A-18586

S. I. NOVOSJOLOV

ALGEBRA

ÕPETAJATE INSTITUUTIDELE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

2/8406

A-18586

S. I. NOVOSJOLOV

Sundeksemplar
„2" „10" 1950 a.

ALGEBRA

ÕPETAJATE INSTITUUTIDELE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1950 TARTU

Originaali tiitel:

С. И. Новоселов. Алгебра.
Государственное Учебно-Педагогическое Издательство.
Министерство Просвещения РСФСР.
Москва — 1947 — Ленинград.

Tõlkinud: V. Arak.

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt õpikuks õpetajate instituutidele.

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
8406

EESSÕNA.

Käesolev raamat on määratud õpetajate instituutide füüsika-matemaatika osakondade üliõpilastele, tulevastele matemaatikaõpetajaile. Vastavalt õpetajate instituutide programmile seisis autori ees ülesanne anda küllalt põhjalik esitus elementaaralgebra nendest osadest, mis on õpetajale aktuaalseimad ja omavad põhilist tähtsust, ning ühtlasi tutvustada õppijat kaasaegse algebra põhimõistetega. Püstitatud ülesande kohaselt ma pidasin õigeks tutvustada õppijat kaasaegse algebra põhimõistetega järk-järgult. Eeldan, et need mõisted, olles elementaaralgebra kursuse materjaliga orgaanilises seoses, aitavad tulevastel õpetajatel selgemalt ja õigemini aru saada õppeaine ideelisest sisust.

Teooria illustreerimiseks, samuti näidisharjutuste andmise eesmärgil, mida on soovitav esitada õppijaile, on õpiku tekstis toodud rida lõpuni lahendatud näiteid ja ülesandeid. Praktilise õppetöö teostamise vahendina võib soovitada viimaseil aastail väljaantud Oberi ja Papelje ning Kretšmari ja Prževalski algebraülesannete kogusid.

Kasutan juhust sügava tänu avaldamiseks järgmistele isikutele: L. J. Okunevile, B. A. Tulinovile, M. K. Grebentsale ja B. V. Kutuzovile, kes on osutanud minule olulist abi väärtuslike nõuannete ja juhenditega.

Moskvas, 5. märtsil 1946. a.

S. Novosjolov.

I OSA.

RATSIONAALARVUDE KORPUS.

I peatükk.

Ratsionaalarvude hulk.

§ 1. Sissejuhatus.

Nagu on teada aritmeetikast, laiendatakse edaspidi naturaalarvu mõistet, mis sugeneb esialgu üksikute esemete loendamisest. Nimelt võetakse tarvitusele null kui arv, mis iseloomustab esemete puudumist, ja seejärel murdarvud, mis on tarvilikud osadeks jaotatavate suuruste mõõtmiseks. Arvu mõiste edasine laiendamine, millele pühendatakse käesolev peatükk, on tingitud vajadusest mõõta suunatud suurusi, s. o. suurusi, *milledele on täiesti iseloomulik mitte ainult nende arvuline väärtus, vaid ka suund.* Me vaatleme ainult eriliigilisi suunatud suurusi, milledel eristatakse kaks vastandsuunda. Niisuguste suuruste näiteiks võiksid olla sirgjoonelisel liikumisel keha poolt läbitud tee, antud sirgel asetsev sirglõik, vee külmumispunktist termomeetri skaalaga üles ja alla mõõdetav temperatuur, mingist momendist minevikku ja tulevikku loetav aeg. Mingi suuruse suurenemist ja vähenemist võib vaadelda kui tema muutumist kahes vastandsuunas (näiteks temperatuuri tõus ja langus, tulu ja kulu jms.).

Lepime kokku, et kasutame mingi *antud kindlasuunalise* suuruse mõõtmiseks aritmeetikas tuntud arve. Siis tekib vajadus arvu mõistet laiendada uute arvudega, mis iseloomustaksid mõõtmise tulemust *vastandsuunas.*

§ 2. Ratsionaalarvud.

Elementaararitmeetikas vaadeldakse naturaalarve 1, 2, 3, ..., arvu 0 ja murdarve kujul $\frac{m}{n}$, kus m ja n on naturaalarvud ja $n \neq 0$. Kõiki neid arve, v ä l j a a r v a t u d n u l l, nimetame p o s i t i i v s e i k s a r v u d e k s.

Niisiis aritmeetikas tuntud kõigi arvude hulk * koosneb positiivseist arvudest ja nullist. Null on nendest kõigist väiksem. Seepärast kasutatakse selle väite sümboolseks tähistamiseks, et k on positiivne arv, võrratust $k > 0$.

Igale positiivsele arvule a seame vastavaks sümboli $-a$. Nii näiteks arvule 1 seame vastavaks sümboli -1, arvule 3 sümboli -3, arvule $\frac{1}{3}$ sümboli $-\frac{1}{3}$ jne.

Neid sümboleid vaatleme kui uusi arve ja nimetame nad negatiivseiks arvudeks.

Aritmeetikas tuntud arvud omavad teatavaid omavahelisi seoseid, milledeks on aritmeetilised tehted ja samuti seosed arvude suurusjärjestuse kohta (mõisted „suurem", „väiksem", „võrdne"). Piltlikult väljendades, arvud ei moodusta omavahelise seoseta, isoleeritud objektide hulka. Arvu mõiste arvudevaheliste seosteta oleks sisutu. Siit on selge, et ülalantud definitsioonist ei piisa negatiivse arvu mõiste iseloomustamiseks, sest meie ei ole seni kindlaks määranud ühtegi seost, mis seoks „uusi arve" nii omavahel kui ka „vanade arvudega". Need seosed määratakse kindlaks järk-järgult ja negatiivse arvu mõiste täielik iseloomustus töötatakse välja definitsioonide ahela abil.

Definitsioon. *Teineteisele vastavaid arve a ja $-a$ nimetatakse vastandarvudeks ehk sümmeetrilisteks arvudeks.* Arv $-a$ on a vastandarvuks ja arv a on arvu $-a$ vastandarvuks.

Niisiis, märgi „—" asetamine positiivse arvu ette tähendab üleminekut vastandarvule, negatiivsele arvule. Lepime kokku, et ka negatiivse arvu ette märgi „—" asetamisega tähistame üleminekut vastavale positiivsele arvule. Selle kokkuleppe järgi $-(-a)$

---

* Hulga mõiste on kaasaegse matemaatika üheks algmõisteks. Seda mõistet ei ole võimalik defineerida teiste lihtsamate mõistete abil; teda saab ainult selgitada konkreetsete näidetega. Nii saab rääkida raamatu leheküljel olevate kõigi tähtede hulgast, päikese süsteemi planeetide hulgast, antud ringjoonel olevate kõigi punktide hulgast.

on a, $-(-(-a))$ on $-a$. Näiteks $-(-2)$ on 2 ja $-(-(-\frac{1}{3}))$ on $-\frac{1}{3}$.

Võtame tarvitusele järgneva täiendava kokkuleppe; *arvu* 0 *loetakse tema enese vastandarvuks*: -0 on 0.

Arvu 0 *ei loeta positiivsete ega ka negatiivsete arvude hulka.*

Negatiivset arvu nimetatakse täisarvuks (murdarvuks), kui vastandarv on täisarv (murdarv). Nii on arvud -2, -5 täisarvud ja arvud $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{7}$ murdarvud.

Positiivsed ja negatiivsed arvud ja arv 0 *moodustavad kõik kokku arvude hulga, mida nimetatakse ratsionaalarvude hulgaks.*

Märkus I. Kui leppida kokku, et positiivsele arvule juurde kirjutada märk „+" ja lugeda, et $+a$ on a (näiteks, $+2$ on 2, $+7$ on 7), siis igale nullist erinevale ratsionaalarvule a võib juurde kirjutada märgi „+", kui ta on positiivne, ja märgi „—", kui ta on negatiivne.

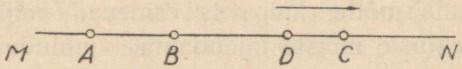
Märkus II. Kui lugeda, et täht a tähendab mistahes ratsionaalarvu (mitte ainult positiivset), siis kujutab $-a$ negatiivset arvu, kui a on positiivne; positiivset arvu aga, kui a on negatiivne, ja nulli, kui arv a on null.

Definitsioon. *Positiivse arvu absoluutväärtuseks nimetatakse seda arvu ennast; negatiivse arvu absoluutväärtuseks — tema sümmeetrilist positiivset arvu; nulli absoluutväärtuseks — arvu* 0 *ennast.*

Absoluutväärtust nimetatakse ka mooduliks. Absoluutväärtuse tähistamiseks paigutatakse antud arv kahe vertikaalse kriipsu vahele. Näiteks:

$$|2|=2,\quad |-\tfrac{1}{2}|=\tfrac{1}{2},\quad |0|=0,\quad |5-3|=|2|=2.$$

Ratsionaalarve kasutatakse suunatud suuruste mõõtmiseks.



Joon. 1.

Nimetame antud suuruse kahest suunast ühte positiivseks ja vastandsuunda negatiivseks. Suurusi, mida loetakse positiivses suunas, mõõdame positiivsete arvudega ja suurusi, mida loetakse negatiivses suunas, negatiivsete arvudega. Arvu absoluutväärtus

näitab antud suuruses sisalduvat mõõtühikute arvu, arvestamata tema suunda. Valime näiteks sirgel MN (joonis 1) positiivseks suuna „paremale", siis sirglõik AB on positiivne suurus ja sirglõik CD negatiivne suurus. Sirglõigu pikkus (suunda arvestamata) on positiivne ja väljendub vastava arvu absoluutväärtusega.

§ 3. Ratsionaalarvude võrdlemine.

Aritmeetikas tundmaõpitavad arvud on omavahel seotud järjestuse seostega: kui a ja b on kaks arvu, siis esineb üks seostest: $a < b$, $a > b$ või $a = b$. Järjestuse seosed omavad järgmisi nn. skalaarjärjestuse omadusi:

I. *Mistahes arvudel a ja b esineb üks seostest: $a = b$, $a < b$, $a > b$.*

II. *Võrratuse pöördumatus: kui $a < b$, siis $b > a$; kui aga $a > b$, siis $b < a$.*

III. *Võrratuse transitiivsus: kui $a < b$ ja $b < c$, siis $a < c$.*

IV. *Võrduse transitiivsus: kui $a = b$ ja $b = c$, siis $a = c$.*

V. *Võrduse refleksiivsus: alati $a = a$.*

Kõik teised aritmeetikas tuntud võrduse ja võrratuse omadused tuletatakse põhiseostest I—V. Näitena tuletame võrduse sümmeetria: *kui $a = b$, siis $b = a$.*

Olgu antud $a = b$. I alusel on olemas üks seostest $b > a$, $b < a$ või $b = a$. Kuid võrratust $b < a$ ei saa olla, sest vastasel korral oleks meil $a > b$ (II omadus); analoogiliselt ei saa olla seost $b > a$, järelikult $b = a$.

Mõisted „suurem", „väiksem", „võrdne" ei ole veel laiendatud kõigi ratsionaalarvude hulgale. Nii ei tea me veel, missugune kahest antud negatiivsest arvust tuleb lugeda suuremaks või kuidas võrrelda positiivset arvu negatiivsega suuruse järgi. Neid mõisteid saab laiendada ainult täiendavate definitsioonidega. Need definitsioonid on kokkulepped, millega anname võrratustele kindla mõtte, kui neis esinevad negatiivsed arvud. Võrduste ja võrratuste mõiste laiendamisel juhindume printsiibist: *põhiomadused I—V peavad jääma kehtima.*

Esitatud printsiibi mõte on arusaadav: põhiomadustest I—V tulenevad need reeglid, milledega opereerime arvude võrdlemisel aritmeetikas. Põhiomaduste I—V säilitamine võimaldab kasutada endisi reegleid mitte üksnes positiivsete, vaid ka mistahes ratsionaalarvude puhul.

Võrduse definitsioon. *Lepime kokku, et loeme negatiivseid arve* $-a$ *ja* $-b$ *võrdseteks, kui on võrdsed nende absoluutväärtused,* $a = b$.

Näiteks: $-\frac{1}{3} = -\frac{2}{6}$, sest $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Võrratuste definitsioonid. *Lepime kokku, et loeme:*

1⁰ *iga negatiivset arvu nullist väiksemaks ja väiksemaks mistahes positiivsest arvust:*

$$-a < 0, -a < b \text{ (kus } a \text{ ja } b > 0);$$

2⁰ *iga positiivset arvu ja nulli suuremaks mistahes negatiivsest arvust:*

$$b > -a,\ 0 > -a\ ^*;$$

3⁰ *kahest negatiivsest arvust väiksemaks seda, millel absoluutväärtus on suurem, ja suuremaks seda, millel absoluutväärtus on väiksem:*

$$-a < -b, \text{ kui } a > b.$$

Nii näiteks $-5 < 7$, $-10 < 2$, $-1 < 0$, $-20 < 4{,}5$, $-3 > -25$.

On kerge veenduda, et nende definitsioonide puhul jäävad kehtima kõik omadused I—V. Näitena vaatleme võrratuste transitiivsust.

1) Võtame kolm võrratustega seotud negatiivset arvu: $-a < -b$, $-b < -c$, näitame, et $-a < -c$.

Tõepoolest, definitsiooni 3⁰ alusel $a > b$ ja $b > c$, millest positiivsete arvude võrratuste transitiivsuse alusel $a > c$; järelikult $-a < -c$.

2) Võtame kaks negatiivset arvu $-a < -b$, olgu c positiivne arv; siis on $-b < c$. Et $-a$ on negatiivne arv, siis alati $-a < c$.

Soovitame õppijail iseseisvalt läbi vaadata ülejäänud võimalikud juhtumid.

Et omadused I—V jäävad kehtima, siis nende sümboolses kirjutises võib tähtede a, b ja c all mõista mistahes ratsionaalarve (mitte ainult positiivseid).

Asume võrratuste geomeetrilisele tõlgendamisele. Võtame sirgjoone (joonis 2), märgistame tal mistahes punkti O, määrame kindlaks positiivse suuna (joonisel 2 vasakult paremale) ja valime

---

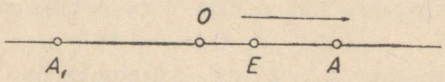
* Kus a ja b on positiivsed arvud.

mõõtühiku (sirglõik OE). Kui a on positiivne arv, siis lepime kokku, et kujutame teda punktina A, paigutades punktist O paremale sirglõigu OA pikkusega a. Negatiivse arvu $-a$ kujutamiseks paigutame punktist O vasakule sirglõigu OA_1 pikkusega a. Arvu 0 kujutame punktina O. Öeldust järeldub:

1) *Vastandarvudele a ja $-a$ vastavad sirgel punktid, mis on sümmeetrilised punkti O suhtes.*

2) *Ratsionaalarvu absoluutväärtus võrdub vastava punkti kaugusega punktist O.*

3) *Suuremale arvule vastab sirgel punkt, mis asetseb paremal pool.*



Joon. 2.

Silmas pidades võrratusi $a < b < c$ (kus a, b ja c on mistahes ratsionaalarvud) asetseb arvule b vastav punkt B arvudele a ja c vastavate punktide A ja C vahel. Säilitades geomeetrilist terminoloogiat räägitakse, et arv b on arvude a ja c vahel. Nii näiteks arv -1 on arvude -2 ja 1 vahel (siin $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$).

§ 4. Aritmeetilised tehted ratsionaalarvudega.

Liitmine. Positiivsete arvude liitmine on tuntud aritmeetikast. Et liitmist laiendada kõigi ratsionaalarvude hulgale, võtame tarvitusele järgmise

definitsiooni: 1° *Kahe negatiivse arvu summaks nimetatakse nende absoluutväärtuste summat, mis on võetud märgiga „—":*

$$(-a) + (-b) = -(a + b) \quad \text{(kus } a \text{ ja } b \text{ on positiivsed)}.$$

2° *Kui kaks antud arvu on märgilt erinevad, siis nimetatakse nende summaks absoluutväärtuste vahet, mis on võetud suurema absoluutväärtusega liidetava märgiga; kahe vastandarvu summa loetakse võrdseks nulliga:*

$$a + (-b) = (-b) + a = \begin{cases} a - b & (\text{kui } a > b) \\ -(b - a) & (\text{kui } b > a) \\ 0 & (\text{kui } a = b) \end{cases}$$

3⁰ *Kui üks liidetavaist võrdub nulliga, siis summa loetakse võrdseks teise liidetavaga:*

$$a+0=a, \quad (-a)+0=-a, \quad 0+0=0.$$

Märkus. Definitsioonist järeldub, et kahe ratsionaalarvu summa võrdub nulliga ainult sel juhtumil, kui antud arvud on vastandarvud.

Näiteid:

$$(-7)+5=-2; \quad (\tfrac{3}{2})+(-\tfrac{1}{2})=1;$$
$$(-1)+(-3)=-4; \quad (-2)+2=0.$$

Ratsionaalarvude liitmise reegel on definitsioon ja seepärast on teda võimatu tõestada. Siiski on võimalik selgitada, miks on otstarbekohane tarvitusele võtta just nimelt seda reeglit. Seda näitame allpool:

esiteks, ratsionaalarvude liitmine omab kõiki aritmeetikas tuntud liitmise omadusi;

teiseks, konkreetne tõlgendamine näitab, et ratsionaalarvude liitmisega saab lahendada kõiki neid ülesandeid, mis lahenduvad aritmeetikas liitmisega.

Aritmeetikast on tuntud järgmised liitmise põhiomadused:

1⁰ *Kommutatiivsus (vahetuvus):*

$$a+b=b+a. \tag{1}$$

2⁰ *Assotsiatiivsus (ühenduvus):*

$$(a+b)+c=a+(b+c). \tag{2}$$

Näitame, et need omadused jäävad kehtima mistahes ratsionaalarvude liitmisel.

Kommutatiivsuse kehtivus on otseselt selge, sest definitsioonis on mõlemad liidetavad võrdõiguslikud ja nii esimese kui ka teise liidetava eriline osa on fikseerimata. Seepärast võib võrduses (1) tähtede a ja b all mõista mitte ainult positiivseid (nagu oli senini), vaid ka mistahes ratsionaalarve.

Näiteid:

$$2+(-3)=(-3)+2=-1 \quad (\text{siin } a=2, \ b=-3);$$
$$(-3)+(-\tfrac{1}{2})=(-\tfrac{1}{2})+(-3)=-\tfrac{7}{2} \quad (\text{siin } a=-3; \ b=-\tfrac{1}{2}).$$

Assotsiatiivsuse kehtivuse tõestamiseks tuleb vaadelda liidetavate märkide mitmesuguseid võimalikke juhtumeid. Vastavad arutlused on elementaarsed ja näidisena vaatleme neist juhtumeist üksikasjaliselt ainult ühte. Tõestame näiteks, et

$$[a+(-b)]+c=a+[(-b)+c] \qquad (3)$$

(a, b, ja c on positiivsed).

Teisendame tõestatava võrduse parem- ja vasakpoolseid avaldisi eraldi. Teisendame $[a+(-b)]+c$.

Siin tuleb eristada mitut juhtumit.

Juhtum A. Olgu $a>b$, siis aritmeetikast tuntud lahutamise omaduste alusel saame:

$$[a+(-b)]+c=(a-b)+c=(a+c)-b.$$

Nüüd oletame, et $a<b$; siis

$[a+(-b)]+c=-(b-a)+c$ (liitmise definitsiooni järgi).

Siin võib esineda kaks järgmist juhtumit.

Juhtum B. Olgu $c>b-a$ ehk, mis on sama, $a+c>b$; siis

$$[a+(-b)]+c=c-(b-a)=(a+c)-b.$$

Juhtum C. Olgu $c<b-a$ ehk $a+c<b$; siis

$$[a+(-b)]+c=-(b-a)+c=-[(b-a)-c]=$$
$$=-[b-(a+c)].$$

Märgime, et juhtumil A on tingimus $a+c>b$ täidetud iseenesest, seepärast võib selle tingimusega iseloomustada mõlemat juhtumit A ja B. Niisiis on meil

$$[a+(-b)]+c=\begin{cases}(a+c)-b & \text{(kui } a+c>b\text{, s. o. juhtumid A ja B)}\\ -[b-(a+c)] & \text{(kui } a+c<b\text{, s. o. juhtum C).}\end{cases}$$

Nüüd vaatleme avaldist $a+[(-b)+c]$. Kui $b<c$, siis võrdub ta avaldisega $(a+c)-b$, kui aga $b>c$, siis $a+[-(b-c)]=-(b-c)+a$. Siit, sarnaselt eelmisega, läbi vaadanud kõik võimalikud juhtumid, leiame:

$$a+[(-b)+c]=\begin{cases}(a+c)-b & \text{(kui } a+c>b\text{),}\\ -[b-(a+c)] & \text{(kui } a+c<b\text{),}\end{cases}$$

millega on tõestatud võrduse (3) kehtivus. Soovitame õppijail

assotsiatiivsuse kehtivust tõestada iseseisvalt teistel võimalikel juhtumeil:

$[(-a)+(-b)]+c=(-a)+[(-b)+c]$; $(a+b)+(-c)=$
$=a+[b+(-c)]$; $[(-a)+b]+c=(-a)+(b+c)$ jne.

Assotsiatiivsuseseaduse kehtivusel võib võrduses $(a+b)+c=$ $=a+(b+c)$ tähtede a, b ja c all mõista mistahes ratsionaalarve.

Näiteid:

1) $[(-2)+3]+(-7)=1+(-7)=-6$; $(-2)+[3+(-7)]=$
$=(-2)+(-4)=-6$. Siin $a=-2$, $b=3$, $c=-7$.

2) $[5+(-4)]+(-8)=1+(-8)=-7$; $5+[(-4)+(-8)]=$
$=5+(-12)=-7$. Siin $a=5$, $b=-4$, $c=-8$.

Teoreem. *Kahe mistahes ratsionaalse liidetava summa vastandarv võrdub liidetavate vastandarvude summaga:*

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

Tõestus. Piisab veendumisest, et arvude $a+b$ ja $(-a)+$ $+(-b)$ summa võrdub nulliga:

$$\begin{aligned}(a+b)+[(-a)+(-b)]&=[(a+b)+(-a)]+(-b)=\\&=[a+[b+(-a)]]+(-b)=\text{(assotsiatiivsus)}\\&=[a+[(-a)+b]]+(-b)=\text{(kommutatiivsus)}\\&=[[a+(-a)]+b]+(-b)=\text{(assotsiatiivsus)}\\&=b+(-b)=0.\end{aligned}$$

Asume ratsionaalarvude liitmise konkreetsele tõlgendamisele. Mingi antud suuruse suurenemist iseloomustame positiivse arvuga, vähenemist negatiivse arvuga ja muutumise puudumist arvuga 0. Kui antud suurus suurenes a ühelise võrra ja seejärel b ühelise võrra, siis iseloomustub muutumine summaga $a+b$. Kui antud suurus vähenes a ühelise võrra ja seejärel vähenes veel b ühelise võrra, siis tema muutumine on vähenemine $a+b$ ühelise võrra, mida iseloomustab negatiivne arv $-(a+b)$, mis võrdub arvude $-a$ ja $-b$ summaga. Kui antud suurus suurenes a ühelise võrra ja seejärel vähenes b ühelise võrra, siis saame suurenemise $a-b$ ühelise võrra, kui $a>b$, ja vähenemise $b-a$ ühelise võrra, kui $b>a$. Esimesel juhtumil iseloomustatakse muutumist positiivse arvuga $a-b$ ja teisel juhtumil negatiivse arvuga $-(b-a)$, s. o. mõlemal juhtumil summaga $a+(-b)$. Niiviisi antud suuruse jär-

jestikusel muutumisel a ja b ühelise võrra iseloomustatakse resulteeruvat muutumist summaga $a+b$, ükskõik, kas arvud a ja b on positiivsed või negatiivsed *.

Korrutamine. ***Definitsioon.*** *Kahe ratsionaalarvu korrutiseks nimetatakse:*

1° *nende absoluutväärtuste korrutist, kui antud arvud on mõlemad positiivsed või mõlemad negatiivsed;*

2° *nende absoluutväärtuste korrutist, võetuna märgiga „—", kui üks tegureist on positiivne ja teine negatiivne;*

3° *nulli, kui vähemalt üks tegureist võrdub nulliga.*

Kooskõlas selle definitsiooniga teostub ratsionaalarvude korrutamine järgmise reegli järgi: *korrutise absoluutväärtus võrdub tegurite absoluutväärtuste korrutisega:*

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

korrutise märk määratakse järgmise skeemi järgi (märkide reegel):

$$(+)(+) = (+); \quad (+)(-) = (-); \quad (-)(-) = (+);$$
$$(-)(+) = (-).$$

Nii

$$(-a)(-b) = ab; \quad (-a)b = b(-a) = -ab; \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Näiteid: $5 \cdot (-2) = -10$; $(-3) \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$; $(-\frac{1}{4}) \cdot 0 = 0$; $7 \cdot (-\frac{1}{7}) = -1$.

Märkus. Korrutamine arvuga -1 on samaväärne teise teguri märgi muutmisega, s. o. vastandarvule üleminekuga:

$$a(-1) = -(a \cdot 1) = -a; \quad (-a)(-1) = a \cdot 1 = a.$$

Aritmeetikast on tuntud järgmised korrutamise põhiomadused:

1° *Kommutatiivsus (vahetuvus):*

$$a \cdot b = b \cdot a. \tag{4}$$

2° *Assotsiatiivsus (ühenduvus):*

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c). \tag{5}$$

3° *Korrutamise distributiivsus (jaotuvus) liitmise suhtes:*

$$(a+b)c = ac + bc. \tag{6}$$

---

* Koolikursuses eelneb pedagoogilistel kaalutlustel tehete eeskirjade kindlaksmääramisele konkreetsete ülesannete vaatlemine.

Näitame, et need omadused jäävad kehtima *mistahes* ratsionaalarvude korrutamisel.

Kommutatiivsuse kehtivus järeldub korrutamise definitsioonist otseselt.

Assotsiatiivsuse kehtivust on kerge kontrollida otseselt. Mõlema korrutise $(a \cdot b)c$ ja $a(b \cdot c)$ absoluutväärtused on võrdsed $(|a| \cdot |b|) \cdot |c| = |a|(|b| \cdot |c|)$ (positiivsete arvude korrutamise assotsiatiivsus). Need korrutised on märgilt samased: mõlemad on positiivsed, kui arvudest a, b ja c üks või kõik kolm on positiivsed; mõlemad on negatiivsed, kui nendest arvudest üks või kolm on negatiivsed; mõlemad võrduvad nulliga, kui vähemalt üks tegureist võrdub nulliga. Nii on võrduse (5) kehtivus tõestatud.

N ä i d e. $[(-2) \cdot 3] \cdot 5 = -30$; $(-2) \cdot [3 \cdot 5] = -30$ (siin $a = -2$, $b = 3$, $c = 5$).

Asume distributiivsuseseaduse tõestamisele. Oletame algul, et c on positiivne arv.

J u h t u m A. Üks liidetavaist (näiteks teine) on negatiivne. Kui $a \geqslant b$, siis

$$[a + (-b)]c = (a - b)c = ac - bc = \text{(positiivsete arvude lahutamise omaduste järgi)}$$
$$= ac + (-bc) = \text{(liitmise definitsiooni järgi)}$$
$$= ac + (-b)c \text{ (korrutamise definitsiooni järgi).}$$

Kui $a < b$, siis

$$[a + (-b)]c = [-(b - a)]c = -[(b - a)c] = \text{(korrutamise definitsiooni järgi)}$$
$$= -(bc - ac) = \text{(positiivsete arvude lahutamise omaduste järgi)}$$
$$= ac + (-bc) = \text{(liitmise definitsiooni järgi)}$$
$$= ac + (-b)c \text{ (korrutamise definitsiooni järgi).}$$

J u h t u m B. Mõlemad liidetavad, esimene ja teine, on negatiivsed:

$$[(-a) + (-b)]c = [-(a + b)]c = -[(a + b)c] =$$
$$= -[(ac) + (bc)] = (-ac) + (-bc) = (-a)c + (-b)c.$$

J u h t u m C. Olgu nüüd c negatiivne ja a ning b *mistahes* ratsionaalarvud. Distributiivsus on kehtiv, kui $c = -1$, sest (lk. 13)

$$(a + b)(-1) = -(a + b) = (-a) + (-b) = a \cdot (-1) + b \cdot (-1).$$

Kui $-c$ on mistahes negatiivne arv, siis

$$(a+b)(-c) = (a+b)[c(-1)] = [(a+b)\cdot c](-1) = \quad \text{(assotsiatiivsus)}$$

$$= [ac+bc](-1) = \text{(distributiivsus, kui } c > 0)$$

$$= (ac)(-1) + (bc)(-1) = a[c(-1)] + b[c(-1)] = \quad \text{(assotsiatiivsus)}$$

$$= a(-c) + b(-c).$$

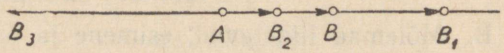
Juhtumi vaatlemise, kus arvudest a, b ja c vähemalt üks on 0, jätame õppijaile.

Teoreem. *Kahe arvu korrutis võrdub nulliga ainult tingimusel, kui tegureist vähemalt üks võrdub nulliga.*

Tõestus. Kui $a \neq 0$ ja $b \neq 0$, siis $|a| > 0$ ja $|b| > 0$, kuid korrutis ab omab siis positiivset absoluutväärtust: $|ab| = |a| \cdot |b| > 0$ (sest kahe positiivse arvu korrutis on positiivne) ega saa võrduda nulliga, m. o. t. t. (mida oligi tarvis tõestada).

Tõestatud teoreemist ja korrutamise definitsioonist järeldub, et *kahe ratsionaalarvu korrutise nulliga võrdumise tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks on vähemalt ühe teguri nulliga võrdumine.*

Asume ratsionaalarvude korrutamise konkreetsele tõlgendamisele. Antud suunatud suuruse a korda muutumise all, kus a on positiivne arv, mõistame üleminekut teisele suurusele, mis on antud suurusega samasuunaline ja moodustab temaga suhte, mis võrdne a-ga. Nii näiteks sirglõigu AB (joonis 3) muutmine 2 korda tähendab üleminekut sirglõigule AB_1, mis on kaks korda suurem ja samasuunaline AB-ga. Sirglõigu AB muutmine $\frac{1}{2}$ korda tähendab üleminekut sirglõigule AB_2, mis on kaks korda väiksem ja samasuunaline AB-ga.



Joon. 3.

Kui antud suurust järjestikku muuta a korda ja seejärel b korda, siis muutub ta ab korda. Nii näiteks sirglõigu suurendamine 3 korda ja siis 5 korda annab tema suurenemise 15 korda.

Olgu $-a$ negatiivne arv. Antud suuruse muutumise all $-a$ korda mõistame tema muutumist a korda ning suuna muutumist vastupidiseks. Nii sirglõigu AB muutumine -2 korda on üleminek

sirglõigule AB_3, mis on pikkuselt kaks korda suurem ja suunalt vastupidine. Olgu a ja $-b$ kaks antud arvu, milledest esimene on positiivne ja teine negatiivne. Antud suuruse järjestikune muutumine a ja siis $-b$ korda on samaväärne tema muutumisega ab korda ning suuna muutumisega vastupidiseks. Resulteeriv muutumine iseloomustub arvuga $-(ab)$, s. o. korrutisega $a(-b)$. Analoogiliselt on järjestikune muutumine $-a$ ja b korda samaväärne muutumisega $(-a)b$ korda. Olgu $-a$ ja $-b$ kaks antud negatiivset arvu; suuruse järjestikune muutumine $-a$ ja $-b$ korda on samaväärne tema muutumisega ab korda ning suuna kahekordse vahetamisega. Seepärast antud suuruse suund ei muutu ja tema muutumist iseloomustatakse arvuga ab, s. o. korrutisega $(-a)(-b)$.

Niisiis, olgu arvud a ja b positiivsed või negatiivsed, *ikkagi iseloomustatakse tulemust, mis saadakse suuruse muutumisel järjestikku a ja b korda, korrutisega ab.*

Märkus. Korrutamine arvuga -1 iseloomustub suuruse muutumisega vastandsuunaliseks.

Lahutamine. Lahutamist defineeritakse kui liitmise pöördtehet.

Definitsioon. Mistahes ratsionaalarvude a ja b vaheks $a-b$ nimetatakse arvu x, mis rahuldab tingimust

$$b+x=a. \tag{7}$$

Oletame, et otsitav arv x on olemas. Liidame selle võrduse mõlema poolega arvu, mis on arvu b vastandarv, ja siit leiame x-i üheainsa võimaliku väärtuse $x=a+(-b)$. Kontrollimisega veendume, et leitud väärtus rahuldab tõepoolest tingimust (7):

$$b+[a+(-b)]=b+(-b)+a=[b+(-b)]+a=a.$$

Siit ***reegel:*** *Kahe ratsionaalarvu vahe võrdub vähendatava ja lahutatava vastandarvu summaga.*

Elementaararitmeetikas ei ole lahutamine alati teostatav, sest väiksemast arvust ei saa lahutada suuremat arvu. Seevastu ratsionaalarvude hulgas on lahutamine alati võimalik.

Näited: $5-7=5+(-7)=-2$; $(-\frac{1}{2})-(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$; $-3-5=-3+(-5)=-8$.

Vaatleme võrdusi

$$a - b = a + (-b) \quad \text{ja} \quad a + b = a - (-b).$$

Esimene näitab, et kahe arvu vahe on alati kujutatav summana, teine näitab, et summa on kujutatav vahena. Järelikult lahutamise omaduste tundmaõppimiseks ei ole erilist vajadust, sest nad kõik järelduvad liitmise vastavaist omadustest. Nii näiteks järeldub korrutamise distributiivsus lahutamise suhtes liitmise vastavast omadusest. Tõepoolest,

$$(a - b)c = [a + (-b)]c = ac + (-b)c = ac + (-bc) = ac - bc.$$

Avaldis, mis tähistab järjestikust liitmiste ja lahutamiste rida, on alati esitatav summana ja seepärast nimetatakse teda algebraliseks summaks.

Nii näiteks on avaldis $a + b - c - d$ väljendatav järgmiste liidetavate summana: a, b, $(-c)$, $(-d)$. Algebraliste summade näiteiks võivad olla

$$3 - 7 + 5, \quad a + 2b, \quad a^2 - ax + x^2, \quad \frac{x^2}{x - a} + 2.$$

M ä r k u s. Ei tule arvata, et algebralise summa liige, mille ees on märk „—", omab alati negatiivset ja märgiga „+" alati positiivset arvulist väärtust. Nii näiteks on summas $a - b + c$ liige $-b$ positiivne, kui b väärtus on negatiivne, ja negatiivne, kui b väärtus on positiivne, ning võrdub 0-ga, kui $b = 0$.

J a g a m i n e. Jagamist defineeritakse kui k o r r u t a m i s e p ö ö r d t e h e t.

Definitsioon. *Jagatiseks* $\frac{a}{b}$ *nimetatakse arvu* x, *mis rahuldab tingimust*

$$a = bx. \tag{8}$$

Olgu a ja b mistahes ratsionaalarvud, kusjuures $b \neq 0$. Ratsionaalarvude korrutamise reegli järgi $|b| \cdot |x| = |a|$, millest leiame otsitava jagatise absoluutväärtuse: $|x| = \frac{|a|}{|b|}$. Tingimus (8) näitab, et arv x peab olema positiivne, kui arvud a ja b on ühesuguse märgiga, ja negatiivne, kui need arvud on vastandmärkidega, ning võrdne 0-ga, kui $a = 0$.

Leitud arv x rahuldab tõepoolest tingimust (8), sest absoluutväärtuselt võrdub korrutis bx arvuga a:

$$|bx| = |b|\,|x| = |b|\frac{|a|}{|b|} = |a|$$

ja ühtib temaga märgi poolest (vastavalt arvu x märgi valikule).

Siit ***reegel:*** *Kui jagaja ei võrdu nulliga, siis jagatise absoluutväärtus võrdub absoluutväärtuste jagatisega ja jagatise märk määratakse märkide reegli järgi:*

$$\frac{(+)}{(+)} = (+);\quad \frac{(-)}{(-)} = (+);\quad \frac{(+)}{(-)} = (-);\quad \frac{(-)}{(+)} = (-).$$

Me eeldasime, et jagaja ei võrdu nulliga. Olgu nüüd $b = 0$, siis on võimalikud järgmised kaks juhtumit:

1° $b = 0$, $a \neq 0$. Sel juhtumil ei rahulda tingimust (8) ükski ratsionaalarv x, sest et $0 \cdot x = 0 \neq a$. Järelikult jagamine on teostamatu.

2° $a = b = 0$. Sel juhtumil rahuldab tingimust (8) mistahes arv x, sest $0 \cdot x = 0$. Seepärast jagatiseks võib olla mistahes ratsionaalarv. Kuid niisugust vaatekohta ei loeta otstarbekohaseks, sest see on vasturääkiv põhiprintsiibile, mille järgi aritmeetilise tehte tulemuseks peab olema mingi täiesti kindel arv. Need kaalutlused sunnivad ka juhtumil 2° lugema jagamist teostamatuks. Niisiis, *kõigil juhtumeil on jagamine* 0*-ga teostamatu ja avaldisi* $\frac{a}{0}$ ja $\frac{0}{0}$ *tuleb vaadelda kui mõttetuid.* Jagamise vaatlemisel loeme jagajat kõigil juhtumeil nullist erinevaks ilma igakordse erilise selgituseta.

Igale nullist erinevale ratsionaalarvule a võib vastavusse seada arvu a_1, mis võrdub $\frac{1}{a}$-ga ja mida nimetatakse arvu a pöördarvuks. Kahe vastastikku pöördarvu korrutis võrdub 1-ga:

$$a \cdot a_1 = 1.$$

Null ei oma pöördarvu.

Näiteid. 1) $a = 2$, pöördarv $a_1 = \frac{1}{2}$; 2) $a = -\frac{2}{5}$, pöördarv $a_1 = -\frac{5}{2}$; 3) $a = -\frac{1}{3}$, pöördarv $a_1 = -3$.

Ratsionaalarvude jagamise reeglist järeldub, et absoluutväärtuselt vastastikused pöördarvud on pöördsuurused ning märgilt ühe-

sugused. Märgime, et arvude 1 ja —1 pöördsuurused võrduvad vastavalt nende enestega.

Jagamistehet võib asendada jagaja pöördarvuga korrutamisega. Korrutades võrduse $bx = a$ mõlemaid pooli arvuga $\frac{1}{b}$ saame

$$bx \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \text{ millest } 1 \cdot x = x = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Seepärast jagamise omaduste tundmaõppimiseks ei ole erilist vajadust, sest kõik need omadused järelduvad korrutamise vastavaist omadustest. Selgitame seda rea näidetega. Näitame eelnevalt, et korrutise pöördarv võrdub tegurite pöördarvude korrutisega. Tõepoolest, kontrollimisega veendume, et arvude ab ja $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ korrutis võrdub 1-ga:

$$(a \cdot b) \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right) = (ab)\left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a}\right) = \left(ab \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} = 1,$$

millest

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}.$$

Nüüd näitame, et aritmeetika põhireegel, mis kinnitab, et jagatise väärtus ei muutu jagatava ja jagaja korrutamisel ühe ja sama nullist erineva arvuga, on kehtiv ka ratsionaalarvude hulga kohta. Olgu a, b ja k mistahes (täis- või murd-) ratsionaalarvud, kusjuures $b \neq 0$ ja $k \neq 0$.

Saame:

$$\frac{ak}{bk} = ak \cdot \frac{1}{bk} = ak \, \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{k} = a \cdot \frac{1}{b} k \, \frac{1}{k} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Edasi näitame, et jääb kehtima ka aritmeetikast tuntud murdude korrutamise reegel:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d} = (ac) \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right) = ac \cdot \frac{1}{bd} = \frac{ac}{bd}.$$

Lõpuks teeme kindlaks jagamise distributiivsuse kehtivuse, rakendades korrutamise distributiivsust:

$$\frac{a+b}{c} = (a+b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Niisiis $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

Siit järeldub, et murdude liitmise aritmeetiline reegel jääb kehtima ka ratsionaalarvude hulgas:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+cb}{bd}.$$

Astendamine. ***Definitsioon.*** *n teguri korrutist, milles kõik tegurid võrduvad ühe ja sama arvuga a, nimetatakse arvu a n-daks astmeks:*

$$\overbrace{a\cdot a\ \dots\ a}^{n\text{ korda}}=a^n.$$

Niisiis, astendamist (algebra tundmaõppimise antud astmel) vaadeldakse kui korrutamise erijuhtumit. Definitsiooni mõtte järgi omab avaldis a^n mõtet ainult siis, kui n on naturaalarv. Selle definitsiooni vaatekohalt ei oma sümbolid a^0, a^{-1}, $a^{\frac{1}{2}}$ jne. mõtet, sest arvu ei saa võtta tegurina 0 või —1 või $\frac{1}{2}$ korda. Korrutamise assotsiatiivsuse seaduse rakendamisega tuletatakse tuntud reeglid ühe ja sama arvu kahe astme korrutamise ja astme astendamise kohta:

$$a^n\cdot a^m=\overbrace{(a\cdot a\ \dots\ a)}^{n\text{ korda}}\overbrace{(a\cdot a\ \dots\ a)}^{m\text{ korda}}=a^{n+m}.$$

$$(a^n)^m=\overbrace{(a\cdot a\ \dots\ a)}^{n\text{ korda}}\overbrace{(a\cdot a\ \dots\ a)}^{n\text{ korda}}\dots\overbrace{(a\cdot a\ \dots\ a)}^{n\text{ korda}}=$$
$$=\overbrace{a^{n+n+n+\dots+n}}^{m\text{ korda}}=a^{nm}.$$

Märgime, et ühe ja sama arvu astmete jagamise reegel $\frac{a^n}{m}=a^{n-m}$ on algebra tundmaõppimise antud astmel kehtiv ainult tingimusel, kui $n>m$, sest kui $n\leqslant m$, siis võrduse parem pool kaotab mõtte.

§ 5. Ratsionaalarvude tehete reeglid.

Seoses arvu mõiste laiendamisega tekib järgmine küsimus: kas võib rakendada mistahes ratsionaalarvudele aritmeetikast tuntud tehete teostamise kõiki reegleid? Mistahes arvu kompo-

nentidega tehete teostamise reeglid tuletatakse aritmeetikas tehete põhiseadustest:

$$\left.\begin{array}{c} a+b=b+a \\ (a+b)+c=a+(b+c) \\ a\cdot b=b\cdot a \\ (ab)c=a(bc) \\ (a+b)c=ac+bc \end{array}\right\} \quad (I)$$

Kõik järeldused, mis tulenevad põhiseadustest (I), kehtivad niikaua, kuni kehtivad need seadused. Järelikult mistahes arvu komponentidega tehete teostamise reeglid on tingimusteta rakendatavad mitte üksnes positiivsetele, vaid mistahes ratsionaalarvudele, sest tehete põhiseadused (I) jäävad kehtima ka ratsionaalarvude hulgas (vaata eelmist §-i), kuid tehete reeglid on seaduste (I) järeldused. Seepärast piisab, kui laiendatud arvude hulgas piirduda põhiseaduste (I) kehtivuse uurimisega. Siit on arusaadav, et eelmises paragrahvis teostatud uurimine tehete põhiseaduste kehtivuse kindlakstegemiseks ratsionaalarvude hulgas omab põhimõttelist tähtsust. Näitena vaatleme reeglit summa korrutamise kohta summaga, mis väidab, et kahe summa korrutamiseks piisab, kui moodustada esimese summa iga liidetava kõikvõimalikud korrutised teise summa iga liidetavaga ja kõik need korrutised liita.

See reegel tuletatakse põhiseaduste (I) rakendamisega.

Esiteks, assotsiatiivsuse- ja distributiivsuseseadused on laiendatavad summa kohta, millel on mistahes arv liidetavaid. Näitame seda täieliku induktsioonimeetodi abil. Eeldame, et seadused on kehtivad mistahes $n-1$ arvu summa $S=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$ kohta. Eelduse järgi

$$A+S=A+(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})=$$
$$=A+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1} \text{ * (assotsiatiivsus).}$$
$$S\cdot k=(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})k=$$
$$=a_1k+a_2k+\ldots+a_{n-1}k \text{ (distributiivsus).}$$

n arvu $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ kohta on

$$A+(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n)=A+[(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+$$
$$+a_n]=A+(S+a_n)=(A+S)+a_n= \text{ (assotsiatiivsuse põhiseadus)}$$
$$=(A+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n= \text{ (eelduse järgi)}$$
$$=A+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n.$$

* Avaldist $a+b+c+\ldots+l$ mõistetakse kui liidetavate järjekorras teostatud liitmise tulemust $(\ldots((a+b)+c)+\ldots+l)$.

Analoogiliselt

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n)k = (S + a_n)k =$$
$$= Sk + a_nk = \text{(distributiivsuse põhiseadus)}$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})k + a_nk =$$
$$= a_1k + a_2k + \ldots + a_{n-1}k + a_nk \text{ (eelduse järgi).}$$

Järelikult assotsiatiivsuse- ja distributiivsuseseadused on õiged mistahes arvu n liidetavatega summa kohta eeldusel, et nad on õiged $n - 1$ liidetavaga summa kohta; ent seadused on kehtivad kahe liidetavaga summa kohta, millest järeldubki nende üldkehtivus.

Teiseks, oletades, et $M = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, $N = (b_1 + b_2 + \ldots + b_m)$, saame

$$MN = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_m) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)N = a_1N + a_2N + \ldots + a_nN = \text{(distributiivsus)}$$
$$= a_1(b_1 + b_2 + \ldots + b_m) + \ldots + a_n(b_1 + b_2 + \ldots + b_m) =$$
$$= (a_1b_1 + a_1b_2 + \ldots a_1b_m) + \ldots + (a_nb_1 + a_nb_2 + \ldots + a_nb_m) = \text{(distributiivsus)}$$
$$= a_1b_1 + a_1b_2 + \ldots + a_nb_m \text{ (assotsiatiivsus).}$$

Selles arutluses on oluline assotsiatiivsuse ja distributiivsuse põhiseaduste kehtivus, kuid pole tähtis, missugust loomust omavad arvud $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots, b_m$.

Märkus. Algebraliste summade korrutamisel tuleb arvestada korrutatavate märke, sest näiteks algebraliste summade $M - N + P$ ja $R - S$ teisekohaliste liikmete korrutis on $(-N)(-S) = NS$.

Järgmise näitena vaatleme tehete seaduste kasutamist hulkliikmeliste avaldiste lahutamise reegli tuletamisel:

$$(A + B - C) - (M - N + P) = (A + B - C) +$$
$$+ [(-1)(M - N + P)] =$$
$$= (A + B - C) + [(-1)M - (-1)N + (-1)P] = \text{(distributiivsus)}$$
$$= (A + B - C) + (-M + N - P) = A + B - C - M + N - P$$
(liitmise assotsiatiivsus).

Me saime tuntud reegli: *algebralise summa lahutamisel piisab, kui vähendatava avaldise liikmeile juurde kirjutada lahutatava avaldise liikmed, mis on võetud vastandmärgiga.*

Lugedes teisendusi vastupidises järjekorras saame algebralise summa osa sulgudesse paigutamise ja märgi „—" sulgude ette toomise reegli.

§ 6. Arvringid ja arvkorpused.

Aritmeetilist tehet nimetatakse antud arvhulgas teostatavaks, kui arv, mis saadakse tema teostamise tulemusena, kuulub samasse hulka.

Näited: 1) Naturaalarvude hulgas 1, 2, 3, ..., n, ... on teostatavad liitmis- ja korrutamistehted, sest naturaalarvude summa ja korrutis on samuti naturaalarvud. Lahutamis- ja jagamistehe ei ole selles hulgas alati teostatav. Tõepoolest, väiksema ja suurema naturaalarvu vahe ei ole naturaalarv; jagatis, näiteks arvude 5 ja 3 jagamisel, ei ole täisarv.

2) Kõigi täisarvude hulgas

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

on lahutamistehe teostatav. Jagamistehe pole alati teostatav.

3) Kõigi positiivsete arvude (täis- ja murdarvude) hulgas on jagamistehe teostatav. Lahutamistehe ei ole alati teostatav.

4) Kõigi ratsionaalarvude hulgas on kõik neli aritmeetilist tehet teostatavad, välja arvatud jagamine 0-ga.

Definitsioon I. *Arvhulka, kui temas on teostatavad liitmis-, korrutamis- ja lahutamistehted, nimetatakse ringiks.*

Definitsioon II. *Arvhulka, mis sisaldab vähemalt ühte nullist erinevat arvu, nimetatakse korpuseks, kui temas on teostatavad liitmis-, lahutamis-, korrutamis- ja jagamistehted, välja arvatud jagamine* 0*-ga.*

Definitsioonist on selge, et arvkorpus on niisugune ring, milles on jagamistehe teostatav (välja arvatud jagamine nulliga).

Arvringi ja arvkorpuse mõistetele võib anda järgmise üksikasjalisema karakteristika: *Ringis ja korpuses on teostatavad liitmis- ja korrutamistehted, mis evivad omadusi* (I) (vaata eelmist §-i). *Ringis ja korpuses on võrrand* $a + x = b$ *lahendatav mistahes* a *ja* b *puhul (lahutamise teostatavus). Korpuses on võrrand* $ax = b$ *lahendatav mistahes* $a \neq 0$ *ja mistahes* b *puhul (jagamise teostatavus).*

Näiteid. 1) Kõigi täisarvude hulk ..., —2, —1, 0, 1, 2, ... on ring.

2) antud arvu m kordsete arvude hulk

$$\ldots -2m, -m, 0, m, 2m, \ldots$$

on ring. Tõepoolest, arvu m kordsete arvude summa, korrutis ja vahe on arvu m kordne:

$$km + k_1m = (k + k_1)m;\quad km \cdot k_1m = (kk_1m) \cdot m;$$
$$km - k_1m = (k - k_1)m.$$

Erijuhtumina on ka paarisarvude hulk ring. Hulgad ... —6, —3, 0, 3, 6 ... ja ... —14, —7, 0, 7, 14, ... on ringid. Igaüks neist on kõigi täisarvude ringi osa.

3) Hulk, mis koosneb ainult ühest arvust 0, on ring, sest $0 + 0 = 0$; $0 \cdot 0 = 0$; $0 - 0 = 0$. Seda ringi nimetatakse n u l l r i n g i k s.

4) Paaritute arvude hulk ... —3, —1, 1, 3, ... e i o l e ring, sest paaritute arvude summa on paarisarv.

5) Kõigi ratsionaalarvude hulk on korpus.

Teoreem. *Iga arvring sisaldab nulli.*

T õ e s t u s. Kui antud ringis sisaldub mingi arv a, siis lahutamise teostatavuse tõttu sisaldub ringis ka vahe $a - a = 0$, m. o. t. t.

Nullringi kui igas ringis olevat nimetatakse m i n i m a a l r i n g i k s. Null evib ringis järgmist põhiomadust: *mistahes arvu a ja arvu* 0 *summa võrdub arvuga a:*

$$a + 0 = a.$$

Teoreem. *Kui ring sisaldab arvu a, siis sisaldab ta ka kõiki arvu a kordseid arve:*

$$\ldots -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a \ldots$$

T õ e s t u s. Liitmise teostatavuse tõttu peab ring sisaldama kõiki arve kujul $a + a = 2a$; $2a + a = 3a$ jne., üldiselt kujul $(k - 1)a + a = ka$.

Lahutamise teostatavuse tõttu sisaldab ring arvu a vastandarvu $-a$ ja samuti kõiki arve kujul $-2a$, $-3a$, ..., sest $-a = 0 - a$, $-2a = 0 - 2a$, $-3a = 0 - 3a$ ..., m. o. t. t.

Teoreem. *Iga arvkorpus sisaldab kõiki ratsionaalarve.*

Seepärast nimetatakse ratsionaalarvude hulka m i n i m a a l s e k s arvkorpuseks.

T õ e s t u s. Arvkorpus, olles ka ring, sisaldab arvu 0. Olgu a korpuse mingi nullist erinev arv. Jagamise teostatavuse tõttu sisaldab korpus jagatist $\frac{a}{a}$, s. o. arvu üks. Edasi, eelmise teoreemi alu-

sel, peab korpus sisaldama kõiki täisarve ... —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, ... Lõpuks jagamise teostatavuse tõttu peab korpus sisaldama kõiki murdarve $\frac{m}{n}$, kus m ja n on mistahes täisarvud ja $n \neq 0$, m. o. t. t.

Tõestatust on selge, et niikaua, kui meie käsutuses on ainult ratsionaalarvud, on võimatu tuua mingit teist arvkorpuse näidet.

§ 7. Tehete skalaaromadused.

Ratsionaalarvude korpust nimetatakse järjestatud korpuseks, sest tema elemendid alluvad skalaarjärjestuse-seadustele (vaata § 3, omadused I—V). Aritmeetiliste tehete ja skalaarjärjestuse-seaduste vastastikused suhted iseloomustuvad tehete skalaaromadustega. Me näitame allpool tehete põhilisi skalaaromadusi (täpsemalt vaata ptk. X).

Teoreem. *Vahe $a - b$ on positiivne, kui a on suurem kui b, ja negatiivne, kui a on väiksem kui b, ning võrdne 0-ga, kui $a = b$.*

Tõestus. 1° Olgu $a > b$. Kui a ja b on mõlemad positiivsed, siis $a - b > 0$; see on teada aritmeetikast. Kui arv a on positiivne ja b negatiivne või võrdne nulliga, siis $a - b > 0$, sest b lahutamine on samaväärne vastandarvu $-b$ liitmisega, viimane on aga mittenegatiivne. Kui arv a on negatiivne või võrdne nulliga, siis arv b on samuti negatiivne ja $|a| < |b|$. Sel juhtumil arvu b lahutamine on samaväärne positiivse arvu $-b$ liitmisega ja kuna $|a| < |b|$, siis $a - b = a + (-b) > 0$.

2° Olgu nüüd $a < b$. Et $b > a$, siis vahe $b - a$ on positiivne ja vastandarv $a - b$ on seega negatiivne.

3° Kui $a = b$, siis on $a - b = 0$, m. o. t. t.

Niisiis

$$a - b \begin{cases} > 0 & (\text{kui } a > b) \\ < 0 & (\text{kui } a < b) \\ = 0 & (\text{kui } a = b) \end{cases}$$

Teoreemi konkreetne mõte on järgmine. Antud suunatud suuruse väärtuse muutumine väljendub üleminekul b-ga võrdselt väärtuselt a-ga võrdsele väärtusele vahega $a - b$. $a > b$ puhul on tegemist suurenemisega ja vastavalt sellele vahe $a - b$, mis väljendab muutumist, on positiivne. $a < b$ puhul on tegemist vähenemisega ja vastavalt sellele vahe $a - b$ on negatiivne.

Liitmise ja lahutamise kohta kehtivad järgmised monotoonsuse seadused:

1^0 Kui $a < b$, siis $a + c < b + c$.

Tõestus. Kui $a < b$, siis $b - a > 0$ ja seepärast $(b + c) - (a + c) = b - a > 0$, millest $a + c < b + c$.

2^0 Kui $a < b$ ja $c > 0$, siis $ac < bc$.

Tõestus. $b - a > 0$, millest $bc - ac = (b - a)c > 0$, järelikult $ac < bc$.

Võrratustega opereerimisel on väga olulised järgmised põhireeglid, mida me kasutame edaspidi.

1. *Võrratuste liikmeti liitmise reegel: kui $a < b$ ja $c < d$, siis $a + c < b + d$.*

Tõestus. On teada, et $a + c < b + c$ ja $c + b < d + b$, millest $a + c < b + d$, m. o. t. t.

2. *Võrratuste liikmeti korrutamise reegel: kui b ja c on positiivsed, $a < b$ ja $c < d$, siis $ac < bd$.*

Tõestus. Tõepoolest $ac < bc$ ja $cb < db$, millest $ac < bd$, m. o. t. t.

II peatükk.

Ratsionaalsed funktsioonid.

§ 8. Üldmõisted.

Iga matemaatiline avaldis on matemaatiliste operatsioonide kogumi sümboolseks kirjutiseks, milliseid operatsioone tuleb teostada kindlas järjestuses arvudega, mis on tähistatud tähtede või numbritega selleks, et saada antud suuruse arvulist väärtust. Avaldises esinevad tähed võivad omada kahesugust mõtet:

Esiteks, tähtedele võib omistada mitmesuguseid arvulisi väärtusi; niisuguseid tähti nimetame tähtargumentideks.

Teiseks, tähed võivad tähistada antud arutlusprotsessis täiesti kindlaid muutumatuid arve.

Vaatleme näiteks ringjoone pikkuse avaldist sõltuvuses tema raadiusest $s = 2\pi R$. Täht R tähistab raadiuse suurust, temale võib omistada mistahes positiivset väärtust, kuna π tähistab täiesti kindlat arvu — ringjoone pikkuse ja diameetri suhet.

Tähtargumentide jaoks peab olema antud nende lubatavate väärtuste kogum. Näiteks, kui tuba mahutab a inimest, siis kolme niisugusesse tuppa mahub $3a$ inimest. Siin tähe a jaoks on lubatavad ainult täisarvulised positiivsed väärtused. Ringjoone pikkuse avaldises $s = 2\pi R$ on R jaoks lubatavad mistahes positiivsed väärtused. Ühtlase sirgjoonelise liikumise tee valemis $s = vt$ võib kiirus v (sõltuvalt tema suunast) omada nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi.

Tähtargumentide arvuliste väärtuste igale lubatavale süsteemile vastab matemaatilise avaldise täiesti kindel arvuline väärtus. *Seepärast on matemaatiline avaldis tähtargumentide funktsiooniks.*

Funktsiooni mõiste ülddefinitsioon sõnastatakse järgmiselt:

y on argumentide $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funktsioon, kui argumentide väärtuste igale lubatavale süsteemile vastab y-i mingi täiesti kindel väärtus.

Nõnda siis, funktsioon määratakse argumentide lubatavate väärtuste andmisega ja vastavuse seadusega. Ei ole tingimata vajalik, et argumentide väärtuste ja funktsiooni väärtuste vaheline vastavusseadus antaks mingi matemaatilise avaldisena (valemina). Funktsiooni mõiste on üldisem ja teda ei tule ära segada matemaatilise avaldise mõistega. Vaatleme järgmist näidet: kui x on täisarv, siis seame temale vastavaks arvu $y = 1$; kui x on murdarv (mitte täisarv), siis seame temale vastavaks arvu $y = 0$. Seega, arvule $x = 1$ vastab $y = 1$, arvule $x = 2$ vastab $y = 1$, arvule $x = 3$ vastab $y = 1$, arvule $x = \frac{1}{2}$ vastab $y = 0$ ja üldiselt

$$y = \begin{cases} 1 \text{ (kui } x \text{ on täisarv)} \\ 0 \text{ (kui } x \text{ on murdarv).} \end{cases}$$

Siin funktsioon ei ole antud matemaatilise avaldisega (valemiga), vaid vastavusseaduse kirjeldamisega. Argumendi x lubatavaks väärtuseks on mistahes ratsionaalne väärtus.

Argumentide lubatavate väärtuste hulk võib olla mitmesugune. Seame näiteks igale naturaalarvule x vastavaks arvu $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$ Selle funktsiooni puhul ei ole argumendi lubatavaiks väärtusteks mistahes ratsionaalarvud, vaid ainult naturaalarvud. Argumendi lubatavate väärtuste hulk moodustab kõigi ratsionaalarvude hulga. Lõpuks võib funktsioon olla antud mitme-

suguste valemitega argumendi mitmesuguste väärtuste jaoks. Oletame näiteks, et

$$y = \begin{cases} x & (\text{kui } x \geqslant 0) \\ x^2 & (\text{kui } x < 0). \end{cases}$$

Antud näites $x = 2$ puhul $y = 2$, $x = 5$ puhul $y = 5$, $x = -7$ puhul $y = 49$ jne.

Funktsioonide tundmaõppimine Dirichlet' poolt formuleeritud ülddefinitsiooni alusel kuulub matemaatilise analüüsi kursusse. Elementaaralgebra vaatleb ainult eri liiki funktsioone, millede vastavusseadust on võimalik määrata rea elementaaralgebras esinevate täiesti kindlate matemaatiliste operatsioonide abil.

Definitsioon. *Kaks matemaatilist avaldist nimetatakse samasteks, kui nende arvulised väärtused on võrdsed neis esinevate tähtede arvuliste väärtuste mistahes lubatud süsteemi puhul. Numbrilised avaldised (mis ei sisalda tähti) loetakse samasteks, kui nad omavad ühte ja sama väärtust.*

Algebralise avaldise asendamist teise temaga samase avaldisega nimetatakse teisendamiseks. Tuleb ära märkida tähti sisaldavate samaste avaldiste mõiste suhtelisust. Samasus võib kaduda, kui muuta tähtede lubatavate väärtuste kogu. Nii näiteks x-i mistahes mittenegatiivse väärtuse puhul $|x| = x$. Seepärast avaldised x *ja* $|x|$ on samased tingimusel, et x-i lubatavaiks väärtusteks oleksid mistahes mittenegatiivsed arvud. Lühemalt öeldakse, et x ja $|x|$ on samased kõigi mittenegatiivsete arvude hulgas. Kõigi ratsionaalarvude hulgas lakkavad need avaldised olemast samased. Kui võtta x-i lubatavaiks väärtusteks ka negatiivsed väärtused, siis võrdus $|x| = x$ ei kehti x-i iga väärtuse puhul, sest kui $x < 0$, siis $|x| = -x$.

Kahe avaldise samasuse märkimiseks kasutatakse võrdusmärgi kõrval sümbolit „$\equiv$".

Lihtsaimateks samasusteks, mis kehtivad kõigi ratsionaalarvude hulgas, on aritmeetiliste tehete põhiseadused, mis on väljendatud valemitega (I) (§ 5). Neist põhiseadustest järeldustena tulenevad seosed on samuti samasusteks kõigi ratsionaalarvude hulgas. Niisuguste samasuste näiteiks on hulkliikmeliste avaldiste (algebra-

liste summade) tehete reeglid. Erijuhtumil on samasusteks lühendatud korrutamise valemid:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2; \quad (x + a)(x - a) = x^2 - a^2;$$
$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3x^2a + 3xa^2 \pm a^3;$$
$$x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \text{ jne.}$$

Murdusid sisaldavate avaldiste teisendamisel tuleb lubatavate väärtuste hulgast välja jätta tähtede väärtused, mis muudavad nulliks vähemalt ühe nimetaja.

N ä i t e d: 1) Vaatleme tehete omaduste kasutamist hulkliikmelises algebralises avaldises sarnaste liikmete koondamise põhjendamisel. Vaatleme näiteks avaldist

$$2a^2b + \frac{c}{d} - \frac{3}{2}a^2b + 4\frac{c}{d} + a^2b = 2a^2b - \frac{3}{2}a^2b + a^2b + \frac{c}{d} + 4\frac{c}{d} =$$
(kommutatiivsus)
$$= (2a^2b - \frac{3}{2}a^2b + a^2b) + \left(\frac{c}{d} + 4\frac{c}{d}\right) = \text{ (assotsiatiivsus)}$$
$$= (2 - \frac{3}{2} + 1)a^2b + (1 + 4)\frac{c}{d} = \text{ (distributiivsus)}$$
$$= \frac{3}{2}a^2b + 5\frac{c}{d}.$$

2) Võrdus

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} = \frac{1}{(x-1)(2-x)}$$

on samasus x-i kõigi väärtuste puhul, mis erinevad arvudest 1 ja 2. Arvud 1 ja 2 tulevad x-le lubatavate väärtuste hulgast välja jätta.

3) Leiame avaldise mistahes liidetavate arvuga summa ruudule. Summa $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ korrutamisel summaga $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ tuleb summa $\Sigma a_k a_l$ moodustada kõikvõimalikest korrutistest, mis saadakse korrutatava iga liikme korrutamisel korrutaja iga liikmega. Selles viimases summas sisalduvad iga liidetava a_1, a_2, $\ldots$, a_n ruudud: $k = l$ puhul $a_k a_l = a_k^2$. Kui $k \neq l$, siis korrutatava k-nda liikme ja korrutaja l-nda liikme korrutisele $a_k a_l$ vastab võrdne (kommutatiivsuse seaduse alusel) korrutis, mis tekib korrutatava l-nda liikme korrutamisel korrutaja k-nda liikmega; ühendades võrdsed liidetavad saame samasuse

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \equiv a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n.$$

4) Teisendada korrutis

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

L a h e n d u s. Rühmitades tegurid, nagu on näidatud allpool, kasutame summa ja vahe korrutamise valemit:

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \equiv$$
$$\equiv [(a+b)+c]\cdot[(a+b)-c]\cdot[c+(a-b)]\cdot[c-(a-b)] \equiv$$
$$\equiv [(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2] \equiv [a^2+b^2-c^2+$$
$$+2ab][c^2-a^2-b^2+2ab] \equiv [2ab+(a^2+$$
$$+b^2-c^2)][2ab-(a^2+b^2-c^2)] \equiv \text{(summa ja vahe korrutis)}$$
$$\equiv 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2 \equiv 4a^2b^2-a^4-b^4-c^4-2a^2b^2+$$
$$+2a^2c^2+2b^2c^2 \equiv 2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

5) Tõestada Lagrange'i samasus

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \equiv$$
$$\equiv (bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2.$$

L a h e n d u s. Arvutame vasaku poole:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \equiv a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+a^2y^2+a^2z^2+$$
$$+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2;$$
$$(ax+by+cz)^2 \equiv a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz.$$

Lahutades liikmeti leiame: $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-$
$$-(ax+by+cz)^2 \equiv (b^2z^2+c^2y^2-2bcyz)+(c^2x^2+a^2z^2-$$
$$-2acxz)+(a^2y^2+b^2x^2-2abxy) \equiv (bz-cy)^2+$$
$$+(cx-az)^2+(ay-bx)^2.$$

§ 9. Ratsionaalsed avaldised.

Definitsioon. *Matemaatilist avaldist, mis on moodustatud numbritega või tähtedega tähistatud arvudest nelja aritmeetilise tehtega, nimetatakse ratsionaalseks algebraliseks avaldiseks* *.

---

* Elementaararitmeetika vaatleb l õ p l i k u arvu komponentidega tehteid. Sümbol, mis sisaldab juhist tehete teostamise vajaduse kohta lõpmatul arvul, nagu näiteks $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, ei oma ilma täiendava definitsioonita m i n g i t mõtet, sest on iseenesest arusaamatu, mida tähendab lõpmatu hulga liidetavate liitmine. Niisiis, definitsioonis mõeldakse ainult lõpliku arvu komponentidega tehteid.

Ratsionaalsete avaldiste näiteiks võiksid olla:

$$\frac{ax+b}{cx+d};\quad 2a^2-\frac{3}{a}x+5;\quad \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{ab}{x+y}}{a^2+b^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}.$$

Ratsionaalse avaldise argumentide lubatavaiks väärtusteks loeme kõiki neid väärtusi, millede puhul antud avaldis omab mõtet, s. o. *kui temas esinevate murdude ükski nimetaja ei muutu nulliks.*

Märkus I. Astendamist vaadeldakse kui korrutamise erijuhtumit. Seepärast näiteks niisugused avaldised nagu x^3, a^3, $\frac{x^2+3a}{x^2+a^2}$ on ratsionaalsed. Kuid avaldisi, mis sisaldavad astendajatena tähtargumente, e i l o e t a ratsionaalseiks. Nii näiteks avaldised 2^k, 3^a, -2^b, $\frac{5^{\frac{1}{x}}+2x}{2}$ ei ole ratsionaalsed.

Märkus II. Avaldisi, mis ei oma arvulist väärtust tähtede ei ühegi väärtuse puhul, nagu näiteks $\frac{a+b}{0}$; $\frac{a-1}{a-a}$; $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2-x^2-y^2-2xy}$, ei loeta ratsionaalseiks ja vaadeldakse kui mõttetuid.

Definitsioon. *Funktsiooni nimetatakse ratsionaalseks, kui tema vastavusseadus on esitatav mingi ratsionaalse avaldisena.*

Nii näiteks funktsioon, mille vastavusseadus on esitatud järgmiselt: „kui x on mistahes arv, siis y-i vastavaks väärtuseks on x-i korrutis iseenesega", on ratsionaalne, sest tema vastavusseadus on väljendatav valemiga $y=x^2$. Iga ratsionaalne avaldis, mis on vaadeldav tähtargumentide funktsioonina, loetakse ratsionaalseks funktsiooniks.

N ä i t e i d. 1) Avaldise $\frac{1}{a-b}$ jaoks on lubatav teineteisest erinevate arvude mistahes süsteem. Näiteks, kui $a=3$ ja $b=2$, siis avaldise vastav väärtus on 1; kui $a=-1$ ja $b=\frac{1}{2}$, siis avaldise väärtus on $-\frac{2}{3}$.

Süsteemid $a=3$, $b=3$ ja $a=-1$, $b=-1$ ei ole lubatavad.

2) Avaldise $\frac{1}{a^2-b^2}$ jaoks on lubatav absoluutväärtuselt erinevate a ja b väärtuste mistahes süsteem, näiteks $a=2$, $b=3$; $a=-1$, $b=4$; absoluutväärtuselt võrdsete väärtuste mistahes süsteem ei ole lubatav, näiteks $a=2$, $b=-2$; $a=1$, $b=1$.

3) Avaldise $\dfrac{x+\frac{1}{x}-1}{x^2+\frac{1}{x}}$ jaoks ei ole väärtused 0 ja -1 lubatavad.

4) Avaldise $\dfrac{(x-y)^2}{x-y}$ jaoks on lubatav mittevõrdsete arvude mistahes süsteem: $x \neq y$.

Definitsioon. *Ratsionaalset avaldist nimetatakse täisavaldiseks ehk hulkliikmeks (polünoomiks), kui ta ei sisalda tähtargumente sisaldava jagajaga jagamistehet.*

Ratsionaalsed avaldised, mis sisaldavad tähtavaldistega jagamistehet, nimetatakse murdavaldisteks.

Nii näiteks, avaldised $x^3+\frac{3}{4}x^2-2x+3$; $(x-1)^2+3$; $(x+a)(x-b^2)^2$; $\dfrac{x^2-y^2}{2}$; x^3a^3 on täisavaldised, aga avaldised

$$\frac{x+a}{x-a};\quad \frac{\frac{x+1}{x-1}+2}{\frac{x^2-y^2}{2}+3}$$

on murdavaldised.

Ratsionaalsed avaldised on liigitatud täis- ja murdavaldisteks v ä l i s e k u j u j ä r g i. Nii näiteks avaldist $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$ vaatleme kui murdavaldist, kuid ta on samane täisavaldisega x^2+1. Ratsionaalsete avaldiste samasuse juurde tuleme uuesti allpool, § 22.

Ratsionaalsete avaldiste liigitamine toimub tähtargumentide suhtes. Näiteks avaldis

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}$$

on murdavaldis temas esinevate tähtede kogumi x, y, a, b suhtes. See avaldis aga on x-i ja y-i suhtes täisavaldiseks, kui lugeda, et tähed a ja b omavad kumbki täiesti kindlat arvulist väärtust.

Iga täisavaldis on tehete seaduste järjestikuse kasutamisega (sulgude avamine, sarnaste liikmete koondamine jms.) teisendatav temaga samaseks liidetavate (liikmete) summaks, milles iga

liidetav on kas numbritega tähistatud arv või arvulise koefitsiendi ja üksikute tähtede astmete korrutis *.

Neid liidetavaid nimetatakse **üksliikmeiks**.

Niisiis, *üksliige on korrutis, mis koosneb numbritega tähistatud koefitsiendist ja ühest või mitmest tähest, millest igaüks on võetud kindlas astmes. Üksliikmeks nimetame samuti igat arvu, mis on tähistatud numbritega või eraldi tähega.*

Hulkliikmeid jaotatakse liikmete arvu järgi **üksliikmeiks**, **kaksliikmeiks**, **kolmliikmeiks** jne. Iga üksliige, olles täisratsionaalseks avaldiseks, on hulkliikme erijuhtumiks; igat hulkliiget, mis sisaldab rohkem kui ühte liiget, võib vaadelda kui üksliikmete summat **.

Näiteid. 1) Täisratsionaalne avaldis $(x+y)(x+2y) - -\frac{x+y}{2}$ on hulkliige. Pärast elementaarseid teisendusi ta võtab kuju $x^2+3xy+2y^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$. Antud hulkliikme liikmeiks on x^2, $3xy$, $2y^2$, $-\frac{1}{2}x$, $-\frac{1}{2}y$.

2) Avaldised 5; $2a^2x^3$; x^3yz^2; $ax+b$; x^2+y^2; x^2+xy+y^4; $x^3-5x^2a+7xa^2-a^3$ on hulkliikmed. Esimesed kolm on üksliikmed, järgmised kaks — kaksliikmed ja neile järgnevad — kolmliikmed.

3) Avaldised $\frac{a}{x}$; $\frac{a+b}{c}$; $\frac{a}{1-x}+b$ on murrulised, seepärast pole nad üksliikmed ega hulkliikmed.

4) Avaldis 2^x+3x, mis sisaldab astendajana tähtargumenti x, ei ole hulkliige.

5) Avaldis $(x-y)(x+2y)$ on hulkliige, kuid mitte üksliige.

Tehete reeglid üks- ja hulkliikmetega määratakse kindlaks arit-

---

* Ei ole võimatu, et lõplikus avaldises jääb järele nimetatud kujul ainult üks liige. Liikmete suhtes, mis ei sisalda numbrilist koefitsienti, võib alati kokku leppida, et seda koefitsienti lugeda võrdseks 1-ga või —1-ga, näiteks, $a^2=1\cdot a^2$.

** Vastavalt kaasaegses algebras tarvituselevõetud definitsioonile vaatleme hulkliiget kui tähtargumentide täisratsionaalset funktsiooni. See definitsioon ei ühti Kisseljovi kooliõpikus tarvitatava hulkliikme definitsiooniga. Tarvitatava liigituse seisukohalt ei või „murrulisi" hulkliikmeid (või üksliikmeid) lugeda hulkliikmeiks või üksliikmeiks.

meetiliste tehete üldseadustega, mida rakendatakse korrutiste ja algebraliste summade puhul.

Näiteid.

1) $(2x^3a^2)\left(\frac{1}{3}x^5a\right) = 2x^3a^2\,\frac{1}{3}x^5a =$ (assotsiatiivsus)

$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot a^2 \cdot a =$ (kommutatiivsus)

$= \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right)(x^3 \cdot x^5)(a^2 \cdot a) =$ (assotsiatiivsus)

$= \frac{2}{3}x^8a^3.$

2) $(2x^2 + ax) + (3x - 5a)x = (2x^2 + ax) +$

$+ (3x^2 - 5ax) =$ (distributiivsus)

$= 2x^2 + ax + 3x^2 - 5ax =$ (assotsiatiivsus)

$= 2x^2 + 3x^2 + ax - 5ax =$ (kommutatiivsus)

$= (2x^2 + 3x^2) + (ax - 5ax) =$ (assotsiatiivsus)

$= 5x^2 - 4ax$ (distributiivsus).

Märkus. Me võtsime tarvitusele ratsionaalse avaldise ja hulkliikme mõisted „ratsionaalarvude korpuses", lugedes antud avaldises kõiki arve ja tähtargumentide lubatavaid väärtusi ratsionaalseiks. See piiramine on tingitud ainult sellest, et peale ratsionaalarvude me seni veel ei tunne mingeid teisi arve. Kuid edaspidi ratsionaalarvude korpuse laiendamisel avaneb võimalus vaadelda ratsionaalseid funktsioone ja hulkliikmeid arvude teistes valdkondades (näiteks reaalarvude või kompleksarvude korpuses).

§ 10. Kahe hulkliikme samasuse teoreem.

Järgnevais lähemais paragrahvides me õpime tundma ühe argumendiga hulkliikmeid. Iga hulkliige argumendiga x on väljendatav järgmisel kujul:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

kus koefitsiendid $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ on mingid kindlad ratsionaalarvud ja n mingi kindel naturaalarv. Kui $a_n \neq 0$, siis nimetatakse arvu n hulkliikme astmeks. Kui kõik koefitsiendid peale a_0 muutuvad 0-ks, siis muutub $f(x)$ nullist erinevaks arvuks a_0. Sel põhjusel lepime kokku, *et igat nullist erinevat arvu vaatleme kui*

nullastme hulkliiget. Kui kõik koefitsiendid muutuvad nulliks, siis saame

$$f(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0;$$

niisugust hulkliiget nimetatakse nullhulkliikmeks (nullpolünoomiks). Nullhulkliikmele ei omistata mingit astet. Nullhulkliige võrdub samaselt 0-ga, sest x-i kõigi väärtuste puhul võrdub tema väärtus 0-ga. Tõestame vastupidise väite kehtivust:

Teoreem. *Kui x-i kõigi väärtuste puhul hulkliikme $f(x)$ väärtus võrdub nulliga, siis kõik tema koefitsiendid võrduvad nulliga.*

Tõestust teostatakse täieliku induktsiooni meetodiga. Veendume teoreemi kehtivuses esimese astme hulkliikmete

$$f(x) = a_1x + a_0$$

kohta. Kui x-i kõigi väärtuste puhul $a_1x + a_0 = 0$, siis, võttes $x = 0$, saame $a_0 = 0$ ja järelikult $a_1x = 0$. Võttes $x = 1$, saame $a_1 = 0$. Eeldame nüüd, et teoreem on kehtiv hulkliikmete kohta, mille aste on madalam kui n, ja näitame, et sel eeldusel ta on õige ka n-astme hulkliikme kohta.

Olgu x-i kõigi väärtuste puhul

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \equiv 0. \qquad (1)$$

Asetades võrduses (1) x-i asemele $2x$, saame samasuse

$$f(2x) = 2^na_nx^n + 2^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + 2a_1x + a_0 \equiv 0. \qquad (2)$$

Korrutades samasust (1) 2^n-ga saame temast pärast (2) liikmeti lahutamist

$$2^{n-1}(2-1)a_{n-1}x^{n-1} + 2^{n-2}(2^2-1)a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + (2^n-1)a_0 \equiv 0.$$

Eelduse kohaselt võrdub n-st madalama astmega hulkliige samaselt 0-ga, kui kõik tema koefitsiendid võrduvad 0-ga:

$$2^{n-1}(2-1)a_{n-1} = 0,\ 2^{n-2}(2^2-1)a_{n-2} = 0,\ \ldots,$$
$$2^{n-k}(2^k-1)a_{n-k} = 0,\ \ldots,\ (2^n-1)a_0 = 0.$$

Kuna $2^{n-k} \neq 0$ ja $2^k - 1 \neq 0$, siis $a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_0 = 0$, kuid siis samasus (1) omab kuju $a^nx^n = 0$. Oletades, et $x = 1$, saame $a_n \equiv 0$.

Olles õige esimese astme hulkliikmete kohta on teoreem õige teise astme hulkliikmete, järelikult ka kolmanda astme hulkliikmete jne. kohta ja seepärast õige ka mistahes astme hulkliikmete kohta, m. o. t. t.

Hulkliikmete samasuse teoreem. *Kahe hulkliikme*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ja

$$\varphi(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

samasuse tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks on nende astmete ja vastavate koefitsientide võrdsus: $n = m$ *ja* $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_m$.

Tõestus. 1) Tingimus on piisav. Tõepoolest, kui antud hulkliikmete vastavad koefitsiendid on võrdsed, siis x-i mistahes väärtuse puhul on võrdsed ka hulkliikmete väärtused, sest meil on tegemist ühe ja sama, aga mitte kahe eri avaldisega.

2) Tingimus on tarvilik. Kui x-i kõigi ratsionaalväärtuste puhul hulkliikmete

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

ja

$$\varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0{}^*$$

väärtused on ühesugused, siis lahutades liikmeti $f(x)$-i väärtused saame kõigi ratsionaalsete x-de puhul

$$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 - b_0) \equiv 0.$$

Eelmise teoreemi alusel $a_n - b_n = a_{n-1} - b_{n-1} = \ldots = a_1 - b_1 = a_0 - b_0 = 0$, millest $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_0 = b_0$, m. o. t. t.

Näide. Järjendada hulkliige $x^2 + 3x + 2$ vahe $x - 1$ astmete järgi. Otsime antud hulkliikmele avaldise järgmisel kujul: $x^2 + 3x + 2 \equiv A(x-1)^2 + B(x-1) + C$, kus A, B ja C on otsitavad koefitsiendid. Avades sulud ja rühmitades liikmed parempoolses osas ümber saame

$$x^2 + 3x + 2 \equiv Ax^2 - (2A - B)x + C + A - B.$$

Samasuse teoreemi järgi peavad vastavad koefitsiendid olema võrdsed, s. o.

$$A = 1;\ -2A + B = 3,\ A - B + C = 2,$$

millest

$$A = 1,\ b = 5,\ C = 6 \text{ ja } x^2 + 3x + 2 \equiv (x-1)^2 + 5(x-1) + 6.$$

---

* Me kirjutame mõlemad hulkliikmed n-astmelistena, sest madalamaastmelisele hulkliikmele on alati võimalik lisada puuduv hulk liikmeid koefitsiendiga 0.

§ 11. Hulkliikmete ring.

Olgu antud kaks hulkliiget

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

ja

$$\varphi(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0.$$

Eeldame, et $n \geqslant m$. Liites ja korrutades $f(x)$-i ja $\varphi(x)$-i algebraliste summade liitmise ja korrutamise üldreeglite järgi saame

$$f(x) + \varphi(x) = a_n x^n + \ldots + (a_m + b_m)x^m + \ldots + (a_0 + b_0), \quad (1)$$

$$f(x) \cdot \varphi(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{n+m-1} + \ldots + a_0 b_0. \quad (2)$$

Võrduste (1) ja (2) parempoolsete hulkliikmete väärtused võrduvad vastavalt hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ väärtuste summa ja korrutisega. Samasuse teoreemi järgi, peale (1) ja (2), *ei saa olla ühtegi teissuguste koefitsientidega hulkliiget, mille väärtused kõigi ratsionaalsete x-de puhul võrduksid vastavalt $f(x)$-i ja $\varphi(x)$-i väärtuste summa ja korrutisega.*

Definitsioon. *Hulkliikmeid $f(x) + \varphi(x)$ ja $f(x) \cdot \varphi(x)$, mis on määratud valemitega (1) ja (2), nimetatakse hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ summaks ja korrutiseks.*

Märgime ära, et objektideks, milledega teostatakse tehted, samuti tehete tulemusteks on nüüd mitte arvud, vaid hulkliikmed. Liitmist ja korrutamist iseloomustavad põhiomadused jäävad kehtima ka hulkliikmete puhul:

$$f(x) + \varphi(x) \equiv \varphi(x) + f(x) \text{ (liitmise kommutatiivsus)}$$

$$[f(x) + \varphi(x)] + \psi(x) \equiv f(x) + [\varphi(x) + \psi(x)] \text{ (liitmise assotsiatiivsus)}$$

$$f(x) \cdot \varphi(x) \equiv \varphi(x) \cdot f(x) \text{ (korrutamise kommutatiivsus)}$$

$$[f(x) \cdot \varphi(x)] \cdot \psi(x) \equiv f(x)[\varphi(x) \cdot \psi(x)] \text{ (korrutamise assotsiatiivsus)}$$

$$[f(x) + \varphi(x)]\psi(x) \equiv f(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi(x) \text{ (distributiivsus).}$$

Nii näiteks hulkliikmed $f(x) + \varphi(x)$ ja $\varphi(x) + f(x)$ on samased, sest arvude liitmise kommutatiivsuseseaduse järgi on nende arvulised väärtused võrdsed x-i kõigi väärtuste puhul. Samasuse teoreemi järgi omavad need hulkliikmed vastavaid võrdseid koefitsiente. Selles võib veenduda ka otseselt, ära lugedes mõlema hulkliikme koefitsiendid.

Hulkliikmete lahutamistehet defineeritakse kui liitmise pöördtehet. Vahe-hulkliikmeks $f(x) - \varphi(x)$ nimetatakse hulkliiget $\psi(x) = c_0 + c_1 x + \ldots$, mis rahuldab tingimust

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Võrdsustades vastavad koefitsiendid saame

$a_0 = b_0 + c_0$, $a_1 = b_1 + c_1$, $a_2 = b_2 + c_2$ jne., millest $c_0 = a_0 - b_0$, $c_1 = a_1 - b_1$, $c_2 = a_2 - b_2$ jne.

On kerge näha, et hulkliikme $\varphi(x)$ lahutamine on samaväärne hulkliikme $-\varphi(x) = -b_0 - b_1 x - b_2 x^2 - \ldots - b_m x^m$ liitmisega.

Summa, korrutise ja vahe hulkliikmete koefitsiendid saadakse antud hulkliikmete koefitsientidest liitmise, korrutamise ja lahutamise teel. Järelikult, kui antud hulkliikmete koefitsiendid kuuluvad mingisse a r v r i n g i, siis summa, vahe ja korrutise koefitsiendid kuuluvad s a m a s s e a r v r i n g i. Nii näiteks täisarvuliste koefitsientidega hulkliikmete summa, korrutis ja vahe on samuti täisarvuliste koefitsientidega hulkliikmed. Paarisarvuliste koefitsientidega hulkliikmete summa, korrutis ja vahe on paarisarvuliste koefitsientidega hulkliikmed. Ratsionaalsete koefitsientidega hulkliikmete summa, korrutis ja vahe on ratsionaalsete koefitsientidega hulkliikmed.

Ratsionaalsete koefitsientidega hulkliikmete hulk evib arvringi kõiki omadusi: temas on teostatavad liitmis-, korrutamis- ja lahutamistehted, milledel on olemas samasugused omadused kui neil tehteil arvringis.

Ratsionaalsete koefitsientidega hulkliikmete hulka nimetatakse h u l k l i i k m e t e r i n g i k s r a t s i o n a a l a r v u d e k o r p u s e s.

M ä r k u s 1. Hulkliikmete ringis on nulli analoogiaks nullhulkliige: $0(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0$. Mistahes hulkliikme $f(x)$ kohta on kehtivad samasused

$$f(x) + 0(x) \equiv f(x) \text{ ja } f(x) \cdot 0(x) = 0(x).$$

M ä r k u s II. Iga ratsionaalarv on vaadeldav kui hulkliige (§ 9). Seepärast sisaldub ratsionaalarvude korpus ratsionaalsete koefitsientidega hulkliikmete ringis kui osa.

Kaasaegses algebras mõistetakse ringi all mingite objektide hulka (mitte alati arvhulka), milles:

1° *On kindlaks määratud ja alati teostatavad liitmise- ja korrutamistehted, mis alluvad tehete põhiseadustele.*

2° *On teostatav liitmise pöördtehe* (lahutamine).

Ringide näiteiks, millede elementideks pole arvud, võivad olla: täisarvuliste koefitsientidega hulkliikmete hulk; antud arvu k kordsete koefitsientidega hulkliikmete hulk; ratsionaalsete koefitsientidega hulkliikmete hulk. Hulkliikmete hulk, millede koefitsientideks on naturaalarvud (või positiivsed arvud), pole ring (lahutamine pole alati teostatav). $(kx + b)$-kujuliste kaksliikmete hulk ei moodusta ringi. Tõepoolest, esimese astme kaksliikmete summa ja vahe omavad sama kuju, kuid korrutis

$$(kx + b)(k_1x + b_1) = kk_1x^2 + (kb_1 + k_1b)x + bb_1,$$

kui $k \neq 0$ ja $k_1 \neq 0$, ei ole esimese astme kaksliikmeks. Paarisarvulise astme hulkliikmete hulk koos nullhulkliikmega moodustavad ringi. Paarituarvulise astme hulkliikmete hulk ei moodusta ringi*.

Olgu teada, et matemaatiliste objektide mitmesugustes vaadeldavates süsteemides igaühes kehtivad mingid seosed. Siis neist (ja ainult neist) seostest tulenevad järeldused on ühesugused kõigis antud süsteemides. Seepärast, kui need järeldused on teada ühes süsteemis, siis pole tarvis neid uuesti tõestada teiste süsteemide kohta. Siit on selge kaasaegse algebra põhimõistete, ringi ja korpuse mõistete tähtsus. Iseloomustades ringi põhiomadustega 1° ja 2° ei huvita kaasaegset algebrat ringi moodustavate elementide loomus (nendeks võivad olla arvud, hulkliikmed või midagi muud). Iseloomulikest põhiomadustest tulenevad järeldused on ühesugused kõigile ringidele ja kaasaegne algebra püüab tuletada need järeldused „üks kord ja alatiseks". On arusaadav, et iga individuaalne ring võib peale üldomaduste evida temale omaseid spetsiifilisi omadusi, mis e r a n d i t u l t e i t u l e n e iseloomulikest omadustest 1° ja 2°.

---

* Kaasaegses algebras vaadeldakse nn. mittekommutatiivseid ringe, kus loeteldud tingimusi silmas pidades korrutamine ei evi kommutatiivsuse omadust. Ringe, milledes korrutamine on kommutatiivne, nimetatakse kommutatiivseiks. Arvringid ja arvuliste koefitsientidega hulkliikmete ringid on kommutatiivsed ringid.

§ 12. Hulkliikmete jaguvus.

Jaguvuse definitsioon. *Hulkliige $f(x)$ on jaguv hulkliikmega $\varphi(x)$, kui on olemas selline kolmas hulkliige $\psi(x)$, et kehtib samasus*

$$f(x) \equiv \varphi(x)\psi(x); \qquad (1)$$

hulkliikmeid $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ nimetatakse $f(x)$-i jagajateks.

Nii näiteks hulkliige x^2-4 jagub $x-2$-ga, sest $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, hulkliikmed $x-2$ ja $x+2$ on x^2-4 jagajad.

Olgu c mingi nullist erinev arv; siis

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$

$$= c\left(\frac{a_n}{c}x^n + \frac{a_{n-1}}{c}x^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{c}x + \frac{a_0}{c}\right).$$

Järelikult, iga nullist erinev arv on mistahes hulkliikme jagajaks; iga hulkliige, mille koefitsiendid erinevad antud hulkliikme koefitsientidest nullist erineva arvulise teguri poolest, on antud hulkliikme jagajaks. Neid jagajaid nimetatakse t r i v i a a l s e i k s j a g a j a i k s.

N ä i d e. Hulkliikmed $x-1$; $(x+2)$; x^3+x^2+x+1; x^3-x^2+x-1; x^2-1; x^2+1 on hulkliikme x^4-1 mittetriviaalseiks jagajaiks, sest x^4-1 jagub igaühega neist:

$$x^4-1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1);\ x^4-1 = (x+1)(x^3-x^2+x-1);\ x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1).$$

Hulkliikmed $2x^4-2$ ja $\frac{x^4-1}{3}$ on x^4-1 triviaalsed jagajad, sest

$$x^4-1 = \frac{1}{2}(2x^4-2) \text{ ja } x^4-1 = 3\left(\frac{x^4}{3}-\frac{1}{3}\right).$$

Ratsionaalsete koefitsientidega hulkliikmete ringis e i o l e jagamistehe a l a t i teostatav. Olgu näiteks jagatava hulkliikme $f(x)$ aste jagaja hulkliikme $\varphi(x)$ astmest madalam, siis ei saa olla samasust (1) ei ühegi $\psi(x) \not\equiv 0$ puhul, sest korrutise $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ aste ei ole $\varphi(x)$-i astmest madalam ega saa olla võrdne $f(x)$-i astmega.

Hulkliikmete ringis saab üles ehitada jaguvuse teooria, mis on analoogiline täisarvude jaguvuse teooriale.

Definitsioon. *Ratsionaalsete koefitsientidega hulkliiget $f(x)$ (mis ei ole arv) nimetatakse ratsionaalarvude korpuses taandu-*

matuks, kui ta ei oma mingeid triviaalseist jagajaist erinevaid jagajaid (ratsionaalsete koefitsientidega).

Hulkliiget $f(x)$ nimetatakse ratsionaalarvude korpuses taanduvaks, kui ta on esitatav ratsionaalsete koefitsientidega kahe hulkliikme korrutisena, milledest kumbki pole $f(x)$-i triviaalseks jagajaks.

N ä i t e i d. 1) Hulkliige x^2+6x+5 on taanduv, sest $x+5$ ja $x+1$ on tema mittetriviaalsed jagajad:

$$x^2+6x+5=(x+5)(x+1).$$

2) Esimese astme hulkliige $kx+b$ on taandumatu. Tõepoolest, mittetriviaalsed jagajad ei ole esimesest astmest madalama astmega; siis aga nende korrutis ei ole madalam teisest astmest ega saa olla samane esimese astme kaksliikmega.

3) Hulkliige x^2+1 on ratsionaalarvude korpuses taandumatu. Tõepoolest, kui antud hulkliige oleks taanduv, siis tema jagajaiks on esimese astme kaksliikmed:

$$x^2+1\equiv(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd.$$

Võrdsustades vastavad koefitsiendid saame

$$ac=1,\ ad+bc=0,\ bd=1,$$

millest

$$c=\frac{1}{a};\ d=\frac{1}{b};\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=0$$

ja järelikult $\left(\frac{a}{b}\right)^2=-1$. Viimane on aga võimatu, sest ratsionaalarvu ruut ei saa võrduda —1-ga.

Tehete põhiseadustest tulenevad järgmised arvude jaguvuse teoreemid:

Teoreem. *Kui kumbki hulkliige $f(x)$ ja $\varphi(x)$ jagub $\psi(x)$-ga, siis ka summa $f(x)+\varphi(x)$ jagub $\psi(x)$-ga.*

T õ e s t u s. Meil

$$f(x)=\psi(x)f_1(x),\ \varphi(x)=\psi(x)\varphi_1(x),$$

millest

$$f(x)+\varphi(x)=\psi(x)f_1(x)+\psi(x)\varphi_1(x)=$$
$$=\psi(x)[f_1(x)+\varphi_1(x)]$$ (distributiivsus) m. o. t. t.

Teoreem. *Kui üks tegureist jagub $\psi(x)$-ga, siis ka korrutis jagub $\psi(x)$-ga.*

Tõestus. Kui $f(x)$ jagub $\psi(x)$-ga, siis

$$f(x) = \psi(x) f_1(x), \text{ millest } f(x)\varphi(x) =$$
$$= [\psi(x) f_1(x)]\varphi(x) = \psi(x)[f_1(x)\varphi(x)] \text{ (assotsiatiivsus), m. o. t. t.}$$

§ 13. Jagamine jäägiga.

Teoreem. *Missugused oleksidki ratsionaalsete koefitsientidega kaks hulkliiget*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ja

$$\varphi(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

kusjuures $\varphi(x)$ pole nullhulkliige, ikka on olemas ainult üks paar hulkliikmeid $q(x)$ ja $r(x)$, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

1⁰ *$r(x)$-i aste on madalam kui m, või $r(x) \equiv 0$;*

2⁰ *on kehtiv samasus*

$$f(x) = q(x)\varphi(x) + r(x). \qquad (1)$$

Hulkliikmeid $q(x)$ ja $r(x)$ nimetatakse vastavalt j a g a t i s e k s ja j ä ä g i k s, mis on saadud $f(x)$-i jagamisest $\varphi(x)$-ga.

Tõestus. Kui $m > n$, siis samasus (1) on rahuldatud, kui $q(x) \equiv 0$ ja $r(x) \equiv f(x)$. Olgu $n \geqslant m$. Jagades esimese hulkliikme $f(x)$ kõrgeima astmega liikme teise hulkliikme $\varphi(x)$ kõrgeima astmega liikmega ja teostades allpoolnäidatud tehted saame

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}\varphi(x) = [a'_{n-1}x^{n-1} + a'_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a'_0], \qquad (2)$$

kus $a'_{n-1} = a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-1}$ ($m = n$ korral tuleb x^{n-m} asendada 1-ga), millest

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}\varphi(x) + R(x),$$

kus $R(x)$-ga on märgitud samasuse (2) parempoolne hulkliige. Olgu hulkliikme $R(x)$ aste n_1 ja kõrgeima astmega liikme koefitsient a'_{n_1} (kui $a'_{n-1} \neq 0$, siis $n_1 = n - 1$). Kui $n_1 \geqslant m$, siis toimime $R(x)$-ga samuti, nagu toimisime $f(x)$-ga, ning saame

$$f(x) \equiv \left[\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m}\right]\varphi(x) + R'(x).$$

Protsessi võib jätkata niikaua, kuni jäägis tekib hulkliige, mille aste on madalam kui m. See toob meid samasusele

$$f(x) \equiv q(x)\varphi(x) + r(x). \qquad (1)$$

Nüüd näitame, et $q(x)$ ja $r(x)$ on ainsaks hulkliikmete paariks, mis rahuldab samasust (1). Oletame, et on olemas veel teine paar hulkliikmeid $q_1(x)$ ja $r_1(x)$, kus r_1-e aste on madalam m_1-st ja

$$f(x) \equiv q_1(x)\varphi(x) + r_1(x). \qquad (3)$$

Samasustest (1) ja (3) saame

$$q(x)\varphi(x) + r(x) \equiv q_1(x)\varphi(x) + r_1(x);$$

järelikult

$$[q(x) - q_1(x)]\varphi(x) \equiv r_1(x) - r(x). \qquad (4)$$

Viimane on võimalik ainult tingimusel, kui $q(x) \equiv q_1(x)$. Tõepoolest, kui hulkliikmed $q(x)$ ja $q_1(x)$ pole samased, siis samasuse (4) vasak pool peab sisaldama x-i astmel, mis pole väiksem kui m, kuid samasuse paremaks pooleks on hulkliige, mille aste on madalam kui m, mis on aga võimatu. Kui $q(x) \equiv q_1(x)$, siis $r_1(x) \equiv r(x)$, m. o. t. t.

Jäägiga jagamise protsessi puhul tuleb hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ koefitsientidega teostada neli aritmeetilist tehet; seepärast omavad $q(x)$ ja $r(x)$ samuti r a t s i o n a a l s e i d k o e f i t s i e n t e. Jäägiga jagamise teoreemi tõestuses tunneb õppija ilma raskuseta ära hulkliikmete jagamise elementaarse reegli põhjenduse.

Kui hulkliige $f(x)$ jagub $\varphi(x)$-ga, siis leiab aset samasus $f(x) \equiv q(x)\varphi(x)$. Sel puhul on jäägiks nullhulkliige:

$$r(x) \equiv 0.$$

M ä r k u s. Jäägiga jagamisel on tähtis, et hulkliikmete koefitsiendid kuuluksid a r v k o r p u s s e. Nii näiteks jagamistehe e i o l e täisarvuliste koefitsientidega hulkliikmete ringis a l a t i teostatav. Tõepoolest, jagatise ja jäägi arvutamisel tuleb jagatava koefitsiendid ja vahepealsed jäägid jagada jagaja kõrgeima astmega liikme koefitsientidega. Seepärast jagatise ja jäägi koefitsiendid võivad olla murrulised. Märgime, et jäägita jagamise protsess on täisarvuliste koefitsientidega hulkliikmete ringis alati teostatav, kui jagaja kõrgeima astmega liikme koefitsient võrdub ± 1-ga.

§ 14. Jagamine vahega $x - a$.

Vaatleme rakendustes tähtsust omavat erijuhtumit: hulkliikme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

jagamist kaksliikmega $x - a$. Otsitav jagatis on $n - 1$ astme hulkliige, kuid jääk, olles madalama kui esimese astme hulkliige, on arv.

Järelikult samasuses

$$f(x) = (x - a)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0) + R$$

on jäägi $R(x)$ väärtus x-i kõigi väärtuste puhul üks ja seesama.

Oletades, et $x = a$, saame $f(a) = R$. Siit järgneb ***Bezout' teoreem:***

Hulkliikme jagamisel vahega $x - a$ võrdub jääk hulkliikme väärtusega, kui $x = a$:

$$R = f(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0.$$

N ä i d e. Hulkliikme

$$2x^3 - 3x^2 - x + 1$$

jagamisel vahega $x - 2$ tekkiva jäägi leidmiseks asetame hulkliikmesse $x = 2$; siis saame

$$R = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 3.$$

Hulkliikme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

jagamisel vahega $x - a$ tekkiva jagatise koefitsientide ja jäägi arvutamiseks on sobiv kasutada järgmist võtet. Korrutame otsitava jagatise jagajaga:

$$\begin{array}{l} b_{n-1}x^{n-1} + \quad b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x - a \\ \hline b_{n-1}x^n + \quad b_{n-2}x^{n-1} + \ldots + b_1 x^2 + b_0 x \\ \qquad - ab_{n-1}x^{n-1} - \ldots\ldots\ldots - ab_1 x - ab_0 \\ \hline b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (b_0 - ab_1)x - ab_0. \end{array} + R$$

Saadud korrutise ja jäägi summa R peab olema samane jagatavaga $f(x)$; järelikult

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-2} - ab_{n-1} = a_{n-1},\ b_{n-3} - ab_{n-2} = a_{n-2},\ \ldots,$$
$$R - ab_0 = a_0,$$

millest leiame järjestikuselt

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1},\ b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2},$$
$$\ldots,\ R = a_0 + ab_0.$$

Arvutused paigutatakse tavaliselt Horneri skeemi kujul:

a	a_n b_{n-1} $(b_{n-1} = a_n)$	a_{n-1} b_{n-2} $(=ab_{n-1} + a_{n-1})$	a_{n-2} b_{n-3} $(=ab_{n-2} + a_{n-2})$	. . . .	a_0 R $(=ab_0 + a_0)$

Jagatise koefitsiendid ja jääk arvutatakse tabeli teise rea järjestikusel täitmisel.

N ä i t e i d. 1) Määrata hulkliikme $2x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 2$ jagatis ja jääk, mis tekib jagamisel vahega $x - 2$. Koostame tabeli:

2	2 2	−1 3	−1 5	3 13	−2 24

Leiame jagatise $2x^3 + 3x^2 + 5x + 13$ ja jäägi 24.

2) Määrata hulkliikme $x^4 - x^2 + 2x - 3$ jagatis ja jääk, mis tekib jagamisel $(x + 1)$-ga. Koostame tabeli (siin $a = -1$):

−1	1 1	0 −1	−1 0	2 2	−3 −5

Leiame jagatise $x^3 - x^2 + 2$ ja jäägi −5.

§ 15. Hulkliikme nullkohad.

Definitsioon. *Arvu a nimetatakse hulkliikme $f(x)$ nullkohaks (lahendiks), kui $x = a$ puhul hulkliikme $f(x)$ väärtus on null:* $f(a) = 0$.

Niisiis, hulkliikme iga nullkoht on võrrandi $f(x) = 0$ lahendiks.

N ä i d e. Arv −3 on hulkliikme $2x^3 + 7x^2 + 5x + 6$ nullkohaks, sest kui $x = -3$, siis hulkliikme vastav väärtus on 0.

Teoreem. *Hulkliikme $f(x)$ jaguvuseks $(x - a)$-ga on tarvilik ja piisav, et arv a oleks hulkliikme $f(x)$ nullkohaks.*

Tõestus: 1° Tingimus on tarvilik. Tõepoolest, kui $f(x)$ jagub $(x-a)$-ga, siis kehtib samasus

$$f(x) \equiv (x-a)q(x).$$

Kuid $x=a$ puhul muutub esimene tegur ja järelikult ka $f(x)$ nulliks.

2° Tingimus on piisav. Tõepoolest, kui a on hulkliikme nullkoht, siis $f(a)=0$. Bezout' teoreemi järgi on $f(a)=R$ jääk, mis tekib $f(x)$-i jagamisel $(x-a)$-ga. Järelikult $R=0$ ja $f(x)$ jagub $(x-a)$-ga, m. o. t. t.

Näide. n-date astmete vahe x^n-a^n jagub $(x-a)$-ga. Tõepoolest, võttes $x=a$ saame $a^n-a^n=0$.

Horneri skeemi järgi leiame jagatise koefitsiendid:

a	1	0	0	. . .	0	$-a^n$
	1	a	a^2	. . .	a^{n-1}	0

järelikult

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^n).$$

Kui $n=2$ ja $n=3$, siis saame erijuhtumina valemid ruutude ja kuupide vahe tegureiks lahutamise kohta.

Kui n on paarisarv, $n=2k$, siis hulkliige $x^{2k}-a^{2k}$ jagub $(x+a)$-ga, sest $(-a)^{2k}-a^{2k}=0$. Arvutades jagatise Horneri skeemi järgi saame

$$x^{2k}-a^{2k}=(x+a)(x^{2k-1}-ax^{2k-2}+a^2x^{2k-3}-\ldots-a^{2k-1}).$$

Nii näiteks $x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$.

Analoogiliselt näitame, et paaritu $n=2k+1$ puhul jagub hulkliige $x^{2k+1}+a^{2k+1}$ summaga $x+a$:

$$x^{2k+1}+a^{2k+1}=(x+a)(x^{2k}-ax^{2k-1}+a^2x^{2k-2}-\ldots+a^{2k}).$$

Kui hulkliige $f(x)$ omab ratsionaalset nullkohta a, siis on ta ratsionaalarvude korpuses taanduv, sest $x-a$ on tema mitte-triviaalne jagaja.

Märkus. Kui hulkliige ei oma ratsionaalarvude korpuses nullkohti, siis see veel ei tähenda, et ta on taandumatu. Nii näiteks hulkliige $x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$ on taanduv,

kuid ta ei oma ratsionaalseid nullkohti, sest kumbki tema tegureist ei muutu nulliks.

Teoreem. *Kui hulkliige $f(x)$ omab k erisugust nullkohta $x_1, x_2, \ldots, x_k$, siis ta jagub korrutisega*

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k).$$

Tõestus. Eelneva põhjal

$$f(x) = (x - x_1)\varphi(x).$$

Eelduse järgi x_2 on $f(x)$-i nullkohaks, seepärast

$$f(x_2) = (x_2 - x_1)\varphi(x_2) = 0.$$

Tegur $x_2 - x_1$ on erinev nullist, sest $x_2 \neq x_1$; järelikult $\varphi(x_2) = 0$, s. o. x_2 on hulkliikme $\varphi(x)$ nullkohaks ja $\varphi(x)$ jagub $(x - x_2)$-ga:

$$\varphi(x) = (x - x_2)\varphi_1(x),$$

millest leiame

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\varphi_1(x).$$

Täpselt samuti näitame, et arv x_3 peab olema hulkliikme $\varphi_1(x)$ nullkohaks, millest

$$\varphi_1(x) = (x - x_3)\varphi_2(x)$$

ja

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\varphi_2(x).$$

Jätkates neid arutlusi saame lõplikult

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)\Phi(x), \qquad (1)$$

kus $\Phi(x)$ on $n - k$-astme hulkliige (n on $f(x)$-i aste), m. o. t. t.

Erijuhtumil, kui on teada n-astme hulkliikme n erisugust nullkohta ($n = k$), siis peab tegur $\Phi(x)$ olema arv, sest (1) parempoolsete sulgude korrutis omab sama astet kui $f(x)$. Võrdsustades x^n mõlemapoolsed koefitsiendid saame $\Phi(x) = a_n$, millest

$$f(x) \equiv a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \qquad (2)$$

Näiteid: 1) Arvud 1 ja 2 on võrrandi

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

lahendeiks, seepärast hulkliige $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ jagub kor-

rutisega $(x-1)(x-2)$. Jagamist saab teostada järjestikuselt Horneri skeemi järgi. Jagame $(x-1)$-ga:

1	1	−3	3	−3	2
	1	−2	1	−2	0

Jagame jagatise x^3-2x^2+x-2 vahega $(x-2)$:

2	1	−2	1	−2	
	1	0	1	0	

Teine jagatis on x^2+1.

Lõplikult saame

$$x^4-3x^3+3x^2-3x+2=(x-1)(x-2)(x^2+1).$$

2) Hulkliige x^3-2x^2-x+2 muutub $x=1$, $x=-1$ ja $x=2$ puhul nulliks ja seepärast kehtib samasus

$$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x+1)(x-2).$$

Teoreem. *n-astme hulkliige omab ratsionaalarvude korpuses mitte rohkem kui n nullkohta.*

Tõestus. Samasus (2) näitab, et $f(x)$ ei saa x-i ühegi väärtuse puhul, mis erineb väärtustest $x_1, x_2, \ldots, x_n$, muutuda nulliks, sest parempoolseist tegureist ükski ei muutu nulliks. Seepärast ei saa olla $n+1$-mest nullkohta, mis erineb nullkohtadest $x_1, x_2, \ldots, x_n$, m. o. t. t.

Hulkliikme nullkohtade arv ratsionaalarvude korpuses võib olla mitmesugune. Nii ei oma taandumatu hulkliige ratsionaalseid nullkohti. Näitena võib olla taandumatu hulkliige x^2+1.

Kolmanda astme hulkliige $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$ omab ratsionaalarvude korpuses ühte nullkohta $x=1$, sest teine tegur ei muutu nulliks x-i ühegi väärtuse puhul. Hulkliige x^3-2x^2-x+2 (vaata ülal, näide 2) omab kolm nullkohta 1, −1 ja 2 ja mingeid teisi nullkohti ta ei saa omada.

Eelmine teoreem võimaldab oluliselt täiendada teoreemi kahe hulkliikme samasusest.

Teoreem. *Kui kaks hulkliiget $f(x)$ ja $\varphi(x)$, millede aste pole n-ist suurem, omavad ühesuguseid väärtusi $n+1$ erineva x-i väärtuse puhul, siis on nad samased: $f(x)\equiv\varphi(x)$.*

Tõestus. Kui vahe $f(x) - \varphi(x)$ pole nullhulkliige, siis omab ta astet, mis pole n-ist kõrgem, ja muutub n-i $n+1$ erineva väärtuse puhul nulliks, mis on aga võimatu, sest $f(x) \equiv \varphi(x)$, m. o. t. t.

Kui n-astme hulkliikme väärtused on x-i $n+1$ erineva väärtuse puhul teada, siis neist andmeist piisab $f(x)$-i koefitsientide määramiseks.

Järeldus. Kui on teada, et hulkliikmed $f(x)$ ja $\varphi(x)$ omavad x-i lõpmatu hulga väärtuste puhul (ei ole tingimata tarvilik kõigi ratsionaalsete x-ide puhul) ühesuguseid väärtusi, siis on nad samased.

Näiteid. 1) Leiame esimese astme hulkliikme $y = kx + b$, kui on teada tema väärtused y_1 ja y_2, mis vastavad väärtustele $x = x_1$ ja $x = x_2$.

Lahendus. Eelduse järgi

$$y_1 = kx_1 + b \text{ ja } y_2 = kx_2 + b,$$

millest

$$y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2), \quad k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ja

$$b = y_1 - kx_1 = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Järelikult

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

on otsitav hulkliige.

2) Leida teise astme hulkliige

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

kui on teada tema väärtused $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 3$, vastavalt väärtustele $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Üles kirjutades ülesande tingimused

$$\begin{aligned} 1 &= A + B + C && (x = 1 \text{ puhul}) \\ 3 &= A - B + C && (x = -1 \text{ puhul}) \\ 3 &= 4A + 2B + C && (x = 2 \text{ puhul}) \end{aligned}$$

leiame saadud võrranditest, et $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$.

Järelikult $y = x^2 - x + 1$.

3) On kerge moodustada üldvalem hulkliikmele, mille aste ei ületa n-i, kui on teada tema $n+1$ väärtust $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ vastavalt x-i väärtustele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.
Vaatleme avaldist

$$f(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)(x_1-x_{n+1})} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{n-1})} + \ldots +$$

$$+ y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n+1})} +$$

$$+ y_{n+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_n)},$$

mis on üldiselt n-astme hulkliikmeks (erijuhtumil võib aste olla väiksem kui n). Kui võtta, et $x = x_k$, siis y_k juures asuv murruline tegur muutub 1-ks ja kõik ülejäänud murrud muutuvad 0-ks. Seepärast $f(x_k) = y_k$ ja hulkliige $f(x)$ rahuldab ülesseatud tingimust. Tuletatud valemit nimetatakse Lagrange'i interpolatsioonivalemiks.

Eelmise näite lahendamiseks rakendame Lagrange'i valemit:

$$y = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} +$$

$$+ y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = 1 \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} +$$

$$+ 3 \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 3 \frac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)} =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2) + \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) + (x^2 - 1) = x^2 - x + 1.$$

§ 16. Hulkliikme täisarvuliste nullkohtade leidmine.

Teoreem. *Täisarvuliste koefitsientidega hulkliikme iga täisarvuline nullkoht on vabaliikme jagaja.*

Tõestus. Olgu hulkliikme

$$f(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

koefitsiendid ja nullkoht α täisarvud.

TRÜ Raamatukogu

On teada, et

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Kust

$$a_0 = -a_n\alpha^n - a_{n-1}\alpha^{n-1} - \ldots - a_1\alpha =$$
$$= \alpha(-a_n\alpha^{n-1} - a_{n-1}\alpha^{n-2} - \ldots - a_1).$$

Järelikult a_0 jagub α-ga, sest sulgudes olev avaldis on täisarv, m. o. t. t.

Niisiis, täisarvuliste koefitsientidega hulkliikme täisarvuliste nullkohtade otsimisel piisab, kui võtta proovimisele vabaliikme jagajad. Kui vabaliige omab suure hulga jagajaid, siis võimaldab järgmine tunnus proovimiste arvu vähendada.

Kui α on hulkliikme nullkoht, siis

$$f(x) = (x - \alpha)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0),$$

kus b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0 (nagu näitab Horneri skeem) on täisarvud. Võtame $x = k$, kus k on mistahes täisarv; saame

$$f(k) = (k - \alpha)N_1, \qquad (1)$$

kus $N = b_{n-1}k^{n-1} + b_{n-2}k^{n-2} + \ldots + b_0$ on täisarv.

Võtame võrduses (1) $k = \pm 1$, siis saame

$$f(1) = (1 - \alpha)N_1; \quad f(-1) = (1 + \alpha)N_2.$$

Seepärast kuuluvad proovimisele ainult vabaliikme need jagajad, millede puhul suhted $\frac{f(1)}{\alpha - 1}$ ja $\frac{f(-1)}{\alpha + 1}$ on täisarvud.

Näited. 1) Leida võrrandi

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$$

täisarvulised lahendid.

Lahendus. Kirjutame välja arvu -6 jagajad ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

Asendades $x = \pm 1$ saame $f(1) = -12$ ja $f(-1) = -6$; järelikult ± 1 ei ole lahenditeks. Koostame suhted $\frac{f(1)}{\alpha - 1}$ ja $\frac{f(-1)}{\alpha + 1}$; $\alpha = 2$ puhul saame täisarvud, seepärast arv 2 kuulub proovimisele. Analoogiliselt veendume, et proovimisele kuuluvad -2 ja -3. Arvud 3 ja 6 aga ei kuulu proovimisele. Nii on $\alpha = 3$ puhul suhe $\frac{f(-1)}{\alpha + 1} = -\frac{6}{4}$ murdarv. Asendamisel veendume, et hulkliikme nullkohtadeks on arvud 2 ja -3. Proovimist võib teostada Horneri

skeemi abil. Jagades antud hulkliikme $(x-2)$-ga:

2	1	2	−4	−5	−6
	1	4	4	3	0

saame jagatises x^3+4x^2+4x+3 ja jäägis 0. Järelikult 2 on nullkoht. Arv -2 ei saa olla nullkohaks, sest jagatise vabaliige 3 ei jagu -2-ga. Jagame jagatise $(x+3)$-ga:

−3	1	4	4	3
	1	1	1	0

;

saame teise jagatise x^2+x+1 ja jäägis 0. Järelikult -3 on nullkoht. Täisarvulisi nullkohti rohkem pole. Võime kirjutada samasuse

$$x^4+2x^3-4x^2-5x-6=(x-2)(x+3)(x^2+x+1).$$

2) Tõestada, et kui täisarvuliste koefitsientidega hulkliige $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ omab $x=0$ ja $x=1$ puhul paarituid väärtusi, siis ta ei oma täisarvulisi nullkohti.

L a h e n d u s. Oletame vastuväitena, et α on täisarvuline nullkoht: $f(\alpha)=0$. Suhe $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ on paaritu $f(1)$ puhul täisarv, kui α on paarisarv. Tingimusest

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_0=0$$

leiame, et $a_0=-\alpha(a_1+a_2\alpha+\ldots+a_n\alpha^{n-1})$, järelikult a_0 on paarisarv. Kuid teiselt poolt $f(0)=a_0$ ja seepärast ei saa olla paarisarvuks. See vastuolu tõestab teoreemi.

Kui hulkliikme $f(x)$ koefitsiendid ei ole täisarvud, siis korrutades $f(x)$-i tema koefitsientide nimetajate väikseima ühiskordsega d saame täisarvuliste koefitsientidega hulkliikme $df(x)$, millel on samad nullkohad mis $f(x)$-il. $f(x)$-i täisarvuliste nullkohtade leidmiseks piisab, kui leida $df(x)$-i täisarvulised nullkohad.

N ä i d e. Leida hulkliikme

$$x^3-\frac{11}{6}x^2+x-\frac{1}{6}$$

täisarvulised nullkohad.

L a h e n d u s. Korrutades $f(x)$-i 6-ga saame hulkliikme

$$6x^3-11x^2+6x-1.$$

Vabaliikme jagajate ± 1 proovimisega leiame täisarvulise nullkoha $x = 1$.

§ 17. Hulkliikme ratsionaalsete nullkohtade leidmine.

Teoreem. *Iga ratsionaalne nullkoht hulkliikmel $f(x)$, mille koefitsiendid on täisarvulised ja kõrgeima astmega liikme koefitsient võrdub 1-ga, on täisarv.*

Tõestus vastuväitelise meetodiga. Väidame, et hulkliige

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

kus $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ on täisarvud, omab murdarvulist nullkohta $x = \frac{p}{q}$, kus p ja q on ühistegurita arvud ja $q \neq 1$.

Siis

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Korrutades q^{n-1}-ga saame

$$\frac{p^n}{q} = -a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}.$$

Viimane võrdus on võimatu, sest paremal pool on täisarv ja vasakul pool taandumatu murd $\frac{p^n}{q}$ (arvud p ja q on ühistegurita). See vastuolu tõestab teoreemi õigsust.

Olgu tarvis leida täisarvuliste koefitsientidega hulkliikme

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

ratsionaalsed nullkohad.

Korrutades $f(x)$ a_n^{n-1}-ga saame hulkliikme, millel on needsamad nullkohad:

$$a_n^{n-1}f(x) = a_n^nx^n + a_{n-1}a_n^{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1a_n^{n-1}x + a_0a_n^{n-1}.$$

Asendades argumendi x argumendiga $y = a_nx$ esitame antud hulkliikme järgmisel kujul:

$$a_n^{n-1}f(x) = \varphi(y) = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1a_n^{n-2}y + a_0a_n^{n-1}.$$

Viimase hulkliikme kõik ratsionaalsed nullkohad on täisarvulised. Olles leidnud selle hulkliikme kõik täisarvulised nullkohad, leiame seosest $x = \frac{y}{a_n}$ hulkliikme $f(x)$ kõik ratsionaalsed nullkohad.

N ä i d e. Leida hulkliikme

$$4x^3 - 7x^2 - x + 3 = f(x)$$

ratsionaalsed nullkohad.

L a h e n d u s. Otsime täisarvulised nullkohad hulkliikmel

$$16f(x) = (4x)^3 - 7(4x)^2 - 4(4x) + 3 \cdot 4^2 =$$
$$= y^3 - 7y^2 - 4y + 48 = \varphi(y), \text{ kus } y = 4x.$$

Uurime arvu 48 jagajaid ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 16, ± 24, ± 48.

$\alpha = 2$ puhul suhe $\frac{\varphi(-1)}{\alpha + 1} = \frac{44}{3}$ on murdarvuline, $\alpha = -2$ puhul suhe $\frac{\varphi(1)}{\alpha - 1} = \frac{38}{3}$ on murdarvuline; seepärast heidame kõrvale jagajad ± 2. $\alpha = 3$ puhul on mõlemad suhted $\frac{\varphi(1)}{\alpha - 1} = \frac{38}{2}$ ja $\frac{\varphi(-1)}{\alpha + 1} = \frac{44}{4}$ täisarvulised. Jagades $\varphi(y)$-i Horneri meetodil $(y - 3)$-ga:

3	1	−7	−4	48
	1	−4	−16	0

saame $\varphi(y) = (y - 3)(y^2 - 4y - 16)$.

Sulgudes olev ruutkolmliige ei oma täisarvulisi nullkohti, seepärast antud hulkliikme ainsaks ratsionaalseks nullkohaks on $x = \frac{y}{4} = \frac{3}{4}$.

§ 18. Kahe hulkliikme suurim ühisjagaja.

Definitsioon. *Hulkliiget* $d(x) = d_k x^k + \ldots + d_0$ *nimetatakse hulkliikmete*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

ja

$$\varphi(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$$

ühisjagajaks, kui $f(x)$ *ja* $\varphi(x)$ *jaguvad* $d(x)$*-ga:*

$$f(x) = f_1(x) d(x) \text{ ja } \varphi(x) = \varphi_1(x) d(x).$$

Mistahes arv $c \neq 0$ on kahe mistahes hulkliikme ühisjagajaks, sest c on iga hulkliikme jagajaks.

Definitsioon I. *Kahte hulkliiget $f(x)$ ja $\varphi(x)$ nimetatakse ühistegurita hulkliikmeiks, kui nad peale arvuliste jagajate ei oma mingeid teisi ühisjagajaid.*

Definitsioon II. *Kahe hulkliikme $f(x)$ ja $\varphi(x)$ suurimaks ühisjagajaks nimetatakse niisugust ühisjagajat, mis on jaguv iga teise ühisjagajaga.*

Hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ kõigist ühisjagajaist omab suurim ühisjagaja s u u r i m a t a s t e t. Suurim ühisjagaja on määratav täpsusega kuni arvulise tegurini, mis erineb nullist. Kui hulkliikmed $f(x)$ ja $\varphi(x)$ on ühistegurita, siis nende suurimaks ühisjagajaks on arv. Üldsust piiramata võime lugeda teda võrdseks arvuga 1. Hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ suurimat ühisjagajat tähistame sümboolselt $D(f, \varphi)$-ga.

Eukleidese algoritm, mida kasutatakse kahe täisarvu suurima ühisjagaja leidmiseks, on oluliste muudatusteta laiendatav ka hulkliikmeile. Oletame, et $\varphi(x)$-i aste ei ületa $f(x)$-i astet, s. o. $m \leqslant n$. Kui $f(x)$ jagub $\varphi(x)$-ga jäägita, siis $D(f, \varphi) = \varphi(x)$. Vastasel korral tekib mingi jääk $r_1(x)$, mis ei võrdu samaselt 0-ga. Edasi jagame $\varphi(x)$-i $r_1(x)$-ga ja kui tekib jääk $r_2(x)$, mis ei võrdu samaselt nulliga, siis jagame $r_1(x)$-i $r_2(x)$-ga jne. Eelmise jäägi ja järgneva jäägi jagamisprotsess e i s a a toimuda lõpmatult ning peab lõppema. Tõepoolest, protsessi jatkumisel jääkide astmed kahanevad, kuid olles mittenegatiivsed täisarvud ei kahane nad piiramatult. Tähistades järjestikused jagatised arvudega $q_0(x)$, $q_1(x)$, ..., $q_\varrho(x)$ saame:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &\equiv \varphi(x)\,q_0(x) + r_1(x) \\ \varphi(x) &\equiv r_1(x)\,q_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) &= r_2(x)\,q_2(x) + r_3(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{\varrho-2}(x) &\equiv r_{\varrho-1}(x)\,q_{\varrho-1}(x) + r_\varrho(x) \\ r_{\varrho-1}(x) &\equiv r_\varrho(x)\,q_\varrho(x) \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Teoreem. *Viimane samaselt nulliga mittevõrduv jääk $r_\varrho(x)$ on antud hulkliikmete suurimaks ühisjagajaks:*

$$r_\varrho(x) = D(f, \varphi).$$

T õ e s t u s. 1° Viimane jääk $r_\varrho(x)$ on hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ jagajaks. Tõepoolest, seose (I) eelviimasest reast järeldub, et $r_\varrho(x)$ on $r_{\varrho-2}$-e jagajaks, sest jääk $r_{\varrho-2}$ on esitatud kahe liidetava

summana, milledest kumbki on jaguv r_ϱ-ga. Samadel kaalutlustel järeldame, et igaüks jääkidest $r_{\varrho-3}, \ldots, r_2, r_1$, samuti $f(x)$ ja $\varphi(x)$ jaguvad $r_\varrho(x)$-ga.

2⁰ **Hulkliikmete** $f(x)$ ja $\varphi(x)$ iga ühisjagaja $r_\varrho(x)$ on jäägi r_ϱ ühisjagajaks. Tõepoolest, ümber kirjutades samasused (I) kujul

$$\left.\begin{aligned} r_1(x) &= f(x) - \varphi(x)q_0(x) \\ r_2(x) &= \varphi(x) - r_1(x)q_1(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_\varrho(x) &= r_{\varrho-2}(x) - r_{\varrho-1}(x)q_{\varrho-1}(x) \end{aligned}\right\} \quad (I')$$

märgime, et hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ iga ühisjagaja on $r_1(x)$-i jagajaks, ja olles $r_1(x)$-i jagaja, on ta ka $r_2(x)$-i jagajaks, samuti $r_3(x)$-i jagajaks jne. ja lõpuks $r_\varrho(x)$-i jagajaks.

Kõrvutades tõestatut näeme, et $r_\varrho(x)$, olles hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ ühisjagajaks, jagub nende iga teise ühisjagajaga, s. o. $D(f, \varphi) = r_\varrho(x)$, m. o. t. t.

Kui viimane nullist erinev jääk $r_\varrho(x)$ on arv, siis hulkliikmed $f(x)$ ja $\varphi(x)$ on ühistegurita.

Teoreem. *Kahe mistahes hulkliikme $f(x)$ ja $\varphi(x)$ jaoks on olemas kaks hulkliiget $P(x)$ ja $Q(x)$, mis rahuldavad samasust*

$$D(f, \varphi) \equiv P(x)f(x) + Q(x)\varphi(x). \qquad (I)$$

Tõestus. Asetades $r_1(x)$-i esimesest samasusest (I') teise, saame

$$\begin{aligned} r_2(x) &= \varphi(x) - [f(x) - \varphi(x)q_0(x)]q_1(x) = \\ &= P_1(x)f(x) + Q_1(x)\varphi(x), \end{aligned}$$

kus $P_1(x) = -q_1(x)$ ja $Q_1(x) = 1 + q_0(x)q_1(x)$.

Asetades kolmandasse samasusse $r_2(x)$-i asemele leitud avaldise, saame $r_3(x)$-i jaoks analoogilise samasuse. Järjestikuse asendamise protsess viib meid lõpuks $r_\varrho = D(f, \varphi)$ jaoks vastavale samasusele (1), m. o. t. t.

Kui hulkliikmed $f(x)$ ja $\varphi(x)$ on ühistegurita, siis $D(f, \varphi)$ on arv: $D(f, \varphi) = c \neq 0$. Jagades samasuse (1) mõlemad osad c-ga võib ilma üldsust piiramata lugeda $D(f, \varphi)$ võrdseks 1-ga. Sel juhtumil samasus (1) kirjutatakse nii:

$$P(x)f(x) + Q(x)\varphi(x) \equiv 1.$$

Näide. 1. Leida hulkliikmete

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ ja $\varphi(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

suurim ühisjagaja.

Lahendus. Murdudest hoidumiseks korrutame $f(x)$-i enne 2-ga ja siis jagame $\varphi(x)$-ga:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x - 6 & 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \\ 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x & \hline x + 1 \\ \hline x^3 - 4x^2 + 5x - 6 & \\ 2x^3 - 8x^2 + 10x - 12 & \text{(korrutame 2-ga)} \\ \hline 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 & \\ \hline r_1(x) = -3x^2 + 14x - 15 & \end{array}$$

Arvutusprotsessis me korrutame esimest vahet 2-ga. Selle tagajärjel moonutub jagatis, kuid jääk r_1 omandab ainult arvulise kordaja 2, mis pole oluline. Korrutame $\varphi(x)$-i 3-ga ja jagame ta $r_1(x)$-ga:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 15x^2 - 12x + 9 & -3x^2 + 14x - 15 \\ 6x^3 - 28x^2 + 30x & \hline -2x - 13 \\ \hline 13x^2 - 42x + 9 & \\ 39x^2 - 126x + 27 & \text{(korrutame 3-ga)} \\ 39x^2 - 182x + 195 & \\ \hline r_2(x) = 56x - 168 & \end{array}$$

Võib võtta $r_2(x) = x - 3$.

Jagame $r_1(x)$-i $r_2(x)$-ga:

$$\begin{array}{r|l} -3x^2 + 14x - 15 & x - 3 \\ -3x^2 + 9x & \hline -3x + 5 \\ \hline 5x - 15 & \\ 5x - 15 & \\ \hline r_3 = 0 & \end{array}$$

Järelikult $D(f, \varphi) = x - 3$.

§ 19. Hulkliikme lahutamine taandumatuiks tegureiks.

Teoreem. *Kui korrutis $F(x)\Phi(x)$ jagub hulkliikmega $f(x)$ ja hulkliikmed $F(x)$ ja $f(x)$ on ühistegurita, siis $\Phi(x)$ jagub $f(x)$-ga.*

Tõestus. Hulkliikmed $F(x)$ ja $f(x)$ on ühistegurita, seepärast

$$F(x)P(x) + f(x)Q(x) \equiv 1.$$

Korrutades liikmeti $\Phi(x)$-ga saame

$$[F(x)\Phi(x)]P(x) + Q(x)\Phi(x)f(x) = \Phi(x).$$

Et kumbki liidetav vasakul pool jagub $f(x)$-ga, siis ka $\Phi(x)$ jagub $f(x)$-ga, m. o. t. t.

Teoreem. *Kui $p(x)$ on taandumatu hulkliige ja $f(x)$ mistahes hulkliige, siis $f(x)$ ja $p(x)$ on kas ühistegurita või $f(x)$ jagub $p(x)$-ga.*

Tõestus. On teada, et

$$f(x) = f_1(x)D(f,p) \text{ ja } p(x) = p_1(x)D(f,p),$$

kus $D(f,p)$ on $f(x)$-i ja $p(x)$-i suurim ühisjagaja. Et $p(x)$ on taandumatu hulkliige, siis on arvud kas $p_1(x)$ või $D(f,p)$. Esimesel juhtumil võib lugeda, et $D(f,p) = p(x)$, ja siis $f(x)$ jagub $p(x)$-ga. Teisel juhtumil $f(x)$ ja $p(x)$ on ühistegurita, m. o. t. t.

Erijuhtumil on kaks taandumatut hulkliiget kas ühistegurita või erinevad nad ainult arvulise teguri poolest. Tõepoolest, kui taandumatu hulkliige $q(x)$ jagub taandumatu hulkliikmega $p(x)$, siis $q(x) = q_1(x)p(x)$, kuid $q(x)$-i taandumatuse tõttu on see võimalik ainult tingimusel, kui $q_1(x) = \text{const}$.

Teoreem. *Kui korrutis $f_1(x)f_2(x) \ldots f_n(x)$ jagub taandumatu hulkliikmega $p(x)$, siis vähemalt üks tegureist jagub $p(x)$-ga.*

Tõestus toimub täieliku induktsiooni meetodi abil. Kahe teguri korrutis $f_1(x)f_2(x)$ jagugu $p(x)$-ga. Eelmise teoreemi järgi kas $f_1(x)$ jagub $p(x)$-ga või $f_1(x)$ ja $p(x)$ on ühistegurita. Viimasel juhtumil $f_2(x)$ jagub $p(x)$-ga. Niisiis teoreem on tõestatud kahe teguri korrutise puhul. Eeldades, et teoreem on õige $n-1$ teguriga korrutise puhul, näitame, et sel eeldusel ta jääb õigeks ka n teguriga korrutise puhul. Siit järeldubki teoreemi kehtivus mistahes n-i jaoks. Korrutis

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_n(x)$$

on esitatav kahe teguri korrutisena

$$\{f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_{n-1}(x)\} f_n(x).$$

Kui $f_n(x)$ jagub $p(x)$-ga, siis teoreem on õige; kui $f_n(x)$ ei jagu $p(x)$-ga, siis jagub teine tegur $p(x)$-ga. Kuid see tegur on $n-1$ hulkliikme korrutis ja järelikult vähemalt üks neist peab jaguma $p(x)$-ga, m. o. t. t.

Teoreem. *Iga hulkliige $f(x)$, mis ei ole arv, on esitatav taandumatute tegurite korrutisena:*

$$f(x) = p_1(x)p_2(x) \ldots p_k(x); \qquad (1)$$

taandumatud hulkliikmed $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_k(x)$ (milledest ükski pole arv) on määratavad üheselt (ühel viisil) ja võivad erineda ainult arvulise teguri ja järjekorra poolest.

Tõestus. Taandumatu hulkliikme $p(x)$ puhul on valem (1) õige, kui vaatluse alt mitte välja jätta „triviaalset lahutust" $p(x) = p(x)$.

Tõestame teoreemi täieliku induktsiooni meetodi abil. Esimese astme hulkliikmed $ax + b$ on taandumatud ja seepärast kehtib nende kohta valem (1). Eeldame, et teoreem kehtib hulkliikmete kohta, mille aste on madalam kui n, ja tõestame, et sel eeldusel kehtib ta ka n-astme hulkliikmete kohta. Tõepoolest, kui hulkliige $f(x)$ on taandumatu, siis on kehtiv tema kohta valem (1). Kui $f(x)$ on taanduv, siis on ta esitatav kahe mittetriviaalse jagaja korrutisena.

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

millede kummagi aste on madalam kui n. Eelduse järgi on kumbki hulkliige $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ esitatav taandumatute tegurite korrutisena

$$f_1(x) = p_1(x)p_2(x) \ldots p_l(x) \text{ ja } f_2(x) = p_{l+1}(x) \ldots p_k(x),$$

millest

$$f(x) = p_1(x)p_2(x) \ldots p_l(x)\,p_{l+1}(x) \ldots p_k(x). \qquad (1)$$

Nüüd jääb veel tõestada lahutuse (1) ühesus. Oletame, et hulkliige $f(x)$ on lahutatud taandumatuiks tegureiks kahel viisil:

$$f(x) \equiv p_1(x)p_2(x) \ldots p_k(x) \equiv q_1(x)q_2(x) \ldots q_l(x).$$

Korrutis $q_1(x) \cdot q_2(x) \ldots q_l(x)$ jagub taandumatu hulkliikmega $p_1(x)$ ja seepärast vähemalt üks tegureist jagub $p_1(x)$-ga. Vahetades vajaduse korral tegurite järjekorda võib ilma üldsust piiramata lugeda, et $q_1(x)$ jagub $p_1(x)$-ga. See on võimalik ainult siis, kui $q_1(x)$ erineb $p_1(x)$-st ainult arvulise teguri poolest, s. o. $p_1(x) \equiv c_1 q_1(x)$.

Jagades mõlemaid pooli $p_1(x)$-ga saame samasuse

$$p_2(x) \ldots p_k(x) = c_1 q_2(x) \ldots q_l(x).$$

Korrates järjestikuselt samu arutlusi tegurite $p_2(x) \ldots p_k(x)$ kohta leiame, et igaühele neist vastab parempoolses osas temale samane (erineda võivad ainult arvulise teguri poolest) tegur. Samasuguseid arutlusi saab rakendada tegurite $q_1(x)$,

$q_2(x), \ldots, q_l(x)$ kohta ja näidata, et igaühele neist vastab vasakul pool samane (erineda võivad ainult arvulise teguri poolest) hulkliige, m. o. t. t.

N ä i d e. Hulkliige $x^2 - 8x + 5$ on lahutatav taandumatuiks tegureiks järgmiselt:

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5). \tag{2}$$

Seda hulkliiget saab näiteks lahutada tegureiks ka nii:

$$x^2 - 8x + 5 = (3x - 9)\left(\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\right). \tag{3}$$

Lahutusi (2) ja (3) ei vaadelda kui erisuguseid, sest neis erinevad taandumatud hulkliikmed ainult arvuliste tegurite poolest.

Valemis (1) võivad tegurite $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_k(x)$ hulgas esineda ühesugused (erineda võivad ainult arvulise teguri poolest) hulkliikmed. Ühesuguseid tegureid ühendades saame hulkliikme k a n o o n i l i s e lahutuse järgmisel kujul:

$$f(x) \equiv C p_1^{\alpha_1}(x) p_2^{\alpha_2}(x) \ldots p_s^{\alpha_s}(x),$$

kus C on arvuline tegur ja $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ on mingisugused naturaalarvud.

N ä i d e. Lahutada hulkliige

$$x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$$

taandumatuiks tegureiks.

L a h e n d u s. Vabaliikme jagajatega ± 1, ± 2, ± 4, ± 8 proovides veendume, et $f(x)$ omab nullkohta $x = -2$. Jagades $(x + 2)$-ga saame

$$f(x) = (x + 2)(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4).$$

Teine tegur omab nullkohta $x = -2$. Jagades $(x + 2)$-ga saame

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x^3 + 2x^2 + x + 2).$$

Viimases samasuses omab teine tegur nullkohta $x = -2$. Seega

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 2)(x^2 + 1).$$

Järelikult saame lõplikult

$$x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8 =$$
$$= (x + 2)(x + 2)(x + 2) \cdot (x^2 + 1) = (x + 2)^3 (x^2 + 1).$$

Siin esineb taandumatu tegur $x + 2$ kolm korda.

Pole raske märgata täielikku paralleelsust täisarvude jaguvuse

teooria ja hulkliikmete jaguvuse teooria vahel. Nii ühes kui ka teises teoorias on ühised järgmised mõisted ja laused.

1° *Jaguvuse, ühisjagaja, ühistegurita elementide (arvude või hulkliikmete), lahutamatu elemendi (algarv või taandamatu hulkliige) mõisted.*

2° *Jagamine jäägiga.*

3° *Eukleidese algoritm.*

4° *Eukleidese algoritm on lõplik protsess, mis alati lõpeb mingil sammul*.*

5° *Kahe ühistegurita elemendi p ja q (arvude või hulkliikmete) kohta kehtib samasus*

$$xp - yq \equiv 1.$$

6° *5°-st järeldub teoreem: kui korrutise $r \cdot s$ üks tegureist on jagajaga q ühistegurita ja korrutis jagub q-ga, siis teine tegur jagub q-ga.*

7° *Iga element on esitatav lahutamatute elementide korrutisena. Teoreemi 6° alusel tõestatakse selle lahutuse ühesus.*

Märgime, et kahe tegureiks lahutatud hulkliikme suurima ühisjagaja leidmine on teostatav nagu aritmeetikaski, võttes mõlema hulkliikme ühised tegurid. Seejuures iga tegur võetakse väikseima astendajaga, millega ta esineb antud hulkliikmeis.

N ä i d e. Olgu

$$f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3(x^2+1),$$
$$\varphi(x) = (x+2)^2(x^2+1)(x-1),$$

siis

$$D(f, \varphi) = (x+2)^2(x^2+1).$$

§ 20. Mitme argumendiga hulkliikmed.

Hulkliige argumentidega $x, y, z, \ldots, w$ on esitatav

$$ax^n y^m z^k \ldots w^l \qquad (1)$$

kujuliste üksliikmete summana, kus a on koefitsient ja $n, m, k, \ldots, l$ mingid mittenegatiivsed täisarvud (kui mingi argument, näiteks w, antud liikmes puudub, siis loeme vastava astendaja

* Näitena, kus Eukleidese algoritm ei lõpe, vaid on jätkatav piiramatult, on elementaargeomeetriast tuntud protsess kahe ühismõõdutu lõigu ühismõõdu leidmiseks.

võrdseks nulliga, $l = 0$). On ka võimalik, et hulkliige sisaldab kujul (1) ainult üht liiget ja muutub sel juhtumil üksliikmeks.

Definitsioon. *Astmete astendajate summat*

$$m + n + \ldots + l$$

nimetatakse liikme (1) astmeks. Hulkliikmes esinevate liikmete suurimat astet nimetatakse hulkliikme astmeks.

Näiteid.

1. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$

on kahe argumendiga teise astme hulkliige.

2. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Kz + L$

on kolme argumendiga teise astme hulkliige.

3. $1 - xyz$ on kolme argumendiga kolmanda astme hulkliige.

Teoreem. *Kui argumentide kõigi väärtuste puhul hulkliikme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ väärtus võrdub nulliga, siis kõik tema koefitsiendid võrduvad nulliga.*

Tõestus toimub täieliku induktsiooni meetodil. Eeldame, et teoreem on kehtiv hulkliikme kohta, mille argumentide arv on väiksem kui n; tõestame, et sel eeldusel on teoreem kehtiv n argumendiga hulkliikmete kohta. Kirjutame hulkliikme $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ühe argumendi, näiteks x_1-i astmete järgi:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_n(x_2, x_3, \ldots, x_n)x_1^n + p_{n-1}(x_2, x_3 \ldots x_n)x_1^{n-1} + \\ + \ldots + p_0(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Koefitsiendid $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_0$ on mingisugused $n - 1$ argumendiga $x_2, x_3, \ldots, x_n$ hulkliikmed. Olgu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ argumentide $x_2, x_3, \ldots, x_n$ väärtused, siis $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-i võib vaadelda kui ühe argumendiga x_1 hulkliiget. See hulkliige võrdub x_1-e kõigi väärtuste puhul nulliga ja seepärast kõik tema koefitsiendid võrduvad nulliga:

$$p_n(x_2, x_3, \ldots, x_n) = p_{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \ldots = \\ = p_0(x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0. \qquad (2)$$

Et argumentide $x_2, x_3, \ldots, x_n$ väärtusi saab valida vabalt, siis võrdused (2) on samasused. Eelduse järgi on see võimalik, kui hulkliikmete $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_0$ kõik koefitsiendid, tähendab ka hulkliikme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kõik koefitsiendid võrduvad nulliga. Niisiis teoreem on õige n argumendiga hulkliikmete kohta eeldusel, et ta on õige väiksema argumentide arvuga hulkliikmete kohta. Kuid (vaata § 10) teoreem on õige ühe argumendiga hulkliikmete

kohta ja seepärast ta on õige mistahes argumentide arvuga hulkliikmete kohta, m. o. t. t.

Hulkliikmete samasuse teoreem. *Kahe hulkliikme samasuse tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks on vastavate koefitsientide võrdsus (s. o. samades astmeis olevate samade argumentidega liikmete koefitsiendid).*

Tõestus, mis on antud §-is 10 ühe argumendiga hulkliikmete kohta, jääb kehtima.

Näide. Hulkliiget $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nimetatakse sümmeetriliseks, kui ta jääb argumentide mistahes ümberpaigutamisel muutmatuks. Leiame kolme argumendiga teise astme sümmeetriliste hulkliikmete üldkuju.

Lahendus. Olgu

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Lx + My + \\ + Nz + P.$$

Paigutame argumendid ümber, asetades x-i asemele y-i, y-i asemele z-i ja z-i asemele x-i; saame

$$f(y, z, x) = Ay^2 + Bz^2 + Cx^2 + Dyz + Eyx + Fxz + Ly + Mz + \\ + Nx + P.$$

Tingimuse kohaselt peab ümberpaigutuse tulemusena saama hulkliikme, mis on samane antud hulkliikmega. Võrdsustades vastavad koefitsiendid saame

$$A = C\,(x^2\text{-i puhul}),\ B = A\,(y^2\text{-i puhul}),\ C = B,$$
$$D = E,\ E = F,\ F = D,\ L = N,\ M = L,\ N = M.$$

Järelikult $A = B = C$, $D = E = F$ ja $L = M = N$, millest

$$f(x, y, z) = A(x^2 + y^2 + z^2) + D(xy + yz + xz) + P.$$

Nagu on kergesti näha, ei muutu viimane hulkliige mistahes argumentide mistahes ümberpaigutusel. See ongi kolme argumendiga teise astme sümmeetrilise hulkliikme üldkuju.

Mistahes arvu argumendiga hulkliikmetega on teostatavad liitmis-, lahutamis- ja korrutamistehted hulkliikmeliste avaldiste tehete üldreeglite järgi. Nende tehete teostamise tulemusena saadakse uuesti hulkliikmed. Liitmise ja korrutamise puhul kehtivad tehete põhiseadused, seepärast ratsionaalsete koefitsientidega hulkliikmete hulk on ring. Hulkliikme jaguvuse ja taandumatuse mõisted laienevad ka hulkliikmetele, millel on mistahes arv argumente.

Suurima ühisjagaja leidmiseks kasutame teatavate muudatustega Eukleidese algoritmi *.

Lõpuks, teoreem hulkliikme lahutamisest taandumatuiks tegureiks ja selle lahutuse ühesusest on kehtiv ka mitme argumendiga hulkliikmete puhul.

Definitsioon. *Hulkliiget* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *nimetatakse n-astme homogeenseks hulkliikmeks, kui kõik tema liikmed omavad sama astet n.*

Näiteid. 1) $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ on kahe argumendiga teise astme homogeenne hulkliige.

2) $2xyz^2 - x^4 - y^4 + x^2z^2$ on kolme argumendiga neljanda astme homogeenne hulkliige.

Homogeensete hulkliikmete omadus: *k-astme homogeense hulkliikme argumentide* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *asendamisel* $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$*-ga omandab hulkliige teguri* t^k*:*

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Tõestus. Võtame hulkliikme ühe liikme

$$ax_1^{m_1}x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n};$$

asetades $x_1, x_2, \ldots, x_n$ asemele $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$ saame

$$a(tx_1)^{m_1}(tx_2)^{m_2} \ldots (tx_n)^{m_n} = t^k a x_1^{m_1}x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

sest $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = k$. Nii omandab iga liige teguri t^k, järelikult, homogeensuse tõttu on t^k kõikide liikmete ühisteguriks, m. o. t. t.

Näide. Olgu $f(x, y, z,) = axy + byz + cxz;$

siis

$$f(tx, ty, tz) = t^2(axy + byz + cxz).$$

Iga hulkliige on pärast tema liikmete ümberrühmitamist esitatav homogeensete hulkliikmete summana.

Näide. $ax^3 + bxy + cxyz + dy^2 + ex + gy + k =$
$= (ax^3 + cxyz) + (bxy + dy^2) + (lx + gy) + k.$

---

* Üksikasjalisemalt vaata sellest kõrgema algebra kursustes, näiteks М. Бохер. — Введение в высшую алгебру või Д. Гравс. — Элементы высшей алгебры.

§ 21. Hulkliikmete tegurlks lahutamise erivõtted.

Hulkliikme tegureiks lahutamise ülesanne loetakse lahendatuks, kui antud hulkliige on esitatud taandumatute hulkliikmete korrutisena, millest igaüks võib lõppavaldises esineda mingis astmes. On olemas üldine Kroneckeri meetod, mis võimaldab proovimiste abil kindlaks teha, kas antud hulkliige on taanduv (ratsionaalarvude korpuses) või mitte, ja lahutada taandatav hulkliige tegureiks. Kuid Kroneckeri meetod omab vähest praktilist väärtust, sest tema kasutamine on seotud erakordselt raskete arvutustega. Kõrgemas algebras püstitatakse rida hulkliikmete lahutamatuse tunnuseid (taandumatuse kriteeriumid), kuid need tunnused ulatuvad kaugele väljapoole elementaaralgebra piire.

Öeldust on arusaadav, et hulkliikmete lahutamisel tegureiks omab esmajärgulist praktilist tähtsust üksikute erivõtete kasutamine nende mitmesugustes kombinatsioonides. See oskus omandatakse alles kestva harjutamise tulemusena. Allpool vaadeldakse hulkliikmete tegureiks lahutamise erimeetodite kasutamise näiteid.

Lahutamise lihtsaimad meetodid põhjenevad tehete seaduste otsesel kasutamisel. Distributiivsuseseaduse vahetu rakendamine on saanud õppekirjanduses ühise teguri sulgude ette toomise meetodi nimetuse.

Näiteid. 1) Lahutada tegureiks:

$$(2a^2 - 3ax)(5c + 2d) - (6a^2 - 4ax)(5c + 2d) =$$
$$= [(2a^2 - 3ax) - 6(a^2 - 4ax)](5c + 2d) = \text{(distributiivsus)}$$
$$= (ax - 4a^2)(5c + 2d) = a(x - 4a)(5c + 2d) \text{ (distributiivsus).}$$

Distributiivsuseseaduse rakendamisele eelnevad harilikult teisendused, mis põhinevad kommutatiivsuse- (liikmete ümberpaigutus) ja assotsiatiivsuse- (liikmete rühmitus) seadusel. Õppekirjanduses nimetatakse seda võtet rühmitamismeetodiks. Sageli osutub otstarbekohaseks „kunstlikkude" teisenduste kohaldamine, mis seisneb mõnede liidetavate lahutamises kahe (või mitme) liidetava summaks või koonduvate liikmete sissetoomises.

2) $(ay + bx)^3 + (ax + by)^3 - (a^3 + b^3)(x^3 + y^3) =$
$= a^3y^3 + 3a^2by^2x + 3ab^2yx^2 + b^3x^3 + a^3x^3 + 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 +$
$+ b^3y^3 - a^3x^3 - a^3y^3 - b^3x^3 - b^3y^3 =$ (sulgude avamine ja assotsiatiivsus)
$= 3a^2by^2x + 3ab^2yx^2 + 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 =$

$$= 3abxy(ay + bx + ax + by) = \text{(distributiivsus)}$$
$$= 3abxy[(ay + ax) + (bx + by)] = \text{(kommutatiivsus ja assotsiatiivsus)}$$
$$= 3abxy[a(x + y) + b(x + y)] = \text{(distributiivsus)}$$
$$= 3abxy(x + y)(a + b) \text{ (distributiivsus).}$$

3) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Lahutame eelkõige teise ja kolmanda liikme kahe liidetava summaks:

$$6x^2 = 3x^2 + 3x^2 \text{ ja } 11x = 9x + 2x.$$

Saame $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 2x + 6 =$
$= x^2(x + 3) + 3x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x^2 + 3x + 2) =$
$= (x + 3)(x^2 + x + 2x + 2) = (x + 3)[x(x + 1) + 2(x + 1)] =$
$= (x + 3)(x + 1)(x + 2)$.

4) Lahutada tegureiks

$$P = bc(b + c) + ca(c - a) - ab(a + b).$$

L a h e n d u s. Märgime, et kolmandais sulgudes olev avaldis on kahe esimese avaldise vahe: $a + b = (b + c) - (c - a)$;
nii

$$P = bc(b + c) + ca(c - a) - ab[(b + c) - (c - a)] =$$
$$= bc(b + c) + ca(c - a) - ab(b + c) + ab(c - a) =$$
$$= (b + c)(bc - ab) + (c - a)(ca + ab) =$$
$$= b(b + c)(c - a) + a(c - a)(b + c) = (c - a)(a + b)(b + c).$$

Sagedamini esinevad korrutised kirjutatakse tavaliselt valmis valemitena ja neid kasutatakse arvutusprotsessis. Niisugused on näiteks lühendatud korrutamise valemid

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2 \quad (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) = x^3 \pm a^3$$
$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3x^2a + 3xa^2 \pm a^3 \quad (x + a)(x - a) = x^2 - a^2.$$

Nende valemitega on kasulik ühendada järgmist valemit:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab,$$

mis võimaldab ruutkolmliiget tegureiks lahutada, kui x-i koefitsient on kujutatud kahe arvu summana ja vaba liige nende korrutisena. Märgime ära sageli esineva teisendamise — t ä i s r u u d u e r a l d a m i s e, mis seisneb mõne liidetavate rühma täiendamises (koonduvate liikmete sissetoomisega) kuni hulkliikme ruuduni.

5) Lahutada tegureiks $x^4 + x^2y^2 + y^4$.

L a h e n d u s. Kasutame teisendamisel täisruudu eraldamist:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = \\ = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy).$$

Saadud lahutust on kasulik meeles pidada.

6) Lahutada tegureiks $x^2 + 6x + 8$.

L a h e n d u s. Nagu kergesti on näha, $6 = 2 + 4$ ja $8 = 2 \cdot 4$, ja seepärast

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4).$$

See näide on lahendatav ka täisruudu eraldamisega:

$$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 8 = (x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9) + 8 - 9 = (x + 3)^2 - 1 = \\ = (x + 4)(x + 2).$$

7) Lahutada tegureiks $(x + y)^4 + x^4 + y^4$.

L a h e n d u s.

$$x^4 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \\ = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = (x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2,$$

millest

$$(x + y)^4 + x^4 + y^4 = 2[(x + y)^4 - 2xy(x + y)^2 + x^2y^2] = \\ = 2[(x + y)^2 - xy]^2 = 2(x^2 + y^2 + xy)^2.$$

8) Lahutada tegureiks

$$S = a^6 - b^6 + (a^4 + a^2b^2 + b^4).$$

L a h e n d u s.

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = \\ = (a - b)(a + b) \cdot (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$ ja

$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$ (vaata näitest 5), järelikult

$$S = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)[(a + b)(a - b) + 1] = \\ = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)(a^2 + 1 - b^2).$$

Hulkliikme $f(x)$ nullkohtade teadmine võimaldab (Bezout' teoreemi alusel) kas teostada täielikku tegureiks lahutamist või eraldada esimese astme tegurid ja muuta ülesanne madalama astme hulkliikme tegureiks lahutamiseks. See meetod oli eelpool illustreeritud suure hulga näidetega. Vaatleme Bezout' teoreemi kasutamist mitme argumendiga hulkliikmete tegureiks lahutamisel.

9) Lahutada tegureiks

$$P = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3.$$

L a h e n d u s. Vaatleme avaldist P kui hulkliiget argumendi a suhtes, lugedes, et b ja c omavad vabalt fikseeritud väärtusi. On kergesti märgatav, et $P(a, b, c)$ muutub nulliks, kui $a = b$ ja $a = c$; järelikult P jagub $(a - b)(a - c)$-ga.

a^2 koefitsient jagajal $(a - b)(a - c)$ on 1; seepärast jagatise koefitsiendid on b ja c suhtes täisavaldised. Analoogiliselt, kui vaadelda avaldist P kui hulkliiget argumendiga b, siis märkame, et ta muutub nulliks, kui $b = c$; see annab uue jagaja $(b - c)$. Niisiis, $P(a, b, c)$ jagub $(a - b)(a - c)(b - c)$-ga.

Hulkliige $P(a, b, c)$ on 4-nda astme homogeenne hulkliige ja jagaja — 3-nda astme homogeenne hulkliige; järelikult jagatis on 1-se astme homogeenne hulkliige kujul

$$Aa + Bb + Cc,$$

kus A, B ja C on arvulised koefitsiendid:

$$P \equiv (a - b)(a - c)(b - c)(Aa + Bb + Cc). \qquad (1)$$

Arvude A, B ja C leidmiseks võib toimida järgmiselt: kui avada sulud parempoolses osas, siis saame hulkliikme, mis on samane $P(a, b, c)$-ga; samasuse teoreemi järgi peavad samasuse (1) mõlema osa vastavad koefitsiendid olema võrdsed. Otseselt on kerge näha, et a^3b koefitsiendiks paremal poolel on arv A ja vasakul poolel -1, ning seepärast $A = -1$. Võrreldes analoogiliselt b^3a ja c^3a koefitsiente saame $B = -1$, $C = -1$.

Järelikult

$$P = -(a - b)(a - c)(b - c)(a + b + c).$$

10) Lahutada tegureiks

$$\Phi(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

L a h e n d u s. Märgime, et $\Phi(x, y, z)$ muutub nulliks, kui $x = -y - z$. Järelikult $\Phi(x, y, z)$ jagub $x + y + z$-ga. Jagatav on 3-nda astme homogeenne sümmeetriline hulkliige ja jagaja — 1-se astme homogeenne sümmeetriline hulkliige ning seepärast jagatis on 2-se astme homogeenne sümmeetriline hulkliige (vaata § 20, näide lk. 64).

$$\Phi(x, y, z) = (x + y + z)[K(x^2 + y^2 + z^2) + L(xy + yz + xz)], \qquad (2)$$

võrreldes mõlemas osas x^3-i koefitsiente saame $K = 1$.

Samasus (2) on õige x-i, y-i ja z-i kõigi väärtuste puhul. Võtame näiteks mõlemas osas $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$; siis saame

$$2 = 2(2K + L),$$

millest $L = -1$. Nii võime kirjutada samasuse

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

§ 22. Ratsionaalsete funktsioonide korpus.

Lihtsaimaks murdratsionaalseks avaldiseks on kahe hulkliikme suhe.

Definitsioon. *Kahe hulkliikme suhet nimetame ratsionaalseks murruks. Seejuures nimetajas esinev hulkliige on nullhulkliikmest erinev.*

Nimetaja ja lugeja hulkliikmeis esinevate tähtargumentide hulga järgi jagunevad ratsionaalsed murrud ühe, kahe, kolme, jne. argumendiga murdudeks. Ratsionaalsete murdude näiteiks võivad olla järgmised algebralised avaldised:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{(ühe argumendiga)},$$

$$\frac{x}{x - y} \quad \text{(kahe argumendiga)},$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{1 - x - y - z} \quad \text{(kolme argumendiga)}.$$

Iga hulkliiget $f(x, y, \ldots)$ võib vaadelda kui ratsionaalset murdu $\frac{f(x, y, \ldots)}{1}$, kui leppida kokku, et lugeda nimetajat võrdseks 1-ga. Niisiis, hulkliikmete hulk sisaldub osana kõigi ratsionaalsete murdude hulgas.

Argumentide arvuliste väärtuste mistahes süsteemile, *mille puhul ratsionaalse murru nimetaja ei muutu nulliks,* vastab selle murru täiesti kindel väärtus. Kõik niisugused süsteemid moodustavad argumentide lubatavate väärtuste hulga. Erandina on ühe argumendiga murrul $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ lubatav x-i iga väärtus, mis pole hulkliikme $\varphi(x)$ nullkohaks.

Näiteid.

1) Murrul $\frac{1}{1 + x^2}$ on lubatav x-i mistahes väärtus.

2) Murrul $\frac{x}{x^2 - 1}$ on lubatav mistahes väärtus $x \neq \pm 1$.

3) Murrul $\frac{x^2}{x}$ on lubatav mistahes väärtus $x \neq 0$.

4) Murrul $\frac{x + 1}{x^2 - 2}$ on lubatav x-i iga ratsionaalne väärtus, sest

nimetaja võib muutuda nulliks x-i väärtuste puhul, mis rahuldavad tingimust $x^2 = 2$. Kuid nagu teada, pole olemas ratsionaalarvu, mille ruut oleks 2.

5) Murrul $\frac{x+y}{x-y}$ on lubatav x-i ja y-i mittevõrdsete väärtuste mistahes süsteem (s. o. $x \neq y$).

6) Murrul $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$ on lubatav x-i, y-i ja z-i väärtuste mistahes süsteem, välja arvatud $x = y = z = 0$.

Vaatleme kahte murdu $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ja $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, lugedes lubatavaks x-i mistahes väärtuse, mille puhul *mõlemad antud murrud* omavad mõtet. Niisiis, lubatavate väärtuste hulga saame, kui eemaldame kõigi ratsionaalarvude hulgast k u m m a g i n i m e t a j a $\varphi(x)$ ja $\varphi_1(x)$ nullkohad.

Teoreem. *Kahe murru võrduse*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} \tag{1}$$

tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks x-i kõigi lubatavate väärtuste puhul on samasuse

$$f(x)\varphi_1(x) = f_1(x)\varphi(x) \tag{2}$$

kehtivus x-i kõigi ratsionaalsete väärtuste puhul.

T õ e s t u s. T i n g i m u s o n p i i s a v. Kui samasus (2) on kehtiv, siis x-i kõigi väärtuste puhul, millede puhul $\varphi(x) \neq 0$ ja $\varphi_1(x) \neq 0$, kehtib võrre (1).

T i n g i m u s o n t a r v i l i k. Kui x-i kõigi lubatavate väärtuste puhul kehtib võrdus (1), siis ka x-i kõigi *lubatavate* väärtuste puhul kehtib võrdus

$$f(x)\varphi_1(x) = \varphi(x)f_1(x).$$

Järelikult omavad hulkliikmed $f(x)\varphi_1(x)$ ja $f_1(x)\varphi(x)$ ühesuguseid väärtusi x-i väärtuste puhul, mis ei ole ühegi hulkliikme $\varphi(x)$ ja $\varphi_1(x)$ nullkohtadeks. Kuid kaks hulkliiget, mis on võrdsed x-i lõpmatu hulga väärtuste puhul, on samased (vaata § 15, teoreem, lk. 49) x-i k õ i g i ratsionaalsete väärtuste puhul, m. o. t. t.

Teoreem on laiendatav mistahes arvu argumentidega murdudele (tõestuse jätame ära).

Kahe algebralise avaldise samasuse ülddefinitsiooni järgi loetakse kaks murdu $\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)}$ ja $\frac{P_1(x, y, \ldots)}{Q_1(x, y, \ldots)}$ samasteks, kui nende

väärtused on võrdsed argumentide kõigi l u b a t a v a t e (mõlemate murdude) väärtuste süsteemide puhul. Tõestatud teoreem omab järgmist tähtsust. Kaks murdu võivad olla samased, kuid võivad omada argumentide erinevaid lubatavaid väärtusi. Teisiti öeldes, üleminekul samasele murrule võib argumentide lubatavate väärtuste hulk muutuda. Nii näiteks murrud $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ ja $\frac{x-1}{x+1}$ on samased, sest nende väärtused on võrdsed x-i kõigi väärtuste puhul, mis on lubatavad nii esimesele kui ka teisele murrule. Eraldi võttes koosneb esimesel murrul x-i lubatavate väärtuste hulk kõigist arvudest, mis erinevad ± 1-st, ja teisel murrul kõigist arvudest, mis erinevad -1-st. Niisiis, $x=1$ on argumendi lubatav väärtus teisele murrule, kuid ei ole argumendi lubatavaks väärtuseks esimesele murrule. Tõestatud teoreem vabastab meid ratsionaalsete murdude samasuse määramisel vajadusest arvestada arvkorpuses argumentide lubatavaid väärtusi, sest kahe murru $\frac{P}{Q}$ ja $\frac{P_1}{Q_1}$ samasuseks on tarvilik ja piisab „ristkorrutiste" PQ_1 ja P_1Q samasusest argumentide k õ i g i (mitte ainult lubatavate) väärtuste puhul. Öeldu alusel saab ratsionaalsete murdude puhul kasutatavat samasuse definitsiooni asendada alljärgneva ekvivalentse definitsiooniga.

Definitsioon. *Kaks ratsionaalset murdu*

$$\frac{P(x, y, z, \ldots)}{Q(x, y, z, \ldots)} \text{ ja } \frac{P_1(x, y, z, \ldots)}{Q_1(x, y, z, \ldots)}$$

nimetatakse samasteks,

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P_1}{Q_1},$$

kui argumentide kõigi väärtuste puhul kehtib samasus

$$PQ_1 \equiv P_1Q.$$

N ä i t e i d. 1) Murrud $\frac{x^2+1}{x^3-x^2+x-1}$ ja $\frac{1}{x-1}$ on samased, sest

$$(x^2+1)(x-1) \equiv x^3-x^2+x-1.$$

2) Murrud $\frac{x^2}{x}$ ja x on samased, sest $x^2 \cdot 1 = x \cdot x$. Nende väärtused on võrdsed mistahes $x \neq 0$ puhul. Kui $x=0$, siis murd $\frac{x^2}{x}$ kaotab mõtte, kuigi teine funktsioon, s. o. x ei kaota mõtet.

3) Murrud $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$ ja $\frac{x-y}{x+y}$ on samased, sest

$$(x^2-y^2)(x+y) \equiv (x^2+2xy+y^2)(x-y),$$

nende väärtused on võrdsed x-i ja y-i mistahes väärtuste puhul, välja arvatud $x = -y$.

4) Avaldisi $\frac{x^2 - x^2}{x - x}$ ja $x + x$ ei saa lugeda samasteks, sest samasusest $x^2 - x^2 \equiv (x + x)(x - x)$ hoolimata on esimene avaldis x-i kõigi väärtuste puhul mõttetu ega ole vaadeldav ratsionaalse murruna.

