

TARTU ÜLIKOOL

LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND

MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Richard Friedrichs

**Kahe reaalse skalaarväljaga mudeli  
valevaakumi lagunemine**

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: PhD Kristjan Kannike

PhD Julia Polikarpus

PhD Luca Marzola

TARTU 2024

**KAHE REAALSE SKALAARVÄLJAGA MUDELI VALEVAAKUMI  
LAGUNEMINE**

Bakalaureusetöö

Richard Friedrichs

**Lühikokkuvõte**

Antud töös määratakse analüütiliselt valevaakumi tekkimise tingimused mõnes kahe reaalse skalaarvälja mudelis. Selleks tehakse kindlaks, millal on nende mudelite potentsiaalil vähemalt kaks erineva väärtusega lokaalset miinimumi. Numbriliste arvutustega leitakse seaduspärasused potentsiaali teist ja neljandat järku liikmete skaleerimise mõjust tunnellerimise tõenäosusele.

**CERCS teaduserialad:** P190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika. P210 Elementaarosakeste füüsika, kvantväljade teooria.

**Märksõnad:** Valevaakum, skalaarvälja potentsiaal, lokaalsed miinimumid, kvanttunnellerumine, mõju, faasisiire.

**FALSE VACUUM DECAY OF THE TWO REAL SCALAR FIELDS  
MODEL**

Bachelor thesis

Richard Friedrichs

**Abstract**

This thesis presents the analytical proof for the conditions of the formation of false vacuum in a few models with two real scalar fields. To this end, rules for the existence of at least two local minima of different values in the potential are identified. Results regarding the effect of scaling the second and fourth

order parameters of the potential on the probability of tunneling are found with numerical calculations.

**CERCS research specialisations:** P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics. P210 Elementary particle physics, quantum field theory.

**Key Words:** False vacuum, scalar field potential, local minima, quantum tunneling, action, phase transition.

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>5</b>
<b>1 Valevaakum</b>	<b>6</b>
1.1 Väljad ja potentsiaal . . . . .	6
1.2 Valevaakumi definitsioon . . . . .	7
1.3 Valevaakumi lagunemine . . . . .	8
<b>2 Tunnelleerumine</b>	<b>10</b>
2.1 Lagranžiaan ja mõju . . . . .	10
2.2 WKB lähendus . . . . .	12
2.3 Pörkelahend . . . . .	13
2.4 Lahendi olemasolust . . . . .	15
2.5 Üldistus $n$ väljale . . . . .	17
<b>3 Kahe välja mudel</b>	<b>19</b>
3.1 Parameetrite piirangud . . . . .	20
3.2 Statsionaarsed punktid . . . . .	21
3.3 Lokaalsed miinimumid . . . . .	24
3.4 Miinimumide analüüs . . . . .	30
3.5 Mõju sõltuvus parameetritest . . . . .	32
<b>4 Täiendatud mudel</b>	<b>38</b>
4.1 Lihtsustus . . . . .	38
4.2 Statsionaarsed punktid . . . . .	38
4.3 Hessiaan . . . . .	40

4.4 Mõju sõltuvus parameetritest . . . . .	44
<b>Kokkuvõte</b>	<b>46</b>
<b>Kasutatud allikad</b>	<b>47</b>
<b>A Hessiaani <math>H(\Phi_{++})</math> arvutamine</b>	<b>49</b>
<b>B Teise peamiinori teisendus</b>	<b>50</b>
<b>C Ruutvõrrandi lahendamine</b>	<b>51</b>
<b>D Juhtum <math>\mu_1^2 \mu_2^2 &lt; 0</math></b>	<b>52</b>
<b>E Vabanemine avaldisest <math>2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - \lambda_{12}</math></b>	<b>55</b>
<b>F Algebraised lihtsustused Wolfram Mathematica abiga</b>	<b>57</b>
<b>G Arvutused</b>	<b>59</b>

## Sissejuhatus

Aastal 1977 avaldas Sidney Coleman artikli (Coleman, 1977), kus hirmutas füüsikuid maailma hävinemist lubava nähtusega. Kui kosmose vaakumis paikneksid väljad potentsiaalse energia lokaalses miinimumis (valevaakumis), siis oleks kvantmehaanika reeglite tõttu võimalik neil sealt spontaanselt välja tunnelleeruda. Selle tulemusena vabaneks palju energiat, tekiks paisuv energiafront, mis liiguks meie poole valguskiirusel, ning toimuks vältimatu katastroof.

Tänaseks välja arendatud standardmudelis on meie vaakumi eluiga väga pikk (Buttazzo *et al.*, 2013). Siiski võib uute osakeste avastamisega olukord muutuda, seega väärib see kvantväljateooria haru tähelepanu.

Antud töö eesmärgiks on tutvustada lugejale valevaakumit ning uurida, kuidas lagranžiaani potentsiaalse liikme kordajad mõjutavad valevaakumi olemasolu ja lagunemist.

Esimesed kaks peatükki on referatiivsed ning nende eesmärk on anda lugejale baasteadmised valevaakumist. Esimeses peatükis toome sisse väljateooria baasteadmised ja defineerime valevaakumi. Teises peatükis toetume Tongi konspektile (Tong, 2015) ja Colemani artiklile (Coleman, 1977), et tutvustada kvantmehaanilist tunnellerumist ning seda kirjeldava pörkelahendi olemasolu.

Viimased kaks peatükki sisaldavad autori panust kahe skalaarväljaga süsteemi valevaakumi lagunemise uurimisse. Kolmandas peatükis uuritakse analüütiliselt konkreetsel kujul potentsiaaliga väljade süsteemi valevaakumi eksisteerimise tingimusi ning numbriliste arvutustega leitakse seoseid potentsiaalis esinevate parameetrite ja pörkelahendi mõju vahel. Neljandas peatükis uuritakse täiendatud potentsiaali sümmeetrilisemat alamjuhtu ning leitakse selles valevaakumi eksisteerimise tingimused.

# 1 Valevaakum

Väli ja vaakum on küll üldlevinud mõisted, siiski on konkreetsuse mõttes vajalik välja tuua, mida täpselt peame silmas kummalgi puhul.

## 1.1 Väljad ja potentsiaal

**Definitsioon 1.** Aegruum kirjeldab meid ümbritsevat maailma. Punkti aegruumis nimetatakse sündmuseks ja igal sündmusel on 4 koordinaati, kujul  $(t, x, y, z)$ , kus  $t$  on aeg ja  $x, y, z$  on ruumikoordinaadid. Iga koordinaat on reaalarv.

**Definitsioon 2.** Väljaks nimetatakse funktsiooni, mis seab igale punktile aegruumis vastavusse mingi väärtuse.

Antud töös keskendume reaalsele skalaarväljadele, kus välja väärtus igas aegruumi punktis on reaalarv.

**Definitsioon 3.** Uuritavate väljade otsekorrutist (ehk vektorit, mille koordinaatideks on väljade väärtused) nimetatakse uuritavaks süsteemiks.

Süsteemis saab korraga eksisteerida mitu välja, nad võivad omavahel interakteeruda, kuid võivad ka olla sõltumatud.

**Definitsioon 4.** Süsteemi potentsiaalset energiat kirjeldab potentsiaal, mis on lõpmata palju kordi pidevalt diferentseeruv funktsioon väljaruumide otsekorrutisruumist reaalarvudesse.

Seega potentsiaal võtab sisendiks iga välja väärtuse, mis on uuritavas süsteemis, ja tagastab reaalarvu. Kuna ühes aegruumi punktis on kõik väljad defineeritud, siis saame arvutada kõigi nende väärtused selles punktis ja kasutada neid sisendina potentsiaalile, nii saame defineerida potentsiaali aegruumi punktis.

Kuna potentsiaali väärtused väljade otsekorrutisruumis on reaalarvud, siis saame neid omavahel võrrelda (potentsiaali väärtus ühes väljade ruumi punktis saab olla suurem, väiksem või võrdne väärtusega teises punktis). See võrdlus lubab defineerida potentsiaalile miinimumid, maksimumid, kasvamise jne. Näiteks võib kahe reaalse skalaarväljaga süsteemil olla range lokaalne miinimum punktis  $\Phi_0 \in \mathbb{R}^2$ , mille rangem matemaatiline definitsioon oleks vastavalt

iga positiivse  $\varepsilon$  korral leidub positiivne  $\delta$  nii, et kui  $\Phi$  on punkt ruumist  $\mathbb{R}^2$  ja  $\Phi$  ning  $\Phi_0$  vaheline kaugus on väiksem suurusel  $\delta$ , kuid suurem kui 0, siis on potentsiaal punktis  $\Phi_0$  rangelt väiksem potentsiaal punktis  $\Phi$ .

Kasutades matemaatilisi sümboleid, saame selle panna kirja ka kujul

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \Phi \in \mathbb{R}^2, 0 < |\Phi - \Phi_0| < \delta \implies V(\Phi_0) < V(\Phi).$$

## 1.2 Valevaakumi definitsioon

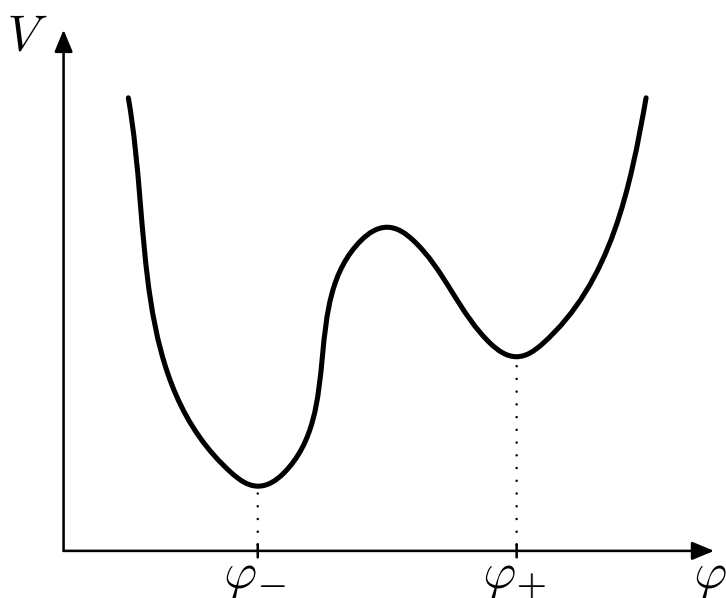
Olgu meil süsteemis  $n$  välja, millest saame moodustada väljade vektori  $\Phi$ , ning süsteemi potentsiaal  $V(\Phi)$ . Klassikaliselt nimetame vaakumiks olekut, kus (füüsilisi) osakesi pole. Kvantväljateoorias vastab vaakumile süsteem, mis asub madalaimal energiatasemel.

**Definitsioon 5.** Kui potentsiaalil  $V$  on punktis  $\Phi$  lokaalne miinimum, kuid mitte globaalne miinimum, siis nimetatakse süsteemi, mis on olekus  $\Phi$ , valevaakumiks. Globaalset miinimumi saab nimetada analoogselt pärisvaakumiks.

Näiteks, kui meil on kaks lokaalset miinimumi, punktides  $\Phi_1$  ja  $\Phi_2$ , ning  $V(\Phi_1) > V(\Phi_2)$ , siis ütleme, et süsteem olekus  $\Phi_1$  on valevaakum.

Kuna potentsiaali lokaalsest miinimumist igas suunas liikumine kasvatab potentsiaali (ehk ka potentsiaalset energiat), siis peab selleks tulema energiat kusagilt

juurde. Kui süsteem on isoleeritud, st ei saa välist energiat, ja on olekus, mis on potentsiaali lokaalseks miinimumiks, siis ta püsib selles seisundis. Lähtudes klassikalisest väljateooriast, on kirjeldatav seisund (ja seekaudu ka valevaakum) stabiilne. Näiteks juhul, kus uuritavaks süsteemiks on üks reaalne skalaarväli, nagu on kujutatud joonisel 1, võib süsteem paikneda valevaakumis (paremal). Selleks, et ta jõuaks valevaakumist pärisvaakumisse, peab ta saama välist energiat juurde, et ületada (vasakule jääv) potentsiaalibarjäär. Isoleerituse korral jääbki süsteem valevaakumisse ja süsteemi arengut ei toimu (ta on stabiilne).



**Joonis 1:** Olekus  $\varphi_+$  on valevaakum ja olekus  $\varphi_-$  on pärisvaakum.

### 1.3 Valevaakumi lagunemine

Olukord muutub, kui võtta arvesse kvantmehaanika reeglid. Välja osakesed, mis on kinni jäänud lokaalsesse miinimumi, on võimelised läbima potentsiaalibarjääri, tunnellerudes selle teisele poole ja arenedes seal edasi klassikalise väljateooria põhiselt. Niisugust lähenemist nimetatakse semiklassikaliseks (Coleman, 1977) ja

valevaakum on sellisel juhul metastabiilne (ehk lagunemisprotsessi tõenäosusliku iseloomu tõttu näivald stabiilne) seisund.

## 2 Tunnelleerumine

Kvantmehaanikas kirjeldab osakese asukohta tõenäosuslikku jaotust lainefunktsioon. Selle lainefunktsiooni amplituudi ruut mingis punktis on võrdeline tema avastamise tõenäosuse tihedusega selles punktis. Kuna see lainefunktsioon suudab osaliselt läbida potentsiaalibarjääri (ehk selle amplituud teisel pool barjääri on positiivne), siis on võimalik leida ka osakest teisel pool uuritavat barjääri. Samas, kuna osakene ei saanud liikuda füüsiliselt läbi barjääri, nimetame seda tunnelleerumiseks.

### 2.1 Lagranžiaan ja mõju

Järgime siin peatükis Tongi konsepti käsitlust (Tong, 2015), kuid põhjalikuma ülevaate saamiseks soovitame lugeda Schwartzi õpikut (Schwartz, 2013).

**Definitsioon 6.** Klassikaliselt nimetatakse lagranžiaaniks  $L$  uuritava keha kineetilise energia  $T$  ja potentsiaalse energia  $V$  vahet

$$L = T - V.$$

**Definitsioon 7.** Kui keha liigub ajavahemikus  $[t_0, t]$  ruumis mööda trajektoori  $s = (x(t), y(t), z(t))$ , siis nimetame selle mõjuks  $S$  lagranžiaani integraali üle selle ajavahemiku

$$S = \int_{t_0}^t L(s) dt.$$

Mõju sõltub valitud trajektoorist, sest lagranžiaani arvutamisel on tarvis ruumikoordinaate ja nende tuletisi ning  $s$  annab need aja funktsioonina.

Klassikalises mehaanikas määrab lagranžiaan süsteemi arengu vastavalt vähima mõju printsiibile.

**Teoreem 1** (Vähima mõju printsiip). *Süsteem areneb ajas mööda trajektoori, mille mõju on vähim.*

Tegelikult kehtib üldisem tulemus, nimelt peab trajektoor olema vaid mõjufunktsionaali „statsionaarseks punktiks“. Me saame selle kirja panna variatsiooniarvutuse keeles vastavalt kujul

$$\delta S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{t_0}^t L(s + \varepsilon h) dt - \int_{t_0}^t L(s) dt}{\varepsilon} = 0,$$

kus  $s$  on mõjufunktsionaali  $S$  statsionaarne punkt, kui iga  $h$  korral, mis algab ja lõpeb samas ruumpunktis, kus  $s$ , kehtib antud piirväärtus.

