



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

K. Ariva
M. Rahula

ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA

II

TARTU 1968

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Algebra ja geomeetria kateeder

K. Ariva
M. Rahula

ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA

I/

Teine vihik

TARTU 1968

II peatükk

KOORDINAATSÜSTEEMID. LINEAARGEOMETRIA

§ 8. Afiinne koordinaatsüsteem

I. Belmärkused.

Matemaatika koolikursusest on teada, et aritmeetiliste ülesannete lahendamist saab tunduvalt lihtsustada algebra vahenditega. Selleks väljendatakse ülesande tingimused võrrandiga või võrrandisüsteemiga. Viimaseid lahendatakse lihtsate, alati ühesuguste eeskirjade järgi. Need eeskirjad (algoritmid) määravad ülesande vastuse leidmiseks vajalikud tehted ja tehete sooritamise järjekorra.

Teatavasti nõuavad geomeetria ülesanded lahendamisel palju leidlikkust ja iga keerukama ülesande puhul uute lahendamisevõtete otsimist. Sellepärast on otstarbekas rakendada algebraalisi algoritme ka geomeetria probleemide uurimisel.

Algebra rakendamiseks geomeetrias kasutatakse koordinaatmeetodit, mis on mõnel määral tuttav juba keskkoolist. Selle meetodi aluseks on punkti asendi kirjeldamine sirgel ühe, tasandil kahe ja ruumis kolme reaalarvuga. Geomeetria kujundeid määravad jooned ja pinnad (lihtsaimal juhul sirged ja tasandid). Punktide koordinaatide abil osutub võimalikuks iseloomustada jooni ja pindu võrranditega. Sel teel taandatakse joonte ja pindade omaduste selgitamine võrrandite ja võrrandisüsteemide lahendamisele ning uurimisele.

Geomeetriat, milles ei kasutata koordinaatmeetodit ja milles geomeetrilisi kujundeid uuritakse puhtgeomeetriliste võtetega, nimetatakse sünteetiliseks. Sellist tüüpi on kooligeomeetria. Koordinaatide ja algebra vahendusel ülesehitatud geomeetriat nimetatakse analüütiliseks. Käesolevas peatükis alustame analüütilise geomeetria kursuse süstemaatilist käsitlust.

2. Afiinne koordinaadistik.

Süsteemi, mis koosneb poolusest ja vabalt valitud vektorbaasist, nimetatakse afiinseks reeperiks. Baasivektoreid nimetatakse ka reeperi vektoriteks ja poolust - reeperi alguspunktiks e. koordinaatide alguspunktiks.

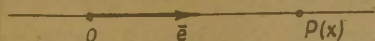
Olgu antud mingi afiinne reeper R . Siis saab igale punktile P pooluse O abil seada vastavusse kohavektori $\vec{r}_P = \vec{OP}$. Vektorbaas määrab vektori \vec{r}_P koordinaadid. Neid koordinaate nimetatakse ühtlasi punkti P afiinseteks koordinaatideks. Seega on punkti afiinseteks koordinaatideks tema kohavektori koordinaadid.

Vektori koordinaadid määrab vektorbaas; mingi punkti fikseerimisest nad ei sõltu. Punkti koordinaadid määrab reeper; ainult baasiga punkti koordinaate määrata ei saa. Punkti koordinaate tähistatakse käesolevas kursuses alati väikeste tähtedega.

Reeper on sõltumatu baasivektorite alguspunktide valikust; näitlikkuse huvides rakendatakse baasivektoreid harilikult reeperi alguspunkti.

Afiinne reeper sirgel koosneb ühest punktist O ja ühest

vektorist \bar{e} (joon. 65): $R = \{0; \bar{e}\}$. Sirge suvalise punkti P
 afiinse koordinaadi x määrab
 vektorvõrdus



$$\overline{OP} = x\bar{e}.$$

Joon. 65.

Punkti P koordinaadiga x tä-

histatakse sümboliga $P(x)$.

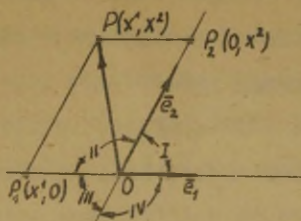
Reeperi vektor \bar{e} korraldab üksühese vastavuse sirge vek-
 torite klasside ja reaalarvude vahel; reeperi alguspunkt
 eraldab igast klassist parajasti ühe vektori \overline{OP} . Järelikult
 $R = \{0; \bar{e}\}$ korraldab üksühese vastavuse sirge punktide hulga
 ja kõigi reaalarvude hulga vahel: $P \xrightarrow{R} x$. Reeperi fikseeri-
 mine muudab sirge arvteljeks. Et \bar{r}_0 on nullvektor, siis on
 reeperi alguspunkti koordinaat null. Alguspunkt jaotab sir-
 ge kaheks poolsirgeks; ühel poolsirgel asetsevad punktid po-
 sitiivsete, teisel - negatiivsete koordinaatidega. Et $|x| =$
 $= |\overline{OP}| : |\bar{e}|$, siis on punkti P koordinaat skalaar, mille
 moodul võrdub P kaugusega alguspunktist, kui pikkusühikuks
 lugeda $|\bar{e}|$, ja mille märk sõltub poolsirgest, millel aset-
 seb P.

Afiinne reeper tasandil koosneb punktist 0 ja kahest
 mittekollineaarsest vektorist \bar{e}_1 ja \bar{e}_2 : $R = \{0; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$
 (joon. 66). Tasandi suvalise punkti P afiinsed koordinaadid
 x^1 ja x^2 määrab vektorvõrdus

$$\overline{OP} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2.$$

Punkti P koordinaatidega x^1 ja x^2 tähistatakse $P(x^1, x^2)$.

Reeperi vektorid korraldavad üksühese vastavuse tasandi
 vektoriite klasside ja järjestatud reaalarvupaaride vahel;



Joon. 66.

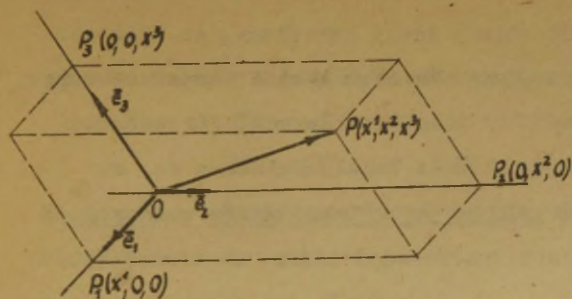
$$P \xleftrightarrow{R} (x^1, x^2).$$

Reeper määrab tasandil kaks sirget, mis läbivad punkti O ja on paralleelsed vektoritega \bar{e}_1 ja \bar{e}_2 . Tasandi reeper $\{0; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ tekitab neil sirgeil reeperid $\{0; \bar{e}_1\}$ ja $\{0; \bar{e}_2\}$, s.t. muudab need sirged arvtelgedeks. Neid telgi nimetatakse koordinaattelgedeks, vektorile \bar{e}_1 vastavat - abstsissteljeks e. x^1 -teljeks ja vektorile \bar{e}_2 vastavat - ordinaatteljeks e. x^2 -teljeks. Punkti koordinaate x^1 ja x^2 nimetatakse vastavalt abstsisiks ja ordinaadiks. Kui $x^1 = 0$, siis $\overline{OP} = x^2 \bar{e}_2$, s.t. P asub ordinaatteljel; analoogiliselt $x^2 = 0$ puhul asub P abstsissteljel; kui $x^1 = x^2 = 0$, siis P ühtib reeperi alguspunktiga.

Koordinaatteljed jaotavad tasandi neljaks koordinaatnurgaks, mis nummerdatakse joonisel 66 näidatud viisil.

Millised on koordinaatide märgid punktide korral erinevaist koordinaatnurkadest? Kuidas saab paralleelprojekteerimise teel leida punkti koordinaate ja koordinaatide järgi konstrueerida punkti? (Vt. §3 ja §7 p. 1).

Afinne reeper ruumis koosneb punktist O ja kolmest mitetekomplanaarsest vektorist: $R = \{0; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. (joon. 67).



Joon. 67.

x^3 tähistatakse $P(x^1, x^2, x^3)$.

Reeperi vektorid korraldavad üksühese vastavuse ruumi vektorite klasside ja järjestatud reaalarvukolmikute vahel; reeperi alguspunkt eraldab igast klassist parajasti ühe vektori \overline{OP} . Järelikult korraldab reeper $R = \{0; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ üksühese vastavuse ruumi punktide hulga ja kõigi järjestatud reaalarvukolmikute vahel: $P \xleftrightarrow{R} (x^1, x^2, x^3)$.

Reeper määrab ruumis kolm punktis 0 lõikuvat koordinaattelge ja kolm paarikanpa mööda neid telgi lõikuvat tasandit - koordinaattasandit. Lisanduvad telge, mille määrab vektor \bar{e}_3 , nimetatakse aplikaatteljeks e. x^3 -teljeks, kordinaati x^3 - punkti aplikaadiks. Koordinaattasandeid nimetatakse nendel tasanditel asuvate telgede järgi: x^1x^2 -, x^1x^3 - ja x^2x^3 -tasand. Kui $x^1 = 0$, siis $\overline{OP} = x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3$, s.o. P asub x^2x^3 -tasandil; kui $x^1 = x^2 = 0$, siis $\overline{OP} = x^3\bar{e}_3$, s.o. P asub x^3 -teljel, jne.

Selgitada iseseisvalt, kuidas paralleelprojekteerimise teel leida antud punkti koordinaate ja antud koordinaatide

Ruumi suvalise punkti P afiinsed koordinaadid x^1 , x^2 ja x^3 määrab vektorvõrdus

$$\overline{OP} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3.$$

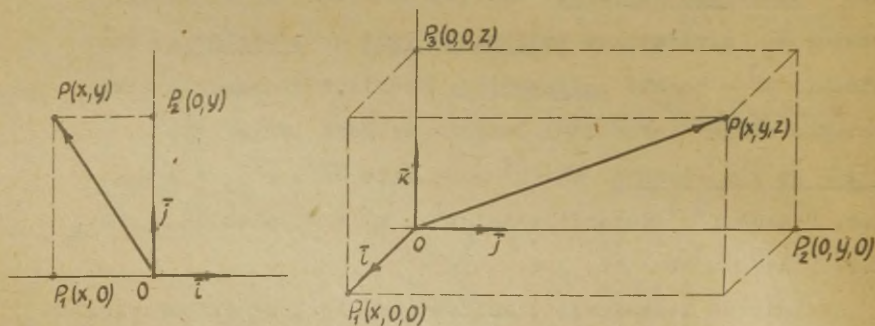
Punkti P koordinaatidega $x^1, x^2,$

järgi punkti!

Niisiis, aafinne reeper määrab üksühese vastavuse sirge, tasandi või ruumi punktide ning reaalarvude, järjestatud reaalarvupaaride või -kolmikute vahel. Oeldakse ka, et aafinne reeper määrab aafinse koordinaadistiku e. koordinaatsüsteemi.

3. Ristkoordinaadistik.

Aafinse reeperi korral on vektorbaas üldiselt täiesti suvaline, s.t. baasivektorite moodulite ja vektoritevaheliste nurkade kohta ei esitata mingeid kitsendusi peale nõude, et vektorid oleksid lineaarselt sõltumatud, s.o. mittekollelinearsed, resp. mittekomplanaarsed. Koordinaatmeetodi rakendustes on suur tähtsus juhul, kui vektorbaas on ortonormeeritud. Vastavat aafinse reeperi erijuhtu $R = \{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (tasandil $R = \{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$) nimetatakse ortonormeeritud reeperiks. Punkti koordinaate ortonormeeritud reeperi suhtes nimetatakse ristkoordinaatideks.



Joon. 68

Ortonormeeritud reeperiga määratud koordinaatteljed ja

-tasandid on paarikaupa risti (joon. 68). Punkti P ristkoordinaate tasandil ja ruumis määravad vektorvõrdused

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};$$

kasutatakse tähistusi $P(x, y)$ ja $P(x, y, z)$. Punkti ristkoordinaadid on punkti kohavektori ristprojektsioonid koordinaattelgedele (vt. 7.6):

$$x = (\vec{i}, \vec{r}_P) = pr_{\vec{i}} \vec{r}_P,$$

$$y = (\vec{j}, \vec{r}_P) = pr_{\vec{j}} \vec{r}_P,$$

$$z = (\vec{k}, \vec{r}_P) = pr_{\vec{k}} \vec{r}_P.$$

4. Afliinsed ja meetrilised valemid.

Vektoralgebra käsitlemisel ilmnes, et valemite, mis sisaldab vektorite skalaar- või vektorkorrutist, saab kirjutada koordinaatides kõige lihtsamal kujul siis, kui kasutatakse ortonormeeritud baasi. Valemi puhul, mis sisaldab ainult vektorite lineaartehteid, ei paku ortonormeeritud baas mingit lihtsustust. Et punkti koordinaatide definitsioonis on oluline osa vektorbaasil, tuleb seda asjaolu arvestada ka reeperi valimisel.

Ristkoordinaadistik on affiinsed koordinaadistiku erijuht, sellepärast kehtivad kõik üldistes affiinsetes koordinaatides tuletatud valemid ka ristkoordinaatides. Selle juures on mõnel valemil ühesugune kuju igas affiinses koordinaadistikus, kuid paljud valemid muutuvad üleminekul ristkoordinaatidesse tunduvalt lihtsamaiks. Järelikult ristkoordinaatides tuletatud valemid suvalises affiinses koordinaadistikus üldiselt ei kehti. Sellepärast tuleb iga arutluse ja

valemi puhul silmas pidada, millist koordinaadistikku kasutatakse.

Illustreerime märgitud asjaolu mõne lihtsa näitega, millel on oluline tähtsus edaspidises.

(1) Vektori avaldamine otspunktide koordinaatide kaudu.

Olgu mingi reeperi $R = \{0; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ suhtes määratud punktid $A(a^1, a^2, a^3)$ ja $B(b^1, b^2, b^3)$. Vektor \overline{AB} on oma otspunktide kohavektorite vahe: $\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$. Et \bar{r}_A ja \bar{r}_B koordinaadid ühtivad punktide A ja B koordinaatidega, siis vektori $\overline{AB}(x^1, x^2, x^3)$ puhul kehtivad seosed:

$$\begin{cases} x^1 = b^1 - a^1, \\ x^2 = b^2 - a^2, \\ x^3 = b^3 - a^3, \end{cases} \quad (8.1)$$

s.o. vektori koordinaatideks on tema lõpp- ja alguspunkti koordinaatide vahed.

Tasandilisel juhul koosneb (8.1) kahest, sirge puhul ühest valemist.

(2) Kolme punkti liitsuhe $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ (vt. näide 8) on vektorite \overline{AC} ja \overline{CB} vastavate koordinaatide ühine suhe (võrdetegur) ja on (8.1) põhjal avaldatav punktide A, B ja C(c^1, c^2, c^3) koordinaatide kaudu järgmiselt:

$$\lambda = \frac{c^1 - a^1}{b^1 - a^1} = \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{c^3 - a^3}{b^3 - a^3}. \quad (8.2)$$

Sirge ja tasandi korral esineb vastavalt üks ja kaks koordinaatide suhet.

Kui punktid A, B ja liitsuhe λ on antud, siis saadakse jaotava punkti C koordinaadid seoste (8.2) lahendamisel nende

koordinaatide suhtes (või vahetult vektorvõrdusest (2.1)):

$$\begin{cases} c^1 = \frac{a^1 + \lambda b^1}{1 + \lambda} \\ c^2 = \frac{a^2 + \lambda b^2}{1 + \lambda}, \\ c^3 = \frac{a^3 + \lambda b^3}{1 + \lambda}. \end{cases} \quad (8.3)$$

Tasandil kasutatakse kaht esimest, sirgel - esimest valemit.

Ilmselt valemid (8.1-3) ristkoordinaatides ei lihtsustu: nende tuletamisel on kasutatud ainult lineaartehteid vektori- tega. Kirjutada need valemid ristkoordinaatides (esineb vaid tähistuste muutus)!

(3) Kahe punkti vaheline kaugus.

Olgu reeperi $R = \{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ suhtes määratud punktid $A(x_1, y_1, z_1)$ ja $B(x_2, y_2, z_2)$. Punktid A ja B määravad (8.1) põhjal vektori $\overline{AB}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Nende punktide vahelist kaugust - lõigu AB pikkust - saab (7.10) ja (8.1) tõttu arvutada eeskirjaga

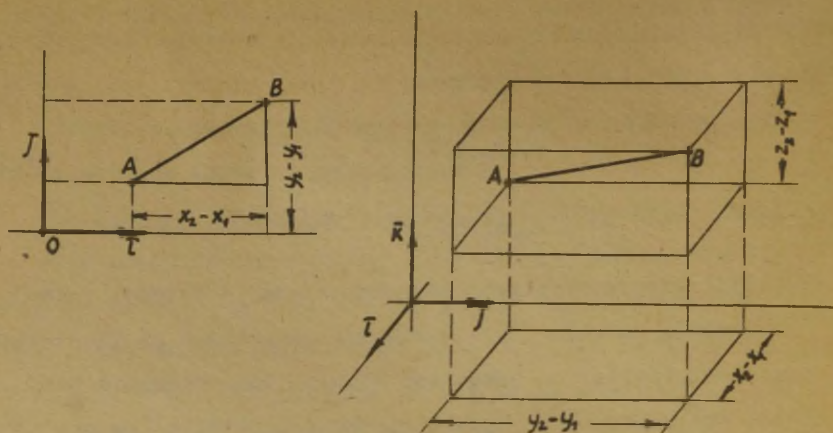
$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \quad (8.4)$$

Tasandilisel juhul

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}. \quad (8.4a)$$

Nende valemite geomeetriline tõlgendus on antud joonisel 69. Lugeja selgitagu, milliseid kooligeometriast tuntud lauseid need valemid esitavad. Analüüsida ka juhte, kus punktid asuvad erinevais tasandi ja ruumi osades, mille määravad koordinaatteljed ja -tasandid!

Valemid (8.4) ja (8.4a) kehtivad ainult ristkoordinaati-



Joon. 69.

des. Tõepoolest, suvalistes afiinsetes koordinaatides (7.8) ja (8.1) tõttu

$$AB = \sqrt{g_{11}(b^1 - a^1)^2 + g_{22}(b^2 - a^2)^2 + g_{33}(b^3 - a^3)^2 + 2g_{12}(b^1 - a^1)(b^2 - a^2) + 2g_{23}(b^2 - a^2)(b^3 - a^3) + 2g_{13}(b^1 - a^1)(b^3 - a^3)},$$

kus $g_{ij} = (\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ ($i, j = 1, 2, 3$). Valem (8.4) järeldub siit erijuhuna, kui $g_{ij} = \delta_{ij}$, s.t. baas on ortonormeeritud.

Valemit, mis kehtib igas afiinses koordinaadistikus, nimetatakse afiinseks valemiks. Valemit, mis kehtib ainult ristkoordinaatides, nimetatakse meetriliseks valemiks (väljendab kujundite mõõtmisega seotud omadusi). Seega (8.1-3) on afiinsed, (8.4-4a) - meetrilised valemid.

Näited.

24. Punkte nimetatakse kollineaarseteks, kui nad asuvad ühel sirgel, ja komplanaarseteks, kui nad on ühel tasandil.

Väljendame kolme punkti kollineaarsuse ja nelja punkti komp-
lanaarsuse tingimuse nende punktide koordinaatide abil.

Olgu punktide A, B, C ja D koordinaadid määratud $R =$
 $= \{0; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ suhtes. Punktid A, B ja C on kollineaarsed
parajasti siis, kui $\overline{AB} \parallel \overline{AC}$, s.t. (vrd. 8.2)

$$\frac{b^1 - a^1}{c^1 - a^1} = \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2} = \frac{b^3 - a^3}{c^3 - a^3}. \quad (8.5)$$

Tasandil kollineaarsuse tingimus $\frac{b^1 - a^1}{c^1 - a^1} = \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}$ ehk

$(b^1 - a^1)(c^2 - a^2) = (b^2 - a^2)(c^1 - a^1)$ on kirjutatav deter-
minandi abil:

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & 1 \\ b^1 & b^2 & 1 \\ c^1 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (8.6)$$

sest

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & 1 \\ b^1 & b^2 & 1 \\ c^1 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & 1 \\ b^1 - a^1 & b^2 - a^2 & 0 \\ c^1 - a^1 & c^2 - a^2 & 0 \end{vmatrix} = (b^1 - a^1)(c^2 - a^2) - \\ - (b^2 - a^2)(c^1 - a^1).$$

Punktid A, B, C ja D on komplanaarsed parajasti siis,
kui $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = 0$, seega (7.17a) tõttu

$$\begin{vmatrix} b^1 - a^1 & b^2 - a^2 & b^3 - a^3 \\ c^1 - a^1 & c^2 - a^2 & c^3 - a^3 \\ d^1 - a^1 & d^2 - a^2 & d^3 - a^3 \end{vmatrix} = 0$$

Veenduda, et see tingimus on esitatav sümmeetrilisemal kujul

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 & 1 \\ b^1 & b^2 & b^3 & 1 \\ c^1 & c^2 & c^3 & 1 \\ d^1 & d^2 & d^3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7)$$

Valemid (8.5-7) on afiinsed. Miks? Kirjutada need valemid ristkoordinaatides!

25. Väljendame kolmnurga pindala ja tetraeedri ruumala tippude koordinaatide abil.

Olgu punktide A, B, C ja D koordinaadid määratud reeperiga $R = \{0; I, J, K\}$.

(7.16) tõttu saab kolmnurga pindala (vt. näide 21) arvutada valemiga

$$S_{ABC} = \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} \quad (8.8)$$

Kui kolmnurk on xy-tasandil, siis (7.20) tõttu

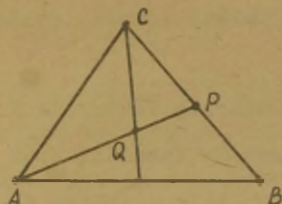
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Põhjendada!}) \quad (8.8a)$$

Tetraeedri ruumala (vt. 7.22) määratakse valemiga

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Põhjendada!}) \quad (8.9)$$

Valemid (8.8-9) on meetrilised. Miks? Kirjutada nad suvalise afiinse reeperi suhtes!

26. Tõestame, et ristkoordinaatidega määratud punktid $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 4)$ ja $C(3, 0, 2)$ on mittekollineaarsed, leiame kolmnurga ABC pindala ja raskuskeskme (joon. 70).



Joon. 70

$$\overline{AB}(1, -3, 1),$$

$$\overline{AC}(2, -2, -1);$$

$$\overline{AB} \nparallel \overline{AC}.$$

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \vec{s}(5, 3, 4),$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{s}| = 2,5\sqrt{2}.$$

$$P\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right) \text{ on lõigu } BC$$

keskpunkt; tema koordinaadid võrduvad otspunktide koordinaatide aritmeetiliste keskmistega ($\lambda = 1$). Raskuskeskme $Q(2, \frac{1}{3}, 3)$ koordinaadid arvutame (8.3) abil (võttes selles $\lambda = 2$, sest $\overline{AQ} = 2\overline{QP}$).

27. Tõestame, et ristkoordinaatidega määratud punktid $A(1, 1, 4)$, $B(3, -3, 1)$, $C(-5, 2, 2)$ ja $D(7, -1, 2)$ on mittekompilanaarsed ja leiame punkti D kauguse punktidega A , B ja C määratud tasandist.

$$\overline{AB}(2, -4, -3),$$

$$\overline{AC}(-6, 1, -2),$$

$$\overline{AD}(6, -2, -2);$$

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = 66,$$

s.t. vektoritele \overline{AB} , \overline{AC} ja \overline{AD} ehitatud rööptahuka ruumala on 66; punktid on mittekompilanaarsed. Otsitava kauguse leiame selle rööptahuka kõrgusena: et tahu ABC pindala $S_{ABC} =$
 $= |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = 33$, siis

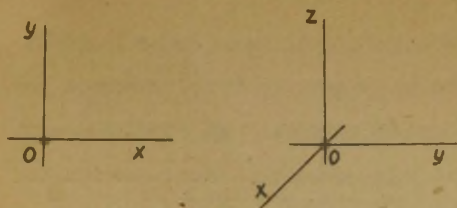
$$h = \frac{V}{S_{ABC}} = 2.$$

5. Täiendavaid märkusi.

(1) Üldiselt mõistetakse reeperina (pr. repère - märk, tähis) teatud geomeetristest objektidest (punktid, vektorid, sirged, tasandid jne.) koosnevat abikonstruktsiooni, mis võimaldab määrata üheselt iga punkti asendi tasandil või ruumis.

Afiinse koordinaadistiku saab määrata vektoreid kasutamata. Afiinseks reeperiks võib nimetada tasandil kaht lõikuvat arvtelge, ruumis - kolme ühes punktis lõikuvat arvtelge, mis ei asu ühel tasandil; telgedevahelised nurgad ja pikkusühikud telgedel fikseeritakse suvaliselt, üldiselt erinevalna. Punkti afiinsed koordinaadid on sellisel juhul reaalarvud, mille määravad koordinaattelgedel selle punkti projektsioonid (joon. 67 punktid P_1 , P_2 ja P_3); projekteerimine toimub paralleelselt telgedega (tasandil) või koordinaattasanditega (ruumis). Ristuvate ja ühesuguste pikkusühikutega telgede korral on tegemist ristkoordinaadistikuga. Sellisel juhul võib rääkida ka ristprojekteerimisest ja ristkoordinaate saab vaadelda punkti sobiva märgiga varustatud kaugustena telgedest (tasandil) või koordinaattasanditest (ruumis). Niisugusel vektorvabal viisil käsitletakse ristkoordinaate koolimatemaatikas.

Edaspidises jätame joonistel sageli (eriti ristkoordinaadistikus) baasivektorid koordinaattelgedel märkimata; telje nimetuse määramiseks kirjutame telje positiivset suunda osutava otspunkti juurde vastava koordinaattähistuse (joon. 71).

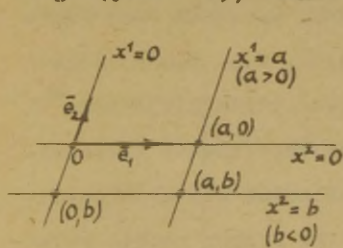


Joon. 71.

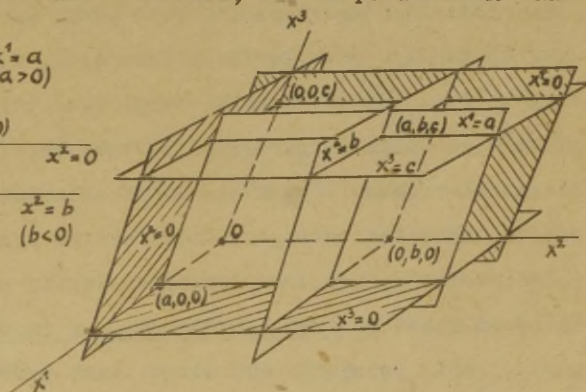
Reeperi saab ehitada ka mingi lõpliku arvu punktide fikseerimise teel. Näiteks reeperi $\{0; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ asemel võib vaadelda

seitset punkti: poolust 0 ja baasivektorite otspunkte. Minimaalne arv punkte, mis määrab reeperi, on sirgel kaks, tasandil kolm ja ruumis neli (miks?).

(2) Punktid, millel on ühine projektsioon ühel koordinaatteljel, moodustavad tasandil teise teljega paralleelse sirge (joon. 72), ruumis - tasandi, mis on paralleelne vaa-



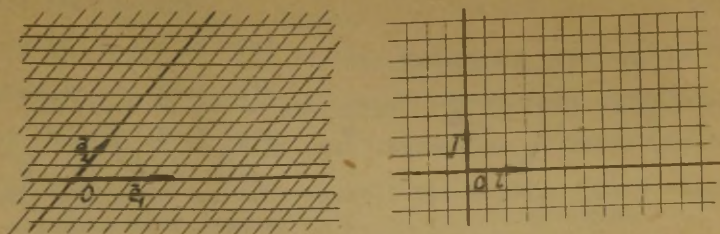
Joon. 72.



Joon. 73.

deldavat telge lõikava koordinaattasandiga (joon. 73). Punkti liikumisel mööda sellist sirget (tasandit) on tema üks koordinaat konstantne, teine koordinaat (ülejäanud koordinaadid) võib omandada mistahes väärtusi.

Reeper määrab tasandil kaks paralleelsirgete parve, mis moodustavad omavahel lõikudes afiinse koordinaatvõrgu tasan-



Joon. 74 .

dil (joon. 74). Tasandi iga punkti läbib parajasti üks sirge kummastki parvest.

Ruumis määrab reeper kolm paralleeltasandite parve; ruumi iga punkti läbib parajasti üks tasand igast parvest. Kui fikseerida kaks koordinaati, peab punkt asetsema kahe koordinaattasandiga paralleelseil tasandeil, s.o. nende lõikesirgel. Kolmanda koordinaadi suvalisuse tõttu kirjeldab punkt kogu selle sirge. Niisiis: kahe koordinaadi fikseerimisega määratakse sirge, mis on paralleelne muutuva koordinaadiga märgitud teljega. Seega tekitab reeper ruumis kolm koordinaattelgedega paralleelsete sirgete parve, mis moodustavad lõikudes afiinse koordinaatvõrgu ruumis. Ruumi iga punkti läbib parajasti üks sirge igast parvest.

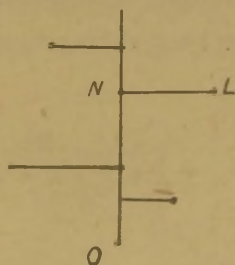
(3) Koordinaadid võeti matemaatikas kasutusele tunduvalt varem kui vektor. Punkti koordinaatide mõiste pärineb analüütilise geomeetria rajajailt, prantsuse matemaatikult Pierre Fermat'ilt¹ (1601-1665) ja René Descartes'ilt² (1596-

¹ [pjär fermá]

² [röné dekart]

1650). Sellepärast nimetatakse ristkoordinaadistikku sageli ka Descartes'i koordinaadistikuks ja afiinset - üldistatud Descartes'i koordinaadistikuks. Viimasel juhul räägitakse sageli ka kaldkoordinaatidest.

Koordinaatide meetod ja sellega seotud terminoloogia kujunes välja samm-sammult. Esialgu puudusid üldse koordinaatteljed (rääkimata vektoreist). Nii moodustas F.L.Lahire³ (1640-1718) punkti asendi määramiseks tasandil "puu" (joon. 75): ta tõmbas alguspunktist O ("origine" - algus) sirge - "tüve" - ja valis sellel punkti N ("neud" - sõlm) ning tasandil punkti L ("lieu" - koht); lõiku ON nimetas ta "tüve osaks" ja lõiku NL "oksaks". Uhes hilisemas töös nimetas ta



Joon. 75.

lõike ON ja NL vastavalt ordinaadiks ja abstsissiks (sõna algvormilt tähendab esimene "järjestust", "korda", teine - "lõiget"). Termin "koordinaadid" on pärit G.W.Leibniz'ilt (1646-1716). Koordinaatide meetod tänapäevases mõttes hakkas kujunema 18. saj. teisel poolel.

Koordinaatide meetodil on teatavad puudused. Näiteks ilmneb, et ehkki ülesande algtingimused ja vastus on geomeetrilise iseloomuga, ei ole vahepealsetes algebralistes operatsioonides alati kerse taibata nende geomeetrilist tähendust.

³ [laír]

dust. Pealegi osutuvad koordinaatkujus esitatud valemid sageli keerukaiks ja väheülevaatlikeks. Selliste punduste kõrvaldamiseks võeti kasutusele vektorid.

Vektorarvutuse algideid väljendasid esimestena saksa matemaatikud Leibniz, A.F.Möbius (1790-1868) ja H.Grassmann (1809-1877). Lõplikult arendati vektorarvutus välja 19. sajandi teisel poolel. Selle rakendusväli on väga lai nii matemaatikas kui ka mehhaanikas ja füüsikas. Käesolevas kursuses puutume kokku vektorarvutuse algebralise osaga, mille abstraktne käsitus antakse kõrgema algebra kursuses. Vektorarvutuse teist osa - vektoranalüüsi, - milles kasutatakse matemaatilise analüüsi vahendeid, vaadeldakse diferentsiaalgeomeetria kursuses. Seal üldistatakse ka koordinaatide meetodit.

§9. Joone ja pinnavaorrandid

1. Tasandilise joone vaorrandid.

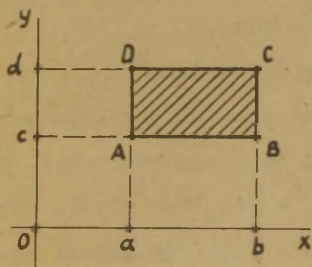
Antud reeper määrab punktide analüütilise esituse reaalarvude, järjestatud reaalarvupaaride või -kolmikute näol. Geomeetrilise kujundi uurimiseks koordinaatmeetodil tuleb kujundit kui punktihulka iseloomustada hulka kuuluvate punktide koordinaatide abil - leida punktihulga analüütiline esitus.

Punktide hulk on defineeritud, kui on teada mingi tingimus, mida rahuldab selle hulga iga punkt, kuid ei rahulda ükski punkt, mis ei kuulu hulka. Teisiti: punktihulga määrab punkti sellesse hulka kuuluvuse tarvilik ja piisav tin-

gimus. Näit. ringjoon on ühest punktist võrdsetel kaugustel asuvate punktide hulk ("geomeetriline koht").

