A. KISSELJOV

# ARITMEETIKA

## V JA VI KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A-18355

A. KISSELJOV

# ARITMEETIKA ÕPIK

## V JA VI KLASSILE

Ümber töötanud
prof. A. HINTŠIN

Sundeksemplar
„13" I 1951 a.

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1950

Originaali tiitel: А. П. Киселёв.
Арифметика. Учебник для 5-го и 6-го классов семилетней и средней школы. Учпедгиз, 1950.

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt 20. VIII 1950.

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
16689

# EESSÕNA ÜMBERTÖÖTUSE AUTORILT.

Kõik mitmesugust laadi rasked küsimused, mis kerkivad iga õpiku koostaja ette, vajavad rahuldavaks lahendamiseks kõigepealt ühtset põhimõttelist seisukohta. A. Kisseljovi aritmeetika kursuse ümbertöötamisel lähtusin seisukohast, et iga õpik, seehulgas paratamatult ka keskkooli V klassi õpik, peab endast kujutama ühtset ja loogiliselt süstematiseeritud tervikut. Selle põhimõtte läbiviimine pidi mõjutama ja mõjutas otsustavalt materjali valikut ja paigutust.

Materjali valiku suhtes ei pidanud ma võimalikuks piirduda ainult sellega, mida suudab ja peab omandama V klassi iga õpilane. Loogilise tervikluse nõue sundis õpikusse sisse võtma teatava osa materjali, mida reeglina on õpilastel tarvilikul viisil võimalik omandada ainult vanemates klassides, kursuse kordamisel. Kogu sedalaadi materjal on toodud peenkirjas, kusjuures õpiku ülesehitus on selline, et kõike peenkirjas toodut on võimalik vahele jätta ilma kahjuta arusaamisele järgnevast. Ma ei taha soovitada õpetajale ilma mõtlemata vahele jätta kogu peenkirja; siin on tarvilik diferentseeritud suhtumine, sõltuvalt klassi arenemistasemest, ja pole võimalik tõmmata umbropsu teravat joont selle vahele, mis on jõukohane V klassi õpilasele, ja selle vahele, mis temale pole jõukohane.

Teiselt poolt, ainestikulise ja loogilise terviklikkuse nõue sundis mind märgatavalt kärpima, mõnikord aga ka hoopis välja jätma mitmeid osi, mis traditsiooni kohaselt tavaliselt on võetud aritmeetika õpikutesse; siia kuulub nende ülesannete teoreetiline käsitlemine, mis haaravad kolmlauset, segusid ja sulameid jms. Elementaarne aritmeetika on õpetus tehetest ratsionaalsete arvudega. Keskkooli erinõuded sunnivad mõistma seda definitsiooni teataval määral laiendatult ja sisse võtma aritmeetika kursusesse õpetust suuruste mõõtmisest ja võrdelistest suurustest. See rikub teataval määral kursuse terviklikkust, ilma et ta siiski kujuneks oluliseks defektiks, kuna aritmeetikale lihtsalt lisandatakse mõned enam või vähem lõpetatud täiendavad peatükid. Sisse võtta aga sellisesse kursusesse üksikute praktikas esinevate ülesannete tüüpide lahendusvõtteid, mis pole ühendatud mingi üldise teoreetilise alusega, tähendaks libisemist teoreetilise õpiku juurest „tööraamatu" poole. Selliste ülesannete koht peab olema ülesannetekogus, mitte aga teoreetilises õpikus.

Põhiprintsiibi elluviimine mõjutas oluliselt ka materjali paigutust. Nii leidsid õpetus suuruste mõõtmisest ja mõõtude ja nimega arvude käsitlus endale loomulikult koha eri osa näol täisarvudeõpetuse ja murdudeõpetuse vahelisel piiril. See ometi ei tähenda, et elavas pedagoogilises protsessis tuleb mainida meetreid ja kilogramme ainult pärast seda, kui on läbi võetud õpetus täisarvudest, juurde arvatult jaguvuse teooria. Arusaadavalt peavad õpilased juba täisarvudega töötamisel tutvuma põhiliste mõõtudega; selles pole midagi halba, kui juba täisarvude tundmaõppimisel õpilased loevad läbi ühe või teise punkti osast, mis on pühendatud mõõtudele ja mõõtmisele; õpik aga kui terviklik ja süstemaatiline käsiraamat ei suuda ja ei tohi täpselt jäljendada elavat pedagoogilist protsessi.

Samadel põhimõttelistel kaalutlustel pidasin tarvilikuks välja jätta õpikust eri osa protsentide kohta. Seejuures lähtusin veendumusest, et see osa, mis sisaldab eneses matemaatiliselt erinevaid ülesandeid, mis on ühendatud vaid ühise praktilise olukorraga, osutub üheks „kompleksmeetodi" igandiks ja et nimelt tema selline iseloom just tekitaski märgatavaid spetsiifilisi raskusi kindlate harjumuste kujundamiseks protsentarvutuste valdkonnas. Õpilastel tekkis loomulikult arvamus, nagu kujutaksid protsentarvutused endast midagi põhimõtteliselt uut, võrreldes tavaliste tehetega murdarvudega, ja see ettekujutus raskendas juba omandatud kogemuste rakendamist ülesannete puhul, milledele on antud vaid uus väliskuju, kuid mis sisuliselt ei kujuta endast midagi uut. Muide õpetaja, kes tahaks läbi võtta protsentarvutusi eri osa näol, omab täieliku võimaluse teha seda ka käesoleva õpiku järgi; selleks on tarvis ainult välja eraldada raamatu IV ja V osast kõik punktid, mis on pühendatud protsentidele ja paigutada need samas järjekorras eri osana raamatu lõppu.

Kisseljovi õpiku kogu tekst tuli väga hoolikalt ümber töötada, et saavutada suuremat teaduslikku täpsust ja esitusviisi suuremat arusaadavust. Paljudes kohtades on toodud näited asendatud uutega ja näidete arvu on suurendatud. Sellele vaatamata on raamatu ülesehitus ja stiil põhiliselt määratud tema esialgse tekstiga; ümbertöötuse autor ei võinud seada endale eesmärgiks uue õpiku loomist.

Minu tööle osutas väga olulist abi Keskkooli Keskinstituudi matemaatikarühma kogu kollektiiv; rea kasulikke nõuandeid olen saanud ka Moskva õpetajate aktiivi esindajailt; kõigile neile seltsimeestele avaldan siirast tänu.

A. Hintšin.

I OSA.

# TÄISARVUD.

## I. Täisarvud, nende nimetused ja kirjutamine.

**1. Täisarvu mõiste.** Üks ese ja üks ese on kokku kaks eset; kaks eset ja üks ese on kokku kolm eset; kolm ja üks on kokku neli jne. Üks, kaks, kolm, neli jne. nimetatakse täisarvudeks.

Arvu üks nimetatakse teisiti üheliseks. Arvu kaks võib vaadelda kui kogumikku kahest ühelisest, arvu kolm kui kogumikku kolmest ühelisest jne. Seega on iga täisarv kas üheline või kogumik mitmest ühelisest.

Peale täisarvude käsitleb aritmeetika ka teisi arve. Nendega tutvume edaspidi.

**2. Arvude loomulik rida.** Kui ühelisele lisada teine üheline, saadud arvule lisada uuesti üheline, siis veel kord lisada üheline jne., siis saadakse arvude loomulik rida: üks, kaks, kolm, neli, viis, kuus, seitse jne.

Väikseimaks arvuks selles reas on üks; suurimat arvu pole olemas, sest et igale arvule, nii suur kui ta ka oleks, võime ikkagi lisada ühelise ja saada veelgi suurema arvu; see tähendab, et arvude loomulikku rida on võimalik piken-

dada lõpmatult; seepärast öeldakse, et arvude loomulik rida on lõpmatu.

Arv kolm on väiksem kui arv viis, mis arvude loomulikus reas asetseb kolmest kaugemal; tõepoolest, selleks et saada arvu viis, on tarvis kolmele ühelisele, millest on koostatud arv kolm, veel juurde arvata kaks ühelist. Üldiselt on kahest isesugusest arvust alati väiksem see arv, mis asetseb arvude loomulikus reas eespool; tõepoolest, selleks et saada sellest arvust teist arvu, mis asetseb arvude loomulikus reas kaugemal, tuleb esimesele arvule juurde arvata veel üks või mitu ühelist, s. t. tuleb teda suurendada; seepärast on teine arv suurem esimesest.

**Kahest arvust on väiksem see, mis arvude loomulikus reas on eespool, ja suurem see, mis arvude loomulikus reas on kaugemal.**

**3. Loendamine.** Et teada saada, mitu lauda on klassis või mitu puud on aias, peame neid loendama. Loendamine seisab selles, et eraldades esemeid ükshaaval (kas tegelikult või ainult mõtteliselt), nimetame igakord eraldatud esemete arvu. Loendades näiteks laudu klassis, eraldame mõtteliselt ühe laua teise järel ja nimetame seejuures arvusid: üks, kaks, kolm, neli jne. Kui viimase laua eraldamisel ütlesime näiteks kaheksa, siis tähendab see seda, et klassis on kaheksa lauda; arv kaheksa on sel juhul loendamise tulemuseks.

**Peame ilmseks tõeks, et loendamise tulemus ei sõltu loendamise järjekorrast.**

Näiteks klassis laudu loendades saame ühe ja sama arvu sõltumata sellest, kas loendamine toimub esimestest laudadest tagumiste poole või tagumistest esimeste poole. On ainult tähtis, et loendamisel ükski laud ei jääks vahele ja et iga lauda loendataks vaid üks kord.

**4. Arvude nimetused tuhande piires.** Arvude loomuliku rea kümnel esimesel arvul on järgmised nimetused:

üks, kaks, kolm, neli, viis, kuus, seitse, kaheksa, üheksa, kümme (ehk kümneline).

Nende ja veel mõningate teiste nimetuste abil on võimalik väljendada ka teisi arvusid. Oletame näiteks, et soovime nimetada siia tõmmatud kriipsude arvu:




Selleks loendame kümme kriipsu ja eraldame need ülejäänutest; siis loendame veel kümme kriipsu ja eraldame ka need ülejäänutest. Jätkame kümnekaupa loendamist niikaua, kuni kriipse üldse enam järele ei jää või neid jääb järele alla kümne. Nüüd loendame kümnelised ja nendest üle jäänud kriipsud (ehk ühelised); et kümnelisi oli neli ja ülejäänud kriipse kolm, siis võime nimetada kõikide kriipsude arvu järgmiselt:

neli kümnelist kolm ühelist.

Kui arvus leitakse rohkem kui kümme kümnelist, siis talitatakse järgmiselt: loendatakse kümme kümnelist, siis veel kümme kümnelist, seejärel veelkordselt kümme kümnelist jne. — niikaua kui see on võimalik. Iga kümmet kümnelist nimetatakse ühe sõnaga: *sada* ehk *sajaline*. Oletame, et mingis arvus on kolm sajalist, järelejäänud kümnelisi — viis ja järelejäänud ühelisi — seitse; sellist arvu võime nimetada järgmiselt:

kolm sajalist viis kümnelist seitse ühelist.

Kui sajalisi leitakse arvus üle kümne, siis neid sajalisi loendatakse samuti kümnete kaupa. Iga kümmet sajalist nimetatakse ühe sõnaga *tuhat* ehk *tuhandeline*.

5. **Mõnede nimetuste lühendid.** Eesti keeles kasutatakse mõningaid arvude lühendatud nimetusi. Nii näiteks arvu kümme ja üks nimetatakse arvuks *üksteist* (üksteistkümmend, s. t. üks teisest kümnest); kümme ja kaks — *kaksteist* (kaksteistkümmend, s. t. kaks teisest kümnest) jne.

6. **Arvude kirjutamine tuhande piires.** Üheksat esimest arvu kirjutatakse eriliste arvutähistega ehk *numbritega:*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Nende üheksa numbri ja kümnenda numbri 0 (nulli) abil, mis tähistab esemete p u u d u m i s t, võib kujutada mistahes arvu.

Number 0 tähendab, et esemeid pole ü l d s e olemas, number 1 — et on olemas vaid üks ese jne.

Et kujutada arvu numbrite abil, on kokku lepitud kirjutada: ühelised esimesele kohale paremalt, kümnelised teisele kohale paremalt, sajalised kolmandale kohale; näiteks:

arvu nelikümmend kaks kirjutatakse . . . . . 42;
„ nelikümmend kirjutatakse . . . . . 40;
„ kolmsada nelikümmend viis kirjutatakse . . . . . 345;
„ kolmsada nelikümmend kirjutatakse . . . . . 340;
„ kolmsada seitse kirjutatakse . . . . . 307;
„ kolmsada kirjutatakse . . . . . 300.

Kõiki numbreid peale nulli nimetatakse *väärtusega* numbriteks.

Toodud näidetest selgub vajadus kasutada nulli. Näiteks arvu kolmsada nelikümmend (340) kirjutamisel pole võimalik nulli ära jätta, sest 34 tähendaks arvu kolmkümmend neli. Küll aga võib ära jätta, ja harilikult jäetaksegi ära, nullid, mis asetsevad esimesest väärtusega numbrist vasakul; 045 tähendab sedasama mis 45; 007 on sama mis lihtsalt 7. Sel tingimusel arvu, mida kirjutatakse ühe numbriga, nimetatakse *ühekohaliseks*, kahe numbriga kir-

jutatavat arvu *kahekohaliseks*, kolme numbriga kirjutatavat arvu *kolmekohaliseks* jne.

7. **Tuhandest suuremate arvude nimetused.** Kui loendatavaid esemeid on üle tuhande, siis moodustatakse neist niimitu tuhandelist, kui on võimalik; siis loendatakse nii tuhandelised kui ka järelejäänud ühelised ja nimetatakse nii ühtede kui ka teiste arv; näiteks: kakssada nelikümmend tuhat viissada kuuskümmend kaks ühelist.

Tuhat tuhandelist moodustavad *miljoni*, tuhat miljonit *miljardi* (ehk *biljoni*), tuhat miljardit *triljoni* jne.[1]

8. **Tuhandest suuremate arvude kirjutamine.** Olgu tarvis kirjutada arv: kolmkümmend viis *miljardit* kaheksasada kuus *miljonit* seitse *tuhat* kuuskümmend kolm *ühelist*. Seda võib kirjutada numbrite ja sõnade abil järgmiselt:

35 miljardit 806 miljonit 7 tuhat 63 ühelist.

Et oleks võimalik läbi saada hoopis ilma sõnadeta, on kokku lepitud: esiteks, kirjutada miljardite, miljonite, tuhandete ja üheliste arvud kõrvuti, ühes reas, vasakult paremale, ja teiseks, kirjutada igaüht neist arvudest alati kolme numbriga, s. o. kirjutada 63 ühelise asemel 063, 7 tuhandelise asemel 007 (tuhandelist) jne. Siis kujuneb võetud arvu kirjutusviis järgmiseks:

035 806 007 063.

Siingi muide ei kirjutata vasakul asetsevaid nulle, s. t. võetud arv kirjutatakse järgmiselt:

35 806 007 063.

Lõpuks kirjutatakse sama arvu sageli ka ilma vahedeta.

35806007063.

Seejuures peetakse meeles, et kolm esimest numbrit paremal tähistavad üheliste arvu, kolm järgmist numbrit vasa-

[1] Edasi järgnevad nimetused: *kvadriljon* (tuhat triljonit), *kvintiljon* (tuhat kvadriljoni), *sekstiljon* (tuhat kvintiljoni) jne.

kule minnes — tuhandete arvu, kolm nendele eelnevat numbrit — miljonite arvu jne. Näiteks:

567002301 tähendab 567 miljonit 2 tuhat 301 ühelist;
15000026 „ 15 miljonit 26 ühelist;
2008001020 „ 2 miljardit 8 miljonit 1 tuhat 20 ühelist jne.

**9. Kuidas lugeda arvu, mis on kirjutatud pika numbrite reaga.** Et oleks hõlpsam lugeda arvu, mis on kirjutatud pika numbrite reaga, näiteks arvu 5183000567029, jaotame selle arvu mõttes või ülesasetatud komadega, alustades paremalt, kolmenumbrilisteks salkadeks, näiteks:

5'183'000'567'029.

Paremalt esimene koma asendab sõna „tuhat", teine koma sõna „miljonit", kolmas sõna „miljardit", neljas sõna „triljonit". See tähendab, et meie arvu tuleb lugeda järgmiselt:

5 triljonit 183 miljardit 567 tuhat 29.

Viimasele arvule sõna „ühelist" tavaliselt ei lisata.

Kui sama arvu kirjutamisel jätta paremalt lugedes vahed iga kolme numbri järele:

5 183 000 567 029,

siis on hõlpus teda lugeda, ilma et oleks vaja panna komasid.

**10. Numbrite kohaväärtus.** Arvude kirjutamise puhul eelkirjeldatud viisil on igal kohal, millel asetsevad numbrid, oma eri tähendus ja nimelt:

paremalt **1-sel** kohal asetsevad **ühelised,**
„ **2-sel** „ „ **kümnelised,**
„ **3-ndal** „ „ **sajalised,**
„ **4-ndal** „ „ **tuhandelised,**
„ **5-ndal** „ „ **kümnetuhandelised,**
„ **6-ndal** „ „ **sajatuhandelised,**

paremalt **7-ndal** kohal asetsevad **miljonilised,**
„ **8-ndal** „ „ **kümnemiljonilised,**
„ **9-ndal** „ „ **sajamiljonilised,**
„ **10-ndal** „ „ **miljardilised**
**jne.**

Sel viisil näeme, et niisugune arvude kirjutamise süsteem põhineb kümne numbri kasutamisel, mis omavad kahesugust väärtust: üht sõltuvalt numbri kujust, teist sõltuvalt kohast, millel number asetseb, ja nimelt:

*kahest kõrvuti kirjutatud numbrist vasakpoolne tähistab ühikuid, mis on 10 korda suuremad kui parempoolse numbri poolt tähistatavad ühikud.*

**11. Ühikute järgud.** Ühelisi, kümnelisi, sajalisi, tuhandelisi jne. on mõnikord kohasem nimetada teisiti, ja nimelt:

ühelisi nimetatakse 1. järgu ühikuteks (ehk lihtühikuteks),
kümnelisi „ 2. „ „ ,
sajalisi „ 3. „ jne.

Kõiki ühikuid peale lihtühikute (1. järgu ühikute) nimetatakse liitühikuteks. Nii näiteks on kümneline, sajaline ja tuhandeline liitühikud.

Iga liitühikut, võrreldes teda teise temast väiksema ühikuga, nimetatakse *kõrgema järgu* ühikuks, temast suurema ühikuga võrreldes aga nimetatakse teda *madalama järgu* ühikuks; nii on sajaline kõrgema järgu ühikuks võrreldes kümnelisega ja madalama järgu ühikuks võrreldes tuhandelisega.

Iga liitühik sisaldab 10 järgmise madalama järgu ühikut; näiteks sisaldab sajatuhandeline 10 kümnetuhandelist, kümnetuhandeline 10 tuhandelist jne.

**12. Ühikute klassid.** Ühikute järgud rühmitatakse veel *klassidesse*: 1. klassi kuuluvad kolme esimese järgu ühikud: sajalised, kümnelised ja ühelised; 2. klassi kuuluvad kolm järgmist järku: tuhandelised, kümnetuhandelised,

sajatuhandelised jne. 1. klass on *üheliste* klass (sisaldab üheliste sadasid, kümneid ja ühelisi); 2. klass on *tuhandeliste klass* (sisaldab tuhandeliste sadasid, kümneid ja ühelisi) jne.

**13. Kuidas teada saada, kui palju on arvus üldse teatava järgu ühikuid?** Olgu tarvis teada saada, kui palju on arvus 56284 üldse sajalisi, s. t. kui palju sajalisi sisaldavad antud arvu kümnetuhandelised, tuhandelised ja sajalised kokku.

Lihtsajalised seisavad paremalt kolmandal kohal: antud juhul seisab paremalt kolmandal kohal number 2; järelikult arv sisaldab kaks liht-sajalist. Järgmine number sellest vasakul, s. o. number 6, tähistab tuhandelisi, kuid iga tuhandeline sisaldab 10 sajalist; see tähendab, et 6 tuhandelist sisaldab neid 60. Järgmine number vasakul, s. o. number 5, tähistab kümnetuhandelisi, kuid iga kümnetuhandeline sisaldab 10 tuhandelist ja järelikult 100 sajalist; see tähendab, et 5 kümnetuhandelist sisaldab 500 sajalist. Sel viisil sisaldab antud arv sajalisi 500, siis veel 60 ja veel 2, s. o. 562.

Samal viisil leiame, et antud arv sisaldab kümnelisi üldse 5628.

***Reegel.*** **Et teada saada, kui palju sisaldab antud arv üldse teatava järgu ühikuid, tuleb ära jätta kõik numbrid, mis tähistavad madalama järgu ühikuid ja lugeda arvu, mis on kujutatud järelejäänud numbritega.**

## II. Mitmesugused arvusüsteemid. Rooma numbrid.

**14. Mõisteid arvusüsteemidest.** Igasugust üldist viisi arvude nimetamiseks ja kirjutamiseks nimetatakse *arvusüsteemiks* (ehk *numeratsiooniks*). Meie arvusüsteemi nimetatakse kümnendsüsteemiks seepärast, et selles süsteemis 10 ühe järgu ühikut moodustavad järgmise kõrgema järgu ühiku. Arvu 10 nimetatakse seepärast kümnendsüsteemi *aluseks*. Iga arv *N* selle süsteemi järgi on kujuteldav

lahutatuna liht-ühelisteks, kümnelisteks, sajalisteks, tuhandelisteks jne., kusjuures üheliste arv igas järgus on väiksem kui 10. Kui oletame, et arv $N$ sisaldab $a$ liht-ühelist, $b$ kümnelist, $c$ sajalist, $d$ tuhandelist jne., siis see arv kujutab endast summat:

$$N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \dots .$$

Võib kujutella ka teisi süsteeme, milledes on võetud aluseks mingi muu arv. Kui näiteks võtta aluseks arv 5, siis saadakse *viiendsüsteem* (kvinaarsüsteem), mille kohaselt ühe mingi järgu 5 ühikut peavad moodustama järgmise kõrgema järgu ühiku. Sel viisil peab viiendsüsteemis 2. järgu ühikuks olema viieline, 3. järgu ühikuks 5 viielist ehk $5^2$, 4. järgu ühikuks 5 korda 5 viielist ehk $5^3$ jne. Selle süsteemi järgi oleks arv $N$ kujutatav järgmiselt:

$$N = a + b \cdot 5 + c \cdot 5^2 + d \cdot 5^3 + e \cdot 5^4 + \dots ,$$

kus igaüks arvudest $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, . . . oleks väiksem kui 5.

**15. Numbrite arv, mis on vajalik arvude kujutamiseks antud süsteemis.** Arvude kirjutamiseks kümnendsüsteemis kasutatakse 10 erinevat arvutähist. Mingi teise arvusüsteemi jaoks vajatakse teistsugust numbrite arvu. Näiteks viiendsüsteemi jaoks jätkuks viiest järgmisest numbrist: 1, 2, 3, 4, 0. Tõepoolest arv 5 kujutaks endast selles süsteemis ühte 2. järgu ühikut ja järelikult tuleks teda kirjutada nii: 10. Arv 6 kujutaks endast ühte 2. järgu ühikut (viielist) ja ühte esimese järgu ühikut ning peaks järelikult olema kirjutatud nii: 11 jne. Arvude kirjutamiseks süsteemis, mille alus on suurem kui 10, ei jätkuks meie numbritest. Nii näiteks oleks tarvis kaheteistkümnendsüsteemi jaoks välja mõtelda mõned eri tähised arvude 10 ja 11 jaoks, sest et need tähised, mida nende arvude jaoks kasutatakse kümnendsüsteemis, tähendaksid hoopis teisi arvusid ja nimelt: 10 tähendaks ühte 2. järgu ühikut, s. t. tosinat, 11 aga tähendaks ühte 2. järgu ühikut ja ühte 1. järgu ühikut, s. o. arvu 13.

**16. Kümnendsüsteemis kirjutatud arvu kujutamine mingis teises süsteemis.** Vastava näitena olgu meil tarvis kujutada arvu 1766 viiendsüsteemis viie arvutähise abil: 0, 1, 2, 3, 4. Selleks on kõigepealt vaja teada, kui palju sisaldab arv 1766 2. järgu ühikuid, s. o. viielisi. Neid leiame olevat 353, misjuures jääb järele üks 1. järgu ühik. Nüüd leiame, kui palju 3. järgu ühikuid sisaldub 353-s viielises. Kuna 3. järgu ühik sisaldab viis 2. järgu ühikut, siis on tarvis 353 jagada 5-ga. Jagamisel leiame, et 353 viielist sisaldavad 70 3. järgu ühikut

ja 3 2. järgu ühikut. 70 3. järgu ühikut muudame ümber 4. järgu ühikuteks; viimased muudame 5. järgu ühikuteks jne.

$$\begin{array}{r|l} 1766 & 5 \\ \hline 26 & 353 \\ \hline 16 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & 5 \\ \hline 20 & 14 \\ \hline 0 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Sel viisil leiame, et arv 1766 sisaldab 5. järgu ühikuid 2, 4. järgu ühikuid 4, 2. järgu ühikuid 3 ja 1. järgu ühikuid 1; järelikult arv 1766 kujundub viiendsüsteemis nii: 24031.

Olgu veel tarvis kujutada arvu 121380 kaheteistkümnendsüsteemis:

$$\begin{array}{r|l} 121380 & 12 \\ \hline 13 & 10115 \\ \hline 18 & 51 \\ \hline 60 & 35 \\ \hline 0 & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & \\ \hline 842 & 12 \\ \hline 2 & 70 \\ \hline 10 & 5 \end{array}$$

Tähistades arvu 10 tähega $a$, arvu 11 tähega $b$, leiame, et antud arv kujundub kaheteistkümnendsüsteemis nii: $5a2b0$.

**17. Mingi arvusüsteemi järgi kirjutatud arvu kujutamine kümnendsüsteemis.** Olgu näiteks tarvis arv 5623, mis on kirjutatud arvusüsteemis alusega 8, väljendada kümnendsüsteemis. Seda on võimalik teostada sel viisil, et arvutame summa:

$$N = 3 + 2 \cdot 8 + 6 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^3 = 3 + 16 + 384 + 2560 = 2963.$$

Kuid lihtsam on talitada järgmiselt: lahutame viis 4. järgu ühikut 3. järgu ühikuteks, milleks korrutame 5 ja 8 (sest arvusüsteemis alusega 8 sisaldab 4. järgu ühik kaheksa 3. järgu ühikut); saadud arvuga liidame kuus 3. järgu ühikut, mida sisaldab antud arv. Lahutame 3. järgu ühikud 2. järgu ühikuteks; saadud arvuga liidame kaks 2. järgu ühikut, mis sisalduvad antud arvus. Lahutame 2. järgu ühikud 1. järgu ühikuteks; saadud arvuga liidame kolm 1. järgu ühikut, mis sisalduvad antud arvus. Saame 2963.

$$
\begin{array}{r}
5623 \\
\cdot\,8 \\
\hline
+\,40 \\
\quad\;\; 6 \\
\hline
46 \\
\cdot\,8 \\
\hline
+\,368 \\
\quad\;\; 2 \\
\hline
370 \\
\cdot\,8 \\
\hline
+\,2960 \\
\quad\;\; 3 \\
\hline
2963
\end{array}
$$

*Märkusi*: 1) Kümnendsüsteem on levinud peaaegu igal pool. Mitmelt poolt loetakse kümnendsüsteemi sellise levimise põhjuseks asjaolu, et iga inimene lapsepõlvest saadik harjub teostama loendamist mõlema käe kümne sõrme abil. Ometi aga ei ole kümnendsüsteem kõige käepärasem. Mõningal määral näiteks omab paremusi kaheteistkümnendsüsteem, mis ei vaja arvude kujutamiseks suurt arvu numbreid, kuid omab tähtsat eelist, et ta alus jagub 2-ga, 3-ga, 4-ga ja 6-ga, kuna meie süsteemi alus jagub ainult 2-ga ja 5-ga; samasugused kaalutlused tõenäoliselt olid aluseks kuuekümnend- (heksagesimaal-)süsteemile (alus 60), mida kasutati vanas Babüloonias. Teoreetilisteks uurimusteks osutub kõige otstarbekohasemaks kahendsüsteem ehk binaarsüsteem (alus 2), mis aga muide praktilisteks otstarveteks pole sugugi kohane, kuna selles süsteemis kujunduks isegi väheldane arv pikaks numbrite reaks (näiteks arv 70 väljendub binaarsüsteemis nii: 1000110).

2) Meie poolt kasutatavad numbrid ja kogu arvude kirjutamise süsteemi võtsid eurooplased üle araablastelt (XII sajandi paiku). See ongi põhjuseks, miks neid numbreid nimetatakse araabia numbriteks. On aga põhjuseid arvata, et araablased omakorda võtsid selle süsteemi üle hindudelt.

18. **Rooma numbrid.** Et rooma numbreid kasutatakse praegusel ajal mõnikord arvude tähistamiseks, on kasulik ka nendega tutvuda. Roomlased kasutasid arvude tähistamiseks vaid seitset järgmist arvutähist:

$$I = 1,\ V = 5,\ X = 10,\ L = 50,\ C = 100,\ D = 500,\ M = 1000.$$

Nende arvude kirjutamisviis erineb oluliselt meie viisist. Meil muudavad numbrid oma tähendust koha vahetamisel, kuid rooma numeratsioonis numbrid säilitavad igal kohal oma tähenduse. Kui mitu rooma numbrit on kirjutatud kõrvuti, siis nende poolt väljendatav arv võrdub iga numbri poolt väljendatavate arvude summaga; näiteks XXV tähendab summat $10 + 10 + 5$, s. t. 25; CLXV tähendab summat $100 + 50 + 10 + 5$, s. t. 165 jne. Erandeid sellest reeglist kujutavad vaid 6 järgmist arvu:

$$4 = \text{IV},\ 9 = \text{IX},\ 40 = \text{XL},\ 90 = \text{XC},\ 400 = \text{CD},\ 900 = \text{CM}.$$

Nendes väljendustes vasakpoolse numbri väärtus lahutatakse parempoolse numbri väärtusest.

Pärast seda muutuvad arusaadavateks järgmised arvude kujutused:

$\text{I} = 1,\ \text{II} = 2,\ \text{III} = 3,\ \text{IV} = 4,\ \text{V} = 5,\ \text{VI} = 6,$
$\text{VII} = 7,\ \text{VIII} = 8,\ \text{IX} = 9,\ \text{X} = 10,\ \text{XI} = 11,\ \text{XII} = 12,$
$\text{XIV} = 14,\ \text{XVIII} = 18,\ \text{XIX} = 19,\ \text{XX} = 20,\ \text{XXIX} = 29,$
$\text{XLII} = 42,\ \text{LXXXIV} = 84,\ \text{XCV} = 95,\ \text{CCC} = 300,$
$\text{MCMXXXVII} = 1937.$

Tuhandeliste arvu kujutatakse samuti nagu üheliste arvu, ainult paremale alla kirjutatakse *m* (*mille* — tuhat); näiteks:

$$\text{CLXXX}_m\text{CCCLXIV} = 180\,364.$$

## III. Liitmine.

**19. Mis on liitmine?** Ühelisi, milledest on koostatud mitu arvu, on võimalik ühendada üheks kogumikuks. Arvu, mis saadakse pärast selle kogumiku kõikide üheliste loendamist, nimetatakse *summaks*, neid arvusid aga, mis ühendatakse üheks kogumikuks, nimetatakse *liidetavateks*. Nii näiteks on võimalik 5 tikku, 7 tikku ja 2 tikku ühendada üheks 14-st tikust koosnevaks kogumikuks. Arv 14 on kolme liidetava — 5, 7 ja 2 — summaks. Liidetavaid võib olla kaks, kolm või enam.

Liidetavaid võib vaadelda summa osadena.

Mitme antud arvu järgi ühe uue arvu leidmist nimetatakse *aritmeetiliseks tehteks* (lühiduse eesmärgil nimetame seda tihtsalt *tehteks*).

*Tehet, mille abil leiame mitme arvu summat, nimetatakse nende arvude liitmiseks.*

Liitmise märgiks on + (pluss); seega kui on kirjutatud $5 + 7 + 2$, siis see tähendab arvude 5, 7 ja 2 summat.

Liitmise tehe on alati teostatav (mistahes arvusid on võimalik ühendada üheks kogumikuks) ja annab alati ainsa tulemuse.

**20. Summa põhiomadused.**

**1) Summa ei muutu liidetavate järjekorra muutmisel.**

Nii võrdub summa $5 + 7 + 2$ alati 14-ga, missuguses järjekorras me ka liitmist toimetaksime:

$$5 + 7 + 2 = 2 + 7 + 5 = 7 + 5 + 2 = 14.$$

Seda omadust nimetatakse *liitmise vahetuvuse* (kommutatiivsuse) *seaduseks*; ta seisab selles, et liidetavaid on võimalik vahetada (ümber paigutada), ilma et summa muutuks.

Üldkujul on võimalik seda omadust kolme liidetava jaoks väljendada järgmiselt:

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = \\ = c + a + b = c + b + a,$$

kus tähtede all on mõeldud mistahes arve.

**2) Summa ei muutu, kui asendame mingi liidetavate rühma nende summaga.**

Näiteks summa $5 + 7 + 2$ ei muutu, kui asendame liidetavad 7 ja 2 nende summaga:

$$5 + 7 + 2 = 5 + 9 = 14.$$

Seda omadust nimetatakse *liitmise ühenduvuse* (assotsiatiivsuse) *seaduseks*; ta seisab selles, et mistahes liidetavaid on võimalik *ühendada* üheks arvuks (rühmaks).

Üldkujul on võimalik seda omadust kolme liidetava jaoks väljendada järgmiselt:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c),$$

kus sulgudega on näidatud, missuguses järjekorras tuleb teostada liitmist: algul tuleb teostada liitmine, mis on näidatud sulgude sees, ja siis liitmine, mis on näidatud väljaspool sulge.

**21. Kuidas liita summat ja kuidas liita summaga?** Summa põhiomadustest on võimalik tuletada kahte järgmist lauset.

**1) Selle asemel et liita mingi arvuga mitme arvu summat, võib liita selle arvuga järjest iga liidetavat.**

Seega [1]:

$$100 + (20 + 7 + 3) = 100 + 20 + 7 + 3.$$

Tõepoolest, punktis 20 nimetatud teise omaduse põhjal eestoodud võrduse parempoolne osa ei muutu, kui ühendame selles liidetavad 20, 7 ja 3 ühte rühma; kui me aga selle teostame, siis saamegi kõnesoleva võrduse vasakpoolse osa.

**2) Selle asemel et liita mingit arvu summaga, võib liita selle arvu ühe mingi liidetavaga, jättes teised liidetavad muutuseta.**

Seega:

$$(35 + 15 + 20) + 10 = (35 + 10) + 15 + 20 = \\ = 35 + (15 + 10) + 20 = \ldots .$$

---

[1] Sulud ( ) siin ja edaspidi tähendavad, et sulgudes seisvad tehted tuleb teostada enne teisi tehteid; lähemalt sulgude kasutamise kohta vt. p. 41.

Kõik need summad on võrdsed summaga 35 + 15 +20 + + 10, ainult mõnedes neist on liidetavad ümber paigutatud ja mõned neist liidetavatest on ühendatud ühte rühma. Seepärast punktis 20 nimetatud esimese ja teise omaduse põhjal kõik need summad võrduvad summaga 35 + 15 + + 20 + 10 ja, tähendab, on omavahel võrdsed.

**22. Kahe ühekohalise arvu liitmine.** Selleks, et leida kahe ühekohalise arvu summat, on ainult tarvis ühele neist juurde loendada kõik teise arvu ühelised. Nii näiteks loendades 7-le juurde kõik arvu 5 ühelised, leiame summa 12.

Et osata kiirelt liita igasuguseid arve, tuleb m e e l e s p i d a d a kõik summad, mis saadakse kahe ühekohalise arvu liitmisel.

*Märkus.* Et null tähendab üheliste puudumist, siis 5 + 0 = 5 (kui viiele midagi ei lisata, siis jääbki 5) ja 0 + 5 = 5 (kui ühelisi ei olnud ja loendati juurde 5 ühelist, siis saadaksegi 5 ühelist). Üldiselt: mistahes arvu liitmisel nulliga või nulli liitmisel mistahes arvuga saadakse alati sama arv.

**23. Mitmekohalise arvu liitmine ühekohalisega.** Olgu tarvis liita arvud 37 ja 8. Selleks eraldame 37-st 7 ühelist ja liidame need 8-ga; saame 15. Need 15 ühelist liidame 30-ga; kuid 15 on sama, mis 10 ja 5. Liites 10 ja 30 saame 40; liites 40-ga veel 5, saame 45.

Võib talitada ka järgmiselt. Pannes tähele, et 37-ga tuleb liita 3, selleks et saada 40, eraldame 3 ühelist 8-st ühelisest ja liidame need 37-ga; saame 40; liites selle arvuga veel 5 ühelist, mis jäid järele 8-st, saame 45.

Neid tehteid tuleb harjuda teostama peast ja seejuures kiiresti.

Kaks selles punktis käsiteldud liitmise võtet kujutavad

endast nende lausete rakendamist, mis on toodud punktis 21. See nähtub võrdusest:

$$37 + 8 = (30 + 7) + 8 = 30 + (7 + 8) = 30 + 15 = 30 + (10 + 5) = (30 + 10) + 5 = 40 + 5 = 45$$

või võrdusest

$$37 + 8 = 37 + (3 + 5) = (37 + 3) + 5 = 40 + 5 = 45.$$

**24. Mitmekohaliste arvude liitmine.** Olgu tarvis liita neli arvu: 13653, 22409, 1608 ja 346. Selleks liidame kõigepealt kõikide arvude ühelised, siis nende kümnelised, siis sajalised jne. Et aga seejuures mitte ära segada erinevate järkude ühikuid, kirjutame antud arvud üksteise alla nii, et ühelised oleksid üheliste all, kümnelised kümneliste all, sajalised sajaliste all jne.; viimasele liidetavale tõmmatakse joon alla:

$$\begin{array}{r} 13653 \\ 22409 \\ + \ 1608 \\ \quad 346 \\ \hline 38016 \end{array}$$

Üheliste liitmisel saame 26, s. t. 2 kümnelist ja 6 ühelist; 2 kümnelist peame meeles, et neid liita antud arvude kümnelistega, 6 ühelist aga kirjutame allapoole joont üheliste kohale. Liites kümnelised (koos kahe kümnelisega, mis saadi üheliste liitmisel) saame 11 kümnelist, s. o. 1 sajalise ja 1 kümnelise; 1 sajalise peame meeles, et seda liita sajalistega, 1 kümnelise aga kirjutame allapoole joont kümneliste kohale. Sajaliste liitmisel saame 20 sajalist, s. o. täpselt 2 tuhandelist; need 2 tuhandelist peame meeles, et neid liita tuhandelistega, allapoole joont sajaliste kohale kirjutame aga nulli. Sel viisil jätkame tehet.

*Märkus.* Kui mingi ühe veeru numbrite liitmisel (näiteks kümneliste liitmisel meie näites) esineb number null, siis jäetakse ta tähele panemata, sest p. 22 lõpus leiduva

märkuse alusel nulli liitmine ei muuda ühikute olemasolevat arvu.

25. **Null on arv.** Nägime, et liitmise teostamisel liidetavate hulgas võib esineda null; edaspidi näeme, et nulliga tuleb teostada teisigi aritmeetilisi tehteid. Seepärast lepime nüüd kokku *lugeda nulli* samasuguseks *arvuks,* nagu on kõik teised arvud; on ilmne, et *null on väiksem igasugusest teisest arvust* (arvude loomulikus reas).

26. **Arvu suurendamine mõne ühelise võrra.** Suurendada mingit arvu mõne ühelise võrra tähendab, et tuleb liita need ühelised kõnesoleva arvuga. Kui näiteks on tarvis arvu 80 suurendada 25 võrra, siis see tähendab, et 80-ga tuleb liita 25 (saame 105). Seega arvu suurendamist mõne ühelise võrra teostatakse liitmisega.

27. **Summa muutumine liidetavate muutmisel.** Kuna summa sisaldab eneses liidetavate kõik ühelised, siis on ilmne, et

**kui mingile liidetavale lisame mõned ühelised (teised liidetavad aga jätame muutmata), siis summa suureneb sama üheliste arvu võrra.**

Näiteks $5 + 8 = 13$; kui esimesele liidetavale lisada 4, siis saadakse $(5 + 4) + 8 = 9 + 8 = 17$; kui aga lisada 4 teisele liidetavale (esimene liidetav aga jätta muutmata), siis saadakse:

$$5 + (8 + 4) = 5 + 12 = 17;$$

seega kui lisame arvu 4 ühele liidetavaist, suureneb summa 4 ühelise võrra (sest 17 on 4 ühelise võrra suurem 13-st).

**Kui mingist liidetavast võtame ära mõned ühelised (teised liidetavad aga jätame muutmata), siis summa väheneb sama üheliste arvu võrra;**

**kui mingile liidetavale lisame mõned ühelised, teisest liidetavast aga võtame ära sama palju ühelisi, siis summa ei muutu.**

## IV. Lahutamine.

28. **Mis on lahutamine?** Õpilasel oli 7 vihikut; kolm nendest ta andis vennale; selleks et teada saada, mitu vihikut jäi õpilasel järele, peame 7 vihikust ära võtma 3 vihikut (jääb järele 4 vihikut).

*Tehet, mille abil ühest arvust võetakse ära niimitu ühelist, kuimitu neid sisaldab teine antud arv, nimetatakse lahutamiseks.*

Meie näites tuleb arvust 7 lahutada arv 3; saadakse arv 4.

Arvu, millest toimub lahutamine, nimetatakse *vähendatavaks;* äravõetavat arvu nimetatakse *lahutatavaks;* pärast lahutamist saadavat arvu nimetatakse *vaheks.*

Meie näites on vähendatavaks 7, lahutatavaks 3 ja vaheks 4.

Lahutamise märgiks on — (miinus); ta asetatakse vähendatava ja lahutatava vahele.

Niisiis: $7 - 3 = 4$.

On ilmne, et antud arvust on võimalik lahutada igasugust teist arvu, mis on temast väiksem või on temaga võrdne; kuid mingist arvust pole võimalik lahutada arvu, mis on temast suurem. Seepärast *lahutatav ei saa olla suurem vähendatavast* (arvude loomulikus reas).

29. **Lahutamise võrdlemine liitmisega.** Lahutamisel üks arv, nimelt vähendatav, jaotatakse kaheks arvuks. Näiteks, kui lahutasime 9-st 5 ja leidsime, et järele jäi 4, siis see tähendab, et jaotasime arvu 9 kaheks arvuks: 5 (lahutatud ühelised) ja 4 (järelejäänud ühelised). On ilmne, et kui

need kaks arvu ühendada üheks, siis saame sama arvu 9, mida me kaheks jaotasime; tähendab, *vähendatav võrdub lahutatava ja vahe summaga*; teisiti öeldes: vähendatav on summa, lahutatav ja vahe aga on liidetavad.

Liitmisel on antud liidetavad, summat aga otsitakse; lahutamisel aga on antud summa ja üks liidetav, kuna otsitakse teist liidetavat.

See tähendab, et arv, mida liitmisel otsitakse, on lahutamisel antud, ja ümberpöördult; seepärast öeldakse, et *lahutamine on liitmise pöördtehe.*

30. *Märkusi*: 1) Lahutamist oleks olnud võimalik defineerida (määratella) algul kui liitmise pöördtehet, kus antud summa ja ühe liidetava järgi otsitakse teist liidetavat. Ometi osutub aritmeetika elementaarse käsitlemise alguses lihtsamaks ja näitlikumaks defineerida lahutamist kui tehet, kus vähendatavalt võetakse ära lahutatavaga võrdne osa, ja seejärel alles selgitada lahutamise ja liitmise seost (nagu see on tehtud punktis 29).

2) Lahutamise tehe on alati võimalik ja annab ainsa tulemuse siis, kui lahutatav ei ole suurem vähendatavast. Näiteks kui $a$-st on tarvis lahutada $b$, siis saame seda teostada, kui võtame $a$-st ära üksteise järel nii palju ühelisi, kui neid sisaldub $b$-s. Võttes ära ühe ühelise, saame jäägina ainsa arvu $a - 1$, mis arvude loomulikus reas asetseb vahetult arvu $a$ ees; võttes ära teise ühelise, saame jällegi ainsa arvu $a - 1 - 1$, mis asetseb vahetult arvu $a - 1$ ees jne. Kui $b < a$, siis võttes ära $b$ ühelist saame teatava (ja ainult ühe) arvu arvude loomulikust reast, mis ongi vahe; kui $b = a$, siis pärast äravõtmist on jäägiks null; lõpuks, kui $b > a$, siis lahutamine pole võimalik.

**31. Ühekohalise arvu lahutamine.** Et raskusteta lahutada igasugust arvu, on tarvis kõigepealt õppida lahutama peast ühekohalist arvu ühekohalisest ja kahekohalisest arvust. Otsitav vahe leitakse hõlpsasti liitmisega. Näiteks, et teada saada, kui palju jääb järele, kui 15-st lahutada 8, tuletame meelde, missugune arv liitmisel 8-ga annab 15; 8 ja 7 on 15; järelikult 15 miinus 8 on 7.

Sellist lahutamist tuleb harjuda teostama peast ja seejuures kiiresti.

*Märkus.* 7 — 0 = 7 (kui 7-st ühelisest midagi ära ei võeta, siis jääb järele 7 ühelist). Üldiselt saadakse seega nulli lahutamisel mistahes arvust alati sama arv.

8 — 8 = 0 (kui 8-st ühelisest ära võtta 8 ühelist, siis ei jää midagi järele). Üldiselt võrdub seega kahe ühesuguse arvu vahe alati nulliga.

Nullist pole võimalik lahutada mingit teist arvu, seepärast et kõik teised arvud on nullist suuremad (loomulikus arvude reas).

**32. Mitmekohalise arvu lahutamine.**

N ä i d e: Arvust 60072 lahutada 7345.

Paigutame tehte samasuguselt nagu liitmisel:

60072 vähendatav
7345 lahutatav
52727 vahe

Peame kinni samast järjekorrast nagu liitmiselgi, s. o. hakkame lahutama ühelisi ühelistest, kümnelisi kümnelistest jne. 5 ühelist pole võimalik lahutada 2-st ühelisest; võtame 7-st kümnelisest 1 kümnelise, see sisaldab 10 ühelist, mis lisame vähendatavas leiduvale 2-le ühelisele; saame 12 ühelist; neist lahutame lahutatavas leiduvad 5 ühelist; vaheks saame 7 ühelist. Nüüd läheme edasi kümneliste juurde. Nendest 7-st kümnelisest, mis olid vähendatavas, kasutasime 1 kümnelise juba üheliste lahutamisel (et seda mitte unustada, paneme kümneliste numbri 7 kohale punkti); jääb järele 6 kümnelist; neist lahutame lahutatava 4 kümnelist; vaheks saame 2 kümnelist. Läheme edasi sajaliste juurde. Vähendatavas pole sajalisi. Vaatame tuhandelisi ja näeme, et neidki vähendatavas ei ole; seepärast läheme veelgi kaugemale, kümnetuhandeliste

juurde. Neid on vähendatavas 6; võtame ühe neist 6-st kümnetuhandelisest (mille tähistamiseks paneme punkti numbri 6 kohale); see sisaldab 10 tuhandelist. Võtame ühe neist tuhandelistest, see sisaldab 10 sajalist, millest lahutame lahutatavas leiduvad 3 sajalist ja saame vaheks 7 sajalist. Järele jäi veel 9 tuhandelist; sellest lahutame lahutatavas leiduvad 7 tuhandelist ja saame vaheks 2 tuhandelist. Lõpuks lähevad vahesse muutuseta üle vähendatavasse järele jäänud 5 kümnetuhandelist, kuna nendest midagi ei lahutata. Seega saame vahe 52727.

Olgu veel näiteid lahutamisest:

| | |
|---|---|
| 6000227 | 500000 |
| − 4320423 | − 17236 |
| 1679804 | 482764 |

Lahutamist on parem toimetada minnes madalamatelt järkudelt kõrgemate suunas, sest et niisugune järjekord võimaldab vajaduse korral alati võtta üht kõrgema järgu ühikut ja peenestada seda madalama järgu ühikuiks.

33. **Kuidas lahutada summat ja kuidas lahutada summast?** Mitmekohalise arvu lahutamisel me lahutasime eelmises punktis ühelisi ühelistest, kümnelisi kümnelistest jne. Seejuures kasutasime järgmisi reegleid:

**1) Selle asemel et lahutada summat, võib lahutada üksteise järel eraldi iga liidetavat.**

Nii näiteks, et lahutada arvu 325, s. t. summat 5 + 20 + + 300, võib eraldi lahutada liidetavad 5, 20 ja 300.

Üldkujul on võimalik seda reeglit väljendada võrdusega:

$$a - (b + c + d + \ldots) = a - b - c - d - \ldots$$

**2) Selle asemel et lahutada summast mingit arvu, võib lahutada seda arvu ühest mingist liidetavast.**

Nii näiteks:

$$(30 + 20) - 10 = 50 - 10 = 40$$

ehk

$$(30 + 20) - 10 = (30 - 10) + 20 = 20 + 20 = 40$$

ehk

$$(30 + 20) - 10 = 30 + (20 - 10) = 30 + 10 = 40.$$

Üldkujul:

$$(a + b + c + \ldots) - m = (a - m) + b + c + \ldots =$$
$$= a + (b - m) + c + \ldots = \ldots .$$

Vaadeldes lahutatavat kui lihtüheliste, kümneliste, sajaliste jne. summat, lahutame eraldi ühelised, siis kümnelised, seejärel sajalised jne. Selleks et lahutada ühelisi, vaatleme vähendatavat kui järkude summat ja lahutame lahutatava ühelised selle summa ühest liidetavast ja nimelt ühelistest. Kui seda pole võimalik teha, siis võtame vähendatava ühe kümnelise ja peenestades selle ühelisteks, liidame need ühelised vähendatava ühelistega ja siis lahutame lahutatava ühelised. Kui vähendatavas kümnelisi ei leidu, siis võtame ühe sajalise, peenestame selle kümnelisteks jne.

**34. Liitmise kontrollimine.** Veendumiseks, et tehe on teostatud õigesti, tuleb teda k o n t r o l l i d a. Liitmise kontrollimiseks liidetakse liidetavad tavaliselt teistkordselt teistsuguses järjekorras kui esimesel korral, toimetades näiteks liitmist a l t ü l e s p o o l e. Kui teisel liitmisel saadakse sama summa, siis on väga tõenäoline, et liitmine on teostatud õigesti.