Eelnev kirjeldus on piisav kirjeldamiseks makromailma objektide kinemaatikat. Välja korral kirjeldab süsteemi arengut samuti lagranžiaan, kuid seda on mõistlik kirja panna teistmoodi.

**Definitsioon 8.** Välja  $\phi$  korral nimetatakse lagranžiaani tiheduseks  $\mathcal{L}$  funktsiooni väljast ja selle tuletistest aegruumi koordinaatide suhtes, mille integreerimisel üle ruumi koordinaatide saadakse lagranžiaan

$$L = \int \mathcal{L} \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Kasutades koordinaatide tähistust ( $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ), osatuletise tähistust  $\partial_\theta = \frac{\partial}{\partial x_\theta}$  ning kirjaviisi, kus n-ö vabaks jäänud indeksi  $\theta$  puhul mõeldakse kõiki  $\theta$  väärtusi eraldi, saame selle kirjutada ümber kujule

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\theta \phi) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Olgu meil ajahetkel  $t_0$  väli olekus  $\phi_0$  ning ajahetkel  $t_1$  seisus  $\phi_1$ , siis vähima mõju printsiibi kohaselt areneb väli väärtusest  $\phi_0$  väärtuseni  $\phi_1$  mööda trajektoori  $\phi(t)$  ( $\phi(t_0) = \phi_0$  ja  $\phi(t_1) = \phi_1$ ), mille korral mõju

$$S = \int_{t_0}^t \int \mathcal{L}(\phi(t), \partial_\theta \phi(t)) dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

variatsioon on 0.

Selle variatsioonarvutuse võrrandi lahendiks on Euleri–Lagrange'i võrrand kujul

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} + \partial_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 \phi)} + \partial_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_2 \phi)} + \partial_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \phi)},$$

mille saame indeksi summeerimise tähistuses kirja panna kujul

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\theta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\theta \phi)}.$$

Reaalse skalaarvälja  $\phi$  osakese käitumist aegruumis kirjeldab lagranžiaani tihedus

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) - m^2 \phi^2. \quad (1)$$

Kasutades indeksi summeerimise tähistust (indeksid, mis leiduvad nii üleval kui ka all, summeeritakse üle kõigi lubatud väärtuste) ning Minkowski ruumi meetrikat  $\eta_{\omega\varpi}$ , saame selle kirjutada ümber kujule

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta_{\omega\varpi} \partial^\omega \phi \partial^\varpi \phi - m^2 \phi^2. \quad (2)$$

Kirjanduses on see üldiselt leitav kujul (2). Kasutatud Minkowski meetrika omab tähendust selle poolest, et erirelatiivsusteoorias vastavad meie aegruum ja selle sümmeetriad Minkowski ruumile.

## 2.2 WKB lähendus

WKB lähendus (Wentzeli–Kramersi–Brillouin'i lähendus) on meetod ligikaudsete lahendite leidmiseks muutuvate kordajatega lineaarsetele diferentsiaalvõrranditele. Selle põhjal avaldub osakese tunnellerumistõenäosus kujul

$$\Gamma \sim A e^{-2S/\hbar},$$

kus  $S$  on tunnellerumise eukleidiline mõju. On näha, et suurem mõju tähendab väiksemat tunnellerumise tõenäosust. WKB lähendusest annab ülevaate näiteks Zettili õpik (Zettili, 2022).

## 2.3 Põrkelahend

See ja järgmine peatükk kirjeldavad Colemani seletust põrkelahendini jõudmisest (Coleman, 1977).

Võtame alustuseks ühikulise massiga osakese, mille ruumikoordinaadid moodustavad vektori  $\vec{q}$ : selle lagranžiaan on kujul

$$L = \frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \frac{d\vec{q}}{dt} - V(\vec{q}).$$

Selle osakese tunnellerumistõenäosus on ligikaudu

$$\Gamma \sim Ae^{-B/\hbar},$$

kus

$$B = 2 \int_{\vec{q}_0}^{\vec{\sigma}} \sqrt{2V} ds. \quad (3)$$

Valemis (3) on  $ds = \sqrt{d\vec{q} \cdot d\vec{q}}$ , punkt  $\vec{q}_0$  potentsiaali  $V$  lokaalne, mitte globaalne, miinimum ja  $\vec{\sigma}$  punkt teisel pool potentsiaalibarjääri, kuhu osake tunnelleruks. Potentsiaali defineerimisel saab vabalt valida sellel nullpunktiks  $\vec{q}_0$ , sest osakese käitumist kirjeldab vaid potentsiaalide vahe punktide vahel, seega igas punktis sama arvu liitmine annab sama käitumisega süsteemi.

Minimaalse mõju printsiibi põhjal otsime trajektoori  $\vec{q}_0$  ja  $\vec{\sigma}$  vahel nii, et kehtiks

$$\delta \int_{\vec{q}_0}^{\vec{\sigma}} \sqrt{2V} ds = 0. \quad (4)$$

Paneme tähele, et sarnasele süsteemile on juba lahend olemas. Nimelt süsteemi

$$\delta \int \sqrt{2(E - V)} ds = 0 \quad (5)$$

lahendiks on Euleri–Lagrange’i võrrandite lahendid ehk lahendid võrranditele

$$\frac{d^2 \vec{q}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{q}} \quad (6)$$

ja

$$\frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \frac{d\vec{q}}{dt} + V = E. \quad (7)$$

Näeme, et esimene olukord (4) on teise (5) erijuht, kus  $E = 0$  ja  $V$  on asendatud vastandpotentsiaaliga  $-V$ . Rakendades Wicki pööret ehk asendades aja imaginaarse ajaga  $\tau = it$ , saame pärast  $E = 0$  ning  $-V$  substituutsiooni võrranditele (6) ja (7) järgmised kujud:

$$\frac{d^2 \vec{q}}{d\tau^2} = \frac{\partial V}{\partial \vec{q}} \quad (8)$$

ja

$$\frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} - V = 0. \quad (9)$$

Võrrand (8) on samuti Euleri–Lagrange’i võrrand imaginaarajalisele versioonile Hamiltoni printsipiist

$$\delta \int L_E d\tau = 0,$$

kus

$$L_E = \frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} + V$$

on eukleidiline hamiltoniaan (lagranžiaanile sarnane funktsioon, kus potentsiaalne ja kineetiline energia liidetakse lahutamise asemel), ning mis kujutab endast süsteemi koguenergiat.

Eeldame, et osake on olnud lokaalse miinimumi  $\vec{q}_0$  juures  $n$ -ö algusest peale ehk kehtib rajatingimus

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \vec{q} = \vec{q}_0. \quad (10)$$

Valemi (9) põhjal, piirprotsessis  $\tau \rightarrow -\infty$  saab  $\vec{q}$  läheneda väärtusele  $\vec{q}_0$  vaid asümptootiliselt. Aja nihke suhtes on ruum invariantne, seega saame valida aja nullpunktiks selle hetke, kus  $\vec{q}$  jõuab väärtuseni  $\vec{\sigma}$ . Jällegi saame valemi (9) põhjal, et

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d\vec{q}}{d\tau} = \vec{0}. \quad (11)$$

Ühendades saadud tähised ja võrrandid, saame

$$\int_{\vec{q}_0}^{\vec{\sigma}} \sqrt{2V} ds = \int_{-\infty}^0 L_E d\tau$$

ja protsessi (11) sümmeetria ütleb, et osakese käitumine positiivse aja  $\tau$  suhtes on täpselt vastupidine negatiivsele. Seega osake pörkub ajahetkel  $\tau = 0$  tagasi punktist  $\sigma$  ja jõuab punkti  $\vec{q}_0$  taas lõpmatuses. Selle lahendi käitumise põhjal andis Coleman sellele nimeks pörkelahend. Tuleb välja, et kordaja  $B$  on kogu pörke eukleidiline mõju

$$B = 2 \int_{\vec{q}_0}^{\vec{\sigma}} \sqrt{2V} ds = 2 \int_{-\infty}^0 L_E d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} L_E d\tau.$$

## 2.4 Lahendi olemasolust

Tõlgime eelkirjeldatu nüüd väljateooria keelde. Eukleidiline (ehk imaginaarse aja-ga) liikumisvõrrand omab kuju

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \right) \phi = \frac{dV}{d\phi} = V'(\phi), \quad (12)$$

kus ' tähistab tuletist välja järgi.

Eelmainitud rajatingimused (10) ja (11) teisenduvad kujule

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi(\tau, x, y, z) = \phi_+, \quad (13)$$

kus  $\phi_+$  tähistab valevaakumit, ja

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(0, x, y, z) = 0. \quad (14)$$

Kordaja  $B$  avaldub kujul

$$B = \int \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + V(\phi) \right] d\tau dx dy dz. \quad (15)$$

Selleks, et  $B$  tuleks lõplik, peab kehtima

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow \infty} \phi(\tau, x, y, z) = \phi_+. \quad (16)$$

Aegruumi Lorentzi teisendused, mis jätavad välja muutumatuks, osutuvad eukleidiilise ruumi neljadimensionaalseteks pööreteks. See tähendab, et  $\phi$  peab olema suurus, mis sõltub vaid neljadimensionaalse pöörde diameetrist ehk suuruselt

$$\rho = \sqrt{\tau^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Sellise eelduse alusel liikumisvõrrand (12), rajatingimused (13) ning (16) ja integraal (15) vastavalt kujule

$$\frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (17)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi(\rho) = \phi_+, \quad (18)$$

$$B = 2\pi^2 \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V(\phi) \right) \right] \rho^3 d\rho. \quad (19)$$

Lisaks kehtib (14) tõttu

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{d\phi}{d\rho} = 0. \quad (20)$$

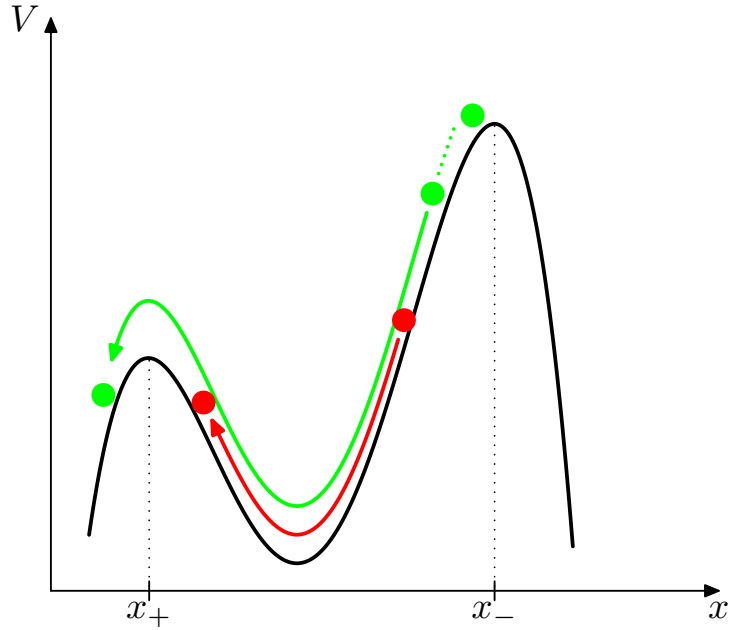
Lahendi olemasolu näitamiseks saab konstrueerida intuiitivsema analoogi. Kui kujutada ette parameetrit  $\rho$  kui aega ja  $\phi$  kui osakese asukohta, siis kirjeldab liikumisvõrrand (17) osakese liikumist potentsiaalis  $-V$ , millele mõjub ka ebatavaline ajast sõltuv pidurdav jõud. Kui osakene lasta lahti  $x_+$  ja  $x_-$  vahel (joonisel 2), piisavalt lähedal punktile  $x_+$ , siis sellel pole piisavalt energiat, et ületada künkas (jõuda punkti  $x_+$ ). Kui aga lasta osake lahti piisavalt lähedal punktile  $x_-$ , siis see veedab aeglase kiirendava jõu tõttu seal kaua aega, mille jooksul pidurdav jõud langeb, kuni lõpuks on piisavalt tühine, et osake saab mäest (kõrgemast potentsiaali osast) alla veeredes rohkem energiat, kui on vaja barjääri ületamiseks, ja veereb üle. Pidevuse põhjal eksisteerib nende vahel mingi punkt, kus osake saab täpselt piisavalt energiat, et see jõuab asümptootiliselt läheneda punktile  $x_+$ .

Kuna on võimalik tunnellerumine pärisvaakumi lähedusest valevaakumisse (see on justkui pörke teine poolt ehk tagasipõrkumine), siis saab sümmeetria põhjal toimuda ka pörke esimene pool, ehk tunnellerumine valevaakumist pärisvaakumi lähedusse.

## 2.5 Üldistus $n$ väljale

Kui süsteem koosneb  $n$  skalaarväljast  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , siis toome sisse tähistuse  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ . Ühe skalaarvälja korral on pörkelahend  $O(4)$  sümmeetriiline (eukleidiliste neljadimensionaalsete pöörete suhtes). Võttes lisaeelduse, et ka  $n$  skalaarvälja korral on pörkelahend  $O(4)$  sümmeetriiline, saame panna liikumisvõrrandi (17) kirja (kasutades laenatud tähistust (Espinosa ja Konstandin, 2019)) kujul

$$\ddot{\Phi} + \frac{3}{\rho} \dot{\Phi} = \nabla V,$$



**Joonis 2:** Osake, mis alustab veeremist liiga madalal, ei ületa barjääri (punane), aga osake, mis veedab tipu lähedal kaua aega, kuni takistav jõud vaegub, veereb barjäärist üle (roheline). Pidevuse põhjal võiks leiduda punkt, kust veeremist alustades jõuab osake täpselt künka otsa.

kus täpiga tuletis tähistab tuletist  $\rho$  suhtes ja  $\nabla V$  on vektor, mille  $i$ -ndaks koordinaadiks on  $\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}$ . Põrkelahendi rajatingimused (20) ning (18) teisenduvad kujule

$$\dot{\Phi}(0) = \vec{0}$$

ja

$$\Phi(\infty) = \Phi_+.$$

Mõju (19) teisendub kujule

$$B = 2\pi^2 \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2} |\dot{\Phi}|^2 + V(\Phi) \right] \rho^3 d\rho.$$

### 3 Kahe välja mudel

Alustuseks uurime kahe skalaarväljaga süsteemi, mille potentsiaalis on vaid vabitud liikmed. Tegemist on leluteooriaga, mida on võimalik hiljem täiendamisel edasi arendada. Olgu  $\varphi_1$  ja  $\varphi_2$  reaalsed skalaarväljad ning avaldame süsteemi  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$  potentsiaali kujul

$$V(\Phi) = \mu_1^2 \varphi_1^2 + \mu_2^2 \varphi_2^2 + \lambda_1 \varphi_1^4 + \lambda_2 \varphi_2^4 + \lambda_{12} \varphi_1^2 \varphi_2^2, \quad (21)$$

kus  $\mu_i^2, \lambda_i, \lambda_{12} \in \mathbb{R}$  ja  $i \in \{1, 2\}$ .

