

N. IVANOV

TUGEVUSÕPETUSE ÕPIK



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1950

R-18655
N. IVANOV

TUGEVUSÕPETUSE ÕPIK



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1950

Originaali tiitel:

Н. И. Иванов

Элементарный учебник сопротивления материалов.
ГИЗ Технико-теоретической литературы 1948.

Tõlkinud Edgar Targo.

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

8654

EESSÕNA.

See raamat kujutab endast ainult lühikest sissejuhatust laialdasesse teadusesse tugevusõpetusest. Ta on määratud tehnikumide õpilastele ja neile, kes, omades vaid piiratud aega, soovivad saada kujutlust mõningaist tugevusarvutuse meetoditest.

Ma ei eeldanud selle raamatu lugejatel tuletiste ja lihtsamate integraalide tundmist ning kasutasin toodud tõestustes ainult elementaarset matemaatikat.

Et vältida raamatu mahu suurenemist, on toodud piiratud arv teooriat selgitavaid näiteid ja ülesandeid. Peale selle on antud vähesel arvul ülesandeid õpilastele iseseisvaks harjutamiseks. On soovitatav, et lugeja tutvuks ainega järkjärgult, töötades pidevalt teooria ja ülesannete kallal. Raamatu lugemisel ei tule piirduda ainult jooniste vaatlemisega ja valemite lugemisega. On vaja lugeda pliiatsiga käes, joonestades paberile ümber kõik joonised ja tehes läbi kõikide valemite tuletused. „Keerukad“ ja „segased“ tuletused muutuavad selgeiks, kui töötada selliselt.

Tekst teise trüki jaoks on hoolikalt läbi vaadatud. Esimeses trükis leidunud trükivead ja sisulised vead on parandatud. Reas paragrahvides on parandatud materjali esitusviisi ja jooniseid. On antud vastused ülesannetele.

Kasutan juhust, et tänada raamatu lugejaid, kes tehtud märkustega aitasid kaasa selle parendamisele.

Raamatu kasutajate soovid ja märkused on autorile eriti väärtuslikud, seepärast, öeldes nende eest ette tänu, palun need saata mulle kirjastuse aadressil (Москва, Орликов пер. 3).

N. IVANOV.

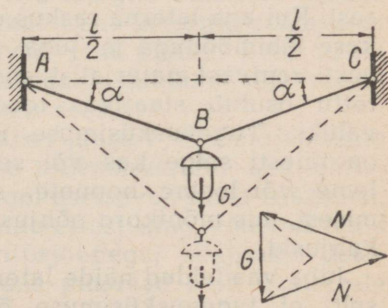
Moskva, aprill 1948. a.

I PEATUKK.

SISSEJUHATUS.

§ 1. Elastse keha mõiste ja tugevusõpetuse põhiülesanded. Teoreetilises mehaanikas eeldatakse mitmesuguste küsimuste käsitlemisel, et keha ei muuda jõudude mõjul oma kuju, ükskõik kui suured need jõud ka oleksid. Niisuguste *kujuteldavate* kehade kohta võib öelda, et nad on *absoluutselt kõvad*. Suur arv küsimusi, mis puudutavad *tegelikkuses esinevate* kehade tasakaalu ja liikumist, lahendatakse täiesti rahuldavalt sellise lihtsustatud kujutluse puhul nende omadustest. Näiteks (joon. 1) soovime leida sisejõude traatides AB ja BC , milledele kavatsetakse riputada latern raskusega G . Lahutades jõu G traatide sihile vastavalt (see lahutamine on teostatud joonise kõrval jõudude kolmnurga abil), leiame raskusteta jõud N , mis, nagu pole raske aru saada, pingutavad traate. Kui traadid läbi lõigata ja lõikekohtadesse kinnitada vedrukaalud (dünamomeetrid), pole raske veenduda selles, et staatika annab niisugused jõudude väärtused, mida kinnitab katse.

Kui me tahame laterna märgitud viisil üles riputada, siis kohtume vältimatult küsimustega: a) millisest materjalist traati tuleb kasutada ja b) millise läbimõõduga ta



Joon. 1.

peab olema, et edukalt vastu pidada tõmbejõududele, sest katse näitab, et isegi materjale, mille osakesed on tähelepandava nidususega, võidakse katki rebida, puruks muljuda, katki murda jne., kui neile rakendatud jõud küünivad igal antud juhul teatud kindla väärtuseni. Nii siis tekib küsimus konstruktsiooni detailide tugevusest. Staatika ei suuda seda küsimust lahendada, kuna mehaanika arvestab tõeliste kehade kõigist omadustest ainult keha geomeetrisi omadusi, tema massi ja inertsit ning omistab talle tegekkuses mitteesinevat absoluutset kõvadust — omadust vastu pidada mistahes jõudude mõjule, kuju muutmata ja purunemata.

Vaadeldud näites oleneb jõudude õige määramine sellest, kui võrd traatide töötingimused vastavad eeldatud absoluutsele kõvadusele, s. o. nende pikkuse muutmatusel. Kui traadid pikenevad laterna raskusest tingitud koormuse mõjul vähem, siis nurgad α , mida traadid moodustavad horisontaaljoonega (joon. 1), jäävad praktiliselt muutumatuks ja jõudude kolmnurk annab siis õiged jõudude N väärtused. Kuid nende jõudude väärtused saadakse hoopis teised, kui tekib suur riipe, näiteks selline, nagu on näidatud kriipsjoonega. Ehitades sel juhul jõudude kolmnurga, leiame, et jõud, mis tõmbavad traate, on tunduvalt väiksemad kui need, mis saame, lugedes traati absoluutselt kõvaks. Kui traat võetakse küllalt suure läbimõõduga vähevenivast materjalist ja laterna raskus pole suur, siis traatide töötingimused lähenevad tingimustele, milles asub absoluutselt kõva keha ja staatiline lahendus on õige, täpsemalt — erineb vähe tõelisest. Kui aga laterna raskus on suur, traat aga võetakse väikese läbimõõduga ja juba väikese koormuse mõjul kergesti venivast materjalist, siis traatide kalde tugeva muutuse tõttu osutub staatikas toodud lahendusviis tegelikkuses valeks. Tugevusküsimuse üksikasjalise uurimise tähtsus on täiesti selge kas või seepärast, et me aeg-ajalt kuuleme või loeme hoonete, sildade või masinate purunemisest, mis mõnikord põhjustavad sadu ohvreid ja tohutuid kahjusid.

Juba vaadeldud näide laterna ülesriputamisest näitab ilmselt, et tugevusküsimuse õigeks lahendamiseks ei piisa ainult teadmistest staatika ja üldse teoreetilise mehaanika

alal, vaid paratamatult peab omama täiendavaid teadmisi ka mõningaist materjalide omadustest, milledega tuleb tegelda.

Pöördudes katsete juurde, me avastame kõigepealt, et iga välisjõud, mida me edaspidi sageli nimetame *koormuseks*, ükskõik kui väike ta olekski, põhjustab kehale rakendatuna selle kuju muutust, mis osutub koormuse mõjul toimunud keha osakeste ümberpaigutamise tulemuseks. Seda keha kuju muutust ja tema osakeste ümberpaigutust nimetatakse *deformatsiooniks*.

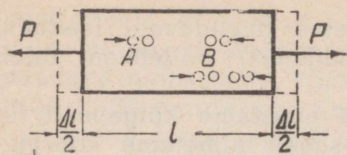
Surudes kokku kustutusikummit, painutades mitte väga tugevasti joonlauda, me kutsume välja nende kehade deformatsiooni. Eemaldades deformatsiooni põhjustanud jõud, näeme, et need kehad võtavad oma algkuju tagasi. Kehade omadust võtta pärast deformatsiooni põhjustanud välisjõudude (koormuse) eemaldamist tagasi oma algkuju, nimetatakse *elastsuseks*.

Kui deformatsioon on niisugune, et keha taastab oma kuju *täielikult*, nimetatakse seda *ajutiseks* ehk *elastseks* deformatsiooniks, vastupidisel juhul, näiteks metalljoonlaua tugeval painutamisel, kui keha saab püsiva, kas või osalise kuju muutuse, nimetatakse deformatsiooni *jäävaks* ehk *plastiliseks*, ka mitte-elastseks.

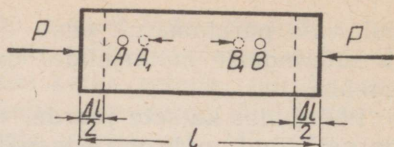
Väga paljusid kehi, näiteks terast, vaske, puitu jms. võib lugeda *teatavais piires* täiesti elastseteks kehadeks. Kehi, mis ei oma elastsust, nimetatakse *mitte-elastseteks* ehk *plastilisteks* kehadeks. Täiesti mitte-elastseid kehi, samuti ka täiesti elastseid, pole olemas. Kui mingile elastsele kehale rakendatakse koormus, siis hakkab keha deformeeruma, seejuures tema osakesed paigutuvad seni ümber, kuni välisjõud, mis mõjuvad kehale, tasakaalustatakse jõududega, mis tekivad osakeste vahel keha sees.

Kui keha *pikkusega l tõmbamisel* jõuga P , mis mõjub tema teljel (joon. 2), saab absoluutse *pikenemise* Δl , siis oletatakse, et teljega paralleelsel sirgel asetsevad keha osakesed, näiteks A ja B , eemalduvad teineteisest ning võtavad uued asendid, mis on näidatud kriipsjoonega; seejuures tekiavad osakeste vahel *sisejõud*, mis püüavad neid üksteisele lähendada.

Sarnaselt sellega oletame keha *surumisel* (joon. 3), kui ta



Joon. 2.



Joon. 3.

pikkus l saab absoluutse lühenemise Δl , et osakesed lähenevad üksteisele ja nende vahel tekivad tõukejõud.

Kuni kehale ei mõju välisjõude, püsivad sisejõud tasakaalus ja ei avaldu seepärast nähtavalt. Välisjõudude mõju-misel paigutuvad keha osakesed ümber ja nende ümberpaigutamiseks tuleb kulutada tööd, ületades osakeste vahel mõjuvate jõudude vastupanu. Kui pole ületatud igale materjalile omast piiri, koguneb see töö pöörduvasse vormi potentsiaalse energia kujul. Kui deformatsiooni põhjustanud jõude vähendada või keha nende jõudude mõju alt hoopis vabastada, siis saab keha osakeste vastastikuse mõju toimel tagasi oma esialgse kuju ja annab ära kogutud energia. Näiteks kella või grammofoni üles keerates, me deformeeme nende vedru. Meie poolt tehtud töö säilib potentsiaalse energia kujul, mis vedru lahtikeerumisel (õgvenemisel) yabanedes käitab kella või grammofoni mehhanismi.

Keha kuju muutmisel temas tekkivaid sisejõude, mis tasakaalustavad välisjõudude mõju, nimetatakse elastsusjõudeks.

Võib juhtuda, et välisjõud muutuvad nii suureks, et keha osakesed kaotavad ümber paigutudes vastastikuse sideme. Siis keha puruneb ja jaguneb kaheks või rohkemaks osaks. Suurte koormuste puhul, kuigi nad oma suuruse tõttu ei põhjusta purunemist, tekivad kehal, nagu juba nimetatud, jäävad deformatsioonid. Viimaste tekkimine ehitustes ja masinates on täiesti lubamatu. Näitena võib tuua ajami rihma libisemise, mis tekib jääva pikenemise (väljavenimise) tagajärjel tunduva jõu mõjul.

Seepärast on masinate ja ehituste detailide mõõdete määramise oskuse kõrval praktiliselt sama tähtis osata määrata deformatsioonide suurusi ning anda detailidele niisugused

mõõted, et neis tekkivad deformatsioonid ei ületaks lubatud suurust. Peale selle osutub deformatsioonide määramise oskus tähtsaks veel välisjõudude leidmisel, mis mõjuvad sellele või teisele osale, kui lahendust pole võimalik leida ainult staatika vahendusel, näiteks jõudude määramisel traatides joonisel 1, kui need tunduvalt pikenevad.

Põgus ülevaade ülesannetest, mis tuleb lahendada igal inseneril olenemata tema erialast, kuid muidugi erinevas ulatuses, lubab ära märkida kolme põhiülesannet, mis on omavahel tihedalt seotud ja mis seisnevad järgnevas:

1. *Teades välisjõude (koormusi), mis mõjuvad mingile ehituse või masina osale, leida sellele osale mõjuvad naaberosade (tugede) reaktsioonjõud.* Seda ülesannet võib lahendada ainult mehaanika abil, kuid paljudel juhtudel on vajalik arvestada nii vaadeldava kui ka naaberosade deformatsioone.

2. *Teades välisjõude (koormusi) ja võttes arvesse ka reaktsioonjõude, määrata vaadeldava osa kuju ja mõõdete muutus.* Selle küsimuse lahendamiseks tuleb peale selle materjali omaduste tundmise, millest on valmistatud osa, omada veel teadmisi deformatsioonidest, mille kutsub esile üks või teine koormusviis.

3. *Teades kõiki osale mõjuvaid välisjõude, leida selle osa erinevates punktides tekkivate elastsusjõudude suurused, eriti leida punktid, kus elastsusjõud saavad maksimaalsed väärtused, millest oleneb osa tugevus.*

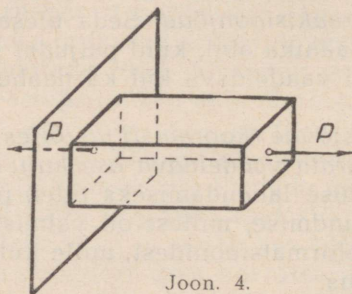
Nende ülesannete lahendamisega tegeleb tugevusõpetuse nime all tuntud teadusharu, mille peamiseks sihiks on õpetada, milliseid mõõteid on vaja anda ehituste ja masinate osadele, et nad oleksid vastupidavad, lühemalt öeldes (prof. V. Kirpitsõvi definitsioonis) — *tugevusõpetus on teadus ehituste ja masinate osade tugevusest.*

Tugevusõpetus on teadus, mis kasutab üheaegselt mehaanikast tulenevaid järeldusi elastsete kehade ja neile rakendatud koormuste tasakaalu teoreetiliseks ülesehituseks ning katseid füüsiliste kehade omaduste tundmaõppimiseks ja oma hüpoteeside ning järelduste kontrolliks.

Selle teaduse rajajaks tuleb lugeda Galileid, kes oma „Dialoogides“ — „Kõnelused kahe uue teaduse üle“ — pani talle aluse.

§ 2. Sisejõudude leidmise meetod. Kuna elastsusjõud on välisjõudude (koormuste) poolt tekitatud sisejõud, siis tuleb enne nende määramisele asumist, et midagi arvestamata jättes mitte teha jämedaid vigu, leida *kõik* antud juhul kehale mõjuvad välisjõud.

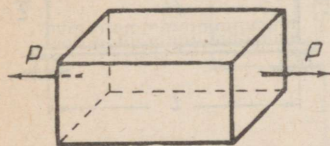
Arvestades eelöeldut *lubatavate* deformatsioonide tühisusest, võime suure lähendusega lugeda vaadeldavaid kehi absoluutselt kõvadeks ja lahendada neile mõjuvate jõudude küsimuse staatika reeglite järgi. Joonisel 1 me leidsime staatika reeglite põhjal sisejõud traatides.



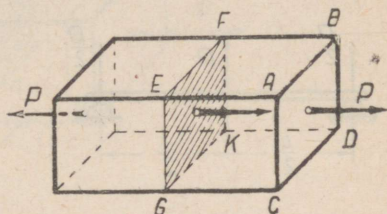
Joon. 4.

Vaatleme veel üht näidet. Olgu täisnurkse ristlõikega pruss (joon. 4) müüritud vasaku otsaga seina, paremas otsas aga koormatud ristlõike raskuskeskmes jõuga P . See jõud, nagu näha, tõmbab prussi. Kujutleme endale samasugust prussi nagu esimene, kuid koormatud nii nagu näidatud joonisel 5, s. o. ristlõigete raskuskeskmetes kummaski otsas jõuga P , mis on võrdne müüritud otsaga prussile rakendatud jõuga. Küsimusele, kumb pruss on ohtlikumas olukorras, vastavad tugevusõppetuse õppimist alustajad väga sageli: „Muidugi teine, sest talle mõjuvad *kaks* jõudu, esimesele aga ainult *üks*“. Kui enne vastamist oleks tasakaalu tingimuste põhjal välja selgitatud *kõik* esimesele latile mõjuvad jõud, poleks raske olnud veenduda, et mõlemad latid asuvad täiesti võrdseis tingimuses, kui mitte arvestada nende kaalu mõju, mida tavaliselt tehaksegi põhjustel, milledest on juttu edaspidi.

Tõepoolest, kui joonisel 5 kujutatud pruss jääb ühel sirgel — prussi teljel¹ — vastassuunas mõjuvate võrdsete jõudude mõjumisel tasakaalu, pole joonisel 4 kujutatud pruss, millesse mõjub ainult jõud P , mitte tasakaalus. Joonisel 4 kujutatud prussi võib lugeda ainult siis tasakaalus olevaks, kui me võtame arvesse *seina reaktsiooni* mõju prussile. Kerge on leida, et see reaktsioon võrdub jõuga P ja on suunatud vasakule. Ta on kujutatud joonisel kriipsjoonega. Vaadeldes jooniseid 4 ja 5 koos, pole raske aru saada, et mõlemad prussid asuvad ühesugustes tingimustes.



Joon. 5.



Joon. 6.

Arusaamatuse vältimiseks tuleb silmas pidada, et joonistel 2, 3, 4 ja 5 näidatud ühes punktis rakendatud jõude meie kujutame ette nii, et jõu mõju jaotub *ühtlaselt* kõikidele selle pinna punktidele, mille raskuskeskmesse ta on rakendatud. Seega on jõud P nagu vaadeldavates tasapindades mõjuvate suure hulga võrdsete ja paralleelsete jõudude resultantjõuks. Me kasutame sellist *tingimuslikku* kujutamisi ainult jooniste lihtsustamiseks. See märkus kehtib ka teiste jooniste kohta, kui vaadeldakse tõmmet ja survet.

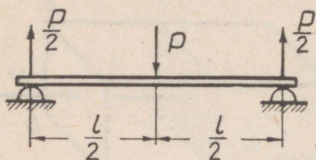
Rakendades staatika seadusi elastsete kehade suhtes, ei tohi unustada, et mõningad operatsioonid — jõudude asendamine nende resultantjõududega või nende jõudude ülekanne — osutuvad lubamatuiks, kuna muutuvad tingimused, milledes asuvad prussi üksikud osad. Näiteks on staatika seisukohalt täiesti ükskõik, kuhu on rakendatud joonisel 6 kujutatud prussile jõud P , s. o. kas lõikesse $ABCD$ või $EFGK$,

¹ Prussi teljeks nimetatakse ristlõigete raskuskeskmeid ühendavat sirget.

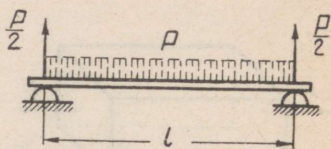
kui ta ainult jääb prussi teljele. Tasakaal ei rikne, kuna me „paigutame“ jõudu edasi tema mõjusihti mööda.

Pole siiski raske märgata, et ühel juhul venitatakse *kogu prussi*, teisel juhul aga ainult tema *vasakpoolset osa*.

Täpselt samuti pole samased prussi kuju muutused tema keskkoha rakendatud koondkoormuse P (joon. 7) või ühtlaselt üle terve pikkuse jaotatud koormuse P (joon. 8) toimel. Mis puutub nende prusside toereaktsioonidesse, siis on need mõlemal juhul võrdsed ja järelikult toereaktsioonide leidmisel on jaotatud jõudude (koormuse) asendamine nende resultantjõuga täiesti õige.



Joon. 7.



Joon. 8.

Veendunud, et vaadeldav pruss on tasakaalus temale rakendatud jõudude mõjul või leidnud tasakaalustamiseks puuduvad jõud, asutakse sisejõudude — elastsusjõudude määramisele, kasutades nn. *lõikemeetodit*. Selle meetodi aluseks on järgmine kaalutlus. *Kui kogu keha on tasakaalus, siis ka iga tema üksik osa on tasakaalus, kui sellele rakendada kõik jõud, mis talle mõjusid kui ta kuulus keha koosseisu.*

Tavaliselt eraldatakse keha osa prussi teljega ristioleva tasapinnaga. Teostanud niisuguse lõike prussil, mis on kujutatud joonisel 9, vaatleme tema vasakpoolse osa tasakaalu. Nagu näha, on ta välisjõu P mõju all, mis püüab teda paigutada vasakule. Ta peab olema tasakaalus, nagu eespool öeldud, kui lõikesse mn rakendada jõud, mis asendavad äralõigatud parempoolse osa mõju vasakpoolsele. Need jõud on mõlemal pool lõiketasapinda asetsevate osakeste vastastikuse mõju resultaat.

Rakendades need, nagu on näidatud joonisel 9 all, ja kasutades uuesti tasakaalutingimust vasaku äralõigatud osa

liste lõigete hüpoteesi). Nagu iga hüpoteesi, peab ka seda võimaluste piires kontrollima. Selleks võib teha järgmise katse. Et kergemini jälgida deformatsioone, kanname kummist valmistatud prussi külgpindadele rea paralleeljooni *ABC*, *DEF*, *GKL* jne. (joon. 9) ja rakendame prussile jõud, nagu on näidatud joonisel. Võib märgata, et prussi pikene mise tõttu paralleeljoonte vahekaugus suureneb, jooned aga ise jäävad sirgeiks. See on võimalik ainult tingimusel, et nende sirgete kõigis punktides mõjuvad võrdsed elastsusjõud, vastasel korral suurematele jõududele vastaksid suuremad deformatsioonid ja jooned kõverduksid. Kuna pole mingit põhjust arvata, et prussi sees leiaks aset mingi teine elastsusjõudude jaotus kui tema pindpunktides, võib oletada, et vaadeldavas lõikes ka prussi sees elastsusjõud on jaotatud ühtlaselt (s. o. mõjuvad igas lõike punktis) ja on võrdsed.

Kui kujutada tõmmatud prussi, nagu sageli tehakse, koosnevana peenikestest siledatest kiududest, võib oletada, et niisuguses prussis kõik kiud on koormatud ühtlaselt ja pike nevad võrdselt. Kui see ei leiaks aset, peaksid lõiked kõverduma.

Mida suuremad on prussile rakendatud välisjõud, seda suuremad on ka elastsusjõud, mis tekivad tema ristlõikes (joon. 9). Seega võib öelda, et välisjõud tasakaalustatakse elastsusjõududega.

§ 3. Pinge. Et otsustada ühe või teise tõmbekoormuse poolt esile kutsutud elastsusjõudude suuruse üle, on käepärane taandada ristlõikes mõjuvad elastsusjõud selle lõike pindala ühikule, s. o. moodustada suhe

$$\frac{\text{elastsusjõud}}{\text{ristlõike pindala}}.$$

Niisugune suhe annab võimaluse võrrelda elastsusjõude erinevatel tõmbejuhtudel olenematult ristlõike kujust ja suurusest ning tõmbejõu suurusest. Tõepoolest, olgu meil kaks latti: üks ümmargune, ristlõike pindalaga 2 cm^2 , koormatud jõuga 1000 kg , ja teine kandiline, ristlõike pindalaga 3 cm^2 , koormatud jõuga 3000 kg . Võib öelda, et esimese lati ristlõike iga ruutsentimeetri kohta saadakse elastsusjõud 500 kg samal ajal, kui teises latis selle jõu suurus on 1000 kg . Teise lati kohta võib öelda, et ta on enam pingestatud kui

esimene. Kui lattide materjalid on samad, võib väita, et teine latt on purunemisele lähemal kui esimene.

Elastsusjõu suurust ristlõike pindala ühiku kohta nimetatakse pingeks:

$$\frac{\text{elastsusjõud}}{\text{ristlõike pindala}} = \text{pinge.}$$

Tõmbava jõu tähistame tähega P ja väljendame ta kilogrammides, ristlõike pindala — tähega F ja väljendame ta ruutsentimeetrites või, mida tehakse harvem, ruutmillimeetrites.

Tõmbe juhul on pinge ilmselt suunalt paralleelne jõuga P , s. o. ta mõjub risti ehk, nagu öeldakse matemaatikas, *normaalselt lõikele*, seepärast nimetatakse teda veel *normaalpingeks* ja tähistatakse kreeka tähega σ (*sigma*).

Seega võib tõmbe normaalpinget väljendada nii:

$$\sigma = \frac{P}{F} \text{ kg/cm}^2 \text{ (kg/mm}^2\text{)}. \quad (1)$$

Arusaadavalt on pinge mingis lõikes, väljendatud kg/mm^2 , alati 100 korda väiksem pingest, mis on väljendatud kg/cm^2 . Seega on pinge 1000 kg/cm^2 sama mis pinge 10 kg/mm^2 .

Kuni pinge ei küüni teatava, igale materjalile omase piirväärtuseni, siis latt ei purune. *Pinget, mille juures keha puruneb, nimetatakse katketugevuseks ja tähistatakse tähistega σ_b .*

Arusaadavalt ei tohi lubada konstruktsioonides katketugevusega võrdse või sellele lähedase pinge tekkimist, kuna nad ei kindlusta mõjuvate jõudude arvestuses alati esinevate ebatäpsuste tõttu purunematust. Praktiliselt valitakse pinge nii, et ta moodustaks mingi n -enda osa katketugevusest. Tähistame lubatava tõmbepinget R_t ; siis

$$R_t = \frac{\sigma_b}{n}. \quad (2)$$

Arvu n nimetatakse varuteguriks ehk ohutuse koeiitsiendiks. Tema valikust räägitakse §-s 32.

Näide 1. Teraslatti ristlõike pindalaga $F = 4 \text{ cm}^2$ tõmmatakse jõuga $P = 4 \text{ t}$. Kui suure varuteguriga töötab latt, kui terase katketugevus $\sigma_b = 4000 \text{ kg/cm}^2$?

Leiame latis tekkiva pinge. Valemi (1) põhjal, pidades silmas, et σ asemele tuleb asetada lubatava pingena tähis R_t , saame:

$$R_t = \frac{P}{F} = \frac{4000}{4} = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

(Tuleb tähele panna, et jõud on avaldatud kilogrammides, kuigi ülesandes ta oli antud tonnides.)

Edasi leiame valemi (2) järgi:

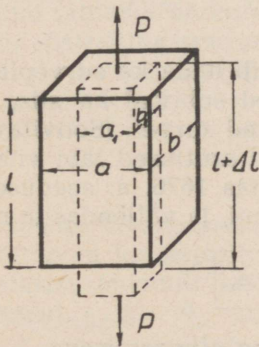
$$n = \frac{\sigma_b}{R_t} = \frac{4000}{1000} = 4.$$

Järelikult on latti varutegur 4.

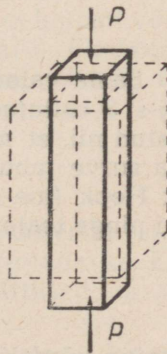
II PEATUKK.

TÕMBE JA SURVE PÕHIVALEMID.

§ 4. Põhivalemid. Olgu lati, mille pikkus on l ja ristlõike pindala F (joon. 10), teljele rakendatud tõmbejõud. Nagu juba öeldud, kujutades sel viisil jõudu, me loeme ta ühtlaselt jaotatuks kogu lõikele, teisiti öeldes, oletame, et kõik kujuteldavad lati pikikiud on võrdselt koormatud ja nad deformeeruvad võrdselt.



Joon. 10.



Joon. 11.

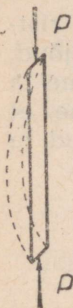
Tõmbejõu mõjul, nagu näitab katse, suureneb lati pikkus l pikkuse Δl (loe *delta l*) võrra, kuna lati ristimõõted vähenevad.

Kui jõud mõjuksid vastupidises suunas, nagu on kujutatud joonisel 11, ja lati pikkus, võrreldes tema ristimõõde-

tega, on väike, *surutakse* latt ainult kokku. Tema pikkus l väheneb pikkuse Δl võrra, ristimõõded aga suurenevad.

Kui lati pikkus on tema ristimõõdetega võrreldes suur, nagu joonisel 12 kujutatud joonlaual, siis võivad survejõud teda välja painutada. Surve asemel tekib *nõtke*. Seda juhtu vaadeldakse raamatu lõpus.

Pikkuse juurdekasvu või lühenemise, teisiti öeldud, *absoluutse pikenemise* (või survel *absoluutse lühenemise*) suhet lati algpikkusega nimetatakse *suhteliseks pikenemiseks* (või *suhteliseks lühenemiseks*) ja tähistatakse tähega ε (*epsilon*).



$$\boxed{\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon.}$$

suhteliseks pikenemiseks või lühenemiseks (3)

Suhteline pikenemine on abstraktne (nimeta) suurus.

Valemist (1) teame, et tõmbepinge

$$\sigma = \frac{P}{F}.$$

Joon. 12. Sama valemi abil võib leida ka survepinge, kuna §-s 3 esitatud arutlused sobivad ka siis, kui jõud on suunatud nii, et nad tekitavad survet. (Soovitav on teha joonis ka surve juhuks ja need arutlused läbi viia.)

Robert Hook (loe *huk*) avastas 1676. a. seaduse, mis on õige kuni pinge teatava suuruseni, ja väljendas ta nii:

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon,}$$

E - moodul (4)

s. t. pinge on võrdeline suhtelise pikenemisega.

Asendades selles valemis σ ja ε nende väärtustega valemist (1) ja (3), leiame, et

$$\frac{P}{F} = E \cdot \frac{\Delta l}{l},$$

kust

$$\boxed{\Delta l = \frac{Pl}{EF},}$$

(5)

s. t. keha pikene mine on võrdeline koormava jõuga ja keha pikkusega ning pöördvõrdeline ristlõike pindalaga ja suu- rusega E .

Kui koormus P suureneb 2, 3 jne. korda, siis ka pikene- mine suureneb vastav arv kordi. Kuna valem (5) on Hooke'i seadust väljendava valemi (4) järeldus, võib öelda, et selle seaduse kasutamise piires on pikene mine võrdeline koor- musega.

Kuna matemaatiliselt vaatekohalt erineb tõmme survest ainult pinge ja deformatsiooni märgi poolest, siis edaspidi me ei hakka neid eraldama. Vajaduse korral, kui avaldub nähte füüsikaline külg, antakse tarvilik seletus ja tehakse selgitavad märkused.

§ 5. **Elastsusmoodul.** Valemist (5) nähtub, et mida suu- rem on suurus E , seda väiksem on pikene mine (või lühene- mine), kui teiste tegurite suurused jäävad muutumatuiks. Seega iseloomustab suurus E materjali võimet panna vastu deformatsioonile, tema jäikust. Teda nimetatakse esimese liigi elastsusmooduliks. Valemist (4) nähtub, et E peab olema väljendatud samades ühikutes kui σ , s. o. kg/cm^2 või kg/mm^2 , kuna ε on abstraktne suurus (nimeta arv). Elastsusmoodulit võib määrata katseliselt. Tõepoolest valemist (5) näeme, et

$$E = \frac{Pl}{\Delta l F}.$$

Seega, teades valemi parempoolses osas esinevaid suursi, mis on leitavad katseliselt, võime arvutada ka E suuruse. Teras elastsusmooduli arvulised väärtused on tõmbel ja survel samad.

Näide 2. Ristkülikukujulise ristlõikega 20×10 mm teraslati pikenes 4-tonnise koormuse mõjul 20 cm pikkuses osas 0,2 mm. Leida lati materjali elastsusmoodul.

Lati ristlõike pindala $F = 20 \cdot 10 = 200 \text{ mm}^2 = 2 \text{ cm}^2$, koormus $P = 4 \text{ t} = 4000 \text{ kg}$, pikkus $l = 20 \text{ cm}$, pikene mine $\Delta l = 0,2 \text{ mm} = 0,02 \text{ cm}$, järelikult

$$E = \frac{Pl}{\Delta l F} = \frac{4000 \cdot 20}{0,02 \cdot 2} = 2\,000\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

Kuna enamiku materjalide E väljendub miljonites või sadades tuhandetes kilogrammides ruutsentimeetri kohta, kasutatakse selliste arvude lühendatud kirjutamiseks kümne astmeid. Nii võib meie näites kirjutada, et

$$E = 2\,000\,000 \text{ kg/cm}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2.$$

E suurus on isesugustel materjalidel erinev ja ei osutu täiesti samaks isegi ühe ning sama materjali puhul.

Enamuses praktikas esinevates ülesannetes võib kasutada järgnevaid ümardatud E väärtusi:

Süsinikteras	$2 \cdot 10^6$ kuni $2,2 \cdot 10^6$ kg/cm ²
Vask	$1 \cdot 10^6$ kg/cm ²
Puit	$1 \cdot 10^5$ "
Kummi	10 "

§ 6. Proportsionaalsuse piir. *Pinget, mille juures keha lakkab järgimast Hooke'i seadust, nimetatakse proportsionaalsuse piiriks.* Teda tähistatakse σ_{pr} . See piir oleneb peale materjali individuaalsete omaduste veel tema töötlemisest. Mõnikord on see piir küllalt kõrge, näiteks pehmel süsinikterasel umbes 2000 kg/cm^2 , teistel materjalidel, nagu malm ja vask, on ta aga madalam ja materjal hakkab Hooke'i seadusest kõrvale kalduma juba võrdlemisi madalate pingete juures (näiteks malm). Suhteline pikenemine osutub proportsionaalsuse piirini õige väikeseks, näiteks süsinikterasest lehtterasest proportsionaalsuse piiri $\sigma_{pr} = 1800 \text{ kg/cm}^2$ juures $\varepsilon = 0,0008$, s. o. vähem kui $1/1000$ kogu lati pikkusest.

Kuni proportsionaalsuse piirini tekivad sellistes materjalides, nagu teras, *elastsed ehk ajutised deformatsioonid, mis kaovad peale koormuse eemaldamist.*

§ 7. Ristlõike mõõdete muutumine tõmbel ja surveel. Nagu öeldud §-s 4, tõmmatud lati ristlõike mõõted vähenevad, surutud latil aga suurenevad.

Nii näiteks joonisel 10 külg a lüheneb a_1 -ni ja b — b_1 -ni. Nimetame *suhteliseks peenenemiseks* suurust

$$\varepsilon_1 = \frac{a - a_1}{a} = \frac{b - b_1}{b},$$

s. o. ristimõõte vähenemise suhet tema esialgse suurusega.

Selgub, et *suhteline peenenemine* moodustab teatava osa *suhtelisest pikenemisest*, s. o.

$$\varepsilon_1 = \mu \cdot \varepsilon, \quad (6)$$

kus μ on nn. *Poisson'i* (loe *puassoo*) tegur. Sama valemiga arvutatakse ka *suhtelist jämenemist* survele. Toome mõningad katselisel teel leitud teguri μ väärtused:

Kork	0,0
Teras	0,25
Kautšuk	0,47
Parafiin	0,50

Kuna tõmbel lati ristlõike pindala väheneb, siis tuleks lahendada küsimus, kas mitte arvestada seda pindala vähenemist ja arvutada pinge latis uue vähenenud ristlõike pindala järgi.

Kujutleme ruudukujulise ristlõikega terasest latti, kusjuures selle ruudu külje pikkus olgu 1 cm. Tõmbame teda nii, et pinge temas osutuks võrdseks proportsionaalsuse pii- riga, s. o. üldiselt öeldes, viime temas pinge praktiliselt vaatekohalt piirväärtuseni.

Teame, et niisugusele pingele terases vastab $\varepsilon = 0,0008$. Kuna Poisson'i tegur terasele on 0,25, siis valemi (6) põhjal

$$\varepsilon_1 = 0,25 \cdot 0,0008 = 0,0002.$$

Ruudu külje pikkus, mis enne oli 1 cm, võrdub nüüd

$$1 - 0,0002 \text{ cm} = 0,9998 \text{ cm},$$

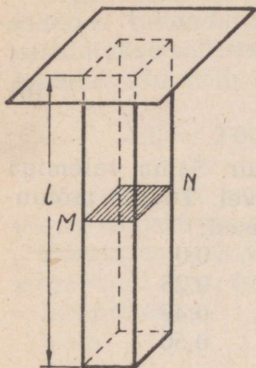
s. o. ta muutus $2/10\,000$ cm ehk $2/1000$ mm võrra, ja uus pindala võrdub

$(1 - 0,0002)^2 = 1 - 2 \cdot 0,0002 + 0,0002^2 \approx 1 - 0,0004 \text{ cm}^2$, järelikult ristlõike pindala väheneb

$$0,0004 \text{ cm}^2 \text{ ehk } 0,04 \text{ mm}^2 \text{ võrra.}$$

See on esialgse 100 mm^2 -lise pindalaga võrreldes niivõrd väikene suurus, et *praktiliselt võib ristimõõteid lugeda muutumatuiks*. Sama vähe muutub ristlõike pindala ka survele. Arvutades pinget oletusel, et ristlõike pindala ei muutu, teeme vea, mis ei oma praktilist tähtsust.

§ 8. Omakaalu mõju pingele tõmmatud lattides. Olgu latt pikkusega l ja ristlõike pindalaga F üles riputatud vertikaal-



Joon. 13.

asendis (joon. 13). Teda tõmmatakse omakaalu mõjul. Lõige, milles saadakse suurim pinge, nn. *ohtlik lõige*, asub ilmselt ülal — kinnituskohas. Tõepoolest sinna antakse edasi kogu lati kaal, samal ajal kui mingis vahepealses lõikes, näiteks *MN*, on pinge tekitajaks ainult allpool lõiget *MN* asuva lati osa kaal.

Tähistame materjali mahuühiku, s. o. ühe kuupsentimeetri kaalu kilogrammides tähega γ , siis on keha kaal

$$G = Fl\gamma,$$

järelikult pinge ülemises lõikes

$$\sigma = \frac{G}{F} = \frac{Fl\gamma}{F}$$

ehk

$$\sigma = l\gamma. \quad (7)$$

Selgub, et see pinge ei olene ristlõike pindalast, mis on ka arusaadav, sest kui latis ristlõike pindalaga 1 cm^2 tekib omakaalu toime mingi pinge, siis ükskõik kui palju selliseid latte ei asetataks kõrvuti, jääb pinge ikka samaks.

Et luua ettekujutust omakaalu toimele tekkinud pinge suurusest, toome valemi (7) järgi arvutatud pinged mitmesuguse pikkusega teraslattides, kusjuures terasel on võetud $\gamma = 0,0075 \text{ kg/cm}^3$.

Lati pikkus meetrites	Pinge kg/cm^2
1	0,75
10	7,5
100	75
1000	750

Tabelist nähtub, et isegi 10 meetri pikkuses latis on omakaalust tingitud pinge ainult $7,5 \text{ kg/cm}^2$. Teras töötab tavaliselt lubatava pingega umbes 1000 kg/cm^2 , seega moodustab omakaalust tingitud pinge isegi kümnemeetrilises latis ainult $\frac{3}{4}$ protsenti lubatavast pingest.

Seega võib tavaliselt esinevate pikkustega lattides omakaalust tingitud tõmbepinget jätta arvestamata.

Kui vertikaalselt ülesriputatud lati pikkus on suur ja ta kannab veel tõmbavat koormust P alumises otsas, siis võib leida pinge lati ülemises, „ohtlikus“ lõikes, liites koormuse P mõjust tekkinud pinge

$$\sigma_1 = \frac{P}{F}$$

omakaalust tekkinud pingega

$$\sigma_2 = l\gamma.$$

Kogu pinge võrdub

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{P}{F} + l\gamma.$$

Võttes selle võrdseks lubatava pingega R_t , saame arvutusvalemi:

$$R_t \leq \frac{P}{F} + l\gamma.$$

Näide 3. Määrata läbimõõt d vertikaalsele teraslatile, mille pikkus $l = 50 \text{ m}$, võttes arvesse tema omakaalu, kui tõmbav koormus alumises otsas $P = 50 \text{ t}$, lubatav pinge $R_t = 800 \text{ kg/cm}^2$ ja terase erikaal $\gamma = 0,0075 \text{ kg/cm}^3$.

Tuletatud valemist leiame, et

$$F = \frac{P}{R_t - l\gamma}.$$

Asetades valemisse ülesande andmed, saame:

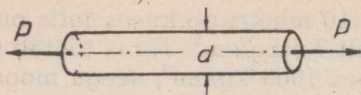
$$F = \frac{50\,000}{800 - 5\,000 \cdot 0,0075} = \frac{\pi d^2}{4},$$

kust

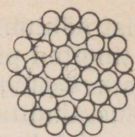
$$d = 9,13 \text{ cm}.$$

§ 9. Ulesandeid.

1. Katusesarika ümarterasest penni tõmmatakse jõuga $P = 6830 \text{ kg}$ (joon. 14). Leida tema vajalik läbimõõt, kui lubatav pinge $R_t = 1000 \text{ kg/cm}^2$.



Joon. 14.



Joon. 15.

Lahendus: Valemist (1), asendades σ lubatava pingega R_t , saame:

$$P = F \cdot R_t = \frac{\pi d^2}{4} R_t$$

ehk

$$6830 = \frac{3,14d^2}{4} \cdot 1000,$$

kust

$$d = \sqrt{\frac{6830 \cdot 4}{3,14 \cdot 1000}} \approx 3 \text{ cm.}$$

2. Terastross on kokku keeratud 36 traadist läbimõõduga δ (kreeka täht *delta*) = 2 mm. Joonisel 15 on kujutatud selle trossi ristlõige. Millise koormuse võib ohutult riputada sellele trossile ja millise koormuse juures tross katkeb, kui traatide materjali lubatav pinge $R_t = 600 \text{ kg/cm}^2$ ja katketugevus $\sigma_b = 5600 \text{ kg/cm}^2$?

Lahendus: Ohutu koormus

$$P = 36 \cdot \frac{\pi \delta^2}{4} R_t = 36 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} \cdot 600 \approx 678 \text{ kg.}$$

Purustav koormus

$$P_b = 36 \cdot \frac{\pi \delta^2}{4} \sigma_b = 36 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} \cdot 5600 \approx 6300 \text{ kg.}$$

Tegelikult on aga nii üks kui ka teine koormus väiksemad leituist. „Nõrgestuse“ suurus oleneb trossi punumise viisist. Näiteks võivad traadid olla algul keeratud üksikuiks palmikuiks — trossikeerdudeks ja siis need palmikud punutud trossiks või on paigutatud trossi sisse kanepist südamik, mida ümbritsevad traadid.

3. Hüdraulilist pressi (joon. 16), mille survejõud on 60 t, kasutatakse materjalide surumiseks. Määrata: 1) kahe terasest samba materjali varutegur, kui terase katketugevus $\sigma_b = 4200 \text{ kg/cm}^2$ ja samba läbimõõt $d = 8 \text{ cm}$; 2) samba *A* pikenemine, kui materjal *C* on surutud jõuga 60 t.

Lahendus: Kui materjal *C* on surutud jõuga 60 t, tõmmatakse kumbagi sammast jõuga $P = 30 \text{ t}$. Samba ristlõike pindala

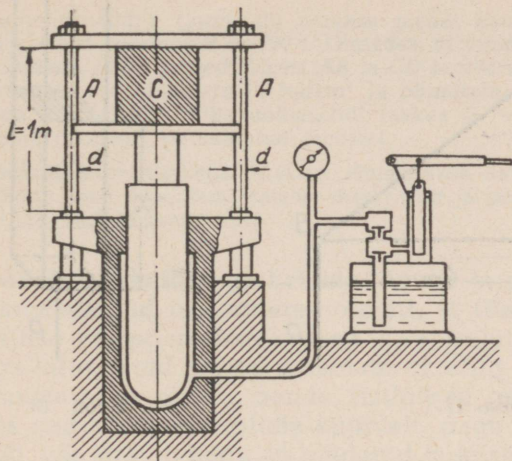
$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8^2}{4} \approx 50 \text{ cm}^2.$$

Järelikult valemi (1) põhjal on tõmbepinge

$$\sigma_t = \frac{P}{F} = \frac{30000}{50} = 600 \text{ kg/cm}^2.$$

Edasi valemi (2) järgi

$$n = \frac{\sigma_b}{\sigma_t} = \frac{4200}{600} = 7.$$



Joon. 16.

Oletades, et terassammaste elastsusmoodul $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ja võttes jooniselt $l = 1 \text{ m}$, leiame, et kummagi samba pikenemine valemi (5) põhjal on

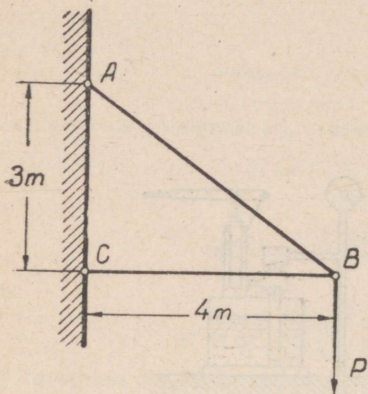
$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} = \frac{30\,000 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 50} = 0,03 \text{ cm}.$$

4. Määrata tala BC otsa ülalhoidva terastõmmitsa AB (joon. 17) läbimõõt d , kui liigendis B mõjub jõud $P = 2 \text{ t}$ ja lubatav pinge $R_t = 600 \text{ kg/cm}^2$.

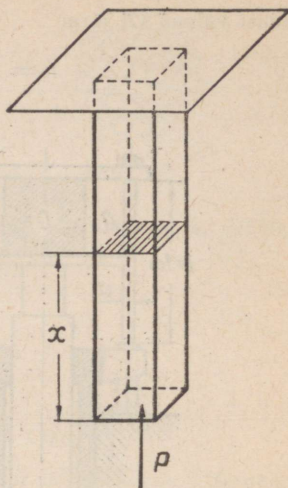
5. Tõmbemasina koormuse suuruse näitaja osuti kontrolliks teostatakse tõmbeproov „kontroll“-proovikehaga. Millist koormust peaks näitama õige koormusnäitaja osuti, kui proovikeha pikkusel 10 cm saadud pikenemine on $0,1 \text{ mm}$, proovikeha ristlõike pindala $F = 2,5 \text{ cm}^2$ ja $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$?

6. Valuterasest ümmargust latti ($d = 2 \text{ cm}$, $E = 2,15 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$) pikkusega $1,6 \text{ m}$ tõmmatakse jõuga $3,6 \text{ t}$. Leida lati pikenemine ja temas tekkiv pinge.

7. Oletame, et tõmmits (s. o. tõmbele töötav latt) on valmistatud terasest, mille katketugevus tõmbel (tõmbetugevus) $\sigma_b = 4000 \text{ kg/cm}^2$, proportsionaalsuse piir $\sigma_{pr} = 1800 \text{ kg/cm}^2$. Leida lubatavad pinged, kui



Joon. 17.

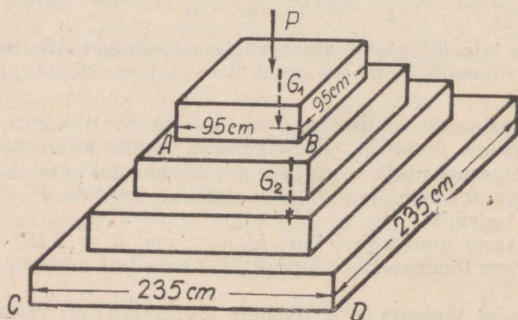


Joon. 18.

varutegur $n = 2; 2,5; 3$ ja 4 . Millise osa proportsionaalsuse piirist nad moodustavad?

Kui suur on väikseim varutegur, mille juures lubatav pinge ei ületa proportsionaalsuse piiri?

8. Ribaterast laiusega 160 mm ja paksusega 12 mm tõmmatakse jõuga $P = 20$ t. Kui suure varuteguriga töötab riba, kui katketugevus terasel, millest riba on valmistatud, on 4200 kg/cm²?



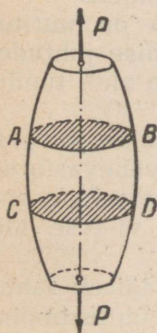
Joon. 19.

9. Prismaline latt (joon. 18) on ülemises lõikes kinnitatud ja alumises lõikes koormatud jõuga $P = 1$ t, mis mõjub alt üles. Millisel kaugusel x alumisest otsast võrdub survepinge latis nulliga, kui võtta arvesse lati omakaalu? Lati ristlõike pindala $F = 5$ cm², materjali erikaal $\gamma = 0,0075$ kg/sm³.

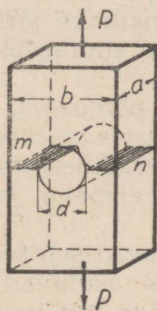
10. Tellisvundamendile (joon. 19) antakse plaadi kaudu, mille kaal $G_1 = 300$ kg, edasi koormus $P = 120$ t. Oletades, et vundament ja plaat on ruudukujulised, leida pinged lõikeis AB ja CD ja võrrelda neid tellismüüri lubatava survepingega 14 kg/cm² ja pinnasele lubatava pindsurvepingega $2,5$ kg/cm². Tellisvundamendi raskus $G_2 = 1,5$ t. Täiendavad andmed (mõõted) on näidatud joonisel.

+ 11. Ruudukujulise ristlõikega teraslatt tõmmatakse katki jõuga 10 t. Kui suurt jõudu peab rakendama samast materjalist ja sama jämedusega ümmarguse lati katkitõmbamiseks?

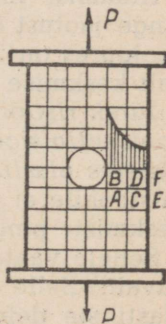
§ 10. Muutuva ristlõikega kehade tõmme ja surve. Kõikides varemvaadeldud ülesannetes oletati, et tõmmatud latid on silindrilise või prismalise kujuga, s. o. kujutavad püsiva ristlõikega latte. Kuid paljud masinate detailid või hoonete osad valmistatakse nii, et nende ristlõiked on muutuvad. Sealjuures nad võivad muutuda sujuvalt, nagu on näidatud joonisel 20, või järsult, nagu on näidatud joonisel 21, või selliselt, nagu muutub ristlõige kruvikeermes. Kui me määrame pinged joonisel 20 kujutatud lati lõikeis AB ja CD viisil, mida me kasutasime varem, s. o. valemi $\sigma = \frac{P}{F}$ järgi, kus F on vaadeldava ristlõike pindala, siis, nagu võib kind-



Joon. 20.



Joon. 21.



Joon. 22.

laks teha katseliselt mitte liiga järsul ristlõike muutusel, minnes ühelt ristlõikelt teisele, erinevad leitud pingete suurused tegelikest vähe.

Joonisel 21 kujutatud juhul on olukord hoopis erinev. Siin kujuneb „ohtlikuks“ lõikeks *mn*, mis läbib ava. Tavaliselt leitakse pinge, jagades jõu *P* viirutatud pindalaga:

$$\sigma = \frac{P}{(b-d) a},$$

s. o. arvestatakse, et pinge jaotub viirutatud pindalale ühtlaselt. Tegelikult seda pole, nagu selgub järgmisest katses.

Valmistame kummist riba avaga ja jaotame ta ruudukes- teks, nagu on näidatud joonisel 22. Tõmmates seda, näeme, et horisontaaljooned ava lähedal ei jää sirgeiks, s. o. siin ei järgita §-s 2 toodud põhieeldust, et tõmbel kõik lõiked jäävad tasapinnalisteks. Selgub, et algselt võrdsed pikijoonte lõigud, näiteks *AB*, *CD*, *EF* jne., ei pikene ühtlaselt. Lõik *AB* pikeneb kõige rohkem, lõik *EF* pikeneb aga tunduvalt vähem. Kuna lõikude algpikkus on teada, võib arvutada nende suhtelised pikenemised ε või mis osutub samaks, riba pikikiu- dude lõikude suhtelised pikenemised. Teades kummi elast- susmoodulit *E*, leiame Hooke'i seadusest [valem (4)] pinged kiudude üksikutes lõikudes. Tõmbepingete jaotuse pilt „ohtlikus“ lõikes on kujutatud joonisel 22. Selgub, et suurim pinge σ_{max} mitte väga väikeste avade puhul on ligikaudu kolm korda suurem pingest, mis leiti pinge ühtlase jaotuse eeldusel ja mida võib nimetada keskmiseks pingeks.

Kummist mudelitega ja teiste meetoditega on uuritud pinge jaotust ka teistel ristlõike järsu muutumise juhtudel. Seejuures on ilmnenu, et suurim pinge ületab alati tundu- valt keskmise pinge.

