

Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Reiko Blum

Radoni teisendus ja selle rakendused

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Marek Kolk, Kaido Lätt

Tartu 2019

Radoni teisendus ja selle rakendused

Bakalaureusetöö

Reiko Blum

Lühikokkuvõte. Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on anda ülevaade Radoni teisendusest, Radoni tagasiprojektsioonist ja filtriga Radoni tagasiprojektsioonist. Esitame tõestuse Fourier' ristlõike teoreemile, mis seob omavahel ühemõõtmelise Fourier' teisenduse, Radoni teisenduse ja kahemõõtmelise Fourier' teisenduse. Bakalaureusetöö põhitulemus annab filtriga Radoni tagasiprojektsiooni arvutamise valemi. Samuti esitatakse praktilised näited töös kirjeldatud teoreetiliste tulemuste rakendamise kohta programmeerimiskeeles R.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier' analüüs, funktsionaalanalüüs.

Märksõnad. Radoni teisendus, Radoni tagasiprojektsioon, filtriga Radoni tagasiprojektsioon, Fourier' ristlõike teoreem, Fourier' teisendus, rakendusmatemaatika.

Radon transform and its applications

Bachelor's thesis

Reiko Blum

Abstract. The objective of the current thesis is to consider the Radon transform, unfiltered Radon backprojection and the filtered Radon backprojection. We present a proof of the central slice theorem that connects the one-dimensional Fourier' transform, the Radon transform and the two-dimensional Fourier' transform. The main result of this thesis gives us the formula for the filtered Radon backprojection. We also present practical examples on how to implement the theoretical parts of the thesis in the programming language R.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier' analysis, functional analysis.

Key words. Radon transform, unfiltered Radon backprojection, filtered Radon backprojection, central slice theorem, Fourier' transform, numerical mathematics.

Sisukord

| | |
|---|-----------|
| Sissejuhatus | 4 |
| 1 Füüsikaline taust | 5 |
| 2 Radoni teisendus | 7 |
| 3 Radoni tagasiprojektsioonid | 10 |
| 3.1 Radoni tagasiprojektsioon | 10 |
| 3.2 Fourier' ristlõike teoreem | 11 |
| 3.3 Filtriga Radoni tagasiprojektsioon | 14 |
| 4 Radoni teisenduse ja tagasiprojektsioonide demonstratsioon | 16 |
| 4.1 Sinogrammi koostamine | 17 |
| 4.2 Radoni tagasiprojektsiooni koostamine | 20 |
| 4.3 Filtriga Radoni tagasiprojektsioon | 21 |
| Kasutatud kirjandus | 27 |
| Lisad | 28 |

Sissejuhatus

Käesolevas bakalaureusetöös käsitletakse Radoni teisendust, Radoni tagasiprojektsiooni ja filtriga Radoni tagasiprojektsiooni, mis on tomograafias laialdaselt kasutatavad matemaatilised meetodid. Need diagnostikaseadmete arengule kaasa aidanud matemaatilised meetodid on andnud võimaluse ilma kirurgilise sekkumiseta saada täpne ettekujutus uuritavast objektist. Meditsiinis võivad näiteks uuritavad objektid olla vähkkasvaja siirded, sisemine verejooks, luumurrud või piirkond, millest operatsiooni ajal on vaja reaajas ülevaadet saada.

Kompuutertomograafiaga saadud mõõteandmete põhjal saab Radoni tagasiprojektsiooni kasutades uuritavast objektist rekonstrueerida vastav kujutis lõiketasandil, milles kiired keha läbisid. Kuna aga selliselt arvatud kujutis sisaldab objekti üldist struktuuri, kuid liiga vähe detaile, siis täiendatakse tagasiprojektsiooni meetodit digitaalse filtri kasutamisega Fourier' teisenduse ruumis. Pärast filtri kasutamist rakendatakse arvutustulemustele Fourier' pöördteisendust, millele omakorda rakendatakse Radoni tagasiprojektsiooni algoritmi. Osutub, et selliselt täiendatud filtriga tagasiprojektsiooni meetod võimaldab saavutada uuritavast objektist ka praktikas vastuvõetava detailsuse astme.

Bakalaureusetöö eesmärk on kirjeldada Radoni teisendust ja tema omadusi, Radoni tagasiprojektsiooni puudujääke, esitada filtriga Radoni tagasiprojektsiooni valemi tõestus ning kirjutada programm, mis demonstreerib kirjeldatud tulemusi.

Töö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis antakse ülevaade töös kasutatavate meetodite füüsikalisest taustast ja kirjeldatakse tomograafiliste meetodite põhimõtteid, toetudes magistritööle [10] ja raamatule [3].

Teises peatükis esitatakse Radoni teisenduse definitsiooniks vajalik geomeetriline esitus ning defineeritakse Radoni teisendus. Arutelu põhineb artiklil [2].

Kolmandas peatükis defineeritakse Radoni tagasiprojektsioon ja kirjeldatakse selle puudusi, tõestatakse Fourier' ristlõike teoreem ning filtriga Radoni tagasiprojektsiooni valem, toetudes artiklile [1].

Viimases peatükis tutvustatakse programmi tööpõhimõtet, mis teostab Radoni teisendust, tagasiprojektsiooni ning filtriga tagasiprojektsiooni. Programmi geomeetriline lähenemine ning algoritm on välja töötatud käesoleva bakalaureusetöö raames programmeerimiskeeles R.

1. Füüsikaline taust

Tomograafia all mõeldakse pildistamist lõigete abil, kasutades selleks uuritavat objekti läbivaid laineid. Laine intensiivsuse kadu aine läbimisel sõltub peamiselt elektronide tihedusest selles aines, seega uuritavat objekti erinevate nurkade all kiiritades ning iga nurga all kiirtevihu kiirte intensiivsuse kadu mõõtes on võimalik määrata erinevate elektronide tihedustega alad objekti sees. Võimet vähendada kiirtekimbu intensiivsust kirjeldab aine *lineaarnõrgenemistegur* (tähistatakse μ_{aine}). Praktikas kasutatakse peamiselt veest koosneva objekti (näiteks inimese) uurimisel lineaarnõrgenemisteguri asemel Hounsfieldi ühikut, mis on suhe uuritava koe ja toatemperatuuril vee lineaarnõrgenemistegurite vahel [3] (vt ka [10])

$$H_{\text{kude}} = \frac{\mu_{\text{kude}} - \mu_{\text{vesi}}}{\mu_{\text{vesi}}} \cdot 1000.$$

Tabelis 1.1 on toodud erinevate kudede ja ainete Hounsfieldi ühikute väärtused vahemikena, kuna kudede tihedus varieerub. Näeme, et pehmete kudede Hounsfieldi ühikute väärtuste vahemikud on lähestikku ning osaliselt kattuvad, mistõttu tomograafias peab mõõtetulemustega opereerimine olema täpne.

Tabel 1.1: Erinevate kudede ja ainete Hounsfieldi ühikute väärtused [3]

| Kude/aine | H_{kude} väärtuste vahemik |
|------------------|---|
| Luu | 1000 |
| Põrn | 50...70 |
| Maks | 50...70 |
| Neerud | 20...40 |
| Lihased | 10...40 |
| Aju valgeaine | 20...30 |
| Aju hallaine | 30...40 |
| Vesi | 0 |
| Rasv | -100...-20 |
| Kopsud | -950...-600 |
| Õhk | -1000 |

Röntgentomograafias kasutatakse Radoni teisendust kiirtekimbu intensiivsuste nõrgenemise arvutamiseks iga voksli (väikseima kuvatava ruumielemendi) jaoks. Röntgentomograafia füüsilise mudeli puhul tehakse tavaliselt järgmised eeldused (vt näiteks [1] ja [4]):

- kõik röntgenkiired on monokromaatilised ehk kõik kiired on kindla sageduse ja lainepikkusega;
- kõikide kiirte laius on 0 meetrit;
- kiired ei peegeldu ega murdu;
- igale ainele, mida fikseeritud energiataseme korral röntgenkiir läbib, vastab lineaarnõrgenemistegur μ , mis sõltub kiire energiast.

