I. ŠEVTŠENKO

ARITMEETIKA ÕPIK

$3+7=7+3$

$30=2\cdot 3\cdot 5$

$\frac{4}{9}:\frac{5}{12}=\frac{4\cdot 12}{9\cdot 5}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$

V–VI KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

I. ŠEVTŠENKO

ARITMEETIKA

ÕPIK SEITSMEKLASSILISE KOOLI JA KESKKOOLI V—VI KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1957

Originaali tiitel:

И. Н. Шевченко. **Арифметика.** Учебник для 5 и 6 классов семилетней и средней школы
Учпедгиз 1957

Утвержден Министерством просвещения
РСФСР

Tõlge kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

ESIMENE OSA

TÄISARVUD

Esimene peatükk

NUMERATSIOON. PIKKUSMÕÕDUD JA RASKUSMÕÕDUD.

§ 1. Loendamine.

Juba väga kauges minevikus tuli inimestel loendada neid ümbritsevaid esemeid: oma perekonna liikmeid, koduloomi, relvi, jahil tapetud ja kinnipüütud metsloomi jne.

Ajalugu räägib meile, et ürginimesed oskasid algul eraldada ainult üht eset paljudest; seejärel hakkasid nad loendama kaheni ja kolmeni, aga kõiki, mida oli rohkem kui kolm, tähistasid nad sõnaga «palju».

Aja jooksul õppisid inimesed loendama sõrmedel; kui esemeid oli aga rohkem kui käel sõrmi, siis sattusid meie kauged esivanemad raskustesse.

Loendamiseks kasutati tihti ka mitmesuguseid lihtsaid vahendeid, näiteks täketega keppe, kepikimpe, kivikesi ja mitmesuguseid helmeid. Esemeid, mida loendati, oli vähe, mistõttu ka loendamine oli lihtne.

Loendades neid esemeid, tulid inimesed esemete arvu mõiste juurde. Nad mõistsid, et küsimusele, kui palju jahimees tappis metsloomi, võib vastata, kui näidata oma käe viit sõrme. Teisest küljest, kui inimesel oli viis noolt, siis võis ta samuti näidata viit sõrme. Seega, olgugi et esemed on täiesti erinevad (metsloomad ja nooled), on neid ometi võrdselt, s. t. nooli on niisama palju kui metsloomi. Tähendab, metsloomade hulgale ja noolte kimbule vastab üks ja seesama arv — viis.

Möödus väga palju aