

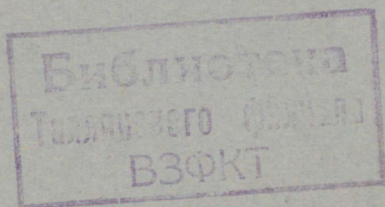
51
T 79 p r
2

NSV LIIDU KÕRGEMA JA KESKERIHARIDUSE MINISTEERIUM

N. S. GLAGOLJEV

МАТЕМАТИКА

METOODILISED JUHENDID JA KOONDÜLESANDED
TEHNIKUMIDE KAUGÕPPEOSAKONDADE
ÕPILASTELE
II OSA



H-2824

EESTI NSV RAHVAMAJANDUSE NÕUKOGU
TEHNILISE INFORMATSIOONI BÜROO
TALLINN 1960

ARH A-36603

NSV LIIDU KÕRGEMA JA KESKERIHARIDUSE MINISTEERIUM

Kinnitatud
Keskerihariduse Oppemetoodika
Keskkabineti poolt

N. S. GLAGOLJEV

MATEMAATIKA

METOODILISED JUHENDID JA KOONDÜLESANDED
TEHNIKUMIDE KAUGÕPPEOSAKONDADE
ÕPILASTELE

II OSA

(KOONDÜLESANDED 6, 7, 8)

EESTI NSV RAHVAMAJANDUSE NÕUKOGU
TEHNILISE INFORMATSIOONI BÜROO
TALLINN 1960

Originaali tiitel

Министерство высшего образования СССР
Управление средних специальных учебных заведений
для учащихся заочных средних специальных учебных заведений

Н. С. Глаголев

МАТЕМАТИКА

Программа, методические указания и контрольные задания

Часть II

(задания 6, 7, 8)

Государственное издательство «Советская Наука»

Москва 1958

Tartu Ülikooli Raamatukogu
ARHIIVKOGI

Koondülesande materjali õppimist tuleb alustada kursuse teoreetilise osa läbitöötamisega.

Sel otstarbel tuleb tutvuda programmiga ja selgeks õppida vastavad peatükid õpikust. Alles pärast teoreetilise materjali täielikku omandamist võib alustada ülesannete lahendamisega ja seejärel teha kontrolltööd.

Koondülesanne matemaatikas sisaldab metooilisi juhendeid kursuse iga teema juurde, kontrollküsimusi, ülesandeid kontrolltööde tegemiseks ja kirjan-duse loetelu.

ÕPPIMISEKS SOOVITAV KIRJANDUS

1. Algebra

- P. A. Kалнин. Курс алгебры для техникумов. Гостехиздат. 1952. a. ja hilisemad väljaanded (edaspidi — Kalnin).
- A. P. Kisseljov. Algebra õpik keskkooli VIII—X klassile, II osa RK «Pedagoogiline Kirjandus». Tallinn (edaspidi Kisseljov, Algebra II osa).
- P. A. Laritšev. Algebra ülesannete kogu, II osa, keskkooli VIII—X klassile. RK «Pedagoogiline Kirjandus». Tallinn (edaspidi — Laritšev, II osa).
- N. A. Sapošnikov ja N. K. Valtsev. Algebra ülesannete kogu, II osa, keskkooli VIII—X klassile. RK «Pedagoogiline Kirjandus». Tallinn (edaspidi — Sapošnikov ja Valtsev, II osa).

2. Geomeetria

- A. П. Андреев. Курс элементарной для техникумов. Гостехиздат. 1952. a. ja hilisemad väljaanded (edaspidi — Andrejev, Geomeetria).
- A. P. Kisseljov. Geomeetria õpik keskkooli X—XI klassile. RK «Pedagoogiline Kirjandus». Tallinn (edaspidi — Kisseljov, Geomeetria II osa).
- N. A. Rõbkin. Geomeetria ülesannete kogu keskkooli X—XI klassile, II osa. Stereomeetria. RK «Pedagoogiline Kirjandus». Tallinn (edaspidi — Rõbkin, Ülesannete kogu II osa).

3. Trigonomeetria

- П. Я. Кожеуров. Курс тригонометрии для техникумов. Гостехиздат. 1952. a. ja hilisemad väljaanded (edaspidi — Kožeurov, Trigonomeetria).
- N. A. Rõbkin. Tasapinnaline trigonomeetria. Opik keskkooli X klassile. RK «Pedagoogiline Kirjandus». Tallinn (edaspidi — Rõbkin, Trigonomeetria).
- S. Novosjolov — Trigonomeetria. Keskkooli IX—X klassile. Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn 1958. a. (edaspidi — S. Novosjolov, Trigonomeetria).

- N. A. Rõbkin. Trigonomeetria ülesannete kogu keskkooli X klassile. RK «Pedagoogiline Kirjandus». Tallinn (edaspidi — Rõbkin, Trigonomeetria ülesannete kogu).
- P. Stratilatov. Trigonomeetria ülesannete kogu IX—XII klassile. Eesti Riiklik Kirjastus 1958. a. (edaspidi — Stratilatov, Ülesannete kogu).
- В. М. Брадис. Четырехзначные математические таблицы для средней школы. Учпедгиз. 1951. а. ja hilisemad väljaanded (edaspidi — Bradis, Tabelid).
- П. Д. Панов. Счетная линейка. Гостехиздат. 1952. (edaspidi — Panov, Arvutuslukat).
- Albert Borkvell. Arvutuslūkati teooria ja käsitsemine. Eesti Riiklik Kirjastus. Tallinn 1956. a. (edaspidi — A. Borkvell, Arvutuslukat).

KOONDÜLESANNE NR. 6

ALGEBRA

Teema 1

Arvutuslükat

Kirjandus

Kalnin, XI ptk., § 135—171; harjutused nr. 1—83.

Panov, Arvutuslükat.

A. Borkvell, Arvutuslükat.

METOODILISED JUHENDID

Alustades teema «Arvutuslükat» õppimisega tuleb eelkõige korrata logaritmade põhiomadusi. Ülaltoodud kirjanduse läbitöötamisel lahendada praktiliselt kõik tekstis toodud ülesanded ja harjutused. Tundmata logaritme võib ainult mehaaniliselt omandada lükati kasutamise eeskirju, aga praktilisi harjutusi sooritamata arvutamisoskust omandada on võimatu.

Arvutuslükati põhjalik kirjeldus on toodud eespool loetletud kirjanduses.

Kriipsutame alla, et arvude kiire ja täpne pealeasetamine ja arvude lugemine lükati skaaladel on käesoleva teema õppimisel esmajärguliseks ülesandeks. Niikaua, kuni lükati skaalade ehitus ei ole selge, pole võimalik ka lükatiga töötada.

Tuleb omale hästi selgeks teha, et ühekohaliste arvude märkimisel tuleb märkija niit nihutada arvutuslükati skaalal sellise jaotuskriipsu kohale, mis on varustatud märgitavale arvule vastava numbriga (suured numbrid); kui tuleb märkida kahekohaline arv, siis nihutatakse niit vastava pikema jaotuskriipsu kohale, mis asub paremal pool kahekohalise arvu esimesele tüvenumbrile vastavat arvjaotust; kui tuleb märkida lükatil kolmekohaline arv, tuleb märkija niit nihutada vastava lühikese jaotuskriipsu kohale (või lühikeste jaotuskriipsude vahele), mis asuvad paremal pool selle kolmekohalise arvu teisele tüvenumbrile vastavat pikemat jaotuskriipsu.

Rohkem kui kolmekohalised arvud tuleb eelnevalt ümardada kolmekohalisteks. Juhul, kui mitmekohalise arvu esimene tüvenumber on 1, võib selle arvu ümardada neljakohaliseks, sest vahemikus 1—2 saab sajandikjaotusi silma järgi jagada tuhandikeks.

TEEME HARJUTUSI

Kuna lükati põhiskaaladele (C ja D) on paigutatud ühesuguses mõõtkavas arvude kümnendlogaritmid ja kui

$$c=ab, \text{ ning } \lg c = \lg a + \lg b,$$

siis tuleb kahe arvu korrutamiseks kanda arvutuslükatile lõigud, mis kujutavad mõlemale tegurile vastavaid kümnendlogaritme.

Me saame korrutamiseks järgmise eeskirja: esimese teguri kohale, mille märgime põhiskaalal D , viime keele alguskriipsu C , seejärel, muutmata keele asendit, nihutame märkijat paremale poole, kuni märkija niit läbib keelel (C -skaalal) teisele tegurile vastava jaotuskriipsu ja loeme seejärel vastuse märkija niidi alt D -skaalal.

NÄITEID

Näide 1. $1,27 \cdot 2,7 =$

Märgime esimese teguri lükati põhiosale ehk korpusele (D -skaalale): selleks nihutame märkija niidi vahemikku 1—2, 2-se ja 3-da pika jaotuskriipsu vahele 7-da lühikese jaotuskriipsu kohale ja viime keele alguskriipsu märkija niidi alla.

Nihutame märkijat paremale, kuni märkija niit läbib C -skaalal vahemikus 2—3 seitsmenda pika jaotuskriipsu.

Loeme D -skaalal märkija niidi alt korrutise 3,43, sest märkija niit asub vahemikus 3—4, neljandast pikast jaotuskriipsust 1,5 väikest jaotust paremal.

Komä asukoha määrame jämedalt ümardatud tegurite korrutamise teel: $1,27 \approx 1$; $2,7 \approx 3$; $1 \times 3 = 3$, seepärast on korrutise täisosa ühekohaline arv.

Näide 2. $42,5 \cdot 3,92 =$

Paigutame märkija niidi põhiosale (D -skaalale) vahemikku 4—5, teise ja kolmanda pika jaotuskriipsu vahel asuva lühema jaotuskriipsu kohale. Kui nüüd viia keele alguskriips märkija niidi alla, siis jaotuskriips C -skaalal, mis märgib teise teguri tüvenumbreid 3-9-2, jääb väljapoole D -skaala piirkonda, seega tuleb keele alguskriipsu asemel viia esimese teguri kohale keele lõppkriips, s. t. teha keele ülekanne.

Nüüd nihutame märkijat vasakule ja paigutame niidi C -skaalal vahemikku 3-4, 9-dast pikemast jaotuskriipsust ühe lühikese jaotuskriipsu paremale.

Kuna põhiosal jäi märkija niit paremale poole suurt numbrit 1, paremale 6-dast pikemast jaotuskriipsust ja paremale poole 6-dast lühikesest jaotuskriipsust, siis korrutis on 166. Kui võtta arvesse, et märkija niit läbis 6-da ja 7-da lühikese jaotuskriipsu vahelisest vahemikust umbes kaks kolmandikku, siis võime saada ka korrutise neljanda tüvenumbri. Kuna see vahemik kujutab endast ühte ühikut, siis kaks kolmandikku on ligikaudu 0,7 ja korrutis seega 166,7. Korrutise täisosa on kolmekohaline arv, sest $40 \cdot 4 = 160$.

Näide 3. Leida 23,4% järgmistest arvudest: 167; 254; 678; 832; 1226; 2402.

Ülesanne taandub antud arvude korrutamisele arvuga 0,234. Märgime lükati põhiosal (*D*-skaalal) numbrid 2-3-4.

Viies keele alguskriipsu märgitud arvu kohale ja nihutades seejärel märkija niiti *C*-skaalal esiteks arvu 167 ja siis 254 kohale, leiame kaks esimest tulemust: 39,1 ja 59,4.

Järgmiste tulemuste saamiseks tuleb keele lõppkriips viia arvu 0,234 kohale *D*-skaalal. Praktiliselt on soovitatav leida kõik võimalikud resultaadid keele esimese asendi juures (toodud ülesandes tuleks ka kahe viimase arvu puhul leida resultaat keele esimese asendi juures) ja alles seejärel teha keele ülekanne. Keele ülekanne teeme kõikidel juhtudel, kui jaotuskriips, mille kohalt tuleks lugeda vastus, asub väljaspool arvutuslükati põhiosa. Ülekanne toimub järgmiselt: märkija niit paigutatakse kas keele alguskriipsu või lõppkriipsu kohale, olenevalt sellest, kumb neist asub lükati põhiosal, seejärel viiakse märkija niidi alla keele lõppkriips, kui märkija niit asus alguskriipsu kohal, või alguskriips, kui märkija niit asus lõppkriipsu kohal. Pärast keele ülekannet leiame ülejäänud tulemused. Tehes kõik ülaltoodud võtted saame, et 23,4% arvudest 167; 254; 678; 832; 1226; 2402 on vastavalt 39,1; 59,4; 158,6; 194,7; 287; 562.

Õppides jagamist arvutuslükatil tuleb meeles pidada, et juhul kui $a = \frac{b}{c}$, siis $\lg a = \lg b - \lg c$. Siit järeldub, et kahe arvu jagamiseks tuleb leida jagatava ja jagaja logaritme kujutavate lõikude vahe. Sellest saame järgmise eeskirja jagamiseks: lükati *D*-skaalal märgitud jagatavaga kohakuti paigutatakse keele *C*-skaalal võetud jagaja ja jagatis loetakse kas keele alguskriipsu või lõppkriipsu kohalt, olenevalt sellest, kumb neist jääb lükati põhiosal *D*-skaala piirkonda.

Jagamisprotsess, samuti nagu korrutamisprotsessi, koosneb kahest etapist — jagatise tüvenumbrite leidmisest ja saadud tulemuses koma õigest paigutamisest. Arvutuslukat täidab ainult selle etapi esimese osa. Koma paigutamiseks tuleb jällegi nii jagatavat kui ka jagajat jämedalt ümardada ja leida koma õige asukoht nende ümardatud arvude jagamise teel.

N ä i d e 4. $35,7 : 0,271 =$

Viime märkija niidi *D*-skaalal jagatava tüvenumbrite 3-5-7 kohale, seejärel nihutame keelt, kuni *C*-skaala jagaja tüvenumbreid 2-7-1 tähistav jaotuskriips jääb märkija niidi alla. Jagatise tüvenumbrid 1-3-1-8 leiame lükati *D*-skaalal (keele alguskriipsu kohalt). Koma asukoht jagatises määratakse jämedalt ümardatud jagatava ja jagaja jagamise teel: $30 : 0,3 = 100$, järelikult peab jagatise täisosa sisaldama kolme tüvenumbrit ja seega $35,7 : 0,271 = 131,8$.

N ä i d e 5. $0,00274 : 0,873 =$

Viime märkija niidi *D*-skaalal jaotuskriipsule 2-7-4 ja nihutame keelt, kuni sellel asuv *C*-skaala jaotuskriips, mis kujutab jagaja tüvenumbreid 8-7-3, jääb märkija niidi alla. Jagatise tüvenumbrid 3-1-4 leiame jällegi lükati põhiosal *D*-skaalal (keele lõppkriipsu kohalt). Koma asukoha jagatises määrame jämedalt ümardatud jagatava ja jagaja jagamise teel: $0,003 : 1 = 0,003$, järelikult $0,00274 : 0,873 = 0,00314$.

Arvutuslükatiga on mugav lahendada ka korrutamise ja jagamise tehteid sisaldavaid kombineeritud ülesandeid.

Vaatleme ühte kombineeritud ülesannetest.

N ä i d e 6.

$$\frac{6,3 \cdot 4,3}{8,7} =$$

Arvutada võib kahel viisil — alguses korrutamine ja siis jagamine, või vastupidi. Vaatleme, kuidas see toimuks praktiliselt.

Asetame märkija niidi *D*-skaalal jaotuskriipsule 6-3-0 ja viime keele lõppkriipsu märkija niidi alla. Nihutame seejärel märkija niidi *C*-skaalal jaotuskriipsu 4-3-0 kohale ja märgime sellega lükati *D*-skaalal saadud korrutise. Jäi üle teostada jagamine. Selleks viime *C*-skaalal jaotuskriipsu 8-7-0 märkija niidi alla ja loeme keele lõppkriipsu kohalt *D*-skaalal lõpptulemuse: 3,12.

Nüüd teeme need tehted teises järjekorras. Asetame märkija niidi jälle *D*-skaalal jaotuskriipsule 6-3-0 ja viime *C*-skaala jaotuskriipsu 8-7-0 märkija niidi alla. Keele lõppkriipsu kohale *D*-skaalal jäi nende arvude jagatis. Järgnevas korrutamiseks tuleks jagatise kohale viia kas keele alguskriips või lõppkriips, kuid viimane juba asubki jagatise kohal, seepärast lõpptulemuse leidmiseks tuleb meil, lugemata vahepealset resultaati, nihutada märkija niit *C*-skaalal jaotuskriipsu 4-3-0 kohale ja lugeda niidi alt *D*-skaalal lõpptulemus 3,12. On ilmne, et teine viis on palju ratsionaalsem ja täpsem, kuna seal tuli teha ainult üks keele lüke. Niisiis tuleks korrutamise ja jagamise kombineeritud ülesannete

lahendamise juures teha kõigepealt jagamise ja seejärel korrutamise tehe.

Kui nii murru lugejas kui ka nimetajas on mitu tegurit, näiteks avaldise $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$ arvutamisel on soovitatav jagada ja korrutada vaheldumisi, s. t. arvutada alljärgneva skeemi kohaselt $[(a : e \cdot b) : f \cdot c] : g \cdot d$, tänu sellele väheneb keele lükete arv ja suureneb arvutuse täpsus.

Toodud näitest ilmneb, et teostades lükatiga kombineeritud tehteid, pole vaja lugeda (ja veel vähem üles kirjutada) vahepealseid tulemusi, vaid ainult märkida neid lükatil märkija niidi abil.

Ruutskaalad (A ja B) kujutavad endast samasuguseid logaritmilisi skaalasid nagu põhiskaalad, kuid mõõtkavalt kaks korda väiksemaid, seepärast vastab põhiskaala ühele pikkusele ruutskaala kaks pikkust, ehk teisiti väljendatult koosneb ruutskaala kahest logaritmilisest ühikust. Skaaladega A ja B saab korrutada ja jagada täpselt samuti nagu põhiskaaladegagi, kuid vastuse saame ebatäpsema. Selleks, et leida antud arvu ruutu, tuleb see arv märkida niidiga põhiskaalal ja vastus lugeda ruutskaalal märkija niidi alt. Koma asetamiseks kasutame kas jämedalt ümardamise viisi või järgmist võtet. Lahutame astendatava arvu kaheks teguriks nii, et üks teguritest oleks ühekohaline arv ja teine tegur arvu 10-ne vastav aste. Sel juhul astendame arvutuslükatil ühekohalise täisosaga arvu, kusjuures saadud astme koma koha võime määrata peast, ning saadud astet korrutame 10-ne vastava astmega.

Näiteid:

$$525^2 = (5,25 \cdot 10^2)^2 = 5,25^2 \cdot 10^4 = 27,6 \cdot 10\,000 = 275\,000$$

$$0,0017^2 = (1,7 \cdot 10^{-3})^2 = 1,7^2 \cdot 10^{-6} = 2,89 \cdot 0,000\,001 = 0,000\,002\,89.$$

Ruutjuure leidmiseks märgitakse juuritav arv märkija niidiga ruutskaalal ja juure tüvenumbrid loetakse põhiskaalal märkija niidi alt. Ruutjuure leidmisel ei ole ükskõik, kummal logaritmilisel ühikul märkida juuritav arv. Lähtume siin ruutjuure leidmise eeskirjast. Kõigepealt jaotame juuritava arvu (kümnendmurru) komast vasakule ja paremale poole kahe numbri kaupa rühmadeks. Kui seejuures esimene (vasakpoolne) tüvenumbreid sisaldav rühm koosneb ühest tüvenumbrist, siis märgitakse juuritav arv niidiga ruutskaala esimesel logaritmilisel ühikul, kui aga esimene tüvenumbreid sisaldav rühm koosneb kahest tüvenumbrist, siis märgitakse juuritav arv ruutskaala teisel logaritmilisel ühikul. Nii näiteks arvude 625; 3,042; 0,0248 ruutjuurte arvutamisel tuleb nad niidiga märkida ruutskaala esimesel logaritmilisel ühikul, sest rühmitatult on need arvud: 6'25; 3,04'20; 0,02'48; kuid arvude 1352; 16,15; 0,008 13 ruutjuurte arvutamisel tuleb nad niidiga

märkida ruutskaala teisel logaritmilisel ühikul, sest rühmitatult on nad $13'52; 16,15; 0,00'81'30$. Selle võttega on lihtne määrata ruutjuure väärtuses koma asukoht: juuritava arvu iga rühm komast vasakul pool annab ruutjuure täisosas ühe numbri. Kui seejuures juuritav arv on väiksem kui üks ja koma järel esinevad nullid (kuni esimese tüvenumbrini), siis on muidugi ruutjuure täisosa null ja koma järel esineb nii mitu nulli, kui mitu rühma järgemööda komast paremal pool sisaldavad kaks nulli.

Näide 7. $\sqrt{2653} =$

Jaotades juuritava arvu algusega koma asukohast rühmadesse $26'53$ näeme, et esimene rühm sisaldab kahte tüvenumbrit — 26 — ja seetõttu tuleb juuritav arv märkida A -skaala teisel logaritmilisel ühikul. Ruutjuure väärtuse loeme põhiskaalalt D märkija niidi alt: $\sqrt{2653} = 51,5$. Juure täisosa sisaldab eespool toodud kohtade määramise reegli põhjal kahte tüvenumbrit, sest juuritava arvu täisosas on kaks rühma.

Näide 8. $\sqrt{0,00052} =$

Jaotame siin juuritava arvu rühmadesse järgmiselt: $0,00'05'20$ ja märgime niidiga A -skaala esimesel logaritmilisel ühikul tüvenumbrid $5-2$ ning loeme niidi alt D -skaalal ruutjuure tüvenumbrid $2-2-8$.

Seega $\sqrt{0,00052} = 0,0228$.

Näide 9.

$$\frac{48,5}{\sqrt{6,03}}$$

Ruutjuure väärtuse leiame põhiskaalalt, kui märgime juuritava arvu ruutude skaalal. Järelikult tuleb ülaltoodud jagamine sooritada põhiskaaladega, kusjuures aga jagaja tüvenumbrid tuleb võtta ruutude skaalal B .

Seega viime märkija niidi D -skaalal jagatava tüvenumbrite $4-8-5$ kohale ja B -skaala jaotuskriipsu, mis märgib jagaja tüvenumbreid $6-0-3$, märkija niidi alla. Jagatise väärtuse $19,7$ loeme keele alguskriipsu kohalt D -skaalal. Koma asukohta jagatise määrame jagatava ja jagaja jämedalt ümardamise teel.

Arvude kuupide ja kuupjuurte nii otseseks leidmiseks, kui ka arvude kuupe ja kuupjuuri sisaldavate kombineeritud avaldiste arvutamiseks on lükati ülemisel äärel kuupskaala ehk lühidalt K -skaala. K -skaalal on lükati põhiskaala pikkuses kolm ühepikkust logaritmilist ühikut, milliseid loeme järgemööda (vasakult paremale) esimeseks, teiseks ja kolmandaks logaritmiliseks ühikuks.

K -skaala esimene logaritmiline ühik sisaldab arvusid 1—10, teine 10—100 ja kolmas 100—1000. Seega esinevad K -skaalal kõik arvud 1—1000, kui skaala alguskriipsu lugeda 1-ks.

Arvude kuupi tõstmiseks märgime niidiga astendatava arvu D -skaalal ja loeme kuubi K -skaalal.

Kui astendatava arvu täisosa on ühekohaline arv, siis koma asukoha kuubis määrab logaritmiline ühik K -skaalal, kust loetakse kuubi tüvenumbrid.

Kui aga astendatava arvu täisosa ei ole ühekohaline arv, siis koma asukoha määramiseks kuubis lahutame astendatava arvu kaheks teguriks nii, et üks teguritest oleks ühekohalise täisosaga arv ja teine tegur kujutaks arvu 10-ne vastavat astet. Sel juhul astendame arvutuslükatil ühekohalise täisosaga arvu, mille astet korrutame 10-ne vastava astmega.

Näiteks toimuks arvu 0,003 65 kuupi tõstmine järgmiselt:

$$0,003\ 65^3 = (3,65 \cdot 10^{-3})^3 = 3,65^3 \cdot 10^{-9} = 48,6 \cdot 10^{-9} = 0,000\ 000\ 048\ 6.$$

Arvude kuupjuurte arvutamisel, kuupjuure leidmiseks ja koma asukoha määramiseks kuupjuures jaotame juuritava arvu (kümnendmurru) komast vasakule ja paremale poole kolme numbri kaupa rühmadeks. Kõige esimesse tüvenumbreid sisaldavasse rühma võib jääda seega kas üks, kaks või kolm tüvenumbrit. Jääb kõige esimesse tüvenumbreid sisaldavasse rühma üks tüvenumber, siis märgitakse juuritav arv niidiga kuupskaala esimesel logaritmilisel ühikul; jääb kaks tüvenumbrit, siis teisel logaritmilisel ühikul. Näiteks arvude 1234; 3,05 ja 0,006 42 kuupjuurte arvutamisel tuleb nad märkida kuupskaala esimesel logaritmilisel ühikul, sest rühmadesse jaotatult on nad: 1'234; 3'050 ja 0,006'420; ning arvude 121 340; 30,5 ja 0,0642 kuupjuurte arvutamisel tuleb nad märkida kuupskaala teisel logaritmilisel ühikul, sest rühmitatult on nad: 12'340; 30'500; 0,064'200; ning arvude 123,4; 305 ja 0,000 642 kuupjuurte arvutamisel tuleb nad märkida kuupskaala kolmandal logaritmilisel ühikul, kuna nad rühmadesse märgitult on 123,400; 305,000; 0,000'642. Kuupjuurte väärtuses koma asukoha määramiseks annab juuritava arvu iga rühm komast vasakul pool kuupjuure täisosas ühe numbri. Kui seejuures juuritav arv on väiksem kui üks ja koma järel esinevad nullid (kuni esimese tüvenumbrini), siis on kuupjuure täisosa null ja koma järel esineb nii mitu nulli, kui mitu rühma järgemööda komast paremal pool sisaldavad kolm nulli. Siit järeldub, et koma asukoha kuupjuures võime kindlaks määrata juuritava arvu rühmade järgi, nagu see toimus ruutjuure leidmisel.

Näide 10. $\sqrt[3]{7502} =$

Jaotades juuritava arvu kolme numbri kaupa rühmadeks näeme, et esimene rühm sisaldab ühte tüvenumbrit. Seega tuleb

juuritav arv märkida kuupide skaala esimesel logaritmilisel ühikul. Märkija niidi alt D -skaalal loeme juure tüvenumbrid 1-9-6. Kuna juuritavas arvus on kaks rühma, siis juure täisosa sisaldab kahte tüvenumbrit ja järelikult:

$$\sqrt[3]{7502} = 19,6.$$

Arvutuslükatiga on kerge lahendada ka võrdeid. Selle küsimuse teoreetiline osa on käsitletud vastavas kirjanduses; siin piirdume ainult mõningate näidete vaatlemisega. Tähendame, et juhul, kui võrde eesliikmed märkida arvutuslükati põhiskaalal D ja tagaliikmed põhiskaalal C , siis neil skaaladel kohakuti seisvate arvude suhted on võrdsed, vaatamata sellele, kas arvutuslükati keel on lükatud paremale või vasakule.

Siis saame järgmise eeskirja.

1) Antud võrde eesliikme märgime märkija niidi abil D -skaalale ja viime sellega kohakuti vastava tagaliikme C -skaalal.

2) Seejärel viime märkija niidi teise suhte tuntud liikme kohta (kui see on eesliige, siis D -skaalal, kui tagaliige, siis C -skaalal). Teise suhte tundmatu liikme loeme vastavalt kas C -skaalal või D -skaalal märkija niidi alt. Eesliikmete ja tagaliikmete paigutus põhiskaaladel võib olla ka vastupidine, s. t. eesliikmed võetakse C -skaalal ja tagaliikmed D -skaalal.

Näide 11. Leida antud võrdest $\frac{0,65}{x} = \frac{3,2}{7,5}$ tundmatu x .

Asetame keele selliselt, et jaotuskriips, mis tähistaks arvu 7,5, jääks kohakuti D -skaala jaotuskriipsuga 3,2. Teeme keele ülekande ja loeme D -skaala jaotuskriipsu 0,65 kohalt C -skaalal vastuse 1,523; järelikult $x = 1,523$. Sama tulemuse oleks saanud ka siis, kui tuntud liikmete paigutus põhiskaaladel oleks olnud vastupidine.

Näide 12. Keemilise analüüsi tulemusena koosnes analüüsiv segu järgmistest komponentidest: A — 258 g, B — 150 g, C — 94 g, D — 28 g.

Leida mitu % moodustab iga komponent segu üldkaalust.

Ülesanne taandub järgmiste võrrete lahendamisele:

$$\frac{x_1}{258} = \frac{x_2}{150} = \frac{x_3}{94} = \frac{x_4}{28} = \frac{100}{530}.$$

Võrrete kirjutusest järeldub, et D -skaala lõppkriipsu kohale tuleb asetada C -skaala jaotuskriips 5-3-0. Viime märkija niidi järk-järgult C -skaalal nimetajate 258; 150; 94 ja 28 kohale ja loeme D -skaalalt vastused (x_3 leidmiseks tuleb teha keele ülekande). Vastuseks saame, et komponent A moodustab 48,7%; B — 28,3%; C — 17,7% ja D — 5,3%.

GEOMEETRIA

Teema 2

Hulktahukad

Hulktahuka mõiste. Prisma (kaldprisma, püstprisma, korrapärane prisma). Rööptahukas (kaldrööptahukas, püströöptahukas, risttahukas). Rööptahuka servade, tahkude ja diagonaalide omadus*. Risttahuka diagonaalide omadus.* Kald- ja püströöptahuka pindala*. Põhimõisted ruumaladest. Ruumala mõõtühik. Lemma püstprisma ja kaldprisma ruumvõrdsusest. Püströöptahuka ja kuubi ruumala; kald- ja püstprisma ruumala*. Kolmnurkse ja hulknurkse prisma ruumala*.

Püramiid (korrapärane püramiid, täispüramiid, tüvipüramiid). Püramiidi põhjaga paralleelse tasapinnalise lõike omadus*. Täis- ja tüvipüramiidi pindala*. Pindvõrdsete põhitahkude ja võrdsete kõrgustega püramiidide ruumvõrdsus. Kolmnurkse ja hulknurkse püramiidi ruumala*. Tüvipüramiidi ruumala*.

METOODILISED JUHENDID

Põhiliseks momendiks, mis kergendab tunduvalt teema «Hulktahukad» õppimist on, nagu kõikide teistegi teemade õppimise juures matemaatikas, teoreetilise materjali ja teemade teadlik ning põhjalik omandamine ja oskus teoreetilise materjali rakendamiseks ülesannete lahendamisel.

Elkõige on vajalik hästi mõista iga definitsiooni, iga õpitavat teoreemi, iga õpitavat osa. Mis tahes teoreemi tõestamisel peab olema selge, missugusel definitsioonil, aksioomil või teoreemil põhineb antud järeldus. Definitsioonide ja teoreemide sõnastuse mehaaniline õppimine, neid lahti mõtestamata ja neid põhjalikult omandamata, ei anna õppimisel positiivseid tulemusi. Neil juhtudel unustatakse õpitu kiiresti ja tuleb ilmsiks, et ei osata rakendada läbivõetud teoreetilist materjali ülesannete lahendamisel ning järgnevate teemade läbitöötamisel.

Õpilastel tuleb aru saada, et õppides üht või teist teema osa, peavad nad hästi lahti mõtestama kõik õpikus toodud seletused, seejärel tõestama teoreemi või tuletama valemi iseseisvalt, kasutamata selleks õpiku abi, ja alles seejärel alustama ülesannete lahendamist.

Juhul, kui teoreetilist materjali õpitakse Kisseljovi geomeetria õpiku II osa järgi, tuleks kindlasti hoida käepärast ka sama autori geomeetria õpiku I osa, sest mis tahes sfereomeetria ülesande

* Märgitud teoreeme peavad õpilased oskama tõestada.

lahendamisel tuleb kasutada planimeetria kursuses õpitud teoreeme, definitsioone, aksioome ja järeldusi.

Antud teema õppimisel ruumilise ettekujutuse arendamiseks soovitage teoreemide läbitöötamisel ja ülesannete lahendamisel kasutada vaadeldavate geomeetriliste kujundite mudeleid. Mudelite valmistamiseks võib kasutada igasugust käepärast olevat materjali (nööri, niiti, pappi jne.). Õigesti ja hästi valmistatud mudel kergendab tunduvalt nii teoreetilise materjali omandamist kui ka ülesannete lahendamist. Olles omandanud kogemusi ja ruumilist ettekujutust ülesannete lahendamiseks, tuleb üha harvem ja harvem kasutada ülesannete lahtimõtestamiseks geomeetriliste kehade mudeleid, selleks piisab joonisest.

Suurt osa ülesannete lahendamisel mängib joonis. Hästi tehtud joonis võimaldab leida kiiresti õige ja kõige ratsionaalsema tee ülesande lahendamiseks, seepärast tuleb joonise tegemise korralikkusele ja selle näitlikkusele pöörata tõsist tähelepanu. Värviliste pliiatsite kasutamine teeb joonise näitlikumaks ja kergendab ülesande lahenduste leidmist.

Geomeetriliste kehade joonestamisel tõmmatakse kõik nähtavad jooned pideva joonega ja nähtamatud — punktiiriga.

Lisaks üldisele stereomeetrilisele joonisele on mõnikord, eriti teema õppimise alguses, kasulik teha üksikuid planimeetrilisi abijooniseid nendest hulktahuka elementidest (põhitahust, külgtahkudest ja lõigetest), millised esinevad ülesande lahendamisel. See soodustab vaadeldava geomeetrilise keha elementide vaheliste seoste mõistmist.

Iseseisva töö organiseerimisel käesoleva teema õppimiseks soovitage tungivalt täita järgnevaid nõudeid:

- 1) Õppige selgeks definitsioonid.
- 2) Mõelge tähelepanelikult läbi õpitava teoreemi iga samm. Ärge jätke endale midagi ebaselgeks; kõiki viiteid varemõpitud materjalile kontrollige õpikust.
- 3) Pärast vastavate teoreemide tõestuste õppimist kirjutage iga teoreemi (definitsiooni) sõnastus õpikut kasutamata oma töövihikusse ja kontrollige oma üleskirjutust õpikuga.
- 4) Pärast teoreemi õppimist tuleb kindlasti iseseisvalt teha joonis teoreemi kohta ja tõestada teoreem.
- 5) Õppides teooriat ja lahendades ülesandeid, kontrollige ennast, kas te kujutate endale õigesti ette joonte ja tasapindade vastastikust asendit selle ruumilise kujundi juures, millest on juttu.
- 6) Lahendage ülesanded ainult vihikusse, mitte aga paberitükikestele, kõik kirjutused olgu ranges järjekorras. Ülesande lahendamisel andke lühike seletus lahenduskäigust (eeskujud on toodud näidisülesannete lahenduste juures). Iga ülesande lahenduskäik vormistage korralikult.

Teema materjali suure hulga tõttu on otstarbekohane jaotada materjal neljaks järgmiseks alateemaks.

Alateema 1. Hulktahuka mõiste. Prisma. Rööptahukas. Rööptahuka tahkude, servade ja diagonaalide omadused. Prisma pindala.

Alateema 2. Rööptahuka ja prisma ruumala.

Alateema 3. Püramiidid. Püramiidi põhjaga paralleelse tasapinnalise lõike omadus. Täispüramiidi ja tüvipüramiidi pindala.

Alateema 4. Täispüramiidi ja tüvipüramiidi ruumala.

Alateema 1

Hulktahuka mõiste. Prisma. Rööptahukas. Rööptahuka tahkude, servade ja diagonaalide omadused. Prisma pindala.

Kirjandus

- Andrejev. Geomeetria, VIII ptk., § 107—112; ülesanded nr. 6, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 17, 18, 20 (lk. 225—227).
Kisseljov. Geomeetria, II osa, § 67, 68, 69, 72, 73, 78, 79.
Rõbkin. Ülesannete kogu, II osa, § 7, nr. 3, 4, 10, 13, 20, 29, 31; § 8, nr. 7, 9, 14, 18, 19, 25.

METOODILISED JUHENDID

Antud alateema õppimisel tuleb selgeks teha vahe püstprisma ja korrapärase prisma ning püstprisma ja risttahuka vahel. Nende geomeetriliste kehade definitsioonide paremaks omandamiseks soovitate valmistada püströöptahuka, risttahuka, püstprisma ja kaldprisma mudelid.

Stereomeetrilise joonise valmistamisel ja lugemisel tuleb arvestada kujutise tinglikkust: sirglõigud, mis on joonisel ühepikkused, võivad tegelikkuses olla eri pikkusega ja vastupidi. Täisnurk võib joonisel näida nii nürinurgana kui ka teravnurgana.

Soovitatud õpikutes ja ülesannete kogudes on joonised tehtud paralleelses kaldprojektsioonis, kusjuures:

- a) sirglõigu projektsioon on sirge, välja arvatud juhul, kus sirge on risti projektsioontasapinnaga,
- b) paralleelsed sirged projekteeritakse paralleelsetena,
- c) ühel ja samal sirgel olevate sirglõikude suhe säilib ka nende sirglõikude projektsioonide juures.

Stereomeetriliste jooniste tegemisel soovitate jälgida järgmisi nõudeid:

- a) joonis peab olema küllalt suur;
- b) joonestades oma ees asuvat prismat (rööptahukat), tõmmake see joon, mis asub teie suhtes paralleelselt, horisontaal-

joonena ja serv, mis läheb risti, 45° -se nurga all horisontaaljoone suhtes;

c) kõik teie suhtes paralleelsed sirglõigud joonestage ühes ja samas mõõtkavas, kuid sirglõigud, mis asuvad risti — kaks korda vähendatud mõõtkavas;

d) hulktahuka kõrgus tõmmake vertikaalselt, s. t. selle paberi servaga paralleelselt, millele te joonistate;

e) mõnikord osutub vajalikuks teha planimeetriline abijoonis prisma (rööptahuka) mõnest osast, et selgitada vaadeldava keha elementide vahelisi seoseid.

Lisaks õpikus sisalduvale materjalile tuleb teada veel järgmisi küsimusi:

1) prisma täispindalaks nimetatakse tema kõikide tahkude pindalade summat,

2) korrapärase prisma külgpindala võrdub tema übermõõdu ja külgserva pikkuse korrutisega.

ÜLESANNETE LAHENDAMISE NÄITEID

Ülesanne 1.

Püströöptahuka külgserv on 1 m, põhiservad 23 dm ja 11 dm ning põhitahu diagonaalid suhtuvad nagu 2 : 3.

Arvutada diagonaallõigete pindalad.

Antud: püströöptahukas $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (joon. 1);

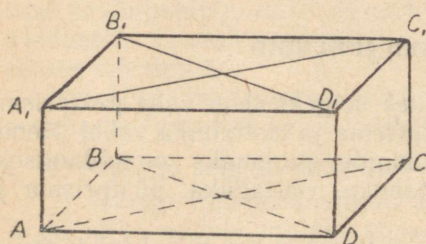
$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 1 \text{ m},$$

$$AA = CD = 11 \text{ dm},$$

$$AD = BC = 23 \text{ dm},$$

$$BD : AC = 2 : 3.$$

Leida $S_{AA_1 C_1 C}$ ja $S_{BB_1 D_1 D}$, kus S on pindala sümbol.



Joon. 1.

Lahendus.

$$S_{AA_1 C_1 C} = AC \cdot CC_1; \quad S_{BB_1 D_1 D} = BD \cdot DD_1;$$

$$CC_1 = DD_1 = AA_1 = H = 1 \text{ m} = 10 \text{ dm}.$$

Arvutame põhitahu diagonaalid, kasutades teoreemi: iga rööpküliku diagonaalide ruutude summa võrdub külgede ruutude summaga.

Tähistame lõikude AC ja BD ühise mõõdu tähega x , siis

$$AC = 3x, \quad BD = 2x, \\ AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2),$$

$$9x^2 + 4x^2 = 2(23^2 + 11^2),$$

$$13x^2 = 2(529 + 121),$$

$$13x^2 = 1300,$$

millest

$$x^2 = 100 \text{ ja}$$

$$x = 10, AC = 30 \text{ dm}, BD = 20 \text{ dm}.$$

$$S_{AA_1B_1C} = 30 \cdot 10 = 300 \text{ dm}^2,$$

$$S_{BB_1D_1D} = 20 \cdot 10 = 200 \text{ dm}^2.$$

Vastus. Diagonaallõigete pindalad on 3 m^2 ja 2 m^2 .

Ülesanne 2.

Püströöptahuka põhiservad on 3 cm ja 4 cm ning moodustavad teineteisega nurga 60° . Külgserv on keskmine võrdeline põhiservade suhtes. Arvutada rööptahuka diagonaalid.

Antud: püströöptahukas $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (joon. 2);

$$AB = 4 \text{ cm}, AD = 3 \text{ cm},$$

$$\angle BAD = 60^\circ \cdot DD_1 =$$

$$= \sqrt{AB \cdot AD} = 2\sqrt{3}.$$

Arvutada:

$$A_1C \text{ ja } B_1D.$$

Lahendus.

Rööptahuka diagonaalide arutamiseks tuleb määrata põhitahu diagonaalid AC ja BD . Tõmbame $BK \perp AD$ kolm-

nurgast ABK , saame: $AK = \frac{1}{2}AB = 2 \text{ cm}$ — täisnurkses kolmnurgas 30° -se teravnurga vastaskaatet on pool hüpotenuusist.

Rakendades teoreemi teravnurga vastaskülje ruudu kohta arvutame BD :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AK,$$

$$BD^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 = 13.$$

Rööpküljiku diagonaalide ruutude summa teoreemi põhjal arvutame põhitahu teise diagonaali:

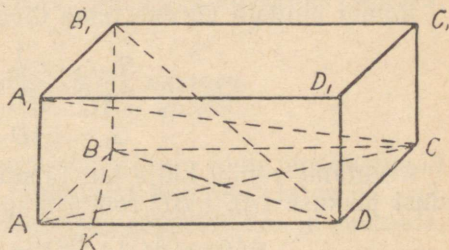
$$AC^2 = 2(AD^2 + AB^2) - BD^2,$$

$$AC^2 = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 16 - 13 = 18 + 32 - 13 = 37.$$

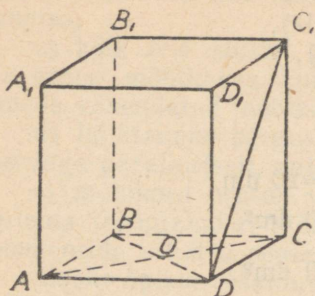
Arvutame nüüd rööptahuka diagonaalid, kasutades selleks Pythagorase teoreemi.

$$\text{Kolmnurgast } BB_1D: B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{12 + 13} = 5 \text{ cm}.$$

$$\text{Kolmnurgast } ACA_1: CA_1 = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = \sqrt{12 + 37} = 7 \text{ cm}.$$



Joon. 2.



Joon. 3.

Vastus. Antud rööptahukal on kaks võrdset diagonaali:

$$A_1C = AC_1 = 7 \text{ cm}, \\ BD_1 = B_1D = 5 \text{ cm}.$$

Ülesanne 3.

Püströöptahuka põhjaks on romb, diagonaalidega 6 cm ja 8 cm; külgtahu diagonaal on 13 cm. Arvutada selle rööptahuka täispindala.

Antud: püströöptahukas

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1,$$

romb $ABCD$ (joon. 3);

$$AC = 8 \text{ cm}; BD = 6 \text{ cm ja } DC_1 = 13 \text{ cm}.$$

Arvutada täispindala S_T .

Lahendus.

$$S_T = 2S_{\text{romb}} + S_k.$$

Rombi pindala võrdub tema diagonaalide poole korrutisega.

$$S_{\text{romb}} = \frac{1}{2} AC \cdot BD,$$

$$2S_{\text{romb}} = AC \cdot BD = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2,$$

$$S_k = AAD \cdot AA_1.$$

Arvutame rombi külje kui täisnurkse kolmnurga AOD hüpotenuusi pikkuse ($AC \perp BD$ rombi diagonaalide omaduse põhjal).

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm},$$

Kolmnurgast DCC_1 leiame CC_1 :

$$CC_1 = \sqrt{DC_1^2 - DC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{18 \cdot 8} = 12 \text{ cm}.$$

Siit:

$$S_k = 4 \cdot 5 \cdot 12 = 240 \text{ cm}^2,$$

$$S_T = 48 + 240 = 288 \text{ cm}^2.$$

Vastus. Antud püströöptahuka täispindala on 288 cm^2 .

Kontrollküsimusi

1. Mis on hulktahukas?
2. Mida nimetatakse hulktahuka tahuks, servaks ja tipuks?
3. Sõnastage prisma ja rööptahuka definitsioon.
4. Nimetage rööptahuka diagonaalide ja tahkude omadused.
5. Missugune on risttahuka diagonaali omadus?
6. Kuidas arvutatakse a) kaldprisma, b) püstprisma, c) korrapärase prisma külgpindala?
7. Kas võib igasugust nelinurkset prisma nimetada rööptahukaks?

Alateema 2

Rööptahuka ja prisma ruumala

Kirjandus

Andrejev. Geomeetria, VIII ptk., § 113—118; ülesanded 24, 25, 29, 30, 31, 32, 34, 37, 38, 40 (lk. 228—230).

Kisseljov. Geomeetria, II osa, § 82—89.

Röbkin. Ülesannete kogu, II osa, § 16, nr. 4, 15(1), 18, 19(1), 21, 23, 26, 35, 37(1).

METOODILISED JUHENDID

Mööta mingisuguse keha ruumala, tähendab võrrelda seda keha teise kehaga, mille ruumala on valitud mõõtühikuks. Ülesannete lahendamisel mõistetakse tavaliselt keha ruumala all mõõt-arvu, mis näitab, mitu korda ruumala mõõtühik mahub keha ruumalasse, või millise osa mõõtühikust moodustab keha ruumala. Tuleb hästi eristada mõisteid: võrdsed kehad (kehad, mis teineteise sisse paigutamisel ühtivad) ja ruumvõrdsed kehad (kehad, millel on võrdne ruumala).

ÜLESANNETE LAHENDAMISE NÄITEID

Ülesanne 4.

Püströöptahuka põhiservad on 3 cm ja 5 cm ning moodustavad teineteisega nurga 60° ; suurema diagonaallõike pindala on 63 cm^2 . Arvutada rööptahuka väiksem diagonaal, külgpindala ja ruumala.

