

Gerhard Rago

Prof. Gerhard Rago

Matemaatilise analüüsi elemendid

Õpperaamat ja ülesanded

3242

K/Ü „Loodus“, Tartus

1922

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
56024

K/Ü „Looduse“ keeleline korrektor Ülikooli Eesti keele lektor
J. V. Veski.

15986408

A-3648 I

K. Mattiesen'i trükk, Tartus.

Lugejale.

1. Lugeja ärgu rahuldugu raamatu lugemisega. Temas esitatud ainet saab lugeja omaks teha ainult siis, kui ta tähelepanelikult mõttekäiku jälgib ja iseseisvalt samm-sammult kõik tarvilikud arvutamised ja graafilised konstruktsioonid teostab; raamatus antud seletused tahavad lugejat selles töös juhtida.

2. Selle raamatu läbitöötamisel ärgu püüdku lugeja teda ära õppida, vaid katsugu iga asja kohta, millest räägitakse, iga lause mõtte, iga tehte kohta endale muretseda täis selgus.

3. Lugeja püüdku mõttekäikusi, milledest ta aru saanud, seletada oma sõnadega, valvaku aga piinlikult, et sõnad mõttele vastaksid.

4. Eelduseks arusaamiseks selles raamatus käsitatud aineist on kõige lihtsamate elementaararvematematika osade tundmine. Oleks soovitav, et lugeja kohtadel, kus see nimetatud, vaevaks võtaks üht või teist asja analüütilisest geomeetriast meelde tuletda. Autor on endale lubanud säärastel kordadel nimetada märkusega T. a. g. p. vastavaid kohti oma raamatukesest: „Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned“.

5. Ülesanded selles raamatus pole määratud ei pea murdmiseks ega lahenduse leidmiseks, vaid järelemõtlemiseks ja läbitöötamiseks. Lugeja tehku seda hoolsalt, andes endale täit aru igast, ka kõige vähemast toimetusest.

6. Kui arvutamistes, nõnda ka jooniste valmistamisel pidagu lugeja kindlat korda ja piinlikku puhtust. Ainult korrapärane ja puhas töö toob rõõmu.

Saatesõna.

1. See raamat peab tema lugejat sisse juhutama teadusevalda, mis kannab matemaatilise analüüsi nime. Selle teaduse alaks on muutuvuse uurimine ja tema eesmärgiks on muutuvuses jääva seaduse leidmine. See teadus seob suurusi üksteisega, ta otsib nende vastavust, ta uurib nende olenevust teineteisest ja määrab nende rippuvuse iseärasused.

2. Funktsionaalsuse idee on selle teaduseala valitseja. Ühiselt mõistetega, mis temast välja võrsunud, on tema loodud suure sündimise kirjeldamiseks: looduse uurimise nõuetest on suurem osa matemaatilise analüüsi mõisteid välja kasvanud. Ja tema nähtuste teraval vaatlemisel ja nende käigu jälgimisel on nad valminud. Nõnda nad valmivad ka selles raamatus. Ma olen püüdnud mitte anda juba valmis kujus mõisteid ja metoode, vaid olen katsunud lugejat juhtida geneetiliselt nende juurde. Kord küpseks saanud, rakendatakse nad uurimistöö riistana. See tee on ainus, mis viib tervele arusaamisele sest suurest mõttest, mis peitub funktsionaalsuse idees ja võimsalt valitseb ja juhib kõike meie vaimutööd. See tee kinnitab palju paremini usku matemaatilise analüüsi mõttesünnituste tõesse ja nende viljakusse, kui pikk väidete ja tõestuste rida.

3. Selles raamatus on tarvitatud graafilist metoodi laiemalt kui üheski teises sama ulatusega. Selle metoodi tähtsus ei seis mitte ainult selles, et ta on võimsaks uurimise abinõuks, et ta meile näitlikuks teeb abstraktsed mõisted, et ta nii võimsalt elustab võib olla muidu vähe kuivi mõttekäikusi, vaid kõige pealt selles, et puhtad täpsad graafilised kujutused meis äratavad suurel määral kõige heledamat rõõmu! Rõõm aga on tööviljakuse peatingimuseks.

4. Ma olen katsunud iga asja nimetada õige nimega. Nii siis puuduvad minu raamatus „lõpmata väikesed arvud“. Miski ei raskenda arusaamist nõnda, kui sõna, mis ei vasta mõttele! Meil esinevad siin ainult „lõpmata vähenavad arvud“. Ei saa selles raamatus ka tan x lõpmatu suureks — küll aga võib ta kasvada lõpmata. Üks matemaatika õpetamise püüetest olgu ikka täpsa mõtlemise harimise kõrval näidata ka täpsat sõna tarvitamist!

Ma ei ole endale lubanud kujutada nähtuse käiku pideva murdjoonena, kus tema kujuks peab olema katkev trepikujuline joonis. Ka on kindlasti lahus hoitud mõisted „funktsiooni väärtus täpis $x = a$ “ ja „funktsiooni piir x -i lõpmatul lähenemisel täpile a “. Ainult nõnda mõisteid lahus hoides on võimalik pääseda suurest mõttesegadusest, millesse nii mõnigi raamat viib oma lugejaid.

5. Ma pean lubamatuks õpetada lugejat peadpööritavaid avaldusi differentsuma ja leidma samasuguseid integraale. Ma ei lahenda ka ühtki nendest keerulistest piiri leidmise ülesannetest, mis kuskil peale vanade ülesannete-kogude ei esine. Kallist aega ei tohi vaimu kurnamiseks tarvitada!

6. Kõike seda pole ju ka sugugi tarvis. Juba kõige lihtsamate analüüsi valemite abil on võimalik lahendada nii väga palju huvitavaid küsimusi. Nendest ei ole siis ka puudust minu raamatus; ja nende jaoks ma ei olnud kokkuhoidlik ruumiga. Raamat on sellepärast vähe suuremaks kasvanud, kui esialgselt oli arvatud. Loodan aga, et tema läbitöötamine selle tõttu ainult kergeneb. Miski ei mõju matemaatika õpetamisel nii halvavalt, kui tema elusa sisu ettekandmine ärakuivanud ja surnud kujus!

7. Selles raamatus leidub nii mõndagi asja, mida palju aega enne matemaatilise analüüsi õpetamist võiks ja tuleks käsitada. Praegusel kooli uutele radadele asumise ajal ei arvanud ma võimaliku olevat nende käsitamist ära jätta. Materjali korraldus, mis mind rahuldaks, läheb mul vahest ehk korda, kui ma oma ammuaegse soovi teostan, moodsat elementaararvmatematika õpperaamatut kirjutada, mis vastaks uutele nõuetele, uutele ülesannetele.

8. Käesolev raamat on nõnda kirjutatud, et temast vabalt mõned osad võib välja jätta ja nende asemele teisi temast võtta. Sellega on püütud võimaldada seda vabadust, mis igal koolimehel peab olema. Kui ma midagi temale südame peale tohiksin panna, siis on see soov, et ta paneks kõige suuremat rõhku põhi-

mõistete ja põhi-mõttekäikude seletamise ja selgitamise peale ja et ta nõuaks piinlikku korda ja puhtust ülesannete numbrilisel ja graafilisel läbitöötamisel.

9. Paljude küsimuste käsitus läheb lahku sellest, mis senini esitatud elementaarsete õpperaamatute. Selle põhjuseks ei ole mitte minu isemeelsus, vaid kogemused, mis ma korjanud oma seitsmeaastases õpetegevuses. Selle aja jooksul olen ma nii mõnelegi sajale noormehele matemaatilist analüüsi õpetanud ja palju harjutusi selles aines juhatanud. Selles raamatus esitatud ainekäsitus on valminud mitte kirjutuselaua taga, vaid igapäevases võitluses eelarvamistega, mõtetiste raskuste ja arusaamatustega.

10. Ärgu otsigu lugeja sellest raamatust teadusrikku süsteemi tuhandete väidete ja tõestustega! Esimeseks tutvustamiseks ainega pole võimalik teda nõnda käsitada. Ma usun kindlasti, et selge arusaamine sest ainest nõuab enam tõe näitlikku seletust kui tema kuiva tõestust.

Ma ei kahtle selle juures, et nii mitmeltki poolt minu metoodilise seisukoha vastu vaidlema hakatakse. Eriti nende poolt, kes arvavad, et kõike on võimalik ja tuleb tõestada. Sellele ma sean vastu kolm järgmist väidet:

1) Matemaatilisele tõele jõudmiseks on kaks teed: intuiitiivne ja aksiomaatiline. Kui teaduse arenemises nõnda ka õpetamises on esimene teisest viljarikkam olnud.

2) Nendele, kellel and abstraktseks mõtlemiseks puudub, teeb aksiomaatiline mõtlemine ülesaamata raskusi: teistelt nõuab ta kauakestvat erilist vaimu eelharidust.

3) Matemaatika õpetamise reformimine nõuab käskivalt intuitsiooni harimist: matemaatika õpetamine ärgu olgu ainult järjekindla mõtlemise harjutamiseks; ta püüdku kasvatada elusat ettekujutust abstraktsetest mõistetest, milledega eksaktselt mõtlemine võimatu; ta püüdku äratada jäävat võimsat matemaatilist tunnet!

11. Ma tean, et raamatu tarvitamisel nii mõnigi tema puudus ilmsiks tuleb, julgen aga loota, et ta peajoontes küps on ilma saatmiseks. Ma palun kõiki selle raamatu hoolsaid lugejaid, iseäranis aga koolimehi, kes ta tarvitusele võtavad, kõikidest vigadest, mis nende silma puutuvad, ja igast soovitatavast muudatusest mulle lahkesti teatada. Ütlen nendele ette oma südamlilkuma tänu.

12. Ma võlgnen palju tänu kõikidele, kes mulle pole keelnud oma abi selle raamatu valmisseadmisel:

Meie Tartu Ülikooli Eesti keele lektorile J. V. Veski'le tema lõpmata vaeva eest, mis ta raamatu keelelisel parandamisel ja korrigeerimise lugemisel näinud, ja tema alatise lahkuse eest, millega ta on mind üle aidanud kõigist keelelistest raskustest;

Tartu Ülikooli ilmajaama juhatajale C. Koch'ile, tema lahke loa eest termograafi negatiivi tarvitada;

Tartu poeglastegümnaasiumi direktorile K. Treffner'ile nii mitme mitme märkuse eest raamatu käsikirja kohta

ja oma abikaasale tema suure abi eest jooniste valmistamisel.

Ma ei saa ka tänamata mööda minna k./ü. „Looduse“ tegelikust juhatajast H. Männik'ust ja Mattiesen'i trükikoja juhatusest, kes vastuvaidlemata on jõudu mööda vastu tulnud kõigile minu soovidele.

13. Ta läheb nüüd ilma, minu raamat. Kergendagu ta meie noorsoole, kellele ta kirjutatud, arusaamist võimsast funktsionaalsuse mõttest, aidaku ta kaasa meie noorsoo täpsa järjekindla mõtlemise arenemiseks, selgitagu ta temale neid suuri mõisteid, millede abil me oma ilmavaate loome, — ja toogu ta rõõmu temast õppijaile!

Tartus,
15. 10. 1921.

Gerhard Rägo.

1. Funktsionaalse olenevuse mõiste. Funktsioonide graafiline kujutamine.

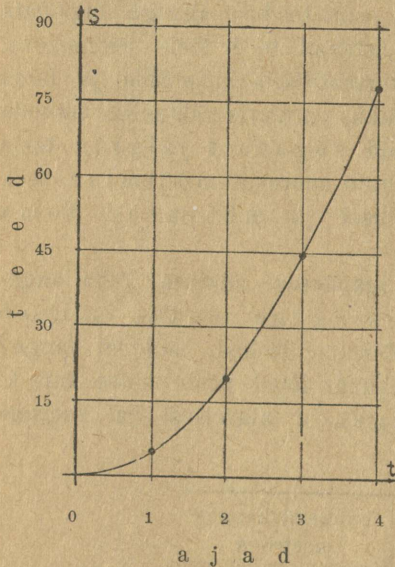
1. Tähtsam matemaatika ülesanne. Üks tähtsamatest matemaatika ülesannetest on keele loomine, milles oleks võimalik kirjeldada looduse nähtusi lühidalt, täpsalt ja täielikult. Kirjeldamismaterjal tuleb muretseda nähtuste vaatlemise ja katse teel. Need kaks teed on, nagu seda teaduse ajalugu lugemata kordadel kinnitanud, ainsad ustavad teed tõele jõudmiseks. Et nähtust oleks võimalik matemaatiliselt kirjeldada ja leida seadust, mis valitseb tema käiku, on tarvis nähtusega tutvuda mitte ainult üldistes joontes, vaid sügavalt jälgida tema sündimist ja arenemist. See sünnib suuruste mõõtmise teel, mis muutuvad nähtuse vältusel ja määravad tema jooksu.

2. Näide. Võtame lihtsa igapäevase nähtuse: keha langemise mõnelt kõrgelt kohalt. Missugune seadus valitseb selle nähtuse käiku? Märgime kohad, millel langev keha oli 1-se, 2-se, 3-da jne. sekundi lõpul peale katse algust; mõõdame nende kohtade kaugused algseisust ja korjame saadused tabeliks kokku:

Langemisaeg sekundites	Langemiskaugus meetrites
0	0
1	4.9
2	19.5
3	44.2
4	78.4

3. Katseresultaatide tabel kui uuritava nähtuse seaduse avaldus. Mis näeme meie leitud tabelist? Esiteks, et mõlemad tabelis nimetatud suurused muutuvad; teiseks, et igale märgitud ajale vastab temale omane langeva keha kaugus algkohast; müidugi on niisugune vastavus kauguse ja aja vahel olemas ka momentidel, mis tabelis tähendamata. Selles kahe suuruse, aja t ja kauguse s , vastavuses peitub seadus, millele allub uuritav nähtus. Tema numbriliseks väljendajaks on saadud ts -tabel. Matemaatika annab meile veel kaks teed seda seadust avaldada: graafilise, joonise abil, ja analüütilise — valemiga.

4. Katseresultaatide graafiline kujutamine. Et tabelis peidus olevat seadust ilmsiks teha, toimetame järgmiselt.



Joon. 1.

Võtame lehe ruudulist paberit (joon. 1), tõmbame ühe tema sirgetest paksemaks ja kujutame temal ajad 1, 2, 3 jne., alates mõnest täpist 0, pikkustena, võttes 1 sec kujukaks mõne pikkusmõõdu, näiteks ruudu külje. Püstjoontel, mis saadud pikkuste lõppedes tõmmatud, kujutame aegadele 0, 1, 2, 3 jne. vastavad langemisteed 0, 4.9, 19.5, 44.2 jne., märkides 15 m näiteks ruudu külje pikkuse abil. Saadud püstpikkuste lõpped moodustavad rea täppe. Igale arvpaarile (t, s), mis tabelist võetud, leidub vastav täpp meie joonises ja

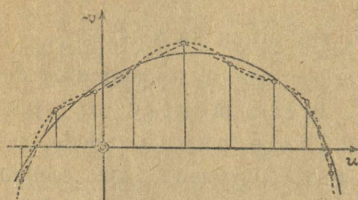
ümberpöörduvalt; meie täpprida on tabeli kaju, sellega rida nähtuse momentülesvõtteid. Tema annab meile ülevaatalikult teede ja aegade vastavuse, mis peitub ts -tabelis.

Palju täielikumana pildi nähtuse käigust, kui seda endine ts -tabel pakub, saaksime meie, kui me peale teede, mis langev keha 1-se, 2-se, 3-da jne. sekundi lõpuni ära käis, temas tähendaksime ka teed, mis aegadele $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ jne. sec vastavad; pildi, veel ligema tõesti sündivale nähtusele, kui sinna ka kõik $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ jne. sec üles võtaksime. Kuid niisuguse mõõtmiste sageduse teostamine sünnitaks suuri raskusi: meie meeled ei suuda nii peeni ajavahemikku tähele panna. Seda ei ole ka tarvis. Me saame nõutud teed kergemalt, kui ennemini saadud joonises täpid sileda kõvera abil ühendame, etteantud aja, nagu ennemini, pikkusena kujutame, selle lõpus püstjoone tõmbame ja tema pikkuse kõverani vastava moodsuga moodsame. Viimane pikkus kujutab otsitud teed. Saadud kõver lubab leida mitte ainult neid teesid, mis langev keha ära käinud vaatlusaegadeni, vaid ka iga teist, mis vastab mõnele teisele ajamomendile katse ajavahemikus. Ta kujutab näitlikult, lühidalt, ülevaatlikult ja täielikult keha langemise seadust: ta on selle nähtuse käigu kinematogramm. Saadud joonist me nimetame langeva keha teegraafikuks ehk tema aeg-tee-diagrammiks.

5. Märkus loodusnähtuste uurimise viisi kohta. Käsitatud keha langemise nähtuse uurimisel me jälgisime keha käidud tee muutumist aja jooksul. Analooiliselt sünnib ka iga teise nähtuse uurimine: me püüame kirjeldada tema käiku kui ühe nähtust määrava suuruse v muutumist teise niisuguse suuruse u muutumisel. Gaasi surumise nähtuse uurimises me jälgime tema mahu muutumist rõhumise muutumisel, varre paisumise nähtusel uurime tema pikkuse muutumist soenemisel, vee rõhumise langemise uurimisel veejuhise me otsime vastust küsimusele, kuidas muutub nimetatud rõhumine kaugusega vee-allikast jne. Iga säärase nähtuse käiku kujutab vastav uv -tabel või, ülevaatlikumalt, vastav uv -diagramm.

6. Katsevead ja nende graafiline leidmine. Harilikult on võimalu täppe, mis mõõtmisresultaate uv kujutavad, ühendada ladusa kõvera abil: nende täppide ühenduskõver saab muhklik (joon. 2), kui neid sileda kõvera abil ühendame, — nurgeline, kui iga paari teineteisele järgnevaid täppe seome sirgjoonelise lõiguga.

Teadus püüab kirjeldada kõike sündivat kõige lihtsamate abinõudega; ta usub, et seadused, mis valitsevad kõike sündimist, on lihtsad seadused; ta usub, et suuruste muutumine, mis meie ees esineb nähtuste arenemisel, sünnib ladusalt. Me paneme selle-



Joon. 2.

pärast kõvera, mis peab kujutama nähtuse käiku, lihtsalt, ladusalt ja siledalt *uv*-täppide reast läbi ja kirjutame püstvahed täppide ja kõvera vahel katsevigade arvele.

Need vead saadavad iga meie katset, iga mõõtmist: nad tekivad sellest, et kontrollimata juhuslised põhjused segavad nähtuse käiku. On katse tehtud iga võimaliku ettevaatuse ja piinlikkusega, siis on meil põhjust arvata, et vead on väikesed: me paneme nähtuse käigu kujukõvera nii täppide reast läbi, et püstvahed tema ja täppide vahel oleksid võimalikult väikesed.

Katsekunsti pea-ülesandeks jääb iseäraliste mõõtmisviiside loomise abil katsevigu võimalikult vähendada.

7. Keha langemise seaduse analüütiline kuju. Esimesed keha langemise nähtuse uurimised on Galilei omad. Oma vaatlusprotokollidest järeldas ta, et keha langemiskaugused algseisust kasvavad võrdeliselt langemis-aegade ruutudega. Selle lausega nõutud vahekord *s* ja *t* vahel kujutas nõnda suure täpsusega vaatlusresultaate, et pisi-kesed lahkuminekuud nendest võis kirjutada katsevigade arvele.

Olgu t_1, t_2, t_3, \dots, t rida langemisaegu, s_1, s_2, s_3, \dots, s vastavad langemisteed; siis on Galilei vaatluste põhjal:

$$s_1 : s_2 : s_3 : \dots : s = t_1^2 : t_2^2 : t_3^2 : \dots : t^2$$

teisiti

$$\frac{s_1}{t_1^2} = \frac{s_2}{t_2^2} = \frac{s_3}{t_3^2} = \dots = \frac{s}{t^2}.$$

See tähendab, et suhe $s : t^2$ on katse vältusel muutumata.

Pikkuste mõõtmisel meetrites ja aegade mõõtmisel sekundites on see suhe 9·81,

tähendab

$$s = 9.81 t^2.$$

See on langemisseaduse analüütiline kuju.

8. **Funktsionaalse olenevuse mõiste.** Katseresultaatide tabel: langemisaeg — langemiskaugus, saadud kõver (joon. 1), mis langemistähtuse käiku kujutab, valem: $s = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 81 \cdot t^2$, mis langemisseadust analüütiliselt edustab, — kõik nad väljendavad igaüks omal viisil üht ja sama mõtet: katse ajavahemikus vastab iga te ajamomendile t üks ja ainult üks, sellele ajale omane kindel käidud tee s . Seda vastavusmõtet me väljendame lauses: tee s oleneb ajast t .

Aja muutumisega muutub ka tee; see tee muutumine ajaga sünnib korrapäraselt, nagu seda nõuab nimetatud vastavus: käidud tee ripub ajast, ehk võõrakeelse sõnaga: tee s on aja t funktsioon, ehk aeg ja tee on funktsionaalselt seotud.

See ts -side, mis ts -tabelis, ts -diagrammis, ts -valemis $s = 9 \cdot 81 t^2$ iga kord omal viisil ilmsiks tuleb, on uuritava langemise nähtuse seaduse mõtteline tuum.

9. **Märkus.** Iga looduseseadus on vastus küsimusele, kuidas üks või teine nähtus sünnib. Ta on lihtne, täppis, täielik, ülevaatlik ja lühike nähtuse käigu kirjeldus. Keeleks, milles säärane kirjeldamine kõige kohasemalt sünnib, on funktsioonide keel.

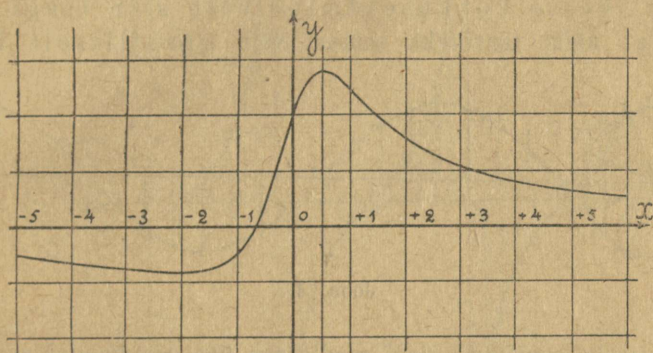
Nähtuse käiku määravate suuruste side, nende funktsionaalne olenevus, on ainus jääv osa nähtuse keerulises arenemises; see side on ainsaks muutuvuse käsutajaks. Ainult selle muutuvuse jääva osa leidmine võimaldab meile arusaamist kõigest sündimisest ja tema teadmine annab meie kätte nähtuse valitsemise ja tema sündimise juhtimise.

Funktsionaalsuses, mis jääva sidemena ilmsiks tuleb teineteisest olenevate suuruste kirjus muutumises, me tunneme ära raudse korra, mis valitseb maailma sündmustes.

Funktsionaalsuse otsimine suuruste muutumises on iga loodusenähtuse uurimise esimeseks ülesandeks. Tema leidmine võimaldab meile kõike oma katsevilja ühes lauses kokku võtta ja kogutud

pikkustena arvud $-5, -4, \dots, +1$ jne.: positiivsed paremale poole mõnest algustäpist 0, negatiivsed pahemale. Saadud pikkuste lõppudes võtame püstjooned ja kanname nendele pikkused, mis funktsiooni väärtusi kujutavad: $-0.50, -0.59, \dots, +2.50$ jne., positiivsed üles-, negatiivsed allapoole telge. Viimaste pikkuste lõpud ühendame sileda kõvera abil. See kõver on uuritava funktsionaalse olenevuse kuju.

Ühest pilgust sellele on küllalt, et kõiki resultate, mis me tabeli vaatlemisel saime, joonises ära tunda. See funktsiooni



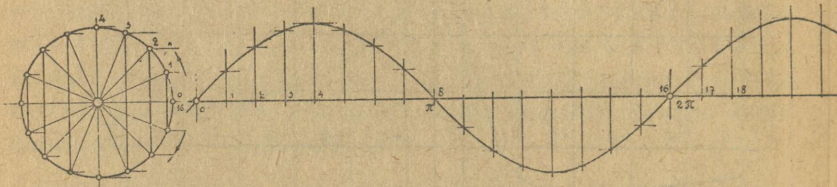
Joon. 3.

graafik annab meile aga veel palju enam andmeid: ta näitab otsekohe, missugune väärtus on meie uuritaval avaldusel iga x -i jaoks vahemikus -5 kuni $+6$ -ni, ka niisuguse jaoks, mida tabelis ei leidu, näiteks väärtustel $x = -3.5, +0.4, +4.7$ jne. Tabelist me nägime ainult vaevaga ja ainult üldistes joontes, kuidas sünnib funktsiooni väärtuse muutumine; joonises torkavad kõik andmed, mis seda määravad, iseenesest silma: me näeme otsekohe, kus meie avaldus on negatiivne, kus positiivne, kus 0, kus ta väheneb, kus kasvab, kus ta kõige vähema, kus kõige suurema väärtuse omandab (ligikaudu $x = -2$ ja $x = +\frac{1}{2}$), kus meie funktsioon järsku, kus

ta aeglaselt kasvab, lühidalt: ei ole raske välja lugeda funktsiooni graafikust kõiki tema muutumise iseärasusi.

11. Trigonomeetrilised funktsioonid ja nende graafiline kujutamine. Trigonomeetrilised suurused sinus x , cosinus x , tangens x jne. on nimeta arvud, nimelt vastavate trigonomeetriliste joonte jagatised raadiusega. Iga le nurgale x vastab temale omane suurus $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ jne.; pealegi üks ja ainult üks. Suurused $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ jne. on nurga x funktsioonid.

Nende funktsioonide kujutamine sünnib seletatud viisil. Tabelikeste kokkuseadmine võib siin isegi ära jääda: kõiki tarvilikku suurusi võib graafiliselt leida.



Joon. 4.

Kui nimelt joonistame ringi raadiusega üks, siis kujutab nurka x tipuga keskkohas tema absoluutsel mõõtmisel kaare pikkus, mis nurga küljed ringist välja lõikavad¹⁾, trigonomeetrilised jooned — vastavaid suurusi.

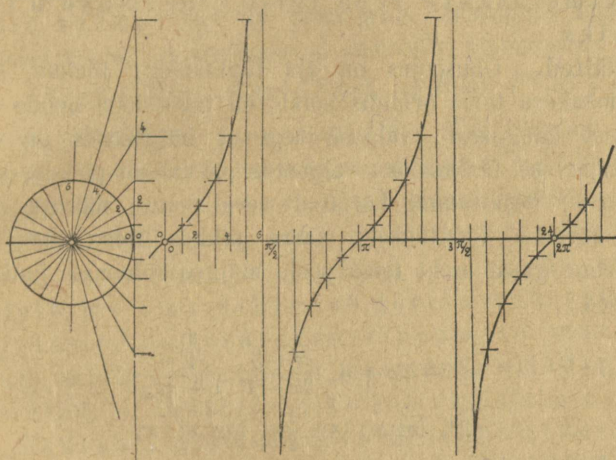
Näide 1. Kujutame funktsiooni $y = \sin x$.

Võtame ringi raadiusega üks (joon. 4), jagame ta näiteks 16-ks osaks ja nummerdame jagamistäpid järgenööda 0, 1, 2, ..., 15 ja edasi 16, 17, ... samuti negatiivses sihis —1, —2, —3, Igast jagamistäpist tõmbame püstjoone null-diaameetrini; nende püstjoonte pikkused kujutavad sinus'e väärtusi, mis vastavad nurkadele:

$$0, 1 \cdot \frac{\pi}{8}, 2 \cdot \frac{\pi}{8}, \dots, 15 \cdot \frac{\pi}{8}, 16 \cdot \frac{\pi}{8} = 2\pi \text{ jne.}$$

1) T. a. g. p. 2·16.

Kujutame neid nurki graafiliselt; selleks lõikame ringi täpis 0 katki ja tõmbame tema sirgeks; saadud lõigu pikkus on 2π , s. o. ligikaudu $6,28$; asetame selle lõigu, alates mõnest täpist 0, nulldiameetri pikendusele, jagame ta 16-ks osaks, nummerdame jagamistäpid 0, 1, 2, ..., 16 ja täiendame nende rida mõlemale poole täppidega 17, 18, ..., -1, -2, Igas säärases jagamistäpis tõmbame püstjoone ja kanname sellele rõhtsirge abil tema numbrile vastava sinusjoone.



Joon. 5.

Saadud täpid ühendame sileda kõvera abil. Viimane kujutab sinusfunktsiooni käiku nurga muutumisel.

Näide 2. $y = \tan x$.

Selle funktsiooni kujutamist selgitab joon. 5.

Lugeja seletagu saadud jooniste abil sinus'e ja tangensi käiku nurga muutumisel. Eriti leidku ta nendest rajad, millede vahel nende funktsioonide väärtused kõiguvad, nende nulltäpid, kus nad väärtuse 0 omavad, samuti nende perioodid ja seadku joonise põhjal endale kokku sinus- ja tangensväärtuste tabelikesed täpsusega 0,1, võttes nurgad iga $\frac{\pi}{24}$ ehk 15° tagant.

12. Üldine funktsiooni definitsioon. On kaks suurt — nimetame neid u ja v — niisuguses vahekorras, et igale esimese väärtusele

$$u_1, u_2, u_3, \dots u$$

vastab üks ja ainult üks temale omane teise suuruse kindel väärtus:

$$v_1, v_2, v_3, \dots v$$

siis nimetatakse seda teist v esimese u funktsiooniks.

Näited. Õhusoojus on aja funktsioon; tõmme, millega päike maakera tema orbiidis hoiab, on funktsioon nende kehade vahelisest kaugusest; valguse tugevus hõõglambis on elektrivoolu tugevuse funktsioon; valgustus päeval on päikese kõrguse funktsioon; veskitammi korjatud vees peituv töövaru on veepinna kõrguse funktsioon; varre pikkus tema temperatuuri funktsioon; gaasi maht tema peale mõjuva rõhumise funktsioon; avaldused:

$$x^2 - 3x + 4, \frac{x+3}{2x-1}, \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}},$$

samuti $2^x, \log x, \tan \frac{1}{2}x, \log \sin x,$

on x -i funktsioonid.

13. Funktsiooni tähis. Funktsionaalse olenevuse, vastavuse ehk rippuvuse üldisteks tähisteks on f (ladinakeelse sõna *functio* algustäht), F, φ ; nendele lisatakse sulgudes suuruse tähis, millest funktsioon oleneb. Nõnda on langemiskaugus aja funktsioon, märkides $s = f(t)$;

avaldus $x^2 - 3x + 4$ x -i funktsioon;

märkides: $x^2 - 3x + 4 = F(x),$

samuti $\log \tan \frac{1}{2} \alpha^2 = \varphi(\alpha)$

jne. Tähtede f, F, φ asemel tarvitatakse ka teisi, näiteks F_1, F_2, F_3, \dots

On v funktsioon u -st, võib ka lihtsalt kirjutada:

$$v = v(u).$$

Tähist $F(x)$ võime kaht viisi vaadelda.

Esiteks kui eeskirja, mille järele tuleb funktsiooni väärtus leida, mis vastab antud x -väärtusele; siis seisab meie näites F lause asemel: x tuleb ruutu tõsta, sellest kolmekordne x lahutada ja saadus neljaga liita; resultaat on võetud x -ile vastav avalduse väärtus.

Teiseks kui saadust, mille nimetatud eeskirja järele saame; siis on tema arv. Niisuguse tähise $F(x)$ tõlkimise korral on arusaadavad sümbolite tähendused:

$$F_1(x) + F_2(x), F_1(x) \cdot F_2(x), \log F(x), F^2(x) \text{ jne.}$$

14. Muutujad ja konstandid. Kui räägime funktsionaalsest olenevusest, on meil tegemist kahe muutuva suurusega ehk muutujaga. Üks nendest, näiteks x , omandab rea väärtusi x_1, x_2, x_3, \dots ; nendele vastavad kindlad teise väärtused $F(x_1), F(x_2), F(x_3), \dots$. Seda suurust, millele me oma tahtmise järele väärtused ette kirjutame, nimetatakse rippumata muutujaks; teist, mille väärtused esimese omadega juba määratud, — funktsiooniks ehk rippujaks muutujaks.

Suurusi, mis uurimise ajavahemikus muutumatuks jäävad, nimetatakse konstantideks.

Üks tähtsamatest loodusteaduse ülesannetest on suuruste leidmine, millel on igas kohas ruumis ja igal ajal üks ja sama väärtus. Seesuguseks suuruseks, maailma konstandiks, on näiteks valguse kiirus tühjuses:

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec.}$$

Ta ei olene mitte millestki.

Märkus. Mõned selles §-is puudutatud küsimused on laiemalt käsitatud minu T. a. g. p. § 1 ja 3.

Ülesanded.

1. Emajõe veepinna kõrguse mõõtmised andsid märtsikuu päevade kohta 1920. a. järgmised arvud:

kuupäev	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
veepinna kõrgus cm-tes.	jää	kate		86	97	108	114	129	140	148	160	169	166	160	152	146
kuupäev	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
veepinna kõrgus cm-tes.	142	139	138	134	130	126	127	129	132	136	143	145	147	149	152	

Joonistada veepinna kõrguse muutumise käigu kuju ajaga, valides kohased pikkused ühe päeva ja cm kujudeks.

2. Katsed näitavad, et vee sees seda enam soola sulab, mida kõrgem on vee temperatuur; näiteks sulab 100 gr vee sees temperatuuridel:

grammides	0°	20°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
keedusoola	34	37	37	37	37	38	38	39	40
silmakivi	16	21	29	34	40	47	54	63	75
bikroomhaput kaaliumi	6	13	30	40	51	62	73	88	103

Kujutada ühes ja samas telgsüsteemis nende ainete sulamise käik vees temperatuuri muutumisel.

3. Ohm'i seaduse järele on konstantse voolu allikate potentsiaalvahe V korral voolu tugevus J juhis pöördvõrdeline takistusega $R: J = \frac{V}{R}$. Joonistada voolu tugevuse muutumise käigu kuju takistuse muutumisel, kui $V=1.2$, nagu see on ligikaudu galvaanilistes kroomelementides.

4. Kujutada funktsioon $y = -3 + 8x - 2x^2$ vahemikus -0.5 kuni $+4.5$.

5. Kujutada funktsioon $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ vahemikus -4 kuni $+4$.

6. Kujutada funktsioonid $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos \frac{1}{2}x$, $\cos 2x - 2\cos \frac{1}{2}x$ ühes ja samas teljestikus.

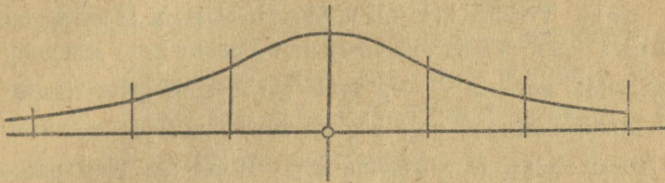
2. Mõned matemaatilise analüüsi põhimõisted.

1. Suuruse lõplikkuse mõiste. 1) Vaatame sinuskõvera jooksu joonises 4. Me näeme, et tema ordinaadid ikka kahe tõkke vahele jäävad, nimelt $+1$ ja -1 vahele; lainete tippudes ja orgudes saavad nad võrdseteks nendega. Kui kaugustes $+1$ ja -1 rõhtsast nurkteljest tõmbame sirded rööbiti viimasega, siis ei ulata ükski sinuskõvera täpp nende sirdete poolt piiratud ribast välja.

2) Joonises 6 on kujutatud funktsioon $y = 2 : (2 + x^2)$. Kõik temale vastava kõvera ordinaadid peituvad 0 ja $+1$ vahel: kõver jääb rõhtribasse, mida piiravad sirged $y = 0$ ja $y = +1$.

Me ütleme: funktsioonid $\sin x$ ja $2 : (2 + x^2)$ on lõplikud. Üldiselt:

Muutub suurus nõnda, et on võimalik nimetada kaht arvu, säärast, et kõik suuruse väärtused jäävad nende arvude poolt piiratud vahemikku, siis nimetame teda lõplikuks.



Joon. 6.

tused jäävad nende arvude poolt piiratud vahemikku, siis nimetame teda lõplikuks.

2. Lõpmata kasvavad suurused. 1) Päris teise pildi võrreldes endisega saame, kui vaatame funktsiooni $y = 1 : (x - 1)^2$ kuju (lugeja tehku joonis). Me näeme, et kõik tema ordinaadid on > 0 , kuid pole võimalik nimetada tõket, millest nad üle ei saa: täpi $x = +1$ ümbruses nad saavad suuremaks igast kindlast etteantud arvust, olgu viimane kui suur tahes.

Tõesti, olgu N niisugune arv. Et oleks $\frac{1}{(x-1)^2} > N$, on tarvis ja piisav, et oleks:

$$(x-1)^2 < \frac{1}{N}, \text{ ehk } |x-1| < \frac{1}{\sqrt{N}} \quad 1)$$

Võtame x -i nii läheda $+1$ -ga, et ta sellest lahku läheb vähem kui murru $1 : \sqrt{N}$ võrra, siis saab temale vastav funktsiooni väärtus $> N$ -ist ja jääb niisuguseks x -i edaspidisel lähenemisel arvule $+1$.

1) Arvu absoluutväärtust me tähistame kahe püstkriipsukesega.

Selle asemel, et öelda: kui x saab küllalt lähedale $+1$ -le, saab $1:(x-1)^2$ suuremaks igast etteantud arvust ja jääb niisuguseks edaspidisel x -i lähenemisel $+1$ -le, me tarvitame kõnekäändu: kui x läheneb $+1$ -le, kasvab murd $1:(x-1)^2$ lõpmata. Sümbolites: kui $x \rightarrow +1$, siis $y \rightarrow \infty$.

Tahame veel ära tähendada, et y selle juures positiivseks jääb, siis kirjutame: $y \rightarrow +\infty$.

2) Teise näitena käsitame funktsiooni $y = \tan x$. Ka siin pole võimalik nimetada arvu, mis oleks tõkkeks \tan -väärtuste kasvamisele: läheneb positiivses sihis nurk $x \frac{\pi}{2}$ -le, saab $\tan x$ suuremaks igast etteantud kindlast arvust, olgu see nii suur kui tahes.

Tõesti, olgu N niisugune arv. Kujutame teda pikkusena tangentsirgel ja ühendame selle pikkuse lõpu ringi keskkohaga sirge abil. Sünnitagu see sirge nulldiameetriga nurga β . Kõikide nende nurkade tangensid, mis β ja $\frac{\pi}{2}$ vahel, on suuremad kui N .

Kokku võttes: läheneb nurk x positiivselt $\frac{\pi}{2}$ -le, siis kasvab $\tan x$, jäädes positiivseks. Saab x küllalt lähedale $\frac{\pi}{2}$ -le, saab $\tan x$ suuremaks igast etteantud kindlast arvust; edaspidisel x -i lähenemisel $\frac{\pi}{2}$ -le jääb ta suuremaks nimetatud arvust. Me ütleme: nurga x lähenemisel $\frac{\pi}{2}$ -le positiivses sihis kasvab $\tan x$ positiivselt lõpmata, ja kirjutame: kui x positiivselt $\rightarrow \frac{\pi}{2}$, siis $\tan x \rightarrow +\infty$. Analoogiliselt leiaksime, et kui x negatiivselt $\rightarrow \frac{\pi}{2}$, siis $\tan x \rightarrow -\infty$.

Üldiselt defiiniime nõnda: muutub suurus niiviisi, et tema teatavast muutumisjärgust alates absoluutselt suuremaks saab igast kindlast, kui spurest tahes, arvust, ja järgneval muutumisel sellest suuremaks ka jääb, siis nimetame teda lõpmata kasvavaks.

Sõnadega „lõpmata kasvav“ tahame ära tähendada,

et pole võimalik nimetada tõket tema kasvamisele, et sellel kasvamisprotsessil pole otsa, pole lõppu.

3. Märkused. 1) L. k. suurused on muutuvad suurused. Iga kindel suuruse väärtus, kui suur ta ka on, on ikka lõplik.

2) Suuruse lõpmatuks kasvamiseks on tarvis, et tema märk jääb püsivaks teatavast suuruse muutumise järgust. Vastasel korral jääb suurus kõikuvas.

3) On see püsivaks jäänud märk $+$, siis ütleme, et uuritav suurus kasvab positiivselt lõpmata, on ta $-$, siis tähendame, et ta kasvab negatiivselt lõpmata.

4) Missugune funktsiooni väärtuste märkidest jääb püsivaks, oleneb sagedasti sellest, mis sihis muutub r. m.

Näidetena uurigu lugeja funktsiooni $\tan x$ nurga $+\frac{\pi}{2}$ ümbruses, ja murdu $\frac{1}{x}$ väärtuse 0 ümbruses.

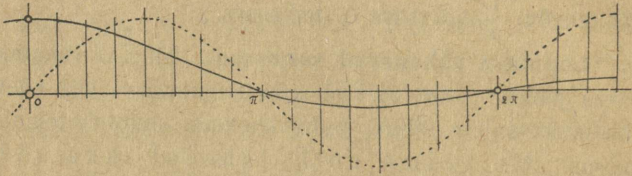
4. Lõpmata vähenevad suurused. 1) Kui vaatame tangentskõvera jooksu (joon. 5) täpi $x=0$ ümbruses, siis näeme, et mida lähemale saab x nullile, seda vähemaks muutub temale vastav tangens. Me võime nulli lähedal ikka säärase kaare leida, et temale vastav tangens vähemaks saab igast kindlast arvust, olgu viimane kui väike tahes.

Tõesti, olgu ε niisugune arv. Kujutame teda pikkusena tangentssirgel ja ühendame selle pikkuse lõpu ringi keskkohaga kiire abil. Sünnitagu viimane nulldiameetriga nurga a . Igal nurgal, mis a -st vähem, on tangens $< \varepsilon$ -ist. Nurga edaspidisel vähenemisel jääb tema tangens vähemaks sellest ε -ist. Me ütleme: nurga lähenemisel nullile väheneb temale vastav tangens lõpmata.

2) Uurime kõvera $y = 2 : (2 + x^2)$ ordinaadi muutumist abstsissi piiramata kasvamisel. Me näeme joonisest, et ta seda vähemaks muutub, mida suuremaks saab x . Näitame, et see ordinaat teatavast muutumisjärgust vähemaks saab igast kindlast etteantud arvust ja paras-tisel x -i kasvamisel niisuguseks ka jääb.

Tõesti, olgu ε säärane arv, kui väike tahes. Et murd $2 : (2 + x^2)$ oleks $< \varepsilon$ -ist, peab $2 + x^2$ olema $> \frac{2}{\varepsilon}$; see on kindlasti nõnda, kui x^2 on $> \frac{2}{\varepsilon}$, ehk kui $|x| > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$. On x nõnda valitud, siis on $y < \varepsilon$ ja ta jääb niisuguseks x -i edaspidisel kasvamisel. Me ütleme: x -i piiramata kasvamisel väheneb y lõpmata.

3) Konstruime kõvera $y = \frac{\sin x}{x}$. Seda on kõige kergem järgmiselt teha (joon. 7): konstruime graafiliselt sinus-kõvera (v. joon. 4); võtame rea tema abstsisse, jagame nendega nendele vastavad ordinaadid, kanname viimastele jagatised ja ühendame saadud rea täppe kõvera abil. See on nõutud kuju.



Joon. 7.

Me näeme otsekohe, et x -i kasvamisel murd $\sin x : x$ absoluutselt ikka vähemaks ja vähemaks muutub; küllalt suure x -i korral saab ta vähemaks igast etteantud arvust; teiste sõnadega: x -i lõpmatul kasvamisel on $\sin x : x$ lõpmata vähenev suurus. Oma lõpmatul vähenemisel saab $\sin x : x$ lõpmata palju kordi nulliks; kuid niisuguseks ta ei jää: ta muudab ilmotsata oma märki.

Üldiselt defineerime nõnda: muutub suurus niiviisi, et ta teatavast muutumisjärgust vähemaks saab igast kindlast kui väiksest tahes etteantud arvust, ja edasi sellest vähemaks ka jääb, siis nimetame teda lõpmata vähenevaks.

Sõnadega „lõpmata vähenev“ tahame ära tähendada, et pole võimalik nimetada positiivset arvu, mis oleks tōk-

keks uuritava suuruse absoluutväärtuse vähenemisele; ta saab vähemaks igast säärast arvust, olgu viimane kui väike tahes; ta läheneb lõpmata nullile. Seda lõpmatut lähenemist nullile tähistame sümboliga $\rightarrow 0$.

5. Märkused. 1) Kui räägime suuruse lõpmatust vähenemisest, siis huvitab meid ainult tema absoluutne väärtus; märk ei etenda osa. Oma lõpmatul vähenemisel võib suurus kõik aeg positiivseks jääda (teine näide), või negatiivseks, või kui palju kordi tahes märki muuta (kolmas näide).

2) Suuruse lõpmatuks vähenemiseks pole sugugi tarvis, et ta nulliks saaks, et ta väärtuse null omandaks. Esimeses näites saab ta nulliks, teises ei saa ta selleks mitte, kolmandas ta saab kui palju kordi tahes nulliks, ei jää aga selleks mitte.

3) L. v. suurus on, nagu seda juba ta nimi ütleb, muutuv suurus. Igal muutumata suurusel, olgu ta veel nii väike, on ikka oma kindel väärtus.

6. Kaks lauset. 1) Olgu a l. v. suurus, a mingisugune kindel arv; siis on ka aa l. v. suurus.

Viimases korrutises võime $a > 0$ lugeda: oleks ta < 0 , võiksime tema $-$ -märgi a ette võtta.

Olgu ε mõni kindel etteantud arv, kui väike tahes; et a l. v. on, siis saab ja jääb ta teatavast muutumisjärgust absoluutselt $< \frac{\varepsilon}{a}$, sellega saab ja jääb nimetatud momendist $|aa| < \varepsilon$, m. o. t. t.

2) On a ja β l. v. arvud, siis on seda ka $a + \beta$. Tõesti, olgu ε kindel etteantud arv kui väike tahes; teatavast muutumisjärgust alates saavad ja jäävad mõlemad arvud a ja β absoluutselt vähemateks kindlast arvust $\frac{\varepsilon}{2}$, sellega saab $|a| + |\beta| < \varepsilon$. Korral, kus arvudel a ja β on samad märgid, on $|a| + |\beta| = |a + \beta|$, kus vastasmärgid on $|a + \beta| < |a| + |\beta|$; sellega on siis ikka $|a + \beta| < \varepsilon$, m. o. t. t.

