

-16  
ТАРТУСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# ТРУДЫ

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

16

ТАРТУ  
1969

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО  
ЦЕНТРА

Р. Р. МУЛЛАРИ

К ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА  
(ИНДИКАТРИСЫ КРИВИЗНЫ, ГЛАВНЫЕ  
НАПРАВЛЕНИЯ, ЭВОЛЮТЫ)

ВЫПУСК 16

ТАРТУ-1969

## ВВЕДЕНИЕ

Объект геометрии многомерного евклидова пространства  $R_n$  прежде всего представляет интерес как естественное, относительно простое, в некотором смысле только количественное обобщение наиболее важных, а именно метрических отношений окружающего нас мира (в их первом приближении). Результаты этой геометрии представляют наибольший интерес как естественные обобщения классических и, как правило, давно уже известных результатов геометрии "обычного" пространства  $R_3$ . Последние откроются перед нами в общем только как предельные, крайне вырожденные случаи результатов исключительно богатой многомерной - но совсем "похожей" с классической - геометрии. Особенно ярко это выражается в теории поверхностей  $V_m \subset R_n$ , так как в классическом случае  $V_2 \subset R_3$  размерности как поверхности, так и объемлющего ее пространства имеют минимальные возможные значения (если не считать за поверхность кривую  $V_1$ ).

В главе II настоящей работы рассматривается присоединяющаяся к каждой точке  $M$  поверхности  $V_m \subset R_n$  последовательность инвариантных многообразий  $I^l$ , где  $l=1, 2, \dots$ , находящихся в соответствующих нормальных плоскостях к  $V_m$  в  $M$ . До определенного значения  $l=k$ , равного порядку кривизны поверхности  $V_m$ , индикатрисы  $I^l$  в общем являются довольно сложными алгебраи-

ческими поверхностями, а при  $l > k$  совпадают с  $M$ . В классическом случае  $V_2 \subset R_3$  имеет место  $k=1$ , а индикатриса  $I^1$  или вырождена в точку, или же в отрезок прямой, проходящей через точку  $M$ .

Ранее более подробно исследованы индикатрисы  $I^1$  (индикатрисы нормальной кривизны). Соответствующие результаты резюмированы в труде И.А. Скоутена и Д.Дж. Стройка [17]. Следует отметить, что индикатрисы  $I^1$  характеризуют строение поверхности  $V_m$  вблизи  $M$  "в первом приближении" и, с другой стороны, они по строению наиболее просты. По возрастанию  $l$  индикатрисы  $I^1$  характеризуют все более тонкие подробности строения  $V_m$  вблизи  $M$  и, в то же время, сложность строения самой индикатрисы  $I^1$  быстро возрастает. Поэтому в случае  $l > 1$  мы пока почти совсем не умеем сопоставить различных свойств поверхности  $V_m$  вблизи  $M$  со строением соответствующей индикатрисы  $I^1$ . Ранее ряд результатов об индикатрисах  $I^1$  в общем значении  $l$ , но при  $m=2$ , получили О. Борувка в [24].

Результаты главы III работы можно истолковать как обобщение классических понятий главного направления поверхности и сопряженных направлений и вообще как выяснение их значения в более общем случае. Приведено сравнение данных обобщений с другими подобными обобщениями, сделанными И.А. Скоутеном и Д.Дж. Стройком в [17], Д.И. Перепелкином в [13] и Ван Кн-чжоу в [30].

Объект исследований главы IV — эволюта поверхности  $V_m \subset R_n$  — в классическом случае  $V_2 \subset R_3$  уже в такой мере вырожден, что он встречается только в виде центра сферы. Поэто-

му для приведения "классического" примера нам следует прибегнуть к кривой  $V_1 \subset R_3$ , где эволюта встречается в виде развертывающейся поверхности  $V_2 \subset R_3$ . Эволюта поверхности  $V_2 \subset R_4$  рассмотрена А.В. Чакмазяном в [18]. Довольно близкие к теме главы ряд результаты Х.Кине в [27], К.Коммереля в [26], Д.И. Перепелкина в [12, 13] и В.Т. Базылева в [1, 2].

Все изложение работы основывается на применении технического аппарата, построенного в главе I в виде векторов кривизны и формул Бартельса-Френе для многомерной поверхности<sup>ж)</sup>. Эти формулы существенно отличаются от соответствующих формул, выведенных в [28], [17] и [29]. Основное различие заключается в том, что в нормальных к  $V_m$  в  $M$  плоскостях различного порядка в виде векторов базиса используются ортогональные проекции соответствующих дифференциальных производных от векторов касательного к  $V_m$  в  $M$  репера - векторы кривизны. Эти векторы могут быть и линейно зависимыми - зато они тесно связаны со строением поверхности  $V_m$  области  $M$ . Во многих случаях (но далеко не всегда) это облегчает получение и интерпретацию инвариантных результатов.

Большая часть выведенных ниже результатов получены автором ранее в [6 - 11].

Автор искренно благодарен доц. Ю.Г. Лумисте за многие ценные указания при составлении этой работы.

---

ж) Название "формулы Бартельса-Френе" (вместо "формулы Френе") оправдывается тем, что М.Бартельс, как выяснено (см. [5]), применял сопровождающий трехгранник при изучении кривых (уже за 17 лет) до Ф.Френе.

Т Е Х Н И Ч Е С К И Й   А П П А Р А Т

§ 1. Формулы Бартельса-Френе

(1.) Пусть на поверхности  $V_m$  евклидова пространства  $R_n$  задан подвижный касательный репер  $R=(M, \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_m)$  и соответствующий кобазис  $\Omega=(\omega^1, \dots, \omega^m)$ . Параллельное инфинитезимальное перенесение репера  $R$  на  $V_m$  описывается уравнениями

$$\begin{cases} d' \bar{l}_c = \omega^c \bar{l}_c \\ d' \bar{l}_a = \omega^c \bar{l}_{ac}, \end{cases} \quad (1)$$

где векторы  $\bar{l}_{ac}$  ( $\perp \bar{l}_b$ ) определяют первую нормальную плоскость  $R_{(1)}$  к  $V_m$  в точке  $M$ , а символом  $d'$  обозначается соответствующее дифференцирование.

Далее, можно писать

$$d' \bar{l}_{ab} = \omega^c (\bar{A}_{abc} + \bar{B}_{abc} + \bar{l}_{abc}).$$

Здесь векторы  $\bar{A}_{abc}$  лежат в  $m$ -мерной касательной плоскости  $R_{(0)}$  к  $V_m$  в точке  $M$ ,  $\bar{B}_{abc}$  - в плоскости  $R_{(1)}$ , а векторы  $\bar{l}_{abc}$  определяют вторую нормальную к  $V_m$  в  $M$  плоскость  $R_{(2)}$ . Продолжая таким образом, получим уравнения

$$d \cdot \bar{1}_{a_0 \dots a_1} = \omega^c (\bar{A}_{a_0 \dots a_1 c} + \bar{B}_{a_0 \dots a_1 c} + \bar{1}_{a_0 \dots a_1 c}), \quad (2)$$

где  $l=1, 2, \dots$ , векторы  $\bar{A}_{a_0 \dots a_1 c}$  и  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1 c}$  лежат соответственно в  $(l-1)$ -ой и  $l$ -ой нормальных плоскостях к  $V_m$  в точке  $M$ , а векторы  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1 c}$  определяют  $(l+1)$ -ую нормальную плоскость  $R_{(l+1)}$ . В том, что дифференциал вектора  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1}$ , кроме плоскостей  $R_{(l-1)}$ ,  $R_{(l)}$  и  $R_{(l+1)}$ , не имеет компонентов в плоскостях  $R_{(l-s)}$ , где  $s > 1$ , можно убедиться, если предполагать обратное, а затем дифференцировать тождества

$$\bar{1}_{a_0 \dots a_1} \bar{1}_{b_0 \dots b_{l-s}} = 0.$$

Назовем  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1}$  векторами 1-ой кривизны поверхности  $V_m$  в  $M$ , а  $\bar{A}_{a_0 \dots a_1 c}$  и  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1 c}$  векторами отражения 1-ой кривизны и векторами 1-ого кручения соответственно. Очевидно, что все эти векторы определены при заданном касательном к  $V_m$  репере  $\mathcal{R}$  однозначно.

Так как пространство  $R_n$  имеет конечную размерность  $n$ , то найдется такая минимальная величина  $k$ , что все векторы  $\bar{1}_{a_0 \dots a_{k+1}}$  тождественно равны нулю. Поэтому для  $l$  в (1) достаточно придать лишь значения  $l=1, \dots, k$ . Эту величину  $k$  назовем порядком кривизны поверхности  $V_m$ .

(2) Подвергнем векторы  $\bar{1}_a$  в точке  $M$  линейному преобразованию  $\bar{1}'_a = A_a^c \bar{1}_c$ . Тогда векторы  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1}$  подвергаются преобразованию

$$\bar{1}'_{a_0 \dots a_1} = A_{a_0}^{c_0} \dots A_{a_1}^{c_1} \bar{1}_{c_0 \dots c_1}.$$

Если преобразование - инфинитезимальное, т.е.  $A_a^b = \delta_a^b + \omega_a^b$ , то получим

$$d'' \bar{l}_{a_0 \dots a_1} = \sum_1 \omega_{a_1}^0 \bar{l}_{a_0 \dots a_{1-1} c a_{1+1} \dots a_1} \quad (3)$$

Здесь символом  $d'' = d(\text{mod } (\omega^1, \dots, \omega^m))$  обозначается дифференцирование при фиксированной точке  $M$ .

Произвольное дифференцирование  $d$ , очевидно, можно разложить на "компоненты"  $d = d' + d''$ . Поэтому в силу (1), (2) и (3) можно писать для общего случая

$$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{M} = \omega^0 \bar{l}_0 \\ d\bar{l}_a = \omega^0 \bar{l}_{a0} + \omega_a^0 \bar{l}_0 \\ d\bar{l}_{a_0 \dots a_1} = \omega^0 (\bar{A}_{a_0 \dots a_1} + \bar{B}_{a_0 \dots a_1} + \bar{l}_{a_0 \dots a_1}^0) + \\ \quad + \sum_1 \omega_{a_1}^0 \bar{l}_{a_0 \dots c \dots a_1} \end{array} \right. \quad (4)$$

Эту систему естественно называть формулами Бартельса-Френе для поверхности  $V_m$ . Сходство со соответствующими формулами для кривой легче заметить, если иметь в виду разложения

$$\bar{A}_{a_0 \dots a_1} = A_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{l}_{c_0 \dots c_{1-1}},$$

$$\bar{B}_{a_0 \dots a_1} = B_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1} \bar{l}_{c_0 \dots c_1}.$$

Разумеется, векторы кривизны не всегда линейно независимы и приведенные разложения поэтому не всегда однозначны. Это, однако, не вызывает затруднений, так как в случае надобности можно фиксировать произвольное одно из многих возможных разложений.

Ранг векторов  $\bar{l}_{a_0 \dots a_1}$ , т.е. размерность 1-ой нормальной плоскости  $R_{(1)}$  к  $V_m$ , будем обозначать через  $m_1$ .

(3) К уравнениям (4) следует в соответствующей форме до-  
бавить еще уравнения инвариантности метрики

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_{l-1}} &= -\bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1} \\ d(\bar{I}_a \bar{I}_b) &= \omega_a^c \bar{I}_c \bar{I}_b + \omega_b^c \bar{I}_a \bar{I}_c \\ d(\bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1}) &= \omega^c (\bar{B}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1} + \bar{B}_{b_0 \dots b_1} \bar{I}_{a_0 \dots a_1}) + \\ &+ \sum_1 \omega_{a_1}^c \bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1} + \sum_1 \omega_{b_1}^c \bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1}, \end{aligned} \right.$$

которые получаются при дифференцировании тождеств  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_{l-1}} = 0$  и скалярных произведений  $\bar{I}_a \bar{I}_b$  и  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1}$  с учетом (4). Тензор  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1}$  назовем тензором 1-ой кривизны поверхности  $V_m$ .

(4) Систему (4) можно истолковать по-разному в зависимости от того, считаем ли мы формы  $\omega_a^b$  независимыми от форм  $\omega^c$ , или же имеем в виду определенные линейные зависимости между ними. Далее будем однако предполагать, что в (4) не имеют места линейные зависимости между  $\omega_a^b$  и  $\omega^c$ . Для другого более важного частного случая, где все формы  $\omega_a^b$  выражаются через формы  $\omega^c$  посредством инволютивных зависимостей

$$\omega_a^b = P_{ac}^b \omega^c,$$

выпишем новую систему

$$\left\{ \begin{aligned} d\bar{M} &= \omega^c \bar{I}_c \\ d\bar{I}_a &= \omega^c (\bar{P}_{ac} + \bar{I}_{ac}) \\ d\bar{I}_{a_0 \dots a_1} &= \omega^c (\bar{A}_{a_0 \dots a_1}^c + \bar{P}_{a_0 \dots a_1}^c + \bar{I}_{a_0 \dots a_1}^c) \end{aligned} \right. \quad (6)$$

с соответствующими уравнениями инвариантности метрики

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{a_0} \dots a_1 b_1 \bar{b}_{b_0} \dots b_{1-1} = -\bar{a}_{a_0} \dots a_1 \bar{b}_{b_0} \dots b_1 \\ d(\bar{a}_a \bar{b}_b) = \omega^c (\bar{P}_{ac} \bar{b}_b + \bar{P}_{bc} \bar{a}_a) \\ d(\bar{a}_{a_0} \dots a_1 \bar{b}_{b_0} \dots b_1) = \omega^c (\bar{P}_{a_0 \dots a_1 c} \bar{b}_{b_0} \dots b_1 + \bar{P}_{b_0 \dots b_1 c} \bar{a}_{a_0} \dots a_1) \end{array} \right. \quad (7)$$

Здесь  $\bar{P}_{ac} = P_{ac}^d \bar{a}_d$  и  $\bar{P}_{a_0 \dots a_1 c} = \bar{B}_{a_0 \dots a_1 c} + \sum_1 P_{a_1 c}^d \bar{a}_{a_0} \dots d \dots a_1$ .  
 Векторы  $\bar{P}_{a_0 \dots a_1 c}$  будем также называть векторами 1-ого кручения поверхности  $V_m$  в  $M$ . Таким образом, векторы кручения зависят от заданных между формами  $\omega_a^b$  и  $\omega^c$  зависимостей. Если этих зависимостей вообще нет, то обозначим векторы кручения через  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1 c}$ , если же все формы  $\omega_a^b$  выражаются через формы  $\omega^c$  посредством инволютивных зависимостей, то — через  $\bar{P}_{a_0 \dots a_1 c}$ .

Если система (4) связана только с поверхностью  $V_m$  в  $R_n$ , то система (6), кроме того, связана и определенной системой заданных на  $V_m$  касательных реперов  $R$ .

§ 2. Условия интегрируемости

Ⓘ. Произвольная система (4) определяет при заданной системе величин  $A_{a_0 \dots a_1 c}^{c_0 \dots c_{1-1}}$  и  $B_{a_0 \dots a_1 c}^{c_0 \dots c_1}$  и согласующихся с ней посредством (5) начальных значениях векторов  $\bar{M}$ ,  $\bar{I}_a$  и  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1}$  в  $R_n$  поверхность  $V_m$  тогда и только тогда, когда соблюдены определенные условия интегрируемости. Эти условия получаются с помощью внешнего дифференцирования из уравнений (4). Уравнения (5), как уравнения инвариантности метрики, дифференциальных следствий не имеют.

Внешнее дифференцирование первого из уравнений (4) дает

$$D\omega^c \bar{I}_c + d\bar{I}_c \wedge \omega^c = 0,$$

т.е. (с учетом (4))

$$D\omega^a = \omega^c \wedge \omega_c^a, \quad (8)$$

$$\bar{I}_{ab} = \bar{I}_{ba}. \quad (9)$$

Для второго уравнения получим

$$D\omega^c \bar{I}_{ac} + d\bar{I}_{ac} \wedge \omega^c + D\omega_a^c \bar{I}_c + d\bar{I}_c \wedge \omega_a^c = 0,$$

т.е.

$$D\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b + A_{acd}^b \omega^c \wedge \omega^d, \quad (10)$$

$$\bar{B}_{acd} = \bar{B}_{adc}, \quad (11)$$

$$\bar{I}_{acd} = \bar{I}_{adc}. \quad (12)$$

Для третьего уравнения (4) выпишем сразу компоненты внешнего дифференциала отдельно в плоскостях

$$\cdot R_{(1-2)}, R_{(1-1)}, R_{(1)}, R_{(1+1)} \quad \text{и} \quad R_{(1+2)}:$$

$$A_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{A}_{c_0 \dots c_{1-1}}^d \omega^c \wedge \omega^d = 0, \quad (13)$$

$$\left[ dA_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{A}_{c_0 \dots c_{1-1}}^d + (A_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{B}_{c_0 \dots c_{1-1}}^d + \right. \\ \left. + B_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1} \bar{A}_{c_0 \dots c_1}^d) \omega^{\bar{d}} + A_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \sum_{i=0}^{1-1} \omega_{c_i}^{\bar{d}} \bar{A}_{c_0 \dots d \dots c_{1-1}} \right] \omega^c = 0, \quad (14)$$

$$- \sum_{i=0}^1 \omega_{a_i}^{\bar{d}} \bar{A}_{a_0 \dots d \dots a_1}^c - \bar{A}_{a_0 \dots a_1}^d \omega_c^{\bar{d}} \Big] \wedge \omega^c = 0,$$

$$\left[ dB_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1} \bar{A}_{c_0 \dots c_1}^d + (A_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{A}_{c_0 \dots c_{1-1}}^d + \bar{A}_{a_0 \dots a_1}^c \omega^{\bar{d}} + \right. \\ \left. + B_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1} \bar{B}_{c_0 \dots c_1}^d - \sum_{i=0}^1 A_{a_i}^g \omega^{\bar{d}} \bar{A}_{a_0 \dots g \dots a_1} \right) \omega^{\bar{d}} + \quad (15)$$

$$+ B_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1} \sum_{i=0}^1 \omega_{c_i}^{\bar{d}} \bar{A}_{c_0 \dots d \dots c_1} - \bar{B}_{a_0 \dots a_1}^d \omega_1^{\bar{d}} -$$

$$\left. - \sum_{i=0}^1 \omega_{a_i}^{\bar{d}} \bar{B}_{a_0 \dots d \dots a_1} \right] \wedge \omega^c = 0,$$

$$(B_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1} \bar{c}_{c_0 \dots c_1}^d + \bar{B}_{a_0 \dots a_1} c_{c_0 \dots c_1}^d) \omega^d \wedge \omega^c = 0, \quad (16)$$

$$\bar{B}_{a_0 \dots a_1} c_{c_0 \dots c_1}^d \omega^d \wedge \omega^c = 0. \quad (17)$$

②. Соотношения (9), (12) и (17), если учитывать значение векторов 1-ой кривизны  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1}$  в (4), равносильны требованию симметричности векторов  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1}$  по всем индексам. Отсюда векторы  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1} c$  и  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1} c$  симметричны по 1+1 первым индексам. Далее будем все векторы  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1} c$  с одинаковым набором индексов  $a_0 \dots a_1$ , но с различной их последовательностью, считать одним и тем же вектором и по своему геометрическому смыслу. (Только тогда можно говорить, например, о линейно независимых векторах  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1} c$  и т.п.)

Число различных по геометрическому смыслу векторов  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1} c$  будет тогда равно

$$r_{m1} = \frac{1}{(1+1)!} m(m+1) \dots (m+1).$$

В силу (5) можно писать

$$\begin{aligned} & A_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{A}_{c_0 \dots c_{1-1}}^d \bar{B}_{b_0 \dots b_{1-2}}^c = \\ & = -A_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{c}_{c_0 \dots c_{1-1}}^d \bar{B}_{b_0 \dots b_{1-2}}^c = \\ & = \bar{B}_{a_0 \dots a_1} \bar{B}_{b_0 \dots b_{1-2}}^c. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что (13) — следствие из требования симметричности векторов кривизны.

Обозначим производную по форме Пфаффа  $\omega^a$  от произвольной функции  $f$  через  $f_a$ . Тогда после некоторых упрощений равенство (14) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 & (\Lambda_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} d \bar{1}_{c_0 \dots c_{1-1}} + \Lambda_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{B}_{c_0 \dots c_{1-1}} d^+ \\
 & + B_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1} \bar{1}_{c_0 \dots c_1} d) \omega^c \wedge \omega^d = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Если выписать из (5) тождество

$$\Lambda_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{1}_{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{1}_{b_0 \dots b_{1-1}} = -\bar{1}_{a_0 \dots a_1} \bar{1}_{b_0 \dots b_{1-1}} c^0,$$

а затем его производную по форме  $\omega^d$  и провести с ней определенные несложные преобразования с учетом (16), то выяснится, что (18) (следовательно, и (14)) является следствием условия интегрируемости (16).

Аналогично тому, как для (14), придаем более компактную форму для (15):

$$\begin{aligned}
 & \left[ B_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1} d \bar{1}_{c_0 \dots c_1} + B_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1} \bar{B}_{c_0 \dots c_1} d^+ + \bar{1}_{a_0 \dots a_1} c^d d^+ \right. \\
 & \left. + \Lambda_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{1}_{c_0 \dots c_{1-1}} d - \sum_{i=0}^1 \Lambda_{i c d}^g \bar{1}_{a_0 \dots g \dots a_1} \right] \omega^c \wedge \omega^d = 0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

В итоге условиями интегрируемости системы (4), если рассмотреть только независимые условия и предположить симметричность векторов кривизны по всем индексам, являются (8), (10), (11), (16) и (19). Все эти условия, вместе взятые, обозначим через (A).

③ Таким же образом можно получить условия интегрируемости для системы (6):

$$D\omega^a = P_{c d}^a \omega^c \wedge \omega^d, \tag{20}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & [P_{cd}^g \bar{1}_{ag} + P_{ad}^g \bar{1}_{gc} + \bar{P}_{adc}] \omega^c \wedge \omega^d = 0 \\ & [P_{cd}^g \bar{1}_{a_0 \dots a_1 g} + P_{a_0 \dots a_1 d}^{c_0 \dots c_1} \bar{1}_{c_0 \dots c_1} + \bar{P}_{a_0 \dots a_1 dc}] \omega^c \wedge \omega^d = 0, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & [P_{ad}^g \bar{c} \bar{1}_g + P_{ad}^g \bar{P}_{gc} + P_{cd}^g \bar{P}_{ag} + \bar{A}_{adc}] \omega^c \wedge \omega^d = 0 \\ & [P_{a_0 \dots a_1 d}^{c_0 \dots c_1} \bar{c} \bar{1}_{c_0 \dots c_1} + P_{a_0 \dots a_1 d}^{c_0 \dots c_1} \bar{P}_{c_0 \dots c_1} + P_{cd}^g \bar{P}_{a_0 \dots a_1 g} + \\ & + \bar{A}_{a_0 \dots a_1 d}^{c_0 \dots c_1} \bar{c} \bar{1}_{c_0 \dots c_1} + \bar{A}_{a_0 \dots a_1 dc}] \omega^c \wedge \omega^d = 0, \end{aligned} \right. \quad (22)$$

где  $l=1, \dots, k$ . Эти условия, вместе взятые, обозначим через (B).

### § 3. Определение поверхности тензорами кривизны.

(1). В (4), (5) и (A) мы имеем дело с тремя системами величин существенно различного значения:

$$A_{a_0 \dots a_1 c}^{c_0 \dots c_{l-1}}, \quad B_{a_0 \dots a_1 c}^{c_0 \dots c_1} \quad \text{и} \quad \bar{1}_{a_0 \dots a_1} \bar{1}_{b_0 \dots b_1}.$$

Уравнения (5) и (A) налагают определенные зависимости между этими системами величин. Представляет интерес выяснить, достаточно ли для определения поверхности  $V_m$  задания только некоторой одной или двух систем. Для этого достаточно показать, что остальные системы величин можно тогда вычислить посредством (5) и (A).

Из первого уравнения (5) непосредственно вытекает, что

величины  $A_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}}$  полностью определяются координатами тензоров кривизны  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1}$  (в случае линейно зависимых векторов кривизны это определение неоднозначное, что однако не меняет сущности проблемы, так как расположение вектора  $\bar{A}_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}}$  среди векторов  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}}$  тем не менее определено однозначно).

В силу того же первого уравнения системы (5) можно писать

$$\begin{aligned} \bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1} &= -A_{a_0 \dots a_1 b_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{I}_{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{I}_{b_0 \dots b_{1-1}} = \dots = \\ &= (-1)^1 A_{a_0 \dots a_1 b_1}^{c_0 \dots c_{1-1}} A_{c_0 \dots c_{1-2}}^{c_0 \dots c_{1-2}} \dots A_{c_0 \dots c_{1-1} b_{1-1}}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{I}_{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{I}_{b_0 \dots b_0} \end{aligned}$$

В итоге получается, что система, состоящая из метрического тензора  $\bar{I}_a \bar{I}_b$  и всех величин  $A_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_{1-1}}$ , равносильна системе всех тензоров кривизны  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1}$  (метрический тензор = тензор нулевой кривизны).

(2.) Несколько сложнее исследование зависимости системы величин  $V_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1}$  от других систем.

Выпишем из (5) выражение граффового производного

$$(\bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1})_{,c} = \bar{V}_{a_0 \dots a_1 c} \bar{I}_{b_0 \dots b_1} + \bar{V}_{b_0 \dots b_1 c} \bar{I}_{a_0 \dots a_1} \quad (23)$$

и составляем из (11), (16) и (23) систему для определения

$$V_{a_0 \dots a_1}^{c_0 \dots c_1}$$

Обозначим

$$\bar{V}_{a_0 \dots a_{1-1} d c} = \bar{V}_{a_0 \dots a_{1-1} d}^{c_0 \dots c_{1-1}} \bar{I}_{c_0 \dots c_{1-1}} + \bar{V}_{a_0 \dots a_{1-1} d c} \quad (24)$$

$$\bar{R}_{adc} = \bar{B}_{adc}, \quad (25)$$

$$E_{a_0 \dots a_1 b_0 \dots b_1 c} = (\bar{I}_{a_0 \dots a_1} \bar{I}_{b_0 \dots b_1})_{,c} + \\ + B_{a_0 \dots a_{l-1} a_l} \bar{I}_{c_0 \dots c_{l-1} c} \bar{I}_{b_0 \dots b_1} + \quad (26)$$

$$+ B_{b_0 \dots b_{l-1} b_l} \bar{I}_{c_0 \dots c_{l-1} c} \bar{I}_{a_0 \dots a_1}, \\ E_{a_0 a_1 b_0 b_1 c} = (\bar{I}_{a_0 a_1} \bar{I}_{b_0 b_1})_{,c}. \quad (27)$$

Тогда вместо (23) можно писать

$$E_{a_0 \dots a_1 b_0 \dots b_1 c} = \bar{R}_{a_0 \dots a_1 c} \bar{I}_{b_0 \dots b_1} + \bar{R}_{b_0 \dots b_1 c} \bar{I}_{a_0 \dots a_1}. \quad (28)$$

В силу (11) и (16), векторы  $\bar{R}_{a_0 \dots a_1 c} = R_{a_0 \dots a_1 c} \bar{I}_{c_0 \dots c_1}$  симметричны относительно всех своих индексов.

