

P. MADISSON

STEREOMEETRIA

Theodor Ussisoo joonestused

**„RAHVAÜLIKOO“
TALLINNA**

[1922]

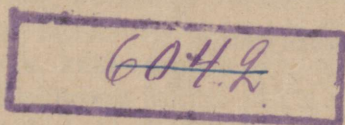


Stereomeetria.

P. Madisson.

Stereomeetria.

Theodor Ussisoo joonestused.



„RAHVAÜLIKOOL“

Tallinnas.

A. Kummel'i trükk, Tallinnas.

2



A 3590

115436251

Eessõna.

Käesoleva aasta kevadel ilmunud geomeetria õpperaamatu esimene osa „Planimeetria“ oli määratud peaaesjalikult lühemajaliste kursustega õppeasutustele. Et see raamat aga kõige oma puuduste peale vaatamata austatud ametvendade poolt õige soojalt vastu võeti ja laialisema tarvitajate hulga leidis, kui kokkuseadmisel oli ette nähtud (terve trükk osteti poolaasta jooksul ära), siis korraldasin teise osa — „Stereomeetria“ — laiemulatusega. Ei katsunud raamatut ühegi oleva õppekavaga kokku siduda, kuid usun, et ta rahuldab austatud ametvendade poolt tehtud ühe ehk teise täiendusega, iseäranis harjutuste suhtes, keskkooli täielikult. Rahvakooli viimase klassi jaoks, kus stereomeetria kursus lühedalt läbi minnakse, on ta liiga täielik, kuid raamatu sisu lubab siin tarvilisi väljavõtteid teha. Üleliigsena võivad paista need osad, mis trigonomeetriaga seotud, kuid õpilastele peaks igas koolis antama peale planimeetria kursuse lõpetamise trigonomeetria algmõisted: see lihtsustaks nii mõnegi stereomeetrilise ülesande lahendamise. Sellepärast kavatsen mahutada „Planimeetria“ teisse trükki trigonomeetria eelkursuse.

Sirgjoonte ja tasapindade osas on tõestatud nii mõnigi teoreem, mis kuulub oma loomu poolest kergesttõestavate ehk niisuguste teoreemide hulka, mida võib võtta iseenesest arusaadavatena või anda õpilastele enestele tõestada.

Allikatena olen tarvitanud peaaesjalikult Dr. H. Lieber'i ja F. von Lühmann'i „Leitfaden der Elementar-Mathematik“ ja Dr. H. Schwarz'i „Stereometrie“; ainete erikaalude tabel on võetud V. Päss'i „Neljakohaliste logaritmid tabelist“, joonestused on Th. Ussisoo tehtud.

Enne trükki andmist vaaatas läbi käsikirja lugupeetud ametvõnd cand. math. J. Kiivet, kellele siinkohal selle suure lahkuse eest südamliku tänu ütlen ja kes käsikirjale järgmise otsuse kirjutas:

„P. Madisson'i stereomeetria kursus vastab oma ulatuse ja väärtuse poolest nii üldhariduslike kui kutsekooli nõuetele. Keskkooli reaalarvustus võib raamatus leiduva materjaali täielikult läbi minna, muus harudes ja kooli tüüpides tuleks stereomeetria esimesest osast mitmed teoreemid, millede väited tõestamatult küllalt selged, võtta ilma tõestamata.

Autor on oma töö hoolega teinud, ja kõigiti tublit stereomeetria õpperaamatut võib igas koolis julgesti tarvitusele võtta.“

Saadan oma töö, mis sarnase hea otsusega varustatud, teistele lugupeetud ametvõndadele suure palvega: kõigist vigadest ja puudustest, mis minust ja minu lahkest arvustajast nägemata raamatusse on pääsenud, mulle teatada Tallinna Tehnikumi.

Tallinnas,
Oktoobri kuul 1921 a.

P. Madisson.

Stereomeetria.

Planimeetrias vaatleme niisuguste kujundite **vormi** ja **ulatust**, mis kõige oma osadega tasapinnal asuvad. Sellejuures leiame, et nende kujundite kolmel elemendil — punktil, joonel ja pinnal — järgmised ulatused või mõõted on:

1) Matemaatilisel **punktil** ei ole mingit mõõdet ehk ulatust, see on mõõteta osa ruumist. Meie võime matemaatilist punkti enesele ette kujutada kui piiri, millele joonlõiku tema lõpmata vähendamisel ligistame.

2) Punkti liikumisel sünnib **joon**; joonel on ainult üks mõõde — pikkus. Joon on punkti liikumisel ruumi jäänud punkti jälg ehk punkti lõpmata hulga uute kohtade kogu.

3) Joone liikumisel sünnib **pind** (liikumine ei tohi joone enese sihis sündida, miks?). Pinnal on kaks mõõdet — pikkus ja laius. Pind on joone liikumisel ruumi jäänud joone jälg ehk joone lõpmata hulga uute kohtade kogu.

Pinna liikumisel sünnib **keha** (liikumine ei tohi pinna enese sihis sündida, miks?). Kehal on kolm mõõdet — pikkus, laius ja kõrgus (paksus, sügavus). Keha on pinna liikumisel ruumi jäänud pinna jälg, pinna lõpmata hulga uute kohtade kogu ehk pindadega piiratud ruumosa. Keha liikumisel sünnib jälle keha.

Märkus: Harilikult nimetame kehaks koike seda, mida näha ja käega katsuda võib. Geomeetrilisel ehk matemaatilisel kehal ei ole aga ainet, raskust jne. See on osa ruumist, mis meie pinnaga ehk pindadega muust ruumist ära eraldame.

Anname meie kehale teatud mõõted, siis piirame teda igast küljest pinnaga. Pind võib piiratud (ringipind) ehk piiramata (kerapind, tasapind) olla. Pinna piir on joon. Joon võib piiratud (joonlõik) ehk piiramata (ringjoon, sirgjoon) olla. Joone piir on punkt.

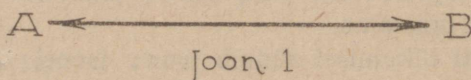
Esimene peatükk.

Sirgjooned ja tasapind.

§ 1.

Üldmõisted.

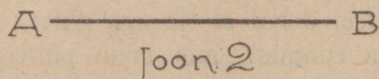
1. **Sirgjoon.** Kui punkt ruumis ilma sihi muutmata liigub, siis sünnib sirgjoon, järjekult — sirgjoon on ühes sihis liikuva punkti lõpmata hulga uute kohtade kogu ruumis. Sirgjoon kaugeneb lõpmatusse ühes sihis mõlemile poole.



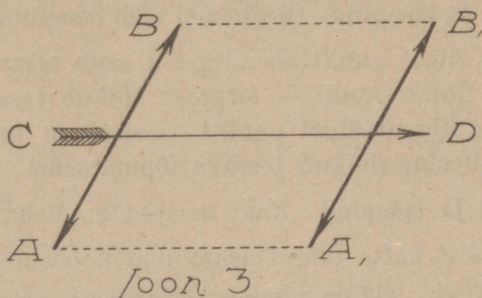
Kaks punkti määravad sirgjoone ruumis kindlaks. Kui sirgjoon kahe oma punkti ümber ennast keerab, siis ei muuda ruumis ükski tema punkt oma kohta. Kõik sirgjooned ühtivad asetamisel. Kahel sirgjoonel võib ruumis olla:

- a) kaks ühist punkti — sirgjooned **katavad** üksteist;
- b) üks ühine punkt — sirgjooned **lõikuvad**;
- c) mitte ühtegi ühist punkti ja nad asuvad ühisel tasapinnal — sirgjooned on **paralleelsed** (lõikuvad lõpmatuses);
- d) mitte ühtegi ühist punkti ja nad ei asu ühisel tasapinnal — sirgjooned **ristuvad** (ei lõiku ka lõpmatuses).

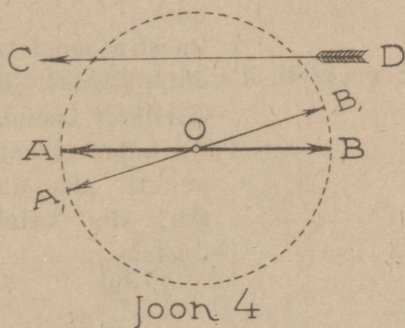
Märkus: Kahe lõpppunkti läbi kindlaks määratud sirgjoone osa on joonlõik.



2. **Tasapind.** Kui sirgjoon kõige oma punktidega ehk ühe oma punkti ümber ruumis teise sirgjoone sihis liigub, siis sünnib tasapind, mis kahes sihis, kummagis mõlemale poole, lõpmatusse kaugeneb.



Joont, mis ruumis liigub ja pinna sünnitab, nimetame **kujutavjooneks** (AB); joont, mille sihis kujutavjoon liigub, nimetame **juhtjooneks** (CD). Kui sirgjoone AB mõni punkt



(O) ruumis kindlalt püsib ja sirgjoon ise selle punkti ümber teise sirgjoone CD sihis ringi keerutab, siis sünnib, nagu ülimal öeldud, ka tasapind. Tasapinna määravad kindlaks:

- a) Kolm punkti, mis ühel sirgjoonel ei asu; sest kaks antud punktidest määravad kindlaks sirgjoone, mis sellel sirgjoonel võetud mõne punkti ja antud kolmanda punkti läbi kindlaks määratud sirgjoone sihis liikudes tasapinna sünnitab;
- b) sirgjoon ja sellest väljaspool asuv punkt (põhjus sama);

- e) kaks lõikuvat sirgjoont, sest üks neist sünnitab teise sihis liikudes tasapinna;
 - d) kaks paralleeljoont, sest need asuvad alati ainult tasapinnal.
3. **Sirgjoon ja tasapind.** Sirgjoonel võib tasapinnaga olla:
- a) kaks ühist punkti — sirgjoon asub tasapinnal;
 - b) üks ühine punkt — sirgjoon lõikub tasapinnaga;
 - c) mitte ühtegi ühist punkti — sirgjoon on tasapinnaga paralleelne (lõikub temaga lõpmatuses).
4. **Tasapind ja tasapind.** Kaks tasapinda võivad ruumis:
- a) üksteist katta (kõik tasapinnad ühtivad);
 - b) teineteist lõigata (nende lõikjoon on sirgjoon, tõestus järgneb eespool);
 - c) olla paralleelsed (lõikuvad lõpmatuses).

Meelespidamiseks: 1. On kahel sirgjoonel kaks ühist punkti, siis katab üks sirgjoon teist.

2. On sirgjoonel tasapinnaga kaks ühist punkti, siis asub sirgjoon täielikult tasapinnal.

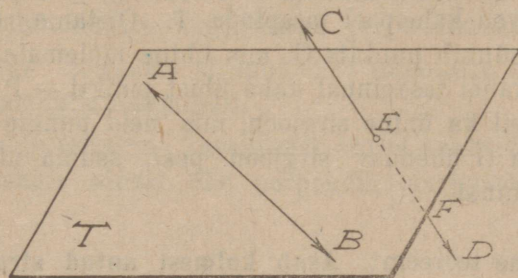
3. On kahel tasapinnal kolm ühist punkti, mis ühel sirgjoonel ei asu, siis katab üks tasapind teist.

§ 2,

Lõikuvatest tasapindadest sünnitatud sirgjooned.

Iga tasapind jagab ruumi kahte ossa. Ei ole võimalik ühest neist ruumi osadest ilma tasapinnast läbitungimata ruumi teisse ossa minna, sellepärast kujutame tasapinna kaheküljelisena. Et tasapinda kui lõpmata suurust võimata on tervena paberile joonestada, siis joonestame ainult tema osa paralleelogrammi näol ja nii, et ta ühe küljega meie poole on pöördunud. Tasapinna märgime T tähega, mis paralleelogrammi ühele nurgale asetame, ja oletame konstrueerimise paremaks

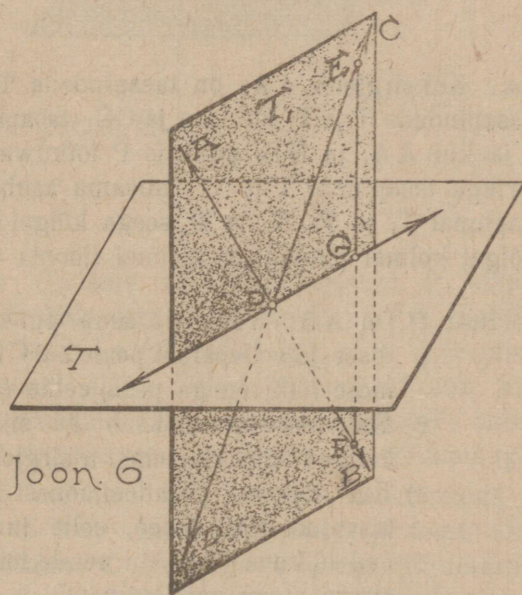
voimaldamiseks, et tasapind poolläbipaistev on. Kõik sirgjoonte osad, mis tasapinnal ehk meiepoolses ruumi osas asuvad, joonestame pideva joonega; sealpoolses ruumi osas — punktidega niikaugale, kui nad tasapinna varjus asuvad.



Joon 5.

Nii asub sirgjoon AB tasapinnal, sirgjoon CD tungib punktis E tasapinnast läbi ja tuleb punktis F selle varjust uuesti nähtavale.

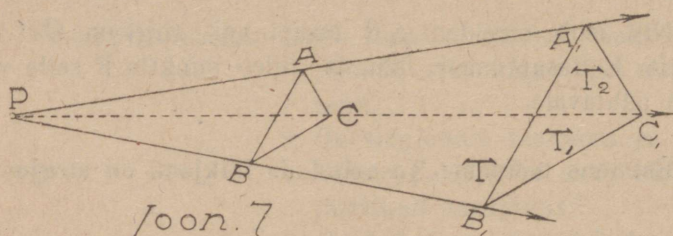
Esimene teoreem: Tasapindade lõikjoon on sirgjoon.



Joon 6

Tõestus: (1) Meie kahel tasapinnal T ja T_1 on üks ühine punkt P . Tõmbame tasapinnale T_1 kaks sirgjoont AB ja CD , mis punktist P läbi lähevad. Võtame neil sirgjoontel kaks punkti E ja F ning ühendame need joonlõiguga, siis asub see joonlõik tasapinnal T_1 ja tungib tasapinnast T läbi, sest punktid E ja F asuvad kahelpool tasapinda T . Oletame, et see läbitungimine sünnib punktis G , mis ühine mõlemale tasapinnale. Nüüd on kahel tasapinnal kaks ühist punkti — P ja G , järjekorraga on neil ka ühine sirgjoon, mis neid punkte lõikab, sest punkte P ja G ühendav sirgjoon peab asuma nii sellel kui teisel tasapinnal.

Teine teoreem: Asub kolmest antud sirgjoonest iga paar ühisel tasapinnal, siis lõikuvad kõik kolm sirgjoont ühes punktis.



Tõestus: Kui sirgjoon AA_1 on tasapindade T ja T_2 lõikjoon, BB_1 tasapindade T ja T_1 lõikjoon ja CC_1 tasapindade T_1 ja T_2 lõikjoon ja kui AA_1 ja BB_1 punktis P lõikuvad, siis asub punkt P korraga tasapinnal T ja T_1 ; niisama asub see punkt korraga tasapinnal T_1 ja T_2 , T_2 ja T , seega kõigel kolmel tasapinnal ja kõigel kolmel pindade lõikjoonel (joonis 7).

- Järeldus:
- 1) On $AA_1 \parallel BB_1$, siis asub punkt P lõpmatuses ja sellepärast peab ka CC_1 kahe esimese lõikjoonega paralleelne olema.
 - 2) See teoreem maksab ka siis, kui meie kolme sirgjoone asemel n sirgjoont võtame.
 - 3) Kui kahest paralleeljoonest kummagist tasapind läbi läheb, selle juures nii, et nad lõikuvad, siis on nende lõikjoon antud sirgjoontega paralleelne.

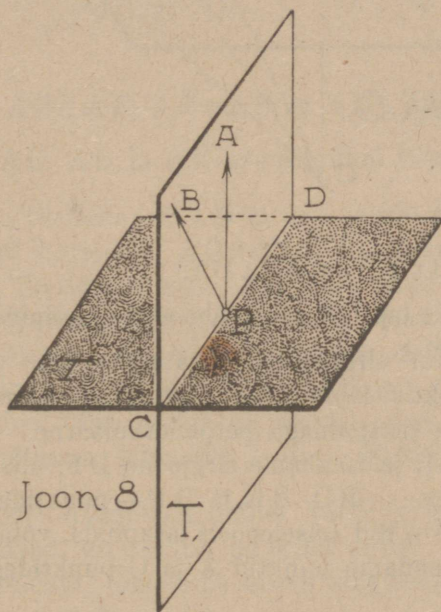
§ 3.

Perpendikulaarjooned ja tasapind.

Sirgjoon on tasapinnaga siis perpendikulaarne, kui ta tasapinnaga lõikub ja kõikide tasapinnal asuvate ja tema aluspunktidest läbiminevate sirgjoontega perpendikulaarne on.

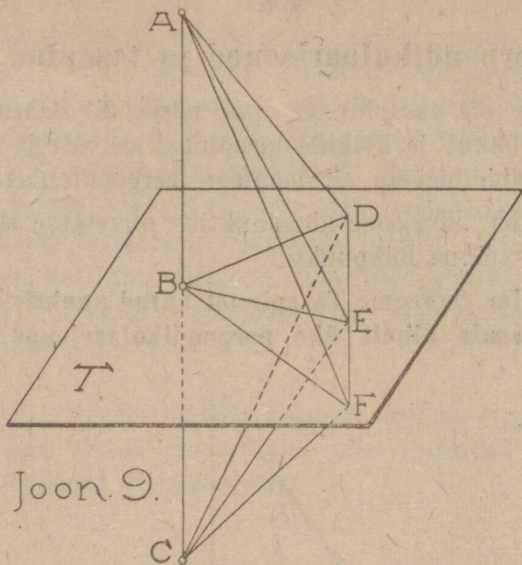
Märkus: Sirgjoone aluspunktiks nimetame sirgjoone ja tasapinna lõikpunkti.

Esimine teoreem: Tasapinnal antud punktist võib tasapinnale ainult ühe perpendikulaarjoone tõmmata.



Tõestus: Oletame, et antud punktist P võib tõmmata tasapinnale T kaks perpendikulaarjoont PA ja PB, mis uue tasapinna T_1 kindlaks määravad (§ 1, p. 2, c) ja mis esimesega lõikub sirgjoonel CD. Sellel sirgjoonel asub nüüd punkt P, millest on tõmmatud kaks ühel tasapinnal T_1 asuvat perpendikulaarjoont sirgjoonega CD. See on aga võimatu (planim. § 7).

Teine teoreem: Kui sirgjoon tasapinnaga nii lõikub, et ta kahe tasapinnal asuva ja tema aluspunktists läbimineva sirgjoonega perpendikulaarne on, siis on ta ka tasapinnaga perpendikulaarne.



Joon 9.

Oletus: $AB \perp BD$ ja $AB \perp BF$.

Väide: $AB \perp \text{tsp } T$. („tsp“ tähendab „tasapind“).

Tõestus: Kui sirgjoon AB iga tasapinnal vabalt võetud ja tema aluspunkti läbimineva sirgjoonega perpendikulaarne on, siis on ta ka tasapinnaga perpendikulaarne. Võtame selleks sirgjoone BE ja tõmbame sirgjoone DF , mis lõikub kõige kolme sirgjoonega — BD , BE ja BF — punktides D , E ja F . Nüüd pikendame AB -d teiselepoole tasapinda, võtame joolõigud $AB = BC$ ja ühendame punktid A ja C punktidega D , E ja F .

Et nüüd $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (miks?), siis $AD = CD$;

„ „ $\triangle ABF \cong \triangle CBF$ „ „ „ $AF = CF$;

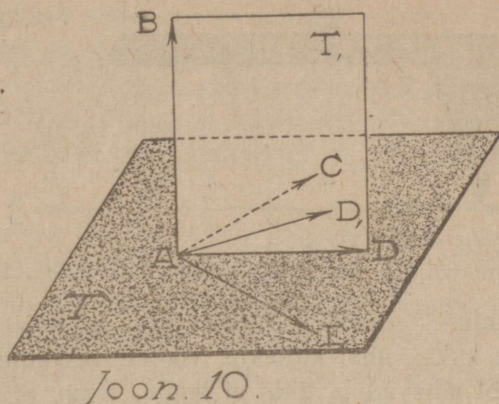
„ „ $\triangle ADF \cong \triangle CDF$ „ „ „ $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CDF$;

„ „ $\triangle ADE \cong \triangle CDE$ „ „ „ $AE = CE$;

„ „ $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ „ „ „ $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBE = 90^\circ = d$.

Järjelikult: $AB \perp BE$ ja $AB \perp \text{tsp. } T$.

Kolmas teoreem: On sirgjoon kolme ühes punktis lõikuva sirgjoonega perpendikulaarne, siis asuvad need kolm sirgjoont ühel tasapinnal.



Oletus: $AB \perp AC$, $AB \perp AD$ ja $AB \perp AE$.

Väide: AC , AD ja AE asuvad ühel tasapinnal.

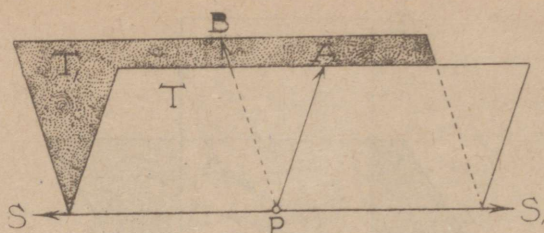
Tõestus: Oletame, et AD ei asu mitte sellel tasapinnal, mille lõikuvad sirgjooned AC ja AE kindlaks määravad (T), vaid all- ehk ülevalpool seda. Kui meie nüüd sirgjoontest AB ja AD kindlaks määratud tasapinna T_1 võtame, siis lõikub see esimese tasapinnaga sirgjoonel AD_1 , mis AB -ga perpendikulaarne (v. eelmine tõestus). Nüüd võrduvad nurgad BAD ja BAD_1 mõlemad täisnurgaga ja asuvad ühel tasapinnal (T_1). See on aga võimata, tähendab — meie oletus ei ole õige.

Märkus: Tasapinda, millel kõik perpendikulaarjooned asuvad, mis antud punktist antud sirgjoonele võib tõmmata, nimetame antud sirgjoone **perpendikulaartasapinnaks**.

Järeldus: 1) Keerame täisnurkse kolmnurga ühe kaateti ümber ringi, siis sünnitab teine kaatet tasapinna.

2) Sirgjoonel antud punktist võime sirgjoonele saada ainult ühe perpendikulaartasapinna.

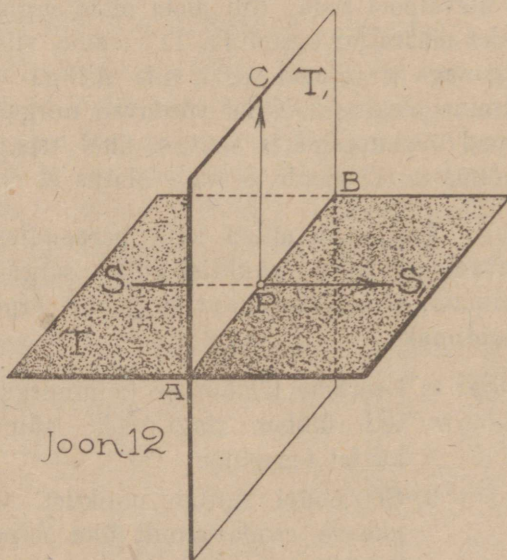
Esimene põhiülesanne: Antud sirgjoonel asuvast punktist konstrueerida sirgjoonele perpendikulaartasapind.



Joon 11

Lahendamine: Antud sirgjoon SS_1 ja sellel punkt P . Konstrueerime kaks vabal kaliakul võetud tasapinda T ja T_1 , mis SS_1 -st läbi lähevad ja ühte ei lange. Nüüd tõmbame P -st sirgjoonele SS_1 kaks perpendikulaarjoont PA ja PB , millest PA asub tasapinnal T ja PB — tasapinnal T_1 . Need kaks perpendikulaarjoont määravad kindlaks nõutava perpendikulaartasapinna.

Teine põhiülesanne: Antud tasapinnal asuvast punktist üles tõmmata tasapinnale perpendikulaarjoon.



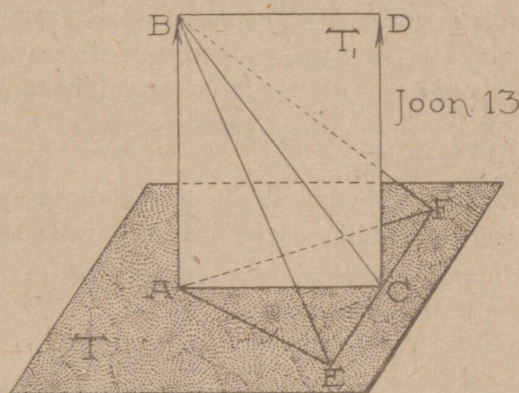
Joon 12

Lahendamine: Antud tasapind T ja sellel punkt P . Tõmbame tasapinnal läbi punkti P sirgjoone SS_1 , siis peab otsitav perpendikulaarjoon sellel tasapinnal asuma, mis sirgjoonega

SS_1 perpendikulaarne ja punktist P läbi läheb. Seda perpendikulaartasapinda mõistame konstruuda esimese ülesande järele. See tasapind on T_1 , mis lõikub tasapinnaga T sirgjoonel AB . Nüüd peab otsitav perpendikulaarjoon AB -ga perpendikulaarne olema, P -st läbi minema ja tasapinnal T_1 asuma. PC vastab kõigile neile nõuetele, järjestikult on see otsitav perpendikulaarjoon.

Märkus: Stereomeetria konstruktsioonülesandeid on võimalik lahendada kõigis oma osades nii nagu planimeetria ülesandeid sirgjoonel ja joonlaua abil. Ülesande ühe osa juures on see lahendamise viis võimalik, kuna teine osa tuleb täide viia kas mõttes ehk sellekohaste füüsiliste kehade abil.

Neljas teoreem: Kui üks antud kahest paralleeljoonest tasapinnaga perpendikulaarne on, siis on ka teine paralleeljoon selle tasapinnaga perpendikulaarne.



1. Oletus: $AB \parallel CD$ ja $AB \perp \text{tsp. } T$.

Väide: $CD \perp \text{tsp. } T$.

Tõestus: Paralleeljooned AB ja CD määravad kindlaks tasapinna T_1 , mis lõikub tasapinnaga T sirgjoonel AC . Sellele lõikjoonele AC tõmbame esimesel tasapinnal T perpendikulaarjoone EF ja võtame sellelt joonlõigud $EC = CF$. Nüüd asub CD tasapinnal T_1 ja on AC -ga perpendikulaarne. (Miks?) On nüüd CD veel teise tasapinnal T asuva sirgjoonega EF

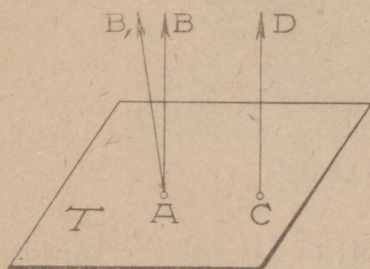
perpendikulaarne, siis on ta ka perpendikulaarne selle tasapinnaga.

Et $\triangle AEC \cong \triangle ACF$ (miks?), siis $AE = AF$;
 „ $\triangle ABE \cong \triangle ABF$ „ „ $BE = BF$;
 „ $\triangle BCE \cong \triangle BCF$ „ „ $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCF = 90^\circ = d$.

Siit näeme, et EF on perpendikulaarne AC-ga ja BC-ga, järjekult on ta perpendikulaarne tasapinnaga T_1 ja sellega ka perpendikulaarne CD-ga. On nüüd CD perpendikulaarne EF-ga ja AC-ga, siis on ta ka perpendikulaarne tasapinnaga T.

2. On antud sirgjoon tasapinnaga perpendikulaarne, siis sünnitab ta kõikide tasapinnal asuvate ja tema aluspunktist läbiminevate sirgjoontega täisnurgad. Nurga suuruse all mõistame külgede sihtide vahet; jääb see vahe muutmata, siis jääb ka nurga suurus muutmata. Sellepärast ei muuda nurk oma suurust siis mitte, kui meie ühe tema külgedest ehk mõlemad küljed ruumis nii edasi lükkame, et nad paralleelseks jäävad oma endiste seisukohtadega — asudes ühel ja samal tasapinnal. Lükame nüüd oma antud sirgjoone nii edasi, et ta oma endiste seisukohtadega paralleelseks jääb, siis jääb ta igas uues punktis tasapinnaga perpendikulaarseks, — järjekult: on üks antud paralleeljoontest tasapinnaga perpendikulaarne, siis on ka kõik teised paralleeljooned selle tasapinnaga perpendikulaarsed.

Vastupidine teoreem: Ühele ja samale tasapinnale langetavad perpendikulaarjooned on paralleelsed.



Joon 14

Oletus: $AB \perp \text{tsp } T$ ja $CD \perp \text{tsp } T$.

Väide: $AB \parallel CD$.

Tõestus: Oletame, et AB ei ole CD-ga mitte paralleelne, siis võime tõmmata läbi antud punkti A teise sirgjoone AB_1 , mis CD-ga paralleelne. Nüüd on ühes punktis (A) tasapinnale tõmmatud kaks perpendikulaarjoont: päripidise teoreemi põhjal on see AB_1 , antud oletuse põhjal AB, järjekult — AB_1 ja AB peavad ühte langema, ja sellepärast on $AB \parallel CD$.

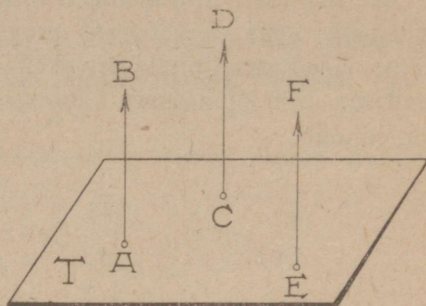
matud kaks perpendikulaarjoont: päripidise teoreemi põhjal on see AB_1 , antud oletuse põhjal AB, järjekult — AB_1 ja AB peavad ühte langema, ja sellepärast on $AB \parallel CD$.

Viies teoreem: On kaks sirgjoont kolmandaga paralleelsed, siis on nad isekeskis paralleelsed.

Oletus: $AB \parallel CD$ ja $EF \parallel CD$.

Väide: $AB \parallel EF$.

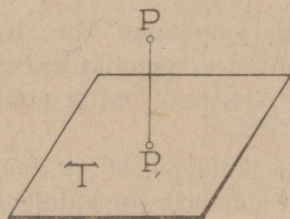
Tõestus: Konstruime CD -le perpendikulaartasapinna T , siis on AB ja EF eelmise päripidise teoreemi põhjal sellega perpendikulaarsed ja vastupidise teoreemi põhjal teineteisega paralleelsed.



Joon 15

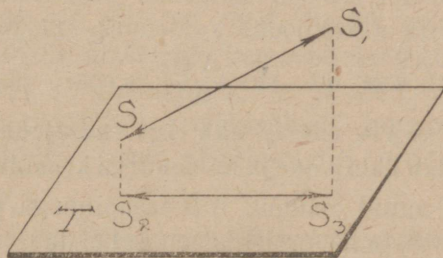
§ 4.

Kaldjooned ja tasapind.



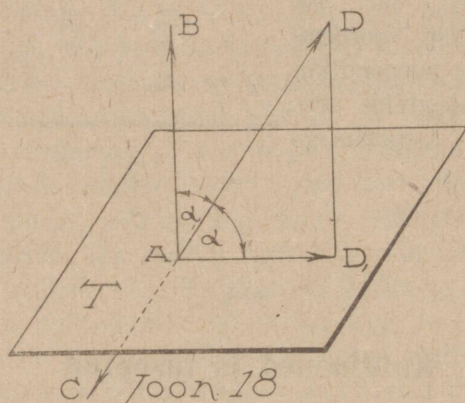
Joon 16

Mõisted: 1. Väljaspool antud tasapinda seisva punkti **projektsiooniks** sellel tasapinnal nime-tame punktist (P) tasapinnale (T) tõmmatud perpendikulaarjoone aluspunkti (P_1). Meie tarvitame siin ja edaspidi ainult niisugust — nõndanimetatud — perpendikulaarprojektsiooni.



Joon 17

2. Sirgjoone kõikide punktide projektsioonid sünnitavad antud tasapinnal selle **sirgjoone projektsiooni**, mis ka sirgjoon on. Iga sirgjoone projektsiooni saame tasapinnal (T) siis, kui sirgjoonelt kaks teineteisest eemalseisvat punkti (S ja S_1) võtame, need tasapinnale projekteerime (S_2 ja S_3) ja sirgjoonega ühendame, mis lõpmatusse kaugenedes antud sirgjoone projektsiooni annab.



3. **Kaldjooneks** antud tasapinnale nimetame iga sirgjoont, mis lõigates tasapinda sellega mitte perpendikulaarselt ei seisa ja mille projektsioon tasapinnal, järjekult, mitte punkt ei ole, vaid sirgjoon.

Kaldjoone **kaldenurgaks** nimetame kaldjoonest ja tema projektsioonist sünnitatud nurka (α). Kaldenurk on kaldjoone ja tasapinna lõikpunktist läbimineva perpendikulaarjoone vahel oleva nurga (α_1) täiendusnurgaks (joonis 18).

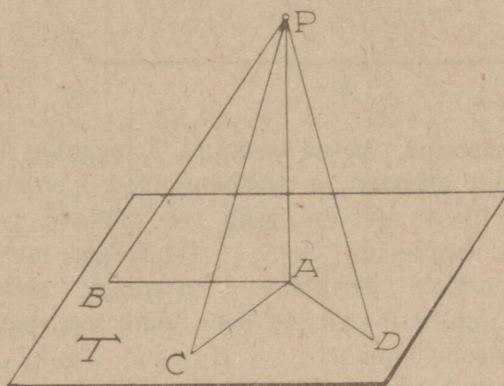
Märkus: 1. AD on kaldjoon, AD_1 selle projektsioon ja nurk α kaldjoone kaldenurk. Et kolmnurk ADD_1 täisnurkne on, siis $\frac{AD_1}{AD} = \cos \alpha$, järjekult

$AD_1 = AD \cdot \cos \alpha$, ehk iga kaldjoone projektsioon võrdub kaldjoone ja kaldenurga koosinuse kasvatiseaga.

2. On antud joonlõik AB tasapinnaga paralleelne, siis võrdub tema projektsioon sellel tasapinnal joonlõigu enesega, sest kaldenurk α on siis null kraadi, mille $\cos = 1$.

Esimene teoreem: On väljaspool tasapinda asuvast punktist tõmmatud tasapinnale perpendikulaarjoon ja kaldjooned, siis on:

1. perpendikulaarjoon igast kaldjoonest lühem;
2. kaldjooned, mille projektsioonid võrdsed, ise ka võrdsed;
3. pikemale projektsioonile vastab pikem kaldjoon.



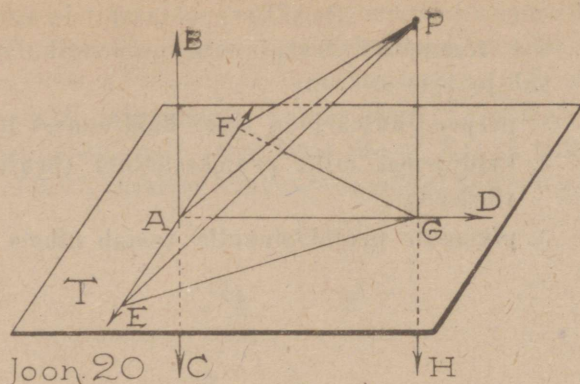
Joon. 19

Oletus: $\begin{cases} AP \perp \text{tsp } T, \\ BP, CP \text{ ja } DP \text{ on kaldjooned,} \\ AC = AD, \\ AB > AC \text{ ja } AB > AD. \end{cases}$

Väide: $\begin{cases} AP < BP, AP < CP \text{ ja } AP < DP, \\ CP = DP, \\ BP > CP \text{ ja } BP > DP. \end{cases}$

Tõestus: Keerame täisnurksed kolmnurgad ADP ja ACP kaateti AP ümber niikaua ringi, kunni nende pinnad, mis külgedest kindlaks määratud, langevad kolmnurga ABP pinnale, siis asuvad perpendikulaarjoon ja kaldjooned kõik ühel tasapinnal, ja kaldjoonte projektsioonid langevad joonlõiguga AB ühte. Nüüd on kerge planimeetrias antud juhatuse järele edasi tõestada.

Kolmas põhiülesanne: Väljaspool antud tasapinda asuvast punktist alla tõmmata tasapinnale perpendikulaarjoon.



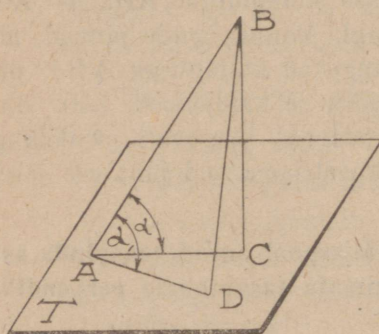
Joon 20

Lahendamine: Antud tasapind T ja punkt P . Tasapinna vabalt võetud punktist A tõmbame üles perpendikulaarjoone AB (teine ülesanne), siis peab see nõutava perpendikulaarjoonega PG paralleelne olema. Tähendab, meie peame läbi AB ja punkti P tasapinna konstruima, sellel tasapinnal AB -le läbi punkti P paralleeljoone tõmbama, mis nõutava perpendikulaarjoone annab.

Ülesande lahendamine sünniks siis nii:

Tõmbame antud tasapinnal vabalt sirgjoone EF , konstruime tasapinna, mille see sirgjoon ja punkt P kindlaks määravad, ja tõmbame sellel tasapinnal $AP \perp EF$. Nüüd tõmbame antud tasapinnal T sirgjoone $AD \perp EF$, siis saame uue tasapinna, mis lõikuvad sirgjooned AP ja AD kindlaks määravad; sellel tasapinnal tõmbame lõpuks $PG \perp AD$. Nõutav perpendikulaarjoon on PG .

Teine teoreem: Kaldjoone kaldenurk on kõikidest nurkadest, mis kaldjoon tasapinnaga sünnitab, kõige väiksem,



Joon 21

Oletus: $\left\{ \begin{array}{l} AB \text{ on kaldjoon,} \\ AC \text{ tema projekt-} \\ \text{sioon ja } \alpha \text{ kaldenurk,} \\ BC \perp \text{ tsp } T. \end{array} \right.$

Väide: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha < \alpha_1 \text{ (kui } AD \text{ tasa-} \\ \text{pinnal vabalt võetud} \\ \text{ja } A\text{-st läbiminev sirg-} \\ \text{joon on).} \end{array} \right.$

Tõestus: Võtame $AD = AC$, siis on kolmnurkades
 ABC ja ABD

$$AB = AB$$

$$\text{ja } AC = AD.$$

Et aga BC kui perpendikulaarjoon kaldjoonest BD lühem on, siis on ka $\alpha < \alpha_1$.

Kolmas teoreem: Nurgad, mille vastavad küljed ruumis ühes sihis ja paralleelselt lähevad, on võrdsed.

Oletus: $AB \parallel A_1B_1$ ja $AC \parallel A_1C_1$.

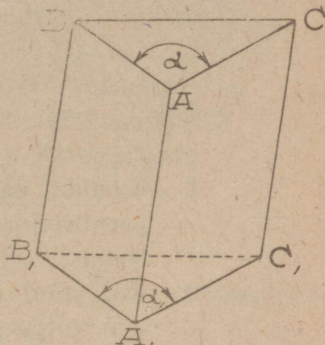
Väide: $\alpha = \alpha_1$.

Tõestus: 1) Võtame $AB = A_1B_1$,
 $AC = A_1C_1$ ja ühendame punktid
 A ja A_1 , B ja B_1 ning C ja C_1 . Et
 nüüd $AB \parallel A_1B_1$ ja $AB = A_1B_1$ ning
 $AC \parallel A_1C_1$ ja $AC = A_1C_1$, siis:

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ja $AA_1 = BB_1 = CC_1$,
 siit: $BC = B_1C_1$.

Järjekult: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$

ja $\underline{\underline{\alpha = \alpha_1}}$.



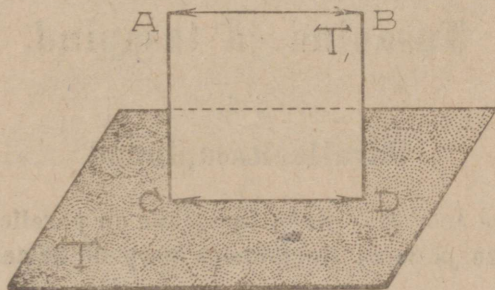
Joon. 22

2. Et nurk oma suurust siis ei muuda, kui meie ühe tema külgedest ehk mõlemad küljed ruumis nii edasi lükkame, et nad, lõikuvateks joonteks jäädes, oma endiste seisukohtadega paralleelseks jäävad, siis võime nurga α nurga α_1 peale tuua, kus nad üksteist täielikult katavad.

§ 5.

Paralleeljooned ja tasapind.

Teoreem: Sirgjoon, mis mõne tasapinnal asuva sirgjoonega paralleelne, on ka tasapinnaga paralleelne.



Joon. 23

Oletus: $AB \parallel CD$ (CD asub tasapinnal).

Väide: $AB \parallel \text{tsp } T$.

Tõestus: Et $AB \parallel CD$, siis võime tasapinna T_1 võtta, mis läheb läbi nende kahe paralleeljoone. Sellel tasapinnal on esimese tasapinnaga (T) ainult üks ühine sirgjoon CD . Oletame, et sirgjoon AB lõikub tasapinnaga T kusgil punktis E , siis peab see punkt sirgjoonel CD asuma, mis aga antud oletuse järele võimata on. Nii ei või sirgjoonel AB ja tasapinnal ühtegi ühist punkti olla, järjekult on nad paralleelsed.

Järeldused: Sirgjoon CD on tasapindade T ja T_1 lõikjoon ja AB -ga paralleelne. Kui meie tasapinna T_1 sirgjoone AB ümber ringi keerame, siis nihkub lõikjoon CD tasapinnal T edasi, jääb aga A - B -ga paralleelseks, sellepärast:

- 1 Kumbki kahest paralleeljoonest on ühest neist paralleeljoontest läbimineva tasapinnaga paralleelne.
2. Kui mõni sirgjoon tasapinnaga paralleelne on, siis võime tasapinnal lõpmata hulga sirgjooni tõmmata, mis antud sirgjoonega paralleelsed.
3. On sirgjoon tasapinnaga paralleelne, siis asub iga ta punkt tasapinnast ühesugusel kaugusel.
4. On kaks punkti ühelpool tasapinda ja ühesugusel kaugusel tasapinnast, siis on neist punktidest läbiminev sirgjoon tasapinnaga paralleelne.

Neljas põhiülesanne: Antud tasapinnale läbi antud punkti, mis väljaspool tasapinda asub, paralleeljoon tõmmata.

Antud ülesande lahendamise viis selgub eelmisest teoreemist ja selle järeldustest.

Teine peatükk.

Tasapind ja tasapind.

§ 6.

Paralleeltasapinnad.

Esimene teoreem: Kaks tasapinda on paralleelsed, kui nad ühe ja sama sirgjoonega perpendikulaarsed on.

Oletus: $\begin{cases} T_{sp} T \perp SS_1 \\ \text{ja } tsp T_1 \perp SS_1. \end{cases}$

Väide: $T_{sp} T \parallel tsp T_1$.

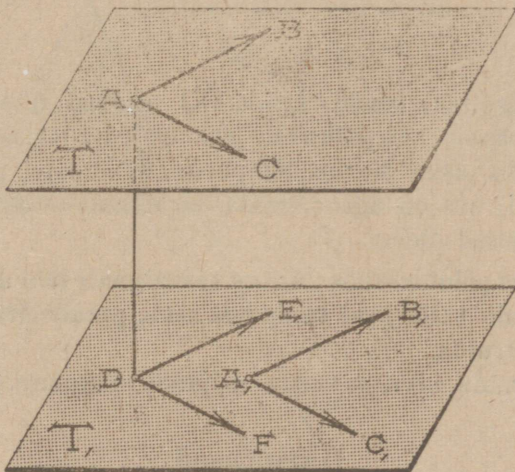
Tõestus: Sirgjoon SS_1 lõikub tasapinnaga T punktis A ja tasapinnaga T_1 punktis A_1 . Oletame nüüd, et tasapinnad T ja T_1 lõikuvad, nende lõikjoon on sirgjoon. Sellel sirgjoonel vabalt võetud punkt B , punktid A ja A_1 määravad kindlaks neist punktidest läbimineva tasapinna, kus asub kolmnurk ABA_1 . Selle kolmnurgakaksnurkavõrduvad mõlemad täisnurgaga:

$$\sphericalangle B'AA_1 = d$$

$$\text{ja } \sphericalangle BA_1A = d.$$

Et see aga võimata on, siis on ka võimata, et tasapinnad lõikuvad, järjestikult on nad paralleelsed.

Teine teoreem: Kaks tasapinda on paralleelsed, kui nendel tasapindadel asuvate kahe nurga vastavad küljed paralleelsed on.



Joon 25.

Oletus: $AB \parallel A_1B_1$ ja $AC \parallel A_1C_1$.

Väide: $T_{sp} T \parallel tsp T_1$.

Tõestus: Tõmbame punktist A tasapinnale T_1 perpendikulaarjoone AD ja läbi punkti D sirgjooned $DE \parallel A_1B_1$ ja $DF \parallel A_1C_1$.

Et nüüd: $AD \perp DE$ ja $AD \perp DF$ (§ 3, neljas teor., p. 2),

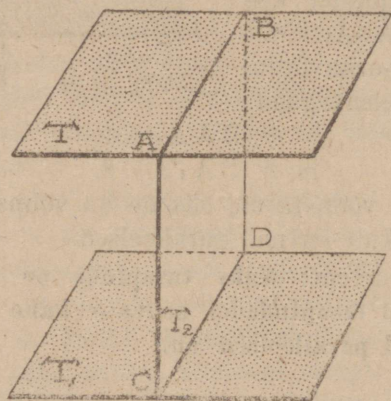
$DE \parallel AB$ ja $DF \parallel AC$ (§ 3, viies teoreem),

siis: $AD \perp AB$ ja $AD \perp AC$ (Miks?)

Järjekult: $AD \perp$ tsp T .

Et nüüd kaks tasapinda T ja T_1 ühe ja sama sirgjoonega AD perpendikulaarsed on, siis on nad paralleelsed.

Kolmas teoreem: **Kui kaks paralleeltasapinda kolmandaga lõikuvad, siis on nende lõikjooned paralleelsed.**



Joon 26.

Tõestus: Lõikjooned AB ja CD asuvad ühel tasapinnal T_2 ja sellepärast kas lõikuvad ehk on paralleelsed. Kui nad lõikuvad, siis asub nende lõikpunkt mõlematel paralleelsetel tasapindadel; see on aga võimata, järjekult — lõikjooned peavad paralleelsed olema.

Viies põhiülesanne: **Antud tasapinnale läbi antud punkti, mis väljaspool tasapinda asub, paralleeltasapind konstruuda.**

Konstruuda, arvesse võttes neljanda ülesande juures antud juhatusi.

Harjutused.

Tõestada:

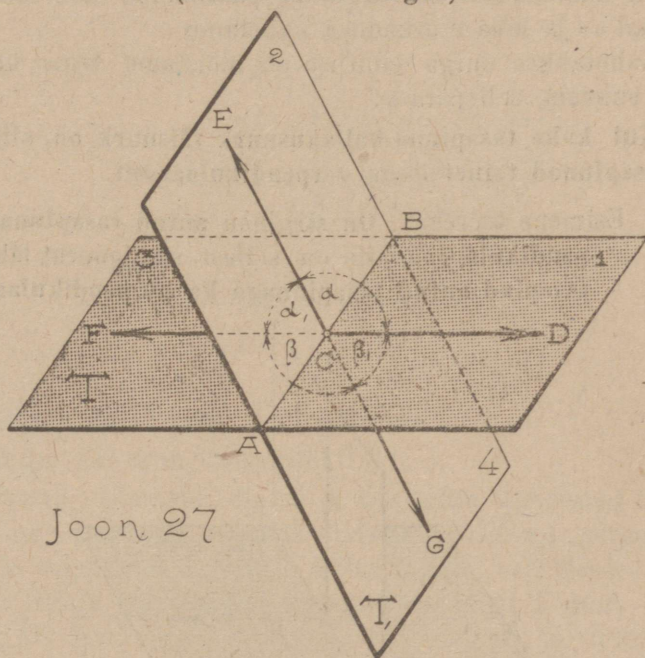
1. On kaks tasapinda paralleelsed, siis on kumbki neist paralleelne iga teisel tasapinnal asuva sirgjoonega.

2. Tasapind, mis kahe lõikuva sirgjoonega paralleelne, on paralleelne neist sirgjoontest kindlaks määratud tasapinnaga.
3. Sirgjoon, mis ühe paralleeltasapinnaga paralleelne, on seda ka teisega.
4. Paralleeltasapinnad on igas punktis teineteisest ühesugusel kaugusel.
5. Sirgjoon sünnitab kahe paralleeltasapinnaga lõikudes võrdsed kaldenurgad.
6. Kui sirgjoon ehk tasapind ühe paralleeltasapinnaga lõikub, siis lõikub ta ka teisega.
7. Paralleeltasapinnad lõikavad paralleeljoontest võrdsed osad ära.

§ 7.

Lõikuvad tasapinnad.

(Kahetahksed nurgad).



Joon 27

Mõisted: Nurka, mis kahe lõikuva pooltasapinna lõikjoonele perpendikulaarselt tõmmatud ja pooltasapindadel asuvad sirgjooned sünnitavad, nimetame nende pooltasapindade **kallakusnurgaks**. Tasapinnad T ja T_1 lõikuvad sirgjoonel AB,

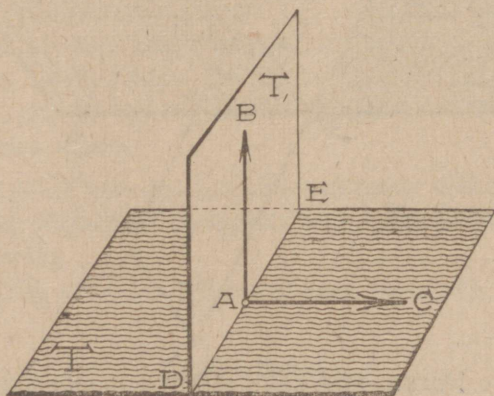
sellel sirgjoonel on vabalt võetud punkt C , millest läbi läheb ja asub tasapinnal T sirgjoon $DF \perp AB$ ja tasapinnal T_1 sirgjoon $EG \perp AB$. Et kallakusnurgad tasapindade poolte ehk pooltasapindade lõikumisel sünnivad, siis saame siin neli kallakusnurka — α, α_1, β ja β_1 ; neist on, näituseks, α_1 teise ja kolmanda pooltasapinna kallakusnurk. Kallakusnurga suurus ei olene sellest, missugusest AB punktist meie AB -le perpendikulaarjooned tõmbame (§ 4, kolmas teoreem), kui üldse tasapindade kallakusnurgaks võetakse üks väiksemaid (võrdseist) nurkadest.

Iga paar lõikuvaid pooltasapindu ühes nende vahel asuva ruumosaga sünnitavad kahetahkse nurga. AB on nende nurkade serv, pooltasapinnad 1 ja 2, 2 ja 3 jne nende nurkade küljed ehk tahud. Igas kahetahkses nurgas on lõpmata hulk võrdseid kallakusnurke, mille järele ka kahetahkseid nurke nimetame, näituseks: teravad, täis=, tõmp=, kõrvu=, jne kahetahksed nurgad. Kui kaks tasapinda lõikuvad, siis sünnib neli kahetahkset nurka, mida paarikaupa kahetahkseteks vertikaal= ja kõrvunurkadeks nimetame.

Kahetahkse nurga suuruse all mõistame tema kallakusnurga suurust, sellepärast:

Kui kahe tasapinna kallakusnurk täisnurk on, siis seisavad tasapinnad teineteisega perpendikulaarselt.

Esimene teoreem: On sirgjoon antud tasapinnaga perpendikulaarne, siis on sellest sirgjoonest läbiminev tasapind antud tasapinnaga ka perpendikulaarne.



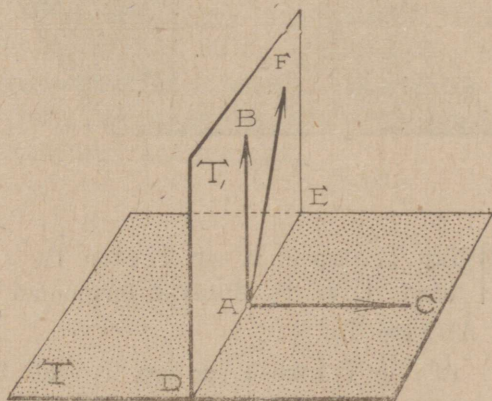
Joon 28.

Oletus: $\left\{ \begin{array}{l} AB \perp \text{tsp } T \text{ ja läbi } AB \text{ läheb tasapind } T_1, \text{ mis} \\ \text{lõikub tasapinnaga } T \text{ sirgjoonel } DE. \end{array} \right.$

Väide: $\text{Tsp } T_1 \perp \text{tsp } T$.

Tõestus: Et nende kahe lõikuva tasapinna kallakusnurka saada, selleks tõmbame punktist A sirgjoone AC, mis tasapinnal T asub ja DE-ga perpendikulaarne on. Nüüd on $\angle BAC$ nende kahe tasapinna kallakusnurk ja võrdub täisnurgaga (§ 3, neljas teor. p. 2), järjestikult — $\text{tsp } T_1 \perp \text{tsp } T$.

Vastupidine teoreem: On kaks tasapinda teineteisega perpendikulaarsed, siis asub nende lõikjoone vabalt võetud punktist läbiminev sirgjoon, mis ühe tasapinnaga perpendikulaarne, teisel tasapinnal.



Joon 29.

Oletus: $\text{Tsp } T \perp \text{tsp } T_1$ ja $AB \perp \text{tsp } T$.

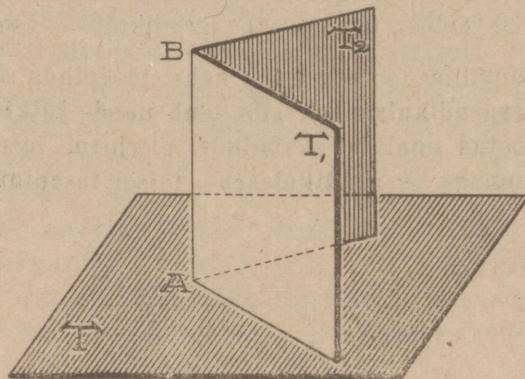
Väide: AB asub tasapinnal T_1 .

Tõestus: Oletame, et AB ei asu mitte tasapinnal T_1 , siis võtame uue sirgjoone AF, mis punktis A DE-ega perpendikulaarne ja tasapinnal T_1 asub. Võtame nüüd veel sirgjoone AC, mis A-s DE-ga perpendikulaarne ja tasapinnal T asub. Nüüd on $\angle FAC$ nende kahe tasapinna kallakusnurk ja võrdub täisnurgaga, järjestikult — $AF \perp AC$ ja sellepärast $AF \perp \text{tsp } T$ (§ 3, teine teoreem).

Nii oleks ühest punktist (A) tasapinnale (T) kaks perpendikulaarjoont — AB ja AF — tõmmatud, see on aga võimata

(§ 3, esimene teoreem), järgelikult — meie oletus ei ole õige, ja AB peab tasapinnal T_1 asuma.

Teine teoreem: Kui kaks tasapinda lõikuvad ja kolmanda tasapinnaga perpendikulaarsed on, siis on nende lõikjoon kolmanda tasapinnaga ka perpendikulaarne.



Joon 30.

Oletus: $\begin{cases} \text{Tsp } T_1 \perp \text{tsp } T \text{ ja } \text{tsp } T_2 \perp \text{tsp } T, \\ \text{tasap. } T_1 \text{ ja } T_2 \text{ lõikuvad sirgjoonel } AB. \end{cases}$

Väide: $AB \perp \text{tsp } T$.

Tõestus: Et $\text{tsp } T_1 \perp \text{tsp } T$ ja $\text{tsp } T_2 \perp \text{tsp } T$, siis peab punktist A tasapinnale T tõmmatud perpendikulaarjoon asuma korraga tasapinnal T_1 ja T_2 (eelmine vastupidine väide), järgelikult — langeb lõikjoonega AB ühte.

Harjutused.

