

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL



P.Kard

ERIRELATIIVSUSTEOORIA

I

TARTU  1972


TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Teoreetilise füüsika kateeder

P.Kard

ERIRELATIIVSUSTEORIA

I

TARTU  1972

K e s s ö n a .

Käesolev kahes andes ilmuv õpik sisaldab viimase osa klassikalise elektrodünaamika põhikursusest, mida loetakse TRÜ füüsikaosakonna üliõpilastele III õppeaastal. Materjali valikult ja ulatuselt vastab õpik põhilises osas ametlikule programmile. Juurde on antud võrdlemisi rohkesti ülesandeid, mis ei ole mõeldud ainult harjutustena, vaid taotlevad ka põhiteksti süvendamist ja arendamist. Seetõttu on enamik ülesandeid varustatud üksikasjaliku lahenduskaiguga. Ülesanded ja osa põhitekstist pakuvad sobivat algmaterjali ka kursuse- ja seminaritöödeks.

Õpikus on kasutusel SI-ühikute süsteem autori poolt varem esitatud viisil (vt. Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised, füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste seeria, 1966, 15, 323). Seega on väljavõrrandite kuju samasugune nagu CGS-süsteemis, ja see ongi kõige sobivam mikrooskoopilises elektrodünaamikas ja eriti relatiivsusteoorias.

Õpikus leidub veel mõningaid teisi iseärasusi, mille põhjendus tuleneb neist endast ja millele annavad lõpliku hinnangu lugejad.

S i s s e j u h a t u s .

Erirelatiivsusteooria on tänapäeva füüsikas üheks kõige üldisemaks teooriaks, mis kehtib põhimõtteliselt mistahes nähtuste valdkonnas. Tegelikult on sageli nn. relativistlikud efektid tähtsusetult väikesed. Neil juhtudel asendub relativistlik teooria vastava klassikalise (mitterelativistliku) teooriaga, mis on relativistliku teooria piirvormiks. Nii kehtib Newtoni mehhanika väga suure täpsusega (praktiliselt täiesti täpselt) valguse kiirusega võrreldes väikeste kiiruste puhul.

On olemas aga ka niisuguseid nähtuste valdkondi, kus mitterelativistlik teooria ei kehti. Seal tuleb rakendada olulisel kombel relatiivsusteooriat. Seejuures ei ole üleminek mitterelativistlikule piirjuhule alati võimalik, või kui ongi, siis piiratud ning tinglikus mõttes. Nii on elektrodünaamika oluliselt relativistlik teooria.

Relatiivsusteooria etendab ka silmapaistvat heuristilist osa uute teooriate loomisel. Iga uus teooria peab olema kooskõlas relatiivsusteooriaga. See nõue osutub võrdlemisi mõjusaks uute teooriate selekteerimise vahendiks. Õeldu ei tähenda muidugi relatiivsusteooria dogmatiseerimist ega tema tõdede absolutiseerimist, vaid sellega me ainult

rõhutame, kuivõrd sügav ja mitmekülgne on olnud tänini relatiivsusteooria põhjendus - nii teoreetiline kui ka eksperimentaalne. Siit järgneb, et kui mingi uus teooria satub relatiivsusteooriaga vastuollu, siis ei ole oluline mitte niivõrd selle teooria põhjendamine omaette, kuivõrd tema mõju uurimine relatiivsusteooria alustele. Et aga relatiivsusteooria aluseid ei ole kerge kõigutada, siis ongi meil õigus käsitada relatiivsusteooriat väga suure kindlusega kui üht olulist osa tõekriteeriumist.

Eespool märkisime, et elektrodünaamika on olemuselt relativistlik teooria. Tegelikult jäi elektrodünaamika arengus see asjaolu pikemat aega varjatuks. Kogu XIX sajandi jooksul arenes elektrodünaamika õndsas teadmatuses, et ta on relativistlik. Tol ajal arvati, et elektrodünaamika on taandatav klassikalisele Newtoni mehhaanikale. Alles XX sajandi algul selgus, et klassikalise mehhaanika relatiivsuspriprintsipi ei ole võimalik elektrodünaamikasse sisse viia. Seega tekkis mõlema teooria - klassikalise mehhaanika ja elektrodünaamika vahel sügav vastuolu. Lahenduse tõi relatiivsusteooria. Osutus, et klassikalise mehhaanika relatiivsuspriprintsibile ei leidunud elektrodünaamikas ruumi just seetõttu, et elektrodünaamika enda sees oli juba oma relatiivsuspriprintsip varjatult olemas. Selle nägemist oli seni takistanud vaid klassikalise relatiivsuspriprintsipi ausära. Relatiivsusteooria algabki selle uue relatiivsuspriprintsipi avastamisega ning seega kogu senise elektrodünaamika relativistliku olemuse tunnetamisega. Elektrodünaamika ja mehhaanika vahekorra prob-

leem pöörduv ümber. Nüüd peab klassikaline relatiivsuspriintsiiip taanduma ka mehhaanikast, andes ruumi uuele, elektrodünaamikast tulenevale relatiivsuspriintsiiibile. Tulemuseks on mehhaanika relativiseerumine. Klassikaline Newtoni mehhaanika säilitab kehtivuse ainult relatiivistliku mehhaanika piirkujuna ja klassikaline relatiivsuspriintsiiip osutub uue relatiivsuspriintsiiibi ligikaudseks avalduseks.

Kõigest sellest jutustame lähemalt alljärgnevas neljas peatükis.

I p e a t ü k k .

RELATIIVSUSTEORIA LÄHTEALUSED.

§ 1. Relatiivsusprintsip klassikalises mehhaanikas.

Klassikalise mehhaanika relatiivsusprintsip põhjeneb inertsiseadusel. Nimelt, tänu inertsiseadusele ei avalda mistahes taustsüsteemi ühtlane ja sirgjooneline (s. o. inertsiaalne) liikumine mingit mõju selles taustsüsteemis kulgevatele mehhaanilistele protsessidele. Kõik inertsiaalsed taustsüsteemid on seega mehhaaniliste nähtuste kirjeldamisel samaväärsed. Teisiti öeldes, mistahes inertsiaalsüsteemi võib vaadelda liikumatuna. Selles seisnebki klassikalise mehhaanika relatiivsusprintsip, mida nimetatakse sageli *G a l i l e i - N e w t o n i r e l a t i i v s u s p r i n t s i i b i k s*.

Matemaatiliselt avaldub relatiivsusprintsip selles, et mehhaanika põhivõrranditel on mistahes inertsiaalsüsteemis ühesugune kuju. Seda omadust nimetatakse võrrandite *i n v a r i a n t s u s e k s*. Võrrandites esinevad suurused võivad küll muutuda üleminekul ühest inert-

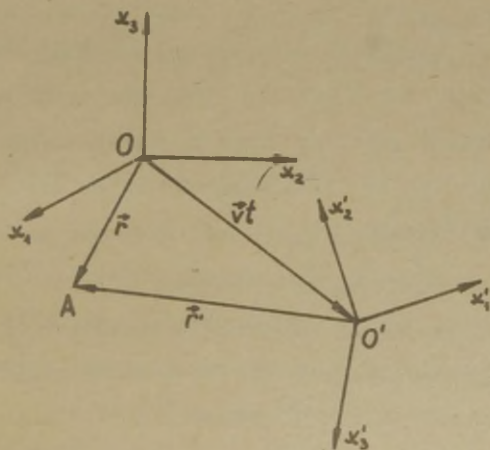
siaalsüsteemist teise, kuid nendevahelised seosed jäävad kujult muutumatuks.

Seoses relatiivsusprintsiibiga tehakse klassikalises mehhaanikas vahet absoluutse ruumi ja relatiivsete ruumide vahel. Relatiivseks nimetatakse ruumi, mis on seotud mingi inertsiaalselt liikuva taustsüsteemiga. Relatiivsusprintsiibi järgi on kõik relatiivsed ruumid mehhaaniliste nähtuste kirjeldamisel samaväärsed. See tähendab muuseas seda, et mehhaanikas puudub võimalus kindlaks määrata absoluutne ruum. Sellele vaatamata postuleeritakse Newtoni mehhaanikas, et peale relatiivsete ruumide on olemas ka absoluutne ruum. Selle postulaadi järgi peab igal inertsiaalsüsteemil olema teatav kindel absoluutne kiirus, millega ta liigub absoluutse ruumi suhtes. Ent selle absoluutse kiiruse, seega ka absoluutse ruumi (absoluutse taustsüsteemi) kindlakstegemine osutub relatiivsusprintsiibi tõttu võimatuks.

Vastupidiselt ruumile on aeg klassikalises mehhaanikas ainult absoluutne, s. o. ühesugune kõikides inertsiaalsüsteemides. Oma põhiteoses "Philosophiae naturalis principia mathematica" toob Newton sisse küll ka relatiivse aja mõiste, kuid sellel mõistel on seal hoopis teine tähendus. Relatiivne aeg tähendab Newtonil tegelikult sellesama absoluutse aja ligikaudseid, osalt ka subjektiivseid mõõte. Need ligikaudsed või subjektiivsed mõõdud ei ole mitte mingisuguses seoses inertsiaalsüsteemide valiku võimalustega. Seega ei ole see "relatiivne aeg" ka mitte mingisuguses seoses relatiivsusprintsiibiga.

Matemaatiliselt avaldub ruumide relatiivsus selles, et eri inertsiaalsüsteemides tuleb kasutada erinevaid ruumikoordinaate. Valemeid, mille järgi teisenevad ruumikoordinaadid üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise, nimetatakse Galilei teisendusvalemiteks. Vastavalt sellele nimetatakse üleminekuid ühest inertsiaalsüsteemist teise Galilei teisendusteks. Peale ruumikoordinaatide võivad Galilei teisenduste puhul teiseneda ka teised mehhaanilised suurused, kuid nii, et võrrandite kuju ei muutu. Relatiivsusprintsipiile võime anda nüüd järgmise sõnastuse: mehhaanika põhivõrrandid on invariantid Galilei teisenduste suhtes.

Galilei teisendusvalemite tuletamiseks vaatleme kaht inertsiaalset koordinaatsüsteemi, mille alguspunktid valime nii, et nad alghetkel ühtiksid (joon. 1, punkt O), Kui



Joonis 1.

teise süsteemi kiirus esimese suhtes on \vec{v} , siis asub teise süsteemi alguspunkt hetkel t punktis O' , mille kohavektor O suhtes on $\vec{v}t$. Mistahes punkti A kohavektor on 1. süsteemis $\vec{OA} = \vec{r}$ ning 2. süsteemis $\vec{O'A} = \vec{r}'$. Järelikult

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t. \quad (1.1)$$

See ongi nõutav teisendusvalem, esitatud siin vektorkujus. Sellest lähtudes võib teisendusvalemid kergesti kirjutada ka üksikute koordinaatide jaoks. Juhul kui mõlemas inertsiiaalsüsteemis on Cartesiusse koordinaadistikud valitud nii, et nende samanimelised teljed on paralleelsed, siis, võttes kõigi vektorite projektsioonid koordinaattelgedele, saame:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - v_x t, \\ y' &= y - v_y t, \\ z' &= z - v_z t. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Kui aga teises inertsiiaalsüsteemis on koordinaattelgede suunad teistsugused, tuleb valemis (1.2) avaldatud koordinaadid x', y', z' teisendada veel vastavalt koordinaattelgede uutele suundadele. Kui vastav teisendusmaatriks on α , saame järgmised teisendusvalemid:

$$x'_i = \alpha_{ik} (x_k - v_k t), \quad (1.3)$$

kus x_1, x_2, x_3 tähistavad koordinaate seniste x, y, z asemel. Valemi (1.3) paremal poolel k on summeerimisindeks 1-st 3-ni.

Edaspidi kasutame Galilei teisendusvalemeid peamiselt vektorkujus (1.1). Võtame sellele valemile juurde ka aja teisendusvalemi

$$t' = t,$$

mis väljendab aja absoluutsust. Kuigi niisugune identsusteisendus näib triviaalsena ning valem $t' = t$ üleliigsena, on kasulik siiski seda valemit silmas pidada koos valemiga (1.1). Asi seisneb selles, et Galilei teisendusvalemid on relativistlike Lorentzi teisendusvalemite piirkujaks, aga seal ei teisene aeg identselt. Niisiis on nüüd meil järgmised Galilei teisendusvalemid:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}t, \\ t' &= t. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Klassikalise mehhaanika põhivõrrandiks on teatavasti Newtoni 2. seaduse valem masspunkti jaoks:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (1.5)$$

kud m on masspunkti mass ja \vec{F} on temasse mõjuv jõud. Selle valemi invariantus Galilei teisenduste suhtes järgneb sellest, et (1.4) põhjal

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2};$$

mass ja jõud on aga igas inertsiaalsüsteemis ühesugused.

Galilei teisendusvalemitest järeldub ka klassikalise mehhaanika kiiruste liitmise valem. Kui mingi masspunkt

liigub esimeses inertsiaalsüsteemis kiirusega \vec{u} , s. o. $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, ja teises inertsiaalsüsteemis kiirusega $\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$, siis (1.4) põhjal

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}. \quad (1.6)$$

See ongi kiiruste liitmise valem, mida võib nimetada ka kiiruse teisendusvalemiks.

Peatumise lõpuks veel veidi lähemalt absoluutse ruumi mõiste juures. Newton arvas, et absoluutse ruumi olemasolu avaldub inertsijõududes, mis esinevad mitteinertsiaalselt liikuvates, näiteks pöörlevates taustsüsteemides. Ometi ei võimalda need inertsijõud kindlaks teha mõne inertsiaalsüsteemi liikumist absoluutse ruumi suhtes. Muidu saaks ju relatiivsuspriintsiip otsekohe kehtetuks. Inertsijõud võimaldavad küll eristada mitteinertsiaalseid süsteeme inertsiaalsüsteetest, aga inertsiaalsüsteemid jäävad isekeskis ikkagi samaväärseks. Kui näiteks mingis inertsiaalsüsteemis pöörleb mingi keha, siis tekivad temas täpselt samasugused tsentrifugaaljõud nagu samasuguse keha pöörlemisel sama nurkkiirusega mingis teises, eelmise suhtes liikuvas inertsiaalsüsteemis. Järelikult iseloomustavad need jõud taustsüsteemi mitteinertsiaalset liikumist mistahes relatiivse, mitte aga tingimata absoluutse ruumi suhtes.

Seega ei tõesta inertsijõudude olemasolu klassikalises mehhaanikas absoluutse ruumi olemasolu, igatahes niikaua, kuni kehtib relatiivsuspriintsiip. Igasugune katse absoluutse ruumi reaalseks kindlakstegemiseks peab algama loobumisega relatiivsuspriintsiibist. Et aga relatiivsuspriintsiip on lahutamatu seotud mehhaanika põhiseadustega, siis võiks absoluutse ruumi postulaadil tegelikult olla mõtet ainult väljaspool mehhaanikat. Peale selle, et mehhaanikaseadused ei võimalda absoluutse ruumi kindlakstegemist, ei ole ka kuskil mehhaanikas mingit vajadust selle mõiste järele. Ükski lause, ükski järeldus, ühegi probleemi lahendus ei sõltu mehhaani-

kas sellest, kas absoluutne ruum on olemas või mitte. See-
ga on absoluutse ruumi postulaat mehhaanikas ilmselt võõrkeha.
Teiste sõnadega: mehhaanika oleks jäänud kõigis oma osades
täpselt samasuguseks ka siis, kui seda postulaati juba al-
gusest peale poleks olnudki.

§ 2. Relatiivsuspriprintsip elektrodünaamikas.

Maxwelli elektrodünaamika (kaasa arvatud optika) on
klassikalises füüsikas mehhaanika kõrval teiseks fundamen-
taalseks teooriaks. Algul püüti taandada elektrodünaamika
mehhaanikale, kuid kauakestnud jõupingutused selles suumas
lõppesid tagajärjetult. Kauemaks kui mistahes konkreetsed
mehhaanilised mudelid jäi elektrodünaamikasse püsima ku-
jutlus e e t r i s t kui universaalsest keskkonnast,
mis täidab kogu ruumi ja mis on elektromagnetiliste prot-
sesside kandja ehk materiaalne substraat. Aga mitte mingi-
sugust konkreetset füüsikalist omadust eetrile enam omista-
da ei suudetud. Maxwelli võrrandid ei sisalda ühtki suurust,
mida võiks vahetult siduda eetriga, kasutamata seejuures
konkreetseid mehhaanilisi mudeleid. Aga mistahes mudelite
paikapidamatus ja viljatus oli juba saanud vaieldamatuks.
Niiviisi jäigi eetrile täita vaid elektromagnetiliste prot-
sesside justkui sümboolse kandja osa, kusjuures isegi selle
"kandmise" viis, s. o. seose iseloom eetri ja elektromagne-
tilise välja vahel pidi paratamatult jääma väljapoole teo-
reetilist käsitlust.

Kõigele sellele vaatamata omandas eetri mõiste väga

suure põhimõttelise tähenduse. Kui eksisteerib universaalse keskkonnana eeter, siis on ilmselt see taustsüsteem, milles eeter on liikumatu, teiste taustsüsteemidega võrreldes eelistatud olukorras. Eetri suhtes teatava kiirusega liikuv taustsüsteemis eksisteerib "eetrituul", s. o. eeter liigub selles süsteemis absoluutväärtuselt sama, kuid vastasuunalise kiirusega. Eeter on liikumatu (eetrituul puudub) ainult eetri suhtes liikumatus taustsüsteemis. Siit nähtub, et eetri suhtes liikumatut taustsüsteemi võib pidada liikumatuks teatavas absoluutses mõttes; liikumist eetri suhtes tuleb siis vaadelda absoluutse liikumisena, s. o. liikumisena absoluutse ruumi suhtes. Eeter osutub seega absoluutse ruumi kehastuseks.

Siit järgneb, et relatiivsuspriprintsip peaks elektrodünaamikas oma kehtivuse kaotama. Eetri suhtes liikuv taustsüsteemis peaksid elektromagnetilised protsessid kulgema teisiti kui eetri suhtes liikumatus süsteemis. Selle erinevuse järgi peaks olema võimalik kindlaks teha absoluutne ruum, mõõtes näiteks eetrituule kiiruse mingis taustsüsteemis.

Märgime kohe algul, et relatiivsuspriprintsipi kehtetus elektrodünaamikas ei kõiguta mingil kombel selle kehtivust mehhaanikas. Eetrit ei ole ju mitte mingisuguseid mehhaanilisi omadusi, seega ei või eetrituul mingit mõju avaldada mehhaaniliste protsesside kulgemisele. Igatahes oleks ju küll mõeldav oletus, et eeter ei ole mitte ainult elektromagnetiliste protsesside kandja, vaid et tal on ka mehha-

nilise keskkonna omadused, näiteks, et ta avaldab takistavat mõju kehade liikumisele tema suhtes. Niisugusel juhul oleks relatiivsuspriinip kehtetu ka mehhaanikas, sest selle takistuse järgi oleks eetri näol kehastatud absoluutne ruum avastatav. Kuid niisugusel hüpoteesil puudub igasugune reaalne alus. Eetrilise keskkonna universaalsuse tõttu peaks niisugusel juhul eetri poolt kehasse avaldatav surve minema mehhaanika põhivõrranditesse. Aga see tähendaks olemasoleva Newtoni mehhaanika revideerimist. Uued mehhaanika põhivõrrandid ei oleks enam Galilei teisenduste suhtes invariantid, ei saakski olla, sest relatiivsuspriinip on ju nüüd kehtetu. Kõik see oleks aga vastuolus väga paljude kogemustega, näiteks taevamehhaanikas, kus Newtoni teooria osutus kehtivaks väga suure täpsusega. Kõik see kooskõla teooria ja vaatluse vahel oleks läinud tühja, kui me oletaksime, et eeter pidurdab taevakehade liikumist.

Elektrodünaamika on olukord teistsugune, sest eeter on eelduse kohaselt elektromagnetilise välja kandja, milleta, nagu näib, ei saa välja kujutleda. Matemaatilisel peaks relatiivsuspriinipi kehtetus elektrodünaamika avalduma põhivõrrandite mitteinvariantuses Galilei teisenduste suhtes. Alljärgnevalt näitame, et see ongi tõepoolest nii. Seejuures aga ilmneb ühtlasi teatav ligikaudne invariantus, mida tuleb tõlgendada kui relatiivsuspriinipi ligikaudset kehtivust. Viimasele viitab ka asjaolu, et elektrodünaamika põhivõrrandid kehtivad liikuval Maal kujus, milles Maa liikumine mingil viisil ei peegeldu, s.o. Maa etendab, vaatamata oma liikumisele, justkui liikumatu

taustsüsteemi osa. Ilmselt peab see tähendama, et relatiivsusprintsip kehtib vähemalt mingil ligikaudsel kombel.

Elektrodünaamika põhivõrranditena võtame Maxwell-Lo-rentzi võrrandisüsteemi:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\rho \vec{u}}{c}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \rho, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

kus \vec{E}, \vec{H} on väljavektorid, ρ on laengutihedus ja \vec{u} on laengu liikumise kiirus. Peale väljavõrrandite uurime ka laengusse mõjuva jõu võrrandit:

$$\vec{f} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{u} \times \vec{H}) \right), \quad (1.8)$$

kus ϵ_0 on elektriline konstant ja \vec{f} on jõu tihedus.

Eeldame, et võrrandid (1.7) ja (1.8) on niisugusel kujul kehtivad absoluutselt liikumatus inertsiaalsüsteemis, ning vaatame, millise kuju omandavad nad absoluutse kiirusega \vec{v} liikuvast taustsüsteemis.

Diferentsiaaloperaatorite teisendamisel eeldame, et mõlema inertsiaalsüsteemi ruumilised teljed on vastavalt paralleelsed, sest võrrandite (1.7) ja (1.8) vektoriline kuju on niikuinii ruumilise koordinaadistiku teisenduste suhtes invariantne. Kui A on mingi väljasuurus, siis (1.4) põhjal

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial x'_k} = \delta_{ik} \frac{\partial A}{\partial x'_k} = \frac{\partial A}{\partial x'_i},$$

kus x_i on liikumatu ja x'_k liikuva süsteemi koordinaadid. Saadud võrdus näitab, et kõik ruumilised diferentsiaaloperaatorid jäävad Galilei teisendustel muutumatuks. Edasi,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial t'} + \frac{\partial x'_k}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial x'_k} = \frac{\partial A}{\partial t'} - v_k \frac{\partial A}{\partial x'_k},$$

B. O.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v} \text{grad}' \quad (1.9)$$

Arvestades veel kiiruste liitmise valemit (1.6) leiame teisendatud võrrandid (1.7) ja (1.8) järgmisel kujul:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}' \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} - \frac{\vec{v}}{c} \text{grad}' \vec{E} + \frac{\rho \vec{u}'}{c} + \frac{\rho \vec{v}}{c}, \\ \text{rot}' \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t'} + \frac{\vec{v}}{c} \text{grad}' \vec{H}, \\ \text{div}' \vec{E} &= \rho, \\ \text{div}' \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

ja

$$\vec{f} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{u}' \times \vec{H}) + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{H}) \right). \quad (1.11)$$

Esimesed kaks võrrandit (1.10) teisendame viimase kahe abil järgmiselt:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}' \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} - \frac{\vec{v}}{c} \text{grad}' \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \text{div}' \vec{E} + \frac{\rho \vec{u}'}{c}, \\ \text{rot}' \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t'} + \frac{\vec{v}}{c} \text{grad}' \vec{H} - \frac{\vec{v}}{c} \text{div}' \vec{H}. \end{aligned} \right.$$

Et $\vec{v} = \text{const}$, siis

$$\begin{aligned}\frac{\vec{v}}{c} \text{div}' \vec{E} - \frac{\vec{v}}{c} \text{grad}' \vec{E} &= \text{rot}' \left(\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c} \right), \\ \frac{\vec{v}}{c} \text{div}' \vec{H} - \frac{\vec{v}}{c} \text{grad}' \vec{H} &= \text{rot}' \left(\frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c} \right).\end{aligned}$$

Seega

$$\left. \begin{aligned}\text{rot}' \left(\vec{H} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c} \right) &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} + \frac{\rho \vec{u}'}{c}, \\ \text{rot}' \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c} \right) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t'}, \\ \text{div}' \vec{E} &= \rho, \\ \text{div}' \vec{H} &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

ja

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left\{ \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c} + \frac{1}{c} [\vec{u}' \times (\vec{H} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c})] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2} (\vec{u}' \times (\vec{v} \times \vec{E})) \right\}.\end{aligned} \quad (1.13)$$

Võrreldes saadud võrrandeid (1.12) ja (1.13) algupäraste võrranditega (1.7) ja (1.8), näeme mõlema vahel ilmsel sarnasust, kuid ka erinevusi. Peamine erinevus on see, et kahes esimeses võrrandis (1.12) ja võrrandis (1.13) kahes esimeses liikmes seisavad \vec{E} ja \vec{H} asemel suurused $\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c}$ ja $\vec{H} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c}$. Tõlgendame neid suurusi kui väljavektoreid liikivas inertsiaalsüsteemis:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c}, \\ \vec{H}' &= \vec{H} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Siis saavad võrrandid (1.12) ja (1.13) järgmise kuju:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}' \vec{H}' &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} + \frac{\rho \vec{u}'}{c}, \\ \text{rot}' \vec{E}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t'}, \\ \text{div}' \vec{E}' &= \rho, \\ \text{div}' \vec{H}' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

ja

$$\vec{f} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left\{ \vec{E}' + \frac{1}{c} (\vec{u}' \times \vec{H}') + \frac{1}{c^2} (\vec{u}' \times (\vec{v} \times \vec{E}')) \right\}. \quad (1.16)$$

Lõpuks tuleb vsel neist võrrandeist elimineerida \vec{E} ja \vec{H} , asendades nad \vec{E}' ja \vec{H}' kaudu. Selleks tuleb seosed (1.14) ümber pöörata. Ümberpööratud seosed on järgmise kujuga (vt. ülesanne 1):

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}' - \frac{\frac{\vec{v} \times \vec{H}'}{c} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{E}')}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \\ \vec{H} &= \vec{H}' + \frac{\frac{\vec{v} \times \vec{E}'}{c} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{H}')}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Asetades need avaldised \vec{E} ja \vec{H} asemele väljavõrranditesse (1.15), leiame peale mõningaid teisendusi (vt. ülesanne 2) lõplikult:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{rot}'\vec{H}' &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} + \frac{\rho \vec{u}'}{c} + \frac{\vec{v} \times \text{rot}'\vec{E}'}{c}, \\
 \text{rot}'\vec{E}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t'} - \frac{\vec{v} \times \text{rot}'\vec{H}'}{c} + \frac{\rho(\vec{v} \times \vec{u}')}{c^2}, \\
 \text{div}'\vec{E}' &= \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{\vec{v} \cdot \text{rot}'\vec{H}'}{c} + \frac{\vec{v} \cdot (\vec{v} \text{grad}'\vec{E}')}{c^2}, \\
 \text{div}'\vec{H}' &= \frac{\vec{v} \cdot \text{rot}'\vec{E}'}{c} + \frac{\vec{v} \cdot (\vec{v} \text{grad}'\vec{H}')}{c^2}.
 \end{aligned} \right\} (1.18)$$

Hiisamatuti leiame (1.16) asemele jõu võrrandi järgmisel kujul:

$$\vec{f} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left\{ \vec{E}' + \frac{1}{c} (\vec{u}' \times \vec{H}') + \frac{1}{c^2} \frac{\vec{u}' \times [\vec{v} \times (\vec{E}' - \frac{\vec{v} \times \vec{H}'}{c})]}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right\}. \quad (1.19)$$

Saadud võrrandites (1.18) ja (1.19) on kõik need liikmed, mis sisaldavad kiirust \vec{v} , võrreldes algkujuga (1.7) ja (1.8) liigsed, s. o. kiirusega \vec{v} liikuvast taustsüsteemis erinevad väljavõrrandid just nende liikmete poolest algvõrranditest. Et kõik need liikmed sisaldavad suhet v/c või selle ruutu, siis väikeste kiiruste puhul on nad ka väikesed, võrreldes teiste liikmetega. Selles avaldubki Maxwell-Lorentzi võrrandite ligikaudne invariantus Galilei teisenduste suhtes.

Täit invariantust aga siiski ei ole. See ei nähtu mitte ainult võrrandite (1.18) ja (1.19) kuju erinevusest võrreldes võrranditega (1.7) ja (1.8), vaid ka sellest, et väljavektorite pöördteisendused (1.17) erinevad oma kujult tei-

sendustest (1.14). Sellevastu, kui mõlemad taustsüsteemid oleksid samaväärsed, siis peaksid \vec{E}, \vec{H} avalduma \vec{E}', \vec{H}' kaudu täpselt niisamuti nagu need \vec{E}, \vec{H} kaudu, selle ainsa vahega, et \vec{v} asemele tuleks võtta $-\vec{v}$. Aga see ei ole nii ja seetõttu tulebki vaadelda esimest taustsüsteemi absoluutselt liikumatuks ja teist absoluutselt liikuvana.

Seoses ligikaudse invariantisusega tuleb meeles pidada, et see on saavutatud tänu väljavektorite teisendusvalemitele (1.14). Võib tekkida küsimus, kas neil valemitel on reaalselt füüsikalist tagapõhja, s. o. kas teisendatud vektorid \vec{E}' ja \vec{H}' kujutavad endast tõesti elektri- ja magnetvälja tugevust liikuvast taustsüsteemis. Niikuinii ju täieliku invariantisust ei ole; kas on siis mõtet taotleda nende teisendusvalemite abil ligikaudsetki invariantisust?

Sellele küsimusele leiame vastuse juba eespool märgitud asjaolust, et Maa liikumine elektromagnetilistele protsessidele mingit märgatavat mõju ei avalda. See tähendabki vähemalt ligikaudse invariantisuse olemasolu. Seega ei ole valemid (1.14) võetud meelevaheldselt, vaid nad peavad kehtima selleks, et Maa taustsüsteemis oleks võimalik kirjeldada elektromagnetilist välja vähemalt ligikaudu Maa liikumist arvestamata. Lisaks vastöeldule kinnitavad valemite (1.14) kehtivust rida spetsiaalselt kavandatud eksperimente. Alljärgnevalt ninetame neist tähtsamaid.

Neis katsetes etendab Maa liikumatu taustsüsteemi ees. Et see üldse võimalikuks osutub, kusjuures teisendusvalemite (1.14) kuju praktiliselt ei muutu, selles avaldub jälle

elektrodünaamika põhivõrrandite ligikaudne invariantus. Näitame seda lähemalt. Olgu meil peale eetri suhtes liikumatu taustsüsteemi kaks kiirustega \vec{v}_1 ja \vec{v}_2 liikuvat süsteemi. Esimeses neist olgu väljavektorid \vec{E}' , \vec{H}' ja teises \vec{E}'' , \vec{H}'' . Siis on (1.14) ja (1.17) põhjal

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}'' &= \vec{E} + \frac{\vec{v}_2 \times \vec{H}}{c}, \\ \vec{H}'' &= \vec{H} - \frac{\vec{v}_2 \times \vec{E}}{c} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

ja

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}' - \frac{\vec{v}_1 \times \vec{H}' + \frac{1}{c^2} \vec{v}_1 \times (\vec{v}_1 \times \vec{E}')}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}, \\ \vec{H} &= \vec{H}' + \frac{\vec{v}_1 \times \vec{E}' - \frac{1}{c^2} \vec{v}_1 \times (\vec{v}_1 \times \vec{H}')}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Elimineerides siit \vec{E} ja \vec{H} , leiame:

$$\begin{aligned} \vec{E}'' &= \vec{E}' + \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \times \vec{H}'}{c} + \\ &+ \frac{\frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \times (\vec{v}_1 \times \vec{E}')}{c^2} + \frac{1}{c^2} [\vec{v}_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{H}') - \vec{v}_2 (\vec{v}_1 \times \vec{H}') \cdot \vec{v}_1]}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}{}, \\ \vec{H}'' &= \vec{H}' - \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \times \vec{E}'}{c} + \\ &+ \frac{\frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \times (\vec{v}_1 \times \vec{H}')}{c^2} - \frac{1}{c^2} [\vec{v}_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{E}') - \vec{v}_2 (\vec{v}_1 \times \vec{E}') \cdot \vec{v}_1]}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Siit näeme, et kui jätta arvestamata viimased liikmed, mis on $v_1 \ll c$ ja $v_2 \ll c$ korral väga väikesed, siis saavad need valemid samasuguse kuju nagu (1.14). See tähendab, et küllaldase täpsusega võime rakendada valemid (1.14) väljavektorite teisendamiseks mistahes inertsiaalsüsteemist mistahes teise inertsiaalsüsteemi (kui ainult nende süsteemide kiirused eetri suhtes on võrreldes valguse kiirusega väikesed). Seega võib praktiliselt mistahes niisugune inertsiaalsüsteem (näiteks Maa) etendada absoluutselt liikumatu süsteemi osa.

Siirdume nüüd eksperimentide juurde, mis kinnitavad valemite (1.14) kehtivust.

Elektrivektori teisendusvalemi kehtivust kinnitab kõige paremini jõud, mis mõjub magnetväljas kiirusega \vec{v} liikuvasse laengusse. Punktlaengu e korral võrdub see jõud $\frac{e}{\epsilon_0 c} (\vec{v} \times \vec{H})$. Laenguga kaasaliikivas süsteemis aga võrdub magnetiline jõud nulliga (sest kiirus on null), seega peab laengusse mõjuv jõud olema elektriline, s. o. kaasaliikivas süsteemis eksisteerib elektriväli $\frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c}$, mis ongi kooskõlas 1. valemiga (1.14).

Nii on juhi liikumiselt magnetväljas esinevat induksiiooninähtust (s. o. voolu või elektromotoorse jõu tekkimist) võimalik seletada samaväärselt kas magnetvälja mõju tulemusena juhi vabadesse laengutesse, mis koos temaga liiguvad, või elektrivälja mõju tulemusena juhiga kaasaliikivas süsteemis.

Elektrivälja $\frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c}$ olemasolu võib kindlaks teha ka tema mõju järgi keerukamatele süsteemidele, näiteks neut-

raalsetele aatomitele. W.Wieni katses lastakse vesiniku aatomite kimp läbi liikumise suunaga ristioleva magnetvälja. Aatomitega kaasaliikuvas süsteemis eksisteeriv elektriväli põhjustab spektrijoonte lõhenemist (Starki efekt), mida oligi eelles katses võimalik optiliselt kindlaks teha.

H.A. Wilsoni katse näitab elektrivälja $\frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c}$ polariseerivat mõju. Selles katses pöörleb õõnes dielektriline silinder teljega paralleelse magnetväljas. Selle tulemuseks on radiaalne elektriväli $\frac{vH}{c}$, mis põhjustab radiaalse polarisatsiooni. Eksperimendis on silindri sise- ja välispind kaetud maandatud metallkatetega, nii et silindri pöörlemisel nendel tekivad silindri seotud laengutega absoluutväärtuselt võrdsed, kuid vastasmärgilised laengud. Kui siis üheseselt lülitatakse välja magnetväli ja maandus, osutub silinderkondensaator laetuks. Elektromeetriga mõõdetud potentsiaalide vahe on kooskõlas teoreetilise ennustusega.

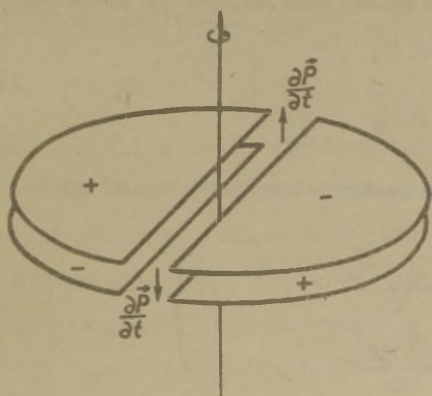
Magnetvektori teisendusvalem väljendab õigupoolest seda, et igasugused liikuvad laengud tekitavad magnetvälja, ja nimelt ühesugusel viisil, sõltumata sellest, kas laeng on mikroskoopiline või makroskoopiline, või muudest asjaoludest. Kui näiteks punktlaeng e on liikumatu, siis tekitab ta elektrivälja $\vec{E} = \frac{e\vec{r}}{4\pi r^2}$, kus \vec{r} on väljapunkti kohavektor. Kiirusega \vec{v} liikuvast süsteemis liigub seesama laeng kiirusega $-\vec{v}$. Vooluelemendi $-e\vec{v}$ magnetväli avaldub aga valemiga $\vec{H}' = -\frac{e\vec{v} \times \vec{r}}{4\pi c r^3}$. Seega $\vec{H}' = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c}$, nagu

peabki olema 2. valemi (1.14) järgi. Kõigis eksperimentides, millega tahetakse kinnitada selle valemi kehtivust, on seega tegemist üht või teist liiki voolu magnetvälja mõõtmisega.

H.A. Rowlandi katses mõõdetakse kiiresti pöörleva laetud metallplaadi magnetvälja. See väli on konvektsioonivoolu väli ning laengud, mis koos kettaga liiguvad, on vabad laengud.

W.C. Röntgeni ja A.A. Eichenwaldi katsetes mõõdetakse samuti konvektsioonivoolu magnetvälja, kuid liikuvateks laenguteks on siin polariseeritud dielektriku seotud laengud. Neis katsetes lastakse dielektrilisel kettal kiiresti pöörelda laetud kondensaatori plaatide vahel. Mõõdetud magnetväli on kooskõlas teoreetiliselt oodatuga.

Röntgeni ja Eichenwaldi katsete teises variandis mõõdetakse polarisatsioonivoolu magnetvälja. Selleks lastakse jälle pöörelda dielektrilisel kettal kondensaatori plaatide



Joonis 2.

vahel. Plaadid on aga piki üht diametrit lõigatud kaheks pooleks ja need pooled on laetud vastupidiselt (vt. joon. 2). Seetõttu on pool kettast polariseeritud ühes suunas ja teine pool vastupidises suunas.

Ketta pöörlemisel muutub polarisatsioon pidevalt piki läbi-
 löiget. Polarisatsioonivool $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ tekitab aga magnetvälja.
 Selle mõõtmise tulemused leiti olevat samuti täies kooskõ-
 las teooriaga.

Ü l e s a n d e d .

1. Tuletada väljavektorite pöörde teisenduse valemid
 (1.17).

L a h e n d u s . Lahutame väljavektorid kiirusega
 \vec{v} paralleelseks (indeks \parallel) ja sellega ristiolevaks (in-
 deks \perp) komponendiks. Et (1.4) põhjal

$$\begin{aligned}\vec{v}\vec{E}' &= \vec{v}\vec{E}, \\ \vec{v}\vec{H}' &= \vec{v}\vec{H},\end{aligned}$$

siis

$$\left. \begin{aligned}\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, \\ \vec{H}'_{\parallel} &= \vec{H}_{\parallel}.\end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Lahutades need valemid valemitest (1.14) ja arvestades, et

$$\left. \begin{aligned}\vec{v} \times \vec{E} &= \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}, \\ \vec{v} \times \vec{H} &= \vec{v} \times \vec{H}_{\perp},\end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

saame ristkomponentide jaoks teisendusvalemid, mille kuju
 on sama, nagu (1.14):

$$\left. \begin{aligned}\vec{E}'_{\perp} &= \vec{E}_{\perp} + \frac{\vec{v} \times \vec{H}_{\perp}}{c}, \\ \vec{H}'_{\perp} &= \vec{H}_{\perp} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}}{c}.\end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Korrutades vektoriliselt need valemid vasakult kiirusega

\vec{v} , saame:

$$\vec{v} \times \vec{E}_\perp = \vec{v} \times \vec{E}'_\perp - \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{H}_\perp)}{c},$$

$$\vec{v} \times \vec{H}_\perp = \vec{v} \times \vec{H}'_\perp + \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{E}_\perp)}{c},$$

ehk, kuna

$$\vec{v} \vec{E}_\perp = \vec{v} \vec{H}_\perp = 0,$$

sile

$$\vec{v} \times \vec{E}_\perp = \vec{v} \times \vec{E}'_\perp + \frac{v^2}{c} \vec{H}_\perp,$$

$$\vec{v} \times \vec{H}_\perp = \vec{v} \times \vec{H}'_\perp - \frac{v^2}{c} \vec{E}_\perp.$$

Asetades need avaldised valemite (1.25) viimastesse liikmetesse, saame seosed, millest võime avaldada \vec{E}_\perp ja \vec{H}_\perp :

$$\vec{E}_\perp = \frac{\vec{E}'_\perp - \frac{\vec{v} \times \vec{H}'_\perp}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$\vec{H}_\perp = \frac{\vec{H}'_\perp + \frac{\vec{v} \times \vec{E}'_\perp}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Lõpuks jääb liita neile ristkomponentidele paralleelkomponentid valemitest (1.23). Arvestades (1.24) saamegi peale mõningaid lihtsaid teisendusi valemid (1.17).

