

A 6019.

VIKTOR PÄSS

ALGEBRA

II

TEORIA JA ÜLESANDED

(X JA XI ÕPPEAASTA JAOKS)

1923

TALLINNA EESTI KIRJASTUS-ÜHISUS

A. 6019

A 6019.

165.
25 oct.

VIKTOR PÄSS

ALGEBRA

II

TEORIA JA ÜLESANDED

(X JA XI ÕPPEAASTA JAOKS)

11315

1923

TALLINNA EESTI KIRJASTUS-ÜHISUS

VIKTOR PÄSS

2



Tallinna Eesti Kirjastus-Ühisuse trükikoda, Pikk tän. nr. 2.

A 6019.

8 15895913

Eessõna.

Käesolev õpperaamat järgneb oma materjaali poolest minu varem ilmunud „Algebra ülesannete kogule I.“ Algebra II. sisaldab eneses kõrgema analüüsi põhimõisteid niisuguses ulatuses kui seda nõuab keskkooli kava.

Raamatu kokkuseadmise juures võtsin omale eeskujuks paremad saksa õpperaamatud, nagu H. Fénkner „Arithmetische Aufgaben“, Behrendsen und Götting „Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen“, R. Geigenmüller „Höhere Mathematik“ ja teised. Ühtlasi pidasin silmas näpunäited, mis mulle andsid ametvennad minu eelmise õpperaamatu ilmumise puhul. Selles mõttes on, näiteks, käesolev raamat varustud ülesannete vastustega, milline asjaolu kergendab raamatu tarvitamist iseõppijale.

Tänades siin kohal kõiki ametvendi, kes minu tähelepanu juhtisid eelmises raamatus ettetulevate puuduste peale, palun seda lahkelt teha ka käesoleva raamatu ilmumisel.

Eraldi tänan arvuteadlast härra Ederberg'i, kes enne trükkimist käsikirja luges ja asjalikud märkused tegi, mis võimaldasid kõrvaldada mitmed puudused ja vead.

Tallinn.

V. Päss.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_1 \\
 a_2 &= a_1 + d \\
 a_3 &= a_1 + 2d \\
 a_n &= a_1 + (n-1)d
 \end{aligned}$$

Lesson

The first lesson of the course is devoted to the study of the properties of the arithmetic progression. The student will learn how to find the sum of the first n terms of an arithmetic progression and how to find the n-th term of an arithmetic progression. The student will also learn how to find the sum of the first n terms of a geometric progression and how to find the n-th term of a geometric progression.

Esimene peatükk.

§ 1. Lõpmatute suurenevad, lõpmatute vähenevad ja lõpuliselt muutuvad suurused.

Lõpmatute suurenevaks suuruseks nimetakse niisugust muutuvat suurust, mille absoluutne väärtus muutudes võib saada ja jääda suuremaks igast kui tahes suurest jäädavast suurusest.

Nõnda, näiteks, on iga aritmeetilise rea

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d,$$

n -ne liige $a + (n-1)d$ liikmete arvu n piiramatult kasvades juures kui muutuv suurus lõpmatu suurenev. Sest tõesti, olgu jäädav arv α kui tahes suur, ikka on võimalik võrratus

$$a + (n-1)d > \alpha$$

selleks on vaja ainult leida niisugune n , et

$$n > \frac{\alpha - a + d}{d}$$

ja niisugune n on tema piiramatult kasvades ikka võimalik leida.

Kui muutuv suurus x on lõpmatu suurenev, siis tähendakse seda kirjas nõnda:

$$x \rightarrow \infty$$

kus ∞ on nõndanimetud lõpmatuse märk.

Lõpmatute vähenevaks suuruseks nimetakse niisugust muutuvat suurust, mille absoluutne väärtus võib saada ja jääda vähemaks igast kui tahes väikesest jäädavast positiivsest suurusest.

Nõnda, näiteks, on muutuv suurus $\frac{1}{n}$ arvu n piiramatult kasvades juures lõpmatu vähenev suurus. Ja tõesti, olgu jäädav suurus ε kui tahes väikene, ikka on võimalik võrratus

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

selleks on ainult vaja, et

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

ja niisugune n on tema piiramatult kasvades ikka võimalik.

Et muutuv suurus x on lõpmatu vähenev, seda tähendakse kirjas nõnda:

$$x \rightarrow 0$$

+3 -3
|3| = |3|

Lõpuliikuks muutuvaks suuruseks nimetakse niisugust suurust, mille absoluutne väärtus muutudes ei või saada suuremaks ühest teatud jäädavast positiivsest suurusest, ega vähemaks ühest teisest jäädavast positiivsest suurusest.

Nõnda näiteks, on suurus

$$x_i = a + \frac{1}{b + n^2}$$

niisugune muutuv, mille absoluutne väärtus ei või saada suuremaks kui $a + \frac{1}{b}$ ega vähemaks kui a , kus a ja b on jäädavad positiivsed suurused ja n on muutuv suurus.

Seda omadust muutuva suuruse $|x|$ juures tähendakse kirjas järgmiselt:

$$a \leq x \leq a + \frac{1}{b}$$

Muutuvate suuruste summa, vahe, korrutise j. n. e. all mõeldakse nende suuruste vastavate väärtuste summat, vahet, korrutist j. n. e. Selles mõttes võib arvutustehete tagajärjel muutuvate suurustega saaduseks olla kas jäädav ehk ka muutuv suurus.

Nõnda näiteks, on muutuvate suuruste

$$|x| = 9,5; 9,95; 9,995; \dots$$

$$\text{ja } y = 0,5; 0,05; 0,005; \dots$$

summa jäädav ja nimelt 10, vahe aga on muutuv suurus:

$$z = 9; 9,9; 9,99; \dots$$

Lõpmatute vähenevate suuruste kohta eraldi tõendame järgmised laused:

1. Kahe lõpmatute väheneva suuruse algebraalne summa on lõpmatu vähenev suurus ehk null.

Tõendus:

Olgu antud kaks lõpmatu vähenevat suurust x ja y . Et tõendada summa $x + y$ lõpmatu vähenemise võimalust, selleks on vaja näidata, et selle summa absoluutne väärtus võib saada vähemaks igast jäädavast kui tahes väikesest positiivsest arvust, näiteks ε .

Et x ja y ise on lõpmatute vähenevad suurused, siis on võimalik neid sedavõrd vähendada, et ühekorraga oleks

$$|x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{ja } |y| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kus $|x|$ ja $|y|$ tähendavad suuruste x ja y absoluutseid väärtusi.

Liites nende võrratuste vastavad pooled (kui x ja y on ühesuguste märkidega) ehk lahutades (kui x ja y on vastupidiste märkidega) võime mõlemate juhtumiste jaoks kirjutada

$$|x + y| < \varepsilon.$$

Kui suurused x ja y on vastupidiste märkidega ja kui $|x| = |y|$, siis leiame eraldi, et

$$x + y = 0.$$

Lause 1. on muidugi maksev ka siis, kui liidetavaid suursi on rohkem kui kaks, aga siiski lõpulik arv.

2. Kahe lõpmatu väheneva suuruse korrutis on lõpmatu vähenev suurus.

Tõendus:

Olgu x ja y kaks lõpmatu vähenevat suurst, aga ε — kui tahes väikene positiivne jäädav suurus, siis on ikka võimalik suursi x ja y niivõrd vähendada, et korruga oleks

$$|x| < \sqrt{\varepsilon}$$

$$\text{ja ka } |y| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Samuti

Korrutades aga nende võrratuste vastavad pooled leiame, et

$$|x \cdot y| < \varepsilon$$

ja seda oligi vaja näidata.

3. Lõpmatu väheneva suuruse korrutis ja jagatis jäädava suurusega on lõpmatu vähenev suurus.

Kui x on lõpmatu vähenev, a on jäädav ja ε on kui tahes väikene positiivne jäädav suurus, siis on viimase lause tõendamiseks vaja näidata, et järgmised võrratused võimalikud on

$$|x \cdot a| < \varepsilon \text{ ja } \left| \frac{x}{a} \right| < \varepsilon,$$

ehk et

$$|x| < \frac{\varepsilon}{a} \text{ ja } |x| < \varepsilon \cdot |a|.$$

Viimased võrratused aga on lõpmatu väheneva x juures täiesti võimalikud.

4. Lõpmatu väheneva suuruse korrutis ja jagatis lõpuliku muutuva suurusega on lõpmatu vähenev suurus.

Kui x on lõpmatu vähenev suurus, aga y lõpulik muutuv suurus, siis on ikka võimalik leida kaks niisugust jäädavat suurst a ja b , et

$$|a| > |y| > |b|,$$

mille tõttu

$$|x \cdot y| < |x \cdot a| \text{ ja } \left| \frac{x}{y} \right| < \left| \frac{x}{b} \right|.$$

Viimaste võrratuste paremad pooled aga on eelmise lause põhjal lõpmatu vähenevad suurst, sellepärast peab olema

$$|x \cdot a| < \varepsilon \text{ ja } \left| \frac{x}{b} \right| < \varepsilon$$

ehk kui eelmisi võrratusi arvesse võtame, siis seda rohkem veel

$$|x \cdot y| < \varepsilon \text{ ja } \left| \frac{x}{y} \right| < \varepsilon$$

ja seda oligi vaja näidata.

$$\frac{-6}{7-6} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$$

5. Kui jagame lõpmatu väheneva suuruse lõpmatu vähenevaga, siis võib jagatis saada kas jäädav, lõpmatu suurenev, lõpmatu vähenev, ehk lõpulik muutuv suurus, selle järele, missugused on antud lõpmatu vähenevad suurused.

Selle lause tõelikkus selgub järgnevatest näitustest. *näidetest*

Kui, näiteks, jagame üksteisega lõpmatu vähenevad suurused $x = \frac{a}{n}$ ja $y = \frac{b}{n}$, kus n on piiramatu kasvav arv, aga a ja b on jäädavad, siis saame jagatise jäädava suurusena:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

Ehk kui jagame üksteisega lõpmatu vähenevad suurused $x = \frac{1}{n}$ ja $y = \frac{1}{n^2}$, kus n on samane, kui eelmises näites, siis saame jagatise lõpmatu suureneva ehk lõpmatu väheneva suuruse selle järele, kas jagame esimest teisega, ehk teist esimesega:

$$\frac{x}{y} = n \text{ ja } \frac{y}{x} = \frac{1}{n}.$$

Ja lõpuks, kui jagame üksteisega lõpmatu vähenevad suurused $x = \frac{1}{1+n}$ ja $y = \frac{1}{2+n}$, kus n on jälle piiramatu kasvav arv, siis saame jagatise lõpuliku muutuva suurusena:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{1+n} : \frac{1}{2+n} = \frac{2+n}{1+n} = 1 + \frac{1}{1+n}$$

mille juures ikka peab olema

$$1 < \frac{x}{y} \leq 2.$$

Kui kahe lõpmatu väheneva suuruse suhe on lõpulik suurus, siis nimetakse neid ühe ja sama järgu lõpmatu vähenevateks suurusteks.

Nõnda, näiteks, on lõpmatu vähenevad suurused $\frac{1}{n}$ ja $\frac{a}{n}$ ühe ja sama järgu lõpmatu vähenevad suurused.

Kui aga kahe lõpmatu väheneva suuruse suhe on lõpmatu vähenev ehk lõpmatu suurenev, siis nimetakse seda lõpmatu vähenevat, mille absoluutne väärtus ikka on vähem teise suuruse absoluutsest väärtusest, võrdlemisi sellega kõrgema järgu lõpmatu vähenevaks.

Nõnda on lõpmatu vähenev suurus $\frac{1}{n^2}$ kõrgema järgu suurus võrdlemisi lõpmatu väheneva suurusega $\frac{1}{n}$.

Selles mõttes on kerge näidata, et kahe ühe ja sama järgu lõpmatu vähenevate suuruste kasvatis on kõrgema järgu lõpmatu vähenev, võrdlemisi esimestega. *Korvuti*

Samuti on iga lõpmatu väheneva suuruse aste, mille näitajaks on positiivne täisarv, kõrgema järgu lõpmatu vähenev võrdlemisi astme alusega.

§ 2. Piirid.

1. Kui muutuva suuruse x väärtus muutudes ligineb jäädavale a nõnda, et vahe $a-x$ on lõpmatu vähenev suurus, siis nimetatakse jäädavat suurust a muutuva suuruse x piiriks.

Nõnda on, näiteks, ringi sissejoonestud n -nurga sisemine nurk $x = 2d - \frac{4d}{n}$ arvu n lõpmatu suurenemisega muutuvaks suuruseks, mille piiriks on $2d$, sest vahe $2d - x = \frac{4d}{n}$ on niisugusel puhul lõpmatu vähenev suurus.

Et muutuva suuruse $2d - \frac{4d}{n}$ piiriks arvu n lõpmatu suurenemise juures on $2d$, seda avaldakse kirjas nõnda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2d - \frac{4d}{n} \right) = 2d,$$

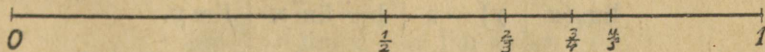
kus piiri märgiks on ladina keelse sõna *limes* (piir) esimesed tähed. Kui muutuv suurus, mille piiri otsime, on funktsioon, mis on olemas omast argumentist, siis tähendatakse piiri märgi all argumenti muutumise siht (praegusel juhtumisel $n \rightarrow \infty$).

Sageli räägitakse ka lõpmatu väheneva, lõpmatu suureneva ja koguni jäädava suuruse piirist, üteldes, et lõpmatu väheneva suuruse piiriks on null, lõpmatu suureneva suuruse piiriks on lõpmatus (∞) ja jäädava suuruse piiriks on see jäädav suurus ise.

Kui võtame funktsiooni $y = 1 - \frac{1}{x}$, mis argumenti x suurenemisega ligineb ühele kui piirile ja, andes argumentidele järjest suurenevad positiivsed täisarvulised väärtused, arvutame vastavad funktsiooni väärtused, siis saame järgmise argumenti ja funktsiooni vastavate väärtuste tabeli:

x	1	2	3	4	5	...
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$...

Kujutades nüüd mingisuguse pikkuse üksuse abil (10 sentim.) arvjoonel tabelist võetud funktsiooni väärtused (Joon. 1),



Joon. 1.

näeme, et funktsiooni kujutäpid, liginedes argumenti kasvamisega oma piirile, järjest tihenevad, nõnda et kahe kõrvuseisva täpi vahe jääb seda kitsamaks, mida ligemale täpp jõuab piirile.

Samane nähtus on iga teise piirile ligineva muutuva suuruse graafilise kujutuse juures.

Kujutada arvjoonel järgmiste piirile liginevate funktsioonide väärtused, andes argumendile järjest kasvavad täis-positiivsed väärtused.

$$1) y = \frac{1}{x}, \quad 2) y = \frac{1}{x^2}, \quad 3) y = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad 4) y = 3 - \frac{2}{n}$$

2. Tõendame muutuvate suuruste ja nende piiride kohta mõned tarvilikud laused:

1) Kui kahe muutuva suuruse x ja y vahe on lõpmatu vähenev suurus ja kui ühel nendest, näit. x -il on piir a , siis on see a ka muutuva y -i piiriks.

Tõendus:

Kui x ja y on niisugused muutuvad suurused, mille vahe on lõpmatu vähenev ja kui $\lim x = a$, siis võime kirjutada:

$$\begin{aligned} x - y &= \varepsilon \\ a - x &= \varepsilon_1, \end{aligned}$$

kus ε ja ε_1 tähendavad lõpmatu vähenevaid suurusi. Liites nende võrduste vastavad pooled, leiame:

$$a - y = \varepsilon + \varepsilon_1.$$

Et aga kahe lõpmatu väheneva suuruse algebraline summa on lõpmatu vähenev suurus, siis peame viimasest võrdusest järeldama, et

$$\lim y = a$$

ja seda oligi vaja tõendada.

2) Kahe muutuva suuruse algebralise summa piir võrdub nende suuruste piiride summaga.

Tõendus:

Olgu antud:

$$\begin{aligned} \lim x &= a \\ \text{ja } \lim y &= b, \end{aligned}$$

siis võime kirjutada:

$$\begin{aligned} a - x &= \varepsilon \\ \text{ja } b - y &= \varepsilon_1, \end{aligned}$$

kus ε ja ε_1 on lõpmatu vähenevad suurused. Liites viimaste võrduste vastavad pooled, leiame

$$(a + b) - (x + y) = \varepsilon + \varepsilon_1$$

ja siit võime järeldada, et

$$\lim (x + y) = a + b = \lim x + \lim y.$$

3) Kahe muutuva suuruse korrutise piir võrdub nende suuruste piiride korrutisega.

Tõendus.

Olgu antud:

$$\begin{aligned} \lim x &= a \\ \text{ja } \lim y &= b, \end{aligned}$$

siis võime kirjutada, et

$$\begin{aligned} a - x &= \varepsilon \\ \text{ja } b - y &= \varepsilon_1, \end{aligned}$$

ehk selle asemel

$$\begin{aligned} a - \varepsilon &= x \\ \text{ja } b - \varepsilon_1 &= y, \end{aligned}$$

kus ε ja ε_1 tähendavad lõpmatu vähenevaid suursi.

Korrutades viimaste võrduste vastavad pooled, leiame

$$ab - a\varepsilon_1 - b\varepsilon + \varepsilon\varepsilon_1 = xy,$$

ehk

$$ab - xy = a\varepsilon_1 + b\varepsilon - \varepsilon\varepsilon_1.$$

Eelmise paragrahvi lausete 1 ja 2 põhjal on aga viimase võrduse parem pool lõpmatu vähenev suurus ja sellepärast on

$$\lim xy = ab = \lim x \cdot \lim y.$$

4) Kui lõpuliku muutuva suuruse x piiriks on jäädav suurus a , siis on suuruse $\frac{1}{x}$ piiriks $\frac{1}{a}$.

Tõendus.

Olgu antud $\lim x = a$ ehk $a - x = \varepsilon$, kus ε on lõpmatu vähenev suurus.

Leiame vahe $\frac{1}{a} - \frac{1}{x}$ väärtuse:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{x - a}{ax} = -\frac{a - x}{ax} = -\frac{\varepsilon}{ax} = -\frac{\varepsilon : a}{x}$$

Selle kirjutuse äärmine parempoolne osa on lõpmatu vähenev suurus, sellepärast et lugeja kui lõpmatu väheneva jagatis jäädava suurusega on oma ette lõpmatu vähenev, aga lõpmatu vähenev jagatud lõpuliku muutuva suurusega x annab ka lõpmatu väheneva suuruse.

Sellepärast võime kirjutada:

$$\lim \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$$

5) Muutuvate suuruste jagatise piir, kui jagaja on lõpulik, võrdub nende suuruste piiride jagatisega.

Tõendus:

Olgu $\lim x = a$ ja $\lim y = b$, siis võime kirjutada eelmise lause 3. põhjal:

$$\lim \frac{x}{y} = \lim x \cdot \frac{1}{y} = \lim x \cdot \lim \frac{1}{y}.$$

Aga lause 4. põhjal on:

$$\lim \frac{1}{y} = \frac{1}{b} \text{ sellepärast}$$

$$\lim \frac{x}{y} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Ülesanded.

Leida järgmised piiri väärtused:

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} (a + x)$ b) $\lim_{x \rightarrow a} (a - x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{x}\right)$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} (a + x)(b - x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} (a - x) \cdot (b + x)^2$
 g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x} - c\right)$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + x}{b - x}$
 i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a - x}{b}$ k) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a}{x - b}$
2. a) *) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b + x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a - x)^2}{bx^2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a + x^2}{x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a - x)(b + x)}{x^2}$
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3 + 5x^2}{x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a - x^2)(b + x)}{x^3}$

§ 3. Kolm tarvilikku piiriväärtust.

1. Kui n on reaalne arv (positiivne ehk negatiivne, täis ehk murd), siis on

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = nx^{n-1}$$

Tõendamiseks tuleb kolm juhust läbi harutada:

a) n on positiivne täisarv.

Sel puhul leiame jagades:

$$\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + x_1^{n-3}x^2 + \dots + x_1x^{n-2} + x^{n-1}$$

kus paremal pool on n liiget. Kui nüüd $x_1 \rightarrow x$, siis on iga liikme piiriks paremal pool x^{n-1} ja sellepärast saame

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = n \cdot x^{n-1}$$

b) Olgu n negatiivne täisarv, näiteks $-m$, siis võime kirjutada

$$\frac{x_1^{-m} - x^{-m}}{x_1 - x} = \frac{1}{x_1^m} - \frac{1}{x^m} = \frac{x^m - x_1^m}{x_1^m \cdot x^m (x_1 - x)} = -\frac{1}{x_1^m \cdot x^m} \cdot \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$$

*) Selle ja järgmist näituste juures tuleb kõige pealt piirimärgi järel seisva murru lugeja ja nimetaja iga liiget jagada arvu x niisuguse astmega, et x ainult nimetajana ette tuleks, peale selle on juba lihtne piiri väärtus määrata.

kus eelmise juhuse põhjal leiame, sest nüüd on m juba positiivne täisarv:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{1}{x_1^m \cdot x^m} \cdot \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = \frac{1}{x^{2m}} \cdot mx^{m-1} = -m \cdot x^{-m-1} = -mx^{n-1}$$

c) Olgu n murdarv, näiteks $\frac{p}{q}$, kus p ja q on täisarvud, siis võime kirjutada:

$$\frac{x_1^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{x_1 - x} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^q}\right)^p - \left(\frac{1}{x^q}\right)^p}{\left(\frac{1}{x_1^q}\right)^q - \left(\frac{1}{x^q}\right)^q}$$

ehk võttes lühidalt $\frac{1}{x_1^q} = y_1$ ja $\frac{1}{x^q} = y$ ja korrutades viimase murru lugejat ja nimetajat avaldusega $y_1 - y$:

$$\frac{x_1^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{x_1 - x} = \frac{y_1^p - y^p}{y_1 - y} \cdot \frac{y_1 - y}{y_1^q - y^q}$$

nüüd võime arvesse võttes eelmise paragrahvi lauseid 2 ja 3, esimese juhuse põhjal kirjutada:

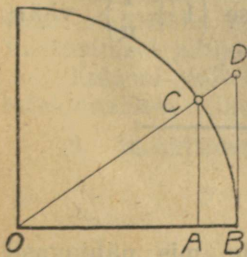
$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{x_1^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{x_1 - x} = \lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{y_1^p - y^p}{y_1 - y} \cdot \lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{y_1 - y}{y_1^q - y^q} = p \cdot y^{p-1} \cdot \frac{1}{q \cdot y^{q-1}} = \frac{p}{q} y^{p-q}$$

sest kui $x_1 \rightarrow x$, siis peab ka $y_1 \rightarrow y$. Kui nüüd y asemele tagasi tuua $x^{\frac{1}{q}}$ ja $\frac{p}{q}$ asemele n , siis saame lõpulikult:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{x_1^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{x_1 - x} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q} - 1} = nx^{n-1}$$

2. Kui x on lõpmatu vähenev suurus, nõnda et $x \rightarrow 0$, siis on

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Joon. 2.

Tõendus:

Kui $OB = 1$ (Joon. 2) ja kaar $CB = x$, siis on joonilõik $AC = \sin x$ ja meie võime joonise põhjal kirjutada, et lõpuliku x juures on ikka $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ ehk jagades $\sin x$ -ga selle võrratuse iga osa

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Pöörates viimase võrratuse iga osa ümber, leiame:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Kui nüüd kaare x väärtust vähendada hakkame, siis hakkab $\cos x$ väärtus liginema ühele. Et aga $\frac{\sin x}{x}$ väärtus ikka vahepealne on ühe ja $\cos x$ vahel, siis peab $\frac{\sin x}{x} - \cos x$ lõpmatu väheneva x juures ka olema lõpmatu vähenev suurus ja eelmise paragrahvi lause 1 põhjal on siis $\frac{\sin x}{x}$ piiriks ka 1. Seda asjaolu avaldame kirjas järgmiselt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

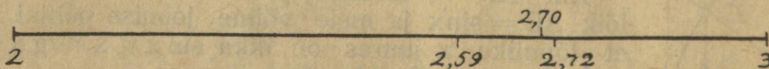
3. Olgu antud leida $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Seda piirväärtust ei ole meil võimalik praegusel silmapilgul valju tõenduse põhjal leida, niisugune võimalus tekib meile hiljem. Me võime praegu ainult näidata, et arvu n suurenemisega avalduse $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ väärtus lõpuliku piiri poole ligineb.

Andes nimelt arvule n järjest suurenevad täisarvulised väärtused 1, 10, 100 j. n. e., arvutades logaritmidel abil avalduse $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ vastavad väärtused ja korraldades nad järgmiselt tabelisse:

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	kasv
1	2	
10	2,5937	0,5937
100	2,7048	0,1111
1000	2,7171	0,0123

näeme, et vaatamata arvu n kiire suurenemise peale avalduse $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ väärtuste vahe siiski kahaneb. Kui veel kujutame need avalduse $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ väärtused arv joone abil (Joon. 3),



Joon. 3.

siis näeme selgesti, et meie avalduse väärtus ligineb piirile, mis nähtavasti asub arvu 2,7 ligiduses.

Selle avalduse piirväärtust tähendatakse tähega e , nõnda siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

See arv on irratsionaalne ja tema väärtus on 2,71828. . . . Arvu e nimetatakse loomulikuks logaritmi aluseks.

Ülesanded:

3. Leida $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ väärtused, andes n -le kõik täisarvulised väärtused 1 kuni 10-ni.

4. Korraldada eelmises ülesandes leitud väärtused tabelisse, juurde lisa-des kasvud, mille võrra suureneb $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, kui n suureneb ühe võrra.

Teine peatükk.

§ 4. Funktsioonide liigid.

1. Funktsioonid jagatakse kõige pealt kahte liiki, milledest üks on n . **n. algebraalsete** ja teine **transsendentsete** funktsioonide liik.

Algebraalseteks nimetatakse funktsioon, milles ette tulevad muutuvad ja jäävad suurused on seotud niisuguste tehtede läbi, nagu liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine, astendamise ehk juurimine ja mille juures astme ja juure näitajaks on jäävad ratsionaalsed suurused. Kõik teised funktsioonid nimetatakse transsendentseteks.

Järgmised funktsioonid on, näiteks, algebraalsed: $y = a + x$; $y = ax$

$$y = \frac{a}{x}; y = x^n; y = \sqrt[n]{x}.$$

Transsendentsed on aga funktsioonid: $y = a^x$, $y = \log x$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$ j. n. e.

2. Algebraalsed funktsioonid omakord jagunevad **ratsionaalseteks** ja **irratsionaalseteks**.

Ratsionaalseteks nimetatakse funktsioon, milles argument ei ole juuritavaks suuruseks, ega niisuguse astme aluseks, mille näitajaks on murdarv. Vastupidisel juhtumisel on funktsioon irratsionaalne.

Eelpool näiteks toodud algebraalistest funktsioonidest on esimesed neli ratsionaalsed, viimane on irratsionaalne.

3. Funktsioon

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

kus $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ tähendavad positiivseid ehk negatiivseid jäädavaid

suurusi, aga n on positiivne täisarv, nimetakse n -astme **ratsionaalseks täis-funktsiooniks**, aga funktsioon

$$y = \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n}{x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m},$$

samasuguste tingimiste juures koefitsientide ja astmenäitajate kohta, nimetakse **raatsionaalseks murd-funktsiooniks**.

4. Transsendentne funktsioon, milles muutuv suurus on logaritmitavaks, nagu $y = \log x$, nimetakse **logaritmiliseks** funktsiooniks.

5. Funktsioon, milles astme alus on jäädav, aga näitaja on muutuv suurus, nagu funktsioon $y = a^x$, nimetakse eraldi näitajaliseks ehk **eksponent-funktsiooniks**.

6. Funktsioone $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ jne. nimetakse **trigonomeetrilisteks**.

7. Funktsioon nimetakse **üheväärtuliseks**, kui argumendi igale väärtusele ainult üks funktsiooni väärtus vastab ja, teiselt poolt nimetakse funktsioon kahe- ehk mitmeväärtuliseks, kui argumendi igale väärtusele ikka kaks ehk mitu funktsiooni väärtust vastab.

Nõnda, näiteks, on kõik ratsionaalsed funktsioonid ühe-väärtuslised, aga irratsionaalne funktsioon $y = \sqrt{a+x}$ on kahe-väärtusline.

8. Funktsioon, mille väärtused ikka ühes ja samas järjekorras korduvad, kui argument teatud jäädava vahemiku võrra suureneb, nimetakse **perioodiliseks funktsiooniks**.

Trigonomeetrilised funktsioonid on perioodilised. Näiteks, on meil teada funktsiooni $y = \sin x$ kohta, et

$$\sin x = \sin (2\pi + x) = \sin (4\pi + x) = \dots$$

siin on perioodi vahemikuks 2π .

9. Kui $y = F(u)$ ja oma kord $u = f(x)$, siis on $y = F[f(x)]$ ja siis nimetakse funktsiooni $y = F[f(x)]$ **liitfunktsiooniks** ehk üteldakse, et y on **funktsioon funktsioonist**. Funktsiooni $u = f(x)$ nimetakse sel puhul sise-miseks funktsiooniks.

Näitustena toome järgmised liitfunktsioonid:

$$1) y = (a + bx)^n; \quad 2) y = a^{bx}; \quad 3) y = (\log x)^n; \quad 4) y = \sin \sqrt{x}.$$

10. Avaldades võrrandist $y = f(x)$ argumendi x väärtuse, leiame $x = \varphi(y)$. Kui nüüd endise argumendi x peale vaatame kui funktsiooni peale, mis oleb argumendist y , siis nimetakse niisugust funktsiooni $x = \varphi(y)$ **ümberpööratud funktsiooniks** võrdlemisi funktsiooniga $y = f(x)$, mida sel puhul nimetakse **algfunktsiooniks**.

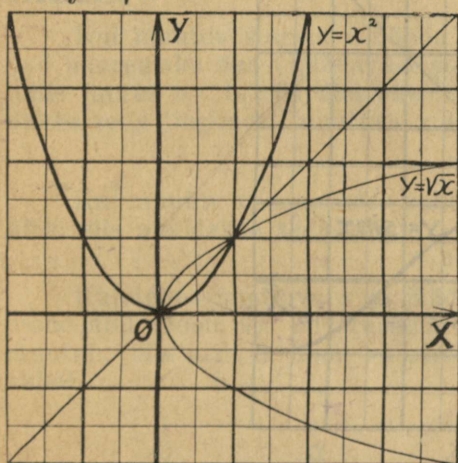
Harilikult tähendakse ka ümberpööratud funktsioonis funktsiooni tähega y ja argumenti tähega x , kirjutades $x = \varphi(y)$ asemele $y = \varphi(x)$ ja vahetades selle juures alguses antud x ja y tähendused ära. Näiteks, on järenevas

tabelis korraldud rida funktsioone ühes vastavate ümberpööratud funktsioonidega:

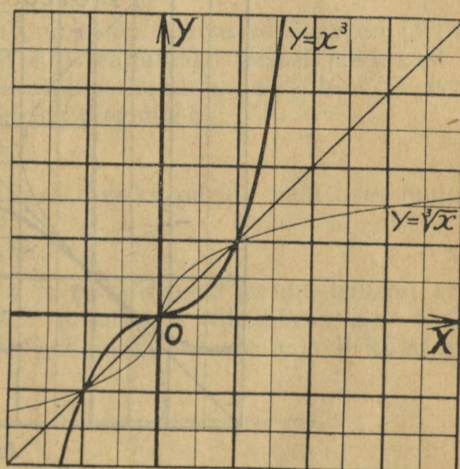
algfunktsioon	ümberpööratud funktsioon
$y = x + a$	$y = x - a$
$y = ax$	$y = \frac{x}{a}$
$y = x^n$	$y = \sqrt[n]{x}$
$y = a^x \ (a > 0)$	$y = \log_a x$

Kui kujutame graafiliselt ühes ja samas koordinaadistikus algfunktsiooni $y = f(x)$ ja ümberpööratud funktsiooni $y = \varphi(x)$, siis peab esimese kujutus samuti paigutatud olema x -telje suhtes nagu teise oma paigutatud on y -telje suhtes ja ka ümberpöörduvalt, sellepärast et ümberpööratud funktsioonis võrdlemisi algfunktsiooniga vahetatud on x ja y tähendused.

Nõnda, näiteks, on joon. 4 kujutatud funktsioon $y = x^2$ ja ümberpööratud funktsioon $y = \sqrt{x}$ ja joon. 5 funktsioon $y = x^3$ ja ümberpööratud funktsioon $y = \sqrt[3]{x}$.



Joon. 4.



Joon. 5.

Kui tõmbame sirgjoone $y = x$, mis nurga xOy poolitab, siis näeme, et alg- ja ümberpööratud funktsiooni kujutused on sümmeetriliselt paigutatud selle sirgjoone suhtes.

Kujutada graafiliselt järgmised alg- ja ümberpööratud funktsioonide paarid:

- 1) $y = x + 1$ ja $y = x - 1$.
- 2) $y = x + 2$ „ $y = x - 2$.
- 3) $y = 2x$ „ $y = \frac{x}{2}$.
- 4) $y = 3x$ „ $y = \frac{x}{3}$.

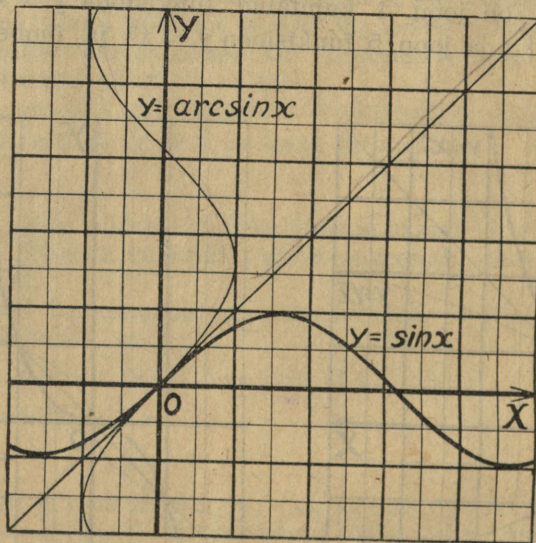
Süklomeetrilised funktsioonid. § 5.

Kui ümber pöörame trigonomeetrilised funktsioonid $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ ja $y = \operatorname{ctg} x$, siis saame nõndanimetud **süklomeetrilised** funktsioonid. Funktsioonile $y = \sin x$ vastavat ümberpööratud funktsiooni nimetakse arkussiinuseks ja märgitakse nõnda

$$y = \arcsin x.$$

Siin tähendab funktsioon y niisugust kaart, mille siinus on võrdne argumentiga x . Sellepärast: kui $y = \arcsin x$, siis $x = \sin y$, kus x ja y mõlemates kirjutustes on ühe ja sama tähenduse juure jäetud. Viimase võrduse põhjal, tarvitades trigonomeetrilisi tabelid, võime leida funktsiooni $y = \arcsin x$ väärtused, mis vastavad mitmesugustele argumentide x väärtustele. Et aga argument ise tähendab siinust, siis võime temale anda ainult niisugused väärtused, mis asuvad vahemikus $-1 < x < +1$. Meil on veel teada, et $\sin y = \sin(k \cdot 2\pi + y)$, kus k on mis tahes täisarv. Sellepärast on süklomeetriline funktsioon $y = \arcsin x$ üldse lõpmatu-mitme väärtusline.

Kõike seda näeme ka funktsiooni $y = \arcsin x$ graafilisest kujutusest (Joon. 6).



Joon. 6.

Nagu funktsioonile $y = \sin x$ vastab ümberpööratud funktsioon $y = \arcsin x$, samuti vastab funktsioonile $y = \cos x$ süklomeetriline funktsioon $y = \arccos x$, funktsioonile $y = \operatorname{tg} x$ funktsioon $y = \operatorname{arctg} x$ j.n.e.

Harutades samuti teiste süklomeetriliste funktsioonide kohta, kui tegime arkussiinusega, leiame et ka teised süklomeetrilised funktsioonid on üldse lõpmatu-mitme väärtuslised.

Ja samuti kui funktsiooni $y = \arcsin x$ nõnda ka funktsiooni $y = \arccos x$ argument võib muutuda ainult vahemikus $-1 < x < +1$, selle vastu aga funktsioonide $y = \operatorname{arctg} x$ ja $y = \operatorname{arccotg} x$ argument võib muutuda vahemikus $-\infty < x < +\infty$, sest tangensi ja samuti kotangensi väärtusteks võib olla iga sugune positiivne ehk negatiivne arv.

Kui räägitakse süklomeetrilise funktsiooni väärtusest, siis mõeldakse harilikult arkussiinuse ja arkustangensi juures absoluutselt kõige vähemat

kaart, aga arkuskoosinuse ja arkuskotangensi juures kõige vähemat positiivset kaart, mis antud argumendile vastab, nagu järgnevast tabelist näha:

x	$-\infty$	-1	0	+1	$+\infty$
arcsin x	—	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$	—
arccos x	—	π	$\frac{\pi}{2}$	0	—
arctg x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
arccot x	π	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0

Kujutada graafiliselt ühes ja samas koordinaadistikus funktsioonid:

1) $y = \operatorname{tg} x$ ja $y = \operatorname{arctg} x$ ja 2) $y = \operatorname{cot} x$ ja $y = \operatorname{arccot} x$.

§ 6. Suuruste pidev ja kaskeline muutu-

mine.

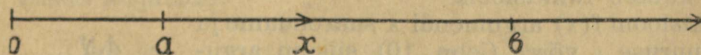
Kui muutuv suurus x nõnda muutub, et tema väärtused ikka on ja jäävad suuremaks ühest jäädavast suurusest a ja vähemaks teisest jäädavast b , mille juures $a < b$, siis üteldakse, et x muutub vahemikus a -st b -ni ja avaldakse seda tingimust muutuva x kohta kirjas järgmiselt:

$$a < x < b.$$

Kui muutuv x , muutudes vahemikus a -st b -ni ka piiride väärtused omada võib, siis avaldakse seda nõnda:

$$a \leq x \leq b.$$

Kujutades muutuva x ja jäädavate a ja b väärtused geomeetriselt arvjoone abil (Joon. 7), on arusaadav, et kui muutuv x vahemikus $a \leq x \leq b$ muutub, siis asuvad tema väärtuste kujutäpid ikka arvude a ja b kujutuste vahel.



Joon. 7.

Muutub x vahemikus $a \leq x \leq b$, näiteks kasvades, nõnda et tema geomeetiline kujutus selle juures, liikudes täpist a täpini b , läbi käib kõik täpid, mis arvjoonel on täppide a ja b vahel, siis üteldakse, et x muutub **pidevalt** nimetud vahemikus. Järjekult peab pideva muutumise korral suurus x omama järjest kõik arvulised väärtused, mis asuvad arvude a ja b vahel.

Muutub aga x vahemikus $x = a$ kuni $x = b$ nõnda, et tema geomeetiline kujutus selle juures, liikudes täpist a täpini b , kõiki vahepeal asuvaid arvjoone täppe läbi ei käi, vaid hüppab ühest täpist teise, jättes osa täppisid vahele, siis üteldakse et x muutub **katkeliselt**. Selle juures ei oma muutuv x ka kõiki arvulisi väärtusi, mis arvude a ja b vahel asuvad, vaid jätab palju väärtusi vahele.

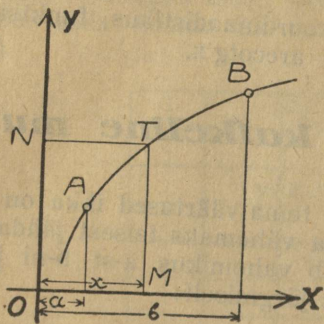
Näiteks, oleks suuruse x muutumine vahemikus $a \leq x \leq b$ katkeline, kui x muutudes ainult täisarvulised väärtused, mis nimetud vahemikus ette tulevad, omada võiks.