Допустим, что при заданных величинах  $E_{a_0 \dots a_1 b_0 \dots b_1 c}$  система (28) однозначно определяет расположение векторов  $\bar{R}_{a_0 \dots a_1 c}$  среди  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1}$ . Тогда из (25) и (24) можно последовательно по возрастанию  $l$  однозначно определить векторы  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1 c}$  (т.е. их расположение среди векторов  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1}$ ). Они определяются через величины  $E_{a_0 \dots a_s b_0 \dots b_s c}$  и  $\bar{I}_{a_0 \dots a_s} \bar{I}_{b_0 \dots b_s}$ , где  $s < l$ . А далее при помощи (27) и (26) можно векторы  $\bar{B}_{a_0 \dots a_1 c}$  последовательно по возрастанию  $l$  однозначно определить через величины  $\bar{I}_{a_0 \dots a_s} \bar{I}_{b_0 \dots b_s}$  и  $(\bar{I}_{a_0 \dots a_s} \bar{I}_{b_0 \dots b_s})_{,d}$ , где  $s < l$ . Итак, если система (28) однозначно определяет векторы  $\bar{R}_{a_0 \dots a_1 c}$ , то система величин  $R_{a_0 \dots a_1 c}$  полностью определяется через координаты тензоров кривизны (и через их производные). Займемся рассмотрением системы (28).

3. Введем обозначение

$$\bar{E}_{a_0 \dots a_1 c} \bar{I}_{b_0 \dots b_1} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \end{Bmatrix},$$

где  $\alpha_a$  и  $\beta_b$  число значений  $a$  и  $b$  соответственно в наборах индексов  $a_0 \dots a_1 c$  и  $b_0 \dots b_1$ . Например,

$$\bar{E}_{1121} \bar{I}_{113} = \begin{Bmatrix} 310 \\ 201 \end{Bmatrix},$$

где  $m=3$ . Тогда система (28) принимает вид

$$E_{a_0 \dots a_1 b_0 \dots b_1 c} = E_{b_0 \dots b_1 a_0 \dots a_1 c} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \beta_1 & \dots & \beta_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta'_1 & \dots & \beta'_m \\ \alpha'_1 & \dots & \alpha'_m \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

где

$$\begin{cases} \alpha'_a = \alpha_a, & \text{если } a \neq c \\ \alpha'_c = \alpha_c - 1, & (\alpha_c > 0) \\ \beta'_a = \beta_a, & \text{если } a \neq c \\ \beta'_c = \beta_c + 1 \end{cases}$$

$$\text{и } \sum_a \alpha_a = \sum_a \beta'_a = 1+2, \quad \sum_a \alpha'_a = \sum_a \beta_a = 1+1.$$

Матрица системы (29) состоит только из двоек, единиц и нулей. При этом в каждой строке или одна двойка (если  $\alpha_a = \beta'_a$ ) и нули, или две единицы и нули. Число ненулевых элементов в

столбце, соответствующем неизвестной  $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{matrix} \right\}$ , равно числу ненулевых значений  $\alpha_a$ . Нетрудно установить, что число строк матрицы равно числу столбцов (= числу неизвестных) только при  $m=2$ . При  $m > 2$  число строк превышает число столбцов. Однако здесь нет смысла рассмотреть случаи, когда условия интегрируемости не соблюдены. Поэтому предполагаем, что система (29) непротиворечива.

Допустим, что между столбцами матрицы системы (29) имеет место определенная линейная зависимость  $L$ , в которую входит с ненулевым множителем столбец  $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{matrix} \right\}$  (т.е. столбец, соответствующий неизвестной  $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{matrix} \right\}$ ). Очевидно, что в этом столбце не может быть двоек. Поэтому он состоит только из единиц и нулей. Пусть  $L$  нормирована, так что множитель столбца  $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{matrix} \right\}$  равен единице. Тогда все те столбцы, которые имеют единицу на тех же строках, где и столбец  $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{matrix} \right\}$  (а число таких столбцов определяется ненулевыми значениями среди  $\alpha_1 \dots \alpha_m$ ), входят также в  $L$  с множителями  $-1$ . Отсюда, в свою очередь, следует существование в  $L$  определенных столбцов с множителем  $1$  и т.д. Оказывается, что при любом исходном столбце  $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{matrix} \right\}$  можно показать, что тот же столбец должен находиться в  $L$  как с множителем  $+1$  так и с множителем  $-1$ . Идея доказательства этого проста и прозрачна, а так как запись доказательства довольно сложна, ограничимся приведением примера. Пусть  $m=3$  и  $l=2$ , а исходным столбцом выбран  $\left\{ \begin{matrix} 310 \\ 201 \end{matrix} \right\}$ . Если учесть уравнение

$$E_{112,113,1} = \begin{Bmatrix} 310 \\ 201 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 301 \\ 210 \end{Bmatrix} \quad (c = 1),$$

то столбец  $\begin{Bmatrix} 30I \\ 2I0 \end{Bmatrix}$  должен быть в  $L$  с множителем  $-I$ . Далее, с помощью уравнения

$$E_{111,112,3} = \begin{Bmatrix} 30I \\ 2I0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 211 \\ 300 \end{Bmatrix} \quad (c = 3)$$

получим, что столбец  $\begin{Bmatrix} 2II \\ 300 \end{Bmatrix}$  в  $L$  с множителем  $I$ , и отсюда, в силу

$$E_{113,111,3} = \begin{Bmatrix} 211 \\ 300 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 310 \\ 201 \end{Bmatrix},$$

исходный столбец  $\begin{Bmatrix} 3I0 \\ 20I \end{Bmatrix}$  в  $L$  с множителем  $-I$ . Символически запишем это все в следующем виде:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{Bmatrix} 3I0 \\ 20I \end{Bmatrix} & \xrightarrow{c=1} & \begin{Bmatrix} 30I \\ 2I0 \end{Bmatrix} & \xrightarrow{c=3} & \begin{Bmatrix} 211 \\ 300 \end{Bmatrix} & \xrightarrow{c=2} & \begin{Bmatrix} 310 \\ 201 \end{Bmatrix} \\ +1 & & -1 & & +1 & & -1 \end{array}$$

Полученное противоречие доказывает линейную независимость столбцов матрицы системы (29). Отсюда ранг системы (29) равен числу неизвестных и поэтому (28) однозначно определяет векторы  $\bar{R}_{a_0 \dots a_1 c}$ .

(4.) В итоге доказано, что система величин  $\bar{R}_{a_0 \dots a_1 c}^{c_0 \dots c_1}$  полностью определяется координатами тензоров кривизны (и их производными). Отсюда следует, что одни только тензоры кривизны определяют в пространстве  $R$  поверхность  $M$  с точностью до движения.

Это было в несколько другой форме получено Э. Бомпьяни, а затем Майером и Бурстином, которые доказали теорему об

ределении поверхности  $V_m$  с помощью инвариантных форм Бом-  
пьяни, которые в нашей записи примут вид

$$\omega_1 = (\omega^0 \dots \omega^{11} \omega_0 \dots \omega_1)^2$$

(см. (20), (21), (22), (23), (25), а также (16)).

И Н Д И К А Т Р И С Ы К Р И В И З Н Ы

§ 1. Определение индикатрисы

(1.) С помощью векторов 1-ой кривизны можно с каждым од-  
номерным касательным направлением ( $\sim$  единичным касательным  
вектором)

$$\bar{x} = x^c \bar{l}_c \quad (x^c x^d \bar{l}_c \bar{l}_d = 1)$$

к  $V_m$  в  $M$  инвариантно связать вектор

$$\bar{p}(\bar{x}^{1+1}) = x^c \dots x^1 \bar{l}_{c_0 \dots c_1}$$

в 1-ой нормальной к  $V_m$  в  $M$  плоскости  $R_{(1)}$ . Назовем  $\bar{p}(\bar{x}^{1+1})$   
вектором 1-ой кривизны поверхности  $V_m$  в направлении  $\bar{x}$ . В слу-  
чае  $1=1$  он совпадает с известным вектором нормальной кривиз-  
ны (см., например, [17]).

В качестве примера укажем на вектор  $\bar{l}_{a \dots a}$ , который яв-  
ляется  $|\bar{l}_a|^{1+1}$ -кратным вектором 1-ой кривизны в направлении  
 $\bar{l}_a$ . Если репер  $R$  ортонормирован, то  $\bar{p}(\bar{l}_a^{1+1}) = \bar{l}_{a \dots a}$ .

Пусть направление  $\bar{x}$  вращается свободно в касательной  
плоскости  $R_{(0)}$ . Тогда конечная точка вектора  $\bar{M} + \bar{p}(\bar{x}^{1+1})$  опи-  
сывает в  $R_{(1)}$  некоторое точечное множество  $\bar{I}^1$ , которое будем

называть индикатрисой 1-ой кривизны поверхности  $V_m$  в  $M$ . В случае  $l=1$  эта индикатриса совпадает с известной индикатрисой нормальной кривизны (см., например, [17]).

Введем обозначение

$$x^{a_0 \dots a_1} = \frac{(1+1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} x^{a_0} \dots x^{a_1},$$

где  $\alpha_a$  - число значений  $a$  в наборе индексов  $a_0 \dots a_1$ . Тогда имеем

$$x^{c_0 \dots c_1} \bar{I}_{c_0 \dots c_1} = x^{c_0 \dots c_1} \bar{I}_{\langle c_0 \dots c_1 \rangle},$$

где в заключенном в скобках " $\langle \dots \rangle$ " наборе индексы могут принимать значения только в неубывающей последовательности.

В силу этого равенства, уравнения

$$\begin{cases} x^{a_0 \dots a_1} - \frac{(1+1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \sqrt{x^{a_0 \dots a_0} \dots x^{a_1 \dots a_1}} = 0 \\ \sqrt{x^{c_0 \dots c_0} x^{d_0 \dots d_0}} \bar{I}_{c_0 d_0} - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

являются уравнениями индикатрисы  $I^1$  в аффинной координатной системе  $(M, \bar{I}_{a_0 \dots a_1})$  плоскости  $R_{(1)}$ . (Здесь мы не ставим никаких ограничений на линейную зависимость или же независимость векторов  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1}$ .)

②. Так как конкретный вид индикатрисы  $I^1$  и ее расположение относительно точки  $M$  поверхности  $V_m$ , очевидно, в определенной мере характеризуют локальное строение  $V_m$  вблизи  $M$ , то для теории поверхностей  $V_m$  имеет значение и самостоятельное изучение индикатрис  $I^1$ , а также конфигураций  $\Gamma^1 = M U I^1$ ,

т.е. пар, состоящих из начала координат  $M$  и точечного многообразия  $I^1$ , представляемого системой (1).

Если скалярные произведения  $\bar{I}_a \bar{I}_b$  считать заданными (что всегда можно сделать; например,  $\bar{I}_a \bar{I}_b = \delta_{ab}$ ), то конфигурация  $F^1$  зависит только от системы  $(M, \bar{I}_{a_0 \dots a_1})$ . При этом, если будем изучать произвольные конфигурации  $F^1$ , нас вообще не будет интересовать геометрическое значение этой системы. Мы будем ее истолковывать как систему исходящих из произвольной точки произвольных векторов. В том, что векторы  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1}$  в зависимости от выбора поверхности  $V_m$  и ее точки  $M$ , действительно могут приобрести произвольные значения, можно убедиться, если посмотреть на них как на начальные условия некоторой интегрируемой системы дифференциальных уравнений (I 4).\*)

Произвольное линейное отображение  $L$  приводит заданную систему  $(M, \bar{I}_{a_0 \dots a_1})$  опять-таки в некоторую систему  $(M', \bar{I}'_{a_0 \dots a_1})$ . А так как система (1) одинакова для обеих систем, то это же линейное отображение приводит конфигурацию  $F^1$ , соответствующую  $(M, \bar{I}_{a_0 \dots a_1})$ , в конфигурацию  $F'^1$ , соответствующую  $(M', \bar{I}'_{a_0 \dots a_1})$ . Отсюда следует, что множество всевозможных конфигураций  $F^1$  замкнуто относительно линейных отображений. Так как всевозможные системы  $(M, \bar{I}_{a_0 \dots a_1})$  можно получить с помощью линейных отображений от произвольной системы  $(M, \bar{I}^0_{a_0 \dots a_1})$ , где векторы  $\bar{I}^0_{a_0 \dots a_1}$  линейно независимы, то и все конфигурации  $F^1$  можно получить этим же путем

\*) т.е. уравнений (4) из главы I; такая система ссылок используется и в дальнейшем.

от соответствующей конфигурации  $F_0^1$ .

③. Предположим, что векторы  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1}$  линейно независимы. Тогда размерность плоскости  $R_{(1)}$  равна

$$r_{m1} = \frac{1}{(1+1)!} m(m+1) \dots (m+1)$$

(числу векторов  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1}$ ), а индикатриса  $I^1$  является, в силу (1),  $(m-1)$ -мерной конечной алгебраической поверхностью. Для определения ее порядка выделим в плоскости  $R_{(1)}$  произвольно некоторую подплоскость  $R_s$ , где  $s = r_{m1} - (m-1)$ , и найдем число точек (действительных или комплексных), в которых плоскость  $R_s$  пересекается с индикатрисой  $I^1$ .

Искомые точки являются решениями системы, состоящей из (1) и  $m-1$  линейных уравнений плоскости  $R_s$ . Исключая из этой системы величины  $X^{a_0 \dots a_1}$ , у которых не все индексы равны, получаем для определения  $m$  величин  $X^{a \dots a}$  некоторую новую систему, которую обозначим через (ж). Из нее с помощью обозначений

$$x^a = \frac{1+1}{X^{a \dots a}}$$

получим систему

$$\begin{cases} b_c^1 \dots c_1^0 x^c \dots x^0 1_{+b^1} = 0 & (i=1, \dots, m-1) \\ x^c x^d \bar{1}_c \bar{1}_d - 1 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

состоящую из одного квадратичного уравнения и из  $m-1$  уравнений  $(1+1)$ -ой степени. Такая система (2) имеет  $2(1+1)^{m-1}$  решений. Однако порядок индикатрисы  $I^1$ , как алгебраической по-

верхности, равен числу решений не системы (2), а системы (ж).

Поэтому будем сопоставлять множества решений этих систем.

Если  $\bar{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$  является решением системы (2), то

$$\bar{X}_0 = ((x_0^1)^{l+1}, \dots, (x_0^m)^{l+1})$$

является решением системы (ж) и определяется при этом однозначно. Все решения системы (2), соответствующие указанным образом одному и тому же значению  $\bar{X}_0$ , должны, очевидно, иметь вид

$$\bar{x}_0^i = (p_1 x_0^1, \dots, p_m x_0^m),$$

где

$$p_a = \sin\left(\frac{2q_a}{l+1}\pi\right) + 1 \cos\left(\frac{2q_a}{l+1}\pi\right)$$

- корни единицы ( $q_a$  - целые числа). Так как величины  $b_{c_0 \dots c_1}^i$  и  $b^i$  в (2) (и в (ж)) могут, в силу произвольности выбора плоскости  $R_s$ , приобрести произвольные вещественные, а  $q_a$  - только целочисленные, дискретные значения, то нетрудно установить равенства  $q_1 = \dots = q_m = q$ .

Первые  $m-l$  уравнения из обеих систем (2) и (ж) не налагают никаких ограничений на величину  $q$ . Зато из последнего уравнения следует, что при нечетном  $l$  имеет место  $q = \frac{1}{2}r(l+1)$ , а при четном  $l$  только  $q = r(l+1)$ , где  $r$  - произвольное целое число. Следовательно, каждому решению  $\bar{X}_0$  системы (ж), в зависимости от четности или нечетности величины  $l$ , соответствует или одно или два решения  $\bar{x}_0$  системы (2).

Если теперь учесть еще, что каждая система линейно зависимых векторов  $\bar{1}_{a_0} \dots a_1$  можно представить как результат пре-

дельного перехода от некоторой системы линейно независимых векторов  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1}(t)$ , где  $t \neq t_0$ , так что

$$\bar{1}_{a_0 \dots a_1} = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{1}'_{a_0 \dots a_1}(t),$$

то может быть сформулирована

Теорема 2.1 Индикатриса 1-ой кривизны  $\Gamma^1$  поверхности  $V_m$  в ее точке  $M$  является или  $(m-1)$ -мерной конечной алгебраической поверхностью порядка  $2(1+l)^{m-4}$ , когда  $l$  четна, и порядка  $(1+l)^{m-4}$ , когда  $l$  нечетна, или же конечной фигурой, получаемой из такой алгебраической поверхности предельным переходом.

Теорема согласуется с результатами, полученными в [17] для случая  $l=1$ , а также с результатами О.Борувка (см. [24]) для  $m=2$ .

## § 2. Сечение индикатрисы

(I.) Пусть касательное направление  $\bar{x}$  к  $V_m$  в точке  $M$  вращается не во всей касательной плоскости  $R_{(0)}$ , а в некоторой двумерной плоскости  $R_2$ , содержащейся в  $R_{(0)}$  (и проходящей через точку  $M$ ). При подходящем выборе ортонормированного подвижного репера  $R$  траекторию конечной точки вектора  $\bar{M} + \bar{x}$  можно задавать следующими формулами Бартельса-Френе:

$$\begin{cases} \bar{1}'_1 = \bar{1}_2 \\ \bar{1}'_2 = -\bar{1}_1, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\bar{1}'_1 = \bar{x}$ , а запятая над вектором означает производную по углу поворота  $\alpha$  направления  $\bar{x}$ . Эти формулы Бартельса-Френе

$$\begin{cases} \omega_1^2 = -\omega_2^1 = d\alpha \\ \omega_1^{a+2} = \omega_2^{a+1} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

При вращениях  $\bar{I}_4$  в  $R_2$ , конец вектора  $\bar{M} + \bar{p}(\bar{I}_4^{1+1}) = \bar{M} + \bar{I}_{\frac{1 \dots 1}{1+1}}$  описывает на индикатрисе  $I^1$  некоторое точечное многообразие  $S^1$ , которое назовем сечением индикатрисы  $I^1$  для  $R_2$ . В случае  $m=2$  сечение  $S^1$  совпадает с  $I^1$ .

Займемся изучением строения сечения  $S^1$ . Для этого введем обозначение

$$\bar{I}_{a_0 \dots a_1} = \{\alpha_1 \dots \alpha_m\},$$

где  $\alpha_a$  — число значений  $a$  в наборе индексов  $a_0 \dots a_1$ . Если учесть ортонормированность  $R(\omega_a^b = -\omega_b^a)$ , то (I.3) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} d^n \{\alpha_1 \dots \alpha_m\} &= \sum_{a, b: a < b} \omega_a^b(\alpha_a \{\alpha_1 \dots \alpha_a - 1 \dots \alpha_b + 1 \dots \alpha_m\} - \\ &- \alpha_b \{\alpha_1 \dots \alpha_a + 1 \dots \alpha_b - 1 \dots \alpha_m\}), \end{aligned} \quad (5)$$

откуда с учетом (4) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \{1+1-s, s, 0 \dots 0\} &= (1+1-s) \{1-s, s+1, 0 \dots 0\} - \\ &- s \{1+2-s, s-1, 0 \dots 0\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $s=0, 1, \dots, 1+1$  и  $\{-1, 1+2, 0 \dots 0\} = \{1+2, -1, 0 \dots 0\} = 0$ .

Назовем эллипсом 1-ой степени кривую, описываемую конечной точкой вектора  $\bar{a}_0(\alpha)$ , являющегося решением системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}'_0 = (1+1)\bar{a}_1 \\ \bar{a}'_1 = 1\bar{a}_2 - \bar{a}_0 \\ \bar{a}'_s = (1+1-s)\bar{a}_{s+1} - s\bar{a}_{s-1} \\ \bar{a}'_{1+1} = -(1+1)\bar{a}_1 \end{array} \right. \quad (7)$$

при произвольных линейно независимых начальных значениях векторов  $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{1+1}$ . В частности, нетрудно убедиться, что понятия "эллипс", "эллипс нулевой степени" и "эллипс первой степени" совпадают.

Если сравнить (6) и (7) и учесть то, что векторы  $\bar{1}_1, \dots, \bar{1}_2, \dots, \bar{1}_2$  в точке  $M$  в зависимости от строения и расположения поверхности  $V_m$  вблизи  $M$  могут иметь произвольные значения, то нами доказана следующая

Теорема 2. 2. Сечение  $S^1$  индикатрисы 1-ой кривизны  $I^1$  для произвольной  $R_2$  является или эллипсом 1-ой степени, или его конечной вырожденной формой. С другой стороны, каждый эллипс 1-ой степени или его конечная вырожденная форма может быть сечением  $S^1$  некоторой индикатрисы  $I^1$ .

②. Если вспомнить определение индикатрисы  $I^1$  и ее сечения  $S^1$  для двумерной плоскости  $R_2$ , уравнения (3) (отсюда  $x^1 = \cos \alpha$ ,  $x^2 = \sin \alpha$ ), теорему 2.2 и соответствие

$$\bar{a}_s \longleftrightarrow \{1+1-s, s, 0 \dots 0\},$$

то эллипс 1-ой степени может быть представлен вектор-функ-

цией

$$\bar{a}_0(\alpha) = \sum_{s=0}^{l+1} C_{l+1}^s \cos^{l+1-s} \alpha \sin^s \alpha \bar{a}_s.$$

Отсюда имеем

$$\bar{a}_0(0) = \bar{a}_0(2n\pi) = \bar{a}_0,$$

$$\bar{a}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \bar{a}_{l+1},$$

$$\bar{a}_0(\pi) = (-1)^{l+1} \bar{a}_0,$$

$$\bar{a}_0\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (-1)^{l+1} \bar{a}_{l+1}.$$

При четном значении  $l$  справедливо  $\bar{a}_0(\alpha + \pi) = -\bar{a}_0(\alpha)$ , т.е. вектор-функция  $\bar{a}_0$  симметрична относительно своей начальной точки, которая, следовательно, геометрически связана с соответствующим эллипсом  $l$ -ой степени (как, например, центр с окружностью). Период функции  $\bar{a}_0$  равен  $2\pi$ .

Если  $l$  нечетна, то период функции  $\bar{a}_0$  равен  $\pi$ . Чтобы выяснить, как здесь начальная точка вектора  $\bar{a}_0$  связана с соответствующим эллипсом  $l$ -ой степени, прибавим к вектору  $\bar{a}_0$  (перемещая его начальную точку) произвольный постоянный вектор  $\bar{a}$  и обозначим

$$\bar{A}_0 = \bar{a}_0 + \bar{a}.$$

Постараемся теперь, соблюдая (7), выписать для  $\bar{A}_0$  систему (7). Тогда последовательно получим:

$$\bar{A}_1 = \bar{a}_1, \bar{A}_2 = \bar{a}_2 + \frac{1}{1} \bar{a}, \bar{A}_3 = \bar{a}_3, \bar{A}_4 = \bar{a}_4 + \frac{3}{1(1-2)} \bar{a}$$

и т.д. Вообще, оказывается, что

$$\bar{A}_s = \begin{cases} \bar{a}_s & \text{при нечетном } s \\ \bar{a}_s + \frac{(s-1)!!}{1(1-2)\dots(1+2-s)} \bar{a} & \text{при четном } s. \end{cases}$$

Так как  $l$  нечетна, то в силу (7) — независимо от выбора  $\bar{a}$  — имеет место равенство

$$\bar{A}'_{l+1} + (l+1)\bar{A}_1 = 0. \quad (8)$$

Поэтому для  $\bar{A}_0$  можно выписать систему, аналогичную (7) (при том же параметре  $\alpha$ ). Следовательно, начальная точка вектора  $\bar{a}_0$  геометрически никак не связана с соответствующим эллипсом  $l$ -ой степени. (Вопрос о существовании центра симметрии у решения системы (7) обсуждается в приложении I к настоящей главе.)

Если же истолковать эллипс  $l$ -ой степени как сечение  $S^1$  индикатрисы  $I^1$  для  $R_2$ , то можно утверждать следующее.

При нечетном значении  $l$  точка  $M$  поверхности  $V_m$  инвариантно связана с произвольным сечением  $S^1$  соответствующей индикатрисы  $I^1$ , являясь для него центром симметрии. Поэтому точка  $M$  является центром симметрии и для индикатрисы  $I^1$ . Это свойство, очевидно, не нарушается и в том случае, когда векторы  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1}$  линейно зависимы (см. §1 п.2). Конфигурация  $R^1$  определяется заданием только индикатрисы  $I^1$ .

В случае же нечетного значения  $l$  строение сечения  $S^1$  не несет в себе никакой информации о расположении относительно него точки  $M$  поверхности  $V_m$ .

③. Чтобы показать каноничность параметра  $\alpha$  для эллипса

1-ой степени, перейдем в (7) к новой переменной  $t$ , так что  $\alpha = \alpha(t)$  и  $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ . Выпишем последовательно:

$$\bar{A}_0 = \bar{a}_0,$$

$$\dot{\bar{A}}_0 = (1+\dot{\alpha})\dot{\alpha}\bar{a}_1 = (1+\dot{\alpha})\bar{A}_1,$$

т.е.

$$\bar{A}_1 = \dot{\alpha}\bar{a}_1,$$

а далее

$$\dot{\bar{A}}_1 = \ddot{\alpha}\bar{a}_1 + \dot{\alpha}^2\bar{a}_1' = (1-\dot{\alpha}^2)\bar{a}_0 + \dot{\alpha}_1\bar{a}_1 + 1\dot{\alpha}^2\bar{a}_2 - \bar{A}_0.$$

Отсюда

$$\bar{A}_2 = \frac{1-\dot{\alpha}^2}{1}\bar{a}_0 + \frac{\dot{\alpha}_1}{1}\bar{a}_1 + \dot{\alpha}^2\bar{a}_2.$$

Общее выражение для  $\bar{A}_s$  является весьма сложным. Тем не менее нетрудно найти, что коэффициент  $q_s$  вектора  $\bar{A}_s$  в выражении суммы

$$\dot{\bar{A}}_s + s\bar{A}_{s-1}$$

равен

$$q_s = \sum_{u=1}^{s-1} u \dot{\alpha}^{s-2u}.$$

Для того, чтобы при новой переменной также получать систему в виде (7), необходимо и достаточно соблюдать равенство (8) (имея в нем в виду производное по  $t$ ), а для этого — так как по определению эллипса 1-ой степени векторы  $\bar{a}_s$  линейно независимы — необходимо равенство

$$q_{1+1} = \sum_{\alpha=1}^1 u \alpha^{1-1} \ddot{\alpha} = 0.$$

Отсюда получим, что  $\ddot{\alpha}=0$  и, далее, также  $\ddot{\alpha}=\ddot{\alpha}=\dots=0$ . Теперь нетрудно определить коэффициент  $p_{s-1}$  вектора  $\bar{a}_{s-1}$  в выражении суммы  $\bar{A}_s + s\bar{A}_{s-1}$ . Приравняв  $p_1=0$ , получим  $1-\ddot{\alpha}^2=0$ .

Таким образом, вид системы (7) сохраняется только при замене переменной  $t = \dot{\alpha} + \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  - постоянная. Поэтому параметр  $\alpha$  является для эллипса 1-ой степени (7) каноническим.

④. Выясним, может ли на индикатрисе  $I^1$  существовать эллипс 1-ой степени, не являющийся сечением индикатрисы для некоторой двумерной плоскости  $R_2$ .

