

TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Keemilise ja bioloogilise füüsika instituut

Aleksei Kubarski

**PÖÖRD-KIIGEMEHHANISM GILDENERI-WEINBERGI
FORMALISMI EDASIARENDUSES**

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja:
Dr Kristjan Kannike

Tartu 2021

Pöörd-kiigemehhanism Gildeneri-Weinbergi formalismi edasiarenduses

Standardmudeli neutriinod on massitud, mis on aga vastuolus arvukate vaatlusandmetega. Samuti on standardmudeli vaakum ebastabiilne ja ainus dimensiooniga parameeter – Higgsi bosoni massiparameeter põhjustab nn hierarhiaprobleemi. Üks neutriinodele massi andmise võimalustest on pöörd-kiigemehhanism, kus kahe fermioni sissetoomisel saavad kerged neutriinod loomulikult moel väiksed massid. Hierarhiaprobleemi lahenduseks nõuame skalaarvälja potentsiaalilt klassikalist skaalainvariantsust, kus sümmeetriarikkumine toimub kiiruslikult. Mitme skalaarväljaga potentsiaale käsitleb Gildeneri-Weinbergi formalism, kus potentsiaali miinum tekkib kvantparandustest tasasel suunal. Antud töö raames leidsime uue meetodi tasase suuna uurimiseks Gildeneri-Weinbergi formalismis. Meetod põhineb asjaolul, et ruutpotentsiaali interaktsioonimaatriksi determinant on null tasases suunas. Rakendasime meetodit ka kiirusliku sümmeetriarikkumisega pöörd-kiigemehhanismi mudelile. Leidsime piisavalt suure parameetruumi väikse Higgsi bosoni segunemise korral.

Märksõnad: efektiivne potentsiaal, klassikaline skaalainvariantsus, neutriino mass, pöörd-kiigemehhanism

CERCS: P210 – Elementaarosakeste füüsika, kvantväljade teooria

Inverse seesaw via a new approach to Gildener-Weinberg formalism

Neutrinos in the standard model are massless, which contradict numerous experiments. Also, vacuum of standard model is unstable and the only dimensionful parameter of standard model, causing the so-called hierarchy problem for the Higgs boson. One way of giving mass to neutrinos is the inverse seesaw mechanism, where neutrino masses become naturally small by introducing two fermions. One solution for hierarchy problem is to demand classical scale invariance with radiative symmetry breaking. Potentials with several scalar field can be approached with Gildener-Weinberg formalism, where the minimum of potential occurs in a flat direction due to quantum corrections. We propose a novel technique for investigating the appearance of a flat direction in Gildener-Weinberg formalism. The method builds on the observation that, in presence of a flat direction, the determinant of the quartic coupling matrix of a biquadratic potential vanishes. We used the new approach on inverse seesaw model with radiative symmetry breaking and investigated allowed parameter space of model, which was large enough for small Higgs boson mixing.

Keywords: effective potential, classical scale invariance, neutrino mass, inverse seesaw

CERCS: P210 – Elementary particle physics, quantum field theory

Sisukord

Sissejuhatus	5
1 Elementaarosakeste standardmudel	7
1.1 Standardmudeli elementaarosakesed	7
1.1.1 Kalibratsioonisektor	7
1.1.2 Aine sektor	8
1.1.3 Higgsi sektor	9
1.1.4 Yukawa sektor ja neutriinode massi probleem	10
1.2 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sümmeetria spontaanne rikkumine	10
1.3 Kvantparandused ja renormeerimismeetodid	11
1.4 Vaakumstabiilsus	11
2 Neutriino massi tekitamine	13
2.1 Diraci massiliige	13
2.2 Majorana massiliige	13
2.3 I tüüpi kiigemehhanism	14
2.4 I tüüpi pöörd-kiigemehhanism	15
3 Efektiivne mõju ja potentsiaal	16
3.1 Klassikaline skaalainvariantus	17
3.2 Efektiivse potentsiaali näide $U(1)$ sümmeetrias	18
3.3 Gildeneri-Weinbergi käsitlus	19
4 Uus meetod tasase suuna leidmisel	22
5 Pöörd-kiigemehhanismi mudel	27
5.1 Kiirguslik sümmeetriarikkumine	29
5.2 Neutriino mass	31
5.3 Lubatud parameetrite ruum	32

5.3.1	Skalaarväljade interaktsioonikonstandid ja segunemisnurgad	32
5.3.2	Yukawa interaktsioonid ja neutriino mass	33
	Kokkuvõte	37
	Summary	39
	Kirjandus	41
	Lihtlitsents	43

Sissejuhatus

Kõiki teadaolevaid elementaariosakesi ja nendevahelisi interaktsioone on juba aastakümneid edukalt kirjeldanud elementaariosakeste standardmudel [1, 2, 3]. Siiski leidub mudelis veel palju nii teoreetilisi kui ka eksperimentaalseid ebakooskõlasid.

Standardmudelis on neutriinod massitud fermionid, aga arvukad eksperimendid on näidanud, et vähemalt kahel neutriinol on nullist erinev mass [4, 5, 6]. Isegi kui tuua standardmudelisse sisse tavalised Diraci paremakäelised neutriinod, mis võimaldaks, sarnaselt teistele massiga osakestele, anda neutriinodele massi, siis ei seletaks see, miks neutriinod on teistest osakestest niivõrd kergemad [7]. Küll aga seletab neutriinode massi väiksust nn kiigelaumehhanism, kus kergete neutriinode mass tuleb loomulikult viisil väikesed, sest on allasurutud Majorana paremakäeliste neutriinode suure massiga [8, 9, 10, 11].

Standardmudeli parameetritest on Higgsi massiliige ainus dimensiooniga suurus, mis määrab elektronõrga skaala $\sim 100 \text{ GeV}/c^2$ ümbrusesse [12]. Kuna Higgsi massiliige ei ole kaitstud ühegi sümmeetriaga, siis võib see saada kvantparandusi, mis on üldiselt propartsioonis uue füüsika energiaskaalaga. Teame, et standardmudel võib kehtida Plancki skaalani ($\sim 10^{19} \text{ GeV}/c^2$), mis on elektronõrga skaalast palju suurusjärke suurem. Kuna parandused võivad tulla osakeselt, mis on Plancki skaala lähedal, siis mõõdetud Higgsi mass on ebaloomulikult väike, mis nõuaks parameetrite peenhäälestust. Seda ebaloomulikust nimetatakse hierarhiaprobleemiks. Selle probleemi üheks lahenduseks on skaalainvariantsus, kus lubame lagranžaanis ainult massidimensiooniga $d = 4$ operaatoreid. Sellisel juhul on mudel klassikaliselt sõltumatu valitud energiaskaalast. Potentsiaali miinimum ja sümmeetriarikkumine tulenevad aga kvantparandustest [13]. Eriti huvitav on olukord mitme skalaarväljaga, mida käsitleb Gildeneri-Weinbergi formalism, kus skalaarväljade potentsiaali miinimum kulgeb mööda statsionaarset joont (nn tasast suunda) ja saab nullist erineva väärtuse kvantparandustest [14].

Lisaks mainime, et praeguste mõõtmisandmete kohaselt ei ole Higgsi eneseinteraktsioon positiivne igal energiaskaalal, millest järeldub, et standardmudelis on praegune vaakum ebastabiilne [15]. Samuti ei suuda standardmudel ära seletada mitmeid kosmoloogilisi vaatlusi

nagu näiteks tumeaine olemasolu (vt. nt. [16]).

Antud töös pakkume lahendust eelnimetatud probleemidele standardmudeli laiendusega. Me toome sisse uusi fermione ja skalaarvälju, mis tekitavad pöörd-kiigemehhanismi abil standardmudeli neutriinodele massi ning seletavad ka ära selle väiksuse. Uued skalaarosakesed aitavad parandada vaakumstabiilsust ja pakuvad kandidaadi tumeaineks. Me loobume dimensiooniga parameetritest, nõudes mudelilt klassikalist skaalainvariantsust, nii et vaakumi keskvärtus on saavutat kvantparanduste abil vastavalt Gildeneri-Weinbergi käsitlusele. Antud töö üheks märkimisväärseks saavutuseks on Gildeneri-Weinbergi käsitluse edasiarendus, mis tunduvalt lihtsustab arvutusi.

Töö käigus kasutame nn loomulikke ühikuid, kus $c = \hbar = 1$.

Peatükk 1

Elementaarosakeste standardmudel

Elementaarosakeste standardmudel (edaspidi lihtsalt standardmudel) on relativistlik kvantväljateooria, mis kirjeldab kõiki teadaolevaid elementaarosakesi ja nendevahelisi interaktsioone kalibratsiooniväljadega (v.a gravitatsioon). Gravitatsioon on standardmudeli energiaskaaladel tühiselt väike. Alljärgnev käsitlus toetub peamiselt [17].

Standardmudeli lagranžiaan jääb invariantseks kalibratsioonisümmeetriarühma

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \quad (1.1)$$

teisenduste suhtes, kus $SU(3)_C$ sümmeetria on seotud kvantkromodünaamikaga, mis kirjeldab tugevat vastastikmõju, $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ aga elektronõrka vastastikmõju kirjeldava kvantelektrodünaamikaga.

1.1 Standardmudeli elementaarosakesed

Standardmudeli lagranžiaan võib jagada omakorda neljaks sektoriks:

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{\text{kalib}} + \mathcal{L}_{\text{aine}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}, \quad (1.2)$$

kus $\mathcal{L}_{\text{kalib}}$ on kalibratsiooni-, $\mathcal{L}_{\text{aine}}$ aine-, $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$ Higgsi- ja $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ Yukawa sektori lagranžiaan.

1.1.1 Kalibratsioonisektor

Igale kalibratsioonisümmeetriarühmale vastab oma kalibratsiooniboson:

$$SU(3) : G_{\mu\nu}^\alpha, \quad SU(2) : W_{\mu\nu}^a, \quad U(1) : B_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Rühma generaatorite kuju sõltub esitusest, aga nende kommutaatorid rahuldavad tingimust

$$[t^a, t^b] = i\varepsilon^{abc}t^c, \quad (1.4)$$

$$[T^\alpha, T^\beta] = if^{\alpha\beta\gamma}T^\gamma, \quad (1.5)$$

kus $t^a, a = 1, 2, 3$ on $SU(2)$ generaatorid ja $T^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, 8$ on $SU(3)$ generaatorid. ε^{abc} on Levi-Civita sümbol ja $f^{\alpha\beta\gamma}$ on struktuurikonstandid. $U(1)$ generaator on ühiselt määratletud kui $T_{U(1)} = 1$.

Kalibratsioonisektori lagranžiaan

$$\mathcal{L}_{\text{kalib}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^\alpha G^{\mu\nu\alpha} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (1.6)$$

sisaldab kalibratsioonibosonite kineetilisi liikmeid ja interaktsioone. Kõik kalibratsioonibosonid on spinn-1 osakesed, mis vahendavad aineosakeste vahelisi jõude.

1.1.2 Aine sektor

Aine osakesteks on spinn-1/2 fermionid, mis omakorda jagunevad kvarkideks ja leptoniteks. Kvargid osalevad tugevas vastastikmõjus ja jagunevad u -tüüpi ja d -tüüpi kvarkideks, mis erinevad omavahel elektrilaengu poolest. Leptonid tugevas vastastikmõjus ei osale ning jagunevad elektrilaenguga leptoniteks ja neutriinodeks. Fermionid jagunevad kolmeks erinevaks generatsiooniks ehk lõhnaks, mis erinevad üksteisest ainult massi poolest. Eksperiment näitas, et nõrga interaktsiooni laetud vooludes (näiteks beetalagunemisel) osalevad ainult vasakukäelised fermionid (ja paremakäelised antifermionid). Seepärast teisenevad vasakukäelised kvargid ja leptonid teisenevad $SU(2)$ all kui dubletid

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

ja paremakäelised kvargid ja leptonid kui singletid e_R, u_R, d_R . Aine sektori lagranžiaan kirjeldab aine kineetilisi liikmeid ja interaktsioone kalibratsiooniväljadega:

$$\mathcal{L}_{\text{aine}} = \sum_i \left[i\bar{L}_L^{(i)} \gamma^\mu D_\mu L_L^{(i)} + i\bar{e}_R^{(i)} \gamma^\mu D_\mu e_R^{(i)} + i\bar{Q}_L^{(i)} \gamma^\mu D_\mu Q_L^{(i)} + i\bar{u}_R^{(i)} \gamma^\mu D_\mu u_R^{(i)} + i\bar{d}_R^{(i)} \gamma^\mu D_\mu d_R^{(i)} \right], \quad (1.8)$$

kus D_μ on kalibratsioonivälju sisaldav kovariantne tuletis ja γ^μ on Diraci maatriksid, mis avalduvad standardesitluses läbi Pauli maatriksite τ^i ja ühikmaatriksi I_2 kui

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \tau^i \\ -\tau^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

1.1.3 Higgsi sektor

Lisaks aine osakestele ja kalibratsioonibosonitele on standardmudelil ka üks spinn-0 skalaarväli: Higgsi boson. Nullist erineva vaakumi keskväärtuse tõttu rikub Higgsi väli $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sümmeetriat (millest on lähemalt juttu alampeatükis 1.2), mis võimaldab anda teistele standardmudeli osakestele massid. Higgsi bosoni dubletti võib kirja panna potentsiaali miinimumi ümber kui

$$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_h + h + i\chi) \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

kus ϕ^+ ja ϕ^0 on kompleksed väljad. Neutraalne kompleksne väli ϕ^0 sisaldab endas massiivset reaalselt skalaari (Higgsi bosonit) h , selle skalaari vaakumi keskväärtust v_h ja mittefüüsikalist Goldstone'i bosonit χ , mis koos teise mittefüüsikalise Goldstone'i bosoniga ϕ^+ annavad sümmeetriarikkumisel lisavabadusastmeid interaktsioonibosonitele. Higgsi sektor kirjeldab kalibratsiooniväljade masse, Higgsi bosoni interaktsioone kalibratsiooniväljadega ja eneseinteraktsioone ning samuti Higgsi bosoni kineetilist liiget:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D^\mu H)^\dagger (D^\mu H) - V(H), \quad (1.11)$$

kus Higgsi bosoni skalaarvälja potentsiaal on

$$V(H) = -\mu_h^2 H^\dagger H + \lambda_h (H^\dagger H)^2. \quad (1.12)$$

Higgsi bosonil puudub interaktsioon $SU(3)_C$ kalibratsioonibosoniga (gluoniga), mis tõttu gluon jääb massituks. Samuti $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ kalibratsioonibosonite massimaatriksil on üks

massi omaväärtustest null, mistõttu üks bosonitest, footon, jääb massita.

1.1.4 Yukawa sektor ja neutriinode massi probleem

Fermionid saavad oma massi läbi parema- ja vasakukäeliste interaktsiooni Higgsi bosoni skalaarväljaga:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_i \left[Y_l^{(i)} \left(\bar{L}_L^{(i)} H e_R^{(i)} + \bar{e}_R^{(i)} H L_L^{(i)} \right) \right] \quad (1.13)$$

$$+ Y_d^{(i)} \left(\bar{Q}_L^{(i)} H d_R^{(i)} + \bar{d}_R^{(i)} H Q_L^{(i)} \right) + Y_u^{(i)} \left(\bar{Q}_L^{(i)} \tilde{H} u_R^{(i)} + \bar{u}_R^{(i)} \tilde{H} Q_L^{(i)} \right) \Big], \quad (1.14)$$

kus $\tilde{H} = i\tau_2 H^*$ ja $Y_{l,d,u}$ on interaktsioonitugevust kirjeldavad 3×3 kompleksed maatriksid.

Eksperimentaalselt on avastatud ainult vasakukäelised neutriinod, mistõttu standardmudeli lagranžiaanis ei ole liiget, mis annaks neutriinodele massi. See tähendab omakorda, et kõik interaktsioonitugevused ja massi omaolekud on standardmudelis samad kõikide neutriino generatsioonide jaoks. Arvukad vaatlused on aga leidnud, et neutriinode massi ja kalibratsiooni omaolekud ei lange kokku. Järelikult vajab standardmudeli lagranžiaan täiendust, mis annaks neutriinodele massi.

1.2 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sümmeetria spontaanne rikkumine

Sümmeetria spontaanses rikkumises põhirole ei säilita kõiki mõju sümmeetriaid. Kui Higgsi potentsiaali (1.12) parameetrid $\mu_h^2 = m_h/2 > 0$ (Higgsi bosoni massiliige) ja $\lambda_h > 0$ (Higgsi bosoni eneseinteraktsiooni tugevus), siis tekkib potentsiaalis nullist erinev miinimum kohal

$$v_h = \sqrt{\frac{\mu_h^2}{\lambda_h}}, \quad (1.15)$$

ja seega omab Higgsi bosoni väli nullist erineva vaakumi keskvaartust

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_h \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Kuigi standardmudeli lagranžiaan on invariantne $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sümmeetriateisenduste suhtes, siis nüüd tekivad Higgsi ja Yukawa sektoris (vt alampeatükke 1.1.3 ja 1.1.4) lagranžiaani Higgsi vaakumi keskvaartusega liikmed, mis rikuvad esialgset sümmeetriat, täpsemalt $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$.

Selle sümmeetriarikkumise tagajärjel tekivad standardmudelite osakestele massid, millest suuremad on top-kvargi mass $m_t = v_h y_t / \sqrt{2}$, W bosoni mass $m_W^2 = g_2^2 v_h^2 / 4$ ja Z bosoni mass $m_Z^2 = (g_2^2 + g_Y^2) v_h^2 / 4$, kus g_2 ja g_Y on vastavalt $SU(2)_L$ ja $U(1)_Y$ kalibratsiooninteraktsiooni tugevused.

1.3 Kvantparandused ja renormeerimismeetodid

Häiritusarvutusi kirjeldatakse Feynmani diagrammidega, kõige madalam järk on klassikaline füüsika, mida kirjeldavad nn. puutaseme diagrammid (graafid), kõrgemates järkudes on silmused, mille siseimpulss ei ole seotud välisimpulssiga, mis tekitab häiritusarvutustesse mittefüüsikalised lõpmatused [18]. Eksisteerib erinevaid renormeerimismeetodeid, mis võimaldavad neid lõpmatusi lõpparvutustest likvideerida. Selle töö raames kasutame dimensionaalset regulariseerimisest tulenevat muudetud minimaalset lahutamisskeemi (ehk \overline{MS} skeemi).

Dimensionaalne regulariseerimise üks tagajärgedest on energiaskaala μ arvutustesse sisseviimine. Kuna aga välised suurused ei tohi sõltuda suvaliselt valitud energiaskaalast, siis seosekonstandid ei ole enam konstantsed, vaid sõltuvad energiaskaalast μ , mis võib seostada osakeste kokkupõrkeenergiatega. Interaktsioonikonstantide sõltuvust energiaskaalast kirjeldavad renormeerimisrühma võrrandid.

1.4 Vaakumstabiilsus

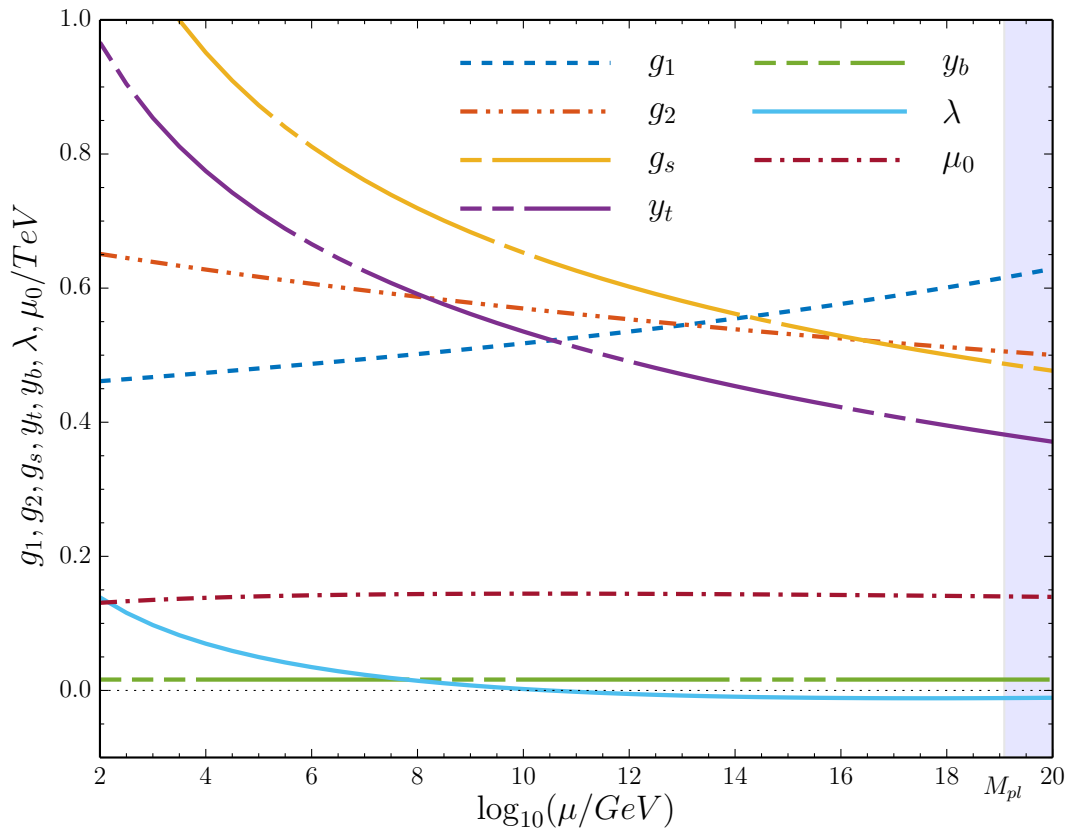
Higsi eneseinteraktsiooni väärtus on mõõdetud

$$\lambda_h \simeq 0,13. \quad (1.17)$$

Ühe silmuse kvantparandused \overline{MS} skeemis kirjeldab Higsi bosoni eneseinteraktsiooni muutust kui

$$(4\pi)^2 \frac{d\lambda_h}{d \ln \mu} \approx 24\lambda_h^2 + 12\lambda_H y_t^2 - 3y_t^4, \quad (1.18)$$

kus interaktsioonid kalibratsioonibosonite ja skalaarväljadega mõjutab muutust positiivses suunas ning Yukawa interaktsioonid negatiivses suunas. Suure top kvargi Yukawa interaktsiooni pärast muutub λ_h suurtel energiatel (umbes 10^{10} GeV) negatiivseks nagu näha joonisel 1.1 (helesinine joon). Kui λ_h on negatiivne, siis Higsi bosoni välja potentsiaal (1.12) ei ole enam altpoolt tõkestatud ja praegune vaakumi keskvärtus on lokaalne, mitte globaalne, miinimum [15]. Standardmudel is mõõdetud parameetrite kohaselt oleme praegu metastabiilses vaakumis,



Joonis 1.1: Standardmudeli interaktsioonikonstantide sõltuvus energiaskaalast μ .

kus iga hetk võib tekkida õige vaakumi mull, mis aegruumis levima hakkab. Vaakumstabiilsust aitaks parandada uued skalaarsed interaktsioonid (vt. nt. [19]).