Järsk ristlõike muutus põhjustab, nagu öeldakse, pingete kontsentratsiooni. Praktilistes arvutustes, eriti vähevastutus- rikastes *plastilistest* materjalidest osades pingete kontsent- ratsioonile ei pöörata tähelepanu ja arvutus viiakse läbi keskmiste pingetega.

Sellele vaatamata töötavad sellised detailid täiesti rahul- davalt. Selle põhjusteks osutuvad pingete ühtlustumine plastiliste deformatsioonide tekkimise tagajärjel ja küllalt suure varuteguri olemasolu. Tõepoolest, olgu meie poolt

vaadeldud avaga riba valmistatud terasest, mille $\sigma_b =$
 $= 4200 \text{ kg/cm}^2$, ja arvutatud keskmise lubatava pinge
 $R_t = 700 \text{ kg/cm}^2$ järgi, s. o. kuuekordse varuteguriga. Tege-
likult on siis suurim pinge ribas $\sigma_{max} = 3 \sigma_{keskm.} = 3 \cdot 700 =$
 $= 2100 \text{ kg/cm}^2$.

Niisuguse pinge juures, mis vastab ligikaudu proportsio-
naalsuse piirile, on varutegur ikkagi veel kahekordne.

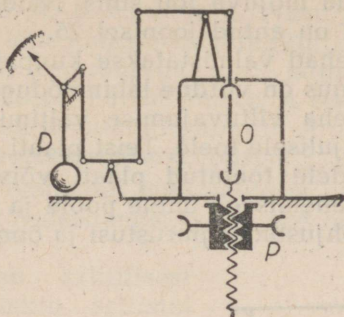
III PEATUKK.

TÕMBE- JA SURVEPROOVID.

§ 11. **Tõmbe- ja survemasinad.** Tõmbe katseliseks uurimiseks kasutatakse *tõmbemasinaiks* nimetatavaid seadmeid, surve uurimiseks aga peaaegu eranditult *presse*. Nad on paratamatult vajalikud seetõttu, et tuleb proovida enam või vähem suuremate mõõdetega proovikehi, et võimalikult kõrvaldada mitmesuguste vigade, näiteks mittehomoogeensuse, pragude jms. mõju, mis väikeste proovikehade puhul avaldavad proovimise tulemustele suuremat mõju kui suurte proovikehade juures. Et tõmmata katki terasest proovikeha ristlõike pindalaga 2 cm^2 , peaks tema otsa riputama ligi 1 m^3 ruumalaga malmvihi. Tohutut koormust oleks vaja ka proovikeha katkisurumiseks. Tekkivad raskused vihtide kasutamisel vahetu koormusena sunnivad proovimismasinat konstruktsioonides kasutama kruviseadmeid või hüdraulilisi presse, mis võimaldavad tekitada väikese jõukuluga tunduvald koormusi.

Joonisel 23 on antud masina skeem, milles kasutatakse kruvist ja tigurattast moodustatud ajamseadist *P*. Pöörates ratast ja temaga ühenduses olevat mutrit, mis haarab kruvi, saab „klambrer“, millesse on kinnitatud proovikeha *O*, liikumise suunaga alla. Proovikeha kaudu kandub temale rakendatud jõud ülemisele klambrile ja liigenditega ühendatud kangüsteemi abil dünamomeetrile ehk jõumõõtjale *D*. Jõumõõtja kujutab endast suure koormaga pendlit. Pendli kaldumine vertikaalasendist kõrvale on seda suurem, mida suurem on proovikehale mõjuv ja kangide süsteemi kaudu ülekantav jõud. Pendlil on osuti, mis liigub skaalal, mille jaotuskriipsud vastavad kindlatele koormustele.

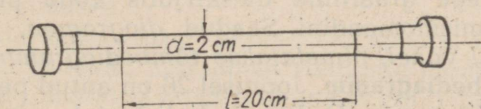
Kui klambrid asendada plaatidega ja kruvile anda liikumine mitte alla, nagu see on tõmbel, vaid üles, siis saab



Joon. 23.

plaatide vahele asetatud proovikeha surutud. Dünamomeetri skaalal peab surveprooviks olema vastupidine jaotus.

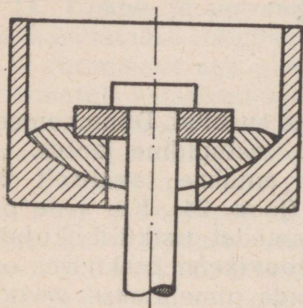
Tõmmatavatele proovikehadele antakse tavaliselt ümarguse ristlõikega silindri kuju (joon. 24). Kui seda pole võimalik teha, siis kasutatakse lamedat ristkülikukujulise ristlõikega proovikeha. *Normaalproovikeha* keskmises osas eraldatakse 20 cm-line pikkus, mida nimetatakse *arvutus-pikkuseks*. Proovikeha pea koonilise ülemineku tõttu arvutuspikkusele tekib viimase ristlõigetel ühtlane tõmme, ilma *ülepingtoneta* üksikutes punktides. Tõmbe tingimuste alahoidmiseks on väga tähtis, et proovikeha ei tõmmataks viltu, et jõud antaks proovikehale edasi tsentraalselt, piki tema telge. See saavutatakse masina klambrite otstarbekohase konstruktsiooniga. Selleks ühendatakse klambrid tõmmitsatega, millede külge nad on riputatud liigendite abil, et nad võiksid alati asetuda tõmbava jõu sihis, kuna aluspinnad, nn. *tugiklotsid*, milledele toetuvad proovikeha otsad, töödeldakse kerapinnakujuliselt (sfääriliselt), et anda neile või-



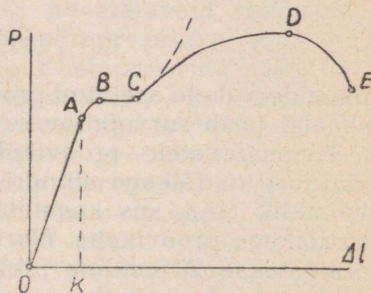
Joon. 24.

malust ise asetuda mõjuva jõu sihis. Näide sellise klambri konstruktsioonist on antud joonisel 25.

Surve proovikehad valmistatakse kuupidena või silindri-tena, millede kõrgus on võrdne läbimõõduga või kaks korda suurem. Proovikeha viltuvajumise vältimiseks toetub üks plaatidest kerakujulisele toele. Teist plaati ei toetata kerale, kuna kaks keradele toetatud plaati võivad jääda kaldu plaatide vahe laienemisega ühele poole ja proovikeha võib välja viskuda, põhjustades purustusi ja õnnetusi.



Joon. 25.



Joon. 26.

Tavaliselt varustatakse proovimismasinad veel nn. *diagrammiseadmega*. See kannab graafiliselt paberile olenevuse proovikehal saadud pikenemiste ja neile pikenemistele vastavate koormuste vahel. Selle seadme paberileht liigub võrdeliselt proovikeha pikenemisega, milleks ta on ühendatud proovikeha nn. liikuva klambriga, olenevust paberile joonestav pliats on aga ühendatud dünamomeetri osutiga ja liigub võrdeliselt viimase liikumisega, s. o. koormuse muutusega.

Alustades proovimist, käivitatakse nimetatud seade ja saadakse seega graafiline üleskirjutis kogu proovimisest kuni purunemismomendini. Saadud *diagrammi, mis annab seose P ja Δl vahel, nimetatakse tõmbediagrammiks*.

§ 12. Tõmbediagramm. Joonisel 26 on antud pehme terase proovimise diagramm. Ordinaatteljelt loetakse koormused P ja abstsissiteljelt absoluutsed pikenemised Δl . Diagrammil on

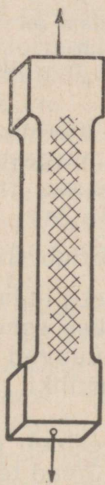
märgitud punktid A, B, C, D ja E . Nagu näha, punktist O kuni punktini A läheb sirgjoon, järelikult pikenedes kasvavad võrdeliselt koormusega, s. o. järgides Hooke'i seadust (vt. § 4 lõpposa). Pärast punkti A sirge muutub kõveraks. Pinge, mis on arvatud punktile A vastavast koormusest, annab proportsionaalsuse piiri σ_{pr}^k . Pikenemine OK , nagu meile juba teada, on õige väike ja kaob peale proovikeha koormusest vabastamist, kuna see on elastne pikenedmine.

Punktist B , nn. kriitilisest punktist edasi tekib sellistel materjalidel, nagu pehme teras, horisontaalne joonlõik. Masina dünamomeeter lakkab näitama koormuse suurenemist ja mõnikord isegi märgib selle langust. *Toimub proovikeha pikenedmine püsiva koormuse juures, nn. materjali voolamine.*

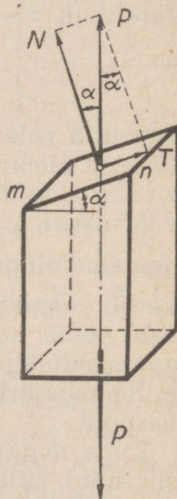
Punktile B vastavat pinget nimetatakse voolavuspiiriks ja tähistatakse σ_T . Kui proovikeha oli enne proovimist poleeritud, siis, saavutanud voolavuspiiri, ta pind tuhmub temale ilmuvate ülipeenikeste viirude võrgu tagajärjel. Töötlemata proovikehade pinnal, mis on kaetud tagi või roostega, märkame suure hulga kaldjoonekeste ilmumist (joon. 27). Mikroskoobiline uurimine näitab, et voolamise ajal toimuvad proovikeha sees mitmesugustes suundades nihked, mis väliselt avalduvad peenikese viirustiku ilmumises.

Et selgitada, miks viirud tekivad kaldsihis ja kust tekivad jõud, mis põhjustavad nihkumisi, vaatleme joonist 28, millel on kujutatud tõmmatud lati kaldpinnaga ärälõigatud alumine pool.

Et eraldatud osa oleks tasakaalus, on tarvilik, et kaldlõike



Joon. 27.



Joon. 28.

raskuskeskmes mõjuks latti tõmbava jõuga võrdne jõud P . Jaotame selle jõu kaheks komponendiks: lõikega risti olevaks $N = P \cos \alpha$ ja lõikepinnas olevaks $T = P \sin \alpha$. Jõud N , mõjudes risti lõikega, tekitab selles normaalpinged, jõud T aga pinged, mis asuvad samas pinnas ja mida nimetatakse *nihke-* ehk *tangentsiaalpingeteks* ja tähistatakse tähega τ (*tau*).

Tähistame lati ristlõike pindala, nagu ikka, F -iga. Jooniselt on näha, et kaldne

$$\text{pindala } mn = F : \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Järelikult } \tau &= \frac{T}{\text{pindala } mn} = P \sin \alpha : \frac{F}{\cos \alpha} = \frac{P}{F} \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \frac{P}{F} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Leitud valemist nähtub, et τ võib olla mitmesuguste väärtustega olenevalt nurgast, mille all me lõike teeme. Suurim τ väärtus saadakse siis, kui $\sin 2\alpha$ küünib suurima võimaliku väärtuseni, s. o. $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ$ ehk kui nurk $\alpha = 45^\circ$. Tangentsiaalpinge võrdub siis $\frac{\sigma}{2}$. Samasuguse arutluse abil on kerge veenduda, et pindadel, mis on kaldu 45° all, kuid teisele poole, saadakse sama suured tangentsiaalpinged. Tangentsiaalpinged püüavad nihutada üht lati osa teise suhtes, mille tagajärjel tekibki „nihe“ ja viirud, milledest oli juttu eespool.

Kuna materjal esineb terade-„kristalliitide“ kogumikuna, siis sihid, milles võivad tekkida nihked proovikeha materjali üksikutes terades, ei ühti, seepärast kohalt libisenud osad toetuvad lõppude lõpuks üksteise vastu ja nihkumine lakab. Materjali vastupanu deformatsioonile suureneb jälle, nagu näha diagrammist (joon. 26), pärast punkti C , millel ei ole erilist nimetust.

Ei tule arvata, et voolamisel materjal puruneb pindades, kus toimuvad nihked. Nihked toimuvad, kuid materjali võimet vastu pidada tõmbele ja tema osakestevahelist seost ei rikuta.

Et seda mõista, vaatleme järgmist näidet, mis sarnaneb muidugi ainult jämedalt proovikehas toimuvaga. Võtame mitu ühesugust puitketast ja, määrinud nad kokku aeglaselt

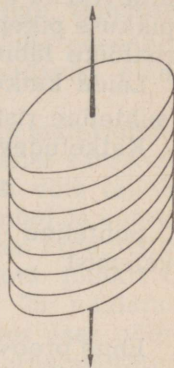
tarduva liimi või kitiga, asetame nad üksteise peale, et moodustada postikest nagu näidatud joonisel 29, kus jämedate joontega on märgitud liim- või kittvahekihid. Selline postike võib osutada küllalt suurt vastupanu tõmbele ja samal ajal on ta üksikud osad kergesti nihutatavad külgsuunas.

Pöördume tagasi tõmbediagrammi juurde. Pärast punkti C suurenevad pikenemised koormusest kiiremini, nihkedeformatsioonid keskenduvad peamiselt ühes kohas, mida võib märgata kergesti tajutavast tunduvast soojenemisest. Peale selle tekib selles kohas nähtav peenenemine — *kael*, kaela läbimõõt väheneb üha enam ja enam, deformeerumine toimub esijoones kaelas, vastupidavus langeb kiiresti ja proovikeha katkeb.

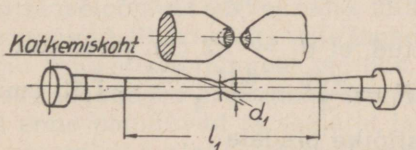
Joonisel 30 on kujutatud katkitõmmatud proovikeha pärast osade kokkupanemist. Samal joonisel on antud kõige tavalisem katkenud proovikeha otste kuju. Üks ots on tüvikoonus, mis sobib teise otsa vastavasse kraaterikujulisse süvendisse.

Punkti D lähedal (vt. diagrammi) esinevad deformatsioonid peamiselt kaelas ja koormus, veidi langedes, jääb pikenemiste kiiresti kasvades peaaegu püsivaks. Suurim koormus, vastav punktile D, jagatud *algse* ristlõike pindalaga, annab *katketugevuse* σ_b .

Nagu nähtub diagrammist, katkeb proovikeha tõeliselt punktile D vastavast koormusest väiksemal koormusel. Katkemine toimub esialgsest väiksema ristlõike pindala juures. Näib, nagu tuleks σ_b määramiseks jagada punktile D vastav koormus kaela ristlõike pindalaga. Kuid nii tavaliselt ei toimita, sest juhindudes praktilisest kaalutlusest, on arvutus-



Joon. 29.



Joon. 30.

teks vajalik teada, kui palju suudab taluda esialgse ristlõike pindala ühik, kuna me ainult sellest lõikest saame jooniselt või mõõtmise teel kindla kujutluse.

§ 13. Näide tõmbeproovi tulemuste läbitöötamisest. Terasest 2 cm-lise läbimõõduga proovikeha tõmbamisel saadi järgmised tulemused: suurim kindlakstehtud tõmbejõud enne proovikeha katkemist oli 15 200 kg; 20 cm pikkuse arvutus-
pikkuse pikenemine, mõõdetuna peale katkemist, oli 4,5 cm; ristlõike läbimõõt katkemiskohal oli 1,2 cm.

Leida katketugevus σ_b , suhteline jääv pikenemine δ ja suhteline ristlõike peenenemine Ψ (kreeka täht *psi*).

Katketugevus

$$\sigma_b = \frac{P_{max}}{F} = \frac{15\,200 \cdot 4}{3,14 \cdot 2^2} \approx 4800 \text{ kg/cm}^2.$$

Suhteline jääv pikenemine δ arvutatakse protsentides valemist

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100.$$

Enne proovimist kantakse proovikeha arvutus pikkusele l_0 jaotuskriipsud. Pärast katkemist pannakse proovikeha osad tihedalt kokku ja mõõdetakse pikkus l_1 äärmiste jaotuskriipsude vahel (vt. joon. 30). Nii toimitakse juhtudel, kui katkemine tekib proovikeha keskmises kolmandikus. Palju komplitseeritum on arvutus katkemisjuhtudel arvutus-
pikkuse äärmistes kolmandikkudes; sellega võib tutvuda materjalide proovimise juhendites.

Ülesande tingimuste põhjal pikkuse juurdekasv

$$l_1 - l_0 = 4,5 \text{ cm},$$

järelikult

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100 = \frac{4,5 \cdot 100}{20} = 22,5\%.$$

Mõõtes kokkupandud proovikeha läbimõõdu katkemise kohal (joon. 30), leiame d_1 ja selle järgi tema ristlõike pindala.

Meil on antud, et $d_1 = 1,2$ cm, järelikult

$$F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,2^2}{4} \approx 1,13 \text{ cm}^2.$$

Esialgne ristlõike pindala

$$F_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ cm}^2.$$

Suhteliseks ristlõike peenenemiseks nimetatakse suurust, mis on määratud valemiga

$$\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} \cdot 100.$$

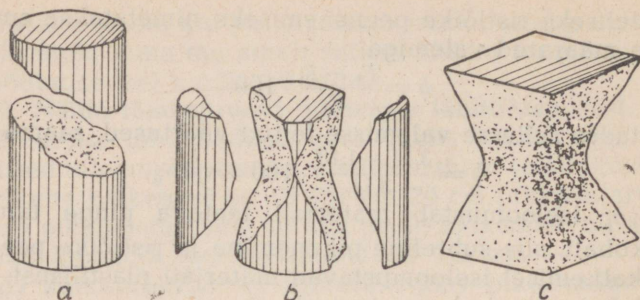
Asetades sellesse valemisse leitud väärtused, saame

$$\psi = \frac{3,14 - 1,13}{3,14} \cdot 100 \approx 64\%.$$

Kui σ_b iseloomustab materjali teatava pinge talumise vaatekohalt, siis suhteline pikenemine ja ristlõike peenene- mine katkemisel iseloomustavad materjali plastilisust, oma- dust deformeeruda koormamisel.

§ 14. Survel täheldatavad nähted. *Plastiliste materjalide*, näiteks pehme terase surumisel saadav diagramm sarnaneb osas *OABC* (joon. 26) tõmbediagrammiga. Eriti võib tähele panna, et elastsusmooduli *E* võrdsuse tõttu tõmbel ja survel sirge *OA* kalle surve ja tõmbe juhtudel on sama. Proportsio- naalsuse piir ja voolavuspiir on olemas, kuid punkti *C* järel diagramm võtab kuju, mis on joonisel 26 näidatud kriipsjoonega. Sellal, kui tõmbediagramm selles osas pöör- dub kumerusega üles, on survediagrammi kumerus pööratud alla. See näitab, et proovikeha vastupanu pidevalt kasvab. Vastupanu suurenemine tekib seetõttu, et plastilisest mater- jalist proovikeha muutub survel ristisuunas jämedamaks ja tema ristlõike pindala suureneb. *Haprast* materjalist, nagu kivid ja malm, purustatud proovikehade kujutised on antud joonisel 31.

Malmsilindrikesed purunevad kaldpinda mööda (joon. 31 a) või, mis juhtub lühikeste proovikehade puhul, puru- nemine toimub mitut kaldpinda mööda nii, et purustatud proovikehal on kas kaksikkoonuse kuju (külgmised osad on eraldunud, joon. 31 b) või kaksikpüramiidi kuju, mis on samuti liitunud oma tippudes (joon. 31 c) (betoonist kuup). Meenutades eespoolöeldut tangentsiaalpingeist kaldlõikeis, võime purunemise iseloomust survel näha, millist tähtsat osa nad sel juhul mängivad. Siiski oleks vale lugeda sellist puru- nemiskuju ainult tangentsiaalpingete mõjuks, kuna näiteks puit puruneb kas jagunedes kiududeks (survel piki kiudu), kusjuures kiud enne painduvad ja seejärel lahti murduvad, või surutakse proovikeha algul teataval määral kõrguses kokku ja kiilutakse siis ülemine osa alumise sisse.



Joon. 31.

Kahtlemata avaldavad väga suurt mõju purunemisele survele ka hõõrdejõud proovikeha ja selle tugipindade vahel, mis ei anna talle võimalust vabalt laieneda. Kui pind määrada erilise määrdega või kui lamedate pindade asemel kasutada väga nüri tipunurgaga koonilisi pindu, siis võib hõõrdejõudude pidurdavat mõju tunduval määral vähendada. Proovikeha puruneb siis pikipragude tekkimise teel kogu pikkuses. Purustava koormuse suurus saadakse teine kui tasapinnaliste määrimata tugiplaatide puhul. Plastilised materjalid muljutakse lamedaks, proovikeha äärtel tekivad mõrad. Siin ei saada selget purunemispilti. Eelöeldu tõttu *katketugevus survele, mis arvutatakse habrastel materjalidel suurima koormuse jagamise teel ristlõike algpindalaga ja milleks plastilistel materjalidel võetakse leppeliselt voolavuspiir*, omab tegelikku tähtsust ainult erinevate materjalide suhtelise tugevuse hindamisel.

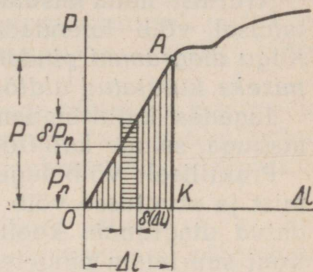
Märgime siin muu hulgas huvitava asjaoluna, et *malm* talub survet ligi kolm-neli korda paremini kui tõmmet.

§ 15. Proovikeha elastsele deformatsioonile ja kaikitõmbamisele kulutatud töö. Vaatleme, mida kujutab tõmbediagrammi pindala (joon. 32). Suurenegu jõud P_n õige väikese suuruse δP_n võrra. Proovikeha pikeneb väikese suuruse $\delta(\Delta l)$ võrra. Jõud $(P_n + \delta P_n)$, paigutudes ümber pikeneamise suuruse võrra, teeb elementaartöö, mida kujutab horisontaalselt viirutatud pindala:

$$\delta W = (P_n + \delta P_n) \cdot \delta(\Delta l) = P_n \cdot \delta(\Delta l) + \delta P_n \cdot \delta(\Delta l) \approx P_n \cdot \delta(\Delta l),$$

sest ilma suurema veata võib loobuda korrutisest $\delta P_n \cdot \delta(\Delta l)$, mis kujutab vaadeldava pindala ülaosas asuva väikese ristküliku pindala. Tõepoolest, oletame et $\delta P_n = \frac{1}{10\,000} P_n$, siis kõrvalejäetud pindala moodustab ainult $\frac{1}{10\,000}$ säilinud pindalast $P_n \cdot \delta(\Delta l)$.

Kuna kolmnurga OAK pindala võib kujutella koosnevana terve reast vaadelduga sarnastest ristkülikutest, siis kujutab ta järelikult jõu P poolt proportsionaalsuse piirini tehtud tööd. See töö koguneb proovikehasse potentsiaalse energiana ja antakse tema poolt tagasi koormusest vabanemisel, sest nagu juba öeldud, deformatsioonid on proportsionaalsuse piirini elastsed — ajutised — ning kaovad koormusest vabanemisel; kui proovikeha lüheneb, annab ta ära temasse kogunenud potentsiaalse energia.



Joon. 32.

Jooniselt on näha, et *tõmbe elastne töö*

$$U = \frac{P \cdot \Delta l}{2} \text{ (kgcm)}. \quad (8)$$

Asendades P tema tähendusega valemist (5), leiame, et

$$U = \frac{(\Delta l)^2 EF}{2l} \text{ (kgcm)}. \quad (9)$$

Leiame veel avalduse tööle, mille varub endasse proovikeha mahuühik tõmbel proportsionaalsuse piirini. Selleks on ilmselt vaja jagada kogu töö [valem (9)] proovikeha mahuga $F l$. Nimetame selle töö erielastsustööks.

$$U_{ce} = \frac{U}{F l} = \frac{P \cdot \Delta l}{2 F l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{F} \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

ehk

$$U_{ce} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (10)$$

See avaldis sobib muidugi ka survele. Määrame selle töö terase kohta, mille $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ja $\sigma_{pr} = 2000 \text{ kg/cm}^2$:

$$U_{ee} = \frac{\sigma_{pr}^2}{2E} = \frac{2000^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^6} = 1 \text{ kgcm/cm}^3.$$

Selgub, et iga kuupsentimeeter varub endasse 1 kilogrammsentimeetri tööd.

Arutlust, mida kasutasime tõmbe elastsustöö avaldise tuletamisel, võib laiendada kogu tõmbediagrammi pindalale. *Kogu diagrammi pindala väljendab proovikeha katkitõmbamiseks kulutatud üldtööd.*

Jagades katkitõmbamiseks kulutatud üldtöö proovikeha mahuga, saame *katkitõmbamise eritöö* (U_{pe}).

Praktiliselt võib lugeda katkemise alguseks kaela tekki- mist ja arvutusse võib viia mitte kogu tööd, mis on väljendatud diagrammi kogu pindalaga, vaid ainult osa temast, kuni suurimale pingele vastava punktini D .

Selle töö suurus erinevate materjalide puhul pole sama. Näiteks pehme süsinikterase puhul saadi ühel katsel $U_{pe} = 10$ kilogramm-meetrit kuupsentimeetri kohta.

Tõmbediagrammi pindala omab suurt tähtsust materjali kvaliteedi hindamisel. Materjal kõrge katketugevusega kuid väikese pikenemisega võib anda tunduvalt väiksema pindalaga diagrammi, kui võrdlemisi väikese katketugevusega kuid suure pikenemisega materjal. Esimesest materjalist proovikeha katkitõmbamiseks on vaja kulutada vähem tööd kui teisest, palju nõrgemast materjalist proovikeha puhul. Need kaalutlused omavad erilist tähtsust, kui detail satub löökide või äkiliste koormuste mõju alla. Võime neid taluda on otseses sõltuvuses katkitõmbamise eritööst.

§ 16. Aja mõju tõmbe tulemustele. Täpsed katsed näitavad, et isegi neis piires, kus deformatsiooni võib lugeda täiesti elastseks, mõjub selle suurusele aeg. Tõmmatava lati pikenemine ei teki korruga. Kui proovikeha koormata järkjärgult proportsionaalsuse piirist madalama pingeni ja seejärel jätta ta püsiva koormuse alla, siis teatava aja möödumisel tekib lisapikenemine. See nähtus on eriti tähelepanдав orgaanilise päritoluga kehadel, näiteks rihmadel. Seda nimetatakse *elastseks järelmõjuks* (aja mõjuks). Aeg üldse avaldab mõju proovi tulemustele. Nii leiti näiteks, et

tsinktraadi katkitõmbamisel, lõpetades proovi ühe minuti jooksul, oli $\sigma_b = 2400 \text{ kg/cm}^2$, kui aga proov kestis tund aega, siis $\sigma_b = 1150 \text{ kg/cm}^2$. Viies proovi läbi veel aeglase-
malt, võib saada $\sigma_b = 500 \text{ kg/cm}^2$.

Vasel ja tema sulamitel on koormatud olekus märgata pidevat pikenemist („roomavus-nähtus“) isegi toatempera-
tuuril.

Terasele on aja mõju vähem märgatav, kuid ta esineb siiski. Täpselt samuti võib teataval pinge suurusel, eriti kõr-
gendatud temperatuuril, näiteks aurukatla seinas võtta „roomavus“ hädaohtliku ulatuse.

Kuid vaatlused paljude kauemat aega töötavate masina- ja
ehitusosade juures näitavad, et pingete õige valiku puhul
deformatsioonide suurenemine aja jooksul võib olla prakti-
liselt mittemärgatav.

§ 17. Eelkoormamise mõju. Mõnikord arvatakse, et kui
mingi proovikeha on sattunud voolavuspiirist kõrgemate
pingete alla ja tal on tekkinud enamvähem tähelepanndavad
jäädavad deformatsioonid, siis on ta nagu „rebestunud“ ja
tema σ_b alaneb tunduvalt.

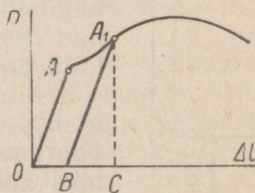
Selline arvamus osutub ekslikuks. Transpordi mugavda-
mise eesmärgil keeratakse paljud metalltooted rulli, nagu
näiteks õhukesed lehed, või keritakse keradesse, nagu traat
jne.; peale sirgestamist, kui neis pole tekitatud seejuures
lisapingeid, pole märgata nende katketugevuse alanemist.

Voolavuspiirist kõrgemaid pingeid esilekutsuvate kordu-
vate koormuste mõju uurimisel ilmnes järgmist.

Kui proovikeha on koormatud (joon. 33) punktile A_1 vas-
tava seisundini, siis koormuse eemaldamisel saame diagram-
mil sirge A_1B , mis on paralleelne OA -ga.

Joonlõik OB annab jääva pikene-
mise, mis osutub kogu pikenemise
 OC osaks; joonlõik BC vastab elaste-
sele pikenemisele. Kuna jooned OA
ja A_1B on paralleelsed, siis see
tähendab, et *elastsed pikenemised*
*ka üle proportsionaalsuse piiri allu-
vad Hooke'i seadusele.*

Teiskordsel koormamisel ilmub
diagrammile joon BA_1 . Selgub, et



Joon. 33.

eeltõmme kõrgendab proportsionaalsuse piiri. Teiskordsel koormamisel saadud pikenemine BC on eranditult elastne, kuid suuruselt on ta tunduvalt väiksem kui OC — juhul, kui eeltõmme puudus. Huvitav on märkida, et proovikehal, mis on allutatud eeltõmbele üle voolavuspiiri, ilmneb proportsionaalsuse piiri langus survele ja vastupidi — eelsurutud proovikeha omab alandatud proportsionaalsuse piiri tõmbel.

Proportsionaalsuse piiri kõrgenemine samaaegse pikene-
miste vähenemisega, nende üleminekuga täielikult elast-
seiks, meenutab väliselt nähtust, mida kohtame terase karas-
tamisel.

Kirjeldatud materjali omaduste muutumise nähtust, mis tekib külmas olekus plastiliste deformatsioonide tulemusena ja avaldub kohe pärast katset, nimetatakse *kalestuseks* (наклеп).

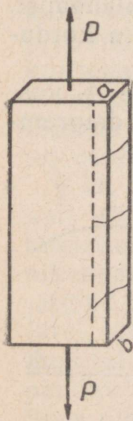
Materjalil, mis on saanud kalestuse, kõrgeneb proportsio-
naalsuse piir, kuid see-eest väheneb jääv pikenemine katke-
misel. Materjal muutub hapramaks.

Proovikeha hoidmine proportsionaalsuse piirist kõrgema
koormuse all mõjub samuti nagu korduv koormus.

Raud, teras, pronks omavad tähelepandavalt määral või-
met kalestuda. Tinal, tsingil, pliil seda võimet ei ole.

- Metallide töötlemine külvalt sepistamise, stantsimise, kääridega lõikamise, pressimise, venitamise, tõmbamise teel, mis deformeerib tugevasti materjali, kutsub neis esile kalestuse. Seda on soovitatav arvestada praktikas. Olgu näiteks riba (joon. 34) lõigatud kääridega mööda serva ab . Lõikele lähim serv, tähistatud kriipsjoonega, muutub tugeva deformatsiooni tagajärjel palju kõvemaks ja seepärast ei ole ta tõmbel suuteline välja venima nagu ülejäänud riba osa ning temas võivad kergesti tek-
kida praod. -

Osutudes paljudel juhtudel soovimatuks, võib proportsionaalsuse piiri kõrgenemist eel-
koormuse mõjul kasutada ka soodsalt. Näi-
teks külmas olekus sepistatud messing hak-
kab hästi „vedrutama“. Töörõhust kõrgemale
rõhule allutatud ja sealjuures jäävaid defor-



Joon. 34.

matsioone saanud hüdraulilise pressi silinder saab töö-
rõhkude mõjul ainult väikesi elastseid deformatsioone.
Kui temasse hästi sobitada uus kolb, siis ei esine töö juu-
res peaaegu mingisugust vedeliku läbilaskmist, kuna rõhu
all saadakse väga väike kolvilõtk.

Et anda metallile tagasi algomadused, mis ta kaotas
kalestudes, on vaja teda termiliselt töödelda, s. o. kuumu-
tada määratud temperatuurini ja, hoidnud teda selle tempe-
ratuuri juures teatava aja, jahutada aeglaselt. Sel teel taas-
tatakse küllalt täielikult metalli omadused. Tavalisi valts-
metalli sorte deformeeritakse valtsimisel tugevasti. Vaata-
mata sellele, et operatsioonid kulgevad ja lõpevad väga
kõrge temperatuuri juures, avaldub metallis eeltöötlemise
mõju. Seepärast on paljudel juhtudel kasulik valtsitud
materjali omaduste parendamiseks seda termiliselt töödelda.

§ 18. Temperatuuri mõju tõmbe tulemustele. Toodud and-
med katketugevusest ja pikenemisest katkemisel antakse
harilikult temperatuuri kohta umbes 18°C , mille juures
teostatakse proovid. Kuid paljud masinate osad töötavad
väga kõrgetel temperatuuridel, näiteks on sisepõlemootori
silindris temperatuur umbes 1700° , või siis väga madalatel
temperatuuridel (sildade osad pakasega, külmutusmasinate
osad). On huvitav tundma õppida, kuidas mõjub tempera-
tuuri muutumine σ_b ja δ suurusele.

Pehme süsinikterase katketugevus temperatuuri tõusul
kuni 300°C algul suureneb, seejärel langeb järsult. Plastili-
sus muutub eriti väikeseks 200°C juures. Sellel temperatuu-
ril muutub teras hapraks. Kuna 220° — 230°C juures terasele
tekib sinine värvus, siis nimetatakse haprust 200°C juures
sinihapruseks. Seda omadust on vaja eriti silmas pidada
sepistamisel.

Teistel metallidel on muutuse iseloom terase kohta too-
dud muutustest erinev.

Temperatuuri alanemisega kõikide metallide σ_b suure-
neb. On leitud, et näiteks pehme terase katketugevus suu-
reneb -182°C juures ligikaudu kaks korda. Kuid tempera-
tuuri alandamine, mis suurendab σ_b , suurendab koos sel-
lega ka haprust. Paljud terase sordid avaldavad -15°C või
 -18°C juures erilist haprust. See *haprus külmas olekus* on
suurel määral tingitud fosfori sisaldusest.

§ 19. Keemilise koostise mõju. Iga muutus metalli sulami keemilises koostises muudab tema mehaanilisi omadusi.

Selgeimaks näiteks on hästi tuntud sepistatava, sitke, madalat σ_b omava puhta raua omaduste muutumine süsiniku lisamisel. 0,2 kuni 1% süsiniku lisandamisel annab raud rea teraseid tõusvate katketugevustega ja vähenevate pikenevustega katkemisel.

Fosfor, nagu juba mainitud, muudab terase kergesti külmalt hapraks. Väevli lisand teeb terase punahapraks, s. o. eriliselt hapraks punase hõõgumise temperatuuril. *Kroomi* lisamine terasele põhjustab tema erilise kõvaduse kõrge proportsionaalsuse piiriga. Isegi väga tugevad löögid deformeerivad vähe sellist terast ja ta ei pragune. *Nikkel* tõstab terase katketugevust ja elastsuspiiri, kuid üheaegselt suurendab pikenemist katkemisel (plastilisust). See osutub väga kasulikuks juhtudel, kui meil on järsult muutuvad koormused. *Volframi* lisamisel säilitab teras kõvaduse isegi punase hõõguse temperatuuril, seepärast valmistatakse temast kiirlõiketerasid. Me ei hakka siin loendama teisi eriteraseid ja rääkima teistest metallidest, kuna sihiks oli anda ainult mõned näited. Üksikasju võib leida tehnoloogia ja metallideõpetuse kursusest.

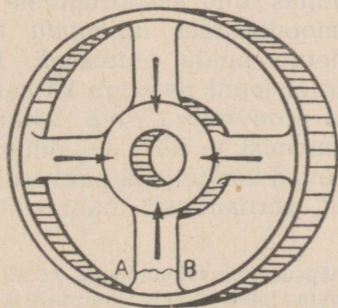
§ 20. Tehnoloogiliste operatsioonide mõju. Nägime (§ 17), millist mõju avaldab metalli tugev deformeerimine tema omadustele. Iga „sordimetall“ (mitte valatud) on tugevasti deformeeritud. Valtsimine ja sepistamine, isegi kuumutatud olekus, tõstavad veidi metalli katketugevust ja vähendavad plastilisust. Metallid omadused on pärast valtsimist ebaühtlased, olenevalt deformatsioonide erinevusest eri sihtides. Seetõttu on lehtede katketugevus piki lehte, s. o. valtsimise sihis, alati 10 protsenti kõrgem kui ristil lehte.

Valatud detailides tekivad mõnikord seetõttu, et nende üksikud osad ei hangu üheaegselt, väga suured sisepinged, mis on purunemise põhjuseks. Joonisel 35 on kujutatud rihmaratas õhukese põia ja paksu rummuga. Peale niisuguse rihmaratta valamist hanguvad esimeses järjekorras õhuke pöid ja kodarad. Järgneval rummu hangumisel hakkab see pingutama kodaraid nooltega näidatud suundades. Kodarates ja põias tekivad sisepinged. Kui kodarad pole küllalt tugevad, võivad nad katkeda mööda AB-d, nagu on näidatud

joonisel. Terasdetailide *karastamisel* kuumutatakse nad kõrge temperatuurini ja seejärel jahutatakse kiirelt. Karastamise mõju, üldiselt öeldes, avaldub kõige tugevamini pinnal, kahanedes sügavuses. Seepärast tekivad ka siin ebaühtluse tõttu sisepinged. Seda soodustavad sageli mitteühtlane kuumutamine ja väär jahutamine. Kõik see kokkuvõetult põhjustab sageli karastatud esemete erilist haprust. Mõnikord kutsub karastatud eseme purunemise esile juba väikeselt kõrguselt kivipõrandale kukkumine. Karastatud esemed purunevad nagu klaasajad. Karastatud esemete töötlemisprotsessis on vaja mõningatel juhtudel kõrvaldada pindkiht. See rikub kujunenud tasakaalu ja detail praguneb.

§ 21. Tähelepanekuid tõmbe- ja surveproovide tulemustest. Vaadeldes mitmesugustes käsiraamatutes ja õpikutes toodud tõmbe- ja surveproovide tulemuste tabeleid, võib märgata suuri erinevusi ja muutlikkust andmeis, isegi ühe ja sama materjali kohta käivates.

Peale vältimatute vaatlusvigade on põhjus siin selles, et katsete tulemusi mõjutavad kõige tähtsusetumad muudatused materjalide koostises ja ehituses (struktuuris). Viimane on olnud metalli töötlemise tingimustest. Termiline töötlemine ise ei vasta mõnikord täpselt ülesseatud tingimustele vigade tõttu temperatuurimõõtmise riistades või kuumutus-seadmete rikete või siis märkamata ebatäpsuste tõttu jahu-



Joon. 35.

tamisel. Nii näiteks võivad jahtumistingimused oleneda: 1) kiirel jahutamisel vees — selle temperatuurist; 2) kiirel jahutamisel õlis — selle sordist, temperatuurist ja olekust, 3) jahutamisel õhus — atmosfääri seisundist (eriti temperatuurist ja õhujoa liigist), 4) jahutamisel ahjus või aeglasel jahutamisel — termoisolatsiooni seisukorrast.

Oeldust võib järeldada, et tabelites esinevatesse andmetesse tuleb suhtuda suure ettevaatusega, määrates võimalust mööda kindlaks tingimused, millistes nad on saadud. Suur arv tulemusi, varustatuna *üksikasjaliste* andmetega koostisest, töötlemisest ja muust, leidub „Tehnilise entsüklopeedia“ lisa „Füüsikaliste, keemiliste ja tehnoloogiliste suuruste käsiraamatu“ II köites.¹

Enamiku süsinikteraste proportsionaalsuse piiri võib lugeda *ligikaudu* võrdseks poolega katketugevusest.

Puidu proovimise tulemused annavad erakordselt kireva pildi. Looduslikud kasvutingimused, koht tüve pikkusel, kust on välja lõigatud proovikeha, tema asetus ristlõikes (südamikust lähemal või kaugemal), paikkond, kus puu on kasvanud, tema iga, niiskus — kõik see omab väga suurt tähtsust ja seda ei või lasta silmist, et mitte teha *väga jämedaid vigu*. Näiteks leiti ühel proovimisel, et männi südamikust lõigatud proovikehal $\sigma_b = 314 \text{ kg/cm}^2$, kuid sama tüki külgmisest osast lõigatud proovikehal $\sigma_b = 942 \text{ kg/cm}^2$. Nagu näha, on katketugevus teisel juhul kolm korda suurem kui esimesel.

Puitaine tõmbetugevus on küllalt tunduv piki kiudu ja väike raadiuse suunas ning aastaringidele tangentsiaalselt, s. o. risti kiudu, moodustades *ligikaudu kümnendiku osa esimesest*, mis seletub puidu ehitusega. Puidu tõmbediagramm kujutab sirget joont peaaegu katkemise momendini.

Kivid avaldavad proovimisel isegi väikestel koormustel suuri jäävaid pikenemisi ja kõrvalekaldumisi Hooke'i seadusest. Nad purunevad kas teljega paralleelset lõiget mööda või kaldpinnaliselt, sarnanevalt habrastele materjalidele, näiteks malmile.

¹ Täielikumaid ja täpsustatumaid andmeid kõikide kasutatavate materjalide markide kohta leiab lugeja hõlpsalt koguteose „Машиностроение. Энциклопедический справочник“ 3. ja 4. köites. (Tõlke vastut. toimetaja märkus.)

Rihmad, köied, kangad ja muud sellesarnased materjalid, põhiliselt orgaanilise päritoluga, näitavad proovimisel kas väga madalat proportsionaalsuse piiri või selle puudumist, avaldades juba madalatel pingetel kõrvalekaldumist Hooke'i seadusest.

Riide ja paberi proovimisel ei määrata harilikult katketugevust ühikutes kg/cm^2 , vaid *riide või lehe jooksvale laiusühikule* (sentimeeter või meeter) *tuleva purustava koormuse suurusega kilogrammides*.¹

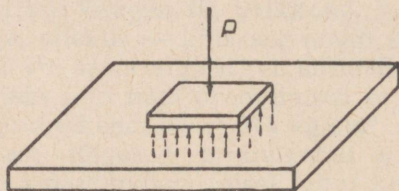
Sageli arvutatakse sealjuures veel „purustav pikkus“, s. o. tüki pikkus, milles omakaalust tingitud pinge võrdub katketugevusega.

¹ ГОСТ'i kohaselt väljendatakse riide katketugevus 50 mm-lise proovikeha kohta kilogrammides [kg] või siis sellest tingimuslikult kilogrammides laiuse 1 m kohta [kg/m]. (Tõlke vastut. toimetaja märkus.)

IV PEATUKK.

PINDSURVE. KÕVADUS.

§ 22. **Pindsurve (muljumine).** Kui suruv jõud mõjub mingi keha suhteliselt väikesele osale (joon. 36), siis ta põhjustab *kohaliku survedeformatsiooni*. Selline kohalik deformatsioon, mis *ei laiene suurele sügavusele*, saadakse kahe keha kokkupuute pindadel. Niisugustel juhtudel öeldakse, et meil on tegemist *pindsurvega* ehk muljumisega.



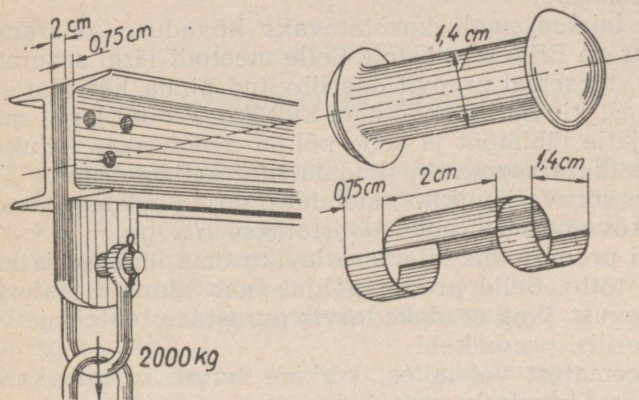
Joon. 36.

Rööbastel veerev veduri- või vaguniratas tekitab muljumise ratta ja rööpa kokkupuute-kohas. Seejuures tekib kokkupuute teataval pinnal, mitte aga joont mööda, nagu see peaks olema ratta ja rööpa absoluutse kõvaduse puhul. Rööbas tekitab oma talla all liipri muljumise. Sellise muljumise jälgi on sageli näha vanadel liipritel. Toome veel ühe näite. Joonisel 37 on kujutatud tala ots temale riputatud koormaga. Needid, milledest üks on näidatud eraldi paremal, on muljutud viirutatud poolsilindrilistel pindadel.

Muljumine on kohalik deformatsioon; kõikidel juhtudel, kui võib oletada pindsurve enam-vähem ühtlast jaotust, võib

lubada pindsurvepingetele tunduvalt suuremaid väärtusi kui survepingetele.

Näiteks võib võtta neetidele meie normide järgi pindsurvepinge kuni 2400 kg/cm^2 . Siiski poleks õige lubada suuri pindsurvepingeid seal, kus jäävad deformatsioonid rasken-



Joon. 37.

davad demonteerimist. Kujutleme, et joonisel 37 toodud ühendis on mingil kaalutlusel neet asendatud võllikuga. Pindsurvepinge teataval väärtusel võtab võllik joonisel 38 näidatud kuju, s. o. muutub astmeliseks, ja siis ei saa teda avausest välja võtta. Neetliites eeltoodu ei oma tähtsust, kuna see liide pole demonteeritav.



Joon. 38.

§ 23. Kõvadus. Kahe keha kokkusurumisel võib üks teise pinnasse tungides jätta jälje (süvendi), mis kujutab jäävaid muljumisdeformatsioone. Teiste tingimuste võrdsusel on jälg

seda suurem, mida kõvem on surutav keha ja mida pehmem on survet vastuvõttev keha.

Seni pole tehnikas püstitatud ühtset *kõvaduse* definitsiooni. Levinuma definitsiooni järgi nimetatakse *kõvaduseks keha omadust osutada vastupanu teise (kõvema) keha sissetungimisele*.

Üheks laialdasemalt kasutatavaks kõvaduse määramise meetodiks on Brinelli meetod. Selle meetodi järgi surutakse siledasse, täpsemal proovil aga lihvitud pinda hästikarastatud terasest kindla läbimõõduga kuulike. Proovi lõpul mõõdetakse jälje läbimõõt ja selle põhjal määratakse lohukese sfääriline (kera segmendi) pindala ruutmillimeetrites.

Jagades suruva jõu (kilogrammides) jälje pindalaga, saame Brinelli kõvadusarvu, mida tähistatakse H_B -ga.

Brinelli proov leidis laialdase leviku oma lihtsuse ja käepärasuse tõttu. Selle proovi põhjal saab hinnata materjali katketugevust, ilma et oleks tarvis purustada tooteid ja valmistada erilisi proovikehi.

Üks uuematest valemitest kõikide *terase* sortide katketugevuse määramiseks esineb kujul:

$$\sigma_b = 0,35 H_B + 2.$$

Katketugevus saadakse kg/mm^2 võimaliku veaga ühele või teisele poole ligikaudu 10%.

Näide 4. Teraštoote proovimisel leiti, et tema Brinelli kõvadus $H_B = 100$. Kui suur on antud materjali σ_b ?

Leiame:

$$\sigma_b = 0,35 \cdot 100 + 2 = 37 \text{ kg/mm}^2 = 3700 \text{ kg/cm}^2.$$

Kuna võimalik erinevus on 10%, mis moodustab 370 kg/cm^2 , siis võimalikud katketugevuse väärtused asuvad vahemikus

$$\sigma_b = 3700 - 370 = 3330 \text{ kg/cm}^2 \text{ kuni}$$

$$\sigma_b = 3700 + 370 = 4070 \text{ kg/cm}^2.$$

DUNAAMILISTE KOORMUSTE MÕJU.

§ 24. Järsku rakendatud koormuse mõju. Toetades alt traadi otsa kinnitatud plaadikest, asetame sellele koormuse P (joon. 39). Kõrvaldades toe, osutub koormus P kogu oma suuruses järsku rakendatuks traadile ja venitades seda, põhjustab pikenemise, mida võib nimetada *dünaamiliseks pikenemiseks* tähistusega $(\Delta l)_{dün}$.

Oletame, et traadi mõõted ja koormuse suurus on valitud nii, et pinge traadis ei ületa proportsionaalsuse piiri. Koormus saavutab madalaima asendi, kui tema poolt tee pikkusel $(\Delta l)_{dün}$ tehtud töö $W = P(\Delta l)_{dün}$ võrdub traadi elastsusjõudude tööga.

Viimase suurus valemi (9) põhjal §-st 15 on:

$$W = \frac{(\Delta l)_{dün}^2 EF}{2l}.$$

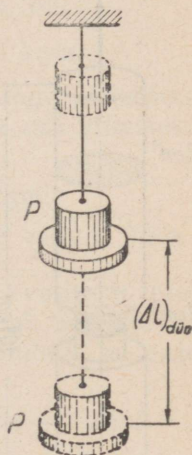
Võrrutades tööde avaldised, saame:

$$P(\Delta l)_{dün} = \frac{(\Delta l)_{dün}^2 EF}{2l}.$$

Määrates sellest võrdusest $(\Delta l)_{dün}$, leiame:

$$(\Delta l)_{dün} = 2 \cdot \frac{Pl}{EF}.$$

Kuid valemist (5) §-s 4 suurus $\frac{Fl}{EF} = \Delta l$, s. o. pikenemine, mis saadakse järk-järgulisel koormamisel. Järelikult



Joon. 39.

$$(\Delta l)_{dün} = 2\Delta l, \tag{11}$$

s. o. järsku rakendatud koormus põhjustab kaks korda suurema pikenemise, kui tekib sama koormuse järk-järgulisel üleandmisel.

Jagades valemi (11) mõlemad pooled traadi algpikkusega l , saame

$$\varepsilon_{dün} = 2\varepsilon.$$

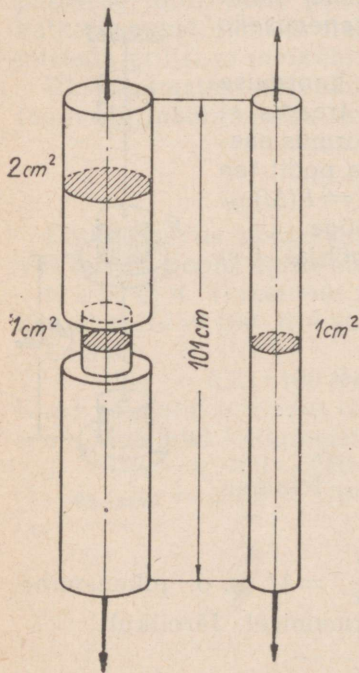
Korrutades mõlemaid pooli E -ga, saame Hooke'i seaduse [valem (4)] põhjal:

$$\sigma_{dün} = 2\sigma,$$

s. o. järsku rakendatud koormus tekitab kaks korda suurema pinget kui järk-järgult suurenev koormus.

§ 25 Vastupidavus löökkormusele.

Kujutleme, et koormus P (joon. 39) tõsteti teatavale kõrgusele ja seejärel vabastati. Kukkudes plaadikesele, ta venitab traati. Seejuures rakendub koormus *löögiga*. § 15 põhjal võime öelda, et traadi võime vastu pidada sellele koormusele oleneb *katkitõmbamise eritöö* suurusest. Kui traadi, mille ruumala on F_l , purustamiseks vajalik töö W_{pe} . F_l on suurem langeva koorma poolt tehtud tööst, siis see koormus pole suuteline purustama traati. Vastupanu löögile oleneb pikenemisest ja katketugevusest, kuna nende suurustega määratakse tõmbediagrammi pind. Peale selle oleneb see ka venitatava keha kujust. Eriti ohtlikud on löökidele vastupanu vähenemise seisukohast järsud ristlõike muutused, sissetreitised, -saetised jms.



Joon. 40.

Selgitame öeldut arvulise näitega.