Valisime potentsiaali sellised liikmed, sest siis on see sümmeetriline  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  teisenduste  $\varphi_1 \rightarrow -\varphi_1$  ja  $\varphi_2 \rightarrow -\varphi_2$  all ja sarnaneb kahe Higgsi välja mudeliga.

### 3.1 Parameetrite piirangud

Defineerime punkti  $\Phi_0 = (0, 0)$  ja märkame, et  $V(\Phi_0) = 0$ . Kuna protsess  $|\Phi| \rightarrow \infty$  on füüsikalistel kaalutlustel süsteemi arengu vältel võimatu, peab piirväärtus  $\lim_{|\Phi| \rightarrow \infty} V(\Phi)$  olema positiivne. Uurime, kuidas see piirab potentsiaali avaldises leiduvaid parameetreid.

Piirprotsessis  $\Phi(\varphi) = (\varphi, 0)$ ,  $\varphi \rightarrow \infty$  mõjutab potentsiaali väärtust kõige rohkem liige  $\lambda_1 \varphi_1^4$ . Sellest järeldub, et kui  $V(\Phi)$  on positiivne, peab kehtima ka

$$\lambda_1 > 0. \quad (22)$$

Sarnaselt, uurides piirprotsessi  $\Phi(\varphi) = (0, \varphi)$ ,  $\varphi \rightarrow \infty$ , märkame, et kehtib ka

$$\lambda_2 > 0. \quad (23)$$

Liites ja lahutades potentsiaali avaldisest (21) avaldise  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \varphi_1^2 \varphi_2^2$ , siis kasutades vahe ruudu valemit ja lõpuks koondades sarnased liikmed, saame viia võrrandi teisele kujule:

$$V(\Phi) = \mu_1^2 \varphi_1^2 + \mu_2^2 \varphi_2^2 + (\sqrt{\lambda_1} \varphi_1^2 - \sqrt{\lambda_2} \varphi_2^2)^2 + (2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + \lambda_{12}) \varphi_1^2 \varphi_2^2. \quad (24)$$

Piirprotsessis  $\Phi(\varphi) = (\frac{\varphi}{\sqrt[4]{\lambda_1}}, \frac{\varphi}{\sqrt[4]{\lambda_2}})$ ,  $\varphi \rightarrow \infty$  mõjutab potentsiaali väärtust kõige rohkem liige  $(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + \lambda_{12}) \varphi_1^2 \varphi_2^2$ . Järelikult peab ka siin kordaja olema positiivne ja saame tingimuse

$$2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + \lambda_{12} > 0. \quad (25)$$

Järgmiseks näitame, et piirangutest (22), (23) ja (25) piisab, et kehtiks  $\lim_{|\Phi| \rightarrow \infty} V(\Phi) > 0$ . Suure  $|\Phi|$  korral, kui  $\varphi_1^2 \gg \varphi_2^2$ , siis on potentsiaal (21) positiivne  $\lambda_1$  positiivsuse tõttu. Kui  $\varphi_1^2 \ll \varphi_2^2$ , siis on potentsiaal (21) positiivne  $\lambda_2$  positiivsuse tõttu. Lõpuks, kui kumbki eelmistest võrratustest ei kehti, siis peab  $\varphi_1^2 \varphi_2^2 \gg \varphi_1^2 + \varphi_2^2$  ja seega on potentsiaal (24) positiivne  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} + \lambda_{12}$  positiivsuse tõttu.

## 3.2 Statsionaarsed punktid

Selleks, et leida  $V$  lokaalsed miinimumid, otsime esialgu selle statsionaarseid punkte. Statsionaarses punktis on funktsiooni osatuletised,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}(\Phi) &= (2\mu_1^2 + 2\lambda_{12}\varphi_2^2)\varphi_1 + 4\lambda_1\varphi_1^3 = 2\varphi_1(\mu_1^2 + \lambda_{12}\varphi_2^2 + 2\lambda_1\varphi_1^2), \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(\Phi) &= (2\mu_2^2 + 2\lambda_{12}\varphi_1^2)\varphi_2 + 4\lambda_2\varphi_2^3 = 2\varphi_2(\mu_2^2 + \lambda_{12}\varphi_1^2 + 2\lambda_2\varphi_2^2),\end{aligned}$$

võrdsed nulliga. Tekib neli võimalust, milleks on

1.  $\varphi_1 = 0$  ja  $\varphi_2 = 0$ ,
2.  $\mu_1^2 + \lambda_{12}\varphi_2^2 + 2\lambda_1\varphi_1^2 = 0$  ja  $\varphi_2 = 0$ ,
3.  $\varphi_1 = 0$  ja  $\mu_2^2 + \lambda_{12}\varphi_1^2 + 2\lambda_2\varphi_2^2 = 0$ ,
4.  $\mu_1^2 + \lambda_{12}\varphi_2^2 + 2\lambda_1\varphi_1^2 = 0$  ja  $\mu_2^2 + \lambda_{12}\varphi_1^2 + 2\lambda_2\varphi_2^2 = 0$ .

Saame teisel ja kolmandal juhul ühte avaldist teise abil lihtsustada, viies need kujule

1.  $\varphi_1 = 0$  ja  $\varphi_2 = 0$ ,
2.  $\mu_1^2 + 2\lambda_1\varphi_1^2 = 0$  ja  $\varphi_2 = 0$ ,
3.  $\varphi_1 = 0$  ja  $\mu_2^2 + 2\lambda_2\varphi_2^2 = 0$ ,
4.  $\mu_1^2 + \lambda_{12}\varphi_2^2 + 2\lambda_1\varphi_1^2 = 0$  ja  $\mu_2^2 + \lambda_{12}\varphi_1^2 + 2\lambda_2\varphi_2^2 = 0$ .

Paneme tähele, et teisel juhul on võrrandis  $\mu_1^2 + 2\lambda_1\varphi_1^2 = 0$  liidetav  $2\lambda_1\varphi_1^2$  alati positiivne, seega peab  $\mu_1^2$  olema negatiivne. Analoogselt on kolmandal juhul vajalik, et  $\mu_2^2$  oleks negatiivne. Neljandal juhul on vaja, et  $\mu_1^2 + \lambda_{12}\varphi_2^2$  ja  $\mu_2^2 + \lambda_{12}\varphi_1^2$  oleksid negatiivsed. Selleks on tarvis, et kas  $\mu_i^2$  või  $\lambda_{12}$  või mõlemad oleksid negatiivsed (siin ja edasi, kui mainitakse  $\mu_i^2$ , siis mõeldakse, et väide kehtib korruga parameetrite  $\mu_1^2$  ja  $\mu_2^2$  kohta).

Esimesele olukorrale vastab statsionaarne punkt  $\Phi_0$ . Teisele olukorrale vastavad statsionaarsed punktid on  $\Phi_{\pm 0} = \left( \pm \sqrt{\frac{-\mu_1^2}{2\lambda_1}}, 0 \right)$ . Kolmandale olukorrale vastavad statsionaarsed punktid on  $\Phi_{0\pm} = \left( 0, \pm \sqrt{\frac{-\mu_2^2}{2\lambda_2}} \right)$ . Neljandale olukorrale vastavad statsionaarsed punktid saame kätte, lahendades võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \mu_1^2 + \lambda_{12}\varphi_2^2 + 2\lambda_1\varphi_1^2 = 0, \\ \mu_2^2 + \lambda_{12}\varphi_1^2 + 2\lambda_2\varphi_2^2 = 0, \end{cases}$$

ning need on  $\Phi_{\pm\pm} = \left( \pm \sqrt{\frac{\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2}}, \pm \sqrt{\frac{\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2}} \right)$ . Siit saame välja lugeda ka rangema tingimuse  $\Phi_{\pm\pm}$  eksisteerimiseks, nimelt on vaja, et juurealused suurused oleksid positiivsed. Viies nimetaja kujule  $4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2 = (2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + \lambda_{12})(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12})$  näeme, et selle nimetaja positiivsus sõltub vaid parempoolsest tegurist  $2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12}$ . Saame  $\Phi_{\pm\pm}$  statsionaarsuse tingimused panna kirja kujul

$$\frac{\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12}} > 0 \text{ ja } \frac{\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12}} > 0, \quad (26)$$

ning negatiivse  $\lambda_{12}$  korral viia tingimused (26) kujule

$$\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 > 0 \text{ ja } \lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2 > 0. \quad (27)$$

Võtame ajutiselt kasutusse tähistuse  $(\pm, \pm, \pm)$ , kus esimesel, teisel ja kolmandal kohal on vastavalt  $\mu_1^2$ ,  $\mu_2^2$  ja  $\lambda_{12}$  märgid (näiteks juhule  $\mu_1^2 = -1$ ,  $\mu_2^2 = -1$  ja  $\lambda_{12} = 2$  vastaks tähistus  $(-, -, +)$ ). Paneme kirja lõpliku statsionaarsete punktide võimaluste ruumi:

- kui  $(+, +, +)$ , siis on statsionaarseks punktiks ainult  $\Phi_0$ ,
- kui  $(-, +, +)$ , siis on statsionaarseteks punktideks  $\Phi_0$  ja  $\Phi_{\pm 0}$ ,
- kui  $(+, -, +)$ , siis on statsionaarseteks punktideks  $\Phi_0$  ja  $\Phi_{0\pm}$ ,
- kui  $(+, +, -)$  ja kehtib tingimus (27), siis on statsionaarseteks punktideks

$\Phi_0$  ja  $\Phi_{\pm\pm}$ ,

- kui  $(+, +, -)$  ja ei kehti tingimus (27), siis on statsionaarseks punktiks ainult  $\Phi_0$ ,
- kui  $(-, -, +)$  ja kehtib tingimus (26), siis on statsionaarseteks punktideks  $\Phi_0$ ,  $\Phi_{\pm 0}$ ,  $\Phi_{0\pm}$  ja  $\Phi_{\pm\pm}$ ,
- kui  $(-, -, +)$  ja ei kehti tingimus (26), siis on statsionaarseteks punktideks  $\Phi_0$ ,  $\Phi_{\pm 0}$  ja  $\Phi_{0\pm}$ ,
- kui  $(-, +, -)$  ja kehtib tingimus (27), siis on statsionaarseteks punktideks  $\Phi_0$ ,  $\Phi_{\pm 0}$  ja  $\Phi_{\pm\pm}$ ,
- kui  $(-, +, -)$  ja ei kehti tingimus (27), siis on statsionaarseteks punktideks  $\Phi_0$  ja  $\Phi_{\pm 0}$ ,
- kui  $(+, -, -)$  ja kehtib tingimus (27), siis on statsionaarseteks punktideks  $\Phi_0$ ,  $\Phi_{0\pm}$  ja  $\Phi_{\pm\pm}$ ,
- kui  $(+, -, -)$  ja ei kehti tingimus (27), siis on statsionaarseteks punktideks  $\Phi_0$  ja  $\Phi_{0\pm}$ ,
- kui  $(-, -, -)$ , siis on statsionaarseteks punktideks  $\Phi_0$ ,  $\Phi_{\pm 0}$ ,  $\Phi_{0\pm}$  ja  $\Phi_{\pm\pm}$  (tingimus (27) kehtib automaatselt).

### 3.3 Lokaalsed miinimumid

Uurime edasi, millal leitud statsionaarsed punktid on lokaalsed miinimumid. Selleks toome sisse hessiaani ja rakendame sellel Sylvesteri tunnust.

**Definitsioon 9.** Ruutmaatriksit

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

nimetatakse  $n$ -muutuja funktsiooni  $f$  hessiaaniks ja sellele vastavat funktsiooni  $\sigma(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j$  funktsiooni  $f$  Hesse ruutvormiks.

Uurime potentsiaali (21), seega  $f = V$ , muutujaid on kaks ja hessiaani saame järgmisel kujul:

$$H(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu_1^2 + 12\lambda_1 \varphi_1^2 + 2\lambda_{12} \varphi_2^2 & 4\lambda_{12} \varphi_1 \varphi_2 \\ 4\lambda_{12} \varphi_1 \varphi_2 & 2\mu_2^2 + 12\lambda_2 \varphi_2^2 + 2\lambda_{12} \varphi_1^2 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

**Definitsioon 10.** Öeldakse, et ruutvorm  $\sigma$  on positiivselt määratud, kui iga  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}$  korral kehtib  $\sigma(z_1, z_2, \dots, z_n) > 0$ .

**Definitsioon 11.** Hessiaani peamiinoriteks nimetatakse determinante

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right| = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{array} \right|, \quad \dots, \quad \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{array} \right|.$$

**Teoreem 2** (Sylvesteri tunnus). *Ruutvorm on positiivselt määratud parajasti siis, kui temale vastava maatriksi kõik peamiinorid on positiivsed.*

Potentsiaali  $V$  hessiaan on positiivselt määratud parajasti siis, kui

$$2\mu_1^2 + 12\lambda_1\varphi_1^2 + 2\lambda_{12}\varphi_2^2 > 0$$

ja

$$\begin{vmatrix} 2\mu_1^2 + 12\lambda_1\varphi_1^2 + 2\lambda_{12}\varphi_2^2 & 4\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2 \\ 4\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2 & 2\mu_2^2 + 12\lambda_2\varphi_2^2 + 2\lambda_{12}\varphi_1^2 \end{vmatrix} > 0.$$

**Teoreem 3.** (Kangro, 1968, lk. 220, teoreem 8) *Olgu funktsioon  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis  $P_0 \in \mathbb{R}^n$ . Kui funktsiooni  $f$  hessiaan punktis  $P_0$  on positiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range lokaalne miinimum.*

Saame teoreemi 3 ühendada Sylvesteri tunnusega (teoreem 2) ning näeme, et potentsiaalil  $V$  on statsionaarses punktis  $\Phi$  range lokaalne miinimum, kui

$$2\mu_1^2 + 12\lambda_1\varphi_1^2 + 2\lambda_{12}\varphi_2^2 > 0$$

ja

$$\begin{vmatrix} 2\mu_1^2 + 12\lambda_1\varphi_1^2 + 2\lambda_{12}\varphi_2^2 & 4\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2 \\ 4\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2 & 2\mu_2^2 + 12\lambda_2\varphi_2^2 + 2\lambda_{12}\varphi_1^2 \end{vmatrix} > 0.$$

Kontrollime ükshaaval, millal on leitud statsionaarsetes punktides hessiaanide kõik peamiinorid positiivsed.

Esiteks, kui

$$H(\Phi_0) = \begin{bmatrix} 2\mu_1^2 & 0 \\ 0 & 2\mu_2^2 \end{bmatrix}.$$

On näha, et peamiinorid on positiivsed parajasti siis, kui  $\mu_1^2$  ja  $\mu_2^2$  on positiivsed. Järelikult on punktis  $\Phi_0$  lokaalne miinimum, kui  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$ .

Teiseks, kui

$$H(\Phi_{\pm 0}) = \begin{bmatrix} 2\mu_1^2 + 12\lambda_1 \left( \sqrt{\frac{-\mu_1^2}{2\lambda_1}} \right)^2 & 0 \\ 0 & 2\mu_2^2 + 2\lambda_{12} \left( \sqrt{\frac{-\mu_1^2}{2\lambda_1}} \right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\mu_1^2 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1\mu_2^2 - \lambda_{12}\mu_1^2}{\lambda_1} \end{bmatrix}.$$

On näha, et peamiinorid on positiivsed parajasti siis, kui  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\frac{\lambda_1\mu_2^2 - \lambda_{12}\mu_1^2}{\lambda_1} > 0$ .

