TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatilise statistika instituut

Liis Kolberg

Krediidiswapi preemiamaksete suuruse leidmine firma struktuurimudelite korral

Magistritöö (30 EAP)
Finants- ja kindlustusmatemaatika

Juhendaja: dotsent Raul Kangro

Tartu 2015

Krediidiswapi preemiamaksete suuruse leidmine firma struktuurimudelite korral

Käesolevas magistritöös uuritakse krediidiswapi preemiamaksete suuruse leidmist. Töös kirjeldatakse krediidiswapi lepingut ning esitatakse valem preemiamakse suuruse leidmiseks. Osutub, et preemiamakse määramine taandub lepingu aluseks oleva firma laostumistõenäosuse leidmisele. Firma laostumistõenäosuse hindamiseks kirjeldatakse töös kahte firma struktuurimudelit – Mertoni mudelit ja topelteksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi mudelit. Nende mudelite raames leitakse krediidiswapi preemiamaksete suurus.

Märksõnad: *finantsmatemaatika, tuletisväärtpaberid, krediidirisk*

Credit Default Swap Premiums under Structural Models of Firm

In this master's thesis the evaluation of premium payments for credit default swap is studied. The contract of credit default swap is described and a formula for calculating the premium payments is given. It appears that the problem of calculating the premium size reduces to the computation of default probability of the underlying firm. Two structural models of firm are described to evaluate the default probability of a firm – Merton's model and double exponential jump diffusion model. Under these models, the premium payments of credit default swap are calculated.

Keywords: *financial mathematics, derivative securities, credit risk*

Sisukord

Sissejuhatus **4**

1 Vajalikud eelteadmised **6**

1.1 Riskineutraalne hindamine, Itô lemma 6

1.2 Itô lemma hüppedifusiooniprotsesside jaoks 13

2 Krediidiswapi hinnastamine **18**

3 Mertoni mudel **23**

4 Topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi mudel **29**

Kokkuvõte **41**

Lisad **44**

Sissejuhatus

Krediidiswap on vahetustehing, mille alusvaraks on võlakiri ja lepingu aluseks olevaks üksuseks on võlakirja emiteerinud firma. Krediidiswapi väärtus sõltub lepingu aluseks oleva firma maksevõimest. Lepingu ostja maksab müüjale lepingus määratud tingimustel perioodilisi preemiamakseid ning vastutasuks, juhul kui lepingu aluseks olev firma laostub (st firma ei ole võimeline oma maksekohustusi täitma), maksab müüja ostjale selle eest kompensatsiooni.

Käesolevas töös uuritakse krediidiswapi preemiamaksete suuruse määramist firma struktuurimudelite korral.

Magistritöö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis antakse lugejale vajalikud eelteadmised. Peatüki oluliseks osaks on riskineutraalse hindamise põhimõtete selgitamine ning hüppedifusiooniprotsessi mõiste ja sellega seonduvate tulemuste esitamine. Töö teises peatükis tutvustatakse krediidiswapi lepingut ning selles määratud tingimusi. Tõestatakse ka tulemus krediidiswapi preemiamakse suuruse leidmiseks. Kolmandas peatükis kirjeldatakse kõige lihtsamat firma struktuurimudelit–Mertoni mudelit. Leitakse krediidiswapi preemiamakse suurus Mertoni mudeli kontekstis. Viimases osas esitatakse detailne ülevaade topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi mudelist. Selle mudeli raames saab laostumistõenäosuse esitada topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi esimese jõudmisajana. Selle esituse kaudu leitakse krediidiswapi preemiamakse suurus, kasutades laostumistõenäosuse numbrilise lähendi leidmisel Gaver–Stehfesti algoritmi.

Krediidiswapi preemiamakse suuruse leidmiseks vastavate mudelite korral on töö lisas toodud statistikatarkvara *R* kood.

Käesolevas töös märgib $\mathcal{N}(a, b)$ normaaljaotust keskväärtusega a ja dispersiooniga b.

Sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste kohta öeldakse lühidalt ssj juhuslikud suurused.

Tähised $E_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ ja $D_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ märgivad vastavalt keskväärtust ja dispersiooni tõenäosusmõõdu $\mathbb{Q}$ suhtes.

PEATÜKK 1

Vajalikud eelteadmised

Käesolevas peatükis sõnastame töös esinevate mudelite kirjeldamiseks vajalikud mõisted ja tulemused.

1.1 Riskineutraalne hindamine, Itô lemma

Kaks põhilist märksõna, mis finantsinstrumentide hindamisel esinevad, on arbitraaživõimalus (või täpsemalt selle võimaluse puudumine) ning riskineutraalne hindamine. Arbitraaživõimaluse puudumise eeldus seab turul kaubeldavate instrumentide hindamise meetoditele kitsendused. Riskineutraalse hindamise raames leitakse suvalise kaubeldava finantsinstrumendi arbitraaživaba hind diskonteeritud väljamaksete oodatava väärtusena mingi sobiva mõõdu järgi, mida nimetatakse riskineutraalseks mõõduks.

Olgu $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ tõenäosusruum ja olgu $\{\mathscr{F}_t,\ t \geq 0\}$ sellel antud filtratsioon ehk kasvav $\mathscr{F}$ alam–σ–algebrate pere (st $\forall s \leq t$ korral $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$). Eeldame, et kõikide kaubeldavate finantsinstrumentide hinnad on kohandatud filtratsioonile $\{\mathscr{F}_t,\ t \geq 0\}$.

Olgu $r > 0$ riskivaba intressimäär.

Definitsioon 1.1. *Diskontotegur $DF(t,T)$ kajastab ajahetkel T saadava ühikulise makse väärtust ajahetkel $t \leq T$ ning leitakse valemiga*

$$DF(t,T) = e^{-r(T-t)}.$$

Seega saame ajale $t \geq 0$ diskonteeritud rahavoo ehk makse nüüdisväärtuse leida makset diskontoteguriga korrutades.

Ajahetkel t tehtava ühikulise makse väärtuse ajahetkel T ehk ühikulise makse tulevikuväärtuse saab leida valemiga

$$DF^{-1}(t,T) = e^{r(T-t)}.$$

Järgnevalt esitame riskineutraalse hindamise kirjeldamiseks vajalikud mõisted ja tulemused. Selles osas tugineme põhiliselt raamatule [3].

Edasises läheb vaja järgmisi martingaali mõiste üldistusi.

Definitsioon 1.2. *Filtratsioonile $\{\mathscr{F}_t,\ t \geq 0\}$ kohandatud protsessi $X := \{X(t),\ t \geq 0\}$ nimetatakse lokaalseks martingaaliks, kui leidub selline kasvav peatumishetkede jada T_n, $n = 1, 2, \ldots$, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral on peatatud protsess $X_t^{T_n} := \{X_{\min(t,T_n)},\ t \geq 0\}$ martingaal ja*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty\right) = 1.$$

On selge, et iga martingaal on lokaalne martingaal (piisab valida $T_n = n$).

Definitsioon 1.3 ([2, Def. 9.1])**.** *Filtratsioonile $\{\mathscr{F}_t,\ t \geq 0\}$ kohandatud cádlág protsessi $S := \{S(t),\ t \geq 0\}$ (st S on paremalt pidev ja omab vasakpoolset piirväärtust) nimetatakse semimartingaaliks, kui see on esitatav kujul*

$$S = S(0) + X + A,$$

kus $S(0)$ on $\mathscr{F}_0$–mõõtuv, X on nullist algav lokaalne martingaal ning A on nullist algav tõkestatud variatsiooniga kohandatud protsess.

Semimartingaali definitsioonist tuleneb otse, et iga lokaalne martingaal on ka semimartingaal.

Definitsioon 1.4 ([3, Def. 14.2.1])**.** *Semimartingaali S nimetatakse sigma–martingaaliks, kui leidub martingaal $M := \{M(t),\ t \geq 0\}$ ja selline martingaali*

M suhtes integreeruv positiivsete väärtustega ennustatav protsess $\phi := \{\phi(t),\ t \geq 0\}$*, et*

$$S(t) = \int_0^t \phi(s) dM(s).$$

Osutub, et iga lokaalne martingaal on ka sigma–martingaal (tuleneb raamatu [3] Lause 14.2.6 punktide (i) ja (ii) samaväärsusest). Vastupidine väide aga ei kehti (vt [3, Näide 7.3.4]).

Definitsioon 1.5. *Tõenäosusmõõtu* $\mathbb{Q}$ *nimetatakse ekvivalentseks sigma–martingaalmõõduks, kui see rahuldab järgmisi tingimusi:*

- $\mathbb{Q}$ *on ekvivalentne tõenäosusmõõduga* $\mathbb{P}$ *(tähistatakse* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$*), st*

$$\forall A \in \mathscr{F} :\ \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0,$$

- *iga turul kaubeldava instrumendi diskonteeritud väärtuse protsess on mõõdu* $\mathbb{Q}$ *suhtes sigma–martingaal.*

Analoogiliselt sõnastatakse ekvivalentne (lokaalne) martingaalmõõt ka (lokaalse) martingaali korral.

Selgitame nüüd arbitraaživõimaluse puudumise mõistet.

Tähistagu $S(t)$ aktsia (diskonteeritud) väärtust ajahetkel $t \geq 0$. Investori kauplemisstrateegia on paar $H := (x, \xi)$, kus $x \in \mathbb{R}$ on portfelli algkapitali suurus ja $\xi := \{\xi(t),\ t \geq 0\}$ on ennustatav protsess, kus $\xi(t)$ märgib investori portfellis olevate aktsiate kogust ajal t. Kauplemisstrateegiale H vastava portfelli väärtus ajahetkel $t \geq 0$ esitub kujul

$$V_H(t) = x + \int_0^t \xi(u) dS(u).$$

Definitsioon 1.6 ([11, Def. 1.6])**.** *Kui leidub selline kauplemisstrateegiate jada $H_n = (x_n, \xi_n)$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:*

- $\forall n \in \mathbb{N}$ *korral* $x_n = 0$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$ *korral leidub konstant* a_n *nii, et*

$$\mathbb{P}\left(V_{H_n}(t) \geq a_n, \forall t \geq 0\right) = 1,$$

- $\forall n \in \mathbb{N}$ *korral eksisteerib piirväärtus*

$$V_{H_n}(\infty) := \lim_{t\to\infty} V_{H_n}(t) \quad \mathbb{P}-p.k,$$

- $\forall n \in \mathbb{N}$ *korral*

$$V_{H_n}(\infty) \geq -\frac{1}{n} \quad \mathbb{P}-p.k,$$

- *leiduvad sellised konstandid* $\delta_1 > 0$ *ja* $\delta_2 > 0$, *et* $\forall n \in \mathbb{N}$ *korral*

$$\mathbb{P}\left(V_{H_n}(\infty) > \delta_1\right) > \delta_2,$$

siis öeldakse, et diskonteeritud protsessi S korral eksisteerib FLVR võimalus (ingl Free Lunch with Vanishing Risk).

Ütleme, et protsess S rahuldab NFLVR *tingimust (ingl No Free Lunch with Vanishing Risk), kui sellist kauplemisstrateegiate jada ei leidu.*

Märgime, et kui iga $t \geq 0$ korral $V_H(t) \geq a$, kus a on mingi konstant, siis öeldakse, et kauplemisstrateegia H on *a–lubatav*. Seega definitsiooni teist tingimust võib nimetada ka lubatavuse tingimuseks.

Käesolevas töös mõtleme arbitraaživõimaluse puudumise all NFLVR tingimuse täidetust.

Nüüd saame sõnastada fundamentaalteoreemi, millele tuginemine on finantsinstrumentide hindamisel standardiks. Teoreemi detailse tõestuse leiab raamatust [3, Teoreem 14.1.1].