2. Funktsiooni nimetakse pidevaks argumendi vahemikus $a \leq x \leq b$, kui argumendi pideva muutumise juures selles vahemikus, funktsioon ise ka pidevalt muutub.

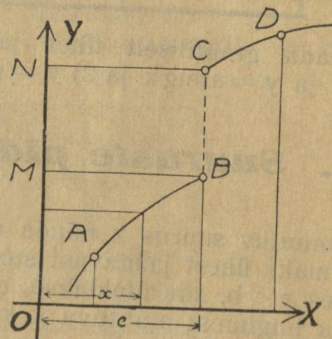
Argumendi kui olenematu muudetavat suurust võime ikka kujutada pidevalt muudetavana.

Kui argumendi pideva muutumise juures funktsioon katkeliselt muutub, siis nimetakse teda katkeliseks.

Kujutades graafiliselt pideva funktsiooni (Joon. 8) argumendi vahemikus $a \leq x \leq b$, saame kujutuses pideva kõverjoone AB. Kui argumendi x kujutäpp M nimetud vahemikus x -telge mööda pidevalt liigub, siis liigub ka pidevalt kõverat joont mööda argumendile vastav täpp T.



Joon. 8.



Joon. 9.

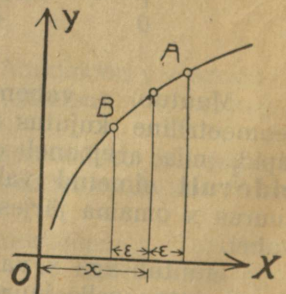
Pidevalt liigub veel y -telge mööda täpi T projektsioon N, mis on argumendile x vastava funktsiooni väärtuse $f(x)$ kujutus, kui arvjooneks võtta y -telg.

Katkelise funktsiooni graafiliseks kujutuseks aga on katkeline kõverjoon (Joon. 9). Siin hüppab argumendi pideva muutumise puhul väärtuse $x=c$ juures funktsiooni kujutäpp T korruga täpist B täppi C. Samuti hüppab täpi T projektsioon y -teljel korruga täpist M täppi N. Üteldakse, et argumendi väärtuse $x=c$ juures katkeb funktsioon.

Kui funktsiooni $f(x)$ argumendi x suurendame ja vähendame suuruse ε võrra (joon. 10), siis on argumendi uutele väärtustele $x+\varepsilon$ ja $x-\varepsilon$ vastavad funktsiooni väärtused $f(x+\varepsilon)$ ja $f(x-\varepsilon)$. Kui nüüd kujutame ε lõpmatu väheneva suurusena, nõnda et $\lim \varepsilon = 0$, siis hakkavad funktsiooni väärtused $f(x+\varepsilon)$ ja $f(x-\varepsilon)$ pideva funktsiooni puhul liginema ühise piiri väärtuse $f(x)$ poole. Funktsiooni katke kohal seda aga ei juhtu. Sellepärast võime ütelda:

Funktsioon on pidev argumendi vahemikus $a \leq x \leq b$, kui rahuldud saab võrdus:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x-\varepsilon)$$



Joon. 10.

Jagades võrduse 3) mõlemad pooled veel argumendi kasvuga Δx , saame funktsiooni ja argumendi kasvude suhte

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots \dots \dots 4)$$

Kui argumendi kasvu Δx mõtleme ikka positiivsena, siis on kasvude suhtel alati sama märk kui funktsiooni kasvul Δy , ja temal on siis kindel geomeetiline tähendus. Ja nimelt, kui (Joon. 11 ja 12) ühendame täpid T ja T_1 sirgjoonega, siis saame väikese täisnurkse kolmnurga TST_1 , mille kaatetid on kasvud Δy ja Δx . Sellepärast tähendab kasvude suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, absoluutselt võetud, selles kolmnurgas kaatetile Δy vastuseisva teravnurga tangensit.

Võttes aga suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ märgi ka arvesse, võime ütelda, et funktsiooni kahane-
mise puhul, kui $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ saab negatiivne, on selle suhte väärtus võrdne nimetud teravnurgale vastava täiendusnurga (kuni 180° -ni) tangensiga. Pikendades sirgjoont TT_1 kuni ta lõikab x -telge ja nimetades selle juures nurka α , mille see sirgjoon sünnitab x -telje positiivse sihiga, sirgjoone tõusunurgaks, näeme,

et kasvude suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on ikka võrdne niisuguse sirgjoone tõusunurga tangensiga, mis läbi funktsiooni kujutuse täppide T ja T_1 läheb: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$.

2. Kujutame edasi (Joon. 11 ja 12), et meie lõikjoont TT_1 hakkame pöörama ümber täpi T nõnda, et täpp T_1 kõverat mööda täpile T hakkab liginema, mille tõttu lõikjoon TT_1 ise ligineb sirgjoone seisukohale, mis kõverat täpis T puudutab. Selle juures hakkab muutuma ka nurk α ja tema tangens $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nõnda, et Δx ja Δy pidevalt vähenedes liginevad nullile kui piirile,

aga suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ise ligineb nimetud puutuja tõusunurga φ tangensi väärtusele, mille tõttu võime kirjutada:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Puutejoone seisukoht ja ühes sellega tema tõusunurk muutub olenedes puutetäpi seisukohast nõnda, et igale üksikule puutetäpi seisukohale vastab kindel puutejoone tõusunurk. Seda võime ütelda ka puutejoone tõusunurga tangensi kohta. Et aga puutetäpi seisukoht kõveral joonel ise oneneb oma abstsissi väärtusest, siis on arusaadav, et avaldus $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ peab tähendama muutuvat suurust, mis oneneb antud funktsiooni argumendist. Sellepärast nimetakse suurust $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ antud funktsiooni **tuletisfunktsiooniks** ehk lühidalt **tuletiseks**.

Kokku võttes võime ütelda:

Antud funktsiooni tuletis on funktsiooni ja tema argumendi kasvude suhte piir, kui argumendi kasv ligineb nullile ja tähendab geomeetriliselt puutejoone tõusunurga tangensi, kui kõverjooneks on antud funktsiooni graafiline kujutus.

Tuletis funktsiooni märgitakse harilikult lühemalt, kas märgi $\frac{dy}{dx}$, ehk y' ehk $f'(x)$ läbi, nõnda et

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(y),$$

mille juures eraldi dy ja dx nimetakse vastavalt funktsiooni ja tema argumendi differentsiaaliks.

Sellepärast võime ka ütelda, et tuletisfunktsioon on algfunktsiooni ja tema argumendi differentsiaalide suhe. On kokku lepitud vaadata argumendi differentsiaali peale kui jäädava suuruse peale, mille tõttu peab funktsiooni differentsiaali peale vaatama kui muutuva peale.

Korrutades võrduse $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ mõlemad pooli argumendi differentsiaaliga, leiame et

$$dy = f'(x) dx$$

ehk üteldes sõnadega: funktsiooni differentsiaal võrdub **tuletisfunktsiooni ja argumendi differentsiaali korrutisega.**

Tuletisfunktsiooni leidmist kui matemaatilist tehet nimetakse funktsiooni **differentsimiseks.**

3. Leiame näiteks funktsiooni

$$y = x^2 \dots \dots \dots 1)$$

tuletise. Selleks harutame järgmiselt: kui argumendile x anname kasvu Δx , siis peab ka funktsioon y saama vastava kasvu Δy , nõnda et

ehk avades sulud:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 \dots \dots \dots 2)$$

Kui nüüd võrduse 2) mõlematest pooltest lahutame võrduse 1) vastavad pooled, siis leiame funktsiooni kasvu:

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled argumendi kasvuga Δx , leiame kasvude suhte

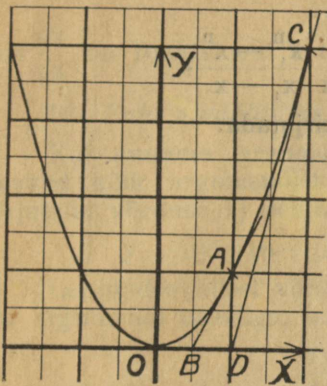
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

mille piiriks on

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Tähendab, funktsiooni $y = x^2$ tuletiseks on funktsioon $y' = 2x$.

Kui kujutame graafiliselt funktsiooni $y = x^2$ kõvera (Joon. 13), siis peab puutejoon näiteks täpis A, mille abstsiss $x = 1$, sünnitama x -teljega niisuguse nurga ABx , mille tangens on 2, sest kui $x = 1$, siis $y' = 2$. Samuti peab olema täpis C tõmmatud puutejoone tõusunurga tangens $\text{tg} \angle CDx = 4$, sest täpi C abstsiss $x = 2$ ja kui $x = 2$, siis $y' = 4$.



Joon. 13.

Ülesanded.

5. Leida funktsiooni $y = x^3$ tuletise väärtused argumenti järgmiste väärtuste jaoks:

- a) $x = -2$, b) $x = 0$, c) $x = 1$, d) $x = 2$.

6. Määrata funktsiooni $y = x^4$ kõverale kujutatud puutujate tõusunurga tangensite väärtused, kui puutetäppide abstsissid on järgmised:

- a) $x = -2$, b) $x = -1$, c) $x = 0$, d) $x = 1$.

7. Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

- a) $y = x^5$, b) $y = 2x^2$, c) $y = 2x^2 + x$, d) $y = x^2 + 2x + 3$.

§ 8. Üldised laused ja algebraliste funktsioonide differentsimine.

Astme (x^n) tuletiseks on astmenäitaja (n) korrutis ühe võrra alandatud astmega (x^{n-1}).

Tõendus:

Olgu antud funktsioon

$$y = x^n;$$

kui anname argumentile kasvu Δx , siis peab ka funktsiooni saama vastava kasvu Δy , nõnda et

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

Lahutades viimasest kirjutusest eelmise ja jagades saaduse mõlemad pooled kasvuga Δx , leiame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Kui nüüd Δx lõpmatu väheneva suurusena mõelda, siis võime piiriväärtuste läbi kirjutada:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Selle võrduse parem poole väärtuse leiame, kui nimetame $x + \Delta x = x_1$, siis $\Delta x = x_1 - x$; ja kui $\lim \Delta x = 0$, siis ka $\lim (x_1 - x) = 0$ ehk $\lim x_1 = x$, nõnda et

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x},$$

Nüüd aga võime § 3 tõendatud lause põhjal kirjutada:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1},$$

kus n võib olla mis tahes reaalne arv.

Harjutused.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

8. a) $y = x$

b) $y = x^2$

c) $y = x^3$

d) $y = x^{-1}$

e) $y = \frac{1}{x^2}$

f) $y = x^{\frac{1}{2}}$

g) $y = \sqrt[3]{x}$

h) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

i) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

k) $y = \sqrt[3]{x^2}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

m) $y = \frac{x}{\sqrt[5]{x^3}}$

n) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

o) $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$

p) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3\sqrt{x}}$

2. Jäädava a ja muutuva suuruse $f(x)$ korrutise tuletis on jäädava a ja muutuva tuletise $f'(x)$ korrutis.

Tõendus.

Olgu antud

$$y = a \cdot f(x).$$

Andes siin argumendile kasvu Δx , saame

$$y + \Delta y = a \cdot f(x + \Delta x).$$

Lahutades viimasest võrdusest eelmise ja jagades siis mõlemad pooled kasvuga Δx , leiame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

mille tõttu võime kirjutada:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

mille tõttu

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

kus $\frac{dv}{dx}$ on funktsiooni v tuletis ja $\frac{du}{dx}$ on u tuletis.

B. Puht analüütiline tõendus.

Kui anname argumendile kasvu Δx , siis saavad korruga vastavad kasvud kõik argumendist x olenevad suurused u , v ja y , nõnda et võime kirjutada võrduse 1) põhjal

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + (v + \Delta v)\Delta u.$$

Lahutades sellest võrdusest võrduse 1) ja jagades saaduse mõlemad pooled argumendi kasvuga, leiame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + (v + \Delta v) \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Edasi tuleb samuti harutada, kui eelmisel juhtumisel, võrdusest 2) algades. Lauset 4 võib kergesti laiendada ka rohkema kui kahe teguri korrutise peale. Näiteks, olgu $y = u \cdot v \cdot t$, siis võime kirjutada, vaadates ajutiselt korrutise $u \cdot v$ peale kui ühe teguri peale:

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot v \frac{dt}{dx} + t \cdot \frac{d(u \cdot v)}{dx}.$$

Aga $\frac{d(u \cdot v)}{dx}$ on kahe funktsiooni korrutise tuletis ja sellepärast

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \text{ ja}$$

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot v \frac{dt}{dx} + u \cdot t \frac{dv}{dx} + v \cdot t \frac{du}{dx}$$

11. Differentsida järgmised funktsioonid, kui korrutised.

a) $y = 3x\sqrt{x}$,

b) $(x^2 - a)(b - x)$,

c) $y = (4x^2 - 3x)(2x - 3)$,

d) $(x - 3x^3)(2 - x^2)$,

e) $y = (3x - \sqrt{x})(x + 3\sqrt{x})$,

f) $x\sqrt{x}(x^2 - a)$.

5. Murd-funktsiooni tuletis on murd, mille lugejaks on antud murru nimetaja korrutis lugeja tuletisega miinus antud murru lugeja korrutis nimetaja tuletisega, aga nimetajaks on antud nimetaja ruut.

Tõendus:

Olgu antud

$$y = \frac{u}{v},$$

kus jälle $u = f(x)$ ja $v = \varphi(x)$.

Korrutades antud võrduse mõlemad pooli parema poole nimetajaga, leiame

$$y \cdot v = u.$$

Ja nüüd kirjutame eelmise lause põhjal

$$y \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

ehk $v \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{ydv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{u}{v} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v}$

ja lõpuks

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Harjutused:

12.

a) $y = \frac{x}{1+x}$

b) $y = \frac{a+x}{b-x}$

c) $y = \frac{x^2+3}{3-x}$

d) $y = \frac{5-x^2}{2+3x}$

e) $y = \frac{a-bx^2}{a+bx^2}$

f) $y = \frac{x^2+3x-1}{x^2-3x+1}$

g) $y = \frac{3x^3-5x^2+x}{x^4+3x^2+1}$

h) $y = \frac{7x-x^2+3x^3}{2x^2-4x^5}$

6. Et liitfunktsiooni $y = F[f(x)]$ differentside, peab differentsema teda sisemise funktsiooni $f(x)$ kui argumendi järele ja saadust korrutama sisemise funktsiooni tuletisega argumendi x järele.

Tõendus:

Olgu meile antud liitfunktsioon

$$y = F(u) \dots \dots \dots 1)$$

kus u on sisemine funktsioon ja nimelt:

$$u = f(x) \dots \dots \dots 2)$$

Kui anname argumendile x kasvu Δx , siis saab korruga funktsioon u kasvu Δu ja y kasvu Δy ja meie võime eelmiste võrduste põhjal kirjutada

$$y + \Delta y = F(u + \Delta u) \dots \dots \dots 3)$$

$$\text{ja } u + \Delta u = f(x + \Delta x) \dots \dots \dots 4)$$

Lahutades võrdusest 3) võrduse 1) ja võrdusest 4) võrduse 2) ja jagades saaduste mõlemad pooled vastavalt kasvudega Δu ja Δx , leiame

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \dots \dots \dots 5)$$

$$\text{ja } \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots \dots \dots 6)$$

Korrutades võrduse 5) mõlemad pooled võrduse 6) vastavate pooltega, mille tõttu koondub pahemal pool Δu , saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \frac{f(u + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Kui mõtleme Δx lõpmatu väheneva suurusena, siis on ka Δu ja Δy lõpmatu vähenevad suurused, sest meie oletame, et funktsioonid u ja y on pidevad, ja siis võime kirjutada:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = F'(u) \cdot f'(x) = F'[f(x)] \cdot f'(x).$$

Siin on $F'(u)$ antud liitfunktsiooni tuletis sisemise funktsiooni u kui argumenti järele, aga $f'(x)$ on sisemise funktsiooni tuletis argumenti x järele.

Leida reegel ruutjuure $y = \sqrt{f(x)}$ differentsimiseks!

Harjutused.

13. a) $y = (a-x)^n$

b) $y = (a+bx)^n$

c) $y = (a+x^2)^n$

d) $y = \left(3 - \frac{1}{x}\right)^5$

e) $y = (7-2x)^4$

f) $y = (a-x)^{\frac{1}{2}}$

g) $y = \sqrt{3-x^2}$

h) $y = \sqrt{3+2x}$

i) $y = \sqrt{a+bx-cx^2}$

k) $y = \frac{a}{\sqrt{a-x^2}}$

l) $y = x \sqrt{1-x^2}$

m) $y = \frac{ax}{\sqrt{a+x^3}}$

n) $y = \sqrt[3]{2-x^5}$

o) $y = \sqrt[3]{(5-x)^2}$

p) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

q) $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

r) $y = \sqrt[3]{\frac{(a+x^2)^2}{a-x}}$

s) $y = \frac{\sqrt{a+x^2}-x}{x+\sqrt{a-x^2}}$

§ 9. Transsendentsete funktsioonide differentsimine.

1. Võtame kõige pealt logaritmilise funktsiooni

$$y = \lg x$$

ja katsume teda differentsida.

Anname selleks argumentile kasvu Δx , siis saab ka funktsioon vastava kasvu Δy , nõnda et

$$y + \Delta y = \lg(x + \Delta x)$$

ja tehes samuti kui eelmistel juhtumistel leiame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lg(x + \Delta x) - \lg(x)}{\Delta x}.$$

Et selle võrduse parema poole piiri leida lõpmatu väheneva Δx juures, selleks muudame tema ümber, teades, et logaritmi vahe on murru logaritm, mille tõttu leiame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \lg \frac{x + \Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x} \lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Korrutame ja jagame veel pahemat poolt argumendiga x ja nimetame peale selle $\frac{x}{\Delta x} = n$, siis saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \cdot n \cdot \lg \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{x} \lg \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Kui nüüd $\Delta x \rightarrow 0$, siis $\frac{x}{\Delta x} \rightarrow \infty$ ja $n \rightarrow \infty$, ja

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lg \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right],$$

sest paremal pool muutub kasvu Δx muutumisega ainult logaritmi märgi all seisev suurus $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

Aga $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ ja § 3 põhjal on $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$, sellepärast leiame:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lg e}{x} \dots \dots \dots 1)$$

Ja võime ütelda lause:

Logaritmi tuletis on murd, mille lugejaks on arvu e logaritm, aga nimetajaks on argument x .

Valem 1) muutub palju lihtsamaks, kui logaritmiline funktsioon võtta aluse e juures, nõnda et

$$y = \ln x^*),$$

siis on $\ln e = 1$ ja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \dots \dots \dots 2)$$

Ehk üteldes sõnadega:

Loomuliku aluse juures võetud logaritmi tuletis on murd, mille lugejaks on 1 ja nimetajaks argument x .

See nähtus, et aluse e juures võetud logaritmi tuletis lihtsam on iga teistsuguse aluse juures võetud logaritmi tuletisest, ongi üheks põhjuseks, mispärast arv e nimetakse loomulikuks logaritmi aluseks.

Harjutused:

14. a) $y = \ln(2x)$ b) $y = \ln(x^2)$ c) $y = \ln \sqrt{x}$
 d) $y = \ln(2-x)$ e) $y = \ln(1+x^2)$ f) $y = \ln(1-x)^3$

*) Loomuliku aluse juures võetud logaritmi märgitakse harilikult tähiga \ln — ladina keelse nimetuse „logarithmus naturalis“ esimesed tähed.

g) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$

h) $y = (\ln x)^2$

i) $y = \sqrt{\ln x}$

k) $y = [\ln(1-x)]^2$

l) $y = x^3 \ln x$

m) $y = \frac{\ln x}{x^3}$

n) $y = \ln(1+x) \cdot \ln(1-x)$

o) $y = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$

p) $y = \ln(\ln x)$

2. Eksponentsiaal funktsiooni $y = a^x$ tuletis on selle funktsiooni korrutis aluse a loomuliku logaritmiga lna.

Tõendus.

Kui $y = a^x$, siis saame, võttes loomulikud logaritmid mõlematest pooltest

$$\ln y = x \cdot \ln a,$$

ja siit

$$x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln y.$$

Kui nüüd suurust x ajutiselt võtta funktsioonina, aga y argumendina ja silmas pidades, et $\frac{1}{\ln a}$ on jäädav suurus, siis võime kirjutada eelmise valemi

2) põhjal

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{y}.$$

Pöörates viimase kirjutuse mõlemad pooled ümber ja pannes suuruse y asemele tema antud väärtuse argumendi x läbi, leiame lõplikult

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a$$

Erijuhtumisel, kui antud funktsioon on

$$y = e^x,$$

leiame, teades et $\ln e = 1$,

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Harjutused:

15. a) $y = a^{2x}$

b) $y = a^{1-x}$

c) $y = 3a^{\frac{x}{3}}$

d) $y = a^{x^3}$

e) $y = 2a^{\sqrt{x}}$

f) $y = a^{\ln x}$

g) $y = \ln(a^{3x})$

h) $y = a^x \cdot \ln x$

i) $y = \frac{a^x}{\ln x}$

k) $y = \frac{\ln x}{a^x}$

l) $y = 3x^2 a^x$

m) $y = \frac{2x}{2^x}$

n) $y = \sqrt{1-x} \cdot 3^{2x}$

o) $y = \frac{5^{1-x}}{3-x^2}$

p) $y = \frac{a^x}{b^x}$

q) $y = e^{2x}$

r) $y = 2e^{2x} - e^{-2x}$

s) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

3. Siinuse tuletis on koosinus.

Tõendus.

Olgu antud

$$y = \sin x.$$

Andes argumendile kasvu Δx , leiame

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) = \sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x.$$

Lahutades viimasest võrdusest eelmise ja jagades saaduse mõlemad pooled kasvuga Δx , saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \frac{\sin x}{\Delta x} \dots \dots \dots 1)$$

Meil on aga teada, et

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x = \frac{\sin x}{dx},$$

sest

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1,$$

§ 3 tõendatud lause 2 põhjal.

Sellepärast koonduvad võrduse 1) parema poole esimese ja viimase liikme piiriväärtused ja meie leiame

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

4. Tõendada analoogiliselt, et funktsiooni

$$y = \cos x$$

tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

Harjutused.

16. a) $y = \sin 2x$

b) $y = \sin(2-x)$

c) $y = \sin^2 x$

d) $y = \sqrt{\sin x}$

e) $y = \sin(\ln x)$

f) $y = \sin(a^x)$

g) $y = \ln(\sin x)$

h) $y = a^{\sin x}$

i) $y = x \cdot \sin x$

k) $y = \frac{\sin x}{x^2}$

l) $y = \frac{3x}{\sin x}$

m) $y = \sin x \cdot \sin 2x$

n) $y = \frac{\sin x}{\sin 2x}$

o) $y = \sin^2(1-2x)$

p) $y = \sin^n(a - bx^2)$

17. a) $y = \cos 3x$ b) $y = \cos(1-x)$ c) $y = \cos^2 x$
 d) $y = \cos x^2$ e) $y = \cos \sqrt{x}$ f) $y = \sqrt{\cos x}$
 g) $y = \cos(\ln x)$ h) $y = \ln(\cos x)$ i) $y = \cos a^x$
 k) $y = \cos x \cdot \sin x$ l) $y = \frac{\sin x}{\cos 2x}$ m) $y = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
 n) $y = \sin 2x \cdot \cos 3x$ o) $y = (\sin x + \cos x)^2$ p) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

5. Tangensi tuletis on murd, mille lugeja on üks, aga nime-taja on sama argumendi juures võetud koosinuse ruut.

Tõendus.

Kui on antud

$$y = \operatorname{tg} x,$$

siis võime ka kirjutada, et

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Nüüd aga on meil tegemist murdfunktsiooniga ja meie saame eelmise paragrahvi lause 5 põhjal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

aga, nagu teada, on $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, sellepärast leiame lõpulikult:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

6. Näidata, et funktsiooni

$$y = \operatorname{cotg} x$$

tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Harjutused:

18. a) $y = \operatorname{tg} 5x$ b) $y = \operatorname{tg} x^3$ c) $y = \operatorname{tg}(1-x)$
 d) $y = \operatorname{tg}(a + bx^2)$ e) $y = x^2 \operatorname{tg} x$ f) $y = \operatorname{tg}(\ln x)$
 g) $y = \ln(\operatorname{tg} x)$ h) $y = \operatorname{tga}^x$ i) $y = a^x \operatorname{tg} x$
 k) $y = \frac{a^x}{\operatorname{tg} x}$ l) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln x}$ m) $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$
 n) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$ o) $y = \ln(\operatorname{tga}^x)$ p) $y = \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\operatorname{tg} x)}$
19. a) $y = \operatorname{cotg} 3x$ b) $y = \operatorname{cotg}(1-3x)$ c) $y = \operatorname{cotg}^2 x$
 d) $y = \sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}$ e) $y = x^3 \operatorname{cotg} x$ f) $y = \frac{x}{\operatorname{cotg} x}$

g) $y = \frac{\cotgx}{x^3}$ h) $y = \cotg(\ln x)$ i) $y = \cotg a^x$
 k) $y = \cos x \cdot \cotgx$ l) $y = \frac{\cotgx}{\sin x}$ m) $y = e^{\cotgx}$
 n) $y = \sin^2 x + \cotg^2 x$ o) $y = \ln \sqrt{\cotgx}$ p) $y = \ln(\cotg a^x)$

7. Arkussiinuse tuletis on murd, mille lugeja on üks aga nimetaja on ruutjuur ühe ja argumendi ruudu vahest.

Tõendus.

Kui antud on

$$y = \arcsin x,$$

siis

$$x = \sin y$$

$$\text{ja } \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \dots \dots \dots 1)$$

Siin võetakse juur ikka positiivsena, sest $y = \arcsin x$ muutub harilikult vahemikus $-\frac{\pi}{2} > y > \frac{\pi}{2}$ (§ 5), aga siis on $\cos y$ positiivne.

Kui võrduse 1) mõlemad pooled veel ümber pöörame, siis saame lõpulikult:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

8. Näidata, et funktsiooni

$$y = \arccos x$$

tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

H a r j u t u s e d :

20. a) $y = \arcsin 2x$ b) $y = \arcsin(3-x)$ c) $y = \arcsin \frac{x}{a}$
 d) $y = (\arcsin x)^2$ e) $y = x \arcsin x$ f) $y = \arcsin(\ln x)$
 g) $y = \arcsin a^x$ h) $y = \ln(\arcsin x)$ i) $y = \frac{\arcsin x}{x}$
21. a) $y = \arccos 3x$ b) $y = \arccos(x^2)$ c) $y = \arccos \frac{x^2}{a^2}$
 d) $y = \arccos(2x-1)$ e) $y = \arccos \frac{x^2-1}{x^2+1}$ f) $y = a^{\arccos x}$

9. Arkustangensi tuletis on murd, mille lugejaks on üks, aga nimetajaks ühe ja argumendi ruudu summa.

Tõendus.

Kui
siis

$$y = \operatorname{arctg} x,$$

$$x = \operatorname{tg} y \quad \text{ja}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

ja siit leiame, ümber pöörates võrduse pahema ja parema poole:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

10. Näidata, et funktsiooni

$$y = \operatorname{arccotg} x$$

tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Harjutused.

22. a) $y = \operatorname{arctg} 5x$ b) $y = \operatorname{arctg} x^2$ c) $y = (\operatorname{arctg} x)^2$
 d) $y = \operatorname{arctg} \frac{a}{1+x}$ e) $y = \operatorname{arctg} a^x$ f) $y = \operatorname{arctg} (\ln x)$
 g) $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$ h) $y = \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ i) $y = x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}$
23. a) $y = \operatorname{arccotg}(3-x)$ b) $y = \operatorname{arccotg} \frac{x^3}{3}$ c) $y = (\operatorname{arccotg} x)^3$
 d) $y = x \cdot \operatorname{arccotg} x$ e) $y = \operatorname{arccotg} (\ln x)$ f) $y = \operatorname{arccotg} \frac{a}{1+x}$

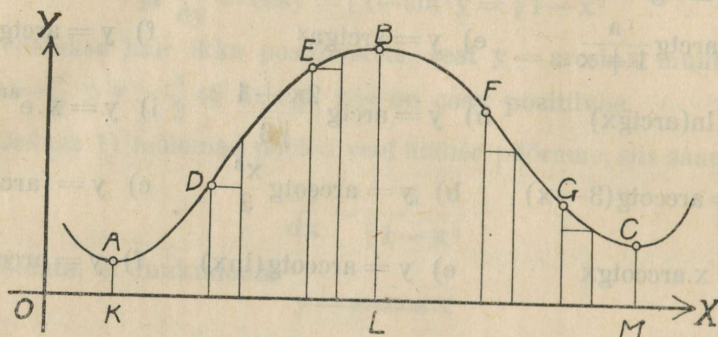
Sega-ülesanded.

24. a) $\sqrt{v} = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$ b) $x = \frac{t+1}{t} \ln t$
 c) $y = (x^2 - a^2) \ln \frac{a+x}{a-x} + 2ax$ d) $s = \ln |\sin \varphi| + \ln |\cos \varphi|$
 e) $r = \varphi + \sin \varphi \cos \varphi$ f) $y = \sin^2 x \cdot \operatorname{tg} x$
 g) $s = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos a \varphi}{1 + \cos a \varphi}}$ h) $r = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\varphi}{1+\varphi}}$
 i) $s = a\varphi + b \cdot \ln(\operatorname{acos} \varphi + b \sin \varphi)$ k) $r = \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{1-\varphi}{\varphi}}$
 l) $x = z \cdot \operatorname{arctg} z - \ln \sqrt{1+z^2}$ m) $y = \sqrt{1-x^2} + x \operatorname{arcsin} x$
 n) $y = \frac{(2bu^2 - a) \sqrt{a+bu^2}}{u^3}$ o) $x = \ln \frac{\sqrt{2 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} - 1}{\sqrt{2 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} + 1}$
 p) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^x - \frac{e^x}{2(e^{2x} + 1)}$ q) $v = \ln(2x + 1 + 2\sqrt{1+x+x^2})$
 r) $s = \frac{4}{3} \ln(2 + \cos \varphi) - 3 \ln \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right) + \ln \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)$

§ 10. Funktsiooni ja tema tuletise vahetamine.

Kui täisnurkses koordinaadistikus kujutatud kõverjoon (Joon. 16) on mingisuguse funktsiooni $y = f(x)$ graafiliseks kujutuseks, siis on meil teada (A. I p. I § 3), et selle kõverjoone iga täpi ordinaat ja abtsiss on vastavalt nimetatud funktsiooni ja tema argumenti vastavad väärtused.

Meie saame niisugusel korral selle kõverjoone läbi selge ettekujutuse funktsiooni muutumise kohta. Näiteks võime ütelda, et joonisel 16 kujutatud funktsioon kasvab argumenti väärtusest OK kuni argumenti väärtuseni OL, sest selles vahemikus kasvab kõverjoone ordinaat tema abtsissi kasvamisega, mille tõttu kõverjoon tõuseb võrdlemisi x -teljega. Argumenti väärtuse OL juures on funktsioonil kõige suurem väärtus võrdlemisi teiste ligiduses olevate väärtustega. Niisugust funktsiooni väärtust nimetakse **maksimumiks** *). Maksimumi juures on funktsiooni kujutusel kõige kõrgem täpp võrdlemisi



Joon. 16.

ligiduses asuvate täppidega; siin algab kõverjoone alanemine ja ühes sellega funktsiooni kahanemine, mis kestab kuni argumenti väärtuseni OM, sest siin kahaneb kõverjoone ordinaat tema abtsissi kasvamisega. Argumenti väärtuse OM juures on funktsioonil kõige vähem väärtus võrdlemisi teiste ligiduses asuvate väärtustega ja seda väärtust nimetakse funktsiooni **miinimumiks** **). Miinimumi kohal on ka kõverjoonel kõige madalam täpp võrdlemisi teiste ligidate täppidega ja siin algab kõverjoone uus tõus.

Kui funktsiooni kasvamise vahemikus eraldi võrdleme täppide D ja E juures argumenti ühele ja samale kasvule Δx vastavaid funktsiooni kasvu Δy väärtusi, siis näeme et täpi D juures on kõverjoone tõus ja ühes sellega funktsiooni kasvamine kiirem, kui täpi E juures, sest ühele ja samale abtsissi kasvule Δx vastab täpi D juures suurem ordinaadi kasv Δy kui täpi E juures.

Samuti näeme funktsiooni kahanemise vahemikus, et täpi F juures on kõverjoone alanemine ja ühtlasi ka funktsiooni kahanemine kiirem, kui täpi G juures.

*) Ladina keelsest sõnast „maximum“ — kõige suurem (väärtus).

***) Ladina keelsest sõnast „minimum“ — kõige vähem (väärtus).

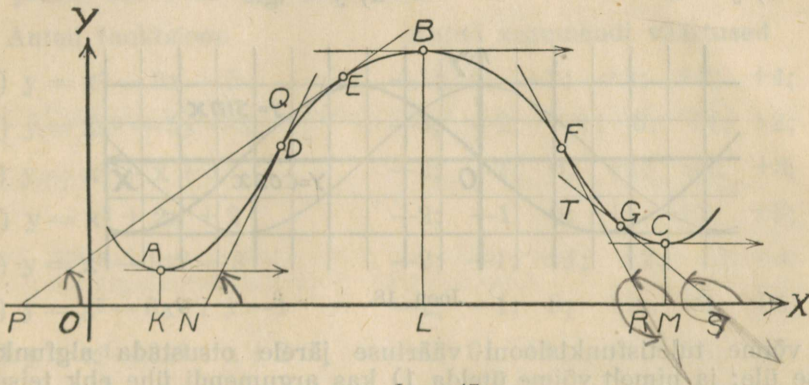
Kui funktsiooni kujutuse mitmesugustes täppides tõmbame puutejooned (Joon. 17), siis on meil teada, et iga puutuja tõusunurga tangens annab meile tuletisfunktsiooni väärtuse puutetäpi abstsissi, kui argumenti väärtusele vastavalt.

Me võime sellepärast, võrreldes puutujate tõusunurga tangensi väärtusi, leida, missuguses vahemikus peavad olema funktsiooni ja tema tuletiste väärtused. Selles mõttes on joonise 17 järel arusaadavad järgmised laused:

1. **Argumenti niisuguses vahemikus, kus funktsioon kasvab, on tuletisfunktsioon positiivne**, sest, nagu joonisel näha, on siin puutuja tõusunurk ikka terav, aga teravnurga tangens on positiivne.

2. **Argumenti niisuguses vahemikus, kus funktsioon kahaneb, on tuletisfunktsioon negatiivne**, sest siin on puutuja tõusunurk nüri, aga nürinurga tangens on negatiivne.

3. **Argumenti niisuguse väärtuse juures, kus funktsioonil on maksimum ehk miinimum, on tuletisfunktsioon null**, sest siin on puutuja paralleelne x-teljega ja sellepärast on tõusunurk ja selle tangens null.



Joon. 17.

Võrreldes funktsiooni kujutuse tõusu vahemikus täppides D ja E tõmmatud puutujate tõusunurke, näeme, et mida kiirem on kõverjoone tõus, seda suurem on ka tema tõusunurk, sest kolmnurgas NQP on $\angle DNX$ välisnurgaks, kuna $\angle QPN$ on sama kolmnurgas nurgale DNX vastuseisvaks sisenurgaks. Sellepärast võime lühidalt ütelda:

4. **Mida kiirem on funktsiooni kasvamine, seda suurem peab olema tuletisfunktsiooni väärtus.**

Funktsiooni kujutuse alanemise vahemikus aga näeme kolmnurgast TRS, et seal on puutuja tõusunurk, olles nüri, seda vähem, mida kiirem on kõverjoone alanemine, ja sellepärast peame ütleva:

5. **Mida kiirem on funktsiooni kahanemine, seda vähem on tuletisfunktsiooni väärtus.**

Silmas pidades, et funktsiooni kahanemise vahemikus tuletisfunktsiooni väärtus ikka on negatiivne, aga negatiivne suurus on seda vähem, mida suurem on tema absoluutne väärtus ja ümberpöörduvalt, võime viimased kaks lauset (4 ja 5) ühendada, üteldes:

6. **Mida kiirem on funktsiooni muutumine (kasvamine ehk kahane-mine), seda suurem peab olema tuletisfunktsiooni absoluutne väärtus.**

Kui kujutada ühele ja samale joonisele algfunktsioon ja tema tuletis, siis peab eelmiste lausetega põhjal tuletise kujutis asuma ülal pool x-telje abstsissi

niisuguses vahemikus, kus algfunktsiooni kujutus tõuseb ja tuletise kujutus peab asuma allpool x-telge niisuguses vahemikus, kus algfunktsiooni kujutus alaneb. Tuletise kujutus peab lõikama x-telge abstsissi niisuguste väärtuste juures, kus funktsiooni kujutus tõusust läheb üle alanemisele ehk ümberpöördult. Tuletisfunktsiooni kujutuse ordinaat peab olema absoluutselt seda suurem, mida kiirem on algfunktsiooni kujutuse tõus ehk alanemine.

Kõike seda näeme joonisel 18, kus korruga on kujutatud siinus ja tema tuletis koosinus.

Kujutada ühel ja samal joonisel iga järgmine funktsioon ühes oma tuletisega.

a) $y = x^2$

f) $y = 2x^3 + 1$

b) $y = x^2 + 1$

g) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$

c) $y = 3x^2$

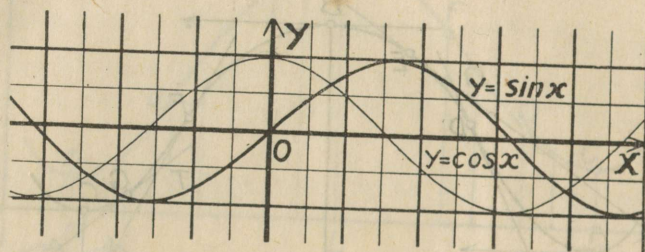
h) $y = \frac{1}{x^2}$

d) $y = 3x^2 + 2$

i) $y = \ln x$

e) $y = x^3$

k) $y = \lg x$



Joon. 18.

Me võime tuletisfunktsiooni väärtuse järele otsustada algfunktsiooni muutumise üle; ja nimelt võime ütelda 1) kas argumendi ühe ehk teise väärtuse juures funktsioon kasvab ehk kahaneb, 2) missuguse argumendi väärtuse juures on funktsioonil maksimum ehk miinimum ja 3) võime võrrelda funktsiooni muutumise kiirust argumendi ühe ehk teise väärtuse juures.

Näiteks olgu antud funktsioon

$$y = 4x^3 - 21x^2 + 18x - 5,$$

ja olgu vaja selle funktsiooni muutumise kohta selgusele jõuda.

1. Antud funktsiooni tuletis on:

$$y' = 12x^2 - 42x + 18$$

Kui anname argumendile mitmesugused väärtused, arvutame vastavad tuletise väärtused ja tabelisse korraldame, siis saame:

x	0	1	2	3	4	5
y'	18	-12	-18	0	42	98

Ja selle tabeli põhjal võime ütelda, et 1) argumendi väärtuste 0, 4 ja 5 juures kasvab meie funktsioon; 2) argumendi väärtuste 1 ja 2 juures kahaneb meie funktsioon; 3) argumendi väärtuse 3 juures on meie funktsioonil kas

maksimum ehk miinimum ja nähtavasti on siin miinimum, sest enne seda argumendi väärtuse $x = 2$ juures kahaneb meie funktsioon, aga pärast $x = 4$ juures kasvab ta; 4) argumendi väärtuse $x = 2$ juures kahaneb meie funktsioon kiiremalt kui $x = 1$ juures.