Peatükk 2

Neutriino massi tekitamine

2.1 Diraci massiliige

Kõige lihtsam viis neutriino massi tekitamiseks on tuua sisse paremakäelised neutriinod (vt. nt. [7]). Neutriinode massiliige lagranžiaanis saab kuju

$$-\mathcal{L}_D = m_D^{ij}(\bar{\nu}_{L_i} N_{R_j} + \bar{N}_{R_i} \nu_{L_j}), \quad (2.1)$$

kus N_R on paremakäelised neutriinod, $\bar{\nu}_L$ on vasakukäelised neutriinod ja $m_D = Y_\nu v_h$ on Yukawa interaktsioonist tulenev massiliige. Sellisel lähenemisel on Yukawa interaktsioon neutriinode ja Higgsi bosoni vahel ebaloomulikult väike võrreldes teiste standardmudeli osakestega.

2.2 Majorana massiliige

1937. aastal avastas Itaalia füüsik Ettore Majorana, et massiivseid neutraalseid fermione (nagu näiteks neutriinod) võib kirjeldada ainult kahe vabadusastmega spiinoritena ψ , kui rakendada nn Majorana tingimus:

$$\psi = \psi^c, \quad (2.2)$$

kus $\psi^c = \mathcal{C}\bar{\psi}^T$ ja \mathcal{C} on laengu konjugaadi operaator. On võimalik veenduda, et sellisel juhul ei ole parema- ja vasakukäelised spiinorid omavahel sõltumatud, vaid kehtib seos

$$\psi_R = \psi_L^c. \quad (2.3)$$

Seega on võimalik lisada lagranžiaani veel ka Majorana massiliikmed

$$-\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}m_L^{ij}(\bar{\nu}_{L_i}^c \nu_{L_j} + \bar{\nu}_{L_i} \nu_{L_j}^c) + \frac{1}{2}m_R^{ij}(\bar{N}_{R_i}^c N_{R_j} + \bar{N}_{R_i} N_{R_j}^c), \quad (2.4)$$

mida on koos Diraci massiliikmega võimalik kokku võtta kujul

$$-\mathcal{L}_{D+M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^c & \bar{N}_R \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} + h.c \quad (2.5)$$

kujul. Massimaatriks \mathbf{M} on aga

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_L & \mathbf{m}_D^T \\ \mathbf{m}_D & \mathbf{m}_R \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Kui neutriinod on Majorana osakesed, siis nende interaktsioon skalaarvälja ja kalibratsioonibosonitega rikub leptonarvu, sest lagranžiaani tekkivad interaktsiooniliikmed nagu

$$-\mathcal{L}_{\text{int}} = Y_D^{ij} \bar{L}_i N_{R_j} i\tau_2 H^* + \frac{1}{2} \bar{N}_{R_i}^c D_{M_i} N_{R_j} + \frac{1}{2} \bar{\nu}_{L_i}^c D_{M_i} \nu_{L_j} + h.c. \quad (2.7)$$

2.3 I tüüpi kiigemehanism

Kui ainult paremakäelised neutriinod on Majorana osakesed, siis $\mathbf{m}_L = \mathbf{0}$ [8, 9, 10, 11]. Massimaatriks saab siis kuju

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m}_D^T \\ \mathbf{m}_D & \mathbf{m}_R \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Kui $\mathbf{m}_R \gg \mathbf{m}_D$, siis massimaatriksi omaväärtused on

$$\mathbf{m}_{\text{raske}} \approx \mathbf{m}_R, \quad \mathbf{m}_{\text{kerge}} \approx \mathbf{m}_D^T \frac{1}{\mathbf{m}_R} \mathbf{m}_D. \quad (2.9)$$

Standardmudeli neutriino saab endale massi $\mathbf{m}_{\text{kerge}}$, mis on väike, sest on alla surutud \mathbf{m}_R suure massiga.

2.4 I tüüpi pöörd-kiigemehhanism

Toome sisse lisaks paremakäeliste neutriinodele ka fermioni S_L leptonarvuga $S_L = +1$ [20, 21]. Pöörd-kiigemehhanismis on S_L Majorana osake ja uute osakeste lagranžiaani massiliikmed on

$$-\mathcal{L}_N = m_D^{ij} \bar{\nu}_{L_i} N_{R_j} + M_R^{ij} \bar{N}_{R_i} S_{L_j} + \mu^{ij} \tilde{S}_{L_i} S_{L_j} + h.c., \quad (2.10)$$

kus $\tilde{S}_L = S_L^T \mathcal{C}^{-1}$. Pöördkiigemehhanismi lagranžiaanis on \mathbf{m}_D ja \mathbf{M}_R sisaldavad liikmed Diraci massiliikmed ja μ -ga liikmed Majorana massiliikmed. Kuna Majorana massiliige μ rikub leptonarvu sümmeetriat otseselt, siis on mõistlik eeldada, et ta on võrreldes teiste liikmetega väike. Massimaatriks (ν_L, N_R, S_L) baasis saab kuju

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m}_D^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_D & \mathbf{0} & \mathbf{M}_R \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_R & \mu \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Kui $\mathbf{M}_R \gg \mathbf{m}_D, \mu$, siis massimaatriksi omaväärtustest saame kaks rasket osakest ja ühe kerge

$$\mathbf{m}_{\text{kerge}} = \mathbf{m}_D \frac{1}{\mathbf{M}_R} \mu \frac{1}{\mathbf{M}_R} \mathbf{m}_D^T, \quad (2.12)$$

mis on allasurutud nii suure M_R kui ka väikse μ väärtusega. Seda osakest saab seostada standardmudeli neutriinoga.

Erinevalt kiigemehhanismist on pöörd-kiigemehhanismis võimalik saavutada märkimisväärselt suurem leptonarvu rikkumine.

Peatükk 3

Efektiivne mõju ja potentsiaal

Skalaarne kvantväljateooria on määratud üleeteede integraaliga

$$Z = e^{iW(J)} = \int D\varphi e^{i[\int d^4x \mathcal{L} + \int d^4x J\varphi]}, \quad (3.1)$$

kus Z on Greeni funktsiooni genereeriv funktsionaal ja J väline allikas. $W(J)$ on defineeritud kui vaakumenergia funktsionaal välise allika olemasolul [18, 22]. Kui me defineerime klassikalise välja kui

$$\varphi_{kl} = \frac{\delta W(J)}{\delta J} = \frac{1}{Z} \int D\varphi e^{i[\int d^4x \mathcal{L} + \int d^4x J\varphi]} \varphi, \quad (3.2)$$

siis energia funktsionaali Legendre teisendusega saab leida efektiivse mõju

$$\Gamma(\varphi_{kl}) = W(J) - \int d^4x J\varphi. \quad (3.3)$$

Peale rittaarendust saab efektiivne mõju kuju

$$\Gamma(\varphi_{kl}) = \int d^4x \left[-V_{\text{ef}}(\varphi_{kl}) + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_{kl} \partial^\mu \varphi_{kl} Z(\varphi_{kl}) + \dots \right], \quad (3.4)$$

kus V_{ef} on efektiivne potentsiaal. Efektiivse mõju funktsionaalne tuletis φ_{kl} suhtes on

$$\frac{\delta \Gamma(\varphi_{kl})}{\delta \varphi_{kl}} = -J. \quad (3.5)$$

Kui J ja φ_{kl} on aegruumi koordinaatidest sõltumatud ja väline allikas puudub ($J = 0$), siis saab

tuletis (3.5) kuju

$$\frac{\delta V_{\text{ef}}(\varphi_{\text{kl}})}{\delta \varphi_{\text{kl}}} = -J = 0. \quad (3.6)$$

Antud tulemus näitab, et efektiivse potentsiaali uurimine annab hea ülevaate vaakumi struktuurist. Nimelt, arvestades et, kanoonilises formalismis on $\varphi_{\text{kl}} = \langle 0 | \hat{\varphi} | 0 \rangle$, siis avaldise (3.6) kohaselt on välja vaakumi keskvaertus määratletud efektiivse potentsiaali miinimumiga.

3.1 Klassikaline skaalainvariantsus

Standardmudel is on kõik operaatorid renormeeritavad ja dimensioonitute interaktsioonikonstantidega. Ainsaks erandiks on Higgsi massiparameeter μ_h [12]. Skaalainvariantsuse nõudmine klassikaliste väljade puhul seletab ära, miks kõik looduses esinevad jõud on renormeeritavad. Neljamõõtmelises ruumis on skaalainvariantsuse puhul lubatud lagranžiaanid ainult massidimensiooniga $d = 4$ operaatorid – vastasel juhul interaktsioonikonstandid ei oleks sõltumatud valitud energiaskaalast. Selle demonstreerimiseks vaatleme skalaarvälja φ lagranžiaani

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \mu_\varphi^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!} \lambda_\varphi \varphi^4. \quad (3.7)$$

Vaatleme nüüd, kuidas antud lagranžiaaniga mõju teiseneb dilatsiooni koordinaatteisenduse

$$x \rightarrow \sigma^{-1} x \quad (3.8)$$

all, kus $\sigma > 0$ [23].

Arvestades, et tuletis ja skalaar teisenevad vastavalt $\partial_\mu \rightarrow \sigma \partial_\mu$ ja $\varphi(x) \rightarrow \sigma \varphi(\sigma^{-1} x)$, siis mõju teiseneb kui

$$S[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \mu_\varphi^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!} \lambda_\varphi \varphi^4 \right] \rightarrow \quad (3.9)$$

$$S[\sigma \varphi(\sigma^{-1} x)] = \int_{-\sigma^{-1} \infty}^{\sigma^{-1} \infty} d^4(\sigma^{-1} x) \left[\frac{1}{2} \sigma^4 \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \sigma^2 \mu_\varphi^2 \varphi^2 - \sigma^4 \frac{1}{4!} \lambda_\varphi \varphi^4 \right] = \quad (3.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \sigma^{-2} \frac{1}{2} \mu_\varphi^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!} \lambda_\varphi \varphi^4 \right]. \quad (3.11)$$

Nagu on näha real (3.11), siis massidimensiooniga μ_φ konstandi liige ei ole dilatsiooni koordinaatteisenduse all invariantne. Seega (3.7) lagranžiaan ei ole skaalainvariantne. Seega, kui me nõuame skaalainvariantsust, siis Higgsi bosoni klassikalisel skalaarväljal ei saa olla

massiliiget μ_h liiget, millela puudub väljal nullist erinev vaakumi keskväärtus. Nullist erinevat vaakumi keskväärtust on võimalik siiski saavutada efektiivse potentsiaaliga ehk kvantparandusi arvestades.

3.2 Efektiivse potentsiaali näide $U(1)$ sümmeetrias

Vaatleme klassikaliselt massitut $U(1)$ kalibratsioonisümmeetria ja komplekse skalaarväljaga lagranžiaani [13]:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4!} \lambda (\Phi \Phi^\dagger)^2, \quad (3.12)$$

kus $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ on kompleksne skalaarväli ja $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ on kovariantne tuletis, kus e on kalibratsiooniinteraktsiooni konstant. $F^{\mu\nu}$ on välja tugevuse tensor. Efektiivse potentsiaali invariantsus kalibratsiooniteisenduste suhtes sõltub ainult skalaarväljast $\phi_{kl}^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2$. Klassikaliselt ei riku skalaarväli $U(1)$ sümmeetriat, sest välja potentsiaalil puudub nullist erinev miinimum.

