Geometrie

Achter Cursus

Analysiometrie,

Oder Untersuchung geometrischer Aufgaben durch Anwendung von Algebra und Trigonometrie in Verbindung mit geometrischer Analysis.

VIII.

Erste und zweite Folge.

Vom Professor Dr. G. Paucker

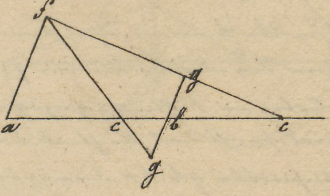
Mitau $\frac{15}{27}$ October 1841.

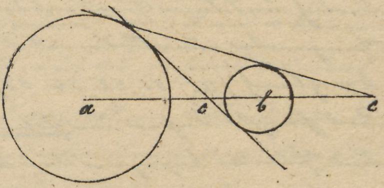
Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet. Riga, am 25. Octbr. 1841.
Dr. C. E. Napiersky, Censor.

Da nach dem gegenwärtigen Schulstatut für den mathematischen Unterricht in Prima zwei wöchentliche Lehrstunden und in drei Semestern bestimmt sind, so kann von diesem <u>ersten Cursus</u> nur die <u>erste Folge</u> bis S. 62. in den Unterricht des ersten Semesters gezogen werden. Die zweite und die demnächst erscheinenden übrigen Folgen bleiben dem Privatstudium überlassen. Der <u>zweite</u> für das zweite Semester bestimmte Cursus enthält die <u>Coordinatenlehre</u> und wird unverzüglich erscheinen.

1.

Eine grade Linie in zwei Punkten nach gegebenem Verhältniß harmonisch zu theilen.





Die grade Linie ab soll in c so zu theilen, daß die Abschnitte ac, bc, sich wie zwei gegebene Linien af, bg, verhalten. Zieht man die Linien af, bg, einander parallel, und verbindet man fg, welche die ab in c schneidet, so ist offenbar c der verlangte Punkt, weil $acf \sim bcg$, also (II. 59) $\frac{ac}{bc} = \frac{af}{bg}$

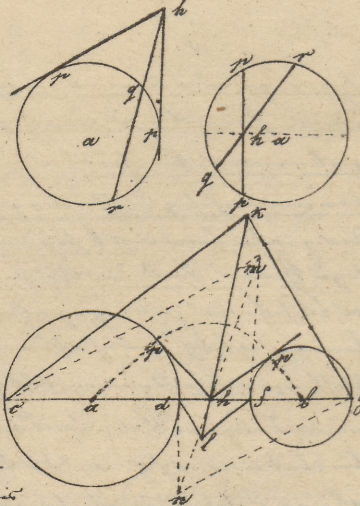
Da man der Linie bg zwei entgegengesetzte Lagen geben kann, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen. Die beiden Punkte c, c, heißen harmonische Punkte.

Man setze $af = A$, $bg = B$, $ab = C$, $ac = x$, $bc = y$ so hat man die Gleichungen: 1) $\frac{x}{y} = \frac{A}{B}$, 2) $x + y = C$ oder $x - y = C$, woraus man für den innern Punkt c $x = \frac{C.A}{A+B}$, $y = \frac{C.B}{A+B}$, für den äußern Punkt c $x = \frac{C.A}{A-B}$, $y = \frac{C.B}{A-B}$ findet.

Wenn man an zwei Kreise a, b, die gemeinschaftlichen Berührenden zieht (III. 45) so sind die Punkte c, c, wo diese Berührenden die Mittelpunktslinie schneiden, harmonische Punkte, und heißen in diesem besondern Falle die Aehnlichkeitspunkte der Kreise. In der Untersuchung der Eigenschaften, welche den Durchschnitten gerader und Kreislinien zukommen, spielen die harmonischen Punkte eine wichtige Rolle.

2. Den Potenzpunkt zweier Kreise zu finden.

Wenn von irgend einem Punkte h an einen Kreis a eine Transversallinie qr in beliebiger Richtung gezogen wird, so ist das Rechteck der Abschnitte qh.hr unveränderlich und dem Quadrat der Tangente oder Ordinate hp gleich (III. 51. 52. 54. 57.) und heißt daher die Potenz des Punkts h gegen den Kreis a.

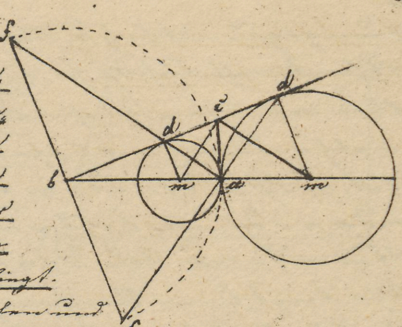


Wenn also auf der Mittelpunktslinie zweier Kreise a, b, ein Punkt h so liegt, daß er gegen beide Kreise gleiche Potenzen hat, so heißt er der Potenzpunkt, Chordalpunkt oder Radicalpunkt der beiden Kreise. Dieser Punkt ist bei dem Durchschnitt und der Berührung der Kreise von Wichtigkeit.

Die angeführte Bedingung giebt die Gleichung $ch.hd = fh.hg$. Hieraus folgen die Proportionen $\frac{ch}{fh} = \frac{gh}{dh} = \frac{cg}{fd}$ und $\frac{ch}{gh} = \frac{fh}{dh} = \frac{cf}{gd}$, welche auf folgende Auflösung führen:

Man beschreibe über cg, fd, zwei beliebige ähnliche Dreiecke cgk, fdl, verbinde kl, so schneidet sie die ab in dem verlangten Punkte h. Oder man beschreibe über cf, gd, zwei beliebige ähnliche Dreiecke cfm, gdn, verbinde mn, so schneidet sie die ab ebenfalls in dem verlangten Potenzpunkte h. Dieser Potenzpunkt ist auch dann möglich, wenn die Kreise einander schneiden, oder wenn der Kreis b ganz innerhalb des Kreises a liegt.

3.



Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene grade Linie berührt, wobei auch der Mittelpunkt in einer gegebenen graden Linie liegt.

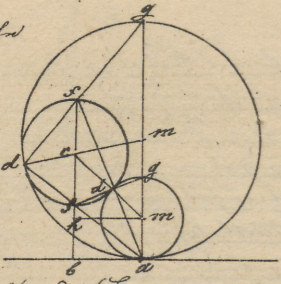
Der Kreis soll durch a gehen und die bc berühren, der Mittelpunkt m soll in ab liegen. Errichtet man ac senkrecht auf ab, so sind ac und der Winkel c gegeben, und ac soll eine Berührende des Kreises seyn. Theilt man also den $\angle c$ in die Hälfte, so wird ab von der theilenden Linie in dem verlangten Mittelpunkt m geschnitten. Da jeder von den beiden Nebenwinkeln bei c getheilt werden kann, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen. Die beiden Halbmesser sind $am = ac \cdot tg\, \frac{1}{2}c$, und $am = ac \cdot cot\, \frac{1}{2}c$. Wenn der Kreis die bc in d berührt, und $bf \parallel md$ von ad in f geschnitten wird, so ist $\Delta\, abf \sim amd$, also $\frac{bf}{ab} = \frac{md}{am}$. Aber $md = am$; also $bf = ab$.

Um also den Berührungspunkt d zu finden, kann man entweder $cd = ac$ nehmen; oder man zieht $bf = ab$ senkrecht auf bc, und verbindet af, welche die bc in d schneidet.

4.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene grade Linie in einem gegebenen Punkte, außerdem aber auch einen gegebenen Kreis berührt.

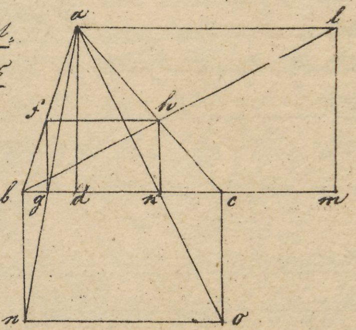
Der Kreis m soll die Linie ab in a außerdem aber auch den Kreis c berühren. Der Berüh-



rungspunkt sei d. Man ziehe cb senkrecht auf ab, so ist cb ∥ ma. Man ziehe ad, welche den cb in f schneidet, so ist $\angle\, dfc = dam = mda = cdf$, also $\Delta\, cfd \sim mad$. Aber $md = ma$. Also $cf = cd$. Also liegt f im Umfange des Kreises c, und da f auch in der Geraden bc liegt, so ist f gegeben. Hieraus folgt die Auflösung: Man fälle cb senkrecht auf ab. Wo cb den Kreis c in f schneidet, so ziehe man af, welche den Kreis c in d schneidet, dann ist d der verlangte Berührungspunkt. Man ziehe cd, welche die in a auf ab errichtete Senkrechte in m schneidet, so ist m der verlangte Mittelpunkt. Da die bc den Kreis c in zwei Punkten f schneidet, so ergeben sich zwei Berührungspunkte d und zwei Mittelpunkte m. Die Aufgabe hat also zwei Auflösungen.

Wenn die fd die in a auf ab errichtete Senkrechte in g schneidet, so ist $\angle\, adg = fdf = R$, also ag der Durchmesser des Kreises m. Da $\Delta\, adg \sim fba$, so ist $\frac{ag}{ad} = \frac{af}{fb}$. Also $ag = \frac{da.af}{fb} = \frac{A^2}{fb}$. Hier ist $da.af = A^2$ die Potenz des Punktes a gegen den Kreis c, also gegeben (VIII. 2). Nämlich A ist die aus a an den Kreis c gezogene Tangente oder Ordinate.

<u>Anders</u>. Man ziehe $mh \parallel ab$, so ist in dem rechtwinkligen $\Delta\, mch$: $mh^2 = ab^2 = mc^2 - ch^2 = (mc - ch)(mc + ch)$. Der Halbmesser des Kreises m sei $= x$, so ist $mc = cd + x$, $ch = bc - x$, also $ab^2 = (2x + cf - bc)(bc + cf)$ also $ab^2 = 2fb.x + cf^2 - bc^2$, also $2x = \frac{ab^2 + bc^2 - cf^2}{fb}$ also $2x = \frac{ac^2 - cf^2}{fb} = \frac{A^2}{fb}$, wie oben:



<u>In ein Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist, und dessen Grundlinie in die Grundlinie des Dreiecks fällt.</u>

Das Rechteck fghk soll dem Rechtecke adlm ähnlich seyn. Man hat $\frac{af}{fh} = \frac{ab}{bc}$, $\frac{fh}{fg} = \frac{al}{ad}$, $\frac{fg}{bf} = \frac{ad}{ab}$. Aus der Verbindung dieser Proportionen folgt $\frac{af}{bf} = \frac{al}{bc}$, also $\frac{ah}{ch} = \frac{al}{bc}$. Man ziehe also bl, welche die ac in h schneidet, so ist (VIII. 1.) h die verlangte Ecke des Rechtecks.

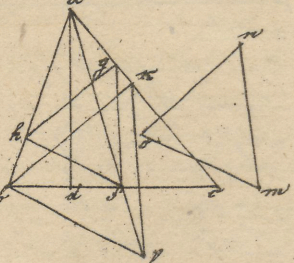
Oder das Rechteck fghk soll dem Rechtecke bnco ähnlich seyn. Man hat $\frac{bg}{fg} = \frac{bd}{ad}$, $\frac{fg}{fh} = \frac{bn}{bc}$, $\frac{fh}{bc} = \frac{af}{ab} = \frac{dg}{bd}$, also $\frac{fh}{dg} = \frac{bc}{bd}$. Aus der Verbindung dieser Proportionen folgt $\frac{bg}{dg} = \frac{bn}{ad}$. Man ziehe also an, ao, welche die bc in g, k schneiden, so sind (VIII. 1.) diese Punkte die verlangten Ecken des Rechtecks.

<u>Anders.</u> Es sey $fh = gk = x$, $fg = hk = y$, so ist $bg = y \cdot \cot b$, $ck = y \cdot \cot c$, also $bc = x + y(\cot b + \cot c)$. Aber $ad \cdot \cot b = bd$, $ad \cdot \cot c = cd$, $ad \cdot \cot b + ad \cdot \cot c = bc$, also $bc \cdot ad = ad \cdot x + bc \cdot y$.

Man kann diese Gleichung auch auf folgende Art erhalten: $\frac{fg}{ad} = \frac{y}{ad} = \frac{bf}{ab}$, $\frac{af}{ab} = \frac{fh}{bc} = \frac{x}{bc}$, $\frac{bf}{ab} = \frac{bc-x}{bc}$, also $\frac{y}{ad} = \frac{bc-x}{bc}$ woraus sich ergibt $bc \cdot ad = ad \cdot x + bc \cdot y$, wie oben. Verbindet man hiermit, daß das Verhältniß $\frac{x}{y} = A$ gegeben

ben ist, so wird $x = \frac{A.ad.bc}{A.ad+bc}$, $y = \frac{ad.bc}{A.ad+bc}$.
Wenn insbesondere das Rechteck fghk ein Quadrat seyn soll, so ist $A = 1$, also $x = y = \frac{ad.bc}{ad+bc}$.
Ist noch außerdem das Δ abc gleichseitig, so ist $ad = \frac{1}{2} bc. \sqrt{3}$, also $x = bc(\sqrt{12} - 3) = bc. 0,4641016$
$x^2 = bc^2(21 - \sqrt{432}) = bc^2. 0,21539031$.

6.



In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich und von ähnlicher Lage ist.

In das Δ abc soll das Δ fgh so beschrieben werden, daß es dem Δ mno ähnlich und von ähnlicher Lage sey, d. h. es soll $fg \parallel mn$, $gh \parallel no$, $hf \parallel om$ seyn. Das Verlangte sey geschehen, und man ziehe $bk \parallel hg$, $bl \parallel hf$ bis an die af, so ist (II. 49) auch $kl \parallel fg$ also $\Delta\, bkl \sim onm$. Hieraus ergiebt sich die Auflösung:
Man ziehe $bk \parallel on$, $kl \parallel nm$, $bl \parallel om$. Wenn kl, bl einander in l schneiden, so ziehe man al, welche die bc in f schneidet. Zieht man nun $fg \parallel mn$, $fh \parallel mo$, so ist auch $gh \parallel no$.

Anders. Vermöge der Bedingungen der Aufgabe sind die Winkel a, b, c, f, g, h, bfh, cfg, also auch die Winkel fhb, fgc, gegeben. Man setze $fg = x$, $gh = y$, $hf = z$, so ist $bf = z. \frac{\sin fhb}{\sin b}$, $cf = x \frac{\sin fgc}{\sin c}$ also $x. \frac{\sin fgc}{\sin c} + z. \frac{\sin fhb}{\sin b} = bc$. Verbindet man hiermit die Gleichungen $z = x. \frac{\sin g}{\sin h} = x \frac{\sin n}{\sin o}$, $y = x. \frac{\sin f}{\sin h} = x. \frac{\sin m}{\sin o}$, so lassen sich die Seiten x, y, z, bestimmen.

Soll insbesondere $hf = fg = x = z$, $\angle hfg = R$, $\angle hfb = gfc = \frac{1}{2} R$, also $gh \parallel bc$ seyn, so ist

$$\sin fgc = \sin fga = \sin(\tfrac{1}{2}R + c) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\sin c + \cos c)$$

$$\sin fhb = \sin fha = \sin(\tfrac{1}{2}R + b) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\sin b + \cos b)$$

$$fg\left(\frac{\sin fgc}{\sin c} + \frac{\sin fhb}{\sin b}\right) = bc, \text{ also } fg\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}}(2 + \cot b + \cot c) = bc$$

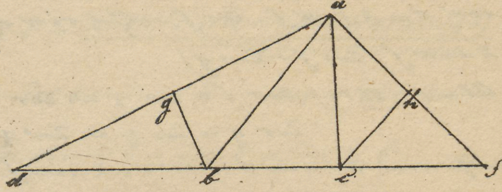
also $fg\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(2\cdot ad + bc) = ad\cdot bc$, $fg = \frac{\sqrt{2}\cdot ad\cdot bc}{2ad + bc}$

hieraus $bf = \frac{bc(ad + bd)}{2ad + bc}$, $cf = \frac{bc(ad + cd)}{2ad + bc}$.

Ist noch außerdem das $\Delta\, abc$ gleichseitig, so ist $ad = \frac{1}{2} bc\cdot\sqrt{3}$, also $fg = bc\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{18} - \sqrt{6})$, oder $fg = bc\cdot 0{,}4482877$, $fg^2 = bc^2\cdot(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{3}) = bc^2\cdot 0{,}20096189$.

7.

Ein Dreieck aus dem Umfange und den Winkeln zu bestimmen.



Das gesuchte Dreieck sey abc. Man mache $bd = ab$, $cf = ca$, so ist df der Umfang des Dreiecks, und $\angle d = \frac{1}{2} b$, $\angle f = \frac{1}{2} c$. Hieraus ergiebt sich die Auflösung:

Ueber einer Grundlinie df, welche dem gegebenen Umfange des Dreiecks abc gleich ist, setze man die Winkel $d = \frac{1}{2} b$, $f = \frac{1}{2} c$ an. Der Durchschnitt a ist die Spitze des verlangten Dreiecks. Man halbire ad, af in g, h, und errichte in g auf ad, in h auf af Senkrechte, welche die Grundlinie df, in b, c schneiden.

Anders. Nach VI. 23 ist $ab.\sin a = bc.\sin c$, $ab.\sin b = ca.\sin c$, $ab.\sin c = ab.\sin c$, also die Summen $ab(\sin a + \sin b + \sin c) = (ab + bc + ca)\sin c = 2.S.\sin c$ also $ab = \frac{2S}{N}.\sin c$, $bc = \frac{2.S}{N}.\sin a$, $ca = \frac{2.S}{N}.\sin b$,

wo S der halbe Umfang des $\Delta\, abc$ ist.
Der Nenner $N = \sin a + \sin b + \sin c$ läßt sich für die logarithmische Berechnung bequemer ausdrücken.

Es sey $a + b = 2.f$, $a - b = 2.g$, so ist $a = f + g$, $b = f - g$, also nach VI. 12:

$\sin a = \sin f.\cos g + \cos f.\sin g$

$\sin b = \sin f.\cos g - \cos f.\sin g$

also $\sin a + \sin b = 2 \sin f.\cos g$. Aber nach VI. 3 ist $\sin c = \sin(a+b)$, also $\sin c = \sin 2f$, also (VI. 10) $\sin c = 2 \sin f.\cos f$, also $\sin a + \sin b + \sin c = 2 \sin f (\cos f + \cos g)$

Aber (VI. 13) $\cos f = \cos \frac{1}{2}a.\cos \frac{1}{2}b - \sin \frac{1}{2}a.\sin \frac{1}{2}b$

$\cos g = \cos \frac{1}{2}a.\cos \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}a.\sin \frac{1}{2}b$

also $\sin a + \sin b + \sin c = 2.\sin f.2.\cos \frac{1}{2}a.\cos \frac{1}{2}b$

aber $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = R$, also $f + \frac{1}{2}c = R$, also (VI. 3) $\sin f = \cos \frac{1}{2}c$, also $N = \sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{1}{2}a.\cos \frac{1}{2}b.\cos \frac{1}{2}c$.

<u>Noch anders</u>. (VI. 28) $ab^2 = bc^2 + ca^2 - 2bc.ca.\cos c$
also $ab^2 = (bc + ca)^2 - 2bc.ca(1 + \cos c)$.

Es sey $\Delta\, abc = F$, so ist (VI. 27.) $\frac{1}{2} bc.ca.\sin c = F$
also $ab^2 = (bc + ca)^2 - 4F \dfrac{1 + \cos c}{\sin c}$.

Nach VI. 10. 11. ist $\sin c = 2 \sin \frac{1}{2}c.\cos \frac{1}{2}c$

$1 + \cos c = 2.\cos \frac{1}{2}c.\cos \frac{1}{2}c$

also $ab^2 = (bc + ca)^2 - 4F.\cot \frac{1}{2}c$

$ab + bc + ca = 2S$, also $bc + ca = 2S - ab$

also $(bc + ca)^2 = 4S^2 - 4S.ab + ab^2$

also $F.\cot \frac{1}{2}c = S^2 - S.ab$

$F.\cot \frac{1}{2}a = S^2 - S.bc$

$F.\cot \frac{1}{2}b = S^2 - S.ca$

also $F(\cot \frac{1}{2}a + \cot \frac{1}{2}b + \cot \frac{1}{2}c) = S^2$

oder $F = \dfrac{S^2}{M}$.

Der Nenner $M = \cot\frac{1}{2}a + \cot\frac{1}{2}b + \cot\frac{1}{2}c$ läßt sich für die logarithmische Berechnung bequemer ausdrücken:

$$\cot\tfrac{1}{2}a + \cot\tfrac{1}{2}b = \frac{\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a} + \frac{\cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}b}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}a + \cot\tfrac{1}{2}b = \frac{\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b + \cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}a + \cot\tfrac{1}{2}b = \frac{\sin(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)}{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}a + \cot\tfrac{1}{2}b + \cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b} + \frac{\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}a + \cot\tfrac{1}{2}b + \cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}c(\sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b)}{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}c = \cos(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b) = \cos\tfrac{1}{2}a.\cos\tfrac{1}{2}b - \sin\tfrac{1}{2}a.\sin\tfrac{1}{2}b$$

also $\sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b = \cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b$

also $\cot\frac{1}{2}a + \cot\frac{1}{2}b + \cot\frac{1}{2}c = \dfrac{\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c}$

also $M = \cot\frac{1}{2}a + \cot\frac{1}{2}b + \cot\frac{1}{2}c = \cot\frac{1}{2}a.\cot\frac{1}{2}b.\cot\frac{1}{2}c$

also $F = S^2.\, tg\frac{1}{2}a.\, tg\frac{1}{2}b.\, tg\frac{1}{2}c$

aber $F.\cot\frac{1}{2}c = S^2 - S.ab$

also $S^2.\, tg\frac{1}{2}a.\, tg\frac{1}{2}b = S^2 - S.ab$

also $ab = S - S.\, tg\frac{1}{2}a.\, tg\frac{1}{2}b$

oder $ab = S.\dfrac{\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b - \sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b}$

oder $ab = S.\dfrac{\cos(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)}{\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b}$

also $ab = S.\dfrac{\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b} = \frac{1}{2}S.\dfrac{2\sin\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c}$

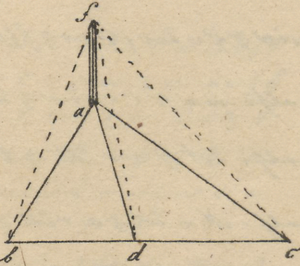
also $ab = \dfrac{\frac{1}{2}S.\sin c}{\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c}$ wie oben.

Beispiel. Der Umfang des △ abc sei = 140, also $S = 70$, die Winkel $a = 68°34'$, $b = 75°27'$, $c = 35°59'$.

$\frac{1}{2}S$	1,54407	bc	1,71945	S	1,84510
$\cos\frac{1}{2}a$	9,91742	ca	1,73641	S	1,84510
$\cos\frac{1}{2}b$	9,89815	ab	1,51961	$tg\frac{1}{2}a$	9,83361
$\cos\frac{1}{2}c$	9,97823	$bc =$	52,414	$tg\frac{1}{2}b$	9,88851
	1,75057	$ca =$	54,501	$tg\frac{1}{2}c$	9,51157
$\sin a$	9,96888	$ab =$	33,083	F	2,92389
$\sin b$	9,98584	$2S =$	140	$F =$	839,24
$\sin c$	9,76904				

8.

Aus den Höhenwinkeln, welche nach einem Punkte aus drei in gerader Linie liegenden Punkten gemessen worden sind, die absolute Höhe zu bestimmen.



Die Ebene abc sei horizontal; in a befinde sich senkrecht auf dieser Ebene ein Signal af; aus den drei in gerader Linie liegenden Punkten b, d, c, seien nach der Spitze des Signals die Höhenwinkel $fba = b$, $fda = d$, $fca = c$ gemessen, die absolute Höhe des Signals über der horizontalen Ebene abc sei $af = x$.

Nach V. 10. ist $ad^2 = ab^2 \cdot \frac{cd}{bc} + ac^2 \cdot \frac{bd}{bc} - bd \cdot cd$.

Aber $ab = x \cdot \cot b$, $ad = x \cot d$, $ac = x \cdot \cot c$

also $x^2\left(\cot^2 b \cdot \frac{cd}{bc} + \cot^2 c \cdot \frac{bd}{bc} - \cot^2 d\right) = bd \cdot cd$

setzt man also $N = \cot^2 b \cdot cd + \cot^2 c \cdot bd - \cot^2 d \cdot bc$

oder $N = (\cot^2 b - \cot^2 d)\,cd + (\cot^2 c - \cot^2 d)\,bd$

so ist $x^2 = \dfrac{bd \cdot cd \cdot bc}{N}$

der Nenner N läßt sich für die logarithmische Berechnung etwas bequemer einrichten.

$$\cot^2 b - \cot^2 d = \frac{\cos^2 b}{\sin^2 b} - \frac{\cos^2 d}{\sin^2 d} = \frac{\sin^2 d . \cos^2 b - \cos^2 d . \sin^2 b}{\sin^2 b . \sin^2 d}$$

$$\cot^2 b - \cot^2 d = \frac{(\sin d \cos b + \cos d \sin b)(\sin d \cos b - \cos d \sin b)}{\sin^2 b . \sin^2 d}$$

$$\cot^2 b - \cot^2 d = \frac{\sin(d+b)\sin(d-b)}{\sin^2 b . \sin^2 d}$$

Setzt man also $A = \frac{cd . \sin(d+b)\sin(d-b)}{\sin^2 b . \sin^2 d}$

$B = \frac{bd . \sin(d+c)\sin(d-c)}{\sin^2 c . \sin^2 d}$, so ist $N = A + B$

Um aus den Logarithmen von A und B unmittelbar den Logarithmus von N zu finden, verfährt man nach VI. Aufgabe 71.

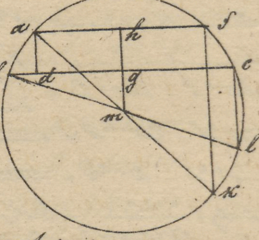
Beispiel. $bd = 774,5$ Fuß, $cd = 592,5$ Fuß

$b = 15°24,4$	$d = 12°54,8$	$c = 9°13,8$
$d = 12\ 54,8$	$c = 9\ 13,8$	A 3,54021
$d-b = -2\ 29,6$	$d-c = 3\ 41,0$	B 4,16424
$d+b = 28\ 19,2$	$d+c = 22\ 8,6$	$\sin^2 y$ 9,37597
$\sin(d-c)$ 8,80782	$\sin(d-b)$ 8,63862	$\sin y$ 9,68798
$\sin(d+c)$ 9,57626	$\sin(d+b)$ 9,67614	$\cos y$ 9,94108
bd 2,88902	cd 2,77269	$\cos^2 y$ 9,88216
1,27310	1,08735	N 4,04640
$\sin c$ 9,20520	$\sin b$ 9,42434	5,95360
$\sin c$ 9,20520	$\sin b$ 9,42434	bd 2,88902
$\sin d$ 9,34923	$\sin d$ 9,34923	cd 2,77269
$\sin d$ 9,34923	$\sin d$ 9,34923	bc 3,13577
B 4,16424	A 3,54021	x^2 4,75108
$x = af = 237,43$ Fuß		x 2,37554

9.

Aus zwei parallelen Sehnen und ihrem Abstande den Durchmesser des Kreises zu bestimmen.

Es seien die parallelen Sehnen af, bc, und ihr Abstand ad gegeben. Fällt man vom Mittelpunkt m auf die Sehnen die Senkrechte mgk,

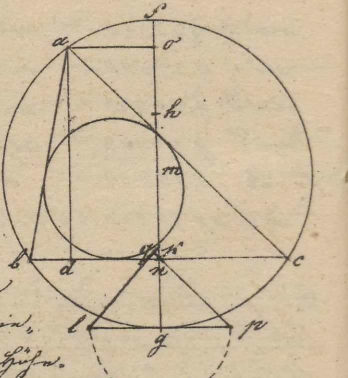


so halbirt sie dieselben, also ist
$bd = \frac{1}{2} bc - \frac{1}{2} af$; $cd = \frac{1}{2} bc + \frac{1}{2} af$.
Hieraus berechnet man
$tg\, b = \frac{ad}{bd}$, $tg\, c = \frac{ad}{cd}$ und
dann $ab = \frac{ad}{\sin b}$, $ac = \frac{ad}{\sin c}$
und (V. 5) den Durchmesser
$D = \frac{ab.\, ac}{ad}$. Diese Aufgabe kommt in der Astronomie vor, wo der Kreis das Gesichtsfeld eines Fernrohrs vorstellt, durch welches zwei Sterne von bekannten Breitenunterschieden durchgehen.

<u>Beispiel.</u> $af = 87$, $bc = 108$, $ad = 23$.

$bc =$	108	ad	1,36173	ad	1,36173
$af =$	87	bd	1,02119	$\sin b$	9,95889
	195	cd	1,98900	$\sin c$	9,36097
	21	$tg\, b$	0,34054	ab	1,40284
$cd =$	97,5	$tg\, c$	9,37273	ac	2,00076
$bd =$	10,5			ad	1,36173
				D	2,04187 = 110,12

10.



<u>Ein Dreieck aus den Durchmessern des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises und einer gegebenen Höhe zu bestimmen.</u>

Das verlangte Dreieck sey abc. Gegeben ist der Durchmesser des umschriebenen Kreises $fg = D$, des eingeschriebenen Kreises $pl = d$, und die Höhe $ad = H$. Man setze den Inhalt $= F$, den halben Umfang $= S$, die Grundlinie $bc = x$, so ist:
V. 4. $F^2 = S(S - x)(S - ca)(S - ab)$

V. 6. $S . \partial = 2 F. = H . x$, also:

$$\frac{F^2}{S(S-x)} = \frac{S^2 \partial^2}{4 S.(S-x)} = \frac{S . \partial^2}{4(S-x)} = \frac{H . x . \partial}{4(S-x)} = \frac{H . \partial^2}{4(H-\partial)}$$

ferner ist $(S - ca)(S - ab) = S^2 - S(ca + ab) + ca . ab$

$(S - ca)(S - ab) = S^2 - S(2S - x) + ca . ab$

$(S - ca)(S - ab) = S . x - S^2 + ca . ab$

$(S - ca)(S - ab) = \frac{H . x^2}{\partial} - \frac{H^2 x^2}{\partial^2} + ca . ab$

Nach V. 5 ist $ca . ab = D . H$

also $(S - ca)(S - ab) = \frac{H . x^2}{\partial} - \frac{H^2 x^2}{\partial^2} + D . H$

also $\frac{F^2}{S(S-x)} = \frac{H . x^2}{\partial} - \frac{H^2 . x^2}{\partial^2} + D . H$

also $\frac{H . \partial^2}{4(H-\partial)} = \frac{H . x^2}{\partial} - \frac{H^2 . x^2}{\partial^2} + D . H$

Setzt man also $\partial^2 = 4(H - \partial) . A$

so ist $A = D - \frac{x^2}{4A}$, $\frac{1}{4} x^2 = (D - A) A$.

Hieraus ergiebt sich die Auflösung:

In dem gegebenen umschriebenen Kreis so zieht man den Durchmesser $fg = D$, nimmt darauf $gk = H$, und $kr = \partial$, so ist $gr = H - \partial$. In g errichtet man auf fg die Senkrechte $gl = gp = \frac{1}{2}\partial$, verbindet rl, und zieht auf rl eine Senkrechte pn, welche die fg in n schneidet, so ist $ng . gr = gp . gl = \frac{1}{4}\partial^2$, also $ng = A$, $nf = D - A$.

Errichtet man also in n auf fg eine Senkrechte, welche den Kreis in b, c, schneidet, so ist bc die Grundlinie des verlangten Dreiecks. Man nimmt $no = gh = H$, zieht $oa \parallel bc$, welche den Kreis in a schneidet, so ist a die Spitze des verlangten Dreiecks. Damit die Auflösung möglich sey, muß $nf > no$; also $D - A > H$,

14.

also $D > H + \frac{d^2}{4(H-d)}$ seyn

Beispiel. Es sey $D = 105$, $H = 74$, $d = 47$.

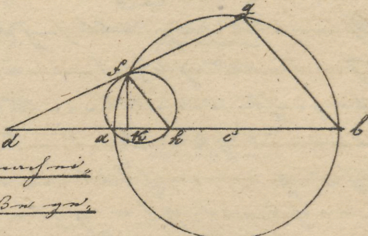
d 1,67210
d 1,67210
$\frac{1}{4}$ 9,39794
$H-d$ 1,43136
A 1,31078
$A = 20,454$
$D = 105$
$D-A = 84,546$
$H = 74$
$f\sigma = 10,546$
$\frac{1}{2}D = 52,5$
$m\sigma = 41,954$

A 1,31078
$D-A$ 1,92709
$\frac{1}{4}x^2$ 3,23787
$\frac{1}{2}x$ 1,61893
$\frac{1}{2}D$ 1,72016
$\sin\alpha$ 9,89877
$m\sigma$ 1,62277
$\frac{1}{2}D$ 1,72016
$\cos am\sigma$ 9,90261
$\sin am\sigma$ 9,77899
nd 1,49915

$nd = 31,561$
$bn = 41,585$
$bd = 10,024$
$cd = 73,146$
H 1,86923
bd 1,00104
cd 1,86419
$tg\, b$ 0,86819
$tg\, c$ 0,00504
$a = 52° 22,8$
$b = 82\ 17,1$
$c = 45\ 20,0$

11.

Durch einen gegebenen Punkt eine grade Linie zu ziehen, welche von einem gegebenen Kreise nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt wird.



Auf dem Durchmesser ab seyen zwei Punkte d, h, gegeben, also das Verhältniß $\frac{dh}{db} = A$ gegeben. Man soll die Linie dfg so ziehen, daß $\frac{df}{dg} = \frac{dh}{db} = A$ sey. Da das Rechteck $fd.dg = ad.db$ gegeben ist, so folgt durch Verbindung beider Gleichungen;
$df^2 = ad.dh$, woraus df bestimmt ist.

Fällt man $f\kappa$ senkrecht auf cd, so ist (V.8)
$df^2 = cd^2 + cf^2 - 2\,cd.c\kappa$,
$df^2 - ad^2 = cd^2 + ca^2 - 2\,cd.c\kappa - ad^2$
$ad.ah = cd^2 - 2\,cd.c\kappa + cd\,(ca - da)$
also $ad.ah = cd.2a\kappa$, $2a\kappa = \frac{ad.ah}{cd}$

Wenn die Auflösung möglich seyn soll, so darf das gegebene Verhältniß A nicht $< \frac{da}{db}$, und nicht $> \frac{db}{da}$ seyn.

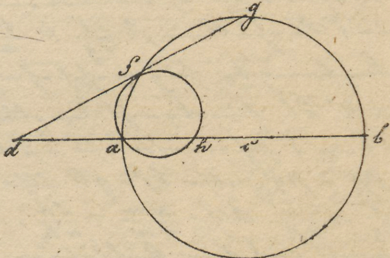
Beispiel. $ac = bc = 23$, $ad = 14$, $db = 60$

$A = 0{,}475$; $dh = A \cdot db = 28{,}5$, $ah = 14{,}5$.

ad	1,14613	ck	1,30657	db	1,77815
ah	1,16137	cf	1,36173	$\sin\frac{1}{2}dcf$	9,38776
$\frac{1}{2}$	9,69897	$\cos dcf$	9,94484		1,16591
cd	1,56820	$dcf =$	28° 16,2	ad	1,14613
ak	0,43827	$\frac{1}{2}dcf =$	14 8,1	$\cos\frac{1}{2}dcf$	9,98665
$ak =$	2,7433	$x =$	47 11,0		1,13278
$ac =$	23	$cdf =$	33 2,9	$tg\, x$	0,03313
$ck =$	20,2567			$\sin x$	9,86542
				$\cos x$	9,83229
				df	1,30049

12.