Teoreem 1.7 (Fundamentaalteoreem varade hindamisest)**.** *Semimartingaal S rahuldab NFLVR tingimust parajasti siis, kui leidub selline tõenäosusmõõduga $\mathbb{P}$ ekvivalentne tõenäosusmõõt $\mathbb{Q}$, mille suhtes S on sigma–martingaal.*

Märgime, et S tähistab siinkohal mingi kaubeldava finantsinstrumendi diskonteeritud väärtuse protsessi. Seega ütleb fundamentaalteoreem, et turul puudub arbitraaživõimalus parajasti siis, kui suvalise kaubeldava finantsinstrumendi jaoks leidub ekvivalentne sigma–martingaalmõõt $\mathbb{Q}$.

Definitsioon 1.8. *Protsess S on lokaalselt tõkestatud, kui leidub selline kasvav peatumishetkede jada T_n, $n = 1, 2, \ldots$, mille puhul on iga $n \in \mathbb{N}$ korral peatatud martingaal $S_t^{T_n}$ ühtlaselt tõkestatud ja*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty\right) = 1.$$

Käesolevas töös eeldame, et kõikide kaubeldavate instrumentide diskonteeritud väärtuse protsessid on lokaalselt tõkestatud ning sel juhul saame kasutada järgmist fundamentaalteoreemi versiooni.

Teoreem 1.9 ([3, Järeldus 9.1.2])**.** *Lokaalselt tõkestatud semimartingaal S rahuldab NFLVR tingimust parajasti siis, kui leidub selline tõenäosusmõõduga $\mathbb{P}$ ekvivalentne tõenäosusmõõt $\mathbb{Q}$, mille suhtes S on lokaalne martingaal.*

Töös nimetame ekvivalentset lokaalset martingaalmõõtu $\mathbb{Q}$ ka *riskineutraalseks mõõduks.*

Järgmine tulemus tagab selle, et juhul kui protsess S on tõkestatud, siis fundamentaalteoreemis 1.9 võib lokaalse martingaali asendada sõnaga martingaal.

Teoreem 1.10 ([2, Teoreem 5.2])**.** *Iga tõkestatud lokaalne martingaal on martingaal.*

Seega, kui eeldame, et turg on arbitraaživaba ja mingi vaadeldava finantsinstrumendi diskonteeritud väärtuse protsess S on tõkestatud, siis fundamentaalteoreemi 1.9 põhjal leidub riskineutraalne mõõt $\mathbb{Q}$, mille suhtes instrumendi diskonteeritud väärtuse protsess S on lokaalne martingaal ning teoreemi 1.10 põhjal ka martingaal. Sellisel juhul saame martingaali definitsiooni põhjal, et finantsinstrumendi diskonteeritud väärtuse S keskväärtus on igal ajahetkel sama ehk suvalise $t \geq 0$ korral

$E_{\mathbb{Q}}(e^{-rt}S(t)) = e^{-r0}S(0) = S(0)$. Sellest võrdusest avaldub lihtsasti finantsinstrumendi S arbitraaživaba ehk riskineutraalne hind ajahetkel 0.

Mudelite kirjeldamisel on tarvis ka järgmist stohhastilist diferentsiaalarvutuse põhitulemust.

Lemma 1.11 (Itô lemma). *Olgu $f(t, y)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv kahe muutuja funktsioon ning rahuldagu protsess Y stohhastilist diferentsiaalvõrrandit*

$$dY(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dW(t),$$

kus α ja β on pidevad protsessid ning W on standardne Browni liikumine.

Siis

$$df(t, Y(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, Y(t)) + \frac{\beta(t)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, Y(t))\right)dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y(t))dY(t).$$

Järeldus 1.12. *Olgu $S(t)$ aktsia hind ajahetkel t. Eeldame, et $S(t)$ järgib geomeetrilist Browni liikumist ehk*

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW(t), \tag{1.1}$$

kus $\mu \in \mathbb{R}$ on aktsiahinna keskmise protsentuaalse kasvamise kiirus ehk trend ning $\sigma \in \mathbb{R}$ on aktsiahinna volatiilsus. Siis funktsioon

$$S(t) = S(0) \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}$$

rahuldab stohhastilist diferentsiaalvõrrandit 1.1.

Tõestus. Vaatame funktsiooni $f(t, s) = \ln(s)$ ning leiame kõigepealt $d(\ln(S(t)))$. Kuna

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, s) = \frac{1}{s},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, s) = -\frac{1}{s^2},$$

siis Itô lemma põhjal

$$\begin{aligned}
d(\ln(S(t))) &= \left(0 - \frac{\sigma^2}{2} S(t)^2 \frac{1}{S(t)^2}\right) dt + \frac{1}{S(t)} dS(t) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2} dt + \frac{1}{S(t)} [S(t)(\mu dt + \sigma dW(t))] \\
&= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW(t).
\end{aligned}$$

Integreerides viimast võrdust rajades 0–st t–ni, saame

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t), \tag{1.2}$$

millest arvu e astmesse võttes avaldub aktsiahind soovitud kujul

$$S(t) = S(0) \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)}. \qquad \square$$

Standardse Browni liikumise W puhul on iga t korral $W(t)$ normaaljaotusega $\mathcal{N}(0, t)$. Seega võrdusest 1.2 tuleneb, et logaritmitud aktsiahind $\ln(S(t))$ on iga t korral normaaljaotusega $\mathcal{N}\big(\ln(S(0)) + \big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\big) t,\ \sigma^2 t\big)$.

Lause 1.13. *Diskonteeritud geomeetriline Browni liikumine $e^{-rt}S(t)$, kus $S(t)$ käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile 1.1, on martingaal parajasti siis, kui $\mu = r$.*

Tõestus. Tõestuseks piisab näidata, et diferentsiaal $d(e^{-rt}S(t))$ sisaldab ainult martingaalosa parajasti siis, kui $\mu = r$.

Vaatame funktsiooni $f(t, s) = e^{-rt}s$. Siis Itô lemma 1.11 põhjal

$$\begin{aligned}
d\big(e^{-rt}S(t)\big) &= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t) = -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}S(t)\left[\mu dt + \sigma dW(t)\right] \\
&= e^{-rt}S(t)(\mu - r)dt + e^{-rt}S(t)\sigma dW(t),
\end{aligned}$$

mis vastab martingaalile parajasti siis, kui saadud tulemuse dt kordaja on null ehk siis, kui $\mu = r$. $\square$

1.2 Itô lemma hüppedifusiooniprotsesside jaoks

Standardsetes finantsmatemaatika õpikutes eeldatakse tihti, et turul kaubeldavate varade väärtused käituvad vastavalt geomeetrilisele Browni liikumisele. Eeldada sellist pidevat käitumist ei ole aga väga realistlik, sest tegelikkuses on võimalik olukord, kus muidu pideva protsessina käituv instrumendi väärtus muutub mingitel ajahetkedel hüppeliselt. Selline mõttekäik õigustab hüppedifusiooniprotsesside kasutamist varade väärtuse käitumise kirjeldamise juures, sest hüppedifusiooniprotsessid arvestavad ka võimalike järskude hinnamuutustega turul.

Kõigepealt toome hüppedifusiooniprotsesside defineerimiseks vajalikud mõisted ja tulemused.

Järgmised definitsioonid on esitatud juhuslike protsesside kursuse konspektis [6].

Juhuslikku protsessi $N := \{N(t),\ t \geq 0\}$ nimetatakse loendavaks protsessiks, kui $N(t)$ on mingite sündmuste toimumiste koguarv ajavahemikus $[0, t]$.

Definitsioon 1.14. *Loendavat protsessi N nimetatakse Poissoni protsessiks, kui*

- $N(0) = 0$,
- *protsessi N juurdekasvud on sõltumatud, st* $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ *korral* $N(t) - N(s)$ *ja* $N(v) - N(u)$ *on sõltumatud juhuslikud suurused (omadus kehtib ka n ajaintervalli korral),*
- *sündmuste arv mistahes lõigul pikkusega t on Poissoni jaotusega juhuslik suurus keskväärtusega* λt*, st suvalise* $s, t \geq 0$ *korral*

$$\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Seega $E(N(t)) = E(N(t) - N(0)) = \lambda t$*. Suurust* λ *nimetatakse protsessi intensiivuseks.*

Definitsiooni viimasest tingimusest tuleneb, et Poissoni protsessi juurdekasvud on statsionaarsed.

Definitsioon 1.15. *Juhuslikku protsessi $Q := \{Q(t),\, t \geq 0\}$ nimetatakse Poissoni liitprotsessiks, kui $Q(t)$ avaldub kujul*

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i,\ t > 0,$$

kus $N = \{N(t),\, t \geq 0\}$ on Poissoni protsess ja $\{J_i,\, i \geq 1\}$ on sõltumatud sama jaotusega (ssj) juhuslikud suurused, mis on sõltumatud ka protsessist N.

Juhul kui $J_i = 1$, $\forall i \geq 1$ korral, siis taandub Poissoni liitprotsess Q Poissoni protsessile N.

Poissoni liitprotsessi keskväärtuse saab leida $N(t)$ suhtes võetud tinglike keskväärtuste keskmistamise teel ehk $E(Q(t)) = E[E(Q(t)|N(t))]$. Leiame

$$\begin{aligned} E(Q(t)|N(t) = n) &= E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} J_i \middle| N(t) = n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} J_i \middle| N(t) = n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(J_i|N(t) = n) = \sum_{i=1}^{n} E(J_i) = n \cdot E(J_1), \end{aligned}$$

kus eelviimane võrdus tuleneb J_i ja $N(t)$ sõltumatuse eeldusest ning viimane võrdus tuleneb sellest, et J_i, $i \geq 1$, on ssj juhuslikud suurused.

Seega $E(Q(t)|N(t)) = N(t)E(J_1)$, millest keskmistamisega üle $N(t)$ saame Poissoni liitprotsessi keskväärtuse $E(Q(t)) = \lambda t E(J_1)$.

Järgmised kaks tulemust ja nende tõestused leiab raamatu [12] peatükist 11.3.

Lause 1.16. *Olgu $Q(t)$ Poissoni liitprotsess. Siis protsess $Q(t) - \lambda t E(J_1)$ on martingaal.*

Esitame ka valemi Poissoni liitprotsessi momente genereeriva funktsiooni leidmiseks.

Lause 1.17. *Tähistagu $m_{J_1}(\theta) := E(e^{\theta J_1})$ ssj juhuslike suuruste J_i momente genereerivat funktsiooni. Siis Poissoni liitprotsessi $Q(t)$ momente genereeriv funktsioon avaldub kujul*

$$m_Q(\theta) := E(e^{\theta Q(t)}) = e^{\lambda t (m_{J_1}(\theta) - 1)}.$$

Toome nüüd hüppedifusiooniprotsessi mõiste ning sõnastame Itô lemma hüppedifusiooniprotsesside jaoks. Selleks tugineme raamatule [4, lk 432–433].

Definitsioon 1.18. *Olgu* $W := \{W(t),\ t \geq 0\}$ *standardne Browni liikumine ja* $N := \{N(t),\ t \geq 0\}$ *Poissoni protsess. Olgu* $J_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ *hüpetele vastavad juhuslikud suurused. Protsessi* $Z := \{Z(t),\ t \geq 0\}$, *kus*

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s) + \int_0^t c(s)(J_{N(s)} - 1)dN(s), \tag{1.3}$$

kus $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ *on* $Z(t)$*–st ja ajast t sõltuvad funktsioonid, nimetatakse hüppedifusiooniprotsessiks.*

Märgime, et protsessi 1.3 viimane komponent tähistab võrdust

$$\int_0^t c(s)(J_{N(s)} - 1)dN(s) = \sum_{i=1}^{N(t)} c(T_i)(J_i - 1),$$

kus $N(t)$ on enne ajahetke t toimunud hüpete arvu loendav protsess ning $T_i,\ i = 1, \ldots, N(t)$, on i–nda hüppe toimumise aeg.

Kui hüppedifusiooniprotsessi difusiooni osa on kirjeldatud geomeetrilise Browni liikumise poolt, siis avaldub see kujul

$$dZ(t) = \mu Z(t-)dt + \sigma Z(t-)dW(t) + Z(t-)(J_{N(t)} - 1)dN(t), \tag{1.4}$$

kus $Z(t-)$ tähistab protsessi väärtust vahetult enne hüppe toimumist ajahetkel t ning μ ja σ on vastavalt protsessi $Z(t)$ trend ja volatiilsus.

