OSKAR PÄRLI

ALGEBRA ÜLESANNETE KOGU

II

KESKKOOLI II KLASSILE

NOOR-EESTI KIRJASTUS TARTUS

OSKAR PÄRLI

ALGEBRA ÜLESANNETE KOGU

II

17810

NOOR-EESTI KIRJASTUS TARTUS



2-56243

A-7662

O/Ü. „Trükikoda Ed. Bergmann“, Tartus, 1933.

VII. Täisavaldiste teisendamine.

35. Sarnaste liikmete koondamine.

Seletusi. Avaldisele anname nime temas esineva viimase tehte järele; nii nim. summaks x^2+y^2, vaheks $b-mx$, korrutiseks $h^2\cdot(R-\frac{h}{3})$, jagatiseks ehk murruks $\frac{a+x}{a-x}$, astmeks $(x-a)^2$, juureks $\sqrt{x^2-a^2}$. Summat ja vahet nim. ühise nimega hulkliikmeks; teisi avaldisi nim. üksliikmeteks. Hulkliige koosneb üksikutest üksliikmetest, mis on seotud + või — märgi abil; neid üksliikmeid nim. hulkliikme liikmeteks. Liiget nim. positiivseks, kui tema ees on + märk, ja negatiivseks, kui tema ees on — märk. Hulkliikme liikmeid nim. sarnasteks, kui nad üksteisest ei erine oma tähelise avaldise poolest, küll aga võivad nad erineda oma koeffitsiendi (kordaja) ning selle ees seisva märgi poolest. Kui hulkliikmes esinevad sarnased liikmed, siis on võimalik hulkliiget lihtsustada ühendades kõik sarnased liikmed üheks liikmeks. Seda teisendamist nim. sarnaste liikmete koondamiseks.

Lihtsustada hulkliikmed koondades sarnased liikmed ja arvutada, kus antud on tähtede arvulised väärtused:

1. a) $3m+5m+9m$ c) $2x+6x+x+7x$
b) $4ab+7ab+8ab$ d) $5n+9n+12n+7n$

2. a) $K-3m-5m-10m$; $K=20$; $m=\frac{2}{3}$.
b) $A-4x-6x-7x$; $A=10$; $x=0{,}5$.
c) $A-9ab-4ab-ab$; $A=40$; $a=0{,}5$; $b=3$.
d) $P-8nx-5nx-7nx$; $P=100$; $n=9$; $x=\frac{5}{6}$.

3. a) $8m - 2m$; $m = 2{,}5$.
b) $9k - 4k$; $k = 0{,}66$.
c) $4{,}3ab - 1{,}8ab$; $a = 0{,}4$; $b = 7$.
d) $3{,}4x^2 - 0{,}9x^2$; $x = 2$.

4. a) $-15a + 21a$
b) $-8b + 5b$
c) $6am - 9am$
d) $-9u^2 + 2u^2$

5. a) $B + 5m - 5m$
b) $N - 1{,}7n^2 + 1{,}7n^2$
c) $N - 8x^3 + 8x^3$
d) $P - 9uv + 9uv$

6. a) $3xy^2 - 3xy^2$
b) $-4c^2xy + 4c^2xy$
c) $-\frac{1}{3}rh + \frac{1}{3}rh$
d) $1{,}8uv - 1{,}8uv$

7. a) $x - a + 4a$
b) $3m + 5b - 9b$
c) $a^2 + 8c^2 - 2c^2$
d) $b^2 - 8x^2 + 7x^2$

8. a) $6n + 8a + 5a + a + 6a$
b) $9a - 10v - 4v - v - 7v$
c) $m^2 - 5c^2 - 8c^2 - 7c^2 - c^2$
d) $4ab + ab + 6ab + 8ab$

9. a) $4m + 8m - 9m - 6m + 7m$; $m = 1{,}25$.
b) $5a - 8a + 2a + 3a - a$; $a = \frac{1}{3}$.
c) $N + 7c - 11c + 8c + 5c - 5c$; $N = 50$; $c = 3{,}7$.
d) $N - 28x - 17x + 23x + 19x - x$; $N = 2$; $x = 0{,}25$.

10. a) $ac + bc - 6bc + 5ac + 2ac$; $a = 0{,}5$; $c = 1{,}5$; $b = 0{,}4$.
b) $mx - 4nx + 2nx - 3mx + 8nx$; $m = 3{,}5$; $x = 1{,}5$; $n = 2$.
c) $5xy + 6yz - 8xy + yz + 7xy$; $x = \frac{4}{5}$; $y = 2\frac{1}{2}$; $z = \frac{4}{7}$.
d) $4ab - 7an + 5ab - an - 3ab$; $a = 6$; $b = \frac{5}{4}$; $n = \frac{2}{3}$.

11. a) $x^2 - 7x + 10 + 3x^2 + 6 - 4x^2 + 15x - 32$; $x = 4$.
b) $6b^2 + 11b - 17 - 5b^2 - 2b - 8 + b^2 - 9b - 7$; $b = 3{,}5$.
c) $81y^2 + 16y + 45 + 19y^2 - 59y + 66 - 57y - 11$; $y = 0{,}1$.
d) $17z - 23 - 2z^2 - 5z^2 + 12z + 23 - 23z + z^2$; $z = \frac{2}{3}$.

12. a) $2x^2 - 1{,}7x - 4{,}1 + 3{,}9x - 3{,}6x^2 - 2{,}8 - 0{,}2$
b) $5a^2 + 4{,}6a + 1 - 3{,}1a^2 + 1{,}5a + 7{,}8 - 0{,}9a - 1{,}9a^2 - 1$
c) $nx^2 + 2px + q - 3nx^2 + 2q + 3nx^2 - px - 2q$
d) $ax^2 - bx + 2c - 6c + 4bx + 5c + 2bx$

36. Üksliikmete liitmine.

Meeldetuletuseks: Et liita positiivset arvu, tuleb liita tema absoluutne väärtus; et liita negatiivset arvu, tuleb lahutada tema absoluutne väärtus.

13. a) $(+m)+(+n)$
b) $(+m)+(-n)$
c) $(-m)+(+n)$
d) $(-m)+(-n)$

14. a) $(+2a)+(+5a)$
b) $(+7x)+(-4x)$
c) $(-8b)+(+3b)$
d) $(-9y)+(-2y)$

15. a) $(+2ab)+(+7ab)+(-6ab)$
b) $(-4xy)+(+9xy)+(-7xy)$
c) $(+3az)+(-4ax)+(-2az)$
d) $(-bn)+(-5bm)+(+8bn)$

16. a) Liita üksliikmed: $+8u^2v; +5uv^2; +6uv^2; -4u^2v; -5u^2v.$
b) „ „ : $-7a^2r^2; +4ar; +8a^2r^2; +3ar; -5a^2r^2.$
c) „ „ : $-9bn; -2am; +7bn; +5am; -4bn.$
d) „ „ : $+3cz^2; -5b^2z; +6cz^2; -2b^2z; -9cz^2.$

17. a) Liita üksliikmed: $+5ax^3; -8a^2x^2; -ax^3; -8a^2x^2; -2ax^3.$
b) „ „ : $-9n^2; -2ny; +8n^2; +ny; +n^2.$
c) „ „ : $-4bc^2; +6b^2c; +bc^2; -3b^2c; -b^2c.$
d) „ „ : $+a^2z; -5z^3; +4a^2z; -2z^3; +3a^2z.$

Järeldus 1. *Hulkliiget võib kujutada tema üksikute liikmete algebralise summana.*

Järeldus 2. *Hulkliikme liikmeid võib ümber paigutada, kuid ikkagi nii, et nende ees seisvad märgid ikka nende ette jäävad.*

Kui hulkliikmes esineb mõni erilise tähtsusega täht, näiteks muutuja, siis on kasulik, pärastpoole möödapääsematu, korraldada hulkliige selle tähe alanevate astmete järjekorras. Niisugust valitud tähe alanevate astmete järjekorras korraldatud hulkliiget nim. polünoomiks.

37. Hulkliikmete liitmine

Meeldetuletuseks: Et liita summat, tuleb liita iga liidetav ükshaaval; et liita vahet, tuleb liita vähendatav ja lahutada vähendaja.

18. a) $n+(a+b)$
b) $n+(a-b)$
c) $(-n)+(a+b)$
d) $(-n)+(a-b)$

19. a) $n+(-a+b)$
b) $n+(-a-b)$
c) $(-n)+(-a+b)$
d) $(-n)+(-a-b$

20. a) $(a+b)+(c+d)$
b) $(a+b)+(c-d)$
c) $(a-b)+(c+d)$
d) $(a-b)+(c-d)$

21. a) $(-a+b)+(c+d)$
b) $(-a-b)+(c+d)$
c) $(-a+b)+(c-d)$
d) $(-a-b)+(c-d)$

22. a) $(-a+b)+(-c+d)$
b) $(-a+b)+(-c-d)$
c) $(-a-b)+(-c+d)$
d) $(-a-b)+(-c-d)$

23. a) $3xy+(4xy-3yz)$
b) $-5ab+(-6bc+8ab)$
c) $7mn+(-2am-5mn)$
d) $-9ax+(4ax+3bx)$

24. a) $(6mx+4ny)+(2ny-mx)$
b) $(-3ab+7bc)+(8ab-9bc)$
c) $(-2uv+4uz)+(-uz+3uv)$
d) $(am-9an)+(3am+8an)$

25. a) $(a^2+b^2)+(a^2-b^2)$
b) $(2b^2c-4c^3)+(2c^3+2b^2c)$
c) $(7xy^2-5x^2y)+(8x^2y-6xy^2)$
d) $(-4a^2y+2a^3)+(a^2y-a^3)$

26. a) $(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)$
b) $(a^2-b^2)+(b^2-c^2)+(c^2+a^2)$
c) $(t^2+u^2+v^2)+(t^2+u^2-v^2)+(t^2-u^2+v^2)$
d) $(2a^2-3ax+x^2)+(a^2+2ax+x^2)+(a^2-ax-2x^2)$

27. a) $(m^2+2m+1)+(4m^2-4m+1)+(-5m^2+10m-5)$
b) $(9v^2-11v-2)+(8v-4v^2-2)+(1+v^2+v)$
c) $6x^2-5x-2+(1+4x-2x^2)+(x-2x^2+2)$
d) $u^2+7u+4+(2u^2-5u+1)+(5u^2-2u-1)$

28. Liita hulkliikmed:

a) $2a^2+5ab-7b^2$; $-3a^2+2ab+4b^2$; $7a^2-5ab-b^2$.
b) $5a^2x-8ax^2-x^3$; $6ax^2-3a^2x+4x^3$; $2x^3-a^2x+3ax^2$.
c) $-4xy^2+9x^2y+y^3$; $2x^3-5x^2y-7y^3$; $3y^3+2x^2y-xy^2$.
d) $9u^2v-6uv^2+2v^3$; $3v^3+2uv^2-5u^2v$; $4uv^2-5v^3$.

29. Liita hulkliikmed ja arvutada nende summa tähtede antud väärtustel:

a) $14a^2u-8au^2+5u^3+7a^3$; $6au^2-2u^3-9a^2u+a^3$; $9au^2-7u^3-5a^2u-4a^3$; $a=2$; $u=0{,}5$.

b) $6u^3 + v^3 - 13u^2v - 7uv^2$; $2u^2v + 4v^3 - uv^2 - 5u^3$; $8u^2v - 3uv^2 - u^3 - v^3$; $u = 1$; $v = 4$.

c) $4m^3 + 8r^3 - 9m^2r$; $8m^3 + 8m^2r - 6mr^2 - r^3$; $2mr^2 - 3r^3 - 7m^3$; $m = 2$; $r = 5$.

d) $6ab^2 + a^3 - 4a^2b - 4b^3$; $3b^3 - 5a^3 - a^2b$; $6a^3 - 2a^2b - 3ab^2$; $a = 1$; $b = 2$.

38. Üksikliikmete lahutamine.

M e e l d e t u l e t u s e k s: Et lahutada positiivset arvu, tuleb tema absoluutne väärtus lahutada; et lahutada negatiivset arvu, tuleb tema absoluutne väärtus liita.

30. a) $(+m) - (+n)$
b) $(+m) - (-n)$
c) $(-m) - (+n)$
d) $(-m) - (-n)$

31. a) $(+7a) - (+5a)$
b) $(+7a) - (+9a)$
c) $(+7a) - (-5a)$
d) $(+7a) - (-9a)$

32. a) $(-6b) - (+4b)$
b) $(-6b) - (+8b)$
c) $(-6b) - (-4b)$
d) $(-6b) - (-8b)$

33. a) $(+5mn) - (-7mn)$
b) $(-8nx) - (+3nx)$
c) $(-4xy) - (-9xy)$
d) $(+6ay) - (+6ay)$

34. a) $(+2x^2) - (+8x^2)$
b) $(+5n^2x) - (-5n^2x)$
c) $(-mz^2) - (-az^2)$
d) $(-ay^3) - (+by^3)$

35. a) $12a - (-7a) - (-3b)$
b) $6x - (-2x) - (+4y)$
c) $9u - (+3u) - (-5v)$
d) $24a - (+19u) - (-6a)$

36. a) $6ab - (+4ac) - (+5ab) - (-ac)$
b) $8b^2c - (+5b^2c) - (-6bc^2) - (+9bc^2)$
c) $3mx - (-8ny) - (+5ny) - (+7mx)$
d) $5a^2d - (+6ad^2) - (-2a^2d) - (-ad^2)$

37. a) $6a^2b - (+4a^2b) + (+7a^2b) - (-8a^2b) + (-9a^2b)$
b) $am^2 + (-8am^2) - (+5am^2) - (-9am^2) + (+3am^2)$
c) $-4m^2x + (-10m^2x) - (-8m^2x) + (+9m^2x) - (+3m^2x)$
d) $-7ny^2 - (-12ny^2) + (+19ny^2) - (+28ny^2) + (-6ny^2)$

38. a) $-bx^2 + (-2ax) - (-9bx^2) + (+8ax) - (+15bx^2)$
b) $28an^2 - (+19an^2) - (-7av^2) + (-14an^2) + (+6av^2)$
c) $4{,}7nx + (-5{,}8an) - (+2{,}9nx) - (-6{,}5an) - (+3{,}1nx)$
d) $-7{,}3a^2u - (-3{,}8b^2v) - (+0{,}9a^2u) + (+2{,}8b^2v) + (+5{,}4a^2u)$

39. Hulkliikmete lahutamine.

Meeldetuletuseks: Et lahutada summat, tuleb lahutada iga liidetav ükshaaval; et lahutada vahet, tuleb vähendatav lahutada ja vähendaja liita.

39. a) $n-(a+b)$
b) $n-(a-b)$
c) $(-n)-(a+b)$
d) $(-n)-(a-b)$

40. a) $n-(-a+b)$
b) $n-(-a-b)$
c) $(-n)-(-a+b)$
d) $(-n)-(-a-b)$

41. a) $(a+b)-(c+d)$
b) $(a+b)-(c-d)$
c) $(a-b)-(c+d)$
d) $(a-b)-(c-d)$

42. a) $10-(a-5)$
b) $10-(5-a)$
c) $a-(a-1)$
d) $1-(1-a)$

43. a) $x-(-x+2)$
b) $x-(-x-2)$
c) $m-(m-n)$
d) $7-(6-n)$

44. a) $5ab-(3bc+2ab)$
b) $12xy-(7xy-4ay)$
c) $19am-(15am+2an)$
d) $3{,}7az-(4{,}5ax-6{,}5az)$

45. a) $(11ax+17ay)-(25ay+8ax)$
b) $(1{,}6xy-2{,}8yz)-(1{,}4xy-1{,}9yz)$
c) $(3{,}4mx-5{,}5nx)-(2{,}3mx+4{,}4nx)$
d) $(8{,}2an+3{,}7bn)-(1{,}2an-3{,}3bn)$

46. a) $4m^2-n^2-(m^2+3mn-n^2)$
b) $8u^2-4uv-(2u^2-6uv+2v^2)$
c) $a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$
d) $4x^2-4xy+y^2-(4x^2+4xy+y^2)$

47. a) $(4a-5b-c+8d)-(a+2b-c+5d)$
b) $7x+2y-4u-3v-(4u-3v+7x-5y)$
c) $2a^3-5a^2b+3ab^2-b^3-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$
d) $(8c^4-2c^2-15)-(5c^4-4c^2+9)$

48. a) Hulkliikmest $17m-28a-13b+9n$
lahutada $16a-13b-10n+13m$;
b) „ $24a+47b-35c-11d$
lahutada $-18a+47b-35c+33d$;
c) „ $5x-29y+78z+6u$
lahutada $6u-48x+86z-10y$;

d) Hulkliikmest $71r - 17s - 83t + 43u$
lahutada $-54t + 43u - 17s + 54r$.

49. a) Hulkliikmest $15ab - 28bc - 89cd + 41ad$
lahutada $24ad - 2ab - 11bc - 72cd$;

b) „ $82mn + 28pq - 74mp - 47nq$
lahutada $54mn + 28pq - 92mp - 47nq$;

c) „ $44ax - 67by + 19ay - 12bx$
lahutada $97ay + 66bx - 67by - 34ax$;

d) „ $17ab - 41pq + 91aq - 68bp$
lahutada $-12ab + 62aq + 12pq - 39bp$.

50. a) Hulkliikmest $7x^3 + 9x^2 + 3x + 8$
lahutada $5x^3 + 2x^2 + x + 1$; $x = 10$.

b) „ $6a^3 + 2a^2 + 8a + 5$
lahutada $4a^3 + 7a^2 + 3a + 9$; $a = 10$.

c) „ $4n^4 - 5n^3 + 8n - 7$
lahutada $2n^4 - 9n^3 + 5n - 3$; $n = 10$.

d) „ $5x^4 + x^2 + 8x + 3$
lahutada $4x^4 + 6x^2 + 5x + 9$; $x = 10$.

J ä r e l d u s. Algebraline liitmine seisab liidetavate juurdekirjutamises sama märkidega ja sarnaste liikmete koondamises; algebraline lahutamine seisab vähendaja juurdekirjutamises vastasmärkidega ja sarnaste liikmete koondamises.

51. a) $(7a + 5b) + (4a - c) - (2b + 3a) - (8c - 5b)$; $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{7}{8}$; $c = \frac{5}{6}$.

b) $(-9m + 2n) - (8k - 6m) + (k - 3n) + (8k + 2m)$; $k = 1{,}5$; $m = 0{,}78$; $n = 1{,}22$.

c) $(14xy - 9yz) + (17yz - 5xz) - (10xz + 6xy) - (8xy - 6xz)$; $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{3}{8}$; $z = \frac{5}{9}$.

d) $(-5au + 6av) - (4uv + 5av) + (9uv + 6au) - (5uv - av)$; $a = \frac{3}{4}$; $u = 1\frac{1}{2}$; $v = \frac{5}{8}$.

52. a) $(a^2 + b^2) - (c^2 - a^2) - (c^2 - b^2) + (a^2 - 2b^2)$; $a = \frac{5}{6}$; $c = \frac{3}{8}$; $b = \frac{4}{9}$.

b) $(3x^2 - 4y^2) + (5z^2 - 6x^2) - (2x^2 - 5y^2) - (9z^2 + y^2)$; $x = 0{,}6$; $z = 0{,}75$.

c) $(5a^2x - 6ax^2) - (4a^2x + 3ax^2) + (2a^2x - 7ax^2) + + (6ax^2 - 3a^2x)$; $a = 1{,}2$; $x = 1{,}5$.

d) $(10a^3n - 5an^3) + (8a^2n^2 - 2an^3) - (6a^3n - a^2n^2) - - (-7an^3 + 4a^3n)$; $a = \frac{7}{9}$; $n = \frac{3}{7}$.

53. a) $x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 + y^2 - z^2) - (x^2 - y^2 + z^2) + + (x^2 - y^2 - z^2)$;

b) $2n^3 + 8p^3 + (q^3 - 2n^3 - 5p^3) - (4n^3 - 2p^3 - 3q^3) - - (-q^3 + n^3)$; $n = 0{,}5$; $p = 0{,}4$; $q = 0{,}1$.

c) $3a^2 - 4am + 2m^2 - (7a^2 - 5am + 3m^2) + (m^2 - am - 2a^2)$; $a = \frac{3}{4}$.

d) $4x^2 + 7n^2 - (13x^2 - 5nx + 8n^2) + (7nx + n^2)$; $n = \frac{3}{4}$; $x = \frac{2}{3}$.

40. Üksliikmete korrutamine.

Meeldetuletuseks: Kahe arvu korrutamisel annavad ühesugused märgid pluss, isesugused märgid — miinus.

54. a) $(+4) \cdot (+7)$
b) $(-5) \cdot (+29)$
c) $(+7) \cdot (-19)$
d) $(-11) \cdot (-34)$

55. a) $(-1{,}5) \cdot (-2{,}8)$
b) $(+1{,}2) \cdot (-37)$
c) $(-4{,}8) \cdot (+0{,}25)$
d) $(+2{,}8) \cdot (+9{,}9)$

56. a) $(+\frac{5}{6}) \cdot (-\frac{9}{10})$
b) $(-\frac{7}{12}) \cdot (-\frac{9}{14})$
c) $(+2\frac{2}{3}) \cdot (+2\frac{1}{4})$
d) $(-3\frac{1}{5}) \cdot (+4\frac{3}{8})$

Seletuseks: $a^5 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{5+2} = a^7$.

Et korrutada sama aluse astmeid, tuleb astmenäitajad liita.

57. a) $a^3 \cdot a^6$
b) $a^4 \cdot a^2$
c) $x^5 \cdot x^5$
d) $x \cdot x^4$

58. a) $b^2 \cdot b \cdot b^5$
b) $c^3 \cdot c^2 \cdot c^4$
c) $y^6 \cdot y^4 \cdot y$
d) $v \cdot v^3 \cdot v^5$

59. a) $m^3 \cdot m^5 \cdot m$
b) $n \cdot n^2 \cdot n^4$
c) $a^4 \cdot a \cdot a^3$
d) $x \cdot x^3 \cdot x^3$

Meeldetuletuseks:

1) Et korrutisega korrutada mõnda arvu, tuleb korrutada iga teguriga järkjärgult, s. t. seda arvu tuleb korrutada esimese teguriga,

tulemust korrutada teise teguriga, uut tulemust kolmanda teguriga j. n. e.

2) Korrutis ei olene tegurite järjekorrast.

3) Mitme arvu korrutamisel võib tegureid rühmitada mis tahes rühmadeks, leida iga rühma korrutis eraldi ja saadud korrutised isekeskis korrutada.

60. a) $6a \cdot 9x$
b) $(-7b) \cdot 4c$
c) $(+9x) \cdot (-5y)$
d) $(-1{,}5m) \cdot (-6n)$

61. a) $3a \cdot 2c \cdot 4{,}5b$
b) $8x \cdot 4y \cdot 11z$
c) $9a \cdot 25x \cdot 4y$
d) $3m \cdot 7n \cdot 19x$

62. a) $8a^2b \cdot 15ab^2$
b) $18nx \cdot 15nx^2y$
c) $11ab^2c^3 \cdot 26a^2b$
d) $15x^2y \cdot 24xy^2z$

63. a) $(-1{,}7am) \cdot (-10an^2)$
b) $(-5x^2y) \cdot (+4{,}6yz^2)$
c) $(+98b^2c) \cdot (+1{,}5bx^2)$
d) $(+1{,}5ax^2) \cdot (-6{,}2xy^2)$

64. a) $(-\frac{4}{5}a^2b) \cdot (+\frac{5}{8}ab^2)$
b) $(+\frac{10}{21}m^2x) \cdot (-\frac{14}{25}mx^2)$
c) $(-1\frac{3}{4}abx) \cdot (-2\frac{2}{7}ax^2)$
d) $(+\frac{6}{7}bcz^2) \cdot (+2\frac{1}{3}bz)$

65. a) $(+4ac^2) \cdot (+\frac{3}{4}a^2x)$
b) $(-5ny^2) \cdot (-\frac{2}{5}n^2y)$
c) $(-\frac{5}{8}ab^2) \cdot (+1\frac{3}{5}an)$
d) $(+\frac{3}{5}a^2u) \cdot (-1\frac{2}{3}uv^2)$

66. a) $(1{,}4ab) \cdot (\frac{2}{7}ab^3)$
b) $(-1\frac{1}{8}am) \cdot (+0{,}42am^2)$
c) $(+3\frac{1}{7}b^3) \cdot (-1{,}4bn^2)$
d) $(-1\frac{3}{7}xu^2) \cdot (-0{,}7u^2x)$

41. Hulkliikme korrutamine üksliikmega.

Meeldetuletuseks: Et summat korrutada mõne arvuga, tuleb iga liidetavat eraldi korrutada selle arvuga ja saadud korrutised liita; et vahet korrutada mõne arvuga tuleb vähendatavat ja vähendajat eraldi korrutada selle arvuga ja esimesest korrutisest lahutada teine korrutis.

Näiteid:

$2 \cdot 342 = 2 \cdot (300 + 40 + 2) = 2 \cdot 300 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 2 = 600 + 80 + 4 = 684.$
$17 \cdot 405 = 17 \cdot (400 + 5) = 17 \cdot 400 + 17 \cdot 5 = 6800 + 85 = 6885.$
$23 \cdot 98 = 23 \cdot (100 - 2) = 23 \cdot 100 - 23 \cdot 2 = 2300 - 46 = 2254.$

67. a) $4 \cdot (x + y)$
b) $7 \cdot (m - a)$
c) $a \cdot (d - r)$
d) $n \cdot (a + u)$

68. a) $8 \cdot (x + 3)$
b) $5 \cdot (n - 1)$
c) $m \cdot (a + 2)$
d) $b \cdot (d - 5)$

69. a) $5 \cdot (2a - 7)$
b) $8 \cdot (1 + \frac{1}{2}d)$
c) $3 \cdot (2r - d)$
d) $6 \cdot (1{,}5a + x)$

70. a) $x \cdot (3y + 8)$
b) $a \cdot (4b - 1)$
c) $n \cdot (2u - s)$
d) $r \cdot (5c + a)$

71. a) $4 \cdot (2a - 5d)$
b) $1{,}5 \cdot (2r + 3a)$
c) $n \cdot (8x + 5a)$
d) $h \cdot (3r - 2b)$

72. a) $8x \cdot (5a - 7)$
b) $6a \cdot (1{,}5n + 2)$
c) $2n \cdot (5r + 3d)$
d) $\frac{1}{2}k \cdot (2n - 8p)$

73. a) $x \cdot (x - 1)$
b) $m \cdot (2m + 1)$
c) $a \cdot (2a + 5r)$
d) $r \cdot (4r - 3d)$

74. a) $2a \cdot (7a + 5)$
b) $8x \cdot (3x - 2)$
c) $2x \cdot (x^2 - 4)$
d) $\frac{1}{3}h \cdot (3h^2 - 1)$

75. a) $7 \cdot (a + b - c)$
b) $a \cdot (m - n + p)$
c) $5 \cdot (2a - 3b - 1)$
d) $x \cdot (6y - 5z + 2)$

76. a) $9b \cdot (a + 7b + 3c)$
b) $4y \cdot (3x - 5y - 2a)$
c) $9uv \cdot (-11u^2 + 15uv + 37v^2)$
d) $8a^2(0{,}5x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2)$

77. a) $-6xy \cdot (4x + 5y - xy)$
b) $8ab \cdot (1{,}5a^2 - 2{,}5a + 1{,}25b)$
c) $5ax \cdot (ax - 2a - 3x)$
d) $-4bn \cdot (-bn + 1{,}5b - 2{,}5n)$

78. a) $7z^2 (z^2 - 1{,}3z + 1)$
b) $\frac{3}{4}x^2 \cdot (x^2 + x + 1)$
c) $-1\frac{1}{3}a^2 (a^2 - a - 1)$
d) $-12v^2 \cdot (-1{,}5v^2 - v + 1)$

Järeldus. Et hulkliiget korrutada üksliikmega, tuleb hulkliikme iga liiget korrutada selle üksliikmega.

42. Hulkliikme korrutamine hulkliikmega.

Seletuseks: $(a + b - c) \cdot (m - n + p) = ?$

Oletame, et avaldis $(a + b - c)$ on arvutatud mingisugustel tähtede antud väärtustel ja tulemuseks on arv K. Siis leiame: $(a + b - c) \cdot (m - n + p) = K \cdot (m - n + p) = K \cdot m - K \cdot n + Kp$. Võtame K asemele tema esialgse avaldise $(a + b - c)$, siis saame: $(a + b - c) \cdot (m - n + p) = K \cdot m - K \cdot n + K \cdot p = (a + b - c) \cdot m - (a + b - c) \cdot n + (a + b - c) \cdot p$; järel. $(a + b - c) \cdot (m - n + p) = (am + bm - cm) - (an + bn - cn) + (ap + bp - cp)$ ehk:

$$(a + b - c) \cdot (m - n + p) = am + bm - cm - an - bn + cn + ap + bp - cp.$$

Järelikult: *Et hulkliiget korrutada hulkliikmega tuleb korrutatava kõiki liikmeid korrutada korrutaja iga liikmega.*

79. a) $(a+b)\cdot(x+y)$
b) $(a+b)\cdot(x-y)$
c) $(a-b)\cdot(x+y)$
d) $(a-b)\cdot(x-y)$

80. a) $(a+c)\cdot(x+c)$
b) $(m-n)\cdot(p+q)$
c) $(R+r)\cdot(R-r)$
d) $(d-r)\cdot(d+r)$

81. a) $(5a+6b)\cdot(4x-y)$
b) $(2m-7n)\cdot(3a-5b)$
c) $(8r-3d)\cdot(9x+4y)$
d) $(6a+b)\cdot(5c+8d)$

82. a) $(8x+3y)\cdot(x-6y)$
b) $(5x-2y)\cdot(7x+4y)$
c) $(4a-3b)\cdot(7b-5a)$
d) $(9a+2i)\cdot(7i+2a)$

83. a) $(a+b)\cdot(a^2+b^2)$
b) $(a+1)\cdot(a^2-1)$
c) $(x^2-1)\cdot(x-1)$
d) $(x^3-1)\cdot(x^2+1)$

84. a) $(n+1)\cdot(n^2-n+1)$
b) $(m+3)\cdot(m^2+2m+5)$
c) $(2R+5r)\cdot(2R^2-6Rr+3r^2)$
d) $(9a-2b)\cdot(a^2-2ab+5b^2)$

85. a) $(x+a)\cdot(x+b)$
b) $(x+2e)\cdot(x-a)$
c) $(x-4a)\cdot(x+5)$
d) $(x-5)\cdot(x-8)$

86. a) $(x+1)\cdot(x+2)$
b) $(x-1)\cdot(x-2)$
c) $(a+7)\cdot(a-5)$
d) $(a-7)\cdot(a+5)$

87. a) $(x+e)\cdot(x+c)$
b) $(x-e)\cdot(x+c)$
c) $(x+e)\cdot(x-c)$
d) $(x-e)\cdot(x-c)$

Tegurid korraldada ühe tähe alanevate astmete järjekorras ja siis korrutada:

88. a) $(x+a)\cdot(x^2+ax+a^2)$
b) $(4y-3b)\cdot(2y^2-5by+6b^2)$
c) $(7m-2a)\cdot(4m^2+9ma-a^2)$
d) $(6m+5a)\cdot(8a^2-3m^2+11am)$

89. a) $(4u-v)\cdot(3v^2-2u^2+5uv)$
b) $(7x+2r)\cdot(6rx+r^2-9x^2)$
c) $(8d-5r)\cdot(9r^2-2d^2-7dr)$
d) $(2x+4c)\cdot(3x^2+c^2-6cx)$

90. a) $(6ab+3a^2-7b^2)\cdot(-b^2+2a^2-4ab)$
b) $(5xy-9y^2-x^2)\cdot(3y^2-2x^2-3xy)$
c) $(-8ae+3a^2-e^2)\cdot(-9ae+5e^2+2a^2)$
d) $(u^2-5uv-7v^2)\cdot(4u^2-3v^2-2uv)$

91. a) $(7am + 2a^2 - m^2) \cdot (a^2 - 10m^2 + 3am)$
b) $(2a^2 - 3x^2 - ax) \cdot (2a^2 - 5x^2 - 16ax)$
c) $(6x^2 + 4e^2 - 10ex) \cdot (5ex + 3x^2 + 2e^2)$
d) $(b^2 + 4c^2 + 3bc) \cdot (5c^2 + b^2 - 3bc)$.

92. Arvutada korrutis, võttes $x = 10$! Võttes $x = 10$ arvutada enne korrutaja ning korrutis ja siis korrutada!

a) $(3x^2 + 7x + 4) \cdot (2x^3 + 8x^2 + x + 9)$
b) $(5x^2 + 8x + 1) \cdot (3x^3 + 4x^2 + 6x + 2)$
c) $(8x^2 - 5x + 7) \cdot (3x^3 - 2x^2 + 9x - 6)$
d) $(2x^2 + 7x + 6) \cdot (9x^3 + 5x^2 + x + 8)$

93. a) $(a + b) \cdot (a - b)$
b) $(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
c) $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$
d) $(a - b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

94. a) $(x + y) \cdot (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$
b) $(x + y) \cdot (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$
c) $(x - y) \cdot (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$
d) $(x - y) \cdot (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$

95. a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
b) $(x + y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y)(x^2 - xy + y^2)$
c) $2a(a - 1) + (a + 1) \cdot (a + 2) - (3a + 1)(a - 1)$
d) $u(u + 2) - 3u(u - 1) - (u + 3)(5 - 2u)$

96. a) $(d + r)(d - 2r) - 4d(d - r) - (r + d)(3r - 4d)$
b) $an(a - n) - a(a + n)(a - n) + (a - n)(a^2 + an + n^2)$
c) $(x + 2)(x - 5) + (x + 3)(x - 4) - 2x(x - 13)$
d) $2(8x + 5)(3x + 8) + 2(11x + 13)(6x - 5) - 11(6x - 5)(3x + 8)$

43. Üksliikme jagamine üksliikmega.

Meeldetuletuseks: Jagamine on antud korrutise ja ühe teguri kaudu teise teguri leidmine.

97. a) $3x : 3$
b) $am : m$
c) $uv : uv$
d) $15ab : 3b$

98. a) $(+35ax) : (-7a)$
b) $(-35ax) : (-7a)$
c) $(+8mx) : (+8mx)$
d) $(-4ae) : (+4ae)$

99. a) $m^2 : m$
b) $a^3 : a^2$
c) $n^4 : n^2$
d) $b^5 : b^2$

100. a) $n^2 : n^2$
b) $a^3 : a^3$
c) $m : m$
d) $x^5 : x^5$

101. a) $\frac{2}{7}r^2 : \frac{1}{2}r$
b) $(-21a^2) : 7a$
c) $(-7{,}5m^3) : (-1{,}5m)$
d) $4{,}6n^3 : (-2{,}3n)$

102. a) $(-24b^3) : 8b^2$
b) $22{,}2m^3 : (-3{,}7m^2)$
c) $18a^2b : 6a$
d) $(-65a^2m) : (-5am)$

103. a) $4na^2b : 5nab$
b) $(-6ax^2y) : 4axy$
c) $17kab^2 : (-1{,}7kb)$
d) $(-\frac{2}{3}\pi r^2h) : (-2\pi r)$

104. a) $(+7nb^3) : (-5b^2)$
b) $(-21x^3y) : (-3x^2)$
c) $(-8ax^3) : (+2ax^2)$
d) $\frac{4}{3}\pi R^3 : 4\pi R^2$

105. a) $(-6ax^3) : 3x$
b) $9na^3 : (-5an)$
c) $(-4{,}5kd^3) : (-0{,}5kd)$
d) $\frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{1}{3}R$

106. Küsimusi: a) Mitut tegurit tuleb jagada korrutise jagamisel antud arvuga?
b) Kuidas jagada antud arvu korrutisega?
c) Kuidas jagada sama aluse astmeid?
d) Millised toimingud tuleb teostada üksliikme jagamisel üksliikmega?
e) Kui suur on jagatis, kui jagaja võrdub jagatavaga?

44. Hulkliikme jagamine üksliikmega.

Meeldetuletuseks: 1) Et summat jagada antud arvuga, tuleb iga liidetavat eraldi jagada selle arvuga ja saadud jagatised liita.

2) Et vahet jagada antud arvuga, tuleb vähendatavat ja vähendajat eraldi jagada selle arvuga ja esimesest jagatisest lahutada teine jagatis.

107. a) $(12a - 6b + 18c) : 6$
b) $(am + an - ap) : a$
c) $(15ax - 10bx - 30cx) : 5x$
d) $(28an + 14bn + 35cn) : 7n$

108. a) $(42ab - 27bc - 18bx) : (-3b)$
b) $(-20mx + 16my - 28mz) : (-4m)$
c) $(-12abx + 24aby + 6ab^2) : 6ab$
d) $(-10ax^2 - 12{,}5abx + 15ax^3) : (-5ax)$

109. a) $(8a^2b - 6a^2c - 4a^2d) : 4a^2$
b) $(13x^4 - 10x^3 + 7x^2) : (-5x^2)$
c) $(8n^3 + 10n^4 - 12n^5) : 4n^3$
d) $(60x^4 - 47x^3 - 34x^2) : (-5x)$

110. a) $(9ax - 6bx + 3x) : 3x$
b) $(8ac - 4bc - 2c) : 2c$
c) $(-20x^4 + 10x^3 + 5x^2) : 5x^2$
d) $(-75a^5 + 45a^4 - 15a^3) : (-15a^3)$

45. Hulkliikme jagamine hulkliikmega.

111. a) $672 : 21$ c) $9821 : 23$
b) $782 : 34$ d) $13395 : 47$

112. a) $(6x^2 + 7x + 2) : (2x + 1)$; $x = 10$.
b) $(6x^2 + 17x + 12) : (3x + 4)$; $x = 10$.
c) $(8x^3 + 16x^2 + 20x + 21) : (2x + 3)$; $x = 10$.
d) $(8x^3 + 46x^2 + 76x + 35) : (4x + 7)$; $x = 10$.

113. a) $(a^2 + 8a + 15) : (a + 5)$ c) $(x^2 - 9x + 14) : (x - 2)$
b) $(n^2 + 3n - 28) : (n + 7)$ d) $(x^2 - 5x - 36) : (x - 9)$

114. a) $(x^2 + 13x + 36) : (x + 4)$ c) $(x^2 - 3x - 10) : (x - 5)$
b) $(x^2 + 5x - 24) : (x + 8)$ d) $(x^2 - 7x + 6) : (x - 1)$

115. a) $(a^3 - b^3) : (a - b)$
b) $(a^3 + b^3) : (a + b)$
c) $(a^3 - b^3) : (a + b)$
d) $(a^3 + b^3) : (a - b)$

116. a) $(x^4 - y^4) : (x - y)$
b) $(x^4 + y^4) : (x + y)$
c) $(x^4 - y^4) : (x + y)$
d) $(x^4 + y^4) : (x - y)$

46. Arvutamise abivalemeid.

117. Valemite tuletamine.

a) $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$
$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$

Tuletada see valem graafiliselt!

Sõnastus: *Kahe liikme summa ruut koosneb kolmest liikmest: esimese liikme ruut + esimese ja teise liikme kahekordne korrutis + teise liikme ruut.*

b) $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$
$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$

Tuletada see valem graafiliselt!

Sõnastus: *Kahe liikme vahe ruut koosneb kolmest liikmest: esimese liikme ruut — esimese ja teise liikme kahekordne korrutis + teise liikme ruut.*

c) $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ab-b^2$
$\mathbf{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2.}$

Tuletada see valem graafiliselt!

Sõnastus: *Kahe liikme summa korrutis nende liikmete vahega koosneb kahest liikmest: esimese liikme ruut — teise liikme ruut,* ehk *— annab nende liikmete ruutude vahe.*

d) $(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)^2=(a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)=$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
$\mathbf{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.}$

Sõnastus: *Kahe liikme summa kuup koosneb neljast liikmest: esimese liikme kuup + kolmekordne esimese liikme ruudu korrutis teise liikmega + kolmekordne esimese liikme korrutis teise liikme ruuduga + teise liikme kuup.*

e) $(a-b)^3=(a-b)\cdot(a-b)^2=(a-b)\cdot(a^2-2ab+b^2)=$
$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$
$\mathbf{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.}$

Sõnastus: *Kahe liikme vahe kuup koosneb neljast liikmest: esimese liikme kuup — kolmekordne esimese liikme ruudu korrutis teise liikmega + kolmekordne esimese liikme korrutis teise liikme ruuduga — teise liikme kuup.*

118. a) $(x+y)^2$
b) $(m+n)^2$
c) $(u+v)^2$
d) $(x+c)^2$

119. a) $23^2=(20+3)^2$
b) $31^2=(30+1)^2$
c) 45^2
d) 72^2

120. a) $(a+1)^2$
b) $(b+2)^2$
c) $(x+5)^2$
d) $(y+8)^2$

121. a) 63^2
b) 81^2
c) 54^2
d) 92^2

122. a) $(x-y)^2$
b) $(m-n)^2$
c) $(u-v)^2$
d) $(x-c)^2$

123. a) $19^2=(20-1)^2$
b) 28^2
c) 46^2
d) 79^2

124. a) $(x - 1)^2$
b) $(a - 2)^2$
c) $(c - 7)^2$
d) $(y - 10)^2$

125. a) 57^2
b) 38^2
c) 87^2
d) 99^2

126. a) $(x + c) \cdot (x - c)$
b) $(m + n) \cdot (m - n)$
c) $(u + v) \cdot (u - v)$
d) $(x + y) \cdot (x - y)$

127. a) $21 \cdot 19 = (20 + 1) \cdot (20 - 1)$
b) $22 \cdot 18$
c) $43 \cdot 37$
d) $67 \cdot 53$

128. a) $(x + 1) \cdot (x - 1)$
b) $(a + 3) \cdot (a - 3)$
c) $(b + 6) \cdot (b - 6)$
d) $(y + 4) \cdot (y - 4)$

129. a) $26 \cdot 34$
b) $76 \cdot 84$
c) $97 \cdot 103$
d) $89 \cdot 91$

130. a) $(2x + a)^2$
b) $(5b + y)^2$
c) $(7m + n)^2$
d) $(8r + s)^2$

131. a) $(10k + 5)^2$
b) $(10x + 5)^2$
c) $(10a + 5)^2$
d) $(10n + 5)^2$

132. a) $(7y + 4n)^2$
b) $(3x + 2m)^2$
c) $(5a + 3c)^2$
d) $(9u + 5v)^2$

133. a) $(1 + x)^2$
b) $(3a + 1)^2$
c) $(2n + 1)^2$
d) $(1 + 3n)^2$

134. a) $(4x - a)^2$
b) $(9y - b)^2$
c) $(a - 6x)^2$
d) $(v - 7u)^2$

135. a) $(5b - 8y)^2$
b) $(7x - 2m)^2$
c) $(9x - 2k)^2$
d) $(4u - 3v)^2$

136. a) $(1 - k)^2$
b) $(5n - 1)^2$
c) $(1 - 7e)^2$
d) $(8v - 1)^2$

137. a) $(m + \frac{1}{2})^2$
b) $(a + \frac{2}{3})^2$
c) $(n - 0{,}5)^2$
d) $(x - 1{,}5)^2$

138. a) $(a + ex)^2$
b) $(a + bi)^2$
c) $(r + ey)^2$
d) $(d + ix)^2$

139. a) $(a - bi)^2$
b) $(x - yi)^2$
c) $(a - ex)^2$
d) $(b - ey)^2$

140. a) $(5ab + 1)^2$
b) $(1 - 6xy)^2$
c) $(3 + uv)^2$
d) $(5 - mx)^2$

141. a) $(8ax + 1)^2$
b) $(1 + 5bn)^2$
c) $(7mx - 1)^2$
d) $(1 - 4an)^2$

142. a) $(4x + y) \cdot (4x - y)$
b) $(a + 5b) \cdot (a - 5b)$
c) $(9mn + 1) \cdot (9mn - 1)$
d) $(1 + 5uv) \cdot (1 - 5uv)$

143. a) $(m + x) \cdot (x - m)$
b) $(u + v) \cdot (v - u)$
c) $(a + b) \cdot (b - a)$
d) $(n - 7) \cdot (7 + n)$

144. a) $(x+2a)\cdot(2a-x)$
b) $(7x+6y)\cdot(6y-7x)$
c) $(1+3a)\cdot(3a-1)$
d) $(1-4x)\cdot(4x+1)$

145. a) $(x+y)^3$
b) $(m+n)^3$
c) $(n+1)^3$
d) $(1+a)^3$

146. a) $(y-x)^3$
b) $(m-a)^3$
c) $(n-1)^3$
d) $(1-x)^3$

147. a) $(x+5)^3$
b) $(a+2)^3$
c) $(k+4)^3$
d) $(r+7)^3$

148. a) $(u-2)^3$
b) $(v-3)^3$
c) $(6-a)^3$
d) $(8-x)^3$

47. Ülesandeid.

149. Näidata, et arvu, mis lõpeb 5-ga, ruuditakse sel teel, et tema kümneliste arvu korrutatakse sellele kümneliste arvule loomulikus arvude reas järgneva arvuga ja saadud korrutisele kirjutatakse juurde 25. Juhatuseks näide 131.

150. Ülesandes 149 juhatatud viisil leida 35^2; 75^2; 85^2; 95^2; 115^2; 245^2; 185^2 jne.!

151. Linna krunt oli ruudu kujuline, küljega x m. Tänava paremaks korraldamiseks võttis linn sellest krundist ära 3-meetrilise riba, andis aga teisest küljest sama laia riba juurde nii, et krunt sai ristküliku kujuline. Kas krunt suurenes või vähenes?

152. Metallist kuubi serv on a cm pikk; kui selle kuubi temperatuuri tõsta n^0 võrra, siis pikeneb tema serv k cm võrra. Kui palju kasvab selle kuubi ruumala niisugusel soojendamisel?

153. Suvitaja sõidab jalgrattal oma suvituskohast iga hommiku linna teenistuskohale. Harilikult sõidab ta a min. keskmise kiirusega b m minutis. Juhtub ta aga 5 min. hiljem välja sõitma, siis lisab ta kiirusele 40 m minutis juurde. Kui kaugel teenistuskohast on ta tol momendil, kui ta harilikult pärale jõudis?

154. Riik saatis välisturule ühel aastal v tonni võid ja sai keskmiselt k kr. tonnist. Järgmisel aastal oli või väljavedu teiste maade võistluse tõttu langenud t tonni võrra ja hind ka langenud b kr. tonnilt. Kui palju sai riik selle läbi teisel aastal vähem sissetulekuid?

155. T. gümnaasiumis oli 1930/31 õppeaastal n täismaksulist õpilast ja õppemaks oli k krooni aastas. Teiste koolide sulgemise tõttu suurenes selle kooli õpilaste arv 20 õpilase võrra ja õppemaksu tõsteti 23 krooni võrra aastas. Kui palju võisid suureneda gümnaasiumi sissetulekud sel teel?

156. A. kavatses ehitada maja. Ehitusekulud olid arvestatud selle järele, et maja pidi saama ruumalaga r kantmeetrit ja 1 kantmeeter ehitist pidi maksma m krooni. Hindade languse tõttu 3 kr. kantmeetrilt ehitati maja 130 kantmeetri võrra suurem. Kui palju ületasid uue kava teostamise kulud esialgu arvestatud kulud?

157. Majal oleks seinte jahenemispind minimaalne, kui vundament oleks ruudukujuline. Et see aga ilus ei ole, siis vähendati laiust 4 m ja suurendati pikkust 4 m võrra; seinte kõrgus jäi endiselt 6,5 m. Kas ruumala suurenes või väheneb ja kui palju?

158. Kaevatud tiik. Tema pind on ruudukujuline, küljega x m, kuid ruumi poolest on tal tüvipüramiidi kuju, mis vähema põhjaga pöördud allapoole. Vihmaste ilmade tõttu suurenes tiigi pind nii, et ruudu külg kasvas iga päev 10 cm võrra. Kuidas kasvab tiigi pindala päevpäevalt ühe nädala jooksul? Teha joonis ja tabel!

159. Kaevatud tiik. Tema pind on ruudu kujuline, küljega x m, kuid ruumi poolest on tal tüvipüramiidi kuju, mis vähema põhjaga pöördud allapoole. Põua ajal leiti, et ühe päevaga oli tiigi pind alanenud nii, et külg oli vähenenud 10 cm võrra ja iga päevaga väheneb külg 1 cm võrra enam kui eelmisel päeval. Kuidas väheneb tiigi pindala päevpäevalt 5 päeva jooksul? Teha joonis ja tabel!

160. Jääst on välja lõigatud 1 kantmeeter. Kui selle jää sulamisest tekkinud veest moodustada kuup, siis on vee kuubi serv c cm võrra lühem jää kuubi servast. Kui palju väheneb sulamisel jää kuubi ruumala?

161. Kõigi meie mõõtmiste kaasas käib mõõtmise viga; meie ei suuda mõõta matemaatiliselt täpsalt. Saali põranda mõõtmisel leiti pikkus olevat p m ja laius l m, mõlemad veaga

alla ± 10 cm. Põranda värvimine maksab 3 kr. kui materjal on maalri poolt. Kui suur hinnavahe tekib, kui mõõtmine arvata maalri kasuks võrreldes hinnaga, mis tekib siis, kui mõõtmine arvata majaomaniku kasuks?

162. Mõisa tükeldamisel taheti mõisa südamest eraldada 49 hektaari suurune ruudukujuline maa-ala. Kui suur on selle maatüki määramatuse piirkond, kui ruudu külje mõõtmisel tekkinud viga võib ulatuda x meetrini?

163. Tee tegemiseks laskis linnavalitsus lõhkuda kive ja laduda neid kantmeetritena hunnikusse. Üks kivilõhkuja ladus 3 kuubikut kive veaga α cm servas enese kasuks, teine 2 kuubikut — veaga β cm enese kahjuks. Järelevalve ametnik leidis esimese töölise vea, tegi märkuse, kuid võttis kivid siiski vastu; teine tööline leidis oma vea isegi. Edaspidi püüdsid nad hoiduda nii suurtest vigadest. Kui palju sai linn kahju? kui $\alpha > \beta$?

164. Põletuspuud laotakse riitadesse, mille pikkus 4 m ja kõrgus 1 m. Puuhalu pikkus on $\frac{1}{2}$ m; seepärast laotakse 2 riita kokku nii, et riida otsa kõrgus ja laius on 1 m. Kuigi riit on hästi laotud, tekib siiski viga. Oletame, et viga kõrguses ja laiuses on α cm ja pikkuses β cm. Leida niisuguse kaksikriida ruumala määramatuse piirkond!

165. Graniidist hauasamba keskmine osa kujutab enesest ruutpõhjaga risttahukat, mille kõrgus on 4 korda nii suur kui laius x cm. Kuidas muutub selle samba poleeritav külgpind ja kaal, kui sammas teha 5 cm laiem ja õhem? Graniidi erikaal on 2,75.

166. Klaasiärist oli tellitud n aknaklaasi. Äris oli tehtud viga ja klaasid lõigatud ruudukujulised, küljega x cm, kuna tellimise järele pidid nad olema 4 mm pikemad ja 4 mm kitsamad kui tehtud. Aga tarvitada võidi neid ka sellel kujul, sest äär kattub kitiga. Kas oli äril sellest veast kasu või kahju ja kui palju, kui klaasi hinda arvata pindala järele s senti ruutmeeter?

167. Ringi raadius leiti mõõtmisel R m veaga kuni ϱ cm. Kui palju on selle ringi võimalik maksimaalne pindala suurem võimalikust minimaalsest pindalast?

168. Vankri kuuri laepealse ruumi, kuhu talveks heinu

pannakse, määrab peremees sel teel, et mõõdab poole lae laiusest, katuse harja kõrguse laest ja lae pikkuse ning korrutab need arvud. Esimesed kaks arvu leidis peremees olevat võrdsed, nimelt a m, veaga kuni 10 cm, ja viimase l m, veaga ka kuni 10 cm. Kui suurtes piirides võib kõikuda viga ruumala arvutamises? Valem tuleb arendada ja tulemus arvutada võttes $a = 5$ ja $l = 10$.

169. Kera läbimõõt leitakse sel teel, et kera asetatakse kahe rööbiku tasapinna vahele ja mõõdetakse kaugus nende tasapindade vahel. Nagu teada, on kera pindala võrdne π korda diameetri ruut. Kui suurtes piirides kõigub viga kera pindala arvutamises, kui diameeter leiti olevat a cm, veaga kuni 5 mm? Koostada vea muutumise tabel, kui a muutub 20-st kuni 40-ni võttes a väärtused iga 5 cm tagant.

170. Kera ruumala võrdub $\frac{1}{6}$-kuga arvu π ja diameetri kuubi korrutisest. Kui suureks võib tõusta viga kera ruumala arvutamisel, kui diameeter leitakse olevat d cm, veaga kuni 5 mm? Koostada vea muutumise tabel, võttes d väärtused iga 5 cm tagant 20-st kuni 40-ni!

48. Arvude teguriteks lahutamine, suurim ühisjagaja ning vähim ühiskordne.

Seletuseks. *Algarvuks* nim. täisarvu, mis ei saa esineda teiste täisarvude korrutisena, ehk teiste sõnadega, mis ei ole jagatav (ilma jäägita) peale 1 ja iseenese teiste täisarvudega.

Arvu, mis saab esineda teiste arvude korrutisena, nim. *kordarvuks*. Arvud, mille korrutisena esineb antud kordarv, nim. selle kordarvu *teguriteks* ehk *jagajateks* ning see kordarv on oma tegurite ehk jagajate *kordne* ehk jagatav. Samu nimetusi võime tarvitada ka avaldiste kohta.

Kui mõni arv esineb mitme arvu tegurina, siis on ta nende *ühine tegur* ehk ühine jagaja. Arvud, millel ühiseid tegureid ei ole, nim. *ühistegurita arvudeks*.

171. Esimese saja piirkonnas ära märkida kõik arvud, missugused on algarvud, missugused kordarvud!

172. Leida missugune alljärgnevatest arvudest on algarv, missugune on kordarv, jagades neid järjekorras kõigi algarvudega, kuni jagamine lõpeb jäägita või jagatis muutub vähemaks kui jagaja:

a) 91	e) 143	i) 383	n) 299	r) 1091
b) 101	f) 221	k) 449	o) 599	s) 1147
c) 113	g) 251	l) 499	p) 667	t) 2099
d) 119	h) 323	m) 573	q) 757	u) 2183

173. Alljärgnevad hulkliikmed kujutada korrutisena, kui see võimalik; vastasel korral kirjutada juurde nimetus „algavaldis".

a) $7a+7b$	e) $8u-8v$	i) $ab+cd$	n) $3e-3r-3x$
b) $a+7$	f) $8u-v$	k) $ab-ad$	o) $nx-nu-nt$
c) $mx+my$	g) $na-nb$	l) $nx+ny+nz$	p) $ab+bc+ca$
d) $2x+5$	h) $ax-y$	m) $5a-5b+5c$	q) $2x-2y+xy$

174. Tõestada lause: a) *Kui iga liidetav on jagatav arvuga a, siis on ka summa jagatav selle arvuga.* b) *Kui üks tegur on jagatav antud arvuga, siis on ka korrutis jagatav selle arvuga.*

175. Tuua näiteid järgmiste lausete maksvuse kohta:

a) Kui üks liidetav on jagatav antud arvuga, teine liidetav selle arvuga jagatav ei ole, siis ei ole ka summa jagatav selle arvuga.

b) Kui korrutis on jagatav antud arvuga, üks tegur aga selle arvuga jagatav ei ole, siis on teine tegur jagatav selle arvuga.

c) On antud arv jagatav kahe ühistegurita arvuga eraldi, siis on ta jagatav ka nende korrutisega.

d) Ei ole mõni arv jagatav antud arvuga, siis ei ole ta ammugi jagatav selle arvu kordsega.

176. Tuletada jaguvuse tunnused arvudele:
a) 2 ja 5; b) 4 ja 25; c) 8 ja 125; d) 9 ja 3.

177. Lahutada algteguriteks alljärgnevad arvud, kirjutades teguriteks lahutamine

veergu:

a) 102 g) 924
b) 126 h) 3840
c) 520 i) 2496
d) 945 k) 2555
e) 441 l) 1001
f) 529 m) 2145

ritta:

n) 56 t) 500
o) 60 u) 6600
p) 75 v) 7300
q) 105 x) 8700
r) 360 y) 18000
s) 540 z) 1000000

178. Antud arvule leida kõik tema tegurid, lahutades teda enne algteguriteks ja siis võttes neid algtegureid ühekaupa, korrutades neid kahe kaupa, kolme kaupa, nelja kaupa jne:

a) 30 c) 98 e) 180 g) 666 i) 2730
b) 75 d) 66 f) 420 h) 966 k) 3650.

179. Antud arvudele leida kõik nende ühised tegurid, lahutades neid enne algteguriteks ja siis võttes ainult ühiseid algtegureid üksikult, koostades neist ühistest algteguritest korrutisi kahe kaupa, kolme kaupa, nelja kaupa jne.

a) 54 ja 72 c) 450 ja 525 e) 48, 72 ja 84
b) 84 ja 140 d) 504 ja 693 f) 360, 405 ja 450.

180. Antud arvudele leida nende suurim ühistegur kas peast, kui võimalik, või, lahutanud need arvud enne algteguriteks, välja kirjutades kõik ühised algtegurid ja neid korrutades:

a) 18 ja 24 e) 52 ja 78 i) 36, 42 ja 66
b) 28 ja 42 f) 132 ja 220 k) 48, 126 ja 90
c) 48 ja 72 g) 4000 ja 5200 l) 600, 900 ja 1200
d) 75 ja 90 h) 1400 ja 2450 m) 800, 1400 ja 1800

n) 60 ja 84 r) 392 ja 490 v) 30, 45 ja 75
o) 126 ja 162 s) 312 ja 364 x) 90, 72 ja 108
p) 135 ja 225 t) 304 ja 342 y) 390, 546 ja 624
q) 144 ja 180 u) 568 ja 852 z) 198, 330 ja 528

181. Arvu kordses peavad leiduma kõik selle arvu algtegurid. Mitmel arvul võib olla ühine kordne; see on nende arvude *ühiskordne.* Selles ühiskordses peab iga arv leidma kõik oma algtegurid. Mitme arvu *vähimas ühiseskordses* peab iga

antud arv leidma kõik oma algtegurid, kuid üleliigseid tegureid ei tohi olla.

Vähima ühiskordse leidmiseks tuleb kõik antud arvud lahutada algteguriteks ja siis ühe arvu algteguriteks lahutis täiendada temas puuduvate, kuid teistes antud arvudes leiduvate algteguritega.

Vähim ühiskordne leida järgmistele arvudele:

a) 8 ja 12
b) 9 ja 21
c) 91 ja 65
d) 217 ja 248
e) 12, 15, 20
f) 15, 21, 35
g) 27, 36, 54
h) 42; 70; 105
i) 6, 9, 18, 27
k) 8, 9, 24, 36
l) 3, 6, 74, 111
m) 123, 164, 205, 246
n) 67 ja 469
o) 171 ja 456
p) 402 ja 1005
q) 595 ja 357
r) 12, 21, 28, 42
s) 4, 10, 25, 50
t) 20, 28, 16, 70
u) 45, 60, 72, 120
v) 75, 90, 225, 300
x) 12, 22, 33, 44
y) 20, 28, 35, 70
z) 14, 49, 28, 4

49. Hulkliikmete teguriteks lahutamine.

Järgmised hulkliikmed kujutada korrutisena tuues sulgude ette kõigi liikmete suurim ühistegur:

182. a) $2a + 2b$
b) $7m - 7n$
c) $5u - 5v + 5t$
d) $8x + 8y - 8z$

183. a) $-3x - 3a$
b) $-4u + 4v$
c) $-6x - 6a - 6y$
d) $-9m + 9n - 9p$

184. a) $ax + ay$
b) $bm - bn$
c) $ax - bx + cx$
d) $nx - ny - nz$

185. a) $4x + 10y$
b) $9a - 12b$
c) $-6m - 9n$
d) $-15u + 25v$

186. a) $10au + 15av$
b) $8bn - 16bm$
c) $-42ax + 56bx$
d) $-27my + 72ny$

187. a) $4 + 2m$
b) $9 - 3n$
c) $-8 + 2a$
d) $-10 - 5x$

188. a) $5x + 5$
b) $7a + 7$
c) $-3m - 3$
d) $-8n + 8$

189. a) $ax + a$
b) $mn - n$
c) $-uv - v$
d) $-ab + b$

190. a) $x^2 + xy$
b) $uv - v^2$
c) $-a^2 - am$
d) $-my + y^2$

191. a) x^2+x
b) a^2-a
c) $-u^2-u$
d) $-v+v^2$

192. a) a^3+a^2+a
d) $-x^3-x^2-x$
c) $b^4-b^3+b^2$
d) $-n^4+n^3-n^2$

193. a) $6ax+9bx-3x$
d) $10am-6mx+2m$
c) $-8an-16bn+4n$
d) $-20au+15av-5a$

194. a) $12u^3-15u^2v$
d) $20u^2v^2+35v^4$
c) $-18n^2x+27nx^2$
d) $-22a^3n-55an^3$

195. a) $15ab+25b^2-10b$
b) $28m^3-21m^2n-35mn^2$
c) $-6xy-12x^2z+18x^3t$
d) $-14a^3x+42a^2x^2-70ax^3$

Ühiseks teguriks võib olla ka hulkliige:

196. a) $a(x+y)+b(x+y)$
b) $m(a-b)+n(a-b)$
c) $x(a+b)-y(a+b)$
d) $m(x-y)-n(x-y)$

197. a) $2m(u-v)+3n(u-v)$
b) $4n(a+2b)-m(a+2b)$
c) $x(x-3)-4(x-3)$
d) $y(y-m)-n(y-m)$

Meie teame, et

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; järelikult: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; „ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

Rakendades arvutamise abivalemeid ja, kus võimalik, ühistegurite sulgude ette toomist lahutada teguriteks:

198.
a) $x^2+2xy+y^2$
b) $u^2+2uv+v^2$
c) $m^2+2mn+n^2$
d) $x^2+2cx+c^2$

199.
a) $c^2-2cd+d^2$
b) $x^2-2ax+a^2$
c) $d^2-2dr+r^2$
d) $R^2-2Rr+r^2$

200.
a) $x^2+10x+25$
b) $a^2+14x+49$
c) $m^2+20m+100$
d) y^2+4y+4

201. a) $b^2-18b+81$
b) e^2-6e+9
c) $u^2-22u+121$
d) $t^2-16t+64$

202. a) n^2+2n+1
b) m^2-2m+1
c) $4b^2+4b+1$
d) $36a^2-12a+1$

203. a) $4a^2-12av+9v^2$
b) $25x^2+80mx+64m^2$
c) $49u^2-42uv+9v^2$
d) $81a^2+72ab+16b^2$

204. a) $1+2r+r^2$
b) $1-2n+n^2$
c) $1+a+\frac{a^2}{4}$
d) $1-x+\frac{x^2}{4}$

205. a) $x^2+px+\frac{p^2}{4}$
b) $t^2-ta+\frac{a^2}{4}$
c) $x^2+hx+\frac{h^2}{4}$
d) $l^2-bl+\frac{b^2}{4}$

206. a) $4a^2x^2+4abx+b^2$
b) $9n^2y^2-30nyz+25z^2$
c) $100a^2k^2+60aky+9y^2$
d) $49a^2b^2-112abt+64t^2$

207. a) $ma^2+2mab+mb^2$
b) $a^2n-2abn+b^2n$
c) $3x^2-6xy+3y^2$
d) $4x^2+8xt+4t^2$

208. a) $5a^3-10a^2b+5ab^2$
b) $2a^4+4a^3b+2a^2b^2$
c) $a^2x^2+2abx^2+b^2x^2$
d) $6x^4-12x^3y+6x^2y^2$

209. a) $am^2+2am+a$
b) $nx^2-2nx+n$
c) $9u^2-18u+9$
d) $2t^2+4t+2$

210. a) g^3+2g^2+g
b) c^3-2c^2+c
c) $n^4+2n^3+n^2$
d) $x^4-2x^3+x^2$

Me teame, et:
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$; järel. $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$.

211. a) x^2-y^2
b) m^2-n^2
c) u^2-v^2
d) R^2-d^2

212. a) m^2-4
b) n^2-25
c) $36-a^2$
d) $81-x^2$

213. a) 25^2-24^2
b) 73^2-48^2
c) 13^2-12^2
d) 37^2-35^2

214. a) a^2-1
b) $1-x^2$
c) $4R^2-d^2$
d) $9e^2-c^2$

215. a) $49u^2-4a^2$
b) $64x^2-25y^2$
c) $81a^2-1$
d) $1-4n^2$

216. a) 5^2-4^2
b) 29^2-21^2
c) 101^2-91^2
d) 229^2-221^2

217. a) a^2x^2-1
b) $a^2x^2-b^2$
c) $m^2x^2-9n^2$
d) $1-b^2m^2$

218. a) $2a^2-2m^2$
b) nx^2-ny^2
c) $a^2u^2-a^2v^2$
d) $8a^3-8ab^2$

219. a) x^3-x
b) $a-a^3$
c) $2-8n^2$
d) $5-20a^2$

220. a) $3a^3-75ab^2$
b) $50x^3-2a^2x$
c) $4a^3m-am^3$
d) $4x^3y-9xy^3$

221. a) $ab - 4ab^3$
b) $18n^3x - 2nx$
c) $7a^2 - 7a^2x^2$
d) $9x^2 - 36m^2x^2$

222. a) $\pi R^2 - \pi r^2$
a) $\pi ab - \pi b^2$
c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9}$
d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

223. a) $(R+r)^2 - (R-r)^2$
b) $(r+d)^2 - (r-d)^2$
c) $(b+c)^2 - a^2$
d) $a^2 - (b+c)^2$

VIII. Murrud.

50. Murru mõiste ja peaomadus.

Murruks nim. ilmutamata jagatist. Jagatavat nim. murru lugejaks, jagajat — murru nimetajaks. Murru tähisena tarvitame jagamise märgi : asemel nn. murrukriipsu.

Me kirjutame: $a:b=\frac{a}{b}$ ja $l:n=\frac{l}{n}$.

Lugejat ja nimetajat nim. murru liikmeteks. Korraliku kirja otstarbel tuleb enne kirjutada murru kriips — poole rea kõrgusel —, siis alles lugeja ja nimetaja.

Kahe arvu jagatist nim. ka nende arvude suhteks; jagatavat — suhte eesliikmeks ja jagajat — suhte tagaliikmeks. Kahe arvu suhteks nim. kolmandat arvu, millega tuleb korrutada teist arvu, et saada esimest.

Kahe arvu suhe näitab, mitu korda teine arv mahub esimese arvu sisse, kui esimene arv on suurem kui teine, või millise osa teisest arvust moodustab esimene arv, kui esimene arv on vähem kui teine.

Sõnad „jagatis“, „murd“, „suhe“ on erivarjunditega sünonüümid. Murru teisendamine ehk murrule teise, otstarbekohasema kuju andmine põhineb lausel: *Kaks murdu on isekeskis võrdsed, kui esimese murru lugeja korrutis teise murru nimetajaga on sama suur kui esimese murru nimetaja korrutis teise murru lugejaga.*

Antud on kaks murdu: $\frac{l_1}{n_1}$ ja $\frac{l_2}{n_2}$, ning et $l_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot l_2$.

Tõestada tuleb, et $\frac{l_1}{n_1} = \frac{l_2}{n_2}$.

Tõestus: Jagame kumbagi võrdsetest korrutistest antud murdude nimetajate korrutisega, siis saame võrdsed jagatised:

$$(l_1 \cdot n_2) : (n_1 \cdot n_2) = (n_1 \cdot l_2) : (n_1 \cdot n_2);$$

Korrutamise ühenduvusseaduse põhjal on meil õigus ütelda: et mingit arvu jagada kahe arvu korrutisega, tuleb seda arvu jagada enne ühe teguriga ja siis tulemust jagada teise teguriga. Seepärast saame:

$$[(l_1 \cdot n_2) : n_2] : n_1 = [(n_1 \cdot l_2) : n_1] : n_2$$

Samuti teame jagamise definitsioonist, et kui korrutist jagada ühe teguriga, siis on jagatiseks teine tegur.

Sel põhjal saame: $[l_1] : n_1 = [l_2] : n_2$

Ehk $l_1 : n_1 = l_2 : n_2$ ehk $\frac{l_1}{n_1} = \frac{l_2}{n_2}$. M. o. t. t.

Järeldus 1. Tõestatud lause põhjal võime öelda, et

$\frac{l}{n} = \frac{k \cdot l}{k \cdot n}$ ja et $\frac{k \cdot l}{k \cdot n} = \frac{l}{n}$, sest et alati on $l \cdot k \cdot n = n \cdot k \cdot l$

Sõnades väljendatult: *Murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama arvuga.* Selles seisabki murru peaomadus.

Järeldus 2. Kahe suhte ehk murru võrdsust nim. võrdeks. Suhte liikmed on ka võrde liikmed; neid nim. järjekorras 1-seks, 2-seks, 3-ndaks, 4-ndaks. Esimest ja neljandat liiget nim. äärmisteks, teist ja kolmandat siseliikmeteks.

Tõestatud on, et kui $l_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot l_2$, siis $\frac{l_1}{n_1} = \frac{l_2}{n_2}$.

Sellest järgneb, et kui $\frac{l_1}{n_1} = \frac{l_2}{n_2}$, siis $l_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot l_2$.

Sõnades väljendatult: *Võrde äärmiste liikmete korrutis on sama suur kui siseliikmete korrutis.* Selles seisab võrde peaomadus.

51. Murru taandamine.

Murru taandamine seisab lugeja ja nimetaja jagamises sama arvuga; teiste sõnadega — murru taandamiseks tuleb lugejast ja nimetajast eemaldada ühepalju võrdseid tegureid. Selle läbi omandab murd selgema, lihtsama kuju.
Taandada järgmised murrud:

224. a) $\frac{6}{8}$ b) $\frac{30}{45}$ c) $\frac{28}{42}$ d) $\frac{55}{132}$

225. a) $\frac{28}{98}$ b) $\frac{39}{65}$ c) $\frac{105}{135}$ d) $\frac{165}{231}$

226. a) $\frac{222}{370}$ b) $\frac{219}{365}$ c) $\frac{428}{749}$ d) $\frac{662}{993}$

227. a) $\frac{4200}{5600}$ b) $\frac{12000}{14400}$ c) $\frac{825}{900}$ d) $\frac{1350}{2160}$

228. a) $\frac{10}{5a}$ b) $\frac{2a}{10}$ c) $\frac{ab}{bc}$ d) $\frac{ab^2}{a^2b}$

229. a) $\frac{4xy}{6a^2x}$ b) $\frac{14m^2n^2}{21mn^3}$ c) $\frac{25ax^2y}{40bxy^2}$ d) $\frac{51a^2u^2}{85auv^2}$

230. a) $\frac{33ax^3}{88ma^2x}$ b) $\frac{56uv^2}{280u^2v}$ c) $\frac{63n^3}{105n^2t}$ d) $\frac{57ab^3}{76a^2b^2}$

231. a) $\frac{\frac{1}{2}b_1h_1}{\frac{1}{2}b_2h_2}$ b) $\frac{\frac{1}{2}gt_1^2}{\frac{1}{2}gt_2^2}$ c) $\frac{R^2r^3}{Rr(R+r)}$ d) $\frac{0{,}5bcs}{0{,}5b^2s}$

232. a) $\frac{12a(a+b)}{18b(a+b)}$ b) $\frac{n(a-x)}{n(a+x)}$ c) $\frac{a^2b(x+y)}{ab^2(x+y)}$ d) $\frac{m^2n(a+b)}{mn^2(a-b)}$

233. a) $\frac{au(u-v)}{2a(u+v)}$ b) $\frac{3x(x^2+y^2)}{6y(x^2+y^2)}$ c) $\frac{9m^2(x^3-a^3)}{12mx(x^3-a^3)}$ d) $\frac{6ax(a^2+m^2)}{6ax(a^2-m^2)}$

234. a) $\frac{ax+bx}{am+bm}$ b) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$ c) $\frac{x-xy}{y-y^2}$ d) $\frac{u^2-uv}{u^2+uv}$

235. a) $\frac{ax+bx}{by+ay}$ b) $\frac{a^2+a}{7a+7}$ c) $\frac{ax-ay}{by-bx}$ d) $\frac{2a-4b}{6b-3a}$

236. a) $\frac{12m-18n}{15n-10m}$ b) $\frac{x^2-xy}{y^2-xy}$ c) $\frac{12a^2+20ab}{15ab+25b^2}$ d) $\frac{4an^2-6n^3}{8a^2n-12an^2}$

237. a) $\frac{n-1}{n^2-1}$ b) $\frac{x+a}{x^2-a^2}$ c) $\frac{u-v}{u^2-v^2}$ d) $\frac{m+5}{m^2-25}$

238. a) $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}$

b) $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}$

c) $\frac{a^3-ab^2}{a^3-a^2b}$

d) $\frac{ax-a^2}{x^2-a^2}$

239. a) $\frac{n^3+an^2}{a^3-an^2}$

b) $\frac{n^2-nx}{x^2-n^2}$

c) $\frac{(x+1)^2}{2x^2+2x}$

d) $\frac{(a-3n)^2}{5an-15n^2}$

240. a) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$

b) $\frac{(b+n)^2}{b^2-n^2}$

c) $\frac{(u+1)^2}{1-u^2}$

d) $\frac{(x-5)^2}{25-x^2}$

241. a) $\frac{m^2-2mx+x^2}{m^2-mx}$

b) $\frac{R^2+2Rr+r^2}{R^2+Rr}$

c) $\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2-a^2}$

d) $\frac{b^2-2by+y^2}{b^2-y^2}$

242. a) $\frac{2x^2-18}{x^2+6x+9}$

b) $\frac{5a^2-5b^2}{5a^2-10ab+b^2}$

c) $\frac{3m^2-12}{6m^2+24m+24}$

d) $\frac{3n^2-12y^2}{3n^2-12ny+12y^2}$

52. Murdude samanimeliseks tegemine.

Murru lugeja ja nimetaja korrutamist sama arvuga nim. murru laiendamiseks. Murdude laiendamise teel saab teha murdusid samanimelisteks.

Korrutades eraldi iga murru lugejat ja nimetajat ühe ja sellesama arvuga on arusaadav, et meie ei tohi neid koormata üleliigsete, mitte-hädavajalikkude teguritega. Vähimaks ühiseks nimetajaks osutub niisugune arv või avaldis, milles iga nimetaja leiab kõik oma tegurid, kuid üleliigseid, mitte-hädavajalikke, tegureid ei leidu. See on kõigi nimetajate vähim ühiskordne. Tema leidmiseks lahutame kõik nimetajad algteguriteks ning korrutame eraldi iga murru lugejat selle murru nimetajas puuduvate, kuid teiste murdude nimetajates esinevate teguritega. Need on nn. täiendtegurid. Kui ühe murru nimetajas leiduvad kõigi teiste murdude nimetajate tegurid ehk, nagu kõneldakse, ühe murru nimetaja jagub kõigi teiste murdude nimetajatega, siis tema ongi see vähim ühine nimetaja. Teiste murdude nimetajaid ja lugejaid tuleb vaid korrutada puuduvate, täiendteguritega.

Teha samanimelisteks murrud:

243. a) $\frac{2}{9}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{25}{36}$ b) $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{14}$ $\frac{3}{28}$ c) $\frac{4}{9}$ $\frac{11}{15}$ $\frac{23}{45}$ d) $\frac{13}{20}$ $\frac{17}{25}$ $\frac{41}{100}$

244. a) $\frac{b}{2a}$ $\frac{c}{3a}$ $\frac{d}{6a}$ b) $\frac{2a}{5x}$ $\frac{k}{6x}$ $\frac{17k}{30x}$ c) $\frac{a}{m}$ $\frac{b}{n}$ $\frac{c}{mn}$ d) $\frac{x}{a}$ $\frac{y}{b}$ $\frac{z}{ab}$

Kui ühelgi nimetajate paaril ei leidu ühiseid tegureid, siis on vähimaks ühiseks nimetajaks kõigi nimetajate korrutis. Iga murru lugeja ning nimetaja täiendteguriks on kõigi teiste murdude nimetajate korrutis. Näiteks, teha samanimelisteks murrud:

245. a) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{7}$ c) $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{7}{11}$ d) $\frac{5}{7}$ $\frac{8}{11}$ $\frac{10}{13}$

246. a) $\frac{x}{a}$ $\frac{y}{b}$ $\frac{z}{c}$ b) $\frac{a}{k}$ $\frac{b}{m}$ $\frac{c}{l}$ c) $\frac{l}{2a}$ $\frac{m}{5b}$ $\frac{n}{7c}$ d) $\frac{x}{3y}$ $\frac{a}{5b}$ $\frac{m}{2n}$

Kui ükski nimetaja ei sisalda kõigi teiste murdude nimetajate tegureid, kuid leidub ühiste teguritega nimetajate paare, siis tuleb käia üldjuhise järele. Teha samanimelisteks murrud:

247. a) $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{10}$ a) $\frac{1}{6}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{7}{12}$ c) $\frac{11}{18}$ $\frac{19}{30}$ $\frac{28}{45}$ d) $\frac{29}{44}$ $\frac{53}{66}$ $\frac{11}{12}$

248. a) $\frac{2a}{9b}$ $\frac{3m}{4n}$ $\frac{5c}{6b}$ b) $\frac{m}{ab}$ $\frac{n}{bc}$ $\frac{k}{ca}$ c) $\frac{2x}{a^2b}$ $\frac{3y}{ab^2}$ $\frac{4z}{nab}$ d) $\frac{5a^2}{6xy^2}$ $\frac{7y}{15x^2}$ $\frac{3b^2}{10x^2y}$

249. a) $\frac{a}{a-b}$ $\frac{b}{a+b}$ $\frac{ab}{a^2-b^2}$ b) $\frac{1}{x+1}$ $\frac{1}{x-1}$ $\frac{x}{x^2-1}$ c) $\frac{c}{(x+c)^2}$ $\frac{x}{x^2+2cx+c^2}$ $\frac{1}{c+x}$ d) $\frac{dr}{d^2-2dr+r^2}$ $\frac{d^2}{(d-r)^2}$ $\frac{r}{d-r}$

250. a) $\frac{u}{u+v}$ $\frac{v}{u-v}$ $\frac{u+v}{uv}$ b) $\frac{a-1}{a}$ $\frac{a}{a-1}$ $\frac{1}{a+1}$ c) $\frac{m+3}{3m}$ $\frac{m-3}{m+3}$ $\frac{3}{m-3}$ d) $\frac{e}{e+p}$ $\frac{p}{e-p}$ $\frac{e-p}{ep}$

251. a) $\frac{a}{x-y}$ $\frac{a}{y-x}$ $\frac{a}{x-y}$ b) $\frac{4b}{3a-3b}$ $\frac{5a}{4a-4b}$ $\frac{ab}{6b-6a}$ c) $\frac{9m}{5m-5x}$ $\frac{8x}{15x-15m}$ $\frac{10x}{9m-9x}$ d) $\frac{e}{ae-ar}$ $\frac{r}{ar-ae}$ $\frac{er}{ae-ar}$

252. a) $\frac{m-x}{m+x}$ $\frac{x+m}{x-m}$ $\frac{mx}{m^2-x^2}$ b) $\frac{a-4}{a+4}$ $\frac{4+a}{4-a}$ $\frac{8a}{a^2-16}$ c) $\frac{e+c}{e-c}$ $\frac{c-e}{c+e}$ $\frac{ec}{c^2-e^2}$ d) $\frac{1-a}{a+1}$ $\frac{1+a}{1-a}$ $\frac{a}{a^2-1}$

253. a) $\frac{x(a-x)}{ax+a^2}$ $\frac{a(x+a)}{ax-x^2}$ $\frac{ax}{a^2-x^2}$ b) $\frac{x-7}{7+7x}$ $\frac{x+1}{7x-7}$ $\frac{7x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{n^2+b^2}{bn+b^2}$ $\frac{b(b+n)}{n^2-nb}$ $\frac{2n^2}{b^2-n^2}$ d) $\frac{uv}{u^2-v^2}$ $\frac{v-u}{v^2+vu}$ $\frac{v+u}{u^2-uv}$

53. Murdude liitmine ja lahutamine.

Jaotuvusseaduse põhjal [I, ül. 147] on: $n \cdot (a + b) = n \cdot a + n \cdot b$;

ning: $n \cdot (a - b) = n \cdot a - n \cdot b$.

Samuti on: $\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}$;

ning: $\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}$.

Lugedes kaht viimast võrdust paremalt poolt vasakule poole

saame: $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$;

ning: $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$.

Neid võrdusi sõnastame järgmiselt:

Et liita samanimelisi murde, tuleb liita lugejad ning summale nimetajaks alla kirjutada nende murdude ühine nimetaja.

Et lahutada samanimelisi murde, tuleb vähendatava lugejast lahutada vähendaja lugeja ning vahele nimetajaks alla kirjutada nende murdude ühine nimetaja.

Kui murrud on isenimelised, siis tuleb teha nad enne samanimelisteks ja pärast seda teostada liitmine ning lahutamine.

Täisarvule või täisavaldisele on lubatav nimetajaks alla kirjutada 1; selle läbi omandab see avaldis murru kuju ning temaga võib toimida nagu murruga. Pärast lugejate liitmist ja lahutamist ja nimetaja allakirjutamist tuleb tulemus taandada, kui see võimalik on.

254. a) $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8}$

b) $\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4}$

c) $\frac{7}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15}$

d) $\frac{a}{x} + \frac{2a}{x} + \frac{4a}{x}$

255. a) $\frac{6}{7} - \frac{2}{7}$

b) $\frac{a}{5} - \frac{b}{5}$

c) $\frac{81}{100} - \frac{41}{100}$

d) $\frac{3}{a} - \frac{2}{a}$

256. a) $\frac{a+2k}{12} + \frac{k-a}{12}$

b) $\frac{R+d}{2x} - \frac{R-d}{2x}$

c) $\frac{5x-2y}{6n} - \frac{2x-5y}{6n}$

d) $\frac{3a-x}{9x} + \frac{7x-3a}{9x}$

257. a) $\frac{2a+3b}{12} + \frac{5a-2b}{12} + \frac{a-5b}{12}$

b) $\frac{7m-n}{25} - \frac{6n-m}{25} - \frac{3m+8n}{25}$

c) $\frac{9a-7m}{8am}+\frac{-9m+2a}{8am}-\frac{3a+11m}{8am}-\frac{8a-11m}{8am}$

d) $\frac{8x+y}{12xy}-\frac{5y+4x}{12xy}-\frac{9x-y}{12xy}-\frac{9y-5x}{12xy}$

258. a) $\frac{7d(R+d)}{6R}-\frac{5d(d-R)}{6R}+\frac{d(d-9R)}{6R}$

b) $\frac{2an+5n}{9ax}-\frac{n(7-a)}{9ax}+\frac{7n(2a+1)}{9ax}-\frac{5n(a+1)}{9ax}$

c) $\frac{4a(5a-b)}{7ab}+\frac{(a+b)^2}{7ab}-\frac{(a+b)(a-b)}{7ab}-\frac{5a(4a-b)}{7ab}$

d) $\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(x+y)^2}{xy}-\frac{2(x+y)(x-y)}{xy}$

259. a) $\frac{12x}{x+y}-\frac{3y}{x+y}-\frac{5x}{x+y}+\frac{10y}{x+y}$

b) $\frac{15a}{a-b}-\frac{8b}{a-b}+\frac{4b-3a}{a-b}+\frac{7a+b}{a-b}$

c) $\frac{6a-b}{10a+10b}-\frac{9a-5b}{10a+10b}-\frac{3a+b}{10a+10b}+\frac{7b-4a}{10a+10b}$

d) $\frac{5(3a+n)}{a^2-n^2}-\frac{2(a-4n)}{a^2-n^2}+\frac{3(a-3n)}{a^2-n^2}-\frac{6a-6n}{a^2-n^2}$

260. a) $\frac{7}{10}+\frac{5}{6}+\frac{11}{12}+\frac{3}{4}+\frac{43}{60}$

b) $\frac{4}{7}-\frac{8}{21}+\frac{79}{84}-\frac{17}{28}+\frac{9}{14}$

c) $4\frac{13}{22}+2\frac{49}{66}-3\frac{259}{330}-1\frac{28}{55}+2\frac{17}{30}$

d) $8\frac{12}{17}-1\frac{7}{10}-5\frac{48}{85}+1\frac{61}{170}$

261. a) $\frac{7m}{6}-\frac{4n}{5}+\frac{2n}{15}-\frac{11m}{30}$

b) $\frac{9a}{14}-\frac{31b}{42}+\frac{83b}{84}-\frac{11a}{28}$

c) $\frac{2c}{ab}+\frac{2a}{bc}+\frac{2b}{ca}-\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

d) $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}-\frac{a^2c^2-2a^2b^2+b^2c^2}{abc}$

262. a) $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{5}{7}$

b) $\frac{5}{8}-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{4}{7}$

c) $3\frac{3}{4}+2\frac{5}{9}-1\frac{4}{5}-2\frac{6}{7}$

d) $3\frac{4}{7}-1\frac{10}{13}+6\frac{8}{11}-4\frac{1}{4}$

263. a) $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}-\frac{1}{F}$

b) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

c) $\frac{x-y}{x}+\frac{x+y}{y}$

d) $\frac{x+y}{x}-\frac{x-y}{y}$

264. a) $\frac{17}{30}+\frac{5}{12}+\frac{13}{20}+\frac{11}{15}+\frac{3}{10}$

b) $\frac{25}{28}-\frac{13}{12}+\frac{20}{21}-\frac{5}{6}-\frac{3}{14}$

c) $\frac{11}{28}+\frac{21}{25}-\frac{17}{35}-\frac{9}{20}-\frac{41}{70}$

d) $\frac{11}{12}-\frac{175}{222}-\frac{1}{4}+\frac{59}{74}-\frac{25}{37}$

265. a) $\frac{2a}{3}-\frac{3b}{5}-\frac{a}{6}+\frac{b}{10}$

b) $\frac{6x}{7}-\frac{3y}{5}+\frac{13x}{42}-\frac{7y}{30}$

c) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$

d) $\frac{t}{uv}+\frac{u}{vt}+\frac{v}{tu}$

266. a) $\frac{5v-5u}{12}+\frac{3u+5v}{8}-\frac{v-4u}{6}$

b) $\frac{19x+9y}{22}-\frac{y}{6}-\frac{2x-3y}{33}-\frac{7x}{11}$

c) $\frac{8a^2-10z^2}{13}+\frac{19a^2}{39}-\frac{5z^2}{6}-\frac{7a^2-20z^2}{26}$

d) $\frac{7c-8d}{9}+\frac{2c-12d}{15}-\frac{4c+d}{5}-\frac{c-2d}{3}$

267. a) $\frac{9m-n}{14}-\frac{5n+4m}{8}+\frac{17m+30n}{28}-\frac{3n-m}{4}$

b) $\frac{25a-38n}{48}+\frac{24a+14n}{32}-\frac{17n+5a}{24}-\frac{7a-11n}{16}$

c) $\frac{a-3b+2}{4}-\frac{5b+4-4a}{6}-\frac{3a-10b-4}{9}-\frac{2b+5}{18}$

d) $\frac{5a-7n+13}{12}+\frac{13a+7n-19}{21}-\frac{5n+7a-3}{7}-\frac{9a-15n+17}{28}$

268. a) $\frac{24u-29v}{14}+\frac{2(5u-4v)}{35}-\frac{3(5u-4v)}{10}$

b) $\frac{11(3x-5n)}{28}+\frac{5(x-4n)}{21}-\frac{5(2x-7n)}{12}$

c) $\frac{17(x-1)}{45}-\frac{3x-8}{10}+\frac{7(x+2)}{18}-\frac{11(6-x)}{30}$

d) $\frac{7(4a^2-3b^2)}{30}-\frac{4(5a^2-2b^2)}{25}-\frac{3(6a^2-7b^2)}{50}+\frac{2(11b^2-4a^2)}{75}$

269. a) $\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}$

b) $\frac{a+b}{a}-\frac{a-b}{b}$

c) $\frac{5b-3a}{6ab}+\frac{7b+3c}{4bc}-\frac{2{,}5c+3a}{3ac}$

d) $\frac{2(4a-7v)}{9av}+\frac{6v-5u}{15uv}-\frac{2a-5u}{5au}$

270. a) $\frac{5x-7a}{8ax}-\frac{b-3a}{6ab}+\frac{5b-6x}{12bx}$

b) $\frac{15a-7v}{15av}-\frac{7u+3v}{9uv}-\frac{3u-5a}{15au}$

c) $\frac{3ax-5nx}{15an}-\frac{2ax-3an}{12nx}-\frac{6x-5a}{30n}+\frac{8x^2+a^2}{12ax}$

d) $\frac{9u-5v}{14uv}-\frac{3a+10u}{12au}-\frac{25v-45a}{42av}+\frac{17v-8u}{28uv}$

271. a) $\frac{8a^2+3m^2}{6am}-\frac{7am-11mx}{22ax}+\frac{3am-2ax}{6mx}-\frac{11a-7m}{22x}$

b) $\frac{7xy-2xz}{14yz}-\frac{xy-yz}{5xz}+\frac{40x^2+28y^2}{35xy}-\frac{5x-2y}{10z}$

c) $\frac{3}{8m}-\frac{3y+2n}{4ny}+\frac{27m-10n}{18my}-\frac{2m+3n}{8mn}+\frac{5n}{9my}$

d) $\frac{a(3b-2c)}{6bc}-\frac{b(4a-5c)}{10ac}+\frac{8a^2+3b^2}{6ab}-\frac{5a-4b}{10c}$

272. a) $\frac{13}{a-c}+\frac{5}{c}$

b) $\frac{9}{b-y}-\frac{20}{3b}$

c) $\frac{m+5}{2m-3}+\frac{3m-1}{4}$

d) $\frac{a-1}{a+1}-\frac{a-2}{2a}$

273. a) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$

b) $\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y}$

c) $\frac{n}{m-n}+\frac{m}{m+n}$

d) $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2-b^2}$

274. a) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$

b) $\frac{c}{b+c}-\frac{c}{b-c}$

c) $\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m+n}$

d) $\frac{x^2}{x^2-y^2}-\frac{y^2}{x^2+y^2}$

275. a) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$

b) $\frac{a-k}{a+k}+\frac{a+k}{a-k}$

c) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$

d) $\frac{b-c}{b+c}-\frac{b+c}{b-c}$

276. a) $\frac{a}{3a+3x}+\frac{x}{4a+4x}-\frac{5a}{6a+6x}$

b) $\frac{2b}{9b-9n}-\frac{8n}{15b-15n}+\frac{n}{5b-5n}$

c) $\frac{7r}{10c+10r}+\frac{5c}{6r+6c}-\frac{8r}{15r+15c}$

d) $\frac{2}{a^2-ax}-\frac{2}{ax-x^2}-\frac{5}{ax}$

277. a) $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}+\frac{a+3b}{a^2-b^2}$

b) $\frac{1}{c-z}-\frac{1}{c+z}+\frac{3c-5z}{c^2-z^2}$

c) $\frac{2}{x-y}-\frac{3}{x+y}-\frac{4y-2x}{x^2-y^2}$

d) $\frac{1}{a-n}-\frac{1}{a+n}+\frac{7a-9n}{a^2-n^2}$

278. a) $\frac{8}{a-b}+\frac{5}{b-a}$

b) $\frac{1}{a-n}-\frac{1}{n-a}$

c) $\frac{x}{x-a}+\frac{a}{a-x}$

d) $\frac{m}{m-y}-\frac{y}{y-m}$

279. a) $\frac{m}{k^2-m^2}-\frac{k}{m^2-k^2}$

b) $\frac{a}{a^2-e^2}+\frac{2a}{e^2-a^2}-\frac{e}{a^2-e^2}$

c) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-xy+y^2}{y^2-x^2}$

d) $\frac{u^2-uv+v^2}{u^2-v^2}-\frac{u^2-3uv+v^2}{v^2-u^2}$

280. a) $\frac{2m}{m-n}-\frac{5n}{2n-2m}-\frac{3m}{4m-4n}$

b) $\frac{17a}{5a-5b}+\frac{11a}{6b-6a}-\frac{9a}{10a-10b}$

c) $\frac{11m}{9m-9b}-\frac{6m}{5b-5m}-\frac{28m}{15m-15b}$

d) $\frac{13b}{7b-7c}-\frac{5b}{6c-6b}-\frac{5b}{14b-14c}$

e) $\frac{14c}{15c-15n}+\frac{7c}{12n-12c}-\frac{9c-2n}{20c-20n}$

f) $\frac{x-3a}{7a-7x}-\frac{5x-2a}{2a-2x}-\frac{9x-a}{4x-4a}$

281. a) $\frac{5}{2a-2b}+\frac{3}{4b-4a}-\frac{5}{a-b}$

b) $\frac{13x}{6r-6x}-\frac{9x}{10x-10r}-\frac{46r}{15r-15x}$

c) $\frac{16n}{35a-35n}+\frac{14a}{15n-15a}+\frac{10n}{21a-21n}$

d) $\dfrac{7m}{55m-55p}+\dfrac{11m}{15p-15m}+\dfrac{20p}{33m-33p}$

e) $\dfrac{7u+5v}{9v-9u}+\dfrac{2u+5v}{3u-3v}-\dfrac{v-3u}{2v-2u}$

f) $\dfrac{4a-z}{3a-2z}+\dfrac{7a+4z}{6z-9a}-\dfrac{5a-3z}{6a-4z}$

282. a) $\dfrac{2}{4u-3}+\dfrac{3}{4u+3}+\dfrac{16u-6}{9-16u^2}$ c) $\dfrac{2}{2a+3}+\dfrac{3}{3-2a}+\dfrac{2a+15}{4a^2-9}$

b) $\dfrac{5}{5+3n}+\dfrac{3}{5-3n}-\dfrac{3n-35}{9n^2-25}$ d) $\dfrac{3}{2p-1}+\dfrac{7}{2p+1}-\dfrac{4-20p}{1-4p^2}$

283. a) $\dfrac{x-2a}{x+2a}-\dfrac{2a+x}{2a-x}-\dfrac{2x^2-ax+6a^2}{x^2-4a^2}$

b) $\dfrac{5a-b}{5a+b}-\dfrac{b+5a}{b-5a}-\dfrac{2b^2+7ab+15a^2}{25a^2-b^2}$

c) $\dfrac{b(16-b)}{b^2-4}+\dfrac{3+2b}{2-b}-\dfrac{2-3b}{b+2}$

d) $\dfrac{2x(5x+4)}{x^2-9}-\dfrac{4+5x}{3+x}+\dfrac{5x+1}{3-x}$

284. a) $\dfrac{n-y}{n+y}-\dfrac{y+n}{y-n}-\dfrac{4ny}{n^2-y^2}$ c) $\dfrac{4ab}{a^2-b^2}+\dfrac{b+a}{b-a}-\dfrac{a-b}{b+a}$

b) $\dfrac{x-5}{x+5}-\dfrac{5+x}{5-x}-\dfrac{20x}{x^2-25}$ d) $\dfrac{4a}{a^2-1}+\dfrac{1+a}{1-a}-\dfrac{a-1}{a+1}$

285. a) $\dfrac{v}{u^2+uv}-\dfrac{1}{u-v}+\dfrac{2v^2}{u^3-uv^2}$

b) $\dfrac{c+d}{4c-4d}-\dfrac{c-d}{4c+4d}-\dfrac{c^2+d^2}{2c^2-2d^2}$

c) $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{y-x}{6y+6x}-\dfrac{4(x^2+xy+y^2)}{3x^2-3y^2}$

d) $\dfrac{m+2n}{3m-3n}-\dfrac{m-n}{m+n}-\dfrac{n(n+13m)}{3m^2-3n^2}$

286. a) $\dfrac{1}{a^2-2ab+b^2}-\dfrac{1}{a^2-ab}-\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{2a}{(a-b)^2(a+b)}$

b) $\dfrac{1}{x^2-y^2}+\dfrac{2x}{(x+y)^2(x-y)}-\dfrac{1}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}$

c) $\dfrac{1}{k^2-m^2}-\dfrac{1}{k^2+km}-\dfrac{1}{k^2+2km+m^2}+\dfrac{2k}{(k+m)^2(k-m)}$

d) $\dfrac{2u}{(u+v)(u-v)^2}-\dfrac{1}{u^2-v^2}-\dfrac{1}{u^2-uv}+\dfrac{1}{u^2-2uv+v^2}$

287. a) $\frac{1}{m^2+2mx+x^2}+\frac{1}{m^2+mx}-\frac{1}{m^2-mx}-\frac{3m+x}{(m+x)^2(m-x)}$

b) $\frac{1}{r^2-d^2}-\frac{1}{r^2+2dr+d^2}+\frac{d+3r}{(d+r)^2(r-d)}-\frac{3r}{dr^2-d^3}$

c) $\frac{5}{e^2-2ev+v^2}+\frac{9}{e^2-v^2}-\frac{5e-v}{e^3-ev^2}-\frac{10e}{(e+v)(e-v)^2}$

d) $\frac{1}{a^2+6a+9}+\frac{1}{a^2+3a}-\frac{1}{a^2-3a}-\frac{3a+3}{(a+3)^2(a-3)}$

54. Segaarvud ja segaavaldised.

288. Järgmised segaarvud muuta liigmurdudeks:

a) $1\frac{5}{12}$ c) $7\frac{9}{13}$ e) $15\frac{5}{24}$ g) $25\frac{11}{28}$

b) $5\frac{7}{16}$ d) $11\frac{5}{9}$ f) $19\frac{14}{15}$ h) $37\frac{1}{27}$

289. Järgmistele segaavaldistele anda murru kuju:

a) $1+\frac{1}{a}$ g) $n-2m+\frac{m^2}{n}$ m) $\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}$

b) $a+\frac{1}{x}$ h) $\frac{v}{g^2}+\frac{2vt}{g}+t^2$ n) $x-3+\frac{2}{x-1}$

c) $2-\frac{3}{a}$ i) $1+\frac{2}{n^2-1}$ o) $2s-t+\frac{2t^2}{s+t}$

d) $r-\frac{a}{m}$ k) $1-\frac{2n}{n^2+1}$ p) $p+2q-\frac{q^2}{p-q}$

e) $m+2+\frac{4}{m}$ l) $\frac{a}{a+3}-1+\frac{3}{a-3}$ q) $a^2-1-\frac{4}{a+2}$

f) $a-2x+\frac{x^2}{a}$

290. Järgmised liigmurrud muuta segaarvudeks:

a) $\frac{43}{8}$ c) $\frac{87}{25}$ e) $\frac{283}{30}$ g) $\frac{1234}{365}$

b) $\frac{19}{12}$ d) $\frac{365}{7}$ f) $\frac{614}{45}$ h) $\frac{7829}{1000}$

291. Järgmistes murdavaldistes eraldada täisavaldis:

a) $\frac{x+y}{x}$ e) $\frac{x^2+a^2}{x-a}$ i) $\frac{x^3+a^3}{x-a}$

b) $\frac{4a-1}{a}$ f) $\frac{x^2+a^2}{x+a}$ k) $\frac{x^3-a^3}{x+a}$

c) $\frac{c^2-a^2}{a}$ g) $\frac{n^2+6n+10}{n+2}$ l) $\frac{x^3-2x^2+9x-6}{x^2-3x+1}$

d) $\frac{a^2-cx}{a}$ h) $\frac{x^3-7x^2-10x+8}{x-5}$ m) $\frac{t^3+t^2-2t+4}{t^2-1}$

55. Murdude korrutamine.

Murruga korrutamiseks nim. arvu jagamist murru nimetajaga ja tulemuse korrutamist murru lugejaga. Et aga murd ise on ilmutamata jagatis, siis saame [I, ül. 165, 163]:

$$\frac{l_1}{n_1}\cdot\frac{l_2}{n_2}=[(l_1:n_1):n_2]\cdot l_2=[l_1:(n_1\cdot n_2)]\cdot l_2=(l_1\cdot l_2):(n_1\cdot n_2)=\frac{l_1\cdot l_2}{n_1\cdot n_2}.$$

Järelikult: *Et murdu korrutada murruga, tuleb lugejate korrutis jagada nimetajate korrutisega.*

Et täisarvule võime anda murru kuju nimetajaks allakirjutades 1, siis saame: 1) $k\cdot\frac{l}{n}=\frac{k}{1}\cdot\frac{l}{n}=\frac{k\cdot l}{n}$;

2) $\frac{l}{n}\cdot k=\frac{l}{n}\cdot\frac{k}{1}=\frac{l\cdot k}{n}$.

Järeldus. Et murdu korrutada täisarvuga või täisarvu murruga, tuleb murru lugejat korrutada selle täisarvuga ning korrutis jagada nimetajaga. Segaarvude ja segaavaldiste korrutamisel on enamalt jaolt kasulik nad muuta liigmurdudeks.

Märkus: Enne korrutamise teostamist tuleb taandada!

292. a) $2\cdot\frac{1}{2}$ b) $5\cdot\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{4}\cdot 4$ d) $\frac{5}{8}\cdot 8$

293. a) $k\cdot\frac{a}{k}$ b) $\frac{u}{v}\cdot v$ c) $d^2\cdot\frac{v}{d^2}$ d) $\frac{s}{a^2}\cdot a^2$

294. a) $3\cdot\frac{2}{5}$ b) $6\cdot\frac{5}{8}$ c) $\frac{7}{9}\cdot 12$ d) $\frac{11}{20}\cdot 15$

295. a) $n\cdot\frac{a}{b}$ b) $ex\cdot\frac{c^2}{ae}$ c) $\frac{x}{y}\cdot a$ d) $\frac{s}{\pi r^2}\cdot\pi rh^2$

296. a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$ c) $\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{15}$ d) $\frac{15}{52}\cdot\frac{13}{20}$

297. a) $\frac{e}{f}\cdot\frac{g}{h}$ b) $\frac{ax}{by}\cdot\frac{my}{nx}$ c) $\frac{2hr^2}{p}\cdot\frac{3v}{r^2}$ d) $\frac{2a^2}{n^2y}\cdot\frac{b^2n}{a^2x}$

298. a) $\left(+\frac{25}{36}\right)\cdot\left(+\frac{63}{50}\right)$ b) $\left(-\frac{135}{112}\right)\cdot\left(+\frac{392}{495}\right)$ c) $\left(+\frac{128}{365}\right)\cdot\left(-\frac{73}{64}\right)$ d) $\left(-\frac{153}{52}\right)\cdot\left(-\frac{26}{45}\right)$

299. a) $\left(+\frac{4ab^2}{3xy}\right)\cdot\left(\frac{9ax^2}{8by}\right)$ b) $\left(+\frac{15n^2x}{8ay}\right)\cdot\left(-\frac{4xy^2}{5an}\right)$ c) $\left(-\frac{\pi r^2h^2}{3d^2}\right)\cdot\left(-\frac{6vd}{\pi r^3}\right)$ d) $\left(-\frac{4s^2r}{3da^2}\right)\cdot\left(+\frac{7a^3}{10r^2}\right)$

300. a) $\left(+\frac{2\pi r}{3}\right)\cdot\left(+\frac{9v^2}{16\pi^2r^4}\right)$

b) $\left(+\frac{gt^2}{2n^2}\right)\cdot\left(-\frac{6nts}{5g^2}\right)$

c) $\left(-\frac{23v^2}{18a^4h}\right)\cdot\left(+\frac{45a^2h^3}{2v}\right)$

d) $\left(-\frac{8m^3n^2}{27ad^2}\right)\cdot\left(-\frac{81a^2d}{16m^2}\right)$

301. a) $\frac{a^2+2ab}{ac-2cb}\cdot\frac{ab-2b^2}{ab+2b^2}$

b) $\frac{x^2-x}{yx+y}\cdot\frac{ax+a}{yx-y}$

c) $\frac{p^2-pb}{ap-a^2}\cdot\frac{bp-ab}{p^2-cp}$

d) $\frac{2Rr-4r^2}{R^2+Rr}\cdot\frac{R^2+2Rr}{4R-8r}$

302. a) $\frac{xy+x^2}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{xy-y^2}{ax+ay}$

b) $\frac{a^2-n^2}{a^2+ax}\cdot\frac{a^2+2ax+x^2}{an-n^2}$

c) $\frac{b^2-9}{b^2+b}\cdot\frac{b^2-3b}{5b+15}$

d) $\frac{4a^2-4ax+x^2}{2ab+4bx}\cdot\frac{5a^2+10ax}{3x^2-12ax+12a^2}$

303. a) $\frac{-3a^2+12}{-2x^2+18}\cdot\frac{x^2+6x+9}{a^2-4a+4}$

b) $\frac{a^2n+n^3}{a^2-n^2}\cdot\frac{an-n^2}{a^3+an^2}$

c) $\frac{x^4-16}{x^3-2ax^2+a^2x}\cdot\frac{2ax-2a^2}{x^2+4}$

d) $\frac{5m^2x-20x^3}{m^2+2m^2x+x^2}\cdot\frac{m^2-x^2}{m^2-4mx+4x^2}$

304. a) $2\frac{2}{5}\cdot1\frac{5}{6}$

b) $3\frac{1}{9}\cdot2\frac{4}{7}$

c) $4\frac{16}{45}\cdot3\frac{15}{28}$

d) $1\frac{106}{125}\cdot1\frac{9}{176}$

305. a) $\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

b) $\left(3-\frac{3}{1-a^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{a^2}\right)$

c) $\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)\cdot\left(1-\frac{2n}{n^2+1}\right)$

d) $\left(2+\frac{4}{p-1}\right)\cdot\left(4-\frac{8}{p+1}\right)$

56. Murdude jagamine.

Et jagamine on korrutamise pöördtehe, siis

$$\frac{l_1}{n_1}:\frac{l_2}{n_2}=\frac{l_1}{n_1}\cdot\frac{n_2}{l_2}=\frac{l_1\cdot n_2}{n_1\cdot l_2}$$ on õige,

sest et $\frac{l_1\cdot n_2}{n_1\cdot l_2}\cdot\frac{l_2}{n_2}=\frac{l_1\cdot n_2\cdot l_2}{n_1\cdot l_2\cdot n_2}=\frac{l_1}{n_1}$.

Järelikult: *et murdu jagada murruga, tuleb jagatavat korrutada ümberpöördud jagajaga.*

306. a) $\frac{6}{7} : 2$

b) $\frac{4}{5} : 3$

c) $\frac{a}{b} : a$

d) $\frac{m}{n} : k$

307. a) $4 : \frac{2}{5}$

b) $12 : \frac{8}{15}$

c) $x : \frac{a}{b}$

d) $m^2 : \frac{m}{n}$

308. a) $\frac{x^2}{a} : x$

b) $\frac{2a^2}{3b} : ab$

c) $a^2 : \frac{am}{n^2}$

d) $3x^2y : \frac{6ax^2}{5b^2y}$

309. a) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$

b) $\frac{15}{16} : \frac{9}{8}$

c) $\frac{75}{49} : \frac{45}{28}$

d) $\frac{85}{111} : \frac{51}{74}$

310. a) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

b) $\frac{am}{bn} : \frac{mx}{ny}$

c) $\frac{b^2}{c} : \frac{ab}{ch}$

d) $\frac{4\pi r^3 h}{3d} : \frac{\pi r^2 h^2}{3d^2}$

311. a) $\left(-\frac{48}{65}\right) : \left(+\frac{40}{39}\right)$

b) $\left(-\frac{36}{55}\right) : \left(-\frac{24}{35}\right)$

c) $\left(+\frac{44}{63}\right) : \left(-\frac{55}{14}\right)$

d) $\left(+\frac{95}{78}\right) : \left(+\frac{38}{65}\right)$

312. a) $\left(+\frac{3x^2y}{10a^2b}\right) : \left(-\frac{2ax^2}{5b^2y}\right)$

b) $\left(-\frac{4n^2x}{3my}\right) : \left(+\frac{8n^2x}{9y^2}\right)$

c) $\left(+\frac{12u^2v^2}{7a^2m}\right) : \left(+\frac{9mv^2}{14au}\right)$

d) $\left(-\frac{52cx^2}{75b^2z}\right) : \left(-\frac{39cx^2}{50bz}\right)$

313. a) $\frac{60a^4y}{77bx} : \frac{15a^2y^2}{56b^2x}$

b) $\frac{40uv^3}{21a^2} : \frac{24v^2}{35a}$

c) $\frac{14y^3z}{15ab^2} : \frac{7ay^3}{9b^2z}$

d) $\frac{25mn^2}{49x^2} : \frac{15m^2y}{28x^2}$

314. a) $\frac{ax+5a}{bx-3b} : \frac{ax+2a}{x^2-3x}$

b) $\frac{uv^2-u^2v}{3av-6au} : \frac{uv^2+auv}{4u-2v}$

c) $\frac{mx-my}{mx-xy} : \frac{x^2-y^2}{m^2-y^2}$

d) $\frac{x^2-a^2}{ax-2a^2} : \frac{x^2+ax}{ax^2-4a^3}$

315. a) $\frac{a^2+2ar+r^2}{5a^2-20r^2} : \frac{a^2+ar}{ar-2r^2}$

b) $\frac{m^2+2m+1}{m^2-2mn+n^2} : \frac{m^2-1}{m^2-n^2}$

c) $\frac{2e^3-4e^2v+2ev^2}{ev+v^2} : \frac{2e^2-4ev+2v^2}{e^2+2ev+v^2}$

d) $\frac{3k^2+6kn+3n^2}{8nk^2} : \frac{5k^2-5n^2}{12n^2k}$

316. a) $\dfrac{x^3+2x^2+x}{2x^2-4x+2} : \dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-2}$

b) $\dfrac{n^2-25}{4n^2+40n+100} : \dfrac{n^2-5n}{6n+30}$

c) $\dfrac{2s^2-8}{gt} : \dfrac{s^2-4s+4}{0{,}5gt^2}$

d) $\dfrac{k^3+18k^2+81k}{6k-6} : \dfrac{k^3+9k^2}{4k^2-4}$

317. a) $\left(x+\dfrac{y}{z}\right) : \left(z+\dfrac{y}{x}\right)$

b) $\left(m-\dfrac{b}{a}\right) : \left(a-\dfrac{b}{m}\right)$

c) $\left(a-\dfrac{1}{a}\right) : \left(1+\dfrac{1}{a}\right)$

d) $\left(a+2b+\dfrac{b^2}{a}\right) : \left(b-\dfrac{a^2}{b}\right)$

318. a) $\left(\dfrac{m}{x}+\dfrac{x}{m}\right) : \left(\dfrac{x}{m}-\dfrac{m}{x}\right)$

b) $\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}-2\right) : \left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\right)$

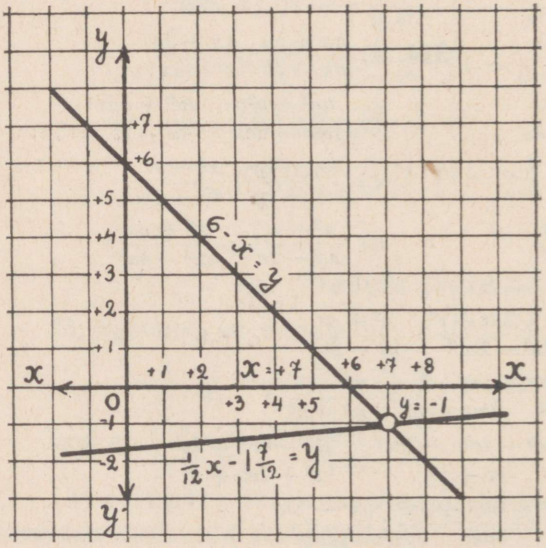
c) $\left(\dfrac{e}{v}+2+\dfrac{v}{e}\right) : \left(\dfrac{e}{v}-\dfrac{v}{e}\right)$

d) $\left(1-\dfrac{2a}{1+a^2}\right) : \left(1-\dfrac{1}{a}\right)$

IX. Võrrandid.

57. Laused, millel põhineb võrrandite lahendamine.

Et graafiliselt lahendada võrrand $\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x+5}{6}=6-x$, anname talle järgmise lihtsama kuju: $\dfrac{1}{12}x-1\dfrac{7}{12}=6-x$ ja kirjutame $\dfrac{1}{12}x-1\dfrac{7}{12}=y$ ning $6-x=y$.



Siis teeme vastava joonise, nagu kõrval näha, ja leiame: $x=+7$. Võrrandeid lahendades arvutamise teel rakendasime lauseid: „kui võrdsete suurustega liita võrdsed suurused, siis saame võrdsed suurused“ ning „kui võrdsetest suurustest lahutada võrdsed suurused, siis saame võrdsed suurused“. Nende põh-

jal kogusime tundmatud liikmed ühele poole ja tuntud liikmed teisele poole võrdsusmärki.

Me võime ka rakendada lauset: „kui võrdseid suurusi korrutada võrdsete suurustega, siis saame võrdsed suurused“ ja selle põhjal vabastada võrrandi murdudest. Näiteks: korrutades 12-ga alguses võetud võrrandi $\frac{x-3}{4} - \frac{x+5}{6} = 6 - x$ (1) kõiki liikmeid, saame võrrandi: $3x - 9 - 2x - 10 = 72 - 12x$

ehk $: x - 19 = 72 - 12x$ (2)

Kuid küsitav on, kas rahuldab viimast võrrandit (2) seesama x-väärtus, mis rahuldab võrrandit (1) ehk võrrandit $\frac{1}{12}x - 1\frac{7}{12} = 6 - x$.

Vähemalt asudes nende võrrandite graafilisele lahendamisele ei ole meil võimalik seda ette ütelda, kujutavad ju funktsioonid $\frac{1}{12}x - 1\frac{7}{12} = y$ ja $x - 19 = y$ täiesti erinevaid sirgeid; samuti ka funktsioonid $6 - x = y$ ja $72 - 12x = y$.

Selle küsimuse lahendavad järgmised laused.

Lause 1.: *Kui võrrandi mõlema poolega liita või võrrandi mõlemast poolest lahutada sama arv, siis saame uue võrrandi, millel on samad lahendid, mis esimesel võrrandil.*

Tõestus: Tähistame lühiduse otstarbel võrrandi vasaku poole V-ga ja parema poole P-ga, siis on meil olemas võrrand

$V = P$ (1).

See tähendab, et meil on olemas nõue, leida tundmatu tähe (või tundmatute tähtede) niisugune väärtus, mis muudab V võrdseks P-ga. Liidame mõlema poolega arvu M, siis saame uue võrrandi . . . . $V + M = P + M$ (2).

Selge on, et millised tundmatu väärtused muudavad V arvsuuruse võrdseks P arvsuurusega, samad tundmatu väärtused muuduvad ka $V + M$ arvsuuruse võrdseks $P + M$ arvsuurusega. See tähendab, et esimese võrrandi lahendid rahuldavad ka teist võrrandit.

Samuti on selge, et millistel tundmatu väärtustel V arvsuurus ei võrdu P arvsuurusega, samadel tundmatu väärtustel ei ole ka $V + M$ arvsuurus võrdne $P + M$ arvsuurusega. See tähendab, et teise võrrandi lahendid rahuldavad ka esimest võrrandit.

Järelikult, neil võrranditel on samad lahendid. Arutlus ei muutu, kui $+M$ asemele võtame $-M$. Võrrandeid, millel on samad lahendid, nim. samaväärseteks (ekvivalentseteks).

Järeldus 1. *Kui võrrandi mõlemal poolel esinevad täiesti ühesugused liikmed sama märkidega, siis langevad mõlemad välja.*

Järeldus 2. *Võrrandi liikmeid on lubatav üle viia ühelt pooli teisele poole vastasmärgiga.*

Lause 2.: *Kui võrrandi mõlemaid pooli korrutada või jagada sama arvuga, mis erineb nullist, siis saame uue võrrandi, millel on samad lahendid, mis esimesel võrrandil.*

Tõestus: Kasutades 1-se lause tähistusi kirjutame antud võrrandi järgmisel kujul: $V=P$ (1).

Korrutades mõlemaid pooli nullist erineva arvuga M saame uue võrrandi .... $V\cdot M=P\cdot M$ (2).

või .... $\frac{V}{M}=\frac{P}{M}$ (3).

Selge on, et millised tundmatu väärtused muudavad V arvsuuruse võrdseks P arvsuurusega, needsamad tundmatu väärtused muudavad ka $V\cdot P$ arvsuuruse võrdseks $P\cdot M$ arvsuurusega ning $\frac{V}{M}$ arvsuuruse võrdseks $\frac{P}{M}$ arvsuurusega — tingimusel, et M erineb nullist. See tähendab, et esimese võrrandi lahendid rahuldavad ka teist ja kolmandat võrrandit.

Samuti on selge, et millistel tundmatu väärtustel V arvsuurus ei ole võrdne P arvsuurusega, neilsamul tundmatu väärtustel ei ole ka $V.M$ arvsuurus võrdne $P.M$ arvsuurusega ning $\frac{V}{M}$ arvsuurus ei ole võrdne $\frac{P}{M}$ arvsuuurusega tingimusel, et M erineb nullist. See tähendab, et teise ja kolmanda võrrandi lahendid rahuldavad ka esimest võrrandit. Järelikult esimesel ja teisel võrrandil on samad lahendid ning esimesel ja kolmandal võrrandil on samad lahendid — ikka, kui M erineb nullist; need võrrandid on samaväärsed.

Kui aga M võrdub nulliga, siis on küll $M.V$ võrdne $M.P$, sest kummagi avaldise arvsuuruseks on O, kuna V arvsuurus sugugi ei tarvitse võrduda P arvsuurusega. See tähendab, et võrrandil (2) võib olla lahendeid, mis ei kuulu võrrandi (1) lahen-

dite hulka, kuna 1-se võrrandi lahendid küll kuuluvad kõik 2-se võrrandi lahendite hulka.

Ilmse nulliga korrutamist ei tule kunagi ette. Selle asemel esineb juhtumeid, kus tuleb korrutada võrrandi mõlemaid pooli muutuvat või tundmatut suurust sisaldava avaldisega, mis selle muutuva suuruse mõnel eriväärtusel võib muutuda nulliks. Selle läbi muutuvad nulliks uue võrrandi mõlemad pooled ja saavad selle läbi võrdseteks, kuna antud võrrandi mõlemad pooled muutuva suuruse sellel eriväärtusel ei tarvitse olla nullid ega isekeskis võrdsed.

Järelikult: korrutades võrrandi mõlemaid pooli muutuvat suurust sisaldava avaldisega, võidakse sisse tuua uued lahendid, mis ei kuulu esialgselt antud võrrandi lahendite hulka. Neid uusi lahendeid nim. kõrvalisteks lahenditeks.

Mis puutub võrrandite (1) ja (3) paarisse, siis on teada, et ilmse nulliga jagada üldse ei ole lubatav. Kui me aga võrrandi mõlemaid pooli jagame muutuvat suurust sisaldava avaldisega, mis võib muutuda nulliks muutuva suuruse mõnel eriväärtusel, siis võivad võrrandi mõned lahendid kaduma minna; kaotsi lähevad nimelt need lahendid, mis jagaja avaldise muudavad nulliks.

58. Võrrandite numbriline lahendamine.

Eelmise paragrahvi lausete põhjal teostame ühe tundmatuga esimese astme võrrandi lahendamiseks järgmised teisendused:

1) Võrrandi vabastame murdudest; selleks korrutame võrrandi iga liiget murdude nimetajate vähima ühiskordsega;

2) avame sulud;

3) viime tundmatud liikmed ühele poole ja tuntud liikmed teisele poole võrdsusmärki;

4) koondame sarnased liikmed;

5) kui tundmatu liige esineb miinusmärgiga, siis muudame märgid võrrandi kõigi liikmete ees;

6) jagame võrrandi mõlemaid pooli tundmatu ees oleva koeffitsiendiga.

Näide: $\frac{15x-10}{4}+x-23-\frac{5-3x}{6}=x-1+\frac{9-x}{18}$

1) Mõlemalt poolt langeb välja $+x$; siis jääb järele

$$\frac{15x-10}{4} - 23 - \frac{5-3x}{6} = -1 + \frac{9-x}{18}$$

2) Korrutame kõiki liikmeid 36-ga, siis saame:

$$9(15x-10) - 36 \cdot 23 - 6(5-3x) = -36 + 2(9-x);$$

3) avame sulud:

$$135x - 90 - 828 - 30 + 18x = -36 + 18 - 2x;$$

4) viime tundmatud liikmed vasakule poole ja tuntud liikmed paremale vastasmärkidega:

$$135x + 18x + 2x = 90 + 828 + 30 - 36 + 18;$$

5) koondame sarnased liikmed: $155x = 930$;

6) jagame mõlemaid pooli tundmatu ees oleva koeffitsiendiga; saame: $x = 6$. Vastus: $x = 6$.

Harjutisi:

319. a) $\frac{x+5}{3} = 4$

b) $\frac{u-29}{11} = 21$

c) $\frac{y+9}{4} = y - 3$

d) $\frac{9x-1}{5} = x + 7$

320. a) $\frac{2x+3}{x-1} = 3$

b) $\frac{7y-2}{2y+1} = 3$

c) $\frac{8z+5}{2z-1} = 5$

d) $\frac{9u+8}{2u+3} = 4$

321. a) $\frac{x+7}{12} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{z-5}{16} = \frac{3}{8}$

c) $\frac{2u-9}{u+1} = \frac{5}{8}$

d) $\frac{5a+3}{7a-9} = \frac{8}{9}$

322. a) $\frac{7x+8}{2} = \frac{14x+5}{3}$

b) $\frac{4x-2}{6} = \frac{5x+8}{4}$

c) $\frac{16x-7}{15} = \frac{13x-7}{12}$

d) $\frac{10x-6}{9} = \frac{7x-27}{12}$

323. a) $\frac{10x}{9} - 4 = \frac{7x}{12} + \frac{3}{4}$

b) $\frac{5x}{4} + 2 = \frac{11x}{6} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{7u}{5} + 3 = \frac{11u}{10} + 4{,}5$

d) $1 - \frac{5}{6}v = \frac{1}{2}v - \frac{3}{2} - \frac{9v}{8}$

324. a) $\frac{5x-7}{8} + \frac{x-5}{6} = 7$

b) $\frac{4x-1}{3} - \frac{3x+5}{7} = 8$

c) $\frac{7x+4}{3} - \frac{3x+2}{4} = -15$

d) $\frac{2x-4}{9} - \frac{5x-1}{6} = 4$

325. a) $\frac{x-7}{5} - \frac{x-2}{15} = \frac{x-8}{6} - \frac{x-29}{3}$

b) $\frac{15-3x}{4} - \frac{x-3}{6} = \frac{4x-7}{9} - \frac{3x-7}{12}$

c) $\frac{x+2}{3}-\frac{x-1}{4}=\frac{3x+5}{2}-\frac{10x-1}{6}$

d) $\frac{7x-2}{15}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-2}{3}-\frac{x+3}{12}$

326. a) $4x+\frac{3x+5}{8}+\frac{x-1}{3}=\frac{29x+1}{6}$

b) $\frac{5-7x}{13}-4x=\frac{3-5x}{9}+12$

c) $\frac{5(x+1)}{9}-\frac{14-13x}{15}=\frac{2x-1}{5}+8$

d) $\frac{3(2x+1)}{11}+x=10-\frac{x-1}{2}$

327. a) $x+\frac{8-x}{10}-\frac{5x+4}{6}=x+\frac{14-8x}{15}$

b) $\frac{5+6x}{20}-\frac{x-25}{15}+1=\frac{4-x}{12}+1$

c) $\frac{27x+7}{25}-\frac{57x+62}{50}-3x=\frac{3(2-13x)}{20}-3x$

d) $\frac{7-x}{10}-6x-2=\frac{1-x}{4}+\frac{2(2x+1)}{5}-6x$

328. a) $\frac{y-3}{4}-\frac{2y-5}{6}=\frac{41}{60}+\frac{3y-8}{5}-\frac{5y+6}{15}$

b) $\frac{y+10}{3}+\frac{16y-3}{20}-\frac{7y-6}{4}=\frac{y-3}{2}+\frac{3y-9}{10}$

c) $\frac{3z+2}{18}-\frac{5z-8}{24}=\frac{2z+1}{12}-\frac{z-1}{6}-\frac{2}{9}$

d) $\frac{8z-27}{30}-\frac{16z-81}{24}=\frac{2z-3}{15}-\frac{4z-9}{20}+\frac{9}{40}$

329. a) $4x+\frac{x-4}{6}-\frac{7x+8}{16}=\frac{7x-16}{24}+5$

b) $6u-16+\frac{2u}{3}=\frac{u-6}{15}-\frac{3u+12}{25}$

c) $3u-15+\frac{19u+1}{21}=\frac{2u-1}{3}-\frac{8u-11}{14}$

d) $\frac{4x}{7}-\frac{4+5x}{12}=7-x-\frac{1-x}{8}$

330. a) $\frac{4x-7}{6x+18}=\frac{7x+2}{10x+30}-\frac{11}{45}$

b) $\frac{1}{2x-5}=\frac{13}{6x^2-15x}-\frac{4}{3x}$

c) $\frac{51}{y+3}-\frac{11y+33}{y^2-9}=\frac{22}{y-3}$

d) $\frac{4}{u+2}+\frac{2}{u-2}=\frac{5u+2}{u^2-4}$

331. a) $\frac{2x+5}{x-2}-\frac{x+29}{x+9}=1$

b) $\frac{5x-5}{x+7}-\frac{3x-8}{x-4}=2$

c) $\frac{6x-11}{x-11}-\frac{3x-2}{x+1}=3$

d) $\frac{7x+5}{x+5}+\frac{3x+2}{x-6}=10$

59. Ülesandeid võrrandite koostamiseks.

Koostada võrrand ülesande tingimustest tähendab tõlkida matemaatika keelde, ehk teiste sõnadega, väljendada matemaatiliste sümbolite abil see seos suuruste vahel, mis ülesande tekstis on väljendatud harilikus keeles. Et ülesandeid on väga mitmekesiseid, siis ei saa üles seada kindlaid juhiseid võrrandite koostamiseks ülesannete tingimustest. On võimalik siiski ära märkida mõningaid juhatusi ja üldisi põhimõtteid, mis juhivad meie arutlusi võrrandi koostamisel.

Kõigepealt vastame ülesandes seatud küsimusele tundmatu tähega, näiteks x-ga. [Kui ülesandes esineb mitu küsimust, siis on loomulik, et me vastame nii mitme tundmatu tähega, mitu küsimust on.] Selle tähe abil väljendame avaldistena kõik teised suurused, millest ülesandes on kõnet otseteed, või mida ülesandes mõeldakse kaudselt. Selle juures seame küsimusi ja anname neile vastuseid, nagu aritmeetikaski, käsitades võetud tähte nagu tuntud arvu. Vastusena esinevadki avaldised, mis väljendavad teisi suurusi. Neid küsimusi seame, vastuseid anname ja avaldisi koostame niikaua, kuni saame ühele küsimusele kaks vastust, üht suurust väljendada kahe avaldise abil. Need avaldised kirjutame võrdseteks, ja võrrand on koostatud. Tuleb kindlasti jälgida, et ükski ülesandes antud arv või tingimus ei jääks arvesse võtmata.

Näide: Ülesanne. Suure Munamäe vaatetorni avamisest saadik 12. juunil 1925 kuni 15. oktoobrini 1931 oli S. Munamäel käinud 30384 inimest. 1931. aastal on käinud seal 1934 inimese võrra enam kui 1925. aastal. Aastatel 1926—1930 ühtekokku on S. Munamäel käinud 10556 inimese võrra enam kui 1925. ja 1931. aastal ühtekokku. Mitu inimest on käinud S. Munamäe vaatetornis 1931. aastal?

Vastus ül. küsimusele:

Munamäe tornis käis 1931. aastal ... x inimest

1) M-mäe tornis käis 1931. a. x in.
2) „ „ „ 1925. a. $x - 1934$ in.
3) „ „ „ 1926.—1930. a. $x + (x - 1934) + 10556$ in.
4) Ühtekokku käis S. M-l 1925—1931. $x + (x - 1934) + (x + x - 1934 + 10556)$ in.
5) 1925—1931. 30384 in.

Järelikult $\mathbf{x + (x - 1934) + (x + x - 1934 + 10556) = 30384.}$

Ülesannete enamikus esineb kaks teineteisega seotud suurust. Ja kui kaks suurust on seotud teineteisega, siis määravad nad kolmanda suuruse. See kolmas suurus seobki neid kaht suurust. Harilikult on see suuruste vaheline seos vaadeldud kahel juhtumil ning peale selle on olemas kolmas tingimus, mis seob neid kaht juhtumit. See viimane tingimus annabki meile võimaluse kirjutada võrrandit.

Näide: A. talu ja T. linna vahel asub E. alev 9 km kaugusel A. talust. Alevist läks välja rühm sõdureid T. linna poole, marssides keskmise kiirusega 5 km/t. 1 tund hiljem lähtus A. talust jalgrattur ka T. linna poole. Ta sõitis keskmise kiirusega 12 km/t. Mitme tunni pärast jõuab ta sõdureile järele?

Jalgrattur jõuab sõdureile järele x tunni pärast.

	Jalgrattur	Sõdurid
Liikumise aeg:	Rattur sõidab x tundi	Sõdurid marsivad $x+1$ tundi
Liikumise kiirus:	kiirusega 12 km/t;	kiirusega 5 km/t;
Läbikäidud tee:	jõuab ära sõita $12.x$ km.	jõuavad ära käia $5.(x+1)$ km.

Läbikäidud teede vahe on $12x-5(x+1)$ km ehk 9 km.

Järel. $\mathbf{12x-5(x+1)=9.}$

332. a) Tartu, Nõmme ja Tallinna loomakaitse ühingu oli ühtekokku 1450 liiget; Tartu ühingul oli 30 liiget vähem kui Nõmme ühingul ja Tallinna ühingul oli 350 liiget enam kui Tartu ja Nõmme ühingul ühtekokku. Mitu liiget oli Nõmme Loomakaitse Ühingul?

b) Linna algkoolide 4-jas rühmas oli 97 noorkotkast; I rühmas oli 1 noorkotka võrra enam kui II rühmas; III rühmas oli 3 noorkotka võrra enam kui I rühmas ja IV rühmas oli 8 noorkotka võrra vähem kui III rühmas. Mitu noorkotkast oli I rühmas?