Ühe silmuse kvantparandustega efektiivne potentsiaal $\overline{\text{MS}}$ skeemis on

$$V_{\text{ef}} = \frac{1}{4!} \lambda \phi_{kl}^4 + \left(\frac{\lambda^2}{256\pi^2} + \frac{3e^4}{64\pi^2} \right) \phi_{kl}^4 \left(\ln \frac{\phi_{kl}^2}{\mu^2} - \frac{25}{6} \right). \quad (3.13)$$

Et miinimum saaks tekkida ja et perturbatiivsus säiliks, siis $\lambda \sim e^4$ peab olema väike. Seepärast jätame tühiselt väikse λ^2 sisaldavat liikme välja:

$$V_{\text{ef}} \approx \frac{1}{4!} \lambda \phi_{kl}^4 + \frac{3e^4}{64\pi^2} \phi_{kl}^4 \left(\ln \frac{\phi_{kl}^2}{\mu^2} - \frac{25}{6} \right). \quad (3.14)$$

Kuna renormeerimisskaala μ on suvaline, siis võime valida selle väärtuse selliselt, et kvantparanduste logaritmid oleksid võimalikult väikesed. Kui valime nüüd renormeerimisskaala võrdseks vaakumi keskväärtusega $v_{\phi_{kl}} = \langle \phi_{kl} \rangle$, siis saame miinimumis

$$\lambda = \frac{33}{8\pi} e^4. \quad (3.15)$$

Asendades λ efektiivses potentsiaalis, saame et

$$V_{\text{ef}} \approx \frac{3e^4}{64\pi^2} \phi_{kl}^4 \left(\ln \frac{\phi_{kl}^2}{v_{\phi_{kl}}^2} - \frac{1}{2} \right). \quad (3.16)$$

Esiialgu dimensioonitu λ -st sõltuv potentsiaal, nüüd sõltub massidimensiooniga $v_{\phi_{kl}}$ -st. Sellist olukorda nimetatakse dimensionaalseks transmutatsiooniks. Kuigi mudel ei sisaldab ainult dimensioonituid parameetreid, dimensionaalse transmutatsiooni tõttu on nüüd mudelil massiskaala $v_{\phi_{kl}}$.

Nullist erineva vaakumi keskvärtuse tõttu on nüüd $U(1)$ sümmeetria rikutud ning lagranžiaanis (3.12) tekkivad massiliikmed

$$m_A = e^2 v_{\phi_{kl}}, \quad m_{\phi_{kl}} = \frac{d^2 V}{d\phi_{kl}^2} = \frac{3e^4}{8\pi^2} v_{\phi_{kl}}^2. \quad (3.17)$$

3.3 Gildeneri-Weinbergi käsitlus

Vaatleme nüüd kõige üldisemat neljanda astme klassikaliselt skaalainvariantset potentsiaali

$$V(\Phi) = \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} \lambda_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l, \quad (3.18)$$

kus väljavektoril Φ on n reaalselt skalaarset vabadusastet ja λ_{ijkl} on interaktsioonide sümmeetriline tensor [14] (lähtume käsitlusel peamiselt töödest [23, 17]). Kvantparandusteta ehk puutasemel on kõik välja osakesed massitud ja potentsiaal on alt tõkestatud nii, et $V(\Phi) \geq 0$. Väljavektorit Φ saab parametrizeerida nii, et $\Phi = \varphi \mathbf{N}$, kus φ on radiaalkomponent ühikvektori \mathbf{N} suunal. Renormeerimisskaala on valitud nii, et potentsiaalimiinum on null ühiksfääril $\mathbf{N}\mathbf{N}^T = 1$. Olgu meil ühikvektori $\mathbf{N} = \mathbf{n}$ suunal tasane suund ehk statsionaarne potentsiaal. Sellisel juhul potentsiaal peab täitma tingimust $\nabla_{\mathbf{N}} V(\mathbf{N})|_{\mathbf{N}=\mathbf{n}} = 0$ ehk (3.18) potentsiaali puhul

$$\sum_{j,k,l} \lambda_{ijkl} \phi_j \phi_k \phi_l = 0. \quad (3.19)$$

Tasane suund on lokaalne miinum, kui Hesse maatriks

$$P_{ij} = \frac{\partial^2 V(\mathbf{N})}{\partial N_i \partial N_j} = \sum_{k,l} \lambda_{ijkl} \phi_k \phi_l = 0 \quad (3.20)$$

on positiivselt poolmääratud (ehk täidab tingimust $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \geq 0$ suvalise $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{P})}$ korral). Sellisel juhul on ühe silmuse kvantparandused $\overline{\text{MS}}$ skeemis kujul

$$V^{(1)}(\varphi \mathbf{n}) = A(\mathbf{n}) \varphi^4 + B(\mathbf{n}) \varphi^4 \ln \frac{\varphi^2}{\mu^2}, \quad (3.21)$$

kordajatega

$$A(\mathbf{n}) = \frac{1}{64\pi^2 v_\varphi^4} \left\{ \text{tr} \left[\mathbf{m}_S^4 \left(\ln \frac{\mathbf{m}_S^2}{v_\varphi^2} - \frac{3}{2} \right) \right] \right. \quad (3.22)$$

$$\left. + \text{tr} \left[\mathbf{m}_V^4 \left(\ln \frac{\mathbf{m}_V^2}{v_\varphi^2} - \frac{5}{6} \right) \right] - \text{tr} \left[\mathbf{m}_F^4 \left(\ln \frac{\mathbf{m}_F^2}{v_\varphi^2} - \frac{3}{2} \right) \right] \right\}, \quad (3.23)$$

$$B(\mathbf{n}) = \frac{1}{64\pi^2 v_\varphi^4} (\text{tr} \mathbf{m}_S^4 + 3 \text{tr} \mathbf{m}_V^4 - 4 \text{tr} \mathbf{m}_F^4), \quad (3.24)$$

mis sõltuvad puutaseme skalaar-, vektor- ja fermionväljade massimaatriksitest $\mathbf{m}_{S,V,F}$ kvantparandustest tekkinud miinimumil $\Phi = \varphi \mathbf{n}$. Skalaarväljade massimaatriks puutasemel sõltub Hesse maatriksist kui

$$m_{S_{ij}}^2 = v_\varphi^2 P_{ij}. \quad (3.25)$$

Potentsiaalil (3.21) minimaliseerimine

$$\left. \frac{\partial V^{(1)}(\varphi \mathbf{n})}{d\varphi} \right|_{\varphi=v_\varphi} = 0 \quad (3.26)$$

annab renormeerimisskaalal $\mu = v_\varphi \exp\left(\frac{A}{2B} + \frac{1}{4}\right)$ mittetriviaalse statsionaarse punkti ning potentsiaal skaalal μ saab kuju

$$V^{(1)}(\varphi \mathbf{n}) = B(\mathbf{n}) \varphi^4 \left(\ln \frac{\varphi^2}{v_\varphi} - \frac{1}{2} \right). \quad (3.27)$$

Massimaatriks koos kvantparandustega saab kuju

$$(\mathbf{m}_S^2 + \delta \mathbf{m}_S^2)_{ij} = \left. \frac{\partial [V(\Phi) + V^{(1)}(\Phi)]}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\Phi=v_\varphi \mathbf{n}}. \quad (3.28)$$

Tasase suunaga risti olevad väljade masside kvantparandused on tühiselt väikesed, aga

puutasemel massitu tasase suunal olev väli, dilatatsiooni pseudo-Goldstone'i boson, saab oma massi kvantparanditest:

$$m_\varphi^2 = 8Bv_\varphi^2. \quad (3.29)$$

Peatükk 4

Uus meetod tasase suuna leidmisel

Käesolev peatükk lähtub artiklist [24].

Kuigi uut meetodit on võimalik üldistada ka potentsiaalile (3.18), siis vaatleme selle töö raames kitsamat juhtu – neljanda astme n reaalse skalaarväljaga ruutpotentsiaali

$$V(\Phi) = \sum_{i,j} \phi_i^2 \lambda_{ij} \phi_j^2 = (\Phi^{\circ 2})^T \Lambda \Phi^{\circ 2}, \quad (4.1)$$

kus sümboliga \circ tähistame Hadamardi korrutist, mis on defineeritud kahe maatriksi vahel kui $(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})_{ij} = A_{ij} B_{ij}$, Hadamardi aste aga kui $(\mathbf{A}^{\circ n})_{ij} = A_{ij}^n$.

Et potentsiaal oleks alt tõkestatud, peab maatriks Λ olema kopsitiivne ehk täitma tingimust $\mathbf{x}^T \Lambda \mathbf{x} \geq 0$ suvalise mittenegatiivse vektori \mathbf{x} korral. Selle tingimuse täitmist tagab Cottle-Habetler-Lemke teoreem: kui reaalse sümmeetrilise n järku ruutmaatriksi \mathbf{A} $n - 1$ järgu peamised alammaatriksid on kopsitiivsed, siis maatriks \mathbf{A} ei ole kopsitiivne siis ja ainult siis, kui

$$\det(\mathbf{A}) < 0 \quad \wedge \quad \text{adj}(\mathbf{A})_{ij} \geq 0, \text{ kus } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4.2)$$

Maatriksi \mathbf{A} adjugaat $\text{adj} \mathbf{A}$ on defineeritud läbi suhte $\mathbf{A} \text{adj} \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I}$.

Vektori Φ normi ruutu saab kirja panna Hadamardi ruuduga kui

$$\Phi^T \Phi = \sum_i \phi_i^2 = \mathbf{e}^T \Phi^{\circ 2}, \quad (4.3)$$

kus vektor $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$ on Hadamardi korrutise ühikelement. Võrrand (4.3) on ruutvõrdeline

Φ suhtes, aga lineaarne $\Phi^{\circ 2}$ suhtes. Me piirame potentsiaali (4.1) ühiksfäärile Lagrange'i kordajate meetodiga:

$$V(\mathbf{N}, \lambda) = (\mathbf{N}^{\circ 2})^T \Lambda \mathbf{N}^{\circ 2} + \lambda(1 - \mathbf{e}^T \mathbf{N}^{\circ 2}), \quad (4.4)$$

kus λ on Lagrange'i kordaja, mille suhtes potentsiaali (4.4) osatuletis annab tingimuse

$$\mathbf{e}^T \mathbf{N}^{\circ 2} = 1. \quad (4.5)$$

Kuigi vektor \mathbf{N} on ühiksfääril, siis tema Hadamardi ruut $\mathbf{N}^{\circ 2}$ paikneb ühiksimpleksil. Nii et ekstreemumi leidmine ühiksfääril on ekvivalentne ekstreemumi leidmisele $\mathbf{N}^{\circ 2}$ vektori ühiksimpleksil.

Potentsiaali (4.4) gradient annab

$$\nabla_{\mathbf{N}} V = 4\mathbf{N} \circ \Lambda \mathbf{N}^{\circ 2} - 2\lambda \mathbf{N} \circ \mathbf{e} = 2\mathbf{N} \circ (2\Lambda \mathbf{N}^{\circ 2} - \lambda \mathbf{e}), \quad (4.6)$$

või indeksitega

$$(\nabla_{\mathbf{N}} V)_i = 2 \sum_j N_i (2\Lambda_{ij} N_j^2 - \lambda). \quad (4.7)$$

Tasane suund ehk statsionaarne potentsiaal peab rahuldama tingimust $\nabla_{\mathbf{N}} V(\mathbf{N})|_{\mathbf{N}=\mathbf{n}} = 0$, mis on gradiendi (4.6) puhul täidetud kui

$$2\Lambda \mathbf{N}^{\circ 2} = \lambda \mathbf{e}, \quad (4.8)$$

eeldusel, et ükski vektori $\mathbf{N}^{\circ 2}$ liige pole null. Korrutades tulemust (4.8) vasakult $(\mathbf{N}^{\circ 2})^T$ ja kasutades tingimust (4.5), saame Lagrange'i kordajaks

$$\lambda = 2(\mathbf{N}^{\circ 2})^T \Lambda \mathbf{N}^{\circ 2} = 2V(\mathbf{N}). \quad (4.9)$$

Asendades Lagrange'i kordaja võrrandis (4.8) annab

$$\Lambda \mathbf{N}^{\circ 2} = [(\mathbf{N}^{\circ 2})^T \Lambda \mathbf{N}^{\circ 2}] \mathbf{e} \equiv V(\mathbf{N}) \mathbf{e}, \quad (4.10)$$

mille lahendame, oletades, et lahend on kujul:

$$\mathbf{N}^{\circ 2} = C \operatorname{adj}(\Lambda) \mathbf{e}. \quad (4.11)$$

Reaalse normeerimiskonstandi C saame, kui lahendame võrrandist (4.10), kasutades (4.11):

$$C = \frac{1}{\mathbf{e}^T \operatorname{adj}(\Lambda) \mathbf{e}}, \quad (4.12)$$

mis tagab vektori \mathbf{N} ühikulise pikkuse. On kasulik tähele panna, et tulemus (4.13) on

$$C = \frac{1}{\sum_{i,j} (\operatorname{adj}(\Lambda))_{ij}} \quad (4.13)$$

– pöördväärtus kõikide $\operatorname{adj}(\Lambda)$ elementide summast.