Kontrolliks võib \vec{E} ja \vec{H} avaldised valemitest (1.17) asetada valemite (1.14) parematesse pooltesse, või vastupidi, \vec{E}' ja \vec{H}' avaldised valemitest (1.14) asetada valemite (1.17) parematesse pooltesse. Mõlemal juhul saame samasused.

2. Lähtudes võrranditest (1.15) tuletada võrrandid (1.18).

L a h e n d u s . Võtame esmalt kaks esimest Maxwelli võrrandit. Tähistame ajutiselt

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \equiv \vec{A},$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t'} \equiv \vec{B}.$$

Elimineerides (1.17) abil nimetatud võrranditest \vec{E} ja \vec{H} , saame:

$$\text{rot}' \vec{H}' = \vec{A} + \frac{\rho \vec{u}'}{c} - \frac{1}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})} [\vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{A})],$$

$$\text{rot}' \vec{E}' = -\vec{B} - \frac{1}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})} [\vec{v} \times \vec{A} - \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B})].$$

Korrutades vektoriliselt need võrrandid vasakult vektoriga \vec{v} , leiame:

$$\vec{v} \times \text{rot}' \vec{H}' = \frac{\rho(\vec{v} \times \vec{u}')}{c} + \frac{\vec{v} \times \vec{A} - \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B})}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$\vec{v} \times \text{rot}' \vec{E}' = - \frac{\vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{A})}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Nurksulgudes olevad avaldised on siin identsed eelmistes valemites olevate analoogiliste avaldistega. Elimineerides nad, saamegi kaks võrrandit (1.18).

Ülejäänud kaks võrrandit (1.18) saame, asendades vastavates võrrandites (1.15) \vec{E} ja \vec{H} avaldistega (1.17).

Esmalt leiame:

$$\operatorname{div}' \vec{E}' - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[-\frac{1}{c} \vec{v} \operatorname{rot}' \vec{H}' - \frac{v^2}{c^2} \operatorname{div}' \vec{E}' + \frac{\vec{v} (\vec{v} \operatorname{grad}' \vec{E}')}{c^2} \right] = \rho,$$

$$\operatorname{div}' \vec{H}' + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[-\frac{1}{c} \vec{v} \operatorname{rot}' \vec{E}' + \frac{v^2}{c^2} \operatorname{div}' \vec{H}' - \frac{\vec{v} (\vec{v} \operatorname{grad}' \vec{H}')}{c^2} \right] = 0.$$

Avaldades siit $\operatorname{div}' \vec{E}'$ ja $\operatorname{div}' \vec{H}'$, saamegi viimased kaks võrrandit (1.18).

3. Tuletada liikuvast inertsiaalsüsteemis kehtivatest väljavõrranditest (1.18) ja jõuvõrrandist (1.19) välja energia tiheduse ja Poynting-Ümovi vektori valemid.

L a h e n d u s . Kirjutamise hõlbustamiseks jätame alljärgnevates arvutustes ära indeksi ' suurus-
te tähistamiseks liikuvast süsteemis. Alles lõpptulemu-
ses võtame selle indeksi uuesti tarvitusele.

Esmesest kahest võrrandist (1.18) järgneb:

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) - \frac{\rho \vec{E} \vec{u}}{c} + \frac{\rho \vec{H} (\vec{v} \times \vec{u})}{c^2} - \frac{\vec{H} (\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{H}) + \vec{E} (\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{E})}{c}$$

ning võrrandist (1.19)

$$\vec{f}\vec{u} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \vec{E}\vec{u}. \quad (1.26)$$

Seega saame eelmise võrduse avaldada kujul:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= -\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) - \frac{\epsilon_0 \vec{f}\vec{u}}{c} + \\ &+ \frac{\rho \vec{H}(\vec{v} \times \vec{u})}{c^2} + \frac{\vec{v}}{c} (\vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} + \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Viimase liikme avaldamiseks kasutame jälle kaht esimest võrrandit (1.18):

$$\begin{aligned} \frac{\vec{v}}{c} (\vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} + \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H}) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{v} (\vec{E} \times \vec{H})] + \\ &+ \frac{\vec{E}\vec{v} \cdot \vec{v} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H}\vec{v} \cdot \vec{v} \operatorname{rot} \vec{E}}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \\ &+ \frac{\rho (\vec{E}\vec{u} \cdot v^2 - \vec{E}\vec{v} \cdot \vec{u}\vec{v})}{c^3} + \frac{\rho \vec{v} (\vec{H} \times \vec{u})}{c^2}. \end{aligned}$$

Asetades võrdusesse (1.27) ning arvestades jälle (1.26), saame:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2c} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) + \right. \\ &+ \left. \frac{\vec{v} (\vec{E} \times \vec{H})}{c^2} \right] - \frac{\epsilon_0 \vec{f}\vec{u}}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{\rho \vec{E}\vec{v} \cdot \vec{u}\vec{v}}{c^3} + \\ &+ \frac{\vec{E}\vec{v} \cdot \vec{v} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H}\vec{v} \cdot \vec{v} \operatorname{rot} \vec{E}}{c^2}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Rakendades veel kord (1.18) kaht esimest võrrandit, saame:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{E}\vec{v} \cdot \vec{v} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H}\vec{v} \cdot \vec{v} \operatorname{rot} \vec{E}}{c^2} &= \\ &= \frac{1}{c^3} (\rho \vec{E}\vec{v} \cdot \vec{u}\vec{v} + \vec{E}\vec{v} \cdot \vec{v} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H}\vec{v} \cdot \vec{v} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) = \\ &= \frac{1}{c^3} \rho \vec{E}\vec{v} \cdot \vec{u}\vec{v} + \frac{1}{2c^3} \frac{\partial}{\partial t} [(\vec{E}\vec{v})^2 + (\vec{H}\vec{v})^2]. \end{aligned}$$

Asetades võrrandisse (1.28), leiame:

$$\begin{aligned} (1 - \frac{v^2}{c^2}) \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2c} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) + \right. \\ &+ \frac{\vec{v}(\vec{E} \times \vec{H})}{c^2} - \frac{1}{2c^3} \{(\vec{E}\vec{v})^2 + (\vec{H}\vec{v})^2\} \left. \right] - \frac{\epsilon_0 \vec{f}\vec{u}}{c} (1 - \frac{v^2}{c^2}). \end{aligned}$$

Siit järgneb:

$$\begin{aligned} -\frac{c}{\epsilon_0} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= \vec{f}\vec{u} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) + \frac{\vec{v}}{c}(\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{(\vec{E}\vec{v})^2 + (\vec{H}\vec{v})^2}{2c^2}}{\epsilon_0(1 - \frac{v^2}{c^2})}. \end{aligned}$$

Saadud võrdust võib tõlgendada kui energia bilansi võrrandit eeldusel, et (nüüd paneme uuesti indeksi ')

$$\vec{S}' = \frac{c}{\epsilon_0} (\vec{E}' \times \vec{H}') \quad (1.30)$$

on Poynting-Umovi vektor ja

$$\begin{aligned} w' &= \frac{1}{\epsilon_0(1 - \frac{v^2}{c^2})} \left[\frac{1}{2} (\vec{E}'^2 + \vec{H}'^2) + \frac{\vec{v}(\vec{E}' \times \vec{H}')}{c} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\vec{E}'\vec{v})^2 + (\vec{H}'\vec{v})^2}{2c^2} \right] \quad (1.31) \end{aligned}$$

on välja energia tihedus. Siit on näha, et Poynting-Ümovi vektori avaldis ei erine kujult selle vektori avaldisest liikumatus süsteemis, aga energia tiheduse valem sisaldab lisaliikmeid ja erineb ka teguri $(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1}$ poolest. Kui v/c on väike, siis on igatahes need liikmed ka väikesed ja lisategur on praktiliselt võrdne 1-ga. Selles avaldub jälle relatiivsuspriprintsibi ligikaudne kehtivus elektrodünaamikas.

4. Avaldada Poynting-Ümovi vektor \vec{S}' ja välja energia tihedus w' liikuvas süsteemis vastavate suuruste kaudu liikumatus süsteemis.

L a h e n d u s . Asetades valemitesse (1.30) ja (1.31) \vec{E}' ja \vec{H}' asemele nende avaldised \vec{E} ja \vec{H} kaudu valemitest (1.14) ning arvestades Poynting-Ümovi vektori ja energia tiheduse avaldasi liikumatus süsteemis:

$$\left. \begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{\epsilon_0} (\vec{E} \times \vec{H}), \\ w &= \frac{1}{2\epsilon_0} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2), \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

leiame peale mõningaid lihtsaid teisendusi:

$$\vec{S}' = \vec{S} - 2w\vec{v} + \frac{\vec{v}\vec{S} \cdot \vec{v}}{c^2} + \frac{\vec{v}\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{v}\vec{H} \cdot \vec{H}}{\epsilon_0} \quad (1.33)$$

ja

$$w' = w - \frac{\vec{v}\vec{S}}{c^2}. \quad (1.34)$$

Valemis (1.33) ei ole \vec{S}' avaldatud ainult w ja \vec{S} kaudu, vaid selle viimases liikmes esinevad ka väljavektorid \vec{E} ja \vec{H} otseselt. Sellevastu on valemis (1.34) w' aval-

datud ainult w ja \vec{S} kaudu. Analoogilise kuju andmiseks valemile (1.33) peame arvestama ka välja impulssi ja niinimetatud pingetenseri, mis kirjeldab välja impulsi liikumist. Nende suuruste avaldised on liikumatus süsteemis teatavasti järgmise kujuga. Impulsi tihedus on

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c\epsilon_0} (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (1.35)$$

ja pingetensor on

$$T = wI - \frac{\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{H}}{\epsilon_0} = \quad (1.36)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) - \vec{E} \cdot \vec{E} - \vec{H} \cdot \vec{H} \right],$$

kus I on ühiktensor. Viimasest valemist järgneb:

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{E} + \vec{v} \cdot \vec{H}}{\epsilon_0} = w\vec{v} - T\vec{v}.$$

Seega omandab valem (1.33) kuju:

$$\vec{S}' = \vec{S} - w\vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{g} - T\vec{v}. \quad (1.37)$$

Valemid (1.34) ja (1.37) ei ole midagi muud kui välja energia tiheduse ja Poynting-Ümovi vektori teisendusvalemid üleminekul liikumatust inertsiaalsüsteemist liikuvasse inertsiaalsüsteemi. Nad on tuletatud Galilei teisenduse alusel, seega on relatiivsusteooria seisukohalt ebaõiged. Näib, et väikeste kiiruste puhul peaksid nad siiski kehtima täpsete relativistlike valemite piirkujuna. Siiski ei ole see küsimus nii lihtne. Me vaatame seda lähemalt §-s 22 (ülesanne 1), kus leiame kõnesolevate suuruste relativistlikud teisendusvalemid.

5. Monokromaatilise tasalaine väljavektorid on absoluutselt liikumatus inertsiaalsüsteemide teineteisega ja laine levimiseunuga risti, kusjuures $\vec{H} = \vec{k}_0 \times \vec{E}$. Siin on \vec{k}_0 laine levimise suunaline ühikvektor. Energia tihedus ja Poynting-Umovi vektor avalduvad järgmiselt:

$$w = \frac{E^2}{\epsilon_0}$$

ja

$$\vec{S} = \frac{cE^2 \vec{k}_0}{\epsilon_0},$$

nii et $\vec{S} = w\vec{c}$, kus $\vec{c} = c\vec{k}_0$ on laine kiirus. Avaldada selle laine kiirus kiirusega \vec{v} liikuvast inertsiaalsüsteemis.

L a h e n d u s . Valemite (1.14) põhjal, arvestades seost $\vec{H} = \vec{k}_0 \times \vec{E}$, leiame:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E} \left(1 - \frac{\vec{k}_0 \cdot \vec{v}}{c}\right) + \frac{\vec{v} \vec{E} \cdot \vec{k}_0}{c}, \\ \vec{H}' &= \left(\vec{k}_0 - \frac{\vec{v}}{c}\right) \times \vec{E}. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Asetades need avaldised valemitesse (1.30) ja (1.31), saame:

$$\vec{S}' = \frac{cE^2}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\vec{k}_0 \cdot \vec{v}}{c}\right) \left(\vec{k}_0 - \frac{\vec{v}}{c}\right) \quad (1.39)$$

ja

$$w' = \frac{E^2}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\vec{k}_0 \cdot \vec{v}}{c}\right). \quad (1.40)$$

Siit järgneb, et

$$\vec{S}' = w' \vec{c}', \quad (1.41)$$

kus

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v} \quad (1.42)$$

on laine kiirus liikuvast süsteemis. See tulemus näi-

tab, et valguse kiirus allub tavalisele mehhaanikast tuntud kiiruste liitmise seadusele (vrd. (1.6)). Eetrihüpoteesi seisukohalt ongi see õieti endastmõistetav, sest liikumatu eeter on keskkond, milles levib valgus.

§ 3. Michelsoni katse.

Belmises paragrahvis (vt. ülesanne 5) jõudsime tulemusele, et valguse kiirus eetri suhtes liikuvast süsteemis ei ole suunast sõltumatu nagu eetri suhtes liikumatus süsteemis. Suunas, mis ühtib süsteemi absoluutse kiirusega, on valguse kiirus võrdne (1.42) põhjal $C - v$, vastupidises suunas $C + v$, üldiselt aga on vahepealseid väärtusi nende kahe ekstreemväärtuse vahel. Eetri suhtes liikuv vaatleja võib seega oma liikumist avastada ja isegi selle kiiruse kindlaks teha, mõõtes valguse kiirust eri suundades. Niisugusele põhimõttelisele võimalusele viitas esmakordselt J.C. Maxwell juba 1878. aastal. Esmakordselt korraldas tegeliku katse selleks A.A. Michelson 1881. aastal.

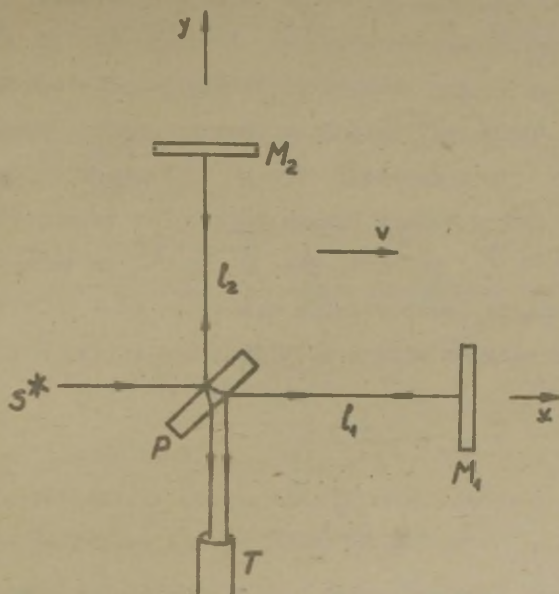
Et Maa tiirleb Päikese ümber, siis peab tal olema mingi liikumine ka eetri suhtes. Isegi kui oletame (kuigi see on väga vähe tõenäoline), et juhuslikult mingil hetkel on Maa kiirus eetri suhtes võrdne nulliga (see on võimalik siis, kui Maa orbitaalne kiirus Päikese suhtes on sal hetkel võrdvastupidine Päikese kiirusega eetri suhtes), siis oleks poole aasta möödumisel Maa kiirus

eetri suhtes võrdne tema kahekordse orbitaalse kiirusega. Seega peab Maal mõõdetud valguse kiirus olema mitteisotroopne (e. o. ta peab olenema suunast). Mitteisotroopsuse efekt aga on arvatavasti väga väike, sest vaevalt võiksime omistada kogu Päikesesüsteemile valguse kiirusega võrreldavat kiirust (sel juhul avalduks valguse kiiruse mitteisotroopsus küllaltki markantselt juba valguse kiiruse mõõtmisel Römeri meetodil, mida aga tegelikult leitud ei ole). Seetõttu tuleb arvatava mitteisotroopsuse avastamiseks liikuvale Maal rakendada erakordselt täpsed ning tundlikku meetodit. Selliseks meetodiks optikas on interferentsmeetod. Michelsoni katse ongi interferentskatse.

Katseriistaks on Michelsoni kahe õlaga interfereerimise katse. Katse edukuse eelduseks on mehhaaniliste ja temperatuuriliste häirituste maksimaalne elimineerimine. Selleks paigutas A.A. Michelson interferomeetri elavhõbedas ujuvale kiviplaadile ja asetaski kogu katseseadme termostaati, kus temperatuur püüdis konstantsena saajandiku kraadi täpsusega. Sellega olid kõik võimalikud süstemaatilised vead niipalju alla viidud, et oodatav efekt pidi ilmema.

Katseskeem (vt. joon. 3) on järgmine. Valgusallikast S langeb monokromaatiline kiir 45° nurga all poollähbipaistvale plaadile P ning jaguneb kaheks kiireks, mis levivad interferomeetri kahe õla suunas ja on teineteisega risti. Plaati läbinud kiir langeb peeglile M_1 ,

peegeldub sellelt ja, jõudnud unesti plaadile P , peegeldub sellelt pikksilma T suunas. Teine kiir peegeldub algul plaadilt, langeb siis peeglile M_2 , peegeldub



Joonis 3.

tagasi ja läbib plaati P , ühinedes esimese kiiriga. Pikksilmas on näha mõlema kiire interfereerumisel tekkinud interferentsipilt, milles perioodiliselt vahelduvad heledad ja tumedad triibud. Triipude asukohad on määratud kiirte käiguvahuga, mis omakorda oleneb valguse kiirusest mõlemal teel. Järelikult, kui pöörata interfomeeter algasendi suhtes ristiasendisse, nii et õlgade sihid vahetuvad, peab interferentsipilt nihkuma, sest valguse kiirus mõlema õla suunas muutub ja

vastavalt muutub ka kiirte käiguvähe.

Teeme sellekohase arvutuse. Võtame interferomeetri õlgade suunad x- ja y-teljeks (vt. joon.) ja oletame, et Maa absoluutne kiirus v on x-telje suunaline. Peeglite M_1 ja M_2 kaugused plaadist P olgu l_1 ja l_2 . Alg- asendis on 1. õlg x-telje ja 2. õlg y-telje suunas, lõpp- asendis vastupidi. Valguse kiirus on x-telje suunas võrd- ne $c - v$ ja tagasiteel $c + v$. Valguse kiiruse leid- miseks y-telje suunas paneme tähele, et valemi (1.42) jär- gi $\vec{c} = \vec{c}' + \vec{v}$, ja siit, kui \vec{c}' ja \vec{v} on teineteisega risti (valgus levib y-telje sihis), $c^2 = c'^2 + v^2$. Seega on valguse kiirus y-telje sihis võrdne $c' = \sqrt{c^2 - v^2}$. Nüüd on:

$$t_1 = \frac{2l_1 c}{c^2 - v^2}$$

ja

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

ajad, mida vajavad kiired levimiseks plaadilt peeglini ja tagasi. Seega on käiguvähe (faasivähe) võrdne

$$\omega \Delta t = \omega (t_2 - t_1) = \omega \left(\frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{2l_1 c}{c^2 - v^2} \right),$$

kus ω on ringsagedus. Pärast interferomeetri pööramist 90° võrra on analoogiliselt,

$$t'_1 = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$t'_2 = \frac{2l_2 c}{c^2 - v^2}$$

ning

$$\omega \Delta t' = \omega (t_2' - t_1') = \omega \left(\frac{2l_2 c}{c^2 - v^2} - \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right).$$

Seega on faasivahe muutus võrdne

$$\omega (\Delta t' - \Delta t) = 2\omega (l_1 + l_2) \left(\frac{c}{c^2 - v^2} - \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right).$$

Arendades viimase sulgavaldisse ritta, leiame:

$$\frac{c}{c^2 - v^2} - \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{c} [(1 - \beta^2)^{-1} - (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}] \approx \frac{\beta^2}{2c},$$

kus $\beta = \frac{v}{c}$. Järelikult,

$$\omega (\Delta t' - \Delta t) = \frac{\omega \beta^2 (l_1 + l_2)}{c}.$$

Interferentsipildi nihe peab seega moodustama selle perioodist murdosa

$$\frac{\omega (\Delta t' - \Delta t)}{2\pi} = \frac{\beta^2 (l_1 + l_2)}{\lambda}, \quad (1.43)$$

kus λ on lainepikkus.

Interferomeetri õlgade efektiivsed pikkused võib korduvate peegeldumiste abil suurendada mõne meetrini. A. Michelsoni hilisemates, koos E.W. Morleyga 1887. a. sooritatud katsetes oli $l_1 + l_2 = 22$ m, D.C. Milleri ja E.W. Morley 1904. a. katsetes koguni $l_1 + l_2 = 68$ m. Kui võtame valemis (1.43) $\beta = 10^{-4}$, mis vastab Maa orbitaalsele kiirusele 30 km/s, ja kui $\lambda = 5,9 \cdot 10^{-7}$ m (naatriumi kollane joon) ja $l_1 + l_2 = 22$ m, siis saame:

$$\frac{\omega (\Delta t' - \Delta t)}{2\pi} = 0,37.$$

Selline nihe peaks olema selgesti märgatav. Ometi osutusid kõikide katsete tulemused negatiivseks, alates juba A.A. Michelsoni 1881. a. katsetest. G. Joosi täpsemad

katsed 1930. a. näitasid, et arvatava "eetrituule" kiirus, kui ta ka üldse olemas on, ei või ületada 1,5 km/s. 1964. a. C.M. Townes kaastöölistega modifitseerisid Michelsoni katse, võttes vaatluse alla interferentsjoonte nihkumise asemele kahe teineteisega risti asetatud laseri kiirguse sageduse muutumise, mis peaks aset leidma aparatuuri pööramisel juhul, kui valguse kiirus oleneks suunast. See efekt on täiesti analoogiline interferentsjoonte nihkumise efektiga ja on samuti võrdeline β^2 -ga. Kuid katse täpsus on palju suurem. Ka siin oli tulemus negatiivne ja sellest võis järeldada, et "eetrituule" kiirus ei või olla üle 30 m/s.

§ 4. Trouton-Noble'i katse.

Michelsoni katse on teist järku katse, s. o. oodatav efekt on võrdeline suurusega β^2 (vt. valem (1.43)). On olemas veel rida teisi katseid, mille eesmärgiks on samuti Maa liikumise mõju avastamine Maal toimuvatele protsessidele. Kõik need katsed on samuti teist järku, seega on mõõdetav efekt väga väike. Peatume lähemalt ainult ühe sedaliiki katse juures, mille korraldasid 1903.a. F.T. Trouton ja H.R. Noble. Ütleme juba ette, et ka selle katse tulemus osutus negatiivseks: oodatud efekt jäi avastamata.

Trouton-Noble'i katse seisneb peene niidi otsa ülesriputatud laetud plaatkondensaatori käitumise vaatlemises.

Kondensaator on riputatud nii, et tema plaadid on vertikaalses asendis. Liikumisel eetri suhtes peaks plaatidel olevatesse laengutesse mõjuvate jõudude moment pöörama plaadid nii, et nad asetuksid paralleelselt kondensaatori absoluutse kiirusega. Kondensaator peaks seega teatava aja möödumisel sellesse asendisse pöörduma. Sellega oleks Maa absoluutse liikumise suund avastatud (õigemini, selle suuna horisontaalprojektsioon). Tegelikult midagi sellist ei juhtunud. Kondensaator jäi rippuma ükskõikselt sellesse asendisse, millesse ta algul pandi.

Selle katse teoreetilise käsitluse lihtsustamiseks vaatleme kondensaatori asemel kaht võrdvastupidist punktlaengut, mis asetsevad jäiga varda otstel ja mõjuvad teineteisesse võrdvastupidiste jõududega. Juhul kui see laengutepaar on absoluutselt (s. o. eetri suhtes) liikumatu, on need jõud suunatud piki varrast, nii et nende moment on võrdne nulliga. Kui aga varras koos laengutega liigub eetri suhtes, peavad jõud moodustama vardaga mõnesuguse väikese nurga; seega erineb jõumoment sel juhul nullist.

Kõige esmalt peame leidma ühtlaselt liikuva punktlaengu e välja absoluutselt liikumatus inertsiaalsüsteemis. Lähtudes Lienard-Wiecherti hilinevatest potentsiaalidest võib väljatugevused teatavasti avaldada kujul:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}, t) &= \frac{e(1 - \frac{v^2}{c^2})(\vec{R}_k - \frac{R_k \vec{v}}{c})}{4\pi(R_k - \frac{R_k \vec{v}}{c})^3}, \\ \vec{H}(\vec{R}, t) &= \frac{\vec{R}_k \times \vec{E}}{R_k}, \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

kus \vec{R} on väljapunkti kohavektor, mille alguspunktiks on laengu asukoht hetkel t , ja \vec{R}_h on sama väljapunkti kohavektor alguspunktiga laengu asukohas hetkel $t - \frac{R_h}{c}$ (vt. joon. 4). R_h ja \vec{R}_h elimineerimiseks valemitest (1.44) paneme tähele, et

$$\vec{R}_h = \vec{R} + \frac{R_h \vec{v}}{c}. \quad (1.45)$$

Võttes selle võrduse ruutu, leiame:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) R_h^2 - \frac{2\vec{R}\vec{v}}{c} R_h - R^2 = 0 \quad (1.46)$$

ja siit

$$R_h = \frac{\frac{\vec{R}\vec{v}}{c} + \sqrt{R^2 - \frac{(\vec{R} \times \vec{v})^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.47)$$

Nüüd valemist (1.45) saame:

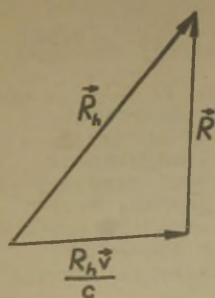
$$\vec{R}_h = \frac{\vec{R} + \frac{(\vec{R} \times \vec{v}) \times \vec{v}}{c^2} + \frac{\vec{v}}{c} \sqrt{R^2 - \frac{(\vec{R} \times \vec{v})^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.48)$$

ja

$$R_h - \frac{\vec{R}_h \vec{v}}{c} = \sqrt{R^2 - \frac{(\vec{R} \times \vec{v})^2}{c^2}}. \quad (1.49)$$

Asetades need avaldised valemitesse (1.44) R_h ja \vec{R}_h asemele, saame:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}, t) &= \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{R}}{4\pi \left[R^2 - \frac{(\vec{R} \times \vec{v})^2}{c^2} \right]^{3/2}}, \\ \vec{H}(\vec{R}, t) &= \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$



Laenguga kaasaliikuvast, s. o. sama absoluutse kiirusega \vec{v} liikuvast inertsiaalsüsteemis on valemi (1.14) põhjal väljatugevused võrdsed

Joonis 4.

$$\vec{E}' = \frac{e(1 - \frac{v^2}{c^2})[\vec{R} + \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{R})}{c^2}]}{4\pi[R^2 - \frac{(\vec{R} \times \vec{v})^2}{c^2}]^{3/2}}, \quad (1.51)$$

$$\vec{H}' = 0,$$

kusjuures kohavektori \vec{R} alguspunkt on nüüd liikumatu; sellega on kooskõlas \vec{E}' ja \vec{H}' staatilisus.

Kui punktis \vec{R} asub laeng $-e$, siis mõjub sellesse valemi (1.19) põhjal, kus tuleb võtta $\vec{u}' = 0$, jõud

$$\vec{F} = - \frac{e^2(1 - \frac{v^2}{c^2})[\vec{R} + \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{R})}{c^2}]}{4\pi\epsilon_0[R^2 - \frac{(\vec{R} \times \vec{v})^2}{c^2}]^{3/2}}. \quad (1.52)$$

Esimesse laengusse $+e$ mõjub laengu $-e$ poolt arusaadavalt võrdvastupidine jõud. Selle jõupaari moment on

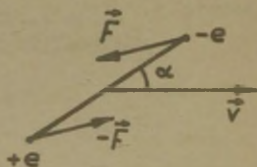
$$\begin{aligned} \vec{N} = \vec{R} \times \vec{F} &= \frac{e^2(1 - \frac{v^2}{c^2})\vec{v} \times \vec{R} \cdot (\vec{v} \times \vec{R})}{4\pi\epsilon_0 c^2 [R^2 - \frac{(\vec{R} \times \vec{v})^2}{c^2}]^{3/2}} \approx \\ &\approx \frac{e^2 \vec{v} \times \vec{R} \cdot (\vec{v} \times \vec{R})}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Kui \vec{R} moodustab kiirusega \vec{v} nurga α (vt. joon. 5), siis

$$\vec{N} = \frac{e^2 \vec{x}_0}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot \sin 2\alpha, \quad (1.54)$$

kus \vec{x}_0 on ristkorrutise $\vec{v} \times \vec{R}$ suunaline ühikvektor. Siit on näha, et vaadeldav jäigalt seotud laengutepaar on stabiilses tasakaalus ainult $\alpha = 90^\circ$ juures, s. o. siis, kui nende ühendussirge on risti nende absoluutse liikumise suunaga.

Analoogiline tulemus kehtib ka siis, kui punktlaengute asemel on kondensaatori plaatide laengud. Jõumoment, mis nendes mõjub, saab stabiilselt nulliks ainult siis, kui plaatide ristjoon on risti absoluut-



Joonis 5.

se liikumise suunaga, s. o. plaadid ise on selle suunaga paralleelsed. Et \vec{N} on võrdeline suhte $\frac{v}{c}$ ruuduga, on see teist järku efekt. Trouton-Noble'i katse täpsus oli siiski küllaldane selle efekti avastamiseks, kui see oleks olnud reaalne. Tegelikult, nagu algul märgitud, mingit efekti ei leitud.

§ 5. Ballistiline hüpotees.

Michelsoni katse negatiivne tulemus on vastuolus eetrihüpoteesiga ja üldse Galilei teisenduste rakendamisega elektrodünaamikas. Seega tekib selle tulemuse teoreetilise tõlgendamise probleem. Üheks hüpoteesiks, millega püüti

Seda teha, on niinimetatud ballistiline ehk korpuskulaarne hüpotees (esitanud W. Ritz 1908. a.). Selle hüpoteesi tuum seisneb oletuses, et valguse kiirus oleneb valgusallika liikumisest. Nimelt on valguse kiirus isotroopne selles inertsiaalsüsteemis, milles valgusallikas on kiirgamise hetkel liikumatu. Muidu allub valguse kiirus tavalisele kiiruste liitmise seadusele

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}, \quad (1.55)$$

kus \vec{v} on mingi teise inertsiaalsüsteemi kiirus valgusallika suhtes ja \vec{c}' on valguse kiirus selles süsteemis. Valem (1.55) on väliselt identne valemiga (1.42), kuid sisuliselt erinev: valemis (1.42) tähendab \vec{c} isotroopset valguse kiirust universaalses absoluutselt liikumatus inertsiaalsüsteemis, kuna valemis (1.55) \vec{c} on küll ka isotroopne valguse kiirus, kuid nimelt selles mitte millegi muu poolest teiste süsteemide seast esiletõstetud süsteemis, milles valgusallikas on liikumatu. Et eri allikad võivad liikuda väga mitmesuguste kiirustega, siis on olemas vastavalt ka palju niisuguseid inertsiaalsüsteeme, milles ühe või teise allika valgus on isotroopse kiirusega. Seega ei paku ballistiline hüpotees mingit võimalust absoluutse ruumi kindlakstegemiseks. Relatiivsusprintsip kehtib ballistilise hüpoteesi raamides täpselt samal viisil ja samas mõttes nagu klassikalises Newtoni mehhaanikas.

Michelsoni katse negatiivne tulemus on ballistilise hüpoteesi seisukohalt endastmõistetav, sest see hüpotees eitab sellise eelistatud inertsiaalsüsteemi olemasolu, mil-

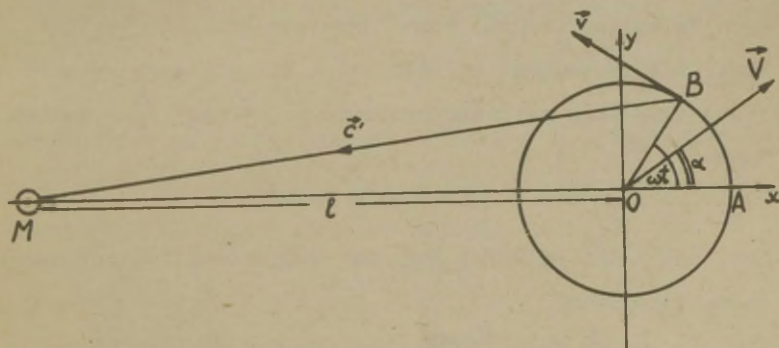
le tunnuseks oleks valguse kiiruse isotroopsus sõltumatult valgusallikast. Teiste sõnadega, relatiivsusprintsipi keh-tivus ballistilise hüpoteesi raamides tähendab, et mistahes elektrodünaamika- või optikaalane katse, mille eesmärgiks on absoluutse ruumi kindlakstegemine, peab jääma tulemus-teta. Seega täidab see hüpotees oma otstarvet. Kuid siiski osutus ballistiline hüpotees peatselt vastuvõtmatuks.

Elkõige on ta vastuolus Maxwelli võrrandite süstee-miga, sest sellest süsteemist järgneb, et valguse kiirus ei sõltu allika liikumisest. Üldse on raske ballistilist hüpoteesi viia kooskõlla laineteooriaga. Sellevastu on ta hästi mõistetav valguse korpuskulaarse teooria seisukohalt (siit ka nimetus). Tõepoolest, kiirgav keha paiskab endast välja selle teooria järgi valguseosakesi, mis loomulikult peavad liikuma kõigis suundades selle keha suhtes võrdse-te kiirustega. Kuid Maxwelli võrrandid niisugust kiirgami-se mehhanismi seletada ei saa.

Ent peamiseks vastuväiteks ballistilise hüpoteesi vas-tu on see, et ta on otseses vastuolus kaksiktähtede liiku-mise vaatlustega. Asi seisab selles, et kaksiktähe kompo-nendid liiguvad oma orbiitidel ühise massikeskme ümber Maa suhtes erinevate kiirustega; seega jõuab ballistilise hü-poteesi järgi valgus kummaltki komponendilt Maale erine-vate kiirustega. Kuigi see erinevus on suhteliselt väga väike, võib siiski, kui tähe kaugus on küllalt suur, ühel ja samal hetkel kummagi komponendi poolt kiiratud valguse Maale saabumise aegade vahe kasvada küllalt suureks. Kui

see vahe on võrreldav tähe tiirlemisperioodiga, siis peab mõlema komponendi liikumine paistma Maalt vaadates suuresti moonutatuna. Võib juhtuda koguni, et üks või teine komponent on nähtav üheaegselt kolmes või enam kui kolmes kohas korraga. Tegelikult ei ole kunagi ühegi kaksiktähe juures sellist veidrat käitumist tähele pandud. Vastupidi, kõigi seni uuritud kaksiktähtede nähtav liikumine toimub täies kooskõlas Kepleri seadustega. Mitte mingisuguseid moonutusi selles liikumises ei leitud. Ometi on kaksiktähtede hulgas küllaldaselt neid, mille kaugus Maast on küllalt suur ja tiirlemisperiood küllalt väike, nii et mainitud moonutused oleksid pidanud nende juures nii või teisiti selgesti ilmema, kui ballistiline hüpotees oleks õige.

Selgitame eelöeldut väikese arvutusega. Selleks piisab, kui vaatleme ainult ühe komponendi liikumist. Eeldame asja lihtsustamiseks, et see komponent liigub ringorbiidi mööda (seega konstantse nurkkiirusega) ja et Maa asetseb orbiidi tasandis. Joonisel 6 on M Maa, O orbiidi



Joonis 6.

keskpunkt (kaksiktähe massikeske); MO võtame x-teljeks, ja alghetkeks valime hetke, mil täht asetseb x-teljel punktis A. Hetkel t asetsegu täht punktis B, nii et $\widehat{BOA} = \omega t$, kus ω on nurkkiirus. Sel hetkel liigub täht massikeskme suhtes kiirusega \vec{v} , mille komponendid on

$$v_x = -v \sin \omega t,$$

$$v_y = v \cos \omega t.$$

Peale selle võib massikeske ise liikuda Maa suhtes mingi kiirusega \vec{V} , mille komponendid olgu

$$V_x = V \cos \alpha,$$

$$V_y = V \sin \alpha.$$

Et eelduse järgi valguse kiirus on võrdne c tähe suhtes, siis Maa suhtes on valguse kiiruse komponendid võrdsed

$$\left. \begin{aligned} c'_x &= c_x - v \sin \omega t + V \cos \alpha, \\ c'_y &= c_y + v \cos \omega t + V \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

kus c_x, c_y on kiiruse komponendid tähe suhtes, nii et $c_x^2 + c_y^2 = c^2$. Tähistame veel orbiidi raadiuse $OB = R$ ja tähe kauguse Maast $MO = \ell$.

Valemitest (1.56) võime arvutada orbiidi punktist B Maale tuleva valguse kiiruse c' . Kui piirdume esimest järku täpsusega väikeste suuruste $\frac{v}{c}$, $\frac{V}{c}$ ja $\frac{R}{\ell}$ suhtes, saame:

$$c' = c - V \cos \alpha + v \sin \omega t.$$

Aeg, mis kulub valgusel tee BM läbimiseks, võrdub seega (sama täpsusega)

$$\Delta t = \frac{\ell}{c} \left(1 + \frac{V \cos \alpha}{c} - \beta \sin \omega t + \frac{R}{\ell} \cos \omega t \right).$$

Eeldame, et $\frac{R}{\ell}$ on palju väiksem kui $\frac{v}{c}$ ja $\frac{V}{c}$. Jättes viimase liikme ära, saame:

$$\Delta t = \frac{\ell}{c} \left(1 + \frac{V \cos \alpha}{c}\right) - \frac{\beta \ell}{c} \sin \omega t.$$

Seega näeb vaatleja tähte asetsevat punktis B hetkel

$$t_1 = t + \Delta t = \frac{\ell}{c} \left(1 + \frac{V \cos \alpha}{c}\right) + t - \frac{\beta \ell}{c} \sin \omega t.$$

Tähe nähtava liikumise määramisel selle valemi järgi ei ole ilmselt liige $\frac{\ell}{c} \left(1 + \frac{V \cos \alpha}{c}\right)$ oluline, sest ta on konstantne ja on tingitud ainult valguse teeloleku aja sellest osast, mis on tähe orbitaalsest liikumisest sõltumatu. Seega võime vaatlushetkena käsitada $\frac{\ell}{c} \left(1 + \frac{V \cos \alpha}{c}\right)$ võrra minevikku nihutatud hetke

$$\tau = t_1 - \frac{\ell}{c} \left(1 + \frac{V \cos \alpha}{c}\right).$$

Eelmine valem saab siis kuju:

$$\tau = t - \frac{\beta \ell}{c} \sin \omega t. \quad (1.57)$$

See valem määrab t funktsioonina vaatlusajast τ . Selle seose uurimiseks on kohane graafiline meetod. Näiteks on joonistel 7 - 9 esitatud graafikud kolmel juhul:

$$\frac{\beta^2 \ell}{R} = 0,5, \quad \frac{\beta^2 \ell}{R} = 1 \text{ ja } \frac{\beta^2 \ell}{R} = 2.$$

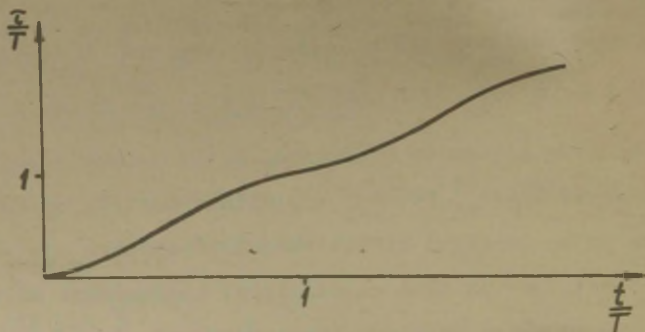
Argumendiks on võetud dimensioonitu aeg t/T ja vastavalt vaatlusajaks τ/T , kus T on tiirlemisperiood.

Valem (1.57) on siis järgmise kujuga:

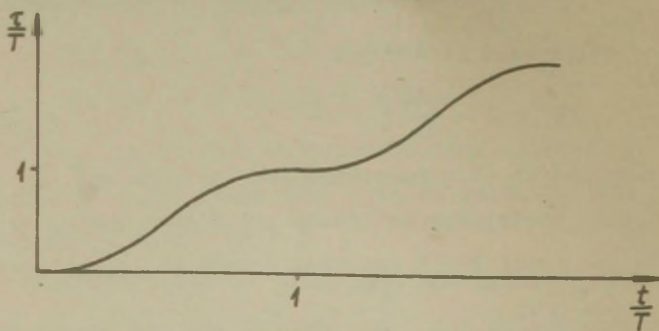
$$\frac{\tau}{T} = \frac{t}{T} - \frac{\beta^2 \ell}{2\pi R} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right). \quad (1.58)$$

Graafikutest näeme, et 1. ja 2. juhul on $\frac{t}{T}$ ühene funktsioon vaatlusajast $\frac{\tau}{T}$; seega näeb vaatleja tähte

tema orbiidil igal hetkel ainult ühes kohas. Ent tähe näiv liikumine mööda orbiiti ei ole ühtlane. 3. juhul (üldiselt niipea kui $\frac{R}{\ell} < \beta^2$ aga ei ole see sõltuvus enam ühene.