Olgu tasandil valitud ristkoordinaadistik (käsolevas paragrahvis kasutatakse suurema näitlikkuse huvides ainult ristkoordinaate, kuid kõik siin esitatud arutlused kehtivad ka suvalise afiinse koordinaadistiku korral). Antud punkti hulka defineeriv tingimus tekitab teatud kitsendused selle hulga punktide koordinaatide kohta; need kitsendused ongi punktihulga analüütiliseks esituseks.

Näit. x -telje punktide hulga puhul $y = 0$; x -teljega paralleelse sirge iga punkti korral $y = c$, kus c on sirge kaugus x -teljest; koordinaat x jääb mõlemas hulgas suvaliseks (joon. 74). Punkt $P(x, y)$ kuulub joonisel 76 viirutatud



Joon. 76.

piirkonda parajasti siis, kui

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d; \end{cases}$$

need võrratused on selle punktihulga analüütiline esitus.

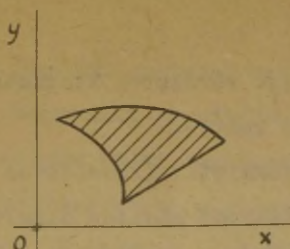
Vaadeldav piirkond on täielikult määratud oma kontuuriga - ristkülikuga ABCD. Sirglõiku

AB esitavad tingimused

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ y = c. \end{cases}$$

Analoogiliselt saab esitada ristküliku ülejäänud külgi (teha seda!).

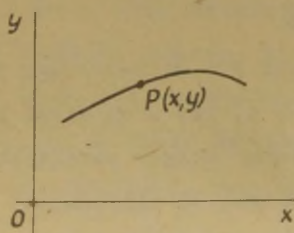
Viimases näites taandub küsimus telgedega paralleelsete-



Joon. 77.

seks esitamiseks.

Tasandilist joont võib tõlgendada mööda tasandit liikuva punkti P trajektooriina (joon. 78). Igale ajahetkele t vastab



Joon. 78.

le sirgetele, mida on lihtne analüütiliselt esitada. Keerukamate kujundite, nagu "kõverjoonse kolmnurga" puhul joonisel 77, tekib vajadus suvaliste tasandiliste kõverjoonte ja sirgete analüütili-

punkt P kindel asend, seega üheselt määratud koordinaadid x ja y . Järelikult on x ja y aja t ühesed funktsioonid:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (9.1)$$

Need funktsioonid määravad trajektoori täielikult.

Selle mõttekäigu üldistusena võib suurust t lugeda reaalmuutujaks, mis on valitud nii, et tema iga väärtusega $t = t_0$ määratud arvud $x_0 = x(t_0)$ ja $y_0 = y(t_0)$ on kõvera mingi punkti koordinaadid, t kõigi väärtuste hulk aga määrab kogu joone kui punktihulga. Joone analüütilist esitust ühe muutuja kahe ühese funktsiooni (9.1) abil nimetatakse joone parameetriliseks esituseks e. parameetrilisteks võrranditeks; muutujat t nimetatakse joone parameetriks.

Kui võrrandeist (9.1) lahendada üks, näit. esimene, parameetri t suhtes, s.o. leida funktsiooni $x = x(t)$ pöördfunktsioon $t = t(x)$ ja asendada teises võrrandis t leitud avaldi-

sega, siis tekib võrrand

$$y = y(t(x)) = f(x), \quad (9.2)$$

mis määrab funktsionaalse sõltuvuse x ja y vahel. Selle sõltuvuse geomeetriline tähendus on ilmne (joon. 79): joone iga punkt P seab oma

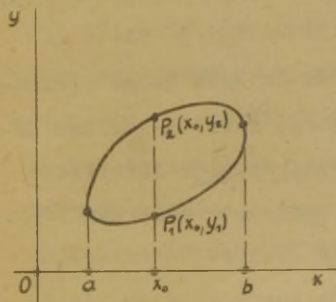
abstsissile x vastavusse ordinaadi y .

Joon. 79.

Võrrand (9.2) on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt $P(x, y)$ kuuluks joonele.

Võib juhtuda, et süsteemiga (9.1) määratud funktsioon $y = f(x)$ on mitmene, s.o. argumenti x väärtusele vastab mitu funktsiooni väärtust. Näiteks kõver joonisel 80 kujutab ka-

hest funktsiooni: argumenti igale väärtusele vahemikust $a < x < b$ vastab kõveral kaks punkti P_1 ja P_2 erinevate ordinaatidega y_1 ja y_2 . Kui $x = a$ või $x = b$, siis on kõvera punkt üheselt määratud. Kui $x < a$ või $x > b$, siis on funktsioon mää-



Joon. 80.

ramata.

Vaatleme nüüd mingit matemaatilist avaldist, mis sisaldab kaht reaalmuutujat x ja y . Sellist avaldist tähistatakse sümboliga $F(x, y)$. Võrdust

$$F(x, y) = 0 \quad (9.3)$$

nimetatakse samasuseks, kui ta on rahuldatud muutujate x ja y kõigi väärtuste korral, ja võrrandiks, kui teda rahulda-

vad ainult teatud väärtuste paarid (x, y) . Näit. võrdus $(x + y)(x - y) - x^2 + y^2 = 0$ on samasus, kuid $2x^2 - 3y^2 + 5x = 0$ on võrrand. Võrrandit rahuldavaid väärtuste paare nimetatakse tema lahenditeks; erijuhul võivad võrrandil lahendid puududa.

Võrrandit (9.3) nimetatakse antud tasandilise joone ilmutamata võrrandiks, kui ta on rahuldatud parajasti vaadeldava joone punktide koordinaatidega.

Joone ilmutamata võrrand (9.3) tekitab funktsionaalse sõltuvuse muutujate x ja y vahel: ühe muutuja fikseerimisega on teise väärtus määratud (üheselt või mitmeselt). Võrrandi (9.3) lahendamisel ühe muutuja suhtes saadakse joone esitus (9.2): $y = f(x)$ või $x = g(y)$. Esitust (9.2) nimetatakse joone ilmutatud võrrandiks.

Punkt, mille koordinaadid rahuldavad kahe joone võrrandeid (ühes ja samas koordinaadistikus), asetseb korraga mõlemal joonel, s.t. on nende joonte lõikepunkt. Järelikult määrab kahe joone lõikepunkte nende joonte võrranditest koosnev kahe tundmatuga võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Joone võrrand võib sisaldada ainult üht muutujat, näit. $x: F(x) = 0$. Sellisel juhul ei esita võrrand kitsendavaid tingimusi puuduva koordinaadi kohta - joonel leiduvad punktid puuduva koordinaadi iga väärtuse jaoks. Kui ühe tundmatuga võrrandil $F(x) = 0$ on olemas lahendid x_1, x_2, \dots , siis määrab iga lahend y -teljega paralleelse sirge - joon

koosneb sellistest sirgetest. Lahendeid x_1, x_2, \dots võib vaadelda joone $y = F(x)$ ja x -telje lõikepunktide abstsissidena; lõikepunkte määrab süsteem

$$\begin{cases} y = F(x), \\ y = 0, \end{cases}$$

mille lahendid on $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots$

Belnevas arutluses eeldatakse, et tasandiline joon on antud, s.o. geomeetriselt defineeritud kui punktihulk oma mingi omaduse kaudu. Joone ülejäänud omaduste, kuju jne. selgitamiseks tuleb koostada joone võrrand ja uurida seda.

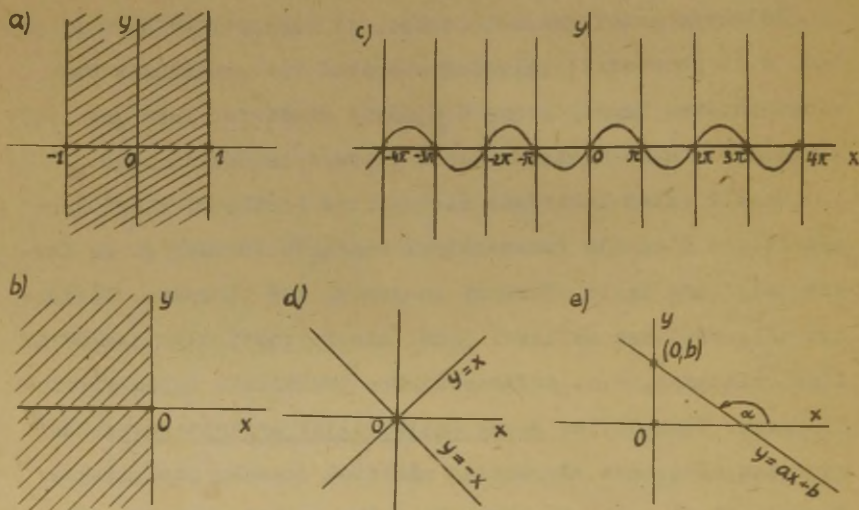
Sageli tuleb lahendada vastupidine probleem: mingi geomeetrisel ülesande lahendamisel saadakse võrrand ja on tarvis selgitada selle võrrandi geomeetrisel tähendus. Võrrandit tõlgendatakse sellisel juhul mingi punktihulga analüütilise esitusena, s.o. defineeritakse punktihulk antud võrrandi kaudu. Tasandilise joone analüütiline definitsioon: kaht muutujat sisaldava võrrandiga määratud jooneks nimetatakse tasandi kõigi selliste punktide hulka, mille koordinaadid (fikseeritud reeperi suhtes) rahuldavad seda võrrandit. Sisuliselt on siin tegemist antud funktsionaalse sõltuvuse graafilise kujutamise, mis on tuttav keskkooli matemaatikakursusest.

Olgu märgitud, et antud võrrand $F(x, y) = 0$ võib määrata punktihulga, mis erineb tunduvalt sellest, mida harjumusepärast mõistetakse joonena. Joone definitsioon võrrandi kaudu on siin sõnastatud liialt üldisel kujul; on tarvis püstitada rida kitsendavaid lisatingimusi (funktsiooni pidevus,

teatud arv korda diferentseeruvus jne.). Joone mõiste detail-
ne käsitletu matemaatilise analüüsi vahenditega antakse dife-
rentsiaalgeomeetria kursuses.

Näited.

28. (joon. 81).



Joon. 81.

a) Võrratus $|x| \leq 1$ määrab riba sirgete $x = 1$ ja $x = -1$ vahel; tingimused $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ y = 0 \end{cases}$ määravad abstsissiteljel lõigu $[-1, 1]$;

b) võrratus $x < 0$ määrab pooltasandi vasakul pool y -telge (ilma viimaseta); tingimused $\begin{cases} x < 1 \\ y = 0 \end{cases}$, määravad abstsissiteljel poolsirge (ilma alguspunktita);

c) võrrand $y = \sin x$ määrab sinusoidi; võrrand $\sin x = 0$ määrab y -teljega paralleelsete sirgete hulga; nende sirgete lõikepunkte x -teljega määrab võrrandisüsteem $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0 \end{cases}$, s.o.

see süsteem esitab punktihulka $(k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

d) võrrand $x^2 - y^2 = 0$ e. $(x + y)(x - y) = 0$ on rahuldatud iga punkti korral, mille koordinaatide puhul kehtib kas $x + y = 0$ või $x - y = 0$; seega võrrand $x^2 - y^2 = 0$ määrab kaks sirget - koordinaatnurkade poolitajad;

e) võrrand $y = ax + b$ määrab sirge, mille tõus $a = \tan \alpha$ ja mis lõikab y -telge punktis $(0, b)$;

f) võrrand $x^2 + y^2 = 0$ määrab hulga, mis koosneb ühest punktist - koordinaatide algusest;

g) võrrand $x^2 + y^2 + 1 = 0$ määrab tühja hulga - seda võrrandit ei rahulda ühegi punkti koordinaadid.

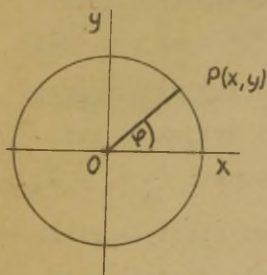
29. Ringjoone definitsiooni kohaselt asub tasandi suvaline punkt $P(x, y)$ ringjoonel, mille keskpunkt on $C(a, b)$ ja raadius r , parajasti siis, kui $CP = r$ e. $CP^2 = r^2$. Järelikult (8.4a põhjal) on ringjoone võrrand

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (9.5)$$

Tegemist on ilmutamata võrrandiga. Erijuhul, kui keskpunkt C ühtib koordinaatide alguspunktiga (joon. 82), kõneldakse ringjoone kanoonilisest võrrandist

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (9.5a)$$

Selle lahendamisel tekib ilmutatud võrrand $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, mille puhul on tegemist kahese funktsiooniga.



Joon. 82.

Punkt $P(x, y)$ asub ringjoonel siis, kui

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (9.5b)$$

Need võrrandid määravad nurga φ iga väärtuse korral üheselt ringjoone punkti, seega φ on parameeter ja (9.5b) on ringjoone parameetrilised võrrandid.

(9.5) on sulgude avamise ja koondamise teel alati kirjutatav järgmiselt:

$$x^2 + y^2 + px + qy + s = 0, \quad (9.6)$$

kus p, q, s on tuntud arvkoordajad. Ilmneb, et ringjoone kõige üldisemaks analüütiliseks esituseks on kahe muutujaga teise astme võrrand, mille ruutliikmete koordajad on võrdsed (näit. ühed) ja mis ei sisalda liiget tundmatute korrutisega.

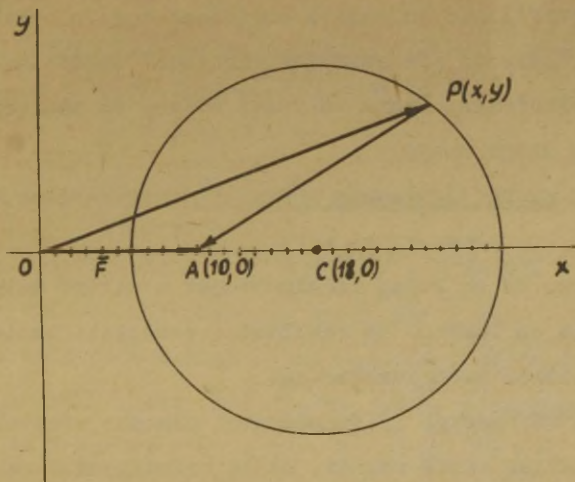
Iga võrrandit kujul (9.6), saab teisendada täisruute sisaldavale kujule (9.5):

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(p^2 + q^2 - 4s).$$

Vasakut poolt saab tõlgendada punktide (x, y) ja $(-\frac{p}{2}, -\frac{q}{2})$ vahelise kauguse runduna; parem pool on konstantne. Järelikult (9.6) määrab ringjoone, kui vaid $p^2 + q^2 - 4s > 0$. Kui $p^2 + q^2 - 4s < 0$, siis räägitakse imaginaarsest ringjoonest; sellisel juhul (9.6) ei määra ühtki punkti. Erijuhul, kui $p^2 + q^2 - 4s = 0$, määrab (9.6) ainult ühe punkti $(-\frac{p}{2}, -\frac{q}{2})$.

30. Antud tungi saab lõpmata paljudel viisidel lahutada kaheks komponendiks nii, et komponentide suhe võrdub antud arvuga. Võib pakkuda praktilist huvi osata kiiresti leida mõni võimalikest tungikolmnurkadest. Koostame sellel eesmärgil võrrandi punktihulga jaoks, mille moodustavad tungikolmnurkade kolmanda tipu kõik võimalikud asendid (joon. 83) juhul,

kui $F = 10$ kG ja komponentide suhe on $3 : 2$.



Joon. 83.

Olgu koordinaatide alguspunktiks tungi \bar{F} rakenduspunkt ja x -telg \bar{F} -suunaline. Siis määrab tungikolmnurga tingimus

$$\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{PA}|} = \frac{3}{2} \quad \text{e.} \quad 4OP^2 = 9PA^2,$$

kus A on vektori \bar{F} lõpp-punkt ja P on tungikolmnurga kolmas tipp. Et vektorite \overline{OA} , \overline{OP} ja \overline{PA} koordinaadid on vastavalt $(10, 0)$, (x, y) ja $(10 - x, -y)$, siis (8.4a) tõttu on tipu P abil kirjeldatud punktihulk määratud võrrandiga

$$x^2 + y^2 - 36x + 180 = 0.$$

Ilmneb, et tegemist on ringjoonega, mille võrrand täisruutu-des on

$$(x - 18)^2 + y^2 = 144,$$

järelikult on selle ringjoone keskpunkt $C(18, 0)$ ja raadius

$r = 12$.

2. Pinna võrrand.

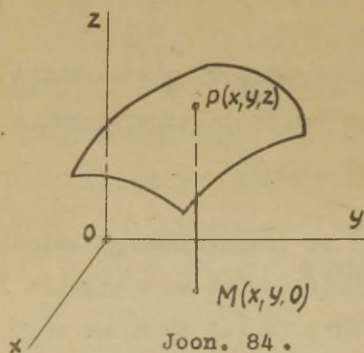
Geomeetriliste kujundite uurimisel ruumis tekib vajadus pindade (üldiselt kõverpindade, erijuhul tasandite) esitamiseks võrranditega. Pinna võrrandi mõiste on analoogiline tasandilise joone omaga.

Antud pinna ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$F(x, y, z) = 0, \quad (9.7)$$

kus $F(x, y, z)$ on kolme reaalmuutujat sisaldav matemaatiline avaldis ja võrrand on rahuldatud parajasti vaadeldava pinna punktide koordinaatidega.

Antud võrrandiga (9.7) määratud pinnaks nimetatakse selliste punktide hulka ruumis, mille koordinaadid rahuldavad seda võrrandit¹.



Võrrandi (9.7) lahendamisel ühe muutuja, näit. z suhtes, saadakse pinna ilmutatud võrrand

$$z = f(x, y). \quad (9.8)$$

Selle kahe muutuja funktsiooni geomeetiline tähendus ilmneb joonisel 84: pinna

¹ See pinna analüütiline definitsioon on liiga üldine; on vaja püstitada veel teatud lisatingimused, mida käesolevas kursuses ei vaadelda (vrd. joone analüütilise definitsiooniga §9, p. 1).

punkt $P(x, y, z)$ seab argumentide väärtuste paarile (x, y) , s.o. oma projektsioonile $M(x, y, 0)$ xy -tasandil vastavusse kauguse $MP = z = f(x, y)$.

Pinna parameetriliseks esituseks nimetatakse kahe reaalmuutuja u ja v kolme funktsiooni süsteemi

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (9.9)$$

kui nende funktsioonide väärtusteks on parajasti vaadeldava pinna punktide koordinaadid ja muutujate u ning v kõigi väärtuste hulk määrab kogu pinna kui punktihulga. Kui lähendada mingid kaks neist võrrandeist, näit. kaks esimest, muutujate u ja v suhtes - $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ - ning asendada need muutujad viimases võrrandis saadud avaldistega, siis tekib pinna ilmutatud võrrand:

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y).$$

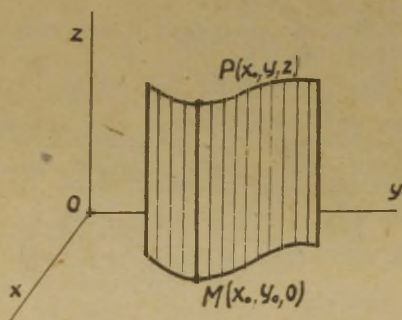
Kahe pinna $F_1(x, y, z) = 0$ ja $F_2(x, y, z) = 0$ lõikepunktide hulga määrab võrrandisüsteem

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (9.10)$$

Võrrandis (9.7) võib üks või koguni kaks muutujat puududa; sellisel juhul võrrand ei kitsenda nende suuruste muutumist.

Kui puudub kaks muutujat, näit. y ja z , siis esineb ühe muutujaga võrrand $F(x) = 0$. Olgu selle võrrandi lahendid x_1, x_2, \dots , siis koosneb pind yz -tasandiga paralleelsetest tasanditest $x = x_1, x = x_2, \dots$ (vt. § 8 p.5(2)).

Ühe muutuja, näit. z , puudumise korral meenutab pinna võrrand $F(x, y) = 0$ väliselt tasandilise joone ilmutamata võrrandit. Olgu (x_0, y_0) selle võrrandi mingi lahend, siis punkt $P(x_0, y_0, z)$ asub pinnal muutuja z iga väärtuse korral. Teatavasti kirjeldab punkt kahe fikseeritud koordinaadi $x = x_0, y = y_0$ puhul z -teljega paralleelse sirge (§ 8, p. 5(2)). Järelikult on vaadeldav pind selliste sirgete hulk (joon. 85). Pinna punkti $P(x_0, y_0, z)$ läbiv sirge lõikab xy -



Joon. 85.

tasandit punktis $M(x_0, y_0, 0)$. Selliste lõikepunktide hulk on pinna ja xy -tasandi lõikejoon, mille määrab võrrandisüsteem

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad (9.11)$$

Vaadeldava pinna kirjeldab sirge PM , mis liigub ruumis,

jäädes oma algasendiga paralleelseks ja lõigates joont (9.11). Sellist pinda nimetatakse silindriliseks pinnaks e. silindriks, iga sirget PM nimetatakse tema sirgjooneliseks moodustajaks ja lõikejoont xy -tasandiga - tema juhtjooneks.

Kui lahendada võrrand $F(x, y) = 0$ ühe muutuja, näit. y suhtes, siis on juhtjoone võrrandeil ilmutatud kuju:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = 0. \end{cases}$$

Niisiis esitab kahe muutujaga võrrand ruumis silindrilist pinda, mille moodustajad on paralleelsed puudevale muu-

tujale vastava koordinaatteljega.

3. Joone võrrandid ruumis.

Joone analüütiline käsitlemine ruumis on mõnevõrra keerukam kui tasandilisel juhul. Tuleb silmas pidada asjaolu, et ruumilist joont ei saa esitada ühe võrrandiga.

Ka ruumis võib joont tõlgendada liikuva punkti trajektoria. Sellise vaatlusviisi puhul sõltuvad punkti asend ja sellepärast ka tema koordinaadid ajast t , s.t. joont kui punkti trajektoori esitavad kolm aja funktsiooni:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (9.12)$$

Need seosed on joone parameetrilised võrrandid ruumis.

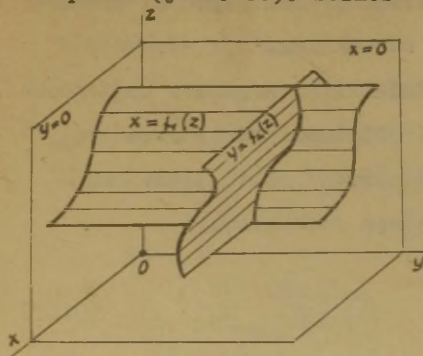
Uldiselt mõistetakse nendes võrrandites parameetri t allmistahes reaalmuutujat, mille igale väärtusele $t = t_0$ vastab joonel üheselt määratud punkt (x_0, y_0, z_0) (kus $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$), kusjuures t kõigi väärtuste hulk määrab kogu joone kui punktihulga.

Kui võrrandites (9.9) fikseerida üks muutujaist u ja v , saame joone parameetrilised võrrandid. See joon asetseb süsteemiga (9.9) määratud pinnal.

Kui elimineerida võrranditest (9.12) parameeter t , s.t. lahendada üks võrranditest t suhtes ja asetada tulemus ülejäänud võrranditesse, siis saadakse kaks sama argumendi funktsiooni. Olgu näit. $t = t(z)$, siis esitab joont ilmutatud võrrandsüsteem

$$\begin{cases} x = f_1(z), \\ y = f_2(z). \end{cases} \quad (9.13)$$

Belneva põhjal (§ 9, p. 2) määrab kumbki võrrand silindrilise pinna (joon. 86). Esimese silindri moodustajad on paralleelsed y -teljega ja juhtjoon



Joon. 86.

leelsed xz -tasandiga:

$$\begin{cases} x = f_1(z) \\ y = 0; \end{cases}$$

teise silindri moodustajad on paralleelsed x -teljega ja juhtjoon on lõige yz -tasandiga:

$$\begin{cases} y = f_2(x), \\ x = 0. \end{cases}$$

Vaadeldav joon, mida esitab süsteem (9.13), on nende silindrite lõikejoon.

Üldiselt saab joont esitada mistahes kahe teda läbiva pinna (mitte tingimata silindriliste) lõikejoonena, s.t. võrrandisüsteemiga (9.10):

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Sel viisil esitatud joone ja pinna $F(x, y, z) = 0$ lõikepunktide leidmiseks tuleb lahendada süsteem kolme võrrandi ja kolme tundmatuga:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Kui joon on antud oma parameetriliste võrrandite (9.12) abil,

siis võimaldab vahetu asendus pinna võrrandisse elimineerida kõik koordinaatmuutujad. Tekkinud ühe tundmatuga võrrandi $\Phi(t) = 0$ lahendid t_1, t_2, \dots on joone ja pinna lõikepunktide määravad parameetri väärtused, mille asetamisel süsteemi (9.12) saadakse lõikepunktide koordinaadid.

Kui joone võrrandi (9.3) või pinna võrrandi (9.7) vasakut poolt saab lahutada tegureiks:

$$F(x, y) \equiv F_1(x, y) \cdot F_2(x, y) = 0,$$

$$F(x, y, z) \equiv F_1(x, y, z) \cdot F_2(x, y, z) = 0,$$

siis on võrrand rahuldatud parajasti nende punktide korral, mille koordinaadid rahuldavad vähemalt ühe teguri abil moodustatud võrrandit, s.o. mille puhul kas $F_1(x, y) = 0$ või $F_2(x, y) = 0$, või vastavalt $F_1(x, y, z) = 0$ või $F_2(x, y, z) = 0$. Sellisel juhul öeldakse, et vaadeldav joon või pind on laguv: ta koosneb siis kahest joonest või pinnast. Näit. joon $x^2 - y^2 = 0$ on laguv (näide 28 d).

Jooned (pinnad), millest koosneb laguv joon (pind), võivad lõikuda; lõikepunkte määrab võrrandisüsteem

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Erijuhul võivad tegurid ühtida: $F_1(x, y) \equiv F_2(x, y)$ või $F_1(x, y, z) \equiv F_2(x, y, z)$; sellisel juhul räägitakse kahekordsest joonest või pinnast. Suurema arvu tegurite puhul võib esineda mitmekordne joon või pind.

Näited.

31. Tõlgendame näites 28 vaadeldud võrratusi ja võrrandeid ruumis. Teha iseseisvalt vastavad joonised!

- a) $|x| \leq 1$: ruumi osa paralleelsete tasandite $x = 1$ ja $x = -1$ vahel;

$$\left. \begin{array}{l} |x| \leq 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} : \text{xz-tasandi osa sirgete } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x = -1, \\ y = 0 \end{cases}$$

vahel;

$$\left. \begin{array}{l} |x| \leq 1, \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} : \text{abstsisstelje lõik } [-1, 1];$$

- b) $x < 0$: poolruum ühel pool yz-tasandit (selle tasandita);

$$\left. \begin{array}{l} x < 0, \\ y = 0 \end{array} \right\} : \text{xz-tasandi pooltasand ühel pool z-telge (selle teljeta);}$$

$$\left. \begin{array}{l} x < 0, \\ y = 0, \\ z = 0 \end{array} \right\} : \text{poolsirge abstsissteljel (koordinaatide alguspunktita);}$$

- c) $y = \sin x$: silindriline pind, mille moodustajad on paralleelsed z-teljega ja juhtjooneks on sinusoid xy-tasandil;

$$\left. \begin{array}{l} y = \sin x, \\ y = 0 \end{array} \right\} : \text{paralleelsirged xz-tasandil, mis läbivad punkte } (k\pi, 0, 0), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \sin x, \\ y = 0, \\ z = 0 \end{array} \right\} : \text{punktide } k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ hulk abstsissteljel;}$$

- d) $x^2 - y^2 = 0$: kaks tasandit, mis läbivad z-telge ja lõikavad xy-tasandit mööda koordinaatnurkade poolitajaid;

- e) $y = ax + b$: z-teljega paralleelne tasand, mis lõikab

xy-tasandit mööda sirget $\begin{cases} y = ax + b, \\ z = 0; \end{cases}$

f) $x^2 + y^2 = 0$: z-telg;

g) $x^2 + y^2 + 1 = 0$: tühi hulk.

32. Ringjoone käsitus (vt. näide 29) on oluliste muutusteta ülekantav sfääri (kerapinna) juhule. Kontrollida iseseisvalt, et

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad (9.14)$$

on sfääri võrrand, kusjuures $C(a, b, c)$ on sfääri keskpunkt ja r on raadius!

Võrrandit

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (9.15)$$

nimetatakse sfääri kanooniliseks võrrandiks.

Veenduda, et

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad (9.16)$$

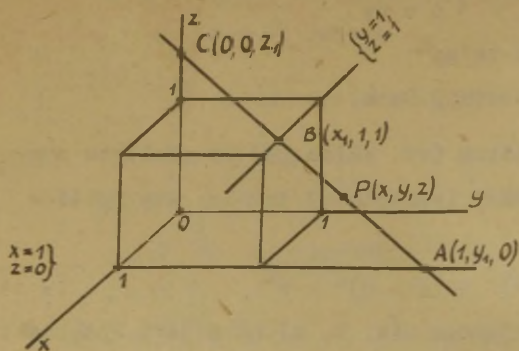
on sfääri võrrand, niipea kui $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$!

Näites 30 vaadeldud tungi F lahutamisel komponentideks antud suhtes on mõtet ka ruumis. Näidata, et tungikolmnurga kolmanda tipu asendite hulk on sfäär!

33. Lõigaku ruumis liikuv sirge igas oma asendis kolme kiivsirget, millel asetsevad ühikkuubi kolm serva. Koostame sirge liikumisel tekkiva pinna võrrandi.

Valime kuubi ühe tipu reeperi alguspunktiks ja kuubi servi sisaldavad sirged koordinaattelgedeks (joon. 87). Olgu vaadeldavateks kiivsirgeteks $\begin{cases} x = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1, \\ z = 1, \end{cases}$ ja z-telg. Lõigaku liikuv sirge neid sirgeid punktides A, B ja C . Need punktid liiguvad mööda kiivsirgeid, seetõttu on x_1, y_1 ja z_1

muutuvad suurused.



Joon. 87.

$1 - y_1, 1)$ ja $(-1, -y_1, z)$, siis tulenevad kollineaarsuse tingimusest (8.5) seosed

$$\frac{x - 1}{x_1 - 1} = \frac{y - y_1}{1 - y_1} = \frac{z}{1},$$

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{-y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

Pinna võrrand on seos tema suvalise punkti koordinaatide x , y ja z vahel. Ilmneb, et selle seose leidmiseks on piisav valida saadud nelja võrrandi süsteemist kaks võrrandit, nimelt

$$\begin{cases} \frac{y - y_1}{1 - y_1} = z, \\ x - 1 = \frac{y - 1}{y_1} \end{cases}$$

ja elimineerida sellest süsteemist parameeter y_1 . Pärast lihtsaid teisendusi saame pinna võrrandi:

$$xy + yz - xz - y = 0.$$

Ruumi suvaline punkt $P(x, y, z)$ asetseb otsitaval pinnal parajasti siis, kui ta on kollineaarne punktidega A , B ja C , s.t. $\overline{AP} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{AC}$. Et nende vektorite koordinaadid on vastavalt $(x - 1, y - y_1, z)$, $(x_1 - 1,$

4. Algebralised jooned ja pinnad.

Joonte ja pindade uurimisel on üldiselt vajalikud matemaatilise analüüsi meetodid. Analüütilises geometrias piirdatakse algebra vahenditega ja eristatakse selliste joonte ja pindade klass, mille puhul puhtalgebraline uurimine annab küllaldasi tulemusi. Niisuguseid jooni ja pindu nimetatakse algebralisteks.

Võrrandeid $F(x, y) = 0$ ja $F(x, y, z) = 0$ nimetatakse algebralisteks võrranditeks, kui nende vasakud pooled on täisarvonaalsed hulklükmed muutujate x, y ja z suhtes, s.t. on summad, mille iga liige on kirjutatav kujul $ax^m y^n$ või $ax^m y^n z^p$, kus a on mingi reaalarv ja astendajad m, n, p on mittenegatiivsed täisarvud. Muutujate astendajate summat $m + n$ või $m + n + p$ nimetatakse liikme astmeks; kõrgeima astme liikmeid võrrandis - pealikkmeteks (neid võib olla mitu); pealikkmete astet nimetatakse algebralise võrrandi astmeks.

Jooni ja pindu nimetatakse algebralisteks, kui neid saab afiinses koordinaadistikus esitada algebraliste võrranditega. Algebralise võrrandi astet nimetatakse vastava joone või pinna järguks.

Tasandilise algebralise joone võrrandil on lihtsamate järkude puhul pärast sarnaste liikmete koondamist järgmine kuju:

1. järku joon: $ax + by + c = 0$,
2. järku joon: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$,
jne.

Kordajaiks $a, b, c \dots$ on mingid reaalarvud, mille hulgas võib olla ka nulle. Esimese astme võrrandis kordajad a ja b , teise astme võrrandis a, b ja c ei saa olla korraga nullid.

Algebraalise pinna võrrandid on pärast sarnaste liikmete koondamist:

1. järku pind: $ax + by + cz + d = 0$,

2. järku pind: $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$,

jne.

Siin peab kordajaist a, b, c või vastavalt a, b, \dots, f vähemalt üks erineva nullist.

Võrrandid $x = 0$, $x + y = 0$, $x - y = 0$, $y = ax + b$ on esimese astme võrrandid; $x^2 - y^2 = 0$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ on teise astme võrrandid. Nad määravad tasandil vastavalt esimest ja teist järku algebraised jooned, ruumis - esimest ja teist järku algebraised pinnad. Võrrandid $2x + 5y - 7z + 1 = 0$ ja $xy + yz - xz - y = 0$ määravad vastavalt esimest ja teist järku algebraised pinnad.

Uldisi algebralisi jooni ja pindu uuritakse algebraises geomeetrias; analüütilise geomeetria all mõistetakse harilikult viimase seda osa, milles põhilisteks uurimisobjektideks on esimest ja teist järku algebraised jooned ja pinnad.¹

¹ Mittealgebralisi jooni ja pindu nimetatakse transtsendentseteks. Näit. võrrandid $y = \sin x$, $2^x - 3 = 0$, $\log x + y + 1 = 0$, $3\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - z = 0$ määravad transtsendentseid jooni ja pindu.

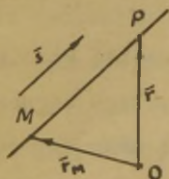
Käesolevas peatükis vaadeldakse järgnevalt esimest järku algebralisi jooni ja pindu. Ilmneb, et leidub ainult üks selline joon - sirge, ja ainult üks pind - tasand. Analüütilise geomeetria osa, milles käsitletakse sirgeid ja tasandeid, nimetatakse lineargeomeetriaks.

§ 10. Sirge ja tasandi võrrandid

1. Sirge vektorvõrrandid.

Sirge on täielikult määratud, kui on teada tema üks punkt ja siht.

Sirge sihi määrab sirgega paralleelne vektor, mida nimetatakse sirge sihivektoriks. Sihivektori suund (üks kahest võimalikust) ja moodul on ebaolulised: kui \vec{s} on sirge sihivektor, siis on seda ka vektor $k\vec{s}$ iga skalaari $k \neq 0$ korral. Sihivektoriks ei saa muidugi olla nullvektor; seetõttu tuleb eeldada, et $\vec{s} \neq 0$.



Joon. 88.

Olgu antud sirge punkt M koha-vektoriga \vec{r}_m ja sihivektor \vec{s} . Suvaline (muutuv) punkt P koha-vektoriga \vec{r} asetseb sirgel parajasti siis, kui vektor $\vec{MP} = \vec{r} - \vec{r}_m$ kuulub sirgele (joon.88), s.t. kui $\vec{r} - \vec{r}_m \parallel \vec{s}$. See kollineaarsuse nõue on samaväärne vektorvõrdusega $\vec{r} - \vec{r}_m = t\vec{s}$ ehk

$$\vec{r} = t\vec{s} + \vec{r}_m. \quad (10.1)$$

Saadud seos on sirge parameetiline vektorvõrrand: ta seab skalaarmuutuja (parameetri) t igale väärtusele vastavusse vektormuutuja \vec{r} kindla väärtuse - sirge teatud punkti kohevaktori. Võrrandit rahuldavad parajasti sirge punktide kohevektorid.

Sirge võib olla määratud oma kahe punktiga M ja N . Sellisel juhul on vektor $\vec{MN} = \vec{r}_N - \vec{r}_M$ sirge sihivektor ja võrrandi (10.1) saab kirjutada järgmiselt:

$$\vec{r} = t(\vec{r}_N - \vec{r}_M) + \vec{r}_M.$$

Sirge on esitatav võrrandiga (10.1) ühteviisi nii tasandil kui ka ruumis.

Ruumis saab kollineaarsuse tingimust $\vec{r} - \vec{r}_M \parallel \vec{s}$ väljendada veel teisiti - vektorkorrutise abil:

$$[\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{s}] = 0 \quad (10.2)$$

ehk

$$[\vec{r}, \vec{s}] = \vec{c}, \text{ kus } \vec{c} = [\vec{r}_M, \vec{s}].$$

Et vektorkorrutis on defineeritud ruumis, siis ei saa seda võrrandit kasutada tasandil.

Tasandil on võimalik fikseerida sirge sihti ka sirgega ristuva sihi - sirge normaalsihti - kaudu. Sirge normaalsiht võib olla antud vektori abil. Normaalsihti määravat vektorit nimetatakse sirge normaalvektoriks. Normaalvektori suund (üks kahest võimalikust) ja moodul on ebaolulised: kui \vec{n} on sirge normaalvektor, siis on seda ka vektor $k\vec{n}$ iga skalaari $k \neq 0$ korral. Normaalvektoriks ei saa olla nullvektor.

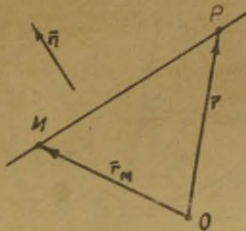
Sirge kui punktihulga määrab tingimus $\vec{r} - \vec{r}_M \perp \vec{n}$ (joon. 89), s.t. vektorvõrrand

$$(\bar{r} - \bar{r}_M, \bar{n}) = 0 \quad (10.3)$$

ehk

$$(\bar{r}, \bar{n}) = c, \text{ kus } c = (\bar{r}_M, \bar{n}).$$

Seda võrrandit ei saa kasutada sirge määramiseks ruumis, sest vektor \bar{n} ei määra ruumis oma ristsihti üheselt.



Joon. 89.

Erijuhul, kui sirge läbib reeperi alguspunkti 0, saab tuletatud võrrandeid lihtsustada, võttes $M = 0$. Siis $\bar{r}_M = \bar{r}_0 = \bar{0}$. Sel puhul saame vastavalt

$$\bar{r} = t\bar{s}, \quad (10.1a)$$

$$[\bar{r}, \bar{s}] = 0, \quad (10.2a)$$

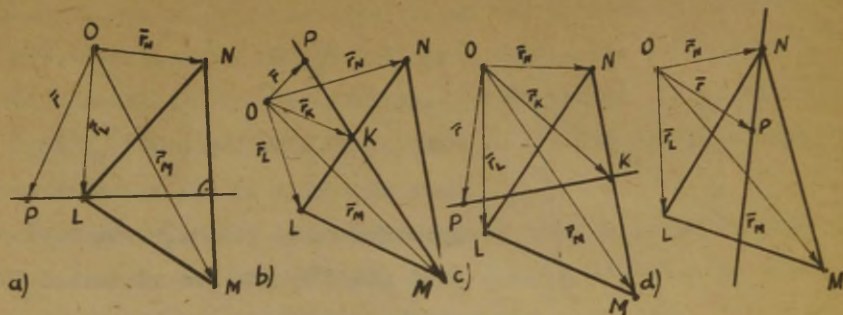
$$(\bar{r}, \bar{n}) = 0. \quad (10.3a)$$

Võrrandist (10.1a) ilmneb, et parameetrit t võib lugeda sirge punkti affiinseks koordinaadiks reeperi $\{0; \bar{s}\}$ suhtes. Selline tähendus on parameetril ka üldisel juhul (10.1), kui lugeda reeperiks sirgel paari $\{M; \bar{s}\}$.

Tuletasime vektorvõrrandid antud sirge jaoks. Vektoralgebra käsitlemisel veendusime vastupidises: iga vaadeldud tüüpi võrrand (10.1-3) määrab sirge - kui eeldada, et vektormuutuja \bar{r} on rakendatud reeperi alguspunkti.

Näited.

34. Lahendame tasandil järgmise ülesande: Kolmnurga tipud on määratud kohavektoritega $\bar{r}_L, \bar{r}_M, \bar{r}_N$; kirjutada järgmiste sirgete võrrandid: a) sirge, millel asetseb tipust L tõmmatud kõrgus, b) sirge, millel asetseb tipust M tõmmatud mediaan, c) külje MN keskristsirge, d) sisenuurga N poolitaja.



Joon. 90.

Kasutame lahendamisel joonist 90.

a) Et $\vec{n} = \overline{MN} = \vec{r}_N - \vec{r}_M$, siis $(\vec{r} - \vec{r}_L, \vec{r}_N - \vec{r}_M) = 0$.

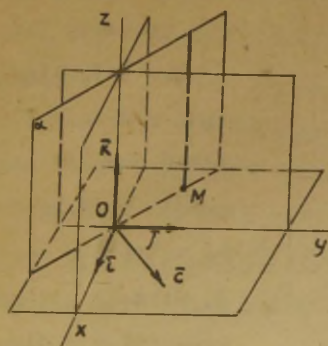
b) Olgu K külje LN keskpunkt, siis $\vec{r}_K = \frac{1}{2}(\vec{r}_L + \vec{r}_N)$ ja $\vec{s} = \overline{MK} = \vec{r}_K - \vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_L + \vec{r}_N - 2\vec{r}_M)$; järelikult $\vec{r} = t(\vec{r}_L + \vec{r}_N - 2\vec{r}_M) + \vec{r}_M$.

c) Olgu K külje MN keskpunkt, siis $\vec{r}_K = \frac{1}{2}(\vec{r}_M + \vec{r}_N)$. Et $\vec{r} = \overline{NK} = \vec{r}_K - \vec{r}_N$, siis $(\vec{r} - \frac{1}{2}(\vec{r}_M + \vec{r}_N), \vec{r}_M - \vec{r}_N) = 0$ ehk $(\vec{r}, \vec{r}_M - \vec{r}_N) = \frac{1}{2}(\vec{r}_M^2 - \vec{r}_N^2)$.

d) Olgu külgedele NL ja NM sihilised ühikvektorid \vec{a}_0 ja \vec{b}_0 , s.t. $\vec{a}_0 = \frac{\vec{r}_L - \vec{r}_N}{|\vec{r}_L - \vec{r}_N|}$ ja $\vec{b}_0 = \frac{\vec{r}_M - \vec{r}_N}{|\vec{r}_M - \vec{r}_N|}$. Et $\cos \hat{LNP} = \cos \hat{MNP}$, siis $\frac{(\vec{r} - \vec{r}_N, \vec{a}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_N|} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_N, \vec{b}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_N|}$ ja siit $(\vec{r} - \vec{r}_N, \vec{a}_0 - \vec{b}_0) = 0$.

35. Leiame sirged, mille määravad vektorvõrrandid

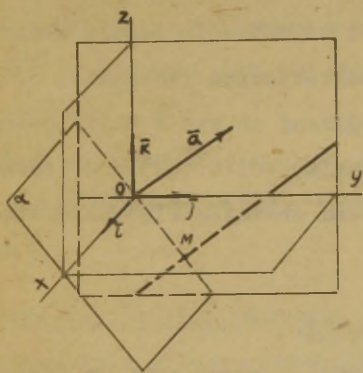
a) $[\vec{r}, \vec{k}] = \vec{c}$, b) $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{i}$, c) $[\vec{r}, \vec{p}] = \vec{c}$, kus \vec{p} on koplanaarne vektoritega \vec{i} ja \vec{j} .



Joon. 91.

kus skalaar λ on võrrandi $\lambda[\bar{k}, \bar{c}] = \bar{c}$ lahend, s.t.

$\lambda \bar{k}^2 \bar{c} = \bar{c}$, $\lambda = \frac{1}{\bar{k}^2} = 1$. Niisiis punkti M määrab tingimus $\bar{r}_M = [\bar{k}, \bar{c}]$. Nüüd kehtib võrdus $[\bar{r}, \bar{k}] = [\bar{r}_M, \bar{k}]$, s.o. $[\bar{r} - \bar{r}_M, \bar{k}] = 0$. Järelikult $\bar{r} - \bar{r}_M \parallel \bar{k}$ ja $\bar{r} = t\bar{k} + \bar{r}_M$: vaadeldav sirge on paralleelne z-teljega ning läbib punkti M.



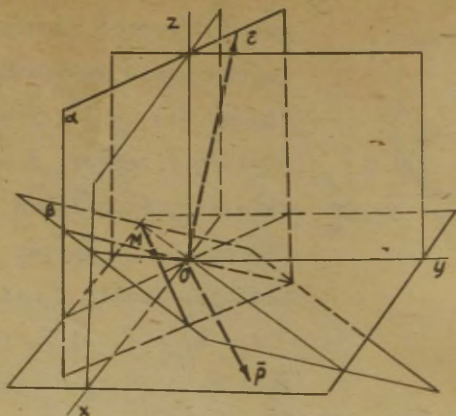
Joon. 92.

deldav sirge läbib punkti M vektori \bar{a} sihis.

c) Rakendame vektori \bar{p} reeperi alguspunkti, siis ta aset-

a) Et $\bar{c} \perp \bar{k}$, siis asetseb \bar{c} (reeperi alguspunkti rakendatuna) xy-tasandil (joon. 91) ja $\bar{c} \perp \bar{r}$ tõttu asetseb \bar{r} vektori \bar{c} risttasandil α (mis läbib z-telge). Määrame α ja xy-tasandi lõikesirgel punkti M nii, et $[\bar{r}_M, \bar{k}] = \bar{c}$. Et $\bar{r}_M \perp \bar{k}$ ja $\bar{r}_M \perp \bar{c}$, siis $\bar{r}_M = \lambda[\bar{k}, \bar{c}]$,

b) \bar{a} ja \bar{r} asetsevad yz-tasandil (joon. 92). Olgu α vektori \bar{a} risttasand, mis läbib punkti O. Määrame eelnevas näidatud viisil punkti M tasandi α ja yz-tasandi lõikesirgel, nii et $[\bar{r}_M, \bar{a}] = 1$. Siis $[\bar{r} - \bar{r}_M, \bar{a}] = 0$, s.t. $\bar{r} - \bar{r}_M \parallel \bar{a}$. Järelikult $\bar{r} = t\bar{a} + \bar{r}_M$: vaa-



Joon. 93

kesirgel punkti M nii, et $[\bar{r}_M, \bar{p}] = \bar{c}$, siis $[\bar{r} - \bar{r}_M, \bar{p}] = 0$, s.t. $\bar{r} - \bar{r}_M \parallel \bar{p}$. Järelikult $\bar{r} = t\bar{p} + \bar{r}_M$: vaadeldav sirge läbib punkti M vektori \bar{p} sihis.

36. Ortonormeeritud reeperi korral võib lugeda abstsissitelje sihivektoriks \bar{i} ja normaalvektoriks (tasandil) \bar{j} . Järelikult abstsissitelje vektorvõrrand on kas $\bar{r} = t\bar{i}$ (tasandil ja ruumis), $[\bar{r}, \bar{i}] = 0$ (ruumis) või $(\bar{r}, \bar{j}) = 0$ (tasandil). Kas need võrrandid määravad abstsissitelje ka mitteortonormeeritud reeperi puhul?

2. Sirge parameetriselised võrrandid.

Lineaargeomeetria käsitlemisel - käesolevas ja järgmises paragrahvis - kasutame ainult ristkoordinaate, ehkki suur osa tulemusi on üldisema affiinse iseloomuga.

Olgu antud sirge sihivektor $\bar{s}(X, Y, Z)$ ja sirge mingi punkt $M(x_0, y_0, z_0)$. (10.1) tõttu asetseb punkt $P(x, y, z)$

seb xy -tasandil (joon. 93). Olgu α tema ristasand, mis läbib reeperi alguspunkti O . Rakendame ka vektori \bar{c} punkti O , siis ta asetseb tasandil α . Olgu β vektori \bar{c} ristasand, mis läbib punkti O . Valime tasandite α ja β liiki-

sellel sirgel parajasti siis, kui $\vec{r}_P = t\vec{s} + \vec{r}_M$. Kirjutame selle vektorvõrrandi koordinaatkujus kolme skalaarvõrrandi süsteemina:

$$\begin{cases} x = tX + x_0, \\ y = tY + y_0, \\ z = tZ + z_0. \end{cases} \quad (10.4)$$

Need ~~on~~ sirge parameetrilised võrrandid ruumis (vrd. 9.12): skalarvõrrandi t iga väärtus määrab sirgel üheselt teatud punkti.

Tasandil on sirgel kaks parameetrilist võrrandit (vrd. 9.1):

$$\begin{cases} x = tX + x_0, \\ y = tY + y_0. \end{cases} \quad (10.4a)$$

Iga võrrandisüsteemi (10.4), milles X , Y ja Z pole kõik nullid, saab kirjutada vektorvõrrandina (10.1). Järelikult saab iga sellist võrrandisüsteemi alati vaadelda teatud sirge parameetrilise esitusena ruumis. See märkus kehtib (tasandil) ka süsteemi (10.4a) kohta, milles X ja Y pole mõlemad nullid.

Need tulemused kehtivad igas afiinses koordinaadistikus, sest nende aluseks on ainult lineaartehted vektoritega (vt. § 8 p.4).

3. Sirge kanooniline võrrand.

Järgnevalt pöörame tähelepanu sirgele tasandil.

Tähistaga $\vec{s}(X, Y)$, $M(x_0, y_0)$ ja $P(x, y)$ endiselt sirge sihivektorit, antud punkti ja suvalist punkti, siis $\vec{MP} \parallel \vec{s}$ ja (8.5) tõttu kehtib

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} \quad (10.5)$$

See tingimus on tarvilik ja piisav punkti P kuulumiseks sirgele, s.t. on sirge võrrand. Teda nimetatakse sirge kanooniliseks võrrandiks.

(10.5) on süsteemi (10.4a) vahetu järeldus; selles veendumiseks tuleb süsteemi kumbki võrrand lahendada parameetri t suhtes. Vastupidi, kanoonilisest kujust saab alati üle minna parameetrilisele. Selleks tuleb suhete ühine väärtus tähistada skalaarmuutujaga t:

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = t$$

ja avaldada siit x ja y t kaudu. Seega on võrrand (10.5) ja süsteem (10.4a) algebraliseks samaväärsed.

Erijuhul, kui $X = 0$, kehtib (10.4a) tõttu $x = x_0$, s.t. sirge on paralleelne ordinaatteljega (teisisi: kui $X = 0$, siis $\bar{x} \parallel \bar{J}$). Analoogiliselt $Y = 0$ puhul on sirge paralleelne abstsissiteljega: $y = y_0$. Niisiis juhul, kui kanoonilise võrrandi üks nimetaja on null, tuleb võrrutada nulliga ka vastav lugeja; võrrandi teine pool jäetakse sel puhul ära - teine koordinaat jääb suvaliseks.

4. Sirge taandatud võrrand.

Kanoonilise võrrandi, milles $X \neq 0$, saab alati kirjutada järgmiselt:

$$y - y_0 = \frac{Y}{X} (x - x_0). \quad (10.6)$$

Et sihivektoriks võib olla iga vektor $k\bar{s}$, siis on sihi määramisel oluline ainult sihivektori koordinaatide suhe $X : Y$

või $Y : X$. Võrrandi (10.6) saab tähistuste $\frac{Y}{X} = a$ ja $y_0 = -ax_0 = b$ abil kirjutada lihtsamal kujul

$$y = ax + b, \quad (10.7)$$

mida nimetatakse sirge taandatud võrrandiks (lineaarse sõltuvuse keskkoolist tuttav analüütiline esitus).

Taandatud kujust on alati võimalik üle minna kanoonilisele:

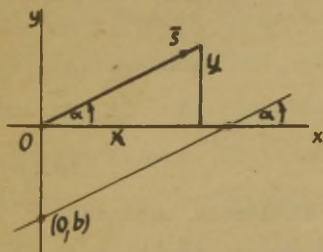
$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - b}{a},$$

millest ilmneb, et sirge läbib punkti $M(0, b)$ vektori $\bar{s}'(1, a)$ sihis.

Samaväärsuse tõttu kanoonilise võrrandiga esitab (10.7) sirget igas affiinses koordinaadistikus.

Kordajat b nimetatakse sirge algordinaadiks, sest sirge lõikab ordinaattelge punktis $(0, b)$. Selline tähendus on kordajal b igas affiinses koordinaadistikus.

Kordajat a nimetatakse sirge tõusuks; tema tähendus sõltub reeperi valikust. Ristkoordinaadistikus (joon. 94)



Joon. 94.

$$a = \frac{Y}{X} = \tan \alpha. \quad (10.8)$$

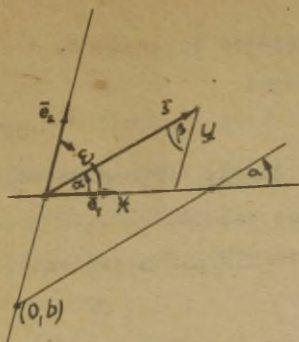
Sirge tõusunurka $\alpha = (\bar{1}, \hat{\bar{s}})$

loetakse positiivses suunas, mille määrab reeper. Iga nurk lõpmatust seerlast $\alpha + k\pi$

($k = 0, 1, 2, \dots$) määrab sama

tõusu; piisav on lugeda $0 \leq \alpha < \pi$

Kaldkoordinaatides (joon. 95) $X = \frac{\text{pr}_{\bar{e}_1} \bar{s}}{|\bar{e}_1|}$ ja $Y = \frac{\text{pr}_{\bar{e}_2} \bar{s}}{|\bar{e}_2|}$,



Joon. 95.

Märgime, et sirge taandatud võrrandi kirjutamiseks antud punkti $M(x_0, y_0)$ ja sihivektori $\vec{s}(X, Y)$ või tõusu a kaudu on otstarbekas kasutada valemit (10.6).

Senisest vaatlusest jäi kõrvale juht, kus $X = 0$. Teata- vasti sellisel juhul $x = x_0$, s.o. sirge on paralleelne or- dinaatteljega, järelikult $\alpha = \omega$ (ristkoordinaadistikus $\omega = \frac{\pi}{2}$); siis loetakse $a = \infty$.

5. Sirge üldvõrrand.

Kanoonilise võrrandi (10.5), milles $X \neq 0$ ja $Y \neq 0$, võib kirjutada järgmiselt:

$$Yx - Xy + Xy_0 - Yx_0 = 0$$

ehk

$$Ax + By + C = 0, \quad (10.10)$$

kus konstantsete kordajate jaoks on kasutatud tähistusi $Y = A$, $-X = B$, $Xy_0 - Yx_0 = C$. Seda võrrandit nimetatakse sirge üldvõrrandiks (tasandilise esimest järku algebralise joone kõige üldisem võrrand, vt. § 9, p. 4).

Vastupidi, iga esimese astme algebralise võrrandi

$$\text{seega } a = \frac{Y}{X} = \frac{|\vec{e}_1| \operatorname{pr}_{\vec{e}_2} \vec{s}}{|\vec{e}_2| \operatorname{pr}_{\vec{e}_1} \vec{s}};$$

$$\text{kuid } \frac{\operatorname{pr}_{\vec{e}_1} |\vec{s}|}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{pr}_{\vec{e}_2} |\vec{s}|}{\sin \alpha}, \text{ kus}$$

$$\beta = \omega - \alpha, \quad \omega = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \text{ ja}$$

$$\alpha = (\vec{e}_1, \vec{s}); \text{ järelikult}$$

$$a = \frac{|\vec{e}_1| \sin \alpha}{|\vec{e}_2| \sin(\omega - \alpha)}. \quad (10.9)$$

(10.10), milles $A \neq 0$ ja $B \neq 0$, saab kirjutada järgmiselt:

$$\frac{x - 0}{-B} = \frac{y + \frac{C}{B}}{A}.$$

Siit ilmneb, et see võrrand määrab sirge, mis läbib punkti $M(0, -\frac{C}{B})$ vektori $\vec{s}(-B, A)$ sihis. Kui aga $A = 0$, siis $B \neq 0$ ja võrrandi saab kirjutada kujul $y = -\frac{C}{B}$; analoogiliselt $B = 0$ puhul $A \neq 0$ ja $x = -\frac{C}{A}$; mõlemal juhul määrab võrrand sirge.

Võtame saadud tulemused kokku: Iga sirget tasandil saab afiinsetes koordinaatides esitada esimese astme algebralise võrrandiga; vastupidi, iga ühe või kahe tundmatuga esimese astme algebralist võrrandit saab tõlgendada teatud sirge võrrandina afiinsetes koordinaatides tasandil. Seega leidub tasandil ainult üks esimest järku algebraline joon - sirge.

Nagu ilmnes, on $(-B, A)$ sirge sihivektor. Selline tähendus on kordajatel A ja B igas afiinses koordinaadistikus.

Ristkoordinaatides saab kordajaid A ja B tõlgendada veel teisiti - nad on sirge normaalvektori koordinaadid. Tõepoolest, ortonormeeritud reeperi puhul saab üldvõrrandi tundmatute osa $Ax + By$ vaadelda vektorite $\vec{r}(x, y)$ ja $\vec{n}(A, B)$ skalaarkorrutisena. Tähistades $C = -c$ saab siis üldvõrrandi kirjutada vektorvõrrandina $(\vec{r}, \vec{n}) = c$. Vastupidi, vektorvõrrand (10.3) annab koordinaatides sirge üldvõrrandi. Kordajate A ja B selline tähendus on ilmne ka vahetult: vektorid $\vec{s}(-B, A)$ ja $\vec{n}(A, B)$ on risti, sest $(\vec{s}, \vec{n}) = 0$.

Kaldkoordinaatides ei ole kordajad A ja B sirge normaalvektori koordinaadid. Miks?

Sirge üldvõrrand on sirge ilmutamata võrrand (vt. 9.3).

Üldvõrrandi kordajad on määratud täpsusega ühise arvtegurini, sest võrrandid $Ax + By + C = 0$ ja $k(Ax + By + C) = 0$ (kus $k \neq 0$) on algebraliselt samaväärsed ja määravad ühe ning sellesama sirge. Järelikult on olulisteks suurusteks ainult kordajate suhted. Nende suhete abil on kirjutatud sirge taandatud võrrand (ilmutatud võrrand, vt. 9.2):

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Seega on sirge asend tasandil määratud kahe arvulise suuruse abil, s.t. sirge asend sõltub kahest parameetrist. Neid parameetreid võib tõlgendada taandatud võrrandi käsitlemisel näidatud viisil kui algordinaati $b = -\frac{C}{B}$ ja tõusu $a = -\frac{A}{B}$.

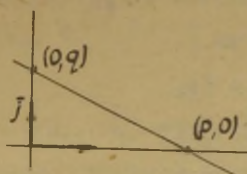
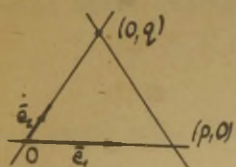
Üldvõrrandi mõne kordaja võrdumine nulliga osutab sirge erilisele asendile reeperi suhtes. Kui $C = 0$, siis rahuldab võrrandit punkt $(0, 0)$, s.t. sirge läbib reeperi alguspunkti. Kui $A = 0$, siis sirge võrrand on $y = -\frac{C}{B}$, s.t. sirge on paralleelne abstsisssteljega (võrrand ei püstita kitsendavaid tingimusi sirge punktide abstsisside kohta); analoogiliselt $B = 0$ puhul on sirge paralleelne ordinaatteljega. Teisiti: kui $A = 0$, siis $\bar{s} \parallel \bar{e}_1$ (ristkoordinaatides $\bar{s} \parallel \bar{i}$ ja $\bar{n} \parallel \bar{j}$); kui $B = 0$, siis $\bar{s} \parallel \bar{e}_2$ (vastavalt $\bar{s} \parallel \bar{j}$ ja $\bar{n} \parallel \bar{i}$). Kui $A = C = 0$, siis $y = 0$ (sest $B \neq 0$), s.o. sirge on abstsissstelg (eelneva põhjal: on abstsisssteljega paralleelne ja läbib reeperi alguspunkti); kui $B = C = 0$, siis on sirge ordinaattelg. Kui üldvõrrandi kõik kordajad erinevad nullist, siis öeldakse, et sirge on üldasendis. Need märkused kehtivad igas afiinses koordinaadistikus.

6. Sirge võrrand telglõikudes.

Uldvõrrandi $Ax + By + C = 0$, milles $C \neq 0$ (sirge ei läbi reeperi alguspunkti), saab kirjutada sümmeetrilisemal kujul

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \quad (10.11)$$

kus $p = -\frac{C}{A}$ ja $q = -\frac{C}{B}$. Kui $x = 0$, siis $y = q$, s.t. q on sirge



ge algordinaat. Kui $y = 0$, siis $x = p$, s.t. p on sirge ja abstsissstelje lõikepunkti abstsiss

Joon. 96.

(algabstsiss) (joon. 96). p ja q on olulised parameetrid, mis määravad sirge asendi tasandil. Kaldkoordinaatides eraldab sirge telgedelt lõigud pikkustega $|p| |\bar{e}_1|$ ja $|q| |\bar{e}_2|$, ristkoordinaatides - vastavalt $|p|$ ja $|q|$. Sellepärast nimetatakse (10.11) sirge võrrandiks telglõikudes.

Kui $A = 0$ või $B = 0$, siis loetakse vastavalt $p = \infty$ või $q = \infty$ (sirge paralleelsuse korral teljega öeldakse, et sirge lõikab telge lõpmata kauges punktis).

Juhul $C = 0$ ei saa sirget esitada võrrandiga (10.11).

Lõpetanud tasandil asuva sirge analüütilise esituse uurimise, märgime, et sirget esitab sisuliselt üksainus võrrand - esimest järku algebraline võrrand, - tuletatud võrrandid (10.4a, 5, 7, 10, 11) on õieti selle võrrandi erinevad kujud. Lugejal tuleb osata igast kujust üle minna igasse teise ja antud võrrandist välja selgitada sirge asend reeperi suhtes.

Näited.

37. Punkte $M(1, -3)$ ja $N(-5, 4)$ läbiva sirge kanoonilise võrrandi määrab suvalise punkti $P(x, y)$ sirgele kuulumise tingimus $\overline{MP} \parallel \overline{MN}$:

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y+3}{7}.$$

Vektor $\overline{MN}(-6, 7)$ on valitud sirge sihivektoriks. Sirge parameetrilised võrrandid on

$$\begin{cases} x = 1 - 6t, \\ y = -3 + 7t; \end{cases}$$

üldvõrrand $7x + 6y + 11 = 0$,

taandatud võrrand $y = -\frac{7}{6}x - \frac{11}{6}$

ja võrrand telgõikudes $-\frac{x}{\frac{11}{7}} + \frac{y}{-\frac{11}{6}} = 1$. Need tulemused ei

sõltu kasutatud affiinse koordinaadistiku iseloomust.

Kui punktid M ja N on määratud ristkoordinaatidega, siis sirge normaalvektor on $\vec{n}(7, 6)$. See vektor on iga ristsirge sihivektor; antud sirge sihivektor $\vec{s}(-6, 7)$ on iga ristsirge normaalvektor. Antud sirge kõigi ristsirgete hulga - ristsirgete parve - määrab võrrand $-6x + 7y + C = 0$, milles C on parve parameeter: muutuja C väärtuste hulgale vastab üksüheselt antud sirge ristsirgete hulk. Näit. punkti $L(1, 2)$ läbiva ristsirge korral $C = -8$ (saadud L koordinaatide asendamisel parve võrrandisse); seega on selle ristsirge võrrand $6x - 7y + 8 = 0$.

38. Sirge võrrandit telgõikudes on ortonormeeritud reeperi puhul lihtne esitada vektorkujus: võrrandi (10.11) vasak pool väljendab vektorite $\vec{r}(x, y)$ ja $\vec{v}(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ skalaarkorru-

tist: $(\bar{r}, \bar{v}) = 1$.

39. Tuletame sirge üldvõrrandi üldises afiinses koordinaadistikus lähtudes vektorvõrrandist (10.3). Olgu sirge normaalvektor $\bar{n}(A, B)$ ja suvalise punkti kohavektor $\bar{r}(x^1, x^2)$, s.t. $\bar{n} = A\bar{e}_1 + B\bar{e}_2$ ja $\bar{r} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2$. Siis

$$(x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2, A\bar{e}_1 + B\bar{e}_2) = 0,$$

$$\{A(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_1, \bar{e}_2)\}x^1 + \{A(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_2, \bar{e}_2)\}x^2 = 0.$$

Tähistame $A(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = a_1$, $A(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = a_2$, $c = -a_3$, siis saame võrduse

$$a_1x^1 + a_2x^2 + a_3 = 0. \quad (10.12)$$

Kordajad a_1 ja a_2 ei saa olla mõlemad nullid. Tõepoolest, vastasel juhul peaks homogeenisel lineaarsel võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} A(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0 \\ A(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 0 \end{cases}$$

leiduma mittetriviaalne lahend (A, B) (sest $\bar{n} \neq 0$). Siis peaks selle süsteemi determinant olema null:

$$\begin{vmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_1) & (\bar{e}_1, \bar{e}_2) \\ (\bar{e}_2, \bar{e}_1) & (\bar{e}_2, \bar{e}_2) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_1)(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)^2.$$

Kuid see on võimatu, sest $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$ ja skalaarkorrutise definitsiooni (4.6) kohaselt $|\bar{e}_1| |\bar{e}_2| > (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, s.t.

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_1)(\bar{e}_2, \bar{e}_2) > (\bar{e}_1, \bar{e}_2)^2.$$

Seega (10.12) on esimest järku algebraalne võrrand. Ortonormeeritud reeperi juhul $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij}$, s.t. $a_1 = A$ ja

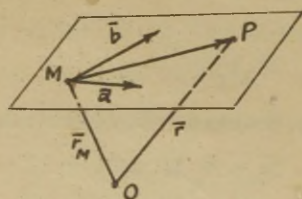
$a_2 = B$. Suvalise afiinse reeperi korral need võrdused üldiselt ei kehti - a_1 ja a_2 ei ole sirge normaalvektori koordinaadid.