Teiselt poolt on võimalik kontrollida liitmist ka lahutamisega: selleks tuleb saadud summast lahutada üks liidetavaist. Kui vahe osutub võrdseks ülejäänud liidetavate summaga, siis võib pidada tõenäoliseks, et tehe on teostatud õigesti.

**35. Lahutamise kontrollimine.** Et vähendatav on summa, lahutatav ja vahe aga liidetavad, siis on lahutamise kontrollimiseks küllaldane liita lahutatav vahega. Kui saadakse vähendatavaga võrdne arv, siis on väga tõenäoline, et tehe on teostatud õigesti.

Teiselt poolt, kuna lahutatav ja vahe on liidetavad, vähendatav aga nende summa, ja kuna summa ei sõltu liidetavate järjekorrast, siis on võimalik kontrollida lahutamist ka lahutamisega; selleks tuleb vähendatavast lahutada vahe. Kui seejuures saadakse lahutatav, siis võib pidada tõenäoliseks, et tehe on teostatud õigesti.

36. **Arvu vähendamine mõne ühelise võrra.** Vähendada mingit arvu mõne ühelise võrra tähendab lahutada temast need mõned ühelised. Näiteks kui on tarvis 100 vähendada 30 võrra, siis see tähendab, et tuleb 100-st ära võtta 30 (saame 70).

37. **Kahe arvu võrdlemine.** Soovides võrrelda omavahel kahte arvu, seame endale küsimuse, mitme ühelise võrra üks arv on suurem või väiksem teisest. Selleks et seda teada saada, tuleb suuremast arvust lahutada väiksem. Näiteks selleks, et teada saada, mitme võrra on 20 väiksem 35-st (või mitme võrra 35 on suurem 20-st), tuleb 35-st lahutada 20; siis leiame, et 20 on 35-st väiksem (või 35 on 20-st suurem) 15 ühelise võrra.

38. **Vahe muutumine antud arvude muutmisel** on tuletatav kui järeldus summa muutumisest, sest vähendatav on summa, lahutatav ja vahe aga on liidetavad. Seepärast,

**kui vähendatavale lisame mõned ühelised, siis vahe suureneb nende üheliste arvu võrra;**

**kui vähendatavast lahutame mõned ühelised, siis vahe väheneb nende üheliste arvu võrra;**

**kui lahutatavale lisame mõned ühelised, siis vahe väheneb nende üheliste arvu võrra;**

**kui lahutatavast lahutame mõned ühelised, siis vahe suureneb nende üheliste arvu võrra.**

On kasulik pöörata tähelepanu sellele, et **vahe ei muutu, kui me korraga kas suurendame või vähendame vähendatavat ja lahutatavat ühe ja sama arvu võrra.**

Nii näiteks:

$$11 - 3 = (11 + 6) - (3 + 6) = 8.$$

**39. Kuidas lahutada vahet?** Olgu tarvis lahutada 30-st vahe $12 - 8$. Selle asemel, et kõigepealt leida see vahe (4) ja siis lahutada ta 30-st (saame 26), võime toimida järgmiselt: suurendame 8 võrra nii vähendatavat 30 kui ka lahutatavat $12 - 8$; siis 30 asemel saame 38, vahe $12 - 8$ asemel saame 12. Nüüd lahutame 38-st 12, saame 26. See ongi otsitav arv, sest kuna me suurendasime nii vähendatavat kui ka lahutatavat ühe ja sama arvu võrra, ei muutunud vahe.

Võib toimida veel ka järgmiselt: me ei lahuta 30-st mitte $12 - 8$, vaid 12 (saame 18). Kuid nüüd me lahutasime 8 võrra rohkem kui tarvis ja seetõttu vahe osutus 8 võrra väiksemaks kui tarvis; see tähendab, et kui 18 suurendada 8 võrra, siis leiame õige vahe 26. Seega:

**selle asemel et lahutada vahet, võib liita lahutatava ja seejärel lahutada vähendatava, või võib lahutada vähendatava [1] ja seejärel liita lahutatava.**

Üldkujul on võimalik seda reeglit väljendada järgmiste võrdustega:

$$a - (b - c) = a + c - b; \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

## V. Tehete märgid. Võrdusmärk ja võrratusmärgid. Sulud.

**40. Märgid.** Mõnikord osutub ülesannete lahendamisel vajalikuks, tehteid tegelikult mitte teostades, tähistada vaid märkidega, milliseid tehteid tuleb toimetada antud

[1] Kui see on võimalik, s. t. kui vähendatav pole suurem arvust, millest on tarvis lahutada vahe.

arvudega. Oletame näiteks, et on tarvis näidata, et arvud 10, 15 ja 20 tulevad liita. Siis kirjutatakse antud liidetavad ühte ritta ja asetatakse nende vahele liitmismärgid: $10 + 15 + 20$.

Kui on tarvis näidata, et ühest arvust tuleb lahutada teine, siis kirjutatakse vähendatav ja lahutatav ühte ritta ja pannakse nende vahele märk —. Nii tähendab näiteks avaldis $10 - 8$, et 10-st on tarvis lahutada 8.

Avaldist $10 + 15 + 20$ loetakse järgmiselt: 10 pluss 15 pluss 20 või arvude 10, 15 ja 20 summa. Avaldist $10 - 8$ loetakse nii: 10 miinus 8 või arvude 10 ja 8 vahe.

On veel tarvitusel märgid: $=$, $>$ ja $<$, mida juba oleme kasutanud. Esimest nimetatakse *võrdusmärgiks* ja ta asendab sõnu „võrdub" või „on"; kahte ülejäänud märki nimetatakse *võrratusmärkideks* ja nad tähendavad: märk $>$ „on suurem kui", märk $<$ aga „on väiksem kui". Näiteks avaldisi $7 + 8 = 15$, $7 + 8 > 10$ ja $7 + 8 < 20$ loetakse järgmiselt: 7 pluss 8 on 15; $7 + 8$ on suurem kui 10; $7 + 8$ on väiksem kui 20. Tuleb meeles pidada, et märgid $>$ ja $<$ peavad olema pööratud nurga tipuga väiksema arvu poole.

Kasutatakse veel märke $\neq$ (ei võrdu), $\leqslant$ (on väiksem või võrdub) ja $\geqslant$ (on suurem või võrdub).

**41. Sulud. Valem.** Ülesannete lahendamisel on väga kasulik näidata enne tehete teostamist, milliseid tehteid ja millises järjekorras tuleb antud arvudega teostada, et saada vastust ülesseatud küsimusele. Oletame näiteks, et mingi ülesande lahendamiseks on kõigepealt tarvis liita 35 ja 20 ja siis saadud summa lahutada arvust 200. Et seda näidata, kirjutatakse järgmiselt:

$$200 - (35 + 20).$$

Siin tähendavad sulud, milledes asetseb summa $35 + 20$, et arvust 200 tuleb lahutada summa $35 + 20$, s. t. 55.

Mõnikord on tarvilik sulgusid sisaldavat avaldist asetada veel teistesse sulgudesse; sel juhul, et eraldada neid üksteisest, kasutatakse erineva kujuga sulgusid.[1]

Näitena olgu toodud avaldis:

$$100 + \{160 - [60 - (7 + 8)]\}.$$

See avaldis tähendab, et tuleb liita 7 ja 8 (saame 15); leitud summa (15) tuleb lahutada 60-st (saame 45); leitud arv (45) lahutada 160-st (saame 115); saadud arv liita 100-ga (saame 215). Seejuures on tehete järjekord mõeldud alati sellisena, et kõigepealt teostatakse tehe, mis asetseb kõige seesmistes sulgudes, jne.

Märgime, et järjestikuste liitmiste ja lahutamiste tähistamisel, s. t. kui tehted peavad toimuma samas järjekorras, nagu nad on kirjutatud, sulgusid tavaliselt ei kasutata; näiteks kui on kirjutatud:

$$20 - 2 + 4 - 5,$$

siis tähendab see sama, mis $[(20 - 2) + 4] - 5$, s. t. et 20-st lahutatakse 2, saadud vahega liidetakse 4 ja sellest summast lahutatakse 5.

*Avaldist, mis näitab, milliseid tehteid ja millises järjekorras tuleb antud arvudega teostada, selleks et leida otsitavat arvu, nimetatakse valemiks.*

Arvutada valem tähendab leida arv, mis saadakse pärast valemis näidatud kõikide tehete teostamist.

---

[1] Sulgusid ( ) nimetatakse harilikult tavalisteks ehk ümmargusteks sulgudeks, sulgusid [ ] nimetatakse nurksulgudeks ja sulgusid { } loogelisteks sulgudeks.

## VI. Korrutamine.

**Ülesanne.** *Osteti 6 joonlauda, milledest igaüks maksis 85 kopikat. Kui palju maksti kõikide joonlaudade eest kokku?*

Selle ülesande lahendamiseks peame leidma 6 ühesuguse liidetava summa:

$85 + 85 + 85 + 85 + 85 + 85 = 510$ (= 5 rbl. 10 kop.).

Toodud ülesandes leidsime selle summa tavalise liitmisega. Kui aga võrdsete liidetavate arv on suur, osutub summa leidmine liitmise teel väsitavaks.

Et aga ühesuguseid liidetavaid tuleb liita väga sageli, siis aritmeetika töötab välja viise selliste summade kiiremaks leidmiseks.

Kui toimub ühesuguste liidetavate liitmine, s. t. kui üks ja sama arv kordub liidetavana mitu korda, siis öeldakse, et seda arvu korrutatakse (võetakse mitmekordselt). Kui ta kordub 6 korda, siis öeldakse, et teda korrutatakse 6-ga; kui ta kordub 20 korda, siis öeldakse, et teda korrutatakse 20-ga jne.

**42. Mis on korrutamine?** *Korrutamiseks nimetatakse võrdsete liidetavate liitmist.*

Seejuures arvu, mis kordub liidetavana, nimetatakse *korrutatavaks* (teda korrutatakse), arvu aga, mis näitab, kui palju võetakse neid võrdseid liidetavaid, nimetatakse *korrutajaks*.

Arvu, mis saadakse pärast korrutamist, nimetatakse *korrutiseks*. Näiteks kui 85 korrutatakse 6-ga, siis 85 on korrutatav, 6 on korrutaja, pärast korrutamist saadud arv 510 aga on korrutis. Korrutatavat ja korrutajat nimetatakse veel *teguriks*.

Korrutamist märgitakse tavaliselt eri märgi abil. Kui näiteks 85 on tarvis korrutada 6-ga, siis kirjutatakse nii: $85 \cdot 6$, s. t. kirjutatakse korrutatav, sellest paremale korrutamismärk (punkt) ja märgist paremale korrutaja; selline

avaldis asendab summat $85 + 85 + 85 + 85 + 85 + 85$. Kui korrutis on leitud, siis võime kirjutada võrduse $85 \cdot 6 = 510$ [1].

Seda võrdust võib lugeda mitmel viisil:

summa kuuest võrdsest liidetavast, milledest igaüks võrdub 85-ga, on 510;

85 korrutatult 6-ga on 510;

arvude 85 ja 6 korrutis on 510.

*Märkusi*: 1) Et korrutamine on liitmise erijuhuks, siis on ta alati võimalik ja annab antud tegurite puhul ühese tulemuse.

2) Kui tegurid on tähistatud tähtedega, siis näidatakse nende korrutamist sageli ilma mingi märgita (asetatakse tegurid lihtsalt kõrvuti). Näiteks kui on kirjutatud *ab*, siis see tähendab, et arv *a* korrutatakse arvuga *b*. Samuti ei asetata mingit märki, kui üks tegur on tähistatud tähega, näiteks $5a$.

3) Korrutatav võib tähendada ükskõik millise nimetusega ühikuid, näiteks meetreid, rublasid, pliiatseid jne.; korrutis peab tähendama sama nimetusega ühikuid nagu korrutatavgi. Näiteks kui 7 rubla korrutatakse 4-ga, siis saadakse 28 rubla. Korrutaja aga, kuna ta tähendab ühesuguste liidetavate arvu, ei oma nimetust; nii näiteks on võimalik 7 rubla korrutada 4-ga, kuid pole võimalik korrutada 7 rubla 4 rublaga või meetriga.

Rakendusteadustes (näiteks füüsikas) korrutatakse sageli omavahel nimega arvusid, kusjuures korrutise nimetust vaadeldakse kui tegurite nimetuste korrutist.

**43. Mõned korrutamise erijuhud.**

**1) Kui korrutatavaks on arv 1, siis korrutis võrdub korrutajaga;** nii näiteks $1 \cdot 5 = 5$, sest et summa $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ võrdub 5-ga.

**2) Kui korrutatavaks on null, siis ka korrutis võrdub nulliga;** näiteks $0 \cdot 4 = 0$, sest et summa $0 + 0 + 0 + 0$, nagu varemalt kokku leppisime (p. 24), tuleb lugeda võrdseks nulliga.

**3) Kui korrutajaks on üks, siis korrutis võrdub korrutatavaga;** näiteks $5 \cdot 1 = 5$ (kui võtta 5 üks kord, saame 5).

[1] Punkti asemel kasutatakse korrutamismärgina ka kaldristi ($\times$).

4) **Kui korrutajaks on null, siis ka korrutis loetakse võrdseks nulliga;** näiteks $5 \cdot 0 = 0$ (kui arvu 5 ei võeta ühtegi korda, siis ei saada midagi).

**44. Arvu suurendamine mitmekordseks.** Suurendada arvu 2-kordseks, 3-kordseks, 4-kordseks jne. tähendab koostada summa kahest, kolmest, neljast jne. liidetavast, mis on võrdsed antud arvuga. Näiteks 10 suurendada 5-kordseks tähendab võtta summa 5-st liidetavast, milledest igaüks võrdub 10-ga, s. t. 10 korrutada 5-ga. Seega arvu suurendamine *mitmekordseks* on teostatav *korrutamisega* (kuna arvu suurendamist *mingi arvu võrra* teostatakse *liitmisega*).

**45. Tegurite ümberpaigutamisel korrutis ei muutu.** Oletame, et meil on soov loendada allpool kujutatud kriipsud.



Esimeses reas on neid 7, teises ja kolmandas reas kummaski samuti 7, s. t. et kokku on kriipse $7 + 7 + 7$ ehk $7 \cdot 3$. Samu kriipse on aga võimalik loendada ka veergudena: esimeses veerus on neid 3, teises 3, kolmandas 3 jne.; et veerge on üldse 7, siis kriipse on kokku $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$, s. t. $3 \cdot 7$. Kuid kriipsude arv ei sõltu sellest, missuguses järjekorras neid loendame; see tähendab, et $7 \cdot 3 = 3 \cdot 7$.

Samal viisil on võimalik veenduda, et $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8$; $20 \cdot 15 = 15 \cdot 20$ jne. Üldiselt:

**korrutis ei muutu, kui paigutada korrutatav korrutaja kohale ning korrutaja korrutatava kohale.**

Seda omadust nimetatakse *korrutamise vahetuvuse* (*kommutatiivsuse*) *seaduseks.*

Üldkujul on võimalik väljendada seda võrdusega:

$$ab = ba.$$

*Märkus.* See omadus säilib korrutamisel ka siis, kui teguriks on üks või null; nii näiteks $1 \cdot 5 = 5$ ja $5 \cdot 1 = 5$; $0 \cdot 4 = 0$ ja $4 \cdot 0 = 0$.

**46. Korrutamistabel.** Selleks et osata kiiresti toimetada mistahes arvude korrutamist, tuleb meeles pidada kõik *ühekohaliste* arvude korrutised. Selleks koostatakse (kasutades liitmist) korrutamistabel (ehk nn. „ükskord-üks") ja õpitakse see pähe.

**47. Järjekord, missuguses hakkame vaatlema korrutamist.** Korrutamise teostamist hakkame vaatlema alltoodud järjekorras:

1) mitmekohalise arvu korrutamine ühekohalisega;

2) mistahes arvu korrutamine arvuga, mida väljendab number 1 koos ühe või mitme nulliga;

3) mistahes arvu korrutamine arvuga, mida väljendab mistahes väärtusega number koos ühe või mitme nulliga;

4) mitmekohalise arvu korrutamine mitmekohalise arvuga;

5) nullidega lõppevate arvude korrutamine.

**48. Mitmekohalise arvu korrutamine ühekohalisega.** Olgu 846 tarvis korrutada 5-ga. On kohane paigutada tehe järgmiselt:

$$\begin{array}{r} 846 \\ \cdot\ \ 5 \\ \hline 4230, \end{array}$$

s. t. kirjutatakse korrutatav ja selle alla korrutaja; korrutaja alla tõmmatakse joon. Joone alla kirjutatakse korrutise numbrid järkjärgult, nagu neid leitakse.

Korrutada 846 5-ga tähendab liita 5 arvu, milledest igaüks võrdub 846-ga. Selleks pole muud tarvis, kui võtta

kõigepealt 5 korda 6 ühelist, siis 5 korda 4 kümnelist ja lõpuks 5 korda 8 sajalist.

Iga sellise üksiktehte puhul leiame korrutise korrutamistabelist.

5 korda 6 ühelist = 30 ühelist, s. t. 3 kümnelist; kirjutame joone alla üheliste kohale nulli, 3 kümnelist aga peame meeles.

5 korda neli kümnelist = 20 kümnelist; lisades sellele veel 3 kümnelist, saame 23 kümnelist, s. o. 2 sajalist ja 3 kümnelist; kirjutame 3 kümnelist joone alla kümneliste kohale, 2 sajalist peame meeles.

5 korda 8 sajalist = 40 sajalist; lisades veel 2 sajalist, saame 42 sajalist; kirjutame joone alla 42 sajalist, s. o. 4 tuhandelist ja 2 sajalist.

Seega leidsime, et 846 korrutatult 5-ga võrdub 4230-ga.

**49. Korrutamine arvuga, mida väljendab number 1 koos ühe või mitme nulliga.** Olgu 358 tarvis korrutada 10-ga, s. t. liita 10 arvu, milledest igaüks võrdub 358-ga. Kui võtta 10 korda üheline, siis saadakse 1 kümneline; tähendab, kui võtta 10 korda 358 ühelist, saadakse 358 kümnelist, milles sisaldub 3580 ühelist.

Võtame veel teise näite: $296 \cdot 1000$. Üheline, mis on võetud liidetavana 1000 korda, annab 1 tuhandelise; järelikult 296 ühelist, võetud liidetavana 1000 korda, annab 296 tuhandelist, mida kirjutatakse nii: 296 000.

***Reegel.*** **Et korrutada mistahes arvu arvuga, mida väljendab number 1 koos nullidega, tuleb korrutatavale paremale juurde kirjutada niimitu nulli, kuimitu neid on korrutajas.**

**50. Korrutamine arvuga, mida väljendab mistahes väärtusega number koos ühe või mitme nulliga.** Olgu 248 tarvis korrutada 30-ga, s. t. liita 30 ühesugust liidetavat, mil-

lest igaüks võrdub 248-ga. Kujutleme, et need 30 liidetavat on koondatud 10-sse ühesugusesse rühma à 3 liidetavat igas rühmas:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 |
| 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 |
| 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 | 248 |
| 744 | 744 | 744 | 744 | 744 | 744 | 744 | 744 | 744 | 744 |

Võime seega 248 võtta 3 korda ja selle tehte tulemust (744) korrutada 10-ga. Teiste sõnadega: selleks et korrutada mingit arvu 30-ga, tuleb teda ainult korrutada 3-ga ja saadud korrutist korrutada 10-ga (selleks kirjutada paremale juurde üks null):

$$248 \cdot 3 = 744; \quad 744 \cdot 10 = 7440.$$

Võtame veel teise näite: $895 \cdot 400$.

Selles näites on tarvis liita 400 arvu, millest igaüks võrdub 895-ga.

400 liidetavat on aga võimalik koondada 100-sse rühma à 4 liidetavat rühmas. Et teada saada, mitu ühelist on ühes sellises rühmas, tuleb 895 korrutada 4-ga (saame 3580); et seejärel teada saada, mitu ühelist on kõikides rühmades, tuleb 3580 korrutada 100-ga (milleks on tarvis ainult kirjutada arvule 3580 paremale juurde kaks nulli).

***Reegel.*** **Et korrutada mistahes arvu arvuga, mida väljendab mistahes väärtusega number koos nullidega, tuleb korrutada korrutatavat selle numbriga ja saadud korrutisele kirjutada paremale juurde niimitu nulli, kuimitu neid on korrutajas.**

**51. Mitmekohalise arvuga korrutamine.** Olgu tarvis teostada korrutamine:

$$3826 \cdot 472,$$

s. o. liita 472 ühesugust arvu, millest igaüks võrdub 3826-ga. Selleks tuleb liita kõigepealt 2 sellist arvu, siis veel 70 samasugust arvu ja edasi veel 400 niisugust arvu ning lõpuks liita kõik saadud summad, s. t. tuleb võtta arvu 3826 liidetavana 472 korda. Selleks tuleb võtta arvu 3826 liidetavana 2 korda, siis 70 korda, siis 400 korda ja saadud summad liita; teiste sõnadega 3826 tuleb korrutada 2-ga, siis 70-ga, seejärel 400-ga ja saadud korrutised liita.

Tehte paigutame järgmiselt: kirjutame korrutatava ja tema alla korrutaja; korrutaja alla tõmbame joone:

| | |
|---|---|
| 3826 | 3826 |
| · 472 | · 472 |
| 7652 | 7652 |
| 267820 | 26782 |
| 1530400 | 15304 |
| 1805872 | 1805872 |

Korrutame korrutatava 2-ga ja saadud korrutise kirjutame joone alla; saame esimese osakorrutise (nimelt 7652).

Korrutame korrutatava 70-ga. Selleks tuleb ainult korrutada korrutatav 7-ga ja korrutisele kirjutada paremale juurde üks null; seepärast kirjutame nulli esimese osakorrutise üheliste alla, numbrid aga, mis saadakse korrutatava korrutamisel 7-ga, kirjutame nende leidmise järjekorras esimese osakorrutise kümneliste, sajaliste ja teiste järkude alla. Sel viisil saame teise osakorrutise (267820).

Korrutame korrutatava 400-ga. Selleks on tarvis ainult 3826 korrutada 4-ga ja korrutisele kirjutada paremale juurde kaks nulli. Kirjutame kaks nulli teise osakorrutise üheliste ja kümneliste alla, numbrid aga, mis saadakse korrutatava korrutamisel 4-ga, kirjutame nende leidmise järjekorras teise osakorrutise sajaliste, tuhandeliste ja

teiste järkude alla. Siis saame kolmanda osakorrutise (1530400).

Viimase osakorrutise alla tõmbame joone ja liidame kõik osakorrutised: saame täiskorrutise.

Kirjutise lühendamiseks ei kirjutata osakorrutistes neid nulle, mis on toodud rasvases kirjas; seejuures on tarvis ainult meeles pidada, et korrutades korrutatavat korrutaja kümneliste numbriga peame kirjutama esimese leitud arvu esimese osakorrutise kümneliste alla, korrutades korrutatavat korrutaja sajaliste numbriga kirjutame esimese leitud numbri eelmiste osakorrutiste sajaliste alla, jne.

*Märkusi.* 1) Kui korrutaja numbrite hulgas leidub number üks, siis, korrutades korrutatavat selle numbriga, tuleb pidada silmas, et kui korrutajaks on üks, siis korrutis võrdub korrutatavaga.

2) Kui korrutajas esinevad nullid, siis nendega ei korrutata, vaid minnakse üle korrutamisele korrutaja järgmise väärtusega numbriga. Näiteks:

$$
\begin{array}{r}
470827 \\
\cdot\ 60013 \\
\hline
1412481 \\
470827 \\
2824962 \\
\hline
28255740751
\end{array}
$$

Viimane osakorrutis, mis saadakse korrutatava korrutamisel 6 kümnetuhandelisega, kirjutatakse muidugi selliselt, et ta üheliste number (2) asetseks kümnetuhandeliste all.

3) Kui korrutajas on rohkem numbreid kui korrutatavas, siis osakorrutiste arvu vähendamiseks on parem võtta korrutaja korrutatavaks, korrutatav aga korrutajaks. Näiteks korrutise $378 \cdot 27\,468$ leidmisel korrutatakse 27 468 378-ga.

**52. Nullidega lõppevate arvude lühendatud korrutamine.** Võtame kõigepealt näite, kus vaid korrutatav üksi lõpeb nullidega:

$$2700 \cdot 15.$$

Korrutada 2700 15-ga tähendab, et tuleb liita 15 arvu, millest igaüks võrdub 2700-ga.

Kui hakkame leidma seda summat tavalise liitmisega:

$$\begin{array}{r} 2700 \\ 2700 \\ \cdots\cdot \\ +\cdots\cdot \\ \cdots\cdot \\ \cdots\cdot \\ 2700 \\ \hline 40\,500 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{15 korda,}$$

siis liidetavate nullid ilmselt lähevad üle summasse ja pole muud vaja kui võtta 15 korda 27 sajalist. Järelikult 2700 korrutamiseks 15-ga tuleb 27 korrutada 15-ga ja korrutisele juurde kirjutada kaks nulli.

On otstarbekohane paigutada tehet järgmiselt:

$$\begin{array}{r} 2700 \\ \cdot 15 \\ \hline 135 \\ 27 \\ \hline 40500, \end{array}$$

s. t. korrutaja kirjutatakse nii, et korrutatava nullid jääksid paremale korrutajast; siis teostatakse korrutamine, jättes tähele panemata korrutatava nullid, korrutisele aga kirjutatakse nullid paremale poole juurde.

Võtame nüüd näite, kus ainult korrutaja lõpeb nullidega:

$$358 \cdot 23\,000.$$

See tähendab, et tuleb liita 23 000 arvu, milledest igaüks võrdub 358-ga.

23 000 liidetavat aga on võimalik koondada 1000 ühesugusesse rühma à 23 liidetavat igas rühmas. Et teada saada, mitu ühelist on ühes rühmas, tuleb 358 korrutada 23-ga. Seejärel aga, et teada saada üheliste arvu kõikides rühmades, tuleb üheliste arv ühes rühmas korrutada 1000-ga (milleks on tarvis ainult kirjutada sellele arvule paremale juurde kolm nulli). Tehe paigutatakse tavaliselt järgmiselt:

$$\begin{array}{r} 358 \\ \cdot\ 23000 \\ \hline 1074 \\ 716 \\ \hline 8234000 \end{array}$$

Lõpuks vaatleme näidet, kus mõlemad antud arvud lõpevad nullidega:

$$57\,000 \cdot 3200.$$

Et korrutada 57 000 mingi arvuga, tuleb korrutada 57 selle arvuga ja korrutisele kirjutada juurde kolm nulli. Et aga 57 korrutada 3200-ga, tuleb 57 korrutada 32-ga ja korrutisele kirjutada juurde kaks nulli. Seega:

**kui korrutatav ja korrutaja lõpevad nullidega, toimetatakse korrutamist nulle tähele panemata jättes ja kirjutatakse korrutisele juurde niipalju nulle, kui palju neid leidub korrutatavas ja korrutajas kokku.**

Tehe paigutatakse järgmiselt:

$$\begin{array}{r} 57000 \\ \cdot 3200 \\ \hline 114 \\ 171 \\ \hline 182400000 \end{array}$$

**53. Korrutise muutumine tegurite muutmisel.**

**1) Kui suurendame korrutajat mingi arv korda, siis suureneb ka korrutis sama arv korda.**

Kui võtame näitena

$$15 \cdot 3 = 45$$

ja suurendame korrutajat näiteks neli korda, siis saame korrutise $15 \cdot 12 = 180$. Uus korrutis osutub eelmisest 4 korda suuremaks. Nii peab see ka olema, sest et esimene korrutis on kolme liidetava summaks:

$$15 + 15 + 15,$$

uus korrutis aga on 12 sama liidetava summaks:

$$15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15.$$

Kasutades liitmise ühenduvuse seadust, võime viimases summas ühendada liidetavad kolmekaupa rühmadesse:

$$(15 + 15 + 15) + (15 + 15 + 15) + (15 + 15 + 15) + (15 + 15 + 15);$$

siit on selge, et uus korrutis võrdub nelja arvu summaga, millest igaüks võrdub esimese korrutisega, s. t. et uus korrutis on esimesest 4 korda suurem.

**2) Kui suurendame korrutatavat mingi arv korda, siis suureneb ka korrutis sama arv korda.**

Kui eelmises näites suurendame korrutatavat näiteks 6 korda, siis saame $90 \cdot 3 = 270$. Uus korrutis on eelmisest 6 korda suurem. Nii see peabki olema, sest et korrutatavat ja korrutajat on võimalik ümber paigutada, ilma et korrutis muutuks, korrutaja suurendamisel mingi arv korda, nagu nägime, suureneb aga korrutis sama arv korda.

Juhtude 1) ja 2) puhul öeldust järgneb:

**3) Kui vähendame korrutatavat või korrutajat mingi arv korda, siis väheneb ka korrutis sama arv korda.**

Näiteks:

$$20 \cdot 2 = 40; \quad 10 \cdot 2 = 20; \quad 5 \cdot 2 = 10 \text{ jne.}$$

Kui mõlemad tegurid muutuvad korraga, siis korrutis mõnikord suureneb, mõnikord väheneb, mõnikord aga üldse ei muutu.

Et teada saada, mis toimub korrutisega mõlema teguri muutmisel, tuleb oletada, et algul muudeti ainult korrutatavat, seejärel aga ka korrutajat. Suurendame näiteks korrutises $15 \cdot 6 = 90$ korrutatavat 3 korda, korrutajat aga 2 korda.

$$15 \cdot 6 = 90; \quad 45 \cdot 12 = ?$$

Et teada saada, mis toimub korrutisega, arutleme järgmiselt: kui korrutatavat suurendame 3 korda, siis korrutis suureneb ka 3 korda, s. t. et siis pole korrutiseks mitte 90, vaid $90 + 90 + 90$. Kui seejärel suurendame korrutajat 2 korda, siis korrutis suureneb veelgi 2 korda; s. t. korrutis võrdub nüüd:

$$(90 + 90 + 90) + (90 + 90 + 90).$$

Esialgse korrutisega võrreldes on ta seega suurenenud kaks korda kolm korda, s. t. 6 korda.

Suurendame samas näites korrutatavat 8 korda, korrutajat aga vähendame 2 korda:

$$15 \cdot 6 = 90; \quad 120 \cdot 3 = ?$$

Korrutatava suurendamisel 8 korda suurenes korrutis 8 korda; kui aga seejärel vähendasime korrutajat 2 korda, siis see 8 korda suurenenud korrutis vähenes 2 korda. Tähendab, pärast kahte sellist muutumist korrutis suurenes ainult 4 korda:

$$120 \cdot 3 = 360 = 90 \cdot 4.$$

4) **Kui suurendame üht tegurit mingi arv korda, teist aga vähendame sama arv korda, siis korrutis ei muutu,** seepärast et ühe teguri suurendamisel korrutis suureneb, teise teguri vähendamisel ta aga väheneb sama arv korda. Näiteks:

$$15 \cdot 6 = 90; \quad 30 \cdot 3 = 90; \quad 5 \cdot 18 = 90.$$

**54. Korrutamise lihtsustamine mõningatel juhtudel.** Teades korrutise muutumist sõltuvalt tegurite muutumisest, võime mõnikord lihtsustada korrutamist. Olgu tarvis näiteks 438 korrutada 5-ga. Suurendame korrutajat 2 korda, s. t. 5 asemel võtame korrutajaks 10. Nüüd leiame korrutise kohe, selleks on 4380. Kuid suurendades korrutajat 2 korda, me suurendasime korrutist 2 korda; otsitav korrutis peab olema järelikult 2 korda väiksem kui 4380, s. t. ta võrdub 2190-ga.

Samuti kui on tarvis korrutada 25-ga, võime korrutada 100-ga ja vähendada saadud korrutist 4 korda.

Mõnikord saavutatakse lihtsustamist veelgi lihtsamate kaalutlustega. Olgu näiteks tarvis 56 korrutada 11-ga. Korrutades 56 10-ga saame 560; nüüd tuleb veel liita ühekordselt arv 56, saame 616.

Analoogilisel viisil on võimalik korrutada mistahes arvu 19-ga. Selleks on küllaldane korrutada see arv 20-ga ja seejärel lahutada korrutatav.

**55. Kolme või enama teguri korrutamine.** Olgu meil mitu arvu, näiteks 7, 5, 3 ja 4, mis asetsevad teatavas kindlas järjekorras, näiteks sellises, nagu nad meil on kirjutatud. Leiame nende korrutise järgmiselt: korrutame esimese arvu teisega, saame 35; korrutame 35 kolmanda arvuga, saame 105; korrutame 105 neljanda arvuga, saame 420. Arvu 420 nimetatakse nelja arvu — 7, 5, 3 ja 4 — korrutiseks. Samasugusel viisil on võimalik leida viie, kuue ja enama teguri korrutist.

Selliste üksteisele järgnevate korrutamiste tähistamiseks

kirjutatakse antud arvud ühte ritta sellises järjekorras, millises on tarvis toimetada nende korrutamist, ja asetatakse nende vahele korrutamismärgid. Sel viisil avaldis

$$3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7$$

on samaväärne avaldisega

$$[(3 \cdot 4) \cdot 2] \cdot 7,$$

mis tähendab, et 3 korrutatakse 4-ga, saadud korrutis 2-ga ja see viimane korrutis 7-ga.

**56. Korrutamise vahetuvuse seadus mistahes tegurite arvu puhul: korrutis ei muutu tegurite järjekorra muutmisel.** See korrutamise omadus, milles veendusime p. 45, jääb kehtima ka kolme, nelja ja enamä teguri korrutamise puhul, s. t. et korrutis ei muutu tegurite järjekorra muutmisel (olgu neid niipalju kui tahes).

Näiteks kui arvutame igaühe antud korrutistest

$$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7, \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7, \quad 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \text{ ja } 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5,$$

mis erinevad üksteisest vaid tegurite järjekorraga, saame alati ühe ja sama arvu 840.

**57. Korrutise tegureid on võimalik ühendada mistahes rühmadesse.**

Ühendame näiteks korrutises

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2$$

kaks viimast tegurit ühte rühma: $3 \cdot 4 \cdot (5 \cdot 2)$ ja arvutame selle avaldise: $3 \cdot 4 = 12$; $5 \cdot 2 = 10$; $12 \cdot 10 = 120$. Saime sama arvu, mille oleksime saanud korrutamisel ilma tegureid rühmadesse ühendamata: $3 \cdot 4 = 12$; $12 \cdot 5 = 60$; $60 \cdot 2 = 120$.

Seda omadust nimetatakse korrutamise *ühenduvuse* (*assotsiatiivsuse*) *seaduseks*. Teda võib vaadelda vahetuvuse seaduse järeldusena. Tõepoolest võime kooskõlas selle seadusega ümber paigutada tegurid 5 ja 2 rea algusse, s. o. kirjutada korrutise nii: $5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Sel kujul tegurid 5 ja 2 moodustavad ühe rühma, sest punktis 55 toodud seletuse kohaselt avaldis $5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ tähendab korrutist $(5 \cdot 2) \cdot 3 \cdot 4$. Nüüd aga see rühm võib vahetada oma koha kummagi ülejäänud teguriga, tähendab

$$(5 \cdot 2) \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot (5 \cdot 2).$$

Üldkujul on võimalik avaldada korrutamise ühenduvuse seadust (kolme teguri jaoks) järgmiselt:

$$abc = (ab)c = a(bc).$$

**58. Kuidas korrutada korrutisega ja kuidas korrutada korrutist?** 1) Nägime (p. 50), et kui on tarvis korrutada mistahes arvu 30-ga (s. t. korrutisega $3 \cdot 10$), siis võib korrutada korrutatavat 3-ga ja seejärel korrutada leitud arvu 10-ga; samuti mistahes arvu korrutamiseks 400-ga (s. t. korrutisega $4 \cdot 100$) võib korrutada seda arvu 4-ga ja seejärel leitud arvu 100-ga. Selline võte järjestikuliseks korrutamiseks iga teguriga on rakendatav ka nelja, viie ja enama teguri korrutamise puhul. Niisiis:

$$7 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 8) = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = [(7 \cdot 3) \cdot 5] \cdot 8,$$

sest et p. 57 kohaselt on võimalik tegureid 3, 5 ja 8 ühendada ühte rühma.

Seega:

**selle asemel et korrutada korrutisega, võib korrutada algul esimese teguriga, siis saadud korrutist korrutada teise teguriga, seejärel kolmanda teguriga jne.**

2) Olgu tarvis korrutada 8-ga korrutist $7 \cdot 3 \cdot 4$. Selle asemel et algul arvutada korrutis $7 \cdot 3 \cdot 4$ (see võrdub 84-ga) ja seejärel teda korrutada 8-ga (saame 672), võime korrutada 8-ga ühte mingit tegurit (7, 3 või 4), jättes teised ilma muutuseta ja alles seejärel neid korrutada omavahel. Korrutame näiteks 8-ga tegurit 3. Siis leiame: $7 \cdot (3 \cdot 8) \cdot 4 = 7 \cdot 24 \cdot 4 = 672$ — saime sama arvu mis varemaltki.

Seega:

**selle asemel et korrutada korrutist mingi arvuga, võib korrutada selle arvuga ühte tegurit ja jätta teised tegurid muutmata.**

Niisiis:

$$(5 \cdot 4 \cdot 8) \cdot 3 = (5 \cdot 3) \cdot 4 \cdot 8 = 5 \cdot (4 \cdot 3) \cdot 8 = \\ = 5 \cdot 4 \cdot (8 \cdot 3) = 480.$$

See reegel osutub vahetuvuse ja ühenduvuse seaduste ilmseks järelduseks.

**59. Kuidas korrutada summat mistahes arvuga?** Kui korrutasime varemalt (p. 48) arvu 846 (s. o. 6 ühelise, 4 kümnelise ja 8 sajalise summat) 5-ga, korrutasime 5-ga eraldi ühelised, eraldi kümnelised ja eraldi sajalised ning liitsime saadud arvud. Samasugusel viisil on võimalik toimida igakord, kui on tarvis korrutada summat mistahes arvuga. Olgu näiteks tarvis korrutada 3-ga summat $10 + 7 + 5 + 9$. See tähendab, et tuleb leida summa

$$(10 + 7 + 5 + 9) + (10 + 7 + 5 + 9) + \\ + (10 + 7 + 5 + 9).$$

Kuid selleks, et liita summat, võime liita eraldi iga liidetava üksteise järel (p. 21). Seepärast võime asendada eeltoodud summa järgmisega:

$$10 + 7 + 5 + 9 + 10 + 7 + 5 + 9 + 10 + 7 + 5 + 9.$$

Rühmitame selle summa liidetavad nii:

$$(10 + 10 + 10) + (7 + 7 + 7) + (5 + 5 + 5) + \\ + (9 + 9 + 9);$$

sellest leiame:

$$10 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 3.$$

Sellist arutelu võib korrata mistahes teiste arvude puhul. Seega:

**selle asemel et korrutada summat mingi arvuga, võib korrutada selle arvuga iga liidetavat eraldi ja liita saadud tulemused.**

Kuna korrutis ei olene tegurite järjekorrast, siis järgneb eeltoodud reeglist:

**selle asemel et korrutada mistahes arvu summaga, võib korrutada seda arvu eraldi iga liidetavaga ja tulemused liita.**

Nii ka toimisime, kui (p. 51) korrutasime arvu 3826 arvuga 472, s. o. summaga $2 + 70 + 400$.

Seda omadust nimetatakse korrutamise *jaotuvuse (distributiivsuse) seaduseks* (liitmise suhtes), sest selle järgi on võimalik summa korrutamist j a o t a d a üksikute liidetavate vahel.

Üldkujul on võimalik seda omadust avaldada järgmiselt:

$$(a + b + c + \ldots)\, m = am + bm + cm + \ldots,$$

või

$$m(a + b + c + \ldots) = ma + mb + mc + \ldots .$$

*Märkus.* Arusaamatuste vältimiseks oleks tarvis avaldist $am + bm + cm + \ldots$ kirjutada nii: $(am) + (bm) + (cm) + \ldots$ .

Kirjutamisviisi lihtsustamiseks on aga kokku lepitud, et kui avaldises esinevad liitmise, lahutamise ja korrutamise tehted ja sulgusid pole, siis kõigepealt tuleb teostada korrutamine, seejärel aga liitmine ja lahutamine. Siis on ka sulgudeta selge, millises järjekorras tuleb teostada tehted avaldises $am + bm + cm + \ldots$ .

## VII. Jagamine.

**60.** Seni esinesid juhud, kus antud tegurite järgi tuli leida korrutis. On aga väga palju ülesandeid, milledes, ümberpöördult, kahe arvu korrutis on antud ja üks tegureist on tundmatu.

***Ülesanne 1.*** *Klassis jaotati 75 vihikut, andes igale õpilasele 3 vihikut. Mitu õpilast on klassis?*

Kui ühele õpilasele antud vihikute arv (s. t. 3) korrutada tundmatu õpilaste arvuga, siis peame saama jaotatud vihikute üldarvu (s. t. 75). Seega on siin antud korrutis

(75) ja üks tegureist (3), otsitakse aga teist tegurit. Otsitav õpilaste arv on 25, sest $3 \cdot 25 = 75$.

***Ülesanne 2.*** *Klassis on 30 õpilast. Kui nendele võrdselt jaotada 120 lehte paberit, kui palju saab iga õpilane?*

Kui tundmatu paberilehtede arv, mida sai iga õpilane, korrutada õpilaste arvuga (30), siis peame saama jaotatud paberilehtede üldarvu (s. t. 120). Seega on siingi antud korrutis (120) ja üks tegureist (30), otsitakse aga teist tegurit. Iga õpilane saab 4 lehte, sest $4 \cdot 30 = 120$.

**61.** *Tehet ühe teguri leidmiseks antud korrutise ja teise teguri järgi nimetatakse jagamiseks.*

Seejuures nimetatakse antud korrutist *jagatavaks*, antud tegurit *jagajaks*, otsitavat tegurit aga *jagatiseks*.

Esimese ülesande lahendamiseks tuleb 75 jagada 3-ga; siin jagatav on 75, jagaja 3, jagatis 25.

Teise ülesande lahendamiseks tuleb 120 jagada 30-ga; siin jagatav on 120, jagaja 30, jagatis 4.

Jagamist tähistatakse kas märgiga :, mis lahutab jagatavat ja jagajat (jagatav vasakul, jagaja paremal), või horisontaaljoone abil, mis samuti lahutab jagatavat ja jagajat (jagatav ülal, jagaja all). Sel viisil kumbki võrdustest

$$75 : 3 = 25, \quad \frac{75}{3} = 25$$

tähendab, et arv 75 jagamisel 3-ga annab jagatiseks arvu 25.

**62.** *Märkus.* Et tegurite järjekorra muutumisel korrutis ei muutu (korrutamise vahetuvuse seadus), siis jagamise tulemuste mõttes on ükskõik, kumb kahest tegurist — korrutatav või korrutaja — on antud ja kumba otsitakse. Kuid kui arvestada lahendatava ülesande sisulist külge, siis võib see kahel nimetatud juhul osutuda täiesti lahkuminevaks. Nii näiteks otsitakse esimeses ülesandes, m i t u k o r d a tuleb võtta 3 (vihikut), et saaksime 75 (v i h i k u t); siin on antud korrutatav (3) ja otsitakse korrutajat. Teises ülesandes vastupidi otsitakse k u i s u u r a r v (paberilehti) t u l e b v õ t t a 30 korda, et saada 120 (lehte); siin on antud korrutaja ja otsitakse korrutatavat.

Niisiis on võimalik ühe ja sama aritmeetilise tehtega — jagamisega — lahendada kahesuguseid, sisult erinevaid ülesandeid.

**63. Nulliga jagamine pole võimalik.** Igasugusel jagamisel võib olla jagajaks mistahes arv peale nulli. *Nulliga jagamine pole võimalik.*

Vaatleme, miks see on nii. Kui jagatavaks pole null, vaid mistahes muu arv, näiteks 5, siis tema jagamine nulliga tähendaks leida niisugune arv, mis pärast korrutamist nulliga annaks 5; sellist arvu aga pole olemas, sest iga arv korrutamisel nulliga annab uuesti nulli. Kui aga jagatav samuti võrdub nulliga, siis on jagamine võimalik, kuid jagatiseks võib olla mistahes arv, sest et sel juhul mistahes arv korrutamisel jagajaga (0) annab meile jagatava (s. t. uuesti nulli); seega, antud juhul ei anna jagamine, kuigi ta on võimalik, ühte kindlat tulemust.

Seepärast ei saa null olla jagajaks.

**64. Jäägiga jagamine.** Ühe arvu jagamine teisega pole alati võimalik. Nii näiteks pole arvu 27 võimalik jagada 6-ga, sest et ei ole niisugust täisarvu, mis korrutamisel 6-ga annaks 27. Öeldakse, et 27 e i j a g u 6-ga.

Kui tahame näiteks jaotada 27 vihikut võrdselt 6 õpilase vahel, siis seda pole võimalik teha; võime anda igale õpilasele 4 vihikut, milleks kulub kokku 24 vihikut; 3 vihikut jääb seejuures üle.

On lepitud kokku ka sellisel juhul rääkida 27 jagamisest 6-ga; 27 nimetatakse endiselt jagatavaks, 6 jagajaks; arvu 4 nimetatakse *mittetäielikuks jagatiseks*, arvu 3 aga *jagamise jäägiks*. Jagamist ennast sel juhul nimetatakse *jäägiga jagamiseks*. Seega: *jäägiga jagamisel nimetatakse mittetäielikuks jagatiseks suurimat arvu, mis korrutamisel jagajaga annab korrutise, mis pole suurem jagatavast. Jagatava ja selle korrutise vahet nimetatakse jagamise jäägiks.*

Siit järeldub, et *jääk on alati väiksem jagajast.*

Jäägiga jagamise võime kirjutada järgmiselt:

$$27 : 6 = 4 \text{ (jääk 3)}.$$

Veel mõned näited jäägiga jagamisest:

$$\frac{32}{5} = 6 \text{ (jääk 2)}; \quad 100 : 9 = 11 \text{ (jääk 1)}.$$

**65. Täisarvude jagamise üldine definitsioon.** Täisarvude valdkonnas võime anda jäägita jagamisele ja jäägiga jagamisele järgmise üldise definitsiooni: *jagada arv* $a$ (jagatav) *arvuga* $b$ (jagaja) *tähendab leida kaks niisugust arvu* $q$ (jagatis) *ja* $r$ (jääk), *mis rahuldaksid seoseid:*

$$a = bq + r \text{ ja } r < b.$$

Võrdus $a = bq + r$ aga väljendab, et

$$a = \overbrace{(b + b + b + \ldots + b)}^{q \text{ liidetavat}} + r,$$

ja kuna seejuures $r < b$, siis jagatis $q$ ilmselt näitab suurimat arvu, mille korrutis jagajaga mahub jagatavasse.

On hõlpus veenduda, et kui jagaja $b$ ei võrdu nulliga, siis jagamise tehe on alati võimalik ja annab alati ühese tulemuse. Tõepoolest:

1) kui $a < b$, siis $q = 0$ ja $r = a$ ja ainult see arvude paar rahuldab definitsiooni;

2) kui $a = b$, siis $q = 1$ ja $r = 0$ ja mingi teine arvude paar ei rahulda definitsiooni; lõpuks

3) kui $a > b$, siis jagatis $q$, nagu nägime, näitab suurimat arvu, mille korrutis jagajaga $b$ mahub jagatavasse $a$; seepärast kui ainult $b$ ei võrdu nulliga, siis see jagatis on alati olemas, ja on selge, et ta on ühene; kuid siis on olemas ka jääk $r$ (ta võrdub vahega $a - bq$) ja ta on samuti ühene.

Märgime veel, et jagamisel arvuga $b$ võib olla jäägiks mistahes arv reast

$$0, 1, 2, \ldots, b - 1.$$

Siit järgneb, et erinevate jääkide arv, mis saadakse jagamisel arvuga $b$, võrdub $b$-ga.

**66. Jagamise võrdlus korrutamisega.** Kahe arvu korrutamisel otsitakse nende korrutist; jagamisel aga (jäägita jagamisel) on viimane antud ning otsitakse arvu, mis korrutamisel on antud (korrutatav või korrutaja). Seega *jagamine on korrutamise pöördtehe* (korrutamine aga on jagamise pöördtehe).

Kui jagamisel saadakse jääk, siis jagatav ei võrdu jagaja ja jagatise korrutisega, vaid võrdub selle korrutise ja jäägi summaga. Nii näiteks $27 = 6 \cdot 4 + 3$.

**67. Jagamisega lahendatavad ülesanded.** Toome mõned tüüpilised ülesanded, millede lahendamisel kasutatakse jagamist.

1) *Ülesanded, kus on tarvis leida, mitu korda mahutab suurem arv endasse väiksemat* või, mis on sama, *mitu korda üks arv on suurem või väiksem teisest*; näiteks mitu korda sisaldab 20 rubla 5 rublat.

2) *Ülesanded, kus antud arvu on tarvis jaotada mitmeks võrdseks osaks*: näiteks kui on tarvis 60 lehte paberit jaotada 12 võrdseks osaks (lühemalt: leida kaheteistkümnendik 60 lehest).

3) *Ülesanded, kus antud arvu on tarvis vähendada mingi arv korda*, sest et vähendada näiteks 60 paberilehte 12 korda tähendab võtta 60 lehe asemel üks kaheteistkümnendik 60 lehest.

**68.** Jagamist on võimalik teostada liitmise, lahutamise ja korrutamise abil. Olgu näiteks tarvis 212 jagada 53-ga. Otsitava jagatise võime leida:

1) Liitmisega:

$$53 + 53 = 106; \quad 106 + 53 = 159; \quad 159 + 53 = 212.$$

Leidsime, et 53 tuleb võtta liidetavana 4 korda, et saada 212; otsitavaks jagatiseks on järelikult 4.


TRÜ Raamatukogu

2) Lahutamisega:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 212 | 159 | 106 | 53 |
| − 53 | − 53 | − 53 | − 53 |
| 159 | 106 | 53 | 0 |

Leidsime, et 53 on võimalik lahutada 212-st 4 korda; otsitavaks jagatiseks on järelikult 4.

3) Korrutamisega:

$$53 \cdot 2 = 106;\quad 53 \cdot 3 = 159;\quad 53 \cdot 4 = 212.$$

Otsitavaks jagatiseks on 4.