Joonis 7.

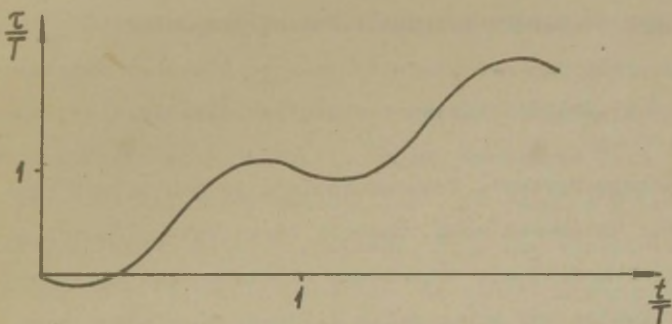


Joonis 8.

Tulemuseks on see, et vaatleja peaks nägema tähte ajuti kolmes kohas korraga. Parameetri $\frac{\beta^2 \ell}{R}$ veel suuremate väärtuste korral suureneks veelgi kohtade arv, kus täht on samaaegselt nähtav.

Tegelikult sedalaadi efekte kaksiktähtede liikumise

vaatlemisel ei esine, mis ongi üheks kaalukamaks vastuväiteks ballistilise hüpoteesi kahjuks. Tuleb veel märkida, et ballistilise hüpoteesi poolt nõutavad häired kaksiktähe liikumises peaksid olema vaadeldavad mitte ainult visuaalse kaksiktähe, vaid ka spektroskoopilise kaksiktähe korral. Sel juhul peaksid ilmema perioodilised häired orbitaalsest liikumisest tingitud Doppleri efekti vaatlemisel. Vaadeldavaks suuruseks on sel korral tähe asukoha asemel tema kiirus. Et aga kiirus võrdub kohavektori tuletisega aja järgi, peaksid asukoha häired avalduma ka kiirusehäiretena. Midagi niisugust aga leitud ei ole.



Joonis 9.

Teine eksperimentaalne fakt, mis kõneleb ballistilise hüpoteesi vastu, on Michelsoni katse negatiivne tulemus juhul, kui selles katses kasutatakse maavälise valgusallika (Päikese või tähe) valgust. Need katsed sooritasid 1924 - 1925. a. R. Tomaschek ja sõltumatult D.C. Miller. Eriti veenev on eksperiment tähe valgusega juhul, kui tähel on suur radiaalkiirus Maa suhtes. Negatiivne tulemus näitab

vahetult, et tähelt tuleva valguse kiirus on Maa suhtes isotroopne, kuna aga ballistilise hüpoteesi järgi peaks ta olema isotroopne tähe suhtes. Siiski kehtib see mõttekääk ainult sel juhul, kui oletame, et valguse peegeldumisel maapealsetelt esemetelt jääb tema kiirus muutumatuks süsteemis, milles kiirgav keha on liikumatu. Selle kõrval on aga võimalik lähtuda eeldusest, et peegeldumine (või murdumine) on samaväärne valguse neeldumisega peeglis koos sellele järgneva taaskiirgumisega. Niisugusel juhul on interferomeetrit läbiv valgus kiiratud maapealsete esemetelt, nimelt interferomeetri poolläbipaistva plaadi ja peegli poolt ja siis ei erine katsekorraldus millegi poolest sellest, kus ka esmane valgusallikas on maapealne.

§ 6. Relatiivsusteooria põhipostulaadid.

Michelson-Morley', Trouton-Noble'i ja rea teiste eksperimentide tulemused võib lühidalt kokku võtta lauses: ei leidu eksperimenti, mis võimaldaks kindlaks teha Maa absoluutse liikumise või mõõta selle kiiruse. Absoluutne ruum jääb kõigis neis katsetes tunnetusele kättesaamatuks. Niisuguse olukord meenutab analoogilist olukorda, mis valitseb klassikalises mehhaanikas, sest ka seal puuduvad reaalsed vahendid absoluutse ruumi kindlakstegemiseks. Kuid on olemas üks oluline erinevus: klassikalise mehhaanika põhivõrrandid on invariantssed Galilei teisenduste suhtes, kuna elektrodünaamika põhivõrrandid Galilei teisenduste suhtes invariantssed ei ole. Seetõttu kehtib klassikalises meh-

haanikas relatiivsuspriintiip, kuna elektrodünaamikas näib ta teoreetiliselt olevat kehtetu. Ometi on kõigi eksperimentide tulemused niisugused, nagu oleks relatiivsuspriintiip kehtiv ka siin. Et aga teooria vastavat põhjendust ei anna (võrrandid ei ole invariantseid), tuleneb siit sügav vastuolu senise teooria ja mainitud eksperimentaalsete tulemuste vahel.

Seega osutub senine teooria puudulikuks. Uus teooria, mis lahendas selle vastuolu, on r e l a t i i v s u s - t e o o r i a . Selle loojaks on A. Einstein (1905. a.).

Relatiivsusteooria lähtub eelkõige Maxwell-Lorentzi võrrandisüsteemist kui elektrodünaamika põhialusest. Loobumine sellest mingi modifitseeritud süsteemi kasuks oleks tekitanud tõsiseid raskusi kõikjal, kus sel süsteemil põhinev elektrodünaamika leiab kinnitust väga paljude ning mitmekesiste eksperimentide kaudu. Muuhulgas järeldub elektrodünaamika põhivõrranditest, et valguse kiirus ei sõltu kiirgava keha liikumisest. Sedasama kinnitavad, nagu nägime eelmises paragrahvis, ka otseste astronoomiliste vaatluste andmed. Seetõttu võetakse relatiivsusteoorias üheks põhipostulaadiks v a l g u s e k i i r u s e k o n s t a n t s u s e p r i n t s i i p . See tähendab eelkõige ballistilise hüpoteesi kõrvalheitmist. Peale selle on aga sel priintiibil veel teine külg, mis on mõistetav ainult seoses relatiivsusteooria keskse priintiibiga, nimelt r e l a t i i v s u s p r i n t s i i - b i g a .

Relatiivsuspriintiip on tuntud juba klassikalises mehhaanikas. Ent koos sellega tunnustab klassikaline mehhaanika ka absoluutse ruumi olemasolu, mille kindlakstegemist väljaspool mehhaanikat olevate vahenditega relatiivsuspriintiip ei keela. Nii oli Michelson-Morley katse mõeldud ühe niisuguse vahendina. Ka sel juhul, kui selle katse tulemus oleks osutunud positiivseks, oleks klassikalise mehhaanika relatiivsuspriintiip jäänud ikkagi püsima, sest ta ei eita absoluutse ruumi olemasolu, vaid ainult välistab selle kindlakstegemise võimaluse mehhaanika vahenditega.

Relatiivsusteooria võtab oma keskeks priintiibiki teistsuguse relatiivsuspriintiibi. See ühtib klassikalise relatiivsuspriintiibiga selles mõttes, et mõlemad eitava absoluutse ruumi kindlakstegemise võimalust mehhaanikas. Sellele lisaks aga väidab uus priintiip sedasama ka elektrodünaamiliste nähtuste valdkonna kohta, ja, mis veel tähtsam, mistahes teiste nähtuste valdkondade kohta. Õeldu käib ka uute, senitundmata valdkondade kohta, mida alles võidakse avastada kunagi lähemas või kaugemas tulevikus.

Esimesest pilgust võib paista, nagu puuduks selliselt formuleeritud relatiivsuspriintiibil igasugune õigustus. Kust me võime ette teada, mida kunagi tulevikus võidakse avastada? Ja kui me väidame, et absoluutset ruumi mitte kunagi, mitte mingisuguste vahenditega kindlaks teha ei õnnestu, kas ei tähenda see tunnetuse võimaluste print-

sipiaalset piiramist? Kas ei ole eespool formuleeritud relatiivsusprintsipi olemuselt agnostitsistlik?

Kõik need kahtlused kaovad, kui peame silmas uue relatiivsusprintsipi põhituuma, mis jäi eespool toodud formuleeringus esiotsa selgelt ütlemata. Põhituum seisneb absoluutse ruumi olemasolu eitamises. Just see ongi see kõige olulisem punkt, milles uus relatiivsusprintsip erineb vanast, klassikalise mehhaanika relatiivsusprintsipist.

Niisiis, relatiivsussteooria aluseks on järgmine relatiivsusprintsip: ei ole olemas absoluutset ruumi. Kõik inertsiiaalsüsteemid on täiesti samaväärsed. Ühtki neist ei saa pidada absoluutselt liikumatuks (ja seda mitte ükski praktiliselt, vaid ka põhimõtteliselt); ka vastupidi, iga inertsiiaalsüsteemi võib mistahes füüsikaliste nähtuste kirjeldamisel pidada suhteliselt liikumatuks.

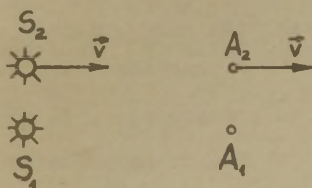
Kõik muu on niiviisi formuleeritud relatiivsusprintsipi järelduseks. See, et üheski nähtuste valdkonnas absoluutne ruum avastatav ei ole, ei tähenda mitte mingisugust agnostitsismi absoluutse ruumi suhtes, vaid järeldub endastmõistetavalt sellest, et selline ruum ei eksisteeri. Kahtlus, nagu nõuaks relatiivsusprintsip liiga palju tulevikus tehtavatelt avastustelt, on põhjendamatu. Iga hea teooria peamine väärtus selles seisnebki, et ta võimaldab vaadata tulevikku. Tegelikult on relatiivsusprintsibil väga suur heuristiline väärtus (niisamuti kui näiteks termodünaamika põhiprintsiipidel). See väärtus on korduvalt realiseerunud relatiivsussteooria loomisele järgnenud aren-

gus. Eriti tähelepanuväärne on asjaolu, et tuumajõudude valdkonnas on relatiivsuspriintiibi kehtivus osutunud niisama kindlaks nagu varemalt mehhaanikas ja elektrodünaamikas.

Relatiivsusteooria algaastail võistles temaga mõnda aega teistsugune teooria, mis on matemaatilise struktuuri poolest relatiivsusteooriaga peaaegu identne, kuid millel puudub relatiivsusteooria heuristiline jõud. See on niinimetatud Lorentzi teooria. Heuristilise jõu puudumine selles teoorias on otseselt seotud relatiivsuspriintiibi eitamisega relatiivsusteooria mõttes ning klassikalise mehhaanika relatiivsuspriintiibi jäädvustamisega. Lorentzi teooria aluseks on mõned ad hoc tehtud hüpoteesid, mille ainsaks eesmärgiks on seletada, miks ükski elektrodünaamiline eksperiment ei too nähtavale absoluutset ruumi. Tähtsamateks hüpoteesideks on: 1) Fitz-Gerald-Lorentzi kontraktsiooni hüpotees, mille järgi iga absoluutse kiirusega v liikuv keha lüheneb liikumise sihis suhtes $1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, ja 2) hüpotees, mille järgi kõik absoluutse kiirusega liikuvates kehas toimuvad protsessid aeglustuvad samas suhtes. Nende ja veel mõnede teiste hüpoteeside abil saavutatakse Maxwell-Lorentzi võrrandite invariantus. Selles avaldubki absoluutse ruumi kindlakstegemise võimatus elektrodünaamikas, täpselt niisamuti nagu mehhaanikas avaldub see mehhaanika põhivõrrandite invariantuses. Kõige selle juures aga säilivad Lorentzi teoorias absoluutse ruumi ja absoluutse aja mõisted ja seetõttu peab see teooria tulevikuperspektiivi rajama hoopis teistsugustele alustele,

kui teeb seda relatiivsusteooria: esmaseks probleemiks jääb Lorentzi teoorias absoluutse ruumi kindlakstegemise probleem mingi reaalse eksperimendi kaudu. Kui mehhaanika ega elektrodünaamika selleks mingeid võimalusi ei paku, tuleb kõike otsast uuesti korrata uutes valdkondades. Ja kui ka seal osutub absoluutne ruum kättesaamatuks, ollakse sunnitud konstrueerima uusi ad hoc hüpoteese. Kõik see võtabki Lorentzi teoorialt igasuguse heuristilise väärtuse.

Pöördume tagasi relatiivsusteooria juurde. Relatiivsuspriprintsibi rakendamine valguse kiiruse konstantsuse postulaadile annab sellele uue sisu. Kujutleme kaht valgusallikat, S_1 ja S_2 (joon. 10), mis liiguvad teineteise suhtes mingi kiirusega \vec{v} , ja kaht vaatlejat, A_1 ja A_2 , kellest esimene on S_1 suhtes liikumatu ja teine S_2 suhtes liikumatu. Mõõtes mõlemast allikast tuleva valguse kiirust, leiab



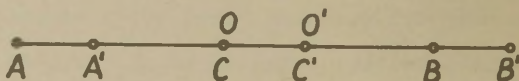
A_1 , et mõlemad kiirused on võrdsed (sest valguse kiirus ei sõltu valgusallika liikumisest). Ent sama õigusega võime teist vaatlejat, A_2 lugeda samuti liikumatuks; seega on ka A_2 suhtes mõlemast allikast tuleva valguse kiirused võrdsed. Et aga S_2 on A_2 suhtes niisama liikumatu nagu S_1 A_1 suhtes ja mõlemad vaatlejad on samaväärses olukorras, siis on A_2 poolt mõõdetud kiirused võrdsed A_1 poolt mõõdetutega. See tähendab, et valguse kiirus ei sõltu inertsiaalsüsteemi vali-

Joonis 10.

kust. Samuti on selge, et mistahes süsteemis ei sõltu valguse kiirus ka suunast. Niisugune ongi nüüd valguse kiiruse konstantsuse printsiip: valguse kiirus on universaalne konstant, mis ei sõltu ei valgusallika liikumisest ega inertsiaalsüsteemi valikust (s. o. vaatleja liikumisest) ega suunast.

Siit võib teha edasi väga olulised järeldused. Kõigepealt on selge, et valguse kiiruse konstantsuse printsiip on vastuolus kiiruste liitmise klassikalise seadusega (vt. valem (1.42)). Seega ei kehti viimane relatiivsusteoorias. Siit aga järgneb, et aeg ei saa olla enam absoluutne. Järelikult kaotavad Galilei teisendusvalemid (1.4) relatiivsusteoorias kehtivuse.

Aja relatiivsus avaldub eelkõige kahe sündmuse samaaegsuse relatiivsuses. Kui kahe eri punktides toimuva sündmuse kohta väidetakse, et nad on samaaegsed, siis võib see olla õige ainult teatavas inertsiaalsüsteemis. Teises inertsiaalsüsteemis ei tarvitse nad olla samaaegsed. Kujutleme sündmusi toimuvatena mingis inertsiaalsüsteemis samaaegselt punktides A ja B (joon. 11). Asetegu lõigu AB



Joonis 11.

keskkohas C vaatleja O, mis on liikumatu samas süsteemis. Siis näeb see vaatleja mõlemaid sündmusi samaaegselt. Teiste sõnadega, sündmustelt lähtuvad valgussignaa-

lid jõuavad vaatlejani samaaegselt, sest valguse kiirus on mõlemas suunas ühesugune. Teine vaatleja O' liikugu O suhtes joont AB mööda suunas $A \rightarrow B$. Asetegu ta samuti omas inertsiaalsüsteemis mõlema sündmuse kohtadest võrdsetel kaugustel. Et ka selle vaatleja suhtes on valguse kiirus mõlemas suunas ühesugune, siis võib ka tema niisamuti kui O otsustada sündmuste samaaegsuse üle valgussignaalide järgi: kui need jõuavad temani samaaegselt, siis on ka sündmused samaaegsed, muidu mitte.

Nüüd on aga selge, et sündmustelt lähtuvad valgussignaalid ei jõua vaatlejani O' samaaegselt. Eelduse järgi jõuavad nad vaatlejani O samaaegselt; seega võiks see nii olla ka O' jaoks ainult siis, kui signaalide jõudmise hetkel O juurde, s. o. punktisse C , asub samas punktis C ka O' . Ent see ei ole võimalik, sest signaalide levimiseks kuluva aja vältel liigub 1. sündmuse koht O' inertsiaalsüsteemis A juurest mingisse asendisse A' ja 2. sündmuse koht B juurest asendisse B' ; et $A'C < CB'$, siis ei saa O' asetseda punktis C hetkel, mil sinna signaalid tulevad, vaid peab viibima mingis punktis C' , mis B -le on lähemal kui A -le, sest $A'C' = C'B'$. Siit järgneb, et B' -st lähtuva signaali võtab O' vastu varem ning A' -st lähtuva signaali hiljem. See tähendabki, et sündmused ei ole süsteemis, milles O' on liikumatu, samaaegsed. Ühtlasi näeme, et kui O' liigub süsteemis, milles sündmused on samaaegsed, siis tema omas süsteemis toimub varem see sündmus, mille koht selle liikumise suuna

suhtes on ees, ning hiljem see, mille koht on liikumise suuna suhtes taga.

Kui oletaksime, et sündmused on samaaegsed O' suhtes, siis leiaksime täpselt samal viisil, et nad ei ole samaaegsed O suhtes, ja nimelt toimub punktis A sündmus varem ning punktis B hiljem.

Esitatud mõttekäigu puhul on tähtis meeles pidada relatiivsuspriintiipi ja sellega seostatud valguse kiiruse konstantsust. Ei ole õige arvata, nagu oleks valgussignaallide mittesamaaegne jõudmine vaatleja O' juurde tingitud valgussignaallide kiiruste erinevusest tema suhtes. Piltlik esitus joonisel 11 võib selleks põhjust anda, sest sealt on näha, et O' liigub B -st tulevale signaalile vastu ning A -st tuleva signaali eest ära. Sellest tekib klassikalisel kiiruste liitmise seadusel põhinev intuiitiivne kujutus, nagu oleksid signaalide kiirused erinevad. Ent see tähendaks loobumist relatiivsuspriintiibist ning vaatleja O süsteemi eelistamist absoluutselt liikumatu süsteemina. Kui aga jääme kindlalt relatiivsuspriintiibi juurde, siis ei ole intuiitiivne mulje enam mõõduandev, vaid ainuõigeks loogiliselt mõeldavaks järelduseks jääb samaaegsuse objektiivne relatiivsus.

II p e a t ü k k .

RELATIVISTLIK KINEMAATIKA.

Kinemaatika on üldiselt aegruumi geometria. Relativistlik kinemaatika on aegruumi relativistlik geometria. Selle aluseks on relatiivsuspriinip koos valguse kiiruse konstantsuse postulaadiga. Nendele lisaks on aegruumi relativistliku geometria põhjendamise eeldusteks aja ja ruumi homogeensus ja ruumi isotroopsus. Viimati nimetatud eeldused kehtivad teatavasti juba mitterelativistlikus kinemaatikas ja et nad pole vastuolus relatiivsuspriinipiiga, kanduvad nad üle muutumatult ka relatiivsusteooriasse.

§ 7. Lorentzi teisendus.

Lorentzi teisendus seob kahe teineteise suhtes liikuva inertsiaalsüsteemi ruumi- ja ajakoordinaate. Mitterelativistlikus kinemaatikas vastab talle Galilei teisendus. Ruumikoordinaatidena kasutame siin ja edaspidi ainult Cartesiuse koordinaate, kuid tarbekorral võib neilt üle minna mistahes teistele koordinaatidele.

Lorentzi teisenduse erijuhuna tuleb vaadelda ka puhtruumilist teisendust, s. o. niisugust üleminekut ühest

inertsiaalsüsteemist teise, kus mõlema süsteemi suhteline kiirus võrdub nulliga. Selline teisendus on ruumikoordinaatide ortogonaalne teisendus (ruumikoordinaadistiku pööre või pööre koos peegeldusega). Ruumi isotroopsuse tõttu on kõik niisuguste teisendustega seotud koordinaatsüsteemid (Cartesiuse koordinaatsüsteemid) isekeskis samaväärsed.

Samaväärsed on ka kõik üksteise suhtes nullist erineva kiirusega liikuvad inertsiaalsüsteemid. Lihtsaimal juhul, mida vaatlemegi esmajoones, on mõlema süsteemi ruumilised koordinaatteljed vastavalt paralleelsed, s. o. üleminek teise inertsiaalsüsteemi toimub ilma ruumilist koordinaadistikku pööramata ning peegeldamata. Veelgi suurema lihtsuse taotlusel eeldame, et inertsiaalsüsteemid liiguvad teineteise suhtes x -telje sihis. Käesoleva paragrahvi lõpus näitame, et niisuguse erijuhulise Lorentzi teisenduse kaudu avaldub ka mistahes üldjuhuline Lorentzi teisendus.

Lorentzi teisendus peab olema lineaarne. See järgneb ruumi ja aja homogeensusest, mille nõudel teisendatud (uute) koordinaatide tuletised vanade järgi peavad olema koordinaatidest sõltumatud konstantsed suurused. Olgu näiteks $x' = f(x, y, z, t)$. Kui osatuletis $\partial f / \partial x$ ei oleks konstantne, siis, võttes $dx' = \frac{\partial f}{\partial x} dx$, leiaksime, et teisendatud x -koordinaadi diferentsiaal dx' oleks konstantse dx juures erinevate väärtustega, olenevalt kohast ja ajast. See on aga vastuolus ruumi ja aja homogeensuse eeldusega. Nii-samuti peavad üldse kõik osatuletised uutest koordinaati-

dest vanade järgi olema konstandid, mis tähendabki teisendusvalemite lineaarsust.

Teisendusvalemid võib teha ka homogeenseks. Selleks tuleb mõlema inertsiaalsüsteemi ruumilise teljestiku alguspunktid valida nii, et nad teataval hetkel ühtiksid, ning see hetk tuleb võtta mõlemas süsteemis aja alghetkeks. Niisugune valik on võimalik jällegi tänu ruumi ja aja homogeensusele, mistõttu ruumilist või ajalast alguspunkti võib alati nihutada soovitud kohta.

Seega on Lorentzi teisendusvalemite üldkuju järgmine:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t. \end{aligned} \right\} (2.1)$$

Eespool mainitud erijuhul, s. o. kui mõlema inertsiaalsüsteemi ruumilised teljed on vastavalt paralleelsed ja liikumine on x -telje sihiline, lihtsustuvad need valemid järgmiselt:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{14}t, \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= a_{41}x + a_{44}t. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Tõepoolest, x' ja t' sõltumatus y -st ja z -ist on ruumi isotroopsuse järeldus. Kui pöörame lähtesüsteemi ruumilise teljestiku x -telje ümber mingi nurga võrra, siis jäävad x ja t muuutumatuks, aga y ja z muutuvad. Kuid see muutus ei või mõjutada x' ja t' väärtusi, sest

x -telg on ruumi isotroopsuse tõttu mõlemas inertsiaalsüsteemis sümmeetriateljeks; järelikult peavad x' ja t' olema sõltumatud selle teljega ristiolevate telgede suundadest. Edasi, y ja z peavad teisenema identselt, s. o. $y' = y$, $z' = z$. Selleks võib tuua järgmised kaalutlused. y' ega z' ei või sõltuda x -ist ega t -st, sest vastasel juhul, avaldades x' ja t' teisendusvalemite x ja t , x' ja t' kaudu ja asetades need avaldised y' või z' avaldistesse, leiaksime, et need koordinaadid olenevad x' -ist ja t' -st. Ent see ei ole võimalik, sest kõik ruumikoordinaadid ja aeg on üksteisest sõltumatud. Seega võiksid y' ja z' oleneda ainult y -st ja z -ist:

$$\left. \begin{aligned} y' &= a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

On aga selge, et ühe või teise süsteemi ruumilise teljestiku sobiva pööramise abil x -telje ümber saab teha selle teisenduse identsuseks:

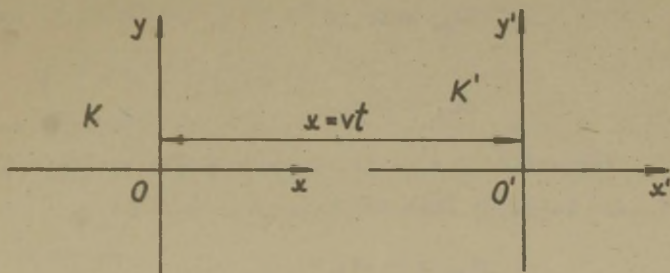
$$\begin{aligned} y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned}$$

kusjuures sel juhul ongi mõlema süsteemi y ja z -teljed vastavalt paralleelsed. Sellevastu, kui teisendusmaatriks

$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ valemis (2.3) oleks ühikmaatriksist erinev, tähendaks see, et y' - ja z' -telg moodustavad y - ja z -teljega mingi mullist erineva nurga.

Pöördume nüüd tagasi valemite (2.2) juurde. Tähistame esimese inertsiaalsüsteemi K ja teise K' . Nelja kordaja

$a_{11}, a_{14}, a_{41}, a_{44}$ määramiseks paneme esmalt tähele, et $x = vt$ korral peab olema $x' = 0$ (vt. joon. 12), sest $x = vt$ on K' alguspunkti O' koordinaat süsteemis K



Joonis 12.

hetkel t . Seega järgneb esimesest valemist (2.2):

$$a_{11}v + a_{14} = 0. \quad (2.4)$$

Edasi vaatleme kaht valgussignaali, mis saadetakse alg-
hetkel välja mõlema süsteemi ühisest alguspunktist x -tel-
je (või x' -telje) positiivses ja negatiivses suunas ja
mis mõlemas süsteemis levivad ühe ja sama kiirusega C .
Hetkel t jõuab esimene signaal süsteemis K punktisse
 $x = ct$ ja teine signaal punktisse $x = -ct$. Süsteemis K'
on nende sündmuste koordinaadid

$$x' = (a_{11}c + a_{14})t,$$

$$t' = (a_{41}c + a_{44})t$$

ja

$$x' = (-a_{11}c + a_{14})t,$$

$$t' = (-a_{41}c + a_{44})t,$$

kusjuures esimesel juhul $x' = ct'$ ja teisel juhul $x' = -ct'$.

Niiviisi saame kaks võrrandit

$$a_{11}c + a_{14} = a_{41}c^2 + a_{44}c,$$

$$-a_{11}c + a_{14} = a_{41}c^2 - a_{44}c.$$

Liites ja lahutades nad saame:

$$a_{14} = a_{41}c^2 \quad (2.5)$$

ja

$$a_{11} = a_{44}. \quad (2.6)$$

Võrrandid (2.4) - (2.6) võimaldavad avaldada kolm otsestavat kordajat üheainsa kaudu, ja nimelt:

$$\left. \begin{aligned} a_{14} &= -a_{11}v, \\ a_{41} &= -\frac{a_{11}v}{c^2}, \\ a_{44} &= a_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Nüüd saavad teisendusvalemid (2.2) järgmise kuju:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= a_{11}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Viimase kordaja leidmiseks vaatleme valgussignaali, mis saadetakse välja alghetkel mõlema inertsiaalsüsteemi ühisest alguspunktist mingis meelevaldses suunas. Süsteemis K jõuab see signaal hetkel t punktisse (x, y, z) , kusjuures

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (2.9)$$

Nüüd on süsteemis K' selle sündmuse koordinaadid (x', y', z', t') , ning

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (2.10)$$

Asetades viimasesse valemisse x', y', z', t' asemele nende

avaldised valemist (2.8), leiame:

$$a_{11}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (x^2 - c^2 t^2) + y^2 + z^2 = 0.$$

Et aga (2.9) põhjal $y^2 + z^2 = -(x^2 - c^2 t^2)$, siis

$$(x^2 - c^2 t^2) \left[a_{11}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 1 \right] = 0.$$

Selles võrduses on $x^2 - c^2 t^2 \neq 0$, sest $y^2 + z^2 \neq 0$.

Seega

$$a_{11}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

ja siit leiame:

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.11)$$

Tähistades nagu I peatükis

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (2.12)$$

saame Lorentzi teisendusvalemid lõplikult järgmisel kujul:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Sageli on kasulik esitada need valemid ka veidi teistsugusel kujul. Tähistame ruumikoordinaadid x_1, x_2, x_3 ning ajakoordinaadiks võtame suuruse

$$x_4 = ict, \quad (2.14)$$

mis on pikkuse dimensiooniga. Erinevalt reaalsest ruumikoordinaatidest x_1, x_2, x_3 on uus ajakoordinaat x_4 imaginaarne. Selle mõte selgub varsti.

Nüüd saavad valemid (2.13) järgmiseks:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= x_3, \\ x'_4 &= \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Lorentzi teisendusvalemid võib esitada ka maatrikskujus. Koordinaatmaatriksiks on üheveeruline maatriks, mille elementideks on aegruumi koordinaadid:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Lorentzi teisendusmaatriksi elementideks on teisendusvalemite kordajad. Tähistades seda maatriksit \mathcal{L} , võime kirjutada:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Nüüd võime valemid (2.15) asendada järgmise maatriksvale-
miga:

$$x' = Lx, \quad (2.18)$$

ehk, avaldades seda maatriksite elementide kaudu,

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu \quad (2.19)$$

(ν on summeerimise indeks 1-st 4-ni; ka edaspidi on kahe-
kordne indeks summeerimise indeks. Kreeka indeksid on siin
ja edaspidi tarvitusel neljamõõtmelises aegruumis, ladina
indeksid tulevad kasutusele (vt. ka I peatükis näit. valem
(1.3)) kolmemõõtmelises ruumis).

Lorentzi teisendused moodustavad rühma, mida
nimetatakse Lorentzi rühmaks. See järg-
neb sellest, et kui inertsiaalsüsteem K' liigub inertsia-
aalsüsteemi K suhtes ning inertsiaalsüsteem K'' liigub
 K' suhtes, siis, arvestades mõlema liikumise inertsiaal-
sust, näeme, et ka K'' liikumine K suhtes on inertsia-
aalne. Üleminekut süsteemist K süsteemi K'' kirjeldab
niisugune Lorentzi teisendus, mis on kahe teineteise jä-
rel teostatud teisenduse tulemus. Seejuures on selle tei-
senduse maatriks võrdne nende mõlema kahe teisenduse maat-
riksite korrutisega. Nimelt, kui

$$x' = Lx$$

ja

$$x'' = L'x',$$

siis ilmselt

$$x'' = L'Lx,$$

s. o.

$$x'' = L'' x,$$

kus

$$L'' = L' L.$$

Tuleb märkida, et tegurite järjekorda tuleb selles korrutises lugeda paremalt vasakule: esimesena on teostatud teisendus, mille maatriks on L , ja teisena see, mille maatriks on L' .

On selge, et Lorentzi rühm on isomorfne Lorentzi maatriksite rühmaga.

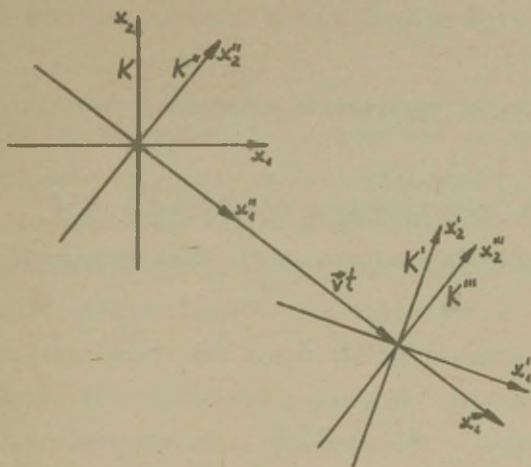
Nüüd vaatame, kuidas saab leida Lorentzi teisendusmaatriksi üldjuhul, s. o. mõlema inertsiaalsüsteemi ruumiliste koordinaattelgede meelevaldse orientatsiooni ja nende suhtelise kiiruse meelevaldse suuna korral.

Liikugu süsteem K' (vt. joon. 13) süsteemi K suhtes kiirusega \vec{v} . Teostame ülemineku süsteemist K süsteemi K' kolme üksteisele järgneva teisenduse kaudu. Esimalt pöörame süsteemi K ruumilised teljed nii, et x -telg saaks \vec{v} -ga paralleelseks. Olgu uus inertsiaalsüsteem (mis on K suhtes liikumatu) K'' . Teiseks, rakendame eespool vaadeldud erijuhulist Lorentzi teisendust, mille maatriksi panime kirja valemis (2.17). See tähendab üleminekut kiirusega \vec{v} liikuvasse süsteemi K''' , mis on ilmselt K' suhtes liikumatu. Lõpuks pöörame (tarbekorral ka peegeldame) süsteemi K''' ruumilised teljed nii, et nad ühtiksid süsteemi K' telgedega. Seega avaldub vaadeldava teisenduse $K \rightarrow K'$ maatriks järgmise korrutisena:

$$L_{K \rightarrow K'} = L_{K'' \rightarrow K'} L_{K'' \rightarrow K''} L_{K \rightarrow K''} \quad (2.20)$$

Siin on keskmine tegur valemis (2.17) avaldatud kujuga, kuna äärmised tegurid on mõlemad kvasidiagonaalse kujuga:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$



Joonis 13.

kus α on ruumikoordinaatide ortogonaalse teisenduse maatriks. Muidugi on α mainitud kahes äärmises maatriksis korrutises (2.20) erinev.

Ülesandes 3 on üldkujuline Lorentzi maatriks selle skeemi järgi ka tegelikult arvutatud (vt. valem (2.35)).

Veendume nüüd, et mistahes Lorentzi teisenduse maatriks on ortogonaalne, s. o. et

$$L^{-1} = L^T, \quad (2.22)$$

kus T on transponeerimise märk. Tõepoolest, valemities (2.17) ja (2.21) esitatud erikujulised Lorentzi maatriksid on ortogonaalsed, milles võib veenduda otseselt. Et aga ortogonaalsete maatriksite korrutis on samuti ortogonaalne maatriks ja et nende erikujuliste teisenduste korrutisena avaldub mistahes üldkujuline teisendus (vt. 2.20)), siis on ka mistahes Lorentzi maatriks ortogonaalne.

Lorentzi maatriksite ortogonaalsusest järgneb, et suurus

$$x^T x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \bar{r}^2 - c^2 t^2 \quad (2.23)$$

on Lorentzi teisenduste suhtes invariantne. Tõepoolest, kui

$$x' = L x,$$

siis

$$x'^T = x^T L^T$$

ning

$$x'^T x' = x^T L^T L x;$$

et aga L ortogonaalsuse tõttu $L^T L = E$ (ühikmaatriks), siis

$$x'^T x' = x^T x$$

ehk

$$x^T x = \bar{r}^2 - c^2 t^2 = \text{inv.}, \quad (2.24)$$

mida oligi tarvis näidata. Analoogiliselt saab näidata, et kui \vec{r}_1, t_1 ja \vec{r}_2, t_2 on kahe sündmuse ajaliskoordinaadid, siis

$$\vec{r}_1 \vec{r}_2 - c^2 t_1 t_2 = \text{inv.} \quad (2.25)$$

Lorentzi teisendusmaatriksi determinant võrdub kas +1 või -1. See järgneb otseselt maatriksi ortogonaalsusest. Et $\mathcal{L}\mathcal{L}^T = E$, kus E on üksikmaatriks, siis võttes selle võrduse mõlemal poolel determinandi, saame:

$$\|\mathcal{L}\|^2 = 1$$

ja siit

$$\|\mathcal{L}\| = \pm 1. \quad (2.26)$$

Erijuhulise teisenduse (2.15) puhul on Lorentzi maatriksi determinant +1, nagu näitab otsene arvutus. Samuti on ruumilise koordinaadistiku pööret kujutava Lorentzi maatriksi determinant +1. Seega on ka mistahes Lorentzi maatriksi determinant +1, kui teisendus ei sisalda ruumilist peegeldust. Kui aga antud teisenduses sisaldub peegeldus, siis on Lorentzi maatriksi determinant -1. Samuti on determinant -1 juhul, kui teisendus ruumilist peegeldust ei sisalda, kuid sisaldab ajalise peegelduse ehk ajalise inversiooni, $t' = -t$. Lõpuks, kui teisendus sisaldab nii ruumilise kui ka ajalise peegelduse, siis on determinant jälle +1.

Ü l e s a n d e d .

1. Süsteem K' liigub süsteemi K suhtes x -telje suunas kiirusega v ning süsteem K'' K' suhtes kiirusega v' (samuti x -telje suunas). Leida K'' kiirus v'' K suhtes.

L a h e n d u s . Tähistame

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.27)$$

Siis avaldub teisenduse $K \rightarrow K''$ maatriks kahe maatriksi korrutisena:

$$\begin{pmatrix} \gamma'' 0 0 i\beta''\gamma'' \\ 0 1 0 0 \\ 0 0 1 0 \\ -i\beta''\gamma'' 0 0 \gamma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' 0 0 i\beta'\gamma' \\ 0 1 0 0 \\ 0 0 1 0 \\ -i\beta'\gamma' 0 0 \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma 0 0 i\beta\gamma \\ 0 1 0 0 \\ 0 0 1 0 \\ -i\beta\gamma 0 0 \gamma \end{pmatrix}$$

Arvutades leiame:

$$\gamma'' = \gamma\gamma'(1 + \beta\beta') \quad (2.28)$$

Et

$$\beta'' = \frac{\sqrt{\gamma''^2 - 1}}{\gamma''},$$

siis

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \quad \left. \vphantom{\beta''} \right\} \quad (2.29)$$

ehk

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$$

See valem on paralleelsete kiiruste liitmise valem.

2. Leida Lorentzi maatriks, mis määrab ülemineku süsteemist K selle suhtes kiirusega $\vec{v} = c\vec{\beta}$ liikuvasse

süsteemi K' , mille ruumilised teljed on paralleelsed süsteemi K vastavate telgedega.

L a h e n d u s . Valemi (2.20) järgi leiame:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & 0 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- kus

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

on pöördemaatriks, mis pöörab x_1 -telje $\vec{\beta}$ -suunaliseks. Seetõttu $\alpha_{11} = \beta_1/\beta$, $\alpha_{12} = \beta_2/\beta$, $\alpha_{13} = \beta_3/\beta$. Korrutades maatriksid läbi, leiame

$$L = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta_1^2(\gamma-1)}{\beta^2} & \frac{\beta_1\beta_2(\gamma-1)}{\beta^2} & \frac{\beta_1\beta_3(\gamma-1)}{\beta^2} & i\beta_1\gamma \\ \frac{\beta_1\beta_2(\gamma-1)}{\beta^2} & 1 + \frac{\beta_2^2(\gamma-1)}{\beta^2} & \frac{\beta_2\beta_3(\gamma-1)}{\beta^2} & i\beta_2\gamma \\ \frac{\beta_1\beta_3(\gamma-1)}{\beta^2} & \frac{\beta_2\beta_3(\gamma-1)}{\beta^2} & 1 + \frac{\beta_3^2(\gamma-1)}{\beta^2} & i\beta_3\gamma \\ -i\beta_1\gamma & -i\beta_2\gamma & -i\beta_3\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Samale tulemusele võime teisiti jõuda ka järgmiselt. Lahutame kohavektori \vec{z} (süsteemis K) $\vec{\beta}$ -suunaliseks komponendiks

$$\vec{z}_H = \frac{\vec{\beta}\vec{z} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} \quad (2.31)$$

ja $\vec{\beta}$ -ga ristiolevaks komponendiks

$$\vec{z}'_{\perp} = \vec{z} - \frac{\vec{\beta} \vec{z} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} = \frac{(\vec{\beta} \times \vec{z}) \times \vec{\beta}}{\beta^2}. \quad (2.32)$$

Üleminekul kiirusega $\vec{\beta}$ liikuvasse süsteemi K' teise-
nevad \vec{z}'_{\parallel} ja x'_4 nagu x_1 ja x_4 valemis (2.15), kuna
 \vec{z}'_{\perp} jääb muutumatuks nagu x_2 ja x_3 samas valemis. See-
ga

$$\vec{z}'_{\parallel} = \gamma \left(\frac{\vec{\beta} \vec{z} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} + i\beta x_4 \right),$$

$$\vec{z}'_{\perp} = \frac{(\vec{\beta} \times \vec{z}) \times \vec{\beta}}{\beta^2},$$

$$x'_4 = \gamma (x_4 - i\vec{\beta} \vec{z}).$$

Liites $\vec{z}'_{\parallel} + \vec{z}'_{\perp} = \vec{z}'$, leiame:

$$\left. \begin{aligned} \vec{z}' &= \vec{z} + \frac{\vec{\beta} \vec{z} \cdot \vec{\beta} (\gamma - 1)}{\beta^2} + i\gamma \vec{\beta} x_4, \\ x'_4 &= \gamma (x_4 - i\vec{\beta} \vec{z}). \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Eeldades nüüd, et mõlema süsteemi ruumilised teljed on
vastavalt paralleelsed, leiame siit:

$$x'_1 = \left[1 + \frac{\beta_1^2 (\gamma - 1)}{\beta^2} \right] x_1 + \frac{\beta_1 \beta_2 (\gamma - 1)}{\beta^2} x_2 + \frac{\beta_1 \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta^2} x_3 + i\gamma \beta_1 x_4,$$

$$x'_2 = \frac{\beta_1 \beta_2 (\gamma - 1)}{\beta^2} x_1 + \left[1 + \frac{\beta_2^2 (\gamma - 1)}{\beta^2} \right] x_2 + \frac{\beta_2 \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta^2} x_3 + i\gamma \beta_2 x_4, \quad (2.34)$$

$$x'_3 = \frac{\beta_1 \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta^2} x_1 + \frac{\beta_2 \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta^2} x_2 + \left[1 + \frac{\beta_3^2 (\gamma - 1)}{\beta^2} \right] x_3 + i\gamma \beta_3 x_4,$$

$$x'_4 = -i\gamma \beta_1 x_1 - i\gamma \beta_2 x_2 - i\gamma \beta_3 x_3 + \gamma x_4.$$

See tulemus ongi kooskõlas teisenduse maatriksiga valemis (2.30).