Meie võime eraldi määrata niisugused argumendi väärtused, kus on meie funktsioonil maksimum ehk miinimum. Selleks on vaja nõuda, et meie funktsiooni tuletis võrduks nulliga ja leida argumendi väärtused, mis seda nõuet rahuldavad.

Võrrandist $12x^2 - 42x + 18 = 0$ leiame $x_1 = 3$ ja $x_2 = 0,5$. Esimene nendest juhtumistest on meile juba teada, teise kohta aga võime ütelda, et meil siin nähtavasti tegemist on funktsiooni maksimumiga, sest enne seda argumendi väärtuse $x = 0$ juures kasvab meie funktsioon, aga pärast seda $x = 1$ juures ta kahaneb.

Ülesanded.

25. Selgeks teha, kas järgnevad funktsioonid antud argumendi üksikute väärtuste juures kasvavad ehk kahanevad.

Antud funktsioon

Antud argumendi väärtused

a) $y = x^2 - 3x + 5$

-1; 0; +1; +2; +3; +4;

b) $y = 2x^2 - 5x - 1$

-3; -2; -1; 0; +1; +2;

c) $y = x^3 + x + 3$

-2; -1; 0; +1; +2; +3;

d) $y = x^3 + 2x + 2$

-2; -1; 0; +1; +2; +3;

e) $y = x^3 - 3x^3 - 3$

-2; -1; +1; +2; +3; +4;

f) $y = x^3 - 6x^2 + x - 1$

-2; -1; 0; +1; +2; +3;

g) $y = x^3 - 3x^3 + x + 2$

-1; 0; +1; +2; +3; +4;

26. Missuguste argumendi väärtuste juures on järgnevatel funktsioonidel maksimum ehk miinimum?

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 4$

e) $y = x^4 - 8x^2 + 5$

b) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$

f) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 3$

c) $y = 2x^3 - 6x^2 - 2$

g) $y = 6x^5 - 115x^3 + 675x - 47$

d) $y = x^3 - 12x + 7$

h) $y = \frac{x^2}{x+1}$

27. Kui suur on järgnevate funktsioonide läbi määratud kõverjoonte tõus*) antud abtsissi üksikute väärtuste juures?

Antud funktsioon

Antud argumendi väärtused

a) $y = x^2$

-1; -0,5; 0; +0,5; +2

b) $y = x^2 - x + 2$

-1; -0,5; 0; +0,5; +1

c) $y = x^3 - 2x^2 + x$

-1; -0,5; 0; +0,5; +1

*) Kõverjoone tõusu all mõeldakse antud abtsissile vastavas kõverjoone täpis kujutatud puutejoone tõusunurga tangens.

d) $y = x - 1$

$-1; 0; +1; +2; +3$

e) $y = \sin x$

$-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; 0; +\frac{\pi}{2}; +\pi$

f) $y = \operatorname{tg} x$

$-\frac{\pi}{2}; 0; +\frac{\pi}{6}; +\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{2}$

g) $y = \ln(x - 1)$

$0; +0,2; +0,75; +1; +1,5$

28. Missuguse argumendi väärtuse juures on funktsiooni $y = \cos x$ muutumine kõige kiirem?

29. Missuguse argumendi väärtuse juures on kõverjoone $y = \sin x + \cos x$ puutejoon paralleelne x -teljega?

30. Missuguse argumendi väärtuse juures on kõverjoone $y = \ln(x - a)$ puutejoon perpendikulaarne x -teljega?

31. Missuguse argumendi väärtuse juures sünnitab kõverjoon $y = x^3 - 11x + 3$ x -teljega nurga $\alpha = \frac{\pi}{4}$?

§ 11. Funktsiooni kõrgema järgu tuletised.

1. Funktsiooni $y = f(x)$ tuletis $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ on üldse ka funktsioon, mis samast argumendist x oleneb.

Sellepärast võime differentsida ka antud funktsiooni tuletist, mille läbi saame antud funktsiooni n.n. teise tuletise. Teist tuletist märgitakse järgmiselt:

$$[f'(x)]' = \frac{d[f'(x)]}{dx} = f''(x) = y'' \text{ ehk } \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(dy)}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Viimasel juhtumisel on silmas peetud, et argumendi differentsiaali peale tuleb vaadata kui jäädava suuruse peale: d^2y on antud funktsiooni n.n. teise järgu differentsiaal.

Differentsides antud funktsiooni teist tuletist, saame juba kolmanda tuletise j. n. e.

Kolmandat tuletist tähendakse kirjas märgi y''' ehk $f'''(x)$ ehk $\frac{d^3y}{dx^3}$ läbi j. n. e.

Näitus 1.

$$\text{Antud } y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2.$$

Siit järgneb:

$$y' = 3x^2 - 10x + 3$$

$$y'' = 6x - 10$$

$$y''' = 6$$

Siin on kolmas tuletis jäädav suurus ja sellepärast on kõik järgmised tuletised nullid.

Näitus 2.

Antud

$$y = \sin x.$$

Siis järgneb et:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x,$$

$$y^{IV} = \sin x, \quad y^V = \cos x, \quad \text{j. n. e.}$$

Siin on lõpmatu arv tuletisi ja need tuletised korduvad perioodiliselt.

32. Leida järgmiste funktsioonide teine tuletis.

a) $y = 2x + 3$

i) $y = \sqrt{x}$

b) $y = x^2 + 3x - 1$

k) $y = \frac{x}{x+1}$

c) $y = 2x^2 - 5x + 1$

l) $y = \frac{x-1}{x+1}$

d) $y = x^3 + 3x - 2$

m) $y = \ln x$

e) $y = 2x^3 - 5x + 7$

n) $y = \operatorname{tg} x$

f) $y = x^4 - 3x^3 + x + 3$

o) $y = \operatorname{cotg} x$

g) $y = x^5 - 7x^2 + 2x - 5$

p) $y = \arcsin x$

h) $y = \frac{1}{x}$

q) $y = \operatorname{arctg} x$

33. Leida järgmiste funktsioonide kolm esimest tuletist.

a) $\frac{1}{x^2}$

d) $\sqrt{1-x}$

g) $x^3 + \sqrt{x}$

b) \sqrt{x}

e) $\frac{1}{1-x^2}$

h) $x^4 - \sqrt[3]{x}$

c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

f) $\sqrt[3]{2-x}$

i) $\frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{x^2}$

34. Leida järgmiste funktsioonide n -ne tuletis $\frac{d^n y}{dx^n}$.

a) $y = (1+x)^m$ *)

b) $y = a^x$

c) $y = e^x$

d) $y = \lg(1+x)$

§ 12. Teise tuletise vahekorrald esimese tuletise ja algfunktsiooniga.

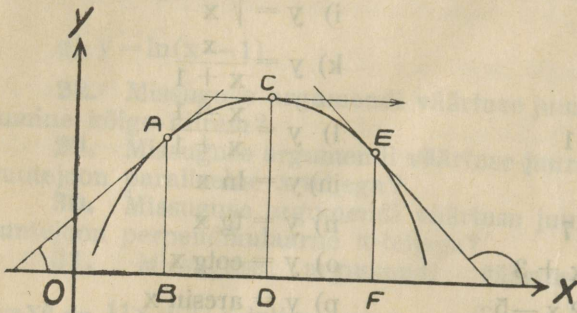
Et teine tuletis järgneb sama reeglite põhjal esimesest, kui see viimane järgneb algfunktsioonist, siis peab teine tuletis esimesega ka samasuguses vahekorras olema, kui esimene tuletis on algfunktsiooniga. Sellepärast võime nende vahekorra määramiseks ütelda: **1) teine tuletis peab olema positiivne argumenti niisuguses vahemikus, kus esimene tuletis kasvab; 2) teine tuletis peab olema negatiivne argumenti niisuguses vahemikus, kus esimene tuletis kahaneb; 3) teine tuletis peab**

*) Siin olgu m , kui teda täisarvuna võtta, suurem kui n .

olema null argumendi niisuguste väärtuste juures, kus esimesel tuletisel on kas maksimum ehk miinimum j. n. e.

Teise tuletise ja algfunktsiooni vahekorra selgitamiseks tarvitame jälle funktsiooni graafilist kujutust.

Olgu funktsiooni kujutuseks kõverjoone lõik AE (Joon. 19), mille kohta võib ütelda, et ta on kumer, kui ülalt vaadata.



Joon. 19.

Jälgides selle kõverjoone puutuja tõusunurga tangensi muutumist, kui puudetäpp nihkub täpist A täpini E, leiame, et see tangensi väärtus kahaneb, olles esialgu positiivne, kunni puudetäpp jõuab täppi C. Siin on puutuja tõusunurga tangens null. Kui puudetäppi veel edasi nihutame, siis muutub tõusunurga tangens negatiivseks, aga tema väärtus kahaneb järjest, sest tõusunurk, muutudes nürriks, ka-

haneb. Sellega kahaneb ka joonisel 19 kujutatud vahemikus funktsiooni esimene tuletis ja meie võime, arvesse võttes esimese ja teise tuletise vahekorra, ütelda järgmise lause:

1. Argumendi vahemikus, kus funktsiooni kujutus on ülalt vaadates kumer, on teine tuletis negatiivne.

Samuti näeme joonisel 20, kus asub funktsiooni kujutuse õõnes osa, kui ülalt vaadata, et siin puutuja tõusunurga tangens kasvab, kui puudetäpp nihkub pahemalt paremale poole.

Nimelt on selle tangensi väärtus esmalt negatiivne, kunni ta kasvades nulliks muutub, kui puudetäpp täppi C jõuab, ja peale selle kasvab ta järjest edasi, olles juba positiivne. Sellepärast võime ütelda veel järgmise lause:

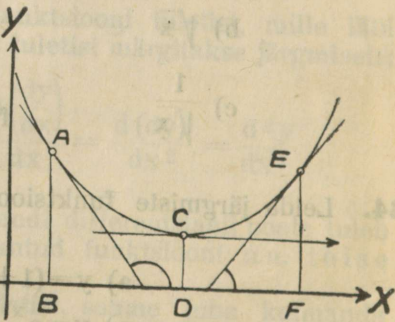
2. Argumendi vahemikus, kus funktsiooni kujutus on ülalt vaadates õõnes, peab teine tuletis olema positiivne.

Tähendab, me võime otsustada teise tuletise märgi järele algfunktsiooni kujutuse kõveruse üle ja nimelt selle õõnsuse ehk kumeruse mõttes. Kui funktsiooni kujutuse õõnsale osale järgneb kumer osa ehk ümberpöördukt, siis peab leiduma selle funktsiooni kujutusel täpp, mis neid osi seob (Joon. 21 ja 22) ja mille juures funktsiooni kujutus üle läheb ühest kõveruse seisukorrast teise juure.

Niisugust täppi nimetakse kõverjoone **käänu täpiks**. Selles täpis kujutatud puutejoon lõikab kõverat, lahutades eelmise õõnsa osa järgnevast kumerast ehk ümberpöördukt. Sellele täpile vastava argumendi väärtuse juures peab funktsiooni teine tuletis oma märki muutma, see tähendab: tema väärtus peab võrduma nulliga. Esimesel tuletisel aga peab siin olema kas maksimum ehk miinimum väärtus.

Eelmisest harutusest järgneb lause:

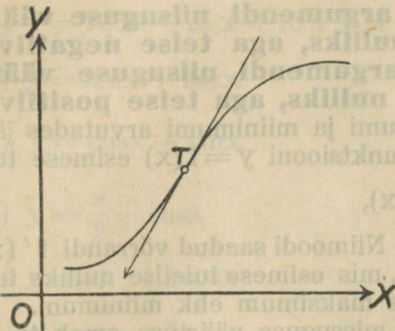
Jälgides selle kõverjoone puutuja tõusunurga tangensi muutumist, kui puudetäpp nihkub täpist A täpini E, leiame, et see tangensi väärtus kahaneb, olles esialgu positiivne, kunni puudetäpp jõuab täppi C. Siin on puutuja tõusunurga tangens null. Kui puudetäppi veel edasi nihutame, siis muutub tõusunurga tangens negatiivseks, aga tema väärtus kahaneb järjest, sest tõusunurk, muutudes nürriks, ka-



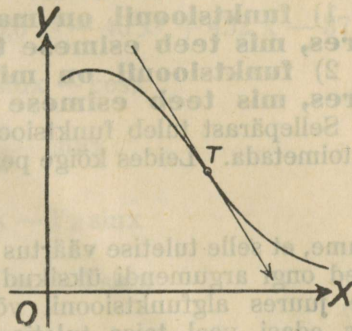
Joon. 20.

3. Teine tuletis on null argumendi niisuguse väärtuse juures, kus algfunktsiooni kujutusel on käänud täpp.

Et funktsiooni ja tema kahe esimese tuletise vahekorda tegelikult näha, selleks on kujutatud joonisel 23 korraga funktsioon $y = \frac{x}{2} + \sin x$ ja tema



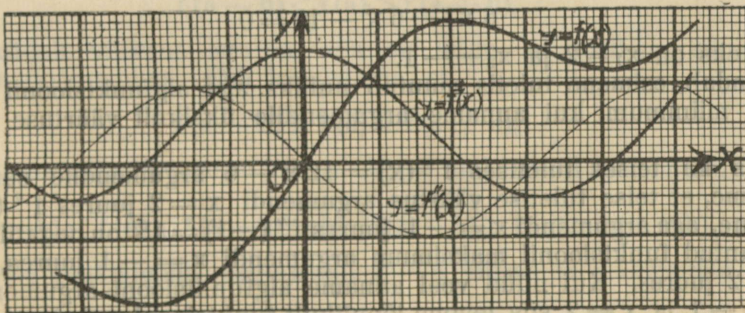
Joon. 21.



Joon. 22.

kaks esimest tuletist. Mitmesugustele argumendi väärtustele vastavalt arvu-
tatud funktsiooni ja tema tuletiste väärtused on korraldatud järgmises tabelis:

X	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$
y	-1,91	-1,79	-1,39	-0,76	0	0,76	1,39	1,79	1,91	1,81	1,57	1,33	1,23	1,36	1,75
y'	0	0,5	1	1,36	1,5	1,37	1	0,5	0	-0,37	-0,5	-0,37	0	0,5	1
y''	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0	0,5	0,87	1	0,87



Joon. 23.

35. Kujutada ühel ja samal joonisel iga järgmine funktsioon ühes oma kahe esimese tuletisega.

- a) $y = \frac{x}{3} - \sin x$ b) $y = \frac{x}{2} + \cos x$ c) $y = x - \cos x$
 d) $y = \frac{1}{4}(x^3 - 11x - 4)$; e) $y = \frac{1}{4}(x^4 - 8x + 9)$ f) $y = \frac{1}{2}(x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12)$.

§ 13. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi arvufamine.

Põhjendades funktsiooni ja tema tuletiste vahekordade peale, võime kokkuvõetult lühidalt ütelda:

1) funktsioonil on maksimum argumendi niisuguse väärtuse juures, mis teeb esimese tuletise nulliks, aga teise negatiivseks.

2) funktsioonil on miinimum argumendi niisuguse väärtuse juures, mis teeb esimese tuletise nulliks, aga teise positiivseks.

Sellepärast tuleb funktsiooni maksimumi ja miinimumi arvutades järgmiselt toimetada. Leides kõige pealt antud funktsiooni $y = f(x)$ esimese tuletise

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

nõuame, et selle tuletise väärtus oleks null. Niimoodi saadud võrrandi $f'(x) = 0$ juured ongi argumendi üksikud väärtused, mis esimese tuletise nulliks teevad, mille juures algfunktsioonil võib olla kas maksimum ehk miinimum. Kirjutades edasi veel teise tuletise, vaatame missuguse väärtuse omab ta leitud argumendi üksikute väärtuste juures. See teise tuletise väärtus, selle järele kas ta saab negatiivne ehk positiivne, ütleb meile juba lõpulikult, missuguse argumendi väärtuse juures on meie funktsioonil maksimum ja missuguse juures miinimum.

Teadsa saades nõnda viisi argumendi väärtused, mille juures algfunktsioonil on maksimum ja miinimum, võime lõpuks arvutada funktsiooni maksimumi ja miinimum väärtused ise, andes algfunktsiooni argumendile vastava väärtuse.

Näiteks olgu vaja leida funktsiooni

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$$

maksimumi ja miinimumi.

Nõudes, et antud funktsiooni esimene tuletis võrduks nulliga, saame võrrandi

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

mille juurteks on $x_1 = 2$ ja $x_2 = -1$.

Tähendab, esimene tuletis muutub nulliks, aga algfunktsioonil on maksimum ehk miinimum, kui anname argumendile üksikult väärtuse $x = 2$ ehk $x = -1$.

Andes ka teises tuletises $f''(x) = 12x - 6$ argumendile samad väärtused, leiame, et teise tuletise väärtus argumendi $x = 2$ juures $f''(2) = +18$ on positiivne, aga argumendi $x = -1$ juures $f''(-1) = -18$ on negatiivne. Järjekult on antud funktsioonil maksimum argumendi $x = -1$ juures, aga miinimum $x = 2$ juures. Kui nüüd veel anname algfunktsiooni argumendile väärtused $x = -1$ ja $x = 2$ siis leiame lõpulikult funktsiooni maksimum-väärtuse: $f(-1) = 13$ ja miinimum-väärtuse: $f(2) = -14$.

Leida järgmiste funktsioonide maksimumi ja miinimumi.

36. a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

b) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

c) $y = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 10$

d) $y = 4x^3 + 6x^2 - 9x + 6$

e) $y = 5x^3 - 19x^2 + 24x + 15$

f) $y = 6x^3 - 7x^2 - 4x + 2$

g) $y = 8x^3 - 13x^2 - 8x + 17$

h) $y = 6\frac{2}{3}x^3 - 14x^2 - 147x + 75$

i) $y = x^3 - 6x + 8$

k) $y = 2x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 36x + 30$

37. a) $y = x^4 - 32x + 3$ b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 10$
 c) $y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 14$ d) $y = 9x^4 - 14x^3 - 21x^2 + 36x - 36$
 e) $y = 1,2x^5 - 5,25x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 30$ f) $y = 3x^5 + 40x^3 - 135x + 13$
 g) $y = 12x^5 - 25x^3 + 15x + 11$ h) $y = 0,6x^5 - 40x^3 + 432x - 37$
38. a) $y = \sin x + \cos x$ b) $y = \sin x - \cos x$
 c) $y = \cos x - \sin x$ d) $y = \frac{x}{2} + \sin x$
 e) $y = \frac{x}{2} + \cos x$ f) $y = x - \sqrt{2} \sin x$
 g) $y = x + \sqrt{2} \cos x$ h) $y = \sqrt{3}x + 2 \sin x$
39. a) $y = x - e^x$; b) $y = e^x - x$ c) $y = e^x - \sin x$
 d) $y = e^x - x + \cos x$; e) $y = x - \ln x$; f) $y = x^2 - \ln x$

Täiendavad märkused.

1. Senni me tundsiime funktsiooni maksimumi ja miinimumi lõpulikult ära teise tuletise märgi järele. On aga veel olemas ka teistsugused tunnused. Nimelt kui a on argumenti niisugune väärtus, mille juures funktsiooni $y = f(x)$ esimene tuletis nulliks muutub ja kui arvutades leiame, et

$$f(a-h) < f(a) > f(a+h),$$

kus h on küllalt väikene suurus, siis on selge, et meil on siin tegemist funktsiooni maksimumiga. Ehk kui leiame, et

$$f(a-h) > f(a) < f(a+h),$$

siis peab argumenti väärtuse a juures olema funktsiooni miinimum. Aga kui juhtub, et

$$f(a-h) < f(a) < f(a+h) \text{ ehk } f(a-h) > f(a) > f(a+h),$$

siis ei ole meie funktsioonil argumenti $x = a$ juures ei maksimumi ega miinimumi.

Võime ka esimese tuletise väärtuste põhjal ütelda, et kui

$$f'(a-h) > 0, f'(a) = 0 \text{ ja } f'(a+h) < 0,$$

siis peab $f(a)$ olema maksimum-väärtuseks.

Kui aga

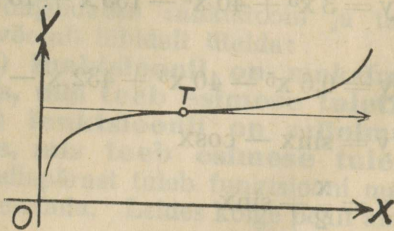
$$f'(a-h) < 0, f'(a) = 0 \text{ ja } f'(a+h) > 0,$$

siis peab $f(a)$ olema miinimum-väärtuseks.

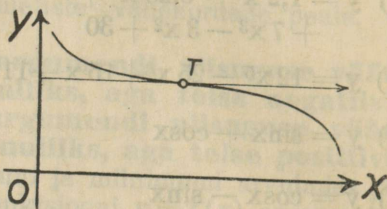
2. Võib juhtuda, et argumenti niisuguse väärtuse juures, kus esimene tuletis nulliks muutub, funktsioonil ei ole ei maksimumi ega miinimumi, vaid

on niisugune käänutäpp, milles puutuja funktsiooni kujutusele on paralleelne x -teljega, nagu joonisel 24 ja 25 näha.

Selle juhtumise tunneme ära teise tuletise järele, mille väärtus siin null peab olema.

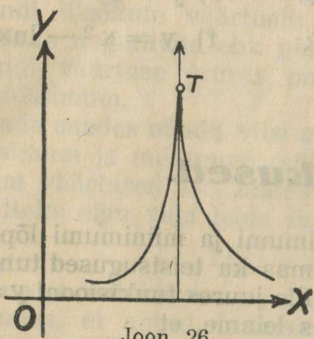


Joon. 24.

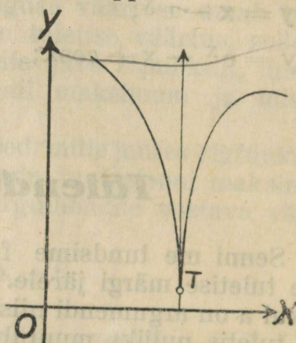


Joon. 25.

Näiteks, muutub funktsiooni $y = x^3 - 15x^2 + 75x + 1$ tuletis $y' = 3x^2 - 30x + 75$ nulliks argumenti $x = 5$ juures. Sama argumenti väärtuse juures muutub ka teine tuletis $y'' = 6x - 30$ nulliks. Täheleb, on meie funktsiooni kujutusel argumenti $x = 5$ juures käänutäpp.

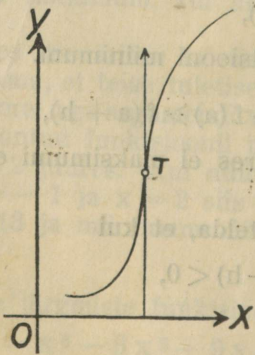


Joon. 26.

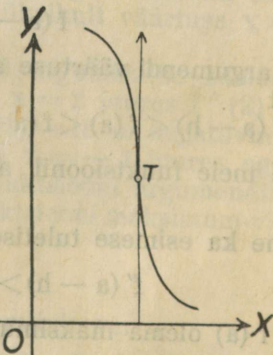


Joon. 27.

3. Funktsioonil võib juhtuda maksimum ehk miinimum ka siis, kui esimene tuletis muutub lõpmatuseks. Niisugused juhtumised on kujutatud joonisel 26 ja 27.



Joon. 28.



Joon. 29.

Siin sünnitab funktsiooni kujutus terava tipu, milles puutuja on perpendikulaarne x -teljega. Kui esimene tuletis muutub lõpmatuseks, siis võib funktsiooni kujutusel olla ka käänutäpp, nagu joonisel 28 ehk 29 näha.

Toome maksimumi ja miinimumi arvutamiseks paar näitust tegelikust elust.

1. Olgu antud papist ruut (Joon. 30), millest on vaja teha karp, lõigates välja nurkade juures väikesed ruudukesed ja pöörates siis küljed üles, soovides et karbi maht saaks võimalikult suur. Kui antud ruudu külg on a ja kui tähendame väljalõigatavate ruudukeste külge x läbi, siis on karbi aluse servaks $a - 2x$ ja kõrguseks x , aga karbi maht, mille tähendame y läbi on siis:

$$y = (a - 2x)^2 x = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3.$$

Siit näeme, et karbi maht y on funktsiooniks, mis oleneb karbi kõrgusest x . Ja sellepärast, et rahuldada ülesande nõudmist, peame leidma selle funktsiooni maksimumi.

Kirjutades esimese tuletise

$$y' = a^2 - 8ax + 12x^2, \text{ leiame et see muutub nulliks, kui } x = \frac{a}{2} \text{ ehk } x = \frac{a}{6}.$$

Teise tuletise järele aga selgub, et maksimum on siis, kui $x = \frac{a}{6}$. Tähendab selleks, et karbi maht kõige suurem saaks, tuleb ta nõnda ehitada, et tema aluse serv oleks 4 korda suurem kõrgusest.

2. On vaja n ühesügest Galvani elementi ühendada patareiks nõnda, et antud välistakistuse T juures voolu tugevus võimalikult suur saaks.

Olgu iga üksiku elemendi elektromootorline jõud e volti, aga sisetakistus t oomi. Kui jagame kõik n elementi rühmadeks, võttes iga rühma x elementi ja ühendame rühmades elemendid paralleelselt, siis on iga rühma elektromootorline jõud samuti kui üksiku elemendi juures e volti, aga sisetakistus on $\frac{t}{x}$ oomi. Ühendades edasi rühmad omavahel põigiti ja silmas pidades,

et rühmade arv on $\frac{n}{x}$, saame oomi seaduse põhjal patarei voolu tugevuse

$$y = \frac{\frac{n}{x} \cdot e}{T + \frac{n}{x} \cdot \frac{t}{x}} = \frac{ne x}{Tx^2 + nt}$$

Et see voolu tugevus maksimum oleks, peab olema

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(Tx + nt) ne - 2T nex^2}{(Tx^2 + nt)^2} = \frac{ne (nt - Tx^2)}{(Tx^2 + nt)^2} = 0.$$

Murru väärtus aga on null siis, kui tema lugeja on null:

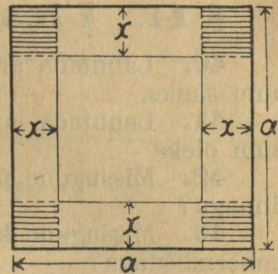
$$ne (nt - Tx^2) = 0$$

ja siit leiame

$$x = \pm \sqrt{\frac{nt}{T}}.$$

Teise tuletise järele aga selgub, et maksimum peab olema, siis kui

$x = + \sqrt{\frac{nt}{T}}$; tähendab sel puhul peab olema: $T = \frac{nt}{x^2}$ ehk sõnadega: et



Joon. 30.

patarei voolu tugevus oleks maksimum, peab selle patarei sisetakistus võrduma välistakistusega.

§ 14. Ülesanded.

40. Lahutada arv a kaheks liidetavaks nõnda, et nende korrutis maksimum saaks.

41. Lahutada arv a kaheks teguriks nõnda, et nende summa miinimum oleks.

42. Missugune püstkülik, mille ümbermõõt on $2p$, on kõige suurema pinnaga?

43. Missugune kõigist püstkülikutest, mille pind on a^2 , on kõige vähema ümbermõöduga?

44. Missugune võrdhaarne kolmnurk, mille haar on a , on kõige suurema pinnaga?

45. Missugune kõigist kolmnurkadest, mille kahe külje summa on S ja nende külgede läbi sünnitatud nurk on x , on kõige suurema pinnaga?

46. Missugune kõigist kolmnurkadest, mille kahe külje summa on S ja kolmas külg on a , on kõige suurema pinnaga?

47. Missugune kõigist võrdhaarsetest kolmnurkadest, mille ümbermõõt on $2p$, on kõige suurema pinnaga?

48. Ruudu sisse on vaja joonestada uus ruut nõnda, et selle pind oleks võimalikult väikene, aga tema tipud asuksid antud ruudu külgedel. Kuidas seda teha?

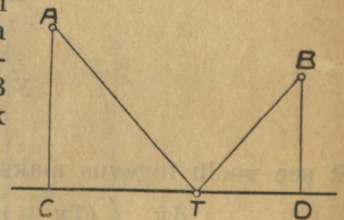
49. Antud täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on a ja b . Selle kolmnurga sisse on vaja kujutada püstkülik nõnda, et tema üks tipp asuks hüpotenuusil ja kaks külge asuksid kaatetidel. Kui suured tuleb võtta püstküliku küljed, et tema pind saaks võimalikult suur?

50. Täisnurkses koordinaadistikus on antud täpp $T(a, b)$. Läbi selle täpi on vaja tõmmata sirgjoon, mis koordinaatide telgi lõikaks täppides $A(x, 0)$ ja $B(0, y)$. Kui suur tuleb võtta OA , selleks et AB võimalikult lühikene saaks?

51. Antud üheloop sirgjoont LM kaks täppi A ja B (Joon. 31) nõnda, et perpendikulaar $AC = a$ ja $BD = b$, aga lõik $CD = c$. Leida antud sirgjoonel niisugune täpp T , et lõikude summa $AT + TB$ saaks miinimum. Kui suur tuleb selleks võtta lõik CT ?

52. Antud on ringi sektori ümbermõõt

$$2x + y = 2a,$$



Joon. 31.

kus x on raadius ja y on sektori kaare pikkus. Leida niisugused x ja y väärtused, et jäädava ümbermõõdu $2a$ juures sektori pind oleks maksimum.

53. Antud ringjoone sisse vaja joonestada võrdhaarne kolmnurk, mille a) pind oleks maksimum, b) ümbermõõt oleks maksimum.

54. Antud ringjoone sisse joonestada võrdhaarne kolmnurk, mille tipp asuks sentris ja mille pind oleks maksimum. Kui suur tuleb võtta kolmnurga alus?

55. Antud ringjoone sisse vaja joonestada püstkülik, mille a) pind oleks maksimum, b) ümbermõõt oleks maksimum.

56. Antud ringi sektor, mille raadius $AS = r$ (Joon. 32) ja nurk $ASE = \alpha$. Selle sektori sisse on vaja joonestada traapets $ACDB$ nõnda, et tema pind võimalikult suur saaks. Kui suur tuleb selleks võtta nurk CSE ?

57. Kui suur tuleb võtta ringi sektori raadius x ja sentri nurk α , et antud sektori pinna a^2 juures sektori ümbermõõt saaks miinimum?

58. Kui suur tuleb võtta püst-ruut-prisma aluse serv x , et antud mahu a^3 juures prisma üldine pind saaks miinimum?

59. Missugune peab olema püst-ruut-prisma, et antud üldise pinna juures tema maht oleks maksimum?

60. Kui suur tuleb võtta korrapärase kolmnurkse püramiidi aluse serv x , et antud külgserva a juures püramiidi maht saaks maksimum?

61. Kui suur tuleb võtta korrapärase ruut-püramiidi aluse serv x , et antud külgserva a juures püramiidi maht saaks maksimum?

62. Kui suur tuleb võtta püst-silindri aluse raadius x ja kõrgus y , et antud mahu M juures silindri üldine pind võimalikult väikene saaks?

63. Kui suur tuleb võtta püst-silindri aluse raadius x ja kõrgus y , et antud üldise pinna $2P$ juures silindri maht võimalikult suur saaks?

64. Kui suur tuleb võtta püst-silindri aluse raadius x ja kõrgus y , et antud telglõike ümbermõõdu $2p$ juures silindri maht võimalikult suur saaks?

65. Kui suur tuleb võtta püst-koonuse aluse raadius x ja kõrgus y , et kujutaja joone antud pikkuse a juures koonuse maht maksimum-väärtuse omaks?

66. Antud püst-koonus, mille aluse raadius on r ja kõrgus on h . Selle koonuse ümber on vaja kujutada teine püst-koonus nõnda, et esimese tipp asuks teise koonuse aluse sentris. Kui suur tuleb võtta teise koonuse aluse raadius x ja kõrgus y , et tema maht võimalikult väikene saaks?

67. Antud püst-koonusesse on vaja kujutada püstsilinder nõnda, et tema maht võimalikult suur saaks. Kui suur tuleb võtta selleks silindri raadius x ja kõrgus y , kui koonuse raadius on r ja kõrgus on h ?

68. Antud ringi pind radiusega r . Sellest pinnast tuleb välja lõigata sektor ja ülejäänud osa painutada koonuse pinnaks. Kui suur tuleb võtta väljalõigatava sektori sentri nurk α , et koonuse maht saaks võimalikult suur?

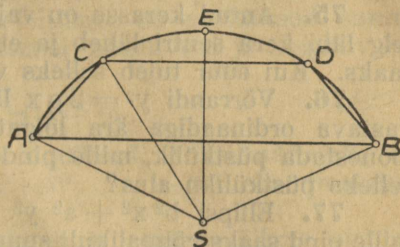
69. Antud kera radiusega r . Lõigates selle kera kolmeks kahe paralleelse ja sentrist ühekaugusel asuva tasapinnaga, on vaja kujutada kera iga osasse uus võimalikult suur kera. Kui kaugel (x) sentrist tuleb tõmmata lõikpinnad, et sissejoonestatud kerade mahtude summa saaks miinimum?

70. Antud kera sisse on vaja kujutada püstsilinder, mille külgpind saaks võimalikult suur. Kui suur tuleb võtta selle silindri aluse raadius x ja kõrgus y ?

71. Antud kera sisse on vaja kujutada püstsilinder, mille maht saaks võimalikult suur. Kui suur tuleb võtta selle silindri aluse raadius x ja kõrgus y ?

72. Kujutada kera sisse püst-koonus, mille maht oleks võimalikult suur. Kui suur tuleb selleks võtta koonuse aluse raadius x ja kõrgus y ?

73. Antud poolkera sisse on vaja joonestada silinder, mille külgpind saaks võimalikult suur. Kui suur tuleb selleks võtta silindri raadius x ja kõrgus y ?



Joon. 32.

74. Antud poolkera sisse on vaja joonestada koonus, mille teljeks oleks poolkera keskmine raadius ja mille tipp asuks poolkera aluse sentris. Kui suur tuleb võtta koonuse raadius ja kõrgus, et tema maht võimalikult suur saaks?

75. Antud kerasse on vaja puurida silindriline õõnsus, nõnda et selle telg läbi kera sentri läheb ja et ülejäänud keha üldine pind võimalikult suur saaks. Kui suur tuleb selleks võtta silindri raadius x ja kõrgus y ?

76. Võrrandi $y^2 = 2px$ läbi määratud paraabolist on abstsissile $x = a$ vastava ordinaadiga ära lõigatud segment. Selle segmenti sisse on vaja joonestada püstkülik, mille pind oleks võimalikult suur. Kui suur tuleb võtta selleks püstküliku alus?

77. Ellipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sisse on vaja joonestada püstkülik, mille pind saaks võimalikult suur. Kui suur tuleb võtta selle püstküliku alus?

78. Ülalpool x -telge asuva ellipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ poolpinna sisse on vaja joonestada traapets, mille pind saaks võimalikult suur. Kui suur tuleb võtta niisuguse traapetsi kõrgus?

79. Horisontaal-tasapinnal seisab vertikaalne teivas, mille pikkus on a . Missugusel kaugusel sellest teivast peab asuma vaatleja, et teivast kõige suurema nurga all näha, kui vaatleja silma kõrgus horisontaal tasapinnast on h ja kui $h > a$?

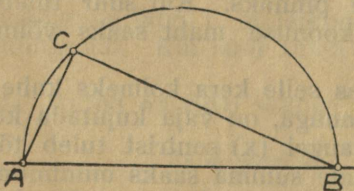
80. Sirgjoone täppides A ja B asuvad kaks valgusallikat, mille valguse tugevused J_1 ja J_2 suhtuvad nagu $m^3 : n^3$. Kui kaugel täpist A asub selle sirgjoone täpp C , mis kõige nõrgemini on valgustatud?

(Valgustus on proportsionaalne valgus-allika tugevusega ja vastuproportsionaalne valgus-allika kauguse ruuduga).

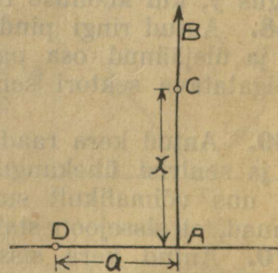
81. Antud kaks valgustäppi A ja B , mille valguse tugevused J_1 ja J_2 suhtuvad nagu $m^2 : n^2$. Kujutades $AB = a$ kui diaameetri peale (Joon. 33) poolringi, leida sellel poolringil täpp C , mis kõige nõrgemini on valgustatud?

82. Horisontaalse tasapinna kohal täpis C asub valgus-allikas, mis vertikaalset sirgjoont AB mööda liikuda võib (Joon. 34). Kui kõrgele tuleb asetada see valguse-allikas, et tasapinna täpp D , mille kaugus täpist A on $AD = a$, võimalikult tugevasti oleks valgustatud?

(Valgustus on proportsionaalne nurga $\varphi = \angle CDA$ siinusega).



Joon. 33.



Joon. 34.

83. Täisnurkse koordinaadistiku y -telje täpp A liigub ühtlase kiirusega v_1 algustäpi poole. Silmapilgul kui $AO = a$, hakkab liikuma algustäpist peale teine täpp x -telge mööda samuti ühtlase kiirusega v_2 . Kui suure aja (t) pärast peale nimetatud silmapilku saab nende liikuvate täppide kaugus üksteisest kõige vähemaks?

§ 15. Lõpmatu arvridade koonduvus.

1. Nimetame lõpmatu arvida

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$, kus n on positiivne täisarv, mis piiramatult suurenedades võib **positiivseks**, sel puhul kui kõik liikmed on positiivsed suurused, ja **vahelduvaks**, kui liikmed on vaheldamisi positiivsed ja negatiivsed. Vahelduv rida oleks näituseks:

$$+ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \dots (1)^{n-1} a_n.$$

Kui rea liigeteks on muutuva suuruse x astmed, mille näitajaks on järjest kasvav positiivne täisarv nagu $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n$, siis nimetakse rida **astmeliseks** ehk **potentsiaalseks**.

2. Kui lõpmatu rida on niisugune, et tema n esimese liikme summa liikmete arvu n piiramatult kasvamise juures, kui muutuv suurus ligineb lõpuliku jäädava suuruse poole, siis nimetakse seda lõpmatu rida **koonduvaks**.

Vastasel juhtumisel nimetakse rida **laienevaks**.

Koonduv on näiteks lõpmatu kahanev geomeetriline rida, sest tema liikmete summa ligineb, meie teades (v. A. I p. 3, § 3) liikmete arvu kasvamisega lõpuliku piiri poole.

Lõpmatu kasvav geomeetriline rida aga on laienev. Siin on rea summa liikmete lõpmatu kasvamise puhul ise lõpmatu suurenev suurus, millel ei ole mingisugust lõpulikku piiri.

Laienev on ka rida:

$$+ a - a + a - a \dots$$

mille liikmete summa küll ei või lõpmatult kasvada, kuid muutudes ja omades vaheldamisi väärtused 0 ja a ei ligine ka mingisuguse kindla piiri poole, nagu see peaks olema koonduva rea juures.

3. Seame omale eesmärgiks määrata lõpmatu arvridade koonduvuse tingimused ja valime selleks kõige pealt positiivse rea.

Arusaadav on, et positiivne rida

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$$

võib koonduda ainult siis, kui ta kahanev on, nõnda et $a_1 > a_2$,

$a_2 > a_3, \dots, a_{n-1} > a_n$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, sest vastasel juhtumisel peaks

rea summa liikmete arvu piiramatult kasvamise juures lõpmatu suurenema.