Järelikult on punktides  $\Phi_{\pm 0}$  lokaalsed miinimumid, kui  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\lambda_{12}\mu_1^2 - \lambda_1\mu_2^2 < 0$ .

Kolmandaks, kui

$$H(\Phi_{0\pm}) = \begin{bmatrix} 2\mu_1^2 + 2\lambda_{12} \left( \sqrt{\frac{-\mu_2^2}{2\lambda_2}} \right)^2 & 0 \\ 0 & 2\mu_2^2 + 12\lambda_2 \left( \sqrt{\frac{-\mu_2^2}{2\lambda_2}} \right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2\mu_1^2 - \lambda_{12}\mu_2^2}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & -4\mu_2^2 \end{bmatrix}.$$

On näha, et peamiinorid on positiivsed parajasti siis, kui  $\mu_2^2 < 0$  ja  $\frac{\lambda_2\mu_1^2 - \lambda_{12}\mu_2^2}{\lambda_2} > 0$ .

Järelikult on punktides  $\Phi_{0\pm}$  lokaalsed miinimumid, kui  $\mu_2^2 < 0$  ja  $\lambda_{12}\mu_2^2 - \lambda_2\mu_1^2 < 0$ .

Hessiaani  $H(\Phi_{++})$  arvutused on esitatud lisas A, hessiaan  $H(\Phi_{--})$  tuleb sellega võrdne, sest miinuste korrutis taandub ära. Esimese peamiinori saame avaldada kujul  $8\lambda_1 \frac{\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\mu_1^2\lambda_2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} > 0$ , kust on näha, et selle positiivsus järeldeb otse statsionaarsuse tingimusest (26). Teise peamiinori (ehk  $\det H(\Phi_{++})$ ) teisendamise lisas B kujule

$$\det H(\Phi_{++}) = \frac{\mu_1^2\mu_2^2(4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_{12}^2) - 2\lambda_{12}(\mu_1^4\lambda_2 + \mu_2^4\lambda_1)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12}}.$$

Selle positiivsuse uurimiseks defineerime uue funktsiooni

$$P(\lambda_{12}) = (\mu_1^2\mu_2^2\lambda_{12}^2 - 2\lambda_{12}(\mu_1^4\lambda_2 + \mu_2^4\lambda_1) + 4\lambda_1\lambda_2\mu_1^2\mu_2^2)(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12}). \quad (29)$$

On lihtne näha, et  $\det H(\Phi_{++})$  ja  $P(\lambda_{12})$  on samamärgilised, seega saame uurida uue funktsiooni (29) positiivsuspiirkonda. Leiame  $P(\lambda_{12})$  nullkohad ehk otsime lahendeid võrrandile  $P(\lambda_{12}) = 0$ . Lahendid on isoleeritud  $\lambda'_{12} = 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$  ja ruutvõrrandi lahendid  $\lambda''_{12} = \frac{2\mu_1^2\lambda_2}{\mu_2^2}$  ja  $\lambda'''_{12} = \frac{2\mu_2^2\lambda_1}{\mu_1^2}$  (nende leidmine on näidatud lisas

C).

Vaatame läbi võimalikud juhud. Olgu  $\mu_1^2 \mu_2^2 > 0$  ja  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} > \lambda_{12}$ , siis  $P(\lambda_{12}) > 0$  ühel kahest võimalusest, kas

$$\lambda_{12} > \max \left\{ \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} \right\} \quad (30)$$

või

$$\lambda_{12} < \min \left\{ \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} \right\}. \quad (31)$$

On selge, et iga negatiivne  $\lambda_{12}$  rahuldaks tingimust (31), seega uurime edasi vaid positiivseid väärtusi. Eeldusega  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} > \lambda_{12}$  lihtsustuvad statsionaarsuse tingimused (26) kujule (27).

$\mu_1^2 \mu_2^2 > 0$  on võimalik kahel juhul:  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$  või  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$ .

- Kui  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$ , siis saame statsionaarsuse tingimustest (27) liikme, kus on  $\lambda_i$ , teisele poole võrratust viimise ja  $\lambda_{12}$  kordajaga läbi jagamise teel võrratused

$$\lambda_{12} > \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \quad \lambda_{12} > \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2}.$$

Neist omakorda järeldub

$$\lambda_{12} > \max \left\{ \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} \right\}$$

ja seega on rahuldatud tingimus (30).

- Kui  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$ , siis saame statsionaarsuse tingimustest (27) liikme, kus on  $\lambda_i$ , teisele poole võrratust viimise ja  $\lambda_{12}$  kordajaga läbi jagamise teel võrratused

$$\lambda_{12} < \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \quad \lambda_{12} < \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2}.$$

Neist omakorda järeldub

$$\lambda_{12} < \min \left\{ \frac{2\mu_1^2\lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2\lambda_1}{\mu_1^2} \right\}$$

ja seega on rahuldatud tingimus (31).

Olgu nüüd  $\mu_1^2\mu_2^2 > 0$  ja  $2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} < \lambda_{12}$ , siis  $P(\lambda_{12}) > 0$ , kui

$$\min \left\{ \frac{2\mu_1^2\lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2\lambda_1}{\mu_1^2} \right\} < \lambda_{12} < \max \left\{ \frac{2\mu_1^2\lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2\lambda_1}{\mu_1^2} \right\}. \quad (32)$$

Eelduse  $2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} < \lambda_{12}$  tõttu saavutavad statsionaarsuse tingimused (26) uue kuju:

$$\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 < 0 \text{ ja } \lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2 < 0. \quad (33)$$

Jälle on  $\mu_1^2\mu_2^2 > 0$  võimalik vaid juhtudel  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$  või  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$ .

- Kui  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$ , siis saame statsionaarsuse tingimustest (33) liikme, kus on  $\lambda_{12}$ , teisele poole võrratust viimise ja  $\lambda_{12}$  kordajaga läbi jagamise teel võrratused

$$\lambda_{12} < \frac{2\mu_1^2\lambda_2}{\mu_2^2}, \quad \lambda_{12} < \frac{2\mu_2^2\lambda_1}{\mu_1^2}.$$

Neist omakorda järeldub

$$\lambda_{12} < \min \left\{ \frac{2\mu_1^2\lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2\lambda_1}{\mu_1^2} \right\}$$

ja seega pole rahuldatud tingimus (32).

- Kui  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$ , siis saame statsionaarsuse tingimustest (33) liikme, kus on  $\lambda_{12}$ , teisele poole võrratust viimise ja  $\lambda_{12}$  kordajaga läbi jagamise teel võrratused

$$\lambda_{12} > \frac{2\mu_1^2\lambda_2}{\mu_2^2}, \quad \lambda_{12} > \frac{2\mu_2^2\lambda_1}{\mu_1^2}.$$

Neist omakorda jäeldub

$$\lambda_{12} > \max \left\{ \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} \right\}$$

ja seega pole rahuldatud tingimus (32).

Märkame, et  $P(\lambda_{12}) > 0$  jäeldub sellest, et  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - \lambda_{12} > 0$ . Tehes läbi analoogse arutluskäigu juhul, kus  $\mu_1^2 \mu_2^2 < 0$  (vt lisa D), jõuame sama jäelduseni, seega peab see võrratus olema tingimuseks  $\det H(\Phi_{++})$  positiivsuse jaoks ja seekaudu ka  $\Phi_{++}$  lokaalseks miinimumiks olemiseks.

Hessiaanid  $H(\Phi_{+-})$  ning  $H(\Phi_{-+})$  erinevad eelmisest selle poolest, et 2. rea esimene element ja 1. rea teine element on korrutatud arvuga  $-1$ , kuid peamiinorid tulevad identsed eelmistega. Järelikult määrab statsionaarsete punktide  $\Phi_{\pm\pm}$  puhul võrratus  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - \lambda_{12} > 0$ , et tegemist on lokaalsete miinimumidega. Võttes arvesse ka selle võrratuse, saame statsionaarsustingimused (26) asendada tingimustega (27).

### 3.4 Miinimumide analüüs

Oleme suutnud miinimumide analüüsi taandada järgmise kuue suuruse märgi uurimisele:

1.  $\lambda_{12}$ ,
2.  $\mu_1^2$ ,
3.  $\mu_2^2$ ,
4.  $\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2$ ,
5.  $\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2$ ,
6.  $2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12}$ .

Paneme tähele, et kasutasime  $\lambda_{12}$  märki vaid punktide  $\Phi_{\pm\pm}$  statsionaarsuse uurimisel. Saame varsti näidata, et nende punktide minimaalsuse uurimisel piisab vaid ülejäänud parameetritest.

Kui  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$ , siis punktis  $\Phi_0$  on lokaalne miinimum. Kui me tahaksime, et punktis  $\Phi_{\pm\pm}$  oleks samal ajal miinimum, siis statsionaarsuse analüüsi peatükis saadud tulemuse põhjal peaks kehtima  $\lambda_{12} < 0$ . Samas, siis ei kehtiks enam võrratus  $\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 > 0$ , seega on rikutud statsionaarsustingimus (27). Järelikult ei saa mõlemad korraga olla lokaalsed miinimumid.

Kui  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$  ning me tahame, et punktides  $\Phi_{\pm\pm}$  oleks lokaalne miinimum, siis  $\lambda_{12} < 0$  järeldeb tingimusest  $\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2 > 0$ . Sarnaselt, juhul  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$  saame, et  $\lambda_{12} < 0$  järeldeb tingimusest  $\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 > 0$ . Juhul  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$  ei sõltunud punktide  $\Phi_{\pm\pm}$  statsionaarsus enam  $\lambda_{12}$  märgist. Saame selle põhjal järeldada, et meile piisab lokaalsete miinimumide uurimiseks eelmainitud nimekirja viimasest viiest suurusest.

Võttes kasutusele sarnase tähistuse statsionaarsuse analüüsi peatüki 3.2 lõpust, kus  $(\pm, \pm, \pm, \pm, \pm)$  märgid vastavad selle loetelu suuruste märkidele (positiivsusele või negatiivsusele), saame panna kompaktselt kirja järgelused:

- juhtudel  $(+, +, \pm, \pm, \pm)$  on ainukene lokaalne miinimum punktis  $\Phi_0$ ,
- juhtudel  $(-, \pm, -, \pm, \pm)$  asub lokaalne miinimum punktides  $\Phi_{\pm 0}$ ,
- juhtudel  $(\pm, -, \pm, -, \pm)$  asub lokaalne miinimum punktides  $\Phi_{0\pm}$ ,
- juhtudel  $(\pm, \pm, +, +, +)$  (välja arvatud juhul  $(+, +, +, +, +)$ ) asub lokaalne miinimum punktides  $\Phi_{\pm\pm}$ .

Siit näeme, et ainukene võimalik olukord, kus tekivad kaks erineva potentsiaaliga lokaalset miinimumi, on  $(-, -, -, -, \pm)$ . Lisas E näitame, et viimane suurus tuleb sel juhul alati negatiivne ehk tegelikult piisab vaid esimesest neljast suurusest.

Potentsiaali väärtused neis lokaalsetes miinimumides on vastavalt

$$V(\Phi_{\pm 0}) = \mu_1^2 \left( \sqrt{\frac{-\mu_1^2}{2\lambda_1}} \right)^2 + \lambda_1 \left( \sqrt{\frac{-\mu_1^2}{2\lambda_1}} \right)^4 = \frac{-\mu_1^4}{2\lambda_1} + \frac{\mu_1^4}{4\lambda_1} = \frac{-\mu_1^4}{4\lambda_1}$$

ja

$$V(\Phi_{0\pm}) = \mu_2^2 \left( \sqrt{\frac{-\mu_2^2}{2\lambda_2}} \right)^2 + \lambda_2 \left( \sqrt{\frac{-\mu_2^2}{2\lambda_2}} \right)^4 = \frac{-\mu_2^4}{2\lambda_2} + \frac{\mu_2^4}{4\lambda_2} = \frac{-\mu_2^4}{4\lambda_2}$$

ning potentsiaalide vahe saab kuju

$$\Delta V = \left| \frac{\mu_1^4}{4\lambda_1} - \frac{\mu_2^4}{4\lambda_2} \right|.$$

Kokkuvõtvalt on meil kahe reaalse skalaarväljaga juhul, kus potentsiaali kirjeldab avaldis (21), võimalik valevaakum ja selle lagunemine, kui  $\mu_1^2 < 0$ ,  $\mu_2^2 < 0$ ,  $\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 < 0$  ja  $\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2 < 0$  ning potentsiaali väärtus neis miinimumides erineb, ehk  $\Delta V > 0$  (konkreetselt  $\lambda_2\mu_1^4 \neq \lambda_1\mu_2^4$ ).

### 3.5 Mõju sõltuvus parameetritest

Selles peatükis kasutatakse Wolfram Mathematica paketti FindBounce (Guada, Nemevšek ja Pintar, 2020), mis võimaldab numbriliselt arvutada antud potentsiaali korral valitud miinimumide vahelise pörkelahendi mõju.

Uurime seoseid parameetrite  $\mu_i^2, \lambda_i, \lambda_{12}$  ja mõju vahel olukordades, kus tunnelleerumine toimuda saab. Valevaakumi lagunemise tingimuste kontrollimiseks saame kasutada eelmisest peatükist saadud võrratused. Suurem mõju tähendab väiksema tõenäosusega tunnelleerumist ja seekaudu ka valevaakumi lagunemist.

Märgime, et antud peatükis saadud tulemused on katselised ning ei toetu matemaatilistele tõestustele. Nende tulemuste matemaatiline tõestus võib olla aluseks tulevasele teadustööle.

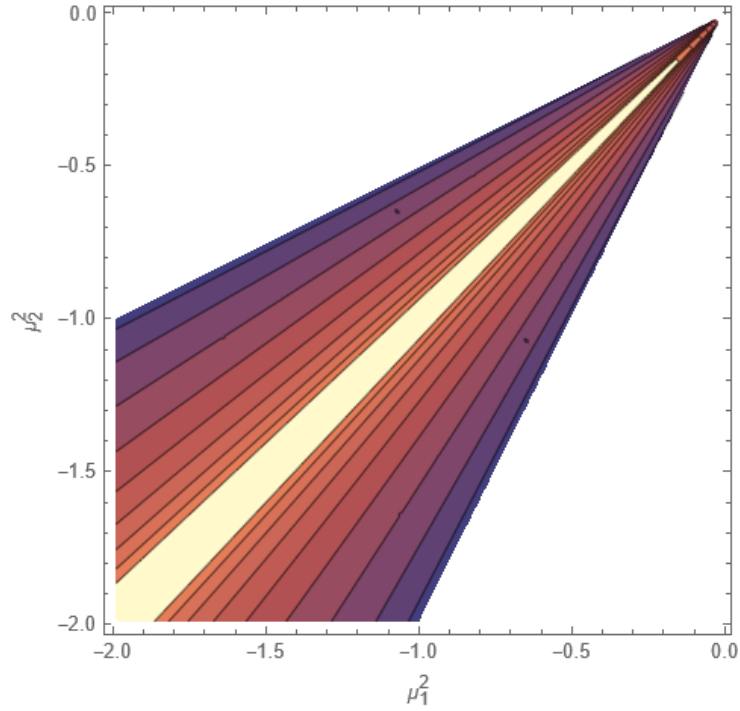
Kõigepealt paneme tähele, et potentsiaal ja mõju on pöördvõrdelised. Seda kinnitavad arvutused vastavalt: võttes parameetrid  $(\mu_i^2, \lambda_i, \lambda_{12})$ , mille korral eksisteerivad kaks erinevat miinimumi, ja korrutades neid positiivse kordajaga  $k$ , saame mõju, mis on  $k$  korda väiksem. See tähelepanek on tehtud arvutuste põhjal, mille tulemuste tabel on lisas G.