Ratsionaalsete murdude samasuse mõiste evib võrduse põhiomadusi:

1. *Refleksiivsus:*

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P}{Q}.$$

Tõestus on silmanähtav: $P \cdot Q \equiv P \cdot Q$.

2. *Transitiivsus:*

kui

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P_1}{Q_1} \text{ ja } \frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_2}{Q_2},$$

siis

$$\frac{P}{Q} \equiv \frac{P_2}{Q_2}.$$

Tõestus. Tingimuse järgi $PQ_1 \equiv P_1Q$ ja $P_1Q_2 \equiv P_2Q_1$, millest läbi korrutades saame

$$(PQ_2) \cdot (P_1Q_1) \equiv (P_2Q) \cdot (P_1Q_1).$$

Järelikult

$$PQ_2 \equiv P_2Q, \text{ m. o. t. t.}$$

Teoreem. *Kui $K(x, y, \ldots)$ ei ole nullhulkliige, siis*

$$\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)} \equiv \frac{K(x, y, \ldots)P(x, y, \ldots)}{K(x, y, \ldots)Q(x, y, \ldots)}.$$

Tõestus. $P(x, y, \ldots)[K(x, y, \ldots)Q(x, y, \ldots)] \equiv$

$$\equiv [K(x, y, \ldots)P(x, y, \ldots)]Q(x, y, \ldots), \text{ m. o. t. t.}$$

Sellel teoreemil põhjeneb murdude taandamise reegel: *kui $D(P, Q)$ on antud ratsionaalse murru lugeja ja nimetaja suurim ühisjagaja:*

$$P \equiv D(P, Q) \cdot p(x, y, \ldots), \quad Q \equiv D(P \cdot Q) \cdot q(x, y, \ldots),$$

siis

$$\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)} \equiv \frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)},$$

kus

$$p(x, y, \ldots) \text{ ja } q(x, y, \ldots)$$

on ühistegurita hulkliikmed. Murdu, mille lugeja ja nimetaja on ühistegurita, nimetatakse t a a n d u m a t u k s.

Teoreem. *Kui murd* $\frac{P}{Q}$ *on samane taandumatu murruga* $\frac{p}{q}$, *siis on olemas niisugune hulkliige* $K(x, y, \ldots)$, et

$$P(x, y, \ldots) = K(x, y, \ldots)p(x, y, \ldots)$$

ja

$$Q(x, y, \ldots) = K(x, y, \ldots)q(x, y, \ldots).$$

T õ e s t u s. Samasuse tingimusest $pQ = Pq$ järeldub, et korrutis Pq jagub p-ga. Kuid kuna p ja q on ühistegurita, siis P jagub p-ga, s. o. $P = Kp$, ja saame $pQ = pKq$ ehk $Q = Kq$, m. o. t. t.

Hulkliikmete ja täisarvude jaguvuse õpetuse paralleelsus võimaldab ratsionaalsete algebraliste murdude teooriat üles ehitada ranges vastavuses murdarvude aritmeetilise teooriaga. Algebraliste murdude samasuse definitsioon ja järgnevad teoreemid on mitte ainult sisult, vaid ka tõestamismeetodeilt rangelt analoogilised vastavaile lauseile, millede alusel ehitatakse üles murdarvude teooria. Edasine algebraliste murdude teooria esitamine oleks õppijaile juba tuntud arutluste sõnasõnaline kordamine. Tõepoolest, et lähtereeglid, mis on mõlema teooria (murdarvude ja algebraliste murdude) aluseks, on ühesugused, siis on ka ühesugused neist tulenevad järeldused. Nii saame siin nagu aritmeetikaski sõnastada, et:

1⁰ *Algebralisi murde saab teisendada ühenimelisteks.*

2⁰ *Tehted algebraliste murdudega määratakse tuntud reeglite järgi:*

$$\frac{P}{Q} \pm \frac{M}{N} = \frac{PN \pm QM}{QN}; \frac{P}{Q} \cdot \frac{M}{N} = \frac{PM}{QN};$$

$$\frac{P}{Q} : \frac{M}{N} = \frac{PN}{QM}.$$

3⁰ *Kui asendada murrud-komponendid samaste murdudega, siis tehete teostamise tulemusena saadakse samased murrud.*

4⁰ *Kehtivad tehete põhiseadused.*

Tehete põhiseadustele alluvate liitmis- ja korrutamistehete teostatavus, samuti ka pöördtehete lahutamise ja jagamise (välja arvatud jagamine nullhulkliikmega) teostatavus näitab, et algebra-

liste murdude hulk evib kõiki korpuse omadusi ja seepärast nimetatakse teda ratsionaalsete funktsioonide korpuseks.

Iga ratsionaalne algebraline avaldis on väljendatav kahe hulkliikme suhte, s. o. ratsionaalse murru kujul, kui teostada kohases järjestuses teisendusi hulkliikmete ja murdudega. Tähtede kõigi väärtussüsteemide puhul, mis on lubatavad antud ja teisendatud avaldistele, on nende arvulised väärtused võrdsed. Tõepoolest, ratsionaalsete murdude liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise tulemusena saame uuesti ratsionaalse murru. Seepärast nende operatsioonide järjestikune kasutamine mistahes hulgal ja mistahes kombinatsioonides lubab *igat keerulist ratsionaalset avaldist esitada kahe hulkliikme suhtena ja lõplikult mingi taandumatu murru kujul.* Erand võib esineda, kui teisendamiste protsessis selgub, et antud avaldis ei oma mõtet ei mingisuguste argumentide väärtuste puhul; kuid siis ei saa teda vaadelda ratsionaalse avaldisena.

Me teame, et kahe samase murru $\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)}$ ja $\frac{P_1(x, y, \ldots)}{Q_1(x, y, \ldots)}$ argumentide lubatavate väärtuste hulgad võivad olla erinevad. Nii näiteks murrud

$$\frac{x+1}{x} \text{ ja } \frac{x^2-1}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$$

on samased, kuid esimesel murrul koosneb x-i lubatavate väärtuste hulk kõigist nullist erinevaist arvudest ja teisel murrul — kõigist 0-st ja 1-st erinevaist arvudest. Kui murd $\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)}$ on samane taandumatu murruga $\frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)}$, siis $P(x, y, \ldots) = K(x, y, \ldots)p(x, y, \ldots)$ ja $Q(x, y, \ldots) = K(x, y, \ldots)q(x, y, \ldots)$. Oletame, et argumentide antud väärtuste süsteemi $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ puhul hulkliige q ei muutu nulliks, $q(x_0, y_0, \ldots) \neq 0$, kuna $K(x_0, y_0, \ldots) = 0$. Sel juhtumil $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ puhul omab murd $\frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)}$ mõtet, kuid murd $\frac{P(x, y, \ldots)}{Q(x, y, \ldots)}$ kaotab argumentide väärtuste sama süsteemi puhul mõtte. Asjaolu, et kahe samase murru argumentide lubatavate väärtuste hulgad võivad olla erinevad, paistab teataval määral „ebaloomulikuna". See ebaloomulikkus on kõrvaldatav, kui tarvitusele võtta täiendav definitsioon. Arvestades seda, et murd $\frac{P}{Q}$ ei oma $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ puhul mõtet,

lepime kokku, et anname talle arvulise väärtuse, mis on $x = x_0$, $y = y_0$, ... puhul võrdne temaga samase taandumatu murru, s. o. murru $\frac{p(x_0, y_0, \ldots)}{q(x_0, y_0, \ldots)}$ väärtusega.

Kasutame alljärgnevat üldist täiendavat ***definitsiooni:*** *Kui mingi ratsionaalne avaldis* $\Phi(x, y, \ldots)$ *kaotab* $x = x_0$, $y = y_0$, ... *puhul mõtte, kuid temaga samane taandumatu murd* $\frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)}$ *ei kaota* $x = x_0$, $y = y_0$, ... *puhul mõtet, siis lepime kokku, et loeme* $\Phi(x, y, \ldots)$*-i väärtuse* $x = x_0$, $y = y_0$, ... *puhul võrdseks temaga samase taandumatu murru väärtusega, s. o.*

$$\Phi(x_0, y_0, \ldots) = \frac{p(x_0, y_0, \ldots)}{q(x_0, y_0, \ldots)}.$$

Kui väärtuste süsteem $x = x_0$, $y = y_0$, ... ei ole lubatav taandamatule murrule $\frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)}$ [s. o. $q(x_0, y_0, \ldots) = 0$], siis on ta ka lubamatu mistahes avaldisele $\Phi(x, y, \ldots)$, mis on samane murruga $\frac{p(x, y, \ldots)}{q(x, y, \ldots)}$. Kasutamisele võetud täiendav definitsioon võimaldab takistusteta teostada algebraliste murdude taandamist hulkliikmeliste ühisteguritega.

N ä i t e i d. 1) Murd $\frac{x^2 + 1}{x(x - 1)}$, kui $x = 1$, omab väärtust, mis võrdub samase taandamatu murru $\frac{x + 1}{x}$ väärtusega, s. o. arvuga 2.

2) Murd $\frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$, kui $x = 2$, $y = 2$, omab väärtust, mis võrdub samase taandumatu murru $\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$ väärtusega, s. o. arvuga 3. Sama murd, kui $x = 2$ ja $y = -2$, ei oma mingisugust väärtust, sest sel juhtumil kaotab ka samane taandumatu murd mõtte.

3) Murd $\frac{(x + 1)(x^2 - y^2)}{(x + 1)(x^2 + y^2)}$ ei oma mõtet, kui $x = y = 0$, sest argumentide nende väärtuste puhul kaotab taandumatu murd $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ mõtte.

4) Vaatleme avaldist

$$\Phi(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - 2} + 1\right).$$

Teostades elementaarseid teisendusi saame

$$\Phi(x) = \frac{x-2}{x}\left(\frac{(x-2)-(x-1)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}\right) =$$

$$= \frac{(x-2)(x^2-3x+1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-3x+1}{x(x-1)}.$$

$x=2$ puhul tuleb $\Phi(x)$-i väärtus lugeda võrdseks $-\frac{1}{2}$-ga. $x=0$ ja $x=1$ puhul ei oma avaldis $\Phi(x)$ mõtet.

Näiteid murdavaldiste teisendamise kohta.

1) Teisendada avaldis

$$S = \left(\frac{y^2-yz+z^2}{x} + \frac{x^2}{y+z} - \frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right) \cdot \frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}} + (x+y+z)^2.$$

Lahendus. Teostame tehted järgmiselt:

a) $$\frac{y^2-yz+z^2}{x} + \frac{x^2}{y+z} - \frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{y^2-yz+z^2}{x} + \frac{x^2}{y+z} - \frac{3yz}{z+y} =$$

$$= \frac{(y^2-yz+z^2)(y+z)+x^3-3xyz}{x(y+z)} = \frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x(y+z)}.$$

b) $$\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}} = \frac{\frac{2(y+z)}{yz}}{\frac{x+y+z}{xyz}} = \frac{2x(y+z)}{x+y+z}.$$

c) $$S = \frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x(y+z)} \cdot \frac{2x(y+z)}{x+y+z} + (x+y+z)^2 =$$

$$= 2\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z} + (x+y+z)^2.$$

Kasutades samasust, mis on tuletatud eelmise paragrahvi näites 10, saame

$$S = 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz) + (x+y+z)^2 =$$

$$= 3(x^2+y^2+z^2).$$

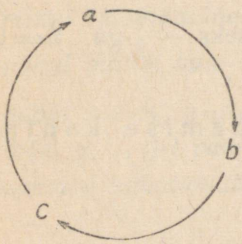
2) Tõestada, et

$$P = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}$$

muutub nulliks a, b ja c kõigi lubatavate väärtuste puhul, kus luba-

tavaiks väärtusteks loetakse tähtede mistahes väärtused, mis rahuldavad tingimusi $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$ ja

$$Q = \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0. \qquad (3)$$



Joon. 4.

L a h e n d u s. Märgime ära avaldise P järgmise omaduse. Kui võtta tema esimene liige $\frac{a}{(b-c)^2}$ ja teha temas tähtede r i n g i l i n e ü m b e r p a i g u t u s, asetades a asemele b, b asemele c ja c asemele a (vastavalt skeemile, mis on kujutatud joonisel 4), siis saadakse teine liige. Tehes teises liikmes ringilise ümberpaigutuse saame kolmanda liikme. See omadus võimaldab arvutusi lihtsustada.

Näitame, et

$$P \equiv \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right). \qquad (4)$$

Tõepoolest on P ja avaldise (4) parema poole vahe

$$\frac{1}{b-c}\left[\frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right] + \frac{1}{c-a}\left[\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c}\right] + \frac{1}{a-b}\left[\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right].$$

Teisendame esimese liidetava:

$$\frac{1}{b-c}\left[\frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right] = \frac{ab - b^2 + c^2 - ac}{(b-c)(c-a)(a-b)}. \qquad (5)$$

Ülejäänud kaks liidetavat saame tähtede ringilisel ümberpaigutamisel. Ringilisel ümberpaigutamisel murru nimetaja (5) parempoolses osas ei muutu ja lugeja omandab kuju

$$bc - c^2 + a^2 - ba.$$

Kasutades veel kord ringilist ümberpaigutust saame kolmanda liidetava lugeja

$$ca - a^2 + b^2 - cb.$$

Nagu kergesti võib näha, on lugejate summa, järelikult ka murdude summa, samaselt võrdne nulliga. Siit järeldub samasus (4).

Sellest samasusest, silmas pidades tingimust (3), tuletubki võrdus $P = 0$.

3) Tõestada samasus

$$\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}=\frac{Ma+N}{a-b}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{Mb+N}{a-b}\cdot\frac{1}{x-b}. \qquad (6)$$

Lahendus. Murd $\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}$ on argumendi suhtes lihtmurd (s. o. murru lugeja aste on madalam nimetaja astmest). Püüame antud murdu väljendada kahe lihtmurru summana nimetajatega $x-a$ ja $x-b$. Nende murdude lugejad on mingisugused arvud A ja B, s. o.

$$\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}.$$

See samasus on kehtiv, kui hulkliige $Mx+N$ on samane lugejaga-hulkliikmega, mis saadakse pärast parempoolsete murdude liitmist:

$$Mx+N\equiv A(x-b)+B(x-a). \qquad (7)$$

Viimane võrdus peab olema õige x-i kõigi väärtuste puhul; võttes algul $x=a$ ja siis $x=b$, leiame

$$A=\frac{Ma+N}{a-b} \text{ ja } B=\frac{Mb+N}{a-b}.$$

Arvude A ja B niisugusel valikul on võrdus (7) samasus, sest (7) mõlema poole esimese astme hulkliikmed, mis on x-i kahe väärtuse ($x=a$ ja $x=b$) puhul võrdsed, peavad olema samased. Asendades A ja B leitud väärtused saame samasuse (6).

Kasutame näiteks samasust (6) murru $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$ lahutamiseks lihtsaimate murdude summaks:

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x-2}.$$

III peatükk.

Lineaarvõrrandite süsteemid.

§ 23. Üldmõisteid.

Definitsioon. *Lineaarvõrrandiks ehk esimese astme võrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab tundmatuid esimeses astmes.*

Käesolevas peatükis õpime tundma lineaarvõrrandite süs-

teeme, s. o. süsteeme, mis koosnevad esimese astme võrrandeist. Niisuguste süsteemide näiteiks oleksid:

$$1.\ \left.\begin{aligned} x-y&=1\\ x+y&=3 \end{aligned}\right\} \qquad 2.\ \left.\begin{aligned} 2x+3y&=4\\ 4x+6y&=5 \end{aligned}\right\}$$

$$3.\ \left.\begin{aligned} x+y&=1\\ 2x+2y&=2 \end{aligned}\right\} \qquad 4.\ \left.\begin{aligned} x+y&=0\\ y+z&=3\\ x+z&=5 \end{aligned}\right\}$$

5. Võrrand $xy-1=0$ ei ole lineaarne, sest ta sisaldab tundmatute suhtes teise astme liiget.

Definitsioon. *Võrrandisüsteemi lahendiks nimetatakse niisugust tundmatute arvuliste väärtuste süsteemi, mille puhul süsteemi iga võrrandi mõlema poole väärtused on võrdsed.*

Lühemalt öeldakse, et süsteemi lahend rahuldab antud süsteemi võrrandeid. Toodud näiteis on arvude paar $x=2$, $y=1$ esimese süsteemi lahend, arvude paar $x=3$, $y=2$ ei ole sama süsteemi lahendiks. Teine süsteem ei oma lahendeid, sest vastasel korral oleks esimese võrrandi vasaku poole väärtus võrdne arvuga 4 ja teise võrrandi vasaku poole väärtus $4x+6y=2(2x+3y)$ oleks võrdne arvuga 8, aga mitte arvuga 5. Iga arvude paar $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$; $x=1$, $y=0$; $x=0$, $y=1$ on kolmanda võrrandisüsteemi lahendiks. Kolme arvu süsteem $x=1$, $y=-1$, $z=4$ on neljanda süsteemi lahendiks.

Käesolevas peatükis õpime tundma mistahes ratsionaalsete koefitsientidega esimese astme võrrandeid ja võrrandisüsteeme.

Ühe tundmatuga esimese astme võrrandile pärast elementaarseid teisendusi saab anda kuju

$$ax=b, \tag{1}$$

kus a ja b on antud ratsionaalarvud. Kui $a\neq 0$, siis jaguvuse teostatavuse tõttu ratsionaalarvude korpuses leiame võrrandi (1) ainsa lahendi jagatise kujul $x=\frac{b}{a}$. $a=0$ puhul lakkab võrrand (1) olemast esimese astme võrrand. Kui $a=0$ ja $b\neq 0$, siis võrrand (1) ei oma lahendeid. Lõpuks, $a=0$ ja $b=0$ puhul võrdub vasak pool samaselt nulliga ja seepärast rahuldab võrrandit x-i mistahes väärtus.

Esimese astme võrrand mitme tundmatuga omab üldjuhtumil lõpmatu hulga lahendeid. Vaatleme näiteks võrrandit $ax + by = c$, kus $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Liites mõlema poolega $-by$ ja jagades a-ga leiame, et

$$x = \frac{c - by}{a}. \tag{2}$$

Andes y-ile mistahes väärtuse ja võttes x-ile vastava väärtuse valemist (2) saame arvude paari, mis rahuldab antud võrrandit:

$$a\left(\frac{c - by}{a}\right) + by \equiv (c - by) + by \equiv c.$$

§ 24. Kahe tundmatuga võrrandisüsteem.

Vaatleme kahe tundmatuga kahest esimese astme võrrandist koosnevat võrrandisüsteemi

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Oletame, et süsteem (I) omab kasvõi ühtegi lahendit x, y. Korrutame esimese võrrandi mõlemad pooled a_2-ga ja teise võrrandi mõlemad pooled a_1-ga ning lahutame liikmeti esimesest võrrandist teise. Seejärel korrutame esimese võrrandi mõlemad pooled b_2-ga ja teise võrrandi mõlemad pooled b_1-ga ning lahutame liikmeti teisest võrrandist esimese. Saame

$$\left.\begin{aligned} (a_1b_2 - a_2b_1)x &= c_1b_2 - c_2b_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y &= a_1c_2 - a_2c_1 \end{aligned}\right\}. \tag{I'}$$

Arutluste käigust järeldub, et arvude x ja y mistahes paar, mis rahuldab süsteemi (I), rahuldab ka süsteemi (I'). Seepärast nimetame süsteemi (I') t u l e t a t u d s ü s t e e m i k s. Niisiis, süsteemi (I) kõiki lahendeid tuleb otsida tuletatud süsteemi (I') lahendite hulgast. Kui $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, siis süsteemil (I') on üksainus lahend

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{II}$$

Järelikult valemid (II) annavad süsteemi (I) üheainsa võimaliku lahendi. Kuid ilma otsese kontrollimiseta e i s a a k i n n i t a d a, et saadud arvude paar on kindlasti esialgse süsteemi (I)

lahendiks. Teostades asenduse süsteemi (I) esimesse võrrandisse, leiame:

$$a_1 \frac{c_1b - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_1 \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{a_1c_1b_2 - a_1c_2b_1 + a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = c_1.$$

Samuti võib veenduda, et arvude süsteem (II) on teise võrrandi lahendiks.

Niisiis, kui $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, siis süsteemil (I) on üksainus lahend (II).

Alljärgnev näide kinnitab, et tuletatud süsteem (I′) võib üldjuhtumil osutuda mittesamaväärseks süsteemiga (I). Olgu $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$; ent kui vähemalt üks arvudest c_1 ja c_2 erineb nullist, siis süsteem (I) omandab kuju

$$\left.\begin{aligned} 0x + 0y &= c_1 \\ 0x + 0y &= c_2 \end{aligned}\right\}.$$

On selge, et sel süsteemil pole lahendeid. Kuid tuletatud süsteem (I′) omandab kuju $0x = 0$, $0y = 0$, teda rahuldavad x-i ja y-i mistahes väärtused.

§ 25. Teise järgu determinandid.

Definitsioon. *Teise järgu (kaherealiseks) determinandiks, mis on koostatud nelja arvu tabelist*

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, \\ a_2, & b_2, \end{matrix}$$

nimetatakse arvu

$$a_1b_2 - a_2b_1.$$

Determinandi tähistamiseks kasutatakse sümbolit

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Näide.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1.$$

§ 26. Cramer'i reegel.

Determinandid võimaldavad kahe tundmatuga kahe lineaarvõrrandi süsteemi lahendit esitada järgmisel meelespidamiseks sobival kujul:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \tag{II'}$$

kus

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0.$$

Definitsioon. *Determinanti* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, *mis on koostatud tundmatute koefitsientidest, nimetatakse võrrandisüsteemi determinandiks.*

Valemid (II') väljendavad järgmist ***Crameri reeglit:*** *Kui võrrandisüsteemi determinant ei võrdu nulliga, siis süsteem (I) omab ühteainsat lahendit: tundmatu väärtus võrdub murruga, mille nimetajaks on süsteemi determinant ja lugejaks on determinant, mis saadakse süsteemi determinandist, asendades selle tundmatu koefitsiendid vabaliikmetega.*

N ä i d e. Lahendada süsteem

$$\left.\begin{aligned} x-y&=1 \\ x+2y&=3 \end{aligned}\right\}.$$

L a h e n d u s. Koostame süsteemi determinandi:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot 2-(-1)\cdot 1=3.$$

Et $\Delta\neq 0$, siis võib kasutada Crameri reeglit:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}.$$

§ 27. Teise järgu determinantide omadused.

Teoreem. *Determinandi väärtus ei muutu, kui asendada read veergudega,* s. o.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Tõestus. Arvutades mõlemad osad, saame ühe ja sama arvu

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1, \text{ m. o. t. t.}$$

Teoreem. *Veergude (või ridade) ümberpaigutamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.*

Tõestus. Arvutades determinantide

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

väärtused saame arvud $a_1 b_2 - a_2 b_1$ ja $b_1 a_2 - a_1 b_2$, mille absoluutväärtused on võrdsed ja märgid vastupidised, m. o. t. t.

Teoreem. *Determinant võrdub nulliga sel ja ainult sel juhtumil, kui tema ridade (veergude) elemendid on võrdelised.*

Tõestus. 1⁰ Olgu determinandi Δ ridade elemendid võrdelised:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2};$$

siis $a_1 b_2 = a_2 b_1$, millest

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

2⁰ Ümberpöördult: olgu

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \tag{1}$$

Oletame, et vähemalt üks determinandi elementidest erineb nullist. Olgu kindlaks määratud, et $a_1 \neq 0$. Tähistame $\frac{a_2}{a_1} = k$ ehk $a_2 = k a_1$. Tingimusest (1) saame $b_2 = k b_1$. Niisiis

$$a_2 = k a_1, \quad b_2 = k b_1. \tag{2}$$

Kui determinandi kõik elemendid võrduvad nulliga, siis võrdus (2) on samuti kehtiv (mistahes k puhul), m. o. t. t.

§ 28. Kahe tundmatuga kahe lineaarvõrrandi süsteemi uurimine.

Vaatleme süsteemi

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Võtame tarvitusele järgmised tähistused:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_2.$$

Süsteemi uurimine teostatakse vastavalt järgmistele võimalikele juhtumeile:

1^0 $\Delta \neq 0$. Vastavalt Crameri reeglile on süsteemil sel juhtumil üksainus lahend.

2^0 $\Delta = 0$, kuid vähemalt üks determinantidest Δ_1 ja Δ_2 on nullist erinev. Kui $\Delta = 0$, siis tundmatute koefitsiendid on võrdelised:

$$a_2 = ka_1 \text{ ja } b_2 = kb_1. \qquad (2)$$

Kuid $c_2 \neq kc_1$, sest vastasel korral oleksid Δ_1 ja Δ_2 nulliga võrdsed. Süsteem (1) omandab kuju

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$ka_1x + kb_1y = c_2.$$

Antud süsteem ei oma lahendeid, sest vastasel korral oleks teise võrrandi vasaku poole väärtus $k(a_1x + b_1y) = kc_1$ c_2-ga mittevõrdeline.

3^0 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, kuid vähemalt üks tundmatute koefitsientidest on nullist erinev. Olgu näiteks $a_1 \neq 0$. Seostes (2) võrdub k sel puhul $\frac{a_2}{a_1}$-ga. Tingimusest $\Delta_2 = 0$ järeldub, et $c_2 = kc_1$. Süsteem (1) omandab kuju

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$ka_1x + kb_1y = kc_1.$$

Tähendab, teine võrrand on esimese järelduseks. Seepärast esimese võrrandi iga lahend on süsteemi lahendiks ja kahe tundmatuga võrrand omab üldjuhtumil lõpmatu hulga lahendeid. Juhtumite 2^0 ja 3^0 näiteiks on süsteemid (2) ja (3) §-is 23.

4^0 Tundmatute kõik koefitsiendid võrduvad nulliga. Kui vähemalt üks vabaliikmeist c_1 ja c_2 erineb nullist, siis süsteem ei oma lahendeid. Kui $c_1 = c_2 = 0$, siis rahuldavad süsteemi samaselt x-i ja y-i mistahes väärtused.

Juhtumid 1^0, 2^0 ja 3^0 omavad järgmist geomeetrilist interpretatsiooni. Juhtumil 1^0 sirged, mida kujutavad võrrandid (1) Descartes'i koordinaadistikus, lõikuvad ühes punktis. Juhtumil 2^0 on sirged paralleelsed. Juhtumil 3^0 sirged ühtivad. Juhtumil 4^0 ükski võrrand ei kujuta ühtegi sirget.

§ 29. Kolmanda järgu determinandid.

Kolmanda järgu determinandi mõiste juurde jõuame, vaadeldes kolme tundmatuga kolme esimese astme võrrandi süsteemi lahendamisküsimust.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Selle süsteemi lahendamisel saame tundmatu x jaoks järgmise avaldise:

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1}$$

eeldusel, et nimetaja erineb nullist. x-i avaldise lugeja saadakse nimetajast, asendades x-i koefitsiendid vabaliikmetega (Crameri reegel). Analoogiliselt on leitavad y-i ja z-i avaldised.

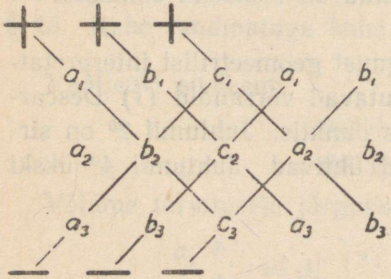
Definitsioon. *Kolmanda järgu (kolmerealiseks) determinandiks, mis koosneb üheksa arvu tabelist*

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3, \end{matrix}$$

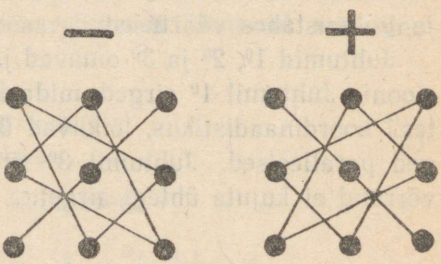
nimetatakse arvu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Kolmanda järgu determinandi arvutus on teostatav Sarruse järgmise reegli abil. Kirjutades antud tabeli juurde esimese ja teise veeru moodustame „peadiagonaalil" olevate elementide korrutise $a_1b_2c_3$ (skeem I) ja samuti „paralleelseil diagonaalidel" olevate elementide korrutised ning võtame need korrutised oma

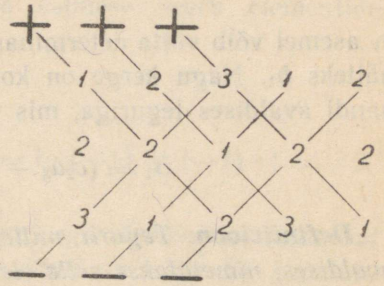


Skeem I.



Skeem II.

märgiga; moodustame „kõrvaldiagonaalil" olevate elementide korrutise $a_3b_2c_1$ ja samuti „paralleelseil diagonaalidel" olevate elementide korrutised ning võtame need korrutised vastandmärgiga. Kõigi korrutiste algebraline summa võrdub Δ-ga. Sarruse reeglit võib kasutada järgmisel muudetud kujul, mida nimetatakse kolmnurkade skeemiks (skeem II). Vasakpoolsel skeemil on tabelis ühendatud kohad, millede elementide korrutised tuleb võtta oma märgiga. Parempoolsel skeemil on tabelis ühendatud need kohad, millede elementide korrutised tuleb võtta vastandmärgiga.



Skeem III.

N ä i d e. Arvutada determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

L a h e n d u s. Sarruse reegli järgi (skeem III)

$$\Delta = 1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 2 = -11.$$

§ 30. Kolmanda järgu determinantide omadused.

Teoreem. *Determinandi väärtus ei muutu, kui asendada tema ridade elemendid vastavate veergude elementidega,* s. o.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

T õ e s t u s. Piisab, kui arendada Sarruse reegli järgi võrduse (1) mõlemat poolt.

Vaadeldes kolmanda järgu determinandi arendit võime kergesti märgata, et algebralise summa iga liige, märki arvestamata, võrdub kolme elemendi korrutisega, milledest ükski paar pole samas veerus ega samas reas. Võtame determinandi ühe elemendi, näiteks a_1. See element sisaldub kahes liikmes $a_1b_2c_3$ ja $-a_1b_3c_2$. Võttes a_1 sulgude ette saame teguri $b_2c_3 - b_3c_2$, millega element a_1 asub determinandi avaldises. Seda tegurit nimetatakse e l e m e n d i a_1

adjunktiks (algebraliseks täiendiks) ja tähistatakse sümboliga A_1.

Adjunkt A_1 on esitatav teise järgu determinandi kujul:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

a_1 asemel võib võtta determinandi mistahes teise elemendi. Võtame näiteks b_1. Nagu kerge on kontrollida, asub element b_1 determinandi avaldises teguriga, mis võrdub

$$B_1 = (c_2a_3 - a_2c_3) = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Definitsioon. *Tegurit, millega antud element asub determinandi avaldises, nimetatakse selle elemendi adjunktiks.*

Determinandi mitmesuguste elementide adjunktide vaatlemise alusel (mille jätame õppijaile) püstitatakse järgmine ***reegel:*** *Antud elemendi adjunkti leidmiseks piisab, kui maha kriipsutada elemendile kuuluv rida ja veerg ning ülejäänud elementidest moodustada teise järgu determinant, võttes selle sama või vastupidise märgiga, vastavalt skeemile IV.*

\+ − +
− + −
\+ − +

Skeem IV.

Vaatleme mingi rea või veeru elemente, näiteks esimese rea elemente. Rühmitame determinandi liikmed järgmiselt: esimesse rühma kogume liikmed, mis sisaldavad a_1, teise — b_1 ja kolmandasse — c_1; siis saame

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1.$$

Analoogiliselt võib toimida mistahes rea või veeru elementidega. Niiviisi saame järgmised samasused, mida nimetatakse determinandi arendiks antud rea või veeru elementide järgi:

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = b_1B_1 + b_2B_2 + c_2C_2 \text{ jne.}$$

Siit ***teoreem:*** *Kolmanda järgu determinandi väärtus võrdub mingi rea või veeru elementide ja neile elementidele vastavate adjunktide korrutiste summaga.*

Determinandi arend rea või veeru elementide järgi võimaldab kolmanda järgu determinanti arvutada teise järgu determinantide abil.

Näide. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Arendades esimese veeru elementide järgi, saame

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -2.$$

Teoreem. *Kui mingi rea (või veeru) iga element on kujutatud kahe liidetava summana, siis determinanti on võimalik kujutada kahe determinandi summana.*

Nii näiteks

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Tõestus. Arendades kirjutatud determinanti võrduse vasakul poolel esimese veeru elementide järgi saame

$$\Delta = (a_1' + a_1'')A_1 + (a_2' + a_2'')A_2 + (a_3' + a_3'')A_3 =$$
$$= (a_1'A_1 + a_2'A_2 + a_3'A_3) + (a_1''A_1 + a_2''A_2 + a_3''A_3) =$$
$$= \Delta' + \Delta'',$$ m. o. t. t.

Teoreem. *Mingi rea (või veeru) kõigi elementide ühise teguri saab tuua determinandi märgi ette.*

Nii näiteks

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Tõestus. Arendades determinante esimese veeru elementide järgi saame

$$ka_1A_1 + ka_2A_2 + ka_3A_3 = k(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) = k\Delta,$$

m. o. t. t.

Teoreem. *Kahe paralleelse rea (või veeru) ümberpaigutamisel determinandi absoluutsuurus ei muutu, kuid märk muutub vastupidiseks.*

Tõestus. Näitame, et näiteks determinandid

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

on absoluutsuuruselt võrdsed, kuid märgilt vastupidised. Tõepoolest, elementide a_1, a_2 ja a_3 adjunktid on mõlemas vaadeldavas determinandis esitatavad teise järgu determinandina, mille elemendid on samad, kuid veerud on ümber paigutatud; järelikult elementide a_1, a_2 ja a_3 vastavad adjunktid erinevad ainult märkidelt. Arendades mõlemaid determinante esimese veeru elementide järgi veendume teoreemi kehtivuses, m. o. t. t.

Teoreem. *Kui determinandi mingi rea (või veeru) elemendid on võrdelised (või erijuhtumil võrdsed) teise rea (või veeru) vastavate elementidega, siis determinant võrdub nulliga.*

Tõestus. Eeldame, et teise veeru elemendid on võrdelised esimese veeru elementidega, s. o.

$$b_1 = ka_1, \quad b_2 = ka_2, \quad b_3 = ka_3.$$

Determinandi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

kolmanda veeru elementide adjunktid võrduvad kõik nulliga kui võrdeliste veergudega teise järgu determinandid ja seepärast

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = 0,$$

m. o. t. t.

Teoreem. *Mingi rea (või veeru) elementide ja teise rea (või veeru) vastavate elementide adjunktide korrutiste summa võrdub nulliga.*

Tõestus. Näitame näiteks, et esimese veeru elementide ja teise veeru vastavate elementide adjunktide korrutiste summa võrdub nulliga:

$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0.$$

Determinandi arendis teise veeru elementide järgi

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3$$

asendame teise veeru elemendid b_1, b_2 ja b_3 esimese veeru elementidega; siis saame determinandi arendi, millel teise veeru elemen-

did võrduvad vastavalt esimese veeru elementidega, kuid niisugune determinant võrdub nulliga, m. o. t. t.

Vaatleme tabelit

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ k_1a_1 + k_2a_2 & k_1b_1 + k_2b_2 & k_1c_1 + k_2c_2. \end{matrix}$$

Kui selle tabeli esimese ja teise rea elemente korrutada vastavalt k_1-ga ja k_2-ga ning liita veergude kaupa, siis saame summana kolmanda rea elemendid. Me ütleme, et kolmas rida on esimese ja teise rea lineaarseks kombinatsiooniks koefitsientidega, mis võrduvad k_1-ga ja k_2-ga.

Näide. Tabeli

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 11 & 1 & 4 \end{matrix}$$

kolmas rida on kahe esimese rea lineaarne kombinatsioon koefitsientidega 2 ja 3, sest

$$11 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3; \quad 1 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1); \quad 4 = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2.$$

Teoreem. *Kui determinandi mingi rida (või veerg) on kahe teise rea (või veeru) lineaarne kombinatsioon, siis determinant võrdub nulliga.*

Tõestus. Eeldame, et kolmas rida on esimese ja teise rea lineaarne kombinatsioon koefitsientidega k_1 ja k_2, s. o.

$$a_3 = k_1a_1 + k_2a_2, \quad b_3 = k_1b_1 + k_2b_2, \quad c_3 = k_1c_1 + k_2c_2. \qquad (2)$$

Determinant on esitatav kahe liidetava summana

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ k_1a_1 & k_1b_1 & k_1c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ k_2a_2 & k_2b_2 & k_2c_2 \end{vmatrix},$$

milledest kumbki kui võrdeliste ridadega determinant võrdub nulliga, m. o. t. t.

Teoreem. *Kui determinant võrdub nulliga ja vähemalt ühe elemendi adjunkt ei võrdu nulliga, siis üks ridadest (või veergudest) on kahe teise lineaarne kombinatsioon.*

Tõestame näiteks, et kui $\Delta = 0$, kuid adjunkt $C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, siis kolmas rida on kahe esimese lineaarne kombinatsioon.

Tõestus. Arendame Δ kolmanda veeru elementide järgi:

$$c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = 0.$$

Kasutame samasusi

$$a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 = 0 \quad \text{ja} \quad b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 = 0,$$

millest

$$a_3 = -\frac{C_1}{C_3}a_1 - \frac{C_2}{C_3}a_2, \quad b_3 = -\frac{C_1}{C_3}b_1 - \frac{C_2}{C_3}b_2, \quad c_3 = -\frac{C_1}{C_3}c_1 - \frac{C_2}{C_3}c_2.$$

Võttes $k_1 = -\frac{C_1}{C_3}$ ja $k_2 = -\frac{C_2}{C_3}$ saame seosed (2), m. o. t. t.

§ 31. Kolme tundmatuga kolme lineaarvõrrandi süsteemi lahendamine ja uurimine.

Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (I)$$

Koostame tundmatute koefitsientidest determinandi süsteemis

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Oletame, et süsteem (I) omab lahendit x, y, z. Korrutame antud võrrandeid järjestikku esimese veeru elementide adjunktidega ja liidame liikmeti, siis saame

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)y + \\ + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)z = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3.$$

Selles võrrandis on x-i koefitsient Δ, y-i ja z-i koefitsiendid võrduvad nulliga, kuid vaba liige $d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 = \Delta_1$ saadakse determinandi Δ arendis x-i koefitsientide asendamisest vabaliikmetega d_1, d_2, d_3. Niisiis, antud süsteemi järeldusena on saadud võrrand, mis sisaldab ainult x-i. Sama meetodiga on tuletatavad võrrandid, mis sisaldavad ainult y-i ja z-i. Esimesel juhtumil piisab, kui süsteemi (I) võrrandeid järjestikuselt korrutada B_1-ga, B_2-ga, B_3-ga ja teisel juhtumil C_1-ga, C_2-ga, C_3-ga ning liikmeti liita. Niisiis, süsteemist (I) tuleneb järgmine tuletussüsteem:

$$\Delta x = \Delta_1, \quad \Delta y = \Delta_2, \quad \Delta z = \Delta_3. \qquad (I')$$

Süsteemi uurimine toimub vastavalt järgmistele võimalikkudele juhtumeile.

1° $\Delta \neq 0$. Süsteem (I′) omab ühteainsat lahendit

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{II}$$

Järelikult süsteemi (I) a i n u s v õ i m a l i k lahend sisaldub valemeis (II). Otsese kontrollimisega veendume, et (II) on süsteemi (I) lahendiks. Näitena teostame asenduse esimeses võrrandis:

$$a_1x+b_1y+c_1z=\frac{1}{\Delta}(a_1\Delta_1+b_1\Delta_2+c_1\Delta_3)=$$

$$=\frac{1}{\Delta}[a_1(d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3)+b_1(d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3)+$$

$$+c_1(d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3)]=\frac{1}{\Delta}[d_1(a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1)+$$

$$+d_2(a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2)+d_3(a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3)]=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\cdot d_1\cdot\Delta=d_1.$$

Võrdused (II) väljendavad C r a m e r i r e e g l i t, mille sõnastus jääb muutumatuks kolme tundmatuga kolme lineaarvõrrandi süsteemi puhul.

N ä i d e 1. Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x+\ y+\ z&=3\\ x-\ y+3z&=7\\ 2x+3y-\ z&=0. \end{aligned}$$

L a h e n d u s:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\2&3&-1\end{vmatrix}=4\neq 0,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}3&1&1\\7&-1&3\\0&3&-1\end{vmatrix}=4,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&3&1\\1&7&3\\2&0&-1\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&-1&7\\2&3&0\end{vmatrix}=8.$$

Crameri reegli järgi leiame süsteemi üheainsa lahendi

$$x=\frac{4}{4}=1,\quad y=\frac{0}{4}=0,\quad z=\frac{8}{4}=2.$$

2° $\Delta=0$, kuid vähemalt üks ta adjunktidest ei ole null ja

vähemalt üks determinantidest Δ_1, Δ_2 ja Δ_3 ei ole 0. Ilma üldsust piiramata võime eeldada, et

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tõepoolest, võrrandite numeratsiooni muutmisega ja tundmatutega veergude ümberpaigutamisega saab nullist erinevat adjunkti alati paigutada ülemisse nurka. Eelmise paragrahvi teoreemi järgi on kolmanda võrrandi tundmatute koefitsientidega rida esimese kahe rea vastavate koefitsientide lineaarne kombinatsioon:

$$a_3 = k_1a_1 + k_2a_2,\ b_3 = k_1b_1 + k_2b_2,\ c_3 = k_1c_1 + k_2c_2. \qquad (1)$$

Järelikult, kolmanda võrrandi vasaku poole saame, kui esimese kahe võrrandi vasakud pooled korrutame vastavalt k_1-ga ja k_2-ga ning liidame. On kergesti näha, et $d_3 \neq k_1d_1 + k_2d_2$. Tõepoolest, kui kehtiks seos $d_3 = k_1d_1 + k_2d_2$, siis vastandina eeldusele $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Vaadeldaval juhtumil on süsteem (I) vasturääkiv. Tõepoolest, kui tal oleks lahend, siis kolmanda võrrandi vasaku poole väärtus oleks

$$k_1(a_1x + b_1y + c_1z) + k_2(a_2x + b_2y + c_2z) = k_1d_1 + k_2d_2,$$

mis ei võrdu d_3-ga.

N ä i d e 2. Uurida süsteem

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= -1 \\ 11x + y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

L a h e n d u s:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 11 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Süsteem ei oma lahendeid. Kui esimese võrrandi vasakut poolt korrutada 2-ga ja teisel 3-ga ning liita, siis saadakse kolmanda võrrandi vasak pool:

$$2(x + 2y - z) + 3(3x - y + 2z) = 11x + y + 4z.$$

Kuid kolmanda võrrandi vabaliiget ei saa sama kombinatsiooniga esimese ja teise võrrandi vabaliikmest.

3^0 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, kuid et vähemalt üks Δ adjunktidest ei oleks null. Eeldame endiselt, et adjunkt $C_3 \neq 0$. Nüüd liitub seostele (1) seos

$$d_3 = k_1 d_1 + k_2 d_2$$

samade koefitsientidega k_1 ja k_2 *.

Korrutades esimest ja teist võrrandit vastavalt arvudega k_1 ja k_2 saame pärast liitmist kolmanda võrrandi. Nii on kolmas võrrand esimese kahe võrrandi järeldus, teda rahuldab „lühendatud" süsteemi

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}\right\}$$

mistahes lahend.

Tingimusest $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ järeldub, et lühendatud süsteem on x-i ja y-i suhtes lahendatav:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - c_1z & b_1 \\ d_2 - c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 - c_1z \\ a_2 & d_2 - c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Viimaseis valemeis võib z-le omistada mistahes arvulisi väärtusi. Seepärast lühendatud süsteem ja temaga koos süsteem (I) omab lõpmatu hulga lahendeid.

Näide 3. Asendame näite 2 kolmanda võrrandi vabaliikme arvuga 3, siis viimane võrrand omandab kuju

$$11x + y + 4z = 3.$$

See võrrand saadakse järeldusena esimesest ja teisest võrrandist arvudega 2 ja 3 korrutamise ning liikmeti liitmise teel. Kaks esimest võrrandit

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

---

* Arendades Δ_3 kolmanda veeru elementide järgi näeme, et ka $k_1 = -\frac{C_1}{C_3}$ ja $k_2 = -\frac{C_2}{C_3}$, samuti nagu seostes (1).

moodustavad lühendatud süsteemi. Lahendades x-i ja y-i suhtes viimase süsteemi saame

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3+z & 2 \\ -1-2z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{1-3z}{7}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3+z \\ 3 & -1-2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{5z-10}{7}.$$

4⁰ Δ kõik adjunktid võrduvad nulliga, kuid tundmatute koefitsientidest vähemalt üks ei ole null ja vähemalt üks determinantide Δ_1, Δ_2 ja Δ_3 adjunktidest ei ole null. Olgu näiteks $a_1 \neq 0$. Tingimusest

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

järeldub esimese ja teise võrrandi koefitsientide võrdelisus

$$a_2=ka_1, \quad b_2=kb_1, \quad c_2=kc_1. \tag{2}$$

Analoogiliselt leiame, et esimese ja kolmanda võrrandi koefitsiendid on võrdelised:

$$a_3=la_1, \quad b_3=lb_1, \quad c_3=lc_1. \tag{3}$$

Olgu näiteks

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

siis $d_2 \neq kd_1$.

Järelikult vaadeldaval juhtumil e i o m a s ü s t e e m l a h e n d e i d.

N ä i d e 4. Uurida süsteem

$$\begin{aligned} x-y+2z&=2 \\ 2x-2y+4z&=3 \\ 3x-3y+6z&=6. \end{aligned}$$

Antud näites saadakse teise võrrandi tundmatute koefitsiendid esimese võrrandi koefitsientide korrutamisel arvuga 2, kuid teise võrrandi vabaliiget ei saa esimese võrrandi vabaliikme korrutamisel arvuga 2. Süsteem on vasturääkiv.

5. Determinantide Δ, Δ_1, Δ_2 ja Δ_3 kõik adjunktid võrduvad nulliga, kui tundmatute koefitsientidest vähemalt üks ei ole null. Olgu näiteks $a_1 \neq 0$.

Tingimuse

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

järgi järelikult liituvad seostele (2) ja (3) vastavalt seosed

$$d_2 = kd_1 \quad \text{ja} \quad d_3 = ld_1.$$

Nii on teine ja kolmas võrrand esimese järeldusteks. Seepärast antud süsteemi lahendiks on ainult ühest esimesest võrrandist koosneva lühendatud süsteemi iga lahend:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1.$$

Sellest võrrandist leiame, et

$$x = \frac{d_1 - b_1y - c_1z}{a_1},$$

kus y ja z võivad omada mistahes arvulisi väärtusi. Järelikult, süsteem omab lõpmatu hulga lahendeid.

Näide 5. Asendame näites 4 teise võrrandi vabaliikme arvuga 4. Siis teine võrrand omandab kuju

$$2x - 2y + 4z = 4.$$

Uues süsteemis saadakse teine ja kolmas võrrand esimesest võrrandist korrutamisel vastavalt arvudega 2 ja 3. Jättes kõrvale teise ja kolmanda võrrandi ja lahendades esimese võrrandi x-i suhtes saame süsteemi kõigi lahendite üldkuju

$$x = y - 2z + 2.$$

6⁰ Tundmatute kõik koefitsiendid võrduvad nulliga. Süsteem on vasturääkiv sel juhtumil, kui vähemalt üks vabaliikmeist ei ole null, ning on rahuldatud samaselt, kui kõik vabaliikmed võrduvad nulliga.

§ 32. Homogeensed süsteemid.

Definitsioon. *Lineaarvõrrandite süsteemi nimetatakse homogeenseks, kui kõik vabaliikmed võrduvad nulliga.* Kolme tundmatuga kolme võrrandi homogeenne süsteem omab kuju

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (\mathrm{I}'')$$

Homogeenne süsteem ei saa olla vasturääkiv. Tõepoolest, iga homogeenne süsteem omab nullilist ehk triviaalset lahendit:

$$x = y = z = 0.$$

Kui süsteemi determinant on nullist erinev, $\Delta \neq 0$ (vaata eelmise §-i juhtum 1⁰), siis Crameri reegli järgi omab süsteem ainult ühte lahendit. Antud juhtumil on see lahend triviaalne. Kui $\Delta = 0$, siis koosneb süsteem kahest sõltumatust võrrandist, kui adjunktidest vähemalt üks erineb nullist (juhtum 3⁰), või ühest sõltumatust võrrandist, kui kõik adjunktid võrduvad nulliga (juhtum 5⁰). Järelikult $\Delta = 0$ puhul omab süsteem lõpmatu hulga lahendeid, nende hulgas mittetriviaalseid lahendeid. Homogeense süsteemi uurimise tulemus võimaldab sõnastada homogeensete võrrandite järgmise teoreemi.

Teoreem. *Selleks, et homogeensete võrrandite süsteem (I″) omaks lahendeid, mis erinevad triviaalseist, on tarvilik ja piisav, et tema determinant võrduks nulliga.*

Näide 6. Homogeenne süsteem

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 0 \end{aligned}\right\},$$

mis vastab näites 1 vaadeldud süsteemile, omab ainult triviaalset lahendit, sest $\Delta = 4 \neq 0$.

Näide 7. Homogeenne süsteem, mis vastab näites 2 vaadeldud süsteemile, omab mittetriviaalseid lahendeid. Lahendades lühendatud süsteemi

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

saame

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 2 \\ -2z & -1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{3z}{-7}; \quad y = \frac{-5z}{-7},$$

millest määrame y-i ja z-i täpsusega kuni võrdetegurini:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{-7}.$$

Näide 8. Homogeense süsteemi lahendamiseks, mis vastab näites 4 vaadeldud süsteemile, piisab, kui lahendada ainult esimene võrrand $x - y + 2z = 0$, millest $x = y - 2z$.

§ 33. Lineaarsüsteemide lahendamise elementaarsed meetodid.

Determinantide teooria võimaldab teostada võrrandisüsteemi uurimist *üldkujul* ja tuletada *üldvalemid*, mis väljendavad lahendit tundmatute koefitsientide ja vabaliikmete abil: Kuid praktiliselt võib süsteemi lahendamiseks kasutada elementaarseid meetodeid, üldvalemeid rakendamata. Elementaarsete meetodite olemus seisneb tundmatute järjestikuses eemaldamises (elimineerimises). Olgu näiteks antud kahe tundmatuga kahe võrrandi süsteem

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Praktiliselt pakub huvi juhtumi vaatlemine, kus süsteemi (I) koefitsientidest ükski *ei võrdu nulliga*. Eeldame vastupidist. Olgu näiteks $b_1 = 0$; siis esimene võrrand omandab kuju $a_1x = c_1$, millest leiame x-i väärtuse, ja teisest võrrandist määrame y-i vastava väärtuse.

Niisiis, eeldame, et koefitsientidest a_1, b_1, a_2, b_2 ükski ei võrdu nulliga.

Võtame antud süsteemi ühe võrrandi (näiteks esimese):

$$a_1x + b_1y = c_1. \tag{1}$$

See võrrand omab lõpmatu hulga lahendeid, mis saame, kui anname ühele tundmatule, näiteks x-le, mistahes arvulisi väärtusi ja määrame võrrandist (1) teise tundmatu vastavad väärtused:

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}. \tag{1'}$$

Arvude paar

$$x,\ y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \tag{2}$$

on mistahes x-i puhul võrrandi (1) lahendiks, s. o. kehtib samasus

$$a_1x + b_1\frac{c_1 - a_1x}{b_1} \equiv c_1.$$

Nüüd määrame x-i väärtuse nii, et arvude paar (2) oleks süsteemi (I) teise võrrandi lahendiks:

$$a_2x + b_2\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2. \tag{3}$$

Niisiis, kui antud süsteem (I) omab lahendit, siis määratakse see valemitega (2), kus x on võrrandi (3) lahendiks. Ümberpöördult eeldame, et võrrand (3) omab lahendit x, see tähendab, et arvude paar (2) rahuldab süsteemi teist võrrandit:

$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Süsteemi esimene võrrand rahuldub samaselt mistahes x-i puhul $\left(\text{kus } y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}\right)$ ja erijuhtumil võrrandist (3) leitud x-i väärtuse puhul. Kui antud süsteem ei oma lahendeid, siis võrrand (3) ei oma samuti lahendeid. Ümberpöördult, kui võrrand (3) ei oma lahendeid, siis süsteem (I) ei oma lahendeid.

Niisiis, süsteemi (I) lahendamine taandub ühe tundmatuga ühe võrrandi (3) lahendamisele ja teise tundmatu arvutamisele valemi (1′) järgi. Üleminekut süsteemilt (I) võrrandile (3), mis ei sisalda y-t, nimetatakse tundmatu y e e m a l d a m i s e k s (elimineerimiseks). Esitatud meetod kannab a s e n d u s m e e t o d i nimetust.

Tundmatu eemaldamine (elimineerimine) on teostatav ka teise meetodiga. Tähistame esimese ja teise võrrandi vasakud pooled lühidalt f_1-ga ja f_2-ga ning kirjutame süsteemi (I) järgmiselt:

$$f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2. \tag{I}$$

Olgu m_1 ja m_2 kaks mistahes nullist erinevat arvu. Korrutame esimese võrrandi arvuga m_1 ja teise arvuga m_2 ning liidame liikmeti. Ühendades leitud uue võrrandiga ühe võrrandeist (I) (näiteks esimese) saame süsteemi

$$f_1 = c_1, \quad m_1f_1 + m_2f_2 = m_1c_1 + m_2c_2. \tag{I′}$$

Kui arvude paar x ja y on süsteemi (I) lahendiks, siis f_1-e ja f_2-e arvulised väärtused on vastavalt c_1 ja c_2 ja seepärast on süsteem (I′) rahuldatud. Ümberpöördult, olgu x ja y süsteemi (I′) lahendiks, siis f_1-e väärtus on c_1; lahutades teise võrduse (I′) mõlemast poolest m_1c_1 saame $m_2f_2 = m_2c_2$. Jagades m_2-ga leiame $f_2 = c_2$, s. o. arvude paar x ja y on süsteemi (I) lahendiks. *Järelikult, süsteemi (I) iga lahend on süsteemi (I′) lahendiks ja ümberpöördult — süsteemi (I′) iga lahend on süsteemi (I) lahendiks.* Niisuguseid süsteeme nimetatakse e k v i v a l e n t s e t e k s (samaväärseteks).

Tegurid m_1 ja m_2 võib valida nii, et teine võrrand (I′) ei sisaldaks ühte tundmatuist. Võtame näiteks $m_1 = b_2$ ja $m_2 = -b_1$, siis

saame võrrandi, mis ei sisalda tundmatut y. Lahendades selle võrrandi leiame x-i vastava väärtuse esimesest võrrandist. Seda meetodit nimetatakse koefitsientide võrdlusmeetodiks.

Kui antud süsteem ei oma lahendit, siis ei oma temast saadud süsteem (I′) samuti lahendit.

Need meetodid laiendatakse mistahes arvu tundmatutega süsteemidele. Vaatleme näiteks kolme tundmatuga kolme võrrandi süsteemi

$$f_1 = d_1, \quad f_2 = d_2, \quad f_3 = d_3. \tag{I}$$

Kasutades asendusmeetodit avaldame esimesest (või mingist teisest) võrrandist ühe tundmatu, näiteks z-i. Asetades avaldise z teise ja kolmandasse võrrandisse saame kaks võrrandisüsteemi kahe tundmatuga x ja y. Lahendades selle süsteemi leiame x-i ja y-i ja siis määrame z-i väärtuse. Arutlused, mis põhjendavad seda meetodit, ei erine millegi poolest arutlusist kahe võrrandiga süsteemi puhul. Koefitsientide võrdlusmeetodit kasutatakse järgmisel kujul. Võtame näiteks kaks esimest võrrandit. Korrutades neid vastavalt nullist erinevate teguritega m_1 ja m_2 ning liites saame võrrandi

$$m_1 f_1 + m_2 f_2 = m_1 d_1 + m_2 d_2. \tag{4}$$

Tegurid m_1 ja m_2 valime nii, et võrrand (4) ei sisaldaks ühte tundmatuist (näiteks z). Seejärel, võttes esimese ja kolmanda (või teise ja kolmanda) võrrandi, korrutame neid nullist erinevate teguritega n_1 ja n_2 ning liidame, saame

$$n_1 f_1 + n_2 f_3 = n_1 d_1 + n_2 d_3. \tag{5}$$

Arvud n_1 ja n_2 valime nii, et võrrand (5) ei sisaldaks z-i.

Ühendades nendega ühe võrrandeist (I) (näiteks esimese), saame süsteemi

$$f_1 = d_1, \; m_1 f_1 + m_2 f_2 = m_1 d_1 + m_2 d_2, \; n_1 f_1 + n_2 f_2 = n_1 d_1 + n_2 d_3. \tag{I′}$$

Näitame, samuti nagu kahe võrrandiga süsteemi puhulgi, et süsteemid (I) ja (I′) on ekvivalentsed. Nii taandub ülesanne kahe tundmatuga x ja y kahe võrrandi (4) ja (5) lahendamisele ja z-i vastava väärtuse leidmisele võrrandist $f_1 = d_1$.

Real erijuhtumeil, kasutades antud süsteemi eriomadusi, saab kasutada võtteid, mis lihtsustavad lahendusprotsessi.

Näiteid. 1. Lahendada süsteem

$$x+y=a,\quad x+z=b,\quad y+z=c.$$

Lahendus. Liites liikmeti kõik kolm võrrandit ja jagades 2-ga saame

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Lahutades liikmeti kolmanda võrrandi leiame

$$x=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}$$

ja analoogiliselt

$$y=\frac{a-b+c}{2},\quad z=\frac{-a+b+c}{2}.$$

2. Lahendada süsteem

$$\frac{x+a}{l}=\frac{y+b}{m}=\frac{z+c}{n},\quad Ax+By+Cz=D.$$

Lahendus. Võtame tarvitusele uue tundmatu u, nii et

$$\frac{x+a}{l}=\frac{y+b}{m}=\frac{z+c}{n}=u,$$

millest

$$x=lu-a,\quad y=mu-b,\quad z=nu-c. \tag{6}$$

Asendades need väärtused süsteemi viimasesse võrrandisse saame

$$(Al+Bm+Cn)u-Aa-Bb-Cc=D, \tag{7}$$

millest

$$u=\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Al+Bm+Cn}\ \text{(tingimusel, et } Al+Bm+Cn\neq 0).$$

Analoogilised avaldised leiame y-le ja z-le. Võrrand (7) ja järelikult ka süsteem on vasturääkiv, kui $Al+Bm+Cn=0$ ja $Aa+Bb+Cc+D\neq 0$.

Kui $Al+Bm+Cn=0$ ja $Aa+Bb+Cc+D=0$, siis süsteem omab lõpmatu hulga lahendeid, mida saab väljendada valemitega (6), kus u on mistahes arv.

3. Lahendada süsteem

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{a+b}{a-b};\quad ax+by=a-c\ \text{(kus } a\neq b).$$

L a h e n d u s. Esimene võrrand on esitatud võrde kujul, koostame tuletatud võrde järgmiselt:

$$\frac{(x+y)+(x-y)}{(x+y)-(x-y)}=\frac{(a+b)+(a-b)}{(a+b)-(a-b)} \quad \text{ehk} \quad \frac{x}{y}=\frac{a}{b}$$

ehk lõpuks $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=u$ ja $x=au$, $y=bu$.

Asetades teise võrrandisse leiame $u=\frac{a-c}{a^2+b^2}$.

Järelikult $x=\frac{a(a-c)}{a^2+b^2}$, $y=\frac{b(a-c)}{a^2+b^2}$.

4. Lahendada süsteem

$$\left.\begin{aligned} x+ay+a^2z+a^3&=0\\ x+by+b^2z+b^3&=0\\ x+cy+c^2z+c^3&=0 \end{aligned}\right\},$$

kus a, b ja c erinevad üksteisest paarikaupa.

L a h e n d u s. Lahutades teise võrrandi esimesest saame

$$(a-b)y+(a^2-b^2)z+(a^3-b^3)=0.$$

Jagame vahega $a-b$ (sest $a\neq b$):

$$y+(a+b)z+(a^2+ab+b^2)=0. \qquad (8)$$

Analoogiliselt, lahutades esimesest võrrandist kolmanda võrrandi leiame

$$y+(a+c)z+(a^2+ac+c^2)=0;$$

lahutades viimase võrrandi eelmisest liikmeti, eemaldame (eliminеerime) y-i:

$$(b-c)z+(ab-ac+b^2-c^2)=0,$$

millest $z=-(a+b+c)$. Võrrandist (8) saame $y=ab+bc+ac$ ja lõpuks, kasutades süsteemi esimest võrrandit, leiame $x=-abc$.

5. Lahendada süsteem

$$\frac{2}{x-1}+\frac{5}{y-2}=1, \quad \frac{1}{x-1}+\frac{3}{y-2}=2.$$

L a h e n d u s. Võtame tarvitusele abitundmatud, võttes

$$\frac{1}{x-1}=u \text{ ja } \frac{1}{y-2}=v$$

saame

$$\left.\begin{aligned} 2u + 5v &= 1 \\ u + 3v &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

Korrutades teise võrrandi 2-ga ja lahutades esimesest saame $v = 3$, $u = -7$.

Seostest $\frac{1}{x-1} = u$, $\frac{1}{y-2} = v$ leiame $x = \frac{6}{7}$, $y = \frac{7}{3}$.

II OSA.

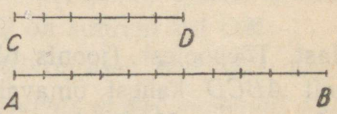
REAALARVUDE KORPUS.

IV peatükk.

Reaalarvud.

§ 34. Põhimõisted.

Suuruste mõõtmise ülesanne tekitab vajaduse arvu mõiste edasiseks laiendamiseks, sest p i d e v a t e suuruste mõõtmisel osutub ratsionaalarvude korpus mitteküllaldaseks. Peatume lõikude mõõtmise ülesandel. Kujutleme sirgjoont kui pidevat punktide hulka (allpool näitame, milles seisneb sirgjoone pidevuse omadus). Valime mõõtühikuks mingi sirglõigu *CD*.



Joon. 5.

Definitsioon. *Sirglõiku AB* (joonis 5) *nimetatakse CD-ga ühismõõduliseks, kui sirglõiku CD saab jaotada n võrdseks osaks nii, et* $\frac{1}{n}$ *CD-st mahuks AB-le mingi täisarv m korda.*

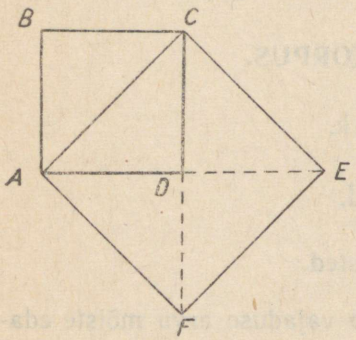
Arv $\frac{m}{n}$ väljendab sirglõigu *AB* pikkust mõõtühiku *CD* puhul. Näitame, et on olemas *CD*-ga ühismõõdutuid lõike, s. o. järgmise omadusega: *ükskõik kui mitmeks n võrdseks osaks me mõõtühikut CD jaotaksimegi, ikka ei mahuks* $\frac{1}{n}$ *temast täisarv korda antud lõigule.* Et selles veenduda, piisab ainult ühe näite toomisest. Märgime ära eelnevalt ühe aritmeetilise fakti: *pole olemas ratsionaalarvu, mille ruut võrdub arvuga 2.*

Tõepoolest, kui oleks olemas niisugune ratsionaalarv, mille ruut võrdub arvuga 2, siis võrrand $x^2 = 2$ ehk $x^2 - 2 = 0$ omaks vähemalt ühte ratsionaalset lahendit. Antud võrrandi võimalikud rat-

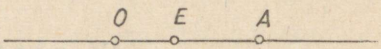
sionaalsed lahendid peaksid olema täisarvud ja arvu —2 jagajad, s. o. arvud ± 1 ja ± 2, kuid ükski neist arvudest ei rahulda antud võrrandit.

Teoreem. *Ruudu diagonaal on tema küljega ühismõõdutu.*

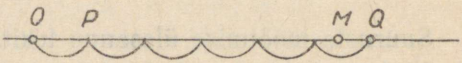
Tõestus. Olgu antud ruut *ABCD*. Ruudu *ABCD* diagonaalile ehitatud ruudu *ACEF* pindala on kaks korda suurem *ABCD* pind-



Joon. 6.



Joon. 7.



Joon. 8.

alast. Tõepoolest (joonis 6), ruut *ACEF* on koostatav neljast ja ruut *ABCD* kahest omavahel võrdsest võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast. Vastandina väitele oletame, et lõigud *AB* ja *AC* on ühismõõdulised, siis on olemas lõik, mis mahub (jäägita) p korda lõigule *AB* ja q korda lõigule *AC*. Võttes selle lõigu mõõtühikuks leiame, et

$$\text{pindala } ABCD = p^2 \text{ ja pindala } ACEF = q^2,$$

järelikult $q^2 = 2p^2$, millest $2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2$, mis aga on võimatu. Järelikult lõigud *AB* ja *AC* on ühismõõdutud, m. o. t. t.

Nagu teada, iga ratsionaalarv $\frac{m}{n}$ on kujutatav arvsirgel mingi punktina *A*; lõik *OA* on ühiklõiguga ühismõõduline: tema pikkus väljendub ratsionaalarvuga $\left(\frac{m}{n}\right)$ (joonis 7). Ümberpöördult, igale lõigule *OA*, mis on ühiklõiguga ühismõõduline, saab seada vastavaks ratsionaalarvu. Kui lõik *OA* on ühiklõiguga *OE* ühismõõdutu, siis lõigu *OA* pikkusele ei saa vastavaks seada ühtegi ratsionaalarvu. Kui paigutada mõttes sirgele punkte, mis kuju-

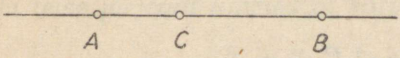
tavad kõikvõimalikke ratsionaalarve, siis sirge ei „täitu" nende „ratsionaalsete" punktidega, vaid temale jäävad tühikud. Neid tühikuid moodustavad ühiklõiguga ühismõõduta lõikude otspunktid, kui paigutada need lõigud alates punktist O. Ühe niisuguse tühiku saame, kui ehitame ruudu küljega OE ja paigutame ehitatud ruudu diagonaali sirgele alates punktist O. Tühikute olemasolu näitab ratsionaalarvude korpuse ebatäiuslikkust võrreldes sirgjoone kõigi punktide hulgaga. Sirglõikude mõõtmiseks kõlbliku arvhulga ehitamine nõuab ratsionaalarvude korpuse laiendamist. Geomeetriliste objektide põhiomaduste kirjeldus antakse geomeetriliste aksioomide süsteemiga ja kuulub geomeetria kursusse. Märgime siin ära ainult järgmised sirgjoonele omased põhiomadused.

I. ***Archimedese aksioom.*** *Missugused oleksidki sirglõigud OP ja OM, ikkagi on olemas niisugune naturaalarv n, et*

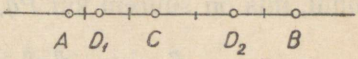
$$n \cdot OP > OM.$$

Selgitus. Kui väike olekski sirglõik OP (joonis 8) ja kui kaugel asukski punkt M punktist O, ometi paigutades sirgele sirglõiku OP järjestikuselt küllalt suur arv korda, saame punkti Q, mis asetseb paremal pool punkti M, nii et OQ on suurem kui OM.

II. ***Tiheduse omadus. Aksioom:*** *Missugused oleksidki sirge kaks erinevat punkti A ja B, ikkagi on olemas sirgel vähemalt üks*



Joon. 9.



Joon. 10.

punkt C, mis asetseb A ja B vahel (joonis 9).

Järeldus. On olemas lõpmatu hulk sirge punkte, mis asetsevad A ja B vahel. Tõepoolest, sirgel on olemas (vähemalt üks punkt) punkt D_1, mis asetseb A ja C vahel, ja punkt D_2, mis asetseb C ja B vahel (joonis 10). Edasi, igale paarile AD_1, D_1C, CD_2, D_2B saab leida vahepealse punkti. Seda vahepealsete punktide leidmise protsessi saab jätkata piiramatult.

III. ***Pidevuse aksioom.*** *Kui sirgele paigutatud lõikude lõpmatu järjend A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ... evib järgmisi omadusi:*

1⁰ *järgnev lõik sisaldub eelmises;*

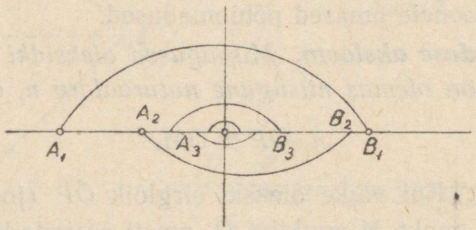
2⁰ *lõik A_nB_n saab kuitahes väikeseks n-i küllalt suure väärtuse puhul* *,

siis on olemas üksainus punkt, mis kuulub antud järjendi kõikidele lõikudele.

See aksioom kannab kuhjuvate lõikude aksioomi nime. Joonisel 11 on antud selle printsiibi geomeetriline selgitus.

Kõrvutame ratsionaalarvude korpuse sirgjoone punktide hulgaga.

I. Ratsionaalarvude korpuses on Archimedese aksioom täidetud järgmisel kujul: *missugused oleksidki kaks antud positiivset ratsio-*



Joon. 11.

naalarvu r ja R, ikkagi on olemas niisugune naturaalarv n, et $nr > R$.

Tõestus. Tõepoolest, olgu $r = \frac{p}{q}$ ja $R = \frac{P}{Q}$; siis mistahes *n*-i puhul, mis on suurem kui Pq,

$$nr = n\frac{p}{q} > Pq \cdot \frac{p}{q} = pP \geqslant P \geqslant \frac{P}{Q} = R, \text{ m. o. t. t.}$$

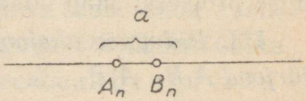
Niisiis, kui väike olekski ratsionaalarv $r > 0$, küllalt suure *n*-i puhul on arv *nr* suurem kui mistahes etteantud suur arv *R*.

Arvkorpust, milles on täidetud Archimedese aksioom, nimetatakse Archimedese korpuseks.

II. *Tiheduse omadus on samuti olemas ratsionaalarvude korpuses.* Olgu *a* ja *b* kaks erinevat ratsionaalarvu, $a < b$. On olemas

---

* Selle väite täpne mõte on järgmine: kui väike olekski etteantud lõik α, alati on olemas selline arv *n*, nii et A_nB_n (tähendab ka mistahes järgnev) on väiksem kui α (joonis 12).



Joon. 12.

vähemalt üks arv, mis rahuldab võrratust $a < r < b$. a ja b vahepealse arvuna võib näiteks võtta nende aritmeetilise keskmise. Tõepoolest,

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} < 0 \text{ ja } b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0,$$

järelikult $a < \frac{a+b}{2} < b$.

J ä r e l d u s: *on olemas lõpmatu hulk a ja b vahelisi arve.*

III. *Pidevuse omadus ei kehti ratsionaalarvude korpuses.*

Nimetame r a t s i o n a a l s e k s a r v v a h e m i k u k s $[a, b]$, mis on tõkestatud arvudega a ja b, kõigi ratsionaalarvude x-de hulka, mis asetsevad a ja b vahel, kaasa arvatud ka need arvud ise:

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Definitsioon. *Ratsionaalarvude kaks järjendit*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \text{ ja } b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

moodustavad kuhjuvate ratsionaalsete vahemikkude järjendi

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n] \ldots, \text{ kui}$$

1⁰ *esimese järjendi liikmed ei kahane*

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots . \leqslant a_n \leqslant \ldots$$

ja teise järjendi liikmed ei kasva

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots ;$$

2⁰ *esimese järjendi iga arv on väiksem teise järjendi mistahes arvust;*

3⁰ *küllalt suure n-i puhul võib vahe $b_n - a_n$ teha kuitahes väikeseks, s. o. väiksemaks igast etteantud (kuitahes väikesest) positiivsest arvust.*

Pidevuse puudumine ratsionaalarvude korpuses seisneb niisuguste kuhjuvate vahemikkude järjendite olemasolus, millede jaoks p o l e o l e m a s ratsionaalarvu r, mis on ühine antud järjendi kõigile vahemikkudele, s. o. mis n-i iga väärtuse puhul rahuldaks võrratusi $a_n \leqslant r \leqslant b_n$. Selle näitamiseks piisab ainult ühe näite toomisest (vaata allpool näide 3).

Näide 1. Järjendid

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots \text{ ja } \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

määravad kuhjuvate vahemikkude järjendi

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right], \ldots$$

Tõepoolest, 1^0 esimene järjend kasvab, teine kahaneb; 2^0 mistahes n-i puhul on $\frac{n-1}{n} < \frac{n+1}{n}$ ja 3^0 vahe $\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n}$ võib küllalt suure n-i puhul teha kuitahes väikeseks.

Tõepoolest, olgu $\varepsilon > 0$ mistahes etteantud kuitahes väike arv, siis on

$$\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon$$

iga $n > \frac{2}{\varepsilon}$ puhul. Nii on näiteks $\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} < \frac{1}{100}$, kui $n > 200$, ja $\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} < \frac{1}{1000}$, kui $n > 2000$, jne.

Arv 1 kuulub vaadeldava järjendi kõigisse vahemikesse, sest iga naturaalarvu n puhul on

$$\frac{n-1}{n} < 1 < \frac{n+1}{n}.$$

Näide 2.

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[0, \frac{1}{3}\right], \ldots, \left[0, \frac{1}{n}\right], \ldots$$

Siin on kõigi vahemikkude ühiseks arvuks 0.

Näide 3. Arvust 2 ruutjuure leidmise tuntud protsess täpsusega kuni 1, kuni 0,1, kuni 0,01 jne. on ratsionaalarvude kahe järjendi

$$a_0 = 1, \; a_1 = 1{,}4, \; a_2 = 1{,}41, \ldots \quad \text{(A)}$$
$$b_0 = 2, \; b_1 = 1{,}5, \; b_2 = 1{,}42, \ldots \quad \text{(B)}$$

moodustamine, mis rahuldavad tingimust

$$a_n^2 < 2 < b_n^2 \quad (1)$$

ja mida vaadeldakse kui puudusega ja liiaga teostatud tehete ligikaudseid tulemusi. Vahemikud

$$[1; 2],\ [1{,}4; 1{,}5],\ \ldots,\ [a_n; b_n],\ \ldots$$

moodustavad koonduvate vahemikkude järjendi *.

Näitame, et pole olemas ratsionaalarvu, mis kuulub kõikidesse vahemikkudesse $[a_n; b_n]$. Eeldame vastupidist, et on olemas ratsionaalarv r, mis rahuldab võrratust

$$a_n \leqslant r \leqslant b_n \quad (n \text{ on mistahes naturaalarv});$$

siis

$$a_n^2 \leqslant r^2 \leqslant b_n^2. \qquad (2)$$

Arvude 2 ja r^2 vahe, mis rahuldab võrratusi (1) ja (2), on absoluutsuuruselt väiksem vahest $b_n^2 - a_n^2$;

$$|2 - r^2| < b_n^2 - a_n^2,$$

kuid

$$b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) < 4(b_n - a_n) = \frac{4}{10^n}$$

$[(a_n + b_n) < 4$, sest ükski arvudest a_n ja b_n ei ületa arvu 2$]$. Järelikult kahe määratud ratsionaalarvu 2 ja r^2 vahe võib küllalt suure n-i puhul teha kuitahes väikeseks. See on võimalik ainult siis, kui $r^2 = 2$, mis on aga võimatu (lk. 106).

Viimane näide tõendab, et ratsionaalarvude korpuses on võimalikud vahemikkude järjendid, mis kuhjuvad piltlikult väljendades „tühjale kohale". Selliste tühikute olemasolu sirgel on pidevuse aksioomi aluseľ võimatu.

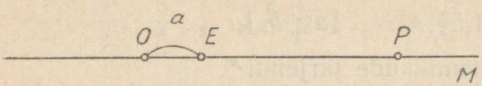
§ 35. Lõikude mõõtmine kümnendsüsteemis.

Vaatleme mingit lõiku OP, mis asetseb sirgel OM (joonis 13). Harilik mõõtmisprotsess seisneb ühiklõigu $OE = a$ järjestikuses paigutamises alates punktist O mööda sirget OP. Archimedese aksi-

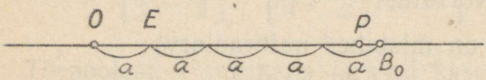
---

* Tingimuste 1° ja 2° täitumine on ilmne. Tingimus 3° on samuti täidetud. Olgu $\varepsilon > 0$ mistahes etteantud (kuitahes väike) arv. Kujutame ε kümnendmurruna (lõpmatu või lõpliku) $\varepsilon = p, q_1 q_2 \ldots$. Kui täisosa $p \neq 0$, siis $\varepsilon \geqslant 1$ ja $n \geqslant 1$ puhul on $b_n - a_n = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$, kui aga $p = 0$, siis viimane võrratus on täidetud iga n-i puhul, mis on suurem kui esimese nullist erineva kümnendkoha number.

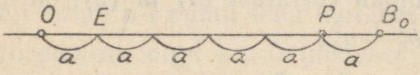
oomi järgi peab see protsess lõppema mingil p-ndal sammul, nii et paigutades lõigu a $p+1$ korda saame lõigu OB_0, mis on suurem kui OP (joonis 14). On võimalikud järgmised kaks juhtumit:



Joon. 13.



Joon. 14.



Joon. 15.

1⁰ Lõik OE mahub OP-le täpselt p korda, seega pikkus OP väljendub täisarvuga p (joonis 15).

2⁰ Lõik OE mahub OP-le p korda ja jäägina jääb üle lõik A_0P, mis on väiksem kui a (joonis 16). Lõik A_0B_0 sisaldab punkti P. Arve p ja $p+1$ vaadeldakse kui OP mõõtmise tulemust puudusega ja liiaga täpsusega kuni 1.

Juhtumil 2⁰ jaotame lõigu $OE = a$ 10-ks võrdseks osaks ja paigutame punktist A_0 alates järjestikuselt $\frac{1}{10}a$. Kui lõik $\frac{1}{10}a$ mahub A_0P-le täisarv q_1 korda, siis väljendub pikkus OP arvuga $p+\frac{q_1}{10} = p, q_1$. Kui jäägiks jäi mingi lõik, mis on väiksem kui $\frac{1}{10}a$, siis arve $p+\frac{q_1}{10}$ ja $p+\frac{q_1+1}{10}$ vaadeldakse kui OP mõõtmise tulemust täpsusega kuni 0,1 puudusega ja liiaga. Paigutades punktist O lõigud OA_1 ja OB_1 pikkusega $p+\frac{q_1}{10}$ ja $p+\frac{q_1+1}{10}$ saame lõigu A_1B_1, mis sisaldab punkti P (joonis 17).

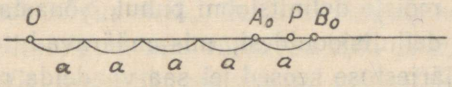
Edasi jaotame ühiklõigu a 100-ks võrdseks osaks ja paigutame järjestikuselt alates punktist A_1 lõigu $\frac{1}{100}a$ jne. See protsess kas lõpeb mingil n-dal sammul, siis lõigu OP pikkus väljendub kas lõpliku kümnendmurruna $p, q_1q_2 \ldots q_n$ (kus p on täisosa ja $q_1, q_2, \ldots, q_n$ on kümnendmärgid), või jätkub piiramatult ja annab tulemusena lõpmatu kümnendmurru

$$p, q_1q_2 \ldots q_n \ldots \qquad (3)$$

Praktikas lõpeb mõõtmisprotsess kümnendsüsteemis alati. Kuitahes suur olekski mõõduriista täpsus, ta võimaldab eristada väikesi suurusi ainult teatava piirini. Praktikas on oluline teada

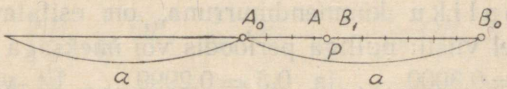
mõõdetava suuruse arvulist väärtust ligikaudselt mingi kindla täpsusjärguga, kuid suuruste absoluutselt täpseks mõõtmiseks, millega opereerib matemaatiline abstraktsioon, ei piisa ratsionaalarvude hulgast.

Oletame algul, et lõik OP on ühiklõiguga OE ühismõõduline ja tema suurus väljendub murruga $\frac{m}{n}$. Mõõtmisprotsessile kümnendsüsteemis vastab hariliku murru $\frac{m}{n}$ muutmine kümnendmurruks.



Joon. 16.

Seepärast OE-ga ühismõõdulise lõigu mõõtmise tulemuseks kümnendsüsteemis on lõplik või lõpmatu perioodiline kümnendmurd. Sümbol (3), mis on saadud OE-ga ühismõõdutu lõigu



Joon. 17.

OP mõõtmise tulemusena, ei saa olla lõplik ega perioodiline kümnendmurd. Oletame, et OE-ga ühismõõdutu lõigu OP mõõtmise tulemusena on saadud perioodiline murd (3) Muutes selle murru harilikuks murruks saame arvu $\frac{m}{n}$. Vaatleme lõiku OP_1, mille pikkus väljendub arvuga $\frac{m}{n}$. Lõik OP_1 on OE-ga ühismõõduline ja seepärast punktid P ja P_1 ei saa ühtida. Lõikude OP ja OP_1 mõõtmise tulemusena saadakse üks ja sama perioodiline murd (3). Järelikult iga lõik A_0B_0, A_1B_1, ..., A_nB_n, ... sisaldab mõlemaid punkte P ja P_1 ning seepärast $PP_1 < A_nB_n = \frac{1}{10^n} OE$, millest $10^n PP_1 < OE$ mistahes (kuitahes suure) naturaalarvu n puhul, mis on vasturääkiv Archimedese aksioomile. Niisiis, kui OP on ühismõõdutu OE-ga, siis sümbol (3) on „mitteperioodiline murd". Sellele sümbolile ei vasta ratsionaalarvude korpuses ükski arv.

