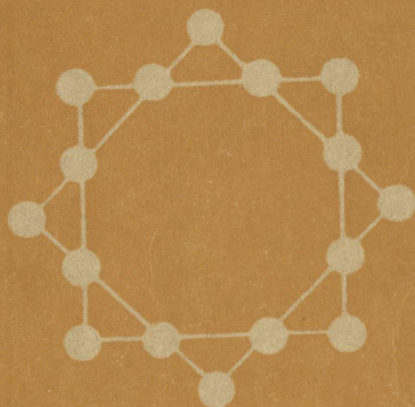


POPULAARTEADUSLIK SARI

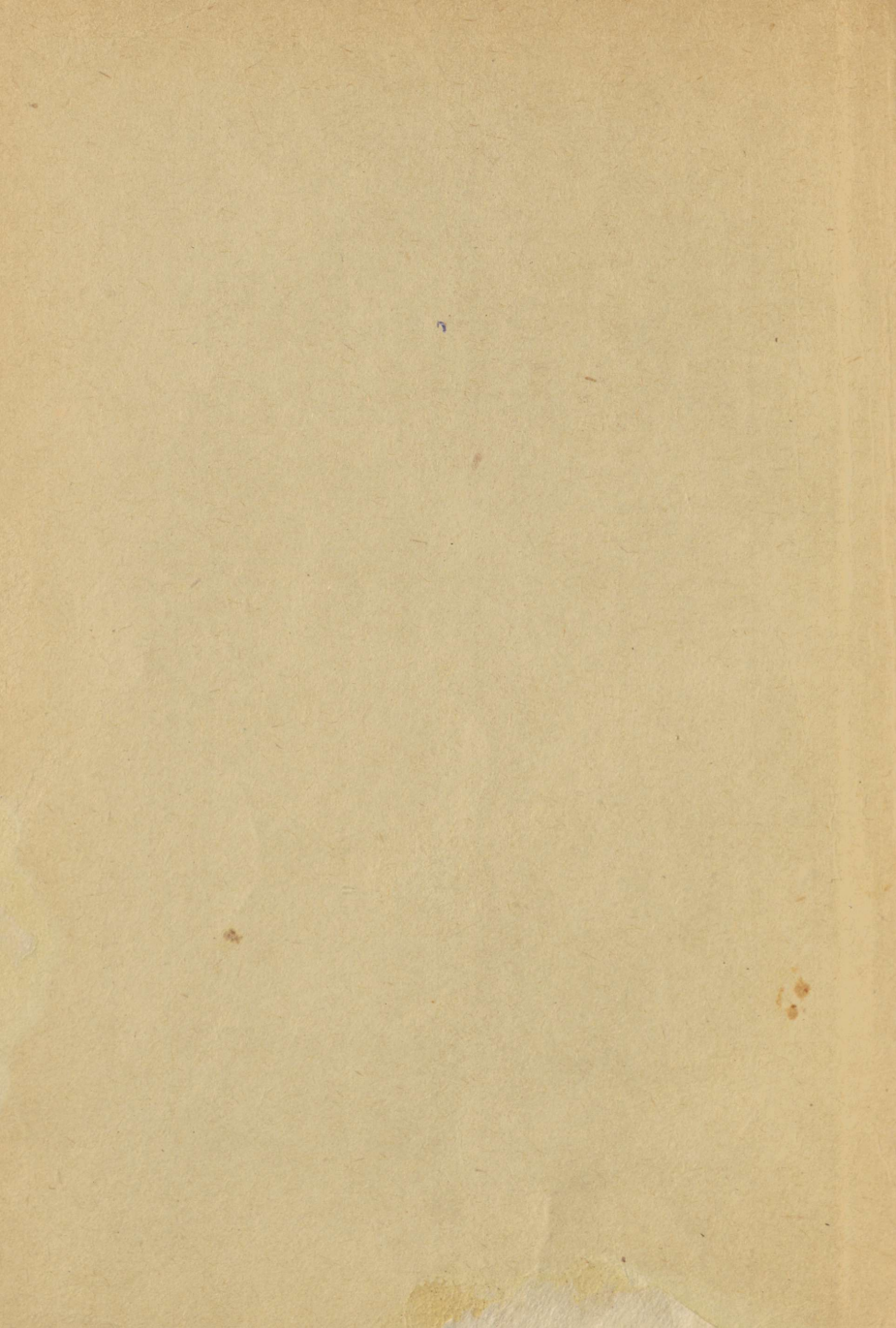
J.I. PERELMAN

# ELAV MATEMAATIKA



---

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS”



J. I. PERELMAN

# ELAV MATEMAATIKA

MATEMAATILISI JUTUSTUSI  
JA KEERDÜLESANDEID



RK „TEADUSLIK KIRJANDUS“  
TARTU, 1948

Tõlgitud teose järgi: Я. И. Перельман, Живая математика. Математические рассказы и головоломки. Издание второе. Государственное издательство технико-теоретической литературы Москва, Ленинград, 1946.

Tõlkija F. Kauba.

A-16558



12980

### Annotatsioon venekeelsele väljaandele.

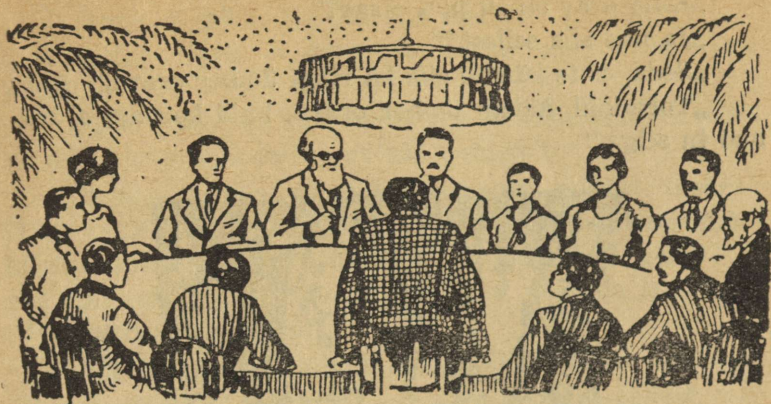
Surnud J. I. Perelmani käesolev matemaatilistele küsimustele pühendatud raamat on üks arusaadavamaid tuntud autori raamatute sarjast. Siia on kogutud mitmesugused matemaatilised keerdulesanded, millest paljud on esitatud väikeste jutustuste kujul. Nende lahendamiseks piisab elementaarse aritmeetika tundmisest ja algelistest teadmistest geomeetrias.

Raamat ilmub teises trükis peagu muutusteta. See on määratud keskkoolides ja tööstus- ning raudteekoolides õppivale noorsoole, töölisnoorte koolide õpilastele ja täiskasvanutele, kes otsivad kasulikku ja mõistlikku meelelahutust puhketundidel.

## Eessõna.

Selle raamatu lugemiseks piisab kõige tagasihoidlikumast matemaatilisest ettevalmistusest: aritmeetika nelja tehte tundmisest ja elementaarteadmistest geometrias. Ainult väike osa ülesandeist nõuab oskust koostada ja lahendada kõige lihtsamaid võrrandeid. Sellele vaatamata on raamatu sisu väga mitmekesine: peadmurdvate keerdülesannete ja keeruliste matemaatiliste trikkide kirjust valimikust kuni kasulikkude arvutuse ja mõõtmise praktiliste näideten. Koostaja on hoolitsenud materjali värskuse eest ja vältinud teistes sama autori valimikes („Mustkunst ja meelelahutus“, „Huvitavad ülesanded“) esineva ainese kordumist. Lugeja leiab siit varemilmunud raamatuis avaldamata sada keerdülesannet, kusjuures mõned neist, näiteks kroketiülesanded, pole üldse kunagi varem avaldatud. VII peatükk — „Jutustusi arvhiiglastest“ — kujutab endast nelja uue jutustusega täiendatud autori ümbertöötatud brošüüri.





Esimene peatükk.

## Hommikueine keerdülesannetega.

1. Orav metsalagendikul. „Täna hommikul mängisin ma oravaga peitust,“ jutustas keegi puhkekodus viibijatest hommikueine ajal söögilauas. „Teie muidugi teate ümmargust lagendikku meie metsas, mille keskel kasvab üksik kask? Selle puu taha peitis end orav minu eest. Väljudes tihnikust lagendikule märkasin kohe orava koonukest elavate silmadega, mis vahtisid mind ainiti puutüve tagant. Ettevaatlikult, mitte lähenedes, hakkasin ma mööda lagendiku äärt ringi kõndima, et näha loomakest. Neli korda käisin ma ringi ümber puu, kuid võrukael taganes kogu aja tüve vastaspoolele, näidates mulle endiselt ainult koonu. Nii ei õnnestunudki mul teha ringi ümber orava.“

„Siiski,“ vaidles keegi vastu, „te ju ise räägite, et käisite neli korda ümber puu.“

„Ümber puu, kuid mitte ümber orava!“

„Kuid orav oli ju puu otsas?“

„Ja mis siis sellest?“

„Seda, et te käisite siis ka ringi ümber orava.“

„Tore küll, käisin ümber orava, kuid kordagi ei näinud ta selga.“



Joon. 1. „Neli korda käisin ma ümber puu.“

„Milleks on siin vaja orava selga? Orav on keskel, teie kõnnite ringi ümber puu, tähendab, kõnnite ka ümber orava.“

„Mitte sugugi. Kujutlege, et mina käin teie ümber ringi, kuid teie pöörate end kogu aja näoga minu poole, varjates oma selga. Kas te ütlete, et ma tiirlen teie ümber?“

„Muidugi ütlen. Kuidas siis teisiti?“

„Tiirlen, kuid ei satu teie selja taha, ei näe teie selga?“

„Jätke juba selg! Te sulete tee minu ümber, — selles on asja tuum, aga mitte, et näha selga.“

„Lubage: mida tähendab tiirelda millegi ümber? Minu arvates tähendab see ainult üht: asetada end järjekindlalt niisugustesse kohtadesse, et näha eset igast küljest. On ju õige, professor?“ pöördus vaidleja laua taga istuva vanamehe poole.

„Teie vaidlete tegelikult sõnade üle,“ vastas õpetlane. „Niisugustel juhtudel tuleb aga ikka alustada sellest, millest te alles nüüd juttu tegite: tarvis on kokku leppida sõnade tähenduses. Kuidas mõista sõnu „liikuda ümber eseme“? Nende mõte võib olla kahesugune. Esiteks võib nende all mõista edasiliikumist mööda kinnist joont, mille keskel asub ese. See on üks mõiste. Teine: liikuda ümber eseme nii, et seda võib näha igast küljest. Vastavalt esimesele mõistele peate tunnistama, et te käisite neli korda ümber orava. Vastavalt teisele peate tegema järelduse, et te ei käinud orava ümber ühtki ringi. Nagu näete, pole siin mingit põhjust vaidluseks, kui mõlemad pooled räägivad ühist keelt, mõistavad sõnu ühteviisi.“

„Suurepärase, võib möönda kahesugust tõlgendust. Kuid kumb on siiski õigem?“

„Niimoodi ei saa küsimust esitada. Kokku võib leppida milles tahes. Kohane on ainult küsida, kumb mõiste on rohkem kooskõlas üldiselt omaksvõetud arusaamisega. Mina ütleksin, et keele iseloomule on sobivam esimene mõiste ja nimelt järgmisel põhjusel. Nagu teada, teeb Päike täispöörde oma telje ümber 26 ööpäevaga...“

„Kas Päike pöörleb?“

„Muidugi, nagu seda teeb Maagi oma telje ümber. Kuid kujutlege, et Päike pöörleb aeglasemalt, ja nimelt, et ta teeb ühe pöörde mitte 26 ööpäevaga, vaid  $365\frac{1}{4}$  ööpäevaga, s. t. ühe aastaga. Siis oleks Päike alati ühe ja sama poolega pööratud Maa poole; vastaspoolt, Päikese



Joon. 2. „Võrukael taganes teisele poole.“

„selga“, ei näeks me iialgi. Kuid kas hakkaks keegi seepärast väitma, et Maa ei tiirle ümber Päikese?“

„Jah, nüüd on selge, et ma ikkagi tiirlesin ümber orava.“

„Üks ettepanek, seltsimehed! Mitte laiali minna!“ ütles üks vaidluse pealtkuulajatest. „Nagu näha, ei lakka vihmasadu niipea, ja kuna vihmaga keegi jalutama ei lähe, siis parem vedame siin aega keerdülesannete lahen-

damisega. Algas on juba tehtud. Igaüks mõelgu välja või tuletagu meelde mõni keerdülesanne. Aga teie, professor, olge meie ülemkohtunikuks.“

„Kui keerdülesanded on algebra või geomeetriaga ühenduses, siis pean ma loobuma,“ teatas noor naine.

„Ja mina ka,“ ühines veel keegi.

„Ei, ei, kõik peavad osa võtma! Kuid me palume koosviibijaid mitte kasutada algebrat ega geomeetriat, või kui, siis algastmes. Vastuväiteid pole?“

„Siis ma nõustun ja olen valmis esimesena esitama keerdülesande.“

„Tore, palume!“ kostus mitmelt poolt. „Alustage!“

**2. Ühisköögis.** „Minu, nii öelda, elulähedane keerdülesanne sündis ühiskorteri oludes. Naisüüriline — nime-tame teda lihtsalt Kolmesteks — pani ühispljidi alla 3 halgu oma puid, teine naisüüriline Viieste 5 halgu, üüriline Puudetu, kellel, nagu te aimate, ei olnud oma puid, sai mõlemalt naiskodanikult loa keeta oma lõunat ühisel tulel. Kulude katteks maksis ta naabritele 8 rubla. Kuidas nad omavahel peavad jagama selle raha?“

„Pooleks,“ avaldas keegi rutukalt. „Puudetu kasutas nende tuld võrdselt.“

„Ei, mitte,“ väitis teine, „tuleb võtta arvesse, kui suured olid naiskodanikkude panused puude näol. Kes pani kolm halgu, peab saama 3 rubla, kes andis viis halgu, saab 5 rubla. See oleks õiglane jagamine.“

„Seltsimehed,“ võttis sõna mängu algataja, keda nüüd peeti koosoleku juhatajaks. „Lepime kokku, et me kohe ei avalda keerdülesannete lõplikke lahendusi. Mõelgu igaüks veel nende üle järele. Õiged lahendused avaldab meile kohtunik õhtusöogi ajal. Kuid nüüd järgmine. Teie järjekord, seltsimees pioneer!“

**3. Kooliringide töö.** „Meie koolis,“ alustas pioneer, „on viis ringi: poliit-, sõjalise ettevalmistuse-, foto-, male- ja lauluring. Poliitring töötab ülepäeviti, sõjalise ettevalmistusering üle kahe päeva kolmandal, foting igal neljandal, male igal viiendal ja laulukoor igal kuuendal päeval. Esimesel jaanuaril olid koolis koos kõik viis ringi, peale seda viidi töö läbi plaanis ettenähtud päevadel ühegi kõrvalkaldumiseta tunniplaanist. Küsimus seisneb selles, mitmel õhtul esimeses kvartalis olid koolis koos veel kõik viis ringi.“

„Kuid kas aasta oli liht- või lisa-aasta?“ päriti pioneerilt.

„Lihtaasta. Tähendab, esimene kvartal — jaanuar, veebruar, märts — tuleb arvestada 90 päeva?“

„Nähtavasti.“

„Lubage teie keerdülesande küsimusele lisada veel üks küsimus,“ lausus professor. „Ja nimelt: kuipalju oli samas kvartalis niisuguseid õhtuid, mil polnud koolis üldse ringide tegevust?“

„Ahaa, saan aru!“ kuuldus hüüe. „See ülesanne on sissevedamiseks. Pole enam ühtki päeva viie ringi tegevusega ega ühtki päeva ühegi ringita. See on selge!“

„Miks?“ küsis juhataja.

„Seletada ma ei oska, kuid aiman, et mõistatuse lahendajat tahetakse sisse vedada.“

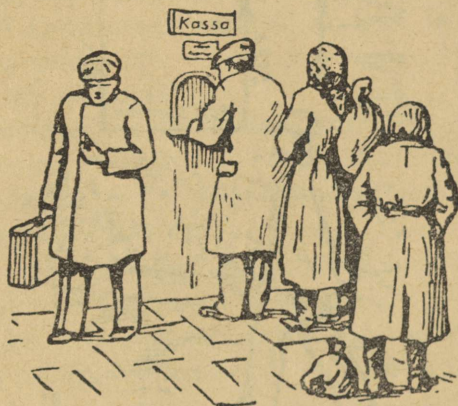
„Noh, see pole põhjendus. Õhtul selgub, kas teie eelaimdus oli õige. Teie käes on järjekord, seltsimees!“

**4. Kes saab rohkem?** „Kaks isikut loendasid ühe tunni vältel kõiki möödujaid kõnniteel. Üks seisis maja väravas, teine kõndis edasi-tagasi mööda kõnniteed. Kes loendas rohkem möödujaid?“

„On selge, et käies saab rohkem loendada,“ kostus laua teisest otsast.

„Vastuse saame teada õhtusöögi ajal,“ teatas juhataja. „Järgmine!“

**5. Vanaisa ja pojapoeg.** „See, millest ma jutustan, juhtus 1932. aastal. Olin siis täpselt nii vana, nagu näita-



Joon. 3. „Ma müün sõidupileteid.“

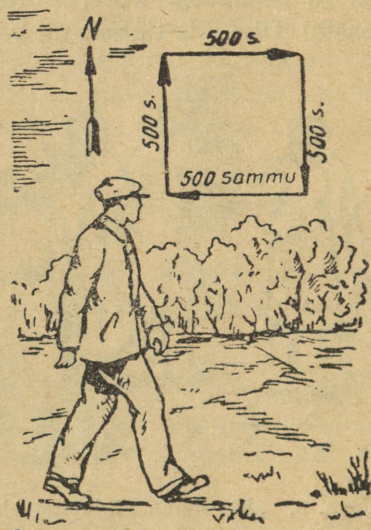
sid minu sünniaasta kaks viimast numbrit, liidetud iseendaga. Kui ma rääkisin vanaisale sellest kokkusattuvusest, hämmastas ta mind seletusega, et tema vanusega olevat sama lugu. Mulle näis see võimatuna . . .“

„Arusaadav, võimatu,“ tähendas kellegi hääl.

„Kujutlege, et see on täiesti võimalik. Vanaisa tõendas seda mulle. Kui vana oli kumbki meist?“

**6. Raudtee sõidupiletid.** „Mina olen raudtee piletikassa teenistuses, müün sõidupileteid,“ alustas järgmine mängust osavõtja. „Paljudele tundub see väga lihtsa tööna. Ei osata ette kujutada, kui suure piletite hulgaga tuleb

tegelda ka kõige väiksema jaama kassapidajal. On ju tarvilik, et sõitjad võiksid saada teatud jaamast pileteid kuni ükskõik millise sellel raudteel asuva jaamani, seejuures mõlemas suunas. Ma teenin raudteel, kus on 25 jaama.



Joon. 4. „500 sammud edasi, 500 — paremale, 500 — tagasi.“

Kui palju eri liiki pileteid on teie arvates müügil selle raudtee kõigis piletikassades?”

„Nüüd on teie kord, seltsimees lendur!“ teatas juhataja.

**7. Õhulaeva lend.** „Leningradist lendas välja õhulaev suunaga otse põhja. Lennanud põhja suunas 500 km, pöördus ta itta. Lennanud selles suunas jällegi 500 km, tegi õhulaev uue pöörde lõunasse ja lendas lõuna suunas samuti 500 km. Siis pöördus ta läände ja, lennanud 500 km, maandus. Küsitakse: mis suunas asub maandu-

miskoht Leningradi suhtes, kas lääne, ida, põhja või lõuna pool?“

„Arvate vist, et teil on tegemist kohtlastega,“ ütles keegi: „500 sammu ettepoole, 500 paremale, 500 tagasi ja 500 vasakule, — kuhu me jõuame? Kust väljusime, sinna ka saabume.“

„Niisiis, kus maandus teie arvates õhulaev?“

„Samal Leningradi lennuväljal, kust ta õhku tõusis. Kas see siis pole nii?“

„Just nii see pole.“

„Sel juhul ei saa ma midagi aru!“

„Tõepoolest midagi ei klapi siin,“ segas naaber jutusse. „Kas õhulaev ei maandunud Leningradis? ... Kas ei võiks korrata ülesande?“

Lendur täitis meeeldi palve. Teda kuulati tähelepanelikult ja vahetati üksteisega nõutuid pilke.

„Hea küll,“ teatas juhataja. „Õhtusöögini on aega selle ülesande üle mõtlemiseks, kuid nüüd jätkame.“

8. Vari. „Lubage mul,“ ütles järgmine mõistatuse-  
esitaja, „võtta oma keerdulesande aineks sama õhulaev. Kumb on pikem, kas õhulaev või selle täisvari?“

„Ja selles ongi terve keerdmõistus?“

„Jah.“

„Vari on muidugi õhulaevast pikem: kiirgavad ju päikesekiired lehvikutaoliselt laiali,“ järgnes kohe vastus.

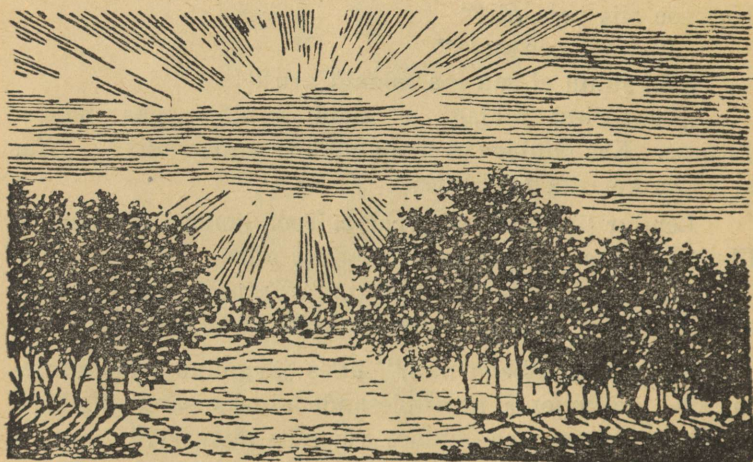
„Mina aga ütleksin,“ väitis keegi, „et, vastupidi, päikesekiired on rööbikud; vari ja õhulaev on ühepikkused.“

„Mis te räägite? Kas teil pole juhust olnud näha pilve taha peidetud Päikese hajuvaid kiiri? Siis võib oma silmaga veenduda, kuivõrd tugevalt päikesekiired hajuvad. Õhulaeva vari peab olema tunduvalt suurem õhulaevast, nagu pilve vari on palju suurem pilvest endast.“

„Miks peetakse siis tavaliselt päikesekiiri rööbikuiks? Meremehed, täheteadlased — kõik arvestavad nõnda...“

Juhataja ei lasknud vaidlust ägedaks minna ja andis sõna järgmisele mõistatuseesitajale.

**9. Ülesanne tikkudega.** Järjekordne kõneleja puistas tikutoosist kõik tikud lauale ja hakkas neid korraldama kolme hunnikusse.



Joon. 5. Pilve taha peitunud päikese laialivalguvad ehk hajuvad kiired.

„Kas kavatsete teha tuleriita?“ naljatasid pealtkuulajad.

„Keerdülesanne,“ seletas mõistatuseesitaja, „toimub sedapuhku tikkudega. Neid on siin kolm ebavõrdset hunnikut. Kõigis kolmes on kokku 48 tikku. Mitu tikku on igas hunnikus, seda ma teile ei ütle. Kuid pange tähele järgmist: ma panen esimesest hunnikust teise niisama palju tikke, kuipalju juba teises hunnikus oli; siis panen tei-

sest hunnikust kolmandasse niipalju tikke, kuipalju oli selles kolmandas hunnikus enne seda, ja lõpuks panen kolmandast hunnikust esimesse niipalju tikke, kuipalju selles esimeses hunnikus nüüd on. Kui see kõik niimoodi läbi teha, siis on kõigis kolmes hunnikus ühepalju tikke. Kuipalju tikke oli igas hunnikus esialgu?"

**10. Salakaval känd.** „See keerdülesanne,“ alustas viimase ülesande esitaja naaber, „meenutab ülesannet, mille mulle andis kunagi ammu külamatemaatik. See oli kaunis lõbus jutustus. Talunik kohtas metsas tundmatut vanameest. Tekkis vestlus. Vanamees silmitses tähelepanelikult talunikku ja ütles:

„Ma tean siin metsatukas üht imelikku kändu. See aitab hädas.“

„Kuidas ta aitab? Kas arstib?“

„Ei arsti, aga kahekordistab raha. Kui paned selle alla rahakoti, muidugi rahaga, loed sajani — ja valmis ongi: raha on kotis kaks korda rohkem. Niisugune oma-dus on tal. Suurepärase känd!“

„Oh, kui ka mina saaksin proovida,“ ütles talunik unistades.

„Seda saab. Miks mitte? Ainult tuleb maksta.“

„Kellele maksta? Kas palju või?“

„Maksma peab teejuhile. Tähendab, minule. Aga kui palju, see on juba isejuht.“

Hakati kauplema. Saanud teada, et talunikul on kukrus vähe raha, nõustus vanamees 1 rbl. 20-kopikalise mak-suga pärast igakordset kahekordistamist.

Siis viis vanamees taluniku sügavasse metsa, eksles temaga kaua ringi ja lõpuks otsis põõsastikust üles vana, samblaga kaetud kuusekännu. Ta võttis taluniku käest rahakukru ja torkas selle kännu juurte vahele. Loeti

sajani. Vanamees hakkas uuesti kobama ja askeldama kännu juurte juures, lõpuks tõmbas ta kukru välja ja ulatas selle talunikule.

Talunik vaatas rahakotti ja, näe imet! — raha oli tõesti kaks korda rohkem! Luges sellest vanamehele pihku lubatud 1 rbl. 20 kop. ja palus panna rahakoti teiskordselt imettegeva kännu alla.

Jälle loeti sajani, uuesti askeldas vanamees kännu juures põõsastes ja jälle sündis ime: raha kukrus kahekordistus. Vanamees sai teiskordselt vastavalt kokkuleppele kotist 1 rbl. 20 kop.

Kolmandat korda peideti rahakott kännu alla. Ka seekord kahekordistus raha. Kuid peale vanamehele lubatud tasu maksmist ei jäänud kotti enam kopikatki. Vaeseke kaotas selle tehinguga kogu oma raha. Polnud enam midagi kahekordistamiseks, ja nukralt lonkides lahkus talunik metsast.

Raha nõidusliku kahekordistamise saladus on teile muidugi selge: otsides kukrut, vanamees ei viivitanud asjata võsas kännu juures. Kuid kas suudaksite vastata teisele küsimusele: kui palju raha oli talunikul enne õnnetat katsetamist salakavala kännuga?“

**11. Ülesanne detsembrist.** „Mina, seltsimehed, olen keeleteadlane, kaugel igasugusest matemaatikast,“ algas elatanud mees, kelleni jõudis järjekord keerdulesande esitamiseks. „Seetõttu ärge oodake minult matemaatilist ülesannet. Ma võin esitada küsimusi ainult oma erialalt. Kas lubate esitada mul keerdulesande kalendriga?“

„Palume!“

„Kaheteistkümnendat kuud nimetatakse meil „detsembriks“. Aga kas te teate, mis õieti tähendab „detsember“? See sõna tuleneb kreekakeelsest sõnast „deka“ —

kümme, samast sõnast on pärit ka „dekaliiter“ — kümme liitrit, „dekaad“ — kümme päeva ja muud. Selgub, et detsembrikuul on nimeks „kümnes“. Millega seletada niisugust mittevastavust?“

„Noh, nüüd on jäänud veel ainult üks keerdulesanne,“ lausus juhataja.

**12. Aritmeetiline trikk.** „Minul tuleb esineda viimasena, kaheteistkümnenädana. Vahelduseks näitan teile aritmeetilise triki ja palun avastada selle saladus. Kirjutagu keegi, kas või teie, seltsimees juhataja, minule nägematult paberile ükskõik missugune kolmekohaline arv.“

„Kas võivad nullid ka hulgas olla?“

„Ma ei tee mingisuguseid kitsendusi. Ükskõik missugune kolmekohaline arv, mis teile meeldib.“

„Kirjutasin. Mis nüüd?“

„Kirjutage selle juurde veel kord täpselt sama arv. Siis te muidugi saate kuuekohalise arvu.“

„Valmis. Kuuekohaline arv.“

„Andke nüüd paber naabrile, kes istub minust võimalikult kaugel. Ja tema jagagu nüüd see kuuekohaline arv seitsmega.“

„Kerge ütelda: jagage seitsmega! Võib-olla ei jagugi.“

„Ärge muretsege, jagub kindlasti ilma jäägita.“

„Te ei tea arvu, kuid olete kindel, et jagub.“

„Enne jagage, pärast räägime.“

„Teie õnneks jagus.“

„Tulemus andke mulle teatamata edasi oma naabrile. Tema jagab selle üheteistkümnele.“

„Arvate, et teil jälle veab ja et arv jagub?“

„Jagage, jääki ei tule!“

„Tõesti, jagus ilma jäägita! Mis nüüd?“

„Andke tulemus edasi. Jagame selle ... ütleme, kolmeteistkümnega.“

„Halvasti valisite. Kolmeteistkümnega jagub väga vähe arve ilma jäägita ... Ent jagus siiski täielikult. Küll teil aga veab!“

„Andke paber tulemusega nüüd minule, ainult murdke kokku, et ma arvu ei näeks.“

Paberilehte lahti tegemata andis „mustkunstnik“ selle edasi juhatajale.

„Palun vastu võtta teie poolt mõeldud arv. Kas on õige?“

„Täiesti õige!“ vastas imestades too, vaadates paberile. „Just selle arvu ma mõtlesingi ... Nüüd, kus kõnelejate nimekiri on läbi, lubage lõpetada meie koosolek; parajasti on ka vihmasadu lakanud. Kõigi keerdülesannete lahendused tehakse teatavaks veel täna pärast õhtusööki. Sedelid lahendustega võite anda minu kätte.“

#### Keerdülesannete 1—12 lahendused.

1. Keerdülesanne oravaga metsalagendikul oli täielikult läbi arutatud juba varem. Asume järgmise juurde.

2. Ei tohi nii arvutada, nagu seda teevad paljud, et 8 rubla oli makstud 8 puuhalu eest, iga halg 1 rubla. See raha oli makstud ainult ühe kolmandiku eest 8 halust, kuna tuld kasutasid võrdselt kolm isikut. Sellest järgneb, et 8 halgu hinnati  $8 \times 3$ , s. o. 24 rubla peale, ja ühe halu hind oli 3 rubla.

Nüüd on kerge välja arvutada, palju kuulub kummalgi. Viiestel on saada 5 halu eest 15 rubla; kuid ta ise tarvitas pliiti 8 rubla eest; tähendab temal on veel saada  $15 - 8$ , s. o. 7 rubla. Kolmestel on oma 3 halu eest saada

9 rubla; kui sellest maha arvata 8 rubla pliidi tarvitamise eest, siis jääb tal veel saada 9 — 8, s. o. ainult 1 rubla.

Niisiis, õige jagamise juures saab Viieste 7 rubla, Kolmeste — 1 rubla.

3. Esimesele küsimusele, mitme päeva järele kogunevad kooli üheaegselt kõik 5 ringi, võime kergesti vastata, kui suudame leida kõige väiksema kõigist arvudest, mis jagub ilma jäägita kahega, kolmega, neljaga, viiega ja kuuega. Pole raske välja arvutada, et see arv on 60. Tähendab, kuuekümnesimesel päeval kogunevad uuesti 5 ringi — poliitring pärast 30 kahepäevast vaheaega, sõjaväelise ettevalmistusering pärast 20 kolmpäevast, fotoring pärast 15 neljapäevast, malering pärast 12 viiepäevast ja laulukoor pärast 10 kuuepäevast vaheaega — üheaegselt kooli. Enne 60 päeva niisugust õhtut ei tule. Järgmine seesugune õhtu on jälle peale 60 päeva, see tähendab juba teises kvartalis.

Seega on esimese kvartali jooksul ainult üks õhtu, millal kooli kogunevad õpinguiks uuesti kõik 5 ringi.

Tülikam on leida vastus ülesande teisele küsimusele: kui palju on õhtuid, millal pole üldse ringide tööd? Et leida niisuguseid päevi, tuleb järjekorras kirjutada kõik arvud 1—90 ja maha tõmmata sellest reast poliitringi tööõhtud, see on: arvud 1, 3, 5, 7, 9 jne. Siis maha tõmmata sõjalise ettevalmistusringi tööpäevad: 4, 10 jne. Peale seda, kui on maha tõmmatud ka fotoringi, maleringi ja laulukoori tööõhtud, jäävad esimeses kvartalis maha tõmbamata need päevad, millistel ei töötanud ükski ring.

Kes sooritab selle töö, see veendub, et töövabu õhtuid on esimeses kvartalis päris palju — 24. Jaanuaris on 8, ja nimelt: 2., 8., 12., 14., 18., 20., 24. ja 30. Veebruaris leidub niisuguseid päevi 7, märtsis — 9.

4. Mõlemad loendasid võrdselt möödujaid. Kuigi see, kes seisis värava juures, loendas möödujaid mõlemas suunas, nägi seevastu teine, kes kõndis, kaks korda rohkem vastutulevaid inimesi.

5. Esimesel pilgul võib tõesti näida, et ülesanne on koostatud valesti: näib, nagu oleksid pojapoeg ja vanaisa üheeealised. Siiski, nagu näeme, on ülesande nõue kergesti rahuldatav.

On ilmne, et pojapoeg sündis XX sajandil. Järelikult on tema sünniaasta kaks esimest numbrit 19: see on sadade arv. Ülejäänud kahe numbriga väljendatud arv liidetud iseendaga peab olema 32. Tähendab, see arv on 16: pojapoja sünniaasta on 1916, ja 1932. a. oli ta 16 aastat vana.

Vanaisa on muidugi sündinud XIX sajandil; tema sünniaasta kaks esimest numbrit on 18. Ülejäänud numbritega väljendatud kahekordne arv peab olema 132. Tähendab, otsitav arv peab võrduma poolega 132-st, see on 66. Seega vanaisa sündis 1866. a. ja 1932. a. oli ta 66 aastat vana.

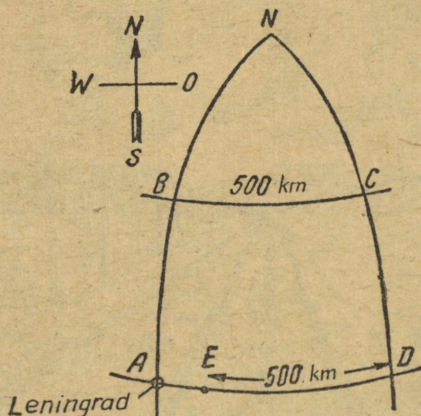
Nii olid pojapoeg ja vanaisa 1932. a. nii vanad, nagu seda näitavad nende sünniaastate kaks viimast numbrit.

6. Reisijad võivad nõuda igast 25-st raudteejaamast pileteid iga jaamani, see on 24 kohta. Tähendab, pileteid tuleb trükkida  $25 \times 24 = 600$  eriliiki.

7. Selles ülesandes pole mingit vastuolu. Pole vaja mõelda, et õhulaev lendas ruudu kontuure mööda: tuleb arvestada Maa kerakujulisust. Asi seisneb selles, et meridiaanid lähenevad põhjapool teine teisele (joon. 6); seepärast, lennates 500 km piki paralleeli, mis asetseb Lenini-gradil laiusest 500 km põhjapool, nihkus õhulaev itta suurema arvu kraade, kui ta hiljem lendas vastupidises suu-

nas, sattudes uuesti Leningradi laiusele. Õhulaeva lennu lõpptulemusena maandus ta ida poole Leningradi.

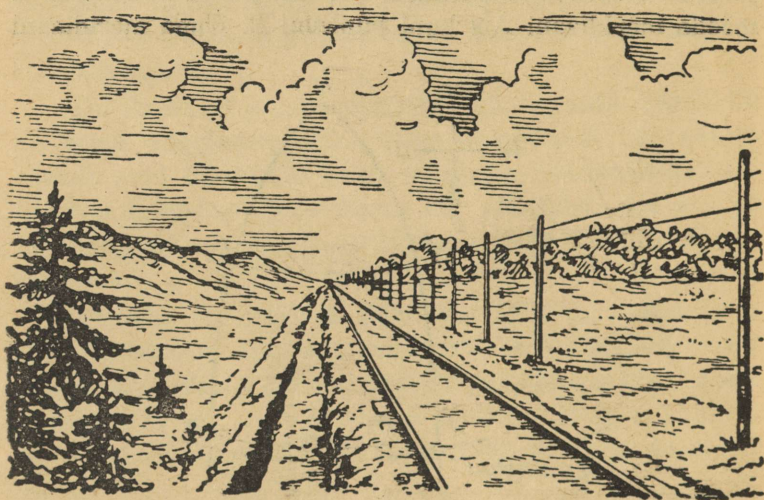
Ja nimelt kui palju? Ka seda võib välja arvutada. Joonisel 6 te näete õhulaeva teekonda: ABCDE. Punkt N on põhjanaba; selles punktis ühtuvad meridiaanid AB ja DC. Õhulaev lendas algul 500 km põhja suunas, s. t. mööda meridiaani AN kuni punktini B. Kuna meridiaani



Joon. 6. Kuidas lendas õhulaev.

kraadi pikkus on 111 km, siis on 500 km meridiaani kaarjoon  $500 : 111 = 4,5^\circ$ . Leningrad asub 60-ndal laiuskraadil; tähendab, punkt B asub  $60^\circ + 4,5^\circ = 64,5^\circ$ . Siis lendas õhulaev ida poole, s. t. 500 km mööda paralleeli BC. Ühe kraadi pikkuse sellel laiusel võib välja arvutada (või leida tabelitest); selle pikkus on 48 km. Nii on kerge määrata, mitu kraadi lendas õhulaev ida poole:  $500 : 48 = 10,4^\circ$ . Edasi lendas õhulaev lõuna suunas, s. t. mööda meridiaani CD ja, läbinud 500 km, sattus uuesti Leningradi laiuskraadile. Nüüd suundus teekond läände, see

on mööda DA; 500 km sellest teekonnast on ilmselt lühem AD pikkusest, AD-s on sama palju kraade kui BC-s, s. t.  $10,4^\circ$ . Kuid  $1^\circ$  pikkus  $60^\circ$  laiusel on 55,5 km. Järelikult, vahemaa A ja D vahel on  $55,5 \times 10,4 = 577$  km. Seega näeme, et õhulaev ei saanud maanduda Leningradis, kuhu



Joon. 7. Kaugusesse suunduvad raudteeropad.

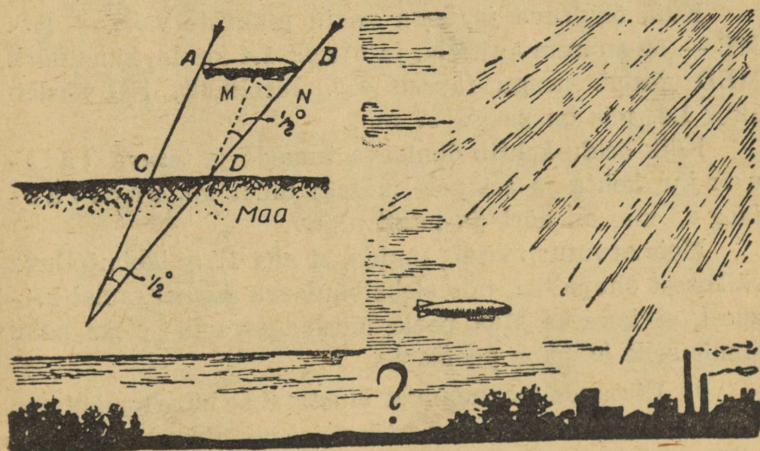
tal jäi lennata veel 77 km, vaid ta maandus Laadoga järvel.

8. Selle ülesande üle vestlejad tegid terve hulga vigu. Pole õige, et Maakerale langevad Päikesese kiired märgatavalt hajuvad. Maakera kaugus Päikesest on nii väike, et päikesekiirte kimbud, mis langevad ükskõik kus kohal tema pinnale, hajuvad märkamatult väikesse nurga võrra: tegelikult võib päikesekiiri lugeda rööbikuteks. Kui me mõnikord näeme lehvikuna hajuvaid päikesekiiri

(nn. „pilvetagune paiste“, joon. 5), siis pole see muud midagi kui perspektiivi tagajärg.

Perspektiivis rööbikjooned näivad koonduvatena; meenutage vaadet kaugusesse suunduvatele raudteerobastele (joon. 7) või vaadet pikale puiesteele.

Kuid sellest, et päikesekiired langevad Maakerale rööbikute vihuna, ei järgne põrmugi, et õhulaeva täisvari



Joon. 8. Kuidas langeb õhulaeva vari?

võrdub õhulaeva pikkusega. Heites pilgu joonisele 8, te taipate, et õhulaeva täisvarju pikkus lüheneb Maa suunas, ja et vari, mis langeb õhulaevast Maakerale, peab olema lühem õhulaevast endast: CD on lühem kui AB.

Kui on teada õhulaeva kõrgus, siis võib välja arvutada ka vahe suuruse. Oletage, et õhulaev lendab 1000 m kõrgusel maapinnast. Nurk, mille moodustavad sirged AC ja BD omavahel, on võrdne nurgaga, mille all näeme Päikest Maakeralt; see nurk on umbes  $\frac{1}{2}^{\circ}$ . Teiselt poolt on teada, et iga ese, mis on nähtav  $\frac{1}{2}^{\circ}$  nurga all, asub silmast

eseme 115-kordse läbimõõdu kaugusel. Tähendab, lõik MN (see lõik on Maakeralt nähtav  $\frac{1}{2}^{\circ}$  nurga all) peab olema 115-es osa AC-st. AC on pikem kui püstloodne kaugus A-st kuni maapinnani. Kui nurk päikesekiirte suuna ja maapinna vahel võrdub  $45^{\circ}$ , siis AC (õhulaeva lennul 1000 m kõrgusel) on umbes 1400 m ja järelikult lõik MN on  $\frac{1400}{115} = 12$  m.

Kuid õhulaeva ja tema varju pikkuste vahe — lõik MB — on suurem kui MN, ja nimelt 1,4 korda, kuna nurk MBD võrdub peagu täpselt  $45^{\circ}$ . Järelikult, NB võrdub  $12 \times 1,4$ , mis on peagu 17 m.

Kõik öeldu kehtib õhulaeva tumeda ja terava täisvarju kohta ja sel pole midagi ühist nn. poolvarjuga, mis on nõrk ja laialivalguv.

Meie arvutus näitab, muide, et alla 17 m läbimõõduga väikesest õhupallist, mis oleks õhulaeva asemel samal kõrgusel, ei langeks Maa peale üldse täisvarju; oleks näha ainult selle ähmane poolvari.

9. Ülesande lahendamist alustatakse lõpust. Lähtume sellest, et peale kõiki ümbertõstmisi oli tikke kõigis hunnikus võrdselt. Et tikkude üldarv nendest ümberasetustest ei muutunud, vaid jäi endiseks (48), siis oli igas hunnikus pärast kõiki ümberladumisi 16 tikku.

Nii on meil lõpuks

1. hunnikus	2. hunnikus	3. hunnikus
16	16	16

Vahetult enne seda lisati 1-sse hunnikusse samapalju tikke, kuipalju neid oli seal enne lisamist; teiste sõnadega, tikkude arv kahekordistus. Tähendab, enne viimast ümbertõstmist polnud esimeses hunnikus mitte 16, vaid ainult 8 tikku. Kuid kolmandas hunnikus, kust võeti need 8 tikku, oli enne seda  $16 + 8 = 24$  tikku.

Nüüd on meil tikud jaotatud hunnikuisse järgmiselt:

1. hunnikus	2. hunnikus	3. hunnikus
8	16	24

Edasi me teame, et enne seda tõsteti teisest hunnikust kolmandasse samapalju tikke, kuipalju oli kolmandas hunnikus. Tähendab, 24 on kahekordne tikkude arv, mis oli enne ümberladumist kolmandas hunnikus. Siit saame teada tikkude jaotuse peale esimest ümberasetust:

1. hunnikus	2. hunnikus	3. hunnikus
8	$16 + 12 = 28$	12

Nüüd on kerge taibata, et enne esimest ümbertõstmist (s. t. enne seda, kui esimesest hunnikust tõsteti teise samapalju tikke, kuipalju neid oli seal enne) tikkude jaotus oli järgmine:

1. hunnikus	2. hunnikus	3. hunnikus
22	14	12

Niisugune oli tikkude esialgne arv hunnikuis.

10. Ka seda keerdulesannet on lihtsam hakata lahendamada lõpust.

Me teame, et pärast kolmandat kahekordistumist oli kotis raha 1 rubla 20 kop. (Selle raha sai vanamees tasuks viimasel korral.) Kuipalju oli siis enne seda kahekordistumist? Muidugi 60 kop. See 60 kop. jäi järele pärast teiskordset 1 rubla 20 kop. väljamaksmist vanamehele, kusjuures enne väljamaksmist oli rahakotis 1 rubla 20 kop. + 60 kop. = 1 rubla 80 kop.

Pärast teiskordset kahekordistumist oli kukrus 1 rubla 80 kop.; enne seda oli aga kõigest 90 kop., mis jäi järele pärast esimese 1 rubla 20 kop. väljamaksmist vanamehele. Nii saamegi teada, et enne väljamaksmist oli kotis 90 kop. + 1 rubla 20 kop. = 2 rubla 10 kop. Niipalju raha oli kotis pärast esimest kahekordistumist; enne seda

oli aga kaks korda vähem, s. o. 1 rubla 05 kop. See ongi raha, millega talunik alustas oma ebaõnnestunud rahalisi tehinguid.

Vastust võime kontrollida järgmiselt:

Kotis oli raha:

Pärast 1. kahe-

kordistumist ... 1 rbl. 05 kop.  $\times 2 = 2$  rbl. 10 kop.

Pärast 1. välja-

maksmist ..... 2 rbl. 10 kop. — 1 rbl. 20 kop. = 90 kop.

Pärast 2. kahe-

kordistumist ... 90 kop.  $\times 2 = 1$  rbl. 80 kop.

Pärast 2. välja-

maksmist ..... 1 rbl. 80 kop. — 1 rbl. 20 kop. = 60 kop.

Pärast 3. kahe-

kordistumist ... 60 kop.  $\times 2 = 1$  rbl. 20 kop.

Pärast 3. välja-

maksmist ..... 1 rbl. 20 kop. — 1 rbl. 20 kop. = 0

11. Meie kalender on saanud alguse vanade roomlaste kalendrist. Kuid roomlased (enne Julius Caesarit) lugesid aasta alguseks mitte 1. jaanuari, vaid 1. märtsi. Järelikult oli siis detsember tollal kümnes kuu. Aasta alguse üleviimisega 1. jaanuarile ei muudetud kuude nimetusi. Sellest tekkiski mittevastavus kuude nimetuste ja järjekorra numbrite vahel, mis kehtib veel praegugi rea kuude nimetuste juures. (Vaata tabelist):

Kuu nimetus	Nimetuse tähendus	Järjekorra number
september	seitsmes	9
oktoober	kaheksas	10
november	üheksas	11
detsember	kümnes	12

12. Jälgime nüüd, mida tehti mõeldud arvuga. Kõige pealt kirjutati sellele juurde veel kord seesama kolmekohaline arv. See on sama, kui kirjutada juurde kolm nulli ja liita siis esialgne arv; näiteks

$$872\ 872 = 872\ 000 + 872$$

Nüüd on selge, kuidas toimiti selle arvuga: see suurendati 1000 korda ja peale selle liideti esialgne arv; lühidalt öeldud — korrutati 1001-ga.

Mis tehti aga pärast selle korrutisega? See jagati järgimööda 7-ga, 11-ga ja 13-ga. Tähendab lõpptulemusena jagati see  $7 \times 11 \times 13$ -ga, see on 1001-ga.

