

Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatilise statistika instituut

Anu Roos

**Elliptilised jaotused kasvukõvera
mudeli kirjeldamiseks**

Magistritöö

Juhendaja: prof. Tõnu Kollo

Tartu, 2004

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Mõisted ja tähistused	6
2 Maatriksnormaaljaotus	11
2.1 Definitsioon	11
2.2 Momendid	12
2.3 Hermite polünoomid	13
3 Elliptilised maatriksjaotused	14
3.1 Elliptilised jaotused	14
3.1.1 Sfäärilised jaotused	14
3.1.2 Elliptiline jaotus	15
3.2 Üldistus maatriksitele	18
4 Kasvukõvera mudel	21
4.1 Kasvukõvera mudeli definitsioon	21
4.2 Kasvukõvera mudeli erinevus võrreldes klassikalise lineaarse mudeliga	22
4.3 Kasvukõvera mudeli parameetrite hindamine	23
5 Kotzi jaotus	25
5.1 Definitsioon	25
5.2 Kotzi jaotuse parameetrite interpretatsioon	26
5.3 Karakteristlik funktsioon ja momendid	33
5.3.1 Karakteristlik funktsioon	33
5.3.2 Momendid	33
5.4 Marginaaljaotus	40
5.5 Maatriksjaotus	41
5.5.1 Maatriksjaotuse momendid	42
5.6 Ühemõõtmelise Kotzi jaotuse simuleerimiseeskiri	43

5.6.1	Üldine valikumeetod tasandil pideva juhusliku suuruse simuleerimiseks	43
5.6.2	Efektiivsus	44
5.6.3	Ülesande täpsustus	44
5.6.4	Ümbriku leidmine	45
5.6.5	Parameetrite leidmine	45
5.6.6	Γ -jaotuse modelleerimine	48
5.6.7	Kotzi jaotuse simuleerimiseeskiri ühemõõtmelisel juhul	49
5.6.8	Simuleerimiseeskirja katsetamine	50
5.7	Üldise Kotzi jaotuse simuleerimine	50
5.7.1	Simuleerimiseeskirja katsetamine kahemõõtmelisel juhul	52
6	Normaaljaotuse ja Kotzi jaotuse segu	54
6.1	Kotzi jaotuse ja normaaljaotuse segu unimodaalsuse tingimus (ühemõõtmelisel juhul)	57
6.2	Kotzi jaotuse ja normaaljaotuse segu unimodaalsuse tingimus	58
6.3	Parameetermaatriksi B jaotuse kuju	59
6.4	Kotzi jaotuse ja normaaljaotuse segu momendid	60
6.5	Kotzi maatriksjaotuse ja maatriksnormaaljaotuse segu mo- mendid	61
6.6	Marginaaljaotus	61
6.7	Kasvukõvera mudeli parameetermaatriksi B hindamine simuleeritud andmetest	64
	Kokkuvõte	68
	Summary	69
	Kirjanduse loetelu	70
	Lisa A	71
	Lisa B	72
	Lisa C	73

Sissejuhatus

Käesolev töö on välja kasvanud kasvukõvera mudelite uurimisest. Tegemist on ajas korduvate mõõtmiste jaoks kasutatava lineaarse mudeli üldistusega, mis sõltub kahest parameetermaatriksist - $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{\Sigma}$. Neist esimese abil kirjeldatakse vaatluste keskväärtused, teine on vajalik hajuvuse hindamisel.

Antud töös uuritakse kasvukõvera mudeli parameetri $\mathbf{B}$ hinnangut ja selle jaotust. Selgub, et kasvukõvera mudeli parameetermaatriksi jaotust saab lähendada seguga kahest elliptilisest jaotusest, normaaljaotusest ja Kotzi jaotusest. Kotzi jaotusele pole varem kirjanduses eriti tähelepanu pööratud, segu uurimisega pole teadaolevalt üldse tegeldud.

Töö esimene osa on pühendatud kasutatud mõistete ja tähistuste selgitamisele. Töös kasutame maatrikstehnikat, selleks on defineeritud maatrikstuletis, toodud on ka mõnede edaspidi kasutatavate operatsioonide ja funktsioonide definitsioonid.

Teises osas tuuakse sisse hiljem kasutatavad mitmemõõtmeline ja maatriksnormaaljaotus, tuuakse ära maatriksnormaaljaotuse momendid ning defineeritakse kasvumudeli parameetrite hindamisel kasutatavad Hermite polünoomid maatrikskuul.

Kolmandas osas vaadeldakse elliptiliste jaotuste klassi ja tuuakse mõned nende jaotustega seotud tulemused. Elliptiliste jaotuste klassi kuuluvad teatavate omadustega sümmeetrilised jaotused, see klass on kinnine marginaaljaotuste ja tinglike jaotuste suhtes. Elliptilised on ka normaaljaotus ning Kotzi tüüpi jaotused.

Neljandas osas tutvustatakse kasvukõvera mudelit, tuuakse sisse kasvukõvera mudeli parameetrite suurima tõepära hinnangud ja esitatakse mudeli parameetermaatriksi $\mathbf{B}$ hinnangu jaotuse lähend. Osutub, et Edgeworthi tüüpi lähendina saadav tihedusfunktsioon on ühe Kotzi jaotuse ja normaaljaotuse tihedusfunktsioonide segu.

Viiendas osas uuritakse Kotzi tüüpi jaotust ja selle kuju sõltuvalt parameetritest. Leitakse meid huvitava Kotzi jaotuse järsakuse karakteristikud, tuuakse sisse maatriksjaotus. Lõpuks leitakse uuritava Kotzi jaotuse simuleerimiseeskiri ja katsetatakse seda modelleerimisel.

Kuuendas osas uuritakse kasvukõvera mudeli parameetermaatriksi $\mathbf{B}$ jaotuse lähendis esinevat Kotzi jaotuse ja normaaljaotuse segu. Uuritakse selle segu kuju sõltuvust segu kaaludest. Samuti leitakse segu esimesed momendid.

Töö esimesed neli osa on referatiivsed. Uued tulemused on seotud eeskätt Kotzi jaotuse uurimisega, kirjeldatud on jaotuse kuju sõltuvus

parameetritest, leitud on Kotzi jaotuse järsakuskordaja ja -parameeter ning simuleerimiseeskiri. Samuti ei ole varem kirjeldatud Kotzi ja normaaljaotuse segu.

Töös tehtud simulatsioonideks kasutatakse statistikapaketti R. Pakett R on tasuta tarkvara, mis võimaldab muuhulgas ka mugavalt jaotuste genereerimise algoritme programmeerida ja graafikuid kujundada. Pakett R ja igasugune info paketi kohta on kättesaadav R-i koduleheküljelt, mille aadress on toodud kasutatud kirjanduse loetelus viimasena.

1 Mõisted ja tähistused

Selles osas toome sisse hilisemates peatükkides kasutatavad mõisted ja tähistused. Edastistes peatükkides kasutame järgmisi tähistusi:

- f_X - juhusliku suuruse X tihedusfunktsioon;
- $f_{\mathbf{x}}$ - juhusliku vektori $\mathbf{x}$ tihedusfunktsioon;
- $F_{\mathbf{x}}$ - juhusliku vektori $\mathbf{x}$ jaotusfunktsioon;
- f_N - normaaljaotusega juhusliku vektori tihedusfunktsioon;
- F_N - normaaljaotusega juhusliku vektori jaotusfunktsioon (tähistuse kasutamisel on täpsustatud, milliste parameetritega normaaljaotusega on tegemist);
- $f_{\mathbf{X}}$ - juhusliku maatriksi $\mathbf{X}$ tihedusfunktsioon;
- $F_{\mathbf{X}}$ - juhusliku vektori $\mathbf{X}$ jaotusfunktsioon;
- $\mathbf{x} \stackrel{d}{=} \mathbf{y}$ - vektorid $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ on sama jaotusega;
- $\text{rank}(\mathbf{X})$ - maatriksi $\mathbf{X}$ astak.

Positiivselt määratud maatriksi $\mathbf{S} : p \times p$ ruutjuureks nimetame maatriksit $\mathbf{A}$, mille korral $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{S}$. Igal positiivselt määratud sümmeetrilisel maatriksil $\mathbf{S}$ leidub ruutjuur $\mathbf{A}$, mis on sümmeetriline maatriks. Nimetame seda maatriksit $\mathbf{A}$ maatriksi $\mathbf{S}$ sümmeetriliseks ruutjuureks.

Edaspidi vajame **maatrikstuletist**:

Definitsioon 1.1. Olgu maatriksi $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ elemendid maatriksi $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ elementide funktsioonid. Maatriksit $\frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{pq \times rs}$ nimetatakse maatriksi $\mathbf{Y}$ tuletiseks maatriksi $\mathbf{X}$ järgi hulgal A , kui kõik osatuletised $\frac{\partial y_{kl}}{\partial x_{ij}}$ eksisteerivad ja on pidevad hulgal A ning:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \text{vec}\mathbf{X}} \text{vec}'\mathbf{Y}, \quad (1.1)$$

kus

$$\frac{\partial}{\partial \text{vec}\mathbf{X}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p1}}, \frac{\partial}{\partial x_{12}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{1q}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{pq}} \right)'.$$

Vajame ka k -järku maatrikstuletise definitsiooni. Selle definitsiooni anname rekursiivselt:

Definitsioon 1.2. Maatriksi $\mathbf{Y}$ k -järku tuletis maatriksi $\mathbf{X}$ järgi defineeritakse maatriksi $\mathbf{Y}$ $(k-1)$ -järku tuletise kaudu järgnevalt:

$$\frac{d^k \mathbf{Y}}{d\mathbf{X}^k} = \frac{d}{d\mathbf{X}} \left(\frac{d^{k-1} \mathbf{Y}}{d\mathbf{X}^{k-1}} \right),$$

kus $\frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}}$ on defineeritud valemiga (1.1).

Anname siinkohal ka mõnede hiljem kasutust leidvate funktsioonide definitsioonid:

Definitsioon 1.3. Juhusliku p -vektori $\mathbf{x}$ **karakteristlikuks funktsiooniks** nimetatakse funktsiooni $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = E(\exp(i\mathbf{t}'\mathbf{x}))$$

Definitsioon 1.4. Juhusliku p -vektori $\mathbf{x}$ **kumulantfunktsiooniks** nimetatakse funktsiooni:

$$\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \ln \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p.$$

Edaspidi kasutame tähistusi:

- $m_k(\mathbf{x})$ - juhusliku vektori $\mathbf{x}$ k -järku moment;
- $\bar{m}_k(\mathbf{x})$ - juhusliku vektori $\mathbf{x}$ k -järku tsentraalne moment;
- $c_k(\mathbf{x})$ - juhusliku vektori $\mathbf{x}$ k -järku kumulant;

Kui juhusliku p -vektori $\mathbf{x}$ karakteristlik funktsioon $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ on k korda diferentseeruv kohal $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, siis juhusliku vektori k -järku moment võrdub:

$$m_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\mathbf{t}^k} \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p, \quad (1.2)$$

kus maatrikstuletis on antud definitsioonides 1.1 ja 1.2.

Juhusliku p -vektori $\mathbf{x}$ k -järku tsentraalne moment võrdub:

$$\bar{m}_k(\mathbf{x}) = m_k(\mathbf{x} - E\mathbf{x}) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\mathbf{t}^k} \varphi_{\mathbf{x}-E\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p, \quad (1.3)$$

kus maatrikstuletis on antud definitsioonides 1.1 ja 1.2.

Kui juhusliku p -vektori $\mathbf{x}$ kumulantfunktsioon $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ on k korda diferentseeruv kohal $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, siis juhusliku vektori k -järku kumulant võrdub:

$$c_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\mathbf{t}^k} \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}, \quad t \in \mathbb{R}^p, \quad (1.4)$$

kus maatrikstuletis on antud definitsioonides 1.1 ja 1.2.

Definitsioon 1.5. Olgu $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_q)$ $p \times q$ -maatriks, kus $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, q$, on i -s veeruvektor. Vektoriseerimisoperaator vec on operaator vektorruumist $(\mathbb{R})^{p \times q}$ vektorruumi $(\mathbb{R})^{pq}$,

$$\text{vec} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_q \end{pmatrix}.$$

Definitsioon 1.6. Ruutmaatriksi $\mathbf{A} = (a_{ij}) : p \times p$ **jäljeks** nimetatakse selle maatriksi peadiagonaali elementide summat:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^p a_{ii}.$$

Definitsioon 1.7. Blokkmaatriksit $\mathbf{K}_{p,q} : pq \times pq$, mis koosneb $q \times p$ blokkidest nimetatakse **kommutatsioonimaatriksiks**, kui

$$(\mathbf{K}_{p,q})_{(i,j)(h,g)} = \begin{cases} 1, & g = j, h = i, \quad i, h = 1, \dots, p \quad j, g = 1, \dots, q; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Blokkmaatriksite juures kasutatakse kahekordsete indeksite süsteemi. Esimene indeksite paar määrab ära rea blokkmaatriksis ja teine indeksite paar veeru asukoha, kusjuures indeksipaaride esimesed indeksid määravad ära bloki ja teised indeksid elemendi asukoha blokis. Näiteks kui $\mathbf{A}$ on 6×6 blokkmaatriks, mis koosneb 2×3 blokkidest, siis tähistus $(\mathbf{A})_{(2,1)(2,3)}$ määrab maatriksi $\mathbf{A}$ elemendi, mis asub teise blokkide rea esimeses reas ja teise blokkide veeru kolmandas veerus. Kui vaadelda maatriksit $\mathbf{A}$ ilma blokkisüsteemi arvestamata, siis oleks tegemist elemendiga $a_{3,6}$.

Definitsioon 1.8. Juhusliku maatriksi $\mathbf{X} : p \times q$ **karakteristlikuks funktsiooniks** nimetatakse funktsiooni $\varphi : \mathbb{R}^{pq} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}) = E(\exp(i\text{tr}(\mathbf{T}'\mathbf{X}))),$$

kus maatriksi $\mathbf{T}$ dimensioonid on samad, mis maatriksil $\mathbf{X}$.

Definitsioon 1.9. Juhusliku maatriksi $\mathbf{X} : p \times q$ **kumulantfunktsiooniks** nimetatakse funktsiooni:

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}) = \ln \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T})$$

Edaspidi kasutame järgmisi tähistusi:

- $m_k(\mathbf{X})$ - juhusliku maatriksi $\mathbf{X}$ k -järku moment;
- $\overline{m}_k(\mathbf{X})$ - juhusliku maatriksi $\mathbf{X}$ k -järku tsentraalne moment;
- $c_k(\mathbf{X})$ - juhusliku maatriksi $\mathbf{X}$ k -järku kumulant;

Kui juhusliku maatriksi $\mathbf{X} : p \times q$ karakteristik funktsioon $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T})$ on k korda diferentseeruv kohal $\mathbf{T} = \mathbf{0}$, siis juhusliku maatriksi k -järku moment võrdub:

$$m_k(\mathbf{X}) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\mathbf{T}^k} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}) \Big|_{\mathbf{T}=\mathbf{0}}, \quad T \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad (1.5)$$

kus maatrikstuletis on antud definitsioonides 1.1 ja 1.2.

Juhusliku maatriksi k -järku tsentraalne moment võrdub:

$$\overline{m}_k(\mathbf{X}) = m_k(\mathbf{X} - E\mathbf{X}) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\mathbf{T}^k} \varphi_{\mathbf{X}-E\mathbf{X}}(\mathbf{T}) \Big|_{\mathbf{T}=\mathbf{0}}, \quad T \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad (1.6)$$

kus maatrikstuletis on antud definitsioonides 1.1 ja 1.2.

Kui juhusliku maatriksi $\mathbf{X}$ kumulantfunktsioon $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T})$ on k korda diferentseeruv kohal $\mathbf{T} = \mathbf{0}$, siis juhusliku maatriksi k -järku kumulant võrdub:

$$c_k(\mathbf{X}) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{d\mathbf{T}^k} \psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}) \Big|_{\mathbf{T}=\mathbf{0}}, \quad T \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad (1.7)$$

kus maatrikstuletis on antud definitsioonides 1.1 ja 1.2.

Mardia (1970) võttis kasutusele mitmemõõtmeliste jaotuste asümmeetria ja järsakuse kirjeldamiseks arvulised karakteristikud $\beta_{1,p}$ ja $\beta_{2,p}$. Esitame need suurused järgnevalt momentide kaudu kasutades Kollo, Srivastava (2000) esitust.

Definitsioon 1.10. Olgu $\mathbf{x}$ juhuslik p -vektor keskväärtusvektoriga $\boldsymbol{\mu}$ ja dispersioonimaatriksiga $\boldsymbol{\Sigma}$ ja $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$, olgu juhusliku vektori $\mathbf{y}$ kolmas ja neljas moment vastavalt $m_3(\mathbf{y})$ ja $m_4(\mathbf{y})$ ning vastavad kumulandid $c_3(\mathbf{y})$ ja $c_4(\mathbf{y})$. Siis juhusliku vektori $\mathbf{x}$ asümmeetriakordaja $\beta_{1,p}$ ja järsakuskordaja $\beta_{2,p}$ on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned} \beta_{1,p} &= tr[c_3(\mathbf{y})^T c_3(\mathbf{y})] = tr[m_3(\mathbf{y})^T m_3(\mathbf{y})], \\ \beta_{2,p} &= tr[m_4(\mathbf{y})] = tr[c_4(\mathbf{y})] + p^2 + 2p. \end{aligned}$$

Definitsiooni 1.10 kasutamiseks peavad neljandad momendid olema ruutmaatriksid. Meie poolt definitsioonis 1.1 antud tuletise definitsiooni põhjal leitud neljanda momendi dimensioon on aga $p \times p^3$. Seetõttu on definitsioonis 1.10 esitatud asümmeetrilise- ja järsakuskordajate leidmisel mugavam kasutada MacRae tuletise järgi leitud momente. Esitame järgnevalt MacRae tuletise definitsiooni MacRae (1974).

Definitsioon 1.11. Olgu maatriksi $\mathbf{Y} : r \times s$ elemendid maatriksi $\mathbf{X} : p \times q$ elementide funktsioonid. Maatriksit $\frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} : rp \times sq$ nimetatakse maatriksi $\mathbf{Y}$ tuletiseks maatriksi $\mathbf{X}$ järgi hulgal A , kui kõik osatuletised $\frac{\partial y_{kl}}{\partial x_{ij}}$ eksisteerivad ja on pidevad hulgal A ning:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{Y} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}. \quad (1.8)$$

Defineeritud tuletises esinevad kõik definitsioonis 1.1 esinevad osatuletised, kuid nad on organiseeritud teisiti.

Kui juhusliku vektori $\mathbf{x} : p \times 1$ karakteristik funktsioon $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ on k korda diferentseeruv kohal $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, siis juhusliku maatriksi k -järku moment MacRae tuletise järgi võrdub:

$$m_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt dt' \dots dt} \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{T}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}, & k \text{ on paaris,} \\ \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt dt' \dots dt'} \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{T}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}, & k \text{ on paaritu.} \end{cases}$$

kus maatrikstuletis on antud definitsiooniga 1.11.

Lisaks vajame hiljem MacRae tuletise juures ka maatriksite tähtkorrutist (MacRae, 1974).

Definitsioon 1.12. Maatriksi $\mathbf{A} : p \times q$ ja blokkmaatriksi $\mathbf{B} : pr \times qs$ tähtkorrutiseks nimetatakse $r \times s$ maatriksit $\mathbf{A} * \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{ij} B_{ij},$$

kus B_{ij} on $r \times s$ mõõtmeline ij -s maatriksi $\mathbf{B}$ blokk.

Tegemist on maatriksi jälje leidmise üldistusega, kui $\mathbf{A}, \mathbf{B} : p \times p$, siis

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{B}).$$

2 Maatriksnormaaljaotus

2.1 Definitatsioon

Vaatleme juhuslikku vektorit $\mathbf{u} = (U_1, U_2, \dots, U_p)$, mis koosneb p sõltumatust standardse normaaljaotusega juhuslikust suurusest. Sõltumatuse tõttu on juhusliku vektori $\mathbf{u}$ tihedusfunktsioon kujul:

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{u}\mathbf{u}')} \quad (2.1)$$

tähistame $\mathbf{u} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Selleks, et saada üldist definitiooni normaaljaotusega juhusliku vektori jaoks kasutame järgnevat skeemi. Olgu $\mathbf{x}$ p -mõõtmeline vektor, keskväärusvektoriga $E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}$ ja dispersioonimaatriksiga $D(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}$, kus $\boldsymbol{\Sigma} : p \times p$ on mittenegatiivselt määratud. Sellisel juhul saame leida maatriksi $\boldsymbol{\Delta}$ nii, et $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}'$ ja $\boldsymbol{\Delta}$ on täisastakuga maatriks, $r(\boldsymbol{\Delta}) = p$. Siis öeldakse, et juhuslik vektor $\mathbf{x}$ on p -mõõtmelise normaaljaotusega parameetritega $\boldsymbol{\mu}$ ja $\boldsymbol{\Sigma}$, kui

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}, \quad (2.2)$$

kus $\mathbf{u} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, tähistame $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Kui $\boldsymbol{\Sigma} > 0$, siis saame valemist (2.1) ja (2.2), et juhusliku vektori $\mathbf{x}$ tihedusfunktsioon on kujul:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})')\right), \quad (2.3)$$

Nüüd jõuame selle paragrahvi põhilise eesmärgi - maatriksnormaaljaotuse - juurde.

Definitioon 2.1. Olgu $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}'$ ja $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}'$, kus $\boldsymbol{\Delta} : p \times r$ ja $\boldsymbol{\Gamma} : n \times s$. Öeldakse, et maatriks $\mathbf{X} : p \times n$ on normaaljaotusega parameetritega $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ ja $\boldsymbol{\Psi}$, kui ta on sama jaotusega kui

$$\mathbf{M} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{U}\boldsymbol{\Gamma}', \quad (2.4)$$

kus $\mathbf{M} : p \times n$ on mittejuhuslik ja $\mathbf{U} : r \times s$ koosneb s sõltumatust normaaljaotusega $N_r(0, \mathbf{I})$ vektorist $\mathbf{U}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$. Tähistame $\mathbf{X} \sim N_{p,n}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Psi})$.

Kui $\boldsymbol{\Sigma}$ ja $\boldsymbol{\Psi}$ on positiivselt määratud, siis on $\boldsymbol{\Delta}$ ja $\boldsymbol{\Gamma}$ valemis (2.4) mõlemad regulaarsed ruutmaatriksid.