Antud: püströöptahukas

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1,$$

rööpkülilik $ABCD$ (joon. 4);

$$AB = 3 \text{ cm}, AD = 5 \text{ cm},$$

$$\angle BAD = 60^\circ \text{ ja}$$

$$S_{AA_1 C_1 C} = 63 \text{ cm}^2.$$

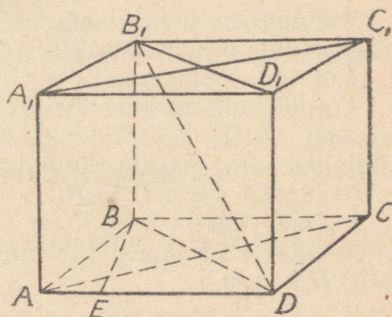
Arvutada: $B_1 D$, S_k ja V ; S_k on rööptahuka külgpindala ja V — ruumala.

Lahendus.

Selleks, et leida $B_1 D$, tuleb arvutada rööptahuka kõrgus BB_1 ja rööptahuka põhitahu diagonaal BD . Põhitahu diagonaali BD leiame kolmnurgast ABD teravnurga vastaskülje ruudu teoreemi järgi:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE,$$

Kolmnurgas ABE $AE = \frac{1}{2} AB$, kui kaatet, mis asub nurga $ABE = 30^\circ$ vastas,



Joon. 4.

$$AE = 1,5 \text{ cm,}$$

$$BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1,5 = 9 + 25 - 15 = 34 - 15 = 19.$$

Rööptahuka kõrguse leiame suurema diagonaallõike pindala kaudu, arvutades eelnevalt põhitahu teise diagonaali rööpküliku diagonaalide ruutude summa teoreemi järgi:

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2),$$

$$AC^2 = 2(9 + 25) - 19 = 49; AC = 7 \text{ cm;}$$

$$AC \cdot AA_1 = 63,$$

$$7 \cdot AA_1 = 63; AA_1 = BB_1 = 9 \text{ cm.}$$

Arvutame B_1D :

$$B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{81 + 19} = 10 \text{ cm,}$$

$$B_1D = 10 \text{ cm.}$$

Arvutame külgpindala valemi järgi S_k :

$$S_k = P \cdot H = 2(AB + BC)H = 2(5 + 3) \cdot 9 = 16 \cdot 9 = 144 \text{ cm}^2.$$

Arvutame ruumala $V = S_p \cdot H$,

$$V = AD \cdot BE \cdot AA_1,$$

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt{3} = 1,5\sqrt{3}.$$

$$V = 5 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{3} \cdot 9 = \frac{135 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3.$$

Vastus. $B_1D = 10 \text{ cm; } S_k = 144 \text{ cm}^2.$

$$V = \frac{135 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3.$$

Ülesanne 5.

Kolmnurkse püstprisma kõrgus on 5 m, tema ruumala 24 m^3 ja külgtahkude pindalad suhtuvad nagu 17:17:16.

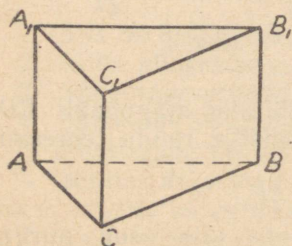
Arvutada põhiservad.

Antud: kolmnurkne püstprisma $ABCA_1B_1C_1$ (joon. 5); $AA_1 = 5 \text{ cm; } Q_1:Q_2:Q_3 = 17:17:16$; kus Q_1, Q_2 ja Q_3 on külgtahkude pindalad, ning prisma ruumala $V = 24 \text{ m}^3$.

Arvutada AB ; AC ja BC .

Lahendus.

Arvutame prisma põhja pindala prisma ruumala valemi $V = Q \cdot H$ kaudu.



Joon. 5.

$$\text{Siit } Q = \frac{V}{H};$$

$$Q = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ m}^2.$$

Arvutame põhiservad. Kuna võrdsete kõrgustega ristkülikute (antud prisma külgtahud) pindalad suhtuvad nagu nende alused, siis

$$Q_1:Q_2:Q_3 = AC:AB:BC.$$

Tähistades lõikude AC , AB ja BC ühise mõõdu tähega x , saame:
 $AC=17x$; $AB=17x$; $BC=16x$.

Prisma põhitahu ehk põhja pindala avaldame Heroni valemi kaudu:

$$Q = \sqrt{25x(25x-17x)(25x-17x)(25x-16x)} = \sqrt{25x \cdot 8x \cdot 8x \cdot 9x} = 8x \cdot 15x = 120x^2.$$

$$\text{Järelikult } 120x^2 = 4,8; \quad x^2 = \frac{4,8}{120} = 0,04,$$

siit $x=0,2$.

Põhiservad $AC=AB=17 \cdot 0,2=3,4$ cm,

$$BC=16 \cdot 0,2=3,2 \text{ cm.}$$

V a s t u s. Prisma põhiservad on:

$$AB=AC=3,4 \text{ cm,}$$

$$BC=3,2 \text{ cm.}$$

Kontrollküsimusi

1. Mida nimetatakse keha ruumalaks?
2. Nimetage põhimõisted ruumaladest.
3. Missuguseid kehasid nimetatakse ruumvõrdseteks?
4. Kuidas väljendub risttahuka ruumala?
5. Sõnastage lemma püstprisma ja kaldprisma ruumvõrd-
suse kohta.
6. Kuidas määratakse kolmnurkse ja hulknurkse prisma ruum-
ala? Tuletage valemid.

A l a t e e m a 3

Püramiid. Püramiidi põhjaga paralleelse lõike omadus. Täis- ja tüvipüramiidi pindala.

Kirjandus

Andrejev. Geomeetria, VIII ptk., § 119—121; ülesanded nr. 41, 42, 44—49, 51, 52.

Kisseljov. Geomeetria, II osa, § 70, 71, 74, 75, 76, 77, 80, 81.

Rõbkin. Ülesannete kogu, II osa, § 9, nr. 3, 9, 17; § 10, nr. 2, 5, 9, 19; § 11, nr. 2, 6; § 12, nr. 3, 6(1).

METOODILISED JUHENDID

Selle alateema õppimisel tuleb hoolikalt selgitada korrapärase püramiidi ja tüvipüramiidi mõiste. Tuleb hästi meeles pidada, et korrapärase püramiidi apoteemiks nimetatakse tema külgtahu kõrgust. Antud alateema teoreetilisest materjalist tuleb teha järeldus, et üldvalem püramiidi külgpindala arvutamiseks kehtib ainult korrapäraste püramiidide juures. Kui on tarvis leida korrapäratu püramiidi külgpindala, siis see arvutatakse kõikide külgtahkude pindalade summana.

Ülesanne 6.

Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a . Arvutada püramiidi külgpindala, kui diagonaallõige on pindvõrdne püramiidi põhjaga.

Antud: korrapärane püramiid $SABCD$ (joon. 6);

$$AB=BC=CD=AD=a,$$

$$S_{ASC}=S_{ABCD}, \text{ kus } S \text{ on pindala tähis.}$$

Arvutada püramiidi külgpindala S_k .

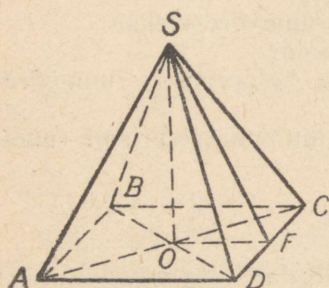
Lahendus.

Korrapärase püramiidi külgpindala võrdub tema põhja ümbermõõdu ja poole apoteemi korrutisega:

$$S_k = 4AD \cdot \frac{1}{2} SF = 2a \cdot SF.$$

Kolmnurgast SOF saame, et $SF = \sqrt{SO^2 + OF^2}$.

Kuna diagonaallõike pindala võrdub püramiidi põhja pindalaga, siis



Joon. 6.

$$\frac{1}{2} AC \cdot SO = AD^2,$$

$$AC = a\sqrt{2} \text{ (kui ruudu diagonaal).}$$

$$\frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot SO = a^2, \text{ siit}$$

$$SO = \frac{a^2 2}{a\sqrt{2}} = a_2\sqrt{2},$$

$$SF = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{9a^2}{4}} = \frac{3a}{2},$$

$$S_k = 2a \cdot \frac{3a}{2} = 3a^2.$$

Vastus. Püramiidi külgpindala on $3a^2$ ruutühikut.

Ülesanne 7.

Püramiidi põhjaks on kolmnurk, mille küljed on 13 cm, 14 cm ja 15 cm. Suuruselt keskmise põhiserva vastas asuv külgserv on risti põhitahuga ja tema pikkus on 16 cm. Arvutada selle püramiidi täispindala.

Antud: püramiid $KABC$ (joon. 7);

$$AC = 15 \text{ cm}; BC = 13 \text{ cm}; AB = 14 \text{ cm.}$$

KC on risti kolmnurga ABC tasapinnaga ja $KC = 16$ cm.

Arvutada püramiidi pindala S .

Lahendus.

Kuna püramiid on korrapäratu, siis püramiidi täispindala võrdub tema kõikide tahkude pindalade summaga.

Külgtahud AKC ja BKC on täisnurksed kolmnurgad. Kolmnurga ABC pindala tähistame S_1 ; kolmnurga BKC pindala — S_2 ; kolmnurga AKC pindala — S_3 ja kolmnurga AKB pindala — S_4 .

$$S_1 = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84 \text{ cm}^2,$$

$$S_2 = \frac{13 \cdot 16}{2} = 104 \text{ cm}^2,$$

$$S_3 = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120 \text{ cm}^2.$$

Selleks, et arvutada S_4 tõmbame $CD \perp AB$ ja ühendame punkti D tipuga K . Siis KD on kaldlõik, DC — selle kaldlõigu projektsioon ja KC — tasapinna ABC ristsirge. Kolme ristsirge teoreemi põhjal $KD \perp AB$, järelikult KD on kolmnurga AKB kõrgus.

Arvutame kolmnurga ABC kõrguse CD :

$$h_a = \frac{2S}{a}, \quad CD = \frac{2S_1}{AB} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12 \text{ cm}.$$

Kolmnurgast DKC leiame KD :

$$KD = \sqrt{CK^2 + CD^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}.$$

$$\text{Arvutame } S_4 = \frac{14 \cdot 20}{2} = 140 \text{ cm}^2.$$

Püramiidi täispindala on:

$$S_T = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

$$S_T = 84 + 104 + 120 + 140 = 448 \text{ cm}^2.$$

Ülesanne 8.

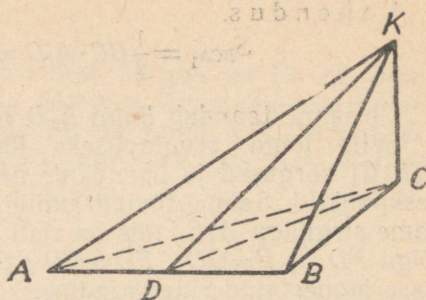
Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 8 m ja 5 m ning kõrgus 3 m. Püramiidi on lõigatud tasapinnaga, mis läbib alumist põhiserva ja ülemise põhja tippu, mis asub selle serva vastas. Arvutada lõike pindala ja lõiketasapinna ning alumise põhitahu vaheline kahetahuline nurk.

Antud: korrapärase kolmnurkne tüvipüramiid $ABCA_1B_1C_1$ (joon. 8);

$$\begin{aligned} AB = BC = AC &= 8 \text{ m}, \\ A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 &= 5 \text{ m}, \\ OO_1 &= 3 \text{ m}. \end{aligned}$$

Lõige A_1CB .

Arvutada lõike A_1CB pindala ja nurk $ACBA_1$.



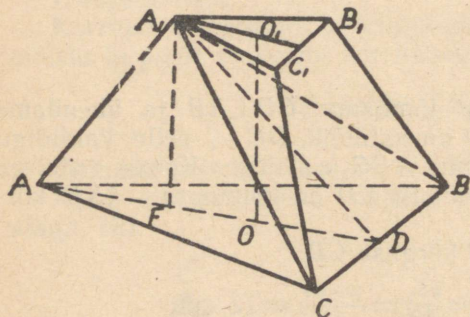
Joon. 7.

Lahendus.

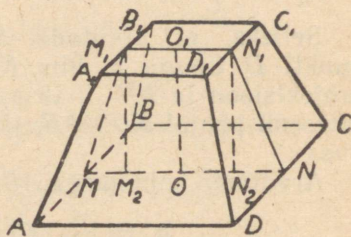
$$S_{BCA_1} = \frac{1}{2} BC \cdot A_1D = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot A_1D = 4A_1D.$$

Ülesanne taandub lõigu A_1D leidmisele.

Selle lõigu arvutamiseks tõmbame kolmnurkade ABC ja $A_1B_1C_1$ kõrgused ja ühendame nende korrapärase kolmnurkade keskpunktid. Saame tüvipüramiidi kõrguse OO_1 . Punktist A_1 tõmbame sirglõigu A_1F , mis on risti tasapinnaga ABC ja arvutame lõigu FD . $A_1F = OO_1$, $FD = OD + OF$; kus OD on kolmnurga ABC sisse joonestatud ringi raadius.



Joon. 8.



Joon. 9.

$$OD = \frac{BC\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

$OF = A_1O_1$; A_1O_1 on aga kolmnurga $A_1B_1C_1$ ümber joonestatud ringi raadius ja seega

$$A_1O_1 = \frac{B_1C_1\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$DF = \frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}.$$

Kolmnurgast A_1FD leiame A_1D :

$$A_1D = \sqrt{A_1F^2 + DF^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$$

Asetame A_1D väärtuse avaldisse $S_{lõige}$.

$$S_{lõige} = 4 \cdot 6 = 24 \text{ m}^2.$$

Samast kolmnurgast A_1FD leiame nurga A_1DF ; kaatet $A_1F = 3$ m, hüpotenuus $A_1D = 6$ m, järelikult $\angle A_1DF = 30^\circ$.

Vastus. Lõike pindala on 24 m^2 . Lõiketasapinna ja alumise põhitahu vaheline nurk on 30° .

Ülesanne 9.

Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on 12 cm, põhiservade vahe 10 cm ja täispindala 512 cm². Arvutada põhiservad.

Antud: korrapärane nelinurkne tüvipüramiid $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ja püramiidi kõrgus OO_1 (joon. 9); $OO_1 = 12$ cm, $AD - A_1 D_1 = 10$ cm, $S_T = 512$ cm².

Arvutada AD ja $A_1 D_1$.

Lahendus.

Püramiidi põhjaks on ruut. Teeme läbi kõrguse OO_1 ja külgede keskpunktide abilõike $MM_1 N_1 N$, mis kujutab endast võrdhaarset trapetsit alustega MN ja $M_1 N_1$. Selle trapetsi alused MN ja $M_1 N_1$ on vastavalt võrdsed põhiservadega AD ja $A_1 D_1$. Tähistame $AD = x$; $A_1 D_1 = y$. Ülesande tingimuste põhjal saame, et

$$x - y = 10. \quad (1)$$

Tõmbame paralleelselt kõrgusega OO_1 lõigud $M_1 M_2$ ja $N_1 N_2$. Saadud lõigud MM_2 ja NN_2 on omavahel võrdsed kui kaatetid võrdsetes täisnurksetes kolmnurkades $MM_1 M_2$ ja $NN_1 N_2$.

Leiame lõigu MM_2 :

$$MM_2 = \frac{x - y}{2} = 5 \text{ cm.}$$

Arvutame tüvipüramiidi apoteemi:

$$MM_1 = \sqrt{MM_2^2 + M_1 M_2^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm.}$$

Tüvipüramiidi täispindala valemist $S_T = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l + Q + q$, kus P_1 ja P_2 on vastavalt alumise ja ülemise põhja übermõõdud, Q ja q nende põhjade pindalad ja l apoteem, koostame teise võrrandi:

$$512 = \frac{4x + 4y}{2} \cdot 13 + x^2 + y^2 \text{ ehk}$$

$$26(x + y) + x^2 + y^2 = 512. \quad (2)$$

Saame süsteemi:

$$x - y = 10$$

$$x^2 + y^2 + 26(x + y) = 512.$$

Esimesest võrrandist leiame:

$$x = y + 10.$$

Asetades suuruse x leitud väärtuse teise võrrandisse, saame:

$$y^2 + 36y - 76 = 0,$$

milläst $y_1 = 2$; $y_2 = -38$ (ei sobi, sest on negatiivse väärtusega):

$$x = 12; AD = 12 \text{ cm ja } A_1 D_1 = 2 \text{ cm.}$$

Vastus. Tüvipüramiidi põhiservad on 12 cm ja 2 cm.

Kontrollküsimusi

1. Mis on püramiid? (Definitsioon).
2. Mis on tüvipüramiid?
3. Korrapärase püramiidi ja korrapärase tüvipüramiidi definitsioonid.
4. Loetlege püramiidi põhjaga paralleelse lõike omadused.
5. Kuidas avaldatakse korrapärase täispüramiidi ja korrapärase tüvipüramiidi külge- ja täispindala?

A l a t e e m a 4

Täis- ja tüvipüramiidi ruumala

Kirjandus

- Andrejev. Geomeetria, VIII ptk., § 122—124; ülesanded nr. 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67.
Kisseljov. Geomeetria, II osa, § 90, 91, 92.
Röbkin. Ülesannete kogu, § 17, nr. 1, 5, 10, 22; § 18, nr. 1, 2, 3, 8, 11.

ÜLESANNETE LAHENDAMISE NÄITEID

Ülesanne 10.

Kolmnurkse püramiidi üks põhiservadest on 16 cm ja selle vastas asuv külgserv 18 cm. Kõik ülejäänud servad on 17 cm. Arvutada püramiidi ruumala.

Antud: kolmnurkne püramiid $SABC$ (joon. 10);

$$BC = 16 \text{ cm}, AS = 18 \text{ cm ja}$$

$$AB = AC = SC = SB = 17 \text{ cm}.$$

Arvutada püramiidi ruumala V .

Lahendus.

$V = \frac{1}{3} Q \cdot H$, kus H on püramiidi kõrgus ja Q põhja pindala.

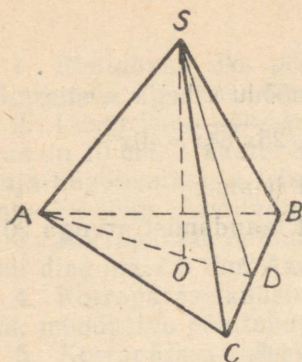
Põhja pindala arvutame Heroni valemi abil:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{25(25-17)(25-17)(25-16)} = \\ &= \sqrt{25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9} = 8 \cdot 5 \cdot 3 = 120 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

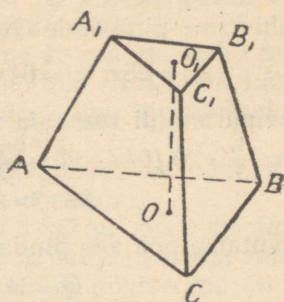
Püramiidi kõrguse arvutamiseks juhime läbi külgserva AS ja põhiserva BC keskpunkti D tasapinna ADC . Kolmnurk ACB on võrdhaarne ja lõik AD on selles kolmnurgas nii mediaaniks kui ka kõrguseks; $\triangle ACB = \triangle SCB$ (kolme külje kaudu, sest BC on ühine külge ja $AC = AB = SC = SB$ ülesande tingimuste põhjal). Järelikult on ka nende kolmnurkade kõrgused võrdsed:

$$AD = SD.$$

Püramiidi kõrguseks on kolmnurga ASD kõrgus SO .



Joon. 10.



Joon. 11.

Arvutame lõigu SD kolmnurgast CSD ;

$$SD = \sqrt{SC^2 - CD^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{25 \cdot 9} = 15 \text{ cm.}$$

Kolmnurgast ASD leiame kõrguse järgmise valemiga:

$$H_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$H = \frac{2}{15} \sqrt{24 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 9} = 14,4.$$

Arvutame ruumala $V = \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 14,4 = 576 \text{ cm}^3$.

Vastus. Antud püramiidi ruumala on 576 cm^3 .

Ülesanne 11.

Tüvipüramiidi ruumala on 1720 m^3 ja tema kõrgus 20 m . Vastavad põhised suhtuvad nagu $5:8$. Arvutada põhjade pindalad.

Antud: tüvipüramiid $ABCA_1B_1C_1$ (joon. 11);

$$V_{\text{tüvip.}} = 1720 \text{ m}^3,$$

$$OO_1 = H = 20 \text{ m ja } A_1B_1 : AB = 5:8.$$

Arvutada põhjade pindalad Q ja Q_1 .

Lahendus.

Kuna püramiidi põhjaks oleva hulknurga kuju ei ole ülesande tingimustega määratud, siis seepärast on valitud püramiidi põhjaks kõige lihtsam kujund — kolmnurk.

$$V_{\text{tüvip.}} = \frac{1}{3} H(Q + Q_1 + \sqrt{Q \cdot Q_1}).$$

Tüvipüramiidi põhjadeks on sarnased hulknurgad. Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud. Järelikult, $Q_1 : Q = A_1B_1^2 : AB^2$,

siit

$$Q_1:Q=25:64.$$

Tähistame pindalade Q_1 ja Q ühise mõõdu tähega x , siis:

$$Q_1=25x; Q=64x; \sqrt{Q_1 \cdot Q} = \sqrt{25x \cdot 64x} = 40x.$$

Tüvipüramiidi ruumala valemi põhjal leiame:

$$1720 = \frac{1}{3} \cdot 20 (64x + 25x + 40x) \text{ ja pärast taandamist arvuga } 20:$$
$$86 \cdot 3 = 129x; \text{ millest } x = 2.$$

Arvutame põhjade pindalad:

$$Q = 64x = 64 \cdot 2 = 128 \text{ m}^2,$$

$$Q_1 = 25x = 25 \cdot 2 = 50 \text{ m}^2.$$

Vastus: Tüvipüramiidi põhjade pindalad on 128 m^2 ja 50 m^2 .

Kontrollküsimusi

1. Tuletage täispüramiidi ruumala valem.
2. Tuletage tüvipüramiidi ruumala valem.

KONTROLLTÖÖ NR. 6 *

Esimene variant.

1. Korrapärase nelinurkse prisma täispindala on 240 dm^2 ja tema külgpindala 168 dm^2 . Arvutada prisma ruumala.

2. Risttahuka põhiservad on 30 cm ja 40 cm . Läbi kahe naaberkülgtahu diagonaali on juhitud tasapinnaline lõige, mille pindala on 1275 cm^2 . Arvutada risttahuka ruumala.

3. Püstprisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatete pikkused on 6 dm ja 8 dm . Arvutada selle prisma täispindala ja ruumala, teades, et ülemise põhja täisnurga tipu kaugus alumise põhja hüpotenuusi keskpunktist on 13 dm .

4. Püramiidi, mille põhja pindala on $4,5 \text{ m}^2$, on põhjast 4 dm kaugusel lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga. Saadud lõike pindala on 2 m^2 . Arvutada püramiidi ruumala.

5. Leida korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi ruumala, teades, et tüvipüramiidi põhiservad on 10 dm ja 5 dm ning külgserv 13 dm .

6. Lahendada arvutuslükatiiga järgmised ülesanded ja selgitada teostatud arvutusprotsessi käik:

a) leida $15,8\%$ arvudest $142, 348, 760, 848$;

b) $\frac{14,6 \cdot 6,84}{\sqrt{52,85}}$.