Nendest kahest lausest järgneb, et kui a ja β on l. v. suurused, a ja b kindlad arvud, siis on $aa + b\beta$ l. v. suurus.

7. Funktsiooni piiri mõiste.

Näide 1. Me nägime (v. 2.4, 2)¹⁾ näite $f(x) = 2 : (2 + x^2)$ käsitamisel, et r. m. kasvamisel selle funktsiooni väärtused nullile ikka enam ja enam lähenevad; täpsamalt: kui ette anname mingisuguse vahemiku nullist ε -nini, nii kitsa kui tahame, siis on võimalik ikka x -i nii suureks võtta, et temale vastav f -väärtus nimetatud vahemikku langeb ja et x -i edaspidisel kasvamisel f -väärtused sinna ka jäävad. Me ütleme: r. m. lõpmatul kasvamisel lähenevad vastavad f -väärtused nullile lõpmata. Selle juures ei saa ükski nendest väärtustest võrdseks nulliga: arv null piirab nimetatud f -väärtuste kogu; ta on nende piiriks. Seda mõtet me kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

ja loeme: funktsiooni $f(x)$ piiriks x -i lõpmatul kasvamisel on null.

Sümbol \lim on lühendatud ladinakeelne limes, millele vastab eestikeelne sõna piir. Limes-märki ei tohi lahutada temale järgnevast $f(x)$: ilma suuruse nimeta, mille väärtuste kogu piirist räägitakse, pole tal mõtet. Ka on tingimata tarvis temale juurde lisada märkus, kuidas muutub r. m., näiteks meie korral $x \rightarrow \infty$; ainult siis on selge, missuguse f -väärtuste kogu piirist räägitakse.

Näide 2 Olgu meil ring raadiusega r . Kujundame temasse mingisuguse korrapärase hulkküliku, näiteks kolmnurga. Suurendame külgede arvu 2 korda, veel kord 2 korda, veel kord samuti jne. Saame hulknurgad:

$$3, 3 \cdot 2^1, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \dots 3 \cdot 2^m$$

küljega. Tähistame viimaste übermõõdud

$$p(0), p(1), p(2), p(3), \dots p(m):$$

hulknurga übermõõd on külgede arvu funktsioon, ja et see arv määratakse astmenäitajaga 0, 1, 2, 3, ... m , siis on p selle viimase funktsioon.

1) See tähendab: vaata § 2, punkt 4, 2.

Elementaargeomeetrias näidatakse, et need übermõõdud järjest kasvavad; kuid mitte lõpmata: nende piiriks on ringi übermõõt $2\pi r$. Nad saavad viimase lähedusse, nii kitsasse kui iganes tahame, kui aga külgede arv, tähendab vastav astmenäitaja m , on võetud küllalt suur. Edaspidisel külgede arvu ja temaga ka arvu m kasvamisel jäävad nad nimetatud ringi übermõõdu lähedusse: $\lim_{m \rightarrow \infty} p(m) = 2\pi r$.

Kui nimetatud hulknurkade pinnad tähistame

$$u(0), u(1), u(2), \dots u(m),$$

saaksime $\lim_{m \rightarrow \infty} u(m) = \pi r^2$:

nende pindade piiriks on ringi pind.

Arv $2\pi r$ piirab übermõõtude $p(m)$ väärtuste kogu; samuti arv πr^2 pindasid $u(m)$. Mõlematele muutujatele $p(m)$ ja $u(m)$ on nende piirid kättesaamatud, ehk nad küll viimastele lõpmata lähenevad.

Näide 3. Olgu $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (joon. 7). R. m. x -i küllasel kasvamisel saab $f(x)$ nullile nii lähedale, kui iganes tahame, ja jääb niisuguseks ka x -i edaspidisel kasvamisel. Selle juures muudab $f(x)$ alatasa oma märki; ta omab ikka ja ikka jälle väärtuse null, mille juurde ta püüab, ümber seda väärtust kõikudes, temast ikka ja ikka jälle üle minnes. Me nimetame seda arvu null, mille ümber $f(x)$ kõigub, temale lõpmata lähenedes x -i lõpmatul kasvamisel, funktsiooni $f(x)$ piiriks nimetatud tingimusel ja kirjutame $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Näide 4. Olgu $f(x) = \frac{2}{2+x^2}$; oletame, et selles avalduses r. m. x lõpmata väheneb; näitame, et selle juures vastav f -väärtus ilmotsata arvule 1 läheneb, teiste sõnadega, et ta saab selle arvu lähedusse, nii kitsasse kui iganes tahame, kui aga x küllalt väikeseks muutub ja edaspidisel x -i vähenemisel $f(x)$ nimetatud lähedusse ka jääb.

Olgu nimelt ε vabalt etteantud arv, < 1 -st, muidu kui väike tahes, kuid kindel. Et vahe 1 ja $f(x)$ vahel saaks vähemaks ε -ist,

tuleb x nõnda valida, et $\frac{x^2}{2+x^2}$ oleks $< \varepsilon$ -ist,

teisiti, et $x^2(1-\varepsilon)$ oleks $< 2\varepsilon$

ehk x^2 „ $< \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$

ehk, viimati, et $|x|$ „ $< \sqrt{\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}}$.

On x nõnda valitud, siis on meie nõue tõesti rahuldatud, nagu kohe näeme, kui viimasest reast järgemööda eelmised järeldame; me nõue jääb rahuldatuks ka edaspidisel x -i vähenemisel. Me ütleme: x -i lõpmatul vähenemisel läheneb $f(x)$ lõpmata 1-le; arv 1 piirab nende väärtuste kogu, mis $f(x)$ omab, kui x ilmotsata väheneb, ehk veel teisiti: 1 on $f(x)$ piir x -i lõpmatul lähenemisel nullile:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Märkus. Funktsiooni $f(x)$ väärtus algustäpis on 1; sellega on meie korral $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

funktsiooni väärtused püüavad x -i lähenemisel nullile just **sellele** väärtusele, mis $f(x)$ -le tema avaldus selles täpis ette kirjutab:

kui x on null, siis $f(x)$ on 1,

kui x läheneb nullile, siis $f(x)$ läheneb 1-le.

See pole sugugi ikka nõnda. Selleks järgmine

Näide 5. Olgu $f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$

Arvutame funktsiooni väärtuse, kui x on null; saame:

$$f(0) = 0 + 0 + 0 + \dots$$

ehk:

$$f(0) = 0.$$

Leiame piiri, millele läheneb funktsiooni $f(x)$ väärtus, kui x läheneb nullile. Sellel nullile lähenemisel on $x \neq 0$; samuti on $x^2 \neq 0$; me võime ta sellepärast sulgude ette võtta:

$$f(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \dots \right);$$

sulgudes seisab lõpmata kahanev geomeetiline rida; summides saame:

$$f(x) = x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = x^2 \cdot \frac{1+x^2}{1+x^2-1} = 1+x^2,$$

sellepärast siis: x -i nullile lähenemisel on iga väärtuse jaoks, mis ta omab:

$$f(x) = 1+x^2;$$

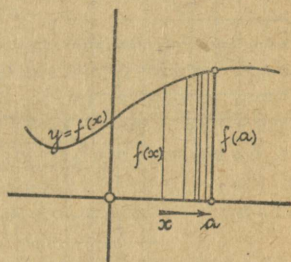
samal ajal kui $x \rightarrow 0$, läheneb ka x^2 nullile, järjelikult $f(x) \rightarrow 1$, ehk teisiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

8. Funktsiooni väärtus ja funktsiooni piir. Funktsiooni väärtus täpis $x = a$ määratakse selle r. m. väärtusega a ; funktsiooni piir, millele ta läheneb, kui x läheneb a -le, määratakse x -i väärtustega a -täpi ümbruses, x -väärtustega, mis a -ga võrrotad.

Ei ole sellepärast sugugi tarvis, et oleks, nagu joonises 8:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$



Joon. 8.

Paremal ja pahemal pool seisvad arvud leitakse igaüks omal teel; nendel teedel pole midagi ühist.

Võib isegi juhtuda, et arvu $f(a)$ ülepea olemaski ei ole, et funktsioonil täpis $x = a$ pole mingit väärtust, et ta on seal määramata. Selle juures võib $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ päris kindla arvuna olemas olla.

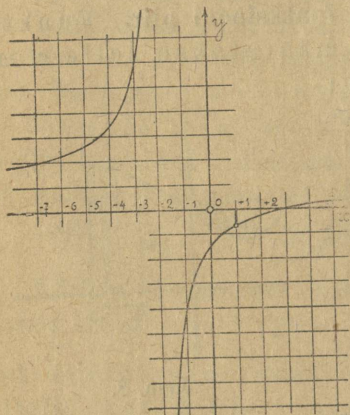
Näide 1. Konstruuda kõver: $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$.

Selle funktsiooni väärtuste tabel on:

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1.5	-1
y	+1.83	+2.00	+2.25	+2.67	+3.50	+6.0	?	-9.00	-4.00
		0	+1	+2	+3	+4	+5		
		-1.50	?	-0.25	+0.00	+0.17	+0.28		

Nagu näeme, määrab avaldus $(x^2 - 4x + 3) : (x^2 + x - 2)$ kindla y väärtuse igas täpis x , peale kahe: $x = -2$ ja $x = +1$.

Täpis $x = -2$ saab nimelt lugeja võrdseks $+15$ -ga, nimetaja aga nulliks. Sümbolil $+15:0$ pole mõtet: pole niisugust arvu, mis korrutamisel nulliga annaks $+15$. Me näeme aga, et kui x paremalt poolt tulles täpile -2 läheneb, siis lugeja meie murrus läheneb $+15$ -le, nimetaja aga saab absoluutselt ikka vähemaks, jäädes negatiivseks, murrud kasvab absoluutselt ikka suuremaks, hoides alal oma märki $-$: kui $x \rightarrow 2$ paremalt poolt tulles, siis $y \rightarrow -\infty$. Samuti näeksime, et kui $x \rightarrow 2$ pahemalt poolt tulles, siis $y \rightarrow +\infty$.



Joon. 9.

Täpis $x = +1$ saab kui lugeja nõnda ka nimetaja nulliks; murrud omandab täpis $x = +1$ kuju $0:0$: see ei määra mingit arvu; tõesti, iga arv annab korrutamisel nulliga jällegi nulli. Täpis $x = +1$ meie funktsioonil y pole väärtust.

Kujutame saadud arvpaarid (x, y) täppidena xy -tasapinnal. Saame kolm rida täppe, mis kolme kaare abil võime ühendada; resultaat on kõver, mis kahes kohas katkeb: täpis $x = -2$, kus üks kõvera haru lõpmata tõuseb, teine lõpmata langeb, ja täpis $x = +1$, milles püstjoon teist ja kolmandat kõvera haru lahutab (joon. 9).

Katkemine täpis $x = +1$ sünnib selle tõttu, et temas y on määramata. Kohase y valiku abil võime teist ja kolmandat kõvera haru üheks katkematuks jooneks ühendada. Me võtame nimelt täpis $x = +1$, milles funktsiooni väärtus ette kirjutamata, selleks viimaseks piiri, millele $f(x)$ läheneb x -i lõpmatul lähenemisel $+1$ -le: olgu täpis $x = +1$

$$y = \lim_{x \rightarrow +1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 1}$$

Kuidas seda piiri leida? Murru väärtuste rea katkemine täpis $x = +1$ tuli sellest, et selles täpis kui lugeja nõnda ka nimetaja nulliks said: täpp $x = +1$ on lugeja ja nimetaja nullkoht. Sellepärast on kui esimene nõnda ka teine nendest jagatav vahega $(x - 1)$. Tõesti:

$$(x^2 - 4x + 3) : (x - 1) = x - 3$$

$$(x^2 + x - 2) : (x - 1) = x + 2.$$

Järjekult võime kirjutada:

$$y = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

Abstsissi x ühele lähenemisel on $x \neq 1$, $x-1 \neq 0$; me võime sellepärast $(x-1)$ -ga murdu lühendada:

$$y = \frac{x-3}{x+2}$$

(Seda operatsiooni pole võimalik teostada, kui $x=1$!) Sellel x -i lähenemisel $+1$ -le, läheneb $x-3$ arvule -2 , $x+2$ arvule $+3$, murd $\frac{x-3}{x+2}$ arvule $-2:3$. Selle arvu võtame puuduvaks y -väärtuseks täpis $x=1$. Täpp $(+1, -\frac{2}{3})$ seob teist ja kolmandat kõvera haru üheks katkematuks jooneks.

Märkus. Meetodi, mille abil me praegu leidsime algebralise murru piiri x -i lähenedes täpile, milles murru väärtus määrata, võib igal säärasel juhtumisel piiri otsimiseks tarvitada. Tehete järjekord on niisugune: meie võrratame kui lugeja nõnda ka nimetaja nulliga, lahendame saadud võrrandid, lahutame leitud juurte abil lugejaja nimetaja teguriteks, lühendame murru ühise teguriga ja läheme piirile.

Mittealgebraliste murdude korral pole see tee käidav; tarvilikud piirid leitakse kunstlikkude võtete abil. Selleks

Näide 2. Kõvera $y = \frac{\sin x}{x}$ joonistamisel tekib meil raskus täpis $x=0$: selles täpis saab kui nimetaja nõnda ka lugeja nulliks; murd esineb kujus $0:0$, millel pole mõtet: sümbol $0:0$ ei määra ühtki arvu; y -väärtus on täpis $x=0$ ette kirjutamata, funktsioonil $\sin x : x$ pole täpis $x=0$ väärtust. Kõver, mille saame, seisab koos kahest harust; ta katkeb täpis $x=0$.

Küll aga on meie funktsioonil, nagu kohe tõestame, piir olemas, kui x läheneb nullile; nimelt on

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

On loomulik, funktsiooni y väärtuseks täpis $x=0$, milles tema määrata, lugeda seda piiri. Siis sünnitavad funktsiooni y

väärtused katkematu rea arve ja saab ta kujuks katkematu kõver.

9. Murru $\sin x : x$ piiri arvutamine tingimusel $x \rightarrow 0$.
Joonistame raadiusega üks ringi; võtame diameetrist OA alates üles ja alla nurga x (joon. 10). Temale vastav kaare pikkus on siis ka x .

Tõmbame sinus- ja tangens-jooned; saame kaks kolmnurka OP_1P_2 ja OT_1T_2 ja sektori OP_1AP_2 . Kolmnurkade pinnad on $\cos x \cdot \sin x$ ja $\tan x$. Et sektori pinda saada, paneme tähele, et tema terve ringi $2x : 2\pi = x : \pi$ osa on; sellepärast on tema pind

$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{x}{\pi} = x.$$

Korraldades kõik kolm pinda suuruse järele, saame

$$\cos x \cdot \sin x < x < \tan x.$$

Kui $x \rightarrow 0$ on $\sin x \neq 0$; jagame ta meie võrratuste liikmetega; saame:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Kui nüüd $x \rightarrow 0$, siis $\cos x \rightarrow 1$, $\frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$; äärmised suurused lähenevad lõpmata ühele, sellele peab siis ka lõpmata lähenema suurus $\frac{\sin x}{x}$, mis nende kahe vahel: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, kui $x \rightarrow 0$;

ehk:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

10. Märkus. Viimast saadust võime kirjutada ka kujus:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{2x} = 1, \text{ teisiti } \lim_{\substack{P_1P_2 \rightarrow 0 \\ P_1P_2}} \frac{\overline{P_1P_2}}{P_1P_2} = 1.$$

Geomeetriliselt väljendub see resultaat järgmiselt: ringi kõõlu suhe temale vastava kaarega läheneb kaare lõpmatul vähenemisel lõpmata ühele. Me oletame,

et sama seadus valitseb vahekorda igasuguse kõvera lõpmata väheneva kaare ja temale vastava kõõlu vahel.

11. Ülesanne. Lugeja näidaku leitud piirilause abil:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ et ka } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

12. Märkus. Käsitatud näidetest on näha, et piiri mõiste meid üle aitab raskustest, mis tekivad funktsioonide graafilisel kujutamisel, seal, kus nende avaldused nendele mingit väärtust ei määra. Pärastpoole me näeme, et tarvitatud mõttekäik on äraarvamata laia ulatusega: tähtsamaid matemaatilise analüüsi ja täpsaloodusteaduse mõisteid pole võimalik defineerida kui teatud funktsioonide väärtusi, küll aga kui piirisid, milledele need väärtused antud tingimustel lähenevad.

13. Üldine funktsiooni piiri definitsioon. Muutuvad $r. m.$ väärtused mingi kindla ettekirjutatud seaduse järele (kasvavad lõpmata, vähenevad lõpmata, lähenevad ilmotsata mõnele arvule a) ja lähenevad selle juures vastavad funktsiooni väärtused kindlale arvule b , nõnda et teatavast muutumisjärgust alates vahe selle arvu ja funktsiooni väärtuse vahel vähemaks saab igast kindlast, ükskõik kui väikesest etteantud arvust, ja niisuguseks ka jääb pärastisel $r. m.$ muutumisel, siis nimetame seda arvu funktsiooni piiriks $r. m.$ öeldud muutumisel. Me kirjutame: $\lim f(x) = b$ märgikesega $x \rightarrow \infty$, või $x \rightarrow 0$, või jälle $x \rightarrow a$.

Märkus. Ka siis, kui $r. m.$ öeldud muutumisel $f(x) \rightarrow \infty$, tarvitame lim-märki ja kirjutame näiteks $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \pm \infty$, olgugi et ∞ pole mingi arv.

Ülesanded.

1. Joonistada kõver $y = \frac{2}{1-x^2}$ vahemikus -4 kuni $+4$ -ni. Näidata, et x -i lõpmatul kasvamisel ordinaadid lõpmata vähenevad. Kuidas peab valima x -i, et ordinaadid tema kasvamisel vähemaks saaksid vabalt etteantud arvust ε ja niisugusteks ka jääksid? Näidata, et x -i

lõpmatul lähenemisel -1 või $+1$ -le y suuremaks saab igast etteantud arvust N . Näidata, et kui $x \rightarrow 0$, siis $y \rightarrow 2$.

2. Tõestada, et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3+x} = 0$, näidates, et kohasel x -i valikul piiri märgi all seisev avaldus vähemaks saab igast etteantud arvust ε ja sääraseks jääb x -i edaspidisel vähenemisel.

3. Kujutada funktsioon $y = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$. Kuidas peab y väärtuse valima täpis $x = -2$, et funktsiooni kuju selle täpi ümbruses esineks katkematu kõverana?

4. Leida $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{1}{2}x}{2x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$, teisendades neid murdusid korrutamise ja jagamise teel nõnda, et oleks võimalik tuntud piirilauseid tarvitada.

5. Määrata $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha)^3 - 1}{\alpha}$, tehes enne piirile minekut kõik ära-tähendatud tehted. Kas on limes-märgi all seisval murrul kindel väärtus olemas r. m. väärtusel $\alpha = 0$?

6. Leida järgmiste murdude piirid

$$\frac{2x-3}{5x+2}, \frac{x^2-4x+3}{2x^2+x+1}, \frac{x^3-3x^2+1}{x^2+5}, \frac{x^3-2x+4}{x^4-3x^3+x^2-1}$$

x -i lõpmatul kasvamisel, jagades enne piirile minekut lugejat ja nimetajat x -ga kohaselt valitud astmes.

7. Murdudel $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ ja $\frac{\sqrt{1-3x+x^2}-1}{x}$ pole väärtust täpis $x=0$. Leida nende piirid x -i nullile lähenemisel. Juhis: enne piirile minekut vabaneda irratsionaalsusest lugejas.

8. On antud kõverad: $y^2 - x^2 = 1$ ja $y^2 - 4x^2 - 4x + 5 = 0$ ja sirged:

$$y = x \quad \text{ja} \quad y = 2x + 1.$$

Näidata, et x -i lõpmatul kasvamisel vahe kõvera ja vastava sirge ordinaadi vahel lõpmata väheneb, teiste sõnadega, et kõver lõpmata läheneb sirgele. Juhis: kirjutada nimetatud vahe murruna ja vabaneda irratsionaalsusest lugejas.

3. Funktsiooni pidevuse mõiste.

1. Funktsiooni pidevuse ehk katkematus mõiste on üks tähtsamatest matemaatikas; tema suur tähtsus ulatab aga üle selle: oletus, et loodusnähtuste käik on pidev, on üks meie ilmavaate nurgakividest.

Selle mõiste seletamiseks olgu järgmine rida näiteid.

Näide 1. Vaatleme palkide parvetamist jõel ja kirjutame endale üles, alates teatavast ajamomendist, meist mööda ujunud palkide arvu, tehes seda iga kord, kui vähemalt üks palk meist mööda ujub. Saame tabeli, millel näiteks järgmine kuju:

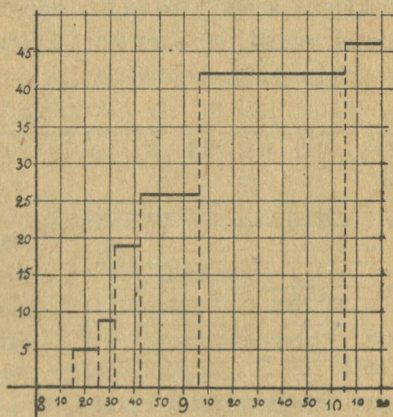
1921, mai 10-es, kell	8^{00}	min. hommikul	0	palki
"	8^{15}	"	5	"
"	8^{25}	"	9	"
"	8^{32}	"	19	"
"	8^{42}	"	26	"
"	9^{06}	"	42	"
"	10^{05}	"	46	" jne.

Igale ajamomendile t vastab kindel palkide arv p , mis selle ajani meist mööda ujunud: palkide arv on aja funktsioon: $p = p(t)$.

Kujutame saadud arvpaarid, aeg t , palkide arv p , täppidena tp -tasapinnas (joon. 11). Täpprida, mille nõnda saame, kujutab meile tabelis märgitud aegadeni meist mööda ujunud palkide arvu muutumist.

Täiendame joonist nõnda, et temast otsekohe näha oleks palkide arv, mis vastab igale teisele, ka mitte tabelis olevale, ajale vaatluse ajavahemikus. Seda

on kerge teha: me protokollisime iga üht meist mööda ujuvat palki ja selle sündmuse aega; sellest järgneb, et iga ajani vaatluse ajavahemikus nii palju palke meist mööda on ujunud, kui viimsel protokollimisel märgitud. Näiteks on kella $8\frac{1}{2}$ -ni palke mööda ujunud 9, kella 10-ni—42 jne.



Joon. 11.

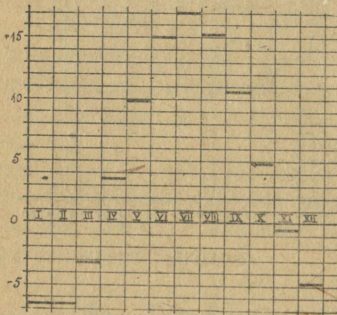
Seletatud viisil täiendatud joonisest näeme, et täpprida, mis kujutab funktsiooni $p(t)$, laguneb osadeks, milledest igaüks asub rõhtsirgel. $p(t)$ -funktsiooni graafiliseks kujuks on katkev joon, mis koos seisab rõhtsatest sirgjoonelistest lõikudest.

Igas ajavahemikus kahe protokollitud ajamomendi vahel on funktsioonil $p(t)$ üks ja sama väärtus; üleminekul ühest niisugusest ajavahemikust järgnevasse muutub funktsiooni väärtus järsku: protokollimise momendil katkeb funktsiooni väärtuste rida: funktsioon teeb kindla suurusega hüppe. Need hüpped on

aegadel: 8^{15} 8^{45} 8^{32} 8^{42} 9^{06}
järgmised: 5 4 10 7 16 jne.

Näide 2. Meteoroloogilised vaatlused, mis viiekümne aasta jooksul a. 1866 kuni 1915 Tartu ülikooli ilmajaamas tehtud, annavad järgmise rea keskmisi õhusoosjusi Tartu kohta:

kuu	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
temperatuur	-6.6	-6.6	-3.2	+3.4	+9.9	+15.0	+17.0	+15.2	+10.6	+4.9	-0.6	-4.9



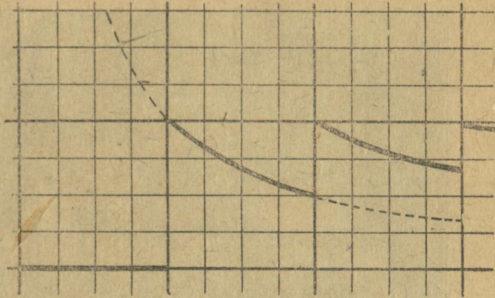
Joon. 12.

Kujutame (joon. 12) keskmise soojuse käiku kuudega graafiliselt. Saame katkeva joone, mis koos seisab üksikutest rõhtsatest lõikudest. Keskmiste soojuse väärtuste katkemine sünnib igal üleminekul ühe kuu juurest teisele, välja arvatud esimene. Keskmiste soojuste muutumine sünnib hüpete viisi. Need on järgemööda $+3.4$, $+6.6$, $+6.5$, jne.

Näide 3. Tähendagu $E(x)$ x -i täisarvulist osa, nõnda et näiteks $E(+\frac{2}{3}) = 0$, $E(+2.7) = +2$, $E(-3\frac{9}{10}) = -3$ jne.

Kujutame graafiliselt funktsiooni $y = \frac{E(x)}{x}$ (joon. 13).

Seda on võimalik kergesti järgmiselt teha: $E(x)$ on vahemikkudes nullist üheni 0, ühest kaheni 1, kahest kolmeni 2 jne.; kujutame, nagu harilikult, funktsiooni $1 : x$ ja korrutame saadud kõvera ordinaate nimetatud vahemikkudes vastavalt arvudega 0, 1, 2 jne. Saame funktsiooni $y = E(x) : x$ kujuna katkeva kõvera. Funktsiooni y väärtuste rida katkeb igal täisarvulisel x -i väärtusel; kui x niisugusest üle läheb, teeb funktsioon y hüppe, mille suurus on 1.

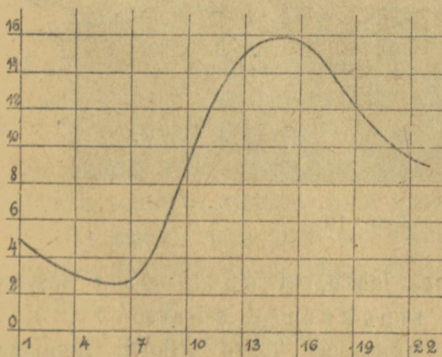


Joon. 13.

Näide 4. Uurime õhu soojuse muutumist ajaga. Me vaatleme selleks soojusmõõtja näitamisi kindlate ajavahemikkude, ütleme iga 3 tunni tagant, ja saame vaatlusprotokollina tabeli, millel näiteks järgmine kuju:

1920, september 25,

aeg t , kell . . .	1	4	7	10	13	16	19	22
temperatuur θ .	+4.8	+3.1	+2.7	+9.0	+15.0	+15.7	+12.3	+9.6



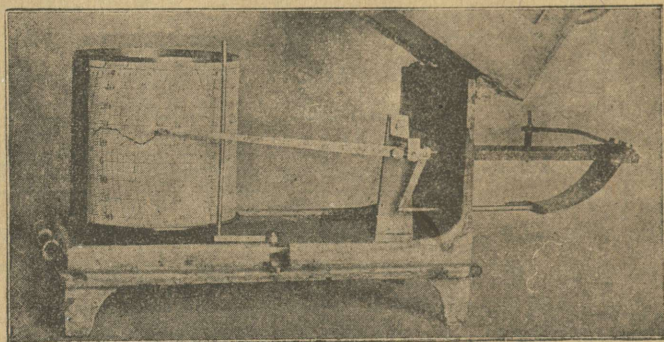
Joon. 14.

Kujutame neid arvpaare: t —aeg, θ —õhu soojus täppidena $t\theta$ -tasapinnas.

Kuidas õhu soojuse käigu kuju saada?

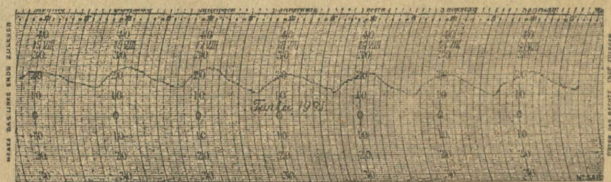
Leitud rida täppe annab meile ainult ligikaudse pildi sellest nähtusest: ta jätab meile ütlemata, mis-

sugused olid õhu soojused vaatlusaegade vahel. Et ka viimased otsekohe näha oleksid, ühendame leitud täpid kõvera abil (joon. 14). Selle kõvera paneme leitud täppidest katkematult läbi, põhjenedes usul, et õhu soojus kat-



Joon. 15.

kematult, hüpeteta muutub. Seda usku kindlustavad iseäranis soojuse käigu pildid, mis me saame mehaanilisel soojuse registrimisel: termograafid, mis seda vahetpidamata automaatselt toimetavad, annavad selle kujudena pidevad kõverad. Need termogrammid lähevad meie



Joon. 16.

$t\theta$ -graafikutest ainult selles lahku, et püstjoonte süsteemi asemel vähese kõverusega ringkaared seisavad.

Joonised 15 ja 16 kujutavad Tartu ülikooli ilmajaama termograafi ja üht tema termogrammidest,

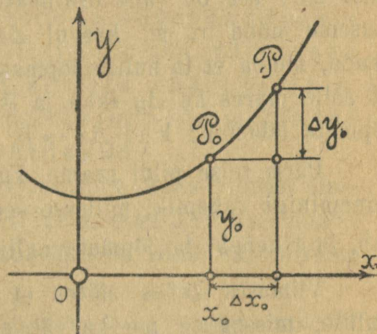
Näide 5. Me uurisime kord (v. 1·10) funktsiooni $y = (3x + 2) : (x^2 + 1)$; me arvutasime selleks xy -tabelikese, kujutasime iga temas esinevat väärtuspaari xy täpina ja ühendasime kõik niisugused pideva kõvera abil (joon. 3). Pidevaid kõveraid me tarvitasime ka funktsioonide $\sin x$, $\tan x$ kujutamisel. Me põhjenesime selle juures usul, et need funktsioonid rippumata muutujaga katkematult muutuvad.

Milles seisab funktsiooni muutumise iseärasus, mida pidevuseks nimetatakse? Kuidas seda katkematuse omadust täpsalt defiinida? Me teeme seda

2. Funktsiooni kasvu mõiste abil.

Olgu meil mingisugune funktsioon $y = f(x)$ ja tema graafiline kuju. Joon. 17 on juhuse kujutatud, kus viimane esineb katkematu kõverana. Võtame

mõne kindla x -i väärtuse; nimetame teda x_0 ; vastaku temale funktsiooni väärtus y_0 . Lisame võetud x_0 -le mõne kasvu; olgu selle tähisteks Δx_0 ; uus r. m. väärtus on $x_0 + \Delta x_0$; sellele uuele x -i väärtusele vastab uus funktsiooni väärtus. Vahe tema ja endise y -väärtuse vahel on funktsiooni kasv, mis vastab r. m.



Joon. 17.

kasvule Δx_0 . Tähistame selle funktsiooni kasvu Δy_0 .

Märkus. Sümbolites Δx_0 , Δy_0 ei tohi tähisteid Δ ja x_0 ehk Δ ja y_0 lahutada: Δ seisab sõna asemel: kasv. Ilma muutuja nimeta, mille oma see kasv on, pole tähisel Δ sisu; samuti nagu pole sisu tähisel \log ilma arvu nimetamata, millest logaritmi tuleb võtta, ehk tähisel \tan ilma kaart nimetamata.

Δ on kreeka alfabeedi täht; tema nimeks on delta; sellepärast loeme sümbolit Δx : delta x .

3. Funktsiooni pidevuse definitsioon. Pöörame veel kord meie näidete juurde tagasi. Olgu t näites 1 mingisugune aeg protokollitud aegade vahel; olgu Δt ajavahemik, millesse t kuulub; me näeme, et palkide arvu kasv Δp ajavahemikus Δt on null ja jääb ka nulliks, kui väikese me Δt ka võtame. On aga t üks protokollitud aegadest ja Δt ajavahemik, millesse see moment kuulub, siis on Δp kindel nullist erinev arv; täpis $t = 8^{\cdot 32}$ näiteks võrdub ta 10-ga. Kui väikese me Δt ka võtame, kuid nõnda, et moment $t = 8^{\cdot 32}$ temasse kuulub, ikka on $\Delta p = 10$. Ka siis tähendab, kui $\Delta t \rightarrow 0$, jääb Δp võrdseks 10-ga.

Olgu näites 3 x mõni mitte täisarv; olgu Δx vahemik, millesse täpp x kuulub, ja vastaku temale funktsiooni $y = E(x): x$ kasv Δy ; see on vahe ordinaatide vahel täppides x ja $x + \Delta x$. Laseme nüüd r. m. kasvul Δx ikka vähemaks ja vähemaks saada, nõnda et ta nullile lõpmata läheneks; $\Delta x \rightarrow 0$. Me näeme, et selle juures ka Δy ikka ja ikka vähemaks saab ja nullile ka lõpmata läheneb: kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis ka $\Delta y \rightarrow 0$.

Päris teise pildi saame, kui x on täisarv. On Δx nagu enneminigi vahemik, millesse see nüüd täisarvuline x kuulub, ja läheneb Δx lõpmata nullile, siis läheneb Δy arvule $\frac{1}{x}$.

Viimases kahes näites (4 ja 5) läheneb funktsiooni kasv nullile, missuguse me ka võtame r. m. väärtuse, kui aga selle muutuja kasv läheneb nullile.

Need näited viivad meid üldisele funktsiooni pidevuse definitsioonile. Olgu $y = f(x)$ x -i funktsioon; olgu x mingisugune r. m. väärtus, ja Δx mõni vahemik, millesse see väärtus kuulub; olgu Δy funktsiooni kasv, mis vastab r. m. kasvule Δx . Kui kasvu Δx nullile lähenemisel ka Δy nullile läheneb, on funktsioon y pidev; läheneb Δy mõnele teisele väärtusele — on y katkev.

Märkused. 1) Vahemiku Δx alg- ja lõpptäpid võivad selle pikkuse muutumisel kokku langeda iga täpiga x -i ümbruses; ka viimase täpi x enesega.

2) Et igal vahemiku Δx muutumise momendil oleks võimalik rääkida kindlast funktsiooni kasvust Δy , on tarvis, et igas täpis x -i ümbruses ja ka selles eneses funktsioonil oleks kindel, sellega lõplik väärtus.

Näidetes 1, 2, 3 pole katkemiskohtades funktsioonidele kindlat väärtust määratud.

4. Pidevate funktsioonide tähtsam omadus. Langegu vahemiku $\Delta_1 x$ lõpp kokku täpiga x . Pidevuse tõttu peab ühiselt avaldusega $\Delta_1 x \rightarrow 0$ olema $[f(x) - f(x - \Delta_1 x)] \rightarrow 0$, teisiti:

$$\lim_{\Delta_1 x \rightarrow 0} f(x - \Delta_1 x) = f(x)$$

Samuti leiaksime, kui vahemik $\Delta_2 x$ algaks täpiga x , et pidevuse korral

$$\lim_{\Delta_2 x \rightarrow 0} f(x + \Delta_2 x) = f(x).$$

Sellepärast: pideva funktsiooni väärtus täpis x võrdub piiriga, millele lähenevad tema väärtused $r. m.$ lõpmatul lähenemisel sellele väärtusele x .

Ümberpöörduvalt järgneks, et funktsioonid, millel on see tähtis omadus, on pidevad.

Tõesti, oletuse põhjal me kirjutaksime kaks viimast lim-avaldust ja leiaksime lahutamisel, et funktsiooni kasv vahemikus $\Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x$, millesse x kuulub, ühiselt selle vahemikuga nullile lõpmata läheneb.

Siit järgneb, et pidevad funktsioonid on ainsad, millel on nimetatud omadus.

5. Funktsiooni pidevuse tõestamise viis. Viimase lause põhjal on funktsiooni pidevuse tõestamiseks ainult tarvis näidata, et on täidetud tingimus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

või, mis seesama, et ühiselt tingimusega $\Delta x \rightarrow 0$ ka vahe

$$[f(x + \Delta x) - f(x)] \rightarrow 0,$$

ükspuhas mis sihis sünnib kasvu Δx lähenemine nullile.

Näited. 1) $y = mx + b$. Olgu x see $r. m.$ väärtus, mille ümbruses me funktsiooni y uurime. Funktsiooni kasv vahemikus Δx on

$$\Delta y = m \cdot \Delta x.$$

Kuidas ka r. m. kasv Δx läheneb nullile, ikka läheneb nullile ühiselt temaga ka funktsiooni kasv Δy .

Lineaarfunktsioon on pidev.

2) $y = ax^2 + bx + c$. Siin on

$$\Delta y = (2ax + b) \cdot \Delta x + a \cdot (\Delta x)^2;$$

kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis sünnib seesama ka avaldusega $(\Delta x)^2$, iga liidetava ja sellepärast ka nende summaga Δy (v. 2:6).

Ruutfunktsioon on pidev.

3) $y = \sin x$. Selle funktsiooni kasv vahemikus Δx on

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x \\ &= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}. \end{aligned}$$

Kui nüüd $\Delta x \rightarrow 0$, siis ka $\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$, $\sin \frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$, $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ jääb, nagu ikka absoluutselt ≤ 1 , sellepärast (v. 2:6)

$$\Delta y \rightarrow 0.$$

$\sin x$ on pidev funktsioon.

Märkus. Matemaatiline analüüs töötab erandita üldse pidevate funktsioonidega.

6. Loodusnähtuste käigu pidevus. Mõttekäiku, mille abil me nii kergesti suutsime tõestada nende funktsioonide pidevust, mis algebra-
liste või trigonomeetriliste avaldustena antud, on võimatu tarvitada loodusenähtuste käigu uurimisel. R. m. vahed (näiteks ajavahed, kaugusvahed, jõudude vahed jne.), mis me möödame, on lõplikud vahed. Me ei suuda neid teha vähemateks igast etteantud arvust: meie meelte piiratud lahutamisvõime ja mõõtmisriistade tundlikkus seab rajad, milledest me üle ei saa. R. m. kasvude nullile lähenemist, mida me nii kergesti mõttes teostame, on meil võimatu looduses tähele panna. Küll kujutavad igasugused mehaanilised registraatorid nähtuste käiku pidevate kõveratena; kuid see pidevus võib näiv olla: võib olla, et suuruste muutumine, mis määrab uuritava nähtuse käiku, siiski hüpetes sünnib, ainult nii väikeses, et me ei suuda neid oma meelte ja aparaatidega ära tunda.

Terve uuema aja loodusteadus põhjenes usul, et looduses ei sünni hüppeid. See usk võimaldas matemaatilise analüüsi tarvitamist loodusenähtuste uurimise võimsama tööriistana ja sai selle tõttu tähtsamaks teguriks eksaktse loodusteaduse arenemises. Mate-

maatilise analüüsi funktsioonide abil ei saanud kirjeldada ainult üht liiki sündmusi: neid, mida valitses jagamata indiviiduumi mõiste: inimene, loom, taim, pisielukas jne. Nende arv võib ainult ühe, kahe, kolme . . . , ikka täisarvulise väärtuse võrra muutuda; nende arvu muutumine sünnib katkevalt.

Suur kreeka mõtleja Demokritos oletas, et kõike sündimist maailmas valitseb olluse algkuju aatom (= jagamatu); kõik nähtused on nende aatomite keerulise mängu resultaat. Füüsikalised ja keemilised uurimised viimasel aastasajal tegid selle hüpoteesi tõenäoseks, viimase 20 aasta uurimised tegid ta tõeks. Pidevus, mis meile loodusnähtuste käigus silma torkab, on ainult näiv: gaasi rõhumine, mis pidevalt näib muutuvat, on ettekujutamata suure arvu üksikute tõugete resultaat, mis gaasi piiravad seinad lendavatelt gaasi rakukestelt saavad, radioaktiivsete olluste lagunemine on peadpööritava suure arvu elektrirakukeste — elektroonide katkev kadumine aatomitest, isegi valguse kiirgamine näib katkev protsess olevat.

Sündimine, mis meie piiratud tundlikkusega meeltele pidevana paistab, on tõepoolest pööraselt suure arvu jagamata elementaar-mõjude resultaat.

Ilmavaate ajajärk, mis loodusenähtuste pidevuse usu peale rajatud, näib lõpu poole jõudvat, andes maad uuele, praegu nii võimsalt kasvavale teadusele ja ilmavaatele, mis oletuse peale rajatud: kõik sündimine on katkev, loodusenähtuste pidevus on ainult näiv.

Ülesanded.

1. Kujutada nende inimeste arvu käik ajaga, mis teatavast ajamomendist alates vaateleja elukoha eest mööda lähevad.

2. Kujutada funktsioon: $y = \frac{1}{2}x \cdot E(x)$, kus $E(x)$ on kõige suurem täisarv, mis peitub arvus x .

3. Määrata funktsiooni $y = x^2 - 5x + 6$ kasv vahemikus $0 \cdot 4$, mis järgneb väärtusele $x = +2 \cdot 0$.

4. Leida funktsiooni $\frac{2}{3-x}$ kasv, mis vastab väärtusele $x = -1$ järgnevale r . m. kasvule $1 \cdot 5$.

5. Tõestada järgmiste funktsioonide pidevus:

$$y = \frac{1}{2}x + 3, y = 3 - 4x - x^2, y = \frac{1}{x},$$

$$y = \frac{3x - 4}{5x + 6}, y = \cos x.$$

6. Mahu muutumise uurimised olluse soenemisel on annud järgmised tabelid (esimeses reas on temperatuurid t , teises mahud v , arvates mahu mõõduks olluse mahu teataval temperatuuril):

stea-riin	$t = 0^{\circ}$	10°	25°	40°	49°	50°	55°	60°	70°	80°	85°
	$v = 1.00$	1.01	1.02	1.03	1.04	1.01	1.03	1.13	1.14	1.15	1.16
vaha	$t = 0^{\circ}$	20°	30°	45°	50°	60°	62°	70°	80°	90°	
	$v = 1.00$	1.01	1.02	1.05	1.07	1.13	1.16	1.17	1.18	1.19	
bis-mut	$t = 154^{\circ}$	186°	200°	232°	242	260°	263°	264°	280°	304°	340°
	$v = 0.90$	0.92	0.93	0.96	0.97	0.99	1.00	0.96	0.97	0.98	1.00
sea-tina	$t = 250^{\circ}$	275°	300°	324°	325°	350°	400°				
	$v = 0.990$	0.992	0.996	0.999	1.034	1.037	1.045				

Joonistada mahu muutumise graafikud soojuse muutumisel. Mõõdud valida otstarbekohaselt. Hüpped steariini, bismuti ja seatina korral ja nurk joonises vaha korral vastavad sulamistemperatuuridele.

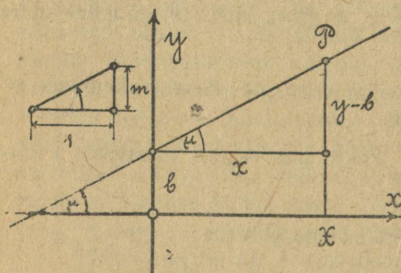
4. Sirge tõusmise uurimine.

Eelmärkus. Järgnev pealkirjas nimetatud uurimine on ettevalmistuseks põhjaneva ühtluse mõiste seletamiseks.

1. Sirge ja lineaarfunktsioon. Analüütilises geometrias näidatakse¹⁾, et iga esimeseastmelise funktsiooni

$$y = mx + b$$

graafiliseks kujuks on sirge ja ümberpöörduvalt — iga sirge analüütiliseks edustajaks on lineaarfunktsioon. Selle juures



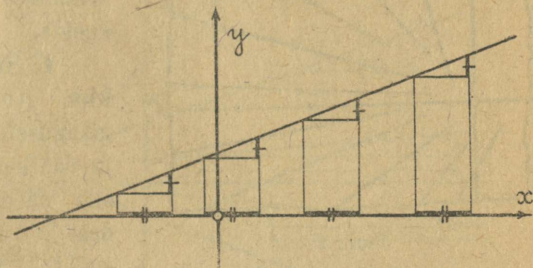
Joon. 18.

tähendab kordaja m tangensi nurgast μ , mis sirge sünnitab $+x$ -sihiga, b -lõiku, mis ta sünnitab y -teljel (joon. 18).

Erijuhustel, kus $x =$ konst ehk $y =$ konst, saame sirged, mis rööbikud y - ja x -telgedega.

1) T. a. g. p. § 7.

2. Sirge tõusmise ühtlus. Olgu antud mõni sirge (joon. 19). Võtame abstsisssteljel rea mingisuguseid võrdseid vahemikke; tõmbame iga niisuguse vahemiku alguses ja lõpus sirge ordinaadi ja esimese ordinaadi lõpust rõhtsirge. Saame rea täisnurkseid kolmnurki. Nad on üksteisega võrdsed; järjekult on nendel võrdsed püstkaatetid. Viimased on sirge ordinaadi kasvud võetud abstsissvahemikkudes. Sellepärast: võrdsetes, kuid



Joon. 19.

abstsissvahemikkudes tahes kasvab sirge ordinaat võrdsete osade võrra. Teiste sõnadega: sirge tõuseb ühtlaselt.

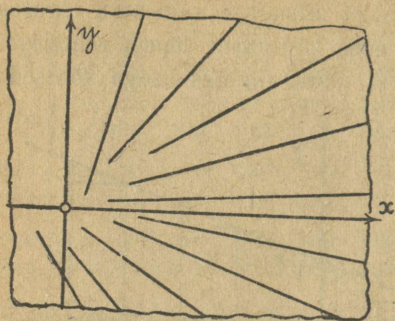
Märkus. Sünnitab sirge $+x$ -teljega nüri nurga, siis vastavad positiivselt sihitud abstsisskasvudele negatiivsed ordinaatkasvud: sirge langeb. Seda langemist me käsitame kui negatiivset tõusmist.

3. Sirge abstsiss- ja ordinaatkasvude võrdelisus. Sellest, et võrdsetele abstsisskasvudele võrdsed sirge ordinaatkasvud vastavad, järgneb, et kui mõne abstsisskasvu ja temale vastava ordinaatkasvu võtame, siis vastab kahekordsele abstsisskasvule kahekordne ordinaatkasv, kolmekordsele — kolmekordne, poolele — pool jne. Sirge ordinaadi kasvud mingisugustes abstsissvahemikkudes on võrdelised nende viimastega.