Seega, kui ajahetkel t toimub hüpe, siis vastava hüppe suurus antud juhul on $Z(t-)(J_{N(t)} - 1)$ ehk $J_{N(t)}$ tähistab protsentuaalset hüppe ulatust:

$$Z(t) = Z(t-) + Z(t-)(J_{N(t)} - 1) = Z(t-)(1 + J_{N(t)} - 1) = Z(t-)J_{N(t)}.$$

Sõnastame nüüd Itô lemma 1.11 hüppedifusiooniprotsesside juhul.

Lemma 1.19 (Itô lemma hüppedifusiooniprotsesside jaoks)**.** *Olgu Z definitsioonis 1.18 esitatud kujul hüppedifusiooniprotsess ning olgu $f(t,z)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon.*

Siis

$$
\begin{aligned}
df(t,Z(t)) = &\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,Z(t-)) + a(t)\frac{\partial f}{\partial z}(t,Z(t-)) + \frac{b(t)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t,Z(t-))\right)dt \\
&+ b(t)\frac{\partial f}{\partial z}(t,Z(t-))dW(t) + [f(t,Z(t-)+c(t)(J_{N(t)}-1)) - f(t,Z(t-))]dN(t).
\end{aligned}
$$

Järeldus 1.20. *Olgu Z hüppedifusiooniprotsess, mis käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile*

$$dZ(t) = \mu Z(t-)dt + \sigma Z(t-)dW(t) + Z(t-)(J_{N(t)}-1)dN(t).$$

Siis funktsioon

$$Z(t) = Z(0)\cdot e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W(t)}\prod_{i=1}^{N(t)} J_i$$

on selle stohhastilise diferentsiaalvõrrandi lahend.

Tõestus. Vaatame funktsiooni $f(z)=\ln(z)$. Itô lemma 1.19 põhjal

$$
\begin{aligned}
d(\ln(Z(t))) &= \left(\frac{1}{Z(t-)}Z(t-)\mu - \frac{1}{Z(t-)^2}\frac{Z(t-)^2\sigma^2}{2}\right)dt + \frac{1}{Z(t-)}Z(t-)\sigma dW(t) \\
&\quad + [\ln\big(Z(t-)+(J_{N(t)}-1)Z(t-)\big) - \ln(Z(t-))]dN(t) \\
&= \left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t) + \ln(J_{N(t)})dN(t).
\end{aligned}
$$

Integreerides saadud tulemust rajades 0–st t–ni, saame

$$\ln(Z(t)) = \ln(Z(0)) + \left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)}\ln(J_i)$$

ning võttes saadud võrduse mõlemad pooled arvu e astmesse jõuame soovitud tulemuseni:

$$Z(t) = Z(0) \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)} \prod_{i=1}^{N(t)} J_i. \qquad \square$$

Lause 1.21. *Diskonteeritud hüppedifusiooniprotsess $e^{-rt}Z(t)$, kus $Z(t)$ käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile 1.4, on martingaal parajasti siis, kui $\mu = r - \lambda(E(J_1) - 1) = r - \lambda\zeta$, kus $\zeta := E(J_1) - 1$.*

Tõestus. Tõestuseks piisab näidata, et diferentsiaal $d(e^{-rt}Z(t))$ sisaldab ainult martingaalosa parajasti siis, kui $\mu = r - \lambda\zeta$.

Enne tõestuse juurde asumist paneme tähele, et $J_{N(t)}dN(t)$ on samaväärne tähisega $dQ(t)$, kus $Q(t)$ on Poissoni liitprotsess.

Vaatame nüüd funktsiooni $f(t,z) = e^{-rt}z$. Siis Itô lemma 1.19 põhjal

$$\begin{aligned}
d\left(e^{-rt}Z(t)\right) &= \left(-re^{-rt}Z(t-) + \mu e^{-rt}Z(t-)\right)dt + e^{-rt}\sigma Z(t-)dW(t) \\
&\quad + \left[e^{-rt}\left(Z(t-) + Z(t-)(J_{N(t)} - 1)\right) - e^{-rt}Z(t-)\right]dN(t) \\
&= e^{-rt}Z(t-)(\mu - r)dt + e^{-rt}\sigma Z(t-)dW(t) + e^{-rt}Z(t-)J_{N(t)}dN(t) \\
&= e^{-rt}Z(t-)(\mu - r)dt + e^{-rt}\sigma Z(t-)dW(t) + e^{-rt}Z(t-)dQ(t) \\
&= e^{-rt}Z(t-)(\mu - r)dt + e^{-rt}\sigma Z(t-)dW(t) \\
&\quad + e^{-rt}Z(t-)d\left(Q(t) - \lambda\zeta t + \lambda\zeta t\right) \\
&= e^{-rt}Z(t-)(\mu - r + \lambda\zeta)dt + e^{-rt}\sigma Z(t-)dW(t) + e^{-rt}Z(t-)d\left(Q(t) - \lambda\zeta t\right).
\end{aligned}$$

Lause 1.16 põhjal on $Q(t) - \lambda\zeta t$ martingaal. Seega $d(e^{-rt}Z(t))$ sisaldab ainult martingaalosa parajasti siis, kui selle esituses on dt kordaja null ehk parajasti siis, kui $\mu - r + \lambda\zeta = 0$, mis on samaväärne võrdusega $\mu = r - \lambda\zeta$. $\square$

PEATÜKK 2

Krediidiswapi hinnastamine

Käesolevas peatükis kirjeldame krediidiswapi lepingut ning esitame tulemuse krediidiswapi õiglase hinna leidmiseks. Kirjeldus tugineb raamatul [8, lk 386–388] ja ülevaatel [7].

Krediididerivatiiv on tuletisväärtpaber, mille väärtus sõltub lepingu aluseks oleva üksuse krediidiriskist. Krediidirisk on risk, mis tuleneb lepingu vastaspoole kohustuste mittetäitmisest. Näiteks võib juhtuda, et võlakirja emiteerinud firma ei ole laostumise tõttu võimeline investori ees oma kohustusi täitma. Üldjuhul ongi krediididerivatiivi alusvaraks võlakiri ning vastavaks üksuseks võlakirja emiteerinud firma.

Tuntuimaks krediididerivatiiviks on krediidiswap (ingl *Credit Default Swap* ehk CDS). Käesolevas töös vaatame krediidiswapi lepingut, mille aluseks on võlakiri ning aluseks olevaks üksuseks võlakirja emiteerinud firma. Ütleme, et firma on laostunud, kui ta ei ole võimeline võlakirjaga kaasnevaid kohustusi täitma.

Üldjoontes on krediidiswap vahetusleping, mis pakub kaitset lepingu aluseks oleva firma laostumise vastu. Seega toimib krediidiswap kui krediidiriski kindlustusleping. Krediidiswapi lepingus on kaks osapoolt – kaitse ostja ja kaitse müüja. Kaitse ostja maksab müüjale vastavalt lepingus varem kokkulepitud tingimustele perioodilisi preemiamakseid seni, kuni lepingu aluseks olev firma laostub või kuni leping aegub. Kui firma laostub enne lepingu aegumistähtaega, siis krediidiswapi müüja on kohustatud lepingu ostjale maksma selle eest kompensatsiooni. Kui firma ei laostu lepingu kehtivusaja jooksul, siis müüjal väljamakseid teha ei tule.

Standardiks on, et preemiamakse suurus esitatakse protsendina lepingu aluseks oleva võlakirja nimiväärtusest. Tavaliselt sõlmitakse krediidiswapi lepingud aegumistähtajaga vahemikust 1–10 aastat, kõige rohkem esineb 5-aastaseid lepinguid.

Olgu $r > 0$ riskivaba intressimäär.

Eeldame, et turul esinevad kaubeldavad protsessid on kõik lokaalselt tõkestatud ning, et turul puuduvad arbitraaživõimalused. Fundamentaalteoreemi 1.9 põhjal leidub siis riskineutraalne mõõt $\mathbb{Q}$, mille suhtes krediidiswap on lokaalne martingaal.

Olgu antud täitmistähtajaga T krediidiswapi leping, mille aluseks on mingi konkreetne firma ja selle firma poolt emiteeritud võlakiri. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et võlakirja nimiväärtus on 1 rahaühikut.

Olgu lepingus määratud perioodilise preemiamakse suurus $\mathbb{S}$ ning preemiamaksete tähtajad $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_K = T$. Swapilepingute puhul on tavaks sõlmida leping swapimääraga, mille korral swap on väärtusetu. Seega määrame krediidiswapi preemiamakse suuruse tingimusest, et krediidiswapi hind lepingu sõlmimise hetkel $t = 0$ on 0.

Tähistagu $R \in [0,1]$ võlakirja protsentuaalset taastumismäära. Märgime, et laostumisest tuleneva võimaliku kahju suurus avaldub taastumismäära abil kujul $1-R$. Sellega määratakse ka kompensatsioonimakse suuruseks $1 - R$.

Märkigu τ ajahetke, mil vaatlusalune firma laostub. Märgime, et τ on juhuslik suurus. Laostumise sündmus defineeritakse erinevate mudelite korral erinevalt, seega täpsustame seda konkreetsete mudelite juures. Tähistagu $\mathbb{Q}(\tau \leq t)$ riskineutraalset tõenäosust, et firma laostub enne ajahetke $t \leq T$.

Eelnevalt sõnastatud kirjelduse põhjal esitame nüüd teoreemi krediidiswapi preemiamakse suuruse leidmiseks lepingu sõlmimise ajahetkel $t = 0$. See tulemus on esitatud ka artiklis [13].

Teoreem 2.1 (Krediidiswapi preemia, [13, Teoreem 1])**.** *Olgu aegumistähtajaga T krediidiswapi leping sõlmitud krediidiriski kaitse ostja ja krediidiriski kaitse müüja poolt* *ajahetkel $t = 0$. Siis saab krediidiswapi preemiamakse suuruse $\mathbb{S}$ ajahetkel $t = 0$ leida järgmiselt*

$$\mathbb{S} = \frac{(1-R)\displaystyle\int_0^T e^{-rt} d\mathbb{Q}(\tau \le t)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{K} e^{-rt_i}[1-\mathbb{Q}(\tau \le t_i)]}, \tag{2.1}$$

kus K on krediidiriski kaitse ostja võimalike preemiamaksete arv kaitse müüjale enne lepingu aegumistähtaega ning $t_1 < t_2 < \cdots < t_K = T$ on vastavad maksetähtajad.

Tõestus. Tõestuses vaatame krediidiswapi väärtust krediidiswapi omaniku jaoks.

Krediidiswapi aegumistähtajal T on teada, kas ajavahemikul $[0, T]$ on lepingu aluseks olev firma laostunud või mitte. Seega on teada ka kõik selle perioodi jooksul tehtud preemia- ja kompensatsioonimaksed.

Tähistagu $X(t)$ krediidiswapi väärtust ajahetkel $t \in [0, T]$ ning märkigu $\mathbb{S}$ preemiamakse suurust. Lepingu aegumistähtajal T on krediidiswapi väärtus $X(T)$ lepingu ostja jaoks

$$X(T) = \sum_{i=1}^{K} -\mathbb{S}e^{r(T-t_i)}\mathbb{1}_{\{\tau > t_i\}} + (1-R)e^{r(T-\tau)}\mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}, \tag{2.2}$$

kus $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ tähistab indikaatorfunktsiooni.