* Kontrolltöö variandi number teatatakse õpilasele tehnikumi kaugõppeosakonna poolt.

Teine variant

1. Risttahuka üks põhiservadest on 5 dm, kõrgus 8 dm ja külgpindala 176 dm². Arvutada risttahuka ruumala.

2. Püstprisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on 10 cm ja kaatet 8 cm. Prisma kõrgus on 6,4 cm. Läbi ühe põhja hüpotenuusi ja teise põhja täisnurga tipu on juhitud tasapinnaline lõige. Arvutada selle lõike pindala.

3. Korrapärase nelinurkse prisma diagonaal on 7 dm ja külgtahu diagonaal 5 dm. Arvutada prisma ruumala.

4. Korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrgus on 3 dm ja külgtähk moodustab põhitahuga nurga 30°. Arvutada prisma ruumala.

5. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 4 dm ja 3 dm, ning diagonaal lõike pindala 21 $\sqrt{2}$ dm². Arvutada püramiidi ruumala.

6. Lahendada arvutuslükatiga järgmised ülesanded ja seletada teostatud arvutusprotsessi käik:

a) Leida 30,6% arvudest 165; 328; 646; 832.

b)
$$\frac{7,35 \cdot 27,4}{40,27}$$

Kolmas variant

1. Arvutada korrapärase nelinurkse prisma ruumala, kui prisma diagonaal on 13 dm ja põhitahu diagonaal 5 dm.

2. On antud risttahukas. Tema kolme ühest tipust lähtuvate servade pikkused on 4 dm, 8 dm ja 1 m. Läbi nende servade otspunktide on juhitud tasapind. Leida saadud lõike pindala.

3. Kolmnurkse püstprisma põhiservad on 8 cm, 10 cm ja 14 cm ning külgserv võrdub põhitahu suurima kõrgusega. Arvutada prisma ruumala.

4. Püramiidi põhjaks on ristkülik, mille üks külg on 3 dm. Püramiidi kõrgus on 6 dm ja läbib põhitahu diagonaalide lõikepunkti. Arvutada püramiidi ruumala, kui püramiidi külgserv on 6,5 dm.

5. Arvutada korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi ruumala, kui püramiidi diagonaal on 9 dm ja põhiservad 7 dm ja 5 dm.

6. Lahendada arvutuslükatiga järgmised ülesanded ja seletada teostatud arvutusprotsessi käik:

a) leida 22,6% arvudest 128; 346; 580; 765.

b)
$$\frac{4,26 \cdot 32,8}{\sqrt{27,67}}$$

Neljas variant

1. Risttahuka põhiservad on 5 cm ja 16 cm ning külgserv 12 cm. Läbi külgtahu diagonaali ja selle diagonaaliga ristuva

põhiserva on juhitud tasapind. Arvutada saadud lõike pindala.

2. Risttahuka diagonaal on 37 cm, põhitahu diagonaal 35 cm. Üks põhiservadest on 21 cm. Arvutada risttahuka ruumala.

3. Korrapärase kuusnurkse prisma täispindala on kaks korda suurem tema külgpindalast. Arvutada prisma ruumala, kui prisma kõrgus on $5\sqrt{3}$ cm.

4. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi külgpindala on 80 cm^2 ja põhja pindala 64 cm^2 .

5. Kolmnurkse tüvipüramiidi kõrgus on 10 m, ühe põhja servad on 27 m, 29 m ja 52 m ning teise põhja übermõõt 72 m. Arvutada tüvipüramiidi ruumala.

6. Lahendada arvutuslükatiga järgmised ülesanded ja selatada teostatud arvutusprotsessi käik:

a) leida 18,8% arvudest 135; 374; 583; 828;

b) $\frac{12,5 \cdot 4,82}{\sqrt{21,82}}$.

KOONDÜLESANNE NR. 7

TRIGONOMEETRIA

Teema 3

Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine

Kaldnurkse kolmnurga elementide vahelised põhiseosed, kaldnurksete kolmnurkade lahendamine.

Siinusteoreem. Koosinusteoreem. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine, kui on antud üks külge ja kaks nurka. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine, kui on antud kaks külge ja nende külgede vaheline nurk. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine, kui on antud kolm külge. Täisnurksete ja kaldnurksete kolmnurkade lahendamine logaritmi tabeli abil.

Kirjandus

- Kožeurov. Trigonomeetria, § 31, 46, 47, 49, 50, 51, 53, 55, 56, 57, 58, 59 (1); X ptk., ülesanded nr. 1—8, 10, 11, 23, 24, 26, 27, 39, 40, 44, 46, 59 (1; 3), 60, 61, 62, 63.
- Rõbkin. Trigonomeetria, § 78, 79, 83, 84, 85, 90, 91, 92, 93, 97, 98, 99, 100, 102, 106, 107, 112, 113.
- Rõbkin. Ülesannete kogu, § 12, nr. 1—8, 9, 11, 35, 36, 44, 49, 53, 57, 58.
- Novosjolov. Trigonomeetria, VI ptk., § 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.
- Stratilatov. V ptk., § 15, ülesanded 336(1); (3); (4); (5); 337; § 16, 341, 342; § 17, 344, 345, 347, 348, 349; § 18, 352, 353, 354, 355, 356, 357; 358, 359, 360, 361, 362, 364.
- Bradis. Tabelid.

METOODILISED JUHENDID

Kuna kolmnurkade lahendamine logaritmi tabeli abil nõuab õpilastelt head tabelite tundmise ja käsitlemise oskust, siis toome mõned juhised tabelite kasutamise kohta.

1. Trigonomeetriliste funktsioonide loomulike väärtuste ja samuti trigonomeetriliste funktsioonide loomulike väärtuste logaritmid tabelid sisaldavad trigonomeetriliste funktsioonide loomulikke väärtusi või nende logaritme argumendi vahemikus 0° kuni 90° -ni.

Kui on tarvis leida kas 90° -st suuremate nurkade või negatiivsete nurkade trigonomeetriliste funktsioonide loomulikke väärtusi (või nende logaritme), siis tuleb enne tabelite kasutamist antud nurga funktsioon taandada positiivse teravnurga trigonomeetriliseks funktsiooniks.

Kui kasutatakse neljakohalisi matemaatilisi tabeleid ülesannete lahendamisel ja nurgad on antud sekundites, siis tuleb nurga väärtus ümardada minutiteni vastavalt ümardamisreeglitele.

Tuleb veel kord meenutada, et nurga kasvades siinuste ja tangensite logaritmid parandused liidetakse funktsiooni logaritmi murdosaga (suuremale nurgale vastab suurem siinus või tangens) ning koosinuste ja kootangensite logaritmid parandused lahutatakse (suuremale nurgale vastab väiksem koosinus või kootangens). Sama põhimõtte järgi tuleb toimida, kui leitakse nurk tema antud trigonomeetrilise funktsiooni logaritmi järgi.

On täiesti loomulik, et asudes õppima ja praktiliselt kasutama trigonomeetriliste funktsioonide loomulike väärtuste logaritmid tabelid, tuleb eelnevalt korrata algebra õpikust logaritmid teooriat, sest ilma logaritmid üldteooria põhjaliku tundmiseta, ei ole õpilased suutelised lahendada edukalt kolmnurki logaritmid tabeli abil.

Teema läbitöötamisel tuleb esiteks hästi omandada teooria, kirjutada oma töövihikusse kõik valemid, õppida veatult leidma tabelis trigonomeetriliste funktsioonide loomulike väärtuste logaritme ja nende järgi nurki ning alles siis hakata lahendada täisnurkseid ja kaldnurkseid kolmnurki. Tuleb pöörata kõige tõsisemat tähelepanu arvutuste paigutamise korrale kolmnurga elementide arvutamisel ja ülesannete lahendamisel võtta eeskujuks ülesannete lahendamise näiteid trigonomeetria õpikutes ja käesolevas meetodilises juhendis.

Trigonomeetria õpikutes on vaadeldud üksikasjaliselt kolmnurkade lahendamise kõiki põhijuhte. Käesolevas juhendis toome ainult üksikuid, õpikus toodud ülesannetest erinevate ülesannete lahendamise näiteid kolmnurkade kohta.

ÜLESANNETE LAHENDAMISE NÄITEID

Ülesanne 1.

Arvutada $(a^2 - b^2) \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$, kui $a = 7,3862$; $b = 5,2138$;
 $\alpha = 42^\circ 26'$; $\beta = 68^\circ 34'$.

Lahendus.

Tähistame antud avaldise väärtuse tähega x , asendades avaldises tähelised kordajad numbrilistega ja pannes tähele, et $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, saame:

$$x = \frac{12,6 \cdot 2,1724 \cdot \sin 111^\circ}{\sin 42^\circ 26' \cdot \cos 68^\circ 34'}$$

$$\lg x = \lg 12,6 + \lg 2,1724 + \lg \sin 111^\circ - \lg \sin 42^\circ 26' - \lg \cos 68^\circ 34'$$

$\lg 12,6 = 1,1004$ $\lg 2,1724 = 0,3369$ $\lg \sin 69^\circ = 1,9702$ $-\lg \sin 42^\circ 26' = 0,1708$ $\lg \cos 68^\circ 34' = 0,4373$	$\lg \sin 42^\circ 26' = \bar{1},8292$ $\lg \cos 68^\circ 34' = \bar{1},5627$
---	--

$$\lg x = 2,0156$$

$$x = 103,6$$

Märkus. Käesolevas ülesandes ja ka edaspidi on logaritmid lahutamise asemel liitmisega.

Ülesanne 2.

Lahendada võrdhaarne kolmnurk, kui on antud kolmnurga ümbermõõt $2p = 40,65$ ja alusnurk $A = 72^\circ 47'$ (joon. 12).

Arvutada küljed $AB = BC = a$; $AC = b$ ja pindala S_{\triangle} .

Lahendus.

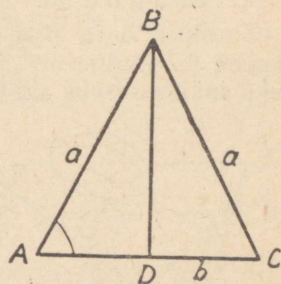
Kolmnurga ümbermõõt on $2a + b$.
Avaldame külje b külje a kaudu.

$$AD = 1/2 b = a \cos A, \quad b = 2a \cos A,$$

$$2p = 2a + 2a \cos A = 2a (1 + \cos A),$$

$$2p = 2a \cdot 2 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} = 4a \cos^2 \frac{A}{2},$$

$$a = \frac{2p}{4 \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{40,65}{4 \cos^2 36^\circ 24'}$$



Joon. 12.

Logaritmime saadud avaldise:

$$\lg a = \lg 40,65 - \lg 4 - 2 \lg \cos 36^\circ 24'$$

$\lg 40,65 = 1,6090$ $\lg 4 = 0,6021$ $2 \lg \cos 36^\circ 24' = \bar{1},9057$	$\lg 40,65 = 1,6090$ $-\lg 4 = \bar{1},3979$ $-2 \lg \cos 36^\circ 24' = 0,1886$
--	--

$$\lg a = 1,1955$$

Antilogaritmade tabelist leiame, et $a=15,69$. Arvutame b ;
 $b=2a \cos A$,

$$b=2 \cdot 15,69 \cdot \cos 72^{\circ}47' = 31,38 \cos 72^{\circ}47',$$

$$\lg b = \lg 31,38 + \lg \cos 72^{\circ}47',$$

$$\lg 31,38 = 1,4966$$

$$\lg \cos 72^{\circ}47' = \bar{1},4713$$

$$\lg b = 0,9679,$$

$$b = 9,287.$$

Arvutame kolmnurga pindala valemiga:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin A,$$

$$S = \lg 0,5 + \lg a + \lg b + \lg \sin A;$$

$$\lg 0,5 = \bar{1},6990,$$

$$\lg a = 1,1955,$$

$$\lg b = 0,9679,$$

$$\lg \sin A = \bar{1},9801,$$

$$\lg S = 1,8425,$$

$$S = 69,58.$$

$$\angle B = 180^{\circ} - 2 \cdot 72^{\circ}47',$$

$$\angle B = 180^{\circ} - 145^{\circ}34' = 34^{\circ}26'.$$

Vastus. Kolmnurga küljed on:

$$AC = CB = 15,69 \text{ ühikut}, AB = 9,287 \text{ ühikut}.$$

Kolmnurga pindala $S = 69,58$ ruutühikut, alusnurgad on $72^{\circ}47'$, tipunurk on $34^{\circ}26'$.

Ülesanne 3.

Punktid A ja B asetsevad selliselt, et nendevahelise kauguse otsene mõõtmine on takistatud (joon. 13). Selle kauguse kaudseks määramiseks valiti punkt C nii, et sellest on näha punktid A ja B ning vahemaad AC ja BC on otseselt mõõdetavad. Seejärel mõõdeti kaugused $BC = a$ ja $AC = b$ ning nurk $\angle ACB = \gamma$.

Arvutada kaugus AB , kui $a = 100$ m, $b = 80$ m ja $\gamma = 48^{\circ}57'$.

Lahendus.

Otsitava kauguse AB määramine taandub kaldnurkse kolmnurga ABC külje AB arvutamisele kahe külje ja nende külgede vahelise nurga järgi.

Koosinusteoreemi rakendamisel saame:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}.$$

Asendades tähelised kordajad nende arvuliste väärtustega, leiame:

$$AB = \sqrt{100^2 + 80^2 - 2 \cdot 100 \cdot 80 \cos 48^\circ 57'}$$

Koosinuse leiame Bradise tabelitest,

$$\cos 48^\circ 57' = 0,6567,$$

järelikult,

$$AB = \sqrt{16\,400 - 2 \cdot 80 \cdot 100 \cdot 0,6567} = \sqrt{16\,400 - 160 \cdot 65,67},$$

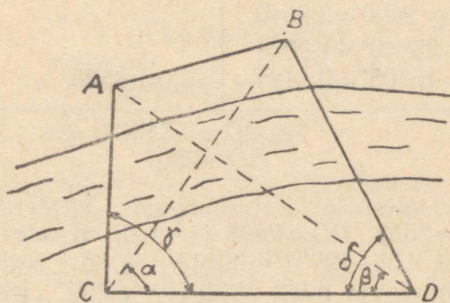
$$AB = \sqrt{16\,400 - 10\,507,2} = \sqrt{5892,8} = 76,77.$$

Vastus. Otsitav kaugus $AB \approx 77$ m.

Ülesanne 4.

Et mõõta kahe ligipääsmatu punkti A ja B vaheline kaugus (joon. 14), mõõdeti baasi CD pikkus a m ja nurgad:

$$\angle ACB = \gamma; \quad \angle BCD = \alpha, \quad \angle ADC = \beta, \quad \angle BDC = \delta.$$



Joon. 14.

Arvutada AB , kui $a = 2000$ m; $\alpha = 52^\circ 40'$; $\beta = 42^\circ 01'$; $\gamma = 86^\circ 40'$ ja $\delta = 81^\circ 15'$.

Otsitava kauguse saame määrata kolmnurgast ABD , kuid selleks tuleb eelnevalt leida selle kolmnurga küljed AD ja BD kolmnurkadest ACD ja BCD .

Kolmnurgast ACD saame siinusteoreemi põhjal:

$$\frac{CD}{\sin A} = \frac{AD}{\sin C};$$

kuid

$\angle A = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 42^\circ 01' - 86^\circ 40' = 180^\circ - 128^\circ 41' = 51^\circ 19'$,
järelikult

$$\frac{2000}{\sin 51^\circ 19'} = \frac{AD}{\sin 86^\circ 40'}, \text{ millest } AD = \frac{2000 \cdot \sin 86^\circ 40'}{\sin 51^\circ 19'}.$$

Arvutame AD : $\lg AD = \lg 2000 + \lg \sin 86^\circ 40' - \lg \sin 51^\circ 19'$

$\lg 2000 = 3,3010$ $\lg \sin 86^\circ 40' = \bar{1},9993$ $-\lg \sin 51^\circ 19' = 0,1076$	$\lg \sin 51^\circ 19' = \bar{1},8924$
$\lg AD = 3,4079,$ $AD = 2558.$	

Kolmnurgast BCD arvutame BD siinusteoreemi põhjal:

$$\frac{CD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin C}, \text{ kuid } CD = 2000, \angle B = 180^\circ - \alpha - \delta = 180^\circ - 52^\circ 40' - 81^\circ 15' = 180^\circ - 133^\circ 55' = 46^\circ 05',$$

järelikult $\frac{2000}{\sin 46^\circ 05'} = \frac{BD}{\sin 52^\circ 40'}; BD = \frac{2000 \cdot \sin 52^\circ 40'}{\sin 46^\circ 05'}.$

Arvutame BD :

$$\lg BD = \lg 2000 + \lg \sin 52^\circ 40' - \lg \sin 46^\circ 05'.$$

$\lg 2000 = 3,3010$ $\lg \sin 52^\circ 40' = \bar{1},9004$ $\lg \sin 46^\circ 05' = 0,1424$	$\bar{1},8576$
$\lg BD = 3,3438$ $BD = 2207.$	

Nüüd saame määrata kolmnurgast ABD külje AB . Selles kolmnurgas $AD = 2558$; $BD = 2207$ ja nurk nende külgede vahel $\angle ADB = \delta - \beta = 81^\circ 15' - 42^\circ 01' = 39^\circ 14'$, s. t. kolmnurgas ABD on teada kaks külge ja nurk külgede vahel. Koosinusteoreemi põhjal leiame:

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos (\delta - \beta)}, \text{ kus } 2ADBD \cos (\delta - \beta) = T$$

Bradise ruutude tabelit kasutades leiame:

$AD^2 = 6\,544\,000$ $BD^2 = 4\,871\,000$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> $AD^2 + BA^2 = 11\,415\,000$ $T = 8\,746\,000$	$\lg 2 = 0,3010$ $\lg AD = 3,4079$ $\lg BD = 3,3438$ $\lg \cos (\delta - \beta) = \bar{1},8891$
$AB^2 = 2\,699\,000$	
$\lg T = 6,9418$	

$$AB = \sqrt{2\,699\,000} = 1634.$$

Vastus. Kahe ligipääsmatu punkti vaheline kaugus AB on 1634 m.

GEOMEETRIA

Teema 4.

Pöördkehad.

Silindriline pind. Püstringilinder. Silindri pinnafaotus. Silindri külge- ja täispindala*. Silindri ruumala*.

Kooniline pind. Püstringkoonus. Koonuse pinnafaotus. Koonuse külge- ja täispindala*. Koonuse ruumala*.

Tüvikoonus. Tüvikoonuse pinnafaotus. Tüvikoonuse külge- ja täispindala*. Tüvikoonuse ruumala*.

Kera. Kera tasapinnalised lõiked. Kera suuring. Puutuja-tasapind. Lemma pöördkeha pindalas*. Kera, keravöö ja sfääri segmendi pindala*. Kera ruumala*. Kerasektori ja kerasegmendi ruumala.

Teema materjal jaotatakse kaheks alateemaks:

Alateema 1. Silinder ja koonus.

Alateema 2. Kera.

Alateema 1

Silinder ja koonus

Kirjandus

Andrejev. Geomeetria, IX ptk. § 125—138; ülesanded nr. 1, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 18, 20, 23, 24, 31, 32, 35, 38, 39, 40, 42, 43, 46, 50, 52.

Kisseljov. Geomeetria, II osa, § 105—122.

Rõbkin. Ülesannete kogu, II osa, § 13, nr. 5, 11, 13, 14, 16—20; § 14, nr. 5, 7, 10 (2), 12, 15, 16, 18, 19, 21; § 15, nr. 1—6, 11, 12, 14 (1), 17, 18; § 16, nr. 56, 60, 62, 68, 69; § 17, nr. 32, 34, 36, 37, 39, 42, 44, 52; 56; § 18, nr. 22, 23, 25, 27, 31, 32.

METOODILISED JUHENDID

Õppides käesoleva teema teoreetilist osa, pange tähele, et silindri mis tahes moodustaja või põhjade keskpunkte ühendav sirglõik on ühtlasi silindri kõrguseks. Tuleb meeles pidada, et silindri teljega iga paralleelne tasapinnaline lõige on ristkülik ja suurim neist on silindri telglõige. Telglõike alus on läbimõõt ja telglõike kõrgus — silindri kõrgus.

Kui koonuses teha tasapinnaline lõige, mis läbib koonuse tippu ja põhja läbimõõtu, siis saame lõikena võrdhaarse kolmnurga, mille aluseks on koonuse põhja läbimõõt ja haaradeks koonuse moodustajad. Sellist lõiget nimetatakse koonuse telglõikeks.

* Märgitud teoreeme peavad õpilased oskama tõestada.

On teada, et koonuse iga tasapinnaline lõige, mis on risti koonuse teljega ja järelikult paralleelne koonuse põhjaga, on ring. Koonuse põhja ja põhjaga paralleelse lõike vaheline seos on sama, mis püramiidigi juures, s. t. koonuse põhja pindala ja põhjaga paralleelse lõike pindala suhtuvad nii nagu nende vastavate kauguste ruudud, kui kaugused loetud koonuse tipust.

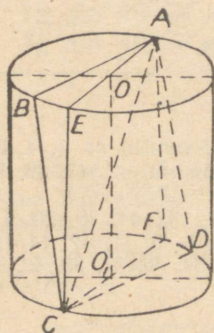
Kui lõigata koonust tasapinnaga, mis läbib koonuse tippu ja põhja mingit kõõlu, siis saame lõikenäite võrdhaarse kolmnurga, mille haaradeks on koonuse moodustajad.

Pöördkehade pindala ja ruumala valemid tuletatakse piirväärtuse omaduste põhjal, seepärast soovitaksime õpilastel enne käesoleva teema läbitöötamist korrata eelnevalt teoreeme piirväärtuse kohta, millistega tutvuti algebra kursuses.

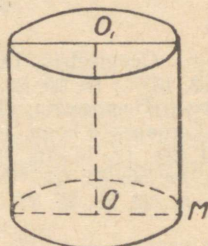
ÜLESANNETE LAHENDAMISE NÄITEID

Ülesanne 1.

Silindri kõrgus on 2 m ja põhja raadius 7 m. Sellesse silindrisse on kujundatud ruut, mille tipud asuvad põhjade ringjoontel ja mis asub kaldu silindri teljega. Arvutada ruudu külje.



Joon. 15.



Joon. 16.

Antud: ruut $ABCD$ (joon. 15), mille külje pikkus x tuleb leida. Ruudu diagonaal AC on ühtlasi telglõike $AECF$ diagonaaliks (järelikult lõikab ta telge OO_1 , selle keskpunktis): $OE=r$ ja $CE=h$. Täisnurksest kolmnurgast AEC saame:

$$AC^2 = AE^2 + EC^2 = 4r^2 + h^2.$$

Kolmnurk ABC on ülesande tingimuste põhjal nii täisnurkne kui ka võrdhaarne. Järelikult:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

ehk

$$2x^2 = h^2 + 4r^2;$$

$$x = \sqrt{\frac{h^2 + 4r^2}{2}} = \sqrt{\frac{4 + 4 \cdot 49}{2}} = 10 \text{ cm.}$$

Pange tähele, et ülesannet ei ole võimalik lahendada suuruste h ja r mis tahes arvuliste väärtuste puhul. Tõepoolest, ruudu külje pikkus ei saa olla suurem silindri põhja diameetrist:

$$x < 2r; \quad x^2 < 4r^2; \quad 2x^2 < 8r^2; \quad h^2 + 4r^2 < 8r^2; \quad h^2 < 4r^2; \quad h < 2r;$$

s. t. ruudu kujundamiseks silindrisse ülesandes antud tingimustel on vajalik, et silindri kõrgus ei oleks suurem silindri põhja läbimõõdust. Kui $h = 2r$, siis silindrisse kujundatud ruut on silindri telglõikeks.