Olgu $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, ... rida täppe sirgel; siis on, nagu leidsime:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5} = \dots$$

Lühemalt: suhe sirge ordinaadi kasvust vastava r. m. kasvuga on sirget mõõda muutumata:



Joon. 20.

sümboolselt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konst.}$

Lugeja tõlgib leitud sirge omadused kergesti algebra keelde.

4. Sirge tõusmise järskus. Kui võtame rea mingisuguseid sirgeid (joon. 20) ja vaatleme nende jooksu, siis näeme, et ühed nendest tõusevad aeglaselt, teised järsku.

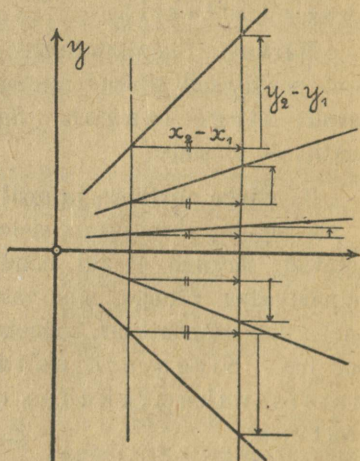
Kuidas ja millega mõõta sirge tõusmise järskust?

Võtame mõne abstsissvahemiku $x_2 - x_1$; olgu temale vastav ordinaadi kasv $y_2 - y_1$ (joon. 21). Me näeme, et ühe ja sama abstsissvahemiku korral tõuseb sirge seda järsemalt, mida suurem on vahe $y_2 - y_1$; ühe ja sama ordinaatvahe $y_2 - y_1$ korral (joon. 22) tõuseb sirge seda järsemalt, mida vähem on vastav abstsissvahe $x_2 - x_1$.

On loomulik lugeda sirge tõusmise järskust võrdeliseks ordinaatvahega $y_2 - y_1$ ja pöördvõrdeliseks abstsissvahega $x_2 - x_1$.

Valime sirge tõusmise järskuse mõõdu.

Me võtame selleks niisuguse sirge tõusmise järskuse, mille korral sirge tõuseb abstsiss-



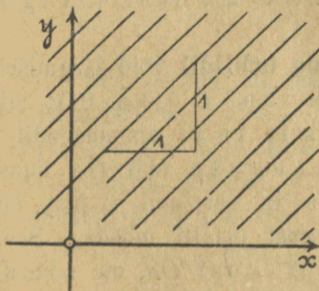
Joon. 21.

vahemikus üks ühe pikkusmõõdu võrra. Säärane sirge sünnitab $+x$ -teljega nurga 45° . Joon. 23 kujutab sirgeid, millede tõusmise järskus on võetud selle suuruse mõõduks.

Õeldust järgneb, et kui sirge ordinaat kasvab abs-tsiisvahemikus 1 ühe võrra, siis on tema tõusmise järskus 1 selle suuruse mõõtu; kasvab samas vahemikus ordinaat $y_2 - y_1$ võrra, siis on sirge tõusmise järskus $y_2 - y_1$ nimetatud mõõtu; ja viimati, kasvab vahemikus $x_2 - x_1$ sirge ordinaat $y_2 - y_1$ võrra, siis on sirge tõusmise järskus

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, lühemalt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ selle suuruse mõõtu.

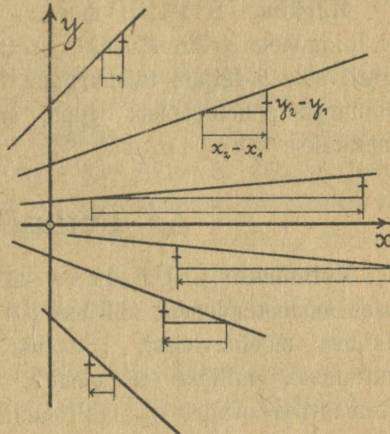
Nagu nägime, ei olene see suhe kohast sirgel — tema tõusmise järskus on kõigis tema kohtades üks ja sama.



Joon. 23.

dab tähtsamat sirge jooksu omadust, tõusmise järskust.

Sirge tõusu m abil on kerge tema sihti leida. Joonistame



Joon. 22.

Geomeetriliselt on see „kasvude suhe“ kujutatud tangensina nurgast, mis sirge sünnitab positiivse x -teljega.

5. Sirge tõus. Sõnade asemel „tõusmise järskus“ me tarvitame lühemat, nimelt „tõus“. Tõus on arv $+1$, $+2.5$, $-\frac{3}{4}$ jne., mis mõõ-

(joon. 18) täisnurkse kolmnurga, mille üks kaatet on 1 rööbiti x -teljega, teine — on m rööbiti y -teljega. Selle kolmnurga hüpotenuus määrab sirge sihi. Ümberpöördult oleks kerge, teades sirge sihti, leida graafiliselt tema tõusu.

Märkus. Sihtkolmnurk, mille me joonistasime sirge sihi leidmiseks tema tõusust, asetatakse harilikult rõhtkaatetiga negatiivsele x -teljele täisnurgaga koordinaatide algusesse. Selle kolmnurga pahempoolset tippu, mille kaugus algusest on -1 , nimetatakse pooluseks.

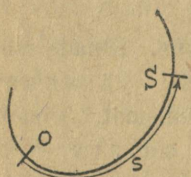
5. Ühtluse mõiste.

Eelmärkus. Ühtluse mõiste on üks tähtsamatest täpsas loodusteaduses: nähtuse ühtlane käik on kõige lihtsam kõikidest mõeldavatest. Suuruse ühtlast muutumist teise muutumisel, millest ta oleneb, leiame ülisagedasti kõikides matemaatika osades ja igal sammul igapäevase elu nähtustes. Üks nendest on ühtlane liikumine.

1. Definiitsioonid. Liikuva täpi orbiidiks nimetatakse seda joont (sirget, ringi, parabooli jne.), millel sünnib täpi liikumine.

Liikumise seaduseks nimetatakse säärast valemit, mis määrab täpi koha tema orbiidil igal ajamomendil.

2. Täpi koha määramine tema orbiidil võib järgmiselt sündida. Valime orbiidil mõne kindla täpi O (joon. 24); siis on liikuva täpi koht igal ajamomendil t määratud tema kauguse abil OS täpist O kohani S , kus ta sel ajal t just on, arvates seda kaugust orbiiti mööda. Seda kaugust, kaare pikkust OS , me nimetame täpi „teeks“ ajal t ja tähistame s^1). Tee on arv, orbiit on joon.



Joon. 24.

1) s — spatium = vaheruum, siin kauguse mõttes; t — tempus = aeg.

On täpi teed aegadel t_1 ja t_2 s_1 ja s_2 , siis on täpp ajavahemikus $t_2 - t_1$ käinud teevahe $s_2 - s_1$.

3. Ühtlase liikumise definitsioon. Kui täpp võrdsetes, kuid muidu mis ajavahemikkudes tahes käib võrdsed teevahed, siis nimetatakse tema liikumist ühtlaseks.

Märkus. Liikumise ühtluseks on tarvis, et täpp igasugustes võrdsetes ajavahemikkudes käiks võrdsed teevahed.

4. Ühtlase liikumise seadus. Käib täpp võrdsetes ajavahemikkudes võrdsed teeosad, siis käib ta kahekordses ajavahemikus kahekordse, kolmekordses kolmekordse teosa võrreldes sellega, mis ta ühes ajavahemikus käinud: teeosad, mis ühtlases liikumises teatavates ajavahemikkudes käidud, on võrdelised, vastavate ajavahemikkudega.

Olgu t_1 ja t_2 kaks kindlat ajamomenti ja t mis aeg tahes; olgu täpi teed, mis nendele aegadele vastavad, s_1 , s_2 ja s . Ajavahemikkudes

on käidud teeosad

$$t - t_1 \text{ ja } t_2 - t_1$$

$$s - s_1 \text{ ja } s_2 - s_1.$$

Need neli vahet on, nagu öeldud, võrdelised; sellepärast:

$$\frac{s - s_1}{t - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

See ts -side on maksev momendil t ; et viimane oli mis ajamoment tahes, siis on ta maksev igal ajal: saadud ts -side on ü. l. seadus. Aeg t ja tee s esinevad temas esimeses astmes: ü. l. seadus on lineaarne. Teiste sõnadega: ühtlases liikumises on täpi tee lineaarfunktsioon ajast:

$$s = s_1 + \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} (t - t_1).$$

Ü. l. ts -diagramm on sirge joon.

5. Ühtlase liikumise kiiruse mõiste on üks meie algmõistetest; nagu teisigi niisuguseid, näiteks mõisteid sirge,

täpp, pikkus, aeg, ruum jne., ei suuda me teda defiinida. Küll aga võime kindlaks määrata, kuidas seda suurust mõõta.

Kui ühes ja samas ajavahemikus vaatleme kaht ühtlast liikumist, siis loeme neist selle kiiremaks, milles pikem teosa käidud. Kui kahes ühtlases liikumises ühed ja samad teeosad käidud, siis loeme nendest liikumistest selle kiiremaks, milles see teosa vähemas ajavahemikus käidud.

On loomulik lugeda kiirust ühtlases liikumises võrdeliseks teeosaga ja pöördvõrdeliseks ajavahemikuga, milles see teosa käidud.

Ü. l. kiirusmõõduks võime meie igat ü. l. kiirust võtta. Võtame selleks ü. l. kiirusmõõduks niisuguse ü. l. kiiruse, mille korral ajavahe 1 sec jooksul teosa 1 cm ära käiakse. Selle kiirusmõõdu nimeks on 1 cm/sec.

Tähist cm/sec ei tohi kui murdu vaadata; selle tähise osasid pole võimalik lahutada, nagu iga teiseigi nime osasid. Nimetatud sümbol on valitud kiirusmõõdu tähistamiseks sellepärast, et temast otsekohe näha on, kuidas on defiinitud see kiirusmõõt pikkus- ja aegmõõtude abil.

Nõnda siis: kui ühtlases liikumises

teosa 1 cm on käidud aja 1 sec jooksul, siis on kiirus 1 cm/sec

$$s_2 - s_1 \quad " \quad - \quad 1 \quad " \quad - \quad s_2 - s_1 \quad "$$

$$s_2 - s_1 \quad " \quad - \quad t_2 - t_1 \quad " \quad - \quad \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad "$$

Et ü. l. korral käidud teeosad suhtuvad kui nendele vastavad ajavahemikud:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s_4 - s_3}{t_4 - t_3} = \dots "$$

siis on seesuguse liikumise vältusel kasvude suhe:

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ kõik aeg üks ja seesama. See suhe mõõdab ü. l.

kiirust. Ta kujutab teosa, mis ü-s l-s ühe sec vältusel käidud.

Ta ei ole tee; kiirus on oma liiki suurus.

6. Märkus. Me näeme, et kiirus ühtlases liikumises leitakse pikkuste ja aegade mõõtmisel. Seesugusele

kiiruse kaudsele mõõtmisele sunnib meid asjaolu, et meil võimalus puudub otse kaht kiirust võrrelda, eriti võimalus puudub kiiruse mõõdu etalooni valmistada ja kuigi ta meil valmis oleks — alal hoida. Sama lugu kordub paljude teiste suurustega.

7. Uus ü. l. seaduse vorm. Me saime ü. l. seaduse

kujus:
$$s = s_1 + \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} (t - t_1).$$

Tähistame kiiruse, mis selles valemis esineb, tähega c^1); saame:

$$s = s_1 + c(t - t_1).$$

Olgu aja algusel täpp kohal, mille kaugus teede algusest on s_0 ; siis on

$$s_0 = s_1 + c(0 - t_1).$$

Lahutades, saame ü. l. seaduse kujus

$$s = s_0 + ct,$$

milles teda harilikult kirjutatakse.

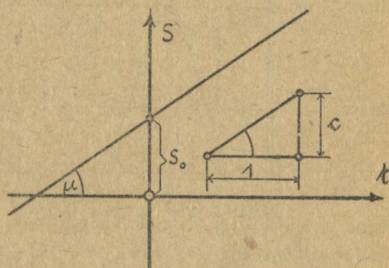
Muidugi on teda võimalik otse saada: ajal $t = 0$ olgu täpi tee s_0 ; liigub ta ühtlaselt kiirusega c , siis käib ta t sec jooksul tee $c \cdot t$ ära; t sec lõpuks on tema tee $s = s_0 + ct$. Et t oli vabalt võetud aeg, on viimane võrdus maksev iga aja kohta; sellega on ta nõutud liikumise seadus.

Ühtlase liikumise seaduse kujuks on ts -tasapinnas sirge joon (joon. 25); s_0 on selle sirge algordiinaat, c on tema tõus.

Ü. l. ts -diagrammis kujutab kiirust tangens nurgast, mis nimetatud sirge sünnitab positiivse aja teljega.

8. Graafiline raudtee sõiduplaan. Rongi orbiidiks on raudtee, tema teeks s ajal t on tema kaugus lähtejaamast.

Oletame, et rong igat kahe jaama vahet sõidab ühtlase kiirusega; ts -diagrammis saame selle liikumise kujutusena sirgjoonelise

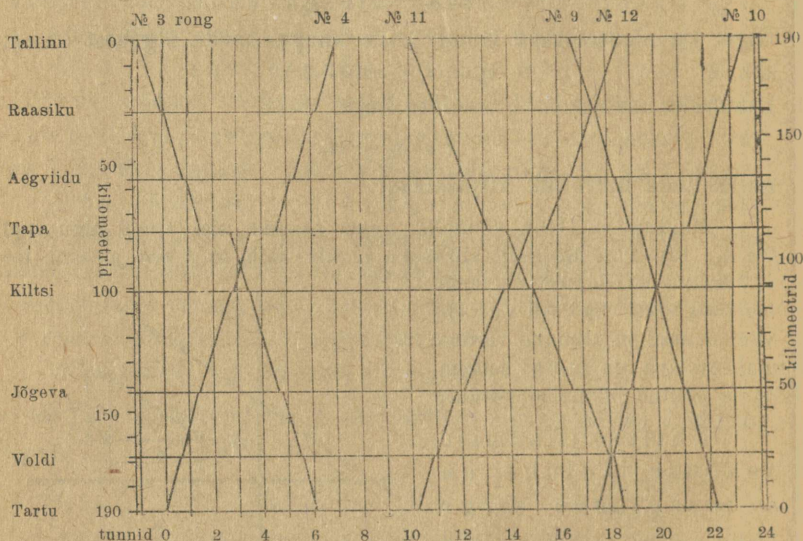


Joon. 25.

1) celeritas — kiirus.

lõigu. Kui aja ja tee mõõdud on kujutatud ühe ja sama pikkuse abil, siis kujutab nimetatud lõigu tõus rongi liikumise kiirust, — kui mitte — on see tõus võrdeline kiirusega. Rongi peatamisajal on tee seaduse kujud sirsjooneline lõik, mis rööbiti aja teljega. Joon. 26 kujutab E. V. raudtee sõiduplaani Tallinna—Tartu osa. Ta lubab otsekohe ära lugeda: mis rong kus, millal ja kui kaua peatab, kus kaks rongi vahetuvad, kus rong kiiresti, kus aeglaselt sõidab, missugune

E. V. raudtee sõiduplaan.



Maksev 1. detsembrist 1920.

Joon. 26.

kahest kiirem, kui kaugel rong on antud ajal lähtejaamast, kui kaugel lõpujaamast jne.

Lugeja joonistagu praegu maksev sõitude diagramm, võttes andmed harilikust sõiduplaanist.

Märkus. Raudteevalitsuses käiakse sõitude määramisel vastupidist teed: esiteks valmistatakse graafiline sõiduplaan ja tema põhjal kuulutatakse harilik sõitudekord välja.

Mõttekäik, mida me ühtlase liikumise uurimisel tarvitame, on tüübiline. Teda me tarvitame iga ühtlaselt sündiva nähtuse käigu kirjeldamisel.

9. Näide. Ühtlane pikkuse paisumine soenemisel. Võtame varre mingisugusest aimest, näiteks vasest. Soenemisel paisub tema pikkus. Paisub vars võrdsetes, kuid muidu mis soojusevahemikkudes $\Delta\theta$ tahes võrdsete pikkuskasvude Δl võrra, siis nimetame paisumise ühtlaseks.

Paisumise ühtlusest järgneb, et varre pikkuskasvud igasugustes soojusevahemikkudes on võrdelised nende vahemikkudega.

10. Ühtlase paisumise seadus. Olgu θ_1 ja θ_2 kaks kindlat temperatuuri, ja θ mis temperatuur tahes. Vastaku nendele varre pikkused l_1 , l_2 ja l .

$$\begin{array}{l} \text{Kasvud} \\ \text{ja} \\ \text{on võrdelised:} \\ \text{järjekult} \end{array} \quad \begin{array}{l} l-l_1 \quad l_2-l_1 \\ \theta-\theta_1 \quad \theta_2-\theta_1 \\ \frac{l-l_1}{\theta-\theta_1} = \frac{l_2-l_1}{\theta_2-\theta_1} \\ l = l_1 + \frac{l_2-l_1}{\theta_2-\theta_1} (\theta-\theta_1). \end{array}$$

Ü. p. korral on varre pikkus lineaarfunktsioon temperatuurist.

Kordajal $\frac{l_2-l_1}{\theta_2-\theta_1}$ on lihtne füüsikaline tähendus: ta on ü. p. kiirus.

11. Ühtlase paisumise kiiruse mõiste on algmõiste; teda on võimaliku defiinida. Küll aga võime kindlaks määrata, kuidas seda suurust mõõta.

Vaatame kaht paisumist ühes ja samas soojusevahemikus; me loeme seda paisumist kiiremaks, mille korral varre pikkusekasv on suurem. Võrdsete pikkusekasvude korral me loeme seda paisumist kiiremaks, mida vähemas soojusevahemikus ta sündis. On loomulik lugeda varre ü. p. kiirust võrdeliseks pikkusekasvuga ja pöördvõrdeliseks sellele vastava soojusevahemikuga.

Ü. p. kiirusmõõduks me võime lugeda igat ü. p. kiirust. Me valime selleks niisuguse ü. p. kiiruse, mille korral varre pikkus paisub soenemisel 1^o võrra just 1 cm võrra. Selle ü. p. kiirusmõõdu tähiseks olgu 1 cm/grad.

Sümboli cm/grad osad on lahutamata, nagu iga nime osad; valitud tähis peab meile meelde tuletama, kuidas on defiinitud ü. p. kiirusmõõt, pikkus- ja temperatuurmõõtude abil.

Sellest, mis ülevalpool öeldud, järgneb nüüd otsekohe tabel:

soojusevahemik	pikkusekasv	ü. p. kiirus
1 grad	1 cm	1 cm/grad
1 "	$l_2 - l_1$ "	$l_2 - l_1$ "
$\theta_2 - \theta_1$ "	$l_2 - l_1$ "	$\frac{l_2 - l_1}{\theta_2 - \theta_1}$ "

Ü. p. kiirust määratakse kaudselt, nimelt pikkuste ja temperatuuride mõõtmiste teel.

12. Uus ü. p. seaduse vorm. Tähistades selles seaduses (v. 5·10) esinevat kiirust tähega q ,

$$\text{saame} \quad l = l_1 + q(\theta - \theta_1)$$

Olgu varre pikkus temperatuuril 0° l_0 :

$$l_0 = l_1 + q(0 - \theta_1);$$

siis saame

$$l = l_0 + q\theta.$$

Ü. p. seaduse graafiliseks kujuks on θl -tasapinnas sirge; varre algpikkus l_0 on selle sirge algordinaat. Ü. p. kiirus on kujutatud tangensina nurgast, mis l -sirge sünnitab positiivse θ -teljega.

13. Näited ühtlaselt sündivatest nähtustest. Keha, mis jõudude mõjust vaba, liigub ühtlaselt sirgjoones; maakera pöörleb ühtlaselt ümber oma telje; sektor, mida piirab maakera orbiit, kindel päikesest tõmmatud raadiusvektor orbiidi tasapinnas ja muutuv maakera raadiusvektor, kasvab ühtlaselt ajaga maakera keerlemisel ümber päikese; gaasi maht, mis konstantse rõhumi all asub, paisub ühtlaselt soenemisel; rõhumine vedelikus kasvab ühtlaselt sügavusega; kõigis osades ühetaolises elektri-voolu juhis langeb potentsiaal ühtlaselt kauguse kasvamisega allikast jne.

Äraarvamata suure tähtsusega on esimesed kaks nimetatud nähtust. Ühtlane keha liikumine sirges on tema loomulik, tema vaba liikumine; kõik teised on sunnitud kehale temale rakendatud jõudude poolt. Selle ühtlase liikumise alalhoidmiseks pole jõudu tarvis: ta sünnib iseenesest igavesti muutumata edasi.

Maakera pöörlemise ühtlus võimaldab selle nähtuse tarvitamist aegade võrdlemiseks: meil puudub võimalus kaht aega otse võrrelda; nimetatud nähtuse ühtluse

tõttu on seda võimalik kaudselt teha. Me loeme võrdseteks ajavahedeks niisugused, milledes maakera pöörleb võrdsete nurkade võrra; tarvilikka pöördnurki on võimalik mõõta astronoomilisel teel. Maakera saab tema pöörlemise ühtluse tõttu ideaalseks kellaks: selle järele seame kõiki omi ajamõõtjaid.

14. Üldine ühtlaselt sündivate nähtuste käsitus. Määraku uuritava nähtuse käiku kaks suurust; nimetame neid üldiselt x ja y ; olgu x r. m., y — tema funktsioon. Kui võrdsetele, kuid muidu mis x -kasvudele tahes vastavad võrdsed y -kasvud, siis nimetame nähtuse käiku ühtlaseks. Ühtlusest järgneb, et x - ja vastavad y -kasvud on võrdelised. Olgu x_1 ja x_2 kaks kindlat r. m. väärtust, x mis selle väärtus tahes. Vastaku nendele y -väärtused y_1 , y_2 ja y . Siis on vastavate kasvude võrdelisuse tõttu:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

ehk teisiti:

$$y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

See on nähtuse käiku valitsev seadus.

Olenev suurus on lineaarfunktsioon rippumata muutujast.

Nähtuse käigu graafik xy -tasapinnas on sirge joon.

Selle joonistamiseks on küllalt kaht paari teineteisele vastavaid x ja y väärtusi: ühtlaselt sündiva nähtuse käigu määramiseks on küllalt kahest vaatlusest.

Kordaja

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ehk üldisemalt temaga võrdne kasvude suhe

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

mõõdab nähtuse ühtlase käigu kiirust.

Tähistame teda m . Vastab x -i nullväärtusele y -väärtus y_0 , siis on võrduste põhjal

$$y = y_1 + m(x-x_1)$$

$$y_0 = y_1 + m(0-x_1)$$

$$y = y_0 + mx.$$

Nähtuse xy -diagrammis kujutab y algväärtust y_0 sirge algordinaat, nähtuse kiirust — sirge tõus.

xm -diagrammina saame kiiruse käiku kujutava joonena sirge, mis rööbiti x -teljega.

15. Märkus. Ühtlaselt sündivad nähtused on ainsad, millede käiku me suudame endile enam-vähem selgelt ette kujutada. Iga niisuguse nähtusega seotud kiirusmõiste on meile selge, olgugi et me teda ei suuda defiinida. Selle algmõiste abil me tule-tame järgmises paragraafis ka nende nähtuste kiirus-mõiste, millede käik pole ühtlane.

Ülesanded.

1. Keha pöörleb kindla telje ümber; ta seis ruumis määratakse nurga abil φ (absoluutmõõdus), mis sünnitab kindel telge lõikav tasa-pind ruumis samasuguse tasapinnaga, mis muutumata kehaga seotud. Kui võrdsetes ajavahemikkudes nurk φ kasvab võrdsete osade võrra, siis nimetatakse pöörlemist ühtlaseks. Uruida seletatud viisil nurga φ olenemist ajast. Kuidas mõõta nurkkiirust? Mis tähendab sümbol $1^1/\text{sec}$?

2. Kepleri teise seaduse järele pühib planeedi raadiusvektor võrdsetes ajavahemikkudes võrdsed sektorpinnad, millede tipp on ellipsi-kujulise orbiidi tulitapis. Kuidas muutuvad need pinnad u ajaga t ? Mis tähendab sümbol $1 \text{ cm}^2/\text{sec}$?

3. Millal me nimetaksime sooja keha külmenemist ühtlaseks? Uruida seda nähtust. Mis tähendab sümbol $1 \text{ grad}/\text{sec}$?

4. Millal me nimetaksime potentsiaali V langemist voolu juhis kau-guse l kasvamisega allikast ühtlaseks? Kuidas on niisugusel korral seotud V ja l ? Mis tähendab sümbol $1 \text{ volt}/\text{cm}$? Takistus r on võrdeline pik-kusega l . Kuidas on seotud potentsiaali langemise kiirus voolu tugevusega?

5. Täpp liigub 1-se, 2-se, 3-nda, 4-nda, 5-nda ja 6-nda ja 7-nda sekundi jooksul seaduste järele: $s = 1 + 0.5t$; $1.5 + 0.8t$; 2.3 ; $2.3 + 2t$; 4.3 ; $4.3 - 3.4t$. Joonistada ts - ja tc -diagrammid, võttes mõlemates t -teljed rööbiti teineteisega ja c -telje s -telje pikendusena.

6. Mitteühtlaselt sündivate nähtuste uurimine. Nende kiirus.

Üks kõige sagedamini esinevatest m. ü. s. nähtustest on mitte ühtlane liikumine.

1. M. ü. l. definitsioon ja seaduse graafik. Kui vähe-malt ühes reas võrdseid ajavahemikka liikuv

täpp käib ära mitte võrdsed teeosad, siis nime-
tame liikumist mitteühtlaseks. Ajavahemikud ja
nendes ära käidud teeosad pole võrdelised; liikumis-
seadus pole lineaarne. Liikumisseaduse kujuks pole
sirge. Kuid, nagu enneminigi, on ka nüüd tee s aja t
funktsioon. Liikumisseaduse graafikuks on nüüd mõni
teine, mitte sirge, joon.

2. Ositi ü. l. definitsioon ja tema seaduse graafik.
Kõige lihtsam mitte ü. l. on ositi ü. l.; kui on võimalik
liikumisaega nõnda osadeks jagada:

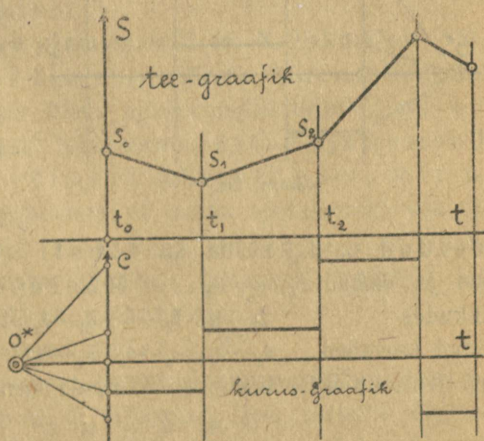
$$t_1 - t_0, t_2 - t_1, t_3 - t_2 \dots,$$

et igas niisuguses vahemikus liikumine on ühtlane, siis nime-
tame teda ositi ühtlaseks, iga säärast ajavahemikku —
ühtlusvahemikuks.

Igas nimetatud ajavahemikkudest on liikumis-
seadus lineaarne, järjekult tema graafikuks sirgjooneline
lõik. Täpi tee on ikka, iga liikumise korral, pidev, kat-
kematu, funktsioon ajast; o. ü. l. seaduse graafik
on pidev murdjoon.

3. O. ü. l. kiirusgraafik. Kujutagu joon. 27 murdjoon
tippudega $S_0 S_1 S_2 \dots$ mõnd o. ü. l. seadust ts -tasapinnas. Kon-
struime tema
kiirusgraafiku.

Asetame tc -tasa-
pinna ts -tasapinnale,
nõnda et t -teljed röö-
bikud ja c -telg s -telje
pikendusel oleks. Tõm-
bame täppidest $S_0, S_1,$
 $S_2 \dots$ püstjooned. Kui
meelde tuletame üht-
lase liikumise kiiruse
graafilist konstruk-
tsiooni (joon. 25), saame
järgmise juhise kii-



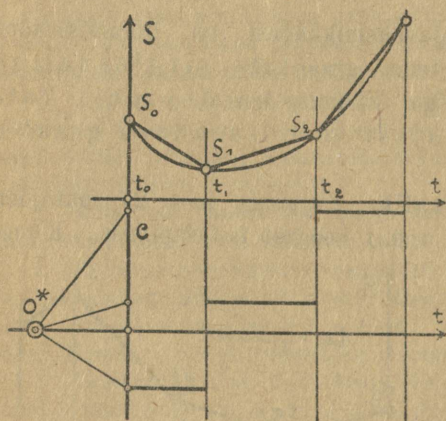
Joon. 27.

ruste leidmiseks nimetatud ühtlusvahemikkudes: valime tc -tasapinnas — t -teljel algusest alates pikkuse 1; tema lõpust O^* kui poolusest (v. 4·5, märkus) tõmbame rea kiiri, mis rööbiti sirgjooneliste lõikudega $S_0S_1, S_1S_2, S_2S_3 \dots$; need kiired lõikavad c -teljel lõigud, mis nõutud kiirusi kujutavad. Kandes neid rööbiti vahemikkudesse $t_1-t_0, t_2-t_1, t_3-t_2 \dots$, saame o. ü. l. kiirusgraafikuna katkeva joone, mille osad rööbiti aegade teljega.

Märkus. Oleks meil olnud antud o. ü. l. kiirusgraafik, siis oleksime temast teegraafiku saanud, tehes neidsamu operatsioone, mis praegu, ainult vastases järjekorras.

4. Keskmise kiiruse mõiste mitteühtlases liikumises.

Kujutagu kõver joon. 28 mõnd m. ü. l. seadust. Võtame sellel



Joon. 28.

kõveral rea täppe $S_0, S_1, S_2 \dots$ ja ühendame iga kaks teineteisele järgnevat nendest sirgjoonelist lõigu abil. Saame murdjoone $S_0S_1S_2 \dots$. See murdjoon kujutab teatavat o. ü. l. seadust. Tema tipud vastavad ühtluse katkemise aegadele.

Aegadel $t_0, t_1, t_2 \dots$ on täpi teed kui

mõeldud o. ü., nõnda ka tõesti sündivas liikumises ühed ja samad $s_0, s_1, s_2 \dots$. Mõeldud o. ü. l. on ajavahemikkudes

$$t_1-t_0, t_2-t_1, t_3-t_2 \dots,$$

käidud teevahed $s_1-s_0, s_2-s_1, s_3-s_2 \dots$,

järjekult on selle liikumise kiirused nendes ajavahemikkudes:

$$\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}, \frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}, \frac{s_3-s_2}{t_3-t_2} \dots$$

Need kiirused oleksid meie m. ü. liikuvale täpil nimetatud ajavahemikkudes olnud, kui ta nende algusel ja lõpul oleks olnud samadel kohtadel kui tõepoolest, vahemikkudes ise aga ta oleks liikunud ühtlaselt. Neid mõeldud kiirusi me nimetame m. ü. liikuva täpi keskmisteks kiirusteks ajavahemikkudes t_1-t_0 , t_2-t_1 , t_3-t_2 , ... Nende käik on kujutatud katkeva treppjoonena joonisel 28.

5. M. ü. liikumine, kui o. ü. liikumise piir. Murdjoon $S_0S_1S_2\dots$ kujutab teatud täpsusega kõverat $S_0S_1S_2\dots$, mõeldud o. ü. l. — tõepoolset liikumist; kujutamise täpsus on seda suurem, mida enam on meie murdjoonel ühistäppe kujutatava kõveraga, teisiti, mida vähemad on tema osad S_0S_1 , S_1S_2 , S_2S_3, \dots

Me vaatame antud kõverat kui piiri, millele läheneb murdjoon $S_0S_1S_2\dots$ tema osade lõpmatul vähenemisel ja nende arvu vastaval lõpmatul kasvamisel. Lähenevad lõigud S_0S_1 , S_1S_2 , S_2S_3, \dots lõpmata nullile, siis sünnib seesama ajavahedega t_1-t_0 , t_2-t_1 , t_3-t_2, \dots ; samal ajal kasvab nende ühtlusvahemikkude arv lõpmata. Me käsitame tõesti sündivat liikumist kui piiri, millele läheneb mõeldud o. ü. l. ühtlusvahemikkude lõpmatul vähenemisel ja nende viimaste arvu vastaval lõpmatul kasvamisel.

6. Kiirus antud ajamomendil m. ü. liikumises. M. ü. liikumise korral on võimatu rääkida kiirusest liikumisaja vältusel: ta muutub ühelt ajamomendilt teisele; sel korral me võime rääkida ainult kiirusest antud ajamomendil. Seda kiirust on võimatu määrata teel, mis ü. l. kiiruse andis: ajamoment ei suuda ajavahemiku osa täita. Suhe $\Delta s:\Delta t$ kaotab siin oma mõtte: kui Δt on null, on ka Δs tee muutumise pidevuse tõttu null, suhtel $\Delta s:\Delta t$ pole mingit kindlat väärtust.

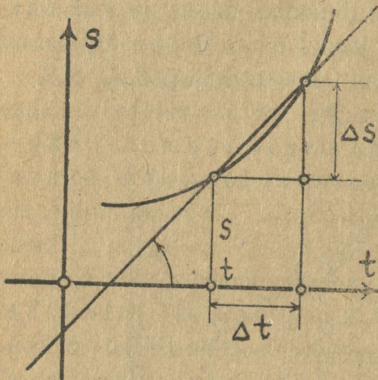
Me läheme sellepärast teist teed.

Olgu antud ajamoment t ; vastaku temale liikuva täpi tee s . Kujutame endile ette o. ü. liikumise, mis teatava täpsusega tõesti sündivat kujutab ja millel moment t oleks ühtluse

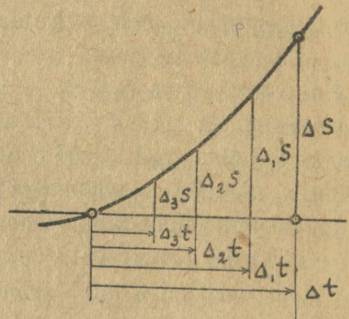
katkemise ajaks. Olgu momendile t järgnev ühtlusajavahemik Δt (joon. 29), temale vastav teekasv Δs ; siis mõeldub o. ü. l. kiirust vahemikus Δt suhe

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Laseme nüüd ühtlusvahemiku pikkuse ikka vähemaks ja vähemaks saada. Vahemik Δt omandab rea väärtusi $\Delta_1 t, \Delta_2 t, \Delta_3 t, \dots$, millede piiriks on $0: \Delta t \rightarrow 0$; nendele vastavad teekasvud on (joon. 30) $\Delta_1 s, \Delta_2 s, \Delta_3 s, \dots$; ka nende piir on tee pidevuse



Joon. 29.



Joon. 30.

tõttu $0: \Delta s \rightarrow 0$. Liikumise kiirused nimetatud ühtlusvahemikkudes on: $\frac{\Delta_1 s}{\Delta_1 t}, \frac{\Delta_2 s}{\Delta_2 t}, \frac{\Delta_3 s}{\Delta_3 t} \dots$

Muutuva ajavahemiku Δt lõpmatul vähenemisel lähenevad need kiirused piirile $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$;

samal ajal läheneb mõeldud liikumine lõpmata tõessti sündivale.

Seda piiri on loomulik lugeda m. ü. l. kiiruseks momendil t ; me defiinime sellepärast: m. ü. l. kiirus ajamomendil t on piir, millele läheneb kiirus mõeldud o. ü. liikumises, kui momendile t järgnev ühtlusvahemik Δt lõpmata läheneb nullile.

Seda m. ü. l. kiirust ajal t me tähistame sümboliga $c(t)$; see tähis peab meile meelde tuletama, et igale ajale t vastab m. ü. l. korral **oma** kiirus, et see kiirus on funktsioon ajast. Nõnda on siis m. ü. l. kiiruse definitsiooni põhjal

$$c(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

7. Teine m. ü. l. kiiruse definitsiooni vorm. Suhe $\Delta s : \Delta t$ annab keskmise liikumise kiiruse vahemikus Δt , mis järgneb võetud ajamomendile t ; $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ on selle piir vahemiku Δt lõpmatul vähenemisel. Sellepärast: m. ü. l. kiirus antud ajamomendil t on piir, millele läheneb keskmine kiirus sellele momendile järgnevas ajavahemikus Δt , kui see viimane vahemik lõpmata väheneb.

8. M. ü. l. kiiruse arvutamine liikumise seadusest. Näide. Katse näitab, et raske keha, mis kiirusega c_0 alla paisatakse, liigub seaduse järele:

$$s = s_0 + c_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2,$$

kus tähtedel t , s , s_0 on endine tähendus ja g on kindel konstant. Leiame keha kiiruse antud ajal t .

Et tee s pole lineaarfunktsioon ajast, siis pole liikumine ühtlane. Kiiruse arvutamine sünnib sellepärast ülemal antud definitsiooni põhjal.

Olgu Δt mõni ajavahemik, mis järgneb momendile t ; selle vahemiku lõppmoment on $t + \Delta t$; selle viimase ni on käidud tee

$$s_0 + c_0 \cdot (t + \Delta t) + \frac{1}{2} g \cdot (t + \Delta t)^2.$$

Teekasv Δs vahemikus Δt on teede vahe ajavahemiku Δt lõpul ja algusel: $\Delta s = s_0 + c_0 \cdot (t + \Delta t) + \frac{1}{2} g \cdot (t + \Delta t)^2$

$$- (s_0 + c_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2)$$

teisiti: $\Delta s = c_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} (2g \cdot t \cdot \Delta t + g \cdot (\Delta t)^2),$

ehk $\Delta s = \Delta t \cdot (c_0 + g \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t).$

Oleks liikumine vahemikus Δt sündinud ühtlaselt, siis **oleks** selles vahemikus tema kiirus olnud

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = c_0 + g \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t.$$

Tõepoolne liikumine ei sündinud ühtlaselt; tema kiirus on definitsiooni põhjal mõeldud liikumise kiiruse piir ühtlusvahemiku Δt lõpmatul vähenemisel:

$$c(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Läheneb Δt nullile, siis sünnib seesama ka avaldusega $\frac{1}{2} g \cdot \Delta t$;

sellepärast $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = c_0 + g \cdot t,$

nõnda et

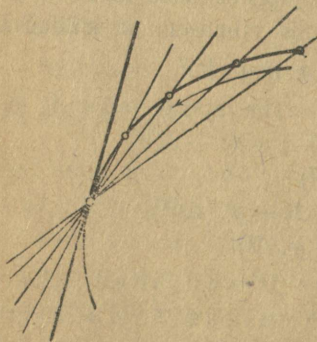
$$c(t) = c_0 + g \cdot t.$$

Meie kiiruse arvutamise protsessis oli t kindel ajamoment; selle juures oli aga ükskõikne, missugune ta nimelt oli. Sellepärast on saadus maksev iga ajamomendi kohta.

Allapaisatud keha tee on ruutfunktsioon, tema kiirus — lineaarfunktsioon ajast.

9. Märkused. 1) Valem $c(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ määrab õige kiiruse väärtuse ka sel korral, kui liikumine on ühtlane; siis on nimelt kasvude suhtel ikka üks ja sama väärtus, olgu Δt kui väike tahes; sama väärtus on siis ka selle suuruse väärtuste kogu piiril.

2) M. ü. l. kiirust ajal t me ei saa määrata kui funktsiooni $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ väärtust, kui kasv Δt on 0, küll aga kui piiri, millele see suhe $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ läheneb, kui Δt lõpmata läheneb nullile.



Joon. 31.

10. Kõvera puutuja mõiste.

Kujutame endile ette kõvera (joon. 31), kindla täpi temal ja mingisuguse kõvera siduja, mis sellest täpist tõmmatud. Oletame, et tema teine lõiketäpp kõveraga viimast mööda esimesele ikka lähemale ja lähemale tuleb; selle juures pöörleb muutuv siduja nimetatud kindla täpi ümber, lähenedes seotud kaare lõpmatul vähenemisel lõpmata kindlale piirsirgele. Viimast

sirget me nimetame kõvera puutujaks nimetatud täpis. Nii siis: kõvera puutujaks kindlas kõvera täpis me nimetame piirsirget, millele läheneb sellest täpist tõmmatud muutuv siduja, seotud kaare lõpmatul vähenemisel.

Märkus. On täiesti lubamata defiinida puutujat kui sirget, millel kõveraga üks ühine täpp (joon. 32).

11. M. ü. l. kiiruse kujutus aeg-tee-diagrammis. Me defiinime m. ü. l. kiirust $c(t)$ momendil t kui piiri

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

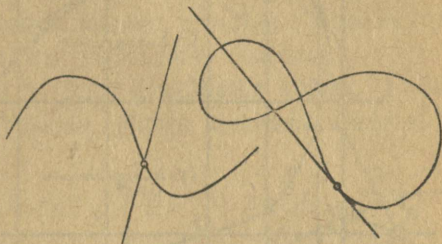
Keskmine kiirus vahemikus Δt , s. t. kasvude suhe $\Delta s : \Delta t$, on

kujutatud (joon. 29) tangensina nurgast, mis tee kõvera siduja vahemikus Δt sünnitab positiivse aegade teljega. Ajakasvu Δt lõpmatul vähenemisel väheneb lõpmata ka seotud kaar; siduja läheneb lõpmata puutujale, siduja nurk $+t$ -teljega puutuja nurgale sama teljega, tangens siduja nurgast — tangensile puutuja nurgast $+t$ -teljega, keskmine kiirus vahemikus Δt kiirusele momendil t . Sellepärast:

M. ü. l. kiirus momendil t on kujutatud tangensina nurgast, mille sünnitab teekõvera puutuja täpis t positiivse aegade teljega.

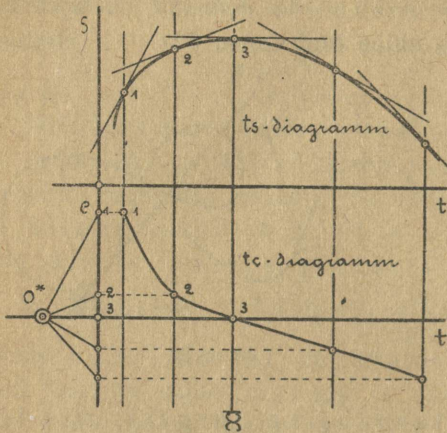
12. Kiiruskõvera graafiline tuletamine teekõverast. Saadud resultaadi me võime ära kasutada kiiruskõvera konstruimisel.

Kujutagu kõver joon. 33 ts -diagrammi. Võtame temal rea täppe: 1, 2, 3, ... ja tõmbame nendes püstjooned ja puutujad. Nende puutujate nurkade tangens'id kujutavad kiirusi vastavatel aegadel.



Joon. 32.

tc -diagrammi joonistamiseks võtame uue t -telje rööbiti endisega, c -teljeks s -telje pikenduse. Valime negatiivsel t -teljel pooluse O^* ja tõmbame temast kiired rööbiti puutujatega 1, 2, 3, Need kiired lõikavad c -teljel lõigud, mis nõutud kiirusi kujutavad. Kanname neid vastavatele püstjoontele



Joon. 33.

1, 2, 3, ... ja ühendame saadud rea täppe sileda kõvera abil. See on kiiruskõver.

13. Märkus. M. ü.

1. kiirusväärtuse momendil t me tuletasime tee seadusest; kiiruse tuletamine teest seisib piiri leidmises, millele läheneb suhe teineteisele vastavatest tee ja aja kasvudest viimase kasvu lõpmatul vähenemisel.

Esitatud mõttekäik on tüübiline: samal viisil tuletakse iga m. ü. sündiva nähtuse kiirus tema käigu seadusest.

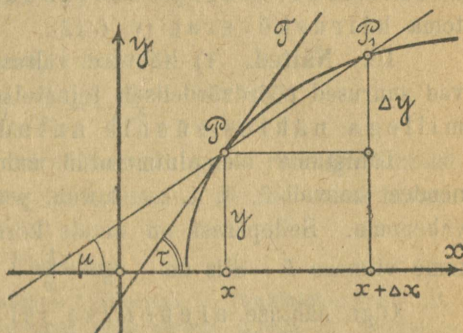
14. Näide. Tahaksime meie määrata varre pikkuse m. ü. paisumise kiirust mõnel antud temperatuuril θ , siis defineerime esiteks selle nähtuse, näeksime, et selle seadus pole lineaarne, et tema käigu kujuks pole sirge. Kõige lihtsam m. ü. p. oleks o. ü. p.; tema käigu kujuks θ -tasapinnas oleks pidev murdjoon. Uuritava m. ü. p. asemele asetame mõeldava o. ü. p., niisuguse, et mõlemate korral temperatuuridel $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$ varre pikkused l_0, l_1, l_2, \dots oleksid ühed ja needsamad. Me vaatame siis m. ü. p. kui piiri, millele läheneb o. ü. p. ühtlusvahemikkude $\theta_1 - \theta_0, \theta_2 - \theta_1, \dots$ lõpmatul vähenemisel ja nende arvu vastaval lõpmatul kasvamisel, m. ü. p. kiirust temperatuuril θ kui piiri, millele läheneb mõeldud o. ü. p. kiirus ühtlusvahemikus $\Delta\theta$, viimase vahemiku lõpmatul vähenemisel: $q(t) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta\theta}$

Geomeetriliselt oleks m. ü. p. kiirus θ -diagrammis kujutatud tangensina nurgast, mis l -kõvera puutuja täpis θ sünnitab $+$ θ -teljega. Sellest järgneks m. ü. p. kiiruskõvera tuletamise viis varre pikkuskõverast (v. 6'12).

Lugeja võtku vaevaks üksikasjaliselt läbi mõelda ja seletada siin lühidalt äratähendatud mõttekäiku.

15. Üldine kiirusmõiste. Olgu võimalik nähtuse käiku kirjeldada, kui ühe suuruse korrapärasest muutumisest teise muutumisel; tähistame neid suurusi üldiselt x ja y ; olgu esimene nendest r. m., teine funktsioon temast: $y=f(x)$. See xy -side on siis nähtuse käiku valitsev seadus.

Olgu kõver joonises 34 tema graafiliseks kujuks. Ühtluse-tuse tõttu pole võimalik rääkida nähtuse arenemise kiirusest teatavas r. m. vahemikus: see kiirus muutub ühiselt r. m. väärtusega. Me küsime: mis kiirusega areneb nähtus momendil, kus r. m. antud väärtusest üle läheneb? lähemalt: mis sugune on nähtuse kiirus antud r. m. väärtusel?