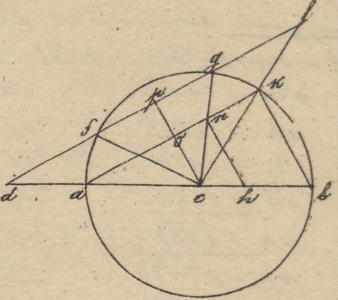
Durch einen gegebenen Punkt nach einem gegebenen Kreise eine grade Linie zu ziehen, auf welcher das Rechteck zwischen der Sehne und einem der Abschnitte einen gegebenen Inhalt hat.



Auf dem Durchmesser ab seyen zwei Punkte d, h gegeben, also das Rechteck $ad \cdot bh = P$ gegeben. Man soll dfg so ziehen, daß das Rechteck $df \cdot fg = ad \cdot bh = P$ sey. Es ist aber $df \cdot dg = ad \cdot db$ gegeben. Hieraus folgt durch Subtraction $df^2 = ad \cdot dh$, woraus df eben so wie in der vorigen Aufgabe bestimmt ist. Wenn die Auflösung möglich seyn soll, so darf der gegebene Inhalt P nicht $> ad \cdot ab$ seyn.

13.

<u>Zu gegebener Richtung eine grade Linie zu ziehen, welche einen gegebenen Kreis nach einem gegebenen Verhältniße theilt.</u>

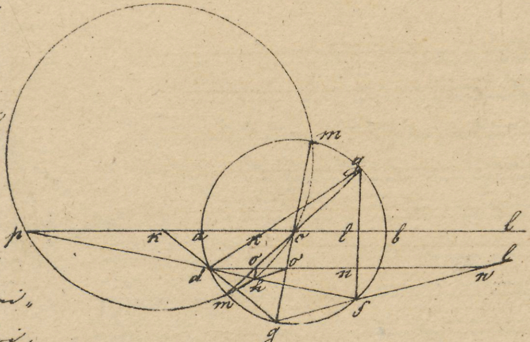


Auf dem Durchmesser ab sey ein Punct h gegeben, im Halbkreise sey eine Sehne ak gegeben. Man soll eine Linie mit ak parallel ziehen, welche den Durchmesser in d, den Kreis in f, g schneidet, so daß das Verhältniß $\frac{df}{dg} = \frac{bh}{ah} = A$ gegeben sey. Das Verlangte sey geschehen; man ziehe cop auf ak, dl, senkrecht, verlängere ck, welche die dl in l schneidet, so ist $ao = ok$, also $dp = pl$. Aber $fp = pg$, also $df = gl$. Also $\frac{df}{dg} = \frac{gl}{dg} = \frac{kn}{an}$. Aber auch $\frac{df}{dg} = \frac{bh}{ah}$. Also $\frac{kn}{an} = \frac{bh}{ah}$, also $hn \parallel bk$. Hieraus ergiebt sich die Auflösung:

da ak gegeben ist, so ziehe man aus dem Puncte h auf ak eine Senkrechte hn, welche sie in n trifft; verbinde cn, welche den Kreis in dem verlangten Puncte g schneidet, durch welchen man nun $dl \parallel ak$ zieht.

14.

<u>Um einen gegebenen Kreis auf einer gegebenen Sehne ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten einen gegebenen Durchmesser nach einem gegebenen Verhältniß theilen.</u>

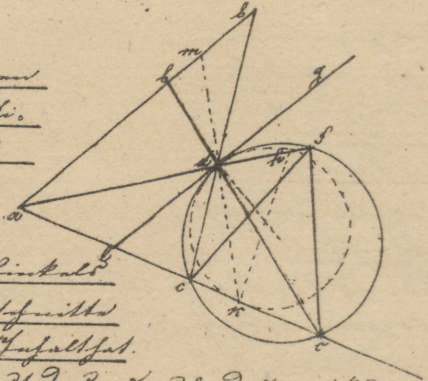


der gegebenen Durchmesser sey ab, die gegebene Sehne df, der Punct derselben in p. Man soll über df einen Dreieck dfg in den Kreis beschreiben, dessen Seiten dg, fg den Durchmesser in k, l, dergestalt schneiden, daß, wenn k ein gegebener Punct auf df ist, $\frac{kc}{lc} = \frac{dk}{fk}$ sey. Das Verlangte sey geschehen. Man ziehe $dn \parallel ab$, die dn werde von gf in n, von gc in o geschnitten, so ist $\frac{kc}{lc} = \frac{do}{no}$, also $\frac{do}{no} = \frac{dk}{fk}$, also $ko \parallel fg$, also $\angle dko = dfn$. Die gc schneide den Kreis in m, so ist $\angle dfg = dmg$, also $\angle dko = dmo$, oder $\angle dko + dmo = 2R$, also ist dmko ein Kreisviereck, also $\angle dom = dkm$. Aber $do \parallel pc$, also $\angle dom = pcm$, also ist auch $\angle dkm$ oder $\angle pkm = pcm$, also pckm ein Kreisviereck. Hieraus ergiebt sich die Auflösung:

Man beschreibe um das gegebene Δ pck einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis C in m schneidet; man verbinde mc, welche den gegebenen Kreis in g schneidet, so ist g der verlangte Punct.

Da der zweite Kreis den gegebenen in zwei Puncten m schneidet, so erhält man zwei Puncte g. Die Aufgabe hat also zwei Auflösungen.

15.



Durch einen gegebenen Punkt eine grade Linie zu ziehen, durch welcher das Rechteck der nach den Seiten eines gegebenen Winkels genommenen Abschnitte einen gegebenen Inhalt hat.

Der $\angle\, bac$, der Punkt d, und auch ad der Punkt f, sind gegeben, und man soll durch d die grade Linie bc so ziehen, daß das Rechteck der Abschnitte $bd \cdot dc = ad \cdot df = T$ sey.

Das Verlangte sey geschehen so ist (III. 53. 55) $abfc$ ein Kreisviereck, also $\angle\, dcf = dab$ gegeben.

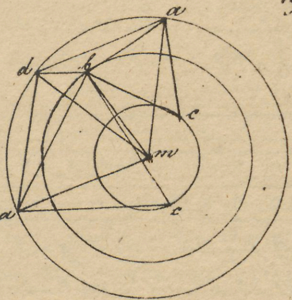
Hieraus ergiebt sich die Auflösung:

Durch d ziehe man $lg \parallel ab$, über df als Sehne beschreibe man einen Kreis, welcher lg berührt. Wenn dieser Kreis die ac in c schneidet, so ist c der verlangte Punkt, weil (III. 39) $\angle\, dcf = gdf = dab$, also $\triangle\, dcf \sim dab$, also $bd \cdot dc = ad \cdot df$.

Da man zwei Durchschnittspunkte c, erhält, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen.

Die Grenze der Möglichkeit findet statt, wenn der Kreis die Linie ac berührt. Um den Berührungspunkt κ zu finden, macht man $l\kappa = ld$, d. h. man zieht die Linie $d\kappa$ senkrecht auf die Linie, welche den $\angle\, bac$ halbirt. Man macht $\angle\, d\kappa h = dab$. Wenn also die Auflösung möglich seyn soll, so darf df nicht $< dh$, d. h. nicht kleiner als $\frac{md \cdot d\kappa}{ad}$, also T nicht $< md \cdot d\kappa$ seyn.

16.



In drei concentrische Kreise ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

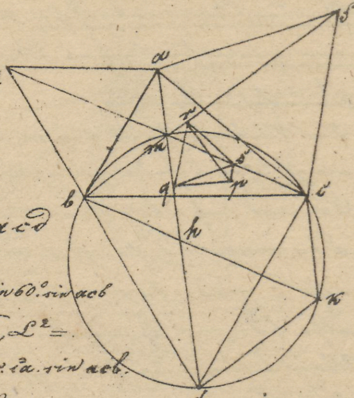
Der Mittelpunkt sey m, das einzuschreibende gleichseitige Dreieck sey abc. Man mache ad = ma = md, so ist ∠ mad = $\frac{2}{3}$ R also ∠ mad = bac, also ∠ bad = mac, also Δ bad ≅ cam, also bd = mc. Hieraus ergiebt sich die Auflösung: Man bilde aus drei gegebenen Halbmessern der Kreise ma, mb, mc, ein Dreieck mbd. Ueber eine der drei Seiten, z. B. über md beschreibe man ein gleichseitiges Dreieck mad, so ist die gerade Linie ab, welche die Gegenspitzen der beiden Dreiecke verbindet, die verlangte Seite des einzuschreibenden gleichseitigen Dreiecks abc. Da man das Δ mad über md nach zwei entgegengesetzten Seiten beschreiben kann, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen.

Diese Auflösung leitet auf verschiedene Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks. Statt nämlich über md das gleichseitige Δ mad zu beschreiben, hätte man auch über jede der beiden andern Seiten mb oder bd gleichseitige Dreiecke beschreiben können, und dadurch der ab gleiche Linien finden müssen. Also

1) Wenn man über die Seiten eines beliebigen Δ abc, gleichseitige Dreiecke agb, bdc, cha beschreibt, so sind die Diagonallinien ad, bh, cg einander gleich.

Denn aus der Gleichheit zweier Seiten und des Zwi-

schenwinkels folgt, daß
$\Delta\, acd = fcb$, also $ad = bf$, u. s. w.



2) Die Länge dieser Diagonallinien ist also aus den drei Seiten symmetrisch zusammengesetzt.

Es sey $ad = bf = cg = L$ so ist

VI. 23. $L^2 = cd^2 + ca^2 - 2cd.ca.\cos acd$

$\angle\, acd = 60^\circ + acb$

VI. 13. $\cos acd = \cos 60^\circ. \cos acb - \sin 60^\circ. \sin acb$

VI. 9. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $L^2 = bc^2 + ca^2 - bc.ca.\cos acb + \sqrt{3}.bc.ca.\sin acb$.

Es sey $\Delta\, acb = F$, so ist:

$L^2 = bc^2 + ca^2 - bc.ca.\cos acb + 2\sqrt{3}.F$

VI. 23. $ab^2 = bc^2 + ca^2 - 2\,bc.ca.\cos acb$, also:

$L^2 = \frac{1}{2} ab^2 + \frac{1}{2} bc^2 + \frac{1}{2} ca^2 + 2\sqrt{3}\, F$

3) Die drei Diagonallinien durchschneiden einander in einem Puncte, um welchen herum sechs Winkel von 60° liegen.

Beschreibt man nämlich um das $\Delta\, bcd$ einen Kreis, welcher von ad in m geschnitten wird, so ist $\angle\, bmd = bcd = 60^\circ$, $\angle\, cmd = cbd = 60^\circ$, also $\angle\, amb = amc = 120^\circ$. Aber $\angle\, agb = afc = 60^\circ$. Also sind $ambg$, $amcf$, Kreisvierecke, also $\angle\, amg = abg = 60^\circ$, $\angle\, amf = acf = 60^\circ$. Also liegen auch die Puncte c, m, g, und die Puncte b, m, f, in graden Linien. Also schneiden ad, bf, cg, einander in einem Puncte m.

4) Die Diagonallinien sind gleich der Summe der Abstände ihres Durchschnittspunkts von den Ecken des $\Delta\, abc$.

Denn man ziehe $bk \parallel mc$, $dk \parallel mb$, welche einander in k schneiden, so ist $\angle hdk = hmb = 60°$; $\angle khd = cmd = 60°$, also ist $\angle hkd = 60°$; also liegt k in dem um das $\Delta\, bcd$ beschriebenen Kreise, also $\angle ckb = cdb = 60° = khd$, also $ck \parallel md$. Aber auch $hk \parallel mc$; also $hk = mc$; aber auch $hk = hd$, also $hd = mc$; aber auch $mh = mb$, also $md = mb + mc$; also

$\mathfrak{L} = ad = ma + mb + mc$. (Siehe V. 43)

5) <u>Die Summe dieser Abstände ist ein Minimum.</u>

Denn es sey p ein beliebiger Punkt im $\Delta\, abc$. Man ziehe pq, pr, ps, gegenseitig senkrecht auf ad, bf, cg, so geht ein über mp als Durchmesser beschriebener Kreis durch die Punkte q, r, s, also ist das $\Delta\, qrs$ gleichseitig, also ist $ms = mq + mr$. Aber $aq = ma + mq$, $br = mb + mr$, $cs = mc - ms$, also ist

$aq + br + cs = ma + mb + mc = \mathfrak{L}$.

Aber $pa > aq$, $pb > br$, $pc > cs$, also ist

$pa + pb + pc > ma + mb + mc$.

6) <u>Die Abstände des Durchschnittspunkts der Diagonallinien von den Ecken des $\Delta\, abc$ sind aus der Diagonallinie und den Seiten des $\Delta\, abc$ gegeben.</u>

Denn $ma = aq \cdot \dfrac{\sin aqm}{\sin amq} = ab\, \dfrac{\sin aqc}{\sin 60°}$

$\mathfrak{L} = iq = ia \cdot \dfrac{\sin iaq}{\sin aqc}$, also $ma \cdot \mathfrak{L} = ia \cdot ab \cdot \dfrac{\sin iaq}{\sin 60°}$

$\sin iaq = \sin(60° + \alpha) = \sin 60° \cdot \cos \alpha + \cos 60° \cdot \sin \alpha$

$\sin iaq = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha$

also $ma \cdot \mathfrak{L} = ca \cdot ab \cdot \cos\alpha + \sqrt{\tfrac{1}{3}} \cdot ca \cdot ab \cdot \sin\alpha$

$$ma \cdot \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} ca^2 + \tfrac{1}{2} ab^2 - \tfrac{1}{2} bc^2 + \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot T$$

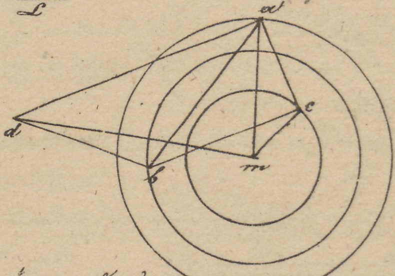
$$ma \cdot \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} ca^2 + \tfrac{1}{2} ab^2 - \tfrac{1}{2} bc^2 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{L}^2 - \tfrac{1}{6} ca^2 - \tfrac{1}{6} ab^2 - \tfrac{1}{6} bc^2$$

$$ma \cdot \mathfrak{L} = \tfrac{1}{3} ca^2 + \tfrac{1}{3} ab^2 - \tfrac{2}{3} bc^2 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{L}^2$$

also $ma = \frac{1}{3}\mathfrak{L} + \dfrac{ca^2 + ab^2 - 2bc^2}{3\mathfrak{L}}$

oder $ma = \mathfrak{L} - \dfrac{4\sqrt{3}.T}{3\mathfrak{L}} - \dfrac{bc^2}{\mathfrak{L}}$

17.



<u>In drei concentrische Kreise ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist.</u>

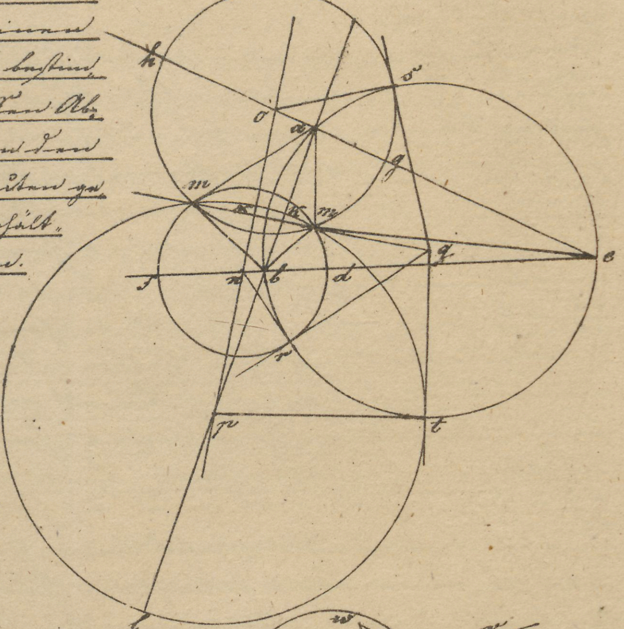
Der Mittelpunct sey m, das Δ abc sey einem gegebenen ähnlich.
Man beschreibe über am ein Dreieck adm ∼ abc, so ist $ad = \frac{ma \cdot ab}{ca}$, ∠ mad = cab, also ∠ bad = cam, also Δ abd ∼ acm. also $bd = \frac{mc \cdot ab}{ca}$. Auch ist $md = ma \cdot \frac{bc}{ca}$. Hieraus ergiebt sich die Auflösung:

Da die Halbmesser ma, mb, mc, und die Verhältnisse $\frac{ab}{ca}$, $\frac{bc}{ca}$, gegeben sind, so beschreibe man über einem der Halbmesser, z. B. über mb, ein Δ mbd, in welchem man die Seiten $md = ma \cdot \frac{bc}{ca}$, $bd = mc \cdot \frac{ab}{ca}$ macht. Dann beschreibe man über md ein Δ mad, dessen Seite ma der gegebenen Halbmesser, und $ad = ma \cdot \frac{ab}{ca}$ ist. Man verbinde ab, und beschreibe über ab ein Dreieck abc ∼ adb, so ist dieses das verlangte; und der Punct c muß im Umfange des dritten Kreises liegen. Da man dem Δ mad zwei entgegengesetzte Lagen gegen md geben kann, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen.

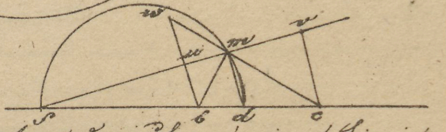
Die umgekehrte Aufgabe ist folgende:

18.

<u>In der Ebene eines gegebenen Dreiecks einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von den Winkelpunkten gegebenes Verhältniß haben.</u>



In der Ebene des $\Delta\, abc$ soll der Punkt m so bestimmt werden, daß
$\frac{ma}{mb} = \frac{A}{B}$
$\frac{mb}{mc} = \frac{B}{C}$
$\frac{mc}{ma} = \frac{C}{A}$ sey.



Nimmt man bc als Grundlinie an, so kommt es darauf an, eine Linie zu finden, in welcher alle Punkte m die Eigenschaft haben, daß $\frac{mb}{mc} = \frac{B}{C}$ sey. Aus V. 19 ergiebt sich, daß diese Linie eine Kreislinie ist; nämlich: <u>Wenn der Durchmesser df eines Kreises in b, c, harmonisch getheilt wird (VIII. 1), so ist für jeden Punkt m des Umfangs</u> $\frac{mb}{mc} = \frac{bd}{cd} = \frac{bf}{cf}$.

Denn da $\angle\, dmf = R$, so ist, wenn man bu, cv senkrecht auf fm fället, und bw, cm, einander in w schneiden

$\frac{mw}{cv} = \frac{mu}{mv} = \frac{bd}{cd} = \frac{bf}{cf} = \frac{bu}{cv}$, also $mw = bu$, also $mw = mb$. Aber $\frac{mw}{mc} = \frac{mu}{mv} = \frac{bd}{cd}$, also auch $\frac{mb}{mc} = \frac{bd}{cd} = \frac{bf}{cf}$.

Hieraus ergiebt sich die Auflösung der obigen Aufgabe:

Man theile bc harmonisch in d, f, im Verhältniß von $\frac{B}{C}$ (VIII. 1), so daß $\frac{bd}{cd} = \frac{bf}{cf} = \frac{B}{C}$ sey, halbire df in n, beschreibe aus dem Mittelpunct n mit dem Halbmesser $nd = nf$ einen Kreis, so liegt der Punct m im Umfange desselben. Man theile ca harmonisch in g, h, im Verhältniß von $\frac{C}{A}$, so daß $\frac{cg}{ag} = \frac{ch}{ah} = \frac{C}{A}$ sey, halbire gh in o, beschreibe aus dem Mittelpuncte o mit dem Halbmesser $og = oh$ einen Kreis, so liegt der Punct m im Umfange desselben. Man theile ab harmonisch in k, l, im Verhältniß von $\frac{A}{B}$, so daß $\frac{ak}{bk} = \frac{al}{bl} = \frac{A}{B}$ sey, halbire kl in p, beschreibe aus dem Mittelpuncte p mit dem Halbmesser $pk = pl$ einen Kreis, so liegt der Punct m im Umfange desselben. Diese drei Kreise müssen einander also in einem Puncte m schneiden, welcher der verlangte Punct ist. Da sie einander noch in einem zweiten Puncte m schneiden, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen.

Aus dieser Auflösung lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen. Da $\frac{bd}{cd} = \frac{bf}{cf} = \frac{B}{C}$ ist, so ist $bd = bc \cdot \frac{B}{C+B}$, $bf = bc \cdot \frac{B}{C-B}$, $df = bc \cdot \frac{2.B.C}{C^2-B^2}$, $nd = nf = bc \cdot \frac{B.C}{C^2-B^2}$, $nb = bc \cdot \frac{B^2}{C^2-B^2}$, $nc = bc \frac{C^2}{C^2-B^2}$ also $\frac{nb}{nc} = \frac{B^2}{C^2}$. Eben so beweist man, daß

$\frac{oc}{oa} = \frac{C^2}{A^2}$, $\frac{pa}{pb} = \frac{A^2}{B^2}$, also $\frac{nb}{nc} \cdot \frac{oc}{oa} \cdot \frac{pa}{pb} = 1$.

Hieraus folgt nach V. 23. Die Mittelpuncte n, o, p, liegen in grader Linie.

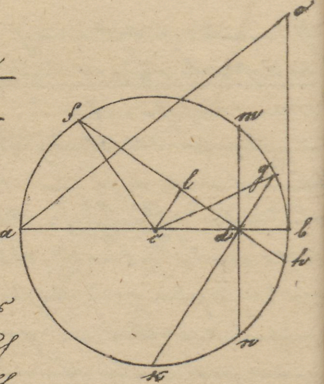
Man beschreibe um das Δ abc einen Kreis, dessen Mittelpunct q ist, und welcher die Kreise n, o, p, in r, s, t, schneidet, so ist $nr^2 = nd^2 = bc^2 \cdot \frac{B^2 \cdot C^2}{(C^2 - B^2)^2}$. Aber auch $nb \cdot nc = bc^2 \cdot \frac{B^2 \cdot C^2}{(C^2 - B^2)^2}$. Also $nr^2 = nb \cdot nc$. Aber $nb \cdot nc = nq^2 - qr^2$, also $nr^2 = nq^2 - qr^2$. Also ist (II. 46.) $\angle nrq = R$, also berührt die Linie qr den Kreis n, und die Linie nr den Kreis q. Ebenso beweiset man, daß os den Kreis q, qs den Kreis o, pt den Kreis q, qt den Kreis p berührt.

Hieraus folgt: Wenn man um das Δ abc einen Kreis q beschreibt, so sind die aus dem Mittelpuncte dieses Kreises an die Kreise n, o, p, gezogenen Berührenden einander und dem Halbmesser dieses Kreises gleich.

Da $nr^2 = nq^2 - qr^2$, $os^2 = oq^2 - qs^2$, und $qr = qs$, so ist $os^2 - nr^2 = oq^2 - nq^2$, also $om^2 - nm^2 = oq^2 - nq^2$. Fällt man von m auf die Linie no eine Senkrechte mx, so ist $om^2 - nm^2 = ox^2 - nx^2 = (ox + nx)(ox - nx)$ $= no(ox - nx) = no(2ox - no)$. Fällt man von q auf die Linie no eine Senkrechte qy, so ist $oq^2 - nq^2 = oy^2 - ny^2 = (oy + ny)(oy - ny) = no(oy - ny)$ $= no(2 \cdot oy - no)$. Aber $om^2 - nm^2 = oq^2 - nq^2$, also $2 \cdot ox - no$ $= 2 \cdot oy - no$, also $ox = oy$. Hieraus folgt; nach

VIII. 2. Der Mittelpunct q des umschriebenen Kreises liegt in der senkrechten Linie, welche auf die Linie nop in dem Puncte x errichtet wird, welcher der Potenzpunct der Kreise n, o, p, ist ~~und~~ welcher durch die Puncte m, m, zieht.

19.



Durch einen gegebenen Punct einen rechten Winkel zu legen, dessen Seiten einen gegebenen Kreis nach gegebenem Verhältnisse schneiden.

Der Durchmesser des Kreises sey ab, der Mittelpunct c; auf dem Durchmesser sey innerhalb des Kreises der Punct d gegeben; man soll den rechten Winkel fdg so ziehen, daß das Verhältniß $\frac{fh}{gk}$ einem gegebenen gleich sey. Der Durchmesser sey $ab = D$. Fället man cl senkrecht auf fh, so ist $fh^2 = 4fl^2 = D^2 - 4cl^2$; $gk^2 = D^2 - 4dl^2$, also $fh^2 + gk^2 = 2D^2 - 4cl^2 - 4dl^2 = 2D^2 - 4cd^2 = D^2 + D^2 - 4cd^2$. Errichtet man in d auf ab die Senkrechte mdn, so ist $mn^2 = D^2 - 4cd^2$, also $fh^2 + gk^2 = D^2 + mn^2$. Da mn gegeben ist, so errichte man in b auf ab die Senkrechte $bo = mn$, ziehe ao, so ist $ao^2 = ab^2 + bo^2$, also $fh^2 + gk^2 = ao^2 = L^2$. Hieraus ergiebt sich die Auflösung:

Aus cd und D berechne man $\frac{2cd}{D} = \cos C$, und bestimme hieraus den $\angle C$. Dann ist $mn = bo = D.\sin C$. Den Werth von $\sin C$ setze man $= \operatorname{tg} A$, und berechne hieraus den $\angle A$. Dann ist $\frac{bo}{D} = \operatorname{tg} A$, also $L = ao = \frac{D}{\cos A} = \frac{bo}{\sin A}$. Man setze nun das gegebene Verhältniß $\frac{fh}{gk} = \operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$, und berechne hieraus den $\angle B$. Dann ist $fh = L.\sin B$, $gk = L.\cos B$. Um die Lage dieser Linien gegen ab zu erhalten, berechnet man $\cos F = \frac{fh}{D}$, $\cos G = \frac{gk}{D}$.

woraus man $\sin cdf = \sin F.\frac{D}{2cd} = \frac{\sin F}{\cos C}$, und
$\sin cdg = \sin G.\frac{D}{2cd} = \frac{\sin G}{\cos C}$ findet.

Wenn die Aufgabe möglich seyn soll, so darf das gegebene Verhältniß tg B nicht < sin C und nicht > als $\frac{1}{\sin C}$ seyn.

Beispiel. $ab = D = 78$, $cd = 27$

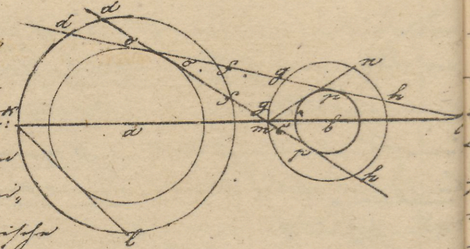
			I.	II.		
2cd	1,73239		tg B = 0,75	tg B = 1,24	I.	
D	1,89209	tg B	9,87506	0,09342		
cos C	9,84030	L	1,98312	1,98312	fh =	57,713
sin C	9,85830	sin B	9,77815	9,89121	gk =	76,95
$\frac{1}{\sin C}$	0,14170	cos B	9,90309	9,79779	cdf =	103° 40'
sin C	= 0,7216	fk	1,76127	1,87433	cdg =	13° 40'
$\frac{1}{\sin C}$	= 1,3858	gk	1,88621	1,78091	II.	
tg A	9,85830	D	1,89209	1,89209	fh =	74,873
cos A	9,90897	cos F	9,86918	9,98224	gk =	60,383
L	1,98312	cos G	9,99412	9,88882	cdf =	23° 53,2
		sin F	9,82782	9,44768	cdg =	113° 53,2
		sin G	9,21371	9,80141		
		cos C	9,84030	9,84030		
		sin cdf	9,98752	9,60738		
		sin cdg	9,37341	9,96111		

Wenn der Punct d außerhalb des Kreises liegt, so darf cd nicht größer als $\sqrt{\frac{1}{2}}\,D$ seyn. Man setzt alsdann $\frac{D}{2cd} = \cos C$, und verfährt übrigens auf eine ähnliche Art.

20.

Aus zwei gegebenen Kreisen durch eine grade Linie Sehnen von gegebener Länge abzuschneiden.

Es sey eine grade Linie cd so zu ziehen, daß sie von den gegebenen Kreisen a, b, Sehnen $df = A$, $gh = B$ abschneide. Das Verlangte sey geschehen, und man beschreibe aus a, b, concentrische Kreise, welche diese grade Linie in o, p, berühren, so sind $do = \frac{1}{2}A$, $gp = \frac{1}{2}B$, gegeben. Auch sind $ad = an$, $bg = bm$, gegeben. Also sind



Die Halbmesser ao, bp gegeben. Hieraus ergiebt sich die Auflösung: Man mache die Sehnen κb = A, mn = B, beschreibe aus a, b, concentrische Kreise, welche die Sehnen κb, mn, berühren, ziehe an diese Kreise die beiden gemeinschaftlichen Berührenden cd (VIII. I. III. 45), so leisten diese das Verlangte.

Beispiel. ab = 85, aκ = 37, bm = 12, A = 62, B = 17

½ A	1,49136
aκ	1,56820
cos x	9,92316
sin x	9,73713
ao	1,30533
½ B	0,92942
bm	1,07918
cos y	9,85024
sin y	9,84873
bp	0,92791

ao = 20,199

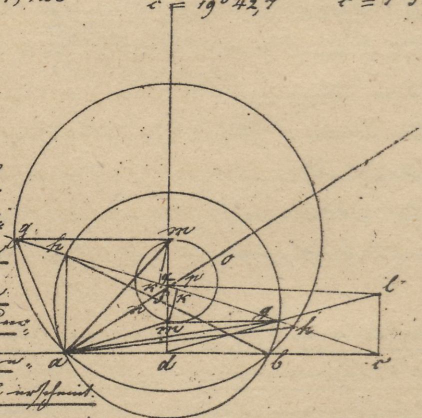
bp = 8,471

ao + bp = 28,670

ao − bp = 11,728

ao + bp	1,45743	ao − bp	1,0692
ab	1,92942	ab	1,9294
sin c	9,52801	sin c	9,1398
ao	1,30533	ao	1,3053
ac	1,77732	ac	2,1655
ac =	59,886	ac =	146,34
c =	19°42,7	c =	7°55,8

21.



Durch einen Kreis auf einer gegebenen graden Linie eine Sehne abzuschneiden, welche in zwey gegebenen Puncten unter einem gegebenen Gesichtswinkel erscheint.

Es sey durch die gegebenen Puncte a, b, ein Kreis m zu beschreiben, welcher die gegebene grade Linie cf in gk so schneide, daß die Gesichtswinkel gak, gbk, dem Winkel gleich seyen, welchen eine nach gegebener Richtung cl gezogene Linie mit der Linie cf bildet. Das Verlangte sey geschehen, mκ sey senkrecht auf cf gezogen, und fy senkrecht auf ab gezogen, und schneide die ds in l, ist fy senkrecht auf cl gezogen, so ist $\angle\, gmx = gak$, $\angle\, gak = fcl$, also $\angle\, gmx = fcl$ also $\angle\, mgx = cfl$, also $mg \parallel fl$. Da $\angle\, fdc = flc = R$, so ist $cdfl$ ein Kreisviereck, also $\angle\, cdl = cfl = mgx$, $\angle\, dlc = dfc = mfg$, also $\triangle\, fmg \sim lcd$, also $\frac{mf}{mg} = \frac{cl}{cd}$ aber $mg = ma$, also $\frac{mf}{ma} = \frac{cl}{cd}$. Da cd, cl, gegeben sind, so ergiebt sich in Verbindung mit VIII. 1.18. die Auflösung:

Man theile af harmonisch in n, o, so daß $\frac{fn}{an} = \frac{fo}{ao} = \frac{cl}{cd}$ sey, halbiere no in p, beschreibe aus p mit dem Halbmesser $pn = po$ einen Kreis, welcher die ds in m schneidet, so ist m der verlangte Mittelpunkt. Da der Kreis p. die ds in zwei Punkten m schneidet, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen. Der eine Kreis m giebt den $\angle\, gak = fcl$, der andere Kreis m giebt den $\angle\, gak$ gleich dem Nebenwinkel von fcl, oder den Nebenwinkel von gak gleich fcl.

Man setze die Winkel $acf = C$, $fcl = A$, $fad = fbd = B$, ziehe $pq \parallel ab$ bis an ds, so ist $cl = cf.\cos A$, $cd = cf.\cos C$, also $\frac{cl}{cd} = \frac{\cos A}{\cos C}$, also $an = af \cdot \frac{\cos C}{\cos C + \cos A}$, $ao = af \cdot \frac{\cos C}{\cos C - \cos A}$, $ap = af \cdot \frac{\cos^2 C}{\cos^2 C - \cos^2 A}$, $pf = af \cdot \frac{\cos^2 A}{\cos^2 C - \cos^2 A}$, $pn = po = pm = af \cdot \frac{\cos A.\cos C}{\cos^2 C - \cos^2 A}$ $fq = pf \cdot \sin B$, $pq = pf \cdot \cos B$

Um den Nenner für die logarithmische Berechnung bequemer zu machen, setzt man $A + C = 2x$, $A - C = 2y$ also $A = x + y$, $C = x - y$. Hieraus nach VI. 13

$\cos A = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

$\cos C = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$.

$\cos A + \cos C = 2 \cos x . \cos y$, $\cos C - \cos A = 2 \sin x . \sin y$

$\cos^2 C - \cos^2 A = 2 \sin x . \cos x . 2 \sin y . \cos y = \sin 2x . \sin 2y$

$\cos^2 C - \cos^2 A = \sin^2 A - \sin^2 C = \sin (A+C) . \sin (A-C)$

Beispiel. $ad = bd = 35$, $bc = 43$, $cd = 78$, $df = 53$ $fcb = A = 52°18$

df 1,72428	$A = 52°18$	af 1,80287	af 1,80287
cd 1,89209	$C = 34° 11,8$	cos A 9,78642	cos A 9,78642
tg C 9,83219	$A+C = 86\ 29,8$	cos A 9,78642	cos C 9,91757
df 1,72428	$A-C = 18\ 6,2$	N 0,50842	N 0,50842
bd 1,54407	sin(A+C) 9,99919	pf 1,88413	pm 2,01528
tg B 0,18021	sin(A−C) 9,49239	sin B 9,92141	pq 1,62533
sin B 9,92141	9,49158	cos B 9,74120	sin pmq 9,61005
cos B 9,74120	N 0,58842	fq 1,80554	cos pmq 9,96058
af 1,80287		pq 1,62533	mq 1,97586

mq = 94,593

fq = 63,906

I. mf = 30,687

II mf = 158,499

df = 53

I. md = 22,313

II md = 211,499

	I	II
md	1,34856	2,32531
ad	1,54407	1,54407
tg dam	9,80449	0,78124
sin dam	9,73043	9,99413
cos dam	9,92594	9,21289
ma	1,61813	2,33118
mf	1,48696	2,20003
cos C	9,91757	9,91757
mk	1,40453	2,11760
mq	1,61813	2,33118
cos A	9,78640	9,78642

22.

Ein Kreisviereck aus den vier Seiten desselben zu bestimmen.

Es seyen die gegebenen Seiten ab, bc, cd, da. Man ziehe $bf \parallel ca$ bis an da, so ist $\angle abf = bac$, $\angle bac = bdc$, also $\angle abf = bdc$. Ferner $\angle bfa = cad$, $\angle cad = cbd$, also $\angle bfa = cbd$. Also $\Delta baf \sim dcb$, also $af = \frac{ab . bc}{cd}$, $df = da + \frac{ab . bc}{cd}$ gegeben.