Seejärel paneme tähele, et mõju väärtus ei sõltu parameetritest  $\mu_i^2$  eraldi, vaid nende suhtest. See tähendab, et fikseeritud parameetritega  $\lambda_i$  ja  $\lambda_{12}$  saame parameetrite  $\mu_i^2$  korral sama mõju kui parameetrite  $k\mu_i^2$  korral, kus  $k$  on mingi positiivne reaalarv. Seda illustreerib joonis 3, kus näeme, et potentsiaali

$$V(\Phi) = \mu_1^2 \varphi_1^2 + \mu_2^2 \varphi_2^2 + \varphi_1^4 + \varphi_2^4 + 4\varphi_1^2 \varphi_2^2 \quad (34)$$

korral kontuurjooned jooksevad sirgetena ehk mööda võrdseid  $\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}$  väärtuseid.

See, et joonise 3 valges osas pole  $S$  määratud, tuleneb sellest, et viimaste kontuurjoonte ja koordinaattelgede vahel on rikutud kahe erineva miinimumi eksisteerimise tingimused, mis said eelmises peatükis sõnastatud – konkreetselt rikutakse ühte võrratustest  $\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 < 0$  ja  $\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2 < 0$ . Need võrratused ütleavad,



**Joonis 3:** Mõju logaritmi  $\log S$  sõltuvus parameetritest  $\mu_i^2$  potentsiaali (34) korral, väärtused järjestikustel kontuurjoontel erinevad 1 võrra.

et kui fikseerida üks suurustest  $\mu_i^2$  (näiteks  $\mu_1^2$ ), siis teine peab jääma kindlasse vahemikku ( $\frac{\lambda_{12}\mu_1^2}{2\lambda_1} < \mu_2^2 < \frac{2\lambda_2\mu_1^2}{\lambda_{12}}$ ). Kui üks võrratustest ei kehti, pole ühel telgedest enam lokaalset miinimumi ja seega tunnellerumist ei toimu.

See, et joonise 3 kollases osas on  $S$  väärtused lähenemas lõpmatusele, tuleneb sellest, et lähenedes sirgele  $\mu_1^2 = \mu_2^2$  muutub potentsiaalide vahe  $\Delta V$  nullilähedaseks (sirgel on  $\Delta V = 0$ ). Olukorras, kus miinimumide väärtuseid eraldab vaid väike suurus, saame kasutada õhukese seina lähendit (Coleman, 1977; Brown, 2018), mille põhjal oleks pörkelahendi mõju ligikaudu

$$B \sim \frac{27\pi^2}{2} \frac{\sigma^4}{(\Delta V)^3}, \quad (35)$$

kus  $\sigma$  on pörkelahendi ja barjääri vahele jääv pindala. Valem (35) kinnitab, et lähenedes sirgele, kus potentsiaalid on võrdsed, võiks mõju kasvada lõpmatusse.

Brown annab ka ülemise ja alumise hinnangu  $\sigma$  jaoks,

$$\sigma_{\min} \equiv \int_{\phi_{\text{tunneli lõpp}}}^{\phi_{\text{valevaakum}}} \sqrt{2(V(\phi) - V(\text{valevaakum}))},$$

$$\sigma_{\max} \equiv \int_{\phi_{\text{pärisvaakum}}}^{\phi_{\text{valevaakum}}} \sqrt{2(V(\phi) - V(\text{pärisvaakum}))}.$$

Skaleerides kogu potentsiaali  $V$  positiivse arvuga  $k$ , jäävad muutumatuks statsionaarsete punktide koordinaadid, sest tegur  $k$  taandub nende avaldistes välja. Seega saame öelda, et  $\sigma_{\min}$  ja  $\sigma_{\max}$  suurenevad mõlemad  $\sqrt{k}$  korda. Pidevuse põhjal võiks ka  $\sigma$  suureneda  $\sqrt{k}$  korda. Lisaks näeme, et  $\Delta V$  skaleerub ise  $k$  korda. Seega õhukese seina lähenduse kohaselt peaks mõju  $B$  (valemi (35) põhjal) suurenema  $\frac{(\sqrt{k})^4}{k^3} = \frac{1}{k}$  korda, mis on kooskõlas esimese tähelepanekuga.

Me näeme, et potentsiaalide võrdsuse suunas kasv kehtib ka teistsuguste parameetrite valikul. Näiteks joonisel 4, kus potentsiaaliks oleme võtnud

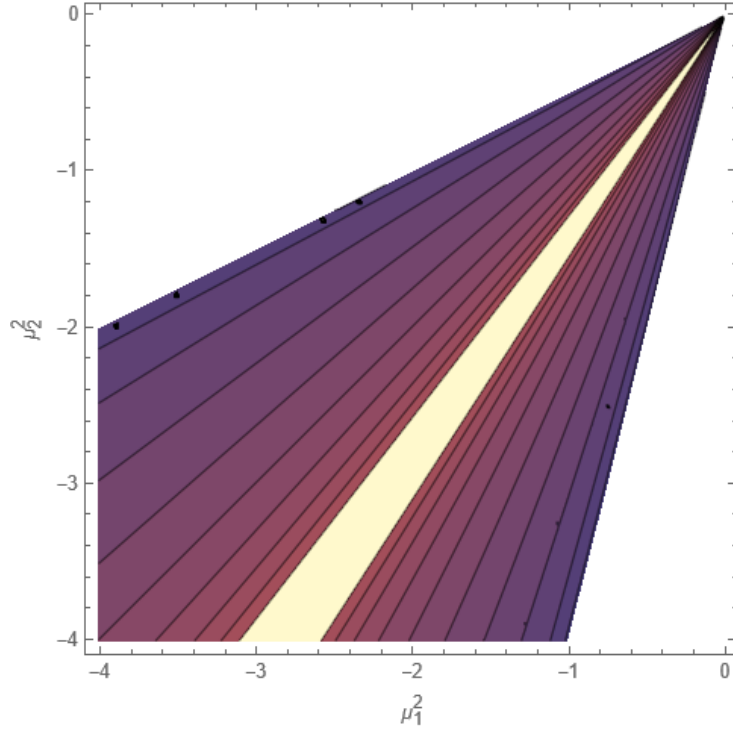
$$V(\Phi) = \mu_1^2 \varphi_1^2 + \mu_2^2 \varphi_2^2 + 0.5 \varphi_1^4 + \varphi_2^4 + 4 \varphi_1^2 \varphi_2^2, \quad (36)$$

asub sirge  $\Delta V = 0$  teise nurga all, sest võrdusest  $2\lambda_1 = \lambda_2$  järeldeb, et potentsiaalide võrduseks peaks kehtima  $\sqrt{2}\mu_1^2 = \mu_2^2$ . Samuti näeme, et ka mõju kasvamise suund on nihkunud kaasa selle sirgega.

Sõnastame peatüki peamised tulemused:

1. korrutades potentsiaali positiivse arvuga  $k$ , mõju väheneb  $k$  korda,
2. korrutades parameetreid  $\mu_i^2$  sama positiivse arvuga  $k$ , mõju ei muutu,
3. mõju suureneb potentsiaalide võrdsuse suunas.

Saame kasutada neid omadusi, et analüüsida mõju sõltuvust parameetritest  $\lambda_i$ . Fikseeritud parameetrite  $\mu_i^2$  ja  $\lambda_{12}$  korral illustreerib mõju sõltuvust joonis 5, kus



**Joonis 4:** Mõju logaritmi  $\log S$  sõltuvus parameetritest  $\mu_i^2$  potentsiaali (36) korral, väärtused järjestikustel kontuurjoontel erinevad 1 võrra.

oleme potentsiaalideks valinud

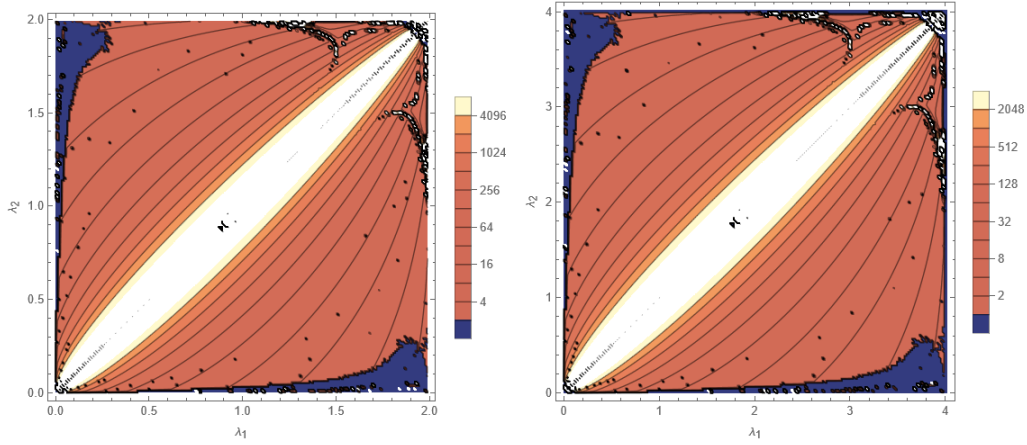
$$V(\Phi) = -\varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \lambda_1 \varphi_1^4 + \lambda_2 \varphi_2^4 + 4\varphi_1^2 \varphi_2^2 \quad (37)$$

ja

$$V(\Phi) = -\varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \lambda_1 \varphi_1^4 + \lambda_2 \varphi_2^4 + 8\varphi_1^2 \varphi_2^2. \quad (38)$$

Võrratuste  $\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 < 0$  ja  $\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2 < 0$  tõttu saame selgitada, miks väljaspool piirkonda  $0 < \lambda_1 < \frac{\lambda_{12}\mu_1^2}{2\mu_2^2}$  ja  $0 < \lambda_2 < \frac{\lambda_{12}\mu_2^2}{2\mu_1^2}$  ei ole valevaakumit.

On selgelt näha, et mõju suureneb lähenedes sirgele  $\lambda_1 = \lambda_2$ , sest seal on  $\Delta V = 0$ . See, et joonise 5 vasak ja parem pool paistavad identsed, tuleneb sellest, et me saame võtta vasaku potentsiaali (37), korrutada seda arvuga 2 (mõju väärtused vähenevad poole võrra), siis asendada parameetrid  $\mu_i^2 = -2$  uuesti arvuga  $-1$  (jagatis jääb samaks, seega mõju ei muutu) ning vaadates punkti  $2\lambda_{i,\text{vasak}} = \lambda_{i,\text{parem}}$ ,



**Joonis 5:** Mõju  $S$  sõltuvus parameetritest  $\lambda_i$  potentsiaali (37) (vasakul) ja (38) (paremal) korral.

saamegi täpselt kaks korda väiksema mõju. Kuna uuritav piirkond suureneb ka kaks korda, siis punkt  $\lambda_{i,\text{parem}}$  paistab paremal joonisel samas kohas, kus  $\lambda_{i,\text{vasak}}$  vasakul. Lisaks on parema joonise kontuurjooned kõik 2 korda väiksematel väärtustel.

Esimest kahte tähelepanekut koos kasutades saame väita, et skaleerides kõiki 4. järku liikmete kordajaid positiivse reaalarvuga  $k$ , väheneb mõju  $S$   $k$  korda. Selle abil saame peatüki esimesed kaks peamist tulemust potentsiaali (21) kohta ümbersõnastada järgmiselt:

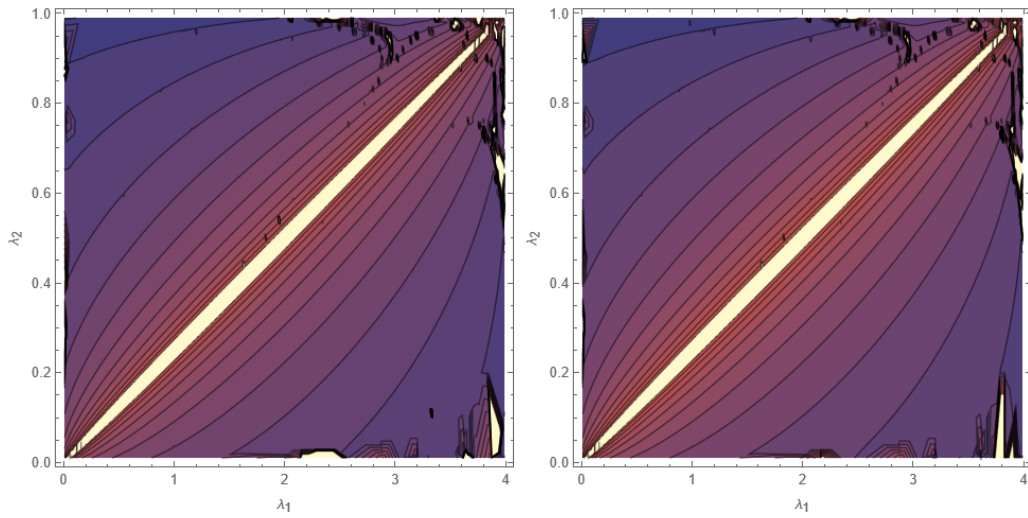
- mõju on muutumatu ruutliikmete (2. järku liikmete) korrutamisel positiivse arvuga  $k$ ,
- mõju on pöörsõltuvuses 4. järku liikmete korrutamisest positiivse arvuga  $k$ .

Võttes mittevõrdsed, kuid samas suhtes parameetrid  $\mu_i^2$ , märkame näiteks potentsiaalide

$$V(\Phi) = -\varphi_1^2 - 0,5\varphi_2^2 + \lambda_1\varphi_1^4 + \lambda_2\varphi_2^4 + 4\varphi_1^2\varphi_2^2 \quad (39)$$

ja

$$V(\Phi) = -2\varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \lambda_1\varphi_1^4 + \lambda_2\varphi_2^4 + 4\varphi_1^2\varphi_2^2 \quad (40)$$



**Joonis 6:** Mõju logaritmi  $\log S$  sõltuvus parameetritest  $\lambda_i$  potentsiaali (39) (vasakul) ja (40) (paremal) korral, väärtused järjestikustel kontuurjoontel erinevad 1 võrra.

puhul joonisel 6 jällegi, et mõju väärtused tulevad võrdsed ning suurenevad potentsiaalide võrdsuse suunas. Lisaks paneme tähele, et ka valevaakumi eksisteerimist tagav uuritav piirkond on samade mõõtmetega.