Kui jagatiseks on suur arv, siis need viisid pole kohased; aritmeetika näitab kätte lihtsama viisi, millega me nüüd ka tutvume.

**69. Kuidas teada saada, kas jagatiseks on ühekohaline arv?** Selleks pole muud vaja kui korrutada (peast) jagajat 10-ga ja võrrelda saadud korrutist jagatavaga.

Näide 1. $534 : 68 = ?$

Kui 68 korutada 10-ga (selleks kirjutame arvule 68 paremale juurde ühe nulli), siis saame 680; 534 aga on väiksem 680-st; jagatis peab seepärast olema väiksem kui 10; tähendab, et jagatiseks peab olema ühekohaline arv.

Näide 2. $534 : 37 = ?$

Kui 37 korrutame 10-ga, siis saame 370; kuid 534 on 370-st suurem; seepärast ei saa jagatis olla väiksem kui 10; tähendab, ta ei saa olla ühekohaline arv.

**70. Ühekohalise jagatise leidmine.** Vaatleme kahte juhtu: kui jagaja on samuti ühekohaline ja kui jagaja on mitmekohaline.

**1) Kui jagaja ja jagatis mõlemad on ühekohalised arvud, siis leitakse jagatis korrutamistabeli järgi.** Näiteks

56 jagamisel 8-ga on jagatiseks 7, sest seitse korda kaheksa on täpselt 56;

42 jagamisel 9-ga on jagatiseks 4, sest neli korda üheksa on 36, mis on väiksem kui 42; viis korda 9 on aga 45, mis on suurem kui 42; tähendab jagatiseks tuleb võtta 4, kusjuures jäägiks saame $42 - 36 = 6$.

**2) Kui jagaja koosneb mitmest numbrist, jagatis aga ühest numbrist, siis leitakse see jagatis ühe või mitme numbri proovimisega.**

Näide. 43530 : 6837.

Kõigepealt veendume võtte abil, mis on toodud p. 69, et jagatiseks on ühekohaline arv. Seejärel jätame mõttes ära kõik jagaja numbrid peale esimese vasakul, s. o. jätame jagajasse ainult 6 tuhat. Jagatavas jätame ära mõttes paremalt poolt samapalju numbreid, kuipalju neid ära jätsime jagajas, s. t. jätame jagatavasse ainult 43 tuhat. Seame nüüd üles küsimuse: missuguse arvuga on tarvis korrutada kuut, et saada 43 või arv, mis on väiksem 43-st, kuid võimalikult lähedam 43-le? Korrutamistabelist leiame, et niisuguseks arvuks on 7, sest seitse korda kuus on 42, kaheksa korda kuus aga on 48. Tähendab otsitav jagatis peab olema 7 või väiksem kui 7 (seitsmest väiksemaks ta võib osutuda seepärast, et jätsime nii jagatavas kui ka jagajas ära rea numbreid). Proovimist alustame arvuga 7. Selleks korrutame 6837 7-ga; kui korrutis osutub suuremaks kui 43530, siis arv 7 pole kõlbulik; siis proovime järgmist väiksemat arvu 6:

| | | |
|---|---|---|
| 6837 | 6837 | 43530 |
| · 7 | · 6 | — 41022 |
| 47859 | 41022 | 2508 |

Korrutis 6837 · 7 osutus suuremaks kui 43530, korrutis 6837 · 6 aga väiksemaks kui see arv; tähendab jagatiseks peab olema 6, kusjuures jäägiks saame 2508 [1].

*Märkus.* Mõnedel juhtudel on käepärasem leida esimest proovimisnumbrit teisiti. Tähele pannes, et võetud näites jagaja 6837 vähe erineb 7-st tuhandest (igatahes vähem kui 6-st tuhandest), leiame, missuguse arvuga on tarvis korrutada 7, et saada 43-le võimalikult lähedast arvu. Korrutamistabelist leiame, et niisuguseks arvuks on 6. Tähendab, jagatis peab olema 6 või suurem kui 6 (seepärast, et jagaja on väiksem 7 tuhandest). Alustame proovimist arvuga 6. Selleks korrutame jagaja 6-ga ja lahutame korrutise jagatavast; kui jääk on suurem kui 6837, siis arv 6 on väike ja siis tuleb proovida arvu 7; kui aga jääk on väiksem kui 6837, siis arv 6 on leitud õigesti. Jäägiks osutus 2508; tähendab arv 6 oli leitud õigesti.

Nii on kasulik toimida siis, kui jagaja teine number on suurem kui 5. Näiteks jagaja 6837 läheneb rohkem 7000-le kui 6000-le, sest et tema teine number on suurem kui 5.

**71. Jagatise leidmine üldjuhul.** Olgu tarvis 64528 jagada 23-ga. Suuremaks selguseks kujutleme seda tehet kui arvu 64528 jaotamist 23-ks võrdseks osaks.

1) Võtame algul meie arvust 64 tuhandelist ja püüame jaotada seda 23-ks võrdseks osaks. Igasse ossa saame 2 tuhandelist ja järele jääb veel 18 tuhandelist.

2) Need järelejäänud 18 tuhandelist moodustavad 180 sajalist; liidame nendega veel 5 sajalist, mis leiduvad

---

[1] Töö vähendamiseks on mõnikord otstarbekohane, enne kui kirjutada jagatisse proovitavat arvu ja korrutada temaga kogu jagatavat, korrutada mõttes temaga ainult jagaja 2 esimest numbrit ja võrrelda saadud korrutist jagatava vastavate järkudega.

antud arvus; nüüd püüame saadud 185 sajalist uuesti jaotada 23-ks võrdseks osaks: igasse ossa saame 8 sajalist ja 1 sajaline jääb jaotamata.

3) See järelejäänud sajaline moodustab 10 kümnelist; nendega liidame veel need 2 kümnelist, mida sisaldab meie arv: saadud 12 kümnelist püüame jaotada 23-ks võrdseks osaks; siin igasse üksikusse ossa ei jätku ühtegi kümnelist, vaid kõik 12 kümnelist jäävad jaotamata.

4) Need järelejäänud 12 kümnelist moodustavad 120 ühelist; nendega liidame veel need 8 ühelist, mida sisaldab meie arv. Saadud 128 ühelist püüame jaotada 23-ks võrdseks osaks: saame igasse ossa 5 ühelist ja 13 ühelist jäävad jaotamata.

Sel viisil saime igasse osasse 2 tuhandelist, 8 sajalist ja 5 ühelist, kuna 13 ühelist jäi jaotamata. See tähendab, et arvu 64528 jagamisel 23-ga on jagatiseks 2805, jäägiks aga 13.

Tehe paigutatakse seejuures tavaliselt nii:

```
64528 | 23
 46   | 2805
 185
 184
  128
  115
   13
```

Seejuures näeme: 1) et arvud, milledest järk-järgult koostatakse jagatis, kujutavad endast erinevate järkude ühikuid (2 tuhandelist, 8 sajalist, 0 kümnelist ja 5 ühelist); seepärast selle asemel, et neid täielikult välja kirjutada (2000 + 800 + 5), võime lihtsalt kirjutada vastavad numbrid üksteise järele, nii nagu see on näidatud kirjutises; seejuures peame kirjutama nulli igakord, kui

jagamisel ei saada väärtusega numbrit (kümnelised meie näites); 2) et kui saame jäägi mingist jagamisest (meie juhul näiteks 18 esimesel jagamisel), et siis võime tema peenestamiseks järgmise madalama järgu ühikuteks ja jagatavas leiduvate sama järgu ühikute liitmiseks lihtsalt „alla tuua" jagatava vastava numbri (meie näites 5) ja kirjutada see saadud jäägile paremale juurde, nagu see meie kirjutises on näidatud punktiiriga.

Nende lihtsustuste tõttu on võimalik toimetada jagamist teatava vilumuse puhul küllalt kiiresti.

Olgu toodud veel kolm jagamise näidet:

```
1470035 | 7          3480000 | 15          130987 | 929
14      |------      30      |------       929    |------
-----   | 210005     -----   | 232000      -----  | 140
 7                   48                     3808
 7                   45                     3716
-----                -----                  -----
  0035                30                      927
    35                30
    --                ---
     0                000
```

**72. Lühendatud viis ühekohalise arvuga jagamiseks.** Kui jagaja on ühekohaline, siis on kasulik kirjutise lühendamiseks omandada harjumus teostada peast kõik lahutamised, välja kirjutades ainult jäägid.

Näiteks nii:

```
563087 | 6          või veelgi lühemalt:  563087 | 6
-----  |------                            -------|------
 23    | 93847                                5  93847
 --
  50
  --
   28
   --
    47
    --
     5
```

Siin joone all olev number 5 tähistab viimast jääki.

**73. Jagamine arvuga, mis lõpeb nullidega.** Jagamine lihtsustub sel juhul, kui jagaja lõpeb ühe või mitme nulliga. Võtame algul juhu, kui jagajaks on üheline koos nullidega. Jagada mingi arv 10-ga, 100-ga, 1000-ga jne. tähendab teada saada, kui palju sisaldab antud arv kümnelisi, sajalisi, tuhandelisi jne. Kuid seda on hõlpus teada saada varemalt selgitatud numeratsioonireegli järgi (p. 13). Näiteks:

$$54634 : 10 = 5463 \text{ (jääk 4)};$$
$$54634 : 1000 = 54 \text{ (jääk 634)}.$$

***Reegel.*** **Et jagada mingit arvu arvuga, mis koosneb nullidega ühelisest, tuleb ainult eraldada jagatavas paremalt niimitu numbrit, kuimitu nulli on jagajas; siis jagatava järelejäänud numbrid kujutavad endast jagatist, eraldatud numbrid aga jääki.**

Võtame nüüd juhu, kui jagajaks on mingi arv, mis lõpeb nullidega; näiteks:

| 389224 | 7300 |
|---|---|
| 365 | 53 |
| 242 | |
| 219 | |
| 2324 | |

Jagaja kujutab endast 73 sajalist. Et teada saada, mitu korda sisaldab jagatav 73 sajalist, jaotame ta kaheks osaks; sajalisteks ja ühelisteks. Esimeseks osaks on 3892 sajalist, teiseks osaks 24 ühelist. Ainult üks nendest osadest, nimelt sajalised, võib sisaldada 73 sajalist. 3892 sajalist sisaldab aga 73 sajalist niimitu korda, kuimitu korda 3892 mistahes ühikut sisaldab 73 samasugust ühikut. Seepärast jagame 3892 73-ga, jättes tähele panemata, et need on sajalised.

Jagamisega leiame, et 3892 sajalist sisaldab 73 sajalist 53 korda, kusjuures jääb järele 23 sajalist. Lisades 23 saja-

lisele jagatava 24 ühelist, saame 2324; see arv ei sisalda 73 sajalist ühtegi korda; järelikult on 2324 jäägiks.

Toome veel ühe näite, milles nii jagatav kui ka jagaja lõpevad nullidega:

$$\begin{array}{r|l} 35000 & 7300 \\ \cline{2-2} 292 & 4 \\ \cline{1-1} 5800 & \end{array}$$

***Reegel.*** **Kui jagaja lõpeb nullidega, siis jäetakse mõttes need nullid ära, samuti jäetakse ära jagataval paremalt poolt niimitu numbrit, kuimitu nulli jäeti ära jagajas; järelejäänud arvud jagatakse ja jäägile kirjutatakse juurde jagatava ärajäetud numbrid.**

**74. Korrutamise kontrollimine.** Kuna korrutis ei muutu tegurite kohtade vahetamisel, siis korrutamise kontrollimiseks võib korrutada teiskordselt, korrutades korrutajat korrutatavaga.

Näiteks:

| Korrutamine: | Kontroll: |
|---|---|
| 532 | 145 |
| · 145 | · 532 |
| 2660 | 290 |
| 2128 | 435 |
| 532 | 725 |
| 77140 | 77140 |

Mõlemad tehted andsid ühesuguse tulemuse; järelikult on väga tõenäoline, et tehe on teostatud õigesti.

Korrutamist saab kontrollida ka jagamisega. Selleks tuleb jagada saadud korrutis ühe teguriga; kui saadakse jagatiseks teine tegur, siis võib pidada tõenäoliseks, et korrutamine on teostatud õigesti.

**75. Jagamise kontrollimine.** Jagamist on võimalik kontrollida korrutamisega, toetudes sellele, et jagatav peab võrduma jagaja ja jagatise korrutisega (pluss jääk, kui see on olemas). Näiteks:

| Jagamine: | | | Kontroll: | |
|---|---|---|---|---|
| 8375 | 42 | | 199 | |
| 42 | 199 | | · | 42 |
| 417 | | | | 398 |
| 378 | | | | 796 |
| 395 | | | | 8358 |
| 378 | | | + | 17 |
| 17 | | | | 8375 |

Korrutasime jagatise 199 jagajaga 42 ja liitsime saadud korrutisega jäägi 17. Et pärast seda saadi arv, mis võrdub jagatavaga, siis on väga tõenäoline, et tehe on teostatud õigesti.

Kui jagamine on teostatud jäägita, siis on võimalik kontrollida seda ka jagamisega. Tõepoolest, et jagatav on jagaja ja jagatise korrutiseks, siis peame jagatava jagamisel jagatisega saama jagaja. Näiteks:

| Jagamine: | | Kontroll: | |
|---|---|---|---|
| 544 | 17 | 544 | 32 |
| 51 | 32 | 32 | 17 |
| 34 | | 224 | |
| 34 | | 224 | |

**76. Kuidas jagada korrutisega?** Olgu tarvis 60 jagada korrutisega $5 \cdot 3$, s. t. 15-ga. Selleks pole tarvis muud, kui 60 jagada 5-ga ja saadud jagatis jagada veel 3-ga.

$$60 : 5 = 12; \quad 12 : 3 = 4.$$

Kõige hõlpsam on seletada, miks selline kahekordne jagamine (5-ga ja 3-ga) annab vajaliku tulemuse, kui

vaatleme jagamist jagatava jaotamisena võrdseteks osadeks. Siis võib öelda, et esimesel jagamisel (5-ga) jaotame 60 5-ks võrdseks osaks, kusjuures igas osas saame 12; teisel jagamisel (3-ga) jaotame 12 3-ks võrdseks osaks, kusjuures igas osas saame 4. Seda on võimalik näitlikult kujutada nii:

$$\overbrace{\underbrace{4+4+4}_{12}\quad\underbrace{4+4+4}_{12}\quad\underbrace{4+4+4}_{12}\quad\underbrace{4+4+4}_{12}\quad\underbrace{4+4+4}_{12}}^{60}$$

Siit näeme, et pärast kaht niisugust jagamist arv 60 osutub jaotatuks 15-ks võrdseks osaks.

Samasugusel viisil on võimalik selgitada, et arvu 300 jagamiseks kolme teguri 3, 5 ja 4 korrutisega on võimalik 300 jagada 3-ga (saame 100), siis see jagatis jagada 5-ga (saame 20) ja lõpuks viimane jagatis jagada 4-ga (saame 5). Seega:

**selle asemel et jagada mingit arvu korrutisega, võib jagada seda arvu esimese teguriga, saadud jagatist jagada teise teguriga, seda jagatist jagada kolmanda teguriga jne.** (seejuures eeldatakse, et iga jagamine toimub jäägita).

Seda omadust on võimalik mõnikord kasutada *peast jagamisel*: näiteks selleks, et 1840 jagada 20-ga, võtame arvesse, et $20 = 10 \cdot 2$, ja jagame 1840 10-ga (saame 184), saadud arvu aga jagame 2-ga (saame 92); analoogiliselt, selleks et jagada mingit arvu 8-ga, s. t. korrutisega $2 \cdot 2 \cdot 2$, võib jagada jagatavat 2-ga, siis veelkord 2-ga ja lõpuks veelkord 2-ga.

**77. Jagatise muutumine jagatava ja jagaja muutmisel.**

**1) Kui suurendame** (või vähendame) **jagatavat mingi arv korda, siis jagatis suureneb** (või väheneb) **sama arv korda.**

Kui näites $20 : 5 = 4$ suurendame jagatavat 3 korda, s. t. võtame 20 asemel jagatavaks $20 + 20 + 20$, siis

saame $60 : 5 = 12$. Uus jagatis osutub eelmisest 3 korda suuremaks, sest et kui 20 sisaldab viit 4 korda, siis summa $20 + 20 + 20$ sisaldab viit ilmselt 4 korda, siis veel 4 korda ja veelkord 4 korda, s. t. 3 korda rohkem, kui teda sisaldab 20.

**2) Kui suurendame** (või vähendame) **jagajat mingi arv korda, siis jagatis väheneb** (või suureneb) **sama arv korda.**

Kui näites $60 : 5 = 12$ suurendame jagajat näiteks 3 korda, s. t. võtame 5 asemel jagajaks 15, siis saame $60 : 15 = 4$. Uus jagatis osutub 3 korda väiksemaks eelmisest. Nii see peabki olema, sest 15 on korrutis $5 \cdot 3$; selle asemel aga, et jagada korrutisega, võib jagada jagatavat esimese teguriga (5-ga) ja saadud arvu (12) jagada seejärel teise teguriga (3-ga), mistõttu ta väheneb (3 korda).

Seejuures eeldatakse, et jagamine toimub *ilma jäägita.* Kui aga esineb jääk, siis jagatis võib muutuda teisiti, kui praegu oli nimetatud. Võtame näiteks seesuguse jagamise $23 : 5 = 4$ (jääk 3) ja suurendame siin jagatavat 3 korda. Saame: $69 : 5 = 13$ (jääk 4); jagatis suurenes enam kui 3 korda.

*Märkus.* Kui jagatav ja jagaja muutuvad korraga, siis jagatis võib mõnikord suureneda, mõnikord väheneda, mõnikord aga jääda muutuseta. Selleks, et ette teada saada, kuidas muutub jagatis, tuleb eeldada, et algul muutub ainult jagatav, seejärel aga ka jagaja (vrd. p. 53).

Tuleb pöörata erilist tähelepanu nendele juhtudele, millal jagatis ei muutu.

**3) Jagatis ei muutu, kui jagatavat ja jagajat suurendada sama arv korda,**

sest jagatava suurendamisel jagatis suureneb, jagaja suurendamisel väheneb ta aga sama arv korda. Kui näites $60 : 15 = 4$ suurendame nii jagatavat kui ka jagajat 5 korda, siis saame $300 : 75 = 4$.

**4) Jagatis ei muutu, kui jagatavat ja jagajat vähendada sama arv korda,**

sest jagatava vähendamisel jagatis väheneb, jagaja vähendamisel ta aga suureneb sama arv korda. Kui samas näites vähendame jagatavat ja jagajat 5 korda, siis saame $12 : 3 = 4$.

**78. Kuidas jagada korrutist?** Olgu tarvis korrutis $8 \cdot 12 \cdot 20$ jagada 4-ga. Selle asemel et algul arvutada see korrutis (see võrdub 1920-ga) ja siis jagada see 4-ga (saame 480), võime jagada 4-ga ühe mingi teguri, jättes teised tegurid muutmata, ja siis arvutada korrutise. Näiteks jagame 12 4-ga, 8 ja 20 aga jätame muutmata; saame $8 \cdot 3 \cdot 20 = 480$, s. t. saame sama arvu, mille saime esimesel korral. Nii see peabki olema, sest et 4-ga jagamine tähendab 4 korda vähendamist; korrutise aga väheneb 4 korda kui vähendame 4 korda ühte mingit tegurit. Seega:

**selle asemel et jagada korrutist mingi arvuga, võib jagada selle arvuga ühte mingit tegurit, jättes teised tegurid muutmata.**

**79. Kuidas jagada summat ja kuidas jagada vahet?**

**1) Selle asemel et jagada summat mingi arvuga, võib jagada selle arvuga iga liidetavat eraldi ja liita saadud jagatised** (eeldatakse, et kõik jagamised toimuvad jäägita).

Selleks et summat $21 + 14 + 35$ jagada 7-ga (s. t. et teada saada, mitu korda sisaldab see summa arvu 7), võime leida, mitu korda 7 sisaldub 21-s (3 korda), siis 14-s (2 korda) ja siis veel 35-s (5 korda) ja saadud arvud liita: $3 + 2 + 5 = 10$.

**2) Selle asemel et jagada vahet mingi arvuga, võib jagada selle arvuga eraldi vähendatavat ja lahutatavat ja siis esimesest jagatisest lahutada teine.** Nii:

$$(40 - 25) : 5 = (40 : 5) - (25 : 5) = 8 - 5 = 3.$$

See peabki nii olema, sest 40 sisaldab 8 viielist, 25 aga sisaldab 5 viielist; 8 viielist miinus 5 viielist on aga ilmselt 3 viielist.

**80. Märkusi tehete järjekorra kohta valemeis.**

Liitmist ja lahutamist nimetatakse tavaliselt *esimese järgu* teheteks, korrutamist ja jagamist aga *teise järgu* teheteks. Selleks et vähendada juhtude arvu, kus tuleb kasutada sulgusid tehete järjekorra määramiseks, on kokku lepitud järgmiselt:

**kui avaldises, milles ei leidu sulgusid, esineb ainult sama järgu tehteid, siis neid teostatakse samas järjekorras, nagu nad on kirjutatud** (vasakult paremale). Seega avaldis

$$40 - 10 + 15 - 8$$

tähendab, et 40-st lahutatakse 10 (saame 30), saadud arvuga liidetakse 15 (saame 45) ja siis lahutatakse 8 (saame 37). Avaldis

$$400 : 4 \cdot 5 : 2$$

aga tähendab, et 400 jagatakse 4-ga (saame 100), jagatis korrutatakse 5-ga (saame 500) ja see korrutis jagatakse 2-ga (saame 250).

**Kui aga sulgudeta avaldises esineb erinevat järku tehteid, siis teostatakse algul teise järgu tehted (korrutamine ja jagamine), seejärel aga esimese järgu tehted (liitmine ja lahutamine).** Näiteks avaldis

$$6 + 20 \cdot 4 - 10 : 2$$

tähendab, et 20 tuleb korrutada 4-ga (saame 80), siis 10 jagada 2-ga (saame 5), siis 6-ga liita 80 (saame 86) ja lõpuks lahutada 5 (saame 81).

Kõrvalekaldumised sellest järjekorrast näidatakse sulgudega. Kui näiteks on kirjutatud:

$$6 + (20 \cdot 4 - 10) : 2,$$

siis see tähendab, et 20 tuleb korrutada 4-ga, lahutada 10, jagada 2-ga ja liita 6 (saame 41).

## II OSA.

# ARVUDE JAGUVUSEST.

**81. Eelmärkmeid.** Neljast aritmeetilisest tehtest kaks — liitmine ja korrutamine — on teostatavad alati (s. t. igasuguste arvudega). Lahutamine ei ole küll alati teostatav, kuid ta teostatavuse tunnus on väga lihtne: vähendatav ei tohi olla väiksem lahutatavast; seepärast, kui on antud kaks arvu, võime alati kohe teada saada, kas on võimalik lahutada esimesest teist või mitte.

Hoopis teisiti on lugu jagamisega: teame, et jagamine (ilma jäägita) pole alati teostatav; mõnikord on aga väga raske teada saada jagamist teostamata, kas üks arv jagub teisega või mitte. Seepärast on jagamise tehtega seotud aritmeetika kõige raskemad küsimused. Mõningaid nendest küsimustest vaatleme käesolevas osas.

Kui üks arv jagub teisega ilma jäägita, siis öeldakse lühendatult lihtsalt, et esimene arv *jagub* teisega. Sel juhul öeldakse samuti, et esimene arv on teise *kordseks*, teine aga on esimese *jagajaks*. Nii on 15 arvu 3 kordne, 3 aga on arvu 15 jagajaks.

Märgime, et null jagub mistahes arvuga (peale nulli), kusjuures jagatiseks on samuti null. Tõepoolest, et $a \cdot 0 = 0$, milline ka oleks arv $a$, siis $0 : a = 0$.

## I. Jaguvuse tunnused.

On olemas tunnuseid, millede järgi on võimalik otsustada, jagamist ennast teostamata, kas antud arv jagub või ei jagu mõne teise arvuga. Asumegi nüüd nende tunnuste vaatlemisele.

**82. Summa ja vahe jaguvus.** Jaguvuse tunnuste tuletamisel tuleb sageli kasutada järgmisi summa ja vahe omadusi:

**1) kui iga liidetav jagub ühe ja sama arvuga, siis ka summa jagub selle arvuga;**

**2) kui üks liidetav ei jagu, kõik teised liidetavad aga jaguvad mingi arvuga, siis summa ei jagu selle arvuga;**

**3) kui vähendatav ja lahutatav jaguvad ühe ja sama arvuga, siis ka vahe jagub selle arvuga.**

Omadused 1) ja 3) on ilmselt õiged: kui näiteks arv 5 sisaldub täisarv (9) korda arvus 45 ja täisarv (7) korda arvus 35, siis ta ilmselt sisaldub täisarv $(9 + 7 = 16)$ korda nende summas ja täisarv $(9 - 7 = 2)$ korda nende vahes.

Omadus 2) on hõlpsalt tõestatav, kui omadused 1) ja 3) on juba kindlaks tehtud. Võtame näiteks summa $102 = 45 + 35 + 22$. Siin liidetavad 45 ja 35 jaguvad 5-ga, viimane liidetav 22 aga ei jagu 5-ga. Tõestame, et ka summa 102 ei või jaguda 5-ga. Et 45 ja 35 jaguvad 5-ga, siis ka nende summa $45 + 35 = 80$ jagub omaduse 1) kohaselt 5-ga. Kuid võrdusest $102 = 45 + 35 + 22$ järgneb, et $102 - (45 + 35) = 22$ ehk $102 - 80 = 22$. Kui 102 jaguks 5-ga, siis omaduse 3) järgi vahe $102 - 80 = 22$ peaks samuti jaguma 5-ga; kuna aga 22 ei jagu 5-ga, siis ka 102 ei või jaguda 5-ga.

**83. 2-ga jaguvuse tunnus.** 2-ga jaguvaid arve nimetame *paarisarvudeks*, 2-ga mittejaguvaid aga *paarituteks arvudeks*. Arvude loomulikus reas paarisarvud ja paaritud arvud

vahelduvad: nii on 1 paaritu arv, 2 paarisarv, 3 paaritu arv, 4 paarisarv jne.

Iga arv, mis lõpeb nulliga, kujutab endast kümneliste summat; näiteks 320 on 32 kümnelise summa. Kuid kümneline jagub 2-ga; seepärast jagub ka kümneliste summa 2-ga (ta sisaldab niimitu korda viis 2-te, kuipalju temas on kümnelisi). Tähendab iga arv, mis lõpeb nulliga, jagub 2-ga. Näiteks:

$$320 : 2 = 160.$$

Võtame nüüd arvu, mis lõpeb mistahes paarisnumbriga, näiteks 328. Seda arvu võib avaldada summana järgmiselt:

$$328 = 320 + 8.$$

Kumbki arvudest 320 ja 8 jagub 2-ga; tähendab omaduse 1) järgi (p. 82) ka 328 jagub 2-ga ja osutub seega paarisarvuks. Seevastu aga arv, mis lõpeb paaritu numbriga, näiteks 329, ei ole jaguv 2-ga.

Tõepoolest:

$$329 = 320 + 9;$$

kuna arv 320 jagub 2-ga, arv 9 aga ei jagu, siis omaduse 2) järgi (p. 82) arv 329 ei ole jaguv 2-ga.

Seega:

**2-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis lõpevad paarisnumbriga.**

*Märkus.* Numbrit null loetakse paarisnumbriks, sest ta kujutab arvu, mis jagub 2-ga (p. 81).

**84. 4-ga jaguvuse tunnus.** Igasugune arv, mis lõpeb kahe nulliga, kujutab endast sajaliste summat; näiteks 2300 on 23 sajalise summa. Sajaline aga jagub 4-ga; seepärast jagub ka sajaliste summa 4-ga (ta sisaldab endas

niimitu korda 25 neljalist, kuipalju temas on sajalisi). Tähendab iga arv, mis lõpeb kahe nulliga, jagub 4-ga.

Näiteks:

$$2300 : 4 = 575.$$

Võtame nüüd kaks arvu, nii et kaks viimast numbrit ühel neist kujutaks neljaga jaguvat arvu, teisel aga neljaga mittejaguvat arvu, näiteks 2348 ja 2350 (48 jagub 4-ga, 50 aga ei jagu). Neid võib avaldada summadena järgmiselt:

$$2348 = 2300 + 48; \quad 2350 = 2300 + 50.$$

Esimeses näites kumbki liidetav jagub 4-ga, seepärast ka summa jagub 4-ga; tähendab arv 2348 jagub neljaga. Teises näites esimene liidetav jagub 4-ga, teine aga ei jagu, seepärast summa 2350 ei jagu 4-ga.

Seega:

**4-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, millede kaks viimast numbrit väljendavad 4-ga jaguvat arvu.**

Samasugusel viisil on võimalik hõlpsasti tõestada, et 8-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, millede kolm viimast numbrit väljendavad 8-ga jaguvat arvu.

**85. 5-ga ja 10-ga jaguvuse tunnused.** Kümneline jagub 5-ga ja 10-ga; seepärast arv, mis koosneb kümnelistest, s. o. mis lõpeb nulliga, jagub 5-ga ja 10-ga. Kui arv ei lõpe nulliga, siis ta ei jagu 10-ga, 5-ga jagub ta aga ainult siis, kui tal viimaseks numbriks on 5, seepärast et kõikidest ühekohalistest arvudest jagub 5-ga ainult 5.

Niisiis:

**5-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis lõpevad nulliga või numbriga 5; 10-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis lõpevad nulliga.**

*Märkus.* Samasugusel viisil on võimalik veenduda, et 25-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, millede kaks viimast numbrit on kas nullid või 25 või 50 või 75.

50-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, millede kaks viimast numbrit on kas nullid või 50.

**86. 3-ga ja 9-ga jaguvuse tunnused.** Kõigepealt tähendame, et 3-ga ja 9-ga jaguvad kõik arvud, mis on kirjutatud ainult numbri 9 abil, s. t. 9, 99, 999 jne. Tõepoolest:

$$999 : 3 = 333;\quad 9999 : 3 = 3333 \text{ jne.}$$
$$999 : 9 = 111;\quad 9999 : 9 = 1111 \text{ jne.}$$

Seejärel võtame mingi arvu, näiteks 2457, ja lahutame selle erinevate järkude ühikuteks (peale lihtüheliste, mis jätame lahutamata):

$$\begin{aligned} 2457 = {} & 1000 + 1000 + \\ & + 100 + 100 + 100 + 100 + \\ & + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + \\ & + 7. \end{aligned}$$

Lahutame iga tuhandelise 999-ks ja 1-ks, iga sajalise 99-ks ja 1-ks, iga kümnelise 9-ks ja 1-ks. Siis saame 2 tuhandelise asemel 2 korda 999 ja 2 ühelist, 4 sajalise asemel saame 4 korda 99 ja 4 ühelist, 5 kümnelise asemel 5 korda 9 ja veel 5 ühelist. Järelikult:

$$\begin{aligned} 2457 = {} & 999 + 999 && + 2 + \\ & + 99 + 99 + 99 + 99 && + 4 + \\ & + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 && + 5 + \\ & && + 7. \end{aligned}$$

Liidetavad 999, 99 ja 9 jaguvad 3-ga ja 9-ga; tähendab antud arvu jaguvus 3-ga või 9-ga sõltub ainult summast $2 + 4 + 5 + 7$; kui see summa jagub (või ei jagu) 3-ga või 9-ga, siis ka antud arv jagub (ei jagu) nende arvudega. Summa $2 + 4 + 5 + 7$ liidetavateks on arvud, mida

kujutavad antud arvu numbrid üksikult võttes; lühidalt öeldakse, et see on antud arvu numbrite summa ehk tema *ristsumma.* Seepärast:

**3-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, millede numbrite summa (ristsumma) jagub 3-ga;**

**9-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, millede numbrite summa (ristsumma) jagub 9-ga.**

Arvu 2457 numbrite summa on 18; 18 jagub 3-ga ja 9-ga; tähendab 2457 jagub nii 3-ga kui ka 9-ga. Tõepoolest:

$$2457 : 3 = 819; \quad 2457 : 9 = 273.$$

Kuna 9 jagub 3-ga, siis mistahes arv, kui ta jagub 9-ga, jagub samuti ka 3-ga. Kuid arv võib jaguda 3-ga ja samal ajal mitte jaguda 9-ga. Nii näiteks arvu 17331 numbrite summa on 15; kuna 15 jagub 3-ga, kuid ei jagu 9-ga, siis ka arv 17331 jagub 3-ga, kuid ei jagu 9-ga.

*Märkus.* Täielikes aritmeetika kursustes võib leida veel 7-ga, 11-ga, 13-ga, 37-ga ja mõningate muude arvudega jaguvuse tunnuseid; need on aga nii keerulised, et nende kasutamine praktiliselt on raskendatud; seepärast me neid ei käsitle.

**87. 6-ga, 12-ga ja 15-ga jaguvuse tunnused.** Kui mingi arv jagub 6-ga, siis on võimalik lahutada teda kuuelisteks, s. t. kujutada teda summana:

$$6 + 6 + 6 + 6 + \ldots + 6.$$

Iga kuuelist aga on võimalik lahutada nii kahelisteks $(2 + 2 + 2)$ kui ka kolmelisteks $(3 + 3)$; tähendab, kogu sellist arvu on võimalik lahutada nii kahelisteks kui ka kolmelisteks; järelikult peab see arv jaguma nii 2-ga kui ka 3-ga. Niisiis:

**et arv jaguks kuuega, on tarvis, et ta jaguks nii 2-ga kui ka 3-ga.**

Arv 3584 ei jagu 6-ga, kuna ta ei jagu 3-ga (ehk küll ta jagub 2-ga); arv 3585 ei jagu samuti 6-ga, sest ta ei jagu 2-ga (kuigi jagub 3-ga).

See arutlus aga ei veena veel meid, et see 6-ga jaguvuse tunnus on piisav, s. t. et iga arv, mis jagub 3-ga ja 2-ga, jagub ka 6-ga. Tõestame nüüd, et see on nii. Oletame, et antud arv jagub 3-ga ja 2-ga ja veendume, et sellisel juhul ta jagub ka 6-ga.

Jagugu antud arv 3-ga ja 2-ga. Siis võime selle lahutada nii kolmelisteks kui ka kahelisteks. Kujutleme, et lahutasime ta kolmelisteks:

$$3 + 3 + 3 + 3 + \ldots + 3.$$

Hakkame ühendama, vasakult alates, iga kahte kolmelist üheks kuueliseks. Siis peab ilmnema üks kahest:

1) kõik kolmelised ühenduvad kuuelisteks, ei jää järele ühtegi liigset kolmelist; see tähendab, et meie arv väljendub summana

$$6 + 6 + \ldots + 6,$$

see tähendab, et ta lahutus kuuelisteks; järelikult ta jagub 6-ga;

2) üks kolmeline jäi ilma paariliseta, s. t. meie arv kujutub järgmiselt:

$$6 + 6 + \ldots + 6 + 3.$$

Siin jaguvad kõik liidetavad peale viimase 2-ga; tähendab omaduse 2) põhjal (p. 82) meie arv ei jaguks siis 2-ga; kuna aga ülesseatud tingimuste kohaselt ta jagub 2-ga, siis see juhtum pole võimalik.

Nüüd võime kinnitada, et mistahes arvu jaguvuseks 6-ga on tarvilik ja piisav, et ta jaguks 2-ga ja 3-ga; või lühemalt:

**6-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis jaguvad nii 2-ga kui ka 3-ga.**

Arv 13854 jagub 6-ga, kuna ta jagub 2-ga (lõpeb paarisnumbriga) ja samal ajal jagub 3-ga (ta numbrite summa jagub 3-ga). Tõepoolest $13854 : 6 = 2309$.

Samuti on võimalik veenduda selles, et **12-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis jaguvad nii 3-ga kui ka 4-ga; 15-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis jaguvad nii 3-ga kui ka 5-ga.**

88. **Eelmist tüüpi jaguvustunnuste üldine põhjendus.** 6-ga, 12-ga, 15-ga ja paljude muude arvudega jaguvuse tunnustel on üldine teoreetiline põhjendus, mille me siinkohal esitame.

***Teoreem.*** *Kui kahe arvu korrutis $a_1a_2$ jagub kolmanda arvuga $p$ ja ühel arvudest $a_1$ või $a_2$ ei ole $p$-ga ühisjagajaid peale arvu üks, siis teine neist jagub $p$-ga.*

Tõestus. Arv $a_1$ näiteks ärgu omagu $p$-ga ühisjagajaid peale arvu üks; tõestame nüüd, et $a_2$ peab jaguma $p$-ga.

Jagame $a_1$ $p$-ga ning tähistame jagatise ja jäägi vastavalt $q$ ja $r$. Siis

$$a_1 = pq + r.$$

Veendume jäägi $r$ suhtes, et ta: 1) ei võrdu nulliga ja 2) ei oma $p$-ga ühisjagajaid peale arvu üks. Tõepoolest, kui $r = 0$, siis $a_1 = pq$, ja siis $a_1$ jaguks $p$-ga ning järelikult arvud $a_1$ ja $p$ omaksid ühest erineva ühisjagaja, mis räägib vastu teoreemi eeldusele. Oletame edasi, et $p$ ja $r$ omavad mingi ühisjagaja $t > 1$. Siis $a_1$ jaguks $t$-ga ja $a_1$ ning $p$ omaksid järelikult ühisjagaja $t > 1$, mis on vastuolus eeldusega.

Kui jääk $r$ ei võrdu ühega, siis jagame $p$ $r$-ga ja tähistame sellest jagamisest saadud jagatise ja jäägi vastavalt $q_1$ ja $r_1$. Siis

$$p = rq_1 + r_1.$$

Kuna $p$ ja $r$ ei oma eeltõestatu kohaselt ühisjagajaid peale arvu üks, siis veendume viimasest võrdusest samuti kui eespool, et: 1) $r_1$ ei võrdu nulliga ja 2) $r$ ja $r_1$ ei oma ühisjagajaid peale arvu üks. Kui $r_1$ ei võrdu ühega, siis jagame $r$ $r_1$-ga, millest saame jäägi $r_2$, mis ei võrdu nulliga ja mis ei oma $r_1$-ga ühisjagajaid peale arvu

üks. Kui $r_2$ ei võrdu ühega, siis jagame $r_1$ $r_2$-ga jne. Siis saame rea võrdusi:

$$\begin{aligned} a_1 &= pq + r, \\ p &= rq_1 + r_1, \\ r &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

millest veendume, et jäägid $r$, $r_1$, $r_2$ jne. ei võrdu nulliga. Kuna aga igasugusel jagamisel jääk peab olema väiksem kui jagaja, siis $r < p$, $r_1 < r$, $r_2 < r_1$ jne. Seepärast kui oleme teostanud küllaldase arvu jagamisi, jõuame lõpuks sellise jäägini, mis võrdub ühega.

Olgu $r_n = 1$. Siis $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + 1$.

Korrutame saadud võrduste mõlemad pooled $a_2$-ga:

$$\begin{aligned} a_1a_2 &= pqa_2 + ra_2; \\ pa_2 &= rq_1a_2 + r_1a_2; \\ ra_2 &= r_1q_2a_2 + r_2a_2; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ r_{n-2}a_2 &= r_{n-1}q_na_2 + a_2. \end{aligned}$$

Pöörates tähelepanu esimesele neist võrdustest, arutleme järgmiselt:

et eelduse järgi korrutis $a_1a_2$ jagub $p$-ga, siis ka summa $pqa_2 + ra_2$ jagub $p$-ga; selle summa esimene liidetav jagub $p$-ga, järelikult ka teine liidetav, s. o. korrutis $ra_2$, jagub $p$-ga. Vaadeldes edasi teist võrdust, leiame, et summa $pa_2$ ja üks liidetav $(ra_2)q_1$ jaguvad $p$-ga, millest järeldame, et ka teine liidetav $r_1a_2$ jagub $p$-ga. Vaadeldes edasi kolmandat, neljandat, viiendat jne. võrdust, jõuame lõpuks võrduseni, millest järeldame, et $a_2$ j a g u b $p$-ga.

89. ***Järeldus.*** *Kui arv $a$ jagub nii arvuga $p$ kui ka arvuga $q$, kusjuures $p$ ja $q$ ei oma ühisjagajaid peale arvu üks, siis $a$ jagub korrutisega $pq$.*

Tähistame arvu $a$ jagamisel $p$-ga saadava jagatise $Q$-ga, siis

$$a = pQ.$$

Et aga eelduse järgi $a$ jagub $q$-ga, siis järeldame sellest võrdusest, et $pQ$ jagub $q$-ga. Kuid $p$ ei oma $q$-ga ühisjagajaid peale arvu

üks; tähendab teoreemile vastavalt peab $Q$ jaguma $q$-ga. Olgu selle jagamise jagatiseks $Q_1$; siis

$$Q = qQ_1.$$

Asendades eelmises võrduses $Q$ temaga võrdse korrutisega, saame:

$$a = p(qQ_1) = (pq)Q_1,$$

millest on näha, et arv $a$ on kahe teguri, $(pq)$ ja $Q_1$ korrutiseks, mis tähendab, et $a$ jagub $pq$-ga.

Seega: kui arv jagub 2-ga ja 3-ga, siis ta jagub 6-ga; kui arv jagub 3-ga ja 4-ga, siis ta jagub 12-ga; kui ta jagub 3-ga ja 5-ga, siis ta jagub 15-ga jne.

*Märkus.* Kui arvud $p$ ja $q$ omavad arvust üks erinevat ühisjagajat, siis mingi arvu jaguvusest $p$-ga ja $q$-ga veel ei järgne, et see arv jagub korrutisega $pq$; nii jagub arv 36 4-ga ja 6-ga, kuid ei jagu korrutisega $4 \cdot 6$ $(= 24)$.

## II. Arvude lahutamine algtegureiks.

**90. Algarvud ja kordarvud.** Iga arv jagub muidugi ühega ja enesega. On olemas palju arve, mis omavad veel teisigi jagajaid peale 1 ja enese: näiteks arv 30 omab peale 1 ja enese veel jagajaid 2, 3, 5, 6, 10 ja 15.

*Iga arvu peale ühe, mis jagub ainult ühega ja enesega, nimetatakse algarvuks.*

*Arvu, mis jagub peale ühe ja enese veel teiste arvudega, nimetatakse kordarvuks.*

Arv 1 ei kuulu ei algarvude ega kordarvude hulka; ta omab erilise seisukoha.

100-st väiksemaid algarve on 25, ja nimelt:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Selle raamatu lõpus on tabel, kus on toodud kõik algarvud, mis on väiksemad 6000-st.

**91. Kordarvu lahutamine algtegureiks.** Iga kordarvu on võimalik lahutada algtegureiks, s. o. kujutada teda algarvude korrutisena. Näiteks lahutada arv 12 algtegureiks tähendab kujutada see arv nii: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Olgu tarvis lahutada algtegureiks mingi kordarv, näiteks 420. Selleks leiame (jagavustunnuste järgi) väikseima algarvu, millega jagub 420; selleks arvuks on 2. Jagame 420 2-ga:

$$420 : 2 = 210;$$

tähendab

$$420 = 210 \cdot 2. \qquad (1)$$

Nüüd otsime väikseimat algarvu, millega jagub kordarv 210; selleks arvuks on 2. Jagame 210 2-ga:

$$210 : 2 = 105;$$

tähendab

$$210 = 105 \cdot 2.$$

Asendame võrduses (1) arvu 210 temaga võrdse korrutisega:

$$420 = 105 \cdot 2 \cdot 2. \qquad (2)$$

Väikseim algarv, millega jagub kordarv 105, on 3. Jagame 105 3-ga:

$$105 : 3 = 35;$$

tähendab

$$105 = 35 \cdot 3.$$

Asendame võrduses (2) arvu 105 temaga võrdse korrutisega:

$$420 = 35 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2. \qquad (3)$$

Väikseim algarv, millega jagub kordarv 35, on 5; jagades 35 5-ga, saame 7; tähendab $35 = 7 \cdot 5$. Asendades võrduses (3) arvu 35 temaga võrdse korrutisega $7 \cdot 5$, saame:

$$420 = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2.$$

Arv ongi seega algtegureiks lahutatud, sest kõik tegurid on nüüd algarvud.

Et korrutis ei sõltu tegurite järjekorrast, siis on võimalik kirjutada tegureid mistahes järjekorras; tavaliselt kirjutatakse need alates väiksematest ja lõpetades suurematega, s. o. nii:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Algtegureiks lahutamist on kõige kohasem üles kirjutada järgmiselt:

| | |
|---|---|
| 420 | 2 |
| 210 | 2 |
| 105 | 3 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

s. t. kirjutatakse antud kordarv ja tõmmatakse temast paremale vertikaaljoon. Joonest paremale kirjutatakse väikseim algarv, millega jagub antud kordarv, ja jagatakse antud kordarv selle algarvuga. Jagatise numbrid kirjutatakse jagatava alla. Selle jagatisega toimitakse samasuguselt, nagu toimiti antud kordarvuga. Tehteid jätkatakse niikaua, kuni saadakse jagatiseks üks. Siis kõik arvud, mis asetsevad joonest paremal, on antud arvu algtegureiks.

Vaadeldud näites otsisime igakord antud arvu *väikseimat* algtegurit; enamasti osutub see kõige käepärasemaks lahutusviisiks seepärast, et mida väiksem on arv, seda hõlpsam on temaga jagada; peale selle on väikeste algtegurite enamiku jaoks olemas lihtsad jaguvuse tunnused. Selline talitusviis pole siiski kohustuslik ja algtegureiks lahutamist on sageli võimalik mõnes teises järjekorras lihtsamalt läbi viia. Nii näeme kohe meie näites, et 420 jagub 10-ga, s. o. $2 \cdot 5$-ga. Seepärast teostades (peast) lahutamise

| 42 | 2 |
|---|---|
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

võime kirjutada:

$$420 = 10 \cdot 42 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Kui näiteks tuleb lahutada algtegureiks arv 13 000, siis võime kohe märkida, et $13\,000 = 13 \cdot 1000$, ja kuna 13 on algarv, siis jääb järele lahutada algtegureiks ainult arv 1000:

$$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5,$$

ja saame kohe:

$$13\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13.$$

Võtame veel ühe näite. Lahutame algteguriteks arvu 8874:

| 8874 | 2 |
|---|---|
| 4437 | 3 |
| 1479 | 3 |
| 493 | 17 |
| 29 | 29 |
| 1 | |

Jõudes jagatiseni 493, pole kerge kindlaks teha, missuguse arvuga ta jagub. Sellistel juhtudel kasutame algarvude tabelit, mis on toodud selle raamatu lõpus. Kui arv, mis tekitab meile raskusi, leidub selles tabelis, siis jagub ta ainult enesega. Arvu 493 ei leidu algarvude tabelis; järelikult on see arv kordarv ja seepärast proovime jagada teda algarvudega 7, 11, 13 jne., niikaua kuni jõuame jäägita jagamiseni. Ilmneb, et 493 jagub 17-ga, kusjuures jagatiseks saadakse 29. Nüüd võime lõpetada lahutamise.

Sellest näitest ilmneb, et mõnikord on väga raske teostada kordarvu lahutamist algtegureiks, kuna lahutamisel võime kohtuda suure arvuga, mille kohta on raske kindlaks teha, kas see on algarv või kordarv; ja kui ta osutub kordarvuks, siis pole alati kerge leida tema väikseimat algtegurit.

**92. Astendamine.** Arvude tegureiks lahutamisel, samuti aga ka paljudel teistel juhtudel, osutub sageli vajalikuks kirjutada kõrvuti mitu ühesugust tegurit, näiteks $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ või $5 \cdot 5 \cdot 5$. Sarnlevalt sellega, nagu me võrdsete liidetavate liitmiseks võtsime kasutusele eri nimetuse (korrutamine) ja eri tähistusviisi ($2 + 2 + 2 + 2$ asemel $2 \cdot 4$), nii on ka võrdsete tegurite korrutamiseks kasulik võtta tarvitusele eri nimetus ja eri tähistusviis.

Võrdsete tegurite korrutist nimetatakse *astmeks*. Nii $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ on 2 neljandas astmes. Seda kirjutatakse järgmiselt:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4;$$

seejuures arvu 2 nimetatakse *astendatavaks*, arvu 4 aga *astendajaks*. Tehet ennast nimetatakse *arvu 2 astendamiseks neljandasse astmesse*. Avaldist

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$$

loetakse täpselt samuti: 5 kolmandas astmes; siin 5 on astendatav, 3 aga astendaja.

Teist astet nimetatakse lühidalt antud arvu *ruuduks*, kolmandat astet arvu *kuubiks*. Nii loetakse $7^2$ — 7 ruudus, $5^3$ aga 5 kuubis. Arvu esimeseks astmeks nimetatakse arvu ennast: $3^1 = 3$.

Toodud tähistusviisi abil on sageli arvude lahutamist algtegureiks võimalik üles kirjutada lühemalt; nii näidetes, mida vaatlesime punktis 91, võime kirjutada:

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7;$$
$$13\,000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 13.$$

Mõnikord võib olla selline lühendamine õige märgatav; näiteks $1536 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^9 \cdot 3$.

**93. Kordarv lahutub ainult üheks algtegurite reaks.** On hõlpus tõestada, et punktis 91 kirjeldatud viisil on iga kordarvu võimalik lahutada algtegureiks. Kuid selle viisi kasutamisel ei tarvitse me igakord kinni pidada tingimata sellest järjekorrast, mis oli kätte näidatud; me ei tarvitse alustada lahutamist väikseima algarvuga, millega jagub antud kordarv, vaid võime toimetada lahutamist mingis teises järjekorras, (võime isegi, nagu nägime, lahutada kordarvu kõigepealt kordtegureiks ja siis need lahutada algarvudeks). Seepärast tekib küsimus: kas mõnikord ei või tekkida ühe ja sama kordarvu jaoks kaks (või enam) algtegurite rida, mis erinevad teineteisest kas tegurite eneste või ühesuguste tegurite kordumiste arvu poolest? Arv 14 000 näiteks on lahutatav reaks $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$; kas aga ei vasta sellele arvule veel mingi teine algtegurite rida, milles oleks peale 2, 5 ja 7 veel mingi teine algtegur, või milles nende tegurite arv oleks teistsugune kui reas $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$? On tõestatud, et see pole võimalik, s. t. et kordarv, kuidas me seda ka ei lahutaks, annab vaid ühe algtegurite rea (kusjuures nende järjekord muidugi võib olla erinev).

**Tõestus, et arve on võimalik lahutada algtegureiks ja seejuures ühel ainsal viisil.** Selleks, et rangelt tõestada, et iga arvu (peale ühe) on võimalik lahutada algtegureiks ja seejuures ainult ühel viisil, tõestame kõigepealt kaks teoreemi.