Niisiis korrutati mõeldud arv alguses 1001-ga ja jagati hiljem jällegi 1001-ga. Tõesti pole midagi imetlusväärset selles, et lõpptulemusena saadi sama arv?

\* \* \*

Enne kui lõpetada peatükk puhkekodu keerdülesannetest, jutustan teile veel kolmest aritmeetilisest trikist, mida võite pakkuda oma sõpradele ajaviiteks.

Kahes tuleb mõistatada arvud, kolmandas — asjade omanikud.

Need on vanad, võib-olla teile isegi tuntud trikid, kuid vaevalt teavad kõik, millel nad põhinevad. Kuid tundmata triki teoreetilist alust ei saa seda teadlikult ja veenvalt sooritada. Kahe esimese triki põhjendamine nõuab meilt väga tagasihoidlikku ja mitte põrmugi väsitavat ekskursiooni elementaarse algebra valdkonda.

**13. Mahatõmmatud number.** Teie sõber mõelgu mingisugune mitmekohaline arv, näiteks 847. Tehke talle ettepanek leida selle arvu ristsumma ( $8 + 4 + 7 = 19$ ) ja lahutada see summa mõeldud arvust. Lahendaja saab

$$847 - 19 = 828.$$

Saadud arvust kriipsutagu ta läbi üks number, ükskõik milline, ja öelgu teile kõik teised. Te ütlete talle viivitamatult läbikriipsutatud numbri, kuigi ei tea tema poolt mõeldud arvu, ega näinud, mis sellega tehti.

Kuidas on see teil võimalik ja milles peitub siin triki lahendus?

Teostamine on väga lihtne: otsitakse niisugune arv, mis koos teile avaldatud numbritest ristsummaga väljendaks lähimat arvu, mis jagub 9-ga ilma jäägita. Kui näiteks arvust 828 oli läbi kriipsutatud esimene number (8) ja teile teatati numbrid 2 ja 8, siis liites  $2 + 8$  taipate, et lähima 9-ga jaguva arvuni, s. t. 18-ni teil puudub 8. See ongi läbikriipsutatud number.

Millest see tuleneb? Sellest, et kui lahutada mingist arvust selle ristsumma, peab jääma järele arv, mis jagub 9-ga, — teiste sõnadega, arv, mille ristsumma jagub 9-ga. Olgu tegelikult mõeldud arvus sadade number —  $a$ , kümnete number —  $b$  ja üheliste number —  $c$ . Tähendab, kokku on selles arvus ühelisi

$$100a + 10b + c$$

Lahutame sellest arvust tema ristsumma  $a + b + c$ . Saame  $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$ . Kuid  $9(11a + b)$  jagub muidugi 9-ga; tähendab, kui lahutada arvust tema ristsumma, peab alati jääma arv, mis jagub 9-ga ilma jäägita.

Triki sooritamisel võib juhtuda, et teile teatatud numbritest summa ise jagub 9-ga (näiteks 4 ja 5). See näitab, et läbikriipsutatud number on kas 0 või 9. Niisugusel korral peate vastama: 0 või 9.

Olgu esitatud veel selle triki teisend. Selle asemel, et mõeldud arvust lahutada tema ristsumma, võib lahutada arvu, mis on saadud mõeldud arvu numbritest ükskõik millise ümberasetamisega. Näiteks arvust 8247 võib lahu-



Tähendab, vahe koosneb järgmisest kolmest numbrist:

sadade	number	$a - c - 1$
kümnete	,,	9
üheliste	,,	$10 + c - a$ .

Tagurpidi asetatud numbritega näeb arv välja nii:

$$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1).$$

Liites mõlemad avaldised

$$100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) \\ + 100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1),$$

saame

$$100 \times 9 + 180 + 9 = 1089.$$

Missugused ka numbrid  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ei oleks, arvutuste lõpptulemuseks on ikka üks ja sama arv: 1089. Seepärast pole raske mõistatada nende tulemust: te teate seda juba ette.

On arusaadav, et seda trikki ei tohi näidata ühele isikule kaks korda, siis saladus avastub.

**15. Mis keegi võttis?** Selle teravmõttelise triki teostamiseks tuleb varuda kolm mingisugust väikest eset, mida saab kergesti peita tasku, näiteks pliiats, võti ja taskunuga. Lisaks asetage lauale taldrik 24 pähkliga; pähklike puudumisel võivad olla kabe- või doominokivid, tikud jne.

Kolmele seltsimehele teete ettepaneku peita taskutesse teie äraoleku ajal pliiats, võti ja nuga vastavalt sellele, missugust eset keegi tahab. Teil tuleb mõistatada, mis-sugune ese on kellegi taskus.

Mõistatamine toimub järgmiselt. Peale esemete tas-kutesse peitmist te tuletate tuppa tagasi ja alustate sellega, et annate seltsimeestele hoiule taldrikulolevaid pähkleid. Esimesele annate ühe, teisele kaks, kolmandale kolm pähk-lit. Siis lahkute uuesti toast, andnud seltsimeestele järg-

mise juhise: igauks peab endale võtma taldrikult veel pähkleid ja nimelt: pliatsi omaja võtab niipalju, kuipalju talle oli antud, võtme omaja võtab k a k s korda rohkem pähkleid, kui talle oli antud, kuna noa omanik võtab n e l i k o r d a rohkem antuist.

Ülejäänud pähklid jäävad taldrikule.

Kui te pärast tagasituleku märguannet tuppa astudes heidate pilgu taldrikule, võite kohe ütelda, missugune ese on kellegi taskus.

Trikk viib osavõtjad seda enam segadusse, et selle teostamise juures pole teil salajast abilist, kes võiks anda vargsi märku. Siin pole mingit pettust, see põhineb täielikult aritmeetilisel arvutusel. Te otsite iga eseme omaja üles ainuüksi ülejäänud pähklite alusel. Neid ei jää taldrikule palju — 1 kuni 7 ja neid võib loetleda ühe pilguga.

Kuidas saab aga pähklite ülejäägi alusel teada, misuguse eseme keegi võttis?

Väga lihtsalt: igale seltsimeestevahelisele asjade jaotumisjuhule vastab isesugune ülejäänud pähklite hulk. Selles me veendume kohe.

Olgu teie seltsimeeste nimedeks Aleksander, Georg ja Konstantin ja märgime nad nende nimede algustähtedega A, G, K. Esemed märgime samuti tähtedega: pliats — a, võti — b, nuga — c. Kuidas võivad kolm eset jaotuda kolme omaniku vahel? Siin esineb 6 varianti:

A	G	K
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Teisi võimalusi ei saa loomulikult olla; meie tabelis esinevad kõik võimalikud kombinatsioonid.

Vaatleme nüüd, missugused jäägid vastavad igale nendest kuuest võimalusest:

A G K	Võetud pähklite arv			Kokku	Jääk
abc	$1 + 1 = 2$	$2 + 4 = 6$	$3 + 12 = 15$	23	1
acb	$1 + 1 = 2$	$2 + 8 = 10$	$3 + 6 = 9$	21	3
bac	$1 + 2 = 3$	$2 + 2 = 4$	$3 + 12 = 15$	22	2
bca	$1 + 2 = 3$	$2 + 8 = 10$	$3 + 3 = 6$	19	5
cab	$1 + 4 = 5$	$2 + 2 = 4$	$3 + 6 = 9$	18	6
cba	$1 + 4 = 5$	$2 + 4 = 6$	$3 + 3 = 6$	17	7

Sellest näete, et pähklite jääk on igakord erinev. See pärast, teades jääki, saate kergesti kindlaks teha esemete jaotuse oma seltsimeeste vahel. Lahkunud kolmandat korda toast, vaatate oma taskuraamatusse, kuhu teil on kirjutatud praegu tuletatud tabel (tegelikult te vajate ainult esimest ja viimast lahtrit). Seda tabelit meeles pidada on raske ja selleks pole ka vajadust. Tabelike ütleb teile, missugune ese on kellegi taskus. Kui taldrikule on jäänud 5 pähklit, siis tähendab see (juht b, c, a), et

Aleksandri käes on võti,

Georgi käes on nuga,

Konstantini käes on pliiats.

Et trikk hästi õnnestuks, tuleb kindlasti meeles pidada, kui palju pähkleid te andsite igale seltsimehele (seepärast jagage pähklid ikka tähestiku järjekorras, nii nagu see on tehtud ka käesoleval korral).



Teine peatükk.

## Matemaatika mängudes.

### Doomino.

**16. Ahel 28-st kivist.** Miks saab laduda 28 doominokivi vastavalt mängu reeglitele üheks pidevaks ahelaks?

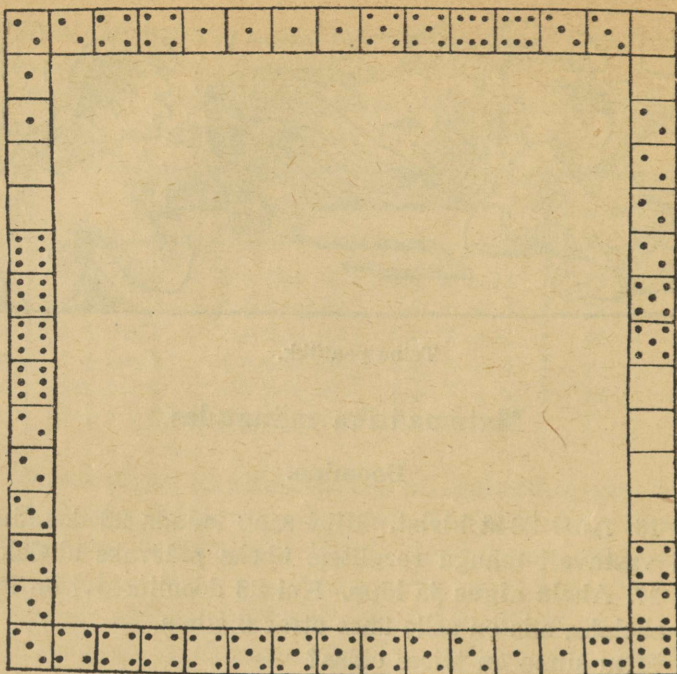
**17. Ahela algus ja lõpp.** Kui 28 doominokivi on laotud ahelaks, siis on selle ühes otsas 5 silma.

Mitu silma on teises otsas?

**18. Trikk doominokividega.** Teie seltsimees võtab ühe kivi ja teeb teile ettepaneku moodustada ülejäänud 27-st kivist pidev ahel, kinnitades, et see on alati võimalik, olgu äravõetud kivi missugune tahes. Ise läheb ta kõrvaltappa, et ei tarvitse vaadata teie ahelat.

Te asute tööle ja veendute, et seltsimehel oli õigus: 27 kivi sai laduda üheks pidevaks ahelaks. Veel imetlusväärsem aga on, et olles ise teises toas ja nägemata teie ahelat ütleb seltsimees, mitu mängusilma on selle kummaski otsas.

Kuidas võib ta seda teada? Ja miks on ta kindel, et ükskõik millisest 27-st doominokivist võib moodustada pideva ahela?



Joon. 9. Raam doominokividest.

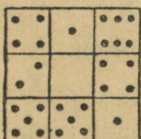
**19. Raam.** Joonis 9 kujutab nelinurkset raami, mis on laotud doominokividest vastavalt mängu reeglitele. Raami küljed on ühepikkused, kuid silmade summa pole võrdne: ülemises ja vasakus reas on 44 silma, ülejäänud kahes reas — 59 ja 32 silma.

Kas te oskate laduda niisuguse nelinurkse raami, mille igal küljel oleks võrdne arv silmi — nimelt 44?

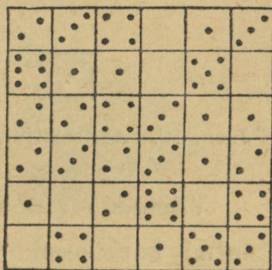
**20. Seitse ruutu.** On võimalik valida neli doominokivi ja neist moodustada väike ruut, mille igal küljel on võrdne arv silmi. Proov on esitatud joonisel 10: liites ruudu iga külje silmad saate kõigil juhtudel 11.

Kas te oskate doominokivide täiskomplektist laduda üheaegselt seitsme niisugust ruutu? Pole nõutav, et ühe külje silmade summa oleks kõigil ruutudel üks ja sama, on ainult vajalik, et iga ruudu neljal küljel oleks ühesugune silmade summa.

**21. Maagilised ruudud doominokividest.** Joonisel 11 on esitatud ruut 18-st doominokivist, mis on tähelepanu-



Joon. 10.



Joon. 11. Maagiline ruut doominokividest.

vääriv seepoolest, et selle iga rea piki, põigi või diagonaalne silmade summa võrdub 13-ga. Niisuguseid ruute nimetatakse juba vanast ajast „maagilisteks“.

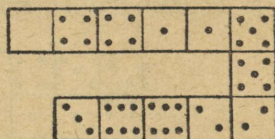
Teile soovitatakse koostada mõned samasugused maagilised ruudud 18-st kivist, kuid teissuguse silmade summaga igas reas. 13 on kõige väiksem summa 18-st kivist koostatud maagilise ruudu ridades. Kõige suurem on 23.

**22. Aritmeetiline rida doominokividest.** Joonisel 12 te näete kuut doominokivi, mis on asetatud vastavalt mängu reeglitele ja mis erinevad seega, et silmade arv kivil (iga kivi mõlemal poolel) kasvab 1 võrra: alates 4-ga koosneb rida järgmistest silmadest:

4; 5; 6; 7; 8; 9.

Niisugust arvude rida, mis kasvab (või kahaneb) võrdse suuruse võrra, nimetatakse „aritmeetiliseks reaks“. Meie reas on iga arv eelmisest ühe võrra suurem; kuid reas võib olla igasugune teine „vahe“.

Ülesandeks on koostada veel mõned aritmeetilised read kuuest kivist.



Joon. 12. Aritmeetiline rida doominokividest.

### Viieteistkümne-mäng ehk taken.

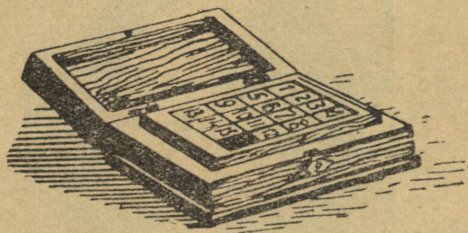
Üldtuntud karbikesel viieteistkümne nummerdatud nelinurkse mängukiviga on huvitav ajalugu, mida vähesed mängijaist tunnevad. Esitame sellest jutustuse saksa mängudeuurija matemaatik W. Ahrensi sõnadega.

„Umbes pool sajandit tagasi — seitsmekümnendate aastate lõpul — tekkis Ameerika Ühendriikides „Viieteistkümne-mäng“; see levis väga kiiresti, ja tänu selle mängu kütkeisse sattunud loendamatu hulgale agaraatele mängijatele, muutus see tõeliseks ühiskonnanuhtluseks.

Sama mängu kirk levis ka Euroopasse. Siin võis näha isegi hoburaudtee vaguneis reisijate käes karpe viieteistkümne kiviga. Kontorites ja ärides sattusid peremehed meeleheitesse oma teenijate mängukirest ning olid sunnitud keelama neil mängimise töö- ja äritundidel. Lõbustuskohtade omanikud kasutasid osavalt seda maaniat ja korraldasid suuri mänguturniire. Mäng tungis isegi Saksa Riigipäeva pidulikkudesse saalidesse. „Nagu

alles praegu näen ma Riigipäeval hallipäisi inimesi, kes süvenenult vaatlevad nelinurkset karbikest enda käes,“ meenutab tuntud maateadlane ja matemaatik Siegmund Günther, kes oli saadikuks mängu taudiaastatel.

Pariisis leidis see mäng endale asupaiga lahtise taeva all, puiestedel, ja levis kiirelt pealinnast üle maa



Joon. 13. Viieteistkümne-mäng.

laiali. „Polnud niisugust üksildast maamajakest, kus poleks pesitsenud see ämblik, varitsedes ohvrit, ega inimest, kes ei olnud valmis laskma end mässida tema võrku,“ kirjutas üks prantsuse autor.

Nähtavasti jõudis mängupalavik 1880. a. haripunkti. Kuid varsti peale seda tõugati türann troonilt ja võideti ta matemaatika relvaga. Matemaatiline mänguteooria avastas, et esitatavate ülesannete suurest hulgast on lahendatavad ainult pooled; teised pole ühegi kavaluse abil lahendatavad.

Ilmnes, miks mõned ülesanded ei alistunud ka kõige visamale pingutusele ja miks turniiride korraldajad julgusid pakkuda tohutuid preemiaid ülesannete lahendamisele. Selles ületas kõiki mängu leiutaja ise, kes pakkus New-Yorgi ajalehe väljaandjale pühapäevase lisa jaoks

lahendamatu ülesande 1000-dollarilise preemiaga selle lahendamise eest. Et aga väljaandja kõhkles, oli leiutaja nõus nimetatud summa oma taskust sisse maksma. Leiutaja nimi oli Samuel (Sam) Lloyd. Ta saavutas suure



Joon. 14. Samuel Lloyd, „viieteistkümne-mängu“ leiutaja.

kuulsuse teravmeelsete ülesannete ja paljude keerdulesannete koostajana. On huvitav, et tal ei õnnestunud saada Ameerikas patenti oma leiutatud mängule. Vastavalt eeskirjale pidi ta esitama proovipartii sooritamiseks „töömudeli“. Ta esitaski patendibüroo ametnikule ülesande, ja kui viimane päris, kas see on lahendatav, oli leiutaja sunnitud vastama: „Ei, matemaatiliselt on see võimatu.“ „Säärasel korral,“ järgnes vastus, „pole võimalik ka töö-

muldel, aga töömudelita ei saa ka patenti.“ Lloyd leppis selle resolutsiooniga, kuid arvatavasti ta poleks olnud nii järeleandlik, kui oleks suutnud ette näha oma leiutise ennekuulmatut edu“<sup>1</sup>.

Avaldame mängu leiutaja isikliku jutustuse mängu ajaloo mõningatest tõsiasiadest.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Joon. 15. Kivide õige järjestus (seis I).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Joon. 16. Lahendamatu juhtum (seis II).

„Mõistuse riigi ammused elanikud,“ kirjutab Lloyd, „mäletavad, kuidas ma seitsmekümnendate aastate lõpul sundisin tervet maailma pead murdma viieteistkümmne liikuva kiviga karbi kallal, mis sai kuulsaks nime all „Viieteistkümmne-mäng“. Viisteist mängukivi olid paigutatud ruudukujulisse karpi õiges järjekorras, ja ainult 14-s ja 15-s kivi olid ümber vahetatud, nagu nähtub juurdelisatud illustratsioonilt (joon. 16). Ülesandeks oli nihutada kivid üksteise järel loomulikku järjestusse, kusjuures üksnes 14-s ja 15-s tulid asetada õigesse järjekorda.

Selle ülesande esimese õige lahenduse eest pakutud 1000-dollarilist preemiat ei pälvinud keegi, ehkki kõik lahendasid väsimatult seda ülesannet. Jutustatakse huvi-

<sup>1</sup> Selle episoodi kasutas ära Mark Twain oma romaanis „Ameerikalik pretendent“.

tavaid lugusid kaupmeestest, kes mängu tõttu unustasid avada oma ärid, auväärseist ametnikest, kes seisis ööd läbi tänavalaternate all, otsides ülesande lahendusviisi. Mitte keegi ei tahtnud loobuda lahenduse otsimisest, kuna



Joon. 17. „Farmerid hülgasid oma adrad...“

kõigil oli kindel usk neid ootavas edus. Räägitakse, et tüürimehed lasksid mängu pärast joosta laevad madalikudele, rongijuhid kihutasid jaamadest mööda; farmerid hülgasid oma adrad.“

\* \* \*

\*

Tutvustame lugejat selle mängu teooria algmetega. Täielikul kujul on see väga keerukas ja on lähedane kõrgema algebra ühe osaga („determinantide teooriaga“). Piirdume ainult mõningate Ahrensi poolt esitatud arvutustega.

„Mängu ülesanne seisneb harilikult selles, et järjekorras teostatavate ümbernihutamiste abil, mida võimalik vaba pind, asetada kõik viisteist kivi ükskõik millisesest algjärjestusest loomulikku järjestusse, s. t. niimoodi, et kivid asetseksid oma arvulises järjekorras: ülal vasakus nurgas 1, sellest paremal 2, siis 3, ülal parempoolses nurgas 4; järgmises reas vasakult paremale 5, 6, 7, 8 jne. Niisugust normaalset lõppjärjestust me näeme joonisel 15.

Kujutlege nüüd paigutust, kus kõik 15 mängukivi on paisatud segi kirevas korratuses. Teatud hulga ümberpaigutustega saab alati 1 kivi seada kohale, kus see asetseb joonisel.

Täpselt samuti on võimalik, liigutamata kivi 1, viia kivi 2 naaberkohale paremal pool. Seejärel, puudutamata kive 1 ja 2, on võimalik paigutada kivid 3 ja 4 nende õigetele kohtadele: kui nad juhuslikult ei ole kahes viimases püstreas, siis on kerge neid juhtida sellesse lõiku ja mõningate ümberpaigutuste abil saavutada soovitud tulemus. Nüüd on ülemine rida 1, 2, 3, 4 korrastatud ja kivide edaspidiste nihutamiste korral me seda rida enam ei liiguta. Samal viisil katsume seada korda ka teise rea — 5, 6, 7, 8; võib kergesti veenduda, et see on alati teostatav. Edasi on vajalik kahe viimase rea ulatuses seada õigesse järjestusse kivid 9 ja 13; ka see on alati võimalik. Kõigist kordaseatud kividest 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 13 edaspidi enam ühtegi ümber ei nihutata; jääb väike ruum kuue pinnaga, milledest üks on vaba, viis ülejäänud aga on ükskõik missuguses järjekorras kivid 10, 11, 12, 14, 15 all. Selle kuuekohalise ruumi piires on alati võimalik paigutada õigesse kohta kivid 10, 11, 12. Kui see on saavutatud, siis osutuvad viimases reas kivid 14 ja 15 kas õiges või vales järjekorras (joon. 16). Sel teel,

mida lugejad võivad tegelikult kergesti kontrollida, jõuame järgmisele tulemusele.

Iga algseisu võib viia kas joonisel 15 (seis I) või joonisel 16 (seis II) näidatud järjestusse.

Kui mingisugust järjestust, mille märgime lühiduse mõttes tähega S, võib muuta seisuks I, siis, on ilmselt võimalik ka vastupidine: muuta seis I seisuks S. Sest kõik kivide käigud on pööratavad. Kui näiteks skeemis I saame paigutada kivi 12 vabale pinnale, siis võime selle käigu kohe tagasi võtta vastupidiste nihutamistega.

Seega on meil kaks säärast järjestuse sarja, kus ühe sarja asetusi on võimalik ümber nihutada õigesse järjestusse (seisu I) ja teises sarjas — seisu II. Ja vastupidi, õigest järjestusest võib saada igasugust esimese sarja seisu, ja järjestusest II — igasugust teise sarja seisu. Lõpuks, ühte ja samasse sarja kuuluvat kaht ükskõik missugust järjestust on võimalik üle viia teineteisesse.

Kas ei saaks minna edasi ja ühendada need kaks järjestust — I ja II? Võib kindlalt tõestada (mitte laskudes üksikasjadesse), et need seisud ei muutu ühtseks mitte mingi käikude arvuga. Seepärast jaguneb terve määratu kivide järjestuse võimaluste hulk kahte erisarja: 1) ühed, milliseid on võimalik üle viia normaalsesse seisu I: need on lahendatavad; 2) teised, milliseid võib viia seisu II ja järelikult pole mitte mingil tingimusel nihutatavad normaalsesse järjestusse: need on asendid, millede lahenduste eest pakuti tohutuid preemiaid.

Kuidas saab teada, kas antud järjestus kuulub esimesse või teise sarja? Näide selgitab selle.

Vaadeldgem joonisel 18 kujutatud paigutust.

Esimene kivide rida on korras, samuti ka teine, välja arvatud viimane kivi (9). See kivi asetseb kohal,

mis loomuliku järjestuse juures kuulub 8-le. Tähendab, kivi 9 seisab kivi 8 ees: niisugust normaalse järjekorra ennetamist nimetatakse „korratuseks“. Kivi 9 kohta me ütleme: siin on 1 korratus. Silmitsedes järgnevaid kive, leiame kivi 14 ennetamise; see on kolme koha (kivide 12, 13, 11) võrra eespool oma õigest asendist; siin on meil 3 korratust (14 enne 12; 14 enne 13; 14 enne 11).

1	2	3	4
5	6	7	9
8	10	14	12
13	11	15	

Joon. 18. Korraldamata kivid.

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Joon. 19. Lloyd'i esimeseks ülesandeks.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Joon. 20. Lloyd'i teiseks ülesandeks.

Kokku on meil juba  $1 + 3 = 4$  korratust. Edasi, kivi 12 asetseb kivi 11-ne ees, ja täpselt samuti ka kivi 13 kivi 11-ne ees. See annab veel 2 korratust. Ühtekokku on meil 6 korratust. Sääraselt tehakse kindlaks igas paigutuses korratuste üldarv, jättes esialgu vabaks viimase koha paremas alumises nurgas. Kui korratuste üldarv nagu käesoleval juhul on paarisarv, siis saab antud paigutust seada õigesse lõppjärjestusse; teiste sõnadega, see kuulub lahendatavate ülesannete hulka. Kui aga korratuste arv on paaritu, siis kuulub paigutus teise sarja, tähendab, on lahendamatu (null korratust võetakse paarisarvuna).

Matemaatika poolt sellesse mängu toodud selguse tõttu on endine palavikuline harrastuskirg meie ajal täiesti kujuteldamatu. Matemaatika lõi põhjalikult uuri-

tud mänguteooria, mis ei jäta ühtki kaheldavat punkti. Mängu lõpptulemus ei sõltu mingist juhuslikkusest ega leidlikkusest, nagu teistes mängudes, vaid puhtmatemaatilisest teguritest, mis määravad selle juba ette absoluutse kindlusega.“

Pöördume nüüd selle ala keerdülesannete juurde.

Esitame siin mõned leiutaja poolt koostatud lahendatavad ülesanded:

**23. Lloyd'i esimene ülesanne.** Lähtudes joonisel 18 näidatud paigutusest, nihutada kivid õigesse järjekorda, jättes sealjuures vabaks pinna ülemises vasakus nurgas (joon. 19).

**24. Lloyd'i teine ülesanne.** Lähtudes paigutusest joonisel 15, keerake karp veerand pööret ja nihutage kive seni, kuni nad saavad joonisel 20 näidatud järjekorra.

**25. Lloyd'i kolmas ülesanne.** Nihutades kive vastavalt mängu reeglitele, muutke karp „maagiliseks ruuduks“, ja nimelt, paigutage kivid nii, et arvude summa oleks igas suunas 30.

### Kroket.

Kroketimängijaile esitan viis järgnevat ülesannet.

**26. Kas läbida värav või krokeerida?** Kroketivärvad on püstkülikukujulised. Nende laius on kaks korda suurem palli läbimõõdust. Mis on neis tingimuses kergem: lähedalt, traati puudutamata, läbida kõige soodsamast positsioonist värav või samast kaugusest krokeerida palli?

**27. Pall ja vai.** Kroketivaia jämedus on alt 6 cm. Palli läbimõõt on 10 cm. Mitu korda kergem on tabada palli, kui samast kaugusest tabada vaia?

28. Kas läbida värav või tabada vaia? Palli läbimõõt on kaks korda väiksem püstkülikukujuliste väravate laiusest ja kaks korda suurem vaia läbimõödust. Mis on kergem: läbida lahedalt värav kõige soodsamast positsioonist või samast kaugusest tabada vaia?

29. Läbida hiirelõks või krokeerida? Püstkülikukujuliste väravate laius on kolm korda suurem palli läbimõödust. Mis on kergem: läbida lahedalt kõige soodsamast positsioonist hiirelõks või samast kaugusest krokeerida palli?

30. Läbipääsematu hiirelõks. Missuguse püstkülikukujuliste väravate laiuse ja palli läbimõõdu vahekorra juures on võimatu läbida hiirelõksu?

#### Keerdülesannete 16—30 lahendused.

#### D o o m i n o.

16. Ülesande lihtsustamiseks paneme esialgu kõrvale kaksikkivid: 0—0, 1—1, 2—2 jne. Jääb 21 kivi, millel iga silmade arv kordub kuus korda. Näiteks esineb silm 4 (ühel kivi pinnal) järgmisel kuuel kivil:

4—0; 4—1; 4—2; 4—3; 4—5; 4—6.

Nii näeme, et iga silmade arv kordub paarisarv kordi. On selge, et säärase valiku kive võib asetada üksteise juurde võrdsete silmade arvuga, kuni terve valik on läbi. Kui see on tehtud, s. t. kui 21 kivi on laotud pidevaks ahelaks, siis lükkame 0—0, 1—1, 2—2 jne. ühenduskohtade vahele 7 kõrvalepandud kaksikkivi. Selle järele on kõik 28 doominokivi reastatud vastavalt mängu reeglitele üheks ahelaks.

17. On kerge näidata, et doomino 28-st kivist koosnev ahel peab lõppema sama silmade arvuga, millega ta algab. Ja tõesti: kui see oleks teisiti, siis korduks sil-

made arv ahela otstes paaritu arv kordi (ahela keskel asetsevad silmade arvud ometi paariviisi); kuid on teada, et doominokivide täiskomplektis iga silmade arv kordub kaheksa korda, s. t. paarisarv kordi. Järelikult meie oletus ebavõrdsest silmade arvust ahela otstes on vale: silmade arv peab olema võrdne. (Seda liiki arutlusi, nagu käesolev, nimetatakse matemaatikas „vastuoleluslikuks tõestuseks“).

Muide, praegu tõestatud ahela omadusest tuleneb alljärgnev huvitav järeldus: ahelat 28 doominokivist võib alati otstest liita rõngaks. Tähendab, vastavalt mängu reeglitele võib doominokivide täiskomplekti laduda mitte ainult lahtiste otstega ahelaks, vaid ka suletud rõngaks.

Lugejat võib huvitada küsimus: mitu erivõimalust on niisuguse ahela või rõnga moodustamiseks? Laskumata väsitava arvutuse üksikasjadesse olgu vaid mainitud, et 28-st doominokivist ahela või rõnga erinevaid moodustamisviise on tohutult palju: üle 7 triljoni. Täpne arv on:

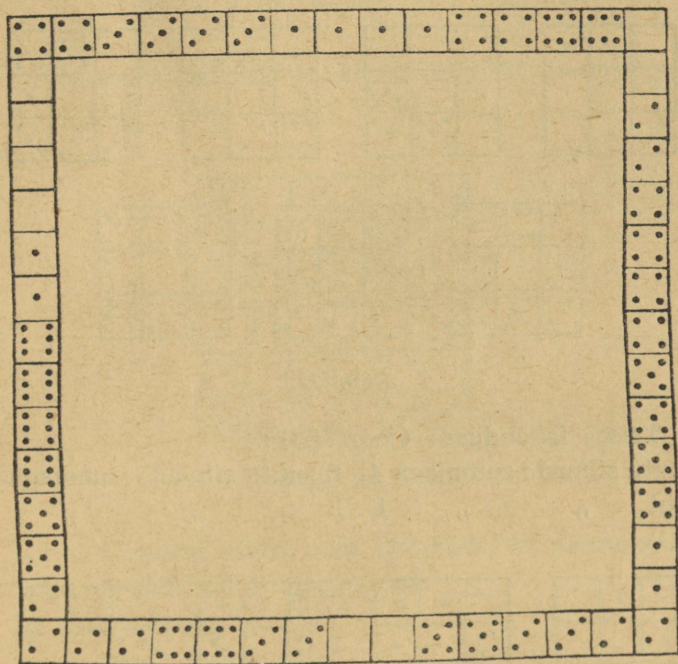
$$7\ 959\ 229\ 931\ 520$$

(see kujutab endast korrutist järgmiste korrutajatega:  
 $2^{13} \times 3^8 \times 5 \times 7 \times 4231$ ).

18. Selle keerdülesande lahendus tuleneb eespool öeldust. Me teame, et 28 doominokivi võib alati laduda rõngaks; järelikult, kui võtame sellest rõngast välja ühe kivi, siis 1) moodustavad ülejäänud 27 kivi pideva ahela lahtiste otstega; 2) silmade arv selle ahela otstel on sama, mis on väljavõetud kivil.

Peites ära ühe doominokivi võime juba ette ütelda, missugune silmade arv esineb ülejäänud kividest moodustatud ahela otstes.

19. Otsitava ruudu kõigi külgede silmade summa peab olema  $44 \times 4 = 176$ , s. t. 8 silma rohkem, kui on silmade summa doominokivide täiskomplektis (168). See tekib sellest, et silmade arv loetakse ruudu nurkades

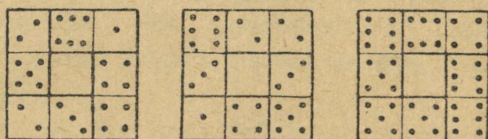
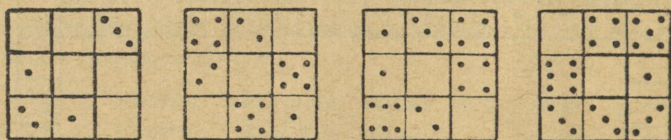


Joon. 21.

kahekordselt. Õelduga määrame ära silmade summa suu-  
ruse ruudu nurkades, mis on 8. See kergendab mõningal  
määral nõutava paigutuse otsimist, kuigi selle leidmine  
on ikkagi küllalt tülikas. Lahendus on kujutatud jooni-  
sel 21.

20. Olgu selle ülesande paljudest lahendusvõimalus-  
test esitatud kaks. Esimeses lahenduses (joon. 22) on meil:

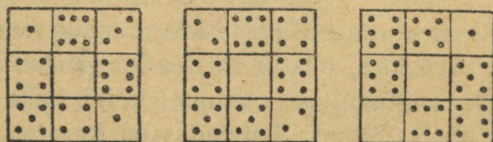
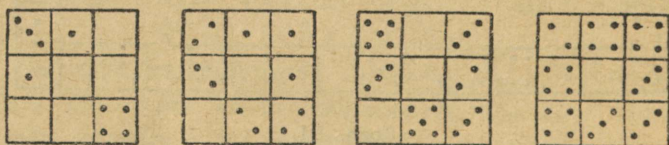
1 ruut	silmade summaga 3	2 ruutu	silmade summaga 9
1 „ „ „	6	1 ruut	„ „ 10
1 „ „ „	8	1 „ „ „	„ „ 16



Joon. 22.

Teises lahenduses (joon. 23):

2 ruutu	silmade summaga 4	2 ruutu	silmade summaga 10
1 ruut	„ „ „ 8	2 „ „ „	„ „ 12



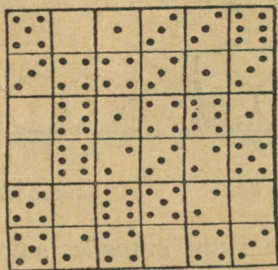
Joon. 23.

21. Joon. 24 on näide maagilisest ruudust, mille silmade summa igas reas on 18.

22. Siin on näitena toodud kaks aritmeetilist rida, kus vahe on 2:

a)  $0-0$ ;  $0-2$ ;  $0-4$ ;  $0-6$ ;  $4-4$  (või  $3-5$ );  $5-5$  (või  $4-6$ ).

b)  $0-1$ ;  $0-3$  (või  $1-2$ );  $0-5$  (või  $2-3$ );  $1-6$  (või  $3-4$ );  $3-6$  (või  $4-5$ );  $5-6$ .



Joon. 24.

Kõigist kuuest kivist võib koostada 23 aritmeetilist rida. Nende algkivid on järgmised:

a) read vahega 1:

$0-0$     $1-1$     $2-1$     $2-2$     $3-2$   
 $0-1$     $2-0$     $3-0$     $3-1$     $2-4$   
 $1-0$     $0-3$     $0-4$     $1-4$     $3-5$   
 $0-2$     $1-2$     $1-3$     $2-3$     $3-4$ .

b) read vahega 2:

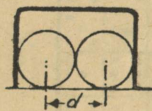
$0-0$ ;  $0-2$ ;  $0-1$ .

23. Alates algseisust, on võimalik ülesannet lahendada järgmise 44 käiguga:

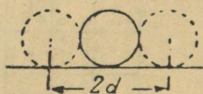
14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,  
 4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,  
 12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,  
 9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,  
 10, 6, 2, 1.

24. Ülesanne lahendatakse järgmise 39 käiguga:

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,  
 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,  
 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,  
 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.



Joon. 25.



Joon. 26.

25. Maagiline ruut silmade summaga 30 saadakse pärast teatavat hulka käike:

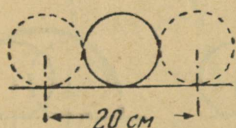
12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,  
 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,  
 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,  
 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,  
 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

Tegeldes keerdülesannetega, mis kuuluvad doomino ja „Viieteistkümne-mängu“ juurde me püsisime aritmeetika piires. Siirdudes keerdülesannete juurde kroketi väljakul astume aga osaliselt geomeetria valdkonda.

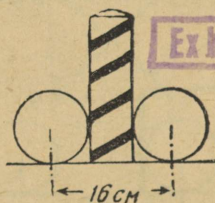
26. Arvatavasti ütleb isegi vilunud mängija, et antud tingimustes on kergem läbida värav kui krokeerida: on ju värav pallist kaks korda laiem. Kuid see kujutus on ekslik: muidugi on värav laiem kui pall, kuid

palli lahe läbipääs väravast on kaks korda kitsam kui krokeerimise märklaud.

See selgub teile tähelepanelikust pilgust joon. 25-le. Palli keskpunkt ei tohi läheneda värava traadile rohkem kui oma raadiuse võrra, muidu pall puudutab traati. Tähendab, palli keskpunktile jääb märklaud kahe raadiuse võrra värava lausest kitsamaks. On selge, et meie ülesande tingimustes võrdub märklaua laius värava läbimisel kõige soodsamast positsioonist palli läbimõõduga.



Joon. 27.



Joon. 28.

Vaatame nüüd, kui suur on märklaua laius krokeerimisel liikuva palli keskpunkti jaoks. On ilmne, et kui krokeeriva palli keskpunkt läheneb vähem kui palli raadiuse võrra krokeeritava keskpunktile, on tabamine kindlustatud. Tähendab, nagu näha ka joonisel 26, võrdub märklaua laius niisugusel juhul palli kahe läbimõõduga.

Seega on antud tingimustes vastupidi mängijate arvamusele, kaks korda kergem tabada palli, kui kõige soodsamast positsioonist lähedalt läbida värav.

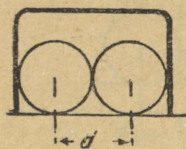
27. Pärast äsjamainitut ei vaja see ülesanne pikki seletusi. On selge (joon. 27), et märklaua laius krokeerimisel võrdub palli kahe läbimõõduga, s. t. 20 cm; märklaua laius aga vaia tabamisel võrdub palli ja vaia läbi-

mõõtude summaga, s. t. 16 cm (joon. 28). Tähendab, kergem on krokeerida kui tabada vaia

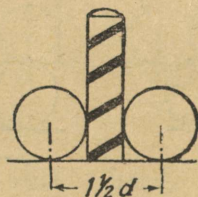
$$20 : 16 = 1\frac{1}{4} \text{ korda}$$

ehk kõigest 25%. Mängijad aga hindavad krokeerimise šansse tavaliselt tugevasti üle, võrreldes vaia tabamisega.

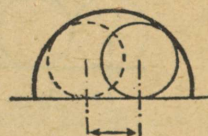
28. Mõni mängija kaalutleb nõnda: kui väravad on kaks korda laiemad pallist, vai aga sellest kaks korda kitsam, siis on väravast lahe läbimise võimalus neli korda suurem, kui vaia tabamise võimalus. Eelmistest ülesannetest õppust võtnud lugeja ei tee säärast viga. Ta taipab,



Joon. 29.



Joon. 30.



Joon. 31.

et vaia tabamise võimalus on poolteist korda suurem, kui kõige soodsamast positsioonist värava läbimise võimalus. See selgub joonise 29 ja 30 vaatlemisel.

(Kui väravad poleks täisnurksed, vaid kaarekujulised, siis oleks läbipääs pallile veelgi kitsas, nagu seda võib kergesti taibata, silmitsedes joonist 31.)

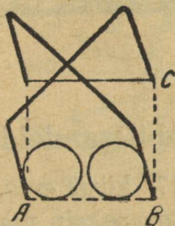
29. Joonisest 33 nähtub, et vahemik a, millest palli keskpunkt peab läbi minema, on ülesandes antud tingimuste juures kaunis kitsas. Geomeetriast on teada, et ruudu külg (AB) on 1,4 korda diagonaalist lühem. Kui värava laius on  $3d$  ( $d$  on palli läbimõõt), siis AB võrdub:

$$3d : 1,4 = 2,1d.$$

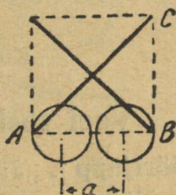
Vahemik  $a$ , mis on palli keskpunktile märklauaks hiirelõksu läbimisel kõige soodsamast positsioonist, on agakitsam terve palli läbimõõdu võrra ja võrdub:

$$2,1d - d = 1,1d.$$

Eespooltoodust teame juba, et krokeeriva palli keskpunkti märklaud võrdub  $2d$ -ga. Järelikult on antud tingimustes krokeerimine peagu kaks korda kergem kui hiirelõksust läbimine.



Joon. 32.



Joon. 33.

30. Hiirelõks muutub täiesti läbipääsematuks, kui väravate laius ületab palli läbimõõdu vähem kui 1,4 korda. See järeldeb eelmises ülesandes antud seletusest. Kui väravad on kaarekujulised, halvenevad läbipääsemise tingimused veelgi.



Kolmas peatükk.

### Veel tosin keerdülesandeid.

31. Nöörijupp<sup>1</sup>. „Jälle nööri?“ küsis ema, tõstes käsi pesupalist. „Võiks arvata, nagu koosneksin ma ainult nöörist. Muud ma ei kuulegi: nööri ja nööri! Alles eile ma andsin sulle ju päris paraja kera nööri. Mis sa teed säärase suure hulgaga? Kuhu sa selle panid?“

„Kuhu ma panin selle nöörijupi?“ vastas poisijõmpikas. „Esitaks võtsid sa ise poole tagasi...“

„Millega ma peaksin siis sinu arvates pesupakid kinni köitma?“

„Poole sellest, mis järele jäi, võttis mult Tom, et õngitseda kraavist raudkiisku.“

„Vanemale vennale tuleb alati järele anda.“

„Ma andsingi. Järele jäi päris vähe ja sellestki võttis isa veel poole trakside parandamiseks, mis katkesid tal naerust, kui juhtus autoõnnetus. Siis oli õel veel tarvis kaks viiendikku ülejäänust oma juuste sidumiseks...“

<sup>1</sup> Selle keerdülesande autoriks on inglise ilukirjanik Barry Payne.

„Ja mis sa tegid siis ülejäänud nööriga?“

„Ülejäänud nööriga? Seda oli kõigest ainult 30 sm!  
Ehita siis veel sellest jupist telefoni...“

Kui pikk oli nöör alguses?

**32. Sokid ja kindad.** Ühes kastis on 10 paari pruune ja 10 paari musti sokke, teises — 10 paari pruune ja



Joon. 34. Missuguse kiirusega peab ta sõitma?

samapalju musti kindaid. Mitu sokki ja kinnast tuleb võtta igast kastist, et piisaks ühe paari (ükskõik kumba värvi) sokkide ja ühe paari kinnaste valikuks?

**33. Juuksekarva iga.** Kui palju on keskmiselt juuksekarvu inimese peas? On välja arvatud, et umbes 150 000<sup>2</sup>. Samuti on kindlaks tehtud, et neid langeb keskmiselt ühe kuu jooksul peast välja umbes 3000.

<sup>2</sup> Paljusid paneb imestama, kuidas seda teada saadi: kas tõesti loeti peas kõik juuksed ära? Ei, seda ei tehtud, vaid loeti, kuipalju on juukseid peanaha ühel ruutsentimeetril. Arvestades seda ja teades juustega kaetud peanaha pindala, on kerge välja arvutada juuste üldarvu peas. Lühidalt öeldes, juuste arvu lugesid anatoomid sama võttega, mida kasutavad metsateadlased puude loendamisel metsas.

Kuidas saab nende andmete põhjal välja arvutada, kui kaua püsib keskmiselt iga juuksekarv peas?

**34. Töötasu.** Minu viimase kuu palk koos ületunni-töötasuga on 250 rubla. Põhipalk on 200 rubla võrra suurem ületunnitöötasust. Kui suur on minu palk ilma ületunnitöötasuta?

**35. Suusamatk.** Suusataja arvutas välja, et sõites 10 km tunnis ta jõuab sihtkohta 1 tund pärast keskpäeva; kuid sõites 15 km tunnis jõuaks ta sihtkohta 1 tund enne keskpäeva.

Missuguse kiirusega peab ta siis sõitma, et jõuda sihtkohta täpselt keskpäeval?

**36. Kaks töelist.** Kaks töelist, vana ja noor, elavad ühes korteris ja töötavad samas tehases. Noorel kulub kodust tehasesse minekuks 20 min., vanal 30 min. Mitme minuti pärast jõuab noor vanale järele, kui viimane väljub kodust 5 min. enne teda?

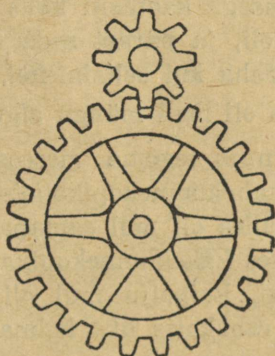
**37. Aruande ümberkirjutamine.** Aruande ümberkirjutamine on antud kahe masinakirjutaja kätte. Vilunum neist suudaks täita oma ülesande kahe tunniga, vähem vilunum kolme tunniga.

Kui ruttu kirjutavad nad ümber selle aruande, kui nad jaotavad omavahel töö nii, et võiksid selle täita lühima ajaga?

Säärased ülesanded lahendatakse tavaliselt kuulsa basseiniülesande eeskujul. Ja nimelt: meie ülesandes leitakse, missuguse osa kogutööst sooritab kumbki masinakirjutaja ühe tunniga; liidetakse mõlemad murrud ja jagatakse üks selle summaga. Kas te ei suudaks sellelaadsete ülesannete lahendamiseks välja mõelda uut võtet, mis erineks nimetatud šabloonist?

**38. Kaks hammasratast.** Kaheksahambuline hammasratas kütkenub rattaga, millel on 24 hammast (joon. 35). Suurema ratta pöörlemisel liigub väiksem hammasratas selle ümber.

Küsitakse, mitu pööret teeb väiksem hammasratas oma telje ümber sellal, kui ta jõuab teha täistiiru suurema hammasratta ümber?



Joon. 35.

**39. Kui vana?** Keerdülesannete harrastajalt küsiti, kui vana ta on. Vastus oli vigurlik:

„Võtke kolmekordselt minu vanus kolme aasta pärast ja lahutage sellest minu kolmekordne vanus, mis mul oli kolm aastat tagasi, siis saategi minu täpse vanuse.“

Kui vana ta praegu on?

**40. Abielupaar Ivanovid.** Kui vana on Ivanov?

„Mäletan, et oma abiellumise aastal, kaheksateist aastat tagasi, oli ta täpselt kolm korda vanem oma naisest.“

„Lubage, niipalju kui mina tean, on ta praegu täpselt kaks korda oma naisest vanem. Kas see on tal teine naine?“

„Seesama ikka. Ja seepärast polegi raske kindlaks määrata, kui vana on praegu Ivanov ja ta naine.“

Lugeja, kui vanad nad on?

**41. Mäng.** Kui me seltsimehega mängu alustasime, oli meil kummalgi ühepalju raha. Esimese partiiga võitsin ma 20 kop. Teisega kaotasin kaks kolmandikku sellest, mis mul siis oli, ja pärast seda selgus, et mul oli neli korda vähem raha kui seltsimehel.

Kui palju raha oli meil mängu alguses?

**42. Ostud.** Minnes tegema sisseoste oli mul kotis üherublalistes ja kahekümnekopikalistes rahades umbes 15 rubla. Tagasi tulles oli mul samapalju rublalisi, kui palju mul oli alguses kahekümnekopikalisi, ja samapalju kahekümnekopikalisi, kui palju mul oli varem rublalisi. Kokku leidus mul rahakotis üks kolmandik sellest summast, mis mul oli ostma minnes.

Kui palju maksid ostetud esemed?

#### Keerdülesannete 31—42 lahendused.

31. Pärast seda, kui ema võttis poole, jäi järele  $\frac{1}{2}$ ; pärast vanema venna laenu jäi järele  $\frac{1}{4}$ ; pärast isa —  $\frac{1}{8}$ , pärast õde —  $\frac{1}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{64}$ . Kui 30 cm moodustab  $\frac{3}{64}$  esialgsest pikkusest, siis terve pikkus võrdub  $30 : \frac{3}{64} = 400$  cm ehk 4 m.

32. Piisab kolmest sokist, kuna kaks neist on alati ühte värvi. Kuid kinnastega pole asi nii lihtne, sest need eralduvad üksteisest mitte ainult värvilt, vaid lisaks on pooled neist parema, pooled — vasaku käe kindad. Neist

piisab 21-st. Kui võtta vähem, näiteks 20, siis võib juhtuda, et kõik 20 on ühe ja sama käe kindad (10 pruuni ja 10 musta vasaku käe kinnast).

33. Kõige hiljem langeb välja muidugi see juuksekarv, mis täna on kõige noorem, s. t. mille vanus on 1 päev.

Vaadeldes, millal jõuab väljalangemise kord selle kätte. Täna peas olevalist 150 000 juuksekarvast langeb välja esimese kuu jooksul 3000, kahe kuu jooksul 6000, esimese aasta jooksul 12 korda 3000, s. t. 36 000. Järelikult möödub veidi üle 4 aasta, kui väljalangemise kord jõuab viimase juukseni. Nii võime kindlaks teha inimese juuksekarva elua: natuke üle 4 aasta.

34. Paljud vastavad järele mõtlemata: 200 rubla. See pole õige, sest siis on ju põhipalk ületunnitöötasust suurem ainult 150 rubla, mitte aga 200 rubla võrra.

Ülesannet peab lahendama järgmiselt. Me teame, et liites ületunnitöötasuga 200 rbl., saame põhipalga. Kui me aga 250 rublaga liidame 200 rbl., siis peab see moodustama kaks põhipalka. Ent  $250 + 200 = 450$ . Tähen-dab, kahekordne põhipalk on 450 rbl. Ühekuu põhipalk ilma ületunnitöötasuta võrdub siis 225 rublaga. Ületunni-töötasu moodustab aga jääk 250 rublast, s. t. 25 rbl.

Kontrollides leiame, et 225-rublaline palk on üle-tunnitöötasust, s. t. 25 rublast 200 rbl. võrra suurem, nagu seda nõuab ülesande tingimus.

35. See ülesanne on kahes suhtes huvitav: esiteks võib see kergesti tekitada mõtte, et otsitav kiirus on keskmine 10 km ja 15 km vahel, s. t.  $12\frac{1}{2}$  km tunnis. Pole raske veenduda, et seesugune oletus on vale. Tegelikult, kui matka pikkus on  $a$  km, siis 15-kilomeetrilise kiiruse juures suusataja on teel  $\frac{a}{15}$  tundi, 10-kilomeetrilise kii-

ruse juures  $\frac{a}{10}$ ,  $12\frac{1}{2}$ -kilomeetrilise juures  $\frac{a}{12\frac{1}{2}}$  ehk

$\frac{2a}{25}$  t. Kuid siis peab esinema võrdsus:

$$\frac{2a}{25} - \frac{a}{15} = \frac{a}{10} - \frac{2a}{25},$$

sest igauks neist vahedest võrdub ühe tunniga. Taandades  $a$ , saame

$$\frac{2}{25} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10} - \frac{2}{25},$$

või vastavalt aritmeetilisele võrdele

$$\frac{4}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10},$$

millest leiame, et võrdsus pole õige, sest

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}, \text{ mis võrdub aga } \frac{4}{24}, \text{ mitte aga } \frac{4}{25}.$$

Ülesande teine iseärasus on see, et seda saab lahendada võrrandite abita, isegi peast arvutades.

Arutleme nõnda: kui 15-kilomeetrise kiiruse juures suusataja oleks teel 2 tundi kauem (s. t. samakaua, kui 10-kilomeetrise kiiruse juures); siis oleks tema poolt läbisõidetud tee tegelikust 30 km võrra pikem. Me teame aga, et suusataja sõidab ühes tunnis 5 km rohkem; tähendab ta oleks teel  $30 : 5 = 6$  tundi. Siit selgub, et matka kestus 15-kilomeetrise kiiruse juures on  $6 - 2 = 4$  tundi. Koos sellega saame teada ka läbisõidetud vahe-  
maa, mis on  $15 \times 4 = 60$  km.

Nüüd on juba kerge leida, millise kiirusega peab suusataja sõitma, et jõuda sihtkohta täpselt keskpäeval, teiste sõnadega, et kulutada matkaks 5 tundi. See on

$$60 : 5 = 12 \text{ km.}$$

Katsetades on kerge veenduda, et see vastus on õige.

36. Ülesannet saab lahendada võrrandi abita ja seejuures mitmel viisil.

Esimene võimalus: noor tööline käib 5 minutiga  $\frac{1}{4}$  teest, vana  $\frac{1}{6}$ , s. t.

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{ võrra vähem kui noor.}$$

Kuna vana jõudis noorest ette  $\frac{1}{6}$  teosa võrra, siis noor jõuab talle järele pärast

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{12} = 2$$

viie minutit ajavahemikku, teiste sõnadega — 10 minuti pärast.

Teine lahendusviis on lihtsam. Terve tee läbikäimiseks kulutab vana tööline 10 min. rohkem kui noor. Kui vanamees väljuks 10 min. enne noort, jõuaksid nad mõlemad tehasesse üheaegselt. Kui aga vanamees väljub ainult 5 min. varem, siis jõuab noor talle järele täpselt poolel teel, s. t. 10 min. pärast (terve tee käib noor tööline ära 20 min.).

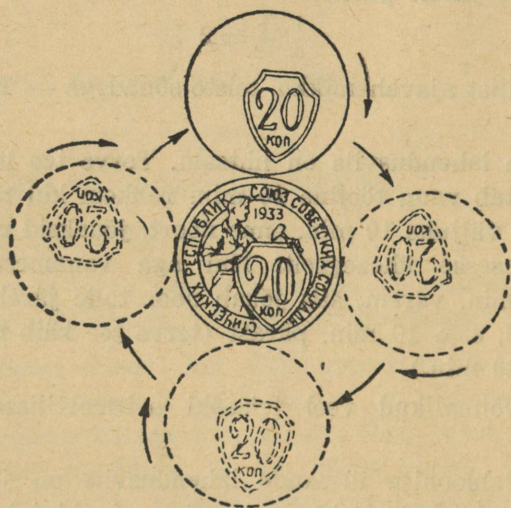
On võimalikud veel teisedki aritmeetilised lahendused.

37. Šabloonita ülesande lahendusviis on järgmine. Kõigepealt küsime, kuidas peavad masinakirjutajad jaotama endi vahel töö, et lõpetada see üheaegselt? (On ilmne, et ainult sel tingimusel, s. t. ilma seisakuta, sooritatakse töö lühima ajaga.) Kuna vilunum masinakirjutaja kirjutab nõrgemast  $1\frac{1}{2}$  korda kiiremini, siis on selge, et esimese osa peab olema  $1\frac{1}{2}$  korda suurem teise osast, siis lõpetavad mõlemad üheaegselt kirjutamise. Siit selgub, et esimene peab kirjutama  $\frac{3}{2}$  aruandest, teine —  $\frac{2}{3}$ .

Õigupoolest on ülesanne juba peagu lahendatud. Jääb ainult leida, missuguse ajaga sooritab esimene ümber-

kirjutaja oma  $\frac{2}{3}$  tööst. Me teame, et terve töö suudab ta ära teha 2 tunniga; tähendab  $\frac{2}{3}$  tööst saab tal valmis  $2 \times \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$  tunniga. Samal ajal peab ka teine masinakirjutaja lõpetama oma osa tööst.

Seega on lühim aeg, millega mõlemad masinakirjutajad suudavad aruande ümber kirjutada 1 tund 12 min.



Joon. 36.

38. Kui te arvate, et hammasratas teeb kolm pööret, siis te eksite: see ei tee mitte kolm, vaid neli pööret.

Et selgitada seda endale näitlikult, asetage siledale paberilehele kaks ühesugust münti, näiteks 2 kahekümnekopikalist, nagu näidatud joonisel 36. Hoides alumist münti kinni, veeretage ülemist selle serva pidi. Te näete ootamatut seika: jõudes alla alumise münti pooleni, on

ülemine teinud juba täispöörde oma telje ümber; see nähtub numbrite seisust mündil. Tehes aga liikumatu mündi ümber täistiiru, jõuab meie kahekümnekopikaline teha mitte ühe, vaid kaks pööret oma telje ümber.

Üldiselt, kui mingi keha liigub pööreldes ringi mööda, teeb ta ühe pöörde rohkem kui seda saab vahetult loendada. Samal põhjusel teeb ka meie Maa-keri ümber Päikese liikudes oma telje ümber mitte  $365\frac{1}{4}$ , vaid  $366\frac{1}{4}$  pööret, kui arvutada pöördeid mitte Päikese, vaid tähtede suhtes.

Nüüd te mõistate, miks tähe-ööpäev on lühem päikese-ööpäevast.

39. Ülesande lahendamine aritmeetiliselt on võrdlemisi keeruline, aga kui abiks võtame algebra ja koostame võrrandi, laheneb see lihtsalt. Märgime otsitava arvu tähega  $x$ . Vanus kolme aasta pärast tuleb siis märkida  $x + 3$ , aga vanus kolme aasta eest  $x - 3$ . Saame võrrandi

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x,$$

lahendades selle, saame  $x = 18$ . Keerdülesannete harrastaja on praegu 18 aastat vana.

Kontrollides näeme, et kolme aasta pärast saab ta 21-aastaseks; kolm aastat tagasi oli ta 15-aastane ja vahe

$$3 \times 21 - 3 \times 15 = 63 - 45 = 18$$

on võrdne keerdülesannete harrastaja praeguse vanusega.

40. Nagu eelmine, nii lahendatakse seegi ülesanne lihtsa võrrandi abil. Kui naine on praegu  $x$ -aastane, siis on mees  $2x$  aastat vana. Kaheksateist aastat tagasi oli kumbki 18 aastat noorem: mees  $2x - 18$ , naine  $x - 18$ . Seejuures on teada, et mees oli tollal naisest kolm korda vanem. Saame võrrandi

$$3(x - 18) = 2x - 18.$$

Lahendades selle, leiame, et  $x = 36$ . Seega on naine praegu 36, mees aga 72 aastane.

41. Oletame, et mängu alguses oli kummalgi  $x$  kopikat. Pärast esimest partiid oli ühel mängijal  $x + 20$ , teisel  $x - 20$  kop. Pärast teist partiid kaotas varemalt võitnud partner  $\frac{2}{3}$  oma rahast; järelikult jäi talle

$$\frac{1}{3}(x + 20).$$

Teine partner, kellel oli  $x - 20$ , sai  $\frac{2}{3}(x + 20)$ ; järelikult oli tal

$$x - 20 + \frac{2}{3}(x + 20) = \frac{5x - 20}{3}.$$

Kuna on teada, et esimesele mängijale jäi raha neli korda vähem kui teisele, siis:

$$\frac{4}{3}(x + 20) = \frac{5x - 20}{3},$$

millest leiame, et  $x = 100$ . Seega oli kummalgi mängijal mängu algul 1 rubla.

42. Märgime üksikute rublade esialgse arvu  $x$ -iga ja kahekümnekopikaliste arvu  $y$ -iga. Siis oli mul sisseoste tegema minnes rahakotis

$$100x + 20y \text{ kop.}$$

Tagasi tulles oli mul

$$100y + 20x \text{ kop.}$$

Teame, et viimane summa on esimesest kolm korda väiksem, järelikult,

$$3(100y + 20x) = 100x + 20y.$$

Lihtsustades seda võrrandit, saame

$$x = 7y.$$

Kui  $y = 1$ , siis  $x = 7$ . Säärase oletuse juures oli mul algul 7 rbl. 20 kop.; see ei ole aga kooskõlas ülesandega („umbes 15 rubla“).

Katsetame:  $y = 2$ ;  $x = 14$ . Algsumma võrdub siis 14 rbl. 40 kop., mis sobib hästi ülesande tingimustega.

Oletus  $y = 3$  annab liiga suure rahasumma: 21 rbl. 60 kop.

Järelikult, ainus sobiv vastus on 14 rbl. 40 kop. Pärast ostusid jäi järele 2 üherublalist ja 14 kahekümnekopikalist, s. t.  $200 + 280 = 480$  kop., see moodustab tõepoolest ühe kolmandiku algsummast ( $1440 : 3 = 480$ ).

Kulutatud oli siis  $1440 - 480 = 960$  kop. Tähendab, ostetud esemed maksid 9 rbl. 60 kop.



Neljas peatükk.

## Kas te oskate loendada?

43. Kas te oskate loendada? See küsimus oleks vahest koguni solvav 3-aastasest vanemale inimesele. Kes ei oskaks loendada? Et lausuda järjest „üks“, „kaks“, „kolm“, see ei nõua ju erilist kunsti. Ja ometi olen ma veendunud, et te alati ei tule hästi toime näiliselt lihtsa asjagagi. Kõik oleneb sellest, mida tuleb loendada. Pole raske üles lugeda naelu kastis. Ent kui kastis pole mitte ainult naelad, vaid naelad ja kruvid segamini ning on tarvis kindlaks määrata, kuipalju on eraldi üht ja teist, kuidas toimite sel juhul? Korjate naelad ja kruvid eraldi hunnikusse ja loete nad siis üle?

Sama ülesanne kerkib ka perenaisel, kui tal tuleb pesu enne pesemist üle lugeda. Ta jaotab pesu enne liiki-desse: särgid ühte hunnikusse, käterätid teise, padja-püürid kolmandasse jne. Ja raisanud aega selle küllaltki

väsitava tööga, hakkab ta loendama esemete arvu igas hunnikus.

Seda just nimetataksegi loendamise oskamatuseks! Sest säärane erinevate esemete loendusviis on kaunis ebamugav ja tülikas, tihti aga isegi teostamatu. On hea, kui teil tuleb loendada naelu või pesu: neid on kerge loopida hunnikusse. Kuid asetage end metsniku seisukorda, kes peab paratamatult loendama, kuipalju mände, kuuski, kaski ja haabu kasvab ühel ja samal hektaari-suurusel maatükil. Siin ei saa enam puid sorteerida ega rühmitada neid esialgu liikide järgi. Kas te loendate algul ainult männid, siis ainult kuused, siis eraldi kased, haavad? Kõnnite maatüki neli korda läbi?

Kas pole võimalik seda lihtsamalt teostada, ühe ringkäiguga metsalangil? On küll niisugune meetod olemas ja metsatöölised kasutavad seda juba ammust ajast. Milles see seisneb, selgitan teile näitega naelte ja kruvide loendamisel.

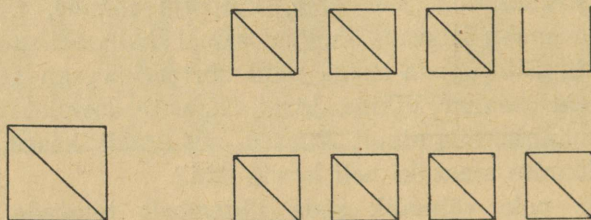
Et liikidesse jagamata ühe korruga loendada, kuipalju on kastis naelu ja kuipalju kruvisid, varustage end pliatsi ja alljärgnevalt lahtritesse jaotatud paberilehega:

Naelu	Kruvisid

Siis hakake lugema. Võtke kastist esimene, mis kätte satub. Kui see on nael, tõmmake paberilehel naelte lahtrisse kriips; kui kruvi — märkige see kriipsuga kruvide lahtris. Võtate järgmise asja ja toimite samal kombel. Võtate kolmanda jne., kuni kogu kast on tühi. Loenduse lõpul on paberil naelte lahtris niipalju kriipse, kuipalju oli naelu kastis, ja kruvide lahtris niipalju, kuipalju oli kruvisid. Jääb ainult liita kriipsud paberil.

Kriipsude loendust võib lihtsustada ja kiirustada, kui ei kirjuta neid lihtsalt üksteise alla, vaid koguda nad viiekaupa näiteks joonisel 37 esitatud kujul.

Sellekujulisi ruute on parem rühmitada paaris, s. t. pärast esimest 10-t kriipsu asetada 11-s uude tulpa jne. Kriipsud asetuvad siis nii, nagu on näidatud joon. 38.

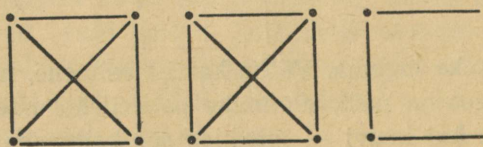


Joon. 37.

Joon. 38.

Niimoodi asetatud kriipse on väga kerge loendada: te näete kohe, et siin on kolm täit kümnet, üks viieline ja veel kolm kriipsu, s. t.  $30 + 5 + 3 = 38$ .

Võib kasutada ka teissuguseid kujusid; näiteks tarvitatakse sageli niisuguseid märke, kus iga täis ruuduke tähendab 10 (joon. 39).



Joon. 39.

Loendades metsalangil eriliiki puid peate toimima samuti, kuid paberilehel ei ole teil enam ainult kaks laht-rit, vaid neli. Otstarbekamad on siin põiklahtrid, mitte

püstlahtrid. Enne loendust omab paberileht joonisel 40 esitatud kuju.

Loenduse lõppu aga kujutab joonis 41.

Mände	
Kuuski	
Kaski	
Haabu	

Joon. 40. Plank puude loendamiseks metsas.

Lõppkokkuvõtet on siin väga kerge teha:

mände	53	kaski	46
kuuski	79	haabu	37

Mände	☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☐
Kuuski	☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☐
Kaski	☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑
Haabu	☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☐

Joon. 41. Plank (joon. 40) pärast loendamist.

Sama loendusvõtet kasutab ka arstiteadlane, loendes mikroskoobi all, kuipalju on võetud vereproovis punaseid ja valgeid vereliblesid.

Ka perenaine võib säästa tööd ja aega ning toimida samuti, koostades pesu nimekirja.

Näiteks, kui teil on tarvis loendada, missugused taimed ja kui suurel hulgal kasvavad mingil väikesel niidul, teate nüüd, kuidas selle ülesandega võimalikult vähese ajaga toime tulla. Paberilehele te kirjutate juba varem tähelepanud taimede nimed, jättes igale eraldi lahtri ja tagavaraks mõned tühjad lahtrid taimede jaoks,

<i>Võililli</i>	
<i>Tulikaid</i>	
<i>Teelehti</i>	
<i>Tähtheinu</i>	
<i>Hiirekõrvu</i>	

Joon. 42. Kuidas alustada taimede loendamist niidul.

mis võivad veel teie teele sattuda. Näiteks alustate loendust joonisel 42 esitatud nimestikuga.

Edasi toimitakse samuti nagu metsalangi loendusel.

**44. Milleks loendatakse puid metsas?** Milleks on õieti tarvis loendada puid metsas? Linnaelanikele paistab see isegi päris võimatu. L. N. Tolstoi romaanis „Anna Karenina“ põllumajandusteadlane Levin küsib oma sel alal võhiklikult sugulaselt, kes kavatseb müüa metsa:

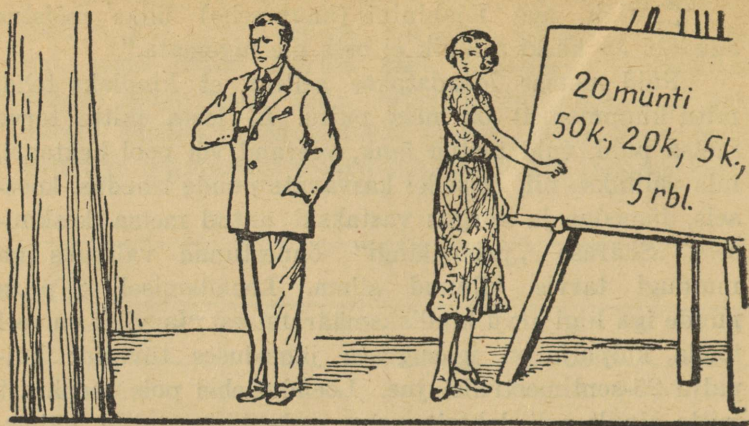
„Kas lugesid puud üle?“

„Kuidas, lugeda puud?“ vastab imestades too. „Üllas mõistus ehk suudaks loendada ka liivaterad, taevakehade kiired...“

„Nojah, aga Rjabinini (kaupmehe) üllas mõistus suudab. Ja ükski talunik ei osta üle lugemata.“

Puid metsas loendatakse selleks, et kindlaks teha, mitu kuupmeetrit on neis puitu. Ei loeta mitte terve metsa puid, vaid teatud lank, veerand või pool hektaari, mis valitakse nii, et sellel kasvavate puude tihedus, koosseis, jämedus ja kõrgus vastaksid antud metsa keskmisele. Säärase „proovilangi“ õnnestunud valikuks on muidugi tarvis vilunud silma. Loendamisel ei piisa puude iga liigi arvu kindlaksmääramisest; tarvilik on veel teada, kuipalju on igasuguses jämeduses tüvesid: kuipalju 25-sentimeetrilisi jne. Loenduslehel pole seepärast mitte ainult neli lahtrit, nagu meie lihtsustatud näites, vaid palju rohkem. Nüüd te võite kujutleda, kuivõrd palju kordi tuleks läbi käia mets, kui loendada puid harilikul kombel ja mitte nii, nagu siin on õpetatud.

Nagu näete, loendus on lihtne ja kerge töö ainult siis, kui loendatavad esemed on ühesugused. Kui aga on tarvis teada mitmesuguste esemete arvu, siis tuleb kasutada erilisi, praegu selgitatud võtteid, mille olemasolust pole paljudel aimugi.



Viies peatükk.

### Keerdülesanded arvudest.

45. Viie rubla eest — sada. Üks lavakunstnik tegi kõigil oma seanssidel publikule järgmise ahvatleva pakkumise:

„Teatan tunnistajate juuresolekul, et maksan sada rubla igäihele, kes annab mulle viis rubla kahekümnes mündis — viiekümnekopikalistes, kahekümnekopikalistes ja viiekopikalistes. Sada rubla viie eest! Kes soovib?“

Valitses vaikus. Rahvas laskus mõtisklusse. Pliiatsid jooksid mööda taskuraamatu lehti, kuid vastupakkumist ei tehtud.

„Mulle näib, et publik peab viit rubla vist liiga kalliks hinnaks sajarublalise rahamärgi eest. Olgu, ma olen valmis kaks rubla maha jätma ja määrän alandatud

hinna: kolm rubla kahekümmes mainitud väärtusega mündis. Maksan sada rubla kolme eest! Soovijad seisku järjekorda!“

Kuid järjekorda ei tekkinud. Publik viivitas ilmselt haruldase juhuse kasutamisega.

„Kas tõesti ka kolm rubla on palju? Hästi, ma alandan summat veel ühe rubla võrra: makske nimetatud kahekümmes mündis ainult kaks rubla, ja ma annan viivitamatult sada rubla.“

Kuna ükski ei väljendanud valmisolekut vahetamiseks, jätkas artist:

„Võib-olla ei ole teil peent raha kaasas? Ärge laske end sellest häirida, ma usaldan ka võlgu. Andke mulle vaid paberil nimestik, kuipalju igas väärtuses münte te olete kohustatud mulle üle andma!“

Ka mina omalt poolt olen nõus maksuma sada rubla igale lugejale, kes minule saadab paberil säärase nimestiku.

**46. Tuhat.** Kas te võite kirjutada arvu 1000 kaheksa ühesuguse numbriga? (Peale numbrite on lubatud ka tehtemärkide kasutamine).

**47. Kakskümmend neli.** Arvu kakskümmend neli on väga kerge väljendada kolme kaheksaga:  $8 + 8 + 8$ . Kas te võiksite teha sedasama, kasutades mitte kaheksaid, vaid kolme muud ühesugust numbrit? Ülesandel on rohkem kui üks lahendus.

**48. Kolmkümmend.** Arvu kolmkümmend on kerge väljendada kolme viiega:  $5 \times 5 + 5$ . Raskem on seda teha kolme muu ühesuguse numbriga. Katsetage. Võib-olla õnnestub teil leida mõni lahendus?

49. **Puuduvad numbrid.** Selles korrutusnäites on üle poolte numbrite asendatud tähekestega.

$$\begin{array}{r} *1* \\ \times 3*2 \\ \hline *3* \\ + 3*2* \\ *2*5 \\ \hline 1*8*30 \end{array}$$

Kas te võite leida puuduvad numbrid?

50. **Missugused arvud?** Veel üks samalaadi ülesanne. On tarvis kindlaks teha, missuguseid arve korrutatakse selles näites:

$$\begin{array}{r} * * 5 \\ \times 1 * * \\ \hline 2 * * 5 \\ + 13 * 0 \\ * * * \\ \hline 4 * 77 * \end{array}$$

51. **Mis jagati?** Leidke puuduvad numbrid selles jagamisläites:

$$\begin{array}{r} *2*5* \overline{) 325} \\ *** \phantom{0} \\ \hline *0** \\ *9** \\ \hline *5* \\ *5* \\ \hline \end{array}$$

52. **Jagamine üheteistkümnega.** Kirjutage mingisugune üheksakohaline arv, milles ükski number ei kordu ja mis jagub ilma jäägita üheteistkümnega.

Kirjutage suurim niisugustest arvudest.

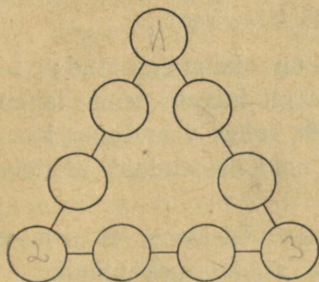
Kirjutage kõige väiksem niisugustest arvudest.

**53. Kummalised korrutised.** Vaadeldge niisugust kahe arvu korrutist:

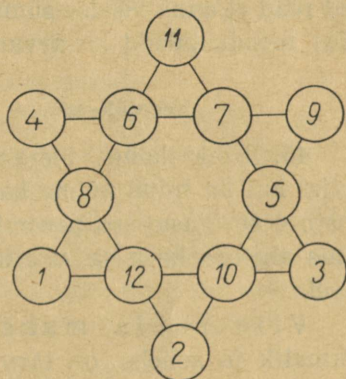
$$48 \times 159 = 7632.$$

See on tähelepanuvääriv selle poolest, et temas esinevad kõik üheksa numbrit üks kord.

Ka te võite leida veel mõned säärased näited? Kui palju neid on, kui neid üldse on olemas?



Joon. 43.



Joon. 44.

**54. Kolmnurk arvudest.** Asetage selle kolmnurga ringikestesse (joon. 43) kõik üheksa põhiarvu (1—9) nõnda, et nende summa igal küljel oleks 20.

**55. Veel üks kolmnurk arvudest.** Asetada kõik põhiarvud (1—9) sama kolmnurga ringikestesse (joon. 43) nii, et nende summa igal küljel oleks 17.

**56. Maagiline täht.** Joonisel 44 kujutatud kuue- tipulisel arvtähel on „maagiline“ omadus: kõigi kuue arvuderea summa on võrdne.

$$4 + 6 + 7 + 9 = 26 \quad 11 + 6 + 8 + 1 = 26$$

$$4 + 8 + 12 + 2 = 26 \quad 11 + 7 + 5 + 3 = 26$$

$$9 + 5 + 10 + 2 = 26 \quad 1 + 12 + 10 + 3 = 26$$

Kuid tähe tippudes asetsevate arvude summa on erinev.

$$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30.$$

Kas ei õnnestu teil arvude ümberpaigutamisega ringikestes täiustada seda tähte nii, et mitte ainult sirged read ei anna võrdse summa (26), vaid et sama summa (26) moodustaksid ka arvud tähe tippudes?

#### Keerdülesannete 45—56 lahendused.

45. Kõik kolm ülesannet on lahendamatud; nii artist kui ka mina võime kartmatult lubada nende lahenduste eest igasuguse preemia. Et selles veenduda, kasutame algebra keelt ja vaatleme neid ülesandeid üksteise järel.

Viie rubla maksmine. Oletame, et see on võimalik ja selleks on tarvis  $x$  viiekümnekopikalist,  $y$  kahekümnekopikalist ja  $z$  viiekopikalist. Saame võrrandi

$$50x + 20y + 5z = 500.$$

Taandades viiega saame

$$10x + 4y + z = 100.$$

Kuna vastavalt ülesande nõudele peab müntide üldarv olema 20, on  $x$ ,  $y$ ,  $z$  seotud veel teise võrrandiga

$$x + y + z = 20.$$

Lahutades selle võrrandi esimesest saame

$$9x + 3y = 80.$$

Jagatud kolmega, on võrrandil järgmine kuju:

$$3x + y = 26\frac{2}{3}.$$

Kuid  $3x$ , s. o. kolm viiekümnekopikalist on muidugi täisarv. Y kahekümnekopikalist on samuti täisarv. Kahe täisarvu summa ei või aga olla murdarv ( $26\frac{2}{3}$ ). Nagu näete, on meie oletus selle ülesande lahendatavusest absurdne. Tähendab, ülesanne on lahendamatu.

Samal teel veendub lugeja kahe teise „odavahinnalise“ ülesande lahendamatuses: kolme ja kahe rubla maksmises. Esimene annab võrrandi

$$3x + y = 13\frac{1}{3}.$$

Teine

$$3x + y = 6\frac{2}{3}.$$

Mõlemad on täisarvudes lahendamatud.

Nagu näete, ei riskeerinud artist mitte sugugi, pakkudes suuri summasid nende ülesannete lahenduste eest: preemiaid pole tarvis maksta iialgi.

Iseasi, kui oleks tulnud maksta kahekümne mainitud väärtustes mündiga mitte viis ega kolm, ka mitte kaks rubla, vaid neli rubla; siis oleks ülesanne olnud kergesti lahendatav ja isegi seitsmel erineval viisil<sup>1</sup>.

46.  $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000.$

47. Siin on kaks lahendust:

$$22 + 2 = 24; \quad 3^3 - 3 = 24.$$

48. Esitame kolm lahendust:

$$6 \times 6 - 6 = 30; \quad 3^3 + 3 = 30; \quad 33 - 3 = 30.$$

49. Puuduvad numbrid leitakse järk-järgult, kui tarvitada järgmist arutluskäiku.

---

<sup>1</sup> Üks võimalikkudest lahendustest on: 6 viiekümnekopikalist, 2 kahekümnekopikalist ja 12 viiekopikalist.

Hölbustuseks nummerdame read järgmiselt:

×	*1*	.....	I
	<u>3*2</u>	.....	II
	*3*	.....	III
+	3*2*	.....	IV
	<u>*2*5</u>	.....	V
	1*8*30	.....	VI

On kerge taibata, et viimane täheke III reas on 0, see selgub VI rea lõpus olevast 0-st.

Nüüd määrame kindlaks I rea viimase tähekesese: see on arv, mis kahega korrutades annab 0-ga lõppeva arvu, ja korrutades kolmega — arvu, mis lõpeb 5-ga (V rida). Niisuguseid numbreid on ainult üks, see on 5.

Pole raske ennustada, mis peitub II rea tähekesese taga, sest arv 15 annab ainult 8-ga korrutades 20-ga lõppeva tulemuse (IV rida).

Lõpuks selgub ka I rea esimese tähekesese tähendus: see on 4, sest ainult 4 korrutatud 8-ga annab tulemuse, mis algab 3-ga (IV rida).

Ülejäänud tundmatud numbrid saame nüüd teada ühegi vaevata: piisab juba täielikult määratud kahe esimese rea arvude korrutamisest.

Lõpptulemusena saame säärase korrutise:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad 415 \\
 \quad 382 \\
 \hline
 \quad 830 \\
 + \quad 3320 \\
 \quad 1245 \\
 \hline
 158530
 \end{array}$$

50. Samasuguse praegu rakendatud arutluskäigu abil avastame-tähekeste tähendused ka sel juhul.

Saame

$$\begin{array}{r} \phantom{+} \phantom{1300} \phantom{325} \\ \phantom{+} \phantom{1300} \times 325 \\ \phantom{+} \phantom{1300} \phantom{325} \hline \phantom{+} \phantom{1300} 2275 \\ + 1300 \\ \phantom{+} \phantom{1300} \phantom{325} \hline 47775 \end{array}$$

51. Jagamise otsitav lahendus on

$$\begin{array}{r|l} 52650 & 325 \\ - 325 & \hline \phantom{5}2015 & 162 \\ - 1950 & \\ \phantom{5}650 & \\ - 650 & \\ \hline \phantom{5}0 & \end{array}$$

52. Selle ülesande lahendamiseks on vaja teada 11-ga jagatavuse tunnust. Arv jagub 11-ga, kui paaris-kohtadel seisvate numbritega väljendatud arvude ristsumma ja paaritutel kohtadel seisvate numbritega väljendatud arvude ristsumma vahe jagub 11-ga või on 0.

Katsetame, näiteks, arvuga 23 658 904.

Paariskohtadel olevate numbritega väljendatud arvude ristsumma on

$$3 + 5 + 9 + 4 = 21,$$

paaritutel kohtadel aga

$$2 + 6 + 8 + 0 = 16.$$

Nende vahe (suuremast tuleb lahutada väiksem) on

$$21 - 16 = 5.$$

See vahe (5) ei jagu 11-ga; tähendab, ka võetud arv ei jagu 11-ga (ilma jäägita).

Katsetame teise arvuga 7 344 535.

$$3 + 4 + 3 = 10,$$

$$7 + 4 + 5 + 5 = 21,$$

$$21 - 10 = 11.$$

Kuna 11 jagub 11-ga, siis jagub ka katsetav arv 11-ga.

Nüüd on kerge kombineerida üheksa numbriga järjekord nii, et saada arv, mis jagub 11-ga ja vastab ülesande tingimustele.

Näiteks

352 049 786.

Katsetame:

$$3 + 2 + 4 + 7 + 6 = 22,$$

$$5 + 0 + 9 + 8 = 22.$$

Vahe  $22 - 22 = 0$ ; tähendab, kirjutatud arv jagub 11-ga.

Suurim kõigist säärastest arvudest on

987 652 413,

kõige väiksem

102 347 586.

53. Kannatlik lugeja võib leida niisuguse korrutise üheksa võimalust. Need on:

$$12 \times 483 = 5\,796$$

$$42 \times 138 = 5\,796$$

$$18 \times 297 = 5\,346$$

$$27 \times 198 = 5\,346$$

$$39 \times 186 = 7\,254$$

$$48 \times 159 = 7\,632$$

$$28 \times 157 = 4\,396$$

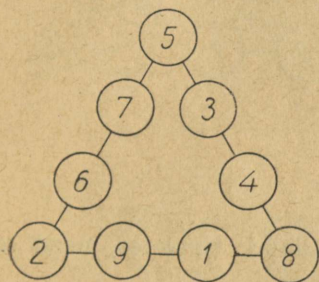
$$4 \times 1738 = 6\,952$$

$$4 \times 1963 = 7\,852$$

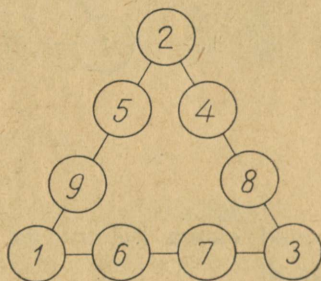
54—55. Lahendused on näidatud juurdelisatud joo-  
nistel 45 ja 46. Iga rea vahepealseid numbreid on võima-  
lik ümber asetada ja saada sel kombel veel teatav hulk  
lahendusi.

56. Et kergendada arvude nõutava paigutuse otsi-  
mist, juhindume järgmistest kaalutlustest.

Arvude summa otsitava tähe tippudes on 26; tähe



Joon. 45.



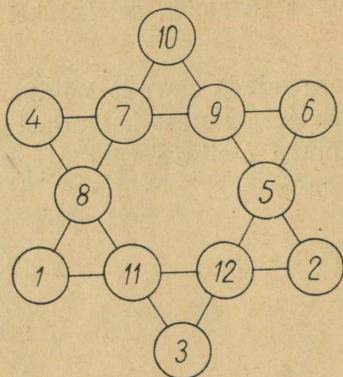
Joon. 46.

arvude kogusumma aga 78. Tähenab, sisemise kuus-  
nurga arvude summa on  $78 - 26 = 52$ .

Seejärel vaatleme ühte suurtest kolmnurkadest. Selle  
iga üksiku külje arvude summa on 26; liidame kõigi  
kolme külje arvud, saame  $26 \times 3 = 78$ , kusjuures tähe  
igas tippus arv esineb kahekordselt. Ja kuna teame, et  
kolme sisemise paari (s. t. sisemise kuusnurga) arvude  
summa peab võrduma 52-ga, siis kahekordselt esinev  
summa iga kolmnurga tippudes võrdub  $78 - 52 = 26$ -ga,  
ühekordne summa on 13.

Otsimiste piirkond on muutunud nüüd märgatavalt  
kitsamaks. Näiteks teame, et 12 ja 11 ei või olla tähe

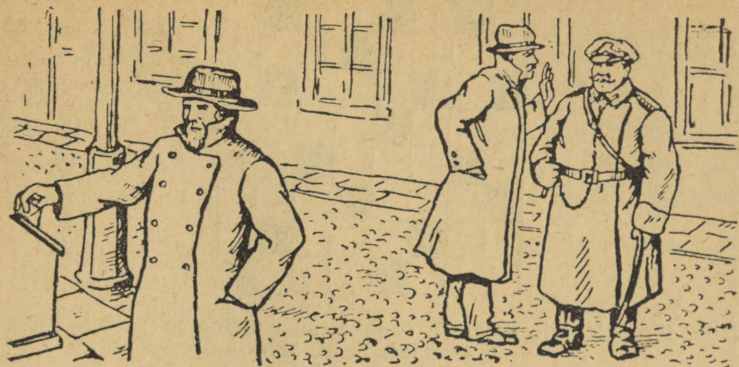
tipus (miks?). Tähendab, katsetamist võib alustada 10-ga, kusjuures kohe on teada, missugused kaks arvu



Joon. 47.

peavad olema kolmnurga ülejäänud tippudes, need on 1 ja 2.

Liikudes niimoodi edasi leiame lõpuks nõutava paigutuse. See on näidatud joonisel 47.

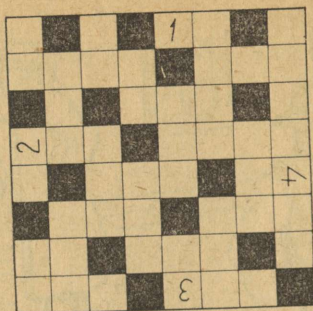


Kuues peatükk.

## Põrandaaluste salajane kirjavahetus.

57. Võrestik. Revolutsionäär-põrandaalune on sunnitud pidama oma märkmeid ja kirjavahetust seltsimeestega niimoodi, et ükski võõras isik ei saaks kirjutatust aru. Selleks kasutatakse spetsiaalset kirjaväsi, mida nimetatakse „salakirjaks“ ehk „krüptograafiaks“. On leiutatud mitmesuguseid salakirjasüsteeme; neid kasutavad mitte ainult põrandaalused, vaid ka diplomaadid ja sõjaväelased riiklike saladuste hoidmiseks. Edasi jutustame ühest salajase kirjavahetuse viisist, mida nimetatakse „võrestikuks“. See kuulub võrdlemisi lihtsate hulka ja on tihedalt seotud aritmeetikaga.

Sel kombel salajast kirjavahetust pidada soovijad varustavad end „võrestikuga“, s. o. nelinurkse paberiga, millesse on lõigatud aknakesed. Proovivõrestikku te näete joonisel 48. Aknakesed pole asetatud juhuslikult, vaid kindlas järjekorras, mis selgub teile edasisest.



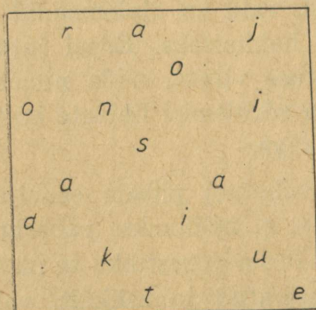
Joon. 48. Salakirja võrestik. (Tehke samasugune paberist ja lugege salakirja joon. 52.)

Oletame, et seltsimehele on tarvis saata niisugune sedel: Rajoonisaadikute koosolek muutke ära. Keegi on politseile teatanud. Anton.

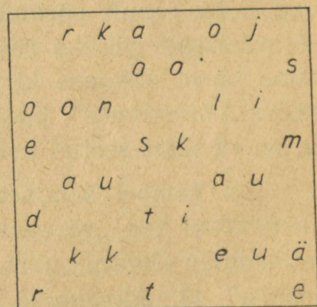
Asetanud võrestiku paberilehele, kirjutab põrandalune teadaande täht tähe järele võrestiku akendes. Kuna aknaid on 16, siis mahub neisse esialgu ainult osa sedelist:

Rajoonisaadikute...

Kõrvaldades võrestiku, näeme kirja, mis on esitatud joonisel 49.



Joon. 49.



Joon. 50.

Arusaadavalt pole siin veel midagi salajast: igauks taipab, milles asi seisneb. Kuid see on alles algus; sedel ei jää sellekujuliseks. Põrandaalune pöörab võrestiku „kellaosuti“ suunas veerand pööret, s. t. asetab selle samale paberilehele nii, et varem küljel olnud number 2 on nüüd ülal. Võrestiku uue asetuse juures on kõik varemkirjutatud tähed kaetud ja akende kohal on puhas

a	r	k	a	k	o	j
e	o	o	e	s		
o	o	g	l	i	i	
e	o	s	k	n	m	
a	u	p	a	u		
d	o	t	i	l	i	
k	k	t	e	u	ä	
r	s	t	e	i	e	

Joon. 51.

a	r	k	a	k	o	j	l
e	e	t	o	o	e	e	s
o	o	n	g	a	l	i	i
e	t	o	s	k	a	n	m
n	a	u	u	p	a	u	d
d	o	a	t	i	l	n	i
t	k	k	t	o	e	u	ä
r	s	n	t	e	a	i	e

Joon. 52.

paber. Neisse kirjutatakse järgmised 16 tähte salajasest teadaandest. Kui nüüd võrestik kõrvaldada, näeme joonisel 50 näidatud tähti.

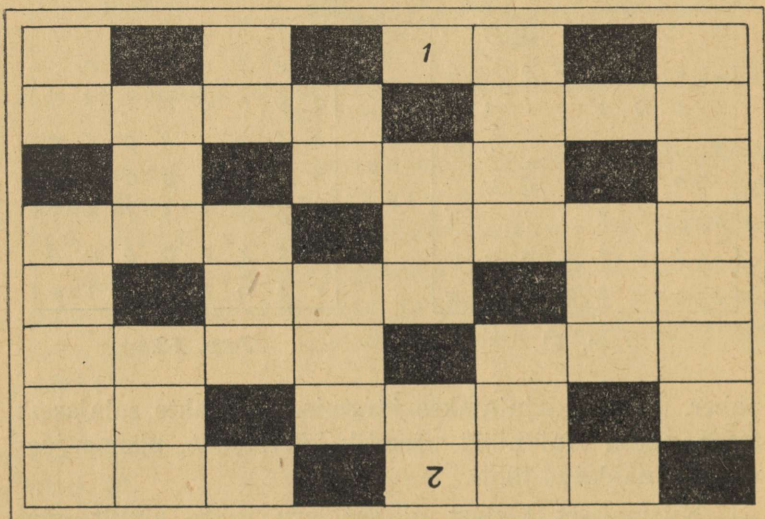
Niisugusest kirjast ei saa aru mitte ainult kõrvalseisev isik, vaid ka kirjutaja ise, kui ta unustab oma teadaande teksti.

Kuid seni on kirjutatud ainult pool teadaandest, nimelt: Rajoonisaadikute koosolek muutke är...

Et kirjutada edasi, tuleb võrestik uuesti pöörata kellaosuti suunas veerand pööret. Võrestik katab kinni kõik kirjutatu ja avab uued 16 ruutu. Neisse mahub veel mõni sõna, ja sedel näeb välja nagu joonis 51.

Lõpuks pööratakse võrestik viimast korda, number 4 on nüüd ülal, ja avanevasse 16 puhtasse ruudukesse kirjutatakse sedeli lõpp. Kui jääb veel mõni kasutamata ruut, siis täidetakse need tähtedega a, b, d... lihtsalt selleks, et sedelisse ei jääks tühikuid.

Kirjal on nüüd joonisel 52 esitatud kuju.



Joon. 53. Postkaardikujuline võrestik.

Proovige sellest midagi välja lugeda! Sattugu sedel politsei kätte, kahtlustagu politseinikud niipalju kui tahavad, et selles peitub tähtis teadaanne, sedeli sisu ei suuda nad ära mõistatada. Mitte ükski võõras ei loe sellest välja ainsat sõnagi. Selle suudab läbi lugeda ainult adressaat, kes omab täpselt samasugust võrestikku, nagu kasutas saatjagi.

Kuidas loeb saaja seda salakirja? Ta asetab oma võrestiku nii tekstile, et number 1 on ülal, ja kirjutab aknakestes ilmuvad tähed välja. Need on teadaande 16 esimest tähte. Siis ta pöörab võrestikku — ja tema ette ilmuvad järgmised 16 tähte. Pärast neljandat pööret on terve salakiri läbi loetud.

Ruutvõrestiku asemel võib kasutada ka püstküliku-taolisi, postkaardisuurusi, laiade akendega (joon. 53) võrestikke. Säärase võrestiku akendesse ei kirjutata mitte üksikuid tähti, vaid sõnade osad, isegi terved sõnad, kui nad sinna mahuvad. Ärge arvake, et kirjutatu on siis loetavam. Mitte sugugi! Kuigi on näha üksikuid silpe ja sõnu, kuid need on segi niisuguses totras korratuses, et saladus on ustavalt hoitud. Piklikul võrestikul pannakse algul üks serv üles, siis vastasserv; pärast seda keeratakse sel tagumine pool ja kasutatakse jälle kahes asendis. Igas uues asendis katab võrestik kõik varem kirjutatu.

Kui oleks võimalik ainult üks võrestik, siis salajuse mõttes ei kõlbaks kirjavahetus selle abil mitte kuhugi. Muidugi leiduks ka politseil see ainus võrestik ja saladus oleks viivitamata avastatud. Kuid selles asi seisnebki, et esinevate võrestikkude arv on erakordselt suur, ja mõistatada, missugust on just kasutatud, on täiesti võimatu.

Kõik võrestikud, mis saab valmistada 64-ruudulisest nelinurgast, on märgitud joonisel 54. Te võite võtta akendeks ükskõik missugused 16 ruutu, hoolitsedes ainult, et valitud ruutude hulgas poleks kahte ühesuguste numbritega ruutu. Praegukasutatud võrestiku jaoks on võetud järgmised ruudud:

1	2	3	4	13	9	5	1
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

Joon. 54. Üle 4000 miljoni salakirja võrestikku ühes ruudus.

2, 4, 5  
14  
9, 11, 7  
16  
8, 15  
3, 12  
10, 6  
13, 1.

Nagu näete, ei kordu ükski ruudu number.