Man ziehe $ag \parallel bd$, bis an bc, so ist $\angle agb = dbc = dac$, $\angle gab = abd = acd$, also $\Delta gab \sim acd$, also $bg = \frac{da . ab}{cd}$

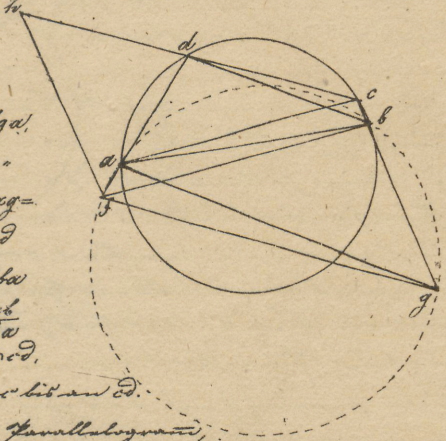
also $cg = bc + \frac{da.ab}{cd}$ gegeben.

Man verbinde fg, so ist $\angle bfa = cad = cbd = bga$, also $abgf$ ein Kreisviereck, also $\angle bfg = bag = abd = acd$, also $fg \parallel cd$

$\Delta afg \sim cba$, $\Delta bfg \sim dba$

also $fg = \frac{af.ab}{bc} = bg\,\frac{ab}{da}$

also $fg = \frac{ab.ab}{cd}$. Da $fg \parallel cd$, so ziehe man $fk \parallel gc$ bis an cd.



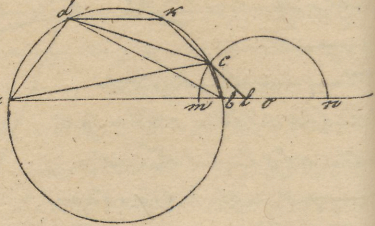
Alsdann ist $fgck$ ein Parallelogramm, also $ck = fg = \frac{ab.ab}{cd}$, also ist $dk = \frac{ab.ab}{cd} - cd$ gegeben.

Hieraus ergiebt sich die Auflösung:

Man bilde ein Dreieck aus den Seiten $df = da + \frac{ab.bc}{cd}$, $fk = bc + \frac{da.ab}{cd}$, $dk = \frac{ab.ab}{cd} - cd$. An die Seite ab als Grundlinie setze man die Winkel $bad = fkd$, $abc = fdk$ an. Dadurch sind die Richtungen ad, bc gegeben und da auch die Längen dieser Seiten gegeben sind, so sind die Punkte c, d gegeben. Eine Folgerung hieraus ist der in V. 31 bewiesene Satz. Da nämlich $\Delta bdf \sim acg$, so ist $\frac{ac}{bd} = \frac{cg}{df} = \frac{da.ab + bc.cd}{ab.bc + cd.da}$

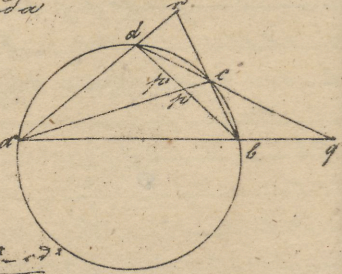
Anders. Man ziehe in den Kreis eine Sehne $dk \parallel ab$ verbinde kc, welche die ab in l schneidet, so ist $\angle cbl = cda$, $\angle clb = ckd$, also $\angle clb = cad$, also $\Delta cbl \sim cda$, also $bl = \frac{bc.da}{cd}$, also $al = ab + \frac{bc.da}{cd}$ gegeben, und das Verhältniß $\frac{lc}{ac} = \frac{bc}{cd}$ gegeben. Hieraus ergiebt sich in Verbindung mit VIII-1.18 die Auflösung:

Auf der Seite ab als Grundlinie bestimme man einen Punkt l so, daß $al = ab + \frac{bc.da}{cd}$ sey. Die Linie al theile man in m, n, harmonisch, so daß $\frac{lm}{am} = \frac{ln}{an} = \frac{bc}{cd}$ sey. Man halbire mn in o, beschreibe aus o



mit dem Halbmesser $om = on$ einen Kreis, aus b mit dem Halbmesser bc einen zweiten Kreis, welcher jenen in dem verlangten Punkte c schneidet. Eine Folgerung hieraus ist der in V. 30. bewiesene Satz. Da nämlich $\angle cal = cab = cdb$, $\angle cla = clb = cad = cbd$ ist, so ist $\Delta\, cla \sim cbd$, also

$ac.bd = cd.al = ab.cd + bc.da$



__Noch anders.__ Da $\angle abc + cda = 2R$, $\angle bcd + dab = 2R$, so ist (VI. 5) $\cos a = -\cos c$, $\cos b = -\cos d$, also nach VI. 28.

$$\cos a = \frac{da^2 + ab^2 - bd^2}{2da.ab} = \frac{bd^2 - bc^2 - cd^2}{2bc.cd}$$

$$\cos b = \frac{ab^2 + bc^2 - ac^2}{2ab.bc} = \frac{ac^2 - cd^2 - da^2}{2cd.da}$$

Hieraus folgt:

$$bd^2(da.ab + bc.cd) = bc.cd(da^2 + ab^2) + da.ab(bc^2 + cd^2)$$
$$= (ab.cd + bc.da)(ab.bc + cd.da)$$

$$ac^2(ab.bc + cd.da) = ab.bc(cd^2 + da^2) + cd.da(ab^2 + bc^2)$$
$$= (ab.cd + bc.da)(da.ab + bc.cd)$$

$$2(da.ab + bc.cd)\cos a = da^2 + ab^2 - bc^2 - cd^2$$

Setzt man also:

$$da.ab + bc.cd = A^2,\quad ab.bc + cd.da = B^2$$
$$ab.cd + da.bc = C^2$$

so ist $bd = \frac{B.C}{A}$, $ac = \frac{A.C}{B}$, und

$$2A^2 \cos\alpha = da^2 + ab^2 - bc^2 - cd^2$$

$$2A^2(1+\cos\alpha) = da^2 + 2da.ab + ab^2 - bc^2 + 2bc.cd - cd^2$$
$$= (da+ab)^2 - (bc-cd)^2$$
$$= (da+ab+bc-cd)(da+ab-bc+cd)$$

$$2A^2(1-\cos\alpha) = -da^2 + 2da.ab - ab^2 + bc^2 + 2bc.cd + cd^2$$
$$= -(da-ab)^2 + (bc+cd)^2$$
$$= (da-ab+bc+cd)(-da+ab+bc+cd)$$

Setzt man nun also den Umfang des Kreisvierecks $ab+bc+cd+da = 2.S$, so ist:

$$2A^2(1+\cos\alpha) = 4(S-bc).(S-cd)$$
$$2A^2(1-\cos\alpha) = 4(S-da).(S-ab)$$

Aber $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$, also

$$\tfrac{1}{4}A^4 \sin^2\alpha = (S-ab)(S-bc)(S-cd)(S-da)$$

aber $\frac{1}{2}A^2\sin\alpha = \frac{1}{2}(da.ab + bc.cd)\sin\alpha$

$$= \tfrac{1}{2}da.ab.\sin\alpha + \tfrac{1}{2}bc.cd.\sin c$$
$$= \Delta dab + \Delta bcd = F$$

Hieraus ergiebt sich der in V. 30. für den Inhalt des Kreisvierecks gegebene Satz:

$$F^2 = (S-ab).(S-bc).(S-cd).(S-da)$$

der Durchmesser des umschriebenen Kreises ist, $D = \frac{bd}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}bd(da.ab+bc.cd)}{\frac{1}{2}\sin\alpha(da.ab+bc.cd)} = \frac{\frac{1}{2}bd.A^2}{F}$

aber $bd = \frac{B.C}{A}$, also $D = \frac{A.B.C}{2F}$

Ferner ist nach VI. 11.

$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha$, $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$, also

$A^2\cos^2\frac{1}{2}\alpha = (S-bc).(S-cd)$, $B^2\cos^2\frac{1}{2}b = (S-cd)(S-da)$

$A^2\sin^2\frac{1}{2}\alpha = (S-da).(S-ab)$, $B^2\sin^2\frac{1}{2}b = (S-ab)(S-bc)$

$\cot^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{(S-bc).(S-cd)}{(S-da).(S-ab)}$, $\cot^2\frac{1}{2}b = \frac{(S-cd)(S-da)}{(S-ab)(S-bc)}$.

$\cot\frac{1}{2}a = \frac{1}{F}.(S-bc)(S-cd)$, $\cot\frac{1}{2}b = \frac{1}{F}(S-cd)(S-da)$

$\cot\frac{1}{2}c = \frac{1}{F}(S-da)(S-ab)$, $\cot\frac{1}{2}d = \frac{1}{F}(S-ab)(S-bc)$

Der nach ab, cd, geöffnete Winkel der Diagonallinien ac, bd, sey = p, so ist

$$2ap.bp.\cos p = ap^2+bp^2-ab^2,\quad \tfrac{1}{2}ap.bp.\sin p = \Delta\, apb$$
$$2bp.cp.\cos p = bc^2-bp^2-cp^2,\quad \tfrac{1}{2}bp.cp.\sin p = \Delta\, bpc$$
$$2cp.dp.\cos p = cp^2+dp^2-cd^2,\quad \tfrac{1}{2}cp.dp.\sin p = \Delta\, cpd$$
$$\underline{2dp.ap.\cos p = da^2-dp^2-ap^2,\quad \tfrac{1}{2}dp.ap.\sin p} = \Delta\, dpa$$
$$2ac.bd.\cos p = da^2+bc^2-ab^2-cd^2,\quad \tfrac{1}{2}ac.bd.\sin p = F$$
$$2C^2.\cos p = da^2+bc^2-ab^2-cd^2,\quad \tfrac{1}{2}C^2.\sin p = F$$
$$2C^2(1+\cos p) = (da+bc)^2-(ab-cd)^2$$
$$2C^2(1-\cos p) = (ab+cd)^2-(da-bc)^2$$
$$C^2\cos^2\tfrac{1}{2}p = (S-ab)(S-cd),\quad C^2\sin^2\tfrac{1}{2}p = (S-bc)(S-da)$$
$$\cot\tfrac{1}{2}p = \sqrt{\frac{(S-ab)(S-cd)}{(S-bc)(S-da)}} = \frac{1}{F}(S-ab)(S-cd)$$

Der Winkel der Gegenseiten ab, cd, sey = q, so ist

V. 29. $\frac{qa}{qb} = \frac{da.ac}{bc.bd} = \frac{da}{bc}.\frac{A^2}{B^2}$, also

$qa = \frac{ab.da.A^2}{da.A^2-bc.B^2}$; aber $da.A^2-bc.B^2 = ab(da^2-bc^2)$

also $qa = \frac{da.A^2}{da^2-bc^2}$, $qb = \frac{bc.B^2}{da^2-bc^2}$

$$qc = \frac{bc.A^2}{da^2-bc^2},\quad qd = \frac{da.B^2}{da^2-bc^2}$$

$$2qa.qd.\cos q = qa^2+qd^2-da^2$$
$$\frac{2da^2.A^2.B^2\cos q}{(da^2-bc^2)^2} = \frac{da^2.A^4}{(da^2-bc^2)^2}+\frac{da^2.B^4}{(da^2-bc^2)^2}-da^2$$
$$2A^2.B^2\cos q = A^4+B^4-(da^2-bc^2)^2$$
$$2A^2.B^2(1+\cos q) = (A^2+B^2)^2-(da^2-bc^2)^2$$
$$2A^2.B^2(1-\cos q) = (da^2-bc^2)^2-(A^2-B^2)^2$$

und $A^2 + B^2 = (da+bc)(ab+cd)$

$A^2 - B^2 = (da-bc)(ab-cd)$

also $2A^2B^2(1+\cos q) = (da+bc)^2((ab+cd)^2-(da-bc)^2)$

$2A^2B^2(1-\cos q) = (da-bc)^2((da+bc)^2-(ab-cd)^2)$

$4A^2B^2\cos^2\tfrac{1}{2}q = (da+bc)^2(ab+bc+cd-da)(ab-bc+cd+da)$

$4A^2B^2\sin^2\tfrac{1}{2}q = (da-bc)^2(ab+bc-cd+da)(-ab+bc+cd+da)$

$A^2B^2\cos^2\tfrac{1}{2}q = (da+bc)^2(S-bc)(S-da)$

$A^2B^2\sin^2\tfrac{1}{2}q = (da-bc)^2(S-ab)(S-cd)$

$\cos\tfrac{1}{2}q = \frac{C}{A.B}(da+bc)\sin\tfrac{1}{2}p$, $\sin\tfrac{1}{2}q = \frac{C}{A.B}(da-bc)\cos\tfrac{1}{2}p$

$\cot\tfrac{1}{2}q = \frac{da+bc}{da-bc}\cdot tg\tfrac{1}{2}p$, $\cot\tfrac{1}{2}r = \frac{ab+cd}{ab-cd}\cdot\cot\tfrac{1}{2}p$

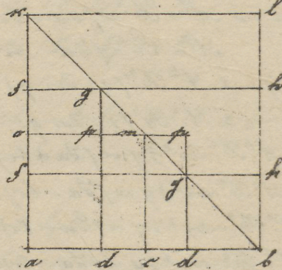
$\sin q = \frac{2F(da+bc)(da-bc)}{A^2.B^2}$, $\sin r = \frac{2F.(ab+cd)(ab-cd)}{A^2.B^2}$

Beispiel. Siehe V. 32.33.

$ab = 990$	$S-da$ 2,65466	$S-ab$ 2,44793	$S-bc$ 2,98295
$bc = 309$	$S-ab$ 2,44793	$S-bc$ 2,98295	$S-da$ 2,65466
$cd = 423$	$S-bc$ 2,98295	$S-cd$ 2,92814	$S-ab$ 2,44793
$da = 819$	$S-cd$ 2,92814	$S-da$ 2,65466	$S-cd$ 2,92814
$2S = 2541$	5,10259	5,43088	5,63761
$S = 1270,5$	5,91109	5,58280	5,37607
$S-ab = 280,5$	$A\sin\frac{1}{2}a$ 2,55129	$B\sin\frac{1}{2}b$ 2,71544	$C\sin\frac{1}{2}p$ 2,81880
$S-bc = 961,5$	$A\cos\frac{1}{2}a$ 2,95554	$B\cos\frac{1}{2}b$ 2,79140	$C\cos\frac{1}{2}p$ 2,68803
$S-cd = 847,5$	$tg\frac{1}{2}a$ 9,59575	$tg\frac{1}{2}b$ 9,92404	$tg\frac{1}{2}p$ 0,13077
$S-da = 451,5$	$\sin\frac{1}{2}a$ 9,56438	$\sin\frac{1}{2}b$ 9,80320	$\sin\frac{1}{2}p$ 9,90618
$S-ab$ 2,44793	$\cos\frac{1}{2}a$ 9,96863	$\cos\frac{1}{2}b$ 9,88416	$\cos\frac{1}{2}p$ 9,77441
$S-bc$ 2,98295	A 2,98691	B 2,90724	C 2,91362
$S-cd$ 2,92814	C 2,91362	C 2,91362	B 2,90724
$S-da$ 2,65466	B 2,90724	A 2,98691	A 2,98691
F^2 11,01368	ac 2,99329	bd 2,83395	$2F$ 5,80787
F 5,50684	$\frac{1}{2}a = 21$ 30,9	$\cot\frac{1}{2}p$ 9,86923	D 2,99990
$F = 321248$	$\frac{1}{2}b = 40$ 0,9	$da-bc$ 2,70757	$tg\frac{1}{2}p$ 0,13077
$ac = 984,77$	$\frac{1}{2}p = 53$ 29,9	$da+bc$ 3,05231	$ab-cd$ 2,75358
$bd = 682,27$	$\frac{1}{2}q = 18$ 29,9	$tg\frac{1}{2}q$ 9,52449	$ab+cd$ 3,15014
$D = 999,81$	$\frac{1}{2}r = 28$ 28,2		$tg\frac{1}{2}r$ 9,73421

23.

Eine quadratische Gleichung der ersten Art aufzulösen.



Auf der gegebenen Linie ab soll der Punkt d so zu bestimmen, daß das Rechteck $ad \cdot db$ einen gegebenen Inhalt habe. Errichtet man also auf ad die Senkrechten $af = dg$, $bh = db$, so soll das Rechteck $adfg$ einen gegebenen Inhalt haben, und das ergänzende Rechteck $bdgh$ ein Quadrat seyn. Daher hieß diese Aufgabe in der Geometrie der Alten: an eine gegebene grade Linie ab ein Rechteck mit quadratischer Ergänzung und gegebenem Inhalt zu entwerfen (applicare ad rectam datam rectangulum dato aequale deficiens quadrato).

Beschreibt man über ab das Quadrat $abkl$, so muß der Punkt g in der Diagonallinie bk liegen. Man halbire ab in c, und beschreibe über ac das Quadrat $acmo$, dessen Seite mo von dg in p geschnitten wird, so daß $gp = mp$ ist.

Ist nun $ad < ac$, so ist $op < dp$, also $opfg < cdmp$ also $adop + opfg < adop + cdmp$, also $adfg < acmo$, d. h. $ad \cdot db < \frac{1}{4} ab^2$.

Ist $ad > ac$, so ist $op > dp$ also $opfg > cdmp$, also $adop - opfg < adop - cdmp$, also $adfg < acmo$. d. h. $ad \cdot db < \frac{1}{4} ab^2$.

Wenn also die Bestimmung des Punkts d möglich seyn soll, so darf der gegebene Inhalt des Rechtecks $ad \cdot db$ nicht größer als $\frac{1}{4} ab^2$ seyn.

Eine Aufgabe, welche auf eine solche quadratische Gleichung der ersten Art führt, hat daher immer unter den gegebenen Umständen [illegible]

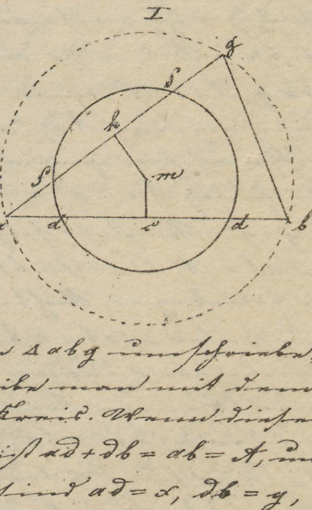
Grenzbeziehung, welche nicht überschritten werden darf, wenn die Aufgabe möglich seyn soll. Die Auflösung dieses Grenzfalls hieß in der Geometrie der Alten: die Determination.

Setzt man $ad = x$, $db = y$, die gegebene Linie $ab = A$, den gegebenen Inhalt $= B.C$, so hat man die Gleichungen

$$x + y = A,\quad x.y = B.C$$

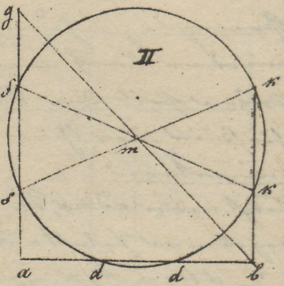
oder $A.x - x^2 = B.C$, $A.y - y^2 = B.C$.

Man macht die Determination, indem man $x = y$ annimmt. Dann wird $2x = A$, und $x^2 = B.C$, also $A^2 = 4B.C$, woraus man die Beziehung zwischen den gegebenen Stücken für den Grenzfall ermittelt.



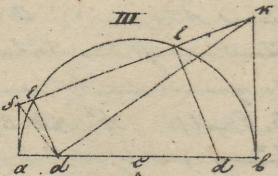
I. Man ziehe aus a in beliebiger Richtung gegen ab die ag, nehme darauf nach einerlei Richtung die Stücke $af = B$, $fg = C$, wodurch man den Punct g erhält, halbire ab in c, ag in k, errichte in c, k Senkrechte, welche einander in m schneiden, so ist m der Mittelpunct des dem $\triangle abg$ umschriebenen Kreises. Aus m beschreibe man mit dem Halbmesser mf einen Kreis. Wenn dieser die ab in d schneidet, so ist $ad + db = ab = A$, und $ad.db = af.fg = B.C$, also sind $ad = x$, $db = y$, die Wurzeln der obigen Gleichung.

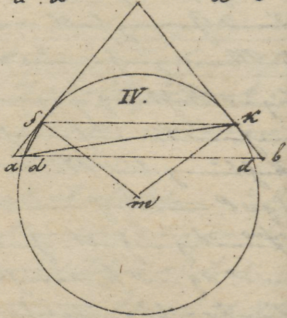
II. Oder man errichte senkrecht auf ab nach einerlei Richtung die $af = B$, $fg = br = C$, verbinde bg, fr, welche einander in m halbiren, beschreibe aus m mit dem Halbmesser $mf = mr$ einen Kreis. Wenn dieser die ab in d schneidet, so sind ebenfalls



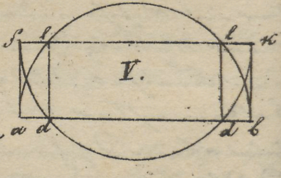
$ad = x$, $db = y$, die Wurzeln der obigen Gleichung.

III. Oder man errichte senkrecht auf ab nach einerlei Richtung die $af = B$, $bk = C$, beschreibe über $ab = A$ als Durchmesser einen Kreis c. Wenn dieser die fk in l schneidet, so errichte man in l senkrecht auf fk die ld, welche die ab in d schneidet. Dann sind $afld$, $dlkb$, Kreisvierecke, also $\angle adf = alf = bld = bkd$, also $\triangle afd \sim bdk$, also $\frac{ad}{af} = \frac{bk}{db}$, also $ad \cdot db = af \cdot bk = B.C$, also $ad = x$, $db = y$, die Wurzeln der obigen Gleichung $Ax - x^2 = B.C$





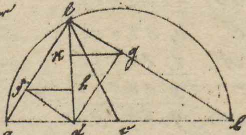
IV. Wenn die gegebene Gleichung $Ax - x^2 = B^2$ oder $A.y - y^2 = B^2$ ist, so setze man an $ab = A$, die $af = bk = B$ in beliebiger Richtung an, so daß aber $\angle fab = kba$ sey, beschreibe über die parallele Linie fk einen Kreis m, welcher den $\angle fab = kba$, ~~faßt also die~~ $af = bk$ in f und k berührt.



Wenn dieser Kreis die ab in d schneidet, so sind $ad = x$, $db = y$ die Wurzeln der Gleichung.

V. Oder man errichte senkrecht auf $ab = A$ nach einerlei Richtung die $af = bk = B$. Wenn der über fk als Durchmesser beschriebene Kreis die ab in d schneidet, oder wenn die über ab als

Durchmesser der beschriebene Kreis die fk in l schnei-det, und ld senkrecht auf ab gefällt wird, so sind ad = x, db = y die Wurzeln der Gleichung $A.x - x^2 = B^2$, $A.y - y^2 = B^2$.



Trigonometrisch. Die gegebene Gleichung sey $A.x - x^2 = B^2$, oder $A.y - y^2 = B^2$; $ab = A$, $dl = B$, $ad = x$, $db = y$. $\angle abl = p$, $\angle acl = 2p$, so ist $\sin 2p = \frac{dl}{cl} = \frac{2B}{A}$. Hieraus berechnet man den Winkel $2p$, und dann p. Alsdann ist $x = ad = dl . \operatorname{tg} p = B . \operatorname{tg} p$

$$y = db = dl . \cot p = B . \cot p.$$

oder $x = ad = al . \sin p = ab . \sin^2 p = A . \sin^2 p$

$$y = db = bl . \cos p = ab . \cos^2 p = A . \cos^2 p$$

Wenn die gegebene Gleichung diese Form hat: $x - \frac{x^2}{A} = C$, $y - \frac{y^2}{A} = C$, so ist $A . C = B^2$.

Man ziehe df, dg, auf al, bl, senkrecht; fh, gk, mit ab parallel, so ist $\frac{fh}{dl} = \frac{gk}{dl} = \frac{dl}{ab}$, also $fh = gk = \frac{dl^2}{ab} = \frac{B^2}{A} = C$. Man hat dann $\frac{B^2}{A^2} = \frac{C}{A}$, also $\sin 2p = 2\sqrt{\frac{C}{A}}$. Hieraus ergiebt sich $2p$ und p, und dann:

$$x = ad = \frac{df}{\cos p} = \frac{fh}{\cos^2 p} = \frac{C}{\cos^2 p}$$

$$y = db = \frac{dg}{\sin p} = \frac{gk}{\sin^2 p} = \frac{C}{\sin^2 p}$$

Beispiele:

1) $11.x - x^2 = 28$, $A = 11$, $B^2 = 28$,

B^2	1,44716	B	0,72358	A	1,04139
B	0,72358	$\operatorname{tg} p$	9,87849	$\sin^2 p$	9,56068
2	0,30103	x	0,60207	$\cos^2 p$	9,80370
A	1,04139	y	0,84509	x	0,60207
$\sin 2p$	9,98322	x	= 4	y	0,84509
$2p$	= 74° 10,5	y	= 7		
p	= 37 5,25				
$\sin p$	9,78034				
$\cos p$	9,90185				

2) $245 . x - 4x^2 = 1837\frac{1}{2}$

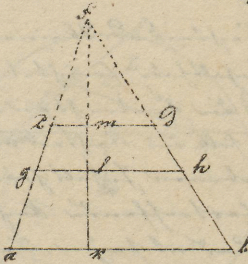
245	2,38917	$2p =$	44° 24,8	$x =$	3,75
4	0,60206	$p =$	22 12,4	$y =$	52,5
A	1,78711	sin p	9,57744	$x.y =$	459,375
$1837\frac{1}{2}$	3,26423	cos p	9,96653		
245	2,38917	C	0,87506		
C	0,87506	$\cos^2 p$	9,93306		
A	1,78711	$\sin^2 p$	9,15488		
	9,08795	x	0,94200		
	9,54397	y	1,72018		
2	0,30103	x.y	2,66218		
sin 2p	9,84500				

3) $x^2 + 11.x = -19$. Hier setzt man x negativ, und hat dann: $11x - x^2 = 19$, $A = 11$, $B^2 = 19$

B^2	1,27875	$2p =$	52° 25,3	$x =$	2,1458
B	0,63937	$p =$	26 12,65	$y =$	8,8542
2	0,30103	B	0,63937	$x+y =$	11,0
A	1,04139	tg p	9,69222	$x.y =$	19
sin 2p	9,89901	x	0,33159		
		y	0,94715		
		x.y	1,27874		

Wenn die Wurzeln sehr genau gefunden werden sollen, so dient die trigonometrische Berechnung nur zur ersten Annäherung. In die gegebene Gleichung $A.x - x^2 = B^2$, setze man statt der genäherten Wurzel x, die genaue Wurzel $x+Z$, so ist $A(x+Z) - (x+Z)^2 = B^2$, $Ax - x^2 = B^2 - R$. Wenn man also Z^2 wegläßt, so ist $Z = \frac{R}{A-2x}$. Im vorstehenden Beispiel, wo $A = 11$, $B^2 = 19$, hat man

$x =$	2,145
$A.x =$	23,595
x^2	4,601025
R	0,006025
$A-2x$	6,710
Z . .	0,0008979
x	2,1458979
A.x	23,6048769
x^2	4,60487779722441
R	0,00000089722441
$A-2x$	6,7082042
Z	0,00000013375031
x	2,14589803375031



4) Ein Trapezium durch parallele Transversallinien nach gegebenem Verhältniß zu theilen.

Das gegebene Trapezium sey $abcd = F$, das gegebene Verhältniß $= N$, das verlangte Trapezium $abgh = N.F$, so ist (III. 71) $fk^2 - fl^2 = N.(fk^2 - fm^2)$. Aber $fk - fl = kl$, $fk - fm = km$; also $kl(fk + fl) = N.km(fk + fm)$.

also $kl(2fk - kl) = N.km(2fk - fm)$

Setzt man $\frac{kl}{km} = x$, $\frac{fm}{fk} = \frac{cd}{ab} = E$, also $\frac{km}{fk} = 1 - E$

so ist $\frac{fk}{km} = \frac{1}{1-E}$, also $x\left(\frac{2}{1-E} - x\right) = N\left(\frac{2}{1-E} - 1\right)$

also $x - \frac{1-E}{2}.x^2 = N.\frac{1+E}{2}$.

In dem Beispiel III. 71. ist $ab = 450$, $cd = 400$, also $E = \frac{400}{450} = \frac{8}{9}$, also $x - \frac{1}{18}x^2 = N.\frac{17}{18}$, also $A = 18$ $C = N.\frac{17}{18}$; $km = 375$. Es sey das Trapezium in drei gleiche Theile zu theilen, so ist I. $N = \frac{1}{3}$ II. $N = \frac{2}{3}$

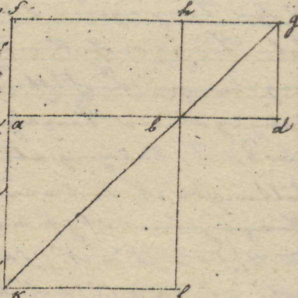
	I	II
N	9,52288	9,82391
17	1,23045	1,23045
18	1,25527	1,25527
C	9,49806	9,79909
A	1,25527	1,25527
	8,24279	8,54382
	9,12139	9,27191
2	0,30103	0,30103
sin 2φ	9,42242	9,57294
2φ	15° 20,2	21° 58,0
φ	7 40,1	10 59,0
cos φ	9,99610	9,99197

km	2,57403	2,57403
E	9,49806	9,79909
cos² φ	9,99220	9,98394
kl	2,07939	2,38918
kl =	120,19	245,0

24.

Eine quadratische Gleichung der zweiten Art aufzulösen.

Auf der Verlängerung der gegebenen Linie ab sey der Punkt d so zu bestimmen, daß das



Rechteck ad. b einen gegebenen Inhalt habe. Errichtet man also auf ad die Senkrechten af = dg = bh = db, so soll das Rechteck adfg einen gegebenen Inhalt haben, und das überschießende Rechteck bdgh ein Quadrat seyn. Daher hieß diese Aufgabe in der Geometrie der Alten: <u>an eine gegebene grade Linie ab ein Rechteck von quadratischem Ueberschuß und gegebenem Inhalt zu entwerfen</u>, (applicare ad rectam datam rectangulum dato aequale excedens quadrato).
Beschreibt man unter ab das Quadrat abkl, so muß der Punkt g in der verlängerten Diagonallinie kb liegen. Hier findet also keine Beschränkung wie in der vorigen Aufgabe statt, die Auflösung ist immer möglich, welches auch das Verhältniß des gegebenen Inhalts zum Quadrat von ab seyn mag.
Setzt man ad = x, db = y, die gegebene Linie ab = A, den gegebenen Inhalt = $B.C$, so hat man die Gleichungen:

$$x - y = A,\quad x.y = B.C$$

oder $x^2 - A.x = B.C$, $y^2 + A.y = B.C$

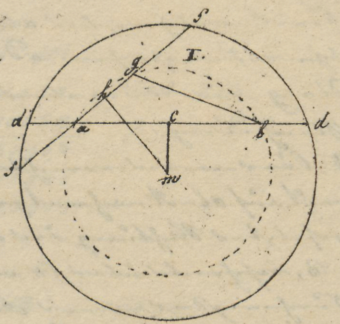
I. Man ziehe aus a in beliebiger Richtung gegen ab die afg, nehme darauf nach entgegengesetzter Richtung die Stücke af = B, fg = C, wodurch man den Punkt g erhält, halbire ab in c, ag in h, errichte in c, h, Senkrechte, welche einander in m schneiden, so ist m der Mittelpunkt des dem △abg umschriebenen Kreises. Aus m beschreibe man mit dem Halbmesser mg einen Kreis, welcher

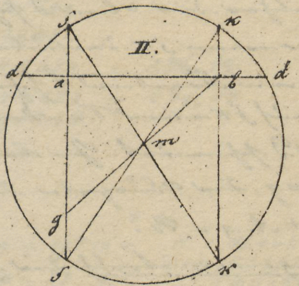
die ab in d schneidet, so ist $ad \cdot db$
$= ab = A$, $ad.\,db = af.\,fg = B.\,C$, also
sind $ad = x$, $db = y$ die Wurzeln
der obigen Gleichung.

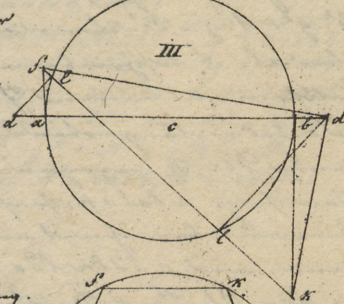
II. Oder man errichte senk-
recht auf ab in entgegengesetzter
Richtung die $af = B$, $fg = bk = C$,
verbinde bg, fk, welche einan-
der in m halbiren, beschreibe
aus m mit dem Halbmesser die
$mf = mk$ einen Kreis, welcher die
ab in d schneidet, so sind eben-
falls $ad = x$, $db = y$ die Wurzeln
der obigen Gleichung.

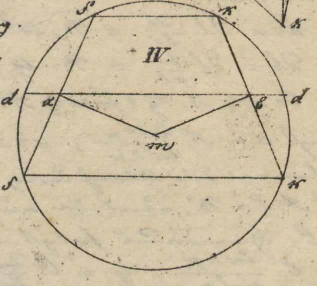
III. Oder man errichte senkrecht
auf ab, nach entgegengesetz-
ter Richtung die $af = B$, $bk = C$,
beschreibe über $ab = A$ als Durch-
messer einen Kreis c, welcher
die fk in l schneidet, errichte in
l senkrecht auf fk die ld, welche
die ab in d schneidet, so sind afld,
dlkb, Kreisvierecke, also $\angle adf =$
$alf = bld = bkd$, also $\triangle afd \sim bdk$,
also $\frac{ad}{af} = \frac{bk}{db}$, also $ad.\,db = af.\,bk$
$= B.\,C$, also sind $ad = x$, $db = y$,
die Wurzeln der obigen Gleichung.

IV. Wenn die gegebene Gleichung
$x^2 - A.\,x = B^2$, oder $y^2 + A.\,y = B^2$ ist,
so ziehe man an $ab = A$, die
Linien faf, kbk, unter beliebi-
gen gleichen Winkel $fab =$
kba, nehme darauf $af = af =$
$bk = bk = B$, beschreibe um
das Trapezium ffkk einen

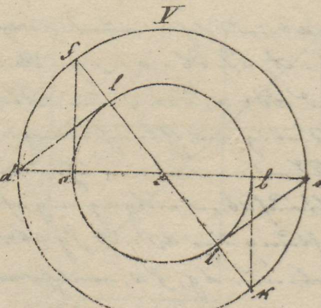




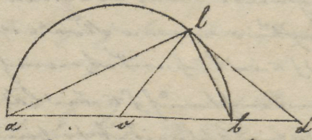




Kreis, welcher die ab in d schneidet, so sind ad = x, db = y die Wurzeln der Gleichung.



V. Oder man errichte senkrecht auf ab = A nach entgegengesetzter Richtung die af = bk = B, beschreibe über fk als Durchmesser einen Kreis, welcher die ab in d schneidet.
Oder wenn fk den über ab als Durchmesser beschriebenen Kreis in l schneidet, so errichte man in l auf fk eine Senkrechte, welche die ab ebenfalls in d schneidet. In beiden Fällen sind ad = x, db = y, die Wurzeln der Gleichung $x^2 - A.x = B^2$; $y^2 + A.y = B^2$.