333. a) Tulepurskav mägi Krakatau saatis oma purskamisel 26.—27. augustil 1883 oma suitsu samba ja tuha 6 korda nii kõrgele, kui kõrgel merepinnast leiduvad kõrgeimad inimesasulad maakeral. Maailmasõja ajal sakslaste poolt Pariisi peale lastud kaugekahuri kuul saavutas arvutuste järele kõrguse, mis ületab

Krakatau purske kõrguse 1,4 kordselt. Kõigi nende kõrguste summa on 77 km. Kui kõrgele saatis Krakatau oma suitsusamba ja tuha?

b) Norra suure nabamereuurija Fridtjof Nanseni andmete järele võib mitmeaastase hiiglajääpanga vee all olev osa olla 63 m võrra paksem kui veest väljaulatuv osa. Vee all olev osa on ligikaudu 10 korda nii paks kui veest väljaulatuv osa. Millise paksuse võib saavutada niisugune jääpank?

c) Põhjanabameri on suur avar veekogu, mille pikkust loetakse Svalbardist kuni Alaskani ja laiust Ameerika arktilisest saarestikust Siberi rannikuni. Mainitud pikkus on laiusest 700 km võrra pikem ja nende mõõdete suhe on $1\frac{7}{24}$. Kui lai on põhjanabameri?

d) Vähimad iseseisvad riigid Euroopas on Monako, San-Mariino ja Liechtenstein. Nende maaala ühtekokku on 221,5 km? Monako maaala on 1,5 km^2; 1-he km^2 võrra vähendatud San-Mariino maaalast kolmandik on sama suur kui 1-he km^2 võrra suurendatud Liechtensteini maaalast kaheksandik. Kui suur on San-Mariino maaala?

e) Vallavanema kandidaatideks oli esitatud kolm isikut: peremees Kaljo, sepp Ilmar ja maatamees Martin. Peremees Kaljo sai 2 korda nii palju hääli kui sepp Ilmar ja sepp Ilmar sai 1 hääle võrra vähem kui Martini poolt antud häälte kolmekordne arv. Üldse oli valimistel antud 17 häält. Mitme häälega valiti peremees Kaljo vallavanemaks?

f) Ühe nädala jooksul (21.—28. novbr. 1931) veeti Eestist välja kartuleid Liverpooli 16 kvintali enam kui Rootsi väljaveetud kartulite 4-jakordne hulk ja Londoni 3 korda nii palju kui Liverpooli; seejuures Inglismaale väljaveetud kartulite hulk ületas Rootsimaale väljaveetud kartulite hulga 3814 kvintali võrra. Mitu kvintali kartuleid veeti tol korral välja Londoni?

334. a) Eesti hõimukillu liivi rahva arvust 1928. aasta andmete järele asus üheteistkümnes liivi külas läti rannikul 0,76 kogu rahvast; 0,3 jäägist ja veel 5 inimest oli välismaal ja laevadel teenistuses ning ülejäänud 310 inimest elas läti linnades ja rannikust eemal. Kui suur oli 1928. aasta andmete järele liivi rahva arv?

b) Lepistu kooliaias kasvavatest õunapuudest on $\frac{1}{4}$ kogu puude arvust ja veel 3 puud antoonovka sorti; $\frac{3}{8}$ jäägist ja veel 2 puud on kuldrenett-õunapuud; ülejäävad 10 puud on mitmesugused suviõunapuud. Mitu õunapuud on Lepistu kooliaias?

c) Isa palgast läheb iga kuu 8 kr elukindlustuseks; $\frac{5}{24}$-kku jäägist korteri üüriks, $\frac{7}{12}$-kku samast jäägist majapidamise kuludeks ja ülejääv summa 25 kr. erakorralisteks kuludeks. Kui suur on isa kuupalk?

d) Vene loodusuurija Adams'i poolt esimese tervikuliselt leitud mammuti kumbki kihv kaalus $\frac{7}{18}$-kku tervest peast ilma kihvadeta; pea ühes kihvadega kaalus 300 kg. Kui palju kaalus kumbki kihv?

e) Talunaine müütas turul elusaid kanu. Esimene ostja ostis $\frac{1}{2}$ kanade arvust ja veel $\frac{1}{2}$ kana; teine ostja ostis $\frac{1}{2}$ ülejäänud kanade arvust ja veel $\frac{1}{2}$ kana; kolmas ostja ostis $\frac{1}{2}$ uuest jäägist ja veel $\frac{1}{2}$ kana. Siis olid kõik kanad elusalt müüdud. Mitu kana müüs naine?

f) Põllumees palkas rühma heinaniitjaid. Maha tuli niita hein kahel heinamaal, millistest üks on 2 korda nii suur kui teine. Pool päeva niitsid kõik suuremal niidul; teine pool päeva läks pool osa rühmast vähemale heinamaale niitma, kuna pool osa rühmast jäi suuremale heinamaale. Õhtuks oli kõik hein suuremal heinamaal niidetud, kuna vähemal heinamaal jäi veel niitmise tööd 1-le mehele 1-ks päevaks. Mitu meest oli rühmas?

335. a) Mitme %-ga tuleb kasu kandma panna kapital 800 kr., et ta 7 kuuga annaks 42 kr. intresse?

b) 135-kroonine veksel diskonditi 2 kuud 20 päeva enne tähtpäeva ja tema eest saadi 132,6 kr. Kui suur oli diskonto protsent?

c_1) Kui kauaks tuleb 7,5%-ga kasu kandma panna 2200 kr., et ta kasvaks 2530 kr. suureks?

c_2) Mitu päeva enne tähtaega diskonditi 8%-ga 450-kroonine veksel, kui tema eest maksti 440 kr.?

d_1) Kui suur kapital toob 9%-ga 5 kuu 10 päeva jooksul 45 kr. intresse?

d_2) Kui suure veksli diskont 84 päeva enne tähtaega on 9,80 kr., kui diskonto protsent on 7?

e_1) Kui suur kapital kasvab 6%-ga 15 kuu jooksul 903 kr. suureks?

e_2) Missugune kapital kasvab 4,5%-ga 500 päeva jooksul 1190 kr. suureks?

f_1) Kui suur on veksli valuut, mille diskontimisest 9%-ga 4 kuud 20 päeva enne tähtaega saadakse 791,30 kr.?

f_2) Kaupmees diskontis kauba vastu saadud veksli 7,5%-ga 56 päeva enne veksli tähtaega ja sai tema eest 1779 kr. Kui suur oli veksli valuut?

336. a) Nii suure põllu linu, nagu peremees iga aasta maha tegi, oli Sauna-Mari ära kitkunud harilikult 15 tunniga, perenaisel Annel oli aga kulunud 21 tundi. Sel aastal peaks nad üheskoos selle töö ära tegema. Kui palju aega võiks neil selleks kuluda, arvestades senist töökiirust?

b) Maja juurde kuuluva kõnnitee puhastamiseks lumest pärast suurt tuisku oli õpilane Õ. harilikult kulutanud 55 min., õpilane P. aga 70 min. Kui palju aega kulub neil samadel tingimustel selle kõnnitee puhastamiseks, kui nad koos töötavad?

c) Limonaaditehase jääkelder oli tarvis täita jääga. Üks tööliste paar lubas selle töö ära teha 8 päevaga. Tehase omanik aga laskis selle töö ära teha kahel tööliste paaril ja töö sai sel teel valmis 3 päevaga. Mitme päevaga oleks teine tööliste paar selle töö üksi ära teinud, kui eeldada, et esimene tööliste paar oma töötempot ei suurendanud?

d) Linna raamatukogu laskis R. ja T. köitekodadel raamatuid köita ja töö tehti valmis 12 päevaga. R. töökoda üksi oleks nende raamatute köitmiseks tarvitanud 21 päeva. Mitme päevaga oleks T. töökoda üksi selle töö ära teinud?

337. a) Veepaak täitub kahe toru kaudu 18 minutiga; esimene toru üksi täidab paagi 30 minutiga. Kui palju aega tarvitab teine toru paagi täitmiseks?

b) Kümblusvanni jookseb ühest kraanist külma ja teisest sooja vett. Harilikult andsid mõlemad kraanid ühepalju vett ja täitsid vanni 7 minutiga. Külmavee toru oli aga vähe ummistunud ja vann täitus 10 minutiga. Mitme minutiga oleks sel tingimusel külmavee toru üksi täitnud vanni?

c) Purskkaevu ümber olev ääreni täis tiik jookseb vastava toru kaudu tühjaks 20 minutiga; kui aga avada ka teine toru, mille kaudu vesi sisse voolab, siis jookseb ta tühjaks 70 minutiga. Mitme minutiga täitub tühi tiik, kui avada üksi teine toru?

d) Kui avada külma ja sooja vee kraanid ühtlasi, siis täitub kümblusvann 7 minutiga; täis vann jookseb aga tühjaks põhjas oleva augu kaudu 12 minutiga. Vann oli tühi, kui avati mõlemad kraanid; kuid põhjaauk oli lahti unustatud. Mitme minuti pärast on täidetud vannist $\frac{5}{8}$ osa?

e) Meski tõrre puhastamiseks oli tõrs vett täis pumbatud. Siis avati põhja lähedal asuv kraan, mis võis tühjendada täis tõrre $\frac{1}{2}$ tunniga, ja ühtlasi hakati ka vett sisse pumpama. Pump võis tühja tõrre täita $\frac{3}{4}$ tunniga. Mitme minuti pärast jääb tõrde vett veel ainult $\frac{1}{10}$ osa tõrretäiest?

338. a) Suuräri kassapidaja saab 1,875 korda nii palju palka kui noor müüjanna. Palgapäeval maksis müüjanna A. kassapidajale oma võla 30 kr. ja siis oli kassapidajal 3,6 korda niipalju raha kui A-l. Kui palju palka sai A?

b) Isal ja pojal on sünnipäevad samal kuupäeval. Möödunud sünnipäeval oli isa 4,5 korda nii vana kui poeg; 8 aasta pärast on poja vanus $\frac{4}{11}$ isa aastate arvust. Kui vanaks sai isa möödunud sünnipäeval?

c) Vagunis oli suitsetajate poolel $\frac{5}{8}$ tollest sõitjate arvust, mis oli mittesuitsetajate poolel. Kui mittesuitsetajate poolelt üle läheb suitsetajate poolele 6 suitsetada tahtjat isandat, siis jääb mittesuitsetajate poolele $\frac{5}{8}$ tollest arvust, mis saab suitsetajate poolel. Mitu sõitjat oli esialgu mittesuitsetajate poolel?

d) Taluomanikul oli kaks põldu valmis haritud talivilja jaoks. Metsapoolsele põllule kavatses ta külvata rukist ja jõepoolsele põllule nisu; siis oleks rukki alla saanud 0,84 nisu alla võetud vakamaade arvust. Nisuseemne puuduse tõttu pidi peremees 1,5 vakamaad nisu alla määratud põllust täis külvama rukkiseemnega. Nii sai taluomanikul nisu alla $\frac{10}{18}$ rukki all olevatest vakamaade arvust. Mitu vakamaad oli haritud nisu jaoks?

e) Andres Paas oli kokku ostnud Mäe-Järve ja Ala-Järve talud. Mäe-Järve suurus oli 0,3 Ala-Järve suurusest. Pärandades need talud kahele pojale jagas ta liidetud krundi pooleks; selleks tuli

Ala-Järve küljest mõõta Mäe-Järve külge 14 ha. Kui suur oli ühendatud Järve talu?

f) Sõites jalgrattal kodunt linna tuli noormehel peatuda kaks korda. Kui ta onu tallu läks teateid viima, oli ära sõidetud kilomeetrite arv 0,4-kku veel sõita jäänud kilomeetrite arvust. Onu talust edasi sõitnud, kohtas ta tee ääres töötavat sõpra ja peatus jälle, et puhata ja vestelda. Siit linna sõita jäänud kilomeetrite arv oli 0,75-kku juba ära sõidetud km-te arvust. Kui kaugel isa talust oli onu talu?

339. Veduri ratta ümbermõõt on 4 m, vaguni ratta ümbermõõt 3 m. Kui pikal teel teeb vaguni ratas 10000 pööret enam kui veduri ratas?

b) Estaklandi rehepeksumasina tagumise ratta ümbermõõt on 3,2 m ja esimese ratta ümbermõõt 2,2 m. Kui pikal teel teeb tagumine ratas 88 pööret vähem kui esimene ratas?

c) Teerulli vedava masina tagumise ratta ümbermõõt on $2\frac{3}{4}$ m ja teerulli enese ümbermõõt on $1\frac{3}{5}$ m. Tänava sillutamisel tegi rull tänava ühest otsast teise otsani 270 pööret enam kui masina tagumine ratas. Kui pikk on see tänav?

d) Kahekroonise hõberaha ümbermõõt on 9,6 cm, ühekroonise hõberaha ümbermõõt on 8,4 cm. Veeredes kirjutuslaua pikkust mööda teeb ühekroonine raha 2,2 pööret enam kui kahekroonine. Kui pikk on kirjutuslaud?

e) Raudteeasjanduse näitusel Berliinis aastal 1928 oli väljapandud hiigelvedur, mille ratta ümbermõõt oli 6 m. Selle veduri juurde kuuluvate vagunite rataste ümbermõõdud olid 4,2 m. Raudteel Berliinist Hamburgi teeb niisuguse veduri ratas ümmarguselt 20700 pööret vähem kui vastava vaguni ratas. Kui pikk on Berliin-Hamburgi raudtee ligikaudu?

f) Väikese rehepeksumasina tagumise ratta ümbermõõt on $2\frac{1}{4}$ m ja esimese ratta ümbermõõt $1\frac{5}{8}$ m. Teel ühest külast teise tegi tagumine ratas 800 pööret vähem kui esimene. Kui kaugel on need külad teineteisest?

Vastused ümmardada!

340. a) Poisil kulus linnas käimiseks 9 tundi; linna minnes käis ta tunnis keskmiselt 5,5 km ja tagasi tulles 4 km. Linnas kulus tal $4\frac{1}{4}$ tundi. Kui kaugel oli poisi kodu linnast?

b) Saades teateid ümber maailma lendaja M. õnnetusest kaugel põhjas, saatsid N. riigi võimud temale abi andma oma lendureid. Neil lendureil kulus sinna ja tagasi lendamiseks, seal viibimine arvestamata, 16,5 tundi. Sinna lennuks oli ilm soodus ja lennati kogu aeg 180 km/t; tagasilennul oli keskmine kiirus 150 km/t. Kui kaugel omast asukohast käisid lendurid abi andmas?

c) Ratsavirgats viis teate sihtkohta 150-meetrilise minutikiirusega ja tuli tagasi 140-meetrilise minutikiirusega. Oma ülesande oli virgats täitnud 1 tunniga, peatudes sihtkohas 2 min. Kui kaugel oli sihtkoht lähtekohast?

d) Poiss müüs oma koera kaugemal olevasse tallu ja viis ise jala koera sinna. Kui koer uues kodukohas mõne päeva pärast õue lasti, leidis ta peagi jäljed ja läks jälgi mööda tagasi. Sinna minnes käis poiss koeraga 4,5 km tunnis ja tagasi tuli koer 10-km-lise tunnikiirusega, nagu pärast selgus. Koer oli kogu teekonna edasi-tagasi sooritanud 4 tunni 50 minutiga. Kui kaugele kodust oli poiss koera müünud?

341. a) Alevi kaupmees oli linnast toonud 25 pakki kohvi. Kallimat sorti kohvipakist oli ta maksnud 2,2 korda nii palju kui odavamat sorti kohvipakist; kallimat sorti kohvi eest oli ta maksnud 4,40 kr., odavamat sorti kohvi eest 4,25 kr. Kui kallis oli pakk odavamat sorti kohvi?

c) Koolile oli tellitud seinatahvleid ja koolipinke, kokku 22 mööblitükki. Kõik tahvlid ühtekokku läksid maksma 140 kr. ja kõik pingid ühtekokku 360 kr. Tahvel oli 1,75 korda nii kallis kui koolipink. Kui palju maksis 1 koolipink?

c) Maamees kurtis: „Sealiha on nüüd $2\frac{1}{4}$ korda odavam kui mõne aasta eest; siis müüsin sea ja sain 126 kr., nüüd müüsin sea, mis kaalus 20 kg enam, ja sain ainult 67,20 kr.“ Kui palju maksis siis sealiha kg?

d) Kirjastusärilt tellitud ajaloo õpperaamatute eksemplaride arv ületab tellitud romaani eksemplaride arvu 4-kordselt; romaani eksemplar ületab aga ajaloo õpperaamatu eksemplari hinna poolest 3 kr. 85 s. võrra. Tellitud ajaloo õpperaamatute eest tuli raamatukauplusel maksta 16 kr. 80 s. ja romaani eksemplaride eest 15 kr. 75 s. Mitu ajaloo õpperaamatut oli tellitud?

e) Majaomanik linnas laskis kaevata kaevu ja maksis töö eest 126 kr. Mõne aasta pärast, kui tööhind oli ainult 0,6 endisest hinnast, laskis ta teise maja juures kaevata teise kaevu. Viimase töö eest maksis ta 111,60 kr., ehk küll see teine kaev sai esimesest 20 jalga sügavam. Kui palju maksti esimese kaevu kaevamisel sügavuse jala eest?

f) Pimedate töökoda müüs asutisele 10 harja; põrandaharjade eest saadi 8,40 kr ja riideharjade eest 4,50 kr. Riidehari oli 1,25 korda niikallis kui põrandahari. Kui palju maksti 1 riideharja eest?

342. a) Väikekaupluses oli ühel päeval müüdud 36 tükki seepi 8,20 kr. eest; kirju pesuseebi tükk maksis 17 senti ja mandliseebi tükk 43 s. Kui suure summa eest oli sel korral müüdud mandliseepi?

b) Perenaine ostis turult haugi ja angerjaid kokku 4 kg, ja maksis kogu ostu eest 280 senti; havi kg maksis 50 senti ja angerja kg 150 senti. Kui palju oli perenaine maksnud angerjate eest?

c) Toiduainete kauplus oli ostnud 25 kg juustu ja maksnud 30,60 kr. Õisu koorejuust maksis 130 senti kg ja hollandi juust 120 s. kg. Kui suure summa eest oli ostetud Õisu koorejuustu?

d) Peremees tõi linnast soola ja rauda; kogu ost kaalus 150 kg ja maksis 18 kr.; raua kg eest oli peremees maksnud 15 senti ja soola kg eest 6 senti. Kui palju raha oli ta väljaandnud raua eest?

e) Magusa söögi jaoks ostis ema 500 grammi kuivatatud puuvilja 1,40 kr. eest, aprikoose ja ploome; 1 kg aprikoose maksis 3 kr. ja 1 kg ploome 2,5 kr. Kui palju oli ema maksnud kuivatatud aprikooside eest?

343. a) Osteti 24 käterätikut ja 5 laudlina ning maksti 71 kr.; laudlina oli käterätikust 5,5 kr. võrra kallim. Kui palju maksti kõigi laudlinade eest?

b) Äri saatis posti 12 kirja; välismaale saadetud kirjadele läks igaühe peale marke 32 sendi eest ja igale sisemaakirjale 10 sendi eest; kõik margid kokku maksid 2 kr. 30 s Kui palju maksid kõik margid välismaale saadetud kirjadele?

c) Peremees ostis jõulukingiks teenijatüdrukule 4 m kleidiriiet ja sulasele 9 m särgiriiet ning maksis kõige eest kokku 7,92 kr.; kleidiriie oli särgiriidest 42 sendi võrra meetri pealt kallim. Kui palju läks maksma tüdruku kingitus?

d) Saapakaupluses oli ühel päeval müüdud saapaid ja kalosse kokku 588 kr. eest; saapapaarist oli võetud keskmiselt 12 kr. ja kalossipaarist 3,5 kr. Saapaid oli müüdud 13 paari vähem kui kalosse. Kui palju saadi sel päeval kalosside müügist?

e) Talumees oli ostnud linnas pudeli petrooleumi — 20 kg — ja koti soola — 50 kg, ning kõige eest maksnud 6,60 kr.; 1 kg petrooleumi on 12 sendi võrra kallim kui kg soola. Kui palju maksis see pudel petrooleumi?

f) Kopsuhaige oli oma paranemise ajal tarvitanud 12 kr. eest mineraalvett; seltersi oli ta tarvitanud 19 pudelit enam kui Ungari tervisevett „Hunyadi János". 1 pudel seltersi maksis 12 senti ja 1 pudel „Hunyadi Jánost" maksis 150 senti. Kui palju läks tal maksma välismaalt toodud tervisevesi?

g) Jõukal peretütrel oli pulmadeks valmis kootud 15 paari sokke ja 8 paari kindaid. Selleks oli tal kulunud 2710 gr villast lõnga; kindapaarile oli läinud 35 gr lõnga vähem kui sokipaarile. Kui palju lõnga oli kulunud sokkidele?

344. a) Pätsjuustukeste tegemisel oli perenaine kohupiimale juurde lisanud võid ja nii saanud 2,25 kg pätsjuustu, mis läks maksma 69 senti. Kohupiima kg maksis 22 senti ja või kg — 1 kroon. Mitme sendi eest oli võid sisse pandud?

b) Poes segati suhkrukompvekke, á 1,25 kr. kg, šokolaadikompvekkidega, à 2 kr., ja saadi 5 kg segu, à 1,55 kr. kg. Kui suure summa eest oli pandud šokolaadikompvekke segusse?

c) Kuldsepp sulatas ühte 960-proovilise kuldkäevõru ja 585-proovilised taskukellakapslid ning sai 72 grammi 750-proovilist kulda. Kui palju kaalusid taskukella kapslid?

d) Hõbevaagna tegemiseks sulatas kuldsepp vana hõbedase sõle ja hõbedase supikulbi. Sõlg oli 885-prooviline, kulp — 800-prooviline ja vaagen sai 825-prooviline ning kaalus 510 gr. Kui palju kaalus sõlg?

e) Kuldsepp tegi hõbesuhkrutoosi, mis kaalus 300 gr ja oli 800-prooviline. Tarvismineva hõbeda võttis kuldsepp vanadest

vene rahadest, rublalistest ja kahekümnekopikalistest. Rublaline raha oli 900-prooviline ja kahekümnekopikaline raha oli 500-prooviline. Kui palju puhast hõbedat sai kuldsepp selle suhkrutoosi jaoks kahekümnekopikalistest rahadest?

f) Kui palju 80%-list äädikahapet tuleb segada destilleeritud veega, et saada 1 kg 30%-list äädikahapet?

g) Segati väävelhapet destilleeritud veega ja saadi 5 kg aku-hapet, à 54 senti kg. 1 kg. väävelhapet maksab 160 senti ja 1 liiter destilleeritud vett 8 senti. Mitme sendi eest väävelhapet oli pandud segusse?

h) Apteegis segati 95%-list piiritust destilleeritud veega ja saadi nõrgemat piiritust, mille 1 kg läks maksma 140 senti. 1 liiter 95%-list piiritust maksab 190 senti ja 1 liiter destilleeritud vett 8 senti. Mitme sendi eest on vett 1 kg. segus?

i) Antiikasjadega kauplejalt ostis kuldsepp pühakuju kuldehte, mille proov oli 960. Sealt saadud kulla sulatas kuldsepp vanade 585-prooviliste sõrmuste kullaga ühte ja tegi portsigari, mis sai 810-prooviline ja kaalus 300 gr. Kui palju puhast kulda oli kuldsepp saanud pühakuju ehtest?

345. a) Kuressaarest lähtus omnibus Kihelkonna poole, sõites keskmiselt iga 5 minutiga 2 km; samal ajal lähtus Kihelkonnalt talumees hobusega, jõudes edasi keskmiselt iga 20 min. jooksul 3 km. Mitmendal kilomeetril Kihelkonnalt kohtuvad sõidukid? Kuressaare—Kihelkonna vahemaa on 36 km.

b) Tallinnast ja Tartust lähtuvad samal ajal teineteisele vastu kaks rongi. Kui peatused kaasa arvata, siis jõuab Tallinnast lähtuv rong edasi keskmiselt 25 km tunnis ja Tartust lähtuv rong 26 km tunnis. Tallinnast Tartu raudteed mööda on 191 km. Mitmendal kilomeetril Tallinnast asub jaam, kus need rongid kohtuvad?

c) L. alevist lähtus teatud kella ajal autobus V. linna poole, sõites keskmiselt iga 2,5 minutiga 1 km. 6 min. hiljem lähtus V. linnast mototsükletil kaupmees N. sama teed L. alevi poole, tarvitades keskmiselt iga km sõitmiseks 2 min. Nad kohtusid just poolel teel L. ja V. vahel. Mitme minuti pärast omnibuse lähtumisest arvates kohtusid need sõidukid?

d) Sõbrad E. ja O., kes elasid teine teises linna ääres, kõnelesid telefoni teel kokku, et kohtuvad kesklinnas A. kohvi-

kus. E. ütles: „Ma lähtun mõni minut hiljem, sest mul on kohvikuni oma 200 m lähem kui sinul ja mul kulub 1 km käimiseks 12 min, kuna sinul kulub 15 min.“ Nii lähtuski E. kodunt 9 min hiljem kui O. ja nad kohtusid just kohviku ukse ees. Mitme minuti käik kohvikust on O. koju, arvestades O. käigukiirust?

e) Õpilane sõitis jalgrattal välja Pärnust Jaagupi poole, sõites tunnis keskmiselt 12 km. Tund varem oli tema isa hobusega välja sõitnud Jaagupist Pärnu poole, sõites keskmiselt 9 km tunnis. Pärnu ning Jaagupi vahemaa on 28 km. Kui kaugel Jaagupist kohtuvad isa ja poeg?

f) Tartust Emajõe suudmeni on jõge mööda 40 km. Kell 14^{30} oli Tartu ja Värska vahel ühendust pidav aurik Emajõe suudmes, sõites Tartu poole keskmise kiirusega 12 km tunnis. Kell 16 lähtus Tartu sadamast väike aurik, sõites jõge mööda allapoole keskmise kiirusega 10 km tunnis. Kui kaugel Tartust kohtuvad aurikud?

g) Sõbrad Ülo ja Ilo elasid teineteisest 5,35 km eemal. Kord läks Ülo minema Ilo poole, käies keskmiselt 80 m minutis Umbes samal ajal tuli ka Ilo kodunt välja, et minna Ülo poole. Kohtudes selgus, et Ilo oli 5 min. hiljem lähtunud kodunt kui Ülo ja käinud keskmise kiirusega 85 m minutis. Kui kaugel Ülo kodust kohtusid sõbrad?

h) Talvel $19^{25}/_{26}$ a. rändasid kaks noort eestlast — Evald Märks ja Karl Nurk — esimestena jalgsi läbi Saahara kõrve (7 kuuga 5000 km). Nefta oaasist kuni Tuggurti linnani on 225 km. Sellel teeosal jõudsid nad päevas edasi keskmiselt 45 km. Teel kohtasid nad karavani, mis läks Tuggurtist Neftasse. Karavani keskmist päevakiirust võis arvata 75-km-le. Oma araablasest saatja kaudu said nad teada, et karavan oli lähtunud Tuggurtist 0,2 päeva võrra hiljem kui nemad Neftast (0,2 päeva = 2 tundi; Märks ja Nurk 1 tund enne päikese tõusu ja karavan 1 tund pärast päikese tõusu). Kui kaugel Tuggurtist kohtasid meie rändurid karavani?

i) Linnast kojusõidul kohtas peremees ootamatult oma talu karjapoissi, kes oli linnast pärit. Selgus, et poiss oli talust salaja lahkunud 1,5 tundi varem kui peremees linnast välja sõitis. Poiss oli iga km ära käinud 10 minutiga, kuna peremees

1 km sõiduks tarvitas 6 min. Poiss oli jõudnud 7 km enam ära käia kui peremees linnast sõita. 1) Mitu minutit pärast põgenemist tabati poiss? 2) Kui kaugel talust tabati poiss?

346. a) Helsingi sadamast sõitis välja reisijate aurik Tallinna suunas keskmise kiirusega 20 km tunnis. Poole tunni pärast lähtus samast sadamast samas suunas suur ookeani-aurik, jõudes tunnis keskmiselt edasi 25 km. Kui kaugel Helsingi sadamast jõudis viimane aurik esimesele järele?

b) Lasnamäe lennuväljalt tõusis õhku lennuk ja lendas minema Narva suunas, kiirusega 90 km tunnis; 20 min. pärast tõusis õhku samalt lennuväljalt teine lennuk ja lendas esimesele järele, keskmise kiirusega 120 km tunnis. Kui kaugel lennuväljast jõudis teine lennuk esimesele järele?

c) Southamptonist lähtusid kaks reisijate aurikut teele Aafrika poole; üks 12 tundi varem kui teine. Esimese auriku sõidukiirus oli 17 sõlme tunnis ja teise oma 23 sõlme tunnis. Kui kaugel Southamptonist jõuab teine laev esimesele järele?

d) Lähtejaamast saadeti välja kaubarong, mis pidi sõitma keskmise kiirusega 18 km tunnis; 42 min. pärast saadeti samast jaamast välja postirong, mille keskmiseks kiiruseks oli ette nähtud 30 km tunnis. Oli arvestatud nii, et M. jaama pidi saabuma kaubarong 2 min. varem kui postirong ja sealt pidi siis postirong kaubarongist varem teele saadetama. Kui kaugel lähtejaamast on M. jaam?

347. a) Samal ajal kui suvitaja pangadirektor sõitis välja omast talust autoga linna poole, lähtus teisest talust, mis asub sama tee ääres 11 km linna poole, selle talu omanik hobusega ka linna poole. Auto sõitis 45-km-lise ja hobune 12-km-lise tunnikiirusega. Kui kaugel oma talust sai auto hobusele järele, eeldades, et järelejõudmine sündis veel enne linna jõudmist?

b) Vanemad läksid jalutama Merekülast mereranda mööda Sillamäe poole, käies keskmiselt 3 km tunnis. Samal ajal lähtus Narva-Jõesuust nendele järele poeg, käies tunnis keskmiselt 6,2 km. Mereküla on Narva-Jõesuust randa mööda 6 km Sillamäe poole. Kui kaugel Merekülast jõudis poeg vanematele järele?

c) Üks poiss andis teisele võidujooksmisel 60 m ette ja siis hakkasid mõlemad jooksma sama rada mööda. Kui esimene poiss oli teise kätte saanud, siis selgus, et esimene oli joosnud 165-

meetrilise minutikiirusega ja teine 150-meetrilise minutikiirusega. Kui pika maa kuni kinnivõtmiseni oli jõudnud läbi joosta teine poiss?

d) Rein ja Juhan asusid hommikul ühel ajal teele kooli. Reinu kodu asub koolist 0,75 km võrra kaugemal kui Juhani kodu ja tee viib Juhani kodust mööda. Rein käib tunnis ära 5,5 km, kuna Juhan ainult 4 km suudab ära käia. Kui kaugel omast kodust jõuab Rein Juhanile järele?

e) Jõge mööda üles sõitis kaks aerutajat lootsikuga ja nende järel üks aerutaja süstaga. Kui süstas-sõitja oli kaluri majakese kohal, siis olid esimesed sõitjad viimasest 250 m ees. Esimesed jõudsid edasi 4 km-lise tunnikiirusega, kuna viimane edasi jõudis $6\frac{2}{3}$-km-lise tunnikiirusega. Kui kaugel kaluri majakesest jõudis süst lootsikule järele?

f) Allveelaev jälgis vaenlase ristlejat ning tegi kindlaks tema liikumise suuna, kiiruse ja kauguse. Ristleja kiirus oli 0,2 meremiili minutis ja kaugus allveelaevast 5 meremiili. Olles kulutanud korralduste jaoks 5 min., arvates ristleja kauguse määramise momendist, hakkas allveelaev liikuma ristleja jälgedes kiirusega 0,25 meremiili minutis. Ristlejast 0,5 meremiili kauguselt saatis allveelaev oma hävitava miini ristlejale. Kui palju oli allveelaev omaks otstarbeks edasi liikunud ülesandes märgitud momentide vahemikus?

348. a) Poeg sõitis jalgrattal ees ära ja $\frac{3}{4}$ tunni pärast sõitis ema omnibuses järele Rakverest Võsule. Ratturi keskmine tunnikiirus oli 14 km ja omnibuse oma 24 km. Rakvere-Võsu vahet on 40 km. Mitmendal kilomeetril Võsult jõudis ema pojale järele?

b) Loobust ja Viitnast sõitis kaks talumeest Tallinna-Narva maanteed mööda Rakvere laadale. Viitna on Loobust 4 km Rakvere poole ja Viitnast on Rakverre 27 km. Viitna mees jõudis tunnis edasi 5 km; Loobu mees lähtus kodunt 1 tund hiljem kui Viitna mees ja jõudis tunnis edasi 8 km. Kui kaugel Rakverest jõudis Loobu mees Viitna mehele järele?

c) Jürsilt sõitis neiu N. kerges vedruvankris teele V.-Lõve kaudu Kuressaare poole, tarvitades iga km sõitmiseks 6 min. V.-Lõvelt oli 15 min. varem sõitnud teele ka Kuressaare poole talumees, kellel iga km sõitmiseks kulus keskmiselt 8 min. Jür-

silt V.-Lõvele on 2 km. Mitme minuti pärast jõudis neiu N. talumehele järele?

d) Jürsilt sõitis neiu N. kerges vedruvankris teele Vana-Lõve kaudu Kuressaare poole, sõites keskmiselt 12 km tunnis. Vana-Lõvelt oli 15 min. varem sõitnud teele ka Kuressaare poole talumees, kes tunnis edasi jõudis 7,5 km. Jürsilt V.-Lõvele on 2 km ja Kuressaarde 26 km. Kui kaugel Kuressaarest jõudis neiu N. talumehele järele?

e) Kuusalust sõitis teele maamees hobusega Tallinna poole; $1\frac{1}{4}$ tunni pärast lähtus Tsitrest autobus Kuusalu kaudu ka Tallinna poole. Hobuse keskmine tunnikiirus oli 9 km ja autobuse oma 24 km. Tsitrest Kuusaluni on 8 km ja Kuusalust Tallinnasse 48 km. Kui kaugel Tallinnast jõudis autobus hobusemehele järele?

f) Kalur läks kalakoormaga teele Häädemeestelt Pärnu poole, jõudes keskmiselt edasi 6 km tunnis. 1 tund 20 min. hiljem sõitis Kablilt teele Häädemeeste kaudu ka Pärnu poole hobusõiduk, mis jõudis edasi keskmiselt 10 km tunnis. Kablilt Häädemeestele on 8 km ja Häädemeestelt Pärnu 33 km. Kui kaugel Pärnust sai viimane sõiduk kalurile järele?

g) V. jaamas juhiti M. jaamast tulnud ja R. jaama poole minev kaubarong tagavarateele, sest 3 min hiljem pidi jaamast mööduma P. jaamast R. jaama poole minev kiirrong. Kiirrong oli lähtunud P. jaamast 40 min. hiljem kui kaubarong M. jaamast. Kiirrongi keskmine kiirus oli 0,75 km min. ja kaubarongi keskmine kiirus 0,30 km min. M. jaam asub P. ja V. jaama vahel, 18 km. P jaamast, ja R. jaam asub P. jaamast 70 km kaugusel. Kui kaugel R. jaamast asub V. jaam?

349. a) Oma kauaaegsele esimehele tema 25-aastase tegevuse juubeli puhul tahtis A. põllumeeste selts kinkida hobuse. Kui iga seltsiliige annab 1,5 kr., siis tuleb hobuse hinnast puudu 28 kr.; annab iga seltsiliige 2 kr., siis jääb 46 kr. üle. Kui kallis hobune kavatseti osta?

b) Kui rongis sõitjaid katsuda vagunitesse ära jaotada ühtlaselt, igasse vagunisse 50 sõitjat, siis jääb üle 48 sõitjat; kui aga igasse vagunisse mahutada 66 sõitjat, siis jääb ruumi veel 16-le sõitjale. Mitu sõitjat on rongis?

c) Klass terves koosseisus pidi lõhutud aknaruudu välja maksma. Kui iga õpilane annab 4 senti, siis tuleb puudu 23 senti; annab iga õpilane 7 senti, siis jääb 91 senti üle. Kui palju maksis uue aknaruudu sissepanek?

d) Aeda istutamiseks oli muretsetud maasikataimi; neid taheti istutada ühepikkuste ridadena. Kui ritta istutada 41 taime, siis jääb ruumi üle veel 56 taimele; kui ritta istutada 33 taime, siis jääb 72 taime üle. Mitu maasikataime oli muretsetud istutamiseks?

e) Puukooli kavatseti istutada kirsipuuvõrseid ühepikkuste ridadena. Kui ritta istutada 55 võrset, siis tuleb valmis pandud kirsivõrsetest puudu 30 tükki; kui ritta istutada 45 võrset, siis jääb 30 võrset üle. Mitu kirsivõrset oli aednikul?

f) Kui A. P. nimelise abiraha valitsus leiaks võimaliku olevat kõigile sisseantud soovidele vastu tulla ja tahaks määrata igaühele sooviavaldajale 40 kr., siis tuleks 30 kr. puudu; annaks ta aga igaühele sooviavaldajale 33 kr., siis jääks 5 kr. üle. Kui suur summa oli abiraha valitsusel käsutada?

350. a) J. talu peremees oli endale ehitanud orus väikese elektrijaama. Et sealt voolu juhtida tallu, tuli üles seada poste elektrijuhtmetele. Seab ta postid üles iga 42 meetri taha, siis tuleb tal valmismuretsetud postidele 1 post juurde muretseda; seab ta postid üles 50 m taha, siis jääb tal 3 posti üle. Kui kaugel on jõujaam talust?

b) Et elektrivoolu anda U. jõujaamast V. linnale, laseb insener üles seada poste elektrijuhtmetele. Laseb ta postid üles seada 50 m kaugusele üksteisest, siis tuleb valmistehtud postidest puudu 60 tükki; laseb ta postid üles seada 5 m kaugemale üksteisest, siis jääb tal 60 posti üle. Kui kaugel on U. jõujaam V. linnast?

c) Kui kooliõue pikkust mööda aiast aiani seada ritta ühe klassi õpilased 2 m kaugusele üksteisest, siis jääb 7 õpilast üle; kui nad seada ritta 1,4 m kaugusele üksteisest, siis tuleb 3 õpilast puudu. Kui pikk on kooli õu?

d) Puisteele taheti istutada tammi kahes reas otsast otsani. Kui neid istutada 12 m kaugusele üksteisest, siis jääb valmismuretsetud noortest puudest üle 8 puud; kui neid istutada 9 m

kaugusele üksteisest, siis tuleb 12 noort puud puudu. Kui pikk on puistee?

e) Kui aiaärist toodud sõstrapõõsad istutada 4 ritta, reas 80 cm kaugusele üksteisest, siis jääb ruumi veel ühele põõsale; kui neid istutada reas üksteisest 95 cm kaugusele, siis peab 11 põõsast istutama mujale. Kui pikk on rida?

f) Aeda kavatseti istutada maasikataimi 16-le ühepikkusele reale, kummassegi otsa ka 1 taim. Kui taimed istutada reas 38 cm kaugusele üksteisest, siis tuleb valmis muretsetud taimedest puudu 36 taime; kui taimed istutada reas 45 cm kaugusele üksteisest, siis jääb 76 taime üle. Kui pikk oli rida?

351. a) Maja müüdi ära kahjuga 8200 krooni eest. Oleks ta müüdud paar aastat varem esimesele pakkujale 9000 krooni eest, siis oleks müüja ka kahju saanud, kuid kahju oleks olnud $\frac{5}{7}$ nüüd saadud kahjust. Kui palju oli see maja maksma läinud müüjale?

b) Oleks linakaupmees ühes aidas oleva linatagavara müünud esimesele välisfirma agendile 730 kr. eest, siis oleks ta saanud kasu; ta müüs selle linatagavara ära pärast tunduvat hinnalangust teisele agendile 470 kr. eest ja sai kahju. See kahjusumma oli 62,5% tollest kasusummast, mis ta oleks saanud müües linu esimesele agendile. Kui palju maksis talle enesele see linatagavara?

352. a) Karjapoiss palgati 5-ks kuuks ja palgaks lepiti paar saapaid ja 50 kr. raha. Saanud linnas õpipoisi koha, läks poiss 3 kuu pärast ära, olles kätte saanud saapad ja 26 kr. raha. Kui kallilt arvestati see paar saapaid?

b) Tallu oli palgatud teenija aastaks ja palgaks kokku lepitud 144 kr. raha ja kleidiriie. 7 kuu pärast lahkus tüdruk teenistusest ja sai kätte kleidiriide ning 81,5 kr. raha. Kui kallilt oli hinnatud kleidiriie?

353. a) Kaevu kaevamine ühes tsementrakete ja nende sissepanemisega läks maksma 236,6 kr. Rakke kõrgus on 2 jalga 7 tolli ja rake maksab 5 kr; 1 jala maa väljakaevamine ühes rakete sissepanemisega maksab 1,8 kr. Kui sügav sai kaev, kui 1 rake tuli pealepoole maapinda? 1 jalg = 12 tolli.

b) Valmisriiete äri oli ostnud kanga riiet ja laskis sellest teha ühesuguseid ülikondi. Riide meeter maksis 7,5 kr., lisandid

ühele ülikonnale 6 kr. ja 1 ülikonna õmblemine 8 kr.; riiet läks 1 ülikonnale 3 m. Kõik need ülikonnad läksid ärile maksma 292 kr. Mitu meetrit riiet oli ostetud kangas?

354. a) Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on ühest kaatetist 2 cm võrra pikem; teine kaatet on 16 cm. Kui pikk on hüpotenuus?

b) Ristküliku lühem külg on diagonaalist 25 cm võrra lühem; pikem külg on 45 cm. Kui pikk on lühem külg?

c) Pool rombi pikemast diagonaalist on 18 cm võrra lühem kui rombi külg; lühem diagonaal on 96 cm pikk. Kui pikk on külg?

d) Võrdhaarse trapetsi diagonaal 77 cm on risti küljega; see külg on pikemast alusest 49 cm võrra lühem. Kui pikk on pikem alus?

355. a) Archimedese seadus ütleb: „Iga asi kaotab vees oma kaalust niipalju, kuipalju kaalub tema poolt välja tõrjutud vesi.“ Vees ujuv jäätükk ulatub veest välja 12 cm võrra. Kui paks on kogu see jäätükk? Jää erikaal on 0,9.

b) Kui palju peab kaaluma haavapuust laud, mille erikaal on 0,43, et tema kandejõud oleks 5 kg? S. t. selle laua raskus peab olema 5 kg võrra vähem kui temaga ruumvõrdse veehulga raskus; siis vajub ta vette kuni ülemise ääreni, tema peale asetatud 5 kg-line raskus aga vette ei vaju.

c) Kui suur korgitükk tuleb siduda 10 kg-lise tinatüki külge, et niisuguse süsteemi kandejõud oleks 2 kg? Tina erikaal on 11,3 ja korgi erikaal — 0,24.

d) Kahe õlaga kang on tasakaalus, kui ühe õla ja temasse rakendatud raskuse korrutis on niisama suur kui teise õla ja temale rakendatud raskuse korrutis. Kahe õlaga kangi ühele õlale on rakendatud raskused 4 kg ja 7 kg. Suurema raskuse rakenduspunkt on toetuspunktist 3 cm võrra kaugemal kui vähema raskuse rakenduspunkt. Neid raskusi tasakaalustab teisele õlale 10 cm kaugusele toetuspunktist rakendatud raskus 12 kg. Kui kaugel toetuspunktist on rakendatud 7 kg-line raskus?

e) Kangi ühele õlale on rakendatud 6 ja 12 cm kaugusel toetuspunktist raskused, mille üldkaal on 19 kg; neid tasakaalustab teisele õlale 16 cm kaugusel toetuspunktist rakendatud 9

kg-line raskus. Kui suur on kumbki esimesele õlale rakendatud raskus?

f) Kui palju keeva vett, (temperatuuriga 100° C) tuleb segada toas hoitud veega, mille temperatuur on 16° C, et haigele teha 240 liitrit vannivett, mis on + 30° C soe?

g) Aine erisoojuseks nim. gramm-kalorite arvu, mis selle aine ühe gr soojust tõstab 1° C võrra (õigemini 0° C kuni 1° C). 2 kg-line rauatükk temperatuuriga + 5° C pannakse 3 liitri vee sisse, mille temperatuur on + 20° C. Milline on tekkinud lõpptemperatuur, kui raua erisoojus on $^1/_9$?

h) Segati 200 gr tärpentiini 420 grammi veega, mille temperatuur oli 30° ja saadi segu temperatuuriga 28,4°. Milline oli tärpentiini temperatuur? Tärpentiini erisoojus on 0,4.

i) Et 0° külm jää sulaks ja muutuks veeks 0° juures, tuleb jääle juurde anda 80 suurt kalorit soojust iga kg kohta. Kui suur jäätükk temperatuuriga 0° tuleb panna puuanumas oleva 1 kg keeva vee sisse, et jää sulaks ja segu temperatuur saaks 60° C?

k) Puuanumasse, milles oli 2 kg vett temperatuuriga 100° C, pandi 0,5 kg jääd temperatuuriga 0°. Kui kõrge oli segu temperatuur pärast jää sulamist?