***Teoreem 1.*** *Iga arv peale ühe omab vähemalt ühe algteguri.*

Tõestus. Olgu $a \neq 1$; kui $a$ on algarv, siis ta ise on enda algteguriks ja teoreem on tõestatud; kui aga $a$ on kordarv, siis ta omab jagajaid, mis erinevad $a$-st ja ühest; olgu $b$ väikseim selliseist jagajaist; siis $b$ ei saa olla kordarvuks, kuna juhul, kui ta jaguks arvuga $c$, mis erineb ühest ja temast endast, selle arvuga jaguks ka arv $a$ ja järelikult arv $b$ ei oleks siis arvu $a$ väiksei-

maks algteguriks. Seepärast $b$ on algarv, ja kuna ta on ühtlasi arvu $a$ jagajaks, siis teoreem on tõestatud.

***Teoreem 2.*** *Mitme teguri korrutis* $a_1a_2a_3 \ldots a_n$ *võib jaguda algarvuga* $p$ *ainult siis, kui vähemalt üks teguritest jagub* $p$*-ga.*

Tõestus. Vaadeldes antud korrutist ainult kahe teguri, $a_1$ ja $(a_2a_3 \ldots a_n)$ korrutisena, võime arutella järgmiselt: kui $a_1$ ei jagu algarvuga $p$, siis see tähendab, et $a_1$ ei oma $p$-ga ühisjagajaid peale ühe; sel juhul punktis 88 tõestatud teoreemi järgi arv $(a_2a_3 \ldots a_n)$ peab jaguma $p$-ga. Sellega sarnlevalt veendume, et kui $a_2$ ei jagu $p$-ga, siis arv $(a_3a_4 \ldots a_n)$ peab jaguma $p$-ga. Jätkates seda arutlust, leiame, et kui ükski arvudest $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ ei jagu $p$-ga, siis $a_n$ jagub $p$-ga. Niisiis üks arvudest: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jagub $p$-ga.

Selleks et nüüd tõestada ühest erineva mistahes arvu algtegureiks lahutamise võimalikkust, toimime järgmiselt. Olgu $a \neq 1$; kui $a$ on algarv, siis väide on tõestatud; kui aga $a$ on kordarv, siis teoreemi 1 järgi omab ta algteguri $p_1$. Olgu

$$a = p_1a_1;$$

kui $a_1$ on algarv, siis teoreem on tõestatud; kui ta aga on kordarv, siis teoreemi 1 järgi omab ta algteguri $p_2$.

Olgu

$$a_1 = p_2a_2,$$

nii et

$$a = p_1p_2a_2;$$

kui $a_2$ on algarv, siis teoreem on tõestatud; kui ta aga on kordarv, siis jätkame arutlust näidatud viisil. Kuna $a > a_1$, $a_1 > a_2$ jne., siis meie arutlus peab varem või hiljem lõppema; lõppeda aga saab see ainult siis, kui mingi arv $a_n$ osutub algarvuks (kui ta on kordarv, siis võime jätkata lahutamist). Seepärast rida

$$a = p_1p_2 \ldots p_{n-1}a_n$$

ongi arvu $a$ algtegurite rida, mille võimalikkus sel viisil on tõestatud.

Ühese lahutusviisi olemasolu tõestamiseks arutleme järgmiselt.

Olgu mingi arv lahutatud kahel viisil (ühesuguseiks või erinevaiks) algtegureiks:

$$abc \ldots \text{ ja } a_1b_1c_1 \ldots .$$

Siis

$$abc \ldots = a_1 b_1 c_1 \ldots .$$

Võrduse vasakpoolne osa jagub $a$-ga, tähendab, ka parempoolne osa peab jaguma $a$-ga. Kuid $a$ on algarv ja seepärast korrutis $a_1 b_1 c_1 \ldots$ jagub $a$-ga ainult siis, kui üks tema tegureist jagub $a$-ga (teoreem 2); algarv aga võib jaguda teise, ühest erineva algarvuga ainult siis, kui need algarvud on ühesugused. Tähendab, üks arvudest $a_1$, $b_1$, $c_1$ ... võrdub $a$-ga. Olgu $a_1 = a$. Jagades võrduse mõlemad pooled $a$-ga, saame:

$$bc \ldots = b_1 c_1 \ldots .$$

Eelmisega sarnlevalt veendume, et üks tegureist $b_1$, $c_1$, ... võrdub $b$-ga. Olgu $b_1 = b$; siis $cd \ldots = c_1 d_1 \ldots$ Jätkates seda arutlust, leiame, et kõik esimese rea tegurid sisalduvad ka teises reas.

Jagades võrduse mõlemaid pooli $a_1$-ga, veendume, et ka esimeses reas on olemas tegur $a_1$. Sel viisil leiame eelmisega sarnlevalt, et kõige teise rea tegurid sisalduvad samuti ka esimeses reas. Siit järgneb, et read $abc \ldots a_1 b_1 c_1 \ldots$ võivad erineda ainult tegurite järjekorra, mitte aga tegurite eneste poolest; teiste sõnadega: *need kaks rida kujutavad endast ühte ja sama rida.* Teisiti öeldes: *iga arvu* (peale ühe) *on võimalik lahutada algtegureiks ja seejuures ainult ühel viisil.*

**94. Mõningaid teatmeid algarvudest.** On hõlpus veenduda, et *on olemas lõpmata palju algarve.* Selle tõestamiseks oletame vastupidist, s. o. et algarve on lõplik arv. Sel juhul peab leiduma suurim algarv. Olgu selliseks arvuks $a$. Selleks et ümber lükata tehtud oletust, kujutleme endale uut arvu $N$, mis on koostatud valemi järgi:

$$N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots a) + 1,$$

s. o. kujutleme endale arvu $N$, mis saadakse, kui korrutatakse omavahel kõik algarvud alates 2-st kuni $a$-ni kaasa arvatult ning lisatakse korrutisele veel üks. Kuna $N$ on ilmselt suurem kui $a$ ja kuna $a$ on oletuse kohaselt suurim algarv, siis $N$ peab olema kordarv. Kuid kordarv peab jaguma mõne algarvuga (p. 93, teoreem 1). $N$ jagub järelikult mingi arvuga reast: 2, 3, 5, 7, 11, ..., $a$. See pole aga võimalik, kuna $N$ on kahe liidetava summa, milledest esimene (korrutis $2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots a$) jagub iga arvuga reast: 2, 3, 5, ..., $a$, teine aga (1) ei jagu ühegagi neist arvudest. Tähendab, suurimat

algarvu ei ole; ja kui ei ole suurimat algarvu, siis algarvude rida on lõpmatu.

Algarvud olid igivanadest aegadest arvukate uurimiste objektiks. Muuseas püüdsid teadlased leida algarvude koostamise *seadust*, mis annaks võimaluse avaldada kõiki algarve ühe või mitme *valemiga*, või püüdsid nad leida vähemalt sellist valemit, mis, kui ta ka ei avaldaks kõiki algarve, võimaldaks siiski leida *mistahes suurt* algarvu. Selles mõttes pakub erilist huvi XVII sajandi kuulsa prantsuse matemaatiku Fermat' katse. Ta leidis, et valem $2^n + 1$ annab algarve, kui $n$ võrdub $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$. Tõepoolest saadakse astendaja $n$ nende väärtuste puhul järgmised algarvud:

3, 5, 17, 257.

Põhinedes nendele vaatlustele (ja mõningatele kaalutlustele arvude omadustest), Fermat oletas, et valem $2^n + 1$ peab andma algarve igasuguse $n$ puhul, mis on 2 aste. Seda oletust ei suudetud kaua ümber lükata, sest keegi (enne Eulerit) ei suutnud näidata ühtegi juhtu, kus valem $2^n + 1$, $n$ võrdudes 2 astmega, oleks andnud kordarvu [1]. Esimesena lükkas Fermat' hüpoteesi ümber kuulus Euler (XVIII saj.), kes tõestas, et $n = 2^5 = 32$ korral valem $2^n + 1$ annab arvu, mis jagub 641-ga. See Fermat' viga kujutab endast õpetlikku näidet sellest, kuivõrd pole matemaatikas rakendatav üksikjuhtudelt üldisele juhtiv järeldamise meetod (induktiivne meetod).

Valemite puudumisel, mis avaldaksid kõiki algarve, on tarvilik koostada katselisel (empiirilisel) teel järjestikuste algarvude rida alates arvust 2 kuni mingi suurema arvuni $a$. Sellise rea koostamise kõige lihtsamaks ja ka kõige vanemaks viisiks on viis, mida kasutas Aleksandria matemaatik Eratosthenes, kes elas III sajandil enne meie ajaarvamist. Eratosthenese viis seisneb selles, et naturaalarvude reast 2-st kuni $a$-ni (maksimaalne arv, millega soovitakse piirata rida) eraldatakse kõigepealt arvud, mis jaguvad 2-ga (peale 2), siis kõik arvud, mis jaguvad 3-ga (peale 3), edasi kõik arvud, mis jagu-

[1] Astendaja $n$ kasvades avaldis $2^n + 1$ annab arve, mis suurenevad erakorralise kiirusega; näiteks kui $n = 2^4$, siis saadakse arv 65537, kui aga $n = 2^5$, siis saadakse arv 4294967297. Selliste suurte arvude kohta oli raske otsustada (selle taseme puhul, millel oli matemaatika kui teadus XVII ja XVIII sajandil), kas nad on algarvud või kordarvud.

vad 5-ga, 7-ga 11-ga (peale nende arvude eneste) jne. Seda tehakse väga lihtsalt: kirjutatakse välja kõik paaritud arvud alates 3-st kuni $a$-ni ja tõmmatakse läbi iga kolmas arv peale 3, iga viies arv peale 5, iga seitsmes arv peale 7 jne.

Käesoleval ajal on olemas tabelid kõikide algarvude kohta, mis on väiksemad kui 9 000 000.

Kui pole käepärast algarvude tabelit või kui antud arv $N$ on suurem tabelis toodud suurimast algarvust, siis kerkib küsimus: kuidas teada saada, kas $N$ on algarv või kordarv? Kõige lihtsam viis selleks seisneb järgmises. Leides eelnevalt $\sqrt{N}$, kirjutatakse välja kõik algarvud, mis on väiksemad sellest juurest. Olgu selleks arvud:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ a.$$

Nüüd jagatakse $N$ 2-ga, 3-ga, 5-ga, ..., $a$-ga. Kui $N$ ei jagu ühegagi nendest arvudest, siis võib väita ilma edasiste jagamisteta, et $N$ on algarv. Tõepoolest, kuna $N = \sqrt{N} \cdot \sqrt{N}$, siis on ilmne, et arvu $N$ jagamisest arvudega, mis on suuremad kui $\sqrt{N}$, saadakse jagatised, mis on väiksemad kui $\sqrt{N}$; seepärast, kui arv $N$ võiks jaguda mingi arvuga, mis on suurem kui $= \sqrt{N}$, siis ta jaguks ka arvuga, mis on väiksem kui $\sqrt{N}$. Kui $N$ on suur, siis see viis võib osutuda väga väsitavaks: kui $N > 1\,000\,000$, siis $\sqrt{N} > 1000$; on aga 168 algarvu, mis on väiksemad kui 1000; sellise arvu proovimiseks läheks järelikult tarvis mõnikord kuni 168 jagamist. Arvuteoorias näidatakse viise, mille abil on võimalik märgatavalt vähendada antud arvu proovimiseks vajalike jagamiste arvu, kuid sellele vaatamata küsimuse lahendamine, kas antud arv osutub algarvuks või kordarvuks, tekitab veel käesolevalgi ajal mõnikord määratuid raskusi.

## III. Kordarvu jagajate leidmine.

**95. Mis on antud arvu „jagaja"?** Meenutame, et antud arvu jagajaks nimetatakse arvu, m i l l e g a antud arv jagub.

Iga algarv, näiteks arv 11, omab ainult kaks jagajat: ühe ja enese.

Iga kordarv omab rohkem kui kaks jagajat. Näiteks arv 6 omab 4 jagajat: 1, 2, 3, 6; nendest 2 ja 3 on algarvud, 6 aga kordarv.

**96. Antud arvu jagajate leidmine.** Olgu tarvis leida arvu 420 jagajad. Selleks lahutame selle arvu algtegureiks:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

On ilmne, et 420 jagub igaühega neist tegureist; hõlpus on ka näha, et 420 jagub samuti ka oma tegurite korrutistega (kaks, kolm või enam tegurit). Näiteks 420 jagub korrutisega $3 \cdot 7$, s. o. 21-ga, kuna tegurite 3 ja 7 ümberpaigutamisel rea algusse saame:

$$420 = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 21 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5,$$

millest nähtubki, et 420 jagub 21-ga.

***Reegel.*** **Et leida antud kordarvu jagajaid, lahutatakse ta kõigepealt algtegureiks; igaüks neist tegureist on antud arvu algjagajaks; algtegurite omavahelisel korrutamisel aga kahe-, kolme-, nelja jne. kaupa saadakse antud arvu kordjagajad.**

*Märkus.* Et leida jagatist kordarvu jagamisel mingi ta jagajaga, tuleb selle arvu algtegurite reast ainult ära jätta need tegurid, millede korrutis võrdub antud jagajaga ja korrutada omavahel ülejäänud tegurid.

Näiteks et leida jagatist, mis saadakse arvu 420 jagamisel 21-ga, tuleb algtegurite reast $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ kõrvaldada tegurid 3 ja 7, millede korrutiseks on 21, ja järelejäänud tegurid omavahel korrutada (saame 20).

Nimetatud reegli kasutamisel on võimalik saada antud arvu *kõiki* jagajaid. Tõepoolest omagu arv $a$ jagajat $b$ ja olgu arvu $a$ jagamisel $b$-ga tekkivaks jagatiseks $c$, nii et

$$a = bc.$$

Kui lahutame $b$ ja $c$ algtegureiks ja asendame nad eeltoodud võrduses saadud algteguritega, siis saame paremal pool ilmselt arvu $a$ lahutise algtegureiks, kusjuures arv $b$ saadakse nende tegurite teatava osa korrutisena. Ülaltoodud reegli järgi on võimalik sel viisil tõepoolest saada antud arvu mistahes jagajat.

## IV. Arvude suurim ühisjagaja (suurim ühistegur).

**97. Mis on suurim ühisjagaja?** *Antud arvude suurimaks ühisjagajaks ehk suurimaks ühisteguriks nimetatakse suurimat arvu, millega jagub iga antud arv.*

Näiteks on kolme arvu, 18, 30 ja 24 suurimaks ühisjagajaks 6, seepärast et 6 on suurim arv, millega jaguvad kõik antud arvud.

*Kahte arvu, millede suurimaks ühisjagajaks ehk suurimaks ühisteguriks on 1, nimetatakse ühistegurita arvudeks.* Sellisteks arvudeks on näiteks 14 ja 15.

Näitame kaks viisi arvude suurima ühisjagaja leidmiseks.

**98. Esimene viis: suurima ühisjagaja leidmine algtegureiks lahutamise teel.** Olgu tarvis leida kahe arvu, 180 ja 126 suurim ühisjagaja. Selleks lahutame need arvud algtegureiks:

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5;\ 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

Võrreldes nende arvude tegureid, leiame, et nende hulgas on ühiseid, ja nimelt: 2, 3, 3. Igaüks neist ühistegureist on ka arvude 180 ja 126 ühisjagajaks. Selleks et leida ühiseid kordjagajaid, tuleb ühistegureid omavahel kahe- ja kolmekaupa korrutada. Suurima ühisjagaja (suurima ühisteguri) saame ilmselt siis, kui korrutame omavahel kõik ühistegurid:

$$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$$

Olgu veel tarvis leida suurim ühisjagaja kolmele arvule: 210, 1260 ja 245. Lahutame need arvud algtegureiks:

| 210 | 2 |
|---|---|
| 105 | 3 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

| 1260 | 2 |
|---|---|
| 630 | 2 |
| 315 | 3 |
| 105 | 3 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

| 245 | 5 |
|---|---|
| 49 | 7 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

Nüüd näeme, et nende arvude suurim ühisjagaja võrdub ühistegurite 5 ja 7 korrutisega, s. o. võrdub 35-ga.

Eeltoodud viisil on võimalik leida suurimat ühisjagajat neljale, viiele ja enamale arvule.

***Reegel.*** **Et leida mitme arvu suurimat ühisjagajat, tuleb lahutada need arvud algtegureiks ja korrutada omavahel need tegurid, mis on ühised kõikidele arvudele.**

*Märkus.* Seejuures tuleb meeles pidada, et kui mingi algtegur esineb lahutistes kõikide arvude algtegurina mitu korda, siis sama arv korda peab ta esinema ka suurimas ühisjagajas.

Kasutades p. 92 tarvitusele võetud astmete tähistusviisi, võime esimeses vaadeldud näites antud arvude algtegureiks lahutamise üles kirjutada järgmiselt:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5; \quad 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7;$$

tegurid 5 ja 7 ei kuulu üldse antud arvude suurimasse ühisjagajasse, kuna 5 ei esine teises arvus, 7 aga ei esine esimeses arvus. Tegur 2 läheb ühisjagajasse 1 kord, kuna ta teise arvu algtegurite hulgas esineb ainult 1 kord. Tegur 3 aga läheb suurimasse ühisjagajasse 2 korda, s. o.

teises astmes, kuna ta esineb kummaski antud arvus teises astmes; nii siis on antud arvude suurimaks ühisjagajaks

$$2 \cdot 3^2 = 18.$$

Nii on võimalik väljendada ülalnimetatud reeglit veel järgmiselt: **et leida antud arvude suurimat ühisjagajat, lahutatakse need arvud algtegureiks ja leitakse kõikide antud arvude ühiste algtegurite astmete korrutis, kusjuures iga tegur võetakse väikseima astendajaga, millega ta esineb antud arvudes.**

N ä i d e: suurim ühisjagaja arvudele

$$9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \text{ ja } 1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2.$$

on: $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$.

**99. Teine viis: suurima ühisjagaja leidmine järkjärgulise jagamise teel.** Selgitame esiteks selle viisi rakendamist ainult kahele antud arvule, siis aga kolmele, neljale ja enamale arvule.

See viis rajaneb kahele järgmisele lausele:

**I. Kui kahest antud arvust suurem jagub väiksemaga, siis väiksem on nende suurimaks ühisjagajaks.**

Võtame näiteks kaks arvu, 54 ja 18, milledest suurem jagub väiksemaga. Kuna 54 jagub 18-ga ja 18 jagub 18-ga, siis tähendab 18 on arvude 54 ja 18 ühisjagajaks. See jagaja on samal ajal ka suurimaks, sest 18 ei saa jaguda mingi arvuga, mis on suurem 18-st.

**II. Kui antud arvudest suurem ei jagu väiksemaga, siis nende suurim ühisjagaja võrdub kahe teise arvu suurima ühisjagajaga, ja nimelt väiksema antud arvu ja suurema arvu jagamisel väiksemaga saadud jäägi suurima ühisjagajaga.**

Olgu näiteks antud kaks arvu, 85 ja 30, milledest suurem ei jagu väiksemaga. Jagades esimest teisega, saame: $85 : 30 = 2$ (jääk 25); siis arvude 85 ja 30 suurim ühis-

jagaja peab olema samuti kahe teise arvu, nimelt 30 ja 25 suurimaks ühisjagajaks (selleks on 5).

Tõepoolest leiame jagamisega:

$$85 = 30 \cdot 2 + 25, \text{ kust } 25 = 85 - 30 \cdot 2.$$

Meile tuntud summa ja vahe omaduste põhjal (p. 82) on võimalik tuletada nendest võrdustest kahte järeldust:

1) arvude 30 ja 25 ühisjagaja peab olema samuti arvu 85 jagajaks;

2) arvude 85 ja 30 iga ühisjagaja peab olema samuti jäägi 25 jagajaks.

Seega ilmnes, et 2 arvude paari,

$$\overbrace{85 \text{ ja } 30} \text{ ja } \overbrace{30 \text{ ja } 25},$$

peavad omama ühe- ja samasuguseid ühisjagajaid; tähendab, et ka suurim ühisjagaja peab neil olema üks ja sama.

Vaatleme nüüd, kuidas on võimalik kasutada neid lauseid kahe arvu suurima ühisjagaja leidmiseks.

Olgu tarvis leida arvude 391 ja 299 suurim ühisjagaja.

$$\begin{array}{rl|l} 391 & 299 & \\ 299 & & 1 \\ \hline 299 & 92 & \\ 276 & & 3 \\ \hline 92 & 23 & \\ 92 & & 4 \\ \hline 0 & & \end{array}$$

Jagame 391 299-ga, et teada saada, kas ehk 299 ei osutu suurimaks ühisjagajaks (lause I alusel). Näeme, et 391 ei jagu 299-ga (saadakse jääk 92) ja seepärast 299 ei ole suurimaks ühisjagajaks. Lause II põhjal väidame, et arvude 391 ja 299 suurim ühisjagaja on ühtlasi ka kahe väiksema arvu, ja nimelt arvude 299 ja 92 suurimaks ühisjagajaks. Püüame leida nende arvude suurimat

ühisjagajat. Selleks et teada saada, kas 92 ei olegi suurimaks ühisjagajaks (lause I), jagame 299 92-ga. Leiame, et 92 ei ole suurimaks ühisjagajaks (saadakse jääk 23).

Nüüd väidame siis lause II alusel uuesti, et arvude 299 ja 92 suurim ühisjagaja on ühtlasi kahe väiksema arvu ja nimelt arvude 92 ja 23 suurim ühisjagaja. Hakkame otsima seda jagajat. Selleks jagame 92 23-ga. Näeme, et 23 on suurimaks ühisjagajaks arvupaarile 92 ja 23, järelikult ka arvupaarile 299 ja 92 ja seetõttu ka antud arvupaarile 391 ja 299.

***Reegel.*** **Et leida kahe arvu suurimat ühisjagajat, jagatakse neist suurem väiksemaga, siis väiksem esimese jäägiga, seejärel esimene jääk teise jäägiga, teine kolmandaga jne. niikaua, kuni saadakse jäägiks null; siis viimane jagaja ongi antud arvude suurimaks ühisjagajaks.**

**100. Teise viisi rakendamine kolmele või enamale arvule.**

Olgu tarvis leida suurim ühisjagaja kolmele arvule: 78, 130 ja 195. Selleks leiame kõigepealt suurima ühisjagaja ühele mingile paarile neist arvudest, näiteks arvudele 78 ja 130:

$$\begin{array}{r|l}
130 & 78 \\ \cline{2-2}
78 & 1 \\ \cline{1-1}
78 & 52 \\ \cline{2-2}
52 & 1 \\ \cline{1-1}
52 & 26 \\ \cline{2-2}
52 & 2 \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Nende arvude suurimaks ühisjagajaks on 26.

Nüüd leiame suurima ühisjagaja arvule 26 ja kolmandale antud arvule 195:

$$\begin{array}{r|l} 195 & 26 \\ \cline{2-2} 182 & 7 \\ \cline{1-1} 26 & 13 \\ \cline{1-1} 26 & 2 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Sel viisil saadud arv 13 ongi kõigi kolme antud arvu suurimaks ühisjagajaks.

Et selgitada, miks see nii peab olema, selleks kujutleme, et antud arvud on lahutatud algtegureiks ja et otsime suurimat ühisjagajat esimese viisi järgi. Siis peab arv 26, mis on arvude 130 ja 78 suurimaks ühisjagajaks, sisaldama eneses kõik nende arvude ühised algtegurid; arv 13, mis on arvude 26 ja 195 suurimaks ühisjagajaks, peab sisaldama eneses kõik need algtegurid, mis on ühised nendele arvudele. Arv 13 sisaldab eneses järelikult kõik algtegurid, mis on ühised kõigile kolmele arvule: 130, 78 ja 195; tähendab, 13 on nende arvude suurim ühisjagaja.

Kui nüüd peale kolme antud arvu oleks ka veel neljas arv, siis tuleks samasugusel viisil leida suurim ühisjagaja arvule 13 ja sellele neljandale arvule jne.

***Reegel.*** **Et leida kolmele või enamale arvule suurimat ühisjagajat järkjärgulise jagamise teel, leitakse kõigepealt suurim ühisjagaja kahele mingile arvule nende hulgast, siis leitakse suurim ühisjagaja leitud jagajale ja mingile kolmandale antud arvule, edasi suurim ühisjagaja viimasele jagajale ja neljandale antud arvule jne.**

## V. Arvude väikseim ühiskordne.

**101. Mis on väikseim ühiskordne?** *Antud arvude väikseimaks ühiskordseks nimetatakse väikseimat arvu, mis jagub iga antud arvuga.*

Kolme arvu 6, 15 ja 20 väikseim ühiskordne on 60, sest mingi arv, mis on väiksem kui 60, ei jagu nii 6 kui 15 kui 20-ga, 60 aga jagub kõigi nende arvudega.

Näitame kaks viisi arvude väikseima ühiskordse leidmiseks.

**102. Esimene viis: väikseima ühiskordse leidmine algtegureiks lahutamise teel.** Olgu tarvis leida järgmiste arvude väikseim ühiskordne: 100, 40 ja 35. Selleks lahutame need arvud algtegureiks:

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5; \quad 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5; \quad 35 = 5 \cdot 7.$$

Et mingi arv jaguks 100-ga, 40-ga ja 35-ga, on tarvilik ja piisav, et ta sisaldaks nende jagajate kõiki algtegureid. Kirjutame välja kõik arvu 100 algtegurid ja lisame neile arvu 40 need algtegurid, mis veel puuduvad arvu 100 algtegurite hulgas. Sel viisil saame korrutise $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2$, mis jagub nii 100-ga kui ka 40-ga. Lisame nüüd sellele korrutisele arvu 35 need tegurid, mis korrutises veel puuduvad. Siis saame korrutise

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 1400,$$

mis jagub nii 100-ga kui 40-ga kui 35-ga. See ongi nende arvude väikseim ühiskordne, sest kõrvaldades temast kas või ainult ühe teguri, saame arvu, mis ei jagu vähemalt ühega antud arvudest.

Pöörame tähelepanu sellele, et kui vaadeldud näites lisasime arvu 100 algtegureile seal veel puuduvaid arvu 40 tegureid, siis lisasime teguri 2. Arvu 100 algtegureiks lahutises on 2 olemas, kuid see tegur esineb seal kõigest

2 korda, arvu 40 lahutises aga 3 korda; seepärast peamegi teda lugema „**veel puuduvaks**" arvu 100 algtegureiks lahutises.

***Reegel.*** **Et leida antud arvude väikseimat ühiskordset, lahutatakse need arvud algtegureiks; siis kirjutatakse välja ühe antud arvu algtegurid, nendele kirjutatakse juurde teise arvu veel puuduvad algtegurid; saadud korrutisele kirjutatakse juurde temas veel puuduvad kolmanda arvu algtegurid jne. kuni viimase arvuni. Sel viisil saadud korrutis ongi antud arvude väikseim ühiskordne.**

Kasutades punktis 92 tarvitusele võetud astmete tähistust, võime üles kirjutada meie näites antud arvude algtegureiks lahutised järgmiselt:

$$100 = 2^2 \cdot 5^2; \quad 40 = 2^3 \cdot 5; \quad 35 = 5 \cdot 7.$$

On ilmne, et antud arvude väikseim ühiskordne peab sisaldama tegureid 2, 5 ja 7; seejuures tegur 2 peab esinema kolmandas astmes, sest väiksema astendaja puhul saadud arv ei saaks jaguda 40-ga; tegur 5 peab esinema teises astmes, sest saadud arv muidu ei jaguks 100-ga; lõpuks on küllaldane, kui võtame teguri 7 esimeses astmes. Sel viisil saame otsitavaks väikseimaks ühiskordseks

$$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1400.$$

Niisiis võime väljendada toodud reegli veel järgmiselt: **et leida antud arvude väikseimat ühiskordset, lahutatakse nad algtegureiks ja koostatakse korrutis kõikide antud arvude erinevate algtegurite astmetest, kusjuures iga tegur võetakse suurima astendajaga, millega ta esineb saadud lahutistes.**

**103. Mõned erijuhud.** Vaatleme kahte juhtu, kus väikseimat ühiskordset on võimalik leida väga lihtsalt.

Esimene juhtum: *antud arvude ükski paar ei oma ühiseid tegureid.* Olgu näiteks antud kolm arvu: 20, 49, 33; lahutame nad algteguriteks:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5, \quad 49 = 7 \cdot 7, \quad 33 = 3 \cdot 11;$$

näeme, et ükski paar ei oma ühiseid tegureid. Rakendades sel juhul üldreeglit, järeldame, et *väikseima ühiskordse leidmiseks tuleb kõik antud arvud omavahel korrutada:*

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11 = 20 \cdot 49 \cdot 33 = 32\,340.$$

Eriti tuleb toimida nii, kui otsitakse üksteisest erinevate *algarvude* väikseimat ühiskordset; näiteks arvude 3, 7, 11 väikseim ühiskordne võrdub $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$.

Teine juhtum: *suurim antud arvudest jagub kõikide ülejäänutega.* Siis suurim antud arv ongi väikseimaks ühiskordseks. Olgu näiteks antud neli arvu 5, 12, 15 ja 60, milledest 60 jagub 5-ga, 12-ga ja 15-ga; et seejuures 60 muidugi jagub ka enesega, siis ta ongi väikseim ühiskordne.

**104. Teine viis: väikseima ühiskordse leidmine suurima ühisjagaja leidmise teel.** Olgu tarvis leida väikseim ühiskordne arvudele 336 ja 1260. Lahutades need arvud algtegureiks, saame: $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$ ja $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Antud arvude korrutis võrdub:

$$336 \cdot 1260 = (2^4 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7). \qquad (1)$$

Meenutame nüüd, kuidas koostatakse kahe antud arvu suurimat ühisjagajat ja väikseimat ühiskordset. Iga algarv, mis esineb antud arvude algtegureiks lahutistes, esineb suurimas ühisjagajas väikseima astendajaga, väikseimas ühiskordses aga suurima astendajaga.

Seega esineb suurimas ühisjagajas $2^2$, väikseimas ühiskordses aga $2^4$; suurimas ühisjagajas esineb 3, väikseimas ühiskordses aga $3^2$; tegur 5, mis esineb ainult ühe antud arvu algtegureiks lahutises, esineb nende väikseimas ühis-

kordses, suurimas ühisjagajas aga ei esine; lõpuks tegur 7, mis kummagi antud arvu algtegureiks lahutises esineb astendajaga 1, peab esinema selle astendajaga nii suurimas ühisjagajas kui ka väikseimas ühiskordses.

Seega antud arvude suurim ühisjagaja on $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, nende väikseim ühiskordne aga on $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$. Näeme, et antud arvude kõik tegurid, mis asetsevad võrduse (1) parempoolses osas, on jaotatud: osa neist asetseb suurimas ühisjagajas, ülejäänud aga väikseimas ühiskordses. Seepärast antud arvude korrutis $336 \cdot 1260$ võrdub nende suurima ühisjagaja 84 ja nende väikseima ühiskordse 5040 korrutisega. Siit järgneb:

***Reegel.*** **Kahe arvu väikseim ühiskordne võrdub nende arvude korrutise ja nende suurima ühisjagaja jagatisega.**

Selle põhjal võime leida kahe arvu väikseimat ühiskordset, ilma et lahutaksime neid arve algtegureiks. Tõepoolest, antud arvude suurimat ühisjagajat on võimalik leida järkjärgulise jagamise teel. Pärast seda, kui aga on leitud suurim ühisjagaja, leitakse antud arvude väikseim ühiskordne hõlpsalt viimase reegli järgi.

**105. Kolme või enama arvu juhtum.** Olgu tarvis leida väikseim ühiskordne järgmisele kolmele arvule: 336, 1260 ja 350. Leiame kõigepealt arvude 336 ja 1260 väikseima ühiskordse; nagu nägime punktis 104, on selleks 5040. Leiame nüüd 5040 ja kolmanda antud arvu väikseima ühiskordse. Nende arvude suurimat ühisjagajat on hõlpus leida (näiteks järkjärgulise jagamise teel); saame 70. Arvude 5040 ja 350 väikseim ühiskordne võrdub p. 104 toodud reegli järgi:

$$\frac{5040 \cdot 350}{70} = 25200.$$

See arv ongi kolme antud arvu väikseim ühiskordne.

Samal viisil on võimalik leida ka nelja, viie või enama arvu väikseimat ühiskordset.

***Reegel.*** **Et leida kolme või enama arvu väikseimat ühiskordset, leitakse kõigepealt väikseim ühiskordne kahele mingile arvule nende hulgast, siis väikseim ühiskordne sellele väikseimale ühiskordsele ja mingile kolmandale antud arvule, edasi väikseim ühiskordne teisele väikseimale ühiskordsele ja neljandale antud arvule jne.**

III OSA.

# SUURUSTE MÕÕTMINE. MEETERMÕÕDUSTIK.

**106. Sissejuhatus.** Seni oli meil tegemist ainult täisarvudega. Täisarvude tarvituselevõtu aluseks oli ajalooliselt eelkõige loendamise vajadus; seda toimingut saab täisarvudega teostada täielikult. Kuid inimese tegevus tekitas juba igivanal ajal vajadusi, millede rahuldamiseks ei piisanud täisarvudest. Tuli tarvitusele võtta uusi arve ja aritmeetika pidi hakkama uurima nende arvude omadusi ja tehteid nende arvudega.

Inimtegevuse üheks põhiliigiks, mis tekitas tarviduse arvu mõiste laiendamiseks, on suuruste mõõtmine. Seepärast enne kui siirduda uute arvude tundmaõppimisele, peame peatuma nii küsimusel, mida kujutab endast suuruste mõõtmine, kui ka tähtsamatel mõistetel, mis on seotud selle protsessiga.

**107. Suuruste mõõtmine.** Oletame, et tahame saada täpset kujutlust mingi toa pikkusest; siis mõõdame selle toa pikkuse mingi teise pikkuse abil, mis on meile hästi tuntud, näiteks meetri abil. Selleks paigutame meetri niimitu korda toa pikkusse kui võimalik. Kui ta mahub toa pikkusse täpselt 10 korda, siis toa pikkuseks on 10 meetrit.

Samuti et mõõta mingi eseme kaalu, võtame teise eseme,

mille kaal on meile hästi tuntud, näiteks keha kaaluga üks gramm, ja teeme kindlaks (kaalude abil), mitu korda gramm sisaldub mõõdetava keha kaalus. Kui ta sisaldub täpselt 5 korda, siis eseme kaaluks on 5 grammi.

Tuntud suurust, mida kasutatakse teiste suuruste mõõtmiseks, nimetatakse antud liiki suuruste *ühikuks*. Nii on meeter pikkusühikuks, gramm kaaluühikuks jne.

Sama liiki suuruste jaoks valitakse tavaliselt mitu ühikut, mõned suuremad, mõned väiksemad. Nii näiteks kasutatakse kaalu mõõtmiseks peale grammi veel *kilogrammi*, *tonni*, *milligrammi* jne.

*Mõõta mingit suurust tähendab kindlaks teha, mitu korda sisaldub temas teine samaliiki suurus, mis on võetud ühikuks.*

**108. Mõõdud.** Igas riigis on valitsuse poolt kindlaks määratud kindlad ühikud tähtsamate suuruste mõõtmiseks. On valmistatud prototüüpühikud: prototüüpmeeter, prototüüpkilogramm jne., mille järgi toodetakse ühikuid igapäevaseks tarvitamiseks. Kasutamisel olevaid ühikuid nimetatakse *mõõtudeks*.

Mõõte nimetatakse *sama liiki* mõõtudeks, kui neid kasutatakse sama liiki suuruste mõõtmiseks. Nii näiteks on gramm ja kilogramm sama liiki mõõdud, kuna mõlemaid kasutatakse kaalu mõõtmiseks.

Kahe sama liiki mõõdu *suhteks* nimetatakse arvu, mis näitab, mitu korda suurem mõõt sisaldab väiksemat. Nii näiteks on meetri ja sentimeetri suhteks arv 100.

**109. Meetermõõdustik.** Käesoleval ajal on meil kasutusel meetermõõdustik, mis on kehtiv ka paljudes teistes maades.

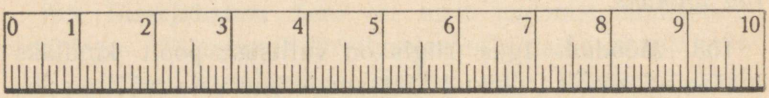
Pikkusühikuks on meetermõõdustikus meeter.

Meetri rahvusvaheliseks prototüübiks on tunnustatud 1889. a. toimunud Esimese Mõõtude ja Kaalude Peakonverentsi otsusega plaatina-iriidiumi sulamist mõõt, mida

hoitakse alal Rahvusvahelises Mõõtude ja Kaalude Büroos, Sèvres'is (Pariisi eeslinn).

Nõukogude Liidus on võetud meetri prototüübiks plaatina-iriidium-meetri koopia, mis kannab numbrit 28 ja hoitakse Üleliidulises Metroloogia ja Standardimise Instituudis Leningradis.

Meeter jaotatakse 10-ks võrdseks osaks, meetri kümnendik veel 10-ks võrdseks osaks, meetri sajandik omakorda veel 10-ks võrdseks osaks jne. Teiselt poolt kasutatakse ka 10 meetri, 100 meetri jne. pikkusi mõõte. Selleks et anda nimetusi meetri kümnendosadele, kirjutatakse sõnale „mee-




Joonis 1.

ter" ette ladinakeelsed sõnad: *detsi-* (et tähistada ühte kümnendikku), *tsenti-* (ühte sajandikku), *milli-* (ühte tuhandikku); nii tähistab *detsimeeter* ühte kümnendikku meetrist, *tsentimeeter* ühte sajandikku meetrist, *millimeeter* ühte tuhandikku meetrist.

Sõna „tsentimeeter" asendatakse tavaliselt sõnaga „sentimeeter".

Joonis 1 kujutab 1 detsimeetrit, mis on jaotatud sentimeetreiks ja millimeetreiks (loomulikus suuruses).

Meetri kordseid mõõte nimetatakse kreekakeelsete eessõnade abil: *deka-* (10), *hekto-* (100), *kilo-* (1000); nii tähendab *dekameeter* 10 meetrit, *hektomeeter* 100 meetrit, *kilomeeter* 1000 meetrit.

On kokku lepitud tähistada meetermõõtude nimetusi lühidalt nii:

| Meetermõõtude nimetused | Lühendatud tähised |
|---|---|
| meeter | m |
| detsimeeter | dm |
| sentimeeter | sm, cm |
| millimeeter | mm |
| kilomeeter | km |

Pindalade mõõtmiseks kasutatakse ruutmõõte: ruutmeetrit, s. o. ruudu pindala, mille külje pikkus on 1 m, ruutdekameetrit jne. Igaüks neist mõõtudest sisaldab eneses 100 järgmise madalama järgu mõõtu: nii sisaldab ruutdetsimeeter 100 ruutsentimeetrit jne.

Põldude pindala mõõtmiseks kasutatakse mõõte *aar* (a) ja *hektaar* (ha). Aar on *ruutdekameeter*; hektaar võrdub 100 aariga ja on järelikult *ruuthektomeeter*.

Ruumalade mõõtmiseks kasutatakse kuupmõõte: kuupmeetrit, s. o. kuubi ruumala, mille serva pikkus on 1 m, kuupdetsimeetrit jne. Igaüks neist mõõtudest sisaldab eneses 1000 järgmise madalama järgu mõõtu; nii näiteks sisaldab kuupmeeter 1000 kuupdetsimeetrit.

Kaalu mõõduks on *gramm* (g). Gramm võrdub ligikaudu ühe kuupsentimeetri puhta destilleeritud vee kaaluga temperatuuril 4° Celsiuse järgi õhuta ruumis. Gramm jaguneb detsigrammideks, sentigrammideks ja milligrammideks; grammi kordseid kaalumõõte nimetatakse: *dekagramm*, *hektogramm* ja *kilogramm* (viimast nimetatakse ka *kilo* ja tähistatakse kg).

Kasutatakse veel kaalumõõte: *tonn*, mis võrdub 1000 kg-ga, ja *tsentner*, mis võrdub 100 kg-ga.

Õõnesnõude mahtuvuse (ja vedel- ning sõmerainete ruumalade) mõõtmiseks kasutatakse mõõtu *liiter* (l).

*Liiter* on ruumala, mis võrdub ligikaudu ühe kuupdetsimeetriga. Täpsemalt on liiter ühe kilogrammi vee ruumala tema maksimaalse tiheduse ja normaalse atmosfäärilise rõhu puhul. Kasutatakse ka *hektoliitrit*, mis võrdub 100 l-ga.

Veel kasutatakse ka detsiliitrit, sentiliitrit, dekaliitrit ja kiloliitrit.

**110. Meetermõõdustiku eelised.** Meetermõõdustikul on kolm järgmist tähtsamat eelist: 1) erinevate suuruste mõõdud on lihtsas sõltuvuses põhimõõdust *meetrist*; 2) naaberjärkude mõõtude suhe on üks ja sama kõikide järkude ja kõikide suuruste puhul (välja arvatud muidugi pindalad ja ruumalad); 3) see suhe võrdub meie arvusüsteemi alusega, mistõttu tehted nimega arvudega lihtsustuvad tunduvalt.

**111. Ajamõõdud.** On olemas kaks põhilist *ajamõõtu*: ööpäev ja aasta. *Ööpäev* on (ligikaudselt) ajavahemik, mille vältel Maa teeb ühe täispöörde ümber oma telje; ööpäev jaguneb 24 *tunniks*, mida loetakse kas 1-st kuni 24-ni või 1-st kuni 12-ni ja siis jälle uuesti 1-st kuni 12-ni. Ööpäeva alguseks loetakse kesköö. Käesoleval ajal loetakse raudteede, laevanduse, posti, telegraafi ja raadiosaadete praktikas tunde 0-st kuni 24-ni (et vältida sõnade „enne lõunat" ja „pärast lõunat" lisamist).

Nii öeldakse „kell 2 päeval" asemel „kell 14", „kell 7 õhtul" asemel „kell 19".

Ööpäeva jaotatakse järgmiselt:

1 ööpäev = 24 tundi;
1 tund = 60 minutit;
1 minut = 60 sekundit.

Aasta kujutab endast (ligikaudu) seda ajavahemikku, mille vältel Maa teeb ühe täistiiru ümber Päikese. On lepitud kokku lugeda, et kolmes üksteisele järgnevas aas-

tas on à 365 päeva, nendele järgnevas neljandas aastas aga 366 päeva. Aastat, mis sisaldab 366 päeva, nimetatakse *liigaastaks*, aastaid aga, mis sisaldavad 365 päeva *lihtaastaiks*. Neljandale aastale lisatakse üks liigne päev järgmisel põhjusel. Maa ringlemise aeg Päikese ümber ei ole täpselt 365 ööpäeva, vaid 365 ööpäeva ja 6 tundi (ligikaudu). Nii on lihtaasta tõelisest aastast 6 tunni võrra lühem, 4 lihtaastat kokku aga on 4-st tõelisest aastast lühemad 24 tunni võrra, s. o. ühe ööpäeva võrra. Seepärast lisatakse igale neljandale aastale üks ööpäev (29. veebruar). Seejuures loetakse liigaastateks aastad, millede arvud jaguvad 4-ga ilma jäägita (näiteks 1936, 1940 jne.).

Aasta jaguneb 12 mittevõrdseks osaks, mida nimetatakse *kuudeks*. Kuude nimetused nende järjekorras on järgmised: *jaanuar* (31 päeva), *veebruar* (28 või 29 päeva), *märts* (31), *aprill* (30), *mai* (31), *juuni* (30), *juuli* (31), *august* (31), *september* (30), *oktoober* (31), *november* (30), *detsember* (31).

Ajaarvamine, mille järgi 3 aastat loetakse 365-päevasteks, neljas aasta aga 366-päevaseks, kehtestati Rooma diktaatori Julius Caesari poolt (45. aastal enne meie ajaarvamist) ja seepärast nimetatakse seda *juuliuse* ehk *vanaks kalendriks*. Venemaal oli ta kasutusel kuni revolutsioonini, pärast Suurt Sotsialistlikku Oktoobrirevolutsiooni see asendati rahvusvahelise *uue* ehk *gregooriuse kalendriga* (omab sellise nimetuse Rooma paavsti Gregorius XIII nime järgi, kes kehtestas selle ajaarvamise 1582. aastal). Selle kalendri järgi on ajaarvamine XX sajandil 13 päeva võrra ees vanast kalendrist; kui vana kalendri järgi näiteks on 10. detsember, siis uue kalendri järgi loetakse 23. detsember. Seega selleks, et uuelt kalendrilt üle minna vanale kalendrile, tuleb uue kalendri kuupäevast lahutada 13 päeva. Näiteks kui meil oli 5. märts 1936. aastal, siis vana kalendri järgi see oleks

olnud 21. veebruar samal aastal, sest lahutanud 5 märtsikuu päeva, peame järelejäänud 8 päeva lahutama veebruarist, veebruaris oli aga 1936. aastal 29 päeva.

112. **Gregooriuse ajaarvamise alused.** Aega ühest kevadpööripäevast kuni järgmise kevadpööripäevani nimetatakse *päikese-* ehk *troopiliseks aastaks*; aega, mis loetakse aastaks tsiviil-ajaarvamise kohaselt, nimetatakse *tsiviilaastaks*. Kuna aastaaegade muutused sõltuvad Maa asendist Päikese suhtes, siis päikeseaasta kujutab endast sellist ajavahemikku, mille vältel täielikult toimuvad aastaaegade muutused. Seepärast on soovitav, et tsiviilaasta võimalikult ühtuks päikeseaastaga; ainult sel tingimusel satuvad aastaajad erinevatel ajajärkudel ühtedele ja samadele kuudele. Julius Caesari poolt kehtestatud ajaarvamine ei saavutanud seda täielikult. Selle ajaarvamise järgi loetakse tsiviilaastaks 365 päeva ja 6 tundi, kuna päikeseaastaks on (ligikaudu) 365 päeva 5 tundi 48 minutit 48 sekundit, nii et aasta juuliuse kalendri järgi on päikeseaastast pikem (ligikaudu) 11 minutit 12 sekundi võrra, mis 400 aastaga annab umbes kolm päeva. Juuliuse ajaarvamist parandati esmakordselt paavst Gregorius XIII poolt 1582. aastal. Sel aastal oli vahe tsiviilkalendri ja päikesekalendri vahel 10 päeva, nii loeti näiteks 1. september sel ajal, kui päikeseaja järgi oleks tulnud lugeda 11. september. Selleks et kaotada vahet tsiviilaja ja päikeseaja vahel, käskis Gregorius 1582. aastal lugeda 5. oktoobri asemel 15. oktoober. Selleks et seesugune mahajäämine edaspidi ei korduks, määrati kindlaks, et edaspidi tsiviilajaarvamise iga 400 aastat tuleb lühendada 3 ööpäeva võrra. See lühendamine pidi toimuma järgmisel viisil. Juuliuse ajaarvamise järgi need aastad, millede arvuks on täissajad, näiteks aastad 1600, 1700 jne., pidi loetama 366-päevasteks. Gregorius aga tegi ettepaneku lugeda need aastad lihtaastaiks, välja arvatud aastad, millede sajaliste arv jagub 4-ga. Seetõttu gregooriuse ajaarvamise järgi 1600. aasta tuli lugeda liigaastaks (16 jagub 4-ga), aastad 1700, 1800, 1900 aga lihtaastaiks, kuna juuliuse ajaarvamise järgi kõik need neli aastat loeti liigaastaiks. Sel viisil lühendatakse iga 400 aastat 3 päeva võrra. Gregorius XIII poolt kehtestatud ajaarvamine on tuntud *gregooriuse* kalendri nime all. Ta on käesoleval ajal kasutusel peaaegu kogu Euroopas. Gregooriuse kalendrit nimetatakse teisiti *uueks kalendriks*, juuliuse kalendrit aga *vanaks kalendriks*. Kuna 1582. aastal uus kalender läks vanast kalendrist 10 päeva võrra ette ja pärast seda veel kolme päeva võrra (aastad 1700, 1800 ja 1900), siis käesoleval ajal vana kalender jääb uuest kalendrist 13 päeva võrra maha.

**113. Nimega (konkreetsed) arvud.** Täisarvu koos nende ühikute nimetustega, milledest ta on koostatud, nimetatakse nimega arvuks. Näiteks 5 pliiatsit, 3 meetrit, 37 grammi on *nimega arvud.* Kui aga arvu juures ei ole näidatud nende ühikute nimetusi, milledest ta on koostatud, siis sellist arvu nimetatakse *nimeta* (*abstraktseks*) arvuks. 5, 3, 37 on nimeta arvud.

Väljendusele „nimega arv" antakse mõnikord veelgi laiem tähendus. Oletame näiteks, et mingi keha kaalu kindlakstegemisel leidsime, et selleks kaaluks on 3 kg ja peale selle veel 350 g; siis selle keha kaalu, mida kirjutatakse

3 kg 350 g,

nimetatakse samuti nimega arvuks (kuigi siin tõeliselt on olemas kaks eri arvu ja kaks eri mõõtu). Samuti nimetatakse ka 12 m 47 sm nimega arvuks.

Nimega arvu nimetatakse *ühe nimega arvuks*, kui ta sisaldab vaid ühe nimetusega ühikuid, näiteks 3 kg.

Nimega arvu nimetatakse *mitme nimega arvuks*, kui ta sisaldab eri nimetusega ühikuid, näiteks 3 kg 350 g.

Kui kaks nimega arvu väljendavad üht ja sama suurust, siis loetakse nad *võrdseteks.* Näiteks mitme nimega arv 2 km 25 m võrdub ühe nimega arvuga 2025 m, sest mõlemad need arvud väljendavad üht ja sama pikkust.

Nimega arvu teisendamist mingi madalama järgu ühikuteks nimetatakse *peenestamiseks*, nimega arvu teisendamist kõrgema järgu ühikuteks nimetatakse *ülestamiseks.* Nii on arvu 2 km 25 m teisendamine arvuks 2025 m peenestamine, vastupidine teisendamine aga (arv 2025 m arvuks 2 km 25 m) on ülestamine.

**114. Mispärast on suuruste mõõtmiseks tarvilikud uued arvud?** Kui tahame loendada, mitu lauda on klassis või

mitu puud on aias, siis leiame alati täisarvu, mis vastab meie küsimusele. Seepärast ei vajata esemete loendamiseks mingeid teisi arve peale täisarvude.