Rea kahanemine on tema koondumiseks tingimata tarvilik nõue, kuid sellest nõudest ei ole veel küllalt selleks, et tema põhjal koonduvuse peale kindel olla. Kõik kahanevad read ei ole veel koonduvad.

Näiteks on n. n. harmooniline rida $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$,

küll kahanev, kuid mitte koonduv.

Et seda näidata, selleks kogume selle rea liikmed sulgudesse, nõnda et tema liikmete summa S oleks järgmiselt avaldud:

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

kus igas järgmistes sulgudes oleks kaks korda rohkem liikmeid, kui eelmises. Kui viimase võrduse paremal pool iga sulgude sees iga liikme asemele võtta

selle sulgude viimane liige, siis väheneb sellega sulgude väärtus ja meie võime kirjutada, et

$$S > 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Nüüd aga on iga sulgude sees asuvate liikmete summa jäädav suurus ja nimelt võrdne $\frac{1}{2}$ -ga. Sellepärast võime kirjutada:

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots$$

Et aga antud rea liikmete arvu piiramatu kasvamisega ka sulgude arv piiramatult kasvab, siis on selle juures viimase võrratuse parem pool lõpmatu suurenev suurus. Temast suurem aga on antud rea liikmete summa S ja sellepärast antud rida ei saa olla koonduv. Siit järgneb, et on vaja leida uus tingimus, mis oleks nõutav kahanevalt realt, et see koonduv oleks. Niisugune tingimus sisaldub järgmises lauses:

Kui kahaneva positiivse rea $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ iga järgneva liikme suhe eelmisesse on vähem kui 1 ja ka $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, siis on rida koonduv.

Tõendus:

Kui meil tegemist on niisuguse reaga, mis viimase lause nõuet rahuldab, siis võime kirjutada:

$$\frac{a_2}{a_1} = q < 1; \frac{a_3}{a_2} = q_2 < 1; \frac{a_4}{a_3} = q_3 < 1; \dots \dots \frac{a_{n+1}}{a_n} = q_n < 1,$$

kus n võib olla kui tahes suur arv.

Kujutades ühe niisuguse murru q , mis oleks vähem kui 1, aga siiski suurem igast üksikust $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$, võime kirjutada:

$$\frac{a_2}{a_1} < q, \frac{a_3}{a_2} < q, \frac{a_4}{a_3} < q, \dots \dots \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

ehk kui kaotame iga võrratuse pahema poole nimetaja:

$$a_2 < a_1 q, a_3 < a_2 q, a_4 < a_3 q, \dots \dots a_{n+1} < a_n q.$$

Nende võrratuste põhjal aga leiame, et

$$a_2 < a_1 q, a_3 < a_1 q^2, a_4 < a_1 q^3, \dots \dots a_{n+1} < a_1 q^n.$$

Ehk võttes viimaste võrratuste vastavate poolte summad:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots \dots a_{n+1} < a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^n$$

Kui nüüd veel viimase kirjutuse kummagi poolele juure lisada a_1 , siis muutub pahem pool antud rea m esimese liikme summaks, kus $m = n + 1$ ja meie võime kirjutada, märkides seda summat tähega S_m :

$$S_m < a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots \dots a_1 q^{m-1}.$$

Siin aga on parem pool kahanev geomeetriline rida (sest $q < 1$), mille väärtus liikmete arvu m piiramatu kasvamisega ligineb lõpuliku jäädava suuruse $\frac{a_1}{1-q}$ poole, kui piiri poole. Sellepärast on

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m \approx \frac{a_1}{1-q}$$

kust näeme, et meie lõpmatu rea summa piir on vähem ühest lõpulikust suurusel ja sellepärast on tema ka igatahes lõpulik ja meie rida on koonduv.

Katsume nüüd järele, kuidas on lugu viimase tingimuse mõttes meile juba tuntud harmoonilise reaga. Selle rea juures on n -ne liige $a_n = \frac{1}{n}$ ja

järgmine $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Sellepärast on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}.$$

Kui viimase piiri märgi all seisva murru lugejat ja nimetajat jagada arvuga n , siis saame:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}},$$

kus $\frac{1}{n}$ on n piiramatu kasvamise puhul lõpmatu vähenev suurus, mille piiriks on null ja sellepärast:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

ja siit näemegi, et harmooniline rida koonduvuse tingimust ei rahulda *).

4. Võtame nüüd vahelduva rea:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$$

ja tõendame, et **niisugune rida on koonduv siis, kui temale vastav positiivne rida koonduv on.**

Sest tõesti, kui oletame, et vastav positiivne rida

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots$$

koonduv on, siis peavad ühtlasi koonduvad olema ka read:

$$\begin{aligned} &1) a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots \\ &2) a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots \end{aligned}$$

ja nende summad peavad liikmete arvu kasvamisega liginema lõpulikkude jäädavate piiride poole. Kui tähendame neid piire vastavalt tähiga A ja B , siis võime ütelda, et antud vahelduva rea summa piiriks peab olema $A - B$, sest vahelduv rida ise on ridade 1) ja 2) vahe. Et aga $A - B$, kui lõpulikkude jäädavate suuruste vahe, ise on lõpulik jäädav suurus, siis peab antud vahelduv rida praegusel juhtumisel olema koonduv.

Vahelduva rea kohta võib veel tõendada lause, mis järgmiselt kõlab:

Vahelduv rida on koonduv ka siis juba, kui tema liikmete absoluutsed väärtused järjest kahanevad, nõnda et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Tõendus:

Kui meile antud on niisugune vahelduv rida:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$$

siis võime tema asemele järgmist kirjutada:

$$a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - (a_6 - a_7) - \dots$$

*) Kui rea juures $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, siis jääb koonduvuse küsimus üldse lahtiseks.

Niisugusel puhul peab veel lisa tingimusi uurima, et lõpulikult otsustada, kas rida on koonduv ehk laienev.

Siin on nüüd selle tõttu, et antud rea liikmete absoluutsed väärtused järjest kahanevad, sulgude sees asuvad vahed ka järjest kahanevad positiivsed suurused. Sellepärast on rea summa igal juhtumisel vähem kui esimene liige a ja rida ise on koonduv.

Märkus. Arvrida nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui temale vastav positiivne rida koonduv on.

Nõnda näiteks on geomeetiline rida

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - + \dots$$

absoluutselt koonduv, aga rida

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots$$

ei ole absoluutselt koonduv, sest sellele reale vastav positiivne rida kui meile tuntud harmooniline rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

on laienev.

5. Kui meil tegemist on astmelise reaga

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots,$$

siis on arusaadav, et selle rea liikmete väärtused ja tema koonduvus olenevad muutuva suuruse x väärtustest.

Meie ülesanne on siin määrata, missuguse x väärtuste juures niisugune rida veel koonduv on.

Kui oletada, et liikmed $a_n x^n$ ja $a_{n+1} x^{n+1}$ võivad olla mitmesuguste märkidega, siis on eelmiste lausete põhjal selleks, et rida veel koonduv oleks vaja, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x \right| < 1$$

ehk kui lühidalt tähendada $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$, siis $q \cdot |x| < 1$,

kust leiame, et

$$|x| < \frac{1}{q}$$

Siit näeme, et astmeline rida on koonduv, kui argumendi x väärtus on niisugune, et

$$-\frac{1}{q} < x < +\frac{1}{q}$$

Sellepärast nimetatakse ka $-\frac{1}{q}$ ja $+\frac{1}{q}$ läbi määratud arvude vahemiku

astmelise rea **koonduvusvahemikuks**.

Katsume näiteks järele, millal on astmeline rida

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots$$

koonduv.

Selleks leiame

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} \right| = 1.$$

Sellepärast, et meie rida koonduv oleks, peab olema:

$$-1 < x < 1,$$

seega x võib olla igasugune lihtmurd.

Ülesanded.

Järele katsuda järgmised read koonduvuse suhtes.

84. a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$ b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots$
 c) $1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{4^2} + \dots$ d) $\frac{1}{2^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{6^2} + \frac{7}{8^2} + \dots$
 e) $1 + \frac{3}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{7}{4!} + \dots$ f) $1 + \frac{2^2}{2 \cdot 2!} + \frac{2^3}{3 \cdot 3!} + \frac{2^4}{4 \cdot 4!} + \dots$
 g) $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} - \dots$ h) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$
 i) $\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \dots$ k) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$
 l) $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \dots$ m) $1 + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{5}{4!} + \dots$
 n) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$ o) $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots$
 p) $\frac{1}{2!} + \frac{2^2}{3!} + \frac{3^2}{4!} + \frac{4^2}{5!} + \dots$ q) $3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \dots$
 r) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} + \frac{9}{4 \cdot 5} + \dots$ s) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 9} + \dots$
 t) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \dots$
 u) $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^3} + \dots$

Määrata järgmiste astmeliste ridade koonduvus-piirkond.

85. a) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$
 b) $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \dots$
 c) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$
 d) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$
 e) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^4}{2^4} + \frac{x^5}{2^5} + \dots$

$$f) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2x}{2 \cdot 3} + \frac{4x^2}{3 \cdot 4} + \frac{8x^3}{4 \cdot 5} + \dots$$

$$g) \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$h) \frac{2x}{1!} + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^4 x^4}{4!} + \dots$$

$$i) \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$k) \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^5}{8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^7}{10} + \dots$$

$$l) 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

§ 16. Funktsioonide ridadeks arendamine.

1. Määramatu koefitsientide meetod.

Kui meil tegemist on mõnesuguse funktsiooniga ja selle juures tarvis läheb mitmesugustele argumentide väärtustele vastavaid funktsiooni väärtusi arvutada, siis on seda sagedasti kergem teha peale selle, kui meie antud funktsiooni avaldame astmelise rea näol ehk, nagu üteldakse, reaks arendame. Ühe võimaluse funktsioonid reaks arendada annab n. n. määramatu koefitsientide meetod.

Määramatu koefitsientide meetod ise põhjeneb järgmise lause peale:

Kui mingisugune funktsioon arendub astmeliseks reaks, mis on koonduv argumentide vahemikus — $a < x < a$, siis ei ole võimalik teda selle argumentide vahemikus teistsuguseks reaks arendada.

Tõendamiseks oletame, et meil on tegemist funktsiooniga, mis arendub argumentide koonduvus-vahemikus astmeliseks reaks nõnda, et

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad 1)$$

Kui nüüd sama funktsioon samasuguses argumentide vahemikus arenduks veel teistsuguseks reaks, näiteks:

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots \quad 2)$$

siis peavad need read 1) ja 2) koonduvus-vahemikust võetud argumentide väärtuse juures võrdsed olema. Nõnda siis:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots \quad 3)$$

Et aga argumentide väärtus $x=0$ igal juhtumisel ka asub koonduvus-vahemikus, siis leiame võrdusest 3), andes argumentidele väärtuse $x=0$, et

$$a_0 = b_0,$$

mille tõttu leiame, lahutades võrduse 3) mõlemate pooltest võrdsed liikmed, uue võrduse:

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots \quad 4)$$

Nüüd võime mõelda argumentide ühe väärtuse koonduvus-vahemikust, mis oleks suurem ehk vähem kui null, ja jagada võrduse 4) mõlemad pooled selle argumenti väärtusega, mille tagajärjel saame võrduse:

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \dots \quad 5)$$

Aga siit leiame, andes jälle argumentidele väärtuse $x = 0$, et ka

$$a_1 = b_1$$

Kui nüüd samas sihis edasi töötame, lahutades võrduse 5) mõlematest pooltest võrdsed liikmed a_1 ja b_1 , jagades peale selle mõlemad pooled argumentiga x ja andes lõpuks argumentidele väärtuse $x = 0$, siis leiame, et samuti:

$$a_2 = b_2 \text{ ja n. e.}$$

Siit aga selgub, et read 1) ja 2) ei ole kaks isesugust rida, vaid on üks ja sama rida. Sellega on meie lause ka tõendatud.

Praegu tõendatud lause võiks me järgmiselt väljendada:

Kui kaks koonduvat astmelist rida on võrdsed, siis peavad ka võrdsed olema ühenimeliste argumentide astmete koefitsiendid.

Et selle lause abil antud funktsiooni $f(x)$ reaks arendada, selleks teeme järgmise oletuse:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad 6)$$

kus koefitsiendid $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ on esialgu määramatu suurused. Peale selle muudame algebraliste tehetega abil võrduse 6) nõnda ümber, et ka pahem pool oleks argumentide astmete järele korraldatud rida. Nüüd võime eelmise lause põhjal välja kirjutada, missugused antud koefitsiendid pahemal pool peavad võrdsed olema määramata koefitsientidega paremal pool. Nõndaviisi saame kogu võrrandid, mis määravad meile tundmatu koefitsientide $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ väärtused. Asemele pannes oletatud ritta leitud koefitsiendid, võime saadud rea koonduvus-vahemiku määrata ja teda selles argumentide vahemikus tarvitada.

Näiteks, tahame arendada funktsiooni $f(x) = \frac{1 + 2x - 4x^2}{1 - 3x}$ reaks.

Oletame, et ta arendub järgmiselt:

$$\frac{1 + 2x - 4x^2}{1 - 3x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

ja korrutame selle võrduse mõlemad pooled avaldusega $1 - 3x$, siis muutub ka pahem pool astmeliseks reaks ja meie leiame järgmise võrduse:

$$1 + 2x - 4x^2 = a_0 + (a_1 - 3a_0)x + (a_2 - 3a_1)x^2 + (a_3 - 3a_2)x^3 + (a_4 - 3a_3)x^4 + \dots$$

kust eelmise lause põhjal kirjutame:

$$a_0 = 1; a_1 - 3a_0 = 2; a_2 - 3a_1 = -4; a_3 - 3a_2 = 0; a_4 - 3a_3 = 0 \dots,$$

aga siit leiame, et

$$a_0 = 1; a_1 = 5; a_2 = 11; a_3 = 33; a_4 = 99; \dots \text{ ja me võime lõpulikult}$$

kirjutada:

$$\frac{1 + 2x - 4x^2}{1 - 3x} = 1 + 5x + 11x^2 + 33x^3 + 99x^4 + \dots$$

H a r j u t u s e d.

Arendada reaks määramata koefitsientide meetodi abil järgmised funktsioonid:

- 86.
- | | |
|---------------------------------|----------------------------|
| a) $\frac{1+x}{1-x}$ | b) $\frac{x}{1-x^2}$ |
| c) $\frac{1+x}{(1-x)^2}$ | d) $\frac{1+2x}{1+x-3x^2}$ |
| e) $\frac{1-2x+x^2}{1+2x+x^2}$ | f) $\frac{1+2x}{1-3x}$ |
| g) $\frac{1-3x+5x^2-7x^3}{1+x}$ | h) $\sqrt{1-2x+x^2}$ |
| i) $\sqrt{1+3x-5x^2}$ | k) $\sqrt{1-2x+4x^3+x^5}$ |

2. Taylor'i ja Mac-Laurin'i valemid.

Ka funktsioonide ridadeks arendamise otstarbeks võib kasutada differentsiaalarvutust. Et näiteks, funktsiooni $f(x) = (a-x)^3$ reaks arendada, selleks oletame, et:

$$f(x) = (a-x)^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + 1$$

kus koefitsiendid $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ jälle on esialgu tundmata suurused.

Kui me aga nõuame, et võrdus 1) mitmesuguse x ja eraldi ka $x=0$ juures maksev peab olema, siis leiame just viimast x väärtust asemele pannes esimese koefitsiendi:

$$a_0 = a^3.$$

Et järgmisi koefitsiente leida, selleks kirjutame välja oletatud võrduse (1) mõlemate poolte tuletised:

$$f'(x) = -3(a-x)^2 = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot 3(a-x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \dots$$

$$f'''(x) = -2 \cdot 3 = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 x + \dots$$

$$f^{IV}(x) = 0 = 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 + \dots$$

ja andes nendes võrdustes x -ile jälle väärtuse $x=0$, leiame:

$$a_1 = -3a^2, \quad a_2 = 3a, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 0, \dots$$

mille tõttu saame:

$$f(x) = (a-x)^3 = a^3 - 3a^2 x + 3ax^2 - x^3.$$

Teiseks näiteks arendame reaks funktsiooni $f(x) = \sin x$, oletades tundmatu koefitsientide läbi kirjutatud astmelise rea ja differentsides seda rida:

$$f(x) = \sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots,$$

$$f'(x) = \cos x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots,$$

$$f''(x) = -\sin x = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + 4 \cdot 5a_5 x^3 + \dots,$$

$$f'''(x) = -\cos x = 2.3a_3 + 2.3.4a_4 x + 3.4.5a_5 x^2 + \dots,$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = 2.3.4a_4 + 2.3.4.5a_5 x + \dots,$$

$$f^V(x) = \cos x = 2.3.4.5a_5 + \dots,$$

kust leiame, andes x -ile väärtuse $x = 0$:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{2.3} = -\frac{1}{3!}, a_4 = 0,$$

$$a_5 = \frac{1}{2.3.4.5} = \frac{1}{5!}$$

Pannes lõpuks leitud koeffitsientide väärtused oletatud ritta, saame n. n. siinus-rea:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

See rida on küll lõpmatu, kuid järele katsudes selgub, et ta iga lõpuliik x väärtuse juures koondub on. Sellepärast võib seda rida kasutada siinuse väärtuste arvutamiseks, ainult selleks peab paremal pool kaar x radiaan-mõõdus avaldama.

Näiteks, tahame leida $\sin 1^\circ$ väärtuse. Proportsioonist $x : 2\pi = 1^\circ : 360^\circ$ leiame:

$$x = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = \frac{3,1415927}{180} = 0,0174533.$$

Kui selle argumenti väärtuse paneme siinus-ritta, siis leiame:

$$\sin 1^\circ = 0,0174533 - 0,0000009 = 0,0174524.$$

Ülesanded:

87. Arendada differentsides reaks järgmised funktsioonid:

a) $f(x) = (3+x)^5$

b) $f(x) = \frac{1}{a+x}$

c) " $= \frac{1}{a-x}$

d) " $= \frac{1}{a+x^2}$

e) " $= \frac{1}{(a-x)^2}$

f) " $= \cos x$

88. Siinus-rea abil arvutada seitsme kümnendmäärgi täpsusega järgmiste siinuste väärtused:

a) $\sin 2^\circ$, b) $\sin 3^\circ$, c) $\sin 5^\circ$, d) $\sin 10^\circ$, e) $\sin 15^\circ$.

89. Ülesandes 87, f) leitud koosinus-rea abil arvutada järgmiste koosinuste väärtused:

a) $\cos 1^\circ$, b) $\cos 2^\circ$, c) $\cos 3^\circ$, d) $\cos 5^\circ$, e) $\cos 10^\circ$, f) $\cos 15^\circ$.

Oletame üldiselt, et funktsioon $f(a+x)$ argumenti vahemikus a kuni $a+x$ arendub koonduvaks astmeliseks reaks:

$$f(a+x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad 1)$$

ja differentsime selle võrduse mõlemaid pooli:

$$f'(a+x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots,$$

$$f''(a+x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \dots,$$

$$f'''(a+x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 x + \dots,$$

$$f^{IV}(a+x) = 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 + \dots,$$

Kui nendes võrdustes anname x -ile väärtuse

$$x = 0, \text{ siis leiame:}$$

$$a_0 = f(a); a_1 = f'(a); a_2 = \frac{f''(a)}{2!}; a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}; a_4 = \frac{f^{IV}(a)}{4!}, \dots$$

Pannes need koeffitsientide väärtused võrdusse 1), saame lõpulikult avalduse:

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + f''(a) \frac{x^2}{2!} + f'''(a) \frac{x^3}{3!} + f^{IV}(a) \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Seda avaldust nimetatakse **Taylor'i valemiks**. Tema põhjal on võimalik funktsiooni $f(a+x)$ arendada reaks, kui funktsioon on niisugune, et argumendi vahemikus a kuni $a+x$ tema ise ja tema tuletised on lõpulikud üheväärtuslised ja pidevad funktsioonid.

Kui Taylori valemis anname a -le väärtuse $a=0$, siis saame **Mac-Laurini valemi**:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0) \frac{x^2}{2!} + f'''(0) \frac{x^3}{3!} + f^{IV}(0) \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Nende valemite põhjal saadud ridade summa on võrdne vastava funktsiooni väärtusega muidugi ainult siis, kui argumendi väärtus asub koonduvusvahemikus. Sellepärast peab ikka enne rea tarvitamist määrama tema koonduvusvahemik.

Arendada Taylori ja Mac-Laurini valemite põhjal reaks järgmised funktsioonid:

90.

a) $f(x) = \sqrt{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $f(x) = e^{2x}$

f) $f(x) = e^{\sin x}$

g) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

h) $f(x) = e^x \cdot \sin x$

§ 17. Mõned tähtsamad read ja nende kasufamine.

1. Binoomrida.

Arendades Taylori valemil põhjal reaks funktsiooni $f(x) = (1+x)^n$ saame nõndanimetatud binoomrea:

$$(1+x)^n = nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \dots \quad 1)$$

Binoomi näitaja n võib siin olla mis tahes reaalne arv, sest astmelise funktsiooni differentsimise reegel on üks ja sama, vaatamata selle peale, missugune on astmenäitaja, kui ta aga reaalne on.

Võrreldes rea 1) koeffitsientide Newtoni binoomi valemi koeffitsientidega (v. A. I. V p. § 3), mis oli tõendatud ainult positiivse täisarvulise näitaja jaoks, näeme, et need koeffitsiendid on avaldatud siin sama korra järele binoomi näitaja n läbi.

Et selgusele jõuda avalduse 1) liikmete arvu kohta, selleks kirjutame välja üldise koeffitsiendi, näiteks:

$$a_k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Siit näeme, et kui n on täisarv ja kui $k = n+1$, siis on $n-k+1 = 0$ ja kõik liikmed, millede koeffitsientide märk $k \geq n+1$ peavad puuduma. Sel puhul on meie avaldusel sellepärast lõpulik arv liikmeid, nimelt $n+1$, ja meil on tegemist tuntud Newtoni binoomi valemiga. Kui aga binoomi näitaja n on kas negatiivne ehk murdarv, siis ei muutu nimetatud põhjusel ükski koeffitsient nulliks, meie avalduse 1) parem pool on siis lõpmatu, n. n. binoomi rida.

Et teada, millal binoomi rida tarvitada võime, selleks määrame tema koondusvahemiku.

Kirjutades:

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{n-k}{k+1} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n}{k} - 1}{1 + \frac{1}{k}} \right| = 1,$$

leiame:

$$|x| > 1 \text{ ehk } -1 > x > +1.$$

Tähendab binoomi rida on koonduv, kui x on lihtmurd.

Binoomi rea tegelik tähtsus seisab selles, et tema abil on võimalik irratsionaalse juure väärtust arvutada kui tahes suure täpsusega, kuna logaritmi tabel annab niisuguse väärtuse ainult piiratud täpsusega.

Näiteks, olgu leida $\sqrt{15}$.

Selleks kirjutame arvu 15 asemel kahe arvu algebralise summa nõnda, et üks liigetest oleks arvule 15 kõige ligemal seisev täisarvu ruut, praegusel juhtumisel 16, ja muudame, korrutades ja jagades saadud summa selle ruuduga, niisuguseks ümber, et esimene liige saaks võrdne ühega:

$$\sqrt{15} = \sqrt{16-1} = \sqrt{16\left(1-\frac{1}{16}\right)} = 4 \sqrt{1-\frac{1}{16}} = 4 \left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Edasi leiame eraldi $\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$ binoomi rea abil, mis nüüd koonduv saab

$$\text{sest } |x| = \left|\frac{1}{16}\right| > 1:$$

$$\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16^3} - \dots,$$

kust arvutades saame:

$$1 = 1,000000$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = -0,031250$$

$$-\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16^2} \approx -0,000488^*)$$

$$-\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16^3} \approx -0,000015$$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,968247$$

Ja sellepärast $\sqrt{15} \approx 4 \cdot 0,968247 = 3,87298$.

Siin on lõpuliku saaduse juures viimane kümnendkoht ära jäetud, kui niisugune, mille väärtuse peale meie praegusel juhtumisel kindel olla ei või.

Nõnda leidsime binoomi rea esimese nelja liikme abil $\sqrt{15}$ viie kümnendkoha täpsusega. Kui täpsus veel suurem peab olema, siis on soovitatav juure all seisvat suurust veel ümber muuta, korrutades ja jagades teda niisuguse täisarvu ruuduga, et kasvatis saaks ühe teise arvu ruudule võrdlemisi ligiladse arv. Praegusel juhtumisel oleks soovitatav järgmiselt teha:

$$\sqrt{15} = \sqrt{\frac{15 \cdot 64}{64}} = \frac{1}{8} \sqrt{960} = \frac{1}{8} \sqrt{961 - 1} = \frac{31}{8} \sqrt{1 - \frac{1}{961}} = \frac{31}{8} \left(1 - \frac{1}{961}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left(1 - \frac{1}{961}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{961} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(961)^2} - \dots$$

$$1 = 1,000000000$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{961} \approx -0,000519771$$

$$-\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{961^2} \approx -0,000000135$$

$$\left(1 - \frac{1}{961}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,999480094$$

$$\sqrt{15} \approx \frac{31}{8} \cdot 0,99948009 \approx 3,87298535.$$

Seda viisi tehes saame niivõrd kiirelt koonduva binoomi rea, et juba kolme esimese liikme läbi leitud resultaati saab kaheksa kümnendkoha täpsusega.

Ülesanded binoomi rea kohta.

91. Arendada reaks järgmised funktsioonid.

a) $\frac{1}{1+x}$

b) $\frac{1}{(1-x)^2}$

c) $\frac{1}{(1+x)^3}$

d) $\sqrt{1+x}$

e) $\sqrt[3]{1-x}$

f) $\sqrt[5]{1+x}$

g) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$

*) Märk \approx tähendab ligikaudset võrdust.

$$i) \sqrt[3]{(1+x)^2} \quad k) \sqrt[4]{(1-x)^3} \quad l) \frac{1}{\sqrt[5]{(1-x)^4}} \quad m) \frac{1}{\sqrt[11]{(1+x)^9}}$$

92. Leida järgmiste irratsionaalsete juurte väärtused viie kümnend-koha täpsusega.

$$\begin{array}{llll} a) \sqrt{1,01} & b) \sqrt{1,02} & c) \sqrt{1,03} & d) \sqrt{1,1} \\ e) \sqrt{1,2} & f) \sqrt[3]{0,99} & g) \sqrt{0,98} & h) \sqrt{0,998} \\ i) \sqrt[3]{1,01} & k) \sqrt[3]{(1,02)^2} & l) \sqrt[3]{0,995} & m) \sqrt[5]{(0,996)^4} \end{array}$$

93.

$$\begin{array}{llll} a) \sqrt{17} & b) \sqrt{24} & c) \sqrt{82} & d) \sqrt{90} \\ e) \sqrt{132} & f) \sqrt{11} & g) \sqrt[3]{9} & h) \sqrt[3]{26} \\ i) \sqrt[3]{56} & k) \sqrt[3]{130} & l) \sqrt[4]{80} & m) \sqrt[5]{15} \\ n) \sqrt[5]{216} & o) \sqrt[6]{72} & p) \sqrt[6]{648} & q) \sqrt[7]{144} \\ r) \sqrt[7]{1944} & s) \sqrt[10]{1025} & & \end{array}$$

2. Arvu e rida.

Et loomuliku logaritmi aluse $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (v. § 3, 3) kohta

ligemalt selgusele jõuda, selleks arendame binoomi $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ reaks:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot \frac{1}{n^4} + \dots$$

Jagame paremal pool iga liikme lugejat ja nimetajat arvu n niisuguse astmega, mis asub nimetajas:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right)}{4!} + \dots$$

Kui nüüd arvu n lõpmatu suurenevaks mõtleme, siis on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0 \text{ jne.}$$

ja
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Siit näeme, et loomulik logaritmi alus e on lõpmatu rea summa. See arvu e rida on koonduv, nagu järele katsudes selgub, sest siin on

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k + 1}{a_k} = 0 < 1. \quad \text{Et arvu } e \text{ rea esimese kahe liikme summa juba on } 2,$$

siis peab olema

Teiselt poolt aga on

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3,$$

sest see viimane rida on teise liikmega algades kahanev geomeetriline rida ja tema iga liige on neljanda liikmega algades suurem arvu e rea vastavast liikmest.

Nõnda siis

$$3 > e > 2$$

ja arv e on arvude 2 ja 3 vahel asuv murd.

Arv e on irratsionaalne. Sest tõesti, kui meie oletaks, et arv e on ratsionaalne murd $\frac{p}{q}$, siis peaks:

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$$

$$\text{ehk } p = q + q + \frac{q}{2!} + \frac{q}{3!} + \frac{q}{4!} + \dots + \frac{q}{k!} + \dots$$

Siin aga on pahem pool täisarv, kuna parem pool on segaarv, ja sellepärast on see võrdus ja ühtlasi ka meie oletus võimatu.

Arvutades leiame $e = 2,7182818 \dots$

Ü l e s a n n e.

94. Arendada reaks funktsioonid $f(x) = e^x$ ja $f(x) = a^x$.

3. Logaritmiline rida ja logaritmid arvutamine.

Arendame reaks funktsiooni $f(x) = \ln(1+x)$, oletades, et

$$\ln(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \quad (1)$$

Kui anname siin x -ile väärtuse $x=0$, siis leiame $a_0 = \ln 1 = 0$. Differentsides võrduse 1) mõlemad pooli, saame:

$$\frac{1}{1+x} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

Viimase võrduse pahem pool aga arendub reaks binoom-rea järele:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

mille tõttu võime kirjutada:

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

Siit aga leiame:

$$a_1 = 1, 2a_2 = -1, 3a_3 = 1, 4a_4 = -1 \dots$$

$$\text{ehk: } a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = -\frac{1}{4} \dots$$

Pandes need koefitsientide väärtused võrdusse 1), saamegi n. n. logaritmilise rea:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (2)$$

See rida, nagu järele võib katsuda, on koonduv vahemikus $-1 < x < +1$

Koonduvusvahemiku kitsa ulatuse tõttu ei ole logaritmiline rida kohane logaritmid arutamiseks. Viimaseks otstarbeks moodustatakse logaritmilise rea abil uus rida, mille koonduvus-vahemik oleks laiem.

Andes võrduses 2) x -ile väärtuse $-x$, võime kirjutada

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \dots \quad 3)$$

Kui lahutame võrdusest 2) võrduse 3) vastavad pooled, silmas pidades, et logaritmid vahe on murru logaritm, siis saame uue võrduse:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right] \quad 4)$$

Sulgudes asuv rida on küll koonduv iga lõpuliku x -väärtuse juures, kuid et ta liig aeglaselt koondub, siis ei ole tema tarvitamine siiski otstarbekohane. Hoopis kiiremalt koonduva rea saame, kui võtame:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+y}{y}, \text{ kust leiame } x = \frac{1}{2y+1}$$

ja võrdusse 4) asemele paneme:

$$\ln \frac{1+y}{y} = 2 \left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2y+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2y+1} \right)^5 + \dots \right]$$

ehk

$$\ln(1+y) = \ln y + 2 \left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2y+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2y+1} \right)^5 + \dots \right] \quad 5)$$

See rida on ka koonduv iga lõpuliku y väärtuse juures; ta koondub pealegi seda kiiremalt, mida suurem on y , sest seda vähem on murru $\frac{1}{2y+1}$ väärtus. Sellepärast on seda rida soodne tarvitada logaritmid arutamiseks.

Näiteks, kui $y=1$, siis leiame:

$$\ln 2 = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} \right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3} \right)^9 + \dots \right] = 0,6931471806 \dots$$

Kui $y=2$, siis leiame:

$$\ln 3 = \ln 2 + 2 \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{5} \right)^7 + \dots \right] = 1,0986122887 \dots$$

Ehk kui võtame $y=9$, siis saame:

$$\begin{aligned} \ln 10 &= \ln 9 + 2 \left[\frac{1}{19} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{19} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{19} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{19} \right)^7 + \dots \right] = 2 \cdot \ln 3 + 2 \left[\frac{1}{19} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{19} \right)^3 + \right. \\ &= \left. \frac{1}{5} \left(\frac{1}{19} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{19} \right)^7 + \dots \right] = 2,3025850930 \dots \end{aligned}$$

Rea 5) abil pruugib arvutada ainult algarvude logaritmid. Kõikide teiste arvude logaritmid saame, liites vastavate algarvude logaritmid. Nimetatud rea 5) abil arvatud logaritmid, on n.n. loomulikud logaritmid, sest siin on logaritmid aluseks arv e .

Arvu loomuliku logaritmi teades, võime leida selle arvu hariliku logaritmi (aluse 10 juures).

Olgu teada arvu N loomulik logaritm $\ln N = a$ ja olgu sama arvu harilik logaritm: $\lg N = x$, siis võime kirjutada

$$10^x = e^a = N$$

Logaritmides seda võrdust loomuliku aluse juures, leiame:

$$x \cdot \ln 10 = a = \ln N$$

ja

$$x = \frac{\ln N}{\ln 10}.$$

Tähendab, selleks et leida arvu harilik logaritm, peame tema loomuliku logaritmi korrutama murruga

$$\frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{2,3025851} = 0,4342945.$$

Viimast arvu nimetatakse **harilikkude logaritmade mooduliks**.

Ü l e s a n n e.

95. Arvutada seitsme kümnend-märgi täpsusega järgmiste arvude loomulik ja harilik logaritm: a) 5; b) 7; c) 11; d) 17; e) 19; f) 35; g) 49; h) 55.

4. Arcussiinuse rida ja arvu π arvutamine.

Oletades et

$$f(x) = \arcsin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots \quad 1),$$

differentseme selle võrduse mõlemaid pooli:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

Binoomrea põhjal on

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \dots,$$

ja sellepärast võime kirjutada:

$$1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \dots = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

aga siit leiame:

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1.3}{1.4} \cdot \frac{1}{5} \dots$$

Võrdusest 1) aga saame koeffitsiendi $a_0 = 0$, kui anname argumendile väärtuse $x=0$.

Pandes võrdusse 1) asemele leitud koeffitsientide väärtused, saame:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{4.5} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots \quad 2)$$

Kui selles reas, mille koonduvus vahemikuks on $-1 < x^2 < 1$, anname x -ile väärtuse $x = \frac{1}{2}$, siis on $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ ja

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$$

ehk

$$\pi = 6 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots \right]$$

Seda võrdust võib kasutada arvu π arvutamiseks.

Ü l e s a n d e d :

96. Leida arvu π väärtus seitsme kümmendmargi täpsusega.
97. Arendada reaks funktsioon $y = \arctg x$.

§ 18. Määramatu avaldused.

1. Määramatus $\frac{0}{0}$.

Kui murru $\frac{F(x)}{f(x)}$ lugeja ja nimetaja argumendi mingisuguse väärtuse, $x = a$ juures korraka nulliks muutuvad, siis omab see murd omale määramatu ilme $\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{0}{0}$. Määramatu avalduse $\frac{F(a)}{f(a)}$ õigeaks väärtuseks on sel puhul

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h)}{f(a+h)} \dots \dots \dots 1)$$

ja see väärtus võib olla mitmesugune selle järele, missugused on $F(x)$ ja $f(x)$, Näiteks on meil teada (§ 3, 2), et

$$\lim_{x \rightarrow x} \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = \frac{0}{0} = nx^{n-1} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} = 1$$

Et avalduse 1) väärtust leida, selleks arendame Taylori valemi põhjal lugeja ja nimetaja reaks, kirjutades:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a) + F'(a)h + F''(a)\frac{h^2}{2!} + F'''(a)\frac{h^3}{3!} + \dots}{f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2!} + f'''(a)\frac{h^3}{3!} + \dots}$$

Et aga $F(a) = f(a) = 0$, siis võime need liikmed ära jätta ja jagada peale selle viimase murru lugeja ja nimetaja h -ga. Selle järele leiame:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(a) + F''(a)\frac{h}{2!} + F'''(a)\frac{h^2}{3!} + \dots}{f'(a) + f''(a)\frac{h}{2!} + f'''(a)\frac{h^2}{3!} + \dots} = \frac{F'(a)}{f'(a)}$$

Tähendab selleks, et määramatuse $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f(a)} = \frac{0}{0}$ õiget väärtust leida tuleb antud murru lugeja tuletis argumendi väärtuse $x = a$ juures jagada sama argumendi väärtuse juures võetud nimetaja tuletisega.

Kui juhtub, et ka $\frac{F'(a)}{f'(a)} = \frac{0}{0}$, siis leiaks meie:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F''(a)}{f''(a)} \text{ j. n. e.}$$

Leida järgmiste määramatuste õige väärtus:

98. a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 40}{x^2 - 4}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$
 g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{x^3 - 5x^2 - 8x - 6}$ h) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^2x - ax^2 + a^3}{x^2 - a^2}$
 i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}$ k) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$
99. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - e^{-x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - e^{-x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{1 - x - \ln(e-x)}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$
 g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln x}$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{-x}}{x - \sin x}$

2. Määramatus $\frac{\infty}{\infty}$.

Kui murru $\frac{F(x)}{f(x)}$ lugeja ja nimetaja on niisugused, et $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty$ ja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, siis on avaldus $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f(a)} = \frac{\infty}{\infty}$ ka määramatu.

Et niisuguse määramatuse õiget väärtust leida, selleks moodustame tema ümber, kirjutades:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x)}{F(x)}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Niisuguse määramatuse kuju on meile juba tuntud ja tema õige väärtuse me juba oskame leida. Tähendades selle määramatu avalduse õige väärtuse tähega A ja differentsides viimase murru lugejat ja nimetajat, võime kirjutada:

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}{\frac{F'(x)}{[F(x)]^2}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(x)}{f(x)} \right]^2 \cdot \frac{f'(x)}{F'(x)} = A^2 \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

ehk lühidalt

$$A = A^2 \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

ja avaldades siit A:

$$A = \frac{F'(a)}{f(a)}$$

Tähendab kui murdfunktsioon omab määramatu ilme $\frac{\infty}{\infty}$, siis tuleb tema õige väärtuse leidmiseks samuti talitada, kui määramatusega $\frac{0}{0}$.

Leida järgmiste määramatuste õige väärtus.

100. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{a+bx}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} ax}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(a+x)}{x}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x}$

3. Määramatused $0 \cdot \infty$ ja $\infty - \infty$.

Määramatused $\lim_{x \rightarrow a} F(x) \cdot f(x) = 0 \cdot \infty$ ja $\lim_{x \rightarrow a} [F(x) - f(x)] = \infty - \infty$

lasevad ennast ka ümber moodustada määramatuseks $\frac{0}{0}$.

Nimelt, kui $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$ ja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, siis võime kirjutada:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) \cdot f(x) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

Ehk kui $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$,

siis saame:

$$\lim_{x \rightarrow a} [F(x) - f(x)] = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{\frac{1}{F(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

Kui juhtub, et $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(x)}{F_1(x)} - \frac{f(x)}{f_2(x)} \right] = \infty - \infty$ selle tõttu, et $\lim_{x \rightarrow a} F_1(x) = 0$ ja $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$, aga lugejad $F(x)$ ja $f(x)$ argumendi $x = a$ juures jäävad lõpulikkudeks suurusteks, siis võime kirjutada:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(x)}{F_1(x)} - \frac{f(x)}{f_2(x)} \right] = \frac{F(x) \cdot f_2(x) - f(x) \cdot F_1(x)}{F_1(x) \cdot f_2(x)} = \frac{0}{0}$$

Ja nüüd tuleb talitada nagu punkt 1. juhutatud.

Harjutused.

101. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \lg x$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \ln(1-x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}$ d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2^x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln(x)$
102. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x \cdot \operatorname{tg} x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x - \frac{1}{1 - \sin x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

Neljas peatükk.

§ 19. Määramatu integraal.