Trigonometrisch. Die gegebenen Gleichungen seÿ $x^2 - A.x = B^2$; $y^2 + A.y = B^2$. Wenn an den über ab = A beschriebenen Halbkreis aus einem Punkte d des verlängerten Durchmessers eine Berührende dl = B gezogen wird, so ist ad = x, db = y.
Man setze $\angle bal = \varphi$, so ist $\angle bcl = 2\varphi$, $tg\, 2\varphi = \frac{dl}{cl} = \frac{2B}{A}$
Hieraus berechnet man 2φ und φ, und hat dann, weil $\triangle bdl \sim lda$

$$x = ad = dl.\frac{al}{bl} = B.\cot\varphi$$
$$y = db = dl.\frac{bl}{al} = B.\,tg\,\varphi$$

Da $B = \frac{1}{2}A.\,tg\,2\varphi = \frac{1}{2}A.\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = A.\frac{\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos 2\varphi}$,
so ist $x = A.\frac{\cos^2\varphi}{\cos 2\varphi}$, $y = A.\frac{\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}$
Hat man die Gleichung $\frac{x^2}{A} - x = C$, $\frac{y^2}{A} + y = C$, so ist $A.C = B^2$, und da auch $x.y = B^2$, so ist $x.y = A.C$. Hieraus folgt noch: $tg\, 2\varphi = 2\sqrt{\frac{C}{A}}$

$$x = C.\frac{\cos 2\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad y = C.\frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Beispiele

1) $x^2 - 119x = 17340$, $A = 119$, $B^2 = 17340$

B^2	4,23905	B	2,11952	$x = 204$	
B	2,11952	$tg\,\mu$	9,80989	$y = 85$	
2	0,30103	x	2,30963		
A	2,07555	y	1,92941		
$tg\,2\mu$	0,34500	$x.y$	4,23904		
2μ	= 65° 41,0				
μ	= 32 50,5				

2) $y^2 + 7y = 79878$, $A = 7$, $B^2 = 79878$

B^2	4,90243	B	2,45121	
B	2,45121	$tg\,\mu$	9,99462	
2	0,30103	x	2,45659	= 286,14
A	0,84510	y	2,44583	= 279,17
$tg\,2\mu$	1,90714	$x.y$	4,90242	
2μ	= 89 17,4			
μ	= 44 38,7			

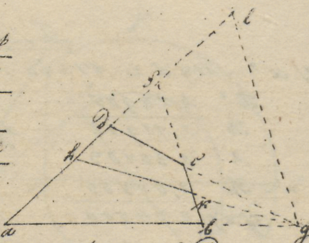
3) $\frac{1}{17} y^2 + 78y = 28360$

17	1,23045	C	2,56062	2μ = 46° 19,4		C	2,56062
78	1,89209	A	3,12254	μ = 23 9,7		$\cos 2\mu$	9,83922
A	3,12254		9,43808	$\sin\mu$	9,59475		2,39984
28360	4,45271		9,71904	$\cos\mu$	9,96350	$\sin^2\mu$	9,13950
78	1,89209	2	0,30103	x =	1623,05	$\cos^2\mu$	9,92700
C	2,56062	$tg\,2\mu$	0,02007	y =	297,08	x	3,21034
						y	2,47284
						$x.y.$	5,68318

Die genäherte Wurzel sei y, die genauere $y+z$ so ist $(y+z)^2 + A(y+z) = B^2$; $y^2 + A\cdot y = B^2 - R$ also ist $z = \frac{R}{A+2y}$. Hier ist $A = 1326$, $B^2 = 482120$

y	297
y^2	88209
$A.y$	393822
R	89
$A+2y$	1920
z	0,04635
y	297,04635
y^2	88236,534048322 5
$A.y$	393883,46010
R	0,005851677 5
$A+2y$	1920,09270
z	0,000003047601
y	297,046353047601

4) Ein unregelmäßiges Viereck durch Linien, welche im Durchschnitt der Gegenseiten zusammentreffen, nach gegebenem Verhältniß zu theilen.



Das gegebene Viereck sey abcd, der Durchschnitt der Gegenseiten ab, cd, sey g, die Theilungslinie hx soll in g treffen. Es sey abcd $= F$, es soll cdhx $= N.F$ seyn. Der Durchschnitt der Gegenseiten bc, da, sey f. Man ziehe gl $\parallel$ bc bis an da, so ist $\frac{\Delta cdf}{\Delta gdl} = \frac{fd^2}{ld^2}$, $\frac{\Delta gdl}{\Delta gal} = \frac{ld}{al}$, also $\frac{\Delta cdf}{\Delta gal} = \frac{fd^2}{al.\,ld}$, also $\Delta cdf = \frac{\Delta gal}{al} \cdot \frac{fd^2}{ld}$. Eben so $\Delta hxf = \frac{\Delta gal}{al} \cdot \frac{fh^2}{lh}$, $\Delta abf = \frac{\Delta gal}{al} \cdot \frac{af^2}{al}$, also $cdhx = \frac{\Delta gal}{al}\left(\frac{fh^2}{lh} - \frac{fd^2}{ld}\right)$, $abcd = \frac{\Delta gal}{al}\left(\frac{fa^2}{la} - \frac{fd^2}{ld}\right)$ also $\frac{fh^2}{lh} - \frac{fd^2}{ld} = N.\left(\frac{fa^2}{la} - \frac{fd^2}{ld}\right)$

also $\frac{fh^2}{lh} = N.\frac{fa^2}{la} + (1-N).\frac{fd^2}{ld} = A$

Es sey $fh = x$, $lf = L$, so ist $lh = L + x$, also:

$x^2 = A(L+x)$, oder $x^2 - A.x = A.L = B^2$.

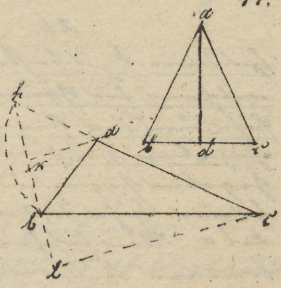
Es sey $fa = 2526$, $la = 3734$, $lf = L = 1208$, $fd = 1993$, $ld = 3201$, $da = 533$, I. $N = \frac{1}{3}$, II. $N = \frac{2}{3}$.

fa	3,40243
fa²	6,80486
la	3,57217
F	3,23269
fd	3,29951
fd²	6,59902
ld	3,50529
Q	3,09373

	I	II
F	3,23269	3,23269
N	9,52288	9,82391
Q	3,09373	3,09373
(1−N)	9,82391	9,52288
	2,75557	3,05660
	2,91764	2,61661
tg² m	9,83793	0,43999
tg m	9,91896	0,21999
sin m	9,80521	9,93274
sin² m	9,61042	9,86548
A	3,14515	3,19112

	I	II
A	3,14515	3,19112
L	3,08207	3,08207
B²	6,22722	6,27319
B	3,11361	3,13659
2	0,30103	0,30103
tg 2μ	0,26949	0,24650
2μ	= 61 44,1	60 27,16
μ	= 30 52,05	30 13,58
cot μ	0,22351	0,23461
fh	3,33712	3,37120
fh	= 2173,3	2350,7
fd	1993	1993
dh	180,3	357,7
ah	352,7	175,3

25.



Ein Dreieck zu bestimmen, in welchem die Summe zweier Seiten, der Zwischenwinkel und die Gegenseite gegeben sind.

Gegeben sey $ca + ab = A$, bc und der Winkel a. Auf der verlängerten ca nehme man $ak = ab$, so sind $bk = \frac{1}{2} a$, und $ck = A$ gegeben. Also kann das $\Delta\, ckb$ nach VI. 26. aus zwei Seiten bc, ck, und dem Gegenwinkel k berechnet werden. Alsdann ist $ab = \frac{bk}{2 \cos \frac{1}{2} a}$. Geometrisch setzt man an die Linie $ck = A$, den $\angle k = \frac{1}{2} a$, und beschreibt aus c mit dem Halbmesser bc einen Kreis, welcher die kb in b schneidet.

Oder man setzt wie in VIII. 7. $bc^2 = ca^2 + ab^2 - 2\,ca.\,ab.\cos a$
$bc^2 = (ca+ab)^2 - 2\,ca.\,ab(1+\cos a) = A^2 - ca.\,ab.\,4\cos^2 \frac{1}{2} a$. Nennt also $ca = x$, $ab = y$, so ist $x + y = A$, und $x.\,y = B^2 = \frac{A^2 - bc^2}{4 \cos^2 \frac{1}{2} a}$, und man macht die Auflösung nach VIII. 23. Für den Grenzfall ist $4B^2 = A^2$, also $A^2 \cos^2 \frac{1}{2} a = A^2 - bc^2$, also ist $bc = A \sin \frac{1}{2} a$, die kleinstmögliche Grundlinie. Dieses folgt auch aus dem gleichschenkligen Dreieck abc, wo $bd = ab.\,\sin \frac{1}{2} a$.

Beispiel $A = 237$; $bc = 193$, $a = 78° 24'$

Erste Art

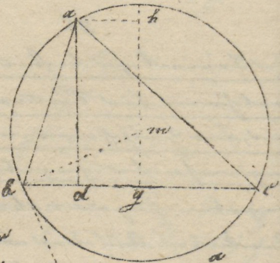
A	2,37475	kl =	183,66
$\sin \frac{1}{2} a$	9,80074	bl =	121,70
$\cos \frac{1}{2} a$	9,88927	bk =	61,96
cl	2,17549	kx =	30,98
kl	2,26402	kx	1,49108
bc	2,28556	$\cos \frac{1}{2} a$	9,88927
$\sin cbl$	9,88993	ab	1,60181
$\cos cbl$	9,79975	ab =	39,97
bl	2,08531		

Zweite Art

A =	237	$2B$	2,24919
bc =	193	A	2,37475
$A+bc$ =	430	$\sin 2p$	9,87444
$A-bc$ =	44	$2p$ =	48° 29,8
$A+bc$	2,63347	p =	24 14,9
$A-bc$	1,64345	B	1,94816
	4,27692	$tg\, p$	9,65363
	2,13846	ca	2,29453
$\cos \frac{1}{2} a$	9,88927	ab	1,60179
$2B$	2,24919	ca =	197,03
		ab =	39,97

26.

Ein Dreieck zu bestimmen, in welchem die Grundlinie, die Höhe, und der Gegenwinkel gegeben sind.



Gegeben seyen die Grundlinie bc, die Höhe ad, der Gegenwinkel α. Man beschreibe (III 43) über bc einen Kreis m, welcher den $\angle \alpha$ faßt, indem man $\angle cbf = \alpha$ nimmt, bm senkrecht auf bf zieht, bc durch gm senkrecht halbirt. Der Punkt a muß im Umfange dieses Kreises liegen. Man errichtet in g eine der gegebenen Höhe gleiche Senkrechte gh, zieht durch h mit bc eine Parallellinie, so schneidet sie den Kreis in dem verlangten Punkte a.

Anders. Es sey $ca = x$, $ab = y$, so ist $x . y . \sin\alpha = bc . ad$ also $B^2 = x . y = \frac{bc . ad}{\sin\alpha}$ gegeben. Wenn $x + y = A$, so findet man wie in VIII. 25.

$$bc^2 = A^2 - 2ca . ab(1+\cos\alpha) = A^2 - 2bc . ad . \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$bc^2 = A^2 - 2bc . ad . \cot\tfrac{1}{2}\alpha$, also $A^2 = bc^2 + 2bc . ad . \cot\tfrac{1}{2}\alpha$

Setzt man $\frac{2ad . \cot\frac{1}{2}\alpha}{bc} = tg^2 r$, so ist

$$A^2 = bc^2 + bc^2 . tg^2 r = bc^2(1 + tg^2 r) = bc^2 . \frac{1}{\cos^2 r}$$

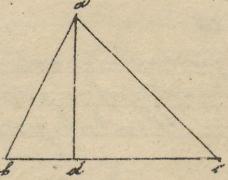
also $A = \frac{bc}{\cos r}$. Da nun A und B gegeben sind so löset man die Aufgabe nach VIII. 23.

Für den Grenzfall ist $4B^2 = A^2$, also $\frac{4bc . ad}{\sin\alpha} = bc^2 + 2bc . ad . \cot\tfrac{1}{2}\alpha$, also $bc = \frac{2ad}{\sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha} - 2ad . \cot\tfrac{1}{2}\alpha$

also $bc = 2ad\, tg\tfrac{1}{2}\alpha$. Dieses läßt sich noch leichter aus dem gleichschenkligen Dreiecke finden, woraus man unmittelbar $\tfrac{1}{2}bc = bd = ad . tg\tfrac{1}{2}\alpha$ erhält, als kleinstmöglichen Werth der Grundlinie für eine gegebene Höhe.

Beispiel. $ad = 97$, $\alpha = 78°24'$, $bc = 193$

ad	1,98677	ad	1,98677	bc	2,28556	$2p = 73°29,5'$	
2	0,30103	2	0,30103	ad	1,98677	$p = 36\ 44,75'$	
$tg\frac{1}{2}\alpha$	9,91147	$\cot\frac{1}{2}\alpha$	0,08853	$\sin\alpha$	9,99104	B	2,14064
	2,19927	bc	2,28556	B^2	4,28129	tg p	9,87310
158,22 =		$tg^2 r$	0,09077	B	2,14064	ca	2,26754
kleinste Grund-linie.		tg r	0,04538	2	0,30103	ab	2,01374
		cos r	9,82561	A	2,45995	ca = 185,16	
		A	2,45995	sin 2p	9,98172	ab = 103,21	



Ein Dreieck zu bestimmen, in welchem die Summe zweier Seiten, der Zwischenwinkel, und die auf die Gegenseite gefällte Höhe gegeben sind.

Gegeben seyen $ca + ab = A$, der Zwischenwinkel a, und die Höhe ad, so ist wie in VIII. 25. 26. $bc^2 + 2bc \cdot ad \cdot \cot\frac{1}{2}a = A^2$. Diese quadratische Gleichung der zweiten Art für bc, löset man nach VIII. 24, indem man setzt $\frac{A \cdot tg\frac{1}{2}a}{ad} = tg\, 2q$, dann ist $bc = A \cdot tg\, q$. Zur Probe setzt man nach VIII. 26. $\frac{2ad \cdot \cot\frac{1}{2}a}{bc} = tg^2 r$, dann muss $\frac{bc}{\cos r} = A$ seyn.

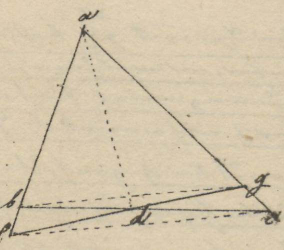
Nachdem bc bestimmt worden, hat man, wenn $ca = x$, $ab = y$ ist, $x + y = A$, $x \cdot y = \frac{bc \cdot ad}{\sin a} = B^2$, woraus sich wie eine quadratische Gleichung der ersten Art für x, y, ergiebt. Nach VIII. 23. setzt man $\frac{2B}{A} = \sin 2p$ dann ist $ca = B \cdot \cot p$, $ab = B \cdot tg\, p$.

Für den Grenzfall ist $ca = ab = \frac{1}{2}A$. Aber allgem. wird $bc^2 = ca^2 + ab^2 - 2ca \cdot ab \cdot \cos a$, also im Grenzfall $bc^2 = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^2 \cdot \cos a = A^2 \cdot \sin^2\frac{1}{2}a$ also $bc = A \cdot \sin\frac{1}{2}a$. Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung so ist $A^2 \cdot \sin^2\frac{1}{2}a + 2A \cdot ad \cdot \cos\frac{1}{2}a = A^2$, also $ad = \frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}a$ diesen größten Werth der Höhe giebt das gleichschenklige Dreieck unmittelbar: $ad = ab \cdot \cos\frac{1}{2}a$

Beispiel. $A = 307$, $a = 78°\,24'$, $ad = 97$

A	2,48714	A	2,48714	bc	2,32284	B	2,15928
$\frac{1}{2}$	9,69897	$tg\frac{1}{2}a$	9,91147	ad	1,98677	$tg\, p$	9,84576
$\cos\frac{1}{2}a$	9,88927	ad	1,98677	$\sin a$	9,99104	ca	2,31352
	2,07538	$tg\, 2q$	0,41184	B^2	4,31857	ab	2,00504
118,95 =		$2q =$	68° 49,4	B	2,15928	$ca =$	205,88
größte Höhe		$q =$	34 24,7	2	0,30103	$ab =$	101,17
		$tg\, q$	9,83570	A	2,48714	$bc =$	210,30
		bc	2,32284	$\sin 2p$	9,97317		
				$2p =$	70° 4'		
				$p =$	35° 2'		

28.



<u>Ein Dreieck zu bestimmen, in welchem der Umfang, Inhalt und ein Winkel gegeben sind.</u>

Gegeben seyen der Umfang $ab+bc+ca = 2S$, der Inhalt des $\Delta\, abc = F$, und der Winkel a, so ist nach VIII. 7. $F.\cot\frac{1}{2}a = S^2 - S.bc$, woraus $bc = S - \frac{F}{S}.\cot\frac{1}{2}a$. Setzt man also $\frac{F.\cot\frac{1}{2}a}{S^2} = \cos^2 q$ so ist $bc = S.\sin^2 q$, woraus sich bc bestimmen läßt. Hieraus folgt $ca + ab = 2S - bc = S + \frac{F.\cot\frac{1}{2}a}{S}$. Setzt man also $\frac{F.\cot\frac{1}{2}a}{S^2} = tg^2 r$, so ist $ca + ab = A = S + S.tg^2 r = S(1+tg^2 r) = \frac{S}{\cos^2 r}$. Ferner ist $\frac{1}{2}ca.ab.\sin a = F$, also $ca.ab = \frac{2F}{\sin a} = B^2$. Man hat also (VIII 23), wenn $\frac{2B}{A} = \sin 2p$, $ca = B.\cot p$, $ab = B.tg\, p$.

Für den Grenzfall ist $ca = ab = \frac{1}{2}A = \frac{S}{2.\cos^2 r}$, $ca.ab = ca^2 = \frac{2F}{\sin a}$, also $\frac{S^2}{4\cos^4 r} = \frac{2F}{\sin a}$. Aber $F\cot\frac{1}{2}a = S^2.tg^2 r$, also $\cot\frac{1}{2}a.\sin a = 8\, tg^2 r.\cos^4 r$ also $\cos^2\frac{1}{2}a = 4 tg^2 r.\cos^4 r = 4\sin^2 r.\cos^2 r$, also $\cos\frac{1}{2}a = \sin 2r$, also $2r + \frac{1}{2}a = 90°$, $r = 45 - \frac{1}{4}a$. Aber $F = S^2.tg\frac{1}{2}a.tg^2 r$, also $F = S^2.tg\frac{1}{2}a.tg^2(45° - \frac{1}{4}a)$ der Werth des größten Inhalts bei gleichem S und a.

Dasselbe ergiebt sich aus dem gleichschenkligen Dreieck, wenn man $af = ag = \sqrt{ca.ab}$ nimmt. Denn alsdann ist $af.ag = ca.ab$. Also (II. 56) $bg \parallel cf$, also $\Delta\, afg = abc = F$. Da ferner $\frac{bf}{cg} = \frac{ab}{ag} = \frac{ab}{af}$, und $af > ab$, so ist $cg > bf$, also $ca - ag > af - ab$, also $ca + ab > af + ag$. Aber (VIII. 25) $bc^2 = (ca+ab)^2 - 4F.\cot\frac{1}{2}a$, also auch $fg^2 = (af+ag)^2 - 4F.\cot\frac{1}{2}a$, also $bc^2 + (af+ag)^2 = fg^2 + (ca+ab)^2$, also $bc > fg$, also

also $ab+bc+ca > af+fg+ga$. Also hat bei gleichem Inhalt das gleichschenklige Dreieck den kleinsten Umfang, also umgekehrt bei gleichem Umfang das gleichschenklige Dreieck den größten Inhalt. Fällt man ad senkrecht auf fg, so ist $af = ag = \frac{df}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$ also $af + df = df \cdot \frac{1+\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$, $ad = df \cot \frac{1}{2}\alpha$
$ad \cdot df = df^2 \cot\frac{1}{2}\alpha$. Wenn also beim gleichschenkligen Dreieck $af+fg+ga = 2S$, $af+df = S$, $ad \cdot df = F$ so ist $S = df \cdot \frac{1+\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$, $F = df^2 \cot\frac{1}{2}\alpha$, also
$$F = S^2 \frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha \cdot \cot\frac{1}{2}\alpha}{(1+\sin\frac{1}{2}\alpha)^2} = S^2 \frac{tg\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos^2\frac{1}{2}\alpha}{(1+\sin\frac{1}{2}\alpha)^2}$$
VI. 10. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sin(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = 2\sin(45^\circ - \frac{1}{4}\alpha) \cdot \cos(45^\circ - \frac{1}{4}\alpha)$
VI. 11. $1+\sin\frac{1}{2}\alpha = 1+\cos(90-\frac{1}{2}\alpha) = 2\cos(45^\circ-\frac{1}{4}\alpha) \cdot \cos(45^\circ - \frac{1}{4}\alpha)$
also $\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{1+\sin\frac{1}{2}\alpha} = tg(45^\circ - \frac{1}{4}\alpha)$, also $F = S^2 tg\frac{1}{2}\alpha \cdot tg^2(45^\circ - \frac{1}{4}\alpha)$ wie oben.

Beispiel. $S = 240$, $\alpha = 78^\circ 24'$; $F = 10400$

$tg(45^\circ-\frac{1}{4}\alpha)$ 9,67654	F 4,01703	F 4,01703	$ca = 162,26$
S 2,38021	$\cot\frac{1}{2}\alpha$ 0,08853	2 0,30103	$ab = 130,86$
2,05675	4,10556	$\sin\alpha$ 9,99104	$bc = 186,88$
4,11350	2,05278	B^2 4,32702	$2S = 480$
$tg\frac{1}{2}\alpha$ 9,91147	S 2,38021	B 2,16351	
4,02497	$\cos q$ 9,67257	2 0,30103	
10592 = größter	$\sin q$ 9,94567	A 2,46705	
Inhalt.	$\sin^2 q$ 9,89134	$\sin 2p$ 9,99749	
	bc 2,27155	$2p = 83^\circ 51,0$	
	$tg\, r$ 9,67257	$p = 41^\circ 55,5$	
	$\cos r$ 9,95658	$tg\, p$ 9,95330	
	$\cos^2 r$ 9,91316	ca 2,21021	
	A 2,46705	ab 2,11681	

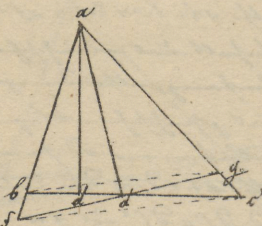
29.

Ein Dreieck zu bestimmen, in welchem der Umfang, ein Winkel, und die aus der Winkelspitze auf die Gegenseite gefällte Höhe gegeben sind.

Gegeben seyen $ab+bc+ca = 2S$, der Winkel α, und die Höhe ad, so ist nach VIII. 7.

$F.\cot\frac{1}{2}a = S^2 - S.bc$, $F = \frac{1}{2}bc.ad$

also $bc.ad.\cot\frac{1}{2}a + bc.2S = 2S^2$.



Setzt man $\frac{ad}{2S} = tg\,q$, so ist

$bc.tg\,q.\cot\frac{1}{2}a + bc = S$

$bc.\sin q.\cos\frac{1}{2}a + bc.\cos q.\sin\frac{1}{2}a =$

$S.\cos q.\sin\frac{1}{2}a$, also nach VI. 12.

$bc.\sin(q + \frac{1}{2}a) = S.\cos q.\sin\frac{1}{2}a$

und hieraus $bc = S.\dfrac{\cos q.\sin\frac{1}{2}a}{\sin(q + \frac{1}{2}a)}$

$F = \frac{1}{2}bc.ad = bc.S.tg\,q = \dfrac{S^2\sin q.\sin\frac{1}{2}a}{\sin(q + \frac{1}{2}a)}$

$ca.ab = B^2 = \dfrac{2F}{\sin a} = \dfrac{F}{\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}a} = S^2\dfrac{\sin q}{\cos\frac{1}{2}a.\sin(q + \frac{1}{2}a)}$

$ca + ab = A = 2S - bc$, also $A.S = 2S^2 - S.bc$

also $A.S = bc.ad.\cot\frac{1}{2}a + bc.S$

aber $bc(ad.\cot\frac{1}{2}a + 2S) = 2S.S$

also $A.(ad.\cot\frac{1}{2}a + 2S) = 2.S(ad.\cot\frac{1}{2}a + S)$

Setzt man $\frac{ad}{S} = tg\,r$, $\frac{ad}{2S} = tg\,q$, so ist

$A.(tg\,q.\cot\frac{1}{2}a + 1) = S.(tg.r\cot\frac{1}{2}a + 1)$

also $A\dfrac{\sin(q + \frac{1}{2}a)}{\cos q.\sin\frac{1}{2}a} = S\dfrac{\sin(r + \frac{1}{2}a)}{\cos r.\sin\frac{1}{2}a}$

also $A = S.\dfrac{\sin(r + \frac{1}{2}a).\cos q}{\sin(q + \frac{1}{2}a).\cos r}$

Da nun A und B bestimmt sind, so setzt man (VIII 23)

$\frac{2B}{A} = \sin 2p$, $ca = B.\cot p$, $ab = B.tg\,p$.

Für den Grenzfall ist $A^2 = 4B^2$. Aber

$A = 2S.\dfrac{ad.\cot\frac{1}{2}a + S}{ad.\cot\frac{1}{2}a + 2S}$, $B^2 = ca.ab = \dfrac{bc.ad}{\sin a}$

$B^2 = 2S.\dfrac{S.ad}{\sin a(ad.\cot\frac{1}{2}a + 2S)}$. Also ist für den Grenz, fall: $\frac{(ad.\cot\frac{1}{2}\alpha+S)^2}{ad.\cot\frac{1}{2}\alpha+2S} = \frac{ad}{\sin\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\alpha}$

$(ad.\cot\frac{1}{2}\alpha+S)^2 = \frac{(ad.\cot\frac{1}{2}\alpha+2S)\,ad}{\sin\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\alpha}$

$ad^2.\cot^2\frac{1}{2}\alpha + 2ad.S.\cot\frac{1}{2}\alpha + S^2 = \frac{ad^2.\cot\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\alpha} + \frac{2S.ad}{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}$

$S^2 - 2S.ad.tg\frac{1}{2}\alpha = ad^2$

$(S-ad.tg\frac{1}{2}\alpha)^2 = ad^2+ad^2.tg^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{ad^2}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}$

also $S = ad.\frac{1+\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, $ad = S.\frac{1-\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$

also $S = ad.\cot(45-\frac{1}{4}\alpha)$, $ad = S.tg(45-\frac{1}{4}\alpha)$

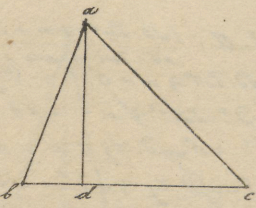
Leichter folgt dieses aus dem gleichschenkligen Dreieck afg, wo $af = \frac{ad}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, $fd = ad.\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$
also $af+fd = S = ad.\frac{1+\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = ad.\cot(45-\frac{1}{4}\alpha)$

Beispiel. $S = 240$, $\alpha = 78°24'$, $ad = 97$

$tg(45-\frac{1}{4}\alpha)$ 9,67654	S 2,38021	$\sin q$ 9,29684
S 2,38021	$\cos q$ 9,99131	$\cos\frac{1}{2}\alpha$ 9,88927
2,05675	$\sin\frac{1}{2}\alpha$ 9,80074	$\sin(q+\frac{1}{2}\alpha)$ 9,88818
113,96 = größte	$\sin(q+\frac{1}{2}\alpha)$ 9,88818	9,51939
Höhe.	bc 2,28408	9,75969
ad 1,98677	S 2,38021	S 2,38021
S 2,38021	$\cos q$ 9,99131	B 2,13990
$tg\,r$ 9,60656	$\sin(r+\frac{1}{2}\alpha)$ 9,94269	2 0,30103
2 0,30103	$\sin(q+\frac{1}{2}\alpha)$ 9,88818	A 2,45888
$tg\,q$ 9,30553	$\cos r$ 9,96715	$\sin 2p$ 9,98205
$r = 22°\ 0,4$	A 2,45888	$2p = 73°\ 38,4$
$q = 11\ 25,5$	$bc = 192,34$	$p = 36\ 49,2$
$r+\frac{1}{2}\alpha = 61\ 12,4$	$ca = 184,34$	$tg\,p$ 9,87427
$q+\frac{1}{2}\alpha = 50\ 37,5$	$ab = 103,32$	ca 2,26563
		ab 2,01417

30

Ein Dreieck zu bestimmen, in welchem die Summe zweier Seiten, die Gegenseite, und die von der Winkelspitze auf dieselbe gefällte Höhe gegeben sind.



Gegeben seyen $ca + ab = A$, die Gegenseite bc, und die Höhe ad, also auch der Inhalt $F = \frac{1}{2} bc \cdot ad$. Also (VIII. 7) $bc^2 = A^2 - 4F.\cot\frac{1}{2}a$, hieraus $\cot\frac{1}{2}a = \frac{A^2 - bc^2}{4F} = \frac{(A+bc)(A-bc)}{2\,bc\cdot ad}$

Hierdurch ist der Winkel a bestimmt, und daraus $2ca \cdot ab = \frac{bc \cdot ad}{\sin a} = B^2$. Nun ist (VIII. 23) $\frac{2B}{A} = \sin 2p$, $ca = B.\cot p$, $ab = B.\operatorname{tg} p$

Für den Grenzfall ist $ca = ab = \frac{1}{2}A$, $cd = bd$, also ist $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 - bc^2}$ die größtmögliche Höhe.

Beispiel. $A = 307$, $bc = 210$, $ad = 98$

$A =$	307	$A + bc$	2,71349	B	2,16093
$bc =$	210	$A - bc$	1,98677	2	0,30103
	517	2	0,30103	A	2,48714
	97	bc	2,32222	$\sin 2p$	9,97482
$A + bc$	2,71349	ad	1,99123	$2p =$	70°40,6
$A - bc$	1,98677	$\cot\frac{1}{2}a$	0,08578	$p =$	35 20,3
$\frac{1}{4}$	9,39794	$\frac{1}{2}a =$	39°22,7	$\operatorname{tg} p$	9,85067
	4,09820	$a =$	78 45,4	ca	2,31026
	2,04910	$bc \cdot ad$	4,31345	ab	2,01160
111,97 =		$\sin a$	9,99158	$ca =$	204,30
größte Höhe		B^2	4,32187	$ab =$	102,70
		B	2,16093		

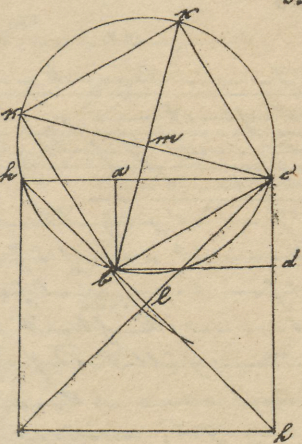
31.

Ein Rechteck zu bestimmen, dessen Umfang und Diagonallinie gegeben sind.

Vom Rechteck $abcd$ seyen der Umfang und die Diagonallinie bc gegeben. Aus dem ersten ist also auch der halbe Umfang $ca + ab = A$, gegeben. Diese Aufgabe ist also ein besonderer Fall der in VIII. 25.

Man beschreibe demnach über eine Linie $ck = A$ ein Quadrat, ziehe dessen Diagonallinie hk, beschreibe aus c mit einem Halbmesser

der



der gegebenen Diagonallinie des Rechtecks gleich ist, einen Kreis, so schneidet derselbe die hk in b. Aus b fälle man auf ch, ck, die Senkrechten ba, bd, so ist das verlangte Rechteck bestimmt.

Oder man beschreibe über die gegebene Diagonallinie bc ein Quadrat bcκκ, beschreibe um dasselbe einen Kreis m, setze in diesen eine Sehne ck gleich dem halben Umfang = A des Rechtecks, wodurch sich der Punkt k ergiebt, und dann durch eine Senkrechte ba, die beiden Seiten ca, ab, finden läßt.

Beim Grenzfall ist $bc = cl = \sqrt{\tfrac{1}{2}} . A$, mithin darf die gegebene Diagonallinie bc nicht kleiner als $\sqrt{\tfrac{1}{2}} . A$ seyn.

Setzt man $ca = x$, $ab = y$, so ist $x + y = A$, $x^2 + y^2 = bc^2$, also $bc^2 = A^2 - 2x.y$, also $x.y = \frac{A^2 - bc^2}{2}$

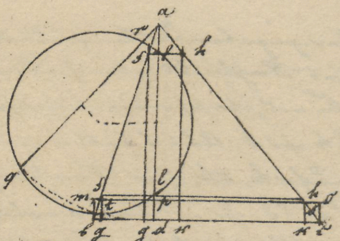
Man berechnet also, nach VIII. 23. aus $B^2 = \frac{A^2 - bc^2}{2}$

$\sin 2p = \frac{2B}{A}$, $ab = B . \operatorname{tg} p$, $ca = B . \cot p$.

Beispiel. Der Umfang des Rechtecks sey = 474, also $A = 237$, $bc = 193$

$\tfrac{1}{2}$ 9,69897	A = 237	B 1,98794
$\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ 9,84948	bc = 193	2 0,30103
A 2,37475	$A+bc$ = 430	A 2,37475
cl 2,22423	$A-bc$ = 44	$\sin 2p$ 9,91422
cl = 167,58	$A+bc$ 2,63347	$2p$ = 55° 9,7
kleinste Diagonallinie	$A-bc$ 1,64345	p = 27.34,85
	$\tfrac{1}{2}$ 9,69897	$\operatorname{tg} p$ 9,71797
	B^2 3,97589	ab 1,70591 = 50,80
	B 1,98794	ca 2,26997 = 186,20

32.



In ein Dreieck ein Rechteck von gegebenem Inhalt zu beschreiben.

In das gegebene Dreieck abc sey ein Rechteck fghk zu beschreiben, welches an Inhalt dem gegebenen Rechteck bcmo = F gleich sey.

Man fälle ad senkrecht auf bc, welche von den obern Linien der Rechtecke, nämlich von fh, mo in l, p, geschnitten werde; so soll $fh . ld = bc . dp = F$ seyn. Aber das Verhältniß $\frac{fh}{al} = \frac{bc}{ad}$ ist gegeben. Also ist auch das Verhältniß $\frac{fh . ld}{al . ld} = \frac{bc}{ad}$ gegeben. Also ist auch das Verhältniß $\frac{bc . dp}{al . ld} = \frac{bc}{ad}$ gegeben. Also muß $al . ld = ad . pd$ seyn. Wenn die obere Linie mo des gegebenen Rechtecks bcmo, die Seiten ca, ab, in s, t, schneidet, so wird aus gleichem Grunde auch $ah . hc = ac . sc$, $af . fb = ab . tb$ seyn. Demnach sind die Punkte l, h, f, durch ein Rechteck von quadratischer Ergänzung (VIII. 23) gegeben. Für den Grenzfall ist $al = ld = \frac{1}{2} ad$, also $\frac{1}{4} ad^2 = ad . pd$, also $pd = \frac{1}{4} ad$. Also darf, wenn die Auflösung möglich seyn soll, pd nicht $> \frac{1}{4} ad$, oder F nicht $> \frac{1}{4} ad . bc$ seyn. Das größte einschreibbare Rechteck ist also der Hälfte des Δ abc gleich.

Man ziehe aus a eine beliebige gerade Linie, nehme darauf aus a nach einerlei Richtung, die $aq = ad$, $ar = pd$, halbire ad, qr, errichte in diesen Punkten Senkrechte auf ad, qr, wodurch

sich

der Mittelpunkt eines Kreises ergiebt, welcher durch die Punkte g, r; geht, und die ad in den beiden Punkten l, l, schneidet. Setzt man fh = x, dl = y, so ist (VIII. 5) $\frac{al}{fh} = \frac{ad}{bc}$, oder $\frac{ad-y}{x} = \frac{ad}{bc}$, also $ad \cdot x + bc \cdot y = ad \cdot bc$. Aber auch $x \cdot y = bc \cdot pd = P$. Also

$$ad \cdot y - y^2 = ad \cdot pd = \frac{ad}{bc} \cdot P = ad^2 \cdot \frac{P}{ad \cdot bc}$$
$$bc \cdot x - x^2 = \frac{bc^2 \, pd}{ad} = \frac{bc}{ad} \cdot P = bc^2 \cdot \frac{P}{ad \cdot bc}$$

Setzt man also (VIII. 23) $\frac{P}{ad \cdot bc} = K^2$, so ist $\sin 2p = 2K$, $x = bc \cdot K \cdot tg\, p$ oder $= bc \cdot K \cdot \cot p$

$y = ad \cdot K \cdot \cot p$ oder $= ad \cdot K \cdot tg\, p$

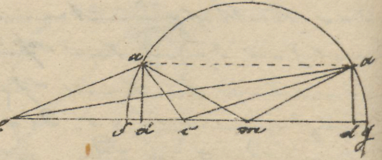
Beispiel. bc = 193, ad = 97, P = 3500

bc 2,28556	P 3,54407	K 9,63587
ad 1,98677	bc 2,28556	bc 2,28556
¼ 9,39794	ad 1,98677	tg p 9,76018
3,67027	K^2 9,27174	I x 1,68161 = 48,041
4680,2 =	K 9,63587	II x 2,16125 = 144,96
größtes Rechteck	2 0,30103	K 9,63587
	sin 2p 9,93690	ad 1,98677
	2p = 59 51,4	tg p 9,76018
	p = 29 55,7	I y 1,86246 = 72,855
		II y 1,38282 = 24,144

33.