Ülesanne 2.

Silindri kõrgus on 10 cm võrra pikem põhja raadiusest ja silindri täispindala on $144\pi \text{ cm}^2$.

Arvutada silindri põhja raadius ja kõrgus.

Antud: OO_1 (joon. 16), $OM = R$, $OO_1 = R + 10 \text{ cm}$, $S_T = 144\pi \text{ cm}^2$.

Arvutada $OM = R$; $OO_1 = H$.

Lahendus.

Ülesande tingimuste põhjal $S_T = 144\pi \text{ cm}^2$.

Silindri täispindala koosneb silindri külgpindala ja kahe põhja pindala summast.

Järelikult saame võrrandi: $2\pi RH + 2\pi R^2 = 144\pi$, ehk $2\pi R(H + R) = 144\pi$; taandades võrrandi mõlemad pooli suurusega 2π , leiame $R(H + R) = 72$; kuna $H = R + 10$, siis $R(2R + 10) = 72$, millest $2R^2 + 10R - 72 = 0$.

$$R^2 + 5R - 36 = 0.$$

Lahendades selle võrrandi saame: $R_1 = 4$; $R_2 = -9$; lahendi R_2 jätame kõrvale kui negatiivse.

$$H = R + 10 = 4 + 10 = 14 \text{ cm.}$$

Vastus. Silindri kõrgus on 14 cm ja põhja raadius on 4 cm.

Ülesanne 3.

Avaldada koonuse ruumala koonuse põhja pindala Q ja külgpindala S kaudu.

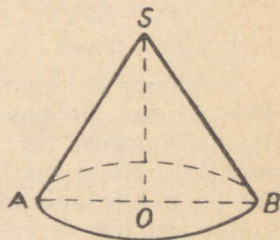
Antud: koonus SAB (joon. 17).

$$S_p = Q; \quad S_k = S.$$

Avaldada koonuse ruumala.

Lahendus.

Oigu $OB = R$ — koonuse põhja raadius, $AS = l$ — koonuse moodustaja ja $SO = H$ — koonuse kõrgus.



Joon. 17.

Siis $Q = \pi R^2$; millest $R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$, $S = \pi R l$;

$$l = \frac{S}{\pi R} = \frac{S}{\pi \sqrt{\frac{Q}{\pi}}} = \frac{S}{\sqrt{\pi Q}};$$

Pythagorase teoreemi põhjal $H = l^2 - R^2$;

$$H = \sqrt{\frac{S^2}{\pi Q} - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{S^2 - Q^2}{Q}}.$$

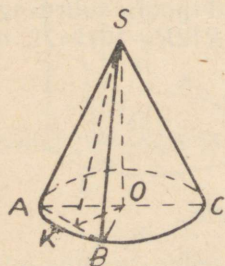
$$\begin{aligned} V_{\text{koonus}} &= \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} Q H \frac{1}{3} Q \sqrt{\frac{S^2 - Q^2}{Q}} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{Q(S^2 - Q^2)}{\pi}} = \frac{1}{3\pi} \sqrt{Q\pi(S^2 - Q^2)}. \end{aligned}$$

Vastus. Koonuse ruumala on $\frac{1}{3} \pi \sqrt{Q\pi(S^2 - Q^2)}$ kuupühikut.

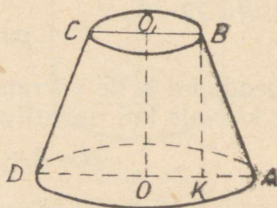
Ülesanne 4.

Läbi koonuse, mille kõrgus on võrdne põhja raadiusega, on juhitud tasapind. Avaldada lõike pindala, kui see tasapind läbib koonuse tippu ja kõõlu, mis lõikab põhja übermööduks olevast ringjoonest ära 90° -se kaare (joon. 18).

Antud: koonus SAC ; $SO = H = AO = R$, $\sphericalangle AB = 90^\circ$ ja lõige SAB . Avaldada lõike SAB pindala.



Joon. 18.



Joon. 19.

Lahendus.

Vaatleme kolmnurka SAB . See kolmnurk on võrdhaarne, sest $AS = SB$ kui koonuse moodustajad. Tõmbame selle kolmnurga tipust S kõrguse SK . Punkti K ühendame koonuse põhja keskpunktiga. Nüüd on lõik SK kaldlõik, mis on risti lõiguga AB ; SO on põhitasapinna ristlõik, KO — kaldlõigu projektsioon. Kolme ristsirge teoreemi (pöördteoreemi) põhjal $OK \perp AB$. $S_{ABC} = \frac{AB \cdot SK}{2}$, AB on kõõluruudu külg ringis, mille raadiuseks on R ,

järelikult $AB=R\sqrt{2}$, $OK=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ (täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi mediaan on pool hüpotenuusist). Avaldame Pythagorase teoreemi põhjal lõigu SK :

$$SK=\sqrt{SO^2+OK^2}=\sqrt{R^2+\frac{2R^2}{4}}=\frac{1}{2}R\sqrt{6}.$$

Leiame lõike pindala:

$$S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}R\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}R\sqrt{6}=\frac{1}{4}R^2\sqrt{12}=\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}.$$

Vastus. Ülesandes nõutud lõike pindala on:

$$S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}R^2\sqrt{3} \text{ ruutühikut.}$$

Ülesanne 5.

Avaldada tüvikoonuse külgpindala, kui tema moodustaja ja alumise põhitasapinna vaheline nurk on 30° ning telglõike pindala on F .

Antud: tüvikoonus $ABCD$ (joon. 19);

$\angle BAD=30^\circ$ ja $S_{\text{trapets}}=F$ (telglõike pindala).

Leida S_k .

Lahendus.

Tüvikoonuse külgpindala valemi põhjal saame:

$$S_k=\pi l(R+r). \quad (1)$$

Tähistame: $AD=2R$; $BC=2r$; $BK=H$; $AB=l$.

$$S_{\text{telglõige}}=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot H=F,$$

$$\frac{2(R+r)H}{2}=F,$$

$$(R+r)H=F. \quad (2)$$

Kolmnurgast ABK leiame, et $l=AB=2H$, sest $\angle BAK=30^\circ$. Asendades valemis (1) moodustaja l tema avaldatud väärtusega, saame:

$$S_k=\pi\cdot 2H(R+r)=2\pi\cdot H(R+r).$$

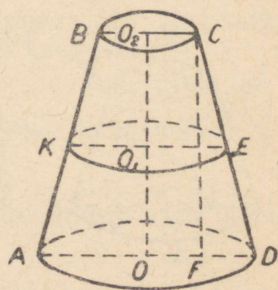
Kasutades võrdust (2), saame: $S=2\pi F$.

Vastus. Tüvikoonuse külgpindala on $2\pi F$ ruutühikut.

Ülesanne 6.

Tüvikoonuse moodustaja on 17 cm, telglõike pindala on 420 cm^2 ja kesk-lõike pindala $196\pi \text{ cm}^2$. Arvutada tüvikoonuse külgpindala ja ruumala.

Antud: tüvikoonus (joon. 20). Telglõike $ABCD$ pindala on 420 cm^2 . Kesk-lõike KO_1E pindala on $196\pi \text{ cm}^2$; $OO_1=O_1O_2$;



Joon. 20.

$CD=AB=17$ cm. Arvutada tükikoonuse ruumala V ja külgpindala S_k .

Lahendus.

Tükikoonuse ruumala ja külgpindala valemite põhjal saame:

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^3 + r^2 + Rr),$$

$$S_k = 2\pi \cdot O_1E \cdot CD,$$

$$V = \frac{1}{3} \pi OO_2 (OD^2 + O_2C^2 + OD \cdot O_2C).$$

Tähistame: $OD=R$; $O_2C=r$; $O_2O=CF=H$; $DF=R-r$.

Leiame kesklõike pindalast $\pi R_1^2 = 196\pi$ kesklõike raadiuse R_1 ; $R_1 = 14$ cm.

Avaldame trapetsist OO_2CD ülemise ja alumise põhja raadiuste summa. O_1E on trapetsi kesklõik, järelikult $R+r=28$ cm. Kuna trapetsi $ABCD$ pindala on 420 cm², siis saame: $(R+r)H = 420$.

$$28H = 420,$$

$$H = \frac{420}{28} = 15 \text{ cm.}$$

Kolmnurgast CDF saame: $FD = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{32 \cdot 2} = 8$ cm, järelikult

$$\begin{cases} R+r=28 \\ R-r=8. \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} R=18 \text{ cm} \\ r=10 \text{ cm.} \end{cases}$$

Asetades leitud väärtused tükikoonuse ruumala ja külgpindala valemisse, saame:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 15 (18^2 + 10^2 + 180) = 5\pi (324 + 100 + 180) = 3020\pi \text{ cm}^3.$$

$$S_k = 2\pi \cdot 14 \cdot 17 = 476\pi \text{ cm}^2.$$

Vastus. Tükikoonuse külgpindala on 476π cm², ja ruumala 3020π cm³.

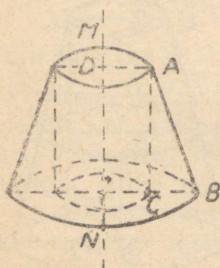
Ülesanne 7.

Täisnurkne kolmnurk kaatetitega 5 cm ja 12 cm pöörleb ümber telje, mis on paralleelne suurema kaatetiga ja asub sellest 3 cm kaugusel. Arvutada pöördkeha pindala ja ruumala (joon. 21).

Lahendus.

Projekteerides punkti A teljele MN , saame:

$$AD=r=3 \text{ cm;}$$



Joon. 21.

$$V_{\text{pöördkeha}} = V_{\text{tüvik}} - V_{\text{sil}} = \frac{H}{3} (R^2 + r^2 + Rr) - \pi r^2 H = \frac{\pi 12}{3}$$

$$(64 + 9 + 24) - \pi \cdot 9 \cdot 12 = 280\pi \text{ cm}^3;$$

$$S_{\text{pöördkeha}} = S_{\text{AB}} + S_{\text{AC}} + S_{\text{BC}} = \pi \cdot AB(R+r) + 2\pi rH + \\ + \pi(R^2 - r^2) = \pi 13 \cdot 11 + 2\pi 3 \cdot 12 + \pi(64 - 9) = 143\pi + \\ + 72\pi + 55\pi = 270\pi \text{ cm}^2.$$

Vastus. Pöördkeha ruumala on $280\pi \text{ cm}^3$ ja pöördkeha pindala $270\pi \text{ cm}^2$.

Kontrollküsimusi

1. Missugust pinda nimetatakse silindriliseks? kooniliseks?
2. Missugust keha nimetatakse silindriks? koonuseks?
3. Missugust koonust nimetatakse tüvikoonuseks?
4. Sõnastage silindri, koonuse ja tüvikoonuse külge- ja täispindala valemid.
5. Mida kujutab endast silindri, koonuse ja tüvikoonuse pinna-laotus?

6. Millega võrdub silindri, koonuse ja tüvikoonuse ruumala?

Pöördkeha pindala ja ruumala arvutamise ülesanded ei tohiks valmistada erilisi raskusi.

Tuleb ainult: 1) õigesti rakendada vastavaid valemeid; 2) korralikult teha kõik põhi- ja abijoonised; 3) arvutuslik osa teha võimalikult ratsionaalselt.

Et arvutada pindalaid, mis tekivad mingisuguse joone pöörlemisel, tuleb endale eelkõige selgeks teha, missugune pind tekib ühel või teisel juhul.

Vaatleme, missugused pinnad tekivad lõigu l pöörlemisel erisuguste, kõige sagedamini esinevate asendite korral telje MN ümber (joon. 22):

a) lõigu l üks otspunkt asub teljel MN ; ja teine teljest MN kaugusel r :

$$S_{\text{koonus}} = \pi r l;$$

b) lõigu l üks otspunktidest, mis asub teljega MN ühel tasapinnal on teljest kaugusel r ja teine otspunkt kaugusel R :

$$S_{\text{tüvikoonus}} = \pi l (R + r);$$

c) lõik l on paralleelne teljega ja asub teljest kaugusel r :

$$S_{\text{silinder}} = 2\pi r l;$$

d) lõik l on risti teljega ja lõigu üks otspunktidest asub teljel:

$$S_{\text{ring}} = \pi l^2 = \pi r^2;$$

e) lõik l on risti teljega ja asub sellega ühel tasapinnal. Lõigu üks otspunktidest asub teljest kaugusel r ja teine kaugusel R .

Saame rōnga:

$$S_{\text{rõngas}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r) = \pi l(R+r).$$

Kõiki loetletud viit valemit võib asendada ühega — viimasega, s. t. kui sirglõik $AB=l$, asub ühel tasapinnal teljega ja pöörleb ümber selle telje, siis tekkinud pöördpind võrdub:

$$S = \pi l(R+r),$$

kus R ja r on lõigu otspunktide kaugused pöörlemisteljest.

Pöördkeha ruumala. Sirge või kõveraga ja teljega piiratud pinna pöörlemisel tekkinud keha nimetatakse pöördkehaks.

Vaatleme kõige sagedamini esinevaid näiteid pöördkehade kohta (joon. 23):

a) Täisnurkne kolmnurk pöörleb ümber ühe kaateti:

$$V_{ABC} = V_{\text{koonus}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

b) Ristkülik pöörleb ümber ühe külje:

$$V_{ABCD} = V_{\text{silinder}} = \pi r^2 h.$$

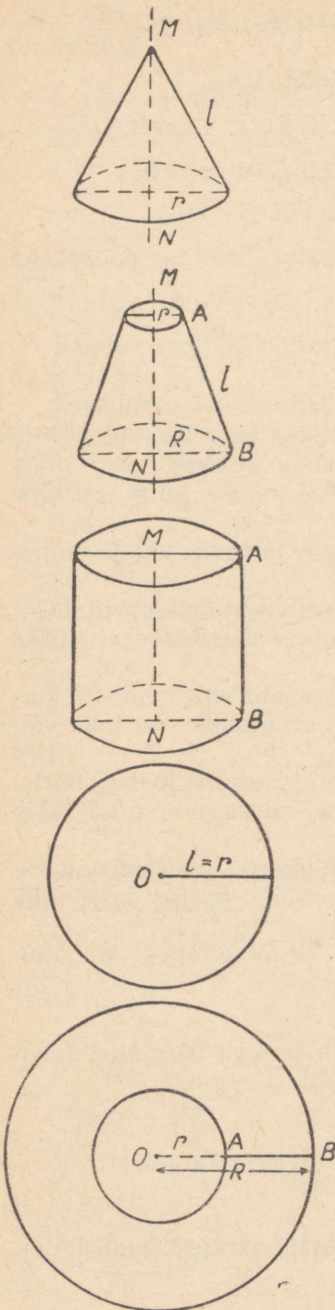
c) Täisnurkne trapets pöörleb ümber väiksema haara:

$$V_{ABCD} = V_{\text{tüvikoonus}} = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

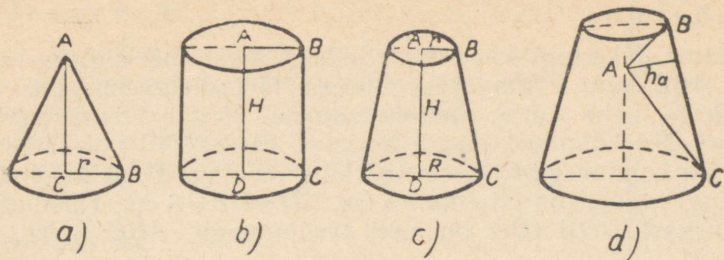
d) Kolmnurk ABC , mis asub ühel pool telge, selle teljega ühel tasapinnal ja mille tipp A asub teljel, pöörleb ümber telje:

$$V_{ABC} = S_{BC} \cdot \frac{h_a}{3},$$

kus h_a on kolmnurga kõrgus.



Joon. 22.



Joon. 23.

Alateema 2

Kera

Kirjandus

Andrejev. Geomeetria, IX ptk. § 139—145; ülesanded nr. 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67.

Kisseljov. Geomeetria, II osa, § 125—148.

Rõbkin. Ülesannete kogu, II osa, § 20, nr. 1, 2, 8; § 21, nr. 1, 3, 5, 7, 10; § 22, nr. 1, 2, 3, 5, 6; § 23, nr. 1, 3, 15, 16.

METOODILISED JUHENDID

Töötades läbi käesoleva alateema teoreetilist materjali, pöörake tähelepanu sellele, et kõigi kolme pöördpinna — keravöö, sfäärisegmendi ja kera pindala võrdub kera suurringi ümbermõõdu ja keha kõrguse korrutisega, kusjuures keha kõrguse all mõistetakse vaadeldavat pinda moodustava pöörleva kaare projektsiooni läbimõõdul.

ÜLESANNETE LAHENDAMISE NÄITEID

Ülesanne 8.

Kera pinnal on antud kolm punkti. Nendevahelised sirgjoonelised kaugused on 6 cm, 8 cm ja 10 cm. Kera raadius on 13 cm. Leida neid punkte läbiva tasapinna kaugus kera keskpunktist.

Antud: kera keskpunkt O (joon. 24); punktid A , B ja C , mis asuvad kera pinnal.

$$AB = 6 \text{ cm}; AC = 8 \text{ cm}; BC = 10 \text{ cm}.$$

Punkte A , B ja C läbib tasapind, mis lõikab kera pinda mööda ringjoont keskpunktiga punktis D . Punkti D läbiv kera raadius on risti lõikeriingiga D . Arvutada tasapinna ABC kaugus DO kera keskpunktist O .

Ülesanne 10.

Kui poolringjoon, mis on jaotatud kolmeks võrdseks osaks, pöörleb ümber oma diameetri, siis pöörpind, mille moodustab keskmine kaar, on pindvõrdne kahe äärmise kaare poolt moodustatud pöörpindade summaga (joon. 26).

Tõestada see.

Antud: poolringjoon $ABCD$: $\cup AB = \cup BC = \cup CD$, AD — poolringjoone läbimõõt.

Tõestada: $S_{BC} = S_{AB} + S_{CD}$, kus S on kaarte BC , AB ja CD poolt pöörlemisel moodustatud pindalade sümbol.

Tõestus.

Iga kaar sisaldab 60° , järelikult, kui jaotuspunktid ühendada poolringjoone keskpunktiga ja omavahel, saame kolm võrdkülgset kolmnurka. Tõmbame $BE \perp AD$ ja $CF \perp AD$; BE ja CF on vastavate kolmnurkade kõrgused, kuid samal ajal ka külgede mediaanideks, seepärast

$$AE = EO = OF = DF = \frac{R}{2},$$

kus R on kaare $ABCD$ raadius.

Kaare AB pöörlemisel ümber AD tekkinud sfäärisegmendi kõrgus on $\frac{R}{2}$; kaare DC pöörlemisel sama läbimõõdu ümber tekkinud sfäärisegmendi kõrgus on samuti $\frac{R}{2}$. Kaare BC pöörlemisel tekkinud keravöö kõrgus on R . Keravöö pindala võrdub tema kõrguse ja suurringi ümbermõõdu korrutisega:

$$S_{BC} = EF \cdot 2\pi \cdot OB = 2\pi R^2.$$

Ka sfäärisegmendi pindala võrdub tema kõrguse ja suurringi ümbermõõdu korrutisega:

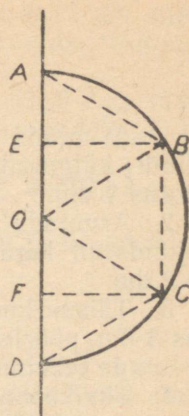
$$S_{AB} = AE \cdot 2\pi \cdot OB = 2\pi R \cdot \frac{R}{2} = \pi R^2,$$

$$S_{CD} = FD \cdot 2\pi \cdot OB = 2\pi R \cdot \frac{R}{2} = \pi R^2,$$

$$S_{AB} + S_{CD} = \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R^2.$$

Siit

$$S_{BC} = S_{AB} + S_{CD}, \text{ mida oligi tarvis tõestada.}$$



Joon. 26.

KONTROLLTÖÖ NR. 7

Esimene variant

1. Arvutada korrapärase nelinurkse prisma sisse kujundatud silindri külgpindala ja ruumala, kui prisma põhiserv on 2 dm ja kõrgus 4 dm.

2. Arvutada võrdkülgse telglõikega koonuse ümber ja sisse kujundatud kera ruumala ja pindala, kui koonuse moodustaja on 2 dm.

3. Täisnurkne trapets, mille alused on 6 dm ja 2 dm ning kõrgus 3 dm, pöörleb ümber telje, mis ühtib trapetsi lühema haaraga. Arvutada tekkinud pöördkeha ruumala ja pindala.

4. Tüvikoonuse külgpindala on 80π dm² ja moodustaja 5 dm. Arvutada telglõike pindala ja tüvikoonuse ruumala, kui põhjade raadiused suhtuvad nagu 5:3.

5. Lahendada võrdhaarne kolmnurk, kui alus $b=72,9$ m ja haar $a=80,3$ m.

6. Lahendada kolmnurk, kui $a=60,5$ m, $B=46^{\circ}8'$ ja $C=79^{\circ}20'$.

Teine variant

1. Arvutada korrapärase kuusnurkse prisma sisse kujundatud silindri külgpindala ja ruumala, kui prisma põhiserv on 3 dm ja kõrgus 5 dm.

2. Koonuse moodustaja on 1 m ja kõrgus 8 dm. Arvutada koonuse ümber ja sisse kujundatud kera pindala ja ruumala.

3. Võrdhaarne trapets, mille alused on 10 cm ja 4 cm ning haar 5 cm, pöörleb oma suurema aluse ümber. Arvutada tekkinud pöördkeha pindala ja ruumala.

4. Arvutada tüvikoonuse telglõike pindala ja ruumala, kui tüvikoonuse moodustaja on 37 cm, kõrgus 35 cm ja põhjade raadiused suhtuvad nagu 5:2.

5. Lahendada võrdhaarne kolmnurk, kui haar $a=30,5$ dm ja tipunurk $B=98^{\circ}50'$.

6. Lahendada kolmnurk, kui $a=18,4$ m, $b=30,5$ m ja $C=60^{\circ}$.

Kolmas variant

1. Arvutada korrapärase kolmnurkse prisma sisse kujundatud silindri külgpindala ja ruumala, kui prisma põhiserv on 4 dm ja kõrgus 6 dm.

2. Arvutada koonuse ümber ja sisse kujundatud kera pindala ja ruumala, kui koonuse põhja raadius on 24 cm ja moodustaja 40 cm.

3. Võrdhaarne trapets, mille alused on 15 dm ja 5 dm ning kõrgus 12 dm, pöörleb ümber väiksema aluse. Arvutada tekkinud pöördkeha pindala ja ruumala.

4. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 5 dm ja 3 dm; tüvikoonuse moodustaja ja kõrguse vahe on 1 dm. Arvutada telglõike pindala ja koonuse ruumala.