Kuna $\text{vec}\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}$ on ühe ja sama jaotusega, siis rakendades vec-operaatorit valemile (2.4) saame, et $\mathbf{X}$ on sama jaotusega kui vektor

$$\text{vec}\mathbf{X} = \text{vec}\mathbf{M} + (\boldsymbol{\Gamma} \otimes \boldsymbol{\Delta})\text{vec}\mathbf{U}.$$

Seega on tähistus $\mathbf{X} \sim N_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi})$ samaväärne tähistusega $\text{vec}\mathbf{X} \sim N_{pn}(\text{vec}\mathbf{M}, \mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma})$. Kuna võrduses (2.4) juhusliku maatriksi $\mathbf{U}$ keskväär-tus on $\mathbf{0}$, siis saame, et $E(\mathbf{X}) = \mathbf{M}$ ja kuna juhusliku maatriksi dispersioon on defineeritud võrdusega $D(\mathbf{X}) = D(\text{vec}\mathbf{X})$, siis $D(\mathbf{X}) = \mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma}$. Interpre-tatsiooni mõttes lisame, et maatriks $\mathbf{\Psi}$ kirjeldab kovariatsiooni maatriksi $\mathbf{X}$ veergude vahel ja maatriks $\mathbf{\Sigma}$ maatriksi $\mathbf{X}$ ridade vahel. Seega, kogu kovari-atsioon maatriksi $\mathbf{X}$ kahe elemendi vahel on kahe teguri korrutis:

$$\text{cov}(x_{ij}, x_{kl}) = \sigma_{ik}\psi_{jl},$$

kus $\mathbf{X} = (x_{ij})$, $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ik})$ ja $\mathbf{\Psi} = (\psi_{jl})$. Kui $\boldsymbol{\mu}_i$ tähistab maatriksi $\mathbf{M}$ i -ndat veergu, siis juhul kui $\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}_n$, st maatriksi $\mathbf{X}$ veerud on sõltumatud, on maatriksi $\mathbf{X}$ read normaaljaotusega $N(\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{\Sigma})$. Kui ka $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}_p$, siis on kõik maatriksi $\mathbf{X}$ elemendid omavahel sõltumatud.

Kui korrutis $\mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma}$ on positiivselt määratud, siis saame maatriksnormaal-jaotuse $N_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi})$ tihedusfunktsiooni kujul:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}pn} |\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{\Psi}|^{-\frac{p}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mathbf{M})')\right). \quad (2.5)$$

2.2 Momendid

Maatriksnormaaljaotuse momendid ja tsentraalsed momendid on leitud käsikirjas Kollo, von Rosen (2004, lk 202). Toome siin ära edaspidi vajalikud avaldised.

Teoreem 2.1. *Olgu $\mathbf{X} \sim N_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi})$, siis*

$$m_1(\mathbf{X}) = E\mathbf{X} = \mathbf{M}; \quad (2.6)$$

$$m_2(\mathbf{X}) = (\mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma}) + \text{vec}\mathbf{M}\text{vec}'\mathbf{M}. \quad (2.7)$$

Samuti vajame edaspidi dispersiooni avaldist:

Teoreem 2.2. *Olgu $\mathbf{X} \sim N_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi})$, siis kõik maatriksi $\mathbf{X}$ paaritut järku tsentraalsed momendid on võrdsed nulliga ja*

$$\overline{m}_2(\mathbf{X}) = D\mathbf{X} = \mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma}. \quad (2.8)$$

2.3 Hermite polünoomid

Toetudes normaalkaotusele, toome sisse Hermite polünoomi mõiste üldistuse mitmemõõtmelisele juhule (Kollo, von Rosen (2004), lk 353). Seda vajame edaspidi kasvukõvera mudeli parameetrite kaotuse lähendi leidmiseks.

Definitsioon 2.2. Mitmemõõtmeliseks k -järku Hermite polünoomiks vektori $\boldsymbol{\mu}$ ja maatriksi $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$ suhtes nimetatakse maatriksit $\mathbf{H}_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kui ta rahuldab võrdust:

$$\frac{d^k f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^k} = (-1)^k \mathbf{H}_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}),$$

kus tuleb $\frac{d^k}{d\mathbf{x}^k}$ on antud definitsioonis 1.1 ja 1.2 ning $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ on normaalkaotuse $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ tihedusfunktsioon:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right).$$

Teoreem 2.3. Mitmemõõtmelise Hermite polünoomid on $\mathbf{H}_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $k = 0, 1, 2, 3$ on kujul:

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= 1; \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}); \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}; \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}]^{\otimes 2} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \text{vec}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\ &\quad - [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}] \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Juhul kui vaatleme tsentreeritud normaalkaotust $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, siis saame avaldised lihtsustatud kujul. Seejuures jätame ära argumendi $\mathbf{0}$ ning kasutame tähistust $\mathbf{H}_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Järeldus 2.4. Mitmemõõtmelised Hermite polünoomid $\mathbf{H}_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma})$, $k = 0, 1, 2, 3$ on kujul:

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma}) &= 1; \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma}) &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}; \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma}) &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} (\mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{\otimes 2} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} \text{vec}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\ &\quad - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

3 Elliptilised maatriksjaotused

3.1 Elliptilised jaotused

Elliptiliste jaotuste kohta võib lähemalt lugeda raamatutest Fang, Kotz, Ng (1990), lk 26-66 või Fang, Zhang (1990), lk 53-72. See jaotuste klass koondab teatud heade omadustega sümmeetrilised jaotused - klass on kinnine jaotuse tinglikustamise ja marginaaljaotuse võtmise suhtes, juhuslike vektorite ja maatriksite momentide leidmine on taandatav vektorite või maatriksite järgi diferentseerimise asemel tavalise ühemõõtmelise funktsiooni tuletise leidmisele.

3.1.1 Sfäärilised jaotused

Sfäärilistel jaotustel on elliptiliste jaotuste klassis samasugune roll nagu standardisel normaaljaotusel $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$ normaaljaotuste $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ hulgas.

Definitsioon 3.1. *Öeldakse, et vektor $\mathbf{x} : p \times 1$ on sfäärilise jaotusega kui $\mathbf{x}$ ja $\boldsymbol{\Gamma}'\mathbf{x}$ on sama jaotusega kõigi ortogonaalsete maatriksite $\boldsymbol{\Gamma} : p \times p$ korral.*

Ortogonaalse maatriksi korral $\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}' = \mathbf{I}$. Sellele tuginedes jõuame tulemuseni, et pideva sfäärilise jaotusega juhusliku vektori $\mathbf{x}$ jaotus saab sõltuda argumentist $\mathbf{x}$ ainult $\mathbf{x}'\mathbf{x}$ väärtuse kaudu. Selle tingimuse tõttu on ilmne, et ainult sümmeetriline jaotus saab olla sfääriline.

Teoreem 3.1. *Vektor $\mathbf{x} : p \times 1$ on sfäärilise jaotusega parajasti siis, kui tema karakteristik funktsioon $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ rahuldab üht järgnevast kahest samaväärsest tingimusest:*

- (i) *iga ortogonaalse maatriksi $\boldsymbol{\Gamma} : p \times p$ korral $\varphi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\Gamma}'\mathbf{t}) = \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$,*
- (ii) *leidub ühemuutuja funktsioon $\phi(\cdot)$, nii et $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}'\mathbf{t})$.*

Sfääriliste jaotuste teoorias on tähtsal kohal juhuslik p -mõõtmeline vektor $\mathbf{u}$, mis on ühtlaselt jaotunud ruumi $\mathbb{R}^p$ ühiksfääril. Selline vektor $\mathbf{u}$ on sfäärilise jaotusega. Vektori $\mathbf{u}$ tähtsus selgub järgmises teoreemis.

Teoreem 3.2. *Olgu $\mathbf{x} : p \times 1$ sfäärilise jaotusega. Siis kehtib $\mathbf{x}$ jaoks stohhastiline esitus*

$$\mathbf{x} \stackrel{d}{=} R\mathbf{u},$$

kus $\mathbf{u}$ on ühtlase jaotusega ühiksfääril ja R on mittenegatiivne vektorist $\mathbf{u}$ sõltumatu juhuslik suurus jaotusfunktsiooniga $F(x)$.

3.1.2 Elliptiline jaotus

Definitsioon 3.2. Ütleme, et p -vektor $\mathbf{x}$ on elliptilise jaotusega parameetritega $\boldsymbol{\mu} : p \times 1$ ja $\mathbf{V} : p \times p$, kui

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{y},$$

kus $\mathbf{y}$ on sfäärilise jaotusega ja $\mathbf{A} : p \times k$, $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{V}$ ning $\text{rank}(\mathbf{V}) = k$.

Tähistame $\mathbf{x} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$. Siinkohal märgime, et kirjutades $\mathbf{x} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ ei määra me üheselt vektori $\mathbf{x}$ jaotust. Sellega ütleme, et tema jaotus on elliptiline, parameetritega $\boldsymbol{\mu}$ ja $\mathbf{V}$, mille tähendus selgub hiljem, kui vaatleme momente.

Elliptilise jaotuse karakteristikul funktsioonil on järgmine kuju.

Teoreem 3.3. Olgu $\mathbf{x} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ ja $\text{rank}(\mathbf{V}) = k$, siis vektori $\mathbf{x}$ karakteristik funktsioon $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ on kujul

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \exp(it'\boldsymbol{\mu})\phi(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \quad (3.1)$$

Teoreemist näeme, et lisaks parameetritele $\boldsymbol{\mu}$ ja $\mathbf{V}$ on karakteristikliku funktsiooni määramiseks vaja teada funktsiooni $\phi(\cdot)$. Nimetame seda edaspidi karakteristikliku funktsiooni genereerivaks funktsiooniks. Kuna karakteristiklik funktsioon määrab jaotuse üheselt, siis juhul, kui meid huvitav juhuslik vektor on elliptilise jaotusega, teame parameetreid ja teame funktsiooni $\phi(\cdot)$, siis teame selle juhusliku vektori täpset jaotust. Kui tahame näidata, et vektor $\mathbf{x}$ on elliptilise jaotusega $\mathbf{x} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ ja tema karakteristikliku funktsiooni määrab funktsioon $\phi(\cdot)$, siis tähistame seda $E_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, \phi(\cdot))$.

Kõik elliptilise jaotuse marginaaljaotused on elliptilised (teoreemist 3.2)

Vaatleme ka elliptilise jaotuse arvkarakteristikuid.

Järgnevas on $\phi(\cdot)$ funktsioon, mida on kasutatud võrduses (3.1), $\phi'(\cdot)$ ja $\phi''(\cdot)$ tähistavad vastavalt tema esimest ja teist tuletist. Järgmistes teoreemides on toodud elliptilise jaotuse momentide avaldised. Toodud momendid ja tsentraalsed momendid on leitud käsikirjas Kollo, von Rosen (2004, lk 225-227).

Teoreem 3.4. Olgu $\mathbf{x} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$. Kui momendid eksisteerivad, on nad

kujul

$$m_1(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}; \quad (3.2)$$

$$m_2(\mathbf{x}) = -2\phi'(0)\mathbf{V} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'; \quad (3.3)$$

$$m_3(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\mu}')^{\otimes 2} - 2\phi'(0)(\boldsymbol{\mu}' \otimes \mathbf{V} + \mathbf{V} \otimes \boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu} \text{vec}'\mathbf{V}); \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} m_4(\mathbf{x}) = & \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\mu}')^{\otimes 3} - 2\phi'(0)\boldsymbol{\mu}(\text{vec}\mathbf{V} \otimes \boldsymbol{\mu}')(\mathbf{I}_{p^3} + \mathbf{I}_p \otimes \mathbf{K}_{p,p}) \\ & - 2\phi'(0)[(\boldsymbol{\mu}')^{\otimes 2} \otimes \mathbf{V} + \boldsymbol{\mu}' \otimes \mathbf{V} \otimes \boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu} \otimes \text{vec}'\mathbf{V}] + \mathbf{V} \otimes (\boldsymbol{\mu}')^{\otimes 2} \\ & + 4\phi''(0)[(\mathbf{V} \otimes \text{vec}'\mathbf{V}) + (\text{vec}'\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})(\mathbf{I}_{p^3} + \mathbf{I}_p \otimes \mathbf{K}_{p,p})]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Anname ka paarisarvulist järku tsentraalsete momentide avaldised. Kõik paaritud järku tsentraalsed momendid on elliptiliste jaotuste korral nullid. Seega on elliptilise jaotuse asümmeetriakordaja 0.

Teoreem 3.5. *Olgu $\mathbf{x} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$. Kui tsentraalsed momendid eksisteerivad, on nad kujul*

$$\overline{m}_2(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x}) = -2\phi'(0)\mathbf{V}; \quad (3.6)$$

$$\overline{m}_4(\mathbf{x}) = 4\phi''(0)[(\mathbf{V} \otimes \text{vec}'\mathbf{V}) + (\text{vec}'\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})(\mathbf{I}_{p^3} + \mathbf{I}_p \otimes \mathbf{K}_{p,p})]; \quad (3.7)$$

Siit saame ka interpretatsiooni elliptilise jaotuse parameetritele - esimene parameeter $\boldsymbol{\mu}$ on keskväärtus ja teist parameetrit $\mathbf{V}$ võime interpreteerida kui hajuvusparameetrit.

Järgmises teoreemis anname kumulantide avaldised. Elliptilise jaotuse kumulantide avaldised on toodud käsikirjas Kollo, von Rosen (2004, lk 227).

Teoreem 3.6. *Olgu $\mathbf{x} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$. Kui kumulandid eksisteerivad, on nad kujul*

$$c_1(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}; \quad (3.8)$$

$$c_2(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x}) = -2\phi'(0)\mathbf{V} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} c_4(\mathbf{x}) = & 4[\phi''(0) - (\phi'(0))^2][(\mathbf{V} \otimes \text{vec}'\mathbf{V}) \\ & + (\text{vec}'\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})(\mathbf{I}_{p^3} + \mathbf{I}_p \otimes \mathbf{K}_{p,p})]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Kõik eksisteerivad paaritud järku kumulandid on võrdsed nulliga.

Elliptilise ja normaaljaotuse teist ja neljandat järku momendid erinevad ainult funktsioonist $\phi(\cdot)$ sõltuva konstandi poolest. Seega, kuigi elliptilise jaotuse definitsioon näib andvat meile suure vabaduse ja laia jaotuste klassi, sõltuvad neljandat järku kumulandid lisaks hajuvusparameetrile vaid ühest ja samast konstandist.

Seda kasutades defineeritakse järsakusparameeter κ järgnevalt:

$$\kappa = \frac{\phi''(0) - (\phi'(0))^2}{(\phi'(0))^2}. \quad (3.11)$$

See tähendab, et iga elliptilise jaotusega vektori $\mathbf{x} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ koordinaatide neljandat järku segakumulant on määratud võrdusega:

$$c_4(X_i, X_j, X_k, X_l) = \kappa(\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}),$$

kus $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$.

Tiheduse olemasolu

Üldjuhul elliptilise jaotusega juhuslikul suurusel pole tihedusfunktsiooni, siiski on olulisemad pidevad mitmemõõtmelised jaotused, millel tihedus eksisteerib. Kuna elliptiline jaotus on defineeritud sfäärilise jaotuse kaudu, siis taandub tema tiheduse olemasolu sfäärilise jaotuse tiheduse olemasolule. Samuti nagu karakteristik funktsioon, saab sfäärilise jaotuse tihedusfunktsioon (eeldusel, et ta eksisteerib) sõltuda argumentidest $\mathbf{x}$ ainult läbi ruutvormi $\mathbf{x}'\mathbf{x}$ ja tihedus peab seega olema kujul $g(\mathbf{x}'\mathbf{x})$, kus funktsiooni $g(\cdot)$ on mittenegatiivne funktsioon.

Teoreemis 3.2 on antud sfäärilise jaotusega juhusliku suuruse esitus juhusliku suuruse R ja juhusliku vektor $\mathbf{u}$ kaudu. Kuna $\mathbf{u}$ jaotus on antud, siis sõltub tiheduse olemasolu ainult juhuslikust suurusel R .

Osutub, et sfäärilise jaotusega juhusliku vektoril $\mathbf{x}$ eksisteerib tihedus $g(\cdot)$ parajasti siis, kui juhuslikul suurusel R eksisteerib tihedus $h(\cdot)$ ja

$$h(r) = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} r^{p-1} g(r^2).$$

Sellest saame iga $g(\cdot)$ jaoks, mis sobib sfäärilise jaotuse tihedusfunktsiooniks, elliptilise jaotuse tihedusfunktsiooni kujul:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = C_p |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} g((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})),$$

kus

$$C_p = \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{2\pi^{\frac{p}{2}} \int_0^\infty r^{p-1} g(r^2) dr}.$$

Funktsioon $g(\cdot)$ sobib tihedusfunktsiooniks, kui järgnev võrratus on täidetud (praktikas on seda tihti mugavam kontrollida):

$$\int_0^\infty y^{p-1} g(y) dy < \infty.$$

Funktsiooni $g(\cdot)$ nimetame edaspidi ka vastava elliptilise jaotuse tihedust genereerivaks funktsiooniks.

Järgnevas tabelis (osaliselt Fang, Kotz, Ng (1990), lk 69) on esitatud olulised sfäärilised jaotused ja nende tihedused (kui need eksisteerivad):

Jaotus	Tihedus- või karakteristik funktsioon
Kotzi tüüpi	$f(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{N-1} \exp(-r(\mathbf{x}'\mathbf{x})^s), r, s > 0, 2N + p > 2$
mitmem normaalj	$f(\mathbf{x}) = c \exp(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x})$
Pearsoni VII tüüp	$f(\mathbf{x}) = c(1 + \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{s})^{-N}, N > \frac{p}{2}, s > 0$
mitmem t -jaotus	$f(\mathbf{x}) = c(1 + \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{s})^{-\frac{p+m}{2}}, m \in \mathbf{N}$
mitmem Cauchy j	$f(\mathbf{x}) = c(1 + \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{s})^{-\frac{p+1}{2}}, s > 0$
Pearsoni II tüüp	$f(\mathbf{x}) = c(1 - \mathbf{x}'\mathbf{x})^m, m > 0$
logistiline	$f(\mathbf{x}) = c \exp(-\mathbf{x}'\mathbf{x}) / \{1 + \exp(-\mathbf{x}'\mathbf{x})\}^2$
stabiilsed	$\varphi(\mathbf{t}) = \exp\{r(\mathbf{t}'\mathbf{t})^{\frac{\alpha}{2}}\}, 0 < \alpha \leq 2, r < 0$
Laplace'	$\varphi(\mathbf{t}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{t}}$
Linniku	$\varphi(\mathbf{t}) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{t})^{\frac{\alpha}{2}}}$

Lisamärkusi

Elliptilise jaotuste pere korral ei saa rääkida parameetrite hindamisest üldjuhul, kuna parameetrid ei määra jaotust üheselt. Jaotus määramiseks peaksime teadma ka karakteristikliku funktsiooni genereerivat funktsiooni $\phi(\cdot)$ või tihedust genereerivat funktsiooni $g(\cdot)$.

Eelpoolnimetatud põhjusel ei saa suvalise elliptilise jaotuse jaoks anda üldist simuleerimiseeskirja. Kasutamiseks peaks jaotuse konkreetsemalt fikseerima ja siis saab hakata tegelema hindamise ja simuleerimise probleemidega.

Erijuhud

Teoreem 3.7. Olgu $\mathbf{x} \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D})$, kus $\mathbf{D}$ on diagonaalmaatriks. Kui $\mathbf{x}$ komponendid $X_1, \dots, X_p$ on sõltumatud, siis $\mathbf{x}$ on normaaljaotusega.

Viimase teoreemi 3.7 juures paneme tähele, et vektori $\mathbf{x}$ jaotuse normaalsuseks ei piisa, et jaotuse teine parameeter on diagonaalkujul. Sellest, et hajuvusparameeter on diagonaalkujul, saame järeldada küll seda, et vektori $\mathbf{x}$ elemendid pole korreleeritud, kuid mittekorreleeritusest ei järeldu sõltumatus. Seega on teoreemi 3.7 juures sõltumatuse eeldus oluline.

3.2 Üldistus maatriksitele

Definitsioon 3.3. Olgu $\mathbf{X} : p \times n$ juhuslik maatriks. Ütleme, et $\mathbf{Y}$ on sfäärilise jaotusega maatriks, kui $\text{vec} \mathbf{Y}$ on sfäärilise jaotusega.

Teoreem 3.8. Olgu maatriks $\mathbf{Y} : p \times n$. Siis järgnevad kolm tingimust on ekvivalentseid.

- (i) Vektori $\text{vec}\mathbf{Y}$ karakteristik funktsioon on kujul $\phi(\text{vec}'\mathbf{T}\text{vec}\mathbf{T}) = \phi(\text{tr}(\mathbf{T}'\mathbf{T}))$, kus $\mathbf{T}$ on $p \times n$ -maatriks.
- (ii) $\mathbf{Y}$ on stohhastiliselt esitatav kujul $\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U}$, kus $R > 0$ on sõltumatu maatriksist $\mathbf{U}$ ja $\text{vec}\mathbf{U}$ on ühtlaselt jaotunud ühiksfääril R^{pn} .
- (iii) $\text{vec}\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \mathbf{\Gamma}'\text{vec}\mathbf{Y}$ iga ortogonaalse maatriksi $\mathbf{\Gamma} : pn \times pn$ korral.

Pidevate sfääriliste jaotuste korral saab kõik tiheduse eksisteerimist ja omadusi puudutavad tulemused otse sfäärilistele maatriksjaotustele üle kanda. Seega on $\mathbf{Y}$ tihedus kujul $g(\text{tr}(\mathbf{Y}'\mathbf{Y}))$, mingi mittenegatiivse funktsiooni $g(\cdot)$ korral. Varasema põhjal teame, et $\mathbf{Y}$ tihedus eksisteerib parajasti siis, kui juhuslikul suurusel R eksisteerib tihedus $h(\cdot)$ ja nimetatud funktsioonid on omavahel seotud:

$$h(r) = \frac{2\pi^{\frac{pn}{2}}}{\Gamma(\frac{pn}{2})} r^{np-1} g(r^2).$$

Definitsioon 3.4. Olgu $\mathbf{Y} : p \times n$ sfäärilise jaotusega juhuslik maatriks ja olgu $\mathbf{V} = \mathbf{\Delta}\mathbf{\Delta}'$ ning $\mathbf{W} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}'$ mittenegatiivselt määratud vastavalt $p \times p$ ja $n \times n$ maatriksid, kus $\mathbf{\Delta} : p \times r$ ja $\mathbf{\Gamma} : n \times s$. Ütleme, et maatriks $\mathbf{X} : p \times n$ on elliptilise maatriksjaotusega, parameetritega $\mathbf{M}$, $\mathbf{V}$ ja $\mathbf{W}$, $\mathbf{X} \sim E_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$, kui

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{M} + \mathbf{\Delta}\mathbf{Y}\mathbf{\Gamma}',$$

kus $\mathbf{M} : p \times n$ maatriks.

Järgmine teoreem annab elliptilise maatriksjaotuse karakteristikliku funktsiooni.

Teoreem 3.9. Olgu $\mathbf{X} \sim E_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$, kus $\mathbf{M} : p \times n$, $\mathbf{V} = \mathbf{\Delta}\mathbf{\Delta}'$ ja $\mathbf{W} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}'$. Siis juhusliku maatriksi $\mathbf{X}$ karakteristik funktsioon avaldub kujul

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}) = e^{i\text{tr}(\mathbf{T}'\mathbf{M})} \phi(\text{tr}(\mathbf{T}'\mathbf{V}\mathbf{T}\mathbf{W})) = e^{i(\text{vec}\mathbf{T}'\text{vec}\mathbf{M})} \phi(\text{vec}'\mathbf{T}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W})\text{vec}\mathbf{T}).$$

Juhusliku maatriksi karakteristikliku funktsiooni definitsiooni järgi on maatriks $\mathbf{X}$ ja vektor $\text{vec}\mathbf{X}$ sama jaotusega, sellest

$$\text{vec}\mathbf{X} = \text{vec}\mathbf{M} + (\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{\Delta})\text{vec}\mathbf{Y}$$

on sama jaotusega kui $\mathbf{X}$. Seega, kui $E(\text{vec}\mathbf{Y}) = \mathbf{0}$, siis $E(\text{vec}\mathbf{X}) = \text{vec}\mathbf{M}$.