Näide 5. Võtame ümarterasest varda (joon. 40) ristlõike pindalaga 2 cm^2 ja pikkusega 101 cm , millel on 1 cm pikune peenem osa ristlõike pindalaga 1 cm^2 . Valmistame veel teise sama pikkusega ja samast materjalist, kuid konstantse 1 cm^2 -lise ristlõike pindalaga varda. Olgu varda materjalil

katketugevus	$\sigma_b = 4000 \text{ kg/cm}^2$,
proportsionaalsuse piir	$\sigma_{pr} = 2000 \text{ kg/cm}^2$,
elastsusmoodul	$E = 2,10^6 \text{ kg/cm}^2$,
katkitõmbamise eritöö	$U_{pe} = 10 \text{ kgm/cm}^3$.

Staatilisel koormuse rakendamisel on vaja mõlema varda purustamiseks ühesuurusi jõude, kuna esimese varda „ohtlik“ lõige on samasuure ristlõike pindalaga kui teine. See ei kehti aga löökkoormuse puhul. Tõepoolest, paremal kujutatud proovikeha puruneb, kui tema ristlõikes pinge võrdub 4000 kg/cm^2 . Töö, mis selleks kulub, on:

$$W_1 = U_{pe} \cdot Fl = 10 \cdot 1 \cdot 101 = 1010 \text{ kgm.}$$

Vasaku, väljalõikega varda katkemisel on pinge väljalõike kohal samuti 4000 kg/cm^2 , järelikult peenema osa viimiseks purustava deformatsioonini kulub tööd

$$W_2 = U_{pe} \cdot Fl_1 = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10 \text{ kgm.}$$

Samal ajal on jämedamates osades pinged ainult $0,5 \sigma_b$, s. o. 2000 kg/cm^2 .

§-s 15 oli leitud vaadeldava terasega sama kvaliteeti terasele erielastsustöö tõmbel pingeni 2000 kg/cm^2 . See võrdus 1 kgcm/cm^3 . Tähenab jämedamate osade tõmbele on vaja kulutada tööd

$$W_3 = U_{pe} F_1 l_2 = 1 \cdot 2 \cdot (101 - 1) = 200 \text{ kgcm} = 2 \text{ kgm.}$$

Kogu töö, mis on vajalik väljalõikega varda katkitõmbamisel, on

$$W_2 + W_3 = 10 + 2 = 12 \text{ kgm}$$

samal ajal, kui väljalõiketeta varras vajab 1010 kgm , s. o. ligikaudu 80 korda enam, mis annab talle võimaluse taluda ka 80 korda tugevamat lööki. Selgub, et kui väljalõikega vardale anda peenema osaga võrdne konstantne läbimõõt, siis sama varras muutub vastupidavamaks löökkoormusele. Selle

näite uurimisel selgub, et ristlõike muutumist, eriti aga järsku muutumist, peame vältima detailidel, milledele mõjub löökkoormus. Selgub ka, et mida lühem on väljalõike pikus, seda kahjulikum on selle mõju, kuna seega väheneb kõige enam löögi tööd, nimelt W_2 , endasse võttev osa.

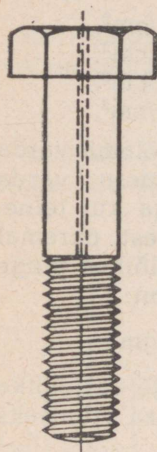
Poldid, mida sageli koormatakse löökidega, omavad tavaliselt keerme välisläbimõõduga võrdset varva läbimõõtu. Keerme mõju sellisele poldile võib võrrelda sisselõigete mõjuga. Et kõrvaldada seda kahjulikku mõju, puuritakse mõnikord poldi varvasse niisuguse läbimõõduga auk, et varva iga ristlõike pindala võrduks keermestatud osa ristlõike väikseima (südamiku) pindalaga (joon. 41).

Üldiselt kohalikud peenenemised nagu keskendavad endile löögi, seepärast peab alati püüdma selle poole, et keha ristlõiked muutuksid sujuvalt.

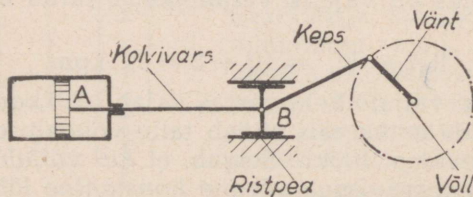
Kohalikel vigadel, nagu praod, vahekihid, räbupesad, õhumullid ja lati mittehomoogensus, on ristlõike muutumisega analoogiline mõju. Lati üksikute osade ebäühtlane plastilisus keskendab löögi enam deformeeruvatele ja vähem vastupidavatele osadele

ja viib samadele tulemustele kui ristlõike pindala vähendamine.

§ 26. Väsimus. Sageli mõjuvad masinate ja ehitiste osadele jõud, mis perioodiliselt ja korduvalt muutuvad kas suuruselt või suuruselt ja suunalt. Näitena (joon. 42) võib tuua

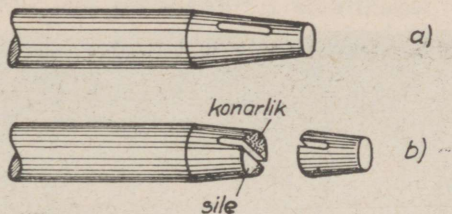


Joon. 41.



Joon. 42.

aurumasina kolvivarre *AB*, mida muutuvate jõudude poolt kord tõmmatakse, kord surutakse. Joonisel 43 on kujutatud veduri niisuguse kolvivarre purunenud ots, mis kinnitatakse ristpeasse *B* (joon. 42) sisselõikesse asetatava kiilu abil. Kolvivarres vaheldub tõmme pidevalt survega. Sellist



Joon. 43.

koormust nimetatakse *märkimuutvaks* (tõmme — positiivne, surve — negatiivne). Pinge kõigub töö ajal suurima positiivse ja suurima negatiivse väärtuse vahel. Kolvivars töötas palju aastaid, ilmutamata mingeid läheneva purunemise tunnuseid, kuni äkki murdus ja pealegi siis, kui vedur vedas ainult kahte tühja vagunit.

Katkemiskohal (joon. 43 b) polnud mingit peenenemist. Kolvivars katkes, nagu olnuks ta malmist või klaasist. Katkemispinnas võis eraldada kahte tsooni, üks võrdlemisi sile (peeneteraline) ja teine jämedalt konarline („kristalliline“), nagu see on iseloomulik habraste kehade murrule. Kolvivarre purunenud koha naaberosade uurimine näitas, et materjal oli säilitanud oma esialgsed omadused.

Niisugust suure arvu korduvalt muutuvate pingete mõjul tekkivat purunemisnähtu nimetatakse „väsimuseks“ ja seda täheldatakse mitmesuguste materjalide juures.

Väsimuse põhjused ja seejuures materjalis toimuvad sise-mised muutused pole seni täielikult välja selgitatud. Vastavatel laboratoorsetel masinatel vahelduvate koormustega korduvalt koormatud proovikehade mikroskoobiline uurimine näitas (joon. 44), et peale teatavat arvu koormamisi ilmub mikroskoobis nähtavatele materjali terakestele rida kriipse, mis tõestavad terakeste osade nihete olemasolu.

Koormuse edasisel mõjumisel kriipsud muutuvad juuspragudeks, mis ühenduvad praoks, mille ümber keskendub ka edasine purunemine, nagu võib otsustada mikroskoopiliselt peeneteralise tolmu ilmumise põhjal. Koormuse vaheldumisel

Koormamata

Sama pärast 27 koormamist tõmbele ja survele

Sama pärast 424 koormamist



Joon. 44.

pragu kord sulgub, kord avaneb. Seejuures muutuvad praoseinad kokkuvajutamisest siledamaks. Pragu kasvab pidevalt ja kui ristlõige on küllalt vähenenud, toimub purunemine. Kuna purunemine keskendub ühte lõikesse, siis on arusaadav, miks naaberkohtades ei avastata materjali omaduste muutust. Tekkinud pragu mõjub väljalõikena, s. o. põhjustab pingete kontsentratsiooni ja vähendab vastupidavust löökkoormustele (dünaamilistele koormustele). Väsimusest tingitud purunemise moment läheneb märgatamatult, detail, mida ähvardab purunemine, näib töötavat laitmatult. Purunemine valmistub ette pika aja jooksul ja lõpuks toimub äkki ning ootamatult, kui hädaohtu ei eeldatagi.

Käesoleval ajal hoolitseb teadus vahendite hankimise eest võitluseks materjalide väsimusega, mis omab erilist tähtsust kiirekäiguliste masinate leviku ja sagenevate avariide tõttu. Pidades väsimusest puruneda ähvardavate detailide juures silmas teatavaid projekteerimisreegleid, valmistamise

tehnoloogilist protsessi ja perioodilist järelevaatust, võib saavutada täiesti rahuldavaid tulemusi.

Juba möödunud sajandil tehti kindlaks, et muutuvatel koormustel puruneb süsinikteras madalamatel pingetel kui rahulikul (staatilisel) koormusel. Kui võtta tõmbetugevuseks staatilisel koormusel 1, siis nullist kuni P -ni muutuvate koormuste puhul see pinge on $\frac{2}{3}$ staatilisest, kuid koormuste sümmeetrilise muutumise puhul $+P$ kuni $-P$ ainult $\frac{1}{3}$ staatilisest. Neid tulemusi kontrolliti korduvalt ja toodud vahekorrad leidsid üldiselt ka kinnitamist, kuigi ilmnes, et kaasaegsete materjalide suhtumine koormuse mitmesugusesse rakendamisviiside „ohtlikusse“ on veidi teine. Siiski paljudes, isegi viimasel ajal ilmunud käsiraamatutes, on toodud samad vahekorrad.

Õige lubatava pinge valikuga võib vältida väsimusest tekkivat purunemist. Suurimat pinget, mida proovikeha võib taluda ilma purunemiseta korduval *märkimuutval* koormusel, nimetatakse *väsimuspiiriks*. Nagu näeme, võetakse ta sageli võrdseks $\frac{1}{3} \sigma_b$. Uuemad uurimused näitavad, et väsimuspiiriks on õigem võtta 0,4 ja isegi $0,5 \sigma_b$.¹

Detailide valmistamisel, mida võib ähvardada purunemine väsimusest, tuleb pöörata erilist tähelepanu materjali kvaliteedile, kahanemistühemikkudele (lunkrid valu puhul), sepsitamispargudele, räbu sissevaltsimistele jm., on vaja vältida ristlõike järske muutusi, avade puurimist, soonte tegemist jm. Vastupanu väsimusele võib erakordselt tugevasti tõsta, kõrvaldades pinna konarused (teostades peenlihvimist), vältides lõiketera vagusid, kriimustusi, templite ja tähtede sissepressimist jm.

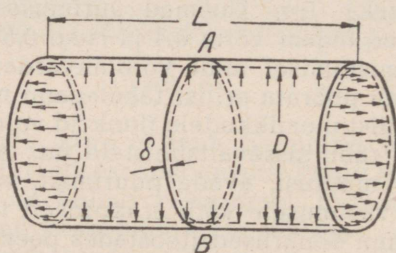
Kõik esitatud konstruktsiooni ja töötlemise vead, soodustades üksikutes kohtades pingete kontsentratsiooni tekkimist, võivad olla põhjuseks „pesa“ tekkimisele, kust saab alguse väsimuspragu.

¹ Viimaste uurimuste kohaselt (prof. I. Oding jt.) ei või staatilise katketugevuse ja väsimuspiiri vahel kehtida mingit seost, kuna nende nähtuste loomused on järsult erinevad. Ainult väsimusnähte mitteküldaldane tundmine sunnib meid kasutama, ja sedagi äärmiselt ettevaatlikult, katkeandmetest tuletatud seoseid väsimuspiiri ja staatilise katketugevuse (või ka voolavuspiiri) vahel. (Tõlke vastut. toimetaja märkus.)

VI PEATUKK.

TÖMBE JA SURVE ARVUTUSED.

§ 27. Vedeliku või gaasi siserõhule töötavate õhukeseseinaliste anumate arvutus. Olgu kinnises silindrilises anumas (joon. 45) gaas p -atmosfäärilise (kg/cm^2) rõhu all. Siserõhust tuleb alati aru saada kui manomeetrisest, s. o. atmosfääri ülerõhust (tähis atü). Rõhk kandub edasi igas suunas ühtlaselt.



Joon. 45.

Rõhk anuma põhjale P_1 võrdub põhja pindalaga korrutatud rõhuga selle pindala ühikule:

$$P_1 = \frac{\pi D^2}{4} p.$$

Sama suur rõhumine, kuid suunalt vastupidine, esineb ka teisel põhjal. Siit selgub, et anum on oma telje sihis tõmmatud. Anuma ristlõikes, näiteks AB , tekib tõmbepinge σ_1 , mille leiame, teades ristlõike pindala. Viimane kujutab endast nii-

suguse rõnga pindala, mille siseläbimõõt on D ja laius võrdub seina paksusega δ . Tavaliselt *seina paksus on läbimõõduga võrreldes õige väike* (näiteks $\delta = 1$ cm, aga $D = 100$ cm) ja seepärast võib rõnga pindala küllaldaselt suure täpsusega avaldada nii:

$$F_1 = \pi D \delta.$$

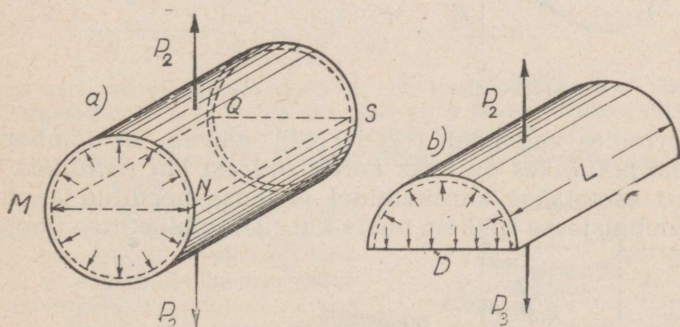
Nüüd võime leida *tõmbepinget anuma ristlõikes*. Ta võrdub:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} = \left(\frac{\pi D^2}{4} p \right) : \pi D \delta$$

ehk

$$\sigma_1 = \frac{D p}{4 \delta} \quad (12)$$

Et leida tõmbepinget *anuma pikilõikes* (piki moodustajaid) (joon. 46 a), uurime jõude, mis põhjustavad selle pinget. Need on jõud P_2 , ülemisele ja alumisele poolsilindrile mõjuvad



Joon. 46.

resultantrõhud. Neid ei saa, nagu jooniselt näha, leida, korrutades poolsilindri pindala rõhuga p , kuna eri punktides radiaalrõhud ainult osaliselt ühtivad P_2 sihiga.

Kujutleme, et anum on lõigatud lahti diametraallõikes $MNSQ$ ja suletud alt (joon. 46 b) tasapinnalise seinaga. Ilmselt jääb silindri seinale mõjuvate rõhkude resultantrõhk P_2

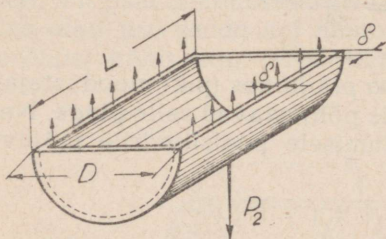
samaks kui terve anuma puhul, kuid jooniselt on näha, et P_2 peab tasakaalu puhul võrduma tasapinnalisele seinale mõjuvate rõhkude resultantrõhuga P_3 ; saame:

$$P_3 = P_2 = DLp. \quad (13)$$

Arvutuse lihtsustamiseks võetakse, et silindrit pikilõikes purustav jõud P_2 jaguneb kahele pikiribale (joon. 47) pindalaga

$$F_2 = 2\delta L.$$

Nagu näha, ei võeta arvesse kahte otpindala $D\delta$, mille tõttu me saame anuma pikilõikes veidi kõrgendatud pingeväärtuse:



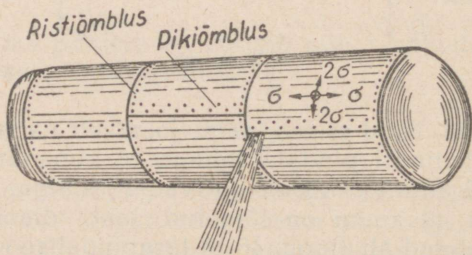
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{F_2} = \frac{D L p}{2 \delta L}$$

ehk

$$\sigma_2 = \frac{D p}{2 \delta}. \quad (14)$$

Joon. 47.

Võrreldes valemeid (12) ja (14), näeme, et *tõmbepinge anuma pikilõikes on kaks korda suurem kui ristlõikes*. Seepärast asetatakse aurukateldel ja üldse needitud anumatel pikiõmblustesse rohkem neete kui ristiõmblustesse (joon. 48)



Joon. 48.

ning keevitatud õmbluste puhul pööratakse erilist tähelepanu pikiõmblustele. Kui katla proovimisel antakse talle üle-määrane hüdrauliline ülerõhk, siis katel hakkab tavaliselt enne lekkima pikiõmblusest.

Peale pingete määramise olemasolevate silindriliste anumate lõigetes tuleb uue katla konstrueerimisel määrata selle seinapaksus antud lubatava pingega R_t järgi. See paksus peab olema määratud hädaohtlikuma lõike, nimelt pikilõike järgi. Asetades valemis (14) σ_2 asemele lubatava pingega R_t ja määratud δ , saame:

$$\delta = \frac{Dp}{2R_t}. \quad (15)$$

§ 28. Ulesandeid anumate arvutamiseks.

12. Määrata seinapaksus aurukatlal, mille läbimõõt $D = 1,8 \text{ m}$ ja mis töötab rõhu all $p = 10 \text{ atü}$, kui katla pikiõmblus on kaherealine ühelõikeline neetõmblus (nõrgestuskoefitsient $\varphi = 0,7$), lubatav pingega $R_t = 760 \text{ kg/cm}^2$ ja paksuse tagavara kulumiseks (rooste ja muu) $c = 3 \text{ mm}$.

Lahendus: Valemist (15) leiame esialgse seinapaksuse:

$$\delta_1 = \frac{Dp}{2R_t} = \frac{180 \cdot 10}{2 \cdot 760} \approx 1,2 \text{ cm}.$$

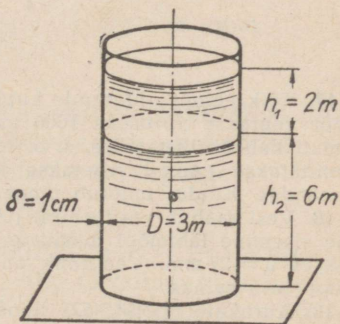
Kuna katel on pikisuunas needitud ja seega läbipuuritud aukude tõttu nõrgestatud 30% ($\varphi = 0,7$), siis peab seinapaksuse võtma võrdseks $\delta_2 = \delta_1 : 0,7 \approx 1,7 \text{ cm} = 17 \text{ mm}$.

Pidades silmas võimalikku kulumist, tuleb lõplikuks seinapaksuseks $\delta = \delta_2 + 3 \text{ mm} = 20 \text{ mm}$.

13. Määrata silindrilise ühes tükis punasest vasest anuma seinapaksus, kui ta läbimõõt $D = 60 \text{ cm}$, rõhk anumapõhjal $p = 4 \text{ atü}$ ja lubatav pingega $R_t = 400 \text{ kg/cm}^2$.

14. Silindriline paak (joon. 49) on täidetud kõrguseni h_2 vedelikuga, mille erikaal on 3 ja selle peal kõrguses h_1 veega. Määrata tõmbepinge paagi alumise lehe madalaimas osas. Paagi seinapaksus $\delta = 1 \text{ cm}$.

Märkus. Rõhk p võrdub vee-samba (kõrgus h_1) ja vedelikusamba (erikaal 3 ja kõrgus h_2) kaaluga. Samba ristlõige tuleb võtta võrdseks 1 cm^2 -ga.

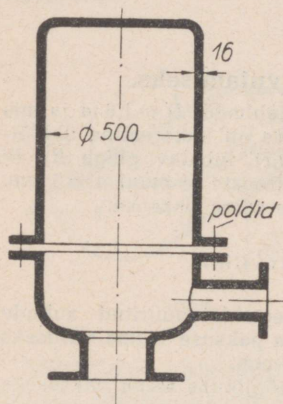


Joon. 49.

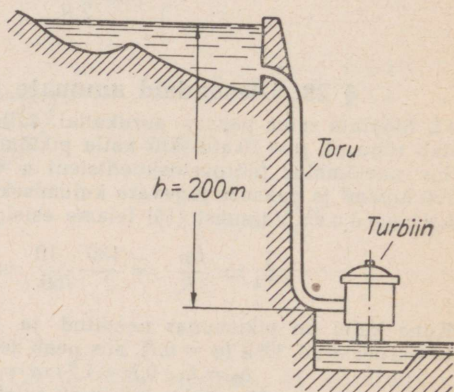
15. Leida poolkerakujulise anuma põhja seinapaksus, kui kera läbimõõt $D = 1,2$ m, rõhk anuma sees $p = 5$ atü ja lubatav pinge $R_t = 750$ kg/cm².

Märkus. Kõigepealt tuleb leida rõhk poolkerale joonise 46 juures läbiviidud arutluse alusel.

16. Joonisel 50 on antud pumba silindrilise õhukupli pikilõige. Kuppel töötab rõhu all 10 atü. Tema läbimõõt $D = 500$ mm ja seinapaksus $\delta = 16$ mm. Milliste pingetega σ_1 ja σ_2 rist- ja pikilõikes töötab kuppel? Mitu 1"-se läbimõõduga polti on vaja asetada kupli äärikusse, kui lubatav tõmbepinge poltides $R_t = 480$ kg/cm²? (Poldi keermetatud osa siseläbimõõt $d_{sis} \approx 21,3$ mm.)



Joon. 50.

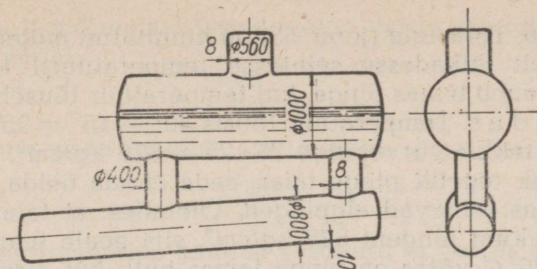


Joon. 51.

17. Kõik eelmise ülesande kupli mõõted kahekordistatakse, s. o. läbimõõt võetakse võrdseks 1000 mm, seinapaksus 32 mm. Rõhk kuplis samuti kahekordistatakse, s. o. tõuseb kuni 20 atü. Poldide arv, millega kinnitatakse kuppel, võetakse kaks korda suurem kui saadi eelmises ülesandes. Kuidas muutub pinge kupli seinas ja poltides?

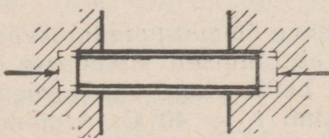
18. Vesi saabub vesiturbiini juurde (joon. 51) torude kaudu, milledest ühe sisemine läbimõõt masinate hoone juures $D = 1850$ mm ja seinapaksus $\delta = 27$ mm. Vee rõhk on seal 20 kg/cm². Leida suurim tõmbepinge toru seinas.

19. Aurukatel (joon. 52) koosneb ülemisest ja alumisest katlast, ühendustorudest ja aurukogujast. Kõik õmblused on keevitatud. Leida pinged kõige enam ja kõige vähem ohtlikes katla osades, arvestamata vee ja auru raskust, kui auru rõhk $p = 16$ atü.



Joon. 52.

§ 29. **Temperatuuripinged.** Olgu terastala (joon. 53) oma otstega jäigalt kinnitatud kiviseintesse. Temperatuuri tõusmisel (või langemisel) ta püüab pikeneda (või lüheneda). Seda pikenemist (lühenemist) takistavad seinad. Oletame, et temperatuur tõusis $t^{\circ}\text{C}$ võrra. Tala suhteline pikenedamine võrdub αt , kus α on joonpaisumise koefitsient, s. o. temperatuuri tõstmisel 1°C võrra saadav suhteline pikenedamine. Eeldame, et seinad ei deformeeru. Nad ei lase talal pikeneda, nagu näidatud kriipsjoonega, ja nende mõju on võrdvõime-



Joon. 53.

line suruvate jõudude mõjuga, mis tekitavad suhtelise lühenemise, mille suurus on αt , s. o. hävitavad pikenedamise.

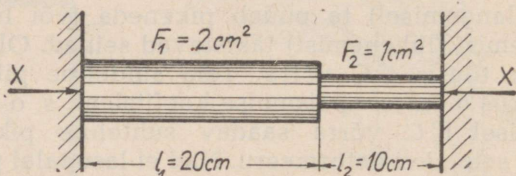
Rakendades Hooke'i seadust, leiame survepinge:

$$\sigma = \varepsilon E = \alpha t E.$$

Võttes terase jaoks $\alpha = 0,0000125$ ja $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, leiame, et temperatuuri tõstmisel ühe Celsiuse kraadi võrra suureneb survepinge $\Delta\sigma = \alpha E = 0,0000125 \cdot 2 \cdot 10^6 = 25 \text{ kg/cm}^2$ võrra. Sama palju suureneb ka tõmbepinge temperatuuri alandamisel ühe kraadi võrra.

Näide 6. Terastala (joon. 53) on kinnitatud mõlema otsaga absoluutselt jäikadesse seintesse temperatuuril 15°C . Kui palju suureneb temas pinge, kui temperatuur tõuseb 40°C -ni.

Lahendus. Temperatuur tõusis $40^{\circ} - 15^{\circ} = 25^{\circ}\text{C}$ võrra, järelikult tekkis survepinge $25 \cdot 25 = 625 \text{ kg/cm}^2$. Kui suur on üld- ehk tegelik pinge talas, seda ei saa öelda, kui pole teada temas esinevad algpinged. Oletades, et tala oli enne tõmmatud kuni pingeni 625 kg/cm^2 , siis peale temperatuuri tõusmist 25°C võrra on pinge temas null; kui, vastupidi, ta oli surutud pingeni, ütleme 200 kg/cm^2 , siis peale temperatuuri tõusu 25°C võrra on pinge temas $200 + 625 = 825 \text{ kg/cm}^2$.



Joon. 54.

Näide 7. Astmeline ümmargune terasvarras (joon. 54) on kinnitatud otstega absoluutselt jäikadesse seintesse temperatuuril $t_0 = 15^{\circ}\text{C}$. Leida pinge vardas peenemas osas temperatuuri tõusul kuni $t_1 = 40^{\circ}\text{C}$. Algpinge on null. $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$; $\alpha = 0,0000125$.

Lahendus. Siin eelmises näites toodud lahenduskäik ei kõlba, kuna vardas osad toetuvad ühest otsast absoluutselt jäikadele seintele, teisest otsast aga teineteisele, s. o. omavahel võimalust, ületades vastupanu, pikeneda. Pikenedes vardas osad suruvad seintele. Tähistame seinte reaktsioonid vardale X -iga. Nad on muidugi võrdsed, kuna parem ja vasak vardas osad suruvad teineteisele võrdse jõuga.

Rakendades vardale reaktsioonid, võime vaadelda seda vabana. Temperatuuri tõusmisel kumbki vardas osa pikeneb, kuid suruvate jõudude mõjul lüheneb.

Vardas vasakpoolne osa pikeneb temperatuuri tõusul $+ \alpha (t_1 - t_0) l_1$ ja parempoolne osa $+ \alpha (t_1 - t_0) l_2$ võrra.

Jõudude X mõjumisel vasakpoolne varda osa lüheneb valemiga (5) põhjal

$$\frac{X l_1}{F_1 E}$$

võrra, kuna parempoolne osa lüheneb sama jõu mõjul

$$\frac{X l_2}{F_2 E}$$

võrra.

Kuna seintevaheline kaugus ei muutu ja varras ei purune, siis peab mõlemate osade pikenedemiste ja lühenemiste summa võrduma nulliga. Avaldame selle tingimuse algebraliselt:

$$\alpha (t_1 - t_0) l_1 + \alpha (t_1 - t_0) l_2 - \frac{X l_1}{F_1 E} - \frac{X l_2}{F_2 E} = 0.$$

Lihtsustades saame:

$$\alpha (t_1 - t_0) (l_1 + l_2) - \frac{X}{E} \left(\frac{l_1}{F_1} + \frac{l_2}{F_2} \right) = 0,$$

kust

$$X = \frac{E \alpha (t_1 - t_0) (l_1 + l_2)}{\frac{l_1}{F_1} + \frac{l_2}{F_2}}.$$

Asetades saadud avaldisse ülesandes antud väärtused, leiame, et

$$X = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,0000125 (40-15) (20+10)}{\frac{20}{2} + \frac{10}{1}} \approx 937,5 \text{ kg}.$$

Otsitav pingeline peenemas osas

$$\sigma = \frac{X}{F_2} = \frac{937,5}{1} = 937,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Kui varda jämedamat osa treida maha peenema osa läbi-mõõduni, siis vastavalt näitele 6 oleks pingeline olnud vaid 625 kg/cm^2 .

Vaadeldud näiteist selgub, et temperatuuripinged võivad tekkida ainult niisugustes varrastes, mis temperatuuri muutudes ei saa vabalt pikeneda ega lüheneda.

§ 30. Staatiliselt määramatute ülesannete mõiste. Esineb niisuguseid tasakaalu ülesandeid, mida ei saa lahendada ainuüksi staatika võrrandite abil, kuna tundmatute arv ületab võrrandite arvu, mida võib koostada. Säärastele ülesannetele on omistatud nimetus „staatiliselt määramatud“.

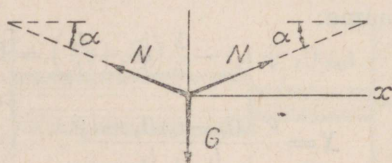
Kui oletada, et joonisel 1 kujutatud raskust kandvad traadid saavad tunduva pikenemise, siis, nagu juba selgus, ei saa ülesannet staatika abil lahendada, kuna jääb teadmatuks, millistes suundades mõjuvad jõud, mis tasakaalustavad raskust G . Puhtanalüütiline ülesande uurimine viib samale tulemusele. Staatika võrranditeks, milledest võib määrata tundmatu traatide pinguse N , osutuvad: projektsioonide võrrand teljele y (joon. 55), mida kirjutatakse nii:

$$\Sigma Y = 2N \sin \alpha - G = 0$$

ja projektsioonide võrrand teljele x :

$$\Sigma X = -N \cos \alpha + N \cos \alpha = 0.$$

Nagu näha, ei anna teine võrrand midagi. Määrates N -i



Joon. 55.

esimesest võrrandist, saame:

$$N = \frac{G}{2 \sin \alpha}.$$

Selgub, et mitte teades nurga α suurust, mis on traatide pikenemisest (deformatsioonist), ei saa seda ülesannet lahendada.

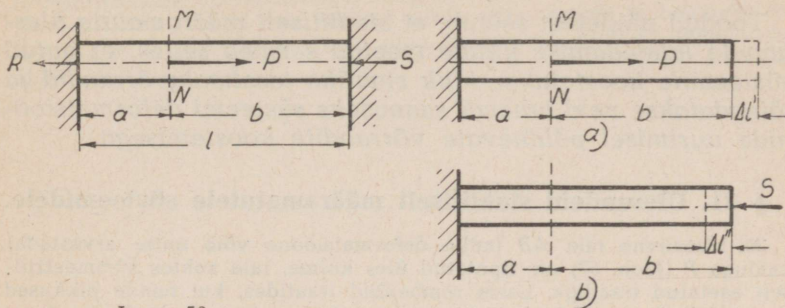
Samasuguses olukorras olime eelmise paragrahvi näites 7 jõudude leidmisel. Tõepoolest, kuna jõud X mõjuvad ühel horisontaalsirgel, siis ainus tasakaalutingimus, mida võib kirjutada,

$$\Sigma X = -X + X = 0,$$

muutub samasuseks, millest ei saa jõudu X määrata. Siiski, lisades sel juhul deformatsioonide uurimisel põhineva võrrandi, leidsime meid huvitavad jõud X . Vaatleme veel üht näidet.

Näide 8. Leida reaktsioonid R ja S (joon. 56), mis saadakse konstantse ristlõikega ja seintesse müüritud otstega talale, kui ta on koormatud lõikes MN tema telge mööda mõjuva jõuga P .

Lahendus. Tala vasakpoolne osa on ilmselt tõmmatud ja parempoolne surutud. Reaktsioonid suunduvad, nagu näidatud joonisel. Märgime need tähtedega R ja S .



Joon. 56.

Reaktsioonide määramiseks annab staatika ainult ühe võrrandi kahe tundmatuga (teist, $\Sigma Y = 0$, ei saa kirjutada):

$$\Sigma X = -R + P - S = 0. \quad (a)$$

Lahenduse määratavuseks puuduv võrrand saadakse deformatsioonide uurimisest. Kujutleme, et parempoolne sein on kõrvaldatud ja vaatleme tala *parempoolse* otsa paigutust, algul jõu P toimest ja siis reaktsioonjõu S toimest.

Jõu P mõjust tekib tala pikenemine $\Delta l'$ (joon. 56 a), mis valemi (5) järgi on:

$$(\Delta l)' = \frac{Pa}{EF}.$$

Selle suuruse võrra nihkub tala parempoolne ots *paremale*. Reaktsioonjõu S mõjul tala lüheneb (joon. 56 b) $\Delta l''$ võrra, mis on:

$$(\Delta l)'' = \frac{S(a+b)}{EF}.$$

Selle suuruse võrra nihkub tala parempoolne ots *vasakule*. Kuna tala ots seisab tegelikult paigal, siis $(\Delta l)' = (\Delta l)''$ ehk

$$\frac{Pa}{EF} = \frac{S(a+b)}{EF},$$

kust saame

$$S = P \frac{a}{a+b}.$$

Asetades S väärtuse valemisse (a), leiame, et

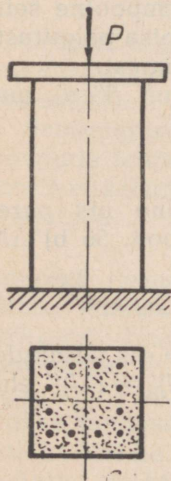
$$R = P \frac{b}{a+b}$$

Toodud näidetest selgub, et *staatiliselt määramatute ülesannete lahendamise üldine meetod seisneb selles, et antud süsteemile koostatakse kõik staatika tasakaaluvõrrandid ja täiendatakse neid lahendi saamiseks süsteemi deformatsioonide uurimisel põhinevate võrrandite koostamisega.*

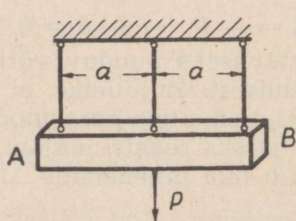
§ 31. Ülesandeid staatiliselt määramatutele süsteemidele.

20. Massiivne tala AB (mille deformatsioone võib mitte arvestada) kaaluga P (joon. 57) on riputatud üles kolme, tala suhtes sümmeetriliselt asetatud traadiga. Leida tõmbejõud traatides, kui nende pikkused ja ristlõiked on võrdsed, kuid materjalid on erinevad: keskmine traat on terasest ($E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$), äärmised vasest ($E = 1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$).

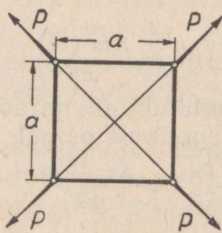
21. Raudbetoonsammas (joon. 58) talub koormust $P = 30 \text{ t}$. Leida, milline osa sellest koormusest antakse edasi betoonile ja milline terasele, kui terase pindala moodustab 0,04 betooni pindalast ja $E_t : E_{bet} = 10 : 1$.



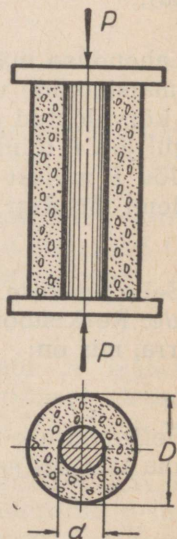
Joone 58.



Joone 57.



Joone 59.



Joone 60.

22. Liigenditega ühendatud prussidest moodustatud ruudu neljas nurgas (joon. 59) mõjuvad diagonaalselt suunatud jõud P . Kõikidel prussidel on võrdne ristlõige ja nad on tehtud samast materjalist. Leida sisejõud prussides.

23. Teraslatt (joon. 60) läbimõõduga d , esialgselt surutud jõududega P , ümbritsetakse betoonmassiga. Peale betooni kõvenemist kõrvaldatakse jõud P . Leida pinged, mis tekivad peale selle terases ja betoonis, kui $E_t : E_{bet} = 20$, $D = 2d$ ja teras ning betoon on kindlalt teineteisega ühinenud.

VII PEATUKK.

VARUTEGUR JA LUBATAV PINGE.

§ 32. **Varutegur ja lubatav pinge.** Eelmistes paragrahvides toodud näidetest selgub, et tõmbetugevuse põhivalemiks on:

$$R_t = \frac{P}{F}. \quad (16)$$

Kui lubatav pinge R_t on teada, siis võrrandi (16) põhjal võib leida antud ristlõike pindalale F vastava lubatava koormuse P ning vastupidi, antud koormusele vajaliku pindala F , mille juures pinge ei ületa lubatavat. Uhe sõnaga, teades R_t , võib lahendada kõiki küsimusi, mis puudutavad tugevusarvutusi tõmbele.

Tavaliselt lähtutakse sellest, et plastiliste materjalide juures ei tohi tegelikud pinged ületada *voolavuspiirile* vastavat pinget. Tõepoolest, ületades selle piiri, me saame esiteks jäävad *deformatsioonid*, mis võivad mõõdete muutumise tõttu rikkuda masinaosade vastastikust seost või hoonete osade vahekordi, teiseks, minek üle *voolavuspiiri* võib põhjustada paljudel juhtudel lubamatut *kalestuse* (наклён) *tekkimist* ja kolmandaks, *voolavuspiiri* ületamine *lähendab pingeid meie detailides katkepingetele*, mis on täiesti lubamatu juhtudel, kui püütakse luua tugevat ja kestvat konstruktsiooni.

Voalavuspiiri võib arvuliselt avaldada teatava osana katketugevusest σ_b . Järelikult võib öelda, et *lubatav pinge ei tohi ületada teatavat osa katketugevusest*, s. o.

$$R_t = \frac{\sigma_b}{n}.$$

§-st 4 teame, et n -i nimetatakse varuteguriks ehk ohutuse koefitsiendiks. Sel viisil redutseerub R , valik niisuguse n -i suuruse kindlaksmääramiseks, et ühegi arvutatava osa teenistuse ajal tekkida võiva koormuse juures ei oleks ületatud voolavuspiir plastilistel materjalidel või katketugevus hab-rastel materjalidel.

§ 33. **Varuteguri valik.** See ülesanne osutub õige keerukaks, kuna paratamatult peab *ette nägema* seda, mida sageli on üldse võimatu arvestada kaasaegse teaduse raamides või mida saab arvestada ainult suurema või väiksema lähendusega. Kui koormus rakendatakse alati *rahulikult* ja tema maksimaalne suurus on meil täpselt teada, siis piisab näiteks, plastilisele süsinikterasele võtta $n=2$. Seejuures moodustab lubatav pinge poole katketugevusest, mis võrdub ligikaudu voolavuspiiriga. Kuid kujutleme, et arvutatav detail võib mõnikord tööprotsessis sattuda *järsult mõjuva* koormuse mõju alla. Nagu teada, kahekordistub seejuures pinge (vt. § 24). Selliste koormuste võimalikkuse puhul tuleb võtta $n=4$, et isegi kahekordistunud pinge ei ületaks σ_T -d. Veel suurem varu tuleb võtta neil juhtudel, kui koormus rakendatakse *iöögiga*. Koormus võib seejuures *suurened* *mitmekordselt*. Siin muutub õige n -i määramine komplitseerituks seega, et dünaamiliste koormuste arvestamine on keerukas toiming, mis nõuab oskust lahendada igal sammul üsna raskeid elastse keha dünaamika ülesandeid, mis kaasaegse teaduse raames mõnikord lihtsalt ei ole lahendatavad vajaliku täpsusega.

Kui detail on karastatud või saadud valamise teel, siis neis esinevad *eelsisepinged*, millede määramine on raskendatud või isegi võimatu, muudavad valitud (arvutatud) varuteguri *fiiktiivseks varuks*, kuna lubatav pinge, liitudes eelsisepingetega, võib tõusta üle voolavuspiiri või katketugevuse. Eelpinged võivad tekkida ka kokkumonteerimisel, kui valmistamise ebatäpsuse tagajärjel detail asetatakse kohale teatava pingutusega.

- §-s 10 oli näidatud, et järsult muutuvate ristlõigetega lattides tekivad *pingete kontsentratsiooni tagajärjel ülepinged*, s. o. pinged, mis mitmekordselt ületavad oletatavaid keskmisi. Need ülepinged osutuvad mõnikord purunemise alguse ja katastroofi põhjusteks. Näitena võib viidata surutud gaa-

sidega täidetud terasballoonide purunemistele, mis tekkisid vigastustest, kui neile peale surveproovi suruti sisse numbrid ja kõlbulikkust tõestavad templid.

Lõpuks *materjal*, nagu puit, on ikka ja alati *kaugel homogeensusest*, millisele oletusele on rajatud tugevusõpetuse teooria. See ei luba olla kindel arvatud pingete ranges vastavuses tegelikele.

Mida ligikaudsemad on *oodatavate suurimate pingete* määramiseks kasutatud arvutusviisid, mida vähem kindlust on kõikide pingele mõjuvate tegurite arvestamises, mida väiksem on usaldatavus kasutatava materjali ja tema oletatud kvaliteedi vastavusse, seda suurem tuleb võtta varutegur, et arvatavas detailis tegelikud pinged ei ületaks lubatavaid pingeid. Sel viisil „ohutuse koefitsient“ kasvab koos meie teadmatuse astmega, mis põhjustabki mõnikord tema nimetamist „*teadmatuse koefitsiendiks*“.

Varuteguri valikut mõjutavad ka veel teistsugused kaalutlused. Mida suurem on varutegur, seda väiksem on lubatav pinge ja seda suuremad on antud koormuste juures detailide ristlõigete arvutuspinnad ja kaal (s. o. kulutatud materjali hulk). Materjali ja töötlemise maksumus oleneb üldiselt detaili kaalust. Tähendab *suured varutegurid on majanduslikult kahjulikud*. Seepärast peab iga konstruktor ja insener vältima asjatuid materjali kulutusi, mis on põhjustatud õigustamatult suurest varutegurist. Neil juhtudel, kui projekteeritav konstruktsioon on mõeldud kauemaks ajaks, tuleb ette näha üksikute osade nõrgenemist, näiteks roostetamise tagajärjel ja muutustest, mis tekivad materjalis aja mõjul, näiteks „vananemisest“; edasi — koormuste suurenemise võimalust, nagu see esineb sildadel — koormus transpordivahendite arenguga muutub aja jooksul teiseks: hobuveokite liikluseks arvatud sildu kasutatakse ka auto- ja trammiliikluseks, mis koormavad silda palju suurema koormusega, kui seda oli esialgne arvutuskoormus.

Selliste „kapitaalsete“ ehitiste projekteerimisel on vaja võtta suurem varu kui mingisuguse „ajutise“ silla projekteerimisel, mis muidugi võib olla arvatud ainult kaasaegsetele koormustele ja isegi mitte selle kõikidele liikidele.

Siiani me rääkisime ainult staatilistest ja dünaamilistest ehk löökkormustest. Paljude masinate ja ehituste osad töö-

tavad peale selle veel korduvate vahelduvate (muutuvate) koormuste all. Sellistes osades on võimalik purunemine väsimusest. Siin tuleb lubatava pinge valikul lähtuda koormuse liigist, mis võib olla kas lihtsalt muutuv (0 kuni max) või märkimuutev (+ kuni —), ja valida niisugune suurus, mis ei ületa väsimuspiiri.

Varuteguri valiku teostamist raskendab suur arv erinevaid faktoreid. Soovitavate lubatavate pingete tabeli koostamine, välja arvatud mõningad vähesed juhud, põrkab suurtele raskustele. *Ehituskonstruktsoonide jaoks on meil NSV Liidus kinnitatud projekteerijaile kohuslikud lubatavate pingete suurused.*

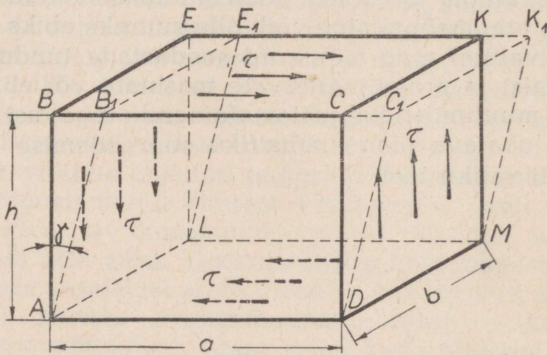
Mis puutub *masinaehituses* lubatavatesse pingetesse, siis on soovitatav erinevates õpikutes ja käsiraamatutes toodud andmesse suhtuda ettevaatlikult, kontrollides iga kord, kas tabelites esitatud materjali omadused ja töötingimused vastavad antud juhule.

Heade, kindla töötamise poolest silmapaistnud konstruktsoonide tundmaõppimine võib olla suureks abiks lubatavate pingete valikul ning mõnikord soodustada tunduvalt kaalu vähenemist ja projekteeritavate masinate või ehituste odavamaks muutumist, kahjustamata nende tugevust ja iga, mis toimub lubatava pinge *mõistliku* suurendamise ja sobiva materjali valiku teel.

VIII PEATUKK.

NIHE JA LÕIGE.

§ 34. Põhimõisted. Kujutleme (joon. 61), et risttahuka tahkudele mõjuvad tangentsiaaljõud. Nad põhjustavad nihke- ehk tangentsiaalpingeid τ , milledega me kohtusime juba §-s 12. Oletame edasi, et jõud on valitud ja rakendatud



Joon. 61.

nii, et nihkepinged jaotuvad ühtlaselt tahkudele ja on kõiki- del tahkudel ühesuured.

Veendume esmalt, et risttahukas on tasakaalus. Korruta- des pinge τ ülemise tahu pindalaga $BCKE = a \cdot b$, leiame sellele tahule mõjuva nihkejõu. Samasuguse, kuid vastupidi mõjuva jõu saame alumisel tahul $ALMD$. Need jõud moo- dustavad jõupaari õlaga h , mis on võrdne servaga AB . Kir-

jutame selle jõupaari momendi, mis mõjub kella osuti liikumise suunas.

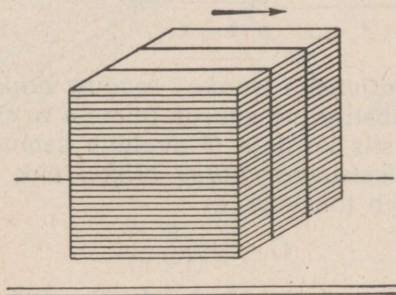
$$M_1 = (ab)\tau h.$$

Samal viisil leiame, et vertikaaltahkudele mõjub jõupaari moment, mis mõjub vastu kella osuti liikumise suunda:

$$M_2 = (bh)\tau a.$$

Vaadeldes jõupaaride momentide avaldisi, on kerge näha, et nad erinevad ainult oma tegurite järjekorralt, seega on nende arvulised suurused võrdsed. Kuid märgilt on nad vastupidised, järelikult tasakaalustavad nad teineteist ja meie risttahukas on tasakaalus.

On tarvis pöörata tähelepanu sellele, et vajalik momentide võrdsus on võimalik ainult võrdsete τ puhul risti asetsevatel tahkudel. Nihkepinged mõjuvad alati paariviisi. Ei saa olla, et ühel tahul nad esinevad, teisel aga puuduvad.



Joon. 62.

Nihkepingete mõjul võtab risttahukas kriipsjoontega kujutatud kaldasendi. Kui vaadelda ainult väga väikesi deformatsioone, siis võib lugeda, et ülemise ja alumise tahu vahekaugus h jääb muutumatuks, kuid vertikaalsed külgtahud kalduvad väga väikese nurga γ võrra, kusjuures nende mõõdet jäävad samuti muutumatuks. Kirjeldatud deformatsiooni nimetatakse nihkedeformatsiooniks. Teatava ettekujutuse temast võib saada järgneva katse abil. Kujutleme õhukesest siledast kartongist plaatide pakki (joon. 62), mis on seotud kumminiitidega. Kui kallutada pakki käe jõuga

noole suunas, siis saadakse nihkedeformatsioonile sarnanev kuju muutus.

Pöördume jälle joonise 61 juurde. Pole raske taibata, et *nihkel kõik horisontaalpinnad jäävad üksteisega paralleelseks ning ühele ja samale kaugusele alumisest tahust, vertikaalpinnad aga on paralleelsed kaldunud tahkudega ja kalduvad ühe ning sama nurga γ all.*

Ilmselt võib see nurk iseloomustada nihkedeformatsiooni suurust samuti, kui suhteline pikenemine iseloomustab tõmbedeformatsiooni.

Nurka γ , avaldatuna radiaanides, nimetatakse *suhteliseks nihkeks*. Arusaadavalt on nurk γ seda suurem, mida suurem on nihet põhjustav τ . Loetakse, samuti nagu tõmbejuhul, et *nihkepinge on proportsionaalne suhtelise nihkedeformatsiooniga*. Kui tähistada proportsionaalsuse koefitsienti tähega G , võib kirjutada:

$$\tau = G\gamma. \tag{17}$$

See valem väljendab Hooke'i seadust nihkel.

Kuna γ on abstraktne suurus (nimeta arv), aga τ avaldatakse kg/cm^2 , siis kordaja G avaldub samuti kg/cm^2 . Teda nimetatakse *elastsusmooduliks nihkel* ehk lihtsalt *nihkemooduliks*. Võib tõestada, et

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

kus E on elastsusmoodul tõmbel ja μ — Poisson'i tegur.

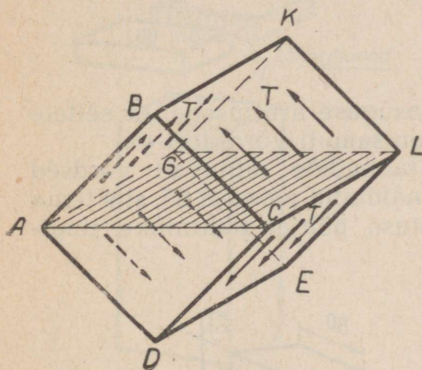
Terasel $\mu \approx 0,25$, järelikult

$$G = \frac{E}{2(1 + 0,25)} = 0,4 E = 0,4 \cdot 2 \cdot 10^6 = 8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

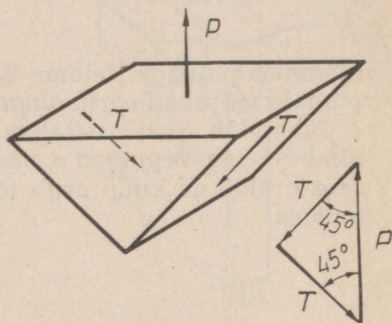
§ 35. Puhtnihe. Puhtnihke nähtust sel viisil, nagu ta oli kirjeldatud, pole võimalik katseliselt teostada. Selleks, et rakendada risttahuka tahkudele võrdseid nihkejõude, näib, nagu võiks kasutada meile tuntud nihke hõõrdejõude. Kuid hõõrdejõudude esilekutsumiseks tuleb avaldada tahkudele survet; see tekitab normaalpingeid, mis meie eelduses nihkest puuduvad.

Uldiselt öeldes pole meil niisuguseid jõude, mida võiks ranges vastavuses meie tingimustele rakendada kehale. Kui uurida kehade pindadele mõjuvaid jõude, võib väita, et

looduses pole puhtnihkejõude. Siiski on võimalikud niisugused pingete olukorrad tahkes kehas, millede puhul teatavad *mõtteliselt eraldatavad elemendid saavad tunda puhtnihet*. Tõepoolest, kujutleme kuubikut (joon. 63), mille külgtahkudele mõjuvad nihet tekitavad nihkejõud T . Kuna külgtahkude pindalad on võrdsed, siis need jõud peavad olema võrdsed, vastasel korral poleks mõeldav kuubi tasakaal. Eeldades, et jõud on jaotunud ühtlaselt tahkudele, leiame, et nihkepinged nendel $\tau = T : F$. Eraldame kuubi alumise poole (joon. 64). Ta asub jõudude T ja elastsusjõudude mõju all,



Joon. 63.