§ 36. Positiivsed reaalarvud.

Definitsioon. *Nimetame positiivseks reaalarvuks iga (lõplikku või lõpmatut) kümnendmurdu*

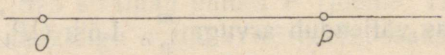
$$p, q_1 q_2 \ldots q_n \ldots,$$

kus p on naturaalarv või 0 ja q_1, q_2, $\ldots$ q_n, $\ldots$ *on kümnendmärgid (s. o. täisarvud 0-st kuni 9-ni).*

Siin on tarvilik silmas pidada sama märkust, mis oli tehtud negatiivse arvu mõiste definitsiooni puhul. Sõnastatud definitsiooni omaette, lahus definitsioonidest, mis määravad tehted reaalarvudega ja nende järjestuse seosed, ei saa vaadelda reaalarvu mõistet iseloomustavana. See definitsioon on terve definitsioonide süsteemi koostisosaks (kord-korralt tuuakse need allpool), mis täielikult iseloomustavad reaalarvu.

Kõigi positiivsete reaalarvude hulgas sisalduvad osana kõik positiivsed ratsionaalarvud, sest iga ratsionaalarv on esitatav lõpmatu perioodilise või lõpliku kümnendmurruna. Iga arvu, mis on kujutatud lõpliku kümnendmurruna, on esitatav lõpmatu murruna kahel viisil: nulliga perioodis või üheksaga perioodis. Nii näiteks $0{,}3 = 0{,}3000 \ldots$ ja $0{,}3 = 0{,}2999 \ldots$ Et vältida arvude kujutamisel kahesust, loobume murdude kasutamisest, mille periioodis on 9.

Lõpmatud mitteperioodilised kümnendmurrud kujutavad endast uusi mitteratsionaalseid arve; neid arve nimetatakse irratsionaalarvudeks.



Joon. 18.

Lõikude mõõtmine kümnendsüsteemis annab igal juhtumil tulemusena positiivse reaalarvu. Antud lõigu ja ühiklõigu ühismõõdutuse puhul on mõõtmise tulemuseks irratsionaalarv. Näitame, et on kehtiv ümberpöördud väide.

Teoreem. *Mistahes antud reaalarvule a vastab üksainus lõik, mille mõõtmise tulemuseks on arv a.*

Tõestus. Näitame, et sirgel antud punktist *O* antud suunas (joonisel 18 paremale) saab paigutada ainult ühe lõigu *OP*, mille

mõõtmise tulemuseks on arv α. Ratsionaalse α puhul on vastav ehitus tuntud elementaargeomeetriast; seepärast eeldame, et α on irratsionaalarv:

$$\alpha = p,\ q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$$

Võtame näiteks $\alpha = 2{,}3501 \ldots$ Paigutame alates punktist O paremale poole lõigud, mis võrduvad 2 ja siis 3 mõõtühikuga. Saame lõigu A_0B_0. Edasi paigutame alates punktist O paremale poole lõigud, mis võrduvad 2,3 ja 2,4 mõõtühikuga. Saame lõigu A_1B_1, mis asetseb lõigus A_0B_0. Seejärel paigutame alates punktist O paremale poole lõigud, mis võrduvad 2,35 ja 2,36 mõõtühikuga. Saame lõigu A_2B_2, jne. Selle protsessiga määratakse kuhjuvate lõikude järjend

$$A_0B_0,\ A_1B_1,\ \ldots,\ A_nB_n,\ \ldots$$

Tõepoolest:

1° Iga järgnev lõik asetseb eelmises.

2° Nende lõikude suurused on vastavalt

$$OE,\ \frac{1}{10}\,OE,\ \frac{1}{100}\,OE,\ \ldots,\ \frac{1}{10^n}\,OE,\ \ldots$$

Järelikult, küllalt suure n-i puhul saab lõigu A_nB_n teha kuitahes väikeseks *.

Sirgjoone pidevuse aksioomi põhjal määrab vaadeldav kuhjuvate lõikude järjend sirge üheainsa punkti P, mis kuulub järjendi kõigile lõikudele, m. o. t. t.

§ 37. Negatiivsed reaalarvud.

Igale positiivsele irratsionaalarvule α seame vastavaks sümboli $-\alpha$, mida nimetame negatiivseks irratsionaalarvuks. Arve α ja $-\alpha$ nimetame irratsionaalseteks vastandarvudeks.

Vastandarvudega väljendatakse suuruselt ühesuguste, kuid vastassuunaliste lõikude (või teiste suuruste) mõõtmise tulemust. Absoluutväärtuste definitsioon kandub muutumatult üle ka irratsionaal-

---

* Olgu l mistahes etteantud kuitahes väike lõik; küllalt suure n-i puhul on $A_nB_n < l$. Vastasel korral oleks olemas niisugune lõik l, et iga n-i puhul oleks kehtiv võrratus $A_nB_n = \frac{1}{10^n}\,OE \geqslant l$, millest $10^n l \leqslant OE$ mistahes n-i puhul. See aga on vasturääkiv Archimedese aksioomile.

arvudele. Positiivsed ja negatiivsed ratsionaal- ja irratsionaalarvud ja arv 0 moodustavad arvhulga, mida nimetatakse reaalarvude hulgaks.

Arvtelje igale punktile P saab vastavusse seada reaalarvu, mis mõõdab punktidega P ja O piiratud lõiku (kus punkt O on võetud lõikude lugemise alguseks). See arv võetakse märgiga „+", kui punkt P asetseb paremal pool punkti O, ja märgiga „—", kui punkt P asetseb vasakul pool punkti O. Ümberpöördult, igale reaalarvule α saab vastavusse seada arvtelje punkti, paigutades punktist O alates positiivse α puhul paremale poole ja negatiivse α puhul vasakule poole lõigu pikkusega $|\alpha|$. Seega *sirgjoone punktide ja reaalarvude vahel saab kindlaks teha vastavuse, mille puhul sirgjoone igale punktile vastab täiesti kindel reaalarv, ja ümberpöördult, igale reaalarvule vastab üksainus kindel sirgjoone punkt.*

Kahe hulga elementide vahelist vastavust, mille puhul esimese hulga igale elemendile vastab teise hulga täiesti kindel element ja, ümberpöördult, teise hulga igale elemendile vastab esimese hulga täiesti kindel element, nii et antud hulkade elemendid on ühendatavad teineteisele vastavate elementide paarideks, nimetatakse üksüheseks vastavuseks.

Esitatu alusel saab sirgjoone punktide ja reaalarvude vahel kindlaks määrata üksühest vastavust.

§ 38. Reaalarvude võrdlemine.

Ratsionaalarvude võrdlemine suuruse järgi on juba kindlaks määratud §-s 3. Seepärast on oluline anda täiendav definitsioon juhtumile, kui antud reaalarvudest α ja β vähemalt üks on irratsionaalne. Eeldame, et arvud α ja β on esitatud lõpmatute kümnendmurdudena (murde perioodiga 9 ei kasutata).

Definitsioon. *Kahest positiivsest reaalarvust α ja β loeme suuremaks selle, mille täisosa on suurem. Kui täisosad on võrdsed, siis loetakse suuremaks see arv, millel järjekorras võetud esimene kümnendmärk (komast paremal pool) on suurem, kuid kõik eelmised on ühesugused.*

Kui arv α on suurem kui β, siis arvu β loetakse arvust α väiksemaks.

Reaalarvud loetakse võrdseteks, kui nad on kujutatud ühe ja sama kümnendmurruga.

Positiivseid ja negatiivseid reaalarve ning nulli võrdleme reeglite järgi, mis on kehtivad ratsionaalarvude võrdlemisel (§ 3).

Näited.

$$3{,}175\ldots > 2{,}983\ldots$$
$$3{,}21\ldots < 3{,}384\ldots$$
$$-5{,}00764\ldots > -5{,}00801\ldots$$

sest $5{,}00764\ldots < 5{,}00801\ldots$ Kahest arvust $0{,}732\ldots$ ja $0{,}734\ldots$ on suurem teine arv, sõltumata järgnevaist kümnendmärkidest.

Märkus. Püstitatud reegel on kasutatav ka ratsionaalarvude võrdlemisel.

Suurem positiivne arv saadakse suurema lõigu mõõtmise tulemusena. Vaatleme näiteks kahte arvu $1{,}3561\ldots$ ja $1{,}3559\ldots$ On teada, et $1{,}3561\ldots > 1{,}3559\ldots$ Lõik OP, mida mõõdab esimene arv, sisaldab 1356 tuhandikku ühiklõigust, lõik OP_1 aga, mida mõõdab teine arv, sisaldab ainult 1355 tuhandikku. Järelikult, $OP > OP_1$.

Reaalarvude hulgas jäävad kehtima arvude skalaarse suurusjärjestuse omadused I—V, mis on sõnastatud §-s 3. Kontrollime näiteks mistahes positiivsete reaalarvude puhul transitiivsuse omaduse III kehtivust.

Olgu

$$\alpha = p_0, p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$$
$$\beta = q_0, q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$$
$$\gamma = l_0, l_1 l_2 \ldots l_n \ldots,$$

kusjuures $\alpha < \beta$ ja $\beta < \gamma$, ja näitame, et $\alpha < \gamma$. Võrdleme järjekorras antud arvude kümnendmärke. Et $\alpha < \beta$ ja $\beta < \gamma$, siis $p_0 \leqslant q_0$ ja $q_0 \leqslant l_0$. Kui vähemalt üks neist seostest on võrratus, siis $p_0 < l_0$ ja ka $\alpha < \gamma$. Kui aga $p_0 = q_0 = l_0$, siis $p_1 \leqslant q_1$ ja $q_1 \leqslant l_1$. Kui viimastest seostest vähemalt üks on võrratus, siis $p_1 < l_1$ ja $\alpha < \gamma$. Kui $p_1 = q_1 = l_1$, siis võrdleme järgmisi kümnendmärke, jne. See võrdlemisprotsess peab teataval sammul andma arvude α ja γ vastavate märkide ebavõrdsuse, sest vastasel korral oleksid antud arvude kõik märgid ühesugused ja meil oleks $\alpha = \beta = \gamma$. Niisiis on $\alpha < \gamma$, m. o. t. t.

Näide. $\alpha = 3{,}2157\ldots$, $\beta = 3{,}2241$, $\gamma = 3{,}225\ldots$; meil on $\alpha < \beta$ ja $\beta < \gamma$. Pärast koma oleva teise märgi kõrvutamisest selgub, et $\alpha < \gamma$.

Üksühene vastavus, mis on reaalarvude ja sirgjoone punktide vahel kindlaks määratud, evib järgmist elementide järjestuse säilivuse omadust: *kui arv α on väiksem kui β, siis punkt A, mis vastab esimesele arvule, asetseb vasakul pool punktist B, mis vastab teisele arvule.* Üksühest vastavust, milles säilub elementide järjestus, nimetatakse sarnasuseks. Irratsionaalarvude tarvituselevõtmisega täitusid „tühikud", mis esinesid ratsionaalarvude korpuses võrreldes sirgjoone punktide hulgaga. Reaalarvude hulk, olles sirgjoone punktide hulgaga sarnane, on lõikude mõõtmiseks täiesti küllaldane.

§ 39. Reaalarvude lähendamine (aproksimeerimine) ratsionaalarvude abil.

Olgu $\alpha = p_0, p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$ mingi positiivne reaalarv. Kui mitte kõik peale koma asetsevad kümnendmärgid pole nulliga võrdsed, siis (definitsiooni järgi) täisarv p_0 on väiksem kui α:

$$p_0 < \alpha.$$

Täisarv $p_0 + 1$ on suurem kui α, järelikult

$$p_0 < \alpha < p_0 + 1.$$

Arvu p_0 nimetatakse arvu α ligikaudseks puudusega väärtuseks ja arvu $p_0 + 1$ ligikaudseks liiaga väärtuseks täpsusega kuni 1. Analoogiliselt: kui mitte kõik kümnendmärgid teisest märgist alates ei võrdu nulliga, siis

$$p_0 + \frac{p_1}{10} < \alpha < p_0 + \frac{p_1 + 1}{10}.$$

Ratsionaalarve $p_0 + \frac{p_1}{10}$ ja $p_0 + \frac{p_1 + 1}{10}$ nimetatakse α ligikaudseiks puudusega ja liiaga väärtusteks täpsusega kuni 0,1.

Definitsioon. *Lõplikke murde*

$$p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} \text{ ja } p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_n + 1}{10^n},$$

millede vahel asub arv α, nimetatakse tema ligikaudseiks puudusega ja liiaga kümnendväärtusteks täpsusega kuni $\frac{1}{10^n}$.

Reegel. *Antud reaalarvu ligikaudse puudusega kümnendväärtuse saamiseks täpsusega kuni* $\frac{1}{10^n}$ *tuleb seda arvu kujutavas kümnendmurrus säilitada n esimest kümnendmärki ja ära jätta kõik järgnevad. Suurendades ligikaudse puudusega väärtuse viimast kümnendmärki 1 võrra, saame ligikaudse liiaga väärtuse täpsusega kuni* $\frac{1}{10^n}$.

Näide. Vaatleme arvu 3,5781 .... Tema ligikaudsed väärtused on:

puudusega	liiaga	täpsusega kuni
3	4	1
3,5	3,6	0,1
3,57	3,58	0,01
3,578	3,579	0,001
		jne.

Lähendamisteoreem. *Ükskõik kui väike olekski positiivne arv* ε, *ikkagi võib iga irratsionaalarvu* α *jaoks leida ratsionaalarvud* r_1 *ja* r_2, *millede vahel peitub* α:

$$r_1 < \alpha < r_2$$

tingimusel, et vahe $r_2 - r_1$ *oleks väiksem kui* ε:

$$r_2 - r_1 < \varepsilon.$$

Tõestus. Olgu $\alpha > 0$ antud irratsionaalarv:

$$\alpha = p_0,\ p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$$

Võtame

$$r_1 = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_n}{10^n}$$

ja

$$r_2 = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \ldots + \frac{p_n + 1}{10^n},$$

siis

$$r_2 < \alpha < r_1.$$

Küllalt suure n-i puhul saab vahet $r_2 - r_1$ teha väiksemaks mistahes etteantud arvust ε (vaata § 34 lõpul olevat viidet):

$$r_2 - r_1 = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

Negatiivse arvu $-\alpha$ puhul võib võtta

$$r_1' = -r_2 \text{ ja } r_2' = -r_1.$$

Siis

$$r_1' < -\alpha < r_2' \text{ ja } r_2' - r_1' < \varepsilon, \text{ m. o. t. t.}$$

§ 40. Reaalarvude hulga tihedus.

Teoreem. *Missugused oleksidki kaks erinevat reaalarvu $\alpha < \beta$, ikkagi on olemas lõpmatu hulk reaalarve, nii ratsionaalseid kui ka irratsionaalseid, mis peituvad α ja β vahel.*

Tõestus. Olgu

$$\alpha = p_0, p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$$
$$\beta = q_0, q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$$

(murde 9-ga perioodis ei tarvitata). Kõrvutame antud arvude ligikaudsed väärtused:

$$p_0;\ p_0, p_1;\ p_0, p_1 p_2;\ \ldots$$
$$q_0;\ q_0, q_1;\ q_0, q_1 q_2;\ \ldots$$

Et $\alpha < \beta$, siis ülemises reas leidub esimesena järjekorras arv $p_0, p_1 p_2 \ldots p_k$, mis on väiksem vastavast alumise rea arvust:

$$p_0, p_1 p_2 \ldots p_{k-1} = q_0, q_1 q_2 \ldots q_{k-1}, \text{ kuid } p_k < q_k.$$

Moodustame kümnendmurru

$$\xi = p_0, p_1 p_2 \ldots p_k l_{k+1}\ l_{k+2} \ldots,$$

säilitades selles arvu α k esimest kümnendmärki. Millised oleksidki järgnevad märgid l_{k+1}, l_{k+2}, ikkagi on $\xi < \beta$. Kui $p_{k+1} \neq 9$, siis võtame l_{k+1}-ks mistahes arvu, kuid suurema kui p_{k+1} (enesestmõistetavalt mitte suurema kui 9), siis järgnevate m i s t a h e s märkide l_{k+2}, l_{k+3} puhul on $\alpha < \xi$. Kui $p_{k+1} = 9$, kuid $p_{k+2} < 9$, siis võtame $l_{k+1} = 9$ ja l_{k+2}-ks mistahes arvu, kuid suurema kui p_{k+2}, ja ülejäänud märgid valime vabalt; jne. Et mitte kõik kümnendmärgid

p_{k+1}, p_{k+2}, ... pole 9-d, siis on alati võimalik valida arvu ξ tingimusel, et $\alpha < \xi$. Järelikult saame

$$\alpha < \xi < \beta. \qquad (1)$$

Märgid l_{k+1}, l_{k+2}, ..., alates esimesest, võib valida vabalt, seepärast on olemas lõpmatu hulk arve ξ, mis peituvad α ja β vahel. Kui need märgid valida nii, et vastav murd oleks perioodiline (erijuhtumil lõplik), siis on ξ ratsionaalarv; vastasel korral on ξ irratsionaalne, m. o. t. t.

Näiteid. 1. $\alpha = 2{,}735\ldots$; $\beta = 4{,}01$.

Iga arv arvudest 2,8; 2,81; 3,8039... on suurem kui α, kuid väiksem kui β.

2. $\alpha = 0{,}713994\ldots$, $\beta = 0{,}714005\ldots$; arv $\xi = 0{,}713995\ldots$ rahuldab tingimust $\alpha < \xi < \beta$.

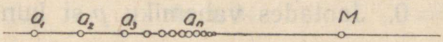
3. $\alpha = 2{,}7301$, $\beta = 2{,}7415\ldots$; mitteperioodiline murd $= 2{,}73101001000100001\ldots$ kujutab α ja β vahel asetsevat irratsionaalarvu.

§ 41. Kasvavate ja kahanevate järjendite teoreemid.

Definitsioon. *Kui on olemas arv M, mis on suurem antud kasvava järjendi*

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots \qquad (A)$$

igast liikmest, s. o. $a_n < M$ *(n-i iga väärtuse puhul), siis järjendit*



Joon. 19.

(A) nimetatakse tõkestatuks (joonis 19). *Kui pole olemas järjendi (A) igast liikmest suuremat arvu M, siis järjendit (A) nimetatakse tõkestamatuks.*

Näiteid. 1. Murdude järjend

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

on tõkestatud: tema iga liige on väiksem kui 1.

2. Antud irratsionaalarvu α puudusega kümnendlähendite jär-

jend täpsusega kuni 1, 0,1, 0,01 jne. on tõkestatud, selle järjendi kõik liikmed on α-st väiksemad.

3. Antud ringi sissejoonestatud korrapäraste hulknurkade ümbermõõtude järjend on külgede arvu piiramatul kahendamisel tõkestatud, sest iga sissejoonestatud hulknurga ümbermõõt on väiksem mingist ümberjoonestatud hulknurga (näiteks ruudu) ümbermõõdust.

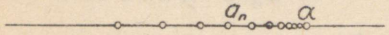
4. Naturaalarvude järjend 1, 2, 3, ... n, ... on tõkestamatu.

5. Naturaalarvude ruutude järjend 1, 4, 9, ..., n^2, ... on tõkestamatu.

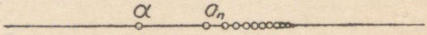
Teoreem. *Iga kasvava tõkestatud järjendi*

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots \qquad (A)$$

puhul on olemas väikseim reaalarv, mis on suurem tema igast liikmest (joonis 20).



Joon. 20.



Joon. 21.

T õ e s t u s. Tähistagu $p+1$ väikseimat t ä i s a r v u, mis on suurem järjendi (A) igast liikmest. Niiviisi on järjendis olemas arvud, mis on suuremad kui p, kuid pole arvust $p+1$ suuremaid arve. Näiteks järjendis $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ tuleb võtta $p+1=1$ ja $p=0$. Jaotades vahemiku p-st kuni $p+1$-ni 10-ks võrdseks osaks

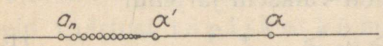
$$p,\ p+\tfrac{1}{10},\ p+\tfrac{2}{10},\ \ldots,\ p+1 \qquad (1)$$

võtame arvudest (1) väikseima, mis on suurem järjendi (A) igast liikmest; olgu see $p+\frac{q_1+1}{10}$. Siis järjendis (A) on olemas arvud, mis on suuremad kui $p+\frac{q_1}{10}$, kuid pole arvust $p+\frac{q_1+1}{10}$ suuremaid arve. Jagades nüüd vahemiku $p+\frac{q_1}{10}$-st kuni $p+\frac{q_1+1}{10}$-ni 10-ks võrdseks osaks ehitame vahemiku $p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}$-st kuni

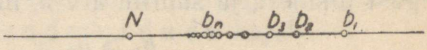
$p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2+1}{100}$-ni, mis evib analoogilist omadust. Seda protsessi tõkestamatult jätkates saame reaalarvu

$$\alpha = p,\ q_1 q_2 \ldots q_n \ldots,$$

mis evib järgmist omadust: *järjendis (A) on olemas arvud, mis on suuremad α mistahes puudusega kümnendlähendist, kuid α iga ligikaudne liiaga väärtus on suurem järjendi (A) igast liikmest.* Arv α on v ä i k s e i m a k s reaalarvuks, mis on suurem järjendi (A) igast liikmest.



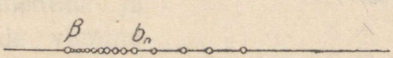
Joon. 22.



Joon. 23.

Tõepoolest; e s i t e k s, α on järjendi igast liikmest suurem, sest vastasel korral leiduks järjendis arvust α suuremaid liikmeid (joonis 21): $\alpha < a_n$. Kuid siis kohaselt võetud α kümnendlähendid liiaga on samuti väiksemad kui a_n, mis on võimatu.

T e i s e k s. Ei ole olemas arvu α', mis oleks väiksem arvust α ja suurem järjendi (A) igast liikmest. Kui niisugune arv oleks olemas, siis α mistahes ligikaudne puudusega väärtus, mis on



Joon. 24.

arvust α' suurem, oleks suurem järjendi (A) igast liikmest. See aga on samuti võimatu (joonis 22), m. o. t. t.

Definitsioon. *Kahanevat järjendit*

$$b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots \qquad (B)$$

nimetatakse tõkestatuks, kui on olemas arv N, mis on väiksem tema igast liikmest: $N < b_n$ (joonis 23).

Teoreem. *Iga kahaneva tõkestatud järjendi puhul on olemas suurim reaalarv, mis on väiksem tema igast liikmest* (joonis 24).

T õ e s t u s on analoogiline eelmise teoreemi tõestusega.

Teoreem. *Igal ratsionaalsete otstega kuhjuvate vahemikkude järjendil*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

on olemas üksainus reaalarv α, *mis kuulub neisse kõigisse vahejärjendil*

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n.$$

Tõestus. Eelmiste teoreemide alusel on olemas väikseim arv α, mis on suurem järjendi

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \qquad (A)$$

igast liikmest, ja suurim arv β, mis on väiksem järjendi

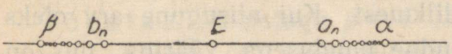
$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots * \qquad (B)$$

igast liikmest.

Näitame, et $\alpha = \beta$. Oletame, et $\alpha > \beta$, siis saab leida α ja β vahel reaalarvu ξ:

$$\beta < \xi < \alpha.$$

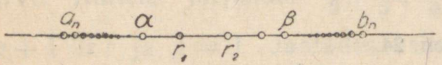
Arvude α ja β omaduste tõttu, küllalt suure n-i puhul, saavad järjendi (A) liikmed suuremaks ja järjendi (B) liikmed väiksemaks kui ξ, s. o.



Joon. 25.

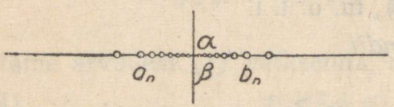
$$\beta < b_n < \xi < a_n \leqslant \alpha$$

(joonis 25).



Joon. 26.

Kuid võrratus $b_n < a_n$ räägib vastu tingimusele. Oletame nüüd, et $\alpha < \beta$. Võtame kaks mingit ratsionaalarvu r_1 ja r_2, mis asuvad α ja β vahel; siis



Joon. 27.

$$\alpha < r_1 < r_2 < \beta,$$

järelikult on ammugi

$$a_n < r_1 < r_2 < b_n,$$

---

* Kui osutub, et kõik arvud a_n alates mingist n-ist on võrdsed, $a_k = a_{k+1} = \ldots = \ldots$, siis võtame $\alpha = a_k$. Sel juhtumil on α kõigi vahemikkude ühine arv. Analoogiline märkus kuulub ka järjendile (B).

millest

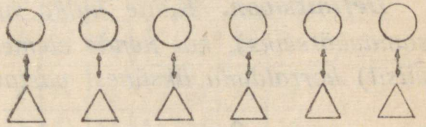
$$b_n - a_n > r_2 - r_1 \qquad \text{(joonis 26)},$$

kuid see on võimatu, sest vahet $b_n - a_n$ saab küllalt suure n-i puhul muuta kuitahes väikeseks. Seega mõlemad oletused $\alpha > \beta$ ja $\alpha < \beta$ on vastuolulised. Järelikult $\alpha = \beta$ on üksainus arv, mis rahuldab võrratusi $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ n-i iga väärtuse puhul (joonis 27), m. o. t. t.

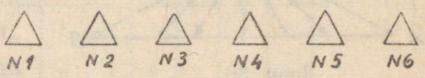
Niisiis, ratsionaalsete kuhjuvate vahemikkude iga järjend määrab a i n u l t ü h e reaalarvu α. Arve a_n ja b_n võib vaadelda kui arvu α ligikaudseid puudusega ja liiaga väärtusi. Reaalarvude kujutamisel kümnendmurdudega kasustatakse erikujulisi ligikaudseid väärtusi l õ p l i k e k ü m n e n d m u r d u d e kujul.

§ 42. Nummerduvad hulgad.

Kui kahel lõplikul hulgal on üks ning sama arv elemente, siis see tähendab, et antud hulkade elemente saab seada üksühesesse vastavusse (vaata § 37). Niisugune vastavus on olemas näiteks joonisel 28 ringide ja kolmnurkade hulkade vahel. Loendamisprotsessiks on antud hulga elementide ja naturaalrea arvude viimine üksühesesse vastavusse. *Kui antud hulk sisaldab n elementi, siis saab neid viia üksühesesse vastavusse (nummerdada) naturaalrea* 1, 2, 3, ... (joonis 29) *n esimese arvu* hulgaga.



Joon. 28.



Joon. 29.

Üksühese vastavuse idee kasutamine võimaldab omavahel võrrelda mitte ainult lõplikke, vaid ka l õ p m a t u i d hulki. Vaatleme näiteks naturaalarvude ja positiivsete paarisarvude hulki. Kahendades iga naturaalarvu kirjutame vastavad paarisarvud nende alla:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5, \ldots, & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10, \ldots, & 2n & \ldots \end{array} \qquad \text{(I)}$$

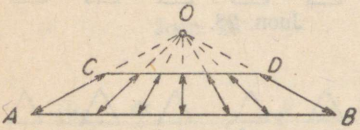
See antud hulkade elementide ühendamisviis paarideks määrab naturaalarvude ja paarisarvude üksühese vastavuse. Me ei saa aga üksühest vastavust, kui ühendame antud hulkade arvud paarideks järgmisel viisil:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & \\ 2 & & 4 & & 6 & \dots & \dots & \dots & 2n+2 & \dots \end{array} \qquad \text{(II)}$$

Skeem (I) näitab, et kogu hulga (naturaalarvude) ja tema osa (paarisarvude) vahel on olemas üksühene vastavus. Niisugust olukorda ei saa tekkida lõplikkude hulkade puhul. Kui kaks lõplikku hulka sisaldavad ühepalju esemeid, siis — millisel viisil me esemeid vastavate elementide paarideks ühendaksimegi — ikkagi saadakse üksühene vastavus.

Lõpliku hulga puhul on võimatu korraldada üksühest vastavust kogu hulga ja tema osa vahel. See omadus on lõplikkude hulkade iseloomulik omadus, mis eristab neid lõpmatuist hulkadest.

Definitsioon. *Kahte hulka nimetatakse ekvivalentseteks (ehk samaväärseiks), kui nende elementide vahel saab (vähemalt ühel viisil) korraldada üksühest vastavust.*



Joon. 30.

Räägitakse, et ekvivalentsed hulgad sisaldavad „ühepalju" elemente. Nii näiteks on paarisarve „niisama palju" kui naturaalarve. Joonis 30 näitab, et kahe lõigu *AB* ja *CD* punktide vahel saab korraldada üksühest vastavust; tähendab, lõik *CD* sisaldab „niisama palju" punkte kui *AB*, kuigi *CD* on pikkuselt väiksem kui *AB*. Lihtsaimaks lõpmatuks hulgaks on kõigi naturaalarvude hulk.

Definitsioon. *Iga hulka, mis on ekvivalentne naturaalrea arvudega, nimetatakse nummerduvaks hulgaks.*

Nii näiteks paarisarvude hulk on nummerduv.

Samaväärsete lõpmatute hulkade iseloomustamiseks võib tarvitusele võtta erisümbolid ja vaadelda neid kui uusi arve. Neid arve nimetatakse transfiniitseiks põhiarvudeks. Num-

merduvale hulgale tema koguse iseloomustamiseks seatakse vastavaks sümbol (transfiniitne arv) $\aleph_0$*.

Teoreem. *Kui nummerduva hulgaga ühendada lõplik arv elemente, siis saadakse nummerduv hulk.*

Tõestus. Näiteks ühendame nummerduva hulgaga $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ kaks uut elementi A_1 ja A_2. Saadud hulga elemente võib nummerdada näiteks nii:

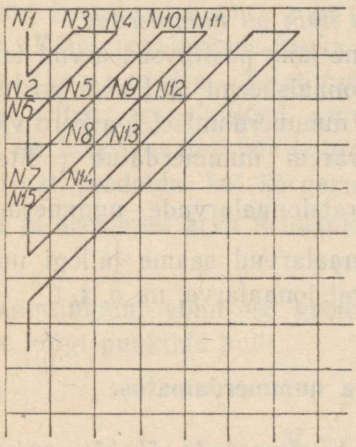
$$\begin{array}{ccccccc} A_1, & A_2, & a_1, & a_2, & a_3, & \ldots \\ \text{Nr. 1} & \text{Nr. 2} & \text{Nr. 3} & \text{Nr. 4} & \text{Nr. 5} & \ldots \end{array}$$

m. o. t. t.

Sümboolselt saab seda kirjutada järgmise võrdusega:

$$2 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Teoreem. *Kui kahe nummerduva hulga elemendid ühendada üheks hulgaks, siis saadakse nummerduv hulk.*



Diagonaalne skeem.

	1	2	3	4	5	6	
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	. . .
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	. . .
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	. . .
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	. . .
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	. . .
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	. . .
	.	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	.	

Tabel.

Tõestus. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ kahe antud hulga elemendid, siis nende hulkade summa elemendid saab nummerdada näiteks nii:

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & \ldots \\ \text{Nr. 1} & \text{Nr. 2} & \text{Nr. 3} & \text{Nr. 4} & \text{Nr. 5} & \text{Nr. 6} & \ldots \end{array}$$

m. o. t. t.

---

* $\aleph$ „alef" — juudi tähestiku esimene täht.

Sümboolselt saab seda kirjutada nii:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Teoreem. *Kui võtta nummerduva hulga elemente nummerduv arv korda, siis saadakse nummerduv hulk.*

Tõestus. Vaatleme tabelit, milles on nummerduv arv ridu ja igas reas nummerduv arv ruute. Kõiki ruute saab nummerdada „diagonaalskeemi" abil, m. o. t. t.

Sümboolselt kirjutatakse nii:

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^2 = \aleph_0.$$

Nagu näeme, ei sarnane transfiniitse aritmeetika arvulised seosed paljudes osades tavalise aritmeetika vastavate seostega, kus opereeritakse lõplike arvudega. Selle lahkumineku põhjuseks on asjaolu, et kogu lõpmatu hulga ja tema osa vahel saab korraldada üksühest vastavust.

Teoreem. *Kõigi ratsionaalarvude hulk on nummerduv.*

Tõestus. Tõepoolest, paigutame kõik positiivsed arvud tabelisse. Me saame nummerdada diagonaalskeemi abil kõik positiivsed ratsionaalarvud. Seejuures võib nummerdamisel iga kord välja jätta need arvud, mis olid juba varem nummerdatud (näiteks, $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}$). Ühendades positiivsete ratsionaalarvude nummerduva hulgaga nulli ja negatiivsed ratsionaalarvud saame jällegi nummerduva hulga, mis sisaldab kõiki ratsionaalarve, m. o. t. t.

§ 43. Reaalarvude hulga nummerdamatus.

Teoreem. *Kõiki reaalarve ei saa nummerdada, ükskõik mil viisil me teostaksimegi nummerdamist.*

Tõestus. Vaatleme 0 ja 1 vahel asetsevat reaalarvude hulka. Oletame, et kõik kümnendmurrud, mis kujutavad neid arve, on mingil viisil nummerdatud:

$$\begin{aligned}
&\text{Nr. 1} \quad 0,p_1^{(1)}p_2^{(1)}p_3^{(1)} \ldots p_n^{(1)} \ldots = \alpha_1 \\
&\text{Nr. 2} \quad 0,p_1^{(2)}p_2^{(2)}p_3^{(2)} \ldots p_n^{(2)} \ldots = \alpha_2 \\
&\text{Nr. 3} \quad 0,p_1^{(3)}p_2^{(3)}p_3^{(3)} \ldots p_{n_i}^{(3)} \ldots = \alpha_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Vaatleme arvu

$$\beta = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

β kümnendmärgid valime silmas pidades järgmisi tingimusi: $a_1 \neq p_1^{(1)}$ ja $a_1 \neq 9$, $a_2 \neq p_2^{(2)}$ ja $a_2 \neq 9$, ..., $a_n \neq p_n^{(n)}$ ja $a_n \neq 9$ jne., muidu aga vabalt *.

Näitame, et β ei võrdu ühegagi arvudest $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Tõepoolest, $\beta \neq a_1$, sest neil arvudel on esimesed kümnendmärgid erinevad; $\beta \neq a_2$, sest neil arvudel on teised kümnendmärgid erinevad, üldiselt $\beta \neq a_n$, sest neil arvudel on n-dad kümnendmärgid erinevad.

Seega, vastandina eeldusele, pole vahemiku (0, 1) kõik reaalarvud nummerdatud, sest arv β ei kuulu kindlasti numeratsiooni hulka, m. o. t. t.

J ä r e l d u s. *Kõigi reaalarvude hulk ei ole nummerduv.*

Hulki, mis on ekvivalentsed kõigi reaalarvude hulgaga, nimetatakse k o n t i i n u u m i v õ i m s u s e g a (s. o. pidevuse) hulkadeks. Kõigi reaalarvude hulka nimetatakse a r i t m e e t i l i s e k s k o n t i i n u u m i k s. Kontiinuumi võimsuse sümbolina tarvitatakse erilist transfiniitset arvu $\aleph$. Naturaalarvude nummerduv hulk on kõigi reaalarvude hulga osa. Seepärast tuleb kontiinuumi võimsust vaadelda kui kõrgemat võimsust võrreldes nummerduvaga ja seepärast arvu $\aleph$ loetakse suuremaks kui $\aleph_0$:

$$\aleph > \aleph_0.$$

Kontiinuumi võimsuse geomeetriliseks näiteks võib olla sirgjoone kõigi punktide hulk.

V peatükk.

Tehted reaalarvudega.

§ 44. Aritmeetilised tehted reaalarvudega.

Hõlbustuseks võtame tarvitusele järgmised tähised. Kui α on antud reaalarv, siis tema ligikaudsed puudusega kümnendväärtused täpsusega kuni 1, 0,1, 0,01 jne. kuni $\frac{1}{10^n}$ ... tähistame vasta-

* Üheksaid ei kasutata, et vältida murde perioodiga 9.

valt sümbolitega a_0^-, a_1^-, a_2^-, ..., a_n^-, ... ja ligikaudsed liiaga väärtused — sümbolitega a_0^+, a_1^+, a_2^+, ..., a_n^+, ... Olgu näiteks $\alpha = 3{,}1471\ldots$ Siis

$$a_0^- = 3, \quad a_1^- = 3{,}1, \quad a_2^- = 3{,}14, \quad a_3^- = 3{,}147$$
$$a_0^+ = 4, \quad a_1^+ = 3{,}2, \quad a_2^+ = 3{,}15, \quad a_3^+ = 3{,}148 \text{ jne.}$$

Vaatleme algul aritmeetilisi tehteid positiivsete reaalarvudega.

Liitmine. Olgu α ja β mistahes positiivsed reaalarvud. Liites vastavad ligikaudsed puudusega väärtused saame kasvava järjendi

$$a_0 = a_0^- + \beta_0^-, \quad a_1 = a_1^- + \beta_1^-, \quad \ldots, \quad a_n = a_n^- + \beta_n^-, \quad \ldots$$

Liites arvude α ja β vastavad ligikaudsed liiaga väärtused, saame kahaneva * järjendi

$$b_0 = a_0^+ + \beta_0^+, \quad b_1 = a_1^+ + \beta_1^+, \quad \ldots, \quad b_n = a_n^+ + \beta_n^+, \quad \ldots$$

Mistahes n-i puhul on $a_n < b_n$.

Vahet $b_n - a_n$ võib n-i küllalt suurte väärtuste puhul teha kuitahes väikeseks. Tõepoolest,

$$b_n - a_n = (a_n^+ + \beta_n^+) - (a_n^- + \beta_n^-) = (a_n^+ - a_n^-) + (\beta_n^+ - \beta_n^-).$$

Kuid kumbagi vahet $a_n^+ - a_n^-$ ja $\beta_n^+ - \beta_n^-$ võib küllalt suure n-i puhul teha kuitahes väikeseks. Olgu $\varepsilon > 0$ mingi etteantud kuitahes väike ratsionaalarv; võttes n-i niivõrd suure, et $a_n^+ - a_n^- < \frac{\varepsilon}{2}$ ja $\beta_n^+ - \beta_n^- < \frac{\varepsilon}{2}$, saame

$$b_n - a_n < \varepsilon.$$

Seepärast

$$[a_0^- + \beta_0^-;\ a_0^+ + \beta_0^+],\ [a_1^- + \beta_1^-;\ a_1^+ + \beta_1^+],\ \ldots,\ [a_n^- + \beta_n^-;\ a_n^+ + \beta_n^+],\ \ldots$$

---

* Täpsemalt, järjend $a_0, a_1, \ldots$ on mittekahanev, sest temas võib eelnev liige järgnevaga võrdseks osutuda: $a_n \leqslant a_{n+1}$. Analoogiliselt järjend $b_0, b_1, \ldots$ on mittekasvav.

on kuhjuvate ratsionaalsete vahemikkude järjend, mis määrab ainult ühe reaalarvu γ.

Niisiis, mistahes reaalarvude α ja β puhul on olemas üksainus reaalarv γ, mis on suurem liidetavate ligikaudsete puudusega väärtuste igast summast ja väiksem liidetavate ligikaudsete liiaga väärtuste igast summast. Erijuhtumil, kui arvud α ja β on mõlemad ratsionaalsed, evib seda omadust summa $\alpha+\beta$ ja seega $\gamma=\alpha+\beta$. Kui vähemalt üks arvudest α ja β on irratsionaalne, siis on loomulik vaadelda arvu γ kui $\alpha+\beta$ summat.

Definitsioon. *Kahe positiivse reaalarvu summaks nimetatakse reaalarvu, mis on suurem liidetavate ligikaudsete puudusega väärtuste igast summast, kuid väiksem liidetavate ligikaudsete liiaga väärtuste igast summast.*

N ä i d e. Olgu $\alpha=3{,}3121\ldots$, $\beta=2{,}5483\ldots$
Liidame ligikaudsed puudusega väärtused:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_0^- = 3 & \beta_0^- = 2 & \alpha_0^- + \beta_0^- = 5 \\
\alpha_1^- = 3{,}3 & \beta_1^- = 2{,}5 & \alpha_1^- + \beta_1^- = 5{,}8 \\
\alpha_2^- = 3{,}31 & \beta_2^- = 2{,}54 & \alpha_2^- + \beta_2^- = 5{,}85 \\
\alpha_3^- = 3{,}312 & \beta_3^- = 2{,}548 & \alpha_3^- + \beta_3^- = 5{,}860 \\
\alpha_4^- = 3{,}3121 & \beta_4^- = 2{,}5483 & \alpha_4^- + \beta_4^- = 5{,}8604 \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Liidame ligikaudsed liiaga väärtused:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_0^+ = 4 & \beta_0^+ = 3 & \alpha_0^+ + \beta_0^+ = 7 \\
\alpha_1^+ = 3{,}4 & \beta_1^+ = 2{,}6 & \alpha_1^+ + \beta_1^+ = 6{,}0 \\
\alpha_2^+ = 3{,}32 & \beta_2^+ = 2{,}55 & \alpha_2^+ + \beta_2^+ = 5{,}87 \\
\alpha_3^+ = 3{,}313 & \beta_3^+ = 2{,}549 & \alpha_3^+ + \beta_3^+ = 5{,}862 \\
\alpha_4^+ = 3{,}3122 & \beta_4^+ = 2{,}5484 & \alpha_4^+ + \beta_4^+ = 5{,}8606 \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Niiviisi määratakse järjestikuselt summa

$$\alpha+\beta=5{,}860\ldots$$

kümnendmärgid.

Vaatleme reaalarvude liitmise konkreetset tähendust. Olgu AB ja CD lõigud, mille pikkused väljenduvad arvudega α ja β. Võtame eelmises näites valitud arvud. Vaatleme α ja β mingisuguseid

ligikaudseid väärtusi antud täpsusjärguga. Võtame näiteks α_2^-, β_2^-, α_2^+ ja β_2^+. Lõik AB sisaldab 331 sajandikku ühiklõigust, kuid 332 sajandikku ühiklõigust moodustab AB-st suurema lõigu. Analoogiliselt lõik CD sisaldab 254 sajandikku ühiklõigust, kuid 255 sajandikku moodustab CD-st suurema lõigu. Lõik $MN = AB + CD$ sisaldab $100(\alpha_2^- + \beta_2^-) = 585$ sajandikku ühiklõigust, kuid $100(\alpha_2^+ + \beta_2^+) = 587$ sajandikku ühiklõigust moodustab MN-st suurema lõigu. Seega on $\alpha_2^- + \beta_2^-$ < pikkus $MN < \alpha_2^+ + \beta_2^+$. Analoogiliselt mistahes n-i puhul leiame, et $\alpha_n^- + \beta_2^-$ < pikkus $MN < \alpha_n^+ + \beta_n^+$. Üksainus arv, mis rahuldab viimaseid võrratusi, on summa $\alpha + \beta$, seepärast summa kui lõigu pikkus väljendub liidetavate lõikude mõõtarvude summaga.

Näitame, et positiivsete reaalarvude liitmine evib kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse omadusi. Tõepoolest, summa $\alpha + \beta$ määratakse summade $\alpha_n^- + \beta_n^-$ ja $\alpha_n^+ + \beta_n^+$ järjenditega, summa $\beta + \alpha$ määratakse summade $\beta_n^- + \alpha_n^-$ ja $\beta_n^+ + \alpha_n^+$ järjenditega. Ratsionaalarvude liitmise kommutatiivsuse omaduse tõttu

$$\alpha_n^- + \beta_n^- = \beta_n^- + \alpha_n^- \text{ ja } \alpha_n^+ + \beta_n^+ = \beta_n^+ + \alpha_n^+;$$

järelikult

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Analoogiliselt määratakse kindlaks liitmise assotsiatiivsuseseaduse kehtivus. Summa $(\alpha + \beta) + \gamma$ määratakse kuhjuvate vahemikkude järjendiga

$$[(\alpha_n^- + \beta_n^-) + \gamma_n^-;\ (\alpha_n^+ + \beta_n^+) + \gamma_n^+]$$

ja summa $\alpha + (\beta + \gamma)$ määratakse järjendiga

$$[\alpha_n^- + (\beta_n^- + \gamma_n^-);\ \alpha_n^+ + (\beta_n^+ + \gamma_n^+)].$$

Ratsionaalarvude liitmise assotsiatiivsuseseaduse järgi on mõlemad järjendid samased ja seepärast

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Korrutamine. ***Definitsioon.*** *Kahe positiivse reaalarvu α ja β korrutiseks nimetatakse reaalarvu, mis on suurem tegurite*

vastavate ligikaudsete puudusega väärtuste kõikidest korrutistest, kuid väiksem tegurite ligikaudsete liiaga väärtuste kõigist korrutistest.

Teoreem. *Mistahes antud positiivsete reaalarvude α ja β korrutis on üheselt teostatav.*

Tõestus. On tarvis tõestada, et on olemas ainult üks reaalarv γ, mis n-i iga väärtuse puhul rahuldab võrratusi

$$\alpha_n^- \beta_n^- < \gamma < \alpha_n^+ \beta_n^+.$$

1⁰ Korrutiste järjend $\alpha_0^- \beta_0^-$, $\alpha_1^- \beta_1^-$, ..., $\alpha_n^- \beta_n^-$, ... on kasvav ja järjend $\alpha_0^+ \beta_0^+$, $\alpha_1^+ \beta_1^+$, ..., $\alpha_n^+ \beta_n^+$, ... on kahanev.

2⁰ Mistahes n-i puhul on

$$\alpha_n^- \beta_n^- < \alpha_n^+ \beta_n^+.$$

3⁰ Vahet $\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^- \beta_n^-$ võib küllalt suure n-i puhul teha kuitahes väikeseks; meil on

$$\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^- \beta_n^- = (\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^+ \beta_n^-) + (\alpha_n^+ \beta_n^- - \alpha_n^- \beta_n^-) =$$
$$= \alpha_n^+ (\beta_n^+ - \beta_n^-) + \beta_n^- (\alpha_n^+ - \alpha_n^-).$$

Olgu M mistahes arv, mis on suurem mõlemast arvust α_0^+ ja β_0^+; siis saame võrratuse

$$\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^- \beta_n^- < M[(\beta_n^+ - \beta_n^-) + (\alpha_n^+ - \alpha_n^-)].$$

Siit on selge, et vahet $\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^- \beta_n^-$ võib teha kuitahes väikeseks. Tõepoolest, vaatleme etteantud kuitahes väikest ratsionaalarvu ε ja valime n-i nii suure, et kehtiksid võrratused

$$\beta_n^+ - \beta_n^- < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ ja } \alpha_n^+ - \alpha_n^- < \frac{\varepsilon}{2M};$$

siis saame

$$\alpha_n^+ \beta_n^+ - \alpha_n^- \beta_n^- < \varepsilon.$$

Järjend

$$[\alpha_0^- \beta_0^-, \alpha_0^+ \beta_0^+], [\alpha_1^- \beta_1^-, \alpha_1^+ \beta_1^+] \ldots$$

on kuhjuvate ratsionaalsete vahemike järjend, mis määrab ainult ühe arvu $\gamma = \alpha\beta$, m. o. t. t.

Näide. Võtame

$$\alpha = 1{,}7320\ldots;\quad \beta = 1{,}4142\ldots;$$

siis

$\alpha_0^- = 1$	$\beta_0^- = 1$	$\alpha_0^-\beta_0^- = 1$
$\alpha_1^- = 1{,}7$	$\beta_1^- = 1{,}4$	$\alpha_1^-\beta_1^- = 2{,}38$
$\alpha_2^- = 1{,}73$	$\beta_2^- = 1{,}41$	$\alpha_2^-\beta_2^- = 2{,}4393$
$\alpha_3^- = 1{,}732$	$\beta_3^- = 1{,}414$	$\alpha_3^-\beta_3^- = 2{,}449048$
$\alpha_4^- = 1{,}7320$	$\beta_4^- = 1{,}4142$	$\alpha_4^-\beta_4^- = 2{,}44939440$

. . . . . .

Analoogiliselt

$\alpha_0^+ = 2$	$\beta_0^+ = 2$	$\alpha_0^+\beta_0^+ = 4$
$\alpha_1^+ = 1{,}8$	$\beta_1^+ = 1{,}5$	$\alpha_1^+\beta_1^+ = 2{,}70$
$\alpha_2^+ = 1{,}74$	$\beta_2^+ = 1{,}42$	$\alpha_2^+\beta_2^+ = 2{,}4708$
$\alpha_3^+ = 1{,}733$	$\beta_3^+ = 1{,}415$	$\alpha_3^+\beta_3^+ = 2{,}452195$
$\alpha_4^+ = 1{,}7321$	$\beta_4^+ = 1{,}4143$	$\alpha_4^+\beta_4^+ = 2{,}44970903$

. . . . . .

Niiviisi on määratavad järjestikuse korrutise

$$\alpha\beta = 2{,}449\ldots$$

kümnendmärgid.

On kerge otseselt näidata (vaata vastavaid arutlusi liitmise kohta), et positiivsete reaalarvude korrutamine evib kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse ja distributiivsuse omadusi.

Lahutamine. Olgu $\alpha > \beta$ kaks positiivset reaalarvu.

Definitsioon. *Vaheks $\alpha - \beta$ nimetatakse arvu x, mis rahuldab tingimust $\alpha = \beta + x$.*

Lahutades arvu α ligikaudseist liiaga väärtustest arvu β vastavad ligikaudsed puudusega väärtused saame kahaneva järjendi

$$\alpha_n^- - \beta_n^- \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Analoogiliselt lahutades arvu α ligikaudseist puudusega

väärtustest arvu β ligikaudsed liiaga väärtused saame kasvava järjendi $\alpha_n^- - \beta_n^+$ *.

Saab näidata (jätame selle õppijaile), et need kaks järjendit moodustavad kuhjuvate vahemikkude järjendi. Selle järjendiga määratav arv x ongi otsitav vahe $\alpha - \beta$. Tõepoolest, summa $\beta + x$ on arv, mis määratakse kuhjuvate vahemikkude järjendiga

$$[\beta_n^- + (\alpha_n^- - \beta_n^+),\ \beta_n^+ + (\alpha_n^+ - \beta_n^-)], \tag{1}$$

kuid

$$\beta_n^- + (\alpha_n^- - \beta_n^+) = \alpha_n^- - (\beta_n^+ - \beta_n^-)$$

ja

$$\beta_n^+ + (\alpha_n^+ - \beta_n^-) = \alpha_n^+ + (\beta_n^+ - \beta_n^-).$$

Et vahet $\beta_n^+ - \beta_n^-$ küllalt suure n-i puhul võib teha kuitahes väikeseks, siis määravad kuhjuvate vahemikkude järjendid (1) ja $[\alpha_n^-,\ \alpha_n^+]$ ühe ja sama arvu α:

$$\beta + x = \alpha.$$

On kerge näidata, et pole olemas ühtegi teist reaalarvu, mis rahuldab tingimust $\alpha = \beta + x$. Tõepoolest, oletame, et on olemas kaks niisugust erinevat reaalarvu x ja y, et $\alpha = \beta + x$ ja $\alpha = \beta + y$. Eeldame, et $x > y$. Meil on $\beta + x = \beta + y$. Järelikult (liitmise definitsiooni alusel)

$$\beta_n^- + x_n^- < \beta_n^+ + y_n^+,$$

millest

$$x_n^- - y_n^+ < \beta_n^+ - \beta_n^-.$$

Et $x > y$, siis iga küllalt suure n-i puhul on vahe $x^- - y_n^+$ suurem mingist arvust k, kuid siis $k < \beta_n^+ - \beta_n^-$ ja järelikult vahet $\beta_n^+ - \beta_n^-$ ei saa teha kuitahes väikeseks ja meil on tekkinud vastuolu.

---

* Kui mõned esimesed vahed $\alpha_n^- - \beta_n^+$ on negatiivsed, siis neid ei tarvitse arvestada.

Märkus. Tingimusest $\alpha > \beta$ järgneb, et $x = \alpha - \beta > 0$. Tõepoolest, x-i ligikaudsed puudusega väärtused $\alpha_n^- - \beta_n^+$ on positiivsed, sest $\alpha > \beta$ puhul iga küllalt suure n-i puhul $\alpha_n^- > \beta_n^+$.

Näide. Võtame

$$\alpha = 2{,}434\ldots, \quad \beta = 2{,}122\ldots,$$

siis

$$\alpha_0^- = 2; \quad \alpha_1^- = 2{,}4; \quad \alpha_2^- = 2{,}43; \quad \alpha_3^- = 2{,}434\ldots$$
$$\beta_0^+ = 3; \quad \beta_1^+ = 2{,}2; \quad \beta_2^+ = 2{,}13; \quad \beta_3^+ = 2{,}123\ldots$$

Koostame vahe ligikaudsed puudusega väärtused

$$\alpha_0^- - \beta_0^+ = -1, \quad \alpha_1^- - \beta_1^+ = 0{,}2, \quad \alpha_2^- - \beta_2^+ = 0{,}30,$$
$$\alpha_3^- - \beta_3^+ = 0{,}311\ldots$$

Ligikaudset väärtust $\alpha_0^- - \beta_0^+$ kui negatiivset arvu ei tarvitse vaadelda. Analoogiliselt arvutatakse vahe ligikaudsed liiaga väärtused:

$$\alpha_0^+ - \beta_0^- = 1; \quad \alpha_1^+ - \beta_1^- = 0{,}4; \quad \alpha_2^+ - \beta_2^- = 0{,}32; \quad \alpha_3^+ - \beta_3^- = 0{,}313\ldots$$

Niiviisi määratakse samm-sammult vahe

$$\alpha - \beta = 0{,}31\ldots$$

kümnendmärgid.

Otsese kontrollimisega võib veenduda aritmeetikas tuntud lahutamise omaduste kehtivuses.

Jagamine. Olgu α positiivne reaalarv. Võtame mingi positiivse ratsionaalarvu k, mis on väiksem kui α *.

Koostame kaks arvjärjendit

$$\frac{1}{\alpha_n^+} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{\alpha_n^-}, \tag{2}$$

* Kui näiteks $\alpha = 0{,}000105\ldots$, siis piisab, kui võtta $k = 0{,}00001$. Üldse, kui q_k on arvu α esimene nullist erinev kümnendmärk, siis võib võtta $k = \frac{1}{10^{k+1}}$.

kusjuures arv n on võetud sellise arvestusega, et arv α_n^- oleks erinev nullist *.

Näitame, et järjendid (2) määravad kuhjuvate vahemikkude järjendi.

Tõestus.

1° $\frac{1}{\alpha_n^+} < \frac{1}{\alpha_n^-}$, sest $\alpha_n^- < \alpha_n^+$.

2° $\frac{1}{\alpha_n^-}$ kahaneb, sest α_n^- kasvab. Analoogiliselt $\frac{1}{\alpha_n^+}$ kasvab.

3° Vahet $\frac{1}{\alpha_n^-} - \frac{1}{\alpha_n^+}$ saab teha kuitahes väikeseks. Tõepoolest, küllalt suure n-i puhul on $k < \alpha_n^- < \alpha_n^+$, ja seepärast

$$\frac{1}{\alpha_n^-} - \frac{1}{\alpha_n^+} = \frac{\alpha_n^+ - \alpha_n^-}{\alpha_n^- \cdot \alpha_n^+} < \frac{\alpha_n^+ - \alpha_n^-}{k^2}.$$

Kuid küllalt suure n-i puhul võib viimase murru lugejat teha kuitahes väikeseks, nimetaja aga jääb muutumatuks. n-i küllalt suurte väärtuste puhul on $\alpha_n^+ - \alpha_n^- < k^2\varepsilon$, kuid siis $\frac{1}{\alpha_n^-} - \frac{1}{\alpha_n^+} < \varepsilon$, m. o. t. t.

Definitsioon. *Reaalarvu, mis määratakse kuhjuvate vahemikkude järjendiga* $\left[\frac{1}{\alpha_n^+}; \frac{1}{\alpha_n^-}\right]$, *nimetatakse* α *suhtes pöördarvuks ja tähistatakse sümboliga* $\frac{1}{\alpha}$.

Näitame, et $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$. Tõepoolest, koostades α ja $\frac{1}{\alpha}$ ligikaudsete väärtuste korrutised saame

$$\alpha_n^- \cdot \frac{1}{\alpha_n^+} < 1 < \alpha_n^+ \cdot \frac{1}{\alpha_n^-}, \text{ millest } \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1.$$

---

* Näiteks, kui $\alpha = 0{,}023\ldots$, siis $\alpha_n^- = \alpha_1^- = 0$, seepärast tuleb vaadelda järjendit (2), alates $n = 2$

$$\frac{1}{\alpha_2^+} = \frac{1}{0{,}03}, \quad \frac{1}{\alpha_3^+} = \frac{1}{0{,}024} \text{ jne.}$$

$$\frac{1}{\alpha_2^-} = \frac{1}{0{,}02}, \quad \frac{1}{\alpha_3^-} = \frac{1}{0{,}023} \text{ jne.}$$

Definitsioon. *Jagatiseks* $\frac{\alpha}{\beta}$ *nimetatakse arvu* x, *mis rahuldab tingimust* $\alpha = \beta x$.

Korrutades $\frac{1}{\beta}$-ga (vaata § 4 vastavaid arutlusi) leiame, et

$$x = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}.$$

Nii on jagamistehe positiivsete reaalarvude hulgas alati teostatav.

Aritmeetilised tehted kõigi reaalarvude hulgas.

Me defineerisime seni aritmeetilisi tehteid eeldusel, et komponentideks on positiivsed reaalarvud.

Lepime kokku, et tehete teostamisel positiivsete ja negatiivsete reaalarvudega ja arvuga 0 kasutame samu reegleid, mis olid püstitatud ratsionaalarvude jaoks (pt. I, § 4). Selle kokkuleppe kohaselt

$$\alpha + (-\beta) = \begin{cases} \alpha - \beta & (\text{kui } \alpha > \beta), \\ -(\beta - \alpha) & (\text{kui } \alpha < \beta), \\ 0 & (\text{kui } \alpha = \beta), \end{cases}$$

$(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$, $(-\alpha)(-\beta) = \alpha \cdot \beta$, $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0$ jne.

Ei ole tarvidust kontrollida aritmeetiliste tehete seaduste kehtivust kõigi reaalarvude hulgas. Tõepoolest, tehete seaduste kehtivuse tõestamine kõigi ratsionaalarvude hulgas põhineb:

1⁰ *nende seaduste olemasolul positiivsete arvude hulgas,*

2⁰ *tehete reeglitel positiivsete ja negatiivsete arvudega ning arvuga 0.*

Et tehete reeglid jäävad kehtima kõigi positiivsete reaalarvude hulgas, aritmeetiliste tehete reeglid positiivsete ja negatiivsete arvude ning nulli puhul aga jäävad endisteks, siis tehete seadused jäävad kehtima kõigi reaalarvude hulgas.

§ 45. Reaalarvude hulk kui arvkorpus.

Kõigi reaalarvude hulka võib vaadelda kui arvkorpust, sest temas:

1⁰ *on teostatavad neli aritmeetilist tehet (välja arvatud jagamine nulliga);*

2⁰ *kehtivad tehete seadused: liitmise ja korrutamise kommutatiivsus ja assotsiatiivsus, korrutamise distributiivsus liitmise suhtes.*

Reaalarvude korpus sisaldab eneses osana ratsionaalarvude korpust.

Märgime reaalarvude korpuses ära arvude 0 ja 1 järgmised põhiomadused. Mistahes reaalse α puhul kehtivad võrdused $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0$, $\alpha \cdot 1 = \alpha$. Kui korrutis $\alpha \cdot \beta$ võrdub nulliga, siis vähemalt üks tegureist võrdub nulliga. Tõepoolest, kui $\alpha \neq 0$ siis korrutades võrduse $\alpha\beta = 0$ mõlemaid pooli $\frac{1}{\alpha}$-ga saame

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\beta = 0 \cdot \frac{1}{\alpha}, \text{ millest } \beta \cdot 1 = \beta = 0.$$

Reaalarvude korpus on järjestatud arvkorpus, sest:

1⁰ *kaks mistahes reaalarvu on seotud ühega seostest „suurem", „väiksem", „võrdne";*

2⁰ *kehtivad skalaarjärjestuse seadused* (pt. I, § 3 ja pt. IV, § 38).

Tehete skalaarsed omadused, mis esinesid ratsionaalarvude korpuses (vaata pt. I, § 7), jäävad kehtima ka reaalarvude korpuses. §-s 7 olid toodud järgmised tehete skalaarsed omadused: vahe $a - b$ on positiivne, kui $a > b$, negatiivne, kui $a < b$, võrdne nulliga, kui $a = b$, ning liitmise ja korrutamise monotoonsuseseadused. §-i 7 kõik arutlused, mis olid seotud ratsionaalarvudega, jäävad kehtima ka mistahes reaalarvude suhtes.

Märgime samuti ära järgmised reaalarvude korpuse põhiomadused.

I. *Reaalarvude korpuses on kehtiv Archimedese aksioom: mistahes positiivsete reaalarvude α ja β puhul on olemas niisugune naturaalarv n, et*

$$n\alpha > \beta.$$

Tõestus. Valime kaks positiivset ratsionaalarvu A ja B tingimusel, et $A < \alpha$ ja $\beta < B$. Archimedese aksioomi kehtivuse tõttu on ratsionaalarvude korpuses olemas niisugune naturaalarv n, et $nA > B$. Et aga $n\alpha > nA$ (korrutamise monotoonsus) ja $\beta < B$, siis $n\alpha > \beta$, m. o. t. t.

II. *Reaalarvude korpus evib tiheduse omadust.*

Tõestus on antud §-s 40.

III. *Reaalarvude korpus evib pidevuse omadust:*
Kui kaks reaalarvude järjendit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \text{ ja } \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots \quad (1)$$

moodustavad kuhjuvate vahemikkude järjendi

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_n, \beta_n], \ldots, \quad (2)$$

siis on olemas üksainus reaalarv ξ, mis kuulub kõigisse vahemikesse (2): s. o. $\alpha_n \leqslant \xi \leqslant \beta_n$ (mistahes n-i puhul).

§-s 41 tõestasime selle väite erijuhtumil, kui kasvava ja kahaneva järjendi liikmeiks olid ratsionaalarvud. Kuid need arutlused on igasuguste muutusteta kasutatavad ka sel puhul, kui arvud α_n ja β_n on reaalarvud*.

Pidevuse omaduse olemasolu tõttu reaalarvude korpuses erineb see oluliselt ratsionaalarvude korpusest.

Märkus. Kuhjuvate vahemikkude printsiip (pidevus) on ulatuslikult rakendatav elementaarmatemaatikas. Nii näiteks ringi sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade ümbermõõtude järjend kasvab, kuid vastavate ümberjoonestatud hulknurkade ümbermõõtude järjend kahaneb külgede arvu piiramatul kahendamisel. Ümber- ja sissejoonestatud vastavate hulknurkade ümbermõõtude vahe saab n-i küllalt suurte väärtuste korral kuitahes väikeseks teha. Järelikult on olemas ainult üks reaalarv, mis on suurem kõigist sissejoonestatud hulknurkade ümbermõõtudest, kuid väiksem ümberjoonestatud hulknurkade ümbermõõtudest. Seda arvu nimetataksegi ringjoone pikkuseks. Analoogiliselt kasutatakse kuhjuvate vahemikkude põhimõtet ümarkehade pindalade ja ruumalade leidmisel.

Reaalarvude korpust ei saa enam nõnda edasi laiendada, et jääksid kehtima tehete seadused, skalaarjärjestuse omadused, tehete skalaaromadused ja Archimedese aksioom. Reaalarvude hulgaga on võimatu ühendada mingeid „uusi arve" nii, et laiendatud arvhulk jääks arhimeedeslikuks, s. o. et oleksid rahuldatud kõik loeteldud arvhulga tingimused. Selles mõttes nimetatakse reaalarvude

---

* Teostada tõestus §-s 41 mistahes reaalsete otstega kuhjuvate vahemikkude puhul oli võimatu ainult selle tõttu, et tingimus 3° nõuab, et vahet $\beta_n - \alpha_n$ saaks teha kuitahes väikeseks küllalt suure n-i puhul. Kuid lahutamistehe reaalarvude hulgas ei olnud veel defineeritud (§ 41).

hulka maksimaalseks arhimeedeslikuks arvkorpuseks.

Tõestus vastuväiteliselt. Oletame, et reaalarvude hulga täiendamise tulemusena moodustus arhimeedeslik arvkorpus. Vaatleme ühte uut juurdevõetud „arvu" Ω. Võib lugeda $\Omega > 0$ (kui $\Omega < 0$, siis võib vaadelda arvu $0 - \Omega$).

Archimedese aksioomi alusel küllalt suure n-i puhul saame $1 + 1 + \ldots + 1 = n > \Omega$. Tähistagu $p + 1$ väikseimat naturaalarvu, mis on suurem Ω-st:

$$p < \Omega < p + 1.$$

Edasi toimime nii, nagu lõikude mõõtmise puhul kümnendsüsteemis: jaotades vahemiku $[p, p + 1]$ 10-ks võrdseks osaks määrame arvu q_1 tingimusel

$$p + \frac{q_1}{10} < \Omega < p + \frac{q_1 + 1}{10}.$$

Selle protsessi piiramatu jätkamine määrab reaalarvu

$$\alpha = p, q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$$

Arvu α koostise kohaselt on iga n-i puhul $\alpha_n^- < \Omega < \alpha_n^+$ ja ühtlasi ka $\alpha_n^- \leqslant \alpha \leqslant \alpha_n^+$. Tingimuse järgi $\alpha \neq \Omega$; võtame $\alpha < \Omega$, siis n-i iga väärtuse puhul

$$\Omega - \alpha < \alpha_n^+ - \alpha_n^- = \frac{1}{10^n}, \text{ millest } 10^n(\Omega - \alpha) < 1,$$

mis pole kooskõlas Archimedese aksioomiga.

Järelikult $\Omega = \alpha$, s. o. Ω ei saa olla „uus arv".

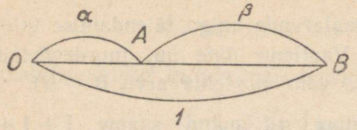
Märkus. Irratsionaalarvud ei moodusta arvkorpust, mida näeb ka sellest, et iga arvkorpus peab sisaldama kõiki ratsionaalarve. Otseselt on selge, et liitmis- ja korrutamistehted pole alati teostatavad irratsionaalarvude hulgas. Nii näiteks kahe irratsionaalarvu summa võib olla ratsionaalarv. Võtame mingi irratsionaalarvu mitteperioodilise kümnendmurru kujul, näiteks

$$\alpha = 0{,}235971 \ldots \tag{3}$$

Moodustame reaalarvu β, täiendades arvu α kümnendmärke kuni 9-ni:

$$\beta = 0{,}764028 \ldots \tag{4}$$

Arv β on irratsionaalne; sest kui murd (4) oleks perioodiline, siis murd (3) oleks samuti perioodiline; meil on



Joon. 31.

$$\alpha + \beta = 0{,}999\ldots = 1.$$

Moodustatud näite geomeetrilist mõtet selgitab joonis 31: lõik AB pikkusega β täiendab kuni pikkuseni OB antud lõiku OA pikkusega α, mis on ühiklõiguga OB ühismõõdutu.

§ 46. Juurimine.

Definitsioon. *Positiivse arvu a n-daks aritmeetiliseks juureks nimetatakse positiivset arvu x, mille n-s aste võrdub a-ga:*

$$x^n = a.$$

n-ndat aritmeetilist juurt tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$.

Ratsionaalarvude hulgas ei ole juurimistehe alati teostatav; sest näiteks $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt{16} = 4$, kuid $\sqrt{2}$ ei ole olemas, sest pole olemas ratsionaalarvu, mille ruut võrduks arvuga 2 (lk. 105).

Teoreem. *Milline olekski positiivne reaalarv a, ikkagi on olemas ainult üks positiivne reaalarv x, mille n-s aste on a.*

Tõestus. Vaatleme mittenegatiivsete täisarvude n-ndate astmete järjendit

$$0,\ 1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ \ldots \qquad (1)$$

Selle järjendi liikmed kasvavad tõkestamatult, sest mistahes etteantud $N > 0$ puhul ja küllalt suure k puhul kehtib võrratus $k^n > N$. Tõepoolest, olgu k mistahes naturaalarv, mis on suurem kui 1 ja suurem kui N:

$$1 < k \text{ ja } N < k.$$

Korrutades need võrratused liikmeti saame $N < k^2$. Korrutades viimase võrratuse liikmeti võrratusega $1 < k$, saame $N < k^3$ jne., ja lõpuks $N < k^n$. Eriti on järjendis (1) arvust a suuremaid arve. Tähistame $p + 1$-ga väikseima nendest arvudest:

$$p^n \leqslant a < (p+1)^n.$$

Jaotame vahemiku $[p,\ p+1]$ kümneks võrdseks osaks $p,\ p+\frac{1}{10},\ p+\frac{2}{10},\ \ldots,\ p+1$. Olgu $p+\frac{q_1+1}{10}$ väikseim neist arvudest, mille n-s aste on suurem kui a; siis

$$\left(p+\frac{q_1}{10}\right)^n \leqslant a < \left(p+\frac{q_1+1}{10}\right)^n.$$

Jaotame saadud uue vahemiku 10-ks võrdseks osaks ja toimime nii edasi piiramatult. Tulemusena saame reaalarvu x, mis on määratav kümnendmurruga:

$$x = p,\ q_1 q_2 \ldots q_m \ldots$$

Tema ligikaudsed puudusega ja liiaga väärtused

$$x_m^- = p,\ q_1 q_2 \ldots q_m \text{ ja } x_m^+ = p,\ q_1 q_2 \ldots (q_m+1) \qquad (2)$$

evivad järgmist omadust:

$$(x_m^-)^n \leqslant a \leqslant (x_m^+)^n. \qquad (3)$$

Reaalarvude korrutamise reegli järgi on x^n üksainus reaalarv, mis rahuldab võrratusi

$$(x_m^-)^n \leqslant x^n \leqslant (x_m^+)^n. \qquad (4)$$

Kõrvutades (3) ja (4) saame $x^n = a$, s. o. $x = \sqrt[n]{a}$. Ei ole olemas ühtegi teist arvu y, mille n-s aste on a. Tõepoolest, kui $y < x$, siis $y^n < x^n$ (korrutamise monotoonsus), s. o. $y^n < a$, kui aga $y > x$, siis $y^n > a$, m. o. t. t.

Arvud x_m^- ja x_m^+ on juure l i g i k a u d s e i k s puudusega ja liiaga väärtusteks täpsusega kuni $\frac{1}{10^m}$.

Reegel ruutjuure ligikaudsete väärtuste järjestikuseks arvutamiseks esitatakse üksikasjaliselt algebra koolikursuses. Mistahes juurijaga juurte leidmiseks võib kasutada järgmisi juhendeid. Juure ligikaudne väärtus täpsusega kuni 1 leitakse otseselt (või tabelite abil). Selleks et leida $\sqrt[n]{a}$ ligikaudseid väärtusi täpsusega kuni $\frac{1}{10^m}$, leiame juure täpsusega kuni 1 arvust $a10^{mn}$ ja jagame tulemuse 10^m-ga.

Tõepoolest, olgu

$$p^n \leqslant a \cdot 10^{mn} < (p+1)^n,$$

siis

$$\frac{p^n}{10^{mn}} \leqslant a < \frac{(p+1)^n}{10^{mn}} \text{ ja } \frac{p}{10^m} \leqslant \sqrt[n]{a} < \frac{p+1}{10^m}.$$

N ä i d e. Leida $\sqrt{2{,}5}$ täpsusega kuni 0,1; siin

$$a = 2{,}5, \quad n = 2, \quad m = 1, \quad 2{,}5 \cdot 100 = 250$$
$$15^2 < 250 < 16^2$$

ja otsitavad ligikaudsed väärtused on 1,5 ja 1,6.

K õ i g i reaalarvude hulgas ei ole juurimistehe a l a t i t e o s t a t a v. Tõepoolest, mistahes reaalarvu paarisaste ei saa olla negatiivne arv. Seepärast paarisjuurijaga juure leidmine negatiivsest arvust ei ole reaalarvude hulgas teostatav.

Kui A on antud positiivne arv, siis on olemas k a k s erinevat reaalarvu, mille paarisaste võrdub A-ga, nimelt kaks reaalset vastandarvu $\sqrt[2k]{A}$ ja $-\sqrt[2k]{A}$ omavad ühte ja sama $2k$-ndat astet, mis on võrdne A-ga.

P a a r i t u juurijaga juure leidmine reaalarvude hulgas on alati üheselt teostatav, sest negatiivse arvu paaritu aste on negatiivne. $A > 0$ puhul rahuldab tingimust $x^{2k+1} = A$ üksainus positiivne arv $x = \sqrt[2k+1]{A}$ ja tingimust $x^{2k+1} = -A$ — üksainus negatiivne arv $x = -\sqrt[2k+1]{A}$.

M ä r k u s. Võrdus

$$\sqrt[n]{a^n} = a \tag{5}$$

on kehtiv mistahes $a \geqslant 0$ puhul, sest sel tingimusel aritmeetiline juur omab a i n u l t ü h t e täiesti määratud mittenegatiivset väärtust. Kõigi reaalarvude hulgas ei ole võrdus (5) samasus, sest näiteks $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$, kuid mitte -2.

Üldiselt

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2} = a$$

ehk

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a \text{ (kui } a \geqslant 0) \\ -a \text{ (kui } a < 0). \end{cases}$$

Näited: 1. Vaatleme avaldist $\frac{\sqrt{a^2}}{a}$.
Meil on

$$\frac{\sqrt{a^2}}{a}=\frac{|a|}{a}=\begin{cases} 1 \text{ (kui } a > 0) \\ -1 \text{ (kui } a < 0) \\ \text{ei oma mõtet } a=0 \text{ puhul.} \end{cases}$$

2. Vaatleme avaldist $x+\sqrt{(x-1)^2}$; meil on $\sqrt{(x-1)^2}=$ $=x-1$, kui $x \geqslant 1$, ja $\sqrt{(x-1)^2}=-x+1$, kui $x<1$. Järelikult

$$x+\sqrt{(x-1)^2}=\begin{cases} 2x-1 \text{ (kui } x \geqslant 1), \\ 1 \text{ (kui } x < 1). \end{cases}$$

§ 47. Näiteid vahepealseist korpustest.

Võib näidata, et on olemas lõpmatu hulk arvkorpusi, mis sisaldavad osana ratsionaalarvude korpust ja sisalduvad reaalarvude korpuses. Neid korpusi nimetame vahepealseiks arvkorpusteks. Veendume näite varal vahepealsete korpuste olemasolus. Ühendame ratsionaalarvude hulgaga mingi irratsionaalarvu α. Siiski ainult α ühendamisest ei piisa arvkorpuse saamiseks. Korpuses peavad olema teostatavad aritmeetilised tehted (välja arvatud jagamine nulliga), seepärast peale α tuleb ühendada arvud, mis saadakse α-ga ja ratsionaalarvudega kõikvõimalike aritmeetiliste tehete teostamisel.

Näitena võtame $\alpha=\sqrt{k}$, kus k on mistahes ratsionaalarv, mis pole ratsionaalarvu ruut. Ühendades $\alpha=\sqrt{k}$ me peame ühendama kõikvõimalikud korrutised kujul

$\ldots -\sqrt{k}, \ -2\sqrt{k}, \ \ldots, \ 2\sqrt{k}, \ 3\sqrt{k}, \ \ldots, \ \frac{1}{2}\sqrt{k}$ ja üldiselt $b\sqrt{k}$, kus b on mistahes ratsionaalarv. Edasi me peame ühendama kõikvõimalikud summad $a+b\sqrt{k}$, korrutised $(a+b\sqrt{k})(a_1+b_1\sqrt{k})$ (kus a, b, a_1, b_1 on mistahes ratsionaalarvud) ja jagatised $\frac{a+b\sqrt{k}}{a_1+b_1\sqrt{k}}$ (kus a_1 ja b_1 mõlemad ei võrdu nulliga).

Teoreem. *Kõikvõimalike* $a + b\sqrt{k}$ *-kujuliste arvude hulk, kus* a *ja* b *on mistahes ratsionaalarvud ja* k *on antud arv, mis pole ratsionaalarvu ruut, moodustab korpuse.*

Tõestus. On tarvis näidata, et antud kujuga kahe arvu summa, vahe, korrutis ja jagatis on jällegi samakujulised.

Tõepoolest,

$$1^0\ (a + b\sqrt{k}) \pm (a_1 + b_1\sqrt{k}) = (a \pm a_1) + (b \pm b_1)\sqrt{k}$$

$$2^0\ (a + b\sqrt{k})(a_1 + b_1\sqrt{k}) = aa_1 + bb_1k + (a_1b + ab_1)\sqrt{k}$$

$$3^0\ \frac{a + b\sqrt{k}}{a_1 + b_1\sqrt{k}} = \frac{(a + b\sqrt{k})(a_1 - b_1\sqrt{k})}{(a_1 + b_1\sqrt{k})(a_1 - b_1\sqrt{k})} = \frac{aa_1 - bb_1k}{a_1^2 - b_1^2k} + \frac{ba_1 - ab_1}{a_1^2 - b_1^2k}\sqrt{k}\ *.$$

Võtame näiteks $k = 2$, siis saame erijuhtumina $a + b\sqrt{2}$-kujuliste arvude korpuse. See korpus on ratsionaalarvude korpuse ja reaalarvude korpuse v a h e p e a l n e. Ratsionaalarvude korpus sisaldub $a + b\sqrt{2}$-kujuliste arvude korpuses, sest $b = 0$ puhul muutub arv $a + b\sqrt{2}$ ratsionaalseks. Moodustatud korpus ei sisalda kõiki reaalarve. Nii näiteks selles korpuses ei sisaldu arv $\sqrt{3}$. Tõepoolest, vastasel korral kehtiks võrdus

$$a + b\sqrt{2} = \sqrt{3}.$$

Astendades ruutu saame

$$a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 3,$$

millest $\sqrt{2}$ avaldub ratsionaalarvu kujul

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab},$$

mis on aga võimatu.

Andes k-le mitmesuguseid väärtusi võime saada lõpmatu hulga vahepealseid korpusi $a + b\sqrt{k}$ -kujuliste arvudega. Olgu siinjuures tähendatud, et need korpused ei a m m u t a veel kõiki võimalikke vahepealseid korpusi.

---

* Nimetaja $a_1^2 - b_1^2k$ on nullist erinev, sest vastasel korral oleks k ratsionaalarvu ruut:

$$a_1^2 - b_1^2k = 0, \text{ millest } k = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2.$$

VI peatükk.

Elementaarsed funktsioonid.

§ 48. Hulkliikmed, ratsionaalsed funktsioonid ja lineaarvõrrandid reaalarvude korpuses.

II peatükis me õppisime tundma hulkliikmeid ja murdavaldisi ratsionaalarvude korpuses, kuhu kuuluvad arvud (tähistatud tähtede või numbritega) on ratsionaalsed. Kuid neid matemaatilisi avaldisi võib vaadelda ka reaalarvude korpuses, kus koefitsientide ja argumentide lubatavaiks väärtusteks ei ole mitte ainult ratsionaalsed, vaid ka mistahes reaalsed väärtused. Ratsionaalavaldiste ja hulkliikme mõistete definitsioonid (vaata § 9) jäävad endisteks, ainult nüüd tuleb tähtede lubatavaiks väärtusteks lugeda kõik reaalarvulised väärtused. Nii on reaalarvude korpuses vaadeldaval hulkliikmel

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

koefitsiendid a n t u d r e a a l a r v u d (ratsionaalsed või irratsionaalsed) ja argumendile x on lubatavad kõik mistahes r e a a l s e d väärtused.

Tehete teostamine hulkliikmetega (ratsionaalarvude korpuses, vaata pt. II) taandub n e l j a a r i t m e e t i l i s e t e h t e teostamisele teatavas järjestikuses nende koefitsientidega. Niisiis, peatükis II püstitatud hulkliikmete teooria ratsionaalarvude korpuses põhjenes ainult nelja aritmeetilise tehte teostamise võimalusel tema koefitsientidega (välja arvatud jagamine 0-ga). Teisiti väljendades, oluline on vaid, et arvkorpuse elementideks on hulkliikme koefitsiendid. Siit on ka arusaadav, et peatükis II esitatud hulkliikmete teooria ratsionaalarvude korpuses on laiendatav hulkliikmeile r e a a l a r v u d e korpuses ja seejuures pole tarvidust kogu teooriat mistahes reaalsete koefitsientidega hulkliikmete jaoks uuesti esitada, sest nagu ratsionaalarvudegagi, on neli aritmeetilist tehet teostatavad ka reaalarvudega. Kahe hulkliikme samasuse teoreem, teoreemid tehete kohta hulkliikmetega, teoreem hulkliikmete jäägiga jagamise kohta, hulkliikme jaguvuse ja taandumatuse mõisted, Bezout' teoreem, Eukleidese algoritm ja lahutamine taandumatuiks tegureiks — kõik need põhimõisted ja lausedühes neist tulenevate järeldustega jäävad kehtima hulkliikmete

suhtes, mida vaadeldakse reaalarvude korpuses (või mingis teises arvkorpuses).

Märkus. On iseenesest mõistetav, et hulkliikme ratsionaalsete lahendite leidmisviis, mis põhineb täisarvude jaguvuse teoorial, ei ole laiendatav mistahes reaalsete koefitsientidega hulkliikmeile.

Ratsionaalseid murde võib samuti vaadelda kui reaalsete koefitsientidega hulkliikmete suhteid ja laiendada viimaseile kõik, mis on öeldud §-s 22 ratsionaalsete koefitsientidega murdavaldiste kohta. Lõpuks põhineb lineaarvõrrandite süsteemide lahendamine ja uurimine samuti nelja aritmeetilise tehte teostatavusel võrrandite koefitsientide ja vabaliikmetega. Seega kõik, mis oli öeldud eespool ratsionaalsete koefitsientidega esimese astme võrrandisüsteemide kohta, on muutumatult kehtiv ka mistahes reaalsete koefitsientidega (või üldisemalt, mingisse arvkorpusse kuuluvate koefitsientidega) võrrandisüsteemide suhtes.