Üldiselt võib kasutada Radoni teisendust seadmetes, kus mõõdetakse paralleelsete kiirte energia kadu, mistõttu Radoni teisendus on kasutatav ka teistes valdkondades peale röntgentomograafia. Näiteks ehitusdetailide läbibivalgustamisel, lennujaamade turvavärvates ja teatud liiki radarite tehnoloogias.

2. Radoni teisendus

Selles peatükis esitame Radoni teisenduse defineerimiseks vajaliku geomeetrilise esituse, defineerime Radoni teisenduse ning kirjeldame tema omadusi ja sisu. Arutelu põhineb artiklil [2] ja raamatul [4].

Vaatleme tasandil \mathbb{R}^2 sirget, mis on antud võrrandiga

$$ax + by = c, \quad (2.1)$$

kus a , b ja c on reaalarvud ning $a^2 + b^2 \neq 0$. Sirge võrrand (2.1) on samaväärne võrrandiga

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2.2)$$

Märgime, et punkt $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ asub ühikringil, kuna

$$\left|\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}} = 1.$$

Järelikult määrab see punkt ühikvektori ω . Paneme tähele, et sirge (2.2) on selliste tasandipunktide (x, y) hulk, mis rahuldavad tingimust

$$\langle (x, y), \omega \rangle = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

kus $\langle (x, y), \omega \rangle$ tähistab vektorite (x, y) ja ω vahelist skalaarkorrutist.

Olgu $t \in \mathbb{R}$ kaugus koordinaatide alguspunktist sirgeni (2.2) nurga θ all. Kuna ühikvektori ω võib esitada nurga θ kaudu kujul $\omega = \omega(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ (vt joonis 2.1), siis sirge võrrand (2.2) on samaväärne punktide $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hulgaga, mis rahuldavad tingimust [1, 2, 4]

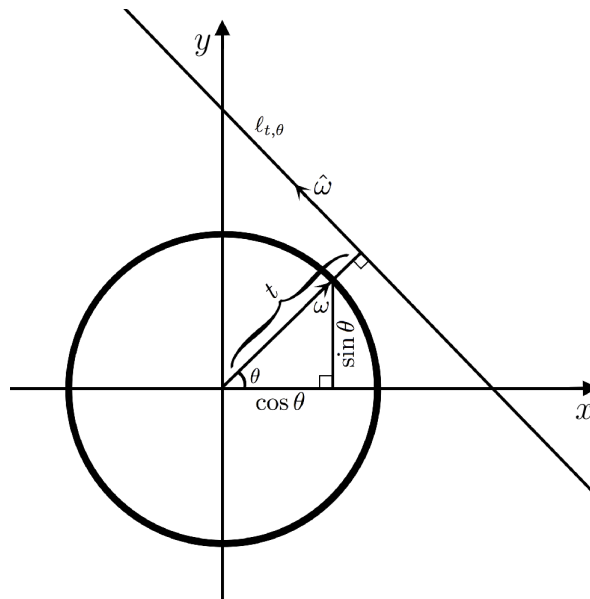
$$t = \langle (x, y), (\cos \theta, \sin \theta) \rangle. \quad (2.3)$$

Järelikult saab sirge võrrandit (2.2) rahuldavate punktide hulk kuju

$$\ell_{t,\omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y), \omega \rangle = t\}. \quad (2.4)$$

Kuna $\omega = \omega(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, siis vahel tähistatakse ka

$$\ell_{t,\omega} = \ell_{t,\omega(\theta)} =: \ell_{t,\theta}.$$



Joonis 2.1

Näitame, et punkt $(t \cos \theta, t \sin \theta) \in \ell_{t,\theta}$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \langle (t \cos \theta, t \sin \theta), \omega \rangle &= \langle (t \cos \theta, t \sin \theta), (\cos \theta, \sin \theta) \rangle \\ &= t \cdot \cos^2 \theta + t \cdot \sin^2 \theta = t \cdot (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = t. \end{aligned}$$

Tähistame vektori $\hat{\omega} := (-\sin \theta, \cos \theta)$, mis on risti vektoriga ω , kuna

$$\langle \omega, \hat{\omega} \rangle = \langle (\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta) \rangle = \cos \theta \cdot (-\sin \theta) + \sin \theta \cdot \cos \theta = 0.$$

Kuna skalaarkorrutise omadustest lähtuvalt iga $s \in \mathbb{R}$ korral

$$\langle \omega, t\omega + s\hat{\omega} \rangle = \langle \omega, t\omega \rangle + \langle \omega, s\hat{\omega} \rangle = t \cdot \langle \omega, \omega \rangle + s \cdot 0 = t,$$

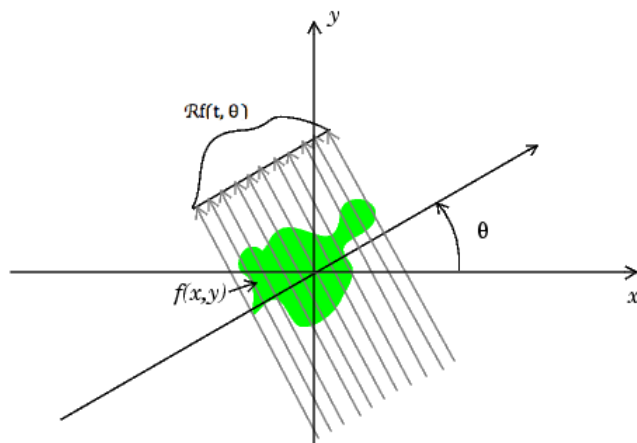
siis võime (2.4) kirjutada kujul

$$\ell_{t,\omega} = \{t\omega + s\hat{\omega} \mid s \in (-\infty, \infty)\}.$$

Tähistame $D_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ ehk D_r on ring raadiusega $r > 0$ ja keskpunktiga $X = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Definitsioon 2.1. Olgu $f = f(x, y)$ tükiti pidev kahemuutuja funktsioon, mis on võrdne nulliga väljaspool ringi D_r . Radoni teisenduseks $\mathcal{R}f(t, \theta)$ nimetatakse teisendust

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\omega + s\hat{\omega})ds.$$



Joonis 2.2: Radoni teisenduse graafiline tõlgendus [9]

Märkus 2.2. Radoni teisendus on operaator, mis kujutab funktsiooni ruumist \mathbb{R}^2 funktsiooniks ruumis $\mathbb{R} \times S^1$ kus S^1 on ühikvektorite hulk ruumis \mathbb{R}^2 (vt [4]).

Lause 2.3. Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $f = f(x, y)$ ja $h = h(x, y)$ funktsioonid, mis kuuluvad Radoni teisenduse määramispiirkonda. Siis Radoni teisendusel on järgmised omadused:

- 1) $\mathcal{R}(\alpha f + \beta h) = \alpha \mathcal{R}f + \beta \mathcal{R}h$;
- 2) $\mathcal{R}f(t, \omega(\theta)) = \mathcal{R}f(-t, -\omega(\theta))$;
- 3) $\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s))ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta)ds$.

Seega 1) põhjal Radoni teisendus on lineaarne. Omadus 2) kehtib, sest

$$\begin{aligned} \ell_{-t, -\omega(\theta)} &= \{(-t) \cdot (-\omega(\theta)) + s \cdot \hat{\omega}(\theta) \mid s \in (-\infty, \infty)\} \\ &= \{(-t) \cdot (-\cos \theta, -\sin \theta) + s \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) \mid s \in (-\infty, \infty)\} \\ &= \{t \cdot (\cos \theta, \sin \theta) + s \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) \mid s \in (-\infty, \infty)\} \\ &= \ell_{t, \omega(\theta)} \end{aligned}$$

ja 3) annab alternatiivse esituse Radoni teisendusele punktis (x, y) .

3. Radoni tagasiprojektsioonid

Selles peatükis esitame Radoni tagasiprojektsiooni valemi ning tõestame ja sõnastame Fourier' ristlõike teoreemi ja filtriga Radoni tagasiprojektsiooni valemi. Põhilise allikana kasutame artiklit [1].

3.1 Radoni tagasiprojektsioon

Radoni teisenduse abil saame luua matemaatilise mudeli objekti kiiritamisel saadud andmetest. Teisisõnu, praktiliste mõõtmistulemuste modelleerimiseks saame kasutada Radoni teisenduse väärtusi. Tutvustame meetodit, mis loob mõõtmistulemuste (Radoni teisenduse) põhjal mudeli uuritavast objektist.

Definitsioon 3.1. Olgu $h = h(t, \theta)$. *Tagasiprojektsiooniks* funktsioonist h (tähistame $\mathcal{B}h$) punktis (x, y) nimetatakse teisendust (vt [1])

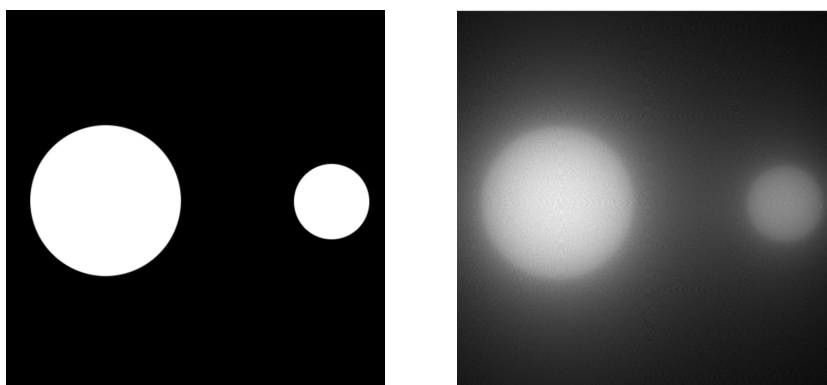
$$\mathcal{B}h(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta.$$

Radoni tagasiprojektsiooniks nimetatakse teisendust

$$\mathcal{BR}f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{R}f(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta, \quad (3.1)$$

kus \mathcal{R} on Radoni teisendus. Radoni tagasiprojektsiooni rakendamise geomeetriline sisu seisneb selles, et iga punkti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ korral leitakse seda punkti läbivatele sirgetele $\ell_{t,\theta}$ vastavate lineaarnõrgenemistegurite $\mu_{t,\theta}$ keskmine.

Kahjuks on Radoni tagasiprojektsioon ebapädev meetod meditsiinivaldkonnas objektist (näiteks ajust) mudeli loomiseks, kuna tulemus sisaldab liiga palju müra. Tagasiprojektsiooni abil saadav mudel säilitab objekti põhikarakteristikud, kuid hägususe tõttu on ebapiisav näiteks veresoonte või vähkkasvaja siirete tuvastamiseks. Joonisel 3.1 näeme, et isegi lihtsa objekti rekonstrueerimisel on tulemus udune.



Joonis 3.1: Algne pilt ja Radoni tagasiprojektsioon 360 nurga korral

3.2 Fourier' ristlõike teoreem

Definitsioon 3.2. Olgu funktsioon $f = f(x)$ määratud hulgal \mathbb{R} . Ütleme, et f on *absoluutselt integreeruv*, kui

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Järgmised Fourier' teisenduse ja pöördteisenduse definitsioonid on pärit raamatust [11].

Definitsioon 3.3. Olgu funktsioon f absoluutselt integreeruv. Funktsiooni f *Fourier' teisenduseks* nimetatakse teisendust

$$\mathcal{F}[f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Märkus 3.4. Olgu f paarisfunktsioon. Siis Fourier' teisendus funktsioonist f on paarisfunktsioon, kuna iga $\omega \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)](-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-\omega)x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-i\omega(-x)} dx \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} f(-x)e^{-i\omega(-x)} d(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} d(x) \\ &= \mathcal{F}[f(x)](\omega). \end{aligned}$$

Definitsioon 3.5. Olgu funktsioon $\hat{f} = \hat{f}(\omega)$ absoluutselt integreeruv. Funktsiooni \hat{f} *Fourier' pöördteisenduseks* nimetatakse teisendust

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Märkus 3.6. Fourier' teisenduse ja tema pöördteisenduse võib alternatiivselt defineerida valemitega

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2i\pi\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

ja

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R},$$

kus suurust $\omega := 2\pi\xi$ nimetatakse nurksageduseks.

Definitsioon 3.7. Olgu funktsioon $f = f(x, y)$ absoluutselt integreeruv tasandil \mathbb{R}^2 . Funktsiooni f kahemõõtmeliseks Fourier' teisenduseks nimetatakse teisendust

$$\mathcal{F}_2[f(x, y)](\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy, \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}.$$

Definitsioon 3.8. Olgu funktsioon $\hat{f} = \hat{f}(\omega_1, \omega_2)$ absoluutselt integreeruv tasandil \mathbb{R}^2 . Funktsiooni \hat{f} kahemõõtmeliseks Fourier' pöördteisenduseks nimetatakse teisendust

$$\mathcal{F}_2^{-1}[\hat{f}(\omega_1, \omega_2)](x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_1, \omega_2)e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Järgmisena tõestame teoreemi, mille inglisekeelne nimetus on *central slice theorem*. See teoreem seob omavahel Radoni teisenduse, ühemõõtmelise Fourier' teisenduse ja kahemõõtmelise Fourier' teisenduse. Tõestus põhineb artiklil [1].

Teoreem 3.9. Olgu f absoluutselt integreeruv funktsioon, mis kuulub Radoni teisenduse määramispiirkonda. Siis iga $S \in \mathbb{R}$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$ korral kehtib

$$\mathcal{F}_2[f](S \cos \theta, S \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(t, \omega(\theta))e^{-iSt} dt = \mathcal{F}[\mathcal{R}f](S), \quad (3.2)$$

kus \mathcal{F}_2 on kahemõõtmeline Fourier' teisendus, \mathcal{F} Fourier' teisendus ja \mathcal{R} Radoni teisendus.

Tõestus. Kahemõõtmeline Fourier' teisendus on definitsiooni kohaselt

$$\mathcal{F}_2[f](S \cos \theta, S \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy,$$

kus $i^2 = -1$. Teeme muutujavahetuse

$$x = t \cos \theta - s \sin \theta, \quad y = t \sin \theta + s \cos \theta.$$

Kuna

$$x \cos \theta + y \sin \theta = (t \cos \theta - s \sin \theta) \cos \theta + (t \sin \theta + s \cos \theta) \sin \theta = t \cos^2 \theta + t \sin^2 \theta = t,$$

siis

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

Muutujavahetuse jakobiaan avaldub seega kujul (vt [5])

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

mistõttu

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) \cdot e^{-iSt} ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \right) e^{-iSt} dt, \end{aligned}$$

kus viimane võrdus kehtib, kuna e^{-iSt} ei sõltu muutujast s . Lause 2.3 omaduse 3 põhjal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds = \mathcal{R}f(t, \theta).$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\mathcal{F}_2[f](S \cos \theta, S \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(t, \theta) e^{-iSt} dt = \mathcal{F}[\mathcal{R}f](S),$$

s.t. valem (3.2) kehtib iga $S \in \mathbb{R}$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$ korral. □

3.3 Filtriga Radoni tagasiprojektsioon

Järgmise teoreemiga toome filtriga Radoni tagasiprojektsiooni valemi [1].