Numbrite järjestussüsteem joonis 54 ruudus on kergesti arusaadav. See jagu-

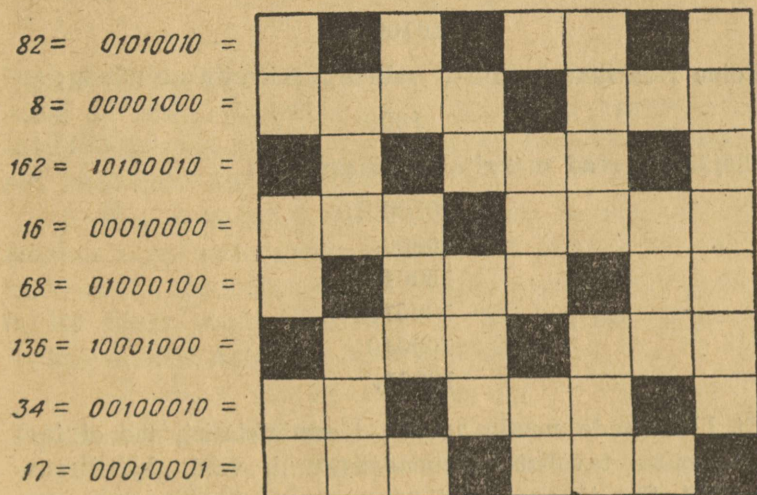
neb ristjoontega neljaks väiksemaks nelinurgaks, millised märgime lihtsuse mõttes rooma numbritega I, II, III, IV (joon. 55). I nelinurgas on ruudukesed nummerdatud harilikus järjekorras. II nelinurk on sama, mis I, ainult keeratud veerand pööret paremale. Keerates seda veel veerand pööret saame III-nda nelinurga, järgmise veerandpöördega saame IV-nda nelinurga.

Arvestame nüüd matemaatiliselt, kuipalju võib olla erivõrestikke. Ruudukest nr. 1 võib võtta aknakesena neljas kohas. Igal juhul võime temaga liita ruudukese nr. 2, võttes ka seda neljas kohas. Järelikult võib kaht aknakest märkida  $4 \times 4$ , s. t. 16 viisil. Kolme akent —

I	II
IV	III

Joon. 55. Skeem joon. 54 juurde.

$4 \times 4 \times 4 = 64$  viisil. Nii viisi arutledes teeme kindlaks, et 16 aknakest on võimalik valida  $4^{16}$  viisil (korrutis kuueteistkümne 4-ga). See arv ületab 4000 miljonit. Kui isegi oletada, et meie arvestus on liialdatud mõnesaja miljoni võrra (kuna üksteisega liituvate akendega võres-



Joon. 56. Salakirja võrestiku aritmeetiline väljendus.

tik on tarvitamisel tülikas ja need juhud tuleb välja jätta), siis jääb ikkagi mõnituhat miljonit võrestikke. See on aga terve ookean, kust vajalikku leida on lootusetu. Politsei ei saa jagu niisugustest arvhiiglastest.

**58. Kuidas pidada võrestik meeles?** On iseendast mõistetav, et mõlemad kirjavahetuses olevad isikud peavad olema valvel, et nende võrestik ei satuks võraste kätte. Kõige parem on võrestikke üldse mitte säilitada, vaid lõigata välja kirja saamisel ja hävitada kohe pärast lugemist. Ent kuidas pidada meeles akende asetus? Siin

tuleb matemaatika meile jälle appi. Märgime aknakesed numbriga 1, teised ruudukesed aga numbriga 0. Siis on esimene võrestiku ruudukeste rida järgmine:

01010010

ehk, ära jättes esimese nulli,

1010010.

Teine rida ilma eesmistele nullideta märgitakse nõnda:

1000.

Ülejäänud read märgitakse järgmiselt:

10100010

10000

1000100

10001000

100010

10001.

Et lihtsustada nende arvude ülesmärkimist, me ei tarvita mitte tavalist kümnendsüsteemi, vaid „kahelissüsteemi“. See tähendab, et parempoolne üheline pole oma naabrist suurem mitte 10, vaid ainult 2 korda. Üheline arvu lõpus tähistab nagu ikka lihtsat ühelist; üheline eelviimasel kohal tähendab kahte; lõpust kolmandal kohal — nelja; neljandal — kaheksat; viiendal — kuusteistkümmend jne. Niisuguse käsituse juures sisaldab esimese rea aknakeste asetust tähistav arv 1010010 lihtühelisi

$$64 + 16 + 2 = 82,$$

kuna nullid näitavad antud liigi üheliste puudumist.

Arv 1000 (teine rida) asendatakse kahelissüsteemis number 8-ga.

Ülejäänud arvud tuleb asendada järgmistega:

$$128 + 32 + 2 = 162$$

$$16$$

$$64 + 4 = 68$$

$$128 + 8 = 136$$

$$32 + 2 = 34$$

$$16 + 1 = 17$$

Pidada meeles arve 82, 8, 162, 16, 68, 136, 34, 17 pole enam nii raske. Ja teades neid, võib alati moodustada arvude alggrupi, millest nad saadi ja mis näitavad otsest aknakeste asetust võrestikus.

Kuidas seda teha, näitame esimese arvuga 82. Et kahtede arvu teada saada, jagame selle 2-ga, saame 41; jääki ei ole, tähendab, viimasel kohal peab ühelisi olema 0. Et teada saada, kuipalju on meie arvus neljasid, jagame saadud kaheliste arvu 41 2-ga:

$$41 : 2 = 20, \text{ jääk } 1.$$

See tähendab, et eelviimasel kahtede kohal on number 1.

Edasi jagame 20 2-ga, et teada saada, kuipalju on meie arvus kaheksaid:

$$20 : 2 = 10.$$

Jääki ei ole, tähendab, neljade kohal on 0.

Jagame 10 2-ga, saame jäägita 5; kaheksate kohal on siis samuti 0.

Jagamisest  $5 : 2$  saame 2 ja jäägi 1: siin kohal on arv 1. Lõpuks jagame 2 2-ga ja teame, et järgmisel kohal on 0, ja viimasel kohal 1 (see koht vastab 64-le).

Nii on siis kõik otsitava arvu numbrid leitud:

$$1010010.$$

Kuna siin on kõigest 7 numbrit, igas võrestiku reas aga on 8 ruudukest, siis on selge, et üks null on eest ära jae-

tud, ja aknakeste asetus esimeses reas määratakse numbritega

01010010,

s. t. aknakesed on 2., 4. ja 7. kohal.

Samuti saadakse teada aknakeste paigutus teistes ridades.

Nagu öeldud, on salakirja süsteeme palju. Me peatusime võrestikul seepärast, et see riivab lähedalt matemaatikat ja tõendab veel kord, kuivõrd mitmekesised on need eluavaldused, kuhu see teadus heidab oma pilgu.

## Jutustused arvhiiglastest.

**59. Kasulik tehing.** On teadmata, kus ja millal see lugu juhtus. Võib-olla see pole iialgi juhtunud; isegi väga hea, kui see nii on. Kuid oli see nii või olemata, lugu on küllaltki huvitav, et seda kuulata.

### I

Rikas miljonär saabus reisilt erakordselt rõõmsana: tal oli teel suuri kasusid töötav õnnelik kohtumine.

„Esineb ju vahel sääraseid õnnelikke juhuseid,“ jutustas ta kodustele. „Paistab, ei räägita asjata, et raha kogub raha. Ennäe, minu rahagi kogub rahakest. Ja nii ootamatult! Kohtusin teel väliselt mitte just silmapaistva tundmatuga. Mul poleks sobinud temaga rääkima haka-tagi, aga ta ise alustas juttu, kui sai teada, et ma elan külluses. Ja jutu lõpuks pakkus ta mulle niisuguse kasuliku tehingu, et mul hing kinni jäi.“

„Teeme,“ ütleb ta, „niisuguse lepingu. Ma toon sulle üks kuu igapäev sada tuhat rubla. Mõistagi mitte muidu, kuid tasu on tühine. Esimesel päeval pead sa mulle lepingukohaselt maksma — veider on öelda — ainult ühe kopika.“

Ma ei uskunud oma kõrvu.

„Ühe kopika?“ küsitlen ma.

„Ühe kopika,“ vastab ta. „Teise saja tuhande eest maksad sa kaks kopikat.“

„Noh,“ ma ei läbenud oodata. „Ja edasi?“



Joon. 57. „Ainult ühe kopika...“

„Edasi: kolmanda saja tuhande eest 4 kopikat, neljanda eest 8, viienda eest 16. Ja nõnda terve kuu, iga päev ikka kaks korda rohkem eelmisest korrast.“

„Ja mis hiljem?“ küsin ma.

„See on kõik,“ ütleb ta, „rohkem ei nõua ma midagi. Kuid kokkuleppest tuleb rangelt kinni pidada: igal hommikul toon ma sulle sada tuhat rubla, aga sina maksa, nagu on kokku lepitud. Enne kuu möödumist sa ei tohi lõpetada.“

Loovutab sajad tuhanded rublad kopikate eest! Kui rahad on õiged, siis pole see inimene täie aruga. Kuid tehing on kasulik, seda ei tohi lasta mööda minna.

„Hea küll,“ ütlen ma. „Too raha. Mina maksan omad täpselt. Vaata aga, et sa mind ei peta: õiged rahad olgu toodud!“

„Ole päris rahulik,“ ütleb ta; „oota mind homme hommikul.“

Ma kardan ainult üht: kas ta ikka tuleb? Äkki taipab, et on teinud liiga kahjuliku lepingu! Noh, ega homseni pole enam kaua oodata.

## II

Möödus päev. Hommikul varakult koputas rikka aknale seesama tundmatu, keda ta kohtas teel.

„Kas raha on valmis,“ ütleb ta. „Mina tõin omad.“

Ja, tõepoolest, veider inimene hakkas tuppa astudes laduma raha välja — õigeid, mitte järeletehtuid. Ta luges täpselt sada tuhat ja ütles:

„Siin on minu raha, nagu oli kokku lepitud. Nüüd on sinu kord maksta.“

Rikas pani lauale vaskkopika ja ootas kartlikult, kas võõras võtab kopika või kõhkleb ja nõuab oma raha tagasi. Küllastaja silmitses kopikat, kaalus seda peopesal ja peitis pauna.

„Homme oota mind siis samal ajal. Ja ära unusta varuda kaks kopikat,“ ütles ta ja lahkus.

Rikas ei uskunud oma õnne: sada tuhat nagu tavast kukkunud. Uuesti luges ta raha üle, uuris põhjalikult, kas rahad pole valed: kõik oli korras. Ta peitis raha hoolega ära ja hakkas ootama homset maksmist.

Öösel hakkas ta aga kahtlema, kas ei teeskle mitte mõni röövel lihtsameelset, et näha, kuhu raha peidetakse, ja pärast tungib roimarite jõuguga kallale?

Rikas lukustas kindlamini ukсед, pidas õhtust alates akent silmas, kuulatles ja ei saanud kaua uinuda. Hommikul koputati jälle aknale: võõras tõi raha. Luges sada tuhat lauale, sai oma kaks kopikat, peitis raha pauna ja ütles lahkudes:



Joon. 58. „Tundmatu koputas aknale...“

„Vaata, et homseks neli kopikat valmis on.“

Uuesti rõõmustab rikas: teine sada tuhat on muidu saadud. Ja külaline pole röövli sarnanegi: ei piilu ringi, ei hiili, nõuab ainult oma kopikaid. Veidrik! Oleks sääraseid maailmas rohkem, tarkadel oleks siis alles hea elada...

Ka kolmandal päeval ilmus võõras, — kolmas sada tuhat läks rikka kätte nelja kopika eest.

Jälle üks päev, ja samal kombel ilmus neljas sada tuhat — kaheksa kopika eest.

Tuli ka viies sada tuhat — 16 kopika eest.

Siis kuues — 32 kopika eest.



Joon. 59. „Sada tuhat, nagu taevast kukkunud!“

Seitsme päeva jooksul pärast tehingu algust sai meie rikas juba seitsesada tuhat rubla ja maksis ise tähtsusetuid kopikaid:

$1 \text{ kop.} + 2 \text{ kop.} + 4 \text{ kop.} + 8 \text{ kop.} + 16 \text{ kop.} + 32 \text{ kop.} +$   
 $+ 64 \text{ kop.} = 1 \text{ rbl. } 27 \text{ kop.}$

See meeldis aplale miljonärile ja ta hakkas juba kahetsema, et sõlmis lepingu ainult üheks kuuks. Üle kolme miljoni ei õnnestu saada. Kui õige mõjutaks veidrikut pikendama tähtaega veel kasvõi poole kuu võrra. Kardetav: äkki ta taipab, et loovutab raha muidu...

Võõras aga ilmus korralikult igal hommikul oma saja tuhande rublaga. Ta sai 8-ndal päeval 1 rbl. 28 kop.;

9-ndal — 2 rbl. 56 kop.; 10-ndal — 5 rbl, 12 kop.;  
 11-ndal — 10 rbl. 24 kop.; 12-ndal — 20 rbl. 48 kop.;  
 13-ndal — 40 rbl. 96 kop.; 14-ndal — 81 rbl. 92 kop.

Rikas maksis selle raha meeeldi: ta oli saanud juba miljon 400 tuhat rubla, aga võõrale loovutanud kõigest umbes poolteistsada rubla.

Kuid rikka rõõm oli üürrike: peagi hakkas ta taipama, et veider külaline pole kohtlane ja tehtud leping polegi nii kasulik, nagu see alguses paistis. Pärast 15. päeva tuli järjekordsete saja tuhandete eest maksta mitte enam kopikaid, vaid sadu rublasid, ja väljamaks kasvas kohutava kiirusega. Tegelikult maksis rikas kuu teisel poolel:

15-nda saja tuhande eest . . . .	163 rbl. 84 kop.
16 „ „ „ „ . . . .	327 „ 68 „
17 „ „ „ „ . . . .	655 „ 36 „
18 „ „ „ „ . . . .	1 310 „ 72 „
19 „ „ „ „ . . . .	2 621 „ 44 „

Muide, rikka enda arvates polnud ta veel kaugeltki kahju saanud: kuigi oli maksnud üle viie tuhande, see-eest saanud aga miljon 800 tuhat rubla.

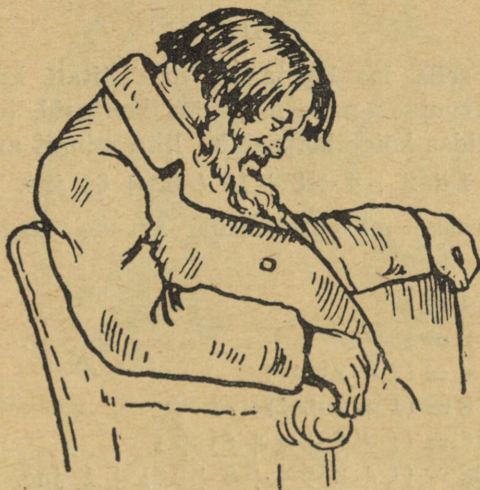
Siiski kahanes kasu iga päevaga, pealegi üha kiiremini.

Järgnevad maksud olid:

20-nda saja tuhande eest . . . .	5 242 rbl. 88 kop.
21 „ „ „ „ . . . .	10 485 „ 76 „
22 „ „ „ „ . . . .	20 971 „ 52 „
23 „ „ „ „ . . . .	41 943 „ 04 „
24 „ „ „ „ . . . .	83 886 „ 08 „
25 „ „ „ „ . . . .	167 772 „ 16 „
26 „ „ „ „ . . . .	335 544 „ 32 „
27 „ „ „ „ . . . .	671 088 „ 64 „

Maksta tuli juba rohkem, kui saada oli. Siin oleks pidanud lõpetama, kuid ei tohtinud murda lepingut.

Edaspidi läks veelgi hullemini. Miljonär veendus liiga hilja, et võõras oli teda halastamatult sisse vedanud ja saab palju rohkem raha, kui ise maksab...



Joon. 60. „Tundmatu oli temast kavalam.“

28. päevast alates pidi rikas maksma juba miljoneid. Aga kaks viimast päeva laostasid ta lõplikult. Siin ongi need tohutud maksud:

28-nda saja tuhande eest	....	1 342 177 rbl.	28 kop.
29 „ „ „ „	....	2 684 354 „	56 „
30 „ „ „ „	....	5 368 709 „	12 „

Kui külaline lahkus viimast korda, arvutas miljonär, kuipalju ta pidi maksma esimesel silmapilgul nii odavana

näiva kolm miljoni rubla eest. Selgus, et võõrale oli makstud

10 737 418 rbl. 23 kop.

Veidi vähem kui üksteist miljonit!... Ja ometigi algas see ühest kopikast! Võõras oleks võinud tuua iga päev isegi kolmsada tuhat rubla ja ei oleks ka sel juhul saanud kahju.

### III

Enne selle loo lõpetamist ma näitan, kuidas saab kiiremini arvutada meie miljonäri kahjusid, teiste sõnades — kuidas kõige hõlpsamini liita mingit arvude rida

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \text{ jne.}$$

Pole raske märgata nende arvude järgmist omapära:

$$1 = 1$$

$$2 = 1 + 1$$

$$4 = (1 + 2) + 1$$

$$8 = (1 + 2 + 4) + 1$$

$$16 = (1 + 2 + 4 + 8) + 1$$

$$32 = (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 1 \text{ jne.}$$

Me näeme, et iga selle rea arv võrdub kõigi eelmiste arvude summaga + 1. Seepärast, näiteks, kui on tarvis liita säärase rea 1 kuni 32 768 kõik arvud, liidame viimasele arvule (32 768) kõigi eelmiste summa, teiste sõnades — liidame selle sama viimase arvu 1 võrra vähemana (32 768 — 1). Saame 65 535.

Sel viisil saab väga ruttu välja arvutada ka meie miljonäri kahjud, kui ainult teame, palju ta maksis viimase korral. Tema viimane väljamaks oli 5 368 709 rbl. 12 kop. Liites 5 368 709 rbl. 12 kop. ja 5 368 709 rbl.

11 kop. saame kohe otsitava tulemuse: 10 737 418 rbl.  
23 kop.

**60. Kuulujutud linnas.** On imeteldav, kuivõrd ruttu levivad linnas kuulujutud! Mõnikord ei möödu paari tun- digi mõnest sündmusest, mida nägid ainult mõned inime-



Joon. 61. „Pealinlane tõi huvitava uudise...“

sed, kuulujutt aga on levinud kulutulena läbi terve linna: kõik teavad sellest, kõik on kuulnud. See haruldane kiirus näib hämmastavana, otse mõistatuslikuna.

Kui läheneda aga asjale arutlusega, siis selgub meile, et siin pole midagi imetleda: kõik seletub arvude omadustega, mitte aga kuulujuttude salapärase iseärasustega.

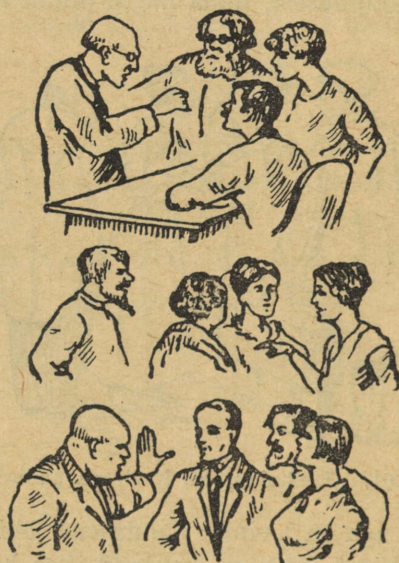
Näiteks vaatleme kasvõi niisugust juhtumit.

## I

50 tuhande elanikuga provintsilinna saabus hommikul kell 8 pealinlane ja tõi kaasa värsked, kõiki huvitava uudise. Majas, kus saabunu peatus, teatas ta uudist ainult

kolmele kohalikule elanikule; ütleme, selleks kulutas ta veerand tundi.

Nii teadis hommikul kell 8 ja 15 min. uudist linnas ainult neli inimest: saabunu ja kolm kohalikku elanikku.



Joon. 62. „Igaüks jutustas uudist kolmele tuttavale.“

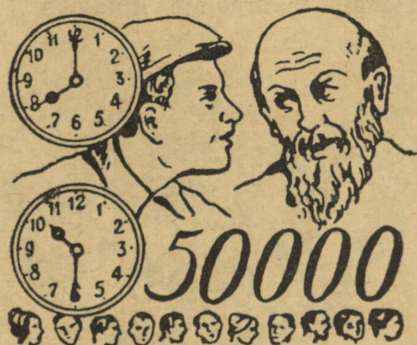
Kuulnud uudise, ruttas igaüks kolmest kodanikust seda oma kolmele tuttavale edasi jutustama. Selleks kulus ka veerand tundi. Tähendab, pool tundi pärast uudise saabumist teadis seda juba  $4 + (3 \times 3) = 13$  inimest.

Igaüks neist üheksast uudistkuulnuist teatas omakorda sellest lähima veerandtunni jooksul kolmele teisele kodanikule, nii teadis hommikul kell 8 ja 45 min. uudist

$$13 + (3 \times 9) = 40 \text{ kodanikku.}$$

Kui uudis levib linnas ka edaspidi samal kombel, s. t. igäüks, kes seda kuuleb, jõuab lähima veerandtunni jooksul selle kolmele kaaskodanikule edasi jutustada, siis toimub uudise teadistus linnale järgmise plaani kohaselt:

kell 9.00 hommikul teab uudist	40 + (3 × 27) =	121 inim.
„ 9.15 „ „ „	121 + (3 × 81) =	364 „
„ 9.30 „ „ „	364 + (3 × 243) =	1093 „



Joon. 63. „Kell 10.30 on kõik linnaelanikud informeeritud.“

Me näeme, et poolteist tundi pärast uudise saabumist linna teab seda kokku umbes 1 100 inimest. See pole palju 50 000 elanikuga linna kohta. Paistab, et uudisest ei kuule veel niipea kõik elanikud. Kuid jälgige uudise edaspidist levikut:

kell 9.45 hommikul teab uudist	1093 + (3 × 729) =	3280 inim.
„ 10.00 „ „ „	3280 + (3 × 2187) =	9841 „

Veerand tundi hiljem teab uudist juba rohkem kui pool linna elanikest:

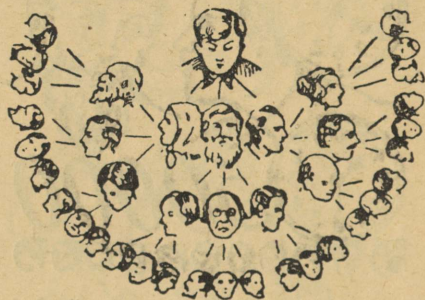
$$9\,841 + (3 \times 6\,561) = 29\,524.$$

Tähendab, enne poolt ühtteistkümmend päeval teab viimane kui üks suure linna elanik uudist, millest hommikul kell 8 teadis ainult üks inimene.

Jälgime nüüd, kuidas teostus eelmine arvutus. Tege-  
likult viis see meid järgmise rea arvude liitmisele:

$$1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3 \times 3) \text{ jne.}$$

Kas ei saaks seda summat kuidagi lühemalt teada,  
nagu me varemalt määrasime kindlaks  $1 + 2 + 4 + 8$



Joon. 64. Kuulujutu levimus.

jne. arvude rea summa? See on võimalik, kui arvesse  
võtta siin liidetavate arvude järgmist iseärasust:

$$1 = 1$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$9 = (1 + 3) \times 2 + 1$$

$$27 = (1 + 3 + 9) \times 2 + 1$$

$$81 = (1 + 3 + 9 + 27) \times 2 + 1 \text{ jne.}$$

Teiste sõnadega: selle rea iga arv võrdub kõigi eel-  
miste arvude kahekordse summaga + 1.

Siit järgneb, et kui on tarvis leida ühest kuni mingi-  
suguse arvuni kõigi arvude summa, siis piisab sellest, kui

liita viimasele arvule pool samast arvust (lahutades enne viimasest arvust 1). Näiteks on arvude summa

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$$

võrdne  $729 +$  pool  $728$ -st, s. t.  $729 + 364 = 1093$ -ga.

### III

Antud juhul iga uudist kuulnud elanik teadustas seda ainult kolmele kodanikule. Kui linna elanikud aga oleksid veel jutukamad ja räägiksid kuulnud uudist mitte kolmele, vaid näiteks viiele või koguni kümnele tuttavale, leviks uudis muidugi palju kiiremini. Näiteks, kui igaüks teataks uudist viiele kodanikule, oleks uudise levimiskiirus linnas järgmine:

kell 8.00	....		=	1 inim.
„ 8.15	....	$1 + 5$	=	6 „
„ 8.30	....	$6 + (5 \times 5)$	=	31 „
„ 8.45	....	$31 + (25 \times 5)$	=	156 „
„ 9.00	....	$156 + (125 \times 5)$	=	781 „
„ 9.15	....	$781 + (625 \times 5)$	=	3 906 „
„ 9.30	....	$3 906 + (3 125 \times 5)$	=	19 531 „

Enne kella 9.45 hommikul teab uudist juba kogu linna 50-tuhandeline elanikkond.

Veel kiiremini levib kuulujutt, kui iga uudist kuulnu teadustab seda kümnele teisele. Siis saame alljärgneva huvitava, kiiresti kasvava arvude rea:

kell 8.00	....		=	1
„ 8.15	....	$1 + 10$	=	11
„ 8.30	....	$11 + 100$	=	111
„ 8.45	....	$111 + 1 000$	=	1 111
„ 9.00	....	$1 111 + 10 000$	=	11 111

Ilmselt on järgmine selle rea arv 111 111 — millest nähtub, et kogu linn teab uudist hommikul juba küm- nenda tunni algul. Kuulujutt levib peagu 1 tunniga!

**61. Odavate jalgrataste laviin.** Revolutsioonieel- setel aastatel oli meil, teisel pool piiri aga tõenäoliselt veel praegugi ettevõtjaid, kes kasutavad kaunis oma- pärast võtet oma tavaliselt keskpärase kvaliteediga kauba müümiseks. Alustati sellega, et laialtlevivais ajalehtedes ja ajakirjades avaldati reklaamiks järgmine kuulutus:

**Jalgratas 10 rubla eest!**

Igäühel on võimalik saada jalgratta omanikuks  
ainult 10 rublaga!

Kasutage haruldast juhust.

**50 rubla asemel — 10 rubla eest.**

**Ostutingimused saadetakse tasuta.**

Muidugi lasksid paljud inimesed end meelitavast kuulutusest ahvatleda ja palusid saata erakordse ostu- võimaluse tingimused. Vastuseks oma järelepärimisele said nad üksikasjaliku prospekti, milles neile teatati järgmist.

Esiialgu ei saadeta 10 rubla eest mitte jalgratas, vaid neli piletit, mis tuleb ära müüa 10 rubla tükk oma neljale tuttavale. Niiviisi kogutud 40 rubla tuli saata firmale ja alles siis saabus jalgratas. Tähendab, ostjale see maksab tegelikult ainult 10 rubla, ülejäänud 40 rubla maksti tuttavate taskutest. Tõsi, lisaks 10 rubla maks- misele sularahas oli jalgratta ostjal veel mõningat tüli pileti müügiga tuttavatele, kuid seda väikest vaeva ei arvestatud.

Mis piletid need siis olid? Missuguste hüvede osaliseks sai nende ostja 10 rubla eest? Ta sai õiguse need firma juures ümber vahetada viie samasuguse pileti vastu, teiste sõnadega, ta sai võimaluse koguda 50 rubla jalgratta ostuks, mis talle enesele järelikult maksis ainult 10 rubla, s. t. pileti hinna. Uued piletite omanikud said igauks omakorda firmalt viis piletit edasiseks levitamiseks jne.

Esimesel silmapilgul ei paistnud kõiges selles mingit pettust. Reklaamkuulutuse lubadus täideti: jalgratas maksis tööpoolest ostjatele ainult 10 rubla. Ja firmagi ei saanud kahju, — ta sai oma kauba eest täishinna.

Kuid seejuures on kogu see ettevõtte kahtlemata pettus. Nii tekitas see afäär, mida meil nimetati „laviiniks“, prantslaste poolt aga „lumepalliks“, kahju neile rohkearvulistele osavõtjatele, kellel ei õnnestunud ostetud pileteid edasi müüa. Nemad tasusidki firmale vahe 50 rublalise jalgratta hinna ja selle eest makstud 10 rubla vahel. Varem või hiljem, kuid vältimatult saabus silmapilk, mil piletite omanikud ei leidnud enam nende ostjaid. Et paratamatult nii pidi juhtuma, seda te taipate, kui võtate vaevaks jälgida, kuivõrd kiiresti kasvab laviini kaasakistud inimeste arv.

Esimene rühm ostjaid, kes said oma piletid otse firmalt, leidsid harilikult ostjad suurema vaevata; iga selle rühma liige varustab piletitega neli uut osavõtjat.

Need neli peavad müüma oma piletid  $4 \times 5$ , s. t. 20-le tuttavale, veendes neid säärase ostu kasulikkuses. Oletame, et see õnnestub ja 20 ostjat on värvatud.

Laviin liigub edasi. 20 uut piletiomanikku peavad nendega varustama  $20 \times 5 = 100$  järgmist.

Senini tõmbas igaüks laviini „esiisadest“ endaga kaasa

$$1 + 4 + 20 + 100 = 125 \text{ inimest,}$$

kellest 25-l on jalgratas, 100-l aga ainult lootus selle saamiseks, mille eest on igaüks maksnud 10 rubla.

Nüüd väljub laviin omavahel tuttavate inimeste kitsast ringist ja voolab laiali mööda linna, kus tal aga värske materjali leidmine muutub üha raskemaks. Viimased sada piletiomanikku peavad varustama samasuguste piletitega 500 kodanikku, kes omakorda peavad värbama 2500 uut ohvrit. Linn ujutatakse kiiresti piletitega üle ning uute ostjate leidmine muutub üsna raskeks.

Seega näete, kuidas laviini kaasakistud inimeste arv kasvab samade seaduste järgi, milledega me tutvusime kuulujuttude levimisest vesteldes. Säärasel korral tekib arvude püramiid:

1  
4  
20  
100  
500  
2 500  
12 500  
62 500

Kui linn on suur ja selle jalgrattal sõiduvõimeline elanikkond moodustab 62 ja pool tuhat, siis käsitletud hetkel, s. o. kaheksandal ringil peab laviin lõppema. Kõik on sellesse kaasa tõmmatud. Kuid jalgrattad on ainult ühel viiendikul elanikkonnast, ülejäänud neli viiendikku on varustatud piletitega, mida pole enam kellelegi müüa.

Suurema elanikkude arvuga linnad, isegi praegusaegsed miljoniliste elanikega pealinnad võivad küllastuda

kõigest mõni ring hiljem, sest laviini arvud kasvavad uskumatu kiirusega. Meie arvude püramiidi järgmised read on:

312 500  
1 562 500  
7 812 500  
39 062 500

Nagu näete, võiks 12. ringil laviin haarata endasse kogu riigi elanikkonna. Ja  $\frac{1}{3}$  sellest elanikkonnast on petetud laviini korraldajate poolt.

Teeme kokkuvõtte, mida saavutab firma isiklikult laviini korraldamisega. Ta sunnib  $\frac{1}{3}$  elanikkonnast maksma kauba eest, mille omanikud on ülejäänud  $\frac{2}{3}$  elanikkonnast; teiste sõnadega — sunnib neli kodanikku viienda heategijaks. Lisaks soetab firma täiesti maksuta suure koosseisu oma kauba agaraid levitajaid. Väga õieti iseloomustas seda afääri üks meie kirjanikest<sup>1</sup>, nimetas seda „vastastikuseks üksteise tüssamise laviiniks“. Selle ettevõtte taga nägematult peituv arvhiiglane nuhtleb neid, kes ei oska kasutada aritmeetilist arvutust oma-enese huvide kaitseks aferistide kallalekippumiste vastu.

**62. Autasu.** Vaat, mis juhtus palju sajandeid tagasi muistses Roomas<sup>2</sup>, nagu jutustab vana legend.

## I

Väejuht Terentius sooritas keisri käsul võidurikka sõjakäigu ja saabus trofeedega tagasi Rooma. Jõudnud pealinna, palus ta, et teda lubataks keisri juurde.

<sup>1</sup> J. I. Jassinski.

<sup>2</sup> Vabalt edasiantud jutustus on laenatud Inglismaal ühele eraraamatukogule kuuluvast ladinakeelsest käsikirjast.

Keiser võttis väejuhi lahkesti vastu, tänas teda südamlilikult sõjaliste teenete eest impeeriumi hüvanguks ja lubas anda talle autasuks kõrge koha senatis.

Kuid Terentius ei vajanud seda. Ta vastas:

„Ma saavutasin hulgaliselt võite, et tõsta sinu võimsust, valitseja, ja ümbritseda kuulsusega su nime. Ma ei kartnud surma, ja kui mul oleks mitu elu ja mitte üks, ma ohverdaksin need kõik sulle. Kuid ma väsisin sõdimisest; noorus on möödunud ja veri voolab aeglasemalt mu soontes. On saabunud aeg puhkuseks mu esiisade majas ja koduelu rõõmude nautimiseks.“

„Mis sa sooviksid minult, Terentius?“ küsis keiser.

„Kuula mind heatahtlikult, valitseja! Pikkade sõja-aastate vältel, niisutades päevast päeva oma mõõka verega, ei ole ma jõudnud koguda endale ainelist hüvangut. Valitseja, ma olen vaene...“

„Jätka, vapper Terentius!“

„Kui sa tahad autasustada oma vähenõudlikku sulast,“ jätkas julgustatud väejuht, „siis aidaku sinu heldus mul elada mu surmani vaikselt ja külluses oma kodukolde juures. Ma ei otsi austust ega kõrget kohta kõikvõimsas senatis. Ma sooviksin eemalduda võimu ja ühiskondliku elu juurest, et puhata rahus. Valitseja, anna mulle raha mu elulõpu kindlustamiseks.“

Keiser, nagu jutustab legend, ei paistnud silma oma liigse heldusega. Ta armastas koguda raha ainult endale ja kulutas seda kasinalt teiste peale. Väejuhi palve pani teda mõtlema.

„Kui suure summa, Terentius, sa arvad endale paraja olevat?“ küsis keiser.

„Miljon teenarit, valitseja.“

Keiser vajus uuesti mõttesse. Väejuht ootas langetatud peaga. Lõppeks ütles keiser:

„Uljas Terentius! Sa oled suur sõdur ja su kuulsad kangelasteod väärivad ohtrat, autasu. Ma annan sulle rikkuse. Homme keskpäeval sa kuuled siin minu otsuse.“

Terentius kummardas ja väljus.

## II

Järgmisel päeval määratud tunnil ilmus väejuht keisri lossi.

„Ole tervitatud, väpper Terentius!“ ütles keiser.

Terentius langetas alandlikult pea.

„Ma tulin, valitseja, et kuulda sinu otsust. Sa lubasid mind armulikult autasustada.“

Keiser vastas:

„Ma ei taha, et niisugune õilis sõjamees nagu sina saaks oma vägitegude eest viletsa autasu. Kuula siis nüüd mind. Minu rahapajas on 5 miljonit vaskbrassi<sup>1</sup>. Pane nüüd tähele mu sõnu. Sa lähed rahapatta, võtad ühe mündi, tuled siia tagasi ja paned selle minu jalge ette. Teisel päeval lähed uuesti rahapatta, võtad mündi, mis võrdub kahe brassiga, ja paned selle siia esimese kõrvale. Kolmandal päeval tood mündi, mis maksab neli brassi, neljandal — kaheksa brassi väärtuses, viiendal — kuusteistkümmet jne., ikka mündi väärtust kahekordistades. Ma käsen valmistada iga päev sinu jaoks vastavas väärtuses münte. Ja niikaua sa tood mu rahapajast raha, kuni sul jätkub jõudu mündi tõstmiseks. Kellelgi pole õigust sind abistada. Sa võid kasutada ainult oma jõudu. Kui sa märkad, et sa ei jaksa enam tõsta münti, peatu: siis lõpeb

---

<sup>1</sup> Peenraha, viiendik osa teenarist.

meie leping. Kuid kõik rahad, mis sul õnnestub ära tuua, kuuluvad sulle ja on sulle autasuks.“

Ahnelt neelas Terentius keisri igat sõna. Talle viirastus tohutu hulk müntisid, üks suurem kui teine, millised ta toob riigi rahapajast.

„Ma olen rahul sinu armulikkusega, valitseja,“ vastas ta rõõmsa naeratusega. „Sinu autasu on tõepoolest „rikkalik“!“

### III

Algasid Terentiuse igapäevased riigi rahapaja külastamised. See asus keisri vastuvõturuumi lähedal ja esimesed käigud müntidega ei valmistanud Terentiusele mingit jõupingutust.

Esimesel päeval ta tõi rahapajast ainult ühe brassi. See on 21-millimeetrilise läbimõõduga ja 5-grammilise kaaluga<sup>1</sup> väike münt.

Samuti olid kerged teine, kolmas, neljas, viies ja kuues käik, kui väejuht tõi kahekordse, neljakordse, kaheksakordse, 16-kordse ja 32-kordse kaaluga mündid.

Seitsmes münt kaalus meieaja mõõtudes 320 g ja oli 8½ cm (täpsemalt 84 mm)<sup>2</sup> läbimõõdus.

Kaheksandal päeval tuli Terentiusel tuua rahapajast münt, mis vastas 128 mündi ühikule. See kaalus 640 g ja oli läbimõõdult umbes 10½ cm.

Üheksandal päeval tõi Terentius keisrisaali 256 mündi ühikule vastava mündi. See oli 13 cm läbimõõdult ja kaalus üle 1¼ kg.

<sup>1</sup> Kaasaegse viiekopikalise kaal.

<sup>2</sup> Kui münt on 64 korda suurem harilikust, siis ta on laiem ja paksem vaid 4 korda, sest  $4 \times 4 \times 4 = 64$ . Seda tuleb silmas pidada edaspidiste kõneallevate müntide suuruse määramisel.

Kaheteistkümnendal päeval ulatus mündi läbimõõt peagu 27 cm-ni ja see kaalus 10¼ kg.

Seni väejuhti sõbralikult kohelnud keiser ei varjanud nüüd enam oma võidurõõmu. Ta nägi, et on tehtud



Joon. 65. Esimene münt.

Joon. 66. Seitsmes münt.

Joon. 67. Üheksas münt.

juba 12 käiku, kuid rahapajast on toodud kokku ainult 2000 väikest vaskrahakest.

Kolmeteistkümnendal päeval sai vahva Terentius mündi, mis võrdus 4096 mündi ühikuga. Selle läbimõõt oli umbes 34 cm ja ta kaalus 20½ kg.

Neljateistkümnendal päeval Terentius tõi rahapajast raske mündi, mis kaalus 41 kg ja mille läbimõõt oli 42 cm.

„Kas sa ei ole väsinud, mu uljas Terentius?“ küsis keiser, hoides tagasi naeratust.



Joon. 68. Üheteistkümnes münt.



Joon. 69. Kolmeteistkümnes münt.



Joon. 70. Viieteistkümnes münt.

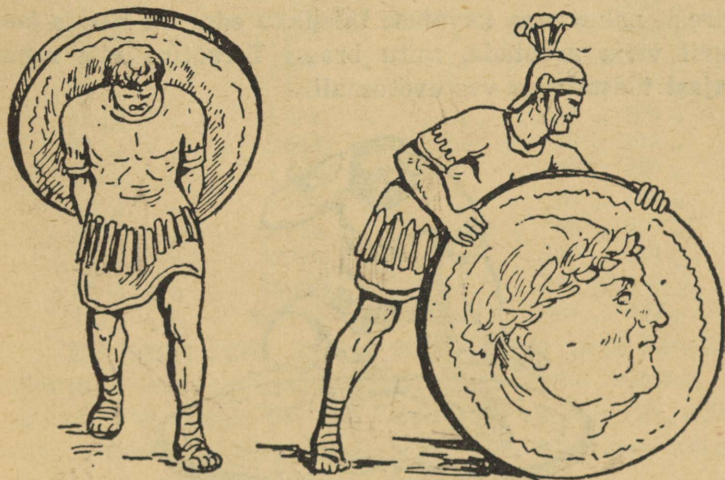
„Ei, mu valitseja,“ vastas väejuht süngelt, pühkides laubalt higi.

Saabus viieteistkümmes päev. Terentiuse kandam oli seekord raske. Aeglaselt jalgu lohistades jõudis ta keisri juurde, kandes 16 384 mündi ühikust koosnevat tohutut münti. Selle läbimõõt oli 53 cm ja ta kaalus 80 kg, — suurekasvulise sõduri kaal.

Kuueteistkümnendal päeval tuikus väejuht seljaloleva kandami all. See oli 32 768 ühikuga võrdne münt ja kaalus 164 kg. Selle läbimõõt ulatus 67 cm-le.

Väejuht oli väsinud ja hingeldas. Keiser muheles...

Kui Terentius järgmisel päeval ilmus keisri vastuvõturuumi, võeti ta vastu suure naerulaginaga. Ta ei



Joon. 71. Kuueteistkümnnes Joon. 72. Seitseteistkümnnes münt.  
münt.

suutnud enam kanda münti, vaid veeretas seda enda ees. Münti läbimõõt oli 84 cm ja see kaalus 328 kg. Ta vastas 65 536 münti ühiku kaalule.

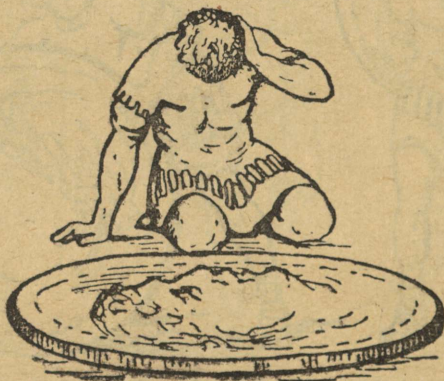
Kaheksateistkümnnes päev oli viimaseks Terentiuse rikastumispäevaks. Sel päeval lõppesid tema rahapajakülastused ja rändamised kandamitega sealt keisri saali. Ta pidi seekord kohale toimetama münti, mis vastas

131 072 ühikule. Selle läbimõõt oli üle meetri ja kaalus 655 kg. Oma oda kangina kasutades jõudis Terentius selle suurima jõupingutusega vaevalt saali veeretada. Suure kolinaga kukkus hiiglaslik münt keisri jalge ette.

Terentius oli täielikult kurnatud.

„Ma ei suuda enam... Küllalt,“ sosistas ta.

Keiser sai vaevaga naeru maha suruda heameele pärast, nähes oma kavaluse täielikku edu. Ta käskis laekuril välja arvutada, mitu brassi Terentius viis rahapajast üldsummas vastuvõtusaali.



Joon. 73. Kaheksateistkümnes münt.

Laekur täitis käsu ja ütles:

„Valitseja, tänu sinu heldusele sai võidukas sõjamees Terentius autasuks 262 143 brassi.“

Nii andis ihne keiser väejuhile umbes  $\frac{1}{2}$  ühest miljonist teenarist, mida palus Terentius.

\* \*  
\*

Kontrollides laekuri arvestust ja ühtlasi ka müntide kaalu leiame, et Terentius tõi

1-sel päeval	1 brassi, kaaluga	5 g
2 „ „	2 „ „	10 „
3-ndal „	4 „ „	20 „
4 „ „	8 „ „	40 „
5 „ „	16 „ „	80 „
6 „ „	32 „ „	160 „
7 „ „	64 „ „	320 „
8 „ „	128 „ „	640 „
9 „ „	256 „ „	1 kg 280 „
10 „ „	512 „ „	2 „ 560 „
11 „ „	1 024 „ „	5 „ 120 „
12 „ „	2 048 „ „	10 „ 240 „
13 „ „	4 096 „ „	20 „ 480 „
14 „ „	8 192 „ „	40 „ 960 „
15 „ „	16 384 „ „	81 „ 920 „
16 „ „	32 768 „ „	163 „ 840 „
17 „ „	65 536 „ „	327 „ 680 „
18 „ „	131 072 „ „	655 „ 360 „

Me teame juba, kuidas võib lihtsalt välja arvutada niisuguse arvude rea summa; teise tulba summa on 262 143, vastavalt lk. 109 näidatud reeglile. Terentius palus keisrilt miljon teenarit, s. o. 5 000 000 brassi. Tähen-  
dab, ta sai ligikaudu

$$5\,000\,000 : 262\,143 = 19 \text{ korda}$$

vähem palutud summast.

**63. Legend malelauast.** Male on üks kõige iidsemaid mängu. Ta eksisteerib juba hulk sajandeid ja pole ime, et sellega on seotud legende, millede tõelisust on kaugete aegade tõttu võimatu kontrollida. Ma tahangi jutustada ühest säärasest legendist. Et sellest aru saada, pole tarvis malemängu üldse osata: piisab teadmisest, et mängitakse 64-ks ruuduks jagatud laual (mustad ja valged ruudud vaheldumisi).

Malemäng leiutati Indias, ja tutvudes sellega sattus india keiser Šeram vaimustusse selle mängu teravmõtte-lisusest ja malendite mitmekesisest asetusvõimalusest. Saades teada, et mängu leiutaja on üks tema alamaist, käskis keiser ta enda juurde kutsuda, et teda isiklikult autasustada õnnestunud väljamõeldise eest.

Leiutaja, keda hüüti Seta'ks, ilmus valitseja aujärje ette. Ta oli tagasihoidlikult rõivastatud õpetlane, kes sai elatust oma õpilastelt.

„Seta, ma tahan sulle väarikat autasu anda suure-pärase mängu eest, mille sa leiutasid,“ ütles keiser.

Tark kummardas.

„Ma olen küllalt rikas, et täita sinu kõige julgema soovi,“ jätkas keiser. „Nimeta autasu, mis sind rahul-daks, ja sa saad selle.“

Seta vaikis.

„Ära karda,“ julgustas teda keiser. „Avalda oma soov. Mul pole kahju millestki, et täita sinu soovi.“

„Valitseja, sinu heldus on suur. Kuid anna mulle aega vastuse mõtlemiseks. Homme, peale küpset kaalut-lust, teatan ma sulle oma palve.“

Kui Seta järgmisel päeval uuesti aujärje astmeile ilmus, hämmastas ta keisrit oma palve võrratu vähe-nõudlikkusega.

„Valitseja,“ ütles Seta, „käse anda mulle malelaua esimese ruudu eest üks nisutera.“

„Harilik nisutera?“ imestas keiser.

„Jah, käskija! Teise ruudu eest käse anda 2 tera, kolmanda eest 4, neljanda eest 8, viienda eest 16, kuuenda eest 32...“

„Küllalt,“ katkestas keiser teda ärritatult. „Sa saad oma nisuterad kõigi malelaua 64 ruudu eest, nagu soovid: iga järgmise eest kaks korda rohkem eelmisest. Kuid tea, et su soov pole mu helduse vääriline. Paludes nii-



Joon. 74. „Teise ruudu eest käsi anda kaks viljatera.“

sugust tühist autasu sa halvustad lugupidamatult minu armulikkust. Sina võiksid õpetajana anda tõesti paremat eeskujut, kuidas austada oma valitseja heldust. Mine! Minu teenrid toovad sulle su nisukoti.“

Seta naeratas, lahkus saalist ja jäi ootama lossi värava juurde.

Lõunalauas meenus keisrile maleleiutaja ja ta saatis vaatama, kas meeletu Seta on juba ära viinud oma viletsa tasu.



Joon. 75. „Seta jäi ootama värava juurde.“

„Valitseja,“ oli vastus, „sinu käsku täidetakse. Keisrikoja matemaatikud arvutavad praegu välja saadaolevat teradehulka.“

Keiser süngestus. Ta polnud harjunud, et tema kāske nii aeglaselt täidetakse.

Õhtul magama heites küsis keiser veel kord, kas Seta juba ammu lahkus oma nisukotiga lossi müüridest.

„Käskija,“ vastati talle, „sinu matemaatikud töötavad väsimatult ja loodavad veel enne koitu lõpetada oma arvutuse.“

„Miks viivitatakse sellega?“ hüüdis keiser vihasele. „Homme, enne kui ma ärkan, olgu kõik viimse terani Setale kätte antud. Ma ei käse kaks korda!“



Joon. 76. „Matemaatikud töötavad väsimatult.“

Hommikul teatati keisrile, et vanem kojamatemaatik palub ära kuulata tähtsa ettekande.

Keiser käskis ta sisse lasta.