## 4 Täiendatud mudel

Anname eelnevalt kasutatud potentsiaalile (21) uue nime  $V_1$  ja kasutame seda, et defineerida  $V_2$ , millele oleme lisanud uue liikme  $\mu_{12}^2\varphi_1\varphi_2$ :

$$V_2(\Phi) = V_1(\Phi) + \mu_{12}^2\varphi_1\varphi_2 = \mu_{12}^2\varphi_1\varphi_2 + \mu_1^2\varphi_1^2 + \mu_2^2\varphi_2^2 + \lambda_1\varphi_1^4 + \lambda_2\varphi_2^4 + \lambda_{12}\varphi_1^2\varphi_2^2, \quad (41)$$

kus  $\mu_i^2, \mu_{12}^2, \lambda_i, \lambda_{12} \in \mathbb{R}$  ja  $i \in \{1, 2\}$ . Selle liikme lisamise tõttu pole potentsiaalil (41) peatükis 3 käsitletud potentsiaali (21)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  sümmeetriat.

Piirangud parameetritele jäävad samaks, sest lisanduva liikme aste on liiga madal, et mõjutada potentsiaali väärtust piirprotsessis  $\lim_{|\Phi| \rightarrow \infty} V_2(\Phi)$ .

### 4.1 Lihtsustus

Potentsiaali (41) statsionaarsed punktid (ja seetõttu ka miinimumid) on algebraliselt leitavad, kuid vajavad tohutult mahukat tööd. Me saame füüsikalistel kaalutlustel uurida edasi ühte sümmeetrilisemat alamjuhtu.

Võtame lisaelduse  $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu^2$  ja  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , siis avaldame potentsiaali kujul

$$V_2^*(\Phi) = \mu_{12}^2\varphi_1\varphi_2 + \mu^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \lambda(\varphi_1^4 + \varphi_2^4) + \lambda_{12}\varphi_1^2\varphi_2^2. \quad (42)$$

### 4.2 Statsionaarsed punktid

Selleks, et  $\Phi$  oleks  $V_2^*$  statsionaarne punkt, peavad olema selle osatuletised,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2^*}{\partial \varphi_1}(\Phi) &= \mu_{12}^2\varphi_2 + (2\mu^2 + 2\lambda_{12}\varphi_2^2)\varphi_1 + 4\lambda\varphi_1^3 \\ &= \varphi_2(2\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2 + \mu_{12}^2) + 2\varphi_1(\mu^2 + 2\lambda\varphi_1^2), \\ \frac{\partial V_2^*}{\partial \varphi_2}(\Phi) &= \mu_{12}^2\varphi_1 + (2\mu^2 + 2\lambda_{12}\varphi_1^2)\varphi_2 + 4\lambda\varphi_2^3 \\ &= \varphi_1(2\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2 + \mu_{12}^2) + 2\varphi_2(\mu^2 + 2\lambda\varphi_2^2), \end{aligned}$$

võrdsed nulliga.

Kui  $\mu_{12}^2 = 0$ , siis on kõik analoogne potentsiaali (21) juhuga, ja on võimalik saada kuni 9 erinevat statsionaarset punkti, neist 1 on nullpunkt, 4 asuvad koordinaattelgedel ja 4 asuvad erinevates tasandi veerandites (n-ö nurkades). Kui  $\mu_{12}^2$  suurendada natukene positiivses suunas, siis lisandub potentsiaalile I ja III veerandis peegelpildis sama palju, kui lahutub II ja IV veerandis. Negatiivse  $\mu_{12}^2$  korral on seis analoogne, II ja IV veerandis väärtused kasvavad ning I ja III veerandis kahanevad. Seda väärtuste muutumist saab visuaalselt kujutleda potentsiaali kokkusurumisena sirgete  $\varphi_1 = \varphi_2$  ja  $\varphi_1 = -\varphi_2$  suunas.

Antud potentsiaali korral paiknevad (juhul  $\mu_{12}^2 = 0$ ) kõik 9 statsionaarset punkti sümmeetriliselt telgede suhtes ja seetõttu on lokaalsed miinimumid võrdsed. Kui meil on miinimumid telgedel, siis suurust  $\mu_{12}^2$  sisaldava liikme poolt kokkusurumine sirgete  $\varphi_1 = \varphi_2$  ja  $\varphi_1 = -\varphi_2$  suunas jätab lokaalsed miinimumid sümmeetriliseks ja seetõttu on potentsiaalid võrdsed. Valevaakumit nii tekkida ei saa.

Huvitav on aga olukord, kus lokaalsed miinimumid on n-ö nurkades. Kui juhul  $\mu_{12}^2 = 0$  oleksid potentsiaalid seal võrdsed, siis parameetri  $\mu_{12}^2$  suurendamine (või vähendamine) suruks neid statsionaarseid punkte kokku erinevalt (sõltuvalt sellest, kas nad asuvad I, III veerandis või II, IV veerandis, parameetriga  $\mu_{12}^2$  liikme lisamine muudab potentsiaali erimärgilise suuruse võrra), mistõttu neis tekib ebavõrdsus ja valevaakum.

Nende koordinaadid on I ja III veerandis  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$  ning II ja IV veerandis  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$ .

Esimesel juhul (ehk I ja III veerandi nurgad) on statsionaarsuse tingimus kujul

$$\varphi(2\lambda_{12}\varphi^2 + \mu_{12}^2) + 2\varphi(\mu^2 + 2\lambda\varphi^2) = 0.$$

Kuna uurime ekstreemume väljaspool koordinaatide alguspunkti, saame  $\varphi$  ära taan-

dada ning jõuame kujule

$$2\lambda_{12}\varphi^2 + \mu_{12}^2 + 2\mu^2 + 4\lambda\varphi^2 = 0.$$

Saame liikmeid rühmitades kuju

$$2(2\lambda + \lambda_{12})\varphi^2 = -(\mu_{12}^2 + 2\mu^2),$$

kust on edasi võimalik avaldada

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{-\mu_{12}^2 - 2\mu^2}{2(2\lambda + \lambda_{12})}}.$$

Teisel juhul (ehk II ja IV veerandi nurgad) on statsionaarsuse tingimus kujul

$$-\varphi(-2\lambda_{12}\varphi^2 + \mu_{12}^2) + 2\varphi(\mu^2 + 2\lambda\varphi^2) = 0.$$

Analoogselt saame  $\varphi$  ära taandada ning jõuame võrrandini

$$2\lambda_{12}\varphi^2 - \mu_{12}^2 + 2\mu^2 + 4\lambda\varphi^2 = 0,$$

mille lahend on

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{\mu_{12}^2 - 2\mu^2}{2(2\lambda + \lambda_{12})}}.$$

### 4.3 Hessiaan

Potentsiaali (42) hessiaan avaldub kujul

$$H(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_2^*}{\partial \varphi_1^2} & \frac{\partial^2 V_2^*}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \\ \frac{\partial^2 V_2^*}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1} & \frac{\partial^2 V_2^*}{\partial \varphi_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu^2 + 2\lambda_{12}\varphi_2^2 + 12\lambda\varphi_1^2 & \mu_{12}^2 + 4\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2 \\ \mu_{12}^2 + 4\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2 & 2\mu^2 + 2\lambda_{12}\varphi_1^2 + 12\lambda\varphi_2^2 \end{bmatrix}.$$

I ja III veerandi nurkade jaoks on lokaalse miinimumi tingimused siis vastavalt

$$2\mu^2 + 2\lambda_{12} \frac{-\mu_{12}^2 - 2\mu^2}{2(2\lambda + \lambda_{12})} + 12\lambda \frac{-\mu_{12}^2 - 2\mu^2}{2(2\lambda + \lambda_{12})} > 0,$$

mille saame lihtsustada kujule

$$-\frac{10\lambda\mu^2 + \lambda_{12}\mu^2 + 6\lambda\mu_{12}^2 + \lambda_{12}\mu_{12}^2}{2\lambda + \lambda_{12}} > 0$$

ehk

$$\mu_{12}^2 < -\frac{10\lambda + \lambda_{12}}{6\lambda + \lambda_{12}}\mu^2, \quad (43)$$

ja

$$(2\mu^2 + (2\lambda_{12} + 12\lambda)\varphi^2)^2 - (\mu_{12}^2 + 4\lambda_{12}\varphi^2)^2 > 0,$$

mille saame lihtsustada kujule

$$\frac{8(2\mu^2 + \mu_{12}^2)(-\lambda_{12}\mu^2 + 2\lambda\mu^2 + 2\lambda\mu_{12}^2)}{2\lambda + \lambda_{12}} > 0$$

ehk

$$(2\mu^2 + \mu_{12}^2)((2\lambda - \lambda_{12})\mu^2 + 2\lambda\mu_{12}^2) > 0,$$

mis on omakorda sama, kui

$$(2\mu^2 + \mu_{12}^2)\left(\frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda}\mu^2 + \mu_{12}^2\right) > 0. \quad (44)$$

Kuna meid huvitab olukord, kus miinimumid on n-ö nurkades, siis  $2\lambda - \lambda_{12} > 0$  analüüsi peatüki 3.2 põhjal (seal kannavad vastavad statsionaarsed punktid nime  $\Phi_{\pm\pm}$ ), seega saame võrratuse (44) kehtimiseks kaks võimalust, kas

$$\mu_{12}^2 > -\mu^2 \max \left\{ 2, \frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda} \right\} \quad (45)$$

või

$$\mu_{12}^2 < -\mu^2 \min \left\{ 2, \frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda} \right\}. \quad (46)$$

Arvestades, et  $2\lambda - \lambda_{12} > 0$ , saame võrratustele (45) ja (46) uued kujud

$$\mu_{12}^2 > -2\mu^2 \quad (47)$$

ja

$$\mu_{12}^2 < -\frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda} \mu^2. \quad (48)$$

Kuna  $\frac{10\lambda + \lambda_{12}}{6\lambda + \lambda_{12}} > 1$ , siis tingimus (48) on leebem kui tingimus (43) ja seega saame teha järeldused:

- kui kehtib (48), siis on tegemist miinumumiga,
- kui kehtib (47), siis on tegemist sadulpunktiga nullpunktis ehk statsionaarne punkt on annihileerunud sattudes kontakti nullpunktiga.

Analoogselt saame II ja IV veerandi nurkade jaoks vastava tingimuse

$$2\mu^2 + 2\lambda_{12} \frac{\mu_{12}^2 - 2\mu^2}{2(2\lambda + \lambda_{12})} + 12\lambda \frac{\mu_{12}^2 - 2\mu^2}{2(2\lambda + \lambda_{12})} > 0,$$

mille saame lihtsustada kujule

$$\frac{-10\lambda\mu^2 - \lambda_{12}\mu^2 + 6\lambda\mu_{12}^2 + \lambda_{12}\mu_{12}^2}{2\lambda + \lambda_{12}} > 0$$

ehk

$$\mu_{12}^2 > \frac{10\lambda + \lambda_{12}}{6\lambda + \lambda_{12}} \mu^2,$$

ja

$$(2\mu^2 + (2\lambda_{12} + 12\lambda)\varphi^2)^2 - (\mu_{12}^2 - 4\lambda_{12}\varphi^2)^2 > 0,$$

mille saame lihtsustada kujule

$$-\frac{8(2\mu^2 - \mu_{12}^2)(\lambda_{12}\mu^2 - 2\lambda\mu^2 + 2\lambda\mu_{12}^2)}{2\lambda + \lambda_{12}} > 0$$

ehk

$$(2\mu^2 + \mu_{12}^2)(-(2\lambda - \lambda_{12})\mu^2 + 2\lambda\mu_{12}^2) < 0,$$

mis on omakorda sama kui

$$(2\mu^2 + \mu_{12}^2)\left(-\frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda}\mu^2 + \mu_{12}^2\right) < 0.$$

Viimasest saame, et kehtib kas

$$\mu_{12}^2 < -\mu^2 \max \left\{ 2, -\frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda} \right\} \quad (49)$$

või

$$\mu_{12}^2 > -\mu^2 \min \left\{ 2, -\frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda} \right\}. \quad (50)$$

Võrratuse  $2\lambda - \lambda_{12} > 0$  abil lihtsustame tingimused (49) ja (50) kujule

$$\mu_{12}^2 < -2\mu^2 \quad (51)$$

ja

$$\mu_{12}^2 > \frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda}\mu^2. \quad (52)$$

Ka siin saame sarnased tulemused:

- kui kehtib (52), siis on tegemist miinimumiga,
- kui kehtib (51), siis on tegemist sadulpunktiga nullpunktis ehk statsionaarne punkt on annihileerunud sattudes kontakti nullpunktiga.

Kokkuvõtvalt saame, et mõlemad miinimumid on alles, kui kehtivad korraga tingi-

mused (48) ja (52):

$$\frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda} \mu^2 < \mu_{12}^2 < -\frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda} \mu^2$$

või teisisõnu

$$|\mu_{12}^2| < -\frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda} \mu^2.$$

Kõik selle peatüki algebralised lihtsustused on tehtud Wolfram Mathematica abiga. Kasutatud sisendid ja saadud väljundid on nähtavad lisas F.

#### 4.4 Mõju sõltuvus parameetritest

Varieerides  $\mu_{12}^2$  ja  $\mu^2$  märkame, et mõju väärtus on sama võrdsete  $\frac{\mu_{12}^2}{\mu^2}$  väärtuste puhul. Näiteks, potentsiaali

$$V(\Phi) = \mu_{12}\varphi_1\varphi_2 + \mu^2\varphi_1^2 + \mu^2\varphi_2^2 + 2\varphi_1^4 + 2\varphi_2^4 + \varphi_1^2\varphi_2^2 \quad (53)$$

puhul on mõju kontuurjooned sirged nagu joonisel 7 kujutatud. Samuti märkame, et skaleerides kogu potentsiaali positiivse arvuga  $k$  väheneb mõju  $k$  korda (selle arvutamine sarnaneb lisas G sisalduvaga).

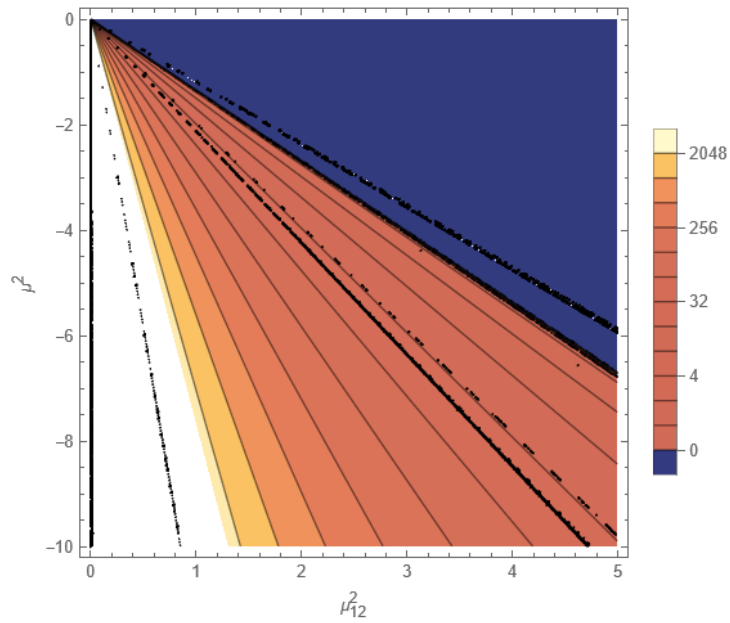
Sarnaselt juhule  $V_1$  märkame katseliselt, et kehtivad ka  $V_2$  puhul järelused:

- mõju on muutumatu ruutliikmete (2. järku liikmete) korrutamisel positiivse arvuga  $k$ ,
- mõju on pöörsõltuvuses 4. järku liikmete korrutamisest positiivse arvuga  $k$ .