Joon. 64.

mis asendavad ülemise osa mõju alumisele. Elastsusjõudude resultantjõudu P on kerge leida, ehitades jõududele T ja P kinnise jõudude kolmnurga (vt. joonis). See jõud võrdub:

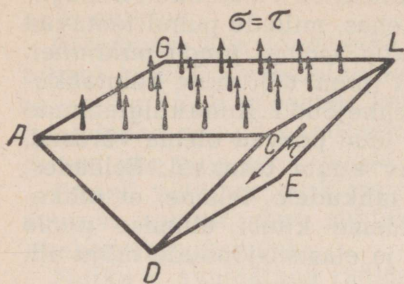
$$P = 2 \cdot T \cos 45^\circ = T\sqrt{2}.$$

Selle suund näitab, et lõikes tekivad tõmbepinged σ (joon. 65).

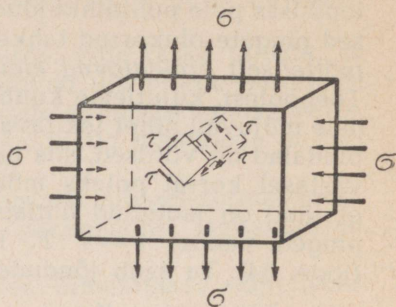
Leiame nende suurused. Diagonaallõike pindala $AGLC$, võrdub pindalaga $(CLED)\sqrt{2}$, s. o. $F\sqrt{2}$. Järelikult

$$\sigma = \frac{P}{\text{pindala } AGLC} = \frac{T\sqrt{2}}{F\sqrt{2}} = \tau.$$

Selgub, et antud juhul normaalsed tõmbepinged võrduvad arvuliselt nihkepingetega. Lõigates prismat vertikaalse



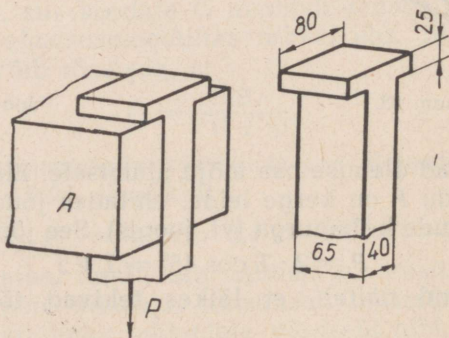
Joon. 65.



Joon. 66.

diagonaalpinnaga, leiame samasuguse arutlusega, et sellele pinnale mõjuvad *survepinged* on samuti võrdsed τ -ga.

Tähendab, kui risttahuka tahkudele mõjuvad võrdsed tõmbe- ja survepinged σ , nagu näidatud joonisel 66, siis tema sees eraldatud kuup asub tõestuse põhjal puhtnihke tingimustes.



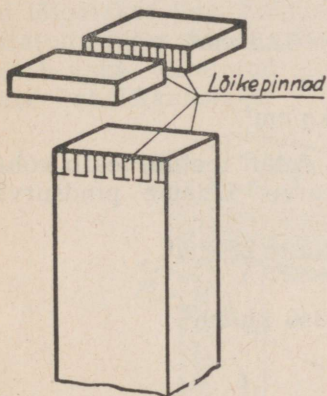
Joon. 67.

§ 36. Lõige. Tihedas seoses puhtnihke nähtusega on praktilist tähtsust omav *lõikenähtus*.

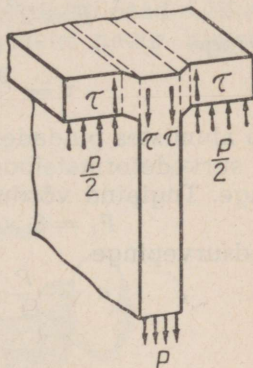
Valmistame pehmest terasest T-kujulise detaili, nagu kujutatud joonisel 67 paremal, ja asetame ta hästi kinnitatud tala väljalõikesse, nagu näidatud samal joonisel vasa-

kul. Koormates detaili järk-järgult suureneva jõuga P , võib viia ta joonisel 68 näidatud purunemiseni. Väljaulatuvad osad lõigatakse ära; kuna üksikutel osadel on võimalik peale purunemise algust libiseda üksteisel, siis purunemispinnad muutuvad kohati siledaks ja läikivaks.

Vaadeldes õhimate kihtide deformatsioone, mis on näidatud kriipsjoontega ja hõlmavad lõikepindu (joon. 69), pole raske veenduda, et nad meenutavad nihkedeformatsioone, mis on kujutatud joonisel 61.



Joon. 68.



Joon. 69.

Purunemine nihkel oleneb peamiselt lõikepinna peale mõjuvatest nihkepingetest. Neid loetakse tavaliselt ühtlaselt jaotatuks üle kogu lõikepinna. Kui tähistada lõike pindala F -iga ja lõikavat jõudu (koormust) P -ga, siis öeldu põhjal lõikepinge

$$\tau = \frac{P}{F}. \quad (18)$$

Saadakse valem, mis väliselt sarnaneb normaalpinge valemiga.

Tähistame lubatava lõikepinge R_n . Asetades ta valemisse (18) τ asemele, saame arvutusvalemi lõikele:

$$R_n = \frac{P}{F}. \quad (19)$$

Katsed näitavad, et lõiketugevus (katketugevus lõikel) moodustab 0,5 kuni 0,8 σ_b -st, s. o. katketugevusest tõmbel. Seepärast ühe ja sama varuteguri juures võetakse R_n samuti 0,5 kuni 0,8 R_t .

Süsinikterasele võetakse sageli $R_n = 0,75 R_t$.

Leiame harjutuseks, milline lõikepinge saadakse joonisel 67 kujutatud detailis, kui jõud $P = 9\text{ t}$. Mõõted on antud joonisel millimeetrites.

Lõige toimub kahes lõikepinnas pindalaga $2,5\text{ cm} \times 6,5\text{ cm}$, järelikult kogu lõikepindala

$$F = 2 \times 2,5 \times 6,5 = 32,5\text{ cm}^2.$$

Pinge

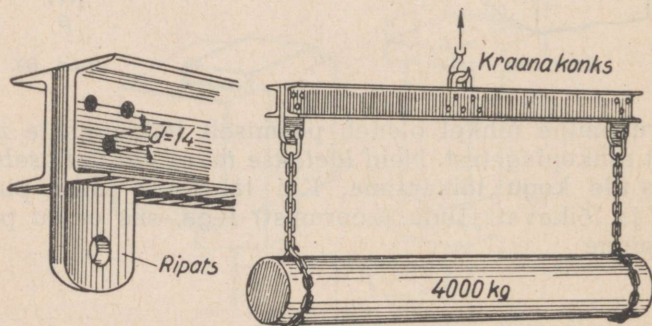
$$\tau = \frac{9000}{32,5} = 278\text{ kg/cm}^2.$$

Pea alumistes pindades, milledega detail toetub, tekib kohalik survedeformatsioon — pindsurve. Leiame pindsurvepinge. Tugipind võrdub:

$$F_1 = 8 \times 6,5 - 4 \times 6,5 = 26\text{ cm}^2.$$

Pindsurvepinge

$$\sigma = \frac{P}{F_1} = \frac{9000}{26} \approx 346\text{ kg/cm}^2.$$



Joon. 70.

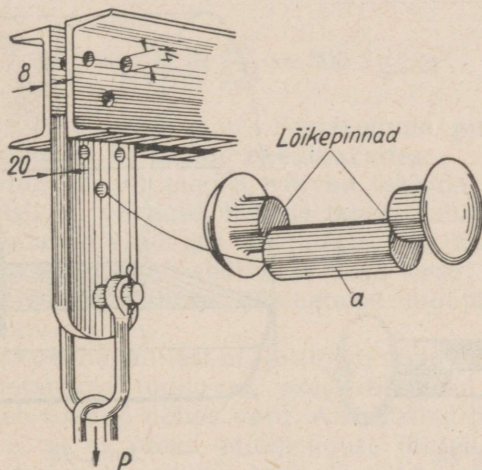
§ 37. Neetliidete arvutamisest. Joonisel 70 on kujutatud terasplonni, kaaluga 4000 kg, tõstmise. Plonni otsi haaravad ketid on riputatud terasripatsite külge, mis on asetatud

kahe terastala vahele ja needitud kolme neediga, läbimõõduga $d = 14$ mm (vt. täiendavat kujutist vasakul). Leida pinge neetides.

Kui oletada, et ketid asuvad otsest võrdsel kaugusel, siis kummalegi ripatsile mõjuv jõud

$$P = \frac{4000}{2} = 2000 \text{ kg.}$$

Joonisel 71 on kujutatud, mis võib juhtuda, kui needid osutuvad mitteühtlaselt vastupidavaks. Nagu näha, needid lõigatakse läbi. Selguse mõttes on kõrval (joon. 71 a) esitatud suures mõõdus ühe läbilõigatud needi osad. Lõikele töötab kaks viirutatud pinda. Niisuguseid neete nimetatakse *kahelõikelisteks*.



Joon. 71.

Arvestame, nagu tavaliselt, et jõud P jaotub võrdselt igale kolmest needist, s. o. et ühele needile tuleb lõikav jõud

$$P_1 = \frac{P}{3} = \frac{2000}{3} \approx 667 \text{ kg.}$$

Needi ristlõike pindala

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,4^2}{4} = 1,54 \text{ cm}^2.$$

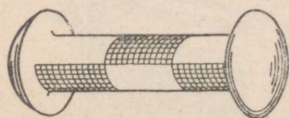
Kuna igal needil töötab kaks lõiget, siis pinge needis

$$\tau = \frac{P_1}{2F} = \frac{667}{2 \cdot 1,54} \approx 216 \text{ kg/cm}^2.$$

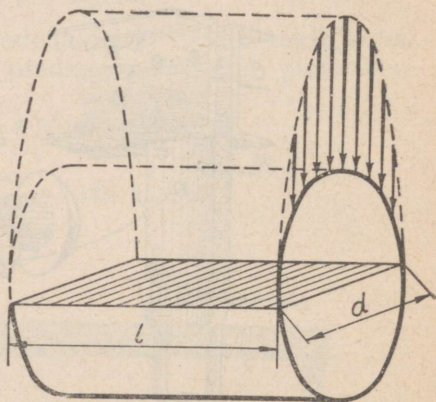
Katketugevus terasel, millest valmistatakse needid, on lõikel ligi 3200 kg/cm^2 , järelikult needid töötavad lõikele varuteguriga

$$n = \frac{3200}{216} \approx 15.$$

Nii suur varutegur on seletatav neetide vastutusriikka tööga, vahelduva koormusega ja dünaamiliste koormuste rakendamise võimalusega.



Joon. 72.



Joon. 73.

Ajal, mil neetide ristlõiked töötavad lõikele, töötavad talade ja ripatsiga kokku puutuvad needivarva pinnad *pindsurvele*. Joonisel 72 on ristviirutisega märgitud needi silindrilised pindsurvele töötavad pinnad. Pindsurve jaotumise seadus erinevates pinna punktides pole teada. Võib ainult suure tõenäosusega arvata, et nad jaotuvad mitte-võrdseks, nagu näidatud needi keskmise osa jaoks tehtud joonisel 73. Seepärast arvutatakse pindsurvepinge silindrilistele pindadele *leppeliselt*, lugedes, et *suurim pind-*

survepinge võrdub pindsurvel tekitava jõu jagatisega diametraallõike pindalaga (joon. 73), s. o. valemil järgi

$$\sigma_{ps} = \frac{P}{dl} \quad (20)$$

Võrdleme diametraallõikeid, milledele tuleb üks ja sama koormus. Mõlemad needi otsmiste osade diametraallõiked (joon. 72) kannavad sama suurt koormust P_1 kui keskmine osa. Otsmiste osade pindalade (joon. 71) summa võrdub

$$2dl_1 = 2 \cdot 1,4 \cdot 0,8 = 2,24 \text{ cm}^2,$$

keskmise osa pindala

$$dl = 1,4 \cdot 2 = 2,8 \text{ cm}^2.$$

Järelikult pingestatakse pindsurvel enam needi otsmised osad, nimelt

$$\sigma_{ps} = \frac{P_1}{2dl_1} = \frac{667}{2,24} \approx 300 \text{ kg/cm}^2.$$

See pinge pole kuigi suur. Samasugune pindsurvepinge saadakse muidugi ka talade neediaukudes.

Pinged, millest siin räägiti, võivad tekkida ainult eeldusel, et ripatsil on võimalik liikuda talade suhtes. Kuna neetimist teostatakse kuumade neetidega, siis pärast lõpp-pea kujundamist surutakse needitavad osad needi jahtumise ja sellest tekkiva needivarva lühenemise tagajärjel tihedalt üksteise vastu.

Ripatsi liikumine, millest oli juttu, on nüüd võimalik ainult siis, kui ületatakse tunduvad osadevahelised hõõrdejõud. Seega esineb toodud näites varu. Aurukatlad peavad olema needitud nii, et ei oleks mingisugust lehtede nihkumist, vastasel korral võib tekkida lekk. Needid asetatakse sinna kaalutlusel, et nad suruksid jahtudes lehed tugevasti üksteise vastu. Selliste tugevtihedate liidete arvutus teostatakse masinaelementide kursuses toodud ja katsetel põhinevate valemite järgi.

§ 38. Keevisliidete arvutamisest. Joonisel 74 on kujutatud kaks ühesuguse laiuse ja paksusega terasriba, mis on asetatud teineteisele ja mille otsad on seejärel elekterkeevituse abil kokku keevitatud. Niisuguseid keevisõmblusi nimetatakse *ots- ehk servõmblusteks*. Õmbluse pealispinna kalle on 45° . Nagu näitasid katsed, võib tõmbel ribade ühen-

dus puruneda õmbluse purunemise tõttu väikseimat pindala omavat kaldpinda mööda.

Joonisel on näha, et 45° -lise nurga juures ristjoon

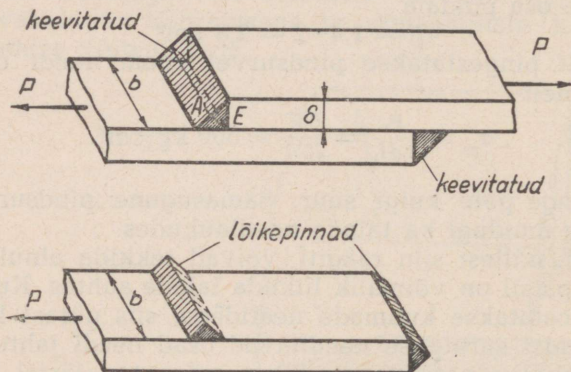
$$AE = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7 \delta,$$

järelikult ühe õmbluse lõikepindala

$$F = AE \cdot b = 0,7 \delta b.$$

Tõmbepinge õmblustes on, võttes arvesse, et neid on kaks,

$$\sigma_t = \frac{P}{2F} = \frac{P}{2 \cdot 0,7 \delta b} \approx 0,7 \frac{P}{\delta b}.$$



Joon. 74.

Meie normide järgi sellise ühenduse arvutus teostatakse siiski mitte tõmbele, vaid lõikele samas ohtlikus lõikes *lepelise* valemi

$$R_n \geq \frac{P}{2 \cdot 0,7 \delta b}$$

järgi.

Õmbluste purunemist lõikel õmbluse ja lehe horisontaalseis ühenduspindades pole vaja karta, kuna lõikepinge neil on muidugi väiksem kui vaadeldud väiksema suurusega kaldpindadel.

Vaatleme veel joonisel 75 kujutatud külõmbluste arvutust. Niisugused õmblused võivad puruneda samuti ainult lõikel 45° -lise nurga all olevat kaldpinda mööda, sest et

lehtedega liitunud õmbluse vertikaal- ja horisontaalpinnad on suurema pindalaga.

Eespool on leitud, et

$$AE = 0,7\delta,$$

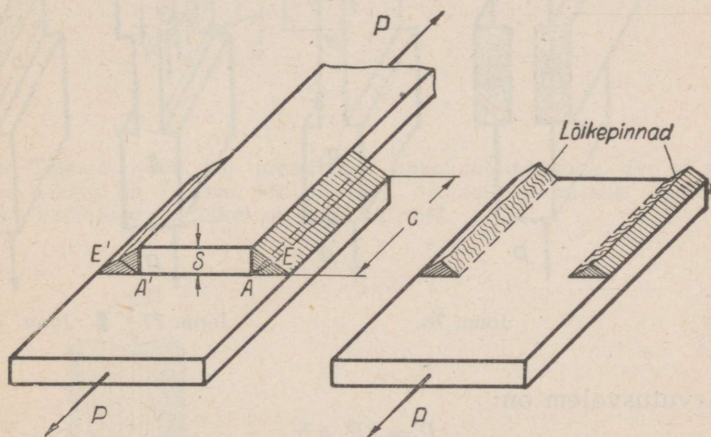
järelikult on mõlema lõikepinna pindala

$$F = 2AE \cdot c = 2 \cdot 0,7\delta c = 1,4\delta c.$$

Külgõmbluste lõikepinge

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{1,4\delta c} \approx \frac{P}{\delta c} \cdot 0,7.$$

Meie normid näevad ette, et lubatav lõikepinge ei ületaks 720 kg/cm^2 .¹

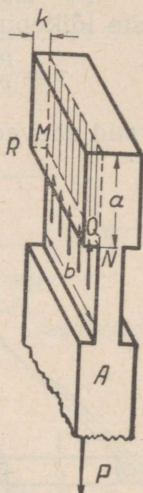
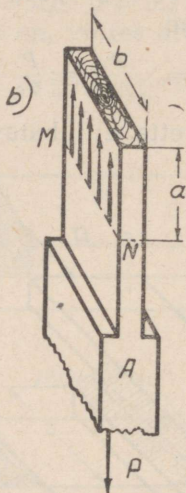
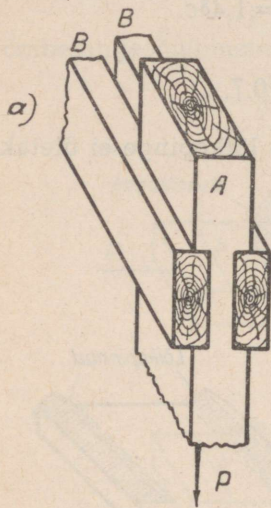


Joon. 75.

§ 39. Tappide arvutamisest. Olgu pruss A (joon. 76 a), mis on koormatud telje sihis mõjuva jõuga P , ühendatud tappide abil liikumatute prussidega B. Prussi A ots võib puru-

¹ Lubatav pinge oleneb eelkõige kasutatud materjalidest ja tehnoloogilise protsessi teostamisest. Siintoodud suurust 720 kg/cm^2 tuleb elekterkeevitamisel ja staatilise koormuse puhul vaadelda kui madalamat väärtust, lubatav lõikepinge võib aga tavaliste põhi- ja keevismaterjalide markide juures ТУ и Н (Tehnilised tingimused ja normid) kohaselt ulatuda kuni 1100 kg/cm^2 . (Tõlke vastut. toim. märkus.)

neda mööda *lõikepinda*, mis võrdub kahekordse *MN*-ist kõrgemal asetseva pindalaga, mille suurus on *ab* (joon. 76 b). Ehitusliku projekteerimise normide järgi võetakse lubatav pinge lõikele R_t männil 12 kg/cm² ja tammel 18 kg/cm².



Joon. 76.

Joon. 77. ■ Joon. 78.

Arvutusvalem on:

$$P = 2R_n a b.$$

Tapil otstes, näiteks *RMNQ* (joon. 77), mõjub *pindsurve*. Normide järgi võib otsa pindsurvet lubada: männil $R_{ps} = 80$ kg/cm² ja tammel 100 kg/cm². Arvutusvalem oleks:

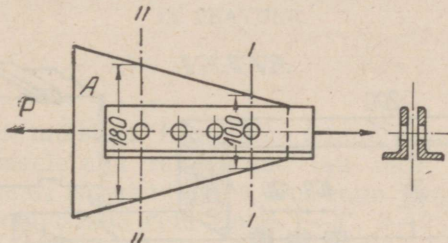
$$P = 2R_{ps} b k.$$

Tavaliselt arvutatakse tapid veel *katkemisele* (tõmbele) ohtlikus lõikes. Nagu näha, on selleks viirutatud lõige joonisel 78. Selle pindala on *bc*. Lubatav tõmbepinge R_t võetakse sageli männil 110 kg/cm² ja tammel 130 kg/cm². Arvutusvalem oleks:

$$P = R_t bc.$$

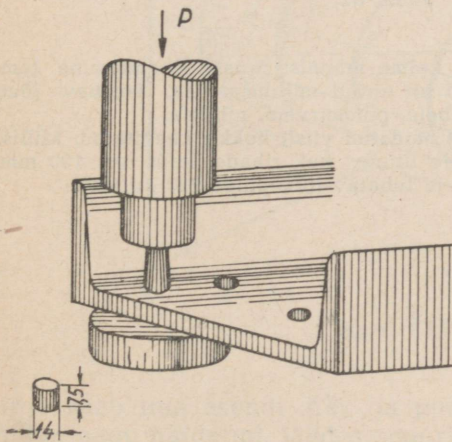
§ 40. Ulesandeid lõikele.

24. Kaks mittevõrdkülgset nurkterast $75 \times 50 \times 10$ (vt. sortiment) on needitud (joon. 79) 12 mm paksuse lehe A mõlemale küljele neljaga läbimõõduga $d = 20$ mm. Jõud $P = 19$ t. Määrata: 1) nihkepinge neetides; 2) suurim pindsurvepinge neetides ja nurkterastes; 3) tõmbe- pinge nurkterase ja lehe lõigetel $I-I$ ja $II-II$.

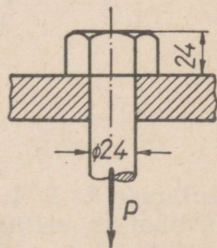


Joon. 79.

25. Talasse (joon. 80) pressitakse auke läbimõõduga $d = 14$ mm. Seina paksus on 7,5 mm. Milline jõud on selleks vajalik, kui tala terase katketugevus lõikel on 2960 kg/cm^2 ?



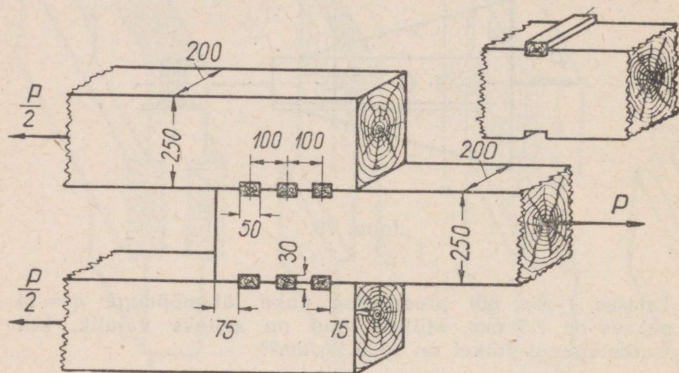
Joon. 80.



Joon. 81.

26. Augustants võib arendada survet kuni 27 t. Ta peab suruma auke 6 mm paksustesse teraslehtedesse, millede katetugevus lõikel on 2640 kg/cm^2 . Leida suurima augu läbimõõt, mida võib suruda stantsiga nimetatud lehtedesse.

27. Joonisel 81 näidatud mõõdetega polti tõmmatakse jõuga $P = 1500 \text{ kg}$. Määrata poldi peas esinev nihkepinge. Kui suur on pindsurvepinge pea ja toe kokkupuute pinnal, kui kuuskantpea külje pikkus on võrdne poldi läbimõõduga?



Joon. 82.

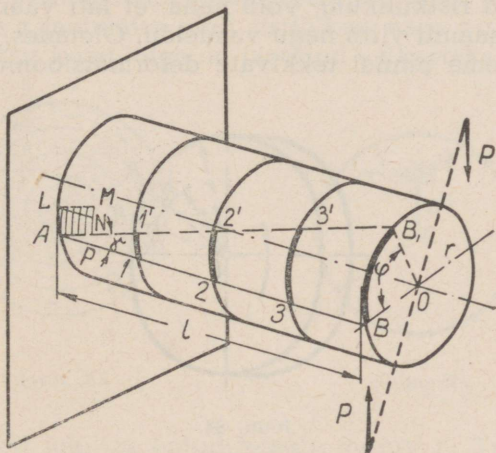
28. Joonisel 82 on esitatud kolme männist prussi ühendamine tam-
mest pöönadega. Kõik mõõdeted on antud millimeetrites. Tõmbav jõud
 $P = 9 \text{ t}$. Kontrollida liidet tõmbele, pindsurvele, nihkele.

29. Kaks riba on joonisel 74 näidatud viisil kokku keevitatud. Millist
koormust P võib lubada sellele liitele, kui ribade laius on 100 mm,
ribade paksus võrdselt 12 mm ja lubatav lõikepinge 720 kg/cm^2 ?

IX PEATUKK.

VÄÄNE.

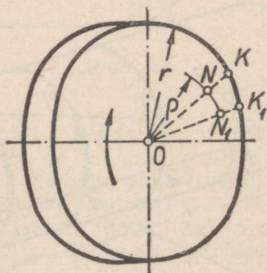
§ 41. Uldisi mõisteid. Kinnitame ümmarguse lati ühe otsa (joon. 83), teisele aga rakendame lati telje risttasapinnas mõjuva jõupaari momendiga M . Kui enne jõupaari rakendamist latile joonestada rida ringe 1—1', 2—2', 3—3' jne. ja sirge AB , siis võib märgata, et peale jõupaari rakendamist



Joon. 83.

sirge saab uue asendi AB_1 . ja punktid 1, 2, 3 paigutuvad ümber nagu näidatud, jäädes oma ringjoontele, milledevahe-line kaugus ei muutu. Ümberpaigutused, antud juhul kaa-red 1—1', 2—2', 3—3' ja BB_1 , suurenevad võrdeliselt kaugu-

sega kinnitatud otsast. Joon AB_1 osutub *kruvijooneks*, s. o. tema kaldenurk kinnitatud lõike suhtes jääb kõikides punktides üheks ja samaks. Raadius OB saab uue asendi OB_1 , pöördudes nurga φ võrra, mis on võrdne vaba otsa pöördega kinnitatud otsa suhtes ja mida nimetatakse *väändenurgaks*. Kirjeldatud deformatsiooni liiki nimetatakse *väändeks*. Lati ristlõiked jäävad tasapinnaliseks. Väändenurk kasvab algul võrdeliselt rakendatava momendiga, kadudes selle eemaldamisel, s. o. saadakse elastsed deformatsioonid; edasisel momendi kasvamisel koormuse ja väändenurga vaheline olenevus muutub keerukamaks ja elastsete väändenurkade kõrval hakkavad ilmnema mitte-elastsed. Eraldame punkti A juures (vt. joonist) väikese risttahuka $ALMN$. Pärast jõupaari rakendamist ta tõmbub viltu, nagu oli kujutatud joonisel 61. Tähendab *eraldatud elemendis toimub väände puhul nihe*. Joonestades varda pinnale meelevaldse arvu $ALMN$ -iga sarnanevaid riskülikuid, võib näha, et lati väänamisel nad tõmbuvad samuti viltu nagu vaadeldu. Oletades, et lati sees saadakse tema pinnal tekkivate deformatsioonidega sarna-



Joon. 84.

sed deformatsioonid, võime öelda, et väändenurk saadakse naaberristlõigete pööramise tagajärjel rea elementaarsete nihete tulemusena. Ristlõigetes peavad seejuures järelikult mõjuma *nihkepinged*.

§ 42. **Pinged väändel.** Vaatleme väänatud lati meelevaldset ristlõiget (joon. 84).

Punkt K kaugusel r lati teljest ja punkt N , mis asub samal

raadiusel kui K , kuid kaugusel ρ (kreeka täht *roo*), joonestavad väändel kontsentrilised kaared. Seejuures

$$\sphericalangle NN_1 : \sphericalangle KK_1 = \rho : r.$$

Need kaared kujutavad lati vastavate elementide nihkeid ja peavad olema Hooke'i seaduse põhjal võrdelised vastavate pingetega. Tähistame pinge punktis K τ -ga ja punktis N τ_1 -ga, siis võib kirjutada, et

$$\tau_1 : \tau = \sphericalangle NN_1 : \sphericalangle KK_1;$$

sellest võrdest järgneb, et

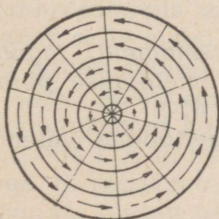
$$\tau_1 : \tau = \rho : r$$

või

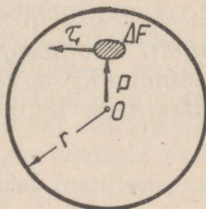
$$\boxed{\tau_1 = \frac{\tau \rho}{r}}$$

(21)

Näeme, et meelevaldselt võetud punktis pinge väljendub lati pinnal asuva punkti pinge τ kaudu ja suureneb võrdeliselt ρ -ga, s. o. kaugenedes löike tsentrist. Selle põhjal võib anda pingete τ jaotumise pildi ristlõikes, nagu on kujutatud joonisel 85, kus kogu löige on jaotatud väikesteks pinnakes-



Joon. 85.



Joon. 86.

teks, milledest igal on antud temale mõjuv τ . Teljel asuv element ei ole pingestatud.

Võtame elemendi pindalaga ΔF (joon. 86), millele mõjub pinge τ_1 . Korrutades elemendi pindala pingega, saame elementaarse nihkeelastsusjõu

$$\Delta T = \tau_1 \Delta F.$$

Asendades τ_1 tema suurusega valemist (21), saame:

$$\Delta T = \frac{\tau}{r} \Delta F \cdot \rho.$$

Korrutades selle jõu raadiusega ρ , leiame elemendile mõjuva elementaarse momendi punkti O suhtes:

$$\Delta M = \Delta T \rho = \frac{\tau}{r} \Delta F \rho^2.$$

Kogu pinna elementidele mõjuvate elastsusjõudude elementaarsete momentide summa, suunaga vastu kella osuti liikumise suunda, peab tasakaalustama välise jõupaari momendi M , mis mõjub kella osuti liikumise suunas. Järelikult

$$M = \sum_F \Delta M = \frac{\tau}{r} \sum_F \Delta F \rho^2.$$

Elementaarsete pinnakeste korrutiste summat kauguse ruutudega tsentrist, võetud üle kogu pindala, nimetatakse pinna polaarinertsmomendiks ja tähistatakse J_p .

Asetades selle tähistuse M -i avaldisse, saame:

$$M = \frac{\tau}{r} J_p,$$

kust

$$\tau = \frac{Mr}{J_p}. \quad (22)$$

Jagatist $J_p : r$, s. o. *polaarinertsmoment, jagatud kaugema punkti kaugusega teljest, nimetatakse polaarvastupidavusmomendiks ja tähistatakse W_p .*

Kasutades seda tähistust, võib eeltoodud valemit kirjutada nii:

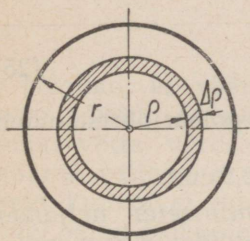
$$\tau = \frac{M}{W_p}. \quad (23)$$

§ 43. Polaarinertsmoment ja polaarvastupidavusmoment.

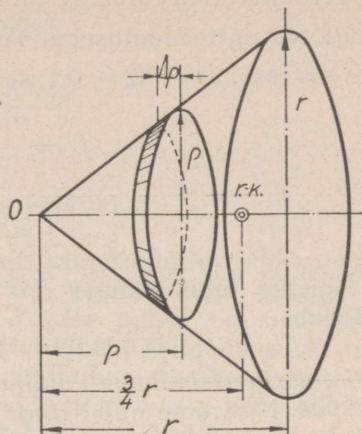
Ringi polaarinertsmomenti on kerge leida, kasutades järgmist meetodit.

Eraldame väikese pindala ΔF (joon. 87) väga kitsa rõngana laiusega $\Delta \rho$ ja raadiusega ρ . See pindala on $\Delta F = 2\pi\rho \cdot \Delta \rho$. Asetades selle polaarinertsmomendi avaldisse, saame:

$$J_p = \sum_F \Delta F \rho^2 = 2 \sum_{\rho=0}^{\rho=r} (\pi \rho^2 \Delta \rho) \rho.$$



Joon. 87.



Joon. 88.

Sulgudes olev korrutis esitab väga madala silindri mahtu raadiusega ρ ja kõrgusega $\Delta\rho$ (joon. 88). Kui kujutella mahtu kaaluvana, siis summa märgi all seisev kogu korrutis väljendab selle mahu staatilist momenti punkti O suhtes. Kuid J_p -d andev summa peab olema koostatud kogu ringi pindala jaoks, seejuures kõik silindrikesed, asetatuna üksteisele, moodustavad koonuse tipuga O -s, põhja raadiusega r ja kõrgusega r , s. o. kõrgusega, mis on võrdne antud ringi raadiusega. Silindrikestede staatiliste momentide summa võrdub Varignoni tuntud teoreemi põhjal resulteeriva momendiga, s. o. koonuse mahuga

$$\frac{1}{3} \pi r^2 r,$$

korrutatud koonuse raskuskeskme kaugusega punktist O , s. o. $\frac{3}{4} r$ -iga. Seega

$$J_p = 2 \left(\frac{1}{3} \pi r^2 r \right) \frac{3}{4} r$$

ehk

$$\boxed{J_p = \frac{\pi r^4}{2}} \quad (24)$$

Tehnilistes arvutustes tuleb tavaliselt tegelda läbimõõduga, aga mitte raadiusega. Asendades valemis $r = \frac{d}{2}$ ja võttes arvesse, et $\pi : 32 \approx 0,1$, saame:

$$J_p = \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

ehk

$$J_p \approx 0,1 d^4. \quad (25)$$

Näiteks läbimõõduga $d = 5$ cm lati polaarinerstmoment võrdub:

$$J_p = 0,1 d^4 = 0,1 \cdot 625 = 62,5 \text{ cm}^4.$$

Polaarinertsmomendi ühikuks on sentimeeter neljandas astmes. Määrame nüüd ringi polaarvastupidavusmomendi.

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

ehk

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3. \quad (26)$$

Vastupidavusmomendi ühikuks on sentimeeter kolmandas astmes.

§ 44. Väände arvutusvalem. Valem (23) annab pinge lati teljest kaugemas punktis. See pingeline, nagu teame, osutub suurimaks. Asendades valemis (23) τ lubatava väändepingega R_v , püstitame seega piiri, et väändepinge ei saa olla suurem lubatavast, s. o. saame arvutusvalemi väände:

$$R_v = \frac{M}{W_p}. \quad (27)$$

Teades siit kahte suurust, võime määrata kolmanda.

Näide 9. Ümmargust võlli väänatakse momendiga $M = 235,5$ kgcm. Lubatav väändepinge $R_v = 150$ kg/cm². Määrata võlli läbimõõt.

Valemi (27) järgi leiame:

$$W_p = \frac{M}{R_v} = \frac{235,5}{150} = 1,57 \text{ cm}^3.$$

Valemi (26) järgi

$$W_p = 0,2 d^3,$$

järelikult

$$1,57 = 0,2 d^3,$$

kust

$$d = \sqrt[3]{\frac{1,57}{0,2}} \approx 2 \text{ cm.}$$

Nägime, et väändel tekivad samasugused nihkepinged nagu lõikel. Seepärast näib, et väände juhul pinge R_v võiks võtta võrdseks R_n -iga. Terase puhul on see samaväärne väitega, et $R_v = R_n = 0,75 R_t$. Kuid nii suuri pingeid kunagi ei lubata, kuna *väändega tavaliselt kaasneb veel paine*. Kui painde mõju eraldi ei arvestata, nagu tehakse sageli masinaehituses, siis määratakse väändele vähendatud lubatav pinge. Seepärast ei tohi R_v -d üldiselt lugeda võrdseks R_n -iga. See on võimalik ainult puhtväändel, kui ei esine painet.

§ 45. Väändemomendi avaldamine võlliga edasiantava võimsuse ja võlli pöörete arvu kaudu. Transmissioonivõlli pöörleb momendi M mõjul, mis osutub sellele võllile ühtlasi ka väändemomendiks.

Joonisel 89 kujutatud võlli ühel otsal istub rihmaratas, mis pannakse pöörlema rihmülekandega paremal all asetsevalt mootorilt. Võlli vasakul otsal istub teine rihmaratas, millest ülekanne käitab joonisel näitamata pinki.

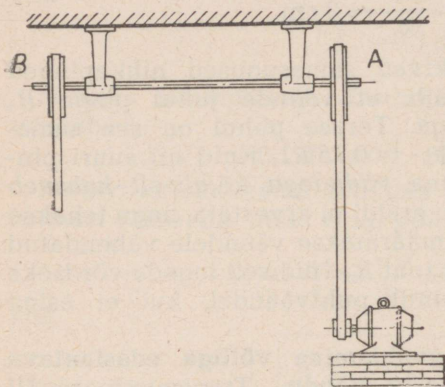
Käivitades mootori, tekitame parema rihmaratta A pööramisega võlli väänamise, kuna pingi töövõll inertsjõudude ja muude vastupanude tõttu ei hakka liikuma. Kui võlli on väänatud niipalju, et tema elastsusjõudude moment saab võrdseks pingi töövõlli pöörlemiseks tarviliku momendiga, milleks kulub mürdosa sekundist, kuna väändenurk on tavaliselt väga väike, pink käivitub ja võll hakkab pöörlema väänatud olekus. Võlli pöörav moment on üheaegselt ka väändemoment. Tavaliselt on teada *võlli pöörete arv minutis n ja võlliga edasiantav võimsus N (HJ)*.

Avaldame nende suuruste kaudu väändemomendi M . Ole-tame, et jõupaar momendiga $M = P \cdot 2a$ (joon. 90) pöördus nurga α võrra. Kumbki jõupaari kuuluv jõud läbib seejuu-

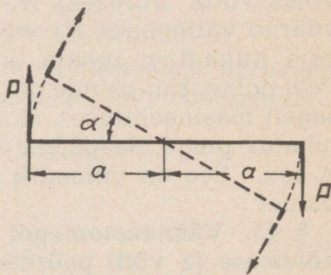
res tee $a \cdot a$, järelikult jõupaari töö on $W = P \cdot 2a \cdot a$; kuid $P \cdot 2a = M$, kust

$$W = M\alpha,$$

s. o. jõupaari poolt teostatud töö pöördumisel nurga α võrra võrdub jõupaari momendi ja pöördenurga korrutisega.



Joon. 89.



Joon. 90.

Jõupaar (väändemoment), mis põhjustab võlli pöörlemist, on seotud temaga ja pöörduv sama nurga võrra kui võll.

1 sekundi jooksul n pööret minutis tegev võll pöörduv nurga α võrra, mille avaldame radiaanides:

$$\alpha = \frac{2\pi n}{60}.$$

Seejuures on väänava jõupaari poolt sooritatud töö eeltoodu põhjal:

$$W = M\alpha = M \cdot \frac{2\pi n}{60}.$$

Sama aja, s. o. ühe sekundi jooksul mootorilt saadud töö võllil on

$$N \cdot 75 \text{ kgm/sek.} = N \cdot 7500 \text{ kgcm/sek.},$$

kuna üks hobujõud on 75 kgm/sek.

Võrrutades paari poolt sooritatud ja mootorilt saadud tööd, leiame:

$$M \cdot \frac{2\pi n}{60} = N \cdot 7500,$$

kust

$$M = \frac{7500 \cdot 60}{2\pi} \cdot \frac{N}{n} \text{ kgcm}$$

ehk

$$M \approx 71620 \cdot \frac{N}{n} \text{ kgcm.} \quad (28)$$

§ 46. **Valem võlli läbimõõdu määramiseks lubatava väändepinge järgi.** Asetame valemisse (27) leitud M avaldise [valem (28)] ja asendame W_p tema väärtusega $0,2d^3$, saame:

$$R_v = \frac{71620 \cdot \frac{N}{n}}{0,2d^3},$$

kust

$$d = \sqrt[3]{\frac{71620 \cdot N}{0,2 R_v \cdot n}} \text{ cm.} \quad (29)$$

Pöörame tähelepanu sellele, et *võlli läbimõõt on pöördvõrdeline kuupjuurega tema pöörete arvust*. Kui suurendada võlli pöörete arvu 8 korda, siis võib teha sama väändepingega töötava ja sama võimsust edasiandva võlli läbimõõdu kaks korda väiksema.

Valem (29) annab võimaluse lahendada suure arvu võllide arvutusse puutuvaid küsimusi. Vaatleme näitena üht sellist ülesannet.

Näide 10. Võll läbimõõduga $d = 10$ cm peab üle andma võimsuse $N = 240$ HJ, töötades pingega $R_v = 300$ kg/cm². Mitu pööret minutis peab tegema võll?

Valemist (29) leiame, et

$$n = \frac{71620 N}{0,2 d^3 R_v} = \frac{71620 \cdot 240}{0,2 \cdot 10^3 \cdot 300} \approx 286 \text{ pööret/min.}$$

Leiame veel, mitu pööret peab tegema see võll, et ta sama läbimõõdu ja väändepinge juures annaks üle $N = 300$ HJ.

Lahendusest on näha, et pöörete arv on võrdeline N -iga, järelikult

$$n_1 : n = 300 : 240,$$

kust

$$n_1 = \frac{300 \cdot 286}{240} \approx 358 \text{ pööret/min.}$$

§ 47. **Võlli väändenurga suurus.** Vaatleme joonist 83. Kui me, nagu ikka, vaatleme ainult väikesi deformatsioone, siis võime lugeda, et ABB_1 on täisnurkne kolmnurk. Oletades, et $\text{tg } \gamma \approx \gamma$, võime kirjutada:

$$\sphericalangle BB_1 = l \text{tg } \gamma \approx l \gamma.$$

Sama kaarepikkust võib teisiti avaldada:

$$\sphericalangle BB_1 = \varphi \cdot r,$$

kus r on lati ristlõike raadius.

Võrrutades kaare pikkuse avaldised, saame:

$$\varphi r = l \gamma,$$

kust

$$\varphi = \frac{l}{r} \gamma.$$

Kuid Hooke'i seaduse põhjal nihkel [vt. valem (17)]

$$\gamma = \tau : G.$$

Asetades γ väärtuse φ avaldisse, saame:

$$\varphi = \frac{l \tau}{Gr}. \quad (30)$$

Siin τ võetakse muidugi B -le vastava, s. o. pinnal asetseva punkti jaoks. Me juba leidsime [valem (22)], et

$$\tau = \frac{Mr}{J_p}.$$

Peale τ asetamist väändenurga avaldisse ja taandamist saame lõplikult:

$$\varphi = \frac{MI}{GJ_p}. \quad (31)$$

Selgitame valemite (30) ja (31) kasutamist ülesannete lahendamisel.

Näide 11. Terastraat pikkusega $l = 1$ m ja läbimõõduga $d = 2$ mm on ühe otsaga kinnitatud klambrisse, kuna teise otsa on rakendatud traati väänav jõupaar. Millise väändenurga φ juures suurim pinge τ on 600 kg/cm^2 , kui $G = 82 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$?

Asetades andmed valemisse (30), leiame, et

$$\varphi = \frac{100 \cdot 600}{82 \cdot 10^4 \cdot 0,1} = 0,732.$$

Trigonomeetriast on teada, et

$$\varphi^\circ = \varphi \cdot \frac{180}{\pi}.$$

Korrutades radiaanides saadud nurga φ väärtuse suurusega $\frac{180}{\pi}$ leiame, et

$$\varphi = 0,732 \cdot \frac{180}{3,14} \approx 42^\circ.$$

Näide 12. Terasvõlli, pikkusega 2 m ja läbimõõduga $d = 4$ cm väänatakse momendiga $M = 10\,000$ kgcm. Leida väändenurk, kui $G = 8 \cdot 10^5$ kg/cm². Valemist (31) leiame:

$$\varphi = \frac{Ml}{GJ_p} = \frac{10\,000 \cdot 200}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 4^4} \approx 0,1.$$

§ 48. Valem võlli läbimõõdu määramiseks lubatava väändenurga järgi. Võib juhtuda, et võll, mille läbimõõt on arvutatud valemi (29) järgi, rahuldades vastupidavustingimust, pole piisavalt jäik, s. o. hakkab tunduva nurga võrra väänatuna tugevasti vedrutama, mille tagajärjel annab momenti edasi ebahühtlaselt — hookaupa.

Oletame, et mõningatel kaalutlustel ei tohi väändenurk võlli pikkuse jooksvale meetrile ületada m kraadi, ehk $\frac{m^\circ}{100}$ ühele jooksvale sentimeetrile.

Avaldame valemiga (31) antud väändenurga kraadides. Selleks on vaja korrutada valemi paremat poolt suurusega $\frac{180}{\pi}$, nagu me tegime juba eelmise paragrahvi näites:

$$\varphi^\circ = \frac{Ml}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi}.$$

Väändenurk *pikkusühikule* (ühele sentimeetrile) võrdub

$$\frac{\varphi^\circ}{l} = \frac{M}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi}.$$

Tingimuse järgi ta peab võrduma $\frac{m^\circ}{100}$. Asendame $\varphi^\circ : l$ selle suurusega, momendi M avaldisega võrdusest (28) ja avaldame J_p $0,1 d^4$ kaudu. Asetanud need andmed valemisse, saame:

$$\frac{m}{100} = \frac{71\,620 \cdot \frac{N}{n} \cdot 180}{G \cdot 0,1 d^4 \cdot \pi}.$$

Võttes $G = 8,5 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ (terasvõll), leiame lõplikult:

$$d = \sqrt[4]{\frac{71\,620 \cdot 180 \cdot 100}{8,5 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 3,14 \text{ m}} \cdot \frac{N}{n}}$$

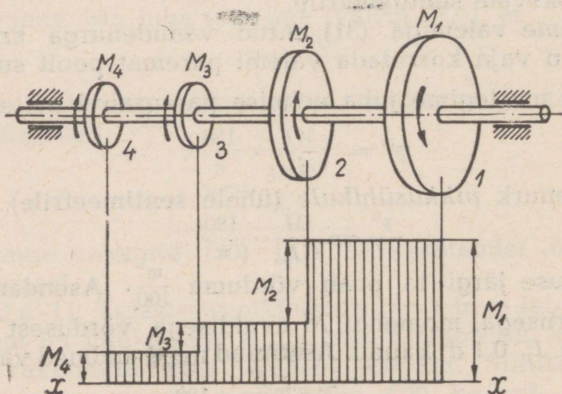
Kui arvata, nagu seda sageli tehakse, tõsi küll ilma küllaldase aluseta, et väändnurk võlli pikkuse jooksvale meetrile ei tohi ületada $1/4^\circ$, s. t. et $m = 0,25$, siis

$$d \approx 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad (32)$$

Arvutus teostatakse nii valemi (29) kui ka valemi (32) järgi. Kahest läbimõõdu väärtusest valitakse suurem.

§ 49. Väändemomentide epüür. Kui võlli pikkusele on asetatud rida tööpinkidega ühendatud rihmarattaid või hammasrattaid, siis, teades pinkidele vajalikku võimsust ja võlli pöörete arvu, on kerge valemi (28) põhjal arvutada vajalikke momente. Nende momentide summa, kui mitte arvestada hõõrdumist laagrites ja lugeda, et võll pöörleb ühtlaselt, võrdub mootorilt saadava momendiga. Kasutatavad momendid omavad mootorist saadavale momendile vastupidist suunda.

Näide 13. Mõjugu võlli (joon. 91) parempoolsele otsale moment $M_1 = 100 \text{ kgm}$, vasakul asetsevatel rihmaratastel



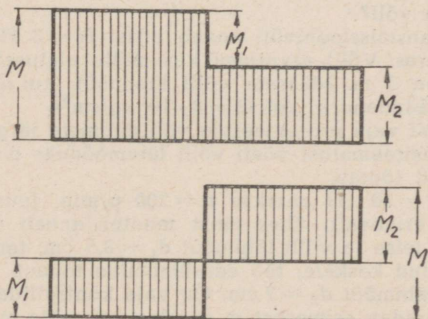
Joon. 91.

aga olgu vajalikud momendid $M_2 = 60$ kgm, $M_3 = 20$ kgm ja $M_4 = 20$ kgm. Tõmbame võlli teljega paralleelse sirge XX (vt. joonisel 91 all) ja hakkame kandma temast sobivas mõõdus rihmaratastevahelistele üksikutele võlli osadele mõjuvate väändemomentide suurus. Esimesele rihmarattale mõjub moment M_1 . Kanname selle suuruse üles. See moment jääb konstantseks võlli osas 1—2. Teisel rihmarattal on vajalik moment M_2 , mille vastava suuruse lahutame momenti M_1 kujutavast ordinaadist. Ulejäänu antakse edasi rihmarattale 3, kus on vajalik moment M_3 . Kogu momendist säilis nüüd veel moment M_4 . Ta säilitab oma väärtuse osas 3—4. Rihmarattal 4 kasutatakse ka see.

Ehitatud graafikut nimetatakse *väändemomentide epüüriks*. Ta annab näitliku kujutise võlli üksikutele osadele mõjuvatest momentidest, mis võimaldab arvutada väändepingeid nendes osades ja samuti ka väändenurki. Tuleb märkida, et pika võlli puhul võib võlli kergendamiseks teha selle astmelisena, arvutades üksikuid osi ühe ja sama lubatava pingega. Suurim läbimõõt saadakse sel juhul osas 1—2. Keskmises osas on see väiksem ja vasakus äärmises veelgi väiksem.

Vaatleme veel üht näidet.

Näide 14. Joonisel 92 ülal on kujutatud väändemomentide epüür juhul kui kaks, momente M_1 ja M_2 vajavat pinki



Joon. 92.

on paigutatud ühele poole rihmarattast, mis saab mootorilt momendi M . Kui völli valmistatakse ühe ja sama läbimõõduga kogu pikkuses, siis tema arvutus tuleb teha suurima momendi M järgi.

Kui mootorilt väändemomenti vastuvõttev rihmaratas paigutada völli keskele, siis väändemomentide epüür saab kuju, nagu on näidatud joonisel 92 all. Nüüd on suurimaks väändemomendiks M_2 , mis on meil võetud veidi suurem poolest M -ist. Völli arvutusel momendi M_2 järgi saadakse ta muidugi väiksema läbimõõduga kui arvutusel M järgi.

Seega selle rihmaratta õnnestunud asetusega, millele mõjub mootori moment, võib vähendada völli kaalu ja hinda. Algajad arvavad mõnikord, et ka teisel juhul mõjub keskmises lõikes moment M ja et me peame teostama arvutuse järelikult selle momendi järgi, s. o. ei saavuta mingit võitu, võrreldes esimese juhuga. See arvamus on väär. Osa momenti antakse edasi vasakule ja osa paremale ning völlil pole olemas sellist lõiget, kus mõjub nende momentide summa.

§ 50. Ulesandeid väändele.

30. Paadimootor võimsusega 30 HJ annab edasi laevakruvi völlile väändemomendi 159 kgcm. Völli läbimõõt $d = 48$ mm. Leida völli väändepinge.

31. 60 pöoret minutis tegev transmissioonivölli oli arvutatud lubatava väändenurgaga $\frac{1}{4}^\circ$ jooksvale meetrile. Mitte vähendades edasiantavat võimsust, on vaja vähendada väändenurka kahekordselt. Millise pöörete arvu peab tegema völli?

32. Terasest transmissioonivölli annab edasi $N = 3$ HJ pöörete arvu $n = 120$ p/min. juures. Völli arvutus pikkus, mille ulatusel antakse edasi väändemoment, on 3 m. Määrata völli läbimõõt, kui $R_v = 300$ kg/cm². Kui suur on üldväändenurk, kui $G = 8 \cdot 10^5$ kg/cm²?

33. Töökojale oli vaja projekteerida völli andmete järgi: $N = 50$ HJ ja $n = 200$ p/min. Käsiraamatust võeti völli läbimõõduks $d = 85$ mm. Leida pinge, millega völli töötab.

34. Võimsus $N = 50$ HJ antakse $n = 200$ p/min. juures edasi kahes remonditöökojas erinevalt: ühes neist mootor annab edasi kogu töö völli ühest otsast teise ja völli läbimõõt $d_1 = 8,5$ cm, teises töökojas on aga mootor asetatud keskele; töö edasiandmine toimub mõlemale poole võrdsest ja völli läbimõõt $d_2 = 7$ cm. On vaja kontrollida, kas teine völli pole vähem vastupidav esimesest ja seejärel võrrelda mõlemate völlide kaalu, lugedes nende pikkused võrdseiks.