Пусть конец единичного вектора  $\bar{x}$  описывает в плоскости  $R_{(0)}$ , касательной к  $V_m$  в  $M$ , произвольную кривую  $L$  с произвольным параметром  $\alpha$ . Аналогично (3), для  $L$  можно выписать формулы Бартельса-Френе

$$\begin{cases} \bar{i}'_1 = \kappa_1 \bar{i}_2 \\ \bar{i}'_2 = -\kappa_1 \bar{i}_1 + \kappa_2 \bar{i}_3 \\ \bar{i}'_a = -\kappa_{a-1} \bar{i}_{a-1} + \kappa_a \bar{i}_{a+1} \\ \bar{i}'_m = -\kappa_{m-1} \bar{i}_{m-1} \end{cases} \quad (9)$$

или, что то же самое, систему

$$\begin{cases} \omega_a^{a+1} = \kappa_a d\alpha \\ \omega_a^{a+s} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $s > 1$ . При этом  $\bar{i}_1 = \bar{x}$  и касательный репер  $R$  ортонормирован.

Следует выяснить, при каких значениях величин  $\kappa_2$  соответствующий вектор  $\bar{p}(\bar{x}^{1+1}) = \bar{1}_{1\dots 1} = \{1+1, 0\dots 0\}$  можно представить в виде решения системы (7), если учесть (5) и (10).

В данном случае имеем

$$\bar{a}_0 = \{1+1, 0\dots 0\},$$

$$\bar{a}'_0 = (1+1) \kappa_1 \{1 \ 1 \ 0\dots 0\},$$

откуда

$$\bar{a}_1 = \kappa_1 \{1 \ 1 \ 0\dots 0\}.$$

Общее выражение для вектора  $\bar{a}_s$  является весьма сложным. Тем не менее нетрудно найти, что коэффициент  $q_s$  вектора  $\{1+1-s, s-1, 10\dots 0\}$  в выражении суммы  $\bar{a}'_s + s\bar{a}_{s-1}$  равен

$$q_s = \frac{s(s+1)}{2} \kappa_1^2 \kappa_2.$$

Пусть вектор  $\{0110\dots 0\}$  линейно независим от других векторов 1-ой кривизны. Тогда необходимым условием того, чтобы соблюдался вид системы (7), является равенство

$$q_{1+1} = \frac{(1+1)(1+2)}{2} \kappa_1^{1+1} \kappa_2 = 0,$$

т.е. равенство

$$\kappa_2 = 0.$$

Но тогда для кривой L вместо (9) можно писать

$$\begin{cases} \bar{1}'_1 = \kappa_1 \bar{1}_2 \\ \bar{1}'_2 = -\kappa_1 \bar{1}_1, \end{cases}$$

т.е. L является окружностью, плоскость  $R_2$  которой проходит

через точку  $M$ . Поэтому эллипс 1-ой степени, описываемый конечной точкой вектора  $\bar{M} + \bar{p}(\bar{x}^{1+4})$ , является сечением индикатрисы  $I^1$  для плоскости  $R_2$ .

В итоге доказана

**Теорема 2.3.** Пусть 1-ая нормальная плоскость  $R_{(1)}$  к поверхности  $V_m$  в ее точке  $M$  имеет максимальную возможную размерность  $m_1 = r_{m1} = \frac{1}{(1+4)!} m(m+4) \dots (m+1)$ . Тогда через произвольные точки  $P_1$  и  $P_2$  индикатрисы 1-ой кривизны  $I^1$ , соответствующим неколлинеарным касательным к  $V_m$  в  $M$  направлениям  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ , проходит на  $I^1$  ровно один эллипс 1-ой степени. Этот эллипс 1-ой степени является сечением индикатрисы  $I^1$  для двумерной плоскости  $R_2$ , определяемой направлениями  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ .

Аргумент  $\alpha$  в (3) - это угол поворота направления  $\bar{x}$ . Тот же (посредством (6)) параметр  $\alpha$  в (7) является для эллипса 1-ой степени (сечения  $S^1$ ) каноническим. Следовательно, разность значений параметра  $\alpha$  в двух точках  $P_1$  и  $P_2$  сечения  $S^1$  равна углу между соответствующими касательными к  $V_m$  в  $M$  направлениями  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ .

Поэтому, в силу теоремы 2.3 может быть сформулирована

**Теорема 2.4.** Пусть поверхности  $V_m$  и  $V'_m$  имеют в заданных точках  $M$  и  $M'$  конгруэнтные между собой индикатрисы 1-ой кривизны  $I^1$  и  $I'^1$ , причем соответствующие 1-ые нормальные плоскости  $R_{(1)}$  и  $R'_{(1)}$  имеют максимальную возможную размерность  $r_{m1}$ . Пусть  $P$  и  $P'$  - соответствующие точки этих конгруэнтных индикатрис  $I^1$  и  $I'^1$ , а  $\bar{x}$  и  $\bar{x}'$  - касательные к  $V_m$  в  $M$  и к  $V'_m$  в  $M'$  направления, соответствующие точкам  $P$  и  $P'$ . Получаемое таким образом соответствие  $\bar{x} \leftrightarrow \bar{x}'$

между касательными к  $V_M$  в  $M$  и к  $V'_M$  в  $M'$  направлениями является изометрией.

⑤ Теорема 2.4 указывает на ту роль, которую имеют индикатрисы кривизны  $I^1$  (и конфигурации  $F^1$ ), рассматриваемые как только точечные многообразия (без наперед известного соответствия  $\bar{x} \leftrightarrow P$  между направлениями  $\bar{x}$  плоскости  $R_{(0)}$  и точками  $P$  индикатрисы  $I^1$ ), при характеристизации дифференциальной окрестности точки  $M$  поверхности  $V_M$ . Если при условиях теоремы заданы только точка  $M$ , плоскость  $R_{(0)}$  и индикатриса  $I^1$ , то при одной только этой информации соответствия  $\bar{x} \leftrightarrow P$  может быть установлено с точностью до ортогональных преобразований в плоскости  $R_{(0)}$ . Однако большее уже не может быть достигнуто, так как во всем пространстве  $R_n$  существует группа движений, оставляющая точки плоскости  $R_{(1)}$  (и конфигурации  $F^1$ ) неизменными и индуцирующая всевозможные ортогональные преобразования плоскости  $R_{(0)}$ .

Если векторы 1-ой кривизны  $\bar{1}_{a_0} \dots a_1$  линейно зависимы, т.е. размерность плоскости  $R_{(1)}$  меньше  $r_{m1}$ , то индикатриса  $I^1$  (и конфигурация  $F^1$ ), рассматриваемая как только точечное многообразие, может нести и меньшую информацию о дифференциальной окрестности точки  $M$  поверхности  $V_M$ .

Пример. Пусть заданы поверхности  $V_3$  и  $V'_3$ , причем в точке  $M \in V_M$  векторы первой кривизны равны  $\bar{1}_{11} = \bar{1}_{22} = \bar{1}_{12} = \bar{1}_{13} = \bar{1}_{23} = 0$ ,  $\bar{1}_{33} = \bar{a} \neq 0$ , а в точке  $M' \in V'_3$  эти векторы равны  $\bar{1}'_{11} = \bar{1}'_{12} = \bar{1}'_{13} = \bar{1}'_{23} = 0$ ,  $\bar{1}'_{22} = \bar{1}'_{33} = \bar{a}$ . Касательные реперы в обоих случаях ортонормированы. Тогда соответствующие индикатрисы  $I^1$  и  $I'^1$  (и конфигурации  $F^1$  и  $F'^1$ ) конгруэнтны, а соответствие  $\bar{x} \leftrightarrow \bar{x}'$  касательных направлений, устанавливаемое равенством  $\bar{p}(\bar{x}^2) = \bar{p}'(\bar{x}'^2)$  не

изометрично, больше того, оно также неоднозначно.

Для устранения этого недостатка мы далее часто будем рассматривать индикатрисы  $I^1$  (и конфигурации  $F^1$ ) вместе с их "параметризациями", т.е. вместе с соответствиями  $P \rightarrow \bar{x}$ , рассматриваемыми с точностью до ортогональных преобразований в  $R_{(0)}$ . В частности, точку  $P$  индикатрисы  $I^1$ , соответствующую нескольким касательным направлениям  $\bar{x}$ , условно будем рассматривать как несколько различных (по своему геометрическому смыслу) точек.

(6.) При выводе результатов этого параграфа нам было достаточно использовать только понятие сечения индикатрисы  $I^1$  для двумерной плоскости  $R_2$ . Вообще говоря, можно ввести и понятие сечения  $s^1$  индикатрисы  $I^1$  для  $q$ -мерной плоскости  $R_q$ :  $s^1$  описывается конечной точкой вектора  $\bar{M}\bar{p}(\bar{x}^{1+1})$ , когда направление  $\bar{x}$  свободно вращается в плоскости  $R_q$  ( $M \in R_q \subset R_{(0)}$ ,  $q < m$ ). По своему строению сечение  $s^1$  для  $R_q$  можно истолковать как индикатрису  $I^1$  в точке  $M'$  некоторой поверхности  $V'_q$ . Верна следующая

Теорема 2. 5. Пусть  $s^1$  - сечение индикатрисы  $I^1$  поверхности  $V_m$  в ее точке  $M$  для плоскости  $R_q$ , а  $V_q$  - подповерхность поверхности  $V_m$  ( $\supset V_q$ ), касающаяся в точке  $M$  плоскость  $R_q$ . Сечение  $s^1$  является индикатрисой первой кривизны поверхности  $V_q$  в  $M$ , тогда и только тогда, когда  $V_q$  на  $V_m$  в точке  $M$  - геодезическая.

Теорема непосредственно вытекает из следующих соображений.

Если  $V_q$  на  $V_m$  в  $M$  геодезическая, то соответствующие векторы первой кривизны поверхностей  $V_q$  и  $V_m$  в направлениях

$\bar{x} \subset R_q$  совпадут. Если же  $V_q$  на  $V_m$  в  $M$  не геодезическая, то существует такое касательное направление  $\bar{x}_0 \subset R_q$ , что вектор первой кривизны поверхности  $V_q$  в направлении  $\bar{x}_0$  имеет, кроме компоненты в плоскости  $R_{(1)}$ , ненулевую компоненту в ортогональном дополнении плоскости  $R_q$  до плоскости  $R_{(0)}$ .

При значениях  $l > 1$  подобная теорема не имеет места, так как векторы  $l$ -ой кривизны в точке  $M$  поверхности  $V_q$ , геодезической на  $V_m$  в  $M$ , в общем случае не лежат в  $l$ -ой нормальной плоскости  $R_{(l)}$  к  $V_m$  в  $M$ .

### § 3. Плоскость индикатрисы

Плоскостью заданной поверхности  $V$  назовем плоскость наименьшей размерности, в которой поверхность  $V$  помещается.

Плоскость индикатрисы  $I^1$  обозначим через  $R_{I^1}$ .

(1.) Займемся определением размерностей нормальных плоскостей различных порядков к индикатрисе  $I^1$  в произвольной ее точке  $P$  и порядком кривизны индикатрисы  $I^1$ . При этом предположим, что  $l$ -ая нормальная плоскость  $R_{(l)}$  к  $V_m$  в точке  $M$  имеет максимальную возможную размерность, т.е.  $m_{l-1} = r_{m1}$  (все векторы  $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_1$  предполагаются линейно независимыми). Касательный к  $V_m$  в  $M$  репер  $R$  выбираем так, чтобы он был ортонормирован и чтобы имело место равенство

$$\bar{P} = \bar{M} + \bar{p}(\bar{l}_1^{l+1}) = \bar{M} + \frac{\bar{l}_{1 \dots 1}}{l+1} \quad (11)$$

Дифференциалы от (11) по  $\text{mod}(\omega^1, \dots, \omega^m)$  (см. (I 3) или (5)) определяют касательную к  $I^1$  в  $P$  плоскость. Если при этом кобазис составить из форм  $\frac{1}{l+1} \omega_A^1$ , где  $A=2, 3, \dots, m$ , то соот-

ветствующим касательным репером к  $I^1$  в  $R$  будет  $(P, \bar{1}_1, \dots, 1_A)^{\#}$ . Касательную к  $I^1$  в  $P$  плоскость обозначим через  $\{P; \bar{1}_1, \dots, 1_A\}$ . (Подобным обозначением плоскостей будем пользоваться и в дальнейшем.)

Векторы  $\bar{1}_1, \dots, 1_A$  вместе с их первыми дифференциалами по  $\text{mod}(\omega^a)$  определяют вторую соприкасающуюся плоскость к  $I^1$  в  $P$  (линейное пространство, натянутое на касательную и первую нормальную плоскость) и т.д. Однако на этом пути мы натолкнемся на серьезные технические трудности, так как векторы, определяющие различные соприкасающиеся плоскости, выражаются в общем случае довольно сложными линейными комбинациями векторов  $\bar{1}_a, \dots, a_1$ . Эти трудности можно обойти, если вместо индикатрисы  $I^1$  (и конфигурации  $R^1$ ) принимать в рассмотрение ее отображение  $L I^1$ , где  $L$  линейное отображение такое, что

\*) В дальнейшем мы всегда будем под касательной плоскостью к  $I^1$  в конечной точке вектора  $\bar{M} + \bar{p}(\bar{X}^{1+1})$  подразумевать плоскость, получаемую в результате следующей конструкции.

Выбираем ортонормированный к  $V_M$  в  $M$  репер так, чтобы имело место  $\bar{1}_1 = \bar{X}$ . Тогда искомая плоскость определяется конечной точкой вектора  $\bar{M} + \bar{1}_1, \dots, 1$  и векторами  $\bar{1}_1, \dots, 1_A$  (это плоскость, определяемая первыми дифференциалами вектора  $\bar{p}(\bar{X}^{1+1})$ , отложенными от конечной точки вектора  $\bar{M} + \bar{p}(\bar{X}^{1+1})$ ).

В случае линейно независимых векторов  $\bar{1}_1, \dots, 1_A$  определяемая таким образом касательная плоскость совпадает с обычной. В противном случае это не всегда так (пример: касательная плоскость к  $I^1$  в конечной точке вектора  $\bar{M} + \bar{1}_{11}$ , если  $n=3$ ,

$$\bar{1}_{11} = \bar{1}_{12} = \bar{1}_{13} = \bar{1}_{23} = 0 \text{ и } \bar{1}_{22} = -\bar{1}_{33} \neq 0).$$

$$L \bar{i}_{a_0 \dots a_1} = \begin{cases} \bar{i}_{a_0 \dots a_1}, & \text{если } a_0 \dots a_1 \neq 1 \dots 1 \\ 0, & \text{если } a_0 \dots a_1 = 1 \dots 1 \end{cases}$$

(при этом  $LP=LM$ ).

② Векторы  $L \bar{i}_{a_0 \dots a_1}$  и точечное многообразие  $LI^1$  можно истолковать как векторы и индикатрису 1-ой кривизны в точке  $LM$  некоторой другой поверхности  $V'_m$  (множество всевозможных видов индикатрис  $I^1$  замкнуто относительно линейных отображений (см. § 1 п. 2)). Касательный репер к  $V'_m$  в точке  $LM$  также ортонормирован, так как скалярные произведения  $\bar{i}'_a \bar{i}'_b$  определяются системой (1), не изменяющейся при отображении  $L$ . К тому же

$$L\bar{m} + L \bar{i}_{1 \dots 1} = L\bar{m} + 0 = L\bar{p}$$

(ср. с (11)).

Дифференциалы векторов  $L \bar{i}_{a_0 \dots a_1}$  (истолкованные как векторы 1-ой кривизны поверхности  $V'_m$ ) по  $\text{mod}(\omega^a)$  вычисляются по формулам (13) (или (5)) после замены в них векторов  $\bar{i}_{a_0 \dots a_1}$  векторами  $L \bar{i}_{a_0 \dots a_1}$ . Таким образом (с учетом  $L \bar{i}_{1 \dots 1} = 0$  и  $L \bar{i}_{1 \dots 1 a_0 \dots a_s} = \bar{i}_{1 \dots 1 a_0 \dots a_s}$ ) нетрудно установить, что первой соприкасающейся (= касательной) плоскостью к  $LI^1$  в точке  $LP$  является плоскость  $\{LP; \bar{i}_{1 \dots 1 A}\}$ , второй - плоскость  $\{LP; \bar{i}_{1 \dots 1 A}, \bar{i}_{1 \dots 1 A_0 A_1}\}$ , третьей - плоскость  $\{LP; \bar{i}_{1 \dots 1 A}, \bar{i}_{1 \dots 1 A_0 A_1}, \bar{i}_{1 \dots 1 A_0 A_1 A_2}\}$  и т.д., где  $A_1 = 2, \dots, m$ .

Отсюда  $(1+1)$ -ой соприкасающейся плоскостью к  $LI^1$  в точке  $LP$  является плоскость  $\{LP; \bar{i}_{A a_1 \dots a_1}\}$ , т.е. плоскость  $LR_{(1)}$ . Тогда и плоскость  $R_{LI^1} (=LR_{(1)})$  индикатрис  $LI^1$  сов-

падает с плоскостью  $IR_{(1)}$  и порядок кривизны индикатрисы  $LI^1$  равен 1.

Из выражений соприкасающихся плоскостей к индикатрисе  $LI^1$  в ее точке  $IP$  непосредственно видно, что размерность  $Ip_s$   $s$ -ой нормальной плоскости к  $LI^1$  в  $IP$  при  $s < 1$  равна числу векторов  $\bar{1}_{\frac{1 \dots 1}{1-s}} A_s \dots A_s$ , т.е.

$$Ip_s = r_{n-1,s} = \frac{1}{(s+1)!} (n-1)n \dots (n+s-1). \quad (12)$$

При  $s > 1$  получим  $Ip_s = 0$ .

(3) Отображение  $L$  не может повысить размерности соприкасающейся плоскости к поверхности. Поэтому для размерности  $p_s$   $s$ -ой нормальной к  $I^1$  в  $P$  плоскости имеем  $p_s \geq Ip_s$ . А так как при  $s < 1$  верно  $Ip_s = r_{n-1,s}$ , то должно иметь место

$$p_s = r_{n-1,s} \quad (s < 1).$$

В силу того, что порядок кривизны индикатрисы  $LI^1$  равен 1, а ее плоскость  $R_{LI^1}$  совпадает с плоскостью  $IR_{(1)}$ , размерность  $L_{m_1}$  которой равна  $m_1 - 1$ , то верно или

А)  $p_{1+u} = 1, p_{1+u} = 0 \ (u > 1)$  - тогда  $R_{I^1} = R_{(1)}$ ,

порядок кривизны индикатрисы  $I^1$  равен  $1+1$ , или же

В)  $p_{1+u} = 0 \ (u > 0)$  - тогда  $R_{I^1}$  является гиперплоскостью в  $R_{(1)}$ , порядок кривизны индикатрисы  $I^1$  равен 1.

В силу § 2 п. 2 при четном значении 1 имеет место  $m \in R_{I^1}$  и поэтому  $\bar{1}_{1 \dots 1} \parallel R_{I^1}$ . Отображение  $L$ , таким образом, уменьшает на единицу размерность плоскости  $R_{I^1}$ . Следовательно-

но, при четном  $l$  имеет место случай А.

В случае же В размерности плоскостей  $R_{T1}$  и  $LR_{T1}$  равны, так как в противном случае имело бы место  $R_{T1} = R(1)$ , т.е. случай А. Поэтому, в силу определения отображения  $L$ ,  $\bar{1}_{1\dots 1} \notin R_{T1}$ . Следовательно,  $M \notin R_{T1}$ . Укажем, что случай В имеет место при нечетном значении  $l$  (и  $m_1 = -m_1$ ) (в силу же § 2 п. 2 мы пока можем утверждать это только для случая  $m=2$ ).

(4) Сначала выясним, может ли существовать конфигурация  $F^l$ , состоящая из двух несовпадающих точек  $M$  и  $P (=I^l)$ . Существование подобной конфигурации  $F^l$  равносильно существованию соответствующей ей системы векторов  $\bar{1}_{a_0\dots a_1}$ . Предположим, что эта система векторов (как и соответствующая поверхность  $V_m$  и касательный к ней в точке  $M$  ортонормированный репер  $R$ ) заданы и изучаем ее свойства.

Укажем, что все векторы  $\bar{1}_{a_0\dots a_1}$  остаются при преобразовании (ортонормированного) касательного репера  $R$  неизменными.

Векторы  $\bar{1}_{a\dots a}$  постоянны, так как здесь они, независимо от выбора репера  $R$ , всегда равны  $\bar{P} - \bar{M}$ . Производными векторов  $\bar{1}_{a\dots a}$  при преобразовании касательного к  $V_m$  в  $M$  репера, в силу (5), являются векторы  $(1+I)\bar{1}_{a\dots a}$ , которые, следовательно, равны нулю, т.е. постоянны. Аналогично выясняется постоянство и остальных векторов  $\bar{1}_{a_0\dots a_1}$ .

Теперь для рассматриваемого случая вместо (5) можно писать

$$\alpha_a \{ \alpha_1 \dots \alpha_a^{-1} \dots \alpha_{b+1} \dots \alpha_m \} = \alpha_b \{ \alpha_1 \dots \alpha_a + 1 \dots \alpha_b^{-1} \dots \alpha_m \}$$

или, что то же самое ( $\alpha_a^{-1} \rightarrow \alpha_a$ ,  $\alpha_b + 1 \rightarrow \alpha_b$ ),

$$\{ \alpha_1 \dots \alpha_a \dots \alpha_b \dots \alpha_m \} = \frac{\alpha_b^{-1}}{\alpha_a + 1} \{ \alpha_1 \dots \alpha_a + 2 \dots \alpha_b - 2 \dots \alpha_m \},$$

где предполагается, что  $\alpha_b \neq 0$ .

В результате кратного использования последнего соотношения получим

$$\{\alpha_1 \dots \alpha_a \dots \alpha_b \dots \alpha_m\} = \frac{(\alpha_b - 1)!!}{(\alpha_a + 1)(\alpha_a + 3) \dots (\alpha_a + \alpha_b + 1)} \{\alpha_1 \dots \alpha_a + \alpha_b \dots 0 \dots \alpha_m\},$$

если  $\alpha_b (\neq 0)$  четна, и

$$\{\alpha_1 \dots \alpha_a \dots \alpha_b \dots \alpha_m\} = 0,$$

если  $\alpha_b$  нечетна. Отсюда можем далее писать

$$\begin{aligned} \{\alpha_1 \dots \alpha_m\} &= \frac{(\alpha_1 - 1)!! \dots (\alpha_m - 1)!!}{1!!} \{1 + 1, 0 \dots 0\} = \\ &= \frac{(\alpha_1 - 1)!! \dots (\alpha_m - 1)!!}{1!!} (\bar{P} - \bar{M}), \end{aligned}$$

если все величины  $\alpha_a$  - четны (условимся, что  $(-1)!! = 1$ ) и

$\{\alpha_1 \dots \alpha_m\} = 0$ , если хотя бы одна из величин  $\alpha_a$  - нечетна.

(5) Отсюда следует, что в случае четного значения  $l$  конфигурации  $F^l$ , состоящей из двух несовпадающих точек  $M$  и  $P$  ( $=I^l$ ), не существует (это вполне согласуется с нашим прежним результатом:  $M \in R_{I^l}$ ). При нечетном же значении  $l$  соответствующая конфигурация  $F^l$  существует. Она является примером случая, где точка  $M$  находится вне плоскости  $R_{I^l} (=P)$ .

Этим свойством должно, в силу § I п. 2, обладать и конфигурация  $F_0^l$ , соответствующая линейно независимым векторам  $\bar{1}^0_{a_0} \dots a_1$ . Следовательно, при нечетном значении  $l$  (и  $m_1 = r_{m_1}$ ) имеет место случай В.

Если наряду с другими полученными выше результатами

учесть еще то обстоятельство, что при линейном отображении  $L'$ , отображающем конфигурацию  $F_0^1 = MUI_0^1$  в пару несовпадающих точек  $M$  и  $P(=I^1)$ , в вектор  $\bar{P} - \bar{M}$  отображаются те и только те исходящие из  $M$  векторы, концы которых лежат в плоскости  $R_{I^1}$ , а в нулевые — те и только те векторы, которые параллельны к плоскости  $R_{I^1}$ ; то в итоге может быть сформулирована

Теорема 2. 6. Если величина  $l$  четна, то плоскость  $R_{I^1}$  индикатрисы  $I^1$   $l$ -ой кривизны в точке  $M$  поверхности  $V_M$  совпадает с соответствующей  $l$ -ой нормальной плоскостью  $R_{(l)}$ , т.е.  $R_{I^1} = R_{(l)}$ . Если же  $l$  — нечетна, то плоскость  $R_{I^1}$  проходит через конечные точки векторов

$$\bar{M} + \frac{l!!!}{(\alpha_1 - 1)!! \dots (\alpha_m - 1)!!} \{\alpha_1 \dots \alpha_m\} \quad (13)$$

( $\sum_a \alpha_a = l + 1$ ,  $(-1)!! = 1$  и все величины  $\alpha_a$  четны; касательный к  $V_M$  в  $M$  репер  $R$  предполагается ортонормированным) и параллельна всем таким векторам, у которых хотя бы одна из величин  $\alpha_a$  нечетна. Этих данных достаточно для определения плоскости  $R_{I^1}$ .

Следствие. Необходимым и достаточным условием того, чтобы при нечетном значении  $l$  имело место  $R_{I^1} = R_{(l)}$ , является разложимость произвольного "четного" вектора  $l$ -ой кривизны (все величины  $\alpha_a$  — четны) по разностям векторов вида (13) и "нечетным" векторам  $l$ -ой кривизны (хотя бы одна из величин  $\alpha_a$  — нечетна). Очевидно, что в упомянутых в следствии разностях один из векторов (13) может быть зафиксирован, его можно положить равным, например, вектору  $\bar{M} + \bar{I}_{1 \dots 1}$ .

6. Пусть между векторами 1-ой кривизны  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1}$ , где 1 нечетна и репер  $R$  ортонормирован, задана линейная зависимость

$$x \cdot e^{\dots c_1} \bar{1}_{e \dots c_1} = 0. \quad (14)$$

Требуется выяснить, какому условию должны удовлетворять коэффициенты  $x \cdot e^{\dots c_1}$  этой зависимости, чтобы из нее следовало, что точка  $M$  поверхности  $V_M$  находится на плоскости  $R_{T_1}$  соответствующей индикатрисе  $\bar{1}^1$ , т.е.  $M \in R_{T_1}$  или, что равносильно,  $-R_{T_1} = R_{(1)}$ . Для удобства изложения, назовем зависимость (14) эффективной, если из нее можно вывести соотношение  $M \in R_{T_1}$ , и неэффективной в противном случае. Для примера, в силу теоремы 2 6, зависимость  $\bar{1}_{1 \dots 1} = 0$  эффективна, а зависимость  $\bar{1}_{1 \dots 1 A} = 0$  - неэффективна.

В силу следствия теоремы 2 6 для эффективности зависимости (14) необходимо и достаточно, чтобы из (14) вытекала разложимость вектора  $\bar{1}_{1 \dots 1}$  по разностям

$$\frac{1!!!}{(\alpha_1 - 1)!!! \dots (\alpha_m - 1)!!!} \{ \alpha_1 \dots \alpha_m \} - \bar{1}_{1 \dots 1},$$

где все величины  $\alpha_a$  четны, и по "нечетным" векторам 1-ой кривизны.