Seaduspärasuse edasiseks uurimiseks katsetasime ka potentsiaali

$$V_3 = \mu_{12}^2\varphi_1\varphi_2 + \mu_1^2\varphi_1^2 + \mu_2^2\varphi_2^2 + \lambda_1\varphi_1^4 + \lambda_2\varphi_2^4 + \lambda_{12}\varphi_1^2\varphi_2^2 + \lambda_3\varphi_1^3\varphi_2 + \lambda_4\varphi_1\varphi_2^3 \quad (54)$$

korral võrduse  $\frac{B_1}{k} = B_k$  kehtivust (kasutatud tähistus viitab lisas G kasutatud



**Joonis 7:** Mõju  $S$  sõltuvus parameetritest  $\mu_{12}^2$  ja  $\mu^2$  potentsiaali (53) korral.

arvutuste tähistusele). Potentsiaal (54) sisaldab kõiki võimalikke erinevaid lagranžiaani liikmeid kahe reaalse skalaarväljaga süsteemile. Arvutuste käigus märkasime, et eelmainitud järeldused püsivad tõesed, seega võiksid need omadused iseloomustada antud süsteemi.

## Kokkuvõte

Leidsime kahe reaalse skalaarväljaga süsteemile, mille käitumist kirjeldab potentsiaal

$$V(\Phi) = \mu_1^2 \varphi_1^2 + \mu_2^2 \varphi_2^2 + \lambda_1 \varphi_1^4 + \lambda_2 \varphi_2^4 + \lambda_{12} \varphi_1^2 \varphi_2^2,$$

valevaakumi tekkimise tingimused:

- $\mu_1^2 < 0$ ,
- $\mu_2^2 < 0$ ,
- $\lambda_{12} \mu_2^2 - 2\lambda_2 \mu_1^2 < 0$ ,
- $\lambda_{12} \mu_1^2 - 2\lambda_1 \mu_2^2 < 0$ .

Samuti näitasime sümmeetrilise lihtsustuse  $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu^2$  ja  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  korral, et segaliikme  $\mu_{12}^2 \varphi_1 \varphi_2$  lisamine potentsiaalile võimaldab valevaakumi teket vaid juhul, kui enne selle lisamist on punktides  $\Phi_{\pm\pm}$  lokaalsed miinimumid ja  $|\mu_{12}^2| < -\frac{2\lambda - \lambda_{12}}{2\lambda} \mu^2$ .

Numbriliste ekperimentide tulemusel märkasime järgmiseid seaduspärasusi:

- mõju kasvab potentsiaalide võrdsuse suunas,
- mõju on muutumatu lagranžiaani ruutliikmete positiivse arvuga skaleerimise suhtes,
- mõju on pöördvõrdeline lagranžiaani 4. järku liikmete positiivse arvuga skaleerimise suhtes.

Esimene seaduspärasus on kinnitatud varasemate tulemustega, kuid viimase kahe kindlaksmääramiseks saaks analüütiliselt uurida mõju muutumist lühikestel väljaruumi lõikudel, kus potentsiaali muut on ligikaudu lineaarne.

Käsitletud potentsiaali saaks ka täiendada, et jõuda asjakohasema mudelini – kahe Higgsi välja mudelini.

## Kasutatud allikad

- Brown, A. R. (2018). „Thin-wall approximation in vacuum decay: A lemma“. *Physical Review D* 97.10. ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.97.105002](https://doi.org/10.1103/physrevd.97.105002). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.105002>.
- Buttazzo, D., Degrassi, G., Giardino, P. P., Giudice, G. F., Sala, F., Salvio, A. ja Strumia, A. (2013). „Investigating the near-criticality of the Higgs boson“. *JHEP* 12, lk. 089. DOI: [10.1007/JHEP12\(2013\)089](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2013)089). arXiv: [1307.3536 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1307.3536).
- Coleman, S. (1977). „Fate of the false vacuum: Semiclassical theory“. *Phys. Rev. D* 15 (10), lk. 2929–2936. DOI: [10.1103/PhysRevD.15.2929](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.2929). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2929>.
- Espinosa, J. R. ja Konstandin, T. (2019). „A fresh look at the calculation of tunneling actions in multi-field potentials“. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2019.01, lk. 051–051. ISSN: 1475-7516. DOI: [10.1088/1475-7516/2019/01/051](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/01/051). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2019/01/051>.
- Guada, V., Nemevšek, M. ja Pintar, M. (2020). „FindBounce: Package for multi-field bounce actions“. *Computer Physics Communications* 256, lk. 107480. ISSN: 0010-4655. DOI: [10.1016/j.cpc.2020.107480](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107480). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107480>.
- Kangro, G. (1968). *Matemaatilise analüüsi II osa*. Valgus.
- Schwartz, M. D. (2013). *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press.
- Tong, D. (2015). „Quantum Field Theory University of Cambridge Part III Mathematical Tripos“. Teoses: URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:160008047>.

Zettili, N. (2022). *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Wiley.  
ISBN: 9781118307892. URL: <https://books.google.ee/books?id=zxt-EAAAQBAJ>.

## A Hessiaani $H(\Phi_{++})$ arvutamine

Siin lisas võtame definitsioonist järelduva hessiaani kuju (28) ja asendame sinna sisse punkti  $\Phi_{++}$  koordinaadid. Pärast mõningaid lihtsustusi saame avaldise viia kujule

$$\begin{aligned}
 H(\Phi_{++}) &= \\
 & \begin{bmatrix} 2\mu_1^2 + 12\lambda_1 \frac{\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} + 2\lambda_{12} \frac{\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} & 4\lambda_{12} \sqrt{\frac{\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2}} \sqrt{\frac{\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2}} \\ 4\lambda_{12} \sqrt{\frac{\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2}} \sqrt{\frac{\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2}} & 2\mu_2^2 + 12\lambda_2 \frac{\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} + 2\lambda_{12} \frac{\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} \end{bmatrix} = \\
 & \frac{1}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} \begin{bmatrix} 2\mu_1^2(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2) + 12\lambda_1(\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2) + 2\lambda_{12}(\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2) \\ \pm 4\lambda_{12} \sqrt{(\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2)(\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2)} \\ \pm 4\lambda_{12} \sqrt{(\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2)(\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2)} \end{bmatrix} = \\
 & 2\mu_2^2(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2) + 12\lambda_2(\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2) + 2\lambda_{12}(\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2) \\
 & \frac{1}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} \begin{bmatrix} -16\mu_1^2\lambda_1\lambda_2 + 8\mu_2^2\lambda_1\lambda_{12} \\ \pm 4\lambda_{12} \sqrt{\lambda_{12}^2\mu_1^2\mu_2^2 - 2\lambda_{12}(\lambda_1\mu_2^4 + \lambda_2\mu_1^4) + 4\lambda_1\lambda_2\mu_1^2\mu_2^2} \\ \pm 4\lambda_{12} \sqrt{\lambda_{12}^2\mu_1^2\mu_2^2 - 2\lambda_{12}(\lambda_1\mu_2^4 + \lambda_2\mu_1^4) + 4\lambda_1\lambda_2\mu_1^2\mu_2^2} \\ -16\mu_2^2\lambda_1\lambda_2 + 8\mu_1^2\lambda_2\lambda_{12} \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} \frac{-16\mu_1^2\lambda_1\lambda_2 + 8\mu_2^2\lambda_1\lambda_{12}}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} & \frac{\pm 4\lambda_{12} \sqrt{\lambda_{12}^2\mu_1^2\mu_2^2 - 2\lambda_{12}(\lambda_1\mu_2^4 + \lambda_2\mu_1^4) + 4\lambda_1\lambda_2\mu_1^2\mu_2^2}}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} \\ \frac{\pm 4\lambda_{12} \sqrt{\lambda_{12}^2\mu_1^2\mu_2^2 - 2\lambda_{12}(\lambda_1\mu_2^4 + \lambda_2\mu_1^4) + 4\lambda_1\lambda_2\mu_1^2\mu_2^2}}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} & \frac{-16\mu_2^2\lambda_1\lambda_2 + 8\mu_1^2\lambda_2\lambda_{12}}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

## B Teise peamiinori teisendus

Siin lisas lihtsustame avaldist  $\det H(\Phi_{++})$ , et oleks võimalik kirja panna positiiv-sustingimused. Sulgude avamise, koondamise ja taandamise kaudu saame peamii-norile kuju

$$\begin{aligned}
\det H(\Phi_{++}) &= \\
& \frac{(-16\mu_1^2\lambda_1\lambda_2 + 8\mu_2^2\lambda_1\lambda_{12})(-16\mu_2^2\lambda_1\lambda_2 + 8\mu_1^2\lambda_2\lambda_{12})}{(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)^2} \\
& - \frac{16\lambda_{12}^2(\lambda_{12}^2\mu_1^2\mu_2^2 - 2\lambda_{12}(\lambda_1\mu_2^4 + \lambda_2\mu_1^4) + 4\lambda_1\lambda_2\mu_1^2\mu_2^2)}{(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)^2} = \\
& \frac{256\mu_1^2\mu_2^2\lambda_1^2\lambda_2^2 - 128\mu_2^4\lambda_1^2\lambda_2\lambda_{12} - 128\mu_1^4\lambda_1\lambda_2^2\lambda_{12} + 64\lambda_{12}^2\lambda_1\lambda_2\mu_1^2\mu_2^2}{(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)^2} \\
& - \frac{16\lambda_{12}^4\mu_1^2\mu_2^2 - 32\lambda_{12}^3\lambda_1\mu_2^4 - 32\lambda_{12}^3\lambda_2\mu_1^4 + 64\lambda_{12}^2\lambda_1\lambda_2\mu_1^2\mu_2^2}{(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)^2} = \\
& 128\lambda_1\lambda_2 \frac{2\mu_1^2\mu_2^2\lambda_1\lambda_2 - \mu_2^4\lambda_1\lambda_{12} - \mu_1^4\lambda_2\lambda_{12}}{(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)^2} \\
& - 16\lambda_{12}^3 \frac{\lambda_{12}\mu_1^2\mu_2^2 - 2\lambda_1\mu_2^4 - 2\lambda_2\mu_1^4}{(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)^2} = \\
16\mu_1^2\mu_2^2 \frac{16\lambda_1^2\lambda_2^2 - \lambda_{12}^4}{(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)^2} & + 32\mu_1^4\lambda_2\lambda_{12} \frac{\lambda_{12}^2 - 4\lambda_1\lambda_2}{(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)^2} + 32\mu_2^4\lambda_1\lambda_{12} \frac{\lambda_{12}^2 - 4\lambda_1\lambda_2}{(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)^2} = \\
& \frac{\mu_1^2\mu_2^2(4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_{12}^2) - 2\lambda_{12}(\mu_1^4\lambda_2 + \mu_2^4\lambda_1)}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2} = \\
& \frac{\mu_1^2\mu_2^2(4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_{12}^2) - 2\lambda_{12}(\mu_1^4\lambda_2 + \mu_2^4\lambda_1)}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12}}.
\end{aligned}$$

## C Ruutvõrrandi lahendamine

Siin lisas leiame ruutvõrrandi  $\mu_1^2 \mu_2^2 \lambda_{12}^2 - 2\lambda_{12}(\mu_1^4 \lambda_2 + \mu_2^4 \lambda_1) + 4\lambda_1 \lambda_2 \mu_1^2 \mu_2^2 = 0$  lahendid. Selleks kasutame tavalist ruutvõrrandi lahendivalemit ja saame

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= \frac{2\mu_1^4 \lambda_2 + 2\mu_2^4 \lambda_1 \pm \sqrt{4(\mu_1^4 \lambda_2 + \mu_2^4 \lambda_1)^2 - 4\mu_1^2 \mu_2^2 4\lambda_1 \lambda_2 \mu_1^2 \mu_2^2}}{2\mu_1^2 \mu_2^2} = \\ &= \frac{\mu_1^4 \lambda_2 + \mu_2^4 \lambda_1 \pm \sqrt{(\mu_1^4 \lambda_2 + \mu_2^4 \lambda_1)^2 - 4\lambda_1 \lambda_2 \mu_1^4 \mu_2^4}}{\mu_1^2 \mu_2^2} = \\ &= \frac{\mu_1^4 \lambda_2 + \mu_2^4 \lambda_1 \pm \sqrt{\mu_1^8 \lambda_2^2 + \mu_2^8 \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \mu_1^4 \mu_2^4}}{\mu_1^2 \mu_2^2} = \\ &= \frac{\mu_1^4 \lambda_2 + \mu_2^4 \lambda_1 \pm \sqrt{(\mu_1^4 \lambda_2 - \mu_2^4 \lambda_1)^2}}{\mu_1^2 \mu_2^2} = \\ &= \frac{\mu_1^4 \lambda_2 + \mu_2^4 \lambda_1 \pm \mu_1^4 \lambda_2 \mp \mu_2^4 \lambda_1}{\mu_1^2 \mu_2^2}. \end{aligned}$$

Seega lahendid on  $\lambda_{12}'' = \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}$  ning  $\lambda_{12}''' = \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2}$ .

## D Juhtum $\mu_1^2 \mu_2^2 < 0$

Siin lisas uurime  $P(\lambda_{12})$  positiivsuspirkonda juhul, kui  $\mu_1^2 \mu_2^2 < 0$ .

Olgu  $\mu_1^2 \mu_2^2 < 0$  ja  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} > \lambda_{12}$ , siis  $P(\lambda_{12}) > 0$ , kui

$$\min \left\{ \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} \right\} < \lambda_{12} < \max \left\{ \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} \right\} < 0$$

ehk tingimus (32).

Eelduse  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} > \lambda_{12}$  tõttu saame statsionaarsuse tingimused (26) lihtsustada kujule (27).

$\mu_1^2 \mu_2^2 < 0$  on võimalik kahel juhul:  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$  või  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$ .

- Kui  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$ , siis saame statsionaarsuse tingimustest (27) liikme, kus on  $\lambda_i$ , teisele poole võrratust viimise ja  $\lambda_{12}$  kordajaga läbi jagamise teel võrratused

$$\lambda_{12} < \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \quad \lambda_{12} > \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2}.$$

Neist omakorda järeldeb

$$\frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} < \lambda_{12} < \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}$$

ja seega on rahuldatud tingimus (32).

- Kui  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$ , siis saame statsionaarsuse tingimustest (27) liikme, kus on  $\lambda_i$ , teisele poole võrratust viimise ja  $\lambda_{12}$  kordajaga läbi jagamise teel võrratused

$$\lambda_{12} > \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \quad \lambda_{12} < \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2}.$$

Neist omakorda järeldeb

$$\frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} > \lambda_{12} > \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}$$

ja seega on rahuldatud tingimus (32).