Üleminek ratsionaalarvude korpusest reaalarvude korpusse võimaldab tundma õppida matemaatiliste avaldiste hoopis laiemat klassi ja nende abil kujutatavaid elementaarseid funktsioone. Nii näiteks avaldis $\sqrt{A}$ omab ratsionaalarvude korpuses mõtet ainult sel tingimusel, kui juuritav avaldis A on ratsionaalarvu ruut, seevastu aga avaldis $\sqrt{A}$ omab reaalarvude korpuses mõtet A mistahes mittenegatiivse väärtuse puhul.

Käesolevas peatükis, mis on pühendatud elementaarsete funktsioonide teooriale, ei korda me reaalarvude korpuses hulkliikmete ja murdratsionaalsete funktsioonide teooriat (mis oleks täiesti üleliigne), vaid piirdume ainult väheste täiendustega.

§ 49. Hulkliikme nullkohad reaalarvude korpuses.

Iga n-da astme hulkliige reaalsete koefitsientidega

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ei saa omada rohkem kui n reaalset nullkohta (vaata § 15). Iga hulkliige, millel on vähemalt üks reaalne nullkoht, on reaalarvude korpuses taanduv. Tõepoolest, kui $x_1, x_2, \ldots, x_k$ on hulkliikme $f(x)$ nullkohtadeks, siis $f(x)$ jagub $(x - x_1)(x - x_2) \ldots$ $\ldots (x - x_k)$-ga.

Näitena vaatleme reaalsete koefitsientidega ruutkolmliiget

$$ax^2 + bx + c.$$

Toome sulgude ette koefitsiendi a ja rakendame täisruudu eraldamist:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ (kus } \Delta = b^2 - 4ac).$$

Kolmliikme nullkohtadeks on x-i need väärtused, millede puhul

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \tag{1}$$

ehk

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{2}$$

On võimalikud järgmised juhtumid:

1° $\Delta > 0$. Viimasest võrdusest saame

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3}$$

ja

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Seega saame kolmliikme kaks erinevat reaalset nullkohta. Kolmliige on taanduv ja

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

on tema lahutus taandumatuiks tegureiks.

2° $\Delta < 0$. Võrdus (1) ja seega ka võrdus (2) ei kehti x-i ühegi reaalse väärtuse puhul, sest x-i ühegi väärtuse puhul ei ole reaalarvu $x + \frac{b}{2a}$ ruut negatiivne. Üleminek võrdusele (3) on võimatu, sest (reaalarvude korpuses) $\Delta < 0$ puhul ei oma avaldis $\sqrt{\Delta}$ mõtet. Seega kolmliige e i o m a reaalseid nullkohti. Näitame, et $\Delta < 0$ puhul on kolmliige reaalarvude korpuses t a a n -

dumatu. Tõepoolest, ruutkolmliikme mittetriviaalseiks jagajaiks võivad olla esimese astme kaksliikmed. Kui kolmliige oleks taanduv, siis lahutuks ta tegureiks

$$ax^2 + bx + c = (kx + 1)(mx + n).$$

Kuid siis, vastandina eeldusele, oleks kolmliikmel kaks reaalset nullkohta:

$$x_1 = -\frac{1}{k} \text{ ja } x_2 = -\frac{n}{m}.$$

3⁰ $\Delta = 0$. Sel juhtumil

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2;$$

järelikult, kolmliikmel on reaalne nullkoht $x = -\frac{b}{2a}$, mida nimetatakse kahekordseks nullkohaks.

Järeldus. *Ruutkolmliikme taandumatuse tingimuseks reaalarvude korpuses on võrratus* $\Delta < 0$.

Iga ratsionaalsete koefitsientidega hulkliiget võib vaadelda reaalarvude korpuses, lugedes tema argumentide lubatavaiks väärtusiks mistahes reaalsed (mitte ainult ratsionaalsed) väärtused. Iga hulkliige, mis on taanduv ratsionaalarvude korpuses, on taanduv ka reaalarvude korpuses, sest tema ratsionaalsete koefitsientidega jagajad on ühtlasi reaalsete koefitsientidega jagajaiks. Vastupidine on ebaõige: hulkliige, mis on ratsionaalarvude korpuses taandumatu, võib osutuda reaalarvude korpuses taanduvaks.

Hulkliikme iga ratsionaalne nullkoht on ühtlasi tema reaalseks nullkohaks. Kuid ratsionaalsete koefitsientidega hulkliige võib omada irratsionaalseid nullkohti. Niisiis, argumendi lubatavate väärtuste hulga laiendamisel võib hulkliikme nullkohtade arv ainult suureneda.

Näiteid. 1. Hulkliige $x^2 - 2$ omab kaks reaalset nullkohta $x = \pm\sqrt{2}$ ja lahutub reaalsete koefitsientidega taandumatuiks tegureiks järgmiselt:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}). \qquad (4)$$

See hulkliige on ratsionaalarvude korpuses taandumatu, sest tegureiks lahutus (4) on ainus võimalik lahutus (kuni arvuliste

tegurite täpsuseni) ja seepärast ükski teine lahutus, erijuhtumina ka ratsionaalsete koefitsientidega lahutus, ei ole võimalik.

2. Vaatleme reaalsete koefitsientidega kolmliiget $ax^2 + bx + c$. Kui $\Delta > 0$, siis on see hulkliige reaalarvude korpuses taanduv ja lahutub kaheks lineaarseks teguriks:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

See kolmliige on ratsionaalarvude korpuses taanduv, kui nullkohad $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ on ratsionaalsed, s. o. kui diskriminant Δ on mingi ratsionaalarvu täpne ruut.

3. Hulkliige $x^4 + 1 > 0$ iga reaalse x-i puhul ja seepärast pole tal reaalseid nullkohti ja ta ei jagu ühegi esimese astme kaksliikmega. Järelikult hulkliige $x^4 + 1$ on kas taandumatu või lahutub kaheks teise astme taandumatuks teguriks. Reaalarvude korpuses on antud hulkliige taanduv:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = \\ &= [(x^2 + 1) + \sqrt{2}x][(x^2 + 1) - \sqrt{2}x] = \\ &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

See hulkliige on ratsionaalarvude korpuses taandumatu, sest viimane lahutus (ainus võimalus) sisaldab irratsionaalsete koefitsientidega tegureid. Antud hulkliige on taanduv vahepealses arvkorpuses kujul $a + b\sqrt{2}$ (vaata § 47).

4. Hulkliige $x^3 + x^2 - 3x - 3$ lahutub ratsionaalarvude korpuses taandumatuiks tegureiks järgmiselt:

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x + 1)(x^2 - 3).$$

Teine tegur on reaalarvude korpuses taanduv ja lahutamist saab jätkata:

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

5. Lühendatud korrutamise valemite järgi

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \text{ ja } x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Ruutkolmliige $x^2 \pm x + 1$ ei oma reaalseid nullkohti ($\Delta = -3 < 0$) ja seepärast on edasine tegureiks lahutamine võimatu nii ratsionaalarvude kui ka irratsionaalarvude korpuses.

§ 50. Juured ja tehted nendega.

Vastavalt §-le 46 on mistahes mittenegatiivse a ja naturaalse n-i puhul olemas üksainus mittenegatiivne arv $x = \sqrt[n]{a}$ (aritmeetiline juur), mille n-s aste on a.

Astmete võrdus $A^n = B^n$ kehtib mittenegatiivsete astendatavate A ja B puhul ainult sel juhtumil, kui A ja B on võrdsed. Tõepoolest, $A > B \geqslant 0$ puhul on $A^n > B^n$ (korrutamise monotoonsus) ja $0 \leqslant A < B$ puhul on $A^n < B^n$ ja järelikult $A^n \neq B^n$, kui $A \neq B$. See võimaldab tõestada rea omadusi juurimiseks otsese proovimise teel:

selleks et kindlaks määrata võrduse $A = B$ kehtivus mittenegatiivsete A ja B puhul, piisab võrduse $A^n = B^n$ kehtivuse tõestamisest, mis on saadud tõestatava seose mõlema poole astendamisel n-ndale astmele.

Tehete ja teisendamiste alljärgnevad reeglid kehtivad aritmeetiliste juurte puhul, s. o. eeldusel, et juuritav avaldis ja juurte väärtused on mittenegatiivsed arvud.

1° Korrutise juurimise reegel:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\,\sqrt[n]{a_2} \dots \sqrt[n]{a_k}.$$

Korrutise juur võrdub tegurite sama juurijaga juurte korrutisega.

Tõestus kontrollimisega. Astendame mõlemad pooled arvuga n:

$$\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_k}\right)^n = a_1 a_2 \dots a_k \text{ (juure definitsiooni järgi)}$$

$$\left(\sqrt[n]{a_1}\,\sqrt[n]{a_2} \dots \sqrt[n]{a_k}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a_1}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{a_2}\right)^n \dots \left(\sqrt[n]{a_k}\right)^n = a_1 a_2 \dots a_k$$

(korrutise astendamise reegli järgi).

2° Murru juurimise reegel (suulise sõnastuse jätame õppijaile):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Tõestus kontrollimisega.

3⁰ Juurija ja juuritava astendaja taandamise reegel:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}.$$

Tõestus kontrollimisega. Astendame mõlemad pooled arvuga nk:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^k = a^k$$

(astme astendamise reegli järgi)

$$\left(\sqrt[nk]{a^k}\right)^{nk} = a^k \quad \text{(juure definitsiooni järgi)}.$$

4⁰ Juure juurimise reegel:

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Tõestus kontrollimisega:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right]^k = \left[\sqrt[k]{a}\right]^k = a.$$

Järeldused reegleist 1⁰ ja 2⁰:

5⁰ Astme juurimise reegel:

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k.$$

Tõestus. Olgu 1⁰-s $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a$.

6⁰ Teguri juuremärgi ettetoomise reegel:

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}. \tag{5}$$

Tõestus:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b} \quad \text{(reegel 1⁰)}.$$

7⁰ Ümber kirjutades võrduse (5) teises järjestuses saame teguri juuremärgi alla viimise reegli:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

8⁰ Reegel juurte teisendamiseks ühisjuurijaga juurteks. Olgu n antud juurijate ühiskordseks arvuks

$$\sqrt[n_1]{A_1},\ \sqrt[n_2]{A_2},\ \ldots,\ \sqrt[n_k]{A_k}.$$

Tähistame $d_1, d_2, \ldots, d_k$-ga vastavad laiendustegurid:

$$n = n_1 d_1,\ n = n_2 d_2,\ \ldots,\ n = n_k d_k.$$

Kasutades reeglit 3⁰ on antud juured asendatavad vastavalt võrdsete juurtega, mis omavad ühisjuurija

$$\sqrt[n_1]{A_1} = \sqrt[n]{A_1^{d_1}},\ \sqrt[n_2]{A_2} = \sqrt[n]{A_2^{d_2}},\ \ldots,\ \sqrt[n_k]{A_k} = \sqrt[n]{A_k^{d_k}}.$$

Näide. Missugune arvudest $\sqrt{2}$ ja $\sqrt[3]{3}$ on suurem? Teisendame juured ühisjuurijaga juurteks:

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8};\quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9};$$

järelikult

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}.$$

Märkus. Reeglid tehteiks juurtega 1⁰ — 8⁰ võivad osutuda ebaõigeiks, kui kõik valemeis esinevad arvud pole positiivsed. Nii näiteks $a < 0$ ja $b < 0$ puhul pole valem

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

kehtiv. Tõepoolest, avaldis $\sqrt{ab}$ omab mõtet, sest $ab > 0$; kuid parem pool ei oma mõtet reaalarvude korpuses, sest kumbki tegureist $\sqrt{a}$ ja $\sqrt{b}$ kaotab mõtte.

§ 51. Irratsionaalsed avaldised.

Definitsioon. *Arvudest (tähtedega või numbritega tähistatud) kuue algebralise tehte (liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise) abil koostatud matemaatilist avaldist nimetatakse irratsionaalseks, kui ta sisaldab juurimistehet.*

Märkus. Me vaatleme algebralisi avaldisi välise kuju järgi. Pole võimatu, et irratsionaalne avaldis osutub samaseks mingi ratsionaalse avaldisega. Nii näiteks irratsionaalsel kujul

on antud avaldis $\sqrt{(x^2+1)^2}-1$ samane ratsionaalse avaldisega x^2.

Arvuliste ja täheliste irratsionaalsete avaldiste näiteiks võivad olla

$$1+\sqrt{2},\quad \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}},\quad \sqrt[3]{a+\sqrt{b}},\quad \sqrt{a^2-\sqrt[3]{ab}}+\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Irratsionaalsete avaldiste samased teisendused teostatakse üldseaduste järgi, mille järgi toimuvad tehted hulkliikmeliste avaldiste ja korrutistega, ning juurtega tehete reeglite järgi.

Lihtsaimate teisendamiste näiteid.

1. Teisendada $S=\frac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d}+\frac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d}-a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{a^4c^2}}$, kus a, b, c ja $d>0$.

Lahendus:

$$S=\frac{1}{a^2c}\sqrt{3d(a^4c^2)^2}+\frac{2}{ac^2}\sqrt{3d(2a^3c^3)^2}-a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{(a^2c)^2}}=$$

(korrutamise omaduste järgi)

$$=\frac{1}{a^2c}a^4c^2\sqrt{3d}+\frac{2}{ac^2}\cdot 2a^3c^3\sqrt{3d}-a^4c^2\frac{1}{a^2c}\sqrt{3d}=$$

(reeglid 6^0 ja 2^0)

$$=ca^2\sqrt{3d}+4a^2c\sqrt{3d}-a^2c\sqrt{3d}=(a^2c+4a^2c-a^2c)\sqrt{3d}=$$

$$=4a^2c\sqrt{3d}\ \text{(distributiivsus)}.$$

2. Teisendada $\left(\frac{24a^5b^2}{d^2}\sqrt[5]{\frac{a^2b^7}{c^2}}\right):\left(\frac{4a^2}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^4b^7}{cd^5}}\right)=$

$$=\left(\frac{24a^5b^2}{d^2}b\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{c^2}}\right):\left(\frac{4a^2}{b}\cdot\frac{ab^2}{d}\sqrt[3]{\frac{ab}{cd^2}}\right)=\ \text{(reegel } 6^0\text{)}$$

$$=\frac{6a^2b^2}{d}\left(\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{c^2}}:\sqrt[3]{\frac{ab}{cd^2}}\right)=\ \text{(korrutamise ja jagamise omadused)}$$

$$=\frac{6a^2b^2}{d}\left(\sqrt[15]{\left(\frac{a^2b^2}{c^2}\right)^3}:\sqrt[15]{\left(\frac{ab}{cd^2}\right)^5}\right)=\ \text{(reegel } 8^0\text{)}$$

$$=\frac{6a^2b^2}{d}\sqrt[15]{\frac{a^6b^6\cdot c^5d^{10}}{c^6a^6b^5}}=\ \text{(reegel } 2^0\text{)}\ \frac{6a^2b^2}{d}\sqrt[15]{\frac{abd^{10}}{c}}=\frac{6a^2b^2}{cd}\sqrt[15]{abd^{10}c^{14}}.$$

Märkus. Viimases näites vaadeldakse ainult paaritu juurijaga juuri, seepärast teisendamised on õiged kõigil (positiivseil või negatiivseil) nullist erinevail tähtede väärtusil.

3. Teisendada

$$S=\frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}},$$

kus x on mistahes nullist erinev reaalarv.

Lahendus:

$$S=\frac{2x}{\sqrt{\frac{(1+x^2)-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}=\frac{2x}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}=$$

$$=\frac{2x\sqrt{(1+x^2)^2}}{\sqrt{4x^2}}=\text{ (reegel } 2^0)$$

$$=\frac{x}{|x|}(1+x^2)=\begin{cases}1+x^2 & \text{(kui } x>0)\\ -(1+x^2) & \text{(kui } x<0).\end{cases}$$

4. Teisendada $Q=\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-x^2-1}$,

kui $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, kus $a>0$, $b>0$.

Lahendus. Arvutame

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-1}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}\right)-1}=\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}}=\frac{|a-b|}{2ab}.$$

Teostades asenduse saame

$$Q=\frac{2b\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)-\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}=\frac{2b\,|a-b|}{(a+b)-|a-b|}.$$

Kuid

$$|a-b|=\begin{cases}a-b & (a\geqslant b \text{ puhul})\\ b-a & (a<b \text{ puhul}),\end{cases}$$

seepärast

$$Q = \begin{cases} a - b & (a \geqslant b \text{ puhul}) \\ \frac{b}{a}(b - a) & (a < b \text{ puhul}). \end{cases}$$

Olgu antud mingi irratsionaalne avaldis S; nimetame selle kaasteguriks teist irratsionaalset avaldist M, mille korrutis SM on ratsionaalne avaldis. Näiteks avaldise $\sqrt[4]{a^3b^2}$ (kus $a > 0$ ja $b > 0$) kaasteguriks võib võtta $M = \sqrt[4]{ab^2}$, sest

$$\sqrt[4]{a^3b^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2} = \sqrt[4]{a^4b^4} = ab.$$

Märgime kaastegurite leidmise lihtsaimad juhtumid.

1. $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ kaasteguriks võib võtta $M = \sqrt{A} - \sqrt{B}$, sest

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = (\sqrt{A})^2 - (\sqrt{B})^2 = A - B.$$

2. $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ kaasteguriks võib võtta $M = \sqrt{A} + \sqrt{B}$.

3. $\sqrt[k]{A} - \sqrt[k]{B}$ kaastegur määratakse samasuse

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \ldots + y^{k-1})$$

alusel.

Võttes $x = \sqrt[k]{A}$ ja $y = \sqrt[k]{B}$ ning

$$M = \sqrt[k]{A^{k-1}} + \sqrt[k]{A^{k-2}B} + \sqrt[k]{A^{k-3}B^2} + \ldots + \sqrt[k]{B^{k-1}}$$

saame

$$(\sqrt[k]{A} - \sqrt[k]{B})M = A - B.$$

Erijuhtumi $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ puhul tuleb võtta

$$M = \sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}.$$

4. $\sqrt[k]{A} - \sqrt[k]{B}$ kaastegur leitakse samasuse

$$x^k \pm y^k = (x + y)(x^{k-1} - x^{k-2}y + \ldots \pm y^{k-1})$$

alusel (paaritu k puhul märk $+$, paaris k puhul märk $-$). Nii näiteks $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ puhul tuleb võtta $M = \sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$.

Real juhtumeil saab kaastegurit leida järjestikuselt. Vaatleme

näiteks avaldist $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$; korrutades seda avaldisega $M_1=\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}$ saame

$$(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C})(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})=$$
$$=(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2-C=A+B-C-2\sqrt{AB}.$$

Korrutades saadud korrutist avaldisega

$$M_2=A+B-C-2\sqrt{AB}$$

saame korrutiseks ratsionaalse avaldise

$$(A+B-C)^2-4AB.$$

Järelikult võib võtta

$$M=M_1M_2=(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})(A+B-C-2\sqrt{AB}).$$

Kaastegurite leidmist kasutatakse juuri sisaldavate murdavaldiste teisendamisel. Nii näiteks korrutades lugejat ja nimetajat nimetaja (või lugeja) kaasteguriga saame avaldise, mis ei sisalda nimetajas (või lugejas) irratsionaalsust.

N ä i t e i d. 1. Vabastada murru

$$\frac{1}{a-\sqrt[n]{b}}$$

nimetaja irratsionaalsusest.

L a h e n d u s:

$$\frac{1}{a-\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{(a-\sqrt[n]{b})(a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})}=$$

$$=\frac{a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a^n-b}.$$

2. Üle viia irratsionaalsus lugejast nimetajasse:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}{a-1}=\frac{a-\sqrt[3]{a^2}}{(a-1)(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a^2})}=$$

$$=\frac{(a-\sqrt[3]{a^2})(a^2+a\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4})}{(a-1)(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a^2+a\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^4})}=$$

$$=\frac{a^3-a^2}{(a-1)(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a^2+a\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[3]{a})}=$$

$$=\frac{a}{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})}.$$

3. Vabastada murru $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$ nimetaja irratsionaalsusest.

L a h e n d u s. Kasutame samasust (§ 21 lõpul)

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Võtame $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$.

Korrutades lugejat ja nimetajat avaldisega

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac}$$

saame

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac}}{(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Nimetaja lõpulikuks vabastamiseks irratsionaalsusest tuleb lugeja ja nimetaja korrutada avaldisega

$$(a+b+c)^2+3\sqrt[3]{abc}(a+b+c)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Võtame järgmise avaldise, mida kasutatakse ruutjuuri sisaldavate avaldiste teisendamisel:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}, \qquad (1)$$

kus $A>0$, $B>0$ ja $A^2>B$ ning märkideks võetakse kas ülemised või alumised.

T õ e s t u s. Võtame $\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=x$.

Tõstes mõlemad pooled ruutu saame

$x^2=2A+2\sqrt{A^2-B}$, millest $x=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}$,

järelikult

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (2)$$

Analoogiliselt leiame

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

liites ja lahutades liikmeti saame valemi (1).

Näiteid. 1. $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$; võtame $A=4\sqrt{2}$, $B=24$. Saame

$$\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}=\sqrt{4\sqrt{2}+\sqrt{24}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{32-24}}{2}}+\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{32-24}}{2}}=$$

$$=\sqrt{3\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{2}.$$

2. Teisendada $S=\sqrt{x^2+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, kus $x\geqslant 1$. Võttes valemis (2) $A=x$, $B=4(x-1)$ saame

$$\sqrt{A^2-B}=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|.$$

Kuid

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & (\text{kui } x\geqslant 2)\\ 2-x & (\text{kui } x<2).\end{cases}$$

Seega

$$S=2\sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}}=\begin{cases} 2\sqrt{x-1} & (\text{kui } x\geqslant 2)\\ 2 & (\text{kui } x<2).\end{cases}$$

§ 52. Astme mõiste üldistamine.

Defineerides astet kui võrdsete tegurite korrutist omab sümbol a^n mõtet ainult siis, kui n on naturaalarv (sest korrutada saab ainult naturaalarvu tegureid). Sümbolid a^0, a^{-1}, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\sqrt{2}}$ jne. ei oma mõtet, sest a korrutamine iseenesega 0 või -1 või $\frac{1}{2}$ või $\sqrt{2}$ korda ei oma mõtet. Sümbolile a^n, kus n pole naturaalarv, saab mõtet anda ainult definitsiooniga, omistades temale täiesti määratud väärtuse juhtumeil, kui n ei ole naturaalarv.

On teada astme järgmised põhiomadused:

$$\text{(I)}\quad a^n a^m=a^{n+m}$$
$$\text{(II)}\quad (a^m)^n=a^{nm}$$

(kus n ja m on naturaalarvud). Juhindume järgmisest printsiibist:

Astme mõiste üldistamisel peavad jääma kehtima omadused I ja II.

A s t e n d a j a n u l l. Kui (esialgu formaalselt) seoses (I) võtta $m = 0$, saame

$$a^n \cdot a^0 = a^n.$$

Kui $a \neq 0$, siis leiame üheainsa võimaliku väärtuse $a^0 = 1$. See arutlus p o l e võrduse $a^0 = 1$ tõestuseks (sest $m = 0$ puhul kaotab avaldis a^m mõtte), ta ainult näitab, missugune definitsioon tuleb võtta a^0 puhul, et jääks kehtima omadus (I).

Definitsioon. *Kui* $a \neq 0$, *siis loeme* $a^0 = 1$. *Sümbolile* 0^0 *me ei omista ühtegi arvulist väärtust.*

Omaduse (II) kehtivust kontrollitakse otseselt:

$$(a^0)^n = 1^n = 1 = a^{0 \cdot n}, \quad (a^m)^0 = 1 = a^{0 \cdot m}, \quad (a^0)^0 = 1^0 = 1 = a^{0 \cdot 0}.$$

N e g a t i i v n e a s t e n d a j a. Kui võrduses (I) võtta $m = -n$, siis saame

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1,$$

millest $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (kus $a \neq 0$). Et jääks kehtima omadus (I), võtame ***definitsiooni:*** *kui* $a \neq 0$, *siis loeme* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

On kerge näha, et omadus (I) jääb kehtima mistahes täisarvulise n-i ja m-i puhul. Olgu näiteks n positiivne ja m negatiivne arv, $m = -m_1$; siis

$$a^n a^m = a^n a^{-m_1} = a^n \cdot \frac{1}{a^{m_1}} = \frac{a^n}{a^{m_1}} =$$

$$= \begin{cases} a^{n-m_1} \text{ (kui } n > m_1) \\ \frac{1}{a^{m_1-n}} \text{ (kui } n < m_1). \end{cases}$$

Teisel juhtumil

$$\frac{1}{a^{m_1-n}} = a^{-(m_1-n)} = a^{n-m_1}.$$

Seega mõlemal juhtumil

$$a^n a^m = a^{n-m_1} = a^{n+(-m_1)} = a^{n+m}.$$

Teised võimalikud juhtumid soovitame läbi arutada õppijail.

Omaduse (II) kehtivust kontrollitakse otseselt. Olgu näiteks mõlemad astendajad negatiivsed; siis

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn} = a^{(-m)(-n)}.$$

Teised võimalikud juhtumid soovitame läbi arutada õppijail.

Murruline astendaja. Olgu a positiivne reaalarv. Võtame võrduses (II) $m = \frac{1}{n}$; siis saame $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a$.

Definitsioon. *Kui* $a > 0$, *siis loeme*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Definitsioonist järeldub, et $(a^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a$. Näitame, et avaldised $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ ja $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ omavad ühte ning sama väärtust. Tõepoolest,

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \text{ ja } (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

seepärast on loomulik võtta tarvitusele järgmine ***definitsioon:***

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Teoreem. *Kui* $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$, *siis ka* $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m_1}{n_1}}$.

Tõestus. $mn_1 = m_1 n$, järelikult

$$a^{mn_1} = a^{m_1 n} \text{ ja } \sqrt[nn_1]{a^{mn_1}} = \sqrt[nn_1]{a^{m_1 n}},$$

millest $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}}$, s. o. $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m_1}{n_1}}$, m. o. t. t.

Kontrollime omaduste (I) ja (II) kehtivust mistahes murruliste astendajate puhul. Võtame $n = \frac{p}{q}$, $m = \frac{r}{s}$, siis

I. $$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p}\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}}\sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

II. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}} = \sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{sq}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$.

Negatiivse murrulise astendaja jaoks laiendatakse astme mõiste järgmise definitsiooniga:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Märkus. Kui kinni pidada definitsioonist $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ka negatiivse a puhul, siis astet $a^{\frac{1}{n}}$ ($a < 0$ puhul) tuleb vaadelda ainult n-i paaritute väärtuste korral, sest paaris n-i puhul ei oma $\sqrt[n]{a}$ mõtet (reaalarvude korpuses). Avaldised $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ ja $(a^m)^{\frac{1}{n}}$, mis ühtivad $a > 0$ puhul, võivad $a < 0$ puhul osutuda mittesamasteks. Tõepoolest, olgu näiteks $a = -2$, $n = 2$, $m = 4$; siis $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt{-2})^4$ ei oma mõtet. Kuid $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16} = 4$. Murd $\frac{m}{n} = \frac{4}{2}$ on taanduv ja võrdub arvuga 2, seepärast $a^{\frac{m}{n}} = a^2 = (-2)^2 = 4$. Samade arvuliste väärtuste puhul $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = (\sqrt[4]{-2})^2$ ei oma mõtet, seevastu aga $(a^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. Murd $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ ja $a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ ei oma mõtet. Seepärast, kui astet $a^{\frac{m}{n}}$ vaadeldakse negatiivse a puhul, siis eeldatakse, et murd $\frac{m}{n}$ on taandumatu ja nimetaja $n = 2k + 1$ on paaritu arv; seega

$$\left(a^{\frac{1}{2k+1}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{a^m}.$$

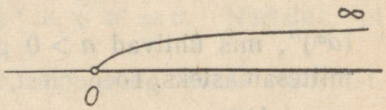
§ 53. Ratsionaalse astendajaga astmefunktsioon.

Lühiduse otstarbel kasutame järgmist terminoloogiat ja leppetähiseid. Kõigi reaalarvude hulka nimetame vahemikuks $-\infty$-st (miinus lõpmatusest) kuni ∞-ni (lõpmatuseni) ja tähistame sümboliga $(-\infty, \infty)$. Geomeetriliselt kujutatakse $(-\infty, \infty)$ kogu arvteljena (joonis 32). Kui täht-argumendi x lubatavaks väärtuseks on mistahes reaalarv, siis kirjutatakse see võrratustega

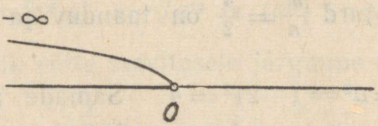
$$-\infty < x < \infty.$$

Kõigi antud arvust a suuremate reaalarvude hulka nimetame vahemikuks a-st kuni ∞-ni ja tähistame sümboliga (a, ∞). Kõigi antud arvust a väiksemate reaalarvude hulka nimetame vahemikuks $-\infty$-st kuni a-ni ja tähistame sümboliga $(-\infty, a)$. Nii näiteks vahemik $(0, \infty)$ on kõigi positiivsete arvude

Joon. 32.



Joon. 33.



Joon. 34.

hulk (joonis 33). Vahemik $(-\infty, 0)$ on kõigi negatiivsete arvude hulk (joonis 34). Sümboleid $-\infty$ ja ∞ ei tule vaadelda kui arve; nende kasutamise mõte määratakse iga kord vastavate selgitustega.

Definitsioon. *Astmefunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis on antud valemiga* $y = x^n$, *kus* x *on argument,* n *antud arv ja lubatavaiks argumendi väärtusteks on kõik väärtused, mille puhul avaldisel* x^n *on mõte.*

Astmefunktsioon naturaalse astendajaga. Olgu n naturaalarv.

1⁰ *Aste* x^n *omab mõtet* x*-i kõigi reaalsete väärtuste puhul.* Seepärast x-i lubatavate väärtuste hulgaks on kõigi reaalarvude kogum.

2^0 Argumendi mittenegatiivseil väärtustel on $0 \leqslant x < \infty$, x-i suuremale väärtusele vastab x^n-i suurem väärtus, s. o. *funktsioon* x^n *kasvab vahemikus* $(0, \infty)$.

Tõestus. Kui $0 \leqslant x_1 < x_2$, siis monotoonsuseseaduse järgi on

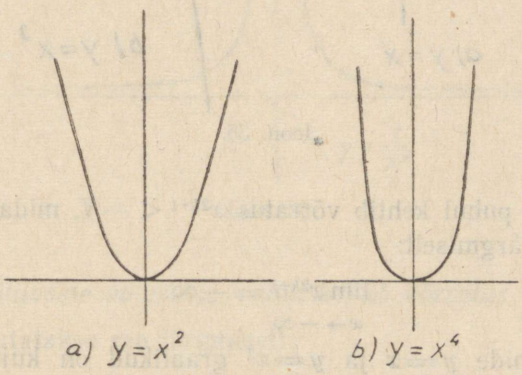
$$x_1^2 < x_2^2,\ x_1^3 < x_2^3,\ \ldots,\ x_1^n < x_2^n,\ \text{m. o. t. t.}$$

3^0 Ükskõik kui suur olekski etteantud arv $N > 0$, x-i küllalt suurte väärtuste puhul kehtib võrratus $x^n > N$. Sümboolselt kirjutatakse seda järgmiselt:

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty.$$

Tõestus. §-s 46 on näidatud, et k küllalt suure naturaalarvulise väärtuse puhul kehtib võrratus $k^n > N$. Kuid $x > k$ kõigi väärtuste puhul on ammugi $x^n > N$, m. o. t. t.

Tõestatud omaduste $1^0 - 3^0$ kogu väljendatakse kokkuleppe kohaselt lühidalt järgmiselt: *vahemikus* $0 \leqslant x < \infty$ *funktsioon* $y = x^n$ *kasvab* 0*-st kuni* ∞*-ni.*



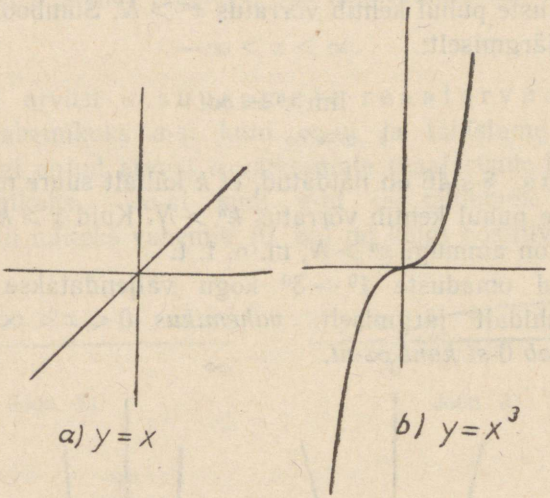
Joon. 35.

4^0 Kui n on paarisarv $(n = 2k)$, siis $(-x)^{2k} = x^{2k}$. Niisiis funktsiooni x^{2k} väärtused on vastandpunktides x ja $-x$ ühesugused. Siit järeldub, et vahemikus $-\infty < x < 0$ on funktsioon x^{2k} kahanev. x-i absoluutväärtuselt küllalt suurte negatiivsete väärtuste puhul kehtib võrratus $x^{2k} > N$ (kus N on mistahes etteantud arv). Sümboolselt kirjutatakse seda järgmiselt:

$$\lim_{x \to -\infty} x^{2k} = \infty.$$

Joonisel 35 on kujutatud funktsioonide $y = x^2$ ja $y = x^4$ graafikud.

5⁰ Kui n on paarituarv ($n = 2k + 1$), siis $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$. Järelikult, *vastandpunktides x ja $-x$ on funktsiooni väärtused absoluutsuuruselt võrdsed ja märgilt vastupidised. Siit järeldub, et vahemikus $-\infty$-st kuni ∞-ni on funktsioon $y = x^{2k+1}$ kasvav.* x-i absoluutsuuruselt küllalt suurte negatiivsete väärtuste ja mistahes



Joon. 36.

etteantud N-i puhul kehtib võrratus $x^{2k+1} < -N$, mida sümboolselt kirjutatakse järgmiselt:

$$\lim_{x \to -\infty} x^{2k+1} = -\infty.$$

Funktsioonide $y = x$ ja $y = x^3$ graafikud on kujutatud joonisel 36.

Astmefunktsioon negatiivse täisarvulise astendajaga. Võtame $n = -k$, kus k on naturaalarv, ja vaatleme funktsiooni $y = x^n = \frac{1}{x^k}$.

1⁰ Avaldis $\frac{1}{x^k}$ kaotab mõtte ainult $x = 0$ puhul. *x-i lubatavate väärtuste hulgaks on kõigi nullist erinevate reaalarvude hulk,* s. o. ta koosneb kahest vahemikust $(-\infty, 0)$ ja $(0, \infty)$ (välja arvatud 0).

2^0 Vahemikus $(0, \infty)$ x^k kasvab, järelikult $y = \frac{1}{x^k}$ kahaneb.

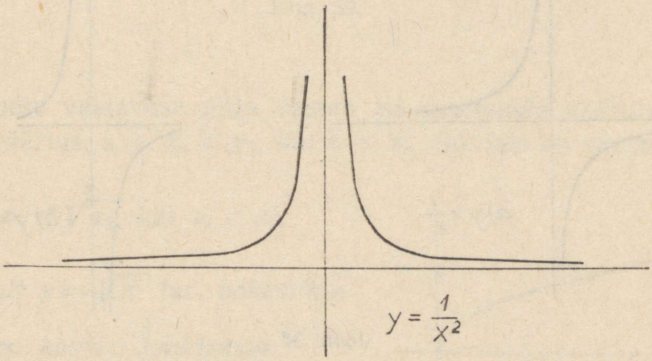
3^0 *Ükskõik kui väike olekski etteantud arv* $\varepsilon > 0$, *x-i küllalt suurte väärtuste puhul kehtib võrratus* $0 < y < \varepsilon$. Sümboolselt kirjutatakse see järgmiselt:

$$\lim_{x \to \infty} x^{-k} = 0.$$

Tõestus. Meil on teada, et $\lim_{x \to \infty} x^k = \infty$,

järelikult x-i küllalt suurte väärtuste puhul kehtib võrratus $x^k > \frac{1}{\varepsilon}$, ent siis $\frac{1}{x^k} < \varepsilon$, m. o. t. t.

4^0 *Ükskõik kui suur olekski etteantud arv* $N > 0$, *x-i küllalt*



Joon. 37.

väikeste positiivsete väärtuste puhul kehtib võrratus $\frac{1}{x^k} > N$. Sümboolselt kirjutatakse see järgmiselt:

$$\lim_{x \to 0} x^{-k} = \infty \quad (\text{kus } x > 0).$$

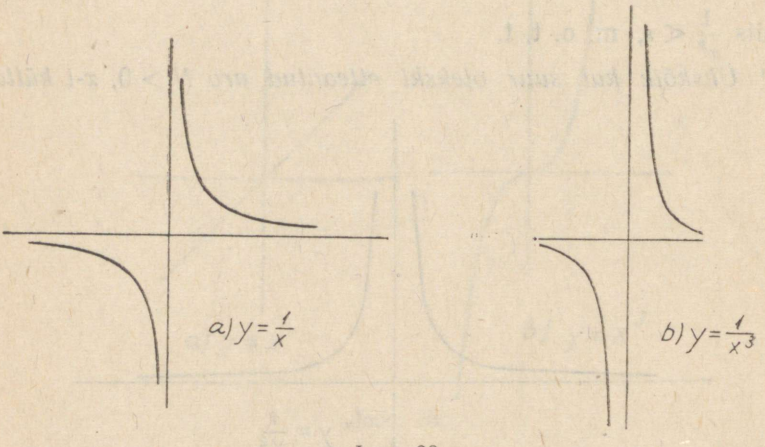
Tõestus. x-i kõigi positiivsete väärtuste puhul, mis on väiksemad kui $\frac{1}{\sqrt[k]{N}}$, on $x^{-k} = \frac{1}{x^k} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[k]{N}}\right)^k} = N$, m. o. t. t.

Omadused 2^0, 3^0 ja 4^0 väljendatakse kokkuleppe kohaselt järgmiselt: *vahemikus* $0 < x < \infty$ *funktsioon* $y = x^{-k}$ *kahaneb* ∞*-st kuni* 0*-ni.*

5⁰ Kui $k = 2l$ on paarisarv, siis $(-x)^{-k} = \frac{1}{(-x)^{2l}} = x^{-k}$.

Seepärast vahemikus $-\infty$*-st kuni* 0*-ni funktsioon* $y = x^{-k}$ *kasvab* 0*-st kuni* ∞*-ni.* Funktsiooni $y = x^{-2}$ graafik on kujutatud joonisel 37.

6⁰ Kui $k = 2l + 1$ on paarituarv, siis $(-x)^{-k} = -x^{-k}$, järelikult *vahemikus* $-\infty$*-st kuni* 0*-ni funktsioon* $y = x^{-k}$ *kahaneb* 0*-st kuni* $-\infty$*-ni.* Funktsioonide $y = \frac{1}{x}$ ja $y = \frac{1}{x^3}$ graafikud on kujutatud joonisel 38.



Joon. 38.

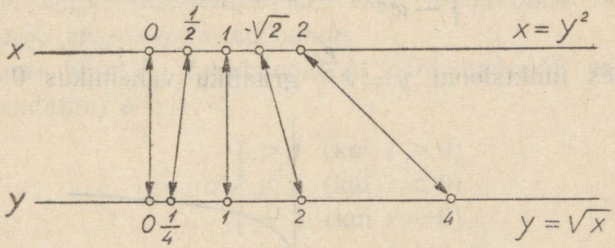
Astmefunktsioon murrulise astendajaga. Võtame $n = \frac{1}{k}$, kus k on naturaalarv, ja vaatleme funktsiooni

$$y = x^n = \sqrt[k]{x}$$

vahemikus $0 \leqslant x < \infty$. Juure olemasolu teoreemi (vaata § 46) järgi vastab x-i igale mittenegatiivsele väärtusele ainult üks y-i mittenegatiivne väärtus. Ümberpöördult, y-i igale väärtusele vastab ainult üks x-i väärtus, mis on määratav valemiga $x = y^k$. Niisiis, x-i ja y-i väärtuste vahel on olemas üksühene vastavus. Joonisel 39 on kujutatud selle vastavuse skeem $k = 2$ puhul. Funktsioone $y = \sqrt[k]{x}$ ja $x = y^k$ nimetatakse teineteise pöördfunktsioonideks. Esimesel on x

argumendiks ja y on funktsiooniks, teisel on y argumendiks ja x on funktsiooniks. Naturaalarvulise astendajaga astmefunktsiooni omaduse tõttu vastab y-i suuremale väärtusele x-i suurem väärtus, s. o.

$$x_1 < x_2, \text{ kui } y_1 < y_2 \text{ (siin } x_1 = y_1^k,\ x_2 = y_2^k).$$



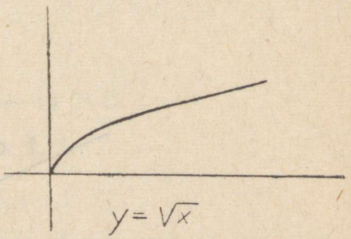
Joon. 39.

Üksühese vastavuse tõttu vastab x-i suuremale väärtusele y-i suurem väärtus, s. o. $y_1 < y_2$, kui $x_1 < x_2$, ehk mis on sama:

$$\sqrt[k]{x_1} < \sqrt[k]{x_2}, \text{ kui } x_1 < x_2.$$

Järelikult $y = \sqrt[k]{x}$ *on vahemikus* $0 \leqslant x < \infty$ *kasvav funktsioon.*

Selles vahemikus $y = \sqrt[k]{x}$ *kasvab* 0-*st kuni* ∞-*ni.* Funktsiooni $y = \sqrt[k]{x}$ graafiku ehitamiseks piisab $x = y^k$ graafiku ehitamisest y-i positiivsete väärtuste abil. Nii $k = 2$ puhul on $y = \sqrt{x}$ graafikuks parabooli haru, mis on kujutatud joonisel 35, kuid paigutatud nii, nagu joonisel 40.



Joon. 40.

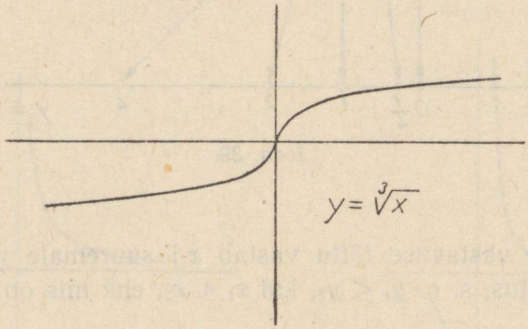
Funktsiooni $y = x^{\frac{p}{q}}$ (eeldusel, et murd $\frac{p}{q}$ on taandumatu) uurimine vahemikus $0 \leqslant x < \infty$ ei tee raskusi. Tõepoolest, $y = \sqrt[q]{x^p}$ ja me võime y-i väärtuse arvutust jaotada kahte ossa:

$$u = x^p \text{ ja } y = \sqrt[q]{u}.$$

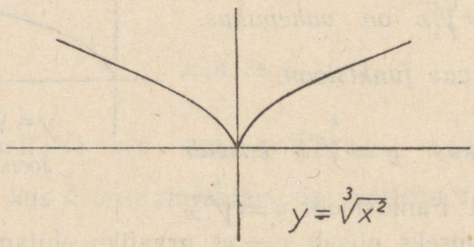
Vahemikus $(-\infty, 0)$ ei oma funktsioon $y = x^{\frac{p}{q}}$ paarisarvulise q puhul mõtet. Paaritu q puhul

$$(-x)^{\frac{p}{q}} = \begin{cases} x^{\frac{p}{q}} \text{ (kui } p \text{ on paarisarv)} \\ -x^{\frac{p}{q}} \text{ (kui } p \text{ on paarituarv).} \end{cases}$$

Ehitades funktsiooni $y = x^{\frac{p}{q}}$ graafiku vahemikus $0 \leqslant x < \infty$,



Joon. 41.



Joon. 42.

ei tekita graafiku ehitamine raskusi ka x-i negatiivsete väärtuste puhul. Joonisel 41 ja 42 on esitatud vastavalt funktsioonide

$$y = x^{\frac{1}{3}} \text{ ja } y = x^{\frac{2}{3}}$$

graafikud.

Negatiivse murrulise n-i puhul saab funktsiooni $y = x^n$ uurida samal viisil nagu negatiivse täisarvulise n-i puhulgi.

§ 54. Ratsionaalse argumendiga eksponentfunktsioon.

Olgu antud reaalarv $a > 0$, r-i * igale ratsionaalväärtusele vastab ainult üks a^r-i väärtus, seepärast a^r-i saab vaadelda kui argumendi r funktsiooni.

Definitsioon. *Funktsiooni a^r, kus argumendi r lubatavaiks väärtusteks on kõigi ratsionaalarvude hulk, nimetatakse ratsionaalse argumendiga eksponentfunktsiooniks.*

Määrame kindlaks funktsiooni a^r põhiomadused, eeldades, et alus (astendatav) $a > 1$.

1^0
$$a^r \begin{cases} > 1 & (\text{kui } r > 0) \\ < 1 & (\text{kui } r < 0) \\ = 1 & (\text{kui } r = 0). \end{cases}$$

Tõestus. Olgu $r = \frac{p}{q}$ (kus p ja q on naturaalarvud), siis $a^p > 1$, tähendab $\sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{1} = 1$.

Kui $r = -s < 0$, siis $a^r = \frac{1}{a^s} < 1$, m. o. t. t.

2^0 *a^r kasvab.*

Tõestus. Kui $r_1 < r_2$, siis

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) > 0$$

(sest $a^{r_2 - r_1} > 1$), millest $a^{r_2} > a^{r_1}$, m. o. t. t.

3^0 $\lim\limits_{r \to \infty} a^r = \infty$.

Tõestus. Piisab veendumisest, et mistahes etteantud kuitahes suure N-i puhul saab leida niisuguse naturaalarvu n, et $a^n > N$. Kuid siis (a^r kasvamise tõttu) n-st suurema mistahes ratsionaalse r-i puhul on ammugi $a^r > N$. Tõestuseks tuletame abivõrratuse:

$$(1 + h)^n > 1 + nh, \qquad (1)$$

kus n on mistahes naturaalarv, suurem kui 1, ja h on mistahes positiivne arv. See võrratus saadakse, kui valemis

$$(1 + h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 + \ldots + h^n \qquad (1)$$

kõik liikmed alates 3-ndast ära jätta.

---

* Irratsionaalse astendajaga aste ei ole veel defineeritud, seepärast ei saa seda veel vaadelda.

Et $a > 1$, siis tähistades $a - 1 = h > 0$ saame $a = 1 + h$. Asetades võrratusse (1) $1 + h = a$ ja $h = a - 1$ saame

$$a^n > 1 + n(a - 1).$$

Valime naturaalarvu n niivõrd suure, et oleks kehtiv võrratus $1 + n(a - 1) > N$, millest $n > \frac{N-1}{a-1}$. Siis seda enam $a^n > N$, m. o. t. t.

4⁰ *n-i kõigi küllalt suurte väärtuste puhul on kehtiv võrratus*

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon,$$

kus $\varepsilon > 0$ *on mistahes etteantud kuitahes väike arv.* Väite mõte on selge: küllalt suurte juurija väärtuste puhul juure $\sqrt[n]{a}$ väärtused erinevad kuitahes vähe arvust 1.

Tõestus. Võttes võrratuses (1) $h = \varepsilon$ saame

$$(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon. \qquad (1')$$

Olgu $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, siis $1 + n\varepsilon > a$; (1') alusel seda enam $(1 + \varepsilon)^n > a$, millest $1 + \varepsilon > \sqrt[n]{a}$ ja järelikult

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon, \text{ m. o. t. t.}$$

Märkus. Võib eksikombel paista, et omadus 4⁰ on silmanähtav ega vaja tõestust, sest $a^0 = 1$; siit aga võib näida, et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1$. Kuid võrdusest $a^0 = 1$ ei tulene iseenesest, et astme a^k astendaja k küllalt väikeste nullist erinevate väärtuste puhul saab teha kuitahes vähe erinevaks arvust 1.

5⁰ $\lim\limits_{r\to-\infty} a^r = 0$.

Tõestus. Olgu $r = -k$, kus $k > 0$. Näitame, et k kõigi küllalt suurte väärtuste puhul kehtib võrratus

$$0 < a^{-k} < \varepsilon,$$

kus ε on mistahes etteantud kuitahes väike positiivne arv. Punkti

3^0 järgi $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = \infty$; järelikult k kõigi küllalt suurte väärtuste puhul $\frac{1}{\varepsilon} < a^k$, kuid siis $0 < \frac{1}{a^k} < \varepsilon$; s. o. $0 < a^{-k} < \varepsilon$, m. o. t. t.

Omaduste 2^0, 3^0 ja 5^0 kogu on lühidalt väljendatav järgmise väitega: *r-i kõigi ratsionaalsete väärtuste puhul vahemikus* $(-\infty, \infty)$ *vaadeldav funktsioon kasvab* a^r *0-st kuni* ∞*-ni.*

Eksponentfunktsiooni a^r omadusi arvust 1 väiksema astendatava a puhul võib leida kergesti, kui võtta arvesse, et $a^r = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^r}$, kus $\frac{1}{a} > 1$, kui $0 < a < 1$. Nii näiteks kasvab $\left(\frac{1}{a}\right)^r$ vahemikus $(-\infty, \infty)$ 0-st kuni ∞-ni, tähendab, a^r kahaneb ∞-st kuni 0-ni.

Lõpuks, kui $a = 1$, siis eksponentfunktsioon a^r omab ühte ja sama väärtust, sest r-i kõigi väärtuste puhul $1^r = 1$.

§ 55. Irratsionaalse astendajaga aste.

Olgu $a = p,\ q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$* antud irratsionaalarv, mis on kujutatud kümnendmurruna.

Vaatleme arvu a lähendeid kümnendsüsteemis α_n^- ja α_n^+ täpsusega kuni $\frac{1}{10^n}$.

Teoreem. *Järjend*

$$\left[a^{\alpha_0^-}, a^{\alpha_0^+}\right], \left[a^{\alpha_1^-}, a^{\alpha_1^+}\right], \ldots, \left[a^{\alpha_n^-}, a^{\alpha_n^+}\right], \ldots \qquad (1)$$

on kuhjuvate vahemikkude järjend.

Tõestus 1^0. Olgu $a > 1$. Astmete $a^{\alpha_n^-}$ järjend kasvab, sest α_n^- (vaata omadus 2^0) kasvab. Analoogiliselt $a^{\alpha_n^+}$ kahaneb.

2^0 n-i kõigi väärtuste puhul on $a^{\alpha_n^-} < a^{\alpha_n^+}$, sest $\alpha_n^- < \alpha_n^+$.

---

* Täisosa p võib olla negatiivne arv, sest kui $a = -2{,}3751\ldots$, siis $a = -2 - 0{,}3751\ldots = -3 + (1 - 0{,}3751\ldots) = -3 + 0{,}6248\ldots = \bar{3}{,}6248$.

3⁰ Vahet $a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-}$ saab n-i küllalt suurte väärtuste puhul teha kuitahes väikeseks. Tõepoolest, meil on

$$a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-} = a^{\alpha_n^-}\left(a^{\alpha_n^+ - \alpha_n^-} - 1\right) < a^{p+1}\left(\frac{1}{a^{10^n}} - 1\right) = a^{p+1}\left(\sqrt[10^n]{a} - 1\right).$$

Eelmise §-i punkti 4⁰ omaduse järgi on mistahes etteantud $\varepsilon > 0$ ja n-i küllalt suurte väärtuste puhul $\sqrt[10^n]{a} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^{p+1}}$; kuid siis

$$a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-} < \varepsilon, \text{ m. o. t. t.}$$

Soovitame õppijail teostada arutlusi iseseisvalt juhtumil, kui $0 < a < 1$.

Definitsioon. *Astmeks a^α (kus $a > 0$) nimetatakse arvu, mis on määratud kuhjuvate vahemikkude järjendiga* (1).

Niisiis, arv a^α, kui $a > 1$, on suurem kõigist $a^{\alpha_n^-}$-kujulistest arvudest ja väiksem kõigist $a^{\alpha_n^+}$-kujulistest arvudest:

$$a^{\alpha_n^-} < a^\alpha < a^{\alpha_n^+}.$$

$0 < a < 1$ puhul on

$$a^{\alpha_n^+} < a^\alpha < a^{\alpha_n^-}.$$

Kui $a = 1$, siis $a^\alpha = 1$. Negatiivsete arvude irratsionaalseid astmeid elementaarmatemaatikas e i v a a d e l d a.

S e l g i t u s. Vaatleme näiteks astet $(-2)^r$ astendaja r ratsionaalsete väärtuste puhul, mis on lähedased antud irratsionaalarvule. Olgu $r = \frac{p}{q}$ taandumatu murd; siis

$$(-2)^r \begin{cases} > 0 & \text{(kui } p \text{ on paarisarv ja } q \text{ paarituarv)} \\ < 0 & \text{(kui } p \text{ ja } q \text{ on paarituarvud)} \\ & \text{(ei oma reaalväärtusi, kui } p \text{ on paaritu-} \\ & \text{ja } q \text{ on paarisarv).} \end{cases}$$

Nii ei ole olemas kindlat reaalarvu, millele lähenevad $(-2)^r$-i väärtused a-le küllalt lähedaste r-i väärtuste puhul.

Teoreem. *Astme omadused*

$$\text{(I)}\quad a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}\quad\text{ja}\quad\text{(II)}\quad (a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$$

jäävad kehtima α ja β mistahes reaalväärtuste puhul.

Tõestus. Vaadeldes α ja β ligikaudseid väärtusi saame (kui $a>1$)

$$a^{\alpha_n^-}<a^{\alpha}<a^{\alpha_n^+},\quad a^{\beta_n^-}<a^{\beta}<a^{\beta_n^+},$$

millest

$$a^{\alpha_n^-}a^{\beta_n^-}<a^{\alpha}a^{\beta}<a^{\alpha_n^+}a^{\beta_n^+}$$

ehk

$$a^{\alpha_n^-+\beta_n^-}<a^{\alpha}a^{\beta}<a^{\alpha_n^++\beta_n^+}.$$

Kuid teiselt poolt on $\alpha_n^-+\beta_n^-$ ja $\alpha_n^++\beta_n^+$ summa $\alpha+\beta$ ligikaudsed väärtused ja ainsaks arvuks on $a^{\alpha+\beta}$, mis on suurem kõigist arvudest $a^{\alpha_n^-+\beta_n^-}$ ja väiksem kõigist arvudest $a^{\alpha_n^++\beta_n^+}$. Järelikult $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$, m. o. t. t. Analoogiliselt tõestatakse omaduse (II) kehtivus.

§ 56. Eksponentfunktsioon.

Definitsioon. *Funktsiooni $y=a^x$, kus $a>0$ ja x-i lubatavaiks väärtusteks on kõigi reaalarvude hulk, nimetatakse eksponentfunktsiooniks.*

Paragrahvis 54 loeteldud ratsionaalse astendajaga eksponentfunktsiooni omadused 1^0—5^0 jäävad kehtima. Sest näiteks $a>1$ puhul kehtib omadus 1^0

$$a^x>1\ \text{(kui } x>0).$$

Tõepoolest, võtame arvu x mingi positiivse ligikaudse puudusega väärtuse $0<x_n^-<x$. Siis saame

$$1<a^{x_n^-}<a^x\ \text{(kus } a>1).$$

Analoogiliselt saab kergesti näidata, et $a^x<1$, kui $x<0$.

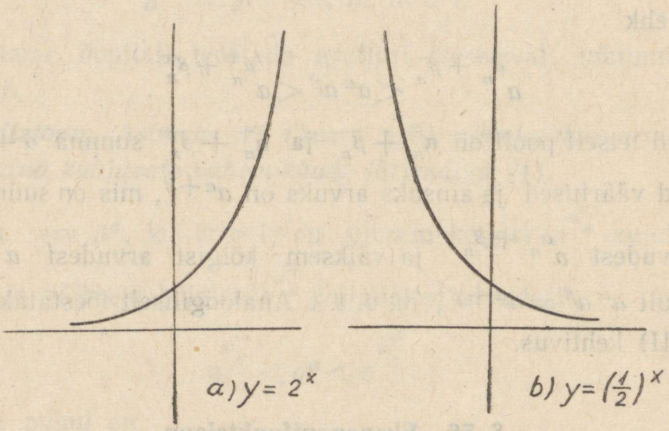
Arutlused, milledel põhinevad ülejäänud omaduste 2^0—5^0 tõestused, on muutumatult kasutatavad mistahes reaalse astendajaga

eksponentfunktsiooni puhul. Järelikult $a > 1$ puhul funktsioon $y = a^x$ kasvab ja $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$; $a < 1$ puhul funktsioon a^x kahaneb ja $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$; $a = 1$ puhul $a^x = 1$. Negatiivse astendatavaga a eksponentfunktsiooni elementaarmatemaatikas ei vaadelda.

Astme omadust

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

võib lugeda nii: *eksponentfunktsiooni väärtuste korrutamisel liidetakse argumendid.* Kui tarvitusele võtta funktsiooni tähis, võttes $a^x = f(x)$, siis see omadus kirjutatakse järgmiselt:



Joon. 43.

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y).$$

Eksponentfunktsiooni graafikud $a = 2$ ja $a = \frac{1}{2}$ puhul on esitatud joonisel 43.

§ 57. Logaritmid ja nende omadused.

Teoreem. *Kui* $0 < a \neq 1$, *siis mistahes antud positiivse arvu* N *puhul on olemas ainult üks niisugune reaalarv* α, *et arv* a *astmel* α *võrdub arvuga* N:

$$a^\alpha = N.$$

Tõestus. Olgu $a > 1$; nagu teada, on olemas kuitahes suuri ja ka nullile kuitahes lähedasi a^x väärtusi. Vaatleme arvu a täisastmeid

$$\ldots a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a,\ a^2,\ \ldots$$

Olgu a^{p+1} väikseim neist arvudest, mis on suuremad kui N. Siis

$$a^p \leqslant N < a^{p+1}.$$

Jaotades vahemiku p-st kuni $p+1$-ni 10-ks võrdseks osaks valime arvu q_1 tingimusel, et

$$a^{p+\frac{q_1}{10}} \leqslant N < a^{p+\frac{q_1+1}{10}}.$$

Jätkates vahemiku kümneks jaotamise protsessi piiramatult saame kümnendmurru, mis määrab mingi reaalarvu α; s. o.

$$\alpha = p,\ q_1 q_2 \ldots q_n \ldots$$

Arvu α kümnendmärkide määramisviisi järgi on tema mistahes ligikaudsete väärtuste jaoks:

$$a_n^{\alpha-} \leqslant N < a_n^{\alpha+}.$$

Kuid üksainus arv, mis rahuldab neid võrratusi, on a^α ja seepärast $a^\alpha = N$.

Kui $a < 1$, siis $\frac{1}{a} > 1$ ja tõestatu järgi on olemas üksainus niisugune arv α, et $\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha = N$. Ent siis $a^{-\alpha} = N$, m. o. t. t.

Märkus. Kui $a = 1$, siis teoreem on ebaõige, sest $1^x = 1$ kehtib x-i iga reaalväärtuse puhul.

Definitsioon. *Arvu N logaritmiks alusel $a \neq 1$ nimetatakse astendajat, millega astendades arvu a saame arvu N.*

Arvu N logaritmi tähistamiseks alusel a kasutatakse sümbolit $\log_a N$. Nii on logaritmi definitsiooni järgi

$$N = a^{\log_a N}.$$

Tõestatud teoreem põhjendab mistahes positiivse arvu N logaritmi olemasolu ja ühesust arvust 1 erineva ja positiivse aluse a puhul.

Positiivse arvu a mistahes reaalne aste on positiivne arv ja seepärast ühegi α puhul ei saa aste a^{α} olla null ega negatiivne. Järelikult 0 *ja negatiivsed arvud ei oma (reaalseid) logaritme.*

Logaritmi definitsioonist ja astmete omadustest tulenevad järgmised ***teoreemid:***

1⁰ *Positiivsete tegurite korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga.*

Tõestus. Olgu $x > 0$ ja $y > 0$. Siis

$$x = a^{\log_a x} \text{ ja } y = a^{\log_a y},$$

millest $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$. Teiselt poolt logaritmi definitsiooni järgi $xy = a^{\log_a (xy)}$. Järelikult

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \tag{1}$$

m. o. t. t.

Märkus. Eeldus, et mõlemad arvud x ja y on positiivsed, on oluline. Olgu näiteks $x < 0$ ja $y < 0$. Siis $xy > 0$ ja $\log_a (xy)$ omab täiesti määratud väärtust, kuid $\log_a x$ ja $\log_a y$ ei oma reaalseid väärtusi ja seepärast võrdus (1) kaotab mõtte.

2⁰ *Positiivsete arvude jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega.*

Tõestus. Olgu $x = a^{\log_a x}$ ja $y = a^{\log_a y}$.

$$\frac{x}{y} = a^{\log_a x - \log_a y},$$

millest

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

m. o. t. t.

3⁰ *Positiivse arvu astme logaritm võrdub antud arvu logaritmi ja astendaja korrutisega.*

Tõestus. Olgu $N > 0$ antud arv. Siis

$$N = a^{\log_a N} \text{ ja } N^k = a^{k \log_a N},$$

millest

$$\log_a N^k = k \log_a N,$$

m. o. t. t.

Olgu antud mingi seos, näiteks

$$\frac{\sqrt[3]{db}}{c} = \sqrt[3]{x^5 y} \tag{2}$$

(kus d, b, c, x ja y on positiivsed). Kui on kehtiv võrdus (2), siis mõlema poole logaritmid on võrdsed:

$$\log_a\left(\frac{\sqrt[3]{db}}{c}\right) = \log_a\left(\sqrt[3]{x^5 y}\right).$$

Kasutades teoreeme 1°, 2°, 3° saame

$$\log_a d^{\frac{1}{3}} + \log_a b - \log_a c = \frac{1}{3}\log_a (x^5 y)$$

ehk lõplikult

$$\frac{1}{3}\log_a d + \log_a b - \log_a c = \frac{5}{3}\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y. \tag{3}$$

Võrrandi mõlemast poolest logaritmi leidmise tehet nimetatakse antud võrrandi logaritmimiseks.

Olgu antud mingisuguste arvude logaritmide vaheline seos, näiteks

$$\log_a x - \frac{1}{n}\log_a y - k = 0 \tag{4}$$

ehk, mis on sama,

$$\log_a x - \frac{1}{n}\log_a y - \log_a a^k = \log_a 1.$$

Teoreemide 1°, 2°, 3° järgi saame

$$\log_a \frac{x}{a^k \sqrt[n]{y}} = \log_a 1.$$

Järelikult

$$\frac{x}{a^k \sqrt[n]{y}} = 1. \tag{5}$$

Üleminekut logaritme mittesisaldavale võrdusele (5) *nimetatakse antud võrduse* (4) *potentseerimiseks.*

Näiteid ja ülesandeid.

1. On teada arvude logaritmid alusel a; leida logaritmid teisel alusel b.

L a h e n d u s. Logaritmi definitsiooni järgi

$$N = b^{\log_b N}.$$

Seda seost logaritmime alusel a:

$$\log_a N = \log_b N \cdot \log_a b,$$

millest

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}. \tag{6}$$

Siit r e e g e l: arvu logaritm „uuel alusel" võrdub sama arvu logaritmiga „vanal alusel", mis on jagatud uue aluse logaritmiga vanal alusel.

2. Kuidas muutub arvu logaritm üleminekul aluselt a uuele alusele a^k?

L a h e n d u s. Valemi (6) järgi

$$\log_{a^k} N = \frac{\log_a N}{\log_a a^k} = \frac{\log_a N}{k}. \tag{7}$$

Niisiis, üleminekul alusele a^k on küllalt, kui arvude logaritmid jagada arvuga k. Erijuhtumil

$$\log_{a^2} N = \frac{\log_a N}{2}, \quad \log_{\sqrt{a}} N = 2 \log_a N, \quad \log_{\frac{1}{a}} N = -\log_a N.$$

Valemi (7) võib saada otseselt: kui $N = a^{\log_a N}$, siis $N = (a^k)^{\frac{\log_a N}{k}}$, millest järeldub (7).

3. Kuidas on seotud omavahel logaritmid $\log_a b$ ja $\log_b a$?

L a h e n d u s. Võttes võrduses (6) $N = a$ saame

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}. \tag{8}$$

4. Tõestada, et kahe antud arvu logaritmide suhted mistahes alusel on võrdsed.

L a h e n d u s. (6) alusel

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \text{ ja } \log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b},$$

millest

$$\frac{\log_a N}{\log_a M} = \frac{\log_b N}{\log_b M}.$$

5. Arvutada $\log_{(a \cdot b \cdot c \ldots k)} x$, teades $\log_a x$, $\log_b x$, ..., $\log_k x$.

Lahendus:

$$\log_{(a \cdot b \cdot c \cdots k)} x = \frac{1}{\log_x (a \cdot b \cdot c \ldots k)} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \ldots + \log_x k},$$

millest (8) alusel

$$\log_{(a \cdot b \cdot c \ldots k)} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \cdots + \frac{1}{\log_k x}}.$$

6. *Kui mingid positiivsed arvud moodustavad geomeetrilise progressiooni, siis nende logaritmid moodustavad aritmeetilise progressiooni.*

Tõepoolest, logaritmides geomeetrilise progressiooni

$$k, kq, kq^2, \ldots, kq^n, \ldots$$

liikmeid, kus teguriks on q, saame aritmeetilise progressiooni, mille vahe on $\log_a q$:

$$\log_a k; \log_a k + \log_a q; \log_a k + 2 \log_a q, \ldots, \log_a k + n \log_a q, \ldots$$

Olgu antud kaks progressiooni, geomeetriline positiivsete liikmetega ja esimese liikmega 1 ning aritmeetiline esimese liikmega 0:

$$1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$$
$$0, p, 2p, \ldots, np. \ldots$$

Näitame, et on olemas niisugune logaritmide alus a, mille puhul geomeetrilise progressiooni liikmete logaritmid võrduvad aritmeetilise progressiooni vastavate liikmetega: $\log_a q^n = np$. Tõepoolest, $\log_a q^n = n \log_a q$, millest $\log_a q = p$ ja $q = a^p$, järelikult

$$a = q^{\frac{1}{p}}.$$

Võtame küllalt väikese vahega aritmeetilise progressiooni, võttes näiteks $p = 0{,}0001$. Vastava geomeetrilise progressiooni võtame teguriga, mis on küllalt lähedane arvule 1, näiteks $q = 1{,}0001$. Liikmete q^2, q^3, ..., q^n arvutamine ei tekita raskusi. Selleks et korrutada mingit arvu k teguriga $q = 1{,}0001$, piisab, kui selle arvuga liita tema kümnetuhandik, s. o. antud arvuga k liita arv, mis saadakse, kui k-d kujutavas arvus viia koma nelja koha võrra vasakule. Aritmeetilise progressiooni arvud on geomeetrilise

progressiooni vastavate liikmete logaritmid alusel $a = q^{\frac{1}{p}} = (1{,}0001)^{10000}$. Kirjeldatud võttega saab koostada tabeli:

	$\log_a N$	N	
0	0,0000	1,0000	$= 1$
p	0,0001	1,0001	$= q$
$2p$	0,0002	1,0002	$\approx q^2$
$3p$	0,0003	1,0003	$\approx q^3$
. . . . .			

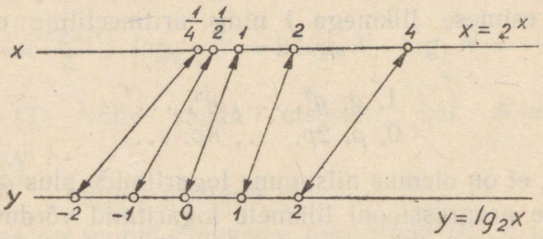
jne.

See võte oli aluseks esimeste logaritmide tabelite koostamisel.

§ 58. Logaritmfunktsioon.

Definitsioon. *Funktsiooni, mis on antud seosega* $y = \log_a x$ *(kus* $a > 0$*), nimetatakse logaritmfunktsiooniks.*

Igale positiivsele arvule x vastab ainult üks reaalarv y. Ümberpöördult, igale reaalarvule y vastab ainult üks positiivne arv



Joon. 44.

$x = a^y$. Niisiis, x-i (kus $0 < x < \infty$) ja y-i (kus $-\infty < y < \infty$) väärtuste vahel on olemas üksühene vastavus. Vastavuse skeem on $a = 2$ puhul kujutatud joonisel 44. $a > 1$ puhul vastab y-i suuremale väärtusele $x = a^y$ suurem väärtus:

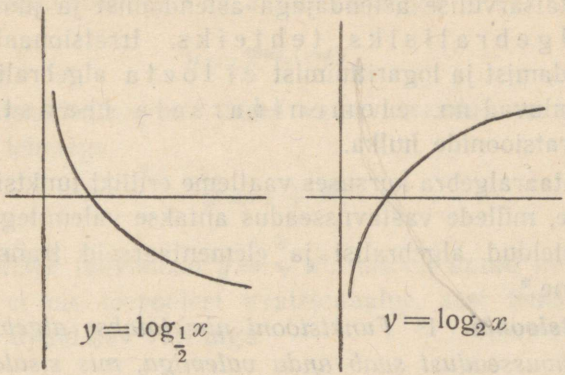
$$x_1 < x_2, \text{ kui } y_1 < y_2 \text{ (siin } x_1 = a^{y_1},\ x_2 = a^{y_2}).$$

Üksühese vastavuse kohaselt vastab x-i suuremale väärtusele y-i suurem väärtus, s. o. $x_1 < x_2$ puhul on $y_1 < y_2$ ehk

$$\log_a x_1 < \log_a x_2.$$

Järelikult $y = \log_a x$ (kus $a > 1$) *on kasvav funktsioon ja vahemikus* $0 < x < \infty$ *ta kasvab* $-\infty$*-st kuni* ∞*-ni.*

$0 < a < 1$ puhul funktsioon $y = \log_a x$ vahemikus 0-st kuni ∞-ni kahaneb ∞-st kuni $-\infty$-ni.



Joon. 45.

Funktsiooni $y = \log_a x$ graafiku ehitamiseks piisab, kui ehitada eksponentfunktsiooni $x = a^y$ graafik. Joonisel 45 on kujutatud funktsioonide $y = \log_2 x$ ja $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ graafikud. Need on samad kõverad, mis on kujutatud joonisel 43, kuid asetsevad tasapinnal, nagu on näidatud joonisel 45.

§ 59. Elementaarsed funktsioonid, määramispiirkond, graafikute ehitamine.

Funktsiooni ülddefinitsioon, mis on sõnastatud §-s 8, ei piira millegagi argumentide lubatavaid väärtusi. Funktsiooni kui vastavuse mõiste on kasutatav sõltumata sellest, kas argumendi lubatavaiks väärtusteks on ratsionaal- (nagu §-s 8) või irratsionaalarvud. Seame näiteks igale reaalarvule x vastavaks arvu y, mis on määratud järgmise vastavusseadusega: kui x on irratsionaalarv, siis $y = 0$, kui x on nullist erinev ratsionaalarv $x = \frac{p}{q}$ (kus $\frac{p}{q}$ on taandumatu murd ja $q > 0$), siis $y = q$, ja lõpuks $y = 1$, kui $x = 0$. Nii näiteks arvule $x = \sqrt{2}$ vastab $y = 0$, arvule $x = 0{,}25 = \frac{1}{4}$ vastab $y = 4$ jne. Meil on olemas funktsioon, mis on

antud kõigi reaalarvude hulga kohta vastavuse seaduse kirjeldamisega.

Elementaaralgebras klassifitseeritakse vaadeldavaid matemaatilisi operatsioone järgmiselt: liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist, täisarvulise astendajaga astendamist ja juurimist nimetatakse algebralisiks tehteiks. Irratsionaalse astendajaga astendamist ja logaritmimist ei loeta algebralisiks tehteiks ja nad kuuluvad nn. elementaarsete transtsendentsete operatsioonide hulka.

Elementaaralgebra kursuses vaatleme eriliiki funktsioone, nimelt funktsioone, millede vastavusseadus antakse valemitega, mis sisaldavad loeteldud algebralisi ja elementaarseid transtsendentseid operatsioone *.

Definitsioonid. 1° *Funktsiooni nimetatakse algebraliseks, kui tema vastavusseadust saab anda valemiga, mis sisaldab algebralisi tehteid argumentidega.*

2° *Funktsioonid, millede vastavusseadust saab anda valemitega, mis sisaldavad:*

a) argumente astendajas,

b) argumente logaritmitavas ja

c) argumente sisaldavate avaldiste irratsionaalseid astmeid, kuid ei saa avaldada algebraliste tehete abil, kuuluvad elementaarsete transtsendentsete funktsioonide klassi. Niisuguseid funktsioone ei loeta algebralisteks.

3° *Algebralist funktsiooni, mille vastavusseadust saab anda valemiga, kus juuritavas esineb argumente sisaldav avaldis, kuid ei saa väljendada ainult ratsionaalsete operatsioonide abil, nimetatakse irratsionaalseks.*

Algebraline funktsioon, mille vastavusseadust saab anda mingi ratsionaalse avaldise abil, on ratsionaalne.

Matemaatiliste avaldiste abil määratavate ja reaalarvude korpuses vaadeldavate elementaarsete algebraliste ja transtsendentsete funktsioonide argumentide lubatavaiks väärtusteks loetakse kõiki neid väärtusi, millede puhul vastav matemaatiline avaldis

---

* Siin ja edaspidi on juttu ainult ilmutatud funktsioonidest, millede vastavusseadus on väljendatud otseselt argumentidega teostamisele tulevate matemaatiliste operatsioonide äranäitamisega.

omab reaalseid väärtusi. Argumentide lubatavate väärtuste kogu nimetatakse funktsiooni määramispiirkonnaks.

Selgitus. Mitte iga funktsioon, mis on antud transtsendentseid operatsioone sisaldava valemiga, pole alati transtsendentne. Nii näiteks funktsioon, mis on antud valemiga

$$y = 2^{\log_2(1+x^2)},$$

ei ole transtsendentne, sest tema vastavusseadus on väljendatav algebraliste tehetega

$$y = 1 + x^2.$$

Analoogiliselt funktsioon $y = \sqrt[3]{x^9}$, mis on antud irratsionaalse avaldisena, ei ole tõepoolest irratsionaalne, sest tema vastavusseadus on väljendatav valemiga

$$y = x^3.$$

Niisiis, siin on oluline vastavusseaduse iseloom, aga mitte teda kujutava valemi väline kuju.

Märkus. Mitte iga matemaatiline avaldis ei määra funktsiooni reaalarvude korpuses. Nii näiteks algebralise summa $-1 - x^2$ väärtused on negatiivsed x-i kõigi reaalväärtuste puhul, seepärast avaldised $\sqrt{-1-x^2}$ ja $\log(-1-x^2)$ ei määra reaalarvude korpuses mingit funktsiooni.

Elementaarfunktsiooni määramispiirkonna leidmisel tuleb võtta juhendiks järgmised reeglid:

1⁰ Murdavaldiste nimetajad peavad erinema nullist.

2⁰ Paarisjuurijaga juuritavad avaldised peavad olema mittenegatiivsed.

3⁰ Irratsionaalse või argumente sisaldava astendajaga avaldised peavad olema positiivsed.

4⁰ Logaritmitavad avaldised peavad olema positiivsed.

5⁰ Avaldistes kujul M^N ei tohi alus ja astendaja mõlemad korraga muutuda nulliks argumentide ühesuguste väärtuste puhul (avaldis 0^0 ei oma mõtet. § 52).

Näiteid. 1. $y = \sqrt{x-1}$. Määramispiirkonnaks on kõigi reaalarvude hulk, mis pole 1-st väiksemad: $x \geqslant 1$.

2. $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Määramispiirkonnaks on arvust 1 suuremate

reaalarvude hulk, $x > 1$. Arv 1 tuleb kõrvaldada argumendi lubatavate väärtuste hulgast.

3. $y = \log_a(-x)$. Määramispiirkonnaks on kõigi negatiivsete arvude hulk $x < 0$, sest $-x > 0$, kui $x < 0$.

4. $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$. Määramispiirkonnaks on vahemik $0 \leqslant x \leqslant 1$. Tõepoolest, mõlema juure juuritavad avaldised peavad olema mittenegatiivsed, s. o. $x \geqslant 0$ ja $1 - x \geqslant 0$, millest $0 \leqslant x$ ja $x \leqslant 1$.

5. $\log(x - y)$. Määramispiirkonnaks on x-i ja y-i kõikvõimalikud väärtused tingimusel, et $x > y$.

6. $y = \log_2(\log_2 x)$. Määramispiirkond on $1 < x < \infty$, sest $\log_2 x > 0$, kui $x > 1$.

7. $\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$. Määramispiirkond koosneb kahest vahemikust $-1 \leqslant x < 0$ ja $0 < x \leqslant 1$. Väärtus $x = 0$ muudab nimetaja nulliks ning kuulub seega kõrvaldamisele.

8. $x^{-\sqrt{2}}$. Määramispiirkond $0 < x < \infty$.

9. x^x. Määramispiirkond $0 < x < \infty$.

10. $\sqrt{\log_2 x - 1}$. Määramispiirkond $x \geqslant 2$.

11. $\sqrt{2^x - 2}$. Määramispiirkond $1 \leqslant x$.

12. $\sqrt{2^{-x} - 2}$. Määramispiirkond $x \leqslant 1$.

13. $a^{\log_a x}$. Määramispiirkond $x > 0$. $x > 0$ puhul logaritmi definitsiooni põhjal $a^{\log_a x} = x$. Kui $x \leqslant 0$, siis $\log_a x$ ja järelikult ka $a^{\log_a x}$ ei oma mõtet.

14. $\frac{x}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}}$. Määramispiirkond $x \geqslant 2$.

Funktsiooni näitlikuks kujutamiseks ehitatakse selle graafik. Kui argumendi väärtuseks on x ja funktsiooni vastavaks väärtuseks y, siis ehitame ristkoordinaadistikus punkti M abstsissiga x ja ordinaadiga y. Funktsiooni graafikuks nimetatakse punktide geomeetrilist kohta, mis kujutavad funktsiooni väärtusi argumendi kõigi võimalike väärtuste puhul.

Valemiga antud funktsiooni graafiku ehitamisel on tarvilik kindlaks teha tema määramispiirkond ja siis, lähtudes antud funktsiooni omadustest, teha selle kõvera visand. Seda visandit saab üksikute punktide ehitamisega täpsustada, andes argumendile

kindlaid arvulisi väärtusi ja arvutades vastavaid funktsiooni väärtusi.

Märkus. Graafiku ehitamise aluseks tuleb võtta mitte kõvera ehitamist „punktide järgi", vaid antud funktsiooni omaduste uurimist. Tõepoolest, kõver sisaldab lõpmatu hulga punkte ja kõigi nende ehitamine pole tegelikult teostatav. Arvestamata antud funktsiooni omadusi ja iseärasusi võib teha jämedaid vigu.

Graafikute ehitamise näiteid.

1. Ruutkolmliikme graafik. Olgu $y = x^2 - 3x + 2$. Määramispiirkonnaks on kõigi reaalarvude hulk. Eraldades täisruudu saame

$$y = \left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} x + \frac{9}{4}\right) + 2 - \frac{9}{4};$$

tähendab

$$y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Siit on selge, et y-i väikseim väärtus on $-\frac{1}{4}$, kui $x = \frac{3}{2}$, sest kui $x \neq \frac{3}{2}$, siis $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 0$ ja $y > -\frac{1}{4}$.

Kolmliige omab reaalseid nullkohti, sest

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0.$$

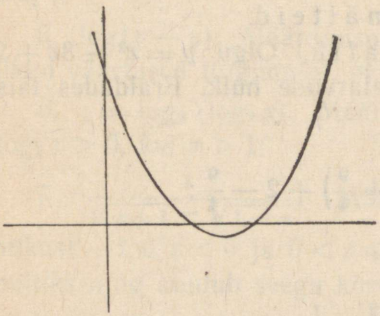
Lahendades ruutvõrrandi $x^2 - 3x + 2 = 0$ leiame tema lahendid $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$; need on kõvera ja abstsisstelje lõikepunktid. Võrrandist (1) leiame, et $\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$. Graafiku täpsustamiseks koostame näiteks järgmise eriväärtuste tabeli:

x	-1	0	1	2	3	4
y	6	2	0	0	2	6

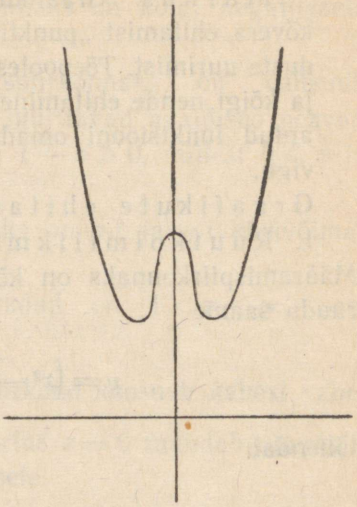
Graafik on kujutatud joonisel 46.

2. Biruut-kolmliikme graafik. Võtame $y = x^4 - 4x^2 + 5$. Määramispiirkonnaks on kõigi reaalarvude hulk. Kuna

x esineb paarisastmes, siis argumendi x märgi muutmisel y-i väärtus ei muutu. Järelikult kõver on sümmeetriline telje OY suhtes.



Joon. 46.



Joon. 47.