Tõestada :

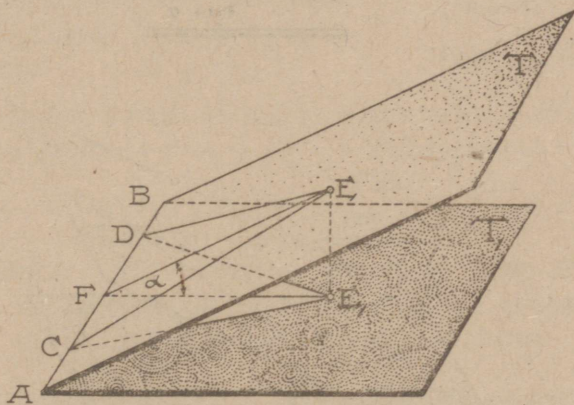
8. Paralleeljooned sünnitavad tasapinnaga lõikudes võrdsed kaldenurgad.
9. Kaks paralleeltasapinda lõikuvad kolmandaga võrdsete kallakusnurkade all.
10. Sirgjoon ja tasapind, mis antud tasapinnaga perpendikulaarsed, on paralleelsed.

11. Sirgjoon, mis kahe lõikuva tasapinnaga paralleelne, on tasapindade lõikjoonega paralleelne.
12. Lõikame kahte lõikuvat tasapinda kolmandaga, mis tasapindade lõikjoonega paralleelne, siis on uued lõikjooned esimese lõikjoonega paralleelsed.
13. Kahest paralleeljoonest läbiminevate ja teineteist lõikuvate tasapindade lõikjoon on paralleeljoontega paralleelne.

§ 8.

Kujundi projektsioon.

Võtame ühel tasapinnal, mis teisega lõikub, mistahes kujundi ja projektime selle teisele tasapinnale, siis saame selle kujundi projektsiooni. Tõestame, et selle kujundi projektsiooni pind võrdub antud kujundi pinnaga, mis kasvatatud nende pindade kallakusnurga koosinusega.



Joon 31.

Tõestus: 1. Tasapinnad T ja T_1 lõikuvad sirgjoonel AB . Tasapinnal T asub kolmnurk CDE , mille üks külg CD langeb tasapindade lõikjoonega ühte ja mis tasapinnal T_1 annab projektsioonina kolmnurga CDE_1 . Kui $EF \perp CD$, siis on EF kolmnurga CDE kõrgus, tema projektsioon E_1F on kolmnurga CDE_1

kõrgus, sest $E_1F \perp CD$ (§ 7, teine teoreem). Et CD ja AB ühte langevad, siis $\sphericalangle EFE_1 = \alpha$ on tasapindade T ja T_1 kallakusnurk. Kolmnurga CDE pind

$$P_{knk} = \frac{1}{2} CD \cdot EF,$$

kolmnurga CDE_1 ehk projektsiooni pind

$$P_{prn} = \frac{1}{2} CD \cdot E_1F.$$

Et $E_1F = EF \cdot \cos \alpha$, siis

$$P_{prn} = \frac{1}{2} CD \cdot EF \cdot \cos \alpha = P_{knk} \cdot \cos \alpha,$$

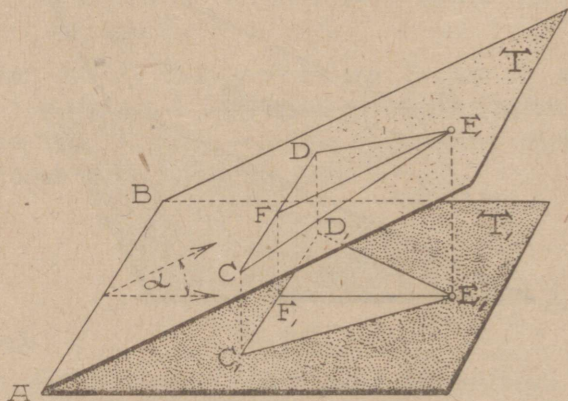
$$\text{ja } P_{knk} = \frac{P_{prn}}{\cos \alpha}.$$

2. Oletame nüüd, et CD ei lange AB -ga ühte, vaid on sellega paralleelne, siis on ta projektsioon C_1D_1 tasapinnal T_1 ka AB -ga paralleelne (§ 5) ja võrdub CD -ga (§ 4, 2 märkus). Kui EF on kolmnurga enese kõrgus ($EF \perp CD$), siis E_1F_1 on tema projektsiooni kõrgus ($E_1F_1 \perp C_1D_1$, miks?). Ka siin

$$E_1F_1 = EF \cdot \cos \alpha \text{ ja}$$

$$P_{prn} = P_{knk} \cdot \cos \alpha \text{ ning}$$

$$P_{knk} = \frac{P_{prn}}{\cos \alpha}.$$



Joon 32.

3. Kui kolmnurga CDE ükski külg ei ole AB -ga paralleelne, siis võime kolmnurga joonlõiguga mis AB -ga paral-

leelne, kaheks kolmnurgaks jagada. Kummagi kolmnurga projektsiooni pind võrdub vastava kolmnurga pinnaga, mis kasvatatud kallakusnurga koosinusega. Neid pindu liites saame jälle:

$$\underline{\underline{P_{prn} = P_{knk} \cdot \cos \alpha}} \text{ ja } \underline{\underline{P_{knk} = \frac{P_{prn}}{\cos \alpha}}}$$

Märkus: Ka igasuguse teise sirgjoonelise kujundi võime nõutavail tingimustel kolmnurkadeks jagada.

4. On meil mõni kõverjööne-line kujund, siis jagame selle paralleeljoontega nõutavail tingimustel ühelaiusteks ribadeks, iga riba kaheks kolmnurgaks, mille kõrgused (h) võrdsed on ja ribade laiusega võrduvad. Kõikide kolmnurkade pinnad annavad kujundi pinna:

$$P_{knd} = P_{knk_1} + P_{knk_2} + P_{knk_3} + \dots + P_{knk_n};$$

kõikide kolmnurkade projektsioonide pinnad annavad kujundi projektsiooni pinna:

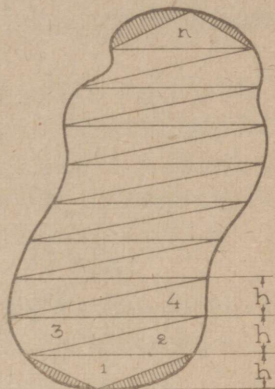
$$P_{prn} = P_{knk_1} \cdot \cos \alpha + P_{knk_2} \cdot \cos \alpha + P_{knk_3} \cdot \cos \alpha + \dots + P_{knk_n} \cdot \cos \alpha =$$

$$= (P_{knk_1} + P_{knk_2} + P_{knk_3} + \dots + P_{knk_n}) \cdot \cos \alpha =$$

$$\underline{\underline{= P_{knd} \cdot \cos \alpha}} \text{ ja } \underline{\underline{P_{knd} = \frac{P_{prn}}{\cos \alpha}}}$$

Märkus: Mida väiksem on ribade laius ehk kolmnurkade kõrgus h , seda väiksem on joonisel 33 näidatud ülejääk ja seda täpsem on vastus.

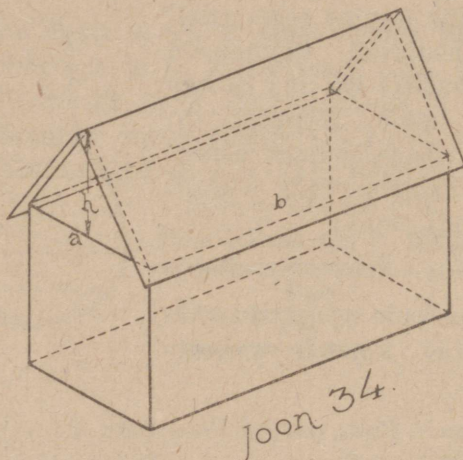
- Meelespidamiseks: 1. Igasuguse kujundi projektsiooni pind võrdub kujundi pinnaga, mis kasvatatud nende pindade kallakusnurga koosinusega.
2. Igasuguse kujundi pind võrdub kujundi projektsiooni pinnaga, mis jagatud nende pindade kallakusnurga koosinusega



Joon 33

Praktiline märkus.

Kui täiskelbaga maja katuse ääri, mis seintest üle ulatavad, arvesse ei võta, siis on lae pind katuse pinna projektioon, sest katuse kummagi külje projektiooniks on poole lae pind. Tahame katuse pinda välja arvata, siis leiame esiti poole lae pinna, jagame saadud arvu katuse ja lae kallakusnurga koosinusega ja kasvatame kahega, sest katuse mõlemate külgede pinnad on harilikult võrdsed ja kallakusnurgad ühesuurused.



Nii oleks siis, kui a on maja laius ja b selle pikkus, lae kohal oleva katuse ühe külje pind:

$$\frac{a b}{2 \cdot \cos \alpha},$$

mõlemate külgede pinnad:

$$P_{\text{kat}} = \frac{2 \cdot a b}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{a b}{\cos \alpha} = \frac{P_{\text{lae}}}{\cos \alpha}.$$

Terve katuse pinna saame siis, kui seintest üleulatavate katuse äärte pinnad saadud pinnaga liidame.

On meil kallakusnurk teadmata, siis võime selle trigonomeetria abil välja arvata. Kui võtame kõrguse katuse harjast kunni laeni ja selle poole lae laiusse jagame, siis saame kallakusnurga tangensi:

$$\frac{\frac{h}{a}}{2} = \frac{2h}{a} = \text{tang } \alpha.$$

On katuse osade kallakusnurgad isesugused, siis tuleb ülesanne osade kaupa lahendada.

Harjutused.

14. Kolmnurga pind $P_{\text{knk}} = 180 \text{ sm.}^2$, kallakusnurk $\alpha = 30^\circ$. Leida kolmnurga projektsiooni pind P_{prn} .
15. Kolmnurga projektsiooni pind $P_{\text{prn}} = 200 \text{ sm.}^2$, kallakusnurk $\alpha = 60^\circ$. Leida kolmnurga pind P_{knk} .
16. Maja pikkus $b = 22 \text{ m.}$, laius $a = 10 \text{ m.}$, kallakusnurk $\alpha = 45^\circ$, ja seintest üleulatavate katuse äärte laius külgedel ja otsadel on $0,5 \text{ m.}$ Leida katuse pind P_{kat} .
17. Maja laius $a = 10 \text{ m.}$, kõrgus katuse harjast kunni laeni $h = 4,502 \text{ m.}$ Leida kallakusnurk α .

§ 9.

Üldharjutused.

Leida:

18. Kahest punktist ühekaugusel oleva punkti geomeetriline koht.

Juhatus: Antud punktid joonlõiguga ühendada ja selle keskpunktist joonlõigule perpendikulaartasapind konstruuda.

19. Kolmest punktist ühekaugusel oleva punkti geomeetriline koht.

Juhatus: Konstruuda punktidele vastav tasapind ja sellel ring, mis kolmest antud punktist läbi läheb. Ringi keskpunktist tasapinnale perpendikulaarjoon tõmmata.

20. Kahest paralleeljoonest ühekaugusel oleva punkti geomeetriline koht.

Juhatus: Paralleeljoonte ühisperpendikulaarjoone keskpunktist läbiminev perpendikulaartasapind.

21. Kahest lõikuvast sirgjoonest ühekaugusel oleva punkti geomeetriline koht.

Juhatus: Sirgjoontest sünnitatud vertikaalnurgad pooleks jagada ja konstruuda sirgjoonte lõikpunktist sirgjoontele ühine perpendikulaarjoon ning kaks lõikuvat tasapinda, mis ühisest perpendikulaarjoonest ja vertikaalnurkade bissektoritest läbi lähevad.

22. Ristuvate sirgjoonte ühisperpendikulaarjoon.

Juhatus: Antud ristuvad sirgjooned AB ja CD . AB vabalt võetud punktist E tõmmata sirgjoon $EF \parallel CD$; AB ja EF määravad tasapinna T kindlaks, mis CD -ga paralleelne. Niisama CD vabalt võetud punktist G tõmmata sirgjoon $GH \parallel AB$; CD ja GH määravad tasapinna T_1 kindlaks, mis AB -ga paralleelne. Nüüd tuleb konstruuda läbi AB tasapind $T_2 \perp \text{tsp } T_1$ ja läbi CD tasapind $T_3 \perp \text{tsp } T$; tasapindade T_2 ja T_3 lõikjoon on nõutav perpendikulaarjoon.

Tõestada, et ristuvate sirgjoonte ühisperpendikulaarjoon on lühem, kui ükski teine nende vahel olev joonlõik.

Nimetada, kuidas leida nurk kahe ristuva joone vahel.

23. Kahest lõikuvast tasapinnast ühekaugusel oleva punkti geomeetriline koht.

Juhatus: Tasapindade kallakusnurk pooleks jagada ja saadud nurgapoolitast ja tasapindade lõikjoonest kindlaks määratud tasapind konstruuda.

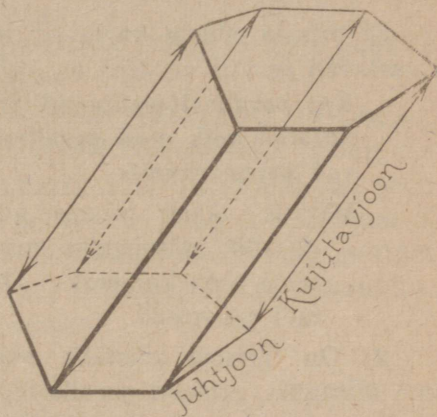
24. Kahest paralleeltasapinnast ühekaugusel oleva punkti geomeetriline koht.

Kehad ja hulktahksed nurgad.

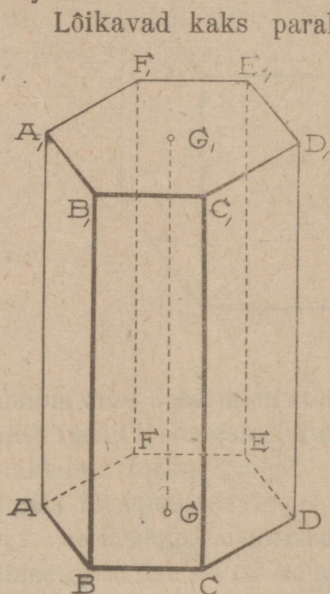
§ 10.

Prisma.

1. Muudab sirgjoon oma kohta ruumis murdjoone sihis liikudes nii, et ta alati oma endiste seisukohtadega paralleelseks jääb, siis sünnitab see sirgjoon oma liikumisega **prisma**pinna, ja kui ta lõpuks oma lähtekohale tagasi tuleb, siis eraldab ta ruumist osa, mida **prismaruumiks** nimetame. Liikuvat sirgjoont nimetame **kujutavjooneks**, liikumise sihinäitajat — **juhtjooneks** (§ 1, p. 2). Igal murdjoone sirgosal sündinud tasapinda nimetame **prisma**pinna **tahuks**, kahe tahu lõikjoont — **servaks**.



Joon 35.



Joon 36.

Lõikavad kaks paralleeltasapinda prismaruumi läbi, siis nimetame seda prismaruumi osa, mis piiratud kahest paralleeltasapinnast — **prismaks**. Nende kahe paralleeltasapinna prismat piiravat osa nimetame **prisma alusteks** ($ABCDEF$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$); prismaruumi tahkused — **prisma külgtahkudeks** (ABB_1A_1 jne.), need on alati paralleelogrammid, külgtahkude lõikjooni teineteisega — **külje servadeks** (AA_1, BB_1 jne.), alustegaaluse **servadeks** (AB, BC jne.). Külgtahkused ja aluseid võime nimetada lühenduse mõttes **prisma tahkudeks** ja kõiki servi — **prisma servadeks**. Prisma külje servad, kui paralleeljooned paralleeltasa-

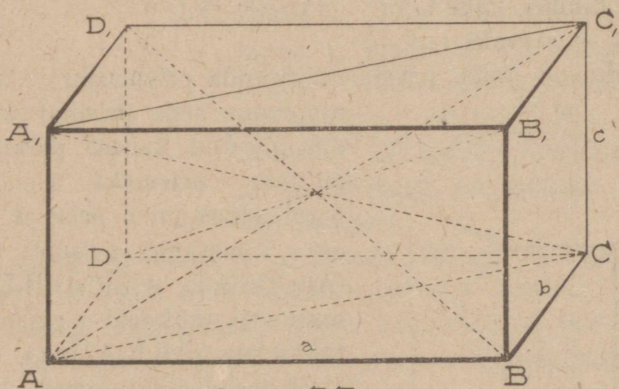
pindade vahel, on võrdsed. Kolme serva ühist punkti nimetame prisma **tipuks** (A, B, C jne.). Aluste kaugus teineteisest annab prisma **kõrguse** (GG_1). On prisma külgtahud alustega perpendikulaarsed, siis nimetame prisma **püstprismaks**; vastasel korral — **kaldprismaks**. Püstprisma külgtahud on täisnurksed nelinurgad (miks?), ja külje servad võrduvad prisma kõrgusega. On prisma alusteks korrapäraseks kujundid, siis nimetame prisma **korrapäraseks**; vastasel korral — **korrapäratuks**.

Et prisma aluste vastavad nurgad (§ 4, kolmas teor.) ja vastavad servad võrdsed on, sellepärast võime ütelda:

Kui paralleeltasapinnad prismapinnaga lõikuvad, siis ühtivad kõik need paralleeltasapindade osad, mis asuvad prismaruumis.

Märkus: Asub prisma kõige oma osadega ühelt pool ükskõik missuguse oma külgtahu pinda, siis nimetame teda kumeraks. Meie vaatleme ainult kumeraid prismasid.

2. On prisma alusteks paralleelogrammid, siis nimetame niisugust prisma **paralleelepipediks**. Igale paralleelepipedile



Joon 37

peedi tipule vastab ainult üks tipp, mida esimesega saab siduda joonlõigu kaudu nii, et lõik ei asu paralleelepipedil ühegi tahu pinnal vaid paralleelepipedil ruumis. Neid tippusid nimetame **vastastippudeks**, siduvaid joonlõikuseid — paralleelepipedil **diagonaalideks**. Et paralleelepipedil neli paari vastastippusid on: A ja C_1 , B ja D_1 , C ja A_1 ning D ja B_1 , siis on tal ka neli diagonaali.

Niisama vastab parallelepipeedi igale servale ainult üks paralleelne serv, mis temaga ühisel pinnal ei asu; niisuguseid servi nimetame **vastasservadeks** (AA_1 ja CC_1 jne.). Vastasservadest kindlaksmääratud tasapindu nimetame **diagonaalpindadeks** ($ACC_1 A_1$ jne.); need on alati paralleelogrammid. Et vastasservi neli paari on, siis on ka diagonaalpindu neli. Iga paar parallelepipeedi diagonaale on korraga ka ühe diagonaalpinna diagonaalideks. Et diagonaalpinnad paralleelogrammid on, siis poolitavad tema diagonaalid teineteist. Sellest välja minnes on kerge tõestada, et

parallelepipeedi diagonaalid lõikuvad ühes punktis ja poolitavad teineteist.

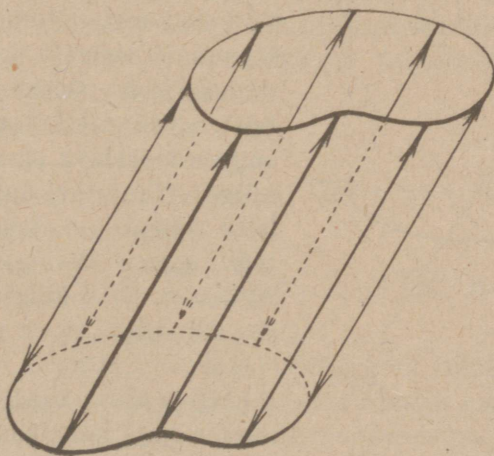
On püstparallelepipeedi alusteks täisnurksed nelinurgad, siis nimetame niisugust parallelepipeedi **täisnurkseks**. Täisnurkse parallelepipeedi ühes tipus lõikuvad kolm serva annavad selle parallelepipeedi kolm mõõdet: pikkuse a , laiuse b ja kõrguse c .

3. On täisnurksel parallelepipeedil need kolm mõõdet kõik võrdsed, siis nimetame niisugust parallelepipeedi **kuubiks**. Kuubi kõik tahud on võrdsed ruudud.

§ 11.

Silinder.

Kui meie prismapinna tahkude arvu lõpmata suurendame ja nende tahkude laiust lõpmata vähendame, siis muutub juhtjoon lõpuks kõverjooneks.



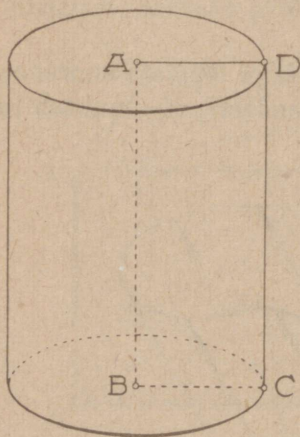
Joon 38

Kujutavjoon, mis selle juhtjoone sihis liigub, sünnitab siis **silindripinna** ja eraldab ruumist **silindriruumi**. Nii võib silindripinda vaadelda kui prismapinda, mille lõpmata hulk lõpmata väikseid tahkuseid on, mille servad lõpmata teineteise lähedal asuvad.

Sellepärast võime ka siin tõestada:

Kui paralleeltasapinnad silindripinnaga lõikuvad, siis ühtivad kõik need paralleeltasapindade osad, mis asuvad silindriruumis.

Lõikavad kaks paralleeltasapinda silindriruumi läbi, siis nimetame saadud ja silindripinnast ning kahest paralleeltasapinnast piiratud ruumosa **silindriks**. On juhtjoon ringjoon, siis sünnib **ringsilindripind** ja **ringsilindriruum**. Kui meie läbi lõikame niisuguse ringsilindriruumi kahe paralleeltasapinnaga, mis kujutavjoonega perpendikulaarsed, siis saame **püstringsilindri**; nende paralleeltasapindade osad, mis silindriruumis asuvad, on kongruentsed ringid. Meie vaatleme edaspidi ainult püst- ja kaldringsilindrid ja nimetame neid lühenduse mõttes lihtsalt „silindriteks“.



Joon 39

Silindripinna osa, mis silindrit piirab, nimetame silindri **külgpinnaks**, paralleeltasapindade osad — silindri **alusteks**, aluste kaugust teineteisest — silindri **kõrguseks**, aluste keskpunkte ühendajat joonlõiku — silindri **teljeks**. Et silindri külgpind meie ettekujutuse järele lõpmata kitsastest paralleelogrammidest koos seisab, siis võime püstringsilindri külgpinna ühe niisuguse mõeldava paralleelogrammi külge (võikujutavjoont) CD-d mööda lahti lõigata ja tasapinnale laotada, saame täisnurkse nelinurga. Nimetame CD-d **küljjooneks**; püst-ringsilindri küljjoon võrdub kõrgu-

sega, iga silindri küljjoon — teljega. Silindri suuruse määravad kindlaks silindri kõrgus (AB) ja aluse raadius (AD=BC).

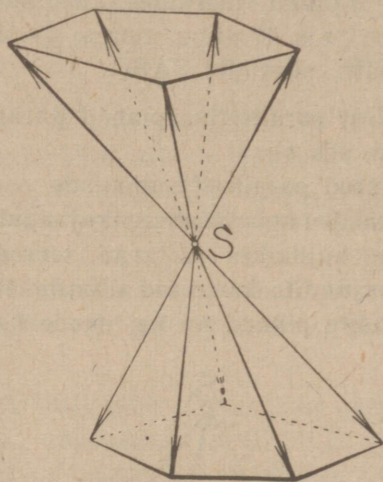
Pöördib täisnurkne nelinurk ABCD kohalpäisiva külje AB ümber, siis sünnitab külge CD silindri külgpinna, külge AD ühe

ja külg BC teise aluse. Nii võime püstringsilindrit ka kui **pöörkeha** vaadelda.

§ 12.

Püramiid.

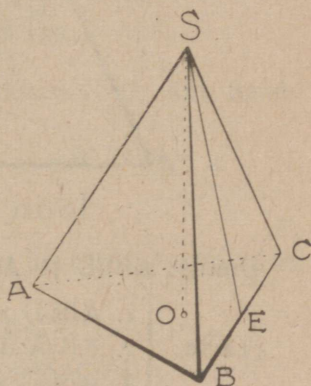
A. Muudab sirgjoon oma kohta ruumis murdjoone sihis liikudes nii, et ta alati ühest ja samast punktist (S) läbi läheb, siis sünnitab see sirgjoon oma liikumisega kaks **püramiidpinda**, ja kui ta lõ-



Joon 40

puks oma lähtekohale tagasi tuleb, siis eraldab ta ruumist kaks **püramiidruumi**. Võtame ühe neist püramiidruumidest ja lõikame tasapinnaga läbi, siis saame ruumosa, mida **püramiidiks** nimetame.

Püramiid on piiratud ühest küljest tasapinnaga — püramiidi **alusega** (ABC), teistest külgedest kolmnurkadega, mille tipud ühes punktis (S) — püramiidi **ülimtipus** — ühinevad ja mida püramiidi külgtahkudeks (SAB, SBC jne.) nimetame. Püramiidi ülimtipu kaugus alusest on püramiidi **kõrgus** (SO), ülimtipu kaugus aluse servast — külgtahu **kõrgus**, mida korrapärase püstpüramiidi juures nimetame **apoteemiks** (SE). Püramiidi aluseks võivad olla kolmnurk, nelinurk jne.; aluse nurkade



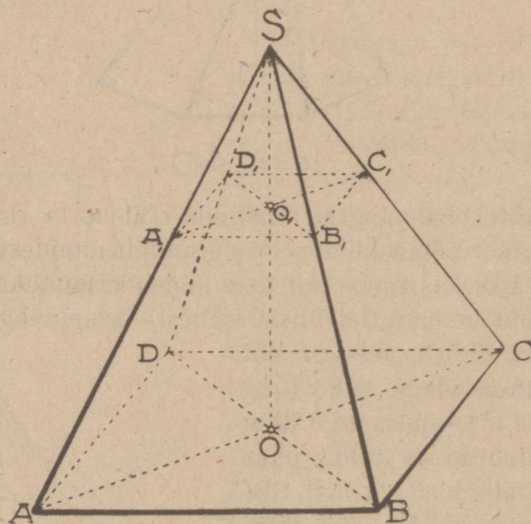
Joon 41

arvu järelenimetame ka püramiidi kolmtahkseks, nelitahkseks jne. On püramiidi aluseks võrdkülgne kolmnurk ehk korrapärane hulknurk ja langeb püramiidi kõrgus niisuguse aluse keskpunkti, siis nimetame püramiidi **korrapäraseks püstpüramiidiks**. Korrapärasel püstpüramiidil on võrdsed kõik külje servad kui kaldjooned, mille projektsioonid võrdsed, kõik kallakusnurgad, mis külgtahud alusega sünnitavad, ja kõik külgtahud kui sarikkolmnurgad.

Märkus: Püramiidi märkides kirjutame kõige enne selle tähe, mis ülimtipu juures, ja siis teised korra järele, näit., püramiid SABC.

Teoreem: Kui paralleeltasapinnad püramiidpinnaga lõikuvad, siis on:

1. kõik need paralleeltasapindade osad, mis asuvad püramiidruumis, taolised kujundid;
2. nende kujundite vastavad servad suhtuvad nii kui kujundite kaugused ülimtipust, ja
3. kujundite pinnad nii kui nende kauguste ruudud.



Joon 42

Oletus: ABCD ja $A_1B_1C_1D_1$ on need kujundid.

Väide: $\left\{ \begin{array}{l} 1. ABCD \sim A_1B_1C_1D_1, \\ 2. AB:A_1B_1 = OS:O_1S \text{ jne.}, \\ 3. ABCD \text{ pind} : A_1B_1C_1D_1 \text{ pin.} = OS^2 : O_1S^2. \end{array} \right.$

Tõestus: 1. Nende kujundite vastavad küljed on paralleelsed:

$$AB \parallel A_1B_1, BC \parallel B_1C_1 \text{ jne. (§ 6, kolmas teór.)}$$

Need küljed suhtuvad nii kui nende lõpppunktide kaugused ülimtipust:

$$\left. \begin{array}{l} AB : A_1B_1 = BS : B_1S \\ BC : B_1C_1 = BS : B_1S \end{array} \right\} \text{ kui paralleeljooned } \\ \text{nurga külgede vahel.}$$

$$\text{Järjelikult} \quad AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

$$\left. \begin{array}{l} BC : B_1C_1 = CS : C_1S \\ CD : C_1D_1 = CS : C_1S \end{array} \right\} \text{ sama põhjus.}$$

$$\text{Järjelikult} \quad BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1 \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

I ja II proportsiooni põhjal võime kirjutada:

$$\underline{\underline{AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1.}}$$

Nii edasi minnes leiame, et nende kujundite vastavad küljed on kõik proportsionaalsed. Peale selle on nende vastavad nurgad võrdsed (§ 4, kolmas teór.), järjelikult on need kujundid taolised.