5. Lahendada võrdhaarne kolmnurk, kui haar $a=67,63$ m ja alus $b=72,8$ m.

6. Lahendada kolmnurk, kui $A=50^\circ$; $B=115^\circ 49'$ ja $a=26,35$ m.

Neljas variant

1. Silindri külgpindala on 72π cm² ja täispindala 104π cm². Arvutada silindri ruumala.

2. Koonuse moodustaja on 20 cm ja põhja raadius 16 cm. Arvutada koonuse ümber ja sisse kujundatud kera pindala ja ruumala.

3. Täisnurkne trapets, mille suurem alus on 4 m ja haarad 16 dm ja 34 dm, pöörleb ümber väiksema aluse. Arvutada tekkinud pöördkeha pindala ja ruumala.

4. Tüvikoonuse külgpindala on 247π cm² ja põhjade pindalad 144π cm² ning 49π cm². Arvutada telglõike pindala ja koonuse ruumala.

5. Lahendada võrdhaarne kolmnurk, kui haar $a=627$ ja alusnurk $23^\circ 30'$.

6. Lahendada kolmnurk, kui $a=450$; $A=87^\circ 55'$ ja $B=10^\circ 53'$.

KOONDÜLESANNE NR. 8

GEOMEETRIA

Teema 5

Trigonomeetria rakendamist nõudvate geomeetriliste ülesannete lahendamine

Kirjandus

Kožeurov. Trigonomeetria, § 60 ja ülesanded nr. 5, 7, 9, 11, 14, 17, 18, 20, 24, 27, 37, 38, 40, 43, 51, 62, 70, 75, 91, 94, 103, 104, 112, 114 (lk. 265—280).

Rõbkin. Trigonomeetria ülesannete kogu, § 15a, nr. 6, 12, 22; § 15, nr. 4, 5, 10, 13; § 17, nr. 1, 9; § 18, nr. 1, 2, 7; § 19, nr. 5, 6, 13, 27; § 20, nr. 1, 4, 12; § 21, nr. 6, 12, 17, 27, 34; § 22, nr. 5, 26; § 23, nr. 6, 9.

Stratilatov. Trigonomeetria ülesannete kogu, § 19, nr. 370 (1), 372, 378 (2), 388 (2), 390, 397, 414, 420; § 20, nr. 444, 445, 453, 459, 465, 473; § 21, 476, 484, 488, 510; § 22, nr. 551, 542.

METOODILISED JUHENDID

Alustades trigonomeetria rakendamist nõudvate geomeetriliste ülesannete lahendamisega, tuleb hoolikalt korrata kõiki pindalade ja ruumalade arvutamise valemeid ja samuti valemeid, milliseid kasutasime täisnurksete ja kaldnurksete kolmnurkade lahendamisel ja avaldiste teisendamisel logaritmitavaks.

Trigonomeetria rakendamist nõudvate geomeetriliste ülesannete lahendamisel tuleb meeles pidada järgmisi nõudeid:

1) Ülesanne tuleb lahendada algul üldkujul, s. t. täheliste suurustega.

2) Tundmatute-vaheliste seoste selgitamiseks ja lahendi valemi üldkujus sisalduvate tundmatute avaldamiseks tuleb kasutada selliseid kolmnurki, kus on antud lahendamiseks vajalikud põhielemendid (küljed, nurgad). Pythagorase teoreemi tuleks rakendada ainult sel juhul, kui kolmnurk, mida tuleb kasutada, ei sisalda antud (või otsitavat) nurka.

3) Nii vahepealsete resultaaside kui ka ülesandes nõutud lõpptulemuse avaldamisel teha kõik vajalikud ja võimalikud trigonomeetrilised lihtsustused.

4) Lõppavaldises tohivad esineda ainult ülesande tingimustes antud suurused. Erandi võivad moodustada täiendusnurgad.

5) Kui on leitud vastus ülesande küsimusele üldkujul, tuleb sellesse asendada arvulised väärtused (kui need on antud) ja teha vajalikud arvutused, kasutades selleks logaritmi tabelit.

Lahendades ülesandeid tähealiste suurustega, tuleb otsitavad suurused avaldada võimaluse korral ühe ja sama abielemendi kaudu.

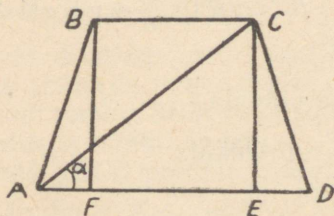
Tavaliselt kasutatakse prismade ja püramiidide juures abielemendina, mille kaudu avaldatakse kõik ülejäänud suurused, põhiserva, sest see on üheaegselt nii põhitahu kui ka külgtahu elemendiks. Mõnikord kasutatakse abielemendina ka veel põhja ümber või sisse joonestatud ringjoone raadiust.

ÜLESANNETE LAHENDAMISE NÄITEID

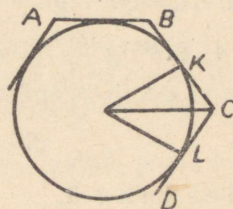
Ülesanne 1.

Avaldada võrdhaarse trapetsi pindala, kui diagonaal a moodustab suurema alusega nurga α .

Antud: võrdhaarne trapets $ABCD$ (joon. 27).



Joon. 27.



Joon. 28.

Diagonaal $AC = a$ ja $\angle DAC = \alpha$.

Avaldada trapetsi pindala S .

Lahendus.

On teada, et $S_{\text{trapets}} = \frac{(AD + BC) \cdot CE}{2}$.

Tõmbame $CE \perp AD$ ja $BF \perp AD$. Jooniselt saame: $AD = AE + ED$; $BC = AE - AF$, kuid $AF = ED$ (see järeldub kolmnurkade ABF ja CDE võrdsusest; nad on täisnurksed; $AB = CD$; $BF = CE$).

$$AD + BC = AE + ED + AE - AF = 2AE,$$

järelikult:

$$S = \frac{2AE \cdot EC}{2} = AE \cdot EC.$$

Kolmnurgast ACE saame:

$$AE = AC \cdot \cos \alpha = a \cos \alpha$$

$$CE = AC \cdot \sin \alpha = a \sin \alpha$$

ja järelikult

$$S = a \cos \alpha \cdot a \sin \alpha = a^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2}.$$

Vastus. Trapetsi pindala $S = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2}$ ruutühikut.

Ülesanne 2.

Arvutada korrapärase n -nurkse puutujahulknurga pindala, kui ringi raadius on R .

Antud: korrapärane hulknurk $ABCD \dots$ (joon. 28);

$$OK = OL = R.$$

Leida hulknurga pindala.

Lahendus.

$$S_{\text{hulknurk}} = \frac{1}{2} n \cdot BC \cdot OK. \text{ Leiame } BC.$$

On teada, et korrapärase n -nurga kesknurk võrdub $\frac{360^\circ}{n}$, järelikult $\angle KOC = \frac{180^\circ}{n}$; täisnurksest kolmnurgast OKC ($\angle K = 90^\circ$) saame: $KC = OK \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, $BC = 2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, millest $S_{\text{hulknurk}} = \frac{1}{2} n \cdot 2R^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = nR^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

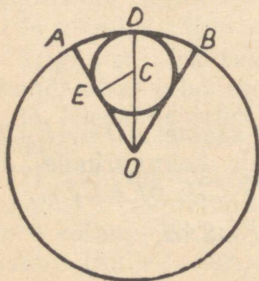
Vastus. Korrapärase n -nurga pindala

$$S = nR^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \text{ ruutühikut.}$$

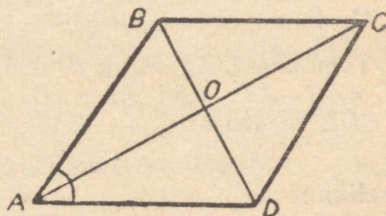
Ülesanne 3.

Sektori raadius on R ja kaar $2a$. Avaldada sektori sisse kujundatud ringi raadius r .

Antud: AOB — sektor, mille sisse on joonestatud ring (joonis 29);



Joon. 29.



Joon. 30.

$$AO = OB = R, \cup AB = 2\alpha, \cup AD = \alpha.$$

Avaldada $DC = r$.

L a h e n d u s.

Tõmbame puutepunktidesse raadiused OD ja CE . Kolmnurgast COE saame: $r = OC \sin \alpha$, kuid $OC = OD - CD = R - r$, järelikult $r = (R - r) \sin \alpha$, millest

$$r(1 + \sin \alpha) = R \sin \alpha,$$

$$r = \frac{R \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{R \sin \alpha}{2 \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}.$$

Seda avaldist saab lihtsustada, korrutades murru lugejat ja nimetajat suurusega

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = 2 \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2}).$$

$$r = \frac{R \sin \alpha \cdot \sin(90^\circ - \alpha)}{2 \cos \alpha \cdot \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} = R \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}).$$

V a s t u s. Sektori sisse joonestatud ringi raadius

$$r = R \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}).$$

Ü l e s a n n e 4.

Rombi diagonaalide summa on m ja rombi teravnurk α . Avaldada ja arvutada rombi pindala, kui $m = 16,8$ m ja $\alpha = 35^\circ 8'$.

Antud: romb $ABCD$, $AC + BD = m$ ja $\angle A = \alpha$ (joon. 30).

Avaldada rombi pindala S .

Rombi $ABCD$ pindala võrdub tema diagonaalide poole korrutisega, järelikult $S_{\text{romb}} = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

Avaldame AC ja BD antud suuruste kaudu. On antud, et

$$AC + BD = m \quad (1)$$

Täisnurksest kolmnurgast AOD leiame:

$$OD = AO \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

millest

$$BD = 2OD = 2AO \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = AC \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Asendades võrduses (1) suuruse BD tema väärtusega, saame:

$$AC + AC \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = m, \text{ millest:}$$

$$AC = \frac{m}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{m \cos 45^\circ \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2})};$$

$$BD = AC \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m \cos 45^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2})}$$

$$S_{\text{romb}} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{m^2 \cdot \cos^2 45^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2(45^\circ + \frac{\alpha}{2})} =$$

$$= \frac{m^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2(45^\circ + \frac{\alpha}{2})} = \frac{m^2 \sin \alpha}{8 \sin^2(45^\circ + \frac{\alpha}{2})}.$$

Arvutame rombi pindala, kui $m = 16,8$ m ja $\alpha = 35^\circ 8'$.

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{35^\circ 08'}{2} = 17^\circ 34'; \quad 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 62^\circ 34'.$$

$$S_{\text{romb}} = \frac{16,8^2 \cdot \sin 35^\circ 08'}{8 \sin^2 62^\circ 34'};$$

$$\lg S = 2 \lg 16,8 + \lg \sin 35^\circ 08' - \lg 8 - 2 \lg \sin 62^\circ 34'$$

$2 \lg 16,8 = 2,4506$	$\lg 8 = 0,9031$
$\lg \sin 35^\circ 08' = 1,7601$	$\lg \sin 62^\circ 34' = 1,9482$
$- \lg 8 = -1,0969$	
$- 2 \lg \sin 62^\circ 34' = 0,1036$	

$$\lg S = 1,4112$$

$$S = 25,77 \text{ m}^2$$

Vastus: Rombi pindala on $\frac{m^2 \sin \alpha}{8 \sin^2(45 + \frac{\alpha}{2})}$ ruutühikut ehk 25,77 m².

Ülesanne 5.

Kaldsirge moodustab tasapinnaga nurga α . Läbi nurga tipu on tõmmatud teine sirge, mis asub tasapinnal ja moodustab antud kaldlõigu projektsiooniga nurga β . Ävaldada ja arvutada nurk nende sirgete vahel, kui $\alpha = 43^\circ 53'$ ja $\beta = 11^\circ 10'$.

Antud: tasapind P .

AE — tasapinna P kaldsirge,
 AF — kaldsirge projektsioon tasapinnal,
 AL — sirge tasapinnal P ,
 $\angle EAF = \alpha$ ja $\angle FAL = \beta$ (joon. 31).

Avalda ja arvuta $\angle EAL = \varphi$.

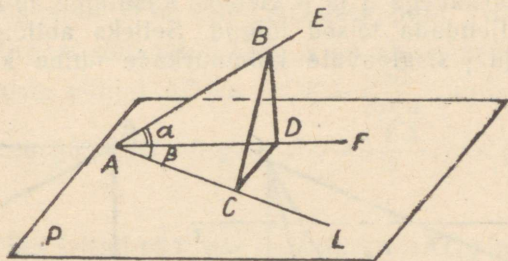
Lahendus.

Võtame kaldsirgel AE vabalt punkti B . Tõmbame $BD \perp AF$, $BC \perp AL$ ja ühendame punkti D punktiga C . Kolme ristsirge teoreemi põhjal on $AC \perp CD$. Täisnurksest kolmnurgast BAC saame:

$\cos \varphi = \frac{AC}{AB}$. Avaldame nüüd AB ja AC abilõigu kaudu. Selleks abilõiguks on sobiv valida AD , sest AD on lõike AC ja AB sisaldavate kolmnurkade ühiseks küljeks.

Täisnurksetest kolmnurkadest ACD ja ABD leiame:

$$AC = AD \cos \beta \text{ ja } AB = \frac{AD}{\cos \alpha}.$$



Joon. 31.

Asetades lõikude AC ja AB saadud väärtused nurga $BAC = \varphi$ koosinuse avaldisse, saame:

$$\cos \varphi = \frac{AD \cdot \cos \beta}{\frac{AD}{\cos \alpha}} = \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Siit

$$\varphi = \arccos(\cos \alpha \cdot \cos \beta).$$

Arvutame nurga φ , kui $\alpha = 43^\circ 53'$ ja $\beta = 11^\circ 10'$

$$\cos \varphi = \cos 43^\circ 53' \cdot \cos 11^\circ 10',$$

$$\lg \cos \varphi = \lg \cos 43^\circ 53' + \lg \cos 11^\circ 10'.$$

$$\lg \cos 43^\circ 53' = \bar{1},8578$$

$$\lg \cos 11^\circ 10' = \bar{1},9917$$

$$\lg \cos \varphi = 1,8495,$$

$$\varphi = 45^\circ.$$

V a s t u s. Otsitav nurk on 45° .

Ü l e s a n n e 6.

Täisnurkne kolmnurk ABC on asetatud selliselt, et tema hüpotenuus AB asub tasapinnal P ja kaatetid moodustavad tasapinnaga P nurgad α ja β .

Avaldada nurk kolmnurga tasapinna ja tasapinna P vahel.

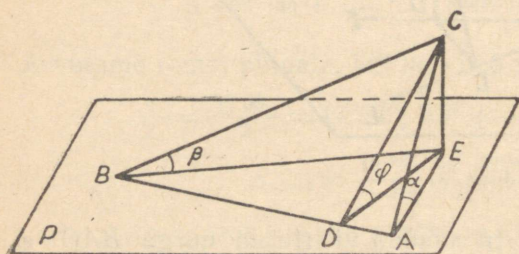
Antud: tasapind P ; kolmnurk ABC ; $\angle C = 90^\circ$; CE on risti tasapinnaga P ; $\angle CBE = \beta$ ja $\angle CAE = \alpha$ (joon. 32).

Avaldada tasapinna P ja kolmnurga tasapinna vaheline nurk φ .

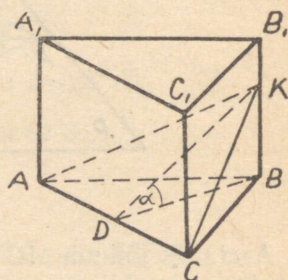
Lahendus.

Otsitav nurk φ on tasapinna P ja kolmnurga tasapinna vahe-
line kahetahuline nurk.

Kahetahulist nurka mõõdetakse tema joonnurgaga. Tõmbame $CD \perp AB$ ja ühendame punkti D punktiga E . Siis $DE \perp AB$ kolme ristsirge teoreemi põhjal ja järelikult $\angle CDE = \varphi$. Nüüd tuleb siduda nurk φ nurkadega α ja β . Selleks kasutame abilõiku, mille kaudu saame väljendada teised lõigud. Selleks abilõiguks võiks olla nurki α , β ja γ sisaldavate kolmnurkade ühine kaatet, s. t. lõik CE .



Joon. 32.



Joon. 33.

Oletame, et $CE = a$ ja leiame $CA = \frac{a}{\sin \alpha}$; $CB = \frac{a}{\sin \beta}$ ja $DC = \frac{a}{\sin \varphi}$. Kuna nurk ACB on täisnurk, siis $AC \cdot CB = CD \cdot AB$, ehk $AC \cdot CB = CD \sqrt{AC^2 + CB^2}$. Asendades antud avaldises AC , CB ja DC nende vastavate väärtustega saame:

$$\frac{a}{\sin \alpha} \cdot \frac{a}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{a^2}{\sin^2 \beta}},$$

millest:

$$\sin \varphi = \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta},$$

$$\varphi = \arcsin (\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}).$$

Ülesanne 7.

Läbi korrapärase kolmnurkse prisma on juhitud tasapind, mis lõikab prisma põhiserva ja selle põhiserva vastas asuvat külgserva. Nurk, mille moodustab see tasapind põhitahuga, on α . Prisma põhiserva pikkus on a . Avaldada saadud lõike pindala.

Antud: korrapärase kolmnurkne prisma $ABCA_1B_1C_1$ ja lõige AKC , mis moodustab põhitasapinnaga ABC nurga α ; $AC = AB = BC = a$ (joon. 33).

Arvutada lõike AKC pindala.

L a h e n d u s.

Lõige kujutab endast võrdhaarset kolmnurka AKC , kus $AK=KC$ kui võrdsete kolmnurkade AKB ja CKB hüpotenuusid.

Tõmbame $DK \perp AC$ ja ühendame punkti D punktiga B . $BD \perp AC$ kolme ristsirge pöördteoreemi põhjal, järelikult $\angle KDB$ on kahtahulise nurga $BACK$ joonnurgaks ja võrdub nurgaga $\alpha \cdot S_{\triangle AKC} = \frac{AC \cdot DK}{2}$, kus punkt D on lõigu AC keskpunkt, (võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus on aluse mediaaniks). Ülesande tingimuste põhjal $AC=a$, $DK = \frac{DB}{\cos \alpha}$; kuna DB on korrapärase kolmnurga ABC kõrgus, $BD = \frac{a \sqrt{3}}{2}$, siis järelikult $DK = \frac{a \sqrt{3}}{2 \cos \alpha}$.

Asetades DK leitud väärtuse kolmnurga AKC pindala avaldisse, saame:

$$S_{\text{lõige}} = \frac{a \cdot a \sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cos \alpha} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \alpha}.$$

V a s t u s.

$$S_{\text{lõige}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \alpha} \text{ ruutühikut.}$$

Ü l e s a n n e 8.

Püströöptahuka põhjaks on romb, mille väiksem diagonaal on d ja teravnurk α . Rööptahuka kõrgus on $\frac{d}{2}$. Leida tema täispindala. Arvutada täispindala, kui $d=25,87$ dm ja $\alpha=75^\circ 20'$.

Antud: püströöptahukas $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; põhitahk $ABCD$ on romb; diagonaal $BD=d$; $\angle BAD=\alpha$ ja kõrgus $AA_1=H=\frac{d}{2}$ (joonis 34).

Avaldada ja arvutada selle rööptahuka täispindala.

L a h e n d u s.

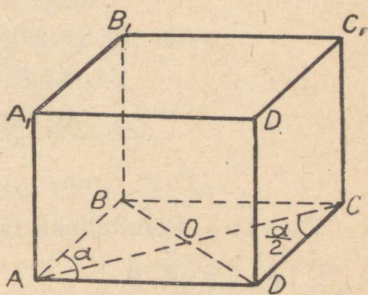
Püströöptahuka täispindala leitakse valemiga:

$$S_T = PH + 2Q,$$

kus P on põhja übermõõt, H — rööptahuka kõrgus, Q — põhja pindala. Tähistame põhiserva tähega x , siis põhja übermõõt $P=4x$ ja rombi pindala $Q = \frac{BD \cdot AC}{2}$.

Rombi diagonaalide omaduse põhjal saame:

$$OC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} d \cdot \text{ctg } \frac{\alpha}{2};$$



Joon. 34.

järelikult

$$AC = d \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$$

$$x = \frac{\frac{1}{2} d}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}; P = \frac{2d}{\sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$Q = \frac{d \cdot d \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Teades nüüd kõiki elemente, milliseid on vaja rööptahuka täispindala arvutamiseks, leiame rööptahuka täispindala:

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{2d \cdot d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{2d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{d^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \\ &+ \frac{d^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{d^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} (1 + \cos \frac{\alpha}{2}) = \\ &= \frac{d^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{2d^2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}}{2 \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{4}} = d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}. \end{aligned}$$

V a s t u s. $S_T = d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$ ruutihikut.

Arvutame rööptahuka täispindala, kui

$$d = 25,87 \text{ dm ja } \alpha = 75^\circ 20',$$

$$\frac{\alpha}{4} = 75^\circ 20' : 4 = 18^\circ 50',$$

$$S_{\text{rööpt}} = 25,87^2 \cdot \operatorname{ctg} 18^\circ 50'$$

$$\lg S = 2 \lg 25,87 + \lg \operatorname{ctg} 18^\circ 50'$$

$$2 \lg 25,87 = 2 \cdot 1,4128 = 2,8256$$

$$\lg \operatorname{ctg} 18^\circ 50' = 0,4672$$

$$\lg S_T = 3,2928$$

$$S_T = 1963 \text{ dm}^2.$$

V a s t u s. Rööptahuka täispindala on 1963 dm².

Ü l e s a n n e 9.

Avaldada korrapärase nelinurkse püramiidi täispindala ja ruumala, kui püramiidi külgserv on l ja tipu juures asuv tasanurk

α . Arvutada püramiidi ruumala ja täispindala, kui $l=5$ m ja $\alpha=13^{\circ}45'$.

Antud: korrapärane nelinurkne püramiid $SABCD$ (joon. 35); $SA=SB=SC=SD=l$ ja $\angle ASB=\angle BSC=\angle CSD=\angle DSA=\alpha$.

Avaldada ja arvutada püramiidi ruumala V ja täispindala S .

L a h e n d u s.

Püramiidi $SABCD$ otsitav ruumala on:

$$V = S_{ABCA} \cdot \frac{SO}{3} \text{ ehk } V = \frac{DC^2 \cdot SO}{3}.$$

Seega tuleb püramiidi ruumala määramiseks avaldada ruudu $ABCD$ külge DC ja püramiidi kõrgus ülesande tingimustes antud suuruste l ja α kaudu.