Kõrgemat järku momendid on esitatud teoreemis 3.12.

Teoreem 3.10. Olgu $\mathbf{X} \sim E_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$, kus $\mathbf{M} : p \times n, \mathbf{V} = \Delta\Delta'$ ja $\mathbf{W} = \Gamma\Gamma'$. Siis iga matriksi $\mathbf{A} : q \times p$ ja $\mathbf{B} : m \times n$ korral kehtib:

$$\mathbf{AXB}' \sim E_{q,m}(\mathbf{AMB}', \mathbf{AVA}', \mathbf{BWB}').$$

Eelnevast paragrahvist 3.1.2 vektorite kohta teame, et elliptilise jaotusega juhuslikul vektoril ei pruugi eksisteerida tihedusfunktsiooni. Samas saame leida tihedusfunktsiooni üldise kuju juhul kui tihedusfunktsioon eksisteerib. Kuna matriksi $\mathbf{X}$ elliptiline jaotus on samas ka pn -vektori $\text{vec}\mathbf{X}$ jaotus, siis kehtivad kõik vektorite jaoks leiduvad tulemused ka matriksjaotuste jaoks. Seega, kui matriks $\mathbf{Y}$ on sfäärilise jaotusega, siis juhul kui tal tihedusfunktsioon eksisteerib, peab see olema kujul:

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) = g(\text{vec}'\mathbf{Y}\text{vec}\mathbf{Y}) = g(\text{tr}(\mathbf{Y}'\mathbf{Y})) = g(\text{tr}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}')),$$

kus $g(\cdot)$ on mingi mittenegatiivne funktsioon.

Selleks, et matrikselliptilisel jaotusel eksisteeriks tihedus, peavad parameetrid $\mathbf{V}$ ja $\mathbf{W}$ olema positiivselt määratud.

Teoreem 3.11. Olgu $\mathbf{X} \sim E_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$, kus $\mathbf{M} : p \times n, \mathbf{V} = \Delta\Delta'$ ja $\mathbf{W} = \Gamma\Gamma'$ regulaarsed ja eksisteerigu matriksil $\mathbf{X}$ tihedus. Siis

$$|\mathbf{V}|^{-\frac{n}{2}}|\mathbf{W}|^{-\frac{p}{2}}g(\text{tr}\{\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{M})\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{M})'\}),$$

kus $g(\cdot)$ on mingi mittenegatiivne funktsioon.

Matrikselliptilise jaotuse momendid ja kumulandid on toodud käsikirjas Kollo, von Rosen (2004, lk 233-235).

Teoreem 3.12. Olgu $\mathbf{X} \sim E_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$. Kui matriksil $\mathbf{X}$ momendid eksisteerivad, on nad kujul:

$$\begin{aligned} m_2(\mathbf{X}) &= -2\phi'(0)(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}) + \text{vec}\mathbf{M}\text{vec}'\mathbf{M}; \\ m_3(\mathbf{X}) &= \text{vec}\mathbf{M}(\text{vec}'\mathbf{M})^{\otimes 2} - 2\phi'(0)(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V} \otimes \text{vec}'\mathbf{M} \\ &\quad + \text{vec}'\mathbf{M} \otimes \mathbf{W} \otimes \mathbf{V} + \text{vec}\mathbf{M}\text{vec}'(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V})); \\ m_4(\mathbf{X}) &= \text{vec}\mathbf{M}(\text{vec}'\mathbf{M})^{\otimes 3} - 2\phi'(0)[(\text{vec}'\mathbf{M})^{\otimes 2} \otimes \mathbf{W} \otimes \mathbf{V} \\ &\quad + \text{vec}'\mathbf{M} \otimes \mathbf{W} \otimes \mathbf{V} \otimes \text{vec}'\mathbf{M} + \text{vec}\mathbf{M}(\text{vec}'\mathbf{M}) \otimes \text{vec}'(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}) \\ &\quad + \mathbf{W} \otimes \mathbf{V} \otimes (\text{vec}'\mathbf{M})^{\otimes 2} \\ &\quad + \text{vec}\mathbf{M}\text{vec}'(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}) \otimes \text{vec}'\mathbf{M}(\mathbf{I}_{(pn)^3} + \mathbf{I}_{pn} \otimes \mathbf{K}_{pn,pn})] \\ &\quad + 4\phi''(0)[\mathbf{W} \otimes \mathbf{V} \otimes \text{vec}'(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}) \\ &\quad + (\text{vec}'(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}) \otimes \mathbf{W} \otimes \mathbf{V})(\mathbf{I}_{(pn)^3} + \mathbf{I}_{pn} \otimes \mathbf{K}_{pn,pn})]. \end{aligned}$$

Elliptilise jaotuse paaritut järku tsentraalsed momendid, mis eksisteerivad on võrdsed nulliga, samuti nagu elliptilise jaotusega vektorite puhul.

Järeldus 3.13. Olgu $\mathbf{X} \sim E_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$. Kui maatriksil $\mathbf{X}$ eksisteerivad tsentraalsed momendid, on nad kujul:

$$\begin{aligned}\overline{m}_2(\mathbf{X}) &= -2\phi'(0)(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}); \\ \overline{m}_4(\mathbf{X}) &= 4\phi''(0)[\mathbf{W} \otimes \mathbf{V} \otimes \text{vec}'(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}) \\ &\quad + (\text{vec}'(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}) \otimes \mathbf{W} \otimes \mathbf{V})(\mathbf{I}_{(pn)^3} + \mathbf{I}_{pn} \otimes \mathbf{K}_{pn,pn})].\end{aligned}$$

Elliptilise jaotuse paaritut järku kumulandid, mis eksisteerivad, on võrdsed nulliga, samuti nagu elliptilise jaotusega vektorite puhul.

Teoreem 3.14. Olgu $\mathbf{X} \sim E_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$. Kui maatriksil $\mathbf{X}$ kumulandid eksisteerivad, on nad kujul:

$$\begin{aligned}c_1(\mathbf{X}) &= \text{vec}\mathbf{M}; \\ c_2(\mathbf{X}) &= -2\phi'(0)(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}); \\ c_3(\mathbf{X}) &= 4(\phi''(0) - (\phi'(0))^2)[\mathbf{W} \otimes \mathbf{V} \otimes \text{vec}'(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}) \\ &\quad + (\text{vec}'(\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}) \otimes \mathbf{W} \otimes \mathbf{V})(\mathbf{I}_{(pn)^3} + \mathbf{I}_{pn} \otimes \mathbf{K}_{pn,pn})].\end{aligned}$$

4 Kasvukõvera mudel

4.1 Kasvukõvera mudeli definitsioon

Vaatleme klassikalist kasvukõvera mudelit (Srivastava, Khatri (1979), lk 134).

$$\mathbf{X} = \mathbf{ABC} + \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{E}, \quad (4.1)$$

kus

- $\mathbf{X}$ on $p \times n$ andmemaatriks,
- $\mathbf{A} : p \times q$ ja $\mathbf{C} : k \times n$ on teadaolevad täisastakuga maatriksid,
- $\mathbf{B} : q \times k$ ja $\Sigma > 0 : p \times p$ on tundmatud parameetermaatriksid,

Eeldame, et vead on normaaljaotusega, $\mathbf{E} \sim N_{p,n}(0, \mathbf{I}_p, \mathbf{I}_n)$ ja $\Sigma^{\frac{1}{2}}$ on positiivselt määratud maatriksi Σ sümmeetriline ruutjuur.

4.2 Kasvukõvera mudeli erinevus võrreldes klassikalise lineaarse mudeliga

Kasvukõvera mudeli ja tavalise lineaarse mudeli erinevuse selgitamiseks vaatleme näidet, mis on toodud raamatus Srivastava, Khatri (1979, lk 134). Vaatleme juhtu, kus on uuritud n indiviidi, kes jagunevad k homogeensesse gruppi, igas vastavalt $n_1, n_2, \dots, n_k$ indiviidi. Näiteks võib niiviisi vaadelda poiste ja tüdrukute kasve, sest nende kasvud käituvad erinevalt ja seega moodustavad nad kaks eraldi gruppi. Eeldame, et indiviidi kasv ajas t_r , $r = 1, 2, \dots, p$ on polünoomiaalne. Märkigu μ_{jt_r} indiviidi grupist j keskmist kasvu ajahetkel t_r , siis

$$\mu_{jt_r} = \beta_{0j} + \beta_{1j}t_r + \dots + \beta_{qj}t_r^q, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

kus β_{ij} on tundmatud parameetrid.

Viime mudeli maatrikskujule. Koondame andmed maatriksisse $\mathbf{X} : p \times n$, kus $n = \sum_{i=1}^k n_i$, maatriksi $\mathbf{X}$ r -ks reaks on siis ajahetkel r tehtud mõõtmised kõikidel objektidel. Maatriksi $\mathbf{X}$ esimeses n_1 veerus on esimesse vaatlusgruppi kuuluvate indiviidide mõõtmised, järgmises n_2 veerus on teise vaatlusgruppi kuuluvate indiviidide mõõtmised jne, viimases n_k -s veerus on k -ndasse vaatlusgruppi kuuluvate indiviidide vaatlused, igas veerus ühe objekti vaatlused.

Maatriks $\mathbf{C}$ on indiviididevaheline disainimaatriks, mis koosneb $p \times n_i$ blokkidest ($i = 1, 2, \dots, k$). Maatriksi $\mathbf{C}$ j -nda bloki j -s rida koosneb ühtedest, ülejäänud bloki elemendid on võrdses nulliga:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Maatriks $\mathbf{A} : p \times (q + 1)$ on indiviididesisene disainimaatriks, mis koosneb mudeli argumentideks olevatest aja t astmetest:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^q \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_p & \dots & t_p^q \end{pmatrix}.$$

Kui tähistame

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \dots & \beta_{0k} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \dots & \beta_{qk} \end{pmatrix},$$

siis saame andmematriksi keskväärtuse esitada kujul:

$$E(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}$$

Edasi võime kasutada vektoriseerimisoperaatorit vec ja saada samaväärse võrduse:

$$E(\text{vec}\mathbf{X}) = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})\text{vec}\mathbf{B},$$

mida saame vaadata kui erijuhtu klassikalisest mitmemõõtmelisest regressioonimudelist:

$$E\mathbf{x} = \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}.$$

Sellise käsitle juures ilmneb üks probleem - nimelt pole võimalik eraldi uurida individidesiseseid ja individidevahelisi mõjusid, seega kaotame hulga meid huvitavat infot. Seetõttu kasvukõvera mudeli korral esitustkorral esitust regerssioonimudelina tavaliselt ei kasutata.

4.3 Kasvukõvera mudeli parameetrite hindamine

Suurima tõepära hinnangud matriksitele $\mathbf{B}$ ja $\boldsymbol{\Sigma}$ on kujul (von Rosen (1984))

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{A}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1},$$

kus

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1}\mathbf{C})\mathbf{X}'$$

ja

$$n\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{V}}', \quad \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{C}.$$

Järelduste tegemiseks $\mathbf{B}$ ja $\boldsymbol{\Sigma}$ kohta oleks vaja teada hinnangute $\hat{\mathbf{B}}$ ja $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ jaotusi. Siinkohal järgime arutlust käsikirjast Kollo, von Rosen (2004, lk 449-451).

Kasutades üldist kahe tihedusfunktsiooni vahelist seost (Kollo, von Rosen (1998)) on võimalik konstrueerida mitmemõõtmeline Edgeworthi tüüpi lähend $\hat{\mathbf{B}}$ ja $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ tiheduste jaoks.

Edgeworthi tüüpi lähend on lähend juhusliku suuruse (või vektori või maatriksi) tihedusfunktsioonile. Selle konstrueerimisel võetakse aluseks valitud juhusliku suuruse tihedusfunktsioon ja uuritava juhusliku suuruse kumulandid. Tihti valitakse kirjeldavaks jaotuseks normaaljaotus.

Meid peamiselt huvitava $\hat{\mathbf{B}}$ jaotuse lähendamiseks vajame teoreemi:

Teoreem 4.1. *Olgu $\mathbf{y}$ juhuslik p -vektor lõplike neljandat järku momentidega, siis saab tiheduse $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ esitada normaaljaotuse $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ tiheduse $f_N(\mathbf{x})$ kaudu järgmist Edgeworthi tüüpi lähendit kasutades:*

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = & f_N(\mathbf{x}) \{ \{ 1 + E(\mathbf{y})' \text{vec} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \Sigma) \\ & + \frac{1}{2} \text{vec}' \{ D(\mathbf{y}) - \Sigma + E(\mathbf{y})(E(\mathbf{y}))' \} \text{vec} \mathbf{H}_2(\mathbf{x}, \Sigma) \\ & + \frac{1}{6} \{ \text{vec}' c_3(\mathbf{y}) + 3 \text{vec}' (D(\mathbf{y}) - \Sigma) \otimes (E(\mathbf{y}))' \\ & + (E(\mathbf{y}))'^{\otimes 3} \} \text{vec} \mathbf{H}_3(\mathbf{x}, \Sigma) + \dots \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

kus mitmemõõtmelised Hermite polünoomid $\mathbf{H}_i(\mathbf{x}, \Sigma)$ on antud valemitega (2.12)-(2.14).

Seda teoreemi saame üldistada ka maatriksite jaoks.

Järeldus 4.2. *Olgu $\mathbf{Y}$ juhuslik $p \times q$ -maatriks lõplike neljandat järku momentidega, siis saab tiheduse $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})$ esitada normaaljaotuse $N_{pq}(\mathbf{0}, \Sigma)$ tiheduse $f_N(\mathbf{X})$ kaudu järgmist Edgeworthi tüüpi lähendit kasutades:*

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) = & f_N(\mathbf{X}) \{ \{ 1 + E(\text{vec} \mathbf{Y})' \text{vec} \mathbf{H}_1(\text{vec} \mathbf{X}, \Sigma) \\ & + \frac{1}{2} \text{vec}' \{ D(\text{vec} \mathbf{Y}) - \Sigma + E(\text{vec} \mathbf{Y})(E(\text{vec} \mathbf{Y}))' \} \text{vec} \mathbf{H}_2(\text{vec} \mathbf{X}, \Sigma) \\ & + \frac{1}{6} \{ \text{vec}' c_3(\mathbf{Y}) + 3 \text{vec}' (D(\text{vec} \mathbf{Y}) - \Sigma) \otimes (E(\text{vec}' \mathbf{Y})) \\ & + (E(\text{vec}' \mathbf{Y}))'^{\otimes 3} \} \text{vec} \mathbf{H}_3(\text{vec} \mathbf{X}, \Sigma) + \dots \} \end{aligned} \quad (4.3)$$

kus mitmemõõtmelised Hermite polünoomid $\mathbf{H}_i(\mathbf{x}, \Sigma)$ on antud valemitega (2.12)-(2.14).

Kuna $\mathbf{S}$ on vaadeldav Σ , siis on loomulik lähendada $\hat{\mathbf{B}}$ maatriksiga

$$\mathbf{B}_N = (\mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{X} \mathbf{C}' (\mathbf{C} \mathbf{C}')^{-1},$$

Kuna tegemist on maatriksi $\mathbf{X}$ lineaarteisendusega ja maatriksi $\mathbf{X}$ on meie mudeli kohaselt normaaljaotusega $N_{p,n}(\mathbf{ABC}, \Sigma, \mathbf{I}_n)$, siis järelikult on $\mathbf{B}_N$

samuti normaalkaotusega $N_{q,k}(\mathbf{B}, (\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A})^{-1}, (\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1})$. Seega oleks üks võimalus kasutada maatriksi $\hat{\mathbf{B}}$ kaotuse lähendina normaalkaotust. Aga ilmneb, et saame $\hat{\mathbf{B}}$ kaotust lähendada ka teatava elliptilise kaotusega (Kollo, von Rosen (2004), lk 449):

$$f_{\mathbf{B}_E}(\mathbf{B}_0) = \{1 + \frac{1}{2}l[\text{tr}(\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{B}_0 - \mathbf{B})\mathbf{C}\mathbf{C}'(\mathbf{B}_0 - \mathbf{B})') - kq]\}f_{\mathbf{B}_N}(\mathbf{B}_0), \quad (4.4)$$

$$l = \frac{p - q}{n - k - p + q - 1}.$$

Tihedusfunktsioon 4.4 on saadud Edgeworthi tüüpi lähendist, kuhu on võetud ainult kaks esimest liiget. Samuti on käsikirjas Kollo, von Rosen (2004, lk 452) näidatud, et tihedusfunktsiooni (4.4) erinevus parameetermaatriksi $\hat{\mathbf{B}}$ tihedusfunktsioonist on järku $O(n^{-2})$. Ilmneb, et $f_{\mathbf{B}_E}(\mathbf{B}_0)$ näol on tegemist juhusliku suuruse tihedusfunktsiooniga ja see tihedus on segu normaalkaotusest ja Kotzi kaotusest parameetritega $N = 2$ ja $r = \frac{1}{2}$. Kotzi tüüpi kaotusi uurime 5. osas.

5 Kotzi kaotus

5.1 Definiitsioon

Kotzi kaotus on defineeritud raamatus Fang, Kotz, Ng (1990, lk 76)

Definiitsioon 5.1. *Kotzi tüüpi kaotuseks nimetatakse elliptilist kaotust, kus tihedust genereeriv funktsioon on kujul:*

$$g(u) = C_p u^{N-1} \exp(-ru^s), \quad r, s > 0, 2N + p > 2, \quad (5.1)$$

kus C_p on normeeriv konstant.

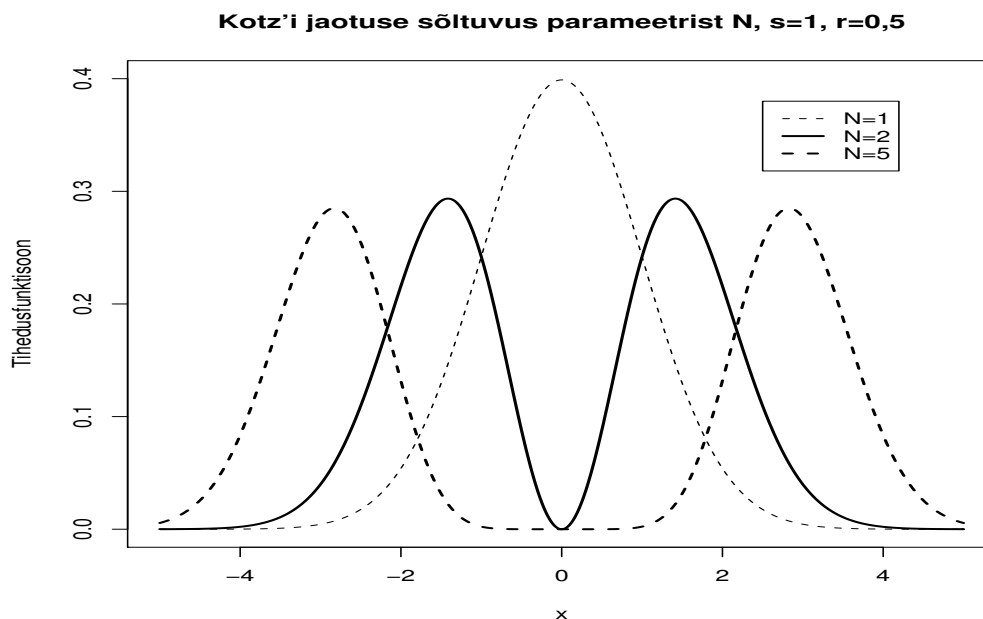
Seega on Kotzi tüüpi kaotusega vektori $\mathbf{x} : p \times 1$ tihedusfunktsioon kujul:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = C_p |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]^{N-1} \exp\{(-r[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]^s)\}, \quad (5.2)$$

kus normeeriv konstant on kujul:

$$C_p = \frac{s\Gamma(p/2)}{\pi^{p/2}\Gamma(2N + p - 2/2s)} r^{(2N+p-2/2s)} \quad (5.3)$$

Kotzi kaotuse saame Kotzi tüüpi kaotusest kui fikseerime $s = 1$.



Joonis 5.1: Parameetri N mõju uurimine

Tiheduse avaldisest näeme, et Kotzi tüüpi jaotuse parameetriteks on lisaks keskvärtusele μ ja hajuvusparameetrile V ka parameetrid N , s ja r , lisaks sõltub jaotus ka vektori dimensioonist p .

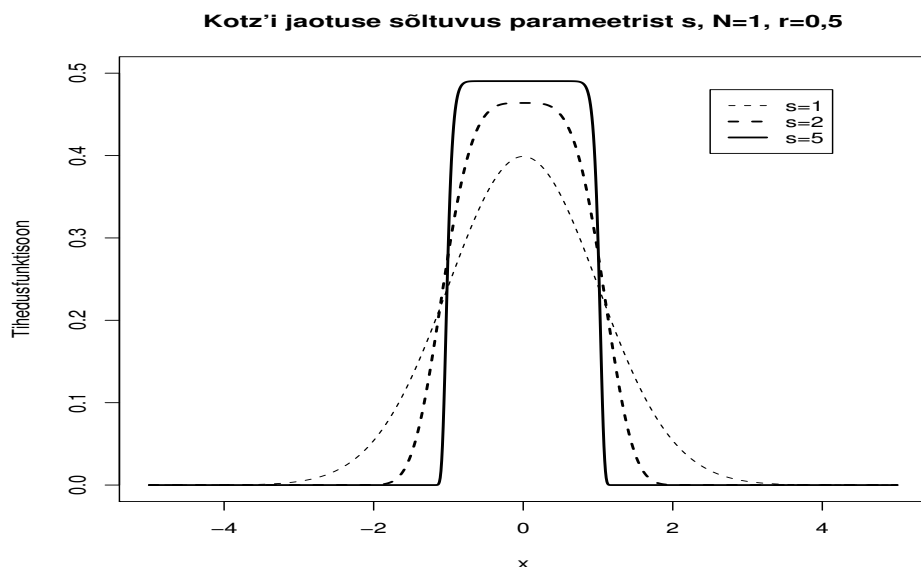
Meid huvitab enim Kotzi jaotus parameetritega $N = 2$ ja $r = \frac{1}{2}$, edaspidi vaatleme lähemalt ainult seda.

5.2 Kotzi jaotuse parameetrite interpretatsioon

Kui $N = 1$, $s = 1$ ja $r = \frac{1}{2}$, siis saame jaotuseks mitmemõõtmelise normaalfaotuse.

Uurime parameetrite tähendusi esmalt ühemõõtmelist jaotust kasutades, võtame uurimise lihtsustamiseks keskvärtuseks $\mu = 0$ ja hajuvusparameetriks $V = 1$, ühemõõtmelisel juhul on mõlemad parameetrid reaalarvud.