60. Tähtvõrrandid.

Kui kahest tegurist üks on muutuv või tundmatu suurus ja teine tegur on konstantne (jääv, muutumatu) või tuntud suurus, siis nim. seda konstantset või tuntud tegurit muutuva või tundmatu teguri koeffitsiendiks, olgu ta kirjutatud kas numbritega või tähtedega.

Kui tähtvõrrandis on murrud hävitatud, sulud avatud, tundmatud liikmed viidud ühele poole ning tuntud liikmed teisele poole ja sarnased liikmed ühendatud, siis tuleb võrrandi lahendamiseks tundmatu tegur viia sulgude taha; sulgudesse jääv avaldis on siis tundmatu teguri koeffitsient. See koeffitsient tuleb veel teguriteks lahutada, kui võimalik. Selle koeffitsiendiga tuleb siis jagada võrrandi mõlemaid pooli.

Harjutisi. 356. a) $mx = b$ c) $\frac{a}{x} = m$

b) $\frac{x}{n} = a$ d) $\frac{a}{x-a} = 2$

e) $ax + b = bx + a$

f) $mx - n = nx - m$

g) $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$

h) $\frac{x}{b} + 2 - \frac{x}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

i) $\frac{x+a}{a} + \frac{x+b}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a-b}{a}$

k) $\frac{x}{m} - 2 + \frac{x}{n} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$

l) $\frac{x}{p} + \frac{x}{q} = \frac{p}{q} - \frac{q}{p}$

m) $\frac{x}{m} - \frac{x}{n} = \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$

n) $\frac{x+a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{2x}{b} + \frac{2x}{a}$

o) $\frac{h-x}{h} = \frac{x}{a}$

p) $\frac{3(x-2b)}{a} - \frac{3(x+a)}{2b} = -6$

q) $\frac{x}{a-b} = \frac{x-b}{a}$

r) $\frac{ax-b}{a-b} = \frac{ax}{a+b}$

s) $\frac{x-a}{a+b} = \frac{x-b}{a-b}$

t) $\frac{a^2+b^2}{x+a} = \frac{2ab}{a-b}$

u) $\frac{a}{x+a} - \frac{b}{x+b} = \frac{a-x}{x-b}$

v) $\frac{1}{a(a+b)} = \frac{1}{ax} - \frac{1}{b(a+b)} + \frac{bx-b^2}{bx(a+b)}$

x) $\frac{4d}{c+d} + \frac{x}{d-c} = \frac{2cx}{d^2-c^2}$

y) $\frac{x-c}{c+d} + \frac{x+c}{d-c} = \frac{2cx}{c^2-d^2}$

Ülesandeid.

357. a) Gümnaasiumi I klassi vastu võetud p poissi tuli jaotada kaheks paralleelklassiks; üks klassiruum võis mahutada a õpilast enam kui teine. Mitu poissi tuli mahutada vähemasse klassiruumi?

b) Suuräri E. kaotas H. äri pankroti puhul a kr. enam kui D. äri pankroti puhul, ja P. äri kokkuvarisemisel b kr. vähem kuii H. äri pankroti läbi. Üldse kaotas suuräri E. nende kokkuvarisemise tõttu e kr. Kui palju kaotas ta D. äri pankroti tõttu?

358. a) Riigi asutaja vürsti surmast kuni ristiusu vastuvõtmiseni selles riigis möödus a korda niipalju aastaid, kuipalju valitses see esimene vürst. Riigi asutamisest kuni ristiusu vastuvõtmiseni möödus r aastat. Kui kaua valitses see esimene vürst? Eeldatakse, et ta valitses kuni surmani.

b) Linnas on ühe kino aastased kulud k korda nii suured kui ainsa teatri tulud; need kino kulud ületavad teatri tulud d kr. võrra. Kui suured on kino kulud?

c) N. riigi pindalast, mille suurus s km², on põllumaad n korda vähem kui põlluharimiseks kõlbmatut maad; viimasest on taimi kasvatavat pinda t korda nii palju kui pinda, kus taime-

kasv ei edene. Kui palju taimekasvuks kõlbmatut maad on N. riigil?

359. a) Ülejäänud osa ööpäevast moodustab $\frac{m}{n}$-dikku möödunud ööpäeva osast. Kui palju on möödunud ööpäevast? (Kui palju on kell?)

b) Kulub p päeva, enne kui liblika munast välja tuleb tõuk; Liblika eluea ülejäänud päevade arvust on ta $\frac{a}{b}$-ndikku tõuk; siis $\frac{m}{n}$-dikku samast päevade arvust on ta nukk ja viimased v päeva liblikas. Mitu päeva kestab liblika arenemiskäik?

360. a) v-kroonise veksli eest maksti t päeva enne tähtaega h kr. Mitme $^0/_0$-iga diskonditi veksel?

b) Kapital a kr. oli $p^0/_0$-iga A kr. suureks kasvanud. Mitu päeva oli ta kasu kandmas olnud?

c) Kui suure vekslilaenu pealt tuleb $p^0/_0$-iga t päeva eest i kr. intresse ette maksta?

d) Kui suur kapital kasvab $p^0/_0$-iga t päeva jooksul K kr. suureks?

361. a) Üks tööline teeb teatava töö ära u tunniga; teine teeb sama töö v tunniga. Mitme tunniga teevad selle töö need töölised koos töötades?

b) Velodroomil lähtuvad 2 ratturit samal ajal samast kohast samas suunas. Kiirem sõitja suudab ära sõita terve ringi ümber velodroomi k minutiga, aeglasem sõitja a minutiga. Mitme minuti pärast kohtuvad need ratturid uuesti?

362. a) Veesäil täitub ühe toru kaudu a tunniga, teise toru kaudu b tunniga. Mitme tunniga täitub veesäil, kui ühtlasi avada mõlemad torud?

b) Tühi veesäil täitub ühe toru kaudu m minutiga ja tühjeneb, kui ta täis on, teise toru kaudu n minutiga. Mitme minutiga täitub see tühi veesäil, kui avada mõlemad torud korraga? $n > m$.

363. a) Nimekirjade järele on A. valla koolis käijate laste arv k korda nii suur kui B. valla koolis käijate laste arv. Kui aga A. valla koolist B. valla kooli üle lähevad need a last, kellele B. valla kool on lähemal, siis on A. valla koolis käijate laste arv

$\frac{m}{n}$-dikku B. valla koolis käijate laste arvust. Mitu last on esialgu B. valla kooli nimekirjas?

b) Luurajate läbi tehti kindlaks, et vaenlase salk oli $\frac{a}{b}$ korda nii suur kui meie salk; pärast seda kui puhkenud kokkupõrkes kummalgi pool sai võitlusvõimetuks m meest, oli meie salgas lahinguvõimelisi mehi ainult $\frac{l}{n}$-dikku vaenlase lahinguvõimeliste meeste arvust. Kui suur oli alguses vaenlase salk?

364. a) Teerulli ümbermõõt on a cm ja tagumise rullratta ümbermõõt on b cm. Põiktänava osal raudteest kuni maanteeni teeb rullratas v pööret vähem kui teerull ise. Mitu pööret teeb teerull sellel tee pikkusel?

b) Traktori esimese ratta ümbermõõt on e cm ja tagumise ratta ümbermõõt t cm. Kui pikal teel teeb esimene ratas n pööret enam kui tagumine ratas?

c) Masina transmissiooni rihm on r cm võrra pikem kui masina hooratta ümbermõõt. Teatava aja vältel käis hooratas a korda ringi, kuna rihm käis i korda ringi. Kui pika tee käis läbi rihma iga punkt?

365. Raudteerong sõidab A. jaamast B. jaama keskmise kiirusega v km/t; tagasi tuleb ta keskmise kiirusega t km/t. Edasitagasi sõiduks kulub a tundi. Kui kaugel on A. jaam B. jaamast?

366. a) Nahakauplus laskis sadulsepal teha s sedelgat ja r paari range; rangide paar läks maksma n korda nii palju kui sedelgas. Tellitud hobuseriistad maksid kokku a kr. Kui kallis oli 1 paar range?

b) Elevandiluust kuul piljardi mängu jaoks on ruumala poolest n korda väiksem kui puukuul keeglimängu jaoks; kuid elevandi luu erikaal on e korda suurem puu erikaalust, olenevuses puuliigist. a piljardikuuli on k kg võrra raskemad kui b keeglikuuli. Kui palju kaalub 1 keeglikuul?

367. a) Haigel tuli võtta Kuressaares v mudavanni ja k mudakompressi. Üks mudavann maksis d senti enam kui mudakompress ja kokku läksid need ravimisvahendid maksma a kr. Kui palju maksis 1 mudakompress?

b) Matemaatika tunni ettevalmistamiseks tarvitab õpilane keskmiselt v min. vähem aega kui inglise keele tunni õppimiseks.

Poolaasta jooksul oli m matemaatika tundi ja i inglise keele tundi ning nende valmistamiseks oli õpilasel kulunud t tundi tööd. Mitu minutit oli õpilane kulutanud keskmiselt ühe inglise keele tunni ettevalmistamiseks?

c) Peremees müüs eksporttapamajale kaks siga; üks kaalus a kg ja teine b kg. Esimene siga arvati I-se peekonliha liiki ja teine siga II-se liiki ning viimase eest maksti kg-ist d senti vähem ja terve sea eest k kr. vähem kui esimese sea eest. Kui palju maksti esimese sea liha kg-ist?

d) Kauplus sai nahavabrikust n kg nahka, tallanahka ja kroomnahka. Kogu arve oli a kr., kusjuures keskmiselt oli arvestatud tallanahk à t kr. kg ja kroomnahk à k kr. kg. Mitu kg tallanahka oli vabrikust saadud?

368. a) Neiu läks kodunt jala minema linna, kuhu oli l km. Teel jõudis talle tuttav perenaine hobusega järele ja võttis kaasa. Nii sai ta linna m min. varem kui ta arvas, sest jala käimisel kulus tal 1 km käimiseks a min., kuna hobusel kulus 1 km sõitmiseks b min. Kui kaugele kodust oli neiu jõudnud minna jala?

b) Noormees sõitis kodunt linna jalgrattal. Teel sai jalgratas viga ja noormees pidi oma teekonda jätkama jala, jalgratas käekõrval. Ta jõudis linna m min. hiljem kui oli arvestanud, sest jalgrattal sõites kulus tal 1 km sõitmiseks r min., kuna jala käies kulus i min. Kodunt linna oli a km. Kui palju maad tuli noormehel käia jala?

369. a) Vabrik müüs kauplusele vankrimääret ja masinaõli, kokku m kg k kr. eest. Vankrimäärde kg arvestati a sendiga ja masinaõli kg b sendiga. Kui suure summa eest oli müüdud vankrimääret?

b) Põllumehel oli h hektaari heinamaad. Harimatul, mätlikul heinamaal jõuab ta tunnis vikatiga maha niita a aari heina; haritud heinamaad saab niita masinaga, niites tunnis b aari heina. Kogu heina niitmiseks kulus tal t töötundi. Mitu ha oli mätlikku heinamaad?

370. a) Koolile osteti tinti ja kriiti. Tinti osteti a kg enam ja maksti b kr. enam kui kriidi eest. Tinti saadi 1 kr. eest t kg ja kriiti 1 kr. eest k kg. Kui palju tinti oli ostetud?

b) Põllumees külvas maha a hl kaeru väetamata maale ja b hl eesti fosforiidiga väetatud maale ning sai k hl kaeru. Väe-

tatud maa andis *e* seemet enam kui väetamata maa. Mitu hl kaeru sai põllumees väetatud põllult?

371. a) Tubakavabrikus segati paremat liiki tubakat à *p* kr. kg ja odavamat liiki tubakat à *h* kr. kg ning saadi *m* kg segu omahinnaga à *s* kr. kg. Kui palju paremat tubakat oli võetud segusse?

b) Kuldsepp sulatas *a*-proovilisi ja *b*-proovilisi vanu kuldasju ja sai *c*-proovilise sulatise, mis kaalus *s* grammi. Mitu gr *b*-proovilist kulda oli kuldsepp pannud sulatisesse?

c) Mitu liitrit vett tuleb juurde kallata *a* liitrile 95%-lisele piiritusele, et segu saaks n%-line?

372. a) A-st ja B-st lähtuvad samal ajal teineteisele vastu kaks sõidukit, mille tunnikiirused on vastavalt *a* km ja *b* km. A—B vahemaa on *d* km. Kui kaugel A-st kohtuvad sõidukid?

b) M. alevist lähtus J. raudteejaama poole nende punktide vahel ühendust pidav autobus, kulutades 1 km sõitmiseks keskmiselt *a* min. *h* min. hiljem lähtus J. raudteejaamast jalgrattur sama maanteed mööda M. alevi suunas, kulutades 1 km sõitmiseks keskmiselt *r* min. M. ja J. vahemaa on *d* km.

1) Mitu minutit pärast autobuse lähtumist kohtuvad autobus ja jalgrattur? 2) Kui kaugel J. jaamast kohtuvad autobus ja jalgrattur?

Kumbki küsimus, ka järgnevates ülesannetes, lahendada iseseisva ülesandena!

c) T. sadamast lähtus aurik O. sadama poole, sõites keskmiselt *t* km tunnis. *a* tundi hiljem lähtus O. sadamast T. sadama poole teine aurik, mis edasi jõudis keskmiselt *v* km tunnis. O. ja T. sadamate kaugus teineteisest jõge mööda on *e* km.

1) Kui kaugel T. sadamast kohtusid aurikud? 2) Mitme tunni pärast kohtuvad aurikud, arvates auriku lahkumisest T. sadamast?

d) N. jaamast lähtus postirong T. jaama poole, kulutades 1 km sõitmiseks keskmiselt *n* min. Samal ajal lähtus T. jaamast N. jaama poole kaubarong, tarvitades 1 km sõitmiseks keskmiselt *k* min. N. jaamast T. jaama on *a* km.

1) Mitme minuti pärast kohtuvad rongid? 2) Kui kaugel N. jaamast kohtuvad rongid?

373. a) Kergesõidu auto lähtub linnast *m* min. hiljem omnibusele järele. Omnibuse ettekirjutatud tunnikiirus on *b* km ja auto keskmiseks kiiruseks võib lugeda *a* km tunnis.

1) Kui kaugel linnast jõuab auto omnibusele järele? 2) Mitme minuti pärast jõuab auto omnibusele järele?

Kumbki küsimus, ka järgnevates ülesannetes, lahendada iseseisva ülesandena!

b) Veesportlane P. andis sportlasele T. *a* m ette ja hakkas T-le järele ujuma. T. tarvitab 1 dkm ujumiseks keskmiselt *t* sekundit, P. tarvitab *p* sekundit.

1) Mitme sekundi pärast jõuab P. T-le järele? 2) Kui kaugel lähtekohast jõuab P. T-le järele?

c) Kitsaroopalise raudtee jaam B. on jaamast A. *b* km kaugusel ning sama raudtee ääres teisel pool A. jaama asuvast T. talust *d* km kaugusel. *m* minutit pärast rongi väljumist A. jaamast B. jaama poole ratsutas kihlveo võitmiseks T. talust välja noormees teed mööda, mis viib paralleelselt raudteega A. jaamast mööda B. jaama. Eeldatakse, et teede vastavad osad on ühepikkused ja et kiirused on ühtlased, nimelt ratsanikul *a* km minutis ja rongil *v* km minutis. Kui kaugel B. jaamast A. jaama poole jõuab ratsanik rongile järele?

d) A. talust sõitis välja hobusõiduk maanteed mööda, mis viis B. talust mööda K. kiriku poole. Samal ajal lähtus B. talust jalakäija sama teed mööda ka K. kiriku poole. Hobusõidukil kulus 1 km sõitmiseks keskmiselt *h* min., jalakäijal 1 km käimiseks *i* min. A. talu kaugus B. talust on *a* km.

1) Kui kaugel B. talust jõudis hobusõiduk jalakäijale järele? 2) Mitme minuti pärast jõudis hobusõiduk jalakäijale järele?

e) Raudtee sõiduplaan tahetakse koostada nii, et P. jaamast lähtuv kiirrong möödub enne R. jaama jõudmist sellest kaubarongist, mis *b* min. varem lähtub M. jaamast R. jaama poole. Kiirrong tarvitab 1 km sõitmiseks *i* min. ja kaubarong *a* min.; tee pikkus P. jaamast M. jaamani on *m* km ja M. jaamast R. jaamani *r* km. Neil tingimusil osutub soodsaks möödumiskohaks V. jaam.

1) Kui kaugel R. jaamast asub V. jaam? 2) Kui palju aega kulub kiirrongil sõitmiseks P. jaamast V. jaamani?

f) Telefoni teel saadud andmete põhjal sõitis konstaabel roimaritele järele, kui viimased olid temast n km ees. Konstaabel sõitis k km-lise tunnikiirusega, kuna roimarid edasi jõudsid tunnis keskmiselt r km.

1) Mitme tunni pärast jõudis konstaabel roimaritele järele? 2) Kui kaugel omast lähtekohast tabas konstaabel roimareid?

374. a) Täisealised lapsed kavatsesid isale tema 70-aastaseks sünnipäevaks teha suurema kingituse. Kui iga laps annab a kr., siis tuleb puudu p kr.; annab iga laps c kr., siis jääb kingitusest üle m kr.

1) Mitu last oli isal? 2) Kui kalli kingituse kavatsesid lapsed teha? Kumbki küsimus lahendada iseseisva ülesandena!

b) Kui riigikaitse õpetaja igale õpilasele klassis kätte annab m padrunit, siis jääb tal a padrunit üle; tahab ta igale õpilasele anda n padrunit, siis tuleb tal kaasavõetud padrunitest b tükki puudu.

1) Mitu õpilast oli klassis? 2) Mitu padrunit oli õpetajal kaasa võetud?

375. a) Insener laseb üles seada telegrahvi poste kahe jaama vahel. Kui postid seada üksteisest d m kaugusele, siis jääb valmisolevatest postidest üle a tükki; kui seada nad üles r m kaugusele üksteisest, siis tuleb b posti puudu.

1) Kui pikk on nende jaamade vaheline kaugus? 2) Mitu posti oli valmistatud?

b) Lähtudes iga hommik samal ajal kodunt kooli jõuab õpilane kooli a min. enne tunni algust, kui ta käib keskmise kiirusega v m/min.; ta jääb aga b min. hiljaks, kui käib keskmise kiirusega u m/min. Kui kaugel on kool kodust?

376. Õpilane sõitis pühadeks koju. Hobusega sõitis ta a min. kauem kui raudteel, sest rong tarvitas 1 km sõitmiseks r min., kuna hobune 1 km sõitmiseks tarvitas h min. Sõidetud tee kogupikkus oli s km. Kui kaua kestis õpilase kojusõit, peatusi arvamata?

377. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on hüpotenuusist d cm võrra lühem; teine kaatet on a cm pikk. Kui pikk on hüpotenuus?

61. Esimese astme võrrandite süsteemid.

Kui on olemas kaks võrdust, kummaski võrduses esineb kaks ühist suurust; kui sama suurus kummaski võrduses on tähistatud sama tähega, erisuurus arusaadavalt eritähega, siis väljendab kumbki võrdus üksikult erinevaid olenevusi nende kahe suuruse vahel.

See olenevus võib olla ilmne, näiteks $s = 5t^2 + 3$, võib olla ka ilmutamatu, näiteks $7x - 5y = 8$. Ilmutamatu olenevuse võime ilmutada; selleks tuleb olenematut muutujat (võõrsõnaga „argument") kohelda nagu tuntud arvu, ning olenevat muutujat (võõrsõnaga „funktsioon") kohelda nagu tundmatut. Siis omandab see võrdus võrrandi iseloomu, mille lahendame oleneva muutuja suhtes. Sel teel leiame eelpool toodud teisest võrdusest, et $y = 1{,}4x - 1{,}6$.

Selles mõttes võib kõnelda ühest võrrandist kahe tundmatuga. Kui kaht võrdust kahe muutuja suurusega ei seo mingi mõte, mingi tingimus, kui neid võrdusi vaadelda üksikult omaette ja kui siis kõnelda ühest võrrandist kahe tundmatuga, siis jääb üks tundmatu määramatuks — ta on ju põhimuutuja, argument, kuna teise tundmatu väärtused olenevad esimese tundmatu väärtustest; teine tundmatu on ju järelmuutuja, esimese funktsioon. Kõneldakse, et üks võrrand kahe tundmatuga on määramatu.

Neid muutujate väärtusi saab kindlaks määrata uus mõte, uus tingimus. Niisuguseks tingimuseks on eeldus ehk nõue, et tuleb leida põhimuutuja, argumendi niisugune väärtus, mille juures järelmuutuja, funktsioon, omandab mõlemate olenevuste jaoks ühe ja sellesama väärtuse.

Niisugune eeldus ehk nõue seob need kaks võrrandit üheks *võrrandite süsteemiks* kahe tundmatuga. Neid muutujate ühiseid väärtusi nim. selle võrrandite süsteemi *ühislahenditeks.*

Enne võrrandite süsteemi lahendamist tuleb anda kummalegi võrrandile tema normaalne ehk lihtsaim kuju.

Kahe tundmatuga esimese astme võrrandi normaalseks üldkujuks loetakse järgmist: $Ax + By + C = 0$. Tähti A ja B nim. koeffitsientideks; C on tuntud liige ehk vaba liige. Alles pärast kummalegi võrrandile tema normaalse kuju andmist võib asuda võrrandite süsteemi lahendamisele.

I. Kahe tundmatuga võrrandite süsteemi graafiline lahendamine.

Olgu antud kahe võrrandi süsteem kahe tundmatuga:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Määrame kummastki võrrandist ühe tundmatu teise tundmatu funktsioonina:

$$y = -\frac{C_1}{B_1} - \frac{A_1}{B_1} x;$$

$$y = -\frac{C_2}{A_2} - \frac{A_2}{B_2} x;$$

Siis konstruime kummagi olenevuse jaoks funktsiooni y arenemiskäiku kujutava joone. Esimese astme võrrandi jaoks on see joon sirge. Nende joonte lõikepunkti kaugus rõhtteljest, nn. punkti ordinaat, annab ühe tundmatu ühislahendi; ja selle punkti kaugus püstteljest, nn. punkti abstsiss, annab teise tundmatu ühislahendi. [Vt. I anne § 26.]

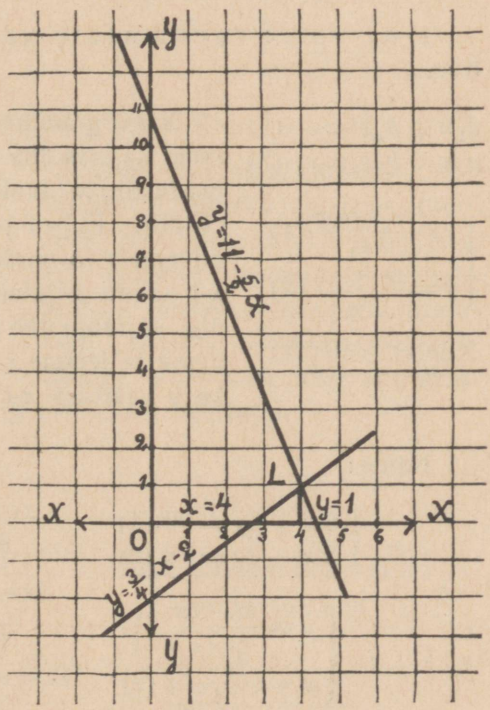
Näide:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 22 \ (1) \\ 3x - 4y = 8 \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 22 - 5x \ (1) \\ 3x - 8 = 4y \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 11 - \frac{5}{2} x \ (1) \\ y = \frac{3}{4} x - 2 \quad (2) \end{cases}$$

$\underline{y = 1;}$ $\underline{x = 4.}$



378. Harjutisi.

a) $x + y - 15 = 0$
$x - y - 7 = 0$

b) $x + 2y - 20 = 0$
$x - 2y + 4 = 0$

c) $9y - 6x = 0$
$7y - 3x - 15 = 0$

d) $4y - 3x - 20 = 0$
$2y - 3x - 4 = 0$

e) $3x + 4y - 16 = 0$
$7x - 4y + 56 = 0$

f) $9x + 5y - 27 = 0$
$3x + 4y - 30 = 0$

g) $x + y + 10 = 0$
$5x - 3y + 18 = 0$

h) $x - 4y - 7 = 0$
$14x - 5y + 55 = 0$

i) $4x + 3y + 3 = 0$
$5x + 9y + 30 = 0$

k) $2x - 3y - 17 = 0$
$5x - 2y - 26 = 0$

l) $7x + 3y + 42 = 0$
$5x - 3y - 6 = 0$

m $3x + 7y - 7 = 0$
$5x - 7y - 49 = 0$

II. Kahe tundmatuga võrrandite süsteemi numbriline lahendamine.

Võrrandite süsteemi numbrilisel lahendamisel püüame saada ühe võrrandi ühe tundmatuga, millist me oskame lahendada. Selleks on tarvis kõrvaldada teine tundmatu. Tutvume teise tundmatu kõrvaldamise kolme võttega.

1-ne võte: tundmatute väärtuste võrdlemise võte.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \ (1) \\ y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2} \ (2) \end{cases}$$

$$\frac{c_2 - a_2x}{b_2} = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$$

Nagu graafilisel lahendamisel, nii määrame ka siin ühe tundmatu, näiteks y, teise tundmatu, x-i funktsioonina kummastki võrrandist. Et y-l peab olema sama väärtus mõlemais võrrandeis, siis võime y avaldised x-i kaudu kirjutada võrdseteks. Nii saame ühe võrrandi ühe tundmatuga. Selle lahendame ja leiame x-i väärtuse. Siis arvutame ka y väärtuse x-i leitud väärtusel.

Näide:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 22 \ (1) \\ 3x - 4y = 8 \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{22 - 5x}{2} \ (1) \\ y = \frac{3x - 8}{4} \ (2) \end{cases}$$

$$\frac{3x - 8}{4} = \frac{22 - 5x}{2}$$

$$3x - 8 = 44 - 10x$$

$$13x = 52$$

$$x = 4; \ y = 1$$

379. Harjutisi. Lahendada võrrandite süsteemid 2-he tundmatuga tundmatu väärtuste võrdlemise võtte abil:

a) $13x + y = 47$
$23x + y = 77$

b) $53x - y = 393$
$79x + y = 663$

c) $7x + 4y = 191$
$7x - 3y = 16$

d) $12x - 46y = 188$
$29x - 46y = 715$

e) $6y + 5x = 17$
$26y - 7x = 2$

f) $35y - 8x = 0$
$14x - 50y = 9$

g) $6y - 5x = 26$
$15y - 13x = 61$

h) $12x + 17y = 210$
$20x - 19y = 66$

i) $7x - 3y = 4$
$8x + 5y = -46$

k) $13y + 4x = 1$
$15y - 6x = 33$

l) $15x - 7y = 88$
$10x - 9y = 76$

m) $9x + 6y = -12$
$6x + 8y = -11$

n) $25x + y = 40$
$3x - 5y = 56$

o) $15x + 4y = 2$
$8x + 5y = 24$

p) $12x - 7y = 3$
$7x - 3y = -8$

q) $5x - 3y = 19$
$4x + 5y = -7$

2-ne võte: asendamise võte.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \ (1) \\ a_2x + b_2 \cdot \frac{c_1 - a_1x}{b^1} = c_2 \ (2) \end{cases}$$

Ühest võrrandist määrame ühe tundmatu, näiteks y, teise tundmatu, x-i funktsioonina ning saadud avaldise paneme teise võrrandisse esimese tundmatu y asemele. Saadud võrrandi ühe tundmatuga lahendame ning siis arvutame ka esimese tundmatu y x-i leitud väärtusel.

Näide:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 22 \ (1) \\ 3x - 4y = 8 \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{22 - 5x}{2} \ (1) \\ 3x - 4 \cdot \frac{22 - 5x}{2} = 8 \ (2) \end{cases}$$

$$3x - \frac{4(22 - 5x)}{2} = 8$$
$$3x - 2(22 - 5x) = 8$$
$$3x - 44 + 10x = 8$$
$$13x = 52$$
$$x = 4; \quad y = 1$$

380. Harjutisi. Lahendada võrrandite süsteemid asemele panemise võtte abil:

a) $3x + y = 55$, $2x + 5y = 54$
b) $3x - 8y = 5$, $x + 5y = 17$
c) $5x - 3y = 0$, $28x - 9y = 78$
d) $6x + 5y = 70$, $9x - 4y = 13$
e) $3x + 8y = 59$, $6x + 5y = 107$
f) $15x - 8y = 29$, $3x + 2y = 13$
g) $5y + 4x = 13$, $3y + 5x = 13$
h) $5x - 6y = 90$, $8x - 15y = 63$
i) $4x - 3y = 0$, $10x + 9y = 11$
k) $10y - 4x = 5$, $9x + 12y = 52$
l) $2y + 8x = 27$, $4y - 4x = 9$
m) $15x - 6y = 11$, $5x - 3y = 2$
n) $7x - 3y = 4$, $x + y = 11$
o) $3x + 2y = 23$, $4x + 6y = 43$
p) $10x - 8y = 11$, $36y - 20x = 3$
q) $5x + 6y = 35$, $10x + 2y = 25$
r) $2x - 7y = 8$, $4y - 9x = 19$
s) $4x + 7y = -76$, $7x - 3y = -11$
t) $8x + 9y = -36$, $9x + 7y = -33$
u) $15x - 22y = 2$, $6y - 10x = 3$

3-as võte: liitmis-lahutamise võte.

Korrutame ühe võrrandi kõiki liikmeid ühe arvuga ja teise võrrandi kõiki liikmeid teise arvuga nii, et ühe tundmatu ees olevad koeffitsiendid saavad võrdseteks. Kui pärast korrutamist võrdsete koeffitsientide ees olevad märgid on ühesugused, siis lahutame liikmeti ühest võrrandist teise; on nad isesugused, siis liidame liikmeti ühe võrrandi teisega. Selle läbi hävib tundmatu liige võrdsete koeffitsientidega ja meie saame ühe võrrandi ühe tundmatuga, mille lahendame. Tundmatu leitud väärtuse võime asetada ühte olemasolevasse võrrandisse kahe tundmatuga ja nii sealt leida ka teise tundmatu.

Näide:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 22 \mid \cdot 2 \\ 3x - 4y = 8 \mid \cdot 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 2y = 22 \mid \cdot 3 \\ 3x - 4y = 8 \mid \cdot 5 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 10x+4y=44 \\ 3x-4y=8 \end{cases} \qquad -\begin{cases} 15x+6y=66 \\ \mp 15x \pm 20y = \mp 40 \end{cases}$$

$$13x = 52 \qquad 26y = 26$$

$$x = 4 \qquad y = 1$$

381. Harjutisi. Lahendada võrrandite süsteemid liitmislahutamise võtte abil:

a) $x+y=57$, $x-y=1$

b) $4x+5u=52$, $4x-5u=12$

c) $3u+v=22$, $2u+v=15$

d) $2x-7v=14$, $3x-4v=60$

e) $8u+15v=101$, $7u-10v=19$

f) $7y-4x=85$, $5y-6x=1$

g) $11u-21v=12$, $9u+12v=39$

h) $5x+14y=24$, $19x-21y=17$

i) $12x+15y=8$, $16x+9y=7$

k) $8y-9x=1$, $10y-6x=3$

l) $12x-10y=10$, $9x+35y=33$

m) $15x+10y=44$, $13y-24x=5$

n) $5x+6y=-40$, $4x+7y=-43$

o) $17z-14u=12$, $6u-13z=4$

p) $6a-4b=5$, $8a-3b=2$

q) $7u+12v=29$, $9u-8v=49$

382. Üldharjutisi.

a) $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=2$; $\frac{2x+1}{3}-\frac{3y+1}{5}=\frac{47}{15}$

b) $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8$; $\frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11$

c) $\frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5$; $\frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10$

d) $\frac{x-y}{2}+3=\frac{2x+y}{5}$; $8-\frac{x-2y}{4}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$

e) $\frac{2}{3}y+2=3x-2{,}5y$; $10-\frac{1}{4}(2x-y)=\frac{4}{7}x+\frac{2}{3}y$

f) $\frac{x+7}{5}-\frac{2x-y}{4}=3y-5$; $\frac{5y-7}{2}+\frac{4x-3}{6}=18-5x$;

g) $\frac{x}{2}-\frac{3x-2y}{5}=5y-5$; $5x+\frac{x-1}{3}+\frac{y-1}{9}=24-3y$

h) $3y-\frac{3x-y}{4}=x-3-\frac{y-6}{8}$; $x+3-\frac{5x-3y}{6}=y-\frac{3-5x}{9}$

i) $\frac{5x-y}{7}+5=\frac{2y}{5}-\frac{2-y}{7}$; $\frac{x+3y}{10}-\frac{3x+y}{15}=\frac{y}{3}-12$

k) $\frac{3x-4y}{6}-\frac{3y-9x}{10}=4$; $\frac{10y-x}{12}-\frac{2y-5}{7}=x-\frac{y}{4}$

l) $\frac{2x-y}{4}+\frac{7x-8y}{12}=\frac{8y-11x}{16}$; $\frac{3x+4y}{8}-\frac{8y-x}{9}=\frac{2x+5y}{12}-2{,}75$

m) $\frac{3x+4y}{5}-\frac{14x-3y}{15}=\frac{7y-x}{10}+\frac{y-x}{2}$;

$\frac{4x+3y-3}{7}+\frac{5x-2y+7}{14}=\frac{9y-5x}{21}+\frac{3y}{4}$

n) $\frac{5y-2x}{25}+\frac{5y+3x}{50}=\frac{3(x+y)}{40}+\frac{3y-2x}{10}$;

$\frac{3x+7y}{8}-\frac{5(x+y)}{12}=\frac{5x+6y}{20}-\frac{5y-14}{60}$

o) $\frac{6x-5y}{10}-\frac{6x+y}{16}=\frac{3x-7y-1}{20}$;

$\frac{7x+2y}{13}-\frac{4x-y}{6}=\frac{8x+5y}{52}-\frac{7x-10}{26}$

p) $\frac{3x+2}{14}-\frac{5x-8y}{12}=\frac{5x+y}{21}+\frac{8y-9x}{28}$;

$\frac{5x-2y}{18}+\frac{7x-y}{27}=\frac{7x+8y}{36}-\frac{14y-17x}{54}$

q) $\frac{8x-y}{9}-\frac{7x+y}{12}=\frac{13x-3y}{16}-\frac{5x+8}{18}$;

$\frac{11x-4y}{15}+\frac{11x+y}{20}=\frac{17x+2y}{30}-\frac{7y-5x}{12}$

r) $\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{5}$; $\frac{x+4}{y+4}=\frac{2}{5}$ t) $\frac{5}{x+4}=\frac{2}{y-1}$; $\frac{3}{x+2}=\frac{4}{y+1}$

s) $\frac{x+1}{y+2}=0{,}8$; $\frac{y-2}{x-1}=0{,}5$ u) $\frac{5}{y-1}=\frac{4}{x-1}$; $\frac{1}{2y-1}=\frac{1}{2x+1}$

Mõnikord, eriti, kui tundmatu esineb murru nimetajas, on kasulik uue, abitundmatu sissetoomine.

Näiteks: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0{,}7$

$\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=2{,}3$

Tähistame: $\frac{1}{x}=u$; $\frac{1}{y}=v$;

Siis saame:

$u+v=0{,}7$

$3u+4v=2{,}3$

$4u+4v=2{,}8$

$3u+4v=2{,}3$

$u=0{,}5$ $x=2$

$v=0{,}2.$ $y=5$

383. Harjutisi.

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{11}{30}$; $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{30}$

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12}$; $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$

c) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=10$; $\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=20$

d) $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=25$; $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=26$

e) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y}=3$; $\frac{15}{x}-\frac{4}{y}=4$

f) $\frac{5}{x}+\frac{12}{y}=3$; $\frac{25}{x}-\frac{13}{y}=2$

g) $\frac{5}{3x}+\frac{2}{5y}=7$; $\frac{7}{6x}-\frac{1}{10y}=3$

h) $\frac{2}{3x}+\frac{1}{2y}=3$; $\frac{5}{6x}-\frac{3}{4y}=1$

Kui võrrandite süsteemis esineb enam kui 2 tundmatut, siis peab süsteemi moodustavate võrrandite arv võrduma tundmatute arvuga. Lahendamisvõtted on needsamad, mis kahe võrrandi süsteemi juures kahe tundmatuga; ainult graafilist lahendamisviisi ei ole võimalik kasutada.

384. Harjutisi.

a)
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=32\\ 2x+y+3z&=31\\ 3x+2y+z&=28 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x-3y+4z&=8\\ 3x+4y-5z&=-4\\ 4x-6y+3z&=1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 7x-6y+2z&=4\\ 14x-8y-z&=0\\ 2x+9y-3z&=19 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 6x+5y-4z&=98\\ 16x-15y+6z&=78\\ 8x-3y-9z&=12 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x+y&=58\\ x-z&=8\\ y-z&=4 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 3x+4y&=25\\ 4x-3z&=-3\\ 5y+6z&=50 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 7x-9z&=19\\ 4x-3y&=7\\ 2y+3z&=9 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} x+y&=7\\ y+z&=12\\ z+x&=9 \end{aligned}$$

Kiirendav võte. Liidame kõik 3 võrrandit liikmeti, siis saame: $2(x+y+z)=28$, ehk $x+y+z=14$.

Võrreldes liitmise tulemusena saadud uut võrrandit iga antud võrrandiga näeme otsekohe, et $z=7$, $x=2$, $y=5$.

62. Ülesandeid võrrandsüsteemide koostamiseks.

Oluliselt ei erine ülesanded, millest saab koostada ühe võrrandi ühe tundmatuga, neist ülesannetest, millest saab koostada kahe võrrandi süsteem kahe tundmatuga. Tehes mõningid tehteid peas, saame tundmatute arvu vähendada ja võime kahe

võrrandi süsteemi asemel kahe tundmatuga sama ülesande lahendada ühe võrrandi abil, milles esineb üks tundmatu; tähistades eri suurusi eri tähtedega saame suurema arvu tundmatuid, mille jaoks tuleb koostada enam võrrandeid, sest võrrandite arv süsteemis peab võrduma tundmatute arvuga.

Ülesande lahendamisel ühe tundmatu abil on enam aritmeetilist iseloomu kui tema lahendamisel kahe tundmatu abil. Esimene nõuab enam mõttepingutust, teine on enam vormaalne.

Selles raamatus on loomulikuks peetud ülesannet lahendada nii mitme tundmatu abil, mitme suuruse järele päritakse — tingimusel, et niisugune lahendamisviis ülearu raske ei ole.

385. Suurima senini kaevandustes leitud puhaskulla tüki ja puhashõbeda tüki, kaevurid nim. neid „nugget", kaalude summa on 2330 kg; hõbedatükk oli kullatükist 970 kg võrra raskem. Kui palju kaalus kumbki nugget?

386. Kahe sügavaima maakera koore sisse puuritud augu sügavuste summa on 3753 m; Ülem-Sileesias puuritud auk on 253 m võrra sügavam kui Schladebachis puuritud auk. Kui sügavale maakera koore sisse on tunginud inimene kummaski kohas?

387. a) Möhnetali veepais Vestfaalis on suurim seesugune ehitis Euroopas. Paisu müüri pikkuse ja kõrguse summa on 690,3 m ja pikkus on kõrgusest suurem 609,7 m võrra. 1) Kui pikk ja kui kõrge on see pais?

b) Selle paisu müüri keskmine paksus on 20,225 m; alusmüüri juures on see müür 27,95 m võrra paksem kui ülal. 2) Kui paks on see müür alusmüüri juures ja kui paks on ta ülal?

388. Kolmnurgas ABC on tipu C juures olev välisnurk m^0 suur; nurk A on nurgast B n^0 võrra suurem. Leida $\triangle$-rga ABC nurgad!

389. Trapetsi keskjoon on m ja üks alus on teisest alusest d võrra pikem. Kui pikk on kumbki alus?

390. Ringjoonelisel teel, mille pikkus 1540 m, liigub ühtlase kiirusega kaks keha, lähtudes samal ajal samast kohast. Kui nad liiguvad samas suunas, siis nad kohtuvad iga 110 sekundi tagant; liiguvad nad vastassuunades, siis kohtuvad nad iga 70 sekundi tagant. Millise kiirusega liigub kumbki keha?

391. Postirongi pikkus on 120 m; kaubarongi pikkus on 280 m. Kui need rongid sõidavad paralleelsetel rööbastel vastassuunas, siis kulub neil möödumiseks teineteisest 25 sek.; kui nad sõidavad samas suunas, siis kulub postirongil kaubarongist möödumiseks 100 sek. Missuguse tunnikiirusega sõidab kumbki rong?

392. Riideäris ostis üks daam 4 m siidriiet ja 7 m villast kleidiriiet ning maksis 43,55 kr.; sealsamas ostis teine daam samade hindadega 7 m siidriiet ja 8 m villast kleidiriiet ning maksis 62,40 kr. Kui kallis oli 1 m siidriiet ja kui kallis oli 1 m villast riiet?

393. Kahele toale taheti osta tapeteid, söögitoale kallimaid kui magamistoale. Kallimad tapetid maksid 1,60 krooni rull ja odavamad 1,25 kr. rull. Nii oleks tapetid maksma tulnud 18 kr Ostmise juures äris otsustati siiski ümberpöördult: magamistoale osta kallimad ja söögitoale odavamad tapetid ning siis tulid tapetid mõlema toa jaoks kokku maksma 19,05 kr. Mitu rulli oli tarvis magamistoa jaoks ja mitu rulli söögitoa jaoks?

394. Jaanilaada aegu oli kaupmees Mõtus müünud 117 vikatit ja 52 luisku, kokku 243,10 kr. eest; järele oli jäänud 33 vikatit ja 23 luisku 71,90 kr. väärtuses, kui kõik vikatid arvata samahinnalisteks ja kõik luisud samahinnalisteks. Kui palju maksis keskmiselt 1 vikat ja kui palju 1 luisk?

395. Enne eesti krooni langust oli 27. juunil 1933 suurkaupmehele kuuluvate inglise naelsterlingite (£) ja ameerika dollarite ($) koguväärtus kr. 12410.—; pärast eesti krooni langust 28. juunil 1933, oli sama arvu naelsterlingite väärtus dollarite väärtusest 530 krooni võrra suurem. Rahakurss oli 27. juunil: 1 £ = kr. 12,50; 1 $ = kr. 3,08.— 28. juunil: 1 £ = kr. 19,10; 1 $ = kr. 4,51.— Mitu naelsterlingit ja mitu dollarit oli suurkaupmehel?

396. Vanemad ostsid enesele 9 m tekiriiet ja 4 kg vatti ning maksid 29,70 kr.; lastele ostsid nad samade hindadega 7,4 m tekiriiet ja 3,5 kg vatti ning maksid 24,80 kr. Kui palju maksis 1 m tekiriiet ja kui palju 1 kg vatti?

397. Aiaäri müüs ühele ostjale 8 põõsast poogitud sireleid ja 5 roosipõõsast, mille juures sirelipõõsaste eest tuli maksta

11 kr. enam kui roosipõõsaste eest; teisele ostjale müüs äri samade hindadega 10 sirelipõõsast ja 7 roosipõõsast, misjuures tuli sirelipõõraste eest maksta 12,40 kr. enam kui roosipõõsaste eest. Kui kallilt müüdi sirelipõõsas ja kui kallilt roosipõõsas?

398. Kui otsitavat arvu jagada 7-ga, siis on jääk 6; kui jagada teda 11-ga, siis on jääk 1, kuna jagatis on 5 võrra vähem eelmisest jagatisest. Kui suur on selle arvu jagatis 7-ga ja kui suur on see arv ise?

399. Kui murru lugejat suurendada 1-e võrra ja nimetajat vähendada 1-e võrra, siis saab murd võrdseks 1-ga; kui aga lugejat vähendada 1-võrra ja nimetajat suurendada 1-e võrra, siis saab murd võrdseks $\frac{1}{2}$-ga. Milline on see murd?