Teoreem 3.10. *Olgu f absoluutselt integreeruv funktsioon, mis kuulub Radoni teisenduse määramispiirkonda. Siis*

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \{ \mathcal{F}^{-1} [|S| \cdot \mathcal{F} [\mathcal{R}f](S)] \} (x, y).$$

Tõestus. Paneme tähele, et kahemõõtmelise Fourier' teisenduse ja pöördteisenduse korral

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \mathcal{F}_2^{-1} [\mathcal{F}_2[f]](x, y) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2[f](X, Y) e^{i(xX+yY)} dXdY. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Läheme üle ristkoordinaatidelt (X, Y) polaarkoordinaatidele (S, θ) . Seega $X = S \cos \theta$ ja $Y = S \sin \theta$, kus $S \in \mathbb{R}$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$. Paneme tähele, et muutujavahetuse jakobiaan on (vt [5])

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & S \cdot (-\sin \theta) \\ \sin \theta & S \cdot \cos \theta \end{vmatrix} = S.$$

Pärast koordinaatide teisendust saame integraali

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} S \cdot \mathcal{F}_2[f](S \cos \theta, S \sin \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} dSd\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} S \cdot \mathcal{F}_2[f](S \cos \theta, S \sin \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} dSd\theta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} S \cdot \mathcal{F}_2[f](S \cos \theta, S \sin \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} dSd\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(t, \theta)](S) e^{iSt} dSd\theta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(t, \theta)](S) e^{iSt} dSd\theta, \end{aligned}$$

kus viimane võrdus kehtib valemi (3.2) tõttu. Paneme tähele, et lause 2.3 omadusest 2 järeldeb, et $\mathcal{R}f(t, \theta) = \mathcal{R}f(-t, \pi + \theta)$. Järelikult

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi^2} \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(t, \theta)](S) e^{iSt} dSd\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(-t, \pi + \theta)](S) e^{iSt} dSd\theta =: I. \end{aligned}$$

Olgu $\pi + \theta = \alpha$. Siis $d\alpha = d(\pi + \theta) = d\theta$ ja $\alpha \in [2\pi, 3\pi]$. Kuna $\omega(\theta) = \omega(\theta + 2\pi)$, siis saame asendada välimise integraali rajad väärtustega 0 ja π . Seega

$$I = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\infty S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(-t, \alpha)](S) e^{iSt} dS d\alpha.$$

Olgu $T = -t$. Paneme tähele, et kuna Radoni teisendus on paarisfunktsioon, siis Fourier' teisendus Radoni teisendusest on samuti paarisfunktsioon (vt märkus 3.4). Järelikult kehtivad järgmised võrdused:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\infty S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(T, \alpha)](S) e^{-iST} dS d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{-\infty} S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(t, \theta)](-S) e^{-iSt} dS d\theta. \end{aligned}$$

Olgu $u = -S$. Siis $du = -dS$ ja

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{-\infty} S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(t, \theta)](u) e^{iut} du d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi (-1) \cdot \int_{-\infty}^0 S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(t, \theta)](S) e^{iSt} dS d\theta. \end{aligned}$$

Järelikult (vt (3.3))

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\infty S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(t, \theta)](S) e^{iSt} dS d\theta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_\pi^{2\pi} \int_0^\infty S \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f(t, \theta)](S) e^{iSt} dS d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |S| \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f](S) e^{iSt} dS d\theta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty |S| \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f](S) e^{iSt} dS &= 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |S| \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f](S) e^{iSt} dS \right) \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1} [|S| \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f](S)](t). \end{aligned}$$

Kasutades valemit (3.1), kus $x \cos \theta + y \sin \theta = t$, saame

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{F}^{-1} [|S| \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f](S)](t) d\theta = \frac{1}{2} \mathcal{B} \{ \mathcal{F}^{-1} [|S| \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f](S)] \} (x, y).$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \{ \mathcal{F}^{-1} [|S| \cdot \mathcal{F}[\mathcal{R}f](S)] \} (x, y).$$

□

Märkus 3.11. Filtriga Radoni tagasiprojektsiooni nimetus tuleb kordajast $|S|$, milleta taandavad Fourier' pöördteisendus ja Fourier' teisendus teineteist välja ning tulemuseks oleks Radoni tagasiprojektsioon (3.1).

4. Radoni teisenduse ja tagasiprojektsioonide demonstratsioon

Bakalaureusetöö üks osa on eelnevalt kirjeldatud tulemusi rakendava programmi kirjutamine. Selles peatükis selgitame programmi tööpõhimõtet.

Olgu eesmärk konstrueerida kujutise 4.1 sinogramm, rakendada saadud sinogrammile Radoni tagasiprojektsiooni ning filtriga Radoni tagasiprojektsiooni. Kujutist joonisel 4.1 nimetatakse Shepp-Logani fantoomiks, mis on tomograafias laialdaselt kasutatav testimiseks mõeldud kujutis. Meditsiinivaldkonnas võib originaalpildi rollis olla näiteks pilt ajus paiknevast vähkkasvajast, mille siirdeid uurida soovitakse.



Joonis 4.1: Originaalpilt

4.1 Sinogrammi koostamine

Märgime esmalt, et röntgentomograafias ei ole sinogrammi koostamise sammu vaja teha, kuna praktikas on sinogrammi andmete rollis mõõtmistulemused. Käesolevas bakalaureusetöös on sinogrammi koostamine vajalik selleks, et saada arvulised väärtused Radoni tagasiprojektsiooni rakendamiseks. Sinogrammi koostamiseks rakendame Radoni teisendust originaalpildil. Sel viisil saame sinogrammi väärtusi kasutada röntgentomograafias mõõdetavate röntgenkiirte intensiivsuste väärtuste modelleerimiseks.

Kõigepealt anname programmile sisendiks originaalpildi 4.1, mille pikslite arvulised väärtused asuvad lõigus $[0,1]$, kus 0 tähistab musta ja 1 valget pikslit. Originaalpilti võib käsitleda kui funktsiooni $f(x, y) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, 1]$, kus (x, y) vastab piksli asukohale ja $f(x, y)$ on vastava piksli intensiivsus originaalpildil. Piksli asukohta (x, y) vaatleme nullpunkti ehk pildi keskosa suhtes.

Programmis asetame originaalpildi mõõtmete poolest suuremale mustadest pikslitest koosnevale alale, mida edaspidi nimetame ekraaniks. Seega, ekraani kirjeldab funktsioon $g(x, y)$, mis on võrdne funktsiooniga $f(x, y)$, kui (x, y) kuulub $f(x, y)$ määramispiirkonda, s.t. (x, y) asub originaalpildil, ja võrdne nulliga vastasel juhul. Teisisõnu, kui X on funktsiooni $f(x, y)$ määramispiirkond, siis

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in X, \\ 0, & (x, y) \notin X. \end{cases}$$

Järelikult nendele koordinaatidele vastavad pikslid, mis ei asu originaalpildil, saavad intensiivsuste väärtusteks 0.

Kui originaalpildi $f(x, y)$ mõõtmed vastavalt horisontaal- ja vertikaaltelje suhtes on n_x ja n_y , siis programmis on ekraani mõõtmed $(2M + 1) \times (2M + 1)$, kusjuures M on arvatud valemiga

$$M = \left\lceil \frac{\max\{n_x, n_y\}}{2} \cdot \sqrt{2} \right\rceil.$$

Siin $\lceil a \rceil$ tähistab vähimat täisarvu, mis on reaalarvust a suurem või võrdne. Ekraani mõõtmete arvutamisel on arvestatud sellega, et originaalpilt oleks alati ekraanil (vt joonis 4.2. Sirgetega viirutatud ala all mõtleme ekraani).

Radoni teisenduse parameetri t väärtuste jada arvutab programm kasutaja poolt sisendina antud sammu $\Delta > 0$ abil. Suurus Δ on võrdne kahe järjestikuse sirge omavahelise kaugusega t . Lihtsuse mõttes on programmis võetud suurus t võrdseks suurusega s , mis kujutab endast kahe järjestikuse mõõdetava piksli kaugust sirgel. Seega Radoni teisenduse parameetrite t ja s väärtused on

$$s = t = -M - \epsilon, \dots, -\Delta, 0, \Delta, \dots, M + \epsilon, \quad 0 \leq \epsilon \leq \Delta. \quad (4.1)$$

Olgu N parameetrite t väärtuste koguarv. Seega N on ka väärtuste s koguarv. Viimase sisendina annab kasutaja programmile nurkade arvu n , mille abil moodustatakse hulk

$$\left\{ \theta_i = \frac{i \cdot \pi}{n} \in [0, \pi] \mid i \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Iga nurga θ_i korral tehakse Radoni teisendus $\mathcal{R}f(t, \theta_i)$, kusjuures ekraani pööratakse sama nurga all.

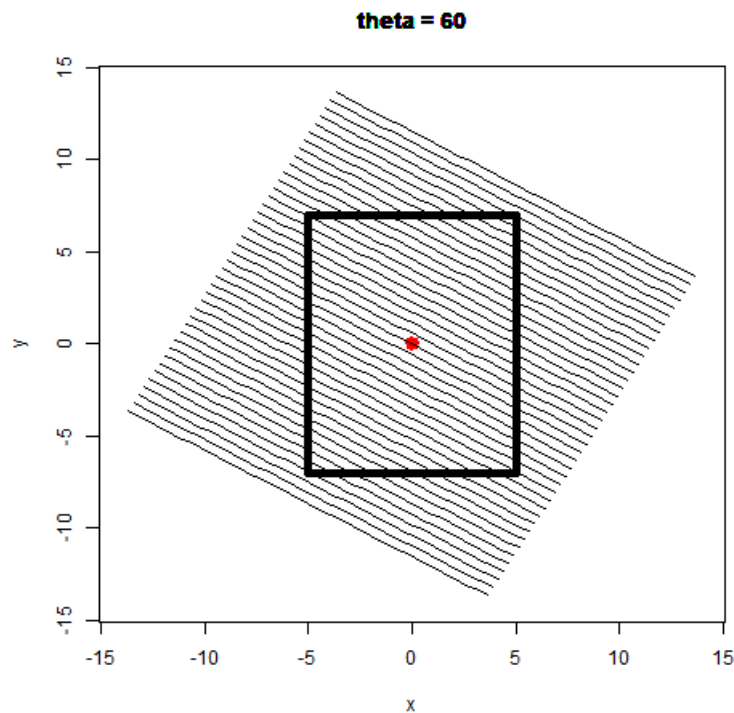
Näide 4.1.1. Olgu pildi mõõtmed $n_x = 10$, $n_y = 13$ ja $\Delta = 0.5$. Siis

$$M = \left\lceil \frac{\max\{10, 13\}}{2} \cdot \sqrt{2} \right\rceil = 10,$$

millest

$$t = s = -10, -9.5, \dots, -0.5, 0, 0.5, \dots, 9.5, 10.$$

Järelikult $N = 41$. Antud näide $\theta = \frac{\pi}{3}$ korral on kujutatud joonisel 4.2.



Joonis 4.2: Sirgete paiknemine pildil $\theta = \frac{\pi}{3}$ korral

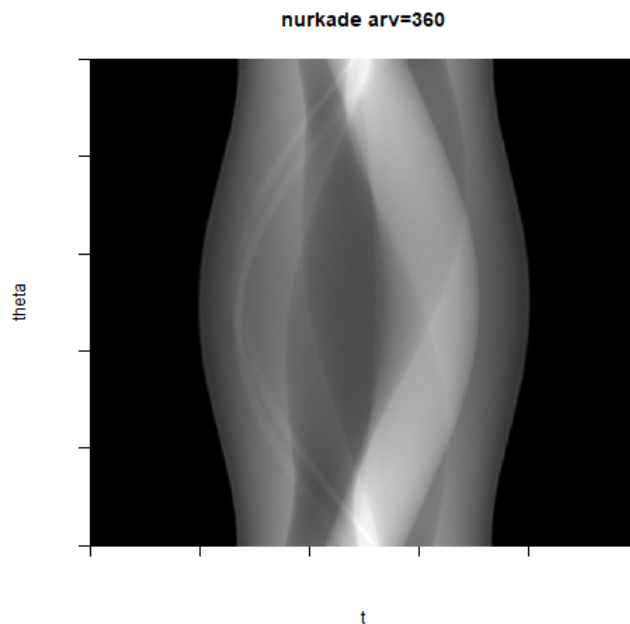
Kuna tegu on diskreetsete andmetega, siis Radoni teisenduses olev integraal asendatakse interpolatsioonimeetodiga. Programmis kasutatakse ristkülikvalemit. Arvestades, et funktsioon f on võrdne nulliga väljaspool mingit ringi, saame fikseeritud t korral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t\omega + s\hat{\omega})ds = \int_{s_0}^{s_N} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta)ds$$

$$\approx \sum_{k=s_0}^{s_N} \Delta \cdot f(t \cos \theta - k \sin \theta, t \sin \theta + k \cos \theta), \quad (4.2)$$

kus s_0 on jada s esimene ning s_N viimane element (vt (4.1)). Sisuliselt tähendab valemi (4.2) kasutamine, et iga sirge korral arvutatakse sellel sirgel asuvate pikselite heleduste väärtuste summa, mille saab vajadusel seostada keskmise heleduse väärtusega.

Joonisel 4.3 on kujutatud sinogramm originaalpildist 4.1, kus vertikaalteljel on erinevad nurgad θ ning horisontaalteljel erinevad t väärtused. Märkime, et kasutame alati jooniste tegemisel sammu $\Delta = 0.5$.

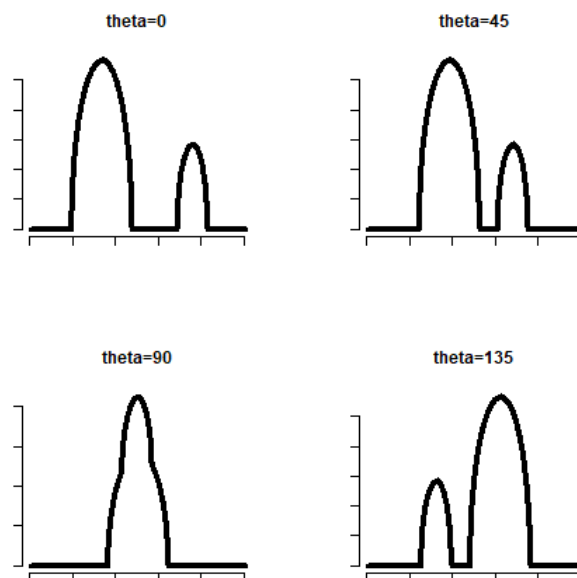


Joonis 4.3: Sinogramm 360 nurga korral

Teadupoolest kujutab sinogramm endast informatsiooni selle kohta, mida uurija, näiteks arst, pärast objekti kiiritamist teab. Seega reaalses olukorras on eesmärk konstrueerida sinogrammist 4.3 pilt 4.1.

4.2 Radoni tagasiprojektsiooni koostamine

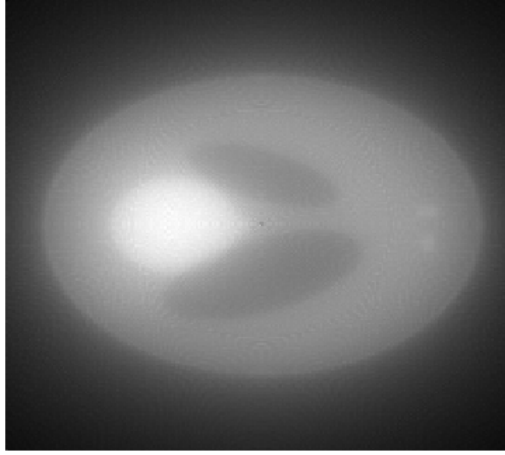
Radoni tagasiprojektsiooni teostamisel on programmi sisendiks eelnevalt valminud sinogramm ehk maatriks, mille veergudes on erinevad θ väärtused ja ridades erinevad t väärtused. Radoni tagasiprojektsiooni teostamise idee programmis on kihtide lisamine mustale pildile (nullidest koosnevale piksliintensiivsuste maatriksile). Esmalt projekteeritakse sinogrammi andmed θ_0 korral piksliintensiivsuste maatriksile (praegu nullmaatriksile). Seejärel projekteeritakse andmed θ_1 korral piksliintensiivsuste maatriksile, kuhu sellel sammul on juba projekteeritud θ_0 andmed. Analoogiliselt jätkatakse kuni projekteeritakse ka viimases veerus olevad andmed θ_N korral. Joonisel 4.4 on piksliintensiivsuste maatriksile lisatavad väärtused erinevate nurkade korral, kui sinogramm on moodustatud pildi 3.1 põhjal.