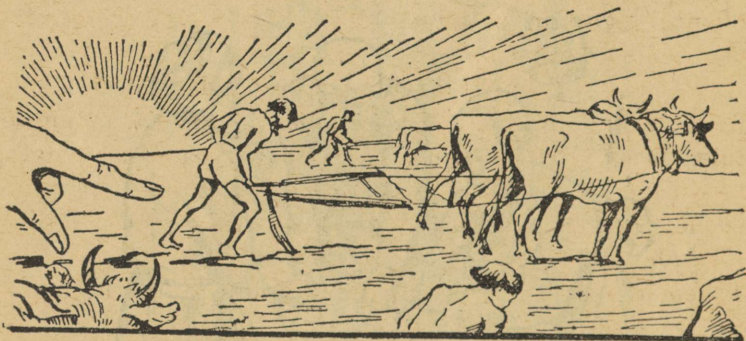
„Enne kui sa räägid oma asjast,“ teatas šeram, „ma soovin kuulda, kas Setale on kätte antud see vilets autasu, mille ta ise endale määras.“

„Just seepärast ma julgesingi su ette tulla nii varajasel tunnil,“ vastas vanamees. „Me arvutasime ausalt

välja Seta poolt soovitud terade hulga. See on nii suur...“

„Olgu see nii suur kui tahes,“ katkestas teda keiser üleolevalt, „minu viljasalved ei vaesu. Autasu on lubatud ja see tuleb anda...“

„Sääraste soovide täitmine ei seisa sinu võimuses, valitseja. Kõigis su aitades kokku pole nii palju teri,



Joon. 77. „Käsi muuta maailma keisririigid küntud põldudeks.“

nagu nõudis Seta. Isegi mitte kogu keisririigi viljasalvedes. Niipalju teri ei leidu terve Maa ulatuses. Ja kui sa soovid tingimata maksta lubatud autasu, siis käse muuta maailma keisririigid küntud põllumaaks, käse kuivatada mered ja ookeanid, käse sulatada kaugeid põhja lagendikke katvad jää ja lumi. Lase kogu see pind nisu täis külvata. Ja kõik, mis kasvab neil põldudel, käse anda Setale. Siis saab ta kätte oma autasu.“

Hämmastusega kuulas keiser rauga sõnu.

„Nimeta mulle see hiiglaslik arv,“ ütles ta mõtiskledes.

„Kaheksateist kvintiljonit nelisada neliküm-  
mend kuus kvadriljonit seitsesada nelikümmend  
neli triljonit seitsekümmend kolm biljonit  
seitsesada üheksa miljonit viissada viiskümmend  
üks tuhat kuussada viisteist, oo käskija!“

### III

Nii kõneleb legend. Ei ole teada, kas see tegelikult oli nii, nagu siin on jutustatud, kuid autasu, millest räägib legend, väljendub just niisuguse arvuga, milles te võite ise kannatlikult arvutades veenduda. Ühest alates tulevad liita arvud: 1, 2, 4, 8 jne. 63-nda kahendamise tulemus näitab, kuipalju on leiutajal saada 64-nda malelaua ruudu eest. Toimides vastavalt lk. 109 esitatud seletusele, leiame vaevata kogu saadaolevate terade hulga, kui kahekordistame viimase arvu ja lahutame sellest ühe. Tähendab, arvutus seisneb ainult kahtede korrutamises 64 korda:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \text{ jne. } 64 \text{ korda.}$$

Arvutamise lihtsustamiseks jagame need 64 korrutajat kuude rühma, igasse rühma 10 kahte ja viimasesse 4 kahte. On kerge veenduda, et kahtede korrutis 10 korda võrdub 1024-ga ja kahtede korrutis 4 korda võrdub 16-ga. Tähendab, otsitav tulemus on

$$1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 16.$$

$$\text{Korrutis } 1024 \times 1024 \text{ võrdub } 1\,048\,576\text{-ga.}$$

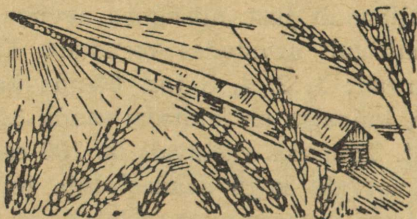
Nüüd tuleb teha korrutis

$$1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times 16,$$

lahutades siis tulemusest ühe, saamegi otsitava terade hulga:

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Kui te tahate kujutleda selle arvhiiglase tohutut suurust, kaalutlege, kui suurt aita oleks tarvis nende terade mahutamiseks. On teada, et ühes kuupmeetris on 15 miljonit nisutera. Tähendab, male leiutaja autasu oleks mahult 12 000 000 000 000 kuupmeetrit ehk 12 tuhat kuupkilomeetrit. Kui ait oleks 4 meetrit kõrge ja 10 meetrit lai, siis peaks ta olema 300 miljonit kilomeetrit pikk, s. t. kaks korda pikem, kui tee Maa pealt Päikesele...



Joon. 78. „Ait ulatuks Päikesest kaugemale...“

India keiser ei suutnud maksta säärast autasu. Kui ta aga oleks tugev olnud matemaatikas, oleks ta kergesti vabanenud koormavast võlast. Selleks oleks ta pidanud laskma Setal ise ükshaaval kõik saadaolevad nisuterad välja lugeda.

Tõepoolest, kui Seta oleks asunud loendama teri ja oleks töötanud vahetpidamata ööd ja päevad, loendades sekundis ühe tera, siis ta oleks esimese öö-päevaga jõudnud lugeda ainult 86 400 tera. Et loendada aga miljon tera, oleks tulnud tal 10 ööd-päeva väsimatult töötada. Ühe kuupmeetri nisu ta oleks üle lugenud umbes poole aastaga: see oleks olnud kõigest 5 setvertit. Lugeses vahetpidamata 10 aastat, poleks ta saanud üle saja setverti. Te näete, et pühendades loendusele kogu oma üle-

jäänud elu, oleks Seta saanud ainult tühise osa oma nõutud autasust...

**64. Kiire paljunemine.** Küps moonipea on täis tillukesi seemneid: igast seemnest võib võrsuda uus taim. Kuivõrd palju saaksime siis moone, kui seemnekesed kõik viimseni idaneksid? Et seda teada, tuleb loendada kõik seemned ühes peas. See on igav töö, kuid tulemus on niivõrd huvitav, et tasub pingutada loenduse lõpuni. Selgub, et üks moonipea sisaldab (ümmarguselt) 3000 seemet.

Mis järeldub sellest? Kui meie moonitaimede ümber oleks küllaldaselt suur tükk sobivat maad, siis iga mahakukkunud seemneke hakkaks idanema ja järgmisel suvel oleks meil sel kohal juba 3000 mooni. Terve moonipõld ühest ainsast peast!

Vaatleme aga, mis edasi juhtub. 3000-st taimest kasvatab igaüks vähemalt ühe pea (sagedasti aga mitu), mis sisaldab omakorda 3000 seemet. Kasvamisel saab igast peast 3000 uut taime ja järgmisel aastal on meil järelikult vähemalt

$$3000 \times 3000 = 9\,000\,000 \text{ taime.}$$

On kerge arvutada, et kolmandal aastal on meie ainsal moonil juba

$$9\,000\,000 \times 3000 = 27\,000\,000\,000 \text{ järeltulijat.}$$

Ja neljandal aastal

$$27\,000\,000\,000 \times 3000 = 81\,000\,000\,000\,000.$$

Viiendal aastal muutub Maakera pind moonidele kitsaks, sest taimede arv ulatub juba

$$81\,000\,000\,000\,000 \times 3000 = 243\,000\,000\,000\,000\,000\text{-ni.}$$

Kogu maismaa pind, s. t. kõigi Maakera mandrite ja saarte pind on aga ainult 135 miljonit ruutkilomeetrit ehk

135 000 000 000 000 ruutmeetrit,

seega ligikaudu 2000 korda vähem, kui vajaksid moonid kasvuks.



Joon. 79. Kui palju saaksime moone, kui iga seeme idaneks?

Niisiis, kui kõik mooniseemned idaneksid, kataksid üheainsa taime järeltulijad viie aastaga kogu Maakera maismaa terveni moonitihnikuga, kus igal ruutmeetril kasvaks 2000 taime. Vaadake, missugune arvhiiglane peitub tillukeses mooniseemnekeses!

Tehes samasuguse arvutuse mitte moonist, vaid mõnest teisest vähem seemneid andvast taimest, jõuak- sime samasugusele tulemusele, kuid selle taime järeltuli-



Joon. 80. Võilill annab igal aastal umbes 100 seemet.

jad ei kataks Maakera mitte viie aastaga, vaid veidi pikema aja jooksul. Võtame näiteks võilille, mis annab igal aastal umbes sada seemet<sup>1</sup>. Kui need kõik idaneksid, oleks meil:

1. aastal . . . . .	1 taim
2. „ . . . . .	100 taime
3. „ . . . . .	10 000 „
4. „ . . . . .	1 000 000 „
5. „ . . . . .	100 000 000 „
6. „ . . . . .	10 000 000 000 „
7. „ . . . . .	1 000 000 000 000 „
8. „ . . . . .	100 000 000 000 000 „
9. „ . . . . .	10 000 000 000 000 000 „

See on 70 korda rohkem, kui on kogu maismaal ruut-meetreid.

<sup>1</sup> Mõnes võilille peas on loendusel leitud isegi peagu 200 seemet.

Järelikult oleksid 9-ndal aastal kogu Maakera mandrid kaetud võililledega, igal ruutmeetril 70 taime.

Miks me siis tegelikult ei näe säärast kohutavalt kiiret paljunemist? Seepärast, et tohutu suur osa seemneist



Joon. 81. Õhk muutuks peaaegu läbipaistmatuks lindude rohkusest.

hukkub idanemata: nad satuvad ebasobivale pinnale ja ei idane üldse või kasvamisel lämmatatakse teiste taimede poolt, või lihtsalt hävitavad neid loomad. Ent kui puuduks see massiline seemnete ja võrsikute hävinemine, siis kataks lühikese ajaga iga taim meie planeedi täielikult.

See pole kehtiv mitte üksnes taimede, vaid ka loomade suhtes. Kui poleks surma, siis täidaksid ükskõik

missuguse looma ühe paari järeltulijad varem või hiljem kogu Maa. Päratuid maa-alasid täiesti katvad rändrohu-tirtsude parved võivad anda meile väikse kujutluse, mis juhtuks siis, kui surm ei pidurdaks elavate olevuste rohkenemist. Kahe-kolme aastakümnega kattuksid mandrid läbipääsmatute metsade ja steppidega, mis kubiseksid



Joon. 82. Ühesuvised järeltulijad võiks reastada Maa pealt Uuranini.

omavahel eluaseme pärast võitlevatest miljonitest loomadest. Ookeanid täituksid nii tihedasti kaladega, et laevasõit muutuks võimatuks. Õhk aga muutuks peagu läbipaistmatuks lindude ja putukate rohkusest.

Vaatleme näiteks, kui kiiresti paljuneb meile kõigile tuntud toakärbes. Oletame, et iga kärbes muneb 120 munakest ja suve jooksul jõuab kasvada seitse põlve kärbseid, kelledest pooled on emased. Võtame esimese munemise aluseks 15. aprilli, ja et emakärbes kasvab 20 päevaga ise munemisvõimeliseks, siis toimub tema paljunemine järgmiselt:

15. aprillil muneb emakärbes 120 muna; mai alguses väljub munadest 120 kärbest, nendest 60 emast.

5. mail iga emakärbes muneb 120 muna, millest mai keskel tekib  $60 \times 120 = 7200$  kärbest, nendest 3600 emast.

25. mail muneb 3600 emakärbest igauks 120 muna; juuni alguses on  $3600 \times 120 = 432\,000$  kärbest, nendest 216 000 emast.

14. juunil muneb 216 000 emakärbest igauks 120 muna; juuni lõpus väljub 25 920 000 kärbest, nendest 12 960 000 emast.

5. juulil muneb 12 960 000 emakärbest igauks 120 muna; juulis tuleb välja 1 555 200 000 kärbest, nendest 777 600 000 emast.

25. juulil tekib 93 312 000 000 kärbest, nendest 46 656 000 000 emast.

13. augustil tuleb munadest 5 598 720 000 000 kärbest, nendest 2 799 360 000 000 emast.

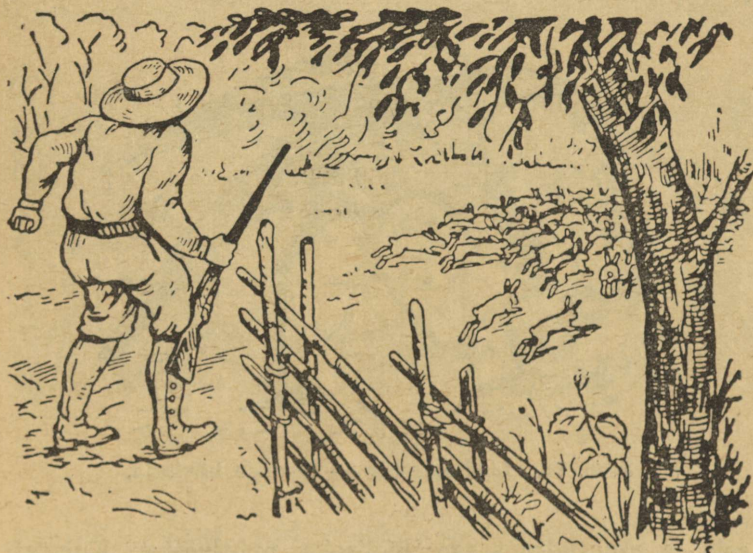
1. septembril tekib 355 923 200 000 000 kärbest.

Et paremini kujutleda seda kärbeste hiigelhulka, mis takistamatu paljunemise juures võiks tekkida ühest paarist ühe ainsa suve jooksul, kujutleme neid reastatuna üksteise järele ühte sirgesse ritta. Et kärbse pikkus on 5 mm, siis veniks see kärbeste rida 2500 miljoni km-ni, s. o. 18 korda pikemaks, kui kaugus Maakeralt Päikesele (ligikaudne kaugus Maa ja kauge planeedi Uurani vahel) ...

Lõpuks esitame mõned tõelised juhtumid sood-satesse tingimustesse asetatud loomade harukordsest kiirest paljunemisest...

Ameerika asustamisel ei olnud seal varblasi. Meie juures nii tavaline lind viidi sihilikult Ühendriiki-

desse kahjulike putukate hävitamise eesmärgil. Nagu teada, sööb varblane ohtralt ilu- ja juurviljaaedu kahjustavaid aplaid tõuke ja teisi putukaid. Uus olukord meeldis varblastele: Ameerikas polnud röövloomi, kes oleksid hävitanud varblasi, ja nad hakkasid kiiresti paljunema.



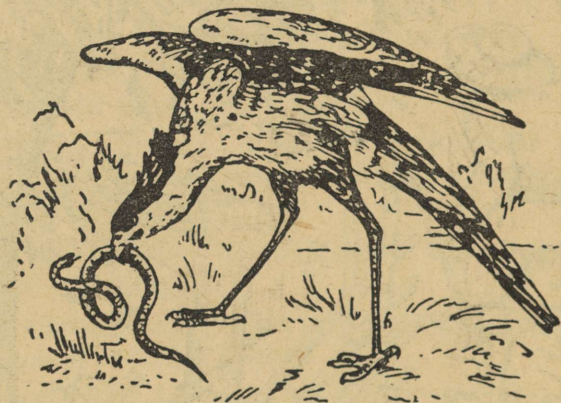
Joon. 83. Küülikute karjad uputasid üle Austraalia.

Kahjulikkude putukate arv kahanes märgatavalt, kuid peagi oli varblasi nii palju, et elava toidu puudusel asusid nad taimetoidu kallale ja hakkasid laastama põlde<sup>1</sup>.

Tuli alustada võitlust varblastega. See võitlus aga maksis ameeriklastel nii palju, et anti seadus, mis keelab tulevikus igasuguste loomade sisseveo Ameerikasse.

<sup>1</sup> Havai saartel nad tõrjusid täielikult välja kõik teised väikesed linnud.

Teine näide. Kui eurooplased avastasid Austraalia, polnud seal küülikuid. Küülikud toodi sinna 18. sajandi lõpul, ja et seal puuduvad küülikutest toituvad röövloomad, arenes nende närijate paljunemine erakordselt kiires tempos. Õige pea ujutasid küülikute karjad Austraalia üle, tehes kohutavat kahju põllumajandu-

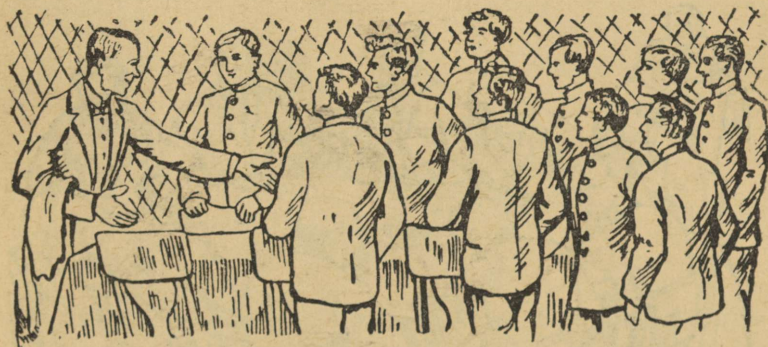


Joon. 84. Lind-sekretär — madude hävitaja.

sele ja muutudes seega tõeliseks nuhtluseks. Kulutati tohutult raha võitluseks selle põllumajanduse nuhtlusega ja ainult tänu energilistele abinõudele õnnestus jagu saada sellest hädast. Umbes sama kordus hiljem küülikutega Kalifornias.

Kolmas õpetlik lugu juhtus Jamaikal. Siin leidis külluses mürkmadusid. Et nendest lahti saada, otsustati saarele tuua mürkmadude äge hävitaja lind-sekretär. Tõepoolest vähenes varsti madude arv, kuid see-eest siginesid enneolematult varem madude hävitatud põldrotid. Rotid kahjustasid niivõrd suhkrupilliroo istan-

dusi, et tuli tõsiselt mõelda nende hävitamisele. Teadagi on rottide vaenlaseks india mangust. Otsustati tuua saarele neli paari neid loomi ja lasta vabalt paljuneda. Mangustid harjusid hästi uue kodumaaga ja asustasid peagi kogu saare. Ei möödunud kümnet aastatki, kui nad hävitasid saarel peagu kõik rotid. Kuid paraku — hävitanud rotid, hakkasid mangustid end toitma kõigest,



Joon. 85. „Istuge lauda, kuidas juhtub...“

mis ette juhtus: nad murdsid koerapoegi, kitsetallesid, põrsaid, kodulinde ja sõid nende mune. Ja paljunedes üha rohkem, asusid nad viljapuuaedade, viljapõldude, istanduste kallale. Elanikud hakkasid oma endisi liitlasi hävitama, kuid neil õnnestus ainult osaliselt piirata mangustide tekitatud kahju.

**65. Tasuta lõuna.** Kümme noorukit otsustas pühit-  
seda keskkooli lõpetamist seltsimeheliku lõunasöögiga  
restoranis. Kui kõik olid kogunenud ja esimene roog  
juba laual, tekkis vaidlus, missuguses järjekorras lauda  
istuda. Ühed soovitasid istuda tähestiku järjekorras, tei-

sed vanuse järgi, kolmandad õppeedukuse, neljandad kasvu järgi jne. Vaidlus venis pikale, supp jahtus, kuid keegi ei istunud lauda. Pöördudes nende poole, lepitaskelner nad järgmiste sõnadega:

„Mu noored sõbrad, jätke oma sõnavahetus! Istuge lauda, kuidas kellelegi meeldib, ja kuulake mind!“

Kõik istusid, kuidas juhtus. Kelner jätkas:



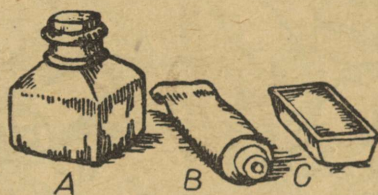
Joon. 86. Ei jõutud ära oodata maksuta lõunat.

„Üks teie seast kirjutagu üles, missuguses järjekorras te praegu istute. Homme tulge uuesti siia lõunastama ja istuge siis teises järjekorras. Tunahomme istuge jälle uues järjekorras jne., kuni olete ära proovinud kõik võimalikud paigutused. Kui jõuab uuesti järjekord istuda nii, nagu te istute täna, siis — ma luban seda pühalikult — hakkam teid kostitama iga päev maksuta kõige valitumate lõunasöökidega.“

Pakkumine meeldis. Otsustati koguneda iga päev samasse restorani ja proovida läbi kõik laudaistumise

järjestuse võimalused, et võiks kiiremini kasutada mak-  
suta lõunaid.

Kuid nad ei jõudnud seda päeva ära oodata. Mitte seepärast, et kelner poleks täitnud oma lubadust, vaid laudaistumise järjestuse võimalusi oli liiga palju. Neid polnud ei rohkem ega vähem kui — 3 628 800. Pole raske arvutada, et see päevade arv moodustab peagu 10 000 aastat!



Joon. 87.

Võib-olla näib teile võimatuna, et 10 inimest nii mit-  
mel erineval viisil võib lauda istuda. Kontrollige ise  
arvutust.

Eelkõige tuleb õppida määrama vahetluste arvu. Lihtsustamiseks alustame arvutust kolmest esemest. Nimetame neid A, B ja C.

Meie soovime teada, kuipalju on nende üksteise  
kohale siirdevõimalusi. Arutlegem järgmiselt. Kui panna  
esialgu kõrvale ese B, siis saab kahte ülejäänut paigutada  
ainult kahel viisil.

Nüüd lisame eseme B iga paari juurde. Selleks on  
meil kolm võimalust: me võime

- 1) paigutada B paari taha,
- 2) „ „ B „ ette,
- 3) „ „ B esemetepaari vahele.

Peale nende kolme teisi asendeid esemel B ilmselt olla ei saa. Kuna meil on aga kaks paari AB ja BA, siis koguneb kõiki paigutusvõimalusi

$$2 \times 3 = 6.$$

Need paigutusviisid on näidatud joonisel 90.

Läheme edasi ja teeme arvutuse 4 asjaga. Meil on 4 asja: A, B, C ja D. Paneme jälle kõrvale ühe eseme, näiteks D, ja ülejäänud kolmega sooritame kõik võima-



Joon. 88 ja 89. Kaht asja saab paigutada ainult kahel viisil.

likud vahetlused. Teame juba, et neid vahetlusi on 6. Mitemel viisil saab siis liita neljas ese D igauhega neist kuuest kolmikust? Ilmselt on neli võimalust; me võime

- 1) paigutada D kolmiku taha;
- 2) „ D „ ette;
- 3) „ D esimese ja teise eseme vahele;
- 4) „ D teise ja kolmanda eseme vahele.

Järelikult saame kokku

$$6 \times 4 = 24 \text{ vahetlust;}$$

kuna aga  $6 = 2 \times 3$  ja  $2 = 1 \times 2$ , siis võime vahetluste summa kirjutada korrutisena:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

Arutledes samuti 5 eseme korral, teame, et nende vahetluste hulk võrdub

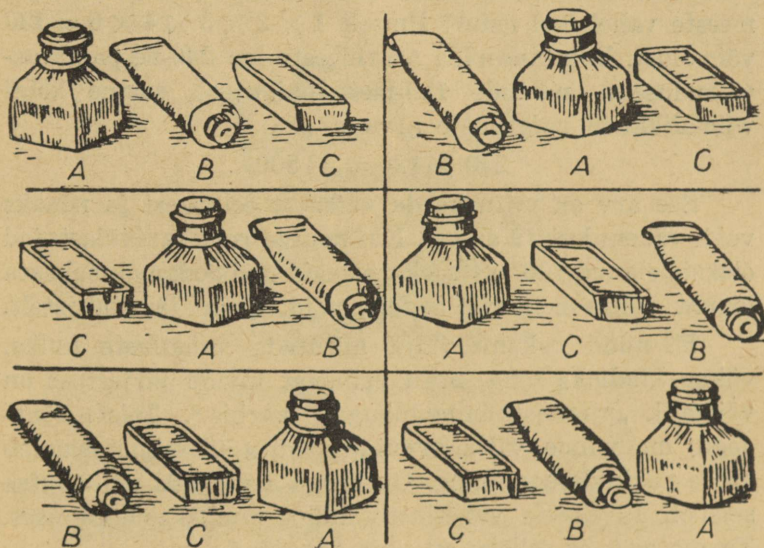
$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120\text{-ga.}$$

Kuue esemega:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \text{ jne.}$$

Pöördume nüüd juhtumile 10 lõunastajaga. Võttes vaevaks välja arvutada korrutise

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$ ,  
saame teada võimalikkude vahetluste hulga.



Joon. 90. Kolme asja võib paigutada kuuel viisil.

Seega saamegi ülalesitatud arvu

3 628 800.

Arvutus oleks keerulisem, kui 10 lõunastaja hulgas oleks 5 neidu ja nad oleksid soovinud istuda lauas tingimata noormeestega vaheldumisi. Kuigi paigutamismõimalused on sel juhul palju väiksemad, on selle arvutamine ometi palju raskem.

Istugu üks noormeestest lauda — ükskõik kuhu. Jättes eneste vahele neidude jaoks tühjad toolid võivad ülejäänud neli istuda  $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ -al eriviisil. Kuna toole on 10, on esimesel noormehel istekoha valikuks 10 võimalust; tähendab, noorukitel on üldse asetuvõimalusi  $10 \times 24 = 240$ .

Mitu istumisvõimalust on tühjadele toolidele noormeeste vahel 5-el neil? Ilmselt  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$  võimalust. Kombineerida noormeeste iga 240-ne paigutusvõimalusega neidude 120-met paigutust, saame kõigi võimalikkude paigutuste arvuna

$$240 \times 120 = 28\ 800.$$

See arv on mitu korda väiksem eelmisest ja nõuaks veidi vähem kui 79 aastat. Kui noored restoranikülastajad oleksid elanud 100-aastaseks, oleksid nad oodanud maksuta lõunat mitte kelnerilt endalt, vaid tema järeltulijatelt.

Et nüüd oskame välja arvutada vahetluste hulka, võime kindlaks teha, mitu erinevat kivide järjestust on võimalik „viieteistkümne-mängu“ karbis<sup>1</sup>. Teiste sõnadega, me võime välja arvutada, mitu ülesannet suudab meile pakkuda see mäng. On kerge aru saada, et arvutus seisneb 15 eseme vahetluste hulga kindlaksmääramises. Teame aga, et selleks on vaja korrutada

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \text{ jne. } \dots \times 14 \times 15.$$

See korrutis annab

$$1\ 307\ 674\ 365\ 000,$$

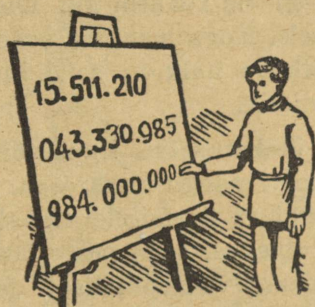
s. o. üle triljoni.

Sellest tohutust ülesannete hulgast on pooled lahendamatud. Tähendab, selles mängus on üle 600 miljardi

<sup>1</sup> Seejuures peab tühi ruut jääma alati paremasse alumisse nurka.

lahendamatauid paigutusvõimalusi. Sellega on ka osaliselt seletatav „viieteistkümne-mängu“ harrastustaud, mis haaras inimesi, kes ei aimanud lahendamataute võimaluste nii tohutut hulka.

Olgu veel tähendatud, et kui läheks korda paigutada igas sekundis mängukivi uude asendisse, siis kõigi võimaluste läbiproovimiseks kuluks 40 000 aastat ööd-päevad kestvat tööd.



Joon. 91. Mitu võimalust on 25 õpilase istuma asetamiseks?

Lõpetades oma vestluse vahetluste hulgast, lahendame veel analoogilise ülesande koolielust.

Klassis on 25 õpilast. Mitu võimalust on nende istuma asetamiseks koolipinkidel?

Neile, kes on omandanud eelpoolöeldu, pole raske selle ülesande lahendamine: tuleb korrutada 25 järgmist arvu:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots \times 23 \times 24 \times 25.$$

Matemaatika näitab meile paljude arvutuste koondamisviise, kuid siinesitatud arvutust ta ei oska lihtsustada. Pole ühtki teist viisi selle arvutuse täpseks läbiviimiseks, kui kõik need arvud hoolikalt korrutada. Ainult

õnnestunud korrutajate rühmitamine võimaldab mõningat ajakokkuhoidu. Tulemus on määratu suur 33 numbrist koosnev arv, mille ulatust meie fantaasia ei suuda kujutleda.

See on:

15 511 210 043 330 985 984 000 000.

Muidugi on see kõigist seni ettetulnud arvudest suurim ja seepärast on tal rohkem kui ühelgi teisel õigust „arvhiiglase“ nimele. Kogu maailma ookeanide ja merede kõige pisemate tilkade hulk on selle hiiglasliku arvuga võrreldes tagasihoidlik.

**66. Müntide ümberasetus.** Lapsepõlves näitas mulle vanem vend huvitava mängu müntidega. Seadnud kõrvuti kolm alustassi, pani ta äärmisele virnakese viiest mündist: kõige alla rublalise, selle peale 50-kopikalise<sup>1</sup>, siis 20-kopikalise, edasi 15-kopikalise ja kõige peale 10-kopikalise. Rahad tulid paigutada kolmandale alustassile, kinni pidades kolmest alljärgnevast nõudest. Esimene nõue: korruga võib tõsta ainult üht raha. Teine: kunagi ei tohi tõsta suuremat raha väiksemale. Kolmas: kinni pidades mõlemast eelmisest nõudest võib münte asetada ajutiselt ka keskmisele alustassile, kuid mängu lõpuks peavad kõik mündid olema esialgses järjekorras kolmandal alustassil. Nagu näete, pole nõuded keerukad. Nüüd aga asume tööle.

Ma hakkasin rahasid ümber tõstma. Panin 10-kopikalise kolmandale alustassile, 15-kopikalise keskmisele ja

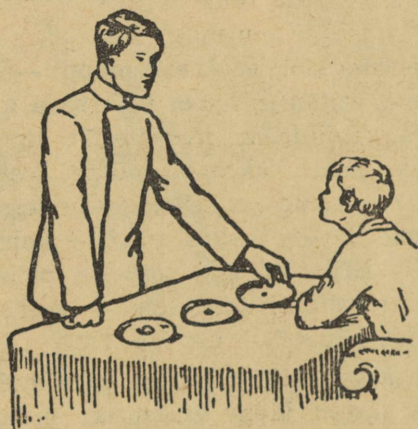
---

<sup>1</sup> Korrates seda mängu, võib lugeja võtta rublase asemel vana vask viiekopikalise või selles suuruses papp-kettakese ja 50-kopikalise asemel praegu käibeloleva 5-kopikalise.

takerdusin. Kuhu panna 20-kopikaline? See on ju 10-kopikalisest ja 15-kopikalisest suurem!

„Noh, mis nüüd?“ aitas mind vend. „Pane 10-kopikaline keskmisele alustassile 15-kopikalise peale, siis vabaneb kolmas alustass 20-kopikalisele.“

Nii ma teingi. Kuid edasi — uus raskus. Kuhu panna 50-kopikaline? Muide, ma taipasin peagi: alguses



Joon. 92. Vend näitas mulle huvitavat mängu.

ma paigutasin 10-kopikalise esimesele alustassile, 15-kopikalise kolmandale ja siis 10-kopikaline ka kolmandale. Nüüd võis 50-kopikalise asetada tühjale keskmisele alustassile. Edasi, pärast rohkeid ümberpaigutusi õnnestus mul paigutada ka rublane münt ümber esimeselt taldrikult ning lõpuks korjata terve müntidevirm kolmandale taldrikule.

„Mitu ümberladumist sa üldse tegid?“ küsis vend, kiites heaks mu tööd.

„Ma ei lugenud.“

„Arvutagem. On ju huvitav teada, missugune on kõige väiksem käikude arv sihilejõudmiseks. Kui müntide-virn poleks koosnenud mitte viiest, vaid ainult kahest mündist, 15-kopikalisest ja 10-kopikalisest, mitu käiku oleks pidanud siis tegema?“

„Kolm: 10-kopikaline keskmisele alustassile, 15-kopikaline kolmandale ja siis 10-kopikaline kolmandale alustassile.“

„Õige. Lisame nüüd veel, ühe mündi — 20-kopikalise — ja arvutame, mitme käiguga võib seda müntide virna ümber laduda. Toimigem järgmiselt: alguses asetame üksteise järele kaks vähemat münti keskmisele alustassile. Nagu me teame, on selleks vaja kolm käiku. Seejärel paigutame 20-kopikalise tühjale kolmandale alustassile — üks käik. Ja siis tõstame mõlemad mündid keskmiselt alustassilt kolmandale — veel kolm käiku. Kokku on üldse käike  $3 + 1 + 3 = 7$ .“

„Käikude arvu nelja mündiga luba mul endal arvutada. Esiteks tõstan kolm väiksemat münti keskmisele alustassile — seitse käiku, seejärel 50-kopikalise kolmandale alustassile — üks käik, ja siis taas kolm väiksemat münti kolmandale alustassile — veel seitse käiku. Kokku üldse  $7 + 1 + 7 = 15$  käiku.“

„Väga hea. Aga viie mündiga?“

„ $15 + 1 + 15 = 31$ ,“ taipasin ma otsekohe.

„Näed, sa oledki tabanud arvutamismeetodi. Kuid ma näitan sulle, kuidas seda võib lihtsustada. Pane tähele, kõik meie saadud arvud — 3, 7, 15, 31 — kujutavad endast ühe või mitme kahelise korrutist, millest on lahutatud üks. Vaata!“

Ja vend kirjutas mulle väikese tabeli:

$$3 = 2 \times 2 - 1$$

$$7 = 2 \times 2 \times 2 - 1$$

$$15 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$$

$$31 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1.$$

„Saan aru: korrutatakse niimitu kahte, kuipalju on ümberpaigutatavaid münte, ja sellest lahutatakse üks.



Joon. 93. „Preestrid peavad väsimatult kettakesi ümber tõstma.“

Ma võin nüüd arvutada käikude hulga igasugusele müntidevirnale. Näiteks 7 mündiga:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 128 - 1 = 127.“$$

„Sa oledki aru saanud sellest vanaaegsest mängust. Kuid üht praktilist reeglit pead sa veel teadma: kui virnas on paaritu arv münte, siis tuleb esimene münt tõsta kolmandale alustassile; kui aga paarisarv — siis keskmisele alustassile.“

„Sa ütlesid: vanaaegne mäng. Kas sa ei ole siis ise seda leiutanud?“

„Ei, ma ainult kohandasin ta müntidele. See mäng on väga iidne ja, nagu räägitakse, tekkinud Indias. Selle mänguga on seotud huvitav legend. Benaresis olnud tempel, kuhu india jumal Brahma maailma loomise ajal seadnud kolm teemandist vardakest ja varustanud ühe neist 64 kuldketakesega: kõige suurem all, iga järgmine väiksem eelmisest. Templi preestrid olid kohustatud väsimatult tõstma päevad ja ööd neid ketakesi ühelt vardalt teisele, kasutades abiks kolmandat ning täites meie mängu nõudeid: paigutada ümber korruga ainult üks ketas ja asetada väiksem suuremale. Legend ütleb, et kui kõik 64 ketakest on ümber paigutatud, siis saabub maailma lõpp.“

„Oh, tähendab maailm oleks pidanud juba ammu hukkuma, kui uskuda seda legendi!“

„Nagu näib, arvad sa, et 64 ketakese ümberpaigutamise ei võta palju aega?“

„Muidugi, tehes igas sekundis ühe tõste, võib ühe tunni vältel teha 3600 ümbertõstmist.“

„Noh, ja mis siis?“

„Öö-päeva vältel aga umbes sada tuhat. Kümne päevaga — miljon tõstet. Ma olen kindel, et miljon tõstega on võimalik ümber paigutada kasvõi tuhat ketakest.“

„Sa eksid! Kõigest 64 ketakese ümberpaigutamiseks on vaja ümmarguselt 500 miljardit aastat!“

„Kuidas nii? Tõstete hulk võrdub ju ainult 64 kahe korrutisega miinus üks, ja see on... Oota, ma kohe korrutan!“

„Suurepärane! Kuni sa korrutad, jõuan ma ära käia ja õiendada omi asju.“

Vend lahkus, jättes mind süvenema arvutusse. Algul ma leidsin 16 kahtede korrutise, siis korrutasin selle tulemuse — 65 536 — iseendaga, selle tulemuse jälle iseendaga. Pärast ma ei unustanud lahutada ühte.

Nii sain arvu

18 446 744 073 709 551 615<sup>1</sup>.

Tähendab, mu vennal oli õigus...

Võib-olla huvitab teid, missuguste arvudega väljendatakse realselt maailma iga. Ses suhtes on õpetlastel muidugi ainult mõned umbkaudsed andmed:

Päikese iga on .....	10 000 000 000 000 aastat
Maakera „ „ .....	2 000 000 000 „
Elu Maakeral .....	300 000 000 „
Inimene .....	300 000 „

**67. Kihlvedu.** Puhkekodu sööklas tekkis lõunalauas jutt, kuidas arvutada juhtumuste tõenäosust. Üks lõunastajatest, noor matemaatik, võttis metallraha ja ütles:

„Ma viskan mündi lauale ega vaata ise. Milline on tõenäosus, et see kukub vapiga ülespidi?“

„Seleta enne, mis tähendab „tõenäosus“!“ kuuldus hääli. „Kõigil pole selge.“

„Oh, see on väga lihtne! Münt võib lauale langeda kahte viisi: kas vapiga ülespidi, või vapiga allapoole. Siin on võimalikud ainult kaks juhtu. Neist on ainult üks soodus meid huvitavale juhtumusele. Leiame nüüd suhte

$$\frac{\text{soodsaid juhte}}{\text{võimalikke juhte}} = \frac{1}{2}$$

<sup>1</sup> Lugejale on see arv juba tuttav: see on male-leiutaja poolt nõutud autasu.

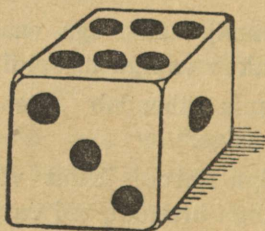
Murd  $\frac{1}{2}$  väljendabki „tõenäosust“, et münt kukub vapiga ülespidi.“

„Mündiga on asi lihtne,“ lausus keegi vahele. Aga vaadelge keerulisemat juhtu, näiteks täringuga.“



Joon. 94. „Münt võib lauale langeda kahteviisi.“

„Vaadelgem,“ nõustus matemaatik. „Meil on täringuks kuubike, mille igal tahul on numbrid. Milline on tõenäosus, et visatud täring langeb teatud numbriga, näiteks kuuega ülespidi? Mitu võimalust selles üldse on?“



Joon. 95. Täring.

Täring võib langeda ükskõik missugusele oma kuuest tahust; tähendab, on kuus võimalust. Meile on neist soodus ainult üks, kui kuus on peal. Nii saame tõenäosuse, kui jagame ühe kuuega. Lühidalt, see väljendub murruga  $\frac{1}{6}$ .“

„Kas tõesti on võimalik välja arvutada kõigi juhtude tõenäosus?“ küsis puhkekodus viibiv naine. „Võtke niisugune näide. Mina ennustan, et esimene söökla aknast mööduja on mees. Kui suur on tõenäosus, et ma õieti ennustasin?“

„Ilmselt võrdub tõenäosus poolega, kui kokku lepime, et me ka aastast poissi meheks arvame. Meeste arv maailmas võrdub naiste arvuga.“

Kuid milline on tõenäosus, et kaks esimest möödujat on mõlemad mehed?“ küsis keegi puhkuselviibijatest.

„See arvutus on mõnevõrra keerulisem. Määrakem, missugused juhud on siin üldse võimalikud. Esiteks on võimalik, et mõlemad möödujad on mehed. Teiseks, et enne tuleb mees, siis naine. Kolmandaks vastupidi: et enne ilmub naine, siis mees. Ja lõpuks neljas juht: mõlemad möödujad on naised. Nii on siis kõigi võimalikkude juhtude arv neli. Nendest on ilmselt soodne ainult üks juht — esimene. Saame tõenäosuse murru näol. Teie ülesanne ongi lahendatud.“

„See on selge! Kuid küsimuse võib asetada ka kolme kohta: missugune on tõenäosus, et kolm esimest möödujat kõik on mehed?“

„Hea küll, arvutame välja ka selle. Algame jälle võimalikkude juhtude loendamisega. Me teame, et kahe mööduja puhul on kõigi võimalikkude juhtude arv neli. Kolme mööduja puhul suureneb võimalikkude juhtude arv kahekordselt, sest igale neljast loetletud kahe mööduja rühmitusest võib liituda kas mees või naine. Kokku võib kõiki juhte olla siis  $4 \times 2 = 8$ . Otsitav tõenäosus aga on ilmselt  $\frac{1}{8}$ , sest soodne juht on ainult ühel

korral. Siin on arvutuse reegel kergesti märgatav: kahe mööduja korral oli tõenäosus

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ; kolme puhul  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ; nelja puhul võrdub tõenäosus 4 poole korrutisega jne. Nagu te näete väheneb tõenäosus üha rohkem.“

„Kui suur see on, näiteks, kümne mööduja puhul?“

„See oleneb tõenäosusest, kas kõik kümme esimest möödujat peavad järjestikku olema mehed? Arvutame, kuipalju on kümne poole korrutis.“

Saame  $\frac{1}{2^{10}}$ , mis on vähem ühest tuhandikust. Tähendab, kui te veate kihla, et see on nii, ja panete mängu ühe rubla, siis võin mina panna sellele vastu 1000 rubla, et seda ei juhtu.“

„Kasulik kihlvedu!“ kostis kellegi hääl. „Ma paneksin meeeldi mängu ühe rubla, et võita tuhat rubla.“

„Kuid arvestage ka seda, et on tuhat võimalust teie ühe vastu.“

„See ei tähenda midagi. Mina riskiksin ühe rublaga tuhande vastu isegi selle juures, et sada möödujat osutuvad kõik järjestikku meesteks.“

„Kas te kujutlete ka, kuivõrd väike on niisuguse juhu tõenäosus?“ küsis matemaatik.

„Üks miljondik osa, või midagi selletaolist?“

„Määratult vähem! Juba kahekümne mööduja korral me saame ühe miljondiku osa. Saja mööduja korral saame... lubage, ma viskan paberile. Ühe biljondiku... triljondiku... kvadriljondiku... Ohoo! Üks kolmekümne nulliga!“

„Ainult?“

„Kas teile on kolmekümnest nullist vähe? Väikeste veepiiskade arv ookeanis on väiksem selle arvu ühest tuhandikust.“

„Pole midagi öelda, aukartustäratav arv! Kuipalju te panete minu rubla vastu?“

„Ha-ha-ha!... Kõik! Kõik, mis mul on.“

„Kõik, see on liiga palju. Pange mängu oma jalgratas. Ega te pane?“

„Miks mitte? Palun! Olgu jalgratas, kui te soovite. Ma ei riski põrmugi.“

„Mina ei riski ka. Rubla pole suur raha! See-eest võin ma võita jalgratta, teie aga peagu mitte midagi.“

„Saage ometi aru, te kaotate kindlasti! Te ei saa ialgi jalgratast, aga teie rubla on juba niisama hästi kui minu taskus.“

„Mida te teete!“ hoiatas matemaatikut ta sõber. „Ühe rubla pärast te tahate riskida jalgrattaga. Hullumeelsus!“

„Just vastupidi,“ vastas matemaatik, „hullumeelsus on niisuguste tingimuste juures vedada kihla kasvõi ühe rubla peale. Kaotus on kindel! Õigem on rubla lihtsalt ära visata!“

„Kuid üks võimalus leidub siiski?“

„Üksainus tilk terves ookeanis! Kümnes ookeanis! Sääb on see teie võimalus. Minu pool on aga kümme ookeani ühe tilgakese vastu. Minu võit on sama kindel, nagu kaks korda kaks on neli.“

„Te liialdate, noormees,“ kostus kogu aeg vaikides vaidlust pealt kuulanud vanamehe rahulik hääl. „Te liialdate...“

„Kuidas? Kas teiegi, professor, arutlete väikekodanlikult?“

„Kas te olete sellele mõelnud, et kõik juhud pole siin võrdvõimalikud? Missuguste juhtude puhul on tõe-

näosuse arvutus õige? Võrdvõimalikkude puhul, eks ole nii? Arutletud näites aga... Muide,“ ütles vanamees kuulatades, „näib, et tegelik elu ise selgitab teile kohe teie vea. On kuulda sõjaväe muusikat, kas pole nii?“

„Mis on siin muusikaga tegemist?...“ algas noor matemaatik ja vaikis äkki. Ta näos peegeldus ehmatus. Ta hüppas kohalt, tormas akna juurde ja pistis pea välja.

„Nii see ongi!“ kuuldus tema kaeblik hüüatus. „Kihlvedu on kaotatud! Hüvasti, mu jalgratas...“

Minuti pärast oli kõigil selge, mis oli juhtunud. Akendest möödus pataljon jalaväesõdureid.

**68. Arvhiiglased meie ümber ja meie sisemuses.** Pole tarvidust otsida erakordseid olukordi, et kohtuda arvhiiglastega. Need on kõikjal meie ümber ja isegi meie endi sisemuses, peab ainult oskama neid tähele panna. Taevas meie pea kohal, liiv meie jalge all, õhk meie ümber, veri meie kehas — kõiges peitub arvude-maailma nähtamatuid hiiglasi.

Enamikule inimestest pole taevaalaotuse arvhiiglased tundmatud. On hästi teada, kui rääkida universumi tähtede arvust, nende kaugusest meieni ja omavahel, nende mõõtudest, kaalust, east, et iga kord me kohtame muutmatult oma hiiglasliku suurusega meie ettekujutust masendavaid arve. Väljend „astronoomiline arv“ pole asjata muutunud lööksõnaks. Kuid paljud ei tea, et isegi need taevakehad, mida täheteadlased nimetavad sageli „väikesteks“, osutuvad tõelisteks hiiglasteks, kui neid mõõta harilikkude maiste mõõtudega. Meie päikesesüsteemis on planeete, mis oma mõõtmete tähtsusetuse tõttu on saanud täheteadlastelt nimetuse „väikesed“. Nende hulgas on sääraisedki, millede läbimõõt on kilomeetreid.

Kuid hiiglaslikkude mõõtudega harjunud täheteadlaste silmis on nad nii väikesed, et rääkides neist nimetavad nad neid halvustavalt „kääbusteks“. Kuid nad osutuvad „kääbustaevakehadeks“ ainult teiste, tohutult suuremate „hiidtähtede“ kõrval. Hariliku inimese mõõdupuuga mõõtes ei ole nad aga kaugeltki miniatuursed. Neist kõige väiksema pinnale võiks mahutada kogu meie Nõukogude Liidu elanikkonna. Võtame kolmekilomeetrilise läbimõõduga „kääbusplaneedi“: selline planeet avastati hiljuti. Geomeetria reeglite abil on kerge välja arvutada, et selle taevakeha pindala on 28 km<sup>2</sup> ehk 28 000 000 m<sup>2</sup>. Ühele ruutmeetrile mahub seistes 7 inimest. Nagu näete, leidub 28 miljonil ruutmeetril kohta 196 miljonile inimesele, s. t. kogu Nõukogude Liidu elanikkonnale.

Ka meie jalgealune liiv viib meid arvhiiglaste riiki. Iga peotäis peenliiva sisaldab niisamapalju üksikuid liivaterakesi, kui on elanikke terves Nõukogude Liidus. Pole põhjuseta kujunenud iidne väljend „niipalju, nagu liiva mere ääres“. Muide, muistsed rahvad alahindasid liivaterade rohkust, pidades seda ühesuguseks tähtede rohkusega. Vanasti poinud teleskoobe, palja silmaga võib taevas näha ainult kuni 3 500 tähte (ühel taeva poolkeral). Liivaterade hulk mere ääres on miljoneid kordi suurem palja silmaga nähtavate tähtede hulgest.

