

TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Füüsika instituut

Carel Kuusk

SKAALAINVARIANTNE PSEUDO-GOLDSTONE'I BOSONI TUMEAIN

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Füüsika, keemia ja materjaliteaduse õppekava, füüsika eriala

Juhendajad:
Kristjan Kannike
Martti Raidal

Tartu 2020

Skaalainvariantne pseudo-Goldstone'i bosoni tumeaine

Töös uurime klassikaliselt skaalainvariantset pseudo-Goldstone'i tumeaine mudelit. Mudelik on Standardmudel, millele on lisatud üks uus $U(1)_X$ sümmeetria ja kaks selle sümmeetria all laetud skalaarset osakest. Klassikaline skaalainvariantsus võimaldab vältida Standardmudelis esinevad hierarhiaprobleemi, skaalainvariantsus rikutakse kvantparandite poolt. Tumeaine avaldub ühe skalaarse osakese imaginaarse komponendina, mis pärast skaalainvariantsuse rikkumist on stabiliseeritud \mathbb{Z}_3 sümmeetria poolt. Standardmudeli Higgsi bosoni identifitseerime skaalainvariantsuse pseudo-Goldstone'i bosonina. Töö peamine eesmärk on uurida lubatavaid parameetrite piirkondi. Leiame, et kahe uue bosoni massid ei saa olla korruga suuremad, kui 400 GeV, vastasel juhul ei ole mudel perturbatiivne. Lisaks uurime töös lähemalt parameetrite ruumi piirkonda, kus kõik segunemisnurgad on esimeses veerandis. Selles piirkonnas on potentsiaal alt tõkestatud sõltumata segunemisnurkade valikust.

Märksõnad: tumeaine, skaalainvariantsus, Gildeneri-Weinbergi lähenemine Coleman-Weinbergi mehhanismile.

CERCS: P210 – Elementaarosakeste füüsika, kvantväljade teooria.

Scale invariant pseudo-Goldstone dark matter

In this work we examine a classically scale invariant model of pseudo-Goldstone dark matter. The model is chosen to be the Standard Model with an extended Higgs sector. We add a new $U(1)_X$ symmetry and two new scalar singlets charged under the new symmetry. Classical scale invariance allows us to avoid the hierarchy problem of the Standard Model, tree-level scale invariance is broken by quantum corrections. The dark matter is identified as the imaginary component of a new scalar particle, after the breaking of scale invariance, it will be stabilised by a remnant \mathbb{Z}_3 symmetry. The Standard Model Higgs boson is identified with the pseudo-Goldstone boson of scale invariance. The main goal of the thesis is to study the allowed region in the parameter space. The masses of two new scalar bosons are limited by perturbativity to not be simultaneously greater than 400 GeV. We study a subspace of the full parameter space where all mixing angles are in the first quadrant. In this region the potential is bounded irrespective of the choice of mixing angles.

Keywords: dark matter, scale invariance, Gildener-Weinberg approach to Coleman-Weinberg mechanism.

CERCS: P210 – Elementary particle physics, quantum field theory.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Teoreetiline taust	6
1.1 Standardmudel	6
1.1.1 Ülesehitus	6
1.1.2 Probleemid	8
1.2 Skaalainvariantsus	9
1.2.1 Klassikaline skaalainvariantsus	9
1.2.2 Coleman-Weinbergi mehhanism	10
1.3 Fenomenoloogia	14
1.3.1 Kosmoloogia	14
1.3.2 Tumeaine	14
2 Mudelid	16
2.1 Täispotentsiaal	16
2.2 Biruutpotentsiaal	18
2.3 Gildeneri-Weinbergi lähenemine	19
3 Fenomenoloogia	21
3.1 Teoreetilised piirangud mudelile	21
3.2 Massimaatriksi uurimine	22
3.2.1 Eksperimentaalsed piirangud	22
3.2.2 Seosekordajate analüüs	23
Kokkuvõte	29
Kirjandus	30
Lihtlitsents	32

Sissejuhatus

Tänapäeva osakestefüüsika põhineb osakestefüüsika Standardmudelile, millele panid aluse Glashow, Weinberg ja Salam 1960. aastatel [1, 2, 3]. Nemad löid elektronõrga kalibratsiooniteooria sümmeetriarühmaga $SU(2)_L \times U(1)_Y$, millele liitsid Higgsi osakese. Hiljem liideti sellele tugeva vastastikmõju kirjeldamiseks loodud $SU(3)_C$ sümmeetriarühmaga kalibratsiooniteooria.

Standardmudel on ainult üks massidimensiooniga parameeter – Higgsi bosoni massiliige. Kuid juba 1970. aastatel juhiti tähelepanu seotud probleemikogumile, mida tuntakse hierarhia-, peenhäälestus- ja naturaalsuse probleemidena. Nende probleemide juur on Higgsi massiliikmes, mis on võrdeline Higgsi osakese massiga. Higgsi osakese mass peaks saama kvantparandeid, mille suurusjärg kasvab koos energiaskaalaga, milleni me nõuame Standardmudeli kehtivust. Kui eeldada, et Standardmudel on puudu ainult gravitatsioon, peaks Standardmudel kehtima kuni Plancki energiaskaalani suurusjärgus 10^{19} GeV. Higgsi mass on aga suurusjärgus 10^2 GeV, mis tähendab, et Higgsi massiliiget peavad tasakaalustama väga täpselt määratud parandid [4, 5, 6].

Üks võimalus hierarhiate (massiskaalade suurte erinevuse) probleemi lahendada on elimineerida teooriast fikseeritud massiskaala ehk praegusel juhul Higgsi massiliige. Saadud teooria on klassikaliselt skaalainvariantne. Kuid Coleman ja E. Weinberg näitasid aastal 1973, kuidas on võimalik skaalainvariantsesse teooriasse dünaamiliselt genereerida massiskaala [7]. Kuna massiskaala on tekitatud kvantparandite kaudu, ei teki skaala stabiilsuse probleemi. Gildener ja S. Weinberg üldistasid Coleman ja E. Weinbergi meetodit juhule, kus skalaarvälju on mitu [8]. Sellisel juhul on teooriat kirjeldava lagranžiaani tiheduse potentsiaalil tasane suund, millele kvantparandused tekitavad kõveruse ja sellega ka massiliikmed.

Teine Standardmudeli puudus on see, et ta ei kirjelda tumeainet. Tumeaine astronoomilistel vaatlustel tuvastatakse erinevus gravitatsioonilise efekti tugevuse ning elektromagnetiliselt helendava aine hulga vahel. Sellest erinevusest saab järeldada puuduoleva massi olemasolu ning hinnata selle kogust. Selliselt on tehtud mõõtmisi näiteks gravitatsiooniläätsete, galaktikate ja galaktikaparvede pöörlemiskõverate jaoks [9, 10]. Kosmilise mikrolaine taustkiirguse mõõtmistest on saadud tumeaine osakaaluks kogu Universumi energiatihedusest umbes 27% [11].

Tumeaine üks olulisemaid omadusi on tema stabiilsus, kuna gravitatsiooniline interaktsioon on näha ka kaugetes galaktikates varajases Universumis. Rasked osakesed lagunevad aga tavaliselt kiiresti. Üks võimalik seletus tumeaine stabiilsusele on diskreetse sümmeetria olemasolu. Kui

tumeaine jaoks kehtib diskreetne sümmeetria, siis tumeaine ei saa sümmeetriat rikkumata laguneda teisteks osakesteks. Kui tumeaine on käsitletav mingi sümmeetria pseudo-Goldstone'i bosonina, on tema interaktsioonide tugevus Standardmudelis olevate osakestega võrdeline interaktsioonienergiaga. Kuna külm tumeaine on mitterelatiivne, on sellise mehhanismiga võimalik alla suruda tumeaine otsese detekteerimise ristlõiget [12].

Käesoleva töö peamiseks eesmärgiks on uurida skaalainvariantset tumeaine mudelit. Selles mudelis on lisatud juurde üks $U(1)_X$ kalibratsioonisümmeetria ning kaks uut skalaarset osakest. Higgsi massiliikme genereerimine toimub dünaamiliselt kvantparandite abil. Käesolevas töös identifitseeritakse Standardmudeli Higgsi osake puutasemel massita osakesega. Seega saab Standardmudeli Higgsi boson omale massi ainult tänu kvantparanditele. Tumeaine selles mudelis avaldub pärast skaalainvariantsuse rikkumist tekkiva \mathbb{Z}_3 sümmeetria all teiseneva osakesena.

Töö peamine eesmärk on uurida lubatavaid parameetrite piirkondi. Täpsemalt uuritakse lähemalt, mis piirides on lubatud skalaarsete osakeste segunemine ja milliseid piiranguid on võimalik seada uute osakeste massidele.

Töö struktuur on järgmine. Esimeses peatükis on antud kirjanduse ülevaade, kus tutvustatakse lähemalt Standardmudelit ning hierarhiaprobleemi ja tumeainet. Teises peatükis tuuakse ülevaade ühest võimalikust mudelist, mis on võimeline need probleemid lahendada. Teises peatükis on kirja pandud ka massimaatriksid, millele saadavaid piiranguid uuritakse lähemalt mudelis olevate parameetrite piiratud vahemikus kolmandas peatükis.

1. Teoreetiline taust

1.1 Standardmudel

1.1.1 Ülesehitus

Ülevaade osakestefüüsika Standardmudelist põhineb Alexandros Karami doktoritööl [13]. Osakestefüüsika Standardmudel kirjeldab kõiki eksperimentaalselt leitud osakesi ja nendevahelisi interaktsioone, kuid jätab kirjeldamata gravitatsiooni. Standardmudel on renormeeritav kalibratsiooniteooria sümmeetriarühmaga $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Standardmudeli põhimõtted töötasid välja Glashow [1], Weinberg [2] ja Salam [3] elektronõrga teooria rühma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ jaoks.

Standardmudel kirjeldab fermione ja nendevahelisi interaktsioone. Standardmudel kirjeldab kolme tüüpi interaktsioone – tugevat, nõrka ja elektromagneetilist. Igat interaktsiooni vahendavad vastava interaktsiooni vektorbosonid, tugevat interaktsiooni vahendavad gluonid, nõrka W - ja Z -bosonid ning elektromagneetilist footonid. Lisaks on mudelis Higgsi boson, mis elektronõrga sümmeetria spontaansel rikkumisel omandab vaakumi keskväärtuse, mille tulemusel omandavad massi nii massiivsed vektorbosonid kui fermionid.

Standardmudeli lagranžiaani tiheduse saab jagada neljaks osaks

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y. \quad (1.1)$$

\mathcal{L}_G sisaldab Standardmudeli kalibratsiooniväljade G_μ^A , W_μ^a ja B_μ kineetilisi ja eneseinteraktsiooni liikmeid ja \mathcal{L}_F sisaldab fermionite kineetilisi liikmeid. Käesolevas töös kahte Standardmudeli lagranžiaani tiheduse osa lähemalt ei vaata. \mathcal{L}_Y tähistab Yukawa sektorit ja sisaldab Standardmudeli Higgsi osakese interaktsiooni fermionitega. Ükski konstant nendes Standardmudeli lagranžiaani tiheduse liikmetes massidimensiooni ei oma.