Joonis 4.4: Sinogrammi (Radoni teisenduse) väärtused $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ ja $\frac{3\pi}{4}$ korral

Meenutame, et peatükis 1 kirjeldatud pehmete kudede Hounsfieldi ühikute (seega ka lineaarnõrgenemistegurite) väärtuste vahemikud on lähestikku ning osaliselt kattuvad. Proovides konstrueerida algset pilti Radoni tagasiprojektsiooni teostamise teel näeme, et tulemus joonisel 4.5 meenutab küll näidispilti 4.1, kuid on liialt udune olemaks kasulik meditsiinivaldkonnas, näiteks vähkkasvaja siirete tuvastamiseks või teiste pehmete kudede lineaarnõrgenemistegurite määramiseks.

Radoni tagasiprojektsioon



Joonis 4.5: Radoni tagasiprojektsioon 360 nurga korral

4.3 Filtriga Radoni tagasiprojektsioon

Tagasiprojektsioonile kontrastsuse lisamiseks sooritame sinogrammil 4.3 iga nurga θ korral diskreetse Fourier' teisenduse, rakendame filtrit ning seejärel teeme Fourier' tagasiteisenduse.

Definitsioon 4.1. [7] Olgu $N \in \mathbb{N}$ ja $u = u_0, \dots, u_{N-1}$ kompleksarvude jada. Jada u (N -punktiliseks) diskreetseks Fourier' teisenduseks nimetatakse teisendust

$$\mathcal{F}_D u_k := U_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-\frac{2\pi i j k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Definitsioon 4.2. [7] Kompleksarvude jada $U = U_0, \dots, U_{N-1}$ (N -punktiliseks) diskreetseks Fourier' pöördteisenduseks nimetatakse teisendust

$$\mathcal{F}_D^{-1} U_j := u_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{\frac{2\pi i j k}{N}}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Märkus 4.3. Programmis kasutame teoreemis 3.10 tutvustatud filtriga Radoni tagasiprojektsiooni valemi asemel selle analoogi diskreetsel juhul. See ligikaudne valem avaldub kujul

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2} \mathcal{B}_D \{ \mathcal{F}_D^{-1} [|S| \cdot \mathcal{F}_D [\mathcal{R}_D f]] \} (x, y),$$

kus \mathcal{B}_D ja \mathcal{R}_D tähistavad vastavalt Radoni tagasiprojektsiooni ja Radoni teisendust lõpliku arvu t ja θ väärtuste korral.

Märkus 4.4. Programmis R leitakse vektori u diskreetne Fourier' teisendus käsuga `fft(u, inverse=F)` ja vastav pöördteisendus käsuga `fft(U, inverse=T)`, kusjuures definitsioonis (4.2) esitatud valemis jätab käsk `fft` jagamata vektori pikkusega N .

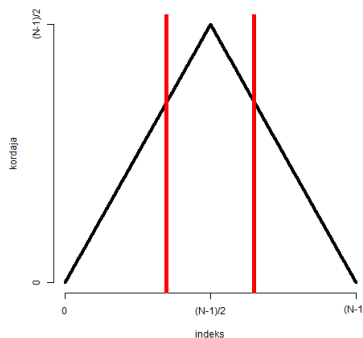
Olgu z kompleksarv. Tähistagu \bar{z} kompleksarvu z kaaskompleksi. Filtri rakendamisel kasutame programmis järgmist teoreemi.

Teoreem 4.5 (vt [8]). *Olgu $x = (x_0, \dots, x_{N-1})$, $N \in \mathbb{N}$, reaalarvuliste väärtustega vektor. Sel juhul diskreetse Fourier' teisendusega leitud vektoril $\mathcal{F}_D x := y = (y_0, \dots, y_{N-1})$ on järgmine sümmeetriline struktuur:*

- 1) $y_0 \in \mathbb{R}$;
- 2) $y_i = \bar{y}_{N-i}$, $i = 1, \dots, N-1$.

Programmis on vektori y rollis maatriksi (nimega `fu`), mille veergudes on vektorid y erinevate nurkade korral. Paneme tähele, et veergudes olevate vektorite y pikkus on iga nurga korral N . Näiteks paarituurvulise N korral kujutab filtri rakendamine (vt. [1, 9]) endast esimese elemendi korrutamist nulliga, järgmise $\frac{N-1}{2}$ elemendi korrutamist vastava indeksiga ning ülejäänud elementide, s.o. kaaskomplekside, läbikorrutamist indeksitega $\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2} - 1, \dots, 2, 1$. Maatriksi `fu` iga veerg korrutatakse punktiviisi läbi vektoriga (vt joonis 4.6)

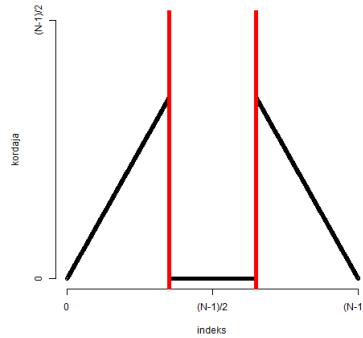
$$\left(0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} - 1, \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2} - 1, \dots, 2, 1\right).$$



Joonis 4.6: Koonusfilter enne müra eemaldamist

Seejärel rakendame kasutaja poolt sisendina antud konstanti (programmis nimega `alles_jaab`), mis kujutab endast ligikaudset osakaalu sagedustest, mis jääb

eemaldamata. Teisisõnu, ligikaudu $(1 - \text{alles_jaab}) \cdot 100\%$ kõige kõrgema indeksiga korrutatud vektori y väärtustele omistatakse väärtus 0 (vt joonis 4.7).



Joonis 4.7: Koonusfilter pärast müra eemaldamist

Näide 4.3.1. Vektori $u = (2, 4, 8, 16, 32)$ korral tagastab käsk `fft(u, inverse=F)` vektori

$$\mathcal{F}_D u = (62, -6.3 + 31.3i, -19.7 + 8.8i, -19.7 - 8.8i, -6.3 - 31.3i).$$

Koonusfiltri rakendamine on samaväärne vektori u punktiviisilise läbikorrutamisega vektoriga $\Pi = (0, 1, 2, 2, 1)$. Eemaldades 40% (`alles_jaab=0.6`) kõrgsageduslikku müra saame, et vektori $\mathcal{F}_D u$ peame läbi korrutama vektoriga $\Pi^* = (0, 1, 0, 0, 1)$. Pärast filtri rakendamist saame vektori

$$\mathcal{F}_D^* u = (0, -6.3 + 31.3i, 0, 0, -6.3 - 31.3i),$$

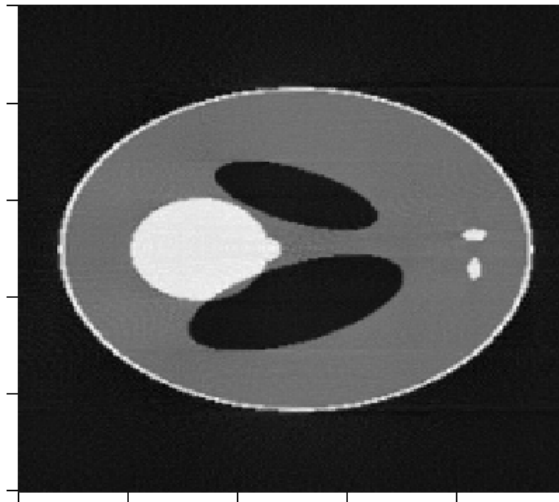
millele käsku `fft(U, inverse=T)` rakendades saame

$$u^* = (-12.6, -63.5, -26.7, 47.0, 55.7).$$

Paneme tähele, et filtri rakendamisel peame säilitama vektori $\mathcal{F}_D u$ sümmeetria omadused. Vastasel juhul võib vektoris $\mathcal{F}_D^* u$ esineda kompleksarve.