Ein Dreieck zu bestimmen, in welchem die Grundlinie, die Höhe, und das Verhältniß der beiden Seiten gegeben ist.

Gegeben seyen die Grundlinie bc, die Höhe ad, und das Verhältniß $\frac{ca}{ab} = N$. Theilt man (VIII. 1) die Grundlinie bc harmonisch in f, g nach dem gegebenen Verhältniß, so daß $\frac{cf}{bf} = \frac{cg}{bg} = N$



und beschreibt man über dem Durchmesser fg einen Kreis m, so muß nach VIII. 18. der Punct a in diesem Kreise liegen. Zieht man also in einem der gegebenen Höhe gleichen Abstande eine Parallellinie mit der Grundlinie bc, so schneidet sie den Kreis m in der verlangten Dreieckspitze a. Die Aufgabe hat also zwei Auflösungen.

Aus $\frac{cf}{bf} = \frac{cg}{bg} = N$, folgt $cf = bc \cdot \frac{N}{1+N}$,
$bf = bc \cdot \frac{1}{1+N}$, $cg = bc \cdot \frac{N}{1-N}$, $bg = bc \cdot \frac{1}{1-N}$
$mf = mg = ma = bc \cdot \frac{N}{1-N^2} = bc \cdot \frac{N}{(1+N)(1-N)}$
Hieraus berechnet man den Halbmesser ma, und hat dann $\sin m = \frac{ad}{ma}$, $md = ma \cdot \cos m$
$mb = bc \cdot \frac{1}{1-N^2} = \frac{ma}{N}$, $mc = bc \cdot \frac{N^2}{1-N^2} = ma \cdot N$
$x = bd = mb \mp md$, $y = cd = -mc \pm md$

$$\operatorname{tg} b = \frac{ad}{bd}, \quad ab = \frac{ad}{\sin b}$$
$$\operatorname{tg} c = \frac{ad}{cd}, \quad ca = \frac{ad}{\sin c}$$

Auf dieselben Resultate führt die Auflösung der Gleichungen: $x + y = bc$, $ad^2 + y^2 = N^2(ad^2 + x^2)$.
Auch darf ad nicht größer als $ma = bc \cdot \frac{N}{1-N^2}$ seyn.

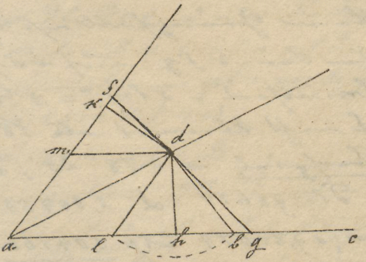
Beispiel. $bc = 325$; $N = 0{,}685$; $ad = 392$

bc	2,51188
N	9,83569
1+N	0,22660
1−N	9,49831
ma	2,62266
ad	2,59329
sin m	9,97063
cos m	9,55102
md	2,17368

ma	2,62266
N	9,83569
mb	2,78697
mc	2,45835
mb =	612,31
mc =	287,31
md =	149,17

	I	II
ad	2,59329	2,59329
bd	2,66571	2,88166
cd	2,14032	2,63996
tg b	9,92758	9,71163
tg c	0,45297	9,95333
sin b	9,81028	9,66058
sin c	9,97458	9,82490
ab	2,78301	2,93271
ca	2,61871	2,76839

34.



Durch einen auf der Mittellinie eines Winkels gegebenen Punkt eine grade Linie zu ziehen, in welcher die Summe der Quadrate der nach den Seiten genommenen Abschnitte, dem Quadrat einer gegebenen Linie gleich ist.

Die Linie ad halbire den gegebenen Winkel bam und es sey auf ihr ein Punkt d gegeben, durch welchen die Linie sg so zu ziehen sey, daß $sd^2 + dg^2 = L^2$ sey, wo die Linie L gegeben ist. Man ziehe $dh = dk$ senkrecht auf die Winkelseiten, $dl = dm$ parallel den Winkelseiten, so ist:

$sd^2 = dm^2 + ms^2 - 2km.ms$, $dg^2 = dl^2 + lg^2 - 2hl.lg$

also $L^2 = 2dl^2 + ms^2 + lg^2 - 2hl(ms + lg)$

aber $\Delta\, smd \sim dlg$, also $ms.lg = dl.dm = dl^2$

also $L^2 = 2ms.lg + ms^2 + lg^2 - 2hl(ms + lg)$

also $L^2 = (ms + lg)^2 - 2hl(ms + lg)$

Nimmt man also $gc = ms$, $lb = 2hl$, so ist

$L^2 = lc^2 - lb.lc$, also $L^2 = lc.cb$

Aus dieser Gleichung bestimmt man den Punkt c nach VIII. 24. Man setzt $tg\, 2p = 2.\frac{L}{lb} = \frac{L}{dl.\cos\alpha}$, so ist $lc = L.\cot p$, $bc = L.\,tg\, p$.

Aber $dl^2 = lg.ms$, also $dl^2 = lg.gc$. Da nun der Punkt c gefunden ist, so löset man diese Gleichung nach VIII. 23. auf. Man setzt $\sin 2q = \frac{2.dl}{lc}$, so ist

$lg = dl.\,tg\, q$ und $gc = ms = dl.\cot q$

oder $lg = dl.\cot q$ und $gc = ms = dl.\,tg\, q$.

Beim Grenzfall ist lg = gc, also lg = mf. Also die Linie fg; auf ad senkrecht, also fd = dg = lm, also $L^2 = 2\,lm^2 = 8\,dl^2.\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$ also darf L nicht kleiner als $\sqrt{8}.\,dl.\sin \tfrac{1}{2}\alpha$ seyn.

Beispiel. $\alpha = 78^\circ\,24'$; $dl = 97$; $L = 203$.

dl 1,98677
sin ½α 9,80074
√8 0,45154
2,23905
173,4 = kleinste Werth von L.

L 2,30750
dl 1,98677
cos α 9,30336
tg 2μ 1,01737
2μ = 84° 30,7
μ = 42 15,35

L 2,30750
cot μ 0,04166
lc 2,34916
2 0,30103
dl 1,98677
sin 2φ 9,93864
2φ = 60° 15,3
φ = 30 7,65
dl 1,98677
tg φ 9,76367
lg 2,22310
mf 1,75044
lg = 167,15
mf = 56,29
lc = 223,44

Proben

lg + dl 2,42185
sin ½α 9,80074
lg − dl 1,84603
cos ½α 9,88927
2,22259
1,73530
tg 0,48729
sin 9,97811
dg 2,24448
mf + dl 2,18551
sin ½α 9,80074
mf − dl 1,60970
cos ½α 9,88927
1,98625
1,49897
tg 0,48728
sin 9,97811
fd 2,00814

lg + dl = 264,15
lg − dl = 70,15
mf + dl = 153,29
mf − dl = −40,71

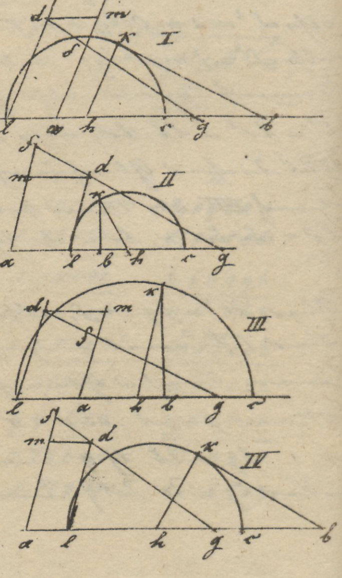
VI. Aufgabe 71

fd² 4,01628
dg² 4,48896
tg²x 9,52732
tg x 9,76366
cos x 9,93698
cos²x 9,87396
fd² + dg² 4,61500
L² 4,61500

35.

Durch einen gegebenen Punkt eine grade Linie zu ziehen welche auf den Seiten eines gegebenen Winkels Stücke abschneidet, deren Summe oder Unterschied von gegebener Länge ist.

Der Winkel α und der Punkt d seyen gegeben; durch d ist eine grade Linie fg so zu ziehen, daß die Summe oder der Unterschied der Abschnitte af, ag, einer gegebenen Länge = L



gleich sey. Man ziehe dl, dm, den Seiten des Winkels x parallel, so ist $\triangle dmf \sim \triangle gld$, also $mf \cdot lg = la \cdot ma$. Man nehme $gb = af$, so ist

in I. und IV. $ab = ag + gb = ag + af = L$

in II und III $ab = ag - gb = ag - af = L$.

der Punkt b ist also gegeben. Man nehme $gc = mf$, so ist $bc = ma$. Folglich ist auch der Punkt c gegeben. Da nun $lg \cdot mf = la \cdot ma$, so ist auch $lg \cdot gc = la \cdot ma$. Aber lc, la, ma, sind gegeben, also wird der Punkt g bestimmt, in I. II. durch ein Rechteck vom quadratischen Ueberschuß $x^2 - A \cdot x = B^2$ (VIII. 24) in III. IV. durch ein Rechteck von quadratischer Ergänzung $Ax - x^2 = B^2$ (VIII. 23) wo $lg = x$, $lc = A$; $la \cdot ma = la \cdot bc = B^2$.
Hier ist in

I. $lc = A = L + la - ma$, II. $lc = A = L - la + ma$,
III. $lc = A = L + la + ma$, IV. $lc = A = L - la - ma$

Die Fälle I. II. haben also immer zwei mögliche Auflösungen. Man beschreibe über lc einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt k sey, und errichte (III.) in b einen senkrechte Ordinate bx an den Halbkreis, so ist $la \cdot bc = lb \cdot bc - ab \cdot bc = bx^2 - ab \cdot bc =$
$kx^2 - bk^2 - ab \cdot bc = \frac{1}{4} lc^2 - bk^2 - ab \cdot bc$
also ist in III. $la \cdot bc < \frac{1}{4} lc^2$, folglich hat dieser Fall auch immer zwei mögliche Auflösungen.
In IV ist im Grenzfall $\frac{1}{4} lc^2 = la \cdot bc = la \cdot ma$, also $lc = 2\sqrt{la \cdot ma}$, also ist $L = la + ma + 2\sqrt{la \cdot ma}$, der kleinste Werth von L für die Möglichkeit der Auflösung.

Beispiel. $la = 97$, $ma = 152$, $\mathfrak{L} = 495$

la	1,98677
ma	2,18184
4	0,60206
$4\mathfrak{B}^2$	4,77067
$2\mathfrak{B}$	2,38533
$2\mathfrak{B} =$	242,84
$la =$	97
$ma =$	152
kleinstes $\mathfrak{L} =$	491,84
$\mathfrak{L} =$	495
$la =$	97
$ma =$	152
I $\mathfrak{A} =$	440
II $\mathfrak{A} =$	550
III $\mathfrak{A} =$	744
IV $\mathfrak{A} =$	246

	I	II	III	IV
$2\mathfrak{B}$	2,38533	2,38533	2,38533	2,38533
$\mathfrak{A}$	2,64345	2,74036	2,87157	2,39094
$tg\,2\varphi$	9,74188	9,64497	$sin\,2\varphi$ 9,51376	9,99439
$2\varphi =$	28 53,70	23 49,4	19 3,10	80 48,50
$\varphi =$	14 26,85	11 54,7	9 31,55	40 24,25
$\mathfrak{B}$	2,08430	2,08430	2,08430	2,08430
$tg\,\varphi$	9,41101	9,32417	9,22481	9,93002
lg	2,67329	2,76013	2,85949	2,15428
mf	1,49531	1,40847	1,30911	2,01432
$lg =$	471,28	575,61	723,62	142,66
$mf =$	31,28	25,61	20,38	103,35
$la =$	97	97	97	97
$ma =$	152	152	152	152
$ag =$	374,28	672,61	626,62	239,65
$af =$	120,72	177,61	131,62	255,35
$\mathfrak{L} =$	495	495	495	495

Zweite Folge.

Im griechischen Alterthum wurde die geometrische Analysis hauptsächlich durch drei Geometer von großer Geisteskraft: Euklides, Archimedes, und Apollonius ausgebildet.

Von Euklides (285 J. v. Chr.) sind uns nur zwei Schriften aufbehalten worden 1) Die Elemente d. h. eine systematische Zusammenstellung der wichtigsten damals bekannten Sätze aus der ebenen Geometrie, Arithmetik und Stereometrie 2) Die Data, d. h. eine Sammlung von Sätzen, welche enthalten, was aus den Forderungen einer geometrischen Aufgabe vermöge der Elemente als unmittelbar gegeben angesehen werden können. Die verloren gegangenen Schriften des Euklides sind 3) Die Kegelschnitte d. h. die krummen Linien, welche entstehen, wenn die durch Umdrehung einer geraden Linie um ihre Axe erzeugte Fläche von ebenen Durchschnitten wird. Die Kegelschnitte waren übrigens schon vor Euklides bekannt, denn Aristäus (450 J. v. Chr.) verfaßte darüber ein Werk, welches ebenfalls verloren gegangen ist 4) Die loca ad superficiem, 5) Die Porismen. Der eigentliche Gegenstand dieser beiden letzten Schriften ist unbekannt, doch scheint es nach der Untersuchung eines berühmten neueren Mathematikers*), daß die loca ad superficiem die Umdrehungsoberflächen der Kegelschnitte, und ihre Durchschnittslinien behandelten, die Porismen aber eine geometrische Methode enthielten durch welche man aus gegebenen Eigenschaften

*) Chasles Geschichte der Geometrie Note II. III

einer Linie, andere Eigenschaften derselben ab-
leiten konnte, aus denen sich leichter auf die Ent-
stehung dieser Linie schließen ließ; also das, was
man in der neueren Geometrie die Transfor-
mation der Coordinaten nennt.

Die Entdeckungen des Archimedes (287–212 v. Chr.)
erstreckten sich hauptsächlich auf denjenigen Theil
der Geometrie, welchen wir die metrischen
Relationen oder die Metrik (siehe V Cursus)
nennen. Seine Schriften sind fast alle erhalten
worden*, nämlich 1) Berechnung des Cylinders
und der Kugel, 2) Berechnung des Kreisverhält-
nisses 3) die Konoiden und Sphäroiden, d.h. die durch
Umdrehung der Kegelschnitte um ihre Axe er-
zeugten Körper 4) die Spirallinien 5) das Gleichge-
wicht und der Schwerpunkt (die Statik) 6) die Quadra-
tur der Parabel 7) Psammites, d.h. Berechnung
der Sandkörner, welche im Weltraum Platz haben,
nämlich im Raum einer Kugel von 1 Zoll Durch-
messer 10^9, von 1 Stadium Durchmesser 10^{21}, in der
Erdkugel 10^{39}, im Sonnengebiet 10^{51}, im Weltraum 10^{63}
Sandkörner 8) das Gleichgewicht der Körper, in ei-
ner Flüssigkeit (Hydrostatik) 9) Lemmata,
nämlich 15 geometrische Sätze.

Apollonius von Perga (247 v. Chr.) war der Ver-
fasser der wichtigsten Schriften über geometrische
Analysis, von denen uns aber nur zwei aufbe-
halten worden, nämlich 1) die Kegelschnitte in
8 Büchern, sein Hauptwerk (das 8te Buch ist verlo-
ren gegangen) 2) die Sectio rationis, von Halley
im Arabischen wiedergefunden und ins Lateinische
übersetzt. Die übrigen Schriften des Apollonius

---

*) Oeuvres d'Archimede, par Peyrard. 4° Paris 1807. Avec l'Arithmetique des Grecs, par Delambre. 601 p.

sind verloren gegangen. Nur die Angabe zu ihrem Inhalte und einige ihnen entnommene Sätze hat uns Pappus (380 J. n. Chr.) in seinen „Collectiones mathematicae" überliefert. Hiernach haben mehrere berühmte Mathematiker ihre Wiederherstellung versucht. Diese Schriften waren: 3) Sectio spatii 4) Sectio determinata*) 5) inclinationes 6) tactiones oder Berührungen der Kreise 7) loca plana, d. h. diejenigen Eigenschaften der geraden Linie und des Kreises, welche allen ihren Punkten in Bezug auf gewisse feste Punkte oder Linien zukommen (v. IX. Cursus) In neuerer Zeit ist die geometrische Analysis hauptsächlich durch die Arbeiten von Halley, Maclaurin, Robert Simson, Desargues, Pascal, Descartes, Monge, Carnot, Brianchon, Servois, Poncelet, Gauß, Steiner, Plücker, Möbius, Clausen, u. a. erweitert worden.

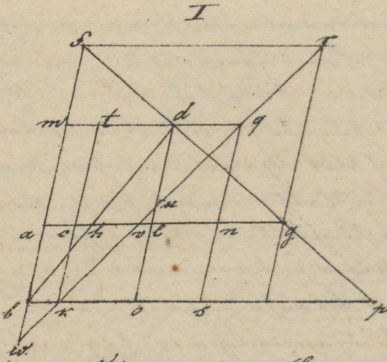
Sectio rationis

36.

<u>Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf den Seiten eines gegebenen Winkels Stücke abschneidet, deren Verhältniß einem gegebenen gleich ist.</u>

Auf den beiden der Lage nach gegebenen Linien ab, ac, seien die Punkte b, c, gegeben. Durch einen gegebenen Punkt d sey eine gerade Linie fg so zu ziehen, daß das Verhältniß der Abschnitte $\frac{bf}{cg} = N$ gegeben sey.

*) Vermischte geometrische Analysis, enthaltend des Apollonius von Perga Sectio rationis, spatii und determinata. Leipzig 1837.



Man suche zuerst eine Gleichung, welche ausdrückt, daß die Linie fg durch den Punkt d geht. Man ziehe also dl, dm, mit ab, ac parallel, so ist $\frac{mf}{ma} = \frac{df}{dg} = \frac{la}{lg}$, also $lg.mf = la.ma$.

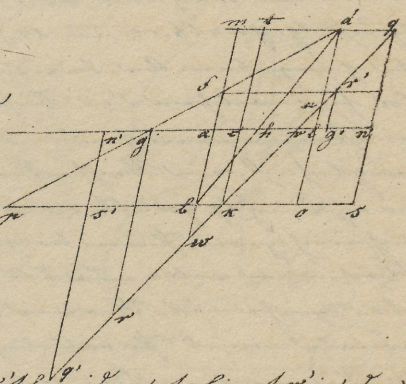
Es ist vortheilhaft, für x diejenige Linie zu wählen, welche für einen unendlich großen Werth von N verschwindet, nämlich lg. Man setze also $lg = x$, $mf = y$, so ist $xy = la.ma$. Außerdem soll $\frac{bf}{cg} = N$, also $y + mb = N(x + lc)$ seyn. Eliminirt man y aus beiden Gleichungen, so erhält man $la.ma + mb.x = N(x+lc)x$. Verbindet man db, welche die ac in h schneidet, so ist $\frac{mb}{ma} = \frac{db}{dh} = \frac{la}{lh}$, also $la.ma = lh.mb$, also ist $lh.mb + mb.x = N.(x + lc)x$, und hieraus $x(x+lc-\frac{mb}{N}) = lh.\frac{mb}{N}$.

Setzt man also $\frac{mb}{N} = cn$, so ist der Punkt n gegeben, und man hat $x(x-ln) = lh.cn$, oder $lg.gn = lh.cn$ eine Gleichung vom quadratischen Ueberschuß, welche nach VIII. 24. aufgelöset wird. Nun ist es leicht, diese Gleichung durch folgende Reihe von Verhältnissen direct zu beweisen:

$\frac{lg}{lh} = \frac{cp}{cb} = \frac{dp}{ds} = \frac{mb}{mf} = \frac{qk}{qr} = \frac{cn}{gn}$, also $lg.gn = lh.cn$.

Hier ist $kt = mb$, $ks = cn$, also $\frac{kt}{ks} = \frac{mb}{cn} = N$ also die Linie kq ihrer Richtung nach gegeben dieser Linie wird von den Parallelogrammseiten md, dl, la, ma, in den Punkten g, u, v, w, geschnitten, diese Punkte sind also ebenfalls gegeben. Zieht man aus s, g, Parallellinien mit ac, ab, welche einander in r, schneiden, so ist $\frac{bs}{cg} = N$, also $\frac{bs}{cg} = \frac{rt}{rs}$, also liegt r in der Linie kg. Also $\frac{ur}{wu} = \frac{lg}{la} = \frac{dg}{ds} = \frac{ma}{ms} = \frac{vg}{rg}$, also ist ur.rg = wu.vg, ebenfalls eine Gleichung vom quadratischen Ueberschuß, welche den Punkt r bestimmt. Die Aufgabe hat also in jedem Falle zwei mögliche Auflösungen.

II



II. Die beiden andern Bestimmungen je zwei mögliche Auflösungen haben. Es sey wieder $\frac{bs}{cg} = N$. Man nehme $cn = cn' = \frac{mb}{N}$, $cg' = cg$, ziehe aus d, n, mit ac, ab, Parallellinien, welche einander in q schneiden, aus s, g' mit ac, ab, Parallellinien welche einander in r' schneiden, so liegt r in der geraden Linie kq, welche der Lage nach gegeben ist. Man ziehe aus q, r' Parallellinien mit ab, welche die kq in r, q' schneiden, so ist kq' = kq, kr = kr', q'r = qr', und $\frac{lg}{lh} = \frac{op}{ob} = \frac{dp}{ds} = \frac{mb}{ms} = \frac{kq}{qr'} = \frac{kq'}{q'r} = \frac{cn'}{gn'}$, also lg.qr' = lh.cn' = lh.cn. Ferner $\frac{ur}{wu} = \frac{lg}{la} = \frac{dg}{ds} = \frac{ma}{ms} = \frac{vq}{qr'} = \frac{vq}{rq'}$, also

ur.rq' = wu.vq. Diese Gleichungen sind von quadratischer Ergänzung und werden nach VIII. 23 aufgelöset. Man kann auch in der oben gefundenen

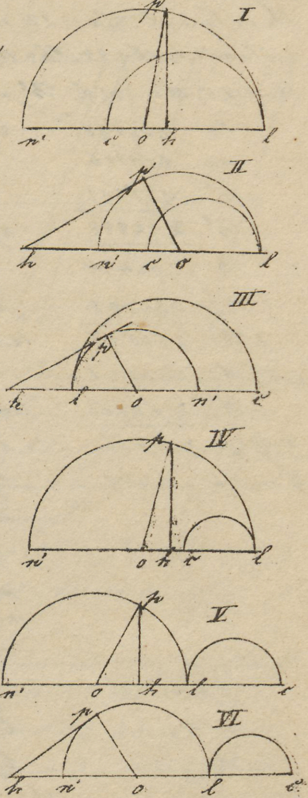
Gleichung $x(x + lr - \frac{mb}{N}) = lh.\frac{mb}{N}$, so muß x als Negativ annehmen, und erhält dann:
$-x.(-x + lr + \frac{mb}{N}) = - lh.\frac{mb}{N}$, oder:
$x.(lr + \frac{mb}{N} - x) = lh.\frac{mb}{N}$, oder $x(ln' - x) = lh.cn'$.
Hieraus ergiebt sich folgende Auflösung:
Man verbinde dk, welche die ac in k schneidet, man vollende das Parallelogramm aldm, und setze aus c nach entgegengesetzten Richtungen die Abschnitte $cn = cn' = \frac{mb}{N}$ auf. An denjenigen Abschnitte ln, für welchen die Richtungen lh, cn entgegengesetzt sind, errichte man ein Rechteck von quadratischem Ueberschuß lg.gn = lh.cn (VIII. 24.) wodurch sich zwei Punkte g ergeben. An denjenigen Abschnitte ln', für welchen die Richtungen lh, cn' übereinstimmend sind, errichte man, wenn es möglich ist, ein Rechteck von quadratischer Ergänzung lg.gn' = lh.cn' = lh.cn (VIII. 23) wodurch sich noch zwei Punkte g ergeben.
Oder man vollende das Parallelogramm abrc, ziehe aus k eine grade Linie als Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten das gegebene Verhältniß N haben. Wo diese gerade Linie von den Linien md, ld, la, ma, in q, u, v, w, geschnitten wird, so nehme man kq' = kq, und errichte an uq ein Rechteck ur.rq von quadratischem Ueberschuß wodurch man zwei Punkte r erhält; auch errichte man, wenn es möglich ist, an uq' ein Rechteck ur.rq' von quadratischer Ergänzung, wodurch man noch zwei Punkte r erhält; beide Rechtecke müssen einander gleich seyn ur.rq = ur.rq' = wu.vq.
Aus diesen vier Punkten r ziehe man rq = ab.
Um für das Rechteck von quadratischer Ergänzung die Grenzfälle zu untersuchen, beschreibe man über

bei einem Halbkreis, dessen Mittelpunkt o ist, ziehe aus dem inneren Punkte k einen Ordinate kp an den Halbkreis, oder, aus dem äußeren Punkte k eine Berührende kp an den Halbkreis, so ist für den inneren Punct k

$lk.kn' = kp^2 = op^2 - ko^2 = \frac{1}{4} ln'^2 - ko^2$;

für den äußeren Punct k

$lk.kn' = kp^2 = ko^2 - op^2 = ko^2 - \frac{1}{4} ln'^2$.



Die Folgen der Punkte sey nun:

I. $n'ckl$, so ist $lk.cn' =$
$lk.kn' - lk.kc = \frac{1}{4} ln'^2 - ko^2 - lk.kc$
also $lk.cn' < \frac{1}{4} ln'^2$, also die doppelte Auflösung immer möglich.

II. $kn'cl$, oder III. $kln'c$, oder IV. $n'kcl$, oder V. $n'klc$. Hier ist, für vier Fällen ist $lk.cn' = \frac{1}{4} ln'^2 - ko^2 + lk.kc$. Hier ist die Auflösung unmöglich, wenn $lk.kc > ko^2$, der Grenzfall mit einer möglichen Auflösung, wenn $lk.kc = ko^2$, zwei mögliche Auflösungen wenn $lk.kc < ko^2$

VI. $kn'lc$. Hier ist ebenfalls $lk.cn' = \frac{1}{4} ln'^2 - ko^2 + lk.kc$ da aber $kc > lk$, so ist $lk.kc > lk^2$, also um so mehr $lk.kc > ko^2$, also die Auflösung immer unmöglich.

Für die Berechnung dieser Aufgabe ist $lk = \frac{la.ma}{mb}$, $cn = cn' = \frac{mb}{N}$, also $lk.cn = lk.cn' = \frac{la.ma}{N} = B^2$; $ln = cn - lc = \frac{mb}{N} - lc = A$; $ln' = cn' + lc = \frac{mb}{N} + lc = A'$. Man hat dann

$x^2 - A.x = B^2$, nach VIII. 24. aufzulösen

$A'x - x^2 = B^2$, nach VIII. 23. aufzulösen.

Beispiel. $la = 23$, $ma = 39$, $lc = 17$, $mb = 83$, $N = \frac{2}{3}$

also $ac = 6$, $ab = 44$, $lh = 10{,}807$, $ch = 6{,}193$, $cn = cn' = 124{,}5°$.

$A = 107{,}5°$, $A' = 141{,}5°$, $B^2 = \frac{la.\,ma}{N} = 1345{,}5$, $mf = \frac{la.\,ma}{lg}$

			I		II
la	1,36173	2p	34. 18,66		31 13,7
ma	1,59106	p	17 9,33		15 36,85
N	9,82391	B	1,56444		1,56444
B²	3,12888	tg p	9,48954		9,44634
B	1,56444	lg	2,07490		2,11810
2	0,30103	lg	1,05398		1,01078
2B	1,86547	la.ma	2,95279		2,95279
A	2,03141	mf	0,87789		0,83469
A'	2,15076	mf	1,89881		1,94201
I tg 2p	9,83406	lg =	118,82		−131,25
II sin 2p	9,71471	lg =	−11,323		−10,25
		lc =	17		17
		mf =	7,549		−6,834
		mf =	−79,216		−87,50
		mb =	83		83
		cg =	135,82		−114,25
		cg =	5,677		6,75
		bf =	90,549		76,166
		bf =	3,784		−4,50

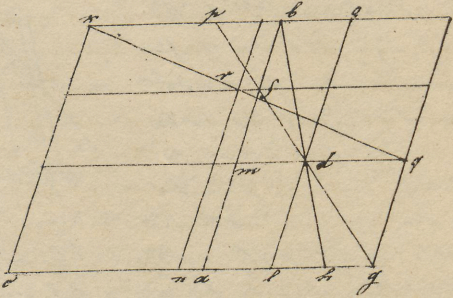
Sectio spatii

37.

<u>Durch einen gegebenen Punkt eine grade Linie zu ziehen, welche auf den Seiten eines gegebenen Winkels Stücke abschneidet, deren Rechteck einen gegebenen Inhalt hat.</u>

Auf den beiden der Lage nach gegebenen Linien ab, ac, seyen die Punkte b, c gegeben. Durch einen gegebenen Punkt d sey eine grade Linie fg so zu ziehen, daß das Rechteck der Abschnitte $bf.\,cg = T^2$ gegeben sey. Man suche zuerst eine Gleichung, welche ausdrückt, daß die Linie fg durch den Punkt d geht. Man ziehe

I



also dl, dm, mit ab, ac parallel, so ist $\frac{mf}{ma} = \frac{df}{dq} = \frac{la}{lg}$, also ist die Gleichung $lg.mf = la.ma$. Man verbinde, da db, welche die ac in h schneidet. Es ist vortheilhaft für x diejenige Linie zu wählen, welche für $T = 0$ verschwindet. Man setze also $hg = x$, $mf = y$, so ist $(x+hl).y = la.ma$, und $(x+hc)(mb-y) = T$. Eliminirt man y aus beiden Gleichungen so ist:

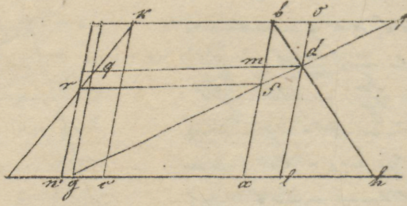
$(x+hc)(mb.x+mb.hl-la.ma) = T.(x+hl)$. Aber $\frac{mb}{ma} = \frac{dl}{dh} = \frac{la}{hl}$, also $mb.hl = la.ma$ also $(x+hc).mb.x = T.(x+hl)$.

Nimmt man also die Linie cn so, daß $cn = \frac{T}{mb}$, so ist $x^2+hc.x = cn.x+hl.cn$ also $x^2+hn.x = hl.cn$, oder $hg.gn = hl.cn$.

Diese Gleichung läßt sich auch leicht direct beweisen. Denn wenn $bf.rq = T$, und $mb.cn = T$ so ist $bf.rq = mb.cn$. Zieht man also gq, nr, cx mit ab; und dq, fr, bx mit ac parallel, so liegen die Punkte q, r, x, in gerader Linie. Also ist $\frac{hg}{hl} = \frac{bx}{bq} = \frac{fx}{rq} = \frac{bf}{mf} = \frac{xr}{qr} = \frac{cn}{gn}$, woraus die Gleichung $hg.gn = hl.cn$ folgt.

II. Wenn man in der obigen Gleichung so, wohl als T, also auch cn negativ annimmt, so hat man $x^2 - hc.x = cn.x - hl.cn$, also $x(hc+cn-x) = hl.cn$. Nimmt man also $cn' = cn$ in entgegengesetzter Richtung, so ist $hg.gn' = hl.cn' = hl.cn$.

Denn da $bs \cdot lg = T^2$, und $mb \cdot cn' = T^2$ heißt $bs \cdot lg = mb \cdot cn'$. Zieht man also gq, $n'r$, ck mit ab und dq, sr, bk mit ac parallel, so liegen die Punkte q, r, k, in grader Linie.



Also ist $\frac{kq}{kl} = \frac{bw}{bo} = \frac{sw}{sd} = \frac{bs}{ms} = \frac{kr}{gr} = \frac{cn'}{gn'}$, woraus die Gleichung $kg \cdot gn' = kl \cdot cn'$ folgt.

Hieraus ergiebt sich folgende Auflösung: Man verbinde db, welche die ac in h schneidet. Man vollende das Parallelogramm $aldcn$, und setze auf c nach entgegengesetzten Richtungen die Abschnitte $cn = cn' = \frac{T^2}{mb}$. An denjenigen Abschnitt hn, für welchen die Richtungen hl, cn, entgegengesetzt sind, errichte man ein Rechteck von quadratischem Ueberschuß $hg \cdot gn = hl \cdot cn$ (VIII. 24) wodurch sich zwei mögliche Auflösungen ergeben. An denjenigen Abschnitt hn', für welchen die Richtungen hl, cn', übereinstimmend sind, errichte man, wenn es möglich ist, ein Rechteck von quadratischer Ergänzung $hg \cdot gn' = hl \cdot cn'$, (VIII. 23) wodurch sich noch zwei Auflösungen ergeben.

Die Auflösung der sectio spatii stimmt also ganz mit der der sectio rationis überein, wenn man nur überall den Punkt h mit l, und den Punkt l mit h vertauscht. folglich wird auch für das Rechteck von quadratischer Ergänzung die Möglichkeit ebenso untersucht. Halbirt man also hn' in o, so ist in Gemäßheit der dortigen Untersuchung, für die Folge der Punkte: $n\,l\,h$ die doppelte Auflösung immer möglich.

bcih, lkci; alch, alkc; die Auflösung unmöglich wenn $hl.lc > lo^2$; einfach möglich im Grenzfall wenn $hl.lc = lo^2$; doppelt möglich wenn $hl.lc < lo^2$ lihc; die Auflösung immer möglich.

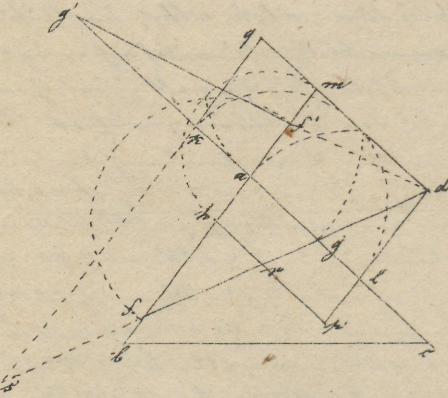
Für die Berechnung dieser Aufgabe ist:
$hl = \frac{la.ma}{mb}$, $cn = cn' = \frac{F^o}{mb}$, $hn = hc - cn = hc - \frac{F^o}{mb} = A$; $hn' = hc + cn' = hc + \frac{F^o}{mb} = A'$; $hl.cn = hl.cn' = \frac{la.ma.F^o}{mb^2} = B^2$. Man hat dann $x^2 - A.x = B^2$, nach VIII. 24. aufzulösen

$A'.x - x^2 = B^2$, nach VIII. 23. aufzulösen.