Massidimensioon näitab lagranžiaani tiheduse dimensiooni loomulikes ühikutes. Loomulikes ühikutes võetakse $\hbar = c = k_B = 1$, kus \hbar on taandatud Plancki konstant, c on valguse kiirus ja k_B on Boltzmanni konstant. Nendes ühikutes on mass, energia, temperatuur ja pikkus samades ühikutes esitatavad, standardselt valitakse ühikuks eV või GeV. Seejuures mingi suuruse

massidimensioon näitab, mis astmesse valitud suuruse ühik on võetud. Lagranžiaani tiheduse massidimensioon peab olema võrdne aegruumi koordinaatide arvuga ehk võrdne arvuga 4. Fermionväljade massidimensioon on 3/2, bosonväljadel 1.

\mathcal{L}_H kirjeldab Higgsi sektorit ja sisaldab Standardmudeli Higgsi osakese kineetilist liiget ja eneseinteraktsioone.

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu H)^\dagger (D_\mu H) - V(H). \quad (1.2)$$

Siin D_μ on rühma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ kovariantne tuletis ja H on sama rühma kompleksarvuline skalaarne dublett. Higgsi potentsiaal on kujuga

$$V(H) = -\mu_h^2 H^\dagger H + \lambda_h (H^\dagger H)^2, \quad (1.3)$$

kus μ_h^2 on Higgsi massiliige massidimensiooniga 2 ja λ_h on massidimensioonita Higgsi eneseinteraktsiooni seosekonstant.

Standardmudeli üks olulisemaid omadusi on sümmeetriarühma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ spontaanne rikkumine klassikalise elektromagnetismi sümmeetriarühmaks $U(1)_{EM}$. Sümmeetria spontaanse rikkumise kirjeldamisel on järgitud õpikut [14].

Sümmeetria rikkumine toimub, kui Higgsi potentsiaalis $V(H)$ kehtivad võrratused $\mu_h^2 > 0$ ja $\lambda_h > 0$, sellisel juhul omandab potentsiaal mittetriviaalse reaalarvulise miinimumi, kui Higgsi väli H rahuldab tingimust

$$H(x) = H_0 = \begin{pmatrix} \phi_a^0 \\ \phi_b^0 \end{pmatrix}, \text{ ja } H_0^\dagger H_0 = \frac{\mu_h^2}{2\lambda_h} =: \frac{v_h^2}{2}. \quad (1.4)$$

Suurust $v_h = \sqrt{\mu_h^2/\lambda_h}$ nimetatakse vaakumi keskvärtuseks (VEV, *vacuum expectation value*), mille eksperimentaalne väärtus on $v_h = 246,42$ GeV. Potentsiaal (1.3) jääb invariantseks, kui vaakumseisundile H_0 rakendada $U(1)$ kalibratsiooniteisendus, mis identifitseeritakse elektromagnetismi sümmeetriarühmaga. Potentsiaali invariantse tõttu $U(1)$ teisendusel võib valida vaakumseisundiks

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_h \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Nüüd saab Higgsi välja lahti kirjutada vaakumi H_0 ümber. Selleks on üldjuhul vaja mõlema Higgsi välja komponendi jaoks ühte kompleksarvu. Et aga teooria on $SU(2)_L \times U(1)_Y$ invariantne, võime fikseerida nn unitaarse kalibratsiooni, kus Higgsi välja saab kirjutada kui

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_h + h(x) \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Kalibratsiooni fikseerimise käigus omandavad kalibratsiooniväljad W_μ^\pm ja Z_μ (mis on leitavad väljade W_μ^a ja B_μ kaudu) massid, st kalibratsiooni fikseerimise käigus ühtegi vabadusastet kaduma ei lähe. Samuti saavad pärast sümmeetria spontaanset rikkumist massi fermionid (va neutriinod, millel pole paremakäelisi komponente) tänu lagranžiaanitiheduse (1.1) liikmele \mathcal{L}_Y .

Elektrilselt neutraalset välja h käsitletakse Higgsi osakesena. Pärast sümmeetria rikkumist on potentsiaali (1.3) Higgsi välja sisaldavad liikmed kujul

$$V \supset \mu_h^2 h^2 + \lambda_h v_h h^3 + \frac{\lambda_h}{4} h^4. \quad (1.7)$$

Seejuures võib tähele panna, et μ_h on Standardmudeli ainuke massidimensiooniga parameeter.

1.1.2 Probleemid

Standardmudel on põhjalikult läbitestitud teooria, mis suudab ära seletada suurema osa osakestefüüsika nähtustest. Siiski on veel ammendava seletuseta nähtuseid, millest kaks käesoleva töö peamist motivaatorit on lühidalt lahti seletatud.

Hierarhiaprobleem

Standardmudel on renormeeritav kvantväljateooria. Muuhulgas see tähendab, et mudelis olevad parameetrid saavad parandusi kvantfluktuatsioonidest, mis on lubatud energia-aja määramatuse printsiibi tõttu. Eksperimendi käigus mingit parameetrit mõõtes saadakse parameetri väärtus koos kvantparanditega. Protseduuri, millega viiakse omavahel vastavusse füüsikalised eksperimendis mõõdetud ja mudelis olevad parameetrid, nimetatakse renormeerimiseks. Täpsemalt on sellest kirjutatud igas kvantväljateooria õpikus, nt Mandli ja Shaw' õpik [14].

Standardmudeli ainuke massidimensiooniga parameeter on μ_h . Selle kaudu saab avaldada Higgsi bosoni füüsikalise massi $M_h = \sqrt{2}\mu_h$, mille eksperimentaalne väärtus on 125,09 GeV [15]. Higgsi massile kvantparandite arvutamisel on parandid lõpmatud. Üks standardne võimalus lõpmatustest lahti saada on regulariseerimine, mille käigus tuuakse sisse lõplik suur massiskaala Λ , mida võib lugeda Standardmudeli kehtivuspiirkonna ülemiseks energiapiiriks. Tuleb aga välja, et Higgsi massi esimest järku paranditel on ruutsõltuvus skaalast Λ [4].

Järelikult, kui nõuda, et Higgsi massi parandid on Higgsi massiga samas suurusjärgus, peaks Standardmudeli kehtivuspiirkond lõppema 1 TeV juures, suuremate energiaskaalade juures on vaja uut teooriat. Kui nõuda, et Standardmudel kehtiks Plancki energiani (suurusjärgus 10^{19} GeV, gravitatsiooni karakteristik energiaskaala), peavad teooria parameetrid olema peenhäälestatud 32. komakohani [16].

Teooria energiaskaala ja mudeli kehtivuspiirkonna ülemise piiri skaala vahelisest suurest erinevusest tingitud teoreetilisi probleeme tuntakse hierarhiaprobleemina. Sellega lähedalt seotud või ekvivalentsed mõisted on peenhäälestamise ja naturaalsuse probleemid.

Tumeaine

Astronoomiliste ja kosmoloogiliste vaatlustega on kinnitatud vajadus tumeaine järele. Tumeaine ei kiirga valgust ja tema olemasolu tuleneb tema gravitatsioonilisest mõjust tavalisele ainele. Tumeaine kohta on teada, et seda ei kirjelda ükski tuntud Standardmudeli osake, mistõttu on arvatavasti selle kirjeldamiseks vaja uut osakest või osakesi. Väljapakutud osakeste massiskaalad varieeruvad suurtes piirides, kuid üks huvipakkuv klass on nõrgalt interakteeruvad massiivsed osakesed (kuhu kuulub ka siin töös uuritud tumeaine), mille massid on kuni mõni suurusjärk üle 1 GeV [17].

Astronoomiliste vaatluste korral tuleneb tumeaine vajadus kõige selgemalt ebakõlast galaktikate ja galaktikaparvede nähtavast ainest leitud massijaotuse ning nähtava aine liikumiskiirusest arvatud massijaotuse vahel. Esimene vaatluslik pakkumine tumeaine olemasolu kohta pärineb galaktikate pöörlemiskiirusest galaktikaparvedes [18]. Hiljem on seda mõõtmist täpsustatud ning leitud tõendeid tumeaine kohta ka galaktikate pöörlemiskõvera analüüsimisel [9] ja gravitatsiooniläätsi kasutades [10].

Kosmoloogilistes vaatlustest on olulisimad kosmilise mikrolaine taustkiirguse mõõtmised. Plancki satelliidi mõõtmiste põhjal on külma (st mitterelativistlikut) tumeaine energiatiheduse osakaal Universumis umbes 27% [11].

1.2 Skaalainvariantsus

Skaalainvariantsust kui mehhanismi, millega selgitada hierarhiate teket, käsitles juba 1979. aastal S. Weinberg [6]. Higgsi massiliige on ainuke dimensiooniga parameeter Standardmudelist. Sellest lähtuvalt on üks võimalus hierarhiaprobleemi lahendamiseks ülendada klassikaline skaalainvariantsus üldiseks mudeliehituse printsiibiks ja genereerida teoorias esinevad massiskaalad dünaamiliselt [19].

1.2.1 Klassikaline skaalainvariantsus

See peatükk järgib Karami doktoritööd [13]. Skaalainvariantsuse all mõeldakse mõju $S[\phi(x)] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ invariantsust skaalateisendustel. Et täpsemalt näha sellest tulenevaid

järeldusi, võib vaadata ühe reaalse skalaariga ϕ teooriat. Sellisel juhul võib lagranžiaani tiheduse kirja panna kui

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \lambda\phi^4. \quad (1.8)$$

Skaalateisendusel saab kirjutada koordinaatide ja väljade teisenemiseeskirjad

$$x \rightarrow x' = \sigma x, \quad \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \sigma \exp(a)\phi(\sigma x) \quad (1.9)$$

Siin $\sigma = \exp(\epsilon) > 0$, kus ϵ on skaalateisenduse parameeter, ja a on välja skaleerimisdimensioon. Skaleerimisdimensioon vastab massidimensioonile, seega skalaarsetel väljadel $a = 1$, fermionitel $a = 3/2$. Nüüd saab leida mõju teisenduse skaalateisendusel:

$$\begin{aligned} S[\phi'(x)] &= S[\sigma\phi(\sigma x)] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_{x\mu}\sigma\phi(\sigma x))(\partial_x^\mu\sigma\phi(\sigma x)) + \frac{m^2}{2}\sigma^2\phi^2(\sigma x) - \lambda\sigma^4\phi^4(\sigma x) \right) \\ &= \int d^4(\sigma x) \left(\frac{1}{2}(\partial_{\sigma x\mu}\phi(\sigma x))(\partial_{\sigma x}^\mu\phi(\sigma x)) + \frac{m^2}{2}\sigma^{-2}\phi^2(\sigma x) - \lambda\phi^4(\sigma x) \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Siit on näha, et kui integreerimine toimub üle kogu aegruumi, siis $S[\phi'(x)] = S[\phi(x)]$ ainult juhul, kui $m^2 = 0$. Seega on teooria skaalainvariantne, kui selles puudub massiliige.