3. Leida Lorentzi maatriks, mis määrab ülemineku süsteemist K selle suhtes kiirusega $\vec{v} = c\vec{\beta}$ liikuvasse süsteemi K' , mille ruumiliste telgede suunalised ühikvektorid on $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$.

L a h e n d u s . Eelmises ülesandes saadud valemid (2.33) kehtivad ka sel juhul, kui mõlema süsteemi ruumilised teljed paralleelsed ei ole, sest need valemid on avaldatud vektorkujus. Seega annavadki nad vahetult nõutava vastuse, kui arvestame, et $x'_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{r}'$, $x'_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{r}'$, $x'_3 = \vec{E}_3 \cdot \vec{r}'$. Teisendusmaatriks on seega järgmine:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} + \frac{\vec{\beta} \vec{E}_1 \cdot \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta^2} & \epsilon_{12} + \frac{\vec{\beta} \vec{E}_1 \cdot \beta_2 (\gamma - 1)}{\beta^2} & \epsilon_{13} + \frac{\vec{\beta} \vec{E}_1 \cdot \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta^2} & i\gamma \vec{\beta} \vec{E}_1 \\ \epsilon_{21} + \frac{\vec{\beta} \vec{E}_2 \cdot \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta^2} & \epsilon_{22} + \frac{\vec{\beta} \vec{E}_2 \cdot \beta_2 (\gamma - 1)}{\beta^2} & \epsilon_{23} + \frac{\vec{\beta} \vec{E}_2 \cdot \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta^2} & i\gamma \vec{\beta} \vec{E}_2 \\ \epsilon_{31} + \frac{\vec{\beta} \vec{E}_3 \cdot \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta^2} & \epsilon_{32} + \frac{\vec{\beta} \vec{E}_3 \cdot \beta_2 (\gamma - 1)}{\beta^2} & \epsilon_{33} + \frac{\vec{\beta} \vec{E}_3 \cdot \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta^2} & i\gamma \vec{\beta} \vec{E}_3 \\ -i\gamma \beta_1 & -i\gamma \beta_2 & -i\gamma \beta_3 & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

kus $\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \epsilon_{i3}$ on vektori \vec{E}_i komponendid süsteemis K .

Teisiti jõuame samale tulemusele ka maatriksi (2.30) korrutamise teel vasakult pöördemaatriksiga

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} & 0 \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

4. Veenduda otsese arvutuse teel, et maatriks L valemis (2.35) on ortogonaalne.

5. Näidata, et kui süsteem K' liigub süsteemi K suhtes kiirusega $\vec{\beta}$ ja tema telgede suunad süsteemi K telgede suhtes määrab maatriks ε (vt. (2.36)), siis avaldub pöörde teisenduse $K' \rightarrow K$ maatriks valemis (2.35) eeskujul, kui seal teha asendused: $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^T$, $\beta_i \rightarrow -\vec{\beta}\vec{\varepsilon}_i$ ja $\vec{\beta}\vec{\varepsilon}_i \rightarrow -\beta_i$. Veenduda, et sel viisil saadud maatriks on teisenduse $K \rightarrow K'$ maatriksi suhtes transponeeritud (nagu peabki olema valemis (2.22) põhjal).

6. Süsteem K' liigub K suhtes kiirusega $\vec{\beta}$ ja süsteem K'' liigub süsteemi K' suhtes kiirusega $\vec{\beta}'$. Millise kiirusega $\vec{\beta}''$ liigub süsteem K'' süsteemi K suhtes?

L a h e n d u s . Et kiirus kui vektor ei sõltu koordinaattelgede suundadest, võime eeldada, et pöörded puuduvad. Sel juhul avaldub teisendusmaatriks valemis (2.30) kohaselt. Teisendusmaatriksi ülemineku $K \rightarrow K''$ jaoks saame korrutades kaks niisuguse kujuga maatriksit, mis kujutavad üleminekuid $K \rightarrow K'$ ja $K' \rightarrow K''$. Korrutis, mille üldkuju on (2.35), määrabki otsitava kiiruse $\vec{\beta}''$. Seejuures piisab korrutise neljanda rea elementidest. Arvutus annab:

$$\gamma''\beta_i'' = \gamma'\beta_i' + \gamma\gamma'\beta_i \left(1 + \frac{\gamma\vec{\beta}\vec{\beta}'}{\gamma+1}\right) \quad (2.37)$$

ja

$$\gamma'' = \gamma\gamma' \left(1 + \vec{\beta}\vec{\beta}'\right). \quad (2.38)$$

Jagades valemis (2.37) valemiga (2.38), leiame:

$$\beta_i'' = \frac{\beta_i' + \gamma\beta_i \left(1 + \frac{\gamma\vec{\beta}\vec{\beta}'}{\gamma+1}\right)}{\gamma \left(1 + \vec{\beta}\vec{\beta}'\right)} \quad (2.39)$$

ehk

$$\vec{\beta}'' = \frac{\vec{\beta} + \vec{\beta}'\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\vec{\beta}\vec{\beta}' \cdot \vec{\beta}(1-\sqrt{1-\beta^2})}{\beta^2}}{1+\vec{\beta}\vec{\beta}'}} \quad (2.40)$$

ehk

$$\vec{\beta}'' = \frac{(\vec{\beta} + \vec{\beta}')\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} + [(\vec{\beta} \times \vec{\beta}') \times \vec{\beta}]\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2(1+\vec{\beta}\vec{\beta}')} \quad (2.41)$$

See valem on relativistlik kiiruste liitmise valem. Mitterelativistlikul piirjuhul on $\sqrt{1-\beta^2} \rightarrow 1$ ja $1+\vec{\beta}\vec{\beta}' \rightarrow 1$; siis saabki see valem mitterelativistliku kuju: $\vec{\beta}'' = \vec{\beta} + \vec{\beta}'$. Erijuhul, kui kiirused on paralleelsed, saame valemist (2.41) varem tuletatud valemi (2.29).

Kiiruse $\vec{\beta}''$ absoluutväärtuse saame kas otseselt valemist (2.40) või valemi (2.38) kaudu valemist

$$\beta'' = \frac{\sqrt{\gamma''^2 - 1}}{\gamma''} \quad (2.42)$$

Tulemus on niisugune:

$$\beta'' = \frac{\sqrt{(\vec{\beta} + \vec{\beta}')^2 - (\vec{\beta} \times \vec{\beta}')^2}}{1 + \vec{\beta}\vec{\beta}'} = \sqrt{1 - \frac{(1-\beta^2)(1-\beta'^2)}{(1+\vec{\beta}\vec{\beta}')^2}} \quad (2.43)$$

7. Liikugu süsteem K' süsteemi K suhtes kiirusega $\vec{\beta}$ ning süsteem K'' süsteemi K' suhtes kiirusega $\vec{\beta}'$, kusjuures K' teljed olgu paralleelsed K telgedega ning K'' teljed paralleelsed K' telgedega. Näidata, et üldiselt ei ole K'' teljed paralleelsed K telgedega. Leiada pöördemaatriks ξ , mis pöörab K teljed K'' telgedeks.

L a h e n d u s . Teisenduse $K \rightarrow K''$ maatriksi saame, korrutades teisenduste $K \rightarrow K'$ ja $K' \rightarrow K''$ maatriksid. Need on mõlemad valemis (2.30) antud kujuga. Korrutis aga ei ole üldiselt sellekujuline. Seetõttu tuleb ülemineku $K \rightarrow K''$ maatriks avaldada (2.35) eeskujul järgmiselt:

$$L_{K \rightarrow K''} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ik} + \frac{\vec{\beta}'' \vec{\varepsilon}_i \cdot \beta_k'' (\gamma'' - 1)}{\beta''^2} & i\gamma'' \vec{\beta}'' \vec{\varepsilon}_i \\ -i\gamma'' \beta_k'' & \gamma'' \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

kusjuures siin on lihtsustuseks kolm esimest rida ja kolm esimest veergu kokku võetud üheks reaks ja üheks veeruks.

See maatriks tuleb võrrutada korrutisega $L_{K' \rightarrow K''} L_{K \rightarrow K'}$:

$$\begin{pmatrix} \delta_{il} + \frac{\beta'_i \beta'_l (\gamma' - 1)}{\beta'^2} & i\beta'_i \gamma' \\ -i\beta'_l \gamma' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{ek} + \frac{\beta_e \beta_k (\gamma - 1)}{\beta^2} & i\beta_e \gamma \\ -i\beta_k \gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ik} + \frac{\vec{\beta}'' \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\beta}_k'' (\gamma'' - 1)}{\beta''^2} & i\gamma'' \vec{\beta}'' \vec{\varepsilon}_i \\ -i\gamma'' \beta_k'' & \gamma'' \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Selle korrutise neljanda rea elemendid on meil arvatud juba eelmises ülesandes. Sealt saime valemid (2.37) ja (2.38) ning arvutasime kiiruse $\vec{\beta}''$. Neljanda veeru elementide arvutamine annab:

$$\gamma'' \vec{\beta}'' \vec{\varepsilon}_i = \gamma \beta_i + \gamma \gamma' \left(1 + \frac{\gamma' \beta \beta'}{\gamma' + 1} \right) \beta'_i \quad (2.46)$$

ja kolme esimese rea ja veeru elementide jaoks leiame:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ik} + \frac{\vec{\beta}'' \vec{\varepsilon}_i \cdot \beta_k'' (\gamma'' - 1)}{\beta''^2} &= \\
= \delta_{ik} + \frac{\gamma^2 \beta_i \beta_k}{\gamma + 1} + \frac{\gamma'^2 \beta'_i \beta'_k}{\gamma' + 1} + & \\
+ \gamma \gamma' \left(1 + \frac{\gamma \gamma' \vec{\beta} \vec{\beta}'}{(\gamma + 1)(\gamma' + 1)} \right) \beta'_i \beta_k &.
\end{aligned}
\tag{2.47}$$

Viimasest valemist avaldamegi nüüd pöördemaatriksi ε elemendid ε_{ik} , kusjuures selle valemi vasaku poole teises liikmes tuleb tegurite β_k'' , $\gamma'' - 1$, β''^2 ja $\vec{\beta}'' \vec{\varepsilon}_i$ elimineerimiseks kasutada valemeid (2.38), (2.39), (2.43) ja (2.46). Mõneti raskepärase, olgugi põhimõtteliselt lihtsa arvutuse tulemusena saame

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} - \frac{1}{1 + \vec{\beta} \vec{\beta}' + \frac{1}{\gamma \gamma'}} \left\{ (\beta_i \beta'_k - \beta'_i \beta_k) + \right. \\
\left. + \frac{\gamma \gamma'}{(\gamma + 1)(\gamma' + 1)} (\beta_i \beta_k \beta'^2 + \beta'_i \beta'_k \beta^2 - 2 \vec{\beta} \vec{\beta}' \beta'_i \beta_k) \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.48}$$

8. Kontrollida otsese arvutuse teel, et eelmises ülesandes leitud pöördemaatriks ε rahuldab seost (2.46).

9. Millise telje ümber ja kui suure nurga võrra toimub pööre, mis on määratud 7. ülesandes leitud maatriksiga ε ?

L a h e n d u s . Olgu $\vec{\xi}$ pöördetelje suunaline ühikuline pseudovektor ja α pöördenuhk. Siis avaldub

ϵ_{ik} nende suuruste kaudu järgmiselt:

$$\epsilon_{ik} = \cos\alpha \cdot \delta_{ik} + (1 - \cos\alpha) \xi_i \xi_k + \sin\alpha \cdot e_{ikl} \xi_l, \quad (2.49)$$

kus e_{ikl} on täielikult antisümmeetriline 3. järku pseudotensor. Tõepoolest, kui pöörame mingi vektori \vec{r} telje $\vec{\xi}$ ümber nurga α võrra, siis teiseneb ta järgmiselt:

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\vec{\xi} \times \vec{r}) \sin\alpha + (\vec{\xi} \times (\vec{\xi} \times \vec{r}))(1 - \cos\alpha), \quad (2.50)$$

sest (vt. joon. 14) pöörde läbi saab vektor \vec{r} juurde vektori $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, kusjuures $\vec{b} = (\vec{\xi} \times \vec{r}) \sin\alpha$ ja $\vec{c} = (\vec{\xi} \times (\vec{\xi} \times \vec{r}))(1 - \cos\alpha)$. Teisiti võime valemi (2.50) kirjutada kujul:

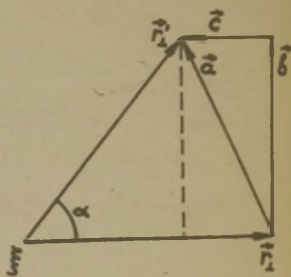
$$r'_k = r_k \cos\alpha + r_l \xi_l \xi_k (1 - \cos\alpha) + e_{klm} \xi_l r_m. \quad (2.51)$$

Kui võtame nüüd vektoriks r_k i -nda koordinaattelja suunalise ühikvektori, siis $r_k = \delta_{ik}$ ja $r'_k = \epsilon_{ik}$ ning valemist (2.51) saamegi (2.49).

Nüüd tuleb avaldada ϵ_{ik} kaudu $\vec{\xi}$ ja α . Selleks võtame valemis (2.49) $i = k = 1, 2, 3$:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) \xi_1^2, \\ \epsilon_{22} &= \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) \xi_2^2, \\ \epsilon_{33} &= \cos\alpha + (1 - \cos\alpha) \xi_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

Liites need valemid saame:



Joonis 14.

$$\cos \alpha = \frac{\epsilon_{kk} - 1}{2}; \quad (2.53)$$

asetades selle avaldise tagasi valemitesse (2.52) saame:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^2 &= \frac{1 - \epsilon_{kk} + 2\epsilon_{11}}{3 - \epsilon_{kk}}, \\ \xi_2^2 &= \frac{1 - \epsilon_{kk} + 2\epsilon_{22}}{3 - \epsilon_{kk}}, \\ \xi_3^2 &= \frac{1 - \epsilon_{kk} + 2\epsilon_{33}}{3 - \epsilon_{kk}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Lõpuks tuleb valemi (2.48) abil leida α ja $\tan \frac{\alpha}{2}$ jaoks lõplikud avaldised. Esmalt leiame:

$$\epsilon_{kk} = 3 - \frac{2\gamma\gamma'[\beta^2\beta'^2 - (\vec{\beta}\vec{\beta}')^2]}{(\gamma+1)(\gamma'+1)(1 + \vec{\beta}\vec{\beta}' + \frac{1}{\gamma\gamma'})}$$

ja siit

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\gamma\gamma'[\beta^2\beta'^2 - (\vec{\beta}\vec{\beta}')^2]}{(\gamma+1)(\gamma'+1)(1 + \vec{\beta}\vec{\beta}' + \frac{1}{\gamma\gamma'})}. \quad (2.55)$$

Siit, arvestades, et $\alpha \leq \pi$, saame veel:

$$\sin \alpha = \frac{(1 + \frac{\gamma\gamma'\vec{\beta}\vec{\beta}'}{(\gamma+1)(\gamma'+1)})\sqrt{\beta^2\beta'^2 - (\vec{\beta}\vec{\beta}')^2}}{1 + \vec{\beta}\vec{\beta}' + \frac{1}{\gamma\gamma'}}. \quad (2.56)$$

Palju lihtsama avaldise saame $\tan \frac{\alpha}{2}$ jaoks:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{A \sin \psi}{1 + A \cos \psi} = \frac{\sin \psi}{B + \cos \psi}, \quad (2.57)$$

kus ψ on vektorite $\vec{\beta}$ ja $\vec{\beta}'$ vaheline nurk ja

$$\left. \begin{aligned} A = B^{-1} &= \frac{(1 - \sqrt{1 - \beta^2})(1 - \sqrt{1 - \beta'^2})}{\beta\beta'} \\ B = A^{-1} &= \frac{(1 + \sqrt{1 - \beta^2})(1 + \sqrt{1 - \beta'^2})}{\beta\beta'} \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Müüd asetame ϵ_{ik} avaldised valemist (2.48) valemitesse (2.54). Tulemus on esialgu niisugune:

$$\vec{\xi} = \pm \frac{\vec{\beta}' \times \vec{\beta}}{|\vec{\beta}' \times \vec{\beta}|} \quad (2.59)$$

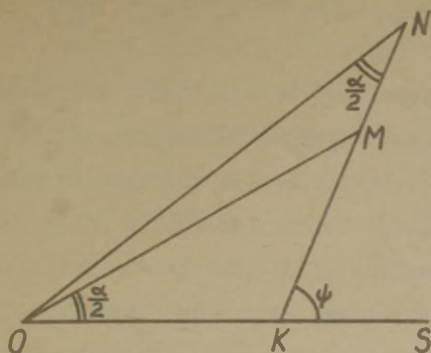
Märk on siin määramata, sest valemid (2.54) annavad ξ_1, ξ_2, ξ_3 märgi täpsusega. Õige märgi leidmiseks võtame valemites (2.48) ja (2.49) $i \neq k$ ja võrrutame mõlemad avaldised. Arvestades ka $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ avaldised (vt. (2.55) ja (2.56)), leiame:

$$\epsilon_{ikl} \xi_l = \frac{\beta'_i \beta_k - \beta_i \beta'_k}{\beta\beta' \sin \psi} \quad (2.60)$$

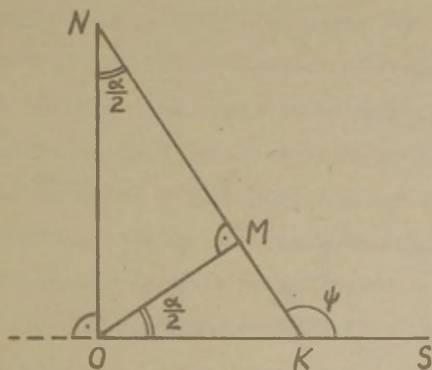
Võrreldes seda avaldist eelmise valemiga (2.59) leiame, et seal tuleb võtta +. Niisiis,

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{\beta}' \times \vec{\beta}}{\beta\beta' \sin \psi} \quad (2.61)$$

Pöördume tagasi veel valemi (2.57) juurde. Joonisel 15 on näidatud lihtne graafiline konstruktsioon $\frac{\alpha}{2}$ leidmiseks. Kui $\overline{OK} = 1$, $\widehat{MKS} = \psi$, $\overline{KM} = A$, $\overline{KN} = B$, siis $\frac{\alpha}{2} = \widehat{MOK} = \widehat{KNO}$. Sellest konstruktsioonist järgneb, et konstantsete β ja β' korral on α maksimaalne siis, kui $\cos \psi = -A$ (vt. joon. 16).



Joonis 15.



Joonis 16.

§ 8. Intervall.

Kahe sündmuse vaheliseks *i n t e r v a l l i k s* nimetatakse suurus S , mille ruut avaldub sündmuste koordinaatide \vec{z}_1, t_1 ja \vec{z}_2, t_2 kaudu järgmiselt:

$$s^2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_{\mu}^{(2)} - x_{\mu}^{(1)})(x_{\mu}^{(2)} - x_{\mu}^{(1)}), \quad (2.62)$$

kus μ on summeerimisindeks: $\mu = 1, 2, 3, 4$; seejuures tähendab x_4 imaginaarset ajakoordinaati (vt. (2.14)).

Intervall on invariant Lorentzi teisenduste suhtes; see järgneb valemitest (2.24) ja (2.25). On selge, et intervall on kolmemõõtmelise ruumi kahe punkti vahelise kauguse analoog neljamõõtmelises aegruumis. Intervalli invariantusele Lorentzi teisenduste suhtes vastab kahe punkti vahelise kauguse invariantus ruumikoordinaatide teisenduste suhtes.

Siiski ei ole see analoogia ühes suhtes täielik. Kolmemõõtmelises ruumis võrdub kahe punkti vahelise kauguse ruut nende punktide koordinaatide vahede ruutude summaga. Selles avaldub kolmemõõtmelise ruumi eukleidilisus. Neljamõõtmelises ruumis aga saab intervalli ruutu esitada koordinaatide vahede ruutude summana ainult formaalselt, nimelt imaginaarse ajakoordinaadi sissetoomise hinnaga. Tegelikult on aeg reaalne suurus. Realse ajakoordinaadi kasutamisel võrdub intervalli ruut ruumikoordinaatide vahede ruutude summaga, millest on lahutatud ajakoordinaatide vahe ruut. Seda asjaolu väljendatakse ütlusega, et neljamõõtmelise aegruumi signatuur on $+++ -$, kuna kolmemõõtmelise ruumi signatuur on $+++$. Geomeetriat, mida saab formaalselt esitada eukleidilisena imaginaarsete koordinaatide sissetoomise teel, nimetatakse $ps eu - do e u k l e i d i l i s e k s$. Niisiis, aegruumi geomeetria on pseudoeukleidiline.

Aegruumi geomeetria pseudoeukleidilise üheks järel-
duseks on see, et kahe sündmuse vaheline intervall võib ol-
la null, ilma et sündmused ühtiksid. Sellevastu tähendab
eukleidilises ruumis kahe punkti vahelise kauguse null-
väärtus alati seda, et need punktid ühtivad.

Niisamuti võib intervalli ruut olla ka negatiivne ja
intervall ise imaginaarne. Seega rühmituvad intervallid
üldiselt kolme liiki: nullist erinevad reaalsed, imagi-
naarsed ja nulliga võrdsed. Neid nimetatakse vastavalt
ruumisarnasteks ($s^2 > 0$), ajasarnasteks ($s^2 < 0$) ja isot-
roopseteks ($s^2 = 0$) intervallideks. Et intervallide väärtused
on invariantid, siis on ka see liigitus Lorentzi
teisenduste suhtes invariantne.

Sündmuste paaride omadused olenevad oluliselt vasta-
vate intervallide liigist. Kõigepealt on selge, et ruumi-
sarnase intervalli korral ei saa sündmused üheski inert-
siaalsüsteemis olla samapaiksed; sest kui oleks $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$,
siis oleks $s^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 < 0$, mis on vastuolus eeldu-
suga. Täpselt niisamuti ei saa sündmused üheski inertsiaal-
süsteemis olla samaaegsed, kui nendevaheline intervall on
ajasarnane. Kui intervall on isotroopne, siis ei saa sünd-
mused olla üheski inertsiaalsüsteemis samaaegsed ega sama-
paiksed (peale triviaalse juhu, kus sündmused ühtivad; aga
sel juhul ei olegi meil tegemist kahe, vaid ainult ühe
sündmusega).

Tõestame veel alljärgnevad laused.

L a u s e 1. Kui intervall on ruumisarnane, siis
leidub niisugune inertsiaalsüsteem, milles selle interval-

liga lahutatud sündmused on samaaegsed.

Tõestus. Ilma üldsust kitsendamata eeldame, et mõlema sündmuse y - ja x -koordinaadid on võrdsed. Selle saavutamiseks on tarvis vaid ruumilise koordinaadistiku x -telg võtta paralleelseks sirgjoonega, mis ühendab sündmuste kohad. Siis saame intervalli ruudu jaoks avaldise:

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (2.63)$$

Eelduseks on $s^2 > 0$, s. o. $\frac{c|t_2 - t_1|}{|x_2 - x_1|} < 1$. Siirdume teise inertsiaalsüsteemi, mis liigub lähtesüsteemi suhtes x -telje suunas kiirusega v . Sündmuste ajakoordinaadid on siis

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Et oleks $t'_2 = t'_1$, peab olema

$$\frac{v}{c} = \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1}. \quad (2.64)$$

Et selle võrduse parema poole absoluutväärtus on väiksem kui 1, siis on niisugune kiirus võimalik; seega on tõesti olemas süsteem, milles antud sündmused on samaaegsed.

Lause 2. Kui intervall on ajasarnane, siis leidub niisugune inertsiaalsüsteem, milles selle intervalliga lahutatud sündmused on samapaiksed.

Tõestus. Lähtume jälle s^2 avaldisest (2.63). Nüüd on $s^2 < 0$ tõttu $\frac{|x_2 - x_1|}{c|t_2 - t_1|} < 1$. Siirdume kiiruse-

ga v liikuvasse teise süsteemi, milles

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Kui valime kiiruse nii, et

$$\frac{v}{c} = \frac{x_2 - x_1}{c(t_2 - t_1)}, \quad (2.65)$$

mis on ilmselt võimalik, siis ongi $x'_2 = x'_1$. Seega on tõesti olemas süsteem, milles antud sündmused on samapaiksed.

L a u s e 3 . Kui kahe sündmuse vaheline intervall on ruumisarnane, siis võib nendevahelisel ajavahemikul olla mistahes väärtus vahemikus $(-\infty, +\infty)$ olenevalt inertsiaalsüsteemi valikust.

T õ e s t u s . Lähtume süsteemist, milles sündmused on samaaegsed: $t_2 = t_1$. Mingis teises süsteemis on siis

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{v}{c^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Siit saame:

$$\frac{v}{c} = \pm \left[1 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2 (t'_2 - t'_1)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{|v|}{c} < 1.$$

Seega võime mistahes meelevaldselt etteantud $t'_2 - t'_1$ väärtuse jaoks määrata niisuguse kiiruse v , millega peab liikuma lähtesüsteemi suhtes süsteem, milles sündmustevahelisel ajavahemikul on see etteantud väärtus.

Ilmselt võib $t'_2 - t'_1$ ette anda positiivseks või negatiivseks; see valik koos $x_2 - x_1$ märgiga määrab vajaliku kiiruse märgi.

L a u s e 4 . Kui kahe sündmuse vaheline intervall on ajasarnane, siis on nendevaheline ajavahemik minimaalne selles inertsiaalsüsteemis, milles sündmused on samapaiksed; mistahes teises inertsiaalsüsteemis on ajavahemik tõkestamatult pikem.

T õ e s t u s . Lähtume süsteemist, milles sündmused on samapaiksed: $x_2 = x_1$. Olgu selles süsteemis $t_2 - t_1 > 0$. Mingis teises süsteemis on siis

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > t_2 - t_1, \quad (2.66)$$

millega lause ongi tõestatud ($t'_2 - t'_1$ tõkestamatus järgneb sellest, et β võib olla kuidas lähedane 1-le).

L a u s e 5 . Kui kahe sündmuse vaheline intervall on isotroopne, siis on nendevaheline ajavahemik kõigis inertsiaalsüsteemides ühe ja sama märgiga ning mistahes väärtusega lahtises vahemikus $(0, +\infty)$ või $(-\infty, 0)$.

T õ e s t u s . Olgu sündmustevaheline ajavahemik mingis inertsiaalsüsteemis $t_2 - t_1 > 0$. Valime x-telje suuna nii, et oleks $x_2 - x_1 > 0$. Siis on intervalli isotroopsuse tõttu $x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$. Mingis teises inertsiaalsüsteemis on ajavahemik võrdne

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ehk

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1) \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} > 0. \quad (2.67)$$

Olenevalt β väärtusest võib $t'_2 - t'_1$ olla kuitahes suur või kuitahes lähedane nullile, jäädes siiski positiivseks. Analoožilise tulemuse saame ka $t_2 - t_1 < 0$ korral, ainult võrratuse märk valemis (2.67) saab vastupidiseks. Seega on lause tõestatud.

Kolmest viimasest lausest järgneb, et sündmuste ajaline järjestus on invariantne siis ja ainult siis, kui nendevaheline intervall on ajasarnane või isotroopne. Ruumisarnase intervalli korral ei ole ajaline järjestus invariantne. Teatavas inertsiaalsüsteemis võib näiteks 1. sündmus eelneda 2. sündmusele ($t_2 - t_1 > 0$), aga mingis teises inertsiaalsüsteemis võib see vahekord olla vastupidine ($t'_2 - t'_1 < 0$). Siit järgneb, et niisuguste sündmuste vahel ei saa olla põhjuslikku seost. Põhjuslikus seoses võivad teineteisega olla ainult need sündmused, millevaheline intervall on ajasarnane või isotroopne. Põhjusliku seose võimalus ruumisarnase intervalli korral nähtub ka sellest, et sündmuse ühendava signaali kiirus, mis võiks olla põhjusliku seose vahendajaks, peaks ületama valguse kiirust. Tõepoolest, sellise signaali kiirus oleks $V = \frac{|x_2 - x_1|}{|t_2 - t_1|}$; et $\frac{|x_2 - x_1|}{c|t_2 - t_1|} > 1$, siis $V > c$. Vastupidi, ajasarnase või isotroopse intervalli korral on sündmuse ühendav signaal võimalik ja nimelt selle kiirus on ajasarnase intervalli korral väiksem valguse kiirusest ning isotroopse intervalli korral sellega võrdne.

Ü l e s a n d e d .

1. Näidata, et kui kahe sündmuse vaheline intervall on ruumisarnane, siis on ruumiline kaugus nende vahel minimaalne selles süsteemis, milles nad on samaaegsed; mistahes teises süsteemis on kaugus tõkestamatult suurem.

L a h e n d u s . Nõutav tõestus on analoogiline lause 4 tõestusega. Lähtume süsteemist, milles sündmused on samaaegsed: $t_2 = t_1$. Siis on mingis teises süsteemis

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.68)$$

millega ongi tõestus käes.

1. Näidata, et kui kahe sündmuse vaheline intervall on ajasarnane, siis võib ruumilisel kaugusel nende vahel olla mistahes väärtusi nullist lõpmatuseni, olenevalt inertsiaal-süsteemi valikust.

L a h e n d u s . Nõutav tõestus on analoogiline lause 3 tõestusega. Lähtume süsteemist, milles sündmused on samapaiksed: $x_2 = x_1$. Siis on mingis teises süsteemis

$$x_2' - x_1' = - \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Siit

$$\frac{v}{c} = \pm \left[1 + \frac{c^2(t_2 - t_1)^2}{(x_2' - x_1')^2} \right]^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{|v|}{c} < 1,$$

millega tõestus ongi käes.

3. Näidata, et kui kahe sündmuse vaheline intervall on isotroopne, võib ruumilisel kaugusel nende vahel olla mistahes väärtusi lahtises vahemikus $(0, \infty)$.

L a h e n d u s . Nõutav tõestus on analoogiline lau-
se 5 tõestusega. Olgu $t_2 - t_1 > 0$; x-telje võime suunata nii,
et $x_2 - x_1 > 0$. Mingis teises inertsiaalsüsteemis on kaugus
võrdne

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ehk

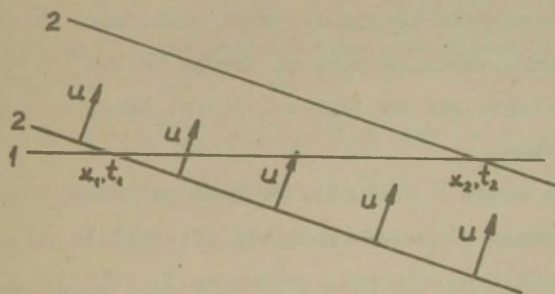
$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$

tõttu

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} , \quad (2.69)$$

millega tõestus ongi käes.

4. Pikk peenike varras on antud inertsiaalsüsteemis
x-telje sihis liikumatu; teine varras, mis moodustab esi-
mesega nurga α , liigub kiirusega u iseendaga ristiole-
vas suunas (vt. joon. 17). Seetõttu liigub mõlema varda



Joonis 17.

lõikumiskoht piki 1. varrast kiirusega $u/\sin\alpha$. Aset-
segu see lõikumiskoht hetkel t_1 punktis x_1 ja hetkel t_2

punktis $x_2 = x_1 + \frac{u(t_2 - t_1)}{\sin \alpha}$. Millisel juhul on intervall nende kahe sündmuse vahel ajasarnane, millisel juhul ruumisarnane või isotroopne? Millise kiirusega peab 1. varda suunas (s. o. x-telje suunas) liikuma teine inertsiaalsüsteem selleks, et mõlemad sündmused oleksid seal ajasarnase intervalli korral samapaiksed või ruumisarnase intervalli korral samaaegsed?

L a h e n d u s . Intervall on ajasarnane siis, kui $\frac{u}{\sin \alpha} < c$, ruumisarnane siis, kui $\frac{u}{\sin \alpha} > c$ ning isotroopne siis, kui $\frac{u}{\sin \alpha} = c$. Olgu teise inertsiaalsüsteemi kiirus v . Kui intervall on ajasarnane, siis selleks, et sündmused oleksid samapaiksed, on tarvis, et $v = \frac{u}{\sin \alpha}$. Sel juhul liigub 2. varras teises inertsiaalsüsteemis iseenda sihis, nii et lõikumiskoht jääb kogu aeg paigale. Kui aga intervall on ruumisarnane, siis selleks, et kõnesolevad sündmused oleksid samaaegsed, peab olema $v = \frac{c^2 \sin \alpha}{u}$. Sel juhul on teises inertsiaalsüsteemis varraste lõikumiskoht olemas teataval hetkel samaaegselt kõigis 1. varda punktides. Teiste sõnadega, varrastevaheline nurk on võrdne teises inertsiaalsüsteemis nulliga, nii et teataval hetkel langevad vardad kogu ulatuses ühte.

5. On antud 3 sündmust. Esimese ja teise, samuti esimese ja kolmanda sündmuse vahelised intervallid on ajasarnased ning teineteisega võrdsed, kusjuures $t_2 > t_1$ ja $t_3 > t_1$. Näidata, et teise ja kolmanda sündmuse vaheline intervall on ruumisarnane.

L a h e n d u s . Võtame inertsiaalsüsteemi, milles 1.

ja 2. sündmus on samapaiksed: $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$. Siis on $s_{12}^2 = s_{13}^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 = (\vec{z}_3 - \vec{z}_1)^2 - c^2(t_3 - t_1)^2$, kust järgneb, et $t_3 > t_2$. Nüüd on

$$\begin{aligned} s_{23}^2 &= (\vec{z}_3 - \vec{z}_2)^2 - c^2(t_3 - t_2)^2 = (\vec{z}_3 - \vec{z}_1)^2 - \\ &- c^2[(t_3 - t_1) - (t_2 - t_1)]^2 = 2s_{12}^2 + 2c^2(t_3 - t_1)(t_2 - t_1) = \\ &= 2s_{12}^2 \left(1 - \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}\right) = 2s_{12}^2 \cdot \frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_1} > 0. \end{aligned}$$

Seda oligi vaja näidata.

6. Koordinaadistiku alguspunktist hakkavad alghetkel liikuma x-telje suunas kaks punktkeha kiirusega v_1 ja v_2 , kusjuures $v_2 > v_1$. Hetkel t_1 on 1. keha punktis $x_1 = v_1 t_1$ ja hetkel t_2 teine keha on punktis $x_2 = v_2 t_2$. Missuguseid tingimusi peavad rahuldama t_1 ja t_2 selleks, et intervall nende kahe sündmuse vahel oleks ruumisarnane?

L a h e n d u s . Intervalli ruut avaldub antud juhul kujus:

$$s^2 = (v_2 t_2 - v_1 t_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2.$$

Et intervall oleks ruumisarnane, on piisav ning tarvilik võrratus

$$(\beta_2 t_2 - \beta_1 t_1)^2 - (t_2 - t_1)^2 > 0.$$

Sellega on samaväärne võrratus

$$[(1 - \beta_1)t_1 - (1 - \beta_2)t_2][(1 + \beta_1)t_1 - (1 + \beta_2)t_2] < 0.$$

Seega on intervall ruumisarnane siis ja ainult siis, kui

$$\frac{1 + \beta_1}{1 + \beta_2} t_1 < t_2 < \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta_2} t_1.$$

7. Kolme sündmuse ajaline järjestus on antud võrratus-

tega $t_1 < t_2 < t_3$. 1. ja 2. sündmuse ning 2. ja 3. sündmuse vahelised intervallid on isotroopsed. Näidata, et 1. ja 3. sündmuse vaheline intervall on üldiselt ajasarnane; ainult erijuhul, kui kõigi kolme sündmuse kohad asetsevad ühel sirgel joonel ning seejuures 2. sündmuse koht on 1. ja 3. sündmuse kohtade vahel, on 1. ja 3. sündmuse vaheline intervall isotroopne.

L a h e n d u s . Võtame 1. ja 2. sündmuse kohad ühendava sirgjoone x -teljeks, valides selle suuna nii, et $x_1 < x_3$. 2. sündmuse koht on üldiselt väljaspool x -telge; võtame kõigi kolme sündmuse kohtade tasandi xy -tasandiks, nii et $z_2 = 0$. Siis on eelduste kohaselt

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{c} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2},$$

$$t_3 - t_2 = \frac{1}{c} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_2^2}.$$

Siit järgneb

$$t_3 - t_1 = \frac{1}{c} \left(\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_2^2} - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2} \right).$$

Järelikult

$$\begin{aligned} s_{13}^2 &= (x_3 - x_1)^2 - c^2(t_3 - t_1)^2 = \\ &= 2 \left[-\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_2^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) - y_2^2 \right]. \end{aligned}$$

Kui võtame siin $y_2 = 0$ ning $x_3 - x_2 > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, siis saame $s_{13}^2 = 0$. See ongi erijuht. Muidu aga $s_{13}^2 < 0$, ja nimelt $y_2 \neq 0$ korral on nurksulgudes ilmselt juba kahe esimese liikme summa negatiivne, ja $y_2 = 0$ korral, kui li-

saks $(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) < 0$, on see ka nõnda. Seda oligi vaja tõestada.

Täienduseks toome teise tõestuse, mis ei vaja arvutusi. Kui valgussignaaliid ühendavad esimest sündmust teisega ja teist kolmandaga ja mõlema signaali tee on ühes suunas kulgev sirgjooneline tee, siis on selge, et ka üksainus valgussignaaliid ühendab 1. sündmust kolmandaga, nii et nendevaheline intervall on isotroopne. Kui aga 2. sündmuse koht ei ole 1. ja 3. sündmuse kohti ühendaval sirgjoonel, siis on viimastevaheline kaugus lühem mõlema valgussignaali (s. o. 1. ja 2. sündmust ja 2. ja 3. sündmust ühendava) summaarsest teest. Seetõttu peab signaali kiirus, mis ühendab esimest sündmust kolmandaga, olema väiksem valguse kiirusest, s. o. nende sündmuste vaheline intervall on ajasarnane.

§ 9. Omaaeg.

Eelmises paragrahvis me nägime, et ajasarnase intervalliga lahutatud sündmuste vaheline ajavahemik on väikseima väärtusega selles inertsiaalsüsteemis, milles sündmused on samapaiksed. Seda väikseimat ajavahemikku nimetatakse omaaja vahemikuks vaadeldavate sündmuste vahel või lühidalt nendevaheliseks omaajaks. Omaaeg on ilmselt invariantne suurus. Intervalliga S seob omaaja vahemikku $\tau_2 - \tau_1$ valem

$$(\tau_2 - \tau_1)^2 = -\frac{S^2}{c^2} = (t_2 - t_1)^2 - \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2}{c^2} \quad (2.70)$$

Tõepoolest, sündmuste samapaiksuse korral $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$ ning $\tau_2 - \tau_1 =$

$= t_2 - t_1$. Võttes ruutjuure, saame omaaja vahemiku jaoks järgmise valemi:

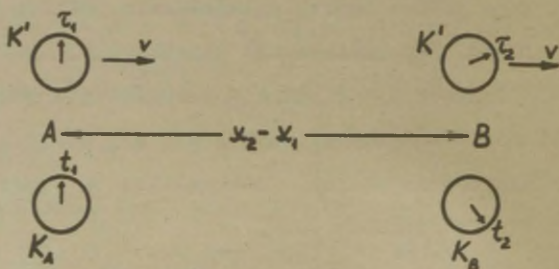
$$\tau_2 - \tau_1 = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{z}_2 - \vec{z}_1}{t_2 - t_1} \right)^2}.$$

Suurus $\frac{\vec{z}_2 - \vec{z}_1}{t_2 - t_1}$ on ilmselt kiirus, millega liigub antud inertsiaalsüsteemi suhtes see inertsiaalsüsteem, milles sündmused on samapaiksed. Tähistades seda lihtsalt \vec{v} , saame:

$$\tau_2 - \tau_1 = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2.71)$$

See valem on sisuliselt identne valemiga (2.66); erinevus on vaid tähistustes.