Beispiel: $la = 23$, $ma = 39$, $mb = 83$, $lc = 25$, $F^o = 2000$, also $ac = 2$, $ab = 122$, $hl = 10,807$, $hc = 35,807$, $cn = cn' = 24,096$. $A = 11,711$; $A' = 59,903$, $B^2 = 260,415$; $mf = \frac{la.ma}{lg}$

			I	II
la	1,36173		I	II
ma	1,59106	2p =	70° 3,4	32 36,0
mb	1,91908	p =	35 1,7	16 18,0
hl	1,03371	B	1,20783	1,20783
F°	3,30103	tg p	9,84568	9,46601
mb	1,91908	hg	1,36215	1,74182
cn	1,38195	hg	1,05351	0,67384
la	1,36173	hg =	−23,022	−55,135
ma	1,59106	hg =	11,311	−4,719
F°	3,30103	hl =	−10,807	−10,807
mb²	3,83816	hc =	−35,807	−35,807
B²	2,41566	lg =	−12,215	−44,378
B	1,20783	lg =	22,118	6,088
2	0,30103	lg	1,08689	1,64717
2B	1,50886	lg	1,34475	0,78447
A	1,06859	la.ma	2,95279	2,95279
A'	1,77745	mf	1,86590	1,30562
I tg 2p	0,44027	mf	1,60804	2,16832
II sin 2p	9,73141	mf =	−73,435	−20,212
		mf =	40,555	147,34
		mb =	83	83
		bf =	−156,435	−103,212
		bf =	−42,445	64,34
		cg =	12,785	−19,378
		cg =	47,118	31,088

38.



Durch einen außerhalb eines Dreiecks gegebenen Punkt das Dreieck zu theilen.

Gegeben seyen das $\triangle abc$ und der Punkt d, durch welchen die Linie fg so zu ziehen sey, daß das Verhältniß $\frac{\triangle afg}{\triangle abc} = N$ gegeben sey. Man ziehe dl, dm, mit ab, ac parallel, und setze an la, ma, die Parallelogramme $lakp = maxq = N \cdot \triangle abc$; so ist $lakp = maxq = \triangle afg$, also $\triangle fhr = \triangle dpr - \triangle dlg$, und $\triangle gxs = \triangle dqs - \triangle dmf$. Aber alle diese Dreiecke sind einander ähnlich, also (III. 64.) $fh^2 = dp^2 - dl^2$; $gx^2 = dq^2 - dm^2$; oder $fh^2 = mh^2 - ma^2$; $gx^2 = lx^2 - la^2$. Hieraus ergiebt sich folgende einfache geometrische Verzeichnung: Man beschreibe über mh einen Halbkreis, setze darin den Abschnitt ma als Sehne; so ist fh oder $f'h$ die Ergänzungssehne. Man beschreibe über lx einen Halbkreis, setze darin den Abschnitt la als Sehne, so ist gx oder $g'x$ die Ergänzungssehne.

Anmerk. Da $\frac{mf}{ma} = \frac{df}{dg} = \frac{la}{lg}$, so ist $lg \cdot mf = la \cdot ma$. Setzt man also $af = x$, $ag = y$, so ist $(la - y)(ma + x) = la \cdot ma$, also $la \cdot x - ma \cdot y = x \cdot y$. Wegen des gemeinschaftlichen Winkels a ist (III. 65.) $\frac{\triangle afg}{\triangle abc} = \frac{af \cdot ag}{ab \cdot ca}$, also $\frac{af \cdot ag}{ab \cdot ca} = N$, also hat man die beiden Gleichungen: $x \cdot y = N \cdot ab \cdot ac$, und $la \cdot x - ma \cdot y = N \cdot ab \cdot ac$. Hieraus erhält man durch Elimination, wenn man der Kürze

wegen

$\frac{N.ab.ia}{lx.ma} = K^2$, setzt, die Gleichungen:

$x^2 - x.ma.K^2 = ma^2.K^2$, $y^2 + y.la.K^2 = la^2.K^2$.

Setzt man nun also nach VIII. 24. $\frac{1}{2}K = \cot 2p$, so ist

$af = x = ma.K.\cot p$ oder $x = -ma.K.\operatorname{tg} p$

$ag = y = la.K.\operatorname{tg} p$ oder $y = -la.K.\cot p$

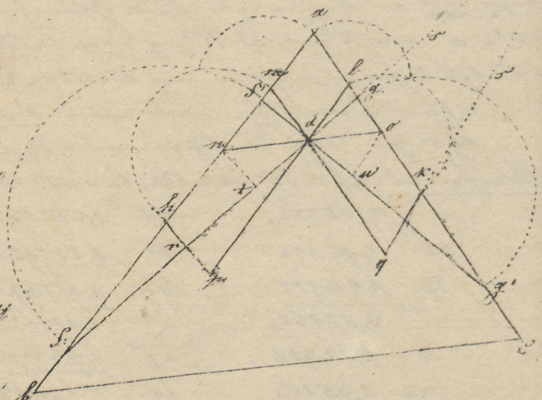
Beispiel. $ab = 85$, $ia = 112$, $la = 107$, $ma = 225$, $N = \frac{1}{3}$

N	9,52288	ma	2,35218
ab	1,92942	K	9,55998
ia	2,04922	$\operatorname{tg} p$	9,92159
	3,50152	af	1,99057 = 97,852
la	2,02938	af'	1,83375 = − 68,195
ma	2,35218	la	2,02938
K^2	9,11996	K	9,55998
K	9,55998	$\operatorname{tg} p$	9,92159
$\frac{1}{2}$	9,69897	ag	1,51095 = 32,430
$\cot 2p$	9,25895	ag'	1,66777 = − 46,534
$2p =$	79 42,7		
$p =$	39 51,35		

39.

Durch einen innerhalb eines Dreiecks gegebenen Punkt das Dreieck zu theilen.

Gegeben seyen das Δabc und der Punkt d, durch welchen die Linie fg so zu ziehen sey, daß das Verhältniß $\frac{\Delta afg}{\Delta abc} = N$ sey. Man ziehe dl, dm, mit ab, ac, parallel, und setze an la, ma, die Parallelogramme $lahp = makq = N.\Delta abc$, so ist $lahp = makq = \Delta afg$, also $\Delta fhr = dpr - dlg$, $\Delta gkr = dqs - dms$. Aber alle diese Dreiecke sind einander ähnlich, also (III. 64) $fh^2 = dp^2 - dl^2$, $gk^2 = dq^2 - dm^2$; oder $fh^2 = mh^2 - ma^2$, $gk^2 = lk^2 - la^2$. Hieraus ergiebt sich folgende einfache geometrische Verzeichnung: Man beschreibe



über mk einen Halbkreis, setzt darin den Abschnitt ma als Sehne, so ist fk oder f'k die Ergänzungssehne. Man beschreibe über lk einen Halbkreis, setzt darin den Abschnitt la als Sehne, so ist gk oder g'k die Ergänzungssehne. Die Auflösung wird also unmöglich wenn $ma > mk$, oder wenn $la > lk$. Für den Grenzfall, wo nur eine Auflösung möglich ist, wird $mk = ma$ und $lk = la$. Nimmt man also $mn = ma$, $lo = la$, so geht die Minimumslinie no durch d und schneidet das kleinste Dreieck ano ab. Zieht man nämlich $nt = ca$, so ist $\Delta ndt = odg$, also $\Delta fnd > odg$, also $\Delta afg > ano$. Zieht man $ow = ab$, so ist $\Delta odw = ndf'$, also $\Delta g'od > ndf'$, also $\Delta af'g' > ano$. Also ist Δano ein Minimum.

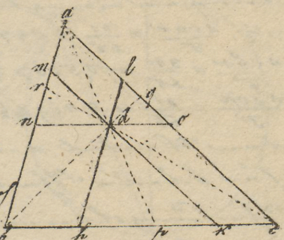
Anders. Da $\frac{mf}{ma} = \frac{df}{dg} = \frac{la}{lg}$, so ist $lg \cdot mf = la \cdot ma$. Setzt man also $af = x$, $ag = y$, so ist $(y - la)(x - ma) = la \cdot ma$, also $la \cdot x + ma \cdot y = x \cdot y$. Wegen des gemeinschaftlichen Winkels a ist (III 65) $\frac{\Delta afg}{\Delta abc} = \frac{af \cdot ag}{ab \cdot ca}$ also $\frac{af \cdot ag}{ab \cdot ca} = N$. Man hat also die beiden Gleichungen: $x \cdot y = N \cdot ab \cdot ca$, $la \cdot x + ma \cdot y = N \cdot ab \cdot ca$.

Hieraus erhält man durch Elimination, wenn man der Kürze wegen $\frac{N \cdot ab \cdot ca}{la \cdot ma} = K^2$ setzt:

$$ma \cdot K^2 \cdot x - x^2 = ma^2 \cdot K^2, \quad la \cdot K^2 \cdot y - y^2 = la^2 \cdot K^2.$$

Setzt man also nach VIII. 23. $\frac{2}{K} = \sin 2\varphi$, so ist

$$af = x = ma \cdot K \cdot \cot \varphi \text{ oder } = ma \cdot K \cdot \operatorname{tg} \varphi$$
$$ag = y = la \cdot K \cdot \operatorname{tg} \varphi \text{ oder } = la \cdot K \cdot \cot \varphi.$$



Um die Bedingungen für die Theilung des Dreiecks zu erhalten, so sey der Inhalt des Δ abc = F, das Stück, welches durch eine durch d gehende Linie abgetheilt werden wird, sey = N. F. Man ziehe durch d die Linien hl, km, no, mit den Seiten ab, ca, bc parallel, und setze die Verhältnisse $\frac{hk}{bc} = \frac{nb}{ab} = \frac{oc}{ca} = A$, $\frac{hb}{bc} = \frac{la}{ca} = B$, $\frac{kc}{bc} = \frac{ma}{ab} = C$ so ist die Lage des Punktes d durch diese drei Verhältnisse A, B, C, deren Summe = 1 ist, gegeben.

1) Die Minimumslinie fällt innerhalb des Dreiecks, und zwar für den Winkel a: wenn $B < \frac{1}{2}$, $C < \frac{1}{2}$; für den Winkel b: wenn $A < \frac{1}{2}$, $B < \frac{1}{2}$; für den Winkel c: wenn $A < \frac{1}{2}$, $C < \frac{1}{2}$.

2) Das Verhältniß des Minimums zum Dreieck abc ist für den Winkel a: = 4 B. C, für den Winkel b: = 4 A B, für d. Winkel c: = 4 A. C. Die Theilungszahl N. muß also größer als diese Producte seyn.

3) Verbindet man ad, bd, cd, welche die Seiten bc, ca, ab, in p, q, r, schneiden, so geben die Dreiecke baq, car, für a; abp, cbr, für b; bcq, acp, für c, die größten abzuschneidenden Stücke innerhalb des Δ abc. Es ist aber

$\frac{\Delta baq}{F} = \frac{B}{A+B}$, $\frac{\Delta car}{F} = \frac{C}{A+C}$, für den Winkel a.

$\frac{\Delta abp}{F} = \frac{B}{B+C}$, $\frac{\Delta cbr}{F} = \frac{A}{A+C}$, für den Winkel b.

$\frac{\Delta bcq}{F} = \frac{A}{A+B}$, $\frac{\Delta acp}{F} = \frac{C}{B+C}$, für den Winkel c.

Die Theilungszahl N muß also kleiner als diese Verhältnisse seyn, wenn die Theilungslinie innerhalb des Dreiecks abc fallen soll.

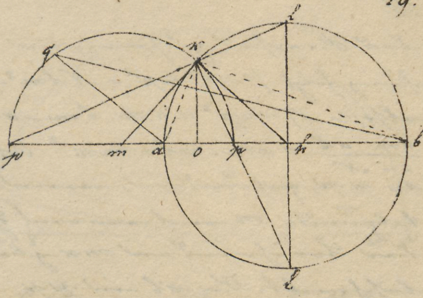
Beispiel. ab = 375, bc = 405, ca = 438; $A = \frac{hk}{bc} = 0,34$, $B = \frac{hb}{bc} = 0,35$; $C = \frac{kc}{bc} = 0,31$. Also fallen die drei Minimumslinien innerhalb des Δ abc. Die Verhältnisse der drei Minima zu F sind: für a = 0,4340, für b = 0,4760, für c = 0,4216. Wenn also $N = \frac{1}{2}$ ist, so sind drei Theilungen möglich. Endlich ist für a: $\frac{\Delta baq}{F} = \frac{35}{69} = 0{,}507 > \frac{1}{2}$, $\frac{\Delta car}{F} = \frac{31}{65} = 0{,}476 < \frac{1}{2}$; für b: $\frac{\Delta abp}{F} = \frac{35}{66} = 0{,}530 > \frac{1}{2}$, $\frac{\Delta cbr}{F} = \frac{34}{65} = 0{,}5237 > \frac{1}{2}$; für c: $\frac{\Delta bcq}{F} = \frac{34}{69} = 0{,}492 < \frac{1}{2}$, $\frac{\Delta acp}{F} = \frac{31}{66} = 0{,}469 < \frac{1}{2}$. Nimmt man also $N = \frac{1}{2}$, so fällt für den Winkel a nur die erste Theilungslinie, für b beide Theilungslinien, für c keine Theilungslinie innerhalb des Dreiecks abc.

	Winkel a		Winkel b		Winkel c
N	9,69897	N	9,69897	N	9,69897
B	9,54407	A	9,53148	A	9,53148
C	9,49136	B	9,54407	C	9,49136
K^2	0,66354		0,62342		0,67613
K	0,33177		0,31171		0,33807
2	0,30103		0,30103		0,30103
sin φ	9,96926		9,98932		9,96296
2φ =	68° 41,8		77 20,66		66, 40,4
φ =	34 20,9		38 40,33		33, 20,2
ab	2,57403	ab	2,57403	bc	2,60746
C	9,49136	A	9,53148	C	9,49136
K	0,33177	K	0,31171	K	0,33807
tg φ	9,83467	tg φ	9,90329	tg φ	9,81809
I x	2,56249	I x	2,51393	I x	2,61880
II x	2,23183	II x	2,32051	II x	2,25498
ca	2,64147	bc	2,60746	ca	2,64147
B	9,54407	B	9,54407	A	9,53148
K	0,33177	K	0,31171	K	0,33807
tg φ	9,83467	tg φ	9,90329	tg φ	9,81809
I y	2,35198	I y	2,36653	I y	2,32911
II y	2,68264	II y	2,55995	II y	2,69293
I auf ab	365,17	I auf ab	326,54	*I auf bc	415,72
I auf ca	224,90	I auf bc	232,56	*I auf ca	213,36
*II auf ab	170,54	II auf ab	209,18	*II auf bc	179,88
*II auf ca	481,54	II auf bc	363,03	*II auf ca	493,09

Die mit * bezeichneten Abschnitte durchschneiden die Theilungslinien die Gegenseiten ausserhalb des Dreiecks, und fallen also weg.

Sectio determinata.

40.



Den Durchmesser eines Kreises nach quadratischem Verhältniß zu theilen.

Der gegebenen Kreises Durchmesser sey ab, der Mittelpunkt k, der Durchmesser sey in p p zu theilen, daß $\frac{ap^2}{bp^2} = N$ sey, wo N ein gegebenes Verhältniß ist. Theilt man den Durchmesser innerhalb in o so daß $\frac{ao}{bo} = N$ ist, und errichtet man in o eine Ordinate ox an den Kreis, so ist (III. 58.) $\frac{ao}{bo} = \frac{ax^2}{bx^2}$ also $\frac{ax^2}{bx^2} = N$. Es soll aber auch $\frac{ap^2}{bp^2} = N$ seyn, also muß $\frac{ap}{bp} = \frac{ax}{bx}$ seyn. Also muß (V. 19) xp den rechten Winkel axb oder seinen Nebenwinkel halbiren. Man errichte also im Mittel, punkt den senkrechten Durchmesser ll, und verbinde die beiden xl, xl, so schneiden sie den Durchmesser in den beiden verlangten Punkten p, p.

Anders. Man suche den Mittelpunkt m und Halbmesser mp, des über p p beschriebenen Kreises. Es ist nämlich $ap = mp \pm am$, $bp = bm \pm mp$. Also $mp^2 \pm 2am.mp + am^2 = N.bm^2 \pm 2N.bm.mp + N.mp^2$.

Hieraus erhält man die beiden Gleichungen $am = N.bm$, und $mp^2 + am^2 = N.bm^2 + N.mp^2$. Vermöge der ersten Gleichung $\frac{am}{bm} = N$, theilt der Mittelpunkt m den Durchmesser ab des gegebenen Kreises außerhalb harmonisch (VIII. 1) so daß $\frac{am}{bm} = \frac{ao}{bo} = N$, daher treffen die Ordinate ox und die Berührende mx in einem Punkte des Kreises zusammen. Aus der zweiten Gleichung folgt $(1-N)\,mp^2 = N.bm^2 - am^2$. Aber $N.bm = am$, also $(1-N).mp^2 = am.bm - am^2 = am.ab$, also $mp^2 = \frac{am.ab}{1-N} = am.mb = mk^2$. Also werden die Punkte $p, p,$ gefunden, wenn man aus dem Mittelpunkte m mit einem Halbmesser, welcher der Berührenden mk gleich ist, einen Kreis beschreibt. Da ab in $p, p,$ harmonisch getheilt ist, so ist auch $p\,p,$ in $a, b,$ harmonisch getheilt, also gilt auch (V.19.20) für jeden Punkt q des Kreises m das Verhältniß $\frac{aq^2}{bq^2} = N$.

Rechnendes. Die trigonometrischen Formeln erhält man am leichtesten wenn man aus der Gleichung $ap^2 = N.bp^2$, für jeden Abschnitt eine quadratische Gleichung entwickelt, und diese nach VIII.23.24 berechnet. Man erhält hiernach

$$ap\left(ap + 2ab.\frac{N}{1-N}\right) = ab^2.\frac{N}{1-N}$$
$$bp\left(2ab.\frac{1}{1-N} - bp\right) = ab^2.\frac{1}{1-N}$$
$$hp\left(ab.\frac{1+N}{1-N} - hp\right) = \frac{1}{4}ab^2$$

Setzt man also $\sqrt{N} = \cos 2q = \operatorname{tg}(45^\circ - r)$ so ist

$ap = ab.\cot 2q.\operatorname{tg} q$ oder $ap = ab.\cot 2q.\cot q$

$bp = ab.\frac{\operatorname{tg} q}{\sin 2q}$ oder $bp = ab.\frac{\cot q}{\sin 2q}$

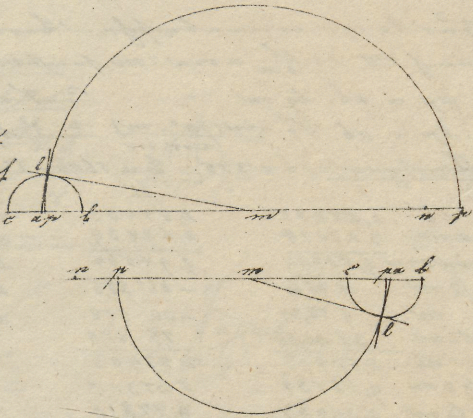
$hp = \frac{1}{2}ab.\operatorname{tg} r$ oder $hp = \frac{1}{2}ab.\cot r$

$hm = \frac{\frac{1}{2}ab}{\sin 2r}$ und $mp = \frac{1}{2}ab.\cot 2r$

Beispiel. $ab = 375$, $N = 0,6$

N	9,77815	ab	2,57403	$\frac{1}{2}ab$	2,27300	$ap =$	163,69
$\cos 2q$	9,88907	$\cot 2q$	0,08805	$\operatorname{tg} r$	9,10388	$ap =$	1288,7
$\operatorname{tg}(45-r)$	9,88907	$\operatorname{tg} q$	9,55193	hp	1,37688	$bp =$	211,31
$2q =$	39°13,9	ap	2,21401	hp	3,16912	$bp =$	1663,7
$q =$	19 36,95	ap	3,11015	$\frac{1}{2}ab$	2,27300	$hp =$	23,82
$45-r =$	37 45,65	ab	2,57403	$\sin 2r$	9,39196	$hp =$	1476,10
$r =$	7 14,35	$\sin 2q$	9,80103	$\operatorname{tg} 2r$	9,41198	$hm =$	749,96
		$\operatorname{tg} q$	9,55193	hm	2,87504		
$2r =$	14 28,7	bp	2,32493	mp	2,86102	$mp =$	726,15
		bp	3,22107				

41.



Den Halbmesser eines Kreises nach stetigem Verhältnisse zu theilen, so daß sich der erste Abschnitt zum zweiten, wie der zweite Abschnitt zu einer gegebenen Linie verhält.

Es sey a der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises bc, der Halbmesser ab soll in p so getheilt werden, daß sich verhalte $\frac{ap}{bp} = \frac{bp}{E}$, wo E eine gegebene Linie ist. Die Gleichung ist also $E \cdot ap = bp^2$. Es sey m der Mittelpunkt des verlangten Kreises $p\pi$, so ist $ap = am \pm mp$, $bp = bm \pm mp$, also $E \cdot am \pm E \cdot mp = bm^2 \pm 2bm \cdot mp + mp^2$. Hieraus ergeben sich die beiden Gleichungen:

$E = 2bm$ und $E \cdot am = bm^2 + mp^2$

also $mp^2 = E \cdot am - bm^2 = 2bm \cdot am - bm^2$

also $mp^2 = am^2 - ab^2 = bm \cdot mc$

Man setze also aus b nach beiden entgegengesetzten Richtungen die Linie $bn = E$ an, halbiere bn in m, wodurch man zwei Punkte m erhält. Aus diesen Punkten ziehe man an den Kreis bc die Berührende ml, und beschreibe aus dem Mittelpunkte m mit dem Halbmesser ml den Kreis $p\pi$. Im Allgemeinen hat man also vier Punkte p. Derjenige Punkt m, welcher auf der verlängerten ab liegt giebt immer zwei mögliche Punkte p. Der andere Punkt m, welcher von b in der Richtung ba liegt, giebt nur dann zwei mögliche Punkte p, wenn er außerhalb des Kreises bc fällt, d. h. wenn $E > 4ab$ ist.

Zur trigonometrischen Berechnung setze man nach VIII. 24 $\frac{ab}{am} = \sin 2m$, so ist $mp = ab.\cot 2m$ und

$ap = ab.\,tg\, m$ und $ap = ab.\cot m$

$bp = ab.\sqrt{2}.\frac{\sin(45^\circ - m)}{\cos m}$ und $bp = ab.\sqrt{2}.\frac{\sin(45+m)}{\sin m}$

Beispiel. $ab = 375$, $E = 1600$, I. $am = 1175$, II $am = 425$.

	I	II
ab	2,57403	2,57403
am	3,07004	2,62839
$\sin 2m$	9,50399	9,94564
$2m$	18 36,68	−61° 55,6
m	9 18,34	−30 57,8
$45-m$	35 41,66	75 57,8
ab	2,57403	2,57403
$tg\,2m$	9,52731	0,27300
$tg\,m$	9,21447	9,77815
mp	3,04672	2,30103
ap	1,78850	2,35218
ap	3,35956	2,79588
ab	2,57403	2,57403
$\sqrt{2}$	0,15052	0,15052
$\sin(45-m)$	9,76601	9,98683
$\cos m$	9,99424	9,93323
$\sin m$	9,20871	9,71138
bp	2,49632	2,77815
bp	3,28185	3,00000

I

$mp = 1113,56$
$ap = 61,45$
$bp = 313,56$
$ap = 2288,6$
$bp = 1913,6$

II

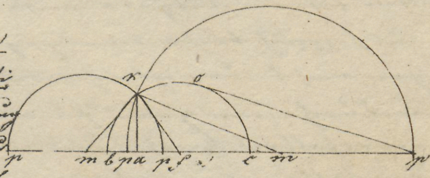
$mp = 200$
$ap = 225$
$bp = 600$
$ap = 625$
$bp = 1000$

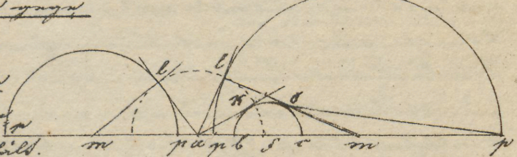
Die Einschreibung eines regelmäßigen Zehnecks in den Kreis bc ist ein besonderer Fall dieser allgemeinen Aufgabe, indem man $E = ab$ setzt. Denn wenn der kleinere Abschnitt bp die Seite, und der größere die Diagonallinie des Zehnecks bedeutet so ist (V. 41.42) $\frac{ap}{bp} = \frac{bp}{ab}$. Hier ist also für $bc = 1$, $ab = \frac{1}{2}$, $bn = \frac{1}{2}$, $bm = \frac{1}{4}$, $am = \frac{3}{4}$, woraus sich folgende Berechnung ergibt:

ab	9,69897	ab	9,69897	ab	9,69897	$mp = 0,55901$
am	9,87506	$tg\,2m$	9,95156	$\sqrt{2}$	0,15052	$ap = 0,19099$
$\sin 2m$	9,82391	$tg\,m$	9,58204	$\sin(45^\circ-m)$	9,61092	$bp = 0,30902$
$2m =$	41 48,66	mp	9,74741	$\cos m$	9,97042	$ap = 1,30902$
$m =$	20 54,33	ap	9,28101	$\sin m$	9,55246	$bp = 0,80902$
$45-m =$	24 5,66	ap	0,11693	bp	9,48999	
				bp	9,90795	

42.

<u>Die Mittelpunctslinie eines Kreises nach stetigem Verhältniß in Bezug auf die Potenzseite zu theilen so daß sich der Abschnitt von einem gegebenen Punct zur Potenzseite, wie diese zu einer gegebenen Linie verhält.</u>





Der Mittelpunct des gegebenen Kreises bc sey f, der Halbmesser sey fb = fc. Aus dem gegebenen Punct a sey an den Kreis f eine Ordinate oder Berührende ak gezogen. Sie heiße die Potenzseite weil (VIII. 2) das Rechteck ca. ab = ak², die Potenz des Puncts a gegen den Kreis f heißt. Ebenso ist die aus einem Puncte p an den Kreis f gezogene Ordinate oder Berührende po die Potenzseite des Puncts p gegen den Kreis f, weil das Rechteck bp. pc = po² die Potenz des Puncts p gegen den Kreis f heißt. Es sey nun E eine gegebene Linie, und der Punct p so zu bestimmen, daß

$\frac{ap}{po} = \frac{po}{E}$, oder $E.\, ap = po^2 = bp.\, pc$ sey.

Da diese Gleichung vom zweiten Grade ist, so sey m die Mitte der beiden zusammengehörigen Puncte p. Alsdann ist $ap = am \pm mp$

$po^2 = \pm(fp^2 - fo^2) = \pm(fp^2 - fb^2)$, $fp = mf \pm mp$

Man hat also die Gleichung:

$$E\cdot(am \pm mp) = (mf \pm mp)^2 - fb^2$$

Hieraus folgen die beiden Gleichungen:

1) $E = 2mf$. 2) $E.\, am = mf^2 + mp^2 - fb^2$

also $mp^2 = fb^2 + 2am.\, mf - mf^2 = fb^2 + am^2 - (am - mf)^2$

also $mp^2 = am^2 + fb^2 - af^2$

Um also die Aufgabe aufzulösen, setze man aus s nach beiden entgegengesetzten Richtungen die beiden gleichen Abschnitte $sm = \frac{1}{2} E$, wodurch man zwei Puncte m erhält. Wenn a innerhalb des Kreises s liegt, so errichte man an demselben die Ordinate ax. Dann ist $mp^2 = am^2 + sb^2 - as^2 = am^2 + ax^2 = mx^2$. Man beschreibe also aus m mit dem Halbmesser mx die beiden Kreise, welche aus der Mittelpunctslinie die vier verlangten Puncte p abschneiden. Ist a außerhalb des Kreises s, so ziehe man an denselben die Berührende ax. Dann ist $mp^2 = am^2 + sb^2 - as^2 = am^2 - ax^2 = am^2 - al^2 = ml^2$. Man beschreibe also alsdann aus dem Mittelpuncte a mit dem Halbmesser ax einen Kreis, ziehe daran die beiden Berührenden ml, und mit diesem Halbmesser ml, beschreibe man aus den beiden Mittelpuncten m die beiden Kreise, welche aus der Mittelpunctslinie die vier verlangten Puncte p abschneiden. Der Punct a ist also, sowohl wenn er innerhalb als wenn er außerhalb des Kreises s liegt, der gemeinschaftliche Potenzpunct der drei Kreise s, m, m, indem $ca.ab = pa.ap = pa.ap = ax^2$. Wenn a außerhalb des Kreises s liegt, so giebt der in der Richtung as genommene Punct m immer zwei mögliche Auflösungen für den Punct p. Der andere in der Richtung sa genommene Punct m giebt aber nur dann eine mögliche Auflösung, wenn er nicht innerhalb des Kreises a fällt, d.h. wenn $sm = \frac{1}{2} E$ nicht zwischen die Grenzen $as - ax$ und $as + ax$ fällt, wo $ax^2 = ca.ab$ ist.
Zur trigonometrischen Berechnung setze man:
für den Fall, wo a innerhalb des Kreises s liegt

$am = \frac{1}{2} E + af$, $ak = \sqrt{ca \cdot ab}$, $af = \frac{ca - ab}{2}$,

$\frac{ak}{fb} = \sin 2f$, $\frac{ak}{am} = tg\, 2m$. Dann ist $mp = \frac{ak}{\sin 2m}$

$ab = ak \cdot tg\, f$, $ca = ak \cdot \cot f$,

$ap = ak \cdot tg\, m$, und $ap = ak \cdot \cot m$

$bp = ak \cdot tg\, f - ak \cdot tg\, m = ak \cdot \frac{\sin(f-m)}{\cos f \cdot \cos m}$

und $pc = ak \cdot \cot f + ak \cdot tg\, m = ak \cdot \frac{\cos(f-m)}{\sin f \cdot \cos m}$ Dabei der

$bp = ak \cdot \cot m + ak \cdot tg\, f = ak \cdot \frac{\cos(f-m)}{\cos f \cdot \sin m}$

und $pc = ak \cdot \cot m - ak \cdot \cot f = ak \cdot \frac{\sin(f-m)}{\sin f \cdot \sin m}$

Für den zweiten Kreis m, dessen Mittelpunkt m in die Richtung fällt, nimmt man $am = \frac{1}{2} E - af$, und setzt in den vorigen Formeln den Winkel m negativ.

Beispiel. $fb = fc = 188$, $bc = 376$, $af = 74$, $ab = 114$, $ca = 262$, $E = 428$, $\frac{1}{2} E = fm = 214$, I. $am = 288$, II. $am = 140$.

			I	II		I	II
ca	2,41830	ak	2,23760	2,23760	ak	2,23760	2,23760
ab	2,05690	am	2,45939	2,14613	cos(f−m)	9,97839	9,71304
	4,47520	tg 2m	9,77821	0,09147	cos f	9,92156	9,92156
ak	2,23760	2m =	30 58,0	−50 59,4	sin m	9,42644	9,63390
fb	2,27416	m =	15 29,0	−25 29,7	bp	2,86799	2,39518
sin 2f	9,96344	f =	33 24,6	33 24,6	ak	2,23760	2,23760
2f =	66°49,2	f−m =	17 55,6	58 54,3	sin(f−m)	9,48826	9,93263
f =	33 24,6	sin 2m	9,71143	9,89044	sin f	9,74085	9,74085
I Probe		tg m	9,44250	9,67840	sin m	9,42644	9,63390
E	2,63144	mp	2,52617	2,34716	pc	2,55857	2,79548
ap	1,68010	ap	1,68010	1,91600	III Probe		
bp	1,82035	ap	2,79510	2,55920	E	2,63144	
pc	2,49119	ak	2,23760	2,23760	ap	1,91600	
E	2,63144	sin(f−m)	9,48826	9,93263	bp	2,29316	
ap	2,79510	cos f	9,92156	9,92156	pc	2,25428	
bp	2,86799	cos m	9,98395	9,95551	E	2,63144	
pc	2,55857	bp	1,82035	2,29316	ap	2,55920	
		ak	2,23760	2,23760	bp	2,39518	
		cos(f−m)	9,97839	9,71304	pc	2,79548	
		sin f	9,74085	9,74085			
		cos m	9,98395	9,95551			
		pc	2,49119	2,25428			

Für den Fall, wo a außerhalb des Kreises f liegt, setze man $am = \frac{1}{2}E + af$, $ak = \sqrt{ca . ab}$, $af = \frac{ca + ab}{2}$

$\frac{ak}{fb} = tg\, 2f$, $\frac{ak}{am} = \sin 2m$. dann ist $mp = ak . \cot 2m$

$ab = ak . tg\, f$, $ca = ak . \cot f$,

$ap = ak . tg\, m$ und $ap = ak . \cot m$

$bp = ak . tg\, f - ak . tg\, m = ak \frac{\sin(f-m)}{\cos f . \cos m}$

und $pc = ak . \cot f - ak . tg\, m = ak \frac{\cos(f+m)}{\sin f . \cos m}$

des andern $bp = ak . \cot m - ak . tg\, f = ak \frac{\cos(f+m)}{\cos f . \sin m}$

und $pc = ak . \cot m - ak . \cot f = ak \frac{\sin(f-m)}{\sin f . \sin m}$

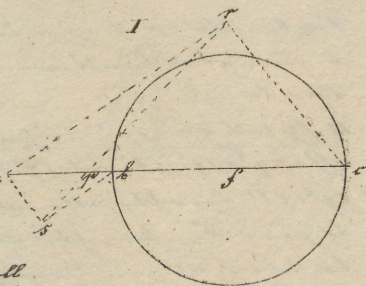
Für den zweiten Kreis, dessen Mittelpunct m in der Richtung fa liegt, ist wenn der möglich seyn soll, entweder $am = af - \frac{1}{2}E$, oder $am = \frac{1}{2}E - af$. Im ersten Falle liegen beide m auf einerlei Seite des Kreises a, und ihre Zeichen stimmen also überein. Im andern Falle liegen sie auf entgegengesetzten Seiten des Kreises a, und man nimmt in den obigen Formeln den Winkel m negativ.

Beispiel. $fb = fc = 188$, $bc = 376$, $af = 302$, $ab = 114$, $ca = 490$, $\frac{1}{2}E = 600$ I. $am = 902$, II. $am = 298$ *)

			I	II			
ca	2,69020	ak	2,37355	2,37355	ak	2,37355	2,37355
ab	2,05690	am	2,95521	2,47422	cos(f+m)	9,92188	9,99998
	4,74710	sin 2m	9,41834	9,89933	cos f	9,95458	9,95458
ak	2,37355	2m =	15°11,4	−52°28,6	sin m	9,12114	9,64553
fb	2,27416	m =	7 35,7	−26 14,3	bp	3,21971	2,77342
tg 2f	0,09939	f =	25 45,0	25 45,0	ak	2,37355	2,37355
2f =	51°30,0	f+m =	33 20,7	0 29,3	sin(f−m)	9,49358	9,89646
f =	25 45,0	f−m =	18 9,3	51 59,3	sin f	9,63794	9,63794
I Probe		tg 2m	9,43378	0,11466	sin m	9,12114	9,64553
E	3,07918	tg m	9,12496	9,69276	pc	3,10805	2,98654
ap	1,49851	mp	2,93977	2,25889			
bp	1,91638	ap	1,49851	2,06631	II Probe		
pc	2,66132	ap	3,24859	2,68079	E	3,07918	
E	3,07918	ak	2,37355	2,37355	ap	2,06631	
ap	3,24859	sin(f−m)	9,49358	9,89646	bp	2,36266	
bp	3,21971	cos f	9,95458	9,95458	pc	2,78282	
pc	3,10805	cos m	9,99617	9,95277	E	3,07918	
		bp	1,91638	2,36266	ap	2,68079	
		ak	2,37355	2,37355	bp	2,77342	
		cos(f+m)	9,92188	9,99998	pc	2,98654	
		sin f	9,63794	9,63794			
		cos m	9,99617	9,95277			
		pc	2,66132	2,78282			

*) $ak = 236,35$ also die Grenzen, daß für $\frac{1}{2}E < 65,65$, oder $> 538,35$

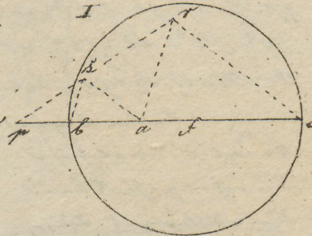
43



Zu einem Punkt und einem Kreise die Punkte der gleichartigen und ungleichartigen Potenz zu finden.