Kui kvantparandid rikuvad puutaseme skaalainvariantsust, siis öeldakse, et teooria on klassikaliselt skaalainvariantne.

1.2.2 Coleman-Weinbergi mehhanism

Coleman-Weinbergi (CW) mehhanism võimaldab dünaamiliselt genereerida klassikaliselt skaalainvariantsesse teoriasse massiskaala. Massiskaala tuleb teoriasse analüüsides esimest järku kvantparandite mõju skalaarsele potentsiaalile. Keskne nähtus on dimensionaalne transmutatsioon, mille käigus üks skalaarvälja massidimensioonita eneseinteraktsiooni seosekonstant on võimalik asendada massidimensiooniga skalaarvälja VEViga. Seejuures vabade parameetrite arv jääb muutumatuks [7].

Gildeneri-Weinbergi lähenemine

Gildeneri-Weinbergi (GW) lähenemine massiskaala dünaamilisele genereerimisele on CW mehhanismi üldistus mitme skalaarse väljaga juhule [8]. Selles peatükis on järgitud ülevaadet [20].

Vaatame klassikaliselt skaalainvariantset teooriat, kus on n reaalsel välja ϕ_i , ($i = 1, \dots, n$), mida

võime kirjutada ühe väljavektorina Φ . Puutaseme potentsiaali võib siis kirjutada

$$V(\Phi) = \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} \lambda_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l. \quad (1.11)$$

Nõudes mõju $S[\Phi]$ invariantsust infinitesimaalsetel skaalateisendustel, on võimalik näidata, et peab kehtima

$$\Phi \cdot \nabla V(\Phi) = 4V(\Phi), \quad (1.12)$$

kus täpp tähistab vektorite skalaarkorrutamist ja ∇ on gradiendi operaator. Võrrandit (1.12) võib rakendada kindlale suunale, selleks saab parametrizeerida väljavektori kui $\Phi = \varphi \mathbf{N}$, kus \mathbf{N} on mingi ühikvektor ja $\varphi \geq 0$ näitab kaugust väljaruumi alguspunktist. Võrrand (1.12) omandab seega kuju

$$\varphi \mathbf{N} \cdot \nabla V(\varphi \mathbf{N}) = \varphi \frac{dV(\varphi \mathbf{N})}{d\varphi} = 4V(\varphi \mathbf{N}). \quad (1.13)$$

Sellest võrrandist jäeldub, et kui potentsiaalil V on tasane suund sihis $\mathbf{N} = \mathbf{n}$ (ehk $V(\varphi \mathbf{n}) = 0$ iga φ korral), siis see on samaväärne sellega, et potentsiaali $V(\varphi \mathbf{n})$ tuletis φ järgi võrdub nulliga.

Oletame, et potentsiaalil $V(\varphi \mathbf{N})$ on fikseeritud renormeerimisskaalal μ_R tasane suund sihis \mathbf{n} . Et tasase suuna punktid oleks potentsiaali statsionaarsed punktid, peab kehtima

$$\left. \frac{\partial V(\mathbf{N})}{\partial N_i} \right|_{\mathbf{N}=\mathbf{n}} = \sum_{j,k,l} \lambda_{ijkl} n_j n_k n_l = 0. \quad (1.14)$$

Et tasane suund oleks lokaalne miinimum, peab hessiaan

$$(\mathbf{P})_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V(\mathbf{N})}{\partial N_i \partial N_j} \right|_{\mathbf{N}=\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \lambda_{ijkl} n_k n_l \quad (1.15)$$

olema positiivselt poolmääratud.

Kuna tasasel suunal on potentsiaali väärtus null, siis omavad esimest järku kvantparandid tasasel suunal märgatavat mõju. Seejuures tekib potentsiaalile tasasel suunal kvantparandeid arvesse võttes kõverus ja miinimum mingil kindlal kaugusel $\varphi = v_\varphi$ väljaruumi alguspunktist. Samuti võib olla miinimum natuke nihutatud tasasest suunast eemale vektori $\delta\Phi = v_\varphi \mathbf{n}$ võrra ($\delta\Phi \cdot \mathbf{n} = 0$).

Tähistame esimest järku parandit potentsiaalile kui $V_1(\Phi)$. Uues miinimumpunktis peab endiselt kehtima potentsiaali statsionaarsuse tingimus, seega võime kirjutada

$$\left. \frac{\partial (V(\Phi) + V_1(\Phi))}{\partial \Phi_i} \right|_{\Phi=v_\varphi(\mathbf{n}+\delta\mathbf{n})} = 0. \quad (1.16)$$

Selle saab lahti kirjutada ning teist järku väikeseid suuruseid ignoreerides saame

$$\left. \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi_i} \right|_{\Phi=v_\varphi \mathbf{n}} + \varphi \delta n_i \cdot \left. \frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \right|_{\Phi=v_\varphi \mathbf{n}} + \left. \frac{\partial V_1(\Phi)}{\partial \Phi_i} \right|_{\Phi=v_\varphi \mathbf{n}} = 0. \quad (1.17)$$

Siin esimene liige on võrdne nulliga, kuna puutaseme potentsiaalil on \mathbf{n} tasane suund (1.14) ja teise liikme saab ära kaotada, skalaarkorrutades kogu võrduse vektoriga \mathbf{n} . Tulemuseks on statsionaarsuse tingimus esimest järku parandeid sisaldava potentsiaali jaoks tasase suuna sihis

$$n_i \left. \frac{\partial V_1(\Phi)}{\partial \Phi_i} \right|_{\Phi=v_\varphi \mathbf{n}} = 0 \Leftrightarrow \left. \frac{\partial V_1(\varphi \mathbf{n})}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=v_\varphi} = 0. \quad (1.18)$$

Tasasel suunal võib parandipotentsiaali kirjutada kujul

$$V_1(\varphi \mathbf{n}) = A(\mathbf{n})\varphi^4 + B(\mathbf{n})\varphi^4 \ln \frac{\varphi^2}{\mu_R^2}, \quad (1.19)$$

kus

$$A(\mathbf{n}) = \frac{1}{64\pi^2 v_\varphi^4} \left\{ \text{Tr} \left[\mathcal{M}_S^4 \left(-\frac{3}{2} + \ln \frac{\mathcal{M}_S^2}{v_\varphi^2} \right) \right] + 3 \text{Tr} \left[\mathcal{M}_V^4 \left(-\frac{5}{6} + \ln \frac{\mathcal{M}_V^4}{v_\varphi^2} \right) \right] - 4 \text{Tr} \left[\mathcal{M}_F^4 \left(-\frac{3}{2} + \ln \frac{\mathcal{M}_F^2}{v_\varphi^2} \right) \right] \right\}, \quad (1.20)$$

$$B(\mathbf{n}) = \frac{1}{64\pi^2 v_\varphi^4} (\text{Tr} \mathcal{M}_S^4 + 3 \text{Tr} \mathcal{M}_V^4 - 4 \text{Tr} \mathcal{M}_F^4). \quad (1.21)$$

Siin $\mathcal{M}_{S,V,F}$ on vastavalt skalaar-, vektor- ja fermionosakeste puutaseme massimaatriksid.

Esimest järku parandpotentsiaalile kehtivast statsionaarsuse tingimusest (1.18) saab avaldada renormeerimisskaala $\mu_R = v_\varphi \exp \left(\frac{A(\mathbf{n})}{B(\mathbf{n})} - \frac{1}{2} \right)$, mida potentsiaali V_1 avaldisse (1.19) on tulemuseks

$$V_1(\varphi \mathbf{n}) = B(\mathbf{n})\varphi^4 \left(\ln \frac{\varphi^2}{v_\varphi^2} - \frac{1}{2} \right). \quad (1.22)$$

Puutasemel massimaatriksi potentsiaali esimest järku parandite genereeritud miinimumis saab leida hessiaanist: $(\mathcal{M}_S^2)_{ij} = v_\varphi^2 (\mathbf{P})_{ij}$. Potentsiaali parandid muudavad ka skalaaride massimaatriksit, esimest järku parandi üldavaldis on

$$(\mathcal{M}_S^2 + \delta \mathcal{M}_S^2)_{ij} = \left. \frac{\partial^2 (V(\Phi) + V_1(\Phi))}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \right|_{\Phi=v_\varphi(\mathbf{n}+\delta \mathbf{n})}. \quad (1.23)$$

Siit saab kuni esimest järku väikeste suurusteni avaldada

$$(\delta\mathcal{M}_S^2)_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V_1(\Phi)}{\partial\Phi_i\partial\Phi_j} \right|_{\Phi=v_\varphi\mathbf{n}} + v_\varphi\lambda_{ijkl}n_k\delta_l. \quad (1.24)$$

Tasases suunas oleva välja massi saab, ahendades selle tulemuse tasast suunda näitava vektoriga \mathbf{n} :

$$M_{\text{tasane}}^2 = n_i n_j (\delta\mathcal{M}_S^2)_{ij} = 8Bv_\varphi^2. \quad (1.25)$$

Kui teiste osakeste massid on märgatavalt suuremad, kui parandite suurusjärk, võib parandeid teistele massidele lugeda tühisteks.

Biruutpotentsiaalid

Biruutpotentsiaalide korral on oluliselt lihtsustatud tasase suuna leidmine. Potentsiaal $V(\Phi)$ on biruutpotentsiaal, kui teda saab esitada kujul

$$V(\Phi) = \sum_{i,j} \Phi_i^2 \lambda_{ij} \Phi_j^2 = (\Phi^{\circ 2})^T \Lambda \Phi^{\circ 2}. \quad (1.26)$$

Siin Λ on sümmeetriline seosekonstantide maatriks ja \circ tähistab Hadamardi korrutist. Kahe maatriksi A ja B korral $(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ (indeksite üle summeerimata) ja $(A^{\circ n})_{ij} = A_{ij}^n$. Potentsiaalil $V(\Phi)$ leidub selline tasane suund, kus ükski väljades Φ_i ei ole samaselt null, kui kehtib $\det(\Lambda) = 0$. Sellisel juhul kehtib tasase suuna tähistava vektori \mathbf{n} jaoks

$$\mathbf{n}^{\circ 2} = \frac{\text{adj}(\Lambda)\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \text{adj}(\Lambda)\mathbf{e}}, \quad (1.27)$$

kus $\text{adj}(\Lambda)$ on maatriksi Λ adjungeeritud maatriks (st $\Lambda \text{adj}(\Lambda) = \det(\Lambda)\mathbf{I}$) ja $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$ on ühtede vektor. Seejuures kehtib kvantparandite poolt genereeritud miinimumis v_φ puutaseme skalaaride massimaatriksi \mathcal{M}_S^2 ja seosekonstantide maatriksi Λ vahel seos

$$\Lambda = \frac{1}{8v_\varphi^2} \mathcal{M}_S^2 \circ (\mathbf{nn}^T)^{\circ -1} \Leftrightarrow \mathcal{M}_S^2 = 8v_\varphi^2 \Lambda \circ (\mathbf{nn}^T). \quad (1.28)$$

Maatriks $(\mathbf{nn}^T)^{\circ -1}$ on maatriksi \mathbf{nn}^T Hadamardi pöördmaatriks, st igast elemendist on võetud pöördväärtus [21].