7. Tasandi vektorvõrrandid.

Belnevas ilmnes, et antud sirge vektorvõrrandi koostamiseks tuleb sirgel valida reeper $\{M; \bar{s}\}$. Analoogiliselt tuleb talitada tasandi puhul - valida reeper $\{M; \bar{a}, \bar{b}\}$ sellel tasandil. Tõepoolest, fikseeritud punkt M ja tasandiga paralleelsete mittekolleaarsete vektorite paar \bar{a}, \bar{b} määravad tasandi täielikult. Niisiis määravad tasandi punkt ja kahe-dimensionaalne siht (vt. § 3 p. 5).

Suvaline punkt P asetseb tasandil parajasti siis, kui vektor \overline{MP} kuulub tasandile, s.t. on komplanaarne vektoritega \bar{a} ja \bar{b} . Järelikult parajasti tasandi punktide korral kehtib võrdus $\overline{MP} = u\bar{a} + v\bar{b}$, kus skalaarmuutujad u ja v on tasandi punktide afiinised koordinaadid reeperi $\{M; \bar{a}, \bar{b}\}$ suhtes. Kuid $\overline{MP} = \bar{r} - \bar{r}_M$ (joon. 97), seega esitab tasandit parameetriline vektorvõrrand

$$\bar{r} = \bar{r}_M + u\bar{a} + v\bar{b} . \quad (10.13)$$



Joon. 97.

Kui tasandil on antud kaks punkti M ja N , s.o. vektor \overline{MN} , siis on tasandi vektorvõrrandi koostamiseks tarvis teada veel mingit tasandiga paralleelset vektorit $\bar{a} \nparallel \overline{MN}$. Antud M, N ja \bar{a}

korral saab kirjutada (10.13) : $\bar{r} = \bar{r}_M + u\bar{a} + v\overline{MN}$ e. $\bar{r} = \bar{r}_M + u\bar{a} + v(\bar{r}_N - \bar{r}_M)$.

Tasandi kolm mittekollineaarset punkti M, N, L määravad tasandil reeperi $\{M; \overline{MN}, \overline{ML}\}$. Sellisel juhul on tasandi vektorvõrrand $\vec{r} = \vec{r}_M + u(\vec{r}_N - \vec{r}_M) + v(\vec{r}_L - \vec{r}_M)$.

Niisiis on tasandi vektorvõrrand kolme vektori komplektsuse tingimus. See tingimus on väljendatav vektorite segakorrutise abil; siit tuleneb teine meetod tasandi vektorvõrrandi koostamiseks: kui on antud tasandi punkt M ja vektorid $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, mis on paralleelsed tasandiga, siis

$$(\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad (10.14)$$

ehk $(\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}) = c$, kus $c = (\vec{r}_M, \vec{a}, \vec{b})$.

Kahe antud punkti M ja N ning vektori $\vec{a} \nparallel \overline{MN}$ puhul

$$(\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{r}_N - \vec{r}_M, \vec{a}) = 0$$

ehk $(\vec{r}, \vec{r}_N, \vec{a}) - (\vec{r}_M, \vec{r}_N, \vec{a}) = c$, kus $c = (\vec{r}_M, \vec{r}_N, \vec{a})$.

Antud mittekollineaarse punktikolmiku korral

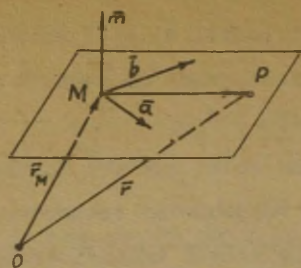
$$(\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{r}_N - \vec{r}_M, \vec{r}_L - \vec{r}_M) = 0$$

ehk $(\vec{r}, \vec{r}_M, \vec{r}_N) + (\vec{r}, \vec{r}_N, \vec{r}_L) + (\vec{r}, \vec{r}_L, \vec{r}_M) = c$,

kus $c = (\vec{r}_M, \vec{r}_N, \vec{r}_L)$.

Tasandi määramisel võib kahedimensionaalse sihi asemel kasutada ka ühedimensionaalset sihti, mis on risti tasandiga - tasandi normaalsihti. Tasand on üheselt määratud, kui on antud tema mingi punkt M ja normaalsiht. Viimane võib olla määratud vektoriga - tasandi normaalvektoriga. Selle vektori moodul ja suund (üks kahest võimalikust) on ebaolulised: kui \vec{m} on tasandi normaalvektor, siis on seda ka vektor $k\vec{m}$, kus $k \neq 0$. Normaalvektorina ei saa kasutada nullvektorit.

Suvaline punkt P asetseb tasandil parajasti siis, kui



Joon. 98.

$\overline{MP} \perp \bar{m}$ (joon. 98), s.t. $(\overline{MP}, \bar{m}) = 0$. Seega esitab tasandit vektorvõrrand

$$(\bar{r} - \bar{r}_M, \bar{m}) = 0 \quad (10.15)$$

ehk $(\bar{r}, \bar{m}) = c$, kus $c = (\bar{r}_M, \bar{m})$.

Ka võrrandi (10.14) saab

väljendada skalaarkorrutise abil,

s.t. teisendada kujju (10.15). Tõepoolest, vektorid \bar{a} ja \bar{b} võib segakorrutises asendada nende vektorkorrutisega $[\bar{a}, \bar{b}]$, mis on risti tasandiga, seega loetav tasandi normaalvektori: $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{m}$. See võimalus esineb muidugi ka tasandi vektorite \overline{MN} ja \overline{ML} korral.

Iga tasandit saab esitada võrranditega (10.13-15). Vastupidi, iga vaadeldud tüüpi võrrand määrab tasandi - kui eeldada, et vektormuutuja \bar{r} on rakendatud reeperi alguspunkti.

Lugeja selgitagu iseseisvalt, kuidas neid võrrandeid saab lihtsustada juhul, kui tasand läbib reeperi alguspunkti.

Näited.

40. Mitu tasandit on määratud kahe järgmise tingimusega: 1) tasand läbib punkti $M(1, 2, 3)$, 2) tasand lõikab koordinaattelgi erinevais punktides, mille kaugused reeperi alguspunktist on võrdsed?

Neid tingimusi rahuldava tasandi normaalsiht moodustab koordinaattelgedega võrdsed nurgad. Selliseid sihte on neli. Määrame nad näit. vektoritega $\bar{n}_1 = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{n}_2 = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$,

$n_3 = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{n}_4 = -\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Et $\bar{r}_M = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, siis
 neile normaalvektoritele vastavad võrrandi $(\bar{r}, \bar{n}) = c$ vaba-
 liikme $c = (\bar{r}_M, \bar{n})$ järgmised väärtused: $c_1 = 6$, $c_2 = 0$, $c_3 =$
 $= 2$, $c_4 = 4$. Teisel juhul läbib tasand reeperi alguspunkti.
 Järelikult on sobivaid tasandeid kolm: $(\bar{r}, \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) = 6$,
 $(\bar{r}, \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) = 2$ ja $(\bar{r}, -\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) = 4$.

41. Tasand $(\bar{r}, a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}) = 0$ läbib reeperi alguspunkti;
 tasand $(\bar{r}, a\bar{j} + b\bar{k}) = c$ on paralleelne abstsisssteljega;
 tasand $(\bar{r}, a\bar{i} + b\bar{k}) = 0$ läbib ordinaattelge; tasand $(\bar{r}, \bar{i}) =$
 $= c$ on paralleelne yz-tasandiga; tasand $(\bar{r}, \bar{j}) = 0$ on xz-ta-
 sand. Põhjendada neid väiteid. Kas nad kehtivad (vastavalt
 muudetud tähistustes) ka suvalise afiinse reeperi puhul?

8. Tasandi parameetriselised võrrandid.

Kui kirjutada parameetriseline vektorvõrrand (10.13) koor-
 dinaatkujus, siis saadakse tasandi parameetriselised skalaar-
 võrrandid.

Olgu tasandi antud punkt $M(x_0, y_0, z_0)$, muutuv punkt
 $P(x, y, z)$ ja tasandiga paralleelsed mittekollineaarsed vek-
 torid $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ ning $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, siis

$$\begin{cases} x = x_0 + u x_1 + v x_2, \\ y = y_0 + u y_1 + v y_2, \\ z = z_0 + u z_1 + v z_2. \end{cases} \quad (10.16)$$

Neid võrrandeid võib vaadelda seostena tasandi punktide kahe-
 suguste koordinaatide - tasandiliste koordinaatide u, v (mil-
 le määrab reeper $\{M; \bar{a}, \bar{b}\}$) ja ruumiliste koordinaatide $x,$
 y, z - vahel.

Iga võrrandisüsteemi (10.16) saab kirjutada ühe vektorvõrrandina (10.13). Kui selle juures $\bar{a} \neq \bar{b}$, siis on tasand määratud. Seega on kordajate kolmikute (X_1, Y_1, Z_1) ja (X_2, Y_2, Z_2) mittevõrdelisuse korral süsteemi (10.16) alati võimalik tõlgendada teatud tasandi parameetrilise esitusega.

9. Tasandi üldvõrrand.

Iga tasandit saab afiinsetes koordinaatides esitada esimese astme algebralise võrrandiga; vastupidi, iga ühe, kahe või kolme tundmatuga esimese astme algebralist võrrandit saab tõlgendada teatud tasandi võrrandina ruumilises afiinses koordinaadistikus.

Selle lause esimese osa tõestamiseks kirjutame tasandi vektorvõrrandi (10.14) koordinaatkujus, kasutades eelnevas punktis märgitud koordinaattähistusi:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Arendame determinandi esimese rea järgi:

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + (y - y_0) \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ja toome sisse tähistused: $\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} = B,$

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = C, \quad -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D. \text{ Saame võrrandi}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{10.17}$$

Kordajaist A, B ja C peab vähemalt üks erinevalt nullist, sest

vastasel juhul peaksid vektorid $\vec{a}(X_1, Y_1, Z_1)$ ja $\vec{b}(X_2, Y_2, Z_2)$ olema - eelduse vastaselt - kollineaarsed: determinandi-
de nulliga võrdumisest järeldub nende ridade võrdelisus.

Niisiis esitab tasandit esimest järku algebraline võr-
rand. See arutus on kasutatud affiinse koordinaadistiku iseloomust sõltumatu.

Lause teise osa tõestuseks märgime, et esimest järku al-
gebralist võrrandit (10.17) saab kirjutada kolmandat järku
determinandi abil. Tõepoolest, olgu näiteks $A \neq 0$, siis $x +$
 $+\frac{D}{A} + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z = 0$; seda võrrandit saab aga kirjutada deter-
minandi abil:

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & y & z \\ -\frac{B}{A} & 1 & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(kontrollida determinandi arendamise teel). Olgu antud mingi
affinne reeper ruumis. Vaatleme determinandi ridu vektorite
koordinaatkolmikutena selle reeperi suhtes. Esimest rida tõl-
gendame muutuva punkti $P(x, y, z)$ kohavektori - vektormuutu-
ja $\vec{r}(x, y, z)$ - ja vektori $\vec{a}(-\frac{D}{A}, 0, 0)$ vektorvahena; kaht
alumist rida - vektoritena $\vec{b}(-\frac{B}{A}, 1, 0)$ ja $\vec{c}(-\frac{C}{A}, 0, 1)$. Sel
viisil saab uuritava skalaarvõrrandi kirjutada vektorkujus:
 $(\vec{r} - \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Ilmselt $\vec{b} \nparallel \vec{c}$, järelikult võrrand määrab
tasandi; see tasand läbib punkti $M(-\frac{D}{A}, 0, 0)$.

Võrrandit (10.17) nimetatakse tasandi üldvõrrandiks.
Tõestatud lausest ilmneb, et tasand on ainus esimest järku
algebraline pind.

Ortonormeeritud reeperi puhul määravad üldvõrrandi kor-

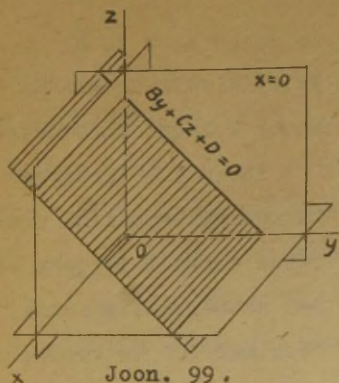
dajad tasandi normaalsihi. Tõepoolest, võrrandi tundmatute osa saab kirjutada tasandi suvalise punkti kohavektori $\vec{r}(x, y, z)$ ja vektori $\vec{p}(A, B, C)$ skalaarkorrutisena: $Ax + By + Cz = (\vec{r}, \vec{p})$, s.t. (10.17) on ristkoordinaadistikus samaväärne vektorvõrrandiga $(\vec{r}, \vec{p}) = c$, kus $c = -D$. Seega \vec{p} on tasandi normaalvektor: $\vec{p} = \vec{m}$ (vt. 10.15). Selles saab veenduda ka teisiti: ortonormeeritud baasil

$$\vec{p}(A, B, C) = \vec{p} \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} x_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \right| \end{pmatrix} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{n}.$$

Kaldkoordinaatides kordajail A, B, C sellist tähendust ei ole, sest sel juhul ei saa võrrandi (10.17) tundmatute osa käsitleda vektorite skalaarkorrutisena (vt. 7.8, samuti näide 43).

Uldvõrrandi mõne kordaja võrdumine nulliga osutab tasandi erilisele asendile reeperi suhtes. Kui $D = 0$, siis rahuldab võrrandit punkt $O(0, 0, 0)$, s.t. tasand läbib reeperi alguspunkti. Kui $A = 0$, siis ei sisalda võrrand esimest koordinaatmuutujat, s.t. ei kitsenda selle muutumisvabadust; järelilikult on tegemist silindrilise pinnaga (vt. § 9 p. 2), mille moodustajad on paralleelsed abstsisssteljega ja juhtjooneks on sirge
$$\begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$
 yz-tasandil (joon. 99).

Selles on lihtne veenduda ka teisiti: x-telje suvalise punkti koordinaadid on $(x, 0, 0)$ ja ilmselt selline punkt ei asetse tasandil $By + Cz + D = 0$, kui vaid $D \neq 0$. Juhul $A = D = 0$ läbib tasand x-telge. Kui $A = B = 0$, siis on tasand eelneva põhjal paralleelne nii x-telje kui ka y-teljega, s.t. xy-tasandiga. See on ilmne ka vahetult võrrandi kujust $z =$



$= -\frac{D}{C} = \text{const}$ (vt. §8 p.5(2)).
 Lõppeks $A = B = D = 0$ puhul on tegemist xy -tasandi võrrandiga $z = 0$ (sest $C \neq 0$). Analoogilised tulemused saame kordajate ülejäänud kombinatsioone vaadeldes.

Niisiis, kui võrrandis puudub üks tundmatu, siis on

tasand paralleelne vastava teljega; kui puudub kaks tundmatut, - paralleelne vastava koordinaattasandiga; kui puudub vabaliige (homogeenne võrrand), siis läbib tasand reeperi alguspunkti. Kerge on veenduda ka vastupidises: kui tasand on paralleelne ühe teljega, siis ei sisalda võrrand vastavat tundmatut, jne. Seega on tegemist tasandi asendit määravate tarvilike ja piisavate tingimustega. Need tingimused kehtivad iga afiinse koordinaadistiku korral.

Kui võrrand sisaldab kõiki võimalikke liikmeid, siis öeldakse, et tasand on üldasendis.

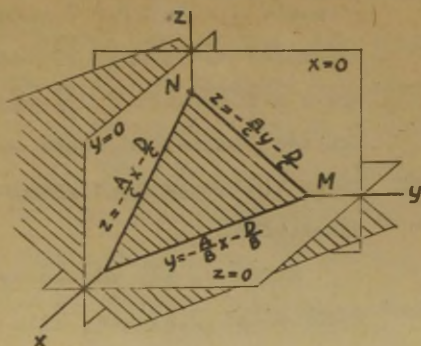
Võrrandid $Ax + By + Cz + D = 0$ ja $kAx + kBy + kCz + kD = 0$ on $k \neq 0$ korral algebraaliselt samaväärsed, seega esitavad üht ja sama tasandit. Järelikult on tasandi üldvõrrandi kordajad olulised vaid ühisteguri täpsusega - tasandit iseloomustavaiks suurusteks on kordajate suhted. Kui võrrand kirjutada ilmutatult näit. z suhtes (võimalik, kui $C \neq 0$):

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

ehk

$$z = ax + by + c,$$

siis määravad tasandi täielikult suurused a , b ja c .



Joon. 100.

Niisiis sõltub tasandi asend kolmest parameetrist.

Tasandi lõikesirget koordinaattasandiga nimetatakse tasandi jäljeks sellel koordinaattasandil.

Joonisel 100 on kujutatud kolm jälge ja kirjutatud nende võrrandid tasandi

üldvõrrandi kordajate suhete abil. Siit ilmneb nende suhete võimalik tõlgendus. Näit. $-\frac{A}{B}$ on xy -tasandil asuva jälje tõus (kui jälje võrrand kirjutada ilmutatult y suhtes), jne. Märgime, et $y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}$ on selle jälje võrrand tingimusel, et $z = 0$, s.t. jälge esitab õieti võrrandisüsteem

$$\begin{cases} y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}, \\ z = 0. \end{cases}$$

Tõepoolest, joonel ruumis on vähemalt kaks võrrandit (vt. 9.13).

Selgitada joonisel 100 kirjutatud üksikute võrrandite geomeetriline tähendus!

10. Tasandi võrrand telglõikudes.

Tasandi üldvõrrandi, milles $D \neq 0$, saab kirjutada sümmeetrilisemal kujul

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1, \quad (10.18)$$

kus $p = -\frac{D}{A}$, $q = -\frac{D}{B}$ ja $r = -\frac{D}{C}$; kui mõni kordajaist A , B , C on null, siis vastav liige puudub.

Kui $x = y = 0$, siis $z = r$, s.t. tasand läbib z -telje punkti $N(0, 0, r)$; lõikepunktid y - ja z -teljega on vastavalt $M(0, q, 0)$ ja $L(p, 0, 0)$ (vt. joon. 100). Suurused p , q , r on olulised parameetrid, mis määravad tasandi asendi ruumis.

Kaldkoordinaatides eraldab tasand telgedelt lõigud pikustega $|p| |\bar{e}_1|$, $|q| |\bar{e}_2|$ ja $|r| |\bar{e}_3|$, ristkoordinaatides - vastavalt $|p|$, $|q|$ ja $|r|$. Sellepärast nimetatakse (10.18) tasandi võrrandiks telglõikudes.

Kui $A = 0$ või $B = 0$ või $C = 0$, siis loetakse vastavalt $p = \infty$ või $q = \infty$ või $r = \infty$ (sirge ja tasandi paralleelsuse korral öeldakse, et sirge lõikab tasandit lõpmata kauges punktis).

Juhul $D = 0$ ei saa tasandit esitada võrrandiga (10.18).

Näited.

42. Tetraeedri tipud on $M_1(-1, 0, 2)$, $M_2(2, 3, -1)$, $M_3(0, -2, 3)$ ja $M_4(1, 1, 1)$. (1) Koostame sellise tasandi võrrandi, mis läbib serva M_1M_2 ja on paralleelne servaga M_3M_4 . (2) Arvutame selle tasandi punkti L ruumilised koordinaadid teades, et tema koordinaadid tasandilise reeperi $\{N_1, N_1N_2, N_1N_3\}$ suhtes on $u = 3$ ja $v = -2$, kusjuures N_1 , N_2 ja N_3 on tasandi lõikepunktid koordinaattelgedega. (3) Koostame tasandi jälje võrrandi xy -tasandil ruumilistes ja tasandilistes koordinaatides.

$$(1) \overline{M_1M_2}(3, 3, -3) \parallel \bar{a}(1, 1, -1), \\ \overline{M_3M_4}(1, 3, -2);$$

$$(\overline{M_1P}, \bar{a}, \overline{M_3M_4}) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x + y + 2z - 3 = 0.$$

$$(2) \quad \overline{N_1}(3, 0, 0),$$

$$\overline{N_2}(0, 3, 0),$$

$$\overline{N_3}(0, 0, 3/2);$$

$$\overline{N_1N_2}(-3, 3, 0) \parallel \bar{b}(-1, 1, 0),$$

$$\overline{N_1N_3}(-3, 0, 3/2) \parallel \bar{c}(-2, 0, 1);$$

$$\bar{r} = \bar{r}_{N_1} + u\bar{b} + v\bar{c},$$

$$\begin{cases} x = 3 - u - 2v, \\ y = u, \\ z = v; \end{cases}$$

$$L(4, 3, -2).$$

$$(3) \quad \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

$v = 0$ (jälg on esimene tasandiline koordinaat-

telg).

Kas lahenduskäik sõltub antud koordinaadistiku iseloomust?

43. Tuletame tasandi võrrandi, lähtudes tema vektorvõrrandist (10.15).

Olgu tasandi normaalvektor $\bar{m}(A, B, C)$ ja tasandi suvalise punkti kohavektor $\bar{r}(x^1, x^2, x^3)$, s.t. $\bar{m} = A\bar{e}_1 + B\bar{e}_2 + C\bar{e}_3$ ja $\bar{r} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3$, siis

$$\begin{aligned}
 & (A\bar{e}_1 + B\bar{e}_2 + C\bar{e}_3, x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3) = c, \{A(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + \\
 & + B(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + C(\bar{e}_1, \bar{e}_3)\}x^1 + \{A(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_2, \bar{e}_2) + \\
 & + C(\bar{e}_2, \bar{e}_3)\}x^2 + \{A(\bar{e}_3, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_3, \bar{e}_2) + C(\bar{e}_3, \bar{e}_3)\}x^3 = c.
 \end{aligned}$$

Kasutame tähistusi: $A(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + B(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + C(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = a_1,$
 $A(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_2, \bar{e}_2) + C(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = a_2,$
 $A(\bar{e}_3, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_3, \bar{e}_2) + C(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = a_3,$
 $-c = a_4,$

siis on tasandi võrrand

$$a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 = 0. \quad (10.19)$$

Kordajad a_1, a_2 ja a_3 ei saa olla korruga nullid, sest vastasel juhul leiduks homogeesel lineaarsel võrrandisüsteemil

$$\begin{cases}
 A(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + C(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 0, \\
 A(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_2, \bar{e}_2) + C(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0, \\
 A(\bar{e}_3, \bar{e}_1) + B(\bar{e}_3, \bar{e}_2) + C(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = 0
 \end{cases}$$

mittetriviaalne lahend (A, B, C) , s.t. peaks kehtima võrdus

$$\begin{vmatrix}
 (\bar{e}_1, \bar{e}_1) & (\bar{e}_1, \bar{e}_2) & (\bar{e}_1, \bar{e}_3) \\
 (\bar{e}_2, \bar{e}_1) & (\bar{e}_2, \bar{e}_2) & (\bar{e}_2, \bar{e}_3) \\
 (\bar{e}_3, \bar{e}_1) & (\bar{e}_3, \bar{e}_2) & (\bar{e}_3, \bar{e}_3)
 \end{vmatrix} = 0,$$

ja (6.6) tõttu $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0$, mis on vastuolus reeperi definitsiooniga.

Kui $(\bar{e}_1, \bar{e}_j) = \delta_{1j}$ ($1, j = 1, 2, 3$), siis $a_1 = A, a_2 = B, a_3 = C$, s.t. (10.19) tundmatute kordajad on normaalvektori koordinaadid. Suvalise afiinse koordinaadistiku korral ei tarvitse see nii olla.

11. Sirge võrrandid ruumis.

Ruumis esitab sirget kahest võrrandist koosnev süsteem (vt. § 9 p.3). Et sirget võib vaadelda kahe tasandi lõike-

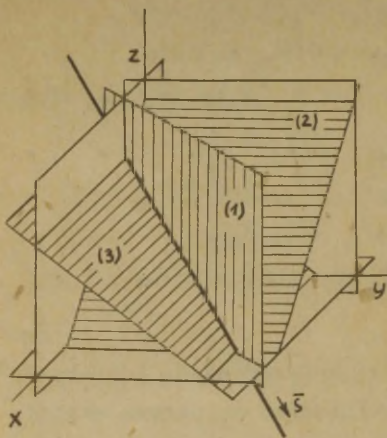
joonena, siis võib nendeks võrranditeks valida alati lineaarsed algebralised võrrandid.

Lahendades sirge kolm parameetrilist võrrandit (10.4) parameetri t suhtes, saame sirge kanoonilised võrrandid

$$(t =) \frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}. \quad (10.20)$$

Tegemist on tarviliku ja piisava tingimusega punkti $P(x, y, z)$ kuulumiseks sirgele, mis läbib punkti $M(x_0, y_0, z_0)$ vektori $\vec{s}(X, Y, Z)$ sihis. Meenutame selle tingimuse vektorkuju: $\overline{MP} \parallel \vec{s}$ (vt. 8.5).

Vaatleme esmalt üldjuhtu, kus ükski nimetajaist X, Y, Z ei ole null, s.t. sirge ei ole paralleelne ühegi koordinaat-tasandiga (sest \vec{s} ei ole seda) (joon. 101).



Joon. 101 .

Seostest (10.20) järel dub kolm võrrandit

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y}, & (1) \\ \frac{x - x_0}{X} = \frac{z - z_0}{Z}, & (2) \\ \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}, & (3) \end{cases}$$

mida saab pärast lihtsustamist ja konstantide ümber-tähistamist kirjutada järgmiselt:

$$\begin{cases} y = ax + p, & (1) \\ x = bz + q, & (2) \\ y = cz + r. & (3) \end{cases}$$

Ruumis esitavad need võrrandid tasandeid, mis läbivad

vaadeldavat sirget.

Tasand (1) on paralleelne aplikaatteljega (ristkoordinaatides, nagu joonisel 101 - risti xy -tasandiga). Tasandit (1) võib vaadelda silindrilise pinnana, mille juhtjoone võrrandid on $\begin{cases} y = ax + p, \\ z = 0. \end{cases}$ Tasand (1) projekteerib vaadeldava sirge xy -tasandile - märgitud juhtjooneks.

Tõlgendada analoogiliselt viisil võrrandeid (2) ja (3)!

Sirge üheseks määramiseks on piisav valida mingid kaks neist tasandest, siis on ülejäänud tasand ebaoluline. See on ilmne ka algebraliseult: võrranditest (1) - (3) on iga paar sõltumatu ja ülejäänud võrrand on valitud paari vahetu järeldus. Seega saab sirget esitada mistahes kahega neist võrrandest.

Olgu sirge esitatud kahe viimase võrrandiga

$$\begin{cases} x = bz + q, \\ y = cz + r. \end{cases} \quad (10.21)$$

Seda süsteemi nimetatakse sirge taandatud võrrandisüsteemiks. Esimene võrrand (koos võrrandiga $y = 0$) määrab sirge projektsiooni xz -tasandil, teine - projektsiooni yz -tasandil.

Neli konstanti b , c , q ja r määravad sirge asendi, s.t. sirge asend ruumis sõltub neljast parameetrist.

Taandatud võrrandest saab alati üle minna kanoonilisse esitusse. Selleks tuleb avaldada z mõlemast võrrandist ja kirjutada tulemus järgmiselt:

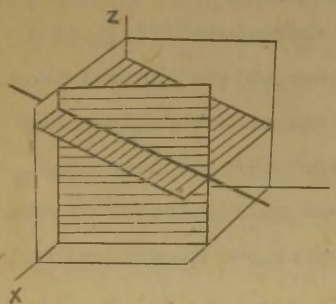
$$\frac{x - q}{b} = \frac{y - r}{c} = \frac{z - 0}{1}. \quad (10.21a)$$

Ilmneb, et sirge läbib punkti $M(q, r, 0)$; see on sirge jälg xy -tasandil. Sirge sihi määrab vektor $\vec{s}'(b, c, 1)$ (Kontrolli-

da, et $\bar{s}' // \bar{s}$! Ristkoordinaatides on kordajad b ja c sirge projektsioonide tõusud koordinaattasanditel.

Pöörame nüüd tähelepanu võrrandite (10.20) erijuhtudele.

Kui nimetajaist X, Y, Z on mõni null, siis tuleb võrranda nulliga ka vastav lugeja; see järeldub parameetristest võrranditest (10, 4). Näit. $X = 0$ puhul (joon. 102) esitab



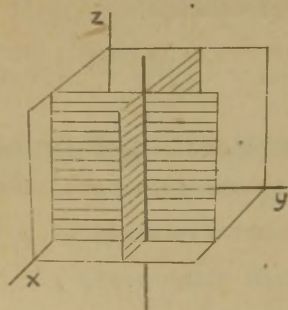
Joon. 102 .

sirget süsteem

$$\begin{cases} x = x_0, \\ \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}; \end{cases}$$

$X = Y = 0$ puhul (joon. 103) süsteem

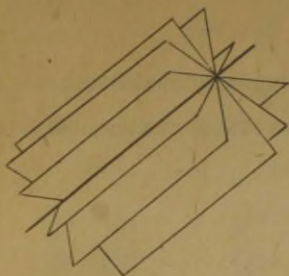
$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \end{cases}$$



Joon. 103 .

(vt. ka § 8 p.5(2)); jne. Kui kaks nimetajat on nullid, siis jäetakse võrrandites (10.20) ära suhe nullist erineva nimetajaga - vastav koordinaatmuutuja võib omandada suvalisi väärtusi.

Sirge taandatud võrrandid määravad sirge koordinaattelgedega paralleelsete tasandite lõikejoonena. Sellisel eriliste tasandite valikul ei ole aga olulist tähtsust. Antud sirget läbib lõpmata palju tasandeid; selliste tasandite hulka nimetakse tasandite kimbuks (joon. 104) ja nende ühist lõikesirget - kimbu teljeks. Iga tasandipaar kimbust määrab telje üheselt. Kahe üldasendis oleva tasandi võrrandid moodustavad



sirge ilmutamata esituse - sirge

üldvõrrandid ruumis:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (10.22)$$

(vrd. 9.10). Ilmselt saab iga sirget esitada lõpmata paljude seda tüüpi võrrandisüsteemidega.

Kui sirge on antud mingi süsteemiga (10.22), siis tuleb tema taandatud (ilmutatud) võrrandite leidmiseks avaldada sellest süsteemist kaks tundmatut kolmanda kaudu. Seda on alati võimalik teha, sest sirgega määratud kimbus leidub ikka vähemalt kaks tasandit, mis on paralleelsed mingi koordinaattelje või -telgede paariga (vt. joonised 101-103). Näitame seda ka algebraliselt.

Et tasandid (10.22) ei ühti, siis ei saa võrrandite kõik kordajad olla võrdelised (vt. p. 9). Samuti pole võrdelised tundmatute kordajad, sest vastasel juhul saaks võrdeteguriga jagades anda süsteemile kuju

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D_1 = 0, \\ Ax + By + Cz + D_2 = 0, \end{cases}$$

kus $D_1 \neq D_2$. Nendel võrranditel ei ole ühiseid lahendeid, s.t. nendega esitatud tasanditel ei ole ühiseid punkte - tasandid on paralleelsed, mis on vastuolus eeldusega. Niisiis ei ole suhted $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{B_1}{B_2}$, $\frac{C_1}{C_2}$ kõik võrdsed (ristkoordinaatides tuleneb see vahetult nõudest $\bar{m}_1 \nparallel \bar{m}_2$). Järelikult deter-

minantidest $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ on vähemalt

üks erinev nullist. Olgu seda näit. esimene determinant, siis saab süsteemist avaldada x ja y vabamuutuja z kaudu kasutades Crameri valemuid:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 z & -D_1 & B_1 \\ -C_2 z & -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \frac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 z & -D_1 \\ A_2 & -C_2 z & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \frac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Tegemist on taandatud võrranditega (10.21).

Saadud võrranditest saab kergesti tuletada parameetrilise esituse (10.4). Sirgel asub punkt koordinaatidega

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad z_0 = 0.$$

Kasutame tähistust $\frac{z}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = t$, siis

$$\begin{cases} x = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t + x_0, \\ y = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} t + y_0, \\ z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t. \end{cases}$$

Siit järeldub, et sirge sihivektoriks võib lugeda vektorit

$$\bar{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \quad (10.23)$$

Ristkoordinaadistikus on tasandite (10.22) normaalvektorid $\bar{m}_1(A_1, B_1, C_1)$ ja $\bar{m}_2(A_2, B_2, C_2)$. Need vektorid on mõlemad ortogonaalsed sirgega, sellepärast nende vektorkorrutis on paralleelne sirgega, s.t. $\bar{s} = [\bar{m}_1, \bar{m}_2]$. Koordinaatkujju üleminekul saame (10.23).

Märgime veel, et antud algebraalse võrrandisüsteemi (10.22) kumbki võrrand on eelneva põhjal tõlgendatav tasandi esitusena. Seega määrab selline süsteem ruumis sirge parajasti siis, kui vastavad tasandid lõikuvad, s.t. tundmatute kordajad on mittevõrdelised.

Näide 44. Olgu antud tetraeedri tipud $A(3, -1, 3)$, $B(-3, 3, -1)$, $C(2, -1, 1)$ ja $D(4, 3, 2)$. Vaatleme sirge AB mitmesuguseid analüütilisi esitusi ja nendevahelisi seoseid.