Kui aga tahame mõõta näiteks toa pikkust, siis tahame teada, mitu korda valitud pikkusühik, näiteks meeter, mahub sellesse pikkusse. Seejuures võib juhtuda, et kui oleme paigutanud meetri sellesse pikkusse 5 korda, siis märkame, et osa toa pikkusest jäi veel mõõtmata, aga meeter sellesse pikkusse enam ei mahu, sest järelejäänud pikkus on väiksem kui meeter. See tähendab, et mõõdetav pikkus sisaldab mõõtühikut (meetrit) rohkem kui 5 korda, seejuures aga vähem kui 6 korda. Tähendab vastuseks küsimusele, mitu meetrit sisaldab mõõdetav pikkus, ei saa olla mingi täisarv, sest ei ole olemas täisarvu, mis on suurem 5-st ja väiksem 6-st. Kui me aga tahame siiski saada vastust meie küsimusele mingi arvu näol, siis peame laiendame meie poolt tundmaõpitavate arvude valdkonda, s. t. peame peale täisarvude tarvitusele võtma veel mõningaid teisi, uusi arve. Nende arvude tundmaõppimisele asumegi nüüd.

# IV OSA.

# HARILIKUD MURRUD.

## I. Põhimõisteid.

**115. Ühiku osad.** Oleme juba kohanud selliseid mõõtühikuid, mida on võimalik jaotada võrdseteks osadeks. Nii näiteks on 1 m võimalik jaotada 100 sentimeetriks; üks ööpäev on jaotatav 24 tunniks.

Me nimetame sentimeetrit meetri *sajandikuks;* täpselt samuti nimetame tundi ööpäeva *kahekümneneljandikuks.* Millimeeter kujutab endast meetri *tuhandikku.* Ööpäev kujutab endast *kolmesaja kuuekümne viiendikku* lihtaastast (s. o. mitte liigaastast). Gramm on *tuhandik* kilogrammist; minut on *kuuekümnendik* tunnist.

Kahendikku nimetatakse lühidalt *pooleks*, neljandikku *veerandiks.*

**116. Murdarv.** *Ühelise üht osa või ühelise mitme võrdse osa kogumikku nimetatakse murruks.*

Näiteks: 1 kümnendik, 3 viiendikku, 12 seitsmendikku on murrud.

Täisarv koos murruga moodustab *segaarvu;* näiteks 3 tervet ja 7 kaheksandikku (s. t. 3 tervet ühelist, millele on lisatud veel 7 kaheksandikku ühelisest).

Murde ja segaarve nimetatakse nende eraldamiseks *täisarvudest*, mis on koostatud tervetest ühelistest, *murdarvudeks.*

**117. Murru kujutamine.** On lepitud kokku kujutada murdu järgmiselt: kirjutatakse arv, mis näitab, mitu osa sisaldab murd; selle alla tõmmatakse joon; joone alla kirjutatakse teine arv, mis näitab, mitmeks võrdseks osaks on jaotatud üheline, millest võeti murd. Näiteks 3 viiendikku kujutatakse järgmiselt: $\frac{3}{5}$.

Arvu, mis asetseb murrujoone peal, nimetatakse murru *lugejaks;* ta näitab nende osade arvu, millest on koostatud murd. Arvu, mis asetseb joone all, nimetatakse murru *nimetajaks;* ta näitab, mitmeks võrdseks osaks jaotati üheline. Mõlemaid arve nimetatakse *murru liikmeteks.*

Segaarvu kujutatakse järgmiselt: kirjutatakse täisarv ja temale kirjutatakse paremale poole juurde murd: näiteks arv 3 ja kaks seitsmendikku kirjutatakse järgmiselt: $3\frac{2}{7}$.

**118. Murdarvude saamine mõõtmisel.** Oletame, et soovime mõõta mingit pikkust meetri abil. Oletame, et meeter mahub sellesse pikkusse 7 korda, kusjuures saadakse meetrist väiksem jääk. Et mõõta seda jääki, otsime sellise osa meetrist, mis, kui võimalik, mahuks jäägisse ilma uue jäägita. Mahtugu kümnendik meetrist jäägisse täpselt 3 korda. Siis öeldakse, et mõõdetav pikkus võrdub $7\frac{3}{10}$ meetriga.

Samuti võivad tekkida murdarvud kaalu mõõtmisel (näiteks $2\frac{1}{4}$ grammi), aja mõõtmisel (näiteks $\frac{7}{10}$ tundi) jne.

Seega võib murdarv tekkida *mõõtmise tulemusena.*

**119. Murdarvude tekkimine täisarvu jaotamisel võrdseteks osadeks.** Olgu tarvis jaotada 5 kg leiba 8-ks võrdseks osaks. Selle jaotamise võime teostada järgmiselt: kujut-

leme, et iga kilogramm leiba on jaotatud 8-ks võrdseks osaks (kaheksandikeks); siis 5 kg leivas on selliseid osi $8 \cdot 5$, s. o. 40, viie kg leiva ühes kaheksandikus peab neid olema $40 : 8$, s. o. 5. Tähendab kaheksandik 5 kg-st võrdub $\frac{5}{8}$-ga ühest kilogrammist (ja üldiselt kaheksandik 5-st mingist ühikust võrdub $\frac{5}{8}$-ga ühest sellest ühikust).

Võtame veel teise näite: arvu 28 tuleb vähendada 5 korda, s. t. 28 asemel tuleb võtta üks viiendik sellest arvust. 28 on arvude 25 ja 3 summa. Viiendik arvust 25 on 5. Et leida viiendikku 3-st, jaotame iga ühelise 5-ks võrdseks osaks; võttes igast ühelisest $\frac{1}{5}$, leiame, et viiendik kolmest ühelisest on $\frac{3}{5}$. Tähendab viiendik arvust 28 võrdub $5\frac{3}{5}$-ga.

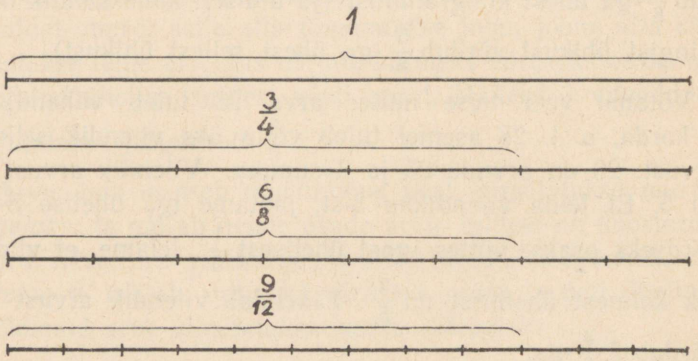
On aga võimalik leida viiendikku arvust 28 ka veel järgmiselt: viiendik ühest ühelisest on $\frac{1}{5}$; viiendik teisest ühelisest on samuti $\frac{1}{5}$; kui sel viisil võtame viiendiku igast 28 ühelisest, siis saame $\frac{28}{5}$. Niiviisi:

**et jaotada täisarvu võrdseteks osadeks, tuleb võtta see täisarv murru lugejaks, nimetajaks aga kirjutada teine arv, mis näitab, mitmeks võrdseks osaks on jaotatud täisarv.**

N ä i t e i d. Üks kaheteistkümnendik arvust 7 on $\frac{7}{12}$; veerand arvust 15 on $\frac{15}{4}$; murd $\frac{8}{13}$ on kolmeteistkümnendik arvust 8; murd $\frac{29}{6}$ on kuuendik arvust 29.

**Järeldus.** Iga murdu võib vaadelda kui kogumikku mitmest ühesugusest ühelise osast ja ka kui *ühte osa mitmest tervest ühelisest.* Nii kujutab murd $\frac{5}{8}$ endast 5 kaheksandikku ühest ühelisest ja ka ühte kaheksandikku 5 ühelisest.

**120. Murdarvude võrdsus ja mittevõrdsus.** Kahte murdarvu peetakse võrdseiks, kui suurused, mida väljendavad need arvud *ühe ja sama mõõtühiku puhul*, on omavahel võrdsed.




Joonis 2.

Võtame mingi murru, näiteks $\frac{3}{4}$ (olgu selleks $\frac{3}{4}$ sellest pikkusest, mis on kujutatud joonisel 2). Jagame iga veerandi pooleks, saame veel väiksemad osad; ühes veerandis on selliseid osi 2, tähendab, tervik sisaldab neid $2 \cdot 4 = 8$; järelikult on need kaheksandikud; kolm veerandit sisaldab neid kaheksandikke $2 \cdot 3 = 6$; tähendab murd $\frac{3}{4}$ võrdub murruga $\frac{6}{8}$. Sellega tahame öelda, et kaks pikkust, millest üks on $\frac{3}{4}$ meetrit, teine aga $\frac{6}{8}$ meetrit, on omavahel võrdsed. Või et kaks raskust, millest üks võrdub $\frac{3}{4}$ kilogrammiga, teine $\frac{6}{8}$ kilogrammiga, on omavahel võrdsed jne.

Kahest mittevõrdsest murdarvust loetakse suuremaks see, mis väljendab suuremat suurust *ühe ja sama mõõtühiku puhul.* Näiteks kui ütleme, et $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$, siis tahame

sellega rõhutada, et näiteks $\frac{1}{5}$ grammi on suurem kui $\frac{1}{8}$ grammi, $\frac{1}{5}$ tundi on suurem kui $\frac{1}{8}$ tundi jne.

Kui aga kahe murru lugejad on võrdsed, siis on nendest suurem see, mille *nimetaja on väiksem*, sest ta sisaldab samasuguse arvu suuremaid ühelise osi kui teine. Näiteks $\frac{2}{3}$ on suurem kui $\frac{2}{5}$.

**121. Lihtmurd ja liigmurd.** Murdu, mille lugeja on nimetajast väiksem, nimetatakse *lihtmurruks*; murdu aga, mille lugeja on nimetajast suurem või temaga võrdne, nimetatakse *liigmurruks*. On ilmne, et lihtmurd on 1-st väiksem, liigmurd aga on 1-st suurem või 1-ga võrdne; näiteks:

$$\frac{7}{8}<1,\ \frac{8}{8}=1,\ \frac{9}{8}>1.$$

**122. Täisarvu muutmine liigmurruks.** Iga täisarvu on võimalik väljendada ühelise mistahes osades. Olgu näiteks tarvis väljendada täisarvu 8 kahekümnendikes. Üks üheline sisaldab 20 kahekümnendikku; 8 ühelist sisaldab neid järelikult $20 \cdot 8$, s. o. 160. Tähendab:

$$8=\frac{20 \cdot 8}{20}=\frac{160}{20}.$$

Samuti väljendub arv 25 veerandeis liigmurruna $\frac{100}{4}$, arv 100 väljendub seitsmeteistkümnendikes liigmurruna $\frac{1700}{17}$ jne.

***Reegel.*** **Et muuta täisarvu antud nimetajaga liigmurruks, tuleb see nimetaja korrutada täisarvuga ja saadud korrutis võtta lugejaks, nimetajaks aga kirjutada antud nimetaja.**

*Märkus:* Täisarvu on mõnikord kasulik kujutada niisuguse murruna, mille lugeja võrdub selle täisarvuga, nimetajaks aga on üks. Nii kirjutatakse 5 asemel mõnikord $\frac{5}{1}$

(viis ühendikku). Et anda mõtet sellistele väljendustele, on kokku lepitud, et arvu „ühendik" on arv ise.

**123. Segaarvu muutmine liigmurruks.** Olgu tarvis muuta segaarv $8\frac{3}{5}$ liigmurruks. See tähendab, et on tarvis teada saada, mitu viiendikku sisaldab kaheksa ühelist koos kolme viiendikuga samast ühelisest.

Üks üheline sisaldab 5 viiendikku; järelikult kaheksa ühelist sisaldab neid $5 \cdot 8$, s. o. 40; tähendab kaheksa ühelist koos kolme viiendikuga sisaldab neid $40 + 3$, s. o. 43.

Niisiis, $8\frac{3}{5} = \frac{43}{5}$. Samuti

$$3\frac{7}{8} = \frac{8 \cdot 3 + 7}{8} = \frac{31}{8};$$

$$10\frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 10 + 1}{4} = \frac{41}{4}.$$

***Reegel.*** **Et muuta segaarvu liigmurruks, korrutatakse täisarv nimetajaga, saadud korrutisega liidetakse lugeja ja see summa võetakse otsitava murru lugejaks, nimetaja jäetakse aga endiseks.**

**124. Liigmurru muutmine segaarvuks.** Olgu tarvis muuta liigmurd $\frac{100}{8}$ segaarvuks, s. o. teada saada, kui palju see liigmurd sisaldab täis- ühelisi ja kui palju jääb järele kaheksandikke, mis ei moodusta ühelist. Kuna üheline sisaldab eneses 8 kaheksandikku, siis 100 kaheksandikku sisaldab niimitu ühelist, kuimitu korda 100 kaheksandikku sisaldab 8 kaheksandikku. 8 kaheksandikku sisaldub 100 kaheksandikus 12 korda, kusjuures jääb järele veel 4 kaheksandikku. Niisiis

$$\frac{100}{8} = 12\frac{4}{8}.$$

Samuti:

$$\frac{59}{8} = 7\frac{3}{8}; \quad \frac{314}{25} = 12\frac{14}{25}; \quad \frac{85}{17} = 5; \quad \frac{25}{25} = 1.$$

***Reegel.*** **Et muuta liigmurdu sega- või täisarvuks, jagatakse lugeja nimetajaga; sel jagamisel saadud täisjagatis näitab segaarvu üheliste arvu, jääk aga ühelise osade arvu segaarvus.**

Liigmurru segaarvuks muutmist nimetatakse mõnikord ka veel *täisosa eraldamiseks* sellest murrust.

## II. Murru suuruse muutumine tema liikmete muutmisel.

### 125. Murru kummagi liikme suurendamine või vähendamine sama arv korda.

Vaatleme uuesti joonist 2 (lk. 108); punktis 120 jagasime iga veerandi 2-ks võrdseks osaks; sel viisil saime kaheksandikud; kolm veerandit sisaldab 6 kaheksandikku ja seepärast, nagu nägime, murd $\frac{3}{4}$ võrdub murruga $\frac{6}{8}$.

Kui jagame iga veerandi 2 asemel 3-ks võrdseks osaks, siis saame veelgi väiksemad osad, mida tervik sisaldab $3 \cdot 4$, s. o. 12 (need on, tähendab, kaheteistkümnendikud), kolm veerandit sisaldab neid aga $3 \cdot 3$, s. t. 9; siis saame $\frac{3}{4}$ asemel murru $\frac{9}{12}$, mis suuruselt on võrdne murruga $\frac{3}{4}$. Jagades sel viisil iga veerandi 2, 3, 4, 5 jne. võrdseks osaks, saame rea järgmisi võrdseid murde:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{18}{24} = \ldots$$

Igaüks neist murdudest, alates teisest, saadakse esimesest murrust $\frac{3}{4}$ selle lugeja ja nimetaja korrutamisel ühe ja sama arvuga: 2, 3, 4 jne., tähendab **murru suurus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutada ühe ja sama arvuga** (ehk suurendada sama arv korda).

Üldkujul on murru sellist omadust võimalik väljendada järgmiselt:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Siit järgneb, **et murru suurus ei muutu ka siis, kui ta lugejat ja nimetajat jagada ühe ja sama arvuga** (ehk vähendada sama arv korda). Näiteks murru $\frac{30}{50}$ mõlemad liikmed jaguvad 10-ga; selle murru võime asendada murruga $\frac{3}{5}$, mis saadakse, kui murru $\frac{30}{50}$ lugejat ja nimetajat vähendada 10 korda.

**126. Murru ühe liikme suurendamine või vähendamine mingi arv korda.**

**Kui suurendada (või vähendada) murru lugejat mingi arv korda, siis murd suureneb (või väheneb) sama arv korda.** Näiteks suurendades murru $\frac{4}{10}$ lugejat 3 korda, saame $\frac{12}{10}$. See murd on eelmisest 3 korda suurem, seepärast et ta sisaldab 3 korda rohkem osi, osad aga jäid endisteks.

**Kui suurendada (või vähendada) murru nimetajat mingi arv korda, siis murd väheneb (või suureneb) sama arv korda.** Suurendades näiteks murru $\frac{4}{10}$ nimetajat 5 korda, saame $\frac{4}{50}$. See murd on eelmisest 5 korda väiksem, seepärast et (vastavalt p. 125) $\frac{4}{10} = \frac{4 \cdot 5}{10 \cdot 5} = \frac{20}{50}$, $\frac{20}{50}$ on aga 5 korda suurem kui $\frac{4}{50}$.

**127. Murru suurendamine või vähendamine mingi arv korda.** Teades, kuidas muutub murd tema lugeja või nimetaja muutumisel, võime tuletada järgmised *reeglid:*

**1) et suurendada murdu mingi arv korda, tuleb suurendada sama arv korda tema lugejat või vähendada sama arv korda tema nimetajat;**

**2) et vähendada murdu mingi arv korda, tuleb vähendada sama arv korda tema lugejat või suurendada sama arv korda tema nimetajat.**

N ä i t e i d:

$\frac{7}{12}$ suurendada 5 korda; saame $\frac{35}{12}$.

$\frac{7}{12}$ suurendada 6 korda; saame $\frac{42}{12}$ ehk $\frac{7}{2}$.

$\frac{8}{9}$ vähendada 7 korda; saame $\frac{8}{63}$.

$\frac{8}{9}$ vähendada 4 korda; saame $\frac{8}{36}$ ehk $\frac{2}{9}$.

Muidugi pole lugeja vähendamine mingi arv korda (murru vähendamiseks) või nimetaja vähendamiseks mingi arv korda (murru suurendamiseks) mitte alati võimalik (nagu nähtub toodud näidetest), vaid on võimalik siis, kui lugeja või nimetaja jagub selle arvuga, mis näitab, mitu korda on tarvis murdu vähendada või suurendada.

**128. Murru mõlema liikme suurendamine või vähendamine ühe ja sama arvu võrra.** Oletame, et murru $\frac{a}{b}$ mõlema liikmega on liidetud üks ja sama arv $m$; siis saame uue murru $\frac{a+m}{b+m}$. Võrdleme seda murdu eelmisega. Selleks korrutame eelmise murru mõlemad liikmed $(b+m)$-ga, uue murru mõlemad liikmed aga $b$-ga:

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b+m)}{b(b+m)}; \quad \frac{a+m}{b+m} = \frac{(a+m)b}{(b+m)b}.$$

Nüüd võrdleme kahe saadud murru lugejaid omavahel, sest nende nimetajad on ühesugused:

$$a(b+m) = ab + am \text{ ja } (a+m)b = ab + bm.$$

Lahutades mõlemast saadud summast $ab$, saame esimesel juhul $am$, teisel juhul $bm$. Kui võetud murd on 1-st väiksem, s. o. kui $a < b$, siis $am < bm$; tähendab antud juhul lihtmurd suurenes. Kui aga antud murd on 1-st suurem, s. t. kui $a > b$, siis $am > bm$; tähendab antud toiminguga selline murd vähenes.

Niisiis:

**kui murru liikmetega liita üks ja sama arv, siis 1-st väiksem murd suureneb, 1-st suurem murd aga väheneb.**

Näiteks kui võtta murd $\frac{1}{2}$ ja liita tema lugejaga ja nimetajaga 1, siis saame murru $\frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$, mis on suurem kui $\frac{1}{2}$; kui aga võtta murd $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ ja sellega teha sama, siis saame murru $\frac{3+1}{2+1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, mis on väiksem kui $\frac{3}{2}$.

## III. Murru taandamine.

**129. Mida nimetatakse murru „taandamiseks"?** *Murru taandamiseks nimetatakse tema asendamist teise temaga võrdse murruga, mille liikmed on väiksemad ja mis saadakse lugeja ja nimetaja jagamisel ühe ning sama arvuga.*

Taandada on muidugi võimalik ainult sellist murdu, mille liikmed omavad mingit ühist jagajat peale ühe; näiteks murdu $\frac{8}{12}$ on võimalik taandada, murdu $\frac{9}{20}$ aga ei ole võimalik taandada, kuna esimese murru lugejal ja nimetajal on ühisjagaja 4 (taandamisel saadakse murd $\frac{2}{3}$), teise murru lugejal ja nimetajal aga ei ole mingit ühisjagajat peale arvu üks.

Murdu, mida pole võimalik taandada, nimetatakse *taandamatuks*.

**130. Kaks taandamise viisi.** Esimene viis (järkjärguline taandamine) seisneb selles, et kasutades jaguvuse tunnuseid, püütakse leida murru lugeja ja nimetaja mingi ühisjagaja (peale arvu 1); kui niisugune jagaja on olemas, siis taandatakse sellega murdu; pärast taandamist saadud murdu, kui võimalik, taandatakse samal viisil uuesti ja seesugust järkjärgulist taandamist jätkatakse niikaua, kuni saadakse taandamatu murd.

$$\frac{840}{3600} = \frac{84}{360} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}.$$

Meelespidamiseks on kasulik algul kirjutada murru kohale arv, millega taandatakse (taandaja). Hiljem, kui on omandatud teatav vilumus, loobutakse niisugusest pealekirjutusest.

Teine viis (täielik taandamine) seisneb selles, et leitakse murru liikmete suurim ühisjagaja ja, kui selleks ei ole üks, jagatakse temaga murru liikmed. Olgu näiteks tarvis taandada murd $\frac{391}{527}$. Selleks leiame arvude 391 ja 527 suurima ühisjagaja (see on 17) ja taandame sellega:

$$\frac{391}{527} = \frac{391 : 17}{527 : 17} = \frac{23}{31}.$$

Sel juhul saadakse pärast taandamist taandamatu murd. Tõepoolest peab murru liikmete suurim ühisjagaja sisaldama eneses kõik ühised algtegurid, mis leiduvad nendes liikmetes; seepärast kui jagame temaga lugejat ja nimetajat, siis saadud jagatised ei saa eneses enam sisaldada mingeid ühistegureid (peale arvu 1) ja järelikult ei saa omada mingeid ühisjagajaid.

**131. Taandamatudest murdudest.** ***Teoreem.*** *Kui antud murd võrdub mingi taandamatu murruga, siis saadakse antud murru liikmed*

*selle taandamatu murru liikmete korrutamisel ühe ja sama täisarvuga.*

Oletame, et

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1},$$

kusjuures oletame, et esimene murd on taandamatu, s. t. et tema liikmed $a$ ja $b$ ei oma ühisjagajaid peale arvu üks. On tarvis tõestada, et $a_1$ on $a$ kordne ja et $b_1$ on $b$ kordne ja seejuures võrdne arv korda. Tõestamiseks korrutame teise murru mõlemad liikmed $b$-ga, esimese murru liikmed aga $b_1$-ga; kuna murdude suurused see tõttu ei muutu, siis saame võrduse

$$\frac{ab_1}{bb_1} = \frac{a_1b}{b_1b},$$

kust leiame, et

$$ab_1 = a_1b.$$

Korrutis $ab_1$ jagub $a$-ga, tähendab ka korrutis $a_1b$ jagub $a$-ga; arvud $b$ ja $a$ on eelduse kohaselt ühisjagajata, mistõttu on tarvilik, et $a_1$ jaguks $a$-ga (p. 88). Tähistades $a_1$ ja $a$ jagatise tähega $m$, võime kirjutada: $a_1 = am$, mille järgi viimase võrduse alusel saame:

$$ab_1 = amb.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled $a$-ga, saame:

$$b_1 = mb.$$

Seega oleme kindlaks teinud, et $a_1 = am$ ja $b_1 = bm$, mida oligi vaja tõestada.

***Järeldus 1.*** *Kaks taandamatut murdu on võrdsed ainult siis, kui nendel on võrdsed lugejad ja võrdsed nimetajad.*

***Järeldus 2.*** *Iga murd võrdub ühe ja ainult ühe taandamatu murruga.* Tõepoolest teine taandamise viis (p. 130) näitab, et iga murd võrdub mingi taandamatu murruga; kui ta aga võrduks kahe sellise murruga, siis need kaks taandamatut murdu võrduksid teineteisega, mis pole aga võimalik järelduse 1 tõttu. Tähendab antud murd võrdub ainult ühe taandamatu murruga.

## IV. Murdude teisendamine ühenimelisteks.

**132. Seletus.** Võtame näiteks kaks murdu $\frac{5}{12}$ ja $\frac{7}{15}$ ja küsime, kas ei ole võimalik avaldada neid murde ühe-

sugustes ühelise osades. Murd $\frac{5}{12}$ on taandamatu; seepärast nende murdude nimetajad, milledega võib võrduda murd $\frac{5}{12}$, peavad olema arvud, mis on arvu 12 kordsed. Teiste sõnadega, peale kaheteistkümnendikkude on võimalik teda väljendada veel kahekümne neljandikes, kolmekümne kuuendikes, neljakümne kaheksandikes jne. Samuti peavad murdude nimetajad, millega võib võrduda taandamatu murd $\frac{7}{15}$, olema arvud, mis on arvu 15 kordsed; nende kahe murru ühisnimetaja peab olema järelikult arvude 12 ja 15 ühiskordne, väikseim ühisnimetaja aga peab olema arvude 12 ja 15 väikseim ühiskordne. Leiame nende arvude väikseima ühiskordse:

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3; \\ 15 &= 3 \cdot 5; \\ \hline \text{v. ü. k.} &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60. \end{aligned}$$

See ongi murdude $\frac{5}{12}$ ja $\frac{7}{15}$ *väikseimaks ühisnimetajaks.* Et avaldada kumbagi neist murdudest kuuekümnendikes, leiame nende nimetajate nn. *laiendustegurid* ehk *laiendajad*, s. t. leiame kummagi nimetaja jaoks *arvu, millega tuleb teda korrutada, et saada väikseimat ühisnimetajat.* Et $60 = 12 \cdot 5 = 15 \cdot 4$, siis 60 saamiseks tuleb 12 korrutada 5-ga, 15 aga 4-ga. Et murru suurus ei muutuks, tuleb kummagi murru lugejat korrutada sama arvuga, millega korrutatakse tema nimetajat, seepärast:

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}, \quad \frac{7}{15} = \frac{7 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{28}{60}.$$

Olgu veel tarvis teisendada ühenimelisteks (väikseima ühisnimetajaga murdudeks) kolm murdu: $\frac{4}{90}$, $\frac{7}{20}$ ja $\frac{8}{75}$. Esimene neist on taandatav murd; pärast taandamist ta annab $\frac{2}{45}$, ülejäänud murrud on taandamatud.

Leiame kõikide nimetajate, 45, 20 ja 75 väikseima ühiskordse:

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, laiendaja 45 jaoks on 20;
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, „ 20 „ „ 45;
$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$, „ 75 „ „ 12;

v. ü. k. $= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 900$.

Korrutame nüüd iga murru mõlemad liikmed tema nimetaja laiendajaga:

$$\frac{2}{45} = \frac{2 \cdot 20}{45 \cdot 20} = \frac{40}{900}; \quad \frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 45}{20 \cdot 45} = \frac{315}{900}; \quad \frac{8}{75} = \frac{8 \cdot 12}{75 \cdot 12} = \frac{96}{900}.$$

***Reegel.*** **Et teisendada murde ühenimelisteks, väikseima ühisnimetajaga, neid kõigepealt, kui võimalik, taandatakse; seejärel leitakse kõikide nimetajate väikseim ühiskordne ja määratakse iga nimetaja jaoks vastav laiendaja; lõpuks korrutatakse iga murru mõlemad liikmed tema nimetaja laiendajaga.**

**133. Mõned erijuhud.** 1. juhtum: *ükski nimetajate paar ei sisalda ühistegureid.*

Näiteks:

$$\frac{3}{7}, \frac{4}{15}, \frac{5}{8}.$$

Et sel juhul nimetajate väikseim ühiskordne võrdub nende korrutisega, siis tuleb iga murru mõlemaid liikmeid korrutada ülejäänud murdude nimetajate korrutisega:

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 15 \cdot 8}{7 \cdot 15 \cdot 8} = \frac{360}{840};$$

$$\frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 8}{15 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{224}{840};$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 15}{8 \cdot 7 \cdot 15} = \frac{525}{840}.$$

Eriti toimitakse nii, kui nimetajateks on üksteisest erinevad algarvud.

2. juhtum: *suurim nimetaja jagub igaühega ülejäänutest.*

Näiteks:

$$\frac{3}{7},\ \frac{7}{15},\ \frac{8}{315}.$$

Nimetaja 315 jagub 7-ga ja 15-ga. Sel juhul suurim nimetaja on kõikide nimetajate väikseimaks ühiskordseks; tähendab ta peab olema väikseimaks ühisnimetajaks;

7 jaoks on laiendaja 45;

$$\frac{3}{7}=\frac{3\cdot 45}{7\cdot 45}=\frac{135}{315};$$

15 jaoks on laiendaja 21;

$$\frac{7}{15}=\frac{7\cdot 21}{15\cdot 21}=\frac{147}{315};\ \frac{8}{315}=\frac{8}{315}.$$

## V. Tehted murdarvudega.

### Murdarvude liitmine.

**134. Definitsioon ja reegli tuletamine.** Murdarvude liitmist võib defineerida samal viisil, nagu täisarvude liitmist (p. 19), ja nimelt:

*liitmine on tehe, mille abil mitu antud arvu* (liidetavat) *ühendatakse üheks arvuks* (summaks), *mis sisaldab eneses liidetavate kõik ühelised ja kõik nende osad.*

1) Olgu tarvis leida *ühenimeliste* murdude summa, näiteks:

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}.$$

On ilmne, et 7 üheteistkümnendikku ja 3 üheteistkümnendikku ja 5 üheteistkümnendikku mingist ühelisest moodustavad $7+3+5$ üheteistkümnendikku samast ühelisest s. t.:

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=\frac{7+3+5}{11}=\frac{15}{11}=1\frac{4}{11}.$$

2) Olgu tarvis liita *erinevate* nimetajatega ehk *isenimelised* murrud, näiteks järgmised:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{10}+\frac{9}{16}.$$

Teisendades kõik need murrud ühenimelisteks (väikseima ühisnimetajaga), teostame liitmise samuti nagu esimeselgi juhul:

$$\frac{\overset{20}{\smile}}{\frac{3}{4}}+\frac{\overset{8}{\smile}}{\frac{7}{10}}+\frac{\overset{5}{\smile}}{\frac{9}{16}}=\frac{60+56+45}{80}=\frac{161}{80}=2\frac{1}{80}.$$

Arv, mis on kirjutatud meelespidamiseks iga murru kohale, on laiendaja, millega tuleb korrutada murru liikmeid, et teisendada murdu ühenimeliseks.

***Reegel.*** **Et murde liita, tuleb nad teisendada ühenimelisteks, siis liita lugejad ja nende summa alla kirjutada ühine nimetaja.**

3) Olgu lõpuks tarvis liita *segaarvud:*

$$4\frac{2}{15}+8\frac{9}{10}+3\frac{5}{6}.$$

Liidame kõigepealt murrud:

$$\frac{\overset{2}{\smile}}{\frac{2}{15}}+\frac{\overset{3}{\smile}}{\frac{9}{10}}+\frac{\overset{5}{\smile}}{\frac{5}{6}}=\frac{4+27+25}{30}=\frac{56}{30}=1\frac{26}{30}=1\frac{13}{15}.$$

Seejärel liidame täisarvud ja nende summaga liidame arvu üks, mis saadi murdude liitmisel:

$$4+8+3+1=16.$$

Tähendab, antud segaarvude täissumma on $16\frac{13}{15}$.

*Märkus.* Nulli liitmisel murdarvuga tuleb kinni pidada samasugusest tingimusest, nagu täisarvude liitmiselgi, ja nimelt: *liita mingi arvuga null või nulliga mingi arv tähendab jätta see arv muutuseta.*

**135. Summa omadused.** Murdarvude summal on samad omadused nagu täisarvude summalgi (p. 20), ja nimelt:

**1) summa ei muutu liidetavate järjekorra muutmisel ja**

**2) summa ei muutu, kui asendame mingi liidetavate rühma nende summaga.**

Summa muutumine liidetavate muutmisel jääb ka murdarvude puhul samaks (p. 27) nagu täisarvudegi puhul, s. o. **kui mingi liidetav suureneb või väheneb mingi arvu võrra, siis ka summa suureneb või väheneb sama arvu võrra.**

## Murdarvude lahutamine.

**136. Definitsioon ja reegli tuletamine.** *Lahutamine on tehe, mille abil suuremast antud arvust* (vähendatavast) *lahutatakse osa, mis võrdub väiksema antud arvuga* (lahutatavaga).

Võib samuti öelda, et lahutamine on tehe (vastupidine liitmisele), mille abil kahe liidetava antud summa ja ühe liidetava järgi leitakse teine liidetav.

1) Olgu antud lahutamiseks ühenimelised murrud, näiteks järgmised:

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8}.$$

Kui seitsmest kaheksandikust lahutame osa, mis võrdub kolme kaheksandikuga, siis jääb järele ilmselt $7 - 3$ kaheksandikku:

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7-3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

2) Olgu antud *isenimelised* murrud, näiteks:

$$\frac{11}{15} - \frac{3}{8}.$$

Teisendame need murrud ühenimelisteks ja teostame lahutamise nii, nagu varem seletatud:

$$\frac{\overset{8}{\smile}}{11} - \frac{\overset{15}{\smile}}{3} = \frac{88-45}{120} = \frac{43}{120}.$$

***Reegel.*** **Et lahutada murrust murdu, tuleb teisendada nad ühenimelisteks, siis lahutada vähendatava lugejast lahutatava lugeja ja nende vahe alla kirjutada ühine nimetaja.**

3) Kui on tarvis lahutada segaarvust segaarvu, siis, kui võimalik, lahutatakse murrust murd ning täisarvust täisarv. Näiteks:

$$8\frac{\overset{4}{\smile}}{9} - 5\frac{\overset{11}{\smile}}{3} = 8\frac{36}{44} - 5\frac{33}{44} = 3\frac{3}{44}.$$

Kui aga vähendatava murd on väiksem lahutatava murrust, siis võetakse vähendatava täisosast üks üheline, peenestatakse see vastavateks osadeks ja liidetakse vähendatava murruga; pärast seda toimitakse nii, nagu eespool oli kirjeldatud. Näiteks:

$$10\frac{\overset{6}{\smile}}{3} - 5\frac{\overset{11}{\smile}}{5} = 10\frac{18}{66} - 5\frac{55}{66} = 9\frac{84}{66} - 5\frac{55}{66} = 4\frac{29}{66}.$$

Samuti toimub ka murru lahutamine täisarvust, näiteks:

$$7 - 2\frac{3}{5} = 6\frac{5}{5} - 2\frac{3}{5} = 4\frac{2}{5};$$

$$10 - \frac{3}{17} = 9\frac{17}{17} - \frac{3}{17} = 9\frac{14}{17}.$$

*Märkusi.* 1) *Nulli* lahutamisel tuleb kinni pidada samast tingimusest, nagu oli näidatud täisarvude lahutamisel, ja

nimelt: **lahutada null mingist arvust tähendab jätta see arv muutuseta.**

2) Murdarvude vahe muutub antud arvude muutmisel täiesti samasuguselt nagu täisarvude vahe, ja nimelt: **kui suurendada** (või vähendada) **vähendatavat mingi arvu võrra, siis ka vahe suureneb** (või väheneb) **sama arvu võrra; kui suurendada** (või vähendada) **lahutatavat mingi arvu võrra, siis vahe väheneb** (või suureneb) **sama arvu võrra.**

### Osa leidmine antud arvust.

**137. Osa leidmine antud arvust on tarvilik väga paljude ülesannete lahendamisel.** Näiteina vaatleme järgmisi ülesandeid.

***Ülesanne 1.*** *Rong liigub ühtlaselt kiirusega 40 km tunnis. Kui pika maa ta läbib* $\frac{7}{8}$ *tunniga?*

On ilmne, et $\frac{7}{8}$ tunniga rong läbib niimitu kilomeetrit, kuimitu kilomeetrit sisaldab $\frac{7}{8}$ 40-st km-st. Et leida $\frac{7}{8}$ arvust 40, leiame kõigepealt $\frac{1}{8}$ sellest arvust (s. o. 40 vähendame 8 korda), siis aga suurendame saadud tulemust 7 korda:

$\frac{1}{8}$ arvust 40 on 5;

$\frac{7}{8}$ arvust 40 on $5 \times 7 = 35$.

Tähendab, rong läbib $\frac{7}{8}$ tunniga 35 km.

Selles ülesandes leidsime $\frac{7}{8}$ arvust 40.

***Ülesanne 2.*** *Üks meeter riiet maksab* $18\frac{1}{2}$ *rubla. Mitu rubla tuleb maksta selle riide* $1\frac{3}{4}$ *meetri eest (s. o.* $\frac{7}{4}$ *meetri eest)?*

On ilmne, et $\frac{7}{4}$ meetrit maksab niimitu rubla, kuimitu rubla sisaldab $\frac{7}{4}$ arvust $18\frac{1}{2}$. Selleks leiame kõigepealt $\frac{1}{4}$ sellest arvust (s. o. vähendame 4 korda arvu $18\frac{1}{2}$), tulemust aga suurendame siis 7 korda:

$\frac{1}{4}$ arvust $18\frac{1}{2}$ (s. o. arvust $\frac{37}{2}$) on $\frac{37}{2 \cdot 4}$ (p. 127);

$\frac{7}{4}$ arvust $18\frac{1}{2}$ (s. o. arvust $\frac{37}{2}$ on $\frac{37 \cdot 7}{2 \cdot 4} = \frac{259}{8} = 32\frac{3}{8}$.

Tähendab $\frac{7}{4}$ meetri eest tuleb maksta $32\frac{3}{8}$ rubla.

Selles ülesandes leidsime $\frac{7}{4}$ arvust $18\frac{1}{2}$.

***Ülesanne 3.*** *Leida* $\frac{8}{3}$ *arvust* $\frac{5}{6}$.

Leiame kõigepealt $\frac{1}{3}$ arvust $\frac{5}{6}$ (s. t. vähendame 3 korda arvu $\frac{5}{6}$), siis aga suurendame saadud tulemust 8 korda.

$\frac{1}{3}$ arvust $\frac{5}{6}$ on $\frac{5}{6 \cdot 3}$;

$\frac{8}{3}$ arvust $\frac{5}{6}$ on $\frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 3} = \frac{40}{18} = 2\frac{2}{9}$.

Selles ülesandes leidsime $\frac{8}{3}$ arvust $\frac{5}{6}$.

Nendest ülesannetest tuletame reegli: **et leida mingit murrulist osa antud arvust, tuleb vähendada seda arvu niimitu korda, kuimitu ühelist on murru nimetajas, ja tulemust suurendada niimitu korda, kuimitu ühelist on murru lugejas.**

**138. Mis on protsent?** Teame juba, et mõningatele enamkasutatavatele ühelise osadele on antud eri nimetused: kahendikku nimetatakse pooleks, neljandikku veerandiks. Väga sageli (näiteks toodangu arvestamisel ja rahalistel arvel:dustel) kasutatakse *sajandikke*; seepärast nad on saanud samuti eri nimetuse.

Mingi arvu sajandikku nimetatakse selle arvu *protsendiks*. Seepärast tähendab näiteks 5 protsenti mingist arvust sedasama, mida tähendab 5 sajandikku (ehk üks kahekümnendik) sellest arvust.

Protsenti tähistatakse märgiga %; nii 17% mingist arvust tähendab 17 protsenti, s. o. $\frac{17}{100}$ sellest arvust.

Meie riiklikud töö-hoiukassad annavad hoiustajaile aastas 3% tulu; see tähendab, et iga hoiukassasse pandud summa suureneb aasta vältel 3% võrra, s. t. $\frac{3}{100}$ võrra (sellest summast); need 3% moodustavad hoiustaja aastase tulu.

Kui öeldakse, et stahhaanovlane täitis 250% normist, siis see tähendab, et tema poolt antud toodang moodustab 250% ehk $\frac{250}{100} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ normi, s. o. saadud ülesannet; teiste sõnadega, ta andis toodangut $2\frac{1}{2}$ korda rohkem, kui norm ette nägi.

**139. Protsendi leidmine antud arvust.** Olgu tarvis leida 18% arvust 245; kuna 18% tähendab $\frac{18}{100}$, siis ülesanne lahendatakse p. 137 toodud reegli järgi:

$$18\% \text{ arvust } 245 \text{ on } \frac{245 \cdot 18}{100} = 44\frac{1}{10}.$$

Vaatleme veel kolme järgmist ülesannet.

***Ülesanne 1.*** *Ülikonna tellimisel, mille hind oli 240 rubla, maksis tellija 15% käsirahaks; leida käsiraha suurus.*

**Lahendus.** On ilmne, et peame leidma 15% (s. o. $\frac{15}{100}$) arvust 240; p. 137 reegli järgi

$$15\% \text{ arvust } 240 \text{ on } \frac{240 \cdot 15}{100} = 36 \text{ (rubla)}.$$

Käsiraha summa on seega 36 rubla.

***Ülesanne 2.*** *Metsatööliste brigaadil oli ülesandeks valmistada 90 kuupmeetrit puid; ülesanne ületati 20% võrra. Kui palju puid valmistas brigaad?*

**Lahendus.**

$$20\% \text{ arvust } 90 \text{ on } \frac{90 \cdot 20}{100} = 18 \text{ (kuupmeetrit)}.$$

Järelikult on ülesanne (90 kuupmeetrit) ületatud 18 kuupmeetri võrra ja tähendab brigaad valmistas puid $90 + 18 = 108$ (kuupmeetrit).

***Ülesanne 3.*** *Riiklik siselaen annab 4% aastatulu; mitme aastaga saab 300-rublaliselt obligatsioonilt 42 rubla tulu?*

**Lahendus.** Kõigepealt teeme kindlaks, kui palju tulu toob 300-rublaline obligatsioon ühe aastaga; selleks tuleb leida 4% arvust 300; 4% arvust 300 on $\frac{300 \cdot 4}{100} = 12$ (rubla). Tähendab obligatsioon toob aastas 12 rubla tulu. Seepärast toob ta 42 rubla tulu $42 : 12 = 3\frac{1}{2}$ (aastaga).

## Murdarvude korrutamine.

**140. Definitsioonid.** 1) Murdarvu korrutamist täisarvuga defineeritakse samuti nagu täisarvudegi korrutamist, ja nimelt: *korrutada mingit arvu* (korrutatav) *täisarvuga* (korrutaja) *tähendab leida summa ühesugustest liidetava-*

*test, milles iga liidetav võrdub korrutatavaga, liidetavate arv aga korrutajaga.*

Nii $\frac{7}{8}$ korrutada 5-ga tähendab leida summa:

$$\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}.$$

2) *Korrutada mingi arv* (korrutatav) *murruga* (korrutaja) *tähendab leida selle murruga määratud osa korrutatavast.*

Nii 5 korrutada $\frac{7}{8}$-ga tähendab leida $\frac{7}{8}$ viiest ühelisest.

$\frac{3}{4}$ korrutada $\frac{2}{3}$-ga tähendab leida $\frac{2}{3}$ arvust $\frac{3}{4}$.

Sel viisil osa leidmist antud arvust, mida oleme eelnevalt vaadelnud, nimetame nüüd murruga korrutamiseks.

3) *Korrutada mingit arvu* (korrutatav) *segaarvuga* (korrutaja) *tähendab korrutada korrutatavat kõigepealt korrutaja täisarvuga, siis korrutaja murruga ja liita saadud korrutised.*

Näiteks:

$$\frac{4}{5}\cdot 3\frac{2}{7}=\frac{4}{5}\cdot 3+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{7}.$$

Arvu, mis saadakse korrutamisel, nimetatakse kõikidel nendel juhtudel *korrutiseks*, s. t. just niisamuti nagu täisarvude korrutamiselgi.

Nendest definitsioonidest nähtub, et murdarvude korrutamine on alati võimalik ja annab ühese tulemuse.

**141. Nende definitsioonide otstarbekohasus.** Et selgitada kahe viimase korrutamise definitsiooni otstarbekohasust aritmeetikas, vaatleme järgmist ülesannet.

***Ülesanne.*** *Ühtlaselt liikudes läbib rong tunnis 40 km. Kuidas saada teada, mitu kilomeetrit läbib see rong antud arvu tundide vältel?*

Kui oleksime jäänud korrutamise selle definitsiooni juurde, mis on toodud täisarvude aritmeetikas (võrdsete liidetavate liitmine), siis meie ülesandel oleks kolm erinevat lahendusviisi, ja nimelt:

kui antud tundide arv on täisarv (näiteks 5 tundi), siis ülesande lahendamiseks tuleb korrutada 40 km selle tundide arvuga;

kui antud tundide arv avaldub murruna (näiteks $\frac{3}{4}$ tundi), siis peame leidma sellise murdosa 40 km-st;

lõpuks, kui antud tundide arv on segaarv (näiteks $5\frac{3}{4}$ tundi), siis tuleb korrutada 40 km täisarvuga, mis sisaldub segaarvus, ja tulemusega liita 40 km-st veel selline murdosa, mis leidub segaarvus.

Viimati antud definitsioonid võimaldavad anda kõikide nende juhtude puhul ühise vastuse:

tuleb korrutada 40 km antud tundide arvuga, missugune ta ka oleks.

Niisiis, kui esitada ülesanne üldkujul järgmiselt:
ühtlaselt liikudes läbib rong tunnis $v$ km. Mitu kilomeetrit läbib rong $t$ tunniga?
siis, millised ka oleksid arvud $v$ ja $t$, võime anda ühe vastuse: otsitav arv väljendub valemiga $v \cdot t$.

*Märkus.* Leida mingi murruga määratud osa antud arvust tähendab meie definitsiooni järgi sedasama, mis korrutada antud arv selle murruga; seepärast leida 5% (s. t. viis sajandikku) antud arvust tähendab sedasama, mis korrutada antud arv $\frac{5}{100}$-ga või $\frac{1}{20}$-ga; leida 125% antud arvust tähendab sedasama, mis korrutada see arv $\frac{125}{100}$-ga või $\frac{5}{4}$-ga jne.

**142. Märkus selle kohta, millal suureneb arv korrutamisel ja millal ta väheneb.**

*Arvu korrutamisel lihtmurruga arv väheneb; korrutamisel liigmurruga arv suureneb, kui see liigmurd on suurem ühest, ja ei muutu, kui ta võrdub ühega.*

Näiteks korrutis $5 \cdot \frac{7}{8}$ peab olema väiksem kui 5, sest ta tähendab $\frac{7}{8}$ arvust 5, $\frac{7}{8}$ viiest on aga väiksem kui $\frac{8}{8}$ viiest, s. t. väiksem kui 5; korrutis $5 \cdot \frac{9}{8}$ peab olema suurem kui 5, sest ta tähendab $\frac{9}{8}$ arvust 5, $\frac{9}{8}$ viiest on aga suurem kui $\frac{8}{8}$ viiest, s. t. suurem kui 5; lõpuks korrutis $5 \cdot \frac{8}{8}$, s. t. $\frac{8}{8}$ arvust 5 on 5.

*Märkus.* Murdarvude korrutamisel, nagu täisarvude korrutamiselgi, korrutis loetakse võrdseks nulliga, kui üks tegureist võrdub nulliga; nii $0 \cdot \frac{7}{8} = 0$ ja $\frac{7}{8} \cdot 0 = 0$.

**143. Korrutamise reeglite tuletamine.**

1) ***Murru korrutamine täisarvuga.*** Olgu tarvis murd $\frac{3}{10}$ korrutada 5-ga, see tähendab, et murdu $\frac{3}{10}$ tuleb suurendada 5 korda. Selleks et suurendada murdu 5 korda, tuleb suurendada tema lugejat või vähendada tema nimetajat 5 korda (p. 127).

Seepärast:

$$\frac{3}{10} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \text{ ehk } \frac{3}{10} \cdot 5 = \frac{3}{10 : 5} = \frac{3}{2}.$$

***1. reegel.*** **Et korrutada murdu täisarvuga, tuleb korrutada selle täisarvuga murru lugejat, nimetaja aga jätta endiseks; selle asemel võib ka murru nimetajat jagada antud täisarvuga (kui see võimalik), lugeja aga jätta endiseks.**

*Märkus.* Murru korrutis tema nimetajaga on võrdne tema lugejaga.

Nii:

$$\frac{5}{8} \cdot 8 = \frac{5 \cdot 8}{8} = 5.$$

2) ***Täisarvu korrutamine murruga.*** Olgu tarvis 7 korrutada $\frac{4}{9}$-ga. See tähendab leida $\frac{4}{9}$ arvust 7. Selleks leiame kõigepealt $\frac{1}{9}$ arvust 7, seejärel aga $\frac{4}{9}$;

$\frac{1}{9}$ arvust 7 on $\frac{7}{9}$ (p. 119);

$\frac{4}{9}$ arvust 7 on $\frac{7 \cdot 4}{9}$ (p. 127).

Tähendab:

$$7 \cdot \frac{4}{9} = \frac{7 \cdot 4}{9} = \frac{28}{9}.$$

***2. reegel.*** **Et korrutada täisarvu murruga, tuleb korrutada täisarvu murru lugejaga ja see korrutis võtta lugejaks, nimetajaks aga kirjutada antud murru nimetaja.**

3) ***Murru korrutamine murruga.*** Olgu tarvis $\frac{3}{5}$ korrutada $\frac{7}{8}$-ga. See tähendab leida $\frac{7}{8}$ arvust $\frac{3}{5}$. Selleks leiame kõigepealt $\frac{1}{8}$, siis aga $\frac{7}{8}$ arvust $\frac{3}{5}$.

$\frac{1}{8}$ arvust $\frac{3}{5}$ on $\frac{3}{5 \cdot 8}$ (p. 119);

$\frac{7}{8}$ arvust $\frac{3}{5}$ on $\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8}$.

Tähendab:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{21}{40}.$$

***3. reegel.*** **Et korrutada murdu murruga, tuleb korrutada lugejat lugejaga ning nimetajat nimetajaga ja esimene korrutis võtta korrutise lugejaks ning teine nimetajaks.**

*Märkus.* Seda reeglit on võimalik rakendada ka murru korrutamisel täisarvuga ja täisarvu korrutamisel murruga, kusjuures tuleb täisarvu vaadelda murruna, mille nimetajaks on üks. Näiteks:

$$\frac{3}{10}\cdot 5=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{1}=\frac{3\cdot 5}{10\cdot 1}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2};$$

$$7\cdot\frac{4}{9}=\frac{7}{1}\cdot\frac{4}{9}=\frac{7\cdot 4}{1\cdot 9}=\frac{28}{9}=3\frac{1}{9}.$$

Kolm äsjaesitatud reeglit ühenduvad sel viisil üheks, mida üldkujul on võimalik väljendada järgmiselt:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

4) ***Segaarvude korrutamine.***

***4. reegel.*** **Et korrutada segaarve, tuleb teisendada nad liigmurdudeks ja siis korrutada murdude korrutamise reeglite järgi.** Näiteks:

1) $7\cdot 5\frac{3}{4}=7\cdot\frac{23}{4}=\frac{7\cdot 23}{4}=\frac{161}{4}=40\frac{1}{4}$;

2) $2\frac{3}{5}\cdot 4\frac{2}{3}=\frac{13}{5}\cdot\frac{14}{3}=\frac{13\cdot 14}{5\cdot 3}=\frac{182}{15}=12\frac{2}{15}$.