1. Integraali mõiste.

Differentsimine on arvutustehe, mille abil leiame antud funktsiooni $y = f(x)$ tuletise $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ja differentsiaali $dy = f'(x) dx$. Differentsimine on algehe, samuti kui liitmine, korrutamine ja astendamine. Ja samuti kui iga algehe võimaldab vähemalt ühe ümberpööratud tehte, nõnda võimaldab ka differentsimine ümberpööratud tehte n. n. integrimise. Integrimise kui

arvutustehte mõiste saame, kujutades et meile antud on teadmatu funktsiooni differentsiaal, $f(x)dx$ ja vaja on leida see teadmatu funktsioon $F(x)$ ise tingimisega, et:

$$f(x)dx = dF(x)$$

Otsitavat funktsiooni $F(x)$ nimetakse antud differentsiaali $f(x)dx$ integraaliks ja kirjutakse:

$$\int f(x) dx = Fx \dots \dots \dots (1)$$

kus \int on integraali märgiks.

Näiteks võiksime kirjutada:

$$\int 3x^2 dx = x^3, \text{ sest } d(x^3) = 3x^2 dx,$$

ehk
$$\int \frac{dx}{x} = \ln x, \text{ sest } d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

Et aga iga jäädava suuruse differentsiaal on null, siis jääb võrdus (1) maksma ka peale selle, kui me tema paremale poolele juure lisame mingisuguse jäädava suuruse k , kirjutades

$$\int f(x) dx = F(x) + k, \dots \dots \dots (2)$$

sest kui

$$dF(x) = f(x)dx,$$

siis on ka

$$d[F(x) + k] = f(x) dx.$$

Ja selle jäädava suuruse k peame me ikka juure lisama, kui tahame et integrimise resultaat oleks üldine.

Suurus k on üldse määramatu ja teda nimetakse **integrimisjäädavaks**. Integraali $\int f(x) dx = F(x) + k$ ennast aga nimetakse **üldiseks** ehk **määramatu integraaliks**.

2. Määramatu integraali graafiline kujutamine.

Meil on teada, et differentsiaal- arvutus võimaldab leida antud funktsiooni $y = F(x)$ tuletise $\frac{dy}{dx} = F'(x)$. Samuti teame, et geomeetrisest seisukohast määrab tuletisfunktsioon algfunktsiooni kujutuse kui kõverjoone iga täpi jaoks puutejoone tõusunurga tangensi.

Kui aga ümberpöörduvalt on antud puutejoone tõusunurga tangens tuletisfunktsiooni $\frac{dy}{dx} = F'(x)$ ehk funktsiooni differentsiaali $dy = F'(x) dx$ näol ja vaja on leida vastava kõverjoone võrrand — algfunktsioon, siis annab seda meile määramatu integraal:

$$y = \int F'(x) dx = F(x) + k \dots \dots \dots (1)$$

Ja sellepärast võime ütelda, et graafiliselt tähendab määramatu integraal niisuguse kõverjoone ordinaati, mille puutejoone tõusunurga α tangens rahuldab antud tingimist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = F'(x)$$

Et see ordinaat aga koos seisab muutuvast osast $F(x)$ ja määramatu jäädavast osast k , siis peab leiduma mitte üks, vaid palju kõveraid, mis vastavad antud tingimisele.

Sest kui anname võrduses (1) integrimis- jäänudale mitu isesugust väärtust k_1, k_2, k_3, \dots siis saame vastavalt sama palju võrrandid:

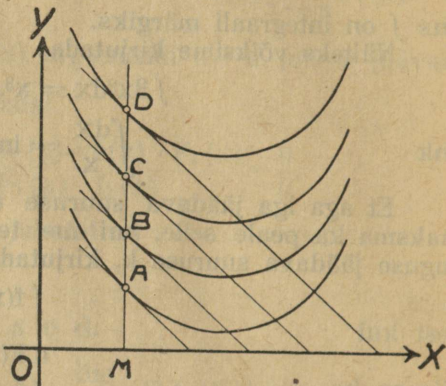
$$y = F(x) + k_1, y = F(x) + k_2, y = F(x) + k_3, \dots$$

Igale võrrandile aga vastab graafiliselt üks kõver (Joon. 35). Et integrimis — jäänud on määratu, siis võime temale anda lõpmatu palju üksikuid väärtusi ja sellepärast määratu integraali ise kujutab graafiliselt lõpmatu palju kõveraid.

Kõik need kõverad aga peavad rahuldama antud tingimist $dy = F'(x)dx$

ehk $\frac{dy}{dx} = F'(x)$, see tähendab, kui ühe ja

sama abstsissile $x_1 = OM$ vastavates kõverjoonte täppides A, B, C,.... tõmbame kõveratele puutujad, siis peavad need puutujad olema paralleelsed, sest nende kõikide tõusunurgad peavad rahuldama võrdust $tg\alpha = F'(x_1)$.



Joon. 35.

3. Üldised laused.

1. Kui $f(x)dx = dF(x) = F'(x)dx$, siis on integraali mõiste põhjal:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x)$$

ja selle põhjal võime ütelda lause:

2. **Integrimine ja differentsimine on tehted, mis üksteist hävitavad.**

Selle lause põhjal võime kontrollida, kas oleme integrimise õieti läbi viinud ehk mitte: õige integraali differentsiaal peab võrduma integraali märgi all antud differentsiaaliga.

Et

$$d[F_1(x) \pm F_2(x) \pm F_3(x) \pm \dots] = F_1'(x)dx \pm F_2'(x)dx \pm F_3'(x)dx \pm \dots$$

siis on

$$\int [F_1'(x)dx \pm F_2'(x)dx \pm F_3'(x)dx \pm \dots] = F_1(x) \pm F_2(x) \pm F_3(x) \pm \dots = \int F_1(x) \pm \int F_2(x) \pm \int F_3(x) \pm \dots$$

ja me võime ütelda:

Algebraalse summa integraal on üksikute liigete integraalide sama sugune summa.

3. Võrduse

$$d[A \cdot F(x)] = A \cdot d[F(x)] = A \cdot F'(x)dx$$

põhjal võime kirjutada:

$$\int A \cdot F'(x)dx = A \cdot F(x) = A \int F'(x)dx.$$

Ja siit leiame jälle lause:

Differentsiaali ees seisev jäänud tegur jääb integrimise puhul muutmata; teda võime tuua integraali märgi ette.

4. Põhivalemid.

Integrimise põhivalemid saame, kui tuntud differentsimise valemid ümber pöörame.

Differentsimise valemi põhjal on, näiteks,

$$d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^{(n+1)-1}}{n+1} dx = x^n dx$$

sellepärast võime ümberpöördult kirjutada:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \dots \dots \dots (1)$$

See valem on maksev igasuguse reaalse astmenäitaja n juures, sellepärast et astmelise funktsiooni differentsimise valem oli igal juhtumisel maksev. Üks väljavõte on aga siin siiski olemas ja nimelt juhtumisel kui $n = -1$. Sest meil on teada, et:

ja sellepärast

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln x + k \dots \dots \dots (2)$$

Samuti leiame diff. valemist:

integraal valem:

$$d \frac{a^x}{\ln a} = a^x dx \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k \dots \dots \dots (3)$$

$$d(e^x) = e^x dx \quad \int e^x dx = e^x + k \dots \dots \dots (4)$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \quad \int \cos x dx = \sin x + k \dots \dots \dots (5)$$

$$-d(\cos x) = \sin x dx \quad \int \sin x dx = -\cos x + k \dots \dots \dots (6)$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + k \dots \dots \dots (7)$$

$$-d(\operatorname{cotg} x) = \frac{dx}{\sin^2 x} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + k \dots \dots \dots (8)$$

$$d(\operatorname{arc} \sin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + k \dots \dots \dots (9)$$

$$d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{dx}{1+x^2} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + k \dots \dots \dots (10)$$

Harjutused.

Leida järgmised integraalid:

103. a) $\int dx$ b) $\int x dx$ c) $\int x^2 dx$
 d) $\int 3x^3 dx$ e) $\int 5ax^4 dx$ f) $\int \frac{3x^2}{a} dx$
 g) $\int (9x^2 - 4x + 5) dx$ h) $\int (5x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 2x - 3) dx$
 i) $\int (10x^4 - 9x^2 + 12x - 1) dx$ k) $\int (12x^3 - 3x^2 - 10x + 7) dx$
104. a) $\int \frac{dx}{x^2}$ b) $\int \sqrt{x} dx$ c) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx$
 d) $\int a^3 \sqrt{x} dx$ e) $\int \sqrt{ax} dx$ f) $\int \frac{adx}{b\sqrt{x}}$

$$g) \int 4 \frac{a}{x^5} dx \quad h) \int (x+a)^2 dx \quad i) \int \frac{(x-a)^2}{x} dx$$

$$k) \int \left(2+x - \frac{x^2}{2}\right) dx \quad l) \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right) dx$$

$$m) \int (2+\sqrt{x})^2 dx \quad n) \int \frac{1+\sqrt{2x}+\sqrt{3x}}{x} dx$$

$$o) \int \frac{(1+\sqrt{x^3})^3}{x} dx \quad p) \int \frac{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}e)^3}{\sqrt{x}} dx$$

105. a) $\int (\sin x + a^x) dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x} - 2 \cos x\right) dx$

c) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

d) $\int \left(\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{b}{x}\right) dx$

e) $\int \left(\frac{1+x^2}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$

f) $\int \left(a \cdot \sin x - \frac{b}{\sin^2 x}\right) dx$

g) $\int (3 \sin x + 2e^x) dx$

h) $\int \left(\frac{1-x \sin x}{x} + \frac{\cos^2 x}{a}\right) dx$

i) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x}\right) dx$

k) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{5-\sqrt{x}}{x}\right) dx$

§ 20. Määratud integraal.

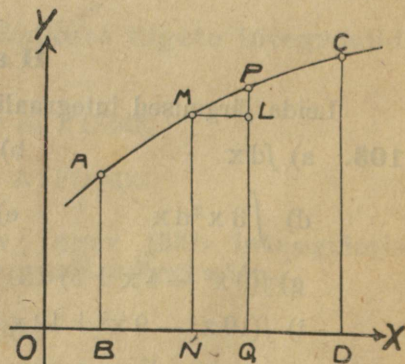
1. Integraal kui pinna funktsioon.

Olgu täisnurkses koordinaadistikus funktsiooni $y = f(x)$ kujutuseks kõverjoon AC (Joon. 36). Kui konstruime selle kõverjoone kahe täpi A ja M ordinaadid AB ja MN ja vaatame esimese peale kui kindla, aga teise peale kui muutuva ordinaadi peale, siis on arusaadav, et selle juures pind AMNB on funktsiooni, mis on oleneb abstsissi $ON = x$ väärtusest. Seame omale eesmärgiks selle pinna funktsiooni $P = F(x)$ leidmise.

Kui meil oleks teada selle funktsiooni diferentsiaal, siis me leiaks funktsiooni enese integreides. Et funktsiooni $P = F(x)$ diferentsiaali leida, selleks anname argumendile $ON = x$ kasvu $NQ = \Delta x$. Siis saab ka funktsioon $P = F(x)$ kasvu $\Delta P = F(x + \Delta x) - F(x)$ pinna NMPQ näol.

Lahutades sellest pinna kasvust püstküliku MNQL, mille pind on $f(x) \cdot \Delta x$, ja silmas pidades, et ülejäänud osa pind MPL on vähem kui $\Delta y \cdot \Delta x$, kus $PL = \Delta y$, võime kirjutada:

$$[F(x + \Delta x) - F(x)] - f(x) \Delta x < \Delta y \cdot \Delta x.$$



Joon. 36.

Kui jagame selle võrduse mõlemad pooled argumendi kasvuga Δx

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) < \Delta y$$

a leiame piiri, kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis saame:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ sest } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

ehk $F'(x) = f(x)$.

Korrutades viimase võrduse mõlemad pooli veel argumendi differentiaaliga, leiame:

$$dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$$

ja selle põhjal võime kirjutada:

$$\int f(x) dx = F(x) + k \dots \dots \dots (1)$$

ehk üteldes sõnadega:

Pind, mis on piiratud võrrandi $y=f(x)$ läbi määratud kõvera joonega, kahe ordinaadiga ja x-teljega, on funktsioon, mille saame integreerides korrutist $f(x)dx$.

Integrimis jäädava k tõttu on see funktsioon esialgu määramatu. See määramatus on seletatav selle läbi, et meie veel mingisugust tingimist ei ole teinud algusordinaadi AB kohta, millest peale meie pinna loeme. Kui me aga nõuame näiteks, et $OB = a$, mille tõttu algusordinaat $AP = f(a)$, siis peame nõudma ühes sellega, et pinna funktsioon $F(x) + k$ argumendi väärtuse $x = a$ juures null oleks. Võrdusest

$$F(a) + k = 0,$$

aga leiame

$$k = -F(a)$$

Pandes niimoodi määratud integrimis-jäädava valemisse (1), saame sel puhul:

$$\int f(x) dx = F(x) - F(a) \dots \dots \dots (2)$$

Kui nüüd tahame leida pinna ACDB väärtust, kus $x = OD = b$, siis peame selle argumendi väärtuse panema valemisse (2), mille tagajärjel saame:

$$\text{pind ACDB} = F(b) - F(a)$$

Seda vahet, mis eelmise harutuse põhjal annab pinna väärtuse ja mis on õieti määramatu integraali $\int f(x) dx = F(x) = k$ kahe väärtuse vahe, sest

$$F(b) - F(a) = [F(b) + k] - [F(a) + k],$$

nimetatakse **määratud integraaliks**, ja kirjutatakse

$$\int_a^b f(x) dx = \left. F(x) \right|_a^b = F(b) - F(a) \dots \dots \dots (3)$$

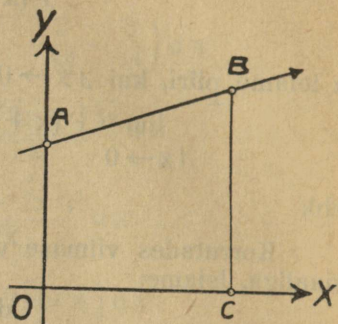
Argumendi väärtusi $x = a$ ja $x = b$ nimetatakse **integrimis piirideks** ja eraldi $x = a$ **alumiseks**, aga $x = b$ **ülemiseks** piiriks.

Näiteks olgu vaja leida pind OABC (Joon. 37), mis on piiratud sirgjoonega AB, ordinaatidega OA ja CB ja x-teljega.

Kui antud sirgjoone AB võrrandiks on $y = ax + b$, aga abstsiss $OC = c$, siis leiame otsitava pinna järgmise integraalina:

$$\int_0^c (ax + b) dx = \left| \frac{ax^2}{2} + bx \right|_0^c = \frac{ac^2}{2} + bc = \frac{c(ac + 2b)}{2}$$

Sama pinna leiame ka, kui silmas peame, et kujund OABC on traapets, mille alused on $OA = b$ ja $CB = ac + b$, aga kõrgus $OC = c$.



Joon. 37.

H a r j u t u s e d :

106. Leida pind, mis on piiratud paraaboliga $y^2 = 2px$ x-teljega ja abstsissidele $x = 0$ ja $x = a$ vastavate ordinaatidega.

107. Leida järgmiste määratud integraalide väärtused.

- | | | | |
|---|-------------------------------------|---|--|
| a) $\int_1^5 2x dx$ | b) $\int_0^2 2x^3 dx$ | c) $\int_1^3 \frac{dx}{x^3}$ | d) $\int_0^x a^x dx$ |
| e) $\int_0^2 e^x dx$ | f) $\int_0^\pi \sin x dx$ | g) $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ | h) $\int_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ |
| i) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ | k) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ | l) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx$ |

2. Integraal kui summa.

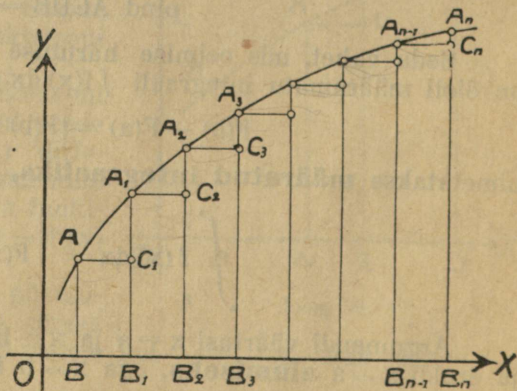
Olgu joonisel 38 kujutatud kõverjoone AA_n võrrandiks $y = f(x)$ ja olgu abstsiss $OB = a$ ja $OB_n = b$, aga pind $BAA_n B_n = P$, siis võime eelmise põhjal kirjutada:

$$\int_a^b f(x) dx = P \dots \dots \dots (1)$$

Kui jagame integrimisvahemiku BB_n n võrdseks osaks nõnda, et

$$BB_1 = B_1 B_2 = B_2 B_3 = \dots \dots \dots B_{n-1} B_n = \Delta x,$$

konstruime ordinaadid $A_1 B_1 = f(a + \Delta x)$, $A_2 B_2 = f(a + 2 \Delta x)$, $A_3 B_3 = f(a + 3 \Delta x)$, $\dots \dots \dots A_{n-1} B_{n-1} = f[a + (n-1) \Delta x]$ ja tõmbame läbi täppide $A, A_1, A_2, \dots \dots \dots A_{n-1}$ x-teljega paralleelsed sirgjooned $AC_1, A_1 C_2,$



Joon. 38.

$A_2 C_3, \dots, A_{n-1} C_n$, siis saame rea püstkülikuid: $AC_1 B_1 B, A_1 C_2 B_2 B_1, \dots, A_{n-1} C_n B_n B_{n-1}$. Nende püstkülikute pindade summa
 $P_1 = f(a) \Delta x + f(a + \Delta x) \Delta x + f(a + 2 \Delta x) \Delta x + \dots + f[a + (n-1) \Delta x] \Delta x \dots (2)$
 on vähem kui pind P . Silmas pidades, et

$$A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3 + \dots + A_n C_n = A_n B_n - AB = f(b) - f(a)$$

võime joonise põhjal kirjutada:

$$P - P_1 < [f(b) - f(a)] \Delta x \dots (3)$$

Kui kujutame arvu n lõpmatu suureneva ja sellega Δx lõpmatu väheneva suurusena, siis on sel puhul võrratuse (3) põhjal ka vahe $P - P_1$ lõpmatu vähenev, mille tõttu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P_1 = P$$

Võrduse (2) põhjal aga võiks meie kirjutada

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P_1 = f(a) dx + f(a + dx) dx + f(a + 2 dx) dx + \dots + f[a + (n-1) dx] dx$$

ja kui arvesse veel võtame võrduse (1), siis saame:

$$\int_a^b f(x) dx = f(a) dx + f(a + dx) dx + f(a + 2dx) dx + f[a + (n-1) dx] dx$$

Ja siit näeme, et määratud intergaali peale tuleb vaadata kui niisuguse summa piiri peale, mille liikmete arv on lõpmatu suurenev, aga iga üksik liige on lõpmatu vähenev suurus.

Selle põhjal on intregaaali märk \int ka moodustatud sõna summa esimesest tähest s .

§ 21. Keerulisemate differentsiaalide integrimine.

Määratud integraali leidmiseks on enne vaja tunda vastav määramatu integraal. Viimase leidmist võimaldavad meile senni tuntud põhivalemid. Põhivalemite abil aga võime integrida ainult piiratud arvu kõige lihtsamaid differentsiaale. Keerulisemate differentsiaalide integrimiseks on leitud mitmesugused meetodid, milledest meie siin kohal läbi võtame ainult ühe kõige tarvilikuma, n. n. asendamise meetodi ja paar tarvilikku valemit.

Et asendamise meetodi arusaadavaks teha, selleks toome paar näidet.

1. Olgu vaja leida integraal:

$$\int (a + x)^n dx$$

Kui nimetame $a + x = z$, siis järgneb siit differentsides: $dx = dz$

Pandes niimoodi asemele ja integrides saame

$$\int (a + x)^n dx = \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + k.$$

Ehk kui lõpuks z asemele tagasi toome x :

$$\int (a + x)^n dx = \frac{(a + x)^{n+1}}{n+1} + k.$$

2. Et leida $\int \sin(a-bx) dx$, selleks võtame $a-bx = z$, kust järgneb:
 $-bdx = dz$ ehk $dx = -\frac{dz}{b}$. Sellepärast, asemele pandes ja integrides, leiame

$$\int \sin(a-bx) dx = \int -\frac{\sin z dz}{b} = -\frac{1}{b} \int \sin z dz = \frac{1}{b} \cos z + k$$

Ja kui z asemele tagasi toome x :

$$\int \sin(a-bx) dx = \frac{1}{b} \cos(a-bx) + k$$

Harjutused.

107. Leida asendamise meetodi abil järgmised integraalid:

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| a) $\int \frac{dx}{(a+x)^2}$ | b) $\int \frac{dx}{a+x}$ | c) $\int (a+x^2)^n x dx$ |
| d) $\int \frac{x dx}{a^2+x^2}$ | e) $\int \cos(2x) dx$ | f) $\int \cos^2 x dx$ |
| g) $\int a^{2x} dx$ | h) $\int \frac{dx}{\sin^2(2-x)}$ | i) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x)}$ |
| k) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ | l) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ | m) $\int e^{5-3x} dx$ |

Koonlõigete arvutamiseks anname paar integrimis-valemit.

1. Differentsides funktsiooni

$$y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

leiame

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x \cdot 2x}{2 \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2 - x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Selle põhjal võime kirjutada

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + k \dots (1)$$

2. Differentsides funktsiooni

$$y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

leiam

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x^2 - a^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x^2 - a^2} \end{aligned}$$

Ja selle põhjal võime jälle kirjutada:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + k \dots (2)$$

Näited.

1. Leiame ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pinna.

Ellipsi võrrandist saame:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Ordinaadi absoluutväärtuse korrutis abstsissi diferentsiaaliga annab meile pinna diferentsiaali.

$$y dx = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Kui integreime selle diferentsiaali vahemikus $x=0$ kuni $x=a$, siis leiame veerand ellipsi pinda. Terve ellipsi pind on sellepärast

$$P = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \dots (1)$$

Valemi põhjal aga on

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\text{sest } \arcsin \frac{a}{a} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ja ellipsi pind on sellepärast

$$P = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

2. Leiame veel pinna, mis on piiratud hüperboli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kaarega

AB (Joon. 39), ordinaadiga BC ja x-teljega. Hüperboli võrrandist saame ordinaadi absoluut-väärtuse

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Otsitava pinna diferentsiaal on sellepärast

$$y dx = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx.$$

Kui silmas peame et $OA = a$ ja kui nimetame $OC = c$, siis saame otsitava pinna

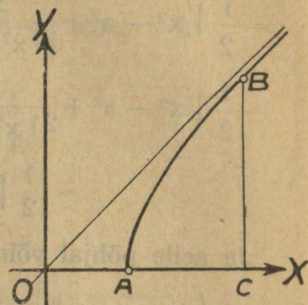
$$P = \int_a^c \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{b}{a} \int_a^c \sqrt{x^2 - a^2} dx.$$

Valemi põhjal aga on

$$\int_a^c \sqrt{x^2 - a^2} dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right]_a^c = \frac{c}{2} \sqrt{c^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(c + \sqrt{c^2 - a^2}) + \frac{a^2}{2} \ln a = \frac{c}{2} \sqrt{c^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - a^2}}{a} \right).$$

Sellepärast on pind

$$P = \frac{b}{a} \left[\frac{c}{2} \sqrt{c^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - a^2}}{a} \right) \right].$$



Joon. 39.

Ülesanded.

108. Leida pind, mis on piiratud sirgjoonega x-teljega ja abstsissidele $x = x_1$ ja $x = x_2$ vastavate ordinaatidega, kui sirgjoone võrrand on:

- $x - y + 1 = 0$, aga $x_1 = 0$ ja $x_2 = 4$
- $x - 2y + 3 = 0$, aga $x_1 = 1$ ja $x_2 = 3$
- $3x - 4y - 2 = 0$, aga $x_1 = 1$ ja $x_2 = 6$
- $4x - 3y + 10 = 0$, aga $x_1 = 1$ ja $x_2 = 5$.

109. Kui suure pinna piirab paraabol, mille võrrand on $y^2 = 4x$, x-telg ja abstsissidele $x_1 = 1$ ja $x_2 = 5$ vastavad ordinaadid?

110. Leida pind, mille piirab kõverjoon, x-telg ja abstsissidele $x = x_1$, ja $x = x_2$ vastavad ordinaadid, kui kõverjooneks on:

- siinusjoon $y = \sin x$, aga $x_1 = 0$ ja $x_2 = \pi$
- coosinusjoon $y = \cos x$, aga $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ ja $x_2 = \frac{\pi}{2}$
- ellips $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, aga $x_1 = 0$ ja $x_2 = 2$
- hüperbol $xy = 1$, aga $x_1 = 1$ ja $x_2 = 5$
- hüperbol $x^2 - y^2 = 1$, aga $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$.

A j a l o o s t.

Üksikute küsimuste lahendamisel olid ammu tarvitusel differentsimisele ja integrimisele sarnased meetodid. Nõnda näiteks arvutas juba Archimeedes pind ja ruumala niisuguste meetodide abil, mida integrimiseks võiks nimetada; prantsuse arvuteadlane Fermat (1601—1655) määras funktsiooni maksimumi ja miinimumi, uurides argumendi lõpmatu vähenevale muutumisele vastavat funktsiooni muutumist. Differentiaal- ja integraal-arvutuse üldised meetodid aga leidsid ja seadsid süsteemi alles Leibniz ja Newton. — Leibnitz (1646—1716, sakslane) oli laialt tuntud mõtteteadlane ja paljud külgne teadusemees. Tema leidis ja töötas välja differentsiaal- ja integraal-arvutuse meetodid umbes 1675. aastal ja avaldas oma töö 1686. aastal. Leibniz'ilt on ka pärit differentsiaali ja integraali märgid. — Newton (1643—1727, inglane), tuntud arvuteadlane, kes põhja pani matemaatilisele füüsikale ja astronoomiale, leidis differentsimise mõisted uurides liikumiste kiirust. Tema kirjutas oma töö differentsiaal- ja integraal-arvutuse üle pealkirja all „Methodus fluxionum“ küll juba 1671. aastal, kuid see töö avaldati alles peale Newtoni surma aastal 1736.

Differentiaal- ja integraal-arvutuse leidmisega algas arvuteaduse kiire arenemine. Arvuteadus aga võimaldas uuema aja füüsika ja tehnika arenemise.

Viies peatükk.

§ 22. Imaginaarne üksus ja kompleksarvu mõiste.

1. On teada, et paarisastmeliseks juureks negatiiv-arvust ei kõlba mingisugune reaalne (ei täis- ega murd-, positiivne ega negatiivne, ratsionaalne ega irratsionaalne) arv. Sellepärast tuleb niisuguste juurte peale vaadata kui iseliiki arvude peale. Neid nimetakse **imaginaararvudeks**.

Nagu reaalarvude üksuseks on 1, nõnda on imaginaararvude üksuseks $\sqrt{-1}$, mida arvuteadlane Gauss (1777—1855) lühidalt tähega „i“ tähendama hakkas (sõna imaginaarne esimene täht). Nõnda siis:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Tõstes imaginaarüksuse mitmesugustele astmetele, leiame:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = -i \cdot i = +1$$

$$i^5 = +1 \cdot i = +i \text{ jne.}$$

Üldse on:

$$i^{4n} = +1; \quad i^{4n+1} = +i;$$

$$i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i.$$

2. Reaal- ja imaginaararvude algebralist summat nimetakse **kompleksarvuks** ehk lühidalt **kompleksiks**.

Kompleksarvu üldine kuju on

$$a + bi,$$

kus a ja b tähendavad mis tahes reaalseid arve; a on kompleksi reaalosa, b on imaginaarosa koeffitsient.

Kompleksarvu mõiste on üldisem, kui reaali- ehk imaginaararvu mõisted— ta sisaldab eneses ka need viimased, sest tehes kompleksarvu $a + bi$ imaginaarosa ehk reaalsosa nulliks, saame kompleksarvu erijuhustena vastavalt reaali- ehk imaginaararvu.

Kahte kompleksarvu, mis ainult imaginaarosade märkide poolest lahku lähevad, nagu

$$a + bi \text{ ja } a - bi$$

nimetakse kaaskompleksideks.

§ 23. Kompleksidega arvutamine.

1. Liitmine: Et kahte kompleksarvu liita, peab liitma nende reaalsosad omavahel ja imaginaarosad omavahel.

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Märkus: Kaaskomplekside summa on reaalarv.

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$

2. Lahutamine. Et ühest kompleksist lahutada teine, peab lahutama esimese reaalsosast teise reaalsosa ja esimese imaginaarosast teise imaginaarosa.

$$(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

3. Korrutamine. Et kahte kompleksi üksteisega korrutada, peab korrutama ühe kompleksi iga osa teise kompleksi iga osaga.

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

Märkus: Korrutades kaaskomplekse leiame, et nende korrutis on positiivne reaalsuurus.

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

4. Jagamine. Et ühte kompleksi jagada teisega, peab korrutama jagatavat ja jagajat viimase kaaskompleksiga ja siis jagama saaduse reaali- ja imaginaarosa eraldi.

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + a_2b_1i - a_1b_2i}{a_2^2 + b_2^2}$$

§ 24. Laused kompleksarvude kohta.

1. Kui kompleksarv on null, siis peab tema reaalsosa ja imaginaarosa koeffitsient üksikult null olema.

Tõendus.

Kui $a + bi = 0$, aga a ja b ise ei oleks nullid, siis peaks

$$a = -bi \text{ ja } -\frac{a}{b} = i;$$

reaalarv peaks võrdne olema imaginaararvuga; see on aga võimatu ja sellepärast peab olema

$$a = 0 \text{ ja } b = 0$$

2. Võrdsete komplekside reaalsosad ja imaginaariosade koeffitsiendid peavad vastavalt võrdsed olema.

Tõendus.

Kui

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i, \text{ siis on}$$

$$(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = 0 \text{ ehk}$$

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i = 0 \text{ ja eelmise lause põhjal}$$

on siis $a_1 - a_2 = 0$ ja $b_1 - b_2 = 0$
 ehk $a_1 = a_2$ ja $b_1 = b_2$.

§ 25. Imaginaar- ja kompleksarvu geometriline kujutamine.

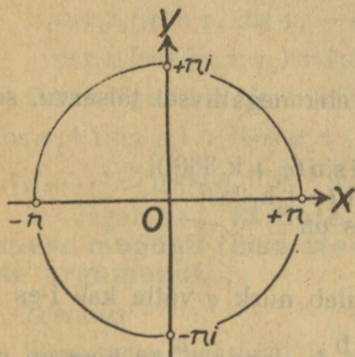
On teada, et reaalarve võib kujutada geomeetriselt sirgjoone, n. n. arvjoone abil, võttes sel joonel mis tahes täpi nulltäpiks ja mõttes siis mingisuguse pikkuse üksuse abil nulltäpist ühele poole (harilikult paremale) joonlõigud vastavalt positiivsete arvude väärtustele ja teisele poole (siis juba pahemale) vastavalt negatiivsete arvude väärtusele. Nõnda tehes selgub, et igale reaalarvale, olgu ta positiivne ehk negatiivne, täis ehk murd, ratsionaalne ehk irratsionaalne vastab arvjoonel üks kindel täpp ja ümberpöörduvalt igale arvjoone täpile vastab üks kindel reaalarv.

Küsime nüüd, kas ja kuidas võib kujutada geomeetriselt imaginaararve?

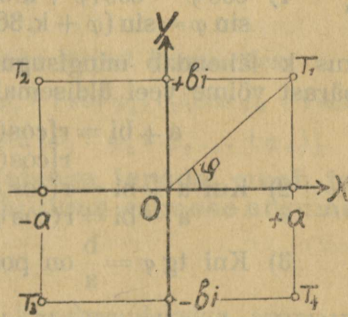
Et selle küsimuse peale vastust leida, selleks paneme tähele, et iga imaginaararv ni on keskmine geomeetiline reaalarvude $+n$ ja $-n$ vahel, sest

$$(ni)^2 = -n^2 = (+n) \cdot (-n)$$

ja tuletame meele, et geomeetriselt on täisnurkse kolmnurga kõrgus, mis läbi täisnurga tipu tõmmatud, keskmine geomeetiline nende osade vahel, milleks see kõrgus kolmnurga hüpotenuusi jagab. Sellepärast, kui reaalarvjoone juures ümber nulltäpi kujutame ringjoone, mis läbi arvude $+n$ ja $-n$ kujutuste läheb (Joon. 40) ja läbi nulltäpi nimetud arvjoonega veel perpendikulaarjoone tõmbame, siis lõikab viimane ringjoont punktis, mis on arvu ni



Joon. 40.



Joon. 41.

kujutuseks. Meie saame korraga õieti kaks täppi, milledest üks (harilikult ülemine) võetakse $+ni$ kujutuseks ja teine (alumine) arvu $-ni$ kujutuseks.

Siit on selge, et ka imaginaararv tuleb kujutada sirgjoone — imaginaararvjoone — abil, mis perpendikulaarselt reaalarvjoonega läbi viimase nulltäpi läheb.

Et kompleksarvu $a+bi$ geomeetriselt kujutada, selleks vaatame reaalarv- ja imaginaararvjoonte, kui koordinaatide telgede peale (v. A I p. I § 1) ja leiame täpi, mille koordinaadid on a ja bi .

Niisugune täpp $T_1(a, bi)$ (Joon. 41) on kompleksarvu $a+bi$ geomeetiline kujutus. Samuti leiaks meie kompleksarvu $-a+bi$ kujutuse täpi $T_2(-a, bi)$ näol, arvu $a-bi$ kujutuse täpi $T_3(-a, -bi)$ näol jne.

Näeme, et kui reaali- ja imaginaararvude kujutusteks on vastavate arvjoonte täpid, siis on kompleksarvude kujutusteks niisuguse tasapinna täpid, mis läbi nende arvjoonte on tõmmatud.

§26. Kompleksarvu trigonomeetriline ilme.

Täpi T_1 , mis on kompleksarvu $a+bi$ kuju (Joon. 41), võiksime ka määrata nurga φ ja sirgjoone $OT_1 = r$ abil. Siis leiame täisnurgalisest kolmnurgast $OT_1 a$, et

$$a = r \cos \varphi \text{ ja } b = r \sin \varphi \dots\dots\dots 1$$

ja sellepärast

$$a+bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi);$$

r ise leiame kolmnurgast $OT_1 a$:

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \dots\dots\dots 2$$

$$\text{ja } \sin \varphi = \frac{b}{r}; \cos \varphi = \frac{a}{r}$$

$$\text{ehk } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \dots\dots\dots 3$$

Valemite 2 ja 3 abil on võimalik igale algebralisele avaldatud kompleksarvule $a+bi$ anda nõndanimetatud **trigonomeetriline ilme** $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Suurust r , mis ikka positiivseks võetakse, nimetakse kompleksi **mooduliks** ja nurka φ **argumendiks**.

Märkused:

✓ 1) $\cos \varphi = \cos(\varphi + k \cdot 360^\circ)$ ja
 $\sin \varphi = \sin(\varphi + k \cdot 360^\circ)$,

kus k tähendab mingisugust positiivset ehk negatiivset täisarvu, sellepärast võime veel üldisemalt kirjutada

$$a+bi = r[\cos(\varphi + k \cdot 360^\circ) + i \sin(\varphi + k \cdot 360^\circ)] = r[\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + i \sin(\varphi + k \cdot 2\pi)].$$

2) Kui $a+bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, siis on
 $a-bi = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$.

3) Kui $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ on positiivne, siis tuleb nurk φ võtta kas I-es ehk

III-as kvadrantis, selle järele, kas $\sin \varphi = \frac{b}{r}$ ja $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ on korruga positiivsed ehk negatiivsed. Kui aga $\operatorname{tg} \varphi$ on negatiivne, siis tuleb φ võtta kas II-ses ehk IV-as kvadrantis, selle järele, kas $\sin \varphi$ on positiivne ja $\cos \varphi$ negatiivne ehk ümberpöördukt.

Näited:

1. Anda kompleksarvule $-15+8i$ trigonomeetriline ilme

$$a = -15; b = +8; r = \sqrt{15^2+8^2} = 17.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{8}{15} = -0,5333; \sin \varphi = \frac{8}{17}; \cos \varphi = -\frac{15}{17}.$$

Siin on $\sin \varphi$ positiivne, aga $\cos \varphi$ negatiivne, tähendab nurk φ asub teises kvadrantis. Kui $\varphi = 180^\circ - \varphi_1$, siis on $\operatorname{tg} \varphi_1 = 0,5333$ ja $\varphi_1 = 28^\circ 4'$, aga $\varphi = 180^\circ - 28^\circ 4' = 151^\circ 56'$ ja $-15+8i = 17(\cos 151^\circ 56' + i \sin 151^\circ 56')$.

2. Avaldada kompleksarv $-4,2 - 5,6i$ trigonomeetriliselt.

Siin on $a = -4,2$; $b = -5,6$; $r = \sqrt{4,2^2 + 5,6^2} = 7$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{5,6}{4,2} = \frac{4}{3} = 1,3333$;

$\sin \varphi < 0$ ja $\cos \varphi < 0$. Sellepärast tuleb φ võtta III^{das} kvadrantis ja $\varphi = 180^\circ + \varphi_1$, kus $\varphi_1 < \frac{\pi}{2}$. Tabelitest leiame $\varphi_1 = 53^\circ 08'$ ja sellepärast $\varphi = 233^\circ 08'$ ja $-4,2 - 5,6i = 7 (\cos 233^\circ 08' + i \sin 233^\circ 08')$.

3. Avaldada kompleksarv $32,3 - 3,6i$ trigonomeetriliselt.

$$a = 32,3; b = -3,6; r = \sqrt{32,3^2 + 3,6^2} = 32,5;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3,6}{32,3} = -0,1115; \varphi = 360^\circ - \varphi_1; \operatorname{tg} \varphi_1 = 0,1115.$$

Tabelitest leiame $\varphi_1 = 6^\circ 22'$, sellepärast $\varphi = 353^\circ 38'$ ja $32,3 - 3,6i = 32,5 (\cos 353^\circ 38' + i \sin 353^\circ 38')$.

§ 27. Trigonomeetriliselt avaldatud komplekside korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise.

1. Korrutamise. Et trigonomeetriliselt avaldatud kompleksarve korrutada, peab korrutama nende moodulid ja liitma argumentid.

Tõendus:

$$\begin{aligned} & r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ & = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ & = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Oleks tegurid rohkem kui kaks, siis leiaks järjest korrutades:

$$\begin{aligned} & r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot r_3 (\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3) \cdot r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) = \\ & = r_1 r_2 r_3 \dots r_n [\cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \dots + \varphi_n) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \dots + \varphi_n)]. \end{aligned}$$

2. Jagamine. Et ühte kompleksi teisega jagada, peab jagama esimese mooduli teise mooduliga ja lahutama esimese argumentist teise argumenti.

Tõendus:

Korrutades jagatavat ja jagajat viimase kaaskompleksiga, saame:

$$\begin{aligned} \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]}{r_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} \end{aligned}$$

ja lihtsustades viimast kirjutust trigonomeetriliste valemite abil, saame lõpuks:

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

3. Astendamise. Et kompleksarvu astmele tõsta, mille näitajaks on reaalne arv, peab tõstma moodul sellele astmele ja korrutama argument astme näitajaga.

See on n. n. Moivre'i lause.

Tõendus:

Siin tuleb läbi harutada kolm juhust.

a) Astme näitaja on positiivne täisarv.