Joon. 34.

Seda r. m. väärtust me ei tähista eriti: me kirjutame teda x , pidades meeles, et ta järgnevas uurimises konstanti tähendab.

Me läheme sama teed nagu m. ü. l. kiiruse tuletamiselgi.

Me defiinime nimelt esiteks kõige lihtsama m. ü. sündiva nähtuse käigu: o. ü. sündiva; selle käigu kujuks oleks xy -tasapinnas pidev murdjoon. Uuritava m. ü. sündiva nähtuse asemele asetame mõeldava o. ü. sündiva ja vaatame tõepoolset nähtuse käiku kui piiri, millele läheneb mõeldud o. ü. nähtuse käik, ühtlusvahemikkude lõpmatul vähenemisel ja nende arvu vastaval lõpmatul kasvamisel. Uuritava

nähtuse kiirust r. m. väärtusel x me vaatame kui piiri, millele läheneb mõeldud o. ü. sündiva nähtuse kiirus vahemikus Δx , mis antud x -ile järgneb, selle vahemiku lõpmatul vähenemisel: nõutud kiirus on

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Geomeetriliselt on kasvude suhe kujutatud tangensina nurgast μ , mis y -kõvera siduja vahemikus Δx sünnitab positiivse r. m. teljega, selle suhte piir — tangensina nurgast τ , mis kõvera puutuja täpis x sünnitab nimetatud teljega.

See annab meile võimaluse leida nähtuse arenemise kiirust graafilisel teel ja tuletada nähtuse käigu kõverast tema kiiruskõverat (v. 6·12).

16. Näited. 1) Nähtuse vältusel muutuvad teda määravad suurused pöördvõrdeliselt teineteisega. Leiame kiiruse, millega nähtus sünnib antud arenemisjärgul.

Tähistame ülemalnimetatud muutujad x ja y ; kui üks nendest kasvab 2, 3, 4, ... korda, peab teine sama palju korda vähenema. Sellepärast on nende korrutis konstant. Tähistame viimase k . Siis on $y = \frac{k}{x}$.

Olgu nähtuse arenemise järk, millel me tema sündimist just uurime, määratud r. m. väärtusega x ; sellele x -ile vastab funktsiooni väärtus $y = \frac{k}{x}$. Kasvab r. m. kasvu Δx võrra, siis on ta uueks väärtuseks $x + \Delta x$; kasvab selle juures funktsioon Δy võrra, siis on uueks y -väärtuseks $y + \Delta y$, nõnda et

$$y + \Delta y = \frac{k}{x + \Delta x}$$

Siit leiame kasvu Δy :

$$\Delta y = \frac{k}{x + \Delta x} - \frac{k}{x} = -k \frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

Kasvude suhe

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{k}{x(x + \Delta x)}$$

ja tema piir

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{k}{x^2}$$

Märk miinus näitab, et nähtuse arenemise kiirus on negatiivne: x -i suurenemisel väheneb y .

Kõik, mis öeldud, jääb maksvaks, olgu x -i väärtus misugune tahes: uuritava nähtuse kiirus muutub pöördvõrdeliselt r . m. ruuduga.

Lugeja seletagu leitud resultaati konkreetsetel näidetel füüsikast.

2) Jõud f , millega päike hoiab maakera tema orbiidis, on pöördvõrdeline kauguse r ruuduga:

$$f = \frac{\mu}{r^2},$$

kus μ konstanti tähendab. Missuguse kiirusega muutub jõud f kauguses r päikesest selle kauguse kasvamisel?

Arutades nagu ennemini, leiame

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta r} = -\frac{2\mu}{r^3}.$$

Sama seaduse järele pöördvõrdeliselt kauguse ruuduga allikast sünnib valguse tugevuse muutumine. Leitud valem annab ka selle nähtuse kiiruse.

Ülesanded.

1. R. m. üksus on kujutatud pikkusena l_x , funktsiooni oma pikkusena l_y . Näidata, et niisuguses diagrammis tuletis on võrdeline puutuja tõusuga. Võrdeteguriks on $l_x : l_y$.
2. Joonistada Emajõe veepinna tõusmise kiiruskõver kevadel 1920. Andmed võtta ülesandest 1 lhk. 19.
3. Joonistada biikroomhapu kaaliumi sulamise kiiruskõver. Andmed võtta ülesandest 2 lhk. 20.
4. Joonistada õhusoojuse muutumise kiiruskõver joon. 14 põhjal.
5. Luua m. ü. pöörlemise kiiruse mõiste.
6. Sama ülesanne m. ü. potentsiaali langemise kiiruse kohta.

7. Funktsiooni tuletis.

1. Funktsiooni tuletise definitsioon. Me nägime, et funktsioon $y = f(x)$ kasvab momendil, mil r . m. antud väärtusest x üle läheb, kiirusega $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Et sel avalduse! põhjapanev tähtsus ja ta edasi meil igal sammul esineb, siis on kohane teda erilise nimega nimetada. Selle avalduse me tuletasime funktsiooni omast $y=f(x)$ teatud piirile mineku teel; me nimetame teda meie funktsiooni tuletiseks ja defiinime üldiselt nõnda: funktsiooni tuletis mõnel r. m. väärtusel on piir, millele läheneb suhe funktsiooni kasvust r. m. kasvuga, mis järgneb nimetatud r. m. väärtusele, selle r. m. kasvu lõpmatul vähenemisel.

2. Tuletise tähis. Me tähistame avaldust $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ühe tähega y' ehk $f'(x)$:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Nõnda on näiteks $\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$, $(s_0 + c_0 t + \frac{1}{2} g t^2)' = c_0 + g t$.

Sümbolit $f'(x)$ me loeme: f tuletis x -i suhtes, ehk lühemalt f -tuletis.

Märkus. Tuletise tuletamist funktsiooni $f(x)$ avaldusest nimetatakse selle funktsiooni differentsimiseks: Δx ja Δy on vahed; vahe nimeks on ladina keeles differentia.

3. Näide. Leiame funktsiooni $y = \sqrt{x}$ tuletise mõnel kindlal r. m. väärtusel.

Seda väärtust me ei märgi kuidagi eriti; me kirjutame lihtsalt x , peame aga meeles, et tema meie tuletise arvutamise vältusel konstantne on. Sellele x -väärtusele vastab y -väärtus \sqrt{x} .

Lisame r. m. väärtusele mõne kasvu Δx ; uus r. m. väärtus on $x + \Delta x$; sellele uuele r. m. väärtusele vastab uus funktsiooni väärtus $\sqrt{x + \Delta x}$. Vahemikus Δx , mis r. m. väärtusele x järgneb, saab funktsioon y kasvu

$$\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x},$$

s. o. meie Δy . Funktsiooni ja r. m. kasvude suhe on meie näites

$$\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x},$$

järjekult on nõutud tuletis võrdne piiriga

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Enne selle piiri leidmist teeme mõned

Märkused. 1) Viimases lim-sümbolis on muutujaks lõpmata vähenev r. m. kasv Δx ; x on konstantne r. m. väärtus, millel nõutakse funktsiooni tuletist.

2) Kui Δx nulliks saab, saab funktsiooni y pidevuse tõttu ka Δy nulliks: murd $\Delta y : \Delta x$ ei määra sellel r. m. kasvu väärtusel mingit arvu.

3) Me ei otsigi niisugust; me ei otsi murru väärtust, kui Δx on null, vaid selle avalduse piiri Δx lõpmatul nullile lähenemisel (v. 2·7, näide 5; 2·8).

Nimetatud piiri leidmine. Katsume lugejas eraldada tegurit Δx , mille nulliks saamise tõttu hävib nimetaja. Korrutame selleks murru liikmeid ühe ja sama avaldusega $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$; saame murru

$$\frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

Kasvu Δx nullile lähenemisel on ta võrratu sellega; me võime sellepärast murdu temaga lühendada. (See poleks võimalik, kui Δx on null!)

Me saame

$$\frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

Läheneb nüüd Δx nullile, siis $x + \Delta x \rightarrow x$, $\sqrt{x + \Delta x} \rightarrow \sqrt{x}$ nimetaja $\rightarrow 2\sqrt{x}$ ja me leiame

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4. Üldine juhised tuletise leidmiseks. Tahame mõne funktsiooni $y = f(x)$ tuletist leida täpis x , siis: loeme selle x -i konstandiks; lisame temale kasvu Δx ; võtame r. m. uue väärtuse $x + \Delta x$, arvutame sellele vastava funktsiooni väärtuse, lahutame sellest endise ja saame funktsiooni kasvu Δy .

Arvutame kasvude suhte $\Delta y : \Delta x$ ja läheme piirile, oletades, et Δx läheneb nullile. See piir on nõutud tuletis. Tema määramine nõuab mõnikord kunstlikka võtteid.

5. Näited. 1) Leida $(\sin x)'$. Tähistame different-
sitava funktsiooni y ja kirjutame vastavuste tabeli:

$$\begin{array}{l} x \quad \dots \quad y = \sin x \\ x + \Delta x \dots \quad y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \\ \hline \Delta x \dots \quad \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x \\ \text{keskmiselt} \quad 1\text{-le} \dots \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ \text{järjekult} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \end{array}$$

Selle piiri leidmiseks teisendame lugejat, katsudes eraldada kasvu Δx :

$$\begin{aligned} \sin(x + \Delta x) - \sin x &= 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \\ &= \Delta x \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}; \end{aligned}$$

siit saame:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right\}$$

Kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis ka $\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$, $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \rightarrow \cos x$

$$\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \rightarrow 1$$

ja me saame $(\sin x)' = \cos x$.

2) Samuti me leiaksime $(\cos x)' = -\sin x$.

3) Lugeja leiab kergesti, et

$$\begin{aligned} (x^2)' &= 2x, \\ (x^3)' &= 3x^2. \end{aligned}$$

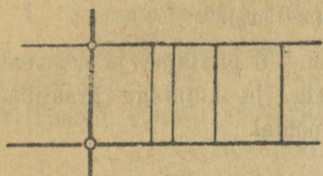
6. Kõvera tõus. Tuletis $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ määras funktsiooni $f(x)$ kasvamise kiiruse täpis x ; geomeetriliselt vastab sellele

$f(x)$ -kujukõvera tõusmise järskus täpis, mille abstsiss on x , lühemalt: ülemalnimetatud tuletis mõõdab kõvera $y=f(x)$ tõusu täpis x . Tõusu mõõduks on, nagu ikka, niisuguse sirge tõus, mis $+x$ -teljega sünnitab nurga $\frac{\pi}{4}$ (v. 4·4).

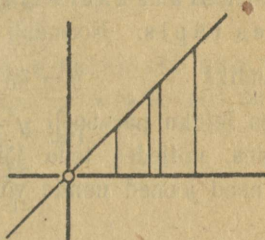
Geomeetriliselt on see kõvera tõus täpis x kujutatud tangensina nurgast, mis puutuja selles kõvera täpis sünnitab positiivse x -teljega.

Siit järgneb kõvera tõusu graafiline konstruksioon ja tõus-kõvera graafilise tuletamise viis antud kõverast (v. 6·12).

7. Kaks lauset. 1) Konstandi tuletis on null. Tõesti, $y = \text{konst}$ kujutab sirget (joon. 35), mis rööbiti x -teljega.



Joon. 35.



Joon. 36.

See sirge langeb igas täpis oma puutujaga ühte; sirge nurk x -teljega on null, selle tangens on null:

$$(\text{konst})' = 0.$$

2) R. m. tuletis on üks.

Tõesti, $y = x$ kujutab sirget (joon. 36); see langeb igas täpis oma puutujaga ühte; tema tõus on üks:

$$(r. m.)' = 1.$$

8. Puntuja võrrand. Olgu antud kõver $y = f(x)$ ja tema täpp $P_0(x_0, y_0)$. Leiame selle sirge võrrandi, mis kõverat antud täpis puutub.

Me teame, et tangens nurgast, mis sünnitab $+x$ -teljega kõvera puutuja täpis P_0 , on y -tuletise väärtus selles täpis. Tähistame selle väärtuse y'_0 . Olgu (x, y) mingisuguse puutuja täpi koordinaadid; siis on tema võrrand (v. T. a. g. p. 7·14):

$$y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0),$$

Näide. Leiame sinuskõvera puutuja täpis, mille abstsiss on $\frac{\pi}{6}$.

Meie korral on $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, järjekult $y_0 = \frac{1}{2}$. Üldiselt on $y' = \cos x$, sellepärast $y'_0 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Otsitud võrrand on:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$

ehk:

$$\sqrt{3}x - 2y = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi - 1.$$

9. Kõvera normaal. Kõvera normaaliks täpis P_0 nimetatakse sirget, mis on risti puutujaga selles täpis. Normaali tõus on $-1:y'_0$, sellepärast on tema võrrandiks

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0} (x - x_0).$$

Lugeja leidku parabooli $y = x^2 - 5x + 6$ puutujad ja normaaliid täppides, milles teda lõikab x -telg, ja kujutagu graafiliselt kõik need jooned nende võrrandite põhjal.

Ülesanded.

Leida üldise eeskirja järele järgmiste funktsioonide tuletised

1. $y = 3x + 4,$

5. $y = \sqrt{1+x^2}.$

2. $y = x^2 - x + 3,$

6. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$

3. $s = \frac{t}{1+t}.$

7. $s = \frac{at+b}{ct+d}.$

4. $s = \frac{1}{1-t^2}.$

8. $s = \frac{1}{\sin t}.$

9. Leida nende puutuja ja normaali võrrandid, mis kõverale

$$y = \frac{x-2}{x+3}$$

tõmmatud täpis, mille abstsiss on $+2$. Joonistada kõik need jooned.

10. Puutuja pikkuseks nimetatakse tema lõiku puutetäpi ja täpi vahel, mis temal x -teljega ühine. Selle pikkuse projektsiooni x -teljele nimetatakse puutuja aluseks. Näidata, et parabooli $y^2 = 2px$ puutuja alus ei olene puutetäpist.

Differentsida graafiliselt funktsioonid:

$$11. y = \frac{3x+2}{x^2+1}.$$

$$12. y = \frac{2}{2+x^2}.$$

$$13. y = \log x.$$

$$14. y = \frac{3x}{1+x^2}.$$

$$15. y = 0.2x^2.$$

Kujutada järgmised funktsioonid ja nende tuletised:

16. $y = x \cdot E(x)$, kus $E(x)$ on kõige suurem täisarv, mis arvus

x peitub;

$$17. y = |x|$$

$$18. y = |\sin x|.$$

8. Mõned differentsimislaused.

Eelmärkus. x -i funktsioone $u(x)$, $v(x)$, ... kirjutame selles paragraafis lihtsalt u , v , ...

1. Summa tuletis on liidetavate tuletiste summa.

Olgu kahe funktsiooni summa täpis x $u+v$, siis on ta täpis $x + \Delta x$

$$(u + \Delta u) + (v + \Delta v).$$

Funktsioonide summa kasv vahemikus Δx

$$\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v;$$

on

sellepärast

$$\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

see annab üleminekul piirile, kui $\Delta x \rightarrow 0$:

$$(u+v)' = u' + v'$$

m. o. t. t.

Lause jääb jõusse, kui liidetavaid on enam kui 2.

Samuti näitame, et

$$(u-v)' = u' - v'.$$

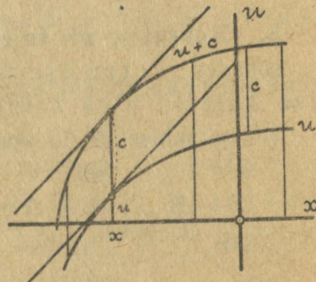
2. Konstantsed liidetavad

jäävad differentsimisel ära.

Tõesti:

$$(u+c)' = u' + c' = u' + 0 = u'.$$

Geomeetriliselt tähendab see, et kõveratel konstantse ordinaatide vahel on täppides võrdsete abstsissidega rööbikud puutujad (joon. 37).



Joon. 37.

3. Konstantsed kordajad jäävad differentsimisel tuletise märgi ette.

Olgu täpis x funktsiooni väärtus cu , kus c on konstantne kordaja. Täpis $x + \Delta x$ on ta väärtus $c(u + \Delta u)$. Järjelikult on

$$\begin{aligned}\Delta(cu) &= c(u + \Delta u) - cu = c \cdot \Delta u, \\ \frac{\Delta(cu)}{\Delta x} &= c \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}, \\ (cu)' &= c \cdot u'.\end{aligned}$$

4. Eelmiste lausete rakendused.

$$\begin{aligned}1) \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1\right)' &= \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - (3x)' + (+1)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^2)' - 3 \cdot (x)' + 0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 \cdot 1 = x - 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x}\right)' &= \left(-\frac{2}{x}\right)' + \left(\frac{1}{3}\sqrt{x}\right)' = \\ &= -2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{3}(\sqrt{x})' = \\ &= -2 \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{6\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

3) Linearfunktsiooni tuletis on konstant.

$$(ax + b)' = (ax)' + b' = a \cdot x' = a.$$

See peab ju ka nõnda olema: $y = ax + b$ on sirge, mille tõus on a .

4) Ruutfunktsiooni tuletis on lineaarne.

$$\begin{aligned}(ax^2 + bx + c)' &= (ax^2)' + (bx)' + c' = \\ &= a \cdot (x^2)' + b \cdot x' + 0 = 2ax + b.\end{aligned}$$

5. Korrutise uv tuletis on $uv' + vu'$;

sõnades: korrutise tuletis on esimene tegur kord teise tuletis plus teine tegur kord esimese tuletis.

Üldise juhise järele saame tabeli:

$$\begin{array}{l} x \dots \quad uv \\ x + \Delta x \dots (u + \Delta u)(v + \Delta v) \\ \hline \Delta x \dots \quad \Delta(uv) = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v. \\ 1 \dots \quad \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v. \end{array}$$

Kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis $\frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v'$, $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'$, $\Delta v \rightarrow 0$ ja me saame

$$(uv)' = u \cdot v' + v \cdot u'.$$

Näide. $(x \cdot \sin x)' = x \cdot \cos x + \sin x \cdot 1 = \sin x + x \cdot \cos x.$

6. Murru $\frac{u}{v}$ tuletis on $\frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}.$

Sõnades: murru tuletis on murd; nimetaja on endise nimetaja ruut, lugeja on endine nimetaja kord lugeja tuletis miinus lugeja kord nimetaja tuletis.

Seame endile kokku tabeli:

$$\begin{array}{l} x \dots \frac{u}{v} \\ x + \Delta x \dots \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \\ \Delta x \dots \Delta \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} \\ \text{teisiti} \quad \Delta x \dots \Delta \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v \cdot (v + \Delta v)} \\ 1 \dots \frac{\Delta \left(\frac{u}{v} \right)}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot (v + \Delta v)}; \\ \text{sellepärast piiris:} \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}. \end{array}$$

Näide. $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$
 $= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

7. Kaudse olenemise mõiste.

Näited. 1) Õhulaeva kandejõud K oleneb tema mahust v : $K = K(v)$;

omal korral oleneb maht v õhulaeva telglõike raadiusest r

$$v = v(r).$$

Muidugi oleneb kandejõud ka sellest raadiusest r : igale raadiusele vastab oma kandejõud; kuid see olenemine pole otsene: ta on kaudne. Kandejõu olenemine raadiusest sünnib mahu kaudu:

$$K = K[v(r)].$$

2) Võnkliikumises oleneb võnkruva keha tee teatavast nurgast:

$$s = a \cdot \sin \theta,$$

kus nurk θ omakord oleneb ajast:

$$\theta = \frac{2\pi}{T} \cdot t + \varepsilon.$$

Liikruva keha tee oleneb ajast t nurga θ kaudu.

3) Avaldused, nagu

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}, \tan\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right), \log \sin x,$$

olenevad kõik rippumata muutujast kaudselt; funktsioonid, millede kaudu see sünnib, on meie korral $\frac{x}{1-x}$, $\frac{1}{2}x^2 - 1$, $\sin x$.

8. **Funktsiooni funktsioon.** Me ütleme: K , s , $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ jne. on funktsiooni funktsioonid.

9. **Kaudselt rippumata muutujast olenevate funktsioonide differentsimine.** Olgu $y = y(u)$ ja $u = u(x)$ kaks pidevat funktsiooni muutujatest u ja x . Olgu x mõni kindel r. m. väärtus; vastaku temale otse väärtus u ja kaudselt y . Lisame r. m. x -le kasvu Δx ; uus r. m. väärtus on $x + \Delta x$; sellele r. m. väärtusele vastab uus u -väärtus, tähistame teda $u + \Delta u$, nõnda, et Δu on u -kasv, mis vastab x -kasvule Δx . Sellele uuele u -le vastab uus y -väärtus; tähistame teda $y + \Delta y$; nõnda siis vastab Δy kasvule Δu ja sellega kaudselt kasvule Δx :

$$\Delta x \dots \Delta u \dots \Delta y.$$

Järjekult vastaks funktsioonide ühtlase kasvamise korral r. m. kasvule

$$1 \dots \frac{\Delta u}{\Delta x} \dots \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Definitsiooni põhjal on: $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Otse me seda piiri arvutada ei saa: y -oleneb x -ist kaudselt. Sellepärast tarvitame järgmist võtet. Kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis ka $\Delta u \rightarrow 0$; selle juures on $\Delta u \neq 0$; me võime temaga korrutada ja jagada:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ilma et murru väärtus muutuks.

Kui nüüd $\Delta x \rightarrow 0$, siis $\Delta u \rightarrow 0$, temaga ka $\Delta y \rightarrow 0$, siis $\Delta y : \Delta u \rightarrow y'_u$; see on y -tuletis u suhtes; $\Delta u : \Delta x \rightarrow u'_x$, see on u -tuletis x -i suhtes, $\Delta y : \Delta x \rightarrow y'$; järjekult on

$$y' = y'_u \cdot u'_x.$$

Põhilause. Tuletis funktsiooni funktsioonist on selle tuletis sisemise funktsiooni suhtes korrutatud viimase funktsiooni tuletisega r. m. suhtes.

10. Näited. 1) $y = (2x - 3)^3$. Leida y' .

Funktsiooniks, mille kaudu sünnib y olenemine x -ist, on $2x - 3 =$ „sulud“. Sellepärast

$$\begin{aligned} y' &= y'_{()} \cdot ()'_x = 3 \cdot ()^2 \cdot ()' \\ &= 3(2x - 3)^2 \cdot 2 = 6(2x - 3)^2. \end{aligned}$$

2) $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Leida y' .

Sisemiseks funktsiooniks on $x^2 + 1$. Sellepärast

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3) $y = \sin \frac{1}{x}$; $y' = \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2}$.

Ülesanded.

Differentsida funktsioonid:

1. $y = x^2 - x + 3$.

6. $\varrho = \frac{1}{\cos \vartheta}$.

2. $s = \frac{1}{8}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 1$.

7. $y = \frac{\sin x}{x}$.

3. $s = (t + 1)(t^2 - 3)$.

8. $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 + x + 1}$.

4. $y = \frac{x}{1 + x^2}$.

9. $s = \frac{\sqrt{t}}{1 + t}$.

5. $y = x^2 \cdot \cos x$.

10. $s = \sqrt{t}$.

11. Millele läheneb kõvera $\frac{3x + 2}{x^2 + 1}$ puutuja siht, puutetäpi abstsissi lõpmatul kasvamisel?

12. Missugustes täppides on kõvera $y = \frac{x - 6}{x^2 - 2x - 8}$ puutuja rööbiti x -teljega? Teha joonis.

13. Missugustes täppides sünnitavad kõvera $y = \frac{x}{1-x^2}$ puutujad $+x$ -teljega nurgad 45° ? Teha joonis.

14. On antud kõver $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Leida tema puutujate ja normaalide võrrandid täppides, milles ta löikab x -telge. Joonistada kõik need jooned.

Differentsiaalfunktsioonid:

$$15. y = \left(\frac{1}{x} + x\right)^2.$$

$$19. y = \sin(x^2).$$

$$16. y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$20. y = \sin^2 x.$$

$$17. y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$21. y = \sqrt{\tan x}.$$

$$18. y = \frac{\sqrt{2x-3}}{x}.$$

$$22. y = \sin 2x.$$

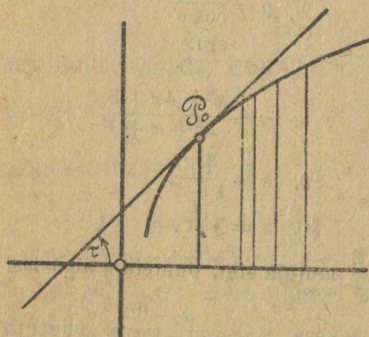
23. Võnkliikumine sünnib seaduse järele:

$$s = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varepsilon\right).$$

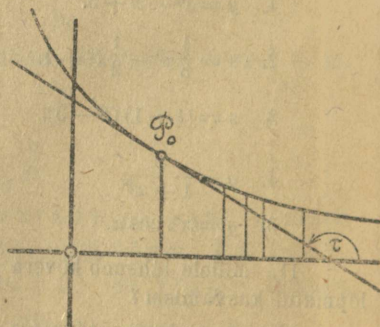
Määrata tema kiirus.

9. Funktsioonide muutumise uurimine nende tuletiste abil.

Eelmärkused. 1) Funktsiooni suurenemise ja vähenemise geomeetrilisteks vastanditeks on tema kujukõvera tõusmine ja langemine ja ümberpöördukt.



Joon. 38.

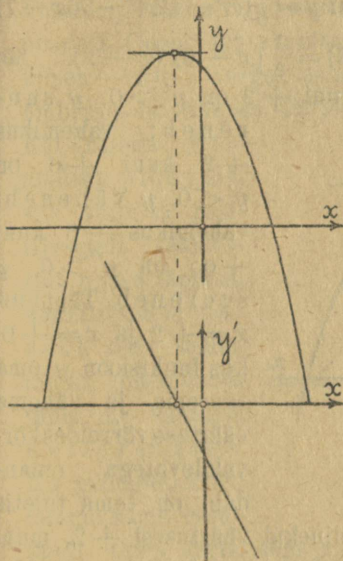


Joon. 39.

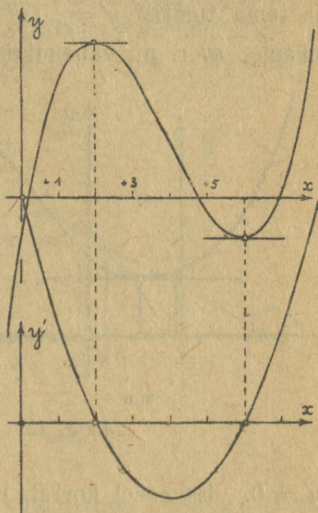
2) Järgnevat uurimistes me oletame ikka, et r. m. muutub suurenedes.

1. Funktsiooni suurenemise ja vähenemise tunnused.

Joonis 38 kujutab kõverat, mis täpi P_0 ümbruses tõuseb, joonis 39 — kõverat, mis täpi P_0 ümbruses langeb. Tõmbame mõlema kõvera puutujad täppides P_0 ; esimene nendest sünnitab $+x$ -teljega terava, teine — nüri nurga τ . Selle-



Joon. 40.



Joon. 41.

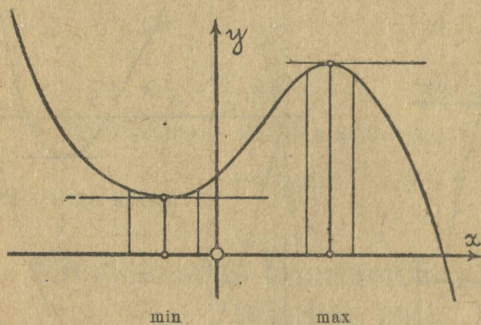
pärast on meil esimesel korral $\tan \tau > 0$, teisel $\tan \tau < 0$. Ümberpöördult: on $\tan \tau$ teatavas kõvera täpis > 0 , siis tõuseb kõver viimase täpi ümbruses, on ta seal < 0 , langeb kõver selle täpi ümbruses.

Väljendades sama mõtet analüütilises keeles, leiame nõutud tunnused: funktsioon $y = f(x)$ suureneb r. m. väärtuse x_0 ümbruses, kui tema tuletis sel r. m. väärtusel on positiivne; ta väheneb, kui nimetatud tuletis on negatiivne ja ümberpöördult.

Näited. 1) Joonises 40 on kujutatud funktsioon $y = 3\frac{1}{4} - x - x^2$

ja tema tuletis $y' = -1 - 2x$. Me näeme otsekohe, et vahemikus, milles y suureneb, on tema tuletis $y' > 0$, vahemikus, milles y väheneb, on tema tuletis $y' < 0$. Täpis, milles funktsiooni suurenemine lõpeb ja vähenemine algab, muutub tema tuletis positiivsetelt väärtustelt tulles nulliks üle minnes negatiivsetele väärtustele.

2) Joonis 41 kujutab funktsiooni $y = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x - 7)$ ja tema tuletist $y' = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 2) = \frac{1}{2}(x - 6)(x - 2)$. Me näeme, et r. m. vahemikus $-\infty$ kuni $+2$ on $y' > 0$, y suureneb; vahemikus $+2$ kuni $+6$ on $y' < 0$, y väheneb; vahemikus $+6$ kuni $+\infty$ on $y' > 0$, y suureneb. Täppides $x = +2$ ja $x = +6$, kus funktsioon y oma suurema ja vähema väärtuse võrreldes kõrvalevatega omandab, on tema tuletis



Joon. 42.

$y' = 0$. Esimesel korral, r. m. üleminekul väärtusest $+2$, muudab tuletis y' oma märgi $+$ -st $-$ -sele; teisel korral, r. m. üleminekul väärtusest $+6$ — ümberpöördukt.

Me ütleme: täpis $x = +2$, kus funktsioon y omandab oma suurema väärtuse, võrreldes kõikide selle viimase naabruses olevatega, — saab y maksimumiks, täpis $x = +6$, milles y -väärtus on vähem kõikidest selle naabruses olevatest — ta saab miinimumiks.

2. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi definitsioon.

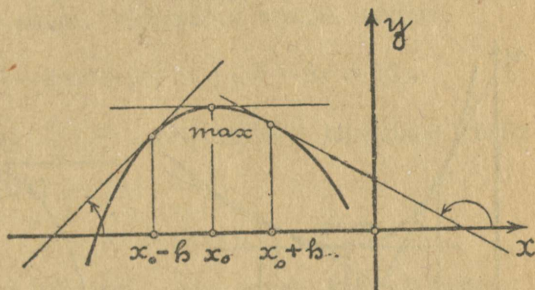
On funktsiooni $f(x)$ väärtus täpis x_0 suurem kui kõik teised, mis tema naabruses asuvad, siis nimetame seda väärtust $f(x_0)$ meie funktsiooni maksimumiks. On see väärtus vähem kõigist

tema naabruses olevatest, siis nimetame väärtust $f(x_0)$ funktsiooni $f(x)$ miinumiks (joon. 42).

3. Funktsiooni maksimumi ja miinumumi tunnused.

Saagu funktsioon $f(x)$ maksimumiks r. m. väärtusel x_0 . Valime selle naabruses väärtused $x_0 - h$ ja $x_0 + h$, mis endisele nii ligi saavad, kui iganes tahame, kui aga h küllalt väikeseks loeme. Võtame f -kõvera täpid abstsissidega $x_0 - h$, x_0 ja $x_0 + h$. Esimeses nendest (joon. 43) sünnitab puutuja terava nurga $+x$ -teljega, teises $-$ nuri nurga; esimese täpi ümbruses suureneb $f(x)$, teise ümbruses ta väheneb. Järjekult on $f'(x_0 - h) > 0$, $f'(x_0 + h) < 0$.

Kui tuletis $f'(x)$ muutub pidevalt, siis võib ta positiivsetelt väärtuselt enne täppi x_0 negatiivsetele pärast seda saada, ainult omandades täpis x_0 väärtuse null: $f'(x_0) = 0$.



Joon. 43.

Ka geomeetriliselt leiame sama resultaadi: täpis abstsissiga x_0 on $f(x)$ -kujukõveral rõhtus puutuja, $\tau = 0$, $\tan \tau = 0$, $f'(x_0) = 0$.

Kokku võttes saame järgmise lause:

R. m. väärtusel, millel funktsioon on maksimum, saab funktsiooni tuletis nulliks. R. m. üleminekul nimetatud väärtusest muudab funktsiooni tuletis oma märgi plussist miinuseks.

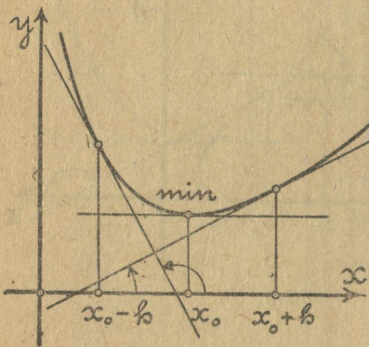
Überpöördult: sünnib säärane tuletise märgi muutumine r. m. üleminekul väärtusest x_0 , siis on $f(x_0)$ maksimum. Tõesti, et oletuse põhjal on $f'(x_0 - h) > 0$ ja $f'(x_0 + h) < 0$, siis suureneb $f(x)$ r. m. lähenemisel väärtusele x_0 ja väheneb edaspidisel x -i muutumisel: $f(x_0)$ on suurem tema naabruses olevatest väärtustest, ta on funktsiooni $f(x)$ maksimum.

Üleval leitud lause annab meile nõnda funktsiooni maksimumi tunnuse.

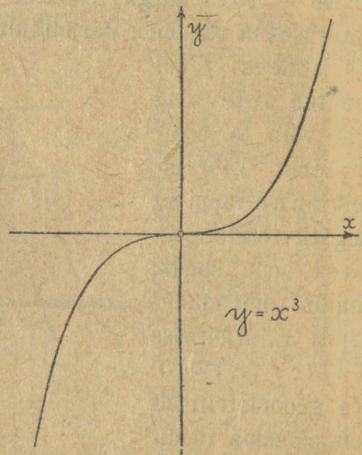
Samuti leiaksime funktsiooni miinimumi tunnuse (joon. 44):

R. m. väärtusel, millel funktsioon on miinimum, saab funktsiooni tuletis nulliks. R. m. üleminekul nimetatud väärtusest muudab funktsiooni tuletis oma märgi miinusest plussiks.

4. Märkus. Tuletise hävimist pole küllalt funktsiooni saamiseks



Joon. 44.



Joon. 45.

maksimumiks või miinimumiks. Seda tõestab juba niisugune lihtne

Näide. Olgu $y = x^3$. Selle funktsiooni tuletis y' on $3x^2$; see avaldus saab nulliks täpis $x_0 = 0$. Nagu joonisest 45 näeme, pole siin ega maksimumi ega miinimumi. Meie korral ei muuda tuletis oma märki r. m. üleminekul väärtusest x_0 . Tõesti enne seda, kui $x = -h$, on $y' = 3(-h)^2 = +$, pärast seda, kui $x = +h$, on $y' = 3(+h)^2 = +$. Funktsioon y kasvab kui r. m. lähenemisel väärtusele 0, nõnda ka tema edaspidisel muutumisel.

Nõude täitmine, et $f'(x)$ oleks null, on funkt-

siooni maksimumiks või miinumiks saamiseks tarvilik; ta ei ole aga mitte ka piisav.

5. Leitud tunnuste tarvitamine. Järgnev rida näiteid selgitab leitud tunnuste tarvitamist maksimum-miinum ülesannete lahendamisel.

Näide 1. On antud funktsioon:

$$y = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x - 7).$$

Leida tema maksimumid ja miinumid.

Täppides x_0 , kus y maksimumiks või miinumiks saab, peab y tuletis null olema. Sellepärast võtame tuletise:

$$y' = \frac{1}{6}(3x^2 - 24x + 36) = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 12),$$

võrratame ta nulliga: $\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 12) = 0$, lühendame kindla teguriga $\frac{1}{2}$, mis null pole:

$$x^2 - 8x + 12 = 0,$$

ja lahendame saadud võrrandi. See annab kaks x -väärtust:

$$x_0' = +2, \quad x_0'' = +6.$$

Need võiksid funktsiooni maksimumi või miinimumi anda. Vaatame, kas nad neid annavad, ja kui annavad, siis missuguse kahest nimelt. Selleks uurime tuletise märgi muutumist r. m. üleminekul väärtustest $x_0' = +2$ ja $x_0'' = +6$. Et seda võimalikult kergesti teha, lahutame tuletise teguriteks:

$$y' = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 6),$$

ja seame endile kokku tabelikesed tuletise märkidest enne ja pärast kohti $x_0' = +2$, $x_0'' = +6$. Selle juures paneme tähele, et me arvu h kui väikeseks tahes võime lugeda ja et järjekult, kui ta teise liidetavaga ühiselt ette tuleb, ikka selle viimase märk ülekaalu saab. Me leiame:

x	$\frac{1}{2}(x-2)(x-6)$	märk	x	$\frac{1}{2}(x-2)(x-6)$	märk
$+2-h$	$\frac{1}{2} \cdot (-h) \cdot (-h-4)$	+	$+6-h$	$\frac{1}{2} \cdot (4-h) \cdot (-h)$	-
$+2$	$\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (-4)$	0	$+6$	$\frac{1}{2} \cdot (+4) \cdot 0$	0
$+2+h$	$\frac{1}{2} \cdot (+h) \cdot (h-4)$	-	$+6+h$	$\frac{1}{2} \cdot (4+h) \cdot (+h)$	+

Me näeme sellest, et mõlemal korral tuletise märk muutub: esimesel plussist miinuseks, teisel — miinusest plussiks. Täpis $x_0' = +2$ saab meie funktsioon maksimumiks, täpis $x_0'' = +6$ — miinumiks. Samad resultaadid saime ennem joonisest 41.

Märkus. Funktsiooni maksimum ei ole tema väärtus, mis kõigist teistest tema väärtustest suurem, vaid ainult nendest, mis temaga otsekoheses naabruses: meie näites on y maksimum $= \frac{1}{6}(2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 - 7) = +4\frac{1}{6}$, kuna meie funktsiooni väärtus x -i küllase kasvamisega nii suureks saab kui iganes tahame. Analoogiline märkus on maksev funktsiooni miinimumi kohta.

Näide 2. Olgu $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. Leiame selle funktsiooni maksimumid ja miinimumid.

Võtame tema tuletise:

$$y' = 3x^2 + 6x + 3,$$

võrratame selle nulliga: $3x^2 + 6x + 3 = 0$,

lühendame kolmega: $x^2 + 2x + 1 = 0$

ja leiame saadud võrrandi $(x+1)^2 = 0$ juured:

$$x_0' = x_0'' = -1.$$

Meie võrrandil on kaks kokkulangevat juurt — 1.

Urime tuletise märgi muutumist r. m. üleminekul väärtusest $x_0 = -1$. Nagu näeme tabelikesest:

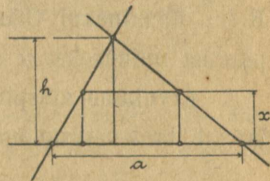
x	$y' = 3(x+1)^2$	märk
$-1-h$	$3 \cdot (-h)^2$	+
-1	$3 \cdot 0^2$	0
$-1+h$	$3 \cdot (+h)^2$	+

ei muuda tuletis täpis $x_0 = -1$ märki: meie funktsioonil pole seal ei maksimumi ega miinimumi. Vastaval kõveral on selles täpis rõhtus puutuja, kuid kõver läheb seal ühelt poolt temast teisele: $x_0 = -1$ on kõvera käänutäpiks. Lugeja tehku joonis.

6. Üldine juhised funktsiooni maksimumide ja miinimumide leidmiseks. Võtame funktsiooni tuletise, võrratame selle nulliga ja leiame saadud võrrandi juured; kirjutame nende abil meie tuletise avalduse korrutisena, uurime tuletise märgi käiku r. m. üleminekul igaühelst leitud väärtusest ja rakendame leitud tunnused.

Näide 3. Kolm tänavat piiravad kolmnurkset tükki maad. Sellele tahetakse nii suur maja püstkülükuse alusega ehitada, kui iganes võimalik. Kuidas peab aluse mõõdud valima?

Andmeteks loeme kolmnurga aluse a (joon. 46), kõrguse h ja selle alustäpi. Ühe maja-aluse külje asetame kõige suuremale kolmnurga küljele.



Joon. 46.

Tähistame otsitava püstkülüku mõõdud b ja x ; siis on tema pind

$$s = bx.$$

Paistab, nagu oleneks s kahest rippumata muutujast. Tõepoolest on nemad aga seotud Kolmnurkade sarnasusest, millede alused on a ja b , leiame:

$$\frac{b}{h-x} = \frac{a}{h}, \text{ kust } b = \frac{a}{h}(h-x).$$

Sellepärast on

$$s = \frac{a}{h}(h-x)x.$$

Selle avalduse peame x -i kohaselt valides maksimumiks tegema. Et $a:h$ on kindel tegur, siis saab s maksimumiks ühel ajal avaldusega $(h-x)x$, mille u -ga tähistame:

$$u = (h-x)x = hx - x^2.$$

Selle u tuletis on $h-2x$;

võrratame ta nulliga: $h-2x=0$,

ja lahendame saadud võrrandi; me leiame

$$x_0 = \frac{h}{2}.$$

Uurime u' märgi käiku r. m. üleminekul väärtusest $x_0 = \frac{h}{2}$. Tähistame a -ga nii väikese arvu, kui iganes tahame, ja kirjutame tabeli:

x	$u' = h - 2x$	märk
$\frac{h}{2} - \alpha$	$h - h + 2\alpha$	+
$\frac{h}{2}$	$h - h$	0
$\frac{h}{2} + \alpha$	$h - h - 2\alpha$	-

R. m. üleminekul väärtusest $x_0 = \frac{h}{2}$ muutub tuletise u' märk plussist miinuseks, u saab maksimumiks, temaga ka s .

Arvutame aluspinna kõige suurema väärtuse. Meie korral langeb ta s -maksimumiga kokku. Kui $x = \frac{h}{2}$, siis on

$$b = \frac{a}{h} \left(h - \frac{h}{2} \right) = \frac{a}{2}$$

ja

$$s = \frac{h}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4} ah.$$

Antud kolmnurga pind on $\frac{1}{2} ah$, sellega on kõige suurema püstküliku pind, mida võib antud kolmnurka joonistada, pool viimase pinnast.

Näide 4. Telgi katteks on tarvitada antud riidepind s . Kuidas peab valima telgi mõõdud, et tema mahutus oleks maksimaalne?

Olgu telgi aluse raadius r , kõrgus h ja külgpinna sünnitaja l (joon. 47). Telgi maht

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

See peab maksimum olema. Selle juures on külgpinna suurus

$$s = \pi r l,$$

ja on r , h ja l seotud valemis:

$$r^2 + h^2 = l^2.$$

Avaldame kõik suurused r -i funktsioonidena:

$$l = \frac{s}{\pi r}, \quad h = \sqrt{l^2 - r^2},$$

ehk
$$h = \sqrt{\frac{s^2}{\pi^2 r^2} - r^2},$$

järjekult
$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{\frac{s^2}{\pi^2 r^2} - r^2}$$

$$= \frac{1}{3} r \sqrt{s^2 - \pi^2 r^4}.$$

Selle funktsiooni me peame maksimumiks tegema. Ta saab niisuguseks ühiselt avaldusega

$$w = r \sqrt{s^2 - \pi^2 r^4}.$$

Viimase tuletis r -i suhtes

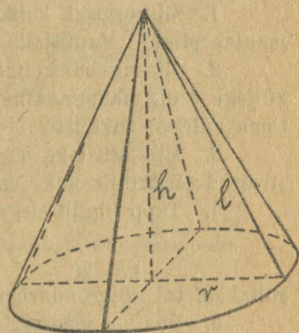
$$w' = \sqrt{s^2 - \pi^2 r^4} + r \cdot \frac{-4\pi^2 r^3}{2 \sqrt{s^2 - \pi^2 r^4}} = \frac{s^2 - \pi^2 r^4 - 2\pi^2 r^4}{\sqrt{s^2 - \pi^2 r^4}} = \frac{s^2 - 3\pi^2 r^4}{\sqrt{s^2 - \pi^2 r^4}}.$$

Selle peame nulliga võrratama. Kõik arvud, mis tema avalduses esinevad, on lõplikud, sellega ka viimase murru nimetaja. Järjekult peab lugeja null olema:

$$s^2 - 3\pi^2 r^4 = 0,$$

kust saame, võttes positiivse reaalse juure,

$$r = \sqrt{\frac{s}{\pi \sqrt{3}}}.$$



Joon. 47.

Teist, negatiivset juurt, uurida pole tarvis: r on oluliselt positiivne suurus.

Nagu otsekohe näha, on $w' > 0$, kui r on vähem leitud arvust, ja < 0 , kui r on temast suurem: leitud r annab telgi mahu maksimumi.

Et telgi mõõtude kohta selgusele jõuda, otsime saadud r -ile vastava h me leiame: $h = r\sqrt{2}$.

Telgi maksimaalne maht on

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \pi \left(\sqrt{\frac{s}{\pi\sqrt{3}}} \right)^3.$$

Ülesanded.

1. Missugusel kolmnurgal kahe antud küljega a ja b on maksimaalne pind? Muutujaks võtta nurk kahe antud külje vahel.
2. Missugusel kolmnurgal antud ümbermõõduga $2p$ ja ühe antud küljega c on maksimaalne pind? Tarvitada kolmnurga pinna-avaldust tema külgede pikkustes.
3. Missugusteks osadeks peab lõigu a jaotama, et nendest konstruitud püstkülik oleks maksimaalse pinnaga?
4. Täpp liigub sirget mööda seaduse järele:

$$s = a \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \epsilon \right).$$

Millal on tal kõige suurem ja millal kõige vähem kiirus?

5. Püstkoonusesse, mille aluse raadius on r ja kõrgus h , kõige suurema mahuga silinder kujundada.
6. Ellipsisse $4x^2 + 9y^2 = 36$ kujundada püstkülik maksimaalse pinnaga.
7. Kerasse, mille raadius R , kujundada silinder kõige suurema mahuga.
8. Kerasse, mille raadius R , kujundada koonus maksimaalse mahuga.