Разделим левую сторону зависимости (14) на две части, в левую из которых соберем все "четные" члены, а во вторую - "нечетные". Тогда (14) можно записать в следующем виде:

$$\sum x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \{ \alpha_1 \dots \alpha_m \} + \bar{1} = 0, \quad (15)$$

где суммирование происходит по всем четным значениям  $\alpha_a$ . Для получения интересующего нас разложения, вместо (15) напишем

$$\sum \frac{(\alpha_1-1)!! \dots (\alpha_m-1)!!}{1!!!} x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \left[ \frac{1!!!}{(\alpha_1-1)!! \dots (\alpha_m-1)!!} \{\alpha_1 \dots \alpha_m\} - \bar{1}_{1 \dots 1} \right] + \bar{x} = - \sum \frac{(\alpha_1-1)!! \dots (\alpha_m-1)!!}{1!!!} x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \bar{1}_{1 \dots 1} .$$

Отсюда непосредственно вытекает, что упомянутое разложение существует - т.е. зависимость (14) эффективна - тогда и только тогда, когда

$$\sum (\alpha_1-1)!! \dots (\alpha_m-1)!! x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \neq 0. \quad (16)$$

Так как линейные комбинации неэффективных зависимостей неэффективны - что непосредственно видно из (16) - то может быть сформулирована

Теорема 2. 7. Точка М поверхности  $V_m$  находится вне плоскости  $R_{l-1}$  соответствующей индикатрисы кривизны  $I^1$  тогда и только тогда, когда  $l$  нечетна и когда для всех базисных линейных зависимостей  $x_1^{c_0 \dots c_l} \bar{1}_{c_0 \dots c_l} = 0$  между векторами  $l$ -ой кривизны в точке М имеет место равенство

$$\sum (\alpha_1-1)!! \dots (\alpha_m-1)!! x_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^1 = 0.$$

(Касательный к  $V_m$  в М репер  $R$  предполагается ортонормированным.)

Условно "зависимость"  $\sum_{c_0 \dots c_l} 0 \cdot \bar{1}_{c_0 \dots c_l} = 0$  ( $l$  - нечетна) назовем неэффективной зависимостью (условие (16) не соблю-

дается).

7. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. Если в некоторой окрестности  $U \subset V_m$  точки  $M$  имеет место линейная зависимость (14), то на  $U$  также имеет место зависимость

$$x_0^{c_0} \dots x_1^{c_1} \bar{1}_{c_0 \dots c_1 a_1 \dots a_s} = 0 \quad (17)$$

(для произвольного  $s$  и любого набора индексов  $a_1 \dots a_s$ ).

Лемма может быть доказана при помощи кратного дифференцирования (14) с учетом (14). Зависимости (17) назовем индуцированными зависимостью (14).

(Один пример об использовании индуцированных зависимостей приведен в приложении 2.)

Пусть в некоторой окрестности  $U \subset V_m$  точки  $M$  имеют место соотношения (15) и (16). Выпишем для каждого значения  $a$  индуцированную зависимость

$$\sum x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \{ \alpha_1 \dots \alpha_a + 2 \dots \alpha_m \} + \bar{1}_a = 0, \quad (18)$$

которая получается из (15), если в ней кратность индекса  $a$  в каждом векторе  $l$ -ой кривизны  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1}$  увеличить на два. При этом "четные" векторы остаются "четными", а "нечетные" - "нечетными". Поэтому обозначения в (18) имеют тот же смысл, что и в (15).

Для краткости введем обозначение

$$(\alpha_1 - 1)!! \dots (\alpha_m - 1)!! x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = y_{\alpha_1 \dots \alpha_m}.$$

Теперь условие неэффективности для (18) принимает вид

$$\sum (\alpha_a + 1) y_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = 0. \quad (19)$$

Но, в силу (16), имеет место неравенство

$$\sum_{a=1}^m \sum (\alpha_a + 1) y_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = (1+m+1) \sum y_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \neq 0.$$

Поэтому существует такое значение  $a=a_0$ , что (19) не соблюдается, т.е. зависимость (18) эффективна. Следовательно, имеет место

Теорема 2. 8. Если плоскость  $R_{I^1}$  индикатрисы  $I^1$  (1 - нечетна) проходит через соответствующую ей точку  $M$  поверхности  $V_m$  и это условие соблюдается также в некоторой окрестности  $U \subset V_m$  точки  $M$ , то и плоскости  $R_{I^{1+s}}$  всех индикатрис  $I^{1+s}$  проходят через точку  $M$ .

Утверждение теоремы может быть выражено и в следующей форме:

Каждая эффективная зависимость между векторами  $I_{a_0 \dots a_1}$  (1 - нечетна) индуцирует некоторые эффективные зависимости между векторами  $I_{a_0 \dots a_{1+s}}$  ( $s$  - четна).

Следует однако подчеркнуть, что и неэффективные зависимости могут индуцировать эффективные зависимости. Пример: зависимость  $I_{12} = 0$  - неэффективна, а индуцированная ею зависимость  $I_{1122} = 0$  - эффективна.

§ 4. Индикатрисы  $I^{1,s}$

(1.) Назовем вектор

$$\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t}) = \underbrace{x_1^{c_q} \dots x_1^{c_r}}_{s_1} \dots \underbrace{x_t^{c_u} \dots x_t^{c_v}}_{s_t} \bar{c}_q \dots \bar{c}_n \dots \bar{c}_u \dots \bar{c}_v, \quad (20)$$

где

$$|\bar{x}_1| = \dots = |\bar{x}_t| = 1$$

и

$$\sum_{i=1}^t s_i = 1 + 1$$

вектором 1-ой кривизны поверхности  $V_m$  в направлениях

$\bar{x}_1^{s_1}, \dots, \bar{x}_t^{s_t}$ . Символом  $\bar{x}^s$  - который встречается у нас не впервые - обозначается система из  $s$  одинаковых направлений  $\bar{x}$ . Вектор  $\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t})$  симметричен относительно всех  $\bar{x}_i^{s_i}$ .

Заметим, например, что в случае ортонормированного касательного репера  $R$  можно писать

$$\bar{p}(\bar{i}_1^{\alpha_1} \dots \bar{i}_m^{\alpha_m}) = \{\alpha_1 \dots \alpha_m\}.$$

Пусть направление  $\bar{x}$  вращается свободно в касательной плоскости  $R_{(0)}$  к  $V_m$  в  $M$ . Конец вектора  $\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t} \bar{x}^s)$ , где  $s + \sum_{i=1}^t s_i = 1 + 1$ , отложенного из  $M$ , описывает при заданных  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t$  в  $R_{(1)}$  некоторое точечное многообразие

$$I^{1,s} = I^1(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t}),$$

которое назовем индикатрисой 1-ой кривизны поверхности  $V_m$  в

направлениях  $\bar{x}_1^{s_1}, \dots, \bar{x}_t^{s_t}$ . В частности,  $I^{1,1+1} = I^1$ . Из (20) видно, что индикатриса  $I^{1,s}$  имеет строение некоторой индикатрисы  $I^{s-1}$  и в общем случае имеет поэтому более простое строение, чем индикатриса  $I^1$ . Это обстоятельство позволяет в случае надобности ввести некоторые упрощения, если изучение локальной окрестности точки  $M$  поверхности  $V_M$  заменить изучением этой окрестности, так сказать, относительно некоторых заданных касательных направлений.

Представление о взаимном расположении индикатрис  $I^{1,s}$  дает

**Теорема 2. 9.** Индикатриса  $I^{1,s} = I^1(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t})$  огибается семейством индикатрис  $I^{1,s-r} = I^1(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t} \bar{y}^r)$  при изменении направления  $\bar{y}$ . Точкой соприкосновения индикатрис  $I^{1,s}$  и  $I^{1,s-r}$  является конечная точка вектора  $\bar{M} + \bar{p}(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t} \bar{y}^r)$ .

Теорема вытекает из соотношения

$$\left. \frac{1}{s} \frac{\lim}{|d\bar{x}| \rightarrow 0} \frac{1}{|d\bar{x}|} \bar{p}(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t} (\bar{x} + d\bar{x})^s) \right|_{\bar{x}=\bar{y}} =$$

$$= \frac{1}{s-r} \frac{\lim}{|d\bar{x}| \rightarrow 0} \frac{1}{|d\bar{x}|} \bar{p}(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t} \bar{y}^r (\bar{x} + d\bar{x})^{s-r}) \Big|_{\bar{x}=\bar{y}}.$$

(2.) Простейшее строение из всех индикатрис кривизны  $I^{1,s}$  имеют индикатрисы  $I^{1,1}$ . Введем обозначение

$$\bar{p}_a = x_1^{\circ q} \dots x_1^{\circ r} \dots x_t^{\circ u} \dots x_t^{\circ v} \bar{c}_q \dots \bar{c}_r \dots \bar{c}_u \dots \bar{c}_v a.$$

Тогда индикатриса  $\Gamma^{1,1}$  имеет в аффинной координатной системе, определяемой репером  $(M, \bar{p}_a)$ , уравнение  $x^c x^d \bar{p}_c \bar{p}_d = 1$  и, следовательно, в случае линейно независимых векторов  $\bar{p}_a$  является  $(m-1)$ -мерным эллипсоидом с центром в  $M$ . Если же векторы  $\bar{p}_a$  линейно зависимы, то  $\Gamma^{1,1}$  является вырожденной фигурой, получаемой от  $(m-1)$ -мерного эллипсоида при стремлении длин некоторых из его осей к нулю. Это может быть установлено при помощи предельного перехода от некоторой системы линейно независимых векторов  $\bar{p}_a(t)$ , где  $t \neq t_0$ , таких что

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{p}_a(t) = \bar{p}_a.$$

Так же получается и

Теорема 2.10. Число отличающихся по длине от нуля осей индикатрисы  $\Gamma^{1,1}$  равно рангу системы векторов  $\bar{p}_a$ .

Пусть задана произвольная индикатриса  $\Gamma^{1,1}$ , произвольное касательное к  $v_m$  в  $M$  направление  $\bar{x}$  и его дифференциал  $d\bar{x} (\bar{x} \perp d\bar{x})$ . Тогда  $\bar{p} = x^c \bar{p}_c$  — соответствующий направлению  $\bar{x}$  радиус-вектор индикатрисы  $\Gamma^{1,1}$ . Производное вектора  $\bar{p}$  выражается в виде

$$\frac{d\bar{p}}{|d\bar{x}|} = \lim_{|d\bar{x}| \rightarrow 0} \frac{(x^c + dx^c) \bar{p}_c - x^c \bar{p}_c}{|d\bar{x}|}. \quad (21)$$

Выберем ортонормированный касательный репер так, чтобы  $\bar{i}_1 = \bar{x}$  и  $\bar{i}_2 \parallel d\bar{x} (= \alpha \bar{i}_2)$ . Тогда  $\bar{p} = \bar{p}_1$ , а для производной (21) получим

$$\frac{d\bar{p}}{|d\bar{x}|} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\bar{p}_1 + \alpha \bar{p}_2 - \bar{p}_1}{\alpha} = \bar{p}_2.$$

Поэтому может быть сформулирована

Теорема 2.11. Векторы  $\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t} \bar{x})$  и  $\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t} \bar{y})$  являются сопряженными радиусами-векторами индикатрисы  $I^{1,1} = I(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t})$  тогда и только тогда, когда направления  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  ортогональны.

## Приложения

①. Как выяснилось, при четном значении  $l$  эллипс  $l$ -ой степени обладает центром симметрии. Возникает естественный вопрос: как обстоит дело в случае нечетного значения  $l$ .

Рассмотрим произвольный эллипс  $l$ -ой степени ( $l$  - нечетна), описываемый системой (7). Если бы этот эллипс  $l$ -ой степени обладал центром симметрии  $S$ , то - так как период функции  $\bar{a}_0$  равен  $\pi$  - симметричными относительно  $S$  оказались бы точки, соответствующие значениям параметра  $\alpha$  и  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ , т.е. конечные точки векторов  $\bar{a}_0(\alpha)$  и  $\bar{a}_0(\alpha + \frac{\pi}{2})$ . Это звучит вполне убедительно, если учесть, что параметр  $\alpha$  для эллипса  $l$ -ой степени является каноническим (см. § 2 п.3). Поэтому центром симметрии  $S$  должен являться конечная точка вектора  $\frac{1}{2}[\bar{a}_0(\alpha) + \bar{a}_0(\alpha + \frac{\pi}{2})]$ , а, следовательно, и вектора  $\frac{1}{2}(\bar{a}_0 + \bar{a}_{l+1})$ . Производное (см. (7)) последнего вектора однако равно

$$\frac{1}{2} (l+1)(\bar{a}_1 - \bar{a}_{-1}),$$

т.е. равняется нулю только в случае  $\bar{a}_1 = \bar{a}_{-1}$  (в частности, в случае  $l=1$ ).

В итоге можем утверждать, что если  $l$  нечетна и  $l \neq 1$ , то кривая, описываемая системой (7), обладает центром симметрии только тогда, когда между начальными значениями векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{-1}$  имеют место определенные линейные зависимости.

②. При помощи индуцированных линейных зависимостей можно легко составить ограничения на размерности высших нормальных к  $V_n$  плоскостей, если известны линейные зависимости между

векторами кривизны меньшего порядка. Можно, например, доказать, что если 1-ая нормальная плоскость к двумерной поверхности  $V_2$  имеет размерность  $p < 1+2$ , то размерность всех более высоких нормальных плоскостей не превышает  $p$ .

Идея доказательства проста и прозрачна. Поэтому можем ограничиться только приведением соответствующего примера.

Пусть заданы базисные линейные зависимости между векторами второй кривизны двумерной поверхности  $V_2$ :

$$\begin{cases} x_0 \bar{1}_{111} + x_1 \bar{1}_{112} + x_2 \bar{1}_{122} + x_3 \bar{1}_{222} = 0 \\ y_0 \bar{1}_{111} + y_1 \bar{1}_{112} + y_2 \bar{1}_{122} + y_3 \bar{1}_{222} = 0, \end{cases}$$

так что  $l=2$  и  $p=2$ . Эти зависимости запишем в виде матрицы

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & x_2 & y_3 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен двум.

При 1, равной, например, четырем, аналогичная матрица для индуцированных зависимостей имеет вид

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & & \\ y_0 & x_1 & y_2 & y_3 & & \\ & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \\ & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \\ & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы  $\geq 4$  и размерность 4-ой нормальной к  $V_2$  плоскости, поэтому, не больше двух.

## Г л а в а    III

### Г Л А В Н Ы Е    Н А П Р А В Л Е Н И Я

#### § 1. Общие положения

①. Индикатрисы  $I^{1,s} = I^1(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t})$  1-ой кривизны поверхности  $V_M$  в направлениях  $\bar{x}_1^{s_1}, \dots, \bar{x}_t^{s_t}$  позволяют в касательной плоскости  $R_M$  к  $V_M$  в  $M$  определить различные соответствия между направлениями. Можно, например, определить такие направления  $\bar{x}$ , в которых вектор  $\bar{p}(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t} \bar{x}^s)$ , отложенный от точки  $M$ , в своей конечной точке ортогонален к индикатрисе

$$I^1(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t})^{**}$$

(условно будем это обозначать через  $\bar{p} \perp I^{1,s}$ ). В результате получается вполне определенное соответствие

$$\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t} \rightarrow \bar{x}. \quad (1)$$

Если имеет место  $s_1 = \dots = s_t = 0$ , т.е.  $s = 1 + I$ , то определяемые нами направления  $x$  уже непосредственно связаны с самой поверхностью  $V_M$ . Направления с подобным свойством можно также

\* Касательные плоскости к  $I^{1,s}$  мы будем определять аналогично тому, как это делается в II, § 3 п.1 для случая  $I^1$ .

получить, если не зафиксировать направления  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t$ , а потребовать, чтобы соответствие (1) обладало некоторыми специальными особенностями.

Все это дает средства как для определения, так и для более глубокого изучения различных свойств поверхностей, и позволяет выделить специальные классы поверхностей.

(2) Так как конечная точка вектора  $\bar{M} + \bar{p}(\bar{x}_1^{s_1} \dots \bar{x}_t^{s_t} \bar{x}^s)$  описывает при вращении направления  $\bar{x}$  в  $R_m$  соответствующую индикатрису  $I^{1,s}$ , то требование  $\bar{p} \perp I^{1,s}$  равносильно требованию  $\bar{p} d\bar{p} = 0$ , т.е.  $d(\bar{p})^2 = 0$ . Другими словами, нахождение таких направлений  $\bar{x}$ , для которых имеет место  $\bar{p} \perp I^{1,s}$ , равносильно нахождению стационарных значений функции  $(\bar{p})^2$  или - что то же самое - функции  $(x^{c_1} \dots x^{c_{s_1}} \bar{E}_{c_1 \dots c_{s_1}})^2$  при условии  $|\bar{x}| = 1$ , где

$$\bar{E}_{a_1 \dots a_s} = \underbrace{x_1^{c_1} \dots x_1^{c_{s_1}}}_{s_1} \dots \underbrace{x_t^{c_u} \dots x_t^{c_{v_1}}}_{s_t} c_q \dots c_r \dots c_u \dots c_v a_1 \dots a_s.$$

Пусть потребуется найти такие направления  $\bar{x}$ , в которых вектор  $\bar{p}$  приобретает не стационарный квадрат, а стационарную длину. Если  $\bar{p} \neq 0$ , то имеем

$$d|\bar{p}| = d\sqrt{(\bar{p})^2} = \frac{\bar{p} d\bar{p}}{|\bar{p}|}.$$

Следовательно, вектор  $\bar{p}$  приобретает одновременно как стационарный квадрат, так и стационарную длину.

Если же при заданном значении  $\bar{x}$  имеет место  $\bar{p} = 0$ , то можно записать

$$d|\bar{p}| = |\bar{p} + d\bar{p}| - |\bar{p}| = |d\bar{p}|. \quad (2)$$

В то же время верно

$$a|\bar{p}|^2 = 2\bar{p}d\bar{p} = 0.$$

Таким образом, для нахождения направлений  $\bar{X}$ , для которых вектор  $\bar{p}$  приобретает стационарную длину, следует из тех направлений  $\bar{X}$ , в которых вектор  $\bar{p}$  ортогонален к индикатрисе  $I^{1,s}$  (= функция  $(\bar{p})^2$  приобретает стационарное значение), исключить такие направления  $\bar{X}$ , для которых верно  $\bar{p}=0$  (тогда  $M \in I^{1,s}$ ) и соответствующая касательная плоскость к индикатрисе  $I^{1,s}$  не вырождена в точку ( $d\bar{p} \neq 0$ ).

③. Для общего значения  $s$  система для определения направлений  $\bar{X}$ , в которых верно  $\bar{p} \perp I^{1,s}$ , довольно сложна и мы пока не умеем дать достаточно содержательную геометрическую интерпретацию полученных результатов при  $1 > 1$ . Поэтому далее ограничимся случаем  $s=1$ , где соответствующая система является относительно  $\bar{X}$  линейной, и случаем  $1=1$  как геометрически наиболее содержательным. Оказывается, что случай  $s=2$ ,  $1=1$  редуцируется на такие случаи, где определяемое при  $s=1$ ,  $1=1$  соответствие  $\bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}$  обладает специальными особенностями.

Дальнейшее изложение начнем с изучения взаимного расположения близких касательных плоскостей к  $v_m$ . Как выяснится, эта задача непосредственно связана с изучением индикатрис  $I^{1,1}$  и определяемого ими соответствия  $\bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}$ .

Взаимное расположение близких касательных плоскостей в случае поверхности  $v_2 \subset R_4$  изучал Ван Кн-чжоу в [30].

§ 2. Главные направления относительно касательного направления.

(1). Пусть на поверхности  $V_m$  задана произвольная точка  $M$  с проходящей через нее кривой  $M(s)$ , где  $s$  - длина дуги и  $M(0)=M$ . Пусть, далее, на кривой  $M(s)$  задан подвижной касательный к  $V_m$  репер  $(\bar{I}_a(s))$ . Касательную плоскость к  $V_m$  в  $M(s)$  обозначим через  $R_{(0)}(s)$ . Для простоты вместо  $\bar{I}_a(0)$ ,  $\bar{I}_{ab}(0)$  и  $R_{(0)}(0)$  будем писать  $\bar{I}_a$ ,  $\bar{I}_{ab}$  и  $R_{(0)}$ .

Выберем в плоскостях  $R_{(0)}$  и  $R_{(0)}(s)$  по одному свободно изменяющемуся направлению  $\bar{x}=x^C \bar{I}_C \in R_{(0)}$  и  $\bar{x}'=x'^C \bar{I}_C(s) \in R_{(0)}(s)$  и обозначим через  $\alpha (= \arccos \bar{x} \bar{x}')$  угол между ними.

При каждом заданном  $s \neq 0$  на плоскостях  $R_{(0)}$  и  $R_{(0)}(s)$  определяются системы ортогональных направлений (не обязательно одномерных)  $Y(s)$  и  $Y'(s)$  соответственно, между которыми косинус (а вместе с тем и квадрат) угла  $\alpha$  приобретает стационарные значения (см. [14]). При стремлении точки  $M(s)$  к  $M$  (т.е.  $s \rightarrow 0$ ) системы  $Y(s)$  и  $Y'(s)$  определяют в  $R_{(0)}$  некоторую предельную систему

$$Y = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} Y'(s).$$

Теорема 3.1. Предельная система  $Y$  совпадает с той системой направлений  $\bar{x}$ , в которых вектор  $\bar{p}(\bar{y}, \bar{x})$  ортогонален к индикатрисе  $I^1(\bar{y})$  ( $\bar{y}$  - касательное направление к кривой  $M(s)$  в точке  $M$ ).

Доказательство. Системы  $Y(s)$  и  $Y'(s)$  являются ортогональными проекциями друг в друга на плоскости  $R_{(0)}$  и  $R_{(0)}(s)$

(см. [14]). Следовательно, углы  $\alpha$ , имеющие стационарный квадрат, реализуются между векторами вида  $\bar{x}$  и  $\bar{x}^{\#}$  ( ), где  $\bar{x}^{\#}(s)$  - вектор в плоскости  $R_{(0)}(s)$ , ортогонально проектирующийся в плоскость  $R_{(0)}$  в вектор  $\bar{x}$ .

Разложим функцию  $\bar{l}_a(s)$  в ряд

$$\bar{l}_a(s) = \bar{l}_a + d\bar{l}_a + \dots = \bar{l}_a + \omega_a^c \bar{l}_c + \omega^o \bar{l}_{ac} + \dots$$

Отсюда соответствующий вектору  $\bar{x} = x^c \bar{l}_c$  вектор  $\bar{x}^{\#}(s)$  имеет вид

$$\bar{x}^{\#}(s) = x^c (\bar{l}_c + \omega^d \bar{l}_{cd} + \bar{o}_c(s)),$$

где  $\lim_{s \rightarrow 0} \bar{o}(s) = 0$  и  $\omega^c \bar{l}_c$  - главная линейная часть вектора  $\bar{M}(s) - \bar{M}$ , т.е.  $\omega^c = sy^c$ . Таким образом, угол  $\alpha$  между векторами  $\bar{x}$  и  $\bar{x}^{\#}(s)$  выразится формулой

$$\alpha = \text{arstg} |\bar{x}^{\#} - \bar{x}| = \text{arstg} |sx^c y^d \bar{l}_{cd} + \bar{o}(s)|.$$

Теперь уже нетрудно показать, что искомая система  $U$  определяется решениями системы

$$x^b (\bar{l}_{bc} \bar{l}_{ad} y^c y^d - k \bar{l}_a \bar{l}_b) = 0, \quad (3)$$

где  $k$  - корень уравнения

$$|\bar{l}_{bc} \bar{l}_{ad} y^c y^d - k \bar{l}_a \bar{l}_b| = 0. \quad (4)$$

Ту же систему получим для определения направлений  $\bar{x}$ , в которых функция  $(x^c y^d \bar{l}_{cd})^2$  приобретает стационарные значения.

Теорема доказана.

Направления, образующие систему  $U$ , назовем главными на-

правлениями относительно направления  $\bar{y}$ . Каждому  $p$ -кратному корню уравнения (4) соответствует  $p$ -мерное главное направление относительно  $\bar{y}$ . Тот результат, что система  $U$  определяется только направлением  $\bar{y}$  на  $V_M$ , можно рассмотреть как обобщение известной теоремы Менье из теории поверхностей  $V_2 \subset R_3$ .

(2.) Если учесть, что индикатриса  $I^{1,1}$  является или  $(m-1)$ -мерным эллипсоидом с центром в точке  $M$  или же конечной вырожденной формой такого эллипсоида (см. II § 4 п. 2) и условие  $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) \perp I^1(\bar{y})$  для главных направлений относительно  $\bar{y}$ , то может быть сформулирована

Теорема 3. 2. Направление  $\bar{x}$  есть главное направление относительно  $\bar{y}$  тогда и только тогда, когда  $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$  есть главный радиус-вектор индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ .

Верны также следующие теоремы.

Теорема 3. 3. Корни уравнения (4) равны квадратам главных радиусов-векторов индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ .

Для доказательства достаточно выбрать касательный репер  $R$  так, чтобы его векторы оказались решениями системы (3), (4).

Теорема 3. 4. Если направления  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  на  $V_M$  сопряжены, то каждое из них является главным направлением относительно другого.

Эта теорема непосредственно вытекает из определения  $x^c u^d \bar{I}_{cd} = 0$  сопряженных направлений  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  (см. [17]).

В силу теоремы 3. 3, направления, сопряженные с направлением  $\bar{y}$ , соответствуют нулевым корням уравнения (4). Необходимым и достаточным условием существования сопряженных на-

правлений для  $\bar{y}$  является вырождение индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ .

Нетрудно установить, что в случае  $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})=0$  соответствующая направлению  $\bar{x}$  касательная плоскость индикатрисы  $I^1(\bar{y})$  вырождена в точку тогда и только тогда, когда сама индикатриса  $I^1(\bar{y})$  вырождена в точку  $M$ , т.е. когда поверхность  $V_M$  тангенциально вырождена в направлении  $\bar{y}$  (см. [15]). Поэтому, если поверхность  $V_M$  не является тангенциально вырожденной в направлении  $\bar{y}$ , то в силу § 1 п. 2, направление  $\bar{x}$ , в котором вектор  $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$  приобретает стационарную длину, является именно несопряженным главным направлением относительно  $\bar{y}$ .

Одна возможность связать при помощи индикатрисы  $I^1(\bar{y})$  с направлением  $\bar{y}$  еще одну ортогональную систему направлений, описывается в приложении I.

③. В случае двумерной поверхности  $V_2$  и ортонормированного касательного репера  $R$ , систему (3), (4) для определения главных направлений  $\bar{x}$  относительно касательного направления  $\bar{y}$  можно заменить уравнением

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2 \frac{\bar{l}_{12} \bar{l}_{22} \operatorname{tg}^2 \varphi + (\bar{l}_{11} \bar{l}_{22} + \bar{l}_{12}^2) \operatorname{tg} \varphi + \bar{l}_{11} \bar{l}_{12}}{(\bar{l}_{12}^2 - \bar{l}_{22}^2) \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \bar{l}_{12} (\bar{l}_{11} - \bar{l}_{22}) \operatorname{tg} \varphi + \bar{l}_{11}^2 - \bar{l}_{12}^2}. \quad (5)$$

Здесь  $\varphi$  - угол между направлениями  $\bar{l}_1$  и  $\bar{y}$ , а  $\theta$  - угол между  $\bar{l}_1$  и главными направлениями  $\bar{x}$  относительно  $\bar{y}$ . Если в (5) только знаменатель обратится в нуль, то следует предположить, что  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ . Если же знаменатель и числитель одновременно обращаются в нуль, то главные направления  $\bar{x}$  относительно  $\bar{y}$  не определены (вернее, существует двумерное - т.е. совпадающее с  $R_{(0)}$  - главное направление относительно  $\bar{y}$ ). Для

случая  $V_2 \subset R_4$  аналогичное уравнение получил Ван Ин-чжоу в [30].

### § 3. Главные направления поверхности

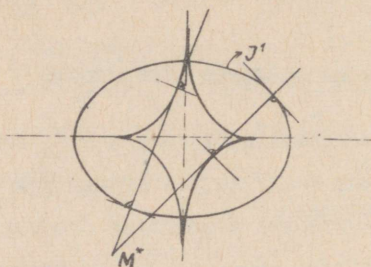
(1.) Если будем искать касательных к  $V_m$  направлений, для которых соответствие между направлениями  $\bar{u}$  и главными направлениями  $\bar{x}$  относительно  $\bar{u}$  обладает специальными особенностями, то одними из первых привлекают внимание такие касательные направления  $\bar{x}$ , которые являются главными относительно самого себя. В силу теоремы 3 2, направление  $\bar{x}$  является главным направлением относительно самого себя тогда и только тогда, когда  $\bar{p}(\bar{x}^2)$  является главным радиусом-вектором индикатрисы  $I^1(\bar{x})$ . Если учесть еще теорему 2 9, то может быть сформулирована

Теорема 3. 5. Касательное к  $V_m$  в  $M$  направление  $\bar{x}$  является главным относительно самого себя тогда и только тогда, когда вектор первой кривизны  $\bar{p}(\bar{x}^2)$  в направлении  $\bar{x}$ , отложенный из точки  $M$ , ортогонален к соответствующей индикатрисе  $I^1$ , т.е. когда  $\bar{p}(\bar{x}^2) \perp I^1$ .

(Всп. утверждение в § 1 п. 3, что случай  $s=2$ ,  $l=1$  редуцируется на случай  $s=1$ ,  $l=1$ .)

Пример 1. Пусть  $m=2$  и длины осей индикатрисы  $I^1$  в точке  $M$  различны и отличны от нуля. Тогда существует 4, 3 или 2 различных главных относительно самого себя касательных направления  $\bar{x}$ , в зависимости от того, находится ли ортогональная проекция  $M^{\pi}$  точки  $M$  поверхности  $V_2$  в плоскости  $R_{T^1}$  индикатрисы  $I^1$  или 1) внутри эволюты индикатрисы  $I^1$ , или 2) в

неособой точке эволюты, или же 3) либо вне эволюты, либо в особой ее точке.



В силу теорем 3.5 и 2.5 очевидна.

Теорема 3.6. Если направление  $\bar{x}$  является главным относительно самого себя в точке  $M$  поверхности  $V_M$ , то оно является главным относительно самого себя и на любой подповерхности  $V_q \subset V_M$ , геодезической на  $V_M$  в  $M$  и касащейся в  $M$  направлении  $\bar{x}$ . Имеет место и обратное утверждение, причем  $q$  может быть фиксирована.

(2) Выразим величину  $k$  из одного из уравнений (3) и подставим в остальные уравнения. Тогда (3) примет вид

$$x^g x^h y^c y^d \bar{l}_{gc} (g_{ah} \bar{l}_{db} - g_{bh} \bar{l}_{da}) = 0, \quad (6)$$

где  $g_{ab} = \bar{l}_a \bar{l}_b$ . Если здесь взять  $\bar{y} = \bar{x}$ , то получим систему

$$x^g x^h x^c x^d \bar{l}_{gc} (g_{ah} \bar{l}_{db} - g_{bh} \bar{l}_{da}) = 0 \quad (7)$$

для определения направлений, главных относительно самого себя.

В частности, при помощи (7) нетрудно найти признак того, что все касательные направления к  $V_M$  в  $M$  являются главными

относительно самого себя (это необходимо и достаточно для того, чтобы индикатриса  $I^1$  находилась на сфере с центром в  $M$ ). В ортонормированном касательном репере необходимо и достаточно условиями этого являются следующие соотношения между координатами тензора первой кривизны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_{aa}\bar{I}_{ab} = 0 \\ \bar{I}_{aa}\bar{I}_{bb} + 2\bar{I}_{ab}^2 - \bar{I}_{aa}^2 = 0 \\ \bar{I}_{aa}\bar{I}_{bc} + 2\bar{I}_{ab}\bar{I}_{ac} = 0 \\ \bar{I}_{ab}\bar{I}_{cd} + \bar{I}_{ad}\bar{I}_{bc} + \bar{I}_{ac}\bar{I}_{db} = 0, \end{array} \right.$$

которые должны выполняться для всех различных между собой значений  $a, b, c$  и  $d$ .

(3.) Известно классическое определение главного направления поверхности  $V_2 \subset R_3$  как такого направления, в котором нормальная кривизна поверхности приобретает экстремальное значение. В случае  $n > 3$  здесь вместо нормальной кривизны более естественно говорить о длине вектора первой (= вектора нормальной) кривизны. Дело, однако, несколько усложняется тем, что при  $n > 3$  имеют место случаи, когда длина вектора первой кривизны не экстремальна, а только стационарна. Выделение таких случаев затруднительно.

Пример 2. Пусть ортогональная проекция  $M^*$  точки  $M$  поверхности  $V_2$  на плоскость  $R_1$ , индикатрисы  $I^1$  (см. пример 1) находится в несобой точке эволюты индикатрисы  $I^1$ . Тогда длина вектора первой кривизны в одном из трех главных относительно самого себя направлений — стационарна, но не экстремальна.

К тому же, такое асимптотическое направление, в котором

поверхность не является тангенциально вырожденной ( $\bar{p}(\bar{x}^2)=0$ ,  $d\bar{p}\neq 0$ ), является, в силу (2), (единственным) примером такого случая, где длина вектора  $\bar{p}(\bar{x}^2)$  экстремальна, но не стационарна.

По тем причинам естественно определить главное направление поверхности  $V_m \subset R_n$  как такое направление, в котором длина вектора первой кривизны поверхности  $V_m$  приобретает стационарную длину. Требованием стационарности не квадрата, а длины вектора первой кривизны, в силу § 1 п. 2, из общей совокупности исключаются те и только те главные относительно самого себя направления, которые являются асимптотическими, но в которых поверхность  $V_m$  не вырождена тангенциально.

В случае  $m=2$  и  $n=3$  приведенное определение полностью сводится к классическому.

Кстати, не совсем точно к классическому определению сводится заданное в [17] определение главного направления поверхности  $V_m$  как такого направления, в котором вектор нормальной кривизны поверхности приобретает экстремальную длину отличную от нуля. (Исключается асимптотическое направление развертывающейся поверхности.)

④. Если наряду с теоремой 3 § 1 учесть приведенное в предыдущем пункте различие между понятиями "главное направление поверхности" и "главное направление относительно самого себя", то может быть сформулирована

Теорема 3. 7. Пусть на поверхности  $V_m$  заданы точка  $M$  и полученная из нее в результате инфинитезимального смещения в касательном направлении  $\bar{y}$  точка  $M'$ . Соответствующие касательные плоскости к  $V_m$  обозначим через  $R_{(0)}$  и  $R'_{(0)}$ .

Пусть  $\bar{x}$  — свободно изменяющееся направление в  $R_{(0)}$ . Направление  $\bar{y}$  является главным для поверхности  $V_m$  тогда и только тогда, когда угол  $\alpha$  между  $\bar{x}$  и его ортогональной проекцией на  $R'_{(0)}$  приобретает при  $\bar{x}=\bar{y}$  стационарное значение. Когда квадрат угла  $\alpha$  приобретает при  $\bar{x}=\bar{y}$  стационарное значение — и только тогда —, то направление  $\bar{y}$  — главное относительно самого себя.

В случае  $V_2 \subset R_3$  это характеристическое свойство главного направления непосредственно вытекает из известной формулы Родрига.

Сравнение понятия "главное направление поверхности" с определенным в [12, 13] понятием "направление кривизны" дано в приложении 2.

#### § 4. Паратактические направления

(1.) Определим паратактическое направление поверхности  $V_m$  в  $M$  как такое касательное к  $V_m$  направление  $\bar{y}$ , относительно которого все касательные к  $V_m$  направления  $\bar{x}$  являются главными. Другими словами,  $\bar{y}$  является паратактическим направлением тогда и только тогда, когда существует  $m$ -мерное главное относительно него направление, т.е. когда соблюдаются следующие равносильные между собой условия: (а) индикатриса  $\Gamma^1(\bar{y})$  является или  $(m-1)$ -мерной сферой или точкой (см. теорему 3 2), (б) уравнение (4) имеет  $m$ -кратный корень, (в) система (6) превращается относительно  $\bar{x}$  в тождество.

Из последнего требования получим для определения паратактических направлений  $\bar{y}$  систему

$$y^c y^d [\bar{i}_{gc} (g_{ab} \bar{i}_{db} - g_{bh} \bar{i}_{da}) + \bar{i}_{hc} (g_{ag} \bar{i}_{db} - g_{bg} \bar{i}_{da})] = 0. \quad (8)$$

По определению, паратактическое направление является в то же время главным направлением относительно самого себя. Так как при асимптотическом главном направлении  $\bar{y}$  индикатриса  $I^1(\bar{y})$ , очевидно, вырождена в точку (т.е. поверхность  $V_m$  в направлении  $\bar{y}$  тангенциально вырождена), то каждое паратактическое направление является и главным направлением поверхности.

В силу теоремы 3 I, можно утверждать, что две касательных плоскости  $R_{(0)}$  и  $R'(0)$  к  $V_m$  в точках  $M$  и  $M'$ , где точка  $M'$  получается посредством инфинитезимального смещения точки  $M$  на  $V_m$  в паратактическом направлении, — паратактические (см. [14]).

Понятие сечения индикатрисы  $I^1$  для плоскости  $R_q (\subset R_{(0)})$  и теорема 2 5 естественным образом распространяются и на случай индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ . Если учесть этого, станет очевидным, что о паратактических направлениях дословно верно все то, что в теореме 3 6 сказано о главных относительно себя направлениях.

Пусть касательный к  $V_m$  в  $M$  репер  $R$  ортонормирован. Тогда, в силу теоремы 2 41, векторы  $\bar{i}_{1a}$  составляют сопряженную систему радиусов-векторов индикатрисы  $I^1(\bar{i}_1)$ . Поэтому соотношения

$$\begin{cases} \bar{i}_{1a} \bar{i}_{1b} = 0 \\ \bar{i}_{1a}^2 - \bar{i}_{1b}^2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

для всех  $a \neq b$  являются необходимым и достаточным условием того, чтобы направление  $\bar{I}_1$  было паратактическим.

Разумеется, это же условие может быть получено и исходя из (8).

Если  $n < 2m$ , то для соблюдения (9) необходимы равенства  $\bar{I}_{1a} = 0$ . Это равносильно тангенциальному вырождению поверхности  $V_m$  в направлении  $\bar{I}_1$ , т.е. в паратактическом направлении.

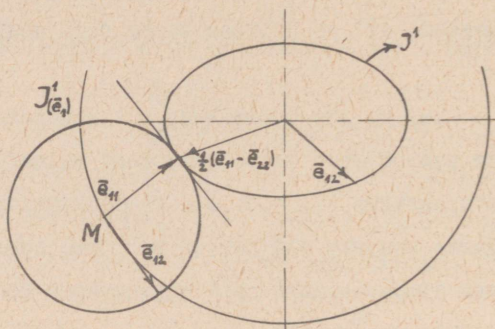
(2.) Далее выводим для случая  $m=2$  одно довольно наглядное условие существования паратактического направления (т.е. условие разрешимости (8)).

При помощи (2.7) ( $l=1$ ) нетрудно установить, что если касательный к  $V_2$  репер  $\mathcal{R}$  ортонормирован, то конечная точка вектора  $\bar{M} + \bar{N}$ , где  $\bar{N} = \frac{1}{2}(\bar{I}_{11} + \bar{I}_{22})$  — вектор средней кривизны поверхности  $V_2$  в  $M$  (см., например, [3]), является центром соответствующей индикатрисы  $I^1$ , а векторы  $\frac{1}{2}(\bar{I}_{11} - \bar{I}_{22})$  и  $\bar{I}_{12}$  ее сопряженными радиусами-векторами. Если учесть еще (9) (см. также пример 3), можно утверждать следующее.

Точка  $P$  на индикатрисе  $I^1$  соответствует паратактическому направлению  $\bar{u}$  тогда и только тогда, когда соответствующая для  $I^1$  точка  $M$  поверхности  $V_m$  находится на  $(n-2)$ -мерной сфере  $L$ , центр которой в точке  $P$ , плоскость ортогональна к  $I^1$  в  $P$ , а радиус равен длине того радиуса-вектора индикатрисы  $I^1$ , который сопряжен с соответствующим точке  $P$  радиусом-вектором индикатрисы  $I^1$ .

Пример 3.

$M \in R_{T^1}$



Пусть для определенности длины  $a$  и  $b$  главных радиусов-векторов индикатрисы  $I^1$  отличны от нуля и  $a > b$ . Тогда при перемещении точки  $P$  на  $I^1$  соответствующая сфера  $L$  описывает некоторую гиперповерхность  $\Omega$ . Эта поверхность  $\Omega$  является каналовой поверхностью, линией центров которой является индикатриса  $I^1$ . Она пересекает плоскость  $R_{T^1}$  по двум окружностям, имеющих общий центр с индикатрисой  $I^1$ , а радиусы которых равны  $a+b$  и  $a-b$  (см. пример 3). Точками самопересечения поверхности  $\Omega$  являются те точки  $(n-2)$ -мерной сферы  $s$ , проходящей через фокусы индикатрисы  $I^1$  ортогонально к ее плоскости  $R_{T^1}$ , расстояние которых от плоскости  $R_{T^1}$  больше

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Во всем этом можно убедиться после довольно простых выкладок.

При помощи предельных переходов  $a \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow 0$  и  $\begin{cases} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0 \end{cases}$  соответствующее многообразие  $\Omega$  и подмногообразие ее точек са-

мопересечения можно связать с произвольной индикатрисой  $I^1$ .

В итоге получается

Теорема 3. 8. Нахождение точки  $M$  поверхности  $V_2$  на соответствующем ей многообразии  $\mathcal{Q}$  является необходимым и достаточным условием существования паратактического направления в точке  $M$ . Нахождение точки  $M$  на самопересечении многообразия  $\mathcal{Q}$  необходимо и достаточно для существования двух паратактических направлений.

Все, что сказано о присоединении многообразия  $\mathcal{Q}$  к индикатрисе  $I^1$  и его значении при  $m=2$ , почти дословно переносится и на случай сечения индикатрисы  $I^1$  для двумерной плоскости при  $m > 2$ . На основе этого и результатов п. I может быть сформулирована

Теорема 3. 9. Касательное к  $V_m$  в  $M$  направление  $\bar{u}$  является паратактическим тогда и только тогда, когда точка  $M$  лежит в пересечении многообразий  $\mathcal{Q}$ , соответствующих сечениям индикатрисы  $I^1$  для всех двумерных подплоскостей касательной к  $V_m$  в  $M$  плоскости  $R_{(0)}$ , проходящих через  $\bar{u}$ .

(3.) Пусть все касательные направления к поверхности  $V_2$  в ее точке  $M$  — паратактические, т.е. на  $V_2$  существует двумерное паратактическое направление. Тогда все касательные к  $V_2$  направления являются и главными направлениями поверхности. Поэтому индикатриса  $I^1$  находится на сфере (с центром в  $M$ ) и, следовательно, является или окружностью, или точкой. Если репер  $\mathcal{R}$  ортонормирован, то радиус индикатрисы  $I^1$  равен  $|\bar{I}_{12}|$  (см. начало п. 2) и поэтому, в силу (9), точка  $M$  совпадает с центром индикатрисы  $I^1$  (подмногообразие точек самопересечения многообразия  $\mathcal{Q}$  вырождено в центр индикатрисы  $I^1$ ). Таким обра-

зом,  $M$  на  $V_2$  является минимальной точкой с окружностью - индикатрисой первой (нормальной) кривизны (см., например, [4]).

В частности, при этом верно

$$\bar{I}_{11} = -\bar{I}_{22}. \quad (10)$$

Таким же путем и к такому же результату (10) приходим, если предположим, что на  $V_m$  ( $m > 2$ ) существует двумерное паратактическое направление, параллельное векторам  $\bar{I}_1$  и  $\bar{I}_2$ . Если потребовать существования на  $V_m$  трехмерного паратактического направления, параллельного векторам  $\bar{I}_1, \bar{I}_2$  и  $\bar{I}_3$ , то получим кроме (10) еще  $\bar{I}_{11} = \bar{I}_{33} = \bar{I}_{22}$ , т.е.  $\bar{I}_{11} = \bar{I}_{22} = \bar{I}_{33} = 0$ .

В итоге может быть сформулирована

Теорема 3. 10. Существование на поверхности  $V_m$  более чем двумерного паратактического направления равносильно тангенциальному вырождению поверхности в этом направлении. Если на поверхности все направления паратактические, то поверхность является или плоскостью, или двумерной минимальной поверхностью с окружностями-индикатрисами первой кривизны  $I^1$ .

## § 5. Абсолютно главные направления

①. Кроме соответствия, сопоставляющего каждому касательному к  $v_m$  в  $M$  направлению  $\bar{u}$  ортогональную систему  $X$  касательных направлений  $\bar{x}$ , главных относительно  $\bar{u}$ , естественно рассмотреть и обратное соответствие, сопоставляющее или заданному касательному направлению  $\bar{x}$ , или же системе  $X$  ортогональных направлений те касательные направления  $\bar{u}$ , относитель-

но которых они являются главными.

Если векторы ортонормированного репера  $\mathcal{R}$  выбрать в направлениях системы  $X$ , то в силу (6) система

$$y^o y^d \bar{l}_{ac} \bar{l}_{bd} = 0 \quad (11)$$

для всех  $a \neq b$  определяет все направления  $\bar{y}$ , относительно которых  $X$  является главной. Эту систему (11) можно выписать и исходя из теоремы 3.2, так как имеет место  $y^c \bar{l}_{ac} = \bar{p}(\bar{y}, \bar{l}_a)$ .

При  $m=2$  (см. (5)) система (11) заменяется уравнением

$$\bar{l}_{11} \bar{l}_{12} \text{tg}^2 \varphi + (\bar{l}_{11} \bar{l}_{22} + \bar{l}_{12}^2) \text{tg} \varphi + \bar{l}_{11} \bar{l}_{12} = 0. \quad (12)$$

Отсюда видно, что система  $X$  на  $V_2$  может быть главной относительно 0, 1, 2 или всех касательных направлений. Подробнее об этом см. в приложении 3. В приложении 4 приведем еще несколько теорем об обратном соответствии в случае  $m=2$ .

(2.) Определим абсолютно главное направление поверхности  $V_m$  (в  $M$ ) как такое касательное к  $V_m$  направление, которое является главным относительно всех касательных направлений. В случае  $V_2 \subset R_4$  такие направления определил Ван Юн-чжоу в [30].

Для нахождения абсолютно главных направлений, в силу (6), получим систему

$$x^g x^h \left[ \bar{l}_{go} (g_{ah} \bar{l}_{db} - g_{bh} \bar{l}_{da}) + \bar{l}_{gd} (g_{ah} \bar{l}_{ob} - g_{bh} \bar{l}_{oa}) \right] = 0.$$

Поэтому в случае ортонормированного репера  $\mathcal{R}$  соотношения

$$\bar{l}_{1a} \bar{l}_{bc} + \bar{l}_{1b} \bar{l}_{ac} = 0 \quad (13)$$

(для всех  $a, b$  и  $c \neq 1$ ) являются необходимым и достаточным условием того, чтобы направление  $\bar{l}_1$  было абсолютно главным. В случае  $m=2$  эти соотношения примут вид

$$\bar{l}_{11}\bar{l}_{22} + \bar{l}_{12}^2 = \bar{l}_{11}\bar{l}_{12} = \bar{l}_{12}\bar{l}_{22} = 0 \quad (14)$$

(ор. с (12)). В частности, отсюда видно, что в случае  $V_2 \subset R_3$  единственным примером абсолютно главных направлений служат главные направления в параболической точке поверхности  $V_2$ .

По определению, абсолютно главное направление является в то же время главным направлением относительно себя. Если в (13) принимаем  $a=1$ ,  $b=c$  и  $\bar{l}_{11}=0$ , то получим  $\bar{l}_{1c}=0$ . Отсюда следует, что если абсолютно главное направление является асимптотическим, то поверхность  $V_m$  в этом направлении тангенциально вырождена. Поэтому каждое абсолютно главное направление является и главным направлением поверхности.

Так же, по определению, если в точке  $M$  поверхности  $V_m$  существует несколько абсолютно главных направлений, то те направления, которые не являются поднаправлениями абсолютно главных направлений большей размерности, вполне ортогональны. Очевидно, что сумма размерностей таких направлений не может быть  $m-1$ .

③ Если учесть тот факт, что главный радиус-вектор эллипсоида является главным и на всех содержащих его эллипсоидах, получаемых как сечения данного эллипсоида, то об абсолютно главных направлениях можно сказать все то, что в теореме 3 6 сказано о главных относительно себя направлениях. Однако, если имеем в виду обратное утверждение в теореме 3

6, то в случае  $m > 2$  следует потребовать, чтобы было и  $q > 2$ . То, что вектор  $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$  при  $\bar{x} \neq \bar{y}$  и  $m > 2$  является главным радиусом-вектором индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ , не может быть установлено сечениями индикатрисы только для двумерных плоскостей, так как двумерная плоскость здесь фиксирована направлениями  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ .

На основе (14) (см. еще начало § 4 п. 2) может быть доказана.

Теорема 3. 11. Касательное направление  $\bar{x}$  в точке  $M$  поверхности  $V_2$  является абсолютно главным тогда и только тогда, когда ему соответствует больший главный радиус-вектор индикатрисы  $I^1$  и когда точка  $M$  находится на окружности  $S$ , проходящей через фокусы индикатрисы  $I^1$  ортогонально к ее плоскости  $R_{14}$ .

(Ср. с приложением 3А.)

В случае  $V_2 \subset R_4$ , где окружность  $S$  заменена парой фокусов индикатрисы  $I^1$ , эта теорема доказана в [30].

На основе теоремы 3 11 и результатов § 4 п. 2 верна.

Теорема 3. 12. Пусть в точке  $M$  поверхности  $V_2$  существует два паратактических направления. Тогда в  $M$  существуют и абсолютно главные направления, являющиеся их биссектрисами.

Последнее утверждение теоремы вытекает из симметричности индикатрисы  $I^1$  относительно своей главной оси.

(4.) Выясним условия существования многомерных абсолютно главных направлений на  $V_m$ .

Пусть двумерное направление, натянутое на векторы  $\bar{i}_1$  и  $\bar{i}_2$ , является абсолютно главным. Тогда условия (13) инвариантны относительно преобразования репера

$$\begin{cases} \bar{i}'_1 = \cos \alpha \bar{i}_1 + \sin \alpha \bar{i}_2 \\ \bar{i}'_2 = -\sin \alpha \bar{i}_1 + \cos \alpha \bar{i}_2 \\ \bar{i}'_A = \bar{i}_A \end{cases},$$

где  $A > 2$  и угол  $\alpha$  может быть фиксирован при любом значении  $\alpha_0 \neq \frac{\pi}{2}$ . После несложных вычислений получим искомые условия в виде

$$\begin{cases} \bar{i}_{11} + \bar{i}_{22} = 0 & \bar{i}_{11} \bar{i}_{AB} = 0 \\ \bar{i}_{11} \bar{i}_{12} = 0 & \bar{i}_{12} \bar{i}_{AB} = 0 \\ \bar{i}_{11}^2 - \bar{i}_{12}^2 = 0 & \bar{i}_{1A} = \bar{i}_{2A} = 0. \end{cases}$$

В частности, отсюда видно, что сечение индикатрисы  $I^1$  для двумерного абсолютно главного направления — окружность (или точка), а точка  $M$  поверхности  $V_m$  находится в центре этой окружности.

Далее, так же как и теорему 3 IO о паратактических направлениях, можно доказать такую же теорему и об абсолютно главных направлениях. В частности, следует отметить, что при  $m > 2$  и когда поверхность  $V_m$  в этом направлении тангенциально не вырождена, то двумерное абсолютно главное направление не является паратактическим.

О некоторых поверхностях, несущих поля абсолютно главных направлений, см. в [6].

## Приложения

①. Пусть направление  $\bar{x}$  вращается в касательной плоскости  $R_m$  к  $V_m$  в  $M$  так, чтобы оно всегда осталось ортогональным к касательному направлению  $\bar{y}$ . Тогда конечная точка вектора  $\bar{M} + \bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$  описывает на индикатрисе  $I^1(\bar{y})$  некоторое точечное многообразие, которое в силу теоремы 2 11 естественно называть сопряженным сечением индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ . Это сечение является или  $(m-2)$ -мерным эллипсоидом с центром в точке  $M$ , или же конечной вырожденной формой такого эллипсоида (ср. с II § 4 п. 2). Плоскость сопряженного сечения индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ , в силу теоремы 2 9, параллельна касательной плоскости к индикатрисе  $I^1$  в конечной точке вектора  $\bar{M} + \bar{p}(\bar{y}^2)$ .

Аналогично теореме 2 10 верна.

Теорема 3. 13. В случае асимптотического направления  $\bar{y}(\bar{p}(\bar{y}^2)=0)$  число отличающихся по длине от нуля осей сопряженного сечения индикатрисы  $I^1(\bar{y})$  равно рангу системы векторов  $y^c \bar{l}_{ac}$ . В случае неасимптотического  $\bar{y}$  число таких осей на единицу меньше.

Аналогично теореме 2 11 верна.

Теорема 3. 14. Векторы  $\bar{p}(\bar{y}, \bar{x})$  и  $\bar{p}(\bar{y}, \bar{x}') (\bar{x}\bar{y} = \bar{x}'\bar{y} = 0)$  являются сопряженными радиусами-векторами сопряженного сечения индикатрисы  $I^1(\bar{y})$  тогда и только тогда, когда направления  $\bar{x}$  и  $\bar{x}'$  ортогональны.

Определим главные направления второго рода относительно  $\bar{y}$  как такие направления  $\bar{x}(\perp \bar{y})$ , в которых вектор  $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$  яв-

ляется главным радиусом-вектором сопряженного сечения индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ . Соответствующие направления  $\bar{x}$  являются решениями системы

$$\begin{cases} x^b(\bar{l}_{bc}\bar{l}_{ad}y^c y^d - k\bar{l}_b\bar{l}_a) - l\bar{l}_a\bar{l}_c y^c = 0 \\ \bar{x}\bar{y} = 0 \\ |\bar{x}| = 1 \end{cases} \quad (15)$$

Пусть ортонормированные векторы  $\bar{l}_a$  выбраны так, чтобы  $\bar{l}_1 = \bar{y}$ , а остальные из них являлись решениями системы (15). Тогда (15) примет вид

$$\bar{l}_{1a}\bar{l}_{1b} - k\delta_{ab} - l\delta_{1a} = 0,$$

где  $b \neq 1$ . Векторы  $\bar{l}_{1b}$  являются здесь главными радиусами-векторами сопряженного сечения индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ , а  $\bar{l}_{11}$  - вектором кривизны в направлении  $\bar{y}$ . На основе этого можем утверждать, что величина  $k$  в (15) равна квадрату соответствующего главного радиуса-вектора сопряженного сечения индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ , а  $l$  равна скалярному произведению этого главного радиуса-вектора с вектором  $\bar{p}(\bar{y}^2)$ .