Kasvatamise reegli järele leiame:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^m = \underbrace{r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \dots \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{m \text{ tegurid}}$$

$$= r^m (\cos m \varphi + i \sin m \varphi)$$

b) Astmenäitaja on murdarv $\frac{p}{q}$. Oletades, et $ka[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)] \cdot \frac{p}{q} = r^{\frac{p}{q}} [\cos(\frac{p}{q} \varphi) + i \sin(\frac{p}{q} \varphi)]$ ja tõstes selle võrduse mõlemad pooled astmele q , saame:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^p = r^p [\cos p \varphi + i \sin p \varphi];$$

see võrdus on juhuse a) põhjal õige, sellepärast peab õige olema ka oletatud võrdus.

c) Astmenäitaja on negatiivne arv $-m$.

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-m} = \frac{1}{(r \cos \varphi + i \sin \varphi)^m} = \frac{1}{r^m [\cos m \varphi + i \sin m \varphi]} = \frac{1}{r^{-m} [\cos m \varphi - i \sin m \varphi]} = \frac{1}{(\cos m \varphi + i \sin m \varphi)(\cos m \varphi - i \sin m \varphi)} = \frac{1}{\cos^2 m \varphi + \sin^2 m \varphi} = r^{-m} (\cos m \varphi - i \sin m \varphi) = r^{-m} [\cos(-m \varphi) + i \sin(-m \varphi)],$$

sest $\cos m \varphi = \cos(-m \varphi)$ ja $-\sin m \varphi = \sin(-m \varphi)$.

4. Juurimine. Et kompleksarvust juurt leida, peab leidma juur argumentid ja jagama moodulit juure näitajaga:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \right]$$

selle lause tõendus järgneb eelmisest, kus astmenäitaja on $\frac{1}{n}$.

Märkus 1: Tõstes kaaskomplekse ühele ja samale astmele, ehk leides neist ühe ja samaastmelise juure, saame kaaskompleksid.

$$\text{Sest } (a + bi)^n = r^n [\cos(n \varphi) + i \sin(n \varphi)] = p + qi \text{ ja } \sqrt[n]{a + bi} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \right] = p_1 + p_1 i.$$

Lause: n-astme juurel kompleks arvust on n ja ainult n väärtust.

Tõendus.

$\cos \varphi + i \sin \varphi = \cos[\varphi + k2\pi] + i \sin(\varphi + k2\pi)$, kus k , nagu teada, on mistahes täisarv, sellepärast peab kirjutama üldse

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) \right]$$

Andes viimase kirjutuse paremas pooles k -le järjest n järgmist väärtust $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ saame n järgmist argumenti väärtust:

k	0	1	\dots	$n-1$
arg.	$\frac{\varphi}{n}$	$\frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}$	\dots	$\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$

mis omakord annavad juurele n mitmesugust väärtust.

Iga uus k väärtus, näit.: $k=n$ ehk $k=n+1$, saavutab argumenti, mis ühest eelmisest on 2π , 4π , ehk $6\pi \dots$ võrra suurem ehk vähem, ja sellepärast uut juure väärtust ei anna.

Kompleksarvu $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ juured, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ on sellepärast järgmised:

$$x_1 = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} \right) \right]$$

$$x_2 = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi}{n} \right) \right]$$

$$x_3 = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos \left(\frac{\varphi + 4\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 4\pi}{n} \right) \right]$$

$$\dots$$

$$x_n = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos \left(\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} \right) \right]$$

Märkus: Et puht reaal- ehk imaginaararv ka kompleksarvude hulka kuulub, siis saame ka niisuguste arvude juurimisel nii mitu juure väärtust, kui suur on juure näitaja.

Näited.

1. Leida $\sqrt[4]{3-4i}$ väärtused.

Et kompleksarv $3-4i = 5(\cos 306^\circ 52' + i \sin 306^\circ 52')$,

siis on $\sqrt[4]{3-4i} = \sqrt[4]{5} \left(\cos \frac{306^\circ 52' + k2\pi}{4} + i \sin \frac{306^\circ 52' + k2\pi}{4} \right)$,

kus arvule k tuleb anda väärtused $0, 1, 2, 3$.

Sellepärast leiame:

$$k=0; x_1 = \sqrt[4]{5} \left(\cos 76^\circ 43' + i \sin 76^\circ 43' \right) = \sqrt[4]{5} \left(0,2295 + i 0,9732 \right)$$

$$k=1; x_2 = \sqrt[4]{5} \left[\cos(76^\circ 43' + 90^\circ) + i \sin(76^\circ 43' + 90^\circ) \right] =$$

$$= \sqrt[4]{5} \left(-\cos 13^\circ 17' + i \sin 13^\circ 17' \right) = \sqrt[4]{5} \left(-0,9732 + i 0,2295 \right)$$

$$k=2; x_3 = \sqrt[4]{5} \left[\cos(76^\circ 43' + 180^\circ) + i \sin(76^\circ 43' + 180^\circ) \right] =$$

$$= \sqrt[4]{5} (-\cos 76^\circ 43' - i \sin 76^\circ 43') = \sqrt[4]{5} (-0,2295 - i 0,9732).$$

$$k=3; x_4 = \sqrt[4]{5} [\cos(76^\circ 43' + 270^\circ) + i \sin(76^\circ 43' + 270^\circ)] =$$

$$= \sqrt[4]{5} (\cos 13^\circ 17' - i \sin 13^\circ 17') = \sqrt[4]{5} (0,9732 - i 0,2295).$$

2. Leida $\sqrt[3]{+1}$ väärtused.

Andes arvule $+1$ üldise kompleksarvu kuju $a + bi$, mille juures $a = 1$ ja $b = 0$, leiame $r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ ja $\operatorname{tg} \varphi = \frac{0}{1} = 0$; $\varphi = 0^\circ$.

Sellepärast

$$\sqrt[3]{+1} = \sqrt[3]{(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)} = \left(\cos \frac{0^\circ + k 2\pi}{3} + i \sin \frac{0^\circ + k 2\pi}{3} \right),$$

kus arvule k tuleb anda järjest väärtused $0, 1, 2$.

Sellepärast leiame

$$k=0; x_2 = (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 1$$

$$k=1; x_2 = (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = (-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$k=2; x_3 = (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = (-\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Leida $\sqrt[5]{-1}$.

Siin on $a = -1$; $b = 0$; $r = 1$; $\cos \varphi = -1$; $\sin \varphi = 0$;

$$\text{Sellepärast } \varphi = 180^\circ \text{ ja } \sqrt[5]{-1} = \cos \frac{180^\circ + k 2\pi}{5} + i \sin \frac{180^\circ + k 2\pi}{5} =$$

$$= \cos(36^\circ + k 72^\circ) + i \sin(36^\circ + k \cdot 72^\circ), \text{ kus } k \text{ võib olla } 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$k=0; x_1 = \cos 36^\circ + i \sin 36^\circ = 0,8090 + i 0,5878.$$

$$k=1; x_2 = -\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ = -0,3090 + i 0,9511.$$

$$k=2; x_3 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ = -1.$$

$$k=3; x_4 = -\cos 72^\circ - i \sin 72^\circ = -0,3090 - i 0,9511.$$

$$k=4; x_5 = \cos 36^\circ - i \sin 36^\circ = 0,8090 - i 0,5878.$$

4. Leida $\sqrt[n]{-1}$

Siin on $a = 0$; $b = 1$; $r = 1$; $\cos \varphi = 0$; $\sin \varphi = 1$; $\varphi = 90^\circ$

$$\text{Sellepärast } \sqrt[n]{+i} = \cos \frac{90^\circ + k 2\pi}{n} + i \sin \frac{90^\circ + k 2\pi}{n}$$

5. Leida $\sqrt[n]{-i}$

Siin on $a=0$; $b=-1$; $r=0$; $\cos \varphi=0$; $\sin \varphi=1$; $\varphi=270^\circ$.

Sellepärast

$$\sqrt[n]{-i} = \cos \frac{270^\circ + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{270^\circ + k \cdot 2\pi}{n}.$$

Märkus: Kui on leida n juure väärtust, kas puht reaal- ehk imaginaararvust ja kui meil juba teada on reaal- ja imaginaararvu üksuste juurte väärtused, siis pruugib leida sellest reaalarvust ehk imaginaararvu koefitsiendist reaalne juur ja korrutada viimast vastava üksuse juurte väärtustega.

Nõnda, näiteks, kui tarvis oleks leida $\sqrt[3]{8}$, siis pruugiks meil selle juure reaalse väärtusega korrutada näites 2) leitud üksuse juure väärtusi ja meie leiaks, et: $x_1=2$; $x_2=-1+i\sqrt[3]{3}$ ja $x_3=-1-i\sqrt[3]{3}$.

§ 28. Ülesanded kompleksarvude kohta.

A. Liitmine ja lahutamine.

111. a) $(5+8i)+(7-2i)$; b) $(11-2i)+(1+6i)$;
 c) $(-3-i)+(9-5i)$; d) $(7+4i)+(-5+i)$;
 e) $2,4+2i\sqrt[3]{3}+(-3,5-0,7i\sqrt[3]{3})$; f) $(-0,7+5i)+(-0,7-5i)$;
 g) $\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; h) $(10-i)+(10+i)$;
112. a) $(9-2i)-(2+7i)$; b) $(11+8i)-(8-5i)$;
 c) $(-13+5i)-(-7-2i)$; d) $(3,7-1,8i)-(-2,5+4,8i)$;
 e) $(2-i\sqrt[3]{3})-(-1+2i\sqrt[3]{3})$; f) $(24-0,2i)-(12-0,2i)$;
 g) $(-3+3,7i)-(-3+7,9i)$; h) $(1,2+1,7i)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}i\right)$;

B. Korrutamine, jagamine ja astendamise.

113. a) $(4+7i)(9+3i)$; b) $(2+13i)(7-11i)$;
 c) $(5-3i)(-7+15i)$; d) $(\sqrt[3]{3}+2i\sqrt[3]{3})(3\sqrt[3]{3}-i\sqrt[3]{3})$;
 e) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt[3]{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt[3]{3}}{2}\right)$; f) $(2\sqrt[5]{5}-0,5i)(2\sqrt[5]{5}+0,5i)$;
 g) $\sqrt[4]{4+3i} \cdot \sqrt[4]{4-3i}$; h) $\sqrt{-8+15i}\sqrt{-8+15i}$.
114. a) $\frac{5+3i}{3+1}$; b) $\frac{7+2i}{2-3i}$; c) $\frac{9+4i}{8-5i}$;
 d) $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2i}$; e) $\frac{41}{5+4i}$; f) $\frac{2-3i\sqrt[3]{3}}{3i}$;
 g) $\frac{1,3+1,3i}{-7+0,5i}$; h) $\frac{0,24-0,47i}{-1,8-1,3i}$.

115. a) $(1+i)^2$; b) $(1-i)^2$; c) $(5-3i)^2$;
 d) $(3\sqrt{2}+2i\sqrt{3})^2$; e) $(1+i)^3$; f) $(1-i)^3$;
 g) $(\sqrt{3}+2i\sqrt{5})^3$; h) $(\sqrt{5}-i\sqrt{3})^4$.

116. e) $\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3+\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$; b) $\left(-\frac{3}{2}+\frac{i3\sqrt{3}}{2}\right)^3-\left(-1-i\sqrt{3}\right)^3$
 c) $(\sqrt{4+3i}+\sqrt{4-3i})^2$; d) $(\sqrt{11-3i}-\sqrt{7+3i})^2$;
 e) $(\sqrt{2}+i\sqrt[4]{8})^4-(\sqrt[4]{8}-i\sqrt{2})^4$; f) $(\sqrt[4]{3}-i\sqrt[4]{27})^4+(\sqrt[4]{27}+i\sqrt[4]{3})^4$;
 g) $(\sqrt{3}+i\sqrt{5})^3(\sqrt{5}-i\sqrt{3})^3$; h) $\left(\frac{2\sqrt{3}-3i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3i\sqrt{3}}\right)^3$.

117. a) $\frac{2+3i}{4-3i}+\frac{3-2i}{4+3i}$; b) $\frac{2-5i}{5+2i}-\frac{5-2i}{2+5i}$;
 c) $\frac{7+9i}{7-9i}+\frac{7-9i}{7+9i}$; d) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^3}+\frac{(1+i)^4}{(1-i)^4}$;
 e) $(1+i\sqrt{3})^2 \cdot (1-i\sqrt{3})^{-3}$; f) $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^{-3} \cdot (\sqrt{6}-i\sqrt{3})^4$;
 g) $19i(\sqrt{7}-2i\sqrt{3})^{-2}$; h) $\frac{(12-8i)^3}{4i}$.

C. Kompleksarvule trigonomeetrilise kuju andmine ja Moivre'i lause tarvitamine.

118. a) $1+i$; b) $1-i$; c) $1+i\sqrt{3}$;
 d) $1-i\sqrt{3}$; e) $-1-i\sqrt{3}$; f) $8+6i$;
 g) $2,2-4,6i$; h) $-4,2+5,6i$; i) $-9,6-2,8i$.

119. a) $(40+9i)(7+24i)$; b) $(6+1,1i)(1,2-3,5i)$;
 c) $(6,3-1,6i)(5,6-3,3i)$; d) $(1,2+0,5i)(2-2,1i)$;
 e) $(2,8+4,5i):(4+0,9i)$; f) $(12+10i):(7-5i)$;
 g) $(2,9-3,7i):(5,6+6,4i)$; h) $(8,6-4,6i):(1,3-7,7i)$.

120. a) $(7+4i)^3$; b) $(5-2i)^4$; c) $(-2,4+7i)^{-3}$;
 d) $(\sqrt{11+5i})^{-4}$; e) $(1+i)^4(1+i\sqrt{3})^3$; f) $(4,5-7,9i)^4:(2,4-4,7i)^2$.
 g) $\frac{(2,5-1,8i)^4(3,7-4,2i)^5}{(4,8+6,5i)^3}$; h) $\frac{(0,68-0,52)^3(0,77+0,82i)^2}{(0,64-0,54i)^4}$

121. a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[3]{64}i$ d) $\sqrt[3]{-125}i$
 e) $\sqrt[3]{13}i$ f) $\sqrt[3]{-17}i$ g) $\sqrt[4]{1}$ h) $\sqrt[4]{-1}$
 i) $\sqrt[4]{i}$ k) $\sqrt[4]{-i}$ l) $\sqrt[4]{16}$ m) $\sqrt[4]{-81}$

n) $\sqrt[4]{15i}$

o) $\sqrt[5]{1}$

p) $\sqrt[5]{-1024}$

q) $\sqrt[6]{1}$

r) $\sqrt[5]{-i}$

s) $\sqrt[7]{i}$

t) $\sqrt[8]{1}$

n) $\sqrt[8]{-1}$

122. a) $\sqrt{4+3i}$

b) $\sqrt{12-5i}$

c) $\sqrt{-15+8i}$

d) $\sqrt[3]{-9+40i}$

e) $\sqrt[3]{415-234i}$

f) $\sqrt[3]{-3-3i}$

g) $\sqrt[4]{12+5i}$

h) $\sqrt[4]{-15-8i}$

i) $\sqrt[4]{(-2+3i)^3}$

k) $\sqrt[5]{-8-15i}$

l) $\sqrt[5]{122-597i}$

m) $\sqrt[6]{352+936i}$

n) $\sqrt[6]{-117+44i}$

o) $\sqrt[6]{(-3+4i)^5}$

p) $\sqrt[9]{615-448i^5}$

§ 29. Geomeetiline kompleksidega arvutamine.

1. Liitmine.

Olgu tasapinnal tõmmatud ox reaali- ja oy imaginaararvjoon (Joon. 42) ja antud täpid T_1 ja T_2 , mis vastavalt kompleksarve $a_1 + b_1i$ ja $a_2 + b_2i$ kujutavad. Selle juures on meil teada, et $OU_1 = a_1$, $T_1U_1 = b_1$, $OU_2 = a_2$ ja $T_2U_2 = b_2$.

Liitmise reegli põhjal saame antud arvude summa:

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

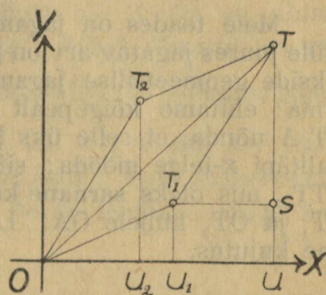
Et seda summat geomeetriselt kujutada, selleks mõeldame x -teljel $OU = OU_1 + OU_2 = a_1 + a_2$ ja täpist U tõmbame sirgjoone paralleelselt y -teljega. Sellel sirgel mõeldame veel täpist U ülespoole lõike

$$UT = US + ST = U_1T_1 + U_2T_2 = b_1 + b_2i.$$

Nõnda leitud täpp T ongi antud komplekside summa kujutus.

Kergesti on näha, et kolmnurgad OU_2T_2 ja T_1ST on võrdsed, et $OT_2 \neq T_1T$ ja ka $OT_1 \neq T_2T$ ja et kujund OT_2TT_1 on paralleelogramm.

Sellepärast võime ütelda: et geomeetriselt komplekse liita, selleks tuleb ehitada antud komplekside moodulite OT_1 ja OT_2 peale paralleelogramm — selle paralleelogrammi tipp, mis nulltäpi vastu seisab, on summa kujutus ja diagonaal OT , mis seda tippu ühendab nulltäpiga, on summa moodul.



Joon. 42.

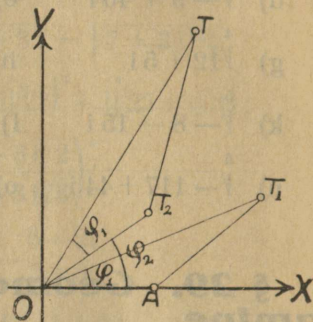
2. Lahutamine.

Et lahutamine on ümberpööratud tehe liitmisega, mille juures vähendatav on lahutatava ja vahe summa, siis on eelmise põhjal arusaadav, et geomeetriselise kompleksarvude lahutamise juures tuleb ehitada paralleelogramm, võttes vähendatava kompleksi mooduli selle paralleelogrammi diagonaaliks ja lahutatava mooduli üheks küljeks. Viimase kõrvalseisev ja nulltäpist väljaminev külg on siis otsitava vahe moodul.

Näeme, et komplekside geomeetiline liitmine ja lahutamine on ühesugune vektorite liitmise ja lahutamise, mille juures kompleksi moodul mängib vektori osa.

3. Korrutamise.

Olgu antud geomeetriselt täppide T_1 ja T_2 (Joon. 43) näol kaks kompleksarvu r_1 ($\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1$) ja r_2 ($\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2$). Et nende korrutist geomeetriselt leida, selleks ehitame ühe antud kompleksi mooduli, näit. $OT_1 = r_1$ kõrvale kolmnurga OAT_1 nõnda, et selle üks külg OA oleks võrdne pikkuse üksusega, tõmmatud nulltäpist x -telge mööda. Siis ehitame teise kompleksi mooduli $OT_2 = r_2$ kõrvale kolmnurga OT_2T , mis esimese kolmnurgaga sarnane, nõnda et külg OT_2 vastab küljele OA ja OT küljele OT_1 . Viimase kolmnurga tipp T ongi korrutise $r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ geomeetiline kujutus.



Joon. 43.

Sest meie leiame sarnastest kolmnurkadest, et $OA : OT_2 = OT_1 : OT$, ehk $1 : r_2 = r_1 : OT$, kust näeme, et korrutise moodul $OT = r_1 \cdot r_2$.

Aga selle tõttu, et $\sphericalangle TOT_2 = \sphericalangle T_1OA = \varphi_1$, on ka korrutise argument $\sphericalangle TOA = \sphericalangle TOT_2 + \sphericalangle T_2OA = \varphi_1 + \varphi_2$, nagu ta peabki olema.

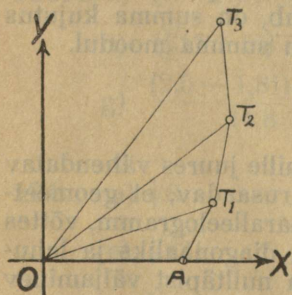
4. Jagamine.

Meie teades on jagamine ümberpööratud tehe võrdlemisi korrutamise, mille juures jagatav arv on jagaja ja jagatise korrutis. Sellepärast peame komplekside geomeetriselise jagamise puhul, eelmist arvesse võttes, järgmiselt talitama: ehitame kõigepealt jagaja mooduli OT_1 kõrvale (Joon. 43) kolmnurga OT_1A nõnda, et selle üks külg oleks võrdne pikkuse üksusega ja läheks läbi nulltäpi x -telge mööda; siis ehitame jagatava mooduli OT kõrvale kolmnurga OTT_2 , mis oleks sarnane kolmnurgaga OT_1A nõnda, et külg OT vastaks küljele OT_1 ja OT_2 küljele OA . Leitud täpp T_2 ongi siis otsitava jagatise geomeetriselise kujutus.

5. Astendamine.

Kui astmenäitaja on positiivne täisarv (ja seda juhust meie vaatlemegi siin), siis on aste ise võrdsete tegurite korrutis ja tema leidmiseks võib antud arvu, korrutades teda iseenesega, tõsta järjest teisele, kolmandale jne. astmele, kunni jõuame eesmärgini.

Samuti tuleb talitada ka geomeetriselise astendamise puhul.



Joon. 44.

Olgu, näiteks, antud kompleksi geomeetriseliseks kujutuseks täpp T_1 (Joon. 44). Ehitades alguses mooduli OT_1 kõrvale kolmnurga OT_1A , kus $OA = 1$, ja siis selle kolmnurgaga sarnase kolmnurga OT_2T_1 , nagu korrutamise juures nõuetav, saame täpi T_2 näol antud arvu kvasitise iseenesega, ehk tema teise astme. Kui veel ehitame OT_2 kõrvale kolmnurga OT_3T_2 sarnase eelmiste kolmnurkadega, siis saame täpi T_3 näol juba antud kompleksi kolmanda astme.

Töötades samuti edasi, võime antud kompleksi tõsta ükskõik missugusele täisarvulisele astmele.

Erijuhused.

1. Kui antud kompleksi moodul $r=1$, siis peavad ka tema astmete moodulid võrduma ühega ja astmete geomeetriselised kujutused on sel puhul paigutatud ringjoonele, mis raadiusega $r=1$ on joonistatud ümber nulltäpi.

2. Kui moodul $r=1$ ja ühtlasi argument $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, kus n on positiivne täisarv, siis on järjest võetud I^{se}, II^{se}, III^{da} n^{se} astmete kujutused korrapärase n —nurga tippudeks, mille kesktäpp asub nulltäpis ja raadius on võrdne ühega.

6. Juurimine.

Juurimise reegli põhjal on

$$\sqrt[n]{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right].$$

Kõikide selle juure n väärtuste moodulid on võrdsed arvuga $\sqrt[n]{r}$, argumendid aga alates argumendiga $\frac{\varphi}{n}$ kasvavad järjest nurga $\frac{2\pi}{n}$ võrra. Selle tõttu on nende n juure väärtuste geomeetriselised kujutused niisuguse korrapärase n -nurga tippudeks, mille keskpunkt asub nulltäpis ja raadius on $\sqrt[n]{r}$. Sellepärast seisab geomeetriselise kompleksarvu juurimine niisuguse n -nurga ehitamises, mille juures eraldi tuleb leida geomeetriselt $\sqrt[n]{r}$; $\frac{\varphi}{n}$; $\frac{2\pi}{n}$. See on aga ainult üksikutel juhtumistel võimalik. Kui näiteks $n=2$, siis on lihtne leida \sqrt{r} , konstruies keskmise geomeetriselise 1 ja r vahel. Samuti on sel puhul lihtne leida $\frac{\varphi}{n}$ ja $\frac{2\pi}{n}$. Kui aga $n=3$, siis on just nurga $\frac{\varphi}{3}$ leidmine üldse geomeetriselt võimatu. Erijuhustel aga, näiteks kui $\varphi = 0$, ehk $\varphi = 180^\circ$, on ka võimalik leida geomeetriselt kolmanda astme juur. Seda on iseäranis lihtne teha, kui ühtlasi veel $r=1$, nagu niisuguste juurte leidmise korral, kui $\sqrt{1}$, $\sqrt{-1}$, \sqrt{i} ja $\sqrt{-i}$.

§ 30. Ülevaade arvu mõiste ja tema laiendamise kohta.

Arvumõiste on alguses tekkinud tarvidusest konkreetsete asjade hulka määrata. Selle tagajärjel on tulnud nõndanimetud loomuliku ehk absoluutse täisarvu mõiste juure.

Nagu asjade hulk võib olla piiramatu suur, nõnda on ka täisarvude hulk piiramatu ehk, nagu öeldakse, lõpmatu, ja nõnda kui asjade hulk seisab koos üksikutest asjadest, samuti seisab ka iga arv koos n . n. arvu üksustest.

Et lõpmatu hulga arvude seas ennast orientida ja nende kohta selget ülevaadet saada, selleks korraldakse arvu üksused ühesuurusteks rühmadeks ja, vaadates viimaste peale kui suuremate üksuste peale, sünnitakse nendest samuti uued kõrgema järgu rühmad jne. Arvude korraldus võib olla mitmesugune, selle järele mitu alama järgu üksust sünnitavad järgmise kõrgema üksuse. Selles mõttes on peaaegu terves ilmas maksev n . n. kümneline ehk dekaadiline arvu süsteem, mille juures iga kümme üksust sünnitavad järgmise suurema üksuse. See kümneline arvu süsteem on samuti, kui arvu mõistegi, muistsetest aegadest pärit ja peaaegu erandita kõikide rahvuste juures maksev.

Kui kõige lihtsam arvu mõiste juba olemas oli, siis tekkis ka tarvidus arvudega n. n. arvutus-tehteid teha ja ühes sellega ilmus ajajooksul ka tarvidus arvu mõistet laiendada.

Mis puutub arvutusteheteisse, siis tunneme meie neist seitse, kui mitte lugeda differentsimist ja inteegrinist, ja nimelt: liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine, astendamine, juurimine ja logaritmine.

Nendest on kolm n. n. otsetehet: liitmine, korrutamine ja astendamine ja neli ümberpööratud tehet: lahutamine, jagamine, juurimine ja logaritmine.

Otsetehted on loomulikkude arvudega igal juhtumisel läbiviidavad, ümberpööratud tehted ei ole aga seda mitte. Siin võib sagedasti ette tulla, et antud loomulikkude arvudega tehet tehakse meie ei leia ühtki loomulikku arvu, mis oleks selle tehte saaduseks. Et ka niisugustel juhtumistel edasi pääseda, tuleb siin arvu mõistet laiendada, oletades, et ka niisugusteks, loomulikkude arvude mõttes võimatu saadusteks on siiski ka arvud, ja defiinides nende uute arvude mõisted nõnda, et seadused, mis senni tuntud arvude kohta maksivad olid, ka uute arvude kohta maksivaks jääksid.

Esimene arvumõiste laiendamine on tarvilik lahutamise juures, sel puhul, kui vähendatav on vähem lahutatavast. Ja nimelt, kui $a < b$, siis ei leia meie ühtki loomulikku arvu, mis rahuldaks kirjutust

$$a - b = x.$$

Teades aga, et $a - a = 0$ ja lahutades b kaheks liidetavaks, milledest üks oleks a ja teine $b - a = c$, nõnda et $b = a + c$, võime kirjutada

$$a - b = a - (a + c) = a - a - c = 0 - c = -c,$$

kust näeme, et saaduseks on iseseisev lahutatav arv, mida iseloomustab tema ees olev märk —. Niisuguseid arvusid nimetakse negatiivseteks, võrdlemisi senni tuntud arvudega, mida positiivseteks arvudeks nimetakse ja tarvilisel korral märgiga + varustakse.

Teine arvu mõiste laiendamise tarvidus ilmub jagamise juures, kui jagamine senni tuntud (positiivsete ja negatiivsete) arvude mõttes võimatu on. Siin tuleb arvu mõistele juure lisada murdarvu mõiste, mille juures senni tuntud arvud täisarvudeks hakatakse nimetama.

Kolmas kord tuleb arvu mõistet laiendada juurimise puhul, n. n. irratsionaalsete arvude mõistega. See arvu mõiste on ka logaritmine juures tarvilik, sest suurema jao arvude logaritmid on just irratsionaalsed arvud, mis lõpmatu, kuid mitte perioodsete kümnendmurdude näol esinevad.

Irratsionaalsete murdudega võrdlemisi nimetakse kõiki teisi murdarvusi ratsionaalseteks.

Irratsionaalsete arvude mõiste sissetoomisega ei kõrvaldu siiski veel kõik takistused, mis juurimise juures võivad ette tulla, nimelt ei leia meie ühtki ratsionaalset ega irratsionaalset arvu, mis oleks paarisastmeliseks juureks negatiivsest arvust. Siin tuleb veel neljas kord arvu mõistet laiendada ja, nagu teada, saame siin imaginaarsete arvude mõiste, mille puhul kõiki senniseid arvusid reaalsseteks nimetakse.

Imaginaararvud sünnitavad sama suure arvude liigi kui reaalsed. Imaginaararvud võivad samuti kui reaalsedki positiivsed ehk negatiivsed; täis ehk murd, ratsionaalsed ehk irratsionaalsed olla.

Realse ja imaginaarse arvu summa, nagu teada, annab kompleksarvu, mis on kõige üldisem arvude liik ja ühendab kõik senni tuntud liigid.

Korraldades kõik arvud arvu mõiste laiendamise põhjal liikidesse, saame kokkuvõetult järgmise ülevaatliku pildi arvu liikidest.

Kõige laiema arvuliigi sünnitavad kompleksarvud. Nendes sisaldub kaks vähemat kuid ühesuurust liiki, reaalsed ja imaginaarsed arvud. Viimased jagunevad omakord kaheks ühesuuruseks liigiks positiivseteks ja negatiivseteks. Positiivsed ja negatiivsed arvud harunevad täis- ja murdarvudeks. Ja lõpuks võivad murdarvud olla kas ratsionaalsed ehk irratsionaalsed.

Kuues peatükk.

Võrrandid.

§ 31. Üldmõisted ja laused.

Avaldust

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

nimetakse **n-astme võrrandiks**, aga pahemat poolt eraldi võrrandi **polünoomiks**.

Arv n on positiivne täisarv ja ühtlasi kõige suurem tundmatu arvu x astmenäitaja.

Koeffitsiendid $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ võivad olla mistahes reaalsed arvud; mõned nendest võivad ka võrduda nulliga.

Võrrandi pahemat poolt, kui funktsiooni, mis oleneb arvust x , võib lühidalt märkida tähega y ehk $f(x)$.

Arvu x niisugust väärtust, mis $f(x)$ nulliks muudab, nimetakse võrrandi $f(x)=0$ **juureks**. Öeldakse, et niisugune arv **rahuldab** võrrandit.

Võrrand, mille koeffitsiendid on avaldud tähiga, nimetakse **tähtvõrrandiks** ja võrrand, mille koeffitsiendid on avaldud numbritega, nimetakse **numbervõrrandiks**.

1. Lause.

Igal võrrandil on vähemalt üks reaalne ehk kompleksjuur.

Selle n . **algebra põhilause** peale põhjenevad järgmised võrrandite kohta käivad laused. Selle lause tõendamine nõuab põhjalikumaid eelteadmisi kompleksarvude kohta, sellepärast peame selle tõenduse siin ära jätma.

2. Lause.

Iga võrrandi polünoom $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$ jaguneb ilma ülejäägita avaldusega $x - x_1$, kus x_1 tähendab selle võrrandi üht juurt.

Tõendus:

Kui antud võrrandi polünoom on

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \dots \dots \dots 1)$$

ja kui x_1 on selle võrrandi juureks, siis võime kirjutada:

$$0 = x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n \dots \dots \dots 2)$$

Lahutades esimese võrduse mõlematest pooltest teise võrduse vastavad pooled, saame:

$$f(x) = (x^n - x_1^n) + a_1 (x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2 (x^{n-2} - x_1^{n-2}) + \dots \dots \dots + a_{n-1} (x - x_1) \dots \dots \dots 3)$$

Saadud võrduse iga sulgudes seisev vahe jaguneb ilma ülejäägita avaldusega $x - x_1$; kui näiteks jagame $(x^n - x_1^n)$, siis leiame:

$$(x^n - x_1^n) : (x - x_1) = x^{n-1} + x^{n-2} x_1 + x^{n-3} x_1^2 + \dots + x x_1^{n-2} + x_1^{n-1}.$$

Sellepärast peab ka võrduse 3) ja ühtlasi ka võrduse 1) mõlemad pooled jagunema ilma ülejäägita avaldusega $x - x_1$.

3. Lause.

Iga n-astme võrrandi polünoom laguneb n esimese astme teguriks.

Olgu antud n-astme võrrandi polünoom

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Sellel võrrandil peab algebra põhilause põhjal olema vähemalt üks juur. Kui selleks juureks on arv x_1 , siis jaguneb võrrandi polünoom eelmise lause põhjal ilma ülejäägita avaldusega $x - x_1$. Jagatisena saame ühe (n-1)-astme polünoomi $f_1(x) = x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}$, mille tõttu võime antud polünoomi avaldada järgmiselt kahe teguri näol:

$$f(x) = (x - x_1)(x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}) = (x - x_1) f_1(x).$$

Võrrandil $f_1(x) = 0$ peab omakord põhilause põhjal olema vähemalt üks juur. Kui selleks juureks on arv x_2 , siis peab polünoom $f_1(x)$ ilma ülejäägita jagunema avaldusega $x - x_2$, mille tagajärjel saame jagatisena (n-2)-astme polünoomi

$$f_2(x) = x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + c_2 x^{n-4} + \dots + c_{n-3} x + c_{n-2}.$$

Sellepärast võime kirjutada:

$$f_1(x) = (x - x_2) \cdot f_2(x) \text{ ja } f(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_2(x).$$

Polünoom $f_2(x)$ jaguneb omakord avaldusega $x - x_3$, kus x_3 on võrrandi $f_2(x) = 0$ juureks, mille tagajärjel saame juba (n-3)-astme polünoomi. Töötades samuti edasi jõuame lõpuks esimese astme avalduseni $f_{n-1}(x) = x + k_1$, mida võime ka avaldada järgmiselt $f_{n-1}(x) = x - x_n$, kus x_n tähendab esimese astme võrrandi $f_{n-1}(x) = 0$ juurt. Antud polünoomi $f(x)$ võime selle harutuse põhjal avaldada järgmiselt n teguri korrutise näol:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n).$$

Tegurid $(x - x_1), (x - x_2), (x - x_3) \dots$ nimetakse **juurteguriteks**.

4. Lause.

Igal n-astme võrrandil on n ja ainult n juurt:

Tõendus.

Iga n-astme võrrandi

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

võime eelmise lause põhjal järgmiselt avaldada:

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0.$$

See võrrand rahuldakse, kui üks pahemal pool asuvatest teguritest nulliks muutub, ja see sünnib siis, kui $x = x_1$ ehk $x = x_2 \dots$ ehk $x = x_n$. Et aga niisuguseid tegurid on n, siis on selge, et on vähemalt n arvu $x_1, x_2 \dots x_n$, mis on meie võrrandi juurteks.

Tõendus.

Kui paneme antud juure $a+bi$ tundmatu arvu x asemele, siis muutub võrrandi pahem pool kompleks suuruseks, ja me võime saaduse üldse avaldada järgmiselt:

$$A + Bi = 0.$$

Agas § 24. lause 1. põhjal on siis korraka

$$A=0 \text{ ja } B=0.$$

ja sellepärast peab olema ka

$$A-Bi=0.$$

Viimase avalduse võiks me saada, kui antud võrrandisse tundmatu x asemele paneme kompleksi $a-bi$. Sellepärast peab ka $a-bi$ olema meie võrrandi juureks. Lause 8. võime vormulida ka järgmiselt:

reaalsete koeffitsientidega võrrandi juures võivad kompleksjuured ette tulla ainult paarikaupa ja nimelt kaaskompleksidena.

Märkus. Edespidi me räägime ainult võrranditest, mille koeffitsiendid on reaalsed, ilma et me seda igal üksikul juhtumisel toonitame.

Järelduslauseid.

9. Paarituastmelisel võrrandil on vähemalt üks ehk paaritu arv reaalseid juuri.

10. Paarisastmelisel võrrandil, millel üldse reaalsed juured ette tulevad, on neid paarisarv.

11. Lause.

Kui võrrandi

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

kõik koeffitsiendid on reaalsed täisarvud, siis ei või niisuguse võrrandi juurteks olla ratsionaalsed murrud.

Tõendus.

Tõenduseks oletame vastupidi sellega, mis vaja tõendada: nimelt olgu täisarvuliste koeffitsientidega võrrandi $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ üheks

juureks koondumatu ratsionaalne murd $\frac{p}{q}$. Siis peab see murd meie võrrandit rahuldama, kui paneme tema tundmatu arvu asemele; ja meie võime kirjutada:

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_n = 0.$$

Kui nüüd korrutame viimases võrduses iga liiget arvuga q^{n-1} ja viime kõik liikmed, peale esimese, pahemalt paremale poole, siis saame:

$$\frac{p^n}{q} = -a_1 p^{n-1} - a_2 p^{n-2} q - \dots - a_n q^{n-1}.$$

Selle võrduse pahem pool on koondumatu murd, aga parem pool on kindlasti täisarv, sest samuti kui koeffitsiendid a_1, a_2, \dots, a_n , nõnda ka arvud p ja q on täisarvud.

Et aga koondumatu murd ei või olla võrdne täisarvuga, siis on see võrdus võimatu, ja see võimatu võrdus on tekkinud selle tõttu, et meie alguses tegime vale oletuse.

Sellepärast võime ka ütelda:

Täisarvuliste koefitsientidega võrrandi reaalsseteks juurteks võivad olla kas täisarvud ehk irratsionaalsed murrud.

§ 32. *Numbervõrrandite lahendamine.*

1. Ratsionaalsete juurte leidmine.

Eelmise paragrahvi lause 11. põhjal võivad täisarvuliste koefitsientidega võrrandi ratsionaalseteks juurteks olla ainult täisarvud. Et aga lause 5. põhjal võrrandi vaba liige on kõikide juurte korrutis, siis on selge, et täisarvulised juured peavad sisalduma võrrandi vaba liikmes teguritena. Sellepärast leiame võrrandi täisarvulised juured, kui lahutame algteguriteks vaba liikme ja katsume, missugune algteguritest ehk nendest kombiinitud korrutistest rahuldab antud võrrandit. Selleks peame iga algteguri ja nendest kombiinitud korrutise võtma positiivse ja negatiivse suurusena ja võrrandisse panema otsitava suuruse asemele. Kui leiame niisugusel teel ühe juure, siis võime järgmised juured leida lihtsamast võrrandist. Sest jagades antud võrrandi polünoomi juurteguriga, saame eelmise paragrahvi lause 2. ja 3. põhjal ühe võrra madalama-astmelise võrrandi. Kui saadud võrrandist leiame teise juure, siis võime uuesti võrrandi astet alandada ühe võrra, et uuest veel lihtsamast võrrandist leida järgmise juure j. n. e.

Näiteks

olgu antud võrrand:

$$x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 26x + 120 = 0.$$

Kui lahutame vaba liikme teguriteks, siis oleks vaja järele katsuda, kas mõni järgmistest arvudest:

$$\begin{aligned} &\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \\ &\pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 40, \pm 60, \pm 120 \end{aligned}$$

on meie võrrandi juureks.

Leiame, et kõige pealt on antud võrrandi juureks arv -2 .

Nüüd jagame antud võrrandi polünoomi juurteguriga $x+2$, mille tagajärjel saame uue võrrandi:

$$x^3 - 4x^2 - 17x - 60 = 0.$$

Katsudes leiame, et selle võrrandi juureks on arv $+3$. Kui nüüd jagame selle võrrandi polünoomi tema juurteguriga $x-3$, siis saame teise astme võrrandi:

$$x^2 - x - 20 = 0,$$

mille juurteks on arvatud -4 ja $+5$.