Sirge sihivektor on $\bar{s}(3, -2, 2) \parallel \overline{AB}(-6, 4, -4)$. Sirge kanoonilised võrrandid määrab tingimus $\overline{AP} \parallel \bar{s}$:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}.$$

Parameetrilised võrrandid:

$$\begin{cases} x = 3t + 3, \\ y = -2t - 1, \\ z = 2t + 3. \end{cases}$$

Taandatud võrranditeks on näit.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}z - \frac{3}{2}, \\ y = -z + 2. \end{cases}$$

Sirge on tasandite ABC ja ABD lõikesirge. Kirjutame nende tasandite võrrandid:

$$\begin{cases} (\overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0, \\ (\overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AD}) = 0; \\ \overline{AC}(-1, 0, -2), \\ \overline{AD}(1, 4, -1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 1 = 0, \\ 6x - 5y - 14z + 19 = 0. \end{cases}$$

Need on sirge üldvõrrandid. Et näit. $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$, siis saab neist võrrandeist avaldada x ja y :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{22} \begin{vmatrix} z+1 & 2 \\ 14 & -5 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}z - \frac{3}{2}, \\ y = -\frac{1}{22} \begin{vmatrix} 2 & z+1 \\ 6 & 14z-19 \end{vmatrix} = -z + 2. \end{cases}$$

Tulemuseks on esialgsed taandatud võrrandid. Nendest saab soovi korral üle minna kanoonilistele võrranditele:

$$z = \frac{x + 3/2}{3/2} = -y + 2,$$

$$\frac{x + 3/2}{3} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z}{2};$$

Kui liita igale suhtele $-3/2$, saame esialgsed kanoonilised võrrandid. Kuid kanoonilised võrrandid saab kergesti kirjutada ka vektori (10.23) abil:

$$\bar{m}_1(2, 2, 1)$$

$$\bar{m}_2(6, 5, -14)$$

$$[\bar{m}_1, \bar{m}_2](-33, 22, -22) \parallel \bar{s}(3, -2, 2).$$

Sirge punkti leidmiseks anname ühele koordinaatmuutujale fikseeritud väärtuse. Näit. olgu $x = 0$, siis

$$\begin{cases} 2y - z - 1 = 0, \\ 5y + 14z - 19 = 0, \end{cases}$$

$$y = z = 1,$$

s.o. sirgel asub punkt $M(0, 1, 1)$. Seega on sirge kanoonilised võrrandid

$$\frac{x}{3} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 1}{2}.$$

Punkti M koordinaadid rahuldavad ka esialgseid kanoonilisi võrrandeid, s.t. tulemused on samaväärsed.

§ 11. Sirgete ja tasandite võrrandite rakendusid

1. Sirgete ja tasandite vastastikused asendid.

(1) Kahe sirge vastastikuse asendi üle tasandil saab ot-

sustada nende sirgete võrranditest moodustatud süsteemi uurimise teel.

Olgu sirged antud üldvõrrandite abil:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Teatavasti on sellisel süsteemil kas parajasti üks lahend, null lahendit või lõpmata palju lahendeid; sirged vastavalt kas lõikuvad, on paralleelsed või ühtivad. Tulemustest, mis saadakse süsteemi uurimisel determinantide abil, järeldub:

1) sirged lõikuvad parajasti siis, kui $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$;

2) sirged on paralleelsed parajasti siis, kui $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, kuid

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ või } \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

3) sirged ühtivad parajasti siis, kui $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$. Väljendame need tingimused ülevaatlikumal

kujul:

$$\text{lõikumine: } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2},$$

$$\text{paralleelsus: } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

$$\text{ühtimine: } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

(Sõnastada need tingimused!).

Nende tulemusteni saab kergesti jõuda ka geomeetrilisel viisil. Lõikumise puhul $\bar{s}_1(B_1, -A_1) \nparallel \bar{s}_2(B_2, -A_2)$, s.t. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Paralleelsuse korral $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2$, kusjuures ühtimine võib toimuda ainult siis, kui võrrandite vasakud pooled eri-

nevad ainult ühistegurilt: $A_1x + B_1y + C_1 = k(A_2x + B_2y + C_2)$, st. kõik kordajad on võrdelised. Arutledes vastupidi, saame tingimuste piisavuse.

Taandatud esituses

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

tulenevad vastavad tingimused kordajate geomeetrisest tähendusest:

lõikumine: $a_1 \neq a_2$

paralleelsus: $a_1 = a_2, b_1 \neq b_2,$

ühtimine: $a_1 = a_2, b_1 = b_2.$

Kanoonilise esituse puhul on teada sirgete sihivektorid \vec{s}_1 ja \vec{s}_2 ning punktid M_1 ja M_2 . Lõikumise puhul $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$; paralleelsuse korral $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \nparallel \overline{M_1M_2}$; ühtimisel $s_1 \parallel s_2 \parallel \overline{M_1M_2}$.

Esitatud tingimused kehtivad igas afiinses koordinaadistikus.

(2) Tasandite vastastikuseid asendeid iseloomustavad analoogilised tingimused, mida vaatlesime juba eelnevas (§ 10 p-d 9, 11). Teeme siin vaid kokkuvõtte.

Uldvõrranditega $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ esitatud tasandite puhul kehtivad järgmised tarvilikud ja piisavad tingimused:

lõikumine: kõik tundmatute kordajad pole võrdelised,

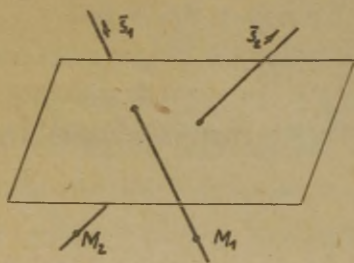
paralleelsus: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$

ühtimine: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$

(3) Kahe sirge vastastikuse asendi määramiseks ruumis on

otstarbekas esitada need sirged kanooniliste võrrandite abil.

Olgu sirgete sihivektorid $\bar{s}_1(x_1, y_1, z_1)$ ja $\bar{s}(x_2, y_2, z_2)$ ning sirgete antud punktid $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ja $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Sirged on kiivasendis (joon. 105) parajasti siis, kui vektorid \bar{s}_1 , \bar{s}_2 ja $\overline{M_1M_2}$ on mittekompanaanarsed, s.t.



Joon. 105.

$(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \overline{M_1M_2}) \neq 0$. Sirged lõikuvad parajasti siis, kui $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \overline{M_1M_2}) = 0$, kuid $\bar{s}_1 \nparallel \bar{s}_2$. Paralleelsuseks on tarvilik ja piisav, et $\bar{s}_1 \parallel$

$\bar{s}_2 \nparallel \overline{M_1M_2}$, ja ühtimiseks $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \parallel \overline{M_1M_2}$.

$\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \parallel \overline{M_1M_2}$.

(4) Sirge ja tasandi lõikepunkti arvutamiseks on otstarbekas kirjutada sirge võrrandid parameetriliselt:

$$\begin{cases} x = tX + x_0, \\ y = tY + y_0, \\ z = tZ + z_0, \end{cases}$$

ja sooritada asendus tasandi võrrandis $Ax + By + Cz + D = 0$ (s.o. elimineerime 4 tundmatu ja 4 võrrandiga süsteemist tundmatud x, y ja z):

$$A(x_0 + tX) + B(y_0 + tY) + C(z_0 + tZ) + D = 0,$$

$$(AX + BY + CZ)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Esinevad võimalused:

- 1) $AX + BY + CZ \neq 0$
- 2) $AX + BY + CZ = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0,$
- 3) $AX + BY + CZ = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$

Esimesel juhul on saadud lineaarvõrrandil täpselt üks lahend $t = t_0$, s.t. sirge lõikab tasandit. Lõikepunkti koordinaadid on

$$\begin{cases} x_1 = t_0 X + x_0, \\ y_1 = t_0 Y + y_0, \\ z_1 = t_0 Z + z_0. \end{cases}$$

Teisel juhul ei rahulda võrrandit parameetri t ükski väärtus, seega lõikepunkte ei leidu - sirge on tasandiga paralleelne. Meenutame, et ristkoordinaatides on A, B, C tasandi normaalvektori koordinaadid ja avaldis $AX + BY + CZ$ on skalaarkorrutis (\vec{m}, \vec{s}) . Niisiis lõikumise puhul pole \vec{m} ja \vec{s} ortogonaalsed, küll on nad seda aga paralleelsuse korral.

Kolmandal juhul on võrrand rahuldatud t igal väärtusel, seega leidub lõpmata palju lahendeid - sirge asub tasandil. Ilmselt on need tingimused nii piisavad kui ka tarvilikud.

Näide 45.

a) Selgitame sirge $\begin{cases} x + 2y + 3z + 8 = 0, \\ 5x + 3y + z - 16 = 0 \end{cases}$ ja tasandi $2x - y - 4z - 24 = 0$ vastastikuse asendi. Olgu võrrandid antud ristkoordinaatides.

Sirget määravate tasandite normaalvektorid on $\vec{m}_1(1, 2, 3)$ ja $\vec{m}_2(5, 3, 1)$. Järelikult on sirge sihivektor $\vec{s}(1, -2, 1) \parallel$

$\parallel [\vec{m}_1, \vec{m}_2](-7, 14, -7)$. Tasandi normaalvektor on $\vec{m}(2, -1, -4)$.

Et $(\vec{s}, \vec{m}) = 0$, siis $\vec{s} \perp \vec{m}$, s.t. sirge kas asub tasandil või on sellega paralleelne. Määrame sirgel ühe punkti: kui $z =$

$= 0$, siis

$$\begin{cases} x + 2y = -8, \\ 5x + 3y = 16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8, \\ y = -8. \end{cases}$$

Sirge punkti $M(8, -8, 0)$ koordinaadid rahuldavad tasandi võrrandit - sirge asub tasandil.

b) Sirge $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ asendi määramiseks tasandi $3x - y + 2z - 5 = 0$ suhtes esitame sirge parameetriselt:

$$\begin{cases} x = 7 + 5t, \\ y = 4 + t, \\ z = 5 + 4t, \end{cases}$$

ja sooritame asenduse tasandi võrrandis:

$$\begin{aligned} 3(7 + 5t) - (4 + t) + 2(5 + 4t) - 5 &= 0, \\ t &= -1. \end{aligned}$$

Sirge lõikab tasandit; lõikepunkt on $(2, 3, 1)$.

2. Sirgete ja tasandite kimbud ning sidumid.

(1) Fikseeritud punkt M tasandil eristab tasandi kõigi sirgete hulgast seda punkti läbivate sirgete alamhulga. Seda alamhulka nimetatakse punktiga M määratud sirgete kimbuks ja punkti M - selle kimbu keskpunktiks.

Olgu antud keskpunkti koordinaadid x_0 ja y_0 . Võrrand

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y}, \quad (11.1)$$

kus X ja Y on suvalised skalaarmuutujad, esitab kimpu. Tõepoolest, X ja Y iga väärtustepaari korral (tingimusel, et nad pole korraga nullid) (11.1) määrab sirge, mis läbib punkti $M(x_0, y_0)$. Vastupidi, iga sirge punktiga M määratud kimbus on esitatav selle võrrandiga.

Kimbu võrrandi kirjutamisel kasutatakse sageli tähistusi $Y = A$, $X = -B$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (11.1a)$$

Siin on A ja B teineteisest sõltumatud skalaarmuutujad, mis ei osutu korruga nullideks.

Kui $X \neq 0$, siis saab võrrandi (11.1) kirjutada taandatud kujul

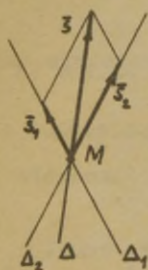
$$y - y_0 = a(x - x_0). \quad (11.1b)$$

Juhul $X = 0$ on kimbu sirge paralleelne ordinaatteljega; siis loetakse $a = \infty$. Muutuja a igale väärtusele vastab teatud sirge kimbus ja vastupidi. Järelikult sõltub kimbu sirgete hulk ühest parameetrist.

Üldjuhul võib kimbu keskpunkt olla määratud mitte oma koordinaatidega, vaid kimbu mingi kahe sirge abil, s.o. võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, & (\text{sirge } \Delta_1) \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. & (\text{sirge } \Delta_2) \end{cases} \quad (x)$$

Sellisel juhul on otstarbekas koostada kimbu võrrand keskpunkti koordinaate leidmata.



Joon. 106.

Et $\bar{s}_1(B_1, -A_1) \nparallel \bar{s}_2(B_2, -A_2)$, siis saab iga vektori kimbu tasandil avaldada vektorite \bar{s}_1 ja \bar{s}_2 lineaarkombinatsioonina (joon. 106):

$$\bar{s} = k_1\bar{s}_1 + k_2\bar{s}_2.$$

Vaatleme kimbu sirget sihivektoriga $\bar{s}(k_1B_1 + k_2B_2, -k_1A_1 - k_2A_2)$; selle sirge võrrand on

$$(k_1 A_1 + k_2 A_2)x + (k_1 B_1 + k_2 B_2)y + C = 0.$$

See sirge läbib keskpunkti $M(x_0, y_0)$, s.t.

$$(k_1 A_1 x_0 + k_1 B_1 y_0) + (k_2 A_2 x_0 + k_2 B_2 y_0) + C = 0.$$

Kuid M rahuldab ka antud sirgete võrrandeid:

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 = 0,$$

$$A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 = 0,$$

s.t.

$$k_1 A_1 x_0 + k_1 B_1 y_0 = -k_1 C_1,$$

$$k_2 A_2 x_0 + k_2 B_2 y_0 = -k_2 C_2;$$

järelikult $C = k_1 C_1 + k_2 C_2$. Ilmneb, et kimbu iga sirget esitab võrrand

$$k_1(A_1 x + B_1 y + C_1) + k_2(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0, \quad (11.2)$$

kus k_1 ja k_2 on skalaarmuutujad, mis ei saa korraga olla nullid. Kui $k_1 = 0$, siis (11.2) määrab sirge Δ_2 ; kui $k_2 = 0$, siis - Δ_1 .

Vastupidi: võrrand (11.2) määrab ainult vaadeldava kimbu sirgeid. Tõepoolest, et $k_1 A_1 + k_2 A_2$ ja $k_1 B_1 + k_2 B_2$ pole eelduse kohaselt mõlemad nullid, siis on (11.2) sirge võrrand muutujate k_1 ja k_2 iga lubatud väärtuste paari korral. Ilmselt kimbu keskpunkti koordinaadid - süsteemi (x) lahend - rahuldavad seda võrrandit.

k_1 ja k_2 muutumisel määrab (11.2) pöörleva sirge, mis kirjeldab kogu kimbu.

Kimbu võrrandi võib kirjutada ka kujul

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + k(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0,$$

kus $k = \frac{k_2}{k_1}$ on kimbu ainus oluline parameeter. Juhul $k_1 = 0$

loetakse $k = \infty$.

Vaatleme kimbu suvaliselt fikseeritud sirget Δ_3 , mille võrrand olgu $A_3x + B_3y + C_3 = 0$. Eelneva põhjal on võimalik leida muutujate k_1 ja k_2 sellised väärtused, mis eraldavad üldvõrrandist (11.2) sirge Δ_3 võrrandi. Sirge võrrandit saab määrata vaid nullist erineva kordaja täpsusega. Seega leiduvad arvud k_1 , k_2 ja ℓ nii, et $k_1(A_1x + B_1y + C_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2) \equiv \ell(A_3x + B_3y + C_3)$. See tingimus on tarvilik sirgete Δ_1 , Δ_2 ja Δ_3 lõikumiseks ühises punktis. Kerge on veenduda, et see tingimus on ka piisav.

Sümmeetrilisema kaju saamiseks tähistame $-\ell = k_3$. Kolm sirget Δ_1 , Δ_2 ja Δ_3 lõikuvad ühes punktis parajasti siis, kui leiduvad sellised arvud k_1 , k_2 ja k_3 , mis pole korruga nullid ja mille puhul kehtib samasus

$$k_1(A_1x + B_1y + C_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2) + k_3(A_3x + B_3y + C_3) \equiv 0.$$

Asendame selle samasuse võrrandisüsteemiga sobivate k_1 , k_2 ja k_3 väärtuste määramiseks:

$$\begin{cases} k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 = 0, \\ k_1B_1 + k_2B_2 + k_3B_3 = 0, \\ k_1C_1 + k_2C_2 + k_3C_3 = 0. \end{cases}$$

Sirgete kuulumiseks ühisesse kimpu on tarvilik ja piisav, et sellel süsteemil leidub mittetriviaalne lahend (k_1, k_2, k_3) , s.t.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Märgime lõpuks, et võrrandil (11.2) on tähendus ka juhul, kui sirged Δ_1 ja Δ_2 on paralleelsed, s.t. $A_1 = \ell A_2$, $B_1 = \ell B_2$, $C_1 \neq \ell C_2$. Tõepoolest, siis (11.2) on järgmine:

$$(k_1 \ell + k_2) A_2 x + (k_1 \ell + k_2) B_2 y + k_1 C_1 + k_2 C_2 = 0.$$

See võrrand määrab k_1 ja k_2 iga väärtuste paari korral (v.a. $(0, 0)$) sirge, mis on paralleelne lähtesirgetega (kontrollida iseseisvalt!). Sellepärast räägitakse vaadeldaval juhul paralleelsirgete kimbust ehk kimbust lõpmata kauge keskpunktiga.

(2) Tasandite kimbu mõiste on sisse toodud juba eespool (vt. § 10, p.11).

Olgu tasandite kimbu telg määratud kahe lõikuva tasandiga, s.t. süsteemiga

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, & (\text{tasand } \pi_1) \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. & (\text{tasand } \pi_2). \end{cases}$$

Ristkoordinaadistiku puhul saab korrata mõttekäiku, mida kasutasime sirgete kimbu käsitlemisel. Tõepoolest, kimbu kõigi tasandite normaalvektorid on ortogonaalsed teljega, seega komplanaarsed. Järelikult on kimbu iga tasandi normaalvektor \bar{m} avaldatav lähtetasandite $\bar{\pi}_1$ ja $\bar{\pi}_2$ normaalvektorite \bar{m}_1 ja \bar{m}_2 lineaarkombinatsioonina: $\bar{m} = k_1 \bar{m}_1 + k_2 \bar{m}_2$. Korrates eelnevat arutlust saame kimbu võrrandi

$$k_1(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + k_2(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0. \quad (11.3)$$

Ehkki tuletuskäik on (erinevalt sirgete juhust) seotud ristkoordinaatidega, on sellel võrrandil üldine affinne iseloom. Kehtib nimelt lause: võrrand (11.3) määrab muutujate k_1

ja k_2 iga väärtuste paari (v.a. $(0, 0)$) korral kimbu tasandi; vastupidi - kimbu iga tasandit saab esitada sellise võrrandiga suvalistes affiinsetes koordinaatides.

Lause esimese osa tõestuseks märgime, et kordajad $k_1 A_1 + k_2 A_2$, $k_1 B_1 + k_2 B_2$, $k_1 C_1 + k_2 C_2$ ei ole korruga nullid, sest vastasel juhul $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, mis on vastuolus eeldusega, et lähtetasandid lõikuvad. Seega (11.3) on tasandi võrrand, kui fikseerida k_1 ja k_2 . Iga punkt, mis asub π_1 ja π_2 lõikesirgel, asub ka sellel tasandil. (Miks?)

Teise väite põhjendamiseks vaatleme kimbu suvalist tasandit \mathcal{J}_3 . Valime sellel tasandil punkti $M(x_0, y_0, z_0)$ väljaspool telge, tähistame

$$k_1 = A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1,$$

$$k_2 = -A_2 x_0 - B_2 y_0 - C_2 z_0 - D_2,$$

ja asendame võrrandis (11.3):

$$(A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1)(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) - (A_2 x_0 - B_2 y_0 - C_2 z_0 - D_2)(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0.$$

Eelneva põhjal on see kimbu mingi tasandi võrrand, sest punkti M valiku tõttu ei saa k_1 ja k_2 olla korruga nullid. Punkti M koordinaadid rahuldavad seda võrrandit. Järelikult määrab võrrand tasandi π_3 .

Ka tasandite kimbul on ainult üks oluline parameeter $k = \frac{k_2}{k_1}$. Kui $k_1 = 0$ (s.t. kui $k = \infty$), siis saame lähtetasandi π_2 . Sirgete juhuga analoogiline arutelu näitab, et kolm tasandit kuuluvad ühte kimpu parajasti siis, kui leiduvad sellised

arvud k_1, k_2, k_3 , et nende tasandite võrrandid rahuldavad samasust

$$k_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + k_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) \equiv 0.$$

Märgime, et näites 45 a) vaatlesime kolme tasandit, mis kuuluvad ühte kimpu; nende puhul $k_1 = 11, k_2 = -5, k_3 = 7$.

Paralleelsete tasandite π_1 ja π_2 korral määrab võrrand (11.3) paralleeltasandite kimbu ehk kimbu lõpmata kaugete teljega. (Põhjendada iseseisvalt!)

(3) Antud punkti M läbivate sirgete hulka ruumis nimetatakse punktiga M määratud sirgete sidumiks, punkti M - sidumi keskpunktiks. Sidumi sirged, mis asuvad ühel tasandil, moodustavad sirgete kimbu keskpunktiga M .

Kui keskpunkti koordinaadid on x_0, y_0, z_0 , siis esitab sidumit võrrand

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}, \quad (11.4)$$

kus X, Y ja Z on kolm skalaarmuutujat, mis pole korruga nullid.

Sidumi sirge määramisel on olulised ainult suuruste X, Y, Z suhted, s.t. sidumi sirgete hulk on kaheparameetrliline. See asjaolu on eriti ilmne, kui kirjutada (11.4) taandatud kujul; näit. $Z \neq 0$ puhul

$$\begin{cases} x - x_0 = a(z - z_0), \\ y - y_0 = b(z - z_0), \end{cases} \quad \text{kus } a = \frac{X}{Z}, \quad b = \frac{Y}{Z}.$$

(4) Antud punkti M läbivate tasandite hulka ruumis nimetatakse punktiga M määratud tasandite sidumiks ja punkti M - sidumi keskpunktiks.

Olgu keskpunkti koordinaadid x_0, y_0, z_0 . Suvaline tasand $Ax + By + Cz + D = 0$ kuulub sidumisse parajasti siis, kui $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, s.t. kui selle tasandi võrrandi kordajate vahel on sõltuvus $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. See tingimus eraldab ruumi kõigi tasandite hulgast vaadeldava sidumi tasandid. Asendades lähtevõrrandis vabaliikme leitud avaldisega saame tasandite sidumi võrrandi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \quad (11.5)$$

A, B ja C on siin skalaarmuutujad, mis ei saa korraga olla nullid.

Sidumi tasandi määrab kaks parameetrit - kordajate A, B ja C suhted.

Näited.

46. Koostame sellise sirge võrrandi, mille lõikumisel sirgetega $7x - 5y - 35 = 0$ ja $x - y + 1 = 0$ tekkinud lõigu keskpunkt on $M(1, -3)$.

Punktiga M määratud sirgete kimp on $y + 3 = a(x - 1)$. Kimbu parameeter a tuleb määrata nii, et otsitava sirge ja antud sirgete lõikepunktide vastavate koordinaatide poolsummad võrduvad punkti M koordinaatidega. Piisav on vaadelda ainult abstsisse.

$$\begin{cases} 7x - 5y - 35 = 0, \\ y + 3 = a(x - 1); \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ y + 3 = a(x - 1); \end{cases}$$

$$x = \frac{5a - 20}{5a - 7} \quad x = \frac{a + 4}{a - 1}$$

$$\frac{5a - 20}{5a - 7} + \frac{a + 4}{a - 1} = 2,$$

$$a = \frac{11}{6};$$

$$y + 3 = \frac{11}{6}(x - 1).$$

Seega on otsitav sirge $11x - 6y - 29 = 0$.

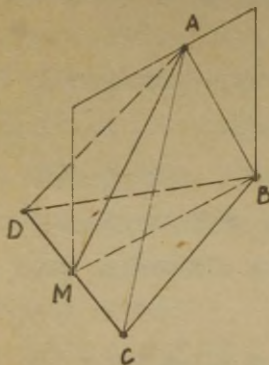
47. Tetraeedri tahud määravad neli tasandit (joon. 107):

$$ABC: x + y - 1 = 0,$$

$$ABD: x + 2y + z + 2 = 0,$$

$$ADC: 3x + z + 1 = 0,$$

$$BDC: x - y - z = 0.$$



Koostame võrrandi tasandi jaoks, mis läbib tippe A ja B ning serva CD keskpunkti M.

Selleks leiame tippude C ja D koordinaadid, lahendades võrrandisüsteemid

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 3x + z + 1 = 0, \text{ ja} \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Joon. 107.

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0, \\ 3x + z + 1 = 0, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

Punktide $C(0, 1, -1)$ ja $D(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ abil määrame punkti $M(-\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4})$. Leiame nüüd servaga AB määratud kimbus tasandi, mis läbib punkti M. Selleks asetame punkti M koordinaadid kimbu võrrandisse $x + y - 1 + k(x + 2y + z + 2) = 0$. Sel viisil saadud parameetri väärtus $k = \frac{5}{6}$ määrabki otsitava tasandi võrrandi $11x + 16y + 5z + 4 = 0$.

3. Lineaarvõrratuste geomeetriline tähendus.

(1) Sirge $Ax + By + C = 0$ jaotab tasandi kaheks pooltasandiks. Kolmliikme $Ax + By + C$ väärtus on null parajasti vaadeldava sirge punktides; seega peab igas punktis väljaspool sirget kehtima üks võrratustest $Ax + By + C > 0$ või $Ax + By + C < 0$. Näitame, et kumbagi võrratust rahuldavad parajasti ühe pooltasandi punktide koordinaadid.

Olgu $M_1(x_1, y_1)$ ja $M_2(x_2, y_2)$ punktid väljaspool sirget $Ax + By + C = 0$; lõigaku sirge M_1M_2 vaadeldavat sirget punktis $M_0(x_0, y_0)$. Teisendame lihtsuhtega $\lambda = (M_1M_2M_0)$ määratud valemeid (8.3)

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{1+\lambda} x_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} x_2, \\ y_0 = \frac{1}{1+\lambda} y_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} y_2 \end{cases}$$

kasutades tähistusi $\frac{1}{1+\lambda} = \sigma$ ja $\frac{\lambda}{1+\lambda} = \rho$. Ilmselt $\sigma + \rho = 1$, s.t. $\rho = 1 - \sigma$, seega

$$\begin{cases} x_0 = \sigma x_1 + (1 - \sigma)x_2, \\ y_0 = \sigma y_1 + (1 - \sigma)y_2. \end{cases}$$

Kui M_1 ja M_2 asetsevad teine teisel pool vaadeldavat sirget, siis on M_0 lõigu M_1M_2 sisepunkt ja $\lambda > 0$, järelikult $0 < \sigma < 1$. Kui aga M_1 ja M_2 on ühel pooltasandil, siis $\lambda < 0$ ja kas $\sigma < 0$ või $\sigma > 1$. Esimesel juhul on kordajad σ ja $1 - \sigma$ samamärgilised (positiivsed), teisel - vastandmärgilised.

Punkti M_0 koordinaadid rahuldavad vaadeldava sirge võrrandit:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

s.t.

$$A[\sigma x_1 + (1 - \sigma)x_2] + B[\sigma y_1 + (1 - \sigma)y_2] + C = 0,$$

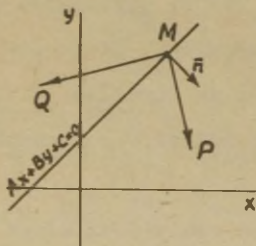
$$\sigma(Ax_1 + By_1 + C) + (1 - \sigma)(Ax_2 + By_2 + C) = 0.$$

Sellest võrdusest ja eelnevast märkusest kordajate σ ja $1 - \sigma$ märkide kohta järeldub nüüd, et avaldised $Ax_1 + By_1 + C$ ja $Ax_2 + By_2 + C$ peavad olema erimärgilised, kui punktid M_1 ja M_2 on teine teisel pooltasandil, ning samamärgilised, kui punktid on ühel pooltasandil.

Seega kujutavad võrratusi $Ax + By + C > 0$ ja $Ax + By + C < 0$ geomeetriliselt sirgega $Ax + By + C = 0$ määratud pooltasandid. Neid pooltasandeid nimetatakse vastavalt positiivseks ja negatiivseks.

Märgime lisaks, et koordinaatide alguspunkt asetseb positiivsel pooltasandil, kui $C > 0$, ja negatiivsel, kui $C < 0$ (põhjendada!).

Senine arutelu on sõltumatu afiinse koordinaadistiku iseloomust. Vaatleme nüüd ristkoordinaatide erijuhtu. Siis määravad kordajad A ja B sirge normaalvektori \bar{n} . Rakendame



Joon. 108.

selle vektori sirge mingisse punkti $M(x_0, y_0)$ (joon. 108). Iga punkti $P(x, y)$ korral pooltasandilt, kuhu on suunatud \bar{n} , kehtib võrratus $(\bar{n}, \overrightarrow{MP}) < \frac{\pi}{2}$, s.t.

$(\bar{n}, \overrightarrow{MP}) > 0$ ehk koordinaatkujus

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) > 0,$$

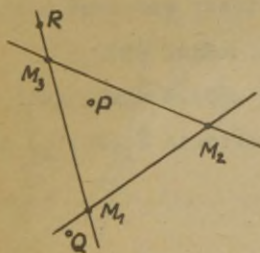
$$Ax + By - (Ax_0 + By_0) > 0.$$

Et M on sirgel, siis $Ax_0 + By_0 = -C$; seega vaadeldava pooltasandi iga punkti korral $Ax + By + C > 0$. Teisel pooltasandil iga punkti $Q(x, y)$ korral $(\bar{n}, \overline{MQ}) > \frac{\pi}{2}$, seepärast $(\bar{n}, \overline{MQ}) < 0$ ja kehtib võrratus $Ax + By + C < 0$.

Niisiis määrab positiivse pooltasandi sirge normaalvektori suund. Kui korrutada võrrand negatiivse arvuga, siis muutub normaalvektori suund vastupidiseks ja pooltasandite märgid vahetuvad.

(2) Analoogiliselt jaotab tasand $Ax + By + Cz + D = 0$ ruumi kaheks poolruumiks. Ühe poolruumi igas punktis kehtib võrratus $Ax + By + Cz + D > 0$ (positiivne poolruum), teise poolruumi puhul $Ax + By + Cz + D < 0$ (negatiivne poolruum). Ristkoordinaadistikus suundub tasandi normaalvektor $\bar{n}(A, B, C)$ positiivsesse poolruumi. Põhjendada iseseisvalt neid väiteid!

Näide 48. Mittekollineaarse punktide kolmikuga M_1, M_2



ja M_3 määratud sirged jaotavad tasandi seitsmeks piirkonnaks (joon. 109).

Olgu antud nende sirgete võrrandid:

$$M_1M_2 : 8x + 3y - 1 = 0,$$

$$M_1M_3 : x + 4y - 11 = 0,$$

$$M_2M_3 : 7x - y - 19 = 0.$$

Joon. 109. Millistes piirkondades asetsevad

punktid $P(1, 2)$, $Q(-3, 5)$ ja $R(7, 1)$?

Arvutame kolmnurga $M_1M_2M_3$ tippude koordinaadid vastavate võrrandisüsteemide lahendamise teel: $M_1(-1, 3)$, $M_2(2, -5)$, $M_3(3, 2)$. Tähistame sirgete võrrandite vasakuid pooli lühil-

sümbolitega $F_1 \equiv 7x - y - 19$, $F_2 \equiv x + 4y - 11$, $F_3 \equiv 8x + 3y - 1$. Määrame nende kolmliikmete märgid kolmnurga tippudes ja uuritavais punktides:

$$F_1(M_1) < 0, F_1(P) < 0, F_1(Q) < 0, F_1(R) > 0,$$

$$F_2(M_2) < 0, F_2(P) < 0, F_2(Q) > 0, F_2(R) = 0,$$

$$F_3(M_3) > 0, F_3(P) > 0, F_3(Q) < 0, F_3(R) > 0.$$

Ilmneb, et punktid P ja M_1 on ühel pool sirget M_2M_3 , P ja M_2 on ühel pool sirget M_1M_3 ning P ja M_3 ühel pool sirget M_1M_2 . Järelikult on punkt P kolmnurga $M_1M_2M_3$ sisepiirkonnas. Analoogiliselt määrame punktide Q ja R asukohta (vt. joon.109)

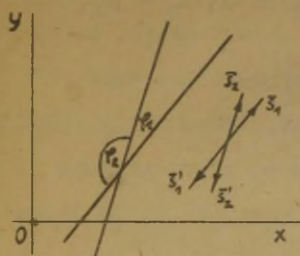
4. Nurgad sirgete ja tasandite vahel.

Käesolevas ja järgmistes punktides vaatleme nurkade ja lõikude mõõtmist, s.t. meetrilisi suurusi. Sellejuures kasutame ainult ristkoordinaate - oluliste lihtsustuste tõttu, mida need pakuvad (vt. §8 p.4). Sel teel saadud valemid ei kehti üldistes affiinsetes koordinaatides; vastavad afiin- sed valemid on tunduvalt keerukamad (vt. näide 49).

(I) Nurka kahe sirge vahel tasandil mõõdab nurk nende sirgete sihivektorite vahel. Olgu sihivektorid $\vec{s}_1(x_1, y_1)$ ja $\vec{s}_2(x_2, y_2)$, siis (4.9) põhjal

$$\cos(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}.$$

Vastavalt sihivektorite suunale määrab see valem ühe kahest täiendusnurgast φ_1 ja φ_2 , mille moodustavad sirged (joon. 110). Niisiis saab nurgapaari sirgete vahel ristkoordinaatides arvutada valemiga



Joon. 110.