Esimese parameetri N mõju uurimiseks vaatleme joonist 5.1, kus teised jaotuse parameetrid on normaaljaotusele vastavad: $s = 1$ ja $r = \frac{1}{2}$. Ühemõõtmelisel juhul järeldub tingimusest jaotuse parameetritele valemis (5.1), et $N > \frac{1}{2}$. Jätame kõrvale juhud, kus $N < 1$, sest sellisel juhul saame jaotuse defineerida ainult kui $x > 0$. Jooniselt võime näha, et parameeter N mõjutab jaotuse modaalsust. Juhul, kui $N > 1$, on jaotus bimodaalne. Mida suurem



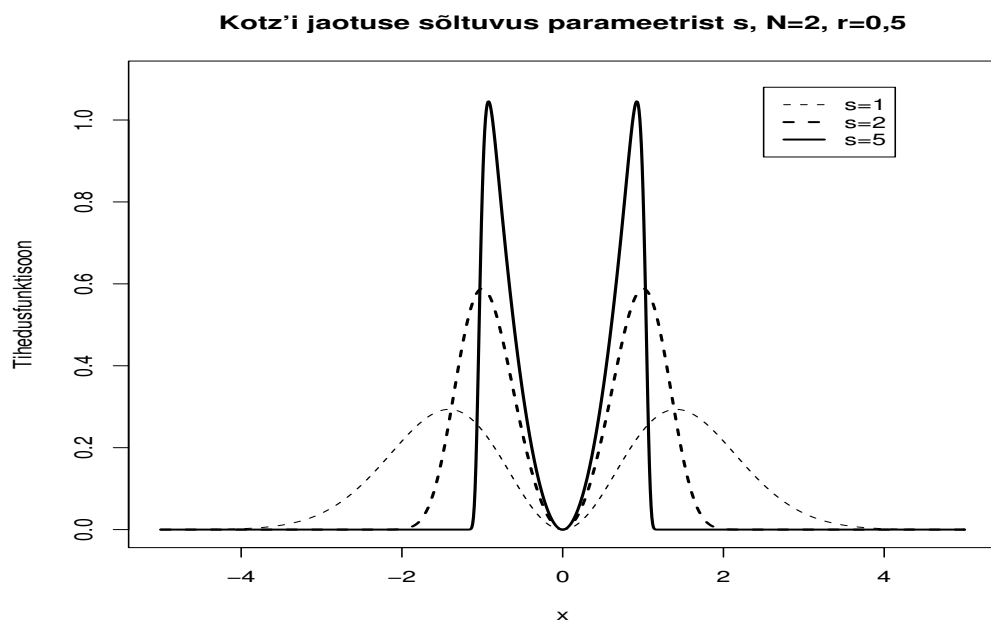
Joonis 5.2: Parameetri s mõju uurimine, $N = 1$

on N , seda suurem on erinevus kahe moodi vahel.

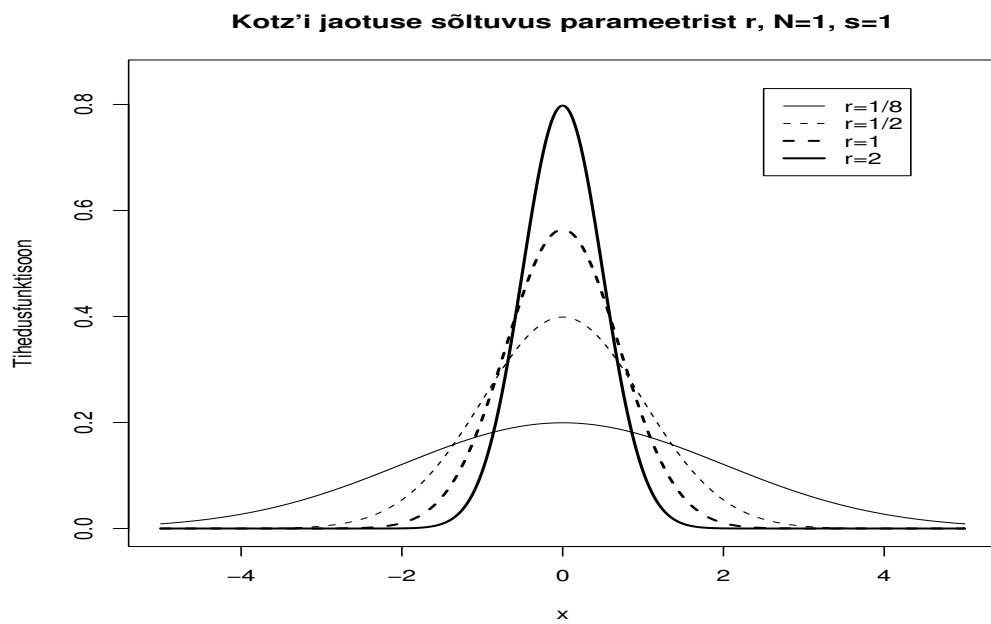
Teise parameetri s mõju vaatame kahel juhul, seda illustreerivad joonised 5.2 ja 5.3. Joonistel on ülejäänud parameetrid fikseeritud, $r = \frac{1}{2}$ ja esimesel joonisel $N = 1$ ning teisel joonisel $N = 2$. Võime näha, et kui s suureneb, siis koondub jaotuse tõenäosusmass järjest enam keskvärtuse lähedusse, moodide ümbruse tõenäosused järjest suurenevad.

Viimase parameetri r mõju vaatame samuti kahel juhul, vastavad graafikud on joonistel 5.4 ja 5.5. Joonistel on ülejäänud parameetrid fikseeritud, $s = 1$ ja esimesel joonisel $N = 1$ ning teisel joonisel $N = 2$. Võime näha, et kui r suureneb, siis koondub jaotuse tihedusfunktsiooni graafik järjest moodi ümber nagu ka r suurenedes, kuid tõus pole nii järsk.

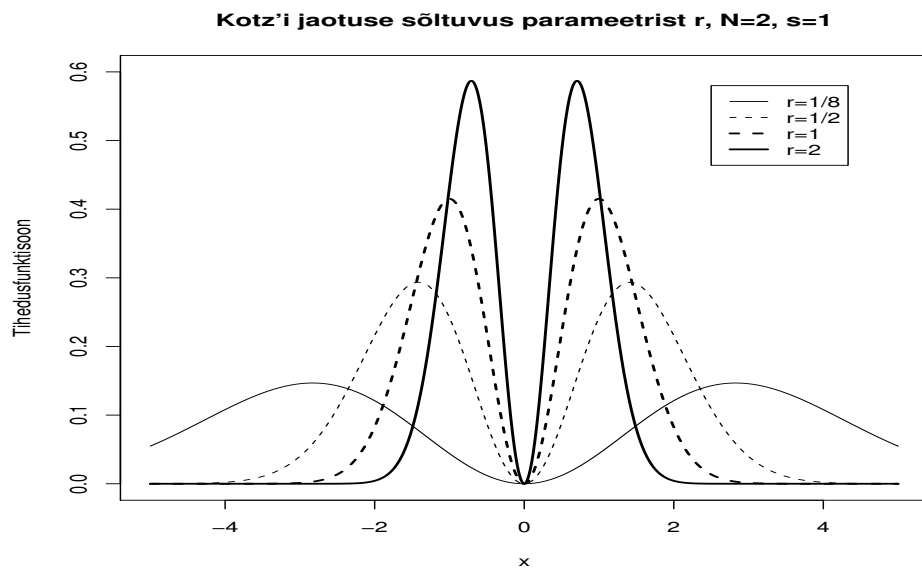
Kuna meid huvitavad enam mitmemõõtmelised jaotused, siis uurime ka ainsat hästi illustreeritavat mitmemõõtmelist juhtu - kahemõõtmelist Kotzi jaotust. Selleks vaatleme jooniseid, kus samuti muudame parameetreid N , s ja r . Parameetri μ võtame siin ikka nulliks (selleks on nüüd kaheelemendiline nullidest koosnev vektor) ja parameetriga $\mathbf{V}$ on igal paarisarvulise numbri- ja joonisel joonistest 5.6-5.13 ühikmaatriks $\mathbf{I}_2$ ja igal parempoolselt joonisel sümmeetriline 2×2 maatriks, mille peadiagonaali elemendid $v_{11} = v_{22} = 1$ ja kõrvaldiagonaali elemendid $v_{12} = v_{21} = 0,7$. Vaadeldes kahemõõtmelise jaotuse jooniseid näeme, et samad tendentsid korduvad ka sel juhul - N , s ja



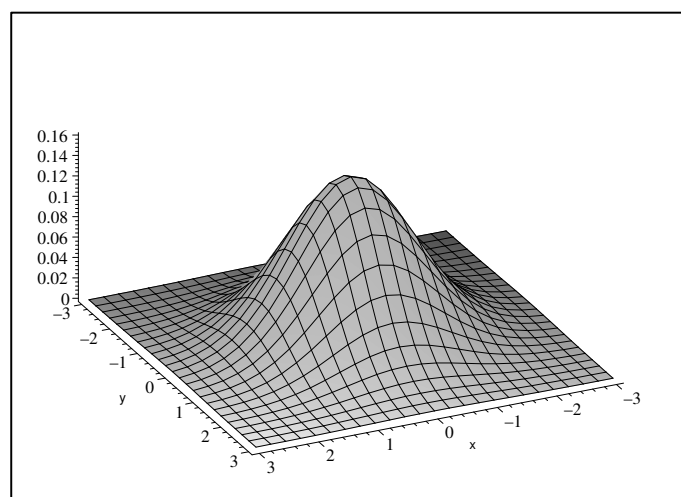
Joonis 5.3: Parameetri s mõju uurimine, $N = 2$



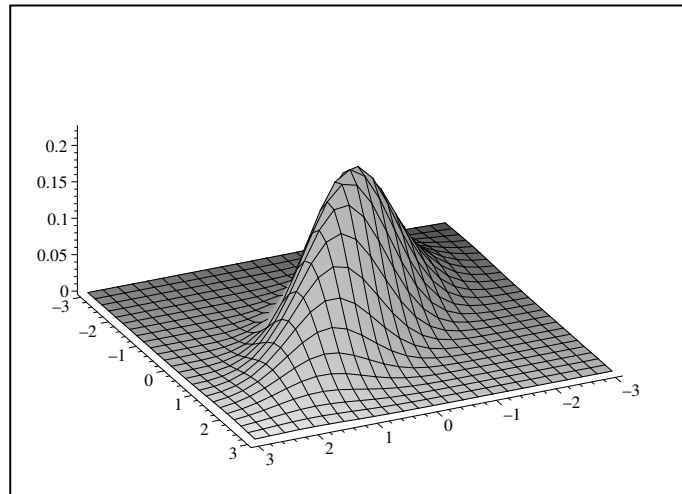
Joonis 5.4: Parameetri r mõju uurimine, $N = 1$



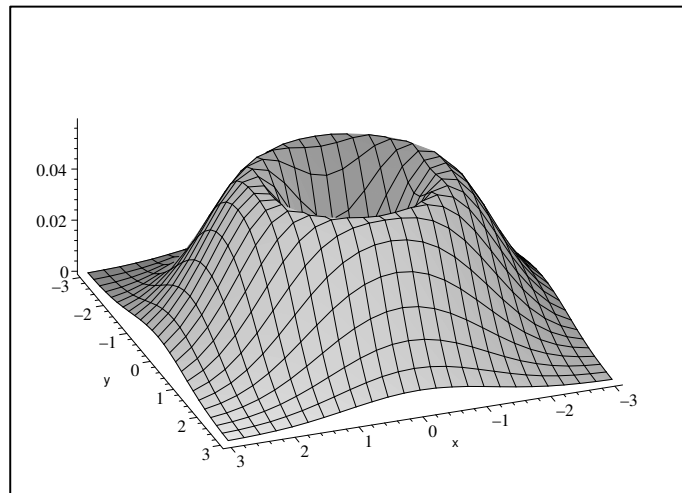
Joonis 5.5: Parameetri r mõju uurimine, $N = 2$



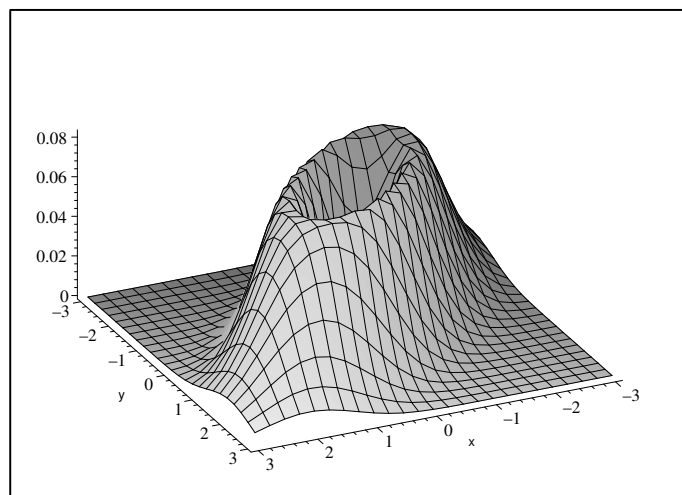
Joonis 5.6: Standardne normaaljaotus



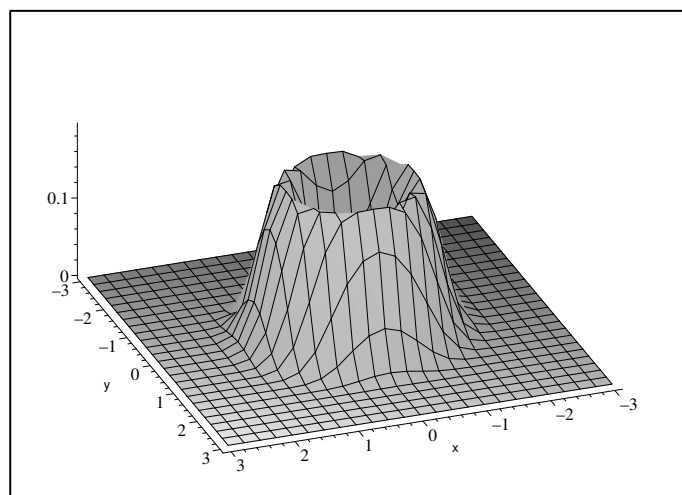
Joonis 5.7: Normaaljaotus sõltuvusega koordinaatide vahel



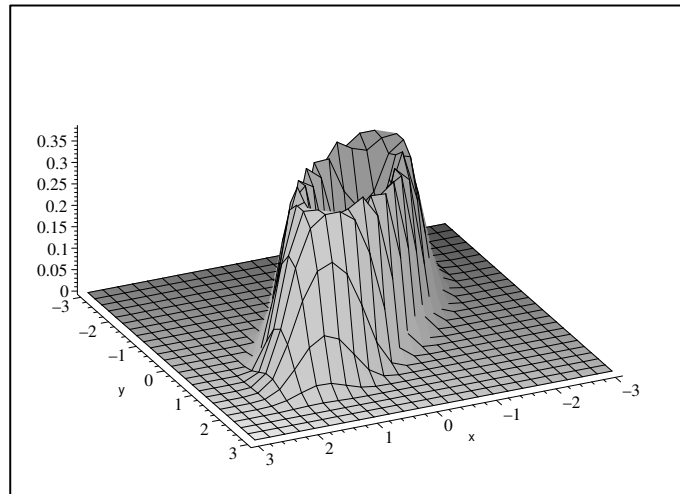
Joonis 5.8: Kotzi jaotus parameetritega $N = 2, s = 1, r = \frac{1}{2}$



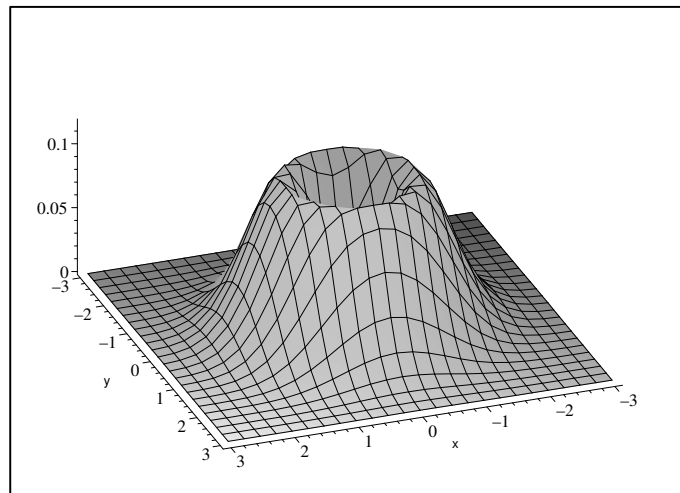
Joonis 5.9: Kotzi jaotus parameetritega $N = 2$, $s = 1$, $r = \frac{1}{2}$, sõltuvusega



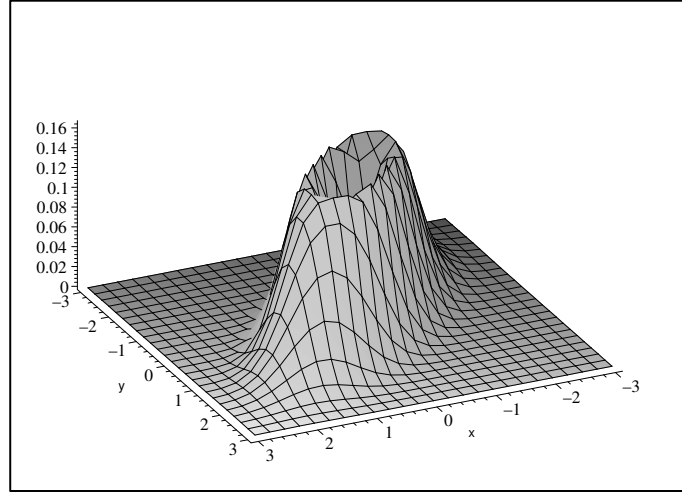
Joonis 5.10: Kotzi jaotus parameetritega $N = 2$, $s = 2$, $r = \frac{1}{2}$



Joonis 5.11: Kotzi jaotus parameetritega $N = 2$, $s = 2$, $r = \frac{1}{2}$, sõltuvusega



Joonis 5.12: Kotzi jaotus parameetritega $N = 2$, $s = 1$, $r = 1$



Joonis 5.13: Kotzi jaotus parameetritega $N = 2$, $s = 1$, $r = 1$, sõltuvusega

r muutused mõjutavad funktsiooni sarnaselt ühemõõtmelise juhuga.

Meid enim huvitav jaotus parameetritega $N = 2$, $s = 1$ ja $r = \frac{1}{2}$ on joonistel 5.1, 5.3, 5.5, 5.8 ja 5.9.

5.3 Karakteristlik funktsioon ja momendid

5.3.1 Karakteristlik funktsioon

Siin ja edaspidi vaatleme ainult Kotzi jaotust (Kotzi tüüpi jaotust, mille parameeter $s = 1$).

Kotzi jaotuse karakteristlik funktsioon on raamatus Fang, Kotz, Ng (1990, lk 79-80) antud kujul:

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}) \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{4r}\right) \sum_{m=0}^{N-1} \binom{N-1}{m} \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma(p/2+m)} \left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{4r}\right)^m$$

Seega meid huvitaval juhul $N = 2$, $r = 1$ on karakteristlik funktsioon:

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}) \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\right).$$

5.3.2 Momendid

Vaatleme momente ainult meid huvitava konkreetse Kotzi jaotuse korral ($N = 2$, $r = \frac{1}{2}$). Momendid saame leida kasutades elliptiliste jaotuste momen-

tide kujusid (3.2)-(3.5) ja p -mõõtmelise Kotzi jaotuse karakteristikliku funktsiooni genereeriva funktsiooni kuju:

$$\phi(u) = \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \left(1 - \frac{u}{p}\right).$$

Keskväärtuse jaoks pole tarvis arvutusi teha, selle saame valemist (3.2). Dispersiooni leidmiseks valemi (3.6) põhjal leiame esmalt funktsiooni $\phi(u)$ tuletise kohal 0:

$$\phi'(u) = -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \left(1 - \frac{u}{p}\right) - \frac{1}{p} \exp\left(-\frac{u}{2}\right),$$

siit

$$\phi'(0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{p} = -\frac{p+2}{2p}. \quad (5.4)$$

Seega keskväärtus, teine moment ja dispersioon avalduvad järgmiselt:

$$E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}, \quad (5.5)$$

$$m_2(\mathbf{x}) = \left(1 + \frac{2}{p}\right) \mathbf{V} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}', \quad (5.6)$$

$$D(\mathbf{x}) = \left(1 + \frac{2}{p}\right) \mathbf{V}. \quad (5.7)$$

Näeme, et vektori dimensiooni kasvades läheneb maatriks $\mathbf{V}$ dispersioonimaatriksile. Jaotuste korral pakuvad enamasti huvi veel asümmeetrilise- ja järsakuskordaja. Elliptiliste jaotuste korral on asümmeetriakordaja 0 tänu sümmeetrilisele. Seega huvitab meid Kotzi jaotuse puhul ainult järsakuskordaja. Arvutame ka elliptiliste jaotuste korral võrdusega (3.11) defineeritud järsakusparameetri κ Kotzi jaotuse korral.

Järsakusparameetri leidmiseks on vaja leida karakteristikliku funktsiooni genereeriva funktsiooni teine tuletis kohal 0:

$$\phi''(u) = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \left(1 - \frac{u}{p}\right) + \frac{1}{p} \exp\left(-\frac{u}{2}\right),$$

kust

$$\phi''(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{p} = \frac{p+4}{4p}. \quad (5.8)$$

Asendades saadud avaldised valemisse (3.11), saame:

$$\kappa = \frac{\phi''(0) - (\phi'(0))^2}{(\phi'(0))^2} = \frac{\frac{p+4}{4p} - \left(-\frac{p+2}{2p}\right)^2}{\left(-\frac{p+2}{2p}\right)^2} = -\frac{4}{(p+2)^2}.$$

Järsakuskordaja leidmiseks definitsiooni 1.10 põhjal on tarvis leida Kotzi jaotusega ($N = 2$, $r = \frac{1}{2}$) juhusliku p -vektori $\mathbf{y}$ neljas moment kasutades MacRae tuletist ja arvutada selle jälg, kusjuures $E\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ja $D\mathbf{y} = \mathbf{I}_p$. Leiame esmalt üldise tsentraalse neljanda momendi avaldise (moment ja tsentraalne moment langevad kokku, kui $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$), selleks diferentseerime Kotzi jaotuse $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ karakteristikku funktsiooni neli korda, vaheldumisi $\mathbf{t}$ ja $\mathbf{t}'$ järgi.

Funktsioon on esmalt kujul:

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\right).$$

Kasutame korrutise diferentseerimise valemit. Kõik MacRae tuletist puudutavad valemid, mida kasutame, on tõestatud raamatus Kollo (1991, lk 58-65). Korrutise diferentseerimise valem on kujul:

$$\frac{d(\mathbf{Y}\mathbf{Z})}{d\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}}(\mathbf{Z} \otimes \mathbf{I}_q) + (\mathbf{Y} \otimes \mathbf{I}_p) \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X} : p \times q, \mathbf{Y} : r \times s, \mathbf{Z} : s \times n. \quad (5.9)$$

Lisaks kasutame tihti järgmiste maatriksfunktsioonide tuletisi:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{X}} &= \text{vec}\mathbf{I}_p \text{vec}'\mathbf{I}_q, & \frac{d(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B})}{d\mathbf{X}} &= \text{vec}\mathbf{A}' \text{vec}'\mathbf{B}, \\ \frac{d\mathbf{X}'}{d\mathbf{X}} &= \mathbf{K}_{q,p}, & \frac{d(\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{B})}{d\mathbf{X}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_p) \frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_q), \\ \frac{d(c\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} &= c \text{vec}\mathbf{I}_p \text{vec}'\mathbf{I}_q, & \frac{d(\mathbf{Y} + \mathbf{Z})}{d\mathbf{X}} &= \frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} + \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{X}}, \end{aligned}$$

kus $\mathbf{X} : p \times q$.