10. Integraalarvutuse põhi-ülesanne.

1. Pindfunktsioon ja tema tuletis. Olgu kõver joon. 48 antud funktsiooni $y = f(x)$ kujuks; olgu a kindel abstsiss ja AM temale vastav ordinaat; olgu x mõni abstsissväärtus ja XP sellele vastav ordinaat. Tähistame pinna $AMPX$, mida

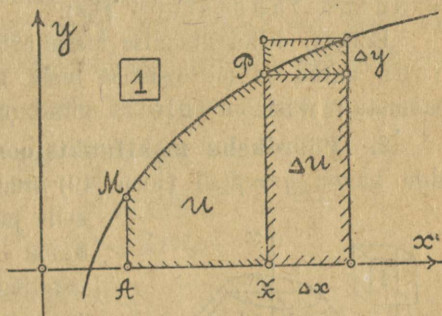
1) T. a. g. p. § 1.

piiravad kõver, x -telg ja kaks ordinaati, tähega u . Igale x -väärtusele vastab üks ja ainult üks kindel pind u : pind u on abstsissi x funktsioon; nimetame viimast $F(x)$:

$$u = F(x).$$

Seame endale ülesandeks pinda u määrata, teisiti, funktsiooni $F(x)$ leida. Selleks katsume otsitavat $F(x)$ siduda antud $f(x)$ -ga. Leiame nimelt pinna tuletise äärabstsissi x -i suhtes. Et meil $F(x)$ -avaldus puudub, siis pole võimalik leida nõutud tuletist analüütilisel teel. Katsume seda geomeetriliselt teha.

Anname selleks x -i väärtusele, millele pind u vastas, kasvu Δx , nõnda et uus abstsissväärtus on $x + \Delta x$; sellele viimasele vastab uus pinna väärtus; tähistame teda $u + \Delta u$; Δu on pinnakasv, mis vastab r. m. kasvule Δx ; vastaku sellele ordinaadi kasv Δy . Nagu joonisest näeme, peitub pinna kasv Δu kahe püstküliku pinna vahel:



Joon. 48.

$y \cdot \Delta x < \Delta u < (y + \Delta y) \cdot \Delta x$.

Tuletise u' leidmisel tuleb meil määrata piir, millele läheneb suhe $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ kasvu Δx lõpmatul lähenemisel nullile. Sellel lähenemisel nullile on $\Delta x \neq 0$; me võime temaga jagada:

$$y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Keskmine pinna kasvamise kiirus vahemikus Δx on sellega kahe suuruse vahele suletud; üks nendest y ei olene kasvust Δx , teine oleneb temast Δy kaudu. Kui $\Delta x \rightarrow 0$, saab funktsiooni $f(x)$ pidevuse tõttu ka $\Delta y \rightarrow 0$, sellega $y + \Delta y \rightarrow y$,

järjelikult peab ka $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, mis y ja $y + \Delta y$ vahel, lõpmata lähene-
nema y -le:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y.$$

Teisiti:

$$u' = y$$

ehk

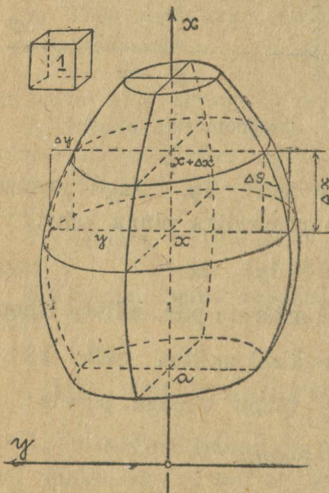
$$F'(x) = f(x).$$

Sõnades: pinna u tuletis tema äär-abstsissis-
suhtes on tema äär-ordinaadi väärtus.

Nagu võrdusest $F'(x) = f(x)$ näeme, peame pinna leidmi-
seks säärase funktsiooni $F(x)$ leidma, mille tuletis
on antud funktsioon $f(x)$.

Ennem, differentsimise ülesannetes, oli meil mõni funkt-
sioon antud ja me otsisime tema tuletist; nüüd on meile
teadmata funktsiooni tuletis antud, otsitakse algfunktsiooni.

2. Pöördkeha mahtfunktsioon ja tema tuletis. Pöör-
dugu kõver $y = f(x)$ (joon. 49) ümber x -telje; ta moodustab



Joon. 49.

selle juures pöördpinna. Lõi-
kame viimast tasapinnaga, mis
 x -teljega risti ja temal lõigu
 $x = a$ sünnitab, lühidalt tasa-
pinnaga $x = a$. Peale selle
valime vabalt, mingisuguses
kauguses x algusest, teise tasa-
pinna, samuti risti x -teljega.
Pöördpind ja nimetatud kaks tasa-
pinda piiravad teatavat ruumala;
olgu selle nimeks v . Igale x -tasa-
pinnale vastab oma v suurus:
 v on x -i funktsioon:

$$v = G(x).$$

Seome selle otsitava funktsiooni
antud $f(x)$ -ga. Selleks leiame
tema tuletise. Andes x -ile kasvu Δx saame temale vas-
tava mahu kasvu Δv ja ordinaadi y kasvu Δy . Me näeme

joonisest, et mahu kasvu suurus kahe silindri mahu vahel peitub:

$$\pi y^2 \cdot \Delta x < \Delta v < \pi(y + \Delta y)^2 \cdot \Delta x.$$

See annab meile võimaluse mahu keskmist kasvamise kiirust abstsissi kasvamisel sulutada kahe raja vahele:

$$\pi y^2 < \frac{\Delta v}{\Delta x} < \pi(y + \Delta y)^2.$$

Tuletise v' leidmiseks laseme Δx lõpmata läheneda nullile; pahem pool meie võrratuste reast ei olene kasvust Δx ; ta jääb selle Δx nullile lähenemise protsessi vältusel muutumatuks; paremal pool, avalduses $\pi y^2 + 2\pi y \cdot \Delta y + \pi(\Delta y)^2$, läheneb Δy ja seda enam $(\Delta y)^2$ lõpmata nullile, mille tõttu kaks viimast liiget piiris hävivad. Et nõnda parempoolne osa meie võrratustes lõpmata pahempoolsele osale πy^2 läheneb, siis peab temale samuti lähenema $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, mis nende kahe vahel:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \pi y^2,$$

teisiti

$$v' = \pi y^2,$$

ehk veel

$$G'(x) = \pi f^2(x).$$

Tähis $f^2(x)$ tähendab $[f(x)]^2$.

Pöördkeha mahu tuletis on π kord äärmise pöörleva ordinaadi ruut.

Et nimetatud osa pöördkeha mahust saada, tuleb meil niisugune funktsioon $G(x)$ leida, et tema tuletis võrduks teatud funktsiooniga $\pi \cdot f^2(x)$.

3. Liikumise seaduse leidmine, kui kiirus aja funktsioonina teada. Olgu täpi kiirus

$$c = c(t);$$

selle avalduse põhjal võime saada täpi kiiruse igal ajamomendil. Missugune on seadus, mis käidud teed s ajaga t seob?

Me teame (v. 6·6), et kiirus on tee tuletis aja suhtes, tähendab

$$s' = c(t);$$

nõutud seaduse saamiseks tuleb meil säärane funktsioon $s(t)$ leida, mille tuletis on antud $c(t)$.

4. Üldine integraalarvutuse põhi-ülesande formuulimine. On antud mõni funktsioon $f(x)$. Leida sääranne x -i funktsioon $F(x)$, et tema tuletis oleks $f(x)$. Funktsiooni $F(x)$, mis seda nõuet täidab, nimetatakse $f(x)$ algfunktsiooniks ehk integraaliks.

Selle algfunktsiooni $F(x)$ leidmise tehet nimetatakse antud funktsiooni $f(x)$ integreerimiseks. Ta on vastastehe differentseerimisele. Sõna integreerimine seletatakse pärastpoole.

5. Lause null-tuletisest. Me nägime (v. 7-7), et kui funktsiooni väärtus jääb konstantseks, siis on tema tuletis null. Võib kergesti tõestada, et maksev on ka ümberpööratud lause: on funktsiooni tuletis null, siis on funktsioon ise konstantne. Tõesti, on $y' = 0$, siis ei ole tuletis y' positiivne ega negatiivne; funktsioon y ei kasva ega vähene — ta on konstantne.

6. Lause. On $F(x)$ funktsiooni $f(x)$ integraaliks, siis on seda ka $F(x) + C$, kus C mis konstanti tahes tähendab. Tõesti: oletuse põhjal on $F'(x) = f(x)$; summa $F(x) + C$ tuletis on $F'(x) + 0$, seega $= f(x)$, tähendab, ka $F(x) + C$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks.

7. Põhilause. On $F(x)$ mõni funktsiooni $f(x)$ integraal, siis saadakse iga teine niisugune sellest esimesest temale teatava konstandi lisamisel.

Tõesti, olgu peale $F(x)$ ka $F_1(x)$ funktsiooni $f(x)$ integraaliks; siis on kui

$$F'(x) = f(x),$$

nõnda ka

$$F_1'(x) = f(x);$$

sellepärast

$$F_1'(x) - F'(x) = 0,$$

ehk

$$[F_1(x) - F(x)]' = 0.$$

On aga tuletis null, siis on tuletatav funktsioon konstantne:

$$F_1(x) - F(x) = \text{konst},$$

kust

$$F_1(x) = F(x) + \text{konst},$$

m. o. t. t.

Meie põhilausest võime ka järgmiselt lugeda: on $F(x)$ üks funktsiooni $f(x)$ integraalidest, siis peituvad kõik teised selle integraalid avalduses

$$F(x) + C,$$

kus C tähendab mis konstanti tahes.

Sellest järgneb: et funktsiooni $f(x)$ integraale saada, on tarvis ainult üks nendest leida; kõik teised saadakse konstantide lisamisel sellele leitule.

Konstanti C , millel võib mis väärtus tahes olla, nimetatakse määramatuks integrimiskonstandiks.

8. Määratu integraali mõiste. Ülesandel: leida funktsioon, mille tuletis võrduks antud funktsiooniga $f(x)$, on, nagu nägime, lõpmata palju lahendusi. Selles mõttes on ta määratu. On $F(x)$ funktsioon, mis rahuldab tingimust, et $F'(x)$ oleks võrdne $f(x)$ -ga, siis peituvad kõik teised peres: $F(x) + C$. Selle funktsioonide pere üldist etendajat $F(x) + C$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määramatuks integraaliks.

9. Määratud integraali mõiste. Lisame endisele tingimusele, et otsitava funktsiooni tuletis võrduks antud funktsiooniga $f(x)$, veel tingimuse, et tal antud täpis $x = b$ oleks antud väärtus B . Näitame, et ta on nende kahe tingimusega täiesti määratud; teisiti, et üks ainus funktsioon leidub, mis mõlemaid nõudeid rahuldab.

Tõesti, olgu $F(x)$ üks nendest funktsioonidest, millede tuletis on $f(x)$; siis peituvad kõik teised, mis sama tingimust täidavad, valemis $F(x) + C$. Selles peitub ka see nendest, mis täpis $x = b$ omandab väärtuse B . Konstandi C väärtuse, mis vastab otsitavale, me leiame nõudest, et täpis $x = b$ avaldus $F(x) + C$ peab võrduma B -ga; tähistes:

$$F(b) + C = B, \text{ kust } C = B - F(b);$$

sellega on nõutud integraal

$$F(x) + B - F(b).$$

On otsekohe näha, et ta ja ainult tema rahuldab kõiki tema peale pandud tingimusi.

Selle integraali leidmise ülesanne, mis ülevalnimetatud kaht tingimust täidab, on täiesti määratud. Seda $f(x)$ integraali, millel antud täpis antud väärtus, nimetame määratud integraaliks.

Rida ülesandeid. Järgnevate ülesannete lahendamine on praegu tarvitatud mõttekäigu kordamine konkreetsetel näidetel. Lugeja tehku iga ülesande korral vastav joonis.

10. Pindade arvutamine.

Näited. 1) Leiame pinna, mis peitub joone $y=b$, abstsissstelje ja kahe ordinaadi vahel, mis vastavad abstsissidele a ja x .

Selleks leiame niisuguse $r. m. x$ -i funktsiooni, mille tuletis on b ; üks nendest on bx ; põhilause järele sisalduvad kõik teised, sellepärast ka otsitav, avalduses $bx+c$. Määrame konstandi c . Nihkub x pahemale poole kuni täpini a , väheneb otsitav pind nullini:

$$\text{kui } x=a, \text{ on } bx+c=0,$$

tähendab,

$$ba+c=0, \quad c=-ba;$$

sellepärast on otsitud pind: $bx-ba=b(x-a)$.

See on õige: püstküliku mõõdud, mille pinda me otsime, on $x-a$ ja b .

2) Leiame pinna, mis peitub joone $y=x$, abstsissstelje ja ordinaadi vahel täpis x .

Alumist raja-abstsissi ei ole antud; joonisest näeme, et ta algusele vastab ja null on. Üks funktsioonidest, mille tuletis on x , on $\frac{1}{2}x^2$; kõik teised niisugused on esitatud avalduses

$$\frac{1}{2}x^2+c.$$

Selles peitub ka otsitav pind; me saame ta kohasel c valikul. Kui parempoolne pinna raja nihkuks pahemale poole ja lõpuks satuks ühte algusega, oleks pind nende vahel null:

$$\text{kui } x=0, \text{ on } \frac{1}{2}x^2+c=0;$$

seega $c = 0$ ja nõutud pind:

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y.$$

See on täisnurkse kolmnurga pind, mille kaatetid on x ja y , nagu peab olema.

3) Leiame pinna, mida piiravad sirge $y = mx + n$, x telg ja kaks ordinaati täppides a ja x (joon. 50).

Üheks funktsiooniks, mille tuletiseks on $mx + n$,

on
$$\frac{1}{2}mx^2 + nx.$$

Tõesti
$$\left(\frac{1}{2}mx^2 + nx\right)' = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2x + n = mx + n.$$

Kõik teised, tähendab ka otsitav, sama tuletisega peituvad

avalduses
$$\frac{1}{2}mx^2 + nx + c.$$

Et nõutud pinda saada, tuleb c kohaselt valida. Nihkub abstsiss x ikka lähemale ja lähemale a -le, väheneb u nullini:

kui $x = a$, on
$$\frac{1}{2}ma^2 + na + c = 0;$$

seega
$$\frac{1}{2}ma^2 + na + c = 0,$$

kust
$$c = -\frac{1}{2}ma^2 - na;$$

järjelikult on otsitud pind

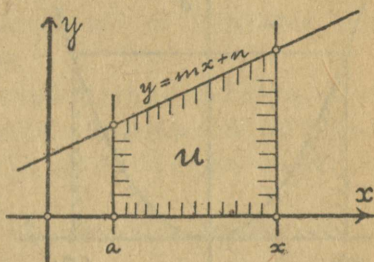
$$u = \frac{1}{2}m(x^2 - a^2) + n(x - a).$$

Teises kujus esineb ta avaldusena:

$$\frac{1}{2} \cdot (x - a) [m(x + a) + 2n]$$

ehk
$$\frac{1}{2} \cdot (x - a) \cdot [(mx + n) + (ma + n)].$$

Nurgelistes sulgudes seisab trapetsi rööpkülgede summa, $x - a$ on selle kuju kõrgus: trapetsi pind on $\frac{1}{2}$ nende korrutisest, nagu peab olema.



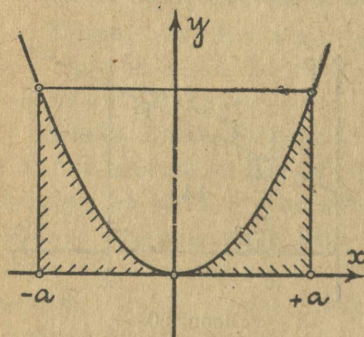
Joon. 50.

4) Leiame pinna, mida piirab parabool $x^2 = 2py$, x -telg ja kaks ordinaati täppides $-a$ ja $+a$ (joon. 51). Üks funktsioonidest, mille tuletis on $\frac{1}{2p}x^2$, on: $\frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{3}x^3$, sellepärast sisalduvad kõik teised säärased avalduses: $\frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{3}x^3 + c$.

Et nõutud pinna saada, valime kohaselt c . Otsitud pind algab ordinaadiga täpis $-a$; seal on ta null:

$$\text{kui } x = -a, \text{ on } \frac{1}{6p}x^3 + c = 0;$$

teiselt poolt: kui $x = +a$, on sama avaldus nõutud u .



Joon. 51.

Esimese rea põhjal on $c = \frac{a^3}{6p}$, sellega teisest

$$u = \frac{1}{6p}a^3 + \frac{a^3}{6p} = \frac{a^3}{3p}.$$

Püstküliku pind, mida piiravad x -telg ja nimetatud kaks ordinaati, on

$$2a \cdot \frac{a^2}{2p} = \frac{a^3}{p}.$$

Paraboolilt piiratud pind on $\frac{1}{3}$ sellest püstküliku pinnast: meie

parabool jagab püstküliku, millesse ta joonistatud, osadeks, mis suhtuvad kui 1:2.

5) Leiame pinna, mida piirab sinuskõvera laine kaarte teljega.

Siin on rajadeks kahe teineteisele järgneva täpi abstsissid, milledes sinuskõver lõikab telge, tähendab, näiteks $x=0$ ja $x=\pi$. Pindfunktsiooni tuletis on $\sin x$; sellega üldine pinna avaldus meie korral

$$-\cos x + c;$$

täpis $x=0$ on see pind 0: $-\cos 0 + c = 0$, sellega $c=1$;

täpis $x=\pi$ saab see pind otsitavaks u :

$$-\cos \pi + c = u,$$

nõnda on $u = c + 1$, ehk c väärtuse tõttu: $u = 2$.

11. Mahtude arvutamine.

Näited. 1) Sirge $y=b$ pöörleb ümber x -telje. Leida maht, mida piiravad sünnitatud pöördepind ja kaks tasapinda, mis täppides a ja x risti x -teljega.

Nõutud mahu tuletis on πb^2 ; järjekult saame tema väärtuse avaldusest $\pi b^2 x + c$ kohasel c valikul. Kui x -i laseme väheneda a -ni, muutub maht v nulliks:

$$\text{kui } x = a, \text{ on } \pi b^2 x + c = 0,$$

sellega on $c = -\pi b^2 a$ ja otsitud maht

$$v = \pi b^2 x - \pi b^2 a = \pi b^2 (x - a).$$

Niisugune ta peab ka olema: πb^2 on sünnitatud silindri põhja pind, $x - a$ tema kõrgus.

2) Sirge $y = mx$ pöörleb ümber x -telje. Leida maht, mida piirab nõnda sünnitatud pöördepind koos tasapinnaga, mis pöördtelge risti lõikab tema täpis x .

Otsitava mahu tuletis on $\pi m^2 x^2$; sellepärast on tema avaldus $\frac{1}{3} \pi m^2 x^3 + c$, kus c veel tuleb kohaselt valida. Kui piirav tasapind ikka edasi pahemale poole nihkub ja lõpuks täppi $x = 0$ lõikab, saab uuritav maht nulliks:

$$\text{kui } x = 0, \text{ on } \frac{1}{3} \pi m^2 x^3 + c = 0;$$

järjekult on $c = 0$ ja $v = \frac{1}{3} \pi m^2 x^3$.

Teisiti $v = \frac{1}{3} \pi m^2 x^2 \cdot x = \frac{1}{3} \pi y^2 \cdot x$.

Püstkoonuse maht on $\frac{1}{3}$ tema põhja pinna korru-tisest kõrgusega.

3) Parabool $y^2 = 2px$ pöörleb ümber x -telje. Leida maht, mida piirab nõnda sünnitatud pöördepind koos tasapinnaga, mis täpis $x = a$ on risti x -teljega (joon. 52).

Selle mahu tuletis on $\pi y^2 = 2\pi r x$;
üks funktsioonidest, millel säärane tuletis, on

$$2\pi r \cdot \frac{1}{2} x^2 = \pi r x^2;$$

sellepärast peituvad kõik teised, mis nimetatud tingimust rahuldavad, nende seas ka otsitav, avalduses:

$$\pi r x^2 + c.$$

Nihkub piiraja tasapind lõikumiseni algusega, saab v nulliks:

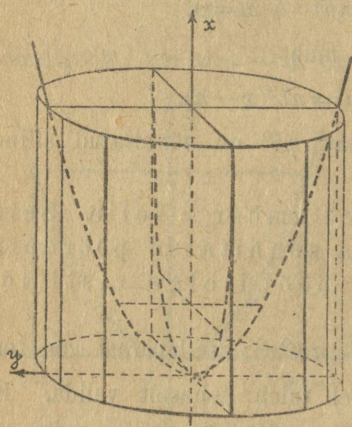
kui $x=0$, on $\pi r x^2 + c = 0$;
tähendab $c=0$, ja otsitud maht
 $v = \pi r x^2$.

Silindri maht, millel sama põhi
ja kõrgus nagu meie pöördkeha
osalgi, on

$$\pi y^2 x = 2\pi r x^2.$$

Paraboloid jagab
silindri, millesse ta
kujundatud, kaheks
võrdseks osaks.

4) Ring $x^2 + y^2 = a^2$
pöörleb ümber x -telje.
Leiame tema sünnita-
tud kera mahu.



Joon. 52.

Mahu tuletis on $\pi y^2 = \pi(a^2 - x^2)$.

Üks funktsioonidest, millel säärane tuletis, on

$$\pi(a^2 x - \frac{1}{3} x^3),$$

kõik teised peituvad avalduses

$$\pi(a^2 x - \frac{1}{3} x^3) + c.$$

Selles peitub ka nõutud maht v . Pahemalt poolt piirab teda
tasapind $x = -a$, paremalt — tasapind $x = a$; sellepärast

$$\pi[a^2(-a) - \frac{1}{3}(-a)^3] + c = 0,$$

$$\pi(a^2 \cdot a - \frac{1}{3} a^3) + c = v.$$

Järjekult:

$$c = \frac{2}{3} \pi a^3$$

ja

$$v = \frac{2}{3} \pi a^3 + \frac{2}{3} \pi a^3 = \frac{4}{3} \pi a^3,$$

nagu peab olema.

12. Näited mehaanikast.

1) Täpp liigub konstantse kiirusega c oma orbiiti mööda. Leida liikumise seadus.

Siin on meil antud kiirus igal ajamomendil; nõutakse täpi kohta, tähendab, täpi kaugust s orbiidil teatavast nulltäpist temal.

Me teame, et

$$s' = c,$$

järjekult on

$$s = ct + k,$$

kus k on esiotsa määramata konstant. Niipea kui täpi koht ühel ainsal ajal antud, on k teada. Tõesti, olgu näiteks aja algusel, kus $t = 0$, $s = s_0$;

siis on

$$s_0 = c \cdot 0 + k;$$

tähendab

$$k = s_0$$

ja

$$s = ct + s_0.$$

2) Täpp liigub kiirusega, mis kasvab võrdeliselt ajaga. Aja algusel on ta tee s_0 . Leida tema liikumise seadus.

Et kiirus c kasvab võrdeliselt ajaga, siis on ta lineaarfunktsioon ajast; kirjutame viimast:

$$c = gt + c_0.$$

Tee on niisugune funktsioon ajast, mille tuletis on $gt + c_0$.

Üheks sääraseks funktsiooniks on

$$\frac{1}{2} gt^2 + c_0 t;$$

kõik teised, tähendab, ka otsitav, peituvad avalduses

$$\frac{1}{2} gt^2 + c_0 t + k.$$

Et nõutavat teed leida, tuleb k kohaselt valida. Kui $t = 0$,

on $s = s_0$, sellega

$$\frac{1}{2} gt^2 + c_0 t + k = s_0,$$

tähendab,

$$k = s_0$$

ja

$$s = \frac{1}{2} gt^2 + c_0 t + s_0.$$

Kui kiirus kasvab võrdeliselt ajaga, siis on tee ruutfunktsioon ajast.

Liikumist, milles kiirus kasvab võrdeliselt ajaga, nimetatakse ühtlaselt kiirendatuks. Sellepärast: ühtlaselt kiirendatud liikumise korral oleneb tee ajast paraboolselt (v. 6·8 ja T. a. g. p. 20·7 ja 8).

13. Märkus integrimisülesande määramatuse kohta. Funktsiooni differentimine annab ikka ühe ainsa tuletise; vastastehe — integrimine — lõpmata palju integraale; selles mõttes on ta määramata. Teda võib määratuks teha nõudega: integraal omandagu antud täpis antud väärtus.

Analoogiline nähtus esineb ka mitmel puhul elementaarmatemaatikas. Kuna näiteks ruutu tõstmisel ikka üks ainus resultaat, viib selle vastastehe, ruutjuure leidmine antud arvust, kahele. Ruutjuure leidmise ülesanne saab määratuks, kui resultaati kuidagi piirata, näiteks nõuda, et ta oleks positiivne.

Tehe, mis on antud kaare sinuse leidmisele vastastehteks, nimelt kaare leidmine, mis vastab antud sinusele, on ka määramata; on üks tema lahendus x käes, siis peituvad kõik teised valemite

$$x + 2\pi \cdot n \text{ ja } \pi - x + 2\pi \cdot n,$$

kus n on täisarv.

Ülesanne saab määratuks, kui näiteks nõuda, et lahendus peituks $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$ vahel.

Kõige selgemini esineb integrimisülesande määramatus meie näidetes mehaanikast. Kuigi antud kiirusfunktsioon $c(t)$ määrab liikumise muutumise ühelt ajamomendilt teisele, jääb siiski täiesti vabaks, missugusel orbiidi osal sünnib liikumine. See vabadus kaob, niipea kui meile liikuva täpi koht orbiidil ühel ainsal silmapilgul teada, näiteks, kui meile tema seis aja algusel antud on. Koos selle algandmega määrab antud kiirusfunktsioon liikumise täiesti.

Ülesanded.

1. Leida pind, mida piirab kõver $y = \frac{1}{x^2}$, ordinaat täpis $x = 1$ ja x -telg.

2. Leida pind, mida piiravad sirged

$$y = 2x, y = 5x, x = 2.$$

3. Leida pind sirgete vahel

$$y = \frac{1}{2}x, y = 3x - 2, x = 1.5, x = 3.$$

4. Leida pind kõvera $y = 3 - 2x - x^2$ ja x -telje vahel.
5. Leida pind kõvera $y = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x - 7)$, x -telje ja kahe ordinaadi vahel täppides $x = +2$ ja $x = +6$.
6. Leida pind kõverate vahel $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ vahemikus, mis nende kahe teineteisele järgneva ühistäpiga määratud.
7. Püsthüperbool $xy = 1$ pöörleb ümber x -telje. Leida maht, mida piirab sünnitatud pöördpind ja tasapind $x = 1$.
8. Ellipsis $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pöörleb oma suure telje ümber. Leida sünnitatud „pikendatud ellipsoidi“ maht.
9. Sama ellipsis pöörleb oma vähema telje ümber. Leida sünnitatud „lamendatud ellipsoidi“ maht.
10. Hyperbool $4x^2 - 9y^2 = 36$ pöörleb ümber x -telje. Leida selle juures sünnitatud pöördpinna poolt piiratud mahu osa tasapindade vahel $x = +3$ ja $x = +5$.

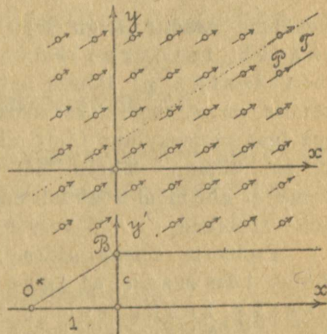
11. Teine integraalarvutuse põhi-ülesande käsitamise viis.

1. Integraalarvutuse põhi-ülesanne (v. 10⁴) väljendub geomeetriselises kattes järgmiselt: on antud kõvera tõus (v. 7⁶) tema täpi abstsisside funktsioonina. Leida kõver.

2. Näide 1. Olgu igas täpis abstsissiga x kõvera tõus $y' = \text{konst}$, näiteks c , olgu x missugune tahes. Leiame kõvera.

Kujutame xy' -teljestikus funktsiooni $y' = c$; saame sirge (joon. 53), mis rööbiti x -teljega ja asub kauguses c temast. Lõigaku ta y -telge täpis B . Valime x -teljel pooluse O^* kauguses -1 algusest ja tõmbame kiire O^*B . Saame nurga α O^*B , mille tangens määrab otsitava joone tõusu, teisiti tema puutuja sihi igas joone täpis. Kui otsitav joon läheks näiteks läbi täpi P xy -tasapinnas, siis oleks tema puutuja selles täpis $PT \parallel O^*B$.

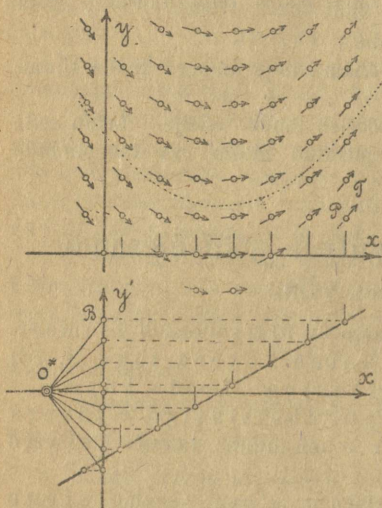
Tõmbame igas xy -tasapinna täpis pisikese noolekese, mis määraks puutuja sihti, kui y -kõver läheks läbi selle täpi. Kõik need noolekesed moodustavad xy -tasapinnas „siht-



Joon. 53.

välja. y -joone leidmise probleem seisab nüüd selles, nimetatud sihtväljas niisugune joon tõmmata, mille puutuja igas tema täpis langeks kokku noolega, mis selles täpis olemas.

Nagu otsekohene näeme, on meie ülesande lahendused sirged. Nad on kõik rööbiti kiirega O^*B , sellepärast rööbiti ka üksteisega. On üks nendest integraaljoontest leitud, saadakse sellest kõik teised rööplükete abil, teisiti endistele ordinaatidele y konstandi lisamisel. Lugeja tehku joonis.



Joon. 54.

ühendame saadud lõigu lõpu poolusega O^* kiire abil. See kiir määrab integraalkõvera puutuja sihi igas täpis abstsissiga x : läheks integraalkõver näiteks läbi täpi P , mille abstsiss on x , siis oleks tema puutuja $PT \parallel O^*B$. Märgime noolekestega igas xy -tasapinna täpis sihi, mis oleks integraalkõvera puutujal, kui see viimane läheks läbi selle täpi. Saame sihtvälja. Me näeme, et kui mõni x antud, siis tervel sirgel selle abstsissiga on sihtnooled rööbikud.

Probleem seisab selles, leitud sihtväljas niisugune kõver tõmmata, et igas tema täpis tema puutuja siht langeks kokku selles täpis oleva noolekestega. Me näeme, et sääraseid kõveraid on lõpmata palju; on üks nendest leitud, saadakse iga teine lahenduste pere indiviiduum sellest ühest rööplükkel

Meie ülesandel on lõpmata palju lahendusi: konstant on määratuks. Ülesanne saab määratuks, niipea kui on antud y -väärtus y_0 ühes ainsas täpis x_0 . Tõesti, väärtuspaar (x_0, y_0) määrab ühe täpi xy -tasapinnas ja sellest täpist läheb läbi üks ainus sirge meie lahenduste perest.

3. Näide 2. Olgu $y' = ax + b$. Leiame y .

Kujutame xy' -tasapinnas antud tuletisfunktsiooni (joon: 54). Saame sirge, mille tõus on a , algordinaat b . Võtame mõne väärtuse x ja temale vastava y' ; kanname selle rööbiti y' -teljele ja

y -telje sihis, teiste sõnadega — lisades leitud kõvera ordinaadile teatava konstandi. Ülesanne saab määratuks, niipea kui ühes ainsas täpis x_0 on antud integraalkõvera ordinaat y_0 : igast täpist (x_0, y_0) läheb läbi üks ainus integraalkõver.

4. Voolukujutus. Kujutame endile ette teatava vedeliku voolu xy -tasapinnas (joon. 53 ja 54), mis nõnda sünniks, et vedeliku osakese liikumise siht oleks igas kohas määratud seal oleva noolekesega. Kui enda jätame voolu hoolde, siis viib ta meid integraalkõverat mööda. Missugune integraalkõver nimelt meie orbiidiks saab, oleneb sellest, missugusel kohal me ennast voolu hoolde jätame.

Sihtväli, mis tuletisseadust $y' = ax + b$ edustab, määrab terve nähtuste pere, millel ühine käik. Koos algandmega (x_0, y_0) määrab ta ühe ainsa nähtuse jooksu kõigi tema iseärasustega.

Resultaat on maksev üldiselt: iga differenttsiaalseadus valitseb tervet rühma nähtusi, millel ühine käik; ettekirjutatud algandmete korral määrab ta ühe ainsa nähtuse käigu.

Ülesanded.

1. Joonistada sihtväli, milles $y' = 0$ ja temale vastav integraaljoonte pere.

2. Joonistada sihtväli, milles $y' = -\frac{1}{x^2}$. Konstruuda temale vastav integraaljoonte pere. Märkida eriti see integraalkõver, mis läbi läheb täpist $x_0 = +1, y_0 = +2$.

Konstruuda sihtväljad ja integraaljoonte pered, mis vastaksid andmetele:

$$3. y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad 4. y' = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 12). \quad 5. y' = \log x.$$

12. Graafiline integrimine.

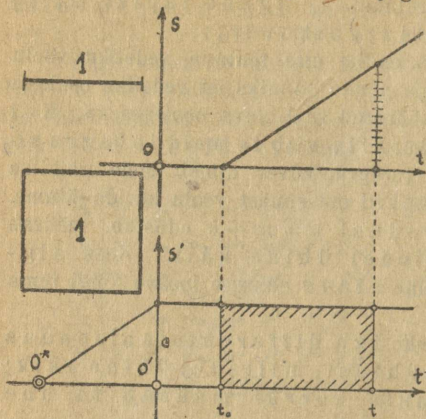
1. Integraalarvutuse põhi-ülesanne esineb mehaanilises kattes vormis (v. 10·3): on teada liikuva täpi kiirus aja funktsioonina $s' = c(t)$.

Leida liikumise seadus $s = s(t)$.

2. Tee kujutus aeg-kiirus-diagrammis.

Juhus 1. Kiirus on konstantne; tähistame teda c . Liikumine on ühtlane. Ajavahemikus $(t - t_0)$ käidud teosa

on $c(t-t_0)$. ts' -diagrammis (joon. 55) kujutab kiiruse käiku sirge, mis rööbiti aegade teljega, nimetatud teosa — pind, mida piirab see sirge, aegade telg ja kaks ordinaati täppides t_0 ja t .



Joon. 55.

Juhus 2. Täpil on vahemikkudes

$t_1-t_0, t_2-t_1, \dots, t-t_4$, konstantsed kiirused

c_1, c_2, \dots, c .

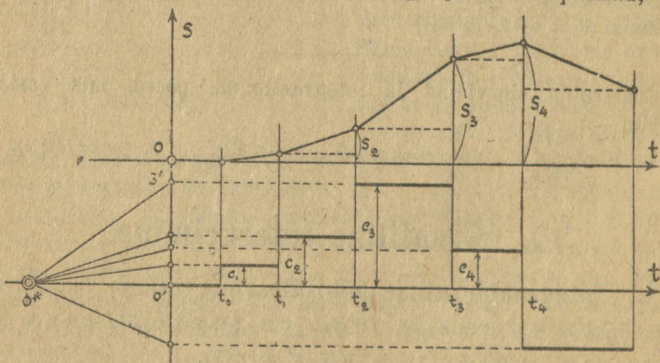
Liikumine on ositi ühtlane. Ühtlusvahemikkudes käidud teosad on järgemööda:

$c_1(t_1-t_0), c_2(t_2-t_1), \dots, c(t-t_4)$

ja teosa, mis on käidud ajavahes $t-t_0$, nende kõikide summa:

$c_1(t_1-t_0) + c_2(t_2-t_1) + \dots + c(t-t_4)$.

ts' -diagrammis (joon. 56) kujutab kiiruse käiku treppjoon, teosasid $c_1(t_1-t_0), c_2(t_2-t_1)$ jne. — pinnad, mida



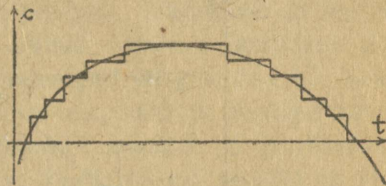
Joon. 56.

piiravad selle joone astmed, nende alg- ja lõpuordinaadid ja aegade telg; teosa, mis on käidud ajavahes $t-t_0$ — pind treppjoone, aegade telje ja kahe ordinaadi vahel täppides t_0 ja t .

Juhus 3. Kiirus on mingisugune aja funktsioon $c(t)$; tema käigu kujuks kõver tc -tasapinnas (joon. 57). Millena on kujutatud vahemikus $t-t_0$ käidud teeosa?

Meie juhusel pole võimalik arvutada teed endisel viisil: üheski ajaosas pole liikumine ühtlane. Me läheme sellepärast teist teed.

Võtame nimelt kiiruskõveral rea täppe ja paneme nendest läbi treppjoone. See treppjoon kujutab ligikaudu kiiruskõverat; ta kujutab seda seda suurema täpsusega, mida enam nendel ühistäppe, mida vähem on tema astmete laius ja ühiselt sellega ka nende kõrgus. Me vaatame järgnevates uurimistes kiiruskõverat kui piiri, millele läheneb treppjoon, kui tema astmete



Joon. 57.

laiused ja ühes sellega ka nende kõrgused lõpmata vähenevad, nende arv, samuti treppjoone ja kõvera ühistäppide arv, aga lõpmata kasvab.

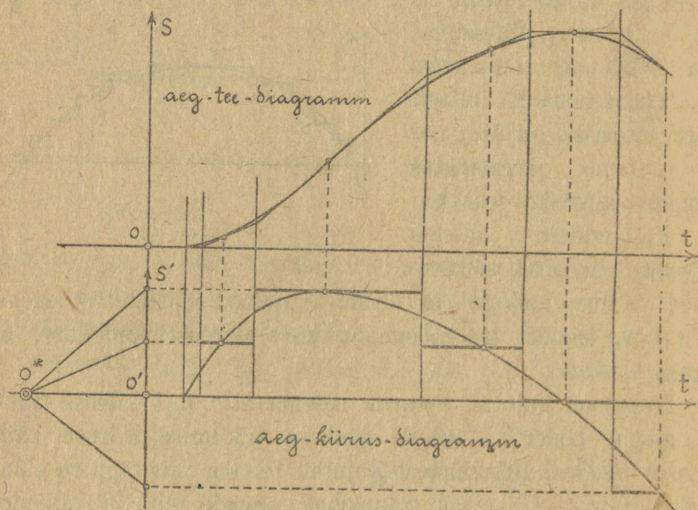
Treppjoon kujutab teatavat mõeldavat o. ü. l. kiiruse muutumist ajaga, kõver — tõesti sündiva liikumise kiiruse käiku. Esimeses nendest liikumistest kujutab teeosa, mis täpp on käinud ajavahemikus $t-t_0$, pind treppjoone, aegade telje ja kahe ordinaadi vahel täpes t_0 ja t . Tõesti sündivas, mis endise piiriks ühtlusvahemikkude lõpmatul vähenemisel, oleks vastav teeosa kujutatud nimetatud pinna piirina: m. ü. l. korral kujutab aeg-kiirus-diagrammis ajavahemikus $t-t_0$ käidud teeosa pind, mida piirab kiiruskõver, aegade telg ja kaks ordinaati täppides t_0 ja t .

3. Teekõvera konstruktsioon kiiruskõverast.

Juhus 1. Kiirus c on konstantne. Liikumine on ühtlane. Selle seaduse kujuks ts -tasapinnas sirge joon, mille tõus on c . Tema sihi saamiseks võtame pooluse O^* (joon. 55) ja konstruime sihtkolmnurga (v. 4·5). Otsitav sirge

on rööbik selle kolmnurga hüpoteenusiga. Niisuguseid sirgeid on lõpmata palju. Üks ainus neist rahuldab algandmeid $t=t_0$, $s=0$.

Juhus 2. Täpi kiirused on vahemikkudes t_1-t_0 , t_2-t_1 , ... järgemööda konstandid c_1 , c_2 , ... Olgu peale selle momendil t_0 $s=0$. Liikumine on ositi ühtlane. Tema seaduse kujuks on pidev murdjoon (v. 6·2). Konstruime praegu seletatud viisil tema esimese lõigu vahemikus t_1-t_0 , see viib meid täppi (t_1, s_1) ; sealt edasi — murdjoone teise lõigu



Joon. 58.

vahemikus t_2-t_1 ; nii jõuame täppi (t_2, s_2) , sealt edasi täppi (t_3, s_3) jne. Nõnda saadud murdjoon on nõutud liikumise seaduse kuju.

Juhus 3. Täpi kiirus on mingisugune aja funktsioon: olgu kõver ts' -tasapinnas (joon. 58) selle graafiliseks kujuks. Leiame talle vastava tee-kõvera ts -tasapinnas. Momendiks t_0 loeme esimest momenti, millel kiirus on 0; vastaku sellele momendile t_0 tee $s=0$. Meie ülesande lahendamiseks tõmbame rea rõhtjooni, mis kiiruskõverat lõikaksid. Võtame peale

nende rea püstjooni, ja nimelt nõnda, et iga kaks korrapäratut kolmnurgakest, mille sünnitavad püstjoon, kõver ja kaks teineteisele järgnevat rõhtjoont, oleksid võrdpindsed. Saame treppjoone. Ta kujutab teatud o. ü. l. kiiruse käiku. Konstruime seletatud viisil temale vastava *ts*-diagrammi. See on pidev murdjoon. Tema abil leiame kergesti otsitava tee-kõvera. Pöörame nimelt tähelepanu nende täppide peale, mis ühised kiiruskõveral ja treppjoonel. Tõmbame ühes nendest ordinaadi. Pinnad, mida piiravad see ordinaat, treppjoon ja aegade telg, ja sama ordinaat, kiiruskõver ja see telg, on võrdsed. Teed, mis käidud vastavate aegadeni tõesti sündivas ja mõeldud o. ü. liikumises, on võrdsed. Nendel aegadel on leitud murdjoonel *ts*-tasapinnas ja otsitaval kõveral võrdsed ordinaadid. Samadel aegadel on murdjoonel ja otsitaval kõveral ühine tõus; tõesti: nendel aegadel on kiirused kui tõesti sündivas nõnda ka mõeldud o. ü. liikumises võrdsed. Kokku võttes: otsitav teekõver läheb läbi murdjoone täppide, mis asuvad otse üle kiiruskõvera ja treppjoone ühistäppide; nimetatud murdjoone täppides puutub ta selle joone osasid. Neid andmeid on küllalt otsitava kõvera joonistamiseks (joon. 58).

4. Graafiline integrimine. Konstruksioon, mille abil me saime teekõvera kiiruskõverast, on üldise tähtsusega: tema abil me võime saada igast antud tuletiskõverast temale vastavat algfunktsiooni kuju. Seda konstruktsiooni nimetatakse graafiliseks integrimiseks.

Me võime teda tarvitada näiteks pinna suuruse käigu kuju joonistamiseks korral, kus seda pinda piiravad mingi kõver *xy*-tasapinnas, *x*-telg, kindel ordinaat täpis x_0 ja muutuv ordinaat täpis *x*. Iseäranis kohane on seletatud graafiline integrimismetood siis, kui integritava kõvera analüütiline avaldus on teadmata, näiteks, kui kõver mehaaniliselt registreeritorilt saadud.

Ülesanded.

Integraalide graafiliselt järgmised funktsioonid:

1. $y' = 0$ algandmetel $x_0 = -1$, $y_0 = +2$.

2. $y' = \frac{1}{2}$ „ $x_0 = -1$, $y_0 = 0$.

3. $s' = 1 - \frac{1}{2}t$ „ $t_0 = -1$, $y_0 = +1$.

4. $s' = t^2 - 4t + 1$ „ $t_0 = 0$, $s_0 = +1$.

5. $y' = \frac{1}{x}$ „ $x_0 = +\frac{1}{2}$, $y_0 = +1$.

6. $y' = \log x$ „ $x_0 = +1$, $y_0 = +1$.

7. Leida algfunktsiooni kuju, mis vastab kõverale joon. 3 kui tuletiskõverale. Algandmetena võtta $x_0 = -5$, $y_0 = +1$.

8. Nähtuse kiiruse käik on antud tabeli abil:

r. m. väärtus	1	4	6	9	10	13	15	17	21
kiirus . . .	1·0	2·1	2·3	7·2	9·1	15·0	15·8	14·3	9·5

Joonistada nähtuse käigu graafiline kuju.

13. Integraal kui summa.

1. Tee väärtuse arvutamine kiirusfunktsioonist. Olgu teada liikuva täpi kiirus aja funktsioonina.

Arvutame tee, mis täpp käinud ajamomentidest t_0 kuni ajani t .

Juhus 1. Täpi kiirus on konstant c ; liikumine on ühtlane. Nõutud tee avaldusena me saame korrutise

$$c(t - t_0).$$

Juhus 2. Täpi kiirused on vahemikkudes $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, ..., $t - t_{n-1}$ — konstandid c_1, c_2, \dots, c ; liikumine on ositi ühtlane. Tee avaldusena saame korrutiste summa:

$$c_1(t_1 - t_0) + c_2(t_2 - t_1) + \dots + c(t - t_{n-1}).$$

Seda summat me kirjutame sümboolselt summa märgi kreeka tähe sigma abil nõnda:

$$\sum_{t_0}^t c(\tau) \cdot \Delta\tau.$$

Viimast avaldust tuleb nõnda mõista: on võetud üks ühtlusvahemikkudest; olgu tema tähiseks $\Delta\tau$; τ on üks sellesse vahemikku kuuluv ajamoment; $c(\tau)$ täpi kiirus sel momendil, järjekult täpi kiirus terves vahemikus $\Delta\tau$; $c(\tau) \cdot \Delta\tau$ on vahemikus $\Delta\tau$ käidud teosa; samasugused korrutised on moodustatud iga ühtlusvahemiku kohta ajavahe $t - t_0$; kõik need korrutised on liidetud.

Juhus 3. Kiirus on mingisugune aja c funktsioon $c(t)$; tema käigu kujuks mingi kõver tc -tasapinnas. Liikumine on mitteühtlane. Endist mõttekäiku pole võimalik tarvitada: kiirus muutub ühelt ajamomendilt teisele. Sel korral me asetame kiiruskõvera asemele treppjoone, millel temaga rida ühistäppe (joon. 57). See treppjoon kujutab kõverat seda suurema täpsusega, mida enam nendel ühistäppe, mida vähemad tema astmete laiused, mida suurem nende arv. Vaatame kiiruskõverat kui treppjoone piiri astmete laiuse lõpmatul vähenemisel ja nende arvu vastaval lõpmatul kasvamisel.