400. Kahes anumas on vett eri temperatuuridega. Kui segada esimesest anumast 4,8 kg ja teisest 5,2 kg, siis on segu temperatuur 52°. Kui esimesest anumast võetud 3,6 kg segada teisest anumast võetud 2,4 kg-iga, siis on saadud segu temperatuur 46°. Kui kõrge on vee temperatuur kummaski anumas?

401. Aine erisoojuseks nim. seda kalorite arvu, mis tõstab selle aine 1 gr temperatuuri 1°C võrra. Raua erisoojust võime lugeda võrdseks $\frac{1}{9}$-ga ja tärpentiini erisoojust võrdseks $\frac{4}{9}$-ga. Kui 2200 gr raualaaste üle kallata 700 gr tärpentiiniga, siis osutub nende ühiseks temperatuuriks 39°C. Kui aga samade temperatuuride juures 850 gr tärpentiiniga üle kallata 1600 gr raualaaste, siis osutub nende ühiseks lõpptemperatuuriks 42°. Missuguse temperatuuriga on võetud raualaastud ja missuguse temperatuuriga tärpentiin?

402. Leida järgmiste sirgete-paaride lõikepunkti koordinaadid (abstsiss ja ordinaat):

a) $2x+3y-12=0\,(AB)$
$x-3y+3=0\,(CD)$

b) $3x+2y-6=0\,(EF)$
$5x-2y+22=0\,(GH)$

c) $3x+2y+8=0\,(IK)$
$x+2y+4=0\,(LM)$

d) $x-3y-5=0\,(PR)$
$5x-2y-12=0\,(ST)$

e) $2x-5y+10=0\,(AB)$
$6x-5y-10=0\,(CD)$

f) $3x-4y+20=0\,(EF)$
$x-2y+8=0\,(GH)$

g) $3x+7y=0\,(IK)$
$4x-7y-49=0\,(LM)$

h) $3x+2y+10=0\,(NP)$
$4x-5y-2=0\,(RS)$

403. Aastate 1924—1928 kohta käivate statistiliste andmete järele tarvitas iga elanik Eestis aastas keskmiselt 187 kg rukkeid ja nisu ühtekokku. Kui rukiste arvelt viia nisu arvele 57,9 kg, siis oleks rukiste ja nisu tarvitamine võrdne. Kui palju rukkeid ja kui palju nisu keskmiselt tarvitas aastas iga Eesti riigi elanik aastatel 1924—1928?

404. Kuldsepa ärist taheti osta hõbekannu kaanega. Äris leidus kaks soovikohast kannu ja üks kaas. Kaane hind oli 18 krooni. Esimene kann ühes kaanega tuleb maksma $1^1/_2$ korda niipalju kui teine kann; teine kann ühes kaanega tuleb maksma $1^1/_{12}$ korda niipalju kui esimene kann. Kui palju maksab kumbki kann üksikult?

405. Poisilt küsiti, mitu venda ja mitu õde tal on. Poiss vastas, et tal olla samapalju vendi kui õdesid. Siis küsiti õelt, mitu venda ja mitu õde tal on. Õde vastas, et tal on vendi 2 korda niipalju kui õdesid. Kuidas oli see võimalik?

406. 4 aasta eest oli isa 3,5 korda nii vana kui poeg; 4 aasta pärast on isa 2,5 korda nii vana kui poeg. Kui vana on isa, kui vana on poeg?

407. Missuguse temperatuuri juures erinevad üksteisest Fahrenheit'i ja Réaumuri kraadide arvud ainult märgi poolest?

408. Missuguse temperatuuri juures on Réaumuri kraadide arv 4 korda nii suur kui Fahrenheit'i kraadide arv?

409. Merevees ujuvast jäätükist ulatub veest välja 2000 kuupmeetriline osa. Jää erikaal on 0,9 ja merevee erikaal on 1,03. Leida selle jäätüki ruumala ja kaal?

410. Õppinud tööline oli palgatud üheks kuuks, s. o. 25-ks tööpäevaks, tingimusega, et iga tehtud päeva eest saab tasu 5 kr., kuid iga ilma mõjuva põhjuseta viidetud päeva eest maksab trahvi 2,5 kr. Kuu lõpul sai tööline 110 kr. Mitu päeva oli ta töötanud ja mitu päeva ära viitnud?

411. Kivi külge on seotud nii suur korgitükk, et nende ühine kaal 11,5 kg on sama suur kui ruumvõrdse veehulga kaal, s. t. kivi ja korgi süsteem on vees tasakaalus, — ei vaju põhja ega kerki pinnale. Kivi erikaal on 3 ja korgi erikaal on 0,24. Kui raske on kivi ja kui palju kaalub kork?

412. Vennad Rein ja Henn leidsid õuest 4,8 m. pikkuse laua ja tahtsid teda asetada palgile risti, et temal kiikuda. Rein kaalub 62,5 kg ja Henn 57,5 kg. Kui kaugel kummastki otsast peab asuma toetuspunkt palgil, et laud tema otsadel istuvate poistega oleks tasakaalus?

413. 32 cm pikkuse kangi otsadele on rakendatud 6 kg- ja 10 kg-ilised raskused. Kui kaugel kummastki raskusest tuleb asetada toetuspunkt, et raskused oleksid tasakaalus?

414. Kahe õlaga kangile rakendatud kaks raskust, mille summa on 16,5 kg, on tasakaalus, kui õlgade pikkused suhtuvad üksteisesse nagu 4 : 7. Kui suur on kumbki raskus?

415. Punane vask kaotab vees oma 89 kg-lisest kaalust 10 kg; tsink kaotab iga 7 kg kohta 1 kg oma kaalust. 124 kg valget vaske, mis on punase vase ja tsingi sulatis, kaotab vees 15 kg oma kaalust. Kui palju valget vaske ja kui palju tsinki on selles sulatises?

416. Tükk hõbeda ja tina sulatist kaalub 10 kg. Selle sulatise erikaal on 9; hõbeda erikaal on 10,2 ja tina erikaal 7,3. Kui palju hõbedat ja kui palju tina on selles sulatises?

417. Oder andis kuiva suve tõttu ainult 4 seemet ja kaer ainult 3 seemet; kaeru saadi 10 hl enam kui otri, sest kaeru oli maha külvatud 7 hl enam kui otri. Kui palju saadi kaeru ja kui palju otri?

418. Põllumees oli külvanud 2 hl talinisu enam kui talirukist ja sai nisu 2 hl vähem kui rukist, sest et rukis andis 9 seemet, kuna nisu andis 7 seemet. Kui palju nisu ja kui palju rukist sai põllumees?

419. Ülo mängis pingpongi Ernöga ja kaotas igast 8-st partiist 5; siis mängis ta Väinöga ja kaotas igast 5-st partiist 3. Üldse kaotas Ülo 16 partiid, olles mänginud Ernöga 6 partiid enam kui Väinöga. Mitu partiid kaotas ta Ernöle, mitu Väinöle?

420. Veetes jõuluvaheaega lelle pool, lellepoegade Ernö ja Väinö seltsilisena, mängis Ülo nendega malet. Ernöga mängitud partiidest tuli Ülol iga 5 partii kohta 2 võitu ja Väinoga mängitud partiidest tuli tal iga 4 partii kohta 3 võitu; Väinölt võitis ta 2 partiid enam kui Ernölt. Üldse oli ta mänginud nendega 18 partiid. Mitu partiid mängis ta Ernöga, mitu Väinöga?

421. Keegi isand ostis 2 maja 30000 krooni eest. Esimese aasta jooksul tõi talle esimene maja kahju 6% ja teine maja kasu 10%. Tema puhaskasu neist majadest ühtekokku oli 2040 krooni. Kui palju maksis kumbki maja?

422. a) Aritmeetilise rea 1-se ja 12-nda liikme summa on 43; 4-nda ja 7-nda liikme summa on 37. Leida rea vahe ja esimene liige!

b) Aritm. rea 2-se ja 10-nda liikme summa on 78; 5-nda ja 11-nda liikme summa on 106. Leida rea vahe, esimene liige ja 11 liikme summa!

c) Aritm. rea 7-nda ja 13-nda liikme summa on 1,6 korda nii suur kui 3-nda ja 9-nda liikme summa; 5-nda ja 12-nda liikme summa on 27,5. Leida rea vahe, esimene liige ja 14 liikme summa!

d) Aritm. rea 4-nda ja 5-nda liikme summa on 0,7 2-se ja 12-nda liikme summast; 3-nda ja 9-nda liikme summa on 4,4. Leida rea vahe, esimene liige ja 12 liikme summa!

423. Kui ristküliku kujulise maaala pikkust suurendada 2 m võrra ja laiust vähendada 5 m võrra, siis väheneb selle maaala pindala 342 m^2 võrra. Kui aga pikkust vähendada 3 m võrra ja laiust suurendada 1 m võrra, siis väheneb pindala 12 m^2 võrra. Kui pikk ja kui lai on see maaala?

424. Kui ristküliku kujulise aia pikkust suurendada ja laiust vähendada 5 m võrra, siis väheneb aia pindala 25 m^2 võrra; kui aga pikkust suurendada 13 m võrra ja laiust vähendada 7 m võrra, siis suureneb pindala 209 m^2 võrra. Kui pikk ja kui lai on see aed?

425. Kui täisnurkse kolmnurga kumbagi kaatetit suurendada 3 cm võrra, siis suureneb tema pindala 51 cm^2 võrra; kui pikemat kaatetit lühendada 3 cm võrra ja lühemat pikendada 3 cm võrra, siis jääb pindala muutumata. Kui pikad on kaatetid?

426. Kui täisnurkse kolmnurga lühemat kaatetit pikendada 4 cm võrra ja pikemat kaatetit lühendada 2 cm võrra, siis kolmnurga pindala suureneb 25 cm^2 võrra; kui lühemat kaatetit pikendada 1 cm võrra ja pikemat pikendada 4 cm võrra, siis suureneb kolmnurga pindala ka 25 cm^2 võrra. Kui pikad on need kaatetid?

427. Kui rombi lühemat diagonaali pikendada 1 m võrra ja pikemat lühendada 1 m võrra, siis rombi pindala suureneb 3 m² võrra; kui lühemat diagonaali lühendada 1 m võrra ja pikemat lühendada 5 m võrra, siis pindala väheneb 55 m² võrra. Kui pikad on need diagonaalid?

428. Kui ristikute diagonaalidega nelinurga kumbagi diagonaali pikendada 2 m võrra, siis suureneb nelinurga pindala 20 m² võrra; kui lühemat diagonaali lühendada 2 m võrra ja pikemat pikendada 4 m võrra, siis väheneb pindala 1 m² võrra. Kui pikad on need diagonaalid?

429. Kui maakera oleks täiesti sileda kera kujuline ja oleks võimalik tema ekvaatori ümber panna pinguli tõmmatud nööri, mis oleks ekvaatorist 10 m võrra pikem ja seisaks maapinnast igal pool ühekaugusel, kas oleks siis võimalik hiirel või kassil selle nööri alt läbi pugeda?

430. Rühm töölisi pidi ära tegema teatud töö. Üks tööline aga ei ilmunud tööle ja seepärast kulus ülejäänud rühmal selle töö tegemiseks 3 päeva enam kui esialgu arvatud. Oleks nende rühm 4-ja mehe võrra suurem olnud esialgsest arvust, siis oleks nad töö lõpetanud 2 päeva varemini kui esialgu kavatsetud. Mitu töölist oli esialgu rühmas ja mitme päeva jooksul kavatsesid nad töö lõpetada?

431. Võrdsete läbimõõtudega torud täidavad veesäili. Kui niisuguseid torusid oleks 9 võrra enam, siis täituks veesäil 3 tunni võrra kiiremini. Oleks neid torusid 4 võrra vähem, siis kuluks veesäili täitmiseks 10 tundi enam aega. Mitu toru oli ning mitme tunni jooksul suudavad nad täita veesäili?

432. Kaks töölist koos töötades suudavad teatud töö ära teha 80 päevaga. Kuid nemad tegid ära ainult $\frac{2}{15}$ osa tervest tööst, sest et esimene töötas ainult 10 päeva ja teine ainult 12 päeva. Mitu päeva oleks ära kulunud kummalgi töölisel üksikult selle töö tegemiseks?

433. Kui meister töötab 8 selli ja 6 õpilase abil, siis kulub tal päevapalgaks 45 krooni, — oma päevapalk kaasa arvatud. Töötab meister 12 selli ja 9 õpilase abil, siis kulub päevapalgaks 65 krooni. Töötab sama meister aga 4 selli ja 12 õpilase abil,

siis on nende päevane teenistus 43 krooni. Kui suur on igaühe päevapalk?

434. Kui vedeliku segu jaoks võtta kolmest vedelikust igaühest 50 cm^3, siis kaalub segu 175 gr; kui esimest vedelikku võtta 20 cm^3, teist 60 cm^3 ja kolmandat 80 cm^3, siis on segu kaal 212 gr; kui aga võtta esimest vedelikku 60 cm^3, teist 80 cm^3 ja kolmandat 20 cm^3, siis on segu kaal 162 gr. Leida iga vedeliku erikaal!

435. Kolmnurga küljed on vastavalt $a = 3$ cm, $b = 5$ cm ja $c = 6$ cm. Tema tippudest kui keskpunktidest on tõmmatud üksteist puutujad ringid. Kui pikad on nende ringide raadiused?

436. Kulduur ühes ketiga maksab 190 kr., hõbeuur sama ketiga 70 kr. ja mõlemad kellad ilma ketita ühtekokku 180 kr. Kui palju maksab iga asi eraldi?

437. Kolmnurga välisnurga ja temaga mitte-kõrvuoleva sisenurga summa annab 115°; sama välisnurga ja teise temaga mitte-kõrvuoleva sisenurga summa annab 125°. Kui suur on see välisnurk ja temaga mitte-kõrvuolevad sisenurgad?

438. Ringi sisse joonestatud nelinurgas $ABCD$ on nurkade A ja B summa 207°; nurkade B ja C summa on 231°. Kui suured on nurgad A ja B?

439. Mitu kraadi Fahrenheit'i järele näitab termomeeter, kui vastavate Celsiuse ja Réaumuri kraadide arvude summa on 27?

440. Kolm töölist suudavad ära teha teatud töö, kui A töötab 2 päeva, B 3 päeva ja C 12 päeva. Kui A töötab 3 päeva, B 2 päeva ja C 2 päeva, siis teevad nad ära $\frac{3}{4}$ osa tervest tööst. Kui aga A töötab 1 päeva, B 5 päeva ja C 2 päeva, siis teevad nad ära $\frac{7}{24}$ osa tervest tööst. Mitu päeva kuluks ära igal töölisel eraldi selle töö tegemiseks?

441. Vabariigi paberivabrikud said välismaalt tellimise teatava hulga paberi peale. Esimene ja teine vabrik koos töötades suudaksid selle tellimise täita 4 kuu jooksul, teine ja kolmas vabrik koos töötades 2,4 kuu jooksul, kolmas ja esimene vabrik koos töötades 3 kuu jooksul. Kui ruttu suudetakse see tellimine täita, kui kõik 3 vabrikut koos töötavad?

X. Ruutfunktsioon ja tema pööre.

63. Ruutfunktsioon.

442. Anda tabel ja diagramm, mis kujutab funktsiooni

$a_1)\ y = x^2$	$a_2)\ y = -x^2$	arenemiskäiku, kui x muutub
$b_1)\ y = x^2 + 1$	$b_2)\ y = -x^2 + 1$	0,5 kaupa — 5-st kuni + 5-ni!
$c_1)\ y = x^2 + 2$	$c_2)\ y = -x^2 + 2$	Millimeetripaberil teha eri-
$d_1)\ y = x^2 + 3$	$d_2)\ y = -x^2 + 3$	joonis
$e_1)\ y = x^2 + 4$	$e_2)\ y = -x^2 + 4$	nr. 1. juhtumitele: a_1, b_1, c_1,
. . . . .	. . . . .	d_1, e_1;
. . . . .	. . . . .	nr. 2. juhtumitele: a_1, f_1, g_1,
$f_1)\ y = x^2 - 1$	$f_2)\ y = -x^2 - 1$	h_1, i_1;
$g_1)\ y = x^2 - 2$	$g_2)\ y = -x^2 - 2$	nr. 3. juhtumitele: a_2, b_2, c_2,
$h_1)\ y = x^2 - 3$	$h_2)\ y = -x^2 - 3$	d_2, e_2;
$i_1)\ y = x^2 - 4$	$i_2)\ y = -x^2 - 4$	nr. 4. juhtumitele: a_2, f_2, g_2,
. . . . .	. . . . .	h_2, i_2;
. . . . .	. . . . .	k) Kuidas muudab oma kuju ja

kohta teljestiku suhtes see kõver joon, millel asuvad funktsiooni $y = x^2$ väärtusi kujutavate sirglõikude otsapunktid, kui

1) x^2-ga liita 1? 2? 3? 4? . . .
2) x^2-st lahutada 1? 2? 3? 4? . . .
3) x^2 ees muuta märk pluss miinuseks?
4) $-x^2$-ga liita 1? 2? 3? 4? . . .
5) $-x^2$-st lahutada 1? 2? 3? . . .
6) $(x^2 + k)$ ees muuta märk pluss miinuseks?
7) $(x^2 - k)$ ees muuta märk?

Kõverat, millel asuvad funktsiooni $y = x^2$ väärtusi kujutavate sirglõikude otsapunktid, ehk lühendatud kõnes, funktsiooni $y = x^2$ arenemiskäiku kujutavat kõverat nim. p a r a b o o l i k s.

e) Millimeetripaberil võimalikult täpsalt joonestada parabool, võttes ühikuks 1 cm ja x-i väärtused — 5-st kuni + 5-ni, kleepida see parabool kartongile ja siis kartongist välja lõigata! See olgu meie paraboolliineal. Mitu paraboolliineali saame sel teel igast joonisest?

m) Missugune kuju on joonel ja kus asub teljestiku suhtes joon, mis kujutab funktsiooni

1) $y = x^2 + k$ 3) $y = -x^2 + k$
2) $y = x^2 - k$ 4) $y = -x^2 - k$ arenemiskäiku?

n) Kuidas on võimalik joonisest nr. 1 saada joonis nr. 4? joonisest nr. 2 saada jnonis nr. 3?

443. Anda tabel ja diagramm, mis kujutab funktsiooni

$a_1)$ $y = x^2$	$a_2)$ $y = -x^2$	arenemiskäiku, kui x muutub 0,5 kaupa 10-ne soodsalt valitud ühiku piirides! Mille abil on kerge teha vastavaid jooniseid?
$b_1)$ $y = (x+1)^2$	$b_2)$ $y = -(x+1)^2$	
$c_1)$ $y = (x+2)^2$	$c_2)$ $y = -(x+2)^2$	
$d_1)$ $y = (x+3)^2$	$d_2)$ $y = -(x+3)^2$	
$e_1)$ $y = (x+4)^2$	$e_2)$ $y = -(x+4)^2$	Teha erijoonised
. . . . .	. . . . .	nr. 5. juhtumitele: a_1, b_1, c_1, d_1, e_1;
. . . . .	. . . . .	
$f_1)$ $y = (x-1)^2$	$f_2)$ $y = -(x-1)^2$	nr. 6. juhtumitele: a_1, f_1, g_1, h_1, i_1;
$g_1)$ $y = (x-2)^2$	$g_2)$ $y = -(x-2)^2$	
$h_1)$ $y = (x-3)^2$	$h_2)$ $y = -(x-3)^2$	nr. 7. juhtumitele: a_2, b_2, c_2, d_2, e_2;
$i_1)$ $y = (x-4)^2$	$i_2)$ $y = -(x-4)^2$	
. . . . .	. . . . .	nr. 8. juhtumitele: a_2, f_2, g_2, h_2, i_2!
. . . . .	. . . . .	

k) Kuidas muudab oma kuju ja kohta teljestiku suhtes funktsioonide $y = x^2$ ja $y = -x^2$ arenemiskäiku kujutav kõver, kui

1) x-ga liita 1? 2? 3? 4? . . . . .
2) x-st lahutada 1? 2? 3? 4? . . . . .

l) Missugune kuju on joonel ja kus asub teljestiku suhtes see joon, mis kujutab funktsiooni 1) $x = (x+k)^2$ 3) $y = -(x+k)^2$
2) $y = (x-k)^2$ 4) $y = -(x-k)^2$
arenemiskäiku?

m) Kuidas on võimalik

joonisest nr. 5 saada joonis nr. 6? nr. 7? nr. 8?
„ nr. 6 „ „ nr. 8? nr. 5? nr. 7?
„ nr. 7 „ „ nr. 8? nr. 5? nr. 6?
„ nr. 8 „ „ nr. 6? nr. 7? nr. 5?

444. Missugune kuju on joonel ja kus asub joon, mis kujutab järgmise funktsiooni arenemiskäiku:

a) $y=(x+1)^2+2$?
b) $y=-(x+3)^2+4$?
c) $y=(x-2)^2+3$?
d) $y=-(x-1{,}5)^2+1$?
e) $y=(x+2)^2-5$?
f) $y=-(x+2{,}4)^2-7$?
g) $y=(x-1)^2-6$?
h) $y=-(x-4)^2-1$?

i) $y=(x+m)^2+n$?
k) $y=-(x+m)^2+n$?
l) $y=(x^2-m)^2+n$?
m) $y=-(x-m)^2+n$?
n) $y=(x+m)^2-n$?
o) $y=-(x+m)^2-n$?
p) $y=(x-m)^2-n$?
q) $y=-(x-m)^2-n$?

445. Alljärgnevad funktsioonid arendada, s. t. avada sulud ja siis lihtsustada, anda nende arenemiskäiku kujutav tabel ja diagramm:

a) $y=(x+2)^2+5$
b) $y=(x-3)^2+1$
c) $y=(x+4)^2-9$
d) $y=(x-5)^2-8$
e) $y=-(x+1)^2+4$
f) $y=-(x+4)^2+10$
g) $y=-(x+5)^2-1$
h) $y=-(x-2^2-3$

446. Arendada funktsioonid:

a) $y=(x+m)^2+n$
b) $y=(x+m)^2-n$
c) $y=(x-m)^2+n$
d) $y=(x-m)^2-n$
e) $y=-(x+m)^2+n$
f) $y=-(x+m)^2-n$
g) $y=-(x-m)^2+n$
h) $y=-(x-m)^2-n$!

Anda nende funktsioonide arendiste üldkuju!

447. Milline kõver kujutab järgmiste funktsioonide arenemiskäiku:

a) $y=x^2+2x+6$
b) $y=x^2+6x+8$
c) $y=x^2-4x+7$
d) $y=x^2-8x+9$
e) $y=-x^2-10x-12$
f) $y=-x^2-2x-4$
g) $y=-x^2+6x+3$
h) $y=-x^2+4x-5$
i) $y=x^2+5x+2{,}25$
k) $y=x^2-\frac{4}{3}x-1\frac{5}{9}$
l) $y=-x^2-3{,}4x-0{,}89$
m) $y=-x^2+3x-5{,}25$

Kõverad *b*), *d*), *f*), *h*), *k*), *m*) kujutada punkt-punktilt, kirjutades vastavad arvutused tabelisse

x	x^2	px	x^2+px	$x^2+px+q=y$

448. Tõestada, et funktsiooni a) $y = x^2 + px + q$
b) $y = -x^2 + px + q$
arenemiskäigu kujuks on parabool, mis on nihkunud esialgsest asendist kas paremale või vasemale poole, olenedes p märgist, ja kerkinud või vajunud! Millest oleneb kerkimine või vajumine?

449. Anda tabel ja diagramm, mis kujutab funktsiooni

a) $y = \frac{3}{4}x^2$
b) $y = \frac{2}{3}x^2$
c) $y = \frac{1}{2}x^2$
d) $y = 0{,}4x^2$
e) $y = \frac{1}{3}x^2$
f) $y = 0{,}25x^2$
g) $y = 1{,}25x^2$
h) $y = 1{,}5x^2$
i) $y = 1{,}75x^2$
k) $y = 2x^2$
l) $y = 3x^2$
k) $y = 4x^2$

arenemiskäiku vahemikus $x = -3$ kuni $x = +3$ ja võrrelda tekkinud kõvera kuju esialgse paraboliga!

l) Millise a väärtuse juures kujutab funktsiooni $y = ax^2$ arenemiskäiku esialgsest paraboolist laiem parabool ja millise a väärtuse juures kitsam parabool?

m) Kuidas muutub parabooli $y = ax^2$ asend, kui 1) koeffitsient a muutub positiivsest negatiivseks? 2) ax^2-ga liita $+ n$? liita $- n$? 3) x-iga enne astendamist liita $+ m$ või $- m$?

n) Milline kõver kujutab funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ arenemiskäiku? Tõestada, et see kõver on esialgsest paraboolist erinev parabool!

450. n konfirmandi jätavad üksteisele mälestuseks vastastikku visiitkaarte. Mitu visiitkaarti k tuleb trükikojas lasta valmistada, et igal konfirmandil oleks enda ja kõigi kaaslaste kaardid? Kuidas muutub kaartide arv k konfirmaadide arvu n muutumisel 10-st kuni 20-ni?

451. Kuidas muutub ruudu pindala, kui tema külg x muutub 1 cm-st kuni 10 cm-ni? x-i väärtustel lasta muutuda 1-e kaupa; ruudud teha ühel joonisel teljestikus nii, et nende kaks külge ühte langevad x- ja y-teljega; anda tabel ja pindala muutumise tulpdiagramm!

452. Kuidas muutub summa

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x + \ldots + 3 + 2 + 1$$

ühes x-i muutumisega? Anda tabel, diagramm ja valem! Vaadelda ka juhtu, kui x on negatiivne täisarv!

453. Kui suur on esimese x paaritu arvu summa? Kuidas muutub see summa ühes x-i muutumisega? Anda tabel, dia-

gramm ja valem! Võib rakendada aritm. rea liikmete summa valemit.

454. Kirikuõpetaja H. perekonnas oli niisugune traditsioon: Jõuluõhtul tegi iga perekonna liige igale teisele perekonnaliikmele kingituse; vähemate laste nimel tegid seda vanemad — tütarde eest ema, poegade eest isa. Kuidas oleneb kingituste arv perekonnaliikmete arvust? Anda tabel, diagramm ja valem! Vaadelda ka juhtu, kui igaüks teeb ka iseendale ühe kingituse!

455. Viimasel ajal on hakatud eriti rohket tähelepanu pöörama viljapuude ja marjapõõsaste ruudukujulisele istutamisviisile.

Aias eraldati marjapõõsaste istutamiseks ruudukujuline maatükk, millele istutati põõsad ruutude tippudesse 1 m kaugusele üksteisest. Kuidas oleneb istutatud põõsaste arv p eraldatud maatüki külje pikkusest x m? Anda tabel, graafik ja valem nelja juhtumi jaoks:

a) kui maatükk on eraldatud aiaga, mille äärde põõsaid ei istutata;

b) kui eraldatud maatükk asub aia ühes täisnurgalises nurgas, ja aia äärde põõsaid ei istutata;

c) kui eraldatud maatükk ei ole piiratud aiaga nii, et igal pool tema piirjoonele istutakse põõsaid!

d) kui maatükk on kahest vastasküljest piiratud aiaga, mille äärde põõsaid ei istutata, ja kahest vastasküljest ei ole piiratud ja sinna istutatakse põõsaid?

456. Hiljemini kui ruudukujuline istutamisviis on tarvitusele võetud ristkülikukujuline istutamisviis. Lääne-Euroopa uuemad suuremad äritaolised viljapuuaiad on juba pea erandita sellele üle läinud.

Ruudukujulisele maaalale istutati viljapuid ristkülikukujulise istutamisviisi järele nii, et üksikute puude vahe ridades oli 1 dam (dekameeter) ja ridade vahe 2 dam. Kuidas oleneb ruudu küljest x dam istutatud puude arv? Vaadelda, nagu eelmises ülesandes, mitmesuguseid võimalikke juhtumeid; neid võib olla isegi 5. Anda tabel, diagramm, valem!

457. Tasapinnal on x punkti asetatud nii, et ükski punktide kolmik ei asu ühel sirgel. Mitu erilist sirget on võimalik

tõmmata läbi nende punktide? Anda tabel, diagramm ja valem! Joonisest välja lugeda:

a) mitu sirget saab tõmmata läbi 9, 10, 11, 12 punkti?

b) läbi mitme niiviisi asetatud punkti on võimalik tõmmata 10, 21, 28 sirget?

458. Kuidas muutub hulknurga diagonaalide arv d ühes külgede arvuga k? Anda tabel, diagramm ja valem! Joonisest välja lugeda:

a) mitu diagonaali on 10-, 13-nurgalisel hulknurgal?

b) mitmeküljelisel hulknurgal on 44, 27, 54 diagonaali?

459. Keha vabal langemisel käidud tee määratakse valemi kaudu $s = \frac{1}{2} gt^2$, kus s mõõdetakse meetrites, t sekundites ja g on Maa raskuskiirendus, mis võrdub 9,8 m/sek.? Määrata käidud tee pikkus iga 0,5 sek. tagant 4 sekundi jooksul! Kujutada langemistee olenevus ajast, võttes t-telg paremale poole ja s-telg allapoole. Interpoolimise teel määrata langemisteed aegadel $\frac{3}{4}$ sek.; $1\frac{1}{4}$ sek., $2\frac{3}{4}$ sek., $3\frac{3}{8}$ sek.! Kui palju erineb interpoolimise teel saadud vastus arvutamise teel leitud vastusest, s. t. kui suur on viga?

460. Lingunööri pinevus lingu keerutamisel kasvab võrdeliselt lingu pöörlemise kiiruse ruuduga: $f = \frac{m v^2}{R}$, kus m on lingukivi mass kg-des, R on lingunööri pikkus meetrites, kiirus v mõõtub meetrites sekundi kohta ja pinevus f mõõtub kg-des. Näidata lingunööri pinevuse olenevust tema pöörlemise kiirusest, võttes näiteks $m = 50$ gr ja $R = 50$ cm!

461. Pinnale langeva valguse energia hulk on võrdeline valguse allika valguse tugevusega ja pöördvõrdeline tema ja valgustatava keha vahelise kauguse ruuduga: $L = \frac{H}{R^2}$. Maapinnale langeb 1 cm² pindalale 1-e minuti joooksul 2 väikest kalorit soojust; see on nn. Päikese konstant. Näidata graafiliselt Päikese konstandi olenevust ja ära lugeda sellelt vastavad konstandid järgmistele planeetidele, kui on teada, et nende keskmised kaugused on: Merkuuril — 0,4; Veenusel — 0,7; Maal —

1,0; Marsil — 1,5; Jupiteril — 5,2. Ühikuks on võetud Maa kaugus Päikesest: 150 000 000 km; see on 1 astronoomiline ühik.

462. Vaatlused gaasi ruumala muutumise kohta tema rõhu muutudes on andnud tulemusena rea kokkukuuluvaid väärtusi:

p	0,2	0,5	0,8	1,2	2,0	2,7	4,0	4,8	6,0	atmosfääri
v	120	48	30	20	12,1	9,0	6,1	5,1	4,2	liitrit

Moodustada p-v graafik! Milline kõver see on? Katsuda anda p ja v vaheline seos valemina!

463. Vaatlused teatava nähu uurimisel on andnud rea kokkukuuluvaid olenematu muutuja ja oleneva muutuja väärtusi:

x	0	2,4	3,2	4,0	4,5	5,2	6,0
y	0	2,3	4,1	6,4	8,0	10,8	13,0

Kujutada andmed graafiliselt! Milline seos valitseb oleneva ja olenematu muutuja vahel? Katsuda määrata see seos!

464. Vaatlused selle kohta, kuidas oleneb tuule kiirusest tuule rõhumine paigalseisvale tasapinnale, andsid rea kokkukuuluvaid andmeid:

v	0	2	4	6	7	9	12	15	20	m/sek.
p	0	0,5	1,9	4,3	5,8	9,6	17,0	26,7	47,4	kg m²-le

Teha diagramm ja katsuda leida seos tuule kiiruse v (meetrit sekundis) ja selle rõhumise p (kg) vahel, mida avaldab see tuul paigalseisva tasapinna 1-le ruutmeetrile!

465. Torust läbimõõduga d kiirusega v läbivoolav veehulk:

Toru läbimõõt d mm-tes	Vee kiirus v meetrit sekundis							
	0,1	0,2	0,4	0,5	0,8	1,0	1,5	2,0
	ühe ristlõike kohalt ühes sekundis läbivoolav vee hulk liitrites							
20	0,03	0,06	0,12	0,15	0,25	0,31	0,47	0,63
25	0,05	0,10	0,19	0,24	0,39	0,49	0,73	0,98
30	0,07	0,14	0,28	0,35	0,56	0,70	1,06	1,41
40	0,12	0,25	0,50	0,62	1,00	1,25	1,88	2,51
50	0,19	0,39	0,78	0,98	1,56	1,96	2,94	3,92
60	0,28	0,56	1,13	1,41	2,26	2,82	4,24	5,65
80	0,50	1,00	2,01	2,51	4,02	5,02	7,54	10,05
100	0,78	1,57	3,14	3,92	6,28	7,85	11,78	15,71
150	1,76	3,53	7,07	8,83	14,13	17,67	26,50	35,34
200	3,14	6,28	12,56	15,70	25,13	31,41	47,12	62,83
250	4,90	9,81	19,63	24,54	39,27	49,08	73,63	98,17
300	7,06	14,13	28,27	35,34	56,54	70,68	106,03	141,37

Teha diagramm ja leida valem, mis näitab, kuidas oleneb ristlõike kohalt läbivoolav veehulk a) voolu kiirusest, b) toru ristlõike läbimõõdust!

64. Ruutfunktsiooni pööre.

466. Koostada kõigi täisarvude ruutude tabel arvudele 1-st kuni 100-ni!

467. Ruudu pindala on x cm². Anda külje pikkuse muutumise diagramm ja tabel, kui x muutub 1-e kaupa 0-st kuni 25-ni! Vastused anda kas täpsad, kui võimalik, või ligikaudsed veaga mitte üle 0,05. Missuguseid võtteid võiks rakendada?

468. Anda diagramm ja tabel, mis kujutab funktsiooni

a) $y = \sqrt{x}$
b) $y = \sqrt{x} + 1$
c) $y = \sqrt{x} + 2$
d) $y = \sqrt{x} + 3$
e) $y = \sqrt{x} + 4$

arenemiskäiku, kui x muutub 0-st kuni 25-ni! Teha joonis nr. 9 näidete a—e jaoks, ja joonis nr. 10 näidete f—k jaoks!

l) Millisest eelmise paragrahvi 63-nda joonisest on võimalik saada joonis nr. 9,

. . . . . .
. . . . . .
f) $y = \sqrt{x}$
g) $y = \sqrt{x} - 1$
h) $y = \sqrt{x} - 2$
i) $y = \sqrt{x} - 3$
k) $y = \sqrt{x} - 4$
. . . . . .
. . . . . .

millisest joonis nr. 10 sel teel, et joonis pööratakse telgede vahelise esimese nurga poolitaja ümber 180° võrra?

m) Millistele x-väärtustele on võimalik leida täpsaid vastuseid?

n) Neile x-väärtustele, millele ei ole võimalik anda täpsaid vastuseid, leida joonise abil ligikaudsed vastused ja silma varal määrata tulemuse kõikumispiirkond.

469. Leida antud ruutjuure ligikaudne väärtus interpolatsiooni teel! Selleks tuleb võtta kaks teineteisele järgnevat täisarvu, mille ruutude vahel asub juuritav, ja leida nende aritmeetiline keskmine. See aritmeetiline keskmine on otsitava ruutjuure ligikaudne väärtus veaga $\pm 0{,}5$; vea kõikumise piirkond on 1. Kui seda võtet rakendada otsitava arvu lähisväärtuste kohta kaks korda, siis on viga $\pm 0{,}5^2$ ja vea kõikumise piirkond 0,5; kui teda rakendada kolm korda, siis on viga $\pm 0{,}5^3$ ja vea kõikumise piirkond on $0{,}5^2$ jne. Seda võtet võib rakendada iga lähisväärtuste paari kohta ja nii leida ruutjuur antud arvust soovitava täpsusega. Harjutisi:

a) $\sqrt{8}$ veaga kuni $\pm 0{,}5$
b) $\sqrt{41}$ „ „ $\pm 0{,}5$
c) $\sqrt{7}$ „ „ $\pm 0{,}25$
d) $\sqrt{53}$ „ „ $\pm 0{,}25$
e) $\sqrt{5}$ „ „ $\pm 0{,}125$
f) $\sqrt{90}$ „ „ $\pm 0{,}125$
g) $\sqrt{30{,}7}$ „ „ $\pm 0{,}1$
h) $\sqrt{73{,}8}$ „ „ $\pm 0{,}1$
i) $\sqrt{42{,}5}$ „ „ $\pm 0{,}01$
k) $\sqrt{91{,}8}$ „ „ $\pm 0{,}01$
l) $\sqrt{2}$ „ „ $\pm 0{,}001$
m) $\sqrt{75}$ „ „ $\pm 0{,}001$
n) $\sqrt{241}$ veaga kuni $\pm 0{,}01$
o) $\sqrt{789}$ „ „ $\pm 0{,}01$
p) $\sqrt{2468}$ „ „ $\pm 0{,}1$
q) $\sqrt{8765}$ „ „ $\pm 0{,}1$
r) $\sqrt{57{,}1}$ „ „ $\pm 0{,}1$
s) $\sqrt{88{,}8}$ „ „ $\pm 0{,}1$
t) $\sqrt{20{,}5}$ „ „ $\pm 0{,}01$
u) $\sqrt{78{,}9}$ „ „ $\pm 0{,}01$
v) $\sqrt{3}$ „ „ $\pm 0{,}001$
x) $\sqrt{69}$ „ „ $\pm 0{,}001$
y) $\sqrt{514}$ „ „ $\pm 0{,}01$
z) $\sqrt{4321}$ „ „ $\pm 0{,}1$

Kui ruutjuur täisarvust ei ole täisarv, siis ei saa ta olla ka murd, sest murru teine aste on ikkagi jälle murd. See arv

kuulub nn. *irratsionaalsete* arvude liiki. Irratsionaalse arvu vastandina nim. täisarvu ja murdu *ratsionaalseks arvuks*.

470. Anda diagramm ja tabel, mis kujutab funktsiooni arenemiskäiku, kui x muutub kuni 25-ni, alates

a) 0-st; b) — 1-st; c) — 2-st; d) — 3-st; e) — 4-st; ....
f) 0-st; g) + 1-st; h) + 2-st; i) + 3-st; k) + 4-st; ....

a) $y=\sqrt{x}$
b) $y=\sqrt{x}+1$
c) $y=\sqrt{x}+2$
d) $y=\sqrt{x}+3$
e) $y=\sqrt{y}+3$
. . . . . .
. . . . . .
f) $y=\sqrt{x}$
g) $y=\sqrt{x}-1$
h) $y=\sqrt{x}-2$
i) $y=\sqrt{x}-3$
k) $y=\sqrt{x}-4$
. . . . . .
. . . . . .

Teha joonis nr. 11 näidete a—e jaoks ja joonis nr. 12 näidete f—k jaoks!

l) Millisest eelmise paragrahvi 63-nda joonisest on võimalik saada joonis nr. 11 ja millisest joonis nr. 12 joonise pööramise teel?

m) Mitu y-väärtust vastab ühele x-väärtusele ja missugused on need vastused oma absoluutse väärtuse ja oma suuna poolest?

n) Millistele x-väärtustele üldse pole võimalik saada vastuseid?

o) Meile seni tuntud arvude vallas üldse ei leidu arvu, mis vastaks ruutjuurele negatiivsest arvust. Kui me ruutjuurt negatiivsest arvust tahame tunnustada arvuks, ja üldistamise pärast peame seda tegema, siis peame arvu mõistet laiendama uue arvude liigi võrra. Ruutjuurt negatiivsest arvust nim. *imaginaarseks* arvuks. Imaginaarsete arvude vastandina nim. teisi arve *reaalseteks* arvudeks.

p) Kuidas asub teljestiku suhtes parabool, mis kujutab funktsiooni

1) $y=\sqrt{x}+k$ 3) $y=\sqrt{x+k}$
2) $y=\sqrt{x}-k$ 4) $y=\sqrt{x-k}$ arenemiskäiku?

Kui kaugel y-teljest lõibab ta x-telge?

471. Olgu $\sqrt{a}=x$; siis on $x^2=a$ ehk $x\cdot x=a$; siit leiame, et $x=\frac{a}{x}$ ehk $\sqrt{a}=\frac{a}{x}$. Seda võime tõlgitseda nii, et kui x on ruutjuur a-st puudusega, siis annab a jagatis selle x-iga ruutjuure a-st liiaga ja ümberpöördult. Võtnud nende kahe lähisväärtuse keskmise aritmeetilise, saame otsitava ruutjuure uue lähisväärtuse, millesse võime uuesti rakendada sama võtet ja

leida temaga paari kuuluva lähisväärtuse. Rakendades seda võte korduvalt, võime leida otsitava ruutjuure soovitava täpsusega.

Näide: $\sqrt{3} \approx 1$; $3 : 1 = 3$; $\frac{1+3}{2} = 2$

$\sqrt{3} \approx 2$; $3 : 2 = 1{,}5$; $\frac{2+1{,}5}{2} = 1{,}75$

$\sqrt{3} \approx 1{,}75$; $3 : 1{,}75 \approx 1{,}71$; $(1{,}75 + 1{,}71) : 2 = 1.73$

$\sqrt{3} \approx 1{,}73$; $3 : 1{,}73 \approx 1{,}74$; $(1{,}73 + 1{,}74) : 2 = 1{,}735$

$\sqrt{3} \approx 1{,}735$; $3 : 1{,}735 \approx 1{,}729$; $(1{,}735 + 1{,}729) : 2 = 1{,}732.$

$\sqrt{3} \approx 1{,}732$ ($\pm 0{,}0005$).

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{0{,}75}$ c) $\sqrt{9.8}$ d) $\sqrt{0{,}047}$ e) $\sqrt{273}$
f) $\sqrt{0{,}064}$ g) $\sqrt{1{,}53}$ h) $\sqrt{0{,}125}$ veaga mitte üle 0,01.

Definitsioone: Juurimine on antud astme ja astmenäitaja kaudu aluse leidmine; antud astet nim. juuritavaks, antud astmenäitajat — juurenäitajaks ja otsitavat alust — juureks. Juurimise märgiks on moonutatud ladinakeelne r, $\sqrt{\ }$, mille rõhtkriipsu alla kirjutatakse juuritav ja avausse juurenäitaja, näiteks: $\sqrt[3]{512} = 8$; seda loetakse: kolmas juur 512-st on 8.

65. Ruutjuure leidmine arvust.

Ühekohalise ruutjuure, s. o. ruutjuure kahekohalisest arvust, leiame järgmise tabeli põhjal:

$1^2 = 1$; $3^2 = 9$; $5^2 = 25$; $7^2 = 49$; $9^2 = 81$;
$2^2 = 4$; $4^2 = 16$; $6^2 = 36$; $8^2 = 64$; $10^2 = 100$.

Kui juuritav on suurem kui 100 ja sellega juur suurem kui 10, siis rakendame korrutamise abivalemit: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Näide:

$\sqrt{1444} = ?$
$\sqrt{14'44} = 38$
9
68 | 54'4
8 | 54 4

Et juuritav on suurem kui 100, siis on ruutjuur temast suurem kui 10 ning koosneb kümnelistest ja ühelistest. Kümneliste ja üheliste summa ruut koosneb kümneliste ruudust, kümneliste ja üheliste kahekordsest korrutisest ning üheliste ruudust.

Kümneliste ruut peitub ainult sajalistes; seepärast eraldame juuritavas sajalised — neid on 14. Ruutjuur 14-st on 3, sest $3 \cdot 3 = 9$ ja üleliigsed 5 sajalist tuleb kümneliste ja üheliste kahekordsest korrutisest. Juure kümneliste number on sellega 3, ei enam ega vähem. Kirjutame selle numbri juure kümneliste kohale.