Võrdus 2.2 kirjeldab perioodi $(0, T]$ jooksul tehtavaid makseid. Juhul kui krediidiswapi lepingu aluseks olev firma ei laostu enne lepingu aegumistähtaega T, siis maksab lepingu ostja igal määratud maksetähtajal $t_1 < t_2 < \cdots < t_K = T$ preemiat suuruses $\mathbb{S}$ lepingu müüjale ning müüjal väljamakseid ei ole. Juhul, kui krediidiswapi lepingu kehtivuse perioodi mingil ajahetkel lepingu aluseks olev firma laostub, st $\tau \le T$, siis kaitse müüja on kohustatud maksma lepingus määratud kompensatsiooni suuruses $1 - R$ ning laostumishetkele järgneval maksetähtajal kaitse ostja preemiat enam ei maksa.

Analoogse aruteluga saab leida lepingu väärtuse lepingu müüja jaoks. Sellisel juhul on krediidiswapi väärtus ajahetkel T järgmine:

$$X(T) = \sum_{i=1}^{K} \mathbb{S}e^{r(T-t_i)}\mathbb{1}_{\{\tau > t_i\}} - (1-R)e^{r(T-\tau)}\mathbb{1}_{\{\tau \le T\}}.$$

Kuna eeldame, et turg on arbitraaživaba ja kuna krediidiswapi väärtus on tõkestatud, siis fundamentaalteoreemi 1.9 põhjal leidub riskineutraalne mõõt $\mathbb{Q}$, mille suhtes krediidiswapi diskonteeritud väärtus on lokaalne martingaal. Teoreemist 1.10 tuleneb, et iga tõkestatud lokaalne martingaal on martingaal ning seega krediidiswapi diskonteeritud väärtus on ka martingaal.

Nüüd saame martingaali definitsiooni põhjal, et krediidiswapi hind ajal 0 avaldub keskväärtusena krediidiswapi diskonteeritud väärtusest:

$$e^{-r0}X(0) = E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-rT}X(T) \mid \mathscr{F}_0\right) = E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-rT}X(T)\right).$$

Tõenäosusteooriast on teada, et iga $A \in \mathscr{F}$ korral $E_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{Q}(A)$. Seega, kasutades nüüd keskväärtuse definitsiooni ja lineaarsuse omadust, kehtivad järgmised võrdused

$$\begin{aligned}
X(0) &= E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-rT}X(T)\right) = E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-rT}\Big(\sum_{i=1}^{K} -\mathbb{S}e^{r(T-t_i)}\mathbb{1}_{\{\tau>t_i\}} + (1-R)e^{r(T-\tau)}\mathbb{1}_{\{\tau\le T\}}\Big)\right) \\
&= E_{\mathbb{Q}}\left(-\mathbb{S}\sum_{i=1}^{K} e^{-rt_i}\mathbb{1}_{\{\tau>t_i\}} + (1-R)e^{-r\tau}\mathbb{1}_{\{\tau\le T\}}\right) \\
&= E_{\mathbb{Q}}\left(-\mathbb{S}\sum_{i=1}^{K} e^{-rt_i}\mathbb{1}_{\{\tau>t_i\}}\right) + E_{\mathbb{Q}}\left((1-R)e^{-r\tau}\mathbb{1}_{\{\tau\le T\}}\right) \\
&= -\mathbb{S}\sum_{i=1}^{K} e^{-rt_i}E_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{\tau>t_i\}}\right) + (1-R)E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-r\tau}\mathbb{1}_{\{\tau\le T\}}\right) \\
&= -\mathbb{S}\sum_{i=1}^{K} e^{-rt_i}\mathbb{Q}(\tau>t_i) + (1-R)\int_0^T e^{-rt}d\mathbb{Q}(\tau\le t) \\
&= -\mathbb{S}\sum_{i=1}^{K} e^{-rt_i}[1-\mathbb{Q}(\tau\le t_i)] + (1-R)\int_0^T e^{-rt}d\mathbb{Q}(\tau\le t).
\end{aligned}$$

Kuna krediidiswapi preemiamakse suuruse määrame tingimusest, et lepingu väärtus ajal $t=0$ on 0 ehk $X(0)=0$, siis kehtivad võrdused

$$0 = X(0) = -\mathbb{S}\sum_{i=1}^{K} e^{-rt_i}[1-\mathbb{Q}(\tau\le t_i)] + (1-R)\int_0^T e^{-rt}d\mathbb{Q}(\tau\le t)$$

ning siit avaldub krediidiswapi preemiamakse suurus $\mathbb{S}$ kujul

$$\mathbb{S} = \frac{(1-R)\displaystyle\int_0^T e^{-rt} d\mathbb{Q}(\tau \leq t)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{K} e^{-rt_i}\left[1-\mathbb{Q}(\tau \leq t_i)\right]}. \qquad \square$$

Teoreemist 2.1 ilmneb, et krediidiswapi preemiamakse suuruse leidmine taandub firma laostumistõenäosuse leidmisele. Järgnevates peatükkides uurimegi kahte mudelit, milles kirjeldatakse laostumise sündmus ning mida kasutades saame leida laostumistõenäosuse, et leida krediidiswapi preemiamakse suurus.

PEATÜKK 3

Mertoni mudel

Laias laastus jagunevad firma laostumise kirjeldamiseks kasutatavad mudelid kaheks, struktuurimudelid ja taandatud kujul mudelid. Taandatud kujul mudelites käsitletakse laostumist kui ettenägematut sündmust, struktuurimudelites defineeritakse aga laostumine juba mudeli kirjelduses, kasutatades selleks firma kapitali struktuuri kirjeldavaid muutujaid. Struktuurimudelite korral on läbivaks põhimõtteks defineerida laostumine olukorrana, kus firma varade väärtus ei ole firma võlgnevuste katmiseks piisav. Kirjanduses nimetatakse struktuurimudeleid ka firmaväärtuse mudeliteks.

Järgnevalt esitame firma laostumistõenäosuse hindamiseks kõige lihtsama struktuurimudeli. Mudeli esitas Robert Merton oma 1974. aasta artiklis [9] ning seda peetakse struktuurimudelite aluseks. Toodud Mertoni mudeli kirjeldus põhineb raamatul [8, lk 331–334].

Eeldame, et turul ei ole arbitraaživõimalusi ning turul esinevad protsessid on lokaalselt tõkestatud. Fundamentaalteoreemi 1.9 põhjal leidub siis riskineutraalne mõõt $\mathbb{Q}$, mille suhtes suvalise turul kaubeldava finantsinstrumendi diskonteeritud väärtus on lokaalne martingaal.

Eeldame veel, et krediidiswapi lepingu aluseks oleval firmal on ainult üks kohustus. Nimelt ajahetkel T on firmal kohustus tasuda võlgnevus suuruses D. Muudel ajahetkedel firmal kohustusi ei ole. Seega sarnaneb firma võlgnevuste väärtus oma käitumiselt täitmistähtajaga T nullkupongvõlakirjale, mille nimiväärtus on D.

Olgu firma võlgnevuste täitmistähtaeg T ka krediidiswapi lepingu aegumistähtajaks.

Tähistagu $V(t)$ firma varade väärtust ajal $t \in [0, T]$. Eeldame, et firma varad on turul kaubeldavad ning firma varade väärtuse protsess järgib stohhastilist diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = r\,dt + \sigma_{\mathrm{V}} dW(t),$$

kus r on riskivaba intressimäär, $\sigma_{\mathrm{V}} > 0$ on firma varade väärtuse volatiilsus ning $W(t)$ on standardne Browni liikumine riskineutraalse mõõdu $\mathbb{Q}$ suhtes.

Defineerime nüüd firma laostumishetke.

Ütleme, et firma laostub, kui ajahetkel T ei ole firma varade väärtus $V(T)$ piisav, et tasuda võlgnevus suuruses D. Seega saab selle mudeli kirjelduse põhjal firma laostuda vaid ajahetkel T ning firma laostumishetk τ esitub kujul

$$\tau = T\mathbb{1}_{\{V(T)\le D\}} + \infty\mathbb{1}_{\{V(T)>D\}}.$$

Paneme tähele, et $\tau = T$ parajasti siis, kui $V(T) \le D$ ning seega riskineutraalne laostumistõenäosus $\mathbb{Q}(\tau = T)$ on samaväärne tõenäosusega $\mathbb{Q}(V(T) \le D)$. Leiamegi nüüd laostumistõenäosuse $\mathbb{Q}(V(T) \le D)$.

Võttes järelduses 1.12 $\mu = r$ saame, et logaritmitud firma varade väärtus on kujul

$$\ln(V(t)) = \ln(V(0)) + \left(r - \frac{\sigma_{\mathrm{V}}^2}{2}\right)t + \sigma_{\mathrm{V}} W(t).$$

Kuna iga t korral on $W(t)$ normaaljaotusega $\mathcal{N}(0, t)$, siis on logaritmitud firma varade väärtus $\ln(V(t))$ iga t korral normaaljaotusega $\mathcal{N}\big(\ln(V(0)) + \big(r - \frac{\sigma_{\mathrm{V}}^2}{2}\big)t,\, \sigma_{\mathrm{V}}^2 t\big)$.

Kasutades nüüd logaritmitud firma varade väärtuse jaotust saame standardiseerides, et vastav riskineutraalne laostumistõenäosus esitub kujul

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}(V(T) \leq D) &= \mathbb{Q}(\ln(V(T)) \leq \ln D) \\
&= \mathbb{Q}\left(\frac{\ln(V(T)) - \ln(V(0)) - \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \leq \frac{\ln(D) - \ln(V(0)) - \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \right) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln(D) - \ln(V(0)) - \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \right),
\end{aligned}
$$

kus $\Phi(\cdot)$ tähistab standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni.

Lause 3.1. *Olgu aegumistähtajaga T krediidiswapi leping sõlmitud ajal $t = 0$. Kasutades laostumistõenäosuse hindamiseks Mertoni mudelit, avaldub krediidiswapi preemiamakse $\mathbb{S}$ kujul*

$$
\mathbb{S} = \frac{e^{-rT}(1-R)\Phi(d_0)}{\sum_{i=1}^{K-1} e^{-rt_i} + e^{-rT}\Phi(-d_0)},
$$

kus K on krediidiriski kaitse ostja preemiamaksete arv kaitse müüjale enne lepingu aegumistähtaega, $t_1 < t_2 < \cdots < t_{K-1} < t_K = T$ on vastavad maksetähtajad ning

$$
d_0 := \frac{\ln(D) - \ln(V(0)) - \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}.
$$

Tõestus. Kuna Mertoni mudelis saab laostumine toimuda vaid aegumistähtajal T, siis maksab krediidiswapi ostja igal ajale T eelneval maksetähtajal $t_i, i = 1, \ldots, K-1$, preemiat $\mathbb{S}$. Kui nüüd ajahetkel T vaatlusalune firma laostub, siis maksab krediidiswapi müüja ostjale kompensatsiooni lepingus määratud suuruses $1 - R$ ning ostja sellel hetkel enam preemiat ei maksa.

Seega on ostja jaoks sellise krediidiswapi väärtus ajahetkel T järgmine:

$$
\begin{aligned}
X(T) &= \sum_{i=1}^{K-1} -\mathbb{S}e^{r(T-t_i)} - \mathbb{S}e^{r0}\mathbb{1}_{\{\tau \neq T\}} + (1-R)\mathbb{1}_{\{\tau = T\}} \\
&= \sum_{i=1}^{K-1} -\mathbb{S}e^{r(T-t_i)} - \mathbb{S}\mathbb{1}_{\{V(T) > D\}} + (1-R)\mathbb{1}_{\{V(T) \leq D\}}.
\end{aligned}
$$

Kuna eeldame, et turg on arbitraaživaba ja kuna krediidiswapi väärtus on tõkestatud, siis fundamentaalteoreemi 1.9 põhjal leidub riskineutraalne mõõt $\mathbb{Q}$, mille suhtes krediidiswapi diskonteeritud väärtus on lokaalne martingaal. Teoreemist 1.10 tuleneb, et iga tõkestatud lokaalne martingaal on martingaal ning seega krediidiswapi diskonteeritud väärtus on ka martingaal.