Liikumises, mille kiiruskäiku kujutab treppjoon, on vahemikus $t - t_0$ ära käidud teosa

$$\sum_{t_0}^t c(\tau) \cdot \Delta\tau,$$

kus sümbolil Σ endine tähendus. Liikumises, mille kiiruskäiku kujutab kõver, on vahemikus $t - t_0$ käidud teosa

$$\lim \sum_{t_0}^t c(\tau) \cdot \Delta\tau$$

oletusel, et ühtlusvahemikud $\Delta\tau$ lõpmata vähenevad, nende arv aga lõpmata kasvab.

Viimast piiri me tähistame öeldud oletusel lühemalt sümboliga

$$\int_{t_0}^t c(\tau) \cdot d\tau.$$

Selles avalduses tähendab $d\tau$ lõpmata vähenevat aja-

vahemikku, milles me liikumist ühtlaseks loeme — aja-elementi, τ mingisugust ajamomenti selles ajaelemendis, $c(\tau)$ kiirust ajamomendil τ , sellega, ühtluse oletuse põhjal, kiirust vahemikus $d\tau$, $c(\tau) \cdot d\tau$ ajaelemendi $d\tau$ vältusel käidud teosa — tee-elementi, $\int c(\tau) \cdot d\tau$ nende tee-elementide summat, oletusel et nende arv lõpmata kasvab; tähed t_0 ja t märgivad selle ajavahe rajasid, millele me otsime vastavat teosa.

2. Leitud avalduste kujutus aeg-kiirus-diagrammis.

$$\text{Avaldused} \quad c(t-t_0), \quad \sum_{t_0}^t c(\tau) \cdot \Delta\tau \quad \text{ja} \quad \int_{t_0}^t c(\tau) \cdot d\tau$$

on kujutatud pindadena, mida piiravad kiirusjoon, aegade telg ja kaks ordinaati täppides t_0 ja t (joon. 55, 56, 58).

3. Avalduse $\int_{t_0}^t c(\tau) \cdot d\tau$ tähendus. Selle avalduse geo-

meetrilisest kujutusest järgneb, et ta on t funktsioon, et selle funktsiooni väärtus on null r. m. väärtusel t_0 ja et tema tuletis on kiiruskõvera ordinaat täpis t , tähendab $c(t)$. Teiste sõnadega: uuritava avaldus on see funktsiooni $c(t)$ määratud integraalidest, mille väärtus kohal t_0 on null; nimetame teda $s(t)$. Kui meelde tuletame, et $c(t) = s'(t)$, võime seda funktsiooni kirjutada

$$s(t) = \int_{t_0}^t s'(\tau) \cdot d\tau.$$

Määratud integraal esineb summana, mille liikmed — elemendid — lõpmata vähenevad, millede arv aga vastavalt lõpmata kasvab.

Määratud integraali s. t. funktsiooni $s(t)$ elemendiks on tema tuletise väärtus $s'(\tau)$ korrutatud r. m. elemendiga $d\tau$.

4. Määratud integraal kui summa. Üldistame saadud resultaati. Olgu nimelt $F(x)$ säärane funktsioon, mille tuletis on antud $f(x)$ ja mis täpis x_0 omandab väärtuse null. Olgu ξ

mingi r. m. väärtus vahemikus x_0 kuni x ; olgu $d\xi$ selle väärtuse lõpmata vähenev kasv, r. m. element; olgu $f(\xi)$ f -väärtus täpis ξ . Siis on F -elemendi avaldus, mis nimetatud ξ -elemendile vastab,

$$f(\xi) \cdot d\xi$$

ja

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) \cdot d\xi.$$

5. Funktsiooni differentsiaali mõiste. Lõpmata vähenevaid korrutisi $f(\xi) \cdot d\xi$, ehk mis seesama: $F'(\xi) \cdot d\xi$, millede summimisel on saadud $F(x)$, me nimetame selle funktsiooni elementideks. Samuti nimetame $d\xi$, s. o. lõpmata vähenevat r. m. vahemiku $x - x_0$ osa, selle r. m. elemendiks.

Sõna elemendi asemel tarvitatakse ka teist: differentsiaal. Sümboleid dx , dF jne. loeme differentsiaal x , differentsiaal F jne. Neid ei tohi lugeda korrutisteks.

Sõna differentia tähendab ladina keeles vahet ja tarvitatakse matemaatilises analüüsis kasvu ehk osa mõttes.

Funktsioon F esineb oma differentsiaalide summamana ehk integraalina:

$$\int_{x_0}^x F'(\xi) \cdot d\xi.$$

Sõna integer tähendab täit, tervet. Tähis \int on muundatud pikendatud täht J .

6. Differentsiaal ja tuletis. Kirjutame funktsiooni differentsiaali avalduses tähe ξ asemel x ; saame

$$dF = F'(x) \cdot dx.$$

R. m. elemendi dx lõpmatul lähenemisel nullile on ta üldse võrratu nulliga; me võime temaga jagada:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}.$$

Funktsiooni tuletis on tema ja r. m. differentsiaalide suhe.

Iga tuletist me võime differentsiaalkujus kirjutada. Nõnda on liikuva täpi kiirus $\frac{ds}{dt}$, paisumise kiirus $\frac{dl}{d\theta}$, kõvera tõus $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$, $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ jne.

7. Funktsiooni differentsiaali graafiline kujutamine.

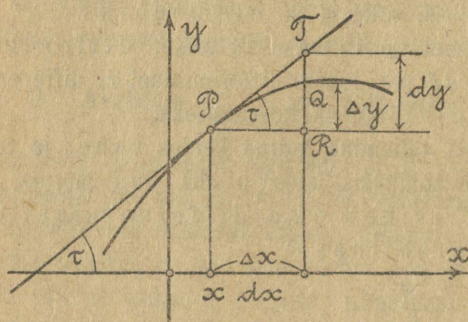
Olgu $y = F(x)$ mõni funktsioon; olgu x mõni kindel r. m. väärtus; tuletis $F'(x)$ määrab funktsiooni y kasvamise kiiruse r. m. üleminekul väärtusest x (v. 6·15). Funktsiooni differentsiaal

$$dy = F'(x) \cdot dx$$

määrab tema kasvu, mille ta oleks omandanud vahemikus dx , kui ta selles vahemikus oleks

kasvanud ühtlaselt ennemini nimetatud kiirusega.

Kujutagu kõver joonises 59 funktsiooni $y = F(x)$. Olgu xP abstsissile x vastav ordinaat, PT puutuja täpis P ja τ tema nurk $+x$ -teljega. Kujutame alates täpist x ühe nendest väärtus-



Joon. 59.

test, mis dx oma lõpmatul vähenemisel omandab. Võrdusest $F'(x) = \tan \tau$ järgneb siis, et

$$dy = dx \cdot \tan \tau = PR \cdot \tan \tau = RT.$$

Samal ajal on funktsiooni F tõepoolne kasv vahemikus Δx , mis võrdne endise differentsiaali väärtusega,

$$\Delta y = RQ.$$

$RT - RQ$ kujutab dy ja Δy vahet.

Lugeja kujutab kergesti pinna differentsiaali $du = y \cdot dx$ ja pöördkeha mahu differentsiaali $dv = \pi y^2 \cdot dx$ ja võrdleb neid kasvudega Δu ja Δv , mis r. m. kasvule $\Delta x = dx$ vastavad (v. joon. 48, 49).

Märkus nelja sümboli kohta. Kahtluste ärahoidmiseks defineerime veel kord nelja sümboli:

$$\Delta x, \Delta F, dx, dF.$$

Esimene nendest on mingi r. m. x -i kasv; ta võib ka lõp-
mata väheneda. Teine on r. m. differentsiaal; see peab lõp-
mata vähenema. ΔF on funktsiooni $F(x)$ kasv, mille ta tõe-
pooldest saab r. m. vahemikus Δx . Differentsiaal dF on see
funktsiooni $F(x)$ mõeldav kasv, mille võrra ta oleks kasvanud
r. m. vahemikus dx , kui ta selles vahemikus oleks alates
vahemiku algusest edasi kasvanud ühtlaselt.

8. Kaare differentsiaal. Olgu kõver joon. 60 funk-
tsiooni $y=f(x)$ kujuks. Võtame temal mingi kindla täpi
(joonises tähiseta); olgu P mõni teine
kõvera täpp. Nimetame kaare pikkuse,
mis esimeses algab ja viimases lõpeb, s .
Me näeme, et igale abstsissile x oma
täpp P kõveral, igale täpile seal oma
kaare pikkus vastab: kaar s on
abstsissi x funktsioon:

$$s = s(x).$$

Leiame tema different-
siaali.

Kujutagu XX_1 , ehk temaga võrdne PR , r. m. kasvu Δx ,
 RQ — vastavat funktsiooni kasvu Δy , PQ — kaare kasvu Δs .
Olgu seda kaart siduva kõõlu pikkus $\Delta \sigma$. Siis on

$$\Delta \sigma^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

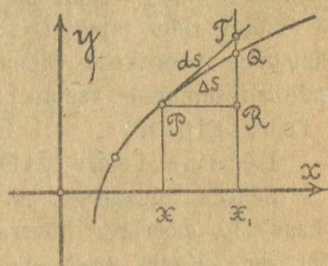
Jagame ja korrutame pahemat osa $(\Delta s)^2$ -ga ja jagame mõlemal
pool $(\Delta x)^2$ -ga: $\left(\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$.

Läheme piirile, oletades, et $\Delta x \rightarrow 0$ ja ühiselt temaga ka $\Delta y \rightarrow 0$,
 $\Delta s \rightarrow 0$, $\Delta \sigma \rightarrow 0$. Me saame (v. 2·10):

$$\frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \rightarrow 1, \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} \rightarrow \frac{ds}{dx}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx},$$

nõnda et

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$



Joon. 60.

kust $ds^2 = dx^2 + dy^2$,

ehk, lahendatud kujus,

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Kujutagu joonises 60 XX_1 ehk temaga võrdne PR üht nendest väärtustest, mis dx omandab oma lõpmatul vähenemisel. Siis kujutab RT y -differentiaali (v. 13·7), puutuja lõik PT — kaare differentiaali.

Kaare differentiaal on see kasv, mille kaar s oleks saanud r. m. vahemikus dx , kui tema kasvamine selle algusest peale oleks edasi sündinud ühtlaselt.

9. Pöördpinna differentiaal. Pöörleku kõver $y = f(x)$ ümber x -telje. Ta sünnitab selle juures pöördpinna (joon. 49). Lõikame viimast tasapindadega, mis risti pöördteljega, esimene — kindlas telje täpis a , teine — mingisuguses telje täpis x . Tähistame pöördkeha pinna osa nende tasapindade vahel S . Igale x -tasapinnale vastab oma pind S : pind S on abstsissi x funktsioon: $S = S(x)$.

Leiame tema differentiaali.

Selleks anname r. m. x -ile kasvu Δx ; vastaku temale y -kasv Δy , pöörleva kõvera kaare kasv Δs ja viimast siduv kõõl $\Delta \sigma$. Kaare kasv Δs sünnitab omal pöörlemisel ümber x -telje pinna kasvu ΔS ; kõõl $\Delta \sigma$ — koonustüvi külgpinna $\Delta \Sigma$. Viimase aluste ümbermõõdud on:

$$2\pi y \text{ ja } 2\pi(y + \Delta y);$$

järjekult on koonustüvi külgpind

$$\Delta \Sigma = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot (y + y + \Delta y) \cdot \Delta \sigma = \pi(2y + \Delta y) \cdot \Delta \sigma.$$

Sellest saame: $\frac{\Delta \Sigma}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta s} = \pi(2y + \Delta y) \cdot \frac{\Delta \sigma}{\Delta s}$.

Laseme nüüd $\Delta x \rightarrow 0$; siis $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta s \rightarrow 0$, $\frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \rightarrow 1$. Koonustüvi külgpind $\Delta \Sigma$ kujutab pöördkeha pinna kasvu ΔS seda täpsamalt, mida vähem on Δx . Me oletame sellepärast, et vahemiku Δx lõpmatul vähenemisel suhe $\Delta \Sigma : \Delta S$ lõpmata läheneb 1-le:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Sigma}{\Delta S} = 1.$$

Nõnda saame öeldud tingimusel piiris võrduse:

$$\frac{dS}{ds} = 2\pi y,$$

ehk

$$dS = 2\pi y \cdot ds$$

ehk, veel teisiti,

$$dS = 2\pi y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

10. Uus integrimisprobleemi käsitlus. On funktsiooni tuletiseks r . m. väärtusel ξ $f(\xi)$, siis on tema elemendiks, mis vahemikule $d\xi$ vastab, $f(\xi) \cdot d\xi$. Määramatu integrimise ülesanne (v. 10·4) seisab selles, teades otsitava funktsiooni elemendi avaldust, leida funktsioon.

Tähistame funktsiooni, mille element kohal ξ on $f(\xi) \cdot d\xi$,

$$\int f(\xi) \cdot d\xi.$$

Niisuguseid funktsioone on lõpmata palju; nad kõik peituvad avalduses (v. 10·7) $\int f(\xi) \cdot d\xi + c$, kus c on mistahtne konstant.

Nõnda on $\int \sin \xi \cdot d\xi = -\cos \xi + c$,

$$\int \xi^2 \cdot d\xi = \frac{1}{3} \xi^3 + c \text{ jne.}$$

Tahaksime leida määratud integraali

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) \cdot d\xi,$$

siis otsiksime esiteks määramatu integraali $\int f(\xi) \cdot d\xi$. Olgu üks funktsioonidest, millede element kohal ξ on $f(\xi) \cdot d\xi$, $\varphi(\xi)$; siis peituvad kõik teised säärased, tähendab ka otsitav $F(x)$ avalduses

$$\varphi(\xi) + c.$$

Väärtusel $\xi = x_0$ peab $\varphi(\xi) + c$ olema 0,

„ $\xi = x$ „ $\varphi(\xi) + c$ „ $F(x)$;

teiste sõnadega $\varphi(x_0) + c = 0$

$$\varphi(x) + c = F(x),$$

järjekult on $F(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0)$.

Määratud integraal on vahe vastava määramatu integraali väärtuste vahel, mis ta omandab ülemisel ja alumisel rajal.

Et konstant c lõpuresultaadist välja langed, siis on määratud integraali arvutamisel ükskõikne, missugust indiviiduumi perest $g(x) + c$ selleks tarvitada.

11. Näited. 1) Antud joon $y = mx + b$ ja kaks täppi temal abstsissidega x_1 ja x_2 . Leida joonlõigu pikkus s nende täppide vahel.

Meie korral on $y' = m$,

kaare differentiaal $ds = \sqrt{1 + m^2} \cdot dx$

ja $s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + m^2} \cdot dx$.

Konstantne tegur $\sqrt{1 + m^2}$ esineb kõigis integraali elementides; me võime teda integraali, kui summa märgi ette võtta:

$$s = \sqrt{1 + m^2} \int_{x_1}^{x_2} dx.$$

Probleemi määramatu integraal on

$$\int dx = x,$$

kus konstant lisamata, sellega probleemi lahendus:

$$s = \sqrt{1 + m^2} \cdot (x_2 - x_1).$$

Lugeja tehku joonis ja seletagu resultaati.

2) Ring $x^2 + y^2 = a^2$ pöörleb ümber x -telje; ta sünnitab kera pinna. Leida selle viimase osa, mis tasapindade vahel $x_1 = a - h$ ja $x_2 = a$.

Pöördpinna differentiaal

$$dS = 2\pi y \cdot ds.$$

Võttes ringi positiivse haru $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, saame

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx, \quad y \cdot ds = a \cdot dx,$$

sellepärast

$$S = \int_{a-h}^a 2\pi \cdot a \cdot dx = 2\pi a \int_{a-h}^a dx.$$

Peale integrimist, ja rajade asetamist leiame

$$S = 2\pi a \cdot h.$$

Lugeja tehku joonis ja seletagu resultaat.

12. Töö kui integraal. 1) Jõu mõistega on lahutamata seotud ettekujutused tema mõjumise sihist, tema suuruselt ja täpist, millele ta rakendatud. Jõu kujuks me tarvitame noolekest, mille algus on jõu rakendustäpis, mille siht on sama, milles mõjub jõud ja milles pikkusmõõt peitub nii mitu korda, kui palju korda jõus peitub selle mõõt.

2) Jõu F osaks mingisuguses sihis s nimetatakse selles sihis mõjuvat jõudu $F \cdot \cos(F, s)$, kus viimased sulud tähendavad nurka jõu F ja s -sihi vahel.

3) Nihkub jõu F rakendustäpp s võrra mingi kindlas s -sihis edasi, siis mõõdetakse selle jõu poolt nihutusel s tehtud tööd korrutisega

$$F \cdot s \cdot \cos(F, s).$$

Nõnda on raske keha otsesel tõstmisel tehtud töö ph , kui p keha kaalu, h kõrgust tähendab, millele keha viidud; töö, mis tehakse sama keha tõstmisel kaldpinda mööda, mille pikkus l ja kaldnurk α , on

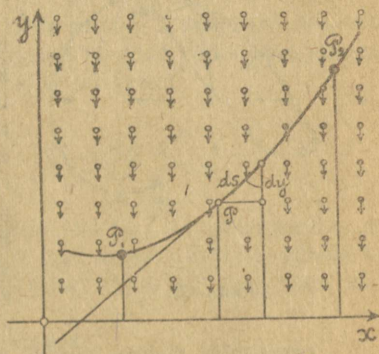
$$p \cdot l \cdot \sin \alpha.$$

Esimeses näites on nurk jõu ja nihutuse vahel null, teises on ta konstantne $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Harilikult

pole see nõnda: nurk, mis jõud sünnitab nihutusega, muutub orbiidil täpist täppi. Viimasel juhul sünnib töö arvutamine integrimise teel. Selleks järgmised

4) Näited. I. Jõu väljaks on raskusväli piiratud ruumi osas maakeral; siin on igas ruumi osa kohas tegutsev jõud, keha kaal, kui suuruse nõnda ka sihi poolest üks ja seesama (joon. 61). Tõstame raske keha, mille kaal on p , kohast $P_1(x_1, y_1)$ kohta $P_2(x_2, y_2)$ kõverat mööda, mis neid kohti ühendab ja mille võrrand on $y = f(x)$. Kui suur on tehtud töö?

Et sellele küsimusele vastust saada, avaldame esiteks töö elemendi. Me võtame selleks mõnes kõvera kohas $P(x, y)$ kaare elemendi ds ; see on lõpmata vähenev sirgjooneline lõik puutuja sihis täpist P alates. Jõud, mis täpis P keha tõstmiseks püstsihis rakendatud, sünnitab



Joon. 61.

kaare elemendiga nurga $\sphericalangle(dy, ds)$; sellepärast on tema osa, mis liikumise sihis tähendab, mis ds -sihis mõjub:

$$p \cdot ds \cdot \cos(dy, ds).$$

Lõpmata vähenevast täisnurksest kolmnurgast, mille hüpotenuus on ds , saame:

$$\cos(dy, ds) = \frac{dy}{ds}.$$

Järjekult on elementaarne töö, mille teeb kehale meie poolt rakendatud jõud tee elemendil ds :

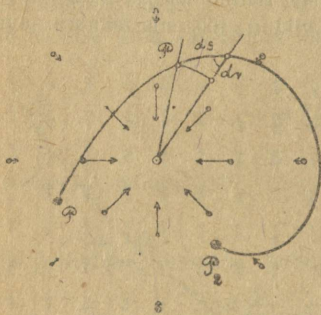
$$p \cdot dy.$$

R. m. on siin y .

Täistöö, mis tehtud keha tõstmisel täpist P_1 täppi P_2 ,

$$\int_{y_1}^{y_2} p \cdot dy = p(y_2 - y_1).$$

See avaldus näitab, et raske keha tõstmisel tehtud töö ei olene ei tõstmise ajast, ega teest, ega orbiidist, mida mööda keha liikumine sündis: ta oleneb ainult keha lõpu- ja lähtekoha kõrguste vahest.



Joon. 62.

Kujutame endile ette, et me raskusväljas keha mõnda kinnist kõverat mööda kohast P_0 kohta P_0 tagasi toome; tehtud töö on $p(y_0 - y_0)$, tähendab null. Raskusväljas on igal „ringprotsessil“ tehtud töö null. Ta jääb nulliks, kui palju korda ka me selle keha ringprotsessis läbi selle täpi P_0 viime: raskusväljast on perioodiliselt käiva masina abil võimatu tööd võita, teisiti

perpetuum mobile, masin, mis oma igaveses liikumises raskustungide sunnil meile ikka ja ikka tööd teeks, on võimatu.

Selle tõe äratundmine avas tee energia jäädavuse seaduse leidmiseks.

II. Newtoni tõmbeväli (joon. 62). Siin on jõud igast ruumikohast sihitud ikka ühte ja samasse täppi: jõudude keskk kohta; jõu suurus väheneb võrdeliselt kauguse ruuduga.

Leiame töö, keha üleviimisel kohast P_1 kohta P_2 mingit kõverat mööda, mis viimaseid ühendab.

Võtame täpi teel mõne koha P ; kujutame temast alates tee elemendi ds ; selle viimase lõpmata vähenemise tõttu võime oletada, et

liikumisel teda mööda tõmbejõud konstantseks jääb: sellel l. v. teosal ta ei suuda tuntavalt muutuda.

On kohas P täpi kaugus tõmbe keskkohast r , siis on tegutseva jõu suurus elemendil ds

$$-\frac{k}{r^2},$$

siin tähendab k konstanti ja märk minus, et jõud on sihitud vastu raadiusvektori r suurenemissihti. Selle vastasjõud on $\frac{k}{r^2}$: see veab keha. Töötamas on ainult see osa temast, mille siht tee elemendiga ds kokku langeb:

$$\frac{k}{r^2} \cos(r, ds).$$

Lõpmata vähenemas täisnurkses kolmnurgas, mille saame, kui ds alguse ja lõpu ühendame jõudude keskkohaga ja sellest joonistame raadiusega r ringi, on

$$\cos(r, ds) = \frac{dr}{ds}.$$

Järjekult on elemendil ds töötav jõu osa

$$\frac{k}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds}$$

ja elementaarne töö, mis sellel elemendil ds tehakse, on

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot ds = \frac{k}{r^2} dr.$$

Otsitav täistöö on elementaarsete tööde summa kõikidel tee elementidel täpist P_1 täpini P_2 . Kui nende kaugused jõudude keskkohast tähistame r_1 ja r_2 , saame otsitava töö avaldusena integraali

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{k}{r^2} dr = -\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Ka siin oleneb tehtud töö ainult lähte- ja lõpukoha „parameetritest“ r_1 ja r_2 . Ta ei ripu sellest, kuidas sündis keha üleviimine ühest kohast teise. Ka selles väljas on perpetuum mobile võimatu.

Ülesanded.

1. Leida kuuservakese pind, mida piiravad kõverad

$$x^2 = 4y \text{ ja } y = 0.2 \cdot x^3.$$

2. Sirge $y = 1 + \frac{2}{5}x$ pöörleb ümber x -telje. Leida pöördpinna ja mahu suurused, mis asuvad tasapindade vahel $x_1 = +1$, $x_2 = +5$.

3. Ring $x^2 + y^2 = r^2$ pöörleb ümber x -telje. Leida pind ja maht, mis peituvad tasapindade vahel $x_1 = a$, $x_2 = b$. ($a, b < r$).

4. Jõud, millega surutud spiraal püüab oma loomulikku seisut, on võrdeline lühendusega, mis surumise tagajärjel tekkinud. Leida töö, mis tuleb teha spiraali kokkusurumisel pikkusest l_1 kuni pikkuseni l_2 .

14. Funktsiooni teine tuletis.

1. Funktsiooni teine tuletis. Olgu $y = f(x)$ mingi x -i funktsioon; olgu $y' = f'(x)$ selle tuletis. Viimane on omal korral x -i funktsioon; selle tuletist $(y')'$ me tähistame y'' ja nimetame teda y teiseks tuletiseks. On näiteks $y = 2x^3$, siis on

$$y' = 6x^2, \quad y'' = 12x.$$

Kujutab $y = f(x)$ teatavat nähtuse käiku, siis määrab $y' = f'(x)$ selle nähtuse arenemise kiirust (v. 6:15); y'' annab meile kiiruse, millega sünnib nähtuse käigu kiiruse muutumine, ta määrab nähtuse käigu kiirenduse.

Liigub näiteks täpp seaduse järele $s = s(t)$, siis on tema kiirus $c = s'(t)$, tema kiirendus $a = s''(t)$ ¹⁾.

Nõnda on meil täpi harmoonilise võnkumise korral (v. T. a. g. p. 1:5) $s = h \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varepsilon\right)$, kus h ja T on konstandid,

järgelikult on
$$c = \frac{2\pi}{T} \cdot h \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varepsilon\right),$$

sellepärast
$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot h \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varepsilon\right),$$

ehk lühemalt:
$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot s;$$

sõnades: harmooniliselt võnkuva täpi kiirendus on igal täpi kohal võrdeline täpi kaugusega tema nullseisust.

Määraku $y = f(x)$ mingi kõvera jooksu; siis kujutab $y' = f'(x)$ tema tõusu käiku ja $y'' = f''(x)$ selle nähtuse kiirust. Viimane mõiste on ligidalt seotud kõvera silmatorkava omadusega, mille nimeks on

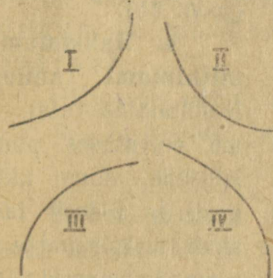
2. Kõvera nõgusus ja kumerus. Funktsiooni y esimese ja teise tuletise märgid võivad esineda järgmises neljas kombinatsioonis: r. m. väärtusel x on:

$$\begin{array}{c} y' \quad | \quad + \quad | \quad - \quad | \quad + \quad | \quad - \\ \hline y'' \quad | \quad + \quad | \quad + \quad | \quad - \quad | \quad - \end{array}$$

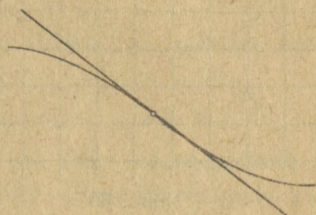
1) acceleratio — kiirendus.

Esimene juhus. Et $y' > 0$, siis tõuseb kõver selle täpi ümbruses (v. 9·1), millele vastab öeldud abstsiss x ; et $y'' > 0$ on, siis sünnib see tõusmine ikka kiiremini ja kiiremini; kõver on nõgus ülespoole (joon. 63. I).

Teine juhus. Võrratusest $y' < 0$ järgneb, et kõver x -täpi ümbruses langeb. Et $y'' > 0$ on, siis suureneb y' , selle juures negatiivseks jäädes. Kõvera langemine sünnib nimetatud täpi ümbruses ikka aeglasemalt ja aeglasemalt: kõver on nõgus ülespoole (joon. 63. II).



Joon. 63.



Joon. 64.

Samuti käsitades kolmandat ja neljandat juhust, leiaksime, et nendel uuritav kõver on ülespoole kumer nimetatud täpi ümbruses (joon. 63. III ja IV).

Kokku võttes:

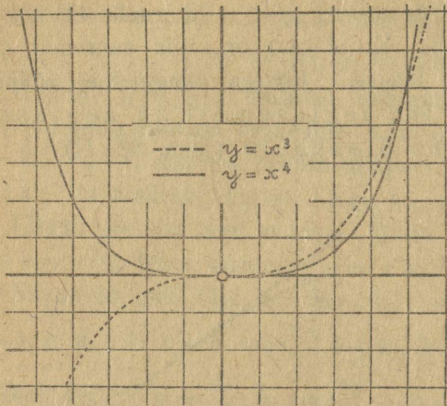
Kui mõnes kõvera täpis

on $y'' > 0$, siis on kõver temas ülespoole nõgus
 „ $y'' < 0$ „ „ „ „ „ kumer.

3. Kõvera käänutäpid. Täppides, milledest üleminekul y'' muudab oma märki, muutub kõver kumerast nõgusaks; või ümberpöörduvalt; y'' märgi muutumine võib selle funktsiooni pidevuse korral sündida ainult sel teel, et öeldud täpis y'' saab nulliks: täpid, milledes y'' saab nulliks, muutes oma märki, on kõvera käänutäpid (joon. 64).

Siit saame järgmise juhise käänutäppide leidmiseks;

otsime y teise tuletise, võrratame ta nulliga, lahendame saadud võrrandi ja uurime y'' märgi muutumist r. m. üleminekuligast leitud võrrandi (reaal)juurest (v. analoogilist y' märgi uurimist 9.5 ja 6).



Joon. 65.

Lugeja leiab ker-
gesti, et kõveral $y = x^3$
on alguses käänu-
täpp, kõveral $y = x^4$
niisugust seal ei ole
(joon. 65).

4. Maksimumi ja miinimumi tunnused.
Resultaatide abil, mis me eelviimses punktis leidsime, võime üliker-
gesti ja lihtsalt funktsiooni maksimumi ja miinimumi tunnuseid väljen-

dada. Me näeme (joon. 42), et täpis x_0 , kus $f(x)$ saab maksimumiks, on kõveral $y = f(x)$ rõhtus puutuja ja ta on kumer; täpis, milles $f(x)$ saab miinimumiks, on tema kujukõveral rõhtus puutuja ja ta on nõgus.

See tähendab analüütiliselt: saab funktsioon $f(x)$ täpis x_0
maksimumiks, siis on $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$;
kui miinimumiks, „ „ $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$.

5. Üldine juhised maksimumi ja miinimumi leidmiseks.
Me differentsime uuritavat funktsiooni $f(x)$ kaks korda: saame $f'(x)$, $f''(x)$;
võrratame esimese tuletise nulliga:

$$f'(x) = 0$$

ja lahendame saadud võrrandi. Asetame järge-
mööda igaüht saadud (reaalsetest) juurtest teise tuletise avaldusse; need juured, mis teda positiivseks teevad, annavad miinimumi, mis nega-

tiivseks — maksimumi. Teeb mõni juur teise tuletise nulliks, jääb küsimus sel teel otsustamata ja tuleb uurida esimese tuletise märgi muutumist küsimuse all oleva väärtuse ümbruses (v. 9·5 ja 6).

6. Näide 1. Mõne suuruse väärtuse a leidmiseks on tehtud tervelt n mõõtmist; nende resultaadid

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

lähevad üksteisest vähe lahku katsevigade tõttu. Mis sugune on mõõdetava suuruse kõige tõenäosem väärtus?

Olgu see meile teadmata väärtus x ; siis on katsevead 1, 2, 3, ..., n katse juures:

$$x - a_1, x - a_2, x - a_3, \dots, x - a_n.$$

Paistab loomulik niisugust x -i kõige tõenäosemaks a -väärtuseks lugeda, millele vastaks kõige vähem katsevigade summa. Kuid see ei või üldiselt nõnda olla: mõned nendest vigadest on positiivsed, teised negatiivsed. Isegi siis, kui nad väga suured on, võiks juhtuda, et nad liitmisel hävivad. x -väärtus, mis saadud nõude põhjal, et vigade summa oleks miinimum, võiks nõutavat suurust a päris vööriti kujutada. Me loeme sellepärast kõige tõenäosemaks a suuruse väärtuseks selle, millele vastab katsevigade ruutude summa miinimum: selle summa liikmed on kõik positiivsed.

Tähistame selle summa Σ :

$$\Sigma = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2.$$

Ta saab miinimumiks, kui tema esimene tuletis on null, teine aga positiivne.

Võtame esimese ja teise tuletise; differentiaal-kirjutusviisis esinevad nad kujus

$$\frac{d\Sigma}{dx} = 2 \cdot (x - a_1) \cdot 1 + 2(x - a_2) \cdot 1 + \dots + 2 \cdot (x - a_n) \cdot 1$$

$$\frac{d^2\Sigma}{dx^2} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \dots + 2 \cdot 1,$$

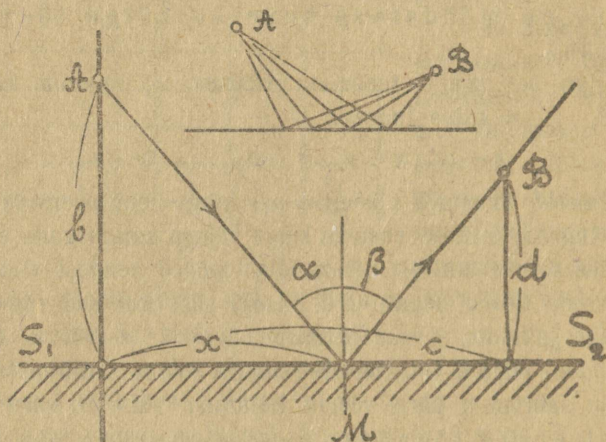
Lühemalt: $\Sigma' = 2(nx - a_1 - a_2 - \dots - a_n)$
 $\Sigma'' = 2n.$

Võrratades Σ' nulliga ja lahendades saadud võrrandi, leiame:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Teine tulemus on ikka positiivne, tähendab, ka leitud x -väärtusel: meie ees on Σ miinimum.

Mõõdetava suuruse kõige tõenäosem väärtus on mõõtmisresultaatide aritmeetiline keskmine.



Joon. 66.

7. Näide 2. On teada, et valgus, tulles täpist A (joon. 66), jõuab peale peegeldumist peeglilt S_1S_2 täppi B.

Missuguse murdjoone valib ta oma teeks kõikidest võimalikkudest? Teisiti: missugune seadus valitseb peegeldumise nähtust?

Vastuse sellele küsimusele võib ainult katse anda ja see vastus on: langemisnurk α võrdub peegeldumisnurgaga β . Katsume seda seadust järeltada mõnest lihtsast oletusest. Selleks võtame järgmise: valgus valib oma teeks kõige lühema murdjoontest, mis

täp is A algavad, peeg l il murduvad ja täp is B lõpevad.

Leiame koha, kus peab olema selle murdjoone tipp M . Olgu A ja B koordinaadid $(0, b)$ ja (c, d) ; olgu täpi M omad $(x, 0)$. Siis on:

$$AM = \sqrt{x^2 + b^2}, \quad MB = \sqrt{(c-x)^2 + d^2},$$

$$s = AMB = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(c-x)^2 + d^2}.$$

Võtame esimese ja teise tuletise:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}};$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{b^2}{\sqrt{x^2 + b^2}^3} + \frac{d^2}{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}^3}.$$

Võrratame esimese nendest nulliga:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}} = 0.$$

Siit tuleks x leida ja teise tuletisse asetada. Et aga teine tuletis on ikka positiivne, on ta seda ka nimetatud asetamise järel: leitud x annaks miinimumi. Abstsissi x -i leidmine nõuaks pikka arvutamist. Me jõuame kergemini eesmärgile, kui võrrandit, millest tuleb määrata x , tõlgime geometriliselt; tema liikmed on nimelt $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ ja $\cos(\frac{\pi}{2} - \beta)$. Sellepärast

$$\sin \alpha = \sin \beta,$$

ehk, et mõlemad nurgad α ja β vähemad kui $\frac{\pi}{2}$:

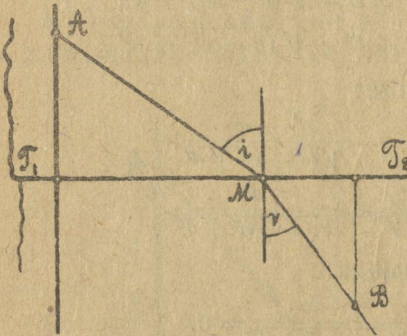
$$\alpha = \beta.$$

Meie oletusest järgneb õige resultaat: peegeldumisnähtus sünnib nõnda, nagu valiks valgus kõige lühema tee täpist A täppi B .

See oletus pole ainus, millest järgneb nõutud resultaat: me saaksime selle ka oletades, et valgus säärase tee AMB valib kõikidest võimalikkudest, mille ta saaks ära käia kõige lühemal ajal. Tõesti, olgu valguse kiirus õhkkonnas, milles ta liigub, c ; siis on aeg t , milles ta tee AMB ära käib, $\frac{s}{c}$. Et

c konstant on, saab $\frac{s}{c}$ samal ajal miinimumiks kui s -gi: ka teine oletus viib eesmärgile.

8. Näide 3. Murdumise seadus. Lahutagu tasapind T_1T_2 (joon. 67) kaht läbipaistvat keskkonda 1 ja 2; olgu valguse kiirused nendes c_1 ja c_2 . Valgus tuleb täpist A , murdub lahutavas tasapinnas ja jõuab täppi B .



Joon. 67.

Missuguse tee AMB ta valib kõikidest võimalikkudest?

Katse saadused näitavad, et täpp M säärasel kohal lahutaval tasapinnal asub, et

$$\sin i : \sin r = n = \text{konst.};$$

see suhe on igal üleminekul keskkonnast 1 keskkonda 2 muutumatu.

Tahaksime seda seadust järeldada esimesest oletusest, et tee AMB on miinimum, siis oleks see võimatu. Tõesti, kui A ja B lahutatakse tasapinnaga T_1T_2 , siis on AMB miinimum sel korral, kui ta on sirge. Niisugust teed aga valgus iialgi ei käi, peale korra, kus ta püsti langeb.

Katsume teist oletust. On täppide A , M , B koordinaadid märgitud nagu enne, leiame aja, milles valgus käib tee AMB :

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}}{c_2}.$$

Oletuse põhjal peab see miinimum olema: avaldus

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{1}{c_2} \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}}$$

peab olema 0. Teine tuletis

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{c_1} \frac{b^2}{\sqrt{x^2 + b^2}^3} + \frac{1}{c_2} \frac{d^2}{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}^3}$$

on alati > 0 ; see tähendab: x , mis on saadud võrrandist $\frac{dt}{dx} = 0$, annab tõesti miinimumi.

Selle x -i leidmine oleks võrdlemisi raske ülesanne. Kergemalt saame eesmärgile, kui tähele paneme, mida üksikud liikmed esimese tuletise avalduses tähendavad; me leiame nimelt:

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - i)}{c_1} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - r)}{c_2},$$

$$\frac{\sin i}{c_1} = \frac{\sin r}{c_2},$$

kust

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Viimane suhe on aga konstant. Murdumise seadus on järeldatud ajamiinimumi oletusest.

Valguse murdumine kahe läbipaistva keskkonna rajal sünnib nõnda, nagu valiks valgus ühest täpist teise jõudmiseks selle tee, mille ta kõige kiiremini suudab ära käia.

Murdumise näitaja n on valguse kiiruste suhe esimeses ja teises keskkonnas.

Ülesanded.

1. On antud kõver $y = \frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 - 6x + 1)$. Kus ta on kumer, kus nõgus? Leida tema käänutäpp ja puutuja võrrand viimases. Teha joonis.

2. Sama ülesanne kõvera kohta $y = \frac{3x}{1+x^2}$.

3. Sama ülesanne kõvera kohta $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

4. Varre paisumine sünnib seaduse järele: $l = \alpha\theta^2 + \beta\theta + \gamma$, kus l tähendab varre pikkust, θ -temperatuuri, α , β ja γ konstante. Kas nähtus sünnib kiirendatult?

5. On antud ruuduline tükk plekki, mille külg on a . Missugused ruudukesed peab tema nurkadest välja lõikama, et ülejäänud osast kokkupandud karbil oleks kõige suurem maht?

6. On antud rida silindreid, millel üks ja sama telgloike ümbermõõt k . Missugusel nendest on kõige suurem maht?

7. Missugusel püstkülikul antud pinnaga a^2 on kõige väiksem diagonaal?

8. Parabool $y^2 = 2px$ on lõigatud sirgega $x = a$. Saadud segmendi sisse joonistatagu kõige suurem püstkülik.

9. On antud kolmnurga külge a ja selle vastasnurk A . Missugusel lähisnurka C väärtusel on kolmnurga pind maksimum? Millega võrdub sel juhul teine lähisnurk? Juhis: avaldada kolmnurga pind suurustes a , A ja C .

10. Aken seisab koos kahest osast: püstkülikust ja tema peal seisvast poolringist. Akna ümbermõõt on p . Kuidas peab akna mõõdud valima, et temast võimalikult palju valgust läbi tungiks?

11. Antud on poolkera raadiusega R . Kujundada tema ümber koonus, mille põhjaks oleks poolkera alusel ja mille maht oleks miinimum.

12. On antud rida võrdhaarseid trapetseid, millel ühine alusnurk α ja ühine pind s . Missugusel nendest on kõige vähem ümbermõõt?

13. On antud ringkujuline tükk plekki, mille raadius on a . Missuguse sektori peab temast välja lõikama, et ülejäänud osast kokkukeerutatud täidis oleks võimalikult suur maht?

14. Ümmargusest palgist, mille läbimõõt on d , välja lõigata säärane neljakandiline kandja, mille kandejõud oleks võimalikult suur. Palgi kandejõud kasvab võrdeliselt tema laiusega ja paksuse ruuduga.

15. Kõnnitee piirab ringkujulist pinda. Missugusel kõrgusel peab tema keskpaiga kohale hõõglamp kinnitatama, et tee valgustus oleks kõige tugevam? Valgustuse tugevus on võrdeline cosinusega langemisnurgast ja pöörd võrdeline kauguse ruuduga.

16. Kaks täppi A ja B on püstjoonel kõrgustes a ja b üle rõhttasapinna. Missugusest kohast sellel tasapinnal paistab lõik AB kõige suuremas nurgas? See koht on lõigu AB vaatlemiseks kõige soodsam.

15. Joonte kõverus.

1. Joone kõveruse mõiste. Olgu kõver joonises 68 funktsiooni $y = f(x)$ kujuks. Võtame temal mõne kindla täpi S_0 kaarte alguseks. Iga täpi S koht kõveral on siis määratud kaare pikkusega $\widetilde{S_0S} = s$.

Võtame rea kaari s_1, s_2, s_3, \dots ; nendele vastab kõveral rida täppe: S_1, S_2, S_3, \dots ; tõmbame igaühes neist puutuja. Sünnitagu viimased $+x$ -teljega nurgad $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$. Iga kaarele s vastab oma täpp S kõveral, sellele oma puutuja, järjekult oma nurk τ : nurk τ on kaare s funktsioon: $\tau = \tau(s)$.

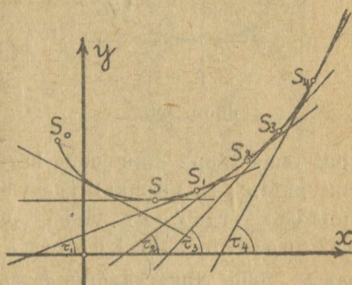
Vaatleme selle nurga τ käiku puutetäpi S liikumisel mööda kõverat. Mida kiiremini muutub nurk τ , seda kiiremini muutub puutuja siht, seda järsemalt sünnib kõvera pöördumine.

On loomulik lugeda kõvera pöördumise järskuseks nurga τ muutumise kiirust kaare s kasvamisel.

Lugeja joonistagu näitena kõver $y = \frac{3x+2}{1+x^2}$, võtku temal rida täppe, tõmmaku nendes puutujad ja vaadelgu nende sihi muutumist puutetäpi kulgemisel mööda kõverat.

Omaval ajal me nimetasime joone tõusmise järskust lühikese nimega „tõus“ (v. 7·6); samuti toimetame siin: joone pöördumise järskust me nimetame tema „kõveruseks“.

2. Joone kõveruse arvutamine. Üldise kiiruse definitsiooni põhjal (v. 6·15) on nurga τ muutumise kiirus kaare s kasvamisel, teisiti kõvera pöördumise kiirus ehk kõverus, nurga τ tuletis kaare s suhtes. Tähistades kõverust sümboliga k , saame differentsiaal kirjutusviisis $k = \frac{d\tau}{ds}$.



Joon. 68.

Selle tuletise väärtuse leidmiseks avaldame eraldi tema lugeja ja nimetaja abstsissi differentsiaali abil. Me teame (v. 7·6), et $y' = \tan \tau$; vaadates paremat poolt kui x -i funktsioonil, leiame (v. 8·9) differentsimisel x -i suhtes:

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 \tau} \cdot \frac{d\tau}{dx}, \text{ teisiti } y'' = (1 + \tan^2 \tau) \cdot \frac{d\tau}{dx},$$

nõnda et
$$d\tau = \frac{y''}{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Ennem saime (v. 13·8)
$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx,$$

sellepärast on
$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Näited. 1) Sirge joon. Võtame tema võrrandi kujus $y_1 = mx + b.$

Siis on $y' = m, y'' = 0$, järjekult $k = 0:$

sirge kõverus on null.

2) Ringjoon. Võtame tema võrrandi kujus

$$x^2 + y^2 = r.$$

Siit saame

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

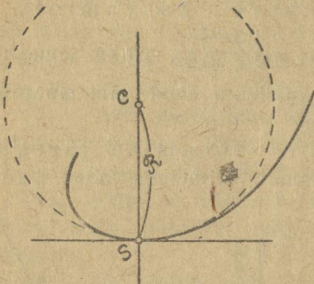
Määrates y' ja y'' ja asetades neid kõveruse avaldusse, leiame ring-

joone kõveruse $k = \frac{1}{r}$.

Igaš ringi kohas on kõverus üks ja sama.

Ühelt ringilt teisele muutub kõverus pöör'd võrdeliselt raadiusega.

3) Joone käänutäpis (v. 14.3), kus $y'' = 0$, on kõverus null: selles täpis on joon sirge-taoline (v. joon. 64).



Joon. 69.

mingi tema täpp; olgu joone kõverus selles täpis k . Tõmbame täpis S joone puutuja ja normaali (joon. 69) ja joonistame ringi, mis nimetatud puutujat riivaks täpis S , mille keskkohkt C asuks joone nõgususe pool ja mille kõverus võrduks joone kõverusega täpis S . Selle ringi raadius $R = \frac{1}{k}$ ja tema keskkohkt asub joone normaali nõgususe sihis.

Seda ringi me nimetame täpile S vastavaks joone kõverusringiks, tema keskkohkt C joone kõveruskeskkohaks, tema raadiust — joone kõverusraadiuseks.

Selle pikkus

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

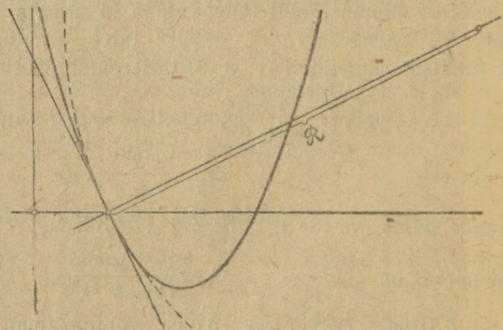
lugeja võtku näitena joon

$$y = x^3 - 8x + 12$$

ja tein hoolas joonis,

vallestäpi S absisissiks

$$x = +2.$$



Joon. 70.