Seepärast on küllalt, kui oskame joonestada graafikut, võttes $x \geqslant 0$. Eraldades täisruudu saame

$$y = (x^2 - 2)^2 + 1.$$

Väikseim väärtus on $y = 1$, kui $x = \sqrt{2}$. Meil $\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$ ja $x = 0$ puhul $y = 5$. Kõvera täpsustamiseks võime koostada näiteks järgneva tabeli:

x	0	± 1	± 2	± 3
y	5	2	5	50

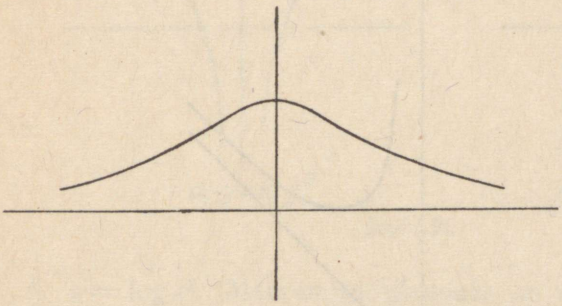
Graafik on kujutatud joonisel 47.

3. $y = \frac{1}{1 + x^2}$. Määramispiirkonnaks on kõigi reaalarvude hulk. Kõver on sümmeetriline telje OY suhtes. Nimetaja väikseim väärtus on 1, kui $x = 0$; seepärast funktsiooni suurim väärtus on 1, kui $x = 0$. $x > 0$ puhul funktsioon kahaneb ja $\lim\limits_{x \to \infty} y = 0$

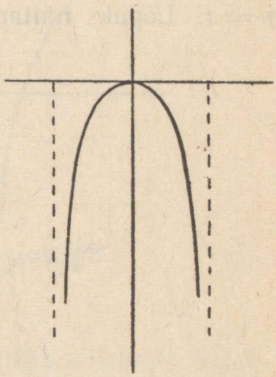
x	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm 2\ldots$
y	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}\ldots$

Graafik on kujutatud joonisel 48.

4. $y = \log_2(1 - x^2)$. Tingimusest $1 - x^2 > 0$ ehk $x^2 < 1$ leiame



Joon. 48.



Joon. 49.

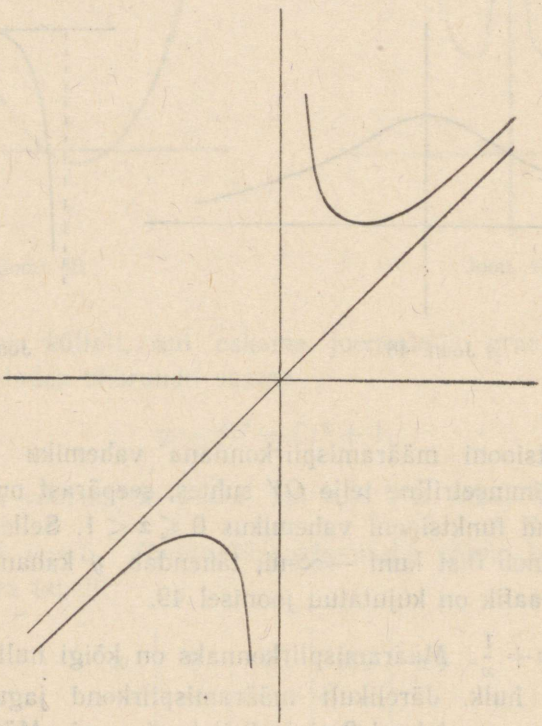
antud funktsiooni määramispiirkonnana vahemiku $-1 < x < 1$. Kõver on sümmeetriline telje OY suhtes, seepärast on küllalt, kui uurime antud funktsiooni vahemikus $0 \leqslant x < 1$. Selles vahemikus $1 - x^2$ kahaneb 0-st kuni $-\infty$-ni, tähendab, y kahaneb 0-st kuni $-\infty$-ni. Graafik on kujutatud joonisel 49.

5. $y = x + \frac{1}{x}$. Määramispiirkonnaks on kõigi nullist erinevate reaalarvude hulk. Järelikult määramispiirkond jaguneb kaheks vahemikuks: $-\infty$-st kuni 0-ni ja 0-st kuni ∞-ni. Märgi x muutumisel muutub y-i märk vastupidiseks ja $|y|$ ei muutu, järelikult kõver on sümmeetriline koordinaatide alguse suhtes. Seepärast on küllalt, kui ehitada graafik argumendi positiivseile väärtustele. Kergesti on nähtav, et $\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} y = \infty$.

Märgime, et punktides $x = k$ ja $x = \frac{1}{k}$ omab funktsioon ühte ning sama väärtust $y = k + \frac{1}{k}$. Nii näiteks

x	1	2 ja $\frac{1}{2}$	3 ja $\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$ ja $\frac{4}{3}$
y	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{25}{12}$

Antud funktsiooni ordinaat erineb sirge $y = x$ ordinaadist suuruse $\frac{1}{x}$ võrra. Järelikult x-i piiramatul kasvamisel läheneb kõvera punkt piiramatult koordinaattelgede vahelise nurga poolitajale $y = x$. Lõpuks näitame, et vahemikus $1 < x < \infty$ funktsioon kas-



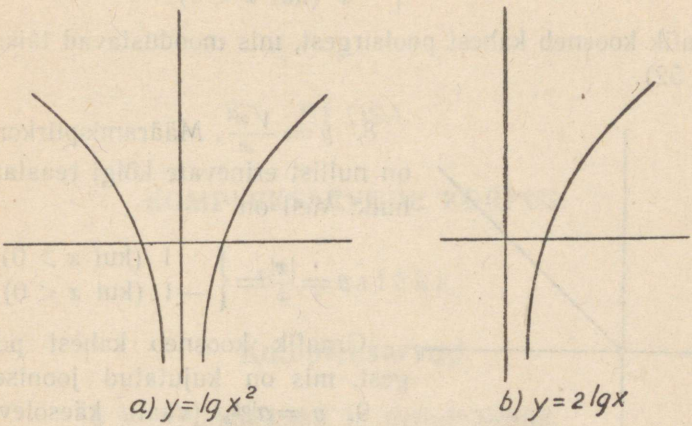
Joon. 50.

vab ja vahemikus $0 < x < 1$ kahaneb. Olgu $x_1 < x_2$; siis

$$y_2 - y_1 = \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right)(x_2 - x_1).$$

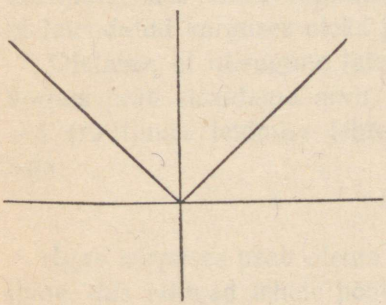
Kui $1 < x_1 < x_2$, siis $\frac{1}{x_1 x_2} < 1$ ja seepärast $y_2 - y_1 > 0$ ja $y_1 < y_2$, s. o. argumendi suuremale väärtusele vastab funktsiooni

suurem väärtus. Kui $0 < x_1 < x_2 < 1$, siis $\frac{1}{x_1 x_2} > 1$ ja seepärast $y_2 - y_1 < 0$ ja $y_2 < y_1$, s. o. y kahaneb. Graafik on kujutatud joonisel 50.

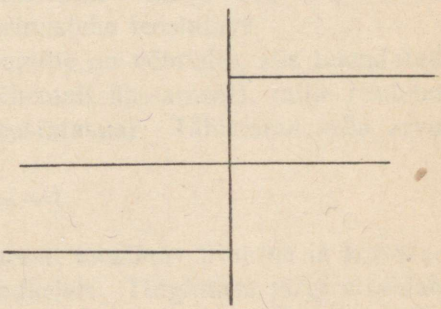


Joon. 51.

6. $y = \log x^2$. Määramispiirkonnaks on nullist erinevate kõigi reaalarvude hulk, sest $x^2 > 0$, kui $x \neq 0$. Kui $x > 0$, siis $\log x^2 = 2 \log x$. Tähendame, et funktsioonid $\log x^2$ ja $2 \log x$ ei ole sama-



Joon. 52.



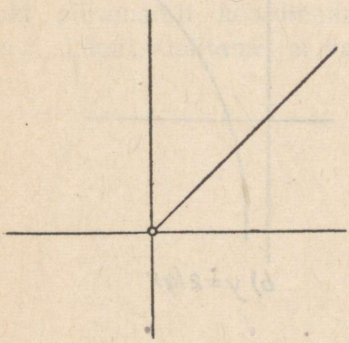
Joon. 53.

sed kõigi reaalarvude hulgas. Nad on samased ainult kõigi positiivsete arvude hulgas. Tõepoolest, $x < 0$ puhul omab esimene täiesti määratud väärtust $\log (-x)^2 = \log x^2$ ja teine kaotab mõtte. Funktsioonide $y = \log x^2$ ja $y = 2 \log x$ graafikud on kujutatud joonisel 51.

7. $y = \sqrt{x^2}$. Määramispiirkonnaks on kõigi reaalarvude hulk. Meil on (vaata § 46)

$$y = |x| = \begin{cases} x & (\text{kui } x \geqslant 0) \\ -x & (\text{kui } x < 0). \end{cases}$$

Graafik koosneb kahest poolsirgest, mis moodustavad täisnurga (joonis 52).



Joon. 54.

8. $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$. Määramispiirkonnaks on nullist erinevate kõigi reaalarvude hulk. Meil on

$$y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & (\text{kui } x > 0) \\ -1 & (\text{kui } x < 0). \end{cases}$$

Graafik koosneb kahest poolsirgest, mis on kujutatud joonisel 53.

9. $y = a^{\log_a x}$ (vaata käesoleva §-i näidet 13). Määramispiirkonnaks on vahemik $0 < x < \infty$, milles $y = x$. Graafikuks on poolsirge — positiivse suunaga koordinaattelgede vahelise nurga poolitaja (joonis 54).

III OSA.

KOMPLEKSARVUDE KORPUS.

VII peatükk.

Kompleksarvud.

§ 60. Põhimõisted ja definitsioonid.

Reaalarvude korpuses ei oma iga võrrand, mille aste on kõrgem kui 1, lahendit. Selle üheks põhjuseks on juurimistehte teostamatus juhtumil, kui juuritav on negatiivne ja juurija on paarisarv. Nii näiteks võrrand $x^2 + 1 = 0$ ei oma reaalseid lahendeid, sest pole olemas reaalarvu, mille ruut oleks -1. Esitame järgmise küsimuse: kas oleks võimalik laiendada reaalarvude korpust nii, et laiendatud korpuses oleks juurimistehe teostatav?

Oletame, et niisugune laiendamine on võimalik, siis laiendatud korpus peab sisaldama arvu (vähemalt ühteainsat), mille ruut on -1 (ruutjuure leidmise tehte teostatavus). Tähistame selle arvu i-ga:

$$i^2 = -1.$$

Igas korpuses peab olema üheselt teostatav liitmine ja korrutamine, mis alluvad tehete põhiseadustele. Tingimuse järgi sisaldab laiendatud korpus kõiki reaalarve, järelikult sisalduvad temas kõik korrutised bi (b on reaalarv) ja samuti kõik summad kujul $a + bi$. Liitmis- ja korrutamistehe peab toimuma tavaliste reeglite järgi (asendades igal pool i^2 arvuga -1):

$$(a + bi) + (a_1 + b_1 i) = (a + a_1) + (b + b_1)i$$
$$(a + bi)(a_1 + b_1 i) = aa_1 + ab_1 i + a_1 bi + bb_1 i^2 =$$
$$= (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + a_1 b)i.$$

Need arutlused on tingiva iseloomuga, nad ainult näitavad, missuguseid omadusi peab evima laiendatud arvkorpus *eeldusel, et teda on võimalik ehitada.* Kuid niisuguse korpuse ehitamise võimalus peab olema põhjendatud. Uute arvude tarvituselevõtmine ja nendega teostatavate tehete kindlaksmääramine toimub definitsioonide abil; meie ülesandeks aga on näidata, et kohaste definitsioonidega võib reaalarvude hulka laiendada ja saada arvkorpuse, mis evib meile vajalikke omadusi.

Definitsioonid. 1° *Sümbolit* $a + bi$, *kus* a *ja* b *on mistahes reaalarvud, nimetame kompleksarvuks.*

2° *Kompleksarvud* $a + bi$ *ja* $a_1 + b_1 i$ *loeme võrdseteks, kui* $a = a_1$ *ja* $b = b_1$.

3° *Kompleksarvu* $a + 0i$ *loeme võrdseks reaalarvuga* a.

4° *Kahe kompleksarvu* $a + bi$ *ja* $a_1 + b_1 i$ *summaks nimetatakse kompleksarvu* $(a + a_1) + (b + b_1)i$.

5° *Kahe kompleksarvu korrutiseks nimetatakse kompleksarvu* $aa_1 - bb_1 + (ab_1 + a_1 b)i$.

Kui kompleksarv ei võrdu reaalarvuga ($b \neq 0$), siis nimetame teda i m a g i n a a r a r v u k s.

Kompleksarvu $0 + bi$ nimetatakse puht imaginaararvuks ja harilikult kirjutatakse nii: bi; arv $0 + 1i = i$ nimetatakse i m a g i n a a r ü h i k u k s.

3° järgi igale reaalarvule a vastab „võrdne" kompleksarv $a + 0i$ ja ümberpöördult — igale kompleksarvule kujul $a + 0i$ vastab „võrdne" reaalarv a. Vaatleme seda üksühest vastavust lähemalt. Võtame kaks kompleksarvu $a_1 + 0i$ ja $a_2 + 0i$. Arvutame reeglite 4° ja 5° järgi nende summa ja korrutise:

$$(a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) = (a_1 + a_2) + 0i$$
$$(a_1 + 0i)(a_2 + 0i) = (a_1 a_2 - 0) + (a_1 0 + a_2 0)i = a_1 a_2 + 0i.$$

Me näeme, et antud kompleksarvude summale (või korrutisele) vastab reaalarv, mis „võrdub" vastavate reaalarvude summaga (või korrutisega). Niisiis, $a + 0i$-kujuliste kompleksarvude ja reaalarvude a vaheline vastavus on niisugune, et vastavate komponentidega aritmeetiliste tehete teostamise tulemusena saadakse vastavad tulemused. Üksühest vastavust, mis säilib tehete teostamisel, nimetatakse kaasaegses algebras i s o m o r f i s m i k s.

Niisiis, reaalarvude ja $a + 0i$-kujuliste kompleksarvude vaheline vastavus on isomorfism. Isomorfsed süsteemid ei ole aritmeetili-

selt teineteisest erinevad, sest mõlemais süsteemides annavad vastavate arvudega tehted vastavaid tulemusi. See võimaldab arvu kujul $a + 0i$ samastada reaalarvuga a ja vaadelda iga reaalarvu kompleksarvu erijuhtumina.

Isomorfsete süsteemidega kohtusime juba eespool. Vaadeldes reaalarvu kui kümnendmurdu võime nendest eraldada lõplikud ja perioodilised kümnendmurrud. Reaalarvude hulga eraldatud osa on isomorfne kõigi ratsionaalarvude hulgaga.

Toome näite üksühesest vastavusest, mis ei ole isomorfism. Seame naturaalarvud ja paarisarvud üksühesesse vastavusse järgmise skeemi abil

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots \end{array}$$

Võtame kahe naturaalarvu summa $m + n$. Asendades liidetavad vastavate arvudega $2m$ ja $2n$ saame arvu $2m + 2n = 2(m + n)$, mis vastab summale $m + n$. Nüüd võtame korrutise mn. Asendades kummagi teguri vastava arvuga saame arvu $(2m)(2n) = 4mn$, mis ei vasta korrutisele mn. Tõepoolest, arvule mn vastab $2mn$, aga mitte $4mn$.

Märkus. Definitsioonis 1^0 ei vaadelda sümbolit $a + bi$ arvude a ja bi summana, sest tehete mõte määratakse alles järgnevais definitsioonides. Definitsioonide 3^0, 4^0 ja 5^0 järgi on kerge veenduda, et arvu $a + bi$ võib vaadelda kui reaalarvu a ja arvude b ning i korrutise summat. Tõepoolest, arv a võrdub arvuga $a + 0i$, arv b võrdub arvuga $b + 0i$. Arvude b ja i korrutis on $(b + 0i)(0 + i) = 0 + bi$. Arvu a ja korrutise bi summa on

$$(a + 0i)(0 + bi) = a + bi.$$

Järeldus. Arvu i ruut võrdub arvuga -1:

$$i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1.$$

Teoreem. *Kompleksarvude liitmisel ja korrutamisel jäävad kehtima arvutamise põhiseadused.*

Tõestus seisneb otseses kontrollimises. Kontrollime näiteks korrutamise distributiivsuseseaduse kehtivust liitmise suhtes. Olgu

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i, \quad z_3 = a_3 + b_3 i;$$

siis

$$z_1(z_2+z_3)=(a_1+b_1i)\,[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i]=$$
$$=a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)+[a_1(b_2+b_3)+(a_2+a_3)b_1]i=$$
$$=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_3b_1)i$$

(teisendused teostatakse reaalarvude tehete reeglite alusel).

Analoogiliselt

$$z_1z_2+z_1z_3=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i)=$$
$$=[a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i]+[a_1a_3-b_1b_3+$$
$$+(a_1b_3+a_3b_1)i]=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+$$
$$+(a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_3b_1)i,$$

millest

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

Teiste seaduste kehtivuse kontrollimine jäägu õppijaile.

Definitsioonid. 1⁰ *Reaalarvu a nimetatakse kompleksarvu $z=a+bi$ reaalosaks.*

2⁰ *Arvu bi nimetatakse arvu z imaginaarosaks ja arvu b — z-i imaginaarosa koefitsiendiks.*

3⁰ *Arve $a+bi$ ja $a-bi$, mis omavad ühesugust reaalosa ja mille imaginaarosa koefitsiendid erinevad ainult märgilt, nimetatakse kaaskompleksarvudeks (kaasarvudeks).*

Arvu $z=a+bi$ kaaskompleksarvu tähistatakse sümboliga

$$\bar{z}=a-bi.$$

Näide.

a) $z=3+i$, $\quad\bar{z}=3-i$

b) $z=-2-4i$, $\bar{z}=-2+4i$.

Iga reaalarv on enese kaasarv, sest $a=a+0i=a-0i=\bar{a}$. Ümberpöördult, iga arv, mis on tema enese kaasarv, on reaalarv. Tõepoolest, kui $z=x+iy=x-iy=\bar{z}$, siis $y=-y$, millest $y=0$, s. o. $z=x$.

Teoreem. *Kahe kaaskompleksarvu summa ja korrutis on reaalarv.*

Tõestus. Meil on

$$z+\bar{z}=(x+yi)+(x-yi)=2x$$

ja

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2,$$

m. o. t. t.

Näitame, et kompleksarvude hulgas on teostatavad liitmise ja korrutamise pöördtehted.

L a h u t a m i n e. Olgu $z_1 = a_1 + b_1 i$ ja $z_2 = a_2 + b_2 i$ antud kompleksarvud. Vahe $z_1 - z_2$ on arv $z = x + yi$, mis rahuldab tingimust $z_1 = z_2 + z$ ehk

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + x) + (b_2 + y)i.$$

x-i ja y-i määramiseks saame võrrandisüsteemi $a_2 + x = a_1$ ja $b_2 + y = b_1$, millel on ainult üks lahend

$$x = a_1 - a_2, \quad y = b_1 - b_2,$$

millest

$$z = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2)i = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2 i).$$

Lahutamist võib asendada lahutatava vastandarvu liitmisega:

$$z = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i).$$

J a g a m i n e. Arvude z_1 ja $z_2 \neq 0$ jagatis on arv $z = x + yi$, mis rahuldab tingimust $z_1 = z_2 z$, ehk

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)(x + yi);$$

järelikult

$$a_1 + b_1 i = a_2 x - b_2 y + (b_2 x + a_2 y)i,$$

millest saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} a_2 x - b_2 y &= a_1, \\ b_2 x + a_2 y &= b_1. \end{aligned}$$

Selle süsteemi determinant $\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2^2 + b_2^2$ on erinev nullist. Tõepoolest, tingimusest $z_2 \neq 0$ järeldub, et arvudest a_2 ja b_2 vähemalt üks on erinev nullist. Süsteemil on üksainus lahend

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2};$$

järelikult

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Praktiliselt jagatise $\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i}$ leidmiseks korrutatakse jagatav ja jagaja viimase kaasarvuga $\bar{z}_2 = a_2 - b_2i$, s. o.

$$z = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Nii näiteks

$$\frac{2 + i}{3 - 2i} = \frac{(2 + i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}\, i.$$

Erijuhtumina saab arvu z pöördarvu $\frac{1}{z}$ esitada järgmiselt:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Märkus. Kompleksarvude hulgas jääb kehtima ***teoreem:*** *kui korrutis võrdub nulliga, siis vähemalt üks tegureist võrdub nulliga.*

Tõepoolest, kui $z_1z_2 = 0$ ja kui $z_1 \neq 0$, siis korrutades $\frac{1}{z_1}$-ga saame

$$z_2 = 0 \cdot \frac{1}{z_1} = 0,$$

m. o. t. t.

Aritmeetiliste tehete teostamisel kompleksarvudega tuleb juhinduda järgmisest üldreeglist: *tehted teostatakse algebraliste avaldiste tehete tavaliste reeglite järgi, kusjuures* i^2 *asendatakse arvuga* -1.

Teoreem. *Iga komponendi asendamisel tema kaaskompleksarvuga asendub tehte tulemus samuti kaaskompleksarvuga.*

Tõestus seisneb otseses kontrollimises. Nii näiteks, kui iga liidetavat $z_1 = a_1 + b_1i$ ja $z_2 = a_2 + b_2i$ asendada kaasarvuga, siis saame arvu, mis on summa $z_1 + z_2$ kaasarvuks:

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i;$$

järelikult

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{(z_1 + z_2)}.$$

Analoogiliselt korrutamisel on

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = \overline{(z_1 z_2)},$$

m. o. t. t.

Teoreem. *Kompleksarvude hulk on korpus.*

T õ e s t u s. Tõepoolest, kompleksarvude hulgas on teostatavad liitmis- ja korrutamistehted, mis alluvad tehete põhiseadustele; samuti on teostatavad pöördtehted, s. o. lahutamine ja jagamine (välja arvatud jagamine nulliga). Järelikult kompleksarvude hulk evib kõiki korpuse omadusi, m. o. t. t.

Reaalarvude korpuse laiendamise võimalus kompleksarvude sissetoomisega e i o l e vastuolus selle tõsiasjaga, et reaalarvude korpus on m a k s i m a a l s e k s järjestatud A r c h i m e d e s e korpuseks. Tõepoolest, reaalarvud ei moodusta ainult korpust, vaid nad on seotud järjestuseseostega (võrratustega). Järjestatud Archimedese korpusele on omased elementide järjestuse kõik üldomadused (võrratuste pöördumatus ja transitiivsus), tehete monotoonsuse omadused ja Archimedese aksioomi kehtivus. Reaalarvude hulk, olles maksimaalseks Archimedese korpuseks, e i o l e laiendatav selliselt, et uus saadud arvsüsteem j ä ä k s maksimaalseks järjestatud Archimedese korpuseks. Järelikult mõisted „suurem" ja „väiksem" e i o l e laiendatavad kompleksarvude korpusele nii, et säiliksid järjestatud Archimedese korpuse kõik loeteldud omadused. Sel põhjusel mõisted „suurem" ja „väiksem" e i o l e kompleksarvude puhul d e f i n e e r i t a v a d. Kahe kompleksarvu puhul, milledest vähemalt üks pole reaalarv, ei saa ütelda, kumb neist on suurem või väiksem. Nii näiteks ei saa ütelda, kumb kahest arvust $2 + 3i$ ja $4 + 2i$ on suurem.

N ä i d e. Kui lepime kokku, et kompleksarvude suurusi võrdleme mingi reegli järgi, siis vähemalt ühes punktis pole kehtivad elementide järjestuse omadused, mis kehtivad reaalarvude korpuses. Näiteks loeme kahest kompleksarvust $a_1 + b_1 i$ ja $a_2 + b_2 i$ suuremaks seda, millel on suurem reaalosa, s. o. $a_1 + b_1 i < a_2 + b_2 i$, kui $a_1 < a_2$; kui aga $a_1 = a_2$, siis loetakse suuremaks arvu, mille imaginaarosa koefitsient on suurem. Selle reegli kohaselt peaks olema

$$2 + 3i < 5 - \mathrm{i}, \quad 3 - i < 3 + 2i, \quad i > 0, \quad i < 1.$$

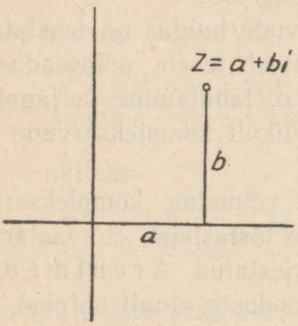
Kergesti võib veenduda, et selle definitsiooni puhul säilivad võrratuste pöördumatuse ja transitiivsuse omadused. Näitame, et Archimedese aksioom ei ole kehtiv. Tõepoolest, mistahes naturaalarvu n puhul

$$i + i + i + \ldots + i = ni < 1.$$

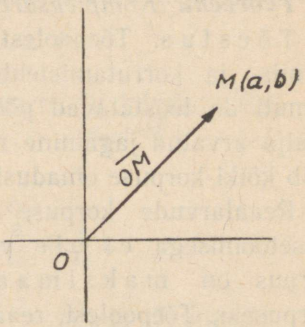
Korrutamise monotoonsus ei kehti samuti, sest $i > 0$, kuid $i^2 = -1 < 0$.

§ 61. Kompleksarvude geomeetriline kujutamine.

Kujutame kompleksarvu $z = a + bi$ punktina tasapinnal, millel antud ristkoordinaadistikus on abstsiss võrdne arvuga a ja ordinaat võrdne arvuga b (joonis 55). Selle kokkuleppe järgi vastab

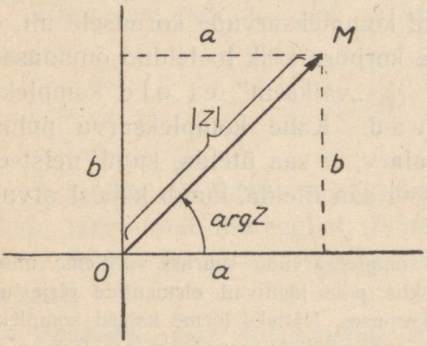


Joon. 55.



Joon. 56.

igale kompleksarvule üksainus punkt tasapinnal ja ümberpöördult, tasapinna igale punktile $M(a, b)$ vastab üksainus kompleksarv $z = a + bi$. Seega *kompleksarvude hulka ja tasapinna punktide hulka saab seada üksühesesse vastavusse.* Tasapinna igale punktile $M(a, b)$ vastab vektor (suunatud lõik) $\overline{OM}$, mis ühendab koordinaatide alguse O punktiga M. Vektorit $\overline{OM}$ saab samuti vaadelda arvu $z = a + bi$ geomeetrilise kujutisena (joonis 56). Reaalarve kujutavad tasapinna punktid, mis asetsevad abstsisstelje, ja puhtimaginaararve bi kujutavad ordinaatteljel asetsevad punktid. Seepärast nimetatakse abstsisstelge ka r e a a l t e l j e k s ja ordinaattelge i m a g i n a a r t e l j e k s.



Joon. 57.

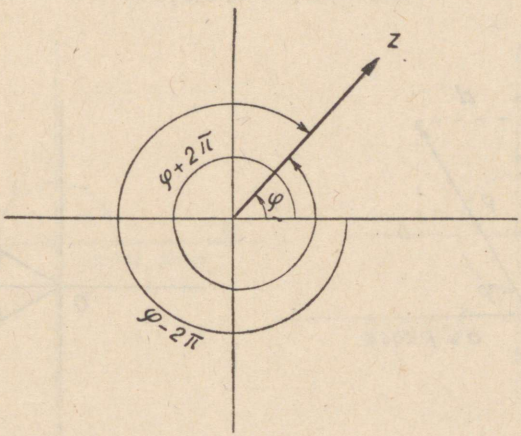
Definitsioon. *Kompleksarvu $z = a + bi$ mooduliks ehk absoluutväärtuseks nimetatakse mittenegatiivset arvu $\sqrt{a^2 + b^2}$.*

Kompleksarvu $z \neq 0$ argumendiks nimetatakse punkti z raadiusvektori ja reaaltelje positiivse suuna vahelist nurka.

Arvu z moodul ja argument tähistatakse vastavalt sümbolitega $|z|$ ja $\arg z$.

Arvud a ja b on arvu z raadiusvektori projektsioonid teineteisega risti olevale teljele, seepärast Püthagorase teoreemi järgi on $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ arvu z kujutava punkti kaugus koordinaatide algusest (joonis 57). Kui $z \neq 0$, siis $|z| > 0$, kui $z = 0$, siis $|z| = 0$. Kui $z = a$ on reaalarv, siis $|z| = \sqrt{a^2}$ on arvu a absoluutväärtuseks.

Kui arv z on nullist erinev, siis tema argument on määratav mitteüheselt. Olgu φ nurk, mida punkti M raadiusvektor $\overline{OM}$ moo-



Joon. 58.

dustab reaaltelje positiivse suunaga (joonis 58), mis on võetud piirkonnas 0-st kuni 2π-ni. Kui $\overline{OM}$ pikkust mitte muuta ja nurgale φ lisandada mistahes 2π kordne arv, siis raadiusvektori $\overline{OM}$ lõpp võtab endise asendi. Järelikult mistahes arvu arvudest

$$\varphi,\ \varphi + 2\pi,\ \varphi + 4\pi,\ \ldots,\ \varphi - 2\pi,\ \varphi - 4\pi,\ \ldots$$

ehk üldkujul $\varphi + 2k\pi$ (k on mistahes täisarv) võib vaadelda kui kompleksarvu z argumenti. Geomeetriliselt on selge, et, lisades nurgale φ mistahes täisarvu täispöördeid päri või vastu kellaosuti liikumissuunda, me ei muuda raadiusvektori asendit.

Arvule null ei vasta tasapinnal ükski raadiusvektor; seepärast loetakse, et null e i o m a a r g u m e n t i.

Teoreem. *Iga nullist erinev kompleksarv on esitatav järgmisel nn. trigonomeetrilisel kujul:*

$$z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kus $\varrho = |z|$ ja φ on $\arg z$ mistahes väärtus.

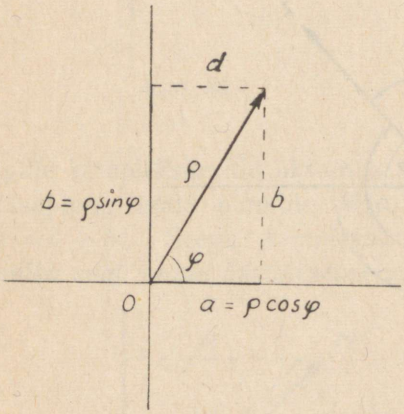
Tõestus. Kui $z = a + bi$, siis arvud a ja b kujutavad z-i raadiusvektori projektsiooni telgedel OX ja OY (joonis 59), ja seepärast

$$a = \varrho\cos\varphi, \quad b = \varrho\sin\varphi,$$

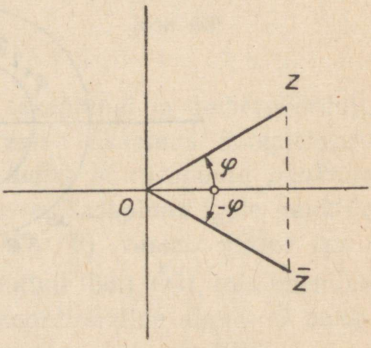
järelikult

$$z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

m. o. t. t.



Joon. 59.



Joon. 60.

Trigonomeetrilisele kujule üleminekul määratakse ϱ ja φ seostest

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Kaaskompleksarve $z = a + bi$ ja $\bar{z} = a - bi$ kujutavad punktid, mis on sümmeetrilised reaaltelje suhtes (joonis 60). Arvud z ja $\bar{z}$ omavad ühesugust moodulit:

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Kui $\varphi = \arg z$, siis z-i argumendina võib vaadelda nurka $-\varphi$, seepärast

$$\bar{z} = \varrho[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)].$$

Nagu teada, $z\bar{z} = a^2 + b^2$, s. o. kaaskompleksarvude korrutis võrdub nende mooduli ruuduga:

$$z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

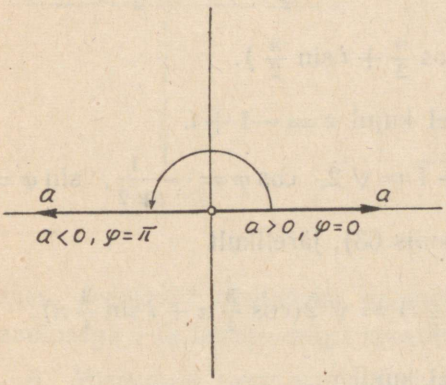
Näiteid. 1. Esitada reaalarv a trigonomeetrilisel kujul.

Lahendus. Kui $a > 0$, siis võib võtta $\varphi = 0$ (joonis 61), järelikult

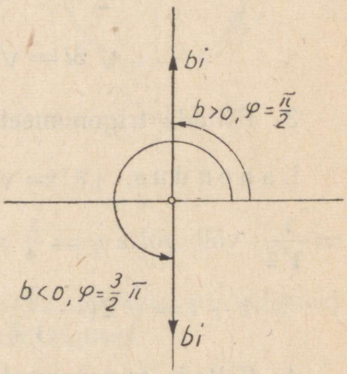
$$a = a(\cos 0 + i \sin 0).$$

Võib samuti võtta $\varphi = 2\pi$ või -2π või üldiselt $\varphi = 2k\pi$. Vastavalt sellele saame

$$a = a(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi).$$



Joon. 61.



Joon. 62.

Erijuhtumil

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi.$$

Kui $a < 0$, siis võib võtta $\varphi = \pi$ (joonis 61). Järelikult

$$a = -a(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Nii näiteks

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi, \quad -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

2. Esitada puhtimaginaararv bi trigonomeetrilisel kujul.

Lahendus.

$$\cos \varphi = 0,$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{|b|} = \begin{cases} 1 & (\text{kui } b > 0) \\ -1 & (\text{kui } b < 0). \end{cases}$$

Seepärast $b > 0$ puhul võib võtta $\varphi = \frac{\pi}{2}$, järelikult

$$bi = b(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}).$$

$b < 0$ puhul võib võtta $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ (joonis 62),

millest

$$bi = -b(\cos\tfrac{3}{2}\pi + i\sin\tfrac{3}{2}\pi).$$

Nii näiteks

$$i = \cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}, \quad -i = \cos\tfrac{3}{2}\pi + i\sin\tfrac{3}{2}\pi,$$

$$\sqrt{3}i = \sqrt{3}(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}).$$

3. Esitada trigonomeetrilisel kujul $z = -1 + i$.

L a h e n d u s. $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; võib võtta $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ (joonis 63), järelikult

$$-1 + i = \sqrt{2}(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\cos\tfrac{3}{4}\pi + i\sin\tfrac{3}{4}\pi).$$

4. Esitada trigonomeetrilisel kujul

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \ (\text{kus } 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi).$$

L a h e n d u s.

$$|z| = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha} = 2\sin\tfrac{\alpha}{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{1-\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \sin\tfrac{\alpha}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \cos\tfrac{\alpha}{2}.$$

Võib võtta

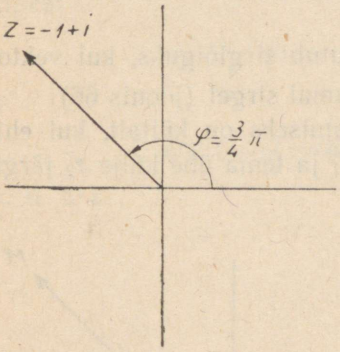
$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

millest

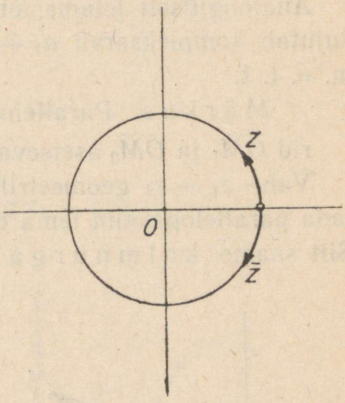
$$z = 2\sin\tfrac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right].$$

5. Olgu $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Määrata punktide z geomeetriline koht eeldusel, et nurk φ võib omada mistahes väärtust.

L a h e n d u s. $|z| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$, järelikult punkt z asetseb koordinaatide algusest kaugusel 1. Nurk φ võib olla milline



Joon. 63.



Joon. 64.

tahes, seepärast otsitavaks geomeetriliseks kohaks on ringjoon raadiusega 1 ja keskpunktiga koordinaatide alguses.

6. Missuguse joone kujutab punkt $\bar{z}$, kui punkt z kujutab ringjoone kellaosuti liikumise suunas.

V a s t u s. Sama ringjoone kellaosuti liikumisele vastandsuunas (joonis 64).

§ 62. Kompleksarvudega tehete geomeetriline tõlgendus. Moivre'i valem.

Teoreem. *Kahe kompleksarvu z_1 ja z_2 summa raadiusvektor on liidetavatele raadiusvektoritele OM_1 ja OM_2 ehitatud parallelogrammi diagonaaliks OM* (joonis 65).

Teoreem väidab, et kompleksarvude liitmisel liidetakse raadiusvektorid parallelogrammi reegli järgi, mille järgi toimub füüsikaliste vektoriaalsete suuruste liitmine (näit. jõud, kiirused, kiirendused).

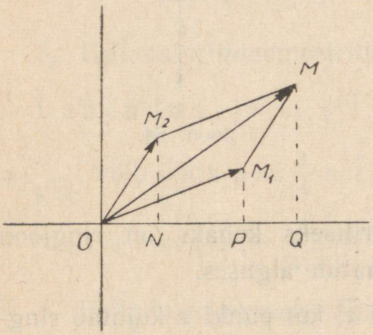
Tõestus. Arvutame parallelogrammi diagonaali projektsioonid koordinaattelgedel (joonis 65):

$$pr_x\overline{OM} = OQ = OP + PQ = OP + ON = pr_x\overline{OM}_1 + pr_x\overline{OM}_2 = a_1 + a_2.$$

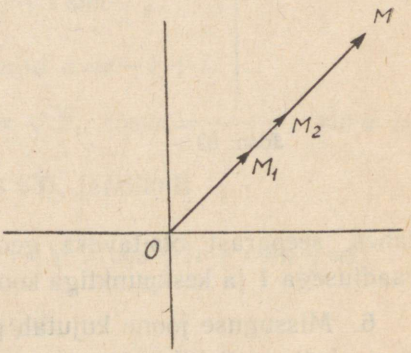
Analoogiliselt leiame, et $pr_y\overline{OM} = b_1 + b_2$. Järelikult punkt M kujutab kompleksarvu $a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$, s. o. summat $z_1 + z_2$, m. o. t. t.

Märkus. Parallelogramm muutub sirglõiguks, kui vektorid $\overline{OM}_1$ ja $\overline{OM}_2$ asetsevad ühel ja samal sirgel (joonis 66).

Vahe $z_1 - z_2$ geomeetriliseks kujutamiseks on küllalt, kui ehitada parallelogramm tema diagonaali z_1 ja tema ühe külje z_2 järgi. Siit saame kolmnurga reegli:



Joon. 65.



Joon. 66.

Vahe raadiusvektori ehitamiseks on küllalt, kui ühendada lahutatava raadiusvektori otspunkt vähendatava raadiusvektori otspunktiga ja saadud vektor $\overline{M_2M_1}$ viia rööplükkega edasi nii, et tema algus langeks punkti O (joonis 67).

Geomeetriliselt võrdub vahe moodul $|z_1 - z_2|$ punktide z_1 ja z_2 vahemaaga.

Teoreem. *Tegurite mistahes arvu puhul võrdub korrutise moodul tegurite moodulite korrutisega ja korrutise argument võrdub tegurite argumentide summaga.*

Tõestus. Läbi korrutades kaks trigonomeetriliselt avaldatud kompleksarvu

$$z_1 = \varrho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = \varrho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

saame

$$z_1 z_2 = \varrho_1 \varrho_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]$$

ehk

$$z_1 z_2 = \varrho_1 \varrho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)],$$

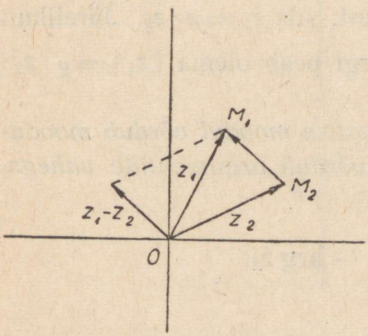
millest

$$|z_1 z_2| = \varrho_1 \varrho_2 = |z_1||z_2|$$

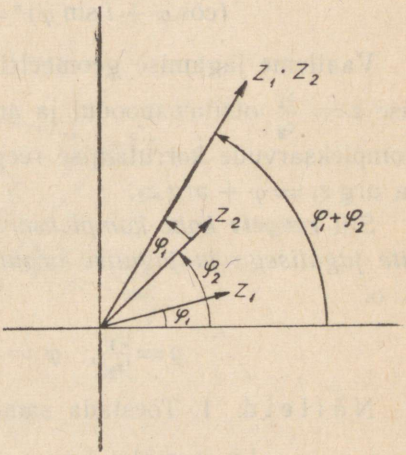
ja

$$\arg (z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2,$$

m. o. t. t.



Joon. 67.



Joon. 68.

Tõestatud reeglit saab kergesti laiendada tegurite mistahes arvu kohta. Nii näiteks

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| = |(z_1 z_2) \cdot z_3| = |z_1 z_2| \cdot |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|$$

ja

$$\arg (z_1 \cdot z \cdot z_3) = \arg [(z_1 z_2) \cdot z_3] = \arg (z_1 z_2) + \arg z_3 = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3.$$

Arvu z_1 korrutamist arvuga z_2 saab teostada geomeetriliselt, rakendades teisendustena p ö ö r a m i s t ja v e n i t a m i s t. *Selleks et korrutada arvu z_1 arvuga z_2, on küllalt, kui raadiusvektorit*

z_1 *(järjestikuliselt) pöörata nurga* φ_2 *võrra ja venitada (või kokku suruda, kui* $\varrho_2 < 1$*)* ϱ_2 *korda* (joonis 68).

Korrutades n võrdset tegurit, mis võrduvad ühe ja sama arvuga $z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, saame

$$z^n = \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1)$$

Siit ***reegel:*** *Kompleksarvu astendamisel naturaalarvuga n on küllaldane, kui moodul astendada arvuga n ja argument korrutada arvuga n.*

Võrdust (1) saab ümber kirjutada järgmiselt:

$$\varrho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Jagades ϱ^n-ga saame ***Moivre'i valemi***

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Vaatleme jagamise geomeetrilist tõlgendust. Olgu ϱ ja φ jagatise $z = \frac{z_1}{z_2}$ otsitav moodul ja argument; siis $z_1 = z \cdot z_2$. Järelikult kompleksarvude korrutamise reegli järgi peab olema $|z_1| = \varrho\,|z_2|$ ja $\arg z_1 = \varphi + \arg z_2$.

Siit ***reegel:*** *kahe kompleksarvu jagatise moodul võrdub moodulite jagatisega ja jagatise argument võrdub argumentide vahega,* s. o.

$$\varrho = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \varphi = \arg z_1 - \arg z_2.$$

N ä i t e i d. 1. Tõestada samasus

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \qquad (2)$$

ja anda selle geomeetriline tõlgendus.

L a h e n d u s.

$$|z_1 + z_2|^2 = |(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$$
$$|z_1 - z_2|^2 = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Liites liikmeti saame

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2[(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2)] =$$
$$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

m. o. t. t.

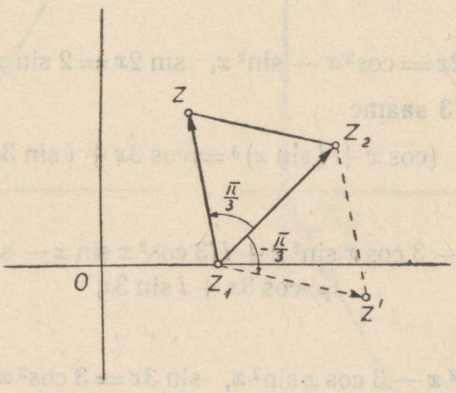
Geomeetriline tõlgendus on silmanähtav: $|z_1 + z_2|$ ja $|z_1 - z_2|$ on arvude z_1 ja z_2 raadiusvektoreile ehitatud parallelogrammi dia-

gonaalide pikkused; samasus (2) väljendab teoreemi: parallelogrammi diagonaalide ruutude summa võrdub tema külgede ruutude summaga.

2. Leida korrapärase kolmnurga tipu asend, kui tema kaks tippu on punktides $z_1 = 1$ ja $z_2 = 2 + i$.

L a h e n d u s. Me saame otsitava tipu z, pöörates punkte z_1 ja z_2 ühendavat vektorit ümber punkti z_1 nurga $\frac{\pi}{3}$ võrra (joonis 69). Vektori pööramine nurga $\frac{\pi}{3}$ võrra on samaväärne tema korrutamisega arvuga

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Joon. 69.

(pööramisel ei tule vektorit venitada ja seepärast $|\alpha| = 1$). Punkte z_1 ja z_2 ühendav vektor kujutab vahet

$$z_2 - z_1 = (2 + i) - 1 = 1 + i.$$

Vektor, mis ühendab punkte z_1 ja z, kujutab vahet $z - z_1 = z - 1$. Tingimuse kohaselt peab $z - z_1 = \alpha(z_2 - z_1)$, millest $z = z_1 + \alpha(z_2 - z_1)$ ehk asendades andmed:

$$z = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 + i) = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Ülesandel on ka teine lahend z', mille saame punkte z_1 ja z_2 ühen-

dava vektori pööramisel nurga $-\frac{\pi}{3}$ võrra. Asendades eelmistes arvutustes α arvuga $\bar{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ saame

$$z' = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Tipud z ja z' asetsevad vastaskülje suhtes sümmeetriliselt.

3. Moivre'i valem võimaldab arvutada kordsete kaarte trigonomeetrilisi funktsioone. Nii $n = 2$ puhul

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x.$$

Astendades ruutu saame

$$\cos^2 x - \sin^2 x + i2 \sin x \cos x = \cos 2x + i \sin 2x,$$

millest

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Võttes $n = 3$ saame

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$$

ehk

$$\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x) = \\ = \cos 3x + i \sin 3x,$$

millest

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x, \quad \sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x.$$

Sel viisil saab leida avaldised sin nx ja cos nx jaoks mistahes naturaalarvulise n-i puhul.

4. Arvutada summad

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \sum_{k=0}^{n} \cos k\alpha$$

ja

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \sum_{k=0}^{n} \sin k\alpha$$

(täht Σ „sigma" on üldtarvitatav summa tähis).

Lahendus. Vaatleme kompleksarvu $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ja arvutame geomeetrilise progressiooni summa

$$S_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n;$$

$S_n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$. Teisendame arvu z astmed Moivre'i valemi järgi ja kirjutame S_n-i jaoks avaldise järgmiselt:

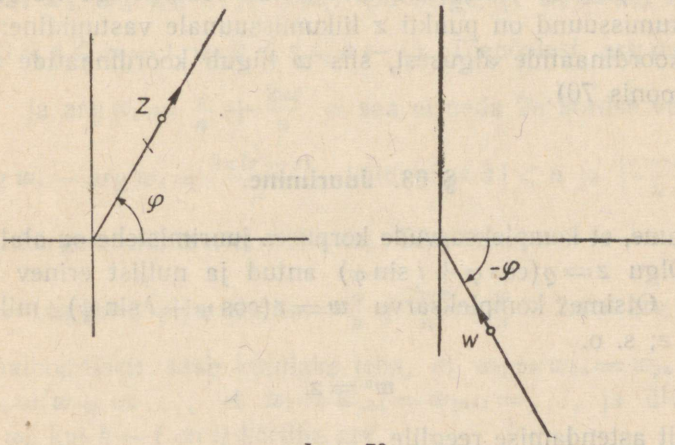
$$1 + (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \ldots +$$

$$+ (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \frac{\cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha - 1}{\cos\alpha + i\sin\alpha - 1}$$

ehk

$$(1 + \cos\alpha + \cos 2x + \ldots + \cos n\alpha) +$$
$$+ i(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha) =$$

$$= \frac{[\cos(n+1)\alpha - 1 + i\sin(n+1)\alpha][\cos\alpha - 1 - i\sin\alpha]}{(\cos\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha}.$$



Joon. 70.

Pärast viimase võrduse parema poole elementaarseid lihtsustamisi saame

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha + i\sum_{k=0}^{n}\sin k\alpha = \frac{1 - \cos\alpha + \cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)} +$$

$$+ \frac{\sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha + \sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)}.$$

Võrreldes reaalosi ja imaginaarosade koefitsiente leiame

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha = \frac{1 - \cos\alpha + \cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)};$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin k\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}.$$

5. Punkt $z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ väljub koordinaatide algusest ja liigub mööda kiirt, mis moodustab reaaltelje positiivse suunaga nurga φ. Missuguse tee joonestab punkt $w = \frac{1}{z}$?

Lahendus.

$$|w| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\varrho} \text{ ja } \arg w = \arg 1 - \arg z = -\varphi.$$

Punkti z liikumisel mööda kiirt kasvab ϱ 0-st kuni ∞-ni ja $\arg z = \varphi$ jääb muutumatuks. Punkti w moodul $|w| = \frac{1}{\varrho}$ kahaneb ∞-st kuni 0-ni ja argument, mis võrdub $-\varphi$-ga, jääb muutumatuks. Järelikult punkt w joonestab kiire, mis moodustab reaalteljega nurga $-\varphi$, kuid liikumissuund on punkti z liikumissuunale vastupidine: kui z väljub koordinaatide algusest, siis w liigub koordinaatide alguse poole (joonis 70).

§ 63. Juurimine.

Näitame, et kompleksarvude korpuses juurimistehe on alati teostatav. Olgu $z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ antud ja nullist erinev kompleksarv. Otsime kompleksarvu $w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$, mille n-s aste on z; s. o.

$$w^n = z.$$

Vastavalt astendamise reeglile

$$|z| = |w|^n \text{ ja } \arg z = n \arg w. \qquad (1)$$

Sümboli $\arg z$ all võib mõista arvu z argumendi mistahes väärtust. Kui φ on z-i argumendi mingi kindel väärtus, siis z-i argumendi üldavaldiseks on $\arg z = \varphi + 2k\pi$. Tingimused (1) võib ümber kirjutada järgmiselt:

$$r^n = \varrho \text{ ja } n\psi = \varphi + 2k\pi,$$

millest

$$r = \sqrt[n]{\varrho} \text{ ja } \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Aritmeetilise juure olemasolu teoreemi (vaata § 46) järgi saame w mooduli jaoks ainult ühe väärtuse $w = \sqrt[n]{\varrho}$. Argument ψ mää-

ratakse mitteüheselt. Tõepoolest, kui võtta $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, siis saame ψ jaoks lõpmatu hulga väärtusi

$$\ldots: \psi_{-1} = \frac{\varphi}{n} - \frac{2\pi}{n}, \quad \psi_0 = \frac{\varphi}{n}, \quad \psi_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ldots, \quad \psi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \ldots.$$

Siit leiame vastavad väärtused:

$$w_k = \sqrt[n]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

On kerge näidata, et w_k väärtuste hulgas on ainult n üksteisest erinevat arvu. Kui võtta $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, saame juure n väärtust $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$. On selge, et $w_r \neq w_s$, kui $r \neq s$ (kus $0 \leqslant r \leqslant n-1$ ja $0 \leqslant s \leqslant n-1$). Tõepoolest, $\arg w_r = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi r}{n}$ ja $\arg w_s = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi s}{n}$ ei saa erineda 2π kordse võrra, sest

$$\arg w_r - \arg w_s = \frac{2\pi(r-s)}{n}, \quad \text{kuid } |r-s| < n \text{ ja } \left|\frac{r-s}{n}\right| < 1.$$

On kergesti nähtav, et $w_n = w_0$. Tõepoolest

$$|w_n| = |w_0| = \sqrt[n]{\varrho} \text{ ja } \arg w_n = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi n}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \arg w_0 + 2\pi.$$

Analoogiliselt saab kindlaks teha, et $w_0 = w_{2n} = w_{3n} = \ldots = w_{-n} = w_{-2n} = \ldots$, et $w_1 = w_{n+1} = w_{2n+1} = \ldots$, ja üldiselt, et $w_k = w_l$, kui $k - l$ on n kordne arv.

Saadud tulemust on kerge tõlgendada geomeetriliselt. Üleminek juure väärtuselt w_k järgnevale väärtusele w_{k+1} toimub arvu $\frac{2\pi}{n}$ liitmisega argumendile w_k. Järelikult pöörates punkti w_0 raadiusvektorit $\frac{1}{n}$ täispööret saame punkti w_1; pöörates punkti w_1 raadiusvektorit $\frac{1}{n}$ täispööret saame punkti w_2 jne. Niisiis, punktid $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ on korrapärase n-nurga tippudeks, mille keskpunkt on punktis O ja raadius on $\sqrt[n]{\varrho}$ ning üks tippudest on punktis

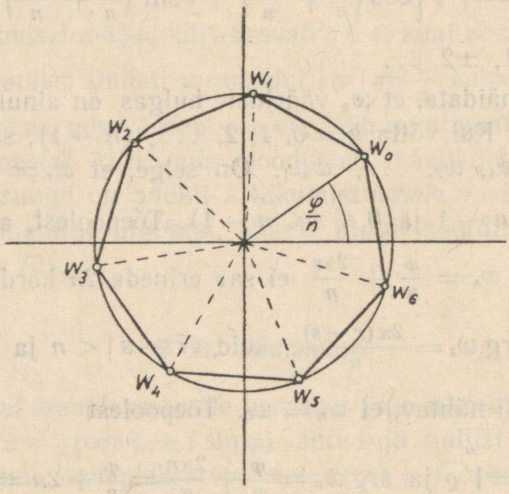
$$w_0 = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

(joonisel 71 $n = 7$). Edasine punktide $w_n, w_{n+1}, \ldots$ ehitamine kutsub esile korrapärase n-nurga juba saadud tippude kordamise.

Öeldust järeldub ***teoreem:*** *Kui* $z \neq 0$, *siis on olemas* n *erinevat kompleksarvu, mis rahuldavad tingimust* $w^n = z$.

$z = 0$ *puhul seda tingimust rahuldab ainult üks arv* $w = 0$.

Vaatleme $\sqrt[n]{1}$ väärtusi. $1 = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kus $\varrho = 1$ ja $\varphi = 0$. Juure kõik omavahel erinevad väärtused leiame ülalkirjeldatud reegli järgi:



Joon. 71.

$$\varepsilon_0 = 1\ (\cos 0 + i\sin 0) = 1$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = \varepsilon_1^2,$$

. . . . . .

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \varepsilon_1^k$$

. . . . . .

$$\varepsilon_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \varepsilon_1^{n-1}.$$

Jättes ära indeksid võtame $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$; siis kirjutatakse kõik n-nda juure väärtused arvust 1 järgmiselt:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1},\ \varepsilon^n = 1.$$

Märgime, et korrutamine arvuga ε tähendab geomeetriliselt korrutatava raadiusvektori pööramist $\frac{1}{n}$ täispööret. Järelikult kõiki n-nda juure väärtusi antud arvust z võib saada, kui korrutada väärtust

$$w_0 = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$ järjest arvudega $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}$.

Niisiis,

$$\sqrt[n]{z} = w_0,\ w_0\varepsilon,\ w_0\varepsilon^2,\ \ldots,\ w_0\varepsilon^{n-1}.$$

N ä i t e i d. 1. Leiame $\sqrt[3]{1}$ väärtused.

L a h e n d u s.

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2};$$

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{5}\text{ ja }\ \varepsilon^3 = 1.$$

2. Leida

$$\sqrt[3]{1+i}.$$

L a h e n d u s. Esitame juuritava avaldise trigonomeetrilisel kujul:

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}\right).$$

Järelikult

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

kuid

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Seega

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right).$$

w_1 ja w_2 leidmiseks tuleb w_0 korrutada arvudega

$$\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ ja } \varepsilon^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Ruutjuure leidmine on teostatav algebraliselt trigonomeetrilisele kujule ü l e m i n e k u t a. Olgu $z = a + bi$ ja $w = x + yi$. Määrame x ja y tingimusest $w^2 = z$ ehk $(x + yi)^2 = a + bi$. Järelikult

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi,$$

millest saame võrrandsüsteemi

$$x^2 - y^2 = a, \tag{2}$$

$$2xy = b. \tag{3}$$

Tõstame nende võrrandite mõlemad pooled ruutu ja liidame liikmeti; saame

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2,$$

millest

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4}$$

(võtame juure aritmeetilise väärtuse, sest $x^2 + y^2 \geqslant 0$); võrrandeist (2) ja (4) leiame

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a),\ y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a).$$

Järelikult

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Võrrand (3) näitab, et $b > 0$ puhul peavad arvud x ja y märgilt olema ühesugused ja seepärast juured tuleb võtta ühe ja sama märgiga. Kui $b < 0$, siis juured tuleb võtta vastandmärkidega. Seega

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

kui $b > 0$, ja

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

kui $b < 0$.

Näide

$$\sqrt{-5-12i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{169}-5}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{169}+5}{2}}\right) = \pm(2-3i).$$

VIII peatükk.

Hulkliikmete ring kompleksarvude korpuses.

§ 64. Algebralised funktsioonid ja lineaarvõrrandid kompleksarvude korpuses.

Vastavalt eelmises peatükis esitatule on kompleksarvude korpuses teostatavad kuus algebralist tehet. Seepärast võib algebralisi avaldisi vaadelda kompleksarvude korpuses, lugedes nende koefitsiente ja argumentide lubatavaid väärtusi kompleksarvudeks. Algebraliste avaldiste liigitamine (ratsionaalsed ja irratsionaalsed, täisratsionaalsed ja murdratsionaalsed) on kompleksarvude korpuses vaadeldavate avaldiste suhtes rakendatav.

Erijuhtumina võib hulkliikmeid käsitleda kompleksarvude korpuses ja neile laiendada hulkliikmete teooriat, mis on esitatud II peatükis hulkliikmete kohta ratsionaalarvude korpuses. Tõepoolest, nagu teame, hulkliikmete teooria põhineb nelja aritmeetilise tehte teostatavusel koefitsientidega. Kuid seda tingimust on silmas peetud, sest kompleksarvude hulk on korpus.

Kõik hulkliikmete, ratsionaalsete funktsioonide ja lineaarvõrrandite süsteemide teoreemid jäävad kompleksarvude korpuses kehtima.

Järelikult

kompleksarvuliste koefitsientidega hulkliikmete hulk moodustab ringi, sest temas on teostatavad liitmine, lahutamine ja korrutamine;

kompleksarvuliste koefitsientidega ratsionaalsete funktsioonide hulk moodustab korpuse, sest temas on teostatavad liitmine, lahu-

tamine, korrutamine ja jagamine (välja arvatud jagamine nullhulkliikmega).

§ 65. Algebra põhiteoreem.

Teoreem. *Iga hulkliige omab kompleksarvude korpuses vähemalt ühte nullkohta.*

Jätame sõnastatud algebra põhiteoreemi tõestamata ja piirdume ainult tarvilike selgitustega *.

Teoreem väidab, et iga hulkliikme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

jaoks, mille koefitsiendid kuuluvad kompleksarvude korpusse, on vähemalt üks kompleksarv (erijuhtumil võib olla reaalarv) a niisugune, et $x = a$ puhul hulkliikme väärtus võrdub nulliga, s. o.

$$f(a) = 0.$$

Põhiteoreemi saab sõnastada ka järgmiselt: *iga algebraline võrrand*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

omab kompleksarvude korpuses vähemalt ühte lahendit.

§ 66. Hulkliikme lahutamine lineaarseiks tegureiks.

Teoreem. *Iga n-nda astme hulkliige on kompleksarvude korpuses esitatav n esimese astme teguri korrutisena.*

Tõestus. Põhiteoreemi järgi omab antud hulkliige

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

kompleksarvude korpuses vähemalt ühte nullkohta x_1. Bezout' teoreemi järgi jagub hulkliige $f_n(x)$ vahega $x - x_1$ ja siis

$$f_n(x) = (x - x_1) f_{n-1}(x),$$

kus $f_{n-1}(x)$ on mingi $n - 1$-mese astme hulkliige. Algebra põhiteoreemi järgi omab hulkliige $f_{n-1}(x)$ vähemalt ühte nullkohta x_2 ja seepärast jagub vahega $x - x_2$, s. o.

$$f_{n-1}(x) = (x - x_2) f_{n-2}(x).$$

---

* Tõestus antakse kõrgema algebra kursustes. Ta põhineb täisratsionaalse funktsiooni pidevusel ja on paratamatult seoses matemaatilise analüüsi põhiideedega.

Seega

$$f_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_{n-2}(x).$$

Rakendame algebra põhiteoreemi hulkliikmele $f_{n-2}(x)$ ja eraldame lineaarse teguri $x - x_3$. Pärast n-ndat sammu on antud hulkliige $f(x)$ esitatav n esimese astme kaksliikme korrutisena:

$$f_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \qquad (1)$$

(vaata § 15), m. o. t. t.

Järeldus: *kompleksarvude korpuses on taandumatud ainult esimese astme hulkliikmed $ax + b$ ja ei ole olemas teisi taandumatuid hulkliikmeid.*

Nii näiteks kaksliige $x^2 + 1$ on reaalarvude korpuses taandumatu, kompleksarvude korpuses aga on lahutatav lineaarseiks tegureiks:

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i).$$

Arvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on hulkliikme $f(x)$ nullkohad. On kergesti nähtav, et peale nende arvude ei oma hulkliige $f(x)$ mingeid teisi nullkohti. Tõepoolest, mitte ühegi x-i väärtuse puhul, mis erineb arvudest $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ei muutu samasuse (1) ükski tegur vasakul pool nulliks ja seepärast ei saa ka $f(x)$ muutuda nulliks.

Arvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seas võivad osutuda mõned arvud võrdseiks, siis võrduse (1) vasakul poolel on vastavad tegurid samased. Tähistame hulkliikme $f_n(x)$ üksteisest erinevad nullkohad tähtedega $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Kui nullkoht x_1 esineb p_1 korda, nullkoht x_2 esineb p_2 korda jne., nullkoht x_k esineb p_k korda, siis omandab lahutus (1) kuju

$$f_n(x) = a_n(x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2} \ldots (x - x_k)^{p_k} \qquad (2)$$

Seejuures lineaarsete tegurite üldarv peab olema n: $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$. Hulkliikme taandumatuiks tegureiks lahutatavuse ühesuse teoreemi järgi (vaata § 19) on lahutus (2) ainuke võimalus (arvestamata tegurite järjekorda).

Definitsioon. *Kui astendaja p_l, millega kaksliige $x - x_l$ esineb lahutuses (2), on suurem kui 1, $p_l > 1$, siis nimetatakse x_l-i hulkliikme $f_n(x)$ kordseks nullkohaks. Kui $p_l = 1$, siis nimetatakse x_l-i antud hulkliikme lihtnullkohaks. Naturaalarvu p_l nimetatakse juure x_l kordsuseks.*

Nõnda x_1 on hulkliikme $f_n(x)$ p_1 kordne nullkoht, x_2 on $f_n(x)$-i p_2 kordne nullkoht jne.

Lepime kokku, et loeme iga nullkohta nii mitu korda, kui suur on tema kordsus. Siis ülalöeldust tuleneb

teoreem: *Iga n-nda astme hulkliige (või võrrand) omab kompleksarvude korpuses n nullkohta (lahendit).*

Märkus. Väide, et kompleksarvude korpuses on taandumatud ainult esimese astme hulkliikmed, kehtib ainult ühe argumendiga hulkliikmete kohta. Võib näidata, et on olemas mistahes astmelisi paljude argumentidega hulkliikmeid, mis ei ole taanduvad kompleksarvude korpuses.

Vaatleme näiteks kahe argumendiga teise astme hulkliiget

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \quad (\text{kus } A \neq 0).$$

Koostame ruutvõrrandi x-i suhtes:

$$Ax^2 + (By + D)x + Cy^2 + Ey + F = 0.$$

Lahendades selle võrrandi x-i suhtes saame

$$x = \frac{-(By + D) \pm \sqrt{(By + D)^2 - 4A(Cy^2 + Ey + F)}}{2A}. \tag{3}$$

Tähistame x-i kaks saadud väärtust x_1-ga ja x_2-ga. Vastavalt ülaltoodule toimub lahutus:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = A(x - x_1)(x - x_2).$$

Kuid tegurid $x - x_1$ ja $x - x_2$ ei ole üldjuhtumil hulkliikmed (x-i ja y-i suhtes), sest x_1-e ja x_2-e on avaldised irratsionaalsed. Et x_1 ja x_2 oleksid y-i suhtes esimese astme hulkliikmed, on tarvilik, et valemi (3) juuritav avaldis oleks esimese astme kaksliikme täpne täisruut. Kuid see avaldis on ruutkolmliige

$$(B^2 - 4AC)y^2 + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF.$$

Antud kolmliige on täisruut, kui tema diskriminant võrdub nulliga: $\Delta = 0$.

Kuid

$$\Delta = (BD - 2AE)^2 - (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF).$$

Järelikult antud hulkliige on taanduv ja lahutub esimese astme tegureiks, kui tema koefitsiendid rahuldavad tingimust $\Delta = 0$.

Näiteid. 1. Hulkliige $x^3 - 1$ lahutub reaalarvude korpuses taandumatuiks tegureiks:

$$x^3 - 1 \equiv (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Kompleksarvude korpuses on vaadeldava hulkliikme nullkohtadeks kuupjuured arvust 1. Need arvud on

$$1,\ \varepsilon = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ ja } \varepsilon^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Järelikult kompleksarvude korpuses saame järgmise lahutuse lineaarseiks tegureiks:

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right).$$

Kolmliige $x^2 + x + 1$, mis on reaalarvude korpuses taandumatu, lahutub kompleksarvude korpuses tegureiks:

$$x^2 + x + 1 = (x - \varepsilon)(x - \varepsilon^2).$$

2. Leida hulkliikme

$$x^3 + ix^2 - 4x - 4i$$

nullkohad.

L a h e n d u s. Kasutades tegureiks lahutamisel elementaarseid võtteid saame

$$x^3 + ix^2 - 4x - 4i = x^2(x+i) - 4(x+i) = \\ = (x+i)(x+2)(x-2).$$

Otsitavad nullkohad on $x_1 = i$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

3. Näidata, et arv 1 on hulkliikme $f(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ kahekordseks nullkohaks, ja leida jagatis $\frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

L a h e n d u s. Esitame $f(x)$-i kujul

$$nx^n(x-1) - (x^n - 1).$$

On ilmne, et $f(x)$ jagub vahega $x - 1$ ja

$$f(x) = (x-1)[nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)].$$

Kirjutame jagatis-hulkliikme ümber järgmisel kujul:

$$\frac{f(x)}{(x-1)} = n(x^n - x^{n-1}) + (n-1)(x^{n-1} - x^{n-2}) + \\ + (n-2)(x^{n-2} - x^{n-3}) + \ldots + (x-1).$$

Parem pool jagub vahega $x - 1$ ja saame

$$\frac{f(x)}{(x-1)^2} = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 1,$$

millest

$$f(x) \equiv (x-1)^2[nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 1]. \qquad (4)$$

Järelikult 1 on hulkliikme $f(x)$ v ä h e m a l t kahekordne nullkoht. Selleks et näidata, et x on t ä p s e l t kahekordne nullkoht, on küllalt, kui veendume, et samasuse (4) parema poole teine tegur ei muutu nulliks $x=1$ puhul. Selle teguri kõik koefitsiendid on positiivsed ja seepärast $x=1$ puhul on tema väärtus positiivne.

4. Näidata, et kolmliige

$$x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3p+2} \qquad (5)$$

(kus n, m ja p on mistahes naturaalarvud) jagub kolmliikmega x^2+x+1.

L a h e n d u s. Meil

$$x^2 + x + 1 = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)$$

(kus ε ja ε^2 on arvu 1 imaginaarsed kuupjuured), seepärast on küllalt, kui veendume, et ε ja ε^2 on hulkliikme (5) nullkohad. Oletades, et $x=\varepsilon$, ja silmas pidades, et $\varepsilon^3=1$, saame

$$\varepsilon^{3n} + \varepsilon^{3m+1} + \varepsilon^{3p+2} = (\varepsilon^3)^n + (\varepsilon^3)^m\varepsilon + (\varepsilon^3)^p\varepsilon^2 = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$

Analoogiliselt, asendades $x=\varepsilon^2$-ga, saame

$$(\varepsilon^3)^{2n} + (\varepsilon^3)^{2m}\varepsilon^2 + (\varepsilon^3)^{2p}\varepsilon^4 = 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0.$$

5. Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hulkliikme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

nullkohad.

Arvutada korrutis $(x_1^2-1)(x_2^2-1)\ldots(x_n^2-1)$ ilma nullkohti leidmata.

L a h e n d u s. Meil on

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n);$$

võttes selles samasuses $x=1$ saame

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_n(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)$$

ehk, mis on sama:

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) + (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) = \\ = a_n(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n).$$

Võttes $x = -1$ saame analoogiliselt

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) = \\ = a_n(-1 - x_1)(-1 - x_2) \ldots (-1 - x_n).$$

Läbi korrutades liikmeti ja arvesse võttes, et

$$(-1 - x_k)(1 - x_k) = x_k^2 - 1,$$

saame

$$(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) \ldots (x_n^2 - 1) = \\ = \frac{1}{a_n^2}[(a_0 + a_2 + \ldots)^2 - (a_1 + a_3 + \ldots)^2].$$

§ 67. Hulkliikmed reaalsete koefitsientidega.

Reaalsete koefitsientidega hulkliikmeid võib vaadelda kompleksarvude korpuses, lugedes argumentide lubatavaiks väärtusteks mistahes kompleksarve. Vaatleme ainult ühe argumendiga hulkliikmeid.

Olgu

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

reaalsete koefitsientidega hulkliige.

Algebra põhiteoreemi ja temast tulenevate järelduste alusel omab see hulkliige kompleksarvude korpuses n nullkohta. Erijuhtumil võivad need nullkohad või mõned neist osutuda reaalseiks.

Teoreem. *Kui reaalsete koefitsientidega hulkliige $f(x)$ omab kompleksnullkohta $a = \xi + i\eta$ (kus $\eta \neq 0$), siis selle kaaskompleksarv on samuti $f(x)$-i nullkohaks.*

Tõestus. Olgu $x = \xi + i\eta$ argumendi x mingi kompleksväärtus; hulkliikme vastava väärtuse tähistame $P + Qi$-ga, s. o.

$$f(\xi + i\eta) = P + Qi.$$

Argumendi kaasväärtusele $\bar{x} = \xi - i\eta$ vastab hulkliikme kaasväärtus. See on arusaadav, sest koefitsiendid kui reaalarvud on iseenese kaasarvud ja x-i asendamisel kaasarvuga $\bar{x}$ asendub iga aste x^k kaasarvuga $(\overline{x^k})$. Niisiis

$$f(\xi - i\eta) = P - Qi.$$

Kui $\xi + i\eta$ on hulkliikme $f(x)$ nullkohaks, siis $P + Qi = 0$, s. o. $P = Q = 0$; kuid siis $f(\xi - i\eta) = P - Qi = 0$.

Järelikult arv $\xi - i\eta$ on samuti hulkliikme $f(x)$ nullkohaks, m. o. t. t.

Järeldus. *Reaalsete koefitsientidega hulkliikmel on paarisarv kompleksnullkohti.* Tõepoolest, kompleksnullkoha esinemine kutsub esile ka kaaskompleksnullkoha esinemise. Niisiis, kompleksnullkohad ühenduvad teineteisega kaaskompleksarvude paarideks.

Teoreem. *Iga paarituastmeline reaalsete koefitsientidega hulkliige omab vähemalt ühte reaalset nullkohta.*

Tõestus. Kui paarituastmelise hulkliikme nullkohtade seas ei oleks ühtegi reaalset nullkohta, siis hulkliikme kompleksnullkohtade arv peaks olema paaritu, mis on võimatu; m. o. t. t.

Teoreem. *Reaalarvude korpuses on taandumatud ainult esimese astme kaksliikmed ja kompleksnullkohtadega ruutkolmliikmed. Iga reaalsete koefitsientidega hulkliige, mille aste on kõrgem kui 2, on taanduv ja esitatav korrutisena, mille tegureiks on esimese astme kaksliikmed ja ruutkolmliikmed.*

Tõestus. 1° Nagu teada, on esimese astme kaksliikmed ja ruutkolmliikmed, millel pole reaalseid nullkohti (kui $\Delta < 0$, § 49), reaalarvude korpuses taandumatud.

2° Kui reaalsete koefitsientidega hulkliige $f(x)$ omab kompleksnullkohta $a = \xi + i\eta$, siis omab ta ka kaaskompleksnullkohta $\bar{a} = \xi - i\eta$ ja seepärast jagub korrutisega

$$(x - a)(x - \bar{a}) = x^2 - (a + \bar{a})x + a\bar{a} = x^2 - 2\xi x + (\xi^2 + \eta^2),$$

s. o. reaalsete koefitsientidega ruutkolmliikmega

$$x^2 + px + q, \text{ kus } p = -2\xi \text{ ja } q = \xi^2 + \eta^2$$

(meie juhtumil $\Delta = \xi^2 - (\xi^2 + \eta^2) = -\eta^2 < 0$).

3° Algebra põhiteoreemi järgi omab antud hulkliige $f(x)$ vähemalt ühte reaalset või kompleksnullkoha ja seepärast jagub kas esimese astme kaksliikmega või ruutkolmliikmega. Järelikult peale *esimese astme kaksliikmete ja kompleksnullkohtadega ruutkolmliikmete ei ole reaalarvude korpuses teisi taandumatuid hulkliikmeid.*

4° Hulkliikme taandumatuiks tegureiks lahutamise võimalikkuse ja ühesuse teoreemi (vaata § 19) järgi on hulkliige $f(x)$ esitatav esimese astme kaksliikmete ja ruutkolmliikmete korrutisena:

$$f(x) = C(x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2} \ldots$$
$$\ldots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \ldots$$
$$\ldots (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}$$

[kus C on $f(x)$-i kõrgeima astmega liikme koefitsient]. Iga tegur selles lahutuses võetakse astendajaga, mis võrdub vastava juure kordsusega, m. o. t. t.

Märkus. On arusaadav, et erijuhtumeil võivad lahutuses puududa kas esimese astme tegurid või ruutkolmliikmed.

Näited. 1. Teades, et hulkliige

$$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$$

omab nullkohta $1 + i$, leida tema teised nullkohad ja lahutada ta tegureiks kompleks-, reaal- ja ratsionaalarvude korpuses.

Lahendus. Kui $a = 1 + i$ on $f(x)$-i nullkoht, siis on $a = 1 - i$ samuti $f(x)$-i nullkoht ja $f(x)$ jagub kolmliikmega

$$(x - 1 - i)(x - 1 + i) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2.$$

Otseselt veendume, et jagamine toimub ilma jäägita ja jagatisena saame kolmliikme $3x^2 + x - 1$. Viimase kolmliikme nullkohad on $\frac{1}{6}(-1 \pm \sqrt{13})$. Nii saame $f(x)$-i lahutuse taandumatuiks tegureiks:

$$f(x) = 3(x - 1 - i)(x - 1 + i)\left(x + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x + \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}\right)$$

kompleksarvude korpuses;

$$f(x) = 3(x^2 - 2x + 2)\left(x + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x + \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}\right)$$

reaalarvude korpuses;

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)(3x^2 + x - 1)$$

ratsionaalarvude korpuses.

2. Lahutada tegureiks hulkliige $x^4 + 1$.

Lahendus. Vastava võrrandi $x^4 + 1 = 0$ lahendeiks on 4-nda juure väärtused arvust -1.

Üle minnes trigonomeetrilisele kujule saame

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

millest

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i);$$

$$x_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i);$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i); \quad x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i).$$

Kompleksarvude korpuses on

$$x^4-1=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right).$$

Ühendades kaastegurid saame lahutuse taandamatuiks tegureiks reaalarvude korpuses:

$$x^4+1=\left[\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\left[\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Ratsionaalarvude korpuses on hulkliige x^4+1 taandumatu.

3. Leida tarvilik ja piisav tingimus, mille puhul reaalsete koefitsientidega hulkliige

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

jagub kaksliikmega x^2+1.

L a h e n d u s. Hulkliikme x^2+1 nullkoht i peab samuti olema $f(x)$-i nullkohaks. See tingimus on piisav, sest kui i on $f(x)$-i nullkoht, siis nullkohaks on ka $-i$, kuid siis $f(x)$ jagub avaldisega $(x-i)(x+i)=x^2+1$. Järelikult otsitav tingimus kirjutatakse järgnevalt:

$$f(i)=(a_0-a_2+a_4-\ldots)+i(a_1-a_3+a_5-\ldots)=0,$$

millest

$$a_0-a_2+a_4-\ldots=0 \text{ ja } a_1-a_3+a_5-\ldots=0. \qquad (1)$$

Vaatleme hulkliikmeid

$$P(z)=a_0+a_2z+a_4z^2+\ldots \text{ ja } Q(z)=a_1+a_3z+a_5z^2+\ldots;$$

siis

$$f(x)=(a_0+a_2x^2+\ldots)+x(a_1+a_3x^2+\ldots)=P(x^2)+xQ(x^2).$$

Tingimused (1) näitavad, et hulkliikmed $P(z)$ ja $Q(z)$ peavad omama ühist nullkohta $z=-1$.

4. Lahutada $x^{2n}-1$ reaalseiks teguriteks.

L a h e n d u s. Hulkliikme $x^{2n}-1$ nullkohtadeks on $2n$-ndate juurte väärtused arvust 1. Vastavaid punkte, mis asetsevad ühik-

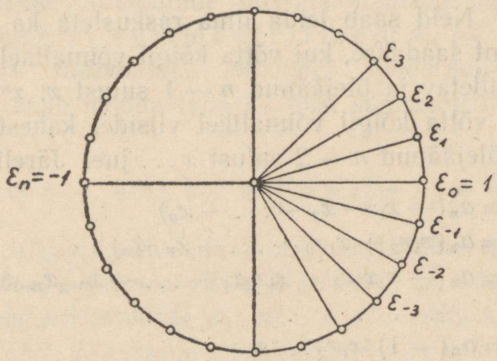
raadiusega korrapärase $2n$-nurga tippudes, võib nummerdada, nagu on näidatud joonisel 72.

Me saame

$$\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n},\ \varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\ldots,\ \varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n},\ \ldots,\ \varepsilon_{-1} = \bar{\varepsilon}_1,\ \varepsilon_{-2} = \bar{\varepsilon}_2,\ \ldots,\ \varepsilon_{-k} = \bar{\varepsilon}_k,\ \ldots$$

Nullkohad ε_k ja ε_{-k} annavad $x^{2n} - 1$ lahutuses kaks kaaskomplekstegurit



Joon. 72.

$$(x - \varepsilon_k)(x - \varepsilon_{-k}) = \left(x - \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= \left(x - \cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{k\pi}{n} = x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1.$$

Järelikult

$$x^{2n} - 1 = (x-1)(x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right)$$

ehk lühendatult

$$x^{2n} - 1 = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)^{*}.$$

---

* Tähte Π tarvitatakse korrutamise sümbolina, samuti kui tähte Σ kasutatakse summa lühitähisena.

§ 68. Hulkliikme koefitsientide seos nullkohtadega.

Hulkliikme lahutus lineaarseiks tegureiks võimaldab määrata seost tema koefitsientide ja nullkohtade vahel. Võrdsustame vastavad koefitsiendid samasuses

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\ = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

x-i mitmesuguste astmete koefitsiente, mis saadakse paremal poolel pärast sulgude avamist, võib arvutada ühesuguste esimeste liikmetega ja erinevate teiste liikmetega kaksliikmete korrutamise valemi alusel. Neid saab leida ilma raskusteta ka otseselt. Sest x^{n-1}-i koefitsient saadakse, kui võtta kõigil võimalikel viisidel ühest sulust teine liidetav ja ülejäänud $n - 1$ sulust x; x^{n-2}-i koefitsient saadakse, kui võtta kõigil võimalikel viisidel kahest sulust teised liidetavad ja ülejäänud $n - 2$ sulust x ... jne. Järelikult

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= a_n(-x_1 - x_2 - \ldots - x_n) \\ a_{n-2} &= a_n(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) \\ a_{n-3} &= a_n(-x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - \ldots - x_{n-2}x_{n-1}x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 &= a_n(-1)^n x_1x_2 \ldots x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Erijuhtumil, kui hulkliikme kõrgeima astmega liikme koefitsient on 1, saame

$$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$$

ja valemid omandavad kuju

$$\begin{aligned} p_1 &= -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\ p_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ p_3 &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= (-1)^n x_1x_2 \ldots x_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Neid valemeid nimetatakse V i ë t a valemeiks.

Siit ***teoreem:*** *kui n-astme hulkliikme kõrgeima astmega liikme koefitsient on 1, siis x^{n-k}-i koefitsient p_k võrdub k kaupa võetud hulkliikme nullkohtade kõikvõimalike korrutiste summaga, mis on võetud paaris k puhul märgiga „+" ja paaritu k puhul märgiga „—".*

Rakendades Vieta valemit ruutkolmliikmele

$$x^2 + px + q$$

saame

$$p = -(x_1 + x_2), \quad q = x_1 x_2.$$

Kuuphulkliikme

$$x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3$$

puhul saame

$$p_1 = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad p_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \quad p_3 = -x_1 x_2 x_3.$$

Vieta valemid näitavad, et hulkliikme koefitsiendid $p_1, p_2, \ldots, p_n$ väljenduvad tema nullkohtade täisratsionaalsete funktsioonidena. Need funktsioonid on sümmeetrilised: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *väärtused ei muutu nullkohtade mistahes ümberpaigutusel.* Peale $p_1, p_2, \ldots, p_n$ saab moodustada ka teisi sümmeetrilisi funktsioone. Näiteks

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \text{ või } x_1^3 x_2^3 + x_1^3 x_3^3 + \ldots + x_{n-1}^3 x_n^3.$$

Kõrgemas algebras tõestatakse, *et hulkliikme nullkohtade iga (täisratsionaalne) sümmeetriline funktsioon on väljendatav sümmeetriliste põhifunktsioonide* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *abil, s. o. hulkliikme koefitsientide abil.* Alljärgnevais näiteis (1—3) näidatakse, kuidas saab hulkliikmete nullkohtade mitmesuguseid sümmeetrilisi funktsioone väljendada tema koefitsientide abil.