Karakteristliku funktsiooni tuletise saame valemi (5.9) abil ümber kirjutada kujul:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} &= \frac{d \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)}{d\mathbf{t}} \left(\left(1 - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\right) \otimes \mathbf{I}_1 \right) \\ &+ \left(\exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \otimes \mathbf{I}_p \right) \frac{d\left(1 - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\right)}{d\mathbf{t}} \\ &= \left(1 - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\right) \frac{d \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)}{d\mathbf{t}} + \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \frac{d\left(1 - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\right)}{d\mathbf{t}}. \end{aligned}$$

Eksponeendi tuletise leidmiseks leiame esmalt tuletise ruutvormist eksponeendi argumentis korrutise tuletise valemit (5.9) kasutades:

$$\frac{d(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}'}{d\mathbf{t}}(\mathbf{V}\mathbf{t} \otimes 1) + (\mathbf{t}' \otimes \mathbf{I}_p) \frac{d(\mathbf{V}\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} = \mathbf{K}_{1,p} \mathbf{V}\mathbf{t} + (\mathbf{t}' \otimes \mathbf{I}_p) \text{vec} \mathbf{V} = 2\mathbf{V}\mathbf{t}.$$

Viimase võrduse saamiseks kasutame seoseid $\mathbf{K}_{1,p} = \mathbf{K}_{p,1} = \mathbf{I}_p$ ja

$$\text{vec} \mathbf{ABC} = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A}) \text{vec} \mathbf{B},$$

millest esimene tuleneb kommutatsioonimaatriksi definitsioonist ja teine on raamatust Kollo (1991, lk 31). Edasi kasutame liitfunktsiooni tuletise valemit erijuhul, kui esialgne funktsioon on skalaarse väärtusega:

$$\frac{dz}{d\mathbf{X}} = \frac{dz}{d\mathbf{Y}} * \frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}}.$$

Saame eksponendi tuletiseks:

$$\frac{d \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)}{d\mathbf{t}} = \frac{d \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)}{d\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)} \frac{d\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)}{d\mathbf{t}} = -\exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \mathbf{V}\mathbf{t}.$$

Leiame ka teise teguri tuletise:

$$\frac{d\left(1 - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\right)}{d\mathbf{t}} = -\frac{2}{p} \mathbf{V}\mathbf{t}.$$

Seega karakteristliku funktsiooni esimene tuletis on:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} &= -\left(1 - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \mathbf{V}\mathbf{t} - \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \frac{2}{p} \mathbf{V}\mathbf{t} \\ &= -\left(\left(1 + \frac{2}{p}\right) \mathbf{V}\mathbf{t} - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p} \mathbf{V}\mathbf{t}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right). \end{aligned}$$

Teise tuletise leidmiseks kasutame samuti korrutise tuletise valemit (5.9):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_{\mathbf{x}}(d\mathbf{t})}{d\mathbf{t}d\mathbf{t}'} &= -\frac{d\left(\left(1 + \frac{2}{p}\right) \mathbf{V}\mathbf{t} - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p} \mathbf{V}\mathbf{t}\right)}{d\mathbf{t}'} \left(\exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \otimes \mathbf{I}_p\right) \\ &\quad - \left(\left(\mathbf{V}\mathbf{t} - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p} \mathbf{V}\mathbf{t} + \frac{2}{p} \mathbf{V}\mathbf{t}\right) \otimes \mathbf{I}_1\right) \frac{d \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)}{d\mathbf{t}'} \\ &= -\frac{d\left(\left(1 + \frac{2}{p}\right) \mathbf{V}\mathbf{t} - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p} \mathbf{V}\mathbf{t}\right)}{d\mathbf{t}'} \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p} + \frac{2}{p}\right) \mathbf{V}\mathbf{t} \frac{d \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)}{d\mathbf{t}'}. \end{aligned}$$

Leiame vajalikud tuletised eraldi. Esmalt leiame korduvate avaldiste tuletised:

$$\begin{aligned}\frac{d(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t})}{d\mathbf{t}'} &= \frac{d\mathbf{t}'}{d\mathbf{t}'}(\mathbf{V}\mathbf{t} \otimes \mathbf{I}_p) + (\mathbf{t}' \otimes \mathbf{I}_1) \frac{d(\mathbf{V}\mathbf{t})}{d\mathbf{t}'} = \text{vec}'\mathbf{I}_p(\mathbf{V}\mathbf{t} \otimes \mathbf{I}_p) + \mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{I}_p \\ &= ((\mathbf{t}'\mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_p)\text{vec}\mathbf{I}_p)' + \mathbf{t}'\mathbf{V} = \text{vec}'(\mathbf{I}_p\mathbf{I}_p\mathbf{V}\mathbf{t}) + \mathbf{t}'\mathbf{V} = 2\mathbf{t}'\mathbf{V}\end{aligned}$$

ja

$$\frac{d(\mathbf{V}\mathbf{t})}{d\mathbf{t}'} = (\mathbf{V} \otimes \mathbf{I}_1)\mathbf{K}_{1,p}(1 \otimes \mathbf{I}_p) = \mathbf{V}.$$

Leiame esimese teguri tuletise, teise liidetava diferentseerimiseks kasutame korrutise tuletise valemit:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\left(1 + \frac{2}{p}\right)\mathbf{V}\mathbf{t} - \mathbf{V}\mathbf{t}\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\right)}{d\mathbf{t}'} &= \left(1 + \frac{2}{p}\right)\mathbf{V} - \frac{1}{p}(\mathbf{V}(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t} \otimes \mathbf{I}_p) \\ &+ (\mathbf{V}\mathbf{t} \otimes \mathbf{I}_1)2\mathbf{t}'\mathbf{V}) = \left(1 + \frac{2}{p}\right)\mathbf{V} - \frac{1}{p}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t} + 2\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}).\end{aligned}$$

Leiame eksponendi tuletise:

$$\frac{d \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)}{d\mathbf{t}'} = \frac{d \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)}{d\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)} \frac{d\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)}{d\mathbf{t}'} = -\exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)\mathbf{t}'\mathbf{V}.$$

Seega teine tuletis on:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}d\mathbf{t}'} &= \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \otimes \left(-\left(1 + \frac{2}{p}\right)\mathbf{V} + \frac{1}{p}\mathbf{V} \otimes \mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{4}{p}\right)\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V} - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}\right).\end{aligned}$$

Kolmanda tuletise võtmisel peame kasutama otsekorrutise tuletise valemit:

$$\frac{d(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{Z})}{d\mathbf{X}} = \mathbf{Y} \otimes \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_{m,r} \otimes \mathbf{I}_p) \left(\mathbf{Z} \otimes \frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} \right) (\mathbf{K}_{n,s} \otimes \mathbf{I}_q), \quad (5.10)$$

kus $\mathbf{X} : p \times q$, $\mathbf{Y} : m \times n$, $\mathbf{Z} : r \times s$.

Seega saame kolmanda tuletise kirjutada kujul:

$$\begin{aligned}\frac{d^3\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}d\mathbf{t}'d\mathbf{t}} &= \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \otimes \frac{d\left(\frac{1}{p}\mathbf{V} \otimes (\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) + \left(1 + \frac{4}{p}\right)\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V} - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}\right)}{d\mathbf{t}} \\ &\quad + \left(-\left(1 + \frac{2}{p}\right)\mathbf{V} + \frac{1}{p}\mathbf{V} \otimes (\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) + \left(1 + \frac{4}{p}\right)\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V} - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}(\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V})\right) \\ &\quad \otimes \frac{d\left(\exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)\right)}{d\mathbf{t}}.\end{aligned}$$

Leiame esmalt tuletise avaldisest $\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}$ kasutades korrutise tuletise valemit (5.9):

$$\frac{d(\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V})}{d\mathbf{t}} = \text{vec}\mathbf{V}((\mathbf{t}'\mathbf{V}) \otimes \mathbf{I}_1) + ((\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{I}_p)\mathbf{I}_p\mathbf{V} = \text{vec}(\mathbf{V})\mathbf{t}'\mathbf{V} + (\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V}.$$

Viimase võrduse saime seosest $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C}\mathbf{D})$, kus $\mathbf{A} : p \times q$, $\mathbf{B} : q \times w$, $\mathbf{C} : r \times s$, $\mathbf{D} : s \times q$

Eksponendi tuletis on juba teada. Kolmanda tuletise leidmiseks on tarvis veel kahe avaldise tuletisi:

$$\frac{d(\mathbf{V} \otimes (\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}))}{d\mathbf{t}} = \mathbf{V} \otimes \frac{d(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} = 2\mathbf{V} \otimes (\mathbf{V}\mathbf{t})$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{d((\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes (\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}))}{d\mathbf{t}} &= \mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t} \otimes \frac{d(\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V})}{d\mathbf{t}} + (\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}) \otimes \frac{d(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} \\ &= (\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes (\text{vec}(\mathbf{V})\mathbf{t}'\mathbf{V}) + (\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes (\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V} + (\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}) \otimes \mathbf{V}\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Kolmandaks tuletiseks saame:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}d\mathbf{t}'d\mathbf{t}} &= \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \otimes \left(\frac{2}{p}\mathbf{V} \otimes (\mathbf{V}\mathbf{t}) + \left(1 + \frac{4}{p}\right)\text{vec}(\mathbf{V})\mathbf{t}'\mathbf{V}\right. \\ &\quad + \left(1 + \frac{4}{p}\right)(\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V} - \frac{1}{p}(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes (\text{vec}(\mathbf{V})\mathbf{t}'\mathbf{V}) \\ &\quad \left. - \frac{1}{p}(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes (\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V} - \frac{1}{p}(\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}) \otimes \mathbf{V}\mathbf{t}\right) \\ &\quad + \left(-\left(1 + \frac{2}{p}\right)\mathbf{V} + \frac{1}{p}\mathbf{V} \otimes (\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) + \left(1 + \frac{4}{p}\right)\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}\right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}(\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V})\right) \otimes \left(-\exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right)\mathbf{V}\mathbf{t}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}\right) \otimes \left(\frac{2}{p}\mathbf{V} \otimes (\mathbf{V}\mathbf{t}) + \left(1 + \frac{4}{p}\right)\text{vec}(\mathbf{V})\mathbf{t}'\mathbf{V}\right. \\ &\quad + \left(1 + \frac{4}{p}\right)(\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V} - \frac{1}{p}(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes (\text{vec}(\mathbf{V})\mathbf{t}'\mathbf{V}) \\ &\quad - \frac{1}{p}(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes (\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V} - \frac{1}{p}(\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}) \otimes \mathbf{V}\mathbf{t} \\ &\quad + \left(1 + \frac{2}{p}\right)\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}\mathbf{t} - \frac{1}{p}\mathbf{V} \otimes (\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V}\mathbf{t} \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{4}{p}\right)\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}\mathbf{t} + \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}(\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}) \otimes \mathbf{V}\mathbf{t}\right). \end{aligned}$$

Tähistame

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} = & \left(\left(1 + \frac{4}{p} \right) \mathbf{V} \otimes (\mathbf{V}\mathbf{t}) + \left(1 + \frac{4}{p} \right) \text{vec}(\mathbf{V})\mathbf{t}'\mathbf{V} \right. \\
& + \left(1 + \frac{4}{p} \right) (\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V} - \frac{1}{p}(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes (\text{vec}(\mathbf{V})\mathbf{t}'\mathbf{V}) \\
& - \frac{1}{p}(\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes (\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V} - \frac{1}{p}(\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}) \otimes \mathbf{V}\mathbf{t} \\
& - \frac{1}{p}\mathbf{V} \otimes (\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V}\mathbf{t} - \left(1 + \frac{4}{p} \right) \mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}\mathbf{t} \\
& \left. + \frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{p}(\mathbf{V}\mathbf{t}\mathbf{t}'\mathbf{V}) \otimes \mathbf{V}\mathbf{t} \right).
\end{aligned}$$

Neljanda tuletise saame otsekorrutise valemi 5.10 abil kirjutada kujul:

$$\frac{d^4\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}d\mathbf{t}'d\mathbf{t}d\mathbf{t}'} = \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{t}'} + \left(\mathbf{Z} \otimes \frac{d(\exp(-\frac{\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}{2}))}{d\mathbf{t}'} \right).$$

Kuna neljas tsentraalne moment, mida leiame, võrdub:

$$\overline{m}_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{i^4} \frac{d^4\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}d\mathbf{t}'d\mathbf{t}d\mathbf{t}'} \Big|_{\mathbf{t}=0},$$

ja teame, et neljanda tuletise avaldises oleva eksponendi tuletis $\mathbf{t}'$ järgi sisaldab vektoriga $\mathbf{t}'$ korrutamist, siis ei pruugi me teist liidetavat tuletise leidmisel arvesse võtta. Ka esimeses liikmes leiame tuletised ainult nendest maatriksi $\mathbf{Z}$ liidetavatest, mis sisaldavad vektorit $\mathbf{t}$ ainult ühe korra, sest teiste tuletised muutuvad vektori $\mathbf{t}$ võrdsustamisel nulliga nullideks. Leiame kolme liidetava tuletised eraldi:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\mathbf{V} \otimes (\mathbf{V}\mathbf{t}))}{d\mathbf{t}'} &= \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}, \\
\frac{d(\text{vec}(\mathbf{V})\mathbf{t}'\mathbf{V})}{d\mathbf{t}'} &= \text{vec}\mathbf{V}\text{vec}'\mathbf{V}, \\
\frac{d((\mathbf{V}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{V})}{d\mathbf{t}'} &= \mathbf{K}_{p,p}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}).
\end{aligned}$$

Seega neljas tsentraalne moment MacRae tuletise järgi on:

$$\overline{m}_4(\mathbf{x}) = \left(1 + \frac{4}{p} \right) ((I_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p})(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) + \text{vec}\mathbf{V}\text{vec}'\mathbf{V}).$$

Järsakuskordaja leidmiseks peame asendama $D\mathbf{y} = \mathbf{I}_p$ ehk $\mathbf{V} = \frac{p}{2+p}\mathbf{I}_p$ ja seejärel leidma maatriksi $\overline{m}_4(\mathbf{x})$ jälje. Kuna $\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{I}_p = \mathbf{I}_{p^2}$ ja saame kasutada seoseid (Lütkepohl (1996), lk 19 ja 97):

$$c\mathbf{A} \otimes d\mathbf{B} = cd(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}), \quad \text{vec}(b\mathbf{A}) = b\text{vec}\mathbf{A},$$

siis saame:

$$\beta_{2,p} = \left(1 + \frac{4}{p}\right) \left(\frac{p}{2+p}\right)^2 \text{tr}(\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{K}_{p,p} + \text{vec}\mathbf{I}_p \text{vec}'\mathbf{I}_p).$$

Jälje omaduse (Kollo 1991, lk 16)

$$\text{tr}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\text{tr}\mathbf{A} + b\text{tr}\mathbf{B}$$

tõttu saame kordaja jälje ette tuua ja arvutada jälje avaldises esinevatest liidetavatest eraldi, kusjuures

$$\text{tr}(\mathbf{I}_{p^2}) = p^2, \quad \text{tr}(\mathbf{K}_{p,p}) = p,$$

sest maatriksi $\mathbf{K}_{p,p}$ igas reas ja igas veerus asub täpselt üks arv 1 ja seetõttu asub peadiagonaalil neid $p^2 \times p^2$ maatriksis täpselt p . Viimase liidetava jälje leidmiseks kasutame jälje omadusi raamatust Kollo (1991, lk 17 ja 31):

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}') = \text{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A}), \quad \text{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \text{vec}'\mathbf{A}\text{vec}\mathbf{B},$$

kus maatriksid $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ on $p \times q$ maatriksid. Viimaseks liidetavaks saame:

$$\text{tr}(\text{vec}\mathbf{I}_p \text{vec}'\mathbf{I}_p) = \text{tr}(\text{vec}'\mathbf{I}_p \text{vec}\mathbf{I}_p) = \text{vec}'\mathbf{I}_p \text{vec}\mathbf{I}_p = \text{tr}(\mathbf{I}_p'\mathbf{I}_p) = p.$$

Seega järsakuseks saame:

$$\beta_{2,p} = \frac{p(p+4)}{(2+p)^2}(p^2 + 2p) = \frac{p^2(p+4)}{2+p} = p^2 + 2p - \frac{4p}{2+p}.$$

Näeme, et meie uuritava Kotzi jaotuse järsakus on mõnevõrra väiksem normaaljaotuse järsakusest $p^2 + 2p$.

5.4 Marginaaljaotus

Hiljem vajame simuleerimisel kahemõõtmelise Kotzi jaotuse marginaaljaotust. Sõnastame tulemuse teoreemina.

Teoreem 5.1. *Olgu kahemõõtmelise Kotzi jaotusega vektor $\mathbf{x}$ parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{V} = \mathbf{I}_2$. Siis vektori $\mathbf{x}$ koordinaadi x_1 marginaaljaotus on segu ühemõõtmelisest Kotzi jaotusest ja standardsest normaaljaotusest tihedusfunktsiooniga:*

$$f_{x_1}(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(x_1 + 1) \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right).$$

Tõestus

Marginaaljaotuse saamiseks integreerime Kotzi jaotuse tihedusfunktsiooni ühe argumendi järgi üle reaalsirge:

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi}(x_1^2 + x_2^2) \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right) dx_2 = \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right) \\ &\quad \times \left(x_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right) dx_2 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right) dx_2\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}(\sqrt{2\pi}x_1^2 + \sqrt{2\pi}) \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(x_1^2 + 1) \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right). \end{aligned}$$

mott

5.5 Maatriksjaotus

Nagu üldiselt elliptilise jaotuse korral, defineerime ka Kotzi tüüpi jaotuse korral maatriksjaotuse vektoriseeritud maatriksi jaotusena.

Definitsioon 5.2. *Ütleme, et maatriks $\mathbf{X}$ on Kotzi tüüpi maatriksjaotusega, kui vektor $\text{vec}\mathbf{X}$ on Kotzi tüüpi jaotusega.*

Kuna Kotzi jaotus kuulub elliptiliste jaotuste hulka, siis peame samuti võtma kasutusele täiendava hajuvusparameetri $\mathbf{W}$ ja leida tihedusfunktsiooni kuju.

Olgu $\mathbf{X} : p \times n$ Kotzi jaotusega parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\mathbf{V} = \mathbf{I}_p$ ja $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I}_n$. Olgu $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}'$ ning $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}'$ mittenegatiivselt määratud vastavalt $p \times p$ ja $n \times n$ maatriksid, kus $\boldsymbol{\Delta} : p \times l$ ja $\boldsymbol{\Gamma} : n \times m$. Kotzi jaotusega ($N = 2$, $r = \frac{1}{2}$) maatriks $\mathbf{Y} : p \times n$ parameetritega $\mathbf{M}$, $\mathbf{V}$ ja $\mathbf{W}$ on esitatav kujul:

$$\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \mathbf{M} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{X}\boldsymbol{\Gamma}',$$

kus $\mathbf{M} : p \times n$ on konstantne maatriks. Siis

$$\text{vec} \mathbf{Y} = \text{vec} \mathbf{M} + (\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{\Delta}) \text{vec} \mathbf{X}$$

ja vektor $\mathbf{Y}$ tihedus, juhul kui $\mathbf{V}$ ja $\mathbf{W}$ on positiivselt määratud, on kujul:

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) = |\mathbf{V}|^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{W}|^{-\frac{p}{2}} g(\text{tr}\{\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{M})\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{M})'\}),$$

kus $g(\cdot)$ on Kotzi jaotuse tihedust genereeriv funktsioon, mis on antud seosega (5.1).

5.5.1 Maatriksjaotuse momendid

Edaspidi vajame ka Kotzi maatriksjaotuse (parameetritega $N = 2$ ja $r = \frac{1}{2}$) momente. Need saame leida elliptilise jaotuse üldkujulistest momentidest, mis on leitud teoreemis 3.12. Vajalik karakteristliku funktsiooni genereeriva funktsiooni tuletis kohal null on leitud vektori momentide paragrahvis 5.3.2 ja antud võrdusega (5.4). Kuna elliptilise jaotusega juhuslik maatriks $\mathbf{X}$ on sama jaotusega kui vektor $\text{vec} \mathbf{X}$, siis $p \times n$ maatriksi jaotuse korral:

$$\phi'(0) = -\frac{pn + 2}{2pn}.$$

Toome siin ära edasises vajalikud avaldised.

Teoreem 5.2. *Olgu juhuslik maatriks $\mathbf{X}$ Kotzi maatriksjaotusega parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{\Psi}$. Siis*

$$m_1(\mathbf{X}) = E\mathbf{X} = \mathbf{M}; \quad (5.11)$$

$$m_2(\mathbf{X}) = \left(1 + \frac{2}{pn}\right) (\mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma}) + \text{vec} \mathbf{M} \text{vec}' \mathbf{M}. \quad (5.12)$$

Samuti vajame edaspidi dispersiooni avaldist. Selle saame kasutades järelduses 3.13 toodud dispersiooni avaldist.

Teoreem 5.3. *Olgu juhuslik maatriks $\mathbf{X}$ Kotzi maatriksjaotusega parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{\Psi}$. Siis kõik maatriksi $\mathbf{X}$ paaritut järku tsentraalsed momendid on võrdsed nulliga ja*

$$\overline{m}_2(\mathbf{X}) = D\mathbf{X} = \left(1 + \frac{2}{pn}\right) \mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma}. \quad (5.13)$$

5.6 Ühemõõtmelise Kotzi jaotuse simuleerimiseeskiri

Selles paragrahvis tuletame esmalt simuleerimiseeskirja ühemõõtmelise sfäärilise Kotzi jaotusega (st Kotzi tüüpi jaotusega, millel parameeter $s = 1$) juhusliku suuruse genereerimiseks parameetrite $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$ ja $\mathbf{V} = 1$ korral, hiljem vaatleme üldisemat juhtu. Simuleerimiseks kasutame üldst valikumeetodit.

5.6.1 Üldine valikumeetod tasandil pideva juhusliku suuruse simuleerimiseks

Üldise valikumeetodi idee on kasutada keeruka tihedusfunktsiooniga juhusliku suuruse simuleerimiseks mõnda muud kergesti simuleeritavat jaotust.

Simuleerimiseeskirja leidmiseks kasutame järgnevat teoreemi (Morgan, 1984 lk 98-107):

Teoreem 5.4. *Olgu tõenäosustihedus $f(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ning $h(x) = kg(x)$, kus $g(x)$ on mingi tõenäosustihedus. Olgu Y_1 ja Y_2 juhuslikud suurused, nii et juhusliku suuruse Y_1 tihedusfunktsioon on $g(x)$ ja juhusliku suuruse Y_2 tinglik tõenäosusjaotus tingimusel $Y_1 = y_1$ on ühtlane jaotus:*

$$(Y_2|Y_1 = y_1) \sim U(0, kg(y_1)) = U(0, h(y_1)).$$

Siis eeskirjaga

$$Z(\omega) = Y_1(\omega), \quad \text{kui } Y_2 < f(Y_1(\omega))$$

määratud juhuslik suurus on tõenäosustihedusega $f(x)$.

Funktsiooni $h(x)$ nimetatakse ümbrikuks (envelope).