Omaaja erinevust teistes inertsiaalsüsteemides samade sündmuste vahel kehtivatest ajavahemikkudest võib piltlikult tõlgendada kui aja aeglustumist liikivas kehas. Vaatleme kaht sündmust, millevahelist ajavahemikku mõeldakse kahes inertsiaalsüsteemis kelladega, mis on nendes süsteemides liikumatud. Esimeses inertsiaalsüsteemis ei ole sündmused samapaiksed, vaid toimuvad punktides A ja B (joon. 18). Seal vajatakse kaht identset kella, mis



Joonis 18.

käivad sünkroonselt (sest nad mõlemad mõõdavad selle inert-
siasüsteemi aega). Kell K_A asub punktis A, kell K_B
punktis B. Teises inertsiaalsüsteemis on sündmused sama-
paiksed ja nende vahelist ajavahemikku mõõdab üksainus kell
 K' , mis on liikumatu selles süsteemis kohas, kus sündmused
toimuvad. Esimeses inertsiaalsüsteemis aga liigub see kell
inertsiaalselt nii, et punktis A on ta hetkel t_1 , mil
seal toimub 1. sündmus, ning punktis B on ta hetkel t_2 ,
mil seal toimub 2. sündmus. Lühidalt ütleme, et kell K' lii-
gub 1. sündmuse juurest 2. sündmuse juurde. Seega on selle
kella kiirus võrdne $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, kus $x_2 - x_1$ on punktide A
ja B vaheline kaugus. Et kella K' süsteemis sündmused on
samapaiksed, näitab ta oma aja vahemikku $\tau_2 - \tau_1$ nende vahel.
Kellad K_A ja K_B aga näitavad ajavahemikku $t_2 - t_1$ süstee-
mis, milles sündmused ei ole samapaiksed. Seega on valemi
(2.71) põhjal $\tau_2 - \tau_1 < t_2 - t_1$. Kui nüüd $t_1 = \tau_1$, s. o. kui kel-
lade K' ja K_A näidud nende kohtumisel on ühesugused, siis
on $\tau_2 < t_2$, s. o. kella K' näit on kohtumisel kellaga K_B
väiksem kui selle oma. Vaadates kella K' näituseid esimesest
inertsiaalsüsteemist jõuame tulemusele: liikuv kell käib
võrreldes samasuguse liikumatu kellaga aeglasemalt suhtes
 $1:\sqrt{1-\beta^2}$. Seejuures on oluline, et "kella" all võib mõelda
mistahes keha, milles toimub mingi protsess. Kui keha liigub,
siis see protsess aeglustub võrreldes samasuguse protsessi-
ga samasuguses liikumatus kehas. Asi seisneb selles, et
" kell " tähendab kõigis eespool toodud arutlustes lihtsalt
objektiivse aja ideaalset mõõtjat, n.-ö. objektiivse aja

kehastust, ja seepärast peavad kõik konkreetsed objektiivses ajas kulgevad protsessid toimuma kooskõlas selle ideaalse kella näitudega. Arusaadavalt aeglustub liikumisel ka reaalsete, konkreetse ehitusega kellamehhanismide käik, sest nad alluvad nagu kõik teisedki kehad objektiivsele aja-voolule. Kui mõni niisugune kell oma konstruktsiooni mitte-täiuslikkuse tõttu käib valesti, siis alluvad ka need vead samale seaduspärasusele. Seega ei ole kellade relativistlikul aeglustumisel midagi ühist nende konkreetse ehituse ise-ärasustega. Seetõttu ei ole ka õige, kuuldes k e l l a d e aeglustumisest, otsida muude kehade juures teistsugust käitumist. On mõttetu väita umbes nii: "Kellade jaoks kindlaks-tehtud seaduspärasused ei tarvitse kehtida keerukamate süs-teemide, näit. elusorganismide juures. Võib-olla alluvad elus-organismid hoopis teistsugustele seaduspärasustele". Need kahtlused on täiesti alusetud, sest ajaseadused on ühesugu-sed kõigile ajas eksisteerivatele kehadele. Relatiivsus-printsip ja sellest tulenevad järeldused ei jäta ruumi mit-te mingisugustele eranditele. Oletus, nagu võiks elusorganismide ajaline eksistents alluda, võrreldes elutute kehadega, teistsugustele seaduspärasustele, tähendaks loobumist rela-tiivsuspriintsiibist. Aga see oleks samaväärne siirdumisega relatiivsusteooria pinnalt Lorentzi teooria pinnale (vt. § 6). Niisugusel juhul tuleks esmajoones kaaluda, kas ei saaks ab-soluutse ruumi kindlakstegemiseks kasutada näiteks eriliselt aretatud ning väljaõpetatud koerte või delfiinide abi. Kui see tõesti võimalikuks osutub, siis on relatiivsusteooria

kehtetu ja protsesside kulg liikuvates kehaades ei allu ühtsetele seaduspärasustele. Meie seda siiski ei usu, jäädes relatiivsusteooria pinnale.

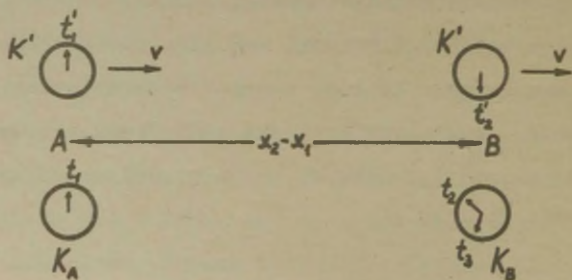
Aja aeglustumise efekti õigeaks mõistmiseks tuleb aga kindlasti silmas pidada, et kella liikumine, millest me siin räägime, ei ole mingil kombel absoluutne liikumine. Ta ei saa olla absoluutne, sest see oleks vastuolus relatiivsuspriintsiibiga. See on relatiivne liikumine, s. o. liikumine teise kella suhtes, mida loeme liikumatuks. Sama õigusega võiksime liikuvaks pidada seda teist kella; esimene kell oleks sel juhul liikumatu ning tema käik oleks nüüd võrreldes teise kella omaga kiirem. Niisiis, olenevalt inertsiiaalsüsteemi valikust, s. o. sellest, kumba kahest kellast loeme liikumatuks ja kumba liikuvaks, osutub aeglasemaks kord ühe, kord teise kella käik. See järeldub näib paradoksaalsena, sest kellade näitude vahetu võrdlemise teel (vt. joon. 18) võib, nagu näib, kindlaks teha, kumb kell käib aeglasemalt, inertsiiaalsüsteemi valikust sõltumatul viisil, s. o. absoluutses mõttes.

See ei ole siiski nii. Kui me eespool võrdlesime liikumatute kellade K_A ja K_B näituseid liikuva kella K' näitusega, siis on niisuguse võrdlemise tulemus küll sõltumatu inertsiiaalsüsteemi valikust, sest kellade K_A ja K_B juures olevad vaatlejad näevad kellade kohtumistel samasuguseid näituseid nagu kellaga K' kaasaliikuv vaatleja; kuid sellele vaatamata jõuab see viimati mainitud vaatleja, s. o. kella K' juures liikumatult seisev vaatleja omas süstee-

mis selle võrdlemise põhjal otsusele, et tema kell K' käib kiiremini kui tema suhtes liikuvad kellad K_A ja K_B .

Asi seisneb selles, et kellad K_A ja K_B on sünkroonsed ainult selles süsteemis, milles nad on liikumatud (I süsteemis), kuid II süsteemis, mille aega mõõdab selles süsteemis liikumatu kell K' , nad sünkroonsed ei ole. See tähendab, et nende ühesugused näidud ei ole samaaegsed. Teeme vastava arvutuse ja veendume, et tõesti II süsteemis liikumatu kell K' käib kiiremini kui samas süsteemis liikuvad kellad K_A ja K_B .

Asetsegu I süsteemis kellad K_A ja K_B punktides A ja B (vt. joon. 19), mille koordinaadid olgu x_1 ja x_2 . Kell



Joonis 19.

K' liikugu kiirusega v neist mööda, nii et hetkel t_1 on ta K_A juures ning hetkel t_2 K_B juures. Need kaks sündmust on II süsteemis samapaiksed; nende ühine ruumikoordinaat (kella K' asukoht) olgu $x_2' = x_1'$, nii et Lorentzi teisenduse põhjal

$$x_2 - vt_2 = x_1 - vt_1,$$

ning

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} . \quad (2.72)$$

Sündmuste ajakoordinaadid on aga II süsteemis t'_1 ja t'_2 , kusjuures

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \beta^2} . \quad (2.73)$$

See valem on muidugi sisuliselt identne valemiga (2.71); vahe on ainult selles, et seal on ajavahemik $t'_2 - t'_1$ tähistatud omaaja vahemikuna $\tau_2 - \tau_1$.

1. sündmuse hetkel, s. o. kellade K_A ja K' kohtumise hetkel näitab kell K_B I süsteemis sama aega t_1 nagu kell K_A ; kuid II süsteemis ei ole see kella K_B näit samaaegne kella K_A samasuguse näiduga. Kella K_B näit, mis II süsteemis on samaaegne kella K_A näiduga t_1 , peab erinevana t_1 -st. Olgu see t_3 . Seega tuleb meil lisaks eespool vaadeldud kahele sündmusele võtta vaatluse alla 3. sündmus, mis seisneb selles, et kell K_B näitab t_3 . Selle 3. sündmuse koordinaadid on I süsteemis $x_3 = x_2$, t_3 , aga II süsteemis on selle ajakoordinaat $t'_3 = t'_1$. Leiame t_3 , rakendades Lorentzi teisendust:

$$t'_3 = \frac{t_3 - \frac{v}{c^2} x_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} ,$$

kust

$$t_3 = t'_3 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{v}{c^2} x_3$$

ehk $t'_3 = t'_1$ ja $x_3 = x_2$ tõttu

$$t_3 = t'_1 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{v}{c^2} x_2 .$$

Et aga

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

siis

$$t_3 = t_1 + \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)$$

ehk, (2.72) põhjal,

$$t_3 = t_1 + \beta^2 (t_2 - t_1). \quad (2.74)$$

See valem näitab vahetult, et kella K_B näit, mis on II süsteemis samaaegne kella K_A näiduga t_1 , erineb sellest näidust, s. o. kellad K_A ja K_B ei ole II süsteemis sünkroonsed. Nüüd leiame ajavahemiku, mis möödub 3. ja 2. sündmuse vahel. See ajavahemik on I süsteemis $t_2 - t_3$ ning II süsteemis $t'_2 - t'_3 = t'_2 - t'_1$. Valem (2.74) annab:

$$t_2 - t_3 = (t_2 - t_1)(1 - \beta^2);$$

seega (2.73) põhjal

$$t_2 - t_3 = (t'_2 - t'_1)\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2.75)$$

See seos näitabki, et liikuv kell K_B käib aeglasemalt võrreldes liikumatu kellaga K' , sest kellal K_B möödub 3. ja 2. sündmuse vahel ajavahemik $t_2 - t_3$, mis on lühem kui kellal K' samade sündmuste vahel registreeritud ajavahemik $t'_2 - t'_1$.

Valem (2.75) on samasuguse kujuga nagu valem (2.73), mis on arusaadav, sest kella käigu suhteline aeglustumine ei või sõltuda sellest, kumba kella loeme liikumatuks. Samuti paneme tähele, et nagu $t'_2 - t'_1$ valemis (2.73) on

omaaja vahemik 1. ja 2. sündmuse vahel, nii on ka $t_2 - t_3$ valemis (2.75) omaaja vahemik 3. ja 2. sündmuse vahel, sest need sündmused on I süsteemis samapaiksed. Aga $t'_2 - t'_1$ valemis (2.75) ei ole omaaja vahemik, kuigi sama suurus valemis (2.73) seda on. Põhjus on see, et $t'_2 - t'_1$ tähendab valemis (2.75) õieti $t'_2 - t'_3$ ning ajakoordinaadid t'_2 ja t'_3 kuuluvad sündmustele, mis ei ole II süsteemis samapaiksed.

Joonisel 19 on piltlikult võetud $t_2 - t_1 = 10$ tundi, $\beta = 0,8$. Siis $t'_2 - t'_1 = 6$ tundi, $t_2 - t_3 = 3,6$ tundi ja $t_3 - t_1 = 6,4$ tundi.

Siirdume omaaja mõiste tähtsa üldistuse juurde. Eespool vaatlesime omaaja nimetuse all inertsiaalsüsteemi aega, milles kaks antud sündmust on samapaiksed. Seda omaaega näitab kell, mis liigub inertsiaalselt 1. sündmuse juurest 2. sündmuse juurde. Kuid kell võib liikuda ka mitteinertsiaalselt. 1. sündmuse toimumise hetkel asetseb kell seal, kus see sündmus toimub, ning 2. sündmuse toimumise hetkel seal, kus toimub see 2. sündmus. Mõlemad võivad toimuda kas ühes ja samas kohas või eri kohtades. Kell aga liigub vahepeal mingil meelevaldsel viisil. Millist ajavahemikku ta näitab nende sündmuste vahel? Nimetame seda mitteühtlaseks omaajaks. Vastavalt nimetame inertsiaalselt 1. sündmuse juurest 2. sündmuse juurde liikuva kella aega ühtlaseks omaajaks.

Tuletame mitteühtlase omaaja valemi. Olgu kahe sündmuse ajad mingis meelevaldselt valitud inertsiaalsüsteemis

t_1 , ja t_2 . Kell, mis näitab mitteühtlast omaaega, liigub nende sündmuste vahel kiirusega $\vec{v}(t)$. Lõpmata väikesel ajavahemiku dt vältel võime vaadelda kella liikumist ühtlasena. Omaaja vahemik $d\tau$, mis vastab ajavahemikule dt , s. o. mis möödub meie kellal, avaldub valemi (2.71) järgi nii:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - [\beta(t)]^2}. \quad (2.76)$$

Integreerides seda avaldist algusest t_1 , lõpuni t_2 , saamegi vaadeldavate sündmuste vahelise mitteühtlase omaaja vahemiku:

$$(\tau_2 - \tau_1)_{\text{mitteühtlane}} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - [\beta(t)]^2} dt. \quad (2.77)$$

Erijuhul, kui kella liikumine on ühtlane, on $\beta = \text{const.}$ ning integraal on võrdne $(t_2 - t_1) \sqrt{1 - \beta^2}$, nii et valem (2.77) taandub ühtlase omaaja valemiks (2.71).

Mitteühtlane omaaeg on invariant niisamuti kui ühtlane omaaeg. See tähendab, et valemi (2.77) paremal poolel seisva integraali väärtus ei sõltu sellest, missuguse inertsiaalsüsteemi aega me kasutame integreerimismuutujana. Nii võime näiteks arvutada seda integraali süsteemis, milles mõlemad sündmused on samapaiksed. Siis on integreerimismuutujaks ühtlane omaaeg ning valem (2.77) saab kuju:

$$(\tau_2 - \tau_1)_{\text{mitteühtlane}} = \int_{\tau_1, \text{ühtlane}}^{\tau_2, \text{ühtlane}} \sqrt{1 - [\beta(\tau)]^2} d\tau. \quad (2.78)$$

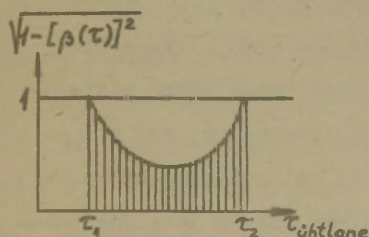
Siit aga tuleneb tähtis järeldus. Kui kell liigub mitteinertsiaalselt, siis peab tema kiirus olema nullist erinev vähe-
malt teatava osa aja vältel. Seega on integrand valemis
(2.78) üldiselt väiksem kui 1:

$$\sqrt{1 - [\beta(\tau)]^2} \leq 1.$$

Sellest järgneb, et integraali väärtus on väiksem kui rajade
vahe, s.o.

$$(\tau_2 - \tau_1)_{\text{mitteühtlane}} < (\tau_2 - \tau_1)_{\text{ühtlane}} \quad (2.79)$$

Seda võrratust illustreerib joon. 20, kus viirutatud pindala



Joonis 20.

kujutab integraali väärtust ning kõrgusega 1 ristküliku pindala τ_1 ja τ_2 vahel on võrdne vahega $\tau_2 - \tau_1$.

Võrratus (2.79) näitab, et mitteühtlase omaaja vahe-
mik mistahes kahe sündmuse
vahel on lühem kui ühtlase

omaja vahemik samade sündmuste vahel. Teisiti võib ütelda nii: kui kaks kella alustavad üheaegselt liikumist mingist punktist ja tulevad mõne aja möödumisel jälle üheaegselt min-
gisse teise punktisse ning kui seejuures üks neist liigub inertsiaalselt, teine aga mitteinertsiaalselt, siis näitab mitteinertsiaalselt liikunud kell väiksemat ajavahemikku nende kahe kohtumise vahel kui inertsiaalselt liikunud kell. Kui laseme samade sündmuste vahel liikuda mitut mitteinertsiaalset kella, siis on üldiselt kõikide nende näidud üksteisest erinevad.

Õeldu kehtib muidugi ka siis, kui liikumise lõpp-punkt langeb ühte alguspunktiga. Inertsiaalne kell on sel juhul kogu aeg selles punktis liikumatu.

Tuleb juhtida tähelepanu veel ühele asjaolule. Kui mitteinertsiaalse kella kiirus on absoluutväärtuselt kogu liikumise vältel konstantne, siis saavad valemid (2.77) ja (2.78) kuju:

$$(\tau_2 - \tau_1) \text{ mitteühtlane} = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2.80)$$

ja

$$(\tau_2 - \tau_1) \text{ mitteühtlane} = (\tau_2 - \tau_1) \text{ ühtlane} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2.81)$$

Valem (2.80) on väliselt samakujuline nagu ühtlase omaaja valem (2.71). Ent see ei tähenda, nagu oleks mitteühtlane omaaeg sel juhul võrdne ühtlasega. Et see nii ei ole, näitab vahetult valem (2.81). Asi seisneb selles, et β ei ole valemis (2.71) ja (2.80) ühe ja sama väärtusega. Ühel juhul liigub sündmuse ühendav kell sirgjooneliselt, teisel juhul aga kõverat joont mööda (olgu absoluutväärtuselt konstantse kiirusega). Mõlema sündmuse kohade vaheline kaugus on aga ikka seesama. Seepärast peab β olema valemis (2.80) suurema väärtusega kui valemis (2.71) ja mitteühtlane omaaeg on ühtlasest lühem.

Peatume veel lähemalt mitteühtlase omaaja mõiste põhjendamisel tehtud eelduse juures. Meie eeldasime, et mitteühtlase liikumise puhul võib vaadelda seda liikumist lõpmata väikese ajavahemiku vältel ühtlasena. Võidakse küsida, kas see eeldus on korrektne.

Mõnikord väidetakse, et ei ole. Mitteinertsiaalsel liikumisel erineb kiirendus nullist. Järelikult on mõeldav, et omaaja vahemik $d\bar{t}$ oleneb sel juhul kiirendusest, kusjuures olenevuse kuju on selline, et kiirenduse nullväärtuse korral kehtib valem $d\bar{t} = dt\sqrt{1-\beta^2}$. Üldjuhul aga peab see valem olema teistsugune, sest ta peab sisaldama kiirendust.

Küsimus ei seisne muidugi mitte kiirenduse mõjust mingisugusele konkreetsele kellamehhanismile või teatavale protsessile, vaid kõne all on kiirenduse mõju kõikide protsesside kulgemises avalduvale objektiivse aja voolamisele. Meie senine käsitus põhjeneb eitaval vastusel sellele küsimusele. Mõeldav on küll ka jaatav seisukoht, kuid selle vastu võib tuua järgmised vastuväited:

1) Oletus, et omaaja vahemik oleneb kiirendusest (ja võib-olla isegi kõrgemat järku tuletistest kiirusest aja järgi), ei toetu mitte mingisugustele teoreetilistele kaalutlustele. Relatiivsusteooria põhipostulaatidest seda tuletada ei saa. See väljendab ainult meelevaldselt mõeldavat võimalust, ilma et selle kasuks võiks tuua teisi kaalutlusi peale selle palja võimalikkuse.

2) Eksperimentaalselt võib mitteühtlase omaaja valemit (2.77) või (2.78) lugeda küllalt hästi põhjendatuks. Elementaarosakeste füüsikast on teada, et kiiresti liikuvate ebastabiilsete osakeste eluiga on seda pikem, mida suurema kiirusega nad liiguvad, kooskõlas nimetatud valemitega. Seega ei näita eksperiment mingit mõju, mida võiks panna kiirenduse arvele.

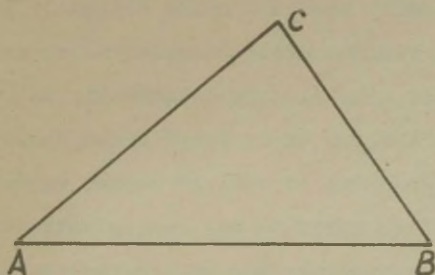
Seega võib täie õigusega pidada mitteühtlase omaaja mõistet põhjendatuks valemiga (2.77).

Vaatleme lõpuks niinimetatud kaksikute paradoksi. Selle aluseks on valem (2.79). Kujutleme kaht kaksikut, kellest üks jääb Maale paigale, teine aga sooritab pika kosmilise reisi ja jõuab mõne aja pärast tagasi Maale. Tema omaaeg on väiksem paigalejäänud kaksikvenna omaajast, seega on ta tagasi jõudnuna vennast noorem. Paradoks ei seisne mitte selles faktis, sest, nagu eespool nägime, toimuvad kõik bioloogilised protsessid (vananemine jne.) omaajas täpselt nii nagu kõik teisedki protsessid. Paradoks on mujal, ning kaksikud kui elusolendid esinevad siin vaid piltliku traditsioonina. Kaksikute asemel võib rääkida lihtsalt "kelladest" (sageli nimetatakse paradoksi ka kellaparadoksiks). Paradoks tekib siis, kui mitteinertsiaalne kell saab algul väga lühikese aja vältel suure kiiruse, liigub siis ühtlaselt teatud kaugusele, peatub seejärel jälle peaaegu hetkeliselt, liigub tagasi ühtlaselt ja peatub uuesti algpunktis. Sel juhul kehtib valem (2.79) ikkagi, kuid see näib paradoksaalsena, sest kell liikus peaaegu kogu aja vältel inertsiaalselt. Seega tundub, nagu oleks see kell samaväärne paigalejäänud kellaga. Siis võiks liikuvana vaadelda just seda, ja teist liikumatuna. Aga siis peaksid nende näidud uuesti kohtumisel olema just vastupidises vahekorras.

Paradoks on siiski vaid näiline. Olgugi et kella liikumine on peaaegu kogu aja vältel inertsiaalne, ei ole ta siiski paigalejäänud kellaga samaväärses olukorras, sest ta ei

ole kogu aeg mitte ühes-ainsas inertsiaalsüsteemis liikumatu, vaid kahes erinevas inertsiaalsüsteemis. Paigalejäänud kell on aga ühes ja samas inertsiaalsüsteemis kogu aeg liikumatu. Seega on inertsiaalne ikkagi ainult see kell, teine aga mitte.

Kolmemõõtmelise analoogina võiksime esitada järgmise "paradoksi": kuidas on võimalik, et kolmnurgas ABC (joon. 21) on külg AB lühem kui külgede AC ja CB summa,



Joonis 21.

olgu et need küljed on kogu ulatuses (peale lõpmata väikese piirkonna tipu C ümbruses) niisama sirged nagu AB? Kes siin mingit paradoksi ei näe, selle jaoks ei ole ka kellade relativistlikus käitumises midagi paradoksaalset.

Ü l e s a n d e d .

1. Laetud ebastabiilne osake liigub homogeeneses magnetväljas H konstantse kiirusega v ringjoont mööda, mille raadius on

$$R = \frac{c \epsilon_0 m_0 v}{e H \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

kus e on osakese laeng ja m_0 on seisumass. Näidata, et tõenäosus selle osakese lagunemiseks ühe tiiru vältel ei sõltu tema kiirusest.

L a h e n d u s . Üheks tiiruks kuluv aeg on $\frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\epsilon_0 m_0 c}{eH\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Vastav osakese mitteühtlane omaaeg on valemi (2.81) põhjal võrdne $\frac{2\pi\epsilon_0 m_0 c}{eH}$. Et see ei sõltu kiirusest, siis on ka selle ajaga osakese lagunemise tõenäosus kiirusest sõltumatu.

2. Ratas veereb tasandit mööda ühtlaselt ja libisemata maksimaalse kiirusega, mida võimaldab nõue, et ratta ühegi punkti kiirus ei tohi ületada valguse kiirust. Ratta raadius on a , nurkkiirus ω . Seega kulub üheks tiiruks aega $2\pi/\omega$. Mitu korda vähem sellest näitab ratta piirdele kinnitatud kell? Mitu korda on see omaaeg väiksem kui ühe tiiru tegemiseks tarvisminev aeg selles inertsiaalsüsteemis, kus kell pöörduv tagasi algasendisse? Mis on kella trajektoori viimati nimetatud süsteemis?

L a h e n d u s . Kella trajektoori esimeses süsteemis (kus ratas veereb) on tsükloid, mille võrrandid on teatavasti järgmise kujuga:

$$x = a\omega t - a \sin \omega t,$$

$$y = a - a \cos \omega t$$

(veeremistasandiks on xz -tasand). Siit saame kella kiiruse komponendid:

$$\frac{dx}{dt} = a\omega(1 - \cos \omega t),$$

$$\frac{dy}{dt} = a\omega \sin \omega t$$

ja edasi

$$\frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \frac{4a^2 \omega^2}{c^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \leq 1.$$

Seega

$$a\omega = \frac{c}{2}$$

ja otsitav omaaeg on

$$\tau = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left| \cos \frac{\omega t}{2} \right| dt = \frac{4}{\omega}.$$

See on $\frac{\pi}{2}$ korda väiksem ühe tiiru ajast $\frac{2\pi}{\omega}$.

Teine inertsiaalsüsteem, milles kell pöörduv pärast üht tiiru tagasi algasendisse, liigub esimese suhtes kiirusega $a\omega = \frac{c}{2}$, sest ajaga $\frac{2\pi}{\omega}$ ta peab liikuma kaugusele $2\pi a$. Et selles süsteemis on tiiru algus ja lõpp samapaiksed sündmused, siis on ajavahemik nende vahel võrdne

$$\frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{\omega}.$$

Omaaeg $\frac{4}{\omega}$ on sellest $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ korda lühem.

Trajektoori kuju leidmiseks teises süsteemis leiame kella koordinaadid Lorentzi teisenduse põhjal:

$$x' = \frac{x - a\omega t}{\sqrt{3}/2} = -\frac{a\sin\omega t}{\sqrt{3}/2},$$

$$y' = y = a - a\cos\omega t.$$

Siit on näha, et trajektooriks on ellips pooltelgedega $2a/\sqrt{3}$ ja a .

3. Näidata otseselt, kasutades kiiruste liitmise valemit (2.43), et integraal

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - [\beta(t)]^2} dt$$

valemis (2.77) on invariantne Lorentzi teisenduste suhtes.

L a h e n d u s . Valemis (2.77) tähendab $\beta(t)$ mitteühtlaselt liikuva keha kiirust mingis inertsiaalsüsteemis. Teises inertsiaalsüsteemis, mis liigub esimese suhtes x -telje suunas kiirusega u , olgu selle keha kiirus $\beta'(t')$. Siis on valemi (2.43) põhjal

$$\sqrt{1 - [\beta(t)]^2} = \frac{\sqrt{1 - [\beta'(t')]^2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{\beta'_x u}{c}}$$

(seal tuleb asendada $\beta'' \rightarrow \beta$ ja $\beta \rightarrow \frac{u}{c}$). Integraalis (2.77) tuleb teha muutuja vahetus $t \rightarrow t'$. Lorentzi teisendus annab:

$$t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

kust saame

$$dt = \frac{dt' + \frac{u dx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{\beta'_x u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} dt'$$

Tehes need asendused integraalis (2.77), leiamegi:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - [\beta(t)]^2} dt = \int_{t'_1}^{t'_2} \sqrt{1 - [\beta'(t')]^2} dt',$$

mida oligi tarvis näidata.

Teeme lõpuks järgmise märkuse. Kiiruse liitmise valemis (2.40) või (2.43), mida me kasutasime, on liidetavad

kiirused ja liitkiirus mõeldud konstantsena. Käesolevas ülesandes aga β ega β' konstantsed ei ole. Sellele vaatamata on meil õigus rakendada valemit (2.40), sest kiiruste konstantsus ei ole seal põhimõttelise tähtsusega. See valem on tuletatud Lorentzi teisenduste järjestikuse rakendamise teel ja on kehtiv ühesugusel kujul sõltumatult kiiruste väärtustest. Järelikult jääb valem jõusse ka siis, kui kiirused muutuvad. Teiste sõnadega: need inertsiaalsüsteemid, millega me seal opereerime, võivad olla mitteinertsiaalse keha hetkelise paigaloleku inertsiaalsüsteemideks. Hiljem, § -s 12 tuletame kiiruste liitmise valemid teisel viisil uuesti, kusjuures juba algusest peale võib üht liidetavat kiirust lugeda täiesti meelevaldseks.

4. Masspunkt liigub mingis inertsiaalsüsteemis ühtlaselt ringjoont mööda $x = -a \sin \omega t$, $y = a(1 - \cos \omega t)$. Leida selle masspunkti liikumisvõrrandid teises inertsiaalsüsteemis, mis liigub esimese suhtes x -telje negatiivses suunas kiirusega $v = \beta c = a\omega$. Omaaja arvutamise teel selles süsteemis veenduda otseselt omaaja invariantisuses.

L a h e n d u s . Tähistades koordinaadid ja aja teises süsteemis x' , y' , t' , saame:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x + a\omega t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' &= y, \\ \omega t' &= \frac{\omega t + \frac{\beta^2 x}{a}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

Asendades siin $x = -a \sin \omega t$ ja $y = a(1 - \cos \omega t)$ ja tähistades $\omega t = \varphi$, leiame:

$$x' = \frac{a(\varphi - \sin \varphi)}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$y' = a(1 - \cos \varphi)$$

$$\omega t' = \frac{\varphi - \beta^2 \sin \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Need seosed ongi masspunkti liikumisvõrrandid parameetrilises kujus (parameetrik on φ).

Nüüd arvutame omaaja ühe tiiru kohta. See on:

$$\tau = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx'}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'} \right)^2 \right]} \cdot \frac{(1 - \beta^2 \cos \varphi) d\varphi}{\omega \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Siin on (2.82) põhjal

$$\frac{1}{c} \frac{dx'}{dt'} = \frac{\beta(1 - \cos \varphi)}{1 - \beta^2 \cos \varphi},$$

$$\frac{1}{c} \frac{dy'}{dt'} = \frac{\beta \sin \varphi \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2 \cos \varphi}.$$

Asetades need avaldised eelmisesse valemisse, saame:

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\omega} d\varphi = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{1 - \beta^2},$$

kus $\frac{2\pi}{\omega}$ on ühe tiiru aeg esimeses süsteemis. Et

$v = \beta c = a\omega$, s. o. kiirus v võrdub masspunkti tiirlemise

konstantse kiirusega esimeses süsteemis, siis avaldub ka

esimeses süsteemis omaaeg korrutisena $\frac{2\pi}{\omega} \sqrt{1 - \beta^2}$;

siit ongi vahetult näha omaaja invariantisus. See omaaeg

on mitteühtlane; vastav ühtlane omaaeg on aga võrdne ühe

tiiru ajaga $\frac{2\pi}{\omega}$ esimeses süsteemis, sest seal on tiiru

algus ja lõpp samapaiksed sündmused. Teises süsteemis on tiiru alguse koordinaadid (2.82) põhjal $x'=0$, $t'=0$ ja lõpu koordinaadid

$$x' = \frac{2\pi a}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t' = \frac{2\pi/\omega}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Siit võime samuti arvutada ühtlase omaaja:

$$\sqrt{t'^2 - \frac{x'^2}{c^2}} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{a^2\omega^2}{c^2(1-\beta^2)}} = \frac{2\pi}{\omega},$$

nagu olema peabki.

5. Kell A on inertsiaalsüsteemis K_A liikumatu. Kell B, liikudes A suhtes konstantse kiirusega v x-telje positiivses suunas, möödub temast hetkel, mil A näitab aja algust 0. B osuti seatakse möödumise hetkel samuti näidule 0. Kell C, liikudes A suhtes konstantse kiirusega v x-telje negatiivses suunas, möödub kellast B hetkel, mil see näitab aega t (kusjuures $t > 0$). C osuti seatakse möödumise hetkel samuti näidule t . Näidata, et C möödumisel A-st on C näiduks $2t$ ja A näiduks $\frac{2t}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

L a h e n d u s . Käesolev ülesanne käsitleb kaksikute paradoksi modifitseeritud kujul. Selle asemel, et lasta kellal liikuda mitteinertsiaalselt - esmalt teatava kiirusega ühes suunas ja siis vastassuunalise kiirusega tagasi, vaatleme kaht inertsiaalselt liikuvat kella,

mille näidud nende kohtumisel peavad olema ühesugused. Tulemus peab olema seega sama nagu juhul, kui kell B oleks hetkel t järsku muutnud oma kiiruse vastassuunaliseks. Seda ongi nüüd vaja üksikasjalikult näidata. Niisuguse kaksikute paradoksi modifitseeritud käsitlese eeliseks on see, et siin me vaatleme ainult inertsi- aalseid liikumisi. Seega realiseerub ilmsel kujul käesoleva paragrahvi põhitekstis toodud väide, et kella käik oleneb ainult kiirusest, mitte aga kiirendusest ega muudest suurustest.

Asume nõutava tõestuse juurde. Et kella C näit hetkel, mil ta jõuab A juurde, on $2t$, järgneb sellest, et see kell liigub sama kiirusega ja käib ära sama vahemaa, nagu tegi varem kell B. Et aga viimasel kulus selleks aega t , siis ka C vajab samapalju. Edasi, süsteemis K_A , milles A on liikumatu, on kella B ja C kohtumise ajaks $t/\sqrt{1-\beta^2}$; see järgneb vahetult ühtlase omaaja valemist (2.71), sest t on A ja B kohtumise ja B ja C kohtumise vaheline omaaeg; seda aega näitab ju kell B, mis on liikumatu süsteemis K_B , kus need kohtumised on samapaiksed. Niisamuti on B ja C kohtumine ja A ja C kohtumine samapaiksed sündmused kella C süsteemis K_C ; seega aeg t , mida kell C nende sündmuste vahel näitab, on ka nendevaheliseks omaajaks. See aga tähendab sama valemi (2.71) põhjal, et kella A süsteemis möödub nende sündmuste vahel aeg $t/\sqrt{1-\beta^2}$. Siit järgnebki, et kohtudes

kellaga C on A näiduks $2t/\sqrt{1-\beta^2}$.

Täiendavalt veendume, et see tulemus, mis tähendab kellade B ja C käigu aeglustumist võrreldes kella A käiguga, on tõlgendatav ka kella A käigu aeglustumisena võrreldes B või C-ga ning ka B käigu aeglustumisena võrreldes C käiguga või vastupidi. Kõik oleneb sellest, millist kella loeme liikumatuks.

Olgu näiteks B liikumatu. Siis on liikumiste pilt niisugune. Esmalt, nullhetkel, möödub kellast B kiirusega v kell A, mille näit on samuti 0. Hetkel t möödub B-st samas suunas C, mille kiirus on kiiruste liitmise valemi (2.29) järgi võrdne $\frac{2v}{1+\beta^2}$. Millal jõuab C A-le järele? Et hetkel t asub A B-st kaugusel vt ja et iga sekundiga väheneb see kaugus $\frac{2v}{1+\beta^2} - v = \frac{v(1-\beta^2)}{1+\beta^2}$ võrra, siis jõuab C A-le järele pärast oma kohtumist B-ga hetkel

$$t + \frac{(1+\beta^2)t}{1-\beta^2} = \frac{2t}{1-\beta^2}.$$

See on kella B näit hetkel, mil C kohtub A-ga. Aga A enda näit sel hetkel on, nagu eespool nägime, võrdne

$$\frac{2t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2t}{1-\beta^2} \sqrt{1-\beta^2},$$

s. o. ta on kella B näidust väiksem. Seega tõesti käib A võrreldes B-ga aeglasemalt.

Niisamuti veendume, et ka C käib B-ga võrreldes aeglasemalt. Kellal B möödub B ja C kohtumise ja A ja C kohtumise vahel ajavahemik $\frac{2t}{1-\beta^2} - t = \frac{(1+\beta^2)t}{1-\beta^2}$. Aga kellal C, mis on liikumatu süsteemis, kus need koh-

tumised on samapaiksed, möödub nende vahel väiksem ajavahemik $2t - t = t$. Seejuures, kooskõlas ühtlase omaaja valemiga,

$$t = \frac{(1+\beta^2)t}{1-\beta^2} \sqrt{1 - \left(\frac{2\beta}{1+\beta^2}\right)^2}.$$

Nüüd olgu C liikumatu. Liikumise pilt on siis järgmine. A ja B liiguvad C suhtes mõlemad samas suunas; A kiirusega v ja B kiirusega $\frac{2v}{1+\beta^2}$. Leiame esmalt, millisel hetkel (kella C süsteemis) olid A ja B koos. Et B jõudis C juurde hetkel t ja A hetkel $2t$, siis pidi A olema B-st kaugusel vt hetkel, mil B oli C-ga koos. Et aga kaugus A ja B vahel kasvab iga sekundiga $\frac{2v}{1+\beta^2} - v = \frac{v(1-\beta^2)}{1+\beta^2}$ võrra, siis kasvab nende esialgne kaugus 0 väärtuseni vt ajaga $\frac{(1+\beta^2)t}{1-\beta^2}$. Siit järgneb, et A ja B olid koos hetkel $t - \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}t = -\frac{2\beta^2 t}{1-\beta^2}$. Nüüd on ajavahemik A ja B kohtumise ja B ja C kohtumise vahel võrdne $t + \frac{2\beta^2 t}{1-\beta^2} = \frac{(1+\beta^2)t}{1-\beta^2}$; aga kellal B möödub nende kohtumiste vahel aeg t . Seega käib B C-ga võrreldes aeglasemalt, kooskõlas ühtlase omaaja valemiga, sest

$$t = \frac{(1+\beta^2)t}{1-\beta^2} \sqrt{1 - \left(\frac{2\beta}{1+\beta^2}\right)^2}.$$

Niisamuti käib A aeglasemalt kui C, sest A ja B kohtumise ja A ja C kohtumise vahel möödub kellal C ajavahemik $2t + \frac{2\beta^2 t}{1-\beta^2} = \frac{2t}{1-\beta^2}$, kuna kellal A möödub $\frac{2t}{\sqrt{1-\beta^2}}$, ning $\frac{2t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2t}{1-\beta^2} \sqrt{1-\beta^2}$.

6. Eelmises ülesandes on tegemist kolme inertsiaal-süsteemiga, K_A , K_B ja K_C , milles vastavalt kellad

A, B ja C on liikumatud, ja kolme sündmusega (A ja B kohtumine, B ja C kohtumine, A ja C kohtumine). Võttes esimese sündmuse koordinaadiks $x = 0$, leida kõigi kolme sündmuse ruumi- ja ajakoordinaadid kõigis kolmes inertsiaalsüsteemis.

L a h e n d u s . Kirjutame sündmuste koordinaadid alumiste indeksitega vastavalt AB, BC, AC, mis näitab, millise sündmusega on tegemist, ning ülemise indeksiga A, B või C, mis märgib inertsiaalsüsteemi. Siis võime lähteandmed kirja panna järgmiselt:

$$x_{AB}^A = 0,$$

$$t_{AB}^A = 0.$$

Et sündmus BC toimus kella A järgi hetkel $\frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}$, ja B liikus kiirusega v , siis

$$x_{BC}^A = \frac{vt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t_{BC}^A = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Kolmandaks,

$$x_{AC}^A = 0,$$

$$t_{AC}^A = \frac{2t}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Teistes inertsiaalsüsteemides leiame otsitavad koordinaadid otseselt Lorentzi teisenduste rakendamise teel. Tulemused on järgmised:

$$x_{AB}^B = 0,$$

$$t_{AB}^B = 0,$$

$$x_{BC}^B = 0,$$

$$t_{BC}^B = t,$$

$$x_{AC}^B = -\frac{2vt}{1-\beta^2},$$

$$t_{AC}^B = \frac{2t}{1-\beta^2}$$

ja

$$x_{AB}^C = 0,$$

$$t_{AB}^C = 0,$$

$$x_{BC}^C = \frac{2vt}{1-\beta^2},$$

$$t_{BC}^C = \frac{(1+\beta^2)t}{1-\beta^2},$$

$$x_{AC}^C = \frac{2vt}{1-\beta^2},$$

$$t_{AC}^C = \frac{2t}{1-\beta^2}.$$

Osa niiviisi arvutatud väärtusi on teada juba eelmise ülesande andmete hulgas või lahenduskäigust. Ainult ajakoordinaadid süsteemis K_C on siin erinevad (eelmise ülesande lahenduse lõpuosas leidsime nende jaoks väärtused $-\frac{2\beta^2 t}{1-\beta^2}$, t ja $2t$). See erinevus aga ei ole oluline, sest ta on tingitud ainult aja alghetke erinevast valikust süsteemis K_C . Varem me valisime alghetke nii, et $t_{BC}^C = t$. Lorentzi teisendusvalemite rakendamine tavalises vormis eeldab aga teistsugust valikut: $t_{AB}^C = 0$. Mõlema alghetke vahe on ilmselt $-\frac{2\beta^2 t}{1-\beta^2}$.