Et ühe silmuse kvantparandid annaksid skalaarväljale lõpliku ja positiivse vaakumi keskvaartuse, siis vektori $\mathbf{N}^{\circ 2}$ liikmed peavad olema lõplikud ja positiivsed, mille piisavaks, kuid mitte vajalikuks tingimuseks, on negatiivsed Λ maatriksi diagonaalivälise elemendid.

Potentsiaali väärtus \mathbf{N} -ga määratud hüpersfääril on

$$V(\mathbf{N}) = \frac{\det(\Lambda)}{\mathbf{e}^T \operatorname{adj}(\Lambda) \mathbf{e}}. \quad (4.14)$$

Nii et suunal $\mathbf{N} = \mathbf{n}$ oleks tasane suund ehk potentsiaal (4.14) oleks null, peab Λ maatriksi determinant olema null ehk

$$\det(\Lambda) = 0 \xLeftrightarrow{0 < \mathbf{n}^{\circ 2} < \infty} V(\mathbf{n}) = 0. \quad (4.15)$$

Ühikvektori Hadamardi ruut on määratletud seosega (4.11):

$$\mathbf{n}^{\circ 2} = \frac{\operatorname{adj}(\Lambda) \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \operatorname{adj}(\Lambda) \mathbf{e}}, \quad (4.16)$$

mis on Λ null omaväärtusele vastav omavektor. Suund \mathbf{n} peab olema potentsiaali lokaalne miinum hüpersfääril, et tagada selle tasase suuna stabiilsus. Gildeneri-Weinbergi käsitluses oli see tagatud positiivselt poolmääratud tingimusega Hesse maatriksile (3.20). Kasutades gradiendi (4.6), kus $\lambda = 2V(\mathbf{n}) = 0$, saame Hesse maatriksiks hüpersfääril

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \nabla_{\mathbf{N}} \nabla_{\mathbf{N}}^T V(\mathbf{N}, \lambda)|_{\mathbf{N}=\mathbf{n}} \\
&= \text{diag} [2(2\Lambda \mathbf{n}^{\circ 2} - \lambda \mathbf{e})] + 8\Lambda \circ (\mathbf{n}\mathbf{n}^T) \\
&= \text{diag}(4\Lambda \mathbf{n}^{\circ 2}) + 8\Lambda \circ (\mathbf{n}\mathbf{n}^T),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

kus $\text{diag}(\mathbf{v})$ vektorist \mathbf{v} tähistab diagonaalset maatriksit, kus diagonaali elemendid on $\text{diag}(\mathbf{v})_{ii} = v_i$. Kuna vektor \mathbf{n} on Hesse maatriksi (4.17) null omaväärtusele vastav omavektor ja kuna igat vektorit väljaruumis võib kirja panna vektori \mathbf{n} ja teiste puutujavektorite lineaarse kombinatsioonina, siis Hesse maatriks (4.17) on alati positiivselt poolmääratud ühikhüpersfääril.

Tasasel suunal on võrrandi (4.17) esimene liige null ja alles jääb

$$\mathbf{P} = 8\Lambda \circ (\mathbf{n}\mathbf{n}^T) = 8 \text{diag}(\mathbf{n}) \Lambda \text{diag}(\mathbf{n}). \tag{4.18}$$

Kui (4.8) tulemuse saamiseks tehtud eeldus ei ole rahuldatud ja mõni vektori $\mathbf{N}^{\circ 2}$ liikmetest on null, siis ühegi lisatingimusega võib tasase suuna leidmiseks maatriksi Λ ja tasase suuna \mathbf{n} esitada blokk-kujul

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{12}^T & \Lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Hadamardi ruut $\mathbf{n}_1^{\circ 2}$ on alammaatriksi Λ_{11} null omaväärtusele vastav omavektor. Hesse maatriks (4.17) saab kuju

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 8\Lambda_{11} \circ (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \text{diag}(4\Lambda_{12}^T \mathbf{n}_1^{\circ 2}) \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Et tagada stabiilne tasane suund ehk et Hesse maatriks oleks positiivselt poolmääratud, peab alammaatriks Λ_{11} olema positiivselt poolmääratud ja vektor $\Lambda_{12}^T \mathbf{n}_1^{\circ 2}$ elemendid peavad olema positiivsed. Samuti, et tagada potentsiaali altpoolt tõkestatust, peab alammaatriks Λ_{22} olema kopsitiivne.

Kui aga suund \mathbf{n} ja skalaarväljade osakeste massid on juba teada, siis on võimalik kasutades Hadamardi pöördväärtust seostest (4.18) ja (3.25) leida interaktsioonimaatriks Λ , mis vastab tasasele suunale:

$$\Lambda = \frac{1}{8} \mathbf{P} \circ (\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^{\circ -1} = \frac{1}{8v_\phi^2} \mathbf{m}_S^2 \circ (\mathbf{n}\mathbf{n}^T)^{\circ -1}. \tag{4.21}$$

Kui aga suuna \mathbf{n} osa liikmeid on nullid, siis võrrand (4.21) kehtib ainult alammatriksi Λ_{11} jaoks, kus $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}_1$. Ülejäänud Λ liikmed peavad olema valitud selliselt, et nad rahuldaksid võrrandit (4.20).

Peatükk 5

Pöörd-kiigemehhanismi mudel

Laiendame standardmudelit, tuues sisse lisaks alampeatükis 2.4 kirjeldatud paremakäeliste neutriinodele N_{R_i} ja fermionidele S_{L_i} ka kaks skalaarvälja: reaalne singlet ρ ja kompleksse singleti σ . Meile huvi pakkuv lagranžaani osa on

$$\mathcal{L} = -Y_D^{ij} \bar{\ell}_{L_j} i\tau_2 H^* N_{R_i} - Y_{NS}^{ij} \rho \bar{N}_{R_i} S_{L_j} - Y_S^{ij} \sigma \tilde{S}_{L_i} S_{L_j} + \text{h.c.}, \quad (5.1)$$

kus \mathbf{Y}_D , \mathbf{Y}_{NS} ja \mathbf{Y}_S on fermionide ja skalaarväljade vahelisi Yukawa interaktsioone kirjeldavad maatriksid. Nagu ka kõikidel standardmudeli fermionidel, võtame N_R ja S_L generatsioonide arvuks kolm.

Kui lisaks Higgsi bosonile, on ka skalaarväljal ρ ja skalaarvälja σ reaalsal $\Re(\sigma)$ nullist erinev vaakumi keskväärtused, siis lagranžaan (5.1) sisaldab endas (2.10) lagranžaanis kirjeldatud massiliikmeid nii, et

$$\mathbf{m}_D = v_h \mathbf{Y}_D, \quad \mathbf{M}_R = v_\rho \mathbf{Y}_{NS}, \quad \mu = v_R \mathbf{Y}_S, \quad (5.2)$$

kus v_h , v_ρ ja v_R on vastavalt skalaarväljade h , ρ ja $\Re(\sigma)$ vaakumi keskväärtused.

Skaalainvariantne puutaseme potentsiaal on

$$\begin{aligned} V^{(0)} = & \lambda_H |H|^4 + \lambda_\sigma |\sigma|^4 + \frac{1}{4} \lambda_\rho \rho^4 + \lambda_{H\sigma} |H|^2 |\sigma|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{H\rho} |H|^2 \rho^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\rho\sigma} |\sigma|^2 \rho^2 \\ & + \frac{1}{2} \lambda'_{H\sigma} (\sigma^2 + \sigma^{*2}) |H|^2 + \frac{1}{4} \lambda'_{\rho\sigma} (\sigma^2 + \sigma^{*2}) \rho^2 + \frac{1}{2} \lambda'_\sigma (\sigma^4 + \sigma^{*4}) \\ & + \frac{1}{2} \lambda''_\sigma (\sigma^2 + \sigma^{*2}) |\sigma|^2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

mis on invariantne $\rho \rightarrow -\rho$ ja $\sigma \rightarrow -\sigma$ teisenduste all. Me valime parametriseringu nii, et

$$|H|^2 = \frac{h^2}{2}, \quad \sigma = \frac{R + iJ}{\sqrt{2}}, \quad (5.4)$$

kus pseudo-Goldstone'i boson J on CP-sümmeetriat rikkuv majoron. Kui valida uued interaktsioonikonstandid nii, et

$$\lambda_R = \lambda_\sigma + \lambda'_\sigma + \lambda''_\sigma, \quad (5.5)$$

$$\lambda_J = \lambda_\sigma + \lambda'_\sigma - \lambda''_\sigma, \quad (5.6)$$

$$\lambda_{RJ} = 2(\lambda_\sigma - 3\lambda'_\sigma), \quad (5.7)$$

$$\lambda_{HR} = \lambda_{H\sigma} + \lambda'_{H\sigma}, \quad (5.8)$$

$$\lambda_{HJ} = \lambda_{H\sigma} - \lambda'_{H\sigma}, \quad (5.9)$$

$$\lambda_{\rho R} = \lambda_{\rho\sigma} + \lambda'_{\rho\sigma}, \quad (5.10)$$

$$\lambda_{\rho J} = \lambda_{\rho\sigma} - \lambda'_{\rho\sigma}, \quad (5.11)$$

siis on võimalik potentsiaal (5.3) ümber kirjutada reaalsete väljade kaudu kui

$$V = \frac{1}{4}\lambda_H h^4 + \frac{1}{4}\lambda_\rho \rho^4 + \frac{1}{4}\lambda_R R^4 + \frac{1}{4}\lambda_J J^4 + \frac{1}{4}\lambda_{RJ} R^2 J^2 + \frac{1}{4}\lambda_{H\rho} h^2 \rho^2 + \frac{1}{4}\lambda_{HR} h^2 R^2 + \frac{1}{4}\lambda_{HJ} h^2 J^2 + \frac{1}{4}\lambda_{\rho R} R^2 \rho^2 + \frac{1}{4}\lambda_{\rho J} J^2 \rho^2. \quad (5.12)$$

Nõuame, et $|\lambda'_{H\sigma}| \ll |\lambda_{H\sigma}|$, $|\lambda'_{\rho\sigma}| \ll |\lambda_{H\rho\sigma}|$ ja $|\lambda'_\sigma|, |\lambda''_\sigma| \ll |\lambda_{H\rho\sigma}|$ selleks, et leptonarvu rikkuvad interaktsioonid ei oleks liiga suured. Uute interaktsioonikonstantide kaudu on need tingimused

$$|\lambda_{HR} - \lambda_{HJ}| \ll |\lambda_{HR} + \lambda_{HJ}|, \quad (5.13)$$

$$|\lambda_{\rho R} - \lambda_{\rho J}| \ll |\lambda_{\rho R} + \lambda_{\rho J}|, \quad (5.14)$$

$$|\lambda_R + \lambda_J - \lambda_{RJ}| \ll |3(\lambda_R + \lambda_J) + \lambda_{RJ}|, \quad (5.15)$$

$$4|\lambda_R - \lambda_J| \ll |3(\lambda_R + \lambda_J) + \lambda_{RJ}|. \quad (5.16)$$