Tihedusega $f(x)$ juhusliku suuruse Z modelleerimiseks teoreemi 5.4 põhjal võtame pseudojuhuslikud ühtlase jaotusega $U(0, 1)$ arvud $u_1, u_2, \dots$, kasutame loendajaid i ja j ning võtame nende väärtused esmalt $i = j = 1$. Juhusliku suuruse Z vajalikud m väärtust simuleerime järgnevalt:

1. modelleerime juhusliku suuruse $y_{1,i}$ kui Y_1 väärtuse pseudojuhusliku arvu u_{2i-1} funktsioonina (arvestades, et Y_1 tihedusfunktsioon on $g(x)$);
2. modelleerime juhusliku suuruse Y_2 väärtuse $y_{2,i} = u_{2i} \cdot k \cdot g(y_{1,i})$;
3. $z_j = y_{1,i}$ ja $j = j + 1$, kui $y_{2,i} < f(y_{1,i})$;
4. $i = i + 1$;
5. kui $j > m$, siis lõpetame töö, kui mitte, siis pöördume uuesti punkti 1.

5.6.2 Efektiivsus

On ilmne, et sellise eeskirja järgi simuleerides tehakse mõnevõrra ka tühja tööd. Kui simuleerimiseeskirja punktis 3 toodud tingimus pole täidetud, siis oleme ühe tsükli töötanud ilmaasjata ja genereeritud väärtus läheb kaduma. Leiame, kui palju väärtusi keskmiselt kaduma läheb. Funktsiooni $h(x)$ alune pindala on:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = k \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = k,$$

kuna tihedusfunktsiooni alune pindala on alati 1 ja $g(x)$ on juhusliku suuruse tihedusfunktsioon. Samuti on 1 funktsiooni $f(x)$ alune pindala. Efektiivsuseks on seega

$$e = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{1}{k}.$$

On selge, et alati $k > 1$, (ilmne tingimustest $f(x) \leq h(x)$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$). Seega eeskiri on seda parem, mida vähem on k suurem ühest.

5.6.3 Ülesande täpsustus

Meie soovime simuleerida juhuslikku suurust P ühemõõtmelisest Kotzi jaotusest parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$. Selle tihedusfunktsioon on kujul:

$$f_P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Kuna see tihedusfunktsioon on sümmeetriline, siis võime lihtsuse mõttes genereerida esmalt juhusliku suuruse $Z = |P|$ väärtuse z ja ühtlase jaotusega $U(0, 1)$ juhusliku suuruse U väärtuse u ning siis võtta juhuslikku suuruse P väärtuseks:

$$p = \begin{cases} z, & \text{kui } u < \frac{1}{2}; \\ -z, & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Seega oleme on probleemi taandanud mittenegatiivsete väärtustega juhusliku suuruse Z , genereerimisele. Juhusliku suuruse Z tihedusfunktsioon on kujul:

$$f(x) = f_Z(x) = 2 \cdot f_P(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad x \geq 0$$

5.6.4 Ümbriku leidmine

Teoreemi kasutamiseks peame leidma ümbrikfunktsiooni $h(x)$. Selleks peame valima mingi tõenäosustiheduse ja määrama k nii, et kehtiks $f(x) \leq h(x)$. Tihti valitakse ainult mittenegatiivsete väärtustega pideva juhusliku suuruse genereerimisel ümbrikfunktsiooni aluseks olevaks tõenäosustiheduseks eksponentjaotuse tõenäosustihedus, sest seda jaotust on äärmiselt lihtne genereerida. Eksponentjaotus on Γ -jaotuse (definiitsioon 5.3) erijuht. Öeldakse, et juhuslik suurus X on eksponentjaotusega parameetriga λ ($X \sim E(\lambda)$), kui $X \sim \Gamma(1, \frac{1}{\lambda})$.

Definiitsioon 5.3. *Juhuslik suurus X on jaotusega $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, parameetritega $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ kui tema tihedusfunktsioon on:*

$$f_{\Gamma}(x) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \quad x > 0.$$

Selgub, et antud juhul eksponentjaotus ei ole sobilik, sellisel juhul tuleks meie genereerimiseeskirja efektiivsuseks olenevalt eksponentjaotuse parameetri valikust alla 40%.

See, et eksponentjaotus on erijuht Γ -jaotusest, viib mõttele kasutada genereerimiseks muude parameetritega Γ -jaotust. Kuna Γ -jaotus on asümmeetriline jaotus, ja seda on lihtne simuleerida, kui parameeter α on täisarv, siis kasutamegi seda ideed. Γ -jaotuse kuju on olenevalt tema parameetrite valikust üsna varieeruv, seepärast on meie järgmiseks probleemiks jaotusparameetrite valik.

Kuna parameetri $\alpha = 1$ väärtuse korra on tegemist eksponentjaotusega ja veendusime, et see meile ei sobi, siis suurendame parameetrit ühe võrra ja võtame $\alpha = 2$ (täisarvulise väärtuse kasutamine on simuleerimise lihtsustamiseks oluline).

Teise parameetri β määrame pärast k avaldise leidmist, minimeerimaks kor-dajat k .

5.6.5 Parameetrite leidmine

Parameetrite leidmiseks peame lahendame võrratuse:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \leq k \cdot \frac{x}{\beta^2} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right),$$

nii et kordaja k väärtus oleks võimalikult väike. Selleks peaks kordaja k määrama nii, et kahel funktsioonil oleks mingis punktis x_0 puutepunkt. Kuna funktsioonid ei saa lõikuda, siis peab neil olema selles punktis ka ühine puutuja, seega peavad selles punktis olema võrdsed ka funktsioonide tuletised.

Koostame võrrandisüsteemi, mille esimese võrrandi saame võrdsustades punktis x_0 funktsioonid $h(x)$ ja $f(x)$ ja teise võrrandi võrdsustades punktis x_0 tuletised funktsioonidest $h(x)$ ja $f(x)$. Jagame esimese võrrandi läbi argumentiga x_0 ja saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x_0 \exp\left(-\frac{1}{2} x_0^2\right) = k \cdot \frac{1}{\beta^2} \exp\left(-\frac{x_0}{\beta}\right); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2x_0 - x_0^3) \exp\left(-\frac{1}{2} x_0^2\right) = \frac{k}{\beta^2} \left(1 - \frac{x_0}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{x_0}{\beta}\right). \end{cases}$$

Lahutame teisest võrrandist esimese ja saame:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (x_0 - x_0^3) \exp\left(-\frac{1}{2} x_0^2\right) = -\frac{k x_0}{\beta^3} \exp\left(-\frac{x_0}{\beta}\right).$$

Avaldame saadud võrrandist k :

$$k = \beta^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (x_0^2 - 1) \exp\left(-\frac{1}{2} x_0^2 + \frac{x_0}{\beta}\right).$$

Asendame k avaldise võrrandisüsteemi esimesse võrrandisse:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} x_0 \exp\left(-\frac{1}{2} x_0^2\right) = \beta^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - x_0^2) \exp\left(-\frac{1}{2} x_0^2 + \frac{x_0}{\beta}\right) \cdot \frac{1}{\beta^2} \exp\left(-\frac{x_0}{\beta}\right),$$

kust lihtsustades saame:

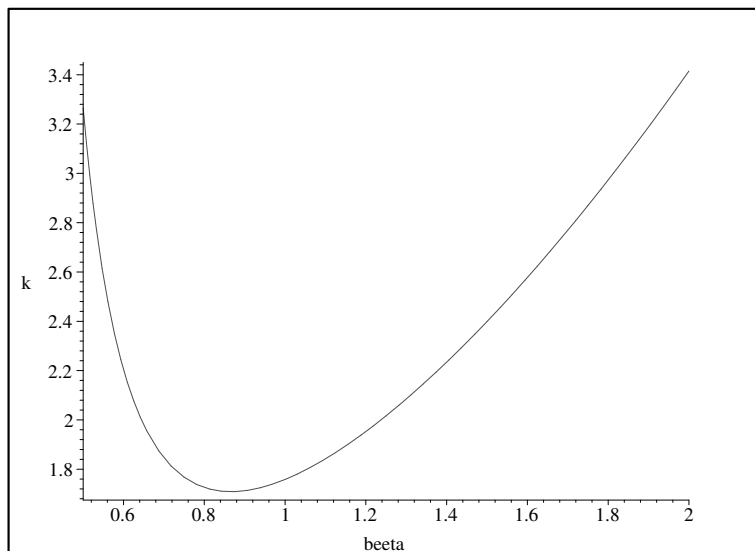
$$\beta x_0^2 - x_0 - \beta = 0.$$

Ruutvõrrandi lahendamisel x_0 suhtes saame (arvestades tingimust $x_0 > 0$), et

$$x_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta^2}}{2\beta}$$

Asendame selle k avaldisse ja saame:

$$k = (1 + \sqrt{1 + 4\beta^2}) \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta^2} - 2\beta^2}{4\beta^2}\right)$$



Joonis 5.14: Joonis k väärtuste kohta sõltuvalt β väärtustest

Jooniselt 5.14 näeme, et parameetri β väärtus minimaalse k korral on 1 lähedal. Selleks, et leida, millise argumenti β väärtuse korral on k väärtus vähim (st. eeskirja efektiivsus suurim), minimeerime k parameetri β suhtes. Selleks leiame k tuletise parameetri β järgi ja leiame tuletise nullkoha:

$$k'(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{8\beta^4 - 2\beta^2 - \sqrt{1 + 4\beta^2} - 1}{\beta^2 \sqrt{1 + 4\beta^2}} \exp\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta^2} - 2\beta^2}{4\beta^2}\right).$$

Seega tuletise nullkohas peab kehtima võrdus

$$8\beta^4 - 2\beta^2 - \sqrt{1 + 4\beta^2} - 1 = 0.$$

Viies ruutjuurega liikme võrrandi paremale poolele, võttes mõlemad pooled ruutu ja lihtsustades saame:

$$64\beta^8 - 32\beta^6 - 12\beta^4 = 0.$$

Jagame saadud võrrandi läbi $4\beta^4$ ja lahendame saadud biruutvõrrandi. Meile sobivaks lahendiks saame:

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866.$$

Minimeerivale β väärtusele vastav k on:

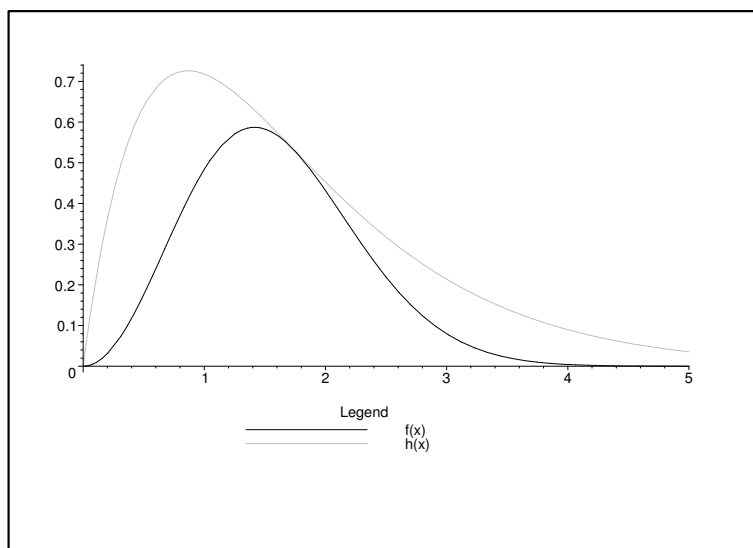
$$k = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1,709, \quad (5.14)$$

seega on meie eeskirja efektiivsus:

$$e = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0,585. \quad (5.15)$$

Seega kasutame genereerimisel ümbrikuna Γ -jaotust parameetritega 2 ja $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ning kordajat k võrdusest (5.14).

Valitud ümbriku ja meie genereeritavat tihedusfunktsiooni graafikud on joonisel 5.15



Joonis 5.15: Genereeritava jaotuse tihedusfunktsiooni ja valitud ümbrik

5.6.6 Γ -jaotuse modelleerimine

Modelleerimiseeskiri on toodud raamatus Gentle (2003, lk 180).

Γ -jaotus on aditiivne, see tähendab, et kui meil on sõltumatud juhuslikud suurused $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$, $\dots$, $X_n \sim \Gamma(\alpha_n, \beta)$, siis

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta\right).$$

Seega, juhul kui juhuslik suurus X on Γ -jaotusega $\Gamma(\alpha, \beta)$, mille esimene parameeter $\alpha = m$ on täisarv, siis saame juhusliku suuruse X avaldada m eksponentjaotusega juhusliku suuruse summana parameetriga β .

Seega on Γ -jaotuse modelleerimiseeskiri järgmine. Olgu meil tarvis modelleerida Γ -jaotusega $\Gamma(m, \beta)$ juhuslikku suuruse l väärtust. Võtame pseudojuhuslikud ühtlase jaotusega $U(0, 1)$ arvud $u_1, u_2, \dots, u_l$, kasutame loendajat i ning võtame selle väärtuseks esmalt $i = 0$. Juhusliku suuruse $X \sim \Gamma(m, \beta)$ vajalikud l väärtust simuleerime järgnevalt:

1. modelleerime m eksponentjaotusega $E(\beta)$ juhuslikku suurust:

$$y_{mi+j} = -\beta \ln u_{mi+j} \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

2. omistame

$$x_{i+1} = \sum_{j=1}^n y_{mi+j};$$

3. $i = i + 1$;

4. kui $i \geq l$, siis lõpetame töö, kui mitte, pöördume uuesti punkti 1.

5.6.7 Kotzi jaotuse simuleerimiseeskiri ühemõõtmelisel juhul

Olgu juhusliku suuruse Z tihedusega

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

Tahame modelleerida m väärtust z_i . Võtame pseudojuhuslikud ühtlase jaotusega $U(0, 1)$ arvud $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots$ ja $w_1, w_2, \dots, w_m$, kasutame loendajaid i ja j ning võtame nende väärtusteks esmalt $i = 1$ ja $j = 1$. Simuleerime järgneva eeskirja järgi:

1. modelleerime 2 eksponentjaotusega $E(\frac{\sqrt{3}}{2})$ juhuslikku suurust:

$$x_{2(i-1)+1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln u_{2(i-1)+1}, \quad x_{2(i-1)+2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln u_{2(i-1)+2};$$

2. omistame

$$y_{1,i} = x_{2(i-1)+1} + x_{2(i-1)+2};$$

3. modelleerime juhusliku suuruse Y_2 väärtuse

$$y_{2,i} = v_l \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4y_{1,i}}{3} \exp\left(-\frac{2y_{1,i}}{\sqrt{3}}\right);$$

4. kui $y_{2,i} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_{1,i}^2 \exp\left(-\frac{1}{2} y_{1,i}^2\right)$, omistame $z'_j = y_{1,i}$ ja $j = j + 1$;

5. $i = i + 1$;

6. kui $j > m$, siis jätkame järgmiselt realt, kui mitte, pöördume uuesti punkti 1;

7. $i = 1$;

8. omistame $z_i = z'_i$, kui $w_i < \frac{1}{2}$, vastasel korral omistame $z_i = -z'_i$;

9. $i = i + 1$;

10. kui $i > m$, siis lõpetame, kui mitte, pöördume punkti 8.

Kui soovime genereerida n Kotzi jaotusega juhuslikku suurust x_i , mille dispersioon on σ^2 ja keskväärtsus μ , siis peame genereerima toodud algoritmi järgi n juhuslikku suurust z_i ja

$$x_i = \sigma z_i + \mu.$$

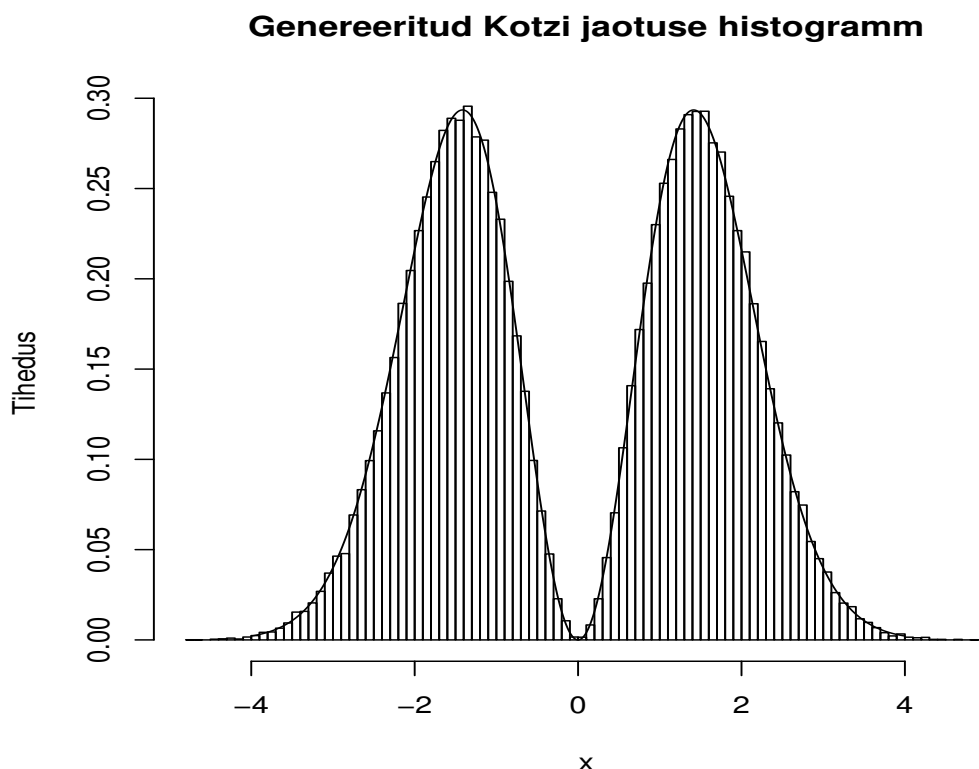
5.6.8 Simuleerimiseeskirja katsetamine

Simuleerimiseeskirja katsetamiseks genereerime statistikapaketiga R leitud eeskirja järgi 100000 pseudojuhuslikku arvu Kotzi jaotusest parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$. Genereerimiseks kasutatud programm on toodud lisas A. Saadud arvudest tehtud histogramm on joonisel 5.16.

5.7 Üldise Kotzi jaotuse simuleerimine

Kotzi jaotusega p -vektori genereerimiseks kasutame elliptilise jaotuse definitsiooni 3.2. Selle kohaselt saame elliptilise jaotusega juhusliku vektori sfäärilise jaotusega juhuslikust vektorist lineaarteisenduse abil. Seega, kui $\mathbf{z}$ on Kotzi jaotusega parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{V} = \mathbf{I}_p$, siis Kotzi jaotusega juhusliku vektori $\mathbf{x}$ parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu}$ ja $\mathbf{V}$ saame võrdusega:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \boldsymbol{\mu},$$



Joonis 5.16: Genereeritud Kotzi jaotuse histogramm koos teoreetilise tiheduse joonega.

kus $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{V}$ ja $\mathbf{A} : p \times p$ ja täisastakuga. Seega taandub probleem Kotzi jaotuse genereerimisele parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{V} = \mathbf{I}_p$.

Kuigi ka üldisel juhul oleks Kotzi jaotuse genereerimiseks võimalik kasutada üldist valikumeetodit, oleks see keerukas, sest sobiva ümbriku leidmine ei ole mitmemõõtmelisel juhul lihtne. Seepärast kasutame siinkohal Markovi ahelatel baseeruvat asümptootilist genereerimiseeskirja, Metropolis-Hastingsi algoritmi (Gamerman (1997), lk 172). Metropolis-Hastingsi algoritm on kahe-sammuline. Esmalt genereeritakse punkt nn ettepanekujaotusest ja siis otsustatakse teatud tõenäosusega, kas punkt võetakse vastu. Vastasel korral võetakse uueks punktiks uuesti eelmine väärtus. Ettepanekujaotuseks valitakse jaotus, millest oskame simuleerida. Algoritmi reaalseks kasutamiseks peab ettepaneku genereerimiseks kasutatav jaotus olema määratud samas piirkonnas ja võimalikult sarnane genereeritavale jaotusele (nt sümmeetrilise jaotuse genereerimiseks sümmeetriline). Algoritm koondub kiiremini kui ettepaneku genereerimiseks kasutatava jaotuse dispersioon on suurem genereeritava jao-

tuse dispersioonist. Kuna alustada võib suvalisest algväärtusest, siis esimesed simuleeritud arvud ei pruugi olla meid huvitavast jaotusest. On tõestatud, et Metropolis-Hastingsi algoritm töötab, st teatud arvu sammude pärast on kõik edasised simulatsioonid meie jaotusest. Algoritmi koondumine on kiirem, kui algväärtus on valitud jaotuse määramispiirkonnast. Praktikas proovitakse algoritmi tööd mitme algväärtusega, leitakse tulemuste võrdlemise teel koht, kust alates genereeritud jaotused on sarnased ehk läheväärtus ja kasutatakse edasises ainult arve pärast läheväärtust.

Juhusliku p -vektori tihedusfunktsiooniga $f(\cdot)$ genereerimiseks võtame esmalt loendaja $i = 0$ ja valime algväärtuse $\mathbf{z}_0$, seejärel:

1. $i = i + 1$;
2. genereerime väärtuse ettepaneku $\mathbf{y}_i$ jaotusest tihedusfunktsiooniga $h(\cdot)$;
3. leiame vastuvõtmistõenäosuse:

$$\alpha(\mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{y}_i) = \min \left(1, \frac{f(\mathbf{y}_i)h(\mathbf{z}_{i-1})}{f(\mathbf{z}_{i-1})h(\mathbf{y}_i)} \right);$$

4. genereerime ühtlase jaotusega $U(0, 1)$ juhusliku suuruse väärtuse u ;
5. kui $u < \alpha$, siis $\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i$, muidu $\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_{i-1}$;

Kordame algoritmi kuni vajalik arv vektoreid on genereeritud.

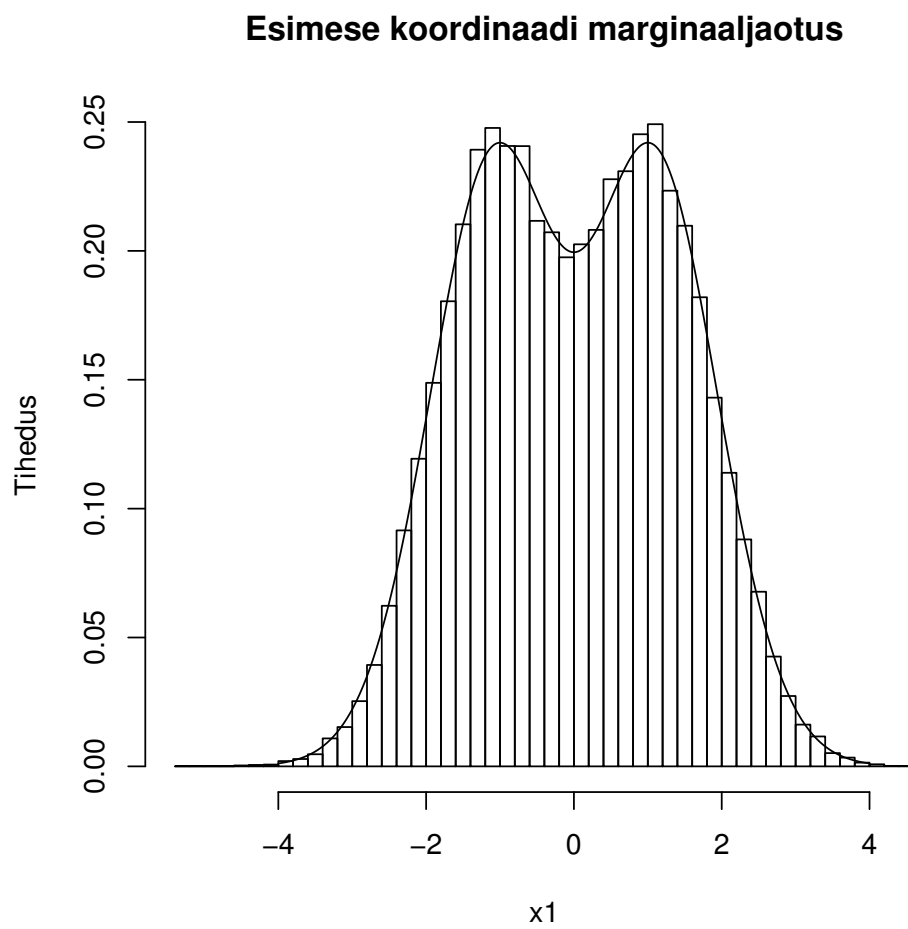
Kotzi jaotuse genereerimiseks peame Metropolis-Hastingsi algoritmis võtma genereeritavaks tiheduseks Kotzi jaotuse tiheduse.