Nõnda on siis antud võrrandi juurteks:

$$x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = -4 \text{ ja } x_4 = 5.$$

Ülesanded.

Leida järgmiste võrrandite juured.

123. a) $x^3 - 7x - 6 = 0$ b) $x^3 - 5x^2 - 34x + 80 = 0$
 c) $x^3 + 2x^2 - 34x + 168 = 0$ d) $x^3 + 7x^2 - 40x - 100 = 0$
 e) $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0$ f) $x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = 0$
 g) $x^3 - 11x^2 + 35x - 49 = 0$ h) $x^3 + 4x^2 + 25x + 100 = 0$
124. a) $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 30 = 0$
 b) $x^4 - 4x^3 - 35x^2 + 78x + 360 = 0$
 c) $x^4 - 7x^3 - 64x^2 + 220x + 1200 = 0$
 d) $x^4 + 3x^3 - 31x^2 - 123x - 90 = 0$
 e) $x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = 0$
 f) $x^4 - 24x^3 + 136x^2 - 273x = 0$
 g) $x^5 - 23x^4 + 171x^3 - 373x^2 - 580x + 2100 = 0$
 h) $x^5 - 7x^4 - 55x^3 + 343x^2 + 76x - 1512 = 0$
 i) $x^5 - x^4 - 20x^3 - 3141x - 9639 = 0$
 k) $x^5 - 5x^4 - 63x^3 + 23x^2 + 680x + 3900 = 0$.

Seada kokku võrrandid, mille juurteks on järgmised suurused.

125. a) 1, 3, -5 b) -1, 2, 8
 c) 2, -4, -7 d) 3, -5, 10
 e) 5, 2i, -2i f) 4, 2+i, 2-i
 g) 2, 4+i√3, 4-i√3 h) 3, -5, 7, 10
 i) 4, -6, -7, 12 k) -5, 7, 3+2i, 3-2i
 l) 2+3i, 2-3i, 1+i√3, 1-i√3 m) -2, 3, -7, -9, 15.

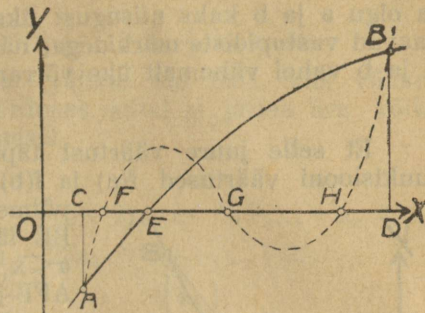
2. Irratsionaalsete juurte leidmine.

Võrrandi irratsionaalsete juurte leidmist võimaldab järgmine lause:

12. Kui võrrandi $f(x) = 0$ polünoom kui funktsioon $y = f(x)$ on niisugune, et argumendi väärtuste $x = a$ ja $x = b$ juures ta omab vastupidiste märkidega väärtused (kas $f(a) > 0$ ja $f(b) < 0$ ehk $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$), siis asub argumendi vahemikus $a < x < b$ üks ehk paaritu arv juuri.

Tõendus:

Seda lauset on lihtne tõendada graafiliselt. Olgu $OC = a$, aga $OD = b$ (Joon. 45). Kui nüüd $f(a) < 0$, aga $f(b) > 0$, siis asub funktsiooni väärtuse $f(a)$ kuhu täpp A all pool, aga $f(b)$ kuhu täpp B' ülal pool x-telge. Et meie funktsiooni $f(x)$ kujutuseks peab olema pidev kõverjoon, siis on selge, et see kõver vähemalt üks kord (täpis E), ehk kui rohkem, siis paaritu arv kordasid lõikab x-telge. Et aga abstsissiga iga väärtus, mille juures võrrandi polünoomi kujutus lõikab x-telge, on võrrandi juureks, siis peab võrrandil vahemikus $a < x < b$ olema vähemalt üks ehk paaritu arv juuri.



Joon. 45.

Kui meil eraldi on tegemist niisuguse võrrandiga $f(x) = 0$, mille koeffitsiendid on täisarvud ja mille polünoomi väärtused argumentide kahe kõrvu seisva täisarvulise väärtuse juures a ja $a+1$ saavad vastupidiste märkidega [kas $f(a) > 0$ ja $f(a+1) < 0$ ehk $f(a) < 0$ ja $f(a+1) > 0$], siis peab antud võrrandil olema vähemalt üks irratsionaalne juur arvude a ja $a+1$ vahel. Sest täisarvuliste koeffitsientidega võrrandi juurteks võivad olla kas täisarvud ehk irratsionaalsed murrud, et aga juur peab asuma kahe üksteisele järgneva täisarvu vahel, siis võib ta olla ainult irratsionaalne.

Eelmise põhjal on võimalik määrata võrrandi irratsionaalsed juured.

Näiteks

olgu antud võrrand

$$f(x) = x^4 + 2x - 4 = 0.$$

Proovides leiame

$$f(+1) = -1 \text{ ja } f(+2) = +16,$$

kust selgub, et üks irratsionaalne juur asub $+1$ ja $+2$ vahel. Kui nimetame selle juure väärtust x_1 läbi, siis võime kirjutada:

$$+1 < x_1 < +2.$$

Et juure x_1 väärtust ligemalt leida, selleks jagame $+1$ ja $+2$ vahe kümneks ja katsume arvusid $1,1; 1,2; 1,3; \dots; 1,9$ järele, neid võrrandisse otsitava suuruse asemele pannes.

Niisugusel teel leiame, et

$$f(1,1) = -0,3359 \text{ ja } f(1,2) = +0,4736.$$

Sellepärast peab juur x_1 asuma $1,1$ ja $1,2$ vahel.

Kui võtame ligikaudu $x_1 \approx 1,1$ ehk $x_1 \approx 1,2$, siis teeme vea vähema kui üks kümnendik. Tahame aga x_1 väärtust täpsemalt leida, siis töötame samuti edasi. Jagame $1,1$ ja $1,2$ vahe kümneks ja proovime arvusid $1,11; 1,12; 1,13 \dots; 1,19$. Niimoodi leiame, et

$$f(1,14) = -0,0310, \text{ aga } f(1,15) = +0,0490,$$

mille tõttu juur x_1 peab asuma $1,14$ ja $1,15$ vahel. Sellepärast kui võtame ligikaudu $x_1 \approx 1,14$ ehk $x_1 \approx 1,15$, siis teeme vea, mis vähem on kui $0,01$.

Kui nõndaviisi edasi töötame, siis võime juure x_1 väärtuse leida nii suure täpsusega kui soovime. Niisugune juure väärtusele liginemine võtab aga palju tööd ja aega. Sellepärast harutame läbi meetodid, mis võimaldavad võrrandi irratsionaalse juure leidmist kergema vaevaga.

A. Regula falsi.

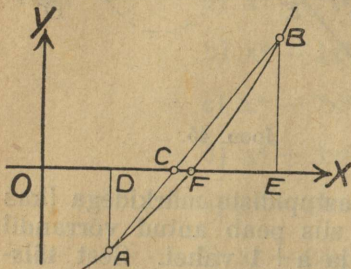
Olgu antud võrrand

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

ja olgu a ja b kaks niisugust üksteise ligiduses asuvat arvu, et $f(a)$ ja $f(b)$ saavad vastupidiste märkidega, näiteks $f(a) < 0$, aga $f(b) > 0$. Siis asub arvude a ja b vahel vähemalt üks võrrandi juur x_1 ; nimelt, kui $a < b$, siis

$$a < x_1 < b.$$

Et selle juure väärtust täpsemalt leida, selleks kujutame graafiliselt funktsiooni väärtused $f(a)$ ja $f(b)$. Kui $OD = a$ (Joon. 46) ja $OE = b$, siis võime $f(a)$ kujutada joonlõigu AD ja $f(b)$ lõigu BE läbi. Funktsiooni $f(x)$ kujutuseks vahemikus $a < x_1 < b$ oleks siis mingisugune kõverjoone kaar AFB ja otsitava juure kujutuseks joonlõik OF . Kui aga lõik $ED = b - a$ on küllalt väikene suurus, siis võime tõmmata sirge AB , mis lõikab x -telge täpis C ja võtta otsitava juure ligikaudseks väärtuseks lõigu $OC = \alpha$. Selle lõigu OC väärtuse leiame, kui silmas peame, et kolmnurgad ACD ja BCE on sarnased, mille tõttu võime kirjutada proportsiooni:



Joon. 46.

$$\frac{CD}{DA} = \frac{EC}{EB}.$$

Et aga $CD = OC - OD = \alpha - a$, $DA = f(a)$, $EC = OE - OC = b - \alpha$ ja $EB = f(b)$, siis võime eelmise proportsiooni avaldada veel järgmiselt

$$\frac{\alpha - a}{f(a)} = \frac{b - \alpha}{f(b)},$$

kust leiame α :

$$\alpha = \frac{a f(b) + b f(a)}{f(a) + f(b)}.$$

Selle valemi põhjal leiamegi võrrandi täpsema juure.

Näiteks

on meil võrrandi $f(x) = x^4 + 2x - 4 = 0$ kohta proovides leitud, et

$$f(1,14) = -0,031 \text{ ja } f(1,15) = 0,049.$$

Sellepärast võime eelmise valemi põhjal kirjutada:

$$\alpha = \frac{1,14 \cdot 0,049 + 1,15 \cdot 0,031}{0,031 + 0,049} = \frac{0,09151}{0,08} = 1,1438.$$

B. Newtoni liginemise meetod.

Olgu proovides leitud võrrandi

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

*) Selles valemis tuleb tarvitada a , b , $f(a)$ ja $f(b)$ absoluutseid väärtusi, mille tõttu leiame ka α absoluutse väärtuse.

irratsionaalse juure x_1 ligikaudne väärtus α ja meil oleks vaja selle juure väärtust täpsemalt määrata. Kui juure x_1 ja tema ligikaudse väärtuse vahe on h , nõnda et $x_1 - \alpha = h$ ehk $x_1 = \alpha + h$, siis peab $\alpha + h$ rahuldama antud võrrandit, mille tõttu:

$$(\alpha + h)^n + a_1 (\alpha + h)^{n-1} + a_2 (\alpha + h)^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Kui h on küllalt väikene suurus, näiteks vähem kui 0,01, siis võime leida ligikaudse h väärtuse, avades selles võrduses sulud ja jättes ära kõik liikmed, kus h on kõrgemal astmel, kui esimesel.

Tehes seda saame kõige pealt:

$$\alpha^n + n\alpha^{n-1}h + a_1\alpha^{n-1} + (n-1)a_1\alpha^{n-2}h + a_2\alpha^{n-2} + (n-2)a_2\alpha^{n-3}h + \dots + a_n \approx 0,$$

$$\text{ehk } h [n\alpha^{n-1} + (n-1)a_1\alpha^{n-2} + (n-2)a_2\alpha^{n-3} + \dots] \approx$$

$$\approx -[\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \dots + a_n]$$

ja lõpuks

$$h \approx - \frac{\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \dots + a_n}{n\alpha^{n-1} + (n-1)a_1\alpha^{n-2} + (n-2)a_2\alpha^{n-3} + \dots}$$

Selle valemi meelespidamiseks juhime tähelepanu selle peale, et paremal pool asuva murru lugeja on antud võrrandi polünoomi kui funktsiooni väärtus argumendi väärtuse $x = \alpha$ juures ja nimetaja on selle funktsiooni tuletise väärtus sama argumendi väärtuse juures. Sellepärast võime selle valemi kirjutada lihtsamal kujul järgmiselt:

$$h \approx - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

See valem võimaldab meil leida h ligikaudse väärtuse. Kui leitud h väärtuse liidame katse teel leitud juure väärtusega α , siis saame uue täpsema juure väärtuse:

$$\alpha_1 = \alpha + h.$$

Kui vaja on juure väärtust veel täpsemalt määrata, siis talitame juure uue väärtusega α_1 samuti, kui tegime väärtusega α .

Näiteks

võtame jälle võrrandi $f(x) = x^4 + 2x - 4 = 0$, mille ligikaudse juure $\alpha = 1,14$ leidsime proovides. Pannes selle väärtuse võrrandisse ja tema tuletisse, leiame

$$f(1,14) = (1,14)^4 + 2 \cdot 1,14 - 4 = -0,0310$$

$$\text{ja } f'(1,14) = 4(1,14)^3 + 2 = 7,926.$$

$$\text{Sellepärast } h = - \frac{f(1,14)}{f'(1,14)} = \frac{0,0310}{7,926} = 0,00389$$

ja täpsem juure väärtus

$$\alpha_1 = \alpha + h = 1,14 + 0,00389 = 1,14389.$$

Ülesanded.

Leida järgmiste võrrandite reaalsed juured kolme kümnend-märgi täpsusega.

126. a) $x^3 + 3x - 6 = 0$

b) $x^3 + 5x - 16 = 0$

c) $x^3 - 2x + 10 = 0$

d) $x^3 - 3x - 16 = 0$

f) $x^4 + 3x^2 - 2x - 12 = 0$

g) $x^4 + 5x^3 - 12x - 1 = 0$

h) $x^5 - 6x - 10 = 0$

i) $x^5 - x - 2 = 0$

k) $x^5 - 3x - 19 = 0$

e) $x^5 - 7x^3 + 9x + 6 = 0$

127. a) $x = 9 \log x$

b) $x + \log x = 5$

c) $x - \log x = 10$

d) $x^x = 5$

e) $(x + 2)^x = 5$

f) $x + 3^x = 11$

g) $\cos x = x$

h) $\cos x = \frac{3}{4}x$

§ 33. Kolmanda astme võrrandid.

A. Üldised omadused.

Kolmanda astme võrrandi üldine kuju on:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Kolmanda astme võrrandi omadused saame, tehes järeldused üldistest võrrandite kohta tõestatud lausetest. Nõnda võime ütelda:

1. Kui võrrandi $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ üheks juureks on x_1 , siis peab selle võrrandi polünoom ilma ülejäägita jagunema avaldusega $x - x_1$.

2. Kolmanda astme võrrandi $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ polünoom laguneb kolmeks teguriks:

$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, kus x_1 , x_2 ja x_3 on selle võrrandi juurteks.

3. Kolmanda astme võrrandil on ikka kolm ja ainult kolm juurt.

4. Kui kolmanda astme võrrandi $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ juurteks on x_1 , x_2 ja x_3 , siis on

$$1) - (x_1 + x_2 + x_3) = a,$$

$$2) x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = b \text{ ja}$$

$$3) - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = c.$$

Selle lause põhjal on võimalik antud juurte teadmisega moodustada kolmanda astme võrrand.

5. Kolmanda astme võrrandil, mille koeffitsiendid on reaalsed, on ikka üks juur reaalne, teised kaks juurt aga on kas mõlemad reaalsed ehk kaaskompleksid.

6. Kui kolmanda astme võrrandi koeffitsient $a = 0$, siis on kõikide juurte summa null, kui aga koeffitsient $c = 0$, siis on vähemalt üks juurtest null.

Toetades nende lausete peale võime kolmanda astme nmbervõrrandi juured leida talitades nõnda, kui eelpool üldiselt juhatud.

B. Cardani valem.

Kolmanda astme võrrandi juuri võib avaldada võrrandi koeffitsientide läbi kindla valemi põhjal sarnaselt, kui seda on võimalik teha teise astme

võrrandi juures. Et niisugust valemit leida, selleks näitame enne, et üldine kolmanda astme võrrand

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \dots\dots\dots 1)$$

muutub lihtsamaks, kui otsitava suuruse x asemele uue otsitava suuruse y võrrandisse toome järgmise tingimuse põhjal:

$$x = y - \frac{a}{3} \dots\dots\dots 2)$$

Selleks otstarbeks kirjutame:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b \left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0.$$

Avades sulud selles võrduses saame:

$$y^3 - 3\frac{a}{3}y^2 + 3\frac{a^2}{9}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - 2\frac{a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ba}{3} + c = 0.$$

Koondades ja kogudes sarnased liikmed saame edasi:

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ba}{3} + c\right) = 0.$$

Kui nüüd veel tähendame lihtsamalt:

$$b - \frac{a^2}{3} = A \text{ ja } \frac{2a^3}{27} - \frac{ba}{3} + c = B,$$

siis saame antud võrrandi 1) asemele lõpulikult lihtsama võrrandi:

$$y^3 + Ay + B = 0 \dots\dots\dots 3)$$

Niisugust võrrandi lihtsustamist nimetakse **taandamiseks**.

Kui taandatava võrrandi koeffitsient a ei jagune kolmega, siis tuleb tingimuse 2) asemel tarvitada järgmist:

$$x = \frac{y-a}{3} \dots\dots\dots 4)$$

et taandatud võrrandi koeffitsiendid saaksid täisarvud.

Et iga üldine kolmanda astme võrrand taandub lihtsamaks, siis võime, üldiselt harutades, tegemist teha lihtsama — taandatud võrrandiga.

Kui näiteks taandatud võrrandi juured y_1 , y_2 ja y_3 leiame, siis saame antud võrrandi juured x_1 , x_2 ja x_3 juba võrduste 2) ehk 4 põhjal.

Selleks, et võrrandi

$$y^3 + Ay + B = 0$$

juuri määrata koeffitsientide A ja B läbi, oletame, et otsitav juur on kahe tundmatu arvu summa:

$$y = p + q \dots\dots\dots 5)$$

Selle tõttu võime kirjutada:

$$y^3 = (p+q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p+q)$$

ehk

$$y^3 - 3pq(p+q) - (p^3 + q^3) = 0,$$

ja võttes veel arvesse võrduse 5)

$$y^3 - 3pqy - (p^3 + q^3) = 0 \dots \dots \dots 6)$$

Et saadud võrrand 6) samane peab olema antud võrrandiga, siis peavad nende võrrandite vastavad koeffitsiendid võrdsed olema, mille tõttu saame kaks uut võrrandit otsitavate suurustega p ja q

$$-3pq = A \text{ ja } -(p^3 + q^3) = B$$

ehk

$$pq = -\frac{A}{3} \text{ ja } p^3 + q^3 = -B \dots \dots \dots 7)$$

Nendest kahest võrrandist on võimalik p ja q leida. Selleks tõstame kõige pealt esimese võrrandi mõlemad pooled kuupi ja korrutame neljaga, aga teise võrrandi mõlemad pooled tõstame ruutu. Selle tagajärjel võime kirjutada:

$$4p^3q^3 = -4\left(\frac{A}{3}\right)^3 \text{ ja } p^6 + 2p^3q^3 + q^6 = B^2.$$

Kui lahutame nüüd viimase võrduse mõlematest pooltest, eelviimase vastavad pooled, siis saame:

$$p^6 - 2p^3q^3 + q^6 = B^2 + 4\left(\frac{A}{3}\right)^3$$

ehk

$$(p^3 - q^3)^2 = B^2 + 4\left(\frac{A}{3}\right)^3$$

ehk veel

$$p^3 - q^3 = \pm \sqrt{B^2 + 4\left(\frac{A}{3}\right)^3}$$

Liites ja lahutades selle võrrandi mõlemad pooled teise võrrandi 7) vastavatest pooltest, saame;

$$2p^3 = -B \pm \sqrt{B^2 + 4\left(\frac{A}{3}\right)^3} \text{ ja } 2q^3 = -B \mp \sqrt{B^2 + 4\left(\frac{A}{3}\right)^3}$$

ehk

$$p^3 = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3} \text{ ja } q^3 = -\frac{B}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3},$$

kust leiame:

$$p = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3}} \text{ ja } q = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3}} \dots \dots 8)$$

sellepärast võime võrduse 5) põhjal kirjutada:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{B}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

Siin on ruutjuurte ees võetud ainult ülemised märgid, sest kui nende asemele võtta alumised, siis pahema poole väärtus ei muutu.

See valem seobki taandatud kolmanda astme võrrandi juuri võrrandi koeffitsientidega. See valem nimetakse Itaalia arvuteadlase Cardano järele **Cardan'i valemiks**.

Tähendades Cardani valemis ettetulevate kolmanda astme juurte reaalseid väärtusi lühidalt u ja v läbi, saame suurustele p ja q kummagile kolm järgmist väärtust:

$$\begin{aligned} p_1 &= u & q_1 &= v, \\ p_2 &= \frac{u}{2} (-1 + i\sqrt{3}) & q_2 &= \frac{v}{2} (-1 + i\sqrt{3}), \\ p_3 &= \frac{u}{2} (-1 - i\sqrt{3}) & q_3 &= \frac{v}{2} (-1 - i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Kui me kombiiniks iga üksikut p väärtust iga üksiku q väärtusega kahe liikme summaks, siis me saaks üldse 9 isesugust summat. Iga niisugune summa ei oleks aga mitte meie võrrandi juureks. Sest kui silmas peame tingimustest 7) esimese: $pq = -\frac{A}{3}$, siis peab p ja q korrutis olema reaalne, et rahulduks meie võrrand, ja selle tagajärjel leiame võrrandile ainult kolm isesugust juurt:

$$\begin{aligned} y_1 &= p_1 + q_1 = u + v, \\ y_2 &= p_2 + q_3 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} i\sqrt{3}, \\ y_3 &= p_3 + q_2 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Näitus.

Leida kolmanda astme võrrandi

$$x^3 + 12x^2 + 69x - 194 = 0$$

juured.

Pannes asemele $x = y - 4$, saame taandatud võrrandi:

$$y^3 + 21y - 342 = 0.$$

Cardani valemi põhjal on

$$p = \sqrt[3]{171 + \sqrt{171^2 + 7^3}} \text{ ja } q = \sqrt[3]{171 - \sqrt{171^2 + 7^3}},$$

ja siit leiame $\alpha = 7$ ja $\beta = -1$.

Sellepärast on:

$$y_1 = 6, y_2 = -3 + 4i\sqrt{3} \text{ ja } y_3 = -3 - 4i\sqrt{3},$$

aga

$$x_1 = y_1 - 4 = 2, x_2 = y_2 - 4 = -7 + 4i\sqrt{3} \text{ ja } x_3 = y_3 - 4 = -7 - 4i\sqrt{3}.$$

Harjutused.

128. a) $x^3 - 27x - 54 = 0$ b) $x^3 - 75x + 250 = 0$
 c) $x^3 - 147x + 686 = 0$ d) $x^3 - 432x - 3456 = 0$
 e) $x^3 + 6x^2 - 63x - 392 = 0$ f) $x^3 - 9x^2 + 15x + 7 = 0$

2. Diskriminant on võrdne nulliga:

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3 = 0.$$

See juhus on võimalik ainult siis, kui $A < 0$ ja korruga

$$\left[\left(\frac{B}{2}\right)^2\right] = \left[\left(\frac{A}{3}\right)^3\right].$$

Sel puhul on ruutjuure väärtus null ja mõlemate kolmanda astme juurte väärtused on võrdsed: $u = v$. Sellepärast on võrrandi juurteks:

$$x_1 = 2u, \quad x_2 = -u, \quad x_3 = -u,$$

kõik kolm reaalsed ja kaks viimast koguni võrdsed.

3. Diskriminant on negatiivne:

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3 < 0.$$

Siin peab ikka olema $A < 0$ ja korruga

$$\left[\left(\frac{B}{2}\right)^2\right] < \left[\left(\frac{A}{3}\right)^3\right].$$

Sel puhul saavad mõlemate Cardani valemis ettetulevate kolmanda astme juurte kõik väärtused kompleks-suurused, mille tõttu paistab, nagu kolmanda astme võrrandil sel puhul reaalseid juuri ei olegi. Sellepärast nimetakse see juhus juba endisest ajast „casus irreducibilis“ — taandamatu juhus. Me aga näitame kohe, et just sel puhul on võrrandil kõik kolm juurt reaalsed.

D. Casus irreducibilis.

Saagu antud kolmanda astme võrrandi $x^3 - Ax + B = 0$ lahendamisel Cardani valemis

$$x = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

diskriminant $\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3 < 0$ selle tõttu, et $\left[\left(\frac{B}{2}\right)^2\right] < \left[\left(\frac{A}{3}\right)^3\right]$.

Sellepärast võime sel puhul Cardani valemi ka järgmiselt kirjutada:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + i \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3 - \left(\frac{B}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - i \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3 - \left(\frac{B}{2}\right)^2}},$$

kus nüüd ruutjuurte väärtused on juba reaalsed.

Et p ja q väärtusi leida, selleks peame kolmanda astme juurte all asuvatele kompleksarvudele andma trigonomeetrilise ilme. Selleks leiame:

$$r = \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3} - \left(\frac{B}{2}\right)^2 = \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3} \quad \text{ja} \quad \cos \varphi = -\frac{B}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{A}\right)^3}, \quad \text{mille tõttu:}$$

$$-\frac{B}{2} \pm i \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3 - \left(\frac{B}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^2} \left[\cos \varphi \pm i \sin \varphi \right].$$

Nimetades jälle p ja q üksikuid väärtusi u_1, u_2, u_3 ja v_1, v_2, v_3 läbi, võime kirjutada:

$$u_1 = \sqrt{\frac{A}{3}} \left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right),$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{A}{3}} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ \right) \right],$$

$$u_3 = \sqrt{\frac{A}{3}} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ \right) \right],$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{A}{3}} \left(\cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3} \right),$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{A}{3}} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ \right) - i \sin \left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ \right) \right],$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{A}{3}} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ \right) - i \sin \left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ \right) \right].$$

Kui silmas peame tingimust $pq = -\frac{A}{3}$, siis saame kolm järgmist juure väärtust antud võrrandile:

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2 \sqrt{\frac{A}{3}} \cos \frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = 2 \sqrt{\frac{A}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ \right) = -2 \sqrt{\frac{A}{3}} \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right),$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = 2 \sqrt{\frac{A}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ \right) = -2 \sqrt{\frac{A}{3}} \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right).$$

Märkus:

Kui B on positiivne, siis on $\cos \varphi$ negatiivne, ja sellepärast φ ise nüri on aga B negatiivne, siis on $\cos \varphi$ positiivne ja nurk φ terav.

Harjutused.

132. a) $x^3 - 13x + 12 = 0$

b) $x^3 - 28x - 48 = 0$

c) $x^3 - 52x - 96 = 0$

d) $x^3 - 76x - 240 = 0$

e) $x^3 + 3x^2 - 76x + 132 = 0$

f) $x^3 + 9x^2 - 34x - 336 = 0$

g) $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = 0$

h) $x^3 + 6x^2 - 37x + 30 = 0$

i) $x^3 + 3x^2 - 37x + 36 = 0$

k) $x^3 - 6x^2 + 7x - 2 = 0$

l) $x^3 + 9x^2 - 2x + 101 = 0$

m) $x^3 + 6x^2 - 2x - 4 = 0$

Ajaloost.

Kolmanda astme võrrandi aritmeetilise lahenduse leidis Itaalia arvuteadlane Scipione del Ferro, kes Bologna linnas professoriks oli (1496—1526). Tema leitud valemi avaldas itaallane Cardano 1545. aastal, kelle järele see valem ka on nimetud. Pärast leidis itaallane Ferrari aritmeetilise lahenduse neljanda astmeliste võrrandite jaoks. Kõik edaspidised katsed ka kõrgema, kui neljanda, astmeliste võrranditele aritmeetilist lahendust leida ei õnnestunud. Nende katsete juures aga leiti palju tähtsaid võrrandite omadusi. Norra arvuteadlane Abel lõpetas 1826. aastal niisugused katsed ja otsimised tõendades, et kõrgema, kui neljanda, astmelistel võrranditel aritmeetilist lahendust olla ei võigi.

§ 34. Ülesanded kolmanda astme võrrandite kohta.

133. Loomulikus arvreas on kaks üksteisele järgnevat arvu, mille kuupide summa on 341. Leida need arvud.
134. Kolmekohalise arvu numbrite summa on 14, numbrite korrutis annab 64, aga kahe viimase numbri ümberpaigutamisega saame arvu, mille väärtus on endise arvu väärtusest 36 võrra vähem. Leida see arv.
135. Kolme arvu summa on 4, ümberpööratud arvude summa on $\frac{7}{15}$ ja nende ruutude summa on $\frac{73}{225}$. Leida need arvud.
136. Kuupvõrrandi juured paarikaupa korrutatult annavad arvud 6, 10 ja 15. Leida selle võrrandi juured.
137. Kuupvõrrandi juurte summa on null, kahekaupa võetud korrutiste summa on -19 ja juurte korrutis on 30. Leida selle võrrandi juured.
138. Kolme arvu summa on 16, kahekaupa võetud korrutiste summa on 68 ja kõikide arvude korrutis on 80. Leida need arvud.
139. Kuupvõrrandi juurte summa on 12, nende ruutude summa on 50 ja kuupide summa on 216. Moodustada see kuupvõrrand ja leida tema juured.
140. Neli arvu sünnitavad aritmeetilise rea, mille vahe on 2; kolmekaupa võetud korrutiste summa nendest arvudest on 390. Leida need arvud.
141. Loomulikus arvreas on neli üksteisele järgnevat niisugust arvu, et kolme esimese arvu kuupide summa on võrdne neljanda arvu kuubiga. Leida need arvud.
142. Geomeetrilise rea esimene liige on 2, teise ja neljanda liikme summa on 260. Leida see rida.
143. Neljaliikmelise geomeetrilise rea viimane liige on 192, kõige nelja liikme summa on 255. Leida see rida.
144. Geomeetrilise rea esimese ja kolmanda liikme summa on 15, neljanda ja teise liikme vahe on 18. Leida see rida.
145. Täisnurkse kolmnurga pind on 45 sm.^2 ; täisnurga tipust kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus lõikab hüpotenuusilt osa $p=3 \text{ sm.}$ Leida hüpotenuus.
146. Võrdhaarse kolmnurga pind $= 12 \text{ sm.}^2$, ümbermõõt 18 sm. Leida kolmnurga alus ja küljed.

147. Kolmnurga külgedeks on järgmise võrrandi juured: $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$. Leida kolmnurga pind.
148. Täisnurkse rööptahuka ruumala on 96 sm^3 , üldpind $= 160 \text{ sm}^2$ ja servade pikkuste summa on 72 sm . Leida servad.
149. Kahe kuubi mahtude summa on 152 sm^3 , aga üldpindade summa on 204 sm^2 . Leida kuupide servad.
150. Kahel püstsilindril, mille telglõiked on ruudud, on mahtude summa $682 \pi \text{ sm}^3$, aga üldpindade summa on 366 sm^2 . Kui suured on silindrite raadiused?
151. Korrapärase nelitahkse püstprismi aluse serv on külje servast 7 sm . võrra pikem. Leida prismi servad, kui prismi maht on 720 sm^3 .
152. Kui pikendame kuubi servi, mis ühes tipus lõikuvad, vastavalt 2 sm , 3 sm ja 4 sm . võrra, siis saame täisnurkse rööptahuka, mille maht on 504 sm^3 . Kui pikk on kuubi serv?
153. Püst-ruut-prismi aluse serva pikkus ja prismi kõrgus on kokku 12 sm , prismi maht on 128 sm^3 . Leida aluse serv.
154. Püst-ruut-prismi maht on 72 sm^3 , aga üldpind on 114 sm^2 . Leida prismi servad.
155. Püst-ruut-prismi maht on 500 sm^3 , aga diagonaal on 15 sm . Leida prismi kõrgus ja aluse serv.
156. Püst-ruut-püramiidi maht on 400 sm^3 ja külgpind on 260 sm^2 . Leida aluse serv $= 2x$.
157. Püstsilindri kõrgus on aluse raadiusest 5 sm . võrra pikem. Leida aluse raadius, kui silindri maht on 785 sm^3 ($\pi = 3,14$).
158. Püstsilindri maht on $960 \pi \text{ sm}^3$, aga üldpind on $368 \pi \text{ sm}^2$. Leida silindri kõrgus ja aluse raadius.
159. Püstsilindri ja püstkoonuse mahud ja üldpinnad on vastavalt võrdsed. Leida silindri kõrgus ja aluse raadius, kui koonuse külgjoon $k = 13 \text{ sm}$ ja aluse raadius $r = 5 \text{ sm}$.
160. Püstkoonuse maht on $235,5 \text{ sm}^3$, koonuse kõrgus on aluse raadiusest 4 sm . võrra pikem. Leida aluse raadius. ($\pi = 3,14$).
161. Kahe võrdaluslise koonuse mahtude summa on $567 \pi \text{ sm}^3$, ühe koonuse kõrgus on 12 sm , teise koonuse kõrgus võrdub aluse raadiusega. Leida aluse raadius.
162. Püstkoonuse maht on $320 \pi \text{ sm}^3$, külgjoon $k = 17 \text{ sm}$. Leida koonuse kõrgus.
163. Kera, mille raadius $r = 5 \text{ sm}$, on tasapinnaga lõigatud; kera asuv tasapinna osa on aluseks koonusele, mille tipp asub kera keskpunktis ja mille maht on $13\frac{8}{9}$ osa kera mahust. Leida tasapinna kaugus kera keskpunktist.
164. Tüvikoonuse maht on $304 \pi \text{ sm}^3$, vähema aluse raadius $r = 4 \text{ sm}$, aga kõrgus on suurema aluse raadiusest kaks korda suurem. Leida suurema aluse raadius.
165. Rauast kera raadius on 2 sm . võrra pikem klaasist kera raadiusest, aga tema raskus on $4400 \pi \text{ gr}$. võrra suurem klaasist kera raskusest. Leida klaasist kera raadius. Raua erikaal on $7,5$ ja klaasi erikaal on $2,5$.
166. Kui sügavale vette ($+ 4^\circ\text{C}$) vajub puust kera, mille raadius $r = 5 \text{ sm}$? Puu erikaal on $0,784$.
167. Kui suur raadius on puust keral, mis 15 sm . sügavusele $+ 4^\circ\text{C}$ vette vajub. Puu erikaal on $\frac{27}{32}$.

168. Kera, mille raadius $r=1$ m., on lõigatud kahe paralleel-tasapinnaga, mis kera keskpunkti võrdsetel kaugustel asuvad. Nende kahe paralleel-tasapinna vahel asub ühiskeskne kera, mis tasapinde puudutab ja mille maht on neli korda suurem tasapindade läbi äralõigatud segmentide mahtude summast. Leida niisuguse kera raadius.
169. Keras, mille raadius $r=6$ sm., on püstkoonus, mille maht on kolm korda vähem kera mahust. Leida koonuse kõrgus.
170. Tinast kera, mille raadius $r=1$ dm., valatakse kehaks, mis kujutab enesest püstsilindrit ühes selle ülemisel alusel asuva poolkeraga, mille raadius võrdub silindri aluse raadiusega. Leida silindri kõrgus ja aluse raadius, kui silindri ja poolkera ühine kõrgus on 2 dm.
171. Kera, mille raadius $r=9$ sm., on lõigatud tasapinnaga nii, et vähema segmenti maht on neli korda väiksem kera mahust. Leida segmenti kõrgus.
172. Kera segmenti maht on $985\frac{1}{3}\pi$ sm.³, aga üldpind on 514π sm.² Leida segmenti kõrgus.
173. Kera, mille raadius $r=2$ dm., seisab koost vasest ja puust valmistatud segmentidest, nii et ta täielikult ujub vees. Leida vasest segmenti kõrgus, kui vase erikaal on 9 ja puu erikaal on 0,5.
174. Poolkera, mille raadius on 3 dm., tuleb nii lõigata tasapinnaga, mis alusega paralleelne, et saadud segmenti maht oleks kaks korda vähem poolkera mahust. Leida segmenti kõrgus.
175. Kerast on välja puuritud sektor, mille vastava segmenti kõrgus on 2 dm. Leida kera raadius, kui ülejäänud keha maht on 240π dm.³
176. Püstsilindri mõlemal alustel asuvad poolkerad, mille raadiused on võrdsed silindri raadiusega. Niisuguse keha üldpind võrdub kera pinnaga, mille raadius on 2 dm., aga maht võrdub niisuguse kera mahuga, mille raadius on 1 dm. Kui suur on silindri raadius ja kõrgus?
177. Keras, mille raadius on 5 sm., on kujutatud silinder, mille maht on kaks korda vähem kera mahust. Kui suur on silindri kõrgus?

Ülesannete vastused.

1. a) a, b) 0, c) 0, d) a, e) ab,

f) ab^2 , g) $-ac$, h) $\frac{a}{b}$, i) 0, k) 0.

2. a) 1, b) $-\frac{1}{b}$, c) 1, d) -1 , e) 5,
f) -1 .

5. a) 12, b) 0, c) 3, d) 12.

6. a) -32 , b) -4 , c) 0, d) 4.

7. a) $5x^4$, b) $4x$, c) $4x+1$, d) $2x+2$.

8. a) 1, b) $2x$, c) $3x^2$, d) $-\frac{1}{x^2}$,

e) $-\frac{2}{x^3}$, f) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, g) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, h) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

i) $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$, k) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, l) $-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$, m) $\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

n) $-\frac{1}{6x\sqrt[6]{x}}$, o) $\frac{0,7}{\sqrt[10]{x^3}}$, p) $-2\frac{5}{6}\frac{1}{x^3\sqrt[6]{x^5}}$.

9. a) 2, b) $6x$, c) $\frac{2}{3}x$, d) $-\frac{4}{x^3}$,

e) $-\frac{9}{2x^4}$, f) $\frac{1}{3\sqrt{x}}$, g) $\frac{1}{4\sqrt[6]{x^5}}$,

h) $-\frac{9a}{2x^2\sqrt{x}}$, i) $\frac{25a}{42b\sqrt[6]{x}}$, k) $-\frac{85}{6x^2\sqrt[12]{x^5}}$

l) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6\sqrt[6]{x}}$, m) $-\frac{2\sqrt[3]{2}}{3x\sqrt[3]{5x}}$

Ülesanne 3 ja 4.

n	$(1 + \frac{1}{n})^n$	kasv
1	2,0000	0,2500
2	2,2500	0,1204
3	2,3704	0,0710
4	2,4414	0,0469
5	2,4883	0,0333
6	2,5216	0,0249
7	2,5465	0,0193
8	2,5658	0,0154
9	2,5812	0,0126
10	2,5938	

10. a) $4x$, b) $\frac{x^2}{3}$, c) $12x + 2$,

d) $4x^3 - 9x^2 + 2$, e) $30x^2 + \frac{4a}{x^3}$,

f) $\frac{6}{5}x^2 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$, g) $\frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{2}{x\sqrt[3]{ax^2}}$,

h) $16x^3 - 36x^2 + 18x$, i) $\frac{\sqrt{a+x} - 1}{2\sqrt{x}}$,

k) $2x$, l) $3x^2 - 6ax + 3a^2 - 5$,

m) $18x^2 - 2x - 2$.

11. a) $\frac{9}{2}\sqrt{x}$, b) $-3x^2 + 2bx + a$, c) $24x^2 - 36x + 9$,

d) $15x^4 - 21x^2 + 2$, e) $6x + 12\sqrt{x} - 3$,

f) $3\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} - 1\frac{1}{2}a\sqrt{x}$.

12. a) $\frac{1}{(1+x)^2}$, b) $\frac{b+a}{(b-x)^2}$, c) $\frac{3+6x-x^2}{(3-x)^2}$,

d) $-\frac{15+x+6x^2}{(2+3x)^2}$, e) $-\frac{4abx}{(a+bx^2)^2}$, f) $\frac{6x^2+4x}{(x^2-3x+1)^2}$,

g) $\frac{-3x^6+10x^5+6x^4+6x^2-10x+1}{(x^4+3x^2+1)^2}$, h) $\frac{24x^7-12x^6+112x^5+6x^4-14x^2}{(2x^2-4x^5)^2}$.

13. a) $-n(a-x)^{n-1}$, b) $nb(a+bx)^{n-1}$,

c) $2nx(a+x^2)^{n-1}$, d) $\frac{5}{x^2}\left(3-\frac{1}{x}\right)^4$, e) $-8(7-2x)^3$,

f) $-\frac{1}{2(a-x)^{\frac{1}{2}}}$, g) $-\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$, h) $\frac{x}{\sqrt{3+2x}}$,

i) $\frac{b-2cx}{2\sqrt{a+bx-cx^2}}$, k) $-\frac{ax}{\sqrt{a-x^2}}$, l) $\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$,

m) $\frac{2a^2-ax^3}{2(a+x^3)\sqrt{a+x^3}}$, n) $-\frac{5x^4}{3\sqrt[3]{(2-x^5)^2}}$, o) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x-5}}$,

p) $\frac{3-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$, q) $-\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$, r) $\frac{a+4ax-3x^2}{3(a-x)\sqrt[3]{(a-x)(a+x^2)}}$

s) $\frac{2(x-\sqrt{a+x^2})}{(a+2x)\sqrt{a-x^2}\sqrt{a+x^2}}$.

14. a) $\frac{1}{x}$, b) $\frac{2}{x}$, c) $\frac{1}{2x}$, d) $\frac{1}{x-2}$, e) $\frac{2x}{1+x^2}$, f) $\frac{3}{x-1}$, g) $\frac{2}{1-x^2}$,
 h) $\frac{2}{x} \ln x$, i) $\frac{1}{2x \sqrt{\ln x}}$, k) $\frac{2 \ln(1-x)}{x-1}$, l) $x^2(1+3 \ln x)$, m) $\frac{1-3 \ln x}{x^4}$,
 n) $\frac{1}{1-x^2} \left[\ln \frac{1-x}{1+x} - x \ln(1-x^2) \right]$,
 o) $\frac{1}{(1-x^2) [\ln(1-x)]^2} \cdot \left[\ln(1-x^2) + x \ln \frac{1+x}{1-x} \right]$, p) $\frac{1}{x \ln x}$.

15. a) $2a^{2x} \ln a$, b) $-a^{1-x} \ln a$, c) $a^{\frac{x}{3}} \ln a$, d) $3x^2 a^{x^3} \ln a$,
 e) $\frac{1}{\sqrt{x}} a^{\sqrt{x}} \ln a$, f) $\frac{a^{\ln x} \cdot \ln a}{x}$, g) $3 \ln a$, h) $a^x \ln x \cdot \ln a + \frac{a^x}{x}$,
 i) $a^x \cdot \frac{x \ln x \cdot \ln a - 1}{x (\ln x)^2}$, k) $\frac{1-x \ln x \cdot \ln a}{a^x}$, l) $3x a^x (2+x \ln a)$,
 m) $\frac{1-x \ln 2}{2^{x-1}}$, n) $3^{2x} \cdot \frac{4(1-x) \ln 3 - 1}{2 \sqrt{1-x}}$, o) $\frac{(x^2-3) \ln 5 + 2x}{5^{x-1} (3-x^2)^2}$,
 p) $\left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \ln \frac{a}{b}$, q) $2e^{2x}$, r) $e^{\frac{2}{2x}} (2e^{4x} + 1)$, s) $-\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$.

16. a) $2 \cos 2x$, b) $-\cos(2-x)$, c) $\sin 2x$,
 d) $\frac{\cos x}{2 \sqrt{\sin x}}$, e) $\frac{\cos(\ln x)}{x}$, f) $a^x \cos a^x \cdot \ln a$,
 g) $\cotg x$, h) $a^{\sin x} \cos x \cdot \ln a$, i) $x \cos x + \sin x$,
 k) $\frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$, l) $3 \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$,
 m) $\cos x \sin 2x + 2 \sin x \cos 2x$, n) $\frac{\sin x}{2 \cos^2 x}$,
 o) $\sin(4x-2)$, p) $-bnx \sin^{n-2}(a-bx^2) \cos 2(a-bx^2)$.

17. a) $-3 \sin 3x$, b) $\sin(1-x)$, c) $-\sin 2x$, d) $-2x \sin x^2$,
 e) $-\frac{\sin \sqrt{x}}{2 \sqrt{x}}$, f) $-\frac{\sin x}{2 \sqrt{\cos x}}$, g) $-\frac{\sin(\ln x)}{x}$,
 h) $-\operatorname{tg} x$, i) $-a^x \sin a^x \cdot \ln a$, k) $\cos 2x$,
 l) $\frac{\cos 2x \cdot \cos x + 2 \sin x \sin 2x}{(\cos 2x)^2}$, m) $3 \sin x (1-4 \cos^2 x)$,
 n) $2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \cdot \sin 3x$, o) $2 \cos 2x$,
 p) $-\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

$$18. \quad a) \frac{5}{\cos^2 5x}, \quad b) \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}, \quad c) -\frac{1}{\cos^2(1-x)}, \quad d) \frac{2bx}{\cos^2(a+bx^2)},$$

$$e) \frac{x}{\cos^2 x} (\sin 2x + x^2), \quad f) \frac{1}{x \cos^2(\ln x)}, \quad g) \frac{2}{\sin 2x},$$

$$h) \frac{a^x \ln a}{\cos^2 a^x}, \quad i) \frac{a^x}{2 \cos^2 x} \left[\sin 2x \cdot \ln a + 2 \right],$$

$$k) \frac{a^x}{2 \sin^2 x} \left[\sin 2x \cdot \ln a - 2 \right], \quad l) \frac{2x \ln x - \sin 2x}{2x \cos^2 x \cdot (\ln x)^2},$$

$$m) \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x, \quad n) \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}, \quad o) \frac{2a^x \ln a}{\sin(2a^x)},$$

$$p) -\frac{\ln(\operatorname{tg} x) \sin x + \ln(\cos x)}{\cos x [\ln(\operatorname{tg} x)]^2}.$$

$$19. \quad a) -\frac{3}{\sin^2 3x}, \quad b) \frac{3}{\sin^2(1-3x)}, \quad c) -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x},$$

$$d) -\frac{1}{3 \sin x \sqrt{\sin x \cos^2 x}}, \quad e) \frac{3x \sin 2x - 2x^2}{2 \sin^2 x},$$

$$f) \frac{\sin 2x + 2x}{2 \cos^2 x}, \quad g) -\frac{2x^2 + 3 \sin 2x}{2x^5 \sin^2 x},$$

$$h) -\frac{1}{x \sin^2(\ln x)}, \quad i) -\frac{a^x \ln a}{\sin^2(a^x)},$$

$$k) -\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \cos x \right), \quad l) -\frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x},$$

$$m) -\frac{\cotg x}{\sin^2 x}, \quad n) \sin 2x - \frac{2 \cos x}{\sin^3 x},$$

$$o) -\frac{2}{\sin 2x}, \quad p) -\frac{2a^x \ln a}{\sin(2a^x)}.$$

$$20. \quad a) \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \quad b) -\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}, \quad c) \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$d) \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad e) \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$f) \frac{1}{x \sqrt{1-(\ln x)^2}}, \quad g) \frac{a^x \ln a}{\sqrt{1-a^{2x}}},$$

$$h) \frac{1}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}, \quad i) \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$21. \quad a) -\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}, \quad b) -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad c) -\frac{2x}{\sqrt{a^4-x^4}},$$

- d) $-\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, e) $-\frac{2}{x^2+1}$, f) $-\frac{a^{\arccos x} \ln a}{\sqrt{1-x^2}}$.
22. a) $\frac{5}{1+25x^2}$, b) $\frac{2x}{1+x^4}$, c) $\frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}$,
 d) $-\frac{a}{(1+x)^2+a^2}$, e) $\frac{a^x \ln a}{1+a^{2x}}$, f) $\frac{1}{x[1+(\ln x)^2]}$,
 g) $\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$, h) $\frac{\sqrt{3}}{2+2x+2x^2}$, i) $\frac{1+x+x^2}{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x}$.
23. a) $\frac{1}{10-6x+x^2}$, b) $-\frac{9x^2}{9+x^6}$, c) $-\frac{3(\operatorname{arccotg} x)^2}{1+x^2}$,
 d) $\operatorname{arccotg} x - \frac{x}{1+x^2}$, e) $-\frac{1}{x[1+(\ln x)^2]}$, f) $\frac{a}{(1+x)^2+a^2}$.
24. a) $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, b) $\frac{1+t-t \ln t}{t^2}$, c) $2x \ln \frac{a+x}{a-x}$,
 d) $\cotg 2\varphi$, e) $2\cos^2\varphi$, f) $2\sin^2x + \operatorname{tg}^2x$,
 g) $\frac{a}{\sin a \varphi}$, h) $-\frac{1}{2\sqrt{1-\varphi^2}}$, i) $\frac{a^2+b^2}{a+b \operatorname{tg} \varphi}$,
 k) $\frac{1}{2\sqrt{\varphi(1-\varphi)}}$, l) $\operatorname{arctg} z$, m) $\arcsin x$,
 n) $\frac{3a^2}{u^4\sqrt{a+bu^2}}$, o) $\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi+\sin\varphi}$, p) $\frac{e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2}$,
 q) $\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$, r) $\frac{8+\cos^2\varphi}{3(2+\cos\varphi)\sin\varphi}$.
25. a) Funktsioon kahaneb argumendi väärtuste $-1,0$ ja $+1$ juures ja kasvab $+1, +3$ ja $+5$ juures.
26. a) -1 ja $+2$, b) $+5$ ja $+6$, c) 0 ja $+2$,
 d) -2 ja $+2$, e) $-2, 0, +2$, f) $-2, -1, +1, +2$,
 g) $-3, -\sqrt{2,5}, +\sqrt{2,5}, +3$, h) 0 ja $+2$.
28. Kui $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ j. n. e.
29. Kui $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{4}\pi$ j. n. e.
30. Kui $x = a$. 31. Kui $x = -2$ ja $x = +2$.

32. a) 0, b) 2, c) 4, d) $6x$, e) $12x$, f) $12x^2 - 18x$, g) $20x^3 - 14$, h) $\frac{2}{x^3}$,

i) $-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ k) $\frac{2}{(x+1)^3}$, l) $-\frac{4}{(x+1)^3}$, m) $-\frac{1}{x^2}$, n) $2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$,

o) $2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$, p) $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, q) $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

33. a) $y' = -\frac{2}{x^3}$, $y'' = \frac{2 \cdot 3}{x^4}$, $y''' = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$;

b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$, $y''' = \frac{1}{8x^3\sqrt{x}}$;

c) $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$, $y'' = \frac{1}{4x^3\sqrt{x}}$, $y''' = -\frac{1}{4x^7\sqrt{x}}$;

d) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$, $y'' = -\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$, $y''' = \frac{1}{8(1-x)^3\sqrt{1-x}}$;

e) $y' = -\frac{2x^2}{(1-x)^2}$, $y'' = \frac{4x}{(1-x)^3}$, $y''' = \frac{4+8x}{(1-x)^4}$

f) $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}}$, $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(2-x)^5}}$, $y''' = -\frac{10}{27\sqrt[3]{(2-x)^8}}$;

g) $y' = \frac{6x^2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = \frac{24x^2\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}}$, $y''' = \frac{48x^3\sqrt{x}+1}{8x^2\sqrt{x}}$;

h) $y' = 4x^3 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'' = 12x^2 + \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$, $y''' = 24x - \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}}$;

i) $y' = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y'' = \frac{6}{x^4} + \frac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$, $y''' = -\frac{24}{x^5} - \frac{8}{27x^2\sqrt[3]{x}}$.

34. a) $m \cdot (m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(1+x)^{m-n}$,

b) $a^x (\ln a)^n$, c) e^x , d) $(-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

36. a) $f(3) = 5$ miinum. ja $f(1) = 9$ maksimum.

b) $f(3) = -20$ „ „ $f(-1) = 12$ „

c) $f(2) = -18$ „ „ $f(-0,5) = 6,25$ „

d) $x = +0,5$ juures miin. ja „ $x = -1,5$ juures maksim.

e) $x = +\frac{4}{3}$ „ „ „ $x = +\frac{6}{5}$ „ „

f) $x = 1$ juures miinim. ja $x = -\frac{1}{9}$ juures maksimum.

g) $x = \frac{11}{12}$ „ „ „ $x = -\frac{1}{4}$ „ „ „

h) $x = 2,1$ juures miinim. ja $x = -3,5$ juures maksimum.

i) $x = -\sqrt{2}$ " " " $x = +\sqrt{2}$ " "

k) $x = 2\sqrt{3}$ " " " $x = -\sqrt{3}$ " "

37. a) $x = 2$ juures miinimum.

b) $x = -1$ ja $x = 2$ juures miinim. ja $x = 0$ juures maksimum.

c) $x = -1$ ja $x = 2$ " " " $x = \frac{1}{2}$ " "

d) $x = -1$ ja $x = 1,5$ " " " $x = 1$ " "

e) $x = \frac{1}{2}$ ja $x = 2$ " " " $x = 0$ ja $x = 1$ juures maks.

f) $x = -1$ ja $x = 3$ " " " $x = -3$ ja $x = 1$ " "

g) $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = 1$ " " " $x = -1$ ja $x = \frac{1}{2}$ " "

h) $x = -2$ ja $+6$ " " " $x = -6$ ja $x = 2$ " "

38. a) maksimum, kui $x = \frac{\pi}{4}$ ehk $x = -\frac{7}{4}\pi$ jne.

miinimum, kui $x = \frac{5}{4}\pi$ " $x = -\frac{3}{4}\pi$ "

b) maksimum, kui $x = \frac{3}{4}\pi$ " $x = -\frac{5}{4}\pi$ "

miinimum, kui $x = \frac{\pi}{4}$ " $x = -\frac{7}{4}\pi$ "

c) maksimum, kui $x = \frac{\pi}{4}$ " $x = -\frac{7}{4}\pi$ "

miinimum, kui $x = \frac{3}{4}\pi$ " $x = -\frac{5}{4}\pi$ "

d) maksimum, kui $x = \frac{2}{3}\pi$ " $x = -\frac{4}{3}\pi$ "

miinimum, kui $x = \frac{4}{3}\pi$ " $x = -\frac{2}{3}\pi$ "

e) maksimum, kui $x = \frac{\pi}{6}$ " $x = -\frac{11}{6}\pi$ "

miinimum, kui $x = \frac{5}{6}\pi$ " $x = -\frac{7}{6}\pi$ "

f) maksimum, kui $x = \frac{7\pi}{4}$ " $x = -\frac{\pi}{4}$ "

miinimum, kui $x = \frac{\pi}{4}$ " $x = -\frac{7}{4}\pi$ "

g) maksimum, kui $x = \frac{\pi}{4}$ ehk $x = -\frac{\pi}{4}$ jne.

miinimum, kui $x = \frac{3}{4}\pi$ „ $x = -\frac{3}{4}\pi$ „

h) maksimum, kui $x = \frac{5}{6}\pi$ „ $x = -\frac{7}{6}\pi$ „

miinimum, kui $x = \frac{7}{6}\pi$ „ $x = -\frac{5}{6}\pi$ „

39. a) $x = 0$ juures maksimum, b) $x = 0$ juures miinimum,

c) $x = 0$ juures miinimum, d) $x = 0$ „ „

e) $x = 1$ „ „ f) $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ juures maksimum.

40. Kumbagi liidetav võrdub $\frac{a}{2}$.

41. Kumbagi tegur on \sqrt{a} .

42. Ruut, mille külge on p.

43. Ruut, mille külge on a.

44. Täisnurkne kolmnurk.

45. Võrdhaarne kolmnurk, mille tipu juures nurk on α .

46. Võrdhaarne kolmnurk, mille aluseks on a.

47. Võrdkülgne kolmnurk.

48. Sissejoonestud ruudu tipud peavad antud ruudu külgede kesktäppes asuma.

49. $\frac{a}{2}$ ja $\frac{b}{2}$. 50. $a + \sqrt[3]{ab^2}$. 51. $CT = \frac{ac}{a+b}$. 52. $x = \frac{a}{2}$, $y = a$.

53. Võrdkülgne. 54. $r\sqrt{2}$, kolmnurk on täisnurkne. 55. Ruut.

56. $\angle CSE = \frac{\alpha}{3}$. 57. $x = a$ ja $\alpha = 114^\circ 35' 30''$. 58. $x = a$. 59. Kuup.

60. $x = a\sqrt{2}$. 61. $x = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$. 62. $x = \sqrt[3]{\frac{M}{2\pi}}$, $y = 2x$.

63. $x = \sqrt[3]{\frac{P}{2\pi}}$, $y = 2x$. 64. $x = \frac{p}{3}$, $y = x$, 65. $x = y = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

66. $x = \frac{3}{2}r$, $y = 3h$. 67. $x = \frac{2}{3}r$, $y = \frac{h}{3}$. 68. $\alpha = 66^\circ 4'$.

69. $x = \frac{r}{3}$. 70. $x = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{2}$. 71. $x = \frac{r\sqrt{6}}{3}$, $y = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

72. $x = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$, $y = \frac{4}{3}r$. 73. $x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}$. 74. $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$y = \frac{r}{\sqrt{3}}$. 75. $x = \frac{r}{2}$, $y = r$. 76. $\frac{2}{3}a$. 77. $a\sqrt{2}$. 78. $\frac{b}{2}\sqrt{3}$.

79. $\sqrt{h^2 - ah}$. 80. $AC = \frac{am}{m+n}$, kui $\overline{AB} = a$. 81. $AC = a\sqrt{\frac{m}{m+n}}$.

$$82. AC = \frac{a}{\sqrt{2}}. \quad 83. t = \frac{av_1}{v_1^2 + v_2^2}.$$

84. Read e), f), g), h), k), l), m), n), o), p), q) ja u) on koonduvad, rida b) on laienev ja ridade a), c), d), i), r), s) ja t) kohta jääb küsimus lahti-

seks, sest $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$

$$85. \text{ a) } -1 < x < +1, \quad \text{ b) } -\frac{1}{2} < x < +\frac{1}{2}, \quad \text{ c) } -1 < x < +1, \\ \text{ d) } -1 < x < +1, \quad \text{ e) } -2 < x < +2, \quad \text{ f) } -\frac{1}{2} < x < +\frac{1}{2}, \\ \text{ g) } -\infty < x < +\infty, \quad \text{ h) } -\infty < x < +\infty, \quad \text{ i), k) ja l) } -1 < x < +1.$$

$$86. \text{ a) } 1 - 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots \quad \text{ b) } x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \dots \\ \text{ c) } 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots \quad \text{ d) } 1 + x + 2x^2 + x^3 + 5x^4 - 2x^5 + \dots \\ \text{ e) } 1 - 4x + 8x^2 - 12x^3 + \dots \quad \text{ f) } 1 + 5x + 15x^2 + 45x^3 + \dots \\ \text{ g) } 1 - 4x + 9x^2 - 16x^3 + 16x^4 - \dots \quad \text{ h) } 1 - x$$

$$\text{ i) } 1 + \frac{3}{2}x - \frac{29}{8}x^2 + \frac{119}{16}x^3 + \dots \quad \text{ k) } 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^3 + \frac{11}{8}x^4 + \dots$$

$$87. \text{ a) } 243 + 405x + 270x^2 + 90x^3 + 15x^4 + x^5.$$

$$\text{ b) } \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \dots$$

$$\text{ c) } \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \dots$$

$$\text{ d) } \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^6}{a^4} + \dots$$

$$\text{ e) } \frac{1}{a^2} + \frac{2x}{a^3} + \frac{3x^2}{a^4} + \frac{4x^3}{a^5} + \dots$$

$$\text{ f) } 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$88. \text{ a) } 0,0348995, \quad \text{ b) } 0,0523359, \quad \text{ c) } 0,0871557, \quad \text{ d) } 0,1736482, \quad \text{ e) } 0,2588190.$$

$$89. \text{ a) } 0,9998477, \quad \text{ b) } 0,9993908, \quad \text{ c) } 0,9986293, \quad \text{ d) } 0,9961947, \quad \text{ e) } 0,9848078, \\ \text{ f) } 0,9659258.$$

$$90. \text{ a) } 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{8} + \dots$$

$$\text{ b) } 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^6}{6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^8}{8} + \dots$$

$$\text{ c) } 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + \dots$$

$$\text{ d) } 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 + \dots$$

$$e) 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \dots$$

$$f) 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} + \frac{13x^6}{6!} + \dots$$

$$g) 1 + \frac{x^2}{2!} + 5 \frac{x^4}{4!} + 61 \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$h) x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

91. a) $1 - x + \frac{1 \cdot 2}{2!} x^2 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4!} x^4 - \dots$

b) $1 + 2x + \frac{2 \cdot 3}{2!} x^2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} x^3 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{4!} x^4 + \dots$

c) $1 - 3x + \frac{3 \cdot 4}{2!} x^2 - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} x^3 + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4!} x^4 - \dots$

d) Vaata ülesanne 90, a).

e) $1 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{6} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{9} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot \frac{x^4}{12} + \dots$

f) $1 + \frac{x}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{x^2}{10} + \frac{4 \cdot 9}{5 \cdot 10} \cdot \frac{x^3}{15} - \frac{4 \cdot 9 \cdot 14}{5 \cdot 10 \cdot 15} \cdot \frac{x^4}{20} + \dots$

g) Vaata ülesanne 90, c).

h) $1 - \frac{x}{3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} x^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 - \dots$

i) $1 + \frac{2}{3} x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 + \dots$

k) $1 - \frac{3}{4} x + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^4 - \dots$

l) $1 + \frac{4}{5} x + \frac{4 \cdot 9}{5 \cdot 10} x^2 + \frac{4 \cdot 9 \cdot 14}{5 \cdot 10 \cdot 15} x^3 + \frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 19}{5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20} x^4 + \dots$

m) $1 - \frac{9}{11} x + \frac{9 \cdot 20}{11 \cdot 22} x^2 - \frac{9 \cdot 20 \cdot 31}{11 \cdot 22 \cdot 33} x^3 + \dots$

92. a) 1,00499; b) 1,00995; c) 1,01489; d) 1,04880; e) 1,09544;
 f) 0,99510; g) 0,98995; h) 0,99899; i) 1,00321; k) 1,01329;
 l) 0,99833; m) 0,99680.

93. a) 4,12310; b) 4,89898; c) 9,05539; d) 9,48683; e) 11,48912;
 f) 3,31662; g) 2,08008; h) 2,96249; i) 3,82586; k) 5,06580;
 l) 2,99070; m) 1,71877; n) 2,93016; o) 2,03965; p) 2,94168;
 q) 2,03394; r) 2,94994; s) 2,00019.

$$94. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!} x + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!} x^3 + \dots$$

95. Harilikud logaritmid:

a) 0,6989700; b) 0,8450980; c) 1,0413927; d) 1,2304489; e) 1,2787536;
f) 1,5440680; g) 1,6901961; h) 1,7403627.

96. $\pi = 3,1415927$.

$$97. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

98. a) 48, b) 2, c) 1, d) 2a, e) 15, f) 3, g) 0,2, h) 0, i) ∞ , k) $-\frac{1}{56}$.

99. a) $\frac{1}{2}$, b) 2, c) $\frac{1}{2}$, d) $-\frac{2e}{e-1}$, e) 1, f) 0, g) ∞ , h) ∞ .

100. a) 0, b) ∞ , c) $\frac{1}{b}$, d) 0, e) a, f) 1, g) 0, h) 1, i) 0, k) ∞ .

101. a) 0, b) 0, c) $-\frac{4}{\pi}$, d) -1, e) a, f) 0.

102. a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{1}{2}$, c) ∞ , d) $\frac{1}{2}$, e) $-\frac{1}{2}$, f) $-\frac{1}{2}$.

103. a) $x+k$, b) $\frac{x^2}{2}+k$, c) $\frac{x^3}{3}+k$,

d) $\frac{3}{2}x^2+k$, e) ax^5+k , f) $\frac{x^3}{a}+k$,

g) $3x^3-2x^2+5x+k$, h) $x^5+2x^4-2x^3+x^2-3x+k$,

i) $2x^5-3x^3+6x^2-x+k$, k) $3x^4-x^3-5x^2+7x+k$.

104. a) $-\frac{1}{x}+k$, b) $\frac{2}{3}x\sqrt{x+k}$, c) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+k$,

d) $\frac{3}{4}ax\sqrt[3]{x+k}$, e) $\frac{2}{3}x\sqrt{ax+k}$, f) $\frac{2a\sqrt{x}}{b}+k$,

g) $-\frac{a}{x^4}+k$, h) $\frac{x^3}{3}+ax^2+a^2x+k$,

i) $\frac{x^2}{2}-2ax+a^2\ln x+k$, k) $2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+k$,

l) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+k$, m) $4x+\frac{8x\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{2}+k$,

n) $\ln x+2\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}+k$, o) $\ln x+6\sqrt{x}+3x+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+k$,

$$p) \frac{x^2}{2} - \frac{18}{13} x^2 \sqrt[6]{x+7} + \frac{9}{7} \cdot x^2 \sqrt[3]{x} - \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + k.$$

105. a) $-\cos x + \frac{a^x}{\ln a} + k,$ b) $\ln x - 2 \sin x + k,$
 c) $\ln x + \operatorname{arctg} x + k,$ d) $a \cdot \arcsin x + b \cdot \ln x + k,$
 e) $\ln x + \frac{x^2}{2} \arcsin x + k,$ f) $-a \cdot \cos x + b \cdot \cotg x + k,$
 g) $-3 \cdot \cos x + 2 \cdot e^x + k,$ h) $\ln x + \cos x + a \cdot \operatorname{tg} x + k,$
 i) $3 \cdot \operatorname{tg} x + 5 \cdot \cotg x + k,$ k) $-\cotg x + 5 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \sqrt{x} + k.$

106. $\frac{2}{3} a \sqrt{2pa}.$

- 106_a a) 24; b) 8; c) $\frac{4}{9};$ d) $\frac{a^x - 1}{\ln a}$
 e) 6,3890; f) 2; g) 1,6094; h) 1;
 i) 1; k) $\frac{\pi}{2};$ l) $\frac{\pi}{6};$ m) 0.

107. a) $\frac{1}{a+x} + k;$ b) $\ln(a+x) + k;$ c) $\frac{(a+x^2)^{n+1}}{2(n+1)} + k;$
 d) $\frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + k;$ e) $\frac{1}{2} \sin 2x + k;$ f) $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + k;$
 g) $\frac{a^{2x}}{2 \ln a} + k;$ h) $\cotg(2-x) + k;$
 i) $\frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + k;$ k) $\frac{1}{2} \arcsin(2x) + k;$
 l) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3x) + k;$ m) $-\frac{1}{3} e^{5-3x} + k.$

108. a) 12; b) 5; c) $10 \frac{5}{8};$ d) 36.

109. 13,5737.

110. a) 2; b) 2; c) 1,5708; d) 1,6094; e) 0,0739.

118. a) $\sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ),$ b) $\sqrt{2} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ),$
 c) $2 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ),$ f*) $10 (\cos 36^\circ 52' + i \sin 36^\circ 52'),$
 g) $5,052 (\cos 295^\circ 34' + i \sin 295^\circ 34'),$ i) $10 (\cos 196^\circ 16' + i \sin 196^\circ 16').$

119. a) $1025 (\cos 86^\circ 25' + i \sin 86^\circ 25'),$ b) $22,57 (\cos 229^\circ 19' + i \sin 229^\circ 19'),$
 c) $42,25 (\cos 315^\circ 14' + i \sin 315^\circ 14'),$ d) $3,77 (\cos 336^\circ 13' + i \sin 336^\circ 13'),$
 e) $\frac{53}{41} (\cos 45^\circ 26' + i \sin 45^\circ 26'),$ f) $1,816 (\cos 75^\circ 21' + i \sin 75^\circ 21'),$
 g) $1,749 (\cos 259^\circ 16' + i \sin 259^\circ 16'),$ h) $0,883 (\cos 52^\circ 17' + i \sin 52^\circ 17').$

*) Nurk on leitud ühe minutilise täpsusega.

- f) $-1,374; 1,637$.
 h) 1,840.
 k) 1,884.
- 127.** a) 1,449.
 c) 11,043.
 e) 5,656.
 g) 0,731.
- 129.** a) $x_1 = 2; x_{2,3} = -1 \pm 3i\sqrt{3}$.
 c) $x_1 = 5; x_{2,3} = -2,5 \pm 0,5i\sqrt{3}$.
 e) $x_1 = 5; x_{2,3} = -2 \pm 2i\sqrt{3}$.
 g) $x_1 = -8; x_{2,3} = 4 \pm 7i$.
 i) $x_1 = -2; x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$.
 l) $x_1 = -1; x_{2,3} = 2 \pm 7i$.
- 130.** a) $-1,258$.
 c) 3,186.
 e) 0,625.
 g) $-0,508$.
- 131.** a) $\sin x \approx 0,69$.
 c) $\cos x = 0,249$.
- 133.** 5 ja 6.
134. 248.
135. $5; +\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}$.
136. 2; 3; 5.
137. $-2; -3; +5$.
138. 2; 4; 10.
139. 3; 4; 5.
140. 2; 4; 6; 8.
141. 3; 4; 5; 6.
142. 2, 10, 50 ehk $q=5$.
143. 3, 12, 48, 192.
144. 3, 16, 12, 24.
145. 15 sm.
146. 8 sm. ja 5 sm.
147. 6,4951.
148. 2,4 ja 12.
149. 3 ja 5.
- 150.** 5 ja 6
151. 12 sm. ja 5 sm.
152. 5 sm.
153. 4 sm.
154. 3 sm. ja 8. sm.
155. 5 sm. ja 10 sm.
156. 10 sm.
157. 5 sm.
158. 15 sm. ja 8 sm.
159. $r=5$ sm. ja kõrgus $h=4$ sm.
160. 5 sm.
161. 9 sm.
162. 15 sm.
163. 4 sm.
164. 6 sm.
165. 6 sm.
166. 7 sm.
- 167.** 10 sm.
168. $\sqrt{3}-1$.
169. 9 sm.
170. Kõrgus = 1,1155 dm. ja $r = 0,8845$ dm.
171. 5,8745 sm.
172. 8 sm.
173. 0,5899 dm.
174. 1,9597 dm.
175. 6 dm.
176. $r = 0,16703$ dm. ja kõrgus = 47,549 dm.
177. 7,4225 sm. ehk 3,9493 sm.
- g) $-0,084; 1,359$.
 i) 1,267.
 l) $-0,752$.
 b) 4,360.
 d) 2,130.
 f) 2,087.
 h) 0,863.
 b) $x_1 = 3; x_{2,3} = -1,5 \pm 0,5i\sqrt{3}$.
 d) $x_1 = 5; x_{2,3} = -2,5 \pm 0,5i\sqrt{3}$.
 f) $x_1 = 7; x_{2,3} = -2 \pm i\sqrt{3}$.
 h) $x_1 = -8; x_{2,3} = 4 \pm i\sqrt{3}$.
 k) $x_1 = -4; x_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{5}$.
 m) $x_1 = -3; x_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{3}$.
 b) 3,780.
 d) 1,78.
 f) 5,71.
 h) $-7,6$.
 b) $\cos x = 0,57$.
 d) $\cos x = 0,947$.

S i s u.

Esimene peatükk.

	Lhk.
1. Lõpmatu suurenevad, lõpmatu vähenevad ja lõpulikult muutuvad suurused . . .	5
2. Piirid	9
3. Kolm tarvilikku piiriväärtust	12

Teine peatükk.

4. Funktsioonide liigid	15
5. Süklomeetrilised funktsioonid	18
6. Suuruste pidev ja katkeline muutumine	19

Kolmas peatükk.

7. Tuletisfunktsiooni mõiste	22
8. Üldised laused ja algebraliste funktsioonide differentseerimine	25
9. Transsendentsete funktsioonide differentseerimine	31
10. Funktsiooni ja tema tuletise vahetamine	38
11. Funktsiooni kõrgema järgu tuletised	42
12. Teise tuletise vahetamine esimese tuletise ja algfunktsiooniga	43
13. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi arvutamine	46
14. Ülesanded	50
15. Lõpmatu arvude koonduvus	53
16. Funktsioonide ridadeks arendamine	58
17. Mõned tähtsamad read ja nende kasutamine	62
18. Määramatute avaldused	69

Neljas peatükk.

19. Määramatute integraalid	72
20. Määratud integraal	76
21. Keerulisemate differentiaalide integreerimine	79

Viies peatükk.

22. Imaginaarne üksus ja kompleksarvu mõiste	83
23. Kompleksidega arvutamine	84
24. Laused kompleksarvude kohta	84
25. Imaginaar- ja kompleksarvu geomeetiline kujutamine	85
26. Kompleksarvu trigonomeetiline ilme	86
27. Trigonomeetriselt avaldatud komplekside korrutamine, jagamine, astendamine ja juurimine	87
28. Ülesanded kompleksarvude kohta	91
29. Geomeetiline kompleksidega arvutamine	93
30. Ülevaade arvu mõiste ja tema laiendamise kohta	95

Kuues peatükk.

Võrrandid.

31. Üldmõisted ja laused	97
32. Numbervõrrandite lahendamine	101
33. Kolmanda astme võrrandid	106
34. Ülesanded kolmanda astme võrrandite kohta	113
Ülesannete vastused	116

Õiendused ja trükivead.

7. lhk.	4. rida	alt on	$\frac{x}{y}$	peab olema	$\frac{x}{b}$
8.	"	5. " ülalt "	näitustest,	" "	näidetest.
"	"	1. " alt "	kasvatis,	" "	korrutis.
10.	"	16. " ülalt "	$\varepsilon - \varepsilon_1,$	" "	$\varepsilon + \varepsilon_1.$
12.	"	1. " alt "	$\frac{1}{x_1^m},$	" "	$\frac{1}{x^m}.$
13.	"	9. " ülalt "	$\frac{\frac{p}{x_1^q} - \frac{p}{x^q}}{x_1 - y},$	" "	$\frac{\frac{p}{x_1^q} - \frac{p}{x^q}}{x_1 - x}.$
13.	"	11. " alt "	$\frac{x^1}{q},$	" "	$\frac{1}{x^q}.$
13.	"	5. " " "	joonilõik,	" "	joonlõik.
17.	"	5. " ülalt "	$\frac{a}{x},$	" "	$\frac{x}{a}.$
22.	"	10. " " "	kõrgejoone,	" "	kõverjoone.
30.	"	3. " " "	$\frac{du}{dx} - \frac{u}{v} \frac{du}{dx},$	" "	$\frac{du}{dx} - \frac{u}{v} \frac{dv}{dx}.$
32.	"	5. " " "	pahemat,	" "	paremat.
33.	"	5. " " "	funktsioni,	" "	funktsiooni.
34.	"	13. " " "	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x},$	" "	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$
41.	"	5. " alt "	abtsiss,	" "	abstiss.
42.	"	5. " ülalt "	$y + \cos x,$	" "	$y = \cos x.$
43.	"	8. " " "	$x^2,$	" "	$x^2.$
46.	"	1. " alt "	$3\sqrt[3]{x^2},$	" "	$3\sqrt[3]{x^2}.$
49.	"	15. " ülalt "	$y = a^2 - 8ax - 12x^2,$	" "	$y' = a^2 - 8ax + 12x^2.$
50.	"	6. " alt "	$\frac{dy}{dx} = \frac{(Tx + nt)ne - 2Tnex^2}{(Tx^2 + nt)^2},$	" "	$\frac{dy}{dx} = \frac{(Tx^2 + nt)ne - 2Tnex^2}{(Tx^2 + nt)^2}.$
52.	"	12. " " "	diaameetri,	" "	diameetri.
54.	"	19. " " "	$\frac{a_n + 1}{a_n} q_n < 1,$	" "	$\frac{a_n + 1}{a_n} = q_n < 1.$
57.	"	12. " ülalt "	$\frac{7}{3^4},$	" "	$\frac{7}{7^4}.$
58.	"	2. " " "	$\frac{2}{2!},$	" "	$\frac{x}{2!}.$
65.	"	3. " alt "	$e < 2,$	" "	$e > 2.$
68.	"	11. " " "	rea kolmas liige $2a_3x^2,$	" "	$3a_3x^2.$
70.	"	9. " ülalt "	$5x^2 - 40,$	" "	$5x^3 - 40.$

75. lhk.	5. rida alt on	$\int 3x^3 dx,$	peab olema	$\int 3x dx.$
75.	" 1. " " "	$\int a^3 \sqrt{x} dx,$	" "	$\int a \sqrt[3]{x} dx.$
76.	" 4. " ülalt "	$\int \frac{(1 + \sqrt{x^3})}{x} dx,$	" "	$\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{x} dx.$
76.	" 4. " " "	$\int \frac{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^e})^3}{\sqrt{x}} dx,$	" "	$\int \frac{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2})^3}{\sqrt{x}} dx.$
77.	" 3. " " "	a,	" "	ja.
78.	" 13. " " "	107,	" "	106 $\frac{a}{r}$.
84.	" 20. " " "	kolmas liidetav $a_2 bi,$	" "	$a_2 b_1 i.$
84.	" 27. " " "	esim. murru lug. $a_1 + bi,$	" "	$a_1 + b_1 i.$
84.	" 27. " " "	teise mur. nim. teine tegur $a_2 + b_2 i,$	" "	$a_2 - b_2 i.$
86.	" 13. " " "	$\cos \varphi = \frac{a}{2},$	" "	$\cos \varphi = \frac{a}{r}.$
88.	" 9. " " "	$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)] \cdot \frac{p}{q},$	" "	$[r \cos \varphi + i \sin \varphi]^q.$
88.	" 10. " " "	$r \frac{p}{q},$	" "	$\frac{p}{r^q}.$
88.	" 8. " alt "	$p_1 \pm p_1 i,$	" "	$p_1 \pm q_1 i.$
89.	" 4. " ülalt "	$\frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n},$	" "	$\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}.$
90.	" 4. " alt "	$\sqrt[n]{-1}.$	" "	$\sqrt[n]{+1}.$
90.	" 3. " " "	$r = 0,$	" "	$r = 1.$
91.	" 1. " ülalt "	$r = 0,$	" "	$r = 1.$
91.	" 1. " " "	$\sin \varphi = 1,$	" "	$\sin \varphi = -1.$
91.	" 13. " " "	$x_3 = -1 - \sqrt[3]{3},$	" "	$x_3 = -1 - i\sqrt[3]{3}.$
91.	" 18. " " "	$2,4 + 2i\sqrt[3]{3},$	" "	$(2,4 + 2i\sqrt[3]{3}).$
92.	" 3. " alt "	a) $\sqrt[3]{8},$	" "	a) $\sqrt[3]{8}.$
92.	" 3. " " "	b) $\sqrt[3]{-27},$	" "	b) $\sqrt[3]{-27}.$
92.	" 2. " " "	e) $\sqrt[3]{13i},$	" "	e) $\sqrt[3]{13i}.$
92.	" 1. " " "	i) $\sqrt[4]{i},$	" "	i) $\sqrt[4]{i}.$
93.	" 2. " ülalt "	n) $\sqrt[8]{-1},$	" "	n) $\sqrt[8]{-1}.$
94.	" 6. " " "	$r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$	" "	$r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$
96.	" 5. " " "	integrist,	" "	integrist.
97.	" 2. " " "	Viimased,	" "	reaalsed ja imaginaarsed.
99.	" 15. " " "	kasvatis,	" "	korutus.
99.	" 25. " " "	enne viimast plussi punktid välja jäänud.		
101.	" 3. " alt "	arvatud,	peab olema	arvud.
111.	" 7. " " "	$\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right),$	" "	$\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{4}\right)^3.$
111.	" 4. ja 12. rida ülalt ning 7. " alt	on absoluut väärtused murtud sulgudes, peavad aga olema paral-leeljoonte vahel.		

Hez



TÜ RAAMATUKOGU



10300016030191

A

6019

56133 i