Lõpuks esitame ajavahemike $t_{BC} - t_{AB}$, $t_{AC} - t_{BC}$ ja $t_{AC} - t_{AB}$ väärtuste ülevaatliku tabeli kolmes inertsiaalsüsteemis:

Inert- siaalsüsteem \ Ajavahe- mik	$t_{BC} - t_{AB}$	$t_{AC} - t_{BC}$	$t_{AC} - t_{AB}$
K_A	$\frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{2t}{\sqrt{1-\beta^2}}$
K_B	t	$\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \cdot t$	$\frac{2t}{1-\beta^2}$
K_C	$\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \cdot t$	t	$\frac{2t}{1-\beta^2}$

§ 10. Liikuva keha pikkus.

Kahes eelmises paragrahvis me nägime, et kui kahe sündmuse vaheline intervall on ajasarnane, siis ajavahe-
mik nende vahel on minimaalne selles inertsiaalsüsteemis, milles sünd-
mused on samapaiksed. See on omaaeg. Sedasama võib väljenda-
da ka teisiti: liikuv kell käib aeglasemalt võrreldes sama-
suguse liikumatu kellaga.

Pikkuste puhul kehtib analoogiline relatiivsus. Seejuu-
res aga tuleb eristada kaht efekti. Üks on see, mille sõnas-
tasime juba §-s 8 1. ülesandes: kui kahe sündmuse vaheline
intervall on ruumisarnane, siis on ruumiline kaugus nende va-
hel minimaalne selles inertsiaalsüsteemis, milles sündmused
on samaaegsed. Käesolevas paragrahvis vaatleme teist efekti,

milles samuti avaldub pikkuste relatiivsus. See on kehade mõõtmete olenevus nende liikumisest. Et liikumine mõjutab ainult liikumisesihilisi mõõtmeid, vaatleme alljärgnevalt eelkõige vardakujulisi kehi, mis liiguvad enda sihis, ja kõneleme nende pikkuse muutumisest olenevalt liikumise kiirusest.

Kui keha (varras) on liikumatu, siis on tema kõigi punktide ruumikoordinaadid ajas konstantsed. Pikkuseks on otspunktidevaheline kaugus, mis võrdub nende koordinaatide vahega (kui võtta koordinaattelg vardaga paralleelseks). Liikumatu varda pikkust nimetatakse tema seisupikkuseks ehk omapikkuseks. Seisupikkus ei sõltu relatiivsusprintsibi põhjal sellest, millises nimelt inertsiaalsüsteemis on varras liikumatu. Niisamuti, kui kaks ühesugust varrast teineteise suhtes liiguvad, aga kumbki on omas inertsiaalsüsteemis liikumatu, siis on nende seisupikkused võrdsed.

Kuid kahe teineteise suhtes liikuva ühesuguse varda pikkuste võrdlemine ühes ja samas inertsiaalsüsteemis, nimelt selles, milles üks neist on liikumatu, annab teistsuguse tulemuse. Liikuva varda pikkus on väiksem kui liikumatu oma. Seejuures on liikuva varda pikkuse all mõeldud tema mõlema otsa samaaegsete asendite vahelist kaugust. See on ainuvõimalik, loomulik ja mõistlik definitsioon. Täpsemalt öeldes, seda definitsiooni võib esitada ka teistsuguses vormis (vt. paragrahvi lõpus ülesanne 1), kuid sisuliselt jääb ta ikkagi ainumõeldavaks.

Tuletame lühendamise valemi. Kui varras on liikumatu

ja tema otste koordinaadid on x_1 , x_2 , siis avaldub tema seisupikkus l_0 nii:

$$l_0 = x_2 - x_1. \quad (2.83)$$

Mingis teises inertsiaalsüsteemis, mis liigub eelmise suhtes varda sihis kiirusega v , liigub ka varras sama kiirusega. Mingil hetkel t' selles süsteemis fikseeritud otspunktide koordinaadid olgu x'_1 , x'_2 ; siis

$$l = x'_2 - x'_1 \quad (2.84)$$

on liikuva varda pikkus.

Et

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ning $t'_2 = t'_1$, siis

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Siit

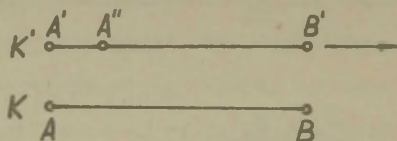
$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (2.85)$$

See ongi lühenemise valem. Seda efekti nimetatakse sageli pikkuste kontraktsiooniks (kokkutõmbumiseks).

Kontraktsioonivalemi (2.85) tuletamisel me vaatlesime ühtainust varrast kahe inertsiaalsüsteemi taustal. Samasuguse tulemuse annab vormilt veidi teistsugune käsitus, kus ühe varda asemel on vaatluse all kaks ühesugust teineteise suhtes liikuvat varrast. Märkimisväärne on sel korral eriti see, et nende pikkuste võrdlemisel osutub ikka

liikuv varras lühemaks, sõltumata sellest, millist varrast loeme liikumatuks, s. o. millises inertsiaalsüsteemis võrdlemine toimub. Loomulikult peabki see nii olema relatiivsprintsibi järgi; tulemuste erinevus olenevalt inertsiaalsüsteemi valikust on vaid näilisel vastuoluline. Loogilist vastuolu siin igatahes ei ole, sest võrdlemine toimub eri süsteemides. Et aga võrdlemise tulemused on erinevad, eelles väljendub vaid pikkuse relatiivne iseloom.

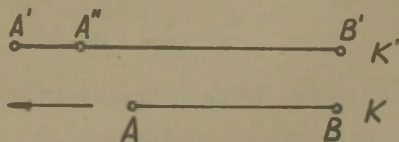
Et võimalikult selgemini esile tuua kahe teineteise suhtes liikuva varda pikkuste relatiivsust, taandame seda samaaegsuse relatiivsusele. Olgu (joon. 22) AB süsteemis



Joonis 22.

K liikumatu varras ja $A'B'$ mingi teine varras, mis liigub AB suhtes. Oletame, et liikuva varda otsad A' , B' asetsevad teataval hetkel samaaegselt kohakuti liikumatu varda otstega A , B . Seega on vardad süsteemis K ühepikkused. Kuid samaaegsuse relatiivsuse tõttu ei ole otste AA' ja BB' ühtelangemised süsteemis K' , kus teine varras on liikumatu, enam samaaegsed sündmused. Sündmus BB' toimub seal varem kui sündmus AA' . Seega näeb varraste vastastikune asetus süsteemis K' hetkel, mil otsad B ja B' on kohakuti, välja nii, nagu näeme joo-

nisel 23, s. o. liikuv varras AB on seal lühem kui $A'B'$. On aga ilmselt võimalik lühendada varrast $A'B'$ just nii palju ($A'A''$ võrra), et saades lühemaks vardast AB süsteemis K , jääks ta sellest süsteemis K' siiski pikemaks.



Joonis 23.

On võimalik seda lühendamist ka niiviisi teostada, et liikuva varda pikkuse suhe liikumatu varda pikkusesse oleks mõlemas süsteemis ühesugune. Sel korral on vardad ilmselt seisupikkuse mõttes ühepikkused, sest suhtelise kiiruse vähenedes jääb liikuv varras liikumatust ikka lühemaks, mistõttu piiril, kui kiirus saab nulliks, peavad nad saada täpselt ühepikkuseks.

Ü l e s a n d e d .

1. Liikuva varda pikkust võib defineerida ka teisiti, kui seda on tehtud käesoleva paragrahvi põhitekstis. Lastes vardal mööduda liikumatust kellast, fikseerime otste möödumise hetked t_1 ja t_2 . Siis on pikkuseks

$$l = v(t_2 - t_1), \quad (2.86)$$

kus v on varda kiirus. Näidata, et sel viisil defineeritud pikkus on identne varem defineerituga.

L a h e n d u s . Ajavahemik $t_2 - t_1$, on kahe sündmuse - varda otste möödumiste - vaheline omaaja vahemik süsteemis, milles varras liigub kiirusega v . Varda paigaloleku süsteemis on samade sündmuste vaheline ajavahemik seega võrdne

$$\frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Et aga kell liigub varda paigaloleku süsteemis sama kiirusega v , siis kaugus, mille ta selle ajaga ära käib, s.o. varda omapikkus on võrdne

$$l_0 = \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Võrreldes seda valemit valemiga (2.86) saame:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

mida oligi vaja näidata.

2. Kui suur on liikuva varda pikkus juhul, kui tema kiirus moodustab temaga nurga φ ?

L a h e n d u s . Võtame tasandi, milles asetseb nurk φ , xy-tasandiks. Kiirus olgu x-telje suunaline, varda otste koordinaadid tema paigaloleku süsteemis olgu (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) . Siis

$$\tan \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2.87)$$

Teises inertsiaalsüsteemis, mis liigub paigaloleku süsteemi suhtes kiirusega v x-telje suunas (milles varras ise liigub sama kiirusega vastupidises suunas), on varda otste koordinaadid (x'_1, y'_1) ja (x'_2, y'_2) . Lorentzi teisenduste põhjal

$$x_2 = \frac{x_2' + vt_2'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$y_2 = y_2'$$

ja

$$x_1 = \frac{x_1' + vt_1'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$y_1 = y_1'.$$

Võttes $t_2' = t_1'$, s. o. fikseerides liikuva varda otste samaaegsed asendid, leiame:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y_2 - y_1 &= y_2' - y_1'. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Siit on liikuva varda pikkus võrdne

$$l = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2(1-\beta^2) + (y_2 - y_1)^2}.$$

Et liikumatu varda pikkus on

$$l_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

nii et (2.87) põhjal

$$x_2 - x_1 = l_0 \cos \varphi,$$

$$y_2 - y_1 = l_0 \sin \varphi,$$

siis

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi}. \quad (2.89)$$

Selles lahenduskäigus oli meil eelduseks, et φ on nurk varda ja tema liikumise suuna vahel süsteemis, kus varras on liikumatu. Süsteemis, milles varras liigub, on see

nurk teisitsugune. Tähistades seda φ' , leiame:

$$\tan\varphi' = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} \quad (2.90)$$

Siit järgneb:

$$\begin{aligned} l_0 &= \sqrt{\frac{(x_2' - x_1')^2}{1 - \beta^2} + (y_2' - y_1')^2} = \\ &= l \sqrt{\frac{\cos^2\varphi'}{1 - \beta^2} + \sin^2\varphi'} = \frac{l\sqrt{1 - \beta^2\sin^2\varphi'}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

ehk

$$l = \frac{l_0\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2\sin^2\varphi'}} \quad (2.91)$$

Võrreldee seda valemit valemiga (2.87) leiame seose φ' ja φ vahel:

$$\tan\varphi' = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.92)$$

mis järeldub otseselt ka valemitest (2.87), (2.88) ja (2.90).

3. Keha, mille ruumala paigalolekuks on V_0 , liigub translatoorselt kiirusega $v = \beta c$. Kui suur on tema ruumala liikumises?

L a h e n d u s . Liikuva keha ruumala on määratud tema kõigi punktide samaaegsete asenditega. Jaotame keha liikumise sihis peenteks varrasteks, ristlõike pindalaga dS ja eesisupikkusega l_0 . Siis $V_0 = \int l_0 dS$. Et liikumisel on varraete pikkuseks $l = l_0\sqrt{1 - \beta^2}$, ristlõike pindala aga ei muutu (see järgneb valemitest (2.89) või (2.91), siis võrdub liikuva keha ruumala

ehk

$$V = \int l dS = \sqrt{1-\beta^2} \int l_0 dS$$

$$V = V_0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (2.93)$$

4. Liikumatu varda suuna polaarnurgad on φ ja ϑ . Kui aga see varras liigub x-telje suunas kiirusega $v = \beta c$, siis on nurgad φ' ja ϑ' . Avaldada φ' ja ϑ' φ ja ϑ kaudu.

L a h e n d u s . Sarnaselt nagu ülesandes 2 leiame järgaised seosed varda otspunktide koordinaatide vahede jaoks kahes süsteemis:

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y_2 - y_1 &= y_2' - y_1', \\ z_2 - z_1 &= z_2' - z_1'. \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

Polaarnurgad avalduvad järgiselt:

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \\ \tan \vartheta &= \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{z_2 - z_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

ja analoogiliselt teises inertsiaalsüsteemis. Seega (2.94) põhjal

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi' &= \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \tan \vartheta' &= \tan \vartheta \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

Nagu peabki olema, on esimene valem neist kahest identne valemiga (2.92).

5. Sama ülesanne, kuid varras liigub z-telje suunas.

L a h e n d u s . Tähistame polaarnurgad varda liikumise juhul z-telje suunas φ'' , ϑ'' . Siis kehtivad (2.94) asemel ilmselt seosed

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= x_2'' - x_1'', \\ y_2 - y_1 &= y_2'' - y_1'', \\ z_2 - z_1 &= \frac{z_2'' - z_1''}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

Rakendades jälle valemuid (2.95), leiame:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'' &= \varphi, \\ \tan \vartheta'' &= \frac{\tan \vartheta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

Arusaadavalt on siin teine valem samasuguse kujuga nagu esimene valem (2.96).

6. Kaks varrast on jälgalt ühendatud nii, et nende suundade polaarnurgad on paigaloleku süsteemis φ_1 , ϑ_1 ja φ_2 , ϑ_2 , nii et nendevaheline nurk ω on määratud valemiga

$$\cos \omega = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.99)$$

Leida nurk ω' , mille nad moodustavad teineteisega, liikudes x-telje suunas kiirusega $v = \beta c$.

L a h e n d u s . $\cos \omega'$ avaldub φ_1' , ϑ_1' ja φ_2' , ϑ_2' kaudu niisamuti kui $\cos \omega$ φ_1 , ϑ_1 ja φ_2 , ϑ_2 kaudu.

Rakendades valemuid (2.96), leiame:

$$\cos \omega' = \frac{\cos \omega - \beta^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{\sqrt{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \varphi_1)(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta_2 \cos^2 \varphi_2)}} \quad (2.100)$$

7. Sama ülesanne, kuid vardad liiguvad z-telje suunas.

L a h e n d u s . Kõik on analoogiline. Tähistades ot-
sitavat nurka ω'' , leiame:

$$\cos \omega'' = \frac{\cos \omega - \beta^2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{(1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_1)(1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta_2)}} \quad (2.101)$$

8. Kaks varrast, ühesuguse seisupikkusega l_0 , liigu-
vad x-telje sihis kiirustega v_1 ja v_2 , olles ise orien-
teeritud piki sama telge. Leida kaugus nende kahe punkti
vahel, milles kohtuvad varraste vasakpoolsed ja parempool-
sed otsad. Leida samuti ajavahemik nende kahe kohtumise va-
hel.

L a h e n d u s . Tähistame vasakpoolsed otsad in-
deksiga A ja parempoolsed indeksiga B. Olgu vasakpool-
sete otste kohtumise koordinaadid x_A, t_A ja parempoolse-
te otste kohtumise koordinaadid x_B, t_B . Seega tuleb lei-
da $x_B - x_A$ ja $t_B - t_A$.

Olgu alghetkel 1. varda otste koordinaadid ξ'_A, ξ'_B
ja 2. varda otste koordinaadid ξ''_A, ξ''_B . Seega kontraktsi-
ooni tõttu

$$\left. \begin{aligned} \xi'_B - \xi'_A &= l_0 \sqrt{1 - \beta_1^2}, \\ \xi''_B - \xi''_A &= l_0 \sqrt{1 - \beta_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

x_A, t_A leiame ilmselt võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} x &= \xi'_A + v_1 t, \\ x &= \xi''_A + v_2 t \end{aligned}$$

lahendina, samuti x_B, t_B võrrandisüsteemi

$$x = \xi'_B + v_1 t,$$

$$x = \xi''_B + v_2 t.$$

lahendina. Nimelt,

$$x_A = \frac{v_2 \xi'_A - v_1 \xi''_A}{v_2 - v_1},$$

$$t_A = \frac{\xi'_A - \xi''_A}{v_2 - v_1}$$

ja

$$x_B = \frac{v_2 \xi'_B - v_1 \xi''_B}{v_2 - v_1},$$

$$t_B = \frac{\xi'_B - \xi''_B}{v_2 - v_1}.$$

Lahutades ning arvestades (2.102) leiame:

$$x_B - x_A = \frac{l_0 (v_2 \sqrt{1 - \beta_1^2} - v_1 \sqrt{1 - \beta_2^2})}{v_2 - v_1},$$

$$t_B - t_A = \frac{l_0 (\sqrt{1 - \beta_1^2} - \sqrt{1 - \beta_2^2})}{v_2 - v_1}.$$

Erijuhul, kui $v_2 = -v_1 = -v$, on

$$x_B - x_A = l_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$t_B - t_A = 0.$$

9. Varras seisupikkusega l_0 liigub piki x-telge kiirusega v . Alghetkel on tema keskoht alguspunktis. Plaat, mis on risti y-teljega, liigub y-telje suunas kiirusega u ja alghetkel on ta xz-tasandis. Plaadis on ringikujuline apk läbimõõduga l_0 , mille keskpunkt liigub mööda y-telge ja alghetkel asetseb alguspunktis. Seega on varras alghetkel keset auku ja et tema pikkus liikumise tõttu on $l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, mahub ta august läbi ning liigub peale alghetke edasi piki x-telge, olles nüüd teisel pool plaati.

Vaadeldes aga neid liikumisi varda paigaloleku süsteemis, leiame, et varras ei peaks august läbi mahtuma, sest tema pikkus on nüüd l_0 , augu laius x-telje suunas peaks aga olema väiksem kui l_0 , sest tal on nüüd nullist erinev x-telje suunaline kiiruse komponent. Ometi ei või varda teisele poole plaati liikumise fakti teha olematuks paljalt ülemineku teel teise inertsiaalsüsteemi. Näidata, et varras pääseb läbi augu siiski ka iseenda paigaloleku süsteemis, olgugi et tema pikkus ületab augu laiuse.

L a h e n d u s . Varda paigaloleku süsteemis asetseb ta liikumatult piki x-telge nii, et tema keskkohk on alguspunktis ja otsad punktides $x' = -\frac{l_0}{2}$ ja $x' = \frac{l_0}{2}$. Vaatleme augu xy-tasandis oleva läbimõõdu liikumist. Selle läbimõõdu mingit punkti võib tähistada parameetriga ξ , nii et $x = l_0 \xi$ on selle punkti x-koordinaat esialgses süsteemis, kus auk liigub y-telje suunas. Seega on selle punkti liikumisvõrrandid nimetatud süsteemis niisugused:

$$\left. \begin{aligned} x &= l_0 \xi, \\ y &= ut. \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

Seejuures ilmselt $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$. Läheme üle varda paigaloleku süsteemi, mis liigub senise süsteemi suhtes x-telje suunas kiirusega v . Seega

$$\begin{aligned} \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} &= l_0 \xi, \\ y' &= ut, \\ \frac{t' + \frac{\beta}{c} x'}{\sqrt{1-\beta^2}} &= t. \end{aligned}$$

Elimineerides t , saame nendest seostest parameetriga ξ märgitud punkti liikumisvõrrandid uues süsteemis:

$$\left. \begin{aligned} x' &= l_0 \xi \sqrt{1-\beta^2} - vt', \\ y' &= \frac{\beta u l_0 \xi}{c} + u \sqrt{1-\beta^2} \cdot t' \end{aligned} \right\} \quad (2.104)$$

Elimineerides veel t' , saame vaadeldava punkti trajektoori võrrandi:

$$x' = \frac{l_0 \xi - \frac{v}{u} \cdot y'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.105)$$

Võttes valemites (2.104) ja (2.105) $\xi = \pm \frac{1}{2}$, saame liikumisvõrrandid ja trajektooride võrrandid augu läbimõõdu otspunktide jaoks:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \pm \frac{l_0}{2} \sqrt{1-\beta^2} - vt', \\ y' &= \pm \frac{\beta u l_0}{2c} + u \sqrt{1-\beta^2} \cdot t' \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

ja

$$x' = \frac{\pm \frac{l_0}{2} - \frac{v}{u} y'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.107)$$

Siit on otsekohe näha, et hetkel

$$t' = - \frac{\beta l_0}{2c \sqrt{1-\beta^2}}$$

on augu parempoolne äär punktis

$$\begin{aligned} x' &= \frac{l_0}{2 \sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' &= 0 \end{aligned}$$

ning hetkel

$$t' = \frac{\beta l_0}{2c\sqrt{1-\beta^2}}$$

on augu vasakpoolne äär punktis

$$x' = -\frac{l_0}{2\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$y' = 0.$$

Et aga liikumatu varda otsad on punktides $x' = \pm \frac{l_0}{2}$, pääsebki varras august läbi. Seejuures on aga augu läbimõõt ikkagi väiksem (nagu oligi arvata) varda pikkusest. Läbimõõt on (2.106) põhjal võrdne

$$l_0 \sqrt{1-\beta^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}.$$

Näilise vastuolu lahendus seisneb selles, et varda paigaloleku süsteemis ei ole augu tasand enam risti y' -teljega. Nurk ψ , mille augu tasand moodustab x -teljega, avaldub (2.106) põhjal järgmiselt:

$$\tan \psi = \frac{\beta u}{c\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (2.108)$$

Augu liikumise suund aga moodustab y -teljega nurga φ :

$$\tan \varphi = \frac{v}{u\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (2.109)$$

Nende arvutuste illustreerimiseks võtame arvilise näite. Olgu $\beta = \frac{3}{5}$ ja $\frac{u}{c} = \frac{2}{3}$. Siis

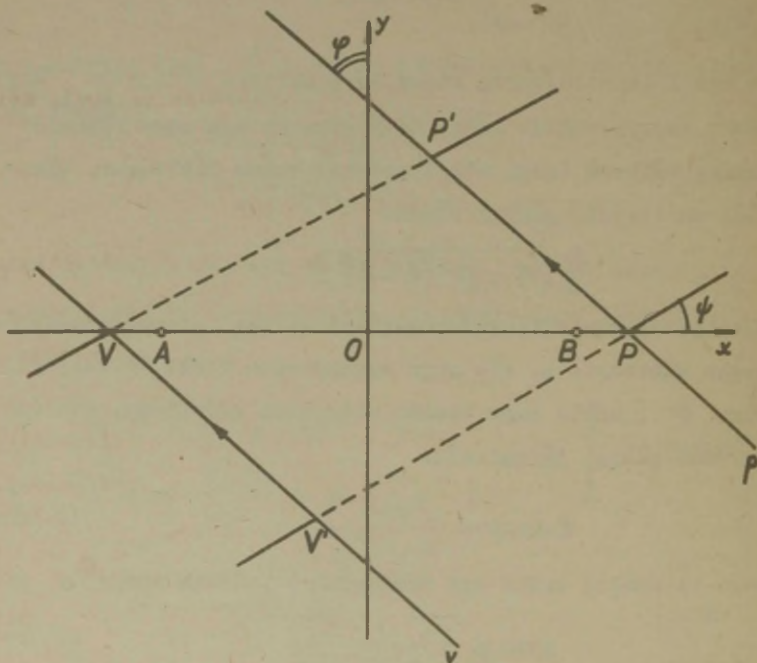
$$\tan \psi = \frac{1}{2}$$

ja

$$\tan \varphi = \frac{9}{8};$$

augu läbimõõt on võrdne $\frac{2l_0}{\sqrt{5}} = 0,894l_0$, kuid nende punkti-

de vaheline kaugus x-teljel, mida läbivad augu ääred, on võrdne $1,25l_0$. Joonisel 24 on AB liikumatu varras, v ja p on augu äärte trajektoorid, V ja P on äärte asen-



Joonis 24.

did x-teljel, V' on vasakpoolse ääre asend hetkel, mil parempoolne äär on x-teljel ja P' on parempoolse ääre asend hetkel, mil vasakpoolne äär on x-teljel. Augu laiust kujutavad sirglõigud $\overline{VP'}$ või $\overline{V'P}$.

$$\text{Kolmnurgas } VPV' \text{ on } \overline{VP} = \frac{l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \overline{V'P} = l_0 \sqrt{1-\beta^2(1-\frac{u^2}{c^2})}$$

ja nurgad: tipu P juures ψ , tipu V juures $90^\circ - \varphi$
 ja tipu V' juures $90^\circ + \varphi - \psi$. Siit leiame, et $\overline{VV'} =$
 $= \overline{PP'} = \frac{L_0 \beta u}{c} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2 + \frac{v^2}{u^2}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Et see on kaugus, millele lii-
 gub auk ajaga $\frac{\beta L_0}{c \sqrt{1-\beta^2}}$, siis on tema kiirus võrdne
 $\sqrt{u^2(1-\beta^2) + v^2}$, mis on kooskõlas valemiga (2.106). Meie
 näites on $\overline{VV'} = \frac{L_0 \sqrt{145}}{20} = 0,602 L_0$.

§11. Aegruumi graafiline esitus.

Aegruumi graafiline esitus on kasulik vahend relati-
 vistliku kinemaatika näitlikustamiseks. Tavaliselt kasu-
 tatakse tasapinnalist esitust. Et tasand on kahemõõtmeline,
 tuleb piirduda xt-ruumiga. Niisuguses kahemõõtmelises
 aegruumis saab täielikult kujutada sirgjoonelisi liikumisi
 ning neid Lorentzi teisendusi, kus y- ja z-koordinaadid ei muutu
 (liikumine x-telje suhtes).

xt-ruumi kujutamisel eukleiidilises tasandis tuleb arvestada,
 et kujutatav ruum on pseudoeukleiidiline. Seetõttu osutub
 vajalikuks kasutada graafikul selle ruumi pikkusühikutena
 eri suundades, s. o. eri inertsiaalsüsteemides erinevaid
 eukleiidilisi joonlõike.

Kujutagu mingit inertsiaalsüsteemi tavaline Cartesiuse
 ristkoordinaadistik tasandil. Võtame vertikaaltelje x-teljeks
 ja horisontaaltelje ct-teljeks (vt. joon. 25, kus $u = ct$).
 Tasandi punktid kujutavad sündmusi, punkte ühendavad
 sirglõigud intervalle. Et aga kahe punkti vahelise kauguse
 ruut avaldub kujul

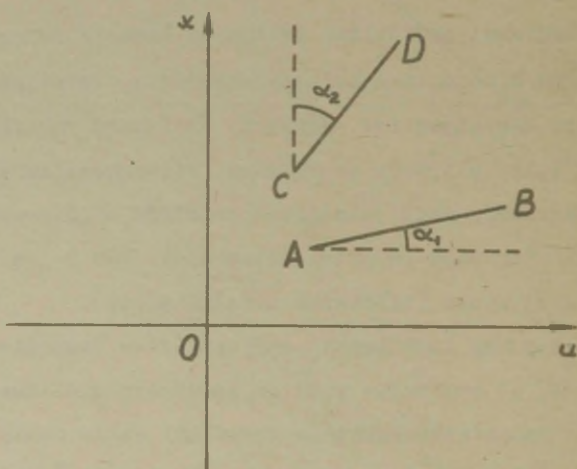
$$(x_2 - x_1)^2 + (u_2 - u_1)^2,$$

intervalli ruudu avaldis on aga

$$(x_2 - x_1)^2 - (u_2 - u_1)^2,$$

siis tuleb iga sirglõigu mõõta eri ühikuga, olenevalt tema kaldest. Ilmselt tuleb võtta pikkusühikute suurus

$$\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (u_2 - u_1)^2}{|(x_2 - x_1)^2 - (u_2 - u_1)^2|}}$$



Joonis 25.

Olgu intervalli kujutava sirglõigu 45° -st väiksema, s.o. kas x - või u -telje suhtes võetud kaldenurga α tangens β , nii et

$$\beta = \frac{x_2 - x_1}{u_2 - u_1}$$

ajasarnane ja

$$\beta = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

ruumisarnase intervalli puhul. Siis avaldub pikkusühiku eukleidiline pikkus antud intervallil järgmiselt:

$$1(\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} \quad (2.110)$$

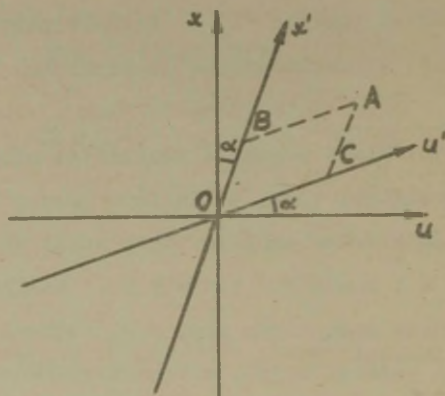
Joonisel 25 kujutavad punktid A, B teineteisest ajasarnase ja punktid C, D ruumisarnase intervalliga lahatatud sündmusi.

Masspunkti või üldse mistahes punktilise objekti liikumist kujutab graafikul joon, mille tõus võrdub objekti kiiruse ja valguse kiiruse suhtega. Seda joont nimetatakse objekti maailmajooneks. Maailmajoone kalle u-telje suhtes peab olema igal pool väiksem kui 45°. Ühtlast liikumist kujutab sirge, mitteühtlast kõver maailmajoon. Maailmajoone pikkus (kui seda mõõta igas punktis kaldest sõltuva pikkusühikuga $1(\beta)$) on võrdne valguse kiirusega korrutatud masspunkti omaajaga (ühtlasega ühtlase ning mitteühtlasega mitteühtlase liikumise puhul).

Valgussignaale kujutavad graafikul sirgjooned, mille tõusunurk on $\pm 45^\circ$. Pikkusühik on neil joontel vastavalt valemile (2.110) lõpmatu, mis vastab sellele, et valgussignaali maailmajoone mistahes kahe punkti vaheline intervall on võrdne nulliga.

Vaatleme nüüd üleminekut teise inertsiaalsüsteemi. Selle alguspunkti liikumist kujutab sirge joon näbi x-koordinaadistiku alguspunkti, kaldega alla 1. See joon ongi uus u-telg (u'-telg joonisel 26). Uueks x-teljeks (x'-teljeks) võtame sirge joone, mis moodustab vana x-tel-

jega sama nurga α , mis on u' - ja u -telje vahel. Selles kaldteljeetikuses kasutame kaldkoordinaate. Mingi punkti A koordinaatideks on lõikude pikkused, mida telgedel lõikavad



Joonis 26.

punktist A tõmmatud telgedega paralleelsed jooned AB ja AC . Seejuures tuleb kasutada pikkusühikuma suurust $1(\beta)$ valemist (2.110). Seega on punkti A koordinaatideks joonisel 26

$$\left. \begin{aligned} x' &= \overline{OB} \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}}, \\ u' &= \overline{OC} \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

kus \overline{OB} ja \overline{OC} on sirglõikude OB ja OC eukleidilised pikkused.

Näitame, et need koordinaadid on seotud vanadega Lorentzi teisenduste läbi. Tõepoolest, et vektorite \overrightarrow{OB} ja \overrightarrow{OC} komponendid ux -teljestikus on $\overline{OB} \sin \alpha$, $\overline{OB} \cos \alpha$ ja $\overline{OC} \cos \alpha$,

$\overline{OC} \sin \alpha$, vektori $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ komponentideks on aga u, x , siis

$$u = \overline{OB} \sin \alpha + \overline{OC} \cos \alpha,$$

$$x = \overline{OB} \cos \alpha + \overline{OC} \sin \alpha.$$

Siit

$$\overline{OB} = \frac{x \cos \alpha - u \sin \alpha}{\cos 2\alpha},$$

$$\overline{OC} = \frac{u \cos \alpha - x \sin \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Et aga

$$\beta = \tan \alpha, \quad (2.112)$$

siis

$$\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} = \cos 2\alpha$$

ning

$$x' = \frac{x \cos \alpha - u \sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}},$$

$$u' = \frac{u \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$$

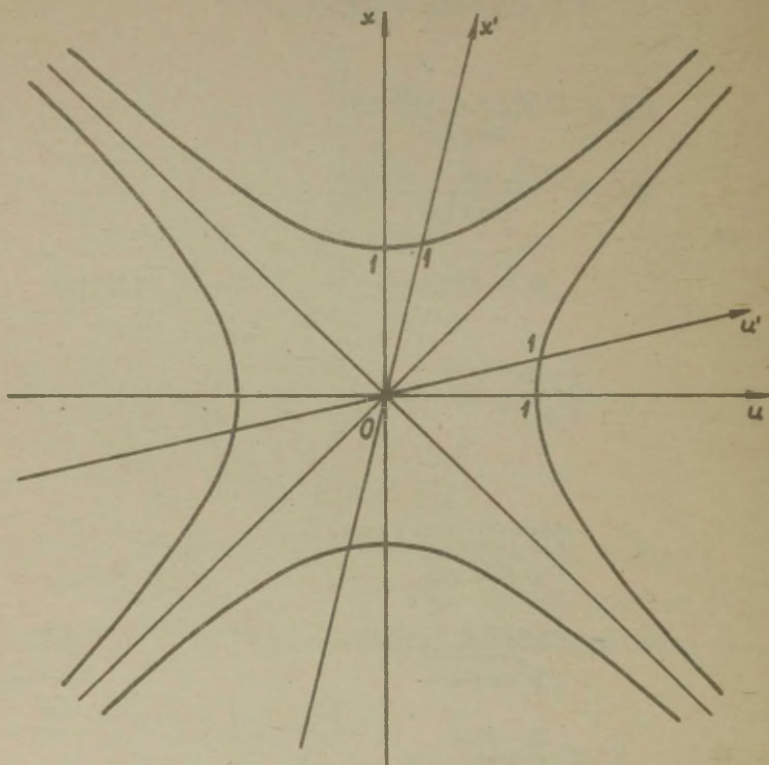
ehk

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - \beta u}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ u' &= \frac{u - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.113)$$

Need ongi Lorentzi teisendusvalemid.

Seega on kirjeldatud viisil võimalik kasutada eukleiidilist tasandit pseudo-eukleiidilisena. Oluline on siin pikkusühiku (2.110) valik. Selle abil me projekteerime pseudo-eukleiidilise kahemõõtmelise aegruumi joonise eukleiidilisse tasandisse.

Teeme veel ühe lisakonstruksiooni, mis võimaldab määrata ühiku $1(\beta)$ väärtuse mätahas suunas graafiliselt. Selleks joonistame (joon. 27) kaks võrdhaarset hüperbooli,



Joonis 27.

mille poolteljed võtame võrdseks 1-ga ja mille asümptootideks on xu -süsteemi koordinaatnurkade poolitajad. Mingis teises süsteemis $x'u'$ tuleb võtta pikkusühikuks lõik, mille hüperbool lõikab ära telgedest. Tõepoolest, hüperbooli ja u -telje lõikepunkti koordinaadid on

$$x = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

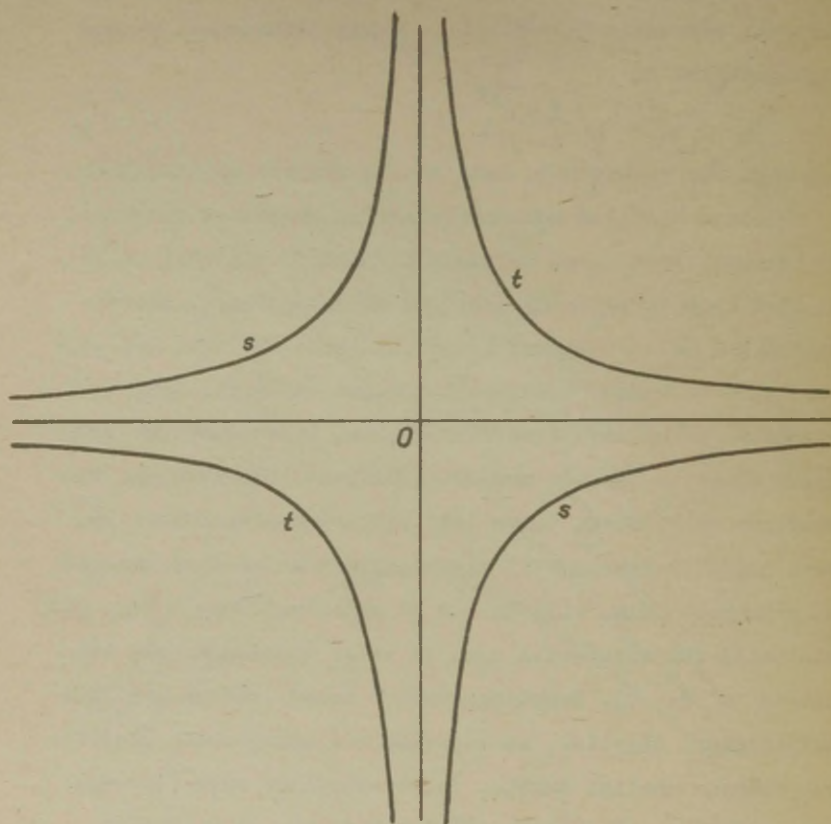
sest nad rahuldavad nii telje võrrandit $x = \beta u$ kui ka hüperbooli võrrandit $u^2 - x^2 = 1$. Selle lõikepunkti kaugus alguspunktist on

$$\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}},$$

mis ongi uus pikkusühik. Sama kehtib ilmselt ka x' -teljel.

Seoses esitatud konstruktsiooniga on kohane rõhutada, et aegruumi graafilise kujutuse tuuma moodustavadki eelkõige need kaks hüperbooli koos oma asümptootidega. Koordinaatteljed on sekundaarne konstruktsioon; see aga, mis aegruumis on sõltumatu inertsiaalsüsteemi valikust, peegeldub nimetatud primaarses konstruktsioonis. Kahemõõtmelise pseudoeukleidilise tasandi projekteerimiseks eukleidilisse tasandisse tuleb seega võtta läbi viimase meelevaldselt võetava punkti (alguspunkti) ristsirgete paar koos võrdhaarse te hüperboolidega, millele nad on asümptootideks (joon. 28), nimetades üht hüperbooli aja- ja teist ruumisarnaseks (indekseid t ja s). Koordinaadistiku saame, võttes mistahes telgedepaari niiviisi, et hüperboolide asümptootid poolitavad telgedevahelisi nurki. Telgedevaheline nurk võib aga olla mistahes väärtusega; väärtus 90° , mis on ka teiste seas võimalik, ei tähenda, nagu oleks see süsteem teistega võrreldes millegi poolest eelistatud, sest selle nurga erinevad väärtused ei ole omased reaalsetele koordinaatsüsteemidele pseudoeukleidilises ruumis, vaid on tingitud ainult selle ruumi projekteerimisest eukleidilisse ruumi.

Seetõttu on edaspidi otstarbekohane iseloomustada mingit meelevaldselt valitud inertsiaalsüsteemi graafilises esituses telgedevahelise nurga väärtustega, mitte aga nur-



Joonis 28.

gaga α , mille moodustavad teljed ortogonaalse süsteemi telgedega, ega selle nurga tangensiga, mis tähendab (2.112) järgi mõlema süsteemi suhtelist kiirust. Nurga α

kasutamise ongi halb selle poolest, et see laseb valitud inertsiaalsüsteemi paista liikuvana selle süsteemi taustal, mille graafilises esituses on teljed teineteisega ristitud. Sellega oleks viimane teiste seas eelistatuna esile tõstetud.

Olgu nüüd mingi süsteemi telgedevaheline nurk θ . Et $\theta = 90^\circ - 2\alpha$, siis avaldub valemite (2.110) ja (2.112) põhjal pikkusühik selles süsteemis järgmiselt:

$$l(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}. \quad (2.114)$$

Valgusekoonuseks tipuga etteantud punktis (\vec{r}_0, t_0) nimetatakse kolmemõõtmelist hüperpinda, mille punktideks on kõik sündmusest (\vec{r}_0, t_0) isotroopse intervalliga lahutatud sündmused. Niisiis, tipuga (\vec{r}_0, t_0) valgusekoonuse võrrand on

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0. \quad (2.115)$$

Valgusekoonuse iga punkt on ühendatav tema tipuga valgussignaali. Kui valgussignaal lähtub koonuse tipust, siis kuulub tema jõudmine mistahes punkti valgusekoonuse tulevikuossa. Sellevastu, valgusekoonuse minevikuossa moodustavad need sündmused, mille juurest lähtuvad valgussignaalid jõuavad koonuse tippu.

Graafikul kujutatavad valgusekoonust ilmselt hüperboolide asümptoodid. Koonuse sisepiirkond (s. o. see, kus asub ajasarnane hüperbool) koosneb sündmustest, mis on tipust lahutatud ajasarnaste intervallidega. Ainult nende sündmustega (kaasa arvatud koonuse ise) võib tipp olla

põhjuslikus seoses. Väljaspool koonust olev piirkond (kus asub ruumisarnane hüperbool) aga koosneb sündmustest, mis on tipust lahutatud ruumisarnaste intervallidega. Ühelgi neist ei saa tipuga olla põhjuslikku seost.