Suurim arvhiiglane peitub õhus, mida meie hingame. Iga kuupsentimeeter, iga sõrmkübaratäis õhku sisaldab 27 kvintiljoni (s. o. 27 kaheksateistkümne nulliga) pisi- osakest, mida nimetatakse „molekulideks“.

On isegi võimatu kujutleda selle arvu suurust. Kui maailmas oleks niipalju inimesi, neile ei jätkuks sõna tõsisel mõttes ruumi meie planeedil. Tegelikult on Maa-

kera pind — mandrid ja ookeanid kõik kokku — 500 miljonit km<sup>2</sup>. Muutes selle ruutmeetriteks, saame

500 000 000 000 000 ruutmeetrit.

Jagades 27 kvintiljoni selle arvuga, saame 54 000. See tähendab, et igale maapinna ruutmeetrile tuleks üle 50 tuhande inimese!

Aga kas teil on aimu, kui suurt ruumala hõivaks see elanikkond? Kuna inimkeha surub keskmiselt välja umbes 50 liitrit, s. t. hõivab  $\frac{1}{20}$ -kuupmeetrilise ruumala, siis 27 kvintiljoni inimest võtaks enda alla mitte vähem kui 1350 miljoni-kuupkilomeetrilise ruumala.

Võrdleme seda kõigi ookeanide mahuga. Maakera ookeanide pind võrdub 375 miljoni km<sup>2</sup>-ga; keskmine sügavus on neli km; seetõttu moodustab kõikide ookeanide veeruumala.

$375\,000\,000 \times 4 = 1\,400$  miljonit kuupkilomeetrit,

s. t. ligikaudu niisamapalju, kui 27 kvintiljoni inimkeha ruumala. Tähendab, niisuur elanikkond täidaks ääreni kõik Maakera ookeanide ja merede sügavikud. Seejuures on praegu tegelikult Maakeral eluneva 2000 miljoni (2 miljardi) inimese ruumala nii kasin, et kogu inimkonna uppudes näiteks Laadoga järve, tõuseks selles vesi... ainult pool sentimeetrit! Nii tühist järve vee pinna tõusu ei märkaks keegi, kuigi selle põhjas peituks kogu meie planeedi elanikkond<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> See näib uskumatuna; pole ülearune tõestada öeldut arvutusega. Laadoga järve pind on 18 000 km<sup>2</sup>. 2 000 miljoni inimkeha ruumala moodustab 100 miljonit m<sup>3</sup> ehk 0,1 km<sup>3</sup>. Jagades 0,1 18 000-ga, saame  $\frac{1}{180\,000}$  km ehk  $\frac{10}{18}$  cm, s. t. umbes pool sentimeetrit.

Eespool mainisime, et arvhiiglased peituvad ka inimkeha sisemuses. Võtame näiteks oma vere. Kui vaadelda verepiiska mikroskoobi all, siis ilmneb, et selles ujub tohtu hulk äärmiselt väikesi punaseid liblekesi, mis annavadki verele tema värvuse. Igal säärasel punasel vereliblil on väikese, ümmarguse, keskelt sissevajutatud padjakese kuju (joon. 96). Inimesel on nad kõik



Joon. 96. Punane verelible.

ligikaudu ühesuurused, umbes 0,007-millimeetrilise läbimõõduga ja 0,002-millimeetrilise paksusega. Kuid see-eest on nende hulk tohtusuur. Ühes kuupmillimeetrilises verepiiskas leidub neid 5 miljonit. Kuipalju on neid siis üldse meie kehas? Inimese kehas on umbes 14 korda vähem verd liitrites, kui tema keha kaalub kilogrammides. Kui te kaalute 40 kg, siis on teie kehas umbes 3 liitrit verd ehk 3 miljonit  $\text{mm}^3$ . Kuna iga  $\text{mm}^3$  sisaldab 5 miljonit punast vereliblet, siis on teie veres nende üldarv

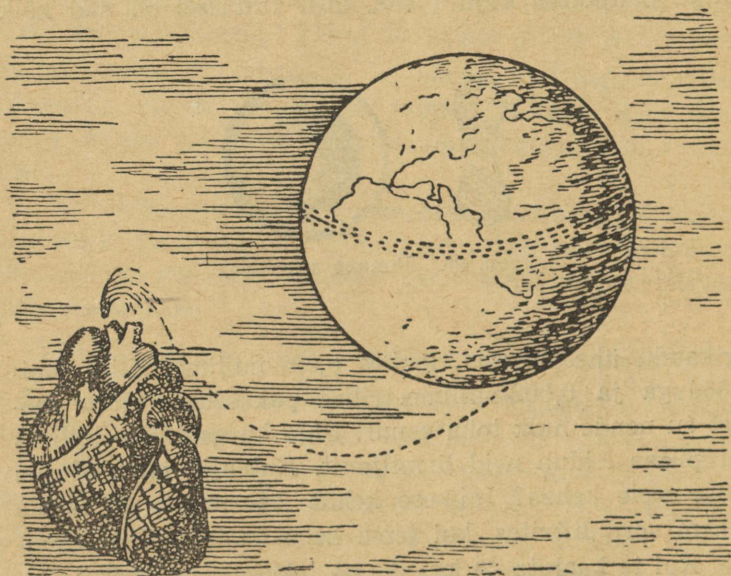
$$5\ 000\ 000 \times 3\ 000\ 000 = 15\ 000\ 000\ 000\ 000.$$

15 triljoni vereliblet! Kui pikaks venib see kettakeste armee, kui asetada nad üksteise kõrvale ritta? On kerge välja arvutada, et niisuguse rea pikkus oleks 105 000 km. Meie vere punastest libledest koostatava

niidi pikkus ulatuks üle saja tuhande kilomeetri. Selle võiks kerida ümber maakera ekvaatori

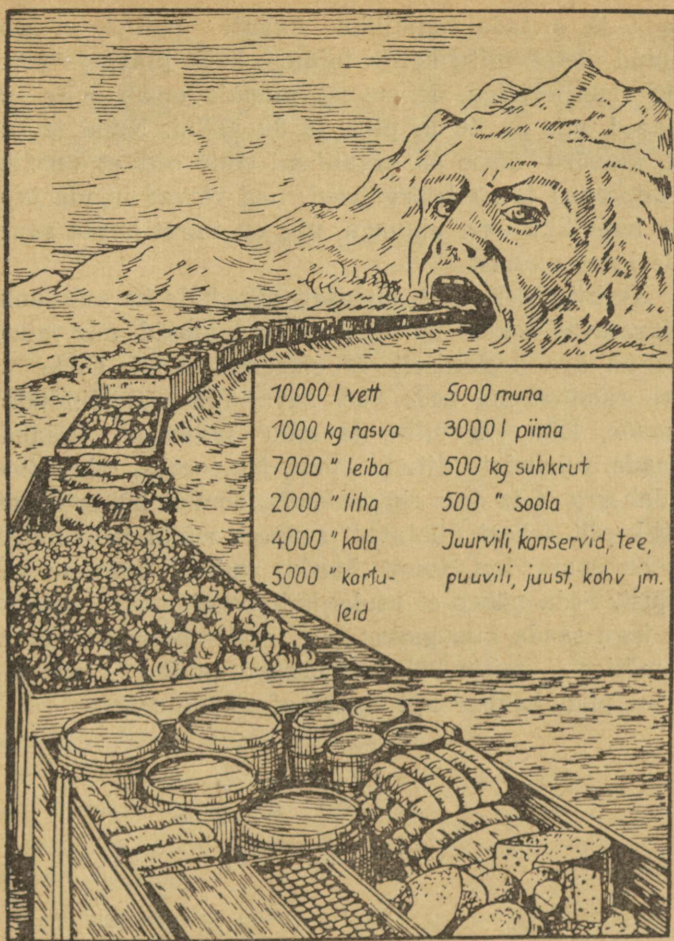
$$100\ 000 : 40\ 000 = 2,5 \text{ korda,}$$

aga täiskasvanud inimese punastest verelibledest niidi — kolm korda.



Joon. 97. Täiskasvanud inimese punastest verelibledest niidi võiks mähkida kolm korda ümber Maakera.

Selgitagem, millist tähtsust omab meie kehale niisugune vereliblede peenendamine. Nende libledede ülesanne on kanda hapnikku laiali kogu kehas. Nad võtavad hapnikku vere läbimines kopsust ja eritavad selle, kui vereringvool viib nad meie keha kudedesse, kopsudest kuni kõige kaugematesse kehaosadesse. Vereliblede üli-



Joon. 98. Kui palju sööb inimene oma elu jooksul.

peenestus soodustab selle ülesande täitmist, sest mida väiksemad nad oma määratu hulga juures on, seda suurem on nende pindala, ja vereible suudab ainult oma pinnaga

imada ja eritada hapnikku. Arvutus näitab, et nende üldpind ületab mitu korda inimese keha pinna ja võrdub 1200 ruutmeetriga. Niisugust pindala omab suur juurviljaaed, mis on 40 m pikk ja 30 m lai. Nüüd te saate aru, kuivõrd tähtis on organismi elule see, et verelibled on ülipeened ja rohkearvulised: nad võivad imada ja eritada hapnikku oma pinnaga, mis on tuhat korda suurem meie keha pinnast.

Arvhiiglaseks võib õiglaselt nimetada ka seda aukartustäratavat kogust igasuguseid toiduaineid, mis inimene tarvitab ära keskmiselt 70 eluaasta vältel. Oleks vaja terve raudteerong selle vee, leiva, liha, metslindude ja loomade, kala, kartulite ja muu juurvilja, tuhandete munade, tuhandete liitrite piima jne. veoks, mis inimene suudab ära süüa oma elu jooksul. Joonisel 98 on esitatud näitlik pilt sellest üllatavalt suurest toiduainete hulgast, mis on enam kui tuhat korda raskem inimese kehakaalust. Seda nähes ei usuks küll keegi, et inimene suudab jagu saada niisugusest hiiglasest, neelates sõna tõsiselt mõttes — mitte küll ühekorraga, kuid 70 aasta jooksul — pika kaubarongi laadungi toiduaineid.



Kaheksas peatükk.

## Mõõtlindita.

69. Tee mõõtmise sammudega. Igakord ei ole käepärast mõõtlinti või joonlauda, siis on kasulik osata kuidagi ilma nendeta läbi saada kas või umbkaudselt mõõtes.

Näiteks on ekskursioonidel kõige lihtsam mõõta enam-vähem pikki vahemaid sammudega. Selleks peab teadma oma sammu pikkust ja oskama samme lugeda. Muidugi pole sammud alati ühepikkused: me võime astuda väikesi samme, võime aga soovikorral kõndida ka pikkade sammudega. Kuid siiski tavalise käigu juures on meie sammud enam-vähem ühepikkused, ja kui meil on teada nende keskmine pikkus, siis võime sammudega mõõta kaugust suurema eksimusega.

Et teada saada oma sammu keskmist pikkust, tuleb mõõta paljude sammude üldpikkus ja sellest arvutada ühe sammu pikkus. Mõistagi ei saa sel puhul läbi mõõtlindi või -nööri.

Tõmmake lint sirgu tasasel kohal ja mõõtke 20-meetriline kaugus. Märkige see joonega maapinnale ja kõrvaldage mõõtlint. Nüüd minge harilikul sammul piki joont ja lugege astunud sammude arv. On võimalik, et mõõdetud pikkusele ei mahu teie sammud tervetena. Kui jääk on poolest sammust lühem, võib jätta selle lihtsalt

arvestamata; kui aga jääk on poolest sammust pikem, loetakse see järgmiseks täissammuks. Jagades 20-meetrilise üldpikkuse sammude arvuga, saame ühe sammu keskmise pikkuse. See arv tuleb meeles pidada, et vajaduse korral mõõtmistel kasutada.

Eriti pikkade maade mõõtmisel võib sammude lugemisega eksida, seepärast tuleb arvutada järgmiselt. Samme loetakse ainult kümneni; jõudes selle arvuni, kõverdame vasakul käel ühe sõrme. Kui kõik vasaku käe sõrmed on kõverdatud, s. t. on käidud 50 sammu, kõverdame paremal käel ühe sõrme. Niiviisi saab loendada 250-ni, seejärel tuleb uuesti alustada otsast peale, pidades meeles, mitu korda olid kõik parema käe sõrmed kõverdatud. Näiteks, peale teatud maa läbikäimist olid teil kõverdatud kõik parema käe sõrmed kaks korda ja teekonna lõpul on paremal käel kõverdatud veel 3 sõrme ja vasakul 4, siis on astunud sammude arv

$$2 \times 250 + 3 \times 50 + 4 \times 10 = 690.$$

Sellele tuleb lisandada veel mõned sammud, mis astuti pärast vasaku käe sõrme viimast kõverdamist.

Olgu möödaminnes märgitud järgmine vanaaegne reegel: täiskasvanud inimese sammu keskmine pikkus võrdub tema poole pikkusega jalatallast silmadeni.

Teine vana praktiline reegel on maksev käigu kiiruse kohta: inimene käib ühes tunnis niimitu kilomeetrit, kuimitu sammu ta astub kolmes sekundis. Kerge on näidata, et see reegel on õige ainult sammu teatud pikkuse ja pealegi kaunis pika sammu juures. Olgu sammu pikkuseks  $x$ -meetrit ja sammude arv  $3$ -s sekundis  $n$ , siis astub jalakäija  $3$ -s sekundis  $nx$  meetrit ja tunnis (3600 sek.)  $1200 nx$  meetrit ehk  $1,2 nx$  km.

Kuna see tee võrdub 3-s sekundis astunud sammude arvuga, siis me saame võrrandi:

$$1,2 nx = n$$

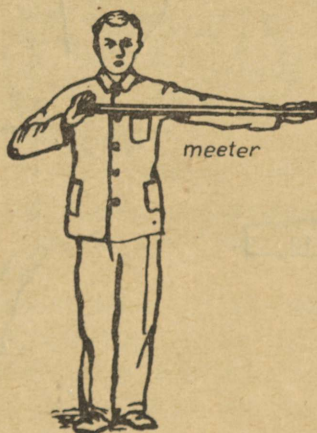
ehk

$$1,2 x = 1,$$

kust

$$x = 0,83 \text{ m.}$$

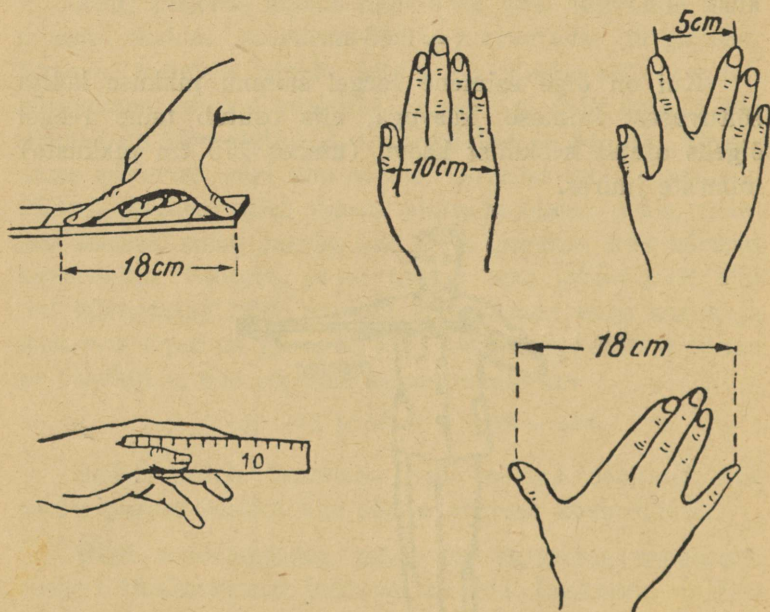
Kui on õige esimene reegel sammu pikkuse kohta sõltuvusest inimese kasvuga, siis osutub teine reegel õigeks ainult keskmist kasvu (umbes 175 cm pikkuste) inimeste juures.



Joon. 99. Vahelaius väljasirutatud käe sõrme otstest teise käe õlani võrdub ligikaudu 1 meetriga.

**70. Elav mõõdik.** Kui ei ole käepärast meetrimõõdistikuga joonlauda ega mõõtlinti, tuleb-keskmise suurusega esemete mõõtmisel toimida järgmiselt. Pingutatud nöör või kepp kõrvaesirutatud käe sõrme otstest kuni teise käe õlani (joon. 99) — see täiskasvanud

mehe sõrmede ja teise õla vaheline kaugus — moodustabki ühemeetrilise pikkuse. Teine ühemeetrilise pikkuse saamisviis seisneb sirgjooneliselt 6 „vaksa“ mõõtmises, s. t. viimase võimaluseni laialiaetud pöidla ja nimetisõrme otste 6-kordne vahe (joon. 100).



Joon. 100, 101, 102, 103, 104. Mida on tarvis mõõta käe juures, et hiljem läbi saada mõõtlindita.

Viimane näpunäide õpetab meile mõõtmiskunsti „paljaste kätega“: selleks on vaid tarvis enne mõõta ära oma kämmal ja pidada hästi meeles mõõtmistulemus.

Mis on vaja mõõta oma kämblas? Kõigepealt peopesa laius, nagu näidatud joonisel 101. Täiskasvanud ini-

mesel on see umbes 10 cm; võib-olla teil on see kitsam, kuid te peate tegema kindlaks, kuipalju ta just kitsam on. Lisaks sellele on tarvis mõõta, kui suur on võimalikult laialiaetud keskmise- ja nimetissõrme vahe (joon. 102). Edasi on kasulik teada oma nimetissõrme pikkust, mõõtes seda pöidla juurest, nagu näidatud joonisel 103. Ja lõpuks, mõõtke ära laialiaetud pöidla ja väikese sõrme otste vahe, nagu kujutab joonis 104.

Kasutades seda „elavat mõõdikut“ võite mõõta umbkaudseid väiksemaid esemeid.



Joon. 105. Kõrvuti asetatud viiekopikaline ja kopikaline moodustavad 4 cm.

**71. Mõõtmise müntidega.** Head teenet võivad meile osutada praegu käibelolevad vask- (pronks-) mündid. Paljud ei tea, et ühekopikalise münti läbimõõt on täpselt  $1\frac{1}{2}$  cm ja viiekopikalisel —  $2\frac{1}{2}$  cm, nii et kõrvutiasetatuna on mõlema münti läbimõõt kokku 4 cm (joon. 105). Tähendab, kui teil leiduvad mõningad vaskmündid, siis võite nendega mõõta üsna täpselt järgmisi pikkusi:

kopikaline .....	$1\frac{1}{2}$ cm
viiekopikaline .....	$2\frac{1}{2}$ „
kaks kopikalist .....	3 „
viiekopikaline + kopikaline ....	4 „
kaks viiekopikalist .....	5 „
jne.	

Lahutades viiekopikalise läbimõõdust kopikalise oma saame täpselt 1 cm.

Kui aga ei juhtu olema viiekopikalist ja kopikalist, vaid on ainult kahe- ja kolmekopikaline münt, siis võivad needki teid teataval määral hädast välja aidata, kui peate meeles, et kõrvutipaigutatuna on mõlema mündi läbimõõt ühtekokku 4 cm (joon. 106).



Joon. 106. Kõrvuti asetsevad kolmekopikaline ja kahekopikaline moodustavad kokku 4 cm.

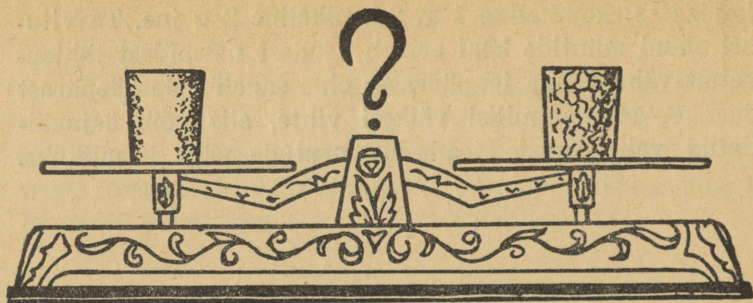
Murdes 4 sentimeetri laiuse pabeririba pooleks ja seejärel veel kord pooleks saate sentimeetrimõõdu<sup>1</sup> 4 cm jaoks.

Seega näete, et teatud ettevalmistuse ja leidlikkuse juures võite ka mõõtlindita teostada praktiliselt kõvuliikke mõõtmisi.

Sellele on kasulik veel juurde lisada, et meie vask- (pronks-) mündid ei asenda hädakorral mitte ainult mõõdikut, vaid on kohased ka väiksemaiks kaaluvihtideks. Uued, kulumata praegu käibelolevad vaskmündid kaaluvad niimitu grammi, kuisuur on nende väärtus

<sup>1</sup> 15-kopikalise mündi läbimõõt on ligi 2 cm, kuid ainult ligikaudu, kuna selle mündi täpne läbimõõt on 19,56 mm. Üldmainitud käibelolevate vaskmüntide mõõtmed on aga täpselt õiged. Kellel on varbsirkel, see võib selles kergesti veenduda.

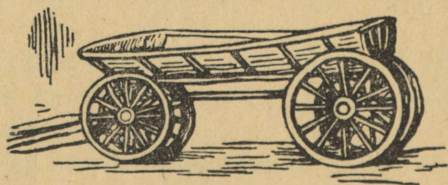
kopikates: kopikaline 1 g, 2-kopikaline 2 g jne. Tarvitusel olnud müntide kaal erineb nendest normidest tähtsusetult vähe. Kuna igapäevases elus sageli pole käepärast just 1—10-grammilisi väikesi vihte, siis võib äsjanäidatud vahekordade teadmine osutada väga kasulikuks.



Üheksas peatükk.

### Geomeetrilisi keerdülesandeid.

Siaa peatükki kogutud keerdülesannete lahendamiseks ei ole nõutav geomeetria kursuse täielik tundmine. Nendega tuleb toime ka see, kes omab ainult geomeetria põhiteadmiste tagasihoidlikke algeid. Kaks tosinat siin-



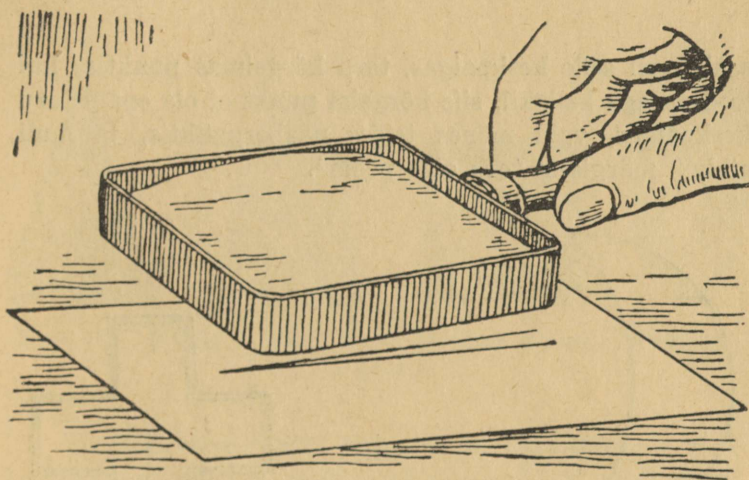
Joon. 107. Miks kulub esimese ratta telg rohkem kui tagumise?

esitatud ülesandeid aitavad lugejal veenduda, kas ta tegelikult valitseb neid geomeetria teadmeid, mis ta arvab olevat õppinud. Tõeline geomeetria tundmine pole mitte ainuüksi oskus loetleda kujundite omadusi, vaid selle praktiline kasutamine reaalsete ülesannete lahendamisel. Mis kasu on inimesel püssist, kui ta ei oska lasta?

Las kontrollib nüüd lugeja, kuipalju tabamusi ta saab 24 lasuga geomeetrilisse märklauda.

**72. Vanker.** Miks kulub vankri esimene telg kiiremini ja süttib sagedamini põlema kui tagumine?

**73. Läbi luubi.** Läbi neljakordse suurendusega luubi vaadeldakse  $1\frac{1}{2}$  suurust nurka. Kui suurena paistab nurk (joon. 108)?



Joon. 108.

**74. Puusepa vesilood.** Teile on muidugi tuttav puusepa vesilood õhumulliga (joon. 109), mis eemaldub märgisest, kui loodi alus on kallak. Mida suurem on see kallak, seda rohkem nihkub õhumull keskel asuvast märgisest kaugemale. Mulli liikumise põhjuseks on tema kergus ja ühtlasi ka tõus vedeliku pinnale, milles ta asub. Kui aga toru oleks sirge, siis jookseks mull iga väikseima kallaku puhul täiesti toru otsa, s. t. selle kõrgei-

masse ossa. Niisugune vesilood oleks muidugi väga eba-praktiline. Seepärast tarvitatakse siin pisut kumerat toru, nagu näidatud joonisel 109. Loodi rõhtasendi puhul

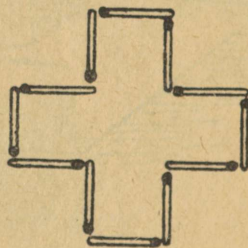


Joon. 109. Puusepa-lood.

asub mull selle keskpaigas, toru kõrgeimas punktis; kui lood on aga kallakil, siis kõrgeim punkt ei ole enam toru keskpaigas, vaid mõnes teises naaberpunktis, ja mull nihkub märgisest toru otsa poole<sup>1</sup>.



Joon. 110.



Joon. 111.

Ülesandeks on määrata, mitu millimeetrit nihkub mull märgisest eemale, kui vesiloodi kallak on pool kraadi ja kumertoru kõverusraadius 1 m.

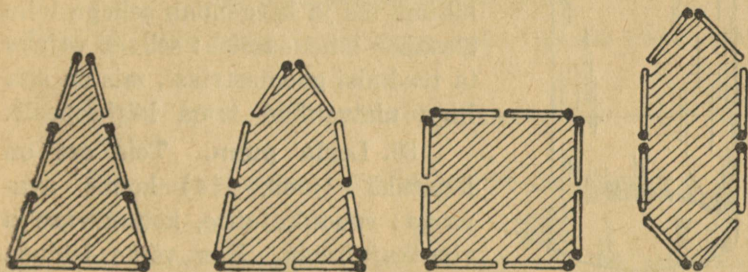
<sup>1</sup> Täpsem oleks öelda: „märgis eemaldub mullist“, sest mull jääb oma kohale, kuid toru koos märgisega libiseb temast mööda.

**75. Tahkude hulk.** See küsimus tundub kahtlemata paljudele liiga naiivsena või vastupidi — liiga kavalana: Mitu tahku on kuuetahulisel pliiatsil?

Enne kui te hakkate lahendama, süvenege tähelepanelikult ülesandesse.

**76. Kuusirp.** Kuusirbi kujund tuleb jaotada (joon. 110) 6 osaks, tõmmates seejuures ainult kaks sirgjoont.

Kuidas seda teha?



Joon. 112. Kuidas koostada 8 tikust kõige suurema pindalaga kujund?

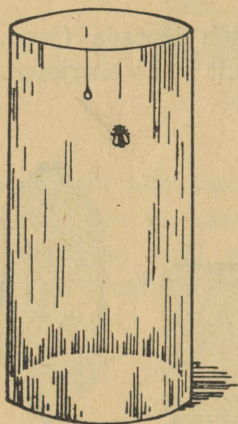
**77. Kaksteist tikku.** 12-st tikust võib koostada risti kujundi (joon. 111), mille pindala võrdub 5 „tikkudest“ ruuduga.

Muutke tikkude asend nii, et kujundi piirjooned hõlmaksid ainult 4 „tikkudest“ ruudu pindala.

Seejuures on mõõteriistade kasutamine keelatud.

**78. Kaheksa tikku.** 8-st tikust võib koostada õige mitmesuguseid kinniskujundeid. Mõned neist on esitatud joonisel 112; nende pindalad on muidugi erinevad. Ülesandeks on koostada 8-st tikust suurima pindalaga kujund.

**79. Kärbe teekond.** Silindrikujulise klaaspurgi siseküljel 3 cm purgi ülemisest servast allpool on näha meetilk. Diametraalselt vastupidises punktis purgi välisküljel istub kärbes (joon. 113).



Joon. 113. Juhatage kärbele teed meetilga juurde.

Näidake kärbele kõige lühem tee meetilgani.

Purgi kõrgus on 20 cm, läbimõõt 10 cm.

Ärge lootke, et kärbes ise leiab lühima tee ja kergendab sellega teile ülesande lahendamise: selleks vajaks ta teadmisi geomeetriast, mis on aga liiga ulatuslikud tema kärbepeale.

**80. Leida punn.** Teie ees on lauatuük (joon. 114) kolme avausega: ruudukujulise, kolmnurkse ja ringikujulisega. Kas võiks leiduda sellekujuline punn, millega saaks sulgeda kõik need avaused?

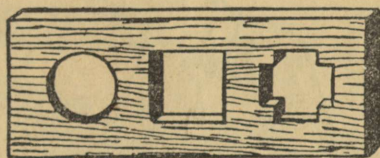
**81. Teine punn.** Kui te saite hakkama eelmise ülesandega, siis võib-olla teil õnnestub leida punn ka joonisel 115 näitatud avaustele?

**82. Kolmas punn.** Lõpuks veel üks samalaadne ülesanne: kas võib olla ühist punni kolmele joonisel 116 kujutatud avausele?



Joon. 114. Leidke ühine punn neile kolmele avausele.

83. Viiekopikaline läbi pista. Varustage end kahe käibeloleva mündiga: 5-kopikalise ja 2-kopikalisega. Paberilehele joonistage täpselt 2-kopikalise suurune ket-take ja lõigake see hoolikalt välja.



Joon. 115. Kas nende kolme avause jaoks võib olla ühist punni?

Mis te arvate? Kas viiekopikaline mahub sellest ava-  
usest läbi?

Siin pole sissevedamist: ülesanne on tõepoolest geo-  
meetriline.

84. Torn kõrgus. Teie linnas on vaatamisväär-  
sus — kõrge torn, mille kõrgust te aga ei tea. Kuid teil



Joon. 116. Kas saab nende kolme avause jaoks valmistada  
ühist punni?

on postkaart ülesvõttega tornist. Kuidas saate seda üles-  
võtet kasutada torni kõrguse määramisel?

85. Sarnased kujundid. See ülesanne on määratud  
neile, kes teavad, mis on geomeetriline sarnasus. Üles-  
andeks on vastata kahele järgmisele küsimusele:

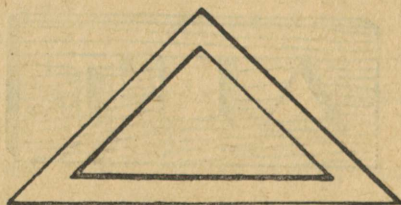
1. Kas joonestuskolmnurga kujundis (joon. 118) on väline ja sisemine kolmnurk sarnased?



Joon. 117.

2. Kas raamil (joon. 119) on väline ja sisemine nelinurk sarnased?

86. Traadi vari. Kui kaugemale ulatub ruumis päikese-



Joon. 118. Kas väline ja sisemine kolmnurk on sarnased?

paistelisel päeval 4-millimeetrilise läbimõõduga telegraafitraadi täisvari?

87. Telliskivike. Ehitustellis kaalub 4 kg. Kuipalju kaalub samast materjalist mängutellis, mille kõik mõõdud on 4 korda väiksemad?

88. Hiiglane ja kääbus. Mitu korda (umbes) on 2 m pikkune hiiglane 1 meetri pikkusest kääbusest raskem?



Joon. 119.



Joon. 120.

89. Kaks arbuusi. Müügil on kaks erineva suurusega arbuusi. Üks  $\frac{1}{4}$  võrra teisest laiem, kuid maksab  $1\frac{1}{2}$  korda rohkem. Kumb neist on kasulikum osta (joon. 120)?

**90. Kaks melonit.** Müügil on kaks ühteliiki melonit. Ühe ümbermõõt on 60, teisel 50 cm. Esimene on teisest  $1\frac{1}{2}$  korda kallim. Kumb melon on kasulikum osta?

**91. Kirss.** Kirsi lihakiht kivi ümber on niisama paks kui kivi ise. Oletame, et kirss ja kirsikivi mõlemad on kerakujulised. Kas suudate peast arvutada, mitu korda on kirsi lihaosa ruumala kirsikivi omast suurem?

**92. Eiffeli torni mudel.** 300 m kõrge Eiffeli torn Pariisis on tervikuna rauast, mida kulus selleks umbes 8 000 000 kg. Ma tahan tellida selle kuulsa torni täpse mudeli, mis kaaluks ainult 1 kg.

Kui kõrge peab see olema? Kas teeklaasist kõrgem või madalam?

**93. Kaks kastrulit.** On kaks ühekujulist ja ühepak-suste seintega vasest kastrulit. Esimene on 8 korda teisest mahukam.

Mitu korda on esimene teisest raskem?

**94. Pakases.** Väljas pakases seisavad täiskasvanu ja laps, mõlemad on ühtemoodi rõivastatud.

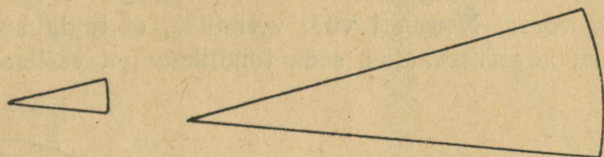
Kumb neist tunneb rohkem külma?

**95. Suhkur.** Kumb on raskem: kas klaasitäispeen-suhkrut või samasugune klaasitäis tükeldatud suhkrut?

#### Keerdülesannete 72—95 lahendused.

72. Esimesel pilgul näib, nagu ei kuuluks see ülesanne üldse geomeetriasse. Kuid selles ju seisnebki selle teaduse valdamine, et osata avastada ülesande geomeet-riline alus seal, kus see on maskeeritud kõrvaliste üksik-asjadega. Meie ülesanne on oma olemuselt absoluutselt geomeetriline; seda ei saa lahendada geomeetriat tund-mata.

Niisiis, miks kulub vankri esimene telg rohkem kui tagumine? Kõigil on teada, et esimesed rattad on tagumistest väiksemad. Ühel ja samal vahemaal teeb väiksem ratas rohkem pöördeid kui suurem: väiksemal rattal on väiksem übermõõt, seepärast mahub ta antud pikkusele rohkem kordi. Arusaadavalt teevad vankri esi-



Joon. 121.

mesed rattad igakordsel sõidul rohkem pöördeid kui tagumised, suurem pöörete arv aga kulutab telge muidugi ka rohkem.

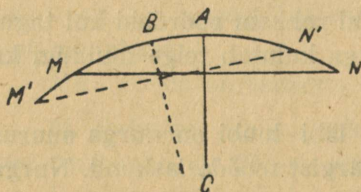
73. Kui te oletate, et läbi luubi on nurga suurus  $1\frac{1}{2} \times 4 = 6^\circ$ , siis olete küll märgist mööda lasknud. Nurga suurus läbi luubi vaadates ei muutu sugugi. Tõsi, nurka mõõtev kaarjoon suureneb kahtlemata, kuid samapalju kordi suureneb siis ka selle kaarjoone raadius ja kesknurga suurus jääb endiseks. Joonis 121 selgitabki selle.

74. Silmitsege joonist 122, kus MAN on vesiloodi kaare algseis, M'BN' — uus asend, kusjuures kõõl M'N' moodustab kõõluga MN nurga  $\frac{1^\circ}{2}$ . Enne punktis A asetsev mull jäi samasse punkti, kuid kaare MN keskoht nihkus punkti B. On tarvis arvutada kaare AB pikkus, kui selle raadius on 1 m ja kaare suurus kraadides  $\frac{1^\circ}{2}$  (see järeldub perpendikulaarhaarade kongruentsusest teravnurkadega).

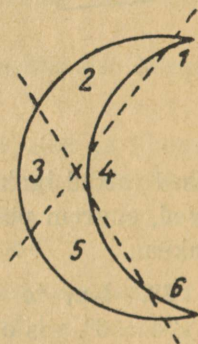
Arvutus pole keeruline. Terve ringjoone pikkus 1 m (ehk 1000 mm) raadiusega võrdub  $2 \times 3,14 \times 1000 = 6280$  mm. Kuna ringjoones on  $360^\circ$  ehk 720 poolkraadi, siis saame ühe poolkraadi pikkuse

$$6280 : 720 = 8,7 \text{ mm.}$$

Mull nihkub märgisest (õigemini — märgis nihkub mullist) eemale ligikaudu 9 mm — peagu terve sentimeetri võrra. Kergesti võib veenduda, et mida suurem on toru kõverusraadius, seda tundlikum on vesilood.



Joon. 122.

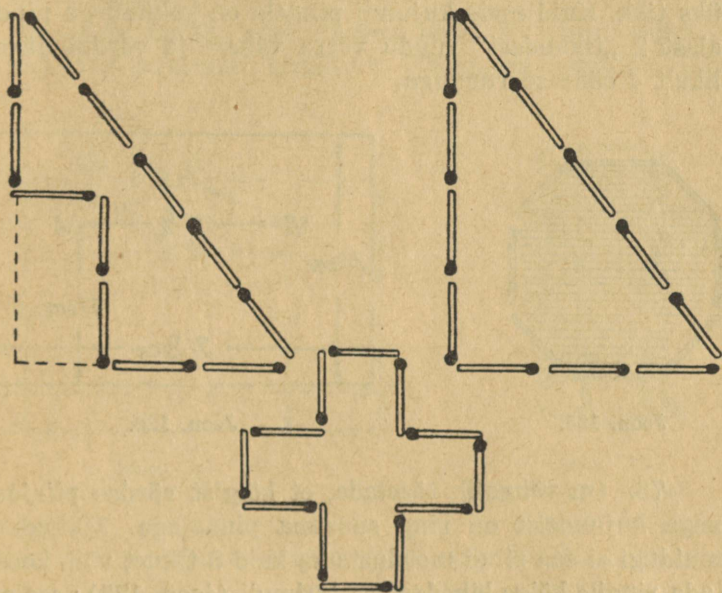


Joon. 123.

75. See ülesanne pole naljategemiseks, ta avastab hariliku sõnatarvitamise ekslikkuse. „Kuuetahtsel“ pliiatsil ei ole 6 tahku, nagu tõenäoliselt oletab enamik. Teritamata pliiatsil on üldse 8 tahku: kuus külgmist ja veel kaks väikest „otsmist“ tahku. Oleks sellel tõelikult kuus tahku, siis oleks see hoopis teisekujuline — nelinurkse lõikepinnaga prussike.

Tavaliselt on väga levinud harjumus lugeda prismal ainult külgmisi tahke, unustades põhjad. Paljud ütlevad:

kolmetahuline prisma, neljatahuline prisma jne., sellal kui peaks ütlema kolmnurkne, nelinurkne jne. prisma tema põhja kuju järgi. Kolmetahulist prisma, s. t. prisma kolme tahuga pole üldse olemaski.



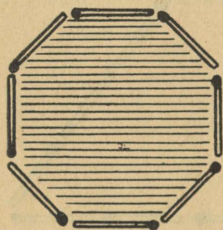
Joon. 124.

Seepärast on õigem nimetada ülendes käsitletud pliiatsit mitte kuuetaahuliseks, vaid kuuenurkseks.

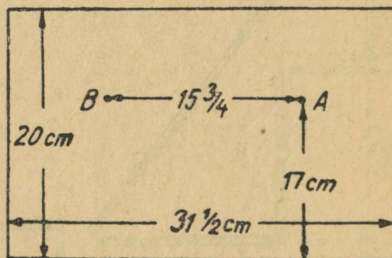
76. Tuleb toimida nii, nagu näidatud joonisel 123. Saadakse 6 osa, mis näitlikkuse mõttes on nummerdatud.

77. Tikud tuleb asetada, nagu on näidatud joonisel 124; kujundi pindala võrdub „tikkudest“ ruudu

neljakordse pindalaga. Kuidas selles veenduda? Täiendame mõttes oma kujundi kolmnurgaks. Siis saame täisnurkse kolmnurga, mille alus on võrdne 3 ja kõrgus 4 tikuga<sup>1</sup>. Selle pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega:  $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$  ruuduga, mille iga külg on üks tikk. Kuid meie kujundi pindala on kolmnurga pindalast 2 „tikkudest“ ruudu võrra vähem ja võrdub järelikult 4 säärase ruuduga.



Joon. 125.



Joon. 126.

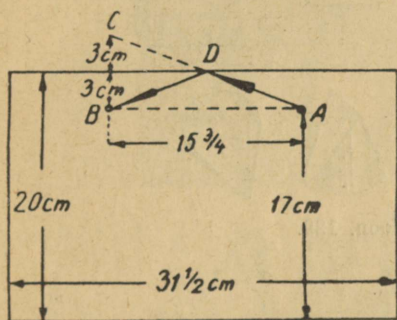
78. On võimalik tõestada, et kõigist võrdse piirjoonega kujundeist on ring suurima pindalaga. Tikkudest muidugi ei saa ringi moodustada, kuid 8 tikust võib koostada ringile kõige lähedasema kujundi (joon. 125): see on korrapärane kaheksanurk. See kujund rahuldab meie ülesande nõude: tal on suurim pindala.

79. Ülesande lahendamiseks kerime silindrikujulise purgi külgpinna lahti tasaseks kujundiks: me saame püstiküliliku (joon. 126), mille kõrgus on 20 cm, alus aga võrdub purgi ümbermõõduga, s. t.  $10 \times 3\frac{1}{2} = 31\frac{1}{2}$  cm

<sup>1</sup> Nn. „Pythagorase lauset“ tundvad lugejad saavad aru, miks võib kindlasti väita, et siin moodustuv kolmnurk on täisnurkne, s. o.  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .

(veidi vähem). Märgive sel püstkülikul kärbse ja meetilga asukohad. Kärbes on alusest 17 cm kaugusel asetsevas punktis A; meetilk aga samal kõrgusel punktis B, purgi poole übermõõdu kaugusel punktist A, s. t.  $15\frac{3}{4}$  cm kaugusel.

Et leida kohta, kust kärbes peab üle purgi serva ronima, me toimime järgmiselt. Tõmbame punktist B



Joon. 127.



Joon. 128.

Kärbse lühim tee meetilgani.

(joon. 127) sirgjoone täisnurga all püstiküliku ülemise servani ja pikendame seda samasuure lõigu võrra: saame punkti C. Selle punkti ühendame sirgjoonega punktist A. Punkt D ongi see koht, kust kärbes peab ronima purgi siseküljele ja tee ADB osutub lühimaks.

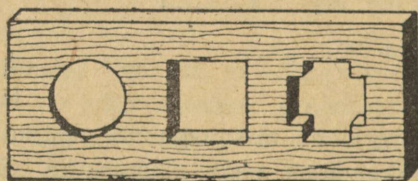
Leides lühima tee lahtikeritud püstkülikul, rullime selle jälle silindriks. Nii saame teada, kuidas peab jooksuma kärbes, et jõuda kiiremini meetilgani (joon. 128).

Kas kärbsed niisugusel juhul valivad säärase tee, ma ei tea. Võib-olla jookseb kärbes tõesti haistmisest juhitud mooda lühimat teed, kuid see on siiski väheusutav: selleks pole haistmine küllalt täpne aisting.

80. Antud juhuks vajalik punn on kujutatud joonisel 129. Me näeme, et ühesuguse punniga võib tõepoolest sulgeda nelinurkse, kolmnurkse ja ringikujulise avause.



Joon. 129.



Joon. 130.

81. Ka joonisel 130 esitatud ringikujulisele, nelinurksele ja ristikujulisele avausele leidub ühine punn, mis on kujutatud kolmes asendis.

82. Esineb ka säärane punn, mida võite näha kolmest küljest joonisel 131.

(Äsjakäsitletud ülesandeid tuleb sageli lahendada joonestajatel, kes peavad kolme „projektsiooni“ abil määrama kindlaks mingi masinaosa kuju.)

83. Nii kummaline kui see ka ei ole, on täiesti võimalik 5-kopikaline läbi pista nii väikesest avausest.

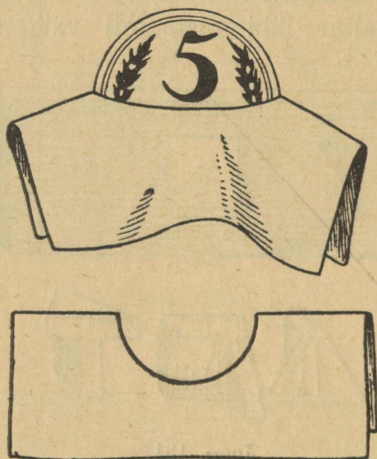


Joon. 131.

Tuleb ainult õigesti peale hakata. Paber murtakse nõnda kahekorra, et ümmargune avaus venib sirgeks praoks (joon. 132): Sellest praost mahubki 5-kopikaline läbi.

Geomeetriline arvutus aitab selgitada seda esimesel pilgul nii keerulisena näivat trikki. 2-kopikalise mündi läbimõõt on 18 mm; selle ümbermõõt on kergesti välja arvutatav ja võrdub 56 mm-ga (jäägiga). Ilmselt peab sirge praost olema kaks korda väiksem avause ümbermõödust, järelikult 28 mm. Seejuures on 5-kopikalise läbimõõt aga ainult 25 mm; seega, võttes arvesse isegi mündi paksuse ( $1\frac{1}{2}$  mm), mahub 5-kopikaline täpselt läbi 28-millimeetrilise praost.

84. Selleks, et ülesvõtte järgi määrata torni kõrgus looduses, tuleb eelkõige ülesvõttel võimalikult täpselt mõõta torni kõrgus ja tema põhja laius. Kui oletada, et torni kõrgus on ülesvõttel 95 mm ja põhja laius 19 mm, ja mõõtes torni põhja laiuse looduses leidsite, et see on



Joon. 132.

14 m, siis on teil vajalikud andmed käes ja te võite edasi arutleda.

Torni ülesvõtte ja selle tõelised piirjooned looduses on geomeetriliselt teineteisega sarnased. Järelikult, niimitu korda, kui torni kõrgus on ülesvõttel suurem põhja laiusest, niimitu korda on ka torni kõrgus suurem põhja laiusest looduses. Esimene suhe on  $95 : 19$ , s. o. 5; siit järeldate, et torni kõrgus on põhja laiusest 5 korda suurem ja võrdub looduses  $14 \times 5 = 70$  m.

Seega on torni kõrgus 70 m.

Kuid seejuures tuleb veel märkida, et ülesvõtte järgi torni kõrguse määramiseks ei kõlba iga foto, vaid ainult niisugune, kus proportsioonid ei ole moonutatud, nagu seda võib juhtuda vilumuseta päevapiltnikkudega.

85. Sageli vastatakse mõlemale ülesandes esitatud küsimusele jaatavalt. Kuid tegelikult on sarnased ainult kolmnurgad; väline ja seesmine nelinurk raami kujundis ei ole sarnased. Kolmnurkade sarnasuseks piisab nurkade võrdsusest; sest kui sisemise kolmnurga küljed on paralleelsed välise kolmnurga külgedega, siis on need kujundid



Joon. 133.

sarnased. Kuid teiste hulknurkade sarnasuseks ei piisa ainult nurkade võrdsusest (või ainult külgede paralleelsusest): nõutav on veel hulknurkade külgede proportsionaalsus. Ainult ruutude ja üldse rombide (kaldruutude) puhul on see maksev raami välise ja sisemise nelinurga kohta. Kõigil teistel juhtudel ei ole välise nelinurga küljed proportsionaalsed sisemise nelinurga külgedega ja järelikult pole ka kujundid sarnased. Sarnasuse puudumine ilmneb laialiistuliste täisnurksete raamide juures, nagu joonisel 133. Vasakpoolse raami väliskülgede suhe on  $2:1$ , sisekülgedel aga —  $4:1$ . Parempoolse raami väliskülgedel  $4:3$ , sisekülgedel  $2:1$ .

86. Paljud üllatuvad, et selle ülesande lahendamiseks vajatakse andmeid astronoomiast: Päikese kaugust Maakerast ja Päikese läbimõõtu.

Ruumi langeva traadi täisvarju pikkus määratakse joonisel 134 näidatud geomeetrilise kujutisega. Nagu näete, on vari niimitu korda pikem traadi läbimõõdust, kui mitu korda vahemaa Maakeralt Päikeseni (150 000 000 km) on suurem Päikese läbimõõdust (1 400 000 km). Ümmardatult on see suhe 115. Tähendab, traadist ruumi langeva täisvarju pikkus on

$$4 \times 115 = 460 \text{ mm} = 46 \text{ cm.}$$

Täisvarju tähtsusetu pikkusega seletub ka see, et vari ei ole nähtav maapinnal ja majade seintel; need nõr-



Joon. 134.

gad joonekesed, mis me suudame eraldada, ei ole täisvarjud, vaid poolvarjud.

Selliste ülesannete teisele lahendusviisile viidati keerdülesande nr. 8 vaatlemisel.

87. Vastus, et mängutelliskivike kaalub 1 kg, s. t. ainult neli korda vähem, on jäme eksimus. Telliskivike ei ole päristellisest mitte ainult neli korda lühem, vaid ka neli korda kitsam ja lisaks veel neli korda õhem, mistõttu on selle ruumala ja kaal  $4 \times 4 \times 4 = 64$  korda väiksem. Järelikult on õige vastus järgmine:

mängutelliskivike kaalub  $4000 : 64 = 62,5$  grammi.

88. Nüüd te olete juba selle ülesande õigeks lahendamiseks ette valmistatud. Kuna inimeste keha kujud on enam-vähem sarnased, siis on kaks korda pikema kasvuga inimese keha ruumala mitte kaks, vaid kaheksa

korda suurem. Tähendab, meie hiiglane on kääbusest 8 korda raskem.

Kõige pikem hiiglane, kellest on säilinud teateid, oli üks 275 cm pikune Elsassi elanik, keskmise kasvuga inimesest terve meetri võrra pikem. Väikseima kääbuse pikkus oli alla 40 cm, s. t. hiiglasest-elsaslasest ümmarguselt 7 korda lühem. Seetõttu, kui oleksite asetanud ühele vaekausile hiiglasel-elsaslase, oleksite pidanud asemata tasakaaluks teisele kausile terve jõugu kääbuseid s. o.  $7 \times 7 \times 7 = 343$  kääbust.

89. Suurema arbuusi ruumala ületab väiksema ruumala peaeagu kaks korda, sest

$$1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} = \frac{125}{64}.$$

Tähendab, kasulikum on osta suur arbuus; see on ainult poolteist korda kallim, kuid söödavat ainet on selles kaks korda rohkem.

Kuid miks küsivad müüjad säärase arbuuside eest tavaliselt mitte kaks, vaid poolteist korda rohkem? See on seletatav lihtsalt enamiku müüjate nõrkade teadmisega geomeetriast. Muide, ka ostjad ei ole selles tugevad ja loobuvad seepärast sageli kasulikkudest ostudest. Võib kindlasti väita, et kasulikum on osta suuri arbuuse kui väikesi, sest suuremad on alati hinnatud alla nende tõelise väärtuse, kuid suurem osa ostjaid ebaleb selles. Samal põhjusel on alati kasulikum osta suuri mune väikeste asemel, kui nad ainult pole hinnatud kaalu järgi.

90. Übermõõdud suhtuvad omavahel nagu läbi mõõdud. Kui ühe meloni übermõõt on 60 cm, teisel 50 cm, siis on nende läbimõõtude suhe  $60 : 50 = \frac{6}{5}$ , nende ruumala suhe on aga

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} = 1,73.$$

Kui suurem melon hinnatakse vastavalt selle ruumalale (või kaalule), siis peaks ta olema 1,73 korda väiksemast kallim; s. t. 73%. Kuid selle eest küsitakse ainult 50% rohkem. Ilmselt on kasulikum osta suurem melon.

91. Ülesandest selgub, et kirsi läbimõõt on kivi läbimõödust 3 korda suurem. Tähendab, kirsi ruumala on kivi ruumalast  $3 \times 3 \times 3$ , s. t. 27 korda suurem; kirsi ruumalast langeb kivile  $\frac{1}{27}$  ja lihaosale ülejäänud  $\frac{26}{27}$ . Järelikult on kirsi lihaosa kivist ruumalaliselt 26 korda suurem.

92. Kui mudel on tornist 8 000 000 korda kergem ja mõlemad on tehtud samast metallist, siis peab mudeli ruumala olema 8 000 000 korda väiksem torni ruumalast. Me teame juba, et sarnaste kehade ruumalad suhtuvad nagu nende kõrguste kuubid. Järelikult peab mudel olema tornist 200 korda madalam, sest

$$200 \times 200 \times 200 = 8\,000\,000.$$

Torni kõrgus on 300 m. Seega peab mudeli kõrgus olema

$$300 : 200 = 1\frac{1}{2} \text{ m.}$$

Mudel peaks olema peaegu inimese kõrgune.

93. Mõlemad kastrulid on geomeetriliselt sarnased kehad. Kui suurem kastrul on 8 korda mahukam, siis on tema joonmõõdud 2 korda suuremad: ta on 2 korda kõrgem ja 2 korda laiem mõlemas suunas. Kui ta on aga 2 korda kõrgem ja laiem, siis peab ta pind olema  $2 \times 2$ , s. o. 4 korda suurem, sest sarnaste kehade pinnad suhtuvad nagu joonmõõtude ruudud. Kui kastrulid on ühesuguse paksusega, siis sõltub nende kaal pinna suurus. Siit me saame vastuse ülesande küsimusele: suurem kastrul on väiksemast 4 korda raskem.

94. See esimesel pilgul sugugi mitte matemaatilisena näiv ülesanne lahendatakse ometi sama geomeetriselise arutluse abil, mille me rakendasime eelmises ülesandes.

Enne kui hakata seda lahendama, vaatleme sellega sarnanevat, kuid mõnevõrra lihtsamat ülesannet.

Kaks katelt (või kaks teemasinat), suur ja väike, materjalilt ja kujult ühesugused, on täidetud keeva veega. Kumb jahtub nendest kiiremini?

Asjad jahtuvad peamiselt pinna kaudu: järelikult jahtub kiiremini see katel, mille iga ruumalauhiku kohta tuleb suurem pind. Kui üks katel on  $n$  korda kõrgem ja laiem teisest, siis on ta pind  $n^2$  ja ruumala —  $n^3$  korda suurem; suuremal katlal tuleb ühe pinnauhiku peale  $n$  korda suurem ruumala. Järelikult peab väiksem katel jahtuma kiiremini.

Samal põhjusel peab ka pakases seisev laps rohkem külmetama kui samasuguselt rõivastatud täiskasvanu: iga keha kuupsentimeetris tekkiv soojuste hulk on mõlematel umbes võrdne, kuid igale kuupsentimeetrile vastav jahtuv keha pind on lapsel suurem kui täiskasvanul.

Selles ongi põhjus, miks sõrmed, varbad või nina külmetavad tugevamini ja külmuvad sagedamini kui teised kehaosad, millede pind võrreldes nende ruumalaga ei ole nii suur.

Lõpuks kuulub siia ka järgmine ülesanne:

Miks süttib peerg kiiremini kui jäme puuhalg, mille küljest ta on lõigatud?

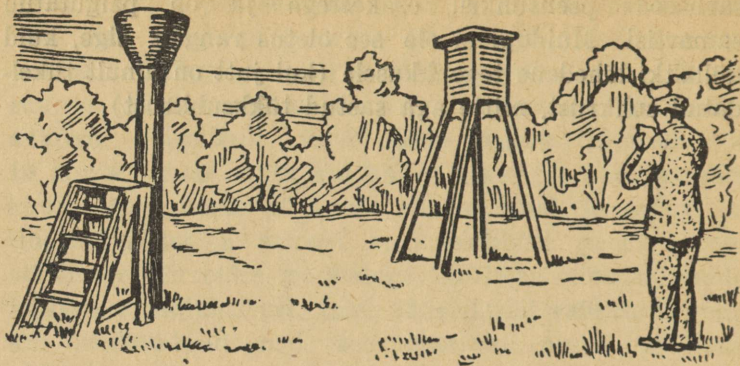
Kuna soojenemine sünnib pinna kaudu ja levib tervele kehale, siis tuleb võrrelda peeru pinda ja ruumala (näiteks, ristlõiget) samasuguse pikkuse ja ristlõikega puuhalu pinna ja ruumalaga, et määrata mõlemal

juhul vastav pinnasuurus igale puidu kuupsentimeet-  
rile. Kui halg on peerust 10 korda jämedam, siis  
on halu külgpind peeru pinnast samuti 10 korda  
suurem, kuid ruumala on peeru ruumalast 100 korda  
suurem. Järelikult tuleb igale peeru pinnaühikule  
10 korda vähem puitu kui halul: ühesugune soojusehulk  
kuumendab peerus 10 korda vähem ainet, — sellest on  
tingitud ühest ja samast soojuseallikast peeru kiirem  
süttimine võrreldes puuhaluga. (Silmas pidades puidu  
halba soojusejuhtivust, tuleb tähendatud vahekordi võtta  
kui umbkaudseid; nad iseloomustavad ainult protsessi  
üldkäiku, mitte aga selle kvantitatiivsust).

95. Väga keerukana näiv käesolev ülesanne lahendub  
kaunis lihtsalt, kui veidi pingutada kujutlusvõimet. Liht-  
sustamiseks oletame, et tükeldatud suhkrutükid on läbi-  
mõõdus peensuhkru osakestest 100 korda suuremad.  
Kujutlegem nüüd, et kõik peensuhkru osakesed suureneksid  
läbimõõdus 100 korda. Klaasi mahtuvus suureneks siis  
 $100 \times 100 \times 100$ , s. t. miljon korda; niisamapalju kordi  
suureneks ka klaasisoleva suhkru kaal. Võtame mõttes  
ühe normaal-klaasitäie seda suurendatud peensuhkrut,  
s. t. 1 miljondiku hiigelklaasi sisust. Teadagi kaalub  
see võetud kogus niisama palju kui harilik klaasitäis  
tavalist peensuhkrut. Kuid mida kujutab siis endast see  
suurendatud peensuhkur? Mitte midagi muud kui tükel-  
datud suhkrut. Tähendab, üks klaasitäis tükeldatud suhk-  
rut kaalub niisamapalju kui klaasitäis peensuhkrut.

Kui me oleksime sajakordse suurendamise asemel  
peensuhkrut suurendanud kuuekümne- või mingi teise  
arvu kordselt, siis poleks see asja põrmugi muutnud.  
Arutluse tuum seisneb ainult selles, et tükeldatud suhkru-  
tükke vaadeldakse kui kehi, mis on geomeetriliselt

sarnased peensuhkru osakestega ja on paigutatud samaviisi. Muidugi ei ole see oletus rangelt õige, kuid küllaltki lähedane tegelikkusele (kui jutt on ainult tükel-datud suhkrust, mitte aga saetud tükksuhkrust).



Kümnnes peatükk.

## Vihma ja lume geomeetria.

**96. Sademetemõõtja.** On kombeks pidada Leningradi väga sademeterohkeks linnaks, palju sademeterikamaks kui näiteks Moskvat. Ometi räägivad õpetlased teist juttu: nad väidavad, et Moskvas annavad sademed aastas rohkem vett kui Leningradis. Kust nad seda teavad? Kas on siis võimalik mõõta, kuipalju vett annavad sademed?

See tundub raske ülesandena, kuid te võite ka ise õppida tegema vihma arvestusi. Ärge arvake, et selleks on tarvis koguda kõik vihmana maa peale sadav vesi. Piisab selle veekihi kõrguse mõõtmisest, mis tekib maa peale, kui sadanud vesi ei valguks laiali ega imbuks maasse. Seda aga teostada pole sugugi raske, sest vihmajärgu ajal langeb vesi kogu paikkonnale ühtlaselt: pole võimalik, et ühele peenrale langeks rohkem vett kui teisele. Tarvitseb vaid mõõta vihmavee kihi kõrgus mingil

väiksel pindalal ja me saame teada veekihi kõrguse kogu vihma käes olnud maa-alal.

Arvatavasti taipate juba nüüd, kuidas tuleb toimida, et mõõta vihmavee kihti. Peab valima vähemalt ühe väikese pindala, kus vesi ei imbuks maasse ega voolaks laiali. Vihmavee kogumiseks sobib iga katteta nõu, näiteks ämber. Kui teil on püstkülgedega ämber (mille ava läbimõõt võrdub põhja läbimõöduga), asetage see lahtisele kohale vihma kätte<sup>1</sup>. Kui vihm on lakanud, mõõtke ämbrisse kogunenud vee kõrgus, ja teil ongi kõik, mida vajate arvutuseks.

Vaadeldgem üksikasjalisemalt seda omatehtud „sademetemõõtjat“. Kuidas saab mõõta ämbris veetaseme kõrgust? Kas asetada sellesse mõõtjoonlaud? Kuid see on kohane ainult siis, kui ämbris on palju vett. Kui aga vee kiht on, nagu tavaliselt ikka juhtub, ainult 2—3 cm või isegi millimeetreid, siis ei õnnestu sel kombel kuigi täpselt mõõta veekihi kõrgust. Siin aga on tähtis iga millimeeter, isegi iga selle kümnendik. Mis siis teha?

Kõige otstarbekohasem on vesi valada kitsamasse klaasnõusse. Säärases nõus on vee kiht kõrgem ja läbi klaasseinte paistab hästi vee tase. Te taipate, et kitsas nõus mõõdetud vee kõrgus ei ole meile vajaliku veekihi kõrguseks. Kuid on lihtne ühed mõõtmed teisteks ümber arvutada. Oletagem, et kitsa nõu põhja läbimõõt on kümme korda väiksem meie ämber-sademetemõõtja põhja läbimõödust. Kitsa nõu põhja pindala on siis ämbri põhja pindalast  $10 \times 10$ , s. t. 100 korda väiksem. Arusaadavalt peab ämbrist valatud veeseis kitsas klaasnõus

---

<sup>1</sup> Ämbri peab asetama maapinnast kõrgemale, et sinna ei satuks veepritsmeid, mis paiskuvad laiali vihmapiiskade kukkudes vastu maad.

olema 100 korda kõrgem. Tähendab, kui ämbris oli vihmavee kihi kõrgus 2 mm, siis kitsas klaasnõus on sama vee tase 200 mm, s. t. 20 cm.

Sellest arvestusest nähtub, et klaasnõu, võrreldes ämber-sademetemõõtjaga, ei tohi olla väga kitsas, sest siis peaks ta olema liiga kõrge. On küllalt, kui klaasnõu on ämbrist umbes 5 korda kitsam, siis on selle põhjapindala 25 korda väiksem ämbri põhja pindalast ja sinna kallatud vee tase tõuseb niisamapalju kordi. Igale ämbris oleva veekihi kõrguse millimeetrile vastab 25-mm-line veekõrgus kitsas nõus. Seepärast on otstarbekohane kleepida klaasnõu välisküljele pabeririba ja see jagada 25-millimeetristeks osadeks ning need nummerdada 1, 2, 3 jne. Siis, vaadates vee kõrgust kitsas nõus, teate otsekohe ilma ühegi arvutusega veekihi kõrguse ämber-sademetemõõtjas. Kui kitsa nõu läbimõõt on ämbri läbimõõdust mitte 5, vaid, ütleme, 4 korda väiksem, siis tuleb jaotused klaasnõu küljele teha iga 16 mm järel jne.

Vee valamine ämbrist üle ääre kitsasse nõusse on väga tülikas. Parem on puurida ämbri küljesse väike ümmargune auk ja sellesse panna klaastoruke korgiga; palju sobivam on valada vett läbi selle.

Nii on teil juba seadis vihmaveekihi kõrguse mõõtmiseks. Muidugi ei saa ämbri ja omatehtud mõõtmisnõuga arvutada vihmavee hulka nii täpselt kui tõelise sademetemõõtja ja mõõteklaasiga, mida kasutavad meteoroloogiajaamad. Kuid siiski aitab see lihtsaim ja odavaim seadis teil teha palju õpetlikke arvutusi.

Nende arvutuste juurde asumegi otsekohe.

**97. Kui palju sadas vihma?** Võtame 40 m pika ja 24 m laia juurviljaia. Sadas vihma, ja te tahate teada,

kuupalju vett langes üldse juurviljaaeda. Kuidas seda arvutada?

Muidugi tuleb alustada vihmaveekihi kõrguse määramisega: seda arvutamata ei saa teha ühtegi muud arvutust. Oletagem, et teie omatehtud sademetemõõtja näitas 4 mm kõrguse vihmaveekihi. Arvutame nüüd välja, mitu kuupsentimeetrit vett oleks juurviljaaia igal ruutmeetril, kui vesi poleks imbunud maasse. Üks m<sup>2</sup> on 100 cm pikk ja on 100 cm lai; sellel asub 4 mm ehk 0,4 cm kõrge veekiht. Tähendab, niisuguse veekihi ruumala on

$$100 \times 100 \times 0,4 = 4000 \text{ cm}^3.$$

Te teate, et 1 cm<sup>3</sup> vett kaalub 1 g. Järelikult, sadas igale juurviljaaia m<sup>2</sup>-le 4000 g ehk 4 kg vihma.

Juurviljaaia kogupindala on

$$40 \times 24 = 960 \text{ m}^2.$$

Tähendab, sellele langes vihmana vett

$$4 \times 960 = 3840 \text{ kg.}$$

s. o. pisut vähem kui 4 tonni.

Võrdluseks võite veel arvutada, mitu ämbritäit vett oleks teil tulnud tuua juurviljaaeda, et kastmisega anda niisamapalju vett, kuupalju sadas vihma. Harilikku ämbresse mahub umbes 12 kg vett. Järelikult sadas vihma

$$3840 : 12 = 320 \text{ ämbritäit.}$$

Nii oleks tulnud teil valada juurviljaaiale üle 300 ämbritäie vett, et asendada võib-olla ainult veerand tundi kestnud vihmasadu.

Kuidas avaldub arvudes tugev ja kerge vihm? Selleks on tarvis määrata nn. „sademete tugevus“, s. t. mitu millimeetrit vett (otsustudes veekihi järgi) sajab ühe

minuti jooksul. Kui igas minutis sajab vihma keskmiselt 2 mm, siis on see erakordselt tugev vihma-  
valing. Kui sügisel piserdub peent uduvihma, siis kogu-  
neb 1 mm vett ühe terve tunni või veel pikema aja  
jooksul.

Nagu näete, on võimalik mõõta vihma kujul maa-  
pinnale sadavat veehulka, kusjuures see toiming pole  
isegi mitte väga keeruline. Veel enam: te võite soovi kor-  
ral isegi umbkaudu kindlaks määrata, mitu üksikut  
piiska sajab vihma ajal<sup>1</sup>. Tegelikult kaalub hariliku  
vihma 12 piiska 1 gr. Tähendab, ülalmainitud vihmaga  
sadas igale juurviljaia m<sup>2</sup>-le

$$4000 \times 12 = 48\,000 \text{ vihmapiiska.}$$

Edasi pole enam raske arvutada, mitu vihmapiiska  
sadas kogu juurviljaiaiale. Kuid piiskade hulga arvutust  
võib teha ainult huvi pärast, kasu pole sellest mingi-  
sugust. Me mainisime seda ainult selleks, et näidata, kui-  
das esimesel pilgul võimatutena näivaid arvutusi võib  
siiski teostada, kui on oskust nende teostamisele asu-  
miseks.

**98. Kuidas mõõta lund?** Aastane sademete  
hulk Maakeral. Me õppisime äsja mõõtma vihma-  
vee hulka. Kuidas aga mõõta vett, mida annab rahe? Täp-  
selt samal viisil. Raheterad sajavad sademetemõõtjasse ja  
sulavad seal; te mõõdate rahest sulanud vee ja saategi  
selle hulga.

Teisiti mõõdetakse aga lumevett. Sel korral sade-  
metemõõtja annaks väga ebatäpsed andmed, sest tuul  
puhub osa ämbrisse sattunud lund sealt uuesti välja.

---

<sup>1</sup> Vihm sajab alati piiskades, ka siis, kui meile näib, nagu  
tuleks seda lausa ojadena.

Lumevee arvutamisel võib läbi saada ka sademetemõõtjata: mõõdetakse puust mõõtlati abil otseselt hoovi, juurviljaaeda või põldu katva lumekihi kõrgus. Et teada saada lume sulamisel tekkiiva veekihi kõrgust, tuleb teha katse: täita ämber sama koheva lumega, lasta sel sulada ja märkida saadud veekihi kõrgus. Sel kombel te võite määrata, mitme millimeetri kõrgune veekiht saadakse igast lumekihi sentimeetrist. Seda teades, pole teil enam raske lumekihi kõrgust arvutada ümber veekihi kõrguseks.

Kui te mõõdate iga päev järjekindlalt soojal aastaajal vihmavee koguse ja lisandate sellele veel talve keskel lumena sadanud vee siis saate teada, kuipalju sademeid sajab üldse aasta jooksul teie paikkonnas. Teatud kohas sademete hulga mõõtmise lõpptulemus on väga tähtis. („Sademeteks“ nimetatakse üldse kõike mahasadvavat vett, langegu see kas vihma, rahe, lume jne. näol.)

Meie Nõukogude Liidu linnades sajab aastas sademeid keskmiselt:

Leningrad .....	47 cm	Astrahan .....	14 cm.
Vologda .....	45 „	Kutaissi .....	179 „
Arhangelsk .....	41 „	Bakuu .....	24 „
Moskva .....	55 „	Sverdlovsk .....	36 „
Kostroma .....	49 „	Tobolsk .....	43 „
Kaasan .....	44 „	Semipalatinsk .....	21 „
Kuibõšev .....	39 „	Alma-Ata .....	51 „
Tškalov .....	43 „	Taškent .....	31 „
Odessa .....	40 „	Jenisseisk .....	39 „
		Irkutsk .....	44 „

Loetletud kohtadest sajab kõige rohkem vett Kutaisis (179 cm), kõige vähem aga Astrahanis (14 cm), seega 13 korda vähem kui Kutaisis. Kuid Maakeral on

kohti, kus sajab palju rohkem kui Kutaiassis. Näiteks leidub Indias koht, mis on sõna tõsises mõttes vihmaveest üle ujutatud: seal sajab aastas 1260 cm ehk 12½ m!

Kord sadas seal ühe öö - p ä e v a jooksul üle 100 cm vihma. Kuid vastupidi leidub ka kohti, kus esineb sademeid veel palju vähem kui Astrahanis: ühes Lõuna-Ameerika piirkonnas, Tšiilis, ei kogune terve aasta jooksul isegi 1 cm sademeid.

Rajoon on põuane, kui sademeid on aastas vähem kui 25 cm. Seal ei saa kunstliku niisutuseta kasvatada teravilja.

Kui te ei ela üheski meie tabelikeses loetletud linnas, või kui teie asukohas ei tööta meteoroloogiajaama, siis tuleb teil endal hakata oma paikkonnas sademeid mõõtma.

Mõõtes kannatlikult aasta läbi, kuipalju vett sajab iga vihma või rahega ja kuipalju vett sisaldab lumi, saate kujutluse, millisel kohal sademete poolest teiste Nõukogude Liidu linnade hulgas asetseb teie linn või asukoht.

On kergesti arusaadav, et mõõtes igal aastal Maakera mitmesugustes kohtades sadanud veehulka, võib nendest arvudest järeldada kogu Maale keskmiselt aastas sadava veekihi kõrguse. Mõõtmistest selgub, et mandri keskmine aasta-sademete hulk on 78 cm. Arvatakse, et ookeani kohal sajab umbes niisamapalju vett, kuipalju sama suurel mandri-maa-alal. Pole raske arvutada, kuipalju vett sajab iga aasta meie planeedile vihma, rahe, lumega jne. Kuid selleks on tarvis teada Maakera pindala suurus. Kui te ei leia kuskilt seda suurust, siis võite selle ise välja arvutada järgmisel viisil:

Nagu teate, on meeter peagu täpselt üks 40-miljon-dik osa Maakera ümbermõõdust. Teiste sõnadega, Maa

ümbermõõt võrdub 40 000 000 m-ga ehk 40 000 km-ga. Iga ringi läbimõõt on umbes  $3\frac{1}{7}$  korda vähem tema ümbermõõdust. Teades seda, leiame oma planeedi läbimõõdu:

$$40\,000 : 3\frac{1}{7} = 12\,700 \text{ km.}$$

Kuna kera pindala leidmiseks kehtib reegel: läbimõõt korrutatud iseendaga ja  $3\frac{1}{7}$ -ga annab kera pindala, siis meie Maakera pindala on  $12\,700 \times 12\,700 \times 3\frac{1}{7} = 509\,000\,000 \text{ km}^2$ .

(Alates resultaadi neljandast numbrist kirjutame ainult nullid, kuna kindlad on ainult selle kolm esimest numbrit.)

Nii on kogu Maakera pindala 509 miljonit  $\text{km}^2$ .

Pöördugem nüüd oma ülesande juurde. Me arvutame, kuipalju on sademeid meie Maakera pinna igal  $\text{km}^2$ -l. Ühele  $\text{m}^2$ -le ehk 10 000  $\text{cm}^2$ -le sajab

$$78 \times 10\,000 = 780\,000 \text{ cm}^3.$$

Ruutkilomeetris on  $1000 \times 1000 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$ .

Järelikult sajab sellele vett

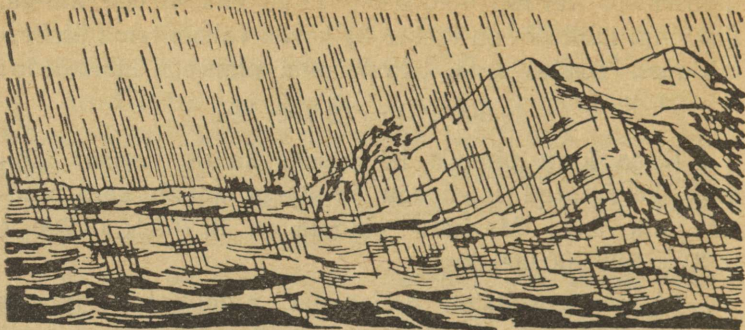
780 000 000 000  $\text{cm}^3$  ehk 780 000  $\text{m}^3$ . Kogu Maakera pinnale sajab aga

$$780\,000 \times 509\,000\,000 = 397\,000\,000\,000\,000 \text{ m}^3.$$

Et muuta  $\text{m}^3$ -d  $\text{km}^3$ -teks, tuleb see jagada  $1000 \times 1000 \times 1000$ , s. t. miljardiga. Saame 397 000  $\text{km}^3$ .

Nii sajab iga aasta õhkkonnast meie planeedi pinnale ümmarguselt 400 000  $\text{km}^3$  vett.

Seega lõpetame oma vestluse vihma ja lume geometriast. Üksikasjalikumalt kõigist siin jutustatust võib lugeda meteoroloogiat käsitlevatest raamatutest.



Üheteistkümmes peatükk.

## Matemaatika ja legend veeputusest.

99. Legend veeputusest. Piiblisse kogutud müto-  
loogiliste legendide hulgas esineb ka lugu sellest, kuidas  
muistsel ajal kogu Maa kõrgeimate mägede tippudeni  
vihmavalingutega üle ujutati. Piibli sõnade järgi jumal  
kord „kahetses, et oli loonud inimese maa peale“, ja  
ütles:

„Ma tahan inimese, keda ma olen loonud, maa pal-  
gelt (s. t. Maakera pinnalt) ära kaotada; niihästi ini-  
mese kui lojuksed, roomajad ja linnud, kes taeva all,  
kaotan ma ära“.

Ainus inimene, keda jumal seejuures tahtis säästa,  
oli vaga Noa. Seepärast jumal hoiatas teda eelseisvast  
maailma hukkumisest ja käskis ehitada mahuka laeva  
(piibli väljenduses „arki“), mille mõõdud olid järgmi-  
sed: „300 küünart olgu laeva pikkus, 50 küünart tema  
laius ja 30 küünart tema kõrgus“. Laev oli kolmekordne.  
Sellel laeval pidid end päästma mitte ainult Noa oma

perekonna ja oma täiskasvanud laste perekondadega, vaid ka kõik maa peal elavate loomade tõud. Jumal käs- kis Noal võtta laevale igast loomaliigist ühe paari koos vajaliku toidutagavaraga pikemaks ajaks.

Kõigi maapealse elusa hävitamisvahendiks valis jumal vihmast tekitatud veepuutuse. Vesi pidi hävitama kõik inimesed ja kõik maapealsete loomade liigid. Pärast uputust pidi Noast ja tema poolt päästetud loomadest tekkima uus inimsugu ja uus loomariik.

„Ja see sündis seitsme päeva pärast“, jutustatakse piiblis, „et uputuse vesi maa peale sai ... Ja vihma sadas maha maa peale 40 ööd ja 40 päeva ... Ja vett sai palju ja see tõstis üles Noa laeva, nõnda et seda kõrgesse tõs- teti maa pealt ... siis võttis vesi üpris võimust maa peal nõnda, et kõik kõrged mäed, mis kõige taeva alla olid, said kaetud; 15 küünart võttis vesi võimust kõrguti ja mäed said kaetud ... Siis heitis kõik liha hinge, kes maa peal liikus. Ja ei jäänud üle kui aga Noa ja need, kes temaga laevas olid“. Piiblitõlge pajatab, et vesi seisis maa peal pärast 40 öö-päevast sadu veel 110 ööd-päeva; peale selle see kadus ja Noa koos kõigi päästetud looma- dega lahkus laevast, et uuesti asustada tühjakslaastatud maad.

Selle legendi puhul me esitame kaks küsimust:

1. Kas on üldse võimalik niisugune vihmavaling, mis kogu Maakeri isegi koos kõrgeimate mäetippudega üle ujutab?

2. Kas võis Noa laev mahutada kõigi maapealsete loomade liigid?

**100. Kas veepuutus võis olla?** Nii see kui ka teine küsimus lahenduvad matemaatika kaasabil.

Kust võis tulla see veeuputusaegne vihmavesi? Muidugi ainult atmosfäärist. Kuhu ta kadus aga pärast seda? Ega siis tervet Maad kattev ookean ei saanud imbuda maasse; mõistagi, et ta meie planeedilt lahkuda ei saanud. Ainus koht, kuhu kogu see vesi võis kaduda, on Maakera atmosfäär: uputusveed võisid ainult auruda ja tõusta Maakera ümbritsevasse õhku. Seal peab see vesi olema veel praegugi. Sellest selgub, et kui kõik praegu atmosfääris olev veeaur muutuks veeks ja sajak maa peale, siis tuleks uuesti üldine veeuputus; vesi kataks taas kõige kõrgemad mäed. Kontrolligem, kas see on võimalik.

Vaatame meteoroloogiat käsitlevast raamatust, kui palju niiskust sisaldab Maakera atmosfäär. Me teame, et ühele ruutmeetrile toetuv õhusamm sisaldab keskmiselt 16 kg veeauru ja mitte kunagi ei sisalda seda üle 25 kg. Arvutame nüüd, kui kõrge oleks veekiht selles õhusambas, kui kogu see aur sajak vihmamana Maakera pinnale. 25 kg, s. t. 25 000 g veeruumala on 25 000 cm<sup>3</sup>. Niisuur oleks selle samba veekihi ruumala, mille põhja pindala on 1 m<sup>2</sup>, s. t. 100 × 100 ehk 10 000 cm<sup>2</sup>. Jagades ruumala põhja pindalaga, saame veekihi kõrguse

$$25\,000 : 10\,000 = 2,5 \text{ cm.}$$

Üle 2,5 cm üleujutus tõusta ei või, sest atmosfääris<sup>1</sup> ei ole rohkem vett. Ja niigi kõrge vesi oleks ainult sel juhul, kui sadav vihm ei imbuks üldse maasse.

---

<sup>1</sup> Paljudes Maakera piirkondades on korraka üle 2,5 cm sademeid; need ei teki mitte ainult selle paikkonna kohal olevast õhust, vaid ka tuulega toodud naaberpaikkondade õhust. Kuid „ülemaailmne“ uputus toimus piibli järgi üheaegselt tervel Maakera pinnal ja üks paikkond ei saanud laenata niisugust teiselt.

See arvutus näitab meile, et kui veeuputus tõesti oleks toimunud, siis oleks vee kõrgus olnud 2,5 cm. Siit on 9 km kõrguse mäe, Mount Everesti tippu veel väga palju maad. Uputuseaegset veekõrgust on suurendatud piibliloos ei vähem ega rohkem kui 360 000 korda!

Seega, kui üldine „uputus“ olekski aset leidnud, siis poleks see üldse olnud uputus, vaid nõrgeim uduvihm, sest sadades 40 ööd-päeva järjest tõusid sademed ainult 25 mm-ni, vähem kui pool millimeetrit ööpäevas. Sügisel annab ühe ööpäeva jooksul sadanud uduvihmgi vett 20 korda rohkem.

**101. Kas Noa laev on võimalik?** Nüüd me vaatleme teist küsimust: kas võidi Noa laeva paigutada kõikide maapealsete loomade liigid?

Arvutagem välja laeva „elamispind“. Piibli järgi see oli kolme-korruseline. Iga korrus oli 300 küünart pikk ja 50 küünart lai. „Küünar“ oli Lääne-Aasia muistsete rahvaste mõõtühik, mis võrdus umbes 45 cm-ga ehk 0,45 m-ga. Tähendab, praegusaja mõõtudes oli iga korruse suurus laevas järgmine:

$$\text{Pikkus: } 300 \times 0,45 = 135 \text{ m.}$$

$$\text{Laius: } 50 \times 0,45 = 22,5 \text{ m.}$$

Põrandapindala:  $135 \times 22,5 = 3040 \text{ m}^2$  (viimane arv on võetud ümmarguselt).

Tähendab, Noa laeva kõige kolme korruse üldine „elamispind“ oli

$$3040 \times 3 = 9120 \text{ m}^2.$$

Kas piisab sellest pindalast kasvõi ainult kogu Maa-kera kõigi imetajate liikide mahutamiseks? Maapealseid imetajate liike on umbes 3500. Noal ei tulnud

mahutada mitte ainult loomi, vaid ka nende söodatagavara 150 päeva kestva uputuse ajaks. Kiskjatele loomadele aga oli tarvis kohta endale ja siis veel neile loomadele, kelledest nad toitused, ning lisaks nende loomade sööda jaoks. Kuid laevas oli iga päästetava loomapaari jaoks keskmiselt ainult

$$9120 : 3500 = 2,6 \text{ m}^2 \text{ pinda.}$$

Niisugusest „elamispiinast“ ilmselt ei piisa, eriti kui arvesse võtta, et paljuliikmeline Noa pere võttis enda alla ka teatava pindala, ja lisaks olid paratamatud ka läbi-pääsud puuride vahel.

Kuid peale imetajate pidi Noa laev andma peavarju veel paljudele väga mitmekesistele väikeloomade liikidele. Nende arv on umbes järgmine:

Linde .....	13 000
Roomajaid .....	3 500
Kahepaikseid .....	1 400
Ämblikulisi .....	16 000
Putukaid .....	360 000

Kui juba ainult imetajatele oleks laev kitsas olnud, siis neile loomadele poleks üldse ruumi jätkunud. Et mahutada kõiki maapealsete loomade liike, oleks Noa laev pidanud olema palju suurem. Kuid isegi piiblis nimetatud mõõtmetega Noa laev oli väga suur laev: tema „veeväljasurve“, nagu ütlevad meremehed, oli 20 000 tonni. Ei ole üldse tõenäolik, et neil kaugetel aegadel, kus laevaehitustehnika oli veel lapsekingades, inimesed oleksid suutnud ehitada säärase mõõtmetega laeva. Ja siiski see polnud veel küllalt suur piibliloos kirjeldatud ülesande täitmiseks. Sest seal oleks pidanud olema terve loomaaed koos söodatagavaraga 5 kuuks!

Lühidalt, piibli legend kogu maailma uputusest ei sobi niivõrdki lihtsa matemaatilise arvutusega, et selles võiks leiduda pisimatki tõenäosuse kübet. Ajendi selleks on arvatavasti andnud mingi kohalik uputus; kõik ülejäänud aga on rikka idamaise kujutluse luul.



Kaheteistkümmes peatükk.

### Kolmkümmend mitmesugust ülesannet.

Ma loodan, et tutvus selle raamatuga ei möödunud lugejast jälgi jätmata, et see polnud talle mitte ainult meelelahutuseks, vaid tõi ka teatavat kasu, arendades ta taibukust, leidlikkust ja õpetades teda arukamalt käsutama oma teadmisi. Arvatavasti sooviks lugeja nüüd ka



Joon. 135.

ise proovida millegi kallal oma taibukust. Selleks on määratudki need kolmkümmend selle raamatu viimasesse peatükki kogutud mitmesugust ülesannet.

**102. Ahel.** Sepale toodi 5 kolmelülilist ahelatükki (joon. 135) ja sooviti, et ta ühendaks nad üheks ahelaks.

Enne tööle asumist hakkas sepp arutlema, mitu rõngast on tal selleks tarvis lahti võtta ja uuesti kinni taguda. Ta leidis, et tuleb lahti võtta ja uuesti kinni taguda neli rõngast.

Kuid kas ei saaks siiski teha selle töö vähemaarvu rõngaste avamise ja kinnitamisega?

**103. Ämblikud ja põrnikad.** Pioneer korjas karpri ühtekokku 8 ämblikku ja põrnikat. Kui kõik karbisolevad jalad üle lugeda, siis on neid 54.

Mitu ämblikku ja mitu põrnikat on karbis?

**104. Mantel, kübar ja kalossid.** Keegi ostis mantli, kübara ja kalossid ning maksis ühtekokku 140 rubla. Mantel on 90 rubla kallim kui kübar, kübar ja mantel aga kokku maksavad 120 rubla rohkem kui kalossid. Kuipalju maksab iga ese üksikult?

Ülesanne tuleb lahendada peast, ilma võrrandita.

**105. Kana- ja pardimunad.** Joonisel 136 esitatud korvides on munad: ühtedes korvides on kanamunad, teistes pardimunad. Nende arv on märgitud igale korvile. „Kui ma näiteks müün selle korvitäie,“ mõtleb müüja, „siis jääb mulle kanamune täpselt kaks korda rohkem kui pardimune.“

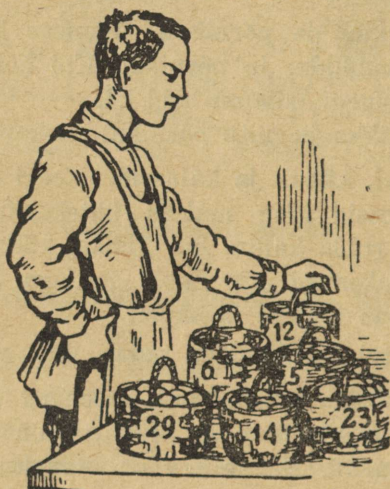
Missugust korvi mõtles müüja?

**106. Lend.** Lennuk katab linnade A ja B-vahelise maa 1 tunni ja 20 min. Kuid tagasilennu ta sooritab 80 min. Kuidas te seda seletate?

**107. Rahalised kingitused.** Kaks isa kinkisid oma poegadele raha. Üks andis pojale 150 rubla, teine aga oma pojale 100 rubla. Kuid selgus, et mõlema poja kapital kokku suurenes ainult 150 rubla võrra. Millega on see seletatav?

108. **Kaks kabekivi.** Tühjale kabelauale on tarvis asetada kaks erivärvilist kivi. Mitu eriasendit neil võib laual olla?

109. **Kahe numbriga.** Missuguse väikseima positiivse täisarvu te võite kirjutada kahe numbriga?



Joon. 136.

110. **Üks.** Kirjutage arv 1, tarvitades seejuures kõiki kümnet numbrit.

111. **Viie 9-ga.** Kirjutage arv 10 viie 9-ga. Näidake vähemalt kaks teisendit.

112. **Kümne numbriga.** Kirjutage arv 100, tarvitades kõiki kümnet numbrit. Mitu kirjutamisviisi te võite leida? On olemas vähemalt neli võimalust.

113. **Neljal viisil.** Kirjutage arv 100 neljal eriviisil viie ühesuguse numbriga.

114. Nelja 1-ga. Missuguse kõige suurema arvu te võite kirjutada nelja 1-ga?

115. Mõistatuslik jagamine. Alljärgnevas jagamisnäites on kõik numbrid asendatud tähekestega, peale nelja 4. Paigutage tähekeste asemele numbrid.

$$\begin{array}{r}
 \text{*****4} \quad | \quad \text{***} \\
 \text{***} \quad \quad | \quad \text{*4**} \\
 \hline
 \text{**4*} \\
 \text{****} \\
 \hline
 \text{****} \\
 \text{*4*} \\
 \hline
 \text{****} \\
 \text{****} \\
 \hline
 \end{array}$$

Sel ülesandel on mitu erinevat lahendust.

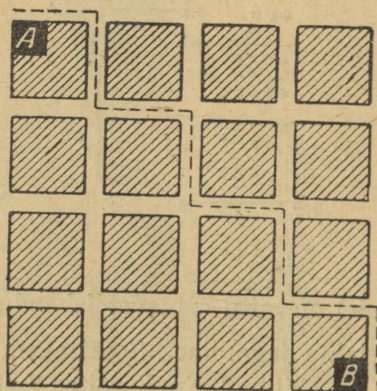
116. Veel teine jagamine. Sooritagem seesama teise näitega, milles on säilinud ainult seitse 7-et:

$$\begin{array}{r}
 \text{**7*****} \quad | \quad \text{****7*} \\
 \text{*****} \quad \quad | \quad \text{**7**} \\
 \hline
 \text{*****7*} \\
 \text{*****} \\
 \hline
 \text{*7****} \\
 \text{*7****} \\
 \hline
 \text{*****} \\
 \text{***7**} \\
 \hline
 \text{*****} \\
 \text{*****} \\
 \hline
 \end{array}$$

117. Mis saab? Kujutlege mõttes, kui pikaks venib ühe ruutmeetri kõigist millimeetrisuurustest ruudukes-

test koostatud riba, kui need asetada tihedalt üksteise kõrvale.

118. **Samalaadne.** Kujutlege mõttes, mitme kilomeetri kõrguse tulba saaks, kui asetada ühe kuupmeetri kõik millimeetrisuurused kuubikesed üksteise peale.



Joon. 137.

119. **Lennuk.** Kaheteistkümne meetri laiune lennuk pildistati lennu ajal altpoolt, kui ta lendas püstloodis aparaadi kohal. Fotokaamera sügavus on 12 cm. Ülesvõttel on lennuki laius 8 mm.

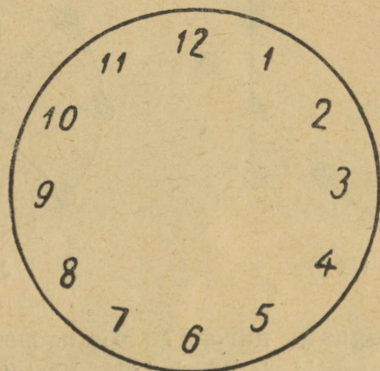
Kui kõrgel lendas lennuk pildistamise momendil.

120. **Miljon toodet.** Toode kaalub 89,4 g. Arvestage peast, mitu tonni kaaluvad miljon säärast toodet?

121. **Mitu teerada?** Joonisel 137 te näete sihtidega ruudukujulisteks kvartalideks jaotatud metsalanki. Punktjoonega on märgitud teerada mööda sihte punktist A punkti B. Muidugi pole see ainus rada mööda sihte

nende punktide vahel. Mitu erinevat ühepikkust teerada te suudate leida?

**122. Kella numbrilaud.** Joonisel 138 kujutatud kella numbrilaud tuleb lõigata ükskõik miskujuliseks kuueks osaks, kuid arvude summa peab igas osas olema üks ja seesama.



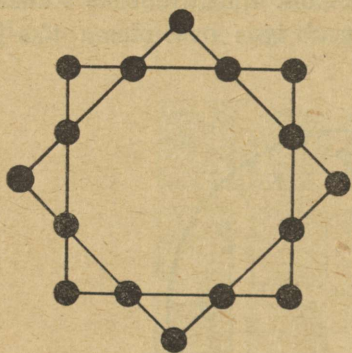
Joon. 138.

Selle ülesande sihiks pole mitte niivõrd proovida teie leidlikkust, kuivõrd taibukuse kiirust.

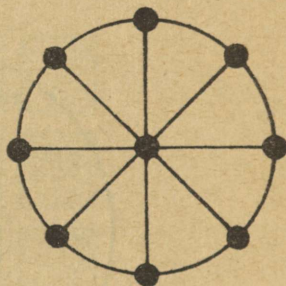
**123. Kaheksatipuline täht.** Arvud 1—16 tuleb paigutada joonisel 139 esitatud kujundi lõikepunktidesse nii, et arvude summa igal ruudu küljel oleks 34 ja arvude summa iga ruudu tippudes samuti 34.

**124. Numbriketas.** Numbrid 1—9 tuleb paigutada joonisel 140 esitatud kujundile nii, et üks number oleks ketta keskel, ülejäänud aga iga diameetri otstes ja et iga rea kolme arvu summa oleks 15.

125. Kolmejalgne laud. Arvatakse, et kolme jalaga laud mitte kunagi ei kõigu, isegi siis mitte, kui jalad pole ühepikkused. Kas on see tõsi?

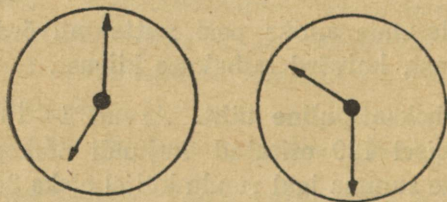


Joon. 139.



Joon. 140.

126. Missugused nurgad? Missugused nurgad moodustavad kellaosutid joonisel 141. Vastata tuleb taibu järgi, nurgamõõtjaid kasutamata.

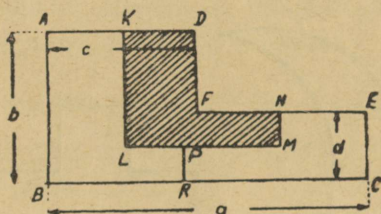


Joon. 141. Kui suured on nurgad osutite vahel?

127. Piki ekvaatorit. Kui me saaksime jalutada piki ekvaatorit ümber Maakera, siis teeks meie pealagi pikema teekonna, kui jalatallad. Kui suur on see vahe?

128. **Kuude ritta.** Arvatavasti olete kuulnud seda naljandit, kuidas üheksa hobust paigutati kümnesse latrisse ja igas latris oli hobune. Praeguesitatav ülesanne on väliselt küll selle tuntud naljandi sarnane, kuid selle lahendus pole ainult kujuteldav, vaid täiesti reaalne. Ülesanne on järgmine:

Paigutada 24 inimest kuude ritta nii, et igas reas oleks 5 inimest.



Joon. 142.

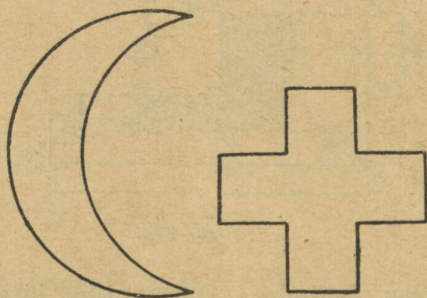
129. **Kuidas jaotada?** On tuntud järgmine ülesanne: kiiljas pind (püstkülik, millest on eemaldatud üks veerand) jaotada neljaks võrdseks osaks. Katsuge jaotada sama kujund (kiiljas pind) joonise 142 järgi kolmeks osaks nii, et saadud osad oleksid võrdsed. Kas selle ülesande lahendus on võimalik?

130. **Rist ja poolkuu.** Joonisel 143 on kujutatud kahest ringi kaarjoonest moodustatud poolkuu<sup>1</sup>. Tarvis on joonestada Punaseristi märk, mille pindala võrduks geomeetriliselt poolkuu pindalaga.

131. **Benediktovi ülesanne.** Paljud vene kirjandusega tegelejad ei aimagi, et luuletaja V. G. Benediktov oli esi-

<sup>1</sup> See ei ole täpselt poolkuu (poolkuu on poolringi kujuline), vaid kuusirp.

mese venekeelse matemaatiliste keerdülesannete kogumiku autor. Seda kogumikku ei kirjastatud; ta säilis käsikirjana ja leiti üles alles 1924. a. Mul oli võimalus tutvuda selle käsikirjaga ja ühe keerdülesande põhjal koguni kindlaks teha koostamisaasta: 1869 (käsikirjal pole aastat märgitud). Allpool esitatud luuletaja poolt ilukirjanduslikus vormis avaldatud ülesanne on võetud sellest kogumikust. Selle pealkirjaks on „Keeruka ülesande kaval lahendus“.