2. Kolmnurga SOB pind lõikub kahe paralleeltasapinnaga ABCD ja $A_1B_1C_1D_1$, sellepärast on $OB \parallel O_1B_1$ (§ 6, kolm. teór.). Samal põhjusel on ka teistes kolmnurkades $OC \parallel O_1C_1, OD \parallel O_1D_1$ ja $OA \parallel O_1A_1$. Nii saame:

$$\begin{array}{l} AB : A_1B_1 = BS : B_1S, \\ OS : O_1S = BS : B_1S. \end{array}$$

$$\text{Järjelikult} \quad \underline{\underline{AB : A_1B_1 = OS : O_1S.}}$$

$$\begin{array}{l} BC : B_1C_1 = CS : C_1S, \\ OS : O_1S = CS : C_1S. \end{array}$$

$$\text{Järjelikult} \quad \underline{\underline{BC : B_1C_1 = OS : O_1S \text{ jne.}}}$$

3. Taoliste kujundite pinnad suhtuvad nii kui nende vastavate külgede ruudud, sellepärast:

$$ABCD \text{ pind} : A_1B_1C_1D_1 \text{ pin.} = AB^2 : A_1B_1^2 \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

$$\text{Et aga} \quad AB : A_1B_1 = OS : O_1S,$$

$$\text{siis} \quad AB^2 : A_1B_1^2 = OS^2 : O_1S^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II,}$$

sest kui suuruste esimeste astete suhted on võrdsed, siis on ka võrdsed nende teiste astete suhted.

I ja II proportsiooni põhjal võime kirjutada:

$$\underline{\underline{ABCD \text{ pind} : A_1B_1C_1D_1 \text{ pin.} = OS^2 : O_1S^2.}}$$

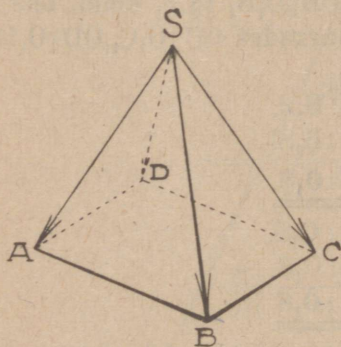
B. Püramiidi osa, mis asub kohe paralleeltasapinna vahel, nimetame **tõmppüramiidiks**. Paralleelkujundid, mis tõmppüramiidi piiravad, on tõmppüramiidi alused ($ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$), nende kaugus teineteisest — tõmppüramiidi **kõrgus** (OO_1). Tõmppüramiid on korrapärane, kui ta on saadud korrapärasest püramiidist. Korrapärase tõmppüramiidi ülemiseks aluseks on korrapärane hulknurk ja külgtahkudeks sarike trapeetsid. Igal n —nurksel tõmppüramiidil on $n+2$ tahku, $2n$ tippu ja $3n$ serva.

Märkus: Meie vaatleme ainult kumeraid püramiide.

§ 13.

Hulktahksed nurgad.

Üks püramiidipind ühes temast piiratava püramiidruumiga sünnitab hulktahkse nurga. Nurgad ASB , BSC jne. on hulktahkse nurga tasapindsed nurgad



Joon 43

ehk hulktahkse nurga tahud; nende nurkade küljed AS , BS jne. on hulktahkse nurga servad ja nende ühine tipp S — hulktahkse nurga tipp. Igale servale vastab oma kahetahkne nurk, mis sellel serval lõikuvad tahud sünnitavad; sellepärast on igal hulktahksel nurgal niipalju tasapindseid ja niipalju kahetahkseid nurki, kui palju on servi. Tahkude arvu järele nimetame ka

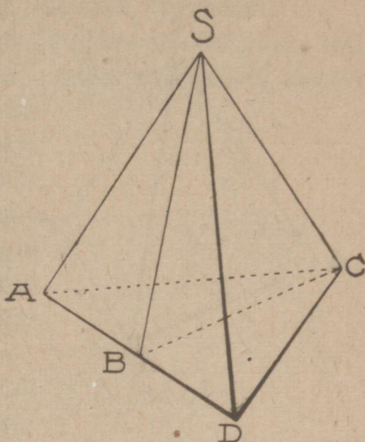
hulktahkseid nurki kolmtahkseteks, nelitahkseteks jne. Vähem kui kolm tahku ei või hulktahksel nurgal olla. Hulktahkseid nurki märkides kirjutame kõige enne selle tähe, mis tippu juures asub ja siis teised korra järele, näit., hulktahkne nurk $SABCD$.

Märkus: Meie vaatleme ainult kumeraid hulktahkseid nurki.

Esimeneteoreem: Kolmtahkses nurgas on kahe tasapindse nurga summa suurem kui kolmas tasapindne nurk.

Tõestus: Oletame, et kolmtahksel nurgal $SABC$ on tasapindne nurk ASC kõige suurem. Tõestame, et ka väiksemate tasapindsete nurkade ASB ja BSC summa on suurem kui kõige suurem tasapindne nurk ASC .

Võtame serval SC punkti C ja tahu ASB pinna pikendusel punkti D nii, et $SD = SC$. Nüüd võtame serval SB punkti B ja lükkame joonlõigu SD viimase punkti D tahupinna pikendust mööda niikaugele, kunni $BD = BC$. Joonlõigu BD pikendame kunni lõikpunktini A .



Joon 44

Kolmnurgas ADC :
 $AD = AB + BD$;
 et aga $BD = BC$,
 siis $AD = AB + BC$.

Järjekult — $AD > AC$.

Kolmnurkades ASD ja ASC :
 $DS = CS$,
 AS on neil ühine külge
 ja $AD > AC$.

Järjekult — $\sphericalangle ASD > \sphericalangle ASC$, sest kui kahes kolmnurgas kaks külge vastavalt võrdsed on, kolmandad küljed aga võrdsed ei ole, siis on suurema külje vastas suurem nurk.

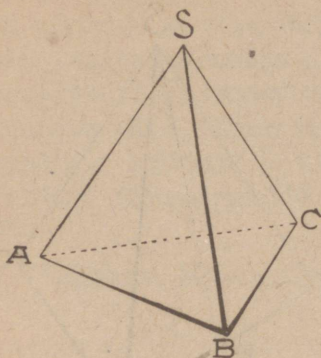
Et $\sphericalangle ASD = \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC$,
 siis $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC$.

Viime saadud võrratuses ühe liidetava nurga pahemalt poolt paremale, siis $\sphericalangle ASB > \sphericalangle ASC - \sphericalangle BSC$, tähendab:

Kolmtahkses nurgas on kahe tasapindse nurga vahe väiksem kui kolmas tasapindne nurk.

Teine teoreem: Kolmtahkses nurgas on tasapindsete nurkade summa väiksem kui neli täisnurka.

Tõestus: Lõikame kolmtahkse nurga tasapinnaga läbi, siis saame kolmnurkse püramiidi, mille tahkudeks on neli kolmnurka. Iga kolmnurga nurkade summa $= 2d$, nelja kolmnurga nurkade summa $= 4 \cdot 2d = 8d$. Nendest on lõikpinnal $2d$, järele jääb $6d$.



Joon 45

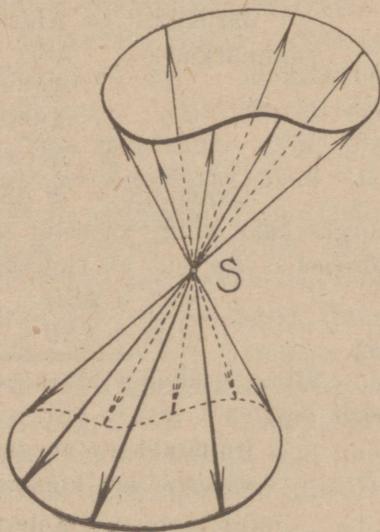
Iga lõikpinna tipp on aga ühtlasi kolmtahkse nurga tipuks, sellepärast on eelmise tõestuse järele selle tipu juures olevate külgtahkude tasapindsete nurkade summa suurem kui lõikpinna tasapindne nurk, järjestikult — kõikide külgtahkude tasapindsed nurgad, mis asuvad lõikpinna tippude juures, on kokku suuremad kui $2d$. Kui need nurgad nüüd suuremad on kui $2d$, siis peavad ülim-tipu S juures olevad tasapindsed nurgad väiksemad olema kui $4d$.

Märkus: See teoreem maksab igasuguse n -tahkse nurga kohta.

§ 14.

Koonus.

1. Kui meie püramiidpinna tahkude arvu lõpmata suurendame ja nende tahkude laiust lõpmata vähendame, siis muutub juhtjoon lõpuks kõverjooneks. Kujutavjoon, mis selle juhtjoone sihis liigub, sünnitab siis **koonuspinnad** ja eraldab ruumist **koonusruumid**. Nii võime vaadelda koonuspinda kui püramiidpinda, millel lõpmata hulk lõpmata väikseid tahkuseid on. Sellepärast võime ka siin tõestada:



Joon 46

Kui **paralleeltasapinnad** koonuspinnaga lõikuvad, siis on kõik need paralleeltasapindade osad, mis koonusruumis asuvad, taolised kujundid.

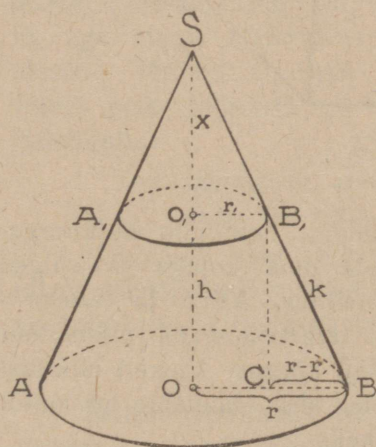
Võtame ühe neist koonusruumidest ja lõikame tasapinnaga läbi, siis saame ruumosa, mida **koonuseks** nimetame. Koonust piirav tasapinna osa on koonuse **alus**, koonuspindtema külgpind, punkt **S** — **ülimtipp**, selle kaugus alusest — **kõrgus**. On koonuse aluseks ring, siis on meil **ringkoonus**; langeb kõrgus selle ringi keskpunkti, siis on meil **püstringkoonus**.

Meie vaatleme edaspidi ainult viimaseid ja nimetame neid lühenduse mõttes lihtsalt „koonusteks“. Pöördib täisnurkne kolmnurk ühe kohalpäisiva kaateti ümber, siis sünnitab teine kaatet koonuse aluse ja on sellele raadiuseks, hüpoteenus sünnitab tema külpinna, esimene kaatet annab kõrguse. Nii on koonus ka pöörkeha.

Kui täisnurkse kolmnurga SOB kaatet SO on koonuse kõrgus h , kaatet OB aluse raadius r ja hüpoteenus SB küljjoon k , siis

$$\underline{\underline{k^2 = r^2 + h^2.}}$$

Nii määravad koonuse kindlaks kaks neist suurustest.



Joon 48

2. Lõikab koonuse läbi tasapind, mis alusega paralleelne, siis on selle tasapinna koonuses asuv osa ka ring. Niisugust kahest paralleelringist piiratud koonuse osa nimetame **tõmpkoonuseks**, ringe — tema alusteks, nende kaugust teineteisest — **kõrguseks**. Täisnurkses kolmnurgas SOB on kaateti osa OO_1 tõmpkoonuse kõrgus h , SO_1 — äralõigatud osa kõrgus x , BB_1 — tõmpkoonuse küljjoon k , OB — alumise aluse raadius r ,

O_1B_1 — ülemise aluse raadius r_1 , CB — nende raadiuste vahe $r - r_1$ ja $CB_1 = h$.

Et nüüd $r \parallel r_1$, siis on $\triangle SOB \sim \triangle SO_1B_1$, sellepärast võime kirjutada:

$$\underline{(h + x) : r = x : r_1.}$$

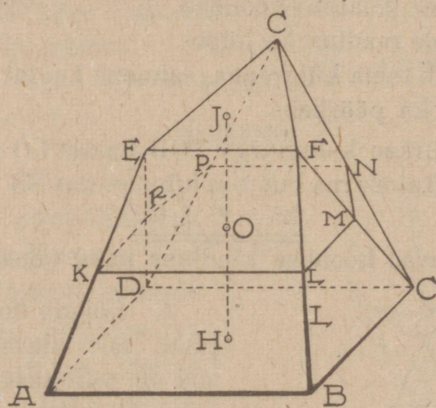
Täisnurksest kolmnurgast CBB_1 leiame:

$$\underline{k^2 = h^2 + (r - r_1)^2.}$$

§ 15.

Prismatoidid.

On geomeetrilise keha alusteks kahe paralleeltasapinna osad, mis aga kongruentsed ega taolised ei pruugi olla, ja külgepinna sünnitavad kolm- ning nelinurgad, siis nimetame niisugust keha tasapindseks **prismatoidiks**.



Joon 49

Prismatoidi alusteks on kolm-, neli- ehk hulknurgad, kuid need alused võivad erineda oma kujuga ja külgede arvuga, näit., üheks aluseks on nelinurk ABCD ja teiseks — kolmnurk EFG. Aluste kaugus teineteisest on prismatoidi kõrgus (HJ). Lõikame prismatoidi kõrguse keskelt läbi tasapinnaga, mis alustega paralleelne, siis nimetame prismatoidis asuvat tasapinna osa **kesklõikeks**.

Prismatoidi alused võivad olla piiratud ka kõverjoonega; üks neist alustest võib olla isegi joonlõik ehk punkt. Nii on, näit., prisma, püramiid, koonus, tõmppüramiid ja tõmpkoonus prismatoidi erikujud. Viltu läbilõigatud kolmtahkne prisma (kiil), mille üheks aluseks on joonlõik (serv) ja teiseks — selle vastastahk, on üks prismatoidi erikuju.

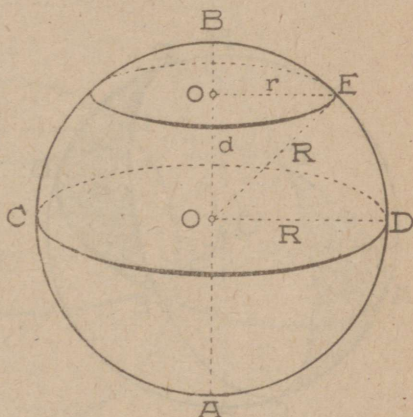
§ 16.

Kera.

Pöörduv poolring diameetri (AB) ümber, siis sünnitab ta kerapinna (sfäärilise pinna) ja eraldab ruumist **keraruumi**, need kaks kokku sünnitavad **kera**.

Poolringi keskpunkt O on ühtlasi **kera keskpunkt**, selle kaugus kerapinnast on **kera raadius** (OD, OE jne.).

Kera sündimise mõistest järgneb, et iga tasapinna see osa, mis keraruumis asub ja diameetriga, mille ümber poolring pöörduv, perpendikulaarselt seisab, ring on. Et aga ringis kõik diameetrid võrdsed on, siis



Joon 50

võime oma pöörduva poolringi mistahes diameetriga võtta, järjekult:

1. igasuguse tasapinna see osa, mis keraruumis asub, on ring.

Nimetame neid ringe lõikringideks. On meil O_1E ühe niisuguse lõikringi raadius r , $OO_1 = d$ selle ringi kaugus kera keskpunktist ja OE kera raadius R , siis

$$\underline{\underline{r^2 = R^2 - d^2}}$$

Sellest võrrandist näeme, et mida väiksem on lõikringi kaugus kera keskpunktist, seda suurem on lõikringi raadius ja

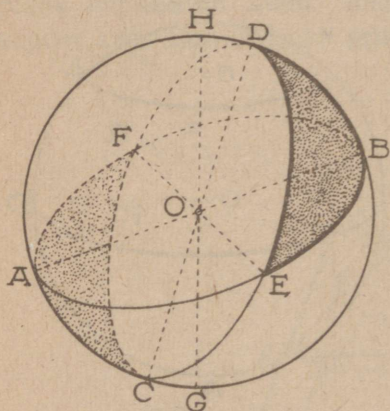
sellega ka lõikring ise. Kui $d = 0$, siis $r = R$, järjestikult on lõikring siis kõige suurem, kui ta kera keskpunktist läbi läheb. Nimetame seda kõigesuuremat lõikringi kera **pearingiks**, teisi kõiki — **kõrvalringideks**.

Õeldust võime järeldada ja meeles pidada:

2. pearing jagab kera kaheks võrdseks osaks;
3. pearingid on kõik võrdsed;
4. kõrvalringid, mis kera keskpunktist ühekaugusel asuvad, on võrdsed;
5. kõrvalringidest on see suurem, mis kera keskpunktile lähemal asub.

Kui kaks pearingi lõikuvad, siis jagavad nad kera nelja ossa; iga osa nimetame **sfääriliseks kahetahkseks nurgaks**. Neist on kaks — sfäärilised kahetahksed **kõrvunurgad**, kaks —

sfäärilised kahetahksed **vastasnurgad**. Esimesed sünnitavad poole kera, teised on võrdsed.



Joon 51

Lõikame sfäärilised kahetahksed nurgad kolmanda pearingiga läbi, siis jagame kera kaheksasse ossa; iga osa nimetame **sfääriliseks kolmtahkseks nurgaks**. Neist on sfäärilised kolmtahksed **vastasnurgad** need, mille paarikaupa ühine tipp; **kõrvunurgad** need, millel üks tahk ühine; **vertikaalnurgad**

need, millel üks serv ühine.

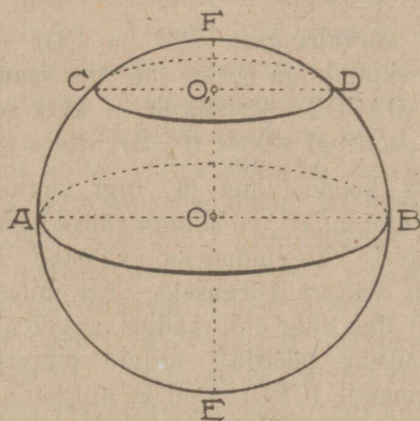
Kahe lõikuva pearingi lõikjoon (EF) on kera diameeter. Et kera iga diameetri lõpppunktid on kera **vastaspunktideks**, siis on ka pearingide lõikjoone lõpppunktid kera vastaspunktid, ja sellepärast:

6. kaks kera pearingjoont lõikuvad kera vastaspunktides ja poolitavad neis teineteist

Sellest järgneb, et iga kera kahest vastaspunktist võivad läbi minna lõpmata hulga pearingide ringjooned ja kahest mittevastaspunktist — ainult ühe pearingi ringjoon.

Iga pearingiga on üks kera diameetrist perpendikulaarne, näit., $EF \perp$ ring AB (joon. 52). Perpendikulaardiameetri lõpp-punkte E ja F nimetame pearingi **nabadeks**. Kõik pearingid, mis perpendikulaardiameetrist läbi lähevad, on pearingiga AB perpendikulaarsed (§ 7, esim. teor.); pearing AB aga poolitab perpendikulaardiameetrist läbiminevate pearingide poolringjooned (meridiaanid), näit., $\widehat{FA} = \widehat{AE}$. Öeldust võime järeldada:

7. läheb üks pearing teise pearingi nabadest läbi, siis on need pearingid teineteisega perpendikulaarsed, ja ümberpöörduvalt:
8. on kaks pearingi teineteisega perpendikulaarsed, siis lähevad nad teineteise nabadest läbi;
9. kõik pearingjoone punktid on selle pearingi nabadest ühekaugusel.



Joon 52

Iga pea- või kõrvalring jagab kera kahte ossa, mida kera segmentideks ehk lõikudeks nimetame (joon. 52). Pearing (AB) jagab kera võrdseteks segmentideks, kuna kõrvalringi (CD) jagamisel üks segmentidest teisest väiksem on. Harilikult vaatleme väiksemat segmenti. Kõrvalring (CD) on segmendi **alus**, osa kera raadiusest (O_1F), mis alusega perpendikulaarne ja kerapinnast kuni aluse keskpunktini ulatab, on vaadeldava kerapinna osale vastava segmendi **kõrgus**, äralõigatud osa kerapinnast on segmendi **pind**.

punkti keraga — riivamispunktiks (E). Kera raadius (OE), mis riivamispunkti (E) langeb, on riivajaga perpendikulaarne, sest iga kerariivaja on sellele pearingile riivajaks, mille pinna pikendusel ta asub. Et aga riivamispunktist lõpmata hulk pearinge võib läbi minna, siis võib sealt läbi minna ka lõpmata hulk riivajaid. Kõik nad on riivamispunkti langeva kera raadiusega perpendikulaarsed, järjekult asuvad nad tasapinnal, mis selle raadiusega perpendikulaarne (§ 3, teine teor.). Seda tasapinda nimetame **riivajaks tasapinnaks** (T). Sellel tasapinnal ja temal asuvatel riivajatel on keraga ühine riivamispunkt (E).

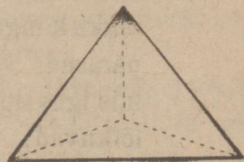
§ 17.

Korrapärased hulktahud.

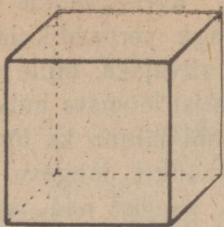
Iga keha, mille tahkudeks on korrapärased hulknurgad, mis igas keha tipus võrdsel arvul lõikuvad, nimetame korrapäraseks hulktahuks. Võtame niisuguse keha ühe tipu ühes temas lõikuvate tahkudega, siis saame hulktahkse nurga. Meie teame, et hulktahkse nurga tasapindsete nurkade summa on väiksem kui neli täisnurka (§ 13, teine teor.). Igas keha tipus peavad vähemalt kolm tahku lõikuma, tähendab — iga tahu tasapindne nurk peab väiksem olema kui üks kolmandik 360° , see on — väiksem kui 120° . Korrapärase ehk võrdkülgse kolmnurga iga nurk on 60° , tähendab — niisuguseid kolmnurki võib ühes tipus lõikuda kolm ($3 \times 60^\circ = 180^\circ$), neli ($4 \times 60^\circ = 240^\circ$) ehk viis ($5 \times 60^\circ = 300^\circ$). Korrapärase nelinurga ehk ruudu iga nurk on 90° , tähendab — ruutuseid võib ainult kolm ($3 \times 90^\circ = 270^\circ$) ühes tipus lõikuda; korrapärase viisnurga iga nurk on 108° , tähendab — niisuguseid viisnurki võib ka ainult kolm ($3 \times 108^\circ = 324^\circ$) ühes tipus lõikuda. Kuus- ja rohkemarvulised nurgad ei või neil tingimustel ühes tipus lõikuda.

Nii võib üldse viit tõugu korrapäraseid hulktahkusid olla:

1. Nelitahk ehk tetraeeder, mille kõik neli tahku kongruentsed võrdkülgseid kolmnurgad on; tal on neli tippu ja kuus serva (joon. 54).



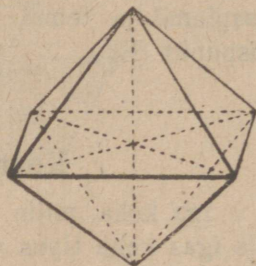
Joon 54



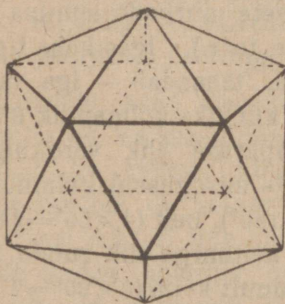
Joon 55

2. Kuustahk ehk heksaeeder (kuup), mille kuus tahku kõik kongruentsed ruudud on; tal on kaheksa tippu ja kaksteistkümme serva (joon. 55).

3. Kaheksatahk ehk oktaeeder, mille kõik kaheksa tahku kongruentsed võrdkülgse kolmnurgad on, mis igas tipus neljakaupa lõikuvad; tal on kuus tippu ja kaksteistkümme serva (joon. 56).



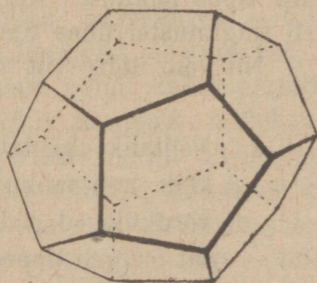
Joon 56



Joon 57

4. Kakskümmendtahk ehk ikosaeeder, mille kõik kakskümmend tahku kongruentsed võrdkülgse kolmnurgad on, mis igas tipus viiekaupa lõikuvad; tal on kaksteistkümme tippu ja kolmkümmend serva (joon. 57).

5. Kaksteistkümmentahk ehk dodekaeeder, mille kõik kaksteistkümme tahku kongruentsed korrapärase viisnurgad on, mis igas tipus kolmekaupa lõikuvad; tal on kakskümmend tippu ja kolmkümmend serva (joon. 58).



Joon 58

Igasse korrapärasesse hulktahku võib kera konstruuda, see riivab kõiki tahkusi nende keskpunktides; teise kera võib hulktahu ümber konstruuda, see läheb tema tippudest läbi; ja kolmanda kera — nende kahe kera vahele, see riivab kõiki hulktahu servi nende keskpunktides ning lõikub hulktahuga. Kõik kolm kera on kontsentrilised, see on — ühise keskpunktiga.

Neljas peatükk.

Kehade mõõtmine.

§ 18.

Üldmõisted.

I. Kehade mõõtmisel tuleb leida järgmised keha või selle osade suurused:

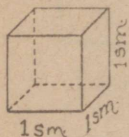
1. kõikide kehas olevate tähtsamate joonlõikude pikkused;
2. keha üldpinna, selle osade, diagonaal- ja mõnede teiste lõikpindade suurused;
3. keha ja selle üksikute osade ruumsuurus ehk maht.

Lõpuks vaatleme veel — selle praktilist tähtsust arvesse võttes — keha ja selle osade raskuse arvamist. Geomeetrilisel kehal, kui ruumi osal, ei ole mingisugust raskust. Kui meie siin mõne keha raskusest räägime, siis mõtleme selle all füüsilist keha, mis võrdmahtne vastava geomeetrilise kehaga.

II. Igasuguse suuruse mõõtmise all mõistame selle suuruse võrdlemist mõne teise teatud ja samatõugu suurusega, mida mõõtüksuseks nimetame. Selle juures otsime, mitu korda võetud mõõtüksus mahub antud suurusesse ehk mitu korda on antud suurus võetud mõõtüksusest suurem.

Sirgjoone mõõtüksuseks on teatud pikkusega **joonlõik**, näit., 1 m., 1 dm., 1 sm. jne. Pinna mõõtüksuseks on **pind**, harilikult ruut, mille pikkus ja laius 1 m., 1 dm., 1 cm. jne. ja mille pind 1 m²., 1 dm²., 1 sm². jne.

Keha mõõtuksuseks peab järjekult keha olema. Selleks võetakse harilikult kuup teatud serva pikkusega, näit., 1 m., 1 dm., 1 sm. jne. Mitu korda see keha mõõtuksus — kuup — mahub antud kehasse, nii mitu mõõtuksust on keha suur. On selle kuubi pikkus, näit., 1 sm., laius 1 sm. ja kõrgus 1 sm., siis

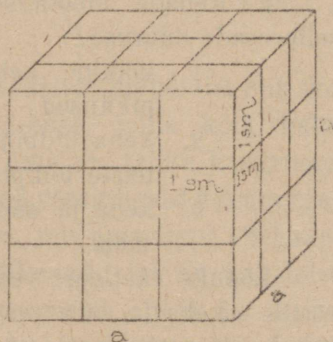


Joon 59.

nimetame niisugust mõõtuksuseks võetud kuupi kuupsentimeetriks (kantsentimeetriks) ja kirjutame 1 sm^3 . Vastavalt saame kuupdetsimeetri = 1 dm^3 , kuupmillimeetri = 1 mm^3 jne.

Oletame, et meil on kuup, mille serva pikkus on a tervet sm., ja mõõtuksuseks kuup, mille serva pikkus 1 sm.

Lõikame antud kuubi paralleeltasapindadega kihtideks, mille paksus on 1 sm., siis saame a niisugust kihti. Et iga kihi pikkus ja laius on a sm., mõõtuksuse pikkus ja laius 1 sm., siis on kihi ühe suurema tahu pind $a \cdot a \text{ sm}^2 = a^2 \text{ sm}^2$ ja mõõtuksuse ühe tahu pind $1 \cdot 1 \text{ sm}^2 = 1 \text{ sm}^2$. Et kihi ja mõõtuksuse paksused võrdsed on, siis mahub mõõtuksusi ühte kihti nii palju, kui palju leidub ruumi mõõtuksuse tahu pinnale kihi ühe suurema tahu pinnal. Seda leidub a^2 mõõtuksusele, sest $a^2 \text{ sm}^2 : 1 \text{ sm}^2 = a^2$ (korda). Nii on ühe kihi maht $a^2 \cdot 1 \text{ sm}^3 = a^2 \text{ sm}^3$, a kihi ehk terve kuubi maht a korda suurem, see on $a \cdot a^2 \text{ sm}^3 = a^3 \text{ sm}^3$.



Joon 60.