Arusaadavalt kuulub aegruumi iga punkti juurde oma valgusekoonus, s. o. iga punkti võib võtta valgusekoonuse tipuks. See koonus jaotabki siis kogu aegruumi kahte piirkonda, millest üks on valitud punkti suhtes ajasarnases, teine ruumiearnases vahekorras.

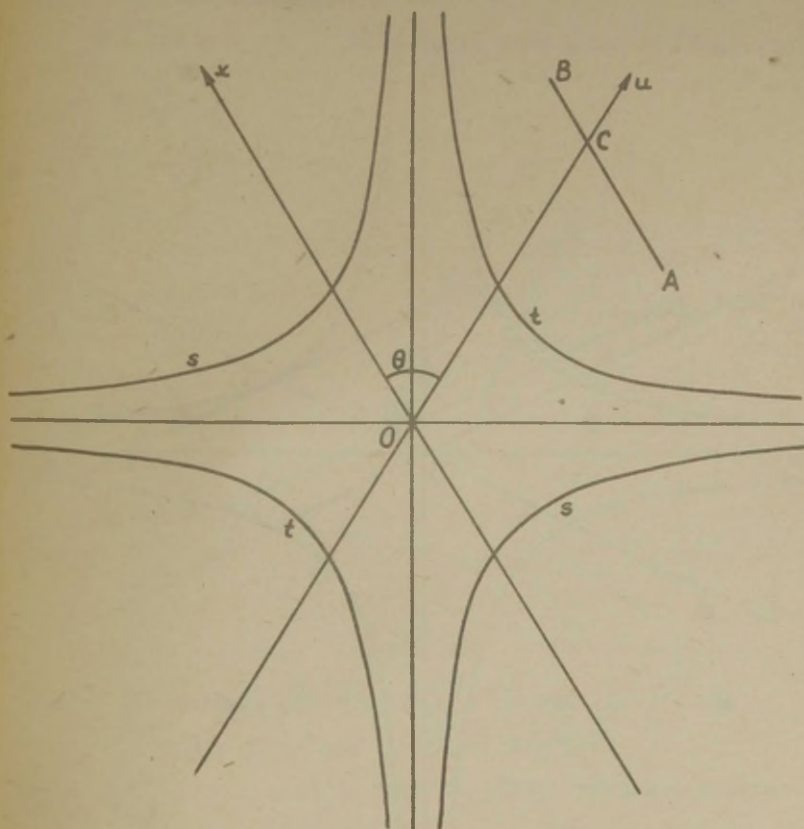
Graafiline esitus võimaldab piltlikult näidata paljusid vahekordi ja seoseid. Näiteks, \dot{S} -s B me tõestasime, et kui kahe sündmuse vaheline intervall on ruumisarnane, siis leidub inertsiaalsüsteem, kus nad on samaaegsed. Joonisel 29 on nendeks sündmusteks näiteks A ja B . Et intervall on nende vahel ruumisarnane, nähtub sellest, et sirglõiguga AB paralleelne sirge Ox läbi alguspunkti asub väljaspool valgusekoonust. Võttes selle sirge x -teljeks ja tõmmates ka vastava ajatelje Ou , saamegi inertsiaalsüsteemi, milles sündmused A ja B on samaaegsed. Mõlema sündmuse ühist ajakoordinaati kujutab sirglõik \overline{OC} .

Ü l e s a n d e d .

1. Näidata, et aegruumi graafilises esituses tasandil ajasarnase hüperbooli puutuja selle lõikepunktis u -teljega on paralleelne x -teljega (ja vastupidi, ruumisarnase hüperbooli puutuja selle lõikepunktis x -teljega on paralleelne u -teljega).

L a h e n d u s . Võttes hüperboolide asümptoodid $\xi\eta$ -koordinaattelgedeks (vt. joon. 30), saame ajasarnase hüperbooli võrrandi kujul

$$\xi\eta = \frac{1}{2}$$



Joonis 29.

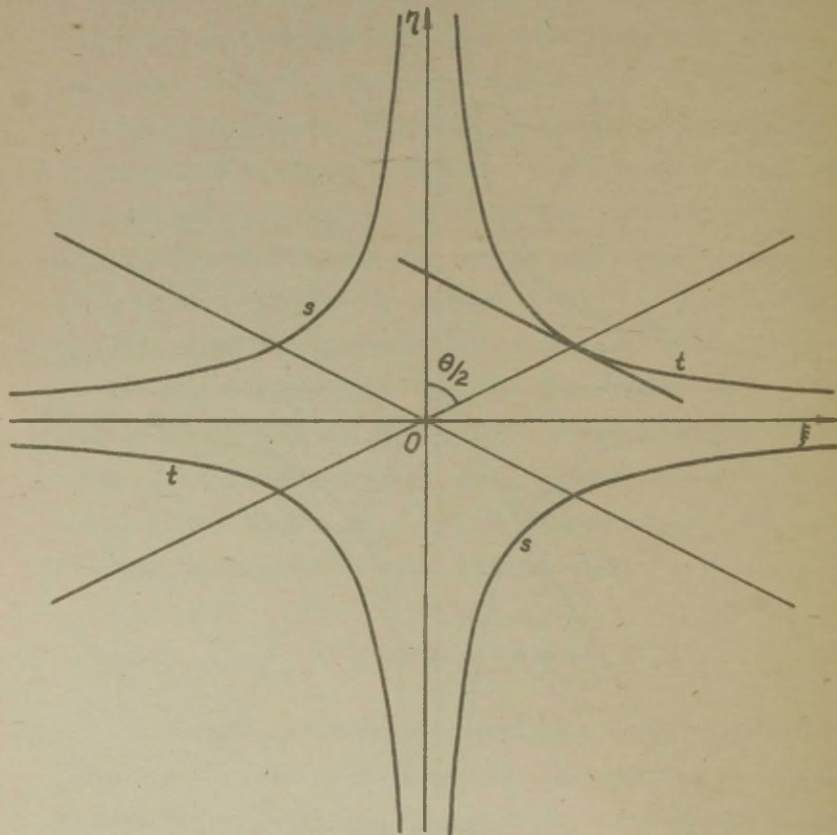
ning u -telje võrrandi kujul

$$\xi \eta^{-1} = \tan \frac{\theta}{2},$$

millest järeneb, et u-telje lõikepunkti koordinaadid hüperbooliga on

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2}},$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}.$$

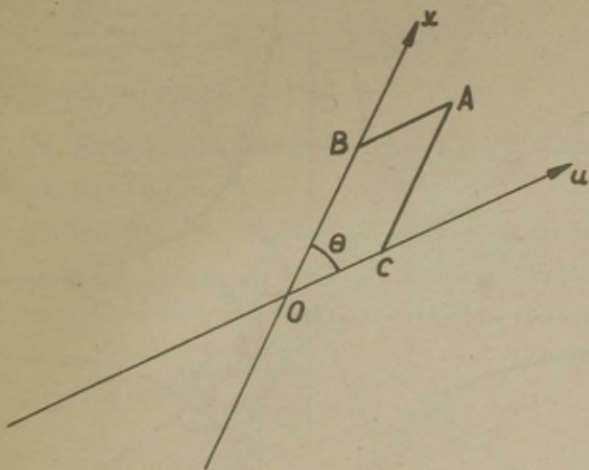


Joonis 30.

Siit järgneb, et puutuja tõus selles punktis on võrdne $-\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$. Sama on ka x -telje tõus. Seega on puutuja tõesti paralleelne x -teljega.

2. Näidata, et rööpküliku pindala, mis tekib, kui antud punktist tõmmata koordinaattelgedele nendega paralleelsed sirgjooned (OABC joonisel 31), võrdub selle punkti koordinaatide korrutisega.

L a h e n d u s . Rööpküliku OABC pindala (joon. 31)



Joonis 31.

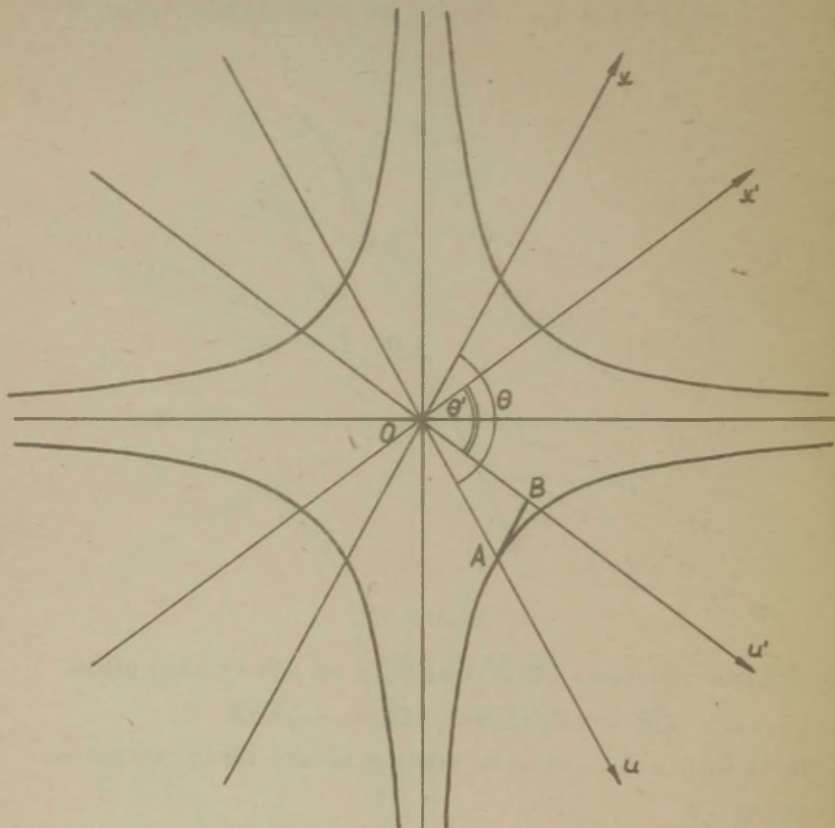
võrdub korrutisega $\overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \sin \widehat{BOC}$; et aga (2.114) põhjal

$$\overline{OB} = x / \sqrt{\sin \theta}, \quad \overline{OC} = u / \sqrt{\sin \theta}$$

ja et $\widehat{BOC} = \theta$, siis on pindala tõesti võrdne korrutisega xu .

3. Kahe inertsiaalsüsteemi telgedevahelised nurgad graafilise esituses on θ ja θ' , kusjuures $\theta > \theta'$. Avaldada nende kaudu kiirus, millega teine süsteem liigub esimese suhtes.

L a h e n d u s . Et u' -telg on $x'u'$ -inertsiaalsüsteemi ruumilise koordinaadistiku alguspunkti maailmajoon, siis kujutab otsitavat kiirust suhe $\overline{AB}/\overline{OA}$ (joon. 32),



Joonis 32.

kus AB on u-telje ja ajasarnase hüperbooli lõikepunktist tõmmatud paralleeljoon x-teljele (ta on ka puutujaks hüperboolile). Siin tuleb arvestada, et pikkusühik on mõlemas suunas, s. o. OA ja AB suunas ühesugune. Et

$$\widehat{BOA} = \frac{\theta - \theta'}{2}, \quad \widehat{ABO} = \frac{\theta + \theta'}{2},$$

siis on kiirus võrdne

$$\beta = \frac{\sin \frac{\theta - \theta'}{2}}{\sin \frac{\theta + \theta'}{2}}. \quad (2.116)$$

Erijuhul, kui $\theta = 90^\circ$, saame siit

$$\beta = \tan\left(45^\circ - \frac{\theta'}{2}\right),$$

mis on identne valemiga (2.112).

4. Tuletada graafilise esituse alusel kiiruste liitmise valem (2.29).

L a h e n d u s . Kui kolmes inertsiaalsüsteemis telgedevahelised nurgad on $\theta, \theta', \theta''$, siis on (2.116) järgi

$$\beta = \frac{\sin \frac{\theta - \theta'}{2}}{\sin \frac{\theta + \theta'}{2}},$$

$$\beta' = \frac{\sin \frac{\theta' - \theta''}{2}}{\sin \frac{\theta' + \theta''}{2}}$$

ja

$$\beta'' = \frac{\sin \frac{\theta - \theta''}{2}}{\sin \frac{\theta + \theta''}{2}}.$$

Siit vahetult järgnebki, et

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'}.$$

5. On antud kolm sündmust. Iga sündmustepaari vaheline intervall on ajasarnane. Inertsiaalsüsteem, milles 1. ja 3. sündmus on samapaiksed, liigub kiirusega β inertsiaalsüsteemi suhtes, milles 1. ja 2. sündmus on samapaiksed. Leida seos kolme omaajavahemiku τ_{12} , τ_{23} ja τ_{13} vahel.

L a h e n d u s . Valime inertsiaalsüsteemis, milles 1. ja 2. sündmus on samapaiksed, x -telje läbi 3. sündmuse asukohta. Siis on inertsiaalsüsteemis, milles 1. ja 3. sündmus on samapaiksed, 2. sündmuse koht samuti x -teljel ja inertsiaalsüsteemis, milles 2. ja 3. sündmus samapaiksed, 1. sündmuse koht x -teljel. Seega on kõigis kolmes inertsiaalsüsteemis sündmuste y - ja z -koordinaadid võrdsed nulliga. Seetõttu võime kasutada kahemõõtmelist aegruumi ja selle graafilist esitust.

Punktid A_1 , A_2 , A_3 joonisel 33 kujutavad antud sündmusi. Kolmnurga $A_1A_2A_3$ nurgad on:

$$\hat{A}_1 = \frac{\theta_{12} - \theta_{13}}{2},$$

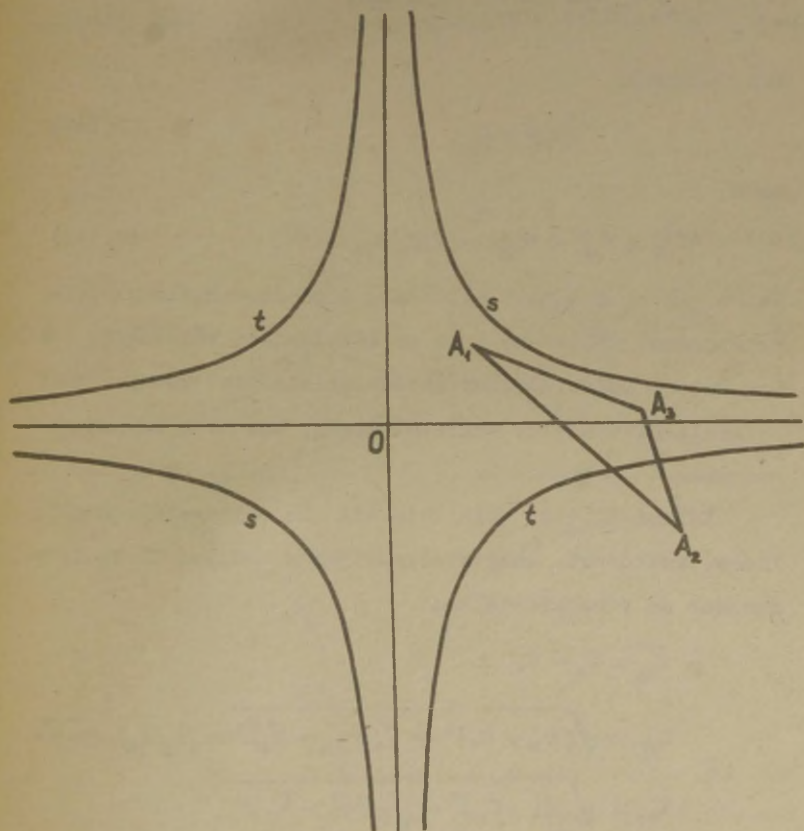
$$\hat{A}_2 = \frac{\theta_{23} - \theta_{12}}{2}$$

$$\hat{A}_3 = 180^\circ - \frac{\theta_{23} - \theta_{13}}{2},$$

kus θ_{ik} on telgedevaheline nurk süsteemis, kus i -s ja k -s sündmus on samapaiksed. Siinuslause põhjal, arvestades valemit (2.114), on

$$\frac{\sin \frac{\theta_{12} - \theta_{13}}{2} \cdot \sqrt{\sin \theta_{23}}}{\tau_{23}} = \frac{\sin \frac{\theta_{23} - \theta_{12}}{2} \cdot \sqrt{\sin \theta_{13}}}{\tau_{13}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{\theta_{23} - \theta_{12}}{2} \cdot \sqrt{\sin \theta_{12}}}{\tau_{12}}.$$



Joonis 33.

Elimineerides siit θ_{23} leiame:

$$\tau_{23}^2 = \tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 - 2\tau_{12}\tau_{13} \cdot \frac{\sin \frac{\theta_{12} + \theta_{13}}{2}}{\sqrt{\sin \theta_{12} \sin \theta_{13}}},$$

ehk valemi (2.116) põhjal

$$\tau_{23}^2 = \tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 - \frac{2\tau_{12}\tau_{13}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Kui tähistame

$$th\psi = \beta, \quad (2.117)$$

siis

$$\tau_{23}^2 = \tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 - 2\tau_{12}\tau_{13} ch\psi. \quad (2.118)$$

Saime seose, mis näeb välja nii nagu koosinuslause valem kolmnurgas, mille üks nurk on imaginaarse väärtusega $i\psi$. See vastab asjaolule, et pseudoeukleidilist ruumi võib formaalselt vaadelda eukleidiliselena, kui teha aeg imaginaarseks.

Valemi (2.118) võib tuletada ka sõltumatult graafilisest esitusest. Inertsiaalsüsteemis, milles 1. ja 2. sündmus on samapaiksed, on

$$\overline{\tau_{12}} = t_2 - t_1,$$

$$\tau_{13} = \sqrt{(t_3 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)^2} = (t_3 - t_1)\sqrt{1 - \beta^2},$$

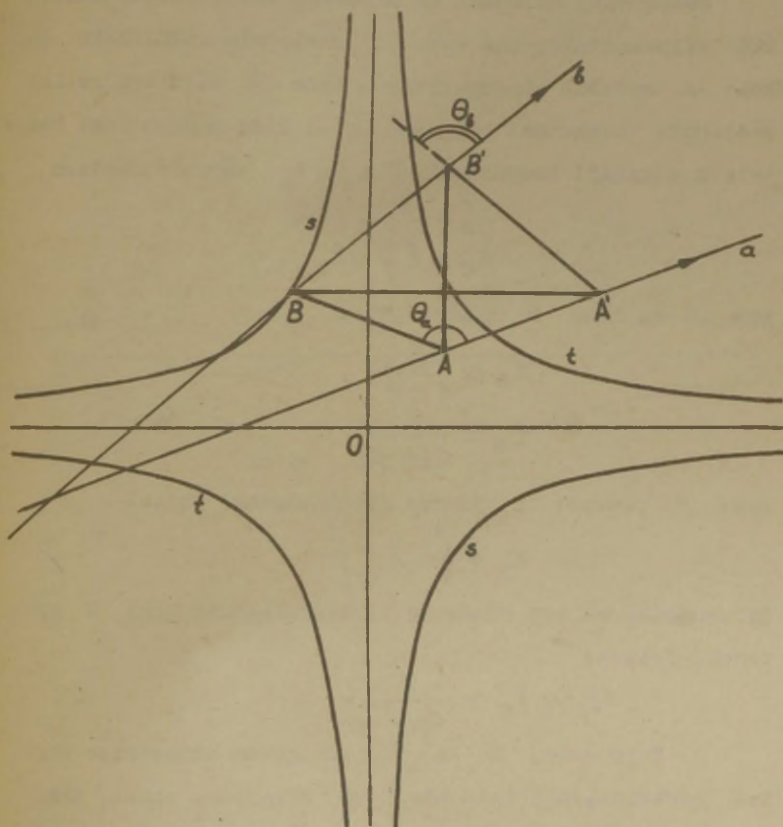
$$\tau_{23} = \sqrt{(t_3 - t_2)^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)^2}.$$

Asetades need avaldised valemisse (2.118), veendume, et ta rahuldub identselt.

6. Keha A on mingis inertsiaalsüsteemis liikumatu; keha B liigub A suhtes inertsiaalselt neid mõlemaid

ühendava sirgjoone sihis. Keha A süsteemis samaaegselt saadab kumbki keha teise suunas valgussignaali. Näidata, et signaalide teise keha juurde saabumine toimub keha B süsteemis samaaegselt.

L a h e n d u s . Joonisel 34 on a ja b kehade maailmajooned, A ja B on signaalide väljasaatmise sünd-



Joonis 34.

mused, AB' ja BA' signaalide maailmajooned, A' ja B' signaalide saabumise sündmused. Et eelduse järgi

$$\widehat{B\hat{A}B'} = A\widehat{B'A'}$$

ja BA' on risti AB' -ga, siis on ka

$$\widehat{B\hat{B}'A} = A\widehat{B'A'}$$

s. o. sündmused A' ja B' on keha B süsteemis samaaegsed. Seda oligi vaja näidata.

Samas võib veenduda ka arvutuse teel. Võtame signaalide väljasaatmise aja keha A süsteemis alghetkeks ja keha A asukeha alguspunktiks. Keha B olgu aga selles süsteemis alghetkel kaugusel l . Siis määrab A -st B -sse tuleva signaali koordinaadid x_B, t_B võrrandisüsteem

$$\begin{aligned}x_B &= ct_B, \\x_B &= l + vt_B,\end{aligned}$$

kus v on keha B kiirus. Siit

$$\begin{aligned}x_B &= \frac{l}{1-\beta}, \\t_B &= \frac{l}{c(1-\beta)}.\end{aligned}$$

Keha B juurest A juurde jõuab signaal hetkel

$$t_A = \frac{l}{c}.$$

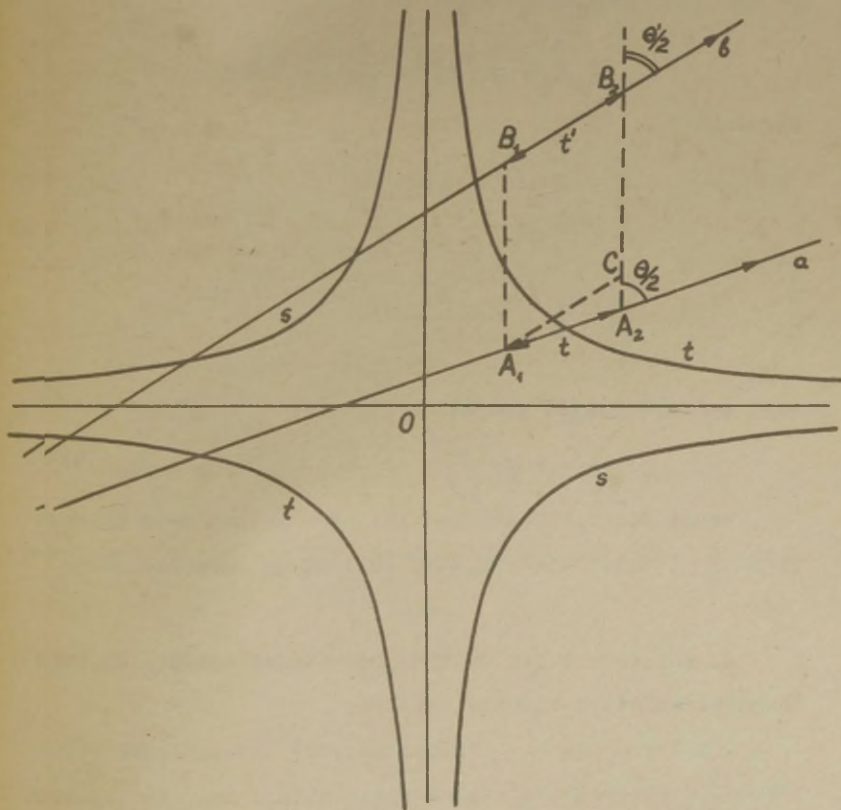
Teisendades mõlema sündmuse ajakoordinaadid keha B süsteemi, leiame:

$$t'_A = t'_B = \frac{l}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

7. Kaks keha, A ja B , liiguvad teineteise suhtes inertsiaalselt neid ühendava sirgjoone sihis. Keha A saadab keha B suunas kaks valgussignaali, oma kella järgi ajavahemikuga t nende vahel. Keha B saab need signaalid oma kella järgi ajavahega t' . Avaldada suhe

t'/t , kui B eemaldub A-st kiirusega β .

L a h e n d u s . Joonisel 35 on a ja b kehade A ja B maailmajooned, A_1 ja A_2 signaalide väljasaatmise, B_1 ja B_2 nende vastuvõtmise sündmused. Tõm-



Joonis 35.

bame punktist A_1 sirgjoone A_1C paralleelselt B_1B_2 -ga. Siis on kolmurgas A_1A_2C

$$\overline{A_1 A_2} = \frac{t}{\sqrt{\sin \theta}},$$

$$\overline{A_1 C} = \frac{t'}{\sqrt{\sin \theta'}}$$

ja

$$A_1 \hat{C} A_2 = \frac{\theta'}{2},$$

$$A_1 \hat{A}_2 C = 180^\circ - \frac{\theta}{2}.$$

Järelikult

$$\frac{t' \sqrt{\sin \theta}}{t \sqrt{\sin \theta'}} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta'}{2}}.$$

Siit

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta'/2)}}$$

ehk, valem (2.116) põhjal,

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (2.119)$$

Samal viisil leiame, et kui B läheneb A-le kiirusega β , siis tuleb valemis (2.119) β asemele võtta $-\beta$.

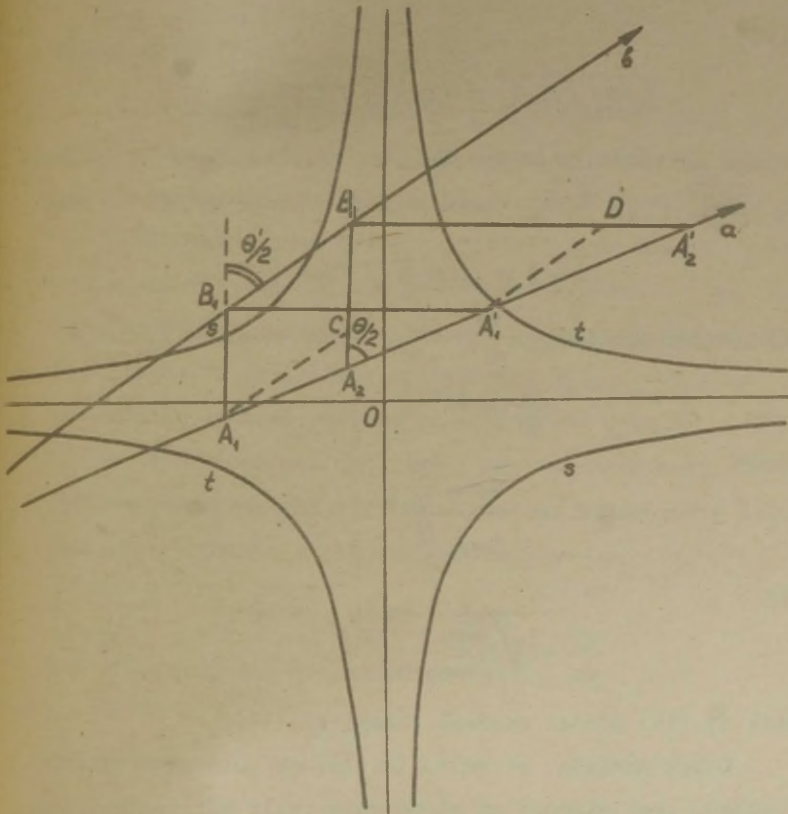
8. Tuletada valem (2.119) kasutamata valem (2.114). Seejärel tuletada viimane esimesest.

L a h e n d u s . Valem (2.119) tuletamiseks võib rakendada otseselt relatiivsuspriintiipi. Kui A saadab B suunas valgussignaali ajavahega t ja nende saamisel ajavahega t' B saadab otsekohe signaali tagasi A suunas, siis saab A need ajavahega t'' ning relatiivsuspriintiipi põhjal on

$$\frac{t'}{t} = \frac{t''}{t'}$$

(2.120)

Joonisel 36 on jälle a ja b kehade maailmajooned, A_1B_1 , A_2B_2 , B_1A_1' , B_2A_2' valgussignaalide maailmajooned, A_1C' ja



Joonis 36.

A_1D on paralleelsed B_1B_2' -ga. Siis saame kolmnurkadest A_1A_2C ja $A_1A_2'D$:

$$\overline{B_1 B_2} / \overline{A_1 A_2} = \sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\theta'}{2}$$

ja

$$\overline{A_1' A_2'} / \overline{B_1 B_2} = \cos \frac{\theta'}{2} / \cos \frac{\theta}{2} .$$

Siit

$$\overline{A_1' A_2'} / \overline{A_1 A_2} = \tan \frac{\theta}{2} / \tan \frac{\theta'}{2} .$$

Et aga sõltumatult pikkuseühikust maailmajoonel a pikkuste $\overline{A_1' A_2'}$ ja $\overline{A_1 A_2}$ suhe võrdub suhtega t''/t , siis

$$t''/t = \tan \frac{\theta}{2} / \tan \frac{\theta'}{2} .$$

Tähistades ajutiselt $\frac{t'}{t} = \kappa$, saame valemist (2.120):

$$\frac{t''}{t} = \kappa^2 ;$$

seega

$$\kappa^2 = \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta'}{2}}$$

ehk

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta'/2)}} .$$

Siit (2.116) põhjal saamegi unesti (2.119).

Tuleb märkida, et valem (2.116) on sõltumatu valemist (2.114), sest viimast ei olnud vaja selle tuletamisel (vt. ülesanne 3).

Nüüd on lihtne tuletada ka (2.114). Tähistades otsitava pikkuseühiku $1(\theta)$, saame kolmnurgast $A_1 C A_2$:

$$\frac{t' \cdot 1(\theta')}{t \cdot 1(\theta)} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta'}{2}} .$$

Siit (2.119) põhjal

$$\frac{1(\theta')}{1(\theta)} = \sqrt{\frac{\sin \theta}{\sin \theta'}} .$$

Võttes $1(90^\circ) = 1$, saamegi (2.114).

9. Kolmemõõtmelist aegruumi, mis koosneb ajast ja kahe mõõtmelisest ruumist, saab kujutada kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis. Kui mingit inertsiaalsüsteemi kujutab selles ruumis Cartesiuse koordinaadistik, siis mingit teist inertsiaalsüsteemi kujutab kaldkoordinaadistik. Olgu teise süsteemi kiirus esimese suhtes $\vec{\beta}$ ja selle komponendid β_1 , β_2 . Lorentzi maatriks koordinaatide $x_0 = ct$, x_1 , x_2 teisendamiseks teisest süsteemist esimesesse olgu L . Näidata, et teist süsteemi x_0^0 , x_1^0 , x_2^0 kujutava kaldkoordinaadistiku telgedesuunaliste ühikvektorite komponendid esimest süsteemi kujutatavas ristkoordinaadistikus x_0 , x_1 , x_2 on

$$\frac{L_{k0}}{e_0} , \frac{L_{k1}}{e_1} , \frac{L_{k2}}{e_2} ,$$

kus $k = 0, 1, 2$ on komponendi indeks, ja

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} , \\ e_1 &= \sqrt{\frac{1+\beta_1^2-\beta_2^2}{1-\beta^2}} \\ e_2 &= \sqrt{\frac{1-\beta_1^2+\beta_2^2}{1-\beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.121)$$

on kolm uut pikkusühikut, millega tuleb mõõta kaldkoordi-

maate vastavatel telgedel. Näidata samuti, et e_0 võrdub x_0^1 -telje lõiguga, mille lõikab ära sellest teljest hüperboloid $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$, ja e_1, e_2 võrduvad vastavalt lõikudega, mis x_1^1 - ja x_2^1 -telgedest lõikab ära hüperboloid $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 1$.

L a h e n d u s . Üldise valemi (2.30) põhjal on

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & & & \\ \frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 1 + \frac{\beta_1^2(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)}{\beta^2} & & \\ \frac{\beta_2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta_1\beta_2(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)}{\beta^2} & 1 + \frac{\beta_2^2(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)}{\beta^2} & \\ & & & \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

Võtame 3 sündmust, mille koordinaadid 2. süsteemis on $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$. Neid sündmusi kujutavad punktid, mis asuvad kaldteljestiku telgedel teatavatel kaugustel alguspunktist; need kaugused määravadki pikkusühikud nendel telgedel. Pikkusühikute ja ühtlasi telgede suundade leidmiseks teisendame maatriksi L abil sündmuste koordinaadid 1. süsteemi. Siis saame 1. sündmuse ristkoordinaatideks L_{k0} ($k=0,1,2$), 2. sündmuse ristkoordinaatideks L_{k1} ($k=0,1,2$) ja 3. sündmuse ristkoordinaatideks L_{k2} ($k=0,1,2$). Nii on määratud kaldteljestiku telgede suunad. Pikkusühikute leidmiseks arvestame, et

$$e_0^2 = L_{k0} L_{k0} ,$$

$$e_1^2 = L_{k1} L_{k1} ,$$

$$e_2^2 = L_{k2} L_{k2}$$

(k on summeerimisindeks). Arvutamisel leiamegi siit valemid (2.121).

Arvutame nüüd x_0' -telje lõikepunkti hüperboloidiga $x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 = 1$. Lahendades selle võrrandi koos x_0' -telje võrranditega

$$x_1 = \frac{L_{10}}{L_{00}} x_0,$$

$$x_2 = \frac{L_{20}}{L_{00}} x_0,$$

leiame:

$$x_0 = L_{00},$$

$$x_1 = L_{10},$$

$$x_2 = L_{20}.$$

Need väärtused aga ongi koordinaadid sellele punktile, mis kujutab sündmust koordinaatidega (1,0,0) (teises süsteemis). Seega lõikab hüperboloid tõesti x_0' -teljest pikkusühiku. Samal viisil veendume, et ka hüperboloid $x_1'^2 + x_2'^2 - x_0'^2 = 1$ lõikab pikkusühikud x_1' - ja x_2' -teljest.

§ 12. Relativistlik kiiruste liitmine.

Ühel viisil oleme juba kiiruste liitmise valemid varem tuletanud (vt. ülesanded 1 ja 6 §-s 7, valemid (2.29) ja (2.41)). Alljärgnevalt teeme seda teisel viisil. Põhiliselt saame sel teel uuesti juba tuntud valemid, kuid neile saab anda mõnevõrra laiemat tähendust.

Olgu mingi punkti (näiteks massipunkti) liikumise kiirus mingis inertsiaalsüsteemis \vec{u} . See tähendab, et selle punkti koordinaadid x, y, z muutuvad süsteemi ajas t

kiirustega u_x, u_y, u_z mie on kiiruse \vec{u} komponentideke:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt}, \\ u_y &= \frac{dy}{dt}, \\ u_z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Vaadeldes sedasama liikumist mingi teise inertsiaalsüsteemi taustal, avaldame kiiruse komponendid vastavalt:

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'}, \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'}, \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.124)$$

Nüüd rakendame koordinaatidele Lorentzi teisendust. Võtame selle esmalt lihtsamal erijuhul (2.13), s. o. eeldades, et teine süsteem liigub esimese suhtes x -telje sihis. Differentsides x', y', z', t' , saame:

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$dy' = dy,$$

$$dz' = dz,$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Jagades dx', dy', dz' läbi dt' -ga, leiame:

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x \beta}{c}}, \\ u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u_x \beta}{c}}, \\ u'_z &= \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u_x \beta}{c}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.125)$$

Need ongi kiiruste liitmise valemid. Teisiti võib neid nimetada kiiruse teisendusvalemiteks.

Vaatleme nüüd üldist Lorentzi teisendust (2.30). Samal viisil nagu eespool leiame:

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{\vec{\beta} \vec{u} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) - \vec{v}}{1 - \frac{\vec{\beta} \vec{u}}{c}} \quad (2.126)$$

ehk

$$\vec{u}' = \frac{(\vec{u} - \vec{v}) \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} + \sqrt{1 - \beta^2} [(\vec{\beta} \times \vec{u}) \times \vec{\beta}]}{\beta^2 (1 - \vec{\beta} \vec{u} / c)} \quad (2.127)$$

Saadud valemid (2.125) ja (2.126) või (2.127) on kooskõlas varem tuletatud valemitega (2.29) ja (2.40) või (2.41). Nimelt tuleb kolmas inertsiaalsüsteem, mis oli kõne all §-s 7, samastada praeguse käsitluse liikuva punktiga (õigemini, 3. inertsiaalsüsteemi mistahes punkt, näit. alguspunkt). Siis vastavad suurustele $\vec{\beta}$, $\vec{\beta}'$ ja $\vec{\beta}$ valemite (2.29) ja (2.40) - (2.41) suurused $\frac{\vec{u}'}{c}$, $\frac{\vec{u}}{c}$ ja $-\vec{\beta}$ valemite (2.125) ja (2.126) - (2.127). Tehes niisugused asendused, veendume kergesti mõlema valemite rühma identisuses.

Sellele vaatamata on uued valemid siiski laiemas sisuga. Kõige esmalt tuletame veel avaldise suuruse $1 - \frac{u'^2}{c^2}$ jaoks. Lähtudes valemist (2.126), saame

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(1 - \beta^2)}{\left(1 - \frac{\vec{u}\vec{\beta}}{c}\right)^2} \quad (2.128)$$

Siit on näha, et $u < c$ korral on ka $u' < c$. Kui seejuures u on ajas konstantne, siis ka u' on ajas konstantne ja me võime omistada seda liikumist mingile inertsiaalsüsteemile, mille kiirus kahe teise süsteemi suhtes on erinev. Sel juhul vastavadiks sisult meie uued kiiruste liitmise valemid täpselt endistele. Kuid uued valemid kehtivad ka laiemas mõttes. u ei tarvitse olla konstantne ega isegi väiksem valguse kiirusest. Nagu nähtub nende valemite tuletamise viisist, on kiirus \vec{u} täiesti meelevaldne. Vaadeldav liikumine ei tarvitse olla mingi masspunkti või signaali liikumine (sel juhul oleks muidugi tingimata $u \leq c$ ning $u = c$ korral ka $u' = c$), vaid võib olla seotud näiteks mingisuguste puhtgeomeetriliste vahetõdedega.

Valemist (2.128) järgneb, et $u > c$ korral on ka $u' > c$. See tähendab, et kiirus, mis mingis inertsiaalsüsteemis signaali kiiruseks olla ei saa, ei saa seda olla ka mistahes teises inertsiaalsüsteemis. Küll aga võib kiirus, mis ületab valguse kiiruse, saada mõnes teises inertsiaalsüsteemis koguni lõpmatuks.

Ü l e s a n d e d .

1. Valgus levib liikumatus keskkonnas kiirusega c/n , kus n on keskkonna murdumisnäitaja. Kui suur on valguse kiirus u keskkonnas, mis liigub kiirusega $v = \beta c$ (Fizeau' katse)?

L a h e n d u s . Võtame keskkonna liikumise suuna x -teljeks. y -telje võtame nii, et valguse levimise suund on xy -tasandis. Kui see suund moodustab x -teljega nurga α , siis on valguse kiiruse komponendid $u_x = u \cos \alpha$ ja $u_y = -u \sin \alpha$. Teisendame nad x -telje suunas kiirusega v liikuvasse süsteemi, s. o. keskkonna paigaloleku süsteemi. Siis

$$u'_x = \frac{u \cos \alpha - v}{1 - \frac{u \beta \cos \alpha}{c}},$$

$$u'_y = \frac{u \sin \alpha \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u \beta \cos \alpha}{c}}.$$

Seega

$$\frac{(u \cos \alpha - v)^2 + u^2 \sin^2 \alpha (1 - \beta^2)}{\left(1 - \frac{u \beta \cos \alpha}{c}\right)^2} = \frac{c^2}{n^2}.$$

Sellest võrrandist avaldame otsitava kiiruse:

$$\frac{u}{c} = \frac{\beta \cos \alpha \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{(1 - \beta^2) \left[\frac{1}{n^2} - \beta^2 \left(\sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{n^2}\right)\right]}}{1 - \beta^2 \left(\sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{n^2}\right)} \quad (2.129)$$

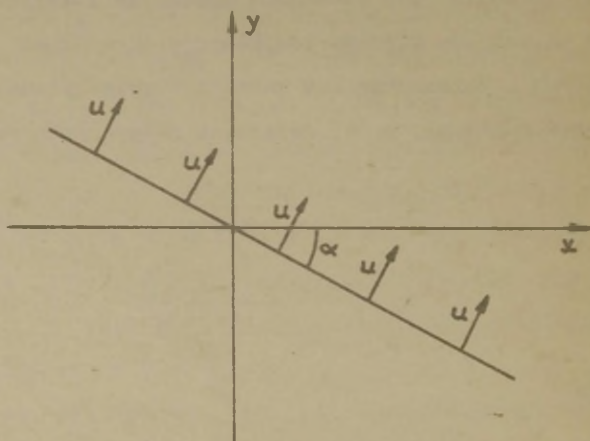
Juhul kui $\alpha = 0$,

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \beta/n} \quad (2.130)$$

ning $\beta \ll 1$ korral

$$u = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (2.131)$$

2. Pikk peenike varras on antud inertsiaalsüsteemis liikumatu. Teine varras, mis moodustab esimesega terava nurga α , liigub kiirusega u iseendaga ristiolevas suunas (vt. joon. 37). Kiiruste teisendamise teel leida varras-tevaheline nurk α' teises inertsiaalsüsteemis, mis liigub esimese varda sihis kiirusega $v = \beta c$.