Kõverusring läheb ühelt poolt joont teisele ja aimab suure täpsusega järele joone kulgu võetud täpi ümbruses (joon. 70).

4. **Joon kõveruskeskkoha koordinaadid.** Teeme veel kord endise joonise 69, täiendades teda kuidagi sihitud koordinaatide telgedega. Kujutame täppide S ja C koordinaadid ja tõmbame viimasest nendest sirge rööbiti x -teljega. Kui tähele paneme, et nurk normaali ja $+x$ -telje vahel on $\frac{\pi}{2} + \tau$, saame täisnurkse kolmnurga abil, mille hüpotenuusiks on SC , nõutud koordinaadid

$$\begin{aligned}x_c &= x - R \cdot \sin \tau \\y_c &= y + R \cdot \cos \tau.\end{aligned}$$

Avaldades $\sin \tau$ ja $\cos \tau$ $\tan \tau$ funktsioonidena, paigutades tema asemele y' ja kõverusraadiuse asemele tema avalduse, leiame, et

$$\begin{aligned}x_c &= x - \frac{(1 + y'^2) y'}{y''}, \\y_c &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}.\end{aligned}$$

Näited. 1) Lugeja leiab, et parabooli $y^2 = 2px$ kõveruskeskkohad, mis vastab tema lagitäpile $(0, 0)$, on $(p, 0)$, kõverusraadius $R_0 = p$.

2) Kõveruskeskkohad, mis vastavad ellipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ lagitäppidele, on

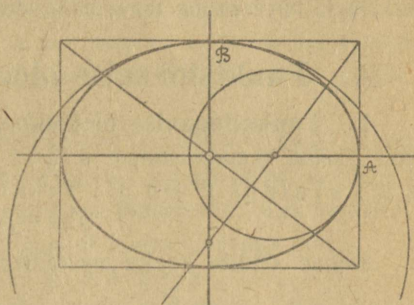
$$\left[\pm \left(a - \frac{b^2}{a} \right), 0 \right] \text{ ja } \left[0, \pm \left(b - \frac{a^2}{b} \right) \right]$$

ja vastavad kõverusraadiused $\frac{b^2}{a}$ ja $\frac{a^2}{b}$.

Neid kohti võib leida järgmise konstruktsiooni abil: joonistame ellipsi telgedel püstküliku (joon. 71); ühendame 2-se ja 4-da vastastipu; tõmbame 1-st ja 3-st tipust sirged, mis risti vastasdiagonaaliga; see sirge lõikab ellipsi telgi kahes nõutud täppidest CA ja CB . Lugeja võtku vaevaks tõestada kolmnurkade sarnasuse põhjal, et tõesti

$$ACA = \frac{b^2}{a}, \quad BCB = \frac{a^2}{b}.$$

Kõverusringid, mis joonistatud täppidest CA ja CB , langevad äärmiselt hästi ühte ellipsi kaartega täppide A ja B ümbruses. Neid ringisid võib hõlpsasti ellipsi joonistamiseks kasutada. Käsitatud erijuhusel ei lähe kõverusringid ühelt poolt ellipsi teisele.



Joon. 71.

Ülesanded.

1. Konstruuda kõver $y = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 1)$. Arvutada y' ja y'' täppides $x = -1, 0, +1, +2, +3$ ja leida nendele täppidele vastavad puutujate võrrandid, normaalide võrrandid, kõveruskeskkohad, kõverusraadiused. Kõiki neid elemente kujutada graafiliselt.
2. Joonistada ellips $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ tema kõverusringidega lagi-täppides.
3. Joonistada kõver $y = \frac{3x+2}{1+x^2}$, tema puutuja, normaal, kõveruskeskkoht ja kõverusring täpis, mille abstsiss on $+3$.

16. Funktsionaalse olenemise pööramine.

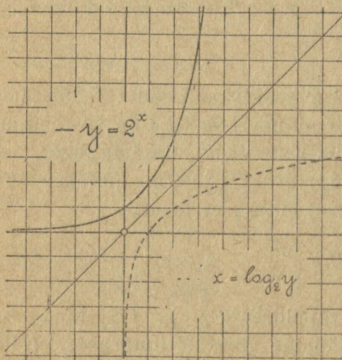
1. Funktsionaalse olenemise pööramine. Igale x -väärtusele vastab temale omane ainus ja kindel avalduse väärtus 2^x : avaldus 2^x on x -i funktsioon. Tähistame teda y :

$$y = 2^x.$$

Seame endile kokku xy -väärtuspaaride tabelikese,

x	...	-2	-1	0	+1	+2	+3	...
y	...	+0.25	+0.50	+1	+2	+4	+8	...

võttes murdarvude korral viimased täpsusega 0.01 . Kujutame temas leiduvaid arvpaare täppidena xy -tasapinnas ja ühendame



Joon. 72.

saadud rea täppe sileda kõvera abil. See on funktsiooni $y = 2^x$ graafiliseks kujuks (joon. 72). Me leiame tema abil kergesti y -väärtused, mis vastavad antud x -idele; me kujutame seesuguse arvu x -teljel lõiguna ja tõmbame viimase lõpus y -kõvera ordinaadi. Selle pikkus on nõutud y -väärtus.

Pöörame oma mõttekäiku: olgu antud mõni

y -väärtus; missugune on temale vastav x ? Et seda leida, kujutame antud y -väärtuse samanimelisel teljel lõiguna ja tõmbame viimase lõpus lõigu rööbiti x -teljega kohtumiseni y -kõveraga; leitud lõik kujutab nõutud x -i. Me näeme, et igale y -väärtusele vastab üks ja ainus kindel x : x on y funktsioon. Seda funktsiooni nimetatakse iseärase nimega: x on y -logaritm alusel 2 ja kirjutatakse märkides $x = \log_2 y$.

Võtame rea y -väärtusi; määrame seletatud viisil nendele vastavad x -id ja kujutame leitud rea yx -väärtuspaare yx -tasapinnas täppidena. Viimaste ühenduskõver on funktsiooni $x = \log_2 y$ kuju. Joon. 72 on yx -tasapind xy -tasapinnale pandud, nõnda et endine x -telg uue y -teljega, endine y -telg — uue x -teljega ühte langevad.

Lugeja loeb logaritmifunktsiooni graafilisest kujust kergesti tähtsamad logaritmi omadused: negatiivsetel arvudel pole logaritme, murdudel on negatiivsed logaritmid, ühe logaritm on null, aluse logaritm on 1, logaritm kasvab arvuga jne.

Võrdused $y = 2^x$ ja $x = \log_2 y$ kujutavad üht ja sedasama suuruste x ja y funktsionaalset olenemist teineteisest: ainus vahe on see, et teisel korral võrreldes esimesega $r. m.$ ja funktsioon on oma osad vahetanud. Me ütleme: $x = \log_2 y$ on saadud sidemest $y = 2^x$ funktsionaalse olenemise pööramisel.

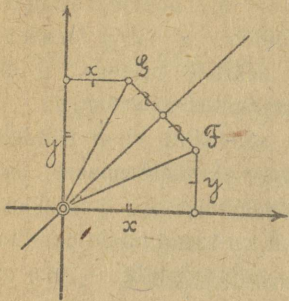
Üldiselt: kujutavad võrdused $y = f(x)$ ja $x = g(y)$ üht ja sama kahe suuruse x ja y funktsionaalset olenemist, nõnda et esimesel korral on x $r. m.$, y tema funktsioon, teisel korral — ümberpöördukt, siis nimetame $x = g(y)$ endise pöördfunktsiooniks.

2. Pöördfunktsiooni graafiku joonistamine. Olgu meil olemas xy -tasapinnas funktsiooni $y = f(x)$ kuju. Asetame yx -tasapinna endisele, nõnda et

uus y telg läheks endist x -telge mööda

„ x „ „ „ y „ „

Vastandiks kõvera $y = f(x)$ täpile F (joon. 73) xy -tasapinnas saame kõvera $x = g(y)$ täpi G yx -tasapinnas. Selle juures on täpi F abstsiss täpi G ordinaadiks, täpi F ordinaat — G abstsissiks. Täisnurksetel kolmnurkadel hüpotenuusidega OF ja OG on paariti võrdsed kaated; sellepärast on nad võrdsed; nende nurgad ühises tipus O on võrdsed, samuti hüpotenuusid OF ja OG ; siit järgneb, et täpid F ja G on sümmeetrilised esimese veerandi nurkpoolitaja suhtes; teisiti: G on F -i peegelkuju 1-se nurkpoolitaja suhtes ja ümberpöörduvalt. See



Joon. 73.

on maksev iga kahe teineteisele vastava f - ja g -kõvera täpi kohta: need kõverad on teineteise peegelkujud esimese veerandi nurkpoolitaja suhtes. Siit järgneb otsekohe ühe kõvera konstruktsioon, kui teine nendest antud.

3. Funktsiooni mõiste

laiendamine: mituväärtuslised funktsioonid. Kui

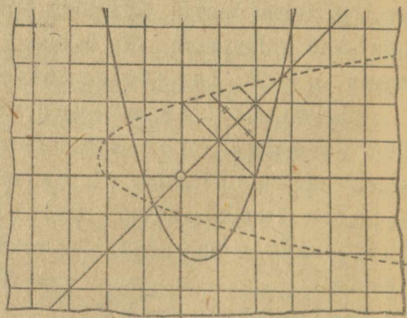
vaatame kõveraid $y = 2^x$ ja $x = \log_2 y$, näeme, et igale r . m. väärtusele, millele vastab oma funktsiooni väärtus, vastab ikka üks ja ainus seesugune: meie mõlemad funktsioonid on üksväärtuslised (ühesed).

Võtame funktsiooni

$y = x^2 - x - 2$; konstruime

tema ja temale vastava pöördfunktsiooni graafilise kuju (joon. 74). Sel ajal kui igale x -ile vastab üks ja ainus y -väärtus, vastab igale y -le, millel pöördfunktsioon defiinitud, kaks x -väärtust: meie pöördfunktsioon on kaksväärtusline.

— $y = x^2 - x - 2$
 vastav pöördfunktsioon.



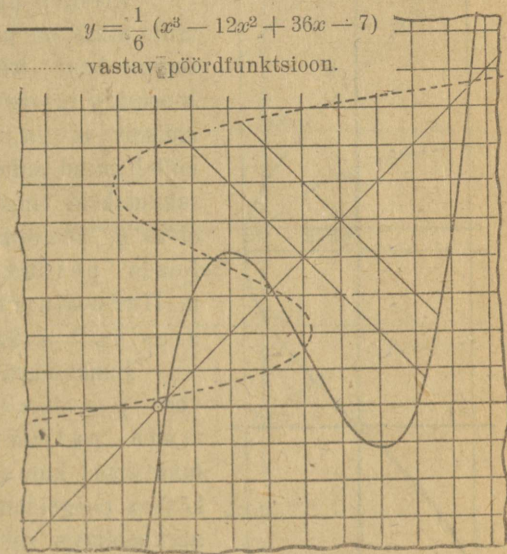
Joon. 74.

Võtame funktsiooni $y = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x - 7)$. Igale x -ile vastab üks ja ainus y (joon. 75). Funktsionaalse olene-mise pööramisel leiame, et teatavas y -vahemikus igale y -le vastab kolm x -väärtust, väljaspool seda vahemikku üks. y -pöördfunktsioon on kolmväärtusline.

4. Arcussinusfunktsioon. Me nägime omal ajal (v. 1·11), et igale antud nurgale x vastab üks ja ainus $\sin x$ -väärtus, ja näitasime, kuidas seda väärtust graa-filisel teel saada ja sinuskövera joonista-miseks ära kasutada.

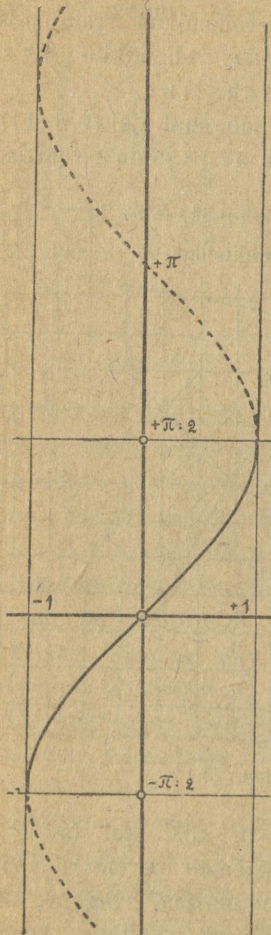
Pöörame küsi-musseadet: anna-me endile mõne $\sin x$ -väärtuse, muidugi absoluutselt ühest vähema, ja küsime: missu-gune on kaar, millel see antud sinus? Selle kaare saamiseks joo-nistame ringi raadiu-sega üks ja kujutame antud $\sin x$ -väärtuse,

püstdiameetril, üles, kui antud $\sin x > 0$, alla, kui ta < 0 . Väärtust $\sin x$ kujutava lõigu lõpust tõmbame paremale poole sirge rööbiti rõht-diameetriga kuni kohtumiseni ringiga; see sirge lõikab koos rõht-diameetriga ringist otsitava kaare. See kaar on absoluutselt vähem $\frac{\pi}{2}$ -st. Igale antud sinus-väärtusele vastab üks ja ainult üks kaar rajade $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$ vahel. Selle kaare nimeks on arcussinus y ja tema tähiseks $\arcsin y$.



Joon. 75.

Nõnda siis: $\arcsin y$ on kaar, mis peitub $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$ vahel ja mille sinus on y . Näiteks on $\arcsin 0 = 0$,



Joon. 76.

$\arcsin \frac{1}{2} = +\frac{\pi}{6}$, $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = +\frac{\pi}{4}$,
 $\arcsin(+1) = +\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$
 jne. Ladinakeelne sõna arcus tähendab kaart.

$\arcsin y$ pole mitte ainus kaar, mille sinus on y . Ka $\pi - \arcsin y$ on niisugune kaar; kui kaartele $\arcsin y$ või $\pi - \arcsin y$ lisame 1.2π , 2.2π , 3.2π , ... üldiselt $n.2\pi$, saame jällegi kaare, millel antud sinus y . Teisi kaari, mis rahuldaksid tingimust, et nende sinus oleks y , peale nimetatute pole olemas. Nõnda peituvad kõik kaared, millede sinus on y , avaldustes $\arcsin y \pm n.2\pi$, $\pi - \arcsin y \pm n.2\pi$.

Funktsioon, mis on saadud olenevuse $y = \sin x$ pööramisel, on lõpmata paljuväärtnusline. Selle funktsiooni kuju (joon. 76) saame sinus kõvera peegeldamisel esimese veerandi nurkpoolitaja suhtes. Selle kõvera osa sirgete vahel $x = -\frac{\pi}{2}$ ja $x = +\frac{\pi}{2}$ kujutab üksväärtnuslist funktsiooni $x = \arcsin y$.

Lugeja seletab kergesti saadud joonise põhjal $\sin x$ -pöördfunktsiooni omadusi.

5. Arcustangensfunktsioon. Samuti nagu eelmises punktis leiaksime,

et igale $\tan x$ -väärtusele y vastab üks ja ainus kaar rajade vahel $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$. Selle kaare nimeks on arcustangens y ja tema tähiseks $\arctan y$.

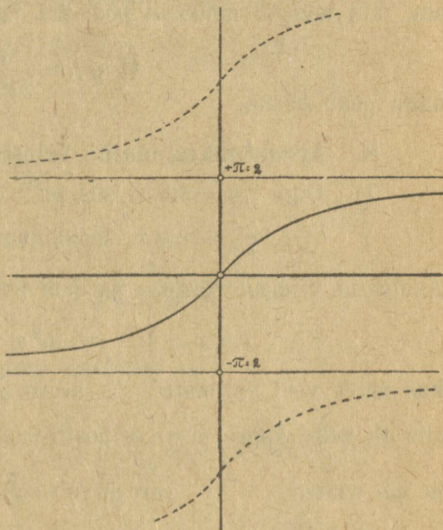
Kõik teised kaared samase tangensiga peituvad avalduses

$$\arctan y \pm n \cdot \pi.$$

Selle funktsiooni graafiku saamiseks peegeldame tangens-kõverat esimese veerandi nurkpoolitaja suhtes; saame kõvera (joo. 77), mis seisab koos perioodiliselt korduvatest osadest.

Selle kõvera haru, mis peitub vahemikus $y = -\frac{\pi}{2}$ kuni $y = +\frac{\pi}{2}$, on $\arctan y$ kuju. Teised harud saadakse sellest viimasest rööpnihutustel, millede pikkused on $\pm n \cdot \pi$.

6. Pöördfunktsiooni pidevus. Olgu $y = f(x)$ antud ja $x = g(y)$ selle pöördfunktsioon. On esimene nendest pidev, siis on tema kujuks pidev joon; ka selle peegelkuju on pidev, järjelikult on seda ka funktsioon $x = g(y)$.



Joon. 77.

Sellest järgneb, et mõlemal korral kasvud Δx ja Δy üks ühiselt teisega nullile lähenevad.

7. Pöördfunktsiooni tuletis. Kasvude Δx ja Δy nullile lähenemisel on nad üldse võrratud nulliga;

sellepärast on

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

järjelikult saame piiris, mõlemate kasvude lõpmatul nullile lähenemisel, võrduse

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Näide. Leiame ruutjuure tuletise. Olgu $y = x^2$,
siis on $x = \pm \sqrt{y}$.

Me teame, et $y'_x = 2x$, tähendab $x'_y = \frac{1}{2x}$,

teisiti $(\pm \sqrt{y})' = \frac{1}{\pm 2\sqrt{y}}$,

ehk, kui märgid mõlemal pool ära jätame,

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

nagu peab olema.

8. Arcusfunktsioonide tuletised.

1) Olgu $y = \sin x$, siis on $x = \arcsin y$,

$$y'_x = \cos x, \text{ järjekult } x'_y = \frac{1}{\cos x}.$$

Avaldame viimase võrduse parema poole muutujas y . Me saame:

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2},$$

kus märk veel valimata. Et $\arcsin y$ peitub $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$ vahel, siis on selle kaare cosinus positiivne, märk ruutjuure ees on $+$,

ja me saame $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

2) Olgu $y = \tan x$, siis on $x = \arctan y$,

$$y'_x = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ sellepärast } x'_y = \cos^2 x.$$

Avaldades $\cos^2 x$ uues rippumata muutujas y , saame

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1 + y^2}.$$

9. Integraalvalemid arcusfunktsioonides. Kui $r. m.$ tähistame x , saame differentsiaalkujus

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

ja sellepärast

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C, \quad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C.$$

10. Mõned ülesanded.

1) Ringi pikkus, mille raadius on a .

Selle ringi võrrand on $x^2 + y^2 = a^2$, kui telgedeks võtame kaks ringi ristdiameetrit. Siit saame

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = \mp x : \sqrt{a^2 - x^2},$$

järjekult on ringi kaare differentsiaali ruut

$$ds^2 = (1 + y'^2) dx^2 = \left(1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}\right) dx^2$$

ehk
$$ds^2 = \frac{a^2 \cdot dx^2}{a^2 - x^2},$$

kust
$$ds = \frac{a \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Pool ringi pikkust

$$\frac{1}{2} s = \int_{-a}^{+a} \frac{a \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Probleemile vastav määramata integraal on

$$\int \frac{a \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = a \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right),$$

kus integrimiskonstant kirjutamata (v. 13·10). Ülemisel rajal $x = +a$ on selle integraali väärtus

$$a \cdot \arcsin(+1) = +\frac{\pi}{2} \cdot a,$$

alumisel
$$a \cdot \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \cdot a;$$

sellega
$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} [a - (-a)] = \pi a$$

ja
$$s = 2\pi a.$$

2) Ellipsi pind. Olgu ellipsi võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

siis on
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

kui võtame ellipsi ülemise haru; sellepärast on ellipsi pinna U differentsiaal (v. 10:1)

$$dU = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

ja pool tema pinda

$$\frac{1}{2}U = \int_{-a}^{+a} \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{b}{a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx.$$

Probleemile vastav määramata integraal on

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx.$$

Selle leidmiseks tarvitame kunstlikku võtet, mida nimetatakse **ositi integrimiseks**.

Me teame nimelt (v. 8:5), et

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

ehk, mis seesama, $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$,

tähendab $\int d(uv) = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$,

ehk, et esimene integraal on uv ,

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du.$$

Võtame meie näites $\sqrt{a^2 - x^2} = u$, $dx = dv$,

siis on $du = \frac{-x \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = x$

ja me saame

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Kui viimases lugejas lisame ja lahutame a^2 , leiame paremapoolse integraali asemel

$$- \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Võttes esimese nendest pahemale poole, saame

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

kust, endise ülesande põhjal,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Esimene liige muutub kui alumisel rajal $x = -a$ nõnda ka ülemisel $x = +a$ nulliks; viimane annab esimesel $+\frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\pi}{2}$, teisel $-\frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\pi}{2}$, nõnda et

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{4} [a^2 - (-a^2)] = \frac{1}{2} \pi a^2$$

ja sellepärast $\frac{1}{2} U = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \pi a^2 = \frac{1}{2} \pi ab$.

Ellipsi täispind $U = \pi ab$.

Ülesanded.

1. Kujutada $y = \frac{3x}{1+x^2}$ ja vastav pöördfunktsioon.
2. Leida ringi $x^2 + y^2 = a^2$ pind.
3. Leida pind, mida piirab kõver $y = \frac{1}{1+x^2}$, x -telg ja kaks ordinaati täppides $x = -1$ ja $x = +1$.

17. Eksponentfunktsioon ja naturaalne logaritm.

1. Kapital liitprotsentidel. Kapital a Emk. toob $p\%$ tulu; viimane lisatakse kapitali juurde iga aasta tagant. Kui suureks saab kapital t aasta lõpuks?

Esimese aasta lõpuks muutub

$$1 \text{ Emk. summaks } 1 + \frac{p}{100} \text{ Emk.}$$

$$a \text{ „ „ } a(1 + \frac{p}{100}) \text{ „}$$

Teise aasta lõpuks muutub teise aasta jooksul

$$1 \text{ Emk. summaks } 1 + \frac{p}{100} \text{ Emk.}$$

$$a(1 + \frac{p}{100}) \text{ „ „ } a(1 + \frac{p}{100})^2 \text{ „}$$

Samuti saaksime kolmanda aasta lõpuks summa $a(1 + \frac{p}{100})^3$ jne. minnes, viimati t aasta lõpuks summa $a(1 + \frac{p}{100})^t$.

Jättes andmed ja küsimuse endisteks, muudame tulu lisamise tähtajad: lisame nimelt tulu kapitalile iga poole aasta tagant. Arutades samuti nagu ennemgi, saame kapitali esimese, teise, kolmanda jne. poole aasta lõpuks:

$$a(1 + \frac{p}{2 \cdot 100}), \quad a(1 + \frac{p}{2 \cdot 100})^2, \quad a(1 + \frac{p}{2 \cdot 100})^3, \dots$$

viimati t aasta lõpuks $a(1 + \frac{p}{2 \cdot 100})^{2 \cdot t}$.

Lisame tulu kapitalile iga kuu tagant. Analoogiliselt endisega saame

1-se kuu lõpuks 2-se kuu lõpuks jne. t aasta lõpuks
summad $a(1 + \frac{p}{12 \cdot 100}), \quad a(1 + \frac{p}{12 \cdot 100})^2 \dots, \quad a(1 + \frac{p}{12 \cdot 100})^{12 \cdot t}$.

Lisame tulu iga päeva tagant, arvates aastas 360 päeva, saame t aasta lõpuks kapitali

$$a(1 + \frac{p}{360 \cdot 100})^{360 \cdot t}.$$

Üldiselt, kui protsendid kapitalile lisada iga $\frac{1}{n}$ aasta tagant, siis muutub a Emk. t aasta lõpuks kapitaliks

$$a(1 + \frac{p}{n \cdot 100})^{n \cdot t}.$$

2. Leitud avalduse teisendamine. Tähistame murru:

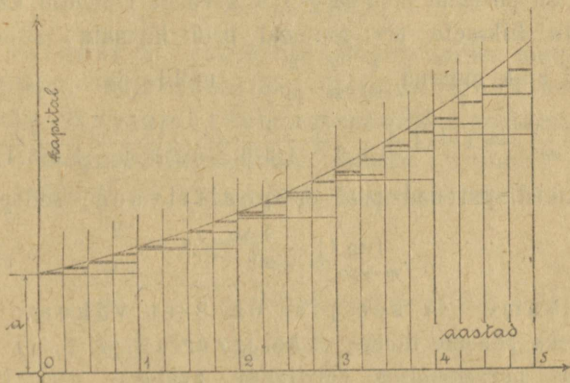
$$\frac{p}{n \cdot 100} \text{ lühemalt } \frac{1}{m};$$

siis on $n = \frac{m p}{100}$, ehk veel lühemalt $n = m s$, kui konstandi $\frac{p}{100}$ märgime tähega s . Uutes tähistes omandab meie kapitali

avaldus kuju: $a(1 + \frac{1}{m})^{m s t} = a[(1 + \frac{1}{m})^m]^{s t}$.

3. Kapitali kasvamise graafilised kujud. Pidev kasvamine. Kujutame kapitali muutumist, kui $\frac{0}{0} \frac{0}{0}$ lisatakse iga aasta, iga poole aasta, iga kuu jne. tagant. Iga kord saame

treppjoone. Kapitali kasvamine sünnib hüpete viisi (v. joon. 78). Ajavahemikkude vähenemisega, millede tagant sünnib $\frac{1}{n}\%$ lisamine, vähenevad kui astmete laiused nõnda ka astmete kõrgused. Kujutame endile ette, et nimetaja murrus $\frac{1}{n}$ lõpmata kasvab; siis väheneb aasta osa $\frac{1}{n}$ lõpmata, vähenevad lõpmata kui astmete laiused nõnda ka kõrgused meie aeg-kapital-diagrammis. Piiris, arvu n lõpmatul kasvamisel, sellega ajavahemikkude lõpmatul vähenemisel, millede tagant lisatakse $\frac{1}{n}\%$, muutub kapitali



Joon. 78.

kasvamine pidevaks (v. kõver joon. 78). Kui $n \rightarrow \infty$, siis saab, võrduse tõttu, mis teda arvuga m seob, ka $m \rightarrow \infty$, ja kapital, mille meie t aasta lõpuks tema pideva kasvamise

korral saame, on
$$A = a \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \right]^{st},$$

lühemalt
$$A = a \cdot e^{st}.$$

4. Arv e . Nagu näeme, esineb kapitali avalduses tema pideva kasvamise korral piirväärtus

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m.$$

Selle arvu juurde viib meid ka paljude teiste küsimuste käsitlemine. Teda tähistatakse tähega e .

Katsume rajasid leida, millele vahel see arv peitub.

Arendame selleks avalduse $(1 + \frac{1}{m})^m$ Newtoni binoomi valemi järele:

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{m})^m &= 1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{m^3} + \dots \\ &= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 \cdot 2} + \frac{(1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m})}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m})(1 - \frac{3}{m})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \end{aligned}$$

Liikmeid on paremal pool $m + 1$. Arvu m lõpmatul kasvamisel kasvab ka liikmete arv paremal pool lõpmata; selle juures lähenevad kõik murrud $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots$ nullile ja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^m = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Kõik liikmed paremal pool on positiivsed, sellepärast on

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^m > 2.$$

Näitame, et see piir on 3-st vähem.

Selleks paneme tähele, et kui iga arvu 3, 4, 5, ... asemele nimetajates parempoolses eelviimase avalduse osas kirjutame kahed, siis vähendame sellega nimetajaid ja suurendame murdusid; sellepärast on:

$$\begin{aligned} 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots < \\ < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots \end{aligned}$$

Viimane summa on aga teisest liikmest peale lõpmata kahanev geomeetriline rida nimetajaga $\frac{1}{2}$. Järjekult on tema väärtus

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

Sellega on siis

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^m < 3.$$

Selle piirväärtuse täppis arvutamine, mis tema arenduse abil $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$

sünnib, annab $e = 2.71828182845904523536 \dots$

Meeles pidada on tarvis ainult 3—4 kümnendkohta; ümmarguselt võib võtta: $e = 2,7183$.

5. Eksponentfunktsiooni mõiste. Arvu e abil võime kapitali suurust t aasta lõpuks pideva kasvamise korral kirjutada

$$aest = a(et)^s.$$

Avaldust et , ehk üldisemalt est , milles muutuja esineb astmenäitajas, nimetatakse eksponentfunktsiooniks¹⁾. Ta on üks tähtsamatest matemaatilises analüüsis.

6. Eksponentfunktsiooni tuletis. Arutades nagu ikka tuletise leidmisel (v. 7.4) saame vastavuste tabeli:

$$\begin{array}{r} t \dots \quad et \\ t + \Delta t \dots \quad et + \Delta t \\ \hline \Delta t \dots \quad et + \Delta t - et = et(e\Delta t - 1) \\ 1 \dots \quad et \cdot \frac{e\Delta t - 1}{\Delta t}, \end{array}$$

nõnda et $(et)' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} et \cdot \frac{e\Delta t - 1}{\Delta t}$.

Kasvu Δt nullile lähenemisel on t konstant, et samuti, muutuvaks on viimases avalduses ainult tema murdtegur;

sellepärast: $(et)' = et \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e\Delta t - 1}{\Delta t}$.

Siin esineva piiri leidmiseks tarvitame järgmist kunstlikku võtet: märgime tema lugeja ühe tähega; et Δt nullile lähenemisel $e\Delta t$ ühele läheneb, siis on vahe $e\Delta t - 1$ küllalt väikese Δt korral õige murd; valides kohaselt arvu m , võime ikka kirjutada

$$e\Delta t - 1 = \frac{1}{m}$$

1) exponere — välja panema, esile seadma (siin tarvitatud astmenäitaja suhtes).

Avaldame siit nimetajas seisva Δt ; meil on

$$e^{\Delta t} = 1 + \frac{1}{m},$$

ehk, logaritmidest, võttes aluseks mingi arvu b :

$$\Delta t \cdot \log_b e = \log_b \left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

$$\text{kust nõutud} \quad \Delta t = \frac{\log_b \left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\log_b e}.$$

Asetades leiame:

$$\frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\log_b e}{\log_b \left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \frac{\log_b e}{\log_b \left(1 + \frac{1}{m}\right)}.$$

Kui nüüd $\Delta t \rightarrow 0$, siis $m \rightarrow \infty$, $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow e$ ja mured

$$\frac{\log_b e}{\log_b \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} \rightarrow 1;$$

sellega on

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = 1,$$

järjekult

$$(e^t)' = e^t.$$

EkspONENTFUNKTSIOONI TULETIS võrdub iga r . m. väärtusel sellele vastava funktsiooni väärtusega.

Pärastpoole näitame, et eksponentfunktsioon (üldisemalt tema kordne) on ainus funktsioon, millel see omadus.

7. Pidevalt muutuva kapitali kasvamise kiirus.

Meil oli (v. 17·3):

$$A = ae^{st};$$

siin on a konstant; astmenäitaja on t funktsioon, sellega siis e^{st} funktsiooni funktsioon; järjekult on (v. 8·9)

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= a \cdot e^{st} \cdot \frac{d(st)}{dt} \\ &= a \cdot e^{st} \cdot s = A \cdot s. \end{aligned}$$

Igal ajamomendil on pidevalt muutuva kapitali kasvamise kiirus võrdeline kapitali suurusega sel ajamomendil.

Suuruse kasvamist, mis nõnda sünnib, et igal silmapilgul tema kiirus on võrdeline kasvava suuruse väärtusega, nimetatakse orgaaniliseks. Selle nime põhjus leiab pärast oma seletuse.

8. Eksponentfunktsiooni integraal. Tuletisvalemitest

$$(et)' = et \text{ ja } (est)' = s \cdot est$$

järgnevad integraalvalemid

$$\int et \cdot dt = et + C, \quad \int est \cdot dt = \frac{1}{s} est + C,$$

kus C mistahet konstanti tähendab.

9. Logaritmfunktsioon. Tähistame funktsiooni et ühe ainsa tähega u :

$$u = et.$$

Pöörame t ja u funktsionaalset olenemist; me saame

$$t = \log_e u.$$

Logaritme, mis võetud alusel e , nimetatakse naturaalseteks; me kirjutame sellepärast $t = \log_{nat} u$ ehk, lühemalt,

$$t = \ln u,$$

ja nimetame saadud funktsiooni logaritmfunktsiooniks.

Selle funktsiooni graafilise kuju saamiseks joonistame olenevuse

$$u = et$$

kuju ja peegeldame saadud kõvera esimese veerandi nurkpoolitajas (v. 16·2). Arvutamistes võib ligikaudu võtta $e = 2,72$ ja resaltaatides ainult kaks kümnendkohta jätta.

10. Naturaalsete ja harilikkude logaritmide side.

Logaritmi definitsiooni põhjal on ühelt poolt

$$u = e^{\ln u}, \text{ teiselt: } u = 10^{\log u},$$

järjelikult

$$e^{\ln u} = 10^{\log u},$$

tähendab, kui mõlemal pool logaritmime alusel e :

$$\ln u = \log u \cdot \log_e 10.$$

Viimane

$$\log_e 10 = 2 \cdot 3026,$$

nõnda et

$$\ln u = 2 \cdot 3026 \times \log u.$$

11. Logaritmifunktsiooni tuletis.

Meil oli $u = et$, $t = \ln u$,

sellepärast $u't = et$, tähendab $t u' = \frac{1}{e^t}$,

teisiti $(\ln u)' = \frac{1}{u}$.

Logaritmifunktsiooni kasvamise kiirus on igal r. m. väärtusel võrdne selle pöördud suurusega.

12. Funktsiooni logaritmi tuletis. Tähistame r. m. nagu harilikult x . Olgu $f(x)$ mingi x -i funktsioon ja $\ln f(x)$ selle viimase naturaalne logaritm. Siis on eelmise resultaadi ja tuntud lause põhjal (v. 8·9).

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Näited. 1) $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$ $y' = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$

2) $y = \ln \cos x$ $y' = -\tan x$

3) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

Funktsiooni logaritmi tuletise teiseks nimeks on

13. Funktsiooni logaritmiline tuletis. Olgu meil mõni funktsioon $f(x)$.

R. m. väärtusel x kasvab $f(x)$ kiirusega $f'(x)$,

„ „ „ „ „ üks f -mõõt kiirusega $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Funktsiooni logaritmiline tuletis mõõdab funktsiooni mõõdu kasvamise kiirust.

Näide 1. Pidevalt kasvav liitprotsente kandev kapital a muutus t aasta lõpuks (kus t muidugi ka mis tahes murd võis olla) kapitaliks

$$A = a e^{st}.$$

Ta kasvab kiirusega $\frac{dA}{dt} = a s e^{st}$,

tema mõõt 1 Emk. kasvab ajal t kiirusega

$$A': A = s = \frac{p}{100}.$$

See oli ette näha: igal ajal kasvab meie kapital nõnda, et

ühtluse korral ühe ajamõõdu — 1 aasta — jooksul 1 Emk. oleks kasvanud $\frac{p}{100}$ Emk. võrra.

Näide 2. Olgu mõne varre pikkus

$$\begin{aligned} \text{temperatuuril} & \quad \theta \dots l, \\ \text{,,} & \quad \theta + d\theta \dots l + dl, \end{aligned}$$

nõnda et temperatuuri tõusmisel 1^o võrra vars ühtlase paisumise korral paisuks $\frac{dl}{d\theta}$ võrra, tähendab, 1 tema pikkusmõõt $\frac{1}{l} \frac{dl}{d\theta}$ võrra. Viimane avaldus on varre pikkuse logaritmiline tuletis temperatuuri suhtes: see on varre lineaarne paisumisnäitaja temperatuuril t .

Näide 3. Mõjugu mõne varre peale varre sihis tõmme t ; olgu varrel sel tõmbe mõjul pikkus l ; tõmbe suurenemisel dt võrra, saab vars pikkuskasvu dl . Lõpmata väheneva tõmbe kasvu korral loeme varre pikenemist ühtlaseks; sellepärast on varre pikenemine tõmbe suurenemisel ühe tema mõõdu võrra $\frac{dl}{dt}$; selle juures kasvab 1 varre pikkusmõõt $\frac{1}{l} \frac{dl}{dt}$ võrra. See on varre pikkuse logaritmiline tuletis tõmbe suhtes; ta näitab, kui palju pikeneks varre mõõt tõmbel t , kui viimane suureneks 1 tõmbemõõdu võrra ja varre pikenemise nähtus sünniks ühtlaselt: $\frac{1}{l} \frac{dl}{dt}$ on varre venitusenäitaja tõmbel t .

14. Integraalvalemid logaritmides. Tuletislausetest

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ ja } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

järgneb otsekohe:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C,$$

kus C on mistahetne konstant.

15. Näide. Leiame parabooli $x^2 = 2y$ kaare pikkuse täppide vahel $x=0$ ja $x=a$.

Parabooli võrrandist leiame: $y' = x$, sellepärast on parabooli kaare differentsiaal:

$$ds = \sqrt{1+x^2} \cdot dx$$

ja otsitud kaar $s = \int_0^a \sqrt{1+x^2} \cdot dx.$

Võtame tarviliku määramatu integraali:

$$J = \int \sqrt{1+x^2} \cdot dx,$$

tarvitades selleks ositi integrimise meetodi (v. 16:10, 2)

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du;$$

olgu nimelt $u = \sqrt{1+x^2}, dv = dx,$

nõnda et $du = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}, v = x.$

Siis saame: $J = x \sqrt{1+x^2} - \int x \cdot \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= x \sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= x \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Viies otsitava integraali pahemale poole, saame (v. 17:12, näide 3)

$$J = \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Rajade asetamine annab nõutud kaare:

$$s = \frac{1}{2} a \sqrt{1+a^2} + \frac{1}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2}).$$

16. Töö gaasi surumisel. 1) Rõhumise mõiste. Olgu meil silindris (joon. 79) kanni all teatav mass gaasi; olgu kanni pind $S \text{ cm}^2$ ja rõhugu teda (õhurõhumine + pommide surumine) jõud $P \text{ kg}$. Pinnale

1 cm^2 tuleb siis jõud $p = \frac{P}{S}.$

Seda jõudu, mis pinnale 1 cm^2 tuleb, nimetatakse rõhumiseks tema mõõduks on rõhumine 1 kg 1 cm^2 peale ja selle nimeks 1 kg/cm^2 .

Igale rõhumisele p vastab oma maht v ja ümberpöörduvalt: rõhumine p on mahu funktsioon:

$$p = p(v).$$

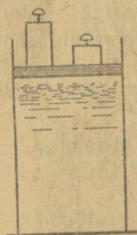
2) Elementaarne töö lõpmata väheneval gaasi mahu muutumisel. Tungigu suruva jõu P sunnil gaasi peal asuv kann dh võrra silindrisse (joon. 80); siis on selle jõu tehtud elementaarne töö $P \cdot dh$, ehk, teises kujus, $p \cdot S \cdot dh$. Korrutisel

$S \cdot dh$ on lihtne tähendus: ta on silindri mahu element dv ; rõhumise töö gaasi elementaarsurumisel, millel tema maht muutub dv võrra, on

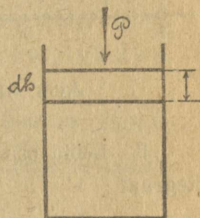
$$p \cdot dv.$$

Tahame veel ära tähendada, et gaasi maht rõhumise kasvamisega väheneb, siis kirjutame dv miinusmärgiga ja saame nimetatud elementaarse töö avaldusena niisuguse

$$dT = -p \cdot dv.$$



Joon. 79.



Joon. 80.

3) Täistöö gaasi surumisel mahust v_1 mahuni v_2

on

$$T = - \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv.$$

Seda integraali on ainult siis võimalik leida, kui on teada, mis sugune mahu funktsioon on rõhumine.

4) Töö isotermsel gaasi surumisel. Me teame, et gaasi mahu muutumine ei ole ainsaks surumise tagajärjeks: katsed näitavad, et gaas selle juures ka veel soeneb. Korraldame katse nõnda, et gaas surumise tagajärjel tekkinud soojuse ümbruskonnale ära annab, nõnda et tema temperatuur endiseks jääb. Niisuguse isotermselise surumise korral valitseb gaasi mahu muutumist rõhumisega Boyle'i seadus: $pv = \text{konst}$. Kui viimase konstandi tähistame k , saame $p = \frac{k}{v}$

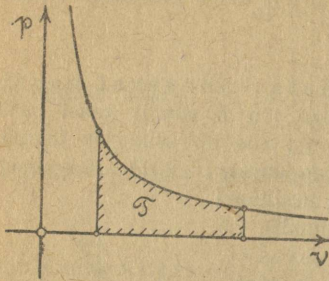
ja

$$T = - \int \frac{k}{v} dv = -k \ln v \text{ rajades } v_1 \text{ kuni } v_2,$$

tähendab

$$T = -k (\ln v_2 - \ln v_1) = k \cdot \ln \frac{v_1}{v_2}.$$

5) Viimase töö avalduse graafiline kujutus. Määratud töö-integraal on vp -diagrammis kujutatud pinnana (joon. 81), mida piiravad mahtude telg, rõhumiste kõver ja kaks ordinaati täppides v_1 ja v_2 .



Joon. 81.

Ülesanded.

1. Joonistada kõver $y = e^x$ ja tema puutuja, normaal ja kõverusring täpis $x = 0$.

2. Kustuvalt võnkuva keha kaugus x tasakaalu kohast muutub ajaga seaduse järele:

$$x = e^{-kt} \cdot \sin nt.$$

Leida liikumise kiirus ja kiirendus.

3. Leida ositi integrimise meetodi abil
integraal

$$\int t \cdot e^{kt} \cdot dt.$$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

4. $\ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$

5. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$

6. $\ln \sqrt{x^2 - x + 1}.$

7. Leida ositi integrimise teel

$$\int x \cdot \ln x \cdot dx.$$

8. Leida pind kõvera $y = \tan x$, x -telje ja kahe ordinaadi vahel täppides $x_1 = 0$ ja $x_2 = \frac{\pi}{4}$.

9. Leida pind, mida piiravad kõver $y = \frac{3x}{1+x^2}$ ja sirged $x=0$, $y=0$, $x=3$.

10. Leida töö gaasi isotermsel surumisel rõhumisest p_1 kuni rõhumiseni p_2 .

18. Orgaanilise kasvamise seadus.

1. Eelmärkus. Liitprotsentidele paigutatud pidevalt muutuva kapitali kasvamise uurimisel (v. 17-7) me leidsime, et igal ajamomendil on tema kasvamise kiirus võrdeline suurusega, mis kapitalil sel silmapilgul olemas.

Kapitali pidev kasvamine pole ainus nähtus, kus kiirus võrdeline kasvava suurusega. Orgaaniline olevus, mis toitvasse keskkonda paigutatud, kasvab seda kiiremini, mida suuremaks ta saab; tema kasvamise kiirus on igal ajamomendil võrdeline selle olevuse suurusega. Analoogiline side muutuva suuruse väärtuse ja tema muutumise kiiruse vahel esineb meile paljudes teisis nähtusis. Selle paragraafi lõpul on rida sääraseid käsitatud. Iga niisugust suuruse muutumist nimetame orgaaniliseks kasvamiseks.

2. Orgaanilise kasvamise seadus. Orgaanilist suuruse kasvamist valitseb eksponentseadus. Selle tõestuseks arutame nõnda.

Olgu r. m. x , $y = f(x)$ tema orgaaniliselt kasvav funktsioon. Selle kasvamise kiirus on $\frac{dy}{dx}$; see peab võrdeline olema y -väärtusega. Nimetame võrdeteguri k ; siis on

$$\frac{dy}{dx} = ky.$$

Selles võrduses peitub orgaanilise kasvamise seadus differentiaalkujus: ta määrab y kasvamise lõpmata vähenevas r. m. vahemikus dx , ta määrab elementaarse sündmusosa käigu. Missugune seadus valitseb sündmust tema täiuses?

Selle seaduse saamiseks me peame leitud „differentiaalvõrrandit“ integrima. Otsekohe see ei lähe: paremal pool ei seisa antud x -i funktsioon, vaid teadmatu, otsitav. Me toimetame sellepärast järgmiselt. Eraldame muutujad x ja y , jagades mõlemaid võrrandi osasid y -ga:

$$\frac{dy}{y} = k \cdot dx.$$

Pahemal pool seisab naturaalse logaritmi differentiaal, paremal $d(kx + k_0)$, kus $k_0 = \text{konst.}$;

sellepärast on

$$\ln y = kx + k_0,$$

ehk

$$y = e^{k_0 + kx} = e^{k_0} \cdot e^{kx},$$

tähendab

$$y = \text{konst.} \cdot e^{kx},$$

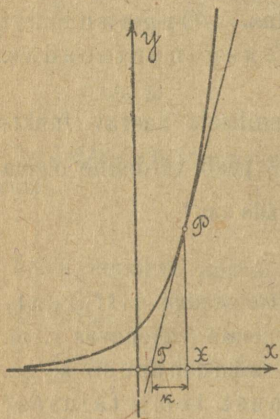
m. o. t. t.

Siit järgneb punkti 17.6 lõpulause.

3. Eksponentkõverat määrav geomeetiline omadus. Lugeja näidaku, et eksponentkõvera $y = \text{konst.} \cdot e^{kx}$ puutuja alus TX (joon. 82) on konstant ja überpöördult.

Järgmiste punktide üldiseks pealkirjaks võiks olla
Eksponentfunktsiooni rakendused.

4. Sooja keha külmenemine. Kujutame endile ette sooja keha, mis keskkonda paigutatud, mille temperatuur jääv on; näiteks sooja tüki vaske õhus, mis sulava jää poolt piiratud (joon. 83). Säärane keha saadab aegamööda oma soojuse ümbruskonda; keha temperatuur väheneb, ümbruskonna oma jääb muutumatuks. Igale ajale t vastab temale omane kindel keha temperatuur θ . Missugune seadus valitseb keha temperatuuri θ langemist ajaga t ?



Joon. 82.