Kasutades martingaali definitsiooni, keskväärtuse lineaarsust ja standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni omadust $1-\Phi(d) = \Phi(-d)$ saame, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}
e^{-r0}X(0) &= E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-rT}X(T)\right) = E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-rT}\left(\sum_{i=1}^{K-1} -\mathbb{S}e^{r(T-t_i)} - \mathbb{S}\mathbb{1}_{\{V(T)>D\}} + (1-R)\mathbb{1}_{\{V(T)\le D\}}\right)\right)\\
&= E_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^{K-1} -\mathbb{S}e^{-rt_i} - e^{-rT}\mathbb{S}\mathbb{1}_{\{V(T)>D\}} + e^{-rT}(1-R)\mathbb{1}_{\{V(T)\le D\}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{K-1} -\mathbb{S}e^{-rt_i} - e^{-rT}\mathbb{S}E_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{V(T)>D\}}) + e^{-rT}(1-R)E_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{V(T)\le D\}})\\
&= \sum_{i=1}^{K-1} -\mathbb{S}e^{-rt_i} - e^{-rT}\mathbb{S}\cdot\mathbb{Q}(V(T)>D) + e^{-rT}(1-R)\mathbb{Q}(V(T)\le D)\\
&= \sum_{i=1}^{K-1} -\mathbb{S}e^{-rt_i} - e^{-rT}\mathbb{S}\big(1-\mathbb{Q}(V(T)\le D)\big) + e^{-rT}(1-R)\mathbb{Q}(V(T)\le D)\\
&= -\mathbb{S}\left(\sum_{i=1}^{K-1} e^{-rt_i} + e^{-rT}\big(1-\Phi(d_0)\big)\right) + e^{-rT}(1-R)\Phi(d_0)\\
&= -\mathbb{S}\left(\sum_{i=1}^{K-1} e^{-rt_i} + e^{-rT}\Phi(-d_0)\right) + e^{-rT}(1-R)\Phi(d_0),
\end{aligned}$$

kus

$$d_0 := \frac{\ln(D) - \ln(V(0)) - \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}.$$

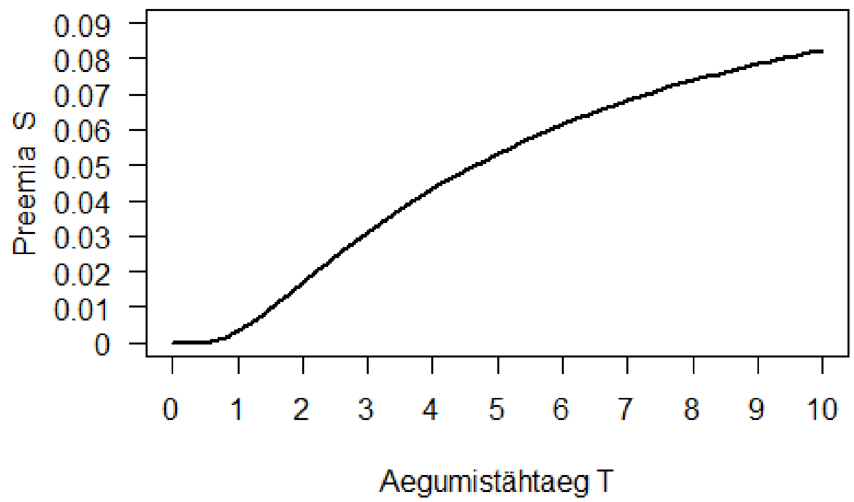
Nagu eelmises peatükis öeldud, siis leiame krediidiswapi preemiamakse suuruse tingimusest, et lepingu sõlmimise hetkel on leping väärtusetu ehk $X(0) = 0$. Seega saame eelmisi võrdusi kasutades avaldada krediidiswapi preemiamakse suuruse $\mathbb{S}$ võrdusest

$$0 = -\mathbb{S}\left(\sum_{i=1}^{K-1} e^{-rt_i} + e^{-rT}\Phi(-d_0)\right) + e^{-rT}(1-R)\Phi(d_0)$$

ning see on

$$\mathbb{S} = \frac{e^{-rT}(1-R)\Phi(d_0)}{\sum_{i=1}^{K-1} e^{-rt_i} + e^{-rT}\Phi(-d_0)}. \qquad \square$$

Järgmine joonis kirjeldab Mertoni mudeli raames leitud krediidiswapi preemiamakse suuruse $\mathbb{S}$ muutumist sõltuvalt lepingu aegumistähtajast T.



Joonis 3.1: Krediidiswapi preemiamakse suurus $\mathbb{S}$ Mertoni mudeli korral: $r = 0.05$, $R = 0.25$, $K = 4$, $V(0) = 160$, $D = 40$, $\sigma_V = 0.6$.

On selge, et kirjeldatud Mertoni mudelis on mitmeid puudujääke. Suurimaks puuduseks on see, et mudelis defineeritakse firma laostumine vaid võlgnevuste lõpptähtajal T. Seega seda, mis toimub firmas vahepealsel perioodil $(0, T)$ mudel arvesse ei võta.

Mertoni mudelis eeldatud firma võlgnevuste struktuur ühe nullkupongvõlakirjana on samuti vastuolus tegelikkusega. Nimelt on tavapärane, et firma võtab erinevatel ajahetkedel laenu juurde ning seega käitub firma võlgnevuste väärtus pigem dünaamilise protsessina.

Lisaks on mudelis eeldatud, et firma varad on turul kaubeldavad. Reaalsel turul saab küll vaadelda firma aktsiate väärtust, kuid firma kohustuste kohta ei ole info nii lihtsasti kättesaadav ning seega ei ole võimalik firma varadele finantsturult väärtusi saada. Sellegipoolest kasutatakse seda eeldust laialdaselt mitmesuguste firma varadest sõltuvate finantsinstrumentide hinnastamisel.

Puudustest hoolimata on Mertoni mudeli kirjelduses selgelt näha näitajad, mille põhjal võiks laostumise sündmuse toimumist defineerida, milliseid näitajaid peaks struktuurimudelis modelleerima ning milliseid protsesse võiks selleks kasutada. Mertoni mudelile järgnevad struktuurimudelid on üle võtnud firma laostumise definitsiooni ning samuti eeldavad need mudelid, et firma varad on kaubeldavad.

PEATÜKK 4

Topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi mudel

Käesolevas peatükis vaatame mudelit, milles krediidiswapi aluseks oleva firma varade väärtus käitub vastavalt hüppedifusiooniprotsessile, kus logaritmitud hüppe suurus on topelt-eksponentjaotusega, ning firma võlgnevuste väärtus järgib geomeetrilist Browni liikumist. Märgime, et lisaks topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsesside kasutamisele on vaadeldava mudeli oluliseks osaks ka võlgnevuste väärtuse juhusliku käitumise eeldus. Peatükk põhineb Yang *et al.* 2014. aastal ilmunud artiklil [13].

Järgnevalt täpsustame vaatlusaluse mudeli kirjeldust.

Olgu W_{V} ja W_{D} kaks standardset Browni liikumist riskineutraalse mõõdu $\mathbb{Q}$ suhtes ning olgu $\rho \in [0,1]$ nendevaheline korrelatsioonikoefitsient. Seega

$$dW_{\mathrm{V}}(t)dW_{\mathrm{D}}(t) = \rho dt.$$

Märgime, et viimane võrdus tähistab kahe standardse Browni liikumise ristvariatsiooni diferentseeritud kuju ehk

$$d\langle W_{\mathrm{V}}, W_{\mathrm{D}}\rangle_t = \rho dt.$$

Kirjeldagu krediidiswapi lepingu aluseks oleva firma varade väärtuse protsessi $V := \{V(t),\, t \geq 0\}$ ja firma võlgnevuste väärtuse protsessi $D := \{D(t),\, t \geq 0\}$ vastavalt järgmised stohhastilised diferentsiaalvõrrandid:

$$\frac{dV(t)}{V(t-)} = (r - \lambda\zeta)dt + \sigma_{\mathrm{V}} dW_{\mathrm{V}}(t) + (J_{N(t)} - 1)dN(t) \tag{4.1}$$

ja

$$\frac{dD(t)}{D(t)} = r dt + \sigma_{\mathrm{D}} dW_{\mathrm{D}}(t), \tag{4.2}$$

kus
$r > 0$ on firma varade oodatav tulusus ning see on võrdne riskivaba intressimääraga;
$\sigma_{\mathrm{V}}, \sigma_{\mathrm{D}} > 0$ on vastavalt firma varade väärtuse ja võlgnevuste volatiilsused;
$J_i - 1$ on i–nda hüppe protsentuaalne ulatus ning $\zeta := E_{\mathbb{Q}}(J_i - 1)$ on i–nda hüppe keskmine ulatus;
$N(t)$ on Poissoni protsess riskineutraalse mõõdu järgi intensiivsusega λ.

Märgime, et sama tõenäosusruumi ja filtratsiooni korral defineeritud Poissoni protsess ja standardne Browni liikumine on sõltumatud [12, Järeldus 11.5.3].

Nagu ka alapeatükis 1.2 mainisime, siis stohhastilise diferentsiaalvõrrandi 4.1 juhuslikke hüppeid kirjeldava osa $(J_{N(t)} - 1)dN(t)$ võib esitada kujul

$$d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (J_i - 1)\right).$$

Riskineutraalse hindamise teooria põhjal on arbitraaživõimaluse puudumise eeldusel kõigi lokaalselt tõkestatud kaubeldavate varade diskonteeritud väärtuste protsessid riskineutraalse mõõdu järgi lokaalsed martingaalid. Käesolevas mudelis on tehtud vaikimisi eeldus, et firma varad ja võlgnevused on turul kaubeldavad. Lisaks on nende protsesside väärtused lokaalselt tõkestatud. Lausetest 1.13 ja 1.21 tuleneb, et nii defineeritud protsesside diskonteeritud väärtused $e^{-rt}D(t)$ ja $e^{-rt}V(t)$ on martingaalid. Seega sellised mudelid võivad riskineutraalse mõõdu $\mathbb{Q}$ korral tõepoolest kehtida.

Tähistame ssj juhuslikud suurused $\gamma_i := \ln(J_i)$ ning eeldame, et γ_i on topelt-eksponentjaotusega tihedusfunktsiooniga

$$f_\gamma(y) = p \cdot \eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} + q \cdot \eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbb{1}_{\{y<0\}}, \quad \eta_1 > 1,\, \eta_2 > 0,$$

kus $p, q \geq 0,\ p + q = 1$, märgivad vastavalt üles- ja allapoole suunatud hüpete toimumise tõenäosusi. Märgime, et kahe eksponentjaotuse keskväärtused on siin vastavalt $1/\eta_1$ ja $1/\eta_2$ ning tingimus $\eta_1 > 1$ on kehtestatud $E_{\mathbb{Q}}(J_i) < \infty$ ja $E_{\mathbb{Q}}(V(t)) < \infty$ kehtivuse tagamiseks.

Kasutades keskväärtuse definitsiooni ning juhusliku suuruse γ tihedusfunktsiooni leiame γ momente genereeriva funktsiooni:

$$\begin{aligned}
m_\gamma(\theta) := E_{\mathbb{Q}}(e^{\theta\gamma}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta y} f_\gamma(y)dy = \int_0^\infty e^{\theta y} p\eta_1 e^{-\eta_1 y} dy + \int_{-\infty}^0 e^{\theta y} q\eta_2 e^{\eta_2 y} dy \\
&= p\eta_1 \int_0^\infty e^{-(\eta_1-\theta)y} dy + q\eta_2 \int_{-\infty}^0 e^{(\eta_2+\theta)y} dy \\
&= -\frac{p\eta_1}{\eta_1-\theta} e^{-(\eta_1-\theta)y}\Big|_0^\infty + \frac{q\eta_2}{\eta_2+\theta} e^{(\eta_2+\theta)y}\Big|_{-\infty}^0 \\
&= -\frac{p\eta_1}{\eta_1-\theta}\left(\lim_{y\to\infty} e^{-(\eta_1-\theta)y} - 1\right) + \frac{q\eta_2}{\eta_2+\theta}\left(1 - \lim_{y\to-\infty} e^{(\eta_2+\theta)y}\right) \\
&= \frac{p\eta_1}{\eta_1-\theta} + \frac{q\eta_2}{\eta_2+\theta},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

kus $\theta \neq \eta_1$ ja $\theta \neq -\eta_2$.