Joonis 37.

L a h e n d u s . Selles ülesandes on meil tegemist kahe kiirusega: üks on teise varda kiirus u , teine on varraste lõikepunkti kiirus V piki esimest varrast. Mõlema kiiruse vahel kehtib ilmselt seos

$$V = \frac{u}{\sin \alpha} \quad (2.132)$$

(vt. ka 4. ülesanne §-s 8). Kui suuname x-telje piki esimest varrast vasakult paremale ja varraste tasandi võtame xy-tasandiks, siis on teise varda kiiruse komponendid $u_x = u \sin \alpha$, $u_y = u \cos \alpha$. Teisendame kiirused \vec{u} ja V teise inertsiaalsüsteemi. Saame valemid

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{u \sin \alpha - v}{1 - \frac{u \beta \sin \alpha}{c}}, \\ u'_y &= \frac{u \cos \alpha \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u \beta \sin \alpha}{c}} \end{aligned} \right\} \quad (2.133)$$

ja

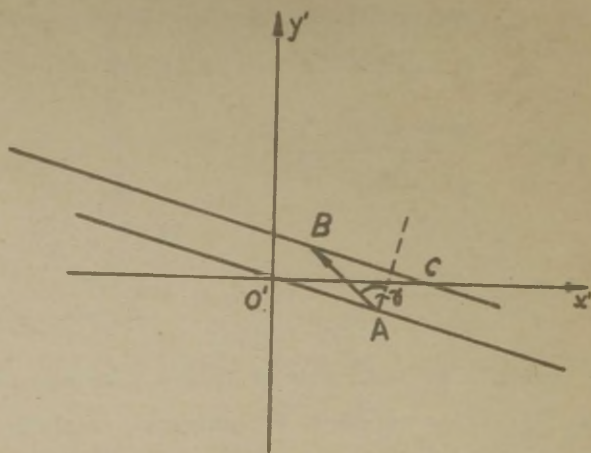
$$v' = \frac{u - v \sin \alpha}{\sin \alpha - \frac{u \beta}{c}} \quad (2.134)$$

Vaatleme lähemalt varda liikumist teises inertsiaalsüsteemis (joon. 38). Olgu varraste lõikumispunkt alghetkel koordinaadistiku alguspunktis. 2. varda mingi punkt A asetsegu alguspunktist sel hetkel kaugusel $\overline{OA} = l$, kusjuures OA moodustab x'-teljega otsitava nurga α' . Punkti A koordinaadid on seega alghetkel $x'_A = l \cos \alpha'$, $y'_A = -l \sin \alpha'$. Mingil teisel hetkel t' jõuab see punkt, liikudes kiirusega \vec{u}' , asendisse B. Punkti B koordinaadid on seega (2.133) põhjal

$$\left. \begin{aligned} x'_B &= l \cos \alpha' + \frac{(u \sin \alpha - v)t'}{1 - \frac{u \beta \sin \alpha}{c}}, \\ y'_B &= -l \sin \alpha' + \frac{u \cos \alpha \sqrt{1 - \beta^2} \cdot t'}{1 - \frac{u \beta \sin \alpha}{c}} \end{aligned} \right\} \quad (2.135)$$

Varraste lõikumispunkt aga, liikudes kiirusega v' , jõuab samal hetkel t' punktisse C , mis asub x' -teljel koordinaadiga

$$x'_C = \frac{u - v \sin \alpha}{\sin \alpha - \frac{u\beta}{c}} \cdot t' \quad (2.136)$$



Joonis 38.

Et 2. varda kõigi punktide kiirused on võrdsed, jääb ta kogu aeg iseendaga paralleelseks; järelikult moodustab sirgjoon BC x' -teljega sama nurga α' nagu OA .

See tähendab, et

$$\tan \alpha' = - \frac{y'_B}{x'_B - x'_C}$$

Siit valemite (2.135) ja (2.136) järgi leiame:

$$\tan \alpha' = \frac{\sin \alpha - \frac{u\beta}{c}}{\cos \alpha \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.137)$$

Tuleb veel märkida, et teises inertsiaalsüsteemis ei liigu teine varras iseendaga ristiolevas summas. Moodustagu kiirus \vec{u}' varda normaaliga nurga γ (joon. 38). Siis on

$$\gamma = \alpha' - \arctan \frac{u'_x}{u'_y}.$$

Arvutades leiame:

$$\tan \gamma = \frac{\beta \sqrt{1-\beta^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \cos \alpha}{\left(1 - \frac{u\beta \sin \alpha}{c}\right) \left(\frac{u}{c} - \beta \sin \alpha\right)} \quad (2.138)$$

Lõpuks vaatleme erijuhte.

1) Kui $u < c \sin \alpha$, siis $V < c$, seega ka $|V'| < c$.

Kuid V' võib olla ka negatiivne. Vaatleme alajuhte. Et

$$\begin{aligned} \frac{d \tan \alpha'}{d\beta} &= \frac{\beta \sin \alpha - \frac{u}{c}}{\cos \alpha (1-\beta^2)^{3/2}} = \\ &= - \frac{\beta \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{(1-\beta^2) \left(1 - \frac{u\beta \sin \alpha}{c}\right) \tan \gamma}, \end{aligned} \quad (2.139)$$

siis on

$$\beta = \frac{u}{c \sin \alpha}$$

puhul $\frac{d \tan \alpha'}{d\beta} = 0$ ning $\gamma = 90^\circ$. Sel juhul on ka $V' = 0$.

Varras liigub seega teises inertsiaalsüsteemis iseenda sihis, nii et tema lõikepunkt esimese vardaga on liikumatu ja tema kiirus on tema normaaliga risti. Ühtlasi on nurk α' sel juhul minimaalse väärtusega. Selle väärtuse leiame valemist

(2.137) võrdseks

$$\tan \alpha'_{\min} = \tan \alpha \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (2.140)$$

Kui aga

$$\beta \geq \frac{u}{c \sin \alpha},$$

siis

$$V' \leq 0$$

ja $\beta > 0$ korral

$$\tan \gamma \leq 0,$$

kuna $\beta < 0$ korral

$$\tan \gamma < 0.$$

See tähendab, et kui $\beta < 0$, siis $\gamma < 0$,

kui $0 < \beta < \frac{u}{c \sin \alpha}$, siis $0 < \gamma < 90^\circ$, ja kui $\beta > \frac{u}{c \sin \alpha}$,

siis $\gamma > 90^\circ$.

Väärrib märkimist veel asjaolu, et

$$\beta = \frac{2u \sin \alpha / c}{\sin^2 \alpha + \frac{u^2}{c^2}}$$

korral on $\alpha' = \alpha$.

2) Kui $u > c \sin \alpha$, siis $V > c$, seega ka $V' > c$.

Sel juhul on (2.139) põhjal alati

$$\frac{d \tan \alpha'}{d \beta} < 0,$$

s. o. $\beta > 0$ korral $\alpha' < \alpha$ ja $\beta < 0$ korral $\alpha' > \alpha$.

Tähtsamaks alajuhuks on siin

$$\beta = \frac{c \sin \alpha}{u}.$$

Siis on $V' \rightarrow \infty$. See tähendab, et vardad on selles süsteemis paralleelsed ($\alpha' = 0$), nii et teataval hetkel ühtivad nad samaaegselt kogu ulatuses. Kui

$$\beta \geq \frac{c \sin \alpha}{u}, \text{ siis } V' \leq 0 \text{ ja } \alpha' \leq 0.$$

Erijuhul

$$\beta = \frac{2u \sin \alpha / c}{\sin^2 \alpha + \frac{u^2}{c^2}}$$

on $\alpha' = -\alpha$. γ jaoks saame valemist (2.138), et kui $\beta > 0$, siis $\gamma > 0$ ja kui $\beta < 0$, siis $\gamma < 0$.

3. Näidata, et suurus

$$S = \frac{t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (2.141)$$

kus \vec{r}, t on mistahes sündmuse koordinaadid ja \vec{u} mistahes kiirus, on invariantne Lorentzi teisenduste puhul.

L a h e n d u s . Näitame seda kahel viisil. Esiteks võib rakendada Lorentzi teisendusvalemeid koos kiiruse teisendusvalemitega. Et S ilmselt ei sõltu ruumilise koordinaatteljestiku valikust, võib kasutada teisendusvalemeid (2.13) ja (2.125). Siis leiame:

$$\begin{aligned} S' &= \frac{t' - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{r}'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \\ &= \frac{(t - \frac{\beta x}{c})(1 - \frac{u_x \beta}{c}) - \frac{1}{c^2} [(u_x - v)(x - vt) + (1 - \beta^2)(y u_y + z u_z)]}{(1 - \beta^2) \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Lihtsustades saamegi nõutava invarianttsuse

$$S' = S.$$

Teiseks võime esitada S kujul

$$S = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{d}{dt_1} \left(t t_1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{c^2} \right),$$

kus

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}_1}{dt_1},$$

s. o. \vec{r}_1 on kiirusega \vec{u} liikuva punkti kohavektor hetkel t_1 . Et suurus

$$\frac{1}{c^2} d\vec{r}_1^2 - dt_1^2 = dt_1 \sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}$$

on invariant ja valemi (2.25) järgi $tt_1 - \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_1}{c^2}$ samuti, siis on ka S invariant.

Märgime, et $u < c$ korral on $dt_1 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ liikuva punkti omaaja diferentsiaal. Kuid S ei tarvitse olla reaalne suurus. Tõestatud väide kehtib ka imaginaarse S jaoks, s. o. $u > c$ korral.

4. Сегодня в полдень пущена ракета.
Она летит куда скорее света
И долетит до цели в семь утра
Вчера.

/С. Маршак/

Võttes valguse kiiruse väärtuseks $3 \cdot 10^5$ km/s ja eeldades, et "raketi" sihtpunkt on 153 miljardi kilomeetri kaugusel, leida, missuguse kiirusega v peab "raketiga" samas sihis liikuma inertsiaalsüsteem, milles "raketi" kiirus on lõpmatu (s. o. ta on samaaegselt stardi- ja sihtkohas). Kui suur on selles süsteemis stardi- ja sihtkoha vaheline kaugus?

L a h e n d u s . Valemist (2.128) leiame, et otsitava kiiruse määrab võrdus

$$1 - \frac{u\beta}{c} = 0,$$

kus

$$u = - \frac{425c}{87}$$

on "raketi" kiirus lähtesüsteemis. Seega

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{c}{u} = - \frac{87}{425}$$

ehk

$$v \approx -61400 \text{ km/e.}$$

Miinus tähendab seda, et see inertsiaalsüsteem liigub sihtkoha poolt stardikoha suunas. Mõlema koha vahelise kauguse selles inertsiaalsüsteemis saame kõige lihtsamalt intervalli invariantisusest:

$$l^2 - \frac{c^2 t^2}{u^2} = l'^2,$$

kus $l = 153 \cdot 10^9$ km ja

$$l' = l \sqrt{1 - \beta^2}$$

on otsitav kaugus teises süsteemis. Arvutades leiame:

$$l' = 149,76 \cdot 10^9 \text{ km.}$$

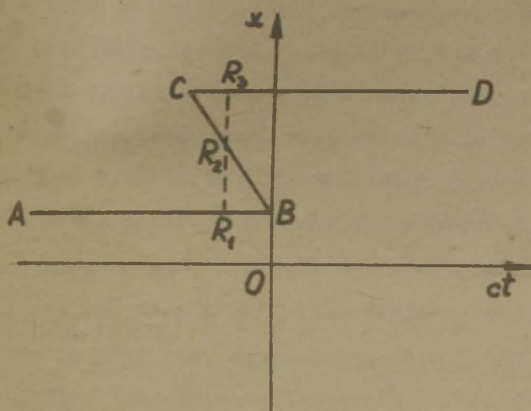
5. Eelmises ülesandes vaatlesime fantastilise ülevalguselise "raketi" liikumist. Sellise "raketi" iseärasuseks on see, et ta võib liikuda sobivalt valitud inertsiaalsüsteemis tagurpidi ajas. See järeldub õieti juba sellest, et sündmuste ajaline järjestus ei ole ruumisarnase intervalli puhul invariantne. Teisest küljest, kui vaadeldav liikumine on ühtlane (nagu varraste lõikepunkti liikumine 2.ülesandes), siis ei ole mingit vajadust kujutleda liikumist ajas tagurpidisena, sest samaväärselt võib teda pidada ruu-

miliselt vastassuunaliseks. Oluline on ju ainult see, et üleminekul vastavalt valitud inertsiaalsüsteemi muutub kiiruse märk. Nii on kiirusega U 2. ülesandes. Kui $u > c \sin \alpha$ ja $v > \frac{c^2 \sin \alpha}{u}$, siis $v' < 0$, s. o. lõikepunkt liigub paremalt vasakule. Võib ju ütelda ka nii, et ta liigub endiselt vasakult paremale, kuid ajas tagurpidi. Ent selleks ei ole mingit vajadust ega paku see väide sisuliselt midagi enam võrreldes ruumis vastassuunalise ning ajas päripäidise liikumisega.

Olukord on aga teistsugune mitteühtlase liikumise puhul. Nii oli see eelmises ülesandes "raketiga". Algul on "rakett" stardikohas paigal, seejärel hakkab "täna" liikuma ja jõuab sihtkohta "eile". See on juba sõna tõsisel mõttes liikumine, mis kulgeb ajas tagurpidi. Tekib küsimus, kuidas seda mõista ja milliseid järeldusi see endaga kaasa toob. Mis sellest, et rakett on fantastiline. Ülevalguseline liikumine iseenesest ei ole fantastiline nähtus. Ainus asjaolu, mida ei tohi unustada, on see, et niisugune liikumine ei saa vahendada põhjuslikku seost, s. o. ülevalguseline kiirus ei saa olla signaali kiiruseks.

L a h e n d u s . Pöördume graafilise esituse poole. Joonisel 39 on joon ABCD "raketi" maailmajooneks. Algul on rakett liikumatu (joon AB), siis hakkab alghetkel liikuma (joon BC), ja nimelt nii, et saabub sihtkohta enne starti (punkti C ajakoordinaat on väiksem punkti B ajakoordinaadist) ja jääb sihtkohas uuesti paigale (joon CD). Sellest esitusest järgneb, et ajas tagurpidise liikumise väl-

tel on "rakett" olema samaaegselt kolmes kohas korraga (punktid R_1 , R_2 , R_3). Liikumine on seega järgmine. Algul on "rakett" stardipaigas liikumatu. Siis äkki tekib siht-



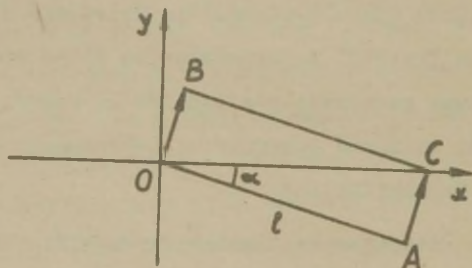
Joonis 39.

kohas tema teisik ("rakett" juba "saabus" sinna), mis samas jaguneb omakorda kaheks. Üks jääb paigale, teine aga hakkab liikuma (joon CB) ülevalguselise kiirusega stardipaiga suunas, kus "raketi" 1. eksemplar on alles stardi otel paigal. Sinna parajasti stardihetkel jõudnud, häviatab see tagurpidi liikunud eksemplar 1. eksemplari ja hävib ise (toimub "annihilatsioon").

6. Eelmises ülesandes vaatlesime fantastilise "raketi" liikumist ajas tagurpidi. Kuid kahe teineteise suhtes liikuva varda lõikepunkti ülevalguseline liikumine ei ole fantastiline. Näidata, et sel juhul tõesti leiab aset lõikepunkti kolmekordistumine ning järgnev annihilatsioon.

L a h e n d u s . Esimesest pilgust näib, et see ei ole võimalik, sest kaks sirgjoont lõikuvad ainult ühes punktis. Kuid siin tuleb arvestada seda, et absoluutselt (s. o. inertsiaalsüsteemi valikust sõltumatult) jääku kehi olemas ei ole. Kui varras liigub mingis inertsiaalsüsteemis järgalt, s. o. nii, et tema mistahes kahe punkti vaheline kaugus jääb muutumatuks, siis ei ole see liikumine mõnes teises inertsiaalsüsteemis üldiselt enam jääk. Nii on ka meie ülesandes: kui varras on algsüsteemis sirge, siis teises on ta kõver ja võib lõikuda teise vardaga enam kui ühes punktis.

Niisugune efekt esineb küll ainult mitteühtlase liikumise puhul. 2. ülesandes meil sellega veel tegu ei olnud. Käesolevas ülesandes on otstarbekas vaadelda lõpliku pikkusega varrast, mis on algul paigal, siis hakkab konstantse kiirusega liikuma, kuni jääb uuesti paigale. Olgu (joon.40) varras OA kuni alghetkeni paigal nii, et tema üks ots on koordinaadistiku algpunktis. Kui varda pikkus on $\overline{OA} = l$ ja



Joonis 40.

ta moodustab x-teljega nurga α , siis on tema teise otsa koordinaadid $(l\cos\alpha, -l\sin\alpha)$. Alghetkel hakkab varras

liikuma iseendaga ristiolevas suunas kiirusega \vec{u} , mille komponendid on seega

$$u_x = u \sin \alpha,$$

$$u_y = u \cos \alpha,$$

ja hetkel

$$\frac{ltan\alpha}{u}$$

jäab uuesti seisma, nii et tema otste koordinaadid sel hetkel on $(l \sin \alpha \tan \alpha, l \sin \alpha)$ ja $(l \cos^2 \alpha, 0)$ (punktid B ja C). Varda lõikepunkt x-teljega liigub kiirusega

$$V = \frac{u}{\sin \alpha},$$

kusjuures eeldusel, et $\frac{u}{c} > \sin \alpha$, on $V > c$.

Vaatleme nüüd varda liikumist teises inertsiaalsüsteemis, mis liigub esimese suhtes x-telje positiivses suunas kiirusega v , kusjuures

$$v > \frac{c^2 \sin \alpha}{u},$$

mistõttu lõikepunkti saabumine selles süsteemis punktisse C toimub hetkel

$$\frac{\frac{ltan\alpha}{u} - \frac{vl}{c^2 \cos \alpha}}{\sqrt{1-\beta^2}} = - \frac{\beta l}{c \cos \alpha \sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{c \sin \alpha}{u \beta}\right) < 0,$$

s. o. enne kui lõikepunkt hakkab üldse alguspunkti liikuma.

Selleks et varda liikumist teises inertsiaalsüsteemis täielikult kirjeldada, tuleb vaadelda tema üksikute punktide liikumist. Fikseerime punkti, mille kaugus alguspunktist alghetkel on $l\xi$, kus ξ on parameeter, mille väärtused on vahemikus $0 \leq \xi \leq 1$. Selle punkti liikumis-

võrrandid on 1. inertsiaalsüsteemis järgmised:

1) kui $-\infty < t \leq 0$, siis

$$x = l\xi \cos\alpha,$$

$$y = -l\xi \sin\alpha;$$

2) kui $0 \leq t \leq \frac{ltan\alpha}{u}$, siis

$$x = l\xi \cos\alpha + ut \sin\alpha,$$

$$y = -l\xi \sin\alpha + ut \cos\alpha;$$

3) kui $t > \frac{ltan\alpha}{u}$, siis

$$x = l \cos^{-1}\alpha (\xi \cos^2\alpha + \sin^2\alpha),$$

$$y = l(1-\xi) \sin\alpha.$$

Läheme üle nüüd 2. inertsiaalsüsteemi. Rakendades

Lorentzi teisendusi, saame näiteks $-\infty < t \leq 0$ korral:

$$t' = \frac{t - \frac{v l \xi \cos\alpha}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$x' = \frac{l\xi \cos\alpha - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$y' = -l\xi \sin\alpha.$$

Elimineerides siit t , leiame:

$$1) \text{ kui } -\infty < t' \leq -\frac{\beta l \xi \cos\alpha}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (2.142)$$

siis

$$\left. \begin{aligned} x' + vt' &= l\xi \cos\alpha \sqrt{1-\beta^2}, \\ y' &= -l\xi \sin\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.143)$$

Analoogilisel viisil leiame kahel ülejäänud juhul:

2) kui

$$\text{siis } -\frac{\beta l \xi \cos \alpha}{c \sqrt{1-\beta^2}} \leq t' \leq -\frac{\beta l \xi \cos \alpha}{c \sqrt{1-\beta^2}} + \frac{l \tan \alpha \left(1 - \frac{\beta u \sin \alpha}{c}\right)}{u \sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.144)$$

$$\left. \begin{aligned} x' + vt' &= \frac{l \xi \cos \alpha \sqrt{1-\beta^2} + u(1-\beta^2)t' \sin \alpha}{1 - \frac{\beta u \sin \alpha}{c}}, \\ y' &= \frac{l \xi \left(\frac{\beta u}{c} - \sin \alpha\right) + ut' \cos \alpha \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta u \sin \alpha}{c}}; \end{aligned} \right\} \quad (2.145)$$

3) kui

$$t' \geq -\frac{\beta l \xi \cos \alpha}{c \sqrt{1-\beta^2}} + \frac{l \tan \alpha \left(1 - \frac{\beta u \sin \alpha}{c}\right)}{u \sqrt{1-\beta^2}}, \quad (2.146)$$

$$\text{siis } \left. \begin{aligned} x' + vt' &= \frac{l \sqrt{1-\beta^2}}{\cos \alpha} (\xi \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha), \\ y' &= l(1-\xi) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.147)$$

Nendest valemitest me näeme, et varda eri punktid alustavad ja lõpetavad liikumist eri aegadel. Kõige esmalt hakkab liikuma varda parempoolne ots, jõudes lõppasendisse samuti esimesena. Mida lähemal alguspunktile aga asetseb mõni varda punkt, s. o. mida väiksem on ξ , seda hiljem algab ja lõpeb tema liikumine. Seetõttu muutub varras kõveraks ning mööda varrast kulgeb x -telje negatiivses suunas deformatsioonilaine. Niiviisi kujunebki selline olukord, kus varda lõikepunkt x -teljega, mis alghetkel on alguspunktis, ei jää ainsaks, vaid veel enne alghetke tekib teine lõikepunkt teises otsas, mis jaguneb seal kaheks. Üks jääb paigale, teine aga liigub mööda x -telje negatiivses suunas,

kuni kaob koos esmase lõikepunktiga. Valemitest (2.142) - (2.147) on kerge tuletada varda kuju iga hetke jaoks.

Olgu kõigepealt märgitud, et kõneldes siin varda punktide liikuma hakkamisest ja nende liikumise lõppemisest teatavas lõppasendis ei arvesta meie nende kiiruse x -komponendi osa, mis on võrdne $-v$ -ga, sest see osa on kõigile punktidele ühine ja on ajast sõltumatu. Varda kuju sellest komponendist seega ei sõltu. Vastavalt sellele on varda punktide x -koordinaadiks valemites (2.143), (2.145) ja (2.147) võetud suurus $x' + vt'$.

Et nimetatud valemites koordinaadid $x' + vt'$ ja y' avalduvad parameetri ξ lineaarsete funktsioonidena, kujutab iga valem sirgjoont. Kuid varras tervikuna ei ole sirge, vaid on murdjoon, mis koosneb üldiselt kolmest tükist vastavalt kolmele erineva kujuga valemile. Leiame murdekohade koordinaadid olenevalt ajast. Esimesele murdekohale vastab ξ väärtus

$$\xi = - \frac{ct' \sqrt{1-\beta^2}}{\beta l \cos \alpha},$$

sest siis kehtivad korruga valemid (2.143) ja (2.145).

Neist saame murdekoha koordinaadid:

$$x' + vt' = - \frac{c(1-\beta^2)t'}{\beta},$$

$$y' = \frac{c \tan \alpha \sqrt{1-\beta^2} \cdot t'}{\beta}.$$

Teisele murdekohale vastab ξ väärtus

$$\xi = - \frac{ct' \sqrt{1-\beta^2}}{\beta l \cos \alpha} + \frac{c \tan \alpha \left(1 - \frac{\beta u \sin \alpha}{c}\right)}{u \beta \cos \alpha},$$

mille juures kehtivad korraga valemid (2.145) ja (2.147).

Nad annavad teise murdekoha koordinaadid:

$$x' + vt' = -\frac{c(1-\beta^2)t'}{\beta} + \frac{cl\sqrt{1-\beta^2} \tan\alpha}{u\beta},$$

$$y' = \frac{ct'\sqrt{1-\beta^2} \tan\alpha}{\beta} + \frac{ltan\alpha}{\cos\alpha} \left(1 - \frac{c\sin\alpha}{\beta u}\right).$$

Kumbki murdekoht eksisteerib aga piiratud aja vältel. Esimene murdekoht üksi eksisteerib ajavahemikus

$$t'_1 \equiv -\frac{\beta l \cos\alpha}{c\sqrt{1-\beta^2}} < t' < -\frac{\beta l}{c \cos\alpha \sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{c\sin\alpha}{u\beta}\right) \equiv t'_2,$$

mõlemad murdekohad ajavahemikus

$$t'_2 \equiv -\frac{\beta l}{c \cos\alpha \sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{c\sin\alpha}{u\beta}\right) < t' < 0 \equiv t'_3,$$

ja teine üksi ajavahemikus

$$t'_3 \equiv 0 < t' < \frac{ltan\alpha \left(1 - \frac{\beta u \sin\alpha}{c}\right)}{u\sqrt{1-\beta^2}} \equiv t'_4$$

Kummagi murdekoha eksisteerimise kestus on seega ühesugune:

$$t'_4 - t'_2 = t'_3 - t'_1 = \frac{\beta l \cos\alpha}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

t'_2 on ilmselt see hetk, mil varda parempoolne ots jõuab x' -teljele. Et $t'_2 < 0$, on sel hetkel vasakpoolne ots alles paigal. Samal hetkel t'_2 jaguneb varda uus lõikepunkt x' -teljega parempoolses otsas kaheks; üks jääb sinnasamasse paigale, teine liigub mööda x' -telge alguspunkti suunas ja jõuab sinna hetkel $t'_3 = 0$, annihileerudes koos esmase lõikepunktiga.

Joonisel 41 on näidatud varda asend ja kuju üheteist-

kümmel hetkel võrdsete ajavahemike tagant, võttes $\alpha = 30^\circ$, $\frac{u}{c} = \frac{5}{6}$ ja $\beta = \frac{4}{5}$. Liikumise algul, s. o. hetkel t'_1 , on varda asend OA; liikumise lõppedes, s. o. hetkel t'_4 , on asendiks DA₄; vahemik $t'_4 - t'_1$ on joonisel jagatud 10 võrdeeks vahemikuks ja varda asendeid iga niisuguse vahemiku tagant kujutavad joonisel mardjooned OB₁A₁, OB₂A₂, OB₃A₃, OB₄A₄, OB₅C₅A₄, OC₄A₄, D₃C₃A₄, D₂C₂A₄ ja D₁C₁A₄.

7. Kvantmehhaanilisel lainetusvõrrandil

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \kappa^2 \psi = 0, \quad (2.148)$$

kus κ on invariantne konstant, on olemas tasalainet kujutatav lahend

$$\psi = \psi_0 \exp[i(\vec{\kappa}\vec{r} - \omega t)], \quad (2.149)$$

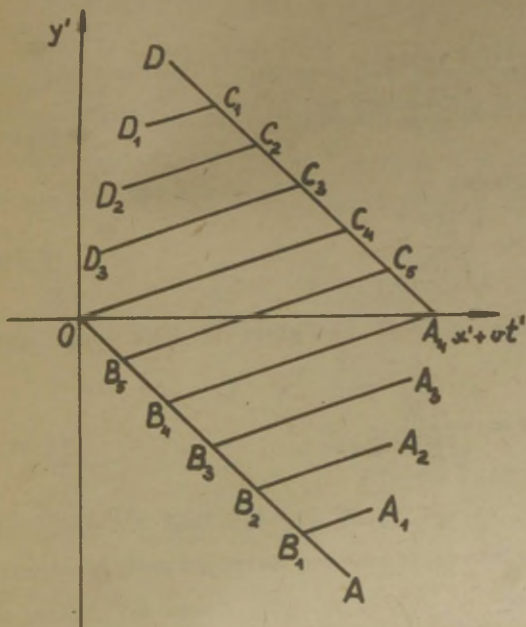
kus $\vec{\kappa}$ on lainevektor ja ω sagedus. Nende vahel kehtib seos

$$\frac{\omega}{c} = \sqrt{\kappa^2 + \kappa'^2}. \quad (2.150)$$

Avaldada selle laine faasikiirus \vec{v} lainevektori kaudu, eeldades et mõlemad vektorid on paralleelsed.

L a h e n d u s . \vec{v} ja $\vec{\kappa}$ paralleelsuse eeldus on vajalik seetõttu, et ilma selleta ei ole faasikiirus üheselt defineeritav. Tõepoolest, teataval hetkel on faas konstantne lainevektoriga ristioleval tasandil; ajaühiku möödudes on sama faas konstantne teisel tasandil, mis on samuti risti lainevektoriga. Faasikiirusena võime seetõttu vaadelda mistahes vektorit, mis ühendab esimese tasandi mingit punkti teise tasandi mingi punktiga. Selle meelevaldalla piiramiseks tulebki püstitada nõue, et faasikiirus

olgu nimetatud tasanditega risti. Alles sel teel saame üheselt defineeritud faasikiiruse.



Joonis 41.

Võttes nüüd \vec{k} suuna mõneks koordinaatteljeks, näiteks x-teljeks, saame:

$$\vec{k}\vec{z} - \omega t = kx - \omega t.$$

Siit, võttes faasi konstanteeks, saame:

$$kdx - \omega dt = 0,$$

s. o.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

See on faasikiiruse absoluutväärtus. Et aga suunaks on lainvektori suund, siis

$$\vec{V} = \frac{\omega \vec{K}}{K^2}$$

ehk, valemi (2.150) põhjal,

$$\vec{V} = \frac{c\sqrt{K^2 + \kappa^2}}{K^2} \cdot \vec{K} \quad (2.151)$$

Vastupidi, avaldades \vec{K} \vec{V} kaudu, leiame:

$$\vec{K} = \frac{\kappa \vec{V} / V}{\sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}} \quad (2.152)$$

(siin eeldame, et $\kappa \neq 0$). Valemi (2.150) abiga saame veel

$$\omega = \frac{\kappa V}{\sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}} \quad (2.153)$$

8. Näidata, et kui laine (2.149) faas $\vec{K}\vec{r} - \omega t$ on invariant, siis eelmises ülesandes defineeritud faasikiirus \vec{V} ei ole kiirus - selles mõttes, et ta ei teisene nagu kiirus, s. o. valemite (2.125) või (2.126) järgi. Erandiks on juht $\kappa = 0$. Sel juhul teiseneb \vec{V} nagu kiirus.

L a h e n d u s . Asetades faasi avaldisesse \vec{K} ja ω asemele nende avaldised valemitest (2.152) ja (2.153), saame

$$\vec{K}\vec{r} - \omega t = \frac{\kappa \left(\frac{\vec{V}\vec{r}}{V} - Vt \right)}{\sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}} \quad (2.154)$$

Faasi invariantus tähendab, et

$$\frac{\frac{\vec{V}_z}{V} - vt}{\sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}} = \frac{\frac{\vec{V}_H' z'}{V_H'} - V_H' t'}{\sqrt{\frac{V_H'^2}{c^2} - 1}}, \quad (2.155)$$

kus indeks H \vec{V}' juures viitab paralleelsuuele lainevektoriga. Asetades siia vasakusse poolde \vec{z} ja t asemel nende avaldised \vec{z}' ja t' kaudu (vt. valem (2.33)) ja võrrutades \vec{z}' ja t' kordajad mõlemal poolel, saame

$$\frac{\vec{V}_H'}{V_H' \sqrt{\frac{V_H'^2}{c^2} - 1}} = \frac{\vec{V}_z + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}_z (\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)}{\beta^2} - \frac{V^2 \vec{\beta}}{c \sqrt{1-\beta^2}}}{V \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}} \quad (2.156)$$

ja

$$\frac{V_H'}{\sqrt{\frac{V_H'^2}{c^2} - 1}} = \frac{V^2 - c \vec{V}_z \cdot \vec{\beta}}{V \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}} \quad (2.157)$$

Viimasest valemist leiame:

$$V_H' = \frac{V^2 - c \vec{V}_z \cdot \vec{\beta}}{\sqrt{V^2(1-\beta^2) + (\vec{V}_z \cdot \vec{\beta})^2 - \frac{2V^2(\vec{V}_z \cdot \vec{\beta})}{c} + \frac{\beta^2 V^4}{c^2}}} \quad (2.158)$$

Siit ja valemist (2.156) saame

$$\vec{V}_H' = \frac{(V^2 - c \vec{V}_z \cdot \vec{\beta}) \left[\vec{V}_z \sqrt{1-\beta^2} + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}_z}{\beta^2} (1 - \sqrt{1-\beta^2}) - \frac{V^2 \vec{\beta}}{c} \right]}{V^2(1-\beta^2) + (\vec{V}_z \cdot \vec{\beta})^2 - \frac{2V^2(\vec{V}_z \cdot \vec{\beta})}{c} + \frac{\beta^2 V^4}{c^2}} \quad (2.159)$$

See on lainevektoriga \vec{k} samasuunalise faasikiiruse \vec{V} teisendusvalem. Kuid ta erineb kujult üldisest kiiruse teisendusvalemist (2.126). Selles mõttes ei ole \vec{V} tõesti kiirus.

Teisest küljest on \vec{V} siiski faasikiirus. Tekkinud vastuolu on tingitud sellest, et faasikiirus ei ole defineeritav üheselt. Me võtsime \vec{V} samasuunaliseks lainevektoriga, kuid see tingimus läheb teises inertsiaalsüsteemis kaotsi, kui teisendaksime \vec{V} valemi (2.126) järgi. Vastupidi, kui ka teises inertsiaalsüsteemis nõuame, et faasikiirus oleks lainevektoriga samasuunaline, siis ei avaldu ta enam mitte (2.126) järgi, vaid (2.159) järgi.

Leiame nurga, mille $\vec{V}'_{||}$ moodustab valemi (2.126) järgi teisendatud kiirusega

$$\vec{V}' = \frac{\vec{V} \sqrt{1-\beta^2} + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V} \vec{\beta} (1-\sqrt{1-\beta^2})}{\beta^2} - c\vec{\beta}}{1 - \frac{\vec{V} \cdot \vec{\beta}}{c}}, \quad (2.160)$$

mille absoluutväärtus on

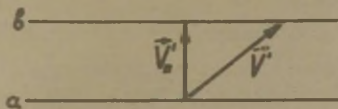
$$V' = \frac{\sqrt{V^2(1-\beta^2) + (\vec{V} \cdot \vec{\beta})^2 + c^2\beta^2 - 2c\vec{\beta} \cdot \vec{V}}}{1 - \frac{\vec{V} \cdot \vec{\beta}}{c}}. \quad (2.161)$$

Arvutades mõlema kiiruse skalaarse korrutise, leiame:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{V}'_{||}, \vec{V}') &= \\ &= \frac{(V^2 - c\vec{\beta} \cdot \vec{V})(1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}}{c})}{[V^2(1-\beta^2) + (\vec{\beta} \cdot \vec{V})^2 - \frac{2V^2\vec{\beta} \cdot \vec{V}}{c} + \frac{\beta^2 V^4}{c^2}]^{\frac{1}{2}} [V^2(1-\beta^2) + (\vec{\beta} \cdot \vec{V})^2 + c^2\beta^2 - 2c\vec{\beta} \cdot \vec{V}]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{V'_{||}}{V'}. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Et selle nurga koosinus võrdub suhtega $V'_{||}/V'$, tähendab seda, et vektori \vec{V}' projektsioon lainevektorile on $\vec{V}'_{||}$. Nii see peabki olema, sest \vec{V}' on ka faasikiirus nagu $\vec{V}'_{||}$, erineb sellest ainult suuna poolest. Joonisel 42 a on mingi konstantse faasi tasand ja b on sama faasi tasand

ajaühiku moodsuses. \vec{V}'_{\parallel} on vektor, mis on mõlema tasandiga risti, kuna \vec{V}' ühendab mõlema tasandi punkte kaldu.



Joonis 42.

Arvutades veel ristkorrutise $\vec{V}'_{\parallel} \times \vec{V}'$, leiame:

$$\sin(\vec{V}'_{\parallel}, \vec{V}') =$$

$$= \frac{c\sqrt{1-\beta^2} \left(\frac{V^2}{c^2} - 1 \right) \sqrt{V^2\beta^2 - (\vec{V}\vec{\beta})^2}}{\left[V^2(1-\beta^2) + (\vec{\beta}\vec{V})^2 - \frac{2V^2\vec{\beta}\vec{V}}{c} + \frac{\beta^2 V^4}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[V^2(1-\beta^2) + (\vec{\beta}\vec{V})^2 + c^2\beta^2 - 2c\vec{\beta}\vec{V} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.163)$$

Valemid (2.158) - (2.163) kehtivad ka siis, kui $\kappa=0$, kuigi valemid (2.152), (2.154) ega (2.155) sel juhul ei kehti. Kuid nende asemele saame

$$\left. \begin{aligned} \vec{V} &= \frac{c\vec{\kappa}}{K}, \\ \vec{K} &= \frac{\kappa\vec{V}}{c} \end{aligned} \right\} \quad (2.164)$$

ja

$$\omega = c\kappa \quad (2.165)$$

tõttu

$$\vec{\kappa}\vec{r} - \omega t = \frac{\kappa}{c} (\vec{V}\vec{r} - c^2 t). \quad (2.166)$$

Siit faasi invariantisusest leiame:

$$\kappa'\vec{V}'_{\parallel} = \kappa \left[\vec{V} + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}\vec{\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)}{\beta^2} - \frac{c\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \quad (2.167)$$

ja

$$k' = \frac{\kappa \left(1 - \frac{V\vec{\beta}}{c}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2.168)$$

Elimineerides $\frac{\kappa}{k'}$, leiame:

$$\vec{V}'_{\parallel} = \frac{\vec{V}\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}\vec{\beta}(1-\sqrt{1-\beta^2})}{\beta^2} - c\vec{\beta}}{1 - \frac{V\vec{\beta}}{c}} \quad (2.169)$$

Sama tulemuse saame ka üldisest valemist (2.158), kui teeme seal $V=C$. Seetõttu säilitavad oma kehtivuse erijuhul $V=C$ ka kõik ülejäänud valemid.

Ent valem (2.169) on kujult identne valemiga (2.160). See tähendab, et kui $\kappa=0$ ning $V=c$, siis jääb faasisikiirus pärast teisendamist üldise kiiruste liitmise valemi (2.126) järgi ikka paralleelseks lainvektoriga. Et see nõnda on ka ainult sel erijuhul (sõltumatult kiirusest $\vec{\beta}$), näitab valem (2.163). Samast valemist aga nähtub, et kui $\vec{\beta}$ on paralleelne lainvektoriga, siis on ka \vec{V}' paralleelne lainvektoriga sõltumatult κ väärtusest.

S i s u k o r d .

Eessõna	3
Sissejuhatus	4
I peatükk. Relatiivsusteooria lähtealused	7
§ 1. Relatiivsuspriintsiip klassikalises mehhaanikas	7
§ 2. Relatiivsuspriintsiip elektrodünaamikas	13
Ülesanded	26
§ 3. Michelsoni katse	35
§ 4. Trouton-Noble'i katse	40
§ 5. Ballistiline hüpotees	44
§ 6. Relatiivsusteooria põhipostulaadid	52
II peatükk. Relativistlik kinemaatika	61
§ 7. Lorentzi teisendus	61
Ülesanded	74
§ 8. Intervall	85
Ülesanded	92
§ 9. Omaaeg	97
Ülesanded	111
§ 10. Liikuva keha pikkus	123
Ülesanded	127
§ 11. Aegruumi graafilise esitus	139
Ülesanded	148
§ 12. Relativistlik kiiruste liitmine	165
Ülesanded	169

П. Кард
СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

На эстонском языке
Тартуский государственный университет
СССР, г. Тарту, ул. Пилкооли, 18
Vastutav toimetaja R. Lias
Korrekter E. Oja

=====

TRÜ rotaprint 1971. Paljundamisels antud 17.XII 1971. Trükipoogmaid 12,13. Ringtrükipoogmaid 11,28. Arvestuspoogmaid 8,82. Trükiarv 400.Paber 30x42. 1/4. MB 07646. Tell. nr. 1094.

Hind 60 kop.