Näited. 1. Väljendada koefitsientide abil nullkohtade ruutude summa.

Lahendus. Tõstame nullkohtade summa ruutu

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \\ + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n)$$

ehk võrduste (2) alusel

$$(-p_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2) + \ldots + x_n^2) + 2p_2,$$

millest

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = p_1^2 - 2p_2.$$

2. Väljendada ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite kuupide summa koefitsientide abil.

Lahendus. Meil

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

või

$$x_1^3 + x_2^3 = 3pq - p^3.$$

Teine lahendus. Kirjutame tingimused, et x_1 ja x_2 on antud ruutvõrrandi lahendid:

$$x_1^2 + px_1 + q = 0,$$
$$x_2^2 + px_2 + q = 0.$$

Korrutades esimest võrdust x_1-ga ja teist x_2-ga ning liites liikmeti saame

$$(x_1^3 + x_2^3) + p(x_1^2 + x_2^2) + q(x_1 + x_2) = 0,$$

kuid

$$x_1^2 - x_2^2 = p^2 - 2q \text{ ja } x_1 + x_2 = -p,$$

millest

$$x_1^3 + x_2^3 = 3pq - p^3.$$

3. Väljendada järgmine nullkohtade sümmeetriline funktsioon

$$\Phi = x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_1^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2 + x_3x_2^2$$

kuuphulkliikme

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3$$

koefitsientide abil.

Lahendus. Korrutis $-p_1p_2$, kus

$$-p_1 = x_1 + x_2 + x_3 \text{ ja } p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

koosneb üheksast liikmest, milles sisalduvad funktsiooni Φ kõik kuus liiget; ülejäänud kolm liiget on ühesugused ja igaüks neist võrdub $x_1x_2x_3 = -p_3$-ga, järelikult $-p_1p_2 = \Phi - 3p_3$, millest

$$\Phi = 3p_3 - p_1p_2.$$

4. Lahendada kuupvõrrand $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$, kui tema kaks lahendit on seoses $x_1 = \frac{3}{2}x_2$-ga.

Lahendus. Meil $\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{2}$ ehk $x_1 = 3k$ ja $x_2 = 2k$. Vieta valemi alusel

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 14,\ x_1x_2x_3 = -24.$$

Järelikult

$$5k + x_3 = 9,\ 6k^2 + 5kx_3 = 14,\ k^2x_3 = -4. \quad (3)$$

k ja x_3-i määramiseks saime kolme võrrandi süsteemi. Üldjuhtumil (mistahes kuupvõrrandi puhul) ei ole see süsteem ühtjas. See on ka arusaadav, sest üldjuhtumil ei ole kuupvõrrandi lahendid seotud antud seostega. Näitame, et v a a d e l d a v a võrrandi puhul on süsteem (3) ühtjas. Kahest esimesest võrrandist saame ruutvõrrandi

$$19k^2 - 45k + 14 = 0,$$

millest leiame $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{7}{19}$; võttes $k = 2$ saame

$$x_1 = 6,\ x_2 = 4,\ x_3 = -1.$$

Kontrollimisel veendume, et süsteemi (3) kolmas võrrand on rahuldatud.

Võttes $k = \frac{7}{19}$ saame $x_1 = \frac{21}{19}$, $x_2 = \frac{14}{19}$, $x_3 = \frac{136}{19}$.

Kontrollimine näitab, et kolmas võrrand ei ole rahuldatud. Muide see on selge ka ilma kontrollimiseta, sest kuupvõrrandil on ainult kolm lahendit ega saa olla kahte erinevat lahendite süsteemi. Niisiis, otsitavad lahendid on 6, 4 ja —1.

5. Koostada ruutvõrrand, mille lahendiks on antud võrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendite ruudud.

L a h e n d u s. Otsitava võrrandi lahendid on x_1^2 ja x_2^2, järelikult tema koefitsiendid on $p_1 = -(x_1^2 + x_2^2) = -(p^2 - 2q)$ ja $q_1 = x_2^2 x_1^2 = q^2$.

Teades koefitsiente koostame otsitava võrrandi

$$x^2 + (2q - p^2)x + q^2 = 0.$$

IX p e a t ü k k.

Algebralised võrrandid.

§ 69. Võrrandite teisendamine.

Võrrandi

$$f(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

lahendamise ülesanne (kus $f(x)$ ja $\varphi(x)$ on tundmatu x mingid funktsioonid) esitatakse järgmiselt: *on antud tundmatu x lubata-*

vate väärtuste hulk; tuleb kindlaks määrata, kas on olemas, ja kui on olemas, leida kõik x-i lubatavad arvulised väärtused, mille puhul võrduse (1) *parem ja vasak pool on ühesuguse väärtusega.*

Tundmatu lubatavate väärtuste hulk võib olla mitmesugune. Nii näiteks, kui antud võrrand on tekkinud aritmeetilise ülesande tingimusest tööliste arvu kohta, siis x-i lubatavaiks väärtusteks on ainult naturaalarvud. Kui x tähistab ruudu külje pikkust, siis tundmatu lubatavaiks väärtusteks on positiivsed arvud.

Elementaaralgebras vaadeldakse tavaliselt erikujulisi võrrandeid, milledes $f(x)$ ja $\varphi(x)$ on algebralised või elementaarsed transtsendentsed funktsioonid.

Ü h e j a s a m a võrrandi $f(x) = \varphi(x)$ lahendite arv võib olla e r i n e v, sõltuvalt sellest, missugune arvhulk on võetud lubatavate väärtuste hulgaks. Nii näiteks võrrand

$$(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

ei oma naturaalarvude hulgas lahendeid, täisarvude hulgas omab ühte lahendit $x = -1$, reaalarvude hulgas omab ühte lahendit $x = -1$, kompleksarvude hulgas kolme lahendit: $x = 1$, $x = i$ ja $x = -i$.

Eeldame, et pärast mõningate matemaatiliste tehete teostamist võrrandi

$$f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

mõlema poolega on saadud uus võrrand

$$F(x) = \Phi(x). \tag{2}$$

Definitsioon. *Võrrandit (2) nimetame võrrandi (1) järelduseks, kui võrrandi (1) iga lahend on võrrandi (2) lahendiks.*

Kui võrrand (2) on võrrandi (1) järelduseks, siis võrrandi (1) kõigi lahendite kogu sisaldub võrrandi (2) lahendite hulgas, kuid võrrand (2) võib omada lahendeid, mis pole võrrandi (1) lahendeiks. Näitena vaatleme võrrandit

$$[f(x)]^2 = [\varphi(x)]^2, \tag{2'}$$

mis saadakse võrrandist (1) mõlema poole ruutimisel. Võrrandi (1) iga lahend on võrrandi (2′) lahendiks, sest kui x-i mingi väärtuse puhul on võrrandi (1) mõlemad pooled võrdsed, siis on võrdsed ka nende ruudud. Tähendab, võrrand (2′) on võrrandi (1)

järelduseks. Kuid võrrand (2′) võib omada lahendeid, mis pole võrrandi (1) lahendeiks. Tõepoolest, võttes võrrandi

$$f(x) = -\varphi(x) \qquad (1')$$

mõlemad pooled ruutu saame järeldusena sama võrrandi (2′). Tähendab, võrrandi (2′) lahendite hulgas sisalduvad mõlema võrrandi (1) ja (1′) lahendid. Nii näiteks võrrand

$$2x - 6 = x$$

omab ühte lahendit $x = 6$, võrrand

$$(2x - 6)^2 = x^2$$

omab kahte lahendit: $x_1 = 6$ ja $x_2 = 2$. Teine lahend on võrrandi

$$2x - 6 = x$$

lahendiks.

Kui on teada võrrandi (1) järeldusena saadud võrrandi (2) kõik lahendid, siis võrrandi (1) lahendite leidmiseks tuleb võrrandi (2) lahendeid proovida asetamisega võrrandisse (1).

Kõik öeldu jääb kehtima ka võrrandisüsteemide kohta.

M ä r k u s. Pole võimatu, et antud võrrandit

$$f(x) = \varphi(x)$$

rahuldavad tundmatu x kõik lubatavad arvulised väärtused. Sel juhtumil öeldakse, et antud võrrandit rahuldavad s a m a s e l t x-i kõik lubatavad väärtused.

Nii näiteks võrrand $\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} + 2 = x^2 + 3$ on rahuldatud x-i iga arvulise väärtuse puhul.

§ 70. Võrrandite samaväärsus (ekvivalentsus).

Definitsioon. *Kui võrrandi (või võrrandisüsteemi)*

$$f(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

iga lahend on võrrandi (või võrrandisüsteemi)

$$F(x) = \Phi(x) \qquad (2)$$

lahendiks ja ümberpöördult, kui võrrandi (või võrrandisüsteemi) (2) iga lahend on võrrandi (või võrrandisüsteemi) (1) lahendiks,

siis nimetatakse antud võrrandeid (või võrrandisüsteeme) samaväärseiks (ekvivalentseteks).

Võrrandi lahendamisel on alati võimalik antud võrrandit asendada temaga samaväärse võrrandiga, sest niisuguse asenduse puhul ei muutu lahendite arv ega nende arvulised väärtused.

Märkus. Võrrandite samaväärsuse mõiste on suhteline, sest antud võrrandite paar võib tundmatute ühe lubatavate väärtuste hulga puhul olla samaväärne, teise puhul aga mitte.

Nii näiteks on võrrandid

$$2x - 2 = x,$$
$$2x - 2 + \sqrt{x} = x + \sqrt{x}$$

reaalarvude korpuses samaväärsed, sest nende ühiseks ainsaks lahendiks on $x = 2$. Kui lugeda lubatavaiks ainult x-i ratsionaalseid väärtusi, siis need võrrandid ei ole enam samaväärsed. Meie näites on $x = 2$ esimese võrrandi lahendiks, kuid pole teise võrrandi lahendiks. Tõepoolest, ratsionaalarvude korpuses pole juurimistehe alati teostatav ja $x = 2$ puhul kaotavad teise võrrandi parema ja vasaku poole avaldised mõtte.

Võrrandite praktilisel lahendamisel on tähtis üldkujul kindlaks määrata, missugused tehted toovad meid samaväärse võrrandi juurde.

Teoreem. *Kui võrrand*

$$f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

on võrrandi

$$F(x) = \Phi(x) \tag{2}$$

järelduseks ja võrrand (2) on võrrandi (1) järelduseks, siis võrrandid (1) ja (2) on samaväärsed.

Tõestus. Kui võrrand (1) on saadav võrrandist (2) järeldusena, siis võrrandi (2) kõik lahendid on võrrandi (1) lahendeiks. Analoogiliselt võrrandi (1) kõik lahendid on võrrandi (2) lahendeiks. Järelikult võrrandid (1) ja (2) on samaväärsed, m. o. t. t.

Teoreem. *Kui avaldis $\omega(x)$ omab mõtet tundmatu kõigi lubatavate väärtuste puhul, siis võrrandid*

$$f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

ja

$$f(x) + \omega(x) = \varphi(x) + \omega(x) \qquad (3)$$

on samaväärsed.

Seda teoreemi sõnastatakse lühidalt reeglina: *võrrandi mõlema poolega võib liita ühe ning sama liidetava.*

Tõestus. Kui x-i mingi arvulise väärtuse puhul on avaldiste $f(x)$ ja $\varphi(x)$ väärtused ühesugused, siis on ka avaldiste $f(x) + \omega(x)$ ja $\varphi(x) + \omega(x)$ väärtused ühesugused. Seepärast võrrand (3) on võrrandi (1) järelduseks. Ümberpöördult, võrrand (1) on võrrandi (3) järelduseks, sest et saada võrrandit (1), tuleb võrrandi (3) mõlema poolega liita $-\omega(x)$. Eelmise teoreemi järgi on võrrandid (1) ja (3) samaväärsed, m. o. t. t.

Tõestatud teoreemil põhineb tuntud reegel liidetavate üleviimise kohta võrrandi ühelt poolelt teisele poolele. Liites võrrandi

$$f(x) + a(x) = \varphi(x)$$

mõlema poolega ühe ja sama avaldise $-a(x)$ saame samaväärse võrrandi

$$f(x) = \varphi(x) - a(x),$$

milles liidetav $a(x)$ on teisel poolel vastandmärgiga.

Märkus. Võrrandid (1) ja (3) võivad osutuda mittesamaväärseiks, kui avaldis $\omega(x)$ ei oma mõtet tundmatu kõigi lubatavate väärtuste puhul. See kehtib, kui $x = a$ on võrrandi (1) lahend, kuid $x = a$ puhul kaotab avaldis $\omega(x)$ mõtte. Näidet vaatlesime käesoleva §-i algul.

Vaatleme teist näidet: võrrand $3x - 1 = 2x$ omab lahendit $x = 1$, kuid $x = 1$ ei ole võrrandi

$$3x - 1 + \frac{1}{x-1} = 2x + \frac{1}{x-1}$$

lahendiks.

Teoreem. *Kui avaldis $\omega(x)$ omab mõtet ja on erinev nullist tundmatu kõigi lubatavate väärtuste puhul, siis võrrandid*

$$f(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

ja

$$\omega(x) f(x) = \omega(x) \varphi(x) \qquad (4)$$

on samaväärsed.

Tõestus. Kui võrrandi (1) mõlema poole väärtused on võrdsed, siis on ka võrrandi (4) mõlema poole väärtused võrdsed. Seepärast võrrand (4) on võrrandi (1) järelduseks. Ümberpöördult, võrrand (1) on võrrandi (4) järelduseks. Tõepoolest, avaldis $\frac{1}{\omega(x)}$ omab mõtet kõigi lubatavate väärtuste puhul, sest $\omega(x) \neq 0$. Korrutades võrrandit (4) liikmeti $\frac{1}{\omega(x)}$-ga saame järeldusena võrrandi (1) m. o. t. t.

Tõestatust järeldub erijuhtumina, et võrrandi mõlemat poolt võib korrutada mistahes nullist erineva arvuga.

Märkus I. Kui tegur $\omega(x)$ muutub tundmatu mingi lubatava väärtuse puhul nulliks, siis võrrandite (1) ja (4) samaväärsust ei ole võimalik üldjuhtumil kinnitada. Tõepoolest, võrrandit (4) rahuldavad kõik arvud, mis muudavad $\omega(x)$ nulliks, s. o. võrrandi $\omega(x) = 0$ kõik lahendid. Kuid viimase võrrandi lahendite hulgas võib olla arve, mis pole võrrandi (1) lahendeiks.

Nii näiteks võrrand $3x + 1 = 2x$ omab lahendit $x = -1$, kuid võrrand $(x - 2)(3x + 1) = (x - 2)2x$ omab peale lahendi $x = -1$ veel lahendit $x = 2$.

Märkus II. Kui astendada võrrandi mõlemad pooled mingisse (täisarvulisse positiivsesse) astmesse, siis üldjuhtumil ei teki antud võrrandiga samaväärset võrrandit. Tõepoolest, võrrand

$$[f(x)]^n = [\varphi(x)]^n \tag{5}$$

on võrrandi

$$f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

järelduseks.

Kuid peale võrrandi (1) lahendite rahuldavad võrrandit (5) võrrandi

$$f(x) = \varepsilon\varphi(x)$$

mistahes lahendid, kus ε on arvu 1 n-nda juure mistahes väärtus. Märgime, et paaritu n-i puhul on võrrandid (1) ja (5) reaalarvude korpuses samaväärsed. Tõepoolest, $\sqrt[n]{1}$ omab paaritu n-i puhul ainult ühte reaalset väärtust 1. Paaris n-i puhul omab

$\sqrt[n]{1}$ reaalarvude korpuses kahte väärtust ± 1, seepärast rahuldavad võrrandit (5) võrrandi (1) ja $f(x) = \varphi(x)$ kõik lahendid.

Võrrandisüsteemide suhtes piirdume ainult järgmise teoreemiga:

Kui determinant $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ *on erinev nullist, siis võrrandisüsteemid*

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, \ldots) &= 0 \\ \Phi(x, y, \ldots) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

ja

$$\left.\begin{aligned} a_1 F(x, y, \ldots) + b_1 \Phi(x, y, \ldots) &= 0 \\ a_2 F(x, y, \ldots) + b_2 \Phi(x, y, \ldots) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

on samaväärsed.

Tõestus. On ilmne, et süsteemi (I) iga lahend on süsteemi (II) lahendiks. Ümberpöördult, süsteemi (II) iga lahend on süsteemi (I) lahendiks. Tõepoolest, süsteemi (II) võib vaadelda F-i ja Φ suhtes kui homogeensete lineaarvõrrandite süsteemi, kuid $\Delta \neq 0$ puhul on süsteem (II) rahuldatud ainult nullväärtustega, $F = \Phi = 0$, m. o. t. t.

Järeldus. Süsteem

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, \ldots) + \Phi(x, y, \ldots) &= 0 \\ F(x, y, \ldots) - \Phi(x, y, \ldots) &= 0 \end{aligned}\right\},$$

mis saadud võrrandite (I) liikmeti liitmisel ja lahutamisel, on samaväärne süsteemiga (I), sest meie erijuhtumil

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

§ 71. Teise ja kolmanda astme võrrandid.

Võrrandi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

koefitsientide mistahes antud arvulistele väärtustele vastavad tema lahendite täiesti kindlad väärtused. Selles mõttes tulebki mõista väidet, et *algebralise võrrandi lahendid on täiesti määratavad, kui on teada tema koefitsientide arvulised väärtused.* Siit tekib järgmine

ülesanne: moodustada antud n-nda astme võrrandi jaoks üldvalem, mis väljendaks lahendite väärtusi koefitsientide abil. Elementaarmatemaatikas antakse selle küsimuse lahendus esimese ja teise astme võrrandite kohta. Peatume lühidalt teise astme võrrandi lahendamisel.

Olgu antud ruutvõrrand

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (kus } a \neq 0).$$

Korrutades mõlemaid pooli arvuga a eraldame vasakul poolel täisruudu

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4} = 0,$$

millest saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}.$$

Juurimistehe on teostatav kompleksarvude korpuses ja seepärast leiame viimasest võrrandist

$$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}}$$

ja lõpuks

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Võttes juure kaks erinevat väärtust saame antud võrrandi kaks lahendit. Tavaliselt kirjutatakse

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

kus juur $\sqrt{b^2 - 4ac}$ tähistab ruutjuure ühte mingit väärtust.

Saadud valem väljendab teise astme võrrandi lahendeid koefitsientide kaudu *kuue algebralise tehte* abil. Loomulikult tekib küsimus: kas ei saaks tuletada analoogilisi valemeid *kõrgemaastmeliste* võrrandite jaoks? Seda on kerge teha kolmanda ja neljanda astme võrrandite suhtes. Vaatleme kolmanda astme võrrandi

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

lahendamist.

Üldsust piiramata oletame, et x^3-i koefitsient a_3 võrdub arvuga 1, sest kui $a_3 \neq 1$, siis jagades võrrandit liikmeti arvuga a_3 saame võrrandi kujul (1), mis on antuga samaväärne. Teisendame võrrandit (1) uue tundmatuga y, võttes $x = y + h$, kus arvu h valime nii, et teisendatud võrrand ei sisaldaks tundmatut r u u d u s. Otseselt on kerge leida, et y^2-i koefitsient peab olema $3h + a_2$. Tingimusest $3h + a_2 = 0$ leiame, et $h = \frac{a_2}{3}$. Pärast teisendamist uue tundmatuga omandab võrrand (1) kuju

$$y^3 + py + q = 0. \tag{2}$$

Võtame tarvitusele (Hudde võtte järgi) kaks uut tundmatut u ja v, nii et

$$y = u + v.$$

Siis võrrand (2) omandab kuju

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0. \tag{3}$$

Tundmatuist u ja v võime ühe valida vabalt.

Kasutades seda vabadust valime u ja v nõnda, et oleks täidetud tingimus

$$3uv + p = 0$$

ehk

$$uv = -\frac{p}{3}. \tag{4}$$

Siis võrrand (3) omandab kuju

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Tõstes võrrandi (4) liikmeti kuupi saame

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Järelikult u^3 ja v^3 on ruutvõrrandi

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

lahendid ja me võime võtta

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{ja} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Siit saadaksegi kuupvõrrandi lahendamisvalem, nn. C a r d a n o valem

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Võttes Cardano valemis kuupjuurte kolm erinevat väärtust ja kombineerides neid üksteisega, saame üldse 9 arvu, milledest ainult 3 on antud võrrandi lahendeiks. Tõepoolest, u ja v väärtusi e i s a a valida teineteisest s õ l t u m a t u l t, sest nad peavad rahuldama tingimust (4). Olgu esimese juure üks väärtusist u, siis u kõik kolm võimalikku väärtust on

$$u_1=u,\quad u_2=\varepsilon u,\quad u_3=\varepsilon^2 u,$$

kus ε ja ε^2 on kuupjuure imaginaarväärtused arvust 1. Vastavad v väärtused leitakse seosest (4):

$$v_1=-\frac{p}{3u},\ v_2=-\frac{p}{3u\varepsilon}=-\frac{p\varepsilon^2}{3u\varepsilon^3}=-\frac{p}{3u}\varepsilon^2,$$

$$v_3=-\frac{p}{3u\varepsilon^2}=-\frac{p}{3u}\varepsilon.$$

Kuupvõrrandi lahendite väärtused määratakse seosest $y=u+v$, järelikult otsitavad lahendid on

$$y_1=u-\frac{p}{3u},\quad y_2=\varepsilon u-\varepsilon^2\frac{p}{3u}\ \text{ja}\ \ y_3=\varepsilon^2 u-\varepsilon\frac{p}{3u}.$$

M ä r k u s. Viimased valemid kaotavad mõtte, kui

$u=0$, s. o. $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=0$, millest $\frac{p^3}{27}=0$ ehk $p=0$.

Sel juhtumil omandab võrrand kuju $y^3+q=0$ ja lahendatakse otseselt: $y=\sqrt[3]{-q}$.

Sama tulemuse saame, kui võtta Cardano valemis $p=0$.

N ä i t e i d. 1. Lahendada Cardano valemi abil võrrand

$$x^3-3x^2-3x+11=0.$$

L a h e n d u s. Võttes $x=y+h$ saame

$$y^3+(3h-3)y^2+(3h^2-6h-3)y+(h^3-3h^2-3h+11)=0.$$

Võttes $3h-3=0$ saame $h=1$. Võrrand omandab kuju

$$y^3-6y+6=0.$$

Võtame Cardano valemis $p=-6$, $q=6$ saame

$$u=\sqrt[3]{-3+\sqrt{9-\frac{6^3}{27}}}=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}.$$

Määrame v tingimusest

$$v=-\frac{p}{3u}=-\frac{6}{3\sqrt[3]{2}}=-\sqrt[3]{4}.$$

Järelikult

$$y_1=u+v=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},$$

$$y_2=-\sqrt[3]{2}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}-\sqrt[3]{4}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}),$$

$$y_3=-\sqrt[3]{2}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}-\sqrt[3]{4}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})$$

ja seega

$$x_1=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+1,$$

$$x_2=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+1+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}),$$

$$x_3=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+1-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}).$$

2. Lahendada Cardano valemi abil võrrand

$$x^3-7x+6=0.$$

L a h e n d u s. Võtame Cardano valemis $p=-7$, $q=6$; saame

$$x=\sqrt[3]{-3+\frac{10\sqrt{3}i}{9}}+\sqrt[3]{-3-\frac{10\sqrt{3}i}{9}}. \qquad (5)$$

Otsesel kontrollimisel on kerge veenduda, et antud võrrand omab kolme reaalset lahendit:

$$x_1=1,\ x_2=2 \text{ ja } x_3=-3.$$

Katse teisendada ja muuta avaldist (5) reaalkujuliseks tekitab

järgmist raskust, mis on seotud juurte teisendamisega. Olgu tarvis leida kuupjuur kompleksarvust $a + bi$. Võtame

$$\sqrt[3]{a + bi} = x + iy.$$

Tõstes viimase võrduse mõlemad pooled kuupi saame

$$a + bi = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$$

millest x-i ja y-i määramiseks saame võrrandisüsteemi

$$x^3 - 3xy^2 = a,$$
$$3x^2y - y^3 = b.$$

Selle võrrandi lahendamiskatse tooks meid uuesti kuupvõrrandi lahendamise ja kompleksarvude juurimise vajadusele, s. o. jõuaksime uuesti lähteküsimuse juurde. Niisiis, Cardano valem kujutab reaalseid lahendeid valemeina, mis sisaldavad imaginaarsust. Katse vabastada need valemid imaginaarsusest algebralisel teel ei anna tulemusi. Niisugune juhtum esineb alati siis, kui kuupvõrrandi kõik kolm lahendit on erinevad ja reaalsed; seda juhtumit nimetatakse taandamatuks juhtumiks*.

§ 72. Ülesanne võrrandi lahendatavusest radikaalides. Kaheliikmelised võrrandid.

Algebra põhiteoreem kinnitab iga hulkliikme nullkohtade olemasolu kompleksarvude korpuses, kuid ta ei anna nende leidmisvõtteid. Eespool tuletasime valemid, mis väljendavad otseselt teise ja kolmanda astme võrrandite lahendeid koefitsientide kaudu. Vaadeldes neid valemeid näeme, et nad väljendavad teise ja kolmanda astme võrrandite lahendite väärtusi koefitsientide kaudu kuue algebralise tehte abil. Neljanda astme võrrand on samuti üldkujul algebraliselt lahendatav, sest tema jaoks saab tuletada valemit, mis väljendab lahendeid koefitsientide kaudu algebraliste tehete abil. Keerukuse tõttu omab see valem vähest praktilist väärtust ja me tema tuletamisel ei peatu.

Õpetlased on näinud palju vaeva selleks, et leida valemit, mis annaks algebralisel kujul viienda ja kõrgema astme võrrandite lahendeid. Kuid kõik need katsed nurjusid. Möödunud sajandi

* Saab näidata, et sel juhtumil pole olemas valemeid, mis väljendaksid reaalseid lahendeid reaalsete juurte abil.

esimesel poolel lahendati küsimus eitavalt norra õpetlase Abel'i poolt. Abel tõestas, et *üldkujul pole algebraliselt lahendatavad võrrandid, mille aste on kõrgem kui 4.*

Abeli teoreem ei väida kõrgema kui 4-nda astme võrrandi lahendite puudumist (see oleks vasturääkiv algebra põhiteoreemile), ta väidab ainult, et neid lahendeid on võimatu väljendada koefitsientide kaudu algebraliste tehete abil. Abeli teoreemiga ei ole vastuolus ka see fakt, et mõned kõrgema astme võrrandite erijuhtumid on algebraliselt lahendatavad.

Peatume võrrandite algebralise lahendamise küsimusel üksikasjalisemalt. Võrrandi algebraline lahendamine kannab nime võrrandi lahendamine radikaalides, sest valem, mis väljendab kõrgema kui esimese astme võrrandi lahendeid koefitsientide kaudu (kui see valem on tuletatav), peab sisaldama peale koefitsientidega teostatavate ratsionaalsete tehete tingimata ka juurimistehet, s. o. radikaale. Tõepoolest, mingi n-nda astme (kus $n > 1$) võrrandi lahendamise üldvalem peab andma antud võrrandi kõik n lahendit. Kui see valem ei sisaldaks radikaale, siis oleks ta koefitsientide suhtes ratsionaalavaldiseks. Seepärast ratsionaalsete tehete ühesuse tõttu oleks selle valemi järgi võimalik arvutada ainult ühte võrrandi lahendit, mitte aga n lahendit.

Leida n-s juur antud arvust A kompleksarvude korpuses — see tähendab leida tema kõik n-i väärtused. Viimast ülesannet tõlgendatakse kui võrrandi

$$x^n = A$$

ehk samaväärse võrrandi

$$x^n - A = 0$$

lahendamist.

Võrrandit kujul $x^n - A = 0$ nimetatakse kaheliikmeliseks võrrandiks.

Kaheliikmelisi võrrandeid käsiteldi §-s 63, mis oli pühendatud juurimisele kompleksarvude korpuses.

Ülesannet võrrandi lahendamisest radikaalides võib sõnastada järgmiselt: *väljendada antud võrrandi lahendid tema koefitsientidega järjestikuselt teostatavate ratsionaalsete tehete rea ja kaheliikmeliste võrrandite lahendamise kaudu.*

Nii näiteks Cardano valemit vaadeldes näeme, et kuupvõrrandi lahendite leidmiseks tuleb:

1° teostada ratsionaalsed tehted

$$z_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{q^3}{27};$$

2° lahendada kaheliikmeline võrrand

$$z_2^2 = z_1;$$

3° teostada järgmine ratsionaalne tehe z_2-ga ja koefitsientidega

$$z_3 = -\frac{q}{2} + z_2;$$

4° lahendada kaheliikmeline võrrand

$$u^3 = z_3;$$

5° teostada ratsionaalne tehe

$$x = u - \frac{p}{3u}.$$

Abeli teoreem väidab, et *ratsionaalsete tehete ja kaheliikmeliste võrrandite järjestikuse lahendamise ahela kaudu ei saa üldkujul leida kõrgema kui 4-nda astme võrrandi lahendeid.*

Abel tõestas, et n-nda astme võrrandi jaoks $n > 4$ puhul on võimatu moodustada üldist valemit, mis väljendaks tema lahendeid radikaalides. Kuid Abeli teoreem ei anna vastust küsimusele, kas on algebraliselt lahendatav iga antud konkreetne võrrand. Geniaalne õpetlane Galois näitas, et on olemas konkreetsed võrrandid, mis ei ole algebraliselt lahendatavad. Radikaalides mittelahenduva arvuliste koefitsientidega võrrandi näiteks oleks

$$x^5 - 9x - 3 = 0.$$

Märkus. Kaheliikmeliste võrrandite lahendamine (s. o. kompleksarvude juurimine) teostatakse üldjuhtumil trigonomeetriliste operatsioonide abil, mis pole algebralisiks tehteiks.

§-s 63 me näitasime, et $\sqrt{a + bi}$ on väljendatav algebraliselt a ja b abil. Teistsugune pilt aga tekib kuupjuure puhul. Eelmise §-i näites 2 tõendasime, et kuupjuure leidmise katse kompleksarvust algebralisel teel ei anna tulemusi, sest ta toob meid uuesti kompleksarvude juurimise vajadusele.

Trigonomeetrilisel kujul antud arvu puhul viib juurimise reegli kasutamine meid algebraliste tehete piirkonnast välja.

§ 73. Võrrandite lahendamise erivõtteid.

Algebralise võrrandi lahendamine kompleksarvude korpuses ja vastava hulkliikme lahutamine lineaarseiks tegureiks on s a m a v ä ä r s e d ülesanded. Tõepoolest, teades võrrandi

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0 \qquad (1)$$

lahendeid saab vastavat hulkliiget lahutada tegureiks:

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = \\ = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \qquad (2)$$

Ümberpöördult, teades hulkliikme tegureiks lahutust (2) teame ka tema nullkohti $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Teoreem. *Kui võrrandi*

$$f(x) = 0 \qquad (3)$$

vasak pool on esitatav mitme teguri korrutisena

$$f(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x) \ldots \varphi_k(x),$$

siis võrrandi (3) *lahendite leidmiseks tuleb leida võrrandite*

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_k(x) = 0 \qquad (4)$$

kõik lahendid.

T õ e s t u s. Võrrandi (3) iga lahend rahuldab vähemalt ühte võrrandeist (4). Tõepoolest, võrrand (3) on ümberkirjutatav kujul

$$\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_k(x) = 0.$$

Kuid korrutis muutub nulliks, kui vähemalt üks tema tegureist on null. Seepärast $f(x)$-i nulliks muutumine põhjustab vähemalt ühe teguri $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ nulliks muutumise.

Ümberpöördult, kui vähemalt üks neist tegureist muutub nulliks, siis ka $f(x)$ muutub nulliks, m. o. t. t.

Niisiis, ülesanne taandub terve rea võrrandite lahendamisele iga teguri eraldi nulliga võrdsustamise kaudu.

M ä r k u s. Lahendades igaühte võrrandeist (4) tuleb võtta ainult need lahendid, mis kuuluvad tundmatu lubatavate väärtuste hulka. Vaatleme näiteks võrrandit (kompleksarvude korpuses)

$$(x - 1)(x^2 + 1)\frac{1}{(x-1)^2} = 0.$$

Võrdsustades järjest tegurid nulliga saame

$$x - 1 = 0, \text{ millest } x = 1;$$
$$x^2 + 1 = 0, \text{ millest } x = i;\ x = -i;$$
$$\frac{1}{(x-1)^2} = 0 \text{ ei oma lahendeid.}$$

Antud võrrandi lahendid on $x = i$ ja $x = -i$. Esimese võrrandi lahend $x = 1$ tuleb kõrvaldada. Tõepoolest, arv 1 ei kuulu tundmatu lubatavate väärtuste hulka, sest $x = 1$ puhul kaotab lähtevõrrandi vasak pool mõtte.

Vaatleme võrrandit

$$(x + 1)\log x = 0;$$

toimides üldreegli järgi formaalselt saame

$$x + 1 = 0, \text{ millest } x = -1;$$
$$\log x = 0, \text{ millest } x = 1.$$

Kuid $x = -1$ ei ole tundmatu lubatavaks väärtuseks, sest $x = -1$ puhul kaotab $\log x$ mõtte ja järelikult ühes sellega ka lähtevõrrandi kogu vasak pool.

Kui võrrandi $f(x) = 0$ vasak pool on hulkliige, mis on esitatud rea tegurite (ei tarvitse lineaarsed olla) korrutisena, siis antud ülesande lahendamine taandub mitme madalama-astmelise võrrandi (vastavalt tegurite arvule) lahendamisele.

N ä i d e. Lahendada võrrand

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0.$$

L a h e n d u s. Lahutame vasaku poole tegureiks:

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = (x^4 + 2x^3) + (5x^2 + 10x) -$$
$$- (6x + 12) = x^3(x + 2) + 5x(x + 2) - 6(x + 2) =$$
$$= (x + 2)(x^3 + 5x - 6) = (x + 2)[(x^3 - 1) + 5(x - 1)] =$$
$$= (x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 6).$$

Antud võrrandi lahendamine taandub kahe esimese astme ja ühe teise astme võrrandi

$$x + 2 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x^2 + x + 6 = 0,$$

lahendamisele, millest

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{23}\,i}{2}.$$

M ä r k u s. Paljudel erijuhtumeil teostatakse juurimist ilma juuritavat arvu trigonomeetrilisel kujul väljendamata. Nagu

teada, on n-nda juure leidmine arvust a samaväärne võrrandi $x^n - a = 0$ lahendamisega.

Näited. 1. Arvutada kuupjuure väärtused arvust 1.

Lahendus. On tarvis lahendada võrrand $x^3 - 1 = 0$ ehk

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

millest

$$x - 1 = 0 \text{ ja } x^2 + x + 1 = 0;$$

järelikult

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

2. Arvutada $\sqrt[4]{1}$. Lahendame võrrandi $x^4 - 1 = 0$. Lahutades vasaku poole tegureiks saame

$$(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i) = 0,$$

millest

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = i, \quad x_4 = -i.$$

3. Arvutada $\sqrt[4]{-1}$.

Lahendus. Lahendame võrrandi $x^4 + 1 = 0$. Lahutame vasaku poole tegureiks

$$(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = 0$$

(vaata § 49).

Lahendades ruutvõrrandid

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0 \text{ ja } x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$$

leiame

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$$

Allpool vaatleme mõningaid eri kujulisi kõrgema astme võrrandeid.

Kolmeliikmelised võrrandid. Kolmeliikmelised võrrandid kujul

$$x^{2n} + px^n + q = 0$$

lahenduvad radikaalides. Võtame tarvitusele uue tundmatu $y = x^n$; siis saame ruutvõrrandi

$$y^2 + py + q = 0,$$

millest

$$y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ja järelikult

$$x = \sqrt[n]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Samasse tüüpi kuulub biruutvõrrand $x^4 + px^2 + q = 0$.

N ä i t e i d. 1. Lahendada võrrand

$$x^6 + 3x^3 + 2 = 0.$$

L a h e n d u s. Määrame $z = x^3$ ruutvõrrandist

$$z^2 - 3z + 2 = 0.$$

Saame $z_1 = 1$ ja $z_2 = 2$, järelikult saame kaks võrrandit $x^3 = 1$ ja $x^3 = 2$, milledest leiame

$$x_1 = 1,\ x_2 = \varepsilon,\ x_3 = \varepsilon^2,\ x_4 = \sqrt[3]{2},\ x_5 = \varepsilon\sqrt[3]{2},\ x_6 = \varepsilon^2\sqrt[3]{2}$$

(kus ε ja ε^2 on imaginaarsed kuupjuured arvust 1).

2. Leida $\sqrt[6]{-1}$ kõik väärtused.

L a h e n d u s. Lahendame võrrandi $x^6 + 1 = 0$.

Meil on

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 0,$$

järelikult on tarvis lahendada kaks võrrandit:

$$x^4 - x^2 + 1 = 0 \text{ ja } x^2 + 1 = 0. \qquad (5)$$

Esimene on biruutvõrrand; võttes $x^2 = z$ saame

$$z^2 - z + 1 = 0, \text{ millest } z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}.$$

Järelikult

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2}}.$$

Kompleksarvust ruutjuure leidmise eeskirja põhjal (vaata § 63) saame

$$x_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

Analoogiliselt

$$x_{3,4} = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right).$$

Lahendades teise võrrandi (5) leiame $x_{5,6} = \pm i$.

Sümmeetrilised võrrandid. Sümmeetriliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0,$$

milles algusest ja lõpust ühekaugusel seisvate liikmete koefitsiendid on võrdsed. Võib kergesti näha, et sümmeetrilise võrrandi ükski juur ei võrdu nulliga. Tõepoolest, kui $x = 0$ oleks võrrandi lahendiks, siis $a = 0$, s. o. võrrandil oleks madalam aste.

Vaatleme algul paarisastmelist ($n = 2k$) sümmeetrilist võrrandit. Jagades võrrandi liikmeti x^k-ga ja rühmitades liikmed, nagu on näidatud allpool, saame

$$a\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + b\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \ldots + l\left(x + \frac{1}{x}\right) + f = 0. \quad (6)$$

Võttes $x + \frac{1}{x} = y$ leiame järjestikuliselt

$$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}, \quad y^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}, \ldots,$$

$$y^k = x^k + kx^{k-2} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}x^{k-4} + \ldots + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}\frac{1}{x^{k-4}} + \\ + k\frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k},$$

millest järjestikuliselt leiame

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y \text{ jne.} \quad (7)$$

Asetades need väärtused võrrandisse (6) saame y-i suhtes k-nda astme võrrandi. Vastavad x-i väärtused leiame ruutvõrrandist

$$x^2 - xy + 1 = 0.$$

Paaritusastmelise ($n = 2k + 1$) sümmeetrilise võrrandi lahendamine taandub paarisastmelise sümmeetrilise võrrandi lahendamisele. Nagu otseselt on kerge näha, omab võrrand

$$ax^{2k+1} + bx^{2k} + cx^{2k-1} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0$$

lahendit $x = -1$, järelikult tema vasak pool jagub kaksliikmega $x + 1$. Esitame võrrandi vasaku poole niisuguste liidetavate summana, milledest igaüks jagub kaksliikmega $x + 1$, s. o.

$$a(x^{2k+1} + 1) + bx(x^{2k-1} + 1) + cx^2(x^{2k-3} + 1) + \ldots + \\ + lx^k(x + 1) + 0.$$

Jagades iga liikme summaga $x+1$ esitame jagatise järgmisel kujul:

$$\begin{gathered} ax^{2k}-ax^{2k-1}+ax^{2k-2}-\ldots\ldots-ax+a+ \\ +bx^{2k-1}-bx^{2k-2}+\ldots\ldots+bx+ \\ +cx^{2k-2}-\ldots+cx^2+ \\ +\ldots\ldots\ldots+ \\ +lx^n. \end{gathered}$$

On kerge näha, et jagatises algusest ja lõpust ühekaugusel seisvate liikmete koefitsiendid on teineteisega võrdsed; järelikult antud võrrand on esitatav kujul

$$(x+1)(ax^{2k}+b_1x^{2k-1}+\ldots+b_1x+a)=0.$$

Seega ülesanne on taandunud paarisastmelise sümmeetrilise võrrandi

$$ax^{2k}+b_1x^{2k-1}+\ldots+b_1x+a=0.$$

lahendamisele.

Näiteid. 1. Arvutada $\sqrt[5]{1}$ kõik väärtused.

Lahendame võrrandi $x^5-1=0$. Vasak pool lahutub tegureiks

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$

millest saame kaks võrrandit:

$$x-1=0 \quad \text{ja} \quad x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Esimesest saame $x_1=1$. Teine võrrand lahendub kui sümmeetriline võrrand:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Võttes $x+\frac{1}{x}=y$ saame seose (7) alusel

$$(y^2-2)+y+1=0 \text{ ehk } y^2+y-1=0,$$

millest

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

x-i määramiseks saame ruutvõrrandid

$$2x^2-(-1+\sqrt{5})x+2=0 \text{ ja } 2x^2+(1+\sqrt{5})x+2=0.$$

Esimesest leiame

$$x_{2,3}=\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{6+2\sqrt{5}-16}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Analoogiliselt leiame teisest

$$x_{4,5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

2. Lahendada võrrand

$$2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0.$$

L a h e n d u s. Antud võrrandi üks lahendeist on teada: $x_1 = -1$. Jagades vasaku poole kaksliikmega $x+1$ saame teiste lahendite määramiseks sümmeetrilise võrrandi

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Võttes $y = x + \frac{1}{x}$ saame

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16 = 2(y^2-2) - 3y - 16 = 0,$$

millest

$$y_1 = -4, \quad y_2 = \frac{5}{2}.$$

x-i määramiseks on meil kaks võrrandit:

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \text{ja} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Esimesest leiame $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$, teisest leiame

$$x_4 = 2 \text{ ja } x_5 = \frac{1}{2}.$$

M u r r u l i s e d v õ r r a n d i d. Vaatleme võrrandit $f(x) = 0$, mille vasak pool on m u r r u l i s e k s ratsionaalseks funktsiooniks. Pärast teisenduste teostamist on vasak pool esitatav taandumatu murruna $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Hulkliikmed $P(x)$ ja $Q(x)$ e i o m a ühiseid nullkohti. Tõepoolest, kui a oleks nende ühiseks nullkohaks, siis jaguksid mõlemad hulkliikmed $P(x)$ ja $Q(x)$ vahega $x-a$ ja murd $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ei oleks taandumatu. Antud võrrandi kõigi lahendite leidmiseks tuleb lahendada võrrand $P(x) = 0$.

N ä i d e. Lahendada võrrand

$$\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0.$$

Pärast ühisnimetajale viimist saame

$$\frac{x^2-5x+6}{x(x+2)(x-2)}=0.$$

Lahendades ruutvõrrandi $x^2-5x+6=0$ leiame lugeja lahendid: $x_1=3$ ja $x_2=2$. Antud murd ei ole taandumatu, sest $x=2$ on lugeja ja nimetaja ühine lahend. Taandades vasaku poole $(x-2)$-ga saame võrrandi

$$\frac{x-3}{x(x+2)}=0.$$

Antud võrrandi ainsaks lahendiks on $x=3$.

Üksikuil erijuhtumeil osutub otstarbekohaseks teostada võrrandite lahendamisprotsessis mitmesuguseid k u n s t l i k k e teisendusi, mida üldises teoorias p o l e v õ i m a l i k ette näha.

N ä i t e i d. 1. Lahendada võrrand

$$\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}-\frac{18}{x^2+2x+1}=0.$$

L a h e n d u s. Võttes $(x+1)^2=y$ saame

$$\frac{1}{y-4}+\frac{18}{y+1}-\frac{18}{y}=0.$$

y-i määramiseks saame ruutvõrrandi

$$y^2-17y+72=0,$$

millest leiame $y_1=9$, $y_2=8$. Arvud 8 ja 9 ei ole ühisnimetaja lahendeiks ja järelikult rahuldavad murrulist võrrandit. x-i jaoks saame kaks võrrandit:

$$(x+1)^2=9 \text{ ja } (x+1)^2=8,$$

millest

$$x_1=2,\ x_2=-4,\ x_{3,4}=-1\pm 2\sqrt{2}.$$

2. Näidata, et võrrandit $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ saab teisendada biruutvõrrandiks.

L a h e n d u s. Võtame $\frac{a+b}{2}=h$, $\frac{a-b}{2}=k$, siis $a=h+k$, $b=h-k$ ja võrrand omandab kuju

$$(x+h+k)^4+(x+h-k)^4=c.$$

Teisendame võrrandi, võttes tarvitusele uue tundmatu $y=x+h$. Saame

$$(y+k)^4+(y-k)^4=c$$

ja pärast lihtsustusi

$$y^4 + 6x^2y^2 + k^4 - \frac{c}{2} = 0.$$

3. Näidata, et võrrandit

$$x^4 + a^4 = kax(x^2 + a^2) \quad (\text{kus } a \neq 0)$$

saab teisendada sümmeetriliseks võrrandiks.

L a h e n d u s. Võtame tarvitusele uue tundmatu, võttes $x = ay$. Saame

$$(ay)^4 + a^4 = ka^2y(a^2y^2 + a^2)$$

ehk

$$y^4 - ky^3 - ky + 1 = 0,$$

mis on sümmeetriline võrrand.

4. Lahendada võrrand

$$\frac{x^2 + 2ax + ac}{x^2 + 2cx + ac} = \frac{ax}{(x + a)(x + c)}.$$

L a h e n d u s. Vaatleme kahte järgmist võimalikku juhtumit:

A) $a \neq c$. Koostame tuletatud võrde

$$\frac{2x^2 + 2(a + c)x + 2ac}{2(a - c)x} = \frac{ax + (x + a)(x + c)}{ax - (x + a)(x + c)} \tag{8}$$

ehk

$$\frac{(x + a)(x + c)}{(a - c)x} = \frac{ax + (x + a)(x + c)}{ax - (x + a)(x + c)}.$$

Võtame tarvitusele uue tundmatu y, märkides

$$(x + a)(x + b) = xy. \tag{9}$$

Saame

$$\frac{y}{a - c} = \frac{a + y}{a - y},$$

millest

$$(a - y)y = (a - c)(a + y).$$

Saadud ruutvõrrandist määrame y-i ja lõpuks ruutvõrrandist (9) määrame x-i.

B) $a = c$. Sel juhtumil muutub murru nimetaja võrduse (8) vasakul poolel nullhulkliikmeks ja seepärast esitatud võte ei ole kasutatav. Kui $a = c$, siis lähtevõrrand omandab kuju

$$1 = \frac{ax}{(x + a)^2} \quad \text{ehk} \quad \frac{x^2 + ax + a^2}{(x + a)^2} = 0.$$

Lugeja lahendid on

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{3}ai}{2}; \tag{10}$$

lugeja ja nimetaja omavad ühislahendit, kui

$$\frac{-a \pm \sqrt{3}ai}{2} = -a, \text{ millest } a(1 \pm \sqrt{3}i) = 0$$

ja järelikult $a = 0$. Kuid $a = c = 0$ puhul muutub lähtevõrrand vasturääkivaks seoseks $(1 = 0)$ ja seepärast ei oma lahendeid. Kui $a = c \neq 0$, siis valem (10) annab antud võrrandi kaks lahendit.

§ 74. Eemaldamise (elimineerimise) probleemi mõiste.

Vaatleme kahte hulkliiget:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ja

$$\varphi(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Esitame järgmise küsimuse: millist tingimust peavad rahuldama koefitsiendid $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ ja $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$, et antud hulkliikmed omaksid vähemalt ühte ühist nullkohta. Seda tingimust silmas pidades omavad võrrandid $f(x) = 0$ ja $\varphi(x) = 0$ vähemalt ühte ühislahendit.

Vaatleme näiteks kahte esimese astme hulkliiget: $a_1 x + a_0$ ja $b_1 x + b_0$ (kus $a_1 \neq 0$ ja $b_1 \neq 0$). Esimene kaksliige omab ühteainsat nullkohta $x = -\frac{a_0}{a_1}$; analoogiliselt $x = -\frac{b_0}{b_1}$ on teise kaksliikme üksainus lahend. Järelikult peab olema $-\frac{a_0}{a_1} = -\frac{b_0}{b_1}$, millest saadaksegi otsitav tingimus

$$a_0 b_1 - b_0 a_1 = \begin{vmatrix} a_0, & b_0 \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

On selge, et tingimuse (1) täitumisel omavad võrrandid $a_1 x + a_0 = 0$ ja $b_1 x + b_0 = 0$ ühte ning sama lahendit, sest nende koefitsiendid on võrdelised.

Üldkujul on küsimus lahendatav järgmisel viisil. Kui hulkliikmed $f(x)$ ja $\varphi(x)$ omavad ühist lahendit α, siis jaguvad nad mõlemad vahega $x - \alpha$ ja seepärast e i o l e nad ühistegurita. Järelikult nende suurim ühisjagaja $D(x)$ e i o l e esimese astme

hulkliikmest madalam. Ümberpöördult, kui hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ suurim ühisjagaja $D(x)$ pole esimesest astmest madalam, siis samasustest $f(x) = D(x) \cdot f_1(x)$ ja $\varphi(x) = D(x) \cdot \varphi_1(x)$ tuleneb, et hulkliikme $D(x)$ iga nullkoht on hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ ühiseks nullkohaks.

Nagu teada, on $D(x)$ (vaata § 18) viimaseks nullist erinevaks jäägiks, mida annab Eukleidese algoritm rakendatult hulkliikmetele $f(x)$ ja $\varphi(x)$. Rakendame Eukleidese algoritme üldkujul antud hulkliikmeile $f(x)$ ja $\varphi(x)$. Nagu teada, alanevad järjestikuste jääkide astmed niikaua, kuni saadakse jääk, mis ei sisalda x-i ja väljendub eranditult antud hulkliikmete koefitsientide kaudu. Tähistame selle viimse jäägi $R(f, \varphi)$-ga. Suurim ühisjagaja $D(x)$ ei oma madalamat astet kui 1 ainult sel juhtumil, kui

$$R(f, \varphi) = 0.$$

Nagu teada, väljenduvad jääkide koefitsiendid hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ koefitsientide kaudu ratsionaalselt (nelja aritmeetilise tehte abil). Seepärast on $R(f, \varphi)$ koefitsientide $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ja $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ suhtes mingi ratsionaalne avaldis. Et suurim ühisjagaja määratakse kuni arvulise teguri (x-i mittesisaldava) täpsuseni, siis võib ka $R(f, \varphi)$-i lugeda (vabastades ta nimetajast sobiva teguri korrutamisega) täisratsionaalseks avaldiseks hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ koefitsientide suhtes.

Tarvilikku ja piisavat tingimust selleks, et antud hulkliikmed omaksid vähemalt ühte ühist nullkohta, võib märkida järgmiselt:

$$R(f, \varphi) = 0.$$

Avaldist $R(f, \varphi)$ nimetatakse hulkliikmete $f(x)$ ja $\varphi(x)$ resultandiks.

Esitatust järeldub ***teoreem:*** *selleks, et kaks antud hulkliiget omaksid vähemalt ühte ühist nullkohta, on tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks nende resultandi muutumine nulliks.*

Näitena arvutame kahe ruutkolmliikme

$$x^2 + px + q \quad \text{ja} \quad x^2 + p_1 x + q_1$$

resultandi R. Kasutame Eukleidese algoritmi:

$$\begin{array}{l|l} x^2 + px + q & x^2 + p_1 x + q_1 \\ \hline x^2 + p_1 x + q_1 & 1 \\ \hline r_1 = (p - p_1)x + (q - q_1). & \end{array}$$

Et hoiduda murdudest, korrutame teise hulkliikme vahega $p - p_1$ ja jagame r_1-ga:

$$\begin{array}{l|l}
(p-p_1)x^2+(p-p_1)p_1x+q_1(p-p_1) & (p-p_1)x+(q-q_1) \\
\underline{(p-p_1)x^2+(q-q_1)x} & \overline{x+[(p-p_1)p_1-(q-q_1)]} \\
\underline{[(p-p_1)p_1-(q-q_1)]x+q_1(p-p_1)} & \text{Korrutame vahega } p-p_1 \\
(p-p_1)[(p-p_1)p_1-(q-q_1)]x+q_1(p-p_1)^2 & \\
\underline{(p-p_1)[(p-p_1)p_1-(q-q_1)]x+(q-q_1)[(p-p_1)p_1-(q-q_1)]} & \\
r_2=\text{konst.} &
\end{array}$$

Siit saame

$$R=q_1(p-p_1)^2-(q-q_1)[(p-p_1)p_1-(q-q_1)]= \\ =(q-q_1)^2+(p-p_1)(q_1p-p_1q).$$

Märkus I. R arvutamisel me korrutasime jääke kaks korda vahega $p-p_1$, mis ei ole lubatav, kui $p=p_1$. Sel juhtumil omandavad antud kolmliikmed kuju $x^2+px+q=0$ ja $x^2+px+q_1=0$ ning ühisnullkoha olemasolu on võimalik ainult siis, kui $q=q_1$. Vaadeldes avaldist R näeme, et $p=p_1$ puhul saame $R=(q-q)^2$ ja $q=q_1$ puhul muutub resultant nulliks. Järelikult on lõplik tulemus kehtiv ka juhtumil $p=p_1$.

Märkus II. On olemas mitu erinevat resultandi leidmise viisi. Selgitame teist viisi kahe ruutkolmliikme abil. Olgu ruutkolmliikme x^2+px+q nullkohtadeks x_1 ja x_2.

Kui antud hulkliikmed omavad ühist nullkohta, siis

$$(x_1^2+p_1x_1+q_1)(x_2^2+p_1x_2+q_1)=0. \qquad (2)$$

Tõepoolest, vasaku poole tegureist vähemalt üks muutub nulliks, sest arvudest x_1 ja x_2 vähemalt üks on teise hulkliikme nullkohaks. Ümberpöördult, kui kehtib võrdus (2), siis vasaku poole tegureist vähemalt üks võrdub nulliga; seepärast arvudest x_1 ja x_2 vähemalt üks on teise hulkliikme nullkohaks.

Teostades korrutamise saame

$$(x_1^2+p_1x_1+q_1)(x_2^2+p_1x_2+q_1)=x_1^2x_2^2+p_1x_1x_2(x_1+x_2)+ \\ +q_1(x_1^2+x_2^2)+p_1^2x_1x_2+p_1q_1(x_1+x_2)+q_1^2. \qquad (3)$$

Kuid esimese kolmliikme nullkohtade sümmeetrilised funktsioonid väljenduvad tema koefitsientide kaudu Vieta valemite abil:

$$x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=q,\ x_1^2+x_2^2=p^2-2q.$$

Asetades need võrduse (3) paremale poolele saame avaldise, mis täpselt ühtib resultandi R varemleitud avaldisega.

Vaatleme kahest kahe tundmatuga võrrandist koosnevat võrrandisüsteemi

$$f(x, y) = 0 \text{ ja } \varphi(x, y) = 0,$$

kus $f(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$ on kahe argumendi x ja y suhtes hulkliikmed. Korraldame hulkliikmed $f(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$ ühe tähe, näiteks x-i astmete järgi ja kirjutame antud võrrandid kujul

$$\left.\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \\ b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

kus koefitsiendid on tundmatu y suhtes mingisugused hulkliikmed. Eeldame, et $x = x_1$, $y = y_1$ on antud süsteemi lahend. $y = y_1$ puhul omavad võrrandid (4) ühist lahendit $x = x_1$. Järelikult võrrandite (4) resultant ($y = y_1$ puhul) peab muutuma nulliks. Ümberpöördult, kui võrrandite (4) resultant muutub mingi väärtuse $y = y_1$ puhul nulliks, siis võrrandid omavad ühislahendit $x = x_1$ (vähemalt ühte) ja järelikult $x = x_1$, $y = y_1$ on antud süsteemi lahendiks. Võrrandite resultant $R(f, \varphi)$ on y-i suhtes mingi hulkliige. Tähistame ta sümboliga $R(y)$.

Võrrandsüsteemi lahendamise üldreegel sõnastatakse järgmiselt:

1⁰ *koostame võrrandite (4) resultandi $R(y)$;*

2⁰ *leiame võrrandi*

$$R(y) = 0$$

lahendid; (5)

3⁰ *iga lahendi $y = y_1$ jaoks leiame võrrandite (4) vastavad üldlahendid.*

Niisiis, kahest kahe tundmatuga võrrandist koosneva võrrandisüsteemi lahendamiseks tuleb leida võrrandi $R(y) = 0$ lahendid. Võrrand (5) sisaldab ühte tundmatut y, seepärast nimetatakse üleminekut süsteemilt

$$f(x, y) = 0, \ \varphi(x, y) = 0$$

võrrandile (5) tundmatu x eemaldamiseks (elimineerimiseks).

Võib tõestada, *et resultandi $R(y)$ aste osutub üldjuhtumil võrdseks antud võrrandite astmete korrutisega (erijuhtumeil võib olla väiksem).*

Vaatleme näiteks ruutvõrrandisüsteemi

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

(x^2-i koefitsiendi A loeme võrdseks arvuga 1, sest kui $A \neq 0$, siis võrrandite mõlemad pooled on alati jagatavad selle arvuga). Korraldame võrrandid x-i astmete järgi

$$\left.\begin{aligned} x^2 + x(By + D) + Cy^2 + Ey + F = 0 \\ x^2 + x(B_1y + D_1) + C_1y^2 + E_1y + F_1 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Et eemaldada x, tuleb kahe kolmliikme resultandi avaldises

$$(q - q_1)^2 + (p - p_1)(q_1p - p_1q)$$

võtta

$$p = By + D,\ q = Cy^2 + Ey + F,$$
$$p_1 = B_1y + D_1,\ q_1 = C_1y^2 + E_1y + F_1.$$

y-i määramiseks saame üldjuhtumil neljanda astme võrrandi. Praktiliselt toimitakse järgmiselt: lahutades liikmeti esimesest võrrandist teise saame x-i suhtes esimese astme võrrandi. Sellest võrrandist saab x-i avaldada y-i kaudu ja asendades selle ühte antud võrrandisse saame võrrandi, mis ei sisalda x-i. Viimasest võrrandist määrame y-i ja siis leiame vastavad x-i väärtused.

N ä i d e. Lahendada süsteem

$$x^2 + xy + 2y^2 = 74$$
$$2x^2 + 2xy + y^2 = 73.$$

L a h e n d u s. Korrutades esimest võrrandit 2-ga ja lahutades liikmeti teise võrrandi saame $3y^2 = 75$, millest $y = \pm 5$. Võttes esimeses võrrandis $y = 5$ saame

$$x^2 + 5x - 24 = 0,$$

millest $x = 3$ ja $x = -8$.

Võttes $y = -5$ saame $x^2 - 5x - 24 = 0$, millest $x = 8$ ja $x = -3$.

Süsteemi lahendid on seega

$$x_1 = 3,\ y_1 = 5;\ x_2 = -8,\ y_2 = 5;\ x_3 = 8,\ y_3 = -5;$$
$$x_4 = -3,\ y_4 = -5.$$

§ 75. Kõrgema astme võrrandisüsteemide lahendamise erivõtteid.

Üldreegli kasutamine tundmatute eemaldamiseks resultandi abil on praktiliselt üsna raskepärane. Seepärast eri liiki võrrandisüsteemide lahendamisel püütakse mitte kohaldada eemaldamise üldskeemi, vaid ära kasutada vaadeldava süsteemi *eriomadusi*, mis võimaldavad lahendamisprotsessi lihtsustada.

Näiteid. 1. Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x + y &= p, \\ xy &= q. \end{aligned}$$

Lahendus. Arvud x ja y on ruutvõrrandi

$$z^2 - pz + q = 0$$

lahendid, millest

$$z_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{ja} \quad z_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Süsteem omab kaks lahendit:

$$x = z_1, \ y = z_2 \quad \text{ja} \quad x = z_2, \ y = z_1.$$

2. Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x - y &= p, \\ xy &= q. \end{aligned}$$

Lahendus. Süsteem taandub eelmiseks, kui võtta $-y = v$:

$$\begin{aligned} x + v &= p, \\ xv &= -q. \end{aligned}$$

3. Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= p, \\ xy &= q. \end{aligned}$$

Lahendus. Astendame teise võrrandi arvuga n. Saame

$$x^n + y^n = p, \ x^n y^n = q^n.$$

Olgu z_1 ja z_2 ruutvõrrandi $z^2 - pz + q^n = 0$ lahendid, siis võib võtta

$$x^n = z_1, \ y^n = z_2 \quad \text{ehk} \quad x^n = z_2, \ y^n = z_1.$$

Järelikult

$$x = \sqrt[n]{z_1}, \ y = \sqrt[n]{z_2} \qquad (1')$$

ehk

$$x = \sqrt[n]{z_2}, \quad y = \sqrt[n]{z_1}. \qquad (1'')$$

Võttes $\sqrt[n]{z_1}$ jaoks mingi väärtuse ja märkides näiteks $x = \sqrt[n]{z_1}$ me ei või y-i jaoks võtta juure mistahes väärtust, sest x ja y on seoses $xy = q$-ga, mis määrab üheselt y-i vastava väärtuse (vaata näiteks kuupvõrrandi lahendamist Hudde meetodi järgi). Seega juure $\sqrt[n]{z_1}$ n väärtustest vastab igaühele ainult üks väärtus teise juure väärtustest. Süsteem omab $2n$ lahendit (1′) ja (1″).

4. Lahendada süsteem

$$x^n + y^n = a,$$
$$x^n - y^n = b.$$

L a h e n d u s. Liites ja lahutades antud võrrandid saame

$$x^n = \frac{a+b}{2}, \quad y^n = \frac{a-b}{2},$$

millest

$$x = \sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}, \quad y = \sqrt[n]{\frac{a-b}{2}}.$$

Süsteem omab n^2 lahendit, mida saame, kombineerides kõigi võimalike võtetega x-ile n väärtust ja y-ile n väärtust.

5. Lahendada süsteem

$$x^2 - y^2 = a, \quad x + y = b.$$

L a h e n d u s. Süsteem taandub lineaarsüsteemiks. Tõepoolest, ümber kirjutades esimese võrrandi kujul $(x+y)(x-y) = a$ ja kasutades teist võrrandit asendame antud süsteemi lineaarvõrrandi süsteemiga

$$b(x-y) = a, \quad x + y = b.$$

Kui $\begin{vmatrix} b, & -b \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = 2b \neq 0$, siis omab süsteem ainult ühte lahendit. Kui $b = 0$, siis $a \neq 0$ puhul on süsteem vasturääkiv. Kui $a = b = 0$, siis omab süsteem lõpmatut hulka lahendeid, teda rahuldab arvude x ja y mistahes paar, mis on võetud tingimusel $x = -y$.

6. Lahendada süsteem

$$x^n + y^n = a,$$
$$x + y = b.$$

Vaatleme juhtumeid, kui $n=2$, $n=3$, $n=4$.

a) $n=2$ puhul on $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$.

Võtame $u=x+y$, $t=xy$. Siis saab süsteemi ümber kirjutada kujul

$$u^2-2t=a,$$
$$u=b.$$

Asetades esimesse võrrandisse u väärtuse saame

$$t=\frac{b^2-a}{2}$$

ja süsteem taandub eespoolvaadeldud süsteemiks

$$x+y=b,\quad xy=\frac{b^2-a}{2}.$$

b) $n=3$ puhul on

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=$$
$$=(x+y)[(x+y)^2-3xy]=u(u^2-3t).$$

Süsteem omandab kuju

$$u(u^2-3t)=a;\quad u=b. \tag{2}$$

See süsteem lahendub sarnaselt eelmisega.

$b\neq 0$ puhul leiame esimesest võrrandist t üheainsa väärtuse. Kui $b=0$ ja $a\neq 0$, siis on süsteem (2) (ja järelikult ka antud süsteem) vasturääkiv. Kui $a=b=0$, siis omandab antud süsteem kuju $x^3+y^3=0$, $x+y=0$, teda rahuldab arvude x ja y mistahes paar, mis on võetud tingimusel $x=-y$.

c) $n=4$ puhul

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=$$
$$=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2=(u^2-2t)^2-2t^2.$$

Antud süsteem on ümberkirjutatav kujul

$$(u^2-2t)^2-2t^2=a,\quad u=b,$$

millest (asetades esimesse $u=b$) t määramiseks saame ruutvõrrandi

$$2t^2-4b^2t+b^4-a=0.$$

Kui diskriminant $\Delta=2(b^4+a)\neq 0$, siis omab ruutvõrrand kahte lahendit

$$t=t_1 \text{ ja } t=t_2,$$

millest saame kaks süsteemi

$$\left.\begin{aligned} x+y&=b\\ xy&=t_1\end{aligned}\right\} \text{ ja } \left.\begin{aligned} x+y&=b\\ xy&=t_2\end{aligned}\right\},$$

milledest kumbki annab kaks lahendit.

Kui $\Delta=0$, siis omab $a=-b^4$ ja ruutvõrrand kahekordset lahendit $t=b^2$ ning x-i ja y-i määramiseks saame võrrandisüsteemi

$$x+y=b,\ xy=b^2.$$

Järelikult x ja y on ruutvõrrandi

$$z^2-bz+b^2=0$$

lahendeiks, millest leiame antud süsteemi kaks erinevat lahendit.

7. Lahendada süsteem

$$(x^2+y^2)(x-y)=447,\ xy(x-y)=210.$$

L a h e n d u s. Võtame $x-y=v$, $xy=t$; siis

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=v^2+2t.$$

Uute tundmatutega omab süsteem kuju

$$(v^2+2t)v=447,\ tv=210.$$

Kasutades teist võrrandit saame

$$(v^2+2t)v=v^3+2tv=v^3+420=447,$$

millest

$$v^3=27$$

ja $v_1=3$, $v_2=3\varepsilon$, $v_3=3\varepsilon^2$ (ε ja ε^2 on arvu 1 imaginaarsed kuupjuured); teisest võrrandist saame vastavalt

$$t_1=70,\ t_2=\frac{210}{3}=70\varepsilon^2 \text{ ja } t_3=70\varepsilon.$$

Võtame esimese lahendi $v_1=3$, $t_1=70$; x-i ja y-i määramiseks saame $x-y=3$, $xy=70$. Järelikult x ja $-y$ on ruutvõrrandi

$$z^2-3z-70=0$$

lahendid, millest

$$z_1=10 \text{ ja } z_2=-7.$$

Järelikult

$$x_1 = 10,\ y_1 = 7 \text{ ja } x_2 = -7,\ y_2 = -10$$

on süsteemi kaks lahendit. Toimides samuti abisüsteemi lahenditega u_2, v_2 ja u_3, v_3 leiame antud süsteemi 4 imaginaarset lahendit.

8. Lahendada süsteem

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= a \\ \varphi(x, y) &= b \end{aligned}\right\},$$

kus $f(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$ on ühe ja sama astme n homogeensed hulkliikmed ja arvudest a ja b vähemalt üks erineb nullist.

L a h e n d u s. Võtame tarvitusele uue tundmatu, võttes $y = tx$; siis on süsteem ümberkirjutatav järgmiselt

$$x^n f(1, t) = a,\ x^n \varphi(1, t) = b, \tag{3}$$

kus n on antud hulkliikmete aste. Seda süsteemi ei rahulda tundmatu väärtus $x = 0$. Korrutades esimese võrrandi b-ga ja teise võrrandi a-ga saame pärast lahutamist ja x^n-ga jagamist

$$bf(1, t) - a\varphi(1, t) = 0.$$

Niiviisi oleme saanud võrrandi ühe tundmatuga t. Selle võrrandi igale lahendile leiame x-i ja y-i vastavad väärtused, kasutades ühte võrrandeist (3) ja seost $y = tx$. Võtame näiteks võrrandisüsteemi

$$x^3 + y^3 = 1;\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2.$$

Võttes $y = tx$ saame

$$x^3(1 + t^3) = 1,\ x^3(t + 2t^2 + t^3) = 2, \tag{4}$$

millest

$$2x^3(1 + t^3) = x^3(t + 2t^2 + t^3).$$

Jagades x^3-ga saame

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$$

ehk

$$(t + 1)(t - 1)(t - 2) = 0.$$

Viimase võrrandi lahenditeks on

$$t_1 = -1,\ t_2 = 1,\ t_3 = 2.$$

$t=-1$ puhul muutub süsteem (4) vasturääkivaks. $t=1$ puhul saame süsteemi (4) esimesest võrrandist

$$2x^3=1$$

$$x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\qquad x_2=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}},\qquad x_3=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{2}}$$

ning vastavalt

$$y_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\qquad y_2=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}},\qquad y_3=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{2}}.$$

$t=2$ puhul saame

$$9x^3=1,$$

millest

$$x_4=\frac{1}{\sqrt[3]{9}},\qquad x_5=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{9}},\qquad x_6=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{9}}$$

ja vastavalt

$$y_4=\frac{2}{\sqrt[3]{9}},\qquad y_5=\frac{2\varepsilon}{\sqrt[3]{9}},\qquad y_6=\frac{2\varepsilon^2}{\sqrt[3]{9}}.$$

Kui $a=b=0$, siis nimetatakse antud süsteemi homogeenseks. Iga homogeenne süsteem omab triviaalset lahendit $x=y=0$. Võttes $y=tx$ leiame süsteemist

$$x^n f(1,\ t)=0,\quad x^n\varphi(1,\ t)=0$$

lahendi $x=0$, mis annab antud süsteemi triviaalse lahendi. Mittetriviaalsed lahendid saadakse, kui kaks võrrandit

$$f(1,\ t)=0\quad\text{ja}\quad\varphi(1,\ t)=0$$

omavad vähemalt ühte ühislahendit. Kui t_1 on nende võrrandite ühislahendiks, siis omab antud süsteem lõpmatu hulga mittetriviaalseid lahendeid: teda rahuldab arvude x ja $y=t_1x$ (x-i mistahes väärtusel) mistahes paar.

9. Lahendada süsteem

$$x+y+z=0,\quad x^2+y^2-z^2=20,\quad x^4+y^4-z^4=560.$$

Lahendus. Esimesest võrrandist leiame $x+y=-z$. Teisest saame

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=20+z^2$$

ehk

$$z^2 - 2xy = 20 + z^2,$$

millest

$$xy = -10.$$

Kolmandast saame

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = 560 + z^4.$$

Eespoolsete seoste alusel

$$(20 + z^2)^2 - 200 = 560 + z^4,$$

ehk

$$40z^2 = 360,$$

millest

$$z = \pm 3.$$

Esimesest võrrandist saame

$$x + y = \pm 3 = -z.$$

Võttes lisaks võrrandi $xy = -10$ leiame

$$x_1 = 5, \quad y_1 = -2, \quad z_1 = -3; \quad x_2 = -2, \quad y_2 = 5, \quad z_2 = -3;$$
$$x_3 = -5, \quad y_3 = 2, \quad z_3 = 3; \quad x_4 = 2, \quad y_4 = -5, \quad z_4 = 3.$$

§ 76. Irratsionaalsete võrrandite lahendamise mõiste.

Võrrandit $f(x) = 0$ nimetatakse irratsionaalseks, kui tema vasak pool on irratsionaalne algebraline funktsioon, s. o. funktsioon, mis sisaldab juuritavas argumenti *.

Eeldame, et $f(x) = 0$ sisaldab ainult ühte juurt $\sqrt[n]{R(x)}$, kus $R(x)$ on mingi tundmatut sisaldav ratsionaalne avaldis. Tähistame võrrandi vasaku poole $F\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)$-ga **:

$$f(x) = F\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right).$$

---

* Jutt on ilmutatud algebralistest funktsioonidest (vaata viidet § 59).

** Eeldatakse, et funktsioon $F(x, y)$ on argumentide x ja y suhtes hulkliige.

Selle võrrandi lahendamise ülesanne kompleksarvude korpuses esitatakse järgmisel kujul:

Leida x-i väärtused, millede puhul juure $\sqrt[n]{R(x)}$ väärtustest vähemalt üks rahuldab tingimust

$$F\left(x,\ \sqrt[n]{R(x)}\right)=0. \tag{1}$$

Võtame tarvitusele uue tundmatu, võttes $y=\sqrt[n]{R(x)}$. Siis on antud võrrand asendatav võrrandisüsteemiga

$$F(x,\ y)=0,\ y^n=R(x).$$

Eemaldades y-i (vaata § 74) saame võrrandi, mis ei sisalda juuri ja ülesanne taandub ühe tundmatuga võrrandi lahendamisele. Kui ülesanne sisaldab mitut juurt, siis saab neid eemaldada järjestikuselt.

Kui me e i l o e lubatavaiks juure kõikvõimalikke väärtusi, siis juure eemaldamise protsessi tulemusena saadakse k õ r v a l l a h e n d i d. Tõepoolest, võrrandit (1) võivad rahuldada juure väärtused, mis ei ole lubatavad. Selles mõttes räägitakse, et võrrandi vabastamine juurtest annab üldjuhtumil võrrandi, mis pole samaväärne antud võrrandiga, ja seepärast on iga kord vajalik lahendite k o n t r o l l i m i n e. Nii näiteks ruutjuurt $\sqrt{R(x)}$ sisaldava võrrandi lahendamisel reaalarvude korpuses mõeldakse tavaliselt $\sqrt{R(x)}$ all juure aritmeetilist väärtust (s. o. juure mittenegatiivset väärtust). Juurest vabastatud võrrand sisaldab peale antud võrrandi lahendi veel antud võrrandist $\sqrt{R}$ asendamisel $-\sqrt{R}$-ga saadava võrrandi lahendit. Need kõrvallahendid tuleb k õ r v a l d a d a kontrollimisega.

Tähendame siinjuures, et praktiliselt on sageli võimalik vabastada võrrandit juurtest võrrandi mõlema poole järjestikuse astendamisega.

N ä i t e d. 1. Lahendada võrrand

$$\sqrt{x-1}=7-x.$$

L a h e n d u s. Loeme x-i ja juure lubatavaiks väärtusiks m i s t a h e s kompleksarvud. Võttes $\sqrt{x-1}=y$ saame süsteemi

$$y=7-x,\ y^2=x-1.$$

Asetades y-i avaldise esimesest võrrandist teise eemaldame juure ja saame ruutvõrrandi

$$x^2 - 15x + 50 = 0, \tag{2}$$

millest

$$x = 5 \text{ ja } x = 10.$$

$x = 5$ puhul on $y = 2$, s. o. juure väärtus tuleb võtta võrdseks arvuga 2.

$x = 10$ puhul on $y = -3$, s. o. juure väärtus tuleb võtta võrdseks arvuga -3.

Vaatleme sama võrrandit reaalarvude korpuses, lugedes juure $\sqrt{x-1}$ lubatavaiks väärtusiks ainult mittenegatiivseid väärtusi. Sel tingimusel saadakse võrrandile ainult üks lahend $x = 5$, kuna $x = 10$ on kõrvallahendiks, mis kuulub võrrandile

$$-\sqrt{x-1} = 7 - x.$$

Praktiliselt tuleb võrrandi (2) saamiseks antud võrrandi mõlemad pooled tõsta ruutu.

2. Lahendada võrrand

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \sqrt{b} \quad (\text{kus } a > 0 \text{ ja } b > 0)$$

kompleksarvude korpuses, lugedes juure väärtusi aritmeetilisteks.

L a h e n d u s. Moodustame tuletatud võrde

$$\frac{2\sqrt{a-x}}{2\sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}+1},$$

millest leiame

$$\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}-1}. \tag{3}$$

Tõstes mõlemad pooled ruutu saame

$$\frac{a-x}{a+x} = \frac{1-2\sqrt{b}+b}{1-2\sqrt{b}+b}.$$

Moodustame uuesti tuletatud võrde

$$\frac{x}{a} = \frac{2\sqrt{b}}{1+b},$$

millest saame ainsa võimaliku lahendi

$$x = \frac{2a\sqrt{b}}{1+b}.$$

$b < 1$ puhul ei oma võrrand lahendeid. Tõepoolest, kui $b < 1$, siis võrrandi (3) vasak pool on negatiivne ja parem pool ei saa olla negatiivne. $b > 1$ puhul rahuldab leitud lahend võrrandit (3) ja samuti lähtevõrrandit:

$$\frac{\sqrt{a - \frac{2a\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}}}{\sqrt{a + \frac{2a\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{1+b-2\sqrt{b}}}{\sqrt{a}\sqrt{1+b+2\sqrt{b}}} = \frac{1-\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}.$$

Niisiis, $b > 1$ puhul omab võrrand ühteainsat lahendit ja $b < 1$ puhul ei oma lahendeid.

3. Lahendada võrrand

$$\sqrt[3]{4a^3 + x} + \sqrt[3]{4a^3 - x} = 2a$$

kompleksarvude korpuses.

Lahendus. Kirjutame antud võrrandi kujul

$$R + R_1 = 2a. \tag{4}$$

Tõstame mõlemad pooled kuupi:

$$R^3 + R_1^3 + 3RR_1(R + R_1) = 8a^3.$$

Asetame R-i ja R_1-e asemele nende avaldised ja kasutame seost (4):

$$(4a^3 + x) + (4a^3 - x) + 3\sqrt[3]{16a^6 - x^2} \cdot 2a = 8a^3,$$

millest

$$6a\sqrt[3]{16a^6 - x^2} = 0.$$

Järelikult

$$16a^6 - x^2 = 0 \quad \text{ja} \quad x = \pm 4a^3.$$

Asendamisega veendume, et leitud lahendid rahuldavad antud võrrandit.

IV OSA.

VÕRRATUSED.

X peatükk.

Võrratuste lahendamine.

§ 77. Põhiteoreemid.

Võrratuste õpetus põhineb võrratuste iseloomulikel omadustel ja aritmeetiliste tehete monotoonsuseseadustel. Arusaadav, et võrratuste õpetus käib ainult järjestatud arvkorpuste (näiteks ratsionaalarvude või reaalarvude korpuse) kohta, milledes on määratud mõisted „suurem", „väiksem", „võrdne"; kompleksarvude korpuse kohta pole ta rakendatav. Tuletame meelde võrratuste põhiomadusi ja märgime ära nendest tulenevad tähtsaimad järeldused.

1° *Võrratusest* $A < B$ *järeldub võrratus* $B > A$ *ja ümberpöördult, teisest võrratusest järeldub esimene* (pöördumatuse omadus, § 3). Seda omadust saab sõnastada järgmise ***reeglina:***

võrratuse vasaku ja parema poole ümberpaigutamisel muutub võrratuse märk vastupidiseks.

2° *Kui* $A < B$ *ja* $B < C$, *siis* $A < C$ (transitiivsuse omadus, § 3).

3° *Kui* $A < B$, *siis*

$$B - A > 0$$

ja ümberpöördult, teisest võrratusest järeldub esimene (vaata § 7).

4° *Kui* $A < B$, *siis*

$$A + C < B + C$$

(liitmise monotoonsuse omadus, vaata § 7).

Siit ***reegel:*** *võrratuse mõlema poolega võib liita ühepalju.*

5⁰ *Kui* $A < B$ *ja* $C < D$, *siis*

$$A + C < B + D$$

(vaata § 7).

Siit ***reegel:*** *samapidiseid (sama võrratuse märgiga) võrratusi võib liita liikmeti.*

6⁰ *Kui* $A < B$, *siis* $Am < Bm$, *kui* $m > 0$, *ja* $Am > Bm$, *kui* $m < 0$.

Tõestus. Tingimuse kohaselt on $B - A > 0$; järelikult

$$Bm - Am = (B - A)m \begin{cases} > 0 & (\text{kui } m > 0) \\ < 0 & (\text{kui } m < 0), \end{cases}$$

m. o. t. t.

Siit ***reegel:*** *Võrratuse mõlema poole korrutamisel positiivse teguriga võrratuse märk ei muutu ja korrutamisel negatiivse teguriga muutub võrratuse märk vastupidiseks.*

7⁰ Erijuhtumil, kui $m = -1$, saame:
kui $A < B$, siis

$$-A > -B.$$

Reegel: *võrratuse mõlema poole märgi muutumisel muutub võrratuse märk vastupidiseks.*

8⁰ Kui $A < B$ ja $C > D$, siis

$$A - C < B - D. \qquad (1)$$

Tõestus. Omaduse 7⁰ järgi on $-C < -D$; liites ta liikmeti võrratusega $A < B$ saame (1), m. o. t. t.

Reegel: *vastupidiseid (erimärgiga) võrratusi saab liikmeti lahutada.*

9⁰ Kui $A < B$ ja $C < D$, kus A, B, C ja D on positiivsed arvud, siis

$$AC < BD.$$

Tõestus vaata §-s 7.

Reegel: *positiivsete liikmetega samapidiseid võrratusi võib liikmeti korrutada.*

Märkus. Kui A, B, C ja D on negatiivsed, siis

$$-A > -B \text{ ja } -C > -D,$$

millest

$$AC > BD.$$

Järelikult, liikmeti korrutamisel muutub võrratuse märk vastupidiseks. Mistahes arvudega A, B, C ja D võrratuste omavahelisel korrutamisel võib esineda mitmesuguseid juhtumeid. Nii näiteks $-2 < 4$ ja $-2 < 3$ puhul on $(-2)(-2) < 4 \cdot 3$. Teiselt poolt $-4 < 2$ ja $-6 < 1$ puhul on $(-4)(-6) > 2 \cdot 1$.

10^0 9^0-st järeldub, et *kui $A < B$, kus A ja B on positiivsed arvud, siis $A^n < B^n$* (n on naturaalarv).

Reegel: *positiivsete liikmetega võrratuste mõlemaid pooli võib astendada ühe ja sama arvuga.*

11^0 Kui $A < B$ ja A ja B on sama märgiga, siis

$$\frac{1}{A} > \frac{1}{B}.$$

Tõestus.

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{B - A}{AB} > 0,$$

kuna $B - A > 0$ ja $AB > 0$, sest A ja B on ühesuguse märgiga, m. o. t. t.

Märkus. Omadus 11^0 ei ole kehtiv erinevate märkidega arvude puhul.

§ 78. Võrratuste lahendamine.