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} \quad (11.6)$$

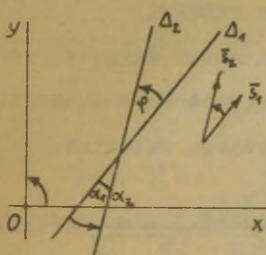
Kui sirged on esitatud üldvõrranditega, siis kasutame tähistusi $\bar{s}(B_1, -A_1)$, $\bar{s}(B_2, -A_2)$:

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (11.6a)$$

Siit järeldub lihtsa teisenduse teel:

$$\sin \varphi_{1,2} = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{1,2}} = \frac{|A_1 B_2 - A_2 B_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} ;$$

$$\tan \varphi_{1,2} = \pm \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \quad (11.6b)$$



Joon. 111.

Kahe sirge vahelise nurga üheks määramiseks järjestatakse (nummerdatakse) need sirged. Nurkaks kahe järjestatud sirge vahel nimetatakse nurka, mille võrra tuleb pöörata esimest sirget positiivses suunas ühtimiseni teise sirgega

(joon. 111).

Nurka sirgest Δ_1 sirgeni Δ_2 arvutatakse valemiga

$$\tan(\Delta_1 \wedge \Delta_2) = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \quad (11.7)$$

Kui sirged on esitatud taandatud võrranditega $y = a_1x + b_1$ ja $y = a_2x + b_2$, siis $A_1 = a_1$, $B_1 = -1$, $A_2 = a_2$ ning $B_2 = -1$; seega

$$\tan(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2} . \quad (11.8)$$

(Tuletada see valem joonise 111 abil)

Sirged on risti, kui $\bar{s}_1 \perp \bar{s}_2$, s.t.

$$\begin{aligned} \text{ehk} \quad X_1 X_2 + Y_1 Y_2 &= 0 \\ A_1 A_2 + B_1 B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Ristsirgete puhul $\tan(\Delta_1, \Delta_2) = \infty$, järelikult valemis (11.8) on nimetaja null: $1 + a_1 a_2 = 0$,

$$a_1 = -\frac{1}{a_2}, \quad (11.10)$$

s.t. ristsirgete tõusud on teineteise vastandpöördarvud.

(2) Nurgaks kahe sirge vahel ruumis nimetatakse nurkade sirgete sihivektorite vahel. Selle definitsiooni põhjal võib kõnelda ka nurgast kiivsirgete vahel.

Et sihivektorite \bar{s}_1 ja \bar{s}_2 suunad on antud sirgetel vabalt valitavad, siis moodustavad kaks sirget kaks teineteist täiendavat nurka φ_1 ja φ_2 , mis arvutatakse valemist

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \quad (11.11)$$

Sirged on risti, kui $\bar{s}_1 \perp \bar{s}_2$, s.o. kui

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0. \quad (11.12)$$

Kui üks (või mõlemad) sirgetest on esitatud taandatud

võrranditega, näit. kujul $\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$ siis (10.21a) põhjal, on selle sirge sihivektor $(a, b, 1)$, s.o. valemis (11.11, 12) tuleb lugeda $X = a, Y = b, Z = 1$.

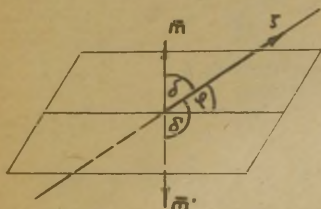
(3) Kaks lõikuvat tasandit moodustavad kaks kahetahulis- te tippnurkade paari. Neid kahetahulisi nurki mõistvaid joon- nurki saab arvutada tasandite normaalvektorite abil. Olgu viimased $\vec{m}_1(A_1, B_1, C_1)$ ja $\vec{m}_2(A_2, B_2, C_2)$, siis

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (11.13)$$

Tasandid on risti, kui $\vec{m}_1 \perp \vec{m}_2$, s.t. kui

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (11.14)$$

(4) Nurgaks sirge ja tasandi vahel nimetatakse väiksemat nurka sirge ja tema ristprojektsiooni vahel sellel tasandil (joon. 112). Seda nurka saab arvutada sirge sihivektori



Joon. 112.

seega alati $\sin \varphi = \cos |(\vec{s}, \vec{m})| = \frac{|(\vec{s}, \vec{m})|}{|\vec{s}| |\vec{m}|}$, s.t.

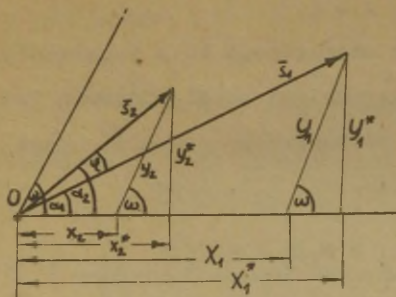
$$\sin \varphi = \frac{|AX + BY + CZ|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

Sirge on risti tasandiga, kui $\vec{s} \parallel \vec{m}$, s.t. kui

$$\frac{A}{X} = \frac{B}{Y} = \frac{C}{Z}. \quad (11.16)$$

Näited.

49. Tuletame kaldkoordinaatides kahe sirge vahelise nurga valemi tasandil (joon. 113):



$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\tan \varphi = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}$$

$$= \frac{\frac{Y_2^*}{X_2^*} - \frac{Y_1^*}{X_1^*}}{1 + \frac{Y_1^* Y_2^*}{X_1^* X_2^*}} =$$

Joon. 113.

$$= \frac{\frac{Y_2 \sin \omega}{X_2 + Y_2 \cos \omega} - \frac{Y_1 \sin \omega}{X_1 + Y_1 \cos \omega}}{1 + \frac{Y_1 Y_2 \sin^2 \omega}{(X_1 + Y_1 \cos \omega)(X_2 + Y_2 \cos \omega)}} =$$

$$= \frac{(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \sin \omega}{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + (Y_1 X_2 + Y_2 X_1) \cos \omega};$$

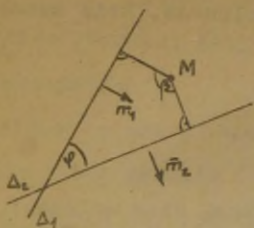
$$X_1 = -B_1, X_2 = -B_2,$$

$$Y_1 = A_1, Y_2 = A_2;$$

$$\tan \varphi = \frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1) \sin \omega}{A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos \omega}. \quad (11.17)$$

(vrd. 11.7).

50. On antud sirged Δ_1 ja Δ_2 oma võrranditega $3x - 4y + 7 = 0$ ja $2x + \sqrt{5}y - 1 = 0$ ning punkt $M(1, -3)$, mis, nagu kerge kontrollida, ei asu kummalgi sirgel. Arvutame selle



sirgetevahelise nurga suuruse, milles asub punkt M .

$$\varphi = \pi - \beta \quad (\text{joon. 114})$$

Vaatleme kolmliikmeid $F_1 \equiv 3x - 4y + 7$ ja $F_2 \equiv 2x + \sqrt{5}y - 1$. Et $F_1(M) > 0$ ja $F_2(M) < 0$, siis

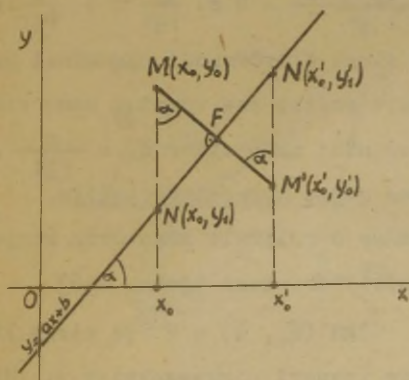
Joon. 114. $\bar{n}_1 \uparrow \uparrow \overline{ML}$ ja $\bar{n}_2 \uparrow \uparrow \overline{MN}$, järelikult

$$(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \pi - (\overline{ML}, \overline{MN}) = \pi - \beta = \varphi, \text{ s.t. } \cos \varphi =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 - 4\sqrt{5}}{\sqrt{9 + 16} \sqrt{4 + 5}} = \frac{12 - 4\sqrt{5}}{15}; \quad \varphi = \arccos \frac{12 - 4\sqrt{5}}{15}.$$

5. Punkti kaugus sirgest ja tasandist. Normaalkõrrandid.

(1) Punkti kaugus sirgest tasandil.



Joon. 115.

Leiame punkti

$M(x_0, y_0)$ kauguse sirgest $y = ax + b$. Selleks projekteerime M vaadeldavale sirgele paralleelselt y -teljega; olgu projektioon $N(x_0, y_1)$. Joonisel 115 on täiendavalt märgitud punkti M asend M' teisel pool sirget ja

vastav projektioon N' . Täisnurksest kolmnurgast MNF tuleneb punkti M igasuguse asendi korral, et

$$d = MF = |y_0 - y_1| \cos \alpha.$$

Et N on vaadeldava sirge punkt, siis $y_1 = ax_0 + b$; $a = \tan \alpha$

tõttu $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Asendame eelnevas, siis saame valem

$$d = \frac{|y_0 - ax_0 - b|}{\sqrt{1+a^2}}. \quad (11.18)$$

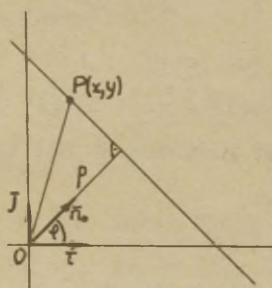
Kui sirge on esitatud üldvõrrandiga, siis eeldusel, et $B \neq 0$, on $\frac{A}{B} = -a$ ja $\frac{C}{B} = -b$, seega on vastav valem

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (11.19)$$

Kasutame kitsendavat eeldust, et $B \neq 0$. Kuid $B = 0$ korral on sirge võrrand $x = -\frac{C}{A}$ ja otsitav kaugus on $d = |x_0 + \frac{C}{A}|$; see tulemus järeldub ka valemist (11.19).

Vaatleme võrrandit $\frac{Ax + By + Cz}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$ e. $\frac{A}{|\vec{n}|} x + \frac{B}{|\vec{n}|} y + \frac{C}{|\vec{n}|} = 0$, mis on saadud sirge üldvõrrandi jagamisel normaalvektori mooduliga. Ilmselt esitab see võrrand sama sirget, kuid normaalvektoriks on nüüd ühikvektor $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Sellist võrrandit nimetatakse sirge normaalvõrrandiks.

Normaalvõrrand kirjutatakse harilikult mõnevõrra kompaktsel kujul, kasutades järgmisi tähistusi (joon. 116).



Joon. 116.

Olgu $(\vec{n}_0, \hat{I}) = \varphi$ ja sirge kaugus reeperi alguspunktist p. Siis $\frac{A}{|\vec{n}|} = \cos \varphi$ ja $\frac{B}{|\vec{n}|} = \sin \varphi$ (vt.

7.4 ja 4.11) ning $x \cos \varphi + y \sin \varphi = (\vec{r}_p, \vec{n}_0) = \text{pr}_{\vec{n}_0} \vec{OP} = p$. Teisest küljest (11.19) põhjal $p = \frac{|C|}{|\vec{n}|}$.

Järelikult on sirge normaalvõrrand

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0. \quad (11.20)$$

Selle võrrandi abil saab kauguse valemi (11.19) kirjutada lihtsamalt:

$$d = |x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - p|. \quad (11.19a)$$

Sõnastame valemid (11.19, 19a): punkti kaugus sirgest tasandil võrdub absoluutväärtusega sirge normaalvõrrandi vasakust poolest, millesse on asetatud vaadeldava punkti koordinaadid.

(2) Punkti kaugus tasandist on avaldatav valemiga, mis on analoogiline sirge puhul vaadelduga ja mis viib samal viisil tasandi normaalvõrrandi mõisteni. Kasutame selle valemi tuletamiskäigus vektoreid; lugeja veendugu iseseisvalt, et täpselt samal viisil on võimalik käsitleda ka sirge juhtu.

Vaatleme mingit

tasandit ühiknormaalvektoriga \vec{m}_0 (joon.

117). Olgu

$$(\vec{m}_0, \vec{I}) = \alpha,$$

$$(\vec{m}_0, \vec{J}) = \beta \text{ ja}$$

$$(\vec{m}_0, \vec{K}) = \gamma,$$

siis on vektori

\vec{m}_0 koordinaadid

$\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja

$\cos \gamma$ (vt. 7.6 ja

Joon. 117.

4.8). Olgu \vec{m}_0 rakendatud tasandi suvalisse punkti $P(x, y, z)$.

Antud punkti $M(x_0, y_0, z_0)$ kaugus tasandist on

$$d = |\text{pr}_{\bar{m}_0} \overline{PM}| = |(\overline{PM}, \bar{m}_0)| = |(x_0 - x)\cos\alpha + (y_0 - y)\cos\beta + (z_0 - z)\cos\gamma| = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)|.$$

Kuid $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = (\bar{r}_P, \bar{m}_0) = \text{pr}_{\bar{m}_0} \overline{OP} = ON = p$, kus p tähistab tasandi kaugust reeperi alguspunktist. Järelikult määrab punkti kauguse tasandist valem

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|. \quad (11.21)$$

Uhtlasi ilmneb sooritatud arutlusest, et tasandi iga punkt P rahuldab võrrandit

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \quad (11.22)$$

See tingimus on ilmselt ka piisav punkti P kuulumiseks tasandile - tegemist on tasandi normaalvõrrandiga. Seega võrdub punkti kaugus tasandist absoluutväärtusega tasandi võrrandi vasakust poolest, millesse on asetatud vaadeldava punkti koordinaadid.

Kirjutame normaalvõrrandi harilikel tähistustel:

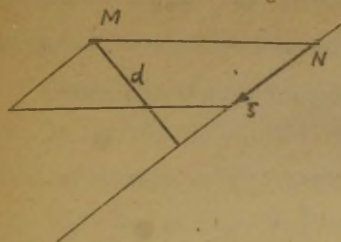
$$\frac{A}{|\bar{m}|} x + \frac{B}{|\bar{m}|} y + \frac{C}{|\bar{m}|} z + \frac{D}{|\bar{m}|} = 0, \quad |\bar{m}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Siit tuleneb punkti kauguse valem tasandi üldeksituse korral:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (11.21a)$$

(3) Punkti kaugust sirgest ruumis saab hõlpsasti määrata vektorite abil.

Olgu sirge esitatud analüütiliselt, siis on kas antud või on alati leitav tema üks punkt $N(x_1, y_1, z_1)$ ja sihivektor $\bar{s}(X, Y, Z)$. Rakendame sihivektori punkti N (joon. 118), siis on antud punkti $M(x_0, y_0, z_0)$ kaugus d sirgest vektori-



tele \bar{s} ja NM ehitatud rööp-
küliku kõrgus. Järelikult

$$d = \frac{S_{\text{rööpk}}}{|\bar{s}|}$$

$$d = \frac{|[\bar{s}, NM]|}{|\bar{s}|}; \quad (11.23)$$

Joon. 118.

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z \\ y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z & X \\ z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Y \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

Praktiliselt on otstarbekas meeles pidada valem (11.23),
õigemini - arutus, mis viib selle valemieni. Täiesti tarbetu
on memoriseerida valemi koordinaatkuju.

Näited.

51. On antud sirged $3x - 4y + 11 = 0$ ja $4x - 3y - 7 = 0$.
Koostame nurgapoolitaja võrrandi selle sirgetevahelise nur-
ga jaoks, milles asetseb punkt $M(3, 2)$.

Olgu $P(x, y)$ nurgapoolitaja suvaline punkt. Ta on võrd-
selt kaugustel antud sirgetest, s.t. $\frac{|3x - 4y + 11|}{5} =$
 $= \frac{|4x - 3y - 7|}{5}$. Et P ja M on ühes ja samas nurgas, siis
 $F_1(P)$ ja $F_2(P)$ peavad olema samamärgilised vastavalt $F_1(M)$
ja $F_2(M)$ -ga (siin $F_1 \equiv 3x - 4y + 11$ ja $F_2 \equiv 4x - 3y - 7$).
Kuid $F_1(M) > 0$ ja $F_2(M) < 0$, sellepärast peavad $F_1(P)$ ja
 $F_2(P)$ olema vastandmärgilised. Seda asjaolu silmas pidades
kirjutame otsitava nurgapoolitaja võrrandi:

$$3x - 4y + 11 = -(4x - 3y - 7),$$

$$7x - 7y + 4 = 0.$$

52. Näites 27 arvatud kauguse punktist 0 tasandini ABC saab nüüd leida teisel viisil.

Koostame ABC võrrandi:

$$(\overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0,$$

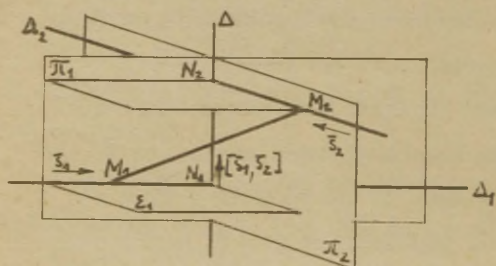
$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 4 \\ 2 & -4 & -3 \\ -6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x + 2y - 2z + 5 = 0.$$

Punkti D (7, -1, 2) kaugus sellest tasandist $d = \frac{7-2-4+5}{\sqrt{1+4+4}} = 2$.

6. Kiivsirgete ühine rist sirge ja kiivsirgetevaheline kaugus.

Üldsust kitsendamata võime lugeda antuiks kiivsirgete sihivektorid $\vec{s}_1(x_1, y_1, z_1)$ ja $\vec{s}_2(x_2, y_2, z_2)$ ning ühe punkti kummalgi sirgel: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ja $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Tarviduse puhul saab neid vektoreid ja punkte leida sirgete analüütilisest esitusest.



Joon. 119.

(1) Kahe kiivsirge Δ_1 ja Δ_2 ühise rist-sirge Δ sihi määrab vektor $[\vec{s}_1, \vec{s}_2]$ (joon. 119). Ühine rist-sirge on vaadeldav tasandite π_1 ja π_2 lõikejoone-na; tasand π_1 läbib

sirgeid Δ_1 ja Δ , tasand π_2 - sirgeid Δ_2 ja Δ . Koostame nende tasandite võrrandid.

Olgu $P(x, y, z)$ suvaline punkt ruumis. Ta asub tasandil π_1 parajasti siis, kui vektorid $\overline{M_1P}$, $\overline{s_1}$ ja $[\overline{s_1}, \overline{s_2}]$ on komplanaarsed, ning tasandil π_2 parajasti siis, kui vektorid $\overline{M_2P}$, $\overline{s_2}$ ja $[\overline{s_1}, \overline{s_2}]$ on komplanaarsed. Nendest tingimustest tulenevadki tasandite võrrandid:

$$\begin{cases} (\overline{M_1P}, \overline{s_1}, [\overline{s_1}, \overline{s_2}]) = 0, \\ (\overline{M_2P}, \overline{s_2}, [\overline{s_1}, \overline{s_2}]) = 0; \end{cases}$$

saadud võrrandisüsteem määrab otsitava ühise ristsirge. Lugeja väljendagu leitud süsteem skalaarvõrranditena (determinantide abil).

(2) Kahe kiivsirge vahelist kaugust mõeldab nende ühise ristsirge lõik N_1N_2 , mis asub kiivsirgete vahel (joon. 120). Lõik N_1N_2 on sirgete antud punktidega määratud lõigu M_1M_2 ristprojektsioon ühisele ristsirgele (joonisel punkte M_1 ja M_2 projekteerivad vastavalt tasandid ϵ_1 ja ϵ_2). Need kaalutlused võimaldavad välja kirjutada valemi otsitava kauguse arvutamiseks:

$$d = |\text{pr}_{[\overline{s_1}, \overline{s_2}]} \overline{M_1M_2}| = \frac{|(\overline{M_1M_2}, [\overline{s_1}, \overline{s_2}])|}{|[\overline{s_1}, \overline{s_2}]|},$$

$$d = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \overline{s_1}, \overline{s_2})|}{|[\overline{s_1}, \overline{s_2}]|}; \quad (11.24)$$

$$d = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

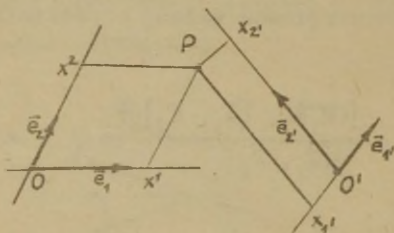
§ 12. Koordinaat teisendused
ja punkt teisendused

1. Põhimõistete näitlik käsitus ühel konkreetsel erijuhul.

Käesolevas paragrahvis vaadeldavad küsimused on mõnevõrra abstraktse iseloomuga, ometi on neil fundamentaalne tähtsus, mis ületab kaugelt analüütilise geomeetria kursuse raamid. Suurema selguse saamiseks käsitleme algul konkreetset näidet.

(1) Afiinsete koordinaatide teisendus tasandil.

Olgu tasandil antud kaks erinevat afiinset reeperit



Joon. 120.

$\{0; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ja
 $\{0'; \bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$ (joon.

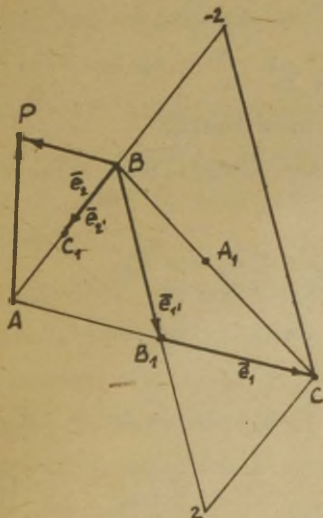
120); siis on igal punktil P teatud koordinaadid mõlema reeperi suhtes. Olgu need koordinaadid vastavalt x^1, x^2 ja $x^{1'}, x^{2'}$.

Nimetame kokkuleppeliselt esimest reeperit ja sellega määratud koordinaate "vanadeks", teisi - "uuteks". Ilmselt on sel-

lised nimetused vaid suhtelise, vaatlusviisist sõltuva tähendusega.

Tekib probleem: kuidas leida punkti uusi koordinaate, kui on teada vanad? Probleemi lahendamiseks on tarvis teada uue ja vana reeperi vastastikust asendit.

Konkretiseerime probleemi. Olgu antud kolmnurk ABC külgede keskpunktidega A_1 , B_1 ja C_1 (joon. 121). Valime esimeseks ("vanaks") reeperiks $\{\bar{A}; \overline{AC}, \overline{AB}\}$ ja teiseks ("uueks") $\{B; \overline{BB_1}, \overline{BC_1}\}$. Siis on näit. tipu C vanad koordinaadid (1, 0) ja uued (2, -2). Lugeja kirjutagu punktide A, B, A_1 , B_1 ja C_1 koordinaadid mõlema reeperi suhtes!



Joon. 121.

lemid, mis võimaldavad arvutada tasandi iga punkti uusi koordinaate antud vanade kaudu.

Tasandi suvalise punkti P korral

Olgu teada mingi punkti M vanad koordinaadid: $x^1 = -3$ ja $x^2 = 9$. Millised on tema uued koordinaadid? Märgime, et on tülikas ja sageli võimatu lahendada sellist küsimust geomeetrilise konstrueerimise teel; näit. $x' = 10^6$ ja $AC = 10$ cm puhul tuleks x' -teljele kanda 1 km pikkune lõik. Otstarbekas on lahendada küsimus üldises vormis - koostada va-

$$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP},$$

kus $\overline{AP} = x^1 \overline{e}_1 + x^2 \overline{e}_2$, $\overline{BP} = x^{1'} \overline{e}'_1 + x^{2'} \overline{e}'_2$, ja

$$\overline{AB} = \overline{e}_2, \text{ seega}$$

$$x^1 \overline{e}_1 + x^2 \overline{e}_2 = \overline{e}_2 + x^{1'} \overline{e}'_1 + x^{2'} \overline{e}'_2.$$

Avaldame uue reeperi vektorid vana reeperi kaudu (joon. 121):

$$\overline{e}'_1 = \frac{1}{2} \overline{e}_1 - \overline{e}_2,$$

$$\overline{e}'_2 = -\frac{1}{2} \overline{e}_2$$

ja asendame eelnevas:

$$x^1 \overline{e}_1 + x^2 \overline{e}_2 = \frac{1}{2} x^{1'} \overline{e}'_1 + (-x^{1'} - \frac{1}{2} x^{2'} + 1) \overline{e}_2.$$

Reeperivektorite lineaarse sõltumatuse tõttu järelduvad siit valemid

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{2} x^{1'}, \\ x^2 = -x^{1'} - \frac{1}{2} x^{2'} + 1, \end{cases} \quad (\alpha)$$

mis väljendavad vanu koordinaate uute kaudu.

Arutledes analoogiliselt leiame vastupidised valemid:

$$\overline{BP} = \overline{BA} + \overline{AP},$$

$$x^{1'} \overline{e}'_1 + x^{2'} \overline{e}'_2 = 2\overline{e}_2 + x^1 \overline{e}_1 + x^2 \overline{e}_2,$$

$$\begin{cases} \overline{e}_1 = 2\overline{e}'_1 - 4\overline{e}'_2, \\ \overline{e}_2 = -2\overline{e}'_2, \end{cases}$$

$$x^{1'} \overline{e}'_1 + x^{2'} \overline{e}'_2 = 2x^1 \overline{e}'_1 + (-4x^1 - 2x^2 + 2) \overline{e}_2,$$

$$\begin{cases} x^{1'} = 2x^1, \\ x^{2'} = -4x^1 - 2x^2 + 2. \end{cases} \quad (\beta)$$

Veenduda, et valemid (β) saab tuletada, lahendades (α) $x^{1'}$ ja $x^{2'}$ suhtes, samuti vastupidi!

Valemeist (β) saame vastuse esitatud küsimusele: punkti M uued koordinaadid on $x^{1'} = -6$ ja $x^{2'} = -4$.

Afiinsete reeperite vahetust, s.o. üleminekut koordinaatidelt x^1, x^2 uutele koordinaatidele $x^{1'}, x^{2'}$ (või vastupidi), nimetatakse afiinsete koordinaatide teisenduseks tasandil. Vaadeldud näites kirjeldavad sellist teisendust valemid (α) ja (β); neid nimetatakse koordinaatteisenduse valemeiks.

Koordinaatide teisendamise praktiline tähtsus ilmneb järgmistes peatükkides. Märgime siin vaid asjaolu, et koordinaatteisendused võimaldavad muuta uuritavate võrrandite kuju. Nõnda ilmneb jooniselt 121, et sirge BC võrrand vanas teljes-tikus on $x^1 + x^2 = 1$ (võrrand telglõikudes). Asendus valemitaga (α) annab võrrandi $x^{1'} + x^{2'} = 0$, mis esitab sama sirget uue reeperi suhtes.

Kontrollige, et B ja C uued koordinaadid rahuldavad võrrandit! Kirjutage mediaanide AA_1, BB_1 ja CC_1 võrrandid mõlema reeperi suhtes ning kontrollige, et punktide A, A_1 , B, B_1 , C ja C_1 vanad ja uued koordinaadid rahuldavad vastavaid võrrandeid!

Rõhutame, et koordinaatteisendused ei muuda geomeetrilisi objekte, vaid ainult nende analüütilist esitust. Koordinaatteisendust võib vaadelda koordinaatvõrgu deformatsioonina tasandil. Sellejuures säilib iga kujund, jääb paigale iga punkt - muutuvad ainult punktide koordinaadid: $(x^1, x^2) \rightarrow (x^{1'}, x^{2'})$.

Vastavalt reeperi valiku suvalisusele saab geomeetrilisi kujundeid esitada analüütiliselt lõpmata paljudel erinevatel viisidel. Siit tuleneb praktiline vajadus: valida reeper kõige otstarbekamalt, nimelt nii, et uuritavat probleemi kirjeldage

dav võrrand või võrrandisüsteem oleks maksimaalselt lihtne. Ilmselt on selleks tarvis tunda seaduspärasusi, millele alluvad koordinaatteisendused.

(2) Tasandi afinite teisendus.

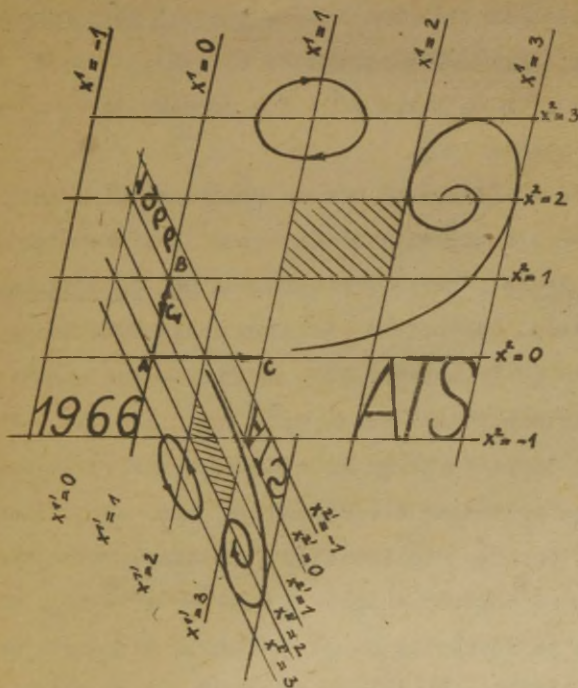
Näitame nüüd, et valemitele (α) ja (β) saab anda veel teistsuguse tõlgenduse.

Joonisel 122 on kujutatud reeperid $R = \{A; \overline{AB}, \overline{AC}\}$ ja $R' = \{B; \overline{BB_1}, \overline{BC_1}\}$ ning nendega seotud koordinaatvõrgud. Kasutagu kaks vaatlejat V ja V' tasandi kirjeldamisel vastavalt reeperit R ja R' , s.t. kummagi vaatleja seisukohalt olgu tasandil antud ainult üks (teise omast erinev) koordinaatvõrk. Sellistel eeldustel jõuavad vaatlejad V ja V' ühesugusel viisil talitades erinevate tulemusteni. Seda iseloomustab joonis 122. Näiteks punktihulka, mille koordinaadid on 1 ja 2 vahel, märgivad vaatlejad erinevate viirutatud rööpkülikutena; erinevatena märgivad nad tasandile ka samu numbreid, tähti ja kujundeid.

Püüame vaatlejate toimingud kooskõlla viia sel teel, et deformeerime ühe reeperi ja sellega seotud võrgu teiseks. Toimingu muutus näiteks vaatleja V võrguga.

Kujutleme nüüd piltlikkuse huvides, et on täidetud kaks eeldust: 1) vaatleja V ei märka oma võrgu deformeerumist; 2) vaatlejad ei tea, et nende reeperid erinevad ja saavad informatsiooni vahetada ainult raadio teel.

Selleks et vaatleja V ei märkaks oma võrgu muutumist, peab ta ise muutuma koos võrguga. Niisiis kahaneb vaatleja V koos reeperiga R viimase ühtimiseni R' -ga. Kahanev V näeb



Joon. 122.

Pärast reeperite R ja R' ühtimist kirjeldab V deformatsiooni tulemust nii, nagu on kujutatud joonisel 123. Tema käsutuses olevate andmete põhjal väidab ta, et reeperiga R seotud koordinaatvõrk on endine, kuid R' ja sellega seotud võrk on kasvanud. Selleks, et viia vaatleja V' poolt joonestatud kujundeid ühtimisele V omadega, tuleb neid V arvates deformeerida - ja teha seda täpselt nii, nagu toimus tema

tasandil olevate kujundite muutumist ja loeb tasandi kasvavaks. Samal ajal teatab V' , et mingit tasandi deformatsiooni ei toimu. Sellest järeldab V , et V' muutub koos tasandiga ja nimelt kasvab.

Niisiis on vaatleja V seisukohalt tasandil ainult üks reeper - tema oma muutumatu reeper R . Selle reeperi suhtes on toimunud tasandi deformatsioon - tasandi teisendus. Näiteks punkt $(1, 0)$ teisenes punktiks $(2, -2)$, sirge $x^2 = 1$ - sirgeks $2x^1 + x^2 = 0$, sirge $x^2 = 2$ - sirgeks $2x^1 + x^2 + 2 = 0$, jne. (vt. joonis 123).

Täpselt sama tulemuseni jõuame valemite (β) abil, kui neid tõlgendada järgmiselt: x^1, x^2 ja $x^{1'}, x^{2'}$ on tasandi erinevate punktide P ja P' koordinaadid ühe ja sellesama reeperi R suhtes. Tõepoolest, sellise tõlgendusviisi korral seavad valemid (β) punktile $P(1, 0)$ vastavusse punkti $P'(2, -2)$, sirgele $x^2 = 1$ sirge $2x^{1'} + x^{2'} = 0$ jne. (Kontrollida kõigi joonisel märgitud sirgete korral!) Et tegemist on ühe ja sellesama koordinaadistikuga, on joonisel 123 kasutatud ühesuguseid koordinaattähistusi. Rõhutame veel kord: koordinaatteisenduste korral on $x^2 = 1$ ja $2x^{1'} + x^{2'} = 0$ ühe ja sellesama sirge võrrandid erinevate reeperite suhtes; tasandi teisenduse puhul $x^2 = 1$ ja $2x^1 + x^2 = 0$ on erinevate sirgete võrrandid ühe ja sellesama reeperi suhtes; kirjutis $2x^{1'} + x^{2'} = 0$ tähendab teisel juhul vaid seda, et nimelt see sirge on saadud sirgest $x^2 = 1$ tasandi vaadeldava teisenduse puhul.