3 (kümmend) korda 3 (kümmend) on 9 (sada); lahutame 9 (sada) juuritavast, jääb järele 544.

Selles jäägis peitub kümneliste ja üheliste kahekordne korrutis ja üheliste ruut. Kümneliste ja üheliste kahekordne korrutis peitub ainult kümnelistes; seepärast eraldame jäägi kümnelised, neid on 54. Et kümneliste ja üheliste kahekordne korrutis on seesama, mis kahekordsete kümneliste ja üheliste korrutis, siis leiame üheliste numbri jagades jäägi kümnelised juure kahekordsete kümnelistega. See jagatis võib osutuda üheliste numbriks liiga suureks, kui üheliste ruut ka annab mõne kümnelise. Seepärast tuleb saadud jagatist katsuda.

Teeme siis juure kümnelised kahekordseks, saame 6 kümnelist. Selle numbri 6 kirjutame jäägi ette tõmmatud ja kahest reast läbi mineva püstjoone ette, jättes tema ja püstjoone vahele ruumi veel ühe numbri jaoks.

Jagame nüüd jäägi kümnelisi juure kahekordsete kümnelistega, saame üheliste jaoks arvu 9. Seda numbrit kirjutame 3 korda: juure üheliste kohale, kahekordsete kümneliste kõrvale, kuhu püstjoone ette tema jaoks on jäetud ruumi, saades selle läbi üheliste ja juure kahekordsete kümneliste summa 69, ning sinnasamasse iseenese alla. Korrutame 69 tema alla kirjutatud 9-ga: 9 korda 9 ühelist on 81 ühelist, — see on üheliste ruut; 9 korda 6 kümnelist on 54 kümnelist, — see on üheliste ja kümneliste kahekordne korrutis; $540 + 81 = 621$. See summa on jäägist suurem; järelikult 9 on üheliste numbriks liiga suur ja tema asemele tuleb võtta järgmine vähem arv 8 ning viimast samuti katsuda. 8 osutub üheliste jaoks õigeks numbriks ja sellega on $\sqrt{1444} = 38$.

On juuritavas suurem kui neljakohaline arv, siis loeme juurt ikkagi kümneliste ja üheliste summaks ja arutleme endist viisi; arutlusi tuleb vaid korrata.

Näide: $\sqrt{222784} = ?$ Kümneliste ruut peitub ainult

$\sqrt{22'27'84} = 472.$

16	
87	62'7
7	609
942	188'4
2	1884

sajalistes, neid on 2227. Võtame 2227-st ruutjuure. Selleks ei tarvitse teda eraldi kirjutada, vaid me jätame niikauaks 84 tähele panemata. Endist viisi arutledes leiame, et ruutjuur 2227-st on 47, järele jääb 18 sajalist. Kümneliste ruut 2209 on juba osade kaupa juuritavast lahutatud ning jääk on 1884. Selles jäägis peitub kümneliste ja üheliste kahekordne korrutis ja üheliste ruut. Teeme juure kümnelised kahekordseks. Selleks liidame vaid 87 tema alla kirjutatud 7-ga, sest 80 on ju kahekordistatud 40 ja tarvis on veel vaid 7 võtta 2 korda; siis saame 94. Jaganud jäägi 188 kümnelist juure kahekordsete kümnelistega, 94-ga, saame üheliste numbriks 2, mida me endist viisi kirjutame 3 korda. Järele katsudes leiame, et 2 on üheliste õige arv. Nii siis $\sqrt{222784} = 472$. Kirjutamisviis on kõrval näha. Sellest on ka näha, et kasulik on juuritava numbrid jagada rühmadeks kahe kaupa arvates paremalt käelt vasakule poole; viimases, s. o. äärmises pahempoolses rühmas võib olla ka üksainus number. Mitu rühma saab juuritavas, nii mitu numbrit on juures.

472. Harjutisi:

a) $\sqrt{169}$
b) $\sqrt{361}$
c) $\sqrt{784}$
d) $\sqrt{841}$
e) $\sqrt{2809}$
f) $\sqrt{3364}$
g) $\sqrt{4489}$
h) $\sqrt{4761}$
i) $\sqrt{6400}$
k) $\sqrt{7744}$
l) $\sqrt{8100}$
m) $\sqrt{9801}$
n) $\sqrt{82944}$
o) $\sqrt{94249}$
p) $\sqrt{127736}$
q) $\sqrt{258064}$
r) $\sqrt{335241}$
s) $\sqrt{360000}$
t) $\sqrt{546121}$
u) $\sqrt{654481}$
v) $\sqrt{960400}$
x) $\sqrt{4297329}$
y) $\sqrt{16703569}$
z) $\sqrt{24078649}$

Kümnendmurru juurimisel tuleb arutleda kümnendikkude, sajandikkude jne. kohta sarnaselt, nagu me arutleme täisarvu juurimisel kümneliste ja üheliste kohta. Siis selgub, et kümnendmurru juurimisel tuleb kümnendmurru numbrid jagada rühmadeks kahe kaupa komast alates paremale poole; ka viimases rühmas saab siis 2 numbrit. Samale otsusele jõuame ka, kui kümnendmurru muudame harilikuks murruks ja siis juurime luge-

jat ja nimetajat eraldi. Kui arvus on täisarvulisi kohti ja kümnendkohti, siis tuleb numbrid rühmitada kahe kaupa, alates komast vasemale ja paremale poole. Arutleda võime alati, nagu täisarvu juurimisel — see on samaväärne kümnendmurru muutmisega täisarvuks, näiteks :

$$\sqrt{54{,}76} = \sqrt{\frac{5476}{100}} = \sqrt{5476} : \sqrt{100} = 74 : 10 = 7{,}4$$

473. Harjutisi:

a) $\sqrt{0{,}0324}$ f) $\sqrt{0{,}502681}$ l) $\sqrt{21{,}4369}$
b) $\sqrt{0{,}0729}$ g) $\sqrt{0{,}662596}$ m) $\sqrt{77{,}0884}$
c) $\sqrt{0{,}4624}$ h) $\sqrt{0{,}258064}$ n) $\sqrt{353{,}8161}$
d) $\sqrt{0{,}8836}$ i) $\sqrt{0{,}405769}$ o) $\sqrt{42{,}810849}$
e) $\sqrt{0{,}075625}$ k) $\sqrt{9{,}4249}$ p) $\sqrt{50{,}339025}$

Et antud arvust võtta ruutjuurt täpsalt kuni määratud kümnendkohani, juurime arvu nagu harilikult ja katkestame juurimistehte, kui ilmunud on nõutud kümnendkoha number ja arvesse on võetud soovitav täpsus. On juuritavas täisarv või vähem kümnendkohti kui tarvis läheb, siis täidame puuduvad kohad nullidega, mida ka jäägi juurde võib kirjutada ilma juuremärgi alla kirjutamata. Eriti tuleb sellele tähelepanu pöörata, et juuritavas oleks paarisarv kümnendkohti, sest kümnendmurru ruutimisel saab kümnendkohtade arv kahekordseks ja me saame alati paarisarvu kümnendkohti.

474. Harjutisi: Leida veaga alla

0,05	0,005	0,0005
a) $\sqrt{6}$	i) $\sqrt{10}$	r) $\sqrt{2}$ kuni $\sqrt{8}$
b) $\sqrt{27}$	k) $\sqrt{70}$	s) $\sqrt{0{,}42}$
c) $\sqrt{200}$	l) $\sqrt{183}$	t) $\sqrt{0{,}135}$
d) $\sqrt{1000}$	m) $\sqrt{1{,}5}$	u) $\sqrt{0{,}1}$ kuni $\sqrt{0{,}9}$
e) $\sqrt{4{,}5}$	n) $\sqrt{0{,}75}$	v) $\sqrt{6{,}4}$
f) $\sqrt{612{,}7}$	o) $\sqrt{3{,}14}$	x) $\sqrt{1{,}538}$
g) $\sqrt{743{,}8}$	p) $\sqrt{20{,}92}$	y) $\sqrt{3{,}14159}$
h) $\sqrt{436{,}52}$	q) $\sqrt{365{,}24}$	z) $\sqrt{2{,}71828}$

475. Anda valem, tabel ja diagramm, mis iseloomustab

hüpotenuusi muutumist olenevuses ühe kaateti x muutumisest, kui teine kaatet $b = 3$ cm püsib muutumata!

476. Anda valem, tabel ja diagramm, mis iseloomustab ühe kaateti muutumist olenevuses hüpotenuusi muutumisest, kui teine kaatet $b = 4$ cm püsib muutumata!

477. Anda valem, tabel ja diagramm, mis iseloomustab ühe kaateti muutumist olenevuses teise kaateti muutumisest, kui hüpotenuus $c = 19$ cm püsib muutumata!

478. Mitu korda peab suurenema ruudu külg, et tema pindala suureneks n korda? Anda valem, tabel, diagramm!

489. Mitu korda peab vähenema ringi raadius, et tema pindala väheneks k korda? Anda valem, tabel, diagramm!

480. Mitu korda peab suurenema või vähenema korrapärase hulknurga külg, et tema pindala suureneks või väheneks a korda? Anda valem, tabel, diagramm!

481. Maikuust kuni 1. juulini 1933 on metsapõlemiste läbi hävinud 820,5 ha riigimetsa ja kannatada saanud 1030 ha metsamaapinda raiestikkudel, lagendikkudel ja soodel. Peale 1. juulit on Rakke metskonnas ära põlenud riigile kuuluvat 494 ha sood, 46 ha okaspuumetsa, 10 ha lehtpuumetsa ja talumaad 200 ha. Tapa metskonnas on 1-st kuni 8-nda juulini 1933 ära põlenud 39,4 ha metsamaad ja 218 ha sood. Kujutada need arvud ruutude pindaladena?

482. Maakera pindalast on:

Vaikne ookean	36,4 %	Aasia . .	8,8 %
Atlandi ookean	17,8 %	Ameerika .	7,8 %
India ookean .	14,4 %	Aafrika . .	5,8 %
Põhja jäämeri .	3,0 %	Euroopa .	1,9 %
		Austraalia .	1,7 %
		Polaarmaad	2,4 %

Kujutada need arvud ruutudena samas mõõtkavas!

483. Linna veevärgis voolab vesi kiirusega 0,85 m/sek. Mitu cm pikk peab olema toru läbimõõt, et ta annaks sekundis M liitrit vett? Anda valem, tabel, diagramm! M olgu 0,27; 0,42; 0,60; 1,07; 1,67; 2,40; 4,27; 6,33; 15,00. Vastused anda täpsalt kuni 1 mm-ni!

484. Tuule surve paigalseisva tasapinna ühele ruutmeetrile väljendub valemis $P = 0{,}12\,v^2$, kus v on tuule sekundikiirus meetrites ja P mõõtub kg-des. Millise kiirusega puhub tuul, kui tema surve paigalseisva tasapinna ühele ruutmeetrile on P kg? Anda tabel ja diagramm! $P = 0{,}5$; 2; 5; 7; 11; 20; 30; 54.

485. Kätesõja mängu juures on kaasmängijate arv x ja vangistamise võimaluste arv v. Seos nende arvude vahel väljendub tabelis:

v	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200
x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Väljendada see seos diagrammina ja valemina!

486. Vaatlused teatava nähu uurimisel andsid rea kokkukuuluvaid andmeid selles nähus esineva kahe suuruse x ja y kohta:

x	0	0,3	0,60	0,90	1,00	1,20	1,50	1,80	2,00
y	0	0,3	0,42	0,52	0,55	0,60	0,67	0,73	0,77

Diagrammi abil katsuda leida seos suuruste x ja y vahel!

487. Vabalt langeva keha läbikäidud tee määratakse valemi abil: $s = 4{,}9\,t^2$, kus t on langemise aeg sekundites ja s on tee pikkus meetrites. Õhku tõusnud õhupallilt lastakse kõrguselt H maha kukkuda metallist kuul. Kui kaua aega kulub sel kuulil maapinnale jõudmiseks, kui õhutakistus jätta arvesse võtmata? Anda valem, tabel ja diagramm, lastes H-l muutuda 0,5 km kaupa 5-st km-st kuni 1-e km-ni!

488. 75 cm pika lingu otsa on pandud 50 gr kaaluv kivikene. Kuidas peab kasvama lingu keerutamise kiirus, et lingunööri pinevus kasvaks 1 kg-ni? Lingunööri pinevus lingu keerutamisel kasvab seaduse järgi: $f = \frac{mv^2}{R}$, kus m on lingukivi mass kg-des, R — lingunööri pikkus meetrites, v on keerutamise kiirus m/sek. ja f on nööri pinevus kg-des.

Anda valem, tabel ja diagramm, lastes f-il muutuda 100 gr kaupa!

489. Kaldpinnalt hõõrumisvabalt allalibiseva keha kiirust arvutatakse valemi järele: $v = \sqrt{19{,}6h}$, kus h on ülalt alla arvatud kõrgus meetrites ja v on sekundikiirus meetrites. Oletades, et kelgu libisemine kaldtasapinnalisel kelgumäel on hõõrumisvaba, kujutada kraafiliselt lõppkiiruse olenevust kelgumäe kõrgusest 0—10 m ulatusel! Milline on kelgutaja kiirus kõrgusel 7,5 m? 2,5 m? Millisel kõrgusel on kiirus 10 m/sek. ehk 36 km/tunnis?

490. Kepleri III-da seaduse kohaselt suhtuvad planeetide tiirlemise perioodide ruudud nii, nagu nende keskmiste kauguste kuubid, Päikesest arvatud: $\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = \frac{T_3^2}{R_3^3} = \text{konst.}$ Maa kaugus Päikesest on 1 astronoomiline ühik ja Maa tiirlemise periood on 1 aasta. Koostada R—T diagramm ja määrata Maale lähemate planeetide tiirlemise perioodid, kui vastavad kaugused Päikesest on: Merkuur — 0,4; Veenus — 0,7; Mars — 1,5; Jupiter — 5,2!

491. Gaasi molekuulide liikumise kiirus on võrdeline ruutjuurega absoluutsest temperatuurist. Anda graafiliselt seos vesiniku molekuuli liikumise kiiruse ja absoluutse temperatuuri vahel, kui on teada, et kiirus v km/sek. avaldub valemi kaudu: $v = 0{,}1\sqrt{T}$, kus $T = t^0$ Cels. $+ 273^0$. Graafikult ära lugeda vesiniku molekuuli kiirused 0^0 abs. $= -273^0$ C; 0^0 C ja toa temperatuuri puhul $+18^0$ C; vee keemistemperatuuri juures $+100^0$ C! Määrata ekstrapolatsiooni teel, millise temperatuuri juures on molekuuli liikumise kiirus 2 km/sek.! Kontrollida saadused arvutamise teel! Miks ei esine madalamaid temperatuure kui -273^0 C $= 0^0$ abs.?

492. Viipuri (pendli) võnkeperiood on võrdeline ruutjuurega viipuri pikkusest: $T = 2\sqrt{l}$, kus l on mõõdetud meetrites ja T — sekundites. Jälgida graafikul viipuri võnkeperioodi olenevust viipuri pikkusest! Kui pikk on sekundviipur (viipur, mille poolvõnkeperiood on 1 sek.: $\frac{T}{2} = 1$)?

66. Ruutvõrrand.

a) Eelharjutusi. **493.** Teguriteks lahutamise teel lahendada võrrandid, rakendades lauset „Kahe teguri korrutis on vaid siis 0, kui vähemalt üks tegur on 0“:

a) $x^2 - 64 = 0$
b) $x^2 - 2{,}25 = 0$
c) $y^2 = 49$
d) $4u^2 - 1 = 0$
e) $9y^2 - 4r^2 = 0$
f) $16v^2 = 25$
g) $4x^2 - 9a^2 = 0$
h) $25x^2 = 36d^2$
i) $x^2 - 7x = 0$
k) $y^2 + 5y = 0$
l) $x^2 = 4{,}5x$
m) $x^2 = -1{,}25x$
n) $3y^2 - 5y = 0$
o) $5x^2 + 18x = 0$
p) $y^2 - ay = 0$
q) $x^2 = -mx$
r) $x^2 - 6x + 9 = 0$
s) $x^2 + x + 0{,}25 = 0$
t) $4u^2 + 12u + 9 = 0$
u) $9x^2 - 30x + 25 = 0$
v) $u^2 - 2mu + m^2 = 0$
x) $4u^2 + 4au + a^2 = 0$
y) $x^2 - 10x = -25$
z) $x^2 + 2kx = -k^2$

Lahendid kontrollida asendamise teel!

494. Ruuduks täiendamise teel lahendada võrrandid:

a) $x^2 - 6x = -9$
b) $x^2 + 10x = 11$
c) $x^2 - 2ax = 3a^2$
d) $z^2 - 4az = 5a^2$
e) $z^2 - 3z = 28$
f) $z^2 + 7z = -6$
g) $x^2 - mx = 2m^2$
h) $x^2 + px = 6p^2$
i) $x^2 - 2x = 2$
k) $x^2 + 5x = 7{,}45$
l) $x^2 - 2mx = c$
m) $x^2 + px = -q$

Lahendid kontrollida asendamise teel!

495. Asendades x abitundmatu z ja keskmise liikme poole koeffitsiendi algebralise vahega lahendada võrrandid!

a) $x^2 + 12x + 35 = 0$
b) $x^2 + 14x + 13 = 0$
c) $x^2 - 10x - 56 = 0$
d) $x^2 - 8x + 15 = 0$
e) $x^2 - 3x - 70 = 0$
f) $x^2 + 7x - 44 = 0$
g) $x^2 - 19x + 34 = 0$
h) $x^2 + 2kx + c = 0$
i) $x^2 + px + q = 0$

b) Täieliku taandamatu ruutvõrrandi normaalkuju. Võrrandi iseloomu üle saab otsustada alles pärast kõiki tarvilikke lihtsustamisi, alles pärast seda, kui võrrand on vabastatud murdudest, sulud avatud, kõik liikmed viidud vasakule poole ja sarnased liikmed koondatud. Pärast seda tuleb veel vasak pool korraldada tundmatu alanevate astmete järjekorras, tundmatu kõrgeima astme ees olev koeffitsient teha positiivseks, kui ta seda ei ole, ja kõik liikmed jagada koeffitsientide ühisjagajaga, kui neil niisugune leidub. Kui pärast kõiki neid teisendamisi võrrand omandab kuju $ax^2 + bx + c = 0$, siis kõneleme, et meil on tegemist ruutvõrrandiga. Selle võrrandi parem pool on 0 ja vasak pool koosneb kolmest liikmest; esimest liiget — ax^2 — nim. ruutliikmeks, teist — bx — keskmiseks liikmeks ja kolmandat — c — vabaks liikmeks; a, b ja c nim. koeffitsientideks. Koeffitsientidest peab a alati olema positiivne, b ja c võivad olla ka negatiivsed, erijuhtumil isegi nullid. Täieliku taandamatu ruutvõrrandi normaalkuju on siis:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

c) Täieliku taandatud ruutvõrrandi normaalkuju. Jagame täieliku taandamatu ruutvõrrandi mõlemaid pooli ruutliikme koeffitsiendiga a, siis saame:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Tähistame arvu $\frac{b}{a}$ ühe tähega p ja arvu $\frac{c}{a}$ teise tähega q, siis omandab ruutvõrrand kuju mida me nimetame täieliku taandatud ruutvõrrandi normaalkujuks:

$$x^2 + px + q = 0.$$

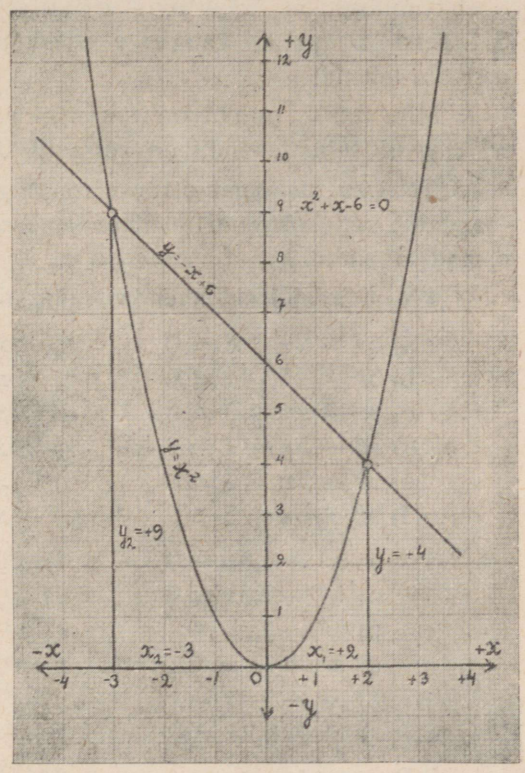
d) Ruutvõrrandi lahendid. Ruutvõrrandi normaalkujudest on selgesti näha, et ruutvõrrand on ruutfunktsiooni erijuhtum, on küsimus, millistel argumendi x väärtustel muutub funktsiooni y väärtus nulliks, ehk on nõue, et funktsiooni väärtus muutugu nulliks. Neid argumendi väärtusi, millistel funktsiooni väärtus muutub nulliks, nim. funktsiooni lahenditeks, ehk neid tundmatu väärtusi, mis rahuldavad võrrandit ehk nõuet, et funktsiooni väärtus olgu null, nim. võrrandi lahenditeks. Sellest järgneb, et sõnadel „funktsiooni lahend" ja „võrrandi lahend" on sama mõte, nad on täiesti samaväärsed.

Täielikul taandamatul ja temast saadud taandatud ruutvõrrandil on samad lahendid, sest millistel x-väärtustel muutub nulliks funktsioon $y = ax^2 + bx + c$, ehk $y = a(x^2 + px + q)$, samadel x-väärtustel muutub nulliks ka funktsioon $y = x^2 + px + q$, ja millistel x-väärtustel ei muutu nulliks funktsioon $y = ax^2 + bx + c$, ehk $y = a(x^2 + px + q)$, samadel x-väärtustel ei muutu nulliks ka funktsioon $y = x^2 + px + q$, sest a ei ole null.

Graafiliselt väljendub see asjaolu selles, et funktsiooni $y = x^2 + px + q$ arenemiskäiku kujutav parabool ja funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ ehk $y = a(x^2 + px + q)$ arenemiskäiku kujutav parabool lõikavad x-telge samas kohas, sest ainult niisuguses lõikepunktis on y-väärtuseks 0.

e) Ruutvõrrandi graafiline lahendamine. Graafiliselt kujutab funktsiooni väärtust y sirglõik (ordinaat), mis on püstitatud risti argumendi teljele argumendi väärtust x kujutava sirglõigu (abstsissi) otsapunktis. On nüüd $y = 0$, siis muutub funktsiooni väärtust kujutav sirglõik x-teljel asuvaks punktiks. Järelikult otsitavat võrrandi ehk funktsiooni lahendit kuju-

tab x-telje lõik, arvatud telgede lõikepunktist kuni lõikumiseni funktsiooni arenemiskäiku kujutava joonega. Seepärast tuleks ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ või $ax^2+bx+c=0$ graafiliseks lahendamiseks joonestada parabool $y=x^2+px+q$, või $y=ax^2+bx+c$, ja vaadata, kui kaugel telgede lõikepunktist lõikab see parapool x-telge. Vastavad x-väärtused oleksidki võrrandi lahendid.



Kuid mitmesuguste paraboolide joonestamine on tülikas ja võib juba väikeste ja lihtsate arvude juures esitada joonestamistehniliselt ületamatuid raskusi, kuna võivad esineda nii peened arvud, et neid graafiliselt kujutada võimatu, või jälle nii suured arvud, et nende kujutis ei mahu joonisele.

Ruutvõrrandi graafilisel lahendamisel toimitakse järgmiselt:

Olgu meil antud ruutvõrrand: $x^2+px+q=0$;

sellest järgneb, et $x^2=-px-q$.

Tähistame funktsiooni x^2 tähega y: $x^2=y$;

siis peame sama tähega tähistama ka funktsiooni $-px-q$: $-px-q=y$.

Esimese funktsiooni $x^2=y$ arenemiskäiku kujutab parabool, mida me saame kergesti joonestada oma paraboolliineali abil; teise funktsiooni $-px-q=y$ arenemiskäiku kujutab sirgjoon. Nende kahe joone lõikepunkti kaugus x-teljest (ordinaat) annab nende funktsioonide ühise väärtuse y ja selle lõikepunkti kau-

gus y-teljest (abstsiss) annab selle x-väärtuse, millisel need y-väärtused on isekeskis võrdsed

ja millisel siis $x^2 = -px - q$

ehk millisel on $x^2 + px + q = 0$.

S. t. selle lõikepunkti kaugus y-teljest (abstsiss) annabki võrrandi otsitava lahendi.

Mitu ühist punkti on sirgel $-px - q = y$ ja paraboolil $x^2 = y$, nii mitu lahendit on võrrandil $x^2 + px + q = 0$.

Täieliku taandamatu ruutvõrrandi graafiliseks lahendamiseks taandame selle võrrandi ja lahendame siis, on ju neil võrranditel samad lahendid.

496. Graafiliselt lahendada järgmised võrrandid:

a) $x^2 - x - 6 = 0$
b) $x^2 + x - 12 = 0$
c) $x^2 - 4x + 3 = 0$
d) $x^2 - 5x + 4 = 0$
e) $x^2 + 5x + 4 = 0$
f) $x^2 + 6x + 5 = 0$
g) $2x^2 - 3x - 2 = 0$
h) $5x^2 + 8x - 85 = 0$
i) $5x^2 + 3x - 36 = 0$
k) $16x^2 + 7x - 64 = 0$
l) $x^2 + 2x - 15 = 0$
m) $x^2 - 4x - 5 = 0$
n) $x^2 - 1{,}5x = 0$
o) $x^2 + 0{,}8x = 0$
p) $x^2 + \frac{2}{3}x = 0$
q) $x^2 - \frac{7}{4}x = 0$
r) $x^2 - 9 = 0$
s) $x^2 - 2{,}25 = 0$
t) $x^2 - 2x + 1 = 0$
u) $x^2 + 4x + 4 = 0$
v) $x^2 - 6x + 9 = 0$
x) $x^2 - 2x + 3 = 0$
y) $x^2 - 4x + 5 = 0$
z) $x^2 - x + 2 = 0$

f) Ruutvõrrandi numbriliseks lahendamiseks taandame tema esimese astme võrrandiks. Selleks otstarbeks on tarvis juurida avaldist, milles esineb tundmatu. Et oleks võimalik võtta ruutjuurt tähelisest avaldisest, teisendame tema nii, et ta esineks kahe liidetava algebralise summa ruuduna.

Olgu meil ruutvõrrandid:

$$x^2 + px + q = 0 \mid ax^2 + bx + c = 0$$

Viime vaba liikme teisele poole:

$$x^2 + px = -q \mid ax^2 + bx = -c$$

Taandamatu ruutvõrrandi kõiki liikmeid korrutame $4a$-ga:

$$x^2 + px = -q \mid 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Ruutliige esineb nüüd esimese liidetava täieliku ruuduna ja kesk-

mist liiget võime kujutada esimese ja teise liidetava kahekordse korrutisena:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} = -q \quad | \quad (2ax)^2 + 2 \cdot (2ax) \cdot b = -4ac$$

Nüüd on näha, et teiseks liidetavaks on taandatud ruutvõrrandis keskmise liikme koeffitsiendi pool $\frac{p}{2}$ ja taandamatu ruutvõrrandis keskmise liikme koeffitsient; kuid täielikuks ruuduks puudub selle liidetava ruut; selle ruuduga täiendame võrrandi mõlemaid pooli; siis saame:

$$x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q; \quad | \quad (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax\,b + b^2 = b^2 - 4ac$$

ehk $(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q \quad | \quad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Nüüd võtame mõlemalt poolt ruutjuure, siis saame kaks ühtekirjutatud esimese astme võrrandit, sest ruutjuurel on kaks väärtust:

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad | \quad 2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Siit leiame:

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad | \quad 2ax = -b + \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Neid ruutvõrrandi lahendamise valemeid sõnastame järgmiselt:

1) *Täieliku taandatud ruutvõrrandi lahendiks on keskmise liikme koeffitsiendi pool vastasmärgiga, pluss algebraline ruutjuur selle poole ruudust ilma vaba liikmeta* (s. t. vaba liige vastasmärgiga).

2) *Täieliku taandamatu ruutvõrrandi lahendiks on murd, mille lugejaks on keskmise liikme koeffitsient vastasmärgiga pluss algebraline ruutjuur selle koeffitsiendi ruudust ilma ruutliikme koeffitsiendi ja vaba liikme neljakordse korrutiseta, ning nimetajaks on ruutliikme kahekordne koeffitsient.*

Esimest valemit rakendame siis, kui keskmise liikme koeffitsient on paarisarv ja ruutliikme koeffitsiendiks 1; teistel juhtumitel on kasulikum rakendada üldvalemit. Kui keskmise liikme koeffitsient on paarisarv, aga ruutliikme koeffitsient ei ole 1, siis on võimalik rakendada kolmandat valemit, mis on üldvalemist lihtsam:

võrrand: $ax^2 + 2kx + c = 0$; valem $x = \frac{-k + \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.
Õpilased tuletagu see valem korrutades võrrandi mõlemaid pooli ainult a-ga.

g) Ruutvõrrandi lahendite arv. Kui juuritavas on: $\frac{p^2}{4} > q$ $b^2 > 4ac$

siis on $\frac{p^2}{4} - q > 0$ (positiivne) $b^2 - 4ac > 0$ (positiivne)
ja seda juurides saame 2 reaalset arvu. See tähendab, et sel puhul on ruutvõrrandil 2 reaalset lahendit.

Kui juuritavas on $\frac{p^2}{4} = q$ $b^2 = 4ac$,

siis on $\frac{p^2}{4} - q = 0$ $b^2 - 4ac = 0$
ja ruutjuur muutub nulliks. Me saame ainult ühe lahendi:

$x = -\frac{p}{2}$ $x = -\frac{b}{2a}$

Kui juuritavas on $\frac{p^2}{4} < q$ $b^2 < 4ac$

siis on juuritav $\frac{p^2}{4} - q < 0$ (negatiivne) $b^2 - 4ac < 0$ (negatiivne), mida me juurida ei saa. Ruutvõrrandil ei ole ühtegi lahendit. See ilmneb ka graafilisel lahendamisel. Ehk küll niiviisi ruutvõrrandil võib olla 2 lahendit, 1 lahend ja ei ühtegi lahendit, siiski kõneldakse, et ruutvõrrandil on alati 2 lahendit, nimelt: kas 2 reaalset ja teineteisest erinevat lahendit või 2 reaalset ja võrdset lahendit, või 2 imaginaarset lahendit.

Erijuhtumid. Võrrandid: 1) $ax^2 + bx = o$ ja
2) $ax^2 + c = o$ tuleb ka lugeda ruutvõrrandite hulka, sest esimeses on $c = o$ ja teises $b = o$.

1) Võrrandi $ax^2 + bx = o$ lahendamiseks toome x sulgude ette, siis saame $x \cdot (ax + b) = o$. Et kahe teguri korrutis on ainult siis o, kui vähemalt üks tegur on o, siis järgneb eelmisest võrdusest, et kas $x = o$, või $ax + b = o$. Sellest järgnevad lahendid: $x_1 = o$; $x_2 = -\frac{b}{a}$. 2) Võrrand $ax^2 + c = o$ laheneb lihtsalt:

$$ax^2 = -c;\ x^2 = -\frac{c}{a} \text{ ja } x = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Sellel võrrandil on lahendid ainult siis, kui c on negatiivne. Kui $b = o$ ja $c = o$, siis saame võrrandi $ax^2 = o$, mille lahen-

diks on $x = o$. Neid võrrandeid võime nimetada puudulikeks ruutvõrrandeiks.

Harjutisi:

497. a) $x^2 - 14x + 45 = 0$
b) $x^2 + 20x + 84 = 0$
c) $x^2 - 6x - 16 = 0$
d) $x^2 + 8x - 33 = 0$
e) $x^2 + 7x - 8 = 0$
f) $x^2 - 9x - 52 = 0$
g) $x^2 - 39x + 360 = 0$
h) $x^2 + 19x + 90 = 0$

498. a) $x^2 - 3{,}7x + 3{,}3 = 0$
b) $x^2 + 4{,}5x + 4{,}34 = 0$
c) $3x^2 + 2x - 21 = 0$
d) $6x^2 - 29x + 30 = 0$
e) $18x^2 + 75x + 68 = 0$
f) $6x^2 + 59x + 138 = 0$
g) $14x^2 + 9x - 110 = 0$
h) $30x^2 - 73x - 299 = 0$

499. a) $x^2 + 14x + 49 = 0$
b) $x^2 - 26x + 169 = 0$
c) $x^2 + 4x + 11 = 0$
d) $x^2 - 10x + 30 = 0$
e) $4x^2 - 20x + 25 = 0$
f) $9x^2 + 6x + 1 = 0$
g) $4x^2 - 12x + 15 = 0$
h) $25x^2 + 30x + 16 = 0$

500. a) $(x + 8)(9 - x) = 52$
b) $(x + 1)(x + 2) = (2x - 1)(2x - 10)$
c) $(x - 3)(x + 4) + (x + 5)(x - 7) = 19$
d) $(x - 8)(2x + 3) - (2x - 18)(x - 5) = (x - 4)^2$

501. a) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 3x^2 - 7$
b) $(x - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{3})^2 = (x - \frac{1}{6})^2$
c) $2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$
d) $1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$
e) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 = 0$
f) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 = 0$

502. a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{7}{12}$
b) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{10}{3}$
c) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x - 1/4} = 14$
d) $\frac{240}{x - 1/2} - \frac{90}{x} = 180$
e) $\frac{156}{x} + \frac{200}{x - 0{,}7} = 530$
f) $\frac{187}{x} - \frac{180}{x + 0{,}2} = 100$

503. a) $\frac{21}{x} - \frac{10}{x-2} - \frac{4}{x-3} = 0$
b) $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-2} = \frac{6}{x-1}$
c) $\frac{5}{x-5} - \frac{4}{x-4} = \frac{9}{x-3}$
d) $\frac{5+x}{3-x} - \frac{8-3x}{x} = \frac{2x}{x-2}$

504. a) $\frac{5x+1}{3x+5} - \frac{4x-1}{4x-7} = \frac{4}{3}$
b) $\frac{5x-2}{4x-3} - \frac{3x+10}{5x+2} = \frac{11}{24}$
c) $\frac{8x+5}{6x-5} + \frac{11x+13}{3x+8} = 5\frac{1}{2}$
d) $\frac{7x+2}{5x-4} - 8 = \frac{5x-6}{2x-3}$

505. a) $x^2 + 5a^2 = 6ax$

b) $mnx^2 - (n - m)x - 1 = 0$

c) $x^2 + (3a - 4b)x = 10a^2 + 13ab - 3b^2$

d) $x - \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - a$

e) $\frac{x}{b+2} = \frac{b-a}{x-2a}$

f) $\frac{d^2}{x} - \frac{d^2}{2} = 2r - 2x$

g) $\frac{ax}{a+x} = x - \frac{9}{4}a$

h) $\frac{a}{x-b} - \frac{b}{a-x} = 2$

67. Ülesandeid ruutvõrrandite koostamiseks.

506. a) Kolmnurga üks kaatet on teisest kaatetist 7 cm võrra pikem; hüpotenuus on 73 cm pikk. Kui pikad on need kaatetid?

b) Ristküliku ümbermõõt on 238 m, diagonaal on 89 m pikk. Kui pikad on küljed?

c) Rombi diagonaalide summa on 46 m ja ümbermõõt 68 m. Kui pikad on diagonaalid?

d) Võrdhaarse trapetsi diagonaal on risti küljega ja viimasest 4,9 cm võrra pikem; pikem alus on 18,5 cm. Kui pikk on külg?

507. a) Uue kodu rajamisel jättis maaomanik puuviljaaia jaoks ristkülikukujulise maaala, mille suurus oli 0,48 ha ja piiri pikkus 280 m. Kui pikk ja kui lai oli see aed?

b) Kolmnurga kõrgus on alusest 2 cm võrra pikem; selle kolmnurga pindala on 60 cm². Kui kõrge on see kolmnurk?

c) Antiparallelogrammi diagonaalide summa on 148 cm ja pindala 2450 cm². Kui pikad on diagonaalid?

d) Mälestussammas asub muruga kaetud künkal, mille alus on ruudukujuline. Selle künka ümber on igal pool ühelaiune kõnnitee nii, et kogu plats on ruudukujuline küljega 6 m. Kui lai peab olema kõnnitee, et murukünka alla kuuluv maaala moodustaks 0,125 kõnnitee all olevast maaalast?

508. a) Kolmnurga hüpotenuus on c cm pikk ja kõrgus h cm. Leida kaatetite projektsioonid hüpotenuusile ja kaatetid!

Harjutuseks võtta: $c = 25$; 25; 29; 10 ja vastavalt $h = 12$; 6,72; $14\frac{1}{2\frac{1}{9}}$; 4,8.

b) Kolmnurga üks kaatet on a m pikk ja teise kaateti projektsioon hüpotenuusile g m. Kui pikk on hüpotenuus?

Harjutuseks võtta: $a = 3$; 8; 24; 28 ja vastavalt $g = 3{,}2$; 3,6; 1,96; $38\frac{1}{5\frac{1}{3}}$.

c) Ringi kõõl on 21 cm (18 cm; 9 cm; 10,5 cm) pikk. Kui palju tuleb pikendada seda kõõlu, et pikendi otsapunktist ringile tõmmatud puutuja oleks 10 cm (6 cm; 15 cm; 7 cm) pikk?

d) Sirglõik a jagada kuldlõikeliselt, s. t. nii, et tema pikem osa oleks keskmine võrdeline kogu sirglõigule ja tema lühemale osale! Mis mõte on nende ülesannete teistel lahenditel?

509. a) Mitu tippu on hulknurgal, milles üldse saab tõmmata 170 diagonaali?

b) Tasapinnal on antud rida punkte, millest ükski punktide kolmik ei asu ühel sirgel. Neist punktidest saab läbi tõmmata 28 erilist sirget. Mitu punkti on antud?

c) Tasapinnal on tõmmatud rida sirgeid, millest ükski sirgete paar ei ole isekeskis paralleelne ja iga sirgete paar lõikub ise punktis. Tekkinud on 91 lõikepunkti. Mitu sirget on tõmmatud?

d) Kätesõja mängu juures on kummalgi pool ühepalju mängijaid; vangistamise võimalusi on 98. Mitu poissi on kaasa mängimas?

510. a) Millised üksteisele järgnevad täisarvud võivad olla täisnurkse kolmnurga külgede mõõtarvudeks?

b) Kui palju tuleb kord liita murru $\frac{5}{9}$ lugejaga ja nimetajaga, kord lahutada lugejast ja nimetajast, et tekkinud murdude summa oleks 1?

c) Kolme üksteisele loomulikus arvude reas järgneva arvu korrutis võrdub nende arvude summaga. Millised on need arvud?

d) Millisel arvsüsteemi alusel arv 237 kirjutatakse kujul 456?

511. a) Aritm. rea esimene liige on 5 ja rea vahe on 4. Mitu liiget tuleb võtta sellest reast, et liikmete summa oleks 275?

b) Mitu liiget on niisuguses aritm. reas, mille esimeseks liikmeks on -17, rea vaheks $+3$ ja mille liikmete summa võrdub -6-ga?

c) Aritm. rea liikmete summa on 535, rea vahe on 7 ja viimne liige on 85. Mitu liiget on selles reas?

d) Aritm. rea viimane liige on 2, rea vahe on $-1{,}5$ ja liikmete summa on 58. Mitu liiget on selles reas?

512. a) Jalgrattur sõitis A. linnast B. linna pool aega tasast teed mööda ühtlase keskmise kiirusega 12 km tunnis ja teise poole aega allamäge. Allamäge sõites kasvas kiirus keskmiselt 3 km võrra tunni kohta. A-st B-sse on 57 km. Mitme tunniga sõitis jalgrattur selle maa ära?

b) Talust lähtus jalakäija, käies ühtlase keskmise kiirusega 90 m/min. Samal ajal lähtus linnast sama teed talu suunas rattur, kelle liikumist loeme ühtlaselt kiirendatuks nii, et ta esimesel minutil sõitis 200 m ja iga järgneva minuti jooksul 1 m võrra enam kui eelmise minuti jooksul. Lähtekohtade vaheline kaugus on 12,38 km. Mitme minuti pärast kohtuvad jalakäija ning rattur?

c) Kaks keha lähtuvad samast kohast samas suunas. I keha jõuab edasi esimeses sekundis 30 cm ja igas järgmises 60 cm võrra enam kui eelmises; II keha lähtub 3 sekundit hiljem, jõuab oma liikumise esimeses sekundis edasi 360 cm ja igas järgmises sekundis 30 cm võrra enam kui eelmises. Mitme sekundi pärast kohtuvad kehad?

d) Samast kohast samas suunas lähtusid 2 keha; I keha jõudis edasi esimeses sekundis 5 m ja igas järgmises 15 m enam kui eelmises; II keha lähtus 2 sek. hiljem ja jõudis edasi oma liikumise esimeses sekundis 50 m ja igas järgmises sekundis 10 m võrra enam kui eelmises. Mitme sekundi pärast kohtuvad need kehad?

513. a) Mingisuguse rikke tõttu pidi üks lennuk eskadrillist maha jääma. See oli tema õnneks, sest peale õhkutõusmist sattus eskadrill udu kätte ja halva orienteerumise võimaluse pärast jõudis ta aeglaselt edasi. Mahajäänud lennuk startis 5 tundi hiljem, sai soodsa ilmastiku ja jõudis eskadrillile järele 1456 km kaugusel stardist. Pärast selgus, et mahajäänud lennuk oli saanud lennata keskmiselt tunnis 70 km võrra kiiremini kui eskadrill. Mitme tunni pärast jõudis mahajäänud lennuk eskadrillile järele? Eeldatakse, et lennuk lendas eskadrilli teed.

b) Mootorpaat lähtus jõesadamast 20 min. hiljem kui aerutajad ja jõudis aerutajatele järele 5 km kaugusel sadamast. Mootorpaadi keskmine tunnikiirus oli aerutajate omast 4 km võrra suurem. Millise kiirusega sõitis mootorpaat?

c) Teenijatüdruk läks raudteejaama jala ja peretütar sõitis sinna jalgrattal. Peretütar lähtus 1 tund 16 min. hiljem ja sõitis tunnis 9,5 km võrra kiiremini kui suutis käia tüdruk. Jaama, kuhu oli 11 km, jõudsid nad ühtaegu. Kui palju aega kulus tüdrukul jaama minemiseks?

d) Koduteel läksid isa ja poeg lahku; isa sõitis hobusega maanteed mööda, poeg läks külateed jala. Maanteed mööda oli koju 22 km, külavahelist teed mööda 15 km. Isa jõudis edasi keskmiselt 3 km võrra tunnis kiiremini kui poeg ja sai $\frac{1}{2}$ tundi varem koju kui poeg. Millise tunnikiirusega sõitis isa?

514. a) P. taluperemees tarvitab linna sõiduks harilikult 1,5 tundi, R. talu peremees 1,6 tundi, ehk küll R. talu on linnale 3 km ligemal kui P. talu; aga P. talu peremehel kulub 1 km sõitmiseks 2 min. vähem kui R. talu peremehel. Mitu minutit kulub P. talu peremehel 1 km sõitmiseks?

b) 17. sajandi lõpul olid parimad liiklemisvõimalused Prantsusmaal; siiski olid teed niisuguses seisukorras, et tõllas reisijad jõudsid 10-netunnilise päeva jooksul — öösiti ei reisitud — 40 km võrra vähem edasi kui juba sajandeid varem ratsanik 12-netunnilise päeva jooksul; tõllas sõites kulus 1 km pikkuse tee sõitmiseks 6 min. enam kui sama pika tee ratsutamiseks ratsanikul. Kui palju aega kulus siis tõllas sõitmisel 1 km edasijõudmiseks?

c) Pikakasvulisel Peetril kulus kodunt seltsimajja jõudmiseks 1,5 tundi, kuna lühikasvulisel Jaagul omast kodust sinna jõudmiseks kulus 1,1 tundi, sest Peetri kodu oli seltsimajast 4 km kaugemal kui Jaagu kodu; Peeter tarvitas 1 km käimiseks 2 min. vähem kui Jaak. Mitu minutit kulus Peetril 1 km käimiseks?

d) Spordiseltsi korraldatud jooksuvõistlusel suutis võistleja Täht joosta vahetpidamata 56 min. ja Ülevee 60 min. Tulemus näitas, et Ülevee oli tarvitanud 1 km jooksmiseks keskmiselt 15 sekundit vähem kui Täht ja oli joosnud 2 km enam kui Täht. Mitu minutit keskmiselt tarvitas Täht 1 km jooksmiseks?