Joon. 143.

„Üks munadega kauplev vanaeit, kellel oli müügiks üheksakümmend muna, saatis oma kolm tütart turule ja usaldas kõige vanema ning taibukama hoolde ühe kümne, teisele kolm kümnet, kolmandale aga poolsada muna. Seejuures ütles ta neile:

„Leppige omavahel juba enne hinnas kokku, millega te hakkate mune müüma, ja kokkulepitud hinnast ärge taganege; pidage kõik kindlasti kinni ühtsest hinnast; kuid ma loodan, et minu vanim tütar oskab oma taibukusega isegi teie omavahel kokkulepitud ühtse hinna juures oma kümne eest saada niisama palju, kuipalju teine oma kolme kümne eest, ja õpetab teisele õele, kui-

das see oma kolme kümne eest saaks niisama palju, kui palju noorim poolesaja eest. Kõigil kolmel aga olgu müügist saadud raha ja hinnad ühesugused. Pealegi ma sooviksin, et teie müüksite kõik munad nii, et nende keskmine hind ei oleks alla 10 kopika kümne eest, kõigi üheksa kümne eest aga mitte vähem kui 90 kopikat ehk 30 kolmekopikalist.“ “

Ma katkestan sellega ajutiselt Benediktovi jutustuse, et lugejad võiksid iseseisvalt mõistatada, kuidas tütarlapsed täitsid neile usaldatud ülesande.

#### Keerdülesannete 102—131 lahendused.

102. Nõutava töö võib teostada ainult kolme lüli avamisega. Selleks tuleb avada ühe ahelatüki lülid ja nendega ühendada ülejäänud tükkide neli otsa.

103. Selle ülesande lahenduseks on vajalik eelkõige meelde tuletada loodusteadusest, mitu jalga on põrnikal ja mitu ämblikul: põrnikal on 6 jalga, ämblikul — 8.

Teades seda, oletame, et karbis oli ainult 8 põrnikat. Siis oleks seal üldse  $6 \times 8 = 48$  jalga, seega 6 jalga vähem, kui on antud ülesandes. Asendame ühe põrnika ämblikuga. Jalgade arv suureneb nüüd 2 võrra, sest ämblikul on 8 jalga, mitte 6.

Kui me kolm korda nõnda vahetame, siis saavutame nõutava jalgade arvu karbis, s. o. 54. Kuid siis jääb 8 põrnikast järele ainult 5, ülejäänud on kõik ämblikud.

Seega on karbis 5 põrnikat ja 3 ämblikku.

Kontrolligem: 5 põrnikal on 30 jalga, 3 ämblikul — 24 jalga, ühtekokku aga  $30 + 24 = 54$ , nagu nõuab ülesande tingimus.

Ülesannet võib lahendada ka teisiti. Ja nimelt: võib oletada, et karbis oli ainult 8 ämblikku. Siis oleks ühte-

kokku  $8 \times 8 = 64$  jalga, seega 10 jalga rohkem, kui oli ülesande tingimuses. Vahetades ühe ämbliku põrnikaga, me vähendame jalgade arvu kahe võrra. Tuleb teha viis niisugust vahetust, et saavutada 54 nõutavat jalga. Teiste sõnadega, 8 ämblikust tuleb jätta ainult 3, kõik ülejäänud aga asendada põrnikatega.

104. Kui mantli, kübara ja kalosside asemel oleks ostetud ainult kaks paari kalosse, siis poleks tulnud maksta mitte 140 rubla, vaid niipalju vähem, kuipalju kalossid on mantlist ja kübarast odavamad, s. t. 120 rubla. Järelikult kaks paari kalosse maksab  $140 - 120 = 20$  rubla, siit saame ühe paari hinna — 10 rubla.

Nüüd selgus, et mantel ja kübar maksavad kokku  $140 - 10 = 130$  rubla, kusjuures mantel on kübarast 90 rubla kallim. Arutlegem nagu enne: mantli ja kübara asemel me ostame kaks kübarat. Me ei maksa nende eest mitte 130 rubla, vaid 90 rubla vähem. Tähendab, kaks kübarat maksavad  $130 - 90 = 40$  rubla, ja ühe kübara hind on 20 rubla.

Esemete hinnad on siis: kalossid 10 rubla, kübar 20 rubla, mantel 110 rubla.

105. Müüja mõtles korvi 29 munaga. Kanamunad olid 23, 12 ja 5 märgitud korvides; pardimunad aga arvudega 14 ja 6 märgitud korvides.

Kontrollides näeme, et kanamune jäi järele

$$23 + 12 + 5 = 40,$$

pardimune aga

$$14 + 6 = 20.$$

Kanamune on kaks korda rohkem, nagu seda nõuab ülesande tingimus.

106. Selles ülesandes pole midagi seletada: lennuk sooritab lennu mõlemas suunas võrdse ajaga, sest 80 min. ongi ju 1 tund 20 min.

Ülesanne on määratud tähelepanematule lugejale, kes võib arvata, et 1 tunni 20 min. ja 80 min. vahel on vahe. Nii imelik, kui see ka ei ole, on sääraselt õnge sattuvaid inimesi palju, pealegi on neid arvutustega vilunute hulgas rohkem kui vähekokogenud arvutajate keskel. Põhjus peitub harjumuses mõõtude ja rahaüksuste kümnendsüsteemiga. Nähes märget „1 tund 20 min.“ ja selle kõrval „80 min.“, hindame me tahtmatult neid erinevalt. Sellele psühholoogilisele veale toetubki käesolev ülesanne.

107. Lahenduse nõutus seisneb selles, et üks isadest oli teise poeg. Kõiki kokku ei olnud neli, vaid kolm, vanaisa, isa ja poeg. Vanaisa andis pojale 150 rubla ja see andis sellest 100 rubla pojapojale (s. t. oma pojale), järelikul suurendades oma isiklikku kapitali ainult 50 rubla võrra. Kokku suurenes poegade kapital 150 rubla võrra.

108. Esimese kivi võib asetada igale kabelaual 64 ruudule, s. t. 64 viisil. Pärast esimese kivi kohaleasetamist võib teise kivi paigutada igale ülejäänud 63 ruudule. Tähendab, iga esimese kivi 64 paigutusvõimalusega võib liita teise kivi 63 võimalust. Siit saame kahe kivi mitmesuguste asetuste üldarvu laual

$$64 \times 63 = 4032.$$

109. Kõige väiksem täisarv, mida võib kirjutada kahe numbriga, ei ole 10, nagu arvatavasti mõtlevad mõned lugejad, vaid üks, mis on avaldatud järgmiselt:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \text{ jne. kuni } \frac{9}{9}.$$

Algebrat oskajad lisavad nende avaldiste juurde veel rea teisi:

$1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ , jne. kuni  $9^0$ ,  
sest iga arv null astmes võrdub ühega<sup>1</sup>.

110. Tuleb esitada üks kahe murru summana:

$$\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1.$$

Algebrat oskajad võivad anda veel teisigi vastuseid:

$$123\ 456\ 789^0; 234\ 567^{9-8-1}$$

jms., sest arv null astmes võrdub ühega.

111. Kaks võimalust on järgmised:

$$9 \frac{99}{99} = 10,$$

$$\frac{99}{9} - \frac{9}{9} = 10.$$

Kes algebrat tunneb, see võib lisandada veel mõned lahendused, näiteks:

$$\left(9 \frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}} = 10,$$

$$9 + 99^{9-9} = 10.$$

112. Siin on neli lahendust:

$$70 + 24 \frac{9}{8} + 5 \frac{3}{8} = 100;$$

$$80 \frac{2}{5} \frac{7}{4} + 19 \frac{3}{8} = 100;$$

$$87 + 9 \frac{4}{5} + 3 \frac{1}{5} \frac{3}{8} = 100;$$

$$50 \frac{1}{2} + 49 \frac{3}{8} = 100.$$

---

<sup>1</sup> Lahendused  $\frac{0}{0}$  või  $0^0$  oleksid valed; neil avaldistel pole üldse mõtet.

113. Arvu 100 võib avaldada viie ühesuguse numbri-  
 riga, kui kasutada ühtesid, kolmi või — kõige lihtsam  
 — viisi:

$$111 - 11 = 100;$$

$$33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100;$$

$$5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100;$$

$$(5 + 5 + 5 + 5) \times 5 = 100.$$

114. Ülesande küsimusele vastatakse sageli 1111.  
 Ometi on võimalik kirjutada mitu korda suurem arv —  
 nimelt 11 üheteistkümnendas astmes:  $11^{11}$ . Kui teil jät-  
 kub kannatust arvutada see lõpuni (logaritmide abil võib  
 arvutada palju kiiremini), siis veendute, et see arv on  
 280 miljardist suurem. Järelikult ületab see 250 miljonit  
 korda arvu 1111.

115. Ülesandes antud jagamisnäide võib sobida nel-  
 jale mitmesugusele juhule, ja nimelt:

$$1\ 337\ 174 : 943 = 1418;$$

$$1\ 343\ 784 : 949 = 1416;$$

$$1\ 200\ 474 : 846 = 1419;$$

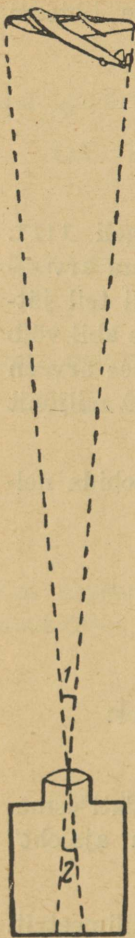
$$1\ 202\ 464 : 848 = 1418.$$

116. See näide sobib ainult ühel võimalusel:

$$7\ 375\ 428\ 413 : 125\ 473 = 58\ 781.$$

Kaks viimast, päris rasket ülesannet, avaldati esma-  
 kordselt ameerika väljaannetes „Matemaatika ajaleht“  
 1920. a. ja „Kooli maailm“ 1906. a.

117. Ruutmeetris on tuhat korda tuhat millimeetrit.  
 Iga tuhat üksteise kõrvale asetatud millimeetrisuurust  
 ruudukest moodustab 1 m; tuhat korda tuhat moodus-  
 tab 1000 m ehk 1 km: riba veniks ühe kilomeetri  
 pikkuseks.



Joon. 144.  
Lennuki  
kõrguse  
arvestus.

118. Vastus on rabav: tulp oleks...  
1000 km kõrge.

Teeme peastarvutuse. Kuupmeeter sisaldab tuhat  $\times$  tuhat  $\times$  tuhat kuupmillimeetrit. Iga tuhat üksteise peale asetatud millimeetrisuurust kuubikest moodustab 1 m kõrguse tulba. 1000 m = 1 km. Kuna meil on aga kuubikesi tuhat korda rohkem, siis tulba kõrgus oleks 1000 km.

119. Joonis 144-ndast nähtub, et (nurkade 1 ja 2 võrdsuse tõttu) eseme joonmõõdud suhtuvad kujutise vastavate mõõtu-dega nii, nagu eseme kaugus objektiivist suhtub kaamera sügavusega. Märkides lennuki kõrguse maapinnast  $x$  meetrit, saame käesoleval juhul võrde:

$$12\ 000 : 8 = x : 0,12,$$

kus  $x = 180$  m.

120. Taolised arvutused tehakse peast järgmiselt: 89,4 g tuleb korrutada miljoniga, mis on tuhat korda tuhat.

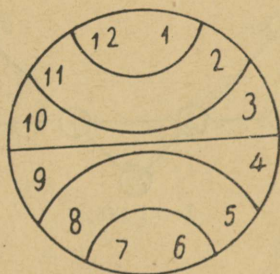
Korrutame kaks korda:  $89,4\text{ g} \times 1000 = 89,4\text{ kg}$ , sest kilogramm on grammist tuhat korda suurem, ja  $89,4\text{ kg} \times 1000 = 89,4\text{ tonni}$ , sest tonn on kilogrammist tuhat korda suurem.

Seega on otsitav kaal 89,4 tonni.

121. Kõiki teid A-st B-ni piki metsasihte võib olla 70. (Selle ülesande süste-

maatiline lahendamine on võimalik algebra kursuses käsitatava nn. Pascali kolmnurga abil.)

122. Kuna numbrilauale märgitud arvude kogusumma on 78, siis peavad arvud igas osas moodustama summa 78:6, s. o. 13. See kergendab lahenduse leidmist, mis on näidatud joonisel 145.



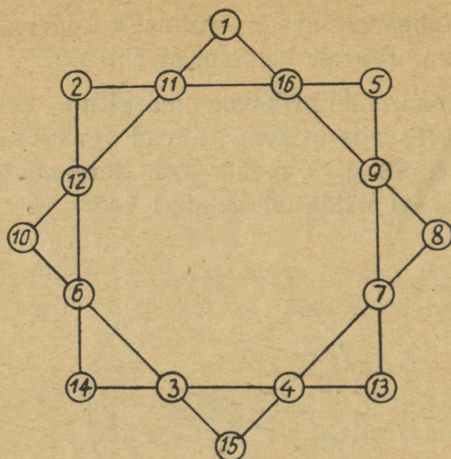
Joon. 145.

123—124. Lahendused on näidatud juurdelisatud joonistel 146 ja 147.

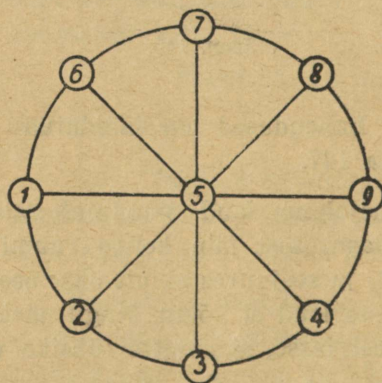
125. Kolmejalgne laud puudutab alati põrandat oma kolme jalaga, sest läbi kolme ruumi punkti võib läbida tasapind, ja seejuures ainult üks; see ongi põhjus, miks kolmejalgne laud ei kõigu. Nagu näete, kuulub see ülesanne geomeetriasse, aga mitte füüsika valdkonda.

Seepärast ongi kolmjalad sobivad maamööduriistade ja fotoaparaatide juures kasutamiseks. Neljas jalg ei tee alust kindlamaks; vastupidi, igakord tuleks hoolitseda selle eest, et see ei kõiguks.

126. Küsimusele on kerge vastata, kui järele mõelda, mis kellaaega osutid näitavad. Nähtavasti on vasakpool-



Joon. 146.



Joon. 147.

ses ringis (joon. 141) kell 7. Tähendab nende osutite otste vahel on kaar, mis moodustab  $\frac{5}{12}$  ringjoonest.

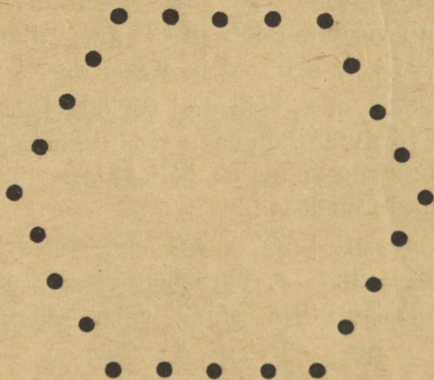
Kraadides on see

$$360^\circ \cdot \frac{5}{12} = 150^\circ.$$

On kerge taibata, et osutid parempoolses ringis näitavad kell 9.30. Kaar nende vahel moodustab  $3\frac{1}{2}$  kaheteistkümnendikku ehk  $\frac{7}{24}$  ringjoonest.

Kraadides on see

$$360^{\circ} \cdot \frac{7}{24} = 105^{\circ}.$$



Joon. 148.

127. Arvestades inimese pikkuse 175 cm ja märkides Maakera raadiuse tähega R, saame:

$2 \times 3,14 \times (R + 175) - 2 \times 3,14 \times R = 2 \times 3,14 \times 175 = 1100$  cm, s. o. umbes 11 m. On hämmastav, et tulemus ei sõltu kera raadiusest ja järelikult on ühesuurune hiiglaslikul Päikesel ja väikesel kerakesel.

128. Ülesande nõuet on kerge rahuldada, kui paigutada inimesed kuusnurgakujuliselt, nagu on näidatud joonisel 148.

129. See ülesanne on huvitav peamiselt sellepolest, et seda ei saa lahendada igasuguste a, b, c, d, e väärtuste,

vaid ainult nende mõningate, täiesti kindlate väärtuste puhul.

Me tahame tegelikult, et viirutatud kiiljas pind joonisel 142 võrduks iga viirutamata pinnaga. On täiesti selge, et külg LM on BC-st lühem; järelikult peab ta võrduma AB-ga. Kuid, teiselt poolt, LM peab võrduma RC-ga; tähendab,  $LM = RC = b$ . Järelikult  $BR = a - b$ . Kuid BR peab võrduma KL ja CE-ga. Tähendab,  $BR = KL = CE$ , s. t.  $a - b = d$  ja  $KL = d$ .

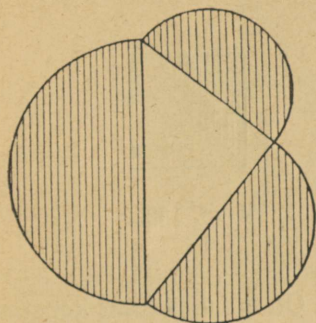
Seega näeme, et a, b ja d ei või olla vabalt valitavad. Külg d peab võrduma külgede a ja b vahega. Kuid sellest on vähe. Me näeme kohe, et kõik küljed peavad olema külje a kindlad murdosad.

Ilmselt on  $PR + KL = AB$  ehk  $PR + (a - b) = b$  ning edasi  $PR = 2b - a$ . Võrreldes viirutatud ja viirutamata parempoolse kiilja pinna vastavaid külgi saame:  $PR = MN$ , s. t.  $PR = \frac{d}{2}$ ; siit  $\frac{d}{2} = 2b - a$ . Viimase võrduse võrdlemisest seosega  $a - b = d$  leiame, et  $b = \frac{3}{8}a$  ja  $d = \frac{5}{8}a$ . Võrreldes viirutatud ja vasakpoolset viirutamata pinda näeme, et  $AK = MN$ , s. o.  $AK = PR = \frac{d}{2} = \frac{5}{16}a$ . Samal kombel veendume, et  $KD = PR = \frac{5}{16}a$ ; järelikult  $AD = \frac{3}{8}a$ .

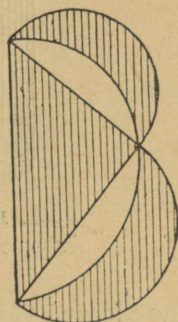
Seega on selge, et kujundi küljed ei saa olla vabalt valitavad. Nad peavad olema külje a kindlad murdosad ( $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{5}{8}$  ja  $\frac{5}{16}$ ). Ainult sel juhul on ülesanne lahendatav.

130. Ringi kvadratuuri ülesande lahendamatusesest kuulnud lugejad peavad tõenäoliselt ka esitatud ülesannet geomeetriliselt lahendamatuks. Kui on võimatu muuta täisringi niisama suureks ruuduks, siis mõtlevad paljud, et võimatu on muuta täisnurkseks kujundiks ka kahe ringjoone kaarest moodustatud kuusirpi.

Ometigi võib ülesande geomeetriliselt konstrueerides vastuvaidlematult lahendada, kui kasutada Pythagorase üldtuntud lause huvitavat järelaluslauset. Järelaluslause, mida ma mõtlen, ütleb, et kaatetitele moodustatud poolringide pindalade summa võrdub hüpotenuusile moodustatud poolringi pindalaga (joon. 149). Keerates suure poolringi teisele küljele (joon. 150),



Joon. 149.



Joon. 150. Pythagorase teoreemi järelalus.

näeme, et mõlemad viirutatud kuusirbid on koos suuruselt võrdsed kolmnurgaga.<sup>1</sup> Kui võtta võrdhaarne kolmnurk, siis iga üksik kuusirp on suuruselt võrdne selle kolmnurga poole pindalaga (joon. 151).

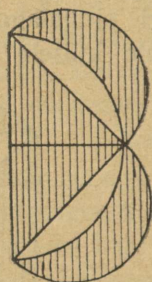
Siit järelalus, et on võimalik geomeetriliselt täpselt konstrueerida võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille pindala võrdub kuusirbi pindalaga.

Ja kuna võrdhaarset täisnurkset kolmnurka on kerge muuta niisamasuureks ruuduks (joon. 152), siis on võima-

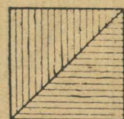
<sup>1</sup> See asetus on geometrias tuntud nimetuse all: „Hippokratese kuukeste lause“.

lik puhtgeomeetrilise konstruktsiooni abil asendada meie kuusirp niisamasuure ruuduga.

Nüüd tuleb osata muuta ruut niisamasuureks Punase-risti kujundiks (mis teadagi on koostatud viiest üksteise

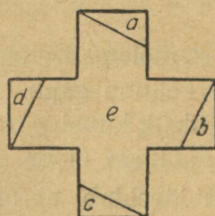
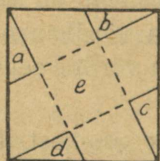


Joon. 151. Hippokratese kuukesed.



Joon. 152.

külge liidetud võrdsest ruudust). On mitu säärast konstrueerimisvõimalust; kaks neist on näidatud joonistel 153 ja



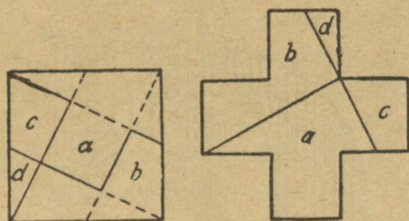
Joon. 153. Ruudu muundumine ristiks.

154; mõlema puhul alustatakse ruudu tippude ühendamisest vastaspoolsete külgede keskkohadega.

Tähtis märkus: ainult niisuguse kuusirbi kujundi võib muuta niisamasuureks ristiks, mis on moo-

dustatud kahe ringi kaartest: välisest poolringist ja vastavalt suurema raadiusega sisemise ringjoone veerandist<sup>2</sup>.

Olgu esitatud sirbige suuruselt võrdse risti konstrueerimiskäik. Sirbi tipud A ja B ühendatakse sirgjoonega (joon. 155); selle sirge keskele O tõmmatakse ristjoon, millele asetatakse  $OC = OA$ . Võrdhaarne kolmnurk OAC täiustatakse ruuduks OADC, millest moodustatakse joonistel 153 ja 154 näidatud viisil rist.



Joon. 154. Ruudu muundumine ristiks.

131. Jätkame nüüd Benediktovi jutustust:

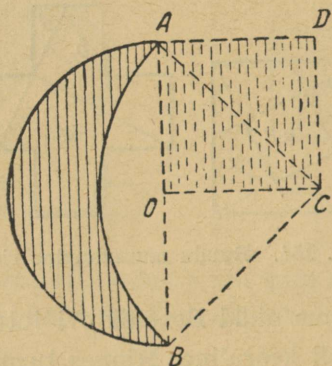
„Ülesanne oli keeruline. Minnes turule hakkasid türed omavahel nõu pidama, kusjuures teine ja kolmas õde toetusidki vanima õe mõistusele ja nõuandele. Kaalutledes asjaolu, ütles see:

„Õekesed, müüme oma munad seekord seitsmekaup, mitte kümneviisi, nagu me seda tänini tegime; iga seitsme muna eest määrame aga ühtse hinna ja peame kõik sellest rangelt kinni, nagu käskis ema. Hoidku küll, kui me määratud hinnast ainsa kopikagi alla jätame! Esimese 7 muna hinnaks on 3 kopikat, kas olete nõus?“

<sup>2</sup> Tollel kuusirbil, mida me näeme taeval, on pisut teissugune kuju: tema väline kaarjoon on poolring, kuid sisemine — pool-ellips. Kunstnikud kujutavad kuusirpi sageli valesti, moodustades seda ringi kaartest.

„Liiga odav,“ ütles teine.

„Noh,“ vastas vanem, „selle eest me tõstame nende munade hinda, mis jäävad meile korvidesse pärast seitsmikute müüki. Ma kontrollisin juba, täna pole turul ühtegi munamüüjat peale meie. Hinda ei tohi kellelegi alandada; kui kaup on lõpukorral, nõudmine aga jätkub, siis teadagi tõuseb allesoleva hind. Just nende ülejäänud munadega me teemegi kõik tasa.“



Joon. 155. Poolkuu muundumine ruuduks.

„Aga kui kallilt me müüme ülejäänud?“ küsis noorim.

„3 kolmekopikalist iga muna. Muudkui aga anna! Küll need, kellel on väga vaja, maksavad.“

„Liiga kallis,“ tähendas jälle keskmine.

„Mis sellest,“ lõi vanem sekka, „see-eest esimesed seitsmikud lähevad odavalt. Üks tasandab teisi.“

Nõustuti.

Jõuti turule. Iga õde istus üksikult oma kohale ja müüs. Ostjad — mehed ja naised — rõõmustasid munade odavast hinnast, tormasid noorima juurde, kellel oli 50

muna ja ostsid kõik õhinal. Ta müüs seitsmele ostjale iga-  
ühele seitse muna ja sai seitse kolmekopikalist, üks muna  
aga jäi tal korvi. Teine, kellel oli kolm kümnet, müüs nel-  
jale ostjale igaühele seitse muna ja korvi jäi kaks muna:  
raha sai ta neli kolmekopikalist. Vanemalt õelt osteti ka  
seitse muna, mille eest ta sai ühe kolmekopikalise; kolm  
muna jäi järele.

Korraga tuli turule köögitüdruk, kelle oli emand saat-  
nud ükskõik mis hinna eest kümnet muna ostma. Eman-  
dale olid lühikeseks ajaks külla sõitnud ta pojad, kes  
armastasid eriti munarooga. Köögitüdruk jooksis mööda  
turgu siia-sinna: munad on kõik müüdnud. Ainult kolmel  
müüjal on alles ainult kuus muna: ühel — 1 muna, tei-  
sel — 2, kolmandal — 3. Antagu needki siia!

Arusaadavalt tormas köögitüdruk kõigepealt selle  
juurde, kellel oli veel kolm muna; see oligi vanim tütar,  
kes oli müünud kolme kopika eest oma ainsa seitsmiku.  
Köögitüdruk küsis:

„Palju sa tahad oma kolmest munast?“

See aga vastas:

„3 kolmekopikalist igast munast.“

„Mis? Kas sa oled hulluks läinud?“ hüüdis köögi-  
tüdruk.

Kuid vastati:

„Kuidas soovite, aga odavamalt ma ei anna. Need on  
viimased.“

Köögitüdruk tormas selle õe juurde, kellel oli kaks  
muna korvis.

Mis maksavad?“

„3 kolmekopikalist tükk. See on kindel hind. Kõik tei-  
sed on müüdnud.“

„Ja palju maksab siis sinu munake?“ küsis köögitüdruk noorimalt õelt.

See vastas:

„3 kolmekopikalist.“

Polnud midagi parata. Tuli osta ennekuulmatu hinnaga.

„Andke siis siia kõik allesolevad munad.“

Ja köögitüdruk andis vanemale õele tema kolme muna eest 9 kolmekopikalist, mis moodustas varemsaadud ühe kolmekopikalise — kümme kolmekopikalist; teisele õele ühe paari munade eest 6 kolmekopikalist, mis endise nelja kolmekopikalise moodustasid kokku ka kümme kolmekopikalist. Noorim sai köögitüdrukult oma viimase muna eest — 3 kolmekopikalist, ja lisades need varem seitsmekordsest seitsmiku müügist saadud seitsmele kolmekopikalisele, oli temagi sissetulek kümme kolmekopikalist.

Seejärel läksid tütrede koju, ja andes emale igauks kümme kolmekopikalist, jutustasid, kuidas nad kokkulepitud hinnast kinni pidades olid mune müünud ja niimoodi kümnest munast samapalju saanud kui poolestsajastki.

Emal oli väga rahul, et tütrede olid täpselt täitnud antud ülesande, eriti aga oma vanima tütre leidlikkusega, kelle nõuandel müük teostati; kuid veel rohkem jäi ta rahule sellega, et tütardelt saadud üldine sissetulek — kolmkümmend kolmekopikalist ehk üheksakümmend kopikat — vastas tema soovile.“

\* \* \*

\*

Võib-olla huvitab lugejaid, mida sisaldab V. G. Benediktovi avaldamatu käsikiri, millest on laenatud äsjaesitatud ülesanne. Benediktovi teosel puudub pealkiri, kuid

selle iseloomust ja ülesandest räägitakse üksikasjalikult kogumiku eessõnas.

„Aritmeetilist arvutust võib rakendada mitmesuguste lõbustuste, mängude, naljade jms. juures. Paljud nn. trikid (käsikirjas allakriipsutatud) on rajatud ainult arvutusele, mis on muuhulgas ka harilikkude mängukaartide abil teostatavad, kus võetakse arvesse kas kaartide arv, teatud kaartide silmade arv või mõlemad koos. Mõned tohutult suurte arvudega lahenevad ülesanded esitavad väga huvitavaid fakte ja teevad mõnevõrra mõistetavaks igasugust ettekujutust ületavad arvud. Meie esitame neid selles aritmeetika täiendusosas. Mõnede küsimuste lahenduseks on vajalik eriti paindlikku mõistust, ja nad on lahendatavad, kuigi esimesel silmapilgul näivad täiesti mõttetutena ja tervele mõistusele vastukäivatena, nagu näiteks siin esinev ülesanne pealkirjaga: „Kaval munade müük“. Aritmeetika praktilise osa rakendamine ei nõua mitte ainult aritmeetika teoreetiliste reeglite tundmist, vaid ka leidlikkust, mida omandatakse, arendades mõistust mitte ainult asjade, vaid ka pisiasjade igakülgse tutvumisega, millele siin ruumi anda me ei pidanud üleliigseks.“

Ajal, mil Benediktov koostas oma teose (1869. a.), ei olnud vene keeles ilmunud veel ainsatki sellelaadset raamatut, ei algupärandit ega tõlget. Kuid Lääneski oli ainult kaks vanaaegset prantsuse teost — Claude Gaspard Bachet de Mézeriat'i (1612. a.) ja 4-köiteline I. Ozanam'i töö (1694. a. ja rida hilisemaid väljaandeid). Plaanilt ja osaliselt ka sisult sarnaneb Benediktovi teos Bachet de Mézeriat'i raamatuga.

Teos on jagatud 20 lühikeseks nummerdamata peatükiks; igal neist on oma päistiitel Bachet de Mézeriat'i teose „Huvitavad ja meeldivad ülesanded“ stiilis. Esimes-

tel peatükkidel on järgmised pealkirjad: „Nõndanimetatud maagilised ruudud“, „Mõeldud arvu 1 kuni 30 mõistamine“, „Salaja-mõeldud numbrimõistamine, mis selgub iseenesest“, „Mahatõmmatud numbrimõistamine“ jne. Siis järgneb rida aritmeetilist laadi trikke mängukaartidega. Seejärel huvitav peatükk „Võlur-väejuht ja aritmeetiline armee“, anekdoodi kujul esitatud korrutamise sõrmedel, edasi — minu poolt äsjaesitatud ülesanne munade müügist. Eelviimane peatükk „64 malelaua ruudule ei piisa nisuteradest“ jutustab lugejatele juba tuttava vanaaegse legendi malelaua leiutajast.<sup>1</sup>

Lõpuks, 20. peatükk: „Tohutu hulk Maakeral elanud inimesi“ sisaldab huvitava katse loendada Maakera elanikkonna üldarvu kogu inimkonna olemasolu vältel (Benediktovi arvestuse üksikasjalik arutus on esitatud minu raamatus „Huvitav algebra“).

---

<sup>1</sup> Legendi ümbertöötamine ilukirjanduslikku vormi, nagu see on esitatud VII peatükis, kuulub minule.

## Sisukord.

	Lk.
Eessõna .....	3
Esimene peatükk.	
<b>Hommikueine keerdülesannetega.</b>	
1. Orav metsalagendikul .....	5
2. Ühisköögis .....	9
3. Kooliringide töö .....	10
4. Kes saab rohkem? .....	10
5. Vanaisa ja pojapoeg .....	11
6. Raudteesõidupiletid .....	11
7. Õhulaeva lend .....	12
8. Vari .....	13
9. Ülesanne tikkudega .....	14
10. Salakaval känd .....	15
11. Ülesanne detsembrist .....	16
12. Aritmeetiline trikk .....	17
Keerdülesannete 1—12 lahendused .....	18
13. Mahatõmmatud number .....	27
14. Arvu mõistatamine midagi küsimata .....	29
15. Mis keegi võttis? .....	30
Teine peatükk.	
<b>Matemaatika mängudes.</b>	
Doomino .....	33
16. Ahel 28-st kivist .....	33
17. Ahela algus ja lõpp .....	33
18. Trikk doominokividega .....	33
19. Raam .....	34
20. Seitse ruutu .....	34
21. Maagilised ruudud doominokividest .....	35
22. Aritmeetiline rida doominokividest .....	35
Viieteistkümne-mäng ehk taken .....	36
23. Lloyd'i esimene ülesanne .....	44

	24. Lloydid teine ülesanne .....	44
	25. Lloydid kolmas ülesanne .....	44
Krocket	.....	44
	26. Kas läbida värav või krookeerida? .....	44
	27. Pall ja vai .....	44
	28. Kas läbida värav või tabada vaia? .....	45
	29. Läbida hiirelõks või krookeerida? .....	45
	30. Läbipääsematu hiirelõks .....	45
	Keerdülesannete 16—30 lahendused .....	45

### Kolmas peatükk.

#### Veel tosin keerdülesandeid.

	31. Nöörijuup .....	54
	32. Sokid ja kindad .....	55
	33. Juuksekarva iga .....	55
	34. Töötasu .....	56
	35. Suusamatk .....	56
	36. Kaks töölist .....	56
	37. Aruande ümberkirjutamine .....	56
	38. Kaks hammasrattast .....	57
	39. Kui vana? .....	57
	40. Abielupaar Ivanovid .....	57
	41. Mäng .....	58
	42. Ostud .....	58
	Keerdülesannete 31—42 lahendused .....	58

### Neljäs peatükk.

#### Kas te oskate loendada?

	43. Kas te oskate loendada? .....	66
	44. Milleks loendatakse puid metsas? .....	70

### Viies peatükk.

#### Keerdülesanded arvudest.

	45. Viie rubla eest — sada .....	72
	46. Tuhad .....	73
	47. Kakskümmend neli .....	73
	48. Kolmkümmend .....	73
	49. Puuduvad numbrid .....	74
	50. Missugused arvud? .....	74
	51. Mis jagati? .....	74
	52. Jagamine üheteistkümnega .....	74
	53. Kummalised korrutised .....	75
	54. Kolmnurk arvudest .....	75

55. Veel üks kolmnurk arvudest .....	75
56. Maagiline täht .....	76
Keerdülesannete 45—56 lahendused .....	76

Kuues peatükk.

**Põrandaaluste salajane kirjavahetus.**

57. Võrestik .....	83
58. Kuidas pidada võrestik meeles? .....	89

Seitsmes peatükk.

**Jutustused arvhiiglastest.**

59. Kasulik tehing .....	93
60. Kuulujutud linnas .....	101
61. Odavate jalgrataste laviin .....	106
62. Autasu .....	109
63. Legend malelauast .....	117
64. Kiire paljunemine .....	125
65. Tasuta lõuna .....	133
66. Müntide ümberasetus .....	140
67. Kihlvedu .....	145
68. Arvhiiglased meie ümber ja meie sisemuses..	150

Kaheksas peatükk.

**Mõõtlindita.**

69. Tee mõõtmise sammudega .....	157
70. Elav mõõdik .....	159
71. Mõõtmine müntidega .....	161

Üheksas peatükk.

**Geomeetrilisi keerdülesandeid.**

72. Vanker .....	165
73. Läbi luubi .....	165
74. Puusepa vesilood .....	165
75. Tahkude hulk .....	167
76. Kuusirp .....	167
77. Kaksteist tikku .....	167
78. Kaheksa tikku .....	167
79. Kärbse teekond .....	168
80. Leida punn .....	168
81. Teine punn .....	168
82. Kolmas punn .....	168

83.	Viiekopikaline läbi pista .....	169
84.	Torni kõrgus .....	169
85.	Sarnased kujundid .....	169
86.	Traadi vari .....	170
87.	Telliskivike .....	170
88.	Hiiglane ja kääbus .....	171
89.	Kaks arbuusi .....	171
90.	Kaks melonit .....	172
91.	Kirss .....	172
92.	Eiffeli torni mudel .....	172
93.	Kaks kastrulit .....	172
94.	Pakases .....	172
95.	Suhkur .....	172
Keerdülesannete 72—95 lahendused .....		172

Kümnnes peatükk.

**Vihma ja lume geomeetria.**

96.	Sademetemõõtja .....	188
97.	Kuupalju sadas vihma? .....	190
98.	Kuidas mõõta lund? Aastane sademete hulk Maakeral .....	192

Üheteistkümnnes peatükk.

**Matemaatika ja legend veeuputusest.**

99.	Legend veeuputusest .....	196
100.	Kas veeuputus võis olla? .....	197
101.	Kas Noa laev on võimalik? .....	199

Kaheteistkümnnes peatükk.

**Kolmkümmend mitmesugust ülesannet.**

102.	Ahel .....	202
103.	Ämblikud ja põrnikad .....	203
104.	Mantel, kübar ja kalossid .....	203
105.	Kana- ja pardimunad .....	203
106.	Lend .....	203
107.	Rahalised kingitused .....	203
108.	Kaks kabekivi .....	204
109.	Kahe numbriga .....	204
110.	Üks .....	204
111.	Viie 9-ga .....	204
112.	Kümne numbriga .....	204
113.	Neljal viisil .....	204

114.	Nelja 1-ga .....	205
115.	Mõistatuslik jagamine .....	205
116.	Veel teine jagamine .....	205
117.	Mis saab? .....	205
118.	Samalaadne .....	206
119.	Lennuk .....	206
120.	Miljon toodet .....	206
121.	Mitu teerada .....	206
122.	Kella numbrilaud .....	207
123.	Kaheksatipuline täht .....	207
124.	Numbriketas .....	207
125.	Kolmejalgne laud .....	208
126.	Missugused nurgad? .....	208
127.	Piki ekvaatorit .....	208
128.	Kuude ritta .....	209
129.	Kuidas jaotada? .....	209
130.	Rist ja poolkuu .....	209
131.	Benediktovi ülesanne .....	209
	Keerdülesannete 102—131 lahendused .....	211



*Vastutav toimetaja*

*A. Ohu.*

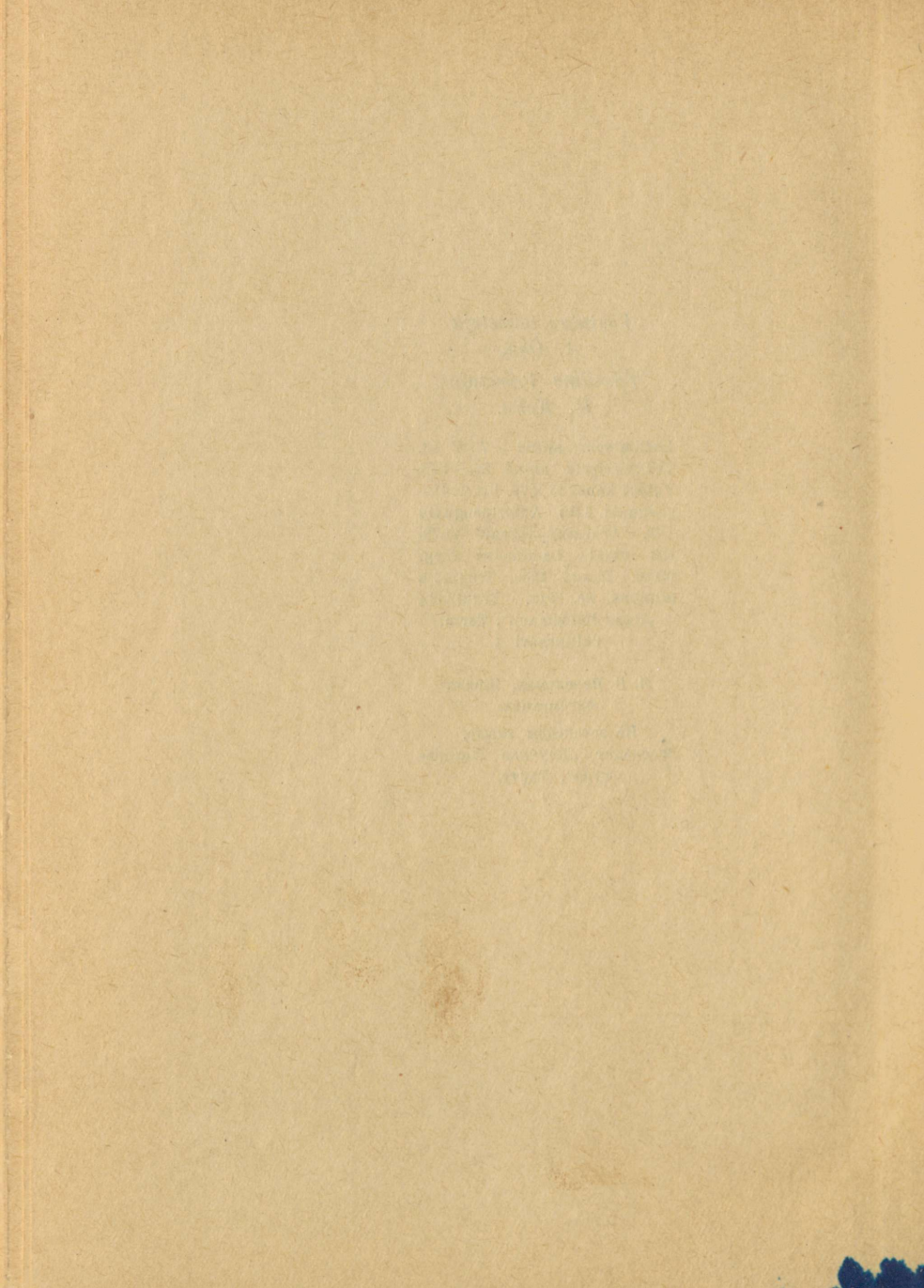
*Tehniline toimetaja*

*H. Kohu.*

Ladumisele antud 7. V 48.  
Trükkimisele antud 25. VI 48.  
Paberi kaust 56 × 79. <sup>1/16</sup>. Trüki-  
poognaid 14<sup>3/4</sup>. Autoripoognaid  
8,38. Arvestuspoognaid 11,78.  
MB 04271. Laotihedus trpg.  
30900. Tiraaz 5200. Trükikoja  
tellimus nr. 914. Trükikoda  
„Hans Heidemann“, Tartu,  
Vallikraavi 4.

Я. И. Перельман, Живая  
математика.

На эстонском языке.  
Эгосиздат „Научная Литера-  
тура“, Тарту.



**RK „TEADUSLIKU KIRJANDUSE” KIRJASTUSEL  
1947/48. AASTAL ILMUNUD POPULAARTEADUSLIKUD  
TEOSED.**

	<b>Lk.</b>	<b>Hind</b>
Aristov, G. A., Maa ja meri	132	Rbl. 4.—
Bajan, V., Esimesed Kesk-Aasia uurijad	76	„ 3.—

**Trükitvigu.**

Lk.	Rida	On trükitud	Peab olema	Kelle süü läbi viga tekkinud
58	6. alt	$30 : \frac{3}{40} =$	$30 : \frac{3}{40} =$	Korrektor
58	7. „	moodustab $\frac{3}{40}$	moodustab $\frac{3}{40}$	„
78	5. ülalt	3*2*	(numbrid ja tähekesed peavad asetsema ühe koha võrra vasemal)	„
78	6. „	*2*5		„
198	1. alt	niisugust	niiskust	Toimetaja

Pojakov, G. I., Narvisüsteemi evolutsioon	97	„ 5.—
Russel, H. N., Päikesesüsteem ja selle tekkimine	126	„ 10.—
Saveljev, L., Jäljed kivil	334	„ 10.—
Subbotin, M., Maakera tekkimine ja iga	48	„ 2.—
Svešnikov, M. P., Klaasi saladused	217	„ 12.—
Zavadovski, B. M., Eluprotsesside keemilised regulaatorid	56	„ 3.—
Veltkov, F., Elektri edukäik	388	„ 14.—
Pilper, J., Pilte ja hääli Eesti loodusest	192	„ 12.—
Fučik, J., Viimne raamat	148	„ 3.50

<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>
<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>
<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>
<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>
<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>	<p>1894</p>

**RK „TEADUSLIKU KIRJANDUSE” KIRJASTUSEL  
1947/48. AASTAL ILMUNUD POPULAARTEADUSLIKUD  
TEOSED.**

	Lk.	Hind
Aristov, G. A., Maa ja meri	132 Rbl.	4.—
Bajan, V., Esimesed Kesk-Aasia uurijad	76 „	3.—
Dorfman, V. A., Elus ja eluta loodus	44 „	2.—
Dzerdzejevski, B. L., Ohumeri	42 „	3.—
Frot, J., Jutustusi füsioloogiast	140 „	6.—
Iljin, I., Jutustusi asjadest	343 „	15.—
Iljin, I., Jutustusi inimesed	240 „	5.—
Iljin, I., Jutustusi loomadest	196 „	6.—
Ivanov, I., Jutustusi perekond	194 „	8.75
Joffe, A., Jutustusi taevang	46 „	2.—
Katšinski, N., Mulla tekkimine ja elu	76 „	2.50
Kerner, B. A., Kuidas tekkis elu maakeral	44 „	2.—
Kostõkov, J., Imelamp	120 „	5.—
Kunitski, R. V., Päev ja õõ. Aastaajad	37 „	2.—
Lunkevitiš, V. V., Kohutavad loodusnähtused	138 „	8.—
Makarenko, A., Raamat lastevanemaile	410 „	12.—
Netšajev, I., Jutustusi elementidest	160 „	8.—
Orlov, V., Leiduri saladus	165 „	6.50
Perleman, J. I., Elav matemaatika	236 „	10.—
Polak, I., Aeg ja kalender	50 „	2.—
Polak, I., Astronoomia kõrgile	416 „	15.—
Poljakov, G. I., Närvisüsteemi evolutsioon	97 „	5.—
Russel, H. N., Päikesesüsteem ja selle tekkimine	126 „	10.—
Saveljev, L., Jäljed kivil	334 „	10.—
Subbotin, M., Maakera tekkimine ja iga	48 „	2.—
Svešnikov, M. P., Klaasi saladused	217 „	12.—
Zavadovski, B. M., Eluprotsesside keemilised regulaatorid	56 „	3.—
Veltkov, F., Elektri edukäik	388 „	14.—
Pilper, J., Pilte ja hääli Eesti loodusest	192 „	12.—
Fučik, J., Viimne raamat	148 „	3.50

A-16558

## Ilmumas:

	Trükipoognaid
	ca
Bubleinikov, F., Maa aarded	5
Darwin, Ch., Naturalisti reis ümber maailma purjekal „Beagle”	25
Fersman, A. E., Jutustusi teadusest ja selle loojaist	35
Kogumik „Vestlusi loodusest ja inimesest”	17
Novikov, N. I., Elu tekkimine maakeral	2
Perelman, J., Huvitav füüsika I	17
Safonov, V., Elu mõistatus	15
Serebrovski, A., Jutustusi bioloogiast	10
Tumerman, L., Valgus ja selle allikad	4

## Lugejale.

Palume lugejaid avaldada oma arvamusi RK „Teadusliku Kirjanduse” kirjastusel ilmuvate populaarteaduslike teoste sisu, tehnilis-kunstilise kujunduse jne. kohta ning teha omapoolseid ettepanekuid, milliseid konkreetseid teoseid või milliste alade käsitlust soovitakse meie populaarteaduslikus sarjas näha.

Arvamused ja ettepanekud saata RK „Teaduslikule Kirjandusele”, Olikooli 18, Tartu.

HIND RBL. 10.—