Valemitega (β) määratud tasandi teisendust on kerge näitlikult mõista abireeperi abil. Viimaseks on reeper $R'' = \{A'; A'B', A'C'\}$ (vt. joon. 123), milleks vaatleja V arvates deformeerus vaatleja V' reeper R' (mida V luges esi-

algselt ühtivaks reeperiga R). Valemite (β) toimel liigub tasandi iga punkt P koordinaatidega (x^1, x^2) (reeperi R suhtes) uude asendisse - punkti P' , millel on abireeperi R'' suhtes samad koordinaadid (x^1, x^2) . Nõnda muutub punkt $A(0, 0)$ punktiks A' , mille koordinaadid R'' suhtes on jälle $(0, 0)$; sirge, mille võrrand R suhtes on $x^1 = 0$, teiseneb sirgeks, millel on sama võrrand R'' suhtes jne. (vt. joon. 123). Sooritada vastav kontroll kõigi joonisel märgitud punktide ja sirgete korral!

Tõlgendada analoogilisel viisil valemeid (α)!

Niisiis valemid (α) ja (β), mis erinevate reeperite (ehk muutuva reeperi) korral määravad koordinaatteisenduse, kirjeldavad üheainsa (muutumatu) reeperi puhul tasandi teisendust. Valemite seose tõttu afiinsete reeperitega räägitakse teisel juhul tasandi afiinsest teisendusest. Koordinaatteisendusest eristamiseks nimetatakse valemite teist tõlgendamisviisi sageli ka afiinseks punktteisenduseks: tasandi iga punkt $P(x^1, x^2)$ liigub uude asendisse $P'(x'^1, x'^2)$.

Täpsustame mõnevõrra kasutatavat terminoloogiat. Vaatleme kaht punktihulka A ja B . Kui hulga A igale punktile P on mingi eeskirja abil seatud vastavusse teatud punkt P' hulgas B' nii, et hulga B iga punkt vastab A mingile punktile ja A erinevatele punktidele vastavad hulgas B alati erinevad punktid, siis öeldakse, et on antud hulga A kujutus hulgale B . Erijuhul, kui A ja B on ühtivad hulgad, esineb hulga A kujutus iseendale ehk hulga A teisendus.

Käesolevas arutluses vaatleme tasandi punktihulka, milles on valitud joonisel 122 kujutatud reeperid R ja R' . Nende reeperite abil moodustatud valemid (α) ja (β) korraldavad üksühese vastavuse tasandi punktide vahel: $P \leftrightarrow P'$. Seega on tegemist tasandi kujutusega iseendale e. tasandi teisendusega defineeritud mõttes.

Teine vaateviis viib seega geomeetriliste teisenduste juurde, mille mõiste on mõnevõrra tuttav juba keskkoolist (sarnasusteisendus jne.). Geomeetriliste teisenduste uurimisel on erakordselt suur tähtsus geomeetria struktuuri kõige üldisemate printsiipide väljaselgitamisel. Tähtsamaid geomeetrilisi teisendusi vaadeldakse käesoleva kursuse teises osas.

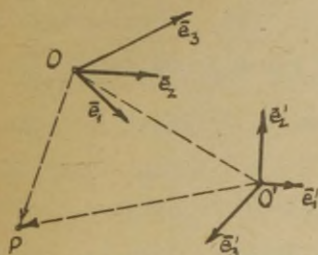
2. Üldine afinne teisendus.

Vaatleme kaht afinset reeperit ruumis: $R = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ja $R' = \{O'; \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ (joon. 124). Olgu teada uue reeperi R' asend vana reeperi R suhtes, s.t. olgu antud uue alguspunkti O' koordinaadid ja uute reeperivektorite \bar{e}'_1 koordinaadid R suhtes:

$$O'(c^1, c^2, c^3),$$

$$\bar{e}'_i(c^1_i, c^2_i, c^3_i) \quad (i=1,2,3).$$

Maatriksit



Joon. 124.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & c_{13}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 & c_{13}^2 \\ c_{11}^3 & c_{12}^3 & c_{13}^3 \end{pmatrix}, \quad (12.1)$$

mille veeruvektoriteks on uued reeperivektorid, nimetatakse vaadeldava teisenduse maatriksiks. Ta on regulaarne, sest (7.15) põhjal

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = \det C (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3),$$

s.t. $\det C \neq 0$. Järelikult kas $\det C > 0$ või $\det C < 0$. Esimesel juhul kõneldakse, et R ja R' on ühesuguselt orienteeritud, teisel juhul - vastupidiselt. Niisiis

$$\begin{cases} \bar{O}\bar{O}' = c_{11}^1 \bar{e}_1 + c_{12}^1 \bar{e}_2 + c_{13}^1 \bar{e}_3 = c_{1j}^j \bar{e}_j \\ \bar{e}_1 = c_{11}^1 \bar{e}_1 + c_{12}^2 \bar{e}_2 + c_{13}^3 \bar{e}_3 = c_{1j}^j \bar{e}_j. \end{cases} \quad (12.2)$$

Kasutame siin summeerimiskokkulepet (§ 3. p.6). Et vaatluse all on olukord ruumis, siis tuleb kõigile indeksitele omista da väärtusi 1, 2, 3. Lugejal on soovitatav "silma harjutamiseks" kõik järgnevad lühisümbolikas esitatud summeerimised lahti kirjutada.

Olgu ruumi suvalise punkti P vanad koordinaadid x^1, x^2, x^3 ja uued $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$, s.t.

$$\begin{aligned} \bar{O}P &= x^i \bar{e}_i, \\ \bar{O}'P &= x^{i'} \bar{e}_{i'}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Jooniselt 124 ilmneb, et kehtib võrdus

$$\bar{O}P = \bar{O}'P + \bar{O}\bar{O}'; \quad (12.4)$$

teisendame seda (12.2,3) abil:

$$x^i \bar{e}_i = x^{i'} \bar{e}_{i'} + c_{1j}^j \bar{e}_j = x^{i'} c_{i'j}^j \bar{e}_j + c_{1j}^j \bar{e}_j = (c_{i'j}^j x^{i'} + c_{1j}^j) \bar{e}_j.$$

Kasutame summeerimisindeksi tähistamise suvalisust ja kirjutame vasakpoolses summas 1 asemel j :

$$\begin{aligned}x^j \bar{e}_j &= (c_1^j x^{1'} + c^j) \bar{e}_j, \\(x^j - c_1^j x^{1'} - c^j) \bar{e}_j &= 0.\end{aligned}$$

Reeperivektorite lineaarse sõltumatus tõttu saab nulliga võrduda ainult nende triviaalne lineaarkombinatsioon; selle tõttu järeldub saadud vektorvõrdusest kolm skalaarvõrdust

$$x^j = c_1^j x^{1'} + c^j, \quad (12.5)$$

mis määravad punkti P vanad koordinaadid uute kaudu uut baasi iseloomustavate kordajate abil. Neid võrdusi nimetatakse afiinse teisenduse valemiteks ruumis. Senise vaatlusviisi korral määravad need valemid afiinsete koordinaatide teisenduse ruumis; selle teisenduse tingib reeperivahetus $R \rightarrow R'$.

Kirjutame valemid (12.5) detailselt:

$$\begin{cases}x^1 = c_1^1 x^{1'} + c_2^1 x^{2'} + c_3^1 x^{3'} + c^1, \\x^2 = c_1^2 x^{1'} + c_2^2 x^{2'} + c_3^2 x^{3'} + c^2, \\x^3 = c_1^3 x^{1'} + c_2^3 x^{2'} + c_3^3 x^{3'} + c^3.\end{cases} \quad (12.5a)$$

Märgime, et nende valemite tuletamine on summeerimiskokuleppe kasutamisetä tunduvalt tülikam, kuid mitte põrmugi rangem ega selgem. Veenduda selles iseseisvalt!

Valemite (12.5) tuletamist ja kuju saab maksimaalselt lihtsustada maatriksümboolika abil. Veendume selles. Olgu $\bar{e} = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)$ ja $\bar{e}' = (\bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \bar{e}'_3)$ üherealised maatriksid, mille elementideks on reeperite R ja R' vektorid, ning olgu $C^{\bar{x}} = \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \end{pmatrix}$ üheveeruline maatriks, mille elementideks on

punkti O' vanad koordinaadid. Kirjutame ka punkti P , koordinaatide kolmikud maatriksitena: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$.

Nendes tähistustes saab (12.2) ja (12.3) kirjutada ilma indeksiteta:

$$\begin{cases} \overline{OO'} = \bar{e} C^{\mathbb{E}}, \\ \bar{e}' = \bar{e} C; \end{cases}$$

$$\overline{OP} = \bar{e}x,$$

$$\overline{O'P} = \bar{e}'x'.$$

nüüd saame (12.4) põhjal

$$\begin{aligned} \bar{e}x &= \bar{e}'x' + \bar{e}C^{\mathbb{E}} = \bar{e}Cx' + \bar{e}C^{\mathbb{E}} = \bar{e}(Cx' + C^{\mathbb{E}}), \\ x &= Cx' + C^{\mathbb{E}}. \end{aligned} \quad (12.5b)$$

Saadud maatriksseos on afiinse teisenduse valemite kõige kompaktsem esitus. Lugejal tuleb endale hästi selgeks teha valemite 12.5, 5a ja 5b samaväärsus.

Valemid 12.5 on pööratavad: nende abil saab tuletada valemid, mis väljendavad uusi koordinaate ($x^{1'}$) vanade (x^1) kaudu. Märgime selle väite kinnituseks, et valemid (12.5a) on lahendatavad $x^{1'}$, $x^{2'}$ ja $x^{3'}$ suhtes kui võrrandisüsteem nullist erineva determinandiga ($\det C \neq 0$; Crameri peajuht). Lihtne on selle tulemuseni jõuda maatriksvõrduse (12.5b) vasakpoolse korrutamise teel maatriksiga C^{-1} :

$$x' = C^{-1}x - C^{-1}C^{\mathbb{E}}. \quad (12.6)$$

Need valemid määravad pöördteisenduse $R' \rightarrow R$. Nende tuletamisel saab talitada muidugi ka samal viisil nagu lähteteisenduse korral. Paneme tähele, et pöördteisenduse maatriksiks on lähteteisenduse maatriksi pöördmaatriks.

Valemeid (12.5) saab tõlgendada kahel viisil:

1) reeper ruumis muutub ($R \rightarrow R'$) ja selle tõttu iga punkti koordinaadid teisenevad ($(x^1) \rightarrow (x'^1)$) valemite (12.5) abil; (x^1) ja (x'^1) on ühe ja sellesama punkti koordinaadid erinevate reeperite suhtes.

2) (x^1) ja (x'^1) on erinevate punktide koordinaadid ühe ja sellesama reeperi suhtes; see reeper on muutumatu, muutuvad punktide asendid reeperi suhtes: valemid (12.5) määravad punkti $P'(x'^1)$ uue asendi $P(x^1)$.

Valemite (12.5) tuletamisel pidasime silmas esimest vaatekohta, mille puhul on tegemist, nagu märgitud, afiinse koordinaatteisendusega. Teise vaateviisi puhul esineb ruumi afiinne teisendus. Piirdume siinkohal selle formaalse määratlusega; lugeja kandku ruumi üle need kujutlused, mis tekisid tasandi teisenduse näitlikul käsitlemisel eelnevas punktis.

Analoogiliselt saab kahel viisil tõlgendada ka pöördteisenduse valemid.

3. Afiinne pööre ja rööplüke.

Üldist afiinset teisendust ruumis kirjeldavad mittehomogeensed lineaarsed valemid (12.5a). Nendest valemitest ilmneb, et üldine afiinne teisendus on määratud 12 suurusega - kordajatega c_j^i ja c^i . Nende suuruste spetsiaalsed väärtuste kombinatsioonid (näit. teatud arvu kordajate võrdumine nulliga jne.) määravad mitmesuguseid afiinse teisenduse erijuhete. Pöörame siin tähelepanu mõnele tähtsamale.

Homogeensete valemite korral, s.t. juhul kui $c^1 = c^2 = c^3 = 0$, ühtib punkt $0'$ punktiga 0 - reeperi alguspunkt ei muutu, muutuvad ainult reeperivektorid. Sellise teisenduse korral räägitakse reeperi afiinsest pöördest. Pöörde valemid on:

$$x^i = c_j^i x'^j. \quad (12.7)$$

Lugejal tuleb selgesti mõista, et sõna "pööre" kasutatakse siin mitte täht-tähelises, vaid üle kantud tähenduses. Afiinset pööret iseloomustab afiinsete teisenduste seas ainult üks asjaolu - reeperi alguspunkti liikumatus.

Kui tõlgendada (12.7) punktteisenduse valemitega, siis esitavad need ruumi sellist afiinset deformatsiooni, mille puhul üks punkt (reeperi alguspunkt) säilitab oma asendi. Ruumi sellist teisendust nimetatakse sageli tsentroafiinseks teisenduseks.

Afiinse pöörde iseloomu määravad 9 suurust - reeperivektorite koordinaadid. Ilmselt võib afiinne pööre olla määratud väga mitmeti. Näit. juhul, kui \bar{e}_3 , koordinaatideks on $(0, 0, 1)$, s.t. $c_3^1 = c_3^2 = 0$, $c_3^3 = 1$, siis $\bar{e}_3 = \bar{e}_3$. Seega vektor \bar{e}_3 jääb muutumatuks (punktteisenduse seisukohalt - selle vektori sihis ruum ei deformeeru). Oeldakse, et toimub afiinne pööre ümber aplikaattelje.

Kui homogeensetes valemites $c_i^j = \delta_i^j$, siis $\bar{e}_1 = \bar{e}_1$ (vt. 12.2) ja $x^i = x'^i$ (vt. 12.7). Seega reeper ei muutu, punkti koordinaadid säilivad (punktteisendusena - ükski punkt ei muuda oma asukohta). Sellist teisendust nimetatakse samasusteisenduseks.

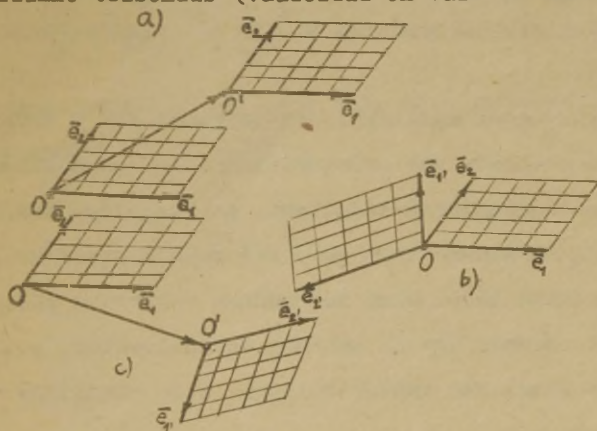
Kui mittehomogeensetes valemites $\alpha_i^j = \delta_i^j$, s.t. valemitel on järgmine kuju:

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^{1'} + \mathbf{o}^1, \quad (12.8)$$

siis reeperivektorid ei muutu ja toimub ainult reeperi alguspunkti nihe. Seega kandub koordinaatteljestik iseendaga paralleelselt punktist O punkti O' . Tõlgenduse puhul punkt-teisendusena määravad valemid (12.8) kogu ruumi nihke: iga punkt liigub vektori $\overline{OO'}$ võrra.

Valemitega (12.8) määratud afiinset teisendust nimetatakse rööplükkeks. Vastavalt tõlgendusele räägitakse kas reeperi või ruumi rööplükkest. Märgame, et ruumi rööplüke on tihedalt seotud võrdsete vektorite klassi mõistega. Tähepoolest, ruumi iga rööplüke tekitab sellise vektorite klassi, ja vastupidi - iga võrdsete vektorite klass määrab ruumi rööplükke.

Joonisel 125 on kujutatud a) rööplüke, b) afiinse pööre, c) üldine afiinse teisendus (vaadeldud on vaid tasandit).



Joon. 125.

4. Afiinne teisendus tasandil.

Afiinse teisenduse valemite tuletamine tasandi jaoks toimub ruumilisel juhul vaadeldud mõttekäikude abil. Ainsaks erinevuseks on reeperi kolmanda vektori puudumine, mille tõttu igal indeksil on ainult kaks väärtust 1 ja 2. Tehes vastavad muudatused süsteemis (12.5a) saame afiinse teisenduse valemid tasandilisel juhul:

$$\begin{cases} x^1 = c_1^1 x^{1'} + c_2^1 x^{2'} + c^1, \\ x^2 = c_1^2 x^{1'} + c_2^2 x^{2'} + c^2. \end{cases} \quad (12.9)$$

Summeerimiskokkuleppe abil kirjutatud teisendusvalemid, samuti valemid maatrikssümbolikas on tasandi ja ruumi jaoks väliselt ühesugused.

Teisendus (12.9) on määratud 6 suurusega $c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, c^1, c^2$, millest 4 esimest moodustavad teisenduse maatriksi $c = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$. See maatriks on regulaarne (tõestada!), järelikult on teisendus pööratav, s.t. leiduvad analoogilised valemid, mis väljendavad $x^{1'}$ ja $x^{2'}$ vanade koordinaatide kaudu.

Teisenduse maatriksi determinandi $\det C$ märk määrab reeperite vastastikuse orientatsiooni ka tasandilisel juhul. Selles veendumiseks kujutleme, et vaadeldav tasand asub ruumis, ja täiendame tema reeperid ruumilisteks kolmanda vektori lisamise teel. Olgu kolmandaks vektoriks mõlema reeperi korral tasandi üks ja seesama normaalvektor, s.t. reeperivahetuse puhul see vektor säiligu. Siis ruumilise teisenduse maatriks on

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & 0 \\ c_1^2 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja selle tõttu $\det \tilde{C} = \det C$. Kui reeperid tasandil on erineva orientatsiooniga, siis on seda ka reeperid ruumis, s.t. $\det \tilde{C} < 0$ ja $\det C < 0$. Vastupidi, $\det C < 0$ puhul $\det \tilde{C} < 0$, mille tõttu ruumilised reeperid on erinevalt orienteeritud; et $\bar{e}_3 = \bar{e}_3$, siis on vastupidiste orientatsioonidega ka tasandi reeperid.

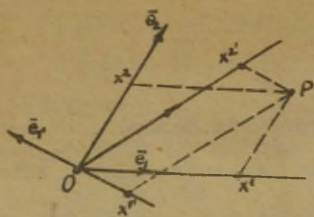
Tasandilise afiinse teisenduse konkreetset erijuhtu vaatlesime punktis 1. Selles näites on teisenduse valemid (12.9) kirjutatud süsteemina (α), teisenduse maatriks on $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ja $c^1 = 0$, $c^2 = 1$. Et $c_2^2 = 0$, siis $\bar{e}_2 \parallel \bar{e}_2$, s.t. ordinaattelg teiseneb iseendaks.

Kui valemid (12.9) on homogeesed, s.t. $c^1 = c^2 = 0$, siis esineb afinne pööre tasandil (joon. 126):

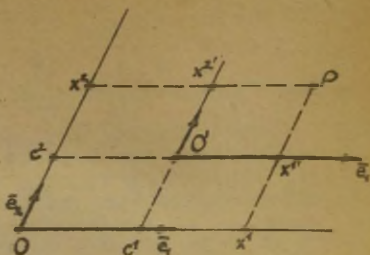
$$\begin{cases} x^1 = c_1^1 x^{1'} + c_2^1 x^{2'} \\ x^2 = c_1^2 x^{1'} + c_2^2 x^{2'} \end{cases} \quad (12.10)$$

Kui aga valemis (12.9) $c_1^j = \delta_1^j$, siis on tegemist rööplükkega tasandil (joon. 127):

$$\begin{cases} x^1 = x^{1'} + c^1 \\ x^2 = x^{2'} + c^2 \end{cases} \quad (12.11)$$



Joon. 126.

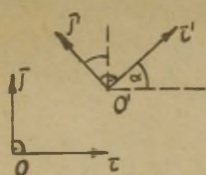


Joon. 127.

5. Ortogonaalne teisendus tasandil.

Afiinset teisendust, mille puhul ortonormeeritud reeper teiseneb jälle ortonormeeritud reeperiks, nimetatakse ortogonaalseks teisenduseks.

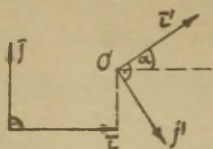
a)



Vaatleme esmalt tasandilist juhtu.

Olgu tasandil antud kaks ortonormeeritud reeperit $R = \{0; \bar{I}, \bar{J}\}$ ja $R' = \{0'; \bar{I}', \bar{J}'\}$. Eeldame, et on

b)



teada uue reeperi R' alguspunkti koordinaadid vana reeperi R suhtes ja nurk vektorite \bar{I}, \bar{I}' vahel: olgu $0'(a, b)$ ja $(\bar{I}, \hat{\bar{I}}') = \alpha$.

Esineb kaks võimalust:

Joon. 128.

1) Reeperitel R ja R' on ühesugune orientatsioon (joon. 128a). Sellisel juhul

ne orientatsioon (joon. 128a). Sellisel juhul

$$(\bar{J}, \hat{\bar{I}}') = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$(\bar{I}, \hat{\bar{J}}') = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

$$(\bar{J}, \hat{\bar{J}}') = \alpha.$$

Järelikult (vt. 7.4):

$$\begin{cases} I' = \cos \alpha I + \sin \alpha J, \\ J' = -\sin \alpha I + \cos \alpha J, \end{cases}$$

seega teisenduse maatriks on (vrd. definitsioon 12.1)

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

See maatriks võimaldab kirjutada teisenduse valemeid

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b. \end{cases} \quad (12.12)$$

2) Reeperitel R ja R' on erinev orientatsioon (joon.

128b). Sellisel juhul

$$(\hat{J}, \hat{I}') = \pi/2 - \alpha,$$

$$(\hat{I}, \hat{J}') = \pi/2 - \alpha,$$

$$(\hat{J}, \hat{J}') = \pi - \alpha;$$

järelikult

$$\begin{cases} I' = \cos \alpha I + \sin \alpha J, \\ J' = \sin \alpha I - \cos \alpha J; \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + a, \\ y = x' \sin \alpha - y' \cos \alpha + b. \end{cases} \quad (12.13)$$

Teisenduse maatriks on mõlemal juhul regulaarne ($\det C \neq 0$). Selle tõttu saab süsteemidest (12.12) ja (12.13) avaldada uued koordinaadid x' ja y' vanade kaudu (ülesanne ise-seisvaks lahendamiseks!).

Tähistame vana reeperi alguspunkti O uusi koordinaate tähtedega o ja d . Kirjutame pöördvalemid pöördmaatriksite

abil. Kui reeperid on ühise orientatsiooniga, siis

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x^1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha + c \\ y^1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + d; \end{cases} \quad (12.14)$$

kui reeperid on orienteeritud vastupidiselt, siis

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha + c, \\ y^1 = x \sin \alpha - y \cos \alpha + d. \end{cases} \quad (12.15)$$

Ortogonaalse teisenduse korral $\det C = \pm 1$, kusjuures determinandi märk osutab orientatsiooni (kooskõlas afiinsel üldjuhul tehtud märkustega).

Vaatleme ortogonaalse teisenduse tähtsamaid erijuhte. Valemid (12.12) määravad

1) pöörde, kui $a = b = 0$ (reeper pöörduv ümber muutumatu alguspunkti nurga α võrra);

2) rööplükke, kui $\alpha = 0$ (alguspunkt nihkub vektori OO' võrra, reeperivektorid ei muutu);

3) samasusteisenduse, kui $a = b = \alpha = 0$ (reeper ei muutu).

Kirjutage nende teisenduste valemid ja tehke vastavad joonised!

Joonise 127 põhjal saab valemitega (12.13) määratud teisenduse teostada kahe teisenduse järjestikku sooritamise teel, nimelt

a) sooritades teisenduse (12.12),

b) muutes teise baasivektori vastassuunaliseks.

Niisiis teine teisendus on

$$\begin{cases} \mathbf{I}'' = \mathbf{I}', \\ \mathbf{J}'' = -\mathbf{J}', \end{cases}$$

s.t. toimub ordinaattelje peegeldus abstsissitelje suhtes.

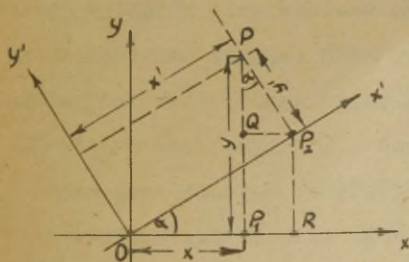
Sellist teisendust nimetataksegi peegelduseks x-telje suhtes.

Seega valemid (12.13) määravad

- 1) pöörde koos peegeldusega, kui $a = b = 0$,
- 2) rõõplükke koos peegeldusega, kui $\alpha = 0$,
- 3) peegelduse (täpsemalt: samasusteisenduse koos peegeldusega), kui $a = b = \alpha = 0$.

Kirjutage nende teisenduste valemid ja tehke vastavad joonised!

Ortogonaalsete teisenduste valemid saab kergesti tule-
tada elementaarsel viisil. Toome näitena pöörde valemite
tuletuse (joon. 129):



Joon. 129 .

$$\begin{cases} x = OP_1 = OR - QP_2 = \\ \quad = OP_2 \cos \alpha - PP_2 \sin \alpha, \\ y = P_1P = P_2R + PQ = \\ \quad = OP_2 \sin \alpha + PP_2 \cos \alpha; \\ OP_2 = x', \\ PP_2 = y'; \\ \begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \end{cases} \quad (12.16)$$

Märgime, et see tõestuskäik vajab täiendavaid lisaurimisi

juhtude jaoks, mil punkt P ei asu mõlema reeperi esimeses koordinaatveerandis. Belnev üldine tuletuskäik selliseid li-savaatlusi ei nõua.

Ortogonaalse teisenduse valemite tuletamisel, samuti saadud valemite ja nende erijuhtude tõlgendamisel pidasime silmas koordinaatteisenduse aspekti. Sellest seisukohast on valemid (12.12-16) ristkoordinaatide teisendamise valemid tasandil.

Punktteisendustena need valemid (ja nende erijuhud) mää-ravad tasandi mitmesuguseid liikumisi. Tasandi liikumisena mõistetakse siin tasandi liikumist mõõda iseennast, mitte liikumist ümbritseva ruumi seisukohalt. Uhtlasi vaadeldakse ainult geomeetrilist liikumist, s.t. peetakse silmas ainult alg- ja lõppasendit, jättes täiesti kõrvale liikumise kui teatud kestusega protsessi mõiste.

Valemitega (12.12) määratud tasandi liikumist nimetatak-se pärisliikumiseks e. esimest liiki liikumiseks.

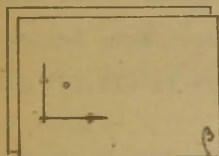
Põhjendame sellist nimetust näitlike kaalutlustega.

Tasandi afiinse teisenduse vaatlemisel lähtusime teisen-duse valemest ja tõlgendasime neid tasandi deformatsiooni näol. Sel viisil eristavad valemid tasandi kõigi võimalike deformatsioonide hulgast teatud alamhulga, mida nimetatak-se tasandi afiinseteks teisendusteks. Muidugi saab samal viisil talitada ka ortogonaalsete teisenduste korral. Kuid huvipakkum on vastupidine tee: lähtuda liikumise näitli-kust kujutlusest ja näidata, et tegemist on tasandi ortogo-naalse teisendusega.

Vaatleme tasandit α , mille suvaline punkt olgu P. Asetame tasandile α abitasandi β ja märgime ka sellel punkti P asendi. Libisegu nüüd tasand β mööda tasandit α mingisse uude asendisse. Märgime selle uue asendi korral β punkti P all oleva α punkti tähega P'. Tasandi β liikumise tagajärjel vastab tasandi α igale punktile P kindel punkt P' (abitasandi β võib nüüd ära jätta). See vastavus on ilmselt üksühene, s.t. on tasandi α kujutus iseendale - tasandi α teisendus. Loomulik on sellist teisendust nimetada tasandi α liikumiseks: iga P ühtimisega viimiseks vastava P'-ga tuleb tasandit liigutada sel viisil, nagu liikus abitasand β .

Tuletame liikumise valemid. Selleks kasutame veel kord abitasandit β . Valime tasanditel α ja β nende algasendis ühise reeperi $R = \{0; \vec{i}, \vec{j}\}$ (joon. 130a). Sooritame

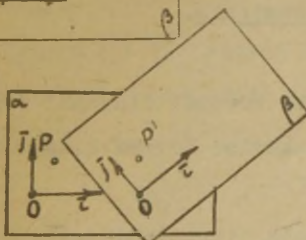
a)



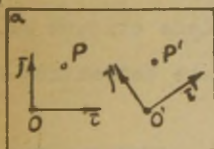
Joon. 130.

β liikumise märgitud viisil (joon. 130b). Märgime reeperi R uue asendi tasandile α reeperina $R' = \{0'; \vec{i}', \vec{j}'\}$ ja jätame tasandi β ära (joon. 130c). Siis on eelneva põhjal määratud tasandi teisendus $P \rightarrow P'$.

b)



c)



Olgu P koordinaadid R suhtes (x, y) ja P' koordinaadid R suhtes (x', y') . Ilmselt on teada ka P' koordinaadid R' suhtes: need on (x, y) . Seega tasandi

iga punkti P' korral on teada tema koordinaadid kahe erineva ortonormeeritud reeperi suhtes. Järelikult rahuldavad need koordinaadid valemeid (12.12) ja (12.14), s.t. need valemid seovad tasandil liikumise teel vastavusse seatud punktide P ja P' koordinaate. Siit näemegi, et tasandi liikumist kirjeldavad märgitud valemid.

Muidugi tuleks veel näidata, et iga vaadeldud tüüpi valem on tõlgendatav tasandi liikumisena (sest viimane on nüüd defineeritud valemeist sõltumatult). Püüdku lugeja seda teha iseseisvalt!

Nüüd pole raske mõista ka valemite (12.13) tähendust tõlgendamisel punktteisendusena: tuleb sooritada tasandi pärisliikumine ja selle järel tasandit peegeldada x -telje suhtes. Peegeldus punktteisendusena tähendab muidugi x -teljega äärnevate pooltasandite vahetamist. Sellist liikumist ei ole enam võimalik realiseerida tasandi libisemisena mööda iseenast - kujutlus nõuab ümbritseva ruumi kasutamist. Eelnevast eristamiseks nimetatakse valemitega (12.13) ja (12.15) määratud teisendust teist liiki liikumiseks.

Lisame mõned märkused:

1. Iga esimest järku liikumine koosneb üldjuhul rööplükkest ja pöördest; teist järku liikumise korral lisandub alati peegeldus.

2. Rööplükke vaatlemisel ei ole ristkoordinaadid olulised, sest rööplüke kui ortogonaalse teisenduse erijuht ei erine millegi poolest rööplükkest kui afiinse teisenduse erijuht.

3. Põõre erineb oluliselt üldisest affiinsest pöörddest: teise puhul tasand deformeerub, esimese puhul mitte. Analooogilisel viisil räägitakse suvalise affiinse teisenduse korral affiinsest liikumisest, mõistes selle all harilikku liikumise üldistust.

6. Ortogonaalne teisendus ruumis.

Piirdume vaid kõige olulisemate märkustega.

Ortogonaalne teisendus ruumis on üldise affiinse teisenduse erijuht, mille puhul ortonormeeritud reeper teiseneb jälle ortonormeerituks. Seda silmas pidades on kerge selgitada tingimusi, mida peavad rahuldama kordajad affiinse teisenduse valemites (12.5a) selleks, et need valemid määraksid ortogonaalse teisenduse.

Tõepoolest, kui R ja R' on ortonormeeritud reeperid, siis

$$1) (\bar{e}_1, \bar{e}_j) = \delta_{1j} \quad (1, j = 1, 2; 3),$$

2) skalaarkorrutis on vastavate koordinaatide korrutiste summa.

Et uue reeperi vektorite koordinaatideks c_j^i on teisenduse maatriksi C elemendid (vt. 12.1), siis kehtib selle maatriksi veergude puhul 6 võrdust:

$$(c_1^1)^2 + (c_1^2)^2 + (c_1^3)^2 = 1,$$

$$(c_2^1)^2 + (c_2^2)^2 + (c_2^3)^2 = 1,$$

$$(c_3^1)^2 + (c_3^2)^2 + (c_3^3)^2 = 1,$$

$$c_1^1 c_2^1 + c_1^2 c_2^2 + c_1^3 c_2^3 = 0,$$

$$c_1^1 c_3^1 + c_1^2 c_3^2 + c_1^3 c_3^3 = 0,$$

$$c_2^1 c_3^1 + c_2^2 c_3^2 + c_2^3 c_3^3 = 0,$$

ehk lühidalt

$$\sum_{i=1}^3 c_j^i c_k^i = \delta_{jk}. \quad (12.17)$$

Need tingimused on ühtlasi ka piisavad selleks, et teisendus (12.5a) oleks ortogonaalne (tõestada!). Niisiis (12.17) on ortogonaalsuse tingimused.

Kõige lihtsamal viisil saab ortogonaalsuse tingimusi kirjutada maatrikskujus: $CC' = E$ (kus C' on teisenduse transponeeritud maatriks ja E on ühikmaatriks). Järelikult $C' = C^{-1}$. Selline tingimus iseloomustab ortogonaalse teisenduse maatriksit - ortogonaalmaatriksit C .

Kontrollige, et maatriksid, mis kirjeldavad ortogonaalteisendust tasandil, on ortogonaalmaatriksid!

Võrdusest $CC' = E$ tuleneb, et $\det C = \pm 1$ (meenutame võrdluseks, et üldisel afiinsel juhul on nõutav vaid erinevus nullist). Determinandi märk iseloomustab reeperite vastastikkust orientatsiooni.