Если учесть теорему 3.2 и общие свойства эллипсоида, то может быть установлена

Теорема 3.15. Все главные направления второго рода относительно направления  $\bar{y}$  являются также главными направлениями относительно  $\bar{y}$  тогда и только тогда, когда направление  $\bar{y}$  является главным относительно самого себя.

(2) В докторской диссертации Д.И.Перепелкина [13] (см.

также [12]) определяется направление кривизны как естественное обобщение главного направления поверхности  $V_2 \subset R_3$ . Направление кривизны — это такое касательное к поверхности  $V_m$  направление, которое имеет ортогональное к нему сопряженное направление большей размерности, чем это имеет место при той же размерности  $m_1$  первой нормальной плоскости  $R_{(1)}$  к  $V_m$  в общем случае. Например, если  $m_1$  достаточно мала, то касательное направление  $\bar{x}$  к  $V_m$  обычно имеет не более чем  $(m-m_1)$ -мерное сопряженное направление. В этом лежит не более чем  $(m-m_1-1)$ -мерное ортогональное к  $\bar{x}$  сопряженное направление. Направление кривизны имеет не менее чем  $(m-m_1)$ -мерное ортогональное направление.

В силу § 2 п. 2, сопряженным направлениям для  $\bar{y}$  соответствуют нулевые, а поэтому в то же время и главные радиусы-векторы индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ . Ортогональным же к  $\bar{y}$  направлениям, в силу теоремы 2 §1 (см. также приложение 1), соответствуют сопряженные с  $\bar{p}(\bar{y}^2)$  радиусы-векторы индикатрисы  $I^1(\bar{y})$ . Увеличение размерности ортогонального к  $\bar{y}$  сопряженного с ним направления может, таким образом, произойти по двум различным причинам: 1) вектор  $\bar{p}(\bar{y}^2) \neq 0$  является главным радиусом-вектором индикатрисы  $I^1(\bar{y})$  и 2) направление  $\bar{y}$  имеет вообще сопряженное с ним направление большей размерности, чем произвольно взятое касательное к  $V_m$  в  $M$  направление. Во втором случае направление  $\bar{y}$  не обязательно является главным направлением поверхности.

Пусть, например, в точке  $M$  поверхности  $V_3$  при заданном ортонормированном репере имеют место соотношения

$$\bar{i}_{11} = \bar{i}_{22} = \bar{i}_{33} = \bar{i}_{12} = \bar{a} \neq 0, \quad \bar{i}_{23} = \bar{b} \neq 0, \quad \bar{i}_{13} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{a}\bar{b} = 0.$$

Тогда  $\bar{i}_1$  является направлением кривизны, но не главным направлением поверхности. В то же время  $\bar{i}_3$  является как направлением кривизны, так и главным направлением поверхности.

Если же размерность первой нормальной плоскости  $R_{(1)}$  к  $V_m$  равен  $m_1 = r_{m1}$ , то сопряженных направлений, а поэтому и направлений кривизны вообще не существует. Тем не менее существуют главные направления поверхности.

③ Довольно сложно получить наглядное представление о том, как зависит число решений системы (12) от взаимного расположения векторов первой кривизны или — другими словами — как зависит число касательных направлений к  $V_2$  относительно которых заданная в  $M \in V_2$  пара ортогональных направлений  $X$  является главной, от строения соответствующей конфигурации  $F^1 (=M \cup I^1)$  и расположения на индикатрисе  $I^1$  соответствующей паре  $X$  оси. Поэтому ограничимся простейшими случаями. Вывод следующих результатов (см. также п. 4) опирается на геометрический смысл векторов первой кривизны, заданный в начале § 4 п. 2.

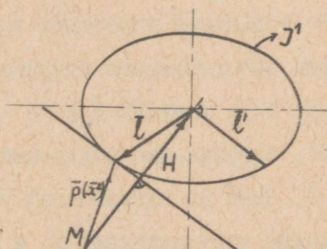
А) Пусть пара  $X$  соответствует большая главная ось (длины  $2a$ ) индикатрисы  $I^1$ . Пусть заданы гиперсферы  $S_1$  и  $S_2$ , центры которых находятся в конечных точках малой главной оси (длины  $2b > 0$ ) индикатрисы  $I^1$ , а радиусы равны  $a$ . Тогда пара  $X$  является главной относительно 0, 1, 2 или всех касательных направлений, в зависимости от того, находится ли точка  $M$  соответственно 1) внутри одной и вне другой сферы, 2) только на одной из этих сфер, 3) внутри или вне обеих

сфер, 4) на обеих сферах, т.е. на их пересечении (см. § 4 п. 2 - сфера  $S$ ).

В) Все сказанное в А дословно переносится на тот случай, когда паре  $X$  соответствует малая главная ось индикатрисы  $\tilde{I}^1$ . Только здесь центры сфер  $S_1$  и  $S_2$  в конечных точках большой главной оси, а радиусы их равны  $b$ . Пересечение сфер  $S_1$  и  $S_2$  - пусто.

④. Приведем несколько теорем о касательных направлениях  $\bar{U}$  к поверхности  $V_2$  в ее точке  $M$  и главных относительно них направлениях  $\bar{X}$ . Пусть  $a$  и  $b$  - длины главных полуосей индикатрисы  $I^1$ . Для простоты предположим, что  $a > b > 0$ .

Теорема 3. 16. Пусть  $\bar{B}'$  - сопряженный с  $\bar{B} = \bar{p}(\bar{x}^2) - \bar{N}$  радиус-вектор индикатрисы  $I^1$ . Направления  $\bar{U}_1$  и  $\bar{U}_2$ , относительно которых  $\bar{X}$  является главным, ортогональны тогда и только тогда, когда ортогональны векторы  $\bar{B}'$  и  $\bar{N}$ . Единственное исключение составляет случай, когда точка  $M$  находится на окружности, проходящей ортогонально к плоскости  $R_{T_1}$  через фокусы индикатрисы  $I^1$ .



Для доказательства выберем ортонормированный репер  $R$ .

так, чтобы  $\bar{X}$  оказался вектором репера. Остается выяснить, при каких условиях решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  уравнения (12) отличаются на  $\frac{\pi}{2}$ , т.е. когда  $\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = -1$ .

Следствие. Необходимым и достаточным условием того, чтобы любые два касательных направления  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$ , имеющие одни и те же главные относительно них направления, были ортогональными, является ортогональность вектора средней кривизны  $\bar{N}$  к плоскости  $R_{T_1}$  индикатрисы  $I^1$ . Единственное исключение составляет случай, когда имеет место равенство  $|\bar{N}| = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Теорема 3. 17. Соответствие между направлениями  $\bar{y}$  и главными относительно них направлениями  $\bar{x}$  является взаимным (т.е.  $\bar{y}$  является также главным относительно  $\bar{x}$ ) только в двух случаях:

- 1) в точке  $M$  на  $v_2$  имеет место  $\bar{N} = 0$ ;
- 2) индикатриса  $I^1$  является окружностью и вектор средней кривизны  $\bar{N}$  ортогонален к плоскости  $R_{T_1}$  индикатрисы  $I^1$  ( $a = b$  и  $\bar{N} \perp R_{T_1}$ ).

Для доказательства можно исходить из уравнения (5), которое здесь симметрично относительно  $\theta$  и  $\varphi$ . Использование следствия теоремы 3 16 позволяет упростить вычисления,

Теорема 3. 18. Пусть ортогональные направления  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  главные относительно  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  и пусть  $\bar{h}$  и  $-\bar{h}$  — радиусы-векторы индикатрисы  $I^1$ , сопряженные радиусами-векторами  $\bar{k} = \bar{r}(\bar{x}_1^2) - \bar{N}$  и  $-\bar{k} = \bar{r}(\bar{x}_2^2) - \bar{N}$ . Одно из направлений  $\bar{y}_1$ ,  $\bar{y}_2$  является биссектрисой между направлениями  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  тогда и только тогда, когда верно одно из равенств: или  $|\bar{N} + \bar{h}| = |\bar{k}|$  или  $|\bar{N} - \bar{h}| = |\bar{k}|$ .

Для доказательства выберем  $\bar{I}_1 = \bar{x}_1$  и  $\bar{I}_2 = \bar{x}_2$ . Остается вы-

яснить, при каких условиях одним из решений уравнения (12) является или  $\operatorname{tg}\varphi=1$  или  $\operatorname{tg}\varphi=-1$ .

Теорема 3.19. Направления  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  и главные относительно них направления  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  имеют общую биссектрису тогда и только тогда, когда направлениям  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  соответствует один из главных осей индикатрисы  $\Gamma^1$ .

Для доказательства выберем  $\bar{l}_1=\bar{x}_1$  и  $\bar{l}_2=\bar{x}_2$ . Остается выяснить, при каких условиях решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  уравнения (12) выражаются в виде  $\varphi_1=\frac{\pi}{4} + \alpha$ ,  $\varphi_2=\frac{\pi}{4} - \alpha$ .

В случае  $V_2 \subset R_4$  эта теорема доказана Ван Ин-чжоу в [30].

ЭВОЛЮТНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

§ 1. Присоединенная поверхность.

(1.) Пусть пространство  $R_n$  совпадает с плоскостью поверхности  $V_m$  (это требование будем соблюдать далее везде). Тогда каждую точку  $M^x$  в плоскости  $R_{n-m}$ , нормальной к поверхности  $V_m$  в ее точке  $M$ , можно представить радиусом-вектором

$$\bar{M}^x = \bar{M} + \sum_{l=1}^k x^0 \dots x^l \bar{1}_{c_0 \dots c_l}. \quad (1)$$

Представляет интерес, при каких условиях дифференциал вектора  $\bar{M}^x$  является параллельным к плоскости  $R_{n-m}$ .

Из (1) после дифференцирования по формулам (I 6) получим

$$d\bar{M}^x = \omega^0 (\bar{1}_c + x^0 \dots x^1 \bar{A}_{c_0 c_1 c} + \bar{N}_c),$$

где  $\bar{N}_c \parallel R_{n-m}$ . Пусть касательный к  $V_m$  в  $M$  репер  $R$  ортонормирован. Тогда, в силу (I 7), имеет место

$$\bar{A}_{abc} = - \sum_d (\bar{1}_{ab} \bar{1}_{cd}) \bar{1}_d.$$

Поэтому, обозначив ортогональную проекцию точки  $M^x$  на пер-

буду нормальной плоскостью  $R_{(1)}$  к  $V_m$  в  $M$  через  $M_1^{\bar{x}}$ , можем написать

$$\bar{l}_a + x^{c_0 c_1} \bar{l}_{c_0 c_1} = \sum_a \left\{ \sigma_{ac} - (\bar{M}_1^{\bar{x}} - \bar{M}) I_{ac} \right\} \bar{l}_a.$$

С каждым касательным к  $V_m$  направлением  $\bar{x}$  в  $M$  можно, таким образом, в плоскости  $R_{(1)}$  инвариантно связать некоторое многообразие  $K(\bar{x})$ , состоящее из точек  $M_1^{\bar{x}}$ , для которых (при всех  $a$ ) имеет место равенство

$$x^c \left\{ (\bar{M}_1^{\bar{x}} - \bar{M}) I_{ac} - \sigma_{ac} \right\} = 0. \quad (2)$$

При дифференцировании в направлении  $\bar{x}$  дифференциалы радиусов-векторов точек многообразия  $K(\bar{x})$  параллельны плоскости  $R_{n-m}$  (это, очевидно, верно и для всех точек  $M_1^{\bar{x}}$ , для которых  $M_1^{\bar{x}} \in K(\bar{x})$ ). Таким образом, многообразие  $K(\bar{x})$  является пересечением нормальной плоскости  $R'_{n-m}$  в точке  $M'$ , полученной инфинитезимальным перемещением точки  $M$  в направлении  $\bar{x}$ , с первой нормальной плоскостью  $R_{(1)}$  к  $V_m$  в точке  $M$ . Другими словами,  $K(\bar{x})$  является совокупностью находящихся в подплоскости  $R_{(1)}$  ( $\subset R_{n-m}$ ) фокальных точек плоскости  $R_{n-m}$ , если точка  $M \in V_m$  перемещается в направлении  $\bar{x}$ .

(2.) Объединение многообразий  $K(\bar{x})$ , т.е.  $K = \bigcup_{\bar{x}} K(\bar{x})$  является гиперповерхностью в  $R_{(1)}$ , которая называется присоединенной поверхностью к  $V_m$  в  $M$ .

Обозначим  $|\bar{M}_1^{\bar{x}} - \bar{M}| = \frac{1}{k}$  и  $k(\bar{M}_1^{\bar{x}} - \bar{M}) = \bar{n}$ . Тогда (2) принимает вид

$$x^c (\bar{n} I_{ac} - k \sigma_{ac}) = 0, \quad (3)$$

где  $\bar{n}$  — единичный ортогональный к  $V_m$  в  $M$  вектор. Отсюда для  $k$  получается уравнение

$$|\bar{n}|_{a_0} - k\sigma_{a_0} = 0. \quad (4)$$

Систему (3), (4) можно истолковать как систему для определения многообразия  $K(\bar{x})$  (т.е. соответствующих значений  $k$  и  $\bar{n}$ ) по заданному касательному направлению  $\bar{x}$ . Так же можно ее истолковать как систему для определения касательных направлений  $\bar{x}$  и значений  $k$ , соответствующих заданному ортогональному к  $V_m$  в  $M$  направлению  $\bar{n}$ . В последнем истолковании (3) и (4) совпадают с системой определения главных (касательных) направлений  $\bar{x}_b$  относительно одномерной нормали  $\bar{n}$  и соответствующих главных кривизн  $k_b$  (для направлений  $\bar{x}_b$  скалярное произведение  $\bar{p}(\bar{x}^2)\bar{n}$  приобретает стационарное значение) (см. например, [19]).

В общем случае уравнение (4) имеет (относительно  $k$ )  $m$  различных решений  $k_b$ . Им соответствует  $m$  главных относительно  $\bar{n}$  (ортогональных) направлений  $\bar{x}_b$  и  $m$  точек пересечения направления  $\bar{n}$  с присоединенной поверхностью  $K$  (в расстояниях  $\frac{1}{k_b}$  от точки  $M$ ).

Эти и множество других результатов в этом направлении выведены в трудах Д.И. Перепелкина ([12, 13]) и В.Т. Базылева ([1, 2]). Представляет интерес рассмотреть их в связи с нашими результатами об индикатрисе кривизны  $\Gamma^1$  и главных направлениях поверхности.

③ Выберем касательный к  $V_m$  в  $M$  репер так, чтобы  $\bar{x} = \bar{e}_1$ . Теперь (2) принимает вид

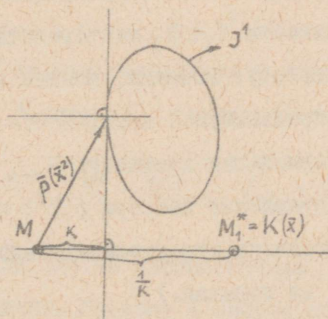
$$(\bar{M}_1^{\bar{x}} - \bar{M})\bar{I}_{1a} - \sigma_{1a} = 0.$$

А так как здесь  $\bar{p}(\bar{x}^2) = \bar{I}_{11}$  и плоскость  $\{\bar{M}\bar{I}_{11}; \bar{I}_{1A} (A \neq I)\}$  является касательной к индикатрисе  $I^1$  в конечной точке вектора  $\bar{M} + \bar{p}(\bar{x}^2)$ , то может быть сформулирована

**Теорема 4. 1.** Пусть через точку  $M$  на поверхности  $V_m$  проходит кривая  $L$  с касательным направлением  $\bar{x}$ . Точка  $M^{\bar{x}}$  в нормальной к  $V_m$  в  $M$  плоскости  $R_{m-m}$  является фокальной для семейства нормальных к  $V_m$  плоскостей, взятых по кривой  $L$ , тогда и только тогда, когда вектор  $\bar{M}_1^{\bar{x}} - \bar{M}$  ортогонален к плоскости, касательной к индикатрисе  $I^1$  в точке, соответствующей направлению  $\bar{x}$ , и, кроме того, имеет место равенство

$$(\bar{M}_1^{\bar{x}} - \bar{M})\bar{p}(\bar{x}^2) = 1.$$

**Пример.** Для наглядности представим на рисунке случай  $m=2$ ,  $M \in R_{11}$ . Здесь многообразие  $K(\bar{x})$  не содержит больше одной точки.



В силу того, что направление  $\bar{l}_1$  является неасимптотическим главным направлением поверхности тогда и только тогда, когда  $\bar{l}_{11} \neq 0$  и  $\bar{l}_{11}\bar{l}_{1A} \neq 0$  (см. главу III § 3), можно дать следующее определение:

Направление  $\bar{x}$  является неасимптотическим главным направлением поверхности  $V_m$  тогда и только тогда, когда луч вектора  $\bar{p}(\bar{x}^2)$ , исходящего из точки  $M$ , пересекает многообразие  $K(\bar{x})$ .

Назовем центром кривизны поверхности  $V_m$  в направлении  $\bar{x}$  конечную точку вектора  $\bar{M} + \frac{1}{(\bar{p}(\bar{x}^2))^2} \bar{p}(\bar{x}^2)$ . Тогда можно дать и следующее определение:

Направление  $\bar{x}$  является неасимптотическим главным направлением поверхности  $V_m$  тогда и только тогда, когда центр кривизны поверхности  $V_m$  в направлении  $\bar{x}$  является фокальной точкой семейства нормальных к  $V_m$  плоскостей  $R_{n-m}$ , взятых вдоль произвольной кривой  $L$  с касательным направлением  $\bar{x}$ .

Если учесть еще тот факт, что асимптотическое направление является главным только в случае тангенциального вырождения поверхности  $V_m$  в этом направлении, то приведенные определения неасимптотического главного направления поверхности  $V_m$  в случае поверхности  $V_2 \subset R_3$  непосредственно приводят к классическому результату: нормали, взятые вдоль линии кривизны, образуют развертывающуюся поверхность. (Если  $\bar{p}(\bar{x}^2) \neq 0$ , то — так как здесь нормальная плоскость  $R_{n-m}$  одномерна — требование, чтобы направление вектора  $\bar{p}(\bar{x}^2)$  пересекало многообразие  $K(\bar{x})$ , равносильно существованию многообразия  $K(\bar{x})$ , т.е. фокальных точек на нормали.)

В приложении I приведем еще специальную, довольно наглядную конструкцию, позволяющую по заданной конфигурации  $MU^1$  построить соответствующую присоединенную поверхность  $K$ .

## § 2. Определение эволюты

(1). Под огибающей семейства плоскостей мы подразумеваем здесь поверхность наибольшей размерности, касательные плоскости к которой являются подплоскостями всех плоскостей данного семейства (за исключением, быть может, только плоскостей некоторого подсемейства). Огибающую семейства нормальных к поверхности  $V_m$  плоскостей  $R_{n-m}$  назовем (следуя [18]) эволютной поверхностью или просто эволютой для  $V_m$  и обозначим через  $W$  (или  $W^1$ ).

Точка  $M^{\mathbb{K}} \in R_{n-m}(M)$  является точкой эволюты  $W$  для  $V_m$  тогда и только тогда, когда все первые дифференциалы вектора  $\bar{M}^{\mathbb{K}}$  параллельны плоскости  $R_{n-m}(=R_{n-m}(M))$ . В силу результатов § 1 п. 1, это требование выражается в форме

$$M_1^{\mathbb{K}} \in K^{\mathbb{K}} = \bigcap_{\bar{x}} K(\bar{x})$$

- т.е. точка  $M_1^{\mathbb{K}}$  должна находиться в пересечении  $K^{\mathbb{K}}$  всех многообразий  $K(\bar{x})$ . В силу (2), равносильное требование есть

$$(\bar{M}_1^{\mathbb{K}} - \bar{M}) \bar{l}_{ab} - \bar{J}_{ab} = 0. \quad (6)$$

Эта система, если она не противоречива, определяет точку  $M_1^{\mathbb{K}} \in R_{(1)}$  однозначно. Поэтому и многообразие  $K^{\mathbb{K}}$ , если оно су-

ществует, состоит из единственной точки. Назовем эту точку  $K^{\bar{x}}$  перипцентром поверхности  $V_M$  в точке  $M$ .

(2) Плоскость  $R_{I^1}$  индикатрисы  $I^1$  проходит через конечные точки векторов  $\bar{M}\bar{1}_{aa}$  и параллельна векторам  $\bar{1}_{ab}$ , где  $a \neq b$  (см. теорему 2 6). Отсюда, в силу (6), следует, что

$$\bar{K}^{\bar{x}} - \bar{M} \perp_{R_{I^1}} \quad \text{и} \quad |\bar{K}^{\bar{x}} - \bar{M}| = \frac{1}{p},$$

где  $p$  - расстояние точки  $M$  от плоскости  $R_{I^1}$ . Перипцентр  $K^{\bar{x}}$  не существует тогда и только тогда, когда имеет место  $M \in R_{I^1}$ .

Тот же результат можно получить и с помощью теоремы 4 1. Следует учесть, что вектор  $\bar{M}_1^{\bar{x}} - \bar{M}$  ортогонален ко всем касательным к индикатрисе  $I^1$  плоскостям и (5) также удовлетворено для всех  $\bar{x}$ .

В итоге может быть сформулирована

Теорема 4. 2. Пусть в пространстве  $R_n$  задана поверхность  $V_M$ . Эволютная поверхность  $W$  для  $V_M$  существует тогда и только тогда, когда точки  $M$  поверхности  $V_M$  (за исключением, может быть, точек некоторого подмногообразия  $V' \subset V_M$ ) не находятся в плоскостях  $R_{I^1}$  соответствующих им индикатрис первой кривизны  $I^1$ . (Те точки  $M \in V'$ , для которых это условие не выполнено, соответствуют бесконечно удаленным точкам эволюты  $W$ .) При этом, эволюта  $W$  состоит из  $(n - m - m_1)$ -мерных плоскостей  $R^{1'} = \{K^{\bar{x}}; \bar{1}_{a_0 \dots a_1} (1 > 1)\}$ , т.е.  $W = \cup_{\bar{M}} R^{1'}$ ; здесь  $m_1$  - размерность первой нормальной к  $V_M$  в  $M$  плоскости  $R_{(1)}$ ,  $K^{\bar{x}} \in R_{(1)}$ ,  $\bar{K}^{\bar{x}} - \bar{M} \perp_{R_{I^1}}$ ,  $|\bar{K}^{\bar{x}} - \bar{M}| = \frac{1}{p}$  и  $p$  - расстояние точки  $M$  от плоскости  $R_{I^1}$ .

Если имеет место  $M \notin R_{I^1}$  и  $m_1 < r_{m_1} (= \frac{1}{2}m (m+1))$ , то точку  $M$  называют полуомбилической точкой поверхности  $V_M$  (см. [12],

[13]). Основные предложения теоремы могут быть выражены и в следующей форме:

Эволютная поверхность  $W$  для  $V_m$  существует тогда и только тогда, когда или первые нормальные к  $V_m$  плоскости  $R_{(1)}$  имеют максимальную возможную размерность  $m_1 = r_{m1}$ , или поверхность  $V_m$  состоит из полуомбилических точек.

То же самое можно выразить и следующим образом:

Эволютная поверхность  $W$  для  $V_m$  существует тогда и только тогда, когда между векторами  $\bar{I}_{ab}$  первой кривизны поверхности  $V_m$  нет эффективных зависимостей.

Пример 1. В случае гиперповерхности  $V_{n-1} \subset R_n$  условие  $M \in R_{I^1}$ , т.е.  $W \neq \emptyset$ , где  $\emptyset$  — пустое множество, выполнено тогда и только тогда, когда индикатриса  $I^1$  вырождена в точку, не совпадающую с  $M$ . Следовательно,  $M$  — омбилическая точка поверхности  $V_{n-1}$ , а  $V_{n-1}$  — сфера. Эволюта  $W$  совпадает с центром сферы.

Пример 2. В случае  $V_{n-2} \subset R_n$  условие  $M \in R_{I^1}$ , т.е.  $W \neq \emptyset$ , выполнено тогда и только тогда, когда индикатриса  $I^1$  вырождена в отрезок прямой, не проходящей через  $M$ . В случае  $n=4$  это является характеристическим свойством двойственно нормализированной поверхности  $D_2$  (см. [18]).

(3) На эволюте  $W$  естественно выделяется подповерхность

$$V^1 = \bigcup_M K^{\#},$$

которую назовем перицентроидом для  $V_m$ . Дифференцируем (6), заменив  $M_1^{\#}$  с  $K^{\#}$ . Тогда получим

$$\bar{1}_c^1 \bar{1}_{ab} + (\bar{K}^{\times} - \bar{M}) \bar{P}_{abc} = 0, \quad (7)$$

где  $\bar{1}_c^1$  - касательные векторы к  $V^1$  в ее точке  $K^{\times}$ . Далее, в силу того же (6), имеем

$$\bar{1}_c^1 \bar{1}_{ab} + \sum_d P_{abc}^{dd} = 0.$$

Этим определяются компоненты векторов  $\bar{1}_a^1$  в плоскости  $R_{(1)}$ .

Пусть  $\bar{K}^{\times} - \bar{M} = x^{cd} \bar{1}_{cd}$ . Тогда компоненты векторов  $\bar{1}_a^1$  на плоскости  $R_{(2)}$  равны  $x^{cd} \bar{1}_{cd}$  ( $x^{cd}$ , согласно (6), являются решениями системы  $x^{cd} \bar{1}_{cd} \bar{1}_{ab} - \delta_{ab} = 0$ ).

Кроме названных, векторы  $\bar{1}_a^1$ , в силу  $K^{\times} \in R_{(1)}$  и  $dK^{\times} \perp R_{(0)}$ , больше компонент не имеют. Поэтому касательная плоскость  $R^1 = \{K^{\times}; \bar{1}_a^1\}$  к перицентроиду  $v^1$  в ее точке  $K^{\times}$  находится в плоскости, натянутой на плоскости  $R_{(1)}$  и  $R_{(2)}$ , т.е.

$$R^1 \subset R_{(1)} + R_{(2)}.$$

Из (7) видно, что плоскости  $R^1$  и  $R_{(1)}$  ортогональны (равносильное условие было бы  $R^1 \subset R'^1$ , где  $R'^1 = \{K^{\times}; \bar{1}_{a_0} \dots \bar{1}_{a_1} \}_{(1>1)}$  - плоская образующая эволюты  $w$  (см. теорему 4 2)) тогда и только тогда, когда все дифференциалы векторов  $\bar{1}_{ab}$  первой кривизны ортогональны к вектору  $\bar{K}^{\times} - \bar{M}$  ( $\equiv$  все векторы  $\bar{P}_{abc}$  параллельны к плоскости  $R_{(1)}$ ). Для ортогональности же плоскостей  $R^1$  и  $R_{(2)}$  необходимы определенные линейные зависимости между векторами  $\bar{1}_{abc}$  второй кривизны. В частности, тогда ортогональны и плоскости  $R^1$  и  $R'^1$ .

Касательная к эволюте  $w$  в ее точке  $K^{\times}$  плоскость  $R^{K^{\times}}$  сов-

падает с плоскостью, натянутой на плоскости  $R^1$  и  $R'^1$ , т.е.

$$R^{\#1} = R^1 + R'^1. \quad (8)$$

В этом можно убедиться, если совершать инфинитезимальное перемещение с точки  $K^{\#}$  в близкую ей точку  $M^{\#}$  эволюты  $W$  в два шага: сначала перемещение с  $K^{\#}$  в точку  $K^{\#}$ , находящуюся в той же самой образующей  $R'^1$  эволюты  $W$ , что и точка  $M^{\#}$ , а затем перемещение с  $K^{\#}$  в  $M^{\#}$ .

④. Из тождества  $\bar{1}_a \bar{1}_b^1 = 0$  после дифференцирования получается:

$$\bar{1}_{ac} \bar{1}_b^1 + \bar{1}_a \bar{1}_{bc}^1 = 0, \quad (9)$$

где  $\bar{1}_{ab}^1$  — векторы первой кривизны перифероида  $V^1$ . Нетрудно установить, что они, независимо от возможных линейной зависимостей между векторами  $\bar{1}_a^1$ , симметричны по своим индексам. Далее, в силу (9), произведение  $\bar{1}_{ab} \bar{1}_c^1$  симметрично по всем своим индексам.

Если плоскость  $R^1$  ортогональна к плоскости  $R_{I_1}$  индикатрисы  $I^1$ , то имеют место равенства

$$\bar{1}_a^1 (\bar{1}_{aa} - \bar{1}_{bb}) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{1}_b^1 \bar{1}_{ab} = 0 (a \neq b).$$

Тогда, учитывая также (9), можем записать

$$\bar{1}_a^1 \bar{1}_{aa} = \bar{1}_a^1 \bar{1}_{bb} = \bar{1}_b^1 \bar{1}_{ab} = 0.$$

Поэтому ортогональны и плоскости  $R^1$  и  $R_{(1)}$ . Т.е., из соотношения  $R^1 \perp R_{I_1}$  следует соотношение  $R^1 \perp R_{(1)} (=R^1 \parallel R_{(2)})$ . Иначе

говоря, если касательная плоскость  $R^1$  перигентроида  $V^1$  ортогональна к плоскости  $R_{I,1}$  индикатрисы  $I^1$ , то она ортогональна и к первой нормальной плоскости  $R_{(1)}$  (поверхности  $V_m$ ).

### § 3. Последовательность огибающих

(1.) Тот факт, что эволюта  $w^1$  представляется в виде объединения плоскостей  $R'^1 (\subset R_{n-m})$  приводит к вопросу о существовании огибающей  $w^2$  для  $w^1$ , являющейся объединением плоскостей  $R'^2 (\subset R'^1)$ , или вообще, к вопросу о существовании последовательности поверхностей  $w^1, w^2, \dots, w^s, \dots$ , где

$$w^s = \bigcup_{M \in V_m} R'^s \quad \text{и} \quad R'^s \subset R'^{s-1},$$

а  $w^s$  является огибающей для  $w^{s-1}$ . Если  $w^{s-1} = \emptyset$  (т.е. если  $R'^{s-1} = \emptyset$ ), то и  $w^s = \emptyset$ . Назовем  $w^s$  s-ой эволютой для  $V_m$  (таким образом, ранее рассмотренная эволюта — это I-ая эволюта). Если под  $w^0$  подразумевать конгруэнцию плоскостей  $w^0 = \bigcup_{M \in V_m} R_{n-m}$ , то все эволюты для  $V_m$  подлежат единому рекуррентному определению.

(2.) Определим в точке  $M$  поверхности  $V_m$  последовательность точек  $M^0, M^1, M^2, \dots$  с помощью рекуррентных формул

$$|M^s - M^{s-1}| = \min_{M^{(s)} \in R'^s} |M^{(s)} - M^{s-1}|,$$

где  $M^0 = M, M^s \in R'^s$  и  $s = 1, 2, \dots$ . Очевидно, что точка  $M^s$  не существует (что условно обозначим через  $M^s = \emptyset$ ) тогда и только тогда, когда  $R'^s = \emptyset$ . Имеет место равенство

$$M^1 = R^x.$$

Назовем точку  $M^s$   $s$ -ым перицентром для  $V_M$  в точке  $M$ .

Определим поверхность  $V^s$  как объединение

$$V^s = \bigcup_M M^s.$$

(В частности,  $V^0 = V_M$ .) Назовем поверхность  $V^s$  ( $\subset W^s$ )  $s$ -ым перицентром для  $V_M$ . Равенства  $V^s = \emptyset$  и  $W^s = \emptyset$  равносильны.

Касательную плоскость к  $V^s$  в ее точке  $M^s$  обозначим

$$R^s (\subset R'^{s-1}).$$

Она определяется производными  $\bar{I}_a^s$  от вектора  $\bar{M}^s$  по формам  $\omega^a$ , т.е.

$$R^s = \{ M^s; \bar{I}_a^s \}.$$

Касательную плоскость к  $W^s$  в  $M^s$  обозначим через  $R^{ss}$ .

Аналогично (8), справедливо равенство

$$R^{ss} = R^s + R'^s.$$

③. Методом математической индукции нетрудно обобщить некоторые результаты, относящиеся к поверхностям  $W^1$  и  $V^1$ , к случай поверхностей  $W^s$  и  $V^s$ . Например, справедлива

Теорема 4. 3. Образующие  $R'^s$   $s$ -ой эволюты  $W^s$  для  $V_M$  определяется точкой  $M^s$  и всеми векторами  $\bar{I}_{a_0 \dots a_1}^s$  ( $1 > s$ ) (оно параллельно этим векторам), т.е.

$$R'^s = \{ M^s; \bar{I}_{a_0 \dots a_1}^s (1 > s) \}. \quad (10)$$

(Если  $M = \emptyset$ , то и  $R'^s = \emptyset$ ).

Доказательство. Допустим, что (10) справедливо при не-

котором значении  $\mathbf{v}$ . Так как  $R^{s+1} \subset R^s$ , то произвольную точку  $M^{(s+1)} \in R^{s+1}$  можно представить вектором вида

$$\bar{M}^{(s+1)} = \bar{M}^s + \sum_{l > s} x^0 \dots x_l \bar{1}_{0 \dots 0 l} \quad (11)$$

По определению имеем  $\bar{M}_{,c}^{(s+1)} \in R^s$ , где  $\bar{M}_{,c}^{(s+1)}$  — производное по форме  $\omega^c$  от вектора  $\bar{M}^{(s+1)}$ . Равносильное этому условие есть  $\bar{M}_{,c}^{(s+1)} \bar{1}_{a_0 \dots a_s} = 0$ , а это, в силу (II), равносильно соотношению

$$(\bar{1}_c^s + x^0 \dots x_{s+1} \bar{1}_{c_0 \dots c_{s+1}}) \bar{1}_{a_0 \dots a_s} = 0.$$

В силу уравнений инвариантности метрики (I 7) можем писать

$$x^0 \dots x_{s+1} \bar{1}_{c_0 \dots c_{s+1}} \bar{1}_{a_0 \dots a_s} - \bar{1}_c^s \bar{1}_{a_0 \dots a_s} = 0 \quad (12)$$

или, что то же самое,

$$(\bar{M}^{(s+1)} - \bar{M}^s) \bar{1}_{a_0 \dots a_s} - \bar{1}_c^s \bar{1}_{a_0 \dots a_s} = 0. \quad (13)$$

Последняя система, если она не противоречива, определяет ровно один вектор, параллельный к плоскости  $R_{(s+1)}$ , который, очевидно, равен  $\bar{M}^{s+1} - \bar{M}^s$ . На коэффициенты же  $x^0 \dots x_l$  при  $l > s+1$  система (12) не налагает никаких ограничений. Поэтому в самом деле можно писать

$$R^{s+1} = \{ M^{s+1}; \bar{1}_{a_0 \dots a_1} (l > s+1) \}.$$

Так как справедливо  $R^1 = \{ M^1; \bar{1}_{a_0 \dots a_1} (l > 1) \}$ , то теорема

доказана.

При доказательстве теоремы 4 3 выяснилось, что вектор  $\bar{M}^{s+1} - \bar{M}^s$  параллелен к  $(s+1)$ -ой нормальной плоскости  $R_{(s+1)}$  к  $V_m$  в  $M$ . Задав здесь для  $s$  последовательно значения  $s=0, \dots, l-1$ , установим, что перипентр  $M^1$  находится в  $(l+1)$ -ой соприкасающейся плоскости к  $V_m$  в  $M$ , т.е.

$$M^1 \in \sum_{s=0}^l R_{(s)}. \quad (14)$$

(Более точной оценкой была бы  $M^1 \in \sum_{s=1}^l R_{(s)}$ .) Если учесть еще теорему 4 3, то может быть сформулирована

Теорема 4. 4. Плоская образующая  $R'^1$   $l$ -ой эволюты  $W^1$  в  $l$ -ом перипентре  $M^1$  ортогонально дополняет  $(l+1)$ -ую соприкасающуюся плоскость  $\sum_{s=0}^l R_{(s)}$  до всего пространства  $R_n$  ( $R'^1, M^1$  и  $\sum_{s=0}^l R_{(s)}$  - все взяты в точке  $M$  поверхности  $V_m$ ).

(4.) Из того, что существование перипентра  $M^1$  и разрешимость системы (13) (при  $s=1$ ) равносильны существованию плоскости  $R'^{l+1}$ , следует

Теорема 4. 5. Поверхность  $V_m$  обладает  $(l+1)$ -ой эволютой  $W^{l+1}$  тогда и только тогда, когда существует  $l$ -ая эволюта  $W^l$  и когда имеющиеся линейные зависимости между векторами  $\bar{a}_{a_0 \dots a_{l+1}}$   $(l+1)$ -ой кривизны не нарушаются, если в них все векторы  $\bar{a}_{a_0 \dots a_{l+1}}$  заменить скалярными произведениями  $\bar{a}_{a_0 \dots a_l} \bar{a}_{a_{l+1}}^1$ . В частности, это имеет место всегда, когда  $W^l \neq \emptyset$  и все линейные зависимости между векторами  $\bar{a}_{a_0 \dots a_{l+1}}$  индуцированы линейными зависимостями между векторами  $\bar{a}_{a_0 \dots a_l}$  (см. II § 3 п. 7).

Следствие. Если между векторами  $\bar{1}_{ab}$  первой кривизны имеют место только неэффективные зависимости и между векторами  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1}$  имеют место только индуцированные ими зависимости, то существуют все эволюты  $W^1, \dots, W^l$ . В частности, эти условия соблюдены, когда 1-ая нормальная плоскость  $R_{(1)}$  к  $V_m$  имеет максимальную возможную размерность, т.е. когда  $m_1 = r_{m1}$ .

Для того, чтобы 1-ая эволюта  $W^1$  оказалась последней в последовательности  $W^1, W^2, \dots$ , следовательно, необходимо, чтобы уменьшение размерности  $m_{1+1}$  плоскости  $R_{(1+1)}$  (по сравнению с  $r_{m,1+1}$ ) было больше, чем то уменьшение, которое вызвано индуцированными зависимостями между векторами  $\bar{1}_{a_0 \dots a_{1+1}}$ .

Последнее утверждение справедливо и в случае  $m=1$ , т.е. в случае кривой  $V_1$ . Пусть при  $m=1$  имеет место  $W^1 \neq \emptyset$  и  $W^{1+1} = \emptyset$ . Так как  $r_{11} = r_{1,1+1} = 1$ , то возможен только случай  $m_1 = 1$  и  $m_{1+1} = 0 (< r_{1,1+1})$  (случай  $m_1 = 0$  приводит к требованию  $m_{1+1} < 0$ ). Следовательно, порядок кривизны кривой  $V_1$  равен 1, она лежит в своей (1+1)-ой соприкасающейся плоскости.

Следует отметить, что теорема 4 5 справедлива и в случае  $l=0$ . Тогда  $\bar{1}_a^0 = \bar{1}_a$ . Если из линейной зависимости

$$x^{od} \bar{1}_{od} = 0 \quad (15)$$

следует равенство  $x^{cd} \bar{1}_c \bar{1}_d^0 = 0$ , т.е. имеет место

$$\sum_o x^{oo} = 0$$

(репер  $R$  ортонормирован), то зависимость (15) неэффективна

(см. II. § 3 п. 6), А если все зависимости между векторами  $\bar{l}_{ab}$  неэффективны, то  $M \notin R^1$ , т.е.  $w^1 \neq \emptyset$ .

⑤ Пусть существует 1-ая эволюта для  $v_m$ , т.е.  $w^1 \neq \emptyset$ . Рассмотрим в периферии  $M^1$  плоскости  $R'^1$ ,  $R^1$  и  $R^{\neq 1}$ , первая из которых является образующей 1-ой эволюты  $w^1$ , вторая - касательной плоскостью к 1-ому перифероиду  $v^1$ , а третья - касательной плоскостью к 1-ой эволюте  $w^1$ . Размерности этих плоскостей обозначим соответственно через  $m'^1$ ,  $m^1$  и  $m^{\neq 1}$ .

Аналогично (8), справедливо соотношение

$$R^{\neq 1} = R^1 + R'^1,$$

откуда

$$m^{\neq 1} \leq m^1 + m'^1.$$

Размерность плоскости  $R^1$  равна рангу векторов  $\bar{l}_a^1$ . Следовательно,  $m^1 \leq m$ , для  $m'^1$  получим

$$m'^1 = \sum_{s>1} m_s = n-m - \sum_{s=1}^1 m_s,$$

где  $m_s$  - размерность  $s$ -ой нормальной плоскости  $R_{(s)}$  к  $v_m$  в  $M$ . В частности,  $m'^1 = 0$  (т.е.  $R'^1$  совпадает с точкой  $M^1$ ) тогда и только тогда, когда величина 1 равна порядку кривизны поверхности  $v_m$ . Это необходимо и достаточно для того, чтобы имело место  $w^1 = v^1$ .

Так как  $M^1 \in R'^1$ , то в силу определения  $R'^1$ ,  $R^1 \subset R'^1$  и поэтому на основе теоремы 4 4 имеет место  $R^1 \perp \sum_{s=0}^{1-1} R_{(s)}$ . С другой стороны, в силу (14), имеем  $R^1 \perp \sum_{s>1+1} R_{(s)}$ . Отсюда получается, что

$$R^1 \subset \{M^1; R_{(1)} + R_{(1+1)}\}^{*})$$

Компоненты векторов  $\bar{i}_a^1 (\subset R^1)$  в плоскости  $\{M^1; R_{(1+1)}\}$  равны

$$x^0 \dots x_1 \bar{i}_{c_0 \dots c_1}^1, \quad (16)$$

где величины  $x^0 \dots x_1$  определяются из системы (12) (при  $s=1-1$ ). В этом можно убедиться при дифференцировании вектора

$$\bar{M}^1 = \bar{M} + \sum_{s=1}^{1-1} x^0 \dots x_s \bar{i}_{c_0 \dots c_s}^1 + x^0 \dots x_1 \bar{i}_{c_0 \dots c_1}^1.$$

Компоненты же векторов  $\bar{i}_a^1$  в плоскости  $\{M^1; R_{(1)}\}$  в силу (13) (при  $s=1$ ), определяют расположение точки  $M^{1+1}$  в плоскости  $\{M^1; R_{(1+1)}\}$ , отнесенной к реперу  $(M^1, \bar{i}_{a_0 \dots a_{1+1}}^1)$ .

Для того, чтобы имело место  $R^1 \perp R_{(1+1)}$  (равносильные условия были бы  $R^1 \subset \{M^1; R_{(1)}\}$  и  $R^1 \perp R^{1+1}$ ; в частности, тогда имеет место и  $m^{*1} = m^1 + m^{1+1}$ ) необходимо и достаточно, чтобы все векторы (16) равнялись нулю. Если соответствующие линейные зависимости между векторами  $\bar{i}_{a_0 \dots a_{1+1}}^1$  не являются индуцированными, то требование  $R^1 \perp R_{(1+1)}$  налагает дополнительное ограничение (т.е. сверх того ограничения, которое вызвано индуцированными зависимостями между векторами  $\bar{i}_{a_0 \dots a_{1+1}}^1$ ) на раз-

\*) Пусть  $K$  — произвольная точка и  $R$  — произвольная плоскость. Под  $\{K; R\}$  подразумеваем плоскость той же размерности, что и  $R$ , параллельную к  $R$  и проходящую через  $K$ .

мерность  $m_{1+1}$  плоскости  $R_{(1+1)}$ . В противном случае имеем

$$x^0 \dots c_1 \bar{l}_{c_0 \dots c_1} = \bar{M}^1 - \bar{M}^{1-1} = 0.$$

Следовательно, перицентры  $M^1$  и  $M^{1-1}$  совпадут, и поэтому

$$v^1 = v^{1-1}.$$

(В частности, так как  $(R_{(0)}) = R^0 \perp R_{(1)}$ , то условно можем записать  $(v_m) = v^0 = v^{-1}$ .) Следует отметить, что выполнение условия  $R^1 \perp R_{(1+1)}$  является необходимым и достаточным для того, чтобы семейство плоскостей  $\bigcup_M \{M^1; R_{(1)}\}$  имело огибающую. Ей является перицентроид  $v^1$ .

Пусть плоскости  $R^1$  и  $R_{(1)}$  ортогональны, т.е.  $R^1 \perp R_{(1)}$  (равносильные условия были бы  $R^1 \subset \{M^1; R_{(1+1)}\}$ ,  $R^1 \subset R'^1$  и  $m^1 = m^1$ ). Здесь все скалярные произведения  $\bar{l}_c \bar{l}_{a_0 \dots a_1}$ , а поэтому, в силу (13) (при  $v=1$ ), и  $(\bar{M}^{1+1} - \bar{M}^1) \bar{l}_{a_0 \dots a_{1+1}}$  равны нулю. А так как  $\bar{M}^{1+1} - \bar{M}^1 \parallel R_{(1+1)}$ , то необходимо имеет место  $\bar{M}^{1+1} = \bar{M}^1$ , т.е.

$$v^{1+1} = v^1.$$

(6.) Пусть имеет место  $v^{1-1} = v^1 = v^{1+1}$ . Отсюда

$$R^{1-1} = R^1 = R^{1+1}.$$

Но так как

$$R^{1-1} \subset \{M^{1-1}; R_{(1-1)} + R_{(1)}\}, R^1 \subset \{M^1; R_{(1)} + R_{(1+1)}\}$$

и

$$R^{l+1} \subset \{M^{l+1}; R_{(l+1)+R_{(l+2)}}\},$$

то плоскость  $R^l (=R^{l-1} \cap R^{l+1})$  совпадает с перипентром  $M^l (=M^{l-1} \cap M^{l+1})$ . Все дифференциалы перипентра  $M^l$ , следовательно, равны нулю и поэтому также перипентроид  $V^l$  совпадает с перипентром  $M^l$ , т.е.  $V^l = M^l$ . Так как точка  $M^l$  принадлежит теперь всем плоскостям  $R_{n-m}$ , то поверхность  $V_m$  находится на гиперсфере пространства  $R_n$  с центром в  $M^l$ .

Пусть перипентр  $M^l$  находится в  $(l-1)$ -ой соприкасающейся плоскости  $\sum_{s=0}^{l-2} R(s)$ , то векторы  $\bar{M}^l - \bar{M}^{l-1}$  и  $\bar{M}^{l-1} - \bar{M}^{l-2}$ , так как они параллельны плоскости  $R_{(l-1)+R(1)}$ , равны нулю. Поэтому  $M^l = M^{l-1} = M^{l-2}$  и, в силу прежнего, поверхность  $V_m$  находится на гиперсфере пространства  $R_n$  с центром в перипентре  $M^l$ .

Допустим, что поверхность  $V_m$  находится на гиперсфере пространства  $R_n$  с центром в  $M^k (\in \bigcap_M R_{n-m})$ . Очевидно, что  $M^k = \bigcap_M R_{n-m}$ , так как в противном случае поверхность  $V_m$  находилась бы в пересечении нескольких гиперсфер и тем самым в некоторой гиперплоскости пространства  $R_n$ . Это противоречит предположению.

Так как производные  $\bar{I}_a^k$  по формам  $\omega^a$  от вектора  $\bar{M}^k$  равны нулю, то  $\bar{I}_a^k \parallel R_{n-m}$ . Следовательно,  $M^k \in R^{l-1}$ . В общем получается, что  $M^k \in R^l (M^k \in \bigcap R^l)$ . В силу того, что  $M^k \neq \emptyset$  и  $\bar{I}_a^k = 0$ , для любого значения  $l$  имеем  $R^{l-1} \neq \emptyset$ , т.е.  $W^l \neq \emptyset$ .

Пусть  $k$  - порядок кривизны поверхности  $V_m$ . Тогда  $R'^k = M^k$ . Поэтому верно  $M^k = M^k (=V^k = W^k)$ .

Допустим, что  $l_0$  - такое минимальное значение  $l$ , что  $M^k = M^{l_0}$ . Для каждого значения  $l > l_0$  имеет место  $M^k = M^l (=V^l)$ . Так как здесь  $R^{l_0} \perp R_{(l_0+1)}$  и  $V^{l_0-1} \neq V^{l_0}$ , то, как видим (см.

п. 5), налагаются определенные (неиндуцированные) линейные зависимости на векторы  $(1_{o+1})$ -ой кривизны и, тем самым, дополнительные ограничения на размерность плоскости  $R_{(1_{o+1})}$ .

На основе этого, а также результатов п. 5 и следствия из теоремы 4 5 может быть сформулирована

**Теорема 4. 6.** Если между векторами  $\bar{1}_{ab}$  первой кривизны поверхности  $V_m$  имеют место только неэффективные зависимости и если между векторами  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1}$  1-ой кривизны имеют место только индуцированные ими зависимости (в частности, когда  $m_1 = r_{m1}$ ), то среди перигентридов  $v^1, \dots, v^1$  имеется не менее  $1/2$  различных. Если при этом поверхность  $V_m$  находится на гиперсфере пространства  $R_n$ , то центр  $M^x$  гиперсферы находится вне 1-ых соприкасающихся к  $V_m$  плоскостей  $\sum_{s=0}^{l-1} R(s)$ . Если  $M^x \in \sum_{s=0}^1 R(s)$ , то на размерность  $m_{l+1}$  плоскости  $R_{(l+1)}$  налагается дополнительное ограничение (т.е. между векторами  $\bar{1}_{a_0 \dots a_{l+1}}$  имеют место неиндуцированные зависимости).

(7) Если взять производную по форме  $\omega^1$  от тождества  $\bar{1}_{a_0 \dots a_{l-1}} \bar{1}_a^1 = 0$ , то получим:

$$\bar{1}_{a_0 \dots a_{l-1}} c \bar{1}_a^1 + \bar{1}_{a_0 \dots a_{l-1}} \bar{1}_{ac}^1 = 0, \quad (17)$$

где  $\bar{1}_{ab}^1$  - векторы первой кривизны поверхности  $v^1$  (ср. § 2 п. 4). Отсюда вытекает симметричность скалярного произведения  $\bar{1}_{a_0 \dots a_1} \bar{1}_a^1$  по всем нижним индексам. (То же самое следует из (13) ( $s=1$ ), однако при условии, что  $w^{l+1} \neq \emptyset$ .)

Из (17) видно, что векторы  $\bar{1}_{ab}^1$  ортогональны к векторам  $\bar{1}_{a_0 \dots a_{l-1}}$  тогда и только тогда, когда  $\bar{1}_a^1$  ортогональны к

$\bar{1} a_0 \dots a_1$ . В силу этого и результатов, полученных в конце п.  
5 может быть сформулирована

Теорема 4. 7. Первая нормальная плоскость  $R_{(1)}^1$  перицентроида  $v^1$  в ее точке  $M^1$  ортогональна к  $(1-1)$ -ой нормальной плоскости  $R_{(1-1)}$  поверхности  $V_m$  в  $M$  тогда и только тогда, когда касательная плоскость  $R^1$  к  $v^1$  в  $M^1$  ортогональна к  $1$ -ой нормальной плоскости  $R_{(1)}$  к  $V_m$  в  $M$ , т.е. когда  $v^1 = v^{1+1}$ .

Некоторые, относящиеся к перицентроидам  $v^1$  дополнительные замечания, сделаны в приложениях 2, 3, 4 и 5.

## Приложения

①. Пусть в первой нормальной к  $V_m$  в  $M$  плоскости  $R_{(1)}$  через точку  $M$  проходит произвольная прямая  $L$ . Пусть задана еще соответствующая индикатриса  $I^1$ . Требуется найти точки пересечения прямой  $L$  с присоединенной поверхностью  $K$ .

Построим в  $R_{(1)}$  ортогональную к  $L$  гиперплоскость  $R^{\times}$  и будем перемещать ее вдоль  $L$  до касания с индикатрисой  $I^1$  (т.е. пока  $R^{\times}$  содержит некоторую касательную к  $I^1$  плоскость). Пусть в тот момент  $R^{\times}$  пересекает  $L$  в точке  $P$ . Тогда конечная точка вектора

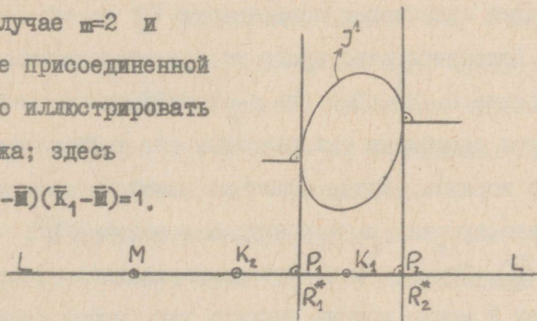
$$\bar{M} + \frac{1}{|\bar{P}-\bar{M}|^2}(\bar{P}-\bar{M})$$

является точкой поверхности  $K$ . Зафиксируя таким образом все положения касания перемещаемой плоскости  $R^{\times}$  с  $I^1$  и, с другой стороны, задавая для  $L$  всевозможные направления, мы получим все точки присоединенной поверхности  $K$ .

Конструкция основывается на теореме 4 §.

Пример. В случае  $n=2$  и  $M \in R_{I^1}$  построение присоединенной поверхности можно иллюстрировать при помощи чертежа; здесь

$$(\bar{P}_2 - \bar{M})(\bar{K}_2 - \bar{M}) = (\bar{P}_1 - \bar{M})(\bar{K}_1 - \bar{M}) = 1.$$



(2) Если для перифетроидов для  $V_m$  верны соотношения  $v^1 = v^{1+1} \neq \emptyset$  и  $v^{1+2} = v^{1+3} \neq \emptyset$ , то перифетроиды  $v^1$  и  $v^{1+2}$  - эквидистантные (т.е. расстояние их соответствующих друг другу точек  $M^1$  и  $M^{1+2}$  - постоянно, не изменяется при перемещении  $M^1$  на  $v^1$ ). Это следует из того, что в этом случае плоскости  $R^1$  и  $R^{1+2}$  обе ортогональны к вектору  $\bar{M}^{1+2} - \bar{M}^1$ .

Если  $v^1 = v^2 \neq \emptyset$ , то поверхности  $V_m$  и  $v^1$  - эквидистантные (ср. с § 3 п. 5 :  $v^0 = v^{-1}$ ).

(3) Если поверхность  $V_m$  является орбитой некоторой группы Ли движений в  $R_n$  и  $v^1 \neq \emptyset$ , то  $v^1$  является орбитой той же группы. При этом все поверхности  $v^s$  ( $s \leq 1$ ) попарно эквидистантные.

Если, в частности, поверхность  $V_m$  является максимально симметричной (см. [7]) и  $v^1 \neq \emptyset$ , то  $v^1$  является или точкой, или максимально симметричной поверхностью той же размерности  $n$ . В противном случае нам удалось бы при помощи соответствия  $M \leftrightarrow M^1$  выделить на  $V_m$  некоторые особые точки или направления, что, однако, противоречит условиям максимальной симметричности  $V_m$ .

(4) Порядок кривизны перифетроида  $v^1$  для  $V_m$  не больше порядка кривизны к поверхности  $V_m$ .

Доказательство этого утверждения основывается на соответствии  $M \rightarrow M^1$ . Все  $(k+s)$ -ые дифференциалы вектора  $\bar{M}$  выражаются линейными комбинациями его дифференциалов до  $(k+1)$ -ого порядка. Точно такие же линейные зависимости между соответствующими дифференциалами вектора  $\bar{M}^1$ .

(5) Пусть  $v^1 \neq \emptyset$ . Ортонормированный касательный к  $V_m$  в  $M$  репер  $R$  можно всегда выбрать так, чтобы соответствующие век-

торам  $\bar{l}_a$  касательные к  $V^1$  в  $M^1$  векторы  $\bar{l}_a^1$  были взаимно ортогональны.

Для доказательства заметим, что каждому касательному к  $V_m$  в  $M$  вектору  $\bar{x} = x^c \bar{l}_c$ , где  $|\bar{x}| = 1$  и касательный репер  $R$  не обязательно ортонормирован, соответствует вектор  $\bar{x}^1 = x^c \bar{l}_c^1$  в плоскости  $R^1$ . При свободном вращении вектора  $\bar{x}$  в  $R_m$ , конец соответствующего вектора  $\bar{x}^1$ , отложенного от перигенцентра  $M^1$ , описывает некоторое точечное многообразие  $K^1$ , которое является или  $(m-1)$ -мерным эллипсоидом с центром в  $M^1$ , или его конечной вырожденной формой (ср. с II § 4 п. 2).

Искомые ортогональные векторы  $\bar{x}_a^1$  определяются из системы

$$\begin{aligned} x^c (\bar{l}_c^1 \bar{l}_d^1 - k \bar{l}_c \bar{l}_d) &= 0, \\ |\bar{x}| &= 1, \end{aligned} \quad (18)$$

$$|\bar{l}_c^1 \bar{l}_d^1 - k \bar{l}_c \bar{l}_d| = 0$$

как главные радиусы-векторы многообразия  $K^1$ . Ортогональны и соответствующие векторы  $\bar{x}_a$ .

Корни  $k_a$  уравнения (18) равны квадратам главных радиусов-векторов многообразия  $K^1$  (ср. с теоремой 3 3). Если же все корни  $k_a$  различны, то соответствующие друг другу ортогональные реперы в плоскостях  $R_m$  и  $R^1$  однозначно определены. Это условие является и необходимым. Число отличных от нуля корней  $k_a$  равно размерности  $m^1$  поверхности  $V^1$ .

Очевидно, что соответствующие друг другу на  $V_m$  и  $V^1$  ортогональные сети или обе голономные, или обе неголономные.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Базылев В.Т., О многомерных сетях в евклидовом пространстве. Литовск. матем. сб., 1966, VI, № 4, 475-491.
2. Базылев В.Т., Об одном аддитивном представлении тензора Риччи  $p$ -поверхности евклидова пространства. Сиб. матем. журнал, т. VII, № 3, М. 1966, 499-511.
3. Лумисте Ю.Г., К теории двумерных минимальных поверхностей I. Теория кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 16-28.
4. Лумисте Ю.Г., К теории двумерных минимальных поверхностей IV. Поверхности с окружностями кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 129, 90-102.
5. Лумисте Ю.Г., Предвосхищение формул Френе в сочинении К.Э. Зенфа. В. сб. "Вопр. истории физ.-матем. наук", Москва, 1963, 141-147.
6. Муллари Р.Р., О поверхностях с полями абсолютно главных направлений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 275-288.
7. Муллари Р.Р., О максимально симметричных поверхностях многомерного евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 129, 62-73.
8. Муллари Р.Р., О главных направлениях  $n$ -мерной поверхнос-

ти. Докл. АН СССР, 1962, 144, 989-992.

9. Муллари Р.Р., Исследования по теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Кандид. дисс., Тарту, 1963.
10. Муллари Р.Р., Индикатрисы кривизны и огибающие нормальных плоскостей для  $V_m$  в евклидовом  $R_n$  I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, 192, 47-64.
11. Муллари Р.Р., Индикатрисы кривизны и огибающие нормальных плоскостей для  $V_m$  в евклидовом  $R_n$  II. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, 206, 22-36.
12. Перепелкин Д.И., Кривизна и нормальные пространства многообразия  $V_m$  в  $R_n$ . Матем. сб. 42, № I, 1935, 81-120.
13. Перепелкин Д.И., Исследования по теории многообразий в римановом пространстве. Докторск. дисс., Москва, 1942.
14. Розенфельд Б.А., Неевклидовы геометрии. Москва, 1955.
15. Рыжков В.В., О тангенциально вырожденных поверхностях. Докл. АН СССР, 1960, 135, 20-22.
16. Рыжков В.В., Римановы геометрии высшего рода. Задача погружения. Труды геом. семинара, т. I, М. 1966, 265-330.
17. Схоутен И.А., Стройк Д.Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II, Москва-Ленинград, 1948.
18. Чакмазян А.В., Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализированной  $D_2$  в  $E_4$ . Докл. АН СССР, 1962, 144, № 6, 1233-1236.

19. Эйзенхарт Л.П., Риманова геометрия. ИЛ, Л., 1948.
20. Bompiani E., Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale. Rend.Accad.Lincei, 1915, 5, N<sup>o</sup> 24, 126-131.
21. Bompiani E., Basi analitiche per una teoria della deformazioni delle superficie di specie superiore. Rend.Accad.Lincei, 1916, 5, N<sup>o</sup> 25, 627-634.
22. Bompiani E., Geometrie riemanniane di specie superiore. Mem.Accad.Ital., 1935, 6, N<sup>o</sup> 8, 269-520.
23. Bompiani E., Geometrie riemanniennes d'espèce superieure. Colloq.de geom.diff.Louvain, 1951, 125-156.
24. Borůvka O., Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n-dimensions à courbure constante I. Publ.Fac.Sci.Univ.Masaryk, 1932, 165, 1-22.
25. Burstin C., Mayer W., Das Formenproblem der 1-dimensionalen Hyperflächen in n-dimensionalen Räume konstanter Krümmung. Monatshefte f.Math. und Phys., 1926, 34, 89-136.
26. Kommerell K., Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. Math. Ann., 1905, 60, 546-596.
27. Kühne H., Über die Krümmung einer beliebigen Mannigfaltigkeit. Archiv der Mathem.u.Physik, 1904, 6, 251-260.
28. Schouten J.A., Kampen E.R., Über die Krümmung einer  $V_m$

in  $V_n$ ; eine Revision der Krümmungstheorie.  
Math. Ann., 1931, 105, 144-159.

29. Wong Y.Ch., On the Frenet formulae for a  $V_m$  in a  $V_n$ .  
Quart. J. Math., 1940, 11, 146-160.
30. Yung-Chow Wong, A new curvature theory for surfaces in  
an Euclidean 4-space. Comment. Math. Helv.,  
1952, 26, 152-170.

## Р Ю Н Н О   М У Л Л А Р И

2 декабря 1968 г. закончился одиннадцатилетний мужественный поединок талантливого эстонского математика Р ю н н о Р а й у в и ч а М у л л а р и (Rüno Mullari) с тяжелой неизлечимой болезнью. На 37 году жизни скончался способный исследователь, который за менее чем девять лет научной деятельности (в том числе последние четыре года будучи прикован к постели) достиг значительных успехов в двух областях науки - в дифференциальной геометрии и в теоретической кибернетике.

Р.Муллари родился 7 декабря 1931 г. в г. Таллине в семье служащего. После окончания средней школы в 1949 г. он поступил в Таллинский политехнический институт на специальность тепловой энергетики, но занятия были прерваны четырехлетним (1950-1954) пребыванием в лагерях лесозаготовки Архангельской области (позднее был полностью реабилитирован). В 1955 г. он поступил на заочное отделение математики Тартуского университета. Закончив I курс с исключительным успехом, он перешел на очное отделение, где также показал выдающиеся способности, и после окончания университета в 1960 г. был направлен на работу в Вычислительный центр Тартуского университета. Пройдя путь от старшего лаборанта до старшего научного сотрудника (с 1964 г.), Р.Муллари стал скоро ведущим исследователем Вычислительного центра. В феврале 1964 г. он защитил кандидатс-

кую диссертацию "Исследования по теории многомерных поверхностей евклидова пространства", основы которой были заложены еще в его дипломной работе. Проблемами теории многомерных поверхностей он занимался до последних дней своей жизни. В то же время Р.Муллари провел ряд значительных исследований по математическим методам управления и планирования промышленного производства, работы заводов и их цехов. Под его руководством работала исследовательская группа, многие его последние статьи написаны совместно с сотрудниками этой группы.

Р.Муллари принимал активное участие в работе ряда конференций по геометрии (Киев 1962, Вильнюс 1963, Харьков 1964, Тарту 1965) и по математической экономике (Москва 1962, Тарту 1963 и 1966, Ленинград 1963 и 1964). Им написан ряд статей глубокого философского содержания об отношениях математики и действительности, мышления и машин (см. [16], [17], [33], [34]). Он смело вмешивался в полемику по этим вопросам на страницах периодики. Свой самоотверженный труд он не прекращал даже в годы обострившейся болезни. Он перенес две тяжелейшие операции (в 1957 и 1964 г.), первая из которых принесла временное облегчение, вторая сохранила жизнь. Последние четыре года он не смог сделать ни единого шага и покидал иногда свою комнату лишь для очередного курса лечения в больнице. Несмотря на это он до последнего месяца своей жизни остался активнейшим сотрудником Вычислительного центра ТГУ.

Р.Муллари пользовался искренней симпатией всех знавших его. Глубокое уважение вызвали его мужество и сила духа, с

которыми он переносил самые большие испытания. Когда приходили друзья, сотрудники, студенты, которыми он руководил, он был неизменно бодрый, оптимистичным, полным энергии и всегда поражал своими глубокими суждениями, оригинальными идеями, умным и тонким юмором. Отличительными чертами его характера были простота, доброжелательность, готовность всегда и во всем помочь. Память о нем навсегда сохранится в сердцах его товарищей по работе и всех его многочисленных друзей.

х

х

х

Исследования Р. Муллари по дифференциальной геометрии посвящены теории многомерных поверхностей в евклидовых пространствах. Уже его дипломная работа ("Исследование главных направлений поверхности") является выдающимся исследованием в этой области. Многие результаты дипломной работы вошли в последующие публикации. Р. Муллари отмечает, что понятие главного направления в теории  $m$ -поверхности, введенное И. А. Схоутеном в 1924, не нашло применений и мало известно о его значении в указанной теории. Он по-новому подходит к этому понятию. Его подход можно в геометрической трактовке характеризовать следующим образом. В двух точках  $M$  и  $M'$   $m$ -поверхности рассматриваются касательные  $m$ -плоскости и на них определяются направления, между которыми косинус угла приобретает стационарное значение. На каждом из них существует полная система полярно вполне ортогональных направлений. Предельные положения этих направлений зависят только от одномерного направления, в котором  $M'$  стремится к  $M$ , и называются главными направлениями относительно последнего. В [3] найдена система

для их определения. Главное относительно самого себя одномерное направление характеризуется тем, что скалярный квадрат вектора нормальной кривизны поверхности в этом направлении стационарен. Если здесь скалярный квадрат заменить длиной, то получается понятие главного направления по Схоутену.

Если все направления в касательной плоскости являются главными относительно данного направления, то последний называется паратактическим. Если данное направление является главным относительно всех касательных направлений, то оно называется абсолютно главным. В [1] доказывалось, что двумерное абсолютно главное направление и его ортогональное дополнение в касательной плоскости составляют сопряженную систему. Тангенциально невырожденная поверхность с такой системой является поверхностью переноса. Подробно исследуются  $m$ -поверхности с  $m$ -сопряженной системой одномерных абсолютно главных направлений, частным случаем которых являются  $m$ -поверхности Клиффорда в гиперсфере (как в эллиптическом пространстве), введенные Б.А.Розенфельдом.

Рассматривая поверхности, в точках которых все направления являются главными, Р.Муллари пришел к интересному классу поверхностей, которые он назвал максимально симметричными поверхностями [4], [5]. Так он называет  $m$ -мерные орбиты  $\frac{1}{2}m(m+1)$  параметрических подгрупп движений  $n$ -мерного евклидова пространства  $R_n$ . Если такая орбита лежит в своей соприкасающейся плоскости  $k$ -го порядка, то она обозначается  $S_m^k$ . В [5] получена общая пфаффовая система, определяющая  $S_m^k$ , и проведена ее интегрирование в случае  $k=1$ . Кроме сферы получается некоторая  $S_m^1$  в  $R_n$  с  $n = \frac{1}{2}m(m+3)$ , лежащая в гиперсфере в виде ее минималь-

ной подповерхности. При  $m=2$  такая  $S_2^4$  была найдена О.Борувка в 1928 (при общем  $m$ , как впоследствии оказалось, также Д.Блануша и А.С.Солодовниковым). Р.Муллари исследует, кроме самой  $S_m^4$ , также поверхности центров ее 1-мерных геодезических подповерхностей.

Эти результаты легли в основу кандидатской диссертации [9] Р.Муллари. Из неопубликованных разделов диссертации отметим исследование поверхностей с паратактическими направлениями (результаты которой аналогичны результатам о поверхностях с абсолютно главными направлениями) и интегрирование пфайфовой системы для  $S_m^k$  в случае, когда размерность нормальной плоскости 3-го порядка к  $S_m^k$  не превышает 1. Кроме плоскостей и сфер получается ровно четыре вида таких  $S_m^k$ .

Самостоятельный интерес представляет применяемый Р. Муллари аппарат — новая и удобная форма формул Бартельса-Френе для многомерной поверхности (они приведены в [9], анонсированы в [10]; их подробный вывод дается в [24]).

В дальнейшем внимание Р. Муллари привлекает две задачи теории многомерных поверхностей. Он познавал решающее значение так называемых индикатрис нормальных кривизн в теории поверхностей евклидова (или риманова) пространства и первым подверг систематическому исследованию индикатрисы кривизны высшего порядка. Результаты он докладывал на II Всесоюзной геометрической конференции [13], их развернутое изложение дано в [24], [28] и [37]. Р.Муллари находит порядок индикатрисы кривизны 1-го порядка (как алгебраической поверхности) а также плоскость, в которой, она лежит; изучает кривые, описываемые на индикатрисе концом вектора нормальной кривизны при

вращении касательного направления в произвольном двумерном направлении; дает теорему об изометричности линейных отображений касательных пространств, индуцирующих изометрии индикатрисы кривизны данного порядка.

Другой задачей, вызывающей интерес Р. Муллари, является задача исследования огибающих конгруэнции нормальных плоскостей многомерной поверхности. Огибающей он называет поверхность, касательные плоскости которой во всех точках (кроме множества меры нуль) принадлежат плоскостям конгруэнции. Первый итог его результатов дан в докладе на II Прибалтийской геометрической конференции [19], подробное изложение содержится в [24], [28] и [37]. Такие огибающие тесно связаны с индикатрисами кривизны. Доказывается, например, что огибающая существует тогда и только тогда, когда плоскость индикатрисы кривизны  $\ell$ -го порядка не проходит через соответствующую точку поверхности, причем вектор, соединяющий точку  $M^\ell$  огибающей в нормальной плоскости  $\ell$ -го порядка с точкой  $M$  поверхности, ортогонален к плоскости индикатрисы, а произведение его длины на расстояние точки  $M$  от этой плоскости равно  $\ell$ . Огибающая, если она существует, состоит из плоскостей, вполне ортогональных к нормальной плоскости  $\ell$ -го порядка в точке  $M^\ell$ . Поэтому она, как семейство плоскостей, может также иметь огибающую, являющуюся семейством плоскостей и т.д. Возникает последовательность огибающих, ряд свойств которой исследуются в [26].

В своей последней работе [37], опубликованном в настоящем выпуске, Р. Муллари, не будучи еще удовлетворен изложением своих результатов в предыдущих публикациях, подверг его

сильной переработке, проведя вместе с тем ряд дополнительных исследований. Рукопись работы была им полностью закончена, он успел также проверить первоначальный машинописный текст с вписанными формулами.

х

х

х

Основные направления исследований Р. Муллари по кибернетике связаны с проблемами использования математических методов и ЭВМ в планировании и управлении производством. Его первые работы в этой области ([6], [7], [8], [11]) посвящены постановке соответствующих математических задач и выявлению основных зависимостей. Одновременно он активно участвовал в поэтапном внедрении полученных результатов и в практическом использовании ЭВМ при планировании работы завода и отдельных цехов (отчеты об этих работах опубликованы в [12], [14], [20], [21], [25], [26], [35]).

На базе этих отдельных работ у Р. Муллари и его сотрудников формировались некоторые общие выводы и складывалась схема подхода к проблемам текущего планирования вообще [15] [18], [22], [36]). По этой схеме переход от опытно-интуитивных методов к математическим методам планирования и управления производством может и должен происходить только постепенно, путем последовательной формализации отдельных элементов управления. Дальнейшее развитие и уточнение этих идей Р. Муллари дал в [30], а также в обширной статье, основную часть которой он оставил лишь в виде черновика и над окончательным оформлением которой сейчас работают его сотрудники.

Основным моментом решения задач текущего планирования

является учет случайностей. Р. Муллари был страстным противником широко распространенного стремления наперед составлять жесткие календарные графики работ на длительные периоды времени, при этом он указывал, что требование строгого соблюдения таких графиков будет скорее мешать, чем помогать производству. Он выдвинул идею составления (на более длительные периоды) лишь ориентировочных графиков, в которых случайные величины учитываются в виде своих математических ожиданий и законов распределения.

Определение и исследование таких законов распределения Р. Муллари считал работой первостепенной важности и уделял этому в последние годы свое основное внимание. При этом он неоднократно указывал на невозможность и даже недопустимость исследования этих законов путем простого наблюдения за действительным ходом производства. Чтобы освободиться от односторонности получаемых данных он взялся за имитирование интересующих нас сторон хода производства на соответствующих кибернетических моделях. По результатам этих исследований опубликованы статьи [29] и [31]. Так, например, удалось дать оценки для сроков ожидания (лучшие, чем получаемые по известной формуле Хинчина), доказать некоторые преимущества метода ориентировочных графиков, сравнить и исследовать основные виды форсажа и т.д.

Наряду с вопросами планирования и управления работой завода или цеха Р. Муллари участвовал и во многих других исследованиях по экономической кибернетике. Так, по его идее был разработан оригинальный алгоритм обращения балансовых матриц ([23], [27]), который уже в течение ряда лет успешно исполь-

зуются при расчетах межотраслевых балансов во всех прибалтийских республиках.

Следует также отметить работу [32] по исследованию нового метода решения задач целочисленного программирования. В этом методе очень простая идея Данцига искусно связана с приемами методов типа ветвей и границ.

Хотя работы по указанным проблемам продолжают теперь уже без личного участия Р. Муллари, есть полное основание считать его по крайней мере соавтором будущих исследований. Столько оригинальных идей оставил он своим сотрудникам, и сам остался для них примером стойкого мужества и бескорыстного служения делу.

Список печатных работ Р.Муллари

1961

1. О поверхностях с полями абсолютно главных направлений. Ученые записки Тартуск.ун-та, 102, 1961, 275-288.

1962

2. Matemaatiliste meetodite kasutamisest tehaste juhtimisel ja planeerimisel. (О применении математических методов при управлении и планировании работы заводов; на эст. яз.) ENSV matemaatikute ja füüsikute II teaduslik-pedagoogilise konverentsi lühietekannete kogumik. Tartu, 1962, 64-67.
3. О главных направлениях  $n$ -мерной поверхности. Доклады АН СССР, т.144, № 5, 1962, 989-992.
4. О максимально симметричных поверхностях многомерного евклидова пространства. Первая всесоюзная геометрическая конференция 25 мая - 2 июня 1962 г. Тезисы и аннотации обзорных докладов и кратких сообщений. Киев, 1962, 73.
5. О максимально симметричных поверхностях многомерного евклидова пространства. Ученые записки Тартуск. ун-та, 129, 1962, 63-73.
6. О планировании работы механических цехов. Научные труды (Московский инженерно-экономический институт), 1962, вып.19, 186-191 (совм. с Каазик Ю.).

7. О применении математических методов в планировании промышленного производства. Коммунист Эстонии, 1962, № 7, 44-51 (совм. с Выханду Л.).

1963

8. Matemaatiliste meetodite rakendamisest tehase töö kalendrilisel planeerimisel. (О применении математических методов при календарном планировании работы завода; на эст.яз.) Majandusliku analüüsi alane teaduslik konverents 11.-13. okt. 1963. Teesid. Tartu, 1963, 23-25 (совм. с Каазик Ю.).
9. Исследования по теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук, 1963, 7 стр.
10. Формулы Френе для многомерной поверхности. [Тезисы доклада Первой Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии.] Литовский математический сборник, т.3, № 2, 1963, 242.
11. К задаче календарного планирования работы цеха. Тезисы докладов межвузовской научной конференции "Применение математики и электронно-вычислительной техники в экономике". Ленинград, 1963, 46-48.

1964

12. Majandusmatematika-alaseid töid Tartu Riikliku Ülikooli Arvutuskeskuses. (Работы по математической экономике в Вычислительном центре Тартуского государственного университета; на эст.яз.) Matemaatika ja kaasaeg, 2, 1964, 47-50 (совм. с Каазик Ю., Сааресте Э.).

13. Индикатрисы кривизны. Тезисы докладов Второй Всесоюзной геометрической конференции. Харьков, 1964, 182-183
14. Расчеты загруженности станочного парка завода. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, 1964, № 4, 3-67 (совм. с Лухт С., Рахенди М., Круль М.).

1965

15. Kalendrilise planeerimise ülesannete matemaatilise lahendamise. (Математическое решение задач календарного планирования; на эст. яз.) Matemaatika ja kaasaeg, 7, 1965, 40-47 (совм. с Каазик Ю.).
16. Matemaatika ja tegelikkus. (Математика и действительность; на эст. яз.) Matemaatika ja kaasaeg, 8, 1965, 3-II.
17. Masinad ja mõtlemine. (Машины и мышление; на эст. яз.) Matemaatika ja kaasaeg, 9, 1965, 40-51.
18. Matemaatiliste meetodite rakendamisest tehase töö kalendrilisel planeerimisel. (на эст. яз.; резюме на русск. яз.: О применении математических методов при календарном планировании работы завода.) Ученые записки Тартуск. ун-та, 1965, 55-62 (совм. с Каазик Ю.).
19. Огибающая конгруэнции нормальных к  $V_m \subset R_n$  плоскостей. Материалы Второй Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии. Тарту, 1965, 126-129.
20. Механическое составление производственных заданий. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 6, 1965, II-31 (совм. с Круль М., Лухт С.).

21. О календарном планировании работы литейного цеха. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 6, 1965, 32-50 (совм. с Сикк А., Тинн В.).
22. О подходе к математическому решению задач текущего планирования. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 6, 1965, I-10 (совм. с Каазик Ю.).
23. Об одном методе обращения балансовых матриц. Ученые записки Тартуск. ун-та, 177, 1965, 159-164 (совм. с Тапфер Ю.).

1966

24. Индикатрисы кривизны и огibaющие нормальных плоскостей для  $v_m$  в евклидовом  $R_n$ . I. Ученые записки Тартуск. ун-та, 192, 1966, 47-64.
25. К задаче календарного планирования работы цеха. Труды Ленингр. инж.-экон. ин-та, вып. 58, 1966, 142-145 (совм. с Каазик Ю.).
26. Механическое составление производственных заданий. Всесоюзная конференция "Использование математики и вычислительной техники в экономике". Тезисы докладов. Тарту, 1966, 39-40 (совм. с Лухт С.).
27. Расчеты на ЭВМ. Методы составления и анализа вариантов планового межотраслевого баланса республики. Таллин, 1966, 137-142 (совм. с Тапфер Ю.).

1967

28. Индикатрисы кривизны и огibaющая нормальных плоскостей многомерной поверхности евклидова пространства. II. Ученые записки Тартуск. ун-та, 206, 1967, 22-36.

29. Имитирование работы пеха на ЭВМ. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 11, 1967, 21-67 (совм. с Праги У.).
30. Производство - управление - ЭВМ. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 11, 1967, 3-20 (совм. с Саарнийт И.).

1968

31. Форсаж работы и отклонения при запуске детали-партий (имитирование на ЭВМ). Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 14, 1968, 3-45 (совм. с Праги У.).
32. К решению задач целочисленного линейного программирования. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 14, 1968, 46-59 (совм. с Алсалу В.).
33. Kaks pähklit majandusküberneetikalise katkihamustami-seks. (О двух проблемах в математической экономике; на эст. яз.) *Matemaatika ja kaasaeg*, 15, 1968, 48-52.
34. Kirj "Matemaatika ja tegelikkuse" autorile. (Письмо автору "Математика и действительность"; на эст. яз.) [Рец. на книгу : Н.А.Киселева "Математика и действительность", Изд. МГУ, 1967.] *Matemaatika ja kaasaeg*, 15, 1968, 127-128.
35. Механическое составление производственных заданий. Сборник "Применение экономико-математических методов и ЭВМ в управлении промышленным предприятием". Москва, 1968, 260-264 (совм. с Эрманн С.).
36. О подходе к математическому решению задач текущего планирования. Сборник "Применение экономико-математических методов и ЭВМ в управлении промышленным пред-

1969

37. К теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Индикатрисы кривизны, главные направления, эволюты. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 16, 1969, 3-111.

Ю. Лумисте, Ю. Каазик.

## СОДЕРЖАНИЕ

	<u>Введение</u> . . . . .	3
I	<u>Технический аппарат</u> . . . . .	6
	§ 1. Формулы Бартельса-Френе . . . . .	6
	§ 2. Условия интегрируемости . . . . .	II
	§ 3. Определение поверхности тензорами кривизны . . . . .	15
II	<u>Индикатрисы кривизны</u> . . . . .	22
	§ 1. Определение индикатрисы . . . . .	22
	§ 2. Сечение индикатрисы . . . . .	27
	§ 3. Плоскость индикатрисы . . . . .	38
	§ 4. Индикатрисы $I^{1,s}$ . . . . .	49
	Приложения . . . . .	53
III	<u>Главные направления</u> . . . . .	56
	§ 1. Общие положения . . . . .	56
	§ 2. Главные направления относительно касательного направления . . . . .	59
	§ 3. Главные направления поверхности . . . . .	63
	§ 4. Паратактические направления . . . . .	67
	§ 5. Абсолютно главные направления . . . . .	72
	Приложения . . . . .	77
IV	<u>Эволютная поверхность</u> . . . . .	84
	§ 1. Присоединенная поверхность . . . . .	84
	§ 2. Определение эволюты . . . . .	89
	§ 3. Последовательность огибающих . . . . .	94
	Приложения . . . . .	105
	<u>Цитированная литература</u> . . . . .	108
	<u>Р ю н н о   М у л л а р и</u> . . . . .	112

ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

Выпуск 16

На русском языке

Тартуский государственный университет  
ЭССР, г. Тарту, ул. Вликооли, 18

Ответственный редактор Ю. Думисте

Корректор М. Салувере

---

Ротапринт ТГУ 1969. Сдано в печать 26/III 1969 г.  
Печ. листов 8,0 (условных 7,44). Учетн.-издат.  
листов 3,73. Бумага 30x42.1/4. Тираж 250 экз

МВ 03902. Заказ № 240

Цена 25 коп.

Цена 25 коп.

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00421698 4