Ettepaneku genereerimiseks valime normaaljaotuse $N_p(0, 2 \left(1 + \frac{2}{p}\right) \mathbf{I}_p)$, sellise normaaljaotuse dispersioon on 2 korda suurem kui genereeritaval Kotzi jaotusel. Normaaljaotus vastab ka algoritmi koondumiseks vajalikele tingimustele.

5.7.1 Simuleerimiseeskirja katsetamine kahemõõtmelisel juhul

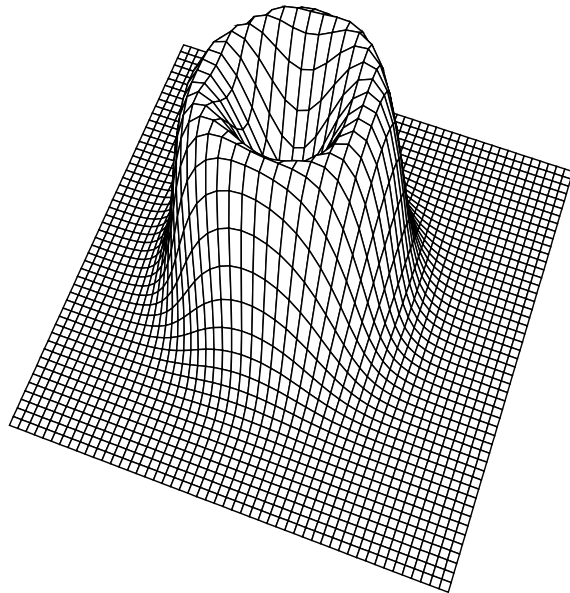
Katsetamiseks genereerime 100 000 kahemõõtmelist juhuslikku vektorit kirjeldatud eeskirja abil. Kasutame algühenditena vektoreid $(0, 1, -0, 1)$ ja $(25, -25)$, et kontrollida eeskirja koonduvust.

Diagnoosimaks, kui hästi eeskiri töötab, leiame kahemõõtmelise Kotzi jaotuse parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{V} = \mathbf{I}_2$ marginaaljaotuse ja



Joonis 5.17: Genereeritud Kotzi jaotuse esimese marginaali empiiriline tihe-
dusfunktsioon

Genereeritud jaotuse empiiriline tihedus



Joonis 5.18: Genereeritud Kotzi jaotuse empiiriline tihedusfunktsioon

võrdleme seda genereeritud arvude empiirilise jaotusega, mis on leitud teoreemis 5.1. Empiiriliseks jaotuseks on standardse normaaljaotuse ja Kotzi jaotuse parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu} = 0$ ja $\mathbf{V} = 1$ segu kaaludega $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}$. Programm R-s simuleerimiseks on toodud lisas B.

Joonisel 5.17 on genereeritud juhuslike vektorite esimestest komponentidest leitud marginaalne tihedusfunktsioon. Lisaks on võrdluseks joonisel kujutatud ka teoreetiline tihedusfunktsioon.

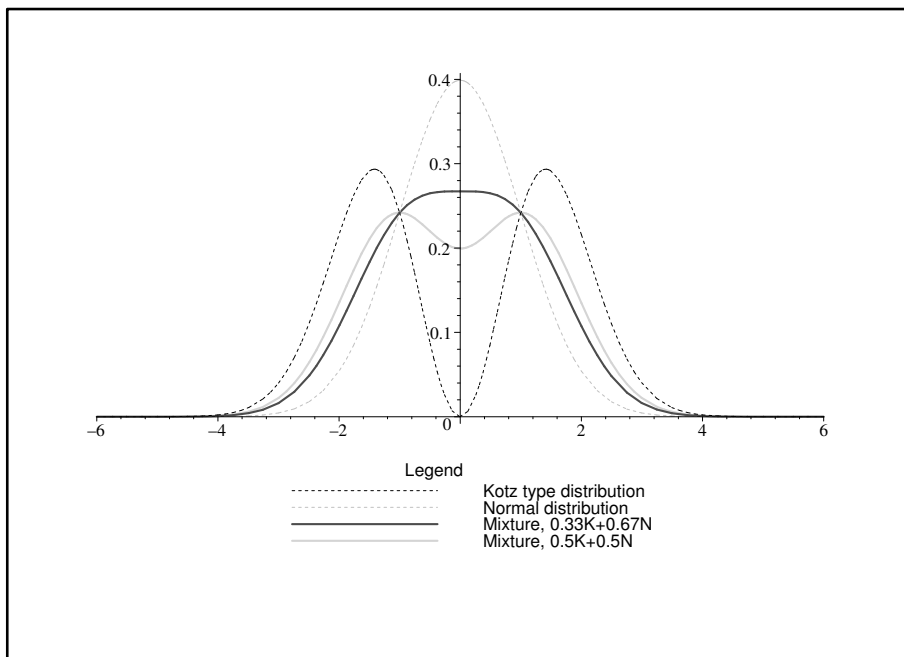
Joonisel 5.18 on genereeritud vektorite empiiriline tihedusfunktsioon.

6 Normaaljaotuse ja Kotzi jaotuse segu

Paragrahvis 4.3 nägime, et kasvukõvera mudeli parameetri $\hat{\mathbf{B}}$ hinnangu jaotus on segu normaaljaotusest ja Kotzi jaotusest parameetritega $N = 2$ ja $r = \frac{1}{2}$.

Normaaljaotust $N_{q,k}(\mathbf{B}, (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A})^{-1}, (\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1})$ on segusse võetud kaaluga

$$1 - \lambda = 1 - \frac{kq(p - q)}{2(n - k - p + q - 1)}$$



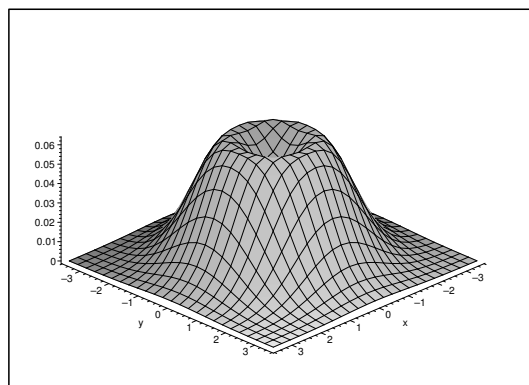
Joonis 6.1: Jaotuste segu erinevate kaalude korral

ja Kotzi jaotust parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\mathbf{M} = \mathbf{B}$, $\mathbf{V} = \mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A})^{-1}$, $\mathbf{V} = (\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1}$ on segusse võetud kaaluga

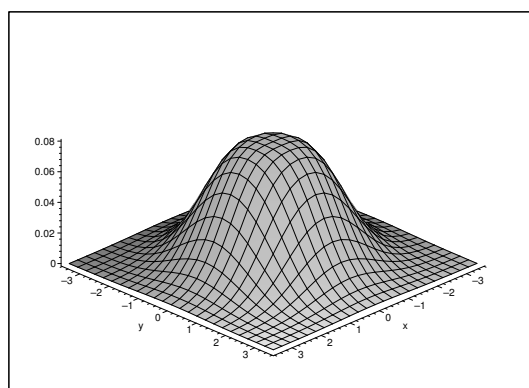
$$\lambda = \frac{kq(p-q)}{2(n-k-p+q-1)}.$$

Uurime, milline näeb segu välja erinevate segu kaalude korral. Selleks vaatame esmalt ühemõõtmelise standardse normaaljaotuse ja Kotzi jaotuse parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{V} = 1$ segu erinevate kaalude λ korral. Näeme jooniselt 6.1, et segu võib olla unimodaalne, aga kui lisada Kotzi jaotust suurema kaaluga, siis ka bimodaalne.

Uurime ka kahemõõtmelisi jooniseid 6.2 ja 6.3, kus on kujutatud kahemõõtmelise standardse normaaljaotuse ja uuritava Kotzi jaotus segu. Empiiriline piir, millal jaotus muutub multimodaalseks, on ligikaudu Kotzi jaotuse kaalu 0,5 juures.



Joonis 6.2: Segre, kus Kotzi jaotus on kaaluga 0,7



Joonis 6.3: Segre, kus Kotzi jaotus on kaaluga 0,5

6.1 Kotzi jaotuse ja normaaljaotuse segu unimodaalsuse tingimus (ühemõõtmelisel juhul)

Vaatleme ühemõõtmelist nõ standardiseeritud juhtu, st juhuslikku suurust X , mille jaotus on ühemõõtmelise standardse normaaljaotuse ja Kotzi jaotuse (parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{V} = 1$) segu kaaludega vastavalt $1 - \lambda$ ja λ .

Juhusliku suuruse X tihedusfunktsioon on sel juhul kujul:

$$f_X(x) = ((1 - \lambda) + \lambda x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

Selleks, et juhusliku suuruse X jaotus oleks unimodaalne, peab tihedusfunktsioonil olema ülimalt üks ekstreemum. Tihedusfunktsiooni ekstreemumite leidmiseks diferentseerime tihedusfunktsiooni tuletist.

$$\frac{d}{dx}(f_X(x)) = 2\lambda x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - ((1 - \lambda) + \lambda x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

Võrdsustades tuletise nulliga ja jagades võrrandi mõlemad pooled konstandi ja eksponendiga läbi, saame võrrandi:

$$2\lambda x - (1 - \lambda)x - \lambda x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(\lambda x^2 - 3\lambda + 1) = 0.$$

Seega on juhusliku suuruse X tihedusfunktsioonil kindlasti ekstreemum punktis $x = 0$. Vaadates segude joonist näeme, et see ilmselt alati nii on, seal on kas miinimum või maksimumkoht olenevalt λ väärtusest. Unimodaalse jaotuse korral rohkem ekstreemume tihedusfunktsioonil olla ei tohi, seega ei tohi ruutvõrrand:

$$\lambda x^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

olla lahenduv ehk ruutjuur $\sqrt{\frac{3\lambda-1}{\lambda}}$ ei tohi olla reaalne. Seega peab kehtima

$$\frac{3\lambda - 1}{\lambda} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < \frac{1}{3}$$

või peab lahendiks olema $x = 0$, mille saame kui $\lambda = \frac{1}{3}$.

Seega ühemõõtmelisel juhul on meie uuritav segu unimodaalne kui Kotzi jaotuse kaal segus $\lambda \leq \frac{1}{3}$.

6.2 Kotzi jaotuse ja normaaljaotuse segu unimodaalsuse tingimus

Vaatleme standardiseeritud juhtu, maatriksit $\mathbf{X}$, mille jaotuseks on segu normaaljaotusest $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{p_1}, \mathbf{I}_{p_2})$ ja Kotzi jaotusest parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\mathbf{V} = \mathbf{I}_{p_1}$, $\mathbf{W} = \mathbf{I}_{p_2}$ kaaludega vastavalt λ ja $1 - \lambda$. Olgu $p = p_1 p_2$. Vaatleme korraga nii maatriksjaotust kui ka vektorjaotust. Vektori puhul $p_2 = 1$ ja $\mathbf{I}_{p_2} = 1$. Vaatleme vektorit $\mathbf{x} = \text{vec}\mathbf{X}$.

Tihedusfunktsioon on kujul:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} (1 - \lambda + \frac{\lambda}{p} \mathbf{x}' \mathbf{x}) \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{x}\right).$$

Leiame maatrikstuletise definitsiooni 1.1 kasutades tihedusfunktsiooni esimese tuletise ja seejärel selle nullkoha. Tihedusfunktsiooni esimese tuletise leidmiseks kasutame korrutise tuletise valemit (käsikirjast Kollo, von Rosen 2004, lk 129):

$$\frac{d(\mathbf{Y}\mathbf{Z})}{d\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}}(\mathbf{Z} \otimes \mathbf{I}_r) + \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{X}}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{Y}'), \quad \mathbf{X} : p \times q, \mathbf{Y} : r \times s, \mathbf{Z} : s \times n, \quad (6.1)$$

Lisaks läheb tarvis seoseid (Kollo, von Rosen (2004), lk 126-129):

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{I}_{pq}, \quad (6.2)$$

$$\frac{d\mathbf{X}'}{d\mathbf{X}} = \mathbf{K}_{q,p}, \quad (6.3)$$

$$\frac{d(c\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = c\mathbf{I}_{pq}, \quad (6.4)$$

$$\frac{d(\mathbf{Y} + \mathbf{Z})}{d\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} + \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{X}}, \quad (6.5)$$

kus $\mathbf{X} : p \times q$. Saame

$$\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \left(\frac{\lambda}{p} \frac{d\mathbf{x}'\mathbf{x}}{d\mathbf{x}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right) + \frac{d\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right)}{d\mathbf{x}} (1 - \lambda + \frac{\lambda}{p} \mathbf{x}'\mathbf{x}) \right),$$

kusjuures kasutasime seoseid (6.4) ja (6.5).

Leiame vajalikud tuletised eraldi kasutades valemeid (6.1)- (6.3):

$$\frac{d\mathbf{x}'\mathbf{x}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{K}_{1,p}(\mathbf{x} \otimes 1) + \mathbf{I}_p(1 \otimes \mathbf{x}) = 2\mathbf{x}.$$

Eksponendi tuletise leidmiseks kasutame liitfunktsiooni tuletise valemit:

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{Y}}.$$

ning seost (6.4), saame

$$\frac{d \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right)}{d\mathbf{x}} = \frac{d\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right)}{d\mathbf{x}} \frac{d \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right)}{d\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right)} = -\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right) \mathbf{x}$$

Lõpptulemusena saame tuletise kujul:

$$\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right) \left(\frac{2\lambda}{p} - 1 + \lambda - \frac{\lambda}{p}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right) \mathbf{x},$$

Seega on üheks tuletise nullkohaks alati $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ka ühe- ja kahemõõtmelistel joonistel on kohal $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, olenevalt parameetrist λ kas miinimum või maksimum. Lisaks saab tuletis olla null, kui

$$\frac{2\lambda}{p} - 1 + \lambda - \frac{\lambda}{p}\mathbf{x}'\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}'\mathbf{x} = \frac{2\lambda + \lambda p - p}{\lambda}.$$

Saadud võrrand pole lahenduv kui:

$$\frac{2\lambda + \lambda p - p}{\lambda} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \leq \frac{p}{2+p}$$

Seega, kui Kotzi jaotuse kaal segus pole suurem kui $\frac{p}{2+p}$, kus p on uuritava vektori dimensioon (maatriksi puhul dimensioonide korrutis), siis meie segujaotus ei ole süvendiga. Kui Kotzi jaotuse kaal on saadud piirist suurem, siis on tegemist süvendiga jaotusega. Näeme, et ühemõõtmelisel juhul saame piiriks samuti $\frac{1}{3}$ nagu eelmises paragrahvis leitud, kahemõõtmelisel juhul on piir $\frac{1}{2}$ ja see suureneb järjest dimensiooni kasvades.

6.3 Parameetermaatriksi $\mathbf{B}$ jaotuse kuju

Meie jaoks on oluline küsimus, kas uuritav parameetermaatriksi $\mathbf{B}$ jaotuse lähend on süvendiga või ilma. Vaatleme võrdusega (4.1) antud mudelit. Parameetermaatriksi $\mathbf{B}$ dimensioonid on $k \times q$. Paragrahvis 4.3 saadud $\hat{\mathbf{B}}$ tiheduse lähendis (4.4) on Kotzi jaotuse kaal

$$\lambda = \frac{kq(p-q)}{2(n-k-p+q-1)}.$$

Kui see on suurem eelmises punktis leitud piirist süvendiga jaotuse jaoks, on teoreetiliselt tegemist süvendiga jaotusega. Selleks piiriks on meie jaotuse jaoks $\frac{kq}{2+kq}$.

Seega jaotusel pole süvendit kui:

$$\frac{kq(p-q)}{2(n-k-p+q-1)} < \frac{kq}{2+kq}.$$

Sellest võrratusest näeme, et kui valimimaht n on piisavalt suur, siis saame $\hat{\mathbf{B}}$ jaotuse lhendi ilma svendita.

6.4 Kotzi jaotuse ja normaaljaotuse segu momendid

Olgu juhusliku vektori $\mathbf{z}$ jaotuseks vektorite segu $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ jaotustest, kus vektor $\mathbf{x}$ on normaaljaotusega $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ja vektor $\mathbf{y}$ on Kotzi jaotusega parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Sigma}$, kaaludega vastavalt $1 - \lambda$ ja λ . Siis vektori $\mathbf{z}$ tihedusfunktsioon on kujul:

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}a\right) \left(\frac{\lambda a}{p} + 1 - \lambda\right), \quad (6.6)$$

kus

$$a = (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}).$$

Segujaotuse momentide leidmiseks saame kasutada seost:

$$m_k(\mathbf{Z}) = (1 - \lambda)m_k(\mathbf{X}) + \lambda m_k(\mathbf{Y}).$$

Seega $E\mathbf{z} = \boldsymbol{\mu}$, kuna $E\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$ ja $E\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu}$.

Teise momendi saame, kasutades Kotzi jaotuse teist momenti, mis on antud võrdusega (5.6) ja normaaljaotuse teist momenti:

$$\begin{aligned} m_2(\mathbf{z}) &= (1 - \lambda)m_2(\mathbf{x}) + \lambda m_2(\mathbf{y}) = (1 - \lambda)(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}') \\ &+ \lambda \left(\left(1 + \frac{2}{p}\right) \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}' \right) = (1 - \lambda)\boldsymbol{\Sigma} + \lambda \left(1 + \frac{2}{p}\right) \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}' \\ &= \left(1 + \frac{2\lambda}{p}\right) \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'. \end{aligned}$$

Dispersiooniks saame seega:

$$D\mathbf{z} = \overline{m}_2(\mathbf{z}) = \left(1 + \frac{2\lambda}{p}\right) \boldsymbol{\Sigma}.$$

6.5 Kotzi maatriksjaotuse ja maatriksnormaaljaotuse segu momendid

Olgu juhusliku maatriksi $\mathbf{Z}$ jaotuseks segu maatriksite $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ jaotustest, kus maatriks $\mathbf{X}$ on normaaljaotusega $N_{p,n}(\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi})$ ja maatriks $\mathbf{Y}$ on Kotzi jaotusega parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{V} = \mathbf{\Sigma}$ ja $\mathbf{W} = \mathbf{\Psi}$, kaaludega vastavalt $1 - \lambda$ ja λ . Siis maatriksi $\mathbf{Z}$ tihedusfunktsioon on kujul:

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}} |\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{\Psi}|^{-\frac{p}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}a\right) \left(\frac{\lambda a}{np} + 1 - \lambda\right), \quad (6.7)$$

kus

$$a = \text{tr}[\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{M})\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{M})'].$$

Segujaotuse momentide leidmiseks saame kasutada seost:

$$m_k(\mathbf{Z}) = (1 - \lambda)m_k(\mathbf{X}) + \lambda m_k(\mathbf{Y}).$$

Seega $E\mathbf{Z} = \mathbf{M}$, kuna $E\mathbf{X} = \mathbf{M}$ ja $E\mathbf{Y} = \mathbf{M}$.

Teise momendi saame samuti nagu vektorite korral Kotzi maatriksjaotuse ja maatriksnormaaljaotuse teisi momente (5.12) ja (2.7) kasutades:

$$\begin{aligned} m_2(\mathbf{Z}) &= (1 - \lambda)m_2(\mathbf{X}) + \lambda m_2(\mathbf{Y}) = (1 - \lambda)((\mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma}) + \text{vec}\mathbf{M}\text{vec}'\mathbf{M}) \\ &+ \lambda \left(\left(1 + \frac{2}{pn}\right) (\mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma}) + \text{vec}\mathbf{M}\text{vec}'\mathbf{M} \right) = \left(1 + \frac{2\lambda}{pn}\right) (\mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma}) \\ &+ \text{vec}\mathbf{M}\text{vec}'\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Dispersiooniks saame seega:

$$D\mathbf{z} = \overline{m}_2(\mathbf{z}) = \left(1 + \frac{2\lambda}{pn}\right) (\mathbf{\Psi} \otimes \mathbf{\Sigma}).$$

6.6 Marginaaljaotus

Teoreem 6.1. Olgu juhusliku vektor $\mathbf{x}$ jaotuseks segu vektorite $\mathbf{x}_N$ ja $\mathbf{x}_K$ jaotustest, kus vektor $\mathbf{x}_N$ on normaaljaotusega $N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ ja vektor $\mathbf{x}_K$ on Kotzi jaotusega parameetritaga $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{V} = \mathbf{\Sigma}$, kaaludega vastavalt $1 - \lambda$ ja λ .

Olgu $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)'$, kus $\mathbf{x}_1 : p_1 \times 1$ ja $\mathbf{x}_2 : p_2 \times 1$ ja jagunegu samuti ka vektor $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)'$ ja olgu

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Siis vektori $\mathbf{x}_1$ jaotuseks on segu vektori $\mathbf{x}_{1N}$ ja $\mathbf{x}_K$ jaotustest, kus vektor $\mathbf{x}_{1N}$ on normaaljaotusega $N_{p_1}(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11})$ ja vektor $\mathbf{z}_K$ on Kotzi jaotusega parameetritaga $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu}_1$, Σ_{11} , kaaludega vastavalt $1 - \frac{\lambda p_1}{p}$ ja $\frac{\lambda p_1}{p}$.

Tõestus

Vektori $\mathbf{x}$ tihedusfunktsioon on kujul:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}a\right) \left(\frac{\lambda a}{p} + 1 - \lambda\right),$$

kus

$$a = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}).$$

Tähistame $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1$ ja $\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_1$.