Oletame nüüd, et kuubi serva pikkus on murdarv, näit., $a = \frac{b}{c} \text{ sm}$. Eeltähendatud viisil toimetades saame b kihti, mille paksus $\frac{1}{c} \text{ sm}$. Niisugustesse kihtidesse mahuvad kuubid, mille paksused vastavad kihtide paksusele; sellepärast võtame ajutiselt mahu mõõtuksuseks kuubi, mille pikkus $\frac{1}{c} \text{ sm}$, laius $\frac{1}{c} \text{ sm}$ ja kõrgus $\frac{1}{c} \text{ sm}$. Niisuguste kuupide ühe tahu pind on $\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c^2} \text{ sm}^2$ ja maht $\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c^3} \text{ sm}^3$. Ühte kihti mahub b^2 niisugust kuupi, sest kihi ühe suurema tahu pind on $\frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b^2}{c^2} \text{ sm}^2$ ja kuubi ühe tahu pind $\frac{1}{c^2} \text{ sm}^2$, järjekult —

$\frac{b^3}{c^3} \text{sm}^3 : \frac{1}{c^3} \text{sm}^3 = b^3$ (korda). Nii näeme, et ühe kihi maht on $b^3 \cdot \frac{1}{c^3} \text{sm}^3 = \frac{b^3}{c^3} \text{sm}^3$ ja b kihi maht b korda suurem ehk $b \cdot \frac{b^3}{c^3} \text{sm}^3 = \frac{b^4}{c^3} \text{sm}^3$.

On lõpuks see arv irratsionaalne, siis muudame selle ligikaudseks murruks ja toimetame jälle murdarvu juures näidatud viisil. Siin saame muidugi ligikaudse vastuse.

Nii näeme, et igal juhul kuubi ruumsuurus ehk maht:

$$\underline{\underline{M_{kp} = a \cdot a \cdot a = a^3 \text{ (kuupmõõtüksust).}}}$$

III. Füüsilise keha mõõtüksuse raskus vastavates arvudes on selle keha aine erikaal (e). Et 1 dm³. vett kaalub teatud temperatuuri juures 1 kilogramm (kg.), 1 dm³ elavhõbedat — 13,6 kg. ja 1 dm³. tina — 11,4 kg., siis on vee erikaal 1, elavahõbeda erikaal — 13,6 ja tina erikaal — 11,4 (kilogrammi iga kuupdetsimeeter ehk $\frac{\text{kg.}}{\text{dm}^3}$). Samad erikaalu arvud saame ka siis, kui 1 sm³. raskuse grammides (g) ehk 1 m³. — tonnides (t) võtame.

Kui nüüd 1 dm³. tina kaalub 11,4 kg., siis a dm³. tina kaalub a korda rohkem: a. 11,4 kg. ehk a dm³. 11,4 $\frac{\text{kg.}}{\text{dm}^3} = a \cdot 11,4 \text{ kg.}$

Tähendab:

keha raskuse leidmiseks kasvatame keha mõõtüksuste arvu keha aine erikaaluga:

$$\underline{\underline{R_{keh} = M_{keh} \cdot e}}$$

Märkus: Raamatu lõpul on tähtsamate ainete erikaalude tabel.

§ 19.

Kehade kongruentsus, taolus ja võrdmahtsus.

Kehad on siis kongruentsed, kui neid nii üksteise sisse võib panna, et nad ühte langevad kõikide oma vastavate osadega. Taolised on nad siis, kui kõik nende vastavad servad proportsionaalsed, vastavad tahud taolised kujundid ja vastavad kahetahksed nurgad võrdsed on.

Mil tingimusel kehad võrdmahtsed on, seda ütleb järgmine
Cavalieri põhilause:

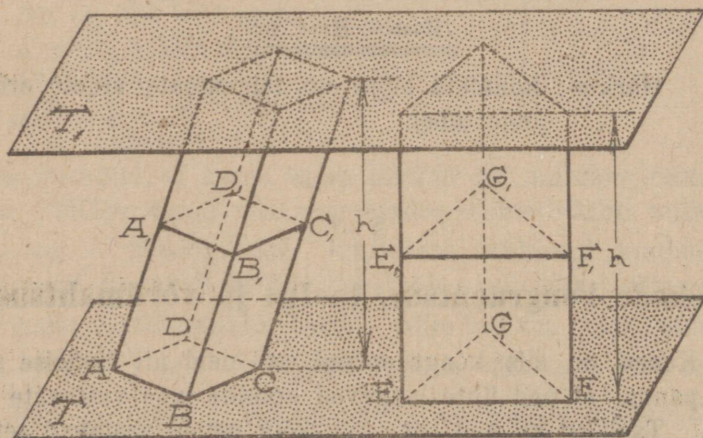
Kehad on võrdmahtsed siis, kui neid nii kahe paralleeltasapinna vahele võib asetada, et iga tasapind, mis nende tasapindadega paralleelne ja kehadest läbi läheb, igas kehas vastavalt võrdpindsed kujundid sünnitab.

Tõestus: Kui paralleeltasapindade vahele asetatud kehad läbi lõikame tasapindadega, mis nende kahe tasapinnaga paralleelsed, siis jagame need kehad kihtideks, mille arv ja vastavad kõrgused kõikides kehaes võrdsed on. Võtame neid lõikpindude lõpmata hulk, siis muutuvad kihtide kõrgused lõpmata väikesteks ja kihid lõpmata õhukesteks, nii et neid lõpuks kui planimeetrilisi kujundid võib vaadelda. On nüüd kõikides kehaes kõik vastavad ja niisugused lõpmata õhukesed kihid võrdpindsed, siis on nad ka — nende lõpmata väikeste kõrgusi arvesse võttes — võrdmahtsed. Ja on nüüd kõik üksikud vastavad kihid võrdmahtsed, siis on ka nende summad, see on kehad, võrdmahtsed.

§ 20.

Prisma.

Teoreem: Prismad, mille alused võrdpindsed ja kõrgused võrdsed, on võrdmahtsed.



Joon 61

Tõestus: Et prismade kõrgused võrdsed on, siis võib neid kahe paralleeltasapinna (T ja T_1) vahele asetada (§ 6, esim. teor.). Lõikame läbi prismad mistahes kõrgusel tasapinnaga, mis alustega paralleelne, siis ühtivad selle tasapinna prisma-ruumides asuvad osad ja vastavad alused (§ 10, p. 1). Ja kui nad ühtivad, siis on nad ka võrdpindsed:

$A_1B_1C_1D_1 \cong ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$ pind = $ABCD$ pinnaga;

$E_1F_1G_1 \cong EFG$ ja $E_1F_1G_1$ pind = EFG pinnaga.

Et aga $ABCD$ pind = EFG pinnaga,

siis $A_1B_1C_1D_1$ pind = $E_1F_1G_1$ pinnaga.

Selle ühe lõikpinna asemel võime lõpmata hulga lõikpindu võtta, mis alustega paralleelsed. Kõik nende osad, mis prismaruumides asuvad, on võrdpindsed. Sellepärast on need prismad Cavalieri põhilause põhjal võrdmahtsed.

Järeldus: 1. Püst- ja kaldprisma, mille kõrgused võrdsed ja alused võrdpindsed, on võrdmahtsed.

2. Igasuguse püst- ja kaldprisma võime muuta võrdmahtseks täisnurkseks parallelepipediks, mille kõrgus võrdub antud prisma kõrgusega ja mille alus on võrdpindne antud prisma alusega.

I. Kuup.

1. Et kuubi tahud kõik võrdsed ruudud on, siis on nende tahkude diagonaalid kõik võrdsed:

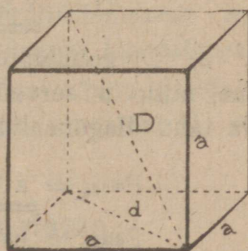
$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \underline{\underline{a\sqrt{2}}}.$$

2. Niisama on kõik kuubi enese diagonaalid võrdsed:

$$D = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \underline{\underline{a\sqrt{3}}}.$$

3. Võrdsed on ka kõik diagonaalpinnad.

$$P_{\text{diag}} = a \cdot a\sqrt{2} = \underline{\underline{a^2\sqrt{2}}}.$$



Joon 62

4. Kuubi ühe tahu pind $= a^2$, kuue tahu ehk kuubi üldpind:

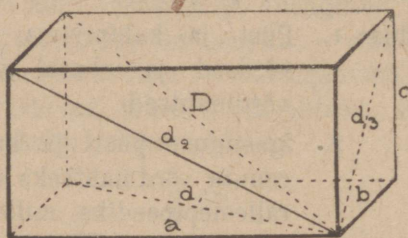
$$P_{kp} = \underline{\underline{6 a^2.}}$$

5. Kuubi mahu leidsime juba (§ 18):

$$M_{kp} = \underline{\underline{a^3.}}$$

II. Täisnurkne parallelepiped.

1. Täisnurksel parallelepipedil on kolm paari isesuguseid tahkuseid: esimene, mille a ja b , teine, mille a ja c , ning kolmas, mille b ja c sünnitavad. Nende tahkude diagonaalid:



Joon 63

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \underline{\underline{\sqrt{a^2 + b^2}}} \\ d_2 &= \underline{\underline{\sqrt{a^2 + c^2}}} \\ d_3 &= \underline{\underline{\sqrt{b^2 + c^2}}} \end{aligned} \right\} \text{Püthagorase teoreemi põhjal.}$$

2. Keha enese diagonaalid on kõik võrdsed:

$$D = \underline{\underline{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}} \text{ — eelmise põhjal.}$$

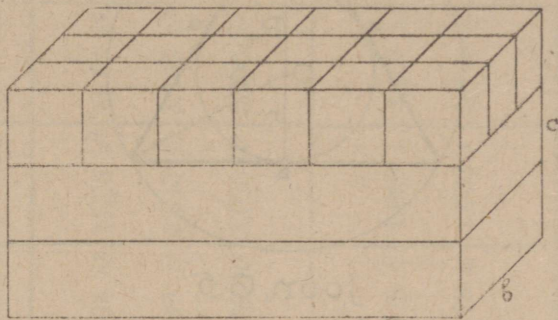
3. Diagonaalpindu on kolm paari: esimene, mille a servad, teine, mille b servad, ja kolmas, mille c servad ja kahe vastava tahu diagonaalid sünnitavad.

$$\left. \begin{aligned} P_{diag_a} &= \underline{\underline{a \sqrt{b^2 + c^2}}} \\ P_{diag_b} &= \underline{\underline{b \sqrt{a^2 + c^2}}} \\ P_{diag_c} &= \underline{\underline{c \sqrt{a^2 + b^2}}} \end{aligned} \right\} \text{samuti p. 1. põhjal.}$$

4. Üldpind seisab koos kolmest paarist isesugustest tahkudest, mis täisnurksed nelinurgad, sellepärast:

$$P_{\text{parp}} = 2ab + 2ac + 2dc = \underline{\underline{2(ab + ac + bc)}}.$$

5. Täisnurkse parallelelepipeedi mahu leiame niisama kui kuubi mahu. Lõikame parallelelepipeedi tasapindadega, mis alustega paralleelsed, kihtideks, mille paksused üks mõõt-



Joon 64

üksus, siis saame c kihti. Ühte kihti mahub ab kuupmõõtüksust, c kihti ehk tervesse parallelelepipeedi mahub neid c korda rohkem, sellepärast:

$$M_{\text{parp}} = \underline{\underline{abc}} \text{ (kuupmõõtüksust).}$$

Nii näeme, et kuubi kui ka täisnurkse parallelelepipeedi ruumsuuruse ehk mahu leidmisel on tarvis keha kolme mõõte — pikkuse, laiuse ja kõrguse — arvud üksteisega ehk aluspinna arv kõrguse arvuga kasvatada. Saadud arv näitab, mitu kuupmõõtüksust mahub antud kehasse. Mõõted olgu kõik ühenimelised. Lühenduse mõttes räägime:

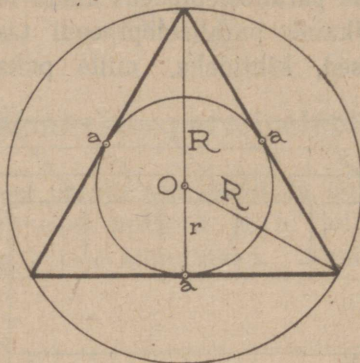
Kuubi kui ka täisnurkse parallelelepipeedi maht võrdub vastava aluspinna ja kõrguse kasvatisega.

Eelmise teoreemi teise järelduse põhjal võime ütelda, et igasuguse prisma maht võrdub aluspinna ja kõrguse kasvatisega.

III. Korrapärane püstprisma.

Igasuguse prisma üldpind seisab koos kahest aluspinnast ja külgpinnast.

1. Korrapärase kolmtahkse püstprisma aluseks on võrdkülgne kolmnurk, mille pind $= \frac{ah}{2}$, kui a on kolmnurga külge ja h kõrgus. Et aga $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{3} = 0,866 a$ ∞,



Joon 65

siis üks aluspind $= \frac{0,866 a \cdot a}{2} = 0,433 a^2$ ∞ ja kaks aluspinda $= 2 \cdot 0,433 a^2 = 0,866 a^2$ ∞. Ühe tahu pind $= ah$, kolme tahu pind $= 3 ah$ ja üldpind:

$$P_{\text{prism}_3} = 0,866 a^2 + 3 ah = \underline{\underline{a (0,866 a + 3 h) \infty}}.$$

Märkus: „∞“ ligikaudsuse märk. Antud arvud on ligikaudsed, kuid küllalt täpsed praktilises elus ettelevate ülesannete lahendamisel.

Mahu saame Cavalieri põhilause järele siis, kui **prisma aluspinna kõrgusega kasvatame**, järjekult:

$$M_{\text{prism}_3} = \underline{\underline{0,433 a^2 \cdot h \infty}}.$$

2. Korrapärase kuustahkse püstprisma aluseks on korrapärane kuusnurk, mis jaguneb kuueks võrdkülgseks kolmnurkaks, sellepärast üks aluspind $= 6 \cdot 0,433 a^2 = 2,598 a^2$ ∞, kaks aluspinda $= 2 \cdot 2,598 a^2 = 5,196 a^2$ ∞ ja üldpind:

$$P_{\text{prism}_6} = 5,196 a^2 + 6 ah = \underline{\underline{a (5,196 a + 6 h) \infty}}.$$

Maht:

$$M_{\text{prism}_6} = \underline{\underline{2,598 a^2 \cdot h \infty}}.$$

Kui r on võrdkülgse kolmnurka ja R selle ümber joonestatud ringide raadiused, siis $R = 2 r$, (tõestada), $R + r = h = 0,866 a$, siit $r = 0,289 a$, $R = 0,577 a$ ja kolmnurga pind:

$$P_{\text{knk}} = 5,196 r^2 \text{ ehk}$$

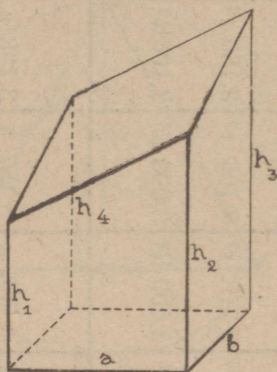
$$P_{\text{knk}} = 1,299 R^2.$$

Sarnase planimeetrilise arvamise teel saame tähtsamate korrapäraste hulknurkade kohta järgmise tabeli, mis praktiliste ülesannete lahendamisel kasulik tarvitada :

	3-nurkn.	4-nurkn.	5-nurkn.	6-nurkn.	8-nurkn.	10-nurkn.	12-nurkn.	20-nurkn.	24-nurkn.
P =	0,433 a ²	1,000 a ²	1,721 a ²	2,598 a ²	4,828 a ²	7,694 a ²	11,20 a ²	31,57 a ²	45,58 a ²
	5,196 r ²	4,000 r ²	3,633 r ²	3,464 r ²	3,314 r ²	3,249 r ²	3,215 r ²	3,168 r ²	3,160 r ²
	1,299 R ²	2,000 R ²	2,378 R ²	2,598 R ²	2,828 R ²	2,939 R ²	3,000 R ²	3,090 R ²	3,106 R ²
r =	0,289 a	0,500 a	0,688 a	0,866 a	1,207 a	1,539 a	1,866 a	3,157 a	3,798 a
R =	0,577 a	0,707 a	0,851 a	1,000 a	1,307 a	1,618 a	1,932 a	3,196 a	3,831 a

IV. Korrapäratu püstprisma.

Igasuguse korrapäratu püstprisma üldpinna saame siis, kui kõikide tahkude pinnad üksikult ehk mõnel juhusel paarikaupa leiame ja saadud arvud kokkuarvame.



Joon 66.

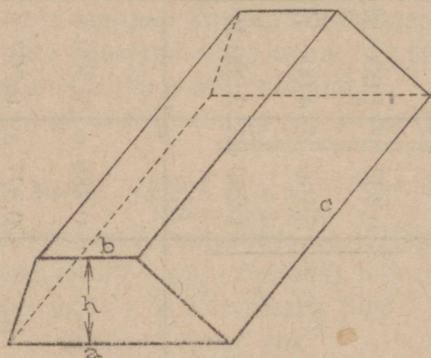
Maht võrdub aluspinnaga ja kõrguse kasvatisega. Kui täisnurkne parallelelepiped on tasapinnaga viltu läbi lõigatud (joon. 66), siis võrdub niisuguse keha maht:

$$M = \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} \right) \cdot ab = \frac{h_1 + h_3}{2} \cdot ab = \frac{h_2 + h_4}{2} \cdot ab.$$

Märkus: On kerge tõestada diagonaalpindade abil. (Tõestada).

Kui prisma alusteks on trapeetsid, siis võrdub niisuguse prisma maht (joon. 67):

$$M = \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot h \cdot c.$$



Joon 67.

§ 21.

Harjutused.

- I. 25. Kuubi serva pikkus on a sm.; leida kuubi diagonaal ja diagonaalpind.
 1) $a=10$ sm., 2) $a=12$ sm., 3) $a=16,5$ sm.
26. Kuubi serva pikkus on a sm.; leida kuubi üldpind ja maht.
 1) $a=8$ sm., 2) $a=15,25$ sm., 3) $a=30$ sm., 4) jne.
27. Leida nii-uguse kuubi maht, mille üldpind:
 1) $P_{kp}=294$ sm.², 2) $P_{kp}=864$ sm.², 3) $P_{kp}=433,5$ sm.².
28. Leida niisuguse kuubi üldpind, mille maht:
 1) $M_{kp}=512$ sm.³, 2) $M_{kp}=125$ sm.³, 3) $M_{kp}=166,375$ sm.³.
29. Liivakivist kuubi serva pikkus on $0,75$ m.; kui raske on see kuup, kui liivakivi erikaal $=2,3$?
30. Kaks tinast kuupi sulatati üheks kuubiks. Esimese kuubi serva pikkus oli 9 sm., teise — 10 sm. Leida uue kuubi serva pikkus, tema üldpind, maht ja raskus.
- II. 31. Täisnurkse parallelepipedide kolm mõõdet on a , b ja c ; leida tema üldpind ja maht.
 1) $a=5$ sm., $b=8$ sm., $c=10$ sm.;
 2) $a=10,5$ sm., $b=5,25$ sm., $c=4,4$ sm.
32. Täisnurkse parallelepipedide kaks mõõdet on a ja b , maht M ; leida üldpind.
 $a=8$ sm., $b=14$ sm., $M=1400$ sm.³.
33. Täisnurkse parallelepipedide kaks mõõdet on a ja b , diagonaal D ; leida üldpind ja maht.
 $a=8$ sm., $b=9$ sm., $D=17$ sm.
34. Täisnurkse parallelepipedide kaks mõõdet on a ja b , diagonaalpind P_{diag} ; leida maht.
 $a=40$ sm., $b=35$ sm., $P_{diag}=1430$ sm.².
35. Kui raske on telliskivist müür, mille pikkus 6 m, kõrgus $3,5$ m. ja paksus 38 sm. ja milles 3 akent — igaüks 2 m. kõrge ja $1,1$ m. lai; müüri aine erikaal on $1,7$.
36. Täisnurkse parallelepipedide üldpind $=448$ sm.², üks tema servadest on keskmine proportsionaalne

kahe teise serva vahel, kõige kolme serva pikkus = 28 sm.; leida need servad.

III. 37. Korrapärase kolmtahkse püstprisma aluse serva pikkus on 6,2 dm., külje serva pikkus — 15 dm.; leida prisma üldpind ja maht.

38. Korrapärase n -tahkse püstprisma külgpind on P ja maht M ; leida prisma servad.

1) $n=8$, $P=960$ sm.², $M=5793,6$ sm.³.

2) $n=12$, $P=480$ sm.², $M=2240$ sm.³.

39. Korrapärase kuustahkse püstprisma aluse vastastippude kaugus teineteisest on 120 mm., prisma kõrgus — 1 m.; leida prisma maht.

40. Kui raske on 1 m. pikkune kuustahkne raudlatt, mille vastastahkude kaugus teineteisest — 30 mm.?

IV. 41. Püstprisma kõrgus $h=20$ sm., maht $M=350$ sm.³, aluseks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatet a on teisest kaatetist b kahe sentimeetri võrra pikem; leida aluse servad.

42. Täisnurkne püstprisma, mille pikkus $a=20$ sm., laius $b=16$ sm. ja kõrgus $c=18$ sm., on viltu läbi lõigatud tasapinnaga, mis ülemisest b servast läbi läheb ja ülemise alusega 30° nurga sünnitab; leida ärälõigatud kolmtahkse prisma üldpind ja maht.

43. Mullavalli pikkus on 1,2 km.; alustega perpendikulaarne läbilõige kujutab sariktrapeetsi, mille paralleelküljed 2,8 m. ja 1 m., kuna kaldküljed kumbki 1,5 m. on. Mitu kuupmeetrit mulda on selles vallis?

44. Kaldparallelepipeedi aluse üks serv $AB=3,2$ m., teine serv $AC=2$ m. ja külje serv $AD=5,4$ m.; kallakusnurk $DAB=73^\circ 20'$, nurgad BAC ja DAC on võrdsed ja võrduvad täisnurgaga. Leida parallelepipeedi üldpind ja maht.

§ 22.

Silinder.

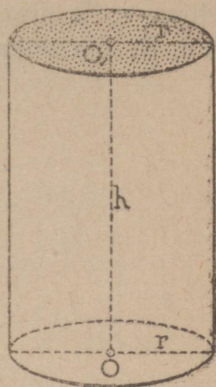
I. Et silindrit võib vaadelda kui prismat, millel lõpmata hulk lõpmata kitsaid tahkuseid (§ 11), siis maksavad ka

silindri pinna ja mahu arvamisel samad põhilaused, mis prisma pinna ja mahu arvamisel.

Püstringsilindri üldpinna sünnitavad kaks aluspinda — ringi $= 2\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{2}$ — ja külgpind, mis tasapinnale laotatult täisnurkse nelinurga annab. Selle nelinurga üks külge võrdub aluse ringjoone pikkusega $= 2\pi r = \pi d$, teine — silindri kõrgusega h , sellepärast silindri külgpind $= 2\pi r h = \pi d h$ ja üldpind:

$$P_{\text{snr}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = \underline{\underline{2\pi r (r + h)}},$$

$$\text{ehk } P_{\text{snr}} = \frac{\pi d^2}{2} + \pi d h = \underline{\underline{\pi d \left(\frac{d}{2} + h \right)}}.$$



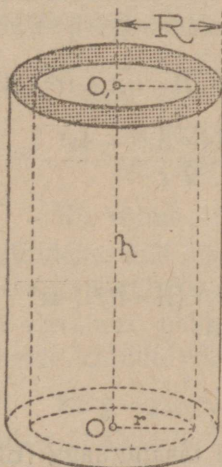
Joon 68.

Silindri mahu saame siis, kui aluspinna kõrgusega kavatame, sellepärast:

$$M_{\text{snr}} = \underline{\underline{\pi r^2 h}}, \text{ siit } r = \sqrt{\frac{M_{\text{snr}}}{\pi h}} \text{ ja } h = \frac{M_{\text{snr}}}{\pi r^2},$$

$$\text{ehk } M_{\text{snr}} = \frac{\pi d^2 h}{4}, \text{ „ } d = 2 \sqrt{\frac{M_{\text{snr}}}{\pi h}} \text{ „ } h = \frac{4 M_{\text{snr}}}{\pi d^2}.$$

II. Õõnsilindri üldpinna sünnitavad:



Joon 69.

$$\text{kaks aluspinda} = 2\pi (R^2 - r^2) = \frac{\pi}{2} (D^2 - d^2),$$

$$\text{väline külgpind} = 2\pi R h = \pi D h,$$

$$\text{seesmine „} = 2\pi r h = \pi d h.$$

$$P_{\text{ösnr}} = 2\pi (R^2 - r^2) + 2\pi R h + 2\pi r h = \underline{\underline{2\pi [R^2 - r^2 + h (R + r)]}},$$

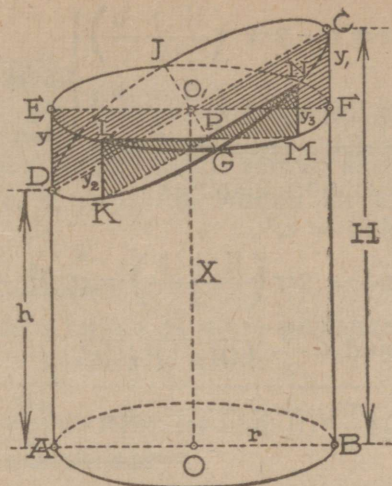
$$\text{ehk } P_{\text{ösnr}} = \frac{\pi}{2} (D^2 - d^2) + \pi D h + \pi d h =$$

$$\underline{\underline{= \pi \left[\frac{1}{2} (D^2 - d^2) + h (D + d) \right]}}.$$

Õõnsilindri maht:

$$\underline{\underline{M_{\text{ösnr}} = \pi h (R^2 - r^2)}},$$

$$\text{ehk } \underline{\underline{M_{\text{ösnr}} = \frac{\pi h}{4} (D^2 - d^2)}}.$$



Joon 71.

ruumis asuv osa ring. Kaks kiilusarnast keha, mis tasapindade vahel asuvad, on võrdmahtsed. Kolmnurgad EDO_1 ja CFO_1 , mis teljega IG perpendikulaarsed ühtivad, sest:

$$\begin{aligned} EO_1 &= FO_1 \text{ — kui raadiused,} \\ \sphericalangle DEO_1 &= \sphericalangle CFO_1 = d, \\ \sphericalangle EO_1D &= \sphericalangle CO_1F \text{ — kui vertikaalnurgad.} \end{aligned}$$

Kõik vastavad kolmnurgad, mis nende kahe kolmnurgaga paralleelsed ühtivad:

$$\begin{aligned} \triangle KLP &\cong \triangle NMP, \\ \text{sest: } LP &= MP \text{ — kui diam. perp. sidejoonte osad,} \\ \sphericalangle PLK &= \sphericalangle PMN = d, \\ \sphericalangle LPK &= \sphericalangle NPM \text{ — kui vertikaalnurgad.} \end{aligned}$$

Nii võime lõikuda need kaks kiilu lõpmata õhukesteks kihtideks, mis ringi diameetriga ehk ellipsi väiksema teljega IG perpendikulaarsed; kõik vastavad kihid on võrdpindsed ja Cavalieri põhilause järele võrdmahtsed, järjekult on ka nende kiilude mahud võrdsed.

Et $y = y_1$, $y_2 = y_3$ jne., siis on nende kiilude külgpinnad, mis y -id sünnitavad, ka võrdsed, järjekult on neil kahel silindril, ühel, mis piiratud ellipsiga DC , ja teisel, mis piiratud ringiga EF , võrdsed külgpinnad ja mahud:

Maht:

$$M_{\text{snr}} = \underline{\underline{\pi r^2 x}},$$

ehk $M_{\text{snr}} = \underline{\underline{\pi r^2 k}}$, sest $x = AD = k$ (külgjoonega).

Et igasuguse prisma maht võrdub aluspinna ja kõrguse kasvatamisega (§ 20, II, p. 5), siis võrdub ka kaldsilindri maht:

$$M_{\text{snr}} = \underline{\underline{\frac{\pi r a}{2} \cdot h}}.$$

On kaldsilindri telje x ja aluse kaldenurk α , siis silindri kõrgus $NO_1 = h = x \cdot \sin \alpha$ ja maht:

$$M_{\text{snr}} = \underline{\underline{\frac{\pi r a}{2} \cdot x \cdot \sin \alpha}}.$$

Ehk veel:

$$\frac{r}{\frac{a}{2}} = \sin \alpha, \text{ siis } \frac{a}{2} = \frac{r}{\sin \alpha} \text{ ja maht:}$$

$$M_{\text{snr}} = \frac{\pi r \cdot r}{\sin \alpha} \cdot x \cdot \sin \alpha = \underline{\underline{\pi r^2 x}}.$$

Nii saame kaldringsilindri mahu siis, kui kasvatame silindri aluspinna silindri kõrgusega ehk ringi pinna, mis teljega perpendikulaarne, silindri teljega ehk silindri külgjoonega.