Olgu nüüd  $\mu_1^2 \mu_2^2 < 0$  ja  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} < \lambda_{12}$ , siis  $P(\lambda_{12}) > 0$ , kui

$$\lambda_{12} > \max \left\{ \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} \right\}$$

või

$$\lambda_{12} < \min \left\{ \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} \right\}$$

ehk tingimused (30) või (31).

Eelduse  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} < \lambda_{12}$  tõttu saame statsionaarsuse tingimused (26) kujul (33).

Jälle on  $\mu_1^2 \mu_2^2 < 0$  võimalik vaid juhtudel  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$  ja  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$ .

- Kui  $\mu_1^2 > 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$ , siis saame statsionaarsuse tingimustest (33) liikme, kus on  $\lambda_{12}$ , teisele poole võrratust viimise ja  $\lambda_{12}$  kordajaga läbi jagamise teel võrratused

$$\lambda_{12} > \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \quad \lambda_{12} < \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2}.$$

Neist omakorda järeldub

$$\frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} > \lambda_{12} > \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}$$

ja seega pole rahuldatud kumbki ringimustest (30) ja (31).

- Kui  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 > 0$ , siis saame statsionaarsuse tingimustest (33) liikme, kus on  $\lambda_{12}$ , teisele poole võrratust viimise ja  $\lambda_{12}$  kordajaga läbi jagamise teel võrratused

$$\lambda_{12} < \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}, \quad \lambda_{12} > \frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2}.$$

Neist omakorda järeldub

$$\frac{2\mu_2^2 \lambda_1}{\mu_1^2} < \lambda_{12} < \frac{2\mu_1^2 \lambda_2}{\mu_2^2}$$

ja seega pole rahuldatud kumbki tingimustest (30) ja (31).

## E Vabanemine avaldisest $2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12}$

Siin lisas näitame, et tingimustest  $\mu_1^2 < 0$ ,  $\mu_2^2 < 0$ ,  $\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 < 0$  ja  $\lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2 < 0$  järeldeb  $2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12} < 0$ , seega pole viimase märki eraldi vaja jälgida miinimumide tekkimise uurimisel.

Eeldame, et kehtivad  $\mu_1^2 < 0$  ja  $\mu_2^2 < 0$ . Näitame, et võrratustest

$$\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 < 0 \quad \text{ja} \quad \lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2 < 0$$

järeldub võrratus

$$2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12} < 0.$$

Saame kordajaga  $\lambda_i$  liikmed viia teisele poole ja siis jagada läbi  $\lambda_{12}$  kordajaga, et viia võrratused

$$\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 < 0 \quad \text{ja} \quad \lambda_{12}\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2 < 0$$

samaväärsele kujule

$$\lambda_{12} > 2\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\lambda_2 \quad \text{ja} \quad \lambda_{12} > 2\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\lambda_1.$$

Võtame nüüd uuritava võrratuse vasaku poole ja hakkame seda teisendama, viies alguses arvu 2 juure alla ning siis juure alust korrutades ja jagades arvuga  $\mu_1^2\mu_2^2$ , saame nii vahe viia kujule

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_{12} &= \\ \sqrt{2\lambda_1\frac{\mu_1^2\mu_2^2}{\mu_1^2\mu_2^2}2\lambda_2} - \lambda_{12} &= \\ \sqrt{2\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\lambda_12\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\lambda_2} - \lambda_{12}. \end{aligned}$$

Nüüd kasutame eeldustega samaväärseid võrratusi, et juurealust ülalt hinnata suu-

rema arvuga:

$$\sqrt{2\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\lambda_1 2\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\lambda_2} - \lambda_{12} <$$
$$\sqrt{\lambda_{12}\lambda_{12}} - \lambda_{12} = |\lambda_{12}| - \lambda_{12} = \lambda_{12} - \lambda_{12} = 0,$$

kus võrdus  $|\lambda_{12}| = \lambda_{12}$  tuleneb selles, et  $\lambda_{12} > 0$ , mis on omakorda järeldus eeldusest  $\lambda_{12}\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2 < 0$ .

## F Algebralised lihtsustused Wolfram Mathematica abiga

Siin lisas on joonisel 8 kuvatud programmi lähtekood, millega tegime algebralised lihtsustused avaldistele

$$2\mu^2 + 2\lambda_{12}\frac{-\mu_{12}^2 - 2\mu^2}{2(2\lambda + \lambda_{12})} + 12\lambda\frac{-\mu_{12}^2 - 2\mu^2}{2(2\lambda + \lambda_{12})} > 0,$$

$$(2\mu^2 + (2\lambda_{12} + 12\lambda)\varphi^2)^2 - (\mu_{12}^2 + 4\lambda_{12}\varphi^2)^2 > 0,$$

$$2\mu^2 + 2\lambda_{12}\frac{\mu_{12}^2 - 2\mu^2}{2(2\lambda + \lambda_{12})} + 12\lambda\frac{\mu_{12}^2 - 2\mu^2}{2(2\lambda + \lambda_{12})} > 0,$$

ja

$$(2\mu^2 + (2\lambda_{12} + 12\lambda)\varphi^2)^2 - (\mu_{12}^2 - 4\lambda_{12}\varphi^2)^2 > 0.$$

```

In[55]:= Iveer = Sqrt[(-μ12 - 2 μ^2) / (4 λ + 2 λ12)]
         IIVEer = Sqrt[(μ12 - 2 μ^2) / (4 λ + 2 λ12)]

Out[*]=  $\sqrt{\frac{-2 \mu^2 - \mu_{12}}{4 \lambda + 2 \lambda_{12}}}$ 

Out[*]=  $\sqrt{\frac{-2 \mu^2 + \mu_{12}}{4 \lambda + 2 \lambda_{12}}}$ 

In[57]:= hessVäike = μ^2 + 2 λ12 φ1^2 + 12 λ φ2^2
         hessSuur = (2 μ^2 + (2 λ12 + 12 λ) φ1^2) (2 μ^2 + (2 λ12 + 12 λ) φ2^2) - (μ12 + 4 λ12 φ1 φ2)^2

Out[*]= μ^2 + 2 λ12 φ1^2 + 12 λ φ2^2

Out[*]= -(μ12 + 4 λ12 φ1 φ2)^2 + (2 μ^2 + (12 λ + 2 λ12) φ1^2) (2 μ^2 + (12 λ + 2 λ12) φ2^2)

In[69]:= hessVäikeIveer = Simplify[hessVäike //. {φ1 → Iveer, φ2 → IVEer}]
         hessVäikeIIVEer = Simplify[hessVäike //. {φ1 → IIVEer, φ2 → -IIVEer}]
         hessSuurIveer = Simplify[hessSuur //. {φ1 → Iveer, φ2 → IVEer}]
         hessSuurIIVEer = Simplify[hessSuur //. {φ1 → IIVEer, φ2 → -IIVEer}]

Out[*]= - $\frac{10 \lambda \mu^2 + \lambda_{12} \mu^2 + 6 \lambda \mu_{12} + \lambda_{12} \mu_{12}}{2 \lambda + \lambda_{12}}$ 

Out[*]=  $\frac{-10 \lambda \mu^2 - \lambda_{12} \mu^2 + 6 \lambda \mu_{12} + \lambda_{12} \mu_{12}}{2 \lambda + \lambda_{12}}$ 

Out[*]=  $\frac{8 (2 \mu^2 + \mu_{12}) (-\lambda_{12} \mu^2 + 2 \lambda (\mu^2 + \mu_{12}))}{2 \lambda + \lambda_{12}}$ 

Out[*]= - $\frac{8 (2 \mu^2 - \mu_{12}) (-2 \lambda \mu^2 + \lambda_{12} \mu^2 + 2 \lambda \mu_{12})}{2 \lambda + \lambda_{12}}$ 

```

**Joonis 8:** Kasutatud lähtekood, mis tagastab lihtsustatud avaldised, siin on koodi suurustele  $\mu_{12}, \lambda_{12}, \phi_1, \phi_2$  vastavad suurused  $\mu_{12}^2, \lambda_{12}, \varphi_1, \varphi_2$ .

## G Arvutused

Siin lisas on arvutuste tulemused, mille põhjal näeme, et potentsiaali  $V$  skaleerimisel positiivse reaalarvuga  $k$  muutub mõju  $k$  korda väiksemaks. Joonisel 9 on arvutustel kasutatud programmi lähtekoodi osa. Juhule  $k = 1$  vastavad  $\mu_i^2, \lambda_i, \lambda_{12}$  defineerisime vahetult enne nähtavat lähtekoodi osa ja funktsiooni FindBounce väljundid sisestasime otse tabeli  $B$  tulpa. Tabeli tulp  $\frac{B_1}{k}$  on seal selleks, et võrrelda skaleerimata juhu ( $k = 1$ ) mõju jagatist arvuga  $k$  arvutustel saadud mõjuga  $B$ . Näeme, et need väärtused on läbivalt võrdsed.

```
In[531]:= minima = {{Sqrt[- μ1 / (2 λ1)], 0}, {0, Sqrt[- μ2 / (2 λ2)]]};
FindBounce[1 V[φ1, φ2], {φ1, φ2}, minima, "FieldPoints" → 100] ["Action"]
FindBounce[2 V[φ1, φ2], {φ1, φ2}, minima, "FieldPoints" → 100] ["Action"]
FindBounce[10 V[φ1, φ2], {φ1, φ2}, minima, "FieldPoints" → 100] ["Action"]
FindBounce[0.314 V[φ1, φ2], {φ1, φ2}, minima, "FieldPoints" → 100] ["Action"]
FindBounce[117.89 V[φ1, φ2], {φ1, φ2}, minima, "FieldPoints" → 100] ["Action"]
```

**Joonis 9:** Kasutatud programmi lähtekood, mille väljundid leiduvad tabelis tulbas  $B$ , siin suurused  $\phi_1, \phi_2$  vastavad väljadele  $\varphi_1, \varphi_2$ .

Arvutustulemused on nähtavad tabelis 1.

k	$\mu_1^2$	$\mu_2^2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_{12}$	B	B <sub>1</sub> /k
1	-0.767	-1.23	1.58	1.23	5.11	4.2464	4.2464
2	-1.534	-2.46	3.16	2.46	10.22	2.1232	2.1232
10	-7.67	-12.3	15.8	12.3	51.1	0.4246	0.4246
0.314	-0.240838	-0.38622	0.49612	0.38622	1.60454	13.5237	13.5237
117.89	-90.42163	-145.0047	186.2662	145.0047	602.4179	0.0360	0.0360
1	-1.23	-0.767	1.58	1.23	5.11	63.0826	63.0826
2	-2.46	-1.534	3.16	2.46	10.22	31.5411	31.5413
10	-12.3	-7.67	15.8	12.3	51.1	6.3081	6.3083
0.314	-0.38622	-0.240838	0.49612	0.38622	1.60454	200.9020	200.9000
117.89	-145.0047	-90.42163	186.2662	145.0047	602.4179	0.5351	0.5351
1	-0.1776	-0.2355	0.7942	0.6331	3	134.6760	134.6760
2	-0.3552	-0.471	1.5884	1.2662	6	67.3381	67.3380
10	-1.776	-2.355	7.942	6.331	30	13.4675	13.4676
0.314	-0.0557664	-0.073947	0.2493788	0.1987934	0.942	428.9070	428.9045
117.89	-20.937264	-27.763095	93.628238	74.636159	353.67	1.1424	1.1424
1	-1	-2	3	4	13	3.9659	3.9659
2	-2	-4	6	8	26	1.9829	1.9829
10	-10	-20	30	40	130	0.3966	0.3966
0.314	-0.314	-0.628	0.942	1.256	4.082	12.6302	12.6301
117.89	-117.89	-235.78	353.67	471.56	1532.57	0.0336	0.0336
1	-1.111	-2	3	4	13	10.9327	10.9327
2	-2.222	-4	6	8	26	5.4663	5.4664
10	-11.11	-20	30	40	130	1.0933	1.0933
0.314	-0.348854	-0.628	0.942	1.256	4.082	34.8174	34.8175
117.89	-130.97579	-235.78	353.67	471.56	1532.57	0.0927	0.0927
1	-1	-2	3	4.444	13	4.4413	4.4413
2	-2	-4	6	8.888	26	2.2206	2.2206
10	-10	-20	30	44.44	130	0.4441	0.4441
0.314	-0.314	-0.628	0.942	1.395416	4.082	14.1442	14.1442
117.89	-117.89	-235.78	353.67	523.90316	1532.57	0.0377	0.0377
1	-1	-2	3	4	13.1313	4.2570	4.2570
2	-2	-4	6	8	26.2626	2.1285	2.1285
10	-10	-20	30	40	131.313	0.4257	0.4257
0.314	-0.314	-0.628	0.942	1.256	4.1232282	13.5575	13.5575
117.89	-117.89	-235.78	353.67	471.56	1548.048957	0.0361	0.0361
1	-1.23456789	-0.98765432	2.19876543	1.32547698	4.987654321	45182.8000	45182.8000
2	-2.46913578	-1.97530864	4.39753086	2.65095396	9.975308642	22591.4000	22591.4000
10	-12.3456789	-9.8765432	21.9876543	13.2547698	49.87654321	4518.2800	4518.2800
0.314	-0.3876543175	-0.3101234565	0.690412345	0.4161997717	1.566123457	143894.0000	143894.2675
117.89	-145.5432086	-116.4345678	259.2124565	156.2604812	587.9945679	383.2620	383.2624
1	-77.202	-99.999	2.033	1.789	5.987	487.2840	487.2840
2	-154.404	-199.998	4.066	3.578	11.974	243.6400	243.6420
10	-772.02	-999.99	20.33	17.89	59.87	48.7267	48.7284
0.314	-24.241428	-31.399686	0.638362	0.561746	1.879918	1551.8600	1551.8599
117.89	-9101.34378	-11788.88211	239.67037	210.90521	705.80743	4.1327	4.1334
1	-0.9090909	-0.9191919	1.21212121	1.31313131	3.03132333	16873.5000	16873.5000
2	-1.8181818	-1.8383838	2.42424242	2.62626262	6.06264666	8436.7500	8436.7500
10	-9.090909	-9.191919	12.1212121	13.1313131	30.3132333	1687.3500	1687.3500
0.314	-0.2854545426	-0.2886262566	0.3806060599	0.4123232313	0.9518355256	53737.3000	53737.2611
117.89	-107.1727262	-108.3635331	142.8969694	154.8050501	357.3627074	143.1290	143.1292

**Tabel 1:** Arvutuste tabel, kus ühesuguse värviga taustal asuvad potentsiaal  $V(\Phi) = \mu_1^2\varphi_1^2 + \mu_2^2\varphi_2^2 + \lambda_1\varphi_1^4 + \lambda_2\varphi_2^4 + \lambda_{12}\varphi_1^2\varphi_2^2$  ja selle suurusega  $k$  skaleeritud versioonid ning neile vastavad mõjud  $B = B_k$ . Võrdluseks on parempoolseimas tulpas suurus  $\frac{B_1}{k}$ , mis tuleb arvutuste põhjal võrdne vastava mõjuga  $B_k$ .

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Richard Friedrichs,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Kahe reaalse skalaarväljaga mudeli valevaakumi lagunemine“, mille juhendajad on Kristjan Kannike, Julia Polikarpus ja Luca Marzola, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Richard Friedrichs

15.05.2024