Ortogonaalsuse tingimused (12.17) väljendavad sõltuvusi 9 kordaja c_i^j vahel. Et tingimusi on 6, siis on kordajate hulgas vaid 3 sõltumatut. Seega on pööre täielikult määratud kolme suurusega. Üldise ortogonaalse teisenduse korral lisandub neile kolmele veel kolm sõltumatut kordajat c^1 , mis määravad rööplükke. Seega sõltub ortogonaalne teisendus

ruumis maksimaalselt kuuest parameetrist. Mitu parameetrit esineb tasandilisel juhul?

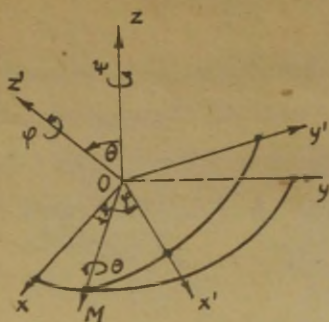
Ortogonaalsete teisenduste tõlgendamisel punktteisendus-tena saame ruumi liikumised, mille näitlik tähendus on analoogiline tasandilisel juhul vaadelduga. Märgime siin vaid, et $\det C = 1$ puhul on tegemist esimest liiki liikumisega, mis koosneb üldiselt pöördest ja rööplükkest, ning $\det C = -1$ korral esineb teist liiki liikumine, milles lisandub veel peegeldus ühe koordinaattasandi suhtes.

7. Euleri nurkad.

Nagu öeldud, on pööre ruumis määratud kolme suurusega. Praktiliselt ei ole otstarbekas valida nendeks suurusteks mingid kolm kordajaist c_i^j , sest sellisel juhul tuleks sõltuvate suuruste avaldamiseks lahendada ruutvõrranditest koosnev süsteem (12.17). Kordajate c_i^j (uue ja vana reeperi vektorite vaheliste nurkade koosinuste) asemel valitakse harilikult mingid kolm nurka, mille kaudu saab neid kordajaid trigonomeetriliselt avaldada. Selliseid nurki nimetatakse Euleri nurkadeks.

Euleri nurki valitakse mitmeti vastavalt vajadusele. Vaatleme siin kõige levinumat meetodit, mis on kasutusel näiteks astronoomias.

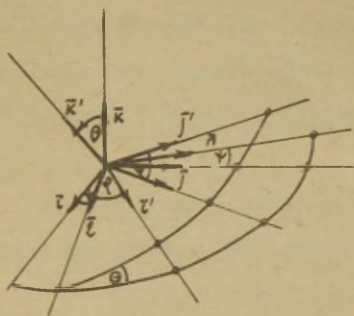
xy - ja $x'y'$ -tasand lõikuvad, sest neil on ühine punkt O . Olgu nende tasandite lõikesirge OM . Muudame selle sirge teljeks nõudega, et punkt M asetseb positiivsel poolsirgel ja \vec{OM} , \vec{E} , \vec{E}' on parempoolne vektorite kolmik (joon. 131a).



Joon. 131 a.

gest OM positiivses suunas. Ilmselt

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi < 2\pi, \\ 0 \leq \theta < \pi, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$



Joon. 131 b.

$\bar{n} \perp \bar{l}$ xy-tasandil, nii et $\bar{l}, \bar{n}, \bar{k}$ oleks parempoolne kolmik. (Märkus: algreeperit $R = \{0; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ loetakse parempoolseks; vastasel juhul vastupidised kokkulepped.)

Esimeseks Euleri nurgaks valitakse pretsessiooninurk $\psi = (\bar{i}, \hat{OM})$, mida loetakse x-teljest positiivses suunas. Teise nurga moodustab nutatsiooninurk $\theta = (\bar{k}, \bar{k}')$, mida loetakse z-teljest positiivses suunas punkti M poolt vaadates. Kolmandaks on pöördenurk $\varphi = (\overline{OM}, \bar{i}')$, mida loetakse sir-

Teisenduse maatriksi

elementide avaldamiseks Euleri nurkade kaudu võtame kasutusele kolm lisäühikvektorit (joon. 131b).

\bar{l} - sirgel OM, positiivses suunas;
 $\bar{m} \perp \bar{l}$ x'y'-tasandil, nii et $\bar{l}, \bar{m}, \bar{k}'$ oleks parempoolne kolmik;

Nendel eeldustel kehtib:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \bar{l} \cos \psi - \bar{n} \sin \psi, \\ \bar{J} &= \bar{l} \sin \psi + \bar{n} \cos \psi, \\ \bar{I}' &= \bar{l} \cos \varphi + \bar{m} \sin \varphi, \\ \bar{J}' &= -\bar{l} \sin \varphi + \bar{m} \cos \varphi, \\ (\bar{n}, \bar{m}) &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Kasutades neid seoseid on kerge leida otsitavaid valemeid:

$$\begin{aligned} c_1^1 &= (\bar{I}, \bar{I}') = ((\bar{l} \cos \psi - \bar{n} \sin \psi), (\bar{l} \cos \varphi + \bar{m} \sin \varphi)) = \\ &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1^2 &= (\bar{J}, \bar{I}') = ((\bar{l} \sin \psi + \bar{n} \cos \psi), (\bar{l} \cos \varphi + \bar{m} \sin \varphi)) = \\ &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta; \end{aligned}$$

jne.

Leidku lugeja ülejäänud valemid iseseisvalt!

§ 13. Kõverjoonised

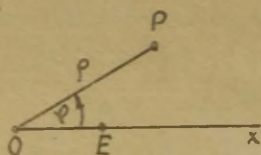
koordinaatsüsteemid

Koordinaatsüsteem määratakse reeperi abil, s.o. geomeetrilise abikonstruktsiooniga, mis korraldab üksühese vastavuse ruumi (või tasandi) punktide ja järjestatud reaalarvukolmikute (või -paaride) vahel. Reeperit saab moodustada väga mitmeti, selle juures kasutatakse ka teisi elemente peale punktide, vektorite ja sirgete. Sellepärast leidub praktiliselt lõpmata palju erinevaid koordinaatsüsteeme. Vaatleme järgnevalt mõnda lihtsamat Descartes'i omast erinevat süsteemi.

1. Polaarkoordinaadid tasandil.

Vaatleme orienteeritud tasandit, s.t. tasandit, millel on fikseeritud positiivne pöörlemissuund.

Orienteeritud tasandil moodustavad polaarse reeperi: fikseeritud punkt O , sellest lähtuv poolsirge Ox ja ühiklõik OE (mille võib lugeda asuvaks poolsirgel) (joon. 132).



Joon. 132.

Punkti O nimetatakse pooluseks, poolsirget Ox - polaarteljeks. Märgime, et polaarse reeperi võib esitada ka järjestatud punktipaari (O, E) abil, samuti punkti O ja vektori $\vec{e} = \overline{OE}$ abil.

Tasandi punkti P polaarseteks koordinaatideks on:

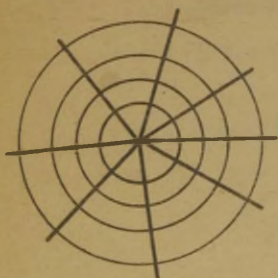
1) polaarraadius $\rho = OP$ - punkti kangus poolusest (mõõdetud antud pikkusühikuga),

2) polaarnurk $\varphi = (\overline{Ox}, \widehat{OP})$, mida loetakse alates polaar teljest ja varustatakse märgiga vastavalt tasandi orientatsioonile.

Ilmselt $\rho > 0$ ja on antud punktiga üheselt määratud. Samal ajal võib antud punkti P korral vaadelda lõpmatut seeriat nurki $\varphi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Sellise tarbetu mitmesuse vältimiseks piiratakse polaarnurga muutumispiirkonda ühe täispöördeni. Harilikult piirduetakse polaarnurga peaväärtustega: $-\pi < \varphi \leq \pi$. Kuid sageli loetakse $0 \leq \varphi < 2\pi$, s.o. kasutatakse ainult positiivseid nurki.

Moodustame polaarse koordinaatvõrgu (joon. 133). Nõue $\rho = c$ määrab (muutuva φ korral) poolusest kaugusel c asu-

vate punktide hulga, s.o. ringjoone keskpunktiga O ja raadiusega c , - ja nõnda konstandi c igal väärtusel. Seega on esimene koordinaatjoonte parv kontsentriiliste ringjoonte hulk.



Joon. 133.

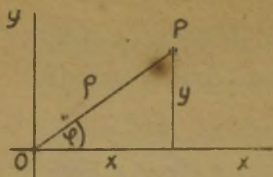
koordinaatjoon kummastki parvest. Pooluse puhul $\rho = 0$, kuid φ on määramata. Üeldakse, et polaarne koordinaatvõrk ei ole pooluses regulaarne - poolus on selle võrgu iseäranne punkt. Teatavasti Descartes'i koordinaadistikus selliseid punkte ei leidu.

Märgime polaarkoordinaatide teatud analoogiat ristkoordinaatidega: mõlemal juhul on koordinaatjoonte parved vastastikku risti. Üeldakse ka, et nendes koordinaadistikutes esineb ortogonaalne võrk.

Olgu tasandil antud ortonormeeritud reeper ja polaarne reeper nii, et poolus ja alguspunkt ühtivad ning polaartelg asub x -telje positiivsel osal (joon. 134). Kahe reeperi tõttu on igal punktil P kahed koordinaadid: (x, y) ja

Tingimus $\varphi = c$ määrab (muutuva ρ korral) poolusest lähtuva poolsirge - erineva igal konstandi c erineval väärtusel. Teine koordinaatjoonte parv on ühise alguspunktiga poolsirgete hulk.

Tasandi iga punkti - peale pooluse - läbib parajasti üks



(ρ, φ). Reeperite sobiva vastastikuse asendi tõttu on kerge leida nende koordinaatide vahelisi seoseid:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi; \end{cases} \quad (13.1)$$

Joon. 134.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \tan \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (13.2)$$

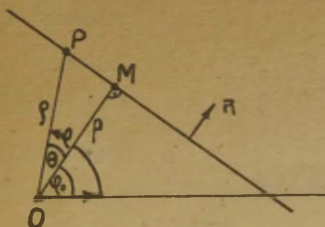
Valemid (13.1) võimaldavad arvutada punkti ristkoordinaate antud polaarkoordinaatide kaudu; valemid (13.2) - vastupidist. Seega on tegemist koordinaatteisenduse valemitega. Märkime, et need valemid üldistavad koordinaatteisenduse mõistet: eelmises paragrahvis vaatlesime vaid üht ja sama tüüpi koordinaatide teisendusi.

Valemid (13.1,2) kehtivad ainult reeperite märgitud spetsiaalse vastastikuse asendi korral.

Näited.

53. Koostame sirge võrrandi polaarkoordinaatides. Olgu teada sirge kaugus p poolusest ja nurk $\varphi_0 = (\vec{e}, \vec{n})$ (joon. 135).

Tasandi suvaline punkt P asetseb sirgel parajasti siis, kui tema ristprojektsioon sirgele OM (antud sirge normaali-



sihiline sirge) ühtib punktiga M,
s.t. kui

$$\rho \cos \theta = p.$$

Et $\theta = \pm(\varphi - \varphi_0)$, siis

$$\rho \cos(\varphi - \varphi_0) = p \quad (13.3)$$

on otsitav sirge võrrand.

Joon. 135.

Ilmne on selle võrrandi seos

sirge normaalvõrrandiga (11.20) ristkoordinaatides (vt. ka joon. 117): need võrrandid teiseks teisenevad teineteiseks valemite (13.1) ja (13.2) abil. Tõepoolest, sooritame sirge normaalvõrrandis

$$x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 - p = 0$$

asenduse (13.1) abil:

$$\rho (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) = p,$$

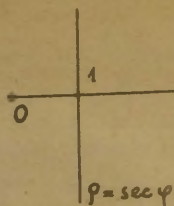
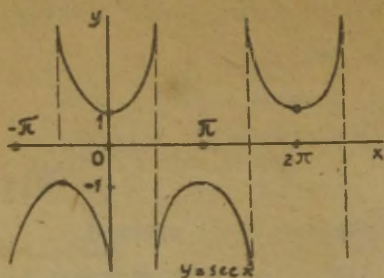
$$\rho \cos(\varphi - \varphi_0) = p.$$

Teeme veel ühe huvitava tähelepaneku. Kirjutame sirge polaarvõrrandi kujul

$$\rho = p \sec(\varphi - \varphi_0)$$

ja vaatleme erijuhtu, mil $p = 1$ ja $\varphi_0 = 0$. Tegemist on sirgega, mis on risti polaarteljega ja läbib selle ühikpunkti E. Selle sirge võrrand on $\rho = \sec \varphi$. Järelikult see sirge on seekansfunktsiooni graafik polaarkoordinaatides. Joonisel 136 on kujutatud seekansi graafikud mõlemas koordinaadistikus. Ristkoordinaatides on kujukalt väljendatud seekansi perioodilisus. Milles avaldub perioodilisus seekansi polaargraafikul?

54. Descartes'i koordinaatides määrab võrdelisus $y = ax$

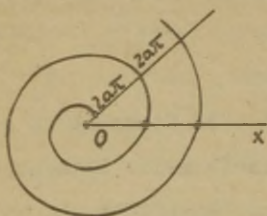


reeperi al-
guspunkti
läbiva sir-
ge. Vaatleme
analoogilist
võrdelist
sõltuvust
polaarkoor-
dinaatide

Joon. 136.

vahel: $\rho = a\varphi$.

Kui $\varphi = 0$, siis $\rho = 0$. Kui $a > 0$, siis peab $\varphi \geq 0$; kui aga $a < 0$, peab ka $\varphi \leq 0$ (sest $\rho > 0$). Mõlemal juhul kutsub $|\varphi|$ kasvamine esile ka ρ kasvamine. Seega liigub punkt $P(\rho, \varphi)$, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit $\rho = a\varphi$, $|\varphi|$ kasvamise korral ümber pooluse, eemaldudes samal ajal poolusest. Punkti trajektoori täpsustami-



seks paneme tähele, et punkti kaugus poolusest kasvab iga täispöörde vältel konstantse suuruse $2a\pi$ võrra (joon. 137).

Võrrandiga $\rho = a\varphi$ määratud joont nimetatakse Archimedese spiraaliks. Joonisel 137 on kujutatud

Joon. 137.
juhtu $a > 0$; kui $a < 0$, esineb "tagurpidine" A. spiraal, mille saab eelnevast peegeldamise teel polaartelje suhtes (tegurite ühise mooduli $|a|$ korral).

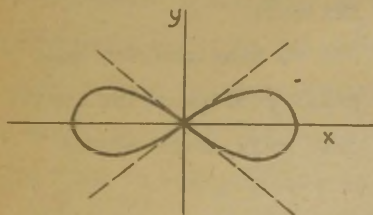
Kirjutame (13.2) abil A. spiraali võrrandi ristkoordini-

naatides:

$$x^2 + y^2 - a \arctan \frac{y}{x} = 0.$$

Siit on ilmne, et A. spiraali on lihtsam uurida polaarkoordinaatides.

Et viimasest võrrandist nähtub A. spiraali mittealgebra-
lisus, tuleb lisada, et see joon käesoleva kursuse uurimis-
objektide hulka ei kuulu. Võrrandist $\rho = a\varphi$ seda vahetult
välja lugeda ei saa (vt. algebraalse joone definitsioon § 9



Joon. 138.

p. 4).

Toome võrdluseks veel tei-
se näite. Joonisel 138 kujuta-
tud kõverjoont nimetatakse
Bernoulli lemniskaadiks. Tema
polaarvõrrand on $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$

ja - nagu kergesti saab kontrollida - võrrand ristkoordinaatides on

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Seega on lemniskaat algebraalne joon. Ometi ei kuulu ka selle joone uurimine käesoleva kursuse raami, sest joone järk on neli.

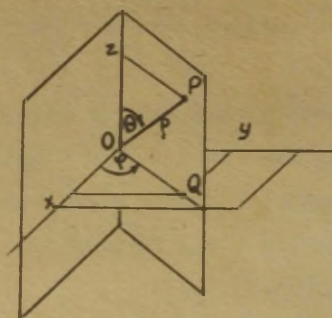
2. Sfäärilised koordinaadid.

Polaarse reeseri ruumis moodustavad (joon. 139):

- 1) fikseeritud punkt 0 - poolus,
- 2) punktist 0 lähtuv poolsirge Oz - polaartelg,
- 3) poolsirgega Oz härnev pooltasand Oxz - polaarpooltasand;

sand;

lisaks eeldatakse, et ruumis on fikseeritud ühiklõik ja positiivse pöörde suund polaartelje risttasandil.



Joon. 139.

Punkti P polaarkoordinaadid ruumis on:

- 1) punkti kaugus ρ poolusest: $\rho = OP$;
- 2) nurk $\theta = (\hat{Oz}, \hat{OP})$, mida loetakse alates polaarteljest;
- 3) kahetahuline nurk polaarpooltasandist punkti

P ja polaartelje läbiva pooltasandini; seda nurka mõeldab joonnurk φ .

Nurkade ühesus saavutatakse nõuetega

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi, \\ -\pi &< \varphi \leq \pi. \end{aligned}$$

Kui valida ortonormeeritud reeper joonisel 139 näidatud viisil (ühine koordinaatide alguspunkt, z-telg polaartelje suunas ja x-telg polaartasandil), siis saab kergesti leida koordinaatteisenduse valemid üleminekuks polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele ja vastupidi.

Tõepoolest, olgu Q punkti P ristprojektsioon xy-tasandil, siis $OQ = \rho \sin \theta$; järelikult

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases} \quad (13.4)$$

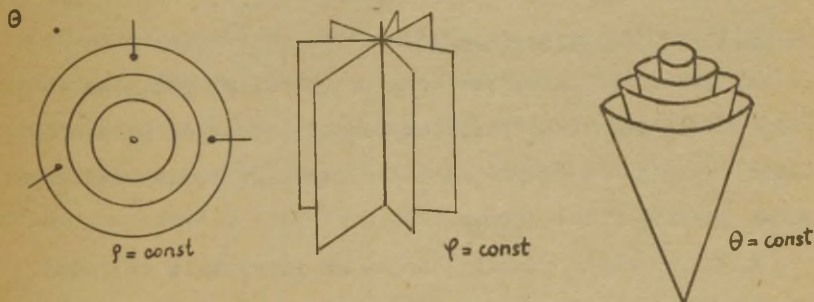
Vastupidi

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \cos \theta = \frac{z}{\rho}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\rho \sin \theta}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\rho \sin \theta}. \end{cases} \quad (13.5)$$

Esimene koordinaatjoon ($\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, ρ muutub suvaliselt) on kiir OP alguspunktiga O. Teine koordinaatjoon ($\rho = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, φ muutub suvaliselt) on ringjoon, mille tasand on risti polaarteljega ja keskpunkt asub sellel teljel. Kolmas koordinaatjoon ($\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, θ muutub suvaliselt) on poolringjoon, mille diameetriks on polaartelje lõik ja keskpunktiks on O.

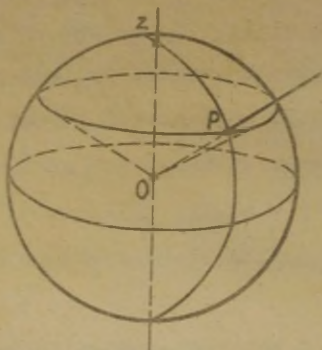
Uhe koordinaadi fikseerimisel saame koordinaatpinna.

Koordinaatpind $\rho = \rho_0$ (φ ja θ muutuvad suvaliselt) on sfäär keskpunktiga O ja raadiusega ρ_0 . Koordinaatpind $\varphi = \varphi_0$ (ρ ja θ muutuvad suvaliselt) on polaarteljega äärnev pooltasand, mis moodustab polaarpooltasandiga nurga φ_0 . Koordinaatpind $\theta = \theta_0$ (ρ ja φ muutuvad suvaliselt) on pöördkoonus tipuga O; nurk koonuse moodustaja ja polaartelje vahel on



Joon. 140 .

Andes konstantidele erinevaid väärtusi saame kolm koordinaatpindade parve (joon 140): 1) kontsentrilised sfäärid, 2) ühise äärega pooltasandid, 3) ühise tipu ja teljega pöördkoonused. Nende parvede lõikejoonteks on koordinaatjooned, mis moodustavad kõverjoonse koordinaatvõrgu.



Joon. 141.

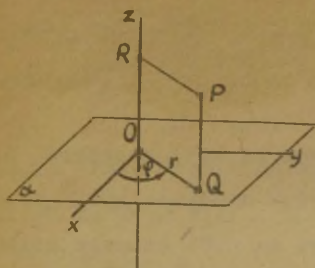
Ruumi iga punkti P , mis ei ole polaarteljel, läbib parajasti üks koordinaatjoon ja üks koordinaatpind igast parvest (joon. 141). Polaartelje punktides ($\Theta = 0$) nurk φ on määramata; pooluses ($\varphi = 0$) on mõlemad nurgad määramata. Seega on koordinaatvõrgul lõpmata palju iseäraseid punkte. Kerge on veenduda, et koordinaatvõrk on ortogonaalne.

Ruumilist polaarkoordinaadistikku kasutatakse eriti astronoomias ja geograafias. Seose tõttu sfääridega nimetatakse seda koordinaadistikku sageli lühemalt sfääriliseks.

3. Silindrilised koordinaadid.

Valime ruumis mingi tasandi α ja sellel polaarse reeperi polaarteljega Ox . Täiendame reeperit tasandi normaalilise teljega Oz (joon. 142). Pikkusühiku loome kogu ruumi jaoks üheselt fikseerituks.

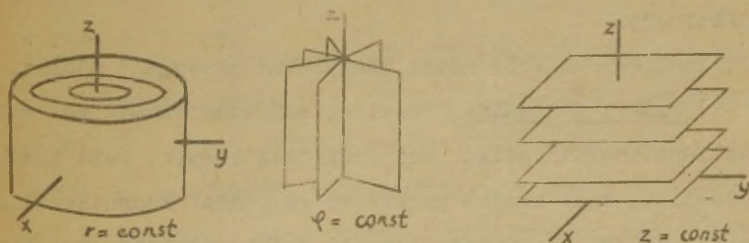
Ruumi suvalise punkti P asend on täielikult määratud oma ristprojektsioonidega tasandile α ja teljele Oz , vasta-



Joon. 142 .

Kui poolpolaarse reeperiga siduda ortonormeeritud reeperjooisel 142 näidatud viisil (ühine alguspunkt, x-telj po-laartelje suunas, z-teljeks telg Oz), siis

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad (13.6)$$



Joon. 143 .

Koordinaatpindadeks silindrilises koordinaadistikus on kontsentrilised pöördsilindrid, Oz-teljega äärnevad pooltasandid ja paralleelsed tasandid (joon. 143). Koordinaatpindade parved moodustavad lõikudes ortogonaalse koordinaatvõrgu. Selgitada iseseisvalt koordinaatjoonte iseloom!

§ 14³. Muutuv suurus
lineaargeomeetrias

Käesolevas peatükis käsitletud koordinaatmeetodi algmõisteid ja lineaargeomeetriat võib nimetada kõrgema matemaatika aabitsaks. Ehkki tegemist on nrõ. esimese sissejuhatusena, saab juba nüüd teha kokkuvõtteid ja visandada teatud perspektiive.

Analüütilise geomeetria osatähtsust kõrgemas matemaatikas iseloomustavad kujukalt F.Engelsi tuntud sõnad: "Pöördepunktiks matemaatikas oli ... Descartes'i muutuv suurus. Selle tõttu pääsesid matemaatikasse liikumine ja dialektika." "Kõrgem matemaatika käsitab elementaar matemaatika igavest tõde kui ületatud seisukohta." (F.Engels, "Looduse dialektika").

Illustreerime seda mõtet käsitletud materjali põhjal.

(1) Punkti liikumine. Punkt on määratud ruumis oma kolme afiinse koordinaadiga. Kui säilitada reeper, kuid muuta koordinaate, siis muudab punkt oma asukohta. Koordinaatide pideval muutumisel muutub pidevalt punkti asukoht. Kui muutub ainult üks koordinaat, siis liigub punkt paralleelselt vastava koordinaatteljega; kui muutuvad kaks koordinaati, siis liigub punkt mööda tasandit, mis on paralleelne ühe koordinaattasandiga. Kui punkti koordinaadid sõltuvad lineaarselt ühest parameetrist t :

$$x^i = a^i t + x_0^i \quad (i = 1, 2, 3),$$

siis tingib parameetri t muutumine punkti liikumise mööda

sirget, mis läbib punkti (x_0^1) vektori $\bar{a}(a^1)$ sihis. Lineaarse sõltuvuse korral kahest parameetrist u ja v

$$x^1 = a^1 u + b^1 v + x_0^1$$

liigub punkt tasandil, mis läbib punkti (x_0^1) ja on paralleelne vektoritega $\bar{a}(a^1)$ ja $\bar{b}(b^1)$. Kui viimasel juhul näit. u on v funktsioon: $u = u(v)$, siis saame teatud tingimustel mingi kõvera nimetatud tasandil. Ka lineaarvõrrand $A_1 x^1 + B = 0$ ($i = 1, 2, 3$) võimaldab suuruste x^1 muutumist (võrrandil on lõpmata palju lahendeid!), see aga tähendab punkti liikumist vastaval tasandil.

(2) Sirge liikumine. Olgu antud sirge $Ax + By + C = 0$. Vabaliikme C pideval muutumisel liigub sirge tasandil, jäädes oma algasendiga paralleelseks (vt. näide 37). Suhte $A:B$ muutumisel muutub sirge siht. Kui kanoonilises võrrandis

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y}$$

muuta pidevalt suhet $Y : X$, siis sirge

pöörleb ümber punkti (x_0, y_0) . Parameetri p muutumisel võrrandis $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ pöörleb vastav sirge ümber punkti $(0, b)$.

Nurga φ muutumisel normaalvõrrandis $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ liigub sirge ümber reeperi alguspunkti, säilitades oma kanguse sellest. Sirge pöörlemisele viib ka kordaja a muutmine võrrandis $y = ax + b$. Kõigil vaadeldud juhtudel kirjeldab muutuv sirge teatud sirgete hulga tasandil. Millistel juhtudel on tegemist sirgete kimbuga?

Kui muuta suhteid $X : Y ; Z$ kanoonilistes võrrandites

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z},$$

siis saame punkti (x_0, y_0, z_0)

ümber pöörleva sirge, mis kirjeldab sirgete sidumit. Kui sel-

le juures suurused X, Y, Z rahuldavad mingit lineaarvõrrandit $AX + BY + CZ = 0$, siis on sirge pöörlemisvabadus kitsendatud: sihivektor \vec{s} peab olema ortogonaalne vektoriga $\vec{n}(A, B, C)$ (eeldame siin ristkoordinaate); sirge moodustab kimbu. Suuruste x_0, y_0, z_0 muutumine tähendab sirge liikumist ruumis paralleelselt oma algasendiga; tekib paralleelsirgete sidum (sidum lõpmata kauge keskpunktiga).

Toodud näited iseloomustavad muutuva suuruse mõiste viljakat toimet geomeetrias. Lihtsamad mõisted seotakse keerulisematega; antud geomeetriliste objektide abil tekitatakse uusi, üldisemaid objekte; toimub üha ulatuslikum seostamine ja üldistamine. Punkti seostamine liikumisega viib sirge ja tasandi, üldse joonte ja pindade vaatlemisele. Liikuv sirge tekitab uut laadi objektid - kimbud ja sidumid, - mis kujunevad olulisteks uurimisobjektideks käesoleva kursuse teises osas.

(3) Tasandi ja ruumi liikumine. Analoogilisi tähelepanekuid võib teha tasandi korral. Korrajate muutumine tasandi võrrandis (antud reeperi suhtes) tähendab tasandi liikumist ruumis. Nõnda tingib vabaliikme B muutmine võrrandis $A_1x^1 + B = 0$ tasandi liikumise paralleelselt oma lähteasendiga (tekib lõpmata kauge lõikesirgega tasandite kimp). Ühe tundmatu kordaja muutmine kutsub esile tasandi pöörlemise ümber sirge. Näit. muutuva A_3 korral kirjeldab tasand kimbu, mille teljeks on sirge $\begin{cases} A_1x^1 + A_2x^2 + B = 0, \\ x^3 = 0. \end{cases}$ Tasand $A_1(x^1 - x_0^1) = 0$ moodustab suhete $A_1 : A_2 : A_3$, muutudes sidumi

keskpunktiga (x_0^1) (vt. 11.5).

Veelgi üldisemate mõisteteni viivad teisendusvalemite tõlgendused muutuvate kordajate abil. Näit. juhul kui tasandi ortogonaalteisenduse valemites

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b \end{cases}$$

lugeda nurk α pidevalt muutuvaks suuruseks (säilitades a ja b konstantsetena), siis võib rääkida reeperi pöörlemisest ümber alguspunkti. Seega jõuame ühest parameetrist sõltuva reeperite hulga mõisteni. Sellise vaateviisi korral asub vaatleja liikumatul tasandil ja jälgib koordinaatide pidevat teisenemist sellel. Kuid eelnevas märkisime veel teist võimalikku valemite tõlgendamisviisi: vaatleja valib endale taustsüsteemiks pöörleva reeperi, seega loeb reeperi asuvat paigal, - ja näeb tasandi pöörlemist ümber punkti (a, b) . Kui kõik kolm muutujat a , b ja α muutuvad pidevalt, siis tasandi suhtes liikumatu vaatleja jaoks toimub reeperi pidev liikumine tasandil, koos reeperiga liikuva vaatleja jaoks aga - tasandi pidev liikumine mööda iseennast.

Afiinse reeperi kasutamisel liikumise mõiste üldistub. Afiinne liikumine tähendab kas reeperi asukoha muutumist koos reeperi deformeerumisega või - tasandi afiinset deformeerumist.

Need mõttekäigud on, nagu teame, üle kantavad ruumi. Tuleb silmas pidada, et rääkides tasandi liikumisest või afiinsest deformeerumisest ei kasutata kuidagi ümbritseva ruumi mõistet: tasand liigub mitte ruumis, vaid mööda ise-

ennast. Sellelt seisukohalt on arusaadav ka ruumi liikumise mõiste.

Mitmesuguste teisenduste, eriti pidevate, uurimisel on matemaatika ja selle rakenduste jaoks fundamentaalne tähtsus. Selle uurimise vajalikkuses veendub kõrgema matemaatika õppija samm-sammult.

Lineargeomeetria käsitlemisel astusime esimese sammu liikumiste uurimisel matemaatilises mõttes. Kuid - ütleme koos Engelsiga - otsustav pöördpunkt on selle sammuga läbitud: on sisse toodud Descartes'i muutuv suurus.

SISUKORD

II peatükk. K O O R D I N A A T S U S T E E M I D. L I N E A A R G E O M E E T R I A

§ 8. AFIINNE KOORDINAATSUSTEEM.

1. Eelmärkused (3).
2. Afiinne koordinaadistik (4).
3. Ristkoordinaadistik (8).
4. Afiinsed ja meetrilised valemid (9).
5. Täiendavaid märkusi (16).

§ 9. JOONE JA PINNA VÕRRANDID.

1. Tasandilise joone võrrand (20).
2. Pinna võrrand (30).
3. Joone võrrandid ruumis (33).
4. Algebraised jooned ja pinnad (39).

§ 10. SIRGE JA TASANDI VÕRRANDID.

1. Sirge vektorvõrrandid (41).
2. Sirge parameetrilised võrrandid (46).
3. Sirge kanooniline võrrand (47).
4. Sirge taandatud võrrand (48).
5. Sirge üldvõrrand (50).
6. Sirge võrrand telglõikudes (53).
7. Tasandi vektorvõrrandid (56).
8. Tasandi parameetrilised võrrandid (59).
9. Tasandi üldvõrrand (60).
10. Tasandi võrrand telglõikudes (64).
11. Sirge võrrandid ruumis (67).

§ 11. SIRGETE JA TASANDITE VÕRRANDITE RAKENDUSI.

1. Sirgete ja tasandite vastastikused asendid (75).
2. Sirgete ja tasandite kimbud ja sidumid (80).
3. Liineaarvõrratuste geomeetiline tähendus (89).
4. Nurgad sirgete ja tasandite vahel (92).
5. Punkti kaugus sir-

gest ja tasandist. Normaalkõrrandid (97). 6. Kiivsirgete ühine ristsirge ja kiivsirgetevaheline kaugus (102).

§ 12. KOORDINAATTEISENDUSED JA PUNKTTEISENDUSED.

1. Põhimõistete näitlik käsitus ühel konkreetsel erijuhul (104). 2. Üldine afinne teisendus (113). 3. Afinne pööre ja rööplüke (117). 4. Afinne teisendus tasandil (120). 5. Ortogonaalne teisendus tasandil (122). 6. Ortogonaalne teisendus ruumis (129). 7. Euleri nurgad (131).

§ 13. KOVERJOONSED KOORDINAATSÜSTEEMID.

1. Polaarkoordinaadid tasandil (134). 2. Sfäärilised koordinaadid (139). 3. Silindrilised koordinaadid (142).

§ 14. MUUTUV SUURUS LINEARGEOMETRIAS (144).

К. Арьява
М.О.Рахула

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ I

Вторая тетрадь

На эстонском языке

Тартуский государственный университет
ЭССР, г.Тарту, ул. Вяиксоли, 18

Vastutav toimetaja Ü. Lumiste
Korrektor E. Oja

=====

TEU rotaprint 1968. Paljundamisele antud 29.XII 1967.
Trükihoognaid 9,38. Tingtrükihoognaid 8,54. Arvestus-
hoognaid 7. Trükiarv 1000. Paber 30x42/4. ME 11635.
Tell. nr. 757.

Hind 20 kop.