1.3 Fenomenoloogia

1.3.1 Kosmoloogia

Varase Universumi arengu kohta meil puuduvad vaatluslikud andmed. Arusaam Universumi arengust enne kosmilise mikrolaine taustkiirguse teket pärineb teadaolevate füüsikaseaduste ja vaatlustulemuste ekstrapoleerimisel. Alltoodud sündmused temperatuuri alanemisel on toodud artikli [22] põhjal.

1. $T \sim 10 \cdot 10^{19}$ GeV. Selle temperatuuri kohta pole midagi teada, kuna sellistel energiatel hakkab mängima rolli ka gravitatsioonijõu kvantteooria.
2. $T \sim 10 \cdot 10^{16}$ GeV. Sellel temperatuuril arvatakse toimuvat ühendteooria tundmatu kalibratsioonigrupi G lõhkumine Standardmudeli kalibratsioonigrupiks.
3. $T \sim 10 \cdot 10^2$ GeV. See on skaala, kus Standardmudeli sümmeetriagrupp laguneb grupiks $SU(3)_C \times SU(1)_{EM}$, st sellel temperatuuril toimus Higgsi välja sümmeetriarikkumine.
4. $T \sim 0,4$ eV. Toimub kosmilise mikrolaine taustkiirguse teke.
5. $T \sim 1 \cdot 10^{-4}$ eV. Tänapäev.

Kuumas Universumis on kõik osakesed omavahel soojuslikus tasakaalus. Universumi jahtudes ja paisudes osakestevahelised interaktsioonid vähenevad. Kui temperatuur langeb alla tumeaine massile vastava energia ja paisumise tõttu on tumeaine interaktsioonid tavaainega tühiselt väikeseks muutunud, on toimunud tumeaine välja külmumine. Sellise protsessiga on võimalik seletada tumeaine teket varajases Universumis ning tumeaine algse tiheduse teket. Algse tiheduse jäänuks on tänapäeval Universumis esinev tumeaine [13].

1.3.2 Tumeaine

Peatükis 1.1.2 on ära toodud vaatluslikud tõendid, mis viitavad tumeaine olulisusele. Vaatluslikult on võimalik leida piiranguid tumeaine omadustele, millest astronoomiliste vaatlustega on kõige selgem tumeaine osalus gravitatsioonilises vastastikmõjus. Samuti seavad vaatlused piiranguid tumeaine stabiilsusele – tumeaine osakese eluiga peab olema Universumi eluea (umbes 14 miljardit aastat) suurusjärgus, vastasel juhul ei oleks võimalikud pidevad vaatlused [23].

Tumeaine osakesi on võimalik otsida eksperimendi teel üldiselt kolmel viisil. Esimene on otsene detekteerimine, kus mõõdetakse Standardmudeli osakeste hajumist tumeaine osakestelt. Teine viis on kaudne detekteerimine, kus tuvastatakse tumeaine annihileerumise või lagunemisel eralduvaid

Standardmudeli lagunprodukte kosmilistes kiirtes. Kolmas võimalus on otsida osakeste põrgutiga, kus Standardmudeli osakesed lagunevad suurte energiatega tumedate osakesteks [13].

2. Mudelid

2.1 Täispotentsiaal

Uuritav mudel on Standardmudeli laiendus, kus on sisse toodud uus kalibratsioonisümmeetria $U(1)_X$. Üldjuhul teiseneb suvaline väli ψ selle kalibratsiooniteisenduse all kui $\psi \rightarrow \exp(iGX_\psi)\psi$, kus G on teisenduse generaator sobivas esituses ja X_ψ on välja ψ laeng selle teisenduse all.

Eeldame, et ükski Standardmudeli osake uue kalibratsiooniteisenduse all laetud pole. Toome lisaks sisse kaks uut kompleksset skalaarset välja Φ ja S , mille X -laengud on vastavalt $X_\Phi = 3$ ja $X_S = 1$. Viimane lisaeldus on, et teooria on puutasemel skaalainvariantne. Kuna potentsiaal peab jääma sümmeetriateisendusel invariantseks, saab kirja panna puutaseme potentsiaali kõige üldisemal kujul kui

$$V = \lambda_H(H^\dagger H)^2 + \lambda_\Phi(\Phi^\dagger \Phi)^2 + \lambda_S(S^\dagger S)^2 + \lambda_{H\Phi}H^\dagger H\Phi^\dagger \Phi + \lambda_{HS}H^\dagger HS^\dagger S + \lambda_{\Phi S}\Phi^\dagger \Phi S^\dagger S + \frac{\lambda'_{\Phi S}}{2}\Phi^\dagger S^3 + \frac{\lambda'_{S\Phi}}{2}(S^\dagger)^3\Phi. \quad (2.1)$$

H on siin Standardmudeli Higgsiga analoogne $SU(2)_L \times U(1)_Y$ skalaarne dublett. $\lambda'_{\Phi S}$ võib võtta reaalse ja positiivse, kuna tema faasi võib alati välja taandada Φ globaalse faasi sobiva ümber defineerimisega.

Kuna tõime sisse uue kalibratsioonisümmeetria, peab leiduma ka sellele sümmeetriaile vastav vektorboson Z' . See vektorboson omandab hiljem sümmeetria rikkumisel massi.

Sümmeetria spontaansel rikkumisel toimub kujul $SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_X \rightarrow U(1)_{EM} \times \mathbb{Z}_3$, kus \mathbb{Z}_3 tekib tänu potentsiaali (2.1) liikmetele, mis sisaldavad kordajat $\lambda'_{\Phi S}$. Nagu hiljem selgitatud, stabiliseerib \mathbb{Z}_3 sümmeetria mudeli tumeainet. Kuna tegu on skaalainvariantse potentsiaaliga, peab sümmeetria rikkumine toimuma dünaamiliselt, st kvantparandite abil tänu CW mehhanismile.

Et rakendada CW mehhanismi GW lähenemist, on vaja leida tasane suund. Üldiselt valemis (2.1) antud potentsiaali jaoks tasase suuna analüütilist avaldist pole, kuid numbriliselt saab seda leida resultantide kaudu [21]. Sellest hoolimata, et uurida mudeli omadusi, võime eeldada, et on leitud tasane suund \mathbf{n} .

GW lähenemise teine oluline eeldus on, et väljad on reaalsed. Selle jaoks kirjutame väljad järgnevalt lahti:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h + iG^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}(s + ia). \quad (2.2)$$

Siin oleme $SU(2)_L \times U(1)_Y$ kalibratsiooni valinud sellise, et elektromagnetlaenguga komponent on võrdne nulliga. Need lahtikirjutused potentsiaali (2.1) tagasi asetades oleme potentsiaali lahti kirjutanud ainult reaalsete väljade kaudu. Selle käigus loomulikult jääb skaalainvariantsus kehtima.

Nüüd saab asuda GW mehhanismi rakendamisele. Selleks eeldame, et oleme leidnud tasase suuna \mathbf{n} , millel reparametriseerime väljad radiaalkoordinaadi φ kaudu:

$$h = \varphi n_1, \quad \phi_1 = \varphi n_2, \quad s = \varphi n_3, \quad G^0 = \varphi n_4, \quad \phi_2 = \varphi n_5, \quad a = \varphi n_6. \quad (2.3)$$

Kvantparandid tekitavad tasasel suunal miinimumi kohas $\varphi = v_\varphi$. Selles punktis saab leida puutaseme skalaaride massimaatriksi \mathcal{M} . Väljade VEVid on kujul $v_\varphi n_i$, kus $i = 1, \dots, 6$. Kehtib ka statsionaarsuse tingimus kujul

$$\left. \frac{\partial V(\varphi \mathbf{n})}{\partial n_i} \right|_{\varphi=v_\varphi} = 0, \quad (2.4)$$

mida saab kasutada massimaatriksi avaldise lihtsustamiseks. Samuti võib nõuda, et algsete väljade H , Φ ja S VEVid oleksid reaalsed, millest saame tingimused $n_4 = n_5 = n_6 = 0$. Seevastu siin ja edaspidi eeldame, et n_1 , n_2 ja n_3 on kõik nullist erinevad. Kokkuvõttes on puutaseme massimaatriks kujul

$$\mathcal{M}^2 = v_\varphi^2 \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\text{Re}}^2 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_{\text{Im}}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Siin $\mathcal{M}_{\text{Re}}^2$ on väljade reaalosade massimaatriks ja $\mathcal{M}_{\text{Im}}^2$ on väljade imaginaarosade massimaatriks. Võtame kasutusele tähised

$$D_2 = \frac{1}{2}(\lambda_{H\phi} n_1^2 + 2\lambda_\phi n_2^2 + \lambda_{\phi S} n_3^2), \quad D_3 = \frac{1}{2}(\lambda_{HS} n_1^2 + \lambda_{\phi S} n_2^2 + 2\lambda_S n_3^2), \quad (2.6)$$

nende abil on võimalik reaali- ja imaginaarosade massimaatriks kirjutada kujul

$$\mathcal{M}_{\text{Re}}^2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_{H\phi} n_1^2 & \lambda_{H\phi} n_1 n_2 & \lambda_{HS} n_1 n_3 \\ \lambda_{H\phi} n_1 n_2 & 2\lambda_\phi n_2^2 + D_2 & \lambda_{\phi S} n_2 n_3 + \frac{3}{4}\lambda'_{\phi S} n_3^2 \\ \lambda_{HS} n_1 n_3 & \lambda_{\phi S} n_2 n_3 + \frac{3}{4}\lambda'_{\phi S} n_3^2 & 2\lambda_S n_3^2 + D_3 + \frac{3}{2}\lambda'_{\phi S} n_2 n_3 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

ja imaginaarosade massimaatriks kujul

$$\mathcal{M}_{\text{Im}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & \frac{3}{4}\lambda'_{\phi S}n_3^2 \\ 0 & \frac{3}{4}\lambda'_{\phi S}n_3^2 & D_3 - \frac{3}{2}\lambda'_{\phi S}n_2n_3 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Mõõdetavate masside leidmiseks tuleb massimaatriksid diagonaliseerida. Alustame imaginaarosade massimaatriksi diagonaliseerimisest. Statsionaarsuse tingimustest (2.4) saame

$$\begin{cases} n_2 D_2 &= -\frac{1}{4}\lambda'_{\phi S}n_3^3, \\ n_3 D_3 &= -\frac{3}{4}\lambda'_{\phi S}n_2n_3^2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Neid võrdusi kasutades tuleb välja, et imaginaarosade massimaatriksil on kaks omaväärtust võrdsed nulliga ja kolmas omaväärtus on

$$M_\chi^2 = -\frac{\lambda'_{\phi S}}{4} \frac{n_3}{n_2} (9n_2^2 + n_3^2). \quad (2.10)$$

Seega tekib mudeli väljade imaginaarosadest kaks massitut välja ehk Goldstone'i bosonit. Need aga pole füüsikalised, kuna vastavad kalibratsiooniväljad (Standardmudeli W ja Z väljad ja uue kalibratsioonisümmeetria $U(1)_X$ kalibratsiooniboson Z') söövad need bosonid ära, omandades sellega massi. Z' bosoni massiks tuleb $M_{Z'}^2 = g_Z v_\varphi^2 (9n_2^2 + n_3^2)$, kus g_Z on vastav seosekonstant.

Lisaks tekib massiga M_χ^2 skalaarne väli. Sellele vastava välja χ identifitseerime tumeainega.

Realosade massimaatriksi diagonaliseerimine on keerulisem. Et me defineerisime suuna \mathbf{n} kui tasase suuna, on ka reaalosade massimaatriksil üks omaväärtus võrdne nulliga. Sellest saame massimaatriksile tingimuse $\det \mathcal{M}_{\text{Re}}^2 = 0$. Tasasele suunale vastav osake omandab valemiga (1.25) antud massi.

2.2 Biruutpotentsiaal

Võib tähele panna, et kui võtta potentsiaalis (2.1) $\lambda'_{\phi S} = 0$, on tegu biruutpotentsiaaliga. Biruutpotentsiaali korral on lihtsasti leitav analüütiline kuju tasasele suunale. Kui $\lambda'_{\phi S}$ on kvantparandite kordajate (1.20) ja (1.21) suurusjärgus, võib vastavaid liikmeid käsitleda potentsiaali paranditena. Seega, uuritav potentsiaal on algse potentsiaali (2.1) biruutosa V_0 :

$$V_0 = \lambda_H(H^\dagger H)^2 + \lambda_\phi(\Phi^\dagger \Phi)^2 + \lambda_S(S^\dagger S)^2 + \lambda_{H\phi}H^\dagger H\Phi^\dagger \Phi + \lambda_{HS}H^\dagger HS^\dagger S + \lambda_{\phi S}\Phi^\dagger \Phi S^\dagger S. \quad (2.11)$$

Kui kirjutada väljad lahti kujul (2.2), siis saab biruutpotentsiaali esitada koefitsentide maatriksi kaudu kui $V_0 = (\Phi^{\circ 2})^T \Lambda \Phi^{\circ 2}$, kus väljavektor Φ ja koefitsentide maatriks Λ on kujul

$$\Phi = \begin{pmatrix} h \\ \phi_1 \\ s \\ G^0 \\ \phi_2 \\ a \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \Lambda_0 & \Lambda_0 \\ \Lambda_0 & \Lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 2\lambda_H & \lambda_{H\phi} & \lambda_{HS} \\ \lambda_{H\phi} & 2\lambda_\phi & \lambda_{\phi S} \\ \lambda_{HS} & \lambda_{\phi S} & 2\lambda_S \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Massimaatriksi saab leida valemi (1.28) järgi. Kui taaskord võtta $n_4 = n_5 = n_6 = 0$ ja kasutada statsionaarsuse tingimust (2.4), siis imaginaarosade massimaatriks muutub nullmaatriksiks. Reaalosade massimaatriks kvantparandite tekitatud tasase suuna miinimumis v_φ on

$$\mathcal{M}_0^2 = v_\varphi^2 \begin{pmatrix} 2\lambda_H n_1^2 & \lambda_{H\phi} n_1 n_2 & \lambda_{HS} n_1 n_3 \\ \lambda_{H\phi} n_1 n_2 & 2\lambda_\phi n_2^2 & \lambda_{\phi S} n_2 n_3 \\ \lambda_{HS} n_1 n_3 & \lambda_{\phi S} n_2 n_3 & 2\lambda_S n_3^2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Kuna nõuame tasase suuna olemasolu, siis üks \mathcal{M}_0^2 omaväärtustest on võrdne nulliga, st $\det \mathcal{M}_0^2 = 0$.

2.3 Gildeneri-Weinbergi lähenemine

Gildeneri-Weinbergi lähenemine rakendatuna täispotentsiaaliga V juhule järgib täpselt peatükis 1.2.2 esitatud kujul. Tasasele suunale vastav osake saab massi

$$M_{\text{tasane},V}^2 = 8B(\mathbf{n})v_\varphi^2, \quad \text{kus } B(\mathbf{n}) = \frac{1}{64\pi^4 v_\varphi^2} (\text{Tr } \mathcal{M}^4 + 3\text{Tr } \mathcal{M}_V^4 - 4\text{Tr } \mathcal{M}_F^4). \quad (2.14)$$

Siin skalaaride puutaseme massimaatriks on antud valemiga (2.5) ja vektorosakeste massimaatriks sisaldab ka uue vektorbosoni Z' massi.

Rakendame nüüd Gildeneri-Weinbergi lähenemist biruutpotentsiaalile. Kvantparandid tasasel

suunal avalduvad valemi (1.19) kohaselt

$$V_1(\varphi\mathbf{n}) = A(\mathbf{n})\varphi^4 + B(\mathbf{n})\varphi^4 \ln \frac{\varphi^2}{\mu_R^2}, \quad (2.15)$$

kus $A(\mathbf{n})$ ja $B(\mathbf{n})$ on antud vastavalt valemitega (1.20) ja (1.21) ja μ_R on renormeerimisskaala. Kui $\lambda'_{\phi S}$ on samas suurusjärgus, mis A ja B , võib täispotentsiaali V (2.1) liikmeid, mis sisaldavad konstanti $\lambda'_{\phi S}$ käsitleda samamoodi parandina V_2 :

$$V_2 = \frac{\lambda'_{\phi S}}{2}\Phi^\dagger S^3 + \frac{\lambda'_{\phi S}}{2}(S^\dagger)^3\Phi \Rightarrow V_2(\varphi\mathbf{n}) = \varphi^4 \frac{\lambda'_{\phi S}}{4}(n_2 n_3^3 - 3n_2 n_3 n_6^2 + 3n_3^2 n_5 n_6 - n_5 n_6^3). \quad (2.16)$$

Siin teises võrduses on V_2 lihtsalt tasasel suunal lahti kirjutatud. GW lähenemisele analoogilise arutluskäiguga saame parandpotentsiaalide statsionaarsuse tingimuseks valemi (1.18) asemel tingimuse

$$\left. \frac{\partial V_1(\varphi\mathbf{n})}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=v_\varphi} + \left. \frac{\partial V_2(\varphi\mathbf{n})}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=v_\varphi} = 0. \quad (2.17)$$

Seda lahti kirjutades saame avaldada

$$\ln \frac{v_\varphi^2}{\mu_R^2} = -\frac{A(\mathbf{n})}{B(\mathbf{n})} - \frac{1}{2} - \frac{\lambda'_{\phi S}}{4B(\mathbf{n})}(n_2 n_3^3 - 3n_2 n_3 n_6^2 + 3n_3^2 n_5 n_6 - n_5 n_6^3). \quad (2.18)$$

Et saaks rakendada perturbatsiooniteooriat, peab see logaritmi olema ühega samas suurusjärgus või väiksem [8]. See annabki tingimuse, millal võib täispotentsiaali liiget V_2 (2.16) üldiselt käsitleda täispotentsiaali V (2.1) parandina: kui $\lambda'_{\phi S}$ ja $B(\mathbf{n})$ on samas suurusjärgus.

Asendades valemist (2.18) renormeerimisskaala avaldise potentsiaali V_1 (2.15) ja võttes pärast tuletiste võtmist $n_4 = n_5 = n_6 = 0$, saame tasasel suunal olevale osakesele massi

$$M_{\text{tasane},V_0}^2 = \left. \frac{\partial^2(V_1(\varphi\mathbf{n}) + V_2(\varphi\mathbf{n}))}{\partial^2 \varphi} \right|_{\varphi=v_\varphi} = 8B(\mathbf{n})v_\varphi. \quad (2.19)$$

Nagu näha, on tasase suuna massi avaldis sama, nagu valemis (1.25). See on ka oodatav, kuna lisaparand $V_2(\varphi\mathbf{n}) \propto \varphi^4$, st lisaparandi võib defineerida konstandi $A(\varphi\mathbf{n})$ sisse. Tasase suuna mass aga konstandist A sõltuma ei jää.

Küll aga mõjutab lisaparand statsionaarsuse tingimust (2.17), millest sõltub teiste masside parandite täpne arvutamine. Samuti on muutunud skalaaride puutaseme massimaatriksi avaldis, kus skalaaride puutaseme massimaatriks on antud avaldisega (2.13) (vektorosakeste massimaatriks \mathcal{M}_V sisaldab endisel uut osakest Z'):

$$B(\mathbf{n}) = \frac{1}{64\pi^2 v_\varphi^4} (\text{Tr } \mathcal{M}_0^4 + 3\text{Tr } \mathcal{M}_V^4 - 4\text{Tr } \mathcal{M}_F^4). \quad (2.20)$$

3. Fenomenoloogia

Selles peatükis uurime lähemalt täispotentsiaali lähendamist biruutpotentsiaaliga, mille jaoks uurime lähemalt biruutpotentsiaali käitumist.

3.1 Teoreetilised piirangud mudelile

Mudelil on esialgu üheksa vaba parameetrit:

$$\lambda_H, \lambda_\phi, \lambda_S, \lambda_{H\phi}, \lambda_{HS}, \lambda_{\phi S}, \lambda'_{\phi S}, v_\phi, g_X, \quad (3.1)$$

seejuures $\lambda'_{\phi S}$ tuleb sisse alles potentsiaali parandeid uurides. Tasase suuna olemasolu nõudmine fikseerib neist ühe. Uurime nüüd lähemalt lisapiiranguid, mida potentsiaalis V_0 (2.11) olevad seosekonstandid peavad rahuldama.

Et vaakum oleks stabiilne, peab potentsiaal olema alt tõkestatud. Et tegu on biruutpotentsiaaliga, siis piisab potentsiaali V_0 kopsitiivsusest [24]. Kopsitiivsuse jaoks piisavad ja tarvilikud tingimused on leitud artiklis [25]. Potentsiaal V_0 on kopsitiivne parajasti siis, kui on täidetud tingimused

$$\lambda_H \geq 0, \lambda_\phi \geq 0, \lambda_S \geq 0, \frac{\lambda_{H\phi}}{2} + 2\sqrt{\lambda_H \lambda_\phi} \geq 0, \frac{\lambda_{HS}}{2} + \sqrt{\lambda_H \lambda_S} \geq 0, \frac{\lambda_{\phi S}}{2} + \sqrt{\lambda_\phi \lambda_S} \geq 0. \quad (3.2)$$

Lisaks peab olema täidetud vähemalt üks kahest tingimusest

$$\frac{\lambda_{H\phi}}{2} \sqrt{\lambda_S} + \frac{\lambda_{\phi S}}{2} \sqrt{\lambda_H} + \frac{\lambda_{HS}}{2} \sqrt{\lambda_\phi} + \sqrt{\lambda_H \lambda_\phi \lambda_S} \geq 0 \vee \det \mathbf{\Lambda}_0 \geq 0, \quad (3.3)$$

kus $\mathbf{\Lambda}_0$ on defineeritud valemis (2.12). Seejuures biruutpotentsiaali korral on $\det \mathbf{\Lambda}_0 = 0$ automaatselt täidetud, kuna nõuame tasase suuna olemasolu.

Perturbatsiooniteooria kasutamiseks on vajalik, et seosekonstandid oleksid üldjuhul väiksemad kui 4π . Arvutustes on seosekonstantide suuruse ülemiseks piiriks võetud varuga arv 1.

3.2 Massimaatriksi uurimine

3.2.1 Eksperimentaalsed piirangud

Selles peatükis uurime lähemalt kvantparandite tekitatud miinimumis leitud massimaatriksit \mathcal{M}_0^2 (2.13). Tähistame selle maatriksi omaväärtusi kui M_1^2 , M_2^2 ja M_3^2 . Need omaväärtused identifitseerime vastavate osakeste h_1 , h_2 ja h_3 puutaseme masside ruutudega. Oleme nõudnud, et üks neist massidest on võrdne nulliga, olgu selleks M_1^2 .

Identifitseerime Standardmudeli Higgsi bosoni osakesega h_1 . See tähendab, et Higgsi bosoni eksperimentaalne mass 125,09 GeV tuleb puhtalt kvantparanditest ja puutasemel on Standardmudeli Higgsi mass võrdne nulliga.

Nüüd võib maatriksi \mathcal{M}_0^2 ära diagonaliseerida. Olgu diagonaliseerivaks maatriksiks $\mathcal{O} = R_1(\alpha_1)R_2(\alpha_2)R_3(\alpha_3)$ nii, et $\mathcal{O}^T \mathcal{M}_0^2 \mathcal{O} = \text{diag}(M_1^2, M_2^2, M_3^2)^T$ ja $\mathcal{O} = R_1(\alpha_1)R_2(\alpha_2)R_3(\alpha_3)$, kus $R_i(\alpha_i)$ pöörab fikseeritud koordinaattelgede korral ümber i -nda telje nurga α_i võrra:

$$R_1(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{pmatrix}, \quad R_2(\alpha_2) = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad R_3(\alpha_3) = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Siin ja edaspidi on kompaktsuse huvides tähistatud $s_i = \sin \alpha_i$, $c_i = \cos \alpha_i$ ja $t_i = \tan \alpha_i$ ($i = 1, 2, 3$). Seega maatriks \mathcal{O}^T on kujul

$$\mathcal{O}^T = \begin{pmatrix} c_2 c_3 & c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 & s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 \\ -c_2 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & c_1 s_2 s_3 + s_1 c_3 \\ s_2 & -s_1 c_2 & c_1 c_2 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Maatriks \mathcal{O}^T teisendab massibaasis antud väljad interaktsioonibaasis antud väljadeks, st

$$\begin{pmatrix} h & \phi_1 & s \end{pmatrix}^T = \mathcal{O}^T \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}^T. \quad (3.6)$$

Kuna väli h_1 on tasasel suunal \mathbf{n} , siis siit omakorda järeldub, et võime vektori \mathbf{n} komponendid kirjutada

$$n_1 = \cos \alpha_2 \cos \alpha_3, \quad n_2 = -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3, \quad n_3 = \sin \alpha_2. \quad (3.7)$$

Kuna oleme identifitseerinud Standardmudeli Higgsi seisundiga h_1 on võrrandist (3.6) näha, et Standardmudeli interaktsioonides tuleb klassikalisele Standardmudeli Higgsi interaktsioonidele

juurde kordaja $\cos \alpha_2 \cos \alpha_3$. Samas, Standardmudeli Higgsi signaalitugevuseks on alampiiriks 0.81 [26]. Siit saame seega piirangu

$$\cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3 > 0.81, \Rightarrow 1 > |\cos \alpha_2 \cos \alpha_3| > 0.9. \quad (3.8)$$

Valitud identifikatsiooni kohaselt on Standardmudeli Higgs osake h_1 . Puutasemel on tema mass võrdne nulliga, kuid on teada Standardmudeli Higgsi mass. Samuti on teada Higgsi VEV $v_h = 246,42 \text{ GeV}$. Järelikult peab kehtima

$$M_h^2 = M_{\text{tasane},V_0}^2 = 8Bv_\varphi^2 = (125,09 \text{ GeV})^2, \quad v_\varphi n_1 = v_\varphi \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 = 246,42 \text{ GeV}. \quad (3.9)$$

Sellest võrdusest saame võrratust (3.8) kasutades piirangu suurusele v_φ :

$$246,42 \text{ GeV} \leq v_\varphi \leq 273,8 \text{ GeV}. \quad (3.10)$$

Saame piirangud ka uute osakeste massidele. Selleks kirjutame valemi (2.20) lahti teadaolevate masside kaudu:

$$B(\mathbf{n}) = \frac{1}{64\pi^2 v_\varphi^4} (M_2^4 + M_3^4 + 6M_W^4 + 3M_Z^4 + 3M_{Z'}^4 - 12M_t^4). \quad (3.11)$$

Siin $M_W = 80,379 \text{ GeV}$ on Standardmudeli W -bosonite mass, $Z = 91,188 \text{ GeV}$ on Standardmudeli Z -bosoni mass ja $M_t = 172,9 \text{ GeV}$ on t -kvargi mass [27]. Ülejäänud fermionid on t -kvargiga võrreldes tühise massiga. Seega, kasutades võrratust (3.10) ja Standardmudeli Higgsi omaduste mõõtmisi (3.9), saame uute osakeste massidele M_2 , M_3 ja M_Z piirangud

$$(540 \text{ GeV})^4 \leq M_2^4 + M_3^4 + 3M_Z^4 \leq (567 \text{ GeV})^4. \quad (3.12)$$

3.2.2 Seosekordajate analüüs

Kuna massid ja segunemisnurgad on eksperimentaalselt mõõdetavad, on neist lihtsam lähtuda ja uurida, kuidas avalduvad mudeli parameetrid (seosekordajad) masside ja segunemisnurkade kaudu. Selleks teeme diagonaliseerimise pöördteisenduse, lähtudes juba diagonaalsest maatriksist $\mathcal{M}_d^2 = \begin{pmatrix} 0 & M_2^2 & M_3^2 \end{pmatrix}$, avaldades nii $\mathcal{M}_0 = \mathcal{O}\mathcal{M}_d^2\mathcal{O}^T$. Kasutades võrduseid (3.7) ja (1.28),

saame avaldada seosekordajate maatriksi elemendid kui

$$\begin{aligned}
(\mathbf{\Lambda}_0)_{11} &= 2\lambda_H = \frac{1}{v_\varphi^2} (M_2^2 t_3^2 + M_3^2 t_2^2 (t_3^2 + 1)), \\
(\mathbf{\Lambda}_0)_{22} &= 2\lambda_\phi = \frac{1}{v_\varphi^2} \left(M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2 t_3} - s_1 t_2 \right)^2 + M_3^2 \frac{s_1^2}{s_3^2} \right), \\
(\mathbf{\Lambda}_0)_{33} &= 2\lambda_S = \frac{1}{v_\varphi^2} \left(M_2^2 \left(c_1 s_3 + \frac{s_1 c_3}{s_2} \right)^2 + M_3^2 \frac{c_1^2}{t_2^2} \right), \\
(\mathbf{\Lambda}_0)_{12} &= (\mathbf{\Lambda}_0)_{21} = \lambda_{H\phi} = \frac{1}{v_\varphi^2} \left(M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2} - s_1 t_2 t_3 \right) + M_3^2 \frac{s_1 t_2}{c_3 s_3} \right), \\
(\mathbf{\Lambda}_0)_{13} &= (\mathbf{\Lambda}_0)_{31} = \lambda_{HS} = \frac{1}{v_\varphi^2} \left(M_3^2 \frac{c_1}{c_3} - M_2^2 s_3 \left(c_1 t_3 + \frac{s_1}{s_2} \right) \right), \\
(\mathbf{\Lambda}_0)_{23} &= (\mathbf{\Lambda}_0)_{32} = \lambda_{\phi S} = \frac{1}{v_\varphi^2} \left(-M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{s_1}{s_2 c_2 t_3} \right) (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3) + M_3^2 \frac{c_1 s_1}{t_2 s_3} \right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

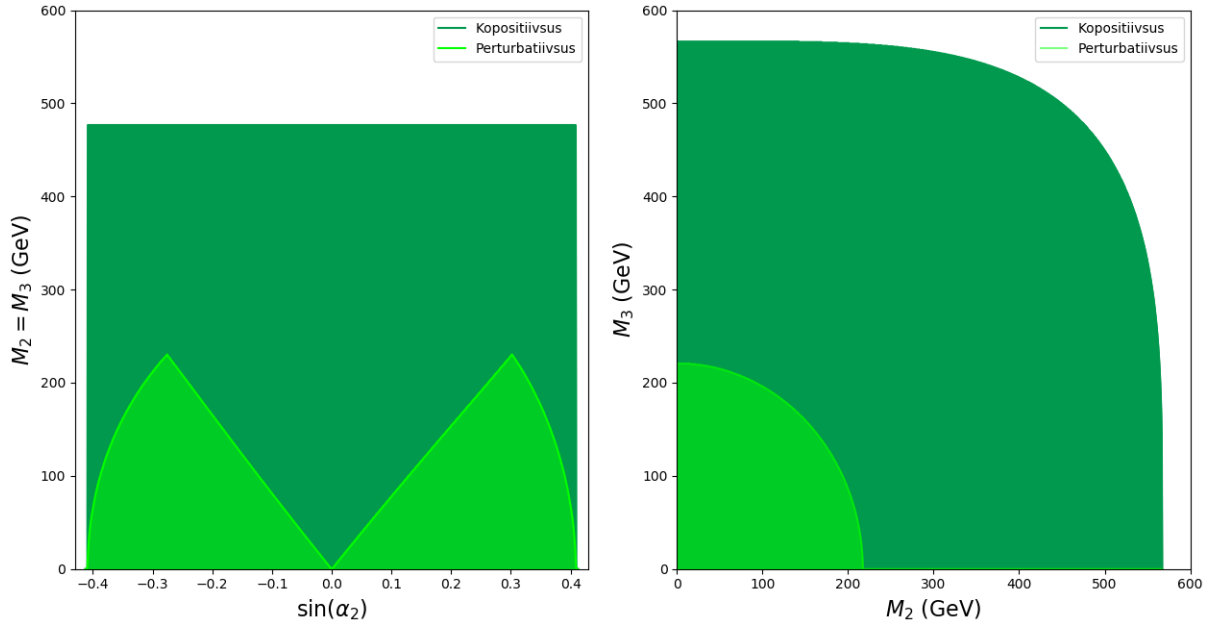
Nüüd saab kasutades leitud massi- ja segunemisnurkade piiranguid arvestades analüüsida, milliste uute osakeste masside M_2 ja M_3 ning segunemisnurkade $\alpha_{1,2,3}$ korral vastab saadud seosekordajate maatriks ülalesitatud perturbatiivsuse ja kopsitiivsuse nõuetele.