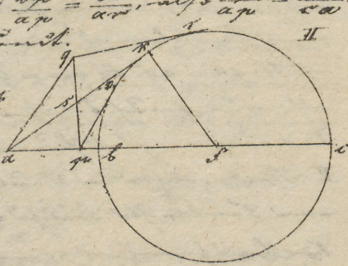
Gegeben sey der Punkt a und der Kreis, dessen Durchmesser bc ist. Es soll seyn $ap^2 = bp \cdot pc$.

Der Punkt der gleichartigen Potenz.

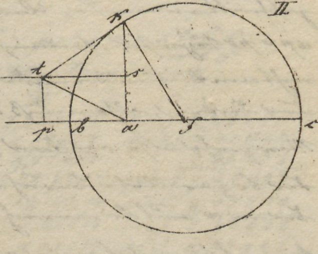


I. Alsdann liegt p außerhalb des Kreises, und die Aufgabe ist ein besonderer Fall der Aufgabe VIII. 2. Da $\frac{bp}{ap} = \frac{ap}{pc}$, so ist auch $\frac{bp}{ap} = \frac{ab}{ca}$.

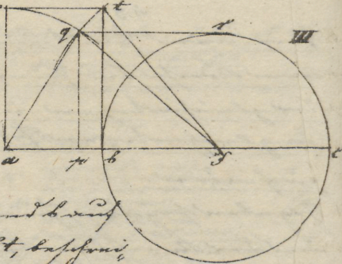
Man ziehe also in beliebiger Richtung $bs \parallel ar$, und $as \parallel cr$, so ist $\frac{ab}{ca} = \frac{bs}{ar}$. Man verbinde rs, welche die bc in p schneidet, so ist $\frac{bp}{ap} = \frac{bs}{ar}$, also $\frac{bp}{ap} = \frac{ab}{ca}$, also p der verlangte Punkt.



II. Man fälle aus einem beliebigen Punkte q eine Senkrechte qp, und ziehe die Berührenden qr, po, so ist $qr^2 = fq^2 - fb^2$; $po^2 = fp^2 - fb^2$, also $qr^2 - po^2 = fq^2 - fp^2 = pq^2$ also $qr^2 - po^2 = aq^2 - ap^2$. Ist also $qr = aq$, so ist auch $po = ap$. Dieses führt auf folgende Auflösung: Man ziehe aus a die Berührende $a\pi$, halbire sie in s, fälle sp senkrecht, so ist $po = ap$, weil $s\pi = as$. Ist a innerhalb des Kreises, so errichte man die Ordinate $a\pi$, halbire sie in s, ziehe die Berührende πt, welche von der Parallele in st in t geschnitten wird, fälle die

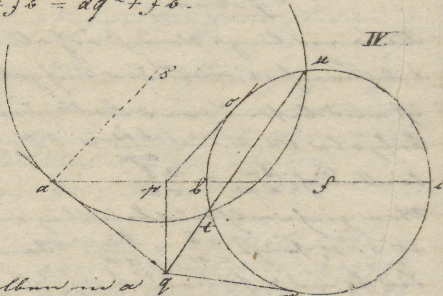


Senkrechte tp, so ist p der verlangte Punkt, weil $tr = ta$ ist.



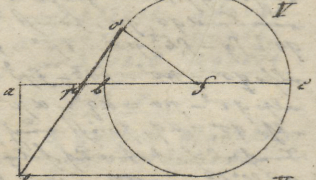
III

III. Es soll $ap^2 = fp^2 - fb^2$ seyn, also $aq^2 = fq^2 - fb^2$, also $fq^2 = aq^2 + fb^2$. Errichte also in a und b auf bc zwei Senkrechte $as = bt$, beschreibe über af ein Dreieck aqf, in welchem $aq = as$, $fq = ft$, fälle die Senkrechte qp, so ist p der verlangte Punkt, weil
$fq^2 = ft^2 = bt^2 + fb^2 = as^2 + fb^2 = aq^2 + fb^2$.

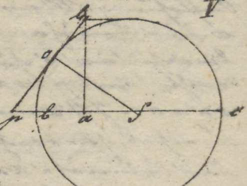


IV.

IV. Man beschreibe einen beliebigen Kreis s', welcher durch a geht. Wenn dieser Kreis den gegebenen Kreis f in tu schneidet, so ziehe man an denselben in a eine Berührende, welche die tu in q schneidet, so ist $tq \cdot qu = aq^2$, $tq \cdot qu = qr^2$, also $qr = aq$. Fällt man also aus q auf bc die Senkrechte qp, so ist p der verlangte Punkt.

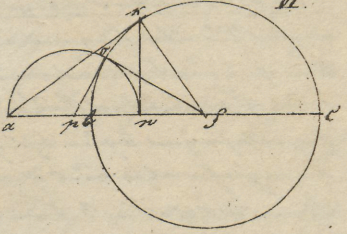


V

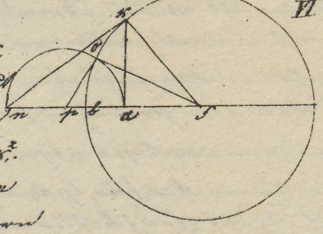


V

V. Man errichte in a auf bc eine Senkrechte, welche von der Berührenden po in l geschnitten werde. Wenn nun $ap = po$ seyn soll, so müssen die rechtwinkligen Dreiecke pal, pof, einander decken, also muss $al = fo$ seyn. Man ziehe also an den Kreis f eine der bc parallele Berührende, welche die in a auf bc errichtete Senkrechte in l schneidet, ziehe aus l an den Kreis die Berührende lo, so schneidet sie die bc in dem verlangten Punkt p.



VI.



VI.

VII. Es sey die Berührende $po = ap$. Man beschreibe aus p mit dem Halbmesser $po = ap$ einen Kreis aon. Da po den Kreis s berührt, so ist $\angle pos = R$. Also berührt auch so den Kreis p, also ist $as \cdot sn = so^2$; also ist auch $as \cdot sn = sb^2$. Man ziehe von dem äußern Punkt a die Berührende ax, oder von dem innern Punkt a die Ordinate ax. Da nun $as \cdot sn = sb^2$, so ist auch $as \cdot sn = sx^2$. Also ist im ersten Falle xn eine Ordinate, im andern Falle eine Berührende. Hieraus ergiebt sich folgende Auflösung: Man ziehe an den Kreis s aus a eine Berührende oder Ordinate ax, aus x eine Ordinate oder Berührende xn, halbire an in p, so ist p der verlangte Potenzpunkt. Die Punkte a, n, sind zusammengehörige harmonische Punkte, ihre Gleichung ist: $as \cdot sn = sb^2$.

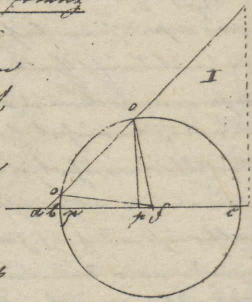
Setzt man für den äußern Punkt a: $\frac{sb}{as} = \cos 2s$
für den innern Punkt a: $\frac{as}{sb} = \cos 2s$, so ist
für den äußern Punkt a:
$ap = as \cdot \frac{1}{2} \sin^2 2s$, $bp = as \cdot 2 \sin^4 s$, $pc = as \cdot 2 \cos^4 s$
für den innern Punkt a:
$ap = as \cdot \frac{1}{2} tg^2 2s$, $bp = as \frac{2 \sin^4 s}{\cos^2 2s}$, $pc = as \frac{2 \cos^4 s}{\cos^2 2s}$

Beispiel. $sb = 188$, I. $as = 380$, II. $as = 97$.

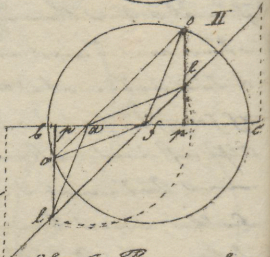
I		I		II		II	
sb	2,27416	$2as$	2,88081	sb	2,27416	$2as$	2,28780
as	2,57978	$\sin s$	9,70124	as	1,98677	$\cos^2 2s$	9,42522
$\cos 2s$	9,69438	$\sin^3 s$	9,10372	$\cos 2s$	9,71261		2,86253
$2s =$	60° 20,8	$\cos s$	9,93677	$2s =$	58 56,33	$\sin s$	9,69193
$s =$	30 10,4	$\cos^3 s$	9,81031	$s =$	29 28,16	$\sin^3 s$	9,07579
$\sin 2s$	9,93904	bp	1,68577	$tg 2s$	0,22018	$\cos s$	9,93982
$\sin 2s$	9,93904	pc	2,62789	$tg 2s$	0,22018	$\cos^3 s$	9,81946
$\frac{1}{2}$	9,69897			$\frac{1}{2}$	9,69897	bp	1,63030
ap	2,15683			ap	2,12610	pc	2,62186

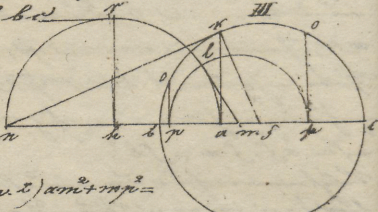
Die Punkte der ungleichartigen Potenz

Diese Punkte liegen innerhalb des Kreises, und wenn man aus p an den Kreis die Ordinate po zieht, so soll seyn $ap^2 = bp.pc = po^2$. Man ziehe also aus a eine gerade Linie ao, so daß der $\angle fao = \frac{1}{2} R$, so schneidet dieselbe den Kreis, wofern nicht $af > \sqrt{2}.fb$, in zwei Punkten o, aus welchen man die Senkrechten op fällt.



II. Wenn $ap = po$ seyn soll, und man nimmt $pl = fp$, so decken die Dreiecke fpo, lpa, einander, also ist $al = fo = fb$. Man ziehe also aus dem Mittelpunkte f eine gerade Linie lfl, so daß $\angle bfl = cfl = \frac{1}{2} R$, nehme darauf die Punkte l, l, so daß $al = fb$ sey, und fälle lp senkrecht auf bc.





III. Es soll seyn $ap^2 = po^2$, also $ap^2 = fb^2 - fp^2$, also $(am \pm mp)^2 = fb^2 - (fm \mp mp)^2$. Hieraus folgen die beiden Gleichungen 1) $am = fm$. 2) $am^2 + mp^2 = fb^2 - fm^2 - mp^2$. Setzt man in die letztere aus der ersteren den Werthen $am = fm = \frac{1}{2} af$, $fb^2 = af.fn$, also $fb^2 = 2am(2am + an) = 4am^2 + 2am.an$, so wird $2mp^2 = 4am^2 + 2am.an - 2a$ also $mp^2 = am.mn$. Man bestimme also zu a den harmonischen Punkt n, so daß $af.fn = fb^2$, halbire af in m, und an in k, ziehe aus m an den mit dem Halbmesser $ka = kn$ beschriebenen Kreis die Tangente ml, und beschreibe aus m mit dem Halbmesser ml den Kreis pp, wodurch man die Punkte der ungleichartigen Potenz erhält. Diese Auflösung enthält übrig beide Fälle. Denn auch dem Abschnitte as ist der dem Halbirungspunct m entsprechende harmonische Punct (VIII. 1) im Unendlichen. Wenn man aus diesem an den Kreis k eine Berührende zieht, welche ihn in r berührt, und aus dem unendlich weit entfernten Punct mit dem unendlichen Halbmesser einen Kreis beschreibt, so schneidet derselbe die bc in k, welches der Punct der gleichartigen Potenz ist. Der zweite Punct der gleichartigen Potenz liegt also im Unendlichen.

Zur trigonometrischen Berechnung setze man in II. $\sin 2l = \frac{as \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}{sb}$, so ist:

$$ap = po = sb \cdot \sin(45^\circ - 2l) \text{ und } = sb \cdot \cos(45^\circ - 2l)$$

$$sp = sb \cdot \cos(45^\circ - 2l) \text{ und } = sb \cdot \sin(45^\circ - 2l)$$

$$bp = sb \cdot 2\sin^2(22\tfrac{1}{2}^\circ - l) \text{ und } = sb \cdot 2\cos^2(22\tfrac{1}{2}^\circ + l)$$

$$pc = sb \cdot 2\cos^2(22\tfrac{1}{2}^\circ - l) \text{ und } = sb \cdot 2\sin^2(22\tfrac{1}{2}^\circ + l)$$

Beispiel. $sb = sc = 182$, $as = 97$.

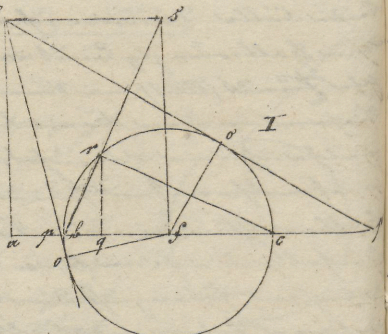
as	1,98677	sb	2,26007	$2sb$	2,56110
$\sqrt{\frac{1}{2}}$	9,84949	$\sin(45^\circ - 2l)$	9,58937	$\sin^2(22\frac{1}{2} - l)$	8,59408
sb	2,26007	$\cos(45 - 2l)$	9,96447	$\cos^2(22\frac{1}{2} + l)$	9,84150
$\sin 2l$	9,57619	ap	1,84944	$\cos^2(22\frac{1}{2} - l)$	9,98260
$2l =$	22° 8,39	ap	2,22454	$\sin^2(22\frac{1}{2} + l)$	9,48538
$45^\circ - 2l =$	22 51,61			bp	1,15518
$22\frac{1}{2}^\circ - l =$	11 25,80			pc	2,54370
$22\frac{1}{2} + l =$	33 34,20			bp	2,40260
				pc	2,04648

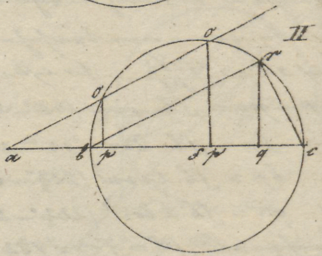
44.

Auf der Mittelpunctslinie eines Kreises den Punct zu finden, in welchem das Quadrat des Abschnittes von einem gegebenen Punct zu der Potenz des Kreises ein gegebenes Verhältniß hat.

Der gegebene Punct sey a, der Durchmesser des gegebenen Kreises bc, der Mittelpunct sey s, der verlangte Punct sey p, die aus demselben

an den Kreis gezogene
Berührende der Ordinate
seÿ po. Es soll seÿn $\frac{ap^2}{bp.pc} = \frac{ap^2}{po^2} = N$
I. Ist p außerhalb des Krei-
ses, so werde die in a auf
bc errichtete Senkrechte von
der Berührenden po in l
geschnitten. Dann ist
$\triangle fop \sim lap$, also $\frac{ap}{po} = \frac{al}{fo}$
$= \frac{al}{fb}$, also al gegeben.
Dieses giebt folgende
Auflösung: Man theile
bc in q so, daß $\frac{cq}{bq} = N$ seÿ,
errichte in q eine Ordi-
nate qr, verbinde br
welche die in f errichtete
Senkrechte in s schneidet,





ziehe sl $\parallel$ bc, ziehe aus l an den Kreis die bei-
den Berührenden lo, so schneiden sie die beiden
den beiden verlangten Puncten p. Denn alsdann
ist $\frac{al^2}{fo^2} = \frac{fs^2}{fb^2} = \frac{cr^2}{br^2} = \frac{cq}{bq} = N$.
II Ist p innerhalb des Kreises, so theile man
bc in q so, daß $\frac{bq}{cq} = N$, errichte in q die Ordi-
nate qr, verbinde br, ziehe aoo $\parallel$ br. Diese
Linie schneidet den Kreis wenn die Aufl-
sung möglich ist, in zwei Puncten o. Fällt man
aus diesen die Ordinaten op, so sind pp die verlang-
ten Puncte. Denn alsdann ist:
$\frac{ap^2}{po^2} = \frac{bq^2}{qr^2} = \frac{br^2}{cr^2} = \frac{bq}{cq} = N$.
Anders. Es seÿ $ap^2 = N.po^2$, so ist, wenn p außerhalb
des Kreises liegt, $po^2 = fp^2 - fb^2$, und wenn p
innerhalb des Kreises liegt: $po^2 = fb^2 - fp^2$.
Man erhält also den zweiten Fall aus dem er-
sten, wenn man N negativ nimmt. Es seÿ nun m

die Mitte der beiden zusammengehörigen Puncte p, so ist $ap = am \pm mp$, $fp = fm \pm mp$, also hat man im ersten Falle die Gleichung:

$(am \pm mp)^2 = N(fm \pm mp)^2 - N \cdot fb^2$

Hieraus folgen die beiden Gleichungen:

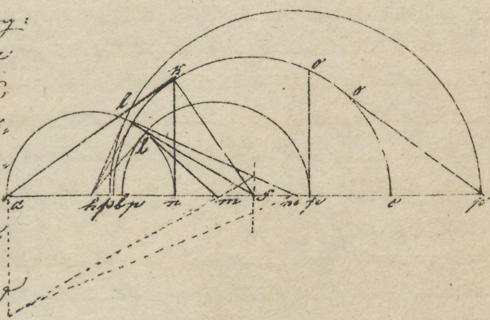
1) $am = N \cdot fm$ 2) $am^2 + mp^2 = N(fm^2 + mp^2 - fb^2)$.

Setzt man den Werth von N aus der ersten Gleichung in die zweite, und bestimmt man zu a den harmonischen Punct n, so daß $af \cdot fn = fb^2$, so ist $am^2 + mp^2 = am \cdot fm + \frac{am}{fm} \cdot mp^2 - \frac{am}{fm} \cdot af \cdot fn$

also $am \cdot af = \frac{af}{fm} \cdot mp^2 - \frac{am}{fm} \cdot af \cdot fn$

also $mp^2 = am \cdot fm + am \cdot fn = am \cdot mn$

III.



III. Hieraus ergiebt sich folgende allgemeine Auflösung: Man ziehe aus a an den Kreis f, je nachdem a außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt, die Berührende oder Ordinate ak, und aus k die Ordinate oder Berührende kn. Dadurch ergiebt sich zu a der harmonische Punct n, so daß $af \cdot fn = fb^2$ ist. Man halbire an in h, so ist (VIII. 43) h der Punct der gleichartigen Potenz von a gegen den Kreis f. Man beschreibe aus h mit dem Halbmesser $ha = hn$ einen Kreis. Man theile af (VIII. 1) außerhalb und innerhalb harmonisch in zweien Puncten m so daß $\frac{am}{fm} = N$ dem gegebenen Verhältniß gleich sey. Man ziehe aus beiden

Punkte m die Berührenden ml an den Kreis k, und beschreibe aus jedem dieser Punkte m mit einem Halbmesser welcher der entsprechenden Berührenden ml gleich ist, den Kreis pp', so erhält man die vier verlangten Punkte p. Diejenigen beiden Punkte p welche den außerhalb af liegenden Punkte m entsprechen, liegen außerhalb des Kreises f. Zieht man aus ihnen an den Kreis f die Berührenden pl, so ist für sie $ap^2 = N . po^2$. Wenn $N > 1$, so liegt m in der Richtung af, folglich sind alsdann die beiden p immer möglich.

Wenn $N < 1$, so fällt der äußere Punkt m in die Richtung fa. Ist alsdann a außerhalb des Kreises f, so liegt m außerhalb des Kreises k, und die beiden p sind möglich. Ist aber a innerhalb des Kreises f, so können die beiden p unmöglich werden, welches dann der Fall ist, wenn m innerhalb des Kreises k liegt, d. h. wenn $fm < fn$, also $fm < \frac{fb^2}{af}$, also $\frac{af}{1-N} < \frac{fb^2}{af}$, also $1-N > \frac{af^2}{fb^2}$ also $N < \frac{ak^2}{fb^2}$ ist.

Für den Punkt m, welcher innerhalb af liegt, können die beiden p ebenfalls unmöglich werden, und dieser Umstand tritt ein, wenn a außerhalb des Kreises f liegt, und zugleich $fm > fn$. d. h. wenn $\frac{af}{1+N} > fn$, also $\frac{af}{1+N} > \frac{fb^2}{af}$, also $1+N < \frac{af^2}{fb^2}$ also $N < \frac{ak^2}{fb^2}$ ist.

45.

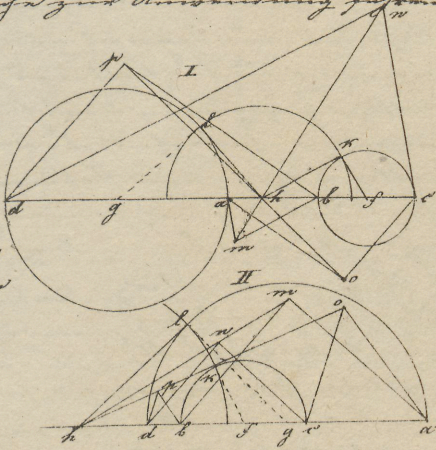
<u>Zu zwei Kreisen die Punkte der gleichartigen und ungleichartigen gleichen Potenz zu finden.</u>

Die Durchmesser der Kreise seyen bc, da, ihre Mittelpunkte f, g, der Punkt p soll auf der Mittelpunktslinie fg so bestimmt werden, daß $ap . pd = bp . pc$ seÿ. Gleichartig sind diese

Potenzen, wenn der Punkt entweder innerhalb beider Kreise, oder außerhalb beider Kreise liegt, ungleichartig aber, wenn der Punkt innerhalb des einen und außerhalb des andern liegt.

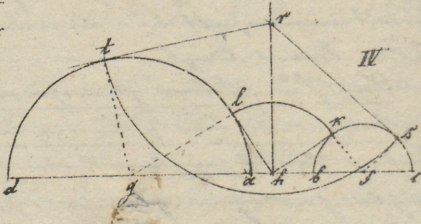
Der Punkt der gleichartigen gleichen Potenz, oder der Potenzpunkt schlechthin.

Dieser Punkt sey zum Unterschiede der Punkte der ungleichartigen gleichen Potenz, durch h bezeichnet. Diese Aufgabe ist zwar schon in VIII. 2. auf eine Art aufgelöset worden, es sollen hier aber noch verschiedene andere Eigenschaften aufgesucht werden, welche zur Anwendung führen:

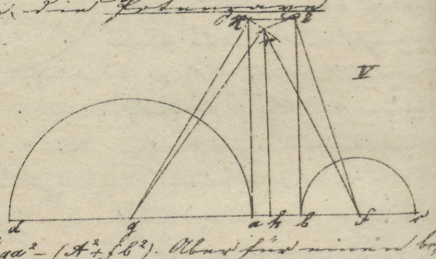


I. II. Da nämlich $ah \cdot hd = bh \cdot hc$ seyn soll, so ist $\frac{ha}{hb} = \frac{hc}{hd}$ und $\frac{ha}{hc} = \frac{hb}{hd}$ also auch $\frac{ha}{hb} = \frac{ac}{bd}$, und $\frac{ha}{hc} = \frac{ab}{cd}$. Man zieht also in beliebiger Richtung $am \parallel cn$, $bm \parallel dn$, so geht die grade Linie mn durch h. Oder man zieht in beliebiger Richtung $ao \parallel bp$, $co \parallel dp$, so geht die grade Linie op durch h. Wenn also die Kreise einander nicht durchschneiden, so liegt ihr Potenzpunkt außerhalb beider, und $hx = hl$ sind gleiche Berührenden.

III. Wenn die Kreise einander durchschneiden, so wird die Mittelpunktslinie ga von der gemeinschaftlichen Sehne xl, in dem Potenzpunkt h senkrecht geschnitten. Der Potenzpunct liegt also hier innerhalb beider Kreise, und hx = kl sind gleiche Ordinaten. –

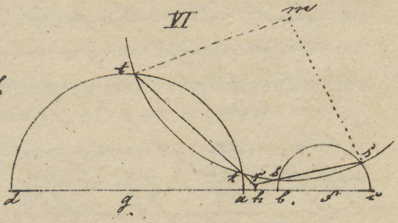


IV. Die Gleichung des Potenzpuncts heißt: $hg^2 - hf^2 = ga^2 - fb^2$: Man errichte in h eine Senkrechte auf fg, und nehme in derselben einen beliebigen Punct r an, so ist $hg^2 - hf^2 = rg^2 - rf^2$, also $rg^2 - rf^2 = ga^2 - fb^2$. Folglich hat die in dem Potenzpunct h auf fg errichtete senkrechte Linie die Eigenschaft, daß die aus irgend einem ihrer Puncte, wenn er außerhalb der Kreise liegt, an dieselben gezogenen Berührenden rs, rt, oder wenn er innerhalb der Kreise liegt, an dieselben gezogenen Ordinaten, einander gleich sind. Aus diesem Grunde heißt die genannte senkrechte Linie die Potenzgerade.

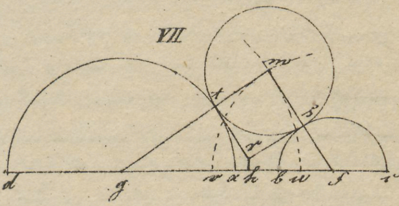


V. Wenn man in der Gleichung des Potenzpuncts $hg^2 - hf^2 = ga^2 - fb^2$; rechts das Quadrat einer beliebigen Linie A addirt und subtrahirt, so ist $hg^2 - hf^2 = A^2 + ga^2 - (A^2 + fb^2)$. Aber für einen beliebigen Punct r der Potenzgerade ist $hg^2 - hf^2 = rg^2 - rf^2$. Also $rg^2 = A^2 + ga^2$, $rf^2 = A^2 + fb^2$. Man errichte also auf fg in a, b die Senkrechten von beliebiger Länge ax = bl, beschreibe aus g mit dem Halbmesser gx, aus f mit dem Halbmesser fl Bögen, welche einander in r schneiden, so ist r ein Punct der Potenzgerade, folglich bestimmt die von r auf fg gefällte Senkrechte den Potenzpunct h.

VI. Man beschreibe einen beliebigen Kreis m, welcher die Kreise f, g, in den Sehnen ss, tt durchschneidet. Wenn nun diese Sehnen in r zusammentreffen, so ist die Potenz sr·rs den Kreisen f, m, die Potenz tr·rt den Kreisen g, m, gemeinschaftlich, also hat der Punct r zu den Kreisen f, g, eine gleiche Potenz, liegt also nach IV. in der Potenzgerade. Man fälle also rk senkrecht auf fg, so ist k der Potenzpunct.



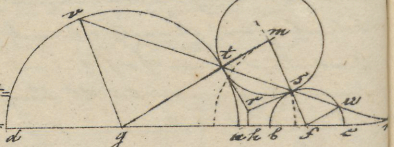
VII. Wenn die Kreise f, g, von einem Kreise m in s, t, berührt werden, so sind die Berührenden rs = rt, also liegt ihr Durchschnitt r in der Potenzgeraden der Kreise f, g.



Man schneide also beliebige aber gleiche Stücke aw = bv, ab, beschreibe aus f, g mit den Halbmessern fv, gw, Kreise, welche einander in m schneiden, so wird ein aus m mit dem Halbmesser aw = bv beschriebener Kreis die Kreise f, g, in s, t, berühren. Man ziehe also die Berührenden sr, tr, und aus r die Senkrechte rk, so ist k der Potenzpunct.

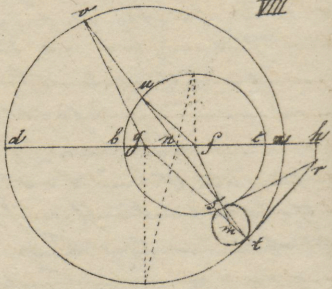
VIII. Wenn die Kreise f, g, von einem beliebigen Kreise m, berührt werden, so durchschneidet die Verbindungslinie der Berührungspuncte st die Mittelpunctslinie fg, in einem der Aehnlichkeitspuncte der Kreise (VIII. 1). Denn es

VIII

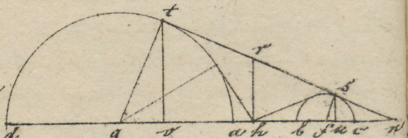


schneidet st die gq in n, und die Kreise f, g, in u, v, so ist wegen der Berührung ∠ $gvt = gtv = mts = mst = fsw = fus$, also $gt \parallel fu$, $gv \parallel fs$, also $\frac{fn}{gn} = \frac{fu}{gt} = \frac{fs}{gv} = \frac{fb}{ga}$ also n einer der beiden Aehnlichkeitspunkte, bestimmt man daher nach VIII. 1. einen der Aehnlichkeitspunkte, so darf man nur irgend eine grade Linie durch denselben legen, welche den Kreis f in s, u den Kreis g in t, v, schneidet. An den entsprechenden Durchschnittspunkten s, t oder u, v, zieht man Berührende, und aus dem Durchschnitt derselben fällt man eine Senkrechte auf fg, so ist sie die Potenzgrade.

VIII

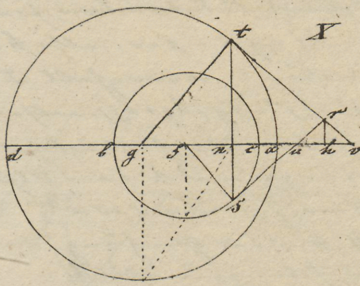


IX



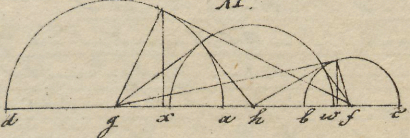
IX. Wenn ein Kreis außerhalb des andern liegt, und man aus einem ihrer Aehnlichkeitspunkte n eine Berührende nsu an den Kreis f zieht, so berührt sie auch den Kreis g. Denn wenn man auf ns die Senkrechte gt fällt, so ist $\frac{fn}{gn} = \frac{fs}{gt}$. Aber vermöge der Voraussetzung ist $\frac{fn}{gn} = \frac{fb}{ga}$. Also $\frac{fs}{gt} = \frac{fb}{ga}$. Aber $fs = fb$, also auch $gt = ga$. Also ist t ein Berührungspunkt. Halbirt man st in r, so sind die Berührenden $rs = rt$, also ist (IV) r ein Punkt der Potenzgrade. Fällt man die Senkrechten su, rh, tv, so heißen u, v, die harmonischen Punkte des Punktes n. Also halbirt der Potenzpunkt h den Abstand uv der harmonischen Punkte eines Aehnlichkeitspunkts n. Diese harmonischen Punkte sind durch die Gleichungen $ns.su = sb^2$; $ng.gv = ga^2$ bestimmt.

X

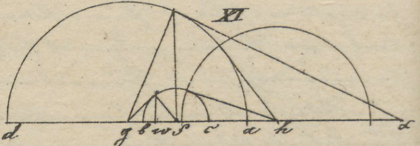


X. Ein ähnlicher Satz gilt auch für den Fall wo ein Kreis innerhalb des andern liegt. Es sey n einer der Aehnlichkeitspunkte. Eine in n auf sg errichtete Senkrechte schneidet die Kreise s, g in den nachstehenden Punkten s, t. In diesen Punkten ziehe man Berührende an die Kreise, welche einander in r, und die sg in u, v schneiden. Vermöge der Voraussetzung ist $\frac{sn}{gn} = \frac{sb}{ga}$. Also ist $\frac{sn}{gn} = \frac{ss}{gt}$. Also ist $\angle nss = ngt$. Aber $\angle ssu = gtv = R$. Also ist $\angle rst = rts$ und $\angle ruv = rvu$. Also ist $rs = rt$ und $ru = rv$. Da $rs = rt$ so ist (IV) r ein Punkt der Potenzgerade. Fällt man rh senkrecht auf sg, so ist h der Potenzpunkt. Da $ru = rv$, so ist $hu = hv$. Aber $ns.su = sb^2$, $ng.gv = ga^2$. Also sind u, v die harmonischen Punkte des Aehnlichkeitspunktes n. Also wird ihr Abstand vom Potenzpunkte h halbirt.

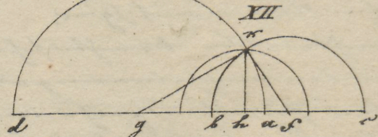
XI.



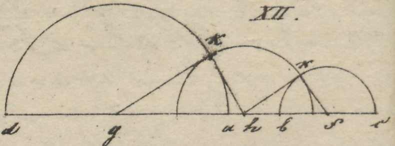
XI. Es seyen w, x die harmonischen Punkte des Mittelpunkts g zum Kreise s, und des Mittelpunkts s zum Kreise g, so daß $gs.sw = sb^2$, $sg.gx = ga^2$. Die



Gleichung des Potenz-punkts h ist aber $hg^2 - hf^2 = ga^2 - fb^2$. Also ist $hg^2 - hf^2 = fg.gx - gf.fw$; liegt der eine Kreis außerhalb des andern, so ist $hg^2 - hf^2 = fg(hg - hf)$, also $hg - hf = gx - fw$, also $hx = hw$. Liegt der eine Kreis innerhalb des andern, so ist $hg^2 - hf^2 = fg(hg + hf)$, also $hg + hf = gx - fw$, also $hx = hw$. Also halbirt in beiden Fällen der Potenzpunkt h den Abstand der harmonischen Punkte wx.



XII. Aus der Gleichung des Potenzpunkts h, nämlich $ha.hd = hb.hc$, folgt $\frac{ha}{hb} = \frac{hc}{hd}$, also $\frac{ha}{ab} = \frac{hc}{dc}$, also $\frac{ha}{hc} = \frac{ab}{dc}$, also $\frac{ha}{ca} = \frac{ab}{2fg}$. Auf dieselbe Art findet man die übrigen Abschnitte hb, hc, hd, und dann, nach ist:

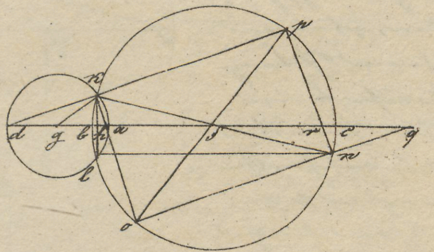


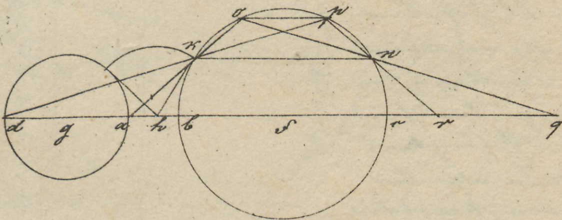
$$2fg.ha = ca.ab = A^2$$
$$2fg.hb = ab.bd = B^2$$
$$2fg.hc = dc.ca = C^2$$
$$2fg.hd = bd.dc = D^2$$
$$4fg^2.hx^2 = ca.ab.bd.dc = B^2C^2 = D^2A^2.$$

d. h. das doppelte Recht, mit dem Abstande der Mittelpunkte mit dem Abstand des Potenzpunkts von einem der Endpunkte des Durchmessers des einen Kreises ist gleich der Potenz dieses Endpunkts gegen den andern Kreis. Nennt man die vom Potenzpunkt an die Kreise f, g, gezogenen Ordinate oder

Berührenden hk den Potenzhalbmesser nennt, so ist das doppelte Rechteck des Abstandes der Mittelpunkte mit dem Potenzhalbmesser gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der vier Abschnitte zwischen den Kreisen.

Beweis. Wenn die Kreise einander in k, l, schneiden, so zieht man in dem Kreise f die Sehne $kn \approx fg$, verbindet ka, welche den Kreis in o schneidet, und kd, welche den Kreis in p schneidet, verbinde on, pn, welche die fg in q, r schneiden, so ist $\angle akh = okl = onl = oqa$. Wenn die Kreise einander nicht schneiden, und h ihr Potenzpunkt, hk der Potenzhalbmesser ist, so ziehe man $kn \approx fg$, und verfahre übrigens ebenso, dann ist $\angle akh = onk = oqa$. In beiden Fällen ist also $khoq$ ein Kreisviereck, also $aq \cdot ha = ka \cdot ao$, $ka \cdot ao = ca \cdot ab$, also $aq \cdot ha = ca \cdot ab$.