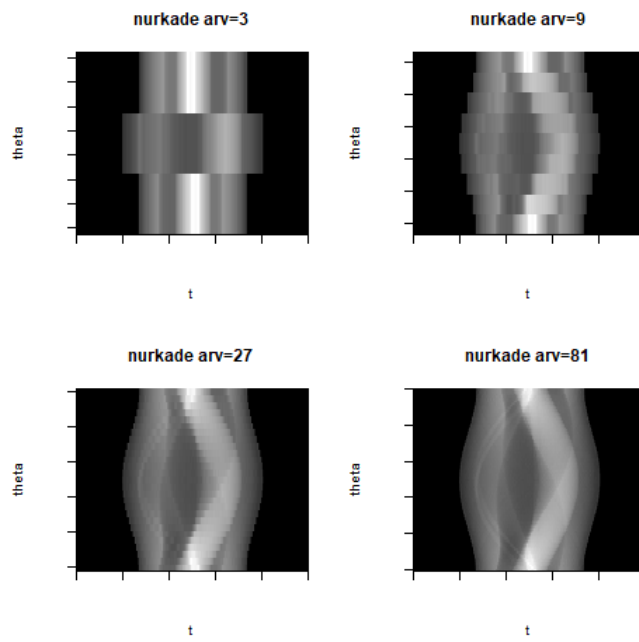
Olles rakendanud maatriksile f_u filtrit, teeme sellel Fourier' tagasiteisenduse. Seejärel rakendame niimoodi arvutatud vähema müraga sinogrammil Radoni tagasiprojektsiooni. Näeme, et tulemus on tunduvalt parem võrreldes Radoni tagasiprojektsiooniga tavalisel sinogrammil (joonis 4.8).

Filtriga tagasiprojektsioon

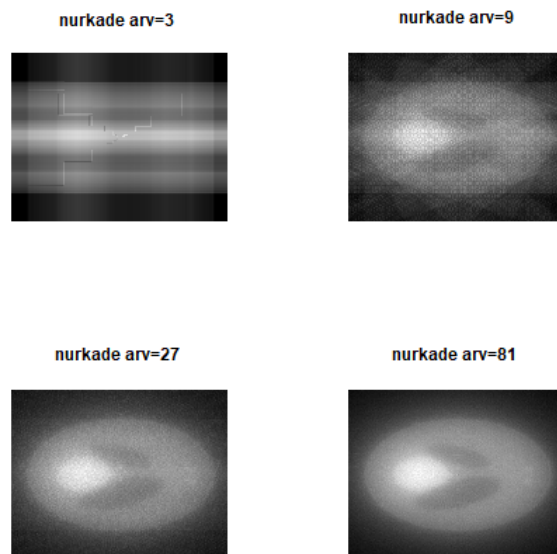


Joonis 4.8: Filtriga Radoni tagasiprojektsioon 360 nurga korral

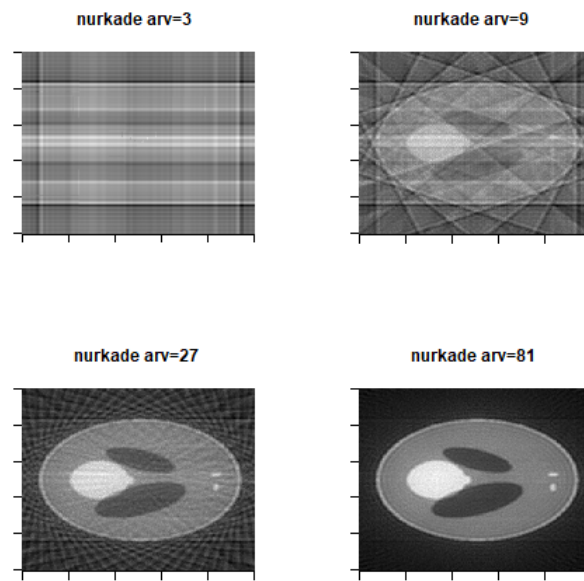
Joonistel 4.9, 4.10 ja 4.11 on kujutatud vastavalt sinogrammide, Radoni tagasiprojektsioonid ja filtriga Radoni tagasiprojektsioonid erinevate nurkade korral.



Joonis 4.9: Sinogramm 3, 9, 27 ja 81 nurga korral



Joonis 4.10: Radoni tagasiprojektsioon 3, 9, 27 ja 81 nurga korral



Joonis 4.11: Filtriga Radoni tagasiprojektsioon 3, 9, 27 ja 81 nurga korral

Kirjandus

- [1] Beatty, J. (2012). *The Radon Transform and the Mathematics of Medical Imaging*. Colby College.
- [2] Bolles, K. (2011). *Mathematics of medical imaging. Inverting the Radon transform*.
- [3] Dance, D. R., Christofides, S., Maidment, A. D. A., McLean, L. D., Ng, K. H. (2014). *Diagnostic radiology Physics*. IAEA. Vienna, Austria.
- [4] Epstein, C. L. (2008). *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*. Second edition. Department of Mathematics, University of Pennsylvania. Philadelphia, PA.
- [5] Kangro, G. (1968). *Matemaatiline analüüs II*. Valgus. Tartu, Eesti.
- [6] Oja, E., Oja, P. (1991). *Funktsionaalanalüüs*. Tartu Ülikool. Tartu, Eesti.
- [7] O'Neil, P. V. (2010). *Advanced Engineering Mathematics*. Seventh edition. Cengage Learning. Stamford, USA.
- [8] Sauer, T. (2012). *Numerical Analysis*. Second edition. Pearson.
- [9] Toft, P. (1996). *The Radon Transform - Theory and Implementation*. Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark. Copenhagen, Denmark.
- [10] Turgeneva, O. (2017). *Kompuutertomograafide rekonstrueerimisalgoritmide võrdlus Catphan fantoomiga*. Terviseteaduste instituut, Tallinna Tehnikaülikool. Tallinn, Eesti.
- [11] Vretblad, A. (2003). *Fourier Analysis and Its Applications*. Springer-Verlag New York.

Lisa

```
library(png) #pakett PNG piltide sisselugemiseks.
library(EImage) #pakett piltide pooramiseks

#-----FUNKTSIOONID-----

#funktsioon sirge koordinaatide leidmiseks:
leiaKoordinaadid <- function(theta, t){
  x <- t*cos(theta)-sjada*sin(theta)
  y <- t*sin(theta)+sjada*cos(theta)
  return(matrix(c(x,y),ncol=2))
}

#funktsioon, mis modelleerib graafiliselt
#originaalpildi kiiritamise ekraani alal.
graafik <- function(theta, tjada, tyyp="l", delay=0.1){
  for (nurk in theta){
    plot(c(-poolPildimootmest[1], -poolPildimootmest[1],
           poolPildimootmest[1], poolPildimootmest[1],
           -poolPildimootmest[1]),
         c(-poolPildimootmest[2], poolPildimootmest[2],
           poolPildimootmest[2], -poolPildimootmest[2],
           -poolPildimootmest[2]),
         type="l", xlab="x", ylab="y", col="black",
         xlim=xlim, ylim=ylim, lwd=5)
    par(new=T)
    plot(0,0, lwd=5, col="red", xlim=xlim, ylim=ylim,
         xlab="", ylab="", axes=F)
    for (t in tjada){
      par(new=T)
      plot(leiaKoordinaadid(nurk, t), type=tyyp,
```

```

    axes=F, xlim=xlim,
    ylim=ylim, xlab="", ylab="",
    main=paste("theta_=", nurk*180/pi))
  }
  Sys.sleep(delay)
}
}