35. Mehhanismis, kus on eriti tähtis kaalu vähendamine, tahetakse

vahetada süsinikterasest võll, mis on arvatatud väändepingega 150 kg/cm^2 , kvaliteetterasest võlliga, mille $R_v = 4500 \text{ kg/cm}^2$. Selgitada, milline erinevus tekib läbimõõtude suuruses ja võllide kaalus, lugedes mõlema terase erikaalud võrdseks.

36. Leida võimsus, mis antakse edasi 120 pööret minutis tegeva võlliga, kui võlli pikkusel 5 m väändenurk $\varphi = 0,05$. Võlli läbimõõt $d = 8 \text{ cm}$, moodul $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

X PEATUKK.

**TASAPINNALISTE KUJUNDITE RASKUSKESKMED,
STAATILISED MOMENDID JA INERTSMOMENDID.**

§ 51. **Kujundi pinna raskuskese.** Mehaanikas on antud *kaaluliste* pindade (täpsemalt plaatide) raskuskeskmete määramise viis. Kujutelles, et vaadeldava *geomeetrilise* kujundi pind kujutab endast õhukest, võrdse paksusega homogeenet plaati, võib kõnelda selle raskuskeskmest. Raskuskeset võib leida samade valemitega, mis antakse staatikas, ainult üksikute plaadi osade kaalude asemele tuleb võtta nende pindalad, mis asendavad jõude (kaale).

Seepärast

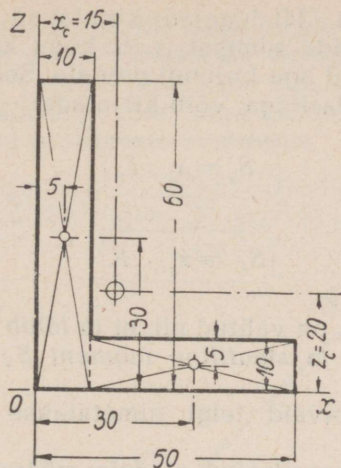
$$x_c = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \quad (33)$$

$$z_c = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \quad (34)$$

kus F -iga on tähistatud kujundi osade pindalad ja x -i ning z -iga nende osade raskuskeskmete koordinaadid. Leiame näiteks joonisel 93 kujutatud kujundi raskuskeskme. Võtame koordinaatteljed, nagu näidatud joonisel, ja jaotame kujundi kaheks ristkülikuks. Ristkülikute raskuskeskmete asendi leiame raskusteta. Teades neid, võib kirjutada, et

$$x_c = \frac{10 \cdot 60 \cdot 5 + 40 \cdot 10 \cdot 30}{10 \cdot 60 + 40 \cdot 10} = 15 \text{ mm};$$

$$z_c = \frac{10 \cdot 60 \cdot 30 + 40 \cdot 10 \cdot 5}{10 \cdot 60 + 40 \cdot 10} = 20 \text{ mm}.$$



Joon. 93.

§ 52. Staatiline moment. Eraldame mingisuguse kujundi pinnast (vt. joon. 97) õige väikese pinnaelemendi ΔF koordinaatidega x ja z ¹. Võib moodustada korrutised $\Delta F \cdot x$ ja $\Delta F \cdot z$. Asendades pindalad jõududega, võib niisuguseid korrutisi nimetada pinnaelementide *staatilisteks momentideks*. Niisuguste korrutiste summat, laiendatuna kogu pinnale, nimetatakse *kujundi staatiliseks momendiks* telgede x ja z suhtes. Staatilist momenti tähistatakse tavaliselt tähega S , kirjutades alla telje tähise, mille suhtes ta on koostatud. Järelikult võib kirjutada:

$$S_x = \sum_F \Delta F \cdot z; \quad (35)$$

$$S_z = \sum_F \Delta F \cdot x. \quad (36)$$

¹ Täpselt öeldes peavad kaugused x ja z olema võetud pinnaelemendi raskuskeskmest, kuid pinnaelemendi väiksuse tõttu võib kauguste x ja z asemel võtta kaugused tema servast, nagu näidatud joonisel.

Valemite (33) ja (34) lugejad kujutavad kujundi osade staatiliste momentide summat, s. o. kogu kujundi staatilist momenti, nimetajad aga kujundi pindala. Seepärast, tähistades kujundi pindala F -iga, võib kirjutada:

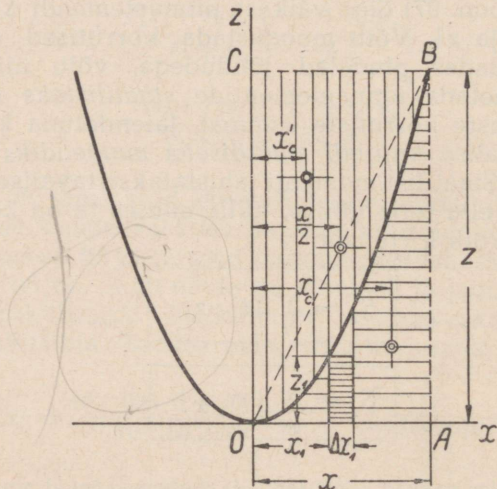
$$\boxed{S_z = x_c \cdot F}, \quad (37)$$

$$\boxed{S_x = z_c \cdot F}. \quad (38)$$

Kuj telg, näiteks x , on valitud nii, et ta läbib kujundi raskuskeset, siis $z_c = 0$ ja staatiline moment $S_x = F \cdot z_c = F \cdot 0$ muutub nulliks.

Raskuskeset läbivaid telgi nimetatakse *tsentraal-* ehk *raskustelgedeks*.

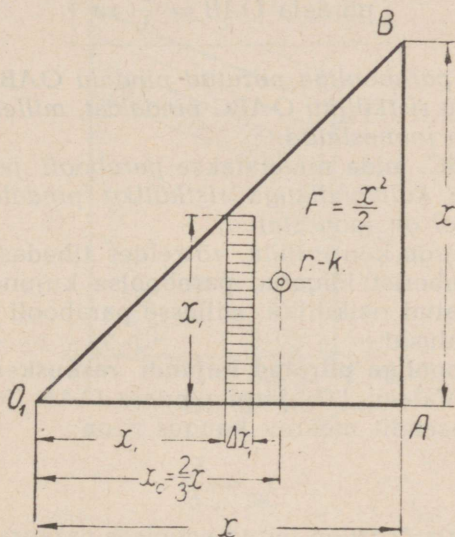
§ 53. **Parabooliga piiratud pindala määramine.** Mitmesuguste tugevusõpetuse ülesannete lahendamisel tuleb sageli arvutada parabooliga piiratud kujundite pindalasid, nagu näiteks ABO või OBC joonisel 94.



Joon. 94.

Leiame algul pindala OAB . Olgu ta piiratud parabooliga, mille võrrand on $z = x^2$. Eraldame koordinaatide algusest kaugusel x_1 õige väikese pinnakese laiusel Δx_1 ja kõrgusega $z_1 = x_1^2$. Mõistagi võib kogu pindala OAB kujutada tihedalt viirutatud pinnakeste summana:

$$\text{pindala } OAB = \sum_{x_1=0}^{x_1=x} \Delta x_1 \cdot z_1 = \sum_{x_1=0}^{x_1=x} \Delta x_1 \cdot x_1^2 = \sum_{x_1=0}^{x_1=x} (\Delta x_1 \cdot x_1) x_1.$$



Joon. 95.

Summa arvutamiseks mõõdame punktist O_1 (joon. 95) x_1 -ga võrdse joonlõigu, mille lõpul ehitame õige väikese pinnakese külgedega x_1 ja Δx_1 . Selle pinnakese korrutis x_1 -ga kujutab pinnakese staatilist momenti punkti O_1 suhtes. Selliste staatiliste momentide summa x_1 muutumisel nullist x -ini võrdub pinnakestest $x_1 \cdot \Delta x_1$ koostatud kolmnurga O_1AB pindala staatilise momendiga punkti O_1 suhtes.

Et saada kolmnurga pindala staatilist momenti, tuleb selle

pindala korrutada kolmnurga raskuskeskme kaugusega O_1 -st (x_c).

Seega

$$\text{pindala } OAB = \sum_{x_1=0}^{x_1=x} (\Delta x_1 \cdot x_1) x_1 = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{3} x = \frac{x^3}{3}$$

ehk

$$\boxed{\text{pindala } OAB = \frac{1}{3} xz.} \quad (39)$$

Selgub, et *parabooliga piiratud pindala OAB võrdub ühe kolmandikuga ristküliku OABC pindalast, millesse see parabooli pool on joonestatud.*

Pindala OBC, mida nimetatakse parabooli poolpindalaks, võrdub kahe kolmandikuga ristküliku pindalast, millesse parabooli pool on joonestatud.

Seda on kerge kontrollida, võrreldes tihedast, ühesuguse paksusega paberist lõigatud paraboolse kujundi ja samast paberist lõigatud ristküliku, millesse parabooli pool on joonestatud, kaalusid.

§ 54. Parabooliga piiratud kujundi raskuskeskme asendi määramine. Valemi (37) järgi pindala OAB (joon. 94) raskuskeskme asendit määrav kaugus x_c on:

$$x_c = \frac{S_z}{F}$$

Kuna pindala OAB on leitud eelmises paragrahvis, siis x_c arvutamiseks on vaja leida S_z suurus. Kuid

$$S_z = \sum_{x_1=0}^{x_1=x} (\Delta x_1 \cdot z_1) x_1 = \sum_{x_1=0}^{x_1=x} (\Delta x_1 \cdot x_1^2) x_1.$$

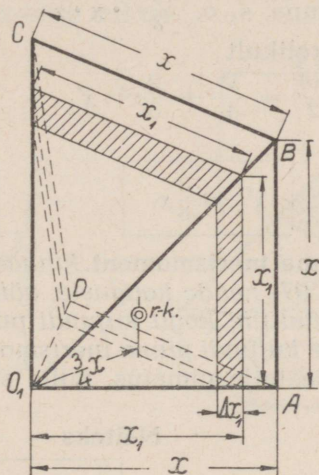
Summa märgi all olevat korrutist võib kujutada (joon. 96) kui ruudukujulise ristlõikega prisma, külgedega x_1 ja kõrgusega Δx_1 , mahu staatilist momenti punkti O_1 suhtes. Selliste korrutiste summa võrdub püramiidi O_1ABCD mahu staatilise momendiga punkti O_1 suhtes.

See staatiline moment võrdub püramiidi mahuga $\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot x$,

korrutatud tema raskuskeskme kaugusega O_1 -st, mis, nagu teada mehaanikast, võrdub $3/4$ -ga püramiidi kõrgusest, s. o. $\frac{3}{4} x$.

Seega

$$S_z = \sum_{x_1=0}^{x_1=x} (\Delta x_1 \cdot z_1) x_1 = \left(\frac{1}{3} x^2 \cdot x \right) \cdot \frac{3}{4} x = \frac{x^4}{4} .$$



Joon. 96.

Jagades saadud suuruse varem leitud pindalaga OAB , saame:

$$x_c = \frac{S_z}{F} = \frac{x^4}{4} : \frac{x^3}{3}$$

ehk

$$x_c = \frac{3}{4} x . \quad (40)$$

Saadud raskuskeskme kaugust võib kontrollida, lõigates tihedast paberist kujundi ja tasakaalustades selle lauanaa teral.

§ 55. Parabooli pinna raskuskeskme asendi määramine. Ristküliku $OABC$ (joon. 94) pindala staatiline moment telje z suhtes võrdub $(xz) \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^4}{2}$. Teisest küljest ta peab võrduma pindade OAB ja OBC staatiliste momentide summaga sama telje suhtes. Pinna OAB staatiline moment on leitud eespool ja on $\frac{x^4}{4}$, pinna OBC staatiline moment võrdub aga sellele juba leitud pinna, s. o. $\frac{2}{3} \cdot x \cdot z = \frac{2}{3}x^3$ korrutisega kaugusega x'_c . Järelikult

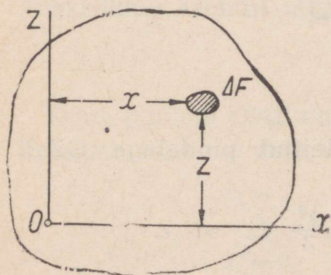
$$\frac{x^4}{2} = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 \cdot x'_c,$$

kust

$$x'_c = \frac{3}{8}x. \quad (41)$$

§ 56. Kujundi pinna inertsmoment. Pinnaelementide korruktiste summat (joon. 97) nende kauguste, näiteks x või z , ruutudega teljest, võetud üle kogu kujundi pinna, tähistatakse J -iga ja nimetatakse kujundi pinna inertsmomentiks; seejuures lisatakse juurde telje nimetus, mille suhtes see inertsmoment võetakse.

Näiteks



Joon. 97.

$$J_x = \sum_F \Delta F z^2 \quad (42)$$

on kujundi pinna inertsmoment x -telje suhtes.

Samal viisil nimetatakse avaldist

$$J_z = \sum_F \Delta F x^2 \quad (43)$$

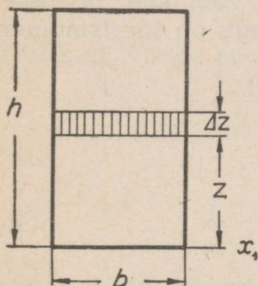
pinna inertsmomentiks z -telje suhtes. Nende suurustega kohtume paindepingete määramisel.

§ 57. Ristküliku ja ruudu inertsmomentid. Ristküliku- ja ruudukujulisi ristlõikeid kohtame sageli prusside juures.

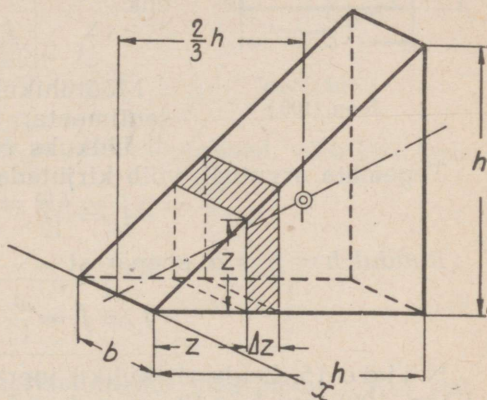
Leiame ristküliku inertsmomendi (joon. 98) tema alusega ühtiva telje x_1 suhtes.

$$J_{x_1} = \sum_F \Delta F \cdot z^2 = \sum_{z=0}^{z=h} (b \Delta z) z^2 = \sum_{z=0}^{z=h} (b z \Delta z) z.$$

Summa märgi all sulgudes olevat korrutist võib kujutella viirutatud prisma (joon. 99) mahuna. Selle mahu korrutis z -iga, kui seda mahtu kujutella kaaluvana, annab tema staatilise momendi x -telje suhtes.



Joon. 98.



Joon. 99.

Summeerimise laiendamisel kogu ristküliku pindalale moodustavad elementaarsed prismakesed kolmetahulise prisma mahuga $\frac{1}{2} h^2 b$ ja nende staatiline moment saadakse, kui prisma maht korrutada tema raskuskeskme kaugusega sellest teljest, s. o. $\frac{2}{3} h$ -ga.

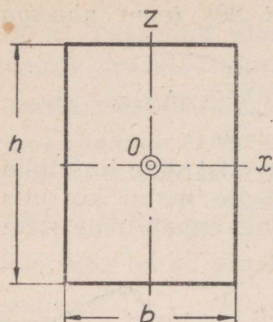
Järelikult

$$J_{x_1} = \sum_F \Delta F z^2 = \frac{1}{2} h^2 \cdot b \cdot \frac{2}{3} h$$

ehk

$$\boxed{J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}.} \quad (44)$$

Ristküliku inertsmoment tema raskuskeset läbiva ja alusega paralleelse telje suhtes (joon. 100), nagu on kerge näha,



Joon. 100.

võrdub valemis (44) järgi leitud inertsmomenti kahekordse väärtusega, kui valemis kõrgus lugeda võrdseks $\frac{h}{2}$ -ga.

Seega

$$J_x = 2 \cdot \frac{b \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3}{3}$$

ehk

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (45)$$

Mõõtühikuks võetakse tavaliselt sentimeeter. Seega on inertsmomenti ühikuks cm^4 .

Tegemata arvutusi, võib kirjutada, et

$$J_z = \frac{hb^3}{12}.$$

Ruudul $h = b = a$, seepärast

$$J_x = J_z = \frac{a^4}{12}. \quad (46)$$

Näide 15. Leida ristküliku inertsmoment x -telje suhtes (joon. 100), kui $h = 12$ cm ja $b = 5$ cm.

Valemi (45) järgi saame:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{5 \cdot 12^3}{12} = 720 \text{ cm}^4.$$

Näide 16. Ruudu külge $a = 10$ cm. Leida inertsmoment ruudu raskuskeset läbiva ja küljega paralleelse telje suhtes.

Valemi (46) järgi saame:

$$J_x = J_z = \frac{a^4}{12} = \frac{10^4}{12} = 833 \text{ cm}^4.$$

§ 58. Ringi inertsmoment. Sümmeetria tõttu on ringi inertsmomentid kahe omavahel risti asetseva tsentraaltelje suhtes võrdsed (joon. 101). Paragrahvis 43 leidsime [valem (24)], et

$$J_p = \sum_F \Delta F \rho^2 = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Joonisel 101 on näha, et

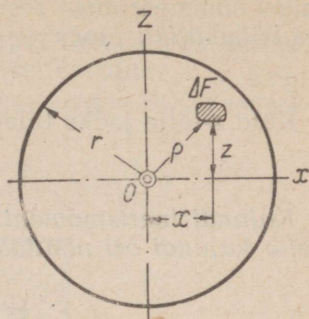
$$\rho^2 = x^2 + z^2.$$

Asetades selle tähenduse eelmisesse avaldisse, leiame:

$$J_p = \sum_F \Delta F \cdot \rho^2 = \sum_F \Delta F (x^2 + z^2) = \\ = \sum_F \Delta F x^2 + \sum_F \Delta F z^2 = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Kuid

$$\sum_F \Delta F x^2 = J_z \text{ ja } \sum_F \Delta F z^2 = J_x,$$



Joon. 101.

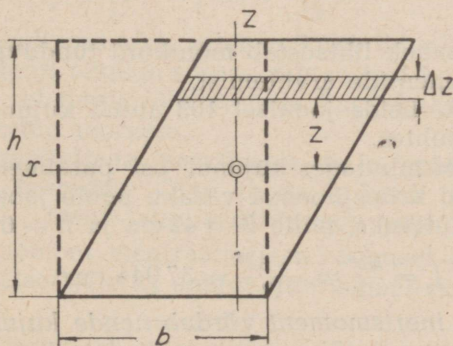
järelikult, võttes arvesse, et nad on võrdsed, võib kirjutada:

$$J_z + J_x = 2 J_z = 2 J_x = \frac{\pi r^4}{2},$$

kust

$$J_x = J_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05 d^4. \quad (47)$$

§ 59. Liitkujundite inertsmomendi määramine. Kui ristkülik (joon. 100) muuta võrdse suurusega rööpkülikuks, nagu on näidatud joonisel 102, siis pole raske näha, et J_x määra-



Joon. 102.

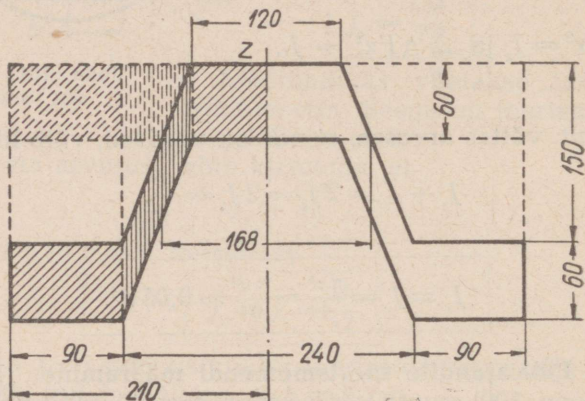
misel summeerimise resultaadid jäävad muutmatuks, s. o. ka rööpküliliku jaoks

$$J_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Kuid z-telje jaoks tuleb tulemus muidugi teistsugune,

$$J_z = \frac{hb^3}{12}.$$

Kujundi inertsmoment mingi telje suhtes ei muutu, kui selle kujundi osi nihutada paralleelselt selle teljega.



Joon. 103.

See tähelepanek lihtsustab mõnikord tunduvalt liitkujundite inertsmomentide arvutamist.

Näide 17. Leida joonisel 103 antud kujundi inertsmoment z-telje suhtes.

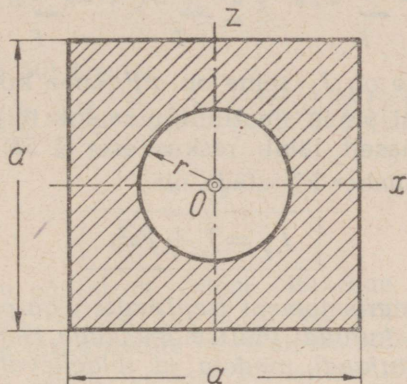
Märkame, et nihutades kujundi osi paralleelselt teljega, nagu näidatud kriipsjoonega vasaku poole jaoks, me muudame ta ristkülikuks, mille $b = 42$ cm ja $h = 6$ cm; leiame:

$$J_z = \frac{hb^3}{12} = \frac{6 \cdot 42^3}{12} = 37\,044 \text{ cm}^4.$$

Liitkujundi inertsmoment võrdub nende kujundite inertsmomentide summa või vahega, milledest liitkujundit võib koostada.

Näide 18. Joonisel 104 on kujutatud ruut, avaga keskel. Tähistame ruudu inertsmomenti x -telje suhtes J'_x , ringi inertsmomenti aga J''_x . Eelöeldu põhjal kogu kujundi inertsmoment

$$J_x = J'_x - J''_x.$$



Joon. 104.

Asetades J'_x ja J''_x asemele nende avaldised valemitest (46) ja (47), saame:

$$J_x = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi r^4}{4} = \frac{a^4 - 3\pi r^4}{12}.$$

Jagades kujundi osadeks, tuleb mõnikord vajadus kirjutada inertsmomenti telgede suhtes, mis ei läbi kogu kujundi raskuskeset — sel juhul võib osutada kasulikuks järgmises paragrahvis toodud teoreem.

§ 60. **Tsentraalteljega paralleelse telje suhtes võetud inertsmomenti teoreem.** Olgu teada kujundi (joon. 105) inertsmoment J_x tsentraaltelje suhtes, on vaja leida sama kujundi inertsmoment tsentraalteljest kaugusel a asetseva temaga paralleelse telje x_1 suhtes. Inertsmoment üldiselt

$$J_{x_1} = \sum_F \Delta F z_1^2,$$

kuid joonisel on näha, et

$$z_1 = z + a.$$

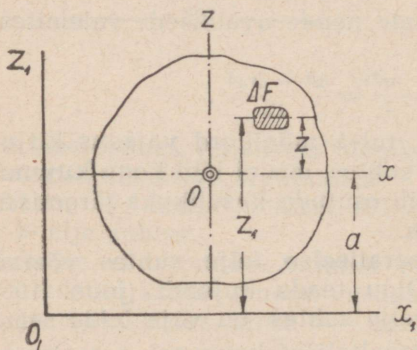
Asetades selle J_{x_1} avaldisse, saame:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \sum_F \Delta F \cdot z_1^2 = \sum_F \Delta F (z + a)^2 = \\ &= \sum_F \Delta F z^2 + a^2 \sum_F \Delta F + 2a \sum_F \Delta F z. \end{aligned}$$

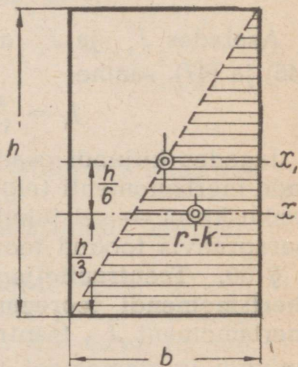
Esimene liige on J_x , teine on $a^2 F$, kuna kolmas liige võrdub nulliga kui pinna staatiline moment telje suhtes, mis tingimuse kohaselt läbib raskuskeset (§ 52). Järelikult J_{x_1} avaldist võib ümber kirjutada nii:

$$J_{x_1} = J_x + Fa^2, \quad (48)$$

s. o. kujundi inertsmoment tsentraalteljega paralleelse telje suhtes võrdub kujundi inertsmomendiga tsentraaltelje suhtes, liidetud kujundi pindala ja telgedevahelise kauguse ruudu korrutisega.



Joon. 105.



Joon. 106.

§ 61. Kolmnurga inertsmoment tema raskuskeset läbiva ja alusega paralleelse telje suhtes (joon. 106). Selle inertsmomendi võib leida, kasutades §-s 60 toodud teoreemi.

Viirutatud kolmnurga inertsmoment telje x_1 suhtes võr-

dub ilmselt poolega risküliku inertsomendist sama telje suhtes:

$$J_{x_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{24}.$$

Kuna kolmnurga raskuskese asetseb alusest kaugusel $\frac{h}{3}$, siis telgede x_1 ja x vaheline kaugus on

$$\frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}.$$

Valemi (48) (§ 60) järgi

$$J_x = J_{x_1} + Fa^2 = \frac{bh^3}{24} - \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{6}\right)^2$$

ehk

$$\boxed{J_x = \frac{bh^3}{36}} \quad (49)$$

§-s 59 öeldu põhjal on valem (49) õige iga kolmnurga jaoks, olenemata sellest, kas ta on täis- või kaldnurkne.

§ 62. Näiteid liitkujundite inertsomomentide määramisest.

Näide 19. Leida joonisel 107 antud lõikepinna inertsomoment tsentraaltelgede x ja z suhtes.

Lahendus. Raskuskese asetseb teljel z , kuna kujund on selle telje suhtes sümmeetriline. Kauguse z_c määramiseks kasutame valemit (34), kusjuures loeme, et kujund on jaotatud kaheks riskülikuks:

$$z_c = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_1 + F_2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 7}{10 \cdot 2 + 10 \cdot 2} = 4 \text{ cm} = 40 \text{ mm}.$$

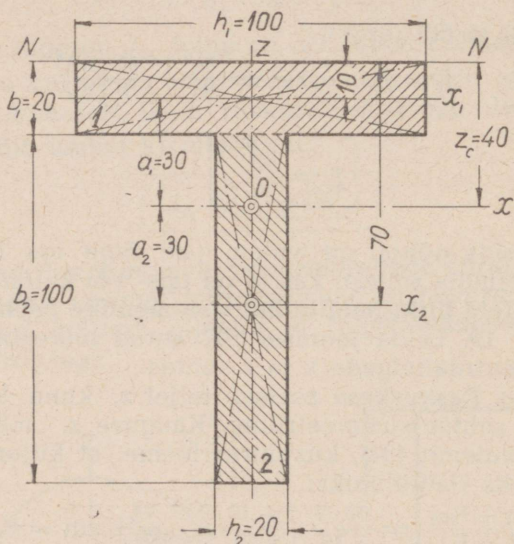
Inertsomoment mõlemate osade raskuskeskmeid läbiva telje z suhtes kirjutatakse valemi (45) järgi:

$$J_z = J'_z + J''_z = \frac{b_1 h_1^3}{12} + \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{2 \cdot 10^3}{12} + \frac{10 \cdot 2^3}{12} \approx 173 \text{ cm}^4.$$

Inertsomendi koostamisel telje x suhtes tuleb kasutada valemit (48), kuna kujundi osade tsentraalteljed x_1 ja x_2 on paralleelsed teljega x , kuid kumbki asetseb sellest 30 mm kaugusel.

$$\begin{aligned} J_x &= J'_x + J''_x = \left(\frac{h_1 b_1^3}{12} + F_1 a_1^2\right) + \left(\frac{h_2 b_2^3}{12} + F_2 a_2^2\right) = \\ &= \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 10 \cdot 2 \cdot 3^2 + \frac{2 \cdot 10^3}{12} + 10 \cdot 2 \cdot 3^2 \approx 533 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Näide 20. Leida \bar{I} -tala (joon. 108) ristlõike inertsmoment tema horisontaaltelje suhtes. Tala koosneb vertikaallehest — „seinast“, kahest horisontaallehest — „vöödest“ ja neljast nurkterasest. Ristlõike mõõted on antud sentimeetrites. Märge $75 \times 75 \times 10$ tähistab, et on kasutatud võrdkülgseid nurkteraseid külgede pikkusega 7,5 cm ja paksusega 1 cm.



Joon. 107.

Lahendus. Vertikaallehe inertsmoment valemi (45) järgi

$$J'_x = \frac{b h^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 30^3}{12} = 2700 \text{ cm}^4.$$

Kahe horisontaallehe inertsmoment võrdub valemi (48) järgi:

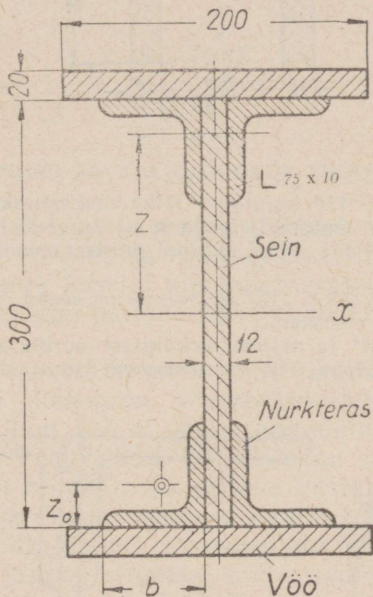
$$J''_x = 2(J_x + F a^2) = 2\left(\frac{20 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 2 \cdot 16^2\right) \approx 20\,500 \text{ cm}^4.$$

Mis puutub nurkterastesse, siis käsiraamatuis toodud sortimendi tabelitest leiame võrdkülgse nurkterase jaoks: pind-

ala $F = 14,10 \text{ cm}^2$, raskuskeskme koordinaat $z_0 = 2,22 \text{ cm}$, inertsmoment $J_x = 72,2 \text{ cm}^4$.

Nende andmete põhjal leiame, et nurkterase raskuskeskme kaugus z (joon. 108) teljest x võrdub:

$$z = 15 - 2,22 = 12,78 \text{ cm.}$$



Joon. 108.

Meil on *neli nurkterast*. Kasutades valemit (48) §-st 60, leiame, et nurkteraste jaoks

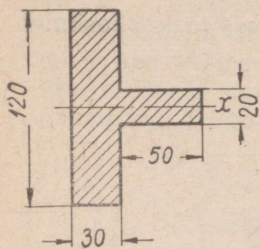
$$J_x''' = 4 (72,2 + 14,10 \cdot 12,78^2) = 9490 \text{ cm}^4.$$

Uldine inertsmoment kogu ristlõike kohta:

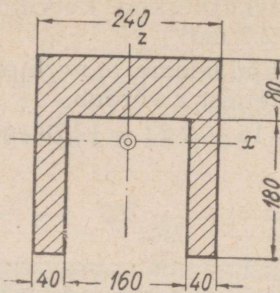
$$J_x = J_x' + J_x'' + J_x''' = 2700 + 20\,500 + 9490 = 32\,690 \text{ cm}^4.$$

§ 63. Ülesandeid inertsmomentide määramiseks.

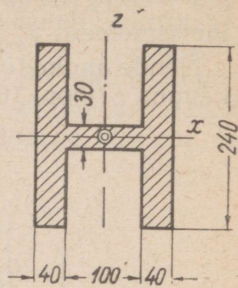
37. Leida joonisel 109 antud kujundi inertsmoment tsentraaltelje x suhtes.



Joon. 109.



Joon. 110.



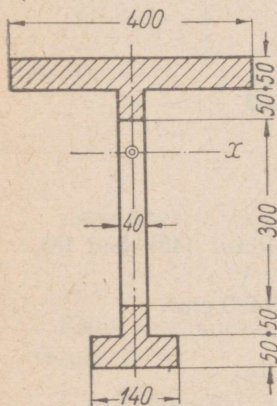
Joon. 111.

38. Leida joonisel 110 kujutatud lõike raskuskeskme asend ja määrata inertsmomentid tsentraaltelgede x ja z suhtes.

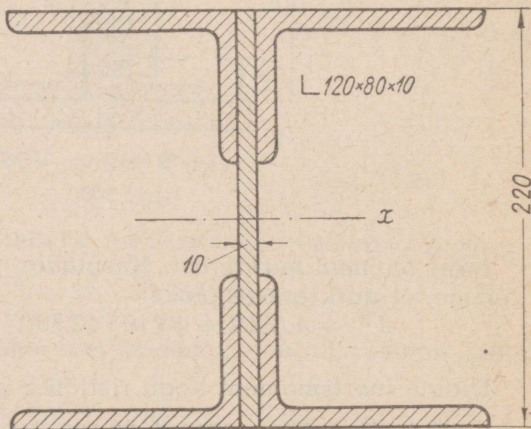
39. Leida joonisel 111 antud kujundi inertsmomentid tsentraaltelgede x ja z suhtes.

40. Leida kujundi (joon. 112) raskuskeskme asend ja määrata inertsmoment tsentraaltelje x suhtes.

41. Leida „seinast“ ja neljast isekülgsest nurkterasesest $120 \times 80 \times 10$ koosneva ristlõike (joon. 113) inertsmoment tsentraaltelje x suhtes.



Joon. 112.



Joon. 113.

XI PEATUKK.

PAINE.

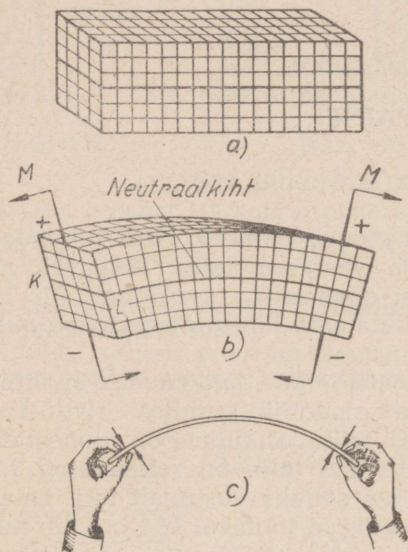
A. PINGED JA VALISJÕUDUDE TEOORIA.

§ 64. **Deformatsioonid ja pinged paindel.** Kui rakendada lati otstele kaks võrdset ja vastassuunalist jõupaari, mis asetsevad lati telge läbival sümmeetriatasapinnal, siis latt *paindub*. Jõupaaridega painutamise juhtu nimetatakse *puhtpaindeks*.

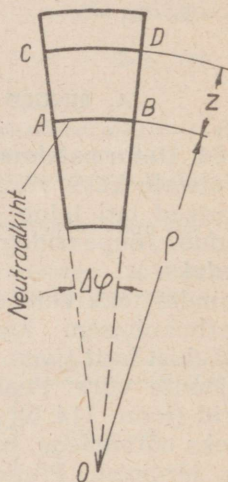
Paindel tekkivate deformatsioonide jälgimiseks on kõige otstarbekohasem kasutada riskülikukujulise ristlõikega kautšukist latti (joon. 114 a), mille tahkudele on joonestatud sirgjoonte võrk. Peale seda, kui talle on rakendatud jõupaarid (joon. 114 b), mõjudes selleks vastavalt lati otstele, näiteks sõrmedega, nagu näidatud joonisel 114 c, võib märkata järgmist. Pikijooned vertikaaltahkudel kõverduvad, kuid ristjooned jäävad sirgeiks; kuigi nad pöörduvad üksteise suhtes teatava nurga võrra, jäävad nad seejuures siiski kõverdunud pikijoontega risti.

Mõõtes punktide kaugusi ükskõik millistel horisontaalsirgetel painutamata latil ja samade punktide vahel painutatud latil, näeme, et kumeral poolel (joon. 114 b) kaugused *suurenevad*, nõgusal aga *vähenevad*. Koos sellega võib märkata, et lati kõrgust poolitav horisontaalsirge kõverdub, kuid ei muuda oma pikkust. Oletades, et lati sees tekivad samasugused deformatsioonid, võib kujutella latti koosnevana kihtidest. Kumera poole kihid ja neis asetsevad kujuteldavad kiud on *tõmmatud*, nõgusal poolel *surutud*. Kumera ja nõgusat poolt eraldab pind, millel samuti asetsevad painduvad kiud, mis aga ei ole tõmmatud ega surutud. Seda

pinda nimetatakse *neutraalkihiks* (vt. joon. 114 b). Lõikejoont, mis tekib neutraalkihi lõikumisel mingi ristlõikega, nimetatakse selle ristlõike *neutraalteljeks* ehk *neutraaljooneks*. Joonisel 114 b on tähtedega *KL* tähistatud üks neutraaljoontest.



Joon. 114.



Joon. 115.

Kuna vertikaaljooned pöörduvad üksteise suhtes kõverdu-mata, siis järelikult *ristlõiked samuti ei kõverdu, vaid, jäädes tasapinnalisteks, ainult pöörduvad*.

Eraldame deformeerunud latist kahe väga lähedase ristlõikega piiratud osa (joon. 115). Nende ristlõigete asend pärast lati deformeerumist on järgmine. Kiud *AB* asetseb neutraalkihis ja kiud *CD* neutraalkihist kaugusel z asetsevas kihis. Tähistame lõigetevahelise nurga $\Delta\varphi$ ja neutraalkihi kõverusraadiuse ρ . Kiu *AB* pikkus, mis on $\rho \cdot \Delta\varphi$, jäi muutmatus, aga kiu *CD* pikkus, mis peale deformatsiooni on $(\rho + z)\Delta\varphi$, suurenes. Painutamata latis nende kiudude pik-

kused olid võrdsed, tähendab kiud CD sai absoluutse pikene-
nemise

$$\Delta l = \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB} = (\rho + z) \Delta \varphi - \rho \cdot \Delta \varphi = z \cdot \Delta \varphi,$$

Kiu suhteline pikene-
mine

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{z \cdot \Delta \varphi}{\rho \cdot \Delta \varphi}$$

ehk

$$\boxed{\varepsilon = \frac{z}{\rho}} \quad (50)$$

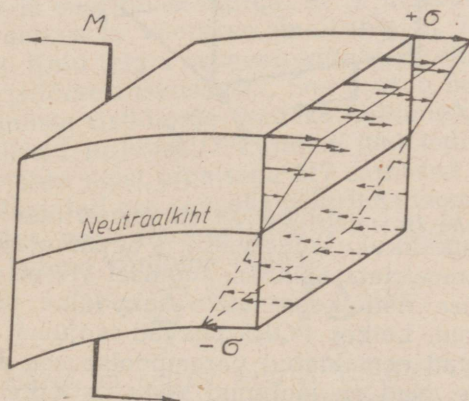
Sama valemiga võib muidugi arvutada ka surutud kiudude suhtelist lühenemist. Katsed näitavad, et kiudude pikene-
mist ja lühenemist saadavad peenenemine ja jämenemine, mis esinevad tavalisel tõmbel ja survel. See annab õiguse väita, et lati kiududes esineb tavaline tõmme ja surve.

Hooke'i seaduse põhjal [valem (4)] $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Asendades ε tema väärtusega valemist (50), saame:

$$\boxed{\pm \sigma = \frac{Ez}{\rho}} \quad (51)$$

Märk $+$ või $-$ valitakse vastavalt ε märgile, mis kindlaks-
määratud reegli järgi loetakse positiivseks tõmbel ja nega-
tiivseks survel.

Valem (51) näitab, et *pinged kiududes suurenevad võrde-
liselt kaugenemisega neutraalkihist*, et ühel ja samal kaugu-

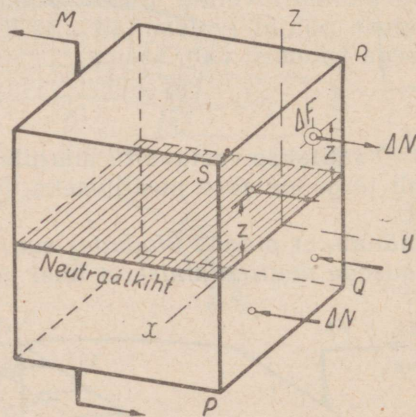


Joon. 116.

sel neutraalkihist on pinged võrdsed ja lõpuks, et *maksimaalselt pingestatud kiud asetsevad neutraalkihist kõige kaugemal.*

Eelöeldu põhjal võib normaalpingete jaotust mingis ristlõikes kujutada joonisel 116 näidatud viisil.

• § 65. Pingete avaldamine puhtpaindel painet tekitava jõupaari momendi kaudu. Vaadeldes joonist 116, pole raske taibata, et sisejõud — elastsusjõud — jaotuvad ristlõikes sama seaduse järgi nagu pingedki, kuna pinge on pinna ühikule tulev elastsusjõud. Seega on üksiku osa tasakaal võimalik ainult siis, kui välise jõupaari moment M , mis mõjub vastu kella osuti liikumise suunda, tasakaalustatakse sisejõupaari momendiga, mis mõjub kella osuti liikumise suunas. Momenti M nimetatakse *paindemomendiks.*



Joon. 117.

Oletame, et lati ristlõige on sümmeetriline (näiteks ümargune, ristkülikukujuline vms.) ja et painutavad jõupaarid asuvad sümmeetriatasapinnas. Joonisel 117 on esitatud ristkülikukujulise ristlõikega lati vasakpoolne osa, mis ongi nii koormatud. Lõikes $PQRS$ peavad mõjuma elastsusjõud, mis asendavad eemaldatud parempoolse osa mõju vaadeldavale osale. Nad on jaotunud kogu ristlõikele, nagu näidatud joonisel 116, kuid joonise lihtsustamiseks on ristlõikes

kujutatud ainult kaks tõmbavat ja kaks suruvat jõudu ΔN , mis mõjuvad elementaarsetele pinnakestele ΔF .

Pinnake ΔF asetseb neutraalkihist kaugusel z . Valemi (51) järgi pingele sellel pinnakesel $\sigma = + \frac{Ez}{\rho}$. Korrutades selle pingele pindalaga ΔF , saame elastsusjõu

$$\Delta N = \sigma \cdot \Delta F = \frac{E}{\rho} \cdot \Delta Fz.$$

Joonisel on näha, et kui lati osa ülemisele poolele mõjuvate tõmbejõudude summa ei võrdu alumisele poolele mõjuvate survejõudude summaga, siis hakkab eraldatud lati osa liikuma piki lati y -telge, kuna jõupaar M ei saa neid jõude tasakaalustada. Iga elastsusjõud projekteerub y -teljele oma suurust muutmata, seepärast on tasakaalutingimus täidetud, kui kogu ristlõike jaoks koostatud jõudude ΔN projektsioonide summa võrdub nulliga. Kirjutame selle tingimuse:

$$\sum_F \Delta N = \frac{E}{\rho} \sum_F \Delta Fz = 0.$$

Kuna $\frac{E}{\rho}$ ei võrdu nulliga, siis tingimus täitub ainult siis, kui

$$\sum_F \Delta Fz = 0.$$

Niisugust summat me nimetasime §-s 52 pinna staatiliseks momendiks ja seal oli märgitud, et ta muutub nulliks, kui telg, mille suhtes ta võetakse (meil telg x), läbib ristlõike raskuskeset. Kuid telg x on *neutraaltelg*, järelikult *neutraaltelg läbib ristlõike raskuskeset*. See osutub muidugi õigeks ka teisekujuliste ristlõigete (näiteks kolmnurkse, ringikujulise, elliptilise, \bar{I} -kujulise, T-kujulise jm.) puhul, nagu võib veenduda, tehes neist joonisega 117 sarnased joonised.

Et vaadeldav lati osa ei saaks pöörduda momendi M mõjul telje x suhtes, peab elastsusjõudude ΔN momentide summa sama telje suhtes võrduma M -iga:

$$M = \sum_F \Delta Nz = \frac{E}{\rho} \sum_F \Delta Fz^2.$$

Summa märgi all seisev suurus kujutab ristlõike inertsmomenti neutraaltelje x suhtes. Tähistades teda tähega J , võib kirjutada:

$$M = \frac{EJ}{\rho},$$

kust

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}. \quad (52)$$

Puhtpaindel mõjub lati meelevaldses ristlõikes üks ja sama konstantne moment M , seepärast kujutab valemi parem pool prismalises latis konstantset suurus. Kõveruseks nimetatakse suurus $1 : \rho$ on konstantne. Konstantset kõverust evib ainult üks kõver — ringjoon. Seega puhtpaine juhul paindub latt ringjoone kaart mööda, mille raadius on ρ .

Näeme, et lati kõverdumise aste (kõverus) on seda väiksem, mida suurem on korrutis EJ . Suure EJ väärtuse puhul niisuguse ringjoone raadius, mille järgi paindub latt, muutub väga suureks ja lati telg kujutab lauet kõverat, peaaegu sirgjoont. Korrutise EJ suurusel, konstantse M -i juures, oleneb lati suurem või väiksem kõverdumine paindel. Seepärast nimetatakse korrutist EJ lati jäikuseks.

Asetades leitud $1 : \rho$ väärtuse valemisse (51), saame:

$$\pm \sigma = \frac{Ez}{\rho} = \frac{1}{\rho} Ez = \frac{MEz}{EJ}$$

ja peale taandamist

$$\pm \sigma = \frac{Mz}{J}. \quad (53)$$

Maksimaalne pingeline σ_{max} saadakse punktides, mis asetsevad suurimal kaugusel neutraalkihist:

$$\sigma_{max} = \frac{Mz_{max}}{J}.$$

On kokku lepitud, et suurus $J : z_{max}$, s. o. ristlõike inertsmomendi neutraaltelje suhtes, jagatuna ristlõike sellest teljest kõige kaugemal asetseva punkti kaugusega, nimetatakse ristlõike vastupidavusmomendiks ja tähistatakse tähena W .

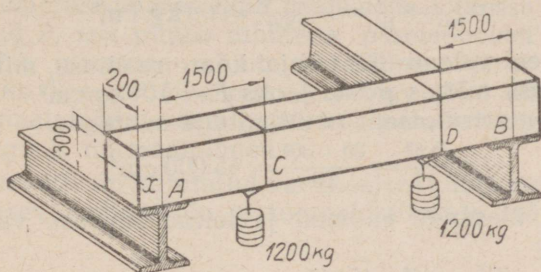
W suurus oleneb ainult ristlõike kujust. Vastupidavusmomente on kerge arvutada ja neid võib leida kõigis käsiraamatuis.

Kasutades uut tähistust, saame:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} \quad (54)$$

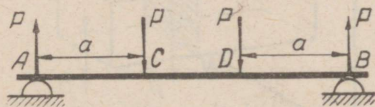
Asendades σ_{max} lubatava pingega paindel R_p , saame arvutusvalemi paindele:

$$R_p = \frac{M}{W} \quad (55)$$



Joon. 118.

§ 66. Arvutusnäide puhtpaindele. Puitprussile ristkülikukujulise ristlõikega 300×200 mm (joon. 118), mis tugineb otstes A ja B I-taladele, on riputatud tugedest 1500 mm kaugusel asuvates punktides C ja D kaks raskust à 1200 kg. Leiame maksimaalse pingetala osas CD.



Joon. 119.

Prussi koormuskeem on kujutatud joonisel 119. Pole raske näha, et tugeidel A ja B tekivad suuruselt võrdsed, üles suunatud toereaktsioonid P. Toereaktsioon ja temale lähem jõud moodustavad jõupaari momendiga $M = P \cdot a$.

Seega on tala osa CD otstesse rakendatud võrdsed jõupaarid nagu puhtpainde juhul.

Meil

$$M = P \cdot a = 1200 \cdot 150 = 180\,000 \text{ kgcm.}$$

Ristlõike vastupidavusmoment W neutraaltelje x (vt. joon. 118) suhtes on:

$$W = \frac{J}{z_{\max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{20 \cdot 30^2}{6} = 3000 \text{ cm}^2.$$

Maksimaalne pinge

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{180\,000}{3000} = 60 \text{ kg/cm}^2.$$

Leiame veel valemi (52) põhjal kaare raadiuse, mille järgi paindub pruss, võttes puidu jaoks $E = 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

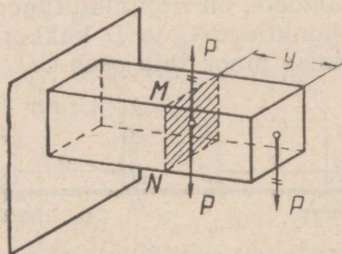
Ristlõike inertsmoment neutraaltelje suhtes

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45\,000 \text{ cm}^4.$$

Asetades üllesande andmed ja leitud suuruse valemisse (52), saame:

$$\rho = \frac{EJ}{M} = \frac{10^5 \cdot 45\,000}{180\,000} = 25\,000 \text{ cm} = 250 \text{ m.}$$

Prussi kõverdumist veerandkilomeetrilise (250 m) raadiuse juures ei saa ilma vastavate mõõteseadmeteta „silma järgi“ isegi avastada.

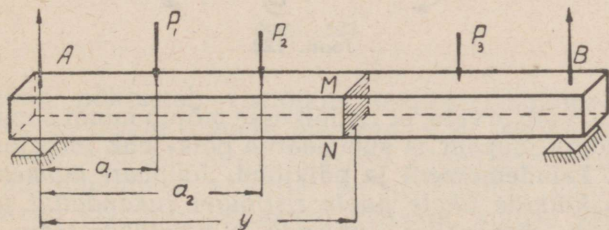


Joon. 120.

§ 67. Uldisem painde juht. Kuigi puhtpaine esineb küllalt sageli, kohtame veel sagedamini juhtu, mil üheaegselt paindemomentidega mõjuvad prussi ristlõigetel tema tel-

jega ristiolevald jõud. Selle selgitamiseks vaatleme prussi (joon. 120), mis on ühes otsas kinnitatud ja teises otsas koormatud prussi sümmeetriatasapinnas asuva jõuga P . Rakendame prussi otsast meelevaldsel kaugusel y võetud ristlõike MN raskuskeskmesse kaks võrdset ja vastassuunalist jõudu P , mis ei muuda prussi olekut. Me kanname, nagu öeldakse staatikas, jõu üle lõikesse. Jooniselt on näha, et ülekande tulemusena moodustub jõupaar kahekordselt läbikriipsutatud jõududest momendiga $M = P \cdot y$, mis painutab prussi kumerusega üles, kuid peale selle lõikesse MN mõjub veel jõud P , mis püüab nihutada parempoolset otsa alla. Teda võib nimetada mõjumise iseloomu järgi *põik- ehk lõikejõuks*. See ristlõike pinnale mõjuv jõud tekitab temas tangentsiaalpinged, samal ajal kui paindemoment tekitab, nagu nägime, normaalpinged.

Joonisel 121 on kujutatud vertikaalses sümmeetriatasapinnas asetseva mitme jõu ja toereaktsioonide mõju all olev pruss.

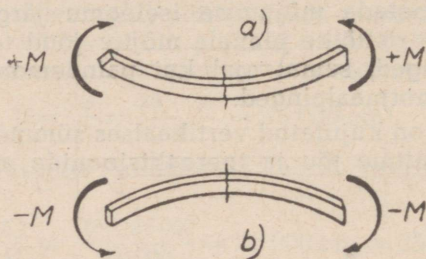


Joon. 121.

Kanname ristlõikest MN vasakule rakendatud jõud üle selle ristlõike raskuskeskmesse. Lepime kokku lugeda üles mõjuvaid jõude ja kella osuti liikumise suunas pööravaid momente positiivseiks. Ülekande tulemusi võib esitada järgmisel leheküljel toodud tabeli kujul.

Tekkivate jõupaaride momente ja ülekandmisel saadud jõude võib liita, nagu see on tehtud tabelis. Seega selgub, et ka sel juhul, mis on palju keerukam kui joonisel 120

Olekantav jõud	Tekkinud paari momendi suurus	Ristlõikesse mõjuva jõu suurus
A P_1 P_2	$+ A \cdot y$ $- P_1 (y - a_1)$ $- P_2 (y - a_2)$	$+ A$ $- P_1$ $- P_2$
	$\sum M = + A y - P_1 (y - a_1) - P_2 (y - a_2)$	$\sum P = + A - P_1 - P_2$



Joon. 122.

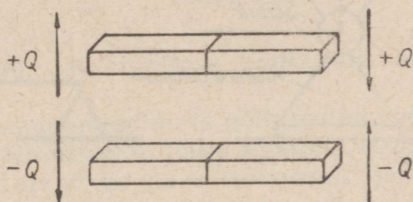
kujutatatu, võib arvata, et ristlõikesse mõjub mingi summaarse momendiga jõupaar ja summaarne põik- ehk lõikejõud.

§ 68. Paindemoment ja põikjõud. Jõupaari momenti, mis võrdub kõikide ühele poole ristlõiget rakendatud jõudude momentide algebralise summaga, nimetatakse tema raskuskeskme suhtes paindemomendiks. Paindemomenti tähistatakse tähega M ja alla kirjutatakse juurde ristlõike tähis, näit. M_x . Ta tekitab normaalpingeid, nagu nägime puhtpaine vaatlemisel. Kuna eeldatakse, et pruss on tasakaalus, siis on selge, et on ükskõik, kummal pool ristlõiget, paremal või vasakul, toimub summeerimine paindemomendi leidmisel. Paindemomendi suurus saadakse üks ja sama, kuid pöörde suund tuleb muidugi vastupidine (joon. 122). Et saada momentide märgid ühed ja samad, olenemata sellest, kummalt poolt neid võetakse, lepiti kokku lugeda paremalt mõjuvate jõudude momentide pöördumine vastu kella osuti liikumise suunda positiivseks (joon. 122 a), s. o. parempool-

sele osale on märkide reegel vastupidine vasaku osa reegli. Vaadeldes jooniseid, võib samuti öelda, et positiivne moment painutab tala kumerusega alla (joon. 122 a), negatiivne aga üles (joon. 122 b).

Prussi ristlõikest ühel pool mõjuvate ja prussi teljega risti olevate jõudude algebralist summat nimetatakse põikjõuks; teda tähistatakse tavaliselt tähega Q .

Nagu paindemomendid, nii peavad ka vasakult ja paremalt poolt ristlõiget määratud summaarsed põikjõud olema võrdsed. Põikjõudude märkide reegel on antud joonisel 123.



Joon. 123.

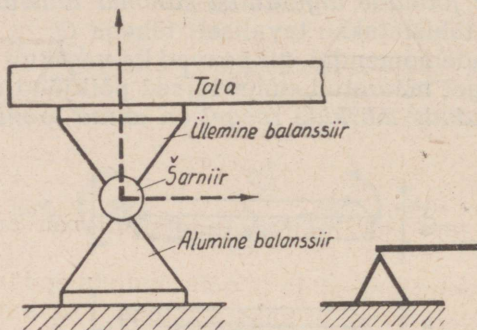
Põikjõud põhjustab ristlõikes tangentsiaalpingeid. On tõestatud, et nende pingete olemasolek ei või muuta normaalpingete suurust, mida kõikidel sümmeetriasapinnas asetsevate jõududega tekitatud paindejuhtudel võib arvutada valemi (53) järgi. Edaspidi näitame, kuidas väljendatakse tangentsiaalpingeid põikjõu Q kaudu.

§ 69. Tala ja selle tingkujutamine. Toed. Joonistel 118, 120 ja 121 kujutatud prusside iseloomulikuks eriomaduseks on, et nad annavad jõudude mõju edasi tugelele ja painduvad seejuures. Selliseid prusse nimetatakse sageli taladeks.

Edaspidi kujutame jooniste lihtsustamiseks tala sirgjoonena, s. o. kujutame nagu ühte tema telge, mille punktide suhtes arvutatakse paindemomendid ja põikjõud ning mille kuju muutuse põhjal otsustatakse tala paindumise üle. Tala otsad on tugelel, mis võtavad vastu ka koormuste mõju.

Liikumatuks toeks nimetatakse sellist tuge, mis ei luba tala otsa nihkumist tasapinnas, kuid võimaldab tala otsa pöördumist. Ta koosneb tavaliselt kahest balanssiiriks nime-

tatud detailist (joon. 124), millede vahele on paigutatud šarniir, mis kujutab endast balanssiiridega hästi sobitatud silindrit. Alumine balanssiir on kinnitatud seinale, alusele vms., ülemisega on aga ühendatud tala ots. Tala, mõjudes

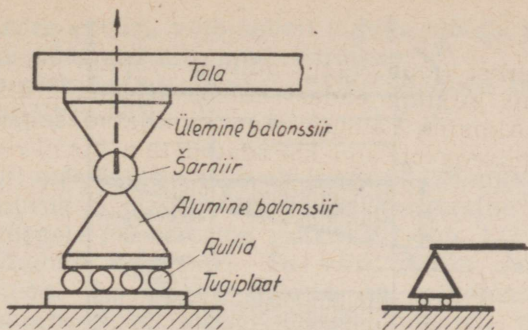


Joon. 124.

toele, tekitab temas reaktsiooni. Kuna niisugune tugi, lubades ülemise balanssiiri ja sellega ühendatud tala otsa pöördumist, ei luba horisontaalset ega vertikaalset nihkumist, siis niisuguses toes võivad tekkida horisontaal- ja vertikaalkomponendid, millede summa annab üldtoereaktsiooni, mille sihti üldiselt ei saa ette määrata. Sellise toe tingkujutis on toodud joonisel 124 paremal all.

Liikuv tugi (joon. 125) erineb eelnevast sellega, et alumine balanssiir võib tema alla asetatud silindrilistel rullidel nihkuda vasakule ja paremale. Tala ots võib pöörduda ümber šarniiri ja nihkuda piki tugiplaati, kuid tugi ei luba nihkumist risti tugiplaadiga. Seepärast on siin toereaktsiooni siht alati risti tugiplaadiga. Sellise toe tingkujutis on antud joonisel 125 paremal all.

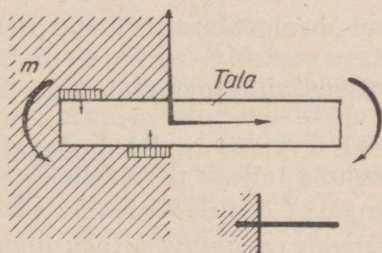
Jäigalt kinnitatud ots. Tala ots on kinnitatud nii (joon. 126), et ta ei saa pöörduda tasapinnas ega nihkuda piki või risti tala telge. Üldiselt võib jäykkinnituses esineda reaktsioonmoment m , mida mõnikord nimetatakse jäikusmomentiks, ja kaks komponenti, millede summa annab üldtoereaktsiooni, mille sihti saab üldiselt ette määrata ainult mõningail



Joon. 125.

erandjuhtudel. Jäikinnituse tingkujutis on antud joonisel 126 all.

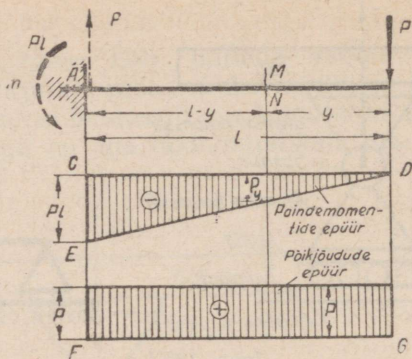
§ 70. Paindemomentide ja põikjõudude epüürid. Joonistelt 120 ja 121 võib näha, et lõike asukoha, s. o. kauguse y muutumisel muutuvad ka paindemomendi ja põikjõu suurus.



Joon. 126.

Kuna paindemomendi ja põikjõu suurusel olenevad normaal- ja tangentsiaalpingete suurused, siis on tarvis teada, missuguses tala ristlõikes on M ja Q maksimaalsed ja üldse omada selget ettekujutust nende muutumise seadustest. Joonist, mis kujutab paindemomentide muutumist tala pikkusel, nimetatakse paindemomentide epüüriks ehk momentide epüüriks, joonist, mis kujutab aga põikjõu muutumist — põikjõudude epüüriks.

Näitame näidetega, kuidas ehitatakse epüüre.



Joon. 127.

Näide 21. Joonisel 127 on kujutatud jäigalt kinnitatud otsaga tala (nagu see oli joonisel 120), mis kannab otsal koorumust P . Seda liiki tala nimetatakse *konsooliks*. Ehitame tema jaoks epüürid.

Paindemoment meelevaldselt võetud ristlõikes MN :

$$M = -Py.$$

Ta on negatiivne, kuna painutab tala kumerusega üles (vt. joon. 122).

Paindemomendi avaldis esitab sirgjoone võrrandi. Kanname y suuruse tala teljega paralleelsele sirgele CD ja M suuruse risti sirgiga CD . Positiivsed M väärtused kanname sirgest CD ülespoole, negatiivsed aga allapoole. Et joonestada sirget, on vaja teada kahte punkti, mida ta läbib.

Kui $y = 0$, siis $M = 0$,

järelikult sirge läbib punkti D .

Kui $y = l$, siis $M_{y=l} = -Pl$.

Kanname punktist C alla lõigu CE , mis kujutab meelevaldselt valitud mõõdus suurust Pl . Sirge peab läbima punkti E . Uhendades leitud punktid kaldsirgiga ED , saame graafilise kujutuse paindemomendi absoluutse suuruse muutusest kogu tala pikkusel. See joonis kujutabki momentide epüüri. Epüüri pindala viirutatakse harvade vertikaaljoontega ja ringikese sisse asetatakse momendi märgile vastav

märk. Omades epüüri, võib sellelt lugeda mõõdu järgi paindemomendi väärtuse tala igas ristlõikes.

Ehitame põikjõudude epüüri. Põikjõud meie tala meelevaldses ristlõikes MN:

$$Q_y = + P.$$

Märk (+) on võetud vastavalt joonisel 123 antud reeglile. Põikjõu suurus ei olene y -ist, ta on konstantne kogu tala pikkusel. Sirgele FG ehitatud ristkülik (joon. 127 all) kujutab põikjõudude Q epüüri. Ta viirutatakse samuti vertikaaljoontega. §-s 68 oli öeldud, et paindemomendi ja põikjõu suurus ei olene sellest, kummalt poolt ristlõiget neid võtta. Kontrollime seda. Punkti A mõjub toereaktsioon, võrdne P -ga, suunatud üles. Seejuures tõeppoollest $\Sigma Z = +P - P = 0$, s. t. projektsioonide summa tingimus teljele z on rahuldatud.

Kirjutame momentide tasakaaluvõrrandi punkti A suhtes. Seejuures kasutame staatika märkide reeglit, kuna tundmatu momendi m jäikkinnituses viime sisse märgiga pluss:

$$\Sigma M_A = + m - Pl = 0,$$

kust

$$m = + Pl.$$

Märk pluss näitab, et punkti A suhtes reaktsioonmoment mõjub vastu kella osuti liikumise suunda, mis on iseenesest mõistetav, kui võtta arvesse koormuse mõju tala otsal. Kirjutame nüüd paindemomendi avaldise lõikele MN , vaadeldes lõikest vasakul mõjuvaid jõude ja momente (märgid võtame joonisel 122 antud reegli järgi):

$$M_y = - m + P(l - y).$$

Asendades m -i tema väärtusega Pl ja koondades sarnased liikmed, saame:

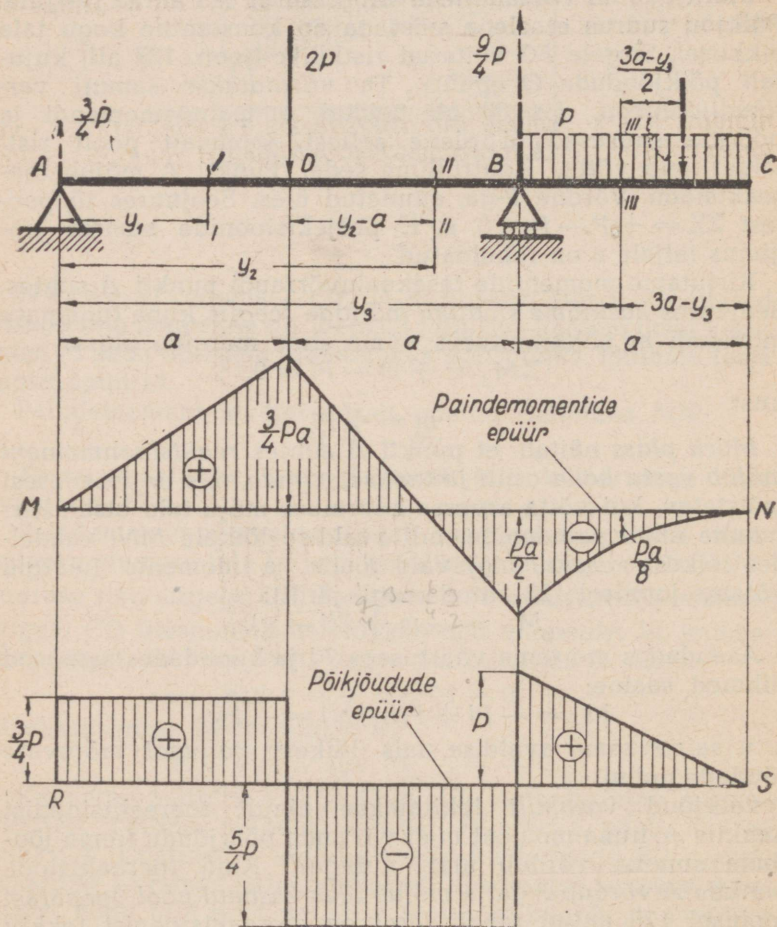
$$M_y = - Pl + P(l - y) = - Py,$$

s. t. saime sama avaldise, mis lõikest paremal mõjuvate jõudude puhul.

Põikjõud vasakult tekitatakse ainult toereaktsioonist punktis A , kuna moment m ei või anda põikjõudu (tema jõudude summa võrdub alati nulliga). Kuid toereaktsioon punktis A võrdub P -ga ja mõjub üles vasakul pool, seepärast joonisel 123 antud reegli järgi on toereaktsioonist tekkiv põikjõud positiivne, s. o. jälle

$$Q_y = + P.$$

Näide 22. Tala (joon. 128) liikumatu toega A ja liikuva toega B on koormatud lõikes D jõuga $2P$ ja kannab üle toe ulataval otsal (konsoolil) pikkusel a ühtlaselt jaotatud koormust P .



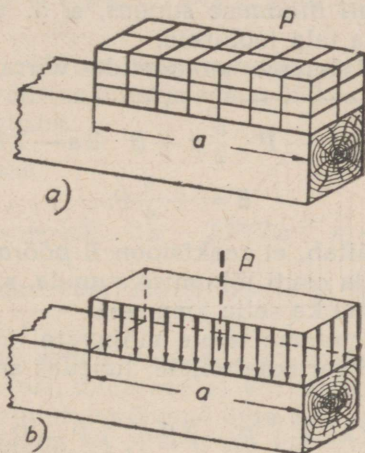
Joon. 128.

Ühtlaselt jaotatud koormust P võib endale näiteks ette kujutada koormusena omavahel sidumata siledete raskuste kihist (joon. 129 a).

Mehaanika seisukohalt tuleb kujutada ühtlaselt jaotatud koormust lõpmatu hulga võrdsete paralleelsete jõudude kujul (joon. 129 b), millede resultant on P . Kui koormus on rakendatud pikkusele a , siis jagatist

$$\frac{P}{a} = q$$

nimetatakse koormuse intensiivsuseks. Ta avaldatakse ton-
nides meetri või kilogrammides sentimeetri pikkuse kohta.



Joon. 129.

Määrame tala toereaktsioonid. Kuna kõik koormused mõjuvad vertikaalselt, siis liikumatus toes A tekib ainult vertikaalne reaktsioon, mida tähistame A-ga. Toes B, nagu teame, mõjub reaktsioon B samuti vertikaalsihis.

Kirjutame tasakaalutingimuse, et jõudude staatiliste momentide summa punkti B suhtes võrdub nulliga. Võttes arvesse, et ühtlaselt jaotatud koormust võib kujutella lõpmatu hulga paralleelsete jõududega, saab nende jõudude momente

asendada resultantjõu momendi teoreemi põhjal nende resultantjõu momendiga. Resultantjõud aga võrdub P -ga ja on rakendatud toest B kaugusele $\frac{a}{2}$.

Seega võib kirjutada, et

$$\sum M_B = -P \cdot \frac{a}{2} + 2Pa + A \cdot 2a = 0.$$

Tundmata suurus A on viidud sisse märgiga pluss. Lahendades võrrandi, saame:

$$A = -\frac{3}{4}P.$$

Märk miinus näitab, et reaktsioon A pöörab tala punkti B suhtes kella osuti liikumise suunas, s. o. ta on suunatud üles. Kanname ta tala joonisele.

Reaktsiooni B leiame momentide võrrandist punkti A suhtes:

$$\sum M_A = -P \cdot \frac{5}{2}a + B \cdot 2a - 2Pa = 0,$$

$$B = +\frac{9}{4}P.$$

Märk pluss näitab, et reaktsioon B pöörab tala punkti A suhtes vastu kella osuti liikumise suunda, s. o. ta on suunatud üles. Kanname ka selle joonisele.

Kontrolliks kirjutame talale mõjuvate jõudude projektsioonide summa vertikaalteljele, lugedes suunda üles positiivseks:

$$\sum Z = +\frac{3}{4}P - 2P + \frac{9}{4}P - P = 0.$$

Võrdsus nulliga näitab, et reaktsioonid on määratud õieti.

Asume leidma paindemomente, kirjutades nad välja ristlõikest vasakul asuvate jõudude järgi.

Osas AD , toest A kaugusel y_1 võetud lõikes $I-I$:

$$M^I = +Ay_1 = +\frac{3}{4}Py_1.$$

Osas AD muutub moment sirgjoone seaduse järgi:

$$\text{kui } y_1 = 0, \text{ siis } M^I_{y_1=0} = 0;$$

$$\text{kui } y_1 = a, \text{ siis } M^I_{y_1=a} = +\frac{3}{4}Pa.$$

Kandes leitud suurused arvates sirgest MN (joon. 128), ühendame saadud punktid sirgega.

Võtame lõike $II - II$ osas DB :

$$M^{II} = + \frac{3}{4} P y_2 - 2 P (y_2 - a).$$

See annab sirge võrrandi, kuid erineva sellest, mis saadi osa AD jaoks, kuna tema koostamisel on arvestatud jõu $2P$ mõju, mis osas AD puudub.

Kui $y_2 = a$, siis

$$M_{y_2 = a}^{II} = + \frac{3}{4} P a - 2 P (a - a) = + \frac{3}{4} P a.$$

Saadakse sama väärtus, mis varemgi. Nii peabki olema, kuna momendi väärtus ühes ja samas lõikes D ei või oleneda tema määramisviisist.

Kui $y_2 = 2a$, siis

$$M_{y_2 = 2a}^{II} = + \frac{3}{4} P \cdot 2a - 2 P (2a - a) = - \frac{P a}{2}.$$

Kanname saadud väärtuse joonisele ja ühendame epüüri punktid sirgega.

Algajad teevad sageli vea M -i eri väärtuste leidmisel, andes y -ile väärtusi, mida see ei või omada lõigus, mille jaoks on väljakirjutatud võrrand õige. Nii näiteks oleks vale M^{II} leidmisel oletada, et $y_2 = 0$ või $y_2 = 3a$.

Et mitte tegelda suure arvu liikmetega, on osa BC lõikes $III - III$ mugavam võtta paindemoment *mitte vasakult*, nagu me seni tegime, *vaid paremalt*. M^{III} suurus, nagu me teame, sellest ei muutu.

Lõige $III - III$ asetseb C -st kaugusel $3a - y_3$. Paindemoment võrdub lõpmatu hulga võrdsete paralleelsete jõudude momentide summaga, mis on jaotatud pikkusel $3a - y_3$. Seda võib asendada momendiga nende jõudude resultantjõust, mille kaugus on lõikest $\frac{3a - y_3}{2}$. Joonisel 128 on resultantjõud joonestatud kriipsjoonega.

Pikkusühikule tuleb koormus $\frac{P}{a} = q$, järelikult lõikest III — III paremal asetseva koormuse suurus on

$$\frac{P}{a} (3a - y_3)$$

ja tema moment, mis painutab tala kumerusega üles:

$$M^{III} = -\frac{P}{a} (3a - y_3) \frac{3a - y_3}{2} = -\frac{P(3a - y_3)^2}{2a}$$

See on parabooli võrrand.

Kui $y_3 = 3a$, siis

$$M_{y_3=3a}^{III} = -\frac{P(3a - 3a)^2}{2a} = 0,$$

kui $y_3 = \frac{5}{2}a$, siis

$$M_{y_3=\frac{5}{2}a}^{III} = -\frac{P(3a - \frac{5}{2}a)^2}{2a} = -\frac{Pa}{8},$$

kui $y_3 = 2a$, siis

$$M_{y_3=2a}^{III} = -\frac{P(3a - 2a)^2}{2a} = -\frac{Pa}{2}.$$

Selle M -i väärtuse lõike B jaoks me saime ka varem võrrandist M^{II} jaoks. Kandes leitud suurused joonisele, joonestame parabooli. Soovides seda ehitada täpsemalt, tuleks leida rohkem M^{III} vahepealseid väärtusi.

Saadud M -i epüür näitab, et kui tala on konstantse ristlõikega, siis *ohilikuks lõikeks* on antud juhul koht D , kus M omab maksimaalset väärtust $\frac{3}{4}Pa$.

Asume põikjõudude epüüri ehitamisele. Lõike $I - I$ jaoks võrdub vasakult mõjuvate jõudude summa toereaktsiooniga A , mis mõjub üles. Järelikult

$$Q^I = +\frac{3}{4}P.$$

Põikjõu suurus osas AD ei olene y -ist ja osutub konstantseks. Joonisele 128 on ta kantud sirgest RS .

Minnes edasi üle jõu $2P$, muutub vasakult mõjuvate jõude summa korruga suuruse $2P$ võrra, mida vastavalt joonisele 123 tuleb lugeda negatiivseks. Lõike edasisel nihutamisel kogu osas DB on Q väärtus konstantne:

$$Q^{II} = +\frac{3}{4}P - 2P = -\frac{5}{4}P.$$

Joonisel on see suurus ära kantud.

Q muutuse uurimiseks konsoolil on mugavam vaadelda lõikest $III - III$ paremal asuvat koormust.

Paremal asuvate jõudude summa oli juba leitud. See on resultantjõud, mida me kasutasime, kui leidsime paindemomenti. Ta painutab tala paremat osa alla, järelikult tuleb teda reegli järgi (joon. 123) lugeda positiivseks.

Seega

$$Q^{III} = +\frac{P}{a}(3a - y_3).$$

On näha, et põikjõud muutub kaldsirge seaduse järgi. Kui $y_3 = 2a$ (lõige B), siis

$$Q_{y_3=2a}^{III} = +P,$$

kui $y_3 = 3a$ (tala ots), siis

$$Q_{y_3=3a}^{III} = +\frac{P}{a}(3a - 3a) = 0.$$

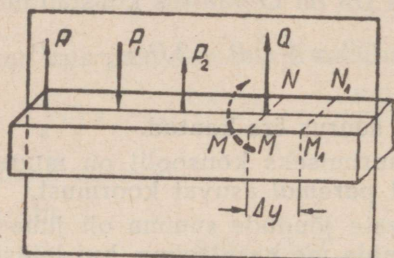
Nende andmete järgi on joonisel 128 ehitatud Q epüür osas BC .

§ 71. Žuravski teoreem. Põikjõudude leidmisel võib osutada kasulikuks insener D. Žuravski teoreem, mis määrab, et põikjõud mingis lõikes võrdub paindemomendi õige väikese juurdekasvu ΔM , mis saadakse lõike nihutamisel õige väikese suuruse Δy võrra, suhtega selle suurusega Δy , s. o.

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta y}.$$

Mõjugu tala vasakule osale (joon. 130) reaktsioon R ning koormused P_1 ja P_2 . Kandes kõik jõud üle lõikesse MN , saame nagu teada, jõupaari momendiga M ja jõu Q , mida me nimetasime põikjõuks.

Võtame esimesest lõikest MN õige väikesel kaugusel Δy asetseva lõike M_1N_1 ja leiame paindemomendi juurdekasvu.



Joon. 130.

Leitud moment M , nagu teada staatikast, kandub edasi uude lõikesse muutumatult, kuid põikjõud Q annab edasikandmisel lisamomendi

$$\Delta M = Q \Delta y.$$

Jagades selle võrduse mõlemaid pooli Δy -iga, saame Žuravski teoreemi:

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta y}. \quad (56)$$

Valemi tuletamisel kasutatud arutlus jääb muutumatuks ka ühtlaselt jaotatud koormuse puhul. Asjaolu, et seejuures pikkusel Δy võib esineda koormus $q \cdot \Delta y$ (kus q on koormus pikkusühikule), ei saa tuua sisse muutust, kuna lisamoment sellest koormusest, $q \cdot \Delta y \cdot \frac{\Delta y}{2}$, sisaldades tegurit $(\Delta y)^2$, on niivõrd väike suurus, võrreldes korrutisega $Q \cdot \Delta y$, et seda pole vaja arvestada. Seega võib võrrandis

$$\Delta M = Q \cdot \Delta y + \frac{q(\Delta y)^2}{2}$$

viimase liikme ära jätta ja saame jälle Žuravski teoreemi algkujul.

Kasutame esitatud teoreemi Q^I , Q^{II} ja Q^{III} leidmiseks eelmises paragrahvis toodud näites 22.

$$\Delta M^I = +\frac{3}{4} P(y_1 + \Delta y) - \frac{3}{4} P y_1 = +\frac{3}{4} P \Delta y,$$

$$Q^I = \frac{\Delta M^I}{\Delta y} = +\frac{3}{4} P;$$

$$\begin{aligned} \Delta M^{II} &= +\frac{3}{4} P(y_2 + \Delta y) - 2P(y_2 + \Delta y - a) - \\ &- \left[\frac{3}{4} P y_2 - 2P(y_2 - a) \right] = +\frac{3}{4} P \Delta y - 2P \Delta y, \end{aligned}$$

$$Q^{II} = \frac{\Delta M^{II}}{\Delta y} = +\frac{3}{4} P - 2P = -\frac{5}{4} P;$$

$$\begin{aligned} \Delta M^{III} &= -\frac{P(3a - y_3 - \Delta y)^2}{2a} - \left[-\frac{P(3a - y_3)^2}{2a} \right] = \\ &= \frac{P[-(\Delta y)^2 + 6a\Delta y - 2y_3\Delta y]}{2a}. \end{aligned}$$

Loobudes $(\Delta y)^2$ -st kui väga väikesest suuruselt, võrreldes Δy esimest astet sisaldavate liikmetega, võib kirjutada:

$$\Delta M^{III} = \frac{P(6a - 2y_3)}{2a} \Delta y = \frac{P(3a - y_3)}{a} \Delta y,$$

kust

$$Q^{III} = \frac{\Delta M^{III}}{\Delta y} = +\frac{P(3a - y_3)}{a}.$$

Nagu näha, võrduvad leitud suurused tõepoolest varem leitud põikjõududega igas vastavas osas.

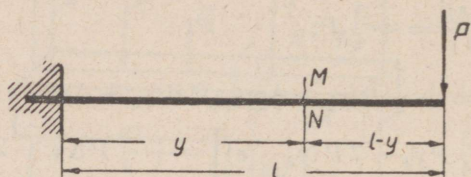
Kui me oleksime tahtnud kasutada Žuravski teoreemi sama paragrahvi näite 21 juures, oleksime leidnud, et

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta y} = -\frac{P \Delta y}{\Delta y} = -P$$

samal ajal, kui vahetul jõudude vaatllemisel oli leitud, et $Q = +P$. Erinevus märkides saadakse siin seepärast, et y lugemine näites toimus paremalt vasakule, kuna tavaliselt ja ka teoreemi tuletamisel seda tehakse vasakult paremale.

Hakkame samal talal kaugust lugema vasakust otsast (joon. 131). Paindemoment lõikes MN , kui jõud võtta paremalt, on

$$M = -P(l-y).$$



Joon. 131.

Koostades momendi juurdekasvu valemi, saame:

$$\Delta M = -P[l - (y + \Delta y)] + P(l - y) = +P \cdot \Delta y;$$

siit leiame:

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta y} = +P.$$

Nüüd ühtivad nii suurus kui ka märk.

§ 72. Tangentsiaalpinged paindel. Lõikame tala (joon. 132) läbi horisontaalse, neutraalkihiga paralleelse pinnaga H ja kahe õige väikesel kaugusel Δy asetseva vertikaalpinnaga V ja V_1 . Kõrvaldades pinnast H kõrgemal asuvad, kriipsjoontega kujutatud tala osad, saame talal astme. Oletame, et lõikest V vasakule mõjub paindemoment M ja lõikesse V — põikjõud Q . Et mitte rikkuda tasakaalu, me peame asendama kõrvaldatud tala osade mõju astmele elastsusjõududega, millede resultantjõude tähistame N_1 ja N_2 . Nimetame pindu, milledele need jõud mõjuvad, astme lõikepindadeks.

Elementaarset survejõudu ΔN , mis tekib neutraalkihist kaugusel z asetseval õige väikesel pinnakesel ΔF , võib leida (joon. 138 a), korrutades pinnakese ΔF temale mõjuva pingega σ :

$$\Delta N = \Delta F \sigma.$$

Kuid valemi (53) järgi $\sigma = \frac{Mz}{J}$. Asetades selle väärtuse eelmisesse võrrandisse, saame:

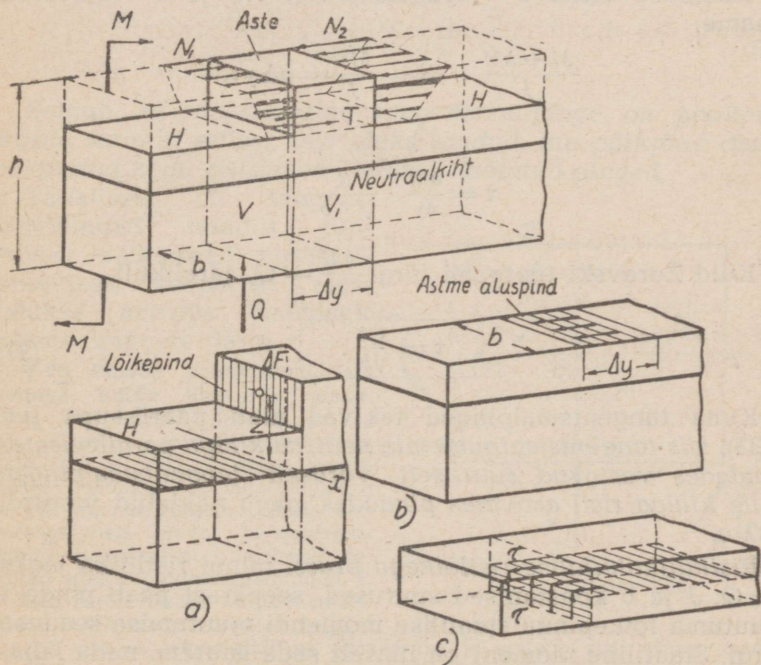
$$\Delta N = \frac{M}{J} \Delta Fz.$$

Summeerides ΔN kogu lõikepinda mööda, leiame, et

$$N_1 = \frac{M}{J} \sum_F \Delta Fz.$$

Kuid summa esitab N_1 valemis lõikepinna staatilist momenti neutraaltelje x suhtes. Tähistades seda tähega S , kirjutame, et

$$N_1 = \frac{MS}{J}.$$



Joon. 132.

Lõikesse V_1 mõjub sama põikjõud Q , kuid paindemoment muutub $\Delta M = Q\Delta y$ võrra. Joonisest on näha, et ΔM mõjub samale poole kui M , järelikult mõjub lõikesse V_1 moment $M_1 = M + \Delta M$, mis on suurem kui M .

N_2 suuruse võib leida N_1 väärtuse järgi, kui M asendada summaga $M + \Delta M$, kuna J ega S naaberlõikeis, kaugusel Δy , ei muutu.

Astmele paremalt ja vasakult mõjuvate jõudude N_2 ja N_1 vahe püüab teda nihutada vasakule. Selle tagajärjel peavad *astme aluspinnal* $b\Delta y$ (joon. 132 b) tekkima tangentsiaalpinged τ . Jõud $T = b\Delta y\tau$ tasakaalustab jõudude N_2 ja N_1 vahe, seepärast

$$N_2 - N_1 = T.$$

Asetades sellesse võrrandisse N_1 , N_2 ja T väärtused, saame:

$$\frac{M + \Delta M}{J} \cdot S - \frac{MS}{J} = b\Delta y\tau,$$

kust

$$\tau = \frac{\Delta M}{\Delta y} \cdot \frac{S}{J \cdot b}.$$

Kuid Žuravski teoreemi järgi $\frac{\Delta M}{\Delta y} = Q$, järelikult

$$\tau = \frac{QS}{Jb}. \quad (57)$$

Kuna tangentsiaalpinged tekivad alati paarikaupa (vt. § 33), siis tangentsiaalpingetele neutraalkihiga paralleelsetes pindades vastavad suuruselt võrdsed tangentsiaalpinged selle kihiga risti asuvates pindades, nagu näidatud joonisel 132 c.

Ristkülikukujulise ristlõikega prussi mingi ristlõike jaoks on Q , J ja b konstantsed suurused, seepärast peab pinge τ muutuma lõikepinna staatilise momendi muutumise seaduse järgi. Staatiline moment on ilmselt seda suurem, mida lähemal on võetud lõige neutraalkihile. Seega maksimaalne tangentsiaalpinge ristkülikukujulise ristlõikega prussis saa-

dakse neutraalkihis. Leiame selle pinge suuruse. Valemi (38) järgi võrdub poole ristlõike staatiline moment

$$S = Fz_c = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}.$$

Ristküliku inertsmoment $J = \frac{bh^3}{12}$.

Asetades leitud suurused valemisse (57), saame:

$$\tau_{max} = \frac{QS}{Jb} = \frac{Q \cdot \frac{bh^2}{8}}{\frac{bh^3}{12} \cdot b}$$

ehk

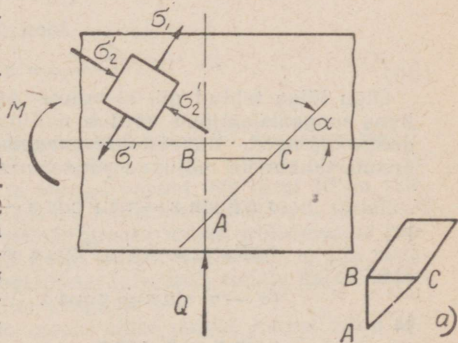
$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}. \quad (58)$$

Selgub, et *maksimaalne tangentsiaalpinge on poolteist korda suurem sellest, mis oleks saadud, kui põikjõud oleks tekitanud kogu ristlõikes ühtlaselt jaotatud pinged.*

Tavaliselt on tangentsiaalpinged talades tunduvalt väiksemad normaalpingetest, seepärast teostatakse arvutus peamiselt normaalpingete järgi.

§ 73. Pinged painutatava tala teljega kaldu asuvates pindades. Peapinged. §-s 65 ja 72 oli leitud, et mingil painutatava tala teljega risti asetseval pinnakesel saadakse normaalpinged σ ja tangentsiaalpinged τ , kuna esimesega risti oleval ja neutraalkihiga paralleelsel pinnakesel tekitab ainult tangentsiaalpinged τ .

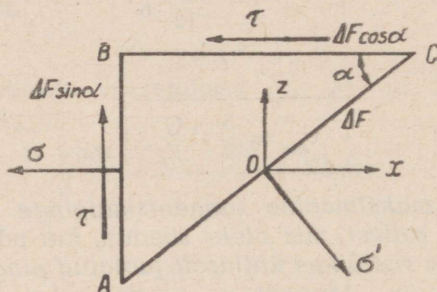
Tala meelevaldses kaldlõikes AC (joon. 133), mis moodustab teljega nurga α , s. t. neutraalkihiga paralleelse ja sellega risti oleva asendi vahepealses asendis olevas lõikes, võib üldiselt eeldada nii normaal- kui ka tangentsiaalpingete olemasolu. Edaspidi tähistame neid pingeid σ' ja τ' .



Joon. 133.

Pingete σ' ja τ' suuruste leidmiseks eraldame talast tema paindetasapinnaga risti oleva kolmetahulise prismakese ABC (joon. 133 a). Rakendades prisma tahkudele jõud, mis asendavad ärajäänud tala osade mõju temale, vaatleme prisma tasakaalu. Joonisel 134 on tahk ABC kujutatud suurendatult.

Tähistame tahu AC pindala ΔF -iga. Siis tahu BC pindala on $\Delta F \cos \alpha$ ja tahu AB pindala $\Delta F \sin \alpha$. Tahule AB mõjuvad: normaaljõud $\sigma \Delta F \sin \alpha$ ja tangentsiaaljõud $\tau \Delta F \sin \alpha$. Nende jõudude suunad on joonisel 133 kujutatud M ja Q suundade puhul näidatud nooltega. Tahul BC ei saa olla normaaljõude ja temale mõjub tangentsiaaljõud $\tau \Delta F \cos \alpha$. Vastastikkuse seaduse põhjal on tangentsiaalpinged τ tahkudel AB ja BC omavahel võrdsed ja omavad joonisel näidatud suunda.



Joon. 134.

Olgu lõige tehtud nii, et tahule AC mõjub ainult normaaljõud $\sigma' \Delta F$, kuna tangentsiaaljõud võrdub nulliga. Pindu, millel puuduvad tangentsiaalpinged, nimetatakse peapindadeks. Projekteerides eraldatud prisma tahkudele mõjuvad jõud horisontaal- ja vertikaalteljele, leiame:

$$\sigma' \Delta F \sin \alpha - \tau \Delta F \cos \alpha - \sigma \Delta F \sin \alpha = 0$$

ja

$$\tau \Delta F \sin \alpha - \sigma' \Delta F \cos \alpha = 0$$

ehk

$$(\sigma' - \sigma) \sin \alpha = \tau \cos \alpha \quad (a)$$

ja

$$\tau \sin \alpha = \sigma' \cos \alpha. \quad (b)$$

Edasi leiame võrdusest (b):

$$\tan \alpha = \frac{\sigma'}{\tau}. \quad (c)$$

Asetades selle võrdusesse (a), saame ruutvõrrandi:

$$(\sigma' - \sigma) \sigma' = \tau^2, \quad (d)$$

kust

$$\sigma' = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (59)$$

Positiivne suurus $\sigma_1' = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ annab maksimaalse

peanormaalpinge, negatiivne suurus $\sigma_2' = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
— minimaalse.

Peapinna asendit määrava nurga α võib leida, pannes tähele, et

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

Asetades sellesse avaldise (c), saame:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sigma'}{\tau \left[1 - \left(\frac{\sigma'}{\tau}\right)^2 \right]} = \frac{2\sigma'}{\tau \left[\frac{\tau^2 - (\sigma')^2}{\tau^2} \right]} = \frac{2\tau\sigma'}{-[(\sigma')^2 - \tau^2]}.$$

Saadest avaldisest (d)

$$\sigma = \frac{(\sigma')^2 - \tau^2}{\sigma'},$$

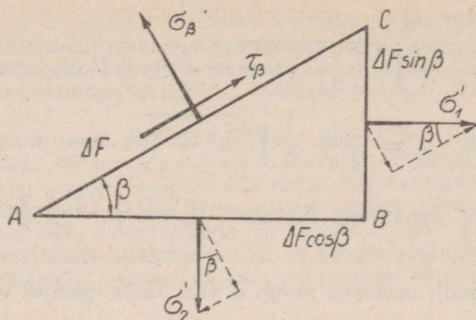
saame lõplikult:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma}. \quad (60)$$

Valemi (b) abil võib määrata, missugustel pindadel saadakse maksimaalne ja missugustel minimaalne peapinge. Olgu näiteks tahul AB τ suunatud üles, s. o. positiivne, ja nurgad valemi (60) järgi 30° ja 120° . 30° -lise nurga jaoks on nii siinus kui ka koosinus positiivsed, järelikult ka σ' peab olema positiivne, s. o. sellele pinnale mõjub maksimaalne peapinge σ_1' . 120° -lise nurga jaoks on siinus positiivne, koosinus aga negatiivne, positiivse τ puhul σ' on negatiivne, järelikult sellele kaldele vastab pind, millele mõjub minimaalne peapinge σ_2' .

Seega selgub, et tala sees võib meelevaldse punkti juures välja lõigata kuubikese (ruutprismakese), mille tahkudele mõjuvad ainult peanormaalpinged (joon. 133).

Uks peapingeist tala kaldlõikes osutub võimalikest pingetest suurimaks, teine väiksemaks. Tõepoolest, lõikame peapindu AB ja BC tasapinnaga AC (joon. 135), mis on ühega neist kaldu nurga β all, ja kirjutame pinnakesele AC , mille suurus on ΔF , mõjuvate pingete σ_1 ja σ_2 avaldised.



Joon. 135.

Koostades kõigi kolmetahulisele prismale ABC mõjuvate jõudude $\sigma\beta$ -sihiliste projektsioonide võrrandi, saame:

$$\sigma_{\beta} \Delta F - \sigma'_1 \Delta F \sin \beta \sin \beta - \sigma'_2 \Delta F \cos \beta \cos \beta = 0,$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma'_1 \sin^2 \beta + \sigma'_2 \cos^2 \beta. \quad (e)$$

Kui $\sigma'_1 > \sigma'_2$, siis, kirjutades avaldise (e) kujus

$$\sigma_{\beta} = \sigma'_1 (1 - \cos^2 \beta) + \sigma'_2 \cos^2 \beta = \sigma'_1 - (\sigma'_1 - \sigma'_2) \cos^2 \beta,$$

on kerge näha, et

$$\sigma_{\beta} < \sigma'_1.$$

Kirjutades aga avaldise (e) kujus

$$\sigma_{\beta} = \sigma'_1 \sin^2 \beta + \sigma'_2 (1 - \sin^2 \beta) = \sigma'_2 + (\sigma'_1 - \sigma'_2) \sin^2 \beta,$$

näeme, et

$$\sigma_{\beta} > \sigma'_2.$$

Tähendab tala lõikeis tekkivatest normaalpingetest on σ'_1 suurim ja σ'_2 väikseim pinge. See on tõestatud $\sigma'_1 > \sigma'_2$ puhul, kuid säärasele järeldusele tuleme ka eeldusel, et $\sigma'_1 < \sigma'_2$. Koostame nüüd kõikide prismale mõjuvate jõudude $\tau\beta$ -sihiliste projektsioonide võrrandi (joon. 135):

$$\tau_{\beta} \Delta F + \sigma'_1 \Delta F \sin \beta \cos \beta - \sigma'_2 \Delta F \cos \beta \sin \beta = 0,$$

kust

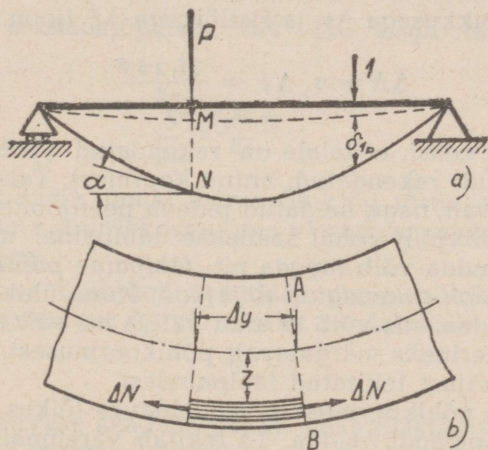
$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{2} \sin 2\beta.$$

Pole raske näha, et τ_β saab suurima väärtuse $\beta = 45^\circ$ juures, s. o. suurimad tangentsiaalpinged, samuti nimetatud peapingeiks, mõjuvad pindadele, mis moodustavad peapindadega nurga 45° . Seejuures peatangentsiaalpinged on võrdsed peanormaalpingete poolvahega, s. o.

$$\frac{\max}{\min} \tau' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (61)$$

B. DEFORMATSIOONID JA RISTLÖIKE VALIK.

§ 74. Talade deformatsioon. Kõverat, mille kuju võtab tala telg paindel, nimetatakse *elastseks jooneks*. Joonisel 136 a oleva tala elastne joon, tugevasti suurendatud defor-



Joon. 136.

matsiooniga, on kujutatud pideva peenjoonega. Tala telje mingi punkti lineaarset paigutust paindel nimetatakse *läbipaindeks*. Joonisel 136 a võrdub läbipaine lõikes, kuhu on rakendatud jõud P , suuruselt joonlõiguga MN . Nurka, mille moodustab elastse joone mingi punkti puutuja tala teljega, nimetatakse *kaldenurgaks*. Joonisel 136 a on kaldenurk punktis N tähistatud α -ga. Ilmselt võrdub ta nurgaga, mille võrra tala ristlõige pöördub paindel.

§ 75. Tala deformatsioonide määramine. Olgu talale (joon. 136 a) lõikesse, kus tahame leida läbipainet, rakendatud jõud 1 („ühikjõud“) (näiteks üks tonn või 1/100 000 000 grammi), mis painutab tala, nagu näidatud kriipsjoonega.

Kui tähistada paindemomenti ühikjõust mingis tala ristlõikes AB M_1 -ga ja punkti kaugust neutraalkihist z -iga (joon. 136 b), siis pinge selles punktis võrdub valemi (53) järgi:

$$\sigma_1 = \frac{M_1 z}{J}.$$

Järelikult jõud ΔN , mis venitab selles punktis eraldatud prismakest pikkusega Δy ja ristlõikega ΔF (joon. 136 b), on

$$\Delta N = \sigma_1 \Delta F = \frac{M_1 z \Delta F}{J}.$$

Kujutleme edasi, et talale on rakendatud „põhikoormus“ (s. o. tegelikult rakendatud, antud koormus). Tala telg paindub täiendavalt, nagu näidatud pideva peenjoonega. Seejuures jõu 1 (ühikjõu) kohal saadakse läbipaine, mille tähistame δ_{1p} ja mida võib lugeda nii: *läbipaine põhikoormusest lõikes, kuhu on rakendatud ühikjõud*. Kuna ühikjõu suurus on meelevaldne, siis võib ta alati valida nii väikese, et läbipaine δ_{1p} ei erineks märgatavalt põhikoormusest, s. t. antud koormuse mõjust tekitatud läbipaindest.

Tähistame põhikoormusest vaadeldavas lõikes AB tekitatud paindemomendi M_0 -iga. Ta tekitab varem näidatud prismakeses pinge

$$\sigma_0 = \frac{M_0 z}{J}$$

ja valemite (3) ja (4) järgi pikenemise

$$\Delta(\Delta y) = \varepsilon \Delta y = \frac{\sigma_0}{E} \Delta y = \frac{M_0 z \Delta y}{E J}.$$

Prismakese pikenemisel teostavad jõud ΔN töö

$$\Delta N \Delta(\Delta y).$$

Elastsusjõudude ΔN töö tala elemendi mahus pikkusega Δy ja ristlõike pindalaga F võrdub:

$$\sum \Delta N \Delta (\Delta y) = \sum_F \frac{M_1 z}{J} \Delta F \frac{M_0 z \Delta y}{E J} = \frac{M_0 M_1 \Delta y}{E J^2} \sum_F \Delta F z^2.$$

Märkides, et $\sum_F \Delta F z^2 = J$, võib öelda, et elastsusjõudude

ΔN töö elemendis pikkusega Δy võrdub:

$$\frac{M_0 M_1 \Delta y}{E J}.$$

Järelikult elastsusjõudude ΔN töö kogu tala pikkusel võrdub:

$$\sum_{y=0}^{y=l} \frac{M_0 M_1 \Delta y}{E J} \quad (a)$$

Tala, paindudes temal asuva ühikjõu tõttu, saab potentsiaalse energia juurdekasvu, mis võrdub arvutatud elastsusjõudude tööga.

Välisjõud — ühikjõud, langedes peale põhikoormuse P rakendamist suuruse δ_{1p} võrra alla, teostab töö

$$1 \cdot \delta_{1p}. \quad (b)$$

Energia jäävuse seaduse põhjal peab elastsusjõudude ΔN potentsiaalse energia juurdekasv olema võrdne välisjõu — ühikjõu töö juurdekasvuga.

Võrrutades (a) ja (b) ning redutseerides ühikule, saame

$$\delta_{1p} = \frac{1}{E J} \sum_{y=0}^{y=l} M_0 M_1 \Delta y. \quad (62)$$

Edaspidi nimetame seda avaldist *ümberpaigutuste valemiks*.

Olnuks vaja leida puutuja kaldenurk mingis lõikes, siis ühikjõu asemele tuleb rakendada sellesse lõikesse „ühik-

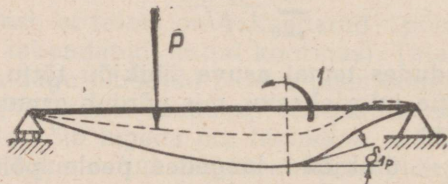
moment" (joon. 137). Ka sel juhul võib võtta „ühikmomendi“ suuruse ükskõik kui väikese. Tala paindub, nagu näidatud kriipsjoonega. Seejärel rakendame põhikoormuse P . Pole raske näha, et elastsusjõudude potentsiaalse energia juurdekasv, nagu ennegi, võrdub:

$$\sum_{y=0}^{y=l} \frac{M_0 M_1 \Delta y}{EJ} \quad (c)$$

Kui rakendatakse põhikoormus, siis lõige, kuhu mõjub ühikmoment, pöörduv nurga võrra, mis joonisel on tähistatud δ_{1p} ; järelikult §-s 45 toodud valemi järgi välisjõu töö juurdekasvu andva ühikmomendi töö võrdub:

$$(\text{ühikmoment}) \times (\text{kaldenurk}) = 1 \cdot \delta_{1p}.$$

Tähistust δ_{1p} võib vaadeldaval juhul jälle lugeda nii: „paigutus“ (kaldenurk) ühikmomendi suunas põhikoormusest.



Joon. 137.

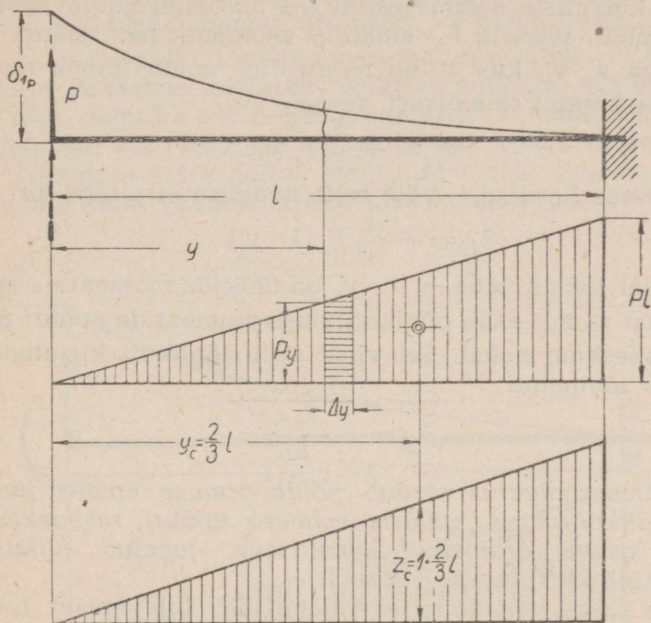
Võrrutades (c) ja (d) ning redutseerides ühikule, saame sama valemi (62).

Seega üks ja sama valem on kõlbulik nii läbipainde kui ka kaldenurga määramiseks. Kuid esimese ülesande lahendamisel tuleb M_1 all mõista momenti ühikjõust, teisel juhul aga ühikmomendist.

Otsene summade arvutamine valemi (62) järgi tekitab mõningaid raskusi, kuid seda võib sooritada väga lihtsalt „epüüride korrutamise reegli“ abil.

§ 76. Epüüride korrutamise reegel. On vaja leida joonisel 138 kujutatud ühe otsaga jäigalt kinnitatud tala vaba otsa läbipaine, kui sellele otsale mõjub jõud P . Rakendame §-s 75 antud juhise järgi ühikjõu, mis on kujutatud kriipsjoonega. Ehitame seejärel teineteise alla paindemomentide

epüürid, eraldi põhikoormusest, s. o. jõust P , ja ühikkoormusest.



Joon. 138.