5.1 Kiirguslik sümmeetriarikkumine

Et viia potentsiaal (5.12) kujule (4.1), defineerime väljavektorit kui $\Phi = (h, \rho, R, J)^T$ ja interaktsioonikonstantide maatriksi

$$\Lambda = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \lambda_H & \frac{1}{2}\lambda_{H\rho} & \frac{1}{2}\lambda_{HR} & \frac{1}{2}\lambda_{HJ} \\ \frac{1}{2}\lambda_{H\rho} & \lambda_\rho & \frac{1}{2}\lambda_{\rho R} & \frac{1}{2}\lambda_{\rho J} \\ \frac{1}{2}\lambda_{HR} & \frac{1}{2}\lambda_{\rho R} & \lambda_R & \frac{1}{2}\lambda_{RJ} \\ \frac{1}{2}\lambda_{HJ} & \frac{1}{2}\lambda_{\rho J} & \frac{1}{2}\lambda_{RJ} & \lambda_J \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Kirjutame puutaseme massid ja interaktsioonikonstandid blokk-kujul nii, et

$$\mathbf{m}_S^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{HH}^2 & \mathbf{m}_{HA}^2 \\ (\mathbf{m}_{HA}^2)^T & \mathbf{m}_{AA}^2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{HH} & \Lambda_{HA} \\ (\Lambda_{HA})^T & \Lambda_{AA} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

kus indeksid H ja A tähistavad vastavalt CP-paaris (ehk CP-sümmeetriat säilitav) ja CP-paaritute (ehk CP-sümmeetriat rikkuv) skalaarosakest. Kuna ainus CP-paaritu osake, majoron J ei oma nullist erinevat vaakumi keskvärtust ja CP-paaris ning CP-paaritute osakeste vahel ei toimu segunemist, siis massimaatriks (5.18) on blokk-diagonaalne, kus \mathbf{m}_{HH}^2 on 3×3 CP-paaris skalaarosakeste massimaatriks ja \mathbf{m}_{HA}^2 1×1 majoroni massimaatriks.

Tingimusest (4.20) teame, et

$$\mathbf{m}_S^2 = v_\phi^2 \begin{pmatrix} 8\Lambda_{HH} \circ (\mathbf{n}_H \mathbf{n}_H^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \text{diag}(4\Lambda_{HA}^T \mathbf{n}_H^{\circ 2}) \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Λ_{HH} maatriksi saame avaldada teadaolevate puutaseme massimaatriksi \mathbf{m}_{HH}^2 kaudu vastavalt seosele (4.21):

$$\Lambda_{HH} = \frac{1}{8v_\phi^2} \mathbf{m}_{HH}^2 \circ (\mathbf{n}_H \mathbf{n}_H^T)^{\circ -1}, \quad (5.20)$$

kus me täidame tasase suuna tingimuse (4.15), võttes puutaseme dilatoni massi nulliks.

Defineerime segunemismaatriksi \mathbf{U} nii, et $\mathbf{U}^T \mathbf{m}_{HH}^2 \mathbf{U} = \text{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$, kus m_i^2 on CP-paaris skalaarosakeste massi omaväärtuste h_i puutaseme masside ruudud. Segunemismaatriks \mathbf{U} on antud kui

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}) &= \mathbf{U}(\alpha_{23})\mathbf{U}(\alpha_{13})\mathbf{U}(\alpha_{12}) = \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

kus $s_{ij} = \sin(\alpha_{ij})$ ja $c_{ij} = \cos(\alpha_{ij})$. Maatriks $\mathbf{U}(\alpha_{ij})$ on pöördemaatriks ij tasandil. Interaktsiooni ja massi omaväärtused on omavahel seotud kui

$$\begin{pmatrix} h \\ \rho \\ R \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Me seostame massi omaolekut h_1 Higgsi bosonina massiga $m_1 = 125,1 \text{ GeV}/c^2$. Kuigi on võimalik olukord, kus Higgsi boson on dilaton, siis antud mudeli raames on see eksperimentaalsete piirangute tõttu vähetõenäoline – seepärast vaatleme ainult olukorda, kus dilaton on massiomaolek h_3 . Tasane suund on null omaväärtusele (dilaton massile) vastav omavektor ehk segunemismaatriksi \mathbf{U} kolmas veerg:

$$\mathbf{n}_H = \begin{pmatrix} s_{13} \\ s_{23}c_{13} \\ c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

Λ_{HA} sisaldavad interaktsioonikonstandid λ_{RJ} , λ_{HJ} ja $\lambda_{\rho J}$ väärtused ei ole üheselt määratletud, küll aga peavad nad täitma tingimust

$$m_J^2 = 4\Lambda_{HA}^T \mathbf{n}_H^2 v_\phi^2 > 0. \quad (5.24)$$

Samuti kehtib λ_J jaoks tingimus $\lambda_J > 0$, et potentsiaal (5.12) oleks alt tõkestatud.

Gildeneri-Weinbergi käsitluses saab klassikaline potentsiaal ühe silmuse kvantparanduse (3.27), kus võrrandiga (3.24) määratud kordaja $B(\mathbf{n})$ saab antud mudelis kuju

$$64\pi^2 v_\phi^4 B \simeq 6m_W^4 + 3m_Z^4 + \sum_{i=1}^3 m_{h_i}^4 + m_J^4 - 12m_t^4 - 2 \sum_{i=1}^3 M_i^4, \quad (5.25)$$

kus lisaks standardmudeli osakeste massidele on nüüd ka neli reaalse skalaarosakese massi ja

sisse toodud uute fermionidega seotud massimaatriksi M_R omaväärtused M_i . Kordaja B peab olema positiivne, et dilaton saaks massi kvantparandustest vastavalt seosele (3.29).

5.2 Neutriino mass

Standardmudeli neutriinode mass on antud pöörd-kiigemehhanismis võrrandiga (2.12). Kasutades seost (5.2), asendame \mathbf{m}_D :

$$\mathbf{m}_{\text{kerge}} = v_h^2 \mathbf{Y}_D \frac{1}{\mathbf{M}_R} \mu \frac{1}{\mathbf{M}_R} \mathbf{Y}_D^T, \quad (5.26)$$

Me kasutame Casas-Ibarra parametriseeringut [25], et hinnata neutriinode Yukawa interaktsioonide \mathbf{Y}_D suurust. Selleks me diagonaliseerime $\mathbf{U}_V^T \mathbf{m}_{\text{kerge}} \mathbf{U}_V = \mathbf{D}_{m_\nu} = \text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3})$ ja $\mathbf{U}_\mu^T \mu \mathbf{U}_\mu = \mathbf{D}_\mu = \text{diag}(m_{\mu_1}, m_{\mu_2}, m_{\mu_3})$. Standardmudeli neutriinode interaktsiooniomaolekute segunemist kirjeldab Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata maatriks

$$\mathbf{U}_V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13}e^{i\phi_1/2} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & (c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}})e^{i\phi_2/2} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

kus $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$ ja $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$ ning δ_{CP} on CP-sümmeetriat rikkuv faas. Faasid ϕ_1 ja ϕ_2 saavad olla nullist erinevad ainult siis, kui standardmudeli neutriino on Majorana osake. \mathbf{U}_μ on defineeritud sama moodi nagu ka \mathbf{U}_V segunemismaatriks. Arvestades, et massimaatriksit μ saab esitada kujul $\mu = \mathbf{U}_\mu^* \mathbf{D}_\mu \mathbf{U}_\mu^\dagger$, siis diagonaalne kergete neutriinode massimaatriks on

$$\mathbf{D}_{m_\nu} = v_h^2 \mathbf{U}_V^T \mathbf{Y}_D \frac{1}{\mathbf{M}_R} \mathbf{U}_\mu^* \sqrt{\mathbf{D}_\mu} \sqrt{\mathbf{D}_\mu} \mathbf{U}_\mu^\dagger \frac{1}{\mathbf{M}_R} \mathbf{Y}_D^T \mathbf{U}_V^\dagger. \quad (5.28)$$

Korrutades mõlemalt poolt suurusega $1/\sqrt{\mathbf{D}_{m_\nu}}$, saame

$$\mathbf{I} = \left[v_h \sqrt{\mathbf{D}_\mu} \mathbf{U}_\mu^\dagger \frac{1}{\mathbf{M}_R} \mathbf{Y}_D^T \mathbf{U}_V^\dagger \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}_{m_\nu}}} \right]^T \left[v_h \sqrt{\mathbf{D}_\mu} \mathbf{U}_\mu^\dagger \frac{1}{\mathbf{M}_R} \mathbf{Y}_D^T \mathbf{U}_V^\dagger \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}_{m_\nu}}} \right]. \quad (5.29)$$

Defineerime uue ortogonaalse maatriksi \mathbf{R} , nii et:

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \hat{c}_{12}\hat{c}_{13} & \hat{s}_{12}\hat{c}_{13} & \hat{s}_{13} \\ -\hat{s}_{12}\hat{c}_{23} - \hat{c}_{12}\hat{s}_{23}\hat{s}_{13} & \hat{c}_{12}\hat{c}_{23} - \hat{s}_{12}\hat{s}_{23}\hat{s}_{13} & \hat{s}_{23}\hat{c}_{13} \\ \hat{s}_{12}\hat{s}_{23} - \hat{c}_{12}\hat{c}_{23}\hat{s}_{13} & -\hat{c}_{12}\hat{s}_{23} - \hat{s}_{12}\hat{c}_{23}\hat{s}_{13} & \hat{c}_{23}\hat{c}_{13} \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

kus $\hat{c}_{ij} = \cos(\hat{\theta}_{ij})$ ja $\hat{s}_{ij} = \sin(\hat{\theta}_{ij})$ komplekssete nurkadega $\hat{\theta}_{ij}$. Ortogonaalsuse pärast $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, nii et

$$\mathbf{R} = v_h \sqrt{\mathbf{D}_\mu} \mathbf{U}_\mu^\dagger \frac{1}{\mathbf{M}_R} \mathbf{Y}_D^T \mathbf{U}_\nu^\dagger \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}_{m_\nu}}}, \quad (5.31)$$

millest saame tuletada Yukawa interaktsioone \mathbf{Y}_D :

$$\mathbf{Y}_D = \frac{1}{v_h} \mathbf{U}_\nu^* \sqrt{\mathbf{D}_{m_\nu}} \mathbf{R}^T \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}_\mu}} \mathbf{U}_\mu^T \mathbf{M}_R. \quad (5.32)$$

5.3 Lubatud parameetrite ruum

Lubatud parameetrite ruumi uurimiseks kirjutasingime koodi Wolfram Mathematica programmis.

5.3.1 Skalaarväljade interaktsioonikonstandid ja segunemisnurgad

Higgsi bosoni segunemine teiste skalaarväljadega on piiratud Higgsi bosoni nähtamatu lagunemisega ehk Higgsi bosoni lagunemisega osakesteks, mida LHC detektorid tuvastada ei suuda. Nähtamatu lagunemise laius ei tohi ATLAS ja CMS mõõtmistulemuste kohaselt ületada 19% [26]. Seega, kui skalaarosake h_1 on Higgsi boson, siis seab see piire segunemisnurkadele α_{12} ja α_{13} :

$$\cos \alpha_{12} \cos \alpha_{13} \geq 0,81. \quad (5.33)$$

Võtsime lihtsuse mõttes nurgad α_{12} ja α_{13} võrdseks, sest teised valikud pigem vähendavad lubatud parameetrite ruumi. Uurime kahte olukorda – piirjuht, kus segunemine on maksimaalne lubatud ehk $\cos \alpha_{12} = \cos \alpha_{13} = 0,9$, ja olukord, kus segunemine on väga väike ehk $\cos \alpha_{12} = \cos \alpha_{13} = 0,99$. Viimane olukord on standardmudeli Higgsi bosoni piirjuht, sest sel juhul $h \approx h_1$, sest segunemist teiste osakestega praktiliselt ei toimu.