Kasutame valemit (Horn, Johnson (1989), lk 31):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} - \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

kus

$$\mathbf{A}_{22 \cdot 1} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}.$$

Saame:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{-1} - \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} & -\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \\ -\Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} & \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \end{pmatrix},$$

Leiame ruutvormi $\mathbf{z}' \Sigma^{-1} \mathbf{z}$ avaldise:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' \Sigma^{-1} \mathbf{z} &= \mathbf{z}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 \\ &\quad - \mathbf{z}'_2 \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}'_2 \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \mathbf{z}_2. \end{aligned}$$

Kuna dispersioonimaatriks Σ on sümmeetriline, siis järelikult ka Σ_{11} ja Σ_{22} on sümmeetrilised ning $\Sigma_{12} = \Sigma'_{21}$. Seega:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' \Sigma^{-1} \mathbf{z} &= \mathbf{z}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 \\ &\quad - 2\mathbf{z}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}'_2 \Sigma_{22 \cdot 1}^{-1} \mathbf{z}_2 \\ &= \mathbf{z}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 + (\mathbf{z}'_2 \Sigma_{22 \cdot 1}^{-\frac{1}{2}} - \mathbf{z}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22 \cdot 1}^{-\frac{1}{2}}) (\Sigma_{22 \cdot 1}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}_2 - \Sigma_{22 \cdot 1}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1) \\ &= \mathbf{z}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 + (\Sigma_{22 \cdot 1}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}_2 - \Sigma_{22 \cdot 1}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1)' (\Sigma_{22 \cdot 1}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}_2 - \Sigma_{22 \cdot 1}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1). \end{aligned}$$

Lisaks kasutame blokkmaatriksi determinandi leidmise valemit (Anderson 2003, lk 637):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}| |\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}|.$$

Saame:

$$|\Sigma| = |\Sigma_{11}| |\Sigma_{22.1}|.$$

Vektor $\mathbf{x}_1$ jaotuse saame integreerides vektori $\mathbf{x}$ tihedusfunktsiooni vektori $\mathbf{x}_2$ järgi. Võime teha muutujavahetuse ja vektori $\mathbf{x}_2$ asemel integreerida vektori $\mathbf{z}_2$ järgi, teisenduse jakobiaan on $J = 1$:

$$f_{Z_1}(\mathbf{z}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}_1' \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1\right) \int_{\mathbb{R}^{p_2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}' \Sigma_{22.1}^{-1} \mathbf{y}\right) \left(\frac{\lambda}{p} \mathbf{z}_1' \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 + \frac{\lambda}{p} \mathbf{y}' \Sigma_{22.1}^{-1} \mathbf{y} + 1 - \lambda\right) d\mathbf{y},$$

kus oleme teinud integraalis muutujavahetuse (J on teisenduse jakobiaan):

$$\mathbf{y} = \mathbf{z}_2 - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 \Rightarrow \mathbf{z}_2 = \mathbf{y} + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 \Rightarrow d\mathbf{y} = d\mathbf{z}_2 \Rightarrow J = 1.$$

Saame integraali aditiivsuse omadust kasutades:

$$\begin{aligned} f_{Z_1}(\mathbf{z}_1) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}_1' \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1\right) \left[\left(\frac{\lambda}{p} \mathbf{z}_1' \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 + 1 - \lambda\right) \right. \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^{p_2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}' \Sigma_{22.1}^{-1} \mathbf{y}\right) d\mathbf{y} + \frac{\lambda}{p} \int_{\mathbb{R}^{p_2}} \mathbf{y}' \Sigma_{22.1}^{-1} \mathbf{y} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}' \Sigma_{22.1}^{-1} \mathbf{y}\right) d\mathbf{y} \left. \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}_1' \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1\right) \left[\left(\frac{\lambda}{p} \mathbf{z}_1' \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 + 1 - \lambda\right) \right. \\ &\quad \times (2\pi)^{\frac{p_2}{2}} |\Sigma_{22.1}| + \frac{\lambda}{p} (2\pi)^{\frac{p_2}{2}} |\Sigma_{22.1}| E(\mathbf{y}' \Sigma_{22.1}^{-1} \mathbf{y}) \left. \right]. \end{aligned}$$

Arvestades, et $D\mathbf{y} = \Sigma_{22.1}$ ja $E\mathbf{y} = \mathbf{0}$, saame $E(\mathbf{y}' \Sigma_{22.1}^{-1} \mathbf{y}) = p_2$.

Seega:

$$\begin{aligned} f_{Z_1}(\mathbf{z}_1) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p_1}{2}}} |\Sigma_{11}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}_1' \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1\right) \left[\left(\frac{\lambda}{p} \mathbf{z}_1' \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 + 1 - \lambda\right) + \frac{\lambda}{p} p_2 \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p_1}{2}}} |\Sigma_{11}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}_1' \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1\right) \left(\frac{\lambda}{p} \mathbf{z}_1' \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 + 1 - \frac{\lambda p_1}{p}\right). \end{aligned}$$

Seega asendades tagasi $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1$, saame, et juhusliku vektori $\mathbf{x}_1$ jaotuseks on segu normaaljaotusest ja Kotzi jaotusest parameetritega $\boldsymbol{\mu}_1$ ja Σ_{11} , kaaludega vastavalt $1 - \frac{\lambda p_1}{p}$ ja $\frac{\lambda p_1}{p}$.

mott

6.7 Kasvukõvera mudeli parameetermaatriksi **B** hindamine simuleeritud andmetest

Uurime järgmist väikesedimensionaalset näidet. Olgu meil tegemist kahe rühma objektidega, mõlemas 5 objekti. Olgu igal objektil tehtud 3 mõõtmist. Olgu esimeses rühmas iga objekti vaatluste tegelik keskmise vektor $\boldsymbol{\mu}_1 = (1, 2, 3)'$ ja teises rühmas $\boldsymbol{\mu}_2 = (2, 3, 4)'$. Olgu korrelatsioon kahe järjestikuse vaatluse vahel 0,5 ning esimese ja kolmanda vaatluse vahel 0,25. Olgu vaatluste maatriks **X** normaaljaotusega $N_{3,10}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{I}_{10})$, kus

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vaatleme mudelit kujul

$$\mu_{i,t} = \beta_{i,0} + \beta_{i,1}t,$$

kus $i = 1, 2$, $t = 1, 2, 3$. Siis maatrikskujul oleva mudeli (4.1) parameetrid **A** ja **C** on vastavalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sellisel juhul on lihtne näha, et tegelik **B** väärtus on

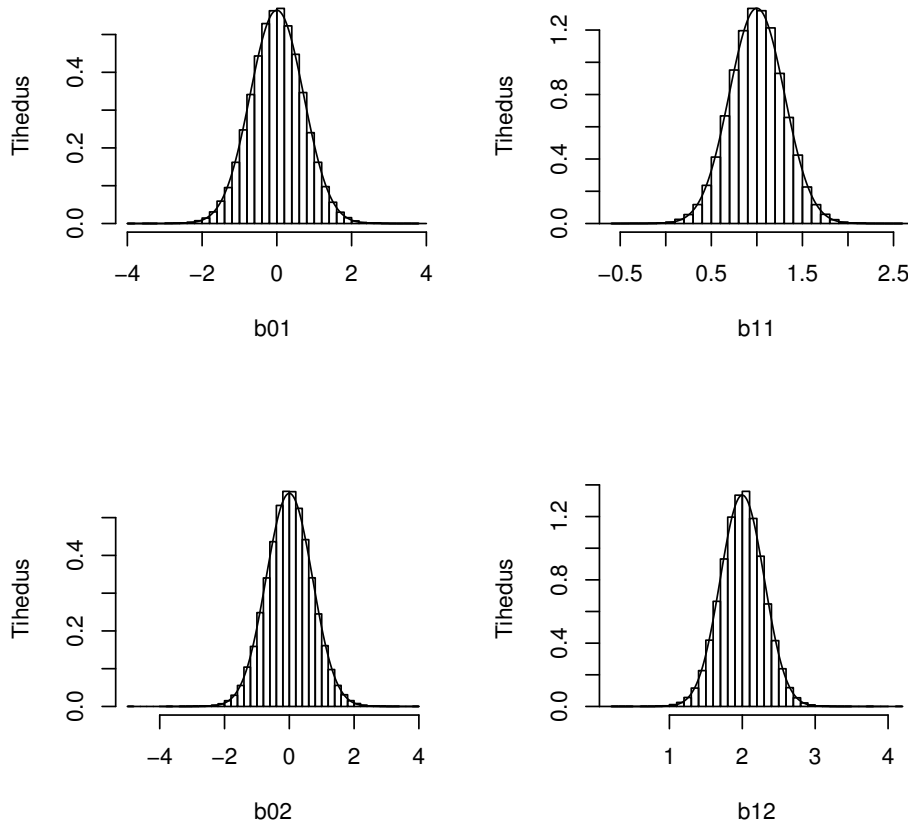
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Teoreetiline lähend **B** hinnangu jaotusele oleks praegusel juhul normaaljaotuse ja Kotzi jaotuse segu parameetritega $N = 2$ ja $r = \frac{1}{2}$, kusjuures $\mathbf{M} = \mathbf{B}$, $\mathbf{V} = (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A})^{-1}$ ja $\mathbf{W} = (\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1}$. Parameetrid saame välja arvutada:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2,1 & -0,75 \\ -0,75 & 0,375 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Segu kaalud saame samuti välja arvutada võrdusest (4.4) saadud kaaludest. Segu kaalud on toodud ka paragrahvi 6 algul. Pannes võrdusesse vastavad dimensioonid, saame Kotzi jaotuse kaaluks $\frac{1}{3}$ ja normaaljaotuse kaaluks $\frac{2}{3}$.

Genereerime 100 000 valimit, hindame igalt valimilt parameetermaatriksi **B** ning uurime saadud jaotust. Genereerimiseks kasutatud paketi R programm on toodud lisas C. Jaotuse uurimiseks kasutame marginaaljaotuste



Joonis 6.4: Hinnatud kasvumudeli parameetrite marginaaljaotus

graafikuid, sest neljaelemendilise maatriksi $\hat{\mathbf{B}}$ jaotuse empiirilist jaotuse viiemõõtmelist graafikut me joonisel kujutada ei saa.

Ühemõõtmeliste marginaaljaotuste parameetrid saame määrata teoreemi 6.1 abil. Võime maatriksi $\hat{\mathbf{B}}$ jaotuse asemel uurida vektori $\text{vec}\hat{\mathbf{B}}$ jaotust. Vektori $\text{vec}\hat{\mathbf{B}}$ jaotuseks on segu normaaljaotusest $N_4(\text{vec}\mathbf{B}, \mathbf{V}_v)$ ja Kotzi jaotusest parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu} = \text{vec}\mathbf{B}$ ja $\mathbf{V}_v$, kus

$$\mathbf{V}_v = \mathbf{W} \otimes \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0,42 & -0,15 & 0 & 0 \\ -0,15 & 0,075 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,42 & -0,15 \\ 0 & 0 & -0,15 & 0,075 \end{pmatrix},$$

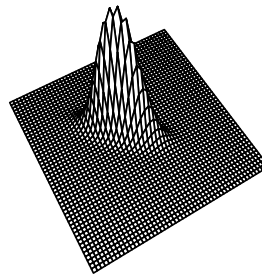
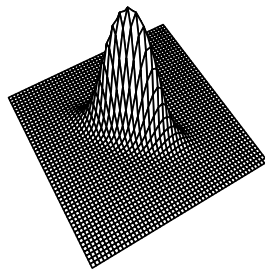
kaaludega vastavalt $\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{3}$.

Seega maatriksi $\hat{\mathbf{B}}$ elementide jaotusteks on segu Kotzi jaotusest parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$ ja normaaljaotusest, kusjuures segu kaalud on vastavalt $\frac{1}{12}$ ja $\frac{11}{12}$, jaotuse ülejäänud parameetrid on järgmises tabelis.

	μ	σ
β_{01}	0	0,42
β_{11}	1	0,075
β_{02}	0	0,42
β_{12}	2	0,075

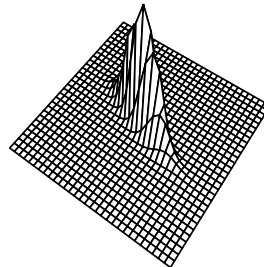
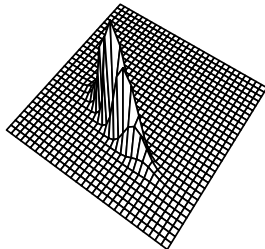
Esimese parameetri empiiriline jaotus

Teise parameetri empiiriline jaotus



Esimese parameetri teoreetiline jaotus

Teise parameetri teoreetiline jaotus



Joonis 6.5: Hinnatud kasvumudeli parameetrite kahemõõtmelised empiirilised ja teoreetilised marginaaljaotused

Ühemõõtmeliste marginaalide empiirilised tihedusfunktsioonid koos teoreetiliste tihedustega on esitatud joonisel 6.4. Sellelt jooniselt näeme, et marginaaljaotused vastavad ootustele.

Samuti saame illustreerida kahemõõtmelist juhtu. Kui vaatleme kahemõõtmelisi marginaale, siis esmalt paneme tähele, et koos on mõtet vaadelda ainult sama klassi mudeli parameetreid, sest erinevate klasside mudeli parameetrid pole korreleeritud.

Tähistades $\beta_1 = (\beta_{01}, \beta_{11})'$ ja $\beta_2 = (\beta_{02}, \beta_{12})'$, saame mõlema vektori jaotuseks segu Kotzi jaotusest parameetritega $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$ ja normaaljaotust kaaludega vastavalt $\frac{1}{6}$ ja $\frac{5}{6}$. Mõlema vektori hajuvusparameeter on $\mathbf{V}_{v2}$ ja keskvaärtused $\boldsymbol{\mu}_1$ ja $\boldsymbol{\mu}_2$, kusjuures

$$\mathbf{V}_{v2} = \begin{pmatrix} 0,42 & -0,15 \\ -0,15 & 0,42 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Kahemõõtmeliste marginaalide empiirilised tihedusfunktsioonid koos teoreetiliste tihedustega on joonisel 6.5. Samuti nagu ühemõõtmelisel juhul näeme, et kuju poolest on jaotused üsna sarnased.

Kokkuvõte

Käesolev töös lähtutakse kasvukõvera mudelite uurimisel saadud tulemustest kasvukõvera mudeli parameetrite kohta. Kasvukõvera mudel on ajas korduvate mõõtmiste jaoks kasutatava lineaarse mudeli üldistus, mis sõltub kahest parameetermaatriksist - $\mathbf{B}$ ja Σ . Neist esimese abil kirjeldatakse vaatluste keskväärtused, teine on vajalik hajuvuse hindamisel.

Antud töös uuritakse kasvukõvera mudeli parameetri $\mathbf{B}$ hinnangut ja selle jaotuse lähendit. Osutub, et selleks on normaaljaotuse ja Kotzi jaotuse segu.

Töö koosneb kuuest osast ja lisadest. Esimese neli osa on referatiivsed. Neist esimene on pühendatud kasutatud tähistuste selgitamisele.

Teises osas tuuakse sisse maatriksnormaaljaotus, mida kasutatakse neljandas paragrahvis kasvukõvera mudeli defineerimise ja kuuendas paragrahvis segu kirjeldamise juures.

Kolmandas osas vaadeldakse elliptilisi jaotusi. Elliptilised jaotused on sisse toodud, kuna Kotzi jaotus kuulub samuti elliptiliste jaotuste hulka ja jaotuse uurimist saab elliptilise jaotuse jaoks tuletatud üldiste tulemuste abil märkimisväärselt lihtsustada.

Neljandas osas kirjeldatakse kasvukõvera mudelit, antakse parameetrite suurima tõepära hinnangud ja mudeli kordajate maatriksi $\mathbf{B}$ hinnangu jaotuse lähend. Osutub, et Edgeworthi tüüpi lähendina saadakse tihedusfunktsioon ning saadud jaotus on normaaljaotuse ja ühe Kotzi jaotuse tihedusfunktsioonide segu, kusjuures lähend on täpsusega $O(n^{-2})$.

Viiendas osas uuritakse lähemalt Kotzi tüüpi jaotusi ja eriti Kotzi jaotust. Jälgitakse Kotzi tüüpi jaotuse kuju muutumist sõltuvalt parameetritest. Leitakse meid huvitava Kotzi jaotuse järsakuse karakteristikud, tuuakse sisse maatriksjaotus. Leitakse ka Kotzi jaotuse marginaaljaotus ühel meid huvitalval erijuhul. Lõpuks leitakse uuritava Kotzi jaotuse simuleerimiseeskiri ja katsetatakse seda modelleerimisel ühe ja kahemõõtmelisel juhul.

Kuuendas osas uuritakse kasvukõvera mudeli kordajate maatriksi $\mathbf{B}$ jaotuse lähendis esinevat Kotzi jaotuse ja normaaljaotuse segu. Uuritakse selle segu kuju sõltuvust segu kaaludest. Samuti leitakse segu esimesed momendid ja marginaaljaotus. Lõpuks viiakse läbi simuleerimiseksperiment, kus simuleeritakse valimid ühel lihtsal erijuhul ja hinnatakse kasvukõvera mudeli parameetri jaotust.

Töös tehtud simulatsioonideks kasutatakse statistikapaketti R.

Elliptical Distributions for Growth Curve Model

Summary

Growth curve models generalize classical linear models to longitudinal data. The growth curve model can be presented in the following matrix form

$$\mathbf{X} = \mathbf{ABC} + \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{E},$$

where $\mathbf{A}$ and $\mathbf{C}$ are known matrices and $\mathbf{B}$ and $\mathbf{\Sigma}$ are to be estimated. Matrix $\mathbf{B}$ describes the mean and $\mathbf{\Sigma}$ the covariance structure of the data. In current thesis estimator of $\mathbf{B}$ is under interest.

When approximating density of the maximum likelihood estimator of the parameter matrix $\mathbf{B}$ a mixture of two matrix distributions in the multivariate density expansion is obtained. One of the distributions is normal and the other one an elliptical distribution from the class of Kotz-type distributions (Fang, Kotz, Ng, 1990, p. 69). A density expansion obtained by (Kollo, von Rosen, 1998) is of order $O(n^{-2})$ which refers to a good approximation.

In this paper Kotz-type distributions and specially Kotz distribution is studied and the parameters interpreted. The corresponding matrix distribution is defined. The first moments of Kotz distribution are derived using general formulas for elliptical distributions and also kurtosis characteristics are calculated. A simulation algorithm is worked out for univariate and multivariate case and tested in one- and two dimensional cases.

Next the mixture of the Kotz distribution and the normal distribution is studied. The shape of density function is examined, the shape depends on the weight of the Kotz distribution in the mixture. Finally the moments and marginal distribution of the mixture are derivated and a simulation study is carried out, to examine the empirical distribution of the estimator of the parameter matrix $\mathbf{B}$ and to compare the empirical distribution with approximator based on the mixture of the normal and the Kotz distribution.

Kirjanduse loetelu

- Anderson, T. W. (2003). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley, New Jersey.
- Fang, K.-T., Kotz, S., Ng, W. (1990). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman and Hall, London, New York.
- Fang, K.-T., Zhang, Y. (1990). *Generalized Multivariate Analysis*. Science Press, Beijing and Springer-Verlag, Berlin.
- Gentle, J. E. (2003). *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. Springer-Verlag, New York
- Harville, D. A. (1997). *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. Springer, New York.
- Horn, R. A., Johnson, C. R. (1989). *Maatriksanalüüs*. Mir, Moskva (vene keeles).
- Kollo, T. (1991). *Maatrikstuletitis mitmemõõtmelises statistikas*. Tartu Ülikooli kirjastus, Tartu (vene keeles).
- Kollo, T., von Rosen, D. (1998). A unified approach to the approximation of multivariate densities. *Scand. J. Statist.* **25** 93 - 109.
- Kollo, T., von Rosen, D. (2004). *Advanced Multivariate Statistics with Matrices.*, raamatu käsikiri.
- Kollo, T., Srivastava M. S. (2000). *A New Class of Skewed Multivariate Distributions*. Technical Report No. 2013. University of Toronto, Department of Statistics.
- Lütkepohl, H. (1996). *Handbook of Matrices*. Wiley, New Jersey.
- MacRae, E. C. (1974). Matrix derivatives with an application to an adaptive linear decision problem. *The Annals of Statistics*, **2**, 337-346.
- Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, **57**, 519-530.
- Morgan, B. J. T. (1984). *Elements of Simulation*. Chapman and Hall, London, New York.
- von Rosen, D. (1984). *Maximum likelihood estimates in multivariate linear normal models with special references to the growth curve model*. Research Report No. 135, University of Stockholm.
- Srivastava, M.S., Khatri, C.G. (1979). *An Introduction to Multivariate Statistics*. North Holland - New York, New York, Oxford.
- Statistikapaketi R kodulehekülg <http://www.r-project.org>

Lisa A

Programm paketiga R Kotzi ühemõõtmelise jaotuse parameetritaga $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$ ja $V = 1$ genereerimiseks.

```
Kotz=function(m)
{
  z=rep(0,m)
  i=1

  while(i<=m)
  {
    y1=-sqrt(3)/2*sum(log(runif(2)))
    y2=runif(1)*3/2*sqrt(3/2/pi)
      *exp(1/2)*4/3*y1*exp(-2*y1/sqrt(3))
    kontroll=sqrt(2/pi)*y1^2*exp(-1/2*y1^2)
    if(y2<=kontroll) {(z[i]=y1)&(i=i+1)}
  }#while

  u=2*(1*(runif(m)<1/2)-1/2)
  z=z*u

  return(z)
}#function

y=Kotz(100000)
```

Lisa B

Programm paketiga R Kotzi kahemõõtmelise jaotuse parameetritaga $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{V} = \mathbf{I}_2$ genereerimiseks.

```
library(mvtnorm)

mvdKotz=function(a)
{
  vaartus=1/(2*pi)^(length(a)/2)
           /length(a)*(t(a)%*%a)*exp(-t(a)%*%a/2)
  return(vaartus)
}

keskv=c(0,0)
disp=matrix(c(4,0,0,4),2,2)

Kotz2=function(b,x) #mitu väärtust, algväärtus
{
  genereeritud=matrix(,2,b)
  for (i in 1:b)
  {
    y=2*rnorm(2)
    vtn=min(1,mvdKotz(y)*dmvnorm(x,keskv,disp)
            /dmvnorm(y,keskv,disp)/mvdKotz(x))
    u=runif(1)
    if (u<vtn){genereeritud[,i]=y
    x=y}
    else {genereeritud[,i]=x}
  }#for
  return(genereeritud)
}#function

#Proov
vordlus1=Kotz2(10000,c(0.1,-0.1))
vordlus2=Kotz2(10000,c(25,-25))

plot(vordlus2[1,])
```

Lisa C

Programm paketiga R kasvukõvera mudeli parameetermaatriksi **B** empiirilise jaotuse hindamiseks.

```
C=t(matrix(c(1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,
  0,0,0,0,0,1,1,1,1,1),10,2))
A=matrix(c(1,1,1,1,2,3),3,2)
I=diag(c(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1))
M=matrix(c(1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,
  3,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6),3,10)
Sigma=matrix(c(1,0.5,0.25,0.5,1,0.5,0.25,0.5,1),3,3)
oma=eigen(Sigma,symmetric=T)
JUUR=oma$vectors%%sqrt(diag
  (oma$values))%%t(oma$vectors) #Sigma ruutjuur

PAR1=matrix(,2,100000)
PAR2=matrix(,2,100000)

for (i in 1:100000)
{
X=matrix(rnorm(30),3,10)
X=JUUR%%X+M
S= X%%(I-t(C)%%solve (C%%t(C))%%C)%%t(X)
B=solve(t(A)%%solve(S)%%A
  )%%t(A)%%solve(S)%%X%%t(C)%%solve(C%%t(C))
PAR1[,i]=B[,1]
PAR2[,i]=B[,2]
}
```