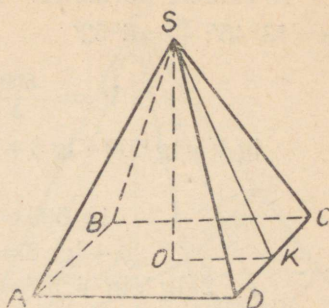
Tõmbame $SK \perp DC$. Kuna kolmnurk SDC on võrdhaarne, siis $DK=KC=\frac{DC}{2}$ ja $\angle DSK=\angle CSK=\frac{\alpha}{2}$. Täisnurksest kolmnurgast DSK saame: $DK=l \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ ja järelkult $DC=2l \sin \frac{\alpha}{2}$. Kõrguse SO määrame Pythagorase teoreemi abil kolmnurgast SOK ;

$SO=\sqrt{SK^2-OK^2}$. Kuid täisnurkse kolmnurga DSK kaatet SK võrdub $l \cos \frac{\alpha}{2}$ ja $OK=DK=l \sin \frac{\alpha}{2}$; järelkult $SO=$

$=\sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = l \cdot \sqrt{\cos \alpha}$. Asetades ruumala avaldises suuruste DC ja SO asemele nende väärtused, saame $V = \frac{4}{3} l^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\cos \alpha}$ Püramiidi täispindala arvutamiseks leiame:

$S_T = 2DC \cdot SK + DC^2 = DC(2SK + DC)$. Asetades suuruste SK ja DC asemele nende väärtused, saame:

$$\begin{aligned} S_T &= 2l \sin \frac{\alpha}{2} (2l \cos \frac{\alpha}{2} + 2l \sin \frac{\alpha}{2}) = \\ &= 4l^2 \sin \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}) = \\ &= 4l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \frac{\alpha}{2} + \cos (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) \right] = \\ &= 4l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cos 45^\circ \cdot \cos (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \\ &= 4\sqrt{2} \cdot l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos (45^\circ - \frac{\alpha}{2}). \end{aligned}$$



Joon. 35.

Arvutame püramiidi ruumala ja täispindala, kui $l=5$ m ja $\alpha=13^{\circ}45'$; $\frac{\alpha}{2}=6^{\circ}52'$

$$V = \frac{500}{3} \sin^2 6^{\circ}52' \sqrt{\cos 13^{\circ}45'}$$

$$\lg V = \lg 500 - \lg 3 + 2 \lg \sin 6^{\circ}52' + \frac{1}{2} \lg \cos 13^{\circ}45'$$

$\lg 500 = 2,6990$ $-\lg 3 = \bar{1},5229$ $2 \lg \sin 6^{\circ}52' = \bar{2},1552$ $\frac{1}{2} \lg \cos 13^{\circ}45' = \bar{1},9937$	$\lg 3 = 0,4771$
--	------------------

$$\lg V = 0,3708$$

$$V = 2,348 \text{ m}^3$$

Arvutame püramiidi täispindala:

$$S_T = 4\sqrt{2} l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos (45^{\circ} - \frac{\alpha}{2});$$

$$45^{\circ} - \frac{\alpha}{2} = 45^{\circ} - 6^{\circ}52' = 38^{\circ}08';$$

$$S_T = 4\sqrt{2} \cdot 25 \sin 6^{\circ}52' \cdot \cos 38^{\circ}08';$$

$$S_T = 100\sqrt{2} \cdot \sin 6^{\circ}52' \cdot \cos 38^{\circ}08';$$

$$\lg S_T = \lg 100 + \frac{1}{2} \lg 2 + \lg \sin 6^{\circ}52' + \lg \cos 38^{\circ}08'$$

$$\lg 100 = 2,0000$$

$$\frac{1}{2} \lg 2 = 0,1505$$

$$\lg \sin 6^{\circ}52' = \bar{1},0776$$

$$\lg \cos 38^{\circ}08' = \bar{1},8957$$

$$\lg S_T = 1,1238$$

$$S_T = 13,29 \text{ m}^2$$

Vastus. Püramiidi ruumala on $\frac{4}{3} l^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}$ ehk $2,348 \text{ m}^3$. Püramiidi täispindala on

$$4\sqrt{2} l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos (45^{\circ} - \frac{\alpha}{2}) \text{ ehk } 13,29 \text{ m}^2.$$

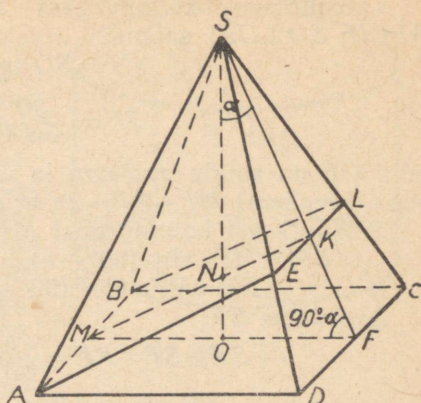
Ülesanne 10.

Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus h moodustab külgtahuga α . Läbi püramiidi põhiserva on juhitud tasapind, mis on risti vastastahuga ja lõikab seda. Arvutada selle tasapinna poolt äralõigatud püramiidi ruumala (joon. 36).

Lahendus.

Olgu $SABCD$ antud püramiid, mille kõrgus $SO = h$ moodustab külgtahuga nurga α .

Olgu tasapind, mis on juhitud läbi põhiserva AB , risti külgtahuga SDC . Kuna $AB \parallel CD$, siis AB on paralleelne tasapinnaga DSC (tasapinna ja sirge paralleelsuse tunnuse põhjal). LE on lõiketasapinna ja külgtahu DSC lõikejoon ning on paralleelne põhiservaga AB kui kahe tasapinna lõikejoon, kusjuures üks tasapindadest läbib sirget, mis on paralleelne teise tasapinnaga. Seepärast on nelinurk $ABLE$ trapets.



Joon. 36.

Tõmbame $OF \perp DC$ ja juhime läbi OF tasapinna SOF . Tasapinna SOF lõikejoon külgtahuga DSC on risti põhiservaga DC kolme ristsirge teoreemi põhjal. Tasapind SOF on risti servaga DC ($DC \perp OF$ ja $DC \perp SF$).

Ülesande tingimuste põhjal on kahetahuline nurk $SLEAB$ täisnurk. Tasapind SOF , mis lõikab seda kahetahulist nurka, on risti selle nurga servaga LE (tasapind $SOF \perp DC$ ja $DC \parallel LE$) ning seepärast $\angle SKM$ on kahetahulise nurga $SLEAB$ joonnurgaks (nagu teada, võime kahetahulise nurga joonnurga saada selle kahetahulise nurga lõikamisel tema servaga ristuva tasapinnaga). Selle kahetahulise nurga joonnurga arvuline suurus on $\angle SKM = 90^\circ$ ja KM on trapetsi $ABLE$ kõrguseks. Lõikejoon SK , mis on risti joontega LE ja KM , on risti ka lõike tasapinnaga ja seega on SK püramiidi $SABLE$ kõrguseks.

Sirged MK ja SO , mis asuvad tasapinnal SMF , lõikuvad punktis N .

NK on risti tasapinnaga DSC ($NK \perp EL$ ja $NK \perp SK$), ning seepärast püramiidi kõrguse projektsioon asub joonel SF ja $\angle OSF = \alpha$.

Leiame püramiidi $SABLE$ ruumala.

$V = \frac{1}{3} S_p \cdot H$, kus V on püramiidi ruumala, S_p — trapetsi $ABLE$ pindala ja H — püramiidi kõrgus.

Joonise järgi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB + LE}{2} \cdot MK \cdot SK.$$

Avaldame lõigud AB , LE , MK ja SK .

Täisnurksest kolmnurgast SOF (SO on risti tasapinnaga $ABCD$; $SO \perp OF$) saame:

$$OF = SO \operatorname{tg} \alpha = h \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$SF = \frac{SO}{\cos \alpha} = \frac{h}{\cos \alpha};$$

kuid OF on ruudu apoteem ja võrdub ruudu külje poole pikkusega, seepärast $MF = AB = 2h \operatorname{tg} \alpha$.

Täisnurksest kolmnurgast MKF leiame:

$$KM = MF \cdot \sin (90^\circ - \alpha) = 2h \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = 2h \cdot \sin \alpha,$$

$$KF = MF \cdot \cos (90^\circ - \alpha) = 2h \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Avaldame SK :

$$\begin{aligned} SK &= SF - KF = \frac{h}{\cos \alpha} - 2h \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{h}{\cos \alpha} - \frac{2h \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{h}{\cos \alpha} (1 - 2 \sin^2 \alpha) = \frac{h \cos 2\alpha}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Avaldame $LE \cdot \triangle SLE \sim \triangle DSC$ (kolmnurkade sarnasuse lemma põhjal).

Kolmnurkade SLE ja DSC sarnasusest tuleneb, et

$$\frac{EL}{DC} = \frac{SK}{SF}; \quad EL = \frac{DC \cdot SK}{SF},$$

$$EL = \frac{2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{h \cdot \cos 2\alpha}{\cos \alpha}}{\frac{h}{\cos \alpha}} = 2h \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos 2\alpha.$$

Asetades lõikude AB , EL , MK ja SK leitud väärtused ruumala valemisse, saame:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2h \operatorname{tg} \alpha + 2h \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos 2\alpha}{2} \cdot 2h \sin \alpha \cdot \frac{h \cdot \cos 2\alpha}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{2h \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) \cdot 2h^2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}{6 \cos \alpha} = \\ &= \frac{4h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos 2\alpha}{3} = \frac{4h^3 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{3} \text{ kuupühikut.} \end{aligned}$$

Vastus. Antud tasapinna poolt äralõigatud püramiidi ruumala on $\frac{4h^3 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{3}$ kuupühikut.

Ülesanne 11.

Silindrisse, mille moodustaja on l , on kujundatud püramiid nii, et püramiidi põhi asub silindri ühel põhjal ja püramiidi tipp silindri teisel põhjal (joon. 37).

Teades, et püramiidi põhjaks on ruut ja püramiidi kaks külgtahku on risti põhitasapinnaga ning kaks ülesjäänud külgtahku moodustavad põhitasapinnaga nurga α , avaldada ja arvutada püramiidi täispindala, kui $l = 38,12$ cm ja $\alpha = 48^\circ 46'$.

Lahendus.

Olgu $SABCD$ nelinurkse silindri sisse kujundatud püramiid. Silindri moodustaja on l . Püramiidi põhjaks on ruut, mis asub silindri ühel põhjal. Kuna püramiidi kaks külgtahku SAB ja SBC on risti põhitasahuga, siis järelikult on nende lõikejoon SB , kui mingi kolmanda tasapinnaga risti olevate tasapindade lõikejoon, risti põhitasapinnaga. Seega on SB püramiidi kõrguseks.

Püramiidi kõrgus ühtib silindri moodustajaga, sest silindri põhitasapinnaga ringjoone punkti B saab juhtida teisele põhitasapinnale ainult ühe ristjoone ja kuna ülesandes on antud, et püramiidi tipp asub silindri ülemisel põhjal, siis $SB=l$.

Püramiidi kaks ülejäänud külgtahku SAD ja SDC moodustavad põhitasapinnaga võrdsed kahetahulised nurgad suurusega α . Nendeks kahetahulisteks nurkadeks on nurgad $SADC$ ja $SCDA$, mille suurust α mõõdetakse nende nurkade joonnurkade suurusega α .

Kahetahulise nurga $SADC$ joonnurgaks on $\angle SAB$. Tõepoolest $AB \perp AD$ (ruudu küljed) ja kuna SA on kaldlõik, mille projektsioon $AB \perp AD$, siis kolme ristsirge teoreemi põhjal $SA \perp AD$.

Seega nii $SA \perp AD$ kui ka $AB \perp AD$, järelikult $\angle SAB$ on kahetahulise nurga $SADC$ joonnurk ja $\angle SAB = \alpha$. Kahetahulise nurga $SCDA$ joonnurgaks on nurk SCB . Tõepoolest, $BC \perp CD$ ja $SC \perp DC$, sest kaldlõigu SC projektsioon on risti lõiguga DC , seega kahetahulise nurga $SCDA$ joonnurgaks on $\angle SCB = \alpha$.

$\triangle SAB = \triangle SBC$, sest mõlemad kolmnurgad on täisnurksed, $AB = BC$, kui ruudu küljed ja kaatet SB on ühine. $\triangle SAD = \triangle SBC$, sest kolmnurgad on täisnurksed ($SA \perp AD$; $SC \perp CD$), $AD = DC$, kui ruudu küljed ja hüpotenuus SD on ühine.

Avaldame püramiidi külgpindala, pannes tähele, et püramiidi külgtahud SAB ja SCB ning SAD ja SDC on pindvõrdsed.

$$S_T = S_p + 2S_{SAB} + 2S_{SAD}, \text{ kus}$$

S_T on antud püramiidi täispindala,

S_p — püramiidi põhja pindala,

S_{SAB} — kolmnurga SAB pindala,

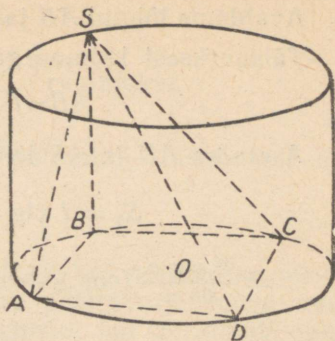
S_{SAD} — kolmnurga SAD pindala.

Jooniselt saame:

$$S_T = AB^2 + 2 \cdot \frac{AB \cdot SB}{2} + 2 \cdot \frac{AD \cdot AS}{2} =$$

$$= AB(AB + SB + AS).$$

(1)



Joon. 37.

Avaldame lõigud AB ja AS teades, et $SB=l$.

Täisnurksest kolmnurgast ASB avaldame:

$$AB=l \cdot \operatorname{ctg} \alpha; AS=\frac{l}{\sin \alpha}.$$

Asetades AB ja AS leitud väärtused avaldusse (1), saame:

$$\begin{aligned} S_T &= l \operatorname{ctg} \alpha \left(\operatorname{ctg} \alpha + l + \frac{l}{\sin \alpha} \right) = \\ &= \frac{l^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} (\cos \alpha + \sin \alpha + l) = \frac{l^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \right. \\ &+ \left. 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{l^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \frac{l^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left[\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{l^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot 2 \cos 45^\circ \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2l^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \text{ ruutühikut.} \end{aligned}$$

Arvutame püramiidi täispindala, kui $l=38,12$ cm ja $\alpha=48^\circ 46'$.

$$\frac{\alpha}{2} = 24^\circ 23'; 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 45^\circ - 24^\circ 23' = 20^\circ 37',$$

$$S_T = \frac{\sqrt{2} \cdot 38,12^2 \operatorname{ctg} 48^\circ 46' \cos 20^\circ 37'}{\sin 24^\circ 23'}.$$

$$\lg S_T = \frac{1}{2} \lg 2 + 2 \lg 38,12 + \lg \operatorname{ctg} 48^\circ 46' + \\ + \lg \cos 20^\circ 37' - \lg \sin 24^\circ 23'.$$

$$\frac{1}{2} \lg 2 = \frac{1}{2} \cdot 0,3010 = 0,1505,$$

$$2 \lg 38,12 = 2 \cdot 1,5811 = 3,1622,$$

$$\lg \operatorname{ctg} 48^\circ 46' = 1,9427,$$

$$\lg \cos 20^\circ 37' = 1,9713,$$

$$-\lg \sin 24^\circ 23' = 0,3842,$$

$$\lg \sin 24^\circ 23' = \bar{1},6158$$

$$\lg S_T = 3,6109$$

$$S_T = 4083 \text{ cm}^2.$$

Vastus. Püramiidi täispindala on

$$\frac{\sqrt{2} l^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \text{ ruutühikut.}$$

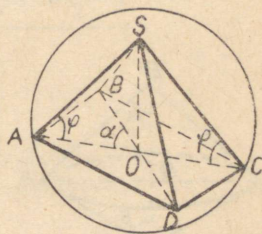
Kui $l = 38,12 \text{ cm}$ ja $\alpha = 48^\circ 46'$, siis püramiidi täispindala on 4083 cm^2 .

Ülesanne 12.

Kerasse, mille raadius on R , on kujundatud nelinurkne püramiid. Püramiidi iga külgserv moodustab põhitahuga nurga suurusega φ . Arvutada selle püramiidi ruumala, kui püramiidi põhjaks on ristkülik, mille diagonaalidevaheline teravnurk on α (joon. 38).

Lahendus.

Olgu $SABCD$ kera sisse kujundatud püramiid. Kuna püramiidi iga külgserv moodustab põhitahuga võrdse nurga, siis kolmnurgad AOS , BSO , SCO , DOS on võrdsed (kaateti ja teravnurga järgi), järelikult läbib püramiidi kõrgus püramiidi põhja ümber joonestatud ringjoone keskpunkti, s. t. läbib ristküliku diagonaalide lõikepunkti. Kuna ümberkujundatud kera keskpunkt asub püramiidi põhitasapinna ristjoonel (või selle pikendusel), mis on tõmmatud läbi püramiidi põhja ümber joonestatud ringjoone keskpunkti, siis kera keskpunkt asub püramiidi kõrgusel (või selle pikendusel) ja järelikult punktid A , S , C ja O asuvad ühel tasapinnal — kera suuringi tasapinnal.



Joon. 38.

Avaldame püramiidi ruumala V . Püramiidi ruumala valemi põhjal saame:

$$V_{\text{püramiid}} = \frac{1}{3} S_p \cdot h,$$

kus S_p on püramiidi põhja pindala ja h — püramiidi kõrgus. Kolmnurgast ASC saame: $AS = 2R \sin \varphi$; kolmnurgast ASO avaldame AO ja SO . $SO = AS \cdot \sin \varphi = 2R \sin^2 \varphi$; $AO = AS \cdot \cos \varphi = 2R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = R \sin 2\varphi$. Leiame põhja pindala. Diagonaalidega AC ja BD jaotub ristkülik neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks; avaldame ühe kolmnurga, näiteks AOB , pindala:

$$\begin{aligned} S_{AOB} &= \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} R \cdot \sin 2\varphi \cdot R \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} R^2 \sin^2 2\varphi \sin \alpha. \end{aligned}$$

Järelikult põhja pindala

$$S_p = 4 S_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin^2 2\varphi \sin \alpha = 2R^2 \sin^2 2\varphi \cdot \sin \alpha.$$

Asetades S_p ja h leitud väärtused püramiidi ruumala valemisse, saame:

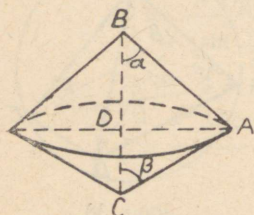
$$\begin{aligned} V_{\text{püramiid}} &= \frac{1}{3} \cdot 2R^2 \sin^2 2\varphi \cdot \sin \alpha \cdot 2R \sin^2 \varphi = \\ &= \frac{4}{3} R^3 \sin^2 2\varphi \cdot \sin^2 \varphi \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ülesanne 13.

Arvutada pöördkeha pindala, mis tekib kolmnurga ABC pöörlemisel ümber külje BC . Külje $BC=a$ ja selle külje lähisnurgad on β ja α .

On antud: $BC=a$, $\angle B=\alpha$ ja $\angle C=\beta$ (joon. 39).

Leida S pöördpind



Joon. 39.

Lahendus:

Kolmnurga pöörlemisel ümber ühe külje tekib pöördpind, mis koosneb kahe koonuse külgpindala summast ($S_{AB} + S_{AC}$).

Seega saame:

$$S = S_{AB} + S_{AC},$$

$$\text{kuid } S_{AB} = \pi r \cdot AB \text{ ja } S_{AC} = \pi r \cdot AC, \\ \text{kus } r = AD.$$

Asetades S_{AB} ja S_{AC} väärtused valemisse (1), leiame:

$$S = \pi r \cdot AB + \pi r \cdot AC = \pi r (AB + AC).$$

Täisnurksetest kolmnurkadest ABD ja ACD leiame:

$$AB = \frac{AD}{\sin \alpha}; \quad AC = \frac{AD}{\sin \beta},$$

millest

$$S = \pi AD \left(\frac{AD}{\sin \alpha} + \frac{AD}{\sin \beta} \right). \quad (2)$$

Avaldame AD ülesande tingimustes antud suuruse $BC=a$ kaudu.

Kolmnurgast ABD saame:

$$BD = AD \cdot \text{ctg } \alpha,$$

kolmnurgast ACD saame:

$$CD = AD \cdot \text{ctg } \beta.$$

Liites liikmeti suuruste BD ja CD avaldatud väärtused leiame:

$$BC = a = AD (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta),$$

millest

$$AD = \frac{a}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta},$$

$$AD = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Tehes asenduse valemis (2), saame:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \left[\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin (\alpha + \beta)} + \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin \beta \sin (\alpha + \beta)} \right] = \\ &= \frac{2\pi a^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin^2 (\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Vastus. Pöördkeha pindala

$$S = \frac{2\pi a^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin^2 (\alpha + \beta)}$$

Ülesanne 14.

Kolmnurgas ABC on nurk A nürinurk, külg $BC = 2a$, külg $AC = a$ ja $\angle C = \alpha$. Avaldada selle kolmnurga pöörlemisel tekkinud pöördkeha ruumala, kui kolmnurk pöörleb ümber telje, mis läbib selle kolmnurga tippu C , on risti küljega AC ja asub kolmnurga ABC tasapinnas (joon. 40).

Antud:

$$AC = a; BC = 2a \quad \angle C = \alpha \quad \text{ja} \quad AC \perp MN.$$

Avaldada $V_{\text{pöördkeha}}$

Lahendus.

Otsitava ruumala moodustab kahe ruumala — tükikoonuse ABB_1C ruumala (V_1) ja täiskoonuse B_1BC ruumala (V_2) vahe. Tükikoonuse ruumala

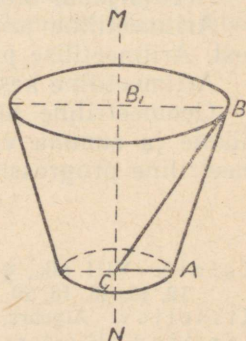
$$V_1 = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr),$$

kus $R = BB_1$; $r = AC$ ja $H = B_1C$. Järelikult

$$V_1 = \frac{\pi B_1C}{3} (B_1B^2 + AC^2 + AC \cdot B_1B).$$

Täiskoonuse ruumala:

$$V_2 = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi BB_1^2 \cdot CB_1}{3}.$$



Joon. 40.

Väljendame suurused R , r ja H antud suuruste kaudu. Täisnurksest kolmnurgast CB_1B , kus $\angle BCB_1 = 90^\circ - \alpha$ ja külg $CB = 2a$, leiame:

$$\begin{aligned} H &= CB_1 = 2a \cos(90^\circ - \alpha) = 2a \sin \alpha; \\ R &= BB_1 = 2a \sin(90^\circ - \alpha) = 2a \cos \alpha. \end{aligned}$$

Asetades saadud väärtused pöördkeha ruumala valemisse, saame:

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr - R^2) = \frac{\pi H}{3} (r^2 + Rr) = \\ &= \frac{\pi 2a \sin \alpha}{3} (a^2 + 2a^2 \cos \alpha) = \frac{2\pi a^3 \sin \alpha}{3} (1 + 2 \cos \alpha) = \\ &= \frac{4}{3} \pi^3 \sin \alpha (\cos 60^\circ + \cos \alpha) = \\ &= \frac{8}{3} \pi a^3 \sin \alpha \cos(30^\circ + \frac{\alpha}{2}) \cos(30^\circ - \frac{\alpha}{2}). \end{aligned}$$

V a s t u s. Pöördkeha ruumala

$$V = \frac{8}{3} \pi a^3 \sin \alpha \cos(30^\circ + \frac{\alpha}{2}) \cos(30^\circ - \frac{\alpha}{2}).$$

ALGEBRA

Teema 6.

Progressioonid

Arvujärjendi mõiste. Arvujärjendi üldliikme valem.

Aritmeetiline progressioon kui üks lihtsamatest arvujärjenditest. Aritmeetilise progressiooni üldliikme ja summa valem.

Aritmeetiline keskmine.

Geomeetiline progressioon. Geomeetrilise progressiooni üldliikme ja summa valem. Geomeetiline keskmine. Koonduv geomeetiline progressioon.