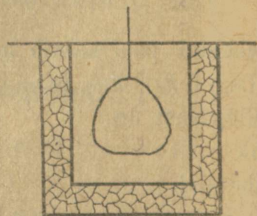
Vaatlused õpetavad meid, et hõõgav keha esiotsa, kui tema temperatuur palju kõrgem ümbruskonna omast, väga ruttu külmeneb, siis aga ikka aeglasemalt ja aeglasemalt, mida enam tema temperatuur ümbruskonna omale läheneb. (Mõeldagu näiteks teemasina vee külmenemist süte kustumise järel.) On loomulik katsena oletada, et keha külmenemise kiirus igal ajamomendil on võrdeline tema temperatuuriga sel ajal, märkides:

$$\frac{d\theta}{dt} \text{ on võrdeline } \theta\text{-ga;}$$

Et pealegi θ väheneb t kasvamisega, siis on kohane kirjutada

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta,$$

kus k tähendab võrdetegurit.



Joon. 83.

Siit saame

$$\frac{d\theta}{\theta} = -k dt,$$

sellepärast

$$\ln \theta = -kt + C,$$

kus C tähendab määramatut integrimiskonstanti.

Missugune on viimase füüsikaline tähendus? Leitud valem on maksev igal ajamomendil, tähendab, ka katse algusel ajal $t=0$; olgu sellele vastav temperatuur θ_0 . Siis on

$$C = \ln \theta_0.$$

Edasi leiame

$$\ln \theta - \ln \theta_0 = -kt,$$

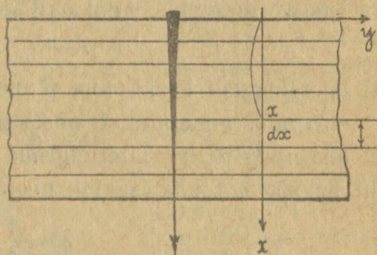
kust lõplikult saame nõutud seaduse:

$$\theta = \theta_0 \cdot e^{-kt}.$$

Märkus. Küsimust, kas keha külmenemist tõesti niisugune eksponentseadus valitseb, võib muidugi ainult katse otsustada. Suurusi θ_0 , θ ja t on mõõtmiste abil võimalik leida; on meie seadus maksev, peab iga seesuguse arvkolmiku kohta maksev olema nõue, et

$$\frac{1}{t} \ln \frac{\theta}{\theta_0}$$

on üks ja sama konst. On ta täidetud, siis valitseb tõesti eksponentseadus nähtuse käiku ja on põhjendatud oletused, milledest meie selle seaduse tuletasime.



Joon. 84.

5. Valguse tugevuse kustumine neelavas keskkonnas.

Kujutame endile ette valgust neelavat keskkonda, mida kaks rööptasapinda piiravad (joon. 84), näiteks riisi klaasplatti. Langegu valgus tema peale püsti; katsed näitavad, et ainult üks osa sellest valgusest sellest riisist läbi tungib; teise osa neelab klaas. Sama nähtus on meil ees valguse vettetungimisel: mida sügavamale me vee alla läheme, seda pimedamaks muutub ümbrus.

Võtame valguse kiire sihi x -teljeks, koha, milles viimane neelavasse keskkonda tungib, alguseks. Igale kohale kiire sihil vastab oma valguse tugevus J : J on x -i funktsioon:

$$J = J(x).$$

Seame endile ülesandeks leida seda xJ -olenemist, tähendab, leida valguse tugevuse kahanemise seadust.

Juba pealiskaudsed vaatlused näitavad, et kustumine esiootsa, kus valguse tugevus veel suur, kiiresti sünnib, siis mida enam edasi, seda aeglasemalt ja aeglasemalt. On loomulik katseviisi oletada, et kustumise kiirus kohas x on võrdeline sinna jõudva valguse tugevusega. Et x -i kasvamisel J väheneb, siis on loomulik kirjutada mainitud kiirust

$$\frac{dJ}{dx} = -\lambda J,$$

kus λ on võrdetegur. Analoogiliselt endise juhusega saaksime siit

$$J = J_0 \cdot e^{-\lambda x},$$

kui J_0 tähendab keskkonna pinnale langeva valguse tugevust.

Arvu λ nimetatakse neelava olluse neelamisnäitajaks. On sissetungiva ja läbitunginud valguse tugevused J_0 ja J_1 ja kihi paksus h teada, saame neelamisnäitaja väärtuse

$$\lambda = \frac{1}{h} \ln \frac{J_0}{J_1}.$$

Neelatud valguse tugevuse osa on

$$J_0(1 - e^{-\lambda h}).$$

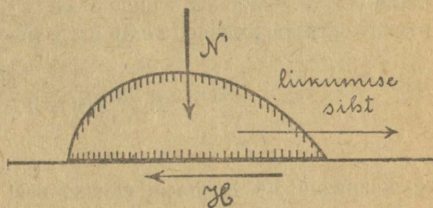
Märkus. Meie oletusi neelamise karakteri kohta me võime lugeda õigeks ainult nõnda kaua, kui katsed nendest oletustest tuletatud järeldusi kinnitavad: iga mõõdetud kolmik arve x , J_0 ja J , mis kokku kuuluvad, peab murrule $\frac{1}{x} \ln \frac{J_0}{J}$ andma ühe ja sama väärtuse: see on meie λ .

6. Rihma hõõrumine rattal. Katsed näitavad, et kahe keha liugumisel nende puutetasapinnas teatav jõud ilmsiks tuleb, mis võrdeline normaalse rõhumisega, mille

all seisab liuguv keha. Nimetame seda hõõrumisjõudu H , normaalset rõhumist N , siis on $H = \mu \cdot N$; kus μ tähendab võrdetegurit.

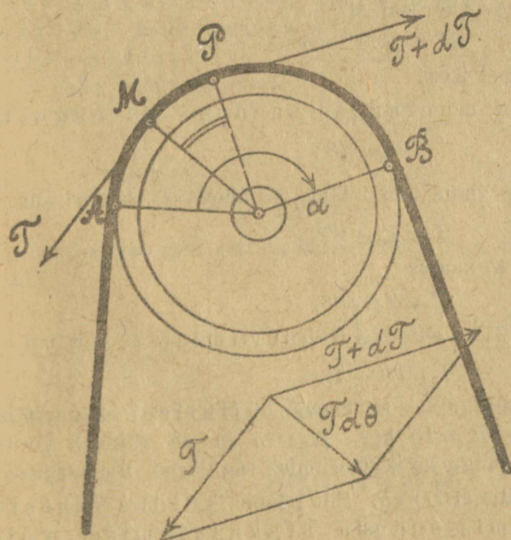
See hõõrumisjõud mõjub liikumise vastas-sihis (joon. 85).

Asume oma ülesande lahendamisele. Kujutame endile ette ratta (joon. 86), mida mööda rihm noole sihis liugub, ratast samas sihis kaasa kiskudes. Olgu täpid, milledes rihm ratta ümbermõõtu puutub, A ja B . Hõõrumise tõttu on rihma ping paremal joonisepoolel suurem pingust pahemal. Arvutame seda pingude vahet, mis hõõrumisest tekib.



Joon. 85.

Mis õieti on see rihma ping mõnes tema täpis M ? Kujutame endile ette, me lõikaksime rihma täpis M katki ja võtaksime täpist M pahempoolse rihmaosa ära. Jõud, mille me peame rakendama parempoolsele osale täpis M , et see osa tasakaalu jääks, on mainitud rihma ping täpis M . Nimetame seda pingu T .



Joon. 86.

Igapäevsed kogemused õpetavad meid, et hõõrumine on rattal seda suurem, mida suurem kaar rihmal on ühine rattaga; igale ühiskaarele vastab oma hõõrumine, sellega ka rihma ping; see ping oleks siis igas ühiskaare täpis M selle ühiskaare pikkuse AM funktsioon; et omal korral $AM = \theta$ abil määratud, siis on

$$T = T(\theta).$$

Otsime esiteks nõutud pingu

elemendi. Olgu MP elementaarne ühiskaareosa; olgu temale vastav nurkelement $d\theta$. Kaarelemendi alguses M ja lõpus P mõjuvad pingud T ja $T + dT$, mis puutujaid mööda sihitud; puutujad sünnitavad sama nurga, nagu ringi raadiused, mis puutetäppidesse tõmmatud, nimelt $d\theta$. Et pingud T ja $T + dT$ nurga sünnitavad, siis leiame nende resultandi parallelogrammjuhise järele. Kaarelemendi MP lõpmatul vähenemisel väheneb ka dT lõpmata, samuti $d\theta$. Pingudeparallelogramm läheneb rombile; selle viimase diagonaal on

$$2 \cdot T \sin\left(\frac{1}{2} d\theta\right) = T \frac{\sin\left(\frac{1}{2} d\theta\right)}{\frac{1}{2} d\theta} \cdot d\theta.$$

Nurkelemendi $d\theta$ lõpmatul vähenemisel muutub suhe $\sin\left(\frac{1}{2} d\theta\right) : \frac{1}{2} d\theta$ üheks, rombi nurk $\frac{1}{2}(\pi - d\theta)$ $\frac{\pi}{2}$ -ks, diagonaali väärtus — $T \cdot d\theta$, tema siht saab piiris risti küljega, s. t. puutuja sihiga. Kaarelement MP seisab normaalarõhumise all

$$T \cdot d\theta,$$

järjelikult on hõõrumise jõud temas

$$\mu \cdot T \cdot d\theta.$$

Sellepärast on pingü kasv kaarosal MP

$$dT = \mu \cdot T \cdot d\theta.$$

Pingu element on käes.

Leiame pingu muutumise seaduse nurgaga θ .

Meil on

$$\frac{dT}{T} = \mu \cdot d\theta;$$

integrides ja tähistades rihma pingu täpis A tähega T_0 , leiame siit

$$T = T_0 \cdot e^{\mu\theta}.$$

Täpis B , kus $\theta = \alpha$, saame

$$T = T_0 \cdot e^{\mu\alpha},$$

nõnda et pingu kasv kaarel AB hõõrumise tõttu on

$$T_0(e^{\mu\alpha} - 1).$$

Märkus. Eksponentfunktsioon kasvab ülikiiiresti nurga α kasvamisel. On näiteks $T_0 = 10$ kgr., $\mu = 0.5$ ja on rihm 3 korda ümber võlli pandud, on pingu kasv hõõrumise tagajärjel ümmarguselt $10(e^{3\pi} - 1)$, s. o. ligikaudu 11000 kg. Siit näeme, kuidas väheste jõududega hõõrumisjõudude ärakasutamisel võimalik on suurtele jõududele tasakaalu hoida: kõie

abil, mis ehk 2–3 korda põsti ümber mässitud, suudame juba suurt laeva kinni pidada.

7. Ülesanne. Projektitakse pöördkeha kujulist sammast, mis peab kandma antud raskust P_0 (joon. 87). Iga tema rõhtlõiget surub peale P_0 veel samba osa raskus, mis sellel rõhtlõikel seisab. Mis-sugune peab samba meridiaankõver olema, et surumine igas samba kohas oleks üks ja seesama? teisiti, et samba materjal oleks kõigil pool ühtlaselt surutud?

Märkus. Surumist mingis samba rõhtlõikes mõõdetakse järgmiselt. Olgu raskus, mis ühtlaselt lõikele jaotatult mõjub, P ; olgu lõike pind S ; siis tuleb 1 pindmõõdu peale raskus $P:S$; see arv mõõdab surumist lõikel S .

Asume oma ülesande lahendamisele. Võtame pöördpinna telje (joon. 87) x -teljeks, valime positiivse sihi ülevalt alla, võtame mõne abstsissi x ja kujutame temale vastava rõhtlõike. Arvutame sambaosa raskuse, mis sellel lõikel asub.

Selle sambaosa maht on (v. 10·2)

$$\pi \int_0^x y^2 \cdot dx;$$

kui samba materjali cm^3 raskuse nimetame γ , saame otsitud sambaosa kaalu:

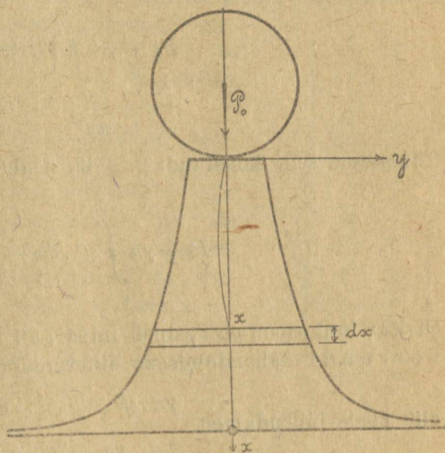
$$\gamma \pi \int_0^x y^2 \cdot dx.$$

Raskus, mis võetud lõiget rõhub, on

$$P_0 + \gamma \pi \int_0^x y^2 \cdot dx,$$

lõike pind on aga

$$\pi y^2.$$



Joon. 87.

Sellega on surumine lõikes, mille kaugus samba otsast arvates on x ,

$$P_0 + \gamma\pi \int_0^x y^2 \cdot dx$$

murd

$$\frac{\quad}{\pi y^2}$$

Lõike abstsiss oli meil vabalt võetud: leitud avaldus annab meile samba lõikpinnas mõjuva surumise igas samba kohas.

See surumine pidi kõigil pool sambas üks ja seesama olema:

$$\frac{P_0 + \gamma\pi \int_0^x y^2 \cdot dx}{\pi y^2} = \text{konst.}$$

Tähistame selle konstandi p . Siis peab olema

$$P_0 + \gamma\pi \int_0^x y^2 \cdot dx - p \cdot \pi y^2 = 0.$$

Otsitav funktsioon $y(x)$ esineb integraali märgi all. Selle „integraalvõrrandi“ lahendamiseks diferentsime teda r. m. x -i suhtes; saame:

$$\gamma\pi \cdot y^2 - p \cdot \pi \cdot 2y \cdot y' = 0$$

ehk peale lühendamist

$$\gamma y - 2p y' = 0.$$

Meridiaankõver peab seda „diferentsiaalvõrrandit“ rahuldama. Kirjutades teda diferentsiaalides

saame

$$\gamma y \cdot dx = 2p \cdot dy,$$

kust

$$\frac{dy}{y} = \frac{\gamma}{2p} \cdot dx,$$

ehk, integrides ja tähistades integrimiskonstanti $-\ln y_0$,

$$\ln y - \ln y_0 = \frac{\gamma}{2p} x,$$

nõnda et

$$y = y_0 \cdot e^{\frac{\gamma}{2p} x}.$$

Konstandil y_0 õn lihtne tähendus: ta on samba raadius tema otsas, kus $x = 0$.

Samba meridiaan peab eksponentkõver olema.

Samba materjali tihedus on teada, sellega ka γ ; rõhumise p , mis peab samba materjali suruma, me kirjutame nõnda ette, et küllane vastupidavus tagatud oleks. Leitud võrrand annab siis meridiaankõvera.

8. Õhu rõhumise muutumise kõrgusega. Õhurõhumise mõõtmised, mis tehtud mitmesugustes kõrgustes maapinnalt, näitavad õhu rõhumise b muutumist kõrgusega x . Igale kõrgusele x vastab oma rõhumine b . Leiame selle rõhumise muutumise seaduse:

$$b = b(x).$$

Selleks paneme tähele, et õhu rõhumine b kohal x on õhusamba kaal, mis üle selle koha alusel 1 cm^2 asub (joon. 88). Seda kaalu pole võimalik leida tiheduse korrutamisel samba mahuga: õhu tihedus pole ühtlane; ta väheneb kiiresti kõrguse kasvamisega. Me läheme sellepärast teist teed.

Võtame nimelt kõrguses x õhukese õhukihi; olgu tema lõpmatu vähenev paksus dx ; kihi maht on siis $1 \cdot dx$. Olgu kõrgusel x õhu tihedus σ ; siis on 1 cm^3 õhu kaal $\sigma \text{ gr.}$, $dx \text{ cm}^3$ kaal $\sigma \cdot dx \text{ gr.}$; olgu edasi õhu tihedus maapinnal σ_0 , õhurõhumine maapinnal b_0 , kõrguses x olgu ta b ; b on senini teadmatu x -i funktsioon. Boyle'i seadusest järgneb, kui teda täidetuks loeme, et tihedused σ ja σ_0 on võrdelised vastavate rõhumistega b ja b_0 :

$$\sigma : \sigma_0 = b : b_0,$$

tähendab

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{b_0} b(x);$$

sellepärast on dx -kihi kaal

$$\frac{\sigma_0}{b_0} b(x) \cdot dx.$$

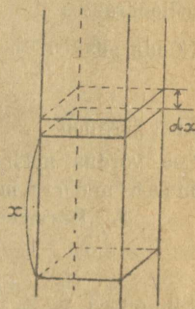
Selle kihi kaal, mis maa ja x -tasapinna vahel peitub,

on

$$\int_0^x \frac{\sigma_0}{b_0} b(x) \cdot dx = \int_0^x \frac{\sigma_0}{b_0} b(x) \cdot dx;$$

teiselt poolt on see kaal õhurõhumiste vahe maa ja x -tasapinnal:

$$\frac{\sigma_0}{b_0} \int_0^x b(x) \cdot dx = b(x) - b_0.$$



Joon. 88.

Sellest „integraalvõrrandist“ tuleb nõutud funktsioon $b(x)$ leida. Diferentsides saame:

$$\frac{\sigma_0}{b_0} b(x) = b'(x),$$

sellepärast

$$\frac{b'(x)}{b(x)} = \frac{\sigma_0}{b_0},$$

ehk

$$\frac{d \cdot b(x)}{b(x)} = \frac{\sigma_0}{b_0} dx.$$

Integrides ja märkides integrimiskonstanti c saame:

$$\ln b(x) + c = \frac{\sigma_0}{b_0} \cdot x.$$

Määrame selle c . Mapinnal on $x = 0$, $b(x) = b_0$,

sellepärast

$$c = -\ln b_0.$$

Nõnda siis

$$\ln b(x) - \ln b_0 = \frac{\sigma_0}{b_0} \cdot x,$$

kust järgneb

$$b = b_0 \cdot e^{\frac{\sigma_0}{b_0} \cdot x}.$$

See võrdus määrab õhu rõhumise igal kõrgusel x ; ta on rõhumise muutumise seaduse avaldus.

9. Baromeetiline nivellimine. Me leidsime, et

$$x = \frac{b_0}{\sigma_0} \ln \frac{b}{b_0};$$

rõhumised b_0 ja b on baromeetri abil mõõdetavad, tihedust σ_0 , mis vastab antud rõhumisele b_0 , võib tabelitest võtta; paremal pool on kõik suurused teada, kõrgust x võib kergesti arvutada.

Nõnda on baromeetri vaatluste abil võimalik kergesti kõrguste vahesid mõõta, mis muidu ehk keeruline ülesanne oleks ja palju vaeva nõuaks. Seda kõrguste mõõtmise viisi nimetatakse baromeetriliseks nivellimiseks.

19. Funktsioonide ligikaudne avaldamine polünoomide abil.

1. Eelmärkused.

1) Kõige lihtsamateks funktsioonideks tuleb arvata ratsionaalseid täisfunktsioone. Selle tõttu, et nende väärtused leitakse ainult kolme esimese tehte, nimelt liitmise, lahutamise ja korrutamise abil, on nende arvutamine kergem kui kõikide teiste oma. Kõigis praktilistes rakendustes etendavad nad sellepärast esimest osa.

kust leiame nõutud kordajate avaldused:

$$a_0 = p(0), \quad a_1 = p'(0), \quad a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} p''(0), \quad a_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} p'''(0), \quad \dots$$

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n} p^{(n)}(0).$$

Nende abil võime oma polünoomi kirjutada kujus

$$p(x) = p(0) + \frac{x}{1} p'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} p''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} p'''(0) + \dots$$

$$+ \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} p^{(n)}(0).$$

4. Üldine funktsiooni ligikaudne avaldus polünoomina. n -astmelise polünoomi tuletiste järg lõpeb n -da järgu tuletisega; kõik järgmised on nullid. Teiste funktsioonidega $f(x)$, nagu näiteks $\sin x$, e^x , $\arctan x$ jne. see pole nõnda: nende tuletiste järg ei lõpe. Juba sellepärast pole võimalik kujutada niisugust funktsiooni $f(x)$ täpsalt polünoomi abil

$$f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(0).$$

Me katsume tarvitada viimast polünoomi funktsiooni $f(x)$ ligikaudse avaldusena. Näidetel näeme, kui hästi see võimalik on.

5. Kooldumisparaboolid. Olgu esiteks $n=1$. Võrreldes kõverat $y = f(x)$ joonega $y_1 = f(0) + \frac{x}{1} f'(0)$

näeme, et nendel on täpis $x=0$ üks ja seesama ordinaat, ja üks ja seesama tõus: võrrand

$$y_1 = f(0) + x \cdot f'(0)$$

kujutab kõvera $y = f(x)$ puutujat viimase täpis $x=0$. Selle viimase ümbruses aimab ta ligikaudu kõvera jooksu järele.

Olgu teiseks $n=2$. Võrreldes kõverat $y = f(x)$ joonega

$$y_2 = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0)$$

leiame, et neil täpis $x=0$ on ühine ordinaat, ühine tõus ja et $y''(0) = y''_2(0)$ — siis ka ühine kõverus. Parabool $y_2(x)$ aimab kõvera $y(x)$ jooksu järele veel paremini, kui seda tegi puutuja $y_1(x)$.

Edasi me võtaksime $n = 3, 4, \dots$ ja leiaksime niiviisi jaa paraboolle 1-se, 2-se, 3-nda jne. järgu, mis kõvera $y = f(x)$ jooksu täpi $x = 0$ ümbruses ikka suurema ja suurema täpsusega järele aimaksid. Neid paraboolle nimetatakse kooldumisparaboolideks.

6. Näited. 1) Olgu $y = \frac{2}{x+1}$. Polünoomid, mis seda funktsiooni ligikaudu kujutavad, on:

$$y_1 = 2(1-x)$$

$$y_2 = 2(1-x+x^2)$$

$$y_3 = 2(1-x+x^2-x^3)$$

.....

Joonis 89 näitab, kui hästi nad järele aimavad y -kõvera jooksu täpi $x = 0$ ümbruses. Mida kõrgem nende järk, seda täpsamalt kujutavad nad y -kõverat mainitud ümbruses.

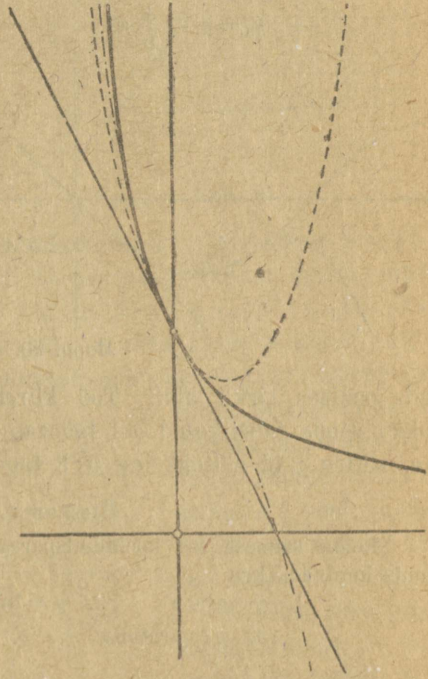
2) Veel silmatorkavam on täpsus, millega sinuskooldumisparaboolid sinus-kõverat kujutavad (joon. 90). Siin on

$$\text{—} \quad y = \frac{2}{x+1}$$

$$\text{—} \quad y_1 = 2(1-x)$$

$$\text{---} \quad y_2 = 2(1-x+x^2)$$

$$\text{- - - -} \quad y_3 = 2(1-x+x^2-x^3)$$



Joon. 89.

$$y = \sin x$$

$$y_1 = x$$

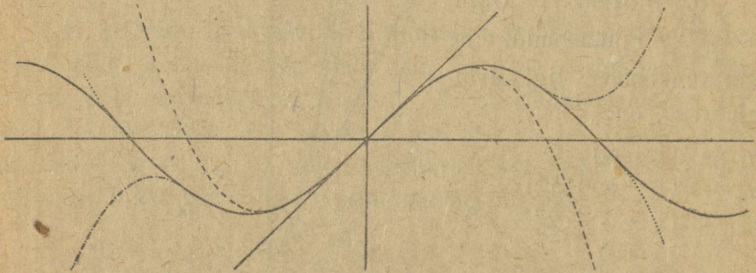
$$y_3 = y_1 - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$y_5 = y_3 + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$y_7 = y_5 - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \dots 7}$$

Sinuskõvera joonistamise viis on enim (v. 1.11) seletatud; $y_1 = x$ kujutab sirget; sellest saame kõvera y_3 , lahutades sirge ordinaatidest $\frac{1}{6}x^3$; kõverast y_3 saame y_5 , lisades endise ordinaatidele $\frac{1}{120}x^5$ jne. Kõik need lahutamised ja lisamised sünni-

$$\begin{array}{ll} \text{—} & y = \sin x \\ \text{—} & y_1 = x \\ \text{- - -} & y_3 = y_1 - \frac{1}{6}x^3 \\ \text{---} & y_5 = y_3 + \frac{1}{120}x^5 \\ \text{...} & y_7 = y_5 - \frac{1}{5040}x^7 \end{array}$$



Joon. 90.

vad joonises sirkli abil. Töö kiirendamiseks on kohane endile kokku seada tabelikesed x -i tõusvate astmete jaoks: x^1 , x^2 , x^3 jne. võttes x -id näiteks iga 0.3 tagant.

Ülesanded.

Leida esimese 5-e kooldumisparabooli võrrandid ja teha vastav joonis kordadel, kus

$$\begin{array}{lll} 1. & y = \cos x & 2. & y = \ln x & 3. & y = e^x \\ 4. & y = \arctan x & 5. & y = \sqrt{1+x}. \end{array}$$

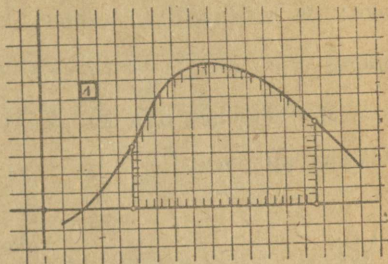
20. Integraalide ligikaudne arvutamine.

1. Määratud integraal

$$\int_{x_0}^x f(x) \cdot dx$$

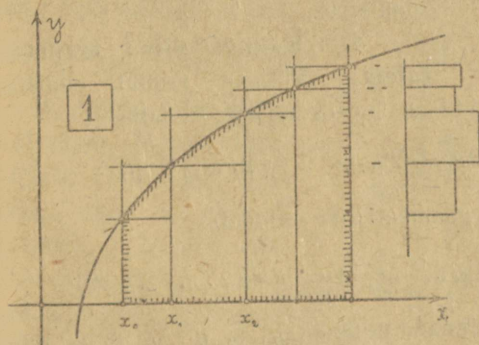
on geomeetriliselt kujutatud pinnana u , mida piiravad, x -telg, kõver $y = f(x)$ ja kaks ordinaati täppides x_0 ja x

(joon. 91). Pole mitte iga kord võimalik leida integraali all seisvale funktsioonile $f(x)$ vastava algfunktsiooni avaldust. Eriti siis, kui $f(x)$ avaldus puudub ja ta graafiliselt kõverana antud, näiteks mõnelt mehaaniliselt registraatorilt võetud. Kuidas säärasel korral tarvisolevat integraali väärtust leida? Üheks selle ülesande lahendamise meetodiks on ülevalpool (v. 12) seletatud graafiline integrimine. Sama ülesannet võib aga ka teisiti käsitada; isegi mitmel viisil.



Joon. 91.

2. Esimene viis: lugemismetood. Olgu kõver $y = f(x)$ kujutatud ruudulisel paberil (joon. 91); valime ruudu pinna pindade mõõduks ja loeme lihtsalt ära, palju ruute peitub pinnas u . Muidugi kujutab saadus pinda u ainult ligikaudu: korrapäradatud kolmnurgad ehk ruutosad, mis kõver sünnitab, jäävad arvesse võtmata. On ägapindmõõt küllalt väike, näiteks 1 mm^2 , annab ka juba see meetod küllalt täpsaid resultaate.



Joon. 92.

$x - x_0$ (joon. 92) mitmeks, näiteks n osaks; olgu jagamistäpid järgemööda $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x$; vastaku nendele ordinaadid $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y$. Tõmbame ordinaatide y_0, y_1, \dots, y_{n-1} lõppudest rõhtjooned; saame rea püstkülikuid. Nende pindade

3. Teine viis: püstkülikvalemid. Oletame, et kõver $f(x)$ vahemikus $x - x_0$ kõik aeg kas tõuseb või langeb. Jagame vahemiku

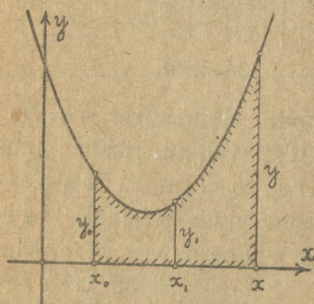
summa kujutab ligikaudu nõutud pinda u . Võetud püstkülikud on „sisepüstkülikud“. Ligikaudu on siis

$$u = (x_1 - x_0)y_0 + (x_2 - x_1)y_1 + \dots + (x - x_{n-1})y_{n-1}.$$

Harilikult jagatakse abstsissvahe $x - x_0$ võrdseteks osadeks; on viimaseid n , saame, kui ligikaudset võrdust märgime täpiga,

$$u = \frac{x - x_0}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}).$$

Me võiksime aga ka „välispüstkülikuid“ tarvitada ja saaksime siis $u = \frac{x - x_0}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y)$.



Joon. 93.

Kasvab $f(x)$, nagu oletasime, vahemikus $x - x_0$, siis annab eelmine resultaat u jaoks liig väikese väärtuse, viimane liig suure. Vahe viimase ja eelmise resultaadi vahel on joon. 92 eraldi kujutatud. Nendest kahest u -lähisväärtusest võime väärtuse saada, mis pinna u suurema täpsusega annab, kui igaüks eelmistest.

4. Kolmas viis: trapetsvalem.

Võtame nimelt endiste

resultaatide aritmeetilise keskmise; saame

$$u = \frac{x - x_0}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y).$$

Sellel avaldusel on lihtne geomeetriline tähendus.

$$\frac{x - x_0}{2n} (y_0 + y_1), \frac{x - x_0}{2n} (y_1 + y_2), \dots$$

on nimelt trapetsite pinnad, millel y_0 ja y_1 , y_1 ja y_2 jne. on rööpkülgedeks: pind \bar{u} on ligikaudu kõigi nende trapetsite summa. Lugeja tehku joonis.

5. Paraboolpind. Leiame pinna, mida piiravad parabool $y = ax^2 + bx + c$, x -telg ja kaks ordinaati täppides x_0 ja x (joon. 93).

$$\text{See pind } u = \int_{x_0}^x (ax^2 + bx + c) \cdot dx,$$

$$\text{tähendab } u = \frac{1}{3} a(x^3 - x_0^3) + \frac{1}{2} b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0),$$

$$\text{ehk teisiti, } u = \frac{x - x_0}{6} [2a(x^2 + xx_0 + x_0^2) + 3b(x + x_0) + 6c].$$

Seda avaldust võib vähe teisiti kirjutada. Eraldame nimelt alg- ja lõpuordinaadid. Me saame:

$$[] = (ax^2 + bx + c) + a(x^2 + 2xx_0 + x_0^2) + 2b(x + x_0) + 4c + (ax_0^2 + bx_0 + c).$$

Keskmiised kolm liiget määravad neljakõrdset parabooli „keskkordinaati“ y_1 . Tõesti, vahemiku x_0 kuni x keskkoha abstsiss on $\frac{1}{2}(x_0 + x)$, sellepärast on parabooli keskkordinaat

$$a\left(\frac{x_0+x}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_0+x}{2}\right) + c = \frac{1}{4} [a(x_0^2 + 2x_0x + x^2) + 2b(x_0 + x) + 4c].$$

Kui kesktäpi koordinaadid tähistame x_1 ja y_1 , saame lihtsa resultaadi: paraboolpind

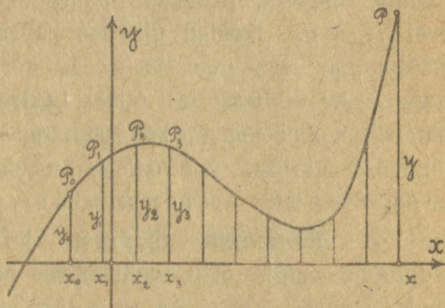
$$u = \frac{x - x_0}{6} (y_0 + 4y_1 + y).$$

6. Neljas viis: paraboolvalem.

Jagame pinna x_0P_0Px (joon. 94) leidmiseks vahe x_0 kuni x paarisarv $2n$ osaks; tõmbame jagamistäppides kõvera $y = f(x)$ ordinaadid

$y_0, y_1, \dots, y_{2n-1}, y$. Need jagavad f -kõvera kõver-

lõikudeks. Kui jagamine küllalt peenelt tehtud, on need kõverlõigud väga väikesed kaared. Vaatame iga kõverosa $P_0P_1P_2, P_3P_4P_5, \dots$ kui parabooli kaart (muidugi on see ainult ligikaudu nõnda!) ja tarvitame igaühe niisuguse osa



Joon. 94.

poolt piiratud pinna kohta leitud parabooli pinnavalemit; saame rea avaldusi:

$$\frac{x - x_0}{3 \cdot 2n} (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\frac{x - x_0}{3 \cdot 2n} (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

.....

$$\frac{x - x_0}{3 \cdot 2n} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y).$$

Liites leiame otsitava pinna ligikaudse avalduse:

$$u = \frac{x - x_0}{3 \cdot 2n} [y_0 + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + y].$$

Esimene ja viimane ordinaat tulevad selles summas ainult üks kord ette, paarisarvulised kaks, paarituuravulised nelja-kordselt.

Märkus. Ordinaatide summimine, nagu see meie valemite tarvilik, sünnib kõige lihtsamini paberpaelal (serpentiin). Paraboolvalemi korral me märgiksime sel paelal järgemööda $y_2, y_4, \dots, y_{2n-2}$, korrutaksime saaduse kahega (muidugi jällegi mehaaniliselt!), summiksime siis $y_1, y_3, \dots, y_{2n-1}$, korrutaksime saaduse neljaga, lisaksime endisele juurde ja liidaksime sinna veel y_0 ja y . Saadud pikkuse paberpaelal mõõdaksime vastava mõõtpuuga, jagaksime $6n$ -ga ja korrutaksime vahemiku pikkusega $x - x_0$. Resultaat oleks ligikaudu u . Ülesannete lahendamisel me näeksime, kui väga täpselt see viimane võtte annab pindade suurused. Joonis tuleb muidugi võimalikult täppis teha, et tema abil võiks arvutada.

7. Keskmiste väärtuste leidmine integraalide abil.

Kujutame endile ette, meil oleks teada liikuva täpi kiirus aja funktsioonina: $c(t)$. Tee, mis täpp ajavahemikus t_0 kuni t käinud, on ct -diagrammis kujutatud pinnana, mida piiravad c -kõver, t -telg ja kaks ordinaati täppides t_0 ja t (joon. 95)

$$s = \int_{t_0}^t c(t) \cdot dt.$$

Missugune on täpi keskmine kiirus vahemikus t_0 kuni t ?

Olgu see keskmine kiirus \bar{c} ; siis oleks

$$\bar{c} \cdot (t - t_0) = s, \text{ sellega } \int_{t_0}^t c(t) \cdot dt,$$

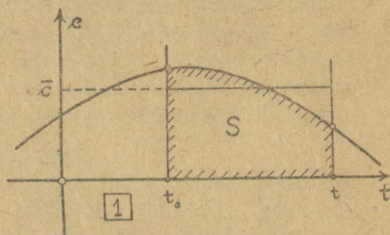
nõnda et

$$\bar{c} = \frac{\int_{t_0}^t c(t) \cdot dt}{t - t_0}.$$

Korrutis $\bar{c}(t - t_0)$ on püstküliku pind, mis võrdne s -ga.

Resultaati võime üldistada: on $y = f(x)$, siis on selle funktsiooni keskmine väärtus vahemikus x_0 kuni x

$$\bar{y} = \frac{\int_{x_0}^x f(x) \cdot dx}{x - x_0}.$$



Joon. 95.

Lugejas seisvat integraali võib leida, kui võimalik, arvutamise teel, kui mitte — graafilisel (v. 12), ehk mis kõige sagedamini tarvitusel, ligikaudu, nagu ülevalpool seletatud. On meil näiteks temperatuurkõver mingi aja, päeva, nädala, kuu jne. kohta, võime keskmist temperatuuri seletatud viisil leida igaühes säärases ajavahemikus.

Ülesanded.

1. On antud kõver $y = \frac{2}{1+x^2}$. Kujutada teda graafiliselt, võttes pikkusmõõduna 5 cm. Arvutada pind, mida see kõver piirab ühiselt x -telje ja kahe ordinaadiga täppides $x_1 = -\sqrt{3}$ ja $x_2 = +\sqrt{3}$. Jagada nimetatud vahemik 10-ks osaks ja leida nimetatud pind kõigi 4 viisi järele ligikaudu. Võrrelda resultaadid.

2. Leida paraboolvalemi abil pind, mida piiravad kõver $y = \log x$, x -telg ja sirge $x = 10$.

3. 25. septembril 1920 oli Tartus õhusoojus:

tundidel	1	4	7	10	13	16	19	22
kraadi:	4·8	3·1	2·7	9·0	15·0	15·7	12·3	9·6

Joonistada soojuskäik sel päeval ja leida paraboolvalemi abil ($n = 12$) keskmine öö-päeva temperatuur.

4. Leida ligikaudu pinnad, mida piiravad kõverad joonistes 1, 3, 6, r. m. telg ja kaks äärmist ordinaati.

5. Leida ligikaudu pool ringi pinda ($r = 5$ cm) püstkülik-, traps- ja paraboolvalemi abil ($n = 10$), arvutada iga kord tehtud vea väärtus ja selle suuruse protsent täpsa pinna väärtusest.

6. Sama ülesanne poole ellipsi pinna kohta, mille pooled teljed on 5 ja 4 cm.

Sisu.

	lhk.
Lugejale	3
Saatesõna	4
1. Funktsionaalse olenevuse mõiste. Funktsioonide graafiline kujutamine	9
Tähtsam matemaatika ülesanne. Katseresuldaatide tabel kui uuritava nähtuse seaduse avaldus. Katseresuldaatide graafiline kujutamine. Märkus loodusnähtuste uurimise viisi kohta. Katsevead ja nende graafiline leidmine. Keha langemise seaduse analüütiline kuju. Funktsionaalse olenevuse mõiste. Märkus loodusseaduse sisu kohta. Algebraalne avaldus kui funktsioon. Trigonomeetrilised funktsioonid ja nende graafiline kujutamine. Üldine funktsiooni definitsioon. Funktsiooni tähis. Muutujad ja konstandid. Ülesanded.	
2. Mõned matemaatilise analüüsi põhimõisted	20
Suuruse lõplikkuse mõiste. Lõpmata kasvavad suurused. Märkused nende kohta. Lõpmata vähenevad suurused. Märkused nende kohta. Kaks lauset. Funktsiooni piiri mõiste. Näited. Funktsiooni väärtus ja funktsiooni piir. Murru $\sin x : x$ piiri arvutamine tingimusel $x \rightarrow 0$. Märkused. Üldine funktsiooni piiri definitsioon. Ülesanded.	
3. Funktsiooni pidevuse mõiste	34
Funktsiooni pidevuse mõiste. Näited. Funktsiooni kasvu mõiste. Funktsiooni pidevuse definitsioon. Pidevate funktsioonide tähtsam omadus. Funktsiooni pidevuse tõestamise viis. Loodusnähtuste käigu pidevus. Ülesanded.	
4. Sirge tõusmise uurimine	44
Sirge ja lineaarfunktsioon. Sirge tõusmise ühtlus. Sirge abstsiss- ja ordinaatkasvude võrdelisus. Sirge tõusmise järskus. Sirge tõus.	
5. Ühtlase mõiste	48
Definitsioonid. Täpi koha määramine tema orbiidil. Ühtlase liikumise seadus. Ühtlase liikumise kiiruse mõiste. Märkus kaudse mõõtmise kohta. Uus ühtlase liikumise seaduse vorm. Graafiline	

raudtee sõiduplaan. Ühtlase paisumise uurimine. Näited ühtlaselt sündivatest nähtustest. Üldine ühtlaselt sündivate nähtuste käsitlus. Ülesanded.

6. Mitteühtlaselt sündivate nähtuste uurimine. Nende kiirus 56
 M. ü. liikumise definitsioon ja seaduse graafik. Ositi ühtlase liikumise definitsioon ja seaduse graafik. Ositi ü. l. kiirusgraafik. Keskmise kiiruse mõiste m. ü. liikumises. M. ü. liikumine kui o. ü. liikumise piir. Kiirus antud ajamomendil m. ü. liikumises. Teine m. ü. l. kiiruse definitsiooni vorm. M. ü. l. kiiruse arvutamine liikumise seadusest. Märkused. Kõvera puutuja mõiste. M. ü. l. kiiruse kujutus aeg-tee-diagrammis. Kiiruskõvera graafiline tuletamine teekõverast. Üldine kiirusmõiste. Näited. Ülesanded.
7. Funktsiooni tuletis 67
 Funktsiooni tuletise definitsioon. Tuletise tähis. Näide: ruutjuure tuletis. Märkused tuletise otsimise viisi kohta. Üldine juhised tuletise leidmiseks. Näited: $\sin x$ -, $\cos x$ -, x^2 -, x^3 - tuletised. Kõvera tõus. Kaks lauset. Puutuja võrrand. Kõvera normaal. Ülesanded.
8. Mõned differentimislausel 73
 Summa tuletis. Konstantsed liidetavad. Konstantsed kordajad. Lineaar- ja ruutfunktsioonide tuletised. Korrutise tuletis. Murru tuletis. Kaudse olenemise mõiste. Funktsiooni funktsioon. Kaudselt rippumata muutujast olenevate funktsioonide differentimine. Näited. Ülesanded.
9. Funktsioonide muutumise uurimine nende tuletiste abil 78
 Funktsiooni suurenemise ja vähenemise tunnused. Näited. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi definitsioon ja tunnused. Märkus nõuete tarvilikkuse ja piisavuse kohta. Leitud tunnuste tarvitamine. Näited. Üldine juhised funktsiooni maksimumide ja miinimumide leidmiseks. Näited. Ülesanded.
10. Integraalarvutuse põhi-ülesanne 88
 Pindfunktsioon ja tema tuletis. Pöördekeha mahtfunktsioon ja tema tuletis. Liikumise seaduse leidmine, kui kiirus aja funktsioonina teada. Üldine integraalarvutuse põhi-ülesande formuleerimine. Lause null-tuletisest. Põhilause. Määramatu integraali mõiste. Määratud integraali mõiste. Pindade arvutamine. Mahtude arvutamine. Näited mehaanikast. Märkus integrimisülesande määramatuse kohta.
11. Teine integraalarvutuse põhi-ülesande käsitamise viis 101
 Integraalarvutuse põhi-ülesanne geomeetrilises kattes. Näited. Voolkujutus. Ülesanded.

12. Graafiline integrimine 103
 Integraalarvutuse põhi-ülesanne mehaanilises kattes. Tee kujutus aeg-kiirus-diagrammis. Teekõvera konstruktsioon kiirus-kõverast. Graafiline integrimine. Ülesanded.
13. Integraal kui summa 108
 Teeväärtuse arvutamine kiirusfunktsioonist. Leitud avalduste kujutus aeg-kiirus-diagrammis. Avalduse $\int_{t_0}^t c(\tau) d\tau$ tähendus. Määratud integraal kui summa. Funktsiooni diferentsiaali mõiste. Diferentsiaal ja tuletis. Funktsiooni diferentsiaali graafiline kujutamine. Märkus kasvu ja diferentsiaali sümboolite kohta. Kaare diferentsiaal. Pöördpinna diferentsiaal. Uus integrimisprobleemi käsitus. Näited. Töö kui integraal. Ülesanded.
14. Funktsiooni teine tuletis 120
 Funktsiooni teine tuletis. Kõvera nõgusus ja kumerus. Kõvera käänutäpid. Maksimumi ja miinimumi tunnused. Üldine juhised maksimumi ja miinimumi leidmiseks. Mõõdetava suuruse kõige tõenäosem väärtus. Peegeldusseaduse tuletamine. Murdumiseseaduse tuletamine. Ülesanded.
15. Joonte kõverus 128
 Joone kõveruse mõiste. Joone kõveruse arvutamine. Näited. Joone kõverusring. Joone kõveruskeskkoha koordinaadid. Näited: parabool, ellips. Ülesanded.
16. Funktsionaalse olenemise pööramine 132
 Funktsionaalse olenemise pööramine. Pöördfunktsiooni graafiku joonistamine. Funktsiooni mõiste laiendamine: mituväärtuslised funktsioonid. Arcussinusfunktsioon. Arcustangensfunktsioon. Pöördfunktsiooni pidevus. Pöördfunktsiooni tuletis. Arcusfunktsioonide tuletised. Integraalvalemid arcusfunktsioonides. Ringi pikkus. Ellipsi pind. Ülesanded.
17. Eksponentfunktsioon ja naturaalne logaritm 141
 Kapital liitprotsentidel. Kapitali kasvamise graafilised kujud. Pidev kasvamine. Arv e . Eksponentfunktsiooni mõiste. Tema tuletis. Pidevalt muutuva kapitali kasvamise kiirus. Eksponentfunktsiooni integraal. Logaritmifunktsioon. Naturaalsete ja hari-likkude logaritmid. Logaritmifunktsiooni tuletis. Funktsiooni logaritmi tuletis. Funktsiooni logaritmiline tuletis. Näited. Integraalvalemid logaritmid. Parabooli kaar. Töö gaasi surumisel. Ülesanded.

18. Orgaanilise kasvamise seadus 152
 Orgaaniline kasvamine. Selle seadus. Eksponentkõverat määrav geomeetriline omadus. Eksponentfunktsiooni rakendused. Sooja keha külmenemine. Valguse tugevuse kustumine neelavas keskkonnas. Rihma hõõrumine rattal. Sammas, milles materjal ühtlaselt surutud. Öhu rõhumise muutumine kõrgusega. Baromeetriline nivellimine.
19. Funktsioonide ligikaudne kujutamine polünoomide abil 162
 Eelmärkused. Astmelise funktsiooni tuletis. Polünoomi kordajate avaldused tema tuletiste abil. Üldine funktsiooni ligikaudne avaldus polünoomina. Kooldumisparaboolid. Näited. Ülesanded.
20. Integraalide ligikaudne arvutamine 166
 Lugemismetood. Püstkülikvalemid. Trapetsvalem. Paraboolpind. Paraboolvalem. Keskmiste väärtuste leidmine integraalide abil. Ülesanded.