Paindemoment põhikoormusest meelevaldses lõikes võrdub

$$M_0 = + Py$$

ja ühikkoormusest:

$$M_1 = + 1 \cdot y.$$

Asetame need väärtused valemisse (62):

$$\begin{aligned} \delta_{1p} &= \frac{1}{EJ} \sum_{y=0}^{y=l} M_0 M_1 \Delta y = + \frac{1}{EJ} \sum_{y=0}^{y=l} P y \cdot 1 y \Delta y = \\ &= + \frac{1}{EJ} \sum_{y=0}^{y=l} [(P y) \Delta y] y. \end{aligned}$$

Avaldis nurksulgudes võrdub suuruselt momentide epüüri tihedalt viirutatud pindalakesega. Selliste pindalakeste ja y -i korrutiste summa esitab §-s 52 öeldu põhjal momentide epüüri pindala F_m staatilist momenti, mis valemi (37) järgi on $F_m y_c$, kus y_c on momentide epüüri pinna raskuskeskme kaugus tala otsast, seega

$$\delta_{1p} = + \frac{1}{EJ} F_m y_c.$$

Viies sisse kordaja 1, võib selle avaldise kirjutada nii:

$$\delta_{1p} = + \frac{1}{EJ} F_m (1 \cdot y_c).$$

Joonisel 138 on näha, et $1 \cdot y_c$ on ühikjõu momentide epüüri ordinaat z_c , mis asub põhikoormuse momentide epüüri pinna raskuskeskme kohal. Sel viisil võib lõplikult kirjutada, et otsitav läbipaine

$$\delta_{1p} = + \frac{F_m z_c}{EJ}, \quad (63)$$

s. o. ümberpaigutus võrdub põhikoormuse epüüri pindala ja ühikkoormuse epüüris esimese epüüri raskuskeskme kohal asuva ordinaadi korrutisega, jagatud jäikusega. (Epüüride korrutamise reegel.)

Pole raske veenduda, et valemi (63) tuletamisel toodud arutlus kehtib ka igasuguse teise momentide M_0 epüüri puhul, s. t. ükskõik, millisele tala põhikoormusele vastava epüüri puhul.

Antud juhul

$$F_m = \frac{1}{2} Pl \cdot l = \frac{Pl^2}{2} \quad \text{ja} \quad y_c = \frac{2}{3} l,$$

järelikult

$$z_c = 1 \cdot \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} l;$$

tähendab, läbipaine

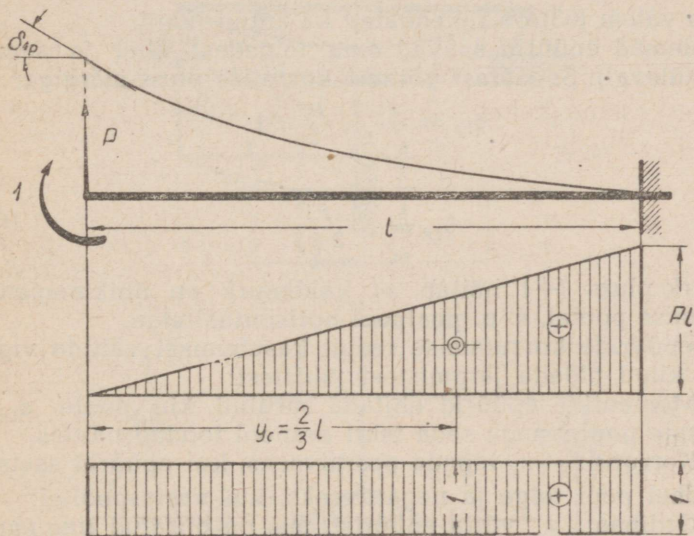
$$\delta_{1p} = + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l$$

ehk

$$\delta_{1p} = + \frac{Pl^3}{3EJ}. \quad (64)$$

Märk (+) näitab, et ümberpaigutus saadakse jõu 1 suunas, s. o. üles, mis on kooskõlas jõu mõjumisega: On kerge mõista, et võttes ühikjõu suuna vastupidise, s. o. alla, me oleksime pidanud lugema ordinaadi z_c negatiivseks, järelikult δ_{1p} oleks tulnud miinus-märgiga, mis näitab, et ümberpaigutus saadakse oletatud ühikjõu suunale vastupidine, s. o. *üles*, nagu ka sobib. Seega epüüride korrutamise reegli kasutamisel võib ühikjõu viia arvutusse meelevaldses suunas. Tulemuse märk näitab paigutuse tõelist suunda.

Leiame nüüd vaadeldud tala otsa kaldenurga.



Joon. 139.

Asetame tala otsale ühikmomendi ja ehitame epüürid (joon. 139). Põhikoormusest tekkiv paindemoment meelevaldses lõikes, nagu öeldud, on

$$M_0 = + Py$$

ja ühikkoormusest (moment on võrdne 1-ga)

$$M_1 = 1.$$

Asetades need suurused valemisse (62), saame:

$$\begin{aligned} \delta_{1p} &= \frac{1}{EJ} \sum_{y=0}^{y=l} M_0 M_1 \Delta y = \frac{1}{EJ} \sum_{y=0}^{y=l} P \cdot y \cdot 1 \cdot \Delta y = \\ &= \frac{1}{EJ} \sum_{y=0}^{y=l} (Py \Delta y) \cdot 1. \end{aligned}$$

Sulgudes oleva avaldise summa, nagu võime näha jooniselt 138, võrdub momentide epüüri pindalaga $F_m = \frac{Pl^2}{2}$, kuna 1 (ühik) on pinna raskuskeskme kohal olev ordinaat z_c . Seega valem (63) on rakendatav ka antud juhul.

Mõlemad epüürid asuvad oma telgedest ühel ja samal pool (üleval). Seepärast võtame korrutise pluss-märgiga:

$$\delta_{1p} = + \frac{1}{EJ} \frac{Pl^2}{2} \cdot 1$$

ehk

$$\delta_{1p} = + \frac{Pl^2}{2EJ} \quad (65)$$

Märk pluss (+) näitab, et kaldenurk on ühikmomendi mõjumise poolel, s. o. pealpool horisontaaltelge.

Et epüüride korrutamise reegli kasutamisel vältida vigu, tuleb kinni pidada järgmistest juhistest:

1. Momentide epüürid ehitada surutud kiu poole, s. o. nõgusale poole, nagu seda tehti eespool toodud näiteis.

2. Korrutis $F_m \cdot z_c$ lugeda positiivseks, kui epüürid asetsevad ühel pool telge ja negatiivseks, kui vastaspooltel.

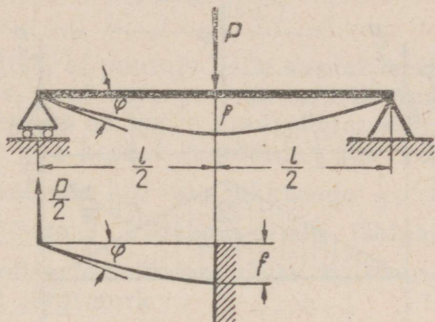
3. Ordinaat z_c võtta epüürist, mis on piiratud *tingimata sirgega* — ilma *murdamisteta*. Viimane tuleneb sellest, et epüüride korrutamise reegel on oma olemuselt summade arvutamise võtte ümberpaigutuste valemi abil.

Kui ühikkoormuse epüüri piiriks on murdjoon, nagu järgnevas näites (23), siis tähendab see seda, et summeeritavate suuruste muutumine erinevatel aladel on erinev.

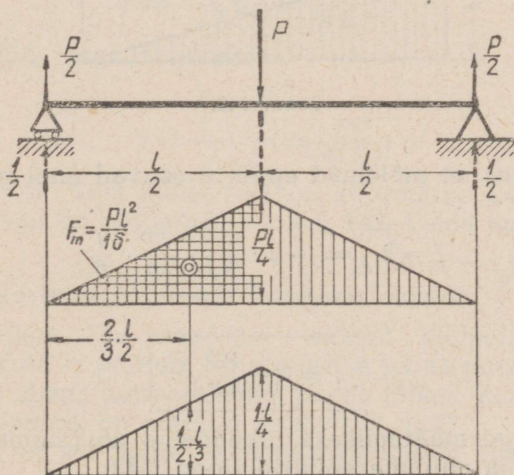
Järelikult ka summeerimise võtted kujunevad erinevateks. Epüüride korrutamise reegel on kehtiv sel juhul üksikute alade kohta, mis on piiratud sirgega, s. o. murdekohast murdekohani.

§ 77. Talade deformatsioonide määramise näited. Umberpaigutuste võrrandi mõiste.

Näide 23. Leida joonisel 140 kujutatud kahel toel asuva tala puutuja kaldenurk φ toel ja läbipaine f tala keskel. Läbipainde määramiseks asetame jõu P alla kriipsjoonega kujutatud ühikjõu (joon. 141). Seejärel ehitame paindemomentide epüürid põhikoormusest P ja ühikkoormusest, paigutades nad teineteise alla.



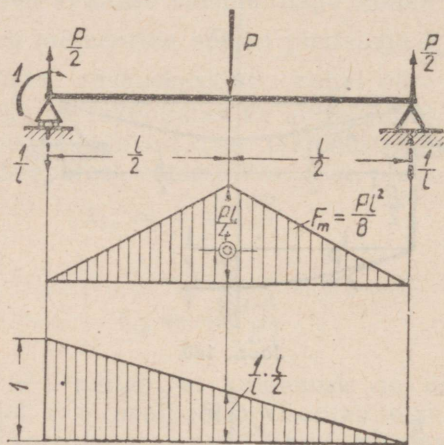
Joon. 140.



Joon. 141.

Otsitava läbipainde f tähistame nagu varemgi δ_{1p} -ga.

Kuna ühikkoormuse epüür on piiratud murdjoonega, aga mitte pideva sirgega, siis tuleb „epüüride korrutamist“ teostada osade kaupa, eraldi vasakule ja eraldi paremale poolele, milledest kummagi jaoks reegel jääb püsima; saadud osatulemused tuleb liita. Lihtsam on muidugi koostada korrutis vasakule osale ja see kahekordistada.



Joon. 142.

Täheldades, et mõlemad epüürid asuvad ühel pool telge, leiame:

$$f = \delta_{1p} = +2 \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{6}$$

ehk

$$f = + \frac{Pl^3}{48EJ} \quad (66)$$

Kaldenurga määramiseks rakendame ühikmomendi vasakule toele ja ehitame epüürid (joon. 142).

Ühikmomendi epüüri piirjoon on pidev sirge, seepärast võib antud juhul põhikoormuse epüüri kogu pindala korru-

tada ühikkoormuse epüüri ordinaadiga. Pöörates tähelepanu epüüride asendile ja tähistades $\varphi = \delta_{1p}$, saame:

$$\varphi = \delta_{1p} = + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{Pl^2}{8} \cdot \frac{1}{2}$$

ehk

$$\varphi = + \frac{Pl^2}{16EJ} \quad (67)$$

Märk (+) näitab, et puutuja kalle saadakse momendi mõju-
mise suunas, s. o. niisugune, nagu on näidatud joonisel 142.

Saadud tulemusi on kerge kontrollida.

Kuna lõige tala keskel ei pöördu, siis võib poolt tala
(joon. 140) vaadelda kui tala pikkusega $\frac{l}{2}$, mis on koor-
matud otsas jõuga $\frac{P}{2}$. Niisuguse tala läbipaine f võrdub
antud kahetoelise tala läbipaindega, koormusega P keskel.

Valemi (65) järgi nurk

$$\varphi = \frac{\frac{P}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ} = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

Valemi (64) järgi läbipaine

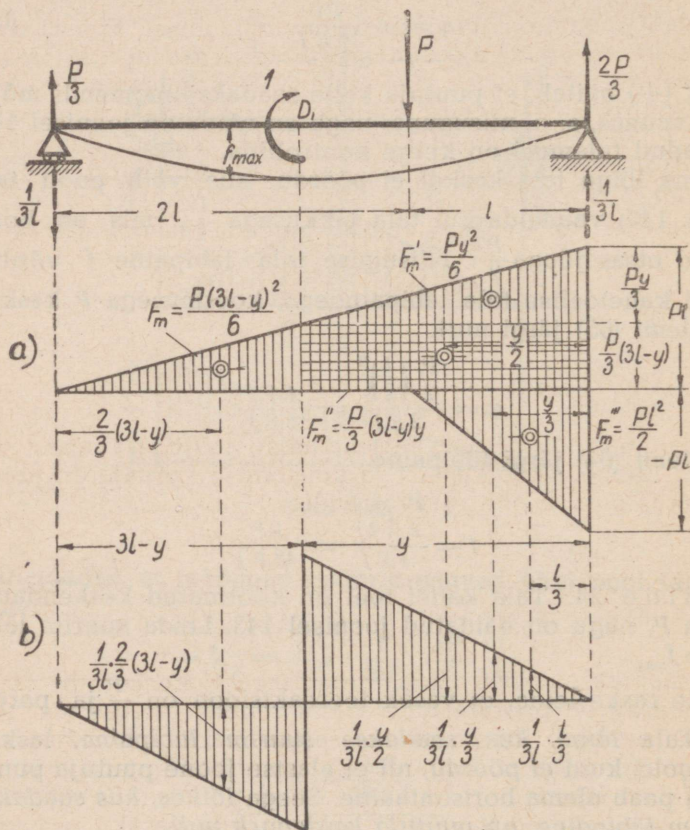
$$f = \frac{\frac{P}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

Näide 24. Tala kahel toel on koormatud keskendatud
jõuga P , nagu on näidatud joonisel 143. Leida suurim läbi-
paine f_{max} .

Pole raske leida, et vasak toereaktsioon on $\frac{P}{3}$ ja parem
 $\frac{2}{3}P$. Tala lõige, kus saadakse suurim läbipaine, laskub
allapoole, kuid ei pöördu, nii et elastse joone puutuja punk-
tis D_1 peab olema horisontaalne. Seega lõikes, kus saadakse
suurim läbipaine, on puutuja kaldenurk null.

Oletame, et see lõige asub parempoolsest toest kaugu-
sel y . Rakendame sellesse lõikesse ühikmomendi ja kirju-
tame kaldenurga avaldise, kasutades epüüride korrutamise
reeglit.

Arvutuste lihtsustamiseks ehitame põhikoormuse paindemomentide epüüri, nagu on näidatud joonisel 143 a, s. o. algul ehitame epüüri, vaadeldes ainult vasakut toereaktsiooni ja seejärel ainult koormust. Liites nende epüüride ordinaadid, saame meile tuntud kujuga epüüri — kolmnurk tipuga koorma all.



Joon. 143.

Epüüri ehitamiseks ühikmomendi koormusest leiame esmalt toereaktsioonid. Reaktsioonid peavad moodustama

jõupaari, mis tasakaalustab ühikmomendi. Tähistades neid Q -ga, võib kirjutada:

$$1 = Q \cdot 3l,$$

kust

$$Q = \frac{1}{3l}.$$

Reaktsioonide suunad on näidatud joonisel. Epüüri ehitamine, kui vaadelda algul momente vasakust toereaktsioonist ja seejärel paremast, ei tee raskusi. Kuna momentide epüür ühikkoormusest on murdjoonega piiratud, siis tuleb epüüride korrutamisel leida korrutis osade kaupa. Pinna osad ja nende raskuskeskmete all asetsevad ordinaadid on näidatud joonisel 143.

Pöörates tähelepanu epüüri pindade asenditele, kirjutame:

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{P(3l-y)^2}{6} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3l-y}{l} + \frac{Py^2}{6} \cdot \frac{y}{9l} + \right. \\ \left. + \frac{P}{3}(3l-y)y \cdot \frac{y}{6l} - \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{1}{9} \right] = 0.$$

Peale samanimeliseks teisendamist, sulgude avamist, sarnaste liikmete koondamist ja konstantse kordaja ärajätmist vasakus osas saame ruutvõrrandi

$$3y^2 - 18ly + 19l^2 = 0.$$

Lahendades selle, leiame üheks juureks $y > 4l$, mis ilmselt ei kõlba, ja teiseks

$$y \approx 1,37l,$$

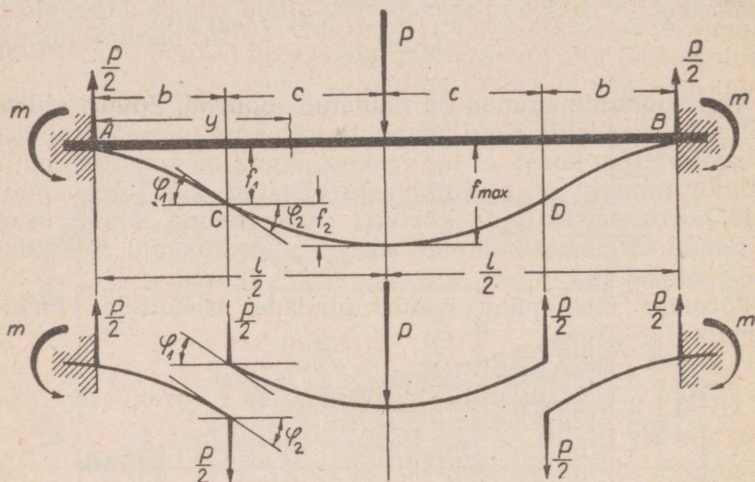
mis määrab suurima läbipainumisega lõike asendi.

Huvitav on pöörata tähelepanu sellele, et suurimat läbipainet ei saada jõu kohal ega selles lõikes, kus mõjub suurim paindemoment, nagu sageli arvavad algajad, vaid tala keskkoha lähedal.

Nüüd on kerge leida f_{max} suurust tala vasaku osa vaatlusest. Valemi (64) järgi

$$f_{max} = \frac{\frac{P}{3}(3l-y)^3}{3EJ} = \frac{P(3l-1,37l)^3}{9EJ} = \frac{P(1,63l)^3}{9EJ} \approx 0,48 \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Näide 25. Jäigalt kinnitatud otstega tala (joon. 144) keskele mõjub jõud P . Leida selle tala suurim läbipaine ning ehitada momentide ja põikjõudude epüürid.



Joon. 144.

Sümmeetrilise koormuse tõttu on toereaktsioonid võrdsed ja võrduvad $\frac{P}{2}$ -ga.

Tala elastse joone kuju on näidatud joonisel. Kui tala otsad poleks jäigalt kinnitatud, vaid toetuksid vabalt, siis paindel nad püüaksid pöörduda. Kuid jäik kinnitus hoiab nad horisontaalasendis, seepärast tekivad jäikkinnitustes võrdsed toemomendid m . On kerge näha, et kirjutades staatilise tasakaalu võrrandi $\Sigma M = 0$, me ei saa neid momente määrata, kuna nad tulevad võrrandisse vastupidiste märkidega ja järelikult taanduvad.

Neid võib leida, nagu tehakse ikka staatiliselt määramatute ülesannete lahendamisel, võttes arvesse tala deformatsioone. Jooniselt on näha, et vaadeldavat tala võib endale ette kujutada koosnevana kolmest osast, mis on näidatud joonisel 144 all, kusjuures selguse mõttes üksikud osad on

nihutatud. Osade liitekohtades momendid puuduvad, kuna nende olemasolu korral pole võimalik eeldatud ja ilmne painde kuju. Olgu äärmiste osade pikkuseks b ja keskmisel $2c$.

Neid pikkusi võib leida, täheldades, et punktides C ja D moodustavad elastse joone puutujad vasakule ja paremale osale võrdsed kaldenurgad φ_1 ja φ_2 . Need nurgad on võrdsed, kuna tala paindub alati sujuvalt.

Kasutades valemit (65) äärmiste osade ja valemit (67) keskmise osa jaoks, leiame:

$$\varphi_2 = \frac{\frac{P}{2}b^2}{2EJ} = \frac{Pb^2}{4EJ}, \quad \varphi_1 = \frac{P(2c)^2}{16EJ} = \frac{Pc^2}{4EJ}.$$

Kuna $\varphi_1 = \varphi_2$, siis $\frac{Pb^2}{4EJ} = \frac{Pc^2}{4EJ}$, kust $b = c$.

Kuid $b + c = \frac{l}{2}$, järelikult $b = c = \frac{l}{4}$.

Nüüd on kerge leida m , kirjutades tala vasaku osa tasa-kaalu võrrandi:

$$m = \frac{P}{2}b = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8}.$$

Läbipaine f_{max} , nagu näha jooniselt, võrdub summaga $f_1 + f_2$.

Valemi (64) järgi äärmistele osadele ja valemi (66) järgi keskmisele osale, saame:

$$f_1 = \frac{\frac{P}{2}b^3}{3EJ} = \frac{\frac{P}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^3}{3EJ} = \frac{Pl^3}{384EJ},$$

$$f_2 = \frac{P(2c)^3}{48EJ} = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{48EJ} = \frac{Pl^3}{384EJ}.$$

Järelikult

$$f_{max} = f_1 + f_2 = 2 \cdot \frac{Pl^3}{384EJ} = \frac{Pl^3}{192EJ}.$$

Ehitame paindemomentide ja põikjõudude epüürid.

Paindemoment toest A kaugusel y asetsevas lõikes (joon. 144) võrdub

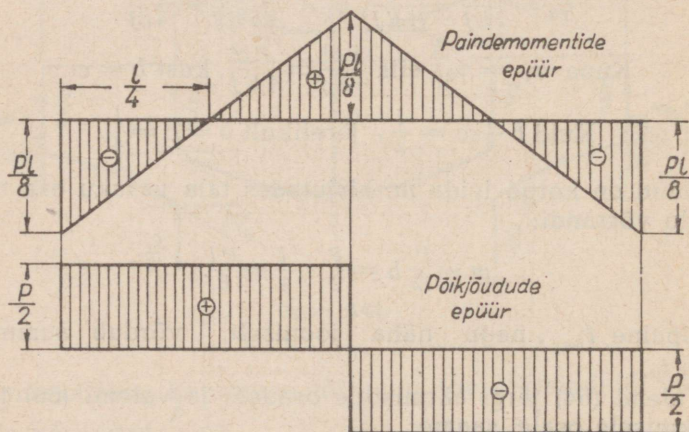
$$M_y = -m + \frac{P}{2}y = -\frac{Pl}{8} + \frac{P}{2}y.$$

Paindemoment muutub sirgjoone seaduse järgi:

$$\text{kui } y = 0, \text{ siis } M_{y=0} = -\frac{Pl}{8}, \quad (68)$$

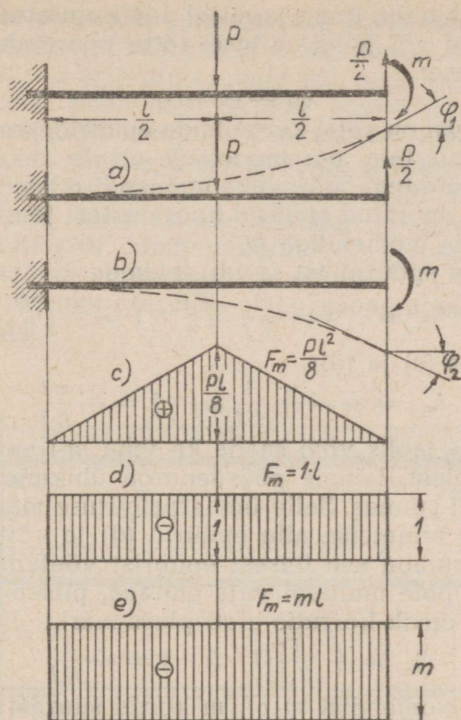
$$\text{kui } y = \frac{l}{2}, \text{ siis } M_{y=\frac{l}{2}} = \frac{Pl}{8}. \quad (69)$$

Nende andmete põhjal koostame vasaku osa epüüri (joon. 145). Parempoolsel tala osal muutub paindemoment,



Joon. 145.

nagu on kerge veenduda, samuti sirgjoone seaduse järgi. Epüürist on näha, et konstantse ristlõikega tala omab kolme ohtlikku lõiget. Viies murdumiseni joonisel 144 toodud skeemi järgi koormatud klaasist latte, selgub, et nad tõepoolest purunevad kolmes lõikes. Epüüris on punkte, kus paindemoment võrdub nulliga. Kuni niisuguse punktini omab paindemoment ühte märki, aga peale seda teist. Need punktid, mis asetsevad, nagu juba nägime, tala otstest kaugusel $\frac{1}{4}l$, vastavad tala elastse joone punktidele C ja D (joon. 144) ja nimetatakse *käänupunktideks*.



Joon. 146.

Põikjõudude epüüri ehitamine ei valmista mingeid raskusi. Jäykkinnituse momenti m , mis on vajalik momentide epüüri koostamisel, võib leida ka teisel, üldisemal viisil. Hävitame joonisel 144 kujutatud tala parempoolse otsa jäykkinnituse. Rakendades aga sellele otsale jäykkinnituse momenti m (joon. 146), me ei muuda tala tasakaalu.

Joonisel 146 kujutatud tala erineb joonisel 144 esitatust ainult jäigalt kinnitatud otsa kujutamise viisilt.

Joonisel 146 a on antud tala elastse joone kujutis jõudude mõjumisel, joonisel 146 b aga — momenti m mõjumisel. Otsal saadud kaldenurgad, üks üles, teine alla, annavad ilm-

selt summaks nulli, kuna joonisel 144 kujutatud tala parempoolne ots ei või jäykkinnituse tõttu pöörduda. Kirjutame selle tingimuse:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0.$$

φ_1 ja φ_2 suurusi on väga kerge leida epüüride korrutamiseega. Selleks on vaja tala parempoolsele otsale rakendada ühikmoment. Loeme teda mõjuvaks momendi m suunas. Joonisel 146 c, d ja e on antud epüürid koormustest jõududega, ühikmomendiga ja momendiga m .

Korrutades epüürid (c) ja (d), leiame:

$$\delta_{1p} = \varphi_1 = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{Pl^2}{8} \cdot 1 = -\frac{Pl^2}{8EJ}$$

ja korrutades (e) ja (d):

$$\delta_{1m} = \varphi_2 = +\frac{l}{EJ} ml \cdot 1 = +\frac{ml}{EJ}.$$

Avaldist φ_2 jaoks võib saada ka ilma m -i epüüri ehitamiseta. Tõepoolest, leiame pöördnurka ühikmomendist selle ühikmomendi suunas. Selle ümberpaigutuse määramiseks on vaja ehitada teineteise alla epüürid (d) ja võttes neist ühe pindala, korrutada see teisest epüürist võetud ordinaadiga. Teist epüüri pole muidugi vaja ehitada, piisab ühe ehitamisest. Ilmselt omab korrutis alati pluss-märki. Järelikult

$$\delta_{11} = +\frac{1}{EJ} (1 \cdot l) \cdot 1 = +\frac{l}{EJ}.$$

Pöördnurk momendist m on m korda suurem kui ühikmomendist, s. o.

$$\delta_{1m} = \delta_{11} m = +\frac{ml}{EJ}.$$

Saime varem leitud avaldise.

Asetades φ_1 ja φ_2 võrrandisse (a), leiame:

$$\delta_{1p} + \delta_{11} m = -\frac{Pl^2}{8EJ} + \frac{ml}{EJ} = 0, \quad (b)$$

kust

$$m = +\frac{Pl}{8}.$$

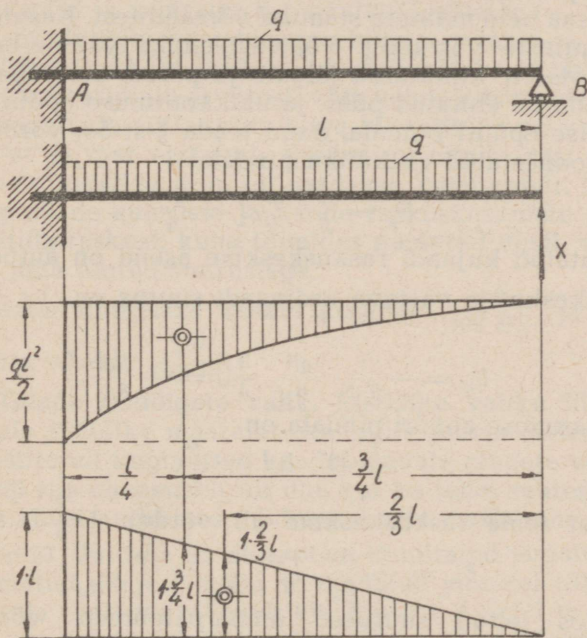
Märk pluss näitab, et moment m mõjub joonisel 146 a eeldatud suunas.

Tähistades staatiliselt määramatu suuruse m tähega X , võib võrrandi (b) ümber kirjutada:

$$\delta_{1p} + \delta_{11} X = 0. \quad (70)$$

See võrrand väljendab järgmist: kui staatiliselt määramatu tala ühe staatiliselt määramatu koormusega asendada niisuguse staatiliselt määratud talaga või, nagu öeldakse, põhisüsteemiga, mis peale koormamist staatiliselt määramatu koormusega paindub samuti kui staatiliselt määramatu, siis ümberpaigutuste summa põhisüsteemis põhikoormusest δ_{1p} ja staatiliselt määramatust koormusest $\delta_{11}X$ on alati null (deformatsioonid hävivad vastastikku). Seepärast nimetatakse võrrandit (70) „ümberpaigutuste võrrandiks“ süsteemil ühe staatiliselt määramatu suurusega.

Järgnevas näites tutvume ümberpaigutuste võrrandi rakendamisega.



Joon. 147.

Näide 26. Tala (joon 147), mille vasak ots on kinnitatud

jäigalt ja parem asub liikuvale toel, kannab ühtlast koormust, kusjuures pikkusühikule tuleb koormus q . Leida toereaktsioon B .

Antud tala reaktsioonid on staatiliselt määratud. Kirjutades momentide võrrandi punkti A suhtes, leiame:

$$\Sigma M_A = m - ql \cdot \frac{l}{2} + Bl = 0.$$

Siin on m -iga tähistatud jäykkinnituse moment. Jõudude projektsioonide võrrand teljele z annab:

$$\Sigma Z = A - ql + B = 0.$$

Kuna kõik jõud on vertikaalsed ja moment m projektsiooni anda ei või, siis võrrandit $\Sigma Y = 0$ ei saa kasutada. Kaks väljakirjutatud võrrandit sisaldavad kolm tundmatut, järelikult ei saa neid määrata staatika võrranditest. Kasutame ümberpaigutuste võrrandit. Põhisüsteemiks valime tala, mille vasak ots on kinnitatud jäigalt ja parem ots vabalt (joon. 147). Alla on ehitatud põhi- ja ühikkoormuse epüürid. Põhikoormuse epüüri pindala, nagu teada §-st 53, võrdub $1/3$ -ga ümberjoonestatud ristküliku pindalast:

$$F_m = \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} l = \frac{ql^3}{6}.$$

Viirutatud kujundi raskuskeskme asend on antud §-s 54. Raskuskeskmele vastava ordinaadi suurus on $1 \cdot \frac{3}{4} l$, seepärast

$$\delta_{1p} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{ql^3}{6} \cdot \frac{3}{4} l = -\frac{ql^4}{8EJ}.$$

Uhikkoormuse epüüri pindala on

$$\frac{1}{2} (1 \cdot l) l = \frac{l^2}{2},$$

ordinaat tema raskuskeskme all võrdub $1 \cdot \frac{2}{3} l$, seepärast

$$\delta_{11} = +\frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = +\frac{l^3}{3EJ}.$$

Asetades leitud suurused ümberpaigutuste võrrandisse, saame:

$$\delta_{1p} + \delta_{11} X = -\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{l^3}{3EJ} X = 0.$$

Seda võrrandit võib lugeda nii: põhisüsteemis põhikoormusest lõikes B saadav läbipaine hävitatakse samas süsteem

mis ja samas lõikes staatiliselt määratud suurusega toe-reaktsioonist B saadava läbipaindega.

Lahendades võrrandi, leiame:

$$X = B = + \frac{3}{8} ql.$$

Märk pluss näitab, et reaktsioon mõjub ühikjõu suunas, seega suunaga üles.

Asetades leitud B väärtuse näite algul toodud staatika võrrandisse, määrame A ja m , misjärel on kerge ehitada paindemomentide ja põikjõudude epüüre, kirjutades välja nende võrrandid.

Omades paindemomentide epüüri, võib leida läbipaindeid ja kaldenurki, rakendades vastavatesse lõigetesse ühikjõud või -momentid ja määrates δ_{lp} näidatud võtetega.

Soovitame lugejal harjutusena ehitada epüürid ja samuti leida läbipaine ja kaldenurk vaadeldud tala keskkohas.

Et vältida keerukaid arvutusi, võib nende küsimuste lahendamisel soovitada võtta mitte kogu M epüüri, vaid vaadelda M -ist, A -st ja q -st ehitatud epüüre üksikult, sest nende epüüride ordinaatide liitmisel saadakse kogu epüür. Sel viisil võib pindade suuruste ja nende raskuskeskmete määramisel vältida raskusi, kuna toimides näidatud viisil, on meil tegemist juba tuntud suurustega.

Läbipaine suuruseks keskel kujuneb $\frac{q l^4}{192 E J}$ ja kaldenurk samas võrdub $\frac{q l^3}{192 E J}$.

§ 78. Talade ristlõigete valik. Ristlõike valiku ülesanne osutub tala ristlõike määramiseks, mille juures oleks rahuldatud püstitatud tingimused kas lubatavate pingete või läbipainde või siis üheaegselt nii ühe kui ka teise suhtes. Vaatleme üksikutes arvulistes näidetes, kuidas seda teha.

N ä i d e 27. Puittala on ühes otsas kinnitatud jäigalt ja teises koormatud jõuga P , nagu on näidatud joonisel 131. Määrata puittala ristlõike mõõted, kui $P = 1$ t, $l = 1,5$ m ja tala ristlõige on ristkülikukujuline, kusjuures tema kõrgus peab olema 2 korda suurem laiusel (joon. 148). Lubatav pinge paindel $R_p = 100$ kg/cm².

Maksimaalne paindemoment

$$M_{max} = Pl = 1000 \cdot 150 = 150\,000 \text{ kgcm.}$$

Vajalik vastupidavusmoment valemi (55) järgi

$$W_x = \frac{M_{max}}{R_p} = \frac{150\,000}{100} = 1500 \text{ cm}^3.$$

Kuna ristkülikukujulise ristlõike jaoks

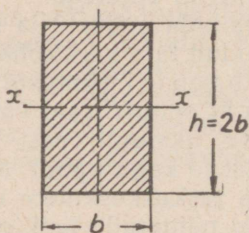
$$W_x = \frac{J_x}{z_{max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6},$$

siis, võttes $h = 2b$, saame:

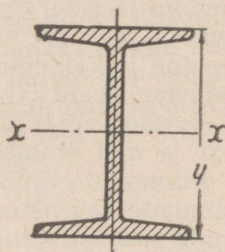
$$\frac{b(2b)^2}{6} = 1500 \text{ cm}^3,$$

kust

$$b \approx 13 \text{ cm ja } h = 2b = 26 \text{ cm.}^1$$



Joon. 148.



Joon. 149.

Näide 28. Joonisel 141 toodud skeemi järgi koormatud terastala tuleb võtta I-kujulise ristlõikega (joon. 149). Leida profiili number ja määrata, millise paindepingega töötab tala, kui lubatav läbipaine ei tohi ületada $\frac{1}{600}$ tala pikkusest. Koormus $P = 2 \text{ t}$, pikkus $l = 6 \text{ m}$, elastsusmoodul $E = = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Eelmises paragrahvis oli näites 23 leitud [valem (66)], et

$$f_{max} = \frac{P l^3}{48 E J}.$$

¹ Arvutus annab b väärtuseks 13,1 cm. Põhimõtteliselt ei tohi muidugi esineda olukord, kus arvutustel saadud pinge (antud juhul $150\,000 : \frac{13 \cdot 26^2}{6} = 102,4 \text{ kg/cm}^2$) ületaks lubatava. Mõne protsendi piirides on see siiski lubatava pinge mitte väga täpsel määramisel lubatav. (Tõlke vastut. toimetaja märkus.)

Jagades mõlemad pooled l -iga, leiame läbipainde suhte tala pikkusega:

$$f_{max} : l = \frac{P l^2}{48 E J}.$$

Ülesande tingimuse järgi $f_{max} : l = 1 : 600$. Tala on kasulik panna tööle niisuguses asendis, et neutraalkiht ühtiks teljega x . Asetades ülesandes antud andmed valemisse ja määrates J_x , saame:

$$J_x = \frac{P l^2}{48 E \left(\frac{f_{max}}{l} \right)} = \frac{2000 \cdot 600^2}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{600}} = 4500 \text{ cm}^4.$$

Tabelist valmistatavate \bar{I} -profiilide kohta (OCT 10016-39) leiame, et tala nr. 24 inertsmoment $J_x = 4570 \text{ cm}^4$ ja väiksema tala nr. 22 inertsmoment $J_x = 3570 \text{ cm}^4$. Kui on püstitatud tingimus, et $f_{max} : l$ ei tohi olla suurem kui $\frac{1}{600}$, siis tuleb võtta tala profiiliga nr. 24.

Seejuures

$$\sigma_p = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{\frac{P l}{4} \cdot \frac{h}{2}}{J_x} = \frac{2000 \cdot 600 \cdot 12}{4 \cdot 4570} \approx 790 \text{ kg/cm}^2.$$

Materjali pole kasutatud ratsionaalselt, kuna terastalades võetakse lubatav pingetavaliselt 1000—1200 kg/cm².

Kui võtta profiil nr. 22, siis

$$\sigma_p = \frac{P l \cdot \frac{h}{2}}{4 J_x} = \frac{2000 \cdot 600 \cdot 11}{4 \cdot 3570} = 925 \text{ kg/cm}^2,$$

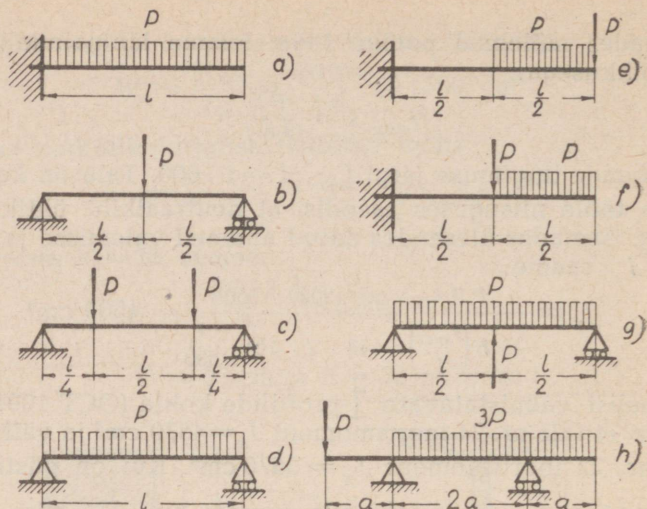
mis oleks materjali ratsionaalse kasutamise suhtes tunduvalt parem.

Seejuures aga

$$\frac{f_{max}}{l} = \frac{P l^2}{48 E J} = \frac{2000 \cdot 600^2}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3570} = \frac{1}{476},$$

s. t. et läbipaine, võrreldes lubatavaga, suureneb

$$\frac{\frac{1}{476} - \frac{1}{600}}{\frac{1}{600}} \cdot 100 \approx 26\% \text{ võrra.}$$



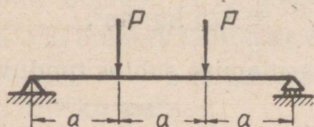
Joon. 150.

§ 79. Ulesandeid paindele.

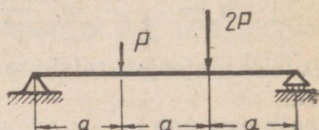
42. Ehitada M ja Q epüürid joonisel 150 kujutatud taladele.

43. Tala on koormatud joonisel 151 näidatud viisil. Leida suurim läbipaine.

44. Leida joonisel 118 kujutatud tala suurim läbipaine, kui $CD = 1500$ mm ja $E = 10^5$ kg/cm². Kui suur on läbipaine ühe jõu kohal?



Joon. 151.



Joon. 152.

45. Valida joonisel 151 kujutatud terasest I -tala ristlõige, kui $R_p = 1000$ kg/cm², $P = 3$ t ja $a = 1,5$ m.

46. Joonisel 151 toodud skeemi järgi koormatud tala tehakse ümarpalgist. Leida palgi vajalik läbimõõt, kui $R_p = 100$ kg/cm², $P = 1$ t ja $l = 1,5$ m.

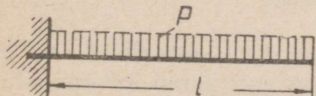
47. Valida joonise 144 järgi koormatud terasest I-tala ristlõige, kui $P = 5 \text{ t}$, $l = 5 \text{ m}$ ja lubatav $f_{max} : l = \frac{l}{600}$. Kui suur pinge tekib talas?

48. Joonisel 118 kujutatud pruss vahetatakse ümarpalgiga. Leida palgi läbimõõt nii, et ta töötaks sama pingega kui ristkülikukujulise ristlõikega pruss.

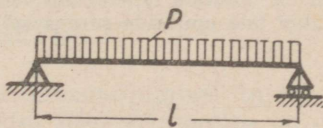
49. Leida joonisel 152 kujutatud tala suurim läbipaine.

50. Leida läbipaine ühtlast koormust P kandva tala otsal (joon. 153).

Juhis. Lahenduskäik on sarnane joonisel 139 kujutatud tala lahendusega. Parabooli pindala ja tema raskuskese on antud §-s 53 ja 54.



Joon 153

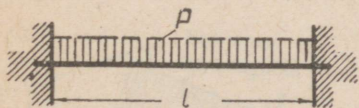


Joon. 154.

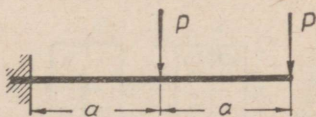
51. Leida läbipaine ühtlase koormusega koormatud tala keskel (joon. 154).

Juhis. Kõige lihtsam on lahendada nii, nagu näidatud näite 23 lõpul. Mitte unustada, et pool tala kannab peale reaktsiooni veel ühtlast koormust, mis mõjub vastassuunas. Kasutada käesoleva paragrahvi ülesande nr. 50 lahendust.

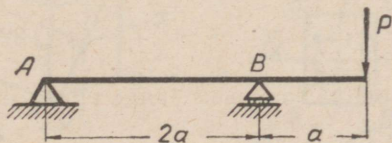
52. Leida järgalt kinnitatud otstega ja ühtlase koormusega koormatud tala läbipaine (joon. 155).



Joon. 155.



Joon. 156.



Joon. 157.

J u h i s . Kasutada võtteid, mis olid toodud joonisel 144 kujutatud tala jaoks.

53. Leida joonisel 156 kujutatud tala suurim läbipaine ja läbipaine tala keskel.

54. Eelmise ülesande tala on valmistatud puitprussist ja omab ruudukujulist ristlõiget. Määrata ruudu külg, kui $P = 1 \text{ t}$, $a = 1 \text{ m}$ ja $R_p = 100 \text{ kg/cm}^2$.

55. Leida joonisel 152 kujutatud tala läbipaine jõu P kohal. Määrata läbipaine jõu $2P$ kohal ja \bar{a} -kujulise ristlõikega tala profiili number, kui $R_p = 1200 \text{ kg/cm}^2$, $P = 2 \text{ t}$ ja $a = 2 \text{ m}$.

56. Leida joonisel 157 kujutatud tala suurim läbipaine avas AB .

J u h i s . Pöörata tähelepanu selle tala ja §-s 77 näites 24 (joon. 143) vaadeldud tala epüüride sarnasusele.

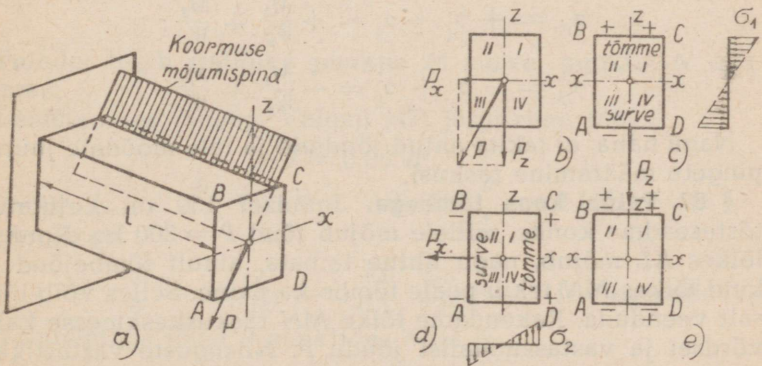
XII PEATUKK.

LIITTUGEVUS.

§ 80. Määratlus. Koormuste koosmõjumisel tuleb pinge määramiseks üksikutes punktides *liita* erireeglite järgi pinged, mis on tekitatud igast koormusest eraldi.

Juhtu, kui pinge vaadeldavas punktis leitakse üksikutest koormustest tekitatud pingete liitmise teel, nimetatakse *liittugevuse* juhuks.

§ 81. Vildakpaine. Olgu ristkülikukujulise ristlõikega pruss (joon. 158 a) koormatud teljega risti oleva jõuga P , mille mõjumispind läbib prussi telje, kuid ei ühti tema sümmeetriatelgedega. Sel juhul tekkivat deformatsiooni nimetatakse *vildakpaineks*. Jagades jõu (joon. 158 b) sümmeetriatelgedele sihis kaheks jõuks P_x ja P_z , me taandame vildak-



Joon. 158.

painde kaheks omavahel risti olevaks paindeks. Eeldades, et jõududest P_x ja P_z tekitatud pinged teineteisest ei olene, võib leida suurimad pinged järgmiselt. Oletame algul, et latile mõjub ainult jõud P_z . See jõud tekitab ristlõikes suurimad pinged σ_1 punktides, mis asuvad sirgeil BC ja AD (joon. 158 c). Seejuures

$$\sigma_1 = \pm \frac{M_1}{W_x}.$$

I ja II veerandis tekib tõmme, III ja IV veerandis aga surve.

Oletame nüüd, et latile mõjub ainult jõud P_x , mis tekitab suurimad pinged sirgete CD ja AB punktides (joon. 158 d):

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_2}{W_z}.$$

I ja IV veerandis tekib tõmme, I ja III veerandis aga surve.

Jõudude P_z ja P_x üheaegsel mõjumisel, mis vastab algjõu P mõjumisele, pinged ristlõike üksikutes punktides liituvad. Seejuures punktides A ja C tulevad suurimad pinged sama märgiga, aga punktides B ja D vastasmärkidega (joon. 158 e).

Liites need pinged, saame:

$$\sigma_A = -\sigma_1 - \sigma_2 = -\frac{M_1}{W_x} - \frac{M_2}{W_z};$$

$$\sigma_B = +\sigma_1 - \sigma_2 = +\frac{M_1}{W_x} - \frac{M_2}{W_z};$$

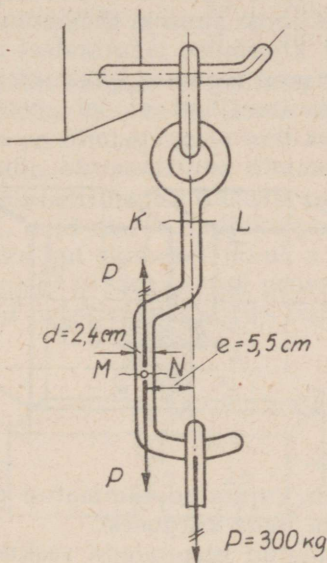
$$\sigma_C = +\sigma_1 + \sigma_2 = +\frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_z};$$

$$\sigma_D = -\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_z}.$$

Nagu näha, ei tekita antud jõudude ja tala mõõdete juures pingete määramine raskusi.

§ 82. Paine koos tõmbega. Joonisel 159 on kujutatud tõsteseadme konks, millele mõjub jõud $P = 300$ kg. Konksu lõikes KL mõjub, nagu lihtne taibata, ainult tõmbejõud P , kuid lõikes MN tekib peale tõmbe ka paine. Selles võib lihtsalt veenduda. Rakendame lõike MN raskuskeskmesse kaks võrdset ja vastassuunalist jõudu P . Niisuguste vastastikku tasakaalustuvate jõudude lisamine ei muuda midagi konksu olukorras. Nüüd võib näha, et kolmest konksule mõjuvast

jõust kaks jõudu, mis on kahe kriipsuga läbi kriipsutatud, moodustavad jõupaari momendiga $M = P \cdot e$, mis painutab konksu, kuna kolmas jõud tõmbab.



Joon. 159.

Paindel tekib ristlõike punktis M surve, punktis N aga tõmme.

Leiame need pinged. Valemi (47) järgi ringi jaoks

$$J = 0,05 d^4.$$

$$\text{Kuna } z_{max} = \frac{d}{2}, \text{ siis } W = 0,05 d^4 : \frac{d}{2} = 0,1d^3.$$

Järelikult

$$\sigma_p = \pm \frac{M}{W} = \pm \frac{Pe}{0,1d^3} = \pm \frac{300 \cdot 5,5}{0,1 \cdot 2,4^3} \approx \pm 1195 \text{ kg/cm}^2.$$

Tõmbepinge jõust P punktides M ja N

$$\sigma_t = + \frac{P}{F} = + \frac{P \cdot 4}{\pi d^2} = + \frac{300 \cdot 4}{\pi \cdot 2,4^2} \approx + 67 \text{ kg/cm}^2.$$

Liites paindepinge tõmbepingega, saame:

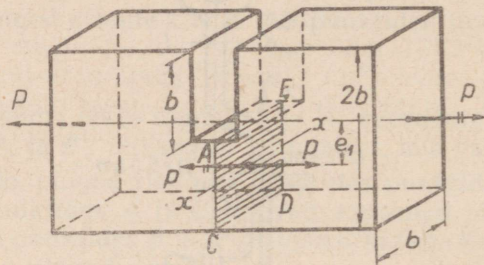
$$\sigma_M = -\sigma_p + \sigma_t = -1195 + 67 = -1128 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_N = +\sigma_p + \sigma_t = +1195 + 67 = +1262 \text{ kg/cm}^2.$$

Suurima pinge saime punktis N (tõmbepinge).

See pinge on 19 korda suurem tõmbepingest, mis saadakse näiteks lõikes KL koormuse tsentraalsel mõjumisel.

Antud juhul on meil tegemist *ekstsentrilise tõmbega*, s. o. tõmbejõudude resultantjõud ei läbi vaadeldava ristlõike raskuskeset.



Joon. 160.

Joonisel 160 on kujutatud tõmmatud pruss sisselõikega, mis ulatub pooleni tema kõrgusest.

Jõud on rakendatud otspindade raskuskeskmisse, s. o. mõjuvad mööda lati telge.

Rakendades lõike $ACDE$ raskuskeskmisse kaks võrdset ja vastassuunalist jõudu, on kerge näha, et ka sel juhul tekivad lõikes paindepinged momendist $Pe_1 = P \cdot \frac{b}{2}$ ja tõmbepinged jõust P . Kuna $ACDE$ on ruut, siis valemi (46) järgi

$$J = \frac{b^4}{12}.$$

Kuid $z_{max} = \frac{b}{2}$, järelikult

$$W = J : z_{max} = \frac{b^3}{6}.$$

Paindepinged sirgete AE ja CD punktides:

$$\sigma_p = \pm \frac{M}{W} = \pm \frac{P \cdot \frac{b}{2}}{\frac{b^3}{6}} = \pm \frac{3P}{b^2}.$$

Tõmbepinge

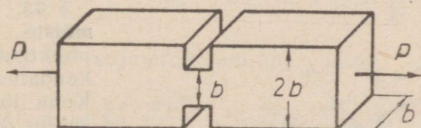
$$\sigma_t = + \frac{P}{F} = + \frac{P}{b^2}.$$

Suurim pinge sirge AE punktides:

$$\sigma_{max} = + \sigma_p + \sigma_t = \frac{3P}{b^2} + \frac{P}{b^2} = \frac{4P}{b^2}.$$

Läbiarutatud juhust selgub, et paindepinged on tõmbepingetest kolm korda suuremad, kuna üld- ehk liitpinge nõrgestatud lõikes on tõmbepingest neli korda suurem.

Siin saadakse jälle *ekstsentriline tõmme*. Kui sisselõiked oleksid tehtud sümmeetriliselt mõlemalt poolt, nagu on näidatud joonisel 161, kuid nii, et ristlõike pindala nõrgestatud lõikes jääks samaks kui esimesel juhul, s. o. b^2 , siis painet poleks olnud. Joonisel 161 kujutatud pruss oleks seega joonisel 160 kujutatud prussist neli korda tugevam.



Joon. 161.