Selle jaoks tehti skaneering üle parameetrite ruumi fikseeritud piirkonnada. Segunemisnurgad olid valitud nii, et $0 < \alpha_i < \pi/2$, $i = 1, 2, 3$ ja masse varieeriti kuni võrratuses (3.12) toodud ülempiirini. Tüüpilised graafikud on toodud joonisel 3.1 (seejuures on vasakpoolsel graafikul lubatud α_2 minna ka negatiivseks, ülejäänud segunemisnurgad jäävad ülalkirjeldatud vahemikku). On näha, et tugevama piirangu seab perturbatiivsuse tingimus. Joonisel olevatel graafikutel on fikseeritud fikseeritud ülejäänud segunemisnurkade väärtused. Fikseeritud segunemisnurkade muutmisel piirkonnas $0 < \alpha_i < \pi/2$ muutub perturbatiivsuse poolt lubatud piirkonna kuju ja suurus, kuid kvalitatiivselt jääb perturbatiivsuse piirang endiselt rangemaks, kui kopsitiivsuse tingimus.

Kopsitiivsuse analüüs

Tuleb välja, et selles piirkonnas on kopsitiivsuse tingimused automaatselt täidetud. Tõepoolest, tasase suuna olemasolu tõttu on tingimus (3.3) täidetud. Kuna λ_H , λ_ϕ ja λ_S on maatriksi (3.13) diagonaalsed elemendid, on ka täidetud tingimused $\lambda_H \geq 0$, $\lambda_\phi \geq 0$, $\lambda_S \geq 0$, kuna maatriksi (3.13) diagonaalsed elemendid koosnevad vaid ruutu võetud liikmetest.

Lähemalt tuleb vaadata ülejäänud kolme tingimust, mis on esitatud valemis (3.2). Selleks võib tähele panna, et kui $0 < \alpha_i < \pi/2$, $i = 1, 2, 3$, siis siinused, koosinused ja tangensid on kõik positiivsed. Seetõttu on iga tegur seosekordajate maatriksis (3.13) positiivne,



Joonis 3.1: Mõlemal graafikul on tumerohelisega tähistatud koposiitivsuse tingimuse poolt lubatud parameetrite piirkond ja helerohelisega perturbatiivsuse tingimuse poolt lubatud piirkond. Seejuures perturbatiivsuse poolt lubatud piirkond jääb mõlemal joonisel kirjeldatud juhul täielikult koposiitivsuse poolt lubatud piirkonna sisse. Vasakul: Fikseeritud $M_2 = M_3$, $\alpha_1 = \pi/4$ ja $v_\phi = 270$ GeV, varieeritud segunemisnurka α_2 nii, et $-\pi/4 < \alpha_2 < \pi/4$ ja $0 < \alpha_3 < \pi/4$. Paremalt: Fikseeritud $\alpha_1 = \pi/4$ rad, $\alpha_2 = 0,2$ rad, $\alpha_3 = 0,4$ rad, masse M_2 ja M_3 varieeritud vahemikus $(0, 567)$ (GeV).

mistõttu on võrdlemisi lihtne kinnitada suuruste $\lambda_{H\phi}/2 + \sqrt{\lambda_H\lambda_\phi}$, $\lambda_{HS}/2 + \sqrt{\lambda_H\lambda_S}$ ja $\lambda_{\phi S}/2 + \sqrt{\lambda_\phi\lambda_S}$ mittenegatiivsust. Kuna kõik tegurid seosekordajate maatriksis on positiivsed, võivad seosekordajaid negatiivseks viia vaid liikmed, mille ees on miinusmärk. Neid liikmeid ükshaaval analüüsides saame järgmised võrratused.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{H\phi}}{2} + \sqrt{\lambda_H\lambda_\phi} &\geq M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2} - s_1 t_2 t_3 \right) + \sqrt{\lambda_H\lambda_\phi} \\ &\geq M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2} - s_1 t_2 t_3 \right) + M_2^2 \left| \frac{c_1}{c_2} - s_1 t_2 t_3 \right| \geq 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{HS}}{2} + \sqrt{\lambda_H\lambda_S} &\geq -M_2^2 s_3 \left(c_1 t_3 + \frac{s_1}{s_2} \right) + \sqrt{\lambda_H\lambda_S} \\ &\geq -M_2^2 s_3 \left(c_1 t_3 + \frac{s_1}{s_2} \right) + M_2^2 \left| s_3 \left(c_1 t_3 + \frac{s_1}{s_2} \right) \right| \geq 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_{\phi S}}{2} + \sqrt{\lambda_{\phi} \lambda_S} &\geq -M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{s_1}{s_2 c_2 t_3} \right) (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3) + \sqrt{\lambda_{\phi} \lambda_S} \\
&\geq -M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{s_1}{s_2 c_2 t_3} \right) (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3) + M_2^2 \left| \left(c_1 s_3 + \frac{s_1 c_3}{s_2} \right) \left(\frac{c_1}{c_2 t_3} - s_1 t_2 \right) \right| \\
&\geq -M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{s_1}{s_2 c_2 t_3} \right) (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3) + M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{s_1}{s_2 c_2 t_3} \right) (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3) \\
&\geq 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Nagu näha, on kõik tingimused seosekonstantide maatriksi kopsitiivsuseks vaadeldavas segunemisnurkade vahemikes täidetud.

Teine piirang tuleb nõudest, et seosekonstandid peavad jääma piisavalt väikeseks, vastasel juhul kaotab perturbatsiooniteooria kiiresti kehtivuse. Seosekonstantide valitud ülempiiriks võtsime arvu 1. Skaneerimisel tuli välja, et valitud segunemisnurkade vahemikes ei saa uute skalaaride h_2 ja h_3 massid täita kogu piirangu (3.12) lubatud ülempiirini. Kui M_2 ja M_3 on mõlemad teatud piirist suuremad, kasvavad seosekonstandid liiga suureks.

Peamine piirang antud segunemisnurkade vahemikes tuleb seosekonstantidest λ_{ϕ} ja λ_S . Seejuures põhjus, miks need seosekonstandid annavad võrdlemisi range piirangu massidele M_2 ja M_3 , ei sõltu segunemisnurkade märkidest.

λ_{ϕ} ja λ_S analüüs

Valemi (3.13) põhjal on λ_{ϕ} avaldis kujul

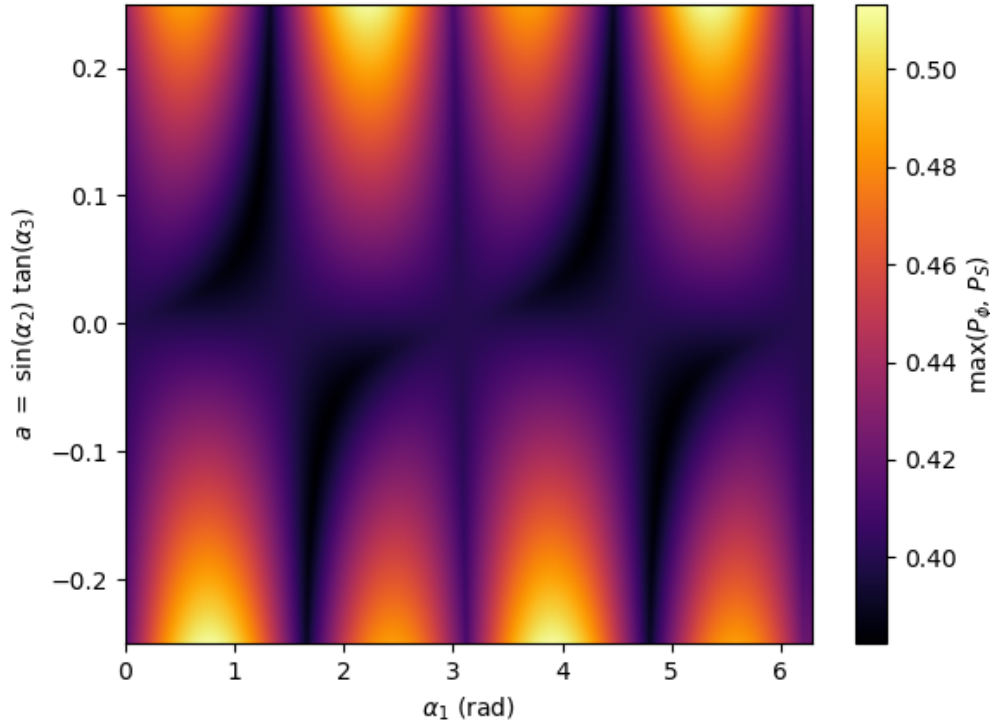
$$\lambda_{\phi} = \frac{1}{8v_{\phi}^2} \left(M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2 t_3} - s_1 t_2 \right)^2 + M_3^2 \frac{s_1^2}{s_3^2} \right). \tag{3.17}$$

Siin saab kasutada võrdust $v_{\phi}^2 c_2^2 c_3^2 = v_h^2$, et vabaneda määramata parameetrist v_{ϕ} . Kui suurustega c_2 ja c_3 läbi korrutada, saame tulemuseks

$$\lambda_{\phi} = \frac{1}{8v_h^2} \left(M_2^2 \left(\frac{c_1 c_3}{t_3} - s_1 s_2 c_3 \right)^2 + M_3^2 \frac{c_2^2 s_1^2}{t_3} \right). \tag{3.18}$$

Standardmudeli Higgsi mõõdetud signaalitugevusest saadud võrratuse (3.8) põhjal $|c_2 c_3| > 0,9$. Seega peavad segunemisnurgad rahuldama järgmisi tingimusi:

$$|c_2|, |c_3| > 0,9; \quad c_2^3, c_3^2 > 0,91; \quad |s_2|, |s_3|, |t_2|, |t_3| < 0,5; \quad \frac{1}{t_3^2}, \frac{1}{t_2^2} > 4. \tag{3.19}$$



Joonis 3.2: λ_ϕ ja λ_S piirangute visualisatsioon. Vertikaalsel teljel on parameeter $a = s_2 t_3$ lubatud muutumispirkond, horisontaalsel teljel on piiranguteta segunemismurk α_1 . Värvikood näitab λ_ϕ alumisest piirangust P_ϕ ja λ_S alumisest piirangust P_S võetud maksimumi. On näha, et vähemalt üks piirangutest P_ϕ ja P_S ületab ükskõik millise parameetrite valiku korral arvu 0,38.