**144. Taandamine korrutamisel.** Murdude korrutamisel, kui see on võimalik, tuleb teostada e e l n e v a t taandamist, nagu nähtub järgmistest näidetest:

1) $\mathbf{12}\cdot\frac{7}{8}=\frac{\mathbf{12}\cdot 7}{8}=\frac{\mathbf{3}\cdot 7}{\mathbf{2}}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}$;

2) $\frac{\mathbf{16}}{21}\cdot\frac{5}{\mathbf{28}}=\frac{\mathbf{16}\cdot 5}{21\cdot\mathbf{28}}=\frac{\mathbf{4}\cdot 5}{21\cdot\mathbf{7}}=\frac{20}{147}$.

Selline taandamine on võimalik seetõttu, et murru suurus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat vähendada sama arv korda.

**145. Korrutise muutumine tegurite muutmisel.** Murdarvude korrutis muutub tegurite muutmisel täiesti samasuguselt nagu täisarvude korrutiski (p. 53), ja nimelt:

**kui suurendada (või vähendada) mingit tegurit mingi arv korda, siis korrutis suureneb (või väheneb) sama arv korda.**

Nii, kui näites

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

suurendame korrutatavat näiteks 2 korda, s. t. $\frac{3}{5}$ asemel võtame $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$, siis uus korrutis kujutab endast mitte enam $\frac{4}{7}$ murrust $\frac{3}{5}$, vaid $\frac{4}{7}$ selle murru kahekordsest väärtusest; tähendab, uus korrutis peab olema eelmisest 2 korda suurem. Ja tõepoolest

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{35};\ \frac{24}{35} \text{ on 2 korda suurem kui } \frac{12}{35}.$$

Suurendame samas näites korrutajat näiteks 3 korda s. t. võtame $\frac{4}{7}$ asemel $\frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7}$; siis uus korrutis kujutab endast mitte enam $\frac{4}{7}$ korrutatavast, vaid 3 korda $\frac{4}{7}$ temast; tähendab uus korrutis peab olema eelmisest 3 korda suurem. Ja tõepoolest

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{7} = \frac{36}{35},\ \frac{36}{35} \text{ on 3 korda suurem kui } \frac{12}{35}.$$

**146. Kolme või enama murru korrutamine.** Olgu tarvis korrutada kolm murdu, $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6}$, kusjuures eeldatakse, et korrutamine tuleb teostada selles järjekorras, nagu tegurid on kirjutatud, s. t. $\frac{2}{3}$ tuleb korrutada $\frac{7}{8}$-ga ja saadud kor-

rutis seejärel korrutada $\frac{5}{6}$-ga. Korrutades kahte esimest murdu, saame $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 8}$; korrutades seda arvu kolmanda murruga, leiame: $\frac{2 \cdot 7 \cdot 5}{3 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 5}{3 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{35}{72}$.

Tähendab:

**et korrutada mitut murdu, tuleb korrutada nende lugejad omavahel ning nende nimetajad omavahel ja esimene korrutis võtta korrutise lugejaks ning teine korrutise nimetajaks.**

*Märkus.* Seda reeglit on võimalik rakendada ka niisugustele korrutistele, kus mõned tegurid on täis- või segaarvud, kui ainult vaatleme täisarvu murruna, mille nimetajaks on üks, ja segaarvud teisendame liigmurdudeks. Näiteks:

$$\frac{3}{4} \cdot 5 \cdot 1\frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{11}{6} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 11}{4 \cdot 1 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 11}{4 \cdot 2} = \frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}.$$

**147. Korrutamise põhiomadused.** Korrutamise omadused, mis olid kehtivad täisarvude puhul (p-des 56, 57 ja 59), on kehtivad ka murdarvude korrutamisel. Meenutame neid omadusi.

**1) Korrutis ei sõltu tegurite järjekorrast.**

Näiteks:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}.$$

Tõepoolest, eelmises punktis toodud reegli kohaselt võrdub esimene korrutis murruga $\frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 6 \cdot 4}$, teine aga võrdub murruga $\frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 4 \cdot 3}$. Need murrud aga on võrdsed, sest et nende liikmed erinevad teineteisest ainult tegurite järjekorra poolest, täisarvude korrutis aga ei sõltu tegurite järjekorrast.

**2) Korrutis ei muutu, kui mingi tegurite rühm asendada nende korrutisega.**

Näiteks:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\right),$$

sest et

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot4\cdot7\cdot5}$$

ja

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{5\cdot3}{6\cdot4}\cdot\frac{2\cdot1}{7\cdot5}=\frac{5\cdot3\cdot(2\cdot1)}{6\cdot4\cdot(7\cdot5)}=\frac{5\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot4\cdot7\cdot5}.$$

Tulemused saadakse ühesugused.

Korrutamise sellest omadusest on võimalik tuletada järgmist järeldust:

**selle asemel et korrutada mingit arvu korrutisega, võib seda arvu korrutada esimese teguriga, saadud arvu korrutada teise teguriga jne.**

Näiteks:

$$10\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\right)=10\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7},$$

sest omaduse 2) kohaselt võime korrutises $10\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\right)$ sulgudes seisva arvuga korrutamise asendada järkjärgulise korrutamisega $\frac{3}{4}$-ga ja $\frac{5}{7}$-ga.

3) ***Korrutamise jaotuvuse seadus (liitmise suhtes).*** **Selle asemel et korrutada summat mingi arvuga, võib korrutada selle arvuga iga liidetavat eraldi ja liita tulemused.**

See seadus oli kehtiv täisarvude korral (p. 59). Ta jääb muutmatult kehtima ka murdarvude puhul.

Näitame, et võrrand

$$(a+b+c+\ldots)m=am+bm+cm+\ldots$$

(korrutamise jaotuvuse seadus liitmise suhtes) on tõepoolest õige ka siis, kui tähed tähendavad murdarve. Vaatleme kolme juhtu.

1) Oletame esiteks, et korrutaja $m$ on täisarv, näiteks $m = 3$ ($a$, $b$, $c$ on mistahes arvud). Täisarvude korrutamise definitsiooni kohaselt võib kirjutada (piirdudes lihtsuse mõttes kolme liidetavaga):

$$(a + b + c) \cdot 3 = (a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c).$$

Liitmise ühenduvuse seaduse põhjal võime parempoolses osas ära jätta kõik sulud; rakendades aga liitmise vahetuvuse seadust ning seejärel uuesti ühenduvuse seadust, võime parempoolse osa järgmiselt ümber kirjutada:

$$(a + a + a) + (b + b + b) + (c + c + c).$$

Nüüd saame:

$$(a + b + c) \cdot 3 = a \cdot 3 + b \cdot 3 + c \cdot 3.$$

Tähendab jaotuvuse seaduse kehtivus on sel juhul tõestatud.

2) Nüüd oletame, et korrutaja $m$ on murdarv, mille lugejaks on üks, näiteks $m = \frac{1}{8}$. Korrutada $a + b + c$ murruga $\frac{1}{8}$ tähendab leida $\frac{1}{8}$ sellest summast. See osa on $\frac{a}{8} + \frac{b}{8} + \frac{c}{8}$, milles võime veenduda, kui korrutame selle avaldise 8-ga. Tõepoolest, kuna 8 on täisarv, siis esimesel juhul tõestatu kohaselt saame pärast korrutamist:

$$\frac{a}{8} \cdot 8 + \frac{b}{8} \cdot 8 + \frac{c}{8} \cdot 8,$$

mis võrdub summaga

$$a + b + c.$$

Tähendab, kaheksandik sellest summast on tõepoolest

$$\frac{a}{8} + \frac{b}{8} + \frac{c}{8},$$

mida võime kirjutada ka järgmiselt:

$$a \cdot \frac{1}{8} + b \cdot \frac{1}{8} + c \cdot \frac{1}{8}.$$

Järelikult

$$(a + b + c) \cdot \frac{1}{8} = a \cdot \frac{1}{8} + b \cdot \frac{1}{8} + c \cdot \frac{1}{8}.$$

Näeme, et jaotuvuse seaduse kehtivus tõestub selgi juhul.

3) Lõpuks oletame, et korrutaja $m$ on mistahes lugejaga murd, näiteks $m = \frac{9}{8}$ (siia kuulub ka see juhtum, kui $m$ on segaarv).

Korrutada summat $a + b + c$ murruga $\frac{9}{8}$ tähendab leida $\frac{9}{8}$ sellest summast, milleks on tarvis korrutada $\frac{1}{8}$ temast 9-ga. $\frac{1}{8}$ summast aga on $\frac{a}{8} + \frac{b}{8} + \frac{c}{8}$, nagu nüüdsama veendusime; tähendab $\frac{9}{8}$ temast on:

$$\left(\frac{a}{8} + \frac{b}{8} + \frac{c}{8}\right) \cdot 9,$$

mis esimesele juhule vastavalt võrdub:

$$\frac{a}{8} \cdot 9 + \frac{b}{8} \cdot 9 + \frac{c}{8} \cdot 9,$$

s. t.

$$a \cdot \frac{9}{8} + b \cdot \frac{9}{9} + c \cdot \frac{9}{8}.$$

Tähendab

$$(a + b + c) \cdot \frac{9}{8} = a \cdot \frac{9}{8} + b \cdot \frac{9}{8} + c \cdot \frac{9}{8}.$$

Seega jaotuvuse seaduse kehtivus on tõestatud kõikide juhtude jaoks.

## Tundmatu arvu leidmine tema osa järgi.

**148. Ülesanded ja reegel.** Enne kui üle minna murdarvude jagamisele, on kasulik vaadelda, kuidas saab leida tundmatut arvu, kui on antud tema mingi osa suurus. Selguse otstarbel käsitleme seda küsimust järgmistes lihtsates ülesannetes.

Muudame ülesandeid, mis on toodud p. 137, järgmiselt:

***Ülesanne 1.*** *Ühtlaselt liikudes läbis rong 30 km $\frac{3}{4}$ tunniga. Mitu kilomeetrit läbib see rong tunnis?*

On ilmne, et rong läbib tunnis sellise arvu kilomeetreid, millest $\frac{3}{4}$ on 30 km. Tähendab, selles ülesandes on

antud tundmatu arvu kolme neljandiku suurus (30 km), tarvis aga on leida see arv.

Et 30 km on $\frac{3}{4}$ antud arvust, siis, vähendades 30 km 3 korda, leiame $\frac{1}{4}$ sellest tundmatust arvust; suurendades seejärel aga tulemust 4 korda, leiame $\frac{4}{4}$ tundmatust arvust, s. t. ta täissuuruse. Selguseks avaldame selle arutluse üksikasjalisema üleskirjutusega:

$\frac{3}{4}$ tundmatust arvust on 30;

$\frac{1}{4}$ " " " $\frac{30}{3}$;

$\frac{4}{4}$ " " " $\frac{30 \cdot 4}{3} = \frac{10 \cdot 4}{1} = 40.$

Tähendab, rong läbib tunnis 40 km.

***Ülesanne 2.*** *$1\frac{1}{2}$ meetrit riiet maksab $27\frac{9}{10}$ rubla. Mitu rubla maksab 1 m seda riiet?*

Et $1\frac{1}{2}$ meetrit $= \frac{3}{2}$ meetrit ja see $\frac{3}{2}$ meetrit maksab $27\frac{9}{10}$ rubla, siis, vähendades $27\frac{9}{10}$ rubla 3 korda, leiame $\frac{1}{2}$ meetri hinna, seejärel aga, suurendades seda hinda 2 korda, leiame ühe meetri hinna. Avaldame selle üksikasjalise üleskirjutusega:

$\frac{3}{2}$ meetrit maksab $27\frac{9}{10}$ rubla $= \frac{279}{10}$ rubla;

$\frac{1}{2}$ " " $\frac{279}{10 \cdot 3}$ rubla;

$\frac{2}{2}$ " " $\frac{279 \cdot 2}{10 \cdot 3} = 18\frac{3}{5}$ rubla.

***Ülesanne 3.*** *Leida arv, millest* $\frac{8}{3}$ *on* $2\frac{2}{9}\left(=\frac{20}{9}\right)$.

$\frac{8}{3}$ tundmatust arvust on $\frac{20}{9}$;

$\frac{1}{3}$ " " " $\frac{20}{9 \cdot 8}$;

$\frac{3}{3}$ " " " $\frac{20 \cdot 3}{9 \cdot 8} = \frac{5}{6}$.

Nendest ülesannetest tuletame r e e g l i: **et leida tundmatut arvu tema murdosa antud suuruse järgi, tuleb vähendada seda suurust niimitu korda, kuimitu ühelist on murru lugejas, ja suurendada tulemust niimitu korda, kuimitu ühelist on murru nimetajas.**

**149. Arvu leidmine protsentide järgi.** Olgu 18% mingist arvust $14\frac{2}{5}$; selleks, et leida seda arvu, märgime, et $14\frac{2}{5}$ moodustab $\frac{18}{100}$ sellest arvust; seepärast tuleb eelmises punktis toodud reegli kohaselt tundmatu arvu leidmiseks $14\frac{2}{5} = \frac{72}{5}$ jagada 18-ga (saame $\frac{4}{5}$) ja tulemus korrutada 100-ga (saame 80).

Vaatleme kaht ülesannet.

***Ülesanne 1.*** *Hoiukassas hoiustaja tulu 4 aastaga oli 12 rubla 84 kop. Leida hoiuse suurus* [1].

**Lahendus.** Tulu 4 aasta kohta oli 12 rubla 84 kop. ehk 1284 kopikat. Tähendab tulu 1 aasta kohta on $1284 : 4 = 321$ (kopikat). Kuna hoiukassa maksab 3% aastatulu, siis 321 kopikat on 3% hoiusest. Selleks et leida hoiuse suu-

[1] Seejuures eeldatakse, et iga aasta lõpul hoiustaja võtab oma tulu kassast välja, nii et hoiuse suurus järgmisel aastal jääb endiseks.

rust, tuleb eelmises punktis toodud reegli kohaselt jagada see arv 3-ga ja tulemus korrutada 100-ga:

$$\frac{321}{3} \cdot 100 = 10\,700 \ (= 107 \text{ rubla}).$$

***Ülesanne 2.*** *Linna elanikkude arv on praegu 134 400 inimest. Pärast Suurt Sotsialistlikku Oktoobrirevolutsiooni on linna elanikkude arv kasvanud 60% võrra. Kui palju elanikke oli linnas enne revolutsiooni?*

**Lahendus.** Tundmatule elanikkude arvule on lisandunud 60% sellest arvust. Kuna iga arv moodustab 100% (sada sajandikosa) iseendast, siis uus elanikkude arv (134 400) moodustab 160% nende eelmisest arvust. Seepärast endise elanikkude arvu leidmiseks tuleb eelmises punktis toodud reegli kohaselt arv 134 400 jagada 160-ga ja tulemus korrutada 100-ga:

$$\frac{134\,400}{160} \cdot 100 = 84\,000 \text{ (inimest)}.$$

### Murdarvude jagamine.

**150. Definitsioon.** *Jagamine on tehe* (korrutamise pöördtehe), *mille abil kahe teguri antud korrutise* (jagatava) *ja ühe teguri* (jagaja) *järgi leitakse teine tegur* (jagatis).

Nii näiteks $\frac{7}{8}$ jagada $\frac{3}{5}$-ga tähendab leida niisugune arv, mida tuleb korrutada $\frac{3}{5}$-ga, et saada $\frac{7}{8}$, ehk leida selline arv, millega tuleb korrutada $\frac{3}{5}$, et saada $\frac{7}{8}$. Esimesel juhul jagatis kujutab endast otsitavat korrutatavat, teisel juhul otsitavat korrutajat.

Et korrutatav ja korrutaja võivad vahetada oma kohad, siis *jagatise suurus ei sõltu sellest, kas see jagatis tähendab korrutatavat või korrutajat.*

*Märkusi.* 1) Täisarvude aritmeetikas on see definitsioon rakendatav ainult *jäägita* jagamisel; nagu varsti näeme, on murdarvude aritmeetikas see definitsioon aga rakendatav alati, välja arvatud juhul, kui jagaja võrdub nulliga.

*2) Lihtmurruga jagamisel arv suureneb; liigmurruga jagamisel aga arv väheneb, kui see liigmurd on suurem ühest, ja ei muutu, kui ta võrdub ühega.*

Näiteks jagatis $5 : \frac{7}{8}$ peab olema suurem kui 5 seepärast, et see jagatis korrutatult $\frac{7}{8}$-ga peab moodustama 5; kuna aga korrutamisel $\frac{7}{8}$-ga, nagu teame, iga arv väheneb, siis see jagatis peab olema suurem kui 5. Samal viisil on võimalik selgitada, miks jagatis $5 : \frac{9}{8}$ peab olema väiksem kui 5 (sest korrutamisel $\frac{9}{8}$-ga see jagatis suurenedes peab andma arvu 5).

**151. Jagamise reeglite tuletamine.** Jagamisel võib esineda 5 järgmist juhtu.

***1) Täisarvu jagamine täisarvuga.*** Niisugust jagamist on vaadeldud täisarvude aritmeetikas. Kuid seal ei olnud täpne jagamine alati võimalik, kuna jagatav ei ole igakord jagaja korrutiseks täisarvuga; seepärast tuli üldjuhul vaadelda *jäägiga* jagamist. Nüüd aga, kui on teostatav murruga korrutamine, on võimalik täisarvude jagamine igal juhul, välja arvatud nulliga jagamine, mis siingi jääb võimatuks. Olgu näiteks tarvis 5 jagada 7-ga, s. o. leida arv, mis korrutatult 7-ga annab 5. Selliseks arvuks on murd $\frac{5}{7}$, sest $\frac{5}{7} \cdot 7 = 5$. Täpselt samuti $20 : 7 = \frac{20}{7}$, sest $\frac{20}{7} \cdot 7 = 20$.

*1. reegel.* **Et täisarvu jagada täisarvuga, tuleb koostada murd, mille lugeja võrdub jagatavaga, nimetaja aga jagajaga.**

Märgime, et täisarvude valdkonnas jäägita jagamist nimetatakse teisiti *täisjagamiseks*, sest jagatiseks saadakse täisarv, s. o. mitte murdarv.

*2) Murru jagamine täisarvuga.* Olgu tarvis $\frac{8}{9}$ jagada 4-ga, s. o. olgu tarvis leida arv, mida tuleb korrutada 4-ga, et saada $\frac{8}{9}$.

Et 4-ga korrutamisel iga arv suureneb 4 korda, siis peab otsitav arv, suurendatult 4 korda, andma $\frac{8}{9}$ ja seepärast selleks et teda leida, tuleb murdu $\frac{8}{9}$ vähendada 4 korda. Et vähendada murdu 4 korda, tuleb vähendada 4 korda tema lugejat või suurendada 4 korda tema nimetajat (p. 127).

Seepärast:

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8:4}{9} = \frac{2}{9}$$

või

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 \cdot 4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

*2. reegel.* **Et jagada murdu täisarvuga, tuleb murru lugejat jagada selle täisarvuga** (kui see on võimalik), **jättes nimetaja samaks, või korrutada selle täisarvuga murru nimetajat, jättes lugeja samaks.**

*3) Täisarvu jagamine murruga.* Olgu tarvis 3 jagada $\frac{2}{5}$-ga, s. t. olgu tarvis leida niisugune arv, mida tuleb

korrutada $\frac{2}{5}$-ga, et saada 3. Et korrutada mingit arvu $\frac{2}{5}$-ga tähendab leida $\frac{2}{5}$ sellest arvust, siis:

$\frac{2}{5}$ tundmatust jagatisest on 3;

$\frac{1}{5}$ " " " $\frac{3}{2}$;

$\frac{5}{5}$ " " " $\frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{2}$.

Tähendab

$$3 : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

***3. reegel.*** **Et jagada täisarvu murruga, tuleb korrutada seda täisarvu antud murru nimetajaga ja võtta see korrutis lugejaks, nimetajaks aga võtta antud murru lugeja.**

***4) Murru jagamine murruga.*** Olgu tarvis $\frac{5}{6}$ jagada $\frac{7}{11}$-ga, s. t. olgu tarvis leida arv, mis korrutatult $\frac{7}{11}$-ga annaks $\frac{5}{6}$. Et korrutada mingi arv $\frac{7}{11}$-ga tähendab leida $\frac{7}{11}$ sellest arvust, siis:

$\frac{7}{11}$ tundmatust jagatisest on $\frac{5}{6}$;

$\frac{1}{11}$ " " " $\frac{5}{6 \cdot 7}$;

$\frac{11}{11}$ " " " $\frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 7}$.

Tähendab

$$\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 7} = \frac{55}{42} = 1\frac{13}{42}.$$

***4. reegel.*** **Et jagada murdu murruga, tuleb korrutada esimese murru lugejat teise murru nimetajaga, esimese murru nimetajat aga teise murru lugejaga ja võtta esimene korrutis lugejaks, teine aga nimetajaks.**

*Märkus.* Selle reegli alla võib viia ka kõik eelnevad juhud, kui ainult vaadelda täisarvu murruna, mille nimetajaks on üks. Nii

$$5:7=\frac{5}{1}:\frac{7}{1}=\frac{5\cdot 1}{1\cdot 7}=\frac{5}{7};$$

$$\frac{8}{9}:4=\frac{8}{9}:\frac{4}{1}=\frac{8\cdot 1}{9\cdot 4}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9};$$

$$3:\frac{2}{5}=\frac{3}{1}:\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5}{1\cdot 2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}.$$

Murdude jagamise reeglit on võimalik avaldada kõikideks juhtudeks järgmise võrdusega.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

*5) Segaarvude jagamine.*

***5. reegel.*** **Et jagada segaarvu segaarvuga, tuleb teisendada nad liigmurdudeks ja siis toimetada jagamist murdude jagamise reegli järgi.**

Näiteks:

$$8:3\frac{5}{6}=8:\frac{23}{6}=\frac{8\cdot 6}{23}=\frac{48}{23}=2\frac{2}{23};$$

$$7\frac{3}{4}:5\frac{1}{2}=\frac{31}{4}:\frac{11}{2}=\frac{31\cdot 2}{4\cdot 11}=\frac{31}{22}=1\frac{9}{22}.$$

**152. Jagamise asendamine korrutamisega.** Kui paigutame antud murrus lugeja nimetaja kohale ja vastupidi, siis murdu, mis saadakse pärast sellist ümberpaigutamist, nimetatakse antud murru *pöördväärtuseks.* Nii on murru $\frac{7}{8}$ pöördväärtuseks $\frac{8}{7}$. Täisarvul on samuti pöördväärtus; näiteks arvu 5 ehk $\frac{5}{1}$ pöördväärtuseks on $\frac{1}{5}$. Seepärast on pöördväärtusi kohasem nimetada *pöördarvudeks.* Antud arvu pöördarvu võib defineerida kui jagatist, mis saadakse 1 jagamisel antud arvuga. Nii on arvu $\frac{7}{8}$ pöördarvuks

$$\frac{1}{\frac{7}{8}}=\frac{8}{7}.$$

Selle definitsiooni järgi on võimalik leida pöördarve ka segaarvudele. Nii on arvu $4\frac{5}{8}$ pöördarvuks

$$\frac{1}{4\frac{5}{8}} = \frac{1}{\frac{37}{8}} = \frac{8}{37}.$$

On ilmne, et mistahes arvu korrutis tema pöördarvuga võrdub ühega.

Selliselt kokku leppinud, võime koostada järgmise jagamise reegli:

**selle asemel et jagada mingit arvu teisega, võib jagatavat korrutada jagaja pöördarvuga.**

Selle reegli kehtivuses võime hõlpsasti veenduda järgmiste näidete abil:

$$8:9 = \frac{8}{9} \text{ ja } 8 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{9};$$

$$\frac{7}{8}:5 = \frac{7}{40} \text{ ja } \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{40}; \quad \frac{2}{7}:\frac{3}{5} = \frac{10}{21} \text{ ja } \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{21};$$

$$5:\frac{7}{8} = \frac{40}{7} \text{ ja } 5 \cdot \frac{8}{7} = \frac{40}{7}; \quad 5:3\frac{1}{3} = \frac{3}{2} \text{ ja } 5 \cdot \frac{1}{3\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

**153. Taandamine jagamisel.** Murdarvude jagamisel, kui võimalik, tuleb teostada *eelnevat* taandamist, nagu on näidatud järgmistes näidetes:

1) $\mathbf{12}:\frac{8}{11} = \frac{\mathbf{12} \cdot 11}{8} = \frac{\mathbf{3} \cdot 11}{\mathbf{2}} = \frac{33}{2} = 16\frac{1}{2};$

2) $\frac{8}{9}:\frac{\mathbf{6}}{7} = \frac{8 \cdot 7}{9 \cdot \mathbf{6}} = \frac{\mathbf{4} \cdot 7}{9 \cdot \mathbf{3}} = \frac{28}{27} = 1\frac{1}{27};$

3) $\frac{5}{\mathbf{12}}:\frac{7}{\mathbf{18}} = \frac{5 \cdot \mathbf{18}}{\mathbf{12} \cdot 7} = \frac{5 \cdot \mathbf{3}}{\mathbf{2} \cdot 7} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}.$

Selline taandamine on võimalik seetõttu, et murru suurus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat vähendatakse sama arv korda.

**154. Kuidas jagada korrutisega?** Jäägita jagamise omadus, mis oli näidatud täisarvude puhul (p. 76), kehtib ka murdarvude puhul, ja nimelt:

**selle asemel et jagada mingit arvu mitme teguri korrutisega, võib jagada seda arvu esimese teguriga, saadud tulemust jagada teise teguriga jne.**

Nii $10 : \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) = 10 : \frac{2}{3} : \frac{5}{7}$, sest et murdude korrutamise ja jagamise reeglite järgi saame:

$$10 : \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) = 10 : \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10 \cdot (3 \cdot 7)}{2 \cdot 5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 5},$$

$$10 : \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{10 \cdot 3}{2} : \frac{5}{7} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 5},$$

s. t. kas jagades korraga korrutisega või jagades järkjärgult iga teguriga, saame ühe ja sama tulemuse.

**155. Jagatise muutumine antud arvude muutmisel.** Jagatava või jagaja muutmisel murdarvude jagatis muutub samuti nagu täisarvude jagatiski (p. 77), ja nimelt:

**kui suurendada** (või vähendada) **jagatavat mingi arv korda, siis jagatis suureneb** (või väheneb) **sama arv korda; kui suurendada** (või vähendada) **jagajat mingi arv korda, siis jagatis väheneb** (või suureneb) **sama arv korda.**

Pöörame erilist tähelepanu sellele, et

**kui suurendada või vähendada sama arv korda nii jagatavat kui ka jagajat, siis jagatis ei muutu.**

Kui me näites $\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{55}{42}$ suurendame nii jagatavat kui ka jagajat näiteks 3 korda, siis saame:

$$\frac{15}{6} : \frac{21}{11} = \frac{15 \cdot 11}{6 \cdot 21} = \frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 7} = \frac{55}{42},$$

jagatis jäi endiseks.

Üldkujul on seda võimalik avaldada järgmiselt:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:m}{b:m}.$$

**156. Kahe arvu suhe.** Pärast murdarvude tarvitusele võtmist, nagu nägime, muutub jagamine alati võimalikuks tehteks (välja arvatud jagamine nulliga). Tähendab, kui on antud kaks arvu, siis on olemas jagatis, mis saadakse esimese arvu jagamisel teisega (kui ainult teine arv ei ole null).

Ühe arvu jagamisel teisega saadavat jagatist nimetatakse teisiti nende arvude *suhteks*. Esimest arvu (jagatavat) nimetatakse suhte *eelnevaks* liikmeks; teist arvu (jagajat) nimetatakse suhte *järgnevaks* liikmeks.

Nii on arvude $2\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{7}$ suhteks jagatis

$$\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{7}} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2};$$

selle suhte eelnevaks liikmeks on $2\frac{1}{2}$, tema järgnevaks liikmeks on $\frac{1}{7}$.

Kui kahe arvu suhe on täisarv, siis ta näitab, mitu korda eelnev liige sisaldab järgnevat liiget[1]; on aga lepitud kokku kasutada seda väljendusviisi ka siis, kui suhteks on murdarv; nii ütleme vaadeldud näites, et arv $2\frac{1}{2}$ sisaldab arvu $\frac{1}{7}$ seitseteist ja pool korda.

Rakendustes tuleb sageli vaadelda kahe ühe ja sama nimetusega arvu suhet. Olgu näiteks tarvis teada, mitu korda $4\frac{1}{4}$ kg on suurem $2\frac{1}{2}$ kg-st. Vastus saadakse arvude

[1] Punktis 108 nimetasime kahe sama liiki mõõdu suhteks arvu, mis näitab, mitu korda suurem mõõt sisaldab väiksemat.

$4\frac{1}{4}$ ja $2\frac{1}{2}$ suhtest; selle suhte liikmed kirjutatakse aga sageli koos nende nimetusega, s. o.

$$\frac{4\frac{1}{4}\text{kg}}{2\frac{1}{2}\text{kg}} = 1\frac{7}{10};$$

seejuures arv $1\frac{7}{10}$ on nimeta arv, sest ta näitab, mitu korda üks kaal sisaldab teist.

Et arvude suhe on nende arvude jagatis, mispuhul jagatavaks on eelnev liige, jagajaks aga järgnev liige, siis on tal ka jagatise kõik omadused; nendest omadustest tuletame meelde järgmisi:

**1) suhte eelnevaks liikmeks võib olla mistahes arv; järgnevaks liikmeks võib olla mistahes arv peale nulli;**

**2) eelnev liige võrdub järgneva liikme ja suhte korrutisega;**

**3) järgnev liige võrdub eelneva liikme ja suhte jagatisega;**

**4) suhe ei muutu, kui tema mõlemaid liikmeid korrutada või jagada ühe ja sama arvuga.**

Omadusest 4) järgneb, et **murdarvude suhet on võimalik asendada täisarvude suhtega.** Olgu näiteks antud suhe $\frac{5}{12} : \frac{3}{8}$; korrutades selle suhte mõlemaid liikmeid antud murdude väikseima ühise nimetajaga, s. o. 24-ga, asendame antud suhte temaga võrdse suhtega 10 : 9, mille liikmeteks on juba täisarvud.

Samal viisil:

$$3\frac{1}{4} : \frac{5}{6} = \frac{13}{4} : \frac{5}{6} = \left(\frac{13}{4} \cdot 12\right) : \left(\frac{5}{6} \cdot 12\right) = 39 : 10.$$

*Märkusi.* 1) Meie poolt defineeritud kahe arvu suhet nimetatakse mõnikord k o r d s e k s ehk g e o m e e t r i l i s e k s suhteks, et eristada seda nende arvude a r i t m e e-

tilisest suhtest, mis võrdub nende arvude vahega. Edaspidi mõistame suhte all alati kordset suhet.

2) Kui suhte liikmed ümber paigutada, s. o. teha järgnev liige eelnevaks liikmeks ja vastupidi, siis saadud uut suhet nimetatakse pöördsuhteks.

3) Nimega arvude suhet on alati võimalik asendada nimeta arvude suhtega. Selleks pole muud tarvis, kui avaldada nimega arvud samades ühikutes ja leida saadud nimeta arvude suhe. Näiteks 10 tonni 5 tsentneri ja 7 tsentneri suhe võrdub 105 tsentneri ja 7 tsentneri suhtega, see viimane suhe aga võrdub nimeta arvude 105 ja 7 suhtega. Tehete puhul nimega arvudega nimetatakse tavaliselt suhteks vaid jagatist, mis saadakse kahe sama liiki nimega arvu jagamisel.

**157. Kahe arvu protsentsuhe.** Olgu tarvis teada saada, mitu protsenti moodustab arv $42\frac{1}{2}$ arvust 250. Üks protsent arvust 250 on $\frac{250}{100}$; seetõttu arv $42\frac{1}{2}$ moodustab nii mitu protsenti arvust 250, kuimitu korda $\frac{250}{100}$ sisaldub arvus $42\frac{1}{2}$, s. t.

$$42\frac{1}{2} : \frac{250}{100} = \frac{42\frac{1}{2}}{250} \cdot 100 = 17\ (\%).$$

Arvu, mis näitab, mitu protsenti antud arv moodustab teisest arvust, nimetatakse nende arvude *protsentsuhteks.* Vaadeldud näide tõendab, et *kahe arvu protsentsuhte leidmiseks tuleb korrutada nende arvude suhe 100-ga.*

Samasugusele järeldusele on võimalik tulla ka teisel teel. Et leida, mitu protsenti moodustab arv $42\frac{1}{2}$ arvust 250, tuleb avaldada suhe $\frac{42\frac{1}{2}}{250}$ protsentides, s. o. sajandi-

kes. Kuid selleks et teada saada, mitu sajandikku sisaldab antud arv, tuleb korrutada see arv 100-ga (näiteks arvus 5 on $5 \cdot 100 = 500$ sajandikku, arvus $\frac{1}{2}$ on $\frac{1}{2} \cdot 100 =$ $= 50$ sajandikku jne.). Seepärast kujutab arv $\frac{42\frac{1}{2}}{250}$ endast $\frac{42\frac{1}{2}}{250} \cdot 100 = 17$ sajandikku, s. t. 17 protsenti.

Vaatame kaht ülesannet.

***Ülesanne 1.*** *Sovhoosil on 80 000 ha maad, millest 69 200 ha-le on külvatud nisu. Mitu protsenti sovhoosi üldpindalast on nisuväljade all?*

Ülesande lahendamiseks tuleb leida, mitu protsenti moodustab arv 69 200 arvust 80 000. Teiste sõnadega, tuleb leida arvude 69 200 ja 80 000 protsentsuhe. Toodud reegli järgi leiame:

$$\frac{69200}{80000} \cdot 100 = 86\frac{1}{2}(\%).$$

***Ülesanne 2.*** *325 kg jahust saadi 429 kg leiba. Leida juurdeküpsetise protsent.*

**Lahendus.** Juurdeküpsetis on $429 - 325 = 104$ (kg).

Ülesande lahendamiseks on tarvis leida arvude 104 ja 325 protsentsuhe; toodud reegli järgi leiame:

$$\frac{104}{325} \cdot 100 = 32(\%).$$

V OSA.

# KÜMNENDMURRUD.

## I. Kümnendmurdude põhiomadused.

**158. Kümnendosad.** Osi, mis saadakse ühelise jagamisel 10-ga, 100-ga, 1000-ga jne., s. o. jagamisel arvuga, mida väljendab number 1 koos ühe või mitme nulliga, nimetatakse *kümnendosadeks.*

Seega on järk-järgult vähenevateks kümnendosadeks järgmised:

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ \frac{1}{100000},\ \frac{1}{1000000}\ \text{jne.}$$

Kahest erinevast kümnendosast nimetatakse suuremat *kõrgema* järgu kümnendosaks, väiksemat aga *madalama* järgu kümnendosaks. Iga kümnendosa sisaldab 10 järgmise madalama järgu kümnendosa. Nii

$$\frac{1}{10}=\frac{10}{100},\ \frac{1}{100}=\frac{10}{1000},\ \frac{1}{1000}=\frac{10}{10000}\ \text{jne.}$$

**159. Kümnendmurd.** Murdu, mille nimetajaks on number 1 ühe või mitme nulliga, nimetatakse *kümnendmurruks*; sellisteks on näiteks murrud:

$$\frac{3}{10},\ \frac{27}{100},\ \frac{27401}{1000},\ 3\frac{1}{1000}\ \text{jne.}$$

Kümnendmurdudest eristamiseks nimetatakse murde, mis omavad mistahes nimetajaid, *harilikeks* murdudeks.

**160. Kümnendmärgid.** Täisarvu kujutamisel numbritega kahest kõrvuti asetsevast numbrist tähendab parempoolne alati ühikuid, mis on 10 korda väiksemad vasakpoolsest. Lepime kokku laiendada sellist kohaväärtust ka nendele numbritele, mida võidakse kirjutada ühelistest paremale.

Oletame näiteks, et kirjutises:

$$63{,}48259\ldots$$

number 3 tähendab ühelisi. Siis number 4 tähendab ühikuid, mis on 10 korda lihtühelistest väiksemad, s. o. kümnendikke; 8 tähendab sajandikke, 2 tuhandikke, 5 kümnetuhandikke, 9 sajatuhandikke jne. Selleks et mitte eksida kohtade tähenduses, lepime kokku eraldada täisarvu kümnendosadest komaga. Puuduvate osade kohtadele, samuti ka täisarvu kohale, kui seda pole olemas, kirjutame nullid. Avaldis 0,0203 näiteks tähendab sellistel tingimustel 2 sajandikku 3 kümnetuhandikku.

Samal viisil tähendab 25,703 25 tervet 7 kümnendikku 3 tuhandikku; 0,82 tähendab 8 kümnendikku 2 sajandikku jne.

Numbreid, mis asuvad komast paremal, nimetatakse *kümnendmärkideks.*

**161. Kümnendmurru kujutamine nimetajata.** Igasugust kümnendmurdu võime kirjutada ilma nimetajata. Olgu näiteks antud kümnendmurd $\frac{32736}{1000}$. Eraldame sellest kõigepealt täisarvu, saame $32\frac{736}{1000}$. Nüüd kujundame selle murru järgmiseks:

$$\frac{32736}{1000} = 32 + \frac{700}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{6}{1000} = 32 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000}.$$

Tähendab, seda murdu võime kujutada järgmiselt:

$$\frac{32736}{1000} = 32{,}736.$$

Seda on hõlpus kontrollida, kui peenestame arvus 32,736 täisühelised ja kõik kümnendosad kõige peenemateks osadeks (tuhandikeks), mida on kõige lihtsam teha selliselt: et iga täisüheline sisaldab eneses 10 kümnendikku, siis 32 täisühelist sisaldavad 320 kümnendikku; liites sellega 7 kümnendikku, saame 327 kümnendikku; et iga kümnendikosa sisaldab eneses 10 sajandikku, siis 327 kümnendikku sisaldavad 3270 sajandikku; liites sellega veel 3 sajandikku, saame 3273 sajandikku; et 1 sajandik on 10 tuhandikku, siis 3273 sajandikku on 32 730 tuhandikku; liites sellega veel 6 tuhandikku, saame antud murru, s. o. 32 736 tuhandikku.

Olgu antud kümnendmurd $\frac{578}{100000}$, millel puudub täisosa. Seda murdu võime kujutada järgmiselt:

$$\frac{578}{100000} = \frac{500}{100000} + \frac{70}{100000} + \frac{8}{100000} = \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{8}{100000}.$$

Seda murdu võib kirjutada järelikult järgmiselt:

$$\frac{578}{100000} = 0{,}00578.$$

***Reegel.*** **Et kirjutada kümnendmurdu ilma nimetajata, tuleb vaid kirjutada tema lugeja ja eraldada sellel paremalt poolt niimitu kümnendmärki, kuimitu nulli on nimetajas** (milleks mõnikord tuleb lugejale kirjutada vasakule juurde mõned nullid).

Järgnevas eeldame alati (kui pole eriti teisiti nimetatud), et kümnendmurdu kirjutatakse ilma nimetajata.

*Märkus.* **Kümnendmurrule paremale või vasakule nullide juurdekirjutamine** (kui kümnendmurd on kirjutatud ilma nimetajata) **ei muuda tema suurust.** Näiteks arvud:

7,05; 7,0500; 007,05

kujutavad üht ja sama arvu: 7 ühelist 5 sajandikku, sest 500 kümnetuhandikku võrdub viie sajandikuga, 007 aga väljendab arvu 7.

**162. Kuidas loetakse kümnendmurdu.** Kõigepealt loetakse täisarv (kui aga seda ei ole, siis öeldakse: „null tervet"), seejärel loetakse arv, mis on kirjutatud pärast koma, just nagu oleks see täisarv ja lisatakse nende osade nimetus, millega murru kümnendkirjutis lõpeb; näiteks murdu 0,00378 loetakse: 0 tervet 378 sajatuhandikku. Tähendab, ilma nimetajata kirjutatud kümnendmurdu loetakse nii, nagu ta oleks kujutatud lugeja ja nimetaja abil.

Muide kümnendmurdu, millel on väga palju kümnendmärke, eelistatakse lugeda teisiti: jagatakse kõik kümnendmärgid komast alates rühmadeks à 3 märki igas rühmas (peale viimase, milles võib olla ka üks või kaks märki); siis loetakse iga rühma kui täisarvu, lisades esimese rühma arvu nimetusele sõna „tuhandikku", teisele rühmale „miljondikku", kolmandale „miljardikku" jne.; viimase rühma arvu nimetusele lisatakse osade nimetus, mida väljendab murru viimane number. Sel viisil murdu

0,028 306 000 07

loetakse nii: 0 tervet 28 tuhandikku 306 miljondikku 7 sajamiljardikku.

**163. Kümnendmurdude võrdlemine nende suuruse järgi.** Olgu tarvis teada saada, kumb järgmistest arvudest on suurem,

0,735 või 0,7348.

Selleks kirjutame (kas või ainult mõttes) sellele arvule, millel kümnendmärke on vähem, paremale juurde niipalju nulle, et kümnendmärkide arv oleks kummalgi arvul ühesugune:

0,7350; 0,7348.

Nüüd näeme, et esimene arv sisaldab 7350 kümnetuhandikku, teine arv aga 7348 kümnetuhandikku; murdude nimetajad muutusid ühesugusteks; tähendab suuremaks

osutub see murd, mille lugeja on suurem; kuna 7350 on suurem kui 7348, siis esimene arv on suurem teisest.

Samasugusel viisil on hõlpus veenduda, et

$$3{,}01 > 2{,}988;\ 3{,}7 > 3{,}6874;\ 3{,}64 < 3{,}6985 \text{ jne.}$$

***Reegel.*** **Kahest kümnendmurrust on suurem see, mille täisarv on suurem; täisarvude võrdudes — mille kümnendikkude arv on suurem; täisarvude ja kümnendikkude võrdudes — mille sajandikkude arv on suurem jne.**

**164. Kümnendmurru suuruse muutumine koma nihutamisel.** Nihutame arvus 3,274 koma ühe koha võrra paremale — saame uue arvu 32,74. Esimeses arvus number 3 tähendab ühelisi, teises aga kümnelisi; selle numbri väärtus järelikult suurenes 10 korda. Number 2 tähendab esimeses arvus kümnendikke, teises aga ühelisi; järelikult tema väärtus suurenes samuti 10 korda. Samasugusel viisil näeme, et ka ülejäänud numbrite väärtus suurenes 10 korda. Niisiis:

**koma nihutamisel ühe koha võrra paremale kümnendmurd suureneb 10 korda.**

Siit järgneb, et koma nihutamisel kahe koha võrra paremale kümnendmurd suureneb 100 korda, kolme koha võrra nihutamisel murd suureneb 1000 korda jne.

**Vastupidi: koma nihutamisel ühe koha võrra vasakule kümnendmurd väheneb 10 korda.**

Järelikult, kui nihutame koma kahe koha võrra vasakule, siis väheneb murd 100 korda, kui nihutame kolme koha võrra, siis väheneb murd 1000 korda jne.

**165. Kümnendmurru suurendamine või vähendamine 10 korda, 100 korda, 1000 korda jne.** Olgu tarvis arvu 0,02 suurendada 10 000 korda. Selleks tuleb ainult nihutada temas koma nelja koha võrra paremale. Kuid antud arvul on kõigest kaks kümnendmärki. Et saada nelja märki, kir-

jutame paremale kaks nulli juurde, millest arvu suurus ei muutu. Nihutades seejärel koma paremale kuni arvu lõpuni, saame täisarvu 0200 ehk lihtsalt 200.

Olgu tarvis sama arvu 0,02 vähendada 100 korda. Selleks tuleb ainult nihutada temas koma kahe koha võrra vasakule. Kuid antud arvul on komast vasakul ainult üks märk. Kirjutame vasakule poole kaks nulli juurde, millest arvu suurus ei muutu. Nihutades seejärel koma kahe koha võrra vasakule, saame 0,0002.

Iga täisarvu võib vaadelda kui kümnendmurdu, millel komast paremal on mistahes arv nulle; seepärast täisarvu suurendamine ja vähendamine 10 korda, 100 korda, 1000 korda jne. toimub samasuguselt kui kümnendmurru suurendamine ja vähendamine. Näiteks kui vähendame täisarvu 567,000... 100 korda, siis saame 5,67.

*Märkus.* Kümnendmurru nimetatud omadus muuta koma nihutamisel oma suurust 10 korda, 100 korda jne. võimaldab toimetada väga ruttu meetermõõtudes väljendatud nimega arvu p e e n e s t a m i s t ja ü l e s t a m i s t.

Olgu näiteks tarvis väljendada mitmenimeline arv 3 meetrit 8 detsimeetrit 4 sentimeetrit meetreis. Et detsimeeter on meetri kümnendik, sentimeeter meetri sajandik, siis on ilmne, et antud mitmenimeline arv väljendub meetreis järgmiselt: 3,84 meetrit. Nihutades selle kümnendmurru koma paremale, leiame, et 3,84 meetrit = 38,4 detsimeetrit = 384 sentimeetrit.

Olgu veel tarvis ülestada ühenimeline arv 8746 milligrammi mitmenimeliseks arvuks (s. o. väljendada kõrgema järgu mõõtudes). Kuna gramm võrdub 1000 milligrammiga, siis 8746 milligrammi = 8,746 grammi = 8 grammi 7 detsigrammi 4 sentigrammi ja 6 milligrammi.

## II. Tehted kümnendmurdudega.

### Kümnendmurdude liitmine.

**166. Kümnendmurdude liitmine toimub samuti nagu täisarvude liitminegi.** Olgu näiteks tarvis liita 2,078 + + 0,75 + 13,5602. Kirjutame need arvud üksteise alla, nii et ühelised asetseksid üheliste all, kümnendikud kümnendikkude all, sajandikud sajandikkude all jne.; seejuures asetuvad ka kõik komad üksteise alla:

$$\begin{array}{r} 2{,}078 \\ +\ 0{,}75 \\ 13{,}5602 \\ \hline 16{,}3882 \end{array}$$

Alustame liitmist kõige väiksemate murdude liitmisega. Kümnetuhandikkude liitmisest saame 2; kirjutame selle numbri joone alla. Tuhandikkude liitmisest saame 8; kirjutame numbri 8 joone alla. Sajandikkude liitmisest saame 18; kuid 18 sajandikku = 10 sajandikku + 8 sajandikku; kümme sajandikku moodustavad ühe kümnendiku; peame selle meeles, et seda hiljem liita liidetavate kümnendikkudega, 8 sajandikku aga kirjutame joone alla. Jätkame arvutamist sel viisil kuni lõpuni. Summa koma seisab liidetavate komade all.

### Kümnendmurdude lahutamine.

**167. Kümnendmurdude lahutamine toimub samuti nagu täisarvude lahutaminegi.** Olgu näiteks tarvis teostada lahutamine: 5,709 — 0,3078.

Kirjutame lahutatava vähendatava alla, nii et ühenimelised ühikud seisaksid teineteise all:

$$\begin{array}{r} 5{,}709 \\ -\ 0{,}3078 \\ \hline 5{,}4012 \end{array}$$

Et lahutada lahutatava viimast numbrit, võtame vähendatava 9 tuhandikust 1 tuhandiku ja peenestame selle kümnetuhandikeks; saame 10 kümnetuhandikku. Tähendab lahutatava number 8 tuleb lahutada 10-st, number 7 aga 8-st.

Samuti toimub ka kümnendmurru lahutamine täisarvust; näiteks:

$$\begin{array}{r} 3 \\ -\,1{,}873 \\ \hline 1{,}127 \end{array}$$

Võtame kolmest ühelisest ühe ja peenestame selle kümnendikeks; viimastest võtame ühe ja peenestame selle sajandikeks; sajandikest võtame 1 sajandiku ja peenestame selle tuhandikeks. Sel viisil saame 3 terve asemel 2 tervet 9 kümnendikku 9 sajandikku ja 10 tuhandikku. Tähendab lahutatava number 3 tuleb lahutada 10-st, numbrid 7 ja 8 aga 9-st, number 1 aga 2-st.

### Kümnendmurdude korrutamine.

**168.** Vaatleme kaht juhtu: esimene juhtum — *üheks teguriks on täisarv*, teine juhtum — *mõlemad tegurid on kümnendmurrud.*

Näiteid:

1) $3{,}085 \cdot 23$; 2) $8{,}375 \cdot 2{,}56$.

Kui kujutaksime nendes näidetes kümnendmurrud lugeja ja nimetaja abil ja teostaksime tehte harilikkude murdude korrutamise reegli järgi, siis saaksime:

$$1)\ \frac{3085}{1000} \cdot 23 = \frac{3085 \cdot 23}{1000} = \frac{70955}{1000} = 70{,}955;$$

$$2)\ \frac{8375}{1000} \cdot \frac{256}{100} = \frac{8375 \cdot 256}{1000 \cdot 100} = \frac{2144000}{100000} = 21{,}44000 = 21{,}44.$$

***Reegel.*** **Et korrutada kümnendmurde tuleb korrutada neid kui täisarve, komadele tähelepanu pööramata, ja korru-**

**tises eraldada komaga paremalt poolt niimitu kümnendmärki, kuimitu neid on korrutatavas ja korrutajas kokku.**

Arvutust on kõige parem paigutada nii:

| | |
|---|---|
| 3,085 | 8,375 |
| · 23 | · 2,56 |
| 9255 | 50250 |
| 6170 | 41875 |
| 70,955 | 16750 |
| | 21,44000 |

### Kümnendmurdude jagamine.

**169. Täisarvuga jagamine. Ligikaudne jagatis.** Olgu tarvis 39,47 jagada 8-ga. Paigutame arvutuse nii, nagu seda paigutatakse täisarvude jagamisel:

| | |
|---|---|
| 39,47 | 8 |
| 74 | 4,93 |
| 27 | |
| 3 | |

Jagame 39 tervet 8-ga; jagatiseks saame 4 tervet ja jääägiks 7 tervet. Peenestame jääägi kümnendikeks ja toome alla jagatava 4 kümnendikku, saame 74 kümnendikku. Jagame 74 kümnendikku 8-ga, saame jagatiseks 9 kümnendikku ja jääägiks 2 kümnendikku. Peenestame jääägi sajandikeks ja toome alla jagatava 7 sajandikku, saame 27 sajandikku. Jagades neid 8-ga, saame jagatiseks 3 sajandikku ja jääägiks 3 sajandikku.