23.

Harjutused.

Märkus: On keha teises kehas, siis peab ta puutuma oma tippudega, servadega ehk pinnaga teise keha pinda. $\pi = 3,14$.

- I. 45. Silindri kõrgus on h ja aluse raadius r ; leida silindri külgpind, üldpind ja maht.

1) $h = 50$ sm. ja $r = 8$ sm.; 2) $h = 24$ sm. ja $r = 6$ sm.

46. Leida niisuguse silindri maht, mille külgpind:

1) $P_{\text{külg}} = 314$ sm.² ja aluse raadius $r = 5$ sm.,

2) $P_{\text{külg}} = 1004,8$ sm.² ja kõrgus $h = 20$ sm.,

3) $P_{\text{külg}} = 471$ sm.² ja $h + r = 20$ sm.

47. Leida niisuguse silindri maht, mille üldpind

$P_{\text{snr}} = 1884$ sm.² ja aluse raadius $r = 10$ sm.

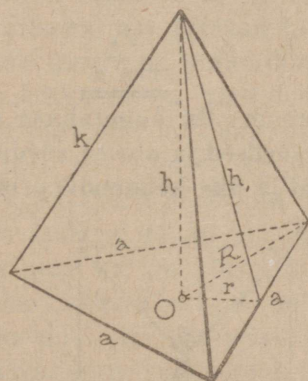
48. Leida niisuguse silindri üldpind, mille maht:
 1) $M_{\text{snr}} = 9812,5 \text{ sm.}^3$ ja aluse raadius $r = 12,5 \text{ sm.}$,
 2) $M_{\text{snr}} = 11304 \text{ sm.}^3$ ja kõrgus $h = 25 \text{ sm.}$,
 3) $M_{\text{snr}} = 4019,2 \text{ sm.}^3$ ja $h:r = 5:2$.
49. Silindrikujulisest puust, mille pikkus 5 m. ja jämedus 35 dm., tahuti nii suur ruuttala, kui puu jämedus andis. Leida tala ja mahatahutud osa mahud.
50. Silindrisse, mille kõrgus $h = 20 \text{ sm.}$ ja aluse raadius $r = 5 \text{ sm.}$, on konstruitud n -tahkne prisma; leida n -tahkse prisma üldpind.
 1) $n = 3$, 2) $n = 6$, 3) $n = 8$, 4) $n = 12$, 5) $n = 24$.
- II. 51. Õõnsilindri kõrgus on 40 sm., välimine läbimõõt — 15 sm. ja seinapaksus — 1,5 sm.; leida silindri üldpind, aine maht ja õõne maht.
52. Silindrikujulise torni kõrgus on 26 m., ümbermõõt — 28,26 m. ja seinapaksus — 1 m.; leida torni ehitamiseks tarvisminev aine hulk.
53. Silindrikujulise torni kõrgus on 18 m., seesmine läbimõõt terves torni pikkuses — 3,5 m., seinapaksus maapinnast kunni 8 m. kõrguseni — 75 sm., sealt kunni torni tipuni — 50 sm. Leida selle torni ehitamiseks tarvisminev kivide hulk, kui iga kuupmeetri seinapaksuseks kulub 400 kivi.
- III. 54. Viltu läbilõigatud püstsilindri diameeter on 5,8 dm., väiksem kõrgus — 14,2 dm. ja suurem kõrgus — 20 dm.; leida selle silindri üldpind ja maht.
55. Silindrikujuline kasepakk on ühest otsast viltu läbi lõigatud; paku ümbermõõt on 157 sm., üks pikkus — 100 sm., teine — 80 sm. Leida paku raskus, kui kase erikaal on 0,6.
56. Püstsilinder on ühest otsast viltu läbi lõigatud tasapinnaga, mis silindri väiksema kõrgusega 150° kaldenurga sünnitab; silindri väiksem kõrgus $h = 40 \text{ sm.}$, ellipsi suurem telg $a = 24 \text{ sm.}$ Leida silindri üldpind ja maht.
- IV. 57. Kaldsilindri telg $x = 36 \text{ sm.}$ ja sünnitab silindri alusega 30° nurga aluspind $= 200 \text{ sm.}^2$; leida silindri maht.

58. Kaldsilindri telg x sünnitab silindri alusega 43° nurga, silindri kõrgus $h = 68,2$ sm., tasapinna osa, mis asub silindriruumis ja piiratud kahe ellipsi väiksematest telgedest ning vastavatest küljoontest, on 3200 sm.^2 . Leida silindri maht.

§ 24.

Püramiid.

I. Korrapärase kolmtahkse püstpüramiidi kõrgus h , apoteem h_1 , külje serv k , aluse serv a , seesmise ringi raadius r ja välise ringi raadius R on teineteisega kindlas siduvuses. Seda



Joon 73.

siduvust võib Püthagorase teoreemi abil kergesti väljendada ja püramiidi osade arvamisel kasulikult tarvitada, sest kui mõni neist suurustest teadmata, siis võime selle teiste antud suuruste järele leida, näit.,

$$h_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4k^2 - a^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{maksab igasuguse korrapärase püst-} \\ \text{püramiidi kohta.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} R = \frac{a}{3} \sqrt{3} \\ k = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} \text{ jne.} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{maksavad ainult korrapärase} \\ \text{kolmtahkse püstpüramiidi kohta.} \end{array} \right.$$

Igasuguse püramiidi üldpinna sünnitavad aluspind ja kolmnurksete tahkude pindadest sünnitatud külgpind.

Korrapärase püstpüramiidi üldpinda on § 20. antud tabelit tarvitades kerge leida:

1. Korrapärase kolmtahkse püstpüramiidi üldpind:

$$P_a = 0,433 a^2,$$

$$P_k = \frac{3}{4} a \sqrt{4k^2 - a^2},$$

$$P_{pür_3} = \underline{\underline{0,433 a^2 + \frac{3}{4} a \sqrt{4k^2 - a^2}}}.$$

2. Korrapärase nelitahkse püstpüramiidi üldpind:

$$P_{pür_4} = \underline{\underline{a^2 + a \sqrt{4k^2 - a^2}}}.$$

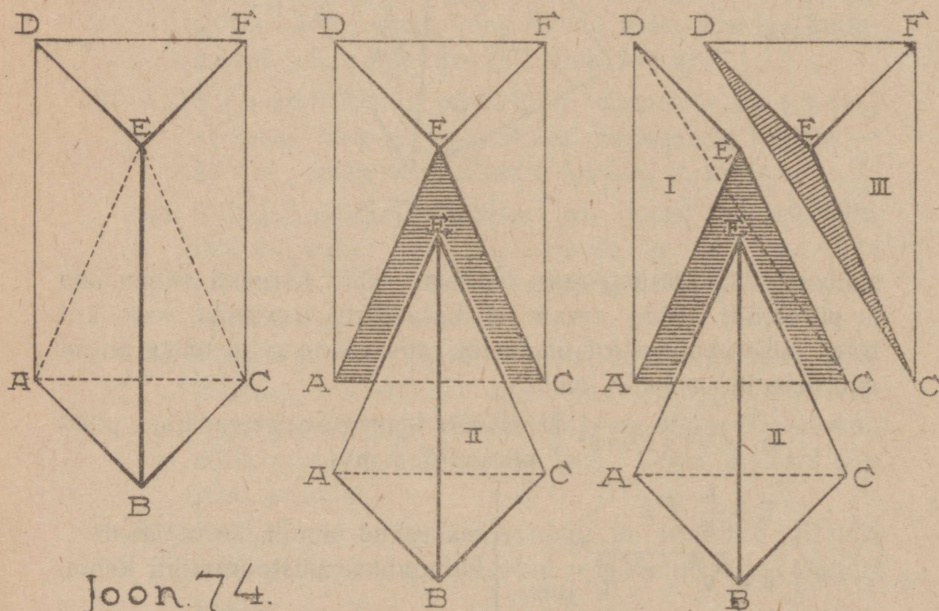
3. Korrapärase kuustahkse püstpüramiidi üldpind:

$$P_{pür_6} = \underline{\underline{2,598 a^2 + \frac{3}{2} a \sqrt{4k^2 - a^2}}} \text{ jne.}$$

Korrapärase hultahkse püstpüramiidi külgsinna saame veel siis, kui aluspinna aluse ja tahu kallakusnurga koosinusega jagame (§ 8):

$$P_k = \frac{P_a}{\cos \alpha}.$$

Esimene teoreem: On kolmtahkse püramiidi ja prisma kõrgused võrdsed ja alused võrdpindsed, siis on püramiidi maht ja üks kolmandik prisma mahust võrdsed.



Joon. 74.

Tõestus: Konstruime kaks tasapinda: ühe, mis lõikab punkte A, E ja C, ja teise, mis lõikab punkte E, D ja C. Need tasapinnad jaotavad antud prisma kolmeks püramiidiks. II. ja III. püramiidi alused on võrdpindsed ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$) ja kõrgused võrdsed, sellepärast on need püramiidid Cavalieri põhilause järele ka võrdmahtsed. Nüüd võtame I. püramiidi aluseks $\triangle ADE$ ja II. püramiidi aluseks $\triangle ABE$; need alused on võrdpindsed, sest $\triangle ADE \cong \triangle ABE$. Võrdsed on ka nende püramiidide kõrgused — kui ühisest tipust C ühisele tasapinnale langevad perpendikulaarjooned. On nüüd I. ja II. püramiidi alused võrdpindsed ja kõrgused võrdsed, siis on nad võrdmahtsed.

Nii näeme, et kõik need püramiidid on võrdmahtsed, sellepärast on iga püramiidi maht üks kolmandik antud prisma mahust.

Teine teoreem: Püramiidi maht võrdub aluse ja kõrguse kasvatisega, mis jagatud kolmega.

Cavalieri põhilause järele on püramiidid siis võrdmahtsed, kui neil on võrdsed kõrgused ja võrdpindsed alused, järjeli. kult on iga n-tahkne püramiid ja kolmtahkne püramiid võrdmahtsed siis, kui neil on võrdsed kõrgused ja võrdpindsed alused. Et aga iga kolmtahkse püramiidi maht on üks kolmandik niisuguse prisma mahust, millel temaga võrdne kõrgus ja võrdpindne alus, siis peab ka iga püramiidi maht üks kolmandik niisuguse prisma mahust olema, millel temaga võrdne kõrgus ja võrdpindne alus. Et aga prisma maht võrdub aluspinna ja kõrguse kasvatisega, siis võrdub püramiidi maht selle ühe kolmandikuga:

$$M_{\text{pür}} = \frac{P_a \cdot h}{3}$$

Sellepärast võrdub korrapärase kolmtahkse püramiidi maht:

$$M_{\text{pür}_3} = \frac{0,433 a^2 \cdot h}{3} = \underline{\underline{0,144 a^2 h}};$$

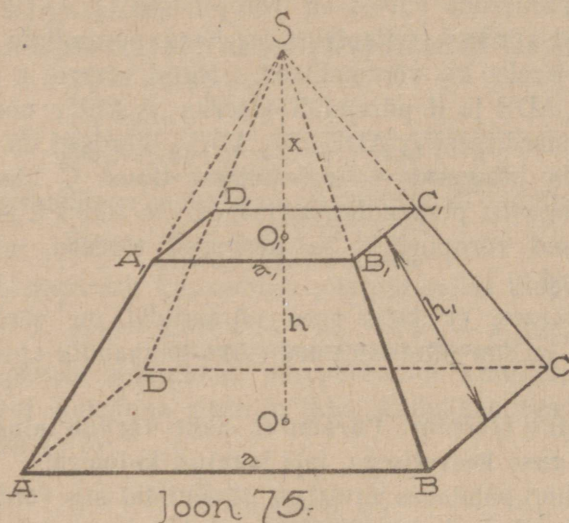
korrapärase nelitahkse püramiidi maht:

$$M_{\text{pür}_4} = \frac{a^2 \cdot h}{3} = \underline{\underline{0,333 a^2 h}};$$

korrapärase kuustahkse püramiidi maht:

$$M_{\text{pür}_6} = \frac{2,598 a^2 \cdot h}{3} = \underline{\underline{0,866 a^2 h}} \text{ jne.}$$

II. On korrapärase püsttõppüramiidi suurem aluspind P , väiksem — P_1 , külgpind P_2 , kõrgus $OO_1 = h$, äralõigatud osa kõrgus $SO_1 = x$, tahu kõrgus h_1 , suurema aluse serv a ,



Joon 75.

väiksema aluse serv a_1 ja tahkude arv n , siis on niisuguse püramiidi külgpind:

$$P_2 = \frac{n}{2} (a + a_1) \cdot h_1$$

ja üldpind: $P_{\text{tpär}} = \underline{\underline{P + P_1 + P_2}}$.

Igasuguse tõppüramiidi maht:

$$M_{\text{tpär}} = \frac{1}{3} P \cdot (h + x) - \frac{1}{3} P_1 \cdot x = \frac{1}{3} P \cdot h + \frac{1}{3} x \cdot (P - P_1).$$

Et aga $P : P_1 = (h + x)^2 : x^2$,

siis $\sqrt{P} : \sqrt{P_1} = (h + x) : x$;

siit $(\sqrt{P} - \sqrt{P_1}) : \sqrt{P_1} = [(h + x) - x] : x$

ehk $(\sqrt{P} - \sqrt{P_1}) : \sqrt{P_1} = h : x$,

siit $x = \frac{h \sqrt{P_1}}{\sqrt{P} - \sqrt{P_1}}.$

Paneme mahu vormelisse x -i asemele tema väärtuse, siis:

$$M_{\text{tpär}} = \frac{P \cdot h}{3} + \frac{h \cdot \sqrt{P_1} \cdot (P - P_1)}{3 (\sqrt{P} - \sqrt{P_1})}.$$

Et aga $P - P_1 = (\sqrt{P} + \sqrt{P_1}) \cdot (\sqrt{P} - \sqrt{P_1})$,

siis $\frac{P - P_1}{\sqrt{P} - \sqrt{P_1}} = \sqrt{P} + \sqrt{P_1}.$

Paneme leitud suuruse vastava suuruse asemele mahu teise vormelisse, siis:

$$M_{\text{püram}} = \frac{P \cdot h}{3} + \frac{h \cdot \sqrt{P_1} (\sqrt{P} + \sqrt{P_1})}{3} = \frac{P \cdot h}{3} + \frac{h \cdot \sqrt{P P_1}}{3} + \frac{P_1 \cdot h}{3} = \frac{h}{3} (P + \sqrt{P P_1} + P_1).$$

Tähendab: tõmppüramiidi maht võrdub kolme niisuguse püramiidi mahuga, mille kõrgused võrduvad tõmppüramiidi kõrgusega ja mille alusteks on: ühel tõmppüramiidi alumine alus, teisel — selle ülemine alus ja kolmandal — nende kahe aluse keskmine proportsionaalne.

§ 25.

Harjutused.

I. 59. Püstpüramiidi kõrgus $h = 20$ sm., aluse serv $a = 15$ sm.; leida püramiidi külgpind, üldpind ja maht, kui püramiidi aluseks on:

- 1) võrdkülgne kolmnurk,
- 2) ruut,
- 3) korrapärane kuusnurk.

60. Püstpüramiidi aluse serv $a = 21$ sm., külje serv $k = 42$ sm.; leida püramiidi maht, kui püramiidi aluseks on:

- 1) võrdkülgne kolmnurk,
- 2) ruut,
- 3) korrapärane kuusnurk.

61. Püstpüramiidi külgpind $= 240$ sm.², aluse serv $a = 8$ sm.; leida püramiidi maht, kui püramiidi aluseks on:

- 1) võrdkülgne kolmnurk,
- 2) ruut,
- 3) korrapärane kuusnurk.

62) Püstpüramiidi maht $= 105,8$ sm.³, aluse serv $a = 4,6$ sm.; leida püramiidi üldpind, kui püramiidi aluseks on:

- 1) võrdkülgne kolmnurk,
- 2) ruut,
- 3) korrapärane kuusnurk.

63. Korrapärase nelitahu (tetraeedri):

1) serv $a = 45$ sm.,

2) kõrgus $h = 20$ sm.,

3) üldpind $= 692,8$ sm.²; leida nelitahu maht.

64. Tornitahu kujutab korrapärase 12-tahkset püstpüramiidi; selle püramiidi aluse serv $a = 2,8$ m., iga külje tahk sünnitab alusega $76^{\circ}40'$ nurga. Leida selle katuse valmistamiseks tarvisminev materjaali hulk (m.²).

65. Liivakivist korrapärase kuustahkse püstpüramiidi aluse serv $a = 3,2$ m., külje serv $k = 8,1$ m.; leida püramiidi raskus, kui liivakivi erikaal $e = 2,3$.

II. 66. Korrapärase nelitahkse tõmppüramiidi suurema aluse serv $a = 40$ dm., väiksema aluse serv $a_1 = 32$ dm., külje tahu kõrgus $h_1 = 20$ dm.; leida püramiidi üldpind ja maht.

67. Korrapärase kuustahkse tõmppüramiidi suurema aluse serv $a = 24$ sm.; väiksema aluse serv $a_1 = 16$ sm., külje serv $k = 28$ sm.; leida üldpind ja maht.

68. Korrapärase nelitahkse tõmppüramiidi maht $= 1824$ sm.³, kõrgus $h = 18$ sm. ja suurema aluse serv $a = 12$ sm.; leida püramiidi üldpind.

69. Korrapärase nelitahkse tõmppüramiidi maht $= 8512$ sm.³, kõrgus $h = 21$ sm., väiksema aluse serv $a_1 = 16$ sm. Leida külje tahu ja suurema aluse kallakusnurk.

§ 26.

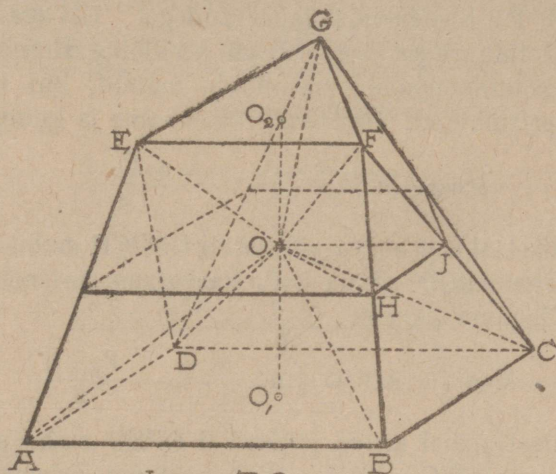
Prismatoidid.

I. Olgu meile antud — tema mahu leidmiseks — kõige lihtsam prismatoid, mille üheks aluseks on nelinurk ABCD ja teiseks aluseks kolmnurk EFG.

Võtame prismatoidi kesklõikel punkti O ja ühendame selle kõikide prismatoidi tippudega, siis jaotavad tasapinnad, mida need tippusid ühendavad joonlõigud piiravad, prismatoidi nii mitmeks püramiidiks, mitu tahku on prismatoidil. Meie prismatoidil on üheksa tahku: kaks alust, neli alt ülesulatavat ja kolm ülevalt allaulatavat tahku, järjekult saame ka

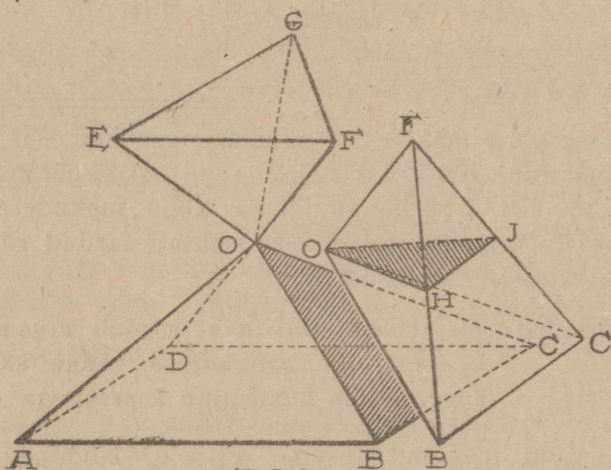
ühaksa püramiidi. Püramiid, mis alumisel alusel asub, on nelitahkne, teised kõik kolmtahksed.

Võtame kolmnurkade BCF ja HIF alusteks vastavalt BC



Joon 76.

ja HI. Et $HI = \frac{1}{2} BC$, sellepärast suhtuvad nende kõrgused kui 2:1 ja pinnad kui 4:1. Kui prismatoidi kõrgus $O_1O_2 = h$, siis püramiidi OHIF maht = OHI pind. $\frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ja püramiidi OBCF



Joon 76^a

maht = 4 OHI pinda. $\frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3}$, sest nende kahe püramiidi kõrgused on võrdsed ja alused suhtuvad kui 4:1.

Kõige seitsme külgtahkudest sünnitatud püramiidi mahud arvame analoogiliselt välja: kesklõike osa, mis asub kolmnurgana vastavas püramiidis, võtame neljakordselt, kasvatame prismatoidi kõrgusega ja jagame kuuega. Et aga kõik need kesklõike kolmnurksed osad kokku kesklõike sünnitavad, siis saame ka kõikide nende püramiidide mahud, kui neljakordse kesklõike prismatoidi kõrgusega kasvatame ja kuuega jagame:

$$M_{kpür} = 4 P_k \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4 P_k \cdot h}{6}.$$

Alumisel alusel asuva püramiidi OABCD mahu saame siis, kui nelinurga ABCD pinna $= P_a$ kasvatame prismatoidi kõrgusega ja jagame kuuega:

$$M_{apür} = ABCD \text{ pind} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{P_a \cdot h}{6}.$$

Ülemisel alusel asuva püramiidi OFEG mahu saame siis, kui kolmnurga EFG pinna $= P_{\bar{a}}$ kasvatame prismatoidi kõrgusega ja jagame kuuega:

$$M_{\bar{u}pür} = EFG \text{ pind} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{P_{\bar{a}} \cdot h}{6}.$$

Nii on prismatoidi maht:

$$\begin{aligned} M_{prist} &= M_{apür} + M_{\bar{u}pür} + M_{kpür} = \\ &= \frac{P_a \cdot h}{6} + \frac{P_{\bar{a}} \cdot h}{6} + \frac{4 P_k \cdot h}{6} = \frac{h}{6} (P_a + P_{\bar{a}} + 4 P_k). \end{aligned}$$

Igasugune n -tahkne prismatoid annab niimoodi püramiidideks jaotatult alumisel alusel ühe n_a -tahkse püramiidi, ülemisel ühe $n_{\bar{a}}$ -tahkse püramiidi ja külje tahkudel $n_a + n_{\bar{a}}$ kolmtahkset püramiidi, sellepärast maksab saadud vormel igasuguse n -tahkse prismatoidi kohta.

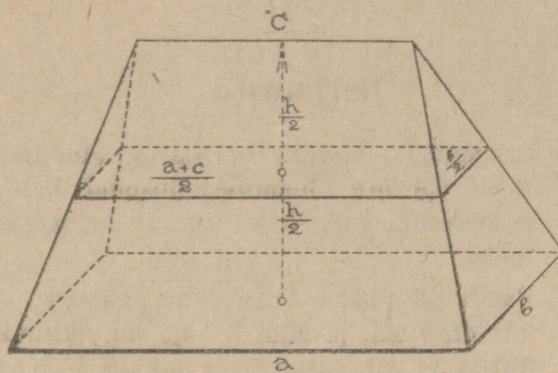
Tähendab: iga prismatoidi maht võrdub kahe aluspinna ja kesklõike neljakordse pinna summa ja kõrguse ühe kuueendiku kasvatisega

II. Kiilu ülemine aluspind $P_{\bar{a}} = 0$, alumine aluspind $P_a = a \cdot b$ (alus on täisnurkne nelinurk) ja kesklõike pind $P_k = \left(\frac{a+c}{2}\right) \cdot \frac{b}{2}$. Et kiil üks prismatoidi erikuju on, siis kiilu maht:

$$M_{\text{kiil}} = \frac{h}{6} (P_a + 4 P_k), \text{ ehk:}$$

$$M_{\text{kiil}} = \frac{h}{6} \left[a \cdot b + 4 \left(\frac{a+c}{2} \right) \cdot \frac{b}{2} \right] = \frac{h}{6} (a \cdot b + a \cdot b + b \cdot c) =$$

$$\frac{h \cdot b}{6} (2a + c) = \underline{\underline{\frac{h \cdot b}{2} \left(\frac{2a + c}{3} \right)}}.$$



Joon 77.

Kui $c = a$, siis:

$$M_{\text{kiil}} = \frac{h \cdot b}{6} (2a + a) = \underline{\underline{\frac{h \cdot b \cdot a}{2}}}.$$

On kiilu aluseks ehk pääks paralleelogramm, siis aluspind $P_a = a \cdot d$, kus d on paralleelogrammi kõrgus ehk a servade kaugus teineteisest, ja kiilu maht:

$$M_{\text{kiil}} = \frac{h \cdot d}{6} (2a + c) = \underline{\underline{\frac{h \cdot d}{2} \left(\frac{2a + c}{3} \right)}}.$$

On aluseks trapeets, siis aluspind $P_a = \frac{1}{2} d \cdot (a + e)$, kus e on trapeetsi teine paralleelkülg ja d nende kaugus teineteisest; kesklõike pind $P_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{a+c}{2} + \frac{e+c}{2} \right) =$
 $= \frac{d}{8} \cdot (a + e + 2c)$, neljakordne kesklõike pind:

$4 P_k = \frac{d}{2} \cdot (a + e + 2c)$, ja maht:

$$M_{\text{kiil}} = \underline{\underline{\frac{h \cdot d}{2} \left(\frac{a + e + c}{3} \right)}}.$$

$\frac{hd}{2}$ on selle kolmnurga pind, mis kiilu läbi lõikab ja alustega perpendikulaarne on.

Nii saame igal juhul kiilu mahu siis, kui alustega perpendikulaarse kolmnurga pinna aluste kolme serva kolmandik summaga kasvatame.

§ 27.

Harjutused.

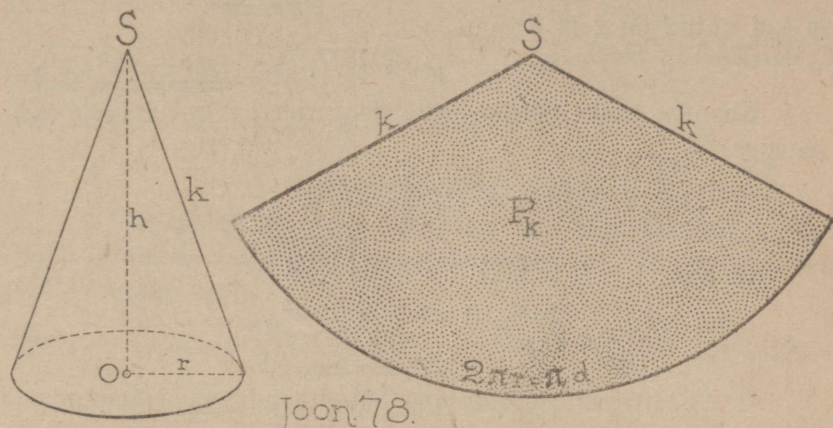
70. Prismatoidi kõrgus $h = 4,2$ m., alumine aluspind $P_a = 0,8$ m.², ülemine aluspind $P_u = 0,6$ m.² ja kesklõike pind $P_k = 0,7$ m.² Leida prismatoidi maht.
71. Raudkiilu pää³ on täisnurkne nelinurk, mille pikkus on 8 sm. ja laius — 4,5 sm.; kiilu kõrgus on 38 sm. ja pää vastasserva pikkus — 3,5 sm. Leida kiilu raskus, kui raua erikaal = 7,6.
72. Täiskelbaga maja pikkus on 25 m., laius — 15 m.; maja katus sünnitab laega 60° nurga. Leida selle maja pööningu maht.
73. Kiilukujuline liivahunnik, mille alumine pikkus oli 8 m., laius—5 m., ülemine pikkus—6 m. ja külgtahkude kallakusnurgad—45°, tõsteti kuubikujulisse kasti, mis liivast ääreni täitus. Leida selle kasti serva pikkus.
74. Oder on väljal õõnsas rõugus, mille pikkus on 12 m., kõrgus—3 m., külje paksus—0,8 m. ja külje kallakusnurk—60°. Mitu koormat otse saab sellest rõugust, kui iga koorma maht keskmiselt 5 m.³ on.

§ 28.

Koonus.