```

```

#funktsioon sinogrammi leidmiseks
moodustaSinogramm <- function(theta, tjada){
  tulemus <- list()
  listiIndeks <- 1
  for(nurk in theta){
    indeks <- 0
    pikslid <- matrix(0, ncol=length(sjada),
      nrow=length(tjada))#sia maatriksisse
      #lisatakse ekraani pikslid.
    for (t in tjada){
      indeks <- indeks+1
      koordinaadid <- ceiling(LeiaKoordinaadid(nurk, t))
      #liidame poolPildimootmest juurde, et allpool muutuja
      #"tingimus" oleks lihtne leida.
      #sisuliselt nihutame pilti nii, et kõik
      #koordinaadid ekraanil on positiivsed.
      koordinaadid[,1] <- koordinaadid[,1]+poolPildimootmest[1]
      koordinaadid[,2] <- koordinaadid[,2]+poolPildimootmest[2]

      tingimus <- koordinaadid[,1]<=pildiMoode[1]&
      koordinaadid[,1]>0&
      koordinaadid[,2]<=pildiMoode[2]&
      koordinaadid[,2]>0
      pikslid[indeks, tingimus] <- pilt[
        matrix(koordinaadid[tingimus, ],
          ncol=2)]
      #seega igal real on LeiaKoordinaadid vaartused
      #fikseeritud t korral
    }
    tulemus[[listiIndeks]] <- pikslid
    listiIndeks <- listiIndeks+1
    print(paste0("Nurk=",

```

```

    round(nurk, digits = 3),
    "( ", round(nurk*180/pi, 3), " _kraadi).")
  }
  sinogramm <- sapply(tulemus, FUN = rowSums)
  #leiab iga listielemendi (pikslid) ridade summa.
  return(sinogramm)
}

#funktsioon Radoni tagasiprojektsiooni leidmiseks
leiaTagasiprojektsioon <- function(sinogramm){
  tagasi <- matrix(0, nrow=pildiMoode[1], ncol=pildiMoode[2])
  for (k in 1:length(theta)){
    nurk <- theta[k]
    for (i in 1:length(tjada)){
      koordinaadid <- ceiling(leiaKoordinaadid(nurk, tjada[i]))
      koordinaadid[,1] <- koordinaadid[,1] + poolPildimootmest[1]
      koordinaadid[,2] <- koordinaadid[,2] + poolPildimootmest[2]
      tingimus <- koordinaadid[,1] <= pildiMoode[1] &
        koordinaadid[,1] > 0 &
        koordinaadid[,2] <= pildiMoode[2] &
        koordinaadid[,2] > 0
      tagasi[koordinaadid[tingimus,]] <-
        tagasi[koordinaadid[tingimus,]] +
        sinogramm[tingimus, k]
    }
    print(paste0("Nurk=", round(nurk, digits = 3),
      "( ", round(nurk*180/pi, 3), " _kraadi)."))
  }
  return(tagasi)
}

#Funktsioon filtriga Radoni tagasiprojektsiooni leidmiseks
leiaTagasiprojektsioon_Filtriga <- function(sinogramm,
  alles_jaab=0.8,
  pilt=T){
  #fu on maatriks, mis saadakse, kui
  #sinogrammi veergudes olevatele vektoritele teha
  #Fourier' teisendus. Sinogrammi veergudes on
  #piksliintensiivsused erinevate nurkate theta_i korral
  fu <- fft(sinogramm, inverse=F)

```

```

maxIndeks <- dim(fu)[1]
maxKordaja <- (maxIndeks-1)/2
filter <- matrix(rep(c(0,1:maxKordaja,maxKordaja:1),
dim(fu)[2]),
ncol=dim(fu)[2])
myraEemaldus <- ceiling(maxIndeks*(1-alles_jaab))%%2
if(myraEemaldus>0){
  myraEemaldus <- myraEemaldus-1
  filter[filter>=(maxKordaja-myraEemaldus)] <- 0
}
fu <- fu*filter
#Rakendasime Fourier' teisenduse vektoritele koonusfiltrit.
filtriga <- fft(fu,inverse=T) #Filtriga sinogramm.
sinogramm2 <- Re(filtriga)
if(pilt) image(sinogramm2,col=gray(0:255/255),useRaster=T,
main=paste0("Filtriga_sinogramm,_murast_eemaldatakse_",
(1-alles_jaab)*100,"%"))
return(leiaTagasiprojektsioon(sinogramm2))
}

```

#----- KASUTAJA SISEND-----

```

nurkadeArv <- 180
delta <- 1 #Sinogrammi koostamisel kaugus kahe jarjestikuse
#sirge vahel (t) = Radoni teisenduse parameeter t
algnepilt <- readPNG("shepplogan.png")[,1]

```

#-----PARAMEETRITE ARVUTAMINE-----

```

image(algnepilt,
col=gray(0:255/255),useRaster=T) #Kuvame algpildi
pilt <- rotate(algnepilt,-90)
pildiMoode <- dim(pilt)
poolPildimootmest <- ceiling(pildiMoode/2)
mootmisiSirgel <- max(
ceiling(poolPildimootmest*sqrt(2)))
theta <- (0:(nurkadeArv))*(pi/nurkadeArv)
if(mootmisiSirgel%%delta==0){
  #parameetri t vaartuste jada kui delta
  #jagab mootmisiSirgel

```

```

tjada <- sort(c(0,-seq(delta , mootmisiSirgel ,
delta ),seq(delta , mootmisiSirgel , delta )))
#parametri s vaartuste jada kui delta
#jagab mootmisiSirgel
sjada <- sort(c(0,-seq(delta , mootmisiSirgel ,
delta ),seq(delta , mootmisiSirgel , delta )))
} else{ #tjada , sjada vastasel juhul
tjada <- sort(c(0,-seq(delta ,
mootmisiSirgel+delta , delta ),seq(delta ,
mootmisiSirgel+delta , delta )))
sjada <- sort(c(0,-seq(delta ,
mootmisiSirgel+delta , delta ),seq(delta ,
mootmisiSirgel+delta , delta )))
}
maxpildiMoode <- max(dim(pilt))

#Kasutatakse funktsioonis "graafik".
#Seotud graafiku piiridega.
xlim <- c(-maxpildiMoode-1,maxpildiMoode+1)
ylim <- c(-maxpildiMoode-1,maxpildiMoode+1)

#----SINOGRAMMI MOODUSTAMINE JA KUVAMINE----
sinogramm <- moodustaSinogramm(theta = theta ,
tjada = tjada)
image(sinogramm , col=gray(c(0:255)/255),
useRaster=T, main=paste0("nurkade_arv=" , nurkadeArv) ,
xlab="t" , ylab="theta")

# -----RADONI TAGASIPROJEKTSIOON JA SELLE KUVAMINE----
tagasiproj <- leiaTagasiprojektsioon(sinogramm=sinogramm)
image(tagasiproj , col=gray(0:255/255), useRaster=T,
main="Radoni_tagasiprojektsioon" , xaxs="r" , yaxs="r")

# -----FILTRIGA RADONI TAGASIPROJEKTSIOON JA SELLE KUVAMINE--
filtriga_tagasi <- leiaTagasiprojektsioon_Filtriga(
sinogramm ,
alles_jaab = 0.4 , pilt=F)
image(filtriga_tagasi , col=gray(0:255/255), useRaster=T,

```

```
main=paste0("Filtriga_tagasiprojektsioon"),  
xaxs="r",yaxs="r")
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Reiko Blum

1. Annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Radoni teisendus ja selle rakendused", mille juhendajad on Marek Kolk ning Kaido Lätt reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni,
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Reiko Blum

08.05.2019