Et tagada kvantparanduste väiksust, peavad skalaarväljade interaktsioonitugevused olema piisavalt väikesed ehk täitma perturbatiivsustingimusi. Nende tingimuste täitmiseks nõuame, et kehtiks iga skalaarväljavahelise interaktsiooni (k.a eneseinteraktsioonid) jaoks kehtiks

$$-\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (5.34)$$

Mudeli ühiselt määramata interaktsioonikonstandid λ_{RJ} , λ_{HJ} , $\lambda_{\rho J}$ ja λ_J valime selliselt, et tingimused (5.13) - (5.16) oleksid alati täidetud. Seejuures peame kontrollima, et majoroni mass $m_J^2 > 0$ ja majoroni eneseinteraktsioon $\lambda_J > 0$ tingimusi, millest viimane on alati täidetud sobiliku λ_J valikuga.

Et kvantparandustest tulenev dilatoni mass oleks positiivne, peame kontrollima ka, et kordaja $B > 0$ tingimust, mille leiame võrrandist (5.25), kus lihtsuse mõttes võtame kõik generatsioonide massid $M_i = M_R$ võrdseks.

Tulemused on esitatud joonisel 5.1, kus on näha, et maksimaalse lubatud Higgsi skalaarvälja segunemise korral, sobiv parameetriteeruum, kus nii interaktsioonikonstandid on perturbatiivsed kui ka kordaja B on positiivne, ei ole suur. Eelistatud on olukord, kus Higgsi skalaarvälja segunemine on väga väike. Sellisel juhul on sobiv parameetriteeruum märkimisväärselt suurem.

5.3.2 Yukawa interaktsioonid ja neutriino mass

Kuna eksperimentaalselt ei ole õnnestunud neutriinode masse otse mõõta ja me teame kindlalt ainult m_1^2 ja m_2^2 neutriinode masside erinevust, siis on neutriinode masside hierarhiaal kaks võimalust [27]:

- Tavaline järjestus ehk $m_1 < m_2 < m_3$;
- Pöördjärjestus ehk $m_3 < m_1 < m_2$.

Seega mõõtmistulemuste interpreteerimine sõltub järjestuse eeldamisest. Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata maatriksi (5.27) nurgad ja mõõdetav faas tavalises järjestuses on

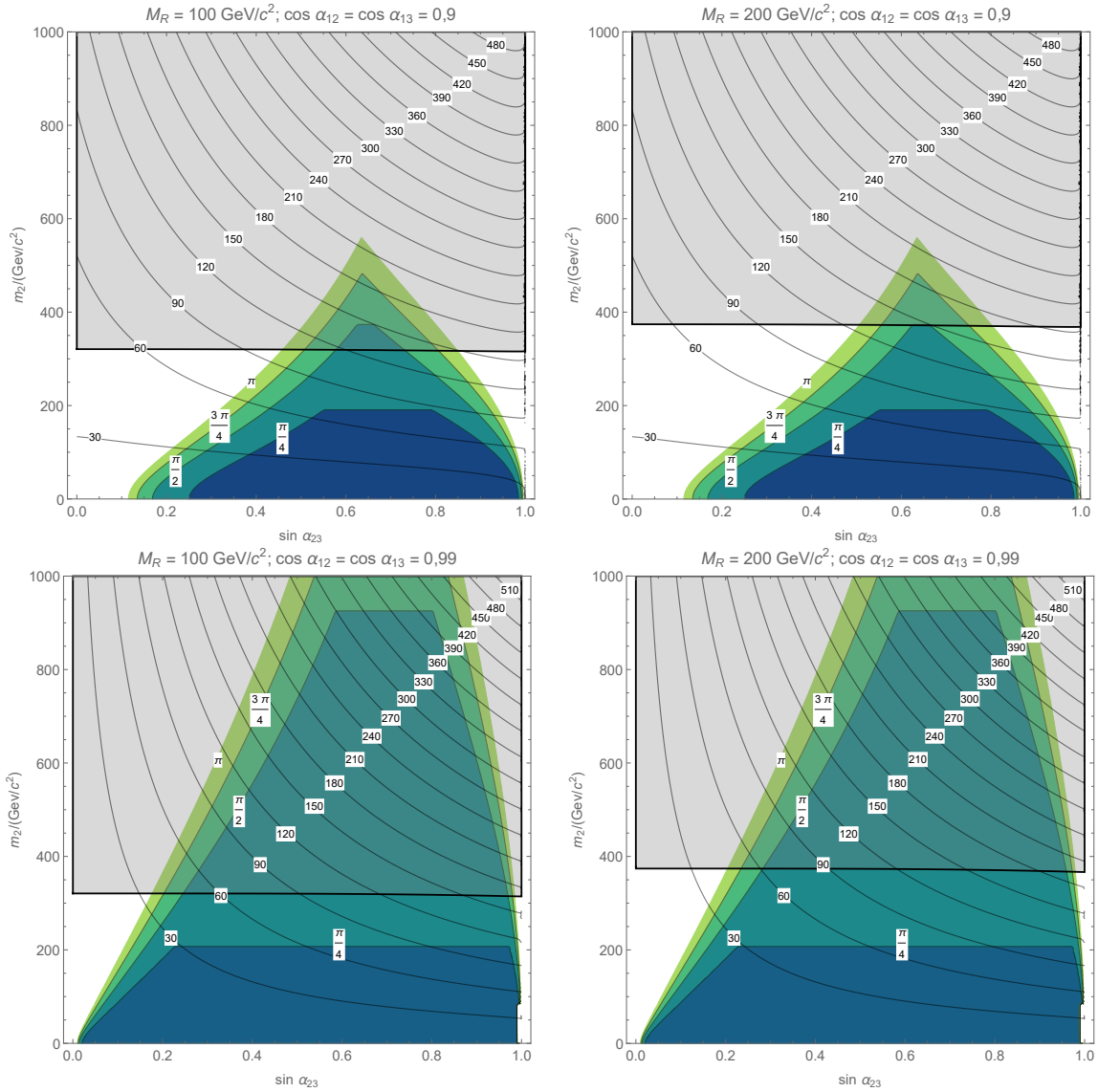
$$\theta_{12} = 33,44^\circ; \quad \theta_{13} = 49,2^\circ; \quad \theta_{23} = 8,57^\circ; \quad \delta_{CP} = 197^\circ, \quad (5.35)$$

pöördjärjestuses aga

$$\theta_{12} = 33,45^\circ; \quad \theta_{13} = 49,3^\circ; \quad \theta_{23} = 8,60^\circ; \quad \delta_{CP} = 282^\circ. \quad (5.36)$$

Masside erinevus tavalises järjestuses on

$$\Delta m_{21}^2 = 7,42 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2/c^2; \quad \Delta m_{31}^2 = 2,517 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2/c^2, \quad (5.37)$$



Joonis 5.1: Interaktsioonikonstantide lubatud parameetruuruum m_2 - $\sin \alpha_{23}$ tasandil fikseeritud nurkadega α_{12} ja α_{13} nii, et $\cos \alpha_{12} = \cos \alpha_{13} = 0,9$ (üleväl) või $\cos \alpha_{12} = \cos \alpha_{13} = 0,9$ (all). Värvilises alas on interaktsioonikonstandid perturbatiivsed ehk $|\lambda_{\max}| < \pi$. Hallis alas on kordaja $B > 0$ ehk dilaton saab endale kvantparandustega massi $m_\phi > 0$. Joontega on tähistatud ka m_J mass GeV/c^2 ühikutes. Vasakul: fermionide massiliikmed $M_i = M_R = 100 \text{ GeV}/c^2$; paremal: fermionide massiliikmed $M_i = M_R = 200 \text{ GeV}/c^2$.

kus $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. Masside erinevused pöördjärjestuses on

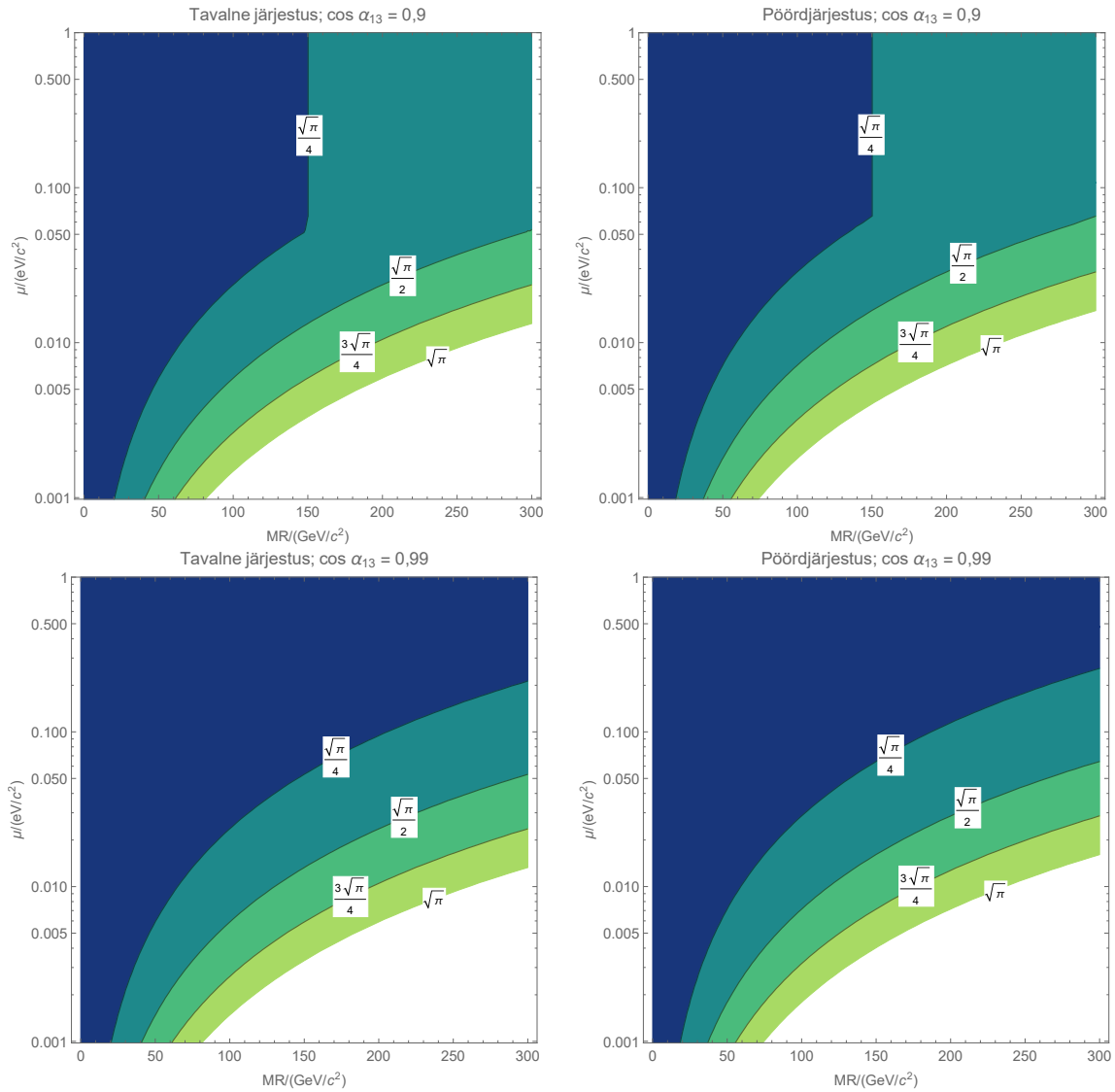
$$\Delta m_{21}^2 = 7,42 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2/c^2; \quad \Delta m_{32}^2 = -2,498 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2/c^2. \quad (5.38)$$

Nagu interaktsioonikonstandidki nii ka Yukawa interaktsioonid peavad olema piisavalt väiksed, et tagada kvantparanduste väiksust. Kõik Yukawa interaktsioonid peavad rahuldama

perturbatiivsuse tingimust

$$|y|^2 < \pi \Rightarrow |y| < \sqrt{\pi}. \quad (5.39)$$

Kõik sissetoodud Yukawa interaktsioonid on seotud pöörd-kiigemehhanismi massimaatriksitega vastavalt seosele (5.2). Yukawa interaktsioone \mathbf{Y}_D leiame aga tuletatud Casas-Ibarra parametriseringuga (5.32), kus valime lihtsuse mõttes kõik tundmatud nurgad ja faasid nulliks. Nurga α_{23} valime nii, et $\sin \alpha_{23} = 2/3$, sest antud nurk on hästi kooskõlas alampeatükis 5.3.1 vaadeldud parameetriruumiga. Vaatleme jälle olukorda, kus $\cos \alpha_{13} = 0,9$ ja $\cos \alpha_{12} = 0,99$ (on võimalik veenduda, et Yukawa interaktsioonid ei sõltu otseselt nurgast α_{12}). Tulemused on esitatud joonisel 5.2.