I. Et meie võime vaadelda koonust kui püramiidi, millel on lõpmata hulk lõpmata kitsaid külgtahkusi, siis ei eraldu koonuse pinna ja mahu arvamine püramiidi pinna ja mahu

arvamisest muuga, kui et see koonuse suurema korrapärasuse tõttu veel lihtsamaks muutub. Iga koonuse üldpinna sünnitavad koonuse aluspind ja külgpind. Kui püstkoonuse



Joon 78.

aluspind on ring, mille raadius r ehk diameeter d , siis võimaldavad viimased selle pinna suuruse väljendada:

$$P_a = \pi r^2, \text{ ehk:}$$

$$P_a = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Koonuse külgpind annab ühte külgeoont k -d mööda lahti lõigatult ja tasapinnale laotatult ringi sektori. Selle sektori raadiuseks on koonuse külgeoon k ja kaareks koonuse aluse ringjoon $2\pi r$ ehk πd .

Meie võime jagada selle sektori lõpmata hulgaks kolmnurkadeks, mille tipud asuvad sektori tipus ja mille aluseid võib vaadelda — kui lõpmata lühikesi kaarekesi — sirgjoone osadena. Iga niisuguse kolmnurga pinna saame siis, kui aluse poole kõrgusega kasvatame. Et aga kõik kõrgused võrdsed on, sest nad võrduvad koonuse külgeoonega k , siis võime esiteks kõikide kolmnurkade alused kokkuarvata — saame sektori kaare $= 2\pi r = \pi d$ — ja siis poole kõrgusega kasvatada.

Nii on siis koonuse külgpind:

$$P_k = 2\pi r \cdot \frac{k}{2} = \pi r k, \text{ ehk:}$$

$$P_k = \pi d \cdot \frac{k}{2} = \frac{\pi d k}{2}.$$

Et aga

$$k = \sqrt{h^2 + r^2}, \text{ siis veel:}$$

$$P_k = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Tähendab — koonuse üldpind on siis, kui antud on r ja k :

$$P_{\text{koon}} = \pi r^2 + \pi r k = \underline{\underline{\pi r(r + k)}}$$

ja kui antud on r ja h :

$$P_{\text{koon}} = \pi r^2 + \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \underline{\underline{\pi r(r + \sqrt{h^2 + r^2})}}$$

Koonuse maht võrdub selle paragrahvi algul öeldule põhjenedes:

$$M_{\text{koon}} = P_a \cdot \frac{h}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}}}$$

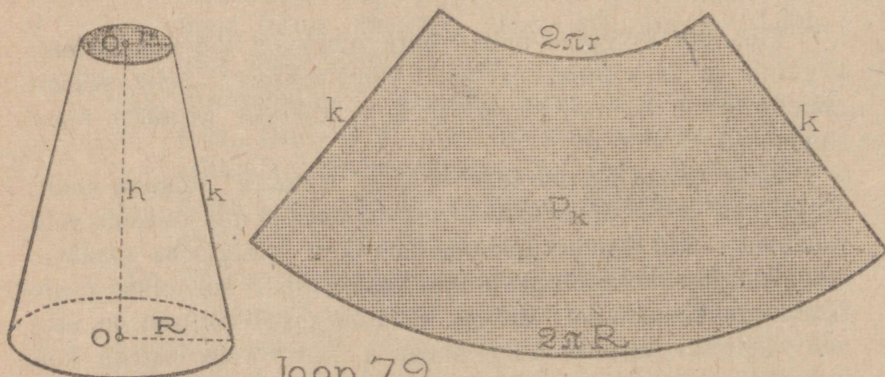
Et aga $h = \sqrt{k^2 - r^2}$, siis veel:

$$M_{\text{koon}} = \underline{\underline{\frac{\pi r^2 \sqrt{k^2 - r^2}}{3}}}$$

II. Tõmpkoonuse üldpinna sünnitavad kaks aluspinda ja külgpind. On tõmpkoonus saadud püstringkoonusest, siis on ta mõlemad alused ringid, mille pinnad:

$$P_a = \pi R^2,$$

$$P_b = \pi r^2.$$



Joon 79.

Lõikame külpinna ühte külgeoont mõõda lahti, laotame tasapinnale ja jagame ta lõpmata hulga joonlõikudega, mis võrduvad külgeoonega, osadesse, siis saame lõpmata hulga lõpmata lühikeste alustega trapeetse, mille kõrgused on võrdsed ja võrduvad külgeoonega. Nende trapeetside suuremate aluste summa võrdub alumise aluse ringjoonega $= 2\pi R$, väiksemate aluste summa — ülemise aluse ringjoonega $= 2\pi r$, sellepärast külgpind:

$$P_k = (2\pi R + 2\pi r) \cdot \frac{k}{2} = \pi k (R + r),$$

ja üldpind:

$$P_{tkoon} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi r (R + r) = \pi \underline{\underline{[R^2 + r^2 + k (R + r)]}}.$$

Et aga $k = \sqrt{h^2 + (R - r)^2},$

siis külgpind: $P_k = \pi (R + r) \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

ja üldpind: $P_{tkoon} = \pi \underline{\underline{[R^2 + r^2 + (R + r) \sqrt{h^2 + (R - r)^2}]}.$

Et tömpkoonust võib vaadelda kui lõpmata hulga lõpmata kitsaste külgtahkudega tömpüramiidi, siis võrdub ka tömpkoonuse maht:

$$\begin{aligned} M_{tkoon} &= \frac{h}{3} (P_a + \sqrt{P_a \cdot P_u} + P_u) = \frac{h}{3} (\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2) = \\ &= \frac{h}{3} (\pi R^2 + \pi Rr + \pi r^2) = \underline{\underline{\frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)}}. \end{aligned}$$

§ 29.

Harjutused.

Märkus: Kõigis harjutustes on võetud püstringkoonus.

I. 75. Leida koonuse üldpind ja maht, kui antud on:

1) raadius $r = 28$ sm. ja kõrgus $h = 45$ sm.;

2) „ $r = 5$ sm. „ „ $h = 12$ sm.;

3) „ $r = 12$ sm. „ külgjoon $k = 37$ sm.;

4) külgjoon $k = 73$ sm. „ kõrgus $h = 55$ sm.

76. Leida koonuse maht, kui antud on:

1) külgpind $P_k = 427,04$ sm.² ja raadius $r = 8$ sm.;

2) „ $P_k = 188,4$ sm.² „ „ $r = 4$ sm.;

3) „ $P_k = 1821,2$ sm.² „ kõrg. $h = 21$ sm.;

4) üldpind $P_{koon} = 38207,52$ sm.² ja raadius $r =$
 $= 72$ sm.;

5) üldpind $P_{koon} = 33064,2$ sm.² ja $r + k = 162$ sm.

77. Koonuse külgpind sünnitab tasapinnale laotatult poolringi, mille raadius on 20 sm. Leida koonuse üldpind.

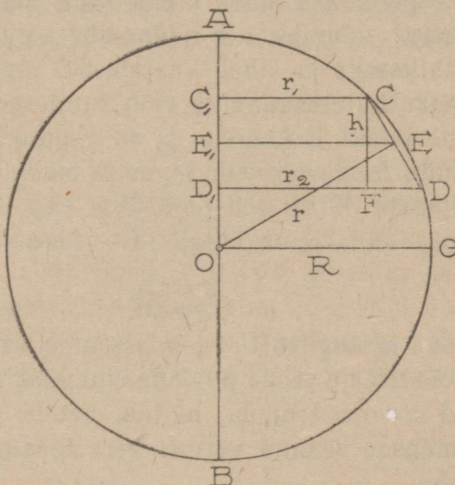
78. Koonuse külgpind on 1884 sm.^2 ja sünnitab tasapinnale laotatult sektori, mille sentrinurk $\alpha = 60^\circ$. Leida koonuse maht.
79. Koonusesse on konstrueitud püstringsilinder, mille külgpind on koonuse külgpinnast neli korda väiksem; koonuse kõrgus $h = 15 \text{ sm.}$, küljjoon $k = 17 \text{ sm.}$ Leida silindri kõrgus.
80. Võrdkülgne kolmnurk, mille kül $a = 24 \text{ sm.}$, pöörduv ühe külje ümber ja sünnitab kahekordse koonuse. Leida selle maht.
81. Romb, mille kaks vastasnurka on kumbki 70° , pöörduv nende nurkade diagonaali $d = 12 \text{ sm.}$ ümber ja sünnitab kahekordse koonuse. Leida selle maht.
82. Koonusetaolise liivakuhja aluse ümbermõõt on $15,072 \text{ m.}$ ja kuhja kõrgus $1,65 \text{ m.}$ Mitu koorimat liiva on selles kuhjas, kui igasse kormasse mahub keskmiselt $1657,92 \text{ dm.}^3$ liiva.
83. Koonuse küljjoon $k = 100 \text{ sm.}$ ja sünnitab alusega 60° kaldenurga; leida koonuse maht.
84. Leida tõmpkoonuse üldpind ja maht, kui on antud:
- 1) alumine raadius $R = 18 \text{ sm.}$, ülemine raadius $r = 8 \text{ sm.}$ ja kõrgus $h = 12 \text{ sm.}$,
 - 2) " " " $R = 18 \text{ sm.}$, küljjoon $k = 17 \text{ sm.}$ ja kõrgus $h = 15 \text{ sm.}$
85. Leida tõmpkoonuse maht, kui antud on:
- 1) külgpind $P_k = 1020,5 \text{ sm.}^2$, $R = 15 \text{ sm.}$ ja $r = 10 \text{ sm.}$;
 - 2) " " $P_k = 439,6 \text{ sm.}^2$, $k = 10 \text{ sm.}$ ja $h = 8 \text{ sm.}$
86. Tõmpkoonusetaolise plekist riista ülemine diameeter on 11 dm. , alumine 9 dm. ja kõrgus $7,5 \text{ dm.}$ Leida selle riista valmistamiseks tarvisminev pleki hulk.
87. Puu tüvest, mille pikkus on $4,5 \text{ m.}$, alumine diameeter 6 dm. ja ülemine $4,8 \text{ dm.}$, valmistati nii suur ühejämune ruuttala, kui puu ülemine ots võimaldas. Leida mahatahutud osa maht.
88. Tuuleveski alumine sisemine läbimõõt on 6 m. , ülemine 5 m. ja kõrgus 12 m. ; seina paksus all on $0,77 \text{ m.}$, üleval $0,51 \text{ m.}$ Leida seinte maht.

89. Laeva masti pikkus on 25 m., alumine läbimõõt on 94 sm. ja ülemine — 36 sm. Leida masti raskus, kui puu erikaal on 0,6.

§ 30.

Kera.

I. Pöördub poolringjoon diameetri AB ümber, siis sünnitab ta kerapinna ja eraldab ruumist keraruumi. Iga selle poolringjoone osakene, näituseks kaar DC, sünnitab kera vöö, kaare vastav sidejoon—tõmpkoonuse pinna.



Joon 80.

Joonlõigud CC_1 ja DD_1 , mis AB -ga perpendikulaarsed, on selle tõmpkoonuse raadiused r_1 ja r_2 ; sidejoon $CD = k$ on selle koonuse külgjoon, ja tema külgpind:

$$P_k = \pi \cdot k \cdot (r_2 + r_1).$$

Jagame külgjoone CD pooleks, siis $CE = ED$; tõmbame E -st EE_1 , mis paralleelne CC_1 -ga ja DD_1 -ga, siis $EE_1 = \frac{r_2 + r_1}{2}$

(kui trapeetsi keskjoon). Ühendame nüüd punktid E ja O, saame joonlõigu $EO = r$, ja tõmbame C-st tõmpkoonuse kõrguse $CF = h$. Kolmnurgad DCF ja OEE_1 on taolised, sest $\sphericalangle DCF = \sphericalangle OEE_1$ ja $\sphericalangle DFC = \sphericalangle EE_1O = d$, järjekult:

$$r : k = \left(\frac{r_2 + r_1}{2} \right) : h, \text{ ehk:}$$

$$2r : 2k = (r_2 + r_1) : 2h,$$

$$\text{siit} \quad 2k(r_2 + r_1) = 4kh$$

$$\text{ja} \quad k(r_2 + r_1) = 2rh.$$

Paneme leitud tõmpkoonuse külgpinna vormelisse $k(r_2 + r_1)$ asemele tema väärtuse $2rh$, siis saame:

$$P_k = 2\pi rh.$$

Mida väiksemaks meie tõmpkoonuse kõrguse muudame, seda lühemaks jääb sidejoon DC, seda lähemale nihkub ta kaarele DC ja seda pikemaks läheb r ehk selle sidejoone kaugus kera keskpunktist. Muudame h -i lõpmata väikseks, siis jääb CD lõpmata lühikeseks ja läheb kaarele CD lõpmata lähedale, nii et neid lõpuks ühtelanguuks võib tunnustada. Siis langeb EO viimane punkt E kaarele, ja selle punkti kaugus O-st ehk $r = R$. Nüüd langevad selle lõpmata madala tõmpkoonuse külgpind ja lõpmata kitsa vöö pind ühte, nii et tõmpkoonus oleks nüüd kera kiht ja tema külgpind — kera vöö, mille pind:

$$P_{\text{vöö}} = \underline{\underline{2\pi R h.}}$$

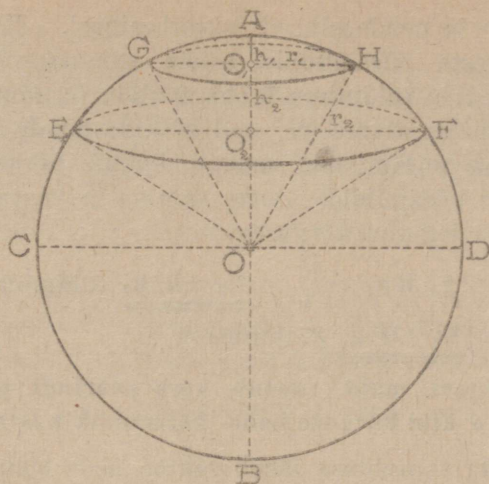
Et meie äga igasuguse vöö pinda võime vaadelda kui niisuguste lõpmata kitsaste vööde pindade summad, mille vastavate kihtide üksikud kõrgused h_1, h_2, h_3 jne. nende üldse kõrguse annavad, siis maksab saadud vormel kera igasuguse vöö pinna kohta, tähendab:

kera vöö pind võrdub kera pearingjoone ($2\pi R$) ja vastava kihi kõrguse (h) kasvatisega.

II. Kera lõik ehk segment (GAH — joon. 81) on kera kiht, mille üks alus on null; järjekult maksab saadud vormel ka kera segmendi välispinna kohta:

$$P_{\text{seg}} = \underline{\underline{2\pi R h_1.}}$$

Kera segmendi välispind võrdub kera pearingjoone ja segmendi kõrguse kasvatisega.



Joon 81.

III. Võtame segmendi, mis poole keraga võrdub, siis võrdub selle segmendi kõrgus h kera raadiusega R , sellepärast poole kera pind:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P_{\text{ker}} &= 2\pi R^2, \\ \text{ja terve kera pind: } P_{\text{ker}} &= \underline{\underline{4\pi R^2}}. \end{aligned}$$

Kera pind võrdub kera pearingi neljakordse pinnaga.

IV. Kera sektori üldpinna sünnitavad sektori aluspind ja külgpind. Üldjuhusel (OEGHF — joon. 81) on sektori aluspinnaks vastav (EGHF) vööpind $= 2\pi R h_2$ ja külgpinnaks kaks koonuspinda; erijuhusel on aluspinnaks sektori segment-osa (GAH) välispind $= 2\pi R h_1$ ja külgpinnaks üks koonuspind. Nii on siis:

1) üldjuhusel:

$$\begin{aligned} P_a &= 2\pi R h_2, \\ P_k &= \pi R r_1 + \pi R r_2. \end{aligned}$$

$$P_{\text{sek}} = \pi R (2 h_2 + r_1 + r_2).$$

2) erijuhusel:

$$\begin{aligned} P_a &= 2\pi R h_1, \\ P_k &= \pi R r_1. \end{aligned}$$

$$P_{\text{sek}} = \pi R (2 h_1 + r_1).$$

Saadud vormelitest näeme, et kera sektori pind võrdub igal juhusel:

pearingjoone pikkuse ja vastava kihi kõrguse kasvatisega.

V. Kera sektori võib vaadelda kui lõpmata väikeste alustega püramiidide kogu. Nende püramiidide tipud asuvad

sektori tipus ja nende alused sektori alusel. Kõikide nende lõpmata väikeste püramiidide aluste summa võrdub sektori alusega $= 2 \pi R h_2$ (üldjuhusel) ehk $2 \pi R h_1$ (erijuhusel). Tähen-
dab, sektori mahu saame siis, kui kõikide nende lõpmata väi-
keste alustega püramiidide mahud kokku arvame. Selleks
võtame nende püramiidide aluste summa ja kasvatame nende
ühise kolmega jagatud kõrgusega:

$$M_{\text{sek}} = 2 \pi R h_2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{2}{3} \pi R^2 h_2 \text{ (üldjuhusel),}$$

$$M_{\text{sek}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h_1 \text{ (erijuhusel).}$$

Sektori maht võrdub kera pearingi pinna ja vas-
tava kihi kõrguse kahe- kolmandik kasvatisega.

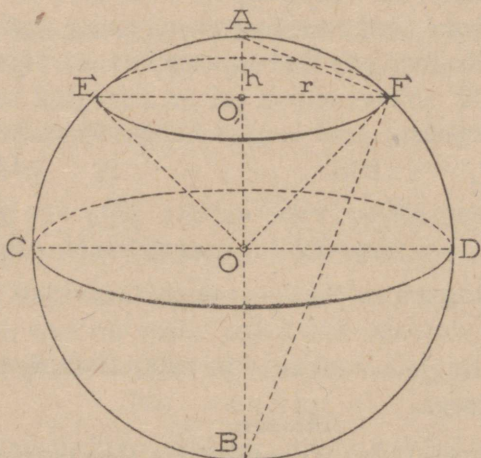
VI. Mida suuremaks läheb sektor, seda suuremaks muu-
tub ka kõrgus h . Võrdub sektor poole keraga, siis $h = R$, ja
poole kera maht:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_{\text{ker}} &= \frac{2}{3} \pi R^3, \\ \text{siit } M_{\text{ker}} &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Kera maht võrdub kera üldpinna ja kolmandik raa-
diuse kasvatisega.

VII. Eraldame erikujulise sektori mahust (joon. 82) koo-
nuse OEF mahu, siis jääb meile järele segmendi maht. Koo-
nuse aluspind:

$$P_a = \pi r^2.$$



Joon. 82.

Ühendama punktid A ja F ning F ja B, siis saame täisnurkse kolmnurga AFB, sest $\angle$ AFB on piirdenurk ja toetab diameetritele; siit r kui kõrgus, mis langeb täisnurga tipust hüpoteenuusile:

$$r^2 = (2R - h)h, \text{ sest } O_1B = 2R - h \text{ ja } O_1A = h,$$

järjekult: $P_a = \pi h(2R - h)$, ja koonuse maht:

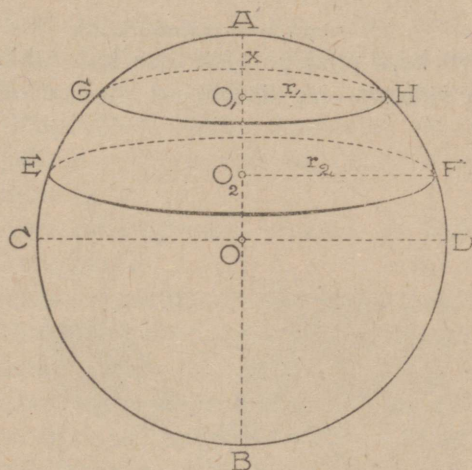
$$M_{\text{koon}} = \frac{1}{3} \pi h(2R - h)(R - h) = \frac{1}{3} \pi h(2R^2 - 3Rh + h^2).$$

Sektori maht:

$$M_{\text{sek}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h, \text{ tähendab — segmendi maht:}$$

$$\begin{aligned} M_{\text{seg}} - M_{\text{sek}} - M_{\text{koon}} &= \frac{2}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h(2R^2 - 3Rh + h^2) = \\ &= \frac{1}{3} \pi h(2R^2 - 2R^2 + 3Rh - h^2) = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h). \end{aligned}$$

VIII. Kera kihi maht võrdub segmendi kahe mahu vahega. On meile antud välja arvata kihi GEFH (joon. 83) maht, siis saame selle, kui segmendi AEFA mahust segmendi



Joon 83.

AGHA mahu maha arvame. On kihi kõrgus $O_1O_2 = h$, väiksema segmendi kõrgus $AO_1 = x$ ja suurema segmendi kõrgus $AO_2 = h + x$, siis segmentide mahud:

$$M_{\text{seg}_2} = \frac{1}{3} \pi (h+x)^2 [3R - (h+x)] = \frac{1}{3} \pi (3Rh^2 + 6Rh x + 3Rx^2 - 3h^2 x - 3hx^2 - h^3 - x^3),$$

$$M_{\text{seg}_1} = \frac{1}{3} \pi x^2 (3R - x) = \frac{1}{3} \pi (3Rx^2 - 3hx^2 - h^3 - x^3).$$

$$M_{\text{kiht}} = M_{\text{seg}_2} - M_{\text{seg}_1} = \frac{1}{3} \pi (3Rh^2 + 6Rh x - 3h^2 x - 3hx^2 - h^3).$$

Toome sulgudest välja $\frac{1}{2} h$, siis:

$$M_{\text{kiht}} = \frac{\pi h}{6} (6 R h + 12 R x - 6 h x - 6 x^2 - 2 h^2).$$

Kihi aluste raadiused on keskmised proportsionaalsed nende juure kuuluvate kera diameetri lõikude vahel, sellepärast:

$$r_2^2 (h + x) [2 R - (h + x)] = 2 R h + 2 R x - 2 h x - x^2 - h^2.$$

$$r_1^2 x (2 R - x) = 2 R x - x^2.$$

$$r_2^2 + r_1^2 = 2 R h + 4 R x - 2 h x - 2 x^2 - h^2.$$

Kasvatame saadud võrduse mõlemad pooli 3-ga, siis:

$$3 r_2^2 + 3 r_1^2 = 6 R h + 12 R x - 6 h x - 6 x^2 - 3 h^2.$$

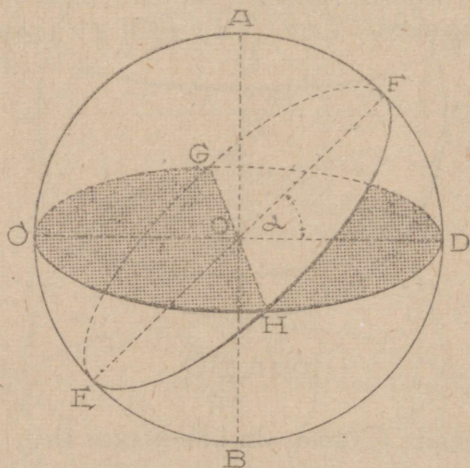
Toome ühe h^2 paremalt põõlt pahemale poole, siis:

$$3 r_2^2 + 3 r_1^2 + h^2 = 6 R h + 12 R x - 6 h x - 6 x^2 - 2 h^2.$$

Kihi mahu vormeli sulgudes olev avaldus on sama, mis leitud vormeli parempoolne osa, sellepärast paneme selle vormeli pahempoolse osa sulgudesse võrdse suuruse asemele, siis:

$$M_{\text{kiht}} = \frac{\pi h}{6} (3 r_2^2 + 3 r_1^2 + h^2).$$

IX. Terve kera pind on sfäärilise kahetahkse nurga ehk sfäärilise kiilu välisest ehk sfäärilisest pinnast nii mitu kordä



Joon 84.

suurem, mitu korda on 360° sfäärilise kahetahkse nurga kallakusnurgast α suurem, sellepärast:

$$P_{\text{ker}} : P_{\text{sfk}} = 360^\circ : \alpha,$$

$$\text{siit } P_{\text{sfr}} = \frac{4 \pi R^2 \cdot a}{360^0} = \frac{\pi R^2 \cdot a}{90^0}.$$

Sfäärilise kahetahkse nurga üldpind:

$$P_{\text{sfrk}} = \pi R^2 + \frac{\pi R^2 \cdot a}{90^0} = \pi R^2 \left(1 + \frac{a}{90^0} \right).$$

Niisama suhtuvad nende mahud:

$$M_{\text{ker}} : M_{\text{sfr}} = 360^0 : a,$$

$$\text{siit } M_{\text{sfr}} = \frac{4 \pi R^3 \cdot a}{3 \cdot 360^0} = \frac{\pi R^3 a}{270^0}.$$

§ 31.

Harjutused.

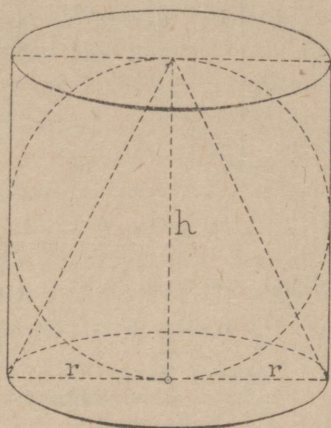
90. Kera raadius on 15 sm.; leida kera pind ja maht.
91. Kera pind on 452,16 sm.²; leida kera maht.
92. Kera maht on 904,32 sm.³; leida kera pind.
93. Õõnpoolkera väline diameeter on 1,8 dm., seina paksus — 3 sm.; leida poolkera väline ja sisemine pind.
94. Kera pearingjoone pikkus on 75,36 dm.; leida kera maht.
95. Maakera raadius on umbes 860 geogr. penikoormat, õhukihi paksus selle pinnal on umbes 10 geogr. penik.; leida õhu hulk.
96. Kera, mille diameeter on 1,8 m., kullatakse üle ja tarvitatakse iga 2 m.² peale 1,98 gr. kulda; leida kuldamiseks tarvisminev kulla hulk.
97. Marmorist kera raadius on 1,4 dm., marmori erikaal — 2,8; leida kera raskus.
98. Kera vöö kõrgus on 12 dm., kera raadius — 20 dm.; leida vöö pind.
99. Kera vöö pind on 628 sm.², kera raadius—12,5 sm. leida vöö kõrgus.
100. Kera vöö pind on 1256 sm.², kõrgus — 10 sm.; leida kera maht.

101. Maakera raadius on ligikaudu 860 geogr. peni-koormat, palavvöö kõrgus — umbes 684 geogr. penik.; leida palavvöö pind.
102. Segmendi alus on kera keskpunktist 8 dm. kaugel, segmendi aluse raadius on 2 dm. võrra kera raadiusest lühem; leida kera maht ja segmendi välispind.
103. Kera raadius on 85 sm.; segmendi kõrgus—8 sm.; leida selle segmendi juure kuuluva sektori üldpind ja maht
104. Kera sektori (erijuhus) kõõnusosa kõrgus on 35 sm., selle aluse raadius—12 sm.; leida sektori maht.
105. Kera sektori (erijuhus) segmentosa aluse raadius $r = 16$ sm., segmendi välispind ja koonuse külgpind on võrdsed; leida sektori maht.
106. Kera sektori (erijuhus) segmentosa aluse raadius $r = 24$ sm., sektori üldpind võrdub kera ühe pearingi pinnaga; leida sektori maht.
107. Kivist kera segmendi aluse raadius $r = 28$ sm., segmendi kõrgus $h = 8$ sm.; leida segmendi raskus, kui kivi erikaal $= 2,8$.
108. Kera kihi suurema aluse raadius $r_2 = 26$ sm., väiksema aluse raadius $r_1 = 21$ sm. ja kihi kõrgus $h = 16$ sm.; leida kihi maht.
109. Kera raadius on 65 sm., kihi suurema aluse raadius $r_2 = 63$ sm., kihi kõrgus on 9 sm.; leida kihi maht.
110. Kerast, mille raadius $= 20$ sm., on välja lõigatud sfääriline kiil, mille kallakusnurk $\alpha = 22^\circ 30'$; leida kiilu üldpind ja maht.
111. Raudse sfäärilise kiilu terava serva pikkus on 20 sm., kallakusnurk $\alpha = 30^\circ$; leida kiilu raskus, kui raua erikaal $= 7,8$.
112. Kaksikkumera klaasist läätsa paksus on 3,5 sm., ühe kumeruse raadius — 7 sm., teise — 8,75 sm.; leida läätsa raskus, kui klaasi erikaal $= 3,5$.
113. Kumerõõnsa klaasist läätsa paksus on 5 sm., ühe kumeruse raadius — 10 sm., teise — 20 sm.; leida läätsa raskus, kui klaasi erikaal $= 3,5$.

§ 32.

Kehade mahtude suhted.