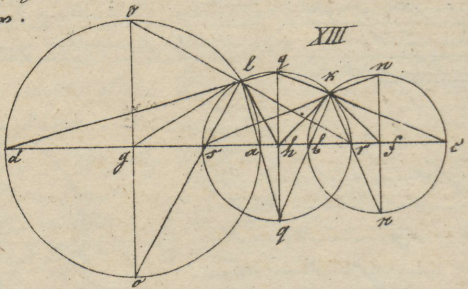
Im ersten Falle sind kn, op, Durchmesser. Im andern Falle ist $hk^2 = dh \cdot ha$, also $\angle kdh = akh = kpo$, also $qr \approx fg$. In beiden Fällen ist also $fd = fq$, $fa = fr$, $ab = cr$, $cd = qr$, $aq = dr = 2fg$, also $2fg \cdot ha = ca \cdot ab$.

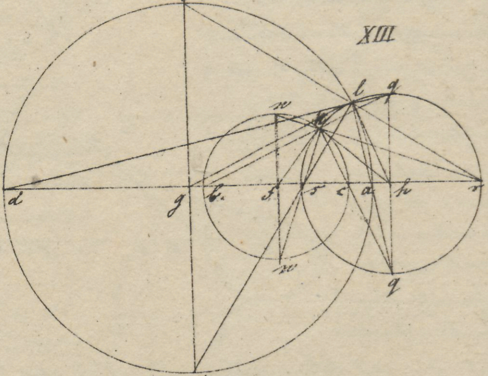
Setzt man $fg + ga + fb = 2S$, so ist $ca = 2(S - ga)$, $ab = 2(S - fg)$, $bd = 2(S - fb)$, $dc = 2S$, also ist

$\frac{1}{2} fg \cdot ha = (S - fg) \cdot (S - ga)$, $\frac{1}{2} fg \cdot hb = (S - fg)(S - fb)$,

$\frac{1}{2} fg \cdot hc = S(S - ga)$, $\frac{1}{2} fg \cdot hd = S(S - fb)$, $\frac{1}{4} fg^2 \cdot hk^2 = S(S - fg)(S - ga)(S - fb)$

Wenn die Kreise einander durchschneiden, so sind diese Faktoren positiv, wenn sie einander nicht durchschneiden, so ist einer von ihnen negativ.





XIII. Wenn die Kreise f, g, einander nicht durchschneiden, aber von ihrem Potenzkreise h in den Punkten x, l, geschnitten werden, so berühren die Halbmesser des Potenzkreises hx, hl, die Kreise f, g, in x, l, und die Halbmesser fx, gl, berühren den Potenzkreis. Wenn also der Potenzkreis die Mittelpunktslinie fg in r, s, schneidet, und man in den Mittelpunkten f, g, h, die senkrechten Durchmesser nn, oo, qq, errichtet, so werden (VIII. 40) die Durchmesser bc in r und s; da in s und r; rs in b, c, und in d, a, harmonisch getheilt, die Winkel in x, und l, sind halbe rechte Winkel nämlich $\angle bxr = cxr = bxs = qxs = dls = als = alr = dlr = \frac{1}{2} R$, und die Linien xr, xs, gehen durch n, n; die Linien lr, ls, durch o, o, und die Linien xb, xc, ld, la, durch q, q. Man hat also die Proportionen:

$$\frac{br^2}{cr^2} = \frac{bs^2}{cs^2} = \frac{bx^2}{cx^2} = \frac{hb}{hc} = \frac{ab \cdot bd}{dc \cdot ca} = \frac{B^2}{C^2}$$

$$\frac{ds^2}{as^2} = \frac{dr^2}{ar^2} = \frac{dl^2}{al^2} = \frac{hd}{ha} = \frac{bd \cdot dc}{ca \cdot ab} = \frac{D^2}{A^2}$$

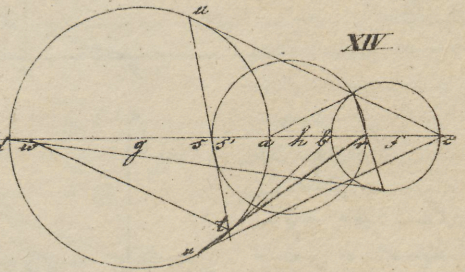
$$\frac{dr^2}{ds^2} = \frac{ar^2}{as^2} = \frac{lr^2}{ls^2} = \frac{gr}{gs}, \quad \frac{br^2}{bs^2} = \frac{cr^2}{cs^2} = \frac{xr^2}{xs^2} = \frac{fr}{fs}$$

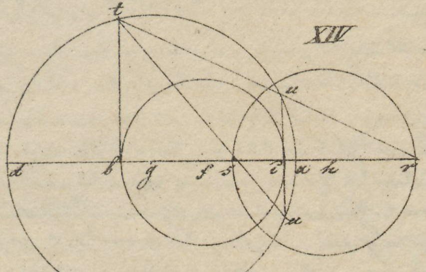
Zur Bestimmung der Punkte hiest: $2fg.fh = fg^2 + fb^2 - ga^2$; $2fg.gh = fg^2 + ga^2 - fb^2$. Dann giebt $fh \pm hr$ die Abschnitte fr, fs; und $gh \pm gr$ die Abschnitte gr, gs. Oder fr, fs, gr, gs, werden durch die Gleichungen $fr - fs = \pm 2hr$, $fr.fs = fb^2$

$gr - gs = \pm 2hr$, $gr.gs = ga^2$, bestimmt, und alsdann hat man zur Bestimmung von $br, cr, bs, cs, ar, dr, as, ds$, die Gleichungen:

$$br.rc = xr.rn = sr.fr = 2hr.fr = \pm(fb^2 - fr^2)$$
$$bs.sc = xs.sn = sr.fs = 2hr.fs = \pm(fb^2 - fs^2)$$
$$as.sd = ls.so = sr.gs = 2hr.gs = \pm(ga^2 - gs^2)$$
$$ar.rd = lr.ro = sr.gr = 2hr.gr = \pm(ga^2 - gr^2)$$
$$br^2 = 2hb.fr;\; cr^2 = 2hc.fr;\; bs^2 = 2hb.fs;\; cs^2 = 2hc.fs$$
$$ar^2 = 2ha.gr,\; dr^2 = 2hd.gr,\; as^2 = 2ha.gs;\; ds^2 = 2hd.gs$$

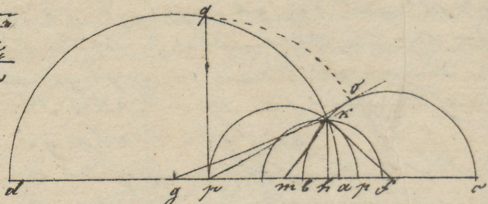
XIV. Zieht man aus den Endpunkten des Durchmessers des einen Kreises die Berührenden der Ordinaten an den anderen Kreis, z. B. bt, cu, so geht die eine Linie tu durch r, die andere durch s. Denn da $\frac{br^2}{cr^2} = \frac{ab.bd}{dc.ca} = \frac{bt^2}{cu^2}$ so ist $\frac{bs}{cs} = \frac{br}{cr} = \frac{bt}{cu}$. Nun ist, wenn tu die fg in s' schneidet $\angle bts' = cus'$. Zieht man $tw = cu$, so ist $\angle cus' = wts'$, also $\angle bts' = wts'$, also halbirt ts' den $\angle btw$, also $\frac{bs'}{bt} = \frac{ws'}{wt}$. Aber $\triangle ws't \sim cs'u$, also $\frac{ws'}{wt} = \frac{cs'}{cu}$, also $\frac{bs'}{bt} = \frac{cs'}{cu}$, also $\frac{bs'}{cs'} = \frac{bt}{cu}$. Aber auch $\frac{bs}{cs} = \frac{bt}{cu}$, also $\frac{bs'}{cs'} = \frac{bs}{cs}$. Also fallen die Punkte s, s' zusammen. Dieses giebt eine leichte Verzeich-

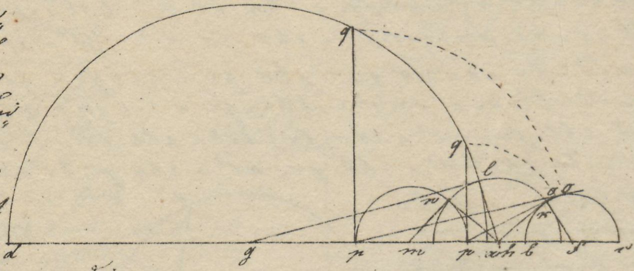


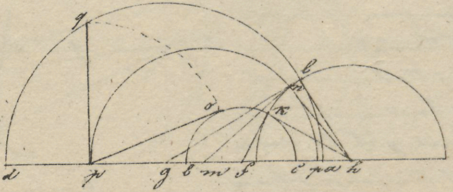


nung der

Punkte r, s; und dadurch auch das Potenzpunkt h.







die Punkte der einen gleichartigen gleichen Potenz. Hier soll auch der Mittelpunktslinie fg, außerhalb des einen und innerhalb des andern Kreises ein Punkt p so bestimmt werden, daß die an die Kreise gezogenen ungleichartigen Potenzseiten pr, pq einander gleich seyen.

Es soll also seyn $ap \cdot pd = bp \cdot pc$, oder $ga^2 - gp^2 = fp^2 - fb^2$, oder $fp^2 + gp^2 = fb^2 + ga^2$.

Es sey m die Mitte der beiden zusammengehörigen Punkte p, so ist $fp = fm \pm mp$, $gp = gm \mp mp$ also $fm^2 \pm 2fm \cdot mp + mp^2 + gm^2 \mp 2gm \cdot mp + mp^2 = fb^2 + ga^2$. Hieraus folgen die beiden Gleichungen.

1) $fm = gm$ 2) $fm^2 + gm^2 + 2mp^2 = fb^2 + ga^2$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß m die Mitte von fg ist. Aus der andern Gleichung folgt $mp^2 = \frac{1}{2}fb^2 + \frac{1}{2}ga^2 - \frac{1}{4}fg^2$. Wenn die Kreise einander in x durchschneiden, so ist (Lehrsatz V.12.) $mx^2 = \frac{1}{2}fx^2 + \frac{1}{2}gx^2 - \frac{1}{4}fg^2$. Also ist $mp = mx$. Wenn also die Kreise einander in x durchschneiden, so halbirt man den Abstand der Mittelpunkte fg in m, und beschreibt aus m einen Kreis, welcher durch den Durchschnittspunkt k geht, so schneidet dieser Kreis die fg in den verlangten Punkten p,p.

Wenn die Kreise einander nicht durchschneiden, so sey h ihr Potenzpunkt, und es seyen die Berührenden fr, gl, an den Potenzkreis gezogen. Es sey m ein beliebiger Punkt, und aus demselben die Berührende mn an den Potenzkreis gezogen. Alsdann ist $gl^2 - mn^2 = hg^2 - hm^2 = gm(2hm + gm)$ $mn^2 - fr^2 = hm^2 - hf^2 = fm(2hm - fm)$. Hieraus:

$$2fm \cdot hm = fm^2 + mn^2 - fr^2, \quad 2gm \cdot hm = gl^2 - mn^2 - gm^2$$

Diese Gleichungen entsprechen den Sätzen V. 8. 9. Wenn also $fm = gm$ ist, so ist:

$$fm^2 + mn^2 - fr^2 = gl^2 - mn^2 - gm^2$$

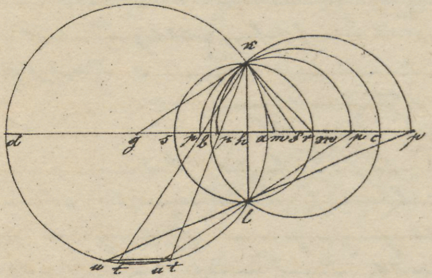
oder $fm^2 + gm^2 + 2mn^2 = fr^2 + gl^2 = fb^2 + ga^2$

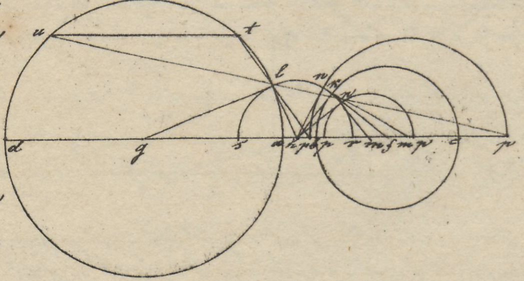
oder $mn^2 = \frac{1}{2} fb^2 + \frac{1}{2} ga^2 - \frac{1}{4} fg^2$

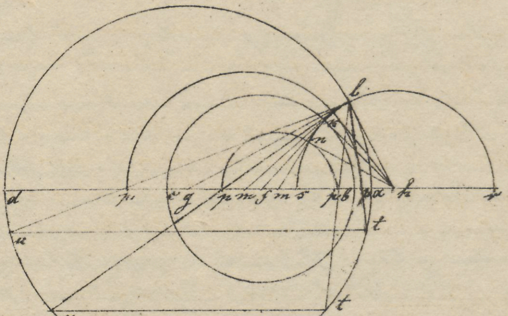
Diese Gleichung entspricht dem Satze V. 12. Es folgt hieraus ebenfalls $mp = mn$. Wenn also die Kreise einander nicht durchschneiden, so zieht man aus der Mitte von fg eine Berührende an den Potenzkreis, und beschreibt mit diesem Halbmesser mn einen Kreis, welcher die fg in den verlangten Punkten p,p, durchschneidet. Wenn also die Kreise einander durchschneiden, oder der eine Kreis innerhalb des andern liegt, so ist die Auflösung immer möglich. Wenn aber der eine Kreis außerhalb des andern liegt, so ist die Auflösung nur dann möglich, wenn die Mitte von fg nicht innerhalb des Potenzkreises fällt, d.h. so lange nicht $fb^2 + ga^2 < \frac{1}{2} fg^2$.

46.

Zu zwei Kreisen den Punkt zu finden, der gegen dieselben genommenen Potenzen ein gegebenes Verhältniss zu einander haben.







Die Durchschnitte der Kreise seyen b, a, ihre Mittelpunkte f, g. Es sey auf fg der Punkt p so zu bestimmen, daß $\frac{ap.pd}{bp.pc} = N$, oder $\frac{gp^2-ga^2}{fp^2-fb^2} = N$. Da man immer zwei zusammengehörige Punkte p haben wird, so sey m ihre Mitte. Alsdann ist $gp = gm \pm mp$, $fp = fm \pm mp$. Man hat also die Gleichung:

$(gm \pm mp)^2 - ga^2 = N(fm \pm mp)^2 - N.fb^2$.

Die hieraus folgenden Gleichungen sind:

1) $gm = N.fm$

2) $gm^2 + mp^2 - ga^2 = N.fm^2 + N.mp^2 - N.fb^2$. Setzt man den Werth von N aus der ersten Gleichung in die zweite, so ist dann, $gm^2 + fm.mp^2 - fm.ga^2 = gm.fm^2 + gm.mp^2 - gm.fb^2$

Es sey N > 1 und positiv, so ist $gm - fm = fg$, also

$$fg \cdot mp^2 = fg \cdot fm \cdot gm + gm \cdot fb^2 - fm \cdot ga^2$$

Nimmt man N und fm negativ an, so ergiebt sich

$$fg \cdot mp^2 = gm \cdot fb^2 + fm \cdot ga^2 - fg \cdot fm \cdot gm$$

Wenn nun die Kreise einander in x durchschneiden, so ist (V. 10. 11) für einen auf der Grundlinie des $\Delta\, fgx$, innerhalb oder außerhalb liegenden Punct m

$$fg \cdot mx^2 = gm \cdot fx^2 \pm fm \cdot gx^2 \mp fg \cdot fm \cdot gm$$

Folglich ist in beiden Fällen $mp = mx$.

Wenn die Kreise einander nicht durchschneiden, so finden dieselben Gleichungen statt. Es sey nämlich h der gemeinschaftliche Potenzpunct der Kreise f, g, so daß die Berührende $hx = hl$ der Potenzhalbmesser ist. Es sey m ein beliebig auf fg genommener Punct, und aus m ein Kreis beschrieben der denselben Potenzpunct h hat, so daß die Berührende $hn = hx = hl$ sey. Alsdann ist

$$gl^2 - mn^2 = hg^2 - hm^2 = gm^2 - 2gm \cdot hm$$

$$fx^2 - mn^2 = hf^2 - hm^2 = fm^2 \pm 2fm \cdot hm$$

Wenn man die erste Gleichung mit fm, die andere mit gm multiplicirt, und dann verbindet, so ist:

$$fg \cdot mn^2 = gm \cdot fx^2 \pm fm \cdot gl^2 \mp fg \cdot fm \cdot gm$$

Also ist auch hier $mp = mn$, d. h. die Kreise f, g, m haben einen gemeinschaftlichen Potenzpunct h.

<u>Zusatz.</u> Es sey h der gemeinschaftliche Potenzpunct der Kreise f, g, und es sey p der verlangte Punct, so läßt sich zu demselben immer ein zweiter Punct p' bestimmen, so daß der Kreis pp' denselben Potenzpunct h hat. Denn wenn die Kreise einander in x, l schneiden, so ziehe man xpl, damit sie $\sim fg$.

verbindet

man nun wl, welche die fg in p' schneidet, so ist xtwl ein Kreisviereck; aber pp' ∥ tw, also auch xplp' ein Kreisviereck.

Wenn aber die Kreise fg einander nicht schneiden, so ziehe man plt, dann tw ∥ fg. Verbindet man nun lw, welche die fg in p' schneidet, so ist kl eine Berührende, also ∠ hlp = lwt. Aber ∠ lwt = lp'h, also △ hlp ∼ hp'l. Halbirt man also pp' in m, so ist in beiden Fällen h der gemeinschaftliche Potenzpunkt der drei Kreise f, g, m. Da h der Potenzpunkt der Kreise m, f ist, so ist (VIII. 45. XII) 2fm. hp = bp. pc. Da h der gemeinschaftliche Potenzpunkt der Kreise g, m ist, so ist aus demselben Grunde 2gm. hp = ap. pd. Es soll aber ap. pd = N. bp. pc seyn. Also muß auch gm = N. fm seyn.

Die allgemeine Auflösung ist also folgende: Man bestimme den Potenzpunkt h der Kreise f, g, und beschreibe aus dem Mittelpunkte h den Potenzkreis rxls. Man theile die Mittelpunktslinie fg innerhalb und außerhalb harmonisch in den beiden Punkten m nach dem gegebenen Verhältniß, so daß $\frac{gm}{fm}$ = N sey. Man beschreibe aus den beiden Punkten m zwei Kreise, welche denselben Potenzpunkt h haben, so erhält man zwei Auflösungen, jede mit zwei Punkten p. Wenn die Kreise f, g einander durchschneiden, so sind für alle Werthe von N beide Auflösungen möglich.

Wenn die Kreise einander nicht durchschneiden, so ist immer eine der beiden Auflösungen möglich; die andere kann unmöglich werden, und dieses findet Statt, wenn der Punkt m innerhalb des Potenzkreises rs fällt.

Wenn der Kreis h außerhalb des Kreises g liegt, so giebt der äußere Punct m für jeden Werth von N eine mögliche Auflösung. Der innere Punct m giebt dann eine unmögliche Auflösung wenn $N < \frac{gr}{fr}$ aber zugleich $> \frac{gs}{fs}$ ist. Diese beiden Grenzverhältnisse sind nach VIII. 45. XIII.

$$\frac{gr}{fr} = \frac{hg + hx}{hf - hx} = \frac{fg^2 + ga^2 - fb^2 + 2fg \cdot hx}{fg^2 + fb^2 - ga^2 - 2fg \cdot hx}$$

$$\frac{gs}{fs} = \frac{hg - hx}{hf + hx} = \frac{fg^2 + ga^2 - fb^2 - 2fg \cdot hx}{fg^2 + fb^2 - ga^2 + 2fg \cdot hx}$$

Wenn der Kreis h innerhalb des Kreises g liegt, so giebt der innere Punct m für jeden Werth von N eine mögliche Auflösung. Der äußere Punct m giebt dann eine unmögliche Auflösung, wenn $N < \frac{gs}{fs}$ und zugleich $> \frac{gr}{fr}$ ist. Diese beiden Grenzverhältnisse sind:

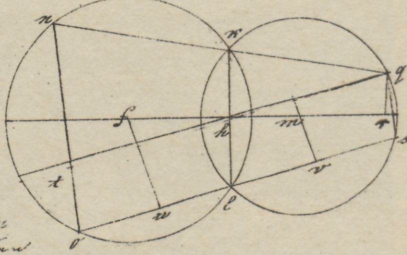
$$\frac{gs}{fs} = \frac{hg - hx}{hf - hx} = \frac{fg^2 + ga^2 - fb^2 - 2fg \cdot hx}{fg^2 + fb^2 - ga^2 - 2fg \cdot hx}$$

$$\frac{gr}{fr} = \frac{hg + hx}{hf + hx} = \frac{fg^2 + ga^2 - fb^2 + 2fg \cdot hx}{fg^2 + fb^2 - ga^2 + 2fg \cdot hx}$$

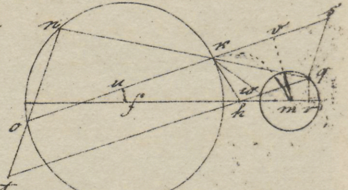
II. Wenn der Kreis m auf die angezeigte Art beschrieben werden, daß die von einem der Endpuncte des Durchmessers pp nach den Kreisen g, f, genommenen Potenzen das Verhältniß N haben, so gilt für jeden Punct q dieses Kreises m dieselbe Eigenschaft, daß nämlich <u>die von q nach den Kreisen g, f, genommenen Potenzen dasselbe Verhältniß N haben.</u>

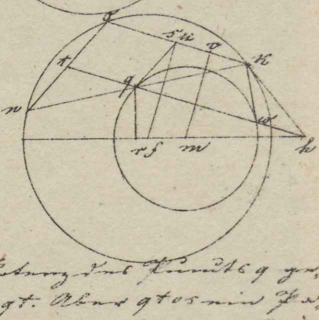
Es seien nämlich f, m, zwei beliebige Kreise, welche einander in k, l, schneiden, h ihr Potenzpunct

ff



q ein beliebiger Punkt des Kreises m. Man ziehe qxn, qht und ols ∥ qht. Da xnol ein Kreisviereck ist, so ist auch xnth ein Kreisviereck, also die Potenz des Punktes q gegen den Kreis m, $xq \cdot qn = hq \cdot qt$. Da xnol, xqsl, Kreisvierecke sind, und ols ∥ qht, so ist auch qs = no, also qt = os. Fällt man aus den Mittelpunkten f, m, auf os die Senkrechten fu, mv, so ist os = 2uv, also $xq \cdot qn = 2uv \cdot hq$. Fällt man von q auf fm die Senkrechte qr, so ist $\frac{hr}{hq} = \frac{uv}{fm}$, also die Potenz $xq \cdot qn = 2fm \cdot hr$.





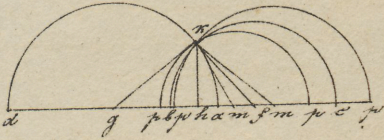
Wenn die Kreise f, m, einander nicht durchschneiden, so ziehe man aus ihrem Potenzpunkt h die Berührende hx an den Kreis f, verbinde qx welche den Kreis f in n schneidet, ziehe hq, dann aus x die xo ∥ hq. Wenn nun no, hq einander nicht schneiden, so ziehe man qs ∥ to. Da hx den Kreis f berührt, so ist ∠ hxq = xon. Da xo ∥ hqt, so ist xon = qtn, also ∠ hxq = htn, also xnth ein Kreisviereck, also die Potenz des Punktes q gegen den Kreis f, $xq \cdot qn = hq \cdot qt$. Aber qtos ein Parallelogramm, also $xq \cdot qn = os \cdot hq$. Wird hq den Kreis m in w schneidend, so ist $wh \cdot hq = hx^2$, also Δ whx ∼ xhq, also ∠ sxw = xwh = qxh = xon = qtn = qsx. Fällt man also aus f, m, auf sxo die Senkrechten fu, mv, so halbiren sie die Linien xo, xs. Also

ist $os = 2uv$, also $xq \cdot qn = 2uv \cdot hq$. Fällt man von q auch fm die Senkrechte qr, so ist $\frac{hr}{hq} = \frac{uv}{fm}$, also die Potenz $xq \cdot qn = 2fm \cdot hr$.
Wenn also die Kreise f, g, m, einen gemeinschaftlichen Potenzpunct h haben, und man von einem beliebigen Punct q des Kreises m auf die Mittelpunctslinie eine Senkrechte qr fällt, so sind die von q nach den Kreisen g, f, gezogenen Potenzen den Rechtecken $2gm \cdot hr$, $2fm \cdot hr$ gleich, das Verhältniß dieser Potenzen ist also gleich $\frac{gm}{fm} = N$.

III Trigonometrische Berechnung.

Wenn die Kreise einander durchschneiden

Man berechnet das $\Delta\, fgx$ aus den drei gegebenen Seiten fg, $gx = ga = gd$, $fx = fb = fc$, und wenn man setzt $fg + ga + fb = 2S$.



$$\frac{S}{(S-fg)(S-fb)(S-ga)} = E^2$$

$$S(S-fg)(S-fb)(S-ga) = F^2$$

dann ist (siehe Cursus VI), wenn $\angle\, xfg = 2f$, $\angle\, xgf = 2g$, $\cot f = E.(S-ga)$ $\cot g = E.(S-fb)$, $hx = \frac{F}{\frac{1}{2} fg}$
$hf = hx \cdot \cot 2f$, $hg = hx \cdot \cot 2g$.
Den Punct m bestimmt man durch die Gleichung $gm = N \cdot fm$, woraus $fm = \frac{fg}{N-1}$. Nimmt man für den einen Punct m N negativ, so ist auch fm negativ. Aus hf, fm, ergiebt sich hm, und dann, wenn $\angle\, xmf = 2m$, ist $tg\, 2m = \frac{hx}{hm}$.
Nun hat man $hb = hx \cdot tg\, f$, $hc = hx \cdot \cot f$, $ha = hx \cdot tg\, g$, $hd = hx \cdot \cot g$, $mp = \frac{hx}{\sin 2m}$, und die beiden Abschnitte $hp = hx \cdot tg\, m$ und $hx \cdot \cot m$, woraus man durch Addition und Subtraction die Abschnitte bp, pc, ap, pd, findet.

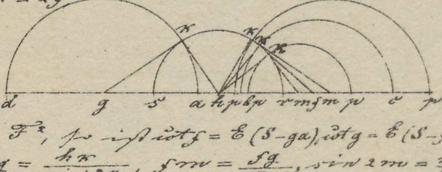
Beispiel. $fg = 376$, $g\alpha = 285$, $fb = 159$, $N = 2{,}5$ also
$S = 410$, $S - fg = 34$, $S - g\alpha = 125$, $S - fb = 251$.

S	2,61278	$f =$	22 11,92		I	II
$S-fg$	1,53148	$g =$	11 29,25	fg	2,57519	2,57519
$S-g\alpha$	2,09691	$2f =$	44 23,84	$N-1$	0,17609	0,54407
$S-fb$	2,39967	$2g =$	22 58,5	fm	2,39910	2,03112
E^2	6,58472	hx	2,04626	$fm =$	250,67	− 107,43
E	8,29236	cot f	0,38927	$hf =$	113,60	113,60
cot f	0,38927	cot g	0,69203	$hm =$	364,27	6,17
cot g	0,69203	hb	1,65699	hx	2,04626	2,04626
F^2	8,64084	hc	2,43553	hm	2,56142	0,79029
F	4,32042	$h\alpha$	1,35423	tg $2m$	9,48484	1,25597
$\frac{1}{2} fg$	2,27416	hd	2,73829	sin $2m$	9,46548	9,99933
hx	2,04626	$hb =$	45,39	mp	2,58078	2,04693
cot $2f$	0,00914	$hc =$	272,60	$mp =$	380,87	111,41
cot $2g$	0,37268	$h\alpha =$	22,61	$2m =$	16°58,9	86°49,19
hf	2,05540	$hd =$	547,39	$m =$	8 29,45	43 24,60
hg	2,41894	I $hp =$	16,61	hx	2,04626	2,04626
$hf =$	113,605	$=$	745,15	tg m	9,17402	9,97588
$hg =$	262,395	II $hp =$	105,23	hp	1,22028	2,02214
		$=$	117,59	hp	2,87224	2,07038

I			I	
$bp =$ 28,78	1,45909		$=$ 790,54	2,89792
$pc =$ 289,21	2,46122		$=$ 472,55	2,67445
N	0,39794			0,39794
	4,31825			5,97031
$\alpha p =$ 39,22	1,59351		$=$ 722,54	2,85886
$pd =$ 530,78	2,72491		$=$ 1292,54	3,11144
	4,31842			5,97030
II			II	
$bp =$ 59,84	1,77699		$=$ 162,98	2,21214
$pc =$ 377,83	2,57730		$=$ 155,01	2,19036
N	0,39794			0,39794
	4,75223			4,80044
$\alpha p =$ 127,84	2,10667		$=$ 94,98	1,97763
$pd =$ 442,16	2,64558		$=$ 664,98	2,82281
	4,75225			4,80044

Wenn ein Kreis außerhalb des andern liegt.

Setzt man hier $\angle hfx = 2f$,
$\angle hgx = 2g$, $\angle hmx = 2m$,
$fg + g\alpha + fb = 2S$,



$$\frac{S}{(fg-S)(S-g\alpha)(S-fb)} = E^2$$

$S(fg-S)(S-g\alpha)(S-fb) = F^2$, so ist cot $f = E(S-g\alpha)$, cot $g = E(S-fb)$

$hx = \frac{F}{\frac{1}{2} fg}$, $hf = \frac{hx}{\sin 2f}$, $hg = \frac{hx}{\sin 2g}$, $fm = \frac{fg}{N-1}$, $\sin 2m = \frac{hx}{hm}$

$mp = hx \cdot \cot 2m$, $hb = hx \cdot \mathrm{tg}\, f$, $hc = hx \cdot \cot f$, $ha = hx \cdot \mathrm{tg}\, g$, $hd = hx \cdot \cot g$, die beiden Werthe von $hp = hx \cdot \mathrm{tg}\, m$ und $hx \cdot \cot m$. Zur Bestimmung der Grenzwerth $fr = 2hf \cdot \sin^2(45^\circ - f)$, $fr' = 2hf \cdot \cos^2(45^\circ - f)$, $gr' = 2hg \cdot \sin^2(45 - g)$, $gr = 2hg \cdot \cos^2(45 - g)$.

Beispiel. $fg = 376$, $ga = 169$, $fb = 105$, also $S = 325$, $fg - S = 51$, $S - ga = 156$, $S - fb = 220$, $N = 12{,}25$.

S 2,51188	f = 25°11,64	I	II
fg − S 1,70757	g = 18 26,86	fg 2,57519	2,57519
S − ga 2,19312	2f = 50 23,28	N − 1 1,05115	1,22222
S − fb 2,34242	2g = 36 53,72	fm 1,52404	1,45297
E^2 6,26877	hx 2,10334	fm = 33,422	28,377
E 3,13438	cot f 0,32750	hf = 164,677	164,677
cot f 0,32750	cot g 0,47680	hm = 198,1	136,3
cot g 0,47680	hb 1,77584	hx 2,10334	2,10334
F^2 8,75499	hc 2,43084	hm 2,29688	2,13450
F 4,37750	ha 1,62654	sin 2m 9,80646	9,96884
½ fg 2,27416	hd 2,58014	cot 2m 0,07892	9,59421
hx 2,10334	hb = 59,68	mp 2,18226	1,69755
sin 2f 9,88671	hc = 269,68	mp = 152,14	49,837
sin 2g 9,77841	ha = 42,32	2m = 39°49,33	68° 33,2
hf 2,21663	hd = 380,32	m = 19 54,67	34 16,6
hg 2,32493	I hp = 45,95	hx 2,10334	2,10334
hf = 164,68	= 350,24	tg m 9,55897	9,83350
hg = 211,32	II hp = 86,46	hp 1,66231	1,93684
sin(45 − f) 9,52999	= 186,14	hp 2,54437	2,26984
cos(45 − f) 9,97351	I		I
9,05998	bp = 13,73 1,13767	= 290,56	2,46324
9,94703	pc = 223,73 2,34973	= 80,56	1,90612
2hf 2,51766	N 1,08814		1,08814
fr 1,57764	4,57554		5,45750
fr' 2,46469	ap = 88,27 1,94581	= 392,56	2,59391
sin(45° − g) 9,65032	pd = 426,27 2,62969	= 730,56	2,86365
cos(45 − g) 9,95159	II 4,57550		5,45756
9,30065	bp = 26,78 1,42781	II = 126,46	2,10195
9,90318	pc = 183,22 2,26298	= 83,54	1,92189
2hg 2,62596	N 1,08814		1,08814
	4,77893		5,11198
gr' 1,92661	ap = 128,78 2,10985	= 228,46	2,35881
gr 2,52914	pd = 466,78 2,66912	= 566,46	2,75317
	4,77897		5,11198

Max N 9,46192 = 0,2897

Min N 0,95150 = 8,943

Wenn der eine Kreis innerhalb des andern liegt.

Die Formeln bleiben dieselben wie im vorigen Fall, nur daß man statt fg − S, S − ga, cot f, respective setzen muß S − fg, ga − S, tg f.

Beispiel. fg = 176, ga = 315, fb = 105, also S = 298, S − fg = 122, ga − S = 17, S − fb = 193, N = 12,25.

S 2,47422	f = 24°53,0	I		II
S − fg 2,08636	g = 10 45,14	fg 2,24551		2,24551
ga − S 1,23045	2f = 49 46,0	N − 1 1,05115		1,12222
S − fb 2,28556	2g = 31 30,29	fm 1,19436		1,12329
E² 6,87185	hx 2,09381	fm = 15,644		− 13,283
8,43592	tg f 9,66637	hf = 162,574		162,574
tg f 9,66637	cot g 0,72148	hm = 146,93		175,857
cot g 0,72148	hb 1,76018	hx 2,09381		2,09381
F² 8,07659	hc 2,42744	hm 2,16711		2,24516
F 4,03829	ha 1,37233	sin 2m 9,92670		9,84865
½ fg 1,94448	hd 2,81529	cot 2m 9,80184		0,00167
hx 2,09381	hb = 57,57	mp 1,89565		2,09548
sin 2f 9,88276	hc = 267,57	mp = 78,642		124,59
sin 2g 9,56417	ha = 23,57	2m = 57°38,4		44°53,4
hf 2,21105	hd = 653,57	m = 28 49,2		22 26,7
hg 2,52964	I hp = 68,29	hx 2,09381		2,09381
hf = 162,574	= 225,57	tg m 9,74053		9,61604
hg = 338,574	II hp = 51,27	hp 1,83434		1,70985
sin(45 − f) 9,53647	= 300,45	hp 2,35328		2,47777
cos(45 − f) 9,97266	bp = I 10,72	1,03019	= I 168,0	2,22531
9,07294	pc = 199,28	2,29947	= 42,0	1,62325
9,94532	N	1,08814		1,08814
2hf 2,51208		4,41780		4,93670
fs 1,58502	ap = 44,72	1,65050	= 202,0	2,30535
fr 2,45740	pd = 585,28	2,76736	= 428,0	2,63144
sin(45 − g) 9,75033		4,41786		4,93679
cos(45 − g) 9,91730	bp = II 6,3	0,79934	= II 242,88	2,38539
9,50066	pc = 216,3	2,33506	= 32,88	1,51693
9,83460	N	1,08814		1,08814
2hg 2,83067		4,22254		4,99046
gs 2,33133	ap = 27,7	1,44248	= 276,88	2,44229
gr 2,66527	pd = 602,3	2,77981	= 353,12	2,54792
Max N 0,20787 = 1,6139		4,22229		4,99021
Min N 0,74631 = 5,5759				