515. a) Kirikusse sõitmisel tuli Turuli rahval sõita 40 min. mägist külavaheteed, kuni jõuti välja maanteele; maanteed mööda tuli sõita kuni kirikuni veel 45 min. Kogu tee pikkus oli 10 km ja maanteel tarvitas hobune 1 km sõitmiseks 2,5 min. vähem kui külavahelisel teel. Mitu minutit kulus 1 km sõitmiseks külavahelisel teel?

b) Kiirrong sõidab pealinnast R. linnani 189 km ja siirdub sealt välismaale. R. linnast 80 km edasi P. linna viib teine rong, mille keskmine kiirus on 20 km võrra vähem kui kiirrongi kiirus. Nii kulub pealinnast R. linna kaudu P. linna jõudmiseks 7,4 tundi. Kui suur on kiirrongi keskmine tunnikiirus?

c) Linnast jõge mööda jõesuudmesse on 42 km. Aurik tarvitab edasi-tagasisõitmiseks 6 tundi, kui peatust jõesuus mitte arvestada. Jõge mööda pärivoolu sõitmisel on auriku keskmine tunnikiirus 4,8 km võrra suurem kui vastuvoolu sõitmisel. Milline on auriku keskmine tunnikiirus vastuvoolu sõitmisel?

d) Toomas tarvitab kodunt kooli minekuks ja koolist koju tulekuks ühtekokku 70 min. Koolimineku on Toomas värskem ja tee viib mäest alla; seepärast on koolimineku poisi keskmine tunnikiirus 1,5 km võrra suurem kui koolist kojutulekul. Tee pikkus on 3 km. Kui suur on Tooma keskmine tunnikiirus koolist tulekul?

516. a) Augusti kuu lõpul 1933 oli mesi naela pealt (1 nael $\approx$ 400 gr) 10 senti odavam kui taluvõi. 990 sendi eest oleks saadud osta mett 4 naela enam kui võid. Kui palju maksis siis nael mett?

b) Põllumees müüs leivavabrikule „Ceres“ 590 kg teravilja ja sai nisu kg-st 12 senti enam kui rukki kg-st. Müüdud nisu eest sai ta 87,50 kr. ja rukki eest 31,20 kr. 1) Kui palju maksti nisu kg-st? 2) Mitu kg rukist müüs põllumees?

c) Talve tulekul ostis noormees enesele riiet parema ülikonna ja palitu jaoks. Ülikonnariie läks maksma 81 kr. ja palituriie 57,50 kr., ülikonnariie oli 4 kr. meetri pealt kallim kui palituriie ja ülikonnaks läks 0,5 m enam kui palituks. 1) Kui kallis oli palituriide meeter? 2) Mitu m osteti ülikonna jaoks?

d) Talumees sai linnas ristikheinte eest 25 kr. ja rukkiõlgede eest 16,50 kr. Rukkiõlgi müüs ta 1 sentneri võrra enam

kui ristikheinu ja sai sentnerist 2,25 kr. vähem kui ristikheinte sentnerist. Kui palju sai talumees ristikheinte sentnerist?

517. a) 1,5 km-lisel teel teeb vankri esimene ratas 250 pööret enam kui vankri tagumine ratas, sest et tema ümbermõõt on tagumise ratta ümbermõõdust 1 m võrra vähem. Kui pikk on kummagi ratta ümbermõõt?

b) Lapsevankri tagumise ratta ümbermõõt on 15 cm pikem kui esimese ratta ümbermõõt ja tagumine ratas teeb 54-meetrilisel teel 5 pööret vähem kui esimene. Kui pikk on kummagi ratta ümbermõõt?

c) 1200 m pikal velodroomil vajab jalgrattur A. ühe tiiru tegemiseks 1 min. enam aega kui jalgrattur B., sest et ta sekundis 1 m võrra aeglasemalt edasi jõuab. Millise sekundikiirusega sõidab B.?

d) 1750 m pikal velodroomil kulub jalgratturil A. ühe tiiru tegemiseks 2,5 min vähem aega kui jalgratturil Z., sest et A. sekundikiirus on 1,5 m võrra suurem kui Z. oma. Kui suur on Z. sekundikiirus?

518. a) Pottsepp ühes õpilasega valmistas tellitud lillepottide arvu 12 tunniga. Oleks meister lasknud need potid treida õpilasel üksi, siis oleks õpilasel selleks kulunud 7 tundi enam kui meistril enesel. Mitme tunniga oleks õpilane valmis treinud tellitud arvu potte?

b) Kaks töölist üheskoos töötades teevad töö ära $6\frac{2}{3}$ tunniga. Esimene tööline üksi töötades tarvitab selle töö tegemiseks 3 tundi vähem kui teine tööline. Mitu tundi kulub esimesel töölisel selle töö tegemiseks?

c) Ühe pumba abil täitub veepaak 20 minuti võrra kiiremini kui teise pumba abil; mõlema pumba koostöötamisel täitub 16 minutiga $\frac{2}{3}$ paagist. Mitme minutiga täidab teine pump üksi selle paagi?

d) Ülemise toru kaudu täitub veepaak 9 minuti võrra kiiremini kui ta alumise toru kaudu tühjeneb; kui mõlemad torud avada korraga, siis täitub tühi paak 70 minutiga. Mitme minutiga jookseb täis paak tühjaks, kui avada üksi alumine toru?

519. a) Velodroomil kulub ratturil A. ühe tiiru tegemiseks 33 sek. enam aega kui ratturil B. ja sõites vastassuunades koh-

tuvad nad iga 1,5 minuti tagant. Mitu sekundit kulub ratturil B ühe tiiru tegemiseks? Eeldatakse, et ratturid sõidavad ühtlase kiirusega.

b) Ratsanik A. tarvitab ühe tiiru tegemiseks hippodroomil 1,25 min. vähem aega kui ratsanik B. ja sõites vastassuunades kohtuvad nad iga $4\frac{2}{3}$ minuti tagant. Mitu minutit kulub ratsanikul B. ühe tiiru tegemiseks? Eeldatakse, et ratsanikud sõidavad ühtlase kiirusega.

c) Velodroomil jõuab rattur E. ratturile T. järele iga 1190 sekundi tagant, sest et T-l kulub üks kord ringi sõitmiseks 153 sek. enam kui E-l. Mitu sekundit kulub T-l ühe korra ringi sõitmiseks? Eeldatakse, et ratturid sõidavad ühtlase kiirusega.

d) Elliptilisel ratsateel kulub ratsanikul K. ühe tiiru ratsutamiseks 64 sekundit enam kui ratsanikul M. Lähtudes samast kohast samas suunas kohtuvad nad uuesti 1280 sekundi pärast. Mitu sekundit kulub ratsanikul K. korra ringi sõitmiseks?

520. a) Täisnurga haaradel liiguvad kaks punkti eemaldudes tipust O sama ühtlase kiirusega. Punkt A on tipust 10 cm kaugel ja punkt B on tipust 15 cm kaugel. Punkt B hakkas liikuma 3 sek. hiljem kui punkt A ja on 3 sekundi pärast punktist A 50 cm kaugel. Millise kiirusega liiguvad need punktid?

b) Kaht lõikuvat ristsirget mööda liiguvad punktid A ja B. Antud momendil asub punkt A sirgete lõikepunktist O 40 cm kaugusel ja läheneb lõikepunktile kiirusega 5 cm/sek.; punkt B asub antud momendil lõikepunktist O 72 cm kaugusel ja läheneb lõikepunktile O kiirusega 8 cm/sek. Mitme sekundi pärast on need punktid teineteisest 26 cm eemal?

c) Ekraanil liiguvad kahe kera varjud nii, et nende varjude keskpunktid liiguvad kaht ristsirget mööda ühtlaselt. Antud momendil on ühe varju keskpunkt A sirgete lõikepunktist 32 cm kaugel ja läheneb sirgete lõikepunktile O kiirusega 3 cm sek; teise varju keskpunkt B on antud momendil lõikepunktist O 37 cm kaugel ja läheneb O-le kiirusega 4 cm sek. Kera varjuks on ring; ringi A raadius on 14 cm ja ringi B raadius 15 cm. Mitme sekundi pärast puutuvad need varjud teineteist väljastpoolt?

d) Ekraanil liiguvad kahe kera varjud nii, et nende varjude keskpunktid liiguvad kaht ristsirget mööda ühtlaselt. Antud mo-

mendil on ühe varju keskpunkt M sirgete lõikepunktist O 42 cm eemal ja läheneb O-le kiirusega 5 cm sek; teise varju keskpunkt N on antud momendil lõikepunktist O 41 cm eemal ja läheneb O-le kiirusega 6 cm/sek. Ringi M raadius on 27 cm ja ringi N raadius on 14 cm. Mitme sekundi pärast puutuvad need varjud teineteist seestpoolt?

68. Ruutvõrrandi lahendite omadus.

Täieliku taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendeid väljendab valem: $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}$

See valem sisaldab 2 lahendit: $x_1 = -\frac{p}{2} + \left|\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right|$

$$x_2 = -\frac{p^2}{2} - \left|\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right|,$$

kus püstjooned näitavad, et juuravaldisest võetakse tema absoluutne väärtus. Kui me kaks viimast võrdust kord liidame liikmeti, teine kord korrutame, siis saame:

1) $x_1 + x_2 = -p$, sest juuravaldised hävivad vastastikku ja

2) $x_1 \cdot x_2 = \left[-\frac{p}{2} + \left|\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right|\right] \cdot \left[-\frac{p}{2} - \left|\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right|\right] =$

$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2$, kusjuures absoluutsuse märgid võime ära jätta, sest sama absoluutse väärtusega vastasmärgiliste arvude ruudud on isekeskis võrdsed.

Et aga ruutjuureks antud arvust nim. niisugust arvu, mille teine aste võrdub antud arvuga, siis on $\left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$

ja me saame: $x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{4}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = +\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$

Nii siis: 1) $x_1 + x_2 = -p$, ja

2) $x_1 \cdot x_2 = q$.

Sõnades väljendatult: Täieliku taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub keskmise liikme vastasmärgilise koeffitsiendiga ja lahendite korrutis võrdub vaba liikmega.

See lause väljendab täieliku taandatud ruutvõrrandi lahendite omadust ja teda nimetatakse tema avastaja prantsuse matemaatiku François Viète'i [1540—1603] järele Viète'i lauseks.

Selle lause põhjal on võimalik: a) ruuttrinoom (ruutkolm-

liige) lahutada lineaarseteks teguriteks; b) antud lahenditest koostada ruutvõrrand.

a) Olgu ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahenditeks x_1 ja x_2 siis on nemad ka lahenditeks ruuttrinoomile $x^2+px+q=y$. Et aga $x_1+x_2=-p$ ja $x_1\cdot x_2=q$, siis saame: $p=-(x_1+x_2)$ ja $q=x_1\cdot x_2$. Ruuttrinoom omandab kuju:
$y=x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2$.
Rühmitades kaks esimest liiget üheks rühmaks ja kaks viimast liiget teiseks rühmaks ja sulgude ette tuues ühised tegurid leiame:
$y=x^2+px+q=(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)$;
ehk $y=x^2+px+q=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

Sõnades väljendatult: *Ruuttrinoom, milles ruutliikme koeffitsiendiks on 1, lahkub kaheks lineaarseks teguriks, nimelt: muutuja ilma ühe lahendita korda muutuja ilma teise lahendita.*

Kui ruutliikme koeffitsient ei ole 1, siis seltsib neile kahele tegurile juurde kolmanda tegurina ruutliikme koeffitsient, mis aga ei ole lineaarne tegur; nimelt:

$$y=ax^2+bx+c=a(x^2+px+q)=a(x-x)\cdot(x-x_2).$$

521. Lahutada teguriteks ruuttrinoomid:

a) $x^2-11x+4$
b) $x^2-5x-14$
c) $x^2+4x-45$
d) x^2+9x+8
e) $x^2-0{,}5x-3$
f) $x^2+1{,}5x-10$
g) $x^2+10{,}5x+20$
h) $x^2-13{,}6x+7{,}8$
i) $3x^2-19x+20$
k) $4x^2-5x-6$
l) $6x^2+7x-13$
m) $6x^2+31x+18$
n) $15x^2-41x+12$
o) $28x^2-25x-75$
p) $30x^2+91x-30$
q) $10x^2+29x+10$
r) $x^2-3ax+2a^2$
s) $x^2-2mx-3m^2$
t) $x^2-1{,}5nx-n^2$
u) $9x^2+9kx+2k^2$

Märkus: Kui ruutliikme koeffitsient ei ole 1, siis on vähemalt üks lahenditest murd.

b) Kui teada on ruutvõrrandite lahendid x_1 ja x_2, siis on kerge koostada vastavat ruutvõrrandit. Näiteks:

1) $x_1=+4$, $x_2=-9$
$x_1+x_2=-5$; $p=+5$
$x_1\cdot x_2=-36$; $q=-36$
$x^2+5x-36=0$

2) $x_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=+\frac{9}{4}$
$x_1+x_2=+\frac{11}{12}$; $p=-\frac{11}{12}$
$x_1\cdot x_2=-3$; $q=-3$
$x^2-\frac{11}{12}x-3=0$; ehk
$12x^2-11x-36=0$.

522. Koostada ruutvõrrand tema lahenditest:

a) $+1$ ja $+8$
b) -3 ja $+7$
c) -6 ja $+1$
d) -4 ja -5
e) $+1{,}5$ ja $+6$
f) $-2{,}4$ ja $+0{,}3$
g) $-1{,}6$ ja $+0{,}5$
h) $-1{,}9$ ja $-2{,}1$
i) $+2\frac{2}{3}$ ja $+\frac{1}{2}$
k) $-3\frac{3}{5}$ ja $+1\frac{2}{3}$
l) $-1\frac{3}{4}$ ja $+2\frac{2}{3}$
m) $-1\frac{1}{3}$ ja $-0{,}75$
n) k ja $4k$
o) $-3a$ ja $+0{,}5a$
p) $\frac{m}{n}$ ja $\frac{n}{m}$
q) $a+b$ ja $a-b$.

Ruutvõrrandit tema lahenditest võib koostada ka sel teel, et enne koostatakse vastava ruuttrinoomi teguriteks lahutis ja siis korrutatakse need tegurid avades sulud.

523. Järgmistes võrrandites määrata ilma võrrandi lahendamata: 1) Kas lahendid on reaalsed või imaginaarsed?

2) kui lahendid on reaalsed, siis kas on nad isekeskis erinevad või võrdsed?

3) kas on nad ratsionaalsed või irratsionaalsed?

4) kas täisarvud või murrud?

5) mis märgid on lahenditel ja millise absoluutse väärtuse ees on milline märk?

a) $x^2+6x+12=0$
b) $x^2-7x+17=0$
c) $x^2-8x+16=0$
d) $x^2+12x+36=0$
e) $x^2-12x+35=0$
f) $x^2+10x+9=0$
g) $x^2-5x+4=0$
h) $x^2+7x+10=0$
i) $x^2-3x+1=0$
k) $x^2+8x-5=0$
l) $x^2+12x+6=0$
o) $x^2-5x-2=0$
p) $3x^2-7x+2=0$
q) $30x^2+x-20=0$
r) $18x^2-9x-44=0$
s) $15x^2+34x+15=0$

Vastuseid.

§ 35.

2. a) 8; b) 1,5;
c) 19; d) —50.
3. a) 15; b) 3,3;
c) 7; d) 10.
9. a) 5; b) $\frac{1}{3}$;
c) 64,8; d) 1.
10. a) 3; b) 7,5;
c) 18; d) 13.
11. a) 16; b) —7,5;
c) 91; d) $1\frac{1}{3}$.

§ 37.

29. a) 35; b) 68;
c) 195; d) —8.

§ 39.

50. a) 2727; b) 1546;
c) 24026; d) 9524.
51. a) 3,5; b) —0,5;
c) $\frac{5}{12}$; d) $2\frac{3}{8}$.
52. a) $1\frac{7}{9}\frac{7}{6}$; b) —4,05;
c) —27; d) 1.
53. a) 0; b) —0,3;
c) $-3\frac{3}{8}$; d) 2.

§ 42.

88. a) $x^3+2ax^2+2a^2x+a^3$;
b) $8y^3-26by^2+39b^2y-18b^3$;
c) $28m^3+55m^2a-25ma^2+2a^3$;
d) $40a^3+103a^2m+51am^2-18m^3$.
89. a) $-8u^3+22u^2v+7uv^2-3v^3$;
b) $2r^3+19r^2x+24rx^2-63x^3$;
c) $-16d^3-46d^2r+107dr^2-45r^3$;
90. a) $6a^4-41a^2b^2+22ab^3+7b^4$;
b) $2x^4-7x^3y+42xy^3-27y^4$;
c) $6a^4-43a^3e+85a^2e^2-22ae^3-5e^4$;
d) $4u^4-22u^3v-21u^2v^2-29uv^3-21v^4$.
91. a) $2a^4+13a^3m-73am^3+10m^4$;
b) $4a^4-30a^3x+53ax^3+15x^4$;
c) $18x^4-26e^2x^2+8e^4$;
d) $b^4+3bc^3+20c^4$.
92. a) 1054306; b) 2011422;
c) 2183188; d) 2626968.
93. a) a^2-b^2; b) a^3+b^3;
c) a^3-b^3;
d) $a^3-2a^2b+2ab^2-b^3$
94. a) x^4-y^4;
b) $x^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3+y^4$; c) x^4-y^4;
d) $x^4-2x^3y+2x^2y^2-2xy^3+y^4$.

95. a) $2b^3$; b) $4x^2y + 2y^3$;
c) $3a + 3$; d) $6u - 15$.

96. a) $d^2 + 4dr - 5r^2$;
b) $a^2n - n^3$; c) $32x - 2$;
d) $390 - 159x - 18x^2$.

§ 45.

112. a) $3x + 2$; b) $2x + 3$;
c) $4x^2 + 2x + 7$;
d) $2x^2 + 8x + 5$.

113. a) $a + 3$; b) $n - 4$;
c) $x - 7$; d) $x + 4$.

114. a) $x + 9$;
b) $x - 3$;
c) $x + 2$;
d) $x - 6$.

115. a) $a^2 + ab + b^2$;
b) $a^2 - ab + b^2$;
c) $a^2 - ab + b^2$, jääk $-2b^3$;
d) $a^2 + ab + b^2$, jääk $+2b^3$.

116. a) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$;
b) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$, jääk $+2y^4$;
c) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$;
d) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$, jääk $+2y^4$.

§ 47.

151. Vähenes 9 m^2.

152. $3a^2k + 3ak^2 + k^3$ (cm^3).

153. $5b + 200 - 40a$ (m).

154. $vl + kt - tl$ (kr)

155. $23n + 20k + 460$ (kr)

156. $130m - 3r - 390$ (kr)

157. Vähenes 104 m^3 võrra.

160. $\approx 0{,}03$ c m^3 võrra.

161. $0{,}6\ (p + l)$ kr.

162. $0{,}28\ x$ ha.

163. Kui võtta $\alpha = 5$ ja $\beta = 2$, siis on kahju $\approx 0{,}3$ m^3.

164. $\approx 0{,}16\alpha + 0{,}02\beta$ m^3.

165. Kaal väheneb $0{,}275x$ kg võrra; külgpind ei muutu.

166. Kasu ei ole tunduv.

167. $400\,\pi R\varrho$ cm^2.

168. 25 m^3.

169. $2\pi a$ cm^2.

170. $\approx 0{,}5\ \pi d^2$ cm^3.

§ 53.

257. a) $\frac{2a - b}{3}$;
b) $\frac{m - 3n}{5}$;
c) $-\frac{2}{a}$;
d) $-\frac{1}{x}$.

258. a) $\frac{d(d + R)}{2R}$;
b) $\frac{4n}{3x}$;
c) $\frac{3a + 2b}{7a}$;
d) $\frac{4y}{x}$.

259. a) 7; b) 5;
b) $\frac{b - a}{b + a}$; d) $\frac{10}{a - n}$

260. a) $3\frac{11}{12}$; b) $1\frac{1}{6}$;
c) $4\frac{20}{33}$; d) 2,8.

261. a) $\frac{2(6m - 5n)}{15}$;
b) $\frac{a + b}{4}$;

c) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$;

d) $\frac{3ab}{c}$.

262. a) $\frac{29}{70}$; b) $\frac{101}{840}$;

c) $2\frac{443}{1260}$;

d) $4\frac{1119}{4004}$;

263. a) $\frac{Ff+Fd-df}{Ffd}$;

b) $\frac{bc-ac+ab}{abc}$;

c) $\frac{x^2+2xy-y^2}{xy}$;

d) $\frac{y^2+2xy-x^2}{xy}$.

264. a) $2\frac{2}{3}$;

b) $-\frac{2}{7}$;

c) $-\frac{241}{350}$;

d) 0.

265. a) $\frac{a-b}{2}$;

b) $\frac{7x-5y}{6}$;

c) $\frac{c+a+b}{abc}$;

d) $\frac{t^2+u^2+v^2}{tuv}$.

266. a) $\frac{7v+5u}{8}$;

b) $\frac{x+2y}{6}$;

c) $\frac{5(a^2-z^2)}{6}$;

d) $\frac{5d-2c}{9}$.

267. a) $m-\frac{3}{8}n$;

b) $\frac{5a-3n}{8}$;

c) $\frac{7(a-b)}{12}$;

d) $-\frac{1}{7}(2a+3n)$.

268. a) $0{,}5u-1{,}1v$;

b) $\frac{7}{12}x$;

c) $\frac{5}{6}x-1$;

d) $\frac{b^2-a^2}{3}$.

269. a) $\frac{a^2+b^2}{ab}$;

b) $\frac{b^2+2ab-a^2}{ab}$;

c) $\frac{3b+c}{4bc}$;

d) $\frac{6a-5v}{9av}$.

270. a) $\frac{11(x-a)}{24ax}$;

b) $\frac{2(a-3v)}{9av}$;

c) $\frac{x^2+a^2}{3ax}$;

d) $\frac{10(a-v)}{7av}$.

271. a) $\frac{a^2+m^2}{am}$;

b) $\frac{x^2+y^2}{xy}$;

c) $\frac{n-y}{ny}$;

d) $\frac{a^2+b^2}{ab}$.

272. a) $\frac{8c+5a}{c(a-b)}$;

b) $\frac{7b+20y}{3b(b-y)}$;

c) $\frac{3m^2-7m+23}{4(2m-3)}$;

d) $\frac{a^2-a+2}{2a(a+1)}$.

273. a) $\frac{2a}{(a+b)(a-b)}$;

b) $\frac{2x^2}{(x+y)(x-y)}$;

c) $\frac{m^2+n^2}{(m+n)(m-n)}$;

d) $\frac{2a^2}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}$.

274. a) $\frac{2b}{(a+b)(a-b)}$;

b) $\frac{-2c^2}{(b+c)(b-c)}$;

c) $\frac{m^2+n^2}{(m+n)(m-n)}$;

d) $\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}$.

275. a) $\frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)}$;

b) $\frac{2(a^2+k^2)}{(a+k)(a-k)}$;

c) $\frac{4ab}{(a+b)(a-b)}$;

d) $\frac{-4bc}{(b+c)(b-c)}$.

276. a) $\frac{x-2a}{4(x+a)}$;

b) $\frac{b-3n}{9(b-n)}$;

c) $\frac{5c+r}{6(c+r)}$;

d) $-\frac{7}{ax}$.

277. a) $\frac{1}{a-b}$;

b) $\frac{3}{c+z}$;

c) $\frac{1}{x-y}$;

d) $\frac{7}{a+n}$.

278. a) $\frac{3}{a-b}$;

b) $\frac{2}{a-n}$;

c) 1;

d) $\frac{m+y}{m-y}$.

279. a) $\frac{1}{k-m}$;

b) $\frac{1}{e-a}$;

c) $\frac{2xy}{x^2-y^2}$;

d) $\frac{2(u-v)}{u+v}$.

280. a) $\frac{5(m+2n)}{4(m-n)}$;

b) $\frac{2a}{3(a-b)}$;

c) $\frac{5m}{9(m-b)}$;

d) $\frac{18b}{7(b-c)}$;

e) $\frac{29}{60}$;

f) $\frac{3(3a-x)}{28(a-x)}$.

281. a) $\frac{13}{4(b-a)}$;

b) $-\frac{46}{15}$;

c) $-\frac{14}{15}$;

d) $-\frac{20}{33}$;

e) $-\frac{29}{18}$;

f) $\frac{8z+5a}{6(2z-3a)}$.

282. a) $\frac{1}{4u-3}$;

b) $\frac{1}{3n+5}$;

c) 0;

d) 0.

283. a) $\frac{a}{x-2a}$;

b) $\frac{7a}{5a+b}$;

c) $\frac{1}{b+2}$;

d) $\frac{3}{x-3}$.

284. a) $\frac{2(n-y)}{n+y}$;

b) $\frac{2(x-5)}{x+5}$;

c) $\frac{2(b-a)}{b+a}$;

d) $\frac{2(1-a)}{1+a}$.

285. a) $-\frac{1}{u}$;

b) $\frac{d-c}{2(d+c)}$;

c) $\frac{y-x}{2(y+x)}$;

d) $\frac{2(n+m)}{3(n-m)}$.

286. a) $\frac{a+b}{a(a-b)^2}$;

b) $\frac{1}{x(x+y)}$;

c) $\frac{1}{k(k-m)}$;

d) $\frac{u+v}{u(u-v)^2}$.

287. a) $\frac{2}{m(x-m)}$;

b) $\frac{-3}{d(r+d)}$;

c) $\frac{-1}{e(e+v)}$;

d) $\frac{2}{a(3-a)}$.

§ 55.

301. a) $\frac{a}{c}$; b) $\frac{ax}{y^2}$;

c) $\frac{b(p-b)}{a(p-c)}$;

d) $\frac{r(R+2r)}{2(R+r)}$.

302. a) $\frac{xy}{a(x-y)}$;

b) $\frac{(a+n)(a+x)}{an}$;

c) $\frac{(b-3)^2}{5b(b+1)}$;

d) $\frac{5a}{6b}$.

303. a) $\frac{3(a+2)(x+3)}{2(a-2)(x-3)}$;

b) $\frac{n^2}{a(a+n)}$;

c) $\frac{2a(x^2-4)}{x(x-a)}$;

d) $\frac{5x(m+2x)(m-x)}{(m+x)(m-2x)}$.

305. a) 1; b) 3;

c) $\frac{n-1}{n+1}$; d) 8.

§ 56.

314. a) $\frac{x(x+5)}{b(x+2)}$;

b) $\frac{2(u-v)}{3a(a+v)}$;

c) $\frac{m(m+y)}{x(x+y)}$;

d) $\frac{(x-a)(x+2a)}{x}$.

315. a) $\frac{r(a+r)}{5a(a+2r)}$;

b) $\frac{(m+1)(m+n)}{(m-1)(m-n)}$;

c) $\frac{e(e+v)}{v}$;

d) $\frac{9n(k+n)}{10k(k-n)}$.

316. a) $\frac{x(x+1)}{x-1}$;

b) $\frac{3}{2n}$;

c) $\frac{t(s+2)}{s-2}$;

d) $\frac{2(k+1)(k+9)}{3k}$.

317. a) $\frac{x}{z}$; b) $\frac{m}{a}$;
c) $a-1$;
d) $\frac{b(b+a)}{a(a-b)}$.

318. a) $\frac{x^2+m^2}{x^2-m^2}$; b) $\frac{x-y}{x+y}$;
c) $\frac{e+v}{e-v}$; d) $\frac{a(a-1)}{a^2+1}$.

§ 58.

319. a) 7; b) 260; c) 7;
d) 9.

320. a) 6; b) 5; c) 5; d) 4.

321. a) 2; b) 11; c) 7;
d) 9.

322. a) 2; b) -4; c) 7;
d) -3.

323. a) 9; b) 4; c) 5;
d) 12.

324. a) 11; b) 10; c) -10;
d) -7.

325. a) 32; b) 4; c) 7;
d) 16.

326. a) 1; b) -3; c) 8;
d) 5.

327. a) -2; b) -5; c) $\frac{2}{3}$;
d) -3.

328. a) 4; b) 5; c) 10;
d) 6.

329. a) 1,6; b) 2,25; c) 0,5;
d) 7.

330. a) 3; b) 3; c) 14;
d) 6.

331. a) 11; b) 3; c) 0;
d) 28.

§ 59.

332. a) 290 liiget;
b) 25 noorkotkast.

333. a) 30 km; b) 77 m;
c) 2400 km; d) 61 km²; e) 10 häälega;
f) 3048 kv.

334. a) 1875 in.; b) 44 õunapuud; c) 128 kr.;
d) 70 kg; e) 7 kana;
f) 8 meest.

335. a) 9 %; b) 8 %;
c_1) 2a.; c_2) 100p.;
d_1) 1125 kr.; d_2) 600 kr.;
e_1) 840 kr.; e_2) 1120 kr.;
f_1) 820 kr.; f_2) 1800 kr.

336. a) $8\frac{3}{4}$ tundi;
b) $\approx$ 31 t.;
c) 4,8 päevaga;
d) 28 p.

337. a) 45 min.; b) 35 min.;
c) 28 min.; d) 14 min.;
e) 81 min.

338. a) 80 kr.; b) 36 a.;
c) 36 sõitjat;
d) 7,5 vakamaad;
e) 52 ha; f) 8 km.

339. a) 120 km; b) $\approx$ 620 m;
c) 770 m; d) $\approx$ 150 cm;
e) $\approx$ 290 km;
f) $\approx$ 5 km;

340. a) 11 km; b) 1350 km;
c) 4,2 km; d) 15 km.

341. a) 25 s.; b) 20 kr.;
c) 1,26 kr.; d) 12 raam.;
e) 3 kr.; f) 1,5 kr.

342. a) 344 s.; b) 120 s.;
c) 780 s.; d) 15 kr.;
e) 90 s.

343. a) 35 kr.; b) 160 s.;

c) 432 s.; d) 168 kr.;
e) 360 s.; f) 900 s.;
g) 1950 gr.

344. a) 25 s.; b) 4 kr.;
c) $\approx$ 40 gr;
d) 150 gr; e) 37,5 gr;
f) 375 gr; g) $\approx$ 242 s.;
h) $\approx$ 2,2 s.; i) 172,8 gr.

345. a) 36-ndal km-il;
b) 94-ndal km-il;
c) 30 min.; d) 33 min.;
e) $\approx$ 17 km; f) 10 km;
g) 2,8 km; h) 135 km;
i) 120 min; 12 km.

346. a) 50 km; b) 120 km;
c) 782 sõlme;
d) 30 km.

347. a) 15 km;
b) $\approx$ 5,5 km;
c) 600 m; d) 2,75 km;
e) $\frac{2}{3}$ km; f) 17,5 miili.

348. a) 15-ndal km-il;
b) 7 km; c) 93 min.;
d) 6,5 km; e) 25,2 km;
f) 1 km; g) 22 km.

349. a) 250 kr.;
b) 248 sõitjat;
c) 175 s.; d) 600 taime;
e) 300 võrset; f) 170 kr.

350. a) 1050 m; b) 66 km;
c) 60 m; d) 360 m;
e) 15,2 m; f) 17,1 m.

351. a) 11000 kr.; b) 570 kr.

352. a) 10 kr.; b) 6 kr.

353. a) 62 jalga; b) 24 m.

354. a) 65 cm; b) 28 cm;
c) 73 cm; d) 85 cm.

355. a) 120 cm; b) $\approx$ 3,8 kg;
c) $\approx$ 14,6 dm^3; d) 12 cm;
e) 5 kg; 14 kg; f) 40 l;
g) $\approx 19^0$; h) 20^0;
i) $\approx$ 0,3 kg; k) 64^0.

§ 60.

356. p) $2b - a$; q) $b - a$;
r) $(a + b) : 2a$;
s) $(b^2 + 2ab - a^2) : 2b$;
t) $\frac{(a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3)}{2ab}$;
u) $\frac{ab(b-a)}{a^2 + ab - 2b^2)}$;
v) b); x) $-4d$;
y) $-c^2 : (c + d)$.

357. a) $(p - a) : 2$;
b) $(e + b - 2a) : 3$.

358. a) $r : (a + 1)$;
b) $kd : (k - 1)$;
c) $ns : [(t + 1)(n + 1)]$.

359. a) $24n : (m + n)$;
b) $\frac{p(an + bm) - bn(p + v)}{an + bm - bn}$.

360. a) $360.100\,(v - h) : tv$;
b) $360.100\,(A - a) : a$;
c) $360.100i : pt$;
d $\frac{360.100K}{(36.100 + pt)}$.

361. a) $uv : (u + v)$;
b) $ak : (a - k)$.

362. a) $ab : (a + b)$;
$mn : (n - m)$.

363. a) $a(m + n) : (nk - m)$;
b) $bm(l + n) : (an - bl)$.

364. a) $av : (b - a)$;
b) $ent : (t - e)$;
c) $air : (a - i)$.

365. a) $atv:(t+v)$.

366. a) $an:(nr+s)$;
b) $nk:(ae-bn)$.

367. a) $(100a-vd):(k+v)$;
b) $(60t+mv):(i+m)$;
c) $(100k-bd):(a-b)$;
d) $(a-kn):(t-k)$.

368. a) $l-m:(a-b)$;
b) $m:(i-r)$.

369. a) $\frac{a(bm-100k)}{100(b-a)}$;
b) $\frac{(abt-100ah)}{100(b-a)}$.

370. a) $t(bk-a):(k-t)$;
b) $b(ae+k):(a+b)$.

371. a) $m(s-h):(p-h)$;
b) $s(a-c):(a-b)$;
c) $a(95-n):n$.

372. a) $ad:(a+b)$;
b) $a(rd+h):(a+r)$;
$(ad-h):(a+r)$;
c) $t(av+e):(t+v)$;
$(e+av):(t+v)$;
d) $ank:(k+n)$;
$ak:(k+n)$.

373. a) $mab:[60(a-b)]$;
$bm:(a-b)$;
b) $apt:[10(t-p)]$;
$at:(t-p)$.
c) $(ab-dv-amv):(a-v)$;
d) $ah:(i-h)$;
$ahi:(i-h)$;
e) $(ar-im-ir-b):(i-r)$;
$i(am+b):(a-i)$;
f) $n:(k-r)$;
$kn:(k-r)$.

374. a) $(p+m):(c-a)$;
$(am+cp):(c-a)$.
b) $(a+b):(n-m)$;
$(an+bm):(n-m)$.

375. a) $dr(a+b):(d-r)$;
$(ad+br):(d-r)$.
b) $uv(a+b):(v-u)$.

376. $(2hrs+ah-ar):(h+r)$.

377. $(a+d)(a-d):2d$.

§ 61. Harjutiste lahendid tulevad kontrollida asendamise teel.

382. a) 9; 5 b) 18; 6 c) 20; 20 d) 12; 6 e) 7; 6 f) 3; 2 g) 4; 1 h) 6; 2 i) 55; 65 k) 36; 48 l) 4; 5 m) 3; 4 n) 5; 7 o) 5; 2 p) 4; 1 q) 2; — 2 r) 4; 16 s) 3; 3 t) 1; 3 u) 5; 6

§. 62.

385. 1650 kg; 680 kg.

386. 2003 m; 1750 m.

387. a) 650 m; 40,3 m.
b) 34,2 m; 6,25 m.

388. $\frac{1}{2}(m^0+n^0)$; $\frac{1}{2}(m^0-n^0)$.

389. $m+\frac{1}{2}d$; $m-\frac{1}{2}d$.

390. 18 m/sek; 4 m/sek.

391. 36 km; 21,6 km.

292. 5,20 kr.; 3,25 kr.

393. 8 rulli; 5 rulli.

394. 1,90 kr.; 0,40 kr.

395. 500 £ ja 2000 $.

396. 2,5 kr.; 1,8 kr.

397. 2,5 kr.; 1,8 kr.

398. 15; 111.

399. $\frac{5}{7}$.

400. 76^0; 26^0.

401. 25^0C; 50^0C.

402. Kontrollida asendamise teel!
403. 151,4 kg; 35,6 kg.
404. 72 kr.; 60 kr.
405. 4 venda, 3 õde.
406. 46a.; 16a.
407. $\approx -10^0$R.
408. -16^0R.
409. $\approx$ 15846 m³;
$\approx$ 14260 tonni.
410. 23 p.; 2 p.
411. 9,5 kg; 2 kg.
412. 2,5 m; 2,3 m.
413. 20 cm; 12 cm.
414. 6 kg; 10,5 kg.
415. 89 kg; 35 kg.
416. $\approx$ 6,65 kg; 3,35 kg.
417. 54*hl*; 44*hl*.
418. 70*hl*; 72*hl*.
419. 10 p.; 6 p.
420. 10 p.; 8 p.
421. 24000 kr; 6000 kr.
422. a) 5; 3. b) 7; 4; 429. c) 1,5; 2,5; 1715. d) 0,3; 0,7; 28,2.
423. 78 m; 29 m.
424. 50 m; 50 m.
425. 14 cm; 17 cm.
426. 7 cm; 18 cm.
427. 18 m; 25 m.
428. 7 m; 11 m.
429. Ja.
430. 2 tööl., 3 p.
431. 6 toru, 5 tundi
432. 120 p.; 240 p.
433. 5 kr; 3,5 kr; 2 kr.
434. 0,8; 1; 1,7.
435. 2 cm; 4 cm; 1 cm.
436. 150 kr; 30 kr; 40 kr.
437. 80^0; 35^0; 45^0.
438. 78^0; 129^0.
439. 39^0.
440. 4p.; 12p.; 48p.
441. 2 kuuga.

§ 66.

500. a) 5; -4.
b) 8; $\frac{1}{3}$.
c) 6; $-5{,}5$.
d) 13; 10.
501. a) ± 3.
b) 1; $\frac{1}{3}$.
c) 1; $-\frac{1}{2}$.
d) $\approx 1{,}618$; $\approx -0{,}618$.
e) 1.
f) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$.
502. a) 5; $1\frac{3}{7}$.
b) ± 6.
c) 0,5; $\frac{3}{28}$.
d) 1,5; $-\frac{1}{6}$.
e) 1,2; $\frac{91}{530}$.
f) 0,55; $-0{,}68$.
503. a) 7; $2\frac{4}{7}$.
b) 4; $2\frac{1}{3}$.
c) 6; $3\frac{3}{4}$.
d) 2,4; 1.
504. a) 4; $1\frac{5}{6}$.
b) 6; $1\frac{1}{4}$.
c) 2; $-5\frac{5}{12}$.
d) 1; $1\frac{5}{13}$.
505. a) $5a$; a.
b) $\frac{1}{m}$; $-\frac{1}{n}$.
c) $3b+2a$; $b-5a$.
d) $-a$; $\frac{1}{a}$.
e) $a+b$; $a-b$.

f) r; $\frac{d^2}{2r}$.
g) $3a$; $-\frac{3}{4}a$.
h) $a+b$; $\frac{1}{2}(a+b)$.

§ 67.

506. a) 48 cm; 55 cm.
b) 39 m; 80 m.
c) 16 m; 30 m.
d) 10,4 cm.

507. a) 80 m; 60 m.
b) 12 cm.
c) 98 cm; 50 cm.
d) 3 m.

508. a) 9 cm ja 16 cm; 15 cm ja 20 cm.
b) 5 m.
c) 4 cm.
d) $0{,}618\,a$; $-1{,}618a$.

509. a) 20 tippu.
b) 8 punkti.
c) 14 sirget.
d) 14 poissi.

510. a) 3; 4; 5.
b) 3.
c) ± 1; ± 2; ± 3.
d) $x=7$.

511. a) 11.
b) 12.
c) 10.
d) 8.

512. a) 4 tunniga.
b) 40 min.
c) 5 min. ja 12 sek.
d) 4 sek. ja 7 sek.

513. a) 8 tunni p.
b) 6 km/t.
c) 2 tundi.
d) 8 km/t.

514. a) 6 min. b) 15 min.
c) 9 min. d) 4 min.

515. a) 10 min. b) 45 km/t.
c) 12 km. d) 4,5 km.

516. a) 45 s. b) 25 s.
c) 23 kr. või 20 kr.
d) 5 kr.

517. a) 2 m ja 3 m. b) 120 cm ja 135 cm. c) 4 m/sek. d) 3,5 m/sek.

518. a) 28 t. b) 12 t.
c) 60min. d) 30 min.

519. a) 165 sek. b) 10 min.
c) 510 sek. d) 320 sek.

520. a) 5 cm/sek. b) 6 m/sek.
c) 4 sek. ja 15,52 sek.
d) 6 sek. ja ≈ 9 sek.

Sisukord.

VII. Täisavaldiste teisendamine.

§ 35. Sarnaste liikmete koondamine . . . . . 3— 4
§ 36. Üksliikmete liitmine 5
§ 37. Hulkliikmete liitmine . . . . . 5— 7
§ 38. Üksliikmete lahutamine 7
§ 39. Hulkliikmete lahutamine . . . . . 8— 10
§ 40. Üksliikmete korrutamine . . . . . 10— 11
§ 41. Hulkliikmete korrutamine üksliikmega . . . . . 11— 12
§ 42. Hulkliikme korrutamine hulkliikmega . . . . . 12— 14
§ 43. Üksliikme jagamine üksliikmega . . . . . 14— 15
§ 44. Hulkliikme jagamine üksliikmega . . . . . 15— 16
§ 45. Hulkliikme jagamine hulkliikmega 16
§ 46. Arvutamise abivalemeid . . . . . 16— 19
§ 47. Ülesandeid. . . . . 19— 22
§ 48. Arvude teguriteks lahutamine, suurim ühisjagaja ning vähim ühiskordne . . . . . 22— 25
§ 49. Hulkliikme teguriteks lahutamine . . . . . 25— 28

VIII. Murrud.

§ 50. Murru mõiste ja peaomadus . . . . . 28— 29
§ 51. Murru taandamine . . . . . 30— 31
§ 52. Murdude samanimelisteks tegemine . . . . . 31— 33
§ 53. Murdude liitmine ja lahutamine . . . . . 34— 40
§ 54. Segaarvud ja segaavaldised 40
§ 55. Murdude korrutamine . . . . . 41— 42
§ 56. Murdude jagamine . . . . . 42— 44

IX. Võrrandid.

§ 57. Laused, millel põhineb võrrandite lahendamine. . . . . 44— 47
§ 58. Võrrandite numbriline lahendamine . . . . . 47— 50
§ 59. Ülesandeid võrrandite koostamiseks . . . . . 50— 68
§ 60. Tähtvõrrandid . . . . . 68— 75
§ 61. Esimese astme võrrandite süsteemid . . . . . 76— 83
§ 62. Ülesandeid võrrandsüsteemide koostamiseks . . . . . 84— 91

X. Ruutfunktsioon ja tema pööre.

§ 63. Ruutfunktsioon . . . . . 92— 99
§ 64. Ruutfunktsiooni pööre . . . . . 99—102
§ 65. Ruutjuure leidmine arvust . . . . . 102—108
§ 66. Ruutvõrrand . . . . . 108—116
§ 67. Ülesandeid ruutvõrrandite koostamiseks . . . . . 116—123
§ 68. Ruutvõrrandi lahendite omadus . . . . . 123—125
Vastuseid . . . . . 126—135
Sisukord 136