Rakendades neid võrratusi valemile (3.18), saame λ_ϕ jaoks võrratuse

$$\lambda_\phi > \frac{0,4}{v_h^2} (M_2^2 (c_1 - s_1 \cdot a)^2 + M_3^2 s_1^2), \quad (3.20)$$

kus oleme tähistanud $a = s_2 t_3$ ja kehtib $|a| < 0,25$.

Analoogselt saame valemist (3.13) λ_ϕ avaldiseks

$$\lambda_\phi = \frac{1}{8v_\varphi^2} \left(M_2^2 \left(\frac{c_1}{c_2 t_3} - s_1 t_2 \right)^2 + M_3^2 \frac{s_1^2}{s_3^2} \right). \quad (3.21)$$

Segunemismurgad rahuldavad endiselt tingimusi (3.19). Kui neid tingimusi rakendada valemile (3.21), saame λ_S jaoks

$$\lambda_S > \frac{1}{v_h^2} (0,36 M_2^2 (c_1 \cdot a + s_1)^2 + 0,4 M_3^2 c_1^2), \quad (3.22)$$

kus endiselt $a = s_2 t_3$ ja kehtib $|a| < 0,25$.

Tähistame nüüd $M_{\min} = \min(M_2, M_3)$ ning defineerime segunemisnurgast α_1 ja parameetrist $a = s_2 t_3$ sõltuvad suurused

$$P_\phi(\alpha_1, a) := 0,4 \left((c_1 - s_1 \cdot a)^2 + s_1^2 \right), \quad P_S(\alpha_1, a) := 0,36 (c_1 \cdot a + s_1)^2 + 0,4c_1^2. \quad (3.23)$$

Siis võrratustes (3.20) ja (3.22) võib asendada massid M_2 ja M_3 massiga M_{\min} , saame tulemuseks

$$\lambda_\phi > \frac{M_{\min}^2}{v_h^2} P_\phi(\alpha_1, a), \quad \lambda_S > \frac{M_{\min}^2}{v_h^2} P_S(\alpha_1, a). \quad (3.24)$$

Nüüd on võimalik uurida parameetrite ruumi kogu lubatud piirides ($-0,25 < a < 0,25$, $0 \leq \alpha_1 < 2\pi$). Numbriliselt arvatud tulemus on toodud joonisel 3.2. Jooniselt on näha, et kuidas iganes valida a ja α_1 lubatud piirides, siis vähemalt üks suurustest P_ϕ ja P_S on suurem arvust 0,38. Järelikult vähemalt üks seosekonstantidest λ_ϕ ja λ_S peab olema suurem kui $0,38M_{\min}^2/v_h^2$. Seega, kuna oleme seosekonstantidele fikseerinud ülempiiriks arvu 1, siis peab kehtima

$$M_{\min} < \frac{v_h}{\sqrt{0,38}} \approx 400 \text{ GeV}. \quad (3.25)$$

Seega praeguse analüüsi kohaselt ei saa mõlemad skalaarosakeste massid olla korraga suuremad kui 400 GeV ükskõik milliste segunemisnurkade valiku korral. Seda piirangut on veel võimalik täpsustada peamiselt kahel põhjusel. Esiteks, on $\max(P_\phi, P_S) > 0,38$, kuid erinevus on on 10% piires. Teiseks on piirang $|a| = |s_2 t_3| < 0,25$ liiga leebe, kuna võrdused $s_2 = 0,25$ ja $t_3 = 0,25$ ei saa korraga kehtida. Nende täpsustuste arvestamine võib tuua ülempiiri natuke allapoole, kuid olulisem mõju masside ülempiirangule tuleb konkreetsest parameetrite valikust.

Kokkuvõte

Käesoleva töö käigus uurisime skaalainvariantset tumeaine mudelit, kus Standardmodellile on lisatud üks uus kalibratsioonisümmeetria ning kaks selle sümmeetria all laetud skalaarset osakest. Tumeaine selles mudelis avaldub $U(1)_X$ sümmeetria pseudo-Goldstone'i bosonina, mis tagab alla surutud otsese detekteerimise amplituudi ja stabiilsuse.

Mudeli uurimine oli jaotatud kaheks. Kõigepealt uurisime mudeli täispotentsiaali, kus on otseselt välja toodud skaalainvariantsuse rikkumisel diskreetset sümmeetriat tekitavad liikmed. Täispotentsiaali uurimise eesmärk oli veenduda mudeli kvalitatiivsetes omadustes.

Pikemalt sai analüüsitud täispotentsiaali biruutlähendus, mis on kasutatav juhul, kui tumeaine massi määrav kordaja $\lambda'_{\phi S}$ on piisavalt väike. Biruutpotentsiaali uurimisel rakendasime Coleman-Weinbergi mehhanismi Gildeneri-Weinbergi lähenemist, et teooriasse genereerida elektronõrk massiskaala. Identifitseerisime Standardmodeli Higgsi osakese tasase suuna pseudo-Goldstone'i bosonina.

Leidsime mainitud eeldustel piirangud uute osakeste massidele ja segunemisenurkadele. Samuti leidsime, et kui interaktsioonibaasi ja massibaasi vahelised segunemisenurgad on kõik vahemikus $(0, \pi/2)$, on kordajate maatriks kopsitiivne ehk biruutpotentsiaal on alt tõkestatud. Kolmandana leidsime, et pärast skaalainvariantsuse rikkumist alles jäävad kaks uut osakest ei saa olla mõlemad korraga raskemad kui 400 GeV.

Kirjandus

- [1] S.L. Glashow. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics*, 22(4):579–588, 1961.
- [2] S. Weinberg. A model of leptons. *Phys.Rev.Lett.*, 19(21):1264–1266, 1967.
- [3] A. Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf.Proc. C*, 680519:367–377, 1968.
- [4] L. Susskind. Dynamics of spontaneous symmetry breaking in the Weinberg-Salam theory. *Phys.Rev. D*, 20(10):2619, 1979.
- [5] G.'t Hooft. Naturalness, Chiral Symmetry, and Spontaneous Chiral Symmetry Breaking. In *Hooft G. et al. (eds) Recent Developments in Gauge Theories*, volume 59 of *NATO Advanced Study Institutes Series (Series B. Physics)*, pages 207–216, Boston, MA, 1980. Springer.
- [6] S. Weinberg. Gauge hierarchies. *Phys.Lett. B*, 82(3–4):387–391, 1979.
- [7] S. Coleman, E. Weinberg. Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking. *Phys.Rev. D*, 7(6):1888, 1973.
- [8] E. Gildener, S. Weinberg. Symmetry breaking and scalar bosons. *Phys.Rev. D*, 13:3333, 1976.
- [9] V.C. Rubin, N. Thonnard, W.K. Ford, Jr. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 ($R = 4$ kpc) to UGC 2885 ($R = 122$ kpc). *Astrophys.J.*, 238:471, 1980.
- [10] D. Clowe, et al. A direct empirical proof of the existence of darkmatter. *Astrophys.J.*, 648:109–113, 2006. arXiv:astro-ph/0608407 [astro-ph].
- [11] Planck Collaboration. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy&Astrophysics*, page avalidamisel. arXiv:1807.06209.
- [12] C. Gross, O. Lebedev, T. Toma. Cancellation Mechanism for Dark-Matter–Nucleon Interaction. *Phys.Rev.Lett.*, 119(19), 2017. arXiv:1708.02253 [hep-ph].
- [13] A. Karam. *Phenomenological and Cosmological Implications of Classically Scale-Invariant Standard Model Extensions*. PhD thesis, University of Ioannina, Ioannina, 2018.

- [14] F. Mandl, G. Shaw. *Quantum Field Theory*. Second Edition. Wiley, 2010.
- [15] G. Aad, et al. (ATLAS Collaboration, CMS Collaboration). Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments. *Phys.Rev.Lett.*, 114(191803), 2015. arXiv:1503.07589 [hep-ex].
- [16] E. Halkiadakis, G. Redlinger, D. Shih. Status and Implications of Beyond-the-Standard-Model Searches at the LHC. *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, 64:319–342, 2014. arXiv:1411.1427 [hep-ex].
- [17] M.Šchumann. Direct detection of WIMP dark matter: concepts and status. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 46(10):103003, 2019. arXiv:1903.03026 [astro-ph.CO].
- [18] F. Zwicky. Spectral displacement of extra galactic nebulae. *Helv.Phys.Acta*, 6:110–127, 1933.
- [19] M. Heikinheimo et al. Physical naturalness and dynamical breaking of classical scale invariance. *Modern Physics Letters A*, 29(15):1450077, 2014. arXiv:1304.7006.
- [20] L. Alexander-Nunneley, A. Pilaftsis. The minimal scale invariant extension of the Standard Model. *J. High Energ. Phys.*, 21, 2010. arXiv:1006.5916 [hep-ph].
- [21] L. Marzola K. Kannike, A. Kubarski. Geometry of Flat Directions in Scale-Invariant Potentials, October 2019. arXiv:1904.07867 [hep-ph].
- [22] G. Bertone, D. Hooper, J. Silk. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. *Phys.Rept.*, 4(5):279–390, 2005. arXiv:0404175 [hep-ph].
- [23] R.K. Leane. *Phenomenology of Particle Dark Matter*. PhD thesis, University of Melbourne, Melbourne, 2017.
- [24] K. Kannike. Vacuum Stability Conditions From Copositivity Criteria. *Eur.Phys.J. C*, 72(2093), 2012. arXiv:1205.3781 [hep-ph].
- [25] K. Hadeler. On copositive matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 49:79–89, 2012.
- [26] A. Falkowski, C. Gross, O. Lebedev. A second Higgs from the Higgs portal. *J. High Energ. Phys.*, 57, 2015. arXiv:1502.01361 [hep-ph].
- [27] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). The Review of Particle Physics (2019). *Phys.Rev. D*, 98:030001, 2019.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Carel Kuusk,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Skaalainvariantne pseudo-Goldstone'i bosoni tumeaine,

mille juhendajad on Kristjan Kannike ja Martti Raidal, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. olen teadlik, et punktis 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Carel Kuusk,

Tartu, 29. mai 2020. a.