Oletame, et sellega katkestasime arvutamise. Siis saame *ligikaudse jagatise* 4,93. Et teada saada, kuivõrd tulemus erineb täpsest jagatisest, leiame täpse jagatise ja võrdleme seda ligikaudse jagatisega. Et saada täpset jagatist, tuleb arvuga 4,93 liita murd, mis saadakse jääägi (3 sajan-

diku) jagamisest 8-ga. 3 ühelise jagamisel 8-ga saame $\frac{3}{8}$ ühelist; 3 sajandiku jagamisel 8-ga saame $\frac{3}{8}$ sajandikku. Tähendab täpne jagatis võrdub summaga $4{,}93 + \frac{3}{8}$ sajandikku. $\frac{3}{8}$ sajandikku ära jättes teeme vea, mis on väiksem kui täissajandik. Seepärast räägitakse, et 4,93 on ligikaudne jagatis *täpsusega* kuni $\frac{1}{100}$. Kui selle asemel, et ära jätta $\frac{3}{8}$ sajandikku, täiendame seda murdu kuni täissajandikuni (suurendades seda $\frac{5}{8}$ sajandiku võrra), siis teeme vea, mis on samuti väiksem kui $\frac{1}{100}$; siis saame teise ligikaudse jagatise $4{,}93 + 0{,}01$, s. t. 4,94, samuti täpsusega kuni $\frac{1}{100}$. Arv 4,93 on väiksem täpsest jagatisest, arv 4,94 on aga temast suurem; seepärast öeldakse, et esimene arv on ligikaudne jagatis *puudusega*, teine aga *liiaga*.

Kui jätkame arvutust, peenestades jääke järjest väiksemateks kümnendosadeks, siis saame suurema täpsusega ligikaudseid jagatisi. Kui peenestame jäägi 3 sajandikku tuhandikkudeks ja jagame 30 tuhandikku 8-ga, siis saame ligikaudse jagatise 4,933 (puudusega) või 4,934 (liiaga), kusjuures viga on väiksem kui 0,001. Arvutust jätkates saame:

$$\begin{array}{r|l} 39{,}47 & 8 \\ \hline 74 & 4{,}93375 \\ \hline 27 & \\ \hline 30 & \\ \hline 60 & \\ \hline 40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Jätkates jagamist, võime mõnikord jõuda jäägini 0 nagu meie näites: siis saame täpse jagatise. Vastasel korral tuleb rahulduda ligikaudse jagatisega, kusjuures viga on võimalik muuta kuitahes väikseks. Kui näiteks soovime leida ligikaudset jagatist täpsusega kuni üks miljondik, katkestame jagamise siis, kui jagatises on saadud miljondikkude number.

***Reegel.*** **Kümnendmurru jagamist täisarvuga teostatakse samuti nagu täisarvude jagamist, kusjuures jäägid peenestatakse järjest väiksemateks kümnendosadeks ning arvutust jätkatakse niikaua, kuni saadakse täpne jagatis või kuni ligikaudses jagatises saadakse nende kümnendosade number, millega soovitakse piirduda.**

Samuti toimitakse täisarvu jagamisel täisarvuga, kui jagatist soovitakse saada kümnendmurruna. Näiteks on arvu 123 jagamist 7-ga võimalik teostada järgmiselt:

$$\begin{array}{r|l} 123 & 7 \\ \hline 53 & 17{,}57\ldots. \\ 40 & \\ \hline 50 & \\ 1 & \end{array}$$

*Märkus.* Selle näitamiseks, et mingi võrdus pole täpne, vaid on ligikaudne, kasutatakse mõnikord lainelist võrdusmärki $\approx$; seega kui on kirjutatud:

$$39{,}47 : 8 \approx 4{,}93,$$

siis tahetakse sellega väljendada, et arvu 39,47 jagamisel 8-ga saadud jagatis võrdub *ligikaudu* 4,93-ga.

**170. Ligikaudse jagatise vea suurus.** *Kahest ligikaudsest jagatisest* (mis on võetud ühe ja sama täpsusega), *milledest üks on puudusega, teine aga liiaga, omab üks alati täpsuse kuni* $\frac{1}{2}$ *viimasest kümnendosast;* niisuguseks jagatiseks on puudusega jagatis, kui jääk

on väiksem kui $\frac{1}{2}$ jagajat, ja liiaga jagatis, kui jääk on suurem kui $\frac{1}{2}$ jagajat. Vaatleme näiteks jagamist 39,47 : 8 (vt. eelmine punkt). Oletame, et võtame ligikaudseks jagatiseks 4,93, mispuhul jääk 3 on väiksem kui pool jagajat (väiksem kui 4). Täpseks jagatiseks on siis $4{,}93 + \frac{3}{8}$ sajandikku; tähendab arvust 4,93 erineb ta $\frac{3}{8}$ sajandiku võrra (alla $\frac{1}{2}$ sajandiku), arvust 4,94 aga $\frac{5}{8}$ sajandiku võrra (üle $\frac{1}{2}$ sajandiku). Sel juhul on kasulikum võtta puudusega jagatis.

Jätkame jagamist:

$$\begin{array}{r|l} 39{,}47 & 8 \\ \underline{74} & 4{,}933 \\ 27 & \\ \underline{24} & \\ 30 & \\ \underline{24} & \\ 6 & \end{array}$$

Võtame nüüd samas näites ligikaudseks jagatiseks 4,933, mille puhul jääk 6 on suurem kui pool jagajat. Täpseks jagatiseks on $4{,}933 + \frac{6}{8}$ tuhandikku; tähendab arvust 4,933 erineb ta $\frac{6}{8}$ tuhandiku võrra (üle $\frac{1}{2}$ tuhandiku), arvust 4,934 aga $\frac{2}{8}$ tuhandiku võrra (alla $\frac{1}{2}$ tuhandiku). Sel juhul on seega kasulikum võtta liiaga jagatis.

Kui jääk on väiksem kui pool jagajat, siis jagatise number, mis peaks järgnema sellele, millel me peatusime, on ilmselt väiksem kui 5; kui aga jääk on suurem kui pool jagajat, siis see number peab olema 5 või suurem 5-st.

**171. Kümnendmurruga jagamine.** Olgu tarvis 3,753 jagada 0,85-ga. Selleks nihutame koma paremale nii jagatavas kui ka jagajas kümnendmärkide *ühesuguse* arvu võrra nii (meie näites 2 võrra), et *jagaja muutuks täisarvuks*. Et seejuures nii jagatav kui ka jagaja suurenevad sama arv korda (meie näites 100 korda), siis jagatis sellest ei muutu (p. 155). Sel viisil

kujuneb kümnendmurruga jagamine täisarvuga jagamiseks:

$$375{,}3 : 85 \approx 4{,}415,$$

mida teostatakse nii, nagu varem oli näidatud.

Täpselt samuti toimitakse täisarvu jagamisel kümnendmurruga, näiteks:

$$7 : 0{,}325 = 7000 : 325 \approx 21{,}538.$$

***Reegel.*** **Et jagada mingit arvu kümnendmurruga, tuleb jagajas koma ära jätta, suurendada jagatavat niimitu korda, kuimitu korda suurenes jagaja koma ärajätmisega ja siis teostada jagamist täisarvuga jagamise reegli kohaselt.**

**172. Arvutusnäide kümnendmurdudega.** Olgu tarvis arvutada murd:

$$\frac{7{,}5 \cdot 0{,}09 \cdot 3{,}725}{0{,}18 \cdot 2{,}7 \cdot 3{,}2675}.$$

Jätame selles murrus kõik komad ära ja vaatame, kuidas muutub seetõttu murru suurus. Lugeja suureneb $10 \cdot 100 \cdot 1000$ korda, s. t. 1 000 000 korda. Nimetaja suureneb $100 \cdot 10 \cdot 10\,000$ korda, s. t. 10 000 000 korda. Et murru suurus ei muutuks, tuleb suurendada lugejat veel 10 korda, näiteks arvu 9 asemel, mis saadi koma ärajätmisega murrust 0,09, tuleks võtta 90. Nüüd arvutame avaldise:

$$\frac{75 \cdot 90 \cdot 3725}{18 \cdot 27 \cdot 32675};$$

taandades kõigepealt 3-ga arve 75 ja 18, 9-ga arve 90 ja 27 ja 25-ga arve 3725 ja 32675, saame:

$$\frac{25 \cdot 10 \cdot 149}{6 \cdot 3 \cdot 1307} = \frac{37250}{23526} \approx 1{,}58.$$

**173. Protsentarvutused kümnendmurdudega.** Protsentarvutuste puhul, nagu nägime, tuleb sageli korrutada ja jagada 100-ga; et aga need tehted on eriti lihtsalt teosta-

tavad kümnendmurdudega, siis iga liiki protsentarvutuste puhul osutub kümnendmurdude kasutamine eriti käepäraseks. Vaatleme mõningaid ülesandeid.

***Ülesannne 1.*** *Kui palju tulu toob 2 aasta ja 3 kuuga 728 rubla suurune summa, kui ta seisab hoiukassas?*

Kuna hoiukassas saadakse 3% aastatulu, siis moodustab aastatulu 3% ehk 0,03 arvust 728, s. t.

$$728 \cdot 0{,}03 = 21{,}84 \ (= 21 \text{ rubla } 84 \text{ kop.}).$$

Tulu 3 kuu, s. o. 0,25 aasta eest moodustab 0,25 aastatulust, s. t.

$$21{,}84 \cdot 0{,}25 = 5{,}46 \ (= 5 \text{ rubla } 46 \text{ kop.}).$$

Tulu 2 aasta ja 3 kuu eest on

$$21{,}84 \cdot 2 + 5{,}46 = 49{,}14 \ (= 49 \text{ rubla } 14 \text{ kop.}).$$

***Ülesanne 2.*** *3,4% tundmatust arvust on 1,6388. Leida see arv.*

Punktis 149 toodud reegli järgi peame arvu 1,6388 jagama 3,4-ga ja tulemuse korrutama 100-ga.

Leiame:

$$\frac{1{,}6388}{3{,}4} \cdot 100 = \frac{1638{,}8}{34} = 48{,}2.$$

***Ülesanne 3.*** *Hoiukassasse paigutati hoius. 9 kuu pärast võeti hoius välja, kusjuures hoiustajale maksti 633 rubla 95 kop. Leida hoiuse esialgne suurus.*

Hoiustaja aastatulu on 3% ehk 0,03 tundmatust hoiusest. Tähendab tulu 9 kuu eest (s. t. $\frac{3}{4}$ ehk 0,75 aasta eest) on:

$$0{,}03 \cdot 0{,}75 = 0{,}0225 \ (= 2{,}25\%)$$

tundmatust hoiusest. Sel viisil moodustab hoiustajale makstud summa, s. o. 633,95 rubla, 1,0225 (ehk 102,25%) sisse-

makstud summast. Selleks et leida sissemakstud summa suurust, peame 633,95 jagama 1,0225-ga:

$$\frac{633{,}95}{1{,}0225} = 620 \text{ (rubla)}.$$

***Ülesanne 4.*** *Kaupluse käive oli plaani järgi ette nähtud 75 300 rubla; käibe tegelikuks suuruseks oli 85 842 rubla. Mitu protsenti plaanist on täidetud?*

Selle ülesande lahendamiseks peame leidma arvude 85 842 ja 75 300 protsentsuhte, s. o. väljendama suhte $\frac{85842}{75300}$ sajandikes; sel eesmärgil on kõige lihtsam avaldada antud arvude jagatis kümnendmurruna, nagu see on näidatud p. 171:

$$\frac{85842}{75300} = 1{,}14;$$

seega on plaan täidetud 114%.

## III. Harilikkude murdude teisendamine kümnendmurdudeks.

**174. Eelmärkmeid.** Et arvutamine kümnendmurdudega on lihtsam kui harilikkude murdudega, siis on sageli kasulik teisendada harilikke murde kümnendmurdudeks [1]. Näitame kaht sellist teisendamisviisi.

**175. Esimene viis: nimetaja lahutamine algtegureiks.** Olgu tarvis teisendada murd $\frac{7}{40}$ kümnendmurruks. Selleks

[1] Muide, arvutuste teostamisel, kus esinevad koos nii kümnendmurrud kui ka harilikud murrud, ei ole igakord otstarbekohane teisendada neid murde üheliigilisteks. Näiteks kui on tarvis 0,567 korrutada $\frac{3}{7}$-ga, pole tarvilik teisendada $\frac{3}{7}$ kümnendmurruks; võib korrutada 0,567 3-ga ja tulemust jagada 7-ga.

seame üles küsimuse: kas ei oleks võimalik teisendada seda murdu niisuguse nimetajaga murruks, mis avalduks ühelise ja nullidega? Kui see osutuks võimalikuks, siis saaksime lugeja ja nimetaja abil kirjutatud kümnendmurru; niisugust murdu aga ei oleks raske kirjutada ka ilma nimetajata. Et teisendada taandamatut murdu teise nimetajaga murruks, tuleb korrutada mõlemaid tema liikmeid ühe ja sama arvuga (p. 132). Selleks et teada saada, missuguse arvuga tuleb korrutada 40, et saada nullidega ühelist, võtame arvesse, et *igasugune arv, mida väljendab nullidega üheline, on lahutatav ainult teguriteks 2 ja 5, kusjuures need mõlemad tegurid esinevad lahutises võrdne arv korda ja nimelt niimitu korda, kuimitu nulli on ühelise kõrval.*

Näiteks:

$$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5;$$

$$10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \text{ jne.}$$

Seda täheldades lahutame arvu 40 algtegureiks:

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

Sellest lahutisest nähtub, et kui arvu 40 korrutada kaks korda 5-ga, siis pärast korrutamist saadakse niisugune arv, mis sisaldab tegureid 2 ja 5 võrdne arv korda (à 3 korda); tähendab, siis saadakse arv, mida väljendab üheline nullidega (kolme nulliga). Et seejuures murd oma suuruselt ei muutuks, tuleb korrutada kaks korda 5-ga ka tema lugejat; seega:

$$\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{40 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{175}{1000} = 0{,}175;$$

N ä i t e i d:

1) $\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{875}{1000} = 0{,}875;$

2) $\frac{4}{125}=\frac{4}{5\cdot5\cdot5}=\frac{4\cdot2\cdot2\cdot2}{5\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot2}=\frac{32}{1000}=0{,}032;$

3) $\frac{11}{20}=\frac{11}{2\cdot2\cdot5}=\frac{11\cdot5}{2\cdot2\cdot5\cdot5}=\frac{55}{100}=0{,}55.$

**176. Missugused harilikud murrud teisenduvad kümnendmurdudeks ja missugused mitte?** Näidatud harilikkude murdude kümnendmurdudeks teisendamise viisist on võimalik tuletada kahte järgmist järeldust:

**1) Kui taandamatu hariliku murru nimetaja ei sisalda mingeid teisi algtegureid peale 2 ja 5, siis teisendub selline murd kümnendmurruks, kusjuures see kümnendmurd omab niipalju kümnendmärke, kuimitu korda hariliku murru nimetajas kordub teguritest 2 ja 5 see, mida ta sisaldab suurem arv korda.**

Kui näiteks hariliku murru nimetajas pärast tema taandamist esineb tegur 2 korduvalt ja kui see tegur sisaldub nimetajas, oletame, 4 korda, siis tuleb lisandada tegurit 5 niimitu korda, et pärast lisandamist nimetaja sisaldaks mõlemaid tegureid (2 ja 5) à 4 korda. Sel juhul saadakse pärast korrutamist nimetajas 1 nelja nulliga ja seepärast kümnendmurrul saadakse 4 kümnendmärki. Näiteks:

$$\frac{7}{80}=\frac{7}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5}=\frac{7\cdot5\cdot5\cdot5}{80\cdot5\cdot5\cdot5}=\frac{875}{10000}=0{,}0875.$$

**2) Kui hariliku murru nimetaja sisaldab algtegureid, mis erinevad 2-st ja 5-st ja kui need tegurid ei taandu nimetajaga, siis selline murd ei teisendu kümnendmurruks.**

Võtame näiteks murru $\frac{35}{84}$, mille nimetaja sisaldab algtegureid 3 ja 7 (nimelt $84=2\cdot2\cdot3\cdot7$). Üks neist (7) taandub; pärast taandamist saame $\frac{5}{12}$. Et 12 sisaldab tegu-

rit 3, siis see murd ei teisendu kümnendmurruks, sest et missuguste täisarvudega me ka ei korrutaks tema nimetajat, kunagi me ei saaks arvu, mida kujutab number 1 koos nullidega.

Selliseid murde on võimalik teisendada kümnendmurdudeks ainult ligikaudselt, kasutades teist teisendusviisi.

**177. Teine viis: lugeja jagamine nimetajaga.** See viis on enam kasutatav kui esimene, kuna ta on rakendatav ka sellistele harilikkudele murdudele, mis teisenduvad ainult ligikaudseteks kümnendmurdudeks.

Olgu tarvis teisendada murd $\frac{23}{8}$ kümnendmurruks. Arvu $\frac{23}{8}$ võib vaadelda kui jagatist, mis on saadud 23 jagamisel 8-ga (p. 151, reegel 1). Kuid täisarvude jagamisel saadud jagatist, nagu nägime, on võimalik leida kümnendmurru näol kas täpselt või ligikaudselt. Selleks tuleb ainult peenestada jagamise jäägid järjest peenemateks ja peenemateks kümnendosadeks niikaua, kuni saadakse jäägiks null või kui saadakse jagatises selle järgu osad, millest kaugemale ei soovita minna.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 8 \\ \hline 70 & 2{,}875 \\ 60 & \\ \hline 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Selles näites saime täpse jagatise: $\frac{23}{8} = 2{,}875$.

Olgu tarvis teisendada $\frac{3}{14}$ kümnendmurruks. Et see murd on taandamatu ja et tema nimetaja sisaldab algtegurit 7, mis erineb 2-st ja 5-st, siis pole teda võimalik teisendada kümnendmurruks; ometi on aga võimalik leida

niisugust kümnendmurdu, mis võrdub l i g i k a u d u $\frac{3}{14}$-ga, ja seejuures mistahes täpsusega. Kui soovime leida näiteks kümnendmurdu, mis erineks murrust $\frac{3}{14}$ vähem kui 0,001 võrra, siis on selleks küllaldane leida arvu 3 jagamisel 14-ga 3 kümnendmärki:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 14 \\ \hline 30 & 0{,}214 \\ \hline 20 & \\ \hline 60 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Ligikaudne jagatis 0,214 erineb täpsest jagatisest, s. t. $\frac{3}{14}$-st, vähem kui poole tuhandiku võrra. Kui jätkata jagamist, siis viga muutub ikka väiksemaks ja väiksemaks. Ometi ei lõpe jagamine kunagi, sest vastasel korral saaksime kümnendmurru, mis võrduks täpselt $\frac{3}{14}$-ga, mis aga pole võimalik; sel viisil jagamise jätkamisel võime aga saada jagatises mistahes arvu kümnendmärke.

**178. Lõplikud ja lõpmatud kümnendmurrud. Arvu ümardamine.**

Kui harilikku murdu, näiteks $\frac{3}{14}$, pole võimalik kujutada kümnendmurruna, siis võime ikkagi, nagu näidatud punktis 177, jagades arvu 3 14-ga, kirjutada järjest uusi ja uusi kümnendmurde. Need kümnendmurrud kujutavad endast järjest paremaid ja paremaid lähendusi arvule $\frac{3}{14}$; seepärast on lepitud kokku öelda sel juhul, et arv $\frac{3}{14}$ lahutub *lõpmatuks* kümnendmurruks;

$$\frac{3}{14} = 0{,}214\ldots;$$

siin kolm punkti tähendavad, et jagatise numbrite rida ei lõpe kirjutatud numbritega (2, 1, 4), vaid et seda on võimalik jätkata lõpmatult; sama hästi oleksime võinud kirjutada:

$$\frac{3}{14} = 0{,}2\ldots;\ \frac{3}{14} = 0{,}21\ldots;\ \frac{3}{14} = 0{,}2142\ldots \text{ jne.}$$

Et eristada niisugustest lõpmatutest kümnendmurdudest neid kümnendmurde, milledega oleme tegelnud siiani, nimetatakse viimaseid *lõplikkudeks* kümnendmurdudeks.

Lõpmatuid kümnendmurde, samuti ka lõplikke kümnendmurde suure kümnendmärkide arvuga tuleb praktilisteks vajadusteks *ümardada*, võttes täpse murru asemele soovitava täpsusega ligikaudse murru kas puudusega või liiaga (p. 169). Kui soovime piirduda täpsusega kuni üks sajandik, siis võtame murru

$$3{,}141592653\ldots$$

asemel tema ligikaudse suuruse 3,14 (puudusega); kui aga peaks olema tarvilik täpsus kuni üks tuhandik, siis võtame 3,142 (liiaga).

**179. Perioodilised murrud.** Lõpmatut kümnendmurdu, mille üks või mitu numbrit korduvad vahetpidamatult ühes ja samas järjekorras, nimetatakse *perioodiliseks* kümnendmurruks, korduvate numbrite kogumikku aga nimetatakse selle murru *perioodiks*.

Perioodilisi murde liigitatakse *puhtperioodilisteks* ja *segaperioodilisteks* murdudeks. Puhtperioodiliseks murruks nimetatakse niisugust, millel periood algab kohe pärast koma, näiteks 2,363636...; segaperioodiliseks niisugust, millel koma ja esimese perioodi vahel on üks või mitu mittekorduvat numbrit, näiteks 0,5232323.... Perioodilisi murde kirjutatakse lühendatult nii:

murru 2,3636... asemel kirjutatakse 2,(36),
„ 0,52323... „ „ 0,5(23),
s. t. asetatakse periood sulgudesse.

**180. Hariliku murru teisendamisel saadav lõpmatu kümnendmurd peab olema perioodiline.** Veendume selles omaduses mingi näite abil. Olgu tarvis teisendada murd $\frac{19}{7}$ kümnendmurruks. Et nimetaja 7 ei koosne tegureist 2 ja 5 ja et antud murd on taandamatu, siis ei saa ta teisenduda lõplikuks kümnendmurruks. Järelikult teisendub ta lõpmatuks kümnendmurruks. Et saada mõnda tema esimestest kümnendmärkidest, hakkame arvu 19 jagama 7-ga. Et jagamine ei saa lõppeda:

$$
\begin{array}{r|l}
19 & 7 \\
\hline
50 & 2{,}71428571\ldots, \\
10 & \\
\hline
30 & \\
20 & \\
\hline
60 & \\
40 & \\
\hline
50 & \\
10 & \\
\hline
3 &
\end{array}
$$

siis peab jääke olema lõpmata palju. Jäägid on aga alati väiksemad kui jagaja; *erinevaid* jääke ei saa seepärast olla rohkem kui kuus järgmist: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Sellest järeldub, et jagamise küllaldasel jätkamisel jäägid tingimata hakkavad k o r d u m a. Tõepoolest osutubki seitsmes jääk samasuguseks, nagu oli esimene. Kui aga nüüd jääk kordus, siis temale nulli juurde kirjutades saame samasuguse jagatava, nagu oli varem (50); see tähendab, et

jagatisse hakkavad tulema samasugused numbrid, nagu olid varem, s. t. saame jagatiseks perioodilise murru. Meie näites periood algas esimese numbriga pärast koma ja seepärast saime puhtperioodilise murru. Teistes näidetes võib juhtuda, et periood ei alga mitte esimese numbriga, vaid näiteks kolmanda või mingi muu numbriga; siis saame segaperioodilise murru.

## IV. Perioodiliste murdude teisendamine harilikeks murdudeks.

**181. Eelmärkus.** Punktis 180 nägime, et lihtmurru teisendamisel kümnendmurruks saadakse alati kas lõplik või perioodiline kümnendmurd. Olgu nüüd, vastupidi, antud perioodiline kümnendmurd ja tahame teada saada, missugune on see lihtmurd, mille lahutamisel saadakse antud perioodiline murd. Selleks vaatleme kõigepealt, missuguseid perioodilisi murde saadakse niisuguste harilikkude murdude teisendamisel, mille lugejaks on üks, nimetajaks aga number 9, kirjutatud üks kord või mitu korda järjest, näiteks $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$ jne.

$\frac{1}{9}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 9 \\ \hline 10 & 0{,}111\ldots \\ 10 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$\frac{1}{9} = 0{,}(1)$

$\frac{1}{99}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 99 \\ \hline 100 & 0{,}0101\ldots \\ 1 & \end{array}$$

$\frac{1}{99} = 0{,}(01)$

$\frac{1}{999}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 999 \\ \hline 1000 & 0{,}001001\ldots \\ 1 & \end{array}$$

$\frac{1}{999} = 0{,}(001)$

Nende jagamiste vaatlemisest on hõlpus järeldada, et niisugustel perioodilistel murdudel periood koosneb kas ühest või ühest, mille ees seisavad nullid, kusjuures perioodis on niimitu numbrit, mitu korda murru nimetajas kordub number 9.

**182. Puhtperioodilise murru teisendamine harilikuks murruks.** Olgu tarvis leida harilik murd, millest saadakse puhtperioodiline murd 0,2323.... Selleks võrdleme seda perioodilist murdu teise, lihtsama murruga, mille periood omab samapalju numbreid, kuid koosneb 1-st ja selle ees seisvast nullist.

$$0{,}232323\ldots$$
$$0{,}010101\ldots$$

Esimene murd sisaldab 23 sajandikku, 23 kümnetuhandikku, 23 miljondikku jne.; teine murd sisaldab 1 sajandiku, 1 kümnetuhandiku, 1 miljondiku jne. Tähendab esimene murd sisaldab kõikide nende järkude kümnendosi 23 korda rohkem kui teine. Seepärast kui on olemas harilik murd, mille teisendamisel saadakse perioodiline murd 0,(23), siis peab ta olema 23 korda suurem sellest harilikust murrust, mille teisendamisel saadakse 0,(01) [1]; kuid murd 0,(01) saadakse, nagu nägime, murrust $\frac{1}{99}$; järelikult murd 0,(23) peab tulenema murrust $\frac{23}{99}$. Ja tõepoolest:

$$\begin{array}{r|l} 23 & 99 \\ \hline 230 & 0{,}23\ldots \\ 198 & \\ \hline 320 & \\ 297 & \\ \hline 23 & \end{array}$$

$$\frac{23}{99} = 0{,}232323\ldots = 0{,}(23).$$

***Reegel.*** **Et teisendada puhtperioodilist murdu harilikuks murruks, tuleb tema periood võtta lugejaks, nimetajaks aga kirjutada number 9 niimitu korda, kuimitu numbrit on perioodis.**

[1] Selle väite täpsemat põhjendust vt. p. 190.

Näiteid. 1) $0,(7) = \frac{7}{9}$; 2) $2,(05) = 2\frac{5}{99}$;

3) $0,(063) = \frac{63}{999} = \frac{7}{111}$.

**183. Segaperioodilise murru teisendamine harilikuks murruks.** Olgu tarvis leida harilik murd, millest tuleneb segaperioodiline murd 0,3(52). Selleks nihutame viimases koma ühe koha võrra paremale; siis saame puhtperioodilise murru 3,(52), mis tuleneb harilikust murrust $3\frac{52}{99}$. Kuid nihutades koma ühe koha võrra paremale, suurendasime murdu 10 korda; murd $3\frac{52}{99}$ on järelikult 10 korda suurem sellest, millest tuleneb murd 0,3(52). Seepärast, et leida otsitavat murdu, on tarvis $3\frac{52}{99}$ jagada 10-ga. Seega:

$$0,35252\ldots = 3,(52) : 10 = 3\frac{52}{99} : 10 = \frac{349}{99} : 10 = \frac{349}{990}.$$

Ja tõepoolest:

| 349 | 990 |
|---|---|
| 3490 | 0,352... |
| 2970 | |
| 5200 | |
| 4950 | |
| 2500 | |
| 1980 | |
| 520 | |

$$\frac{349}{990} = 0,3525252\ldots = 0,3(52).$$

On võimalik tuletada väga käepärast reeglit segaperioodilise murru teisendamiseks harilikuks murruks; selleks pöörame tähelepanu sellele, kuidas on võimalik teostada segaarvu $3\frac{52}{99}$ jagamist 10-ga. Kõigepealt teisendame segaarvu liigmurruks. Selleks tuleb 3 korrutada 99-ga ja siis

liita 52. Selle asemel aga, et korrutada 3 99-ga, võime 3 korrutada 100-ga ja tulemusest lahutada 3. Seega:

$$3\frac{52}{99} = \frac{3 \cdot 99 + 52}{99} = \frac{3 \cdot 100 - 3 + 52}{99}.$$

Selle asemel et lahutada 3 ja seejärel liita 52, on võimalik algul liita 52 ja siis lahutada 3. Järelikult:

$$3\frac{52}{99} = \frac{3 \cdot 100 + 52 - 3}{99} = \frac{352 - 3}{99}.$$

Nüüd jääb järele vähendada seda murdu 10 korda, s. t. kirjutada null tema nimetajale juurde; siis saame selle hariliku murru, millest tuleneb perioodiline murd 0,3(52). Seega:

$$0{,}35252\ldots = \frac{352 - 3}{990} = \frac{349}{990}.$$

Tegutsedes eelmisele sarnlevalt leiame, et:

$$0{,}26444 = \frac{264 - 26}{900} = \frac{238}{900} = \frac{119}{450};$$

$$5{,}7888\ldots = \frac{578 - 57}{90} = \frac{521}{90} = 5\frac{71}{90}$$

ehk

$$5{,}7888\ldots = 5\frac{78 - 7}{90} = 5\frac{71}{90}.$$

***Reegel.*** **Et teisendada segaperioodilist murdu harilikuks murruks, tuleb arvust, mis asetseb enne teist perioodi, lahutada arv, mis asetseb enne esimest perioodi; saadud vahe võtta lugejaks, nimetajaks aga kirjutada number 9 niimitu korda, kuimitu numbrit on perioodis, niimitme nulliga, kuimitu numbrit asub koma ja perioodi vahel.**

**184. Missugused harilikud murrud teisenduvad puhtperioodilisteks ja missugused segaperioodilisteks murdudeks?** Teame juba, et kümnendmurruks teisendamisel iga harilik murd annab kas lõpliku või perioodilise kümnendmurru. Teame samuti, missugustel juhtudel saadakse lõplik, missugustel perioodiline kümnendmurd. Nüüd selgi-

tame, missugustel juhtudel osutub saadav perioodiline murd puhtperioodiliseks, missugustel segaperioodiliseks murruks. Seejuures reeglid, mis nüüd toome, tõestatakse lähemates punktides; siinkohal toome aga vaid mõned esialgsed kaalutlused, mis räägivad nende reeglite kasuks.

**1. Harilik murd, mille nimetaja pärast taandamist ei sisalda tegureid 2 ja 5, teisendub puhtperioodiliseks murruks.**

Näiteks:

$$\frac{3}{7} = 0,(428571); \quad \frac{2}{3} = 0,(6); \quad \frac{5}{11} = 0,(45).$$

Tõepoolest, esiteks selline murd peab muutuma mingiks perioodiliseks murruks (p. 180); teiseks ei saa see perioodiline murd olla segaperioodiline, sest et segaperioodiline murd, nagu nägime, teisendub selliseks harilikuks murruks, mille nimetaja sisaldab tegureid 2 ja 5. Antud murd peab järelikult teisenduma puhtperioodiliseks murruks.

**2. Harilik murd, mille nimetaja pärast taandamist sisaldab teiste tegurite kõrval tegureid 2 ja 5, teisendub segaperioodiliseks murruks.**

Näiteks:

$$\frac{35}{42} = \frac{5}{6} = 0,8(3); \quad \frac{8}{15} = 0,5(3); \quad \frac{119}{450} = 0,26(4) \text{ jne.}$$

Tõepoolest, esiteks selline murd peab teisenduma mingiks perioodiliseks murruks; teiseks see perioodiline murd ei saa olla puhtperioodiline, sest et puhtperioodiline murd, nagu nägime, tuleneb sellisest harilikust murrust, mille nimetaja ei sisalda tegureid 2 ja 5. Antud murd peab järelikult teisenduma segaperioodiliseks murruks.

### Perioodiliste murdude teooria põhjendamine.

185. *Märkus.* Eelnev perioodiliste murdude harilikeks murdudeks teisendamise esitamisviis ei olnud täiel määral põhjendatud; seejuu-

res oletati muide, et kui iga liidetav suureneb mõni arv korda, siis ka summa suureneb sama arv korda (p. 182). See väide, mis on täiesti põhjendatud summade puhu *lõpliku* liidetavate arvuga, pole rakendatav ilma erilise tõestuseta summadele *lõpmatult kasvava* liidetavate arvuga (milledeks on kõik perioodilised lõpmatud murrud).

Perioodiliste murdude täpne teooria põhineb piiri mõistel. Esitame lühidalt selle teooria.

**186. Arvude jada piir.** Olgu antud lõpmatu arvude jada $a_1$; $a_2$; $a_3$; ...; $a_n$.... Lepime kokku nimetada arvu $a$ selle jada *piiriks*, kui vahe $a_n - a$ oma absoluutväärtuselt muutub kuitahes väikeseks kõikide küllalt suurte $n$ väärtuste puhul. Nii omab arvude jada

$$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ldots,\ 1+\frac{1}{n},\ldots$$

piiriks arvu 1, sest et vahe

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=\frac{1}{n}$$

muutub kuitahes väikeseks kõikide küllalt suurte $n$ väärtuste puhul.

**187.** Kui võtame mingist lõpmatust kümnendmurrust mõned esimesed kümnendmärgid, ülejäänud aga heidame kõrvale, siis saame lõpliku kümnendmurru, mida edaspidi nimetame murru lõiguks.

Nii on murrud

0,8; 0,83; 0,833; 0,8333 jne.

lõpmatu perioodilise murru 0,8(3) lõikudeks. Üldiselt iga lõpmatu kümnendmurd omab lõpmatu lõikude jada; seejuures on igaüks nendest lõikudest lõplik kümnendmurd.

***Teoreem 1.*** *Lõpmatuks kümnendmurruks teisenduv harilik murd on selle lõpmatu kümnendmurru lõikude jada piiriks.*

Tõestus. Teame, et antud lõpmatu kümnendmurru esimene lõik (mis lõpeb esimese kümnendmärgiga) erineb antud lihtmurrust vähem kui $\frac{1}{10}$ võrra; teine lõik erineb sellest vähem kui $\frac{1}{100}$ võrra; kolmas vähem kui $\frac{1}{1000}$ võrra jne. Seepärast iga lõik, mis on võetud küllalt suure märkide arvuga, erineb antud lihtmurrust kuitahes väikese osa võrra; piiri definitsiooni kohaselt see aga tähendabki, et antud lihtmurd on selle lõpmatu kümnendmurru lõikude jada piiriks, milleks ta teisendub.

188. ***Teoreem 2.*** *Kui kaks harilikku murdu on võrdsed, siis nad teisenduvad üheks ja samaks* (lõplikuks või lõpmatuks) *kümnendmurruks.*

Tõestus. Olgu meil võrdsed murrud $\frac{a}{b}$ ja $\frac{a_1}{b_1}$. Oletame, et nende teisendamisel kümnendmurdudeks (lugeja jagamisel nimetajaga) jäime peatuma tuhandikele. Siis oleme teada saanud *suurima* arvu tuhandikke, mida sisaldab kumbki murd $\frac{a}{b}$ ja $\frac{a_1}{b_1}$ (seepärast, et suurendades jagatist kas või ainult ühe tuhandiku võrra, saaksime rohkem, kui peame saama õigel jagamisel). Eelduse kohaselt on aga murrud $\frac{a}{b}$ ja $\frac{a_1}{b_1}$ võrdsed; suurim arv tuhandikke, mida sisaldab kumbki neist, peab olema järelikult üks ja sama. Sel viisil peavad kummagi kümnendmurru kolm esimest kümnendmärki, mis saadakse murdude $\frac{a}{b}$ ja $\frac{a_1}{b_1}$ teisendamisel, olema ühesugused. Samasuguse arutlusega veendume, et *mistahes arv* kümnendmärke peavad olema ühesugused; teiste sõnadega, mõlemad murrud peavad omavahel täpselt ühte langema.

189. ***Teoreem 3*** (pöördteoreem eelmisele). *Kui kaks harilikku murdu teisenduvad üheks ja samaks kümnendmurruks* (lõplikuks või lõpmatuks), *siis nad on võrdsed.*

Tõestus. Oletame, et murrud $\frac{a}{b}$ ja $\frac{a_1}{b_1}$ teisenduvad üheks ja samaks kümnendmurruks $N$. Kui see murd on lõplik, siis saame täpsed võrdused:

$$\frac{a}{b} = N \quad \text{ja} \quad \frac{a_1}{b_1} = N;$$

järelikult

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Kui aga murd $N$ on lõpmatu, siis kumbki murdudest $\frac{a}{b}$ ja $\frac{a_1}{b_1}$ on võrdne murru $N$ lõikude jada piiriga ja järelikult

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

190. ***Teoreem 4.*** *Puhtperioodilise murru lõikude jada omab piiri, mis võrdub hariliku murruga, mille lugejaks on teise perioodi ees*

*seisva arvu ja esimese perioodi ees seisva arvu vahe, nimetajaks aga number 9 kirjutatud niimitu korda järjestikku, kuimitu numbrit on perioodis.*

Tõestus. Võtame näiteks puhtperioodilise murru 7,2323.... Tähistame tähega $X_n$ lõigu sellest murrust, mis sisaldab eneses $n$ perioodi, s. t. oletame:

$$7{,}\overbrace{2323\ldots23}^{n} = 7 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \ldots + \frac{23}{100^n} = X_n.$$

Korrutame selle võrduse mõlemad pooled 100-ga:

$$723{,}\overbrace{2323\ldots23}^{n-1} = 723 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \ldots + \frac{23}{100^{n-1}} = 100\,X_n.$$

Lahutades viimasest võrdusest eelmise, leiame:

$$723 - 7 - \frac{23}{100^n} = 99\,X_n,$$

kust

$$\frac{723-7}{99} - \frac{23}{100^n \cdot 99} = X_n$$

või

$$\frac{723-7}{99} - X_n = \frac{23}{100^n \cdot 99}.$$

Viimasest võrdusest nähtub, et sel määral kui suureneb arv $n$, muutub konstantse arvu $(723-7):99$ ja arvu $X_n$ vahe ja võib saada väiksemaks mistahes antud arvust (kui väike see arv ka oleks); see aga tähendab, et

$$\text{piir } X_n = \frac{723-7}{99} = 7\frac{23}{99}.$$

Selle piiri leidmise viisist nähtub, et 723 on arv, mis seisab enne teist perioodi, 7 aga on arv, mis seisab enne esimest perioodi; tähendab, lugeja rahuldab seda, mis on öeldud teoreemis. Nimetaja rahuldab samuti teoreemi, sest number 9 kordub niimitu korda, kuimitu numbrit on perioodis.

Märgime, et perioodilisest murrust oleksime võinud eraldada tema täisarvu, s. o. kirjutada nii:

$$\text{piir } 7{,}(23) = 7 + \text{piir } 0{,}(23) = 7 + \frac{23}{99} = 7\frac{23}{99}.$$

**191.** ***Teoreem 5.*** *Segaperioodilise murru lõikude jada omab piiri, mis võrdub hariliku murruga, mille lugejaks on teise perioodi ees seisva arvu ja esimese perioodi ees seisva arvu vahe, nimetajaks aga number 9 kirjutatud niimitu korda järjestikku, kuimitu numbrit on perioodis, ja niimitme nulliga lõpus, kuimitu numbrit on koma ja esimese perioodi vahel.*

Tõestus: Võtame segaperioodilise murru, näiteks

$$8{,}52(375),$$

ja oletame uuesti:

$$8{,}52\overbrace{375\ldots375}^{n} = 8 + \frac{52}{100} + \frac{375}{100 \cdot 1000} + \frac{375}{100 \cdot 1000^2} + \\ + \ldots + \frac{375}{100 \cdot 1000^n} = X_n.$$

Korrutades selle võrduse mõlemad pooled 100-ga, siis aga korrutades saadud võrduse 1000-ga, saame:

$$852 + \frac{375}{1000} + \ldots + \frac{375}{1000^n} = 100\, X_n;$$

$$852375 + \frac{375}{1000} + \ldots + \frac{375}{1000^{n-1}} = 100000\, X_n.$$

Lahutades viimasest võrdusest eelmise, leiame:

$$852375 - 852 - \frac{375}{1000^n} = 99900\, X_n,$$

kust

$$\frac{852375 - 852}{99900} - \frac{375}{1000^n \cdot 99900} = X_n$$

või

$$\frac{852375 - 852}{99900} - X_n = \frac{375}{1000^n \cdot 99900}.$$

Viimasest võrdusest nähtub, et $n$-i piiramatul kasvamisel

$$\text{piir } X_n = \frac{852375 - 852}{99900} = 8\frac{52323}{99900}.$$

Perioodilise murru täisarvu oleksime võinud siingi temast eraldada, s. o. kirjutada nii:

$$\text{piir } X_n = 8 - \text{piir } 0{,}52(375) = 8 + \frac{52375 - 52}{99900}.$$

Näiteid:

$$1)\ 2{,}(05) = \frac{205 - 2}{99} = \frac{203}{99} = 2\frac{5}{99};$$

$$2)\ 0{,}(063) = \frac{63}{999} = \frac{7}{111};$$

$$3)\ 0{,}26(4) = \frac{264 - 26}{900} = \frac{238}{900} = \frac{119}{450};$$

$$4)\ 5{,}7(8) = \frac{578 - 57}{90} = \frac{521}{90} = 5\frac{71}{90} \text{ ehk } 5{,}7(8) = 5\frac{78 - 7}{90} = 5\frac{71}{90}.$$

192. *Märkus.* Teoreemid 4 ja 5 näitavad, et iga perioodilise kümnendmurru lõikude jada piiriks on mingi harilik murd. Siit järeldub teoreemi 1 alusel, et kui üldse on olemas niisugune harilik murd, mis lahutub antud perioodiliseks murruks, siis võrdub see harilik murd antud perioodilise murru piiriga.

Kuid eeltoodud teoreemidest ei järeldu veel, et iga perioodilise murru jaoks leidub seesugune harilik murd, mis temaks lahutub. Ja tõepoolest see ei ole õige iga perioodilise murru jaoks, nagu seda kohe näeme.

193. ***Teoreem 6.*** *Kui antud perioodilise murru periood koosneb ainult ühest numbrist 9, siis pole olemas niisugust harilikku murdu, mis lahutuks antud perioodiliseks murruks. Kõikidel muudel juhtudel see harilik murd, mis on perioodilise murru lõikude antud jada piiriks, lahutub selleks murruks.*

See tähendab, et kirjutades mistahes perioodilise murru (puht- või segaperioodilise), kui ainult ta periood ei koosne ühest üheksast, võime alati leida sellise hariliku murru, mis lahutub antud perioodiliseks murruks; vastupidi, perioodiline murd, mille perioodiks on number 9, ei saa olla mingi hariliku murru lahutiseks.

Tõestus. 1) Olgu antud mistahes perioodiline murd perioodiga 9, näiteks 5,28(9). Kui oleks olemas harilik murd, mis kümnendmurruks lahutamisel annaks 5,28(9), siis, nagu teame, see harilik murd peaks võrduma antud perioodilise murru lõikude jada piiriga; kuid murru 5,28(9) jaoks võrdub see piir teoreemi 5 alusel:

$$\frac{5289-528}{9\cdot 10^2}=\frac{5280+9-528}{9\cdot 10^2}=\frac{528\cdot 10-528+9}{9\cdot 10^2}=$$
$$=\frac{528\cdot 9+9}{9\cdot 10^2}=\frac{528+1}{10^2},$$

s. t. selleks on murd, mille nimetaja ei sisalda teisi algtegureid peale 2 ja 5; selline harilik murd, nagu teame, lahutub lõplikuks, mitte aga perioodiliseks kümnendmurruks. Tõestamist toimetasime näite abil (näitlikkuse eesmärgil), kuid toodud arutlus jääb ilmselt õigeks mistahes perioodilise murru puhul, mille perioodiks on 9.

2) Olgu nüüd antud perioodiline murd perioodiga, mis koosneb kas mitmest numbrist või ühest numbrist, mis on erinev 9-st, näiteks 7,(23). Teoreemi 4 tõestamisel oletasime, et

$$7{,}\overbrace{2323\ldots 23}^{n}=X_n$$

ja nägime, et $n$-i kasvades

$$7\frac{23}{99}=\frac{723-7}{99}=\text{piir } X_n;$$

täpsemalt, meil oli seal

$$\frac{723-7}{99}-X_n=\frac{23}{100^n\cdot 99}<\frac{1}{100^n},$$

kuna $\frac{23}{99}<1$ (just see viimane võrratus, mis jääb õigeks mistahes perioodi puhul, kui viimane erineb 9-st, võimaldab laiendada meie poolt üksiknäite puhul toodud arutlust mistahes murdudele perioodiga, mis erineb 9-st). See aga tähendab, et lõplik kümnendmurd $X_n$ nimetajaga $100^n$ on arvu $\frac{723-7}{99}$ ligikaudseks suuruseks (puudusega) täpsusega kuni $\frac{1}{100^n}$; sellisteks ligikaudseteks suurusteks on, nagu teame, need lõigud, mis saadakse antud arvu kümnendmurruks lahutamisel; tähendab $X_n$ on arvu $\frac{723-7}{99}$ lahutise lõiguks; kuna aga $n$ on vabalt valitud, siis arvu $\frac{723-7}{99}$ kümnendmurruks lahutis langeb tegelikult ühte antud perioodilise murruga 7,(23).

**194.** ***Järeldused.*** *1) Puhtperioodiliseks murruks muutuva hariliku murru nimetaja ei sisalda pärast taandamist tegureid 2 ja 5, sest vastavalt teoreemile 4 on seda nimetajat alati võimalik kujutada*

*arvuna, mis lõpeb numbriga 9, ja seepärast ei või ta jaguda ei 2-ga ega 5-ga, seda enam aga ei või ta sisaldada neid tegureid pärast murru taandamist.*

*2) Segaperioodiliseks murruks muutuva hariliku murru nimetaja sisaldab ühte teguritest 2 või 5 või mõlemaid koos.*

Tõepoolest seda nimetajat võib teoreemile 5 vastavalt kujutada nulliga lõppeva arvuga ja seepärast jagub ta nii 2-ga kui ka 5-ga. Mõlemad need tegurid võiksid taanduda lugejaga ainult siis, kui lugeja oleks lõppenud nulliga. Lugeja saamiseks aga lahutatakse arv, mis seisab enne esimest perioodi, arvust, mis seisab enne teist perioodi; kuna perioodi viimane number ei või osutuda ühesuguseks perioodi ees seisva viimase numbriga (kui periood on alatud õigest kohast), siis lugeja ei või lõppeda nulliga. Seepärast jääb ka pärast taandamist (kui see on võimalik) nimetajasse kas tegur 2 või 5 või mõlemad koos.

*3) Harilik murd, mille nimetaja ei sisalda tegureid 2 ja 5, muutub puhtperioodiliseks murruks.*

Näiteks:

$$\frac{3}{7} = 0,(428571); \quad \frac{2}{3} = 0,(6); \quad \frac{5}{11} = 0,(45).$$

Tõepoolest: 1) selline murd peab teisenduma mingiks perioodiliseks murruks (p. 180); 2) see perioodiline murd ei või olla segaperioodiline murd, sest segaperioodiliseks murruks, nagu nägime, võib teisenduda ainult selline harilik murd, mille nimetaja sisaldab tegureid 2 ja 5. Järelikult peab antud murd teisenduma puhtperioodiliseks murruks.

*4) Harilik murd, mille nimetaja pärast taandamist sisaldab koos teiste teguritega ühte teguritest 2 või 5 (või mõlemaid), teisendub segaperioodiliseks murruks.*

Näiteks:

$$\frac{35}{42} = \frac{5}{6} = 0,8(3); \quad \frac{8}{15} = 0,5(3); \quad \frac{119}{450} = 0,26(4) \text{ jne.}$$

Tõepoolest: 1) selline murd peab teisenduma mingiks perioodiliseks murruks; 2) see perioodiline murd ei või olla puhtperioodiline murd, sest et puhtperioodiline murd, nagu nägime, tuleneb ainult sellisest harilikust murrust, mille nimetaja ei sisalda tegureid 2 ja 5. Antud murd peab järelikult teisenduma segaperioodiliseks murruks.

VI OSA.

# VÕRDELISED EHK PROPORTSIONAALSED SUURUSED.

## I. Võrded ehk proportsioonid.

**195. Võrded.** *Võrdeks ehk proportsiooniks nimetatakse kahe suhte võrdust.*

Nii kujutavad võrdused

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12},\quad \frac{10}{2\frac{1}{2}}=\frac{1\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}},\quad \frac{3\frac{1}{2}\text{ kg}}{5\text{ kg}}=\frac{\frac{1}{2}\text{ m}}{\frac{5}{7}\text{ m}}$$

endast võrdeid (proportsioone). Neid võrdeid võib kirjutada järgmiselt:

$$3:4=9:12,\quad 10:2\tfrac{1}{2}=1\tfrac{1}{3}:\tfrac{1}{3}\text{ jne.}$$

Sõnadega loetakse neid võrdeid nii: 3 *suhtub* 4-*sse nagu* 9 12-*sse*; 10 *suhtub* $2\frac{1}{2}$-*sse nagu* $1\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$-*sse* jne. Võrret kujundava kahe suhte liikmed võivad olla kas nimeta arvud (nagu kahes esimeses näites) või ühe ning sama nimetusega nimega arvud (nagu kolmandas näites). Viimasel juhul on täiesti lubatav, et esimese suhte liikmetel on üks nimetus (näiteks kilogrammid), teise suhte liikmetel aga hoopis teine nimetus (näiteks meetrid); seejuures kumbki nendest suhetest on nimeta arv ja võrre kujutab endast nende kahe nimeta arvu võrdust.