Eelnevast saame nüüd leida juhuslike suuruste $J_i = e^{\gamma_i}$ keskväärtused

$$E_{\mathbb{Q}}(J_i) = E_{\mathbb{Q}}(e^{\gamma_i}) = m_\gamma(1) = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2+1}.$$

Seega keskmine protsentuaalne hüppeulatus avaldub kujul

$$\zeta = E_{\mathbb{Q}}(J_i - 1) = E_{\mathbb{Q}}(J_i) - 1 = \frac{p\eta_1}{\eta_1-1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2+1} - 1.$$

Sarnaselt Mertoni mudelile ütleme, et firma laostub, kui mingil ajahetkel on firma varade väärtus väiksem firma võlgnevuste väärtusest.

Definitsioon 4.1. *Firma laostumishetkeks (ingl default time) nimetatakse peatumishetke*

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : V(t) \leq D(t)\}.$$

Seega on laostumishetk esimene ajahetk $t \geq 0$, mil kehtib $V(t) \leq D(t)$.

Defineerime nüüd uue juhusliku protsessi $X(t) := \dfrac{V(t)}{D(t)}$. Protsessi $X(t)$ esimese nivoole 1 jõudmisaja (ingl *first passage time*) võime esitada kujul

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) \leq 1\}.$$

Seega saame firma laostumishetke vaadata kui juhusliku protsessi $X(t)$ esimest jõudmisaega.

Järgnevas teoreemis näitame, et selliselt defineeritud juhuslik protsess $X(t)$ on hüppedifusiooniprotsess.

Teoreem 4.2 ([13, Teoreem 2])**.** *Käitugu firma varade väärtuse protsess vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile 4.1 ning firma võlgnevuste väärtuse protsess vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile 4.2.*

Siis juhuslik protsess $X(t) = \dfrac{V(t)}{D(t)}$ *on hüppedifusiooniprotsess, mis järgib stohhastilist diferentsiaalvõrrandit*

$$\frac{dX(t)}{X(t-)} = \mu_X dt + \sigma_X dW(t) + (J_{N(t)} - 1)dN(t),$$

kus $\mu_X := \sigma_D^2 - \rho\sigma_V\sigma_D - \lambda\zeta, \quad \sigma_X := \sqrt{\sigma_V^2 - 2\rho\sigma_V\sigma_D + \sigma_D^2}$ *ja* $\sigma_X dW(t) = \sigma_V dW_V(t) - \sigma_D dW_D(t)$.

Kui tähistada $Y(t) := \ln\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right)$, *siis*

$$Y(t) = \left(\mu_X - \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)t + \sigma_X W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} \gamma_i$$

ehk $Y(t)$ *on topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsess.*

Tõestus. Näitame kõigepealt, et protsess $X(t) = \dfrac{V(t)}{D(t)}$ on hüppedifusiooniprotsess. Järgigu firma võlgnevuste väärtuse protsess $D(t)$ stohhastilist diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dD(t)}{D(t)} = r\,dt + \sigma_{\mathrm{D}} dW_{\mathrm{D}}(t).$$

Võttes järelduses 1.12 $\mu = r$ avaldub selle diferentsiaalvõrrandi lahend kujul

$$D(t) = D(0) \cdot e^{\left(r - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}^2}{2}\right)t + \sigma_{\mathrm{D}} W_{\mathrm{D}}(t)}. \tag{4.4}$$

Käitugu firma varade väärtuse protsess $V(t)$ vastavalt hüppedifusiooniprotsessile

$$\frac{dV(t)}{V(t-)} = (r - \lambda\zeta)dt + \sigma_{\mathrm{V}} dW_{\mathrm{V}}(t) + (J_{N(t)} - 1)dN(t).$$

Võttes järelduses 1.20 $\mu = r - \lambda\zeta$ saame, et selle stohhastilise diferentsiaalvõrrandi lahend on kujul

$$V(t) = V(0) \cdot e^{\left(r - \lambda\zeta - \frac{\sigma_{\mathrm{V}}^2}{2}\right)t + \sigma_{\mathrm{V}} W_{\mathrm{V}}(t)} \prod_{i=1}^{N(t)} J_i. \tag{4.5}$$

Võrdustest 4.4 ja 4.5 saame nüüd, et

$$\begin{aligned}\frac{V(t)}{D(t)} &= \frac{V(0)}{D(0)} \cdot e^{\left(\frac{\sigma_{\mathrm{D}}^2}{2} - \lambda\zeta - \frac{\sigma_{\mathrm{V}}^2}{2}\right)t + \sigma_{\mathrm{V}} W_{\mathrm{V}}(t) - \sigma_{\mathrm{D}} W_{\mathrm{D}}(t)} \prod_{i=1}^{N(t)} J_i \\ &= \frac{V(0)}{D(0)} \cdot e^{\left(\frac{\sigma_{\mathrm{D}}^2}{2} - \lambda\zeta - \frac{\sigma_{\mathrm{V}}^2}{2}\right)t + \sigma_{\mathrm{X}} W(t)} \prod_{i=1}^{N(t)} J_i.\end{aligned}$$

Tähistades $X(t) := \frac{V(t)}{D(t)}$ kehtib võrdus

$$X(t) = X(0) \cdot e^{\left(\frac{\sigma_{\mathrm{D}}^2}{2} - \lambda\zeta - \frac{\sigma_{\mathrm{V}}^2}{2}\right)t + \sigma_{\mathrm{X}} W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} \ln(J_i)}. \tag{4.6}$$

Märgime, et protsess W on samuti standardne Browni liikumine mõõdu $\mathbb{Q}$ suhtes. Tõepoolest, kuna W_{V} ja W_{D} on standardsed Browni liikumised ja standardse Browni liikumise puhul on iga t korral $W_{\mathrm{V}}(t)$ ja $W_{\mathrm{D}}(t)$ normaaljaotusega $\mathcal{N}(0, t)$, siis saame, et iga t korral

$$E_{\mathbb{Q}}(W(t)) = E_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\sigma_{\mathrm{X}} W(t)}{\sigma_{\mathrm{X}}}\right) = \frac{1}{\sigma_{\mathrm{X}}}\big(\sigma_{\mathrm{V}} E_{\mathbb{Q}}(W_{\mathrm{V}}(t)) - \sigma_{\mathrm{D}} E_{\mathbb{Q}}(W_{\mathrm{D}}(t))\big) = 0$$

ja

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{Q}}(W(t)) = D_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\sigma_{\mathrm{X}} W(t)}{\sigma_{\mathrm{X}}}\right) &= \frac{1}{\sigma_{\mathrm{X}}^2}\big(D_{\mathbb{Q}}[\sigma_{\mathrm{V}} W_{\mathrm{V}}(t) - \sigma_{\mathrm{D}} W_{\mathrm{D}}(t)]\big) \\ &= \frac{1}{\sigma_{\mathrm{X}}^2}\Big(\sigma_{\mathrm{V}}^2 D_{\mathbb{Q}}(W_{\mathrm{V}}(t)) - 2\sigma_{\mathrm{V}}\sigma_{\mathrm{D}}\rho\sqrt{D_{\mathbb{Q}}(W_{\mathrm{V}}(t))}\sqrt{D_{\mathbb{Q}}(W_{\mathrm{D}}(t))} + \sigma_{\mathrm{D}}^2 D_{\mathbb{Q}}(W_{\mathrm{D}}(t))\Big) \\ &= \frac{1}{\sigma_{\mathrm{X}}^2}\big(\sigma_{\mathrm{V}}^2 t - 2\rho\sigma_{\mathrm{V}}\sigma_{\mathrm{D}}\sqrt{t}\sqrt{t} + \sigma_{\mathrm{D}}^2 t\big) = \frac{t(\sigma_{\mathrm{V}}^2 - 2\rho\sigma_{\mathrm{V}}\sigma_{\mathrm{D}} + \sigma_{\mathrm{D}}^2)}{\sigma_{\mathrm{V}}^2 - 2\rho\sigma_{\mathrm{V}}\sigma_{\mathrm{D}} + \sigma_{\mathrm{D}}^2} = t \end{aligned}$$

ning seega on iga t korral ka $W(t)$ normaaljaotusega $\mathcal{N}(0,t)$.

Näitame nüüd, et $X(t)$ järgib stohhastilist diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dX(t)}{X(t-)} = \mu_{\mathrm{X}} dt + \sigma_{\mathrm{X}} dW(t) + (J_{N(t)} - 1)dN(t).$$

Olgu Itô lemmas 1.19 vaadeldavaks funktsiooniks $f(t,z) = e^z$ ning vastavaks hüppedifusiooniprotsessiks

$$dZ(t) = \Big(\frac{\sigma_{\mathrm{D}}^2}{2} - \lambda\zeta - \frac{\sigma_{\mathrm{V}}^2}{2}\Big)dt + \sigma_{\mathrm{X}} dW(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \ln(J_i)\right)$$

Märgime, et antud hüppedifusiooniprotsessi korral on kordaja $c(t)(J_{N(t)} - 1) = \ln(J_{N(t)})$. Nüüd saame hüppedifusiooniprotsesside Itô lemma põhjal (vt lemma 1.19), et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}
d\left(e^{Z(t)}\right) &= \left(\left(\frac{\sigma_{\mathrm{D}}^2}{2} - \lambda\zeta - \frac{\sigma_{\mathrm{V}}^2}{2}\right)e^{Z(t-)} + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{X}}^2 e^{Z(t-)}\right)dt + \sigma_{\mathrm{X}} e^{Z(t-)} dW(t) \\
&\quad + \left(e^{Z(t-)+\ln(J_{N(t)})} - e^{Z(t-)}\right) dN(t) \\
&= e^{Z(t-)}\left(\left(\frac{\sigma_{\mathrm{D}}^2}{2} - \lambda\zeta - \frac{\sigma_{\mathrm{V}}^2}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{D}}^2 - 2\rho\sigma_{\mathrm{V}}\sigma_{\mathrm{D}} + \sigma_{\mathrm{V}}^2)\right)dt + \sigma_{\mathrm{X}} dW(t)\right) \\
&\quad + e^{Z(t-)}(e^{\ln(J_{N(t)})} - 1)dN(t) \\
&= e^{Z(t-)}\left((\sigma_{\mathrm{D}}^2 - \rho\sigma_{\mathrm{V}}\sigma_{\mathrm{D}} - \lambda\zeta)dt + \sigma_{\mathrm{X}} dW(t) + (J_{N(t)} - 1)dN(t)\right) \\
&= e^{Z(t-)}\left(\mu_{\mathrm{X}} dt + \sigma_{\mathrm{X}} dW(t) + (J_{N(t)} - 1)dN(t)\right).
\end{aligned}$$

Võrduse 4.6 põhjal $X(t) = X(0)e^{Z(t)}$ ning seega

$$\begin{aligned}
dX(t) = X(0)d\left(e^{Z(t)}\right) &= X(0)e^{Z(t-)}\left(\mu_{\mathrm{X}} dt + \sigma_{\mathrm{X}} dW(t) + (J_{N(t)} - 1)dN(t)\right) \\
&= X(t-)\left(\mu_{\mathrm{X}} dt + \sigma_{\mathrm{X}} dW(t) + (J_{N(t)} - 1)dN(t)\right)
\end{aligned}$$

ehk

$$\frac{dX(t)}{X(t-)} = \mu_{\mathrm{X}} dt + \sigma_{\mathrm{X}} dW(t) + (J_{N(t)} - 1)dN(t).$$

Tähistades $Y(t) := \ln\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right)$ saame võrdusest 4.6 omakorda

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \left(\frac{\sigma_{\mathrm{D}}^2}{2} - \lambda\zeta - \frac{\sigma_{\mathrm{V}}^2}{2}\right)t + \sigma_{\mathrm{X}} W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} \ln(J_i) \\
&= \left(\mu_{\mathrm{X}} - \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{X}}^2\right)t + \sigma_{\mathrm{X}} W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} \gamma_i
\end{aligned}$$

ehk $Y(t)$ on topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsess. □

Jätkame krediidiswapi preemiamakse suuruse määramise jaoks vajaliku laostumistõenäosuse $\mathbb{Q}(\tau \leq t)$ leidmisega, kus $\tau = \inf\left\{t \geq 0 : X(t) \leq 1\right\}$ ning t on mingi suvaline ajahetk.