Igasugused sisselõiked, praod, avaused jms., mis rikuvad koormuse tsentraalset üleandmist, tekitavad alati tunduvald lisapingeid paindest, misparast tuleb püüda vältida *ekstsentrilise koormuse tekkimise võimalust*.

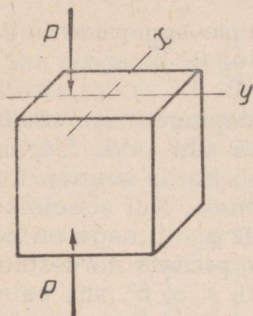
Arvutusvõrrand painde ja tõmbe koosmõjumise juhaks saadakse, kui suurim liitpinge võrrutada lubatavaga:

$$R_p = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}. \quad (71)$$

Siin võetakse mõlemad liidetavad ühe märgiga, olenemata M -i märgist.

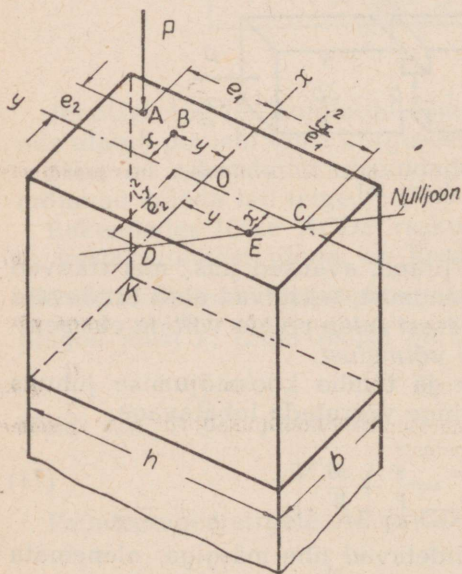
Latid, millede ristlõike mõõted on pikkusega võrreldes

väikesed, võivad ekstsentrilisel survel välja painduda (nõtkuda) (joon. 12), kuna lattide kohta, millede pikkus ristlõike mõõdetega võrreldes pole suur, võib arvata, et lati telg jääb ekstsentrilisel survel sirgeks (joon. 162). Arvutusvõrrand sel juhul võtab valemiga (71) sarnase kuju, ainult pinge märgid, vastavalt survele, tulevad negatiivsed.



Joon. 162.

$$R_p = -\frac{P}{F} - \frac{M}{W} \quad (72)$$



Joon. 163.

§ 83. Ristlõike tuuma mõiste. Olgu ristlõike punkti A (joon. 163) rakendatud survejõud P. Kuna jõud omab telje x suhtes õlga e_1 , siis punktis B, mis asub teljest x kaugusel y, saadakse valemi (53) järgi pinge paindest telje x suhtes

$$\frac{Pe_1 y}{J_x}$$

ja paindest telje y suhtes

$$\frac{Pe_2 x}{J_y}$$

Nende pingetega tuleb liita jõust P tekitatud

survepinge $\frac{P}{F}$. Üldpinge

oleks

$$\sigma = \frac{Pe_1 y}{J_x} + \frac{Pe_2 x}{J_y} + \frac{P}{F}$$

Selle võrrandi järgi võib leida pinge igas ristlõike punktis. Näiteks lõike raskuskeskmes, punktis O , mille jaoks $x = 0$ ja $y = 0$,

$$\sigma = \frac{P}{F}.$$

Leiame, millistes punktides $\sigma = 0$. Mõistagi, et niisuguste punktide jaoks

$$\frac{Pe_1 y}{J_x} + \frac{Pe_2 x}{J_y} + \frac{P}{F} = 0;$$

taandades P -ga, saame:

$$\frac{e_1 y}{J_x} + \frac{e_2 x}{J_y} + \frac{1}{F} = 0. \quad (a)$$

Inertsmomenti võib esitada ristlõikepinna F korrutisena teatava suuruse i , nn. inertsraadiuse ruuduga, s. o.

$$J_x = F i_x^2, \text{ kus } i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}},$$

$$J_y = F i_y^2, \text{ kus } i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}.$$

Joonisel 163 kujutatud risküliku jaoks

$$i_x = \sqrt{\frac{b h^3}{12 b h}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{h b^3}{12 b h}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}.$$

Asetades võrrandisse (a) inertsmomentide avaldised inertsraadiuste kaudu ja taandades F -iga, saame:

$$\frac{e_1 y}{i_x^2} + \frac{e_2 x}{i_y^2} + 1 = 0. \quad (b)$$

Kui punktide koordinaadid rahuldavad seda võrrandit, siis pinge võrdub nulliga.

Kanname joonisele (joon. 163) $OC = -\frac{i_x^2}{e_1}$ ja $OD = -\frac{i_y^2}{e_2}$ ning tõmbame sirge DC . Võttes temal punkti E koordinaatidega x ja y , võime kirjutada sarnastest kolmnurkadest:

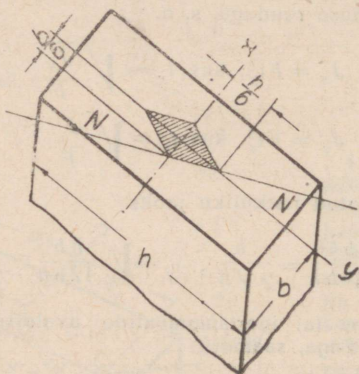
$$\frac{y}{OC} = \frac{DO - x}{DO}, \text{ millest } \frac{y}{OC} + \frac{x}{DO} = 1 \text{ ehk } \frac{y}{-\frac{i_x^2}{e_1}} + \frac{x}{-\frac{i_y^2}{e_2}} = 1,$$

kust

$$\frac{y e_1}{i_x^2} + \frac{x e_2}{i_y^2} + 1 = 0.$$

Seega sirge DC esitab nende punktide geomeetrilist kohta, milledes pinge on null. Seda sirget nimetatakse nulljooneks punkti A rakendatud jõu suhtes. Pole raske aru saada, et sealpool nulljoont, kus asub punkt A , on kõikides selle ristlõike osa punktides survepinged ja teisel pool — tõmbe pinged. Muutes punkti A asendit, s. o. muutes e_1 ja e_2 suurust, muudame sellega ühtlasi ka nulljoone asendit, vastupidi, igale nulljoone asendile vastab kindel punkt A , millesse on rakendatud jõud P .

Kui lõikes pole lubatav tõmbe pinge tekkimine, siis peab nulljoon olema ristlõikele puutujaks või asetsema väljaspool seda. Ristlõikele puutujaks olevale nulljoonele vastavat survejõu rakenduspunkti nimetatakse ristlõike tuuma punktiks. Muutes puutujate asendit ristlõike suhtes, leiame ristlõike tuuma piiravate punktide geomeetrilise koha. Niikaua, kuni survejõu rakenduspunkt asub tuuma sees, läheb nulljoon väljastpoolt ristlõiget, järelikult ristlõikes esinevad ainult survepinged. Kui jõu rakenduspunkt satub tuuma piirjoonele, on ristlõikes ikka veel survepinged ja nulljoon muutub ristlõike puutujaks.



Joon. 164.

Ristküliku jaoks on äärmisteks survejõudude asenditeks tema tippudele vastavad asendid, seejuures

$$e_1 = \frac{h}{2} \quad \text{ja} \quad e_2 = \frac{b}{2},$$

järelikult:

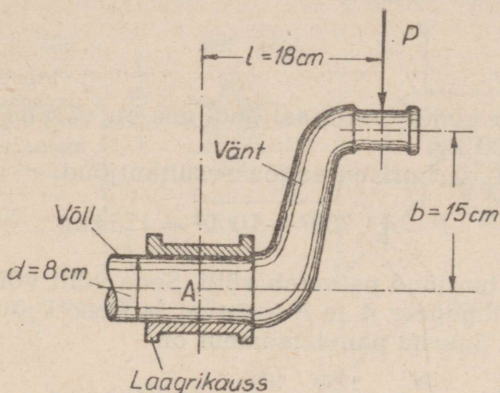
$$OC = -\frac{i_x^2}{e_1} = -\frac{h^2 \cdot 2}{12h} = -\frac{h}{6};$$

$$OD = -\frac{i_y^2}{e_2} = -\frac{b^2 \cdot 2}{12b} = -\frac{b}{6}.$$

Nende joonlõikude järgi võib ehitada nulljoone NN (joon. 164). Kandes joonisele teistele tippudele vastavad nulljooned, saame viirutatud rombi, mis ülalöeldu põhjal osutubki ristlõike tuumaks.

§ 84. Paine koos väändega. Joonisel 165 on kujutatud võlli vânt (vt. ka joonist 42). Vändale mõjub jõud $P = 1700$ kg, mis laagri (toe) A keskkoha suhtes mõjub õla l kaugusel. Järelikult mõjub võlli lõikesse A paindemoment

$$M_p = Pl = 1700 \cdot 18 = 30\,600 \text{ kgcm.}$$



Joon. 165.

Võlli telje suhtes on jõud rakendatud õla b otsa, mistõttu võlli väändatakse momendiga

$$M_v = Pb = 1700 \cdot 15 = 25\,500 \text{ kgcm.}$$

Sellistel juhtudel teostatakse terasvõlli arvutus viimasel ajal tavaliselt järgmise valemi järgi:

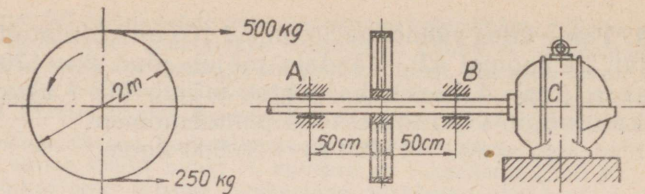
$$R_p = \frac{1}{W} \sqrt{M_p^2 + M_v^2}, \quad (73)$$

kus $W = 0,1d^3$. Leiame pinge, millega võll töötab:

$$\sigma = \frac{1}{0,1 \cdot 8^3} \sqrt{30\,600^2 + 25\,500^2} \approx 778 \text{ kg/cm}^2.$$

Vaatleme veel üht näidet painde arvutamisest koos väändega. Mootoriga C (joon. 166) pööratavale võllile on asetatud rihmaratas kaaluga 1 t ja läbimõõduga 2 m. Rihmarattal töötavate rihmaharude tõmbed on 500 kg ja 250 kg. Leida võlli läbimõõt, kui $R_p = 300 \text{ kg/cm}^2$.

Kandes rihma tõmbejõud üle võlli teljele, leiame, et võllile mõjub horisontaaljõud $H = 500 + 250 = 750$ kg. Peale



Joon. 166.

selle mõjub võllile vertikaaljõud, mis on võrdne rihmaratta kaaluga 1000 kg.

Vertikaal- ja horisontaaljõu resultantjõud

$$P = \sqrt{750^2 + 1000^2} = 1250 \text{ kg.}$$

See resultantjõud painutab võlli. Seda võlli võib vaadelda kui vabalt tugedele A ja B toetuvat ja keskel jõuga P koormatud tala. Suurim paindemoment on

$$M_p = \frac{Pl}{4} = \frac{1250 \cdot 100}{4} = 31\,250 \text{ kgcm.}$$

Rihma tõmbejõudude ülekandel teljele saadakse peale võllile suruvate jõudude veel väändemoment

$$M_v = 500 \cdot 100 - 250 \cdot 100 = 25\,000 \text{ kgcm.}$$

Asetades leitud suurused ja antud lubatava pinge valemisse (73), saame:

$$300 = \frac{1}{W} \sqrt{31\,250^2 + 25\,000^2},$$

kust

$$W = 0,1d^3 = 133 \text{ cm}^3; \quad d \approx 11 \text{ cm.}$$

§ 85. Ülesandeid liittugevusele (liitdeformatsioonile).

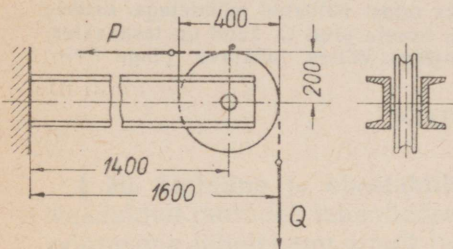
57. Seinasse müüritud kahe U-profiiliga konsooltala otsa (joon. 167) on kinnitatud plokk, millega tõstetakse koormat $Q = 4 \text{ t}$. Keti pingutus P on horisontaalne. Tõsteseadme põhimõõdeted on antud joonisel. Valida U-talade profiili number nii, et pinget σ ei ületaks 800 kg/cm^2 .

58. Prussi (joon. 168) tõmmatakse ekstsentriliselt rakendatud jõuga $P = 350 \text{ kg}$. Ekstsentrilisus on 1 mm .

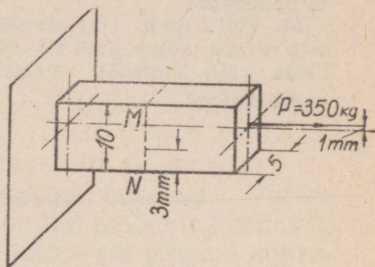
Töö ajal ilmnes lõikes MN pragu, mis oli levinud kogu laiuses 3 mm sügavuselt. Leida pinget lõikes MN peale prao ilmnemist ja võrrelda

seda pingega samas lõikes enne prao tekkimist. Kõik mõõted on antud millimeetrites.

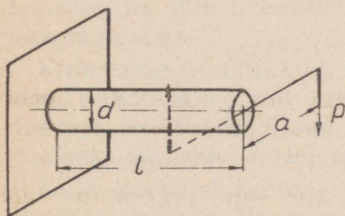
59. Uhe otsaga jäigalt kinnitatud ümmarguse teraslati (joon. 169) teisele otsale mõjub jõud $P = 50$ kg, mis on rakendatud kangile pikku-sega $a = 25$ cm. Lati pikkus $l = 50$ cm. Kuidas muutub tugevusvaru latis, kui talle rakendada lisakoormus $P = 50$ kg õlaga a , nagu näidatud



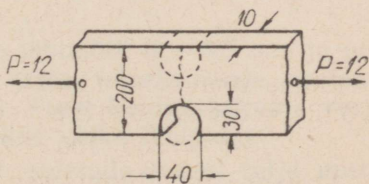
Joon. 167.



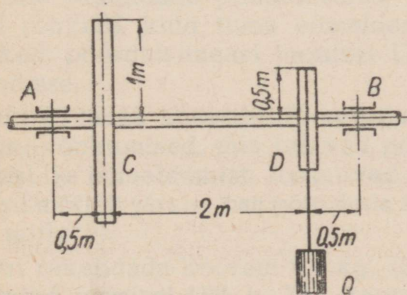
Joon. 168.



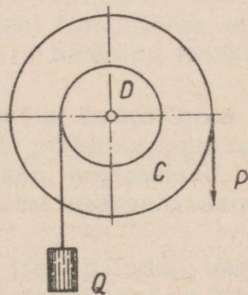
Joon. 169.



Joon. 170.



Joon. 171.



kriipsjoonega, kui on teada, et $R_d = 0,8 R_p$. Lati läbimõõt $d = 5$ cm. Põikjõust tekitatud pingeid mitte arvestada.

60. Tõmbele töötavas terasribas (joon. 170) ilmnes pragu. Et pragu ei leviks, puuriti ta välja, nagu on näidatud joonisel. Leida väljapuurimisest tekkinud pinge suurenemine ribas, kui $P = 12$ t.

Pinge vähendamiseks tehti ettepanek teisest küljest välja puurida samasugune auk, nagu näidatud kriipsjoonega. On see ettepanek otstarbekohane?

61. Võllil (joon. 171) asetseb kaks ratast näidatud mõõdetega. Esimesele rattale mõjub jõud $P = 300$ kg, teisele jõud Q . Jõud on tasakaalus. Leida võlli läbimõõt valemiga (73) järgi, võttes lubatava pinge $R_p = 500$ kg/cm².

XIII PEATUKK.

NÖTKE.

§ 86. **Stabiilne ja ebastabiilne elastne tasakaal.** Varem vaadeldud juhtudel, lahendades mingi lati mõõdete küsimust, pöörasime tähelepanu ainult temas tekkivate pingete suurusele. Kuid võib esineda juhtumeid, kus lubatavatest tunduvalt väiksemate pingete juures tekivad niisugused deformatsioonid, mis praktilisest vaatekohast on samaväärsed purunemisega.

Kinnitame tērastraadil, mille läbimõõt $d = 3,5$ mm ja pikus $l = 850$ mm, ühe otsa ja tema teisele otsale asetame koorma $P = 0,4$ kg (joon. 172). Traat kaldub kõrvale vertikaalsest asendist. Otsal saadakse väike läbipaine.

Seda kõrvalekaldumist võib seletada traadi telje mitte-täieliku sirgjoonelisusega, materjali mittehomogeensusega, koormuse rakendamisega mitte täpselt traadi telge mööda, vaid teatava, ükskõik kui väikese, ekstsentrilisusega. Kui traadile rakendada põikkoormus, siis läbipaine suureneb veel rohkem, kuid tema eemaldamisel traat, tehes mõned võnked, pöördub tagasi joonisel 172 a näidatud tasakaalu-asendisse.

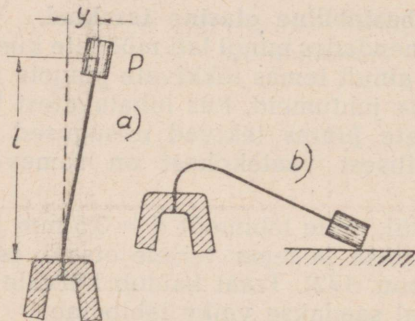
Suurendades koormat P , suureneb ka traadi otsa läbipaine; võnkumised, mis tekivad peale põikkoormuse rakendamist ja eemaldamist, toimuvad ikka aeglasemalt, traat „nagu mõtleb järele, kas pöörduda tagasi tasakaalu asendisse või mitte“.

Kui rakendada koorem $0,6$ kg, siis traat paindub, nagu on näidatud joonisel 172 b. Ta „kaotab stabiilsuse“ ja koorem vajab toetust, et ära hoida tema langemist.

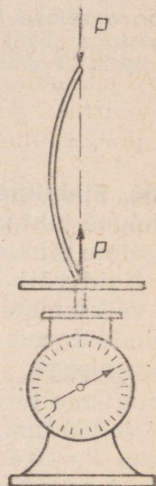
Huvitav on märkida, et selle koormuse juures on survepinge traadis ainult

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{P \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{0,6 \cdot 4}{\pi \cdot 3,5^2} \approx 0,065 \text{ kg/mm}^2 = 6,5 \text{ kg/cm}^2,$$

s. o. ligi 300 korda madalam terase voolavuspiirist.



Joon. 172.



Joon. 173.

Asetame painduva joonlaua ühe otsaga vedrukaalu kausile (joon. 173) ja surume teisest otsast, jälgides, et mõlemad otsad jääksid ühele vertikaalile. Järk-järgult survejõudu suurendades näeme, et algul joonlaua telg jääb *peaaegu sirgjooneliseks*, aga seejärel teataval koormusel, mis on *peaaegu konstantne*, läbipaine kasvab nii hoogsalt, et kui katset õigeaegselt ei katkestata, võib joonlaud murduda. Ka sel juhul on survepinge „stabiilsuse kaotamisel“ mitu korda väiksem katketugevusest.

Koormusi, millede juures kaob elastne stabiilsus, nimetatakse kriitilisteks koormusteks. Tähistame neid P_k .

Toodud näidetes vaatlesime lattide surumist, millede ristlõike mõõdet olid väikesed, võrreldes nende pikkusega;

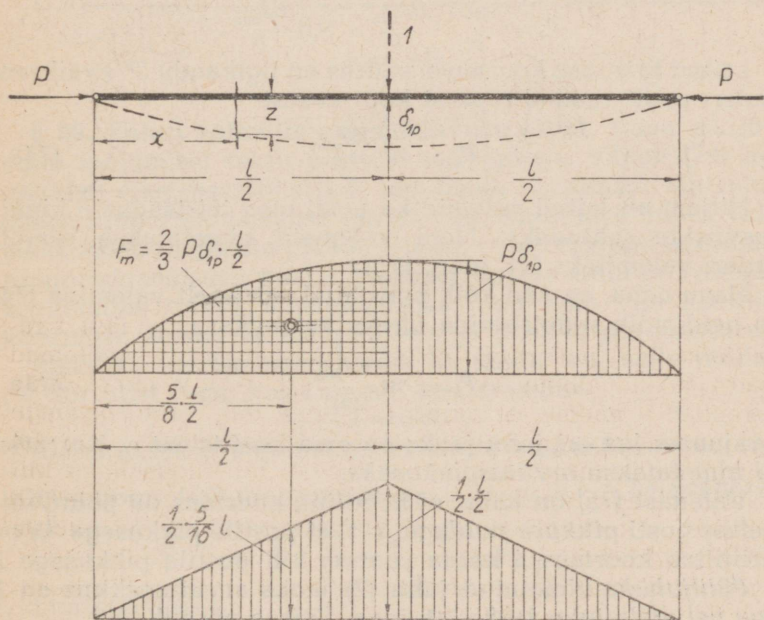
niisuguseid latte nimetatakse sageli postideks või sammasteks (ka varrasteks). Nad töötavad suruva koormuse mõjul nõtkele.

Ilmselt võib konstruktsiooni tõepoolest vastupidavaks lugeda ainult siis, kui mõjuvad jõud ei suuda tema osade stabiilsust kaotada.

Seepärast postide ja sammaste arvutamisel võetakse lubatav koormus võrdseks $P : n$, kus n on stabiilsuse varutegur.

§ 87. Euleri valemid. Kuulus matemaatik, Peterburi Teaduste Akadeemia liige Euler leidis esimesena kriitilise koormuse väärtuse juhu jaoks, kui konstantse ristlõikega lati otsad, jäädes ühele sirgele, võivad vabalt pöörduda (joon. 174).

Et otsad võiksid pöörduda, jäädes ühele sirgele, võib nad konstrueerida sfääriliste pindadega.



Joon. 174.

Leiame antud juhu jaoks kriitilise koormuse, s. o. niisuguse koormuse, mille juures *algab* surutud lati *paindumine* ehk *nõtkumine*.

Oletame (joon. 174), et lati telg paindus parabooli järgi. Paindemomentide epüür on muidugi samuti piiratud parabooliga, kuna moment meelevaldses lõikes $M_x = +Pz$ ja ordinaadid muutuvad parabooli seaduse järgi. Leiame läbipainde keskel, kasutades §-s 76 toodud meetodit, milleks rakendame lati keskele ühikjõu ja ehitame tema epüüri. Kui latil on ristlõike eri telgede suhtes inertsmomentide erinevuse tõttu erinevad jäikused, nagu näiteks joonlaual, siis paindumine toimub telje suhtes, mille jaoks EJ on väiksem.

Korrutades epüüre, saame:

$$\delta_{1p} = + \frac{1}{EJ_{\min}} \cdot 2 \cdot \frac{P\delta_{1p}}{3} \cdot \frac{5}{32} l,$$

kust taandades δ_{1p} saame:

$$P_k = \frac{48}{5} \cdot \frac{EJ_{\min}}{l^2} = 9,6 \frac{EJ_{\min}}{l^2}.$$

Leitud kriitilise koormuse suurus on ligikaudu 3% väiksem Euleri poolt saadud täpsest koormusest

$$P_k = \pi^2 \frac{EJ_{\min}}{l^2}. \quad (74)$$

Hiljem on leitud valemid ka posti otsa teistsuguste kinnitustviiside juhtudeks. Neid valemuid nimetatakse samuti Euleri valemiteks (vt. joon. 175).

Nagu näha, on nad kõik koostatud sarnaselt valemiga (74) ja neid võib redutseerida üheks valemiks:

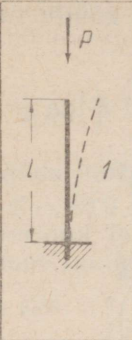
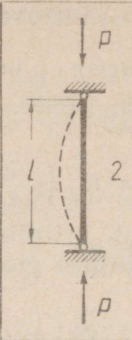
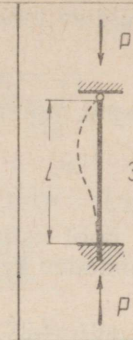
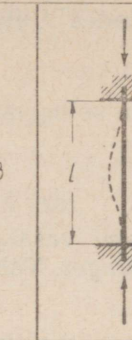
$$P_k = \pi^2 \frac{EJ_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (75)$$

kusjuures iga eri juhu jaoks on oma koefitsient μ . Korrutist μl nimetatakse *arvutus pikkuseks*.

Valemist (75) on näha, et kriitiline koormus on pöördvõrdeline posti *pikkuse ruuduga*, s. t. et postile pikkusega $1/2$ on kriitiline koormus 4 korda suurem kui postile pikkusega l .

Põhijuhuks nimetatud juhu (2) jaoks arvutus pikkus on l , aga neljanda juhu jaoks (vt. joon. 175) ta võrdub $1/2 l$.

Võib järelikult öelda, et posti otste jäikkinnitus nõtkel on samaväärne tema pikkuse vähendamisega kaks korda.

				
Kriitiline koormus	$P_k = \frac{\pi}{4} \frac{EJ_{min}}{L^2}$	$P_k = \pi \frac{EJ_{min}}{L^2}$	$P_k \approx 2\pi^2 \frac{EJ_{min}}{L^2}$	$P_k = 4\pi^2 \frac{EJ_{min}}{L^2}$
Pikkuse koefitsient	$\mu = 2$	$\mu = 1$	$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$	$\mu = \frac{1}{2}$

Joon. 175.

§ 88. Euleri valemite rakendatavuse piirid. Kuna pikijõudude mõjumisel tekib postides survepinge, valem (74) aga sisaldab elastsusmoodulit E , mis omab füüsikalist tähendust ainult proportsionaalsuse piirini, siis, kasutades Euleri valemid, tuleb tingimata pidada silmas, et *survepinge ei ületaks proportsionaalsuse piiri*. Vastasel korral muutub valemite kasutamine täiesti meelevaldseks ning võib viia kriitilise koormuse ebaõigele määramisele ja postide purunemistele.

Ristlõike inertsmomenti võib kujutada kui selle pindala F -i korrutist i^2 -ga, kus i on nn. inertsraadius:

$$J = Fi^2.$$

Inertsraadiuse määramine ei tekita raskusi. Leiame ristküliku (joon. 100) inertsraadiuse: $J_x = \frac{bh^3}{12}$ ja $F = bh$, seepärast

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}.$$

Inertsraadius i_z :

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

Asetades J avaldise inertsraadiuse kaudu valemisse (75), saame

$$P_k = \pi^2 E i^2 F : (\mu l)^2.$$

Jagame selle valemi mõlemad pooled F -iga ja kirjutame ta ümber:

$$\frac{P_k}{F} = \pi^2 E : \left(\mu \frac{l}{i} \right)^2.$$

Valemi vasak pool esitab kriitilisel koormusel tekkivat *survepinget*. Tähistades kriitilise pinge σ_k , saame:

$$\sigma_k = \pi^2 E : \left(\mu \frac{l}{i} \right)^2. \quad (76)$$

Suhet $l : i$ nimetatakse posti või samba *saleduseks*.

Kasutades Euleri valemeid, ei tohi lubada pingeid $\sigma_k > \sigma_{pr}$.

Terasele võib ümardatult võtta $\sigma_{pr} = 2000 \text{ kg/cm}^2$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Suuruse $\pi^2 \approx 9,87$ võib võtta võrdseks 10.

Asetades need andmed σ_k avaldise, leiame:

$$2000 = 10 \cdot 2 \cdot 10^6 : \left(\mu \cdot \frac{l}{i} \right)^2,$$

kust

$$\mu \cdot \frac{l}{i} \approx 100.$$

Kui $\mu \cdot \frac{l}{i}$ väärtus on alla 100, siis saadakse σ_k suurem kui σ_{pr} ja Euleri valemeid ei tohi kasutada; valemite kasutamine on lubatud, kui $\mu \cdot \frac{l}{i} > 100$, kuna siis σ_k on väiksem kui σ_{pr} .

Näide 35. Leida lähimõõt teraspostile pikkusega $l = 140 \text{ cm}$ ($E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$), kui *survejõud* $P = 24\,000 \text{ kg}$ ja stabiilsuse varutegur $n = 2$. Posti otsad saavad vabalt pöörduda.

Võttes arvesse stabiilsuse varutegurit, peab arvutuse viima läbi jõuga

$$P_k = P \cdot n = 24\,000 \cdot 2 = 48\,000 \text{ kg}.$$

Euleri valem tuleb võtta joonisel 175 kujutatud teise juhu jaoks. Ringikujulise ristlõike inertsmoment valemi (47) järgi $J = 0,05d^4$. Tehes asendamised, saame:

$$P_k = 48\,000 = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,05 d^4}{140^2},$$

kust

$$d = \sqrt[4]{\frac{48\,000 \cdot 140^2}{\pi^2 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,05}} = 5,4 \text{ cm.}$$

Selle läbimõõdu jaoks

$$F = 23,0 \text{ cm}^2, J = 0,05d^4 = 42,5 \text{ cm}^4;$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{42,5}{23,0}} = 1,35 \text{ cm};$$

kuna $\mu = 1$, siis

$$l : i = 140 : 1,35 = 104.$$

Euleri valemi kasutamine on lubatud, kuna terase jaoks, mille $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, piirväärtus $\mu \cdot \frac{l}{i} = 95$.

§ 89. Postide arvutamine nõtkete survepinge järgi. Praktikas esinevad postid ja sambad, millel saadakse suhe $\mu \cdot \frac{l}{i}$ väiksem sellest, mille juures on kasutatavad Euleri valemid. Niisuguste postide jaoks kriitilise pinge väljaselgitamiseks on teostatud rohkearvuliselt katseid. Nende tulemusi võib esitada valemitega või, mis mugavam, tabelite kujul, mis annavad σ_k olenevalt posti saledusest $l : i$ [tule-tame meelde valemit (76)].

Kuna $\sigma_k = P_k : F$, siis, omades nimetatud tabelleid, on kerge leida kriitiline koormus valemist

$$P_k = \sigma_k F. \quad (77)$$

Kui on vaja kindlaks määrata lubatav koormus, siis tuleb muidugi σ_k asemel võtta $\sigma_k : n$, kus n on stabiilsuse varu-tegur. Seejuures võib jagatist $\sigma_k : n$ vaadelda kui lubatavat pinget survel, mis oleneb saledusest $l : i$ ja moodustab teata-va osa φ lubatavast pingest lihtsurvel R_s .

Sel viisil

$$P_{\text{lub}} = \sigma_{\text{lub}} \cdot F = \varphi R_s F.$$

Järelikult võib arvutust nõtkete redutseerida arvutuseks lihtsurvele, kuid vähendatud lubatava survepingega.

Vähendusteguriks nimetatud tegur φ määratakse kindlaks normidega katsete alusel.

Üle saleduse piirväärtuste võiks toime tulla ka ilma φ -tä, kasutades Euleri valemit, kuid arvutuste ühtlustamiseks on piirväärtusest suurematele saledustele vastavad φ väärtused samuti kantud tabelitesse. Tabelid arvutatakse vabade ots-
tega postidele (joon. 175, 2), s. o. $\mu = 1$ jaoks, kuid ilmselt võib neid kasutada ka teistel juhtudel, kui l -i asemel võtta suurus μl . Näiteks jäigalt kinnitatud otstega posti arvutamisel tuleb pikkus lugeda võrdseks poolega antud pikkusest, vaba otsa puhul (joon. 175, 1) aga — kahekordse posti pikkusega.

Ehitusliku projekteerimise normid, mis on kohustuslikud NSV Liidus, esitavad kasutamiseks allpooltoodud tabelisse mahutatud lubatavate survepingete vähendustegurid.

Lubatava survepinge vähendustegurite φ tabel nõrke arvutusteks.

Saledus <i>li</i>	Puit	Malm	Ст. Ос, 2, 3, 4	Ст. 5
0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,97	0,99	0,98
20	0,97	0,91	0,96	0,95
30	0,93	0,81	0,94	0,92
40	0,87	0,69	0,92	0,89
50	0,80	0,57	0,89	0,86
60	0,71	0,44	0,86	0,82
70	0,61	0,34	0,81	0,76
80	0,49	0,26	0,75	0,70
90	0,38	0,20	0,69	0,62
100	0,31	0,16	0,60	0,51
110	0,26	—	0,52	0,43
120	0,22	—	0,45	0,37
130	0,18	—	0,40	0,33
140	0,16	—	0,36	0,29
150	0,14	—	0,32	0,26
160	—	—	0,29	0,24
170	—	—	0,26	0,21
180	—	—	0,23	0,19
190	—	—	0,21	0,17
200	—	—	0,19	0,16

Vahepealsed $l : i$ väärtused, mis pole mahutatud tabelisse, arvutatakse, lugedes, et φ ja $l : i$ muutuvad vastavates vahemikes võrdeliselt.

Põhipinge survel valitakse vastavalt normide juhenditele, mis arvestavad erinevaid tööolukordi nõtkel.

Arvutused stabiilsusele (nõtkele) teostatakse tabelite kasutamisel *metallidel alati brutoristlõike järgi*.

Kui lõike nõrgestus puitpostis on väiksem kui 25% kogu lõikest, siis niisuguste postide arvutus viiakse läbi brutoristlõike järgi, vastupidisel juhul viiakse arvutus läbi 1,33 F_{neto} järgi, kus F_{neto} on ristlõike pindala peale nõrgestuse mahaarvamist. Sümmeetrilisi nõrgestusi otstes arvesse ei võeta.

Puidu jaoks, joonistel 175, 3 ja 4 esitatud juhtudel, soovitud normid võtta μ võrdseks vastavalt 0,8 ja 0,65.

§ 90. Näide arvutusest nõtkele survepinge järgi.

Post peab olema valmistatud I-kujulise ristlõikega teras-talast. Posti otsad on kinnitatud liigendi kaudu. Pikkus $l = 1$ m, koormus $P = 10$ t. Määrata profiili number.

Võtame mingisuguse lubatava survepinge, muidugi väiksema kui põhipinge terasele C_T . 3, millest on valmistatud tala — $R_s = 900$ kg/cm², see on väiksem kui 1400 kg/cm², mis on tavaliselt lubatud *kapitaalsetes* ehitistes.

Vajalik ristlõike pindala

$$F = \frac{P}{R_s} = \frac{10\,000}{900} = 11,1 \text{ cm}^2.$$

OCT 10016-39 järgi leiame sobiva profiili nr. 10, mille jaoks $F = 14,3$ cm² ja $J_{min} = J_y = 33,0$ cm⁴.

Leiame inertsraadiuse:

$$i = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{33,0}{14,3}} = 1,52 \text{ cm}.$$

Järelikult

$$l : i = 100 : 1,52 = 66.$$

Tabelist leiame:

kui $l : i = 60$, siis $\varphi = 0,86$;

kui $l : i = 70$, siis $\varphi = 0,81$.

$l : i$ suurenemisele 10 ühiku võrra vastab φ vähenemine 0,05 võrra. 6 saleduse ühiku peale on φ vähenemine

$$\frac{0,05 \cdot 6}{10} = 0,03,$$

seega

$$l : i = 66 \text{ jaoks } \varphi = 0,86 - 0,03 = 0,83.$$

Võttes põhipingeks normidest $R_s = 1400 \text{ kg/cm}^2$, saame

$$P_{lub} = \varphi R_s F = 0,83 \cdot 1400 \cdot 14,2 \approx 16\,500 \text{ kg} = 16,5 \text{ t}.$$

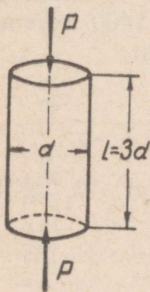
Lubatav koormus on veidi suurem antust, kuid kuna profiil nr. 10 on valtsprofiilidest väikseim, siis jääme selle juurde.

Kui arvutamisel selgub, et P_{lub} erineb tunduvalt antud koormusest ja on olemas teiste numbrite valiku võimalus, siis tuleb teostada proov, valides uue ristlõike suuruse. Arvutust korratakse niikaua, kuni jõutakse võimalikult lähedale antud koormusele.

Märgime muuseas, et vaadeldud näites oleks ristlõike määramine Euleri valemiga võimatu, kuna $l : i < 100$.

§ 91. Ulesandeid nõtkele.

62. Malmsilindrit (joon. 176) läbimõõduga d ja kõrgusega $l = 3d$ surutakse tema teljele rakendatud jõududega P . Leida φ tabeli järgi, mitu % alaneb lubatav survepinge nõtkete tõttu. Millise l puhul see alanemine on 10%?



Joon. 176.

63. Leida šarniirselt kinnitatud otstega posti läbimõõt, kui ta pikkus $l = 1,6 \text{ m}$ ja koormus $P = 18 \text{ t}$. Posti materjaliks on CT. 5, mille lubatav survepinge $R_s = 1750 \text{ kg/cm}^2$. Lahendamisel kasutada φ tabelit.

64. Sammas pikkusega $l = 2 \text{ m}$, mille otsad on kinnitatud šarniiridele, peab olema valmistatud I-talast. Leida profiili number, kui $P = 73 \text{ t}$ ja põhisurvepinge (CT. 3) on 1600 kg/cm^2 .

65. Leida kõikide OCT 10016-39 leiduvate I-talade põhinumbritele lubatud koormus P_{lub} , kui samba pikkus $l = 1 \text{ m}$ ja $R = 1000 \text{ kg/cm}^2$ ja samba otsad on kinnitatud šarniirselt. Saadud andmetest ehitada graafik nii, et ordinaatide teljele on kantud

P_{lub}^l ja abstsissiteljele $l : i$.

Millise kuju võtab saadav joon? Võttes $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ja $\tau_{pr} = 2200 \text{ kg/cm}^2$, arvutada $l : i$ piirväärtus. Profiilide jaoks, mille $l : i$ on piirväärtusest kõrgem, leida P_{lub} Euleri valemi järgi, võttes $n = 2$. Kanda andmed samale joonisele. Kuidas asetseb uus kõver eelmise suhtes?

VASTUSED.

Vastuste koostamisel teostati arvutused arvutuslülkatil, s. o. arvud ümardati. Peale selle mõningatel juhtudel ümardati ka vastused, nagu seda praktikas tehakse. Andmed nurk-, \bar{T} - ja U-teraste kohta on võetud normidest OCT 10014-39, 10015-39, 10016-39.

4. 2,7 cm. 5. 5000 kg. 6. $\Delta l \approx 0,85$ mm; $\sigma \approx 11,46$ kg/mm². 7. $R \approx 2000$; 1600; 1333; 1000 kg/cm²; $R/\sigma_{pr} \approx 10/9$; 8/9; 3/4; 5/9; $k \approx 2,2$. 8. 4.

9. $x \approx 267$ m. 10. $\sigma_{AB} \approx 13,3$ kg/cm²; $\sigma_{CD} \approx 2,2$ kg/cm². 11. $10000 \cdot \frac{\pi}{4} k \sigma$.

13. 3 mm. 14. 300 kg/cm². 15. 4 mm. 16. $\sigma_1 \approx 78$ kg/cm²; $\sigma_2 \approx 156$ kg/cm²; $n \approx 12$. 17. Pinge seinas kahekordistub, pinge poltides neljakordistub. 18. 685 kg/cm². 19. Ulemises katlas 727 kg/cm²; ühendustorus 400 kg/cm². 20. Keskmine traat on tõmmatud jõuga $P:2$ ja äärmised — jõuga $P:4$. 21. $P_b \approx 21,4$ t; $P_t \approx 8,6$ t. 22. Sisejõud ruudu servades ja diagonaalides on ühesuurused ja võrduvad $P:(1 + \sqrt{2})$. 23. Pinge

betoonis on $0,055 P:d^2$; teras on surutud jõuga $\frac{3}{23} P$. 24. 1) $\tau \approx 757$

kg/cm²; 2) neetidel $\sigma_{ps} \approx 1980$ kg/cm²; nurkterastel $\sigma_{ps} \approx 1185$ kg/cm²;

3) lõige I—I: nurkterases $\sigma \approx 990$ kg/cm², lehes $\sigma \approx 495$ kg/cm²; lõige II—II: nurkterases $\sigma \approx 240$ kg/cm², lehes $\sigma \approx 990$ kg/cm². 25. 9760 kg.

26. 54 mm. 27. $\tau \approx 83$ kg/cm²; $\sigma_{ps} \approx 143$ kg/cm². 28. $\sigma_t \approx 20,4$ kg/cm²;

$\sigma_{ps} = 50$ kg/cm²; $\tau_n = 15$ kg/cm². 29. 12,1 t. 30. 7,2 kg/cm². 31. 120

p/min. 32. $d \approx 3,1$ cm; $\varphi \approx 4^\circ 10'$. 33. 146 kg/cm². 34. Pinge peenemas

võllis moodustab ligikaudu 89,5% pingest jämedamas võllis ja kaal ligi-

kaudu 67,8% jämedama võlli kaalust. 35. Kvaliteetterasest võlli läbi-

mõõt on ligikaudu 68% väiksem. Selle kaal on ligikaudu 10% süsinik-

terasest võlli kaalust. 36. 55 HJ. 37. 435,3 cm⁴. 38. Telg x asetseb kujundi

alumisest servast 16,4 cm kaugusel; $J_x \approx 18800$ cm⁴; $J_y \approx 23800$ cm⁴.

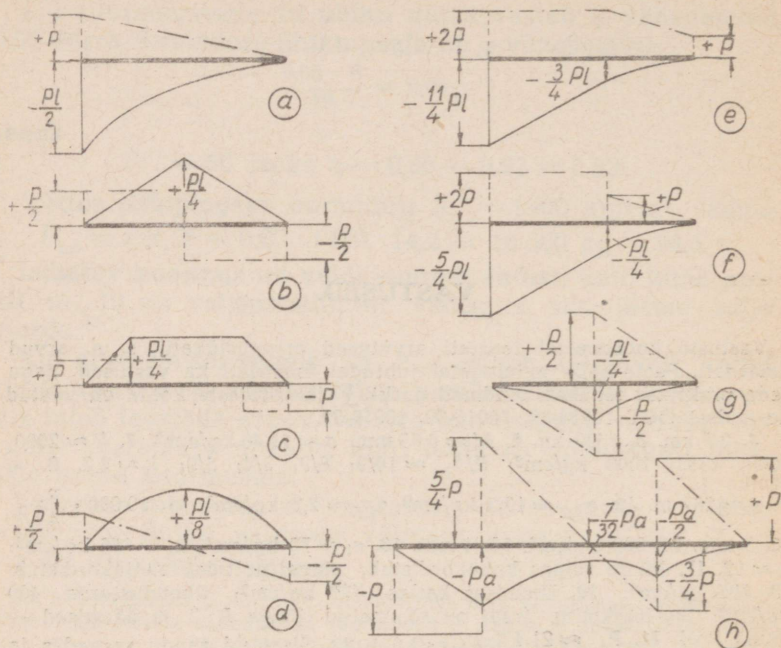
39. $J_x \approx 9240$ cm⁴; $J_z \approx 129700$ cm⁴. 40. Raskuskese asetseb 34,4 cm

kaugusel kujundi alumisest servast; $J_x \approx 122100$ cm⁴. 41. $J_x \approx 7560$ cm⁴.

42. Epüürid on antud joonisel 177. Pideva joonega on kujutatud M epüü-

rid ja kriipspunktjoonega Q epüürid. 43. $i = \frac{23}{24} \cdot \frac{Pa^3}{EJ}$. 44. Suurim läbi-

paine on ligikaudu 8,6 mm; läbipaine jõu kohal on ligikaudu 6 mm.



Joon. 177.

45. Nr. 27 talla laieusega 122 mm (pinge on ligikaudu 930 kg/cm²). 46. Ligikaudu 17 cm. 47. Kui võtta tala nr. 20 talla laieusega 100 mm, siis suhteline läbipaine on väiksem kuj 1/600 ja $\sigma \approx 1320$ kg/cm². 48. 31 cm. 49. Ligikaudu $1,44Pa^3 : EJ$. 50. $l = P\pi^3 : 8EJ$. 51. $l = 5P\pi^3 : 384EJ$. 52. $P\pi^3 = 384EJ$. 53. Suurim läbipaine $f_{max} = 3,5Pa^3 : EJ$; keskel $f = 7Pa^3 : 6EJ$. 54. 26,2 cm. 55. Läbipaine vasaku jõu kohal $11Pa^3 : 9EJ$, parema jõu kohal $23Pa^3 : 18EJ$; tuleb võtta tala nr. 30 talla laieusega 126 mm (pinge on alla 1200 kg/cm²). 56. $i \approx 0,26 Pa^3 : EJ$. 57. Nr. 27c. 58. Pärast praio ilmnemist 14,3 kg/mm² ja enne praio ilmnemist 11,2 kg/mm². 59. Tugevusvaru pärast lisakoormuse rakendamist suureneb 1,8 korda. 60. $\sigma_0 \approx 600$ kg/cm², $\sigma_1 \approx 1068$ kg/cm², pärast sümmeetrilist väljapuurimist $\sigma_2 \approx 860$ kg/cm². 61. 93 mm. 62. 4^o/₀; $l = 5,25d$ juures. 63. 5,7 cm. 64. Nr. 30c talla laieusega 126 mm.

SISUKORD.

Eessõna	3
-------------------	---

I peatükk

Sisesejuhatus	5
-------------------------	---

1. Elastse keha mõiste ja tugevusõpetuse põhiülesanded (5).
2. Sisejõudude leidmise meetod (10). 3. Pinge (14).

II peatükk

Tõmbe ja surve põhivalemid	17
--------------------------------------	----

4. Põhivalemid (17). 5. Elastsusmoodul (19). 6. Proportsionaalsuse piir (20). 7. Ristlõike mõõdete muutumine tõmbel ja survel (20). 8. Omakaalu mõju pingele tõmmatud lattides (21). 9. Ülesandeid (23). 10. Muutuva ristlõikega kehade tõmme ja surve (27).

III peatükk

Tõmbe- ja surveproovid	30
----------------------------------	----

11. Tõmbe- ja survemasinad (30). 12. Tõmbediagramm (32). 13. Näide tõmbeproovi tulemuste läbitöötamisest (36). 14. Survel täheldatavad nähted (37). 15. Proovikeha elastsele deformatsioonile ja katkitõmbamisele kulutatud töö (38). 16. Aja mõju tõmbe tulemustele (40). 17. Eelkoormamise mõju (41). 18. Temperatuuri mõju tõmbe tulemustele (43). 19. Keemilise koostise mõju (44). 20. Tehnoloogiliste operatsioonide mõju (44). 21. Tähelepanekuid tõmbe- ja surveproovide tulemustest (45).

IV peatükk

Pindsurve. Kõvadus	48
------------------------------	----

22. Pindsurve (muljumine) (48). 23. Kõvadus (49).

V peatükk

Dünaamiliste koormuste mõju	51
---------------------------------------	----

24. Järsku rakendatud koormuse mõju (51). 25. Vastupidavus löökoormusele (52). 26. Väsimus (54).

VI peatükk

Tõmbe ja surve arvutused

58

27. Vedeliku või gaasi siserõhule töötavate õhukeseseinaliste anumate arvutus (58). 28. Ulesandeid anumate arvutamiseks (61). 29. Temperatuuripinged (63). 30. Staatiliselt määramatute ülesannete mõiste (65). 31. Ulesandeid staatiliselt määramatutele süsteemidele (68).

VII peatükk

Varutegur ja lubatav pinge

70

32. Varutegur ja lubatav pinge (70). 33. Varuteguri valik (71).

VIII peatükk

Nihe ja löige

74

34. Põhimõisted (74). 35. Puhtnihe (76). 36. Löige (78). 37. Neetliidete arvutamisest (80). 38. Keevisliidete arvutamisest (83). 39. Tappide arvutamisest (85). 40. Ulesandeid löikele (87).

IX peatükk

Vääne

89

41. Uldisi mõisteid (89). 42. Pinged väändel (90). 43. Polaarinertsmoment ja polaarvastupidavusmoment (92). 44. Väände arvutusvalem (94). 45. Väändemomendi avaldamine võlliga edasiantava võimsuse ja võlli pöörete arvu kaudu (95). 46. Valem võlli läbimõõdu määramiseks lubatava väändepinge järgi (97). 47. Võlli väändenurga suurus (98). 48. Valem võlli läbimõõdu määramiseks lubatava väändenurga järgi (99). 49. Väändemomentide epüür (100). 50. Ulesandeid väändele (102).

X peatükk

Tasapinnaliste kujundite raskuskeskmed, staatilised momendid ja inertsmomendid

104

51. Kujundi pinna raskuskeske (104). 52. Staatiline moment (105). 53. Parabooliga piiratud pindala määramine (106). 54. Parabooliga piiratud kujundi raskuskeskme asendi määramine (108). 55. Parabooli pinna raskuskeskme asendi määramine (110). 56. Kujundi pinna inertsmoment (110). 57. Ristküliku ja ruudu inertsmomendid (110). 58. Ringi inertsmoment (112). 59. Liitkujundite inertsmomendi määramine (113). 60. Tsentraalteljega paralleelse telje suhtes võetud inertsmomendi teoreem (115). 61. Kolmnurga inertsmoment tema raskuskeset läbiva ja alusega paralleelse telje suhtes (116). 62. Näiteid liitkujundite inertsmomentide määramisest (117). 63. Ulesandeid inertsmomentide määramiseks (119).

XI peatükk

Paine 121

A. Pinged ja välisjõudude teooria

64. Deformatsioonid ja pinged paindel (121). 65. Pingete avaldamine puhtpaindel painet tekitava jõupaari momendi kaudu (124). 66. Arvutusnäide puhtpaindele (127). 67. Üldisem painde juht (128). 68. Paindemoment ja põikjõud (130). 69. Tala ja selle tingkujutamine. Toed (131). 70. Paindemomentide ja põikjõudude epüürid (133). 71. Žuravski teoreem (141). 72. Tangentsiaalpinged paindel (144). 73. Pinged painutatava tala teljega kaldu asuvates pindades. Peapinged (147).

B. Deformatsioonid ja ristlõike valik.

74. Talade deformatsioon (151). 75. Talade deformatsioonide määramine (152). 76. Epüüride korrutamise reegel (154). 77. Talade deformatsioonide määramise näiteid. Ümberpaigutuste võrrandi mõiste (159). 78. Talade ristlõigete valik (171). 79. Ülesandeid paindele (174).

XII peatükk

Liittugevus 177

80. Määratlus (177). 81. Vildakpaine (177). 82. Paine koos tõmbega (178). 83. Ristlõike tuuma mõiste (182). 84. Paine koos väändega (185). 85. Ülesandeid liittugevusele (liitdeformatsioonile) (186).

XIII peatükk

Nõtke 189

86. Stabiilne ja ebastabiilne elastne tasakaal (189). 87. Euleri valemid (191). 88. Euleri valemite rakendatavuse piirid (193). 89. Postide arvutamine nõtkele survepinge järgi (195). 90. Näide arvutusest nõtkele survepinge järgi (197). 91. Ülesandeid nõtkele (198).

Vastused 199

Vastutav toimetaja H. Kuldma.

Tehniline toimetaja E. Ridala.

Ladumisele antud 22. III 1950. Trükkimisele antud 2. IX 1950. Trükiarv 1500. Paber 56:79, $1/16$. Trükipoognaid 12,75. Formaadile 60:92 kohaldatud trükipoognaid 10,2. Arvutuspoognaid 12,18. Autoripoognaid 10,13. MB-07439. Tellimise nr. 713. Trükikoda „Punane Täht“, Tallinn, Pikk tn. 54/58.

На эстонском языке.

Rbl. 6.50

TRÜKIVIGU

Lk.	Rida	On trükitud	Peab olema
35	7. alt	σ_b	σ_b
52	14. alt	$W_{pe} \cdot Fl$	$W_{pe} \cdot Fl$
109	5. ülalt	$\Delta x_1 \cdot z^i$	$\Delta x_1 \cdot z_1$
119	joon. 108	$\angle 75 \times 10$	$\angle 75 \times 75 \times 10$
139	17. alt	$M_{y_2=2}^{II}$	$M_{yz=2}^{II}$
150	9. alt	$\sigma_{\beta} > \sigma_2$	$\sigma_{\beta} > \sigma'_2$
165	4. alt	$P \left(\frac{l}{2} \right)^3$	$P \left(\frac{l}{2} \right)^3$
176	5. alt	II-kujuline	I-kujuline
183	5. ülalt	J_x	J_x
198	6. alt	P_{ub}^l	P_{lub}

A

18 635

86 54

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00448786 6

Rbl. 6.50