Igal võrdel on ilmselt kaks eelnevat ja kaks järgnevat liiget. Võrret kujundavate suhete liikmeid nimetatakse ka *võrde liikmeteks.* Võrdes

$$3 : 4 = 9 : 12 \qquad (1)$$

nimetatakse liikmeid 3 ja 12 *välisliikmeteks*, liikmeid 4 ja 9 aga *siseliikmeteks.* Iga liiget võrde liikmetest nimetatakse kolme teise liikme suhtes *neljandaks võrdeliseks.*

**196. Võrrete põhiomadus.** Selles punktis käsitleme ainult niisuguseid võrdeid, millede liikmed on nimeta arvud.

Vaatleme võrret $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; korrutame mõlemad võrdsed suhted ühe ja sama arvuga $4 \cdot 12$, s. t. järgnevate liikmete korrutisega; tulemuseks saame jällegi võrdsed arvud:

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 12}{4} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 12}{12},$$

või pärast taandamist

$$3 \cdot 12 = 9 \cdot 4.$$

See võrdus näitab, et

**võrde välisliikmete korrutis võrdub siseliikmete korrutisega.**

On aga hõlpus veenduda, et, vastupidi, **neli arvu, mis on valitud nii, et kahe korrutis võrdub kahe ülejäänu korrutisega osutuvad alati võrde liikmeteks.**

Võtame näiteks võrduse

$$4 \cdot 15 = 3 \cdot 20;$$

jagades võrduse pooled korrutisega $15 \cdot 3$, leiame pärast taandamist:

$$\frac{4}{3} = \frac{20}{15}.$$

Oleksime võinud jagada antud võrduse mõlemaid pooli ka teistsuguste korrutistega, näiteks korrutistega $4 \cdot 3$, $4 \cdot 20$ või $15 \cdot 20$, ja saada sel viisil mitu erinevat võrret.

Ainus erand sellest reeglist esineb sel juhul, kui ühes korrutises (või mõlemas) mõlemad tegurid on nullid, näiteks $0 \cdot 5 = 0 \cdot 0$; sel juhul pole antud arvudest ilmselt võimalik koostada võrret, sest sellises võrdes peab vähemalt üks järgnevatest liikmetest olema null, mis, nagu teame, pole aga lubatav.

Üldkujul kirjutatakse võrde $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ põhiomadus nii:

$$ad = bc.$$

Vastupidi, võrdusest $ad = bc$ järeldub, et

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ ja } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

**197. Järeldusi põhiomadusest.**

**1) Võrde iga välisliige võrdub siseliikmete korrutisega, mis on jagatud teise välisliikmega** ja

**võrde iga siseliige võrdub välisliikmete korrutisega, mis on jagatud teise siseliikmega.**

See annab võimaluse leida võrde tundmatut liiget, kui tema ülejäänud 3 liiget on teada; näiteks võrdest

$$10 : x = 45 : 20,$$

kus $x$ tähendab võrde tundmatut siseliiget, leiame:

$$x = \frac{10 \cdot 20}{45} = 4\frac{4}{9}.$$

**2) Võrde liikmete ümberpaigutamine.** Igas võrdes on võimalik ümber paigutada: 1) siseliikmeid, 2) välisliikmeid ja 3) välisliikmeid siseliikmete asemele ja vastupidi. Niisugused ümberpaigutused ei riku võrret, sest jääb kehtima välisliikmete ja siseliikmete korrutiste võrdsus. Olgu näiteks antud võrre:

1) $4 : 7 = 12 : 21.$

Kui paigutame ümber tema siseliikmed, saame:

$$2)\ 4 : 12 = 7 : 21.$$

Paigutame veel mõlemas võrdes ümber välisliikmed, siis saame veel kaks võrret:

$$3)\ 21 : 7 = 12 : 4; \qquad 4)\ 21 : 12 = 7 : 4.$$

Lõpuks paigutame veel neljas saadud võrdes siseliikmed välisliikmete asemele ja vastupidi, siis saame veel neli võrret:

$$5)\ 7 : 4 = 21 : 12; \qquad 7)\ 7 : 21 = 4 : 12;$$
$$6)\ 12 : 4 = 21 : 7; \qquad 8)\ 12 : 21 = 4 : 7.$$

Saadud kaheksas võrdes oleks veelgi võimalik paigutada ümber suhteid, s. o. paigutada teine suhe esimeseks, esimene aga teiseks, kuid nende ümberpaigutustega ei oleks võimalik saada uusi võrdeid, milles võime vahetult hõlpsalt veenduda. Kui näiteks võrdes 5) paigutame ümber suhteid, siis me ei saa mitte uut võrret, vaid võrde 4). Kõikvõimalike ümberpaigutuste teel on järelikult võimalik saada ühe võrde asemel kaheksa võrret.

**3) Võrde kontrollimine.** Selleks et kontrollida põhiomaduse alusel võrret, tuleb ainult veenduda, kas tema välisliikmete korrutis võrdub siseliikmete korrutisega. Näiteks võrre $4 : 7 = 868 : 1519$ on õige, sest $1519 \cdot 4 = 868 \cdot 7$.

**198. Geomeetriline keskmine.** Võtame võrde, mille siseliikmed on võrdsed, näiteks:

$$36 : 12 = 12 : 4.$$

Niisuguse võrde korduvat liiget nimetatakse võrde kahe ülejäänud liikme *geomeetriliseks keskmiseks*. Nii on 12 arvude 36 ja 4 geomeetriline keskmine.

Seega kui on tarvis leida kahe arvu $a$ ja $b$ geomeetrilist keskmist, siis, tähistades viimast $x$-ga, võime kirjutada võrde:

$$a : x = x : b,$$

kust:

$$x^2 = ab.$$

Tähendab *kahe antud arvu geomeetriline keskmine on niisugune kolmas arv, mille ruut võrdub antud arvude korrutisega*[1]. Näiteks võrdub arvude 25 ja 4 geomeetriline keskmine 10-ga, sest $10^2 = 25 \cdot 4$.

**199. Aritmeetiline keskmine.** *Mitme antud arvu aritmeetiliseks keskmiseks nimetatakse jagatist, mis saadakse nende arvude summa jagamisel nende arvuga.* Näiteks võrdub arvude 10, 2, 8 ja 12 aritmeetiline keskmine:

$$\frac{10+2+8+12}{4} = \frac{32}{4} = 8.$$

Aritmeetilisel keskmisel on see omadus, et kui antud arvude liitmisel asendame igaühe neist aritmeetilise keskmisega, siis sellest asendamisest summa ei muutu. Nii võrdub arvude 10, 2, 8 ja 12 summa 32-ga ja summa $8+8+8+8$ võrdub samuti 32-ga.

Oletame näiteks, et vabriku toodang jooksva aasta esimese nelja kuu jooksul suurenes, võrreldes eelmise aasta detsembri toodanguga: jaanuaris 10 000 rubla, veebruaris 2000 rubla, märtsis 8000 rubla ja aprillis 12 000 rubla võrra. Siis võime öelda, et keskmine toodangu suurenemine nimetatud 4 kuu jooksul on 8000 rubla kuus. Sellest tuleb aru saada nii, et vabriku toodangu suurenemine kõigi 4 kuu jooksul osutus samasuguseks, nagu ta oleks olnud siis, kui toodangu suurenemine iga kuu jooksul oleks olnud ühesugune, nimelt 8000 rubla võrra.

Samas mõttes räägitakse sageli keskmisest sissetulekust, keskmisest liikumise kiirusest, keskmisest rahvastiku tihedusest jne. Kõikide selliste väljenduste puhul mõeldakse, et juttu on aritmeetilisest keskmisest.

**200. Tuletatud võrded.** Alljärgnevalt on näidatud, kuidas ühest võrdest on võimalik saada mitmeid teisi võrdeid, mida nimetatakse t u l e t a t u d võrreteks.

---

[1] Kahe arvu geomeetriline keskmine võrdub järelikult ruutjuurega antud arvude korrutisest.

Võtame mingi suhte, näiteks 21 : 7. Kui liidame tema eelneva liikmega järgneva, jättes järgneva liikme muutmata, siis saame suhte (21 + 7) : 7, mis ilmselt on eelmisest suurem 1 võrra. Kui aga lahutame eelnevast liikmest järgneva (kui see on võimalik, nagu meie näites), järgneva liikme jätame aga muutmata, siis saame uue suhte (21 — 7) : 7, mis on eelmisest väiksem 1 võrra.

Seda märkinult võtame mingi võrde:

$$21 : 7 = 30 : 10$$

ja koostame temast uue võrde järgmisel viisil:

$$(21 + 7) : 7 = (30 + 10) : 10. \qquad (1)$$

Viimane võrre on õige seepärast, et kumbki suhe selles võrdes on suurem esialgse võrde suhetest ühe ja sama arvu võrra, nimelt 1 võrra. Meie poolt koostatud tuletatud võrret on võimalik sõnadega avaldada järgmiselt:

**esimese suhte liikmete summa suhtub selle järgnevasse liikmesse, nagu teise suhte liikmete summa suhtub selle järgnevasse liikmesse.**

Koostame nüüd antud võrdest niisuguse:

$$(21 — 7) : 7 = (30 — 10) : 10. \qquad (2)$$

See võrre on õige seepärast, et kumbki suhe selles võrdes on väiksem antud võrde suhetest ühe ja sama arvu võrra, nimelt 1 võrra. Meie poolt koostatud teist tuletatud võrret on võimalik avaldada sõnadega järgmiselt:

**esimese suhte liikmete vahe suhtub selle järgnevasse liikmesse, nagu teise suhte liikmete vahe suhtub selle järgnevasse liikmesse.**

Liikmete ümberpaigutamisel selles kahes tuletatud võrdes võib saada veel teisigi tuletatud võrdeid. Paigutame ümber siseliikmed esimeses tuletatud võrdes ja antud võrdes:

$$(21 + 7) : (30 + 10) = 7 : 10;$$
$$21 : 30 = 7 : 10.$$

Kahes viimases võrdes teised suhted on võrdsed, tähendab siis ka esimesed suhted peavad olema võrdsed:

$$(21 + 7) : (30 + 10) = 21 : 30.$$

Paigutades siseliikmed ümber, saame:

$$(21 + 7) : 21 = (30 + 10) : 30. \qquad (3)$$

Seda kolmandat tuletatud võrret on võimalik sõnadega avaldada järgmiselt:

**esimese suhte liikmete summa suhtub selle eelnevasse liikmesse, nagu teise suhte liikmete summa suhtub selle eelnevasse liikmesse.**

Paigutame siseliikmed teises tuletatud võrdes ja antud võrdes ümber, saame:

$$(21 - 7) : (30 - 10) = 7 : 10;$$
$$21 : 30 = 7 : 10;$$

siit:

$$(21 - 7) : (30 - 10) = 21 : 30$$

või

$$(21 - 7) : 21 = (30 - 10) : 30. \qquad (4)$$

Seda neljandat tuletatud võrret on võimalik avaldada sõnadega järgmiselt:

**esimese suhte liikmete vahe suhtub selle eelnevasse liikmesse, nagu teise suhte liikmete vahe suhtub selle eelnevasse liikmesse.**

Paigutades siseliikmed esimeses ja teises tuletatud võrdes ümber, saame:

$$(21 + 7) : (30 + 10) = 7 : 10;$$
$$(21 - 7) : (30 - 10) = 7 : 10;$$

siit

$$(21 + 7) : (30 + 10) = (21 - 7) : (30 - 10)$$

või

$$(21 + 7) : (21 - 7) = (30 + 10) : (30 - 10). \qquad (5)$$

Seda viiendat tuletatud võrret on võimalik avaldada sõnadega järgmiselt:

**esimese suhte liikmete summa suhtub nende vahesse, nagu teise suhte liikmete summa suhtub nende vahesse.**

**201. Võrdsete suhete omadus.** Näitame veel ühe omaduse, mis peab paika mitte ainult võrde, s. o. kahe suhte võrduse juures, vaid ka kolme, nelja ja enama suhte võrduse puhul.

Võtame mitu võrdset suhet, näiteks sellised:

$$40 : 10 = 20 : 5 = 8 : 2 = \ldots$$

Et igas suhtes tema eelnev liige võrdub järgneva liikme ja suhte korrutisega ja et meie näites iga suhe võrdub 4-ga, siis võime kirjutada:

$$40 = 10 \cdot 4; \quad 20 = 5 \cdot 4; \quad 8 = 2 \cdot 4; \ \ldots$$

Liidame nende võrduste vasakud pooled omavahel ja paremad pooled omavahel. On ilmne, et võrdsete arvude liitmisel peame saama ka võrdsed summad; seepärast

$$40 + 20 + 8 + \ldots = 10 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + \ldots$$

Selle võrduse parempoolses osas korrutatakse arvud 10, 5, 2 ... eraldi 4-ga ja saadud korrutised liidetakse. Selle asemel on võimalik eelnevalt liita arvud 10, 5, 2, ... ja

siis summa korrutada 4-ga. Seepärast võime meie poolt tuletatud võrduse ümber kirjutada nii:

$$40 + 20 + 8 + \ldots = (10 + 5 + 2 + \ldots)4.$$

Jagame selle võrduse mõlemad pooled summaga $10 + 5 + 2 + \ldots$; et võrdus jääb seejuures kehtima, saame:

$$(40 + 20 + 8 + \ldots) : (10 + 5 + 2 + \ldots) = 4.$$

Kuid igaüks meie poolt võetud võrdsetest suhetest võrdub samuti arvuga 4; tähendab

$$(40 + 20 + 8 + \ldots) : (10 + 5 + 2 + \ldots) = 40 : 10 = 20 : 5 = 8 : 2 = \ldots$$

Olgu meil üldiselt mitu võrdset suhet:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = q.$$

Siis

$$a = bq; \qquad a_1 = b_1 q; \qquad a_2 = b_2 q; \quad \ldots$$

Liites need võrdused, saame:

$$a + a_1 + a_2 + \ldots = bq + b_1 q + b_2 q + \ldots = (b + b_1 + b_2 + \ldots)q.$$

Jagame nüüd võrduse mõlemad pooled summaga $b + b_1 + b_2 + \ldots$, misjuures võrdus jääb kehtima:

$$\frac{a + a_1 + a_2 + \ldots}{b + b_1 + b_2 + \ldots} = q.$$

Kuid igaüks antud suhetest võrdub samuti $q$-ga, tähendab

$$\frac{a + a_1 + a_2 + \ldots}{b + b_1 + b_2 + \ldots} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots$$

Seega:

**kui mitu suhet on üksteisega võrdsed, siis kõikide nende eelnevate liikmete summa suhtub kõikide nende järgnevate liikmete summasse, nagu üks mingi eelnev liige suhtub oma järgnevasse liikmesse.**

Iga võrre kujutab endast kahe suhte võrdust; tähendab meie poolt näidatud omadus peab paika ka iga võrde puhul.

## II. Suuruste võrdeline ja pöördvõrdeline sõltuvus.

**202. Võrdelised (proportsionaalsed) suurused.** Maksku 3 m riiet 360 rubla; siis kahekordne hulk riiet, s. o. 6 m, maksab kaks korda rohkem, s. o. $360 \cdot 2 = 720$ rubla; kolmekordne hulk riiet, s. t. 9 m, maksab kolm korda rohkem, s. o. $360 \cdot 3 = 1080$ rubla jne.

Üldiselt, kui antud kauba hulka suurendada mistahes arv korda, siis suureneb ka tema koguhind sama arv korda; kui antud kauba hulka vähendada mingi arv korda, siis ka tema koguhind väheneb sama arv korda.

*Kui kaks suurust on seotud omavahel nii, et ühe suurenemine (vähenemine) mingi arv korda põhjustab teise suurenemist (vähenemist) sama arv korda, siis neid kahte suurust nimetatakse võrdelisteks suurusteks.*

Nii on kauba hulk ja tema koguhind võrdelised suurused. Täpselt samuti

ühtlase tihedusega keha kaal (näiteks rauatüki kaal) on võrdeline tema ruumalaga;

ühtlaselt liikuva keha (näiteks raudteerongi) poolt käidud tee pikkus on võrdeline liikumise kestusega;

murru suurus, kui tema nimetaja ei muutu, on võrdeline tema lugejaga jne.

Kui ühes riidetükis on 4 m riiet, teises aga 10 m, siis teine riidetükk on esimesest $\frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$ korda suurem; tähendab, et ka teise riidetüki koguhind on $2\frac{1}{2}$ korda suurem esimese riidetüki koguhinnast, s. t.

$$\frac{\text{10 m koguhind}}{\text{4 m koguhind}} = \frac{\text{10 m}}{\text{4 m}} \left( = 2\frac{1}{2} \right).$$

Seega:

*kui kaks suurust on võrdelised, siis esimese suuruse kahe mistahes väärtuse suhe võrdub teise suuruse vastavate väärtuste suhtega.*

**203.** ***Ülesanne.*** *8 meetrit riiet maksab 960 rubla; kui palju maksab 15 m sama riiet?*

**1) Lahendamine ühiku kaudu.**

Riide koguhind on võrdeline tema meetrite arvuga; seepärast 1 m maksab 8 korda vähem kui 8 m, 15 m aga maksab 15 korda rohkem kui 1 m; kuid

8 m maksab 960 rubla,

tähendab

$$1 \text{ m maksab } \frac{960}{8} = 120 \text{ (rubla)},$$

$$15 \text{ m maksab } \frac{960}{8} \cdot 15 = 1800 \text{ (rubla)}.$$

Viisi, mille järgi lahendasime selle ülesande, nimetatakse lahendamiseks *ühiku kaudu*, sest selleks, et teada saada 15 m riide hinda, leidsime kõigepealt 1 m hinna.

**2) Ülesande lahendamine võrde abil.**

Tähistame $x$-ga 15 m riide hinna, siis p. 202 toodud reegli järgi saame võrde:

$$x : 960 = 15 : 8,$$

kust

$$x = \frac{960 \cdot 15}{8} = 1800 \text{ (rubla)}.$$

**204. Võrdelise sõltuvuse väljendamine valemi abil.** Olgu meil kaks võrdelist suurust $A$ ja $B$. Oletame, et kui suurus $A$ on võrdne ühikuga (ühte liiki suuruse ühikuga), siis teine suurus $B$ muutub võrdseks $k$ ühikuga (teist liiki suuruse ühikuga). Kui nüüd suurus $A$ omandab mingi teise väärtuse $x$ ühikut, siis suuruse $B$ väärtuseks ei ole enam $k$ ühikut, vaid mingi teine arv, mille tähistame $y$-ga. Avaldame selle paremaks selguseks järgmise tabelikesega:

| $A$ | $B$ |
|---|---|
| 1 | $k$ |
| $x$ | $y$ |

Et eelduse järgi suurused $A$ ja $B$ on võrdelised, siis suhe $1 : x$ peab olema võrdne suhtega $k : y$. Järelikult võime kirjutada võrde:

$$1 : x = k : y,$$

millest leiame, et

$$y = kx.$$

Selle valemi abil võime hõlpsalt leida arvu $y$, mis vastab $x$-i mistahes väärtusele, kui ainult on teada arv $k$. Kui näiteks $x = 1, 2, 3, 4, 4\frac{1}{2}, 9\frac{3}{4}, \ldots$, siis $y$ võrdub vastavalt $k, 2k, 3k, 4k, 4\frac{1}{2}k, 9\frac{3}{4}k, \ldots$

Seega:

*kui kaks suurust on võrdelised, siis nendevahelist sõltuvust võib avaldada valemiga $y = kx$, milles $y$ ja $x$ on muutuvad arvud, mis väljendavad antud suuruste teineteisele vastavaid väärtusi, $k$ on aga jääv arv ja võrdub $y$ selle eriväärtusega, mis vastab väärtusele $x = 1$.* Seda arvu nimetatakse *võrdeteguriks.*

Rakendades näiteks seda valemit meie ülesandele (p. 203), võime kirjutada:

$$\text{riide koguhind} = k \times \text{riide hulk},$$

kus $k$ on hinna suurus sel juhul, kui riide hulk võrdub ühikuga. Tähendab, kui hind väljendatakse rublades, riide hulk aga meetrites, siis $k$ on 1 m hind (120 rubla).

**205. Pöördvõrdelised suurused.** Vaatleme niisugust ülesannet: *6 töölist lõpetab teatava töö 18 päevaga. Mitme päevaga lõpetab sama töö 9 inimest, töötades sama tootlikkusega nagu esimesedki?*

Selles ülesandes räägitakse ka kahest suurusest: tööliste hulgast ja töö kestusest. Need suurused sõltuvad teineteisest, sest ühe muutumisel muutub ka teine. See sõltuvus on aga teistsugune kui ülesandes p. 203.

Seal ühe suuruse suurendamisel 2, 3 jne. korda teine suurus suurenes sama arv korda. Siin aga, kui suurendada kahekordseks tööliste arvu, sama töö kestus väheneb kaks

korda; vastupidi, kui näiteks vähendada tööliste arvu 3 korda, siis antud töö kestus suureneb ilmselt kolm korda.

*Kui ühe suuruse suurenemisel (vähenemisel) mingi arv korda teine suurus väheneb (suureneb) sama arv korda, siis neid kahte suurust nimetatakse pöördvõrdelisteks suurusteks.*

Nii on tööliste arv ja antud töö kestus pöördvõrdelised suurused.

Täpselt samuti:

kauba kaal, mida on võimalik osta antud rahasumma (näiteks 100 rubla) eest, on pöördvõrdeline selle kauba kaaluühiku hinnaga;

aeg, mille vältel käiakse läbi antud tee ühtlaselt liikuva keha poolt, on pöördvõrdeline liikumise kiirusega;

murru suurus, kui ta lugeja ei muutu, on pöördvõrdeline tema nimetajaga jne.

Kui ühes brigaadis on 6 töölist, teises aga 9 töölist, s. t. $\frac{9}{6} = 1\frac{1}{2}$ korda rohkem, siis teine brigaad täidab sama töö $1\frac{1}{2}$ korda kiiremini kui esimene, s. o.

$$\frac{\text{1. brigaadi töö kestus}}{\text{2. brigaadi töö kestus}} = \frac{\text{tööliste arv 2. brigaadis}}{\text{tööliste arv 1. brigaadis}} \left(= 1\frac{1}{2}\right).$$

Seega:

*kui kaks suurust on pöördvõrdelised, siis esimese suuruse kahe mistahes väärtuse suhe võrdub teise suuruse vastavate väärtuste pöördsuhtega.*

**206.** Lahendame nüüd ülesande, mis oli toodud p. 205 alguses.

**1) Lahendamine ühiku kaudu.**

Päevade arv on pöördvõrdeline tööliste arvuga; seepärast 1 tööline lõpetab töö päevade arvuga, mis on

6 korda suurem päevade arvust, millega lõpetab sama töö 6 töölist; 9 töölist aga lõpetab sama töö päevade arvuga, mis on 9 korda väiksem päevade arvust, millega lõpetab selle töö 1 tööline. Kuid 6 töölist lõpetab töö 18 päevaga; tähendab 1 tööline lõpetab sama töö $18 \cdot 6$ ($= 108$) päevaga, 9 töölist aga lõpetab sellesama töö $\frac{18 \cdot 6}{9}$ ($= 12$) päevaga.

**2) Lahendamine võrde abil.** Tähistades $x$-ga tundmatut päevade arvu, millega 9 töölist lõpetab töö, saame p. 205 toodud reegli järgi võrde:

$$\frac{18}{x} = \frac{9}{6},$$

kust

$$x = \frac{18 \cdot 6}{9} = 12 \text{ (päeva)}.$$

*Märkus.* Et kaks teineteisest sõltuvat suurust oleksid võrdelised (või pöördvõrdelised), ei jätku sellest, et kui üks nendest suurustest suureneb, et siis teine suurus ka suureneb (või teine suurus väheneb, pöördvõrdelisuse puhul). Näiteks kui üks liidetavatest suureneb, siis suureneb ka summa; ekslik oleks aga öelda, et summa on võrdeline liidetavaga, sest kui me näiteks suurendame liidetavat 3 korda, siis, kuigi summa suureneb, ei suurene ta ometi 3 korda. Samuti ei ole võimalik öelda, et kahe arvu vahe on pöördvõrdeline lahutatavaga, sest kui lahutatav suureneb näiteks 2 korda, siis, kuigi vahe väheneb, ei vähene ta ometi 2 korda. Võrdelisuseks on tarvilik, et kummagi suuruse suurenemine või vähenemine toimuks s a m a  a r v  k o r d a.

**207. Pöördvõrdelise sõltuvuse väljendamine valemi abil.** Olgu meil kaks pöördvõrdelist suurust $A$ ja $B$. Oletame, et kui suurus $A$ on võrdne ühikuga (ühte liiki suuruse ühikuga), siis teine suurus $B$ muutub võrdseks $k$ ühikuga (teist liiki suuruse ühikuga). Kui nüüd suurus $A$ omandab ühiku asemel mingi teise väärtuse $x$ ühikut, siis suurus $B$ omandab eelmise väärtuse ($k$ ühikut) asemel mingi väärtuse $y$.

Paremaks selguseks kirjutame selle üles tabelikesena:

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & k \\ \hline x & y \end{array}$$

Kuna tingimuse järgi suurused $A$ ja $B$ on pöördvõrdelised, siis suhe $1 : x$ võrdub suhte $k : y$ pöördväärtusega, s. t. suhtega $y : k$. Seepärast võime kirjutada võrde:

$$1 : x = y : k,$$

kust leiame

$$y = \frac{k}{x} \text{ (või } xy = k).$$

Seega:

*kui kaks suurust on pöördvõrdelised, siis võib nendevahelist sõltuvust avaldada valemiga* $y = \frac{k}{x}$ (või teisiti, valemiga $xy = k$), *kus* $x$ *ja* $y$ *on nende suuruste mingid teineteisele vastavad väärtused,* $k$ *aga on jääv arv, mis võrdub* $y$ *väärtusega, kui* $x = 1$.

Selle valemi järgi võime arvutada $y$ väärtuse mistahes antud $x$ väärtuse puhul, kui ainult on teada arv $k$. Kui $x = 1, 2, 3, 4, 4\frac{1}{2}, \ldots$ siis

$$y = k, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \frac{k}{4}, \frac{k}{4\frac{1}{2}}, \ldots$$

Meie ülesandes töö kestuse kohta (p. 205) on jäävaks arvuks $k$ päevade arv, mis vastab ühele töölisele (108 päeva); siis 2 töölist lõpetab töö $\frac{108}{2}$ $(= 54)$ päevaga, 3 töölist $\frac{108}{3}$ $(= 36)$ päevaga jne.

## 208. Ülesanne võrdelistele (proportsionaalsetele) suurustele, kui neid suurusi on üle kahe.

***Ülesanne.*** *5 ühesugusele petrooleumilambile, mis põlesid 24 päeva à 6 tundi päevas, kulutati 120 liitrit petrooleumi. Mitmeks päevaks jätkub 216 liitrist petrooleumist, kui 9 sellist petrooleumilampi põleb 8 tundi päevas?*

Paigutame selle ülesande andmed järgmiselt:

120 l — 5 lampi — 6 tundi — 24 päeva;
216 l — 9 lampi — 8 tundi — $x$ päeva.

Näeme, et uutes tingimustes on muudetud nii petrooleumi tagavara kui ka lampide arv ja nende igapäevase põlemise kestus; korraga on kõiki neid muutusi arvesse võtta raske; seepärast oletame kõigepealt, et muutub mingi üks arv antud arvudest, näiteks petrooleumi tagavara, ülejäänud arvud aga ei muutu. Saame niisuguse ülesande: mitmeks päevaks jätkub 216 liitrist petrooleumist, kui samad 5 lampi põlevad endiselt 6 tundi päevas? Kui nendes tingimustes 120 l jätkub 24 päevaks, siis 216 l jätkub $\frac{24 \cdot 216}{120}$ päevaks, sest päevade arv on ilmselt võrdeline ärapõlenud petrooleumi hulgaga. Nüüd võime koostada järgmise kirjutise:

$$216 \text{ l} — 5 \text{ lampi} — 6 \text{ tundi} — \frac{24 \cdot 216}{120} \text{ päeva.}$$

Nüüd muudame lampide arvu, jättes muutuseta petrooleumi tagavara (216 l) ja igapäevase põlemise aja (6 tundi). On ilmne, et kui viie lambi asemel põleb üksainus, siis jätkub sama petrooleumi tagavara sama pika igapäevase põletamise puhul 5 korda kauemaks; kui aga ühe lambi asemel põleb neid 9, siis jätkub petrooleumi 9 korda lühemaks päevade arvuks (päevade arv on pöördvõrdeline lampide arvuga); seepärast võime koostada järgmise kirjutise:

$$216 \text{ l} — 9 \text{ lampi} — 6 \text{ tundi} — \frac{24 \cdot 216 \cdot 5}{120 \cdot 9} \text{ päeva.}$$

Jääb järele muuta igapäevase põlemise tundide arvu. On ilmne, et antud petrooleumi tagavara ja antud lampide arvu puhul päevade arv suureneb (väheneb) niimitu korda, kuimitu korda me vähendame (suurendame) igapäevase põlemise tundide arvu. Teiste sõnadega, põlemise päevade

arv ja igapäevase põlemise tundide arv on pöördvõrdelised. Seepärast üle minnes 6-lt igapäevase põlemise tunnilt 8-le, peame viimases üleskirjutises saadud päevade arvu korrutama 6-ga ja jagama 8-ga. See annab järgmise üleskirjutise:

$$216\ \text{l} \text{ — } 9\ \text{lampi} \text{ — } 8\ \text{tundi} \text{ — } \frac{24 \cdot 216 \cdot 5 \cdot 6}{120 \cdot 9 \cdot 8}\ \text{päeva;}$$

seega:

$$x = \frac{24 \cdot 216 \cdot 5 \cdot 6}{120 \cdot 9 \cdot 8} = 18\ \text{(päeva)}.$$

## III. Ülesandeid võrdelisele (proportsionaalsele) jaotamisele.

**209.** ***Ülesanne 1.*** *Jaotada 84 3-ks osaks võrdeliselt arvude reaga: 7, 5 ja 2.*

Sellest tuleb aru saada nii: jaotada 84 kolmeks selliseks osaks, et esimene osa suhtuks 7-sse, nagu teine suhtub 5-sse ja nagu kolmas suhtub 2-sse.

Tähistame otsitavad osad tähtedega $x_1$, $x_2$, $x_3$. Ülesandes nõutakse, et need osad rahuldaksid järgmisi võrdeid (proportsioone):

$$\frac{x_1}{7} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3}{2}.$$

Siit leiame võrdsete suhete omaduse järgi (p. 201):

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{7 + 5 + 2} = \frac{x_1}{7} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3}{2}.$$

Kuid $x_1 + x_2 + x_3 = 84$ ja $7 + 5 + 2 = 14$; seepärast võime eelmise rea kirjutada ümber järgmiselt:

$$\frac{84}{14} = \frac{x_1}{7};\ \frac{84}{14} = \frac{x_2}{5};\ \frac{84}{14} = \frac{x_3}{2};$$

sellest saame:

$$x_1 = \frac{84}{14} \cdot 7 = 42;\quad x_2 = \frac{84}{14} \cdot 5 = 30;\quad x_3 = \frac{84}{14} \cdot 2 = 12.$$

Oleme leidnud järgmise reegli:

***Reegel.*** **Et jaotada arvu osadeks võrdeliselt (proportsionaalselt) antud arvudega, tuleb jagada teda nende arvude summaga ja jagatist korrutada kordamööda igaühega nendest arvudest.**

**210.** ***Ülesanne 2.*** *Jaotada 968 4-ks osaks võrdeliselt arvude reaga:* $1\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{8}$.

Asendame kõigepealt antud murdarvude rea täisarvude reaga. Selleks teisendame murrud ühenimelisteks ja muudame segamurrud liigmurdudeks:

$$1\frac{1}{2}=\frac{60}{40};\ \frac{3}{4}=\frac{30}{40};\ \frac{2}{5}=\frac{16}{40};\ \frac{3}{8}=\frac{15}{40}.$$

Tähistades otsitavad arvud tähtedega $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, saame:

$$\frac{x_1}{60}=\frac{x_2}{30}=\frac{x_3}{16}=\frac{x_4}{15},$$
$$40\quad 40\quad 40\quad 40$$

või vähendades kõiki nelja suhet 40 korda (jättes ära järgnevates liikmetes nimetaja 40),

$$\frac{x_1}{60}=\frac{x_2}{30}=\frac{x_3}{16}=\frac{x_4}{15},$$

misjärel seda ülesannet lahendatakse samuti nagu ülesannet 1.

*Märkus.* On võimalik lahendada ülesannet 2 ka otse ülesande 1 juures näidatud reegli järgi; arvutuste lihtsustamiseks on ometi otstarbekohane asendada kõigepealt suhete järgnevad liikmed täisarvudega, nagu tekstis on tehtudki.

**211.** ***Ülesanne 3.*** *Jaotada 125 4-ks osaks nii, et esimene osa suhtuks teisesse nagu 2 : 3, teine osa kolmandasse nagu 3 : 5, kolmas osa neljandasse nagu 5 : 6.*

Tähistame otsitavad osad tähtedega $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Siis saame:

$$x_1 : x_2 = 2 : 3; \quad x_2 : x_3 = 3 : 5; \quad x_3 : x_4 = 6;$$

paigutades nendes võrretes siseliikmed ümber, saame

$$x_1 : 2 = x_2 : 3; \quad x_2 : 3 = x_3 : 5; \quad x_3 : 5 = x_4 : 6$$

ehk

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{5} = \frac{x_4}{6},$$

misjärel ülesannet lahendatakse nagu ülesannet 1.

212. ***Ülesanne 4.*** *Jaotada 125 4-ks osaks nii, et esimene osa suhtuks teisesse nagu 2 : 3, teine osa kolmandasse nagu 4 : 5, kolmas osa aga neljandasse nagu 6 : 11.*

See ülesanne on väliselt sarnane ülesandega 3. Ometi aga on olemas oluline vahe nende ülesannete vahel. Ülesandes 3 suhted 2 : 3, 3 : 5, ja 5 : 6 on sellised, et esimese suhte järgnev liige võrdub teise suhte eelneva liikmega, teise suhte järgnev liige aga võrdub kolmanda suhte eelneva liikmega. Seetõttu võib öelda, et ülesandes 3 on tarvis 125 jaotada 4-ks osaks võrdeliselt arvude reaga 2, 3, 5, 6. Tähendab, see ülesanne ei erine millegagi ülesandest 1.

Ülesandes 4 on osadevahelised suhted 2 : 3, 4 : 5 ja 6 : 11 niisugused, et ühe suhte järgnev liige ei võrdu järgmise suhte eelneva liikmega. Ometi on aga sedagi juhtu võimalik lahendada eelmisega sarnleva arutlusega.

Tähistame otsitavad osad tähtedega $x_1$, $x_2$, $x_3$ ja $x_4$ siis võime kirjutada kolm järgmist võrret:

$$x_1 : x_2 = 2 : 3; \quad x_2 : x_3 = 4 : 5; \quad x_3 : x_4 = 6 : 11.$$

Paigutades kirjutatud võrretes siseliikmed ümber leiame:

$$x_1 : 2 = x_2 : 3; \qquad (1)$$
$$x_2 : 4 = x_3 : 5; \qquad (2)$$
$$x_3 : 6 = x_4 : 11; \qquad (3)$$

võrdest (2) leiame:

$$x_2 = \frac{4 \cdot x_3}{5},$$

kust

$$\frac{x_2}{3} = \frac{4x_3}{5 \cdot 3} = \frac{x_3}{\frac{15}{4}}.$$

Edasi leiame võrdest (3):

$$x_3 = \frac{6 \cdot x_4}{11},$$

kust

$$\frac{x_3}{\frac{15}{4}} = \frac{6x_4}{11 \cdot \frac{15}{4}} = \frac{x_4}{\frac{55}{8}},$$

seega:

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{\frac{15}{4}} = \frac{x_4}{\frac{55}{8}},$$

misjärel see ülesanne lahendub nagu ülesanne 2.

**213.** ***Ülesanne 4.*** *Jaotada arv a osadeks pöördvõrdeliselt arvudega m, n ja p.*

*See tähendab, et arv a tuleb jaotada osadeks, mis on võrdelised arvude m, n ja p pöördarvudega,* s. t. mis on võrdelised arvudega $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ ja $\frac{1}{p}$. Tähistades otsitavad osad tähtedega $x_1$, $x_2$ ja $x_3$, saame sellele vastavalt:

$$x_1 : \frac{1}{m} = x_2 : \frac{1}{n} = x_3 : \frac{1}{p};$$

siit

$$x_1 : x_2 = \frac{1}{m} : \frac{1}{n} = n : m,$$

$$x_2 : x_3 = \frac{1}{n} : \frac{1}{p} = p : n,$$

s. t. kui arvud $x_1$, $x_2$, $x_3$ on pöördvõrdelised arvudega $m$, $n$ ja $p$, siis suhe $x_1 : x_2$ võrdub suhtega $n : m$ (mitte aga $m : n$, nagu võrdelisuse puhul); suhe $x_2 : x_3$ võrdub samuti suhtega $p : n$ (mitte aga $n : p$, nagu võrdelisuse puhul).

**214. Näide keerulisemast ülesandest võrdelise (proportsionaalse) jaotamise kohta.** *Käsikirja masinal ümberkirjutamise eest maksti 123 rubla. Ümberkirjutamist toimetasid kolm masinakirjutajat; esimene töötas 8 tundi, kirjutades 6 lehekülge tunnis; teine töötas 6 tundi, kirjutades 10 lehekülge tunnis; kolmas töötas 7 tundi, kirjutades 8 lehekülge tunnis. Kui palju tasu sai iga masinakirjutaja?*

Kui kõigi kolme masinakirjutaja töötootlikkus oleks olnud võrdne, siis töötasu oleks tulnud jaotada võrdeliselt nende tööajaga. Teiselt poolt, kui nad kõik oleksid töötanud võrdse arvu tunde, siis töötasu oleks tulnud jaotada võrdeliselt nende töötootlikkusega. Tegelikult aga oli nii töötamise aeg kui ka töötootlikkus kõigil kolmel masinakirjutajal isesugune. Seepärast arutleme ülesande lahendamiseks järgmiselt: esimene masinakirjutaja, töötades 8 tundi, kirjutas 6 lehekülge tunnis ja järelikult kirjutas kokku $6 \cdot 8$ lehekülge; teine masinakirjutaja kirjutas kokku $10 \cdot 6$ lehekülge ja kolmas $8 \cdot 7$ lehekülge. Seepärast tuleb töötasu üldsumma, s. t. 123 rubla jaotada võrdeliselt korrutistega $6 \cdot 8$, $10 \cdot 6$ ja $8 \cdot 7$, s. t. võrdeliselt arvudega 48, 60 ja 56 või pärast taandamist võrdeliselt arvudega 12, 15 ja 14. Tähistades otsitavad arvud tähtedega $x_1$, $x_2$ ja $x_3$ leiame seetõttu:

$$x_1 = \frac{123 \cdot 12}{12 + 15 + 14} = \frac{123 \cdot 12}{41} = 3 \cdot 12 = 36 \text{ (rubla)};$$

$$x_2 = \frac{123 \cdot 15}{41} = 3 \cdot 15 = 45 \text{ (rubla)};$$

$$x_3 = \frac{123 \cdot 14}{41} = 3 \cdot 14 = 42 \text{ (rubla)}.$$

# IV. Algarvude tabel 6000 piires.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 229 | 523 | 857 | 1201 | 1559 | 1933 | 2311 | 2699 | 3089 | 3517 | 3907 | 4289 | 4729 | 5153 | 5573 |
| 3 | 233 | 541 | 859 | 1213 | 1567 | 1949 | 2333 | 2707 | 3109 | 3527 | 3911 | 4297 | 4733 | 5167 | 5581 |
| 5 | 239 | 547 | 863 | 1217 | 1571 | 1951 | 2339 | 2711 | 3119 | 3529 | 3917 | 4327 | 4751 | 5171 | 5591 |
| 7 | 241 | 557 | 877 | 1223 | 1579 | 1973 | 2341 | 2713 | 3121 | 3533 | 3919 | 4337 | 4759 | 5179 | 5623 |
| 11 | 251 | 563 | 881 | 1229 | 1583 | 1979 | 2347 | 2719 | 3137 | 3539 | 3923 | 4339 | 4783 | 5189 | 5639 |
| 13 | 257 | 569 | 883 | 1231 | 1597 | 1987 | 2351 | 2729 | 3163 | 3541 | 3929 | 4349 | 4787 | 5197 | 5641 |
| 17 | 263 | 571 | 887 | 1237 | 1601 | 1993 | 2357 | 2731 | 3167 | 3547 | 3931 | 4357 | 4789 | 5209 | 5647 |
| 19 | 269 | 577 | 907 | 1249 | 1607 | 1997 | 2371 | 2741 | 3169 | 3557 | 3943 | 4363 | 4793 | 5227 | 5651 |
| 23 | 271 | 587 | 911 | 1259 | 1609 | 1999 | 2377 | 2749 | 3181 | 3559 | 3947 | 4373 | 4799 | 5231 | 5653 |
| 29 | 277 | 593 | 919 | 1277 | 1613 | 2003 | 2381 | 2753 | 3187 | 3571 | 3967 | 4391 | 4801 | 5233 | 5657 |
| 31 | 281 | 599 | 929 | 1279 | 1619 | 2011 | 2383 | 2767 | 3191 | 3581 | 3989 | 4397 | 4813 | 5237 | 5659 |
| 37 | 283 | 601 | 937 | 1283 | 1621 | 2017 | 2389 | 2777 | 3203 | 3583 | 4001 | 4409 | 4817 | 5261 | 5669 |
| 41 | 293 | 607 | 941 | 1289 | 1627 | 2027 | 2393 | 2789 | 3209 | 3593 | 4003 | 4421 | 4831 | 5273 | 5683 |
| 43 | 307 | 613 | 947 | 1291 | 1637 | 2029 | 2399 | 2791 | 3217 | 3607 | 4007 | 4423 | 4861 | 5279 | 5689 |
| 47 | 311 | 617 | 953 | 1297 | 1657 | 2039 | 2411 | 2797 | 3221 | 3613 | 4013 | 4441 | 4871 | 5281 | 5693 |
| 53 | 313 | 619 | 967 | 1301 | 1663 | 2053 | 2417 | 2801 | 3229 | 3617 | 4019 | 4447 | 4877 | 5297 | 5701 |
| 59 | 317 | 631 | 971 | 1303 | 1667 | 2063 | 2423 | 2803 | 3251 | 3623 | 4021 | 4451 | 4889 | 5303 | 5711 |
| 61 | 331 | 641 | 977 | 1307 | 1669 | 2069 | 2437 | 2819 | 3253 | 3631 | 4027 | 4457 | 4903 | 5309 | 5717 |
| 67 | 337 | 643 | 983 | 1319 | 1693 | 2081 | 2441 | 2833 | 3257 | 3637 | 4049 | 4463 | 4909 | 5323 | 5737 |
| 71 | 347 | 647 | 991 | 1321 | 1697 | 2083 | 2447 | 2837 | 3259 | 3643 | 4051 | 4481 | 4919 | 5333 | 5741 |
| 73 | 349 | 653 | 997 | 1327 | 1699 | 2087 | 2459 | 2843 | 3271 | 3659 | 4057 | 4483 | 4931 | 5347 | 5743 |
| 79 | 353 | 659 | 1009 | 1361 | 1709 | 2089 | 2467 | 2851 | 3299 | 3671 | 4073 | 4493 | 4933 | 5351 | 5749 |
| 83 | 359 | 661 | 1013 | 1367 | 1721 | 2099 | 2473 | 2857 | 3301 | 3673 | 4079 | 4507 | 4937 | 5381 | 5779 |
| 89 | 367 | 673 | 1019 | 1373 | 1723 | 2111 | 2477 | 2861 | 3307 | 3677 | 4091 | 4513 | 4943 | 5387 | 5783 |
| 97 | 373 | 677 | 1021 | 1381 | 1733 | 2113 | 2503 | 2879 | 3313 | 3691 | 4093 | 4517 | 4951 | 5393 | 5791 |
| 101 | 379 | 683 | 1031 | 1399 | 1741 | 2129 | 2521 | 2887 | 3319 | 3697 | 4099 | 4519 | 4957 | 5399 | 5801 |
| 103 | 383 | 691 | 1033 | 1409 | 1747 | 2131 | 2531 | 2897 | 3323 | 3701 | 4111 | 4523 | 4967 | 5407 | 5807 |
| 107 | 389 | 701 | 1039 | 1423 | 1753 | 2137 | 2539 | 2903 | 3329 | 3709 | 4127 | 4547 | 4969 | 5413 | 5813 |
| 109 | 397 | 709 | 1049 | 1427 | 1759 | 2141 | 2543 | 2909 | 3331 | 3719 | 4129 | 4549 | 4973 | 5417 | 5821 |
| 113 | 401 | 719 | 1051 | 1429 | 1777 | 2143 | 2549 | 2917 | 3343 | 3727 | 4133 | 4561 | 4987 | 5419 | 5827 |
| 127 | 409 | 727 | 1061 | 1433 | 1783 | 2153 | 2551 | 2927 | 3347 | 3733 | 4139 | 4567 | 4993 | 5431 | 5839 |
| 131 | 419 | 733 | 1063 | 1439 | 1787 | 2161 | 2557 | 2939 | 3359 | 3739 | 4153 | 4583 | 4999 | 5437 | 5843 |
| 137 | 421 | 739 | 1069 | 1447 | 1789 | 2179 | 2579 | 2953 | 3361 | 3761 | 4157 | 4591 | 5003 | 5441 | 5849 |
| 139 | 431 | 743 | 1087 | 1451 | 1801 | 2203 | 2591 | 2957 | 3371 | 3767 | 4159 | 4597 | 5009 | 5443 | 5851 |
| 149 | 433 | 751 | 1091 | 1453 | 1811 | 2207 | 2593 | 2963 | 3373 | 3769 | 4177 | 4603 | 5011 | 5449 | 5857 |
| 151 | 439 | 757 | 1093 | 1459 | 1823 | 2213 | 2609 | 2969 | 3389 | 3779 | 4201 | 4621 | 5021 | 5471 | 5861 |
| 157 | 443 | 761 | 1097 | 1471 | 1831 | 2221 | 2617 | 2971 | 3391 | 3793 | 4211 | 4637 | 5023 | 5477 | 5867 |
| 163 | 449 | 769 | 1103 | 1481 | 1847 | 2237 | 2621 | 2999 | 3407 | 3797 | 4217 | 4639 | 5039 | 5479 | 5869 |
| 167 | 457 | 773 | 1109 | 1483 | 1861 | 2239 | 2633 | 3001 | 3413 | 3803 | 4219 | 4643 | 5051 | 5483 | 5879 |
| 173 | 461 | 787 | 1117 | 1487 | 1867 | 2243 | 2647 | 3011 | 3433 | 3821 | 4229 | 4649 | 5059 | 5501 | 5881 |
| 179 | 463 | 797 | 1123 | 1489 | 1871 | 2251 | 2657 | 3019 | 3449 | 3823 | 4231 | 4651 | 5077 | 5503 | 5897 |
| 181 | 467 | 809 | 1129 | 1493 | 1873 | 2267 | 2659 | 3023 | 3457 | 3833 | 4241 | 4657 | 5081 | 5507 | 5903 |
| 191 | 479 | 811 | 1151 | 1499 | 1877 | 2269 | 2663 | 3037 | 3461 | 3847 | 4243 | 4663 | 5087 | 5519 | 5923 |
| 193 | 487 | 821 | 1153 | 1511 | 1879 | 2273 | 2671 | 3041 | 3463 | 3851 | 4253 | 4673 | 5099 | 5521 | 5927 |
| 197 | 491 | 823 | 1163 | 1523 | 1889 | 2281 | 2677 | 3049 | 3467 | 3853 | 4259 | 4679 | 5101 | 5527 | 5939 |
| 199 | 499 | 827 | 1171 | 1531 | 1901 | 2287 | 2683 | 3061 | 3469 | 3863 | 4261 | 4691 | 5107 | 5531 | 5953 |
| 211 | 503 | 829 | 1181 | 1543 | 1907 | 2293 | 2687 | 3067 | 3491 | 3877 | 4271 | 4703 | 5113 | 5557 | 5981 |
| 223 | 509 | 839 | 1187 | 1549 | 1913 | 2297 | 2689 | 3079 | 3499 | 3881 | 4273 | 4721 | 5119 | 5563 | 5987 |
| 227 | 521 | 853 | 1193 | 1553 | 1931 | 2309 | 2693 | 3083 | 3511 | 3889 | 4283 | 4723 | 5147 | 5569 | |

# Sisukord.


Lk.

Eessõna ümbertöötuse autorilt . . . . . 3

I osa.

**Täisarvud.**

I. Täisarvud, nende nimetused ja kirjutamine . . . . . 5
II. Mitmesugused arvusüsteemid. Rooma numbrid . . . . . 12
III. Liitmine . . . . . 16
IV. Lahutamine . . . . . 22
V. Tehete märgid. Võrdusmärk ja võrratusmärgid. Sulud . . 28
VI. Korrutamine . . . . . 31
VII. Jagamine . . . . . 47

II osa.

**Arvude jaguvusest.**

I. Jaguvuse tunnused . . . . . 66
II. Arvude lahutamine algtegureiks . . . . . 74
III. Kordarvu jagajate leidmine . . . . . 83
IV. Arvude suurim ühisjagaja (suurim ühistegur) . . . . . 85
V. Arvude väikseim ühiskordne . . . . . 91

III osa.

**Suuruste mõõtmine.**

**Meetermõõdustik** . . . . . 96

IV osa.

**Harilikud murrud.**

I. Põhimõisteid . . . . . 105
II. Murru suuruse muutumine tema liikmete muutmisel . . . 111

Lk.
III. Murru taandamine . . . . . 114
IV. Murdude teisendamine ühenimelisteks . . . . . 116
V. Tehted murdarvudega . . . . . 119

V osa.

**Kümnendmurrud.**

I. Kümnendmurdude põhiomadused . . . . . 150
II. Tehted kümnendmurdudega . . . . . 156
III. Harilikkude murdude teisendamine kümnendmurdudeks . . 164
IV. Perioodiliste murdude teisendamine harilikeks murdudeks . 171

VI osa.

**Võrdelised ehk proportsionaalsed suurused.**

I. Võrded ehk proportsioonid . . . . . 183
II. Suuruste võrdeline ja pöördvõrdeline sõltuvus . . . . . 192
III. Ülesandeid võrdelisele (proportsionaalsele) jaotamisele . . 199
IV. Algarvude tabel 6000 piires . . . . . 204

III väljaanne

*Vastutav toimetaja* [redacted]
*Tehniline toimetaja H. Kohu.*

Ladumisele antud 1. IX 1950. Trükkimisele antud 26. IX 1950. Trükiarv 17 000. Paber 54×84, 1/16. Trükipoognaid 13. Formaadile 60×92 kohaldatud trükipoognaid 10,66. Arvutuspoognaid 10,05.
MB-07399.
Trükikoda „Hans Heidemann", Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 2505.

На эстонском языке.

Hind rbl. 3.50.

T4

Rbl. 3.50

A
18355
4486330

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00448633 0