Kirjandus

- Kalnin. VIII ptk., § 89—101; harjutused: VIII ptk., nr. 1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 31, 34, 35, 37, 39, 40, 42, 43.
 Kisseljov. Algebra, II osa, § 73—88.
 Laritšev, II osa, nr. 854, 855 (1, 2, 3, 4, 5), 861 (1, 2), 862 (1, 2), 869, 872 (1, 2), 873 (1, 2), 874 (1, 2), 877, 878, 881, 888, 896, 897, 904, 918 (1, 2), 919 (1, 2), 920 (1, 2), 924, 928, 929, 937, 938, 939, 940, 968, 970, 972, 973, 975, 976.

METOODILISED JUHENDID

Arvujärjendi mõiste ja teoreetiline materjal arvujärjendite kohta on toodud R. A. Kalnini algebra õpikus tehnikumidele, kuid mõningaid andmeid arvujärjendite kohta võib leida ka A. P. Kiseljovi geomeetria õpiku I osas, § 227, kus aga materjal on toodud väga kokkusuрутult; seepärast anname lisajuhendeid käesoleva teema läbitöötamiseks.

Arvujärjendiks nimetatakse arvude nummerdatud hulka, kui arvud on järjestatud nende numbrite kasvamise järjekorras.

Näiteks arvude kogumik

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

kujutab endast arvujärjendit.

Tavaliselt kirjutatakse arvujärjend üldkujul järgmiselt:

$$a_1; a_2; a_3; a_4 \dots \dots \dots a_n.$$

Numbrid 1, 2, 3, 4 tähe a juures näitavad koha järjekorra numbrit, kus asetseb vastava arvujärjendi liige. Arvujärjendi kohanumber määrab täielikult selle liikme: see tähendab, et arvujärjendi liikme suurus on kohanumbri funktsioon.

Sageli antakse valem, mis väljendab arvujärjendi liikme (a_n) sõltuvust tema argumentist (n). Paigutades suuruse n asemele arvud naturaalarvude reast, saadakse vastavad arvujärjendi liikmed.

Valemit, mis kujutab endast arvujärjendi moodustamise seadust, nimetatakse «arvujärjendi üldliikme valemiks». Kui näiteks arvujärjendi üldliige väljendub valemiga:

$$a_n = \frac{n}{n+1},$$

siis arvujärjend kirjutatakse järgmiselt:

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6} \dots,$$

kui arvujärjendi üldliige väljendub valemiga:

$$a_n = 2^n - 1,$$

siis arvujärjend on:

$$1, 3, 7, 15, 31 \dots$$

Kuid mitte igal arvujärjendil pole üldliikme valemit. Nii näiteks arvujärjendil 2, 3, 5, 7, 11... ei ole üldliikme valemit. Samuti puudub üldliikme valem ka arvujärjendil, mille moodustavad ligikaudsed kümnendmurrud puudusega avaldisest $\sqrt{2}$; 1; 1,4; 1,41; 1,414; ...

Näideteks arvujärjenditest on ka aritmeetiline ja geomeetriline progressioon. Anname aritmeetilise progressiooni definitsiooni R. A. Kalnini õpiku järgi, mis erineb mõnevõrra Kisseljovi õpikus antud vastavast definitsioonist. Aritmeetiliseks progressiooniks nimetatakse arvujärjendit, milles iga järgnev liige saadakse eelnevast, kui liita sellega üks ja sama progressiooni vaheks nimetatav arv.

Aritmeetilise progressiooni definitsioonist järeldub, et progressiooni vahe leidmiseks tuleb progressiooni mis tahes liikmest lahutada temale eelnev liige; see järeldus on vajalik ülesannete lahendamisel.

Käesoleva teema läbitöötamiseks soovitatud kirjanduses on aritmeetilise progressiooni teoorias tuletatud kaks valemit: üldliikme valem ja aritmeetilise progressiooni liikmete summa valem, millised seovad järgmisi suurusi: aritmeetilise progressiooni esimest liiget a , viimast liiget a_n , progressiooni liikmete arvu n , progressiooni vahet d ja progressiooni n liikme summat S_n . Ülesannete lahendamise põhimõtte aritmeetiliste progressioonide kohta seisneb selles, et nende valemite abil arvutatakse kolme antud suuruse kaudu ülaloodud viiest suurusest kaks ülejäänud suurust. Ülesannetes, kus pole antud progressiooni viimast liiget, saab liikmete summa leida kolmanda valemi abil, mis saadakse progressiooni liikmete summa valemist, kui viimane liige a_n asendada tema väärtusega esimese liikme, progressiooni vahe ja liikmete arvu kaudu.

Toome selle valemi:

See valem on tuletatud R. A. Kalnini algebra õpikus. Tuleb täheldada, et aritmeetilise progressiooni mis tahes liige on temale eelneva ja temale järgneva liikme suhtes aritmeetiliseks keskmiseks. Näiteks progressioonis 2, 6, 10, 14, 18, 22 teine liige võrdub

$$\frac{2+10}{2} = 6; \text{ kolmas liige } \frac{6+14}{2} = 10, \text{ neljas liige } \frac{10+18}{2} = 14 \text{ jne.}$$

Geomeetrilise progressiooni defineerime järgmiselt:

Geomeetriliseks progressiooniks nimetatakse niisugust arvujärjendit, milles iga liige võrdub eelneva liikme ning ühe ja sama antud arvujärjendi jaoks jääva arvu korrutisega. Seda arvu, millega tuleb eelnevat liiget korrutada, et saada järgnev liige, nimetatakse progressiooni teguriks.

Geomeetrilise progressiooni definitsioonist järeldub, et geomeetrilise progressiooni teguri leidmiseks tuleb progressiooni mis

tahes liige jagada temale eelneva liikmega. Seda järeldust on vaja ülesannete lahendamisel.

Käesolevas teemas soovitatud kirjanduses on geomeetrilise progressiooni teoreetilises osas tuletatud kolm valemit: geomeetrilise progressiooni üldliikme valem ja kaks valemit geomeetrilise progressiooni n liikme summa kohta — üks kasvava progressiooni puhul, teine kahaneva progressiooni puhul. Need valemid seovad geomeetrilise progressiooni esimest liiget a , viimast liiget a_n , progressiooni tegurit q , liikmete arvu n ja progressiooni n liikme summat S_n . Ülesannete lahendamise põhimõtte geomeetriliste progressioonide kohta seisneb selles, et nende valemite abil arvutatakse kolme antud suuruse kaudu ülaloodud viiest suurusest kaks ülejäänud suurust. Tuleb pöörata tähelepanu sellele, et geomeetrilise progressiooni mis tahes liige on temale eelneva ja temale järgneva liikme suhtes geomeetriliseks keskmiseks. Näiteks geomeetrilises progressioonis 1, 3, 9, 27, 81, 243... kolmas liige võrdub $\sqrt{3 \cdot 27} = 9$, neljas liige $\sqrt{9 \cdot 81} = 27$ jne.

ÜLESANNETE LAHENDAMISE NÄITEID

Ülesanne 1.

Aritmeetilise progressiooni neljanda ja kümnenda liikme summa on 44 ning teise ja viieteistkümnenda liikme summa 53. Leida progressioon.

Antud:

$$a_4 + a_{10} = 44 \quad (1)$$

$$a_2 + a_{15} = 53 \quad (2)$$

Leida progressioon.

Lahendus.

Tähistame aritmeetilise progressiooni esimese liikme sümbooliga a_1 ja progressiooni vahe sümbooliga d .

Kasutades üldliikme valemit saame:

$$a_4 = a_1 + 3d; \quad a_{10} = a_1 + 9d;$$

$$a_2 = a_1 + d; \quad a_{15} = a_1 + 14d.$$

Asetades need väärtused võrdustesse (1) ja (2):

$$2a_1 + 12d = 44$$

ehk

$$a_1 + 6d = 22 \quad (3)$$

$$2a_1 + 15d = 53 \quad (4)$$

Lahendame süsteemina võrrandid (3) ja (4). Võrrandist (3) leiame $a_1 = 22 - 6d$. Asetame a_1 väärtuse võrrandisse (4) saame:

$$44 - 12d + 15d = 53,$$

millest $d = 3$; $a_1 = 22 - 6 \cdot 3 = 4$

Vastus. Otsitav progressioon on 4; 7; 10; ...

Ülesanne 2.

Geomeetrilise progressiooni kolmanda ja esimese liikme vahe on 24 ning viienda ja esimese liikme vahe 624.

Leida progressiooni kuue esimese liikme summa.

Lahendus.

Tähistame progressiooni esimese liikme tähega a_1 ja progressiooni teguri tähega q ; siis saame progressiooni: a ; aq ; aq^2 ; aq^3 ... Ülesande tingimuste põhjal on progressiooni kolmanda ja esimese liikme vahe 24, järelikult

$$aq^2 - a = 24 \quad (1)$$

ja progressiooni viienda ja esimese liikme vahe 624, järelikult:

$$aq^4 - a = 624 \quad (2)$$

Lahendame saadud võrrandsüsteemi:

$$\begin{cases} aq^2 - a = 24 \\ aq^4 - a = 624 \end{cases}$$

Toome mõlemas võrrandis a sulgude ette ja jagame liikmeti teise võrrandi esimesega (märgime, et $q \neq 1$), saame:

$$a(q^2 - 1) = 24$$

$$a(q^4 - 1) = 624$$

$$\frac{a(q^4 - 1)}{a(q^2 - 1)} = \frac{624}{24}$$

Siit $q^2 + 1 = 26$; $q^2 = 25$; $q_1 = 5$ ja $q_2 = -5$.

Asetades q väärtuse võrrandisse (1), leiame: $a(25 - 1) = 24$, $a = 1$.

Kuna $q = \pm 5$, siis saame kaks geomeetrilist progressiooni 1; 5; 25; 125; ... ja 1; -5; 25; -125; ...

Progressiooni esimese kuue liikme summa leidmiseks tuleb leida progressiooni kuues liige: $a_6 = aq^5 = 1 \cdot (\pm 5)^5 = \pm 3125$.

Esimese progressiooni kuue esimese liikme summa on

$$S'_6 = \frac{3125 \cdot 5 - 1}{5 - 1} = \frac{15624}{4} = 3906.$$

Teise progressiooni kuue esimese liikme summa on

$$S''_6 = \frac{(-3125) \cdot (-5) - 1}{-5 - 1} = \frac{15624}{-5 - 1} = \frac{15624}{-6} = -2604.$$

Vastus. Geomeetrilise progressiooni kuue esimese liikme summa on kas 3906, või -2604.

Ülesanne 3.

Geomeetrilist progressiooni moodustava kolme esimese liikme summa on 42. Kui selle progressiooni esimesest liikmest lahutada

2, teine liige jätta muutmata ja kolmandast liikmest lahutada 4, siis saame arvud, mis moodustavad kasvava aritmeetilise progressiooni. Leida antud geomeetrilise progressiooni esimese viie liikme summa.

L a h e n d u s.

Tähistame geomeetrilise progressiooni esimese liikme tähega a ja teguri tähega q , siis saame progressiooni $a; aq; aq^2; aq^3; \dots$. Kuna geomeetrilise progressiooni esimese kolme liikme summa on 42, siis saame võrrandi: $a + aq + aq^2 = 42$.

Muutes ülesande tingimuste kohaselt geomeetrilise progressiooni liikmete suurust, saame liikmed, mis moodustavad aritmeetilise progressiooni: $a-2; aq; aq^2-4$. Aritmeetilise progressiooni liikmete omaduse põhjal leiame

$$aq = \frac{a-2 + aq^2 - 4}{2}.$$

Lahendame saadud süsteemi:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 42, \\ a - 2aq + aq^2 = 6. \end{cases}$$

Toome mõlemas võrrandis a sulgude ette ja jagame liikmeti esimese võrrandi teisega:

$$\begin{aligned} a(1 + q + q^2) &= 42 \\ a(1 - 2q + q^2) &= 6 \\ \frac{a(1 + q + q^2)}{a(1 - 2q + q^2)} &= \frac{42}{6}. \end{aligned}$$

Millest: $1 + q + q^2 = 7 - 14q + 7q^2$,

$$6q^2 - 15q + 6 = 0$$

$$2q^2 - 15q + 6 = 0$$

$$q_1 = 2$$

$$q_2 = \frac{1}{2}.$$

Lahend $q = \frac{1}{2}$ ei rahulda, sest sel juhul saame kahaneva geomeetrilise progressiooni ja muutes saadud geomeetrilise progressiooni liikmete suurust ülesande tingimuste kohaselt, saame kahaneva aritmeetilise progressiooni, mis on aga vastuolus ülesande tingimustega, kus oli antud, et aritmeetiline progressioon peab olema kasvav.

Seega $q = 2$.

Leiame a :

$$a = \frac{42}{1 + 2 + 4} = 6.$$

Otsitav geomeetiline progressioon on 6; 12; 24; 48; 96.

Leiame selle progressiooni viie esimese liikme summa:

$$S_5 = \frac{6 \cdot 2^5 - 6}{2 - 1} = \frac{192 - 6}{1} = 186.$$

Kontroll.

On antud geomeetriline progressioon 6; 12; 24; ... kolme esimese liikme summa on $6+12+24=42$. Muutes ülesande tingimuste kohaselt kolme esimese liikme suurust, saame arvud: 4; 12; 20; s. t. arvud, mis moodustavad kasvava aritmeetilise progressiooni, progressiooni vahega 8.

Vastus. Antud geomeetrilise progressiooni viie esimese liikme summa on 186.

Kontrollküsimusi

1. Mida nimetatakse arvujärjendiks?
2. Mida nimetatakse arvujärjendi üldliikme valemiks?
3. Kas kõikidel arvujärjenditel on üldliikme valem?
4. Missugust arvujärjendit nimetatakse aritmeetiliseks progressiooniks?
5. Nimetage aritmeetilise progressiooni liikmete omadused.
6. Kirjutage aritmeetilise progressiooni üldliikme ja liikmete summa valem ning sõnastage need.
7. Kuidas on aritmeetilise progressiooni vahe kaudu võimalik määrata, kas aritmeetiline progressioon on kasvav või kahanev?
8. Missugust arvujärjendit nimetatakse geomeetriliseks progressiooniks?
9. Nimetage geomeetrilise progressiooni liikmete omadused.
10. Kirjutage geomeetrilise progressiooni üldliikme ja liikmete summa valemid ja sõnastage need.
11. Kas saab geomeetrilise progressiooni teguri järgi määrata: on geomeetriline progressioon kasvav või kahanev?
12. Kas võib aritmeetilise või geomeetrilise progressiooni mõni liikmetest olla null?

KONTROLLTÖÖ NR. 8

Esimene variant

1. Püströöptahuka põhjaks on romb. Rööptahuka diagonaalid moodustavad põhitasapinnaga nurgad α ja β .

Rööptahuka kõrgus on h .

Avaldada ja arvutada rööptahuka ruumala, kui $\alpha=55^\circ$, $\beta=39^\circ$ ja $h=0,18$ m.

2. Kolmnurkse püramiidi kaks külgtahku, mis moodustavad teineteisega nurga α , on võrdhaarsed täisnurksed kolmnurgad, mille hüpotenuusi pikkuseks on b . Avaldada ja arvutada püramiidi ruumala kui $b=10,25$ dm ja $\alpha=47^{\circ}32'$.

3. Kolmnurk ABC , mille nürinurk $\angle A=\alpha$ ja $\angle B=\beta$, pöörleb ümber külje $AB=c$.

Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala, kui $c=10,25$ dm, $\alpha=112^{\circ}15'$ ja $\beta=33^{\circ}25'$.

4. Kera sisse, mille raadius on R , on kujundatud korrapärase nelinurkne püramiid. Selle püramiidi külgserv moodustab kõrgusega nurga α . Avaldada ja arvutada püramiidi ruumala, kui $R=12,75$ dm ja $\alpha=36^{\circ}28'$.

5. Aritmeetilise progressiooni kümnes liige on 4 ja üheksateistkümmes liige (-32) . Mitu liiget peab progressiooni algusest võtma, et liikmete summa oleks 180?

6. Kolme arvu summa, mis moodustavad aritmeetilise progressiooni, on 12. Kui nendele arvudele liita vastavalt 1, 2 ja 6, siis saadakse geometrilist progressiooni moodustavad arvud. Leida sellele geometrilise progressiooni seitsmes liige.

Teine variant

1. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille teravnurk on α . Rööptahuka väiksem diagonaal on d ja moodustab põhitasapinnaga nurga β . Avaldada ja arvutada rööptahuka ruumala, kui $d=20,4$ m; $\alpha=37^{\circ}40'$ ja $\beta=65^{\circ}20'$.

2. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk ABC haaraga a ja tipunurgaga α . Selle püramiidi kõik külgservad on omavahel võrdsed. Külgtahk, mis läbib kolmnurga ABC alust, moodustab põhitahuga kahetahulise nurga β .

Avaldada selle püramiidi ümber kujundatud koonuse ruumala.

Arvutada koonuse ruumala, kui $a=28,3$ cm; $\alpha=54^{\circ}20'$ ja $\beta=65^{\circ}32'$.

3. Silindrit läbib silindri teljega paralleelne tasapind, mis lõikab silindri põhjast kaare suurusega a . Avaldada lõike pindala, kui põhja raadius on R , ja sirglõik, mis ühendab silindri põhja keskpunkti antud kaarele toetuva kõõlu keskpunktiga silindri teisel põhjal, moodustab põhitasapinnaga samuti nurga α . Arvutada lõike pindala, kui $R=10,05$ dm ja $\alpha=73^{\circ}12'$.

4. Avaldada kera sisse kujundatud korrapärase nelinurkse püramiidi külgpindala, kui kera raadius on R ja püramiidi tipu juures olev tasanurk on α . Arvutada püramiidi külgpindala, kui $R=0,8203$ m ja $\alpha=70^{\circ}14'$.

5. Aritmeetilise progressiooni neljas liige on 9 ja üheksas liige on (-6) . Mitu liiget peab progressiooni algusest võtma, et liikmete summa oleks 54?

6. Kolme arvu summa, mis moodustavad kasvava aritmeetilise progressiooni, on 15. Kui esimesest ja teisest arvust lahutada üks ja kolmandale arvule liita üks, siis saadud kolm arvu moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leida selle geomeetrilise progressiooni kaheksas liige.

Kolmas variant

1. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille übermõõt on P ja teravnurk α . Tasapind, mis on juhitud läbi ühe põhja suurema diagonaali ja teise põhja nürinurga tipu, kujutab endast täisnurkset kolmnurka. Avaldada ja arvutada rööptahuka ruumala, kui $P=440,3$ dm ja $\alpha=34^{\circ}15'$.

2. Korrapärase nelinurkse püramiidi sisse on kujundatud koonus nii, et koonuse põhi asub püramiidi põhjal ja koonuse tipp ühtib püramiidi tipuga. Avaldada koonuse täispindala, kui püramiidi põhiserv on a ja püramiidi külgtahk moodustab põhitahuga nurga α . Arvutada koonuse täispindala, kui $a=83,75$ dm ja $\alpha=73^{\circ}22'$.

3. Silindrit läbib silindri teljega paralleelne tasapind, mis lõikab silindri põhjast kaare suurusega a . Lõike diagonaal d moodustab silindri põhjaga nurga β . Avaldada silindri ruumala. Arvutada silindri ruumala, kui $d=15,72$ dm; $\alpha=52^{\circ}26'$ ja $\beta=84^{\circ}28'$.

4. Kerasse raadiusega R on kujundatud korrapärane kolmnurkne püramiid. Arvutada püramiidi ruumala, kui püramiidi külgserv moodustab põhitahuga nurga α . Arvutada püramiidi ruumala, kui $R=10,75$ dm ja $\alpha=68^{\circ}27'$.

5. Aritmeetilise progressiooni neljas liige on 10 ja seitsmes liige 19. Mitu liiget tuleb progressiooni algusest võtta, et liikmete summa oleks 145?

6. Kolme positiivse arvu summa, mis moodustavad kasvava aritmeetilise progressiooni, on 27. Kui kõige väiksemast arvust lahutada 4, kõige suuremale arvule liita 16 ja keskmine arv jätta muutmata, saame kolm arvu, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leida selle geomeetrilise progressiooni kuues liige.

Neljas variant

1. Avaldada risttahuka ruumala, kui risttahuka diagonaal d moodustab risttahuka põhjaga nurga α ja risttahuka põhja diagonaalide vaheline teravnurk on β . Arvutada risttahuka ruumala, kui $d=26,38$ dm; $\alpha=42^{\circ}54'$ ja $\beta=34^{\circ}12'$.

2. Kerasse raadiusega R , on kujundatud nelinurkne püramiid. Selle püramiidi iga külgserv moodustab põhitahuga nurga β . Avaldada püramiidi ruumala, kui ta põhjaks on riskülik, mille diagonaal moodustab pikema küljega nurga α .

Arvutada püramiidi ruumala, kui $R=20,25$ dm; $\beta=69^{\circ}20'$ ja $\alpha=25^{\circ}10'$.

3. Võrdhaarne kolmnurk, mille alus on a ja tipunurk α , pöörleb ümber sirge, mis asub kolmnurga tasapinnas, läbib kolmnurga tippu ja on risti kolmnurga alusega. Avaldada pöördkeha ruumala. Arvutada pöördkeha ruumala, kui $a=50,75$ cm ja $\alpha=53^{\circ}40'$.

4. Koonuse põhjaks oleva ringi sisse on kujundatud ruut külje pikkusega a . Tasapind, mis läbib koonuse tippu ja ühte ruudu külgedest, kujutab endast lõikumisel koonuse pinnaga kolmnurka, mille tipunurk on α . Avaldada koonuse ruumala. Arvutada koonuse ruumala, kui $a=13,45$ cm ja $\alpha=63^{\circ}52'$.

5. Aritmeetilise progressiooni kolmas liige on 9 ja kümnes liige (-12). Mitu liiget tuleb võtta progressiooni algusest, et liikmete summa oleks (-18)?

6. Kasvav aritmeetiline progressioon koosneb viiest liikmest, kusjuures progressiooni äärmiste liikmete summa on 20 ja nende liikmete korrutis 84. Leida sellise geomeetrilise progressiooni kümne esimese liikme summa, kui geomeetrilise progressiooni esimene liige võrdub antud aritmeetilise progressiooni esimese liikmega ja teine liige sama aritmeetilise progressiooni neljanda liikmega.

SISUKORD

KOONDÜLESANNE NR. 6

Algebra		
Teema 1. Arvutuslükat	5
Geomeetria		
Teema 2. Hulktahukad	13
Kontrolltöö nr. 6	28

KOONDÜLESANNE NR. 7

Trigonomeetria		
Teema 3. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine	31
Geomeetria		
Teema 4. Pöördkehad	37
Kontrolltöö nr. 7	48

KOONDÜLESANNE NR. 8

Geomeetria		
Teema 5. Trigonomeetria rakendamist nõudvate geomeetria ülesannete lahendamine	50
Algebra		
Teema 6. Progressioonid	68
Kontrolltöö nr. 8	74

Ladumisele antud 11. VII 1960. Trükkimisele antud
12. XI 1960. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 5,0.
Trükiarv 2000. Tellimise nr. 6846.

Hans Heidemanni nimeline Trükikoda, Tartu,
Ülikooli 17/19. III

Tasuta

Tasuta.