Lahendada võrratus

$$f(x) < \varphi(x) \tag{1}$$

tähendab leida tundmatu x kõik lubatavad väärtused, millede puhul funktsiooni $f(x)$ väärtused on väiksemad $\varphi(x)$-i väärtustest. Tundmatu x lubatavate väärtuste hulk eeldatakse varem antuna.

Analoogiliselt, võrratuste süsteemi

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, \ldots) &< \varphi_1(x, y, \ldots) \\ f_2(x, y, \ldots) &< \varphi_2(x, y, \ldots) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_k(x, y, \ldots) &< \varphi_k(x, y, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

lahendamine seisneb tundmatute x, y, ... kõigi võimalike lubata-

vate arvuliste väärtuste süsteemide leidmises, millede puhul kõik süsteemi (2) võrratused on kehtivad. Me näeme, et võrratuse (või võrratuste süsteemi) lahendamise küsimus on analoogiline võrrandi lahendamise küsimusele. Samaväärsuse mõiste, mis on antud võrrandite kohta §-s 70, laieneb ka võrratuste kohta.

Teoreem. *Kui võrratuste mõlema poolega liita üks ja sama avaldis, mis omab mõtet tundmatute kõigi lubatavate väärtuste puhul, siis saadakse antud võrratusega samaväärne võrratus.*

Tõestus. Liites võrratuse

$$f(x) < \varphi(x) \tag{1}$$

mõlema poolega avaldise $\omega(x)$ saame järeldusena võrratuse

$$f(x) + \omega(x) < \varphi(x) + \omega(x). \tag{3}$$

Kui nüüd võrratuse (3) mõlema poolega liita $-\omega(x)$, siis saadakse järeldusena võrratus (1), m. o. t. t.

Me näeme, et tõestus ei erine võrrandite kohta käiva vastava teoreemi tõestusest.

Järeldus. Iga liidetavat saab võrratuse ühelt poolelt teisele poolele vastandmärgiga üle viia.

Teoreem võrrandi mõlema poole korrutamisest ühe ja sama arvuga on rakendatav ka võrratustele, kuid järgmise muudatusega: *tegur $\omega(x)$ peab tundmatu kõigi lubatavate väärtuste puhul omama ühte ning sama märki ega või muutuda nulliks; kui $\omega(x) > 0$, siis võrratuse mõlema poole korrutamisel teguriga $\omega(x)$ jääb võrratuse märk endiseks, kui aga $\omega(x) < 0$, siis muutub võrratuse märk vastupidiseks.*

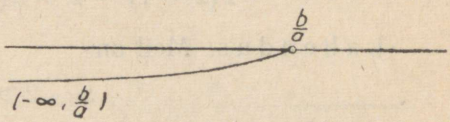
§ 79. Esimese astme võrratused ühe tundmatuga.

Esimese astme võrratus pärast tundmatut sisaldavate liikmete viimist ühele poolele ja arvuliste liidetavate viimist teisele poolele omandab kuju $ax < b$ või $ax > b$ (tundmatu lubatavate väärtuste hulgaks võtame kõigi reaalarvude hulga). Vaatleme esimest juhtumit.

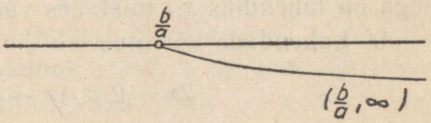
Kui $a > 0$, siis võrratuse $ax < b$ mõlema poole jagamisel arvuga a saame $x < \frac{b}{a}$. Järelikult võrratuse lahendiks on mistahes arv x, mis on väiksem arvust $\frac{b}{a}$. Geomeetriliselt kujutab lahendite

hulka arvtelje punktide hulk, mis asetseb vasakul pool punkti $\frac{b}{a}$, s. o. vahemikus $\left(-\infty, \frac{b}{a}\right)$ (joonis 73).

Kui $a < 0$, siis jagades võrratuse mõlema poole arvuga a ja muutes võrratuse märgi vastupidiseks saame $x > \frac{b}{a}$. Geomeetriliselt kujutatakse lahendite kogu vahemikuga $\left(\frac{b}{a}, \infty\right)$ (joonis 74).



Joon. 73.



Joon. 74.

Kui $a = 0$, siis $b > 0$ puhul rahuldab võrratust x-i mistahes reaalne väärtus. $b \leqslant 0$ ja $a = 0$ puhul on antud võrratus vasturääkiv ega oma lahendeid.

Näiteid. 1. Lahendada võrratus

$$2 - 3x < 14 - 5x.$$

Lahendus. Viies x-i sisaldavad liikmed vasakule poolele ja x-i mittesisaldavad paremale poolele saame

$$5x - 3x < 14 - 2 \text{ ehk } 2x < 12,$$

millest

$$x < 6.$$

2. Lahendada võrratus

$$\frac{37 - 2x}{3} + 9 \leqslant \frac{3x - 8}{4} - x.$$

Lahendus. Korrutades võrratuse mõlemat poolt arvuga 12 saame

$$148 - 8x + 108 \leqslant 9x - 24 - 12x$$

ehk

$$256 - 8x \leqslant -3x - 24,$$

millest

$$-5x \leqslant -280 \text{ ja } x \geqslant \frac{-280}{-5},$$

s. o.

$$x \geqslant 56.$$

3. Lahendada võrratus

$$2(x-1) - x > 3(x-1) - 2x - 5.$$

L a h e n d u s. Meil on

$$x - 2 > x - 8.$$

Koondamisel saame võrratuse $-2 > -8$, mis on õige x-i iga väärtuse puhul. Antud võrratusel kui samaväärsel saadud võrratusega on lahendiks x-i mistahes väärtus.

4. Lahendada võrratus

$$2x - 2 < (x-3) - (5-x).$$

L a h e n d u s. Saame

$$2x - 2 < 2x - 8 \text{ ehk } -2 < -8.$$

Järelduseks on ebaõige seos. Tähendab, antud võrratus ei oma lahendeid.

Vaatleme esimese astme võrratuste süsteemi ühe tundmatuga. Olgu näiteks antud kahe võrratuse süsteem

$$\left.\begin{array}{l} ax + b < cx + d \\ a_1x + b_1 < c_1x + d_1 \end{array}\right\}.$$

Lahendades kumbagi võrratust eraldi, võib antud süsteemi asendada lihtsaimate võrratuste süsteemiga. Sõltuvalt koefitsientidest võib saada kas kaks samapidist võrratust

$$1^0 \quad \left.\begin{array}{l} x < \alpha \\ x < \beta \end{array}\right\} \qquad \text{või} \qquad 2^0 \quad \left.\begin{array}{l} x > \alpha \\ x > \beta \end{array}\right\}$$

või kaks vastupidist võrratust

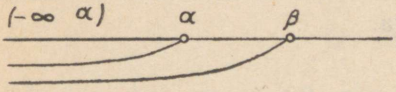
$$3^0 \quad \left.\begin{array}{l} x > \alpha \\ x < \beta \end{array}\right\} \qquad \text{või} \qquad 4^0 \quad \left.\begin{array}{l} x < \alpha \\ x > \beta \end{array}\right\}.$$

Juhtumil 1^0 võtame arvudest α ja β väiksema arvu. Olgu $\alpha < \beta$, siis rahuldab mõlemat võrratust mistahes arv, mis on väiksem kui α, s. o. $x < \alpha$. Geomeetriliselt saame vahemiku $(-\infty, \alpha)$, mis on kahe vahemiku $(-\infty, \alpha)$ ja $(-\infty, \beta)$ ühisosaks (joonis 75). Analoogiliselt saame juhtumil 2^0 $x > \beta$ (loeme $\alpha < \beta$) (joonis 76). Juhtu-

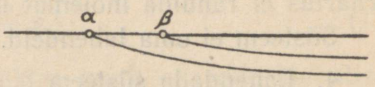
mil 3^0 rahuldab mõlemat võrratust α ja β vahel asetsev mistahes arv, s. o.

$$\alpha < x < \beta.$$

Lõplik vahemik (α, β) on kahe lõpmatu vahemiku (α, ∞) ja

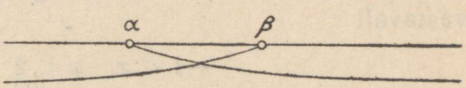


Joon. 75.

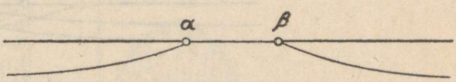


Joon. 76.

$(-\infty, \beta)$ ühisosaks (joonis 77). Juhtumil 4^0 süsteem ei oma lahendeid, sest ($\alpha < \beta$ puhul) ei ole olemas ühtegi arvu, mis oleks korraga suurem kui β ja väiksem kui α. Vaadeldaval juhtumil ei oma vahemikud $(-\infty, \alpha)$ ja (β, ∞) ühiseid punkte (joonis 78).



Joon. 77.



Joon. 78.

Analoogiliselt uuritakse esimese astme süsteeme, mis koosnevad kolmest ja enam võrratusest (vaata näide 4).

N ä i t e d. 1. Lahendada võrratuste süsteem

$$\left.\begin{array}{l} 3 + x > 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \end{array}\right\}.$$

L a h e n d u s. Lahendame esimese võrratuse

$$x - 2x > 4 - 3,$$

millest $x < -1$. Lahendades analoogiliselt teise võrratuse saame $x < 2$. Niisiis peavad kehtima järgmised kaks võrratust: $x < -1$ ja $x < 2$, mis leiavad aset, kui $x < -1$.

2. Lahendada süsteem

$$\left.\begin{array}{l} 3 + x < 4 + 2x \\ 5x + 3 < 4x - 1 \end{array}\right\}.$$

L a h e n d u s. Lahendades antud võrratused saame vastavalt $x > -1$ ja $x < 2$. Mõlemad võrratused on rahuldatud, kui $-1 < x < 2$.

3. Lahendada süsteem

$$\left.\begin{array}{l} 3 + x > 4 + 2x \\ 5x - 3 > 4x - 1 \end{array}\right\}.$$

Esimese ja teise võrratuse lahendid on vastavalt $x < -1$ ja $x > 2$. Mõlemad võrratused eemaldavad teineteist, sest x-i ükski väärtus ei rahulda mõlemat korraga.

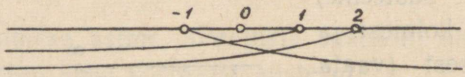
Süsteem ei oma lahendeid.

4. Lahendada süsteem

$$\left.\begin{array}{l} 3 + x < 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \\ 7 + 2x > 6 + 3x \end{array}\right\}.$$

L a h e n d u s. Lahendades igaühe antud võrratustest, saame vastavalt

$$-1 < x, \quad x < 2 \text{ ja } x < 1.$$



Joon. 79.

Kõik kolm võrratust kehtivad, kui $-1 < x < 1$. Vahemik $(-1, 1)$ on kolme vahemiku $(-\infty, 2)$, $(-\infty, 1)$ ja $(-1, \infty)$ ühisosaks (joonis 79).

§ 80. Kõrgema astme võrratused ühe tundmatuga.

Teise astme võrratus omandab pärast kõigi liikmete üleviimist vasakule poolele kuju

$$ax^2 + bx + c > 0$$

või

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

kus $a \neq 0$. Niisiis taandub ülesanne ruutkolmliikme märgi uurimisele. Vaatleme kolme järgmist juhtumit.

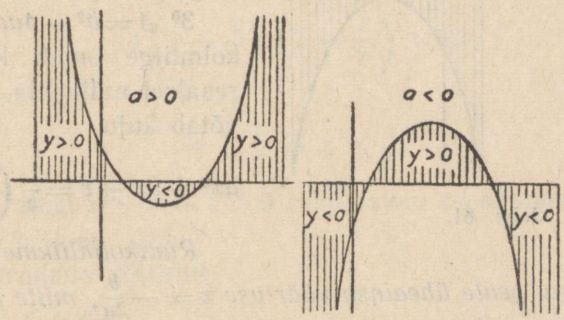
1^0 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Ruutkolmliikme nullkohad on reaalsed ja erinevad. Olgu x_1 ja x_2 kolmliikme nullkohad; olgu $x_1 < x_2$. Võime kirjutada, et

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Kui $a > 0$, siis kolmliikme märk ühtib korrutise

$$(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1)$$

märgiga; kui aga $a < 0$, siis kolmliikme märk on selle korrutise märgiga vastupidine. $x < x_1$ mistahes väärtuse puhul $x - x_1 < 0$ ja $x - x_2 < 0$, seepärast korrutis (1) on positiivne. x_1-e ja x_2-e vahel oleva x-i, s. o. $x_1 < x < x_2$, mistahes väärtuse puhul $x - x_1 > 0$ ja $x - x_2 < 0$; seepärast korrutis (1) on negatiivne. $x > x_2$ mistahes väärtuse puhul $x - x_1 > 0$ ja $x - x_2 > 0$; seepärast korrutis (1) on positiivne.



Joon. 80.

Järelikult *on võrratus* $ax^2 + bx + c > 0$ *rahuldatud* $a > 0$ *puhul, kui* $x < x_1$ *või kui* $x > x_2$ [*s. o. kahes vahemikus:* $(-\infty, x_1)$ *ja* (x_2, ∞)], *ja* $a < 0$ *puhul, kui* $x_1 < x < x_2$.

Võrratus $ax^2 + bx + c < 0$ *on rahuldatud* $a > 0$ *puhul, kui* $x_1 < x < x_2$, *ja* $a < 0$ *puhul, kui* $x < x_1$ *või* $x > x_2$.

Kui $x = x_1$ või $x = x_2$, siis kolmliige muutub nulliks. Uurimise tulemused on selgitatud geomeetriliselt joonisel 80.

2^0 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Ruutkolmliikme nullkohad on kaaskompleksarvud. Eraldades täisruudu saame

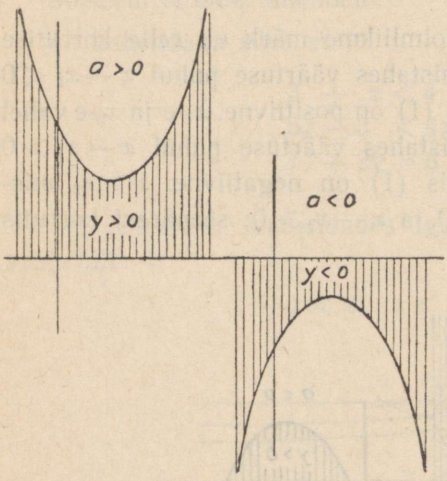
$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}\left[\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}\right]. \qquad (2)$$

Avaldis nurgelistes sulgudes on positiivne, sest $4ac - b^2 > 0$ ja $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$ ei saa omada negatiivseid väärtusi.

Ruutkolmliikme märk ühtib koefitsiendi a märgiga x-i kõigi reaalsete väärtuste puhul.

Järelikult, *võrratust*

$$ax^2 + bx + c > 0$$



Joon. 81.

rahuldavad x-i kõik väärtused, kui $a > 0$, ja ei rahulda ükski x-i väärtus, kui $a < 0$.

Võrratust $ax^2 + bx + c < 0$ ei rahulda x-i ükski väärtus, kui $a > 0$, ja rahuldab x-i iga väärtus, kui $a < 0$. Uurimise tulemused on geomeetriliselt selgitatud joonisel 81.

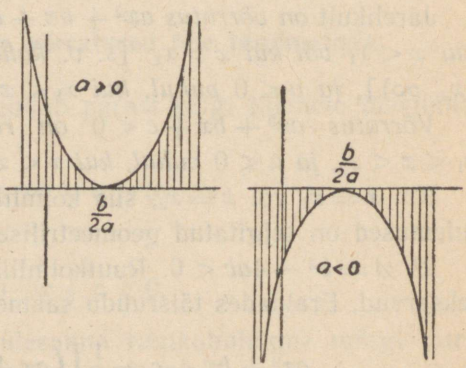
3° $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Ruutkolmliige omab kahekordset reaalset nullkohta. Valem (2) võtab kuju

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Ruutkolmliikme märk ühtib a märgiga, peale üheainsa väärtuse $x = -\frac{b}{2a}$, mille puhul ruutkolmliige muutub nulliks (joonis 82).

Esitatud tulemusi võime lühidalt kokku võtta järgmiselt:

Erinevate reaalsete nullkohtadega ruutkolmliige võib omada nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Kompleksnullkohtadega ruutkolmliige ei või omada märgi poolest erinevaid väärtusi ja muutuda nulliks. Kahekordse nullkohaga ruutkolmliige muutub nulliks argumendi



Joon. 82.

üheainsa väärtuse puhul ega või omada märgilt erinevaid arvulisi väärtusi.

Näiteid. 1. Lahendada võrratus $x^2 + 6 < 5x$.

Lahendus. $x^2 - 5x + 6 < 0$. Lahendades võrrandi $x^2 - 5x + 6 = 0$ leiame kolmliikme nullkohad

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3;$$

järelikult

$$(x - 2)(x - 3) < 0,$$

millest $2 < x < 3$.

2. Lahendada võrratus $8x - 4x^2 < 3$.

Lahendus.

$$-4x^2 + 8x - 3 < 0, \text{ millest } 4x^2 - 8x + 3 > 0.$$

Ruutkolmliikme nullkohad on $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$,

millest

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) > 0.$$

Järelikult

$$x < \frac{1}{2} \text{ ja } x > \frac{3}{2}.$$

3. Võrratust $x^2 - x + 1 > 0$ rahuldavad x-i mistahes väärtused, sest $\Delta < 0$ ja $a = 1 > 0$.

4. Lahendada võrratus

$$\frac{x^2 + x - 6}{2a + 1} > x + 6(2a - 1) \quad (\text{kus } a \neq -\tfrac{1}{2}).$$

Lahendus. Viime liikmed ühele poolele ja teisendame ühenimelisteks. Siis saame

$$\frac{x^2 - 2ax - 24a^2}{2a + 1} > 0.$$

Kolmliikme $x^2 - 2ax - 24a^2$ nullkohad on $-4a$ ja $6a$.

1° Kui $2a + 1 > 0$, s. o. $a > -\frac{1}{2}$, siis korrutades summaga $2a + 1$ saame võrratuse

$$x^2 - 2ax - 24a^2 > 0.$$

$0 < a$ puhul on väikseim lahend $-4a$ ja suurim $6a$; saame:

$$x < -4a \text{ ja } x > 6a.$$

$-\frac{1}{2} < a < 0$ puhul on väikseim lahend $6a$ ja suurim $-4a$;

saame: $x < 6a$ ja $x > -4a$.

2^0 $2a + 1 < 0$, s. o. $a < -\frac{1}{2}$. Korrutades summaga $2a + 1$ saame

$$x^2 - 2ax - 24a^2 < 0.$$

Seega $6a < x < -4a$.

3^0 $a = 0$ puhul omandab võrratus kuju $x^2 > 0$ ja teda rahuldavad kõik väärtused $x \neq 0$.

5. Uurida ruutvõrrandi

$$x^2 - (8k - 2)x + (15k^2 - 2k - 7) = 0 \qquad (3)$$

lahendeid sõltuvalt parameetri k väärtusest.

Lahendus. Koostame diskriminandi

$$\Delta = (8k - 2)^2 - 4(15k^2 - 2k - 7) = 4(k^2 - 6k + 8).$$

A) Kui $k^2 - 6k + 8 > 0$, siis on võrrandi (3) lahendid reaalsed ja erinevad.

B) Kui $k^2 - 6k + 8 < 0$, siis on võrrandi (3) lahendid kaaskompleksarvud.

C) Kui $k^2 - 6k + 8 = 0$, siis omab võrrand kahekordset lahendit.

Kolmliikme $k^2 - 6k + 8$ nullkohad on $k_1 = 2$, $k_2 = 4$.

Juhtum A) esineb, kui $k < 2$ või $k > 4$. Juhtum B) esineb, kui $2 < k < 4$. Juhtum C) esineb, kui $k = 2$ või $k = 4$.

Esitatud meetodit rakendatakse ka kõrgema astme võrratuste lahendamisel. Me piirdume ainult üldiste juhenditega ja konkreetsete näidete käsitlemisega. Olgu antud võrratus

$$\varphi(x) > 0, \qquad (4)$$

kus $\varphi(x)$ on mingi hulkliige. Kui kompleksarvude korpuses on teada hulkliikme $\varphi(x)$ lahutus taandumatuiks tegureiks, siis võrratuse (4) lahendamiseks piisab, kui on teada iga teguri märk. Kuid reaalarvude korpuses lahutub iga hulkliige esimese ja teise astme hulkliikmeiks, seepärast ülesanne taandub mitme esimese ja teise astme võrratuse lahendamisele.

Näiteid. 1. Lahendada võrratus

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0.$$

L a h e n d u s. Lahutades hulkliikme tegureiks kirjutame võrratuse järgmisel kujul:

$$(x+1)(x-1)(x-2) > 0.$$

$x < -1$ puhul on kõik kolm tegurit negatiivsed: $(-)\cdot(-)\cdot(-)$; seepärast võrratus ei ole rahuldatud. Kui $-1 < x < 1$, siis on kaks tegurit negatiivsed: $(+)\cdot(-)\cdot(-)$; võrratus on rahuldatud. Kui $1 < x < 2$, siis on üks tegur negatiivne: $(+)\cdot(+)\cdot(-)$ ja võrratus ei ole rahuldatud. Kui $2 < x$, siis on kõik kolm tegurit positiivsed $(+)\cdot(+)\cdot(+)$; võrratus on rahuldatud. Niisiis, võrratus on rahuldatud, kui $-1 < x < 1$ ja $2 < x < \infty$. Punktides -1, 1, 2 muutub kolmliige nulliks ja seepärast võrratus ei ole kehtiv.

2. Lahendada võrratus $x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0$.

L a h e n d u s. Lahutades vasaku poole tegureiks kirjutame võrratuse kujul

$$(x-1)(x-3)(x^2+x+1) < 0.$$

Kolmliige x^2+x+1 omab kompleksnullkohti ja tema väärtused on positiivsed. Seepärast tuleb lahendada ainult võrratus

$$(x-1)(x-3) < 0,$$

millest leiame $1 < x < 3$.

Algebraline võrratus, mis sisaldab tundmatu suhtes murdavaldisi, omandab pärast liikmete üleviimist ühele poolele ja murdude teisendamist ühenimelisteks kuju

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0 \quad \text{või} \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0.$$

Esimene võrratus on rahuldatud tingimusel

$$\left.\begin{matrix} f(x) > 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{matrix}\right\} \text{ või } \left.\begin{matrix} f(x) < 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{matrix}\right\}.$$

Niiviisi taandub ülesanne võrratuste kahe süsteemi lahendamisele. Analoogiliselt taandub teise võrratuse lahendamine võrratuste kahe süsteemi

$$\left.\begin{matrix} f(x) < 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{matrix}\right\} \text{ ja } \left.\begin{matrix} f(x) > 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{matrix}\right\}$$

lahendamisele.

N ä i d e. Lahendada võrratus

$$1 + \frac{x-4}{x-3} > \frac{x-2}{x-1}.$$

L a h e n d u s. Pärast liikmete üleviimist ühele poolele ja ühenimeliseks teisendamist saame võrratuse

$$\frac{x^2-4x+1}{(x-1)(x-3)}>0.$$

Lugeja nullkohad on $2-\sqrt{3}$ ja $2+\sqrt{3}$, nimetaja nullkohad on 1 ja 3. Lahutades lugeja tegureiks kirjutame võrratuse kujul

$$\frac{[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x-1)(x-3)}>0.$$

Järjestame lugeja ja nimetaja nullkohad suuruse järgi:

$$2-\sqrt{3}<1<3<2+\sqrt{3}.$$

Kui $x<2-\sqrt{3}$, siis jaotuvad tegurite märgid lugejas ja nimetajas järgmiselt $\frac{(-)\cdot(-)}{(-)\cdot(-)}$; seega on võrratus rahuldatud.

Kui $2-\sqrt{3}<x<1$, siis on märkide jaotus $\frac{(+)\cdot(-)}{(-)\cdot(-)}$, mille puhul võrratus ei ole rahuldatud.

Kui $1<x<3$, siis märkide jaotus on $\frac{(+)\cdot(-)}{(+)\cdot(-)}$, mille puhul võrratus on rahuldatud.

Kui $3<x<2+\sqrt{3}$, siis on märkide jaotus $\frac{(+)\cdot(-)}{(+)\cdot(+)}$, mille puhul võrratus ei ole rahuldatud.

Kui $2+\sqrt{3}<x$, siis märkide jaotus on $\frac{(+)\cdot(+)}{(+)\cdot(+)}$, mille puhul võrratus on rahuldatud.

Tähendab, võrratus on rahuldatud vahemikes

$$(-\infty, 2-\sqrt{3}),\ (1, 3)\ \text{ja}\ (2+\sqrt{3}, \infty).$$

§ 81. Mitme tundmatuga võrratuste lahendamise näiteid.

Vaatleme järgmist näidet esimese astme kahe tundmatuga võrratuse lahendamise kohta.

Lahendada võrratus

$$2x-3y+4<0.$$

Lahendades võrratuse ühe tundmatu, näiteks y-i suhtes, saame

$$-3y<-2x-4,$$

millest

$$y > \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Andes x-le mistahes reaalse väärtuse ja võttes teisele tundmatule y mistahes väärtuse, mis on suurem avaldise $\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ vastavast väärtusest, saame arvude paari, mis rahuldab antud võrratust. Nii näiteks, võttes $x = 1$ võib teise tundmatu y jaoks võtta mistahes väärtuse, mis on suurem kui $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$. Antud võrratuse lahenduse üldkuju kirjutatakse järgmiselt:

$$-\infty < x < \infty;$$

$$y > \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Esimene rida on väite, et tundmatule x võib anda mistahes reaalseid väärtusi, üldtarvitatav sümboolne üleskirjutus; teine rida näitab, missugune peab olema y-i vastav väärtus.

Saadud lahendust saab tõlgendada geomeetriliselt. Sirgjoon

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

jaotab tasapinna kaheks pooltasapinnaks I ja II, mis asetsevad vastavalt ülalpool ja allpool antud sirget (joonis 83).

I pooltasapinna punktide koordinaadid rahuldavad võrratust

$$y > \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

ja II pooltasapinna punktide koordinaadid rahuldavad võrratust

$$y < \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Antud võrratuse lahendeid kujutavad geomeetriliselt I pooltasapinna punktid (joonisel 83 viirutatud), s. o. punktid ülalpool sirget

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Võtame vaatluse alla kahe esimese astme kahe tundmatuga võrratuse lahendamise näited.

Lahendada süsteem

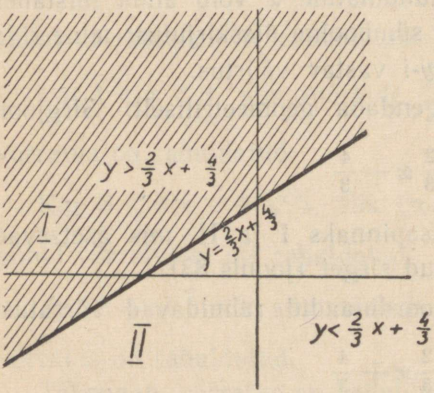
$$\left.\begin{aligned} y - x + 1 &> 0 \\ 2x - y - 3 &> 0 \end{aligned}\right\}.$$

Lahendades kummagi võrratuse ühe tundmatu, näiteks y-i suhtes, saame

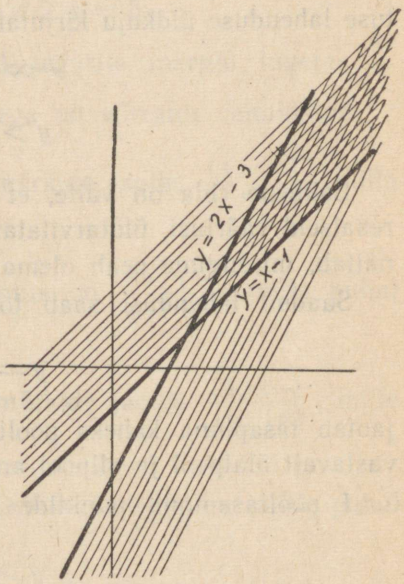
$$\left.\begin{aligned} y &> x - 1 \\ y &< 2x - 3 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Transitiivsuse omaduse kehtivuse tõttu peab olema

$$x - 1 < y < 2x - 3.$$



Joon. 83.



Joon. 84.

Viimased võrratused on rahuldatud ainult x-i nende väärtuste puhul, mis rahuldavad tingimust

$$x - 1 < 2x - 3,$$

millest

$$x > 2.$$

Niisiis, antud süsteemi rahuldavad x-i ja y-i väärtused määratakse tingimustest

$$x > 2, \quad x - 1 < y < 2x - 3.$$

Saadud lahendit võib hõlpsasti tõlgendada geomeetriliselt. Süsteemi (1) võrratused näitavad, et vastav punkt peab asetsema ülalpool sirget $y = x - 1$ ja allpool sirget $y = 2x - 3$. Lahendi annab iga punkt, mis asetseb võrguliselt viirutatud nurgas joonisel 84. Antud sirgete lõikepunkt on $x = 2$, $y = 1$. Seepärast annab süsteemi lahendi iga punkt, mille abstsiss on suurem kui 2 ja ordinaat asetseb antud sirgete ordinaatide vahel.

Seda võrratuste süsteemi lahendamismeetodit kasutatakse neil juhtumeil, kui mõlema võrratuse lahendamisel ühe ja sama tundmatu suhtes saadakse vastupidised võrratused [meie näites (1)]. Nüüd vaatleme juhtumit, kus süsteem koosneb sama märgiga võrratustest.

Lahendada süsteem

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 1 &< 0 \\ 9x - 3y - 2 &< 0 \end{aligned}\right\}.$$

Lahendades selle y-i suhtes saame

$$\left.\begin{aligned} y &> 2x + 1 \\ y &> 3x - \frac{2}{3} \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Lahendamine x-i suhtes toob meid samuti sama märgiga võrratuste juurde. Võrratused (2) näitavad, et antud x-i puhul tuleb y-i väärtus valida suurim $2x + 1$ ja $3x - \frac{2}{3}$ väärtustest. Et leida, kumb neist avaldistest omab suuremat väärtust, koostame võrratuse

$$3x - \frac{2}{3} \geqslant 2x + 1,$$

millest

$$x \geqslant \frac{5}{3}.$$

$x \leqslant \frac{5}{3}$ puhul kehtib võrratus $3x - \frac{2}{3} \leqslant 2x + 1$. Järelikult antud süsteemi lahendust saab kujutada järgmiselt:

$$y > 3x - \frac{2}{3}, \text{ kui } x \geqslant \frac{5}{3};$$

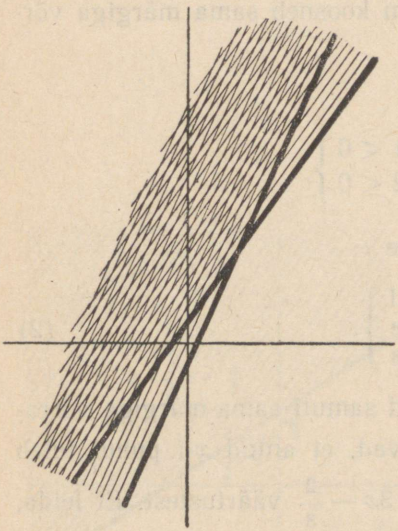
$$y > 2x + 1, \text{ kui } x \leqslant \frac{5}{3}.$$

Punktid, mis kujutavad geomeetriliselt süsteemi lahendeid, peavad asetsema ülalpool mõlemat sirget $y = 2x + 1$ ja $y = 3x - \frac{2}{3}$, mis lõikuvad punktis $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{13}{3}$ (joonis 85).

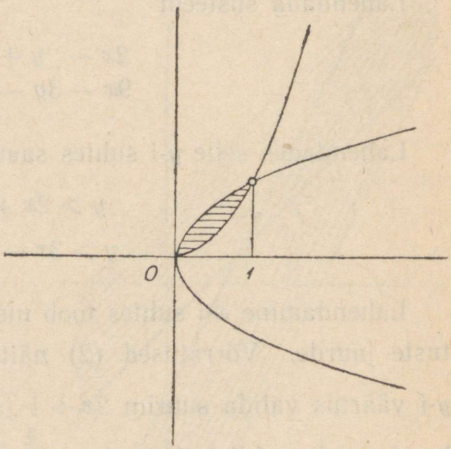
Lahendada süsteem

$$\left.\begin{aligned} y - x^2 &> 0 \\ x - y^2 &> 0 \end{aligned}\right\}.$$

Esimesest võrratusest leiame $y > x^2$, ja et alati $x^2 \geqslant 0$, siis y



Joon. 85.



Joon. 86.

peab olema positiivne. Analoogiliselt leiame teisest võrratusest $x > 0$. Antud võrratustest saame

$$x^2 < y < \sqrt{x}.$$

Viimane on võimalik tingimusel $x^2 < \sqrt{x}$, millest $x^4 < x$ või $x^3 < 1$, mis annab $0 < x < 1$. Järelikult

$$x^2 < y < \sqrt{x}, \text{ kus } 0 < x < 1.$$

Süsteemi kõigi lahendite hulka saab geomeetriliselt kujutada punktidega, mis asetsevad korraga ülalpool parabooli $y = x^2$ ja allpool parabooli $y^2 = x$ ülemist haara (joonis 86).

Lahendada süsteem

$$\left.\begin{aligned} y - x &> 0 \\ y - x^3 &< 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Meil $x < y < x^3$, järelikult peab olema täidetud tingimus

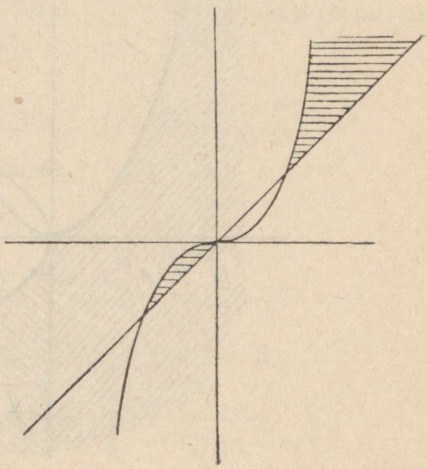
$$x < x^3 \text{ ehk } x^3 - x = (x+1)x(x-1) > 0.$$

Viimane võrratus kehtib tingimusel $-1 < x < 0$ ehk $1 < x$. Järelikult on

$$x < y < x^3, \text{ kui}$$
$$-1 < x < 0 \text{ ehk } 1 < x.$$

Süsteemi (3) saab ümber kirjutada nii: $y > x$ ja $y < x^3$.

Järelikult kujutatakse lahendeid graafiliselt punktidena, mis asetsevad korraga ülalpool sirget $y = x$ ja allpool kuupparabooli $y = x^3$ (joonis 87).



Joon. 87.

Lahendada süsteem

$$\left.\begin{aligned} y &< x^2 \\ x &< y^2 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Kui $x > 0$, siis teisest võrratusest saame $|y| > \sqrt{x}$, millest

$$\text{I: } y > \sqrt{x}, \text{ või II: } y < -\sqrt{x}.$$

Kombineerides I võrratust süsteemi (4) esimese võrratusega saame $\sqrt{x} < y < x^2$, mis on võimalik tingimusel $\sqrt{x} < x^2$, millest $1 < x$.

Kombineerides II võrratust süsteemi (4) esimese võrratusega saame $y < x^2$ ja $y < -\sqrt{x}$, millest transitiivsuse põhjal $y < -\sqrt{x}$ (sest iga $x > 0$ puhul on $-\sqrt{x} < x^2$).

Lõpuks vaatleme III juhtumit: $x < 0$; siis antud süsteemi teine võrratus on iseenesest rahuldatud ja me saame

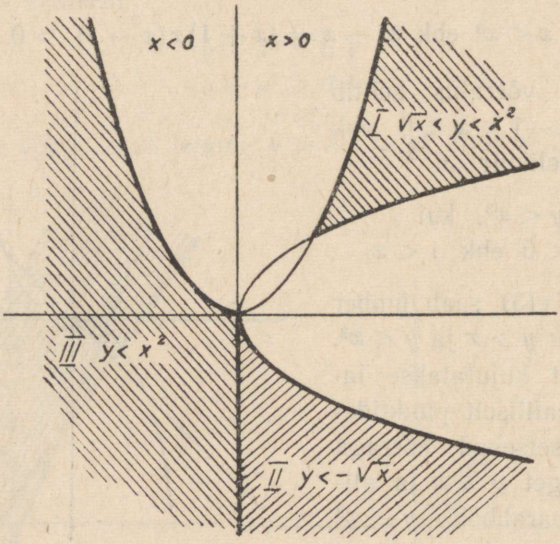
$$y < x^2.$$

Niisiis on

$$y < x^2, \text{ kui } x < 0;$$

$$y < -\sqrt{x}, \text{ kui } 0 < x < 1;$$

$$y < -\sqrt{x} \text{ ja } \sqrt{x} < y < x^2, \text{ kui } 1 < x.$$



Joon. 88.

Saadud tulemused on kujutatud graafiliselt joonisel 88.

§ 82. Absoluutväärtusi sisaldavad võrratused.

Olgu h antud positiivne arv. Võrratust

$$|x| < h \tag{1}$$

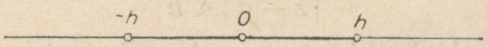
rahuldavad kõik positiivsed arvud x, mis on väiksemad kui h, ja kõik negatiivsed arvud, mis on suuremad kui $-h$.

Seepärast võrratus (1) on samaväärne võrratustega

$$-h < x < h. \tag{2}$$

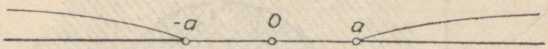
Võrratuste (1) ja (2) geomeetriline tõlgendus on silmanähtav: võrratus (1) väljendab, et punkt x asetseb arvteljel koordinaatide algusele lähemal kui h. On selge, et punkt x peab asetsema vahemikus $(-h, h)$ (joonis 89); seda väljendavadki võrratused (2).

Võrratus $|x| > a$ on $a > 0$ puhul samaväärne võrratustega $x > a$ ehk $x < -a$. Geomeetriliselt asetseb punkt x koordinaatide



Joon. 89.

algusest kaugemal kui a ja järelikult asetseb ühes vahemikest $(-\infty, -a)$ ja $(a, +\infty)$ (joonis 90). $a < 0$ puhul rahuldavad võrratust $|x| > a$ kõik x-i väärtused.



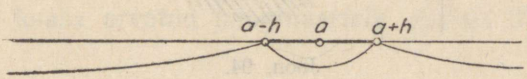
Joon. 90.

Võrratus

$$|x - a| < h \text{ (kus } h > 0)$$

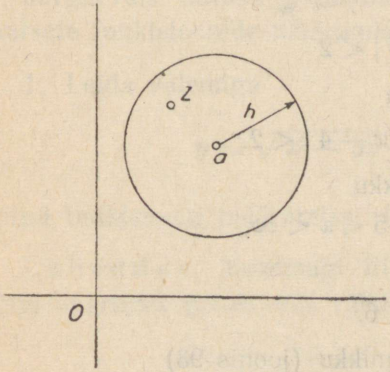
on samaväärne võrratustega

$$-h < x - a < h \text{ ehk } a - h < x < a + h.$$

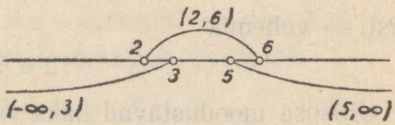


Joon. 91.

Vastav punkt x peab asetsema vahemikus pikkusega $2h$ ja keskpunktiga punktis a.



Joon. 92.



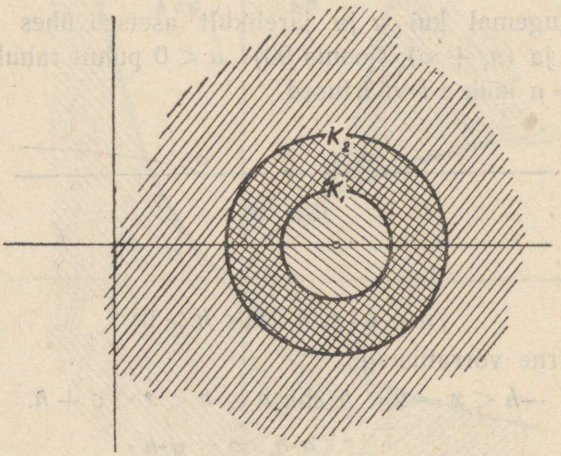
Joon. 93.

Võrratuse $|x - a| > h$ kehtivusel peab punkt x asetsema väljaspool seda vahemikku (joonis 91). Olgu a antud kompleksarv.

Avaldis $|z-a|$ (joonis 92) võrdub punkte z ja a ühendava lõigu pikkusega. Järelikult võrratus

$$|z-a|<h$$

kehtib kõigi punktide kohta, mis asetsevad ringis raadiusega h ja keskpunktiga punktis a (joonis 92).



Joon. 94.

Näiteid. 1. Võrratus $|x-2|<1$ väljendab vahemikku $1<x<3$. Komplekstasapinnas väljendab võrratus $|z-2|<1$ ringi siseosa, mille raadius on 1 ja keskpunkt on punktis 2.

2. Võrratus

$$1<|x-4|<2$$

on samaväärne järgmise süsteemiga

$$1<|x-4| \text{ ja } |x-4|<2.$$

Esimest kujutavad kaks vahemikku

$$-\infty<x<3 \text{ ja } 5<x<\infty,$$

teist — vahemik

$$2<x<6.$$

Ühisosa moodustavad kaks vahemikku (joonis 93)

$$2<x<3 \text{ ja } 5<x<6.$$

Komplekstasapinnas kujutab võrratus $1<|z-4|$ punktide hulka, mis asetsevad väljaspool ringi K_1 raadiusega 1 ja keskpunk-

tiga punktis 4. Võrratus $|z-4|<2$ kujutab ringi K_2 siseosa, mille raadius on 2 ja keskpunkt on punktis 4.

Võrratused

$$1<|z-4|<2$$

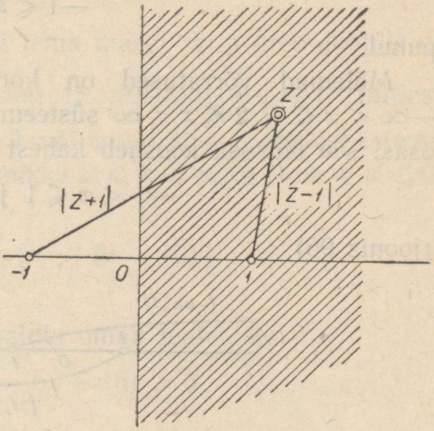
kujutavad punktide hulka, mis asetsevad rõngas, mida piiravad ringid K_1 ja K_2 (joonis 94).

Võrratus

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1 \text{ ehk}$$

$$|z-1|\leqslant|z+1|$$

väljendab, et punktide z ja 1 vaheline kaugus pole suurem punktide z ja -1 vahelisest kaugusest. Punktide z geomeetriliseks kohaks on parempoolne pooltasapind, kaasa arvatud imaginaartelg (joonis 95).



Joon. 95.

§ 83. Elementaarsete funktsioonide määramispiirkonna leidmise näiteid.

Järgnevais näiteis näidatakse võrratuste kasutamist elementaarsete funktsioonide määramispiirkonna leidmiseks.

1. Leida valemiga

$$y=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

antud funktsiooni määramispiirkond.

Lahendus. Kummagi liidetava väärtused on reaalsed x-i kõigi väärtuste puhul, mis rahuldavad võrratuste süsteemi

$$x^2-3x+2\geqslant 0 \text{ ja } 3+2x-x^2>0.$$

Selle võrratuste süsteemi lahendamiseks lahendame kummagi võrratuse eraldi. Esimese kolmliikme nullkohad on 1 ja 2; seepärast on esimene võrratus kehtiv kahe vahemiku (joonis 96)

$-\infty < x \leqslant 1$ ja $2 \leqslant x < \infty$ puhul. Teise kolmliikme nullkohad on -1 ja 3; seepärast teine võrratus on kehtiv vahemiku

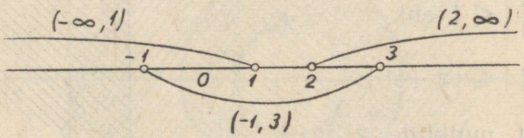
$$-1 < x < 3$$

puhul.

Mõlemad võrratused on korraga kehtivad kahe vahemiku $-\infty < x \leqslant 1$, $2 \leqslant x < \infty$ süsteemi ja vahemiku $-1 < x < 3$ ühisosas; see ühisosa koosneb kahest vahemikust

$$-1 < x \leqslant 1 \text{ ja } 2 \leqslant x < 3$$

(joonis 96).



Joon. 96.

2. Leida funktsiooni

$$\sqrt{\frac{1-x}{x^2-5x+6}}$$

määramispiirkond.

L a h e n d u s. Juuritav avaldis ei ole negatiivne, kui

$$\frac{1-x}{x^2-5x+6} \geqslant 0.$$

See kehtib, kui

$$\left.\begin{matrix} 1-x \geqslant 0 \\ x^2-5x+6 > 0 \end{matrix}\right\} \text{ või } \left.\begin{matrix} 1-x \leqslant 0 \\ x^2-5x+6 < 0 \end{matrix}\right\}.$$

Ruutkolmliikme x^2-5x+6 nullkohad on 2 ja 3; seepärast võrratus

$$x^2-5x+6 > 0$$

kehtib, kui $x < 2$ või $x > 3$. Juurde võttes võrratuse $1-x \geqslant 0$ saame esimese süsteemi lahendi: $x \leqslant 1$. Võrratus $x^2-5x+6 < 0$ on rahuldatud, kui $2 < x < 3$. Juurde võttes võrratuse $1-x \leqslant 0$ saame teise süsteemi lahendi $2 < x < 3$. Niisiis, antud funktsiooni määramispiirkond koosneb kahest vahemikust

$$-\infty < x \leqslant 1 \text{ ja } 2 < x < 3.$$

3. Leida funktsiooni

$$\arcsin \frac{1}{x-1}$$

määramispiirkond.

Arkus-siinus omab mõtet, kui tema märgi järgi olev avaldis ei ole absoluutsuuruselt suurem kui 1; niisiis $\frac{1}{|x-1|} \leqslant 1$, millest $|x-1| \geqslant 1$. Järelikult $x-1 \geqslant 1$ või $x-1 \leqslant -1$, millest leiame määramispiirkonnaks kaks vahemikku $2 \leqslant x < \infty$ ja $-\infty < x \leqslant 0$.

4. Leida funktsiooni

$$\log_{10}[1 - \log_{10}(x^2 - 5x + 16)]$$

määramispiirkond.

L a h e n d u s. Vaadeldav avaldis omab mõtet, kui

$$1 - \log_{10}(x^2 - 5x + 16) > 0$$

ehk

$$\log_{10}(x^2 - 5x + 16) < 1,$$

millest

$$x^2 - 5x + 16 < 10$$

ehk

$$x^2 - 5x + 6 < 0.$$

Ruutkolmliikme nullkohad on 2 ja 3. Otsitavaks määramispiirkonnaks on vahemik $2 < x < 3$.

XI p e a t ü k k.

Võrratuste tõestamine.

§ 84. Võrratuste tõestamine.

Olgu A ja B mingid antud matemaatilised avaldised, mis sisaldavad tähtargumente.

Kui argumentide kõigi lubatavate arvuliste väärtuste puhul on A ja B väärtused seotud võrratusega

$$A < B \text{ või } A > B,$$

siis öeldakse, et see võrratus on rahuldatud samaselt (antud lubatavate argumentide väärtuste puhul).

Võrratuse tõestamise all mõistetakse tavaliselt väite tõestamist,

et antud võrratus on rahuldatud s a m a s e l t temas esinevate tähtede kõigi lubatavate väärtuste puhul. Võrratuse tõestamise ülesanne on samuti analoogiline samasuse tõestamise ülesandega, nagu võrratuse lahendamise ülesanne on analoogiline võrrandi lahendamise ülesandega.

Võrratuste tõestamise üldvõtteid e i o l e v õ i m a l i k kindlaks määrata nii võrratuste eneste kui ka kasutatavate tõestusmeetodite suure mitmekesisuse tõttu. Primitiivsete võtete kõrval kasutatakse sageli teravmeelseid ja kunstlikke võtteid, nii et ei ole võimalik välja töötada kindlat retseptuuri.

§ 85. Mõned silmapaistvad võrratused.

Allpool vaatleme näiteid silmapaistvamate võrratuste tõestamisest ja iseloomulike meetodite rakendamisest.

1⁰ Tõestada, et n-i kõigi naturaalarvuliste väärtuste puhul kehtib võrratus

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}<3. \qquad (1)$$

T õ e s t u s. $n=1$ ja $n=2$ puhul on võrratus otseselt silmanähtav. Üldkuju tõestamiseks asendame nimetajais, alates neljandast liidetavast, arvud 3, 4, ..., n väiksema arvuga 2. Siis saame võrratuse

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}<\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Järelikult

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}<$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Jättes ära negatiivse liidetava $-\frac{1}{2^{n-1}}$ saame võrratuse (1), m. o. t. t.

2⁰ Tõestada võrratus

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2 \qquad (2)$$

kõigi naturaalarvuliste n-ide puhul.

Tõestus. Ülesanne on analoogiline eelmisega, kuid lahendamine toimub teisel põhimõttel. Võtame arvesse, et

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k\cdot k}<\frac{1}{(k-1)\cdot k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

Võttes järjestikuselt $k=2, 3, \ldots, n$ ja asetades võrratuse (2) vasakusse poolde saame

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2, \text{ m. o. t. t.}$$

3⁰ Summa absoluutväärtuse teoreem: *Summa absoluutväärtus ei ole suurem liidetavate absoluutväärtuste summast.*

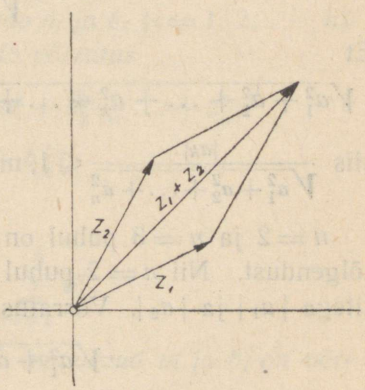
Tõestame, et mistahes reaalsete $a_1, a_2, \ldots, a_n$ puhul kehtib seos

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

Tõestus järeldub otseselt positiivsete ja negatiivsete arvude liitmise reeglist. Kui liidetavad on ühesuguse märgiga (on võimalik, et nende hulgas leidub ka võrdseid nulliga), siis võrdub summa absoluutväärtus liidetavate absoluutväärtuste summaga. Sel juhtumil saame võrduse

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

Kui liidetavate hulgas esinevad nii positiivsed kui ka negatiivsed arvud, siis summa absoluutväärtuse leidmiseks võib liita eraldi positiivsete liidetavate ja eraldi negatiivsete liidetavate absoluutväärtused ja suuremast summast lahutada väiksema. Absoluutväärtuste summa leidmiseks piisab, kui positiivsete liidetavate absoluutväärtuste summaga liita negatiivsete liidetavate absoluutväärtuste summa. Sel juhtumil saame võrratuse



Joon. 97.

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|<|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|, \text{ m. o. t. t.}$$

Nii näiteks

$|2+5+1|=8$ ja $|2|+|5|+|1|=8$ (saame võrduse).

$|2+5-1|=6$ ja $|2|+|5|+|-1|=8$ (saame võrratuse).

Tähendame siinjuures, et teoreem jääb kehtima ka kompleksliidetavate puhul. Joonisel 97 on antud teoreemi geomeetriline illustratsioon kahe liidetava kohta: $|z_1+z_2|$ on parallelogrammi diagonaali pikkus, $|z_1|+|z_2|$ on tema lähiskülgede summa; seepärast

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

Võrdus on võimalik juhtumil, kui vektorid z_1 ja z_2 on samasuunalised, ja parallelogramm muutub siis sirglõiguks.

4⁰ Tõestada võrratus

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|. \qquad (3)$$

Tõestus. Kui arvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kõik ei võrdu nulliga, siis

$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}>0$ ja *

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}=\frac{|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}=$$

$$=|a_1|\frac{|a_1|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}+|a_2|\frac{|a_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}+\ldots+$$

$$+|a_n|\frac{|a_n|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}.$$

Et

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2+\ldots+a_n^2}\geqslant\sqrt{a_k^2}\quad(\text{kus } k=1, 2, \ldots, n),$$

siis $\dfrac{|a_k|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}\leqslant 1$, millest järeldub võrratus (3), m. o. t. t.

$n=2$ ja $n=3$ puhul on võrratusele kerge anda geomeetrilist tõlgendust. Nii $n=2$ puhul ehitame täisnurkse kolmnurga kaatetitega $|a_1|$ ja $|a_2|$. Võrratus omab siis kuju

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}<|a_1|+|a_2|,$$

mis väljendab, et hüpotenuusi pikkus on väiksem kaatetite summast. Analoogiliselt $n=3$ puhul võrratus väljendab, et lõikudele

* Kui $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, siis seos (3) muutub võrduseks.

$|a_1|$, $|a_2|$ ja $|a_3|$ ehitatud risttahuka diagonaali pikkus on väiksem nende lõikude summast.

5⁰ Tõestada võrratus

$$|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}| \leqslant$$
$$\leqslant |a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|. \qquad (4)$$

Tõestus.

$$|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}| =$$
$$= \frac{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}}.$$

Kuid

$$|(a_1^2+a_2^2+\ldots.+a_n^2)-(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)| =$$
$$= |(a_1-b_1)(a_1+b_1)+(a_2-b_2)(a_2+b_2)+\ldots+$$
$$+(a_n-b_n)(a_n+b_n)| \leqslant |a_1-b_1||a_1+b_1|+$$
$$+|a_2-b_2||a_2+b_2|+\ldots+|a_n-b_n||a_n+b_n|$$

Jagades liikmeti summaga $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+$
$+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$ ja võttes arvesse, et

$$\frac{|a_k+b_k|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}} \leqslant \frac{|a_k+b_k|}{|a_k|+|b_k|} \leqslant 1,$$

saame võrratuse (4), m. o. t. t*.

6⁰ Schwarz'i võrratus. *Tähtede a_i ja b_i ($i=1, 2, \ldots, n$) kõigi reaalsete väärtuste puhul on kehtiv võrratus*

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\cdot$$
$$\cdot(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

ehk (lühendatult kirjutatud)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Võrdus on olemas ainult tingimusel, kui arvud a_i ja b_i on võrdelised, s. o.

$$a_1 = kb_1,\ a_2 = kb_2,\ \ldots,\ a_n = kb_n.$$

---

* Tõestus ei ole kasutatav, kui $a_1=a_2=\ldots=a_n=b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, kuid sel puhul saame võrduse.

Tõestus. Vaatleme avaldist

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - xb_i)^2 = (a_1 - xb_1)^2 +$$

$$+ (a_2 - xb_2)^2 + \ldots + (a_n - xb_n)^2. \qquad (5)$$

Avaldis (5) on x-i suhtes ruutkolmliige; korraldades selle hulkliikme x-i astmete järgi saame

$$x^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \qquad (6)$$

(5)-st on selge, et kolmliikme (6) väärtused on mittenegatiivsed x, a_i ja b_i kõigi reaalsete väärtuste puhul. Seepärast tema diskriminant ei ole positiivne, s. o.:

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant 0. \qquad (7)$$

Siit järeldubki Schwarz'i võrratus. Kui võrratus (7) muutub võrduseks, siis kolmliige omab kahekordset nullkohta $x = k$. Kuid avaldis (5) võib muutuda $x = k$ puhul nulliks, kui iga liidetav muutub nulliks, s. o. kui arvud a_i ja b_i on võrdelised, m. o. t. t.

7⁰ Minkovski võrratus*: *Kõigi reaalsete a_i ja b_i puhul kehtib võrratus*

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

ehk lühidalt

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_1^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Võrdus on olemas ainult siis, kui arvud a_i ja b_i on võrdelised.

---

* Täpsamalt rääkides mõistetakse Minkovski võrratuse all üldisemat seost, mille erijuhtumiks on tõestatav võrratus.

Tõestus. Tõepoolest,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2-2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\sum_{i=1}^{n}|a_i|\,|b_i|\leqslant$$

(summa absoluutväärtuse teoreemi järgi)

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}=$$

(Schwarz'i võrratuse järgi)

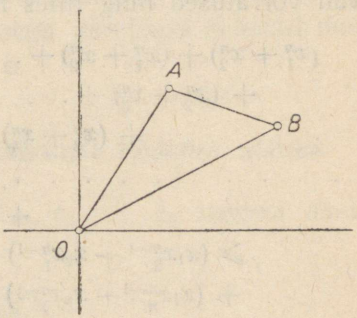
$$=\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right]^2.$$

Siit järeldubki Minkovski võrratus, m. o. t. t.

$n=2$ puhul omandab võrratus kuju

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}. \qquad (8)$$

Seda võrratust on kerge tõlgendada geomeetriliselt. Olgu $A(a_1, a_2)$ ja $B(b_1, b_2)$ tasapinna kaks punkti. Võrratus (8) väljendab, et lõikude OA ja OB summa ei ole suurem lõigust AB (joonis 98). Analoogiline tõlgendus on võrratusel $n=3$ puhul.



Joon. 98.

8⁰ *Mittenegatiivsete arvude* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *aritmeetiline keskmine ei ole väiksem nende arvude geomeetrilisest keskmisest; s. o.*

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Võrdus kehtib tingimusel $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Tõestuse teostame täieliku induktsiooni meetodil. Tõestame võrratuse kehtivust $n=2$ puhul:

$$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}. \qquad (9)$$

Tõepoolest, mistahes reaalsete x_1 ja x_2 puhul on

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geqslant 0,$$

millest

$$x_1x_2 \leqslant \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

Võttes $x_1 = \sqrt{a_1}$ ja $x_2 = \sqrt{a_2}$ saame võrratuse (9). Võrdus on võimalik ainult tingimusel $x_1 - x_2 = 0$, s. o. $x_1 = x_2$, ja järelikult $a_1 = a_2$.

Võrratuse tõestamiseks üldkujul tuletame eelnevalt mingi abivõrratuse. Kui x_1 ja x_2 on mittenegatiivsed arvud, siis $x_1 < x_2$ puhul on $x_1^{n-1} < x_2^{n-1}$; kui aga $x_1 > x_2$, siis $x_1^{n-1} > x_2^{n-1}$.

Järelikult, mistahes mittenegatiivsete x_1 ja x_2 puhul on

$$(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2) \geqslant 0 \text{ (on võrdus, kui } x_1 = x_2).$$

Avades sulud ja viies osa liikmeid üle paremale poolele saame:

$$x_1^n + x_2^n \geqslant x_1x_2^{n-1} + x_2x_1^{n-1} \text{ (on võrdus, kui } x_1 = x_2).$$

Võttes n mittenegatiivset arvu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja kirjutades vastavad võrratused ning liites nad liikmeti saame:

$$\begin{aligned}
&(x_1^n + x_2^n) + (x_1^n + x_2^n) + \ldots + (x_1^n + x_n^n) + \\
&+ (x_2^n + x_3^n) + \ldots + (x_2^n + x_n^n) + \\
&+ (x_3^n + x_4^n) + \ldots + (x_3^n + x_n^n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (x_{n-1}^n + x_n^n) \geqslant \\
&\geqslant (x_1x_2^{n-1} + x_2x_1^{n-1}) + (x_1x_3^{n-1} + x_3x_1^{n-1}) + \ldots + \\
&+ (x_1x_n^{n-1} + x_nx_1^{n-1}) + (x_2x_3^{n-1} + x_3x_2^{n-1}) + \ldots + \\
&+ (x_2x_n^{n-1} + x_nx_2^{n-1}) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (x_{n-1}x_n^{n-1} + x_nx_{n-1}^{n-1})
\end{aligned} \tag{10}$$

(on võrdus, kui $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$).

Koondades sarnased liikmed, saame:

$$\begin{aligned}
(n-1)(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n) &\geqslant x_1(x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}) + \\
&+ x_2(x_1^{n-1} + x_3^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}) + \ldots + \\
&+ x_n(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}).
\end{aligned} \tag{11}$$

Eeldame, et mistahes $n-1$ positiivse arvu aritmeetiline keskmine ei ole väiksem nende geomeetrilisest keskmisest. Järelikult erijuhtumil

$$x_2^{n-1}+x_3^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}\geqslant(n-1)x_2x_3\ldots x_n$$
$$x_1^{n-1}+x_3^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}\geqslant(n-1)x_1x_3\ldots x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_{n-1}^{n-1}\geqslant(n-1)x_1x_2\ldots x_{n-1}$$

(on võrdus, kui $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=x_n$).

Kasutades viimaseid võrratusi saame võrratust (11) muuta järgmiselt:

$$(n-1)(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n)\geqslant n(n-1)x_1x_2\ldots x_n$$

(on võrdus, kui $x_1=x_2=\ldots=x_n$).

Võttes viimases seoses $x_1^n=a_1$, $x_2^n=a_2$, $\ldots$, $x_n^n=a_n$ saame $\sqrt{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$ (on võrdus, kui $a_1=a_2=\ldots=a_n$).

Järelikult n positiivse arvu aritmeetiline keskmine ei ole väiksem nende geomeetrilisest keskmisest eeldusel, et vastav võrratus on kehtiv $n-1$ arvu puhul. Kuid $n=2$ puhul on võrratuse kehtivus kindlaks tehtud otsese kontrollimisega. Järelikult ta kehtib mistahes naturaalarvu n puhul, m. o. t. t.

§ 86. Suurimate ja väikseimate väärtuste leidmise näiteid.

Lemma 1°. *Kui n positiivse arvu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ summa omab antud väärtust S, siis korrutis*

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$$

omab suurimat väärtust, kui

$$\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_n}{m_n},\qquad(1)$$

kus $m_1, m_2, \ldots, m_n$ on mistahes antud positiivsed ratsionaalarvud.

Tõestus. Eeldame, et $m_1, m_2, \ldots, m_n$ on naturaalarvud. Vaatleme $m_1+m_2+\ldots+m_n$ arvu

$$\underbrace{\frac{x_1}{m_1},\frac{x_1}{m_1},\ldots,\frac{x_1}{m_1}}_{m_1\text{ korda}};\ \underbrace{\frac{x_2}{m_2},\frac{x_2}{m_2},\ldots,\frac{x_2}{m_2}}_{m_2\text{ korda}};\ \ldots;\ \underbrace{\frac{x_n}{m_n},\frac{x_n}{m_n},\ldots,\frac{x_n}{m_n}}_{m_n\text{ korda}}$$

ja kirjutame, et nende geomeetriline keskmine ei ole suurem nende aritmeetilisest keskmisest:

$$\sqrt[m_1+m_2+\ldots+m_n]{\left(\frac{x_1}{m_1}\right)^{m_1}\left(\frac{x_2}{m_2}\right)^{m_2}\ldots\left(\frac{x_n}{m_n}\right)^{m_n}} \leqslant \frac{m_1\frac{x_1}{m_1}+m_2\frac{x_2}{m_2}+\ldots+m_n\frac{x_n}{m_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

millest

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n} \leqslant \frac{m_1^{m_1}\cdot m_2^{m_2}\ldots m_n^{m_n}}{(\Sigma m_i)^{m_1+m_2+\ldots+m_n}} S^{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \qquad (2)$$

Suurim $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ väärtus saadakse, kui viimane võrratus muutub võrduseks, mis kujuneb tingimusel

$$\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_n}{m_n}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{m_1+m_2+\ldots m_n}=\frac{S}{\Sigma m_i}.$$

Olgu $m_1=\frac{p_1}{q_1}$, $m_2=\frac{p_2}{q_2}$, $\ldots$, $m_n=\frac{p_n}{q_n}$ murdarvud. Märgime nende murdude nimetajate väikseima ühiskordse tähega N ja vastavad laiendustegurid tähtedega $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Siis saame

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}=\sqrt[N]{x_1^{p_1d_1}x_2^{p_2d_2}\ldots x_n^{p_nd_n}}.$$

Antud summa puhul kujuneb juuritava avaldise suurim väärtus siis, kui

$$\frac{x_1}{p_1d_1}=\frac{x_2}{p_2d_2}=\ldots=\frac{x_n}{p_nd_n}.$$

Jagades nimetajad arvuga N saame seose (1), m. o. t. t.

Järeldus: kui $m_1=m_2=\ldots=m_n=1$, siis antud summa $x_1+x_2+\ldots+x_n$ puhul omab arvude korrutis $x_1x_2\ldots x_n$, kui need arvud on võrdsed, suurimat väärtust:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

Me otsisime korrutise $P=x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ maksimumi antud summa $S=x_1+x_2+\ldots+x_n$ puhul. Kirjutame võrratuse (2) ümber järgmiselt:

$$S \geqslant (m_1+m_2+\ldots+m_n)\left(\frac{P}{m_1^{m_1}+m_2^{m_2}+\ldots+m_n^{m_n}}\right)^{\frac{1}{m_1+m_2+\ldots+m_n}}.$$

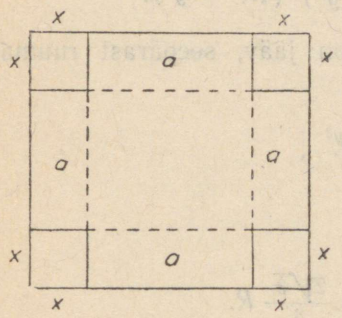
See võrratus näitab, et tingimusel (1) muutub ta võrduseks ja siis antud P puhul saab summa S väikseima väärtuse.

Antud S-i puhul P maksimumi ja antud P puhul S miinimumi leidmise ülesandeid nimetatakse vastastikuseiks. Nii ühe kui ka teise ülesande lahendus antakse tingimustega (1).

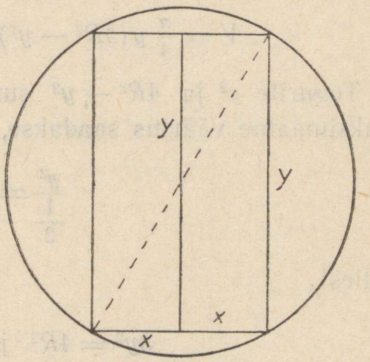
Nüüd vaatleme mõningaid lihtsaid ülesandeid.

Ülesandeid. 1. *Kõigist antud ümbermõõduga ristkülikuist leida ristkülik, mille pindala on suurim.*

Lahendus. Olgu x ja y ristküliku teineteisega risti olevate külgede pikkused, S — tema pool ümbermõõtu ja P — pindala. Siis on $x + y = S$; kuid antud summa puhul omab korrutis P suurimat väärtust, kui $x = y = \frac{S}{2}$, s. o. kui ristkülik on ruut.



Joon. 99.



Joon. 100.

Vastastikune ülesanne sõnastatakse järgmiselt: *kõigist antud pindalaga ristkülikuist leida ristkülik, mille ümbermõõt on väikseim.* Selle ülesande lahenduseks on samuti ruut.

2. *Antud ruudust küljega a lõigata nurkadest ruudud küljega x nõnda, et peale kokkumurdmist mööda punktiirjooni* (joonis 99) *saaks suurima ruumalaga karbi.*

Lahendus. Karbi põhja pindala on $(a - 2x)^2$ ja kõrgus on x. Siit leiame ruumala

$$V = x(a - 2x)^2.$$

Asetame $a - 2x = y$. Siis saame

$$2V = (2x)y^2.$$

Tegurite $2x$ ja y summa on a, järelikult $2V$ (samuti ka V) omab suurimat väärtust, kui

$$\frac{2x}{1} = \frac{y}{2}, \text{ s. o. } 2x = \frac{a-2x}{2},$$

millest $x = \frac{a}{6}$.

3. *Leida suurima ruumalaga silinder, mis on kujutatud kerasse antud raadiusega R.*

Lahendus. Olgu otsitava silindri põhja raadius x ja kõrgus y, siis $V = \pi x^2 y$. Joonisest 100, kus on kujutatud kujundi läbilõige, leiame

$$4R^2 = 4x^2 + y^2, \tag{3}$$

millest

$$V = \frac{\pi}{4} y(4R^2 - y^2) = \frac{\pi}{4} (y^2)^{\frac{1}{2}} (4R^2 - y^2).$$

Tegurite y^2 ja $4R^2 - y^2$ summa on jääv, seepärast ruumala maksimaalne väärtus saadakse, kui

$$\frac{y^2}{\frac{1}{2}} = \frac{4R^2 - y^2}{1},$$

millest

$$3y^2 = 4R^2 \text{ ja } y = \frac{2\sqrt{3}}{3} R.$$

Võrrandist (3) saame $x = \sqrt{\frac{2}{3}} R$.

4. *Kõigist antud ruumalaga risttahukaist leida väikseima täispindalaga risttahukas.*

Lahendus. Olgu x, y ja z otsitava risttahuka servad, V — tema ruumala ja $2S$ — täispindala.

Siis $V = xyz$.

Leiame miinimumi

$$S = xy + xz + yz.$$

Et V väärtus on antud, siis on samuti muutumatu $V^2 = (xy)(xz)(yz)$ väärtus. Antud korrutise puhul on summa S väikseim, kui

$$xy = xz = yz,$$

millest

$$x = y = z.$$

Järelikult antud ülesande lahendamise tulemuseks on k u u p.

Vastastikune ülesanne sõnastatakse järgmiselt: *Kõigist antud täispindalaga risttahukaist leida suurima ruumalaga risttahukas.* Selle ülesande lahendamine annab tulemusena samuti k u u b i.

AINEREGISTER.

Abel 243
absoluutväärtus 7, 200
adjunkt 88
algebra põhiteoreem 218
algebraline funktsioon 184
— summa 18
Archimedese aksioom 107
— korpus 108
argument 200
aritmeetiline juur 142
arvkorpus 24
arvkorpus, Archimedese 108
— maksimaalne arhimeedeslik 141
— järjestatud 26
— minimaalne 25
— reaalarvude 138
— vahepealne 145
arvring 24
asendusmeetod 100
assotsiatiivsus, korrutamise 14
— liitmise 11
astmefunktsioon 164

Bezout' teoreem 45
biruutvõrrandid 248

Cardano valem 242
Cramer'i reegel 83

Determinant, kolmanda järgu 86
— teise järgu 83
— võrrandisüsteemi 86
diagonaalne skeem 127
Dirichlet 29
distributiivsus (jaotuvus) 14

Eemaldamine (elimineerimine) 100, 257
eksponentfunktsioon 175
ekvivalentsed (samaväärsed) hulgad 126
— võrrandid 234
elementaarne transtsendentne funktsioon 184
elimineerimine 100, 257
esimese astme võrrand 79
Eukleidese algoritm 56

Funktsioon 28
funktsioon, algebraline 184
— astme- 164
— eksponent- 171, 175
— elementaarne transtsendentne 184
— irratsionaalne 184
— logaritm- 182
— ratsionaalne 32

Galois 244

Homogeenne hulkliige 65
— süsteem 264
Horner'i skeem 46
Hudde võte 260
hulk 6
hulkliige (polünoom) 33
hulkliige, homogeenne 65
— null- 36
— sümmeetriline 46
— taandumatu 41
— taanduv 42
— ühistegurita 56
hulkliikme aste 35
— nullkoht (lahend) 46
hulkliikmete ring 39
— samasuse teoreem 37
— suurim ühisjagaja 56
— ühisjagaja 55

Imaginaararv 194
imaginaarosa 196
imaginaartelg 200
imaginaarühik 194
irratsionaalarv 114
irratsionaalne avaldis 154
— funktsioon 184
irratsionaalsed võrrandid 265
isomorfism 194

Jaotuvus 14
järjestatud arvkorpus 26

Kaaskompleksarv (kaasarv) 196
kaheliikmelised võrrandid 243
koefitsientide võrdlusmeetod 101
kolmanda järgu determinant 86
kolmeliikmelised võrrandid 247
kommutatiivne ring 40
kommutatiivsus, korrutamise 14
— liitmise 11
kompleksarv 194
kompleksarvu trigonomeetriline kuju 202
kontiinuum 129
korrutamise assotsiatiivsus (ühenduvus) 14
— kommutatiivsus (vahetuvus) 14
kuhjuvate lõikude aksioom 108

Lagrange'i interpolatsioonivalem 51
ligikaudne kümnendväärtus 118
lihtnullkoht 219
lineaar- (esimese astme) võrrand 79
lineaarne kombinatsioon 91
liitmise assotsiatiivsus (ühenduvus) 11
— kommutatiivsus (vahetuvus) 11
logaritm 177
logaritmfunktsioon 182
logaritmimine 179
lubatavad väärtused 28
lõikude mõõtmine kümnendsüsteemis 111
lähendamisteoreem 119

Maksimaalne arhimeedeslik arvkorpus 141
matemaatiline avaldis 27
minimaalne arvkorpus 25
minimaalring 25
Minkovski võrratus 298
mittekommutatiivne ring 40
Moivre'i valem 208
monotoonsuseseadus 27
moodul (absoluutväärtus) 7, 200
murruline astendaja 162
murrulised võrrandid 251

Negatiivne astendaja 161
negatiivsed arvud 6
null-astendaja 161
nullhulkliige 36
nulliline (triviaalne) lahend 98
nullkoht 219
nullring 25
nummerduv hulk 126

Pidevuse aksioom 107
polünoom 33
positiivne reaalarv 114
positiivsed arvud 6
potentseerimine 179
pöördarv 19
pöördumatus, võrratuse 8

Ratsionaalarvude hulk 7
ratsionaalne arvvahemik 109
— funktsioon 32
— murd 70
ratsionaalse argumendiga eksponentfunktsioon 171
ratsionaalsed avaldised 31
reaalarvude hulk 116
— korpus 138
reaalosa 196
reaaltelg 200
refleksiivsus, võrduse 8
resultant 255
ringiline ümberpaigutus 78
rühmitamismeetod 66

Samased avaldised 29
samaväärsed hulgad 126
— (ekvivalentsed) võrrandid 234
sarnasus 118
Sarruse reegel 86

Schwarz'i võrratus 299
skalaarjärjestuse omadus 8
sümmeetria, võrduse 8
sümmeetriline hulkliige 64
sümmeetrilised arvud 6
— võrrandid 249

Taandamatu juhtum 242
taandumatu hulkliige 41
— murd 74
taanduv hulkliige 42
tehete skalaaromadused 26
teise ja kolmanda astme võrrandid 237
teise järgu determinant 82
teisendamine 29
tiheduse omadus 107
transfiniitsed põhiarvud 126
transitiivsus, võrduse 8
— võrratuse 8
trivaalne jagaja 41
— lahend 98
tuletatud süsteem 81
tundmatu eemaldamine (elimineerimine) 257
tähtargumendid 27
täisavaldis 33

Vahepealne arvkorpus 145
vahetuvus, korrutamise 14
— liitmise 11
vastandarvud 6
Vieta valemid 228
võrduse refleksiivsus 8
— sümmeetria 8
— transitiivsus 8
võrrandid, biruut- 248
— irratsionaalsed 265
— kaheliikmelised 243
— kolmeliikmelised 247
— lineaar- (esimese astme) 79
— murrulised 251
— samaväärsed (ekvivalentsed) 234
— sümmeetrilised 249
— teise ja kolmanda astme 237
võrrandsüsteemi determinant 83
võrrandisüsteemi lahend 80
võrratuse pöördumatus 8
— transitiivsus 8

Ühenduvus, korrutamise 14
— liitmise 11
ühise teguri sulgude ette toomise meetod 66
ühisjagaja 55
ühismõõdulised sirglõigud 105
ühismõõdutud sirglõigud 106
ühistegurita hulkliikmed 56
üksliige 34
üksühene vastavus 116

SISUKORD.

Lk.

Eessõna 3

I OSA. **RATSIONAALARVUDE KORPUS.**

I peatükk. **Ratsionaalarvude hulk.**

§ 1. Sissejuhatus 5
§ 2. Ratsionaalarvud 6
§ 3. Ratsionaalarvude võrdlemine 8
§ 4. Aritmeetilised tehted ratsionaalarvudega 10
§ 5. Ratsionaalarvude tehete reeglid 21
§ 6. Arvringid ja arvkorpused 24
§ 7. Tehete skalaaromadused 26

II peatükk. **Ratsionaalsed funktsioonid.**

§ 8. Üldmõisted 27
§ 9. Ratsionaalsed avaldised 31
§ 10. Kahe hulkliikme samasuse teoreem 35
§ 11. Hulkliikmete ring 38
§ 12. Hulkliikmete jaguvus 41
§ 13. Jagamine jäägiga 43
§ 14. Jagamine vahega $x - a$ 45
§ 15. Hulkliikme nullkohad 46
§ 16. Hulkliikme täisarvuliste nullkohtade leidmine 51
§ 17. Hulkliikme ratsionaalsete nullkohtade leidmine 54
§ 18. Kahe hulkliikme suurim ühisjagaja 55
§ 19. Hulkliikme lahutamine taandumatuiks tegureiks 58
§ 20. Mitme argumendiga hulkliikmed 62
§ 21. Hulkliikmete tegureiks lahutamise erivõtted 66
§ 22. Ratsionaalsete funktsioonide korpus 70

III peatükk. **Lineaarvõrrandite süsteemid.**

§ 23. Üldmõisted 79
§ 24. Kahe tundmatuga võrrandisüsteem 81
§ 25. Teise järgu determinandid 82

Lk.
§ 26. Cramer'i reegel 83
§ 27. Teise järgu determinantide omadused 83
§ 28. Kahe tundmatuga kahe lineaarvõrrandi süsteemi uurimine 84
§ 29. Kolmanda järgu determinandid 86
§ 30. Kolmanda järgu determinantide omadused 87
§ 31. Kolme tundmatuga kolme lineaarvõrrandi süsteemi lahendamine ja uurimine 92
§ 32. Homogeensed süsteemid 97
§ 33. Lineaarsüsteemide lahendamise elementaarsed meetodid 99

II OSA. REAALARVUDE KORPUS.

IV peatükk. Reaalarvud.

§ 34. Põhimõisted 105
§ 35. Lõikude mõõtmine kümnendsüsteemis 111
§ 36. Positiivsed reaalarvud 114
§ 37. Negatiivsed reaalarvud 115
§ 38. Reaalarvude võrdlemine 116
§ 39. Reaalarvude lähendamine (aproksimeerimine) ratsionaalarvude abil . 118
§ 40. Reaalarvude hulga tihedus 120
§ 41. Kasvavate ja kahanevate järjendite teoreemid 121
§ 42. Nummerduvad hulgad 125
§ 43. Reaalarvude hulga nummerdamatus 128

V peatükk. Tehted reaalarvudega.

§ 44. Aritmeetilised tehted reaalarvudega 129
§ 45. Reaalarvude hulk kui arvkorpus 138
§ 46. Juurimine 142
§ 47. Näiteid vahepealseist korpustest 145

VI peatükk. Elementaarsed funktsioonid.

§ 48. Hulkliikmed, ratsionaalsed funktsioonid ja lineaarvõrrandid reaalarvude korpuses 147
§ 49. Hulkliikme nullkohad reaalarvude korpuses 148
§ 50. Juured ja tehted nendega 152
§ 51. Irratsionaalsed avaldised 154
§ 52. Astme mõiste üldistamine 160
§ 53. Ratsionaalse astendajaga astmefunktsioon 164
§ 54. Ratsionaalse argumendiga eksponentfunktsioon 171
§ 55. Irratsionaalse astendajaga aste 173
§ 56. Eksponentfunktsioon 175
§ 57. Logaritmid ja nende omadused 176
§ 58. Logaritmfunktsioon 182
§ 59. Elementaarsed funktsioonid, määramispiirkond, graafikute ehitamine 183

Lk.

III OSA. **KOMPLEKSARVUDE KORPUS.**

VII peatükk. **Kompleksarvud.**

§ 60. Põhimõisted ja definitsioonid 193
§ 61. Kompleksarvude geomeetriline kujutamine 200
§ 62. Kompleksarvudega tehete geomeetriline tõlgendus. Moivre'i valem 205
§ 63. Juurimine 212

VIII peatükk. **Hulkliikmete ring kompleksarvude korpuses.**

§ 64. Algebralised funktsioonid ja lineaarvõrrandid kompleksarvude korpuses 217
§ 65. Algebra põhiteoreem 218
§ 66. Hulkliikme lahutamine lineaarseiks tegureiks 218
§ 67. Hulkliikmed reaalsete koefitsientidega 223
§ 68. Hulkliikme koefitsientide seos nullkohtadega 228

IX peatükk. **Algebralised võrrandid.**

§ 69. Võrrandite teisendamine 231
§ 70. Võrrandite samaväärsus (ekvivalentsus) 233
§ 71. Teise ja kolmanda astme võrrandid 237
§ 72. Ülesanne võrrandi lahendatavusest radikaalides. Kaheliikmelised võrrandid 242
§ 73. Võrrandite lahendamise erivõtteid 245
§ 74. Eemaldamise (elimineerimise) probleemi mõiste 254
§ 75. Kõrgema astme võrrandisüsteemide lahendamise erivõtteid 259
§ 76. Irratsionaalsete võrrandite lahendamise mõiste 265

IV OSA. **VÕRRATUSED.**

X peatükk. **Võrratuste lahendamine.**

§ 77. Põhiteoreemid 269
§ 78. Võrratuste lahendamine 271
§ 79. Esimese astme võrratused ühe tundmatuga 272
§ 80. Kõrgema astme võrratused ühe tundmatuga 276
§ 81. Mitme tundmatuga võrratuste lahendamise näiteid 282
§ 82. Absoluutväärtusi sisaldavad võrratused 288
§ 83. Elementaarsete funktsioonide määramispiirkonna leidmise näiteid . 291

XI peatükk. **Võrratuste tõestamine.**

§ 84. Võrratuste tõestamine 293
§ 85. Mõned silmapaistvad võrratused 294
§ 86. Suurimate ja väikseimate väärtuste leidmise näiteid 301

Aineregister 306

Vastutav toimetaja A. Borkvell.
Tehniline toimetaja I. Rammi.
Toimetaja J. Aud.

Ladumisele antud 14. VI 1950. Trükkimisele antud 30. VIII 1950. Trükiarv 1000. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 19,5. Arvutuspoognaid 22,55. MB-06405. Trükikoda „Hans Heidemann", Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 1828.

На эстонском языке.
С. И. Новоселов. Алгебра.

Hind rbl. 9.—

Rbl. 9.—

A-18586
8406

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00449426 8