I. On silindri, kera ja koonuse raadiused ja kõrgused võrdsed, siis:



Joon 85.

$$M_{\text{silnr}} = \pi r^2 \cdot h = 2\pi r^3, \text{ sest } h = 2r,$$

$$M_{\text{ker}} = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

$$M_{\text{koon}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{2}{3} \pi r^3.$$

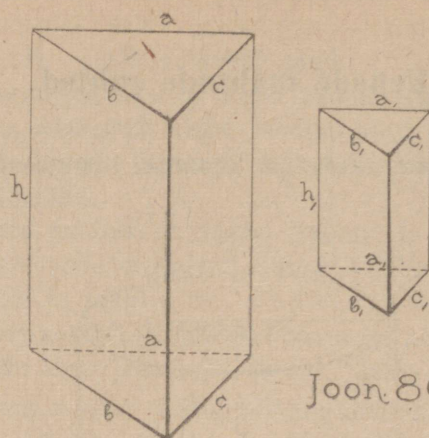
Siit:

$$M_{\text{silnr}} : M_{\text{ker}} : M_{\text{koon}} = 2\pi r^3 : \frac{4}{3} \pi r^3 : \frac{2}{3} \pi r^3 = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3} = 6 : 4 : 2 = \underline{\underline{3 : 2 : 1}}.$$

Tähendab: On silindri, kera ja koonuse raadiused ja kõrgused võrdsed, siis suhtuvad nende mahud nii kui 3 : 2 : 1. (Arhimeedese lause).

II. Kehad on siis taolised, kui kõik nende vastavad servad — proportsionaalsed, vastavad tahud — taolised kujundid ja vastavad kahetahksed nurgad võrdsed on (§ 19).

Järjekult: on kahe püstprisma alused taolised, siis suhtuvad nende aluste pinnad nii kui aluste vastavate servade ruundud:



Joon 86.

Et külje tahud on taolised, siis $h : h_1 = a : a_1$ } Kasvatame proport-
 siooni vastavad liik-
 med.

$$\underbrace{P_a \cdot h} : \underbrace{P_{a_1} \cdot h_1} = a^3 : a_1^3.$$

$$\underline{\underline{M_{pris} : M_{pris_1} = a^3 : a_1^3.}}$$

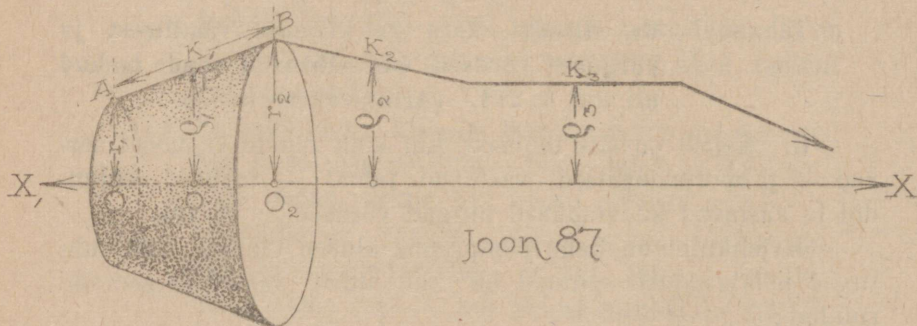
Tähendab: **Toaliste kehade mahud suhtuvad nii kui vastavate servade kuubid.**

Leida, kas võib seda lauset ilma erandita kõikide taolistehkehade kohta laiendada.

§ 33.

Guldini laused.

I. Pöördub joonlõik $AB = k_1$ telje xx_1 ümber, siis sünnitab ta tõmpkoonuse, mille külgpind:



Joon 87

$$P_k = \frac{2\pi r_1 + 2\pi r_2}{2} \cdot k_1 = 2\pi k_1 \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Nelinurk ABO_2O_1 on trapeets. On selle trapeetsi keskjoon $OP = \rho_1$, siis $\rho_1 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ ja $P_k = 2\pi\rho_1 \cdot k_1$.

Punkt P on joonlõigu AB raskuspunkt, ρ_1 — selle raskuspunkti kaugus pöördeteljest xx_1 ehk raskuspunkti raadius ja $2\pi\rho_1$ — selle raskuspunkti tee, mis ta ühe ringiga läbi käib; tähendab:

pöörkeha külgpind võrdub kujutavjoone enese ja selle joone raskuspunkti tee pikkuse kasvatisega.

Sama lause maksab kõikide teiste joonlõikude — k_2, k_3 jne. — kohta, tähendab: kõikidest joonlõikudest sünnitatud keha külgpind:

$$P_k = 2\pi\rho_1 k_1 + 2\pi\rho_2 k_2 + \dots + 2\pi\rho_n k_n = 2\pi(\rho_1 k_1 + \rho_2 k_2 + \dots + \rho_n k_n).$$

Mehaanika nimetab niisuguste üksikute joonlõikude ja nende raskuspunktide raadiuste kasvatisist nende joonlõikude pöördemomentideks pöördetelje xx_1 suhtes ja tõestab, et kõikide niisuguste üksikute joonlõikude pöördemomentide summa võrdub joonlõikude summa ja nende lõikude ühiskeskpunkti raadiuse (ρ) kasvatisega:

$$\rho_1 k_1 + \rho_2 k_2 + \dots + \rho_n k_n = (k_1 + k_2 + \dots + k_n)\rho.$$

Tähendab — pöörkeha külgpind:

$$P_k = \underline{\underline{2\pi\rho(k_1 + k_2 + \dots + k_n)}}.$$

Selles vormelis on $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ kõikide joonlõikude ehk terve murdjoone pikkus, $2\pi\rho$ — selle tee pikkus, mis nende joonlõikude ühiskeskpunkt ühe ringiga läbi käib.

On kujutavjooneks mistahes kõverjoon, siis võime selle kõverjoone osadesse jagada. Mida suurem on kõverjoone osade hulk, seda väiksemad on üksikud kujutavjoonekesed k -d, seda ligemale nihkuvad nad sirgjoone lõikudele ja seda täpsem saab vastus. Nii maksab igasuguse joone läbi sünnitatud pöörkeha kohta

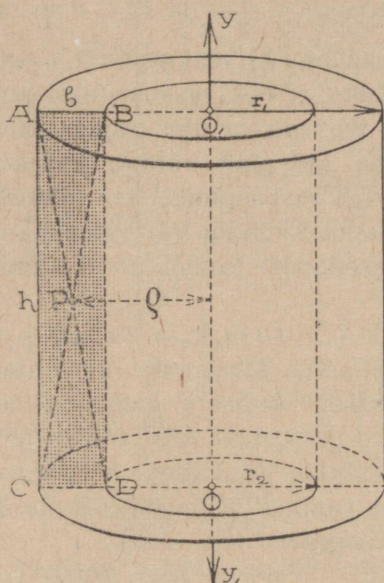
Guldini esimene lause:

Pöörkeha külgpind võrdub kujutavjoone enese pikkuse ja selle joone raskuspunkti tee pikkuse kasvatisega.

II. Pöördub täisnurkne nelinurk ABCD, mille küljed $AB = CD = b$ ja $AC = BD = h$, telje yy_1 ümber, siis sünnib õõnsilinder, mille maht võrdub välise ja sisemise silindri mahu vahega:

$$M_{\text{snr}} = \pi h (r_1^2 - r_2^2) = \pi h (r_1 + r_2) (r_1 - r_2) = 2 \pi h (r_1 - r_2) \frac{(r_1 + r_2)}{2}.$$

Nelinurga ABCD raskuspunktiks on selle nelinurga diagonaalide



Joon 88.

lõikpunkt P, raskuspunkti kaugus pöördeteljest— ρ , sellepärast:

$$\rho = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Et aga $b = r_1 - r_2$, siis õõnsilindri maht:

$$M_{\text{snr}} = 2 \pi h \rho b = 2 \pi \rho \cdot P_n.$$

Saadud vormelis on $P_n = bh$ nelinurga ABCD pind ja $2 \pi \rho$ — selle pinna raskuspunkti tee ümber pöördetelje.

On meil pind, mis seisab koos ABCD taolistest täisnurksetest nelinurkadest, mille pinnad P_1, P_2 jne.; on ρ_1, ρ_2 jne. nende pindade raskuspunktide kaugused pöördeteljest ehk raskuspunktide raadiused, siis nende nelinurkade pöördumisel sünnitatud keha maht:

$$M = 2 \pi \rho_1 \cdot P_1 + 2 \pi \rho_2 \cdot P_2 + \dots + 2 \pi \rho_n \cdot P_n = 2 \pi (\rho_1 \cdot P_1 + \rho_2 \cdot P_2 + \dots + \rho_n \cdot P_n).$$

Endisega sarnaselt tõestab mehaanika, et üksikute pindade ja nende pindade raskuspunktide raadiuste kasvatisete summa võrdub nendest pindadest sünnitatud ühispinna (P) ja selle raskuspunkti raadiuse (ρ) kasvatisega:

$$\rho_1 \cdot P_1 + \rho_2 \cdot P_2 + \dots + \rho_n \cdot P_n = \rho \cdot P.$$

Tähendab — niisuguse pöörkeha maht:

$$M = \underline{\underline{2 \pi \rho \cdot P.}}$$

Meie võime igasuguse tasapinna lõpmata väikesteks täisnurkseteks nelinurkadeks jaotada. Mida väiksemad need nelinurgad võtame, seda ligemale nihkub nende pindade summa antud pinnale; sellepärast maksab igasuguse pöörkeha kohta

Guldini teine lause:

Pöörkeha maht võrdub kujutavpinna enese ja selle pinna raskuspunkti tee pikkuse kasvatisega

Märkus: Kujutavpinnaks on tasapinna osa; pöördetelg asub ühel pool seda tasapinna osa kas selle pinna pikendusel ehk pinnal enesel.

§ 34.

Guldini lausete praktiline väärtus.

Saadud Guldini lauseid võime tarvitada kas pöörkehade pindade ja mahtude otsimisel, kui meil on teada vastavate raskuspunktide raadiused, ehk raskuspunktide raadiuste otsimisel, kui meil on teada vastavad pinnad ehk mahud. Raskuspunkti raadius määrab raskuspunkti enese asukoha kindlaks, järjekult — on raskuspunkti raadius teada, siis on teada ka raskuspunkt.

I. näitus: Leida kerapind Guldini lause järele.

Kerapind sünnib poolringjoone pöördumisel diameetri ümber. Sellekohastest tabelitest leiame, et poolringjoone raskuspunkti raadius $\rho = \frac{2R}{\pi}$. Poolringjoone pikkus $= \pi R$, sellepärast kerapind:

$$P_{ker} = 2 \pi \rho \cdot \pi R = 2 \pi \cdot \frac{2R}{\pi} \cdot \pi R = \underline{\underline{4 \pi R^2.}}$$

II. näitus: Leida poolringjoone raskuspunkt.

Meie teame, et poolringjoone raskuspunkt peab asuma raadiusel, mis poolringjoone diameetriga perpendikulaarne.

Pöördub see poolringjoon diameetri ümber, siis sünnitab ta kerapinna. On nüüd ρ selle raskuspunkti kaugus diameetrist, siis kerapind Guldini esimese lause järele:

$$P_{\text{ker}} = \pi R \cdot 2 \pi \rho.$$

On meil aga teada, et kerapind $= 4 \pi R^2$, siis

$$\pi R \cdot 2 \pi \rho = 4 \pi R^2,$$

$$\text{siit } \rho = \frac{4 \pi R^2}{\pi R \cdot 2 \pi} = \frac{2 R}{\pi}.$$

§ 35.

Segaharjutused.

114. Keras on korrapärane nelitahkne püstpüramiid, mille kõrgus võrdub aluse diagonaaliga $= 8$ sm.; leida kera pind.
115. Keras on korrapärane nelitahkne püstpüramiid, mille kõrgus on aluse diagonaalist kaks korda pikem; leida püramiidi maht, kui kera raadius $r = 51$ sm.
116. Nelitahus (tetraeedris) on kera, mille raadius $r = 9$ sm.; leida nelitahu maht.
117. Korrapärasel nelitahkses kakšik-püstpüramiidis, (kaks võrdset ühise alusega püramiidi), mille aluse serv $a = 34$ sm. ja apoteem $h_1 = 36\frac{1}{8}$ sm., on kera, mille maht tarvis leida.
118. Korrapärasel nelitahkses tõmppüramiidis on kera, mille raadius võrdub tõmppüramiidi ülemise aluse servaga $= 6$ sm.; leida tõmppüramiidi üldpind ja selle osa maht, mis täiendab tõmppüramiidi püramiidiks.
119. Keras, mille raadius $r = 27$ sm., on korrapärane nelitahkne tõmppüramiid, mille kõrgus $h = 30$ sm. ja aluste servad $a + b = 60$ sm. Leida tõmppüramiidi maht.
120. Püstprisma aluseks on romb, mille külge $a = 20$ sm. ja nurk $\alpha = 60^\circ$; prismas on püstringsilinder, mille

- kõrgus võrdub prisma kõrgusega $= 34$ sm. Leida silindri maht.
121. Püstringsilindris, mille raadius $r = 8$ sm., on korrapärane kolmtahkne püstprisma, mille kõrgus võrdub aluse servaga. Leida prisma maht.
 122. Püstringkoonuses, mille külgjoon $k = 65$ sm. ja kõrgus $h = 56$ sm., on püstringsilinder, mille aluse raadius suhtub kõrgusega nii kui 33:112. Leida silindri maht.
 123. Püstringkoonuses on nelitahk (tetraeeder), mille serv $a = 9$ sm.; leida koonuse maht.
 124. Püstringkoonuses, mille kõrgus $h = 8$ sm., on kera, mille raadius on koonuse aluse raadiusest kaks korda väiksem. Leida kera maht.
 125. Tõmpkoonuses on kera, mille raadius $r = 6$ sm.; tõmpkoonuse ühe aluse pind on teise aluse pinnast neli korda väiksem. Leida tõmpkoonuse maht.
 126. Puust õõnsilindris, mille kõrgus $h = 20$ sm. ja erikaal $e = 0,7$, on õõnsuse suurune tinast silinder, mille raadius r_1 on puust silindri raadiusest r 10 sm. võrra lühem ($r - r_1 = 10$ sm.) ja erikaal $e_1 = 11,3$. Leida tinast silindri raadius, kui mõlemad silindrid kaaluvad kokku 26,533 kg.
 127. Puust püstringsilindrist, mille kõrgus $h = 40$ sm., raadius $r = 15$ sm. ja erikaal $e = 0,6$, on välja lõigatud kiil, mille üks serv sünnitas silindri telje ja mille kallakusnurk $\alpha = 20^\circ$. Väljalõigatud kiilu asemele on paigutatud samane terasest kiil, mille erikaal $e_1 = 7,8$. Silinder on lastud püsti $+4^\circ\text{C}$ vette. Kui sügavale vajub silinder, kui on kõrvaldatud küljeli kukkumine?
 128. Puust püstkoonusest, mille kõrgus $h = 15$ sm., külgjoon $k = 17$ sm. ja erikaal $e = 0,8$, on välja lõigatud teine samane koonus nii, et õõnsuse tipp asub koonuse teljel, õõnsuse külgjoon on koonuse külgjoonega paralleelne ja õõnsuse raadius suhtub koonuse raadiusega nii kui 3:4. Leida selle keha

erikaal siis, kui õõnsus on täidetud elavhõbedaga, mille erikaal $e_1 = 18,6$.

129. Puust püstkoonuse kõrgus $h = 15$ sm. Lastakse see koonus, ülimtipp ees, vette, mille temperatuur $+4^\circ\text{C}$, siis jääb ülimtipp 12 sm. sügavusele vee alla. Kui suur on puu erikaal?
130. Kaks kera riivavad teineteist väljaspoolt; nende kerade mahtude summa on $3956,4$ sm.³ ja keskpunktidejoon $d = 15$ sm. Leida kummagi kera raadius.
131. Kaks kera riivavad teineteist seespoolt; nende kerade mahtude vahe on $31538,16$ sm.³ ja keskpunktidejoon $d = 9$ sm. Leida kummagi kera raadius.
132. Punktist A langeb valgus kerale, mille raadius $r = 12$ sm.; punkti A kaugus kerast on 28 sm. Leida kera valgustatud pind.
133. Kui kaugel on punkt A kerast, mille raadius $r = 12$ sm., kui ta valgustab kera pinnast $602,88$ sm.²?
134. Puust kera, mille raadius $r = 21$ sm., vajub $+4^\circ\text{C}$ vees 27 sm. sügavusele. Leida puu erikaal.
135. Klaasist valmistatud õõnkera raskus on $671,175$ gr., seinapaksus — 1,5 sm. Leida kera raadius, kui klaasi erikaal $e = 2,5$.
136. Korgist valmistatud õõnkeras on õõnsuse suurusena rauast kera, mille raskus on $3799,4$ gr. ja erikaal $e = 7,26$. Sarnane kokkupandud kera ujub $+4^\circ\text{C}$ vees nii, et pool kerapinda vee all asub. Leida korgist kesta paksus, kui korgi erikaal $e_1 = 0,24$.
137. Laseme kera segmendi, mille kõrgus $h = 27$ sm., kerapind ees $+4^\circ\text{C}$ vette, siis vajub ta nii sügavale, et lagipunkt asub 21 sm. sügavusel veepinna all; vastupidi vette lastult jääks sama punkt 12 sm. veepinnast kõrgemale. Leida segmendi maht ja aine erikaal.
138. Leida poolringi pinna raskuspunkt.
139. Leida ringjoone kaare raskuspunkt.

Tähtsamate ainete erikaalude tabel.

I. Kõvad kehad.

Alumiinium	2,7.
Hõbe	10,5.
Jää	0,9.
Klaas	2,5.
Kuld	19,2.
Naatrium	1,0.
Plaatina	21,4.
Raud	7,8.
Teras (2 ^o /oC)	7,8.
Malm (4 ^o /oC)	7,4.
Tsink	7,1.
Tammepuu	0,7.
Teemant	3,5.
Tina	11,3.
Vask	8,7.
Väävel	2,0.

II. Vedelikud.

Alkohol	0,79.
Eeter	0,72.
Elavhõbe	13,55.
Väävelsüsinik	1,27.
Väävlihape	1,83.
Vesi	1,00.

III. Kaasid (0^o juures, vee erikaal = 100).

Ammoniak	0,763.
Argoon	1,782.
Hapnik	1,429.
Kloor	3,220.
Lämmastik	1,251.
Süsihape	1,977.
Vee aur	0,804.
Vesinik	0,0899.
Õhk (23 ^o hapnikku ja 77 ^o lämmastikku)	1,293.

Vastused.

§ 8. 14.	155,88 sm. ² .
15.	400 sm. ² .
16.	348,27 m. ³ .
17	42 ^o .
§ 21. 25. 1)	17,32 sm.;
	141,42 sm. ² .
2)	20,784 sm.;
	203,6448 sm. ² ;
3)	28,578 sm.;
	385,0156 sm. ² .
26. 1)	384 sm. ² ; 512 sm. ²
2)	1395,375 sm. ² ;
	3546,5781 sm. ³
3)	54 dm. ² ; 27 dm. ³

27. 1)	343 sm. ³ .
2)	1728 sm. ³ .
3)	614,125 sm. ³ .
28. 1)	384 sm. ² .
2)	150 sm. ² .
3)	181,5 sm. ² .
29.	970,3125 kg.
30.	12 sm. ∞; 864 sm. ³ ∞; 19,5 kg. ∞.
31. 1)	340 sm. ² ; 400 sm. ³
2)	563,85 sm. ² ;
	793,8 sm. ³
32.	774 sm. ² .
33.	552 sm. ² ; 864 sm. ³

34. 16,8 dm.³
 35. 9302,4 kg.
 36. 4 sm.; 8 sm.;
 16 sm.
 37. 312,289 dm.²;
 249,6678 dm.³
 38. 1) 10 sm.; 12 sm.
 2) 5 sm.; 8 sm.
 39. 9352,8 sm.³
 40. 5,923 kg (erikaal =
 = 7,6).
 41. 5 sm.; 7 sm.; 8,6 sm.
 42. 1105,243 sm.²;
 1847,68 sm.³.
 43. 2736 m.³
 44. 67,5085 m.²;
 33,1085 m.³
 § 23. 45. 1) 2512 sm.²;
 2913,92 sm.²;
 10048 sm.³.
 2) 904,32 sm.²;
 1130,4 sm.²;
 2712,72 sm.³.
 46. 1) 785 sm.³
 2) 4019,2 sm.³
 3) 1177,5 sm.³ ehk
 3532,5 sm.³
 47. 6280 sm.³
 48. 1) 2551,25 sm.²
 2) 2788,32 sm.²
 3) 1406,72 sm.²
 49. 306,25 dm.²;
 174,5625 dm.³
 50. 1) 2144,34 sm.²
 2) 2969,1 sm.²
 3) 3108,872 sm.²
 4) 3213,36 sm.²
 5) 3277,092 sm.²
 51. 3518,87 sm.²;
- 2543,4 sm.³;
 4521,6 sm.³
 52. 653,12 m.³
 53. 57148 kivi.
 54. 375,1786 dm.²;
 451,577 dm.³
 55. 105,975 kg.
 56. 2237,8906 sm.²;
 5696,3117 sm.³
 57. 3,6 dm.³
 58. 80,384 dm.³
 § 25. 59. 1) 460,4265 sm.²;
 557,85 sm.²;
 649,5 sm.³
 2) 640,8 sm.²;
 *865,8 sm.²;
 1500 sm.³
 3) 1073,1735 sm.²;
 1657,7235 sm.²;
 3897 sm.³
 60. 1) 2559,534 sm.³
 2) 5775,336 sm.³
 3) 13,891 dm.³
 61. 1) 183,5 sm.³
 2) 308,4 sm.³
 3) 399,674 sm.³
 62. 1) 248,9777 sm.²
 2) 160,7728 sm.²
 3) 151,78 sm.²
 63. 1) 10738,9144 sm.³
 2) 1732 sm.³
 3) 942,785 sm.³
 64. 371,47 m.²
 65. 151,769 tonni.
 66. 55,04 m.²; 25,5 m.³
 67. 54,88 dm.²;
 28,26 dm.³
 68. 932,432 sm.²
 69. 79° 13'.

- § 27. 70. 2,94 m.³
 71. 4223,7 gr.
 72. 2435,625 m.³
 73. 3,4476 m.
 74. 7,5 koormat.
- § 29. 75.1) 7121,52 sm.²:
 36926,4 sm.⁵
 2) 282,6 sm.²; 314 sm.³
 3) 1846,32 sm.²;
 5275,2 sm.³
 4) 18237,12 sm.²;
 132,634 dm.³
- 76.1) 1004,8 sm.³
 2) 242,1 sm.³
 3) 8792 sm.³
 4) 352,6848 dm.³
 5) 318,396 dm.³
77. 942 sm.²
 78. 6192,1847 sm.³
 79. 12,8 sm. ehk 2,2 sm.
 80. 10851,84 sm.³
 81. 221,684 sm.³
 82. 6 koormat.
 83. 226,603 dm.³
 84.1) 1588,84 sm.²;
 4232,72 sm.³
 2) 2826 sm.²;
 9482,8 sm.³
- 85.1) 5966 sm.³
 2) 1306,24 sm.³
86. 396,15 dm.³
 87. 515,916 dm.³
 88. 149,096 m.³
 89. 530,503 kg.
- § 31. 90. 2826 sm.²;
 14,13 dm.³
91. 904,32 sm.³
 92. 452,16 sm.²
93. 508,68 sm.²;
 226,08 sm.²
94. 904,32 dm.³
 95. 93978107 k.geogr.p.
 96. 20,1437 gr.
 97. 32,17 kg.
 98. 1507,2 dm.²
 99. 8 sm.
 100. 33,49 dm.³
 101. 3694147 r.geogr.p.
 102. 20,5691 m.³;
 960,84 dm.²
103. 13,8788 dm.²;
 120,995 dm.³
104. 5731,55 sm.³
 105. 6698,(6) sm.³
 106. 26,795 dm.³
 107. 28,322 kg.
 108. 30,203 dm.³
 109. 107,3315 dm.³
 110. 1570 sm.²;
 2093,3 sm.³
111. 2,721 kg.
 112. 482,415 gr.
 113. 3319,896 gr.
- § 35. 114. 314 sm.²
115. 36,864 dm.³
 116. 10,1 dm.³
 117. 14,13 dm.³
 118. 15,12 dm.²; 48 sm.³
 119. 27,36 dm.³
 120. 8,007 dm.³
 121. 1152 sm.³
 122. 14,184 dm.³
 123. 208 sm.³ ∞.
 124. 113,04 sm.³
 125. 1582,56 sm.³
 126. 5 sm.

127. Silinder vajub vette omas terves pikkuses.

128. 6,2.

129. 0,512.

130. $r_1 = 9$ sm. ehk 6 sm.; $r_2 = 6$ sm. ehk 9 sm.

131. $r_1 = 21$ sm;
 $r_2 = 12$ sm.

132. 633,024 sm.²

133. 24 sm.

134. 0,709.

135. 4,5 sm.

136. 10 sm.

137. 25465,7925 sm.³;
0,7137.

138. $\varphi = \frac{4R}{3\pi}$.

139. $\varphi = \frac{hR}{b}$.

Märkus: b on kaare pikkus; h — kaare projektsioon pöördeteljel; ühtlasi asub raskuspunkt sellel raadiusel, mis kaart poolitab.

Sisukord.

Lhk.

Eessõna	5.
Stereomeetria	7.

Esimene peatükk.

Sirgjoon ja tasapind.

§ 1. Üldmõisted	8.
§ 2. Lõikuvatest tasapinda- dest sünnitatud sirgjooned	10.
§ 3. Perpendikulaarjooned ja tasapind	13.
§ 4. Kaldjooned ja tasapind .	19.
§ 5. Paralleeljooned ja tasa- pind	22.

Teine peatükk.

Tasapind ja tasapind.

§ 6. Paralleeltasapinnad . . .	24.
§ 7. Lõikuvad tasapinnad . .	27.
§ 8. Kujundi projektsioon . .	31.
§ 9. Üldharjutused	35.

Kolmas peatükk.

Kehad ja hulktahksed nurgad.

§ 10. Prisma	37.
§ 11. Silinder	39.
§ 12. Püramiid	41.
§ 13. Hulktahksed nurgad . .	44.
§ 14. Koonus	46.

Lhk.

§ 15. Prismatoidid	48.
§ 16. Kera	49.
§ 17. Korrapärased hulktahud .	53.

Neljäs peatükk.

Kehade mõõtmine.

§ 18. Üldmõisted	55.
§ 19. Kehade kongruentsus, tao- lus ja võrdmahtsus . . .	57.
§ 20. Prisma	58.
§ 21. Harjutused	65.
§ 22. Silinder	66.
§ 23. Harjutused	71.
§ 24. Püramiid	73.
§ 25. Harjutused	77.
§ 26. Prismatoidid	78.
§ 27. Harjutused	82.
§ 28. Koonus	82.
§ 29. Harjutused	85.
§ 30. Kera	87.
§ 31. Harjutused	93.
§ 32. Kehade mahtude suhted .	95.
§ 33. Guldini laused	95.
§ 34. Guldini lausete praktiline väärtus	99.
§ 35. Segaharjutused	100.
Tähtsamate ainete erikaa- lude tabel	103.
Vastused	103.
Sisukord	107.

Õiendused ja trükivead.

Lhk. 5,	ülevaht 20	rida :	teisse	asemel	peab	olema	teise.
" 6,	" 1	"	vaaatas	"	"	"	vaatas.
" 10,	" 8	"	pnnkti	"	"	"	punkti.
" 10,	" 18	"	"	"	"	"	"
" 10, alt	6	"	teisse	"	"	"	teise.
" 13, ülevaht	6	"	esimine	"	"	"	esimene.
" 13, alt	8	"	esimisega	"	"	"	esimesega.
" 13, "	3	"	aluspunktists	"	"	"	aluspunktist.
" 13, "	1	"	perpendikuulaarne	"	"	"	perpendikulaarne.
" 14, "	11	"	joolõigud	"	"	"	joonlõigud.
" 16, "	1	"	perpentikulaarjoon	"	"	"	perpendikulaarjoon.
" 28, ülevaht	14	"	kallakusnurke	"	"	"	kallakusnurki.
" 28, "	14	"	nurke	"	"	"	nurki.
" 29, alt	8	"	DE-ega	"	"	"	DE-ga.
" 40, "	1	"	pöördib	"	"	"	pöördub
" 47, ülevaht	17	"	"	"	"	"	"
" 85, "	3	"	$\pi r(R+r)$	"	"	"	$\pi k(R+r)$.
" 88, "	7	"	4kh	"	"	"	4rh.
" 96, "	3	"	$P_a . h : P_a . h_1$	"	"	"	$P_a . h : P_{a_1} : h_1$

Märkus: Raamatus on tarvitatud sõna „konstrueerima“ kahel kujul: „konstrueerima“ ja „konstruima“. Kumb kuju püsima jääb, näitab tulevik.