Joonis 5.2: Yukawa interaktsioonide lubatud parametruuruum tavalise järjestuse (vasakul) ja pöördjärjestuse (paremal) korral M_R - μ tasandil fikseeritud nurgaga α_{13} nii, et $\cos \alpha_{13} = 0,9$ (üleval) või $\cos \alpha_{13} = 0,99$ (all). Värvilises alas on Yukawa interaktsioonid perturbatiivsed ehk $|y_{\max}| < \sqrt{\pi}$.

Pöörd-kiigemehhanism Gildeneri-Weinbergi formalismi edasiarenduses

Aleksei Kubarski

Kokkuvõte

Standardmudel on aastakümneid edukalt kirjeldanud kõiki teadaolevaid elementaarosakesi ja nendevahelisi interaktsioone. Standardmudelis tekib elementaarosakestel mass tänu Higgsi bosoni nullist erinevale vaakumi keskväärtusele v_h , mis spontaanselt rikub $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sümmeetriat. Standardmudelil on aga nii teoreetilisi kui ka eksperimentaalseid ebakooskõlasid. Paremakäeliste neutriinode puudumise tõttu on standardmudeli neutriinod massitud, mis on vastuolus arvukate vaatlusandmetega. Standardmudeli vaakum on ebastabiilne, sest kõrgetel energiaskaaladel muutub Higgsi bosoni eneseinteraktsioonikonstant negatiivseks. Higgsi bosoni massiparameeter on ainus dimensiooniga parameeter standardmudelis, mis põhjustab nn hierarhiaprobleemi.

Üks neutriinodele massi andmise võimalustest on pöörd-kiigemehhanism, kus kahe fermioni sissetoomisel on võimalik standardmudeli lagranžaani laiendada nii, et kerged neutriinod saavad loomulikult moel väiksed massid, sest on allasurutud suure uute fermionide Diraci massimaatriksiga \mathbf{M}_R ja leptonarvu rikkuva väikse Majorana massimaatriksiga μ .

Hierarhiaprobleemi üks lahendustest on nõuda klassikalist skaalainvariantsust. Kuigi skaalainvariantises puutaseme potentsiaalis ei saa tekkida sümmeetriat rikkuv nullist erinev vaakumi keskväärtus, siis võib see tekkida kvantparandustega, ning klassikaliselt ainult dimensioonitutest parameetritest sõltuv potentsiaal võib dimensionaalse transmutatsiooni abil kvantparandustega sõltuda kindlast energiaskaalast. Mitme skalaarväljaga potentsiaale käsitleb Gildeneri-Weinbergi formalism, kus potentsiaali miinimum tekkib kvantparandustest tasasel suunal.

Leidsime uue meetodi tasase suuna uurimiseks Gildeneri-Weinbergi formalismis, mis tunduvalt lihtsustab arvutusi. Meetod põhineb asjaolul, et neljanda astme ruutpotentsiaali interaktsioonikonstante kirjeldava maatriksi Λ determinant on null tasases suunas. Laiendasime tulemust ka olukorrale, kus tasast suunda kirjeldaval vektoril on vähemalt üks liige null. Selleks esitasime maatriksi Λ ja tasase suuna vektori blokk-kujul. Antud meetodiga on ka mugav leida Hesse maatriksit või interaktsioonikonstantide maatriksit Λ – sõltuvalt algandmetest.

Rakendasime uut meetodit pöörd-kiigemehhanismi mudelile, kus tõime sisse kaks uut skalaarvälja: reaalne singlet ρ ja kompleksne singlet σ . Nõudsime skalaarväljade potentsiaalilt klassikalist skaalainvariantsust, kus Gildeneri-Weinbergi lähenemisega tekkisid

kvantparandustest vaakumi keskvaartused, mis tekitasid massiliikmed \mathbf{M}_R ja μ . Skalaarvälja σ imaginaarne osa, majoron, sobib tumeaine kandidaadiks. Lõpuks, uurisime mudeli lubatud parameetrite ruumi ja leidsime, et standardmudeli Higgsi bosoni väiksel segunemisel on piisavalt suur vabadus parameetrite valimisel.

Inverse seesaw via a new approach to Gildener-Weinberg formalism

Aleksei Kubarski

Summary

The Standard Model has successfully described all known fundamental particles and their interactions for decades. In the Standard Model, particles became massive due to the non-zero vacuum expectation value of Higgs boson, which breaks $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ symmetry. Nevertheless, standard model has theoretical and experimental inconsistencies. Neutrinos of standard model are massless due to lacking of right handed neutrinos, but numerous experiments have shown that neutrinos have non-zero mass. In the Standard Model, the self-coupling of the Higgs boson becomes negative at high energies, causing an unstable vacuum. Also, the mass parameter of the Higgs boson is the only dimensionful parameter of the Standard Model, resulting in the so-called hierarchy problem.

One way of giving mass to neutrinos is the inverse seesaw mechanism, where we expand the Standard Model Lagrangian by introducing two fermions in a way that neutrinos mass is suppressed by a large Dirac mass matrix \mathbf{M}_R and a small lepton number violating Majorana mass matrix μ . If it is the case then neutrino masses become naturally small.

One solution for hierarchy problem is to demand classically scale invariance. Although a scale invariant potential cannot have a symmetry breaking vacuum expectation value, it can be produced radiatively. Despite classical potentials depending on dimensionless parameters, the effective potential can depend on dimensionful parameters via dimensional transmutation. Potentials with several scalar field can be approached with Gildener-Weinberg formalism, where minimum of potential occurs in flat direction due to quantum corrections.

We propose a novel technique for investigating the appearance of a flat direction in Gildener-Weinberg formalism, which noticeably simplifies the calculations. The method builds on the observation that, in presence of a flat direction, the determinant of the quartic coupling matrix of a biquadratic potential vanishes. Situations, where vector of flat direction have vanished components, were also addressed by presenting coupling matrix and flat direction in the block form. It is also easy to find Hessian or coupling matrix using this approach.

We used the new approach on inverse seesaw model, where we also introduced two scalar fields: real singlet ρ and complex singlet σ . We demanded classically scale invariant potential. Through Gildener-Weinberg formalism vacuum expectation values were radiatively generated, which caused mass matrices \mathbf{M}_R and μ . Imaginary part of σ , majoron, is good candidate for

dark matter. Lastly, we investigated the allowed parameter space of model, which was large enough for small Higgs boson mixing.

Kirjandus

- [1] S. L. Glashow. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
- [2] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken Symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, 1962.
- [3] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [4] Q. R. Ahmad et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory. *Phys. Rev. Lett.*, 89:011301, 2002.
- [5] Q. R. Ahmad et al. Measurement of day and night neutrino energy spectra at SNO and constraints on neutrino mixing parameters. *Phys. Rev. Lett.*, 89:011302, 2002.
- [6] Y. Fukuda. Observation of neutrinos at Super-Kamiokande. In *8th International Conference on Calorimetry in High-Energy Physics (CALOR 99)*, 6 1999.
- [7] Marco Drewes. The Phenomenology of Right Handed Neutrinos. *Int. J. Mod. Phys. E*, 22:1330019, 2013.
- [8] M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Šlansky. In P van Nieuwenhuizen and D. Freedman, editors, *Proceedings of the supergravity Stony Brook Workshop, New York, 1979*, North Holland, Amsterdam, 1979.
- [9] Peter Minkowski. $\mu \rightarrow e \gamma$ at a Rate of One Out of 1-Billion Muon Decays? *Phys. Lett.*, B67:421, 1977.
- [10] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanovic. Neutrino Masses and Mixings in Gauge Models with Spontaneous Parity Violation. *Phys. Rev.*, D23:165, 1981.
- [11] T. Yanagida. In *Proceedings of the Workshop on Unified Theories and Baryon Number in the Universe, Tsukuba, Japan, 1979*, KEK Report No. 79-18, Tsukuba.
- [12] William A. Bardeen. On naturalness in the standard model. *FERMILAB-CONF-95-391-T, C95-08-27.3*, 1995.

- [13] Sidney R. Coleman and Erick J. Weinberg. Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking. *Phys. Rev.*, D7:1888–1910, 1973.
- [14] Eldad Gildener and Steven Weinberg. Symmetry Breaking and Scalar Bosons. *Phys. Rev.*, D13:3333, 1976.
- [15] Dario Buttazzo, Giuseppe Degrandi, Pier Paolo Giardino, Gian F. Giudice, Filippo Sala, Alberto Salvio, and Alessandro Strumia. Investigating the near-criticality of the Higgs boson. *JHEP*, 12:089, 2013.
- [16] Gianfranco Bertone, Dan Hooper, and Joseph Silk. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Phys. Rept.*, 405:279–390, 2005.
- [17] Alexandros Karam. *Phenomenological and Cosmological Implications of Classically Scale-Invariant Standard Model Extensions*. PhD thesis, Ioannina U., 2018.
- [18] Mark Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [19] Mario Kadastik, Kristjan Kannike, Antonio Racioppi, and Martti Raidal. Implications of the 125 GeV Higgs boson for scalar dark matter and for the CMSSM phenomenology. *JHEP*, 05:061, 2012.
- [20] Y. Chikashige, Rabindra N. Mohapatra, and R. D. Peccei. Are There Real Goldstone Bosons Associated with Broken Lepton Number? *Phys. Lett. B*, 98:265–268, 1981.
- [21] J. Schechter and J. W. F. Valle. Neutrino Decay and Spontaneous Violation of Lepton Number. *Phys. Rev. D*, 25:774, 1982.
- [22] Mariano Quiros. Finite temperature field theory and phase transitions. In *ICTP Summer School in High-Energy Physics and Cosmology*, 1 1999.
- [23] Lisa Alexander-Nunneley and Apostolos Pilaftsis. The Minimal Scale Invariant Extension of the Standard Model. *JHEP*, 09:021, 2010.
- [24] Kristjan Kannike, Aleksei Kubarski, and Luca Marzola. Geometry of Flat Directions in Scale-Invariant Potentials. *Phys. Rev. D*, 99(11):115034, 2019.
- [25] J. A. Casas and A. Ibarra. Oscillating neutrinos and $\mu \rightarrow e, \gamma$. *Nucl. Phys. B*, 618:171–204, 2001.
- [26] Pier Paolo Giardino, Kristjan Kannike, Isabella Masina, Martti Raidal, and Alessandro Strumia. The universal Higgs fit. *JHEP*, 05:046, 2014.
- [27] M. et al Tanabashi. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 98:030001, Aug 2018.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Aleksei Kubarski,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Pöörd-kiigemechanism Gildeneri-Weinbergi formalismi edasiarenduses,

mille juhendaja on Dr Kristjan Kannike,

- (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
 3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 31. mai 2021. a.