Kuna võrdusest $Y(t) = \ln\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right)$ saame avaldada $\ln(X(t)) = Y(t) + \ln(X(0))$, siis eelnevas defineeritud laostumishetke τ korral kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}\tau &= \inf\left\{t \geq 0 : X(t) \leq 1\right\} = \inf\left\{t \geq 0 : \ln(X(t)) \leq 0\right\} \\ &= \inf\left\{t \geq 0 : Y(t) + \ln(X(0)) \leq 0\right\} = \inf\left\{t \geq 0 : Y(t) \leq -\ln(X(0))\right\}.\end{aligned}$$

Seega esitub krediidiswapi aluseks oleva firma riskineutraalne laostumistõenäosus $\mathbb{Q}(\tau \leq t)$ kujul

$$\mathbb{Q}(\tau \leq t) = \mathbb{Q}\left(\inf_{s\in[0,t]} Y(s) \leq -\ln(X(0))\right) \tag{4.7}$$

ning siit järeldub, et krediidiswapi hinnastamine taandub topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi $Y(t)$ esimese jõudmisaja jaotuse leidmisele.

Üheks esimese jõudmisaja jaotuse leidmise võimaluseks on Laplace'i teisenduse kasutamine, mille pöördteisenduse leidmine annab soovitud jaotuse esituse. Leiamegi järgnevalt laostumistõenäosusele $\mathbb{Q}(\tau \leq t)$ Laplace'i teisenduse ning seejärel rakendame Gaver–Stehfesti algoritmi, et leida saadud teisenduse pöördteisendus.

Toome kõigepealt Laplace'i teisenduse mõiste.

Definitsioon 4.3. *Funktsiooni $f(x)$ Laplace'i teisenduseks nimetatakse funktsiooni*

$$\hat{f}(\alpha) := \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)dt.$$

Kui $\hat{f}(\alpha)$ on funktsiooni $f(x)$ Laplace'i teisendus, siis

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\hat{f}(\alpha)\right\}(x),$$

kus $\mathscr{L}^{-1}\{\cdot\}$ tähistab Laplace'i teisenduse pöördteisendust.

Kui funktsioon $f(x)$ on mingi mittenegatiivse juhusliku suuruse $X \geq 0$ tihedusfunktsioon, siis

$$\hat{f}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x)dx = E(e^{-\alpha X}).$$

Märgime, et asendades Laplace'i teisenduses $-\alpha = \theta$, on teisendus samaväärne juhusliku suuruse X momente genereeriva funktsiooniga ehk $m_X(-\alpha) = \hat{f}(\alpha)$.

Tähistagu nüüd $\hat{\mathbb{Q}}(\alpha)$ laostumistõenäosuse $\mathbb{Q}(\tau \le t)$ Laplace'i teisendust.

Ositi integreerides ning keskväärtuse definitsiooni kasutades saame, et vastav Laplace'i teisendus juhul $\alpha > 0$ avaldub kujul

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{Q}}(\alpha) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathbb{Q}(\tau \le t)dt = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\mathbb{Q}(\tau \le t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}d\mathbb{Q}(\tau \le t) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{bmatrix} \mathbb{Q}(\tau \le t) = u & e^{-\alpha t}dt = dv \\ d\mathbb{Q}(\tau \le t) = du & -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} = v \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}d\mathbb{Q}(\tau \le t) = \frac{1}{\alpha}E_{\mathbb{Q}}\big(e^{-\alpha\tau}\big). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Saadud esitusest ilmneb, et Laplace'i teisenduse $\hat{\mathbb{Q}}(\alpha)$ leidmiseks piisab juhusliku suuruse τ Laplace'i teisenduse $\hat{\tau}(\alpha) := E_{\mathbb{Q}}\big(e^{-\alpha\tau}\big)$ leidmisest.

Selleks leiame kõigepealt protsessi Y momente genereeriva funktsiooni $m_Y(\theta)$.

Märgime, et kuna standardse Browni liikumise puhul on iga t korral $W(t)$ normaaljaotusega $\mathcal{N}(0,t)$, siis $\theta\sigma_X W(t)$ on normaaljaotusega $\mathcal{N}(0,\theta^2\sigma_X^2 t)$. Teame ka, et normaaljaotuse $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ momente genereeriv funktsioon avaldub kujul

$$m_{\mathcal{N}}(\theta) = e^{\theta\mu+\theta^2\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Nüüd, kasutades lisaks eelnevale ka protsesside W ja N sõltumatust, juhusliku suuruse γ momente genereerivat funktsiooni $m_\gamma(\theta)$ (vt võrdus 4.3) ning Poissoni liitprotsessi momente genereerivat funktsiooni (vt lause 1.17), saame leida topelteksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi $Y(t)$ momente genereeriva funktsiooni

$$\begin{aligned} m_Y(\theta) = E_{\mathbb{Q}}\big(e^{\theta Y(t)}\big) &= E_{\mathbb{Q}}\left(e^{\theta\left((\mu_X-\frac{1}{2}\sigma_X^2)t+\sigma_X W(t)+\sum_{i=1}^{N(t)}\gamma_i\right)}\right) \\ &= e^{\theta(\mu_X-\frac{1}{2}\sigma_X^2)t}E_{\mathbb{Q}}\left(e^{\theta\sigma_X W(t)}\right)E_{\mathbb{Q}}\left(e^{\theta\sum_{i=1}^{N(t)}\gamma_i}\right) \\ &= e^{\theta(\mu_X-\frac{1}{2}\sigma_X^2)t}e^{\theta^2\frac{\sigma_X^2}{2}t}e^{\lambda t(m_\gamma(\theta)-1)} \\ &= e^{\theta(\mu_X-\frac{1}{2}\sigma_X^2)t}e^{\theta^2\frac{\sigma_X^2}{2}t}e^{\lambda t\left(\frac{p\eta_1}{\eta_1-\theta}+\frac{q\eta_2}{\eta_2+\theta}-1\right)} \\ &= e^{\left[\theta(\mu_X-\frac{1}{2}\sigma_X^2)+\frac{1}{2}\theta^2\sigma_X^2+\lambda\left(\frac{p\eta_1}{\eta_1-\theta}+\frac{q\eta_2}{\eta_2+\theta}-1\right)\right]t} = e^{G(\theta)t}, \end{aligned}$$

kus funktsioon $G(\cdot)$ on defineeritud järgmiselt:

$$G(\beta) := \beta\big(\mu_{\mathrm{X}} - \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{X}}^2\big) + \frac{1}{2}\beta^2\sigma_{\mathrm{X}}^2 + \lambda\big(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - \beta} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + \beta} - 1\big), \quad \beta \neq \eta_1,\, \beta \neq -\eta_2.$$

Artikli [5] lemma 2.1 põhjal on suvalise $\alpha > 0$ korral võrrandil $G(\beta) - \alpha = 0$ täpselt neli juurt: $\beta_{1,\alpha}$, $\beta_{2,\alpha}$, $-\beta_{3,\alpha}$ ja $-\beta_{4,\alpha}$, kus

$$-\infty < -\beta_{4,\alpha} < -\eta_2 < -\beta_{3,\alpha} < 0 < \beta_{1,\alpha} < \eta_1 < \beta_{2,\alpha}.$$

Sõnastame nüüd artiklis [10] toodud teoreemi 3.1, mille põhjal saab leida topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi esimese jõudmisaja Laplace'i teisenduse. Sõnastame selle tulemuse meid huvitava esimese jõudmisaja kontekstis.

Teoreem 4.4. *Olgu $-\beta_{3,\alpha}$ ja $-\beta_{4,\alpha}$ suvalise $\alpha > 0$ korral võrrandi $G(\beta) - \alpha = 0$ kaks negatiivset juurt, $-\infty < -\beta_{4,\alpha} < -\eta_2 < -\beta_{3,\alpha} < 0$.*

Siis esimese jõudmisaja $\tau = \inf\{t \geq 0 : Y(t) \leq -\ln(X(0))\}$ Laplace'i teisendus avaldub kujul

$$\hat{\tau}(\alpha) := E_{\mathbb{Q}}\big(e^{-\alpha\tau}\big) = \frac{\eta_2 - \beta_{3,\alpha}}{\eta_2}\frac{\beta_{4,\alpha}}{\beta_{4,\alpha} - \beta_{3,\alpha}}e^{-\beta_{3,\alpha}\ln(X(0))} + \frac{\beta_{4,\alpha} - \eta_2}{\eta_2}\frac{\beta_{3,\alpha}}{\beta_{4,\alpha} - \beta_{3,\alpha}}e^{-\beta_{4,\alpha}\ln(X(0))}.$$

Sellega oleme leidnud riskineutraalse laostumistõenäosuse $\mathbb{Q}(\tau \leq t)$ Laplace'i teisenduse $\hat{\mathbb{Q}}(\alpha)$.

Et leida Laplace'i teisendusest laostumistõenäosuse esitus on järgmiseks sammuks leida numbrilisi meetodeid kasutades Laplace'i teisenduse pöördteisendus. Selleks kasutame Gaver–Stehfesti algoritmi.

Sõnastame tulemused, mis viisid Gaver–Stehfesti algoritmini.

Teoreem 4.5 (Gaver 1966, [1, Lause 8.1])**.** *Tõkestatud, punktis t pideva, reaalarvuliste väärtustega funktsiooni f korral*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(2)}{t}\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\hat{f}\left(\frac{(n+k)\ln(2)}{t}\right)\right],$$

kus $\hat{f}$ on funktsiooni f Laplace'i teisendus.

Stehfest täiendas Gaveri tulemust järgmiselt.

Teoreem 4.6 (Stehfest 1970, [1, Lause 8.2])**.** *Olgu funktsioonide jada $\tilde{f}_k$ defineeritud kujul*

$$\tilde{f}_k := \frac{\ln(2)}{t}\frac{(2k)!}{k!(k-1)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\hat{f}\left(\frac{(k+j)\ln(2)}{t}\right).$$

Siis

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^{n}\omega(k,n)\tilde{f}_k(t),\ \textit{kus kaalud}\ \omega(k,n) = (-1)^{n-k}\frac{k^n}{k!(n-k)!}.$$

Veel enam, suvalise $l \in \mathbb{R}$ korral,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{k^n}{k!(n-k)!}\tilde{f}_k(t) - f(t) = o(n^{-l}).$$

Eelnevas tehtud sammudest annab ülevaate järgmine skeem:

$$m_{\gamma}(\theta) \xrightarrow{\text{lause 1.17}} m_Y(\theta) \xrightarrow{\text{teoreem 4.4}} \hat{\tau}(\alpha) \xrightarrow{\text{võrdus 4.8}} \hat{\mathbb{Q}}(\alpha) \xrightarrow{\text{G-S algoritm}} \mathbb{Q}(\tau \le t)$$

Kokkuvõttes saame nüüd sõnastada tulemuse, mille põhjal saab laostumise tõenäosusele $\mathbb{Q}(\tau \le t)$ leida ligikaudse lähendi rakendades selleks Gaver–Stehfesti algoritmi.

Teoreem 4.7. *Järgigu firma varade väärtus stohhastilist diferentsiaalvõrrandit 4.1 ning firma võlgnevuste väärtus stohhastilist diferentsiaalvõrrandit 4.2.*

Laostumistõenäosuse 4.7 lähend esitub kujul

$$\mathbb{Q}(\tau \le t) \approx \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{k^n}{k!(n-k)!}\tilde{\mathbb{Q}}_k(t),$$

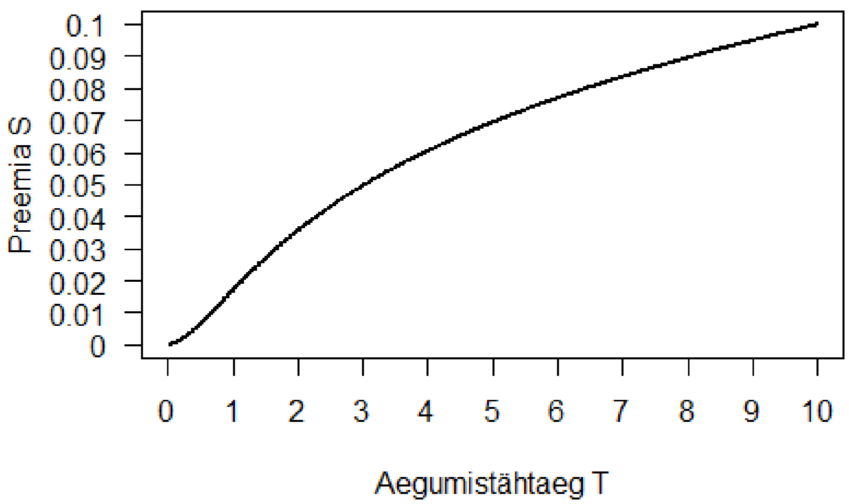
kus

$$\tilde{\mathbb{Q}}_k(t) = \frac{\ln(2)}{t}\frac{(2k)!}{k!(k-1)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\hat{\mathbb{Q}}\left((k+j)\frac{\ln(2)}{t}\right).$$

Veel enam, kui $n \to \infty$, siis

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{k^n}{k!(n-k)!} \tilde{\mathbb{Q}}_k(t) - \mathbb{Q}(\tau \leq t) = o(n^{-l}), \quad \forall l \in \mathbb{R}.$$

Seega saame teoreemi 4.7 põhjal leida fikseeritud ajahetkede t_i, $i = 1, \ldots, K$, jaoks krediidiswapi lepingu aluseks oleva firma laostumistõenäosusele lähendi ning saame seda kasutada teoreemis 2.1 esitatud tulemuses leidmaks krediidiswapi preemiamakse suuruse $\mathbb{S}$ topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi mudeli raames.



Joonis 4.1: Krediidiswapi preemiamakse suurus $\mathbb{S}$ topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi mudeli korral: $r = 0.05$, $R = 0.25$, $K = 4$, $X(0) = 4$, $\eta_1 = 3$, $\eta_2 = 3$, $p = 0.5$, $q = 0.5$, $\lambda = 3$, $\mu_X = 0.5$, $\sigma_X = 0.6$, $n = 9$.

Joonisel 4.1 on toodud preemiamakse suurus $\mathbb{S}$ vastavalt teoreemis 2.1 esitatud tulemusele. Laostumistõenäosus on leitud kasutades Gaver–Stehfesti algoritmi.

Kokkuvõte

Käesolevas magistritöös uuriti krediidiswapi preemiamaksete suuruse leidmist firma struktuurimudelite abil. Töös kirjeldati krediidiswapi lepingut ning tingimusel, et krediidiswapi väärtus lepingu sõlmimise ajahetkel on 0, leiti valem krediidiswapi preemiamaksete suuruse leidmiseks. Osutus, et preemiamaksete arvutamise probleem taandub krediidiswapi lepingu aluseks oleva firma laostumistõenäosuse leidmisele. Firma laostumistõenäosuse leidmiseks kirjeldati töös kahte struktuurimudelit – Mertoni mudelit ja topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi mudelit.

Mertoni mudel on kõige lihtsam struktuurimudel, mille põhjal firma laostub, kui lepingu aegumistähtajal on firma varade väärtus väiksem kui firma võlgnevuste väärtus. Sealjuures eeldati mudelis, et firma varade väärtus käitub geomeetrilise Browni liikumisena ning firma võlgnevuste väärtus on konstantne suurus. Mertoni mudeli raames leiti firma laostumistõenäosus ning seda kasutati, et esitada valem krediidiswapi preemiamaksete suuruse arvutamiseks.

Topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi mudeli korral eeldati, et firma varade väärtus käitub vastavalt hüppedifusiooniprotsessile, kus logaritmitud hüppe suurus on topelt-eksponentjaotusega, ning firma võlgnevuste väärtus järgib geomeetrilist Browni liikumist. Firma laostumishetk defineeriti kui esimene ajahetk, mil firma võlgnevuste väärtus ületab firma varade väärtuse. Selgus, et firma laostumistõenäosuse leidmine taandub topelt-eksponentjaotusega hüppedifusiooniprotsessi esimese jõudmisaja jaotuse leidmisele. See võimaldas firma laostumistõenäosuse numbrilise lähendi leidmiseks kasutada Gaver–Stehfesti algoritmi. Seda lähendit kasutades leiti krediidiswapi preemiamaksete suurus selle mudeli korral.

Kirjandus

[1] Abate, J., Whitt, W., (1992). *The Fourier-series method for inverting transforms of probability distributions.* Queueing Systems **10**, 5–88.

[2] Bain, A., (2009). *Stochastic Calculus.* http://www.chiark.greenend.org.uk/~alanb/stoc-calc.pdf [06.05.2015]

[3] Dalbaen, F., Schachermayer, W., (2006). *The Mathematics of Arbitrage.* Springer Finance.

[4] Jondeau, E. et al. (2006). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions.* Springer.

[5] Kou, S.G., Wang, H., (2003). *First passage times of a jump diffusion process.* Adv. Appl. Prob. **35**, 504–531.

[6] Käärik, M., (2012). *E–kursuse "Juhuslikud protsessid" materjalid.* Tartu Ülikool, http://dspace.utlib.ee/dspace/bitstream/handle/10062/29478/juhuslikud_protsessid.pdf?sequence=1[02.05.2015]

[7] Mengle, D., (2007). *Credit Derivatives: An Overview.* Economic Review (FRB Atlanta), **92**(4)

[8] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, R. (2005) *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools.* Princeton Series in Finance.

[9] Merton, R.C., (1974). *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates.* Journal of Finance **29**, 449–470.

[10] Scherer, M., (2005). *A Structural Credit-Risk Model based on a Jump Diffusion.* University of Ulm,
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.139.7258&rep=rep1&type=pdf [02.05.2015]

[11] Shiryaev, A.N., Cherny, A.S., (2002). *Vector Stochastic Integrals and the Fundamental Theorems of Asset Pricing.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **237**, 6–49.

[12] Shreve, S.E., (2004). *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models.* Springer Finance.

[13] Yang,R., Pang, M., Jin, Z., (2014). *Valuing Credit Default Swap under a double exponential jump diffusion model.* Appl. Math. J. Chinese Univ. **29**(1), 36–43.

Lisad

```
# 1. Mertoni mudel
d0=function(T,D,V,r,s_v){
  return((log(D)-log(V)-(r-s_v^2/2)*T)/(s_v*sqrt(T)))
}
CDSMert=function(T,K,r,R,V,D,s_v){
  rec=exp(-r*T)*(1-R)*pnorm(d0(T,D,V,r,s_v),mean=0,sd=1)
  prem=0
  dt=T/K
  t=(1:K)*dt
  for (t_i in t[-length(t)]){
    prem=prem+exp(-r*t_i)
  }
  prem=prem+exp(-r*T)*pnorm(-d0(T,D,V,r,s_v),mean=0,sd=1)
  S=rec/prem
  return(S)
}
#Preemia Mertoni mudeliga
V=160
D=40
r=0.05
s_v=0.6
R=0.25
K=4 #preemiamaksete arv
M=c()
T=(0:50)*10/50
for (i in 1:length(T)){
  M[i]=CDSMert(T[i],K,r,R,V,D,s_v)
}

```

```
#Joonis
plot(T,M, type='l',lwd=2,ylim=c(0,0.09),xlab='Aegumistahtaeg T',
      ylab='Preemia S',font.lab=1,xaxt="n",yaxt='n',xlim=c(0,10))
axis(1, at=0:10, labels=0:10)
axis(2, las=1,at=seq(0,0.09,0.01),labels=seq(0,0.09,0.01))

# 2. Gaver—Stehfesti algoritmi kasutades
#G(x)-alpha nullkohtade leidmine
findroots=function(n1,n2,p,lambda,alpha,m_x,s_x){
  a=-0.5*s_x^2 #x^4 kordaja
  b=0.5*s_x^2*(n1-n2)-(m_x-0.5*s_x^2) #x^3 kordaja
  c=(m_x-0.5*s_x^2)*(n1-n2)+0.5*s_x^2*n1*n2+lambda+alpha #x^2 kordaja
  d=n1*n2*(m_x-0.5*s_x^2)-alpha*(n1-n2)+lambda*(p*(n1+n2)-n1) #x kordaja
  e=-n1*n2*alpha #vabaliige
  roots=polyroot(c(e,d,c,b,a)) #nullkohtade leidmine
  roots=Re(roots)
  roots=sort(roots)
  return(roots)
}
#Laplace'i teisendus
laplace=function(n1,n2,p,lambda,alpha,m_x,s_x,x0){
  roots=findroots(n1,n2,p,lambda,alpha,m_x,s_x)
  b4=abs(roots[1])
  b3=abs(roots[2])
  #tau Laplace'i teisendus:
  l=(n2-b3)/n2*b4/(b4-b3)*exp(-log(x0)*b3)+(b4-n2)/n2*b3/(b4-b3)*exp(-log(x0)*b4)
  return(l)
}
laplace2=function(alpha){#l6plik Laplace'i teisendus
  return((1/alpha)*laplace(n1,n2,p,lambda,alpha,m_x,s_x,x0))
}
#Gaver-Stehfesti algoritm
Gaver=function(t,n){
  p=c()
  for (k in 1:n){
    z=0
    for (j in 0:k){
      z=z+(-1)^j*choose(k,j)*laplace2((k+j)*log(2)/t)
    }
```

```
    p[k]=(log(2)/t*(factorial(2*k)/(factorial(k)*factorial(k-1))))*z
  }
  sum=0
  for (k in 1:n){
    sum=sum+((-1)^(n-k)*((k^n)/(factorial(k)*factorial(n-k))))*p[k]
  }
  return(sum)
}
#CDS preemiamakse suurus
CDS=function(T,K,r,R){
  dt=T/K
  t=(1:K)*dt
  premium=0#preemiamaksete osa
  for (t_i in t){
    premium=premium+exp(-r*t_i)*(1-Gaver(t_i,9))
  }
  #integraal
  midpoints = 0.5*(t[2:K] + t[1:(K-1)])
  widths = t[2:K] - t[1:(K-1)]
  int=0
  for (i in 1:length(midpoints)){
    int=int+dt*exp(-r*midpoints[i])*Gaver(midpoints[i],9)
  }
  recovery=(1-R)*(exp(-r*T)*Gaver(T,9)+r*int)#kompensatsiooni osa
  S=recovery/premium
  return(S)
}
#Tulemused
x0=4 #V(0)/D(0)
K=4 #maksete arv
r=0.05
R=0.25
n1=3
n2=3
p=0.5
lambda=3
m_x=0.5
s_x=0.6
#CDS preemiamakse suurus vs aegumistahtaeg
```

```
T=seq(0.02,10,0.02)
S=c()
for (i in 1:length(T)){
  S[i]=CDS(T[i],K,r,R)
}
#Joonis
plot(T,S,type='l',lwd=2,xlab='Aegumistahtaeg T',ylab='Preemia S',
      font.lab=1,xaxt="n",yaxt='n',xlim=c(0,10))
axis(1, at=0:10, labels=0:10)
axis(2, las=1,at=seq(0,0.1,0.01),labels=seq(0,0.1,0.01))
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Liis Kolberg,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Krediidiswapi preemiamaksete suuruse leidmine firma struktuurimudelite korral", mille juhendaja on dotsent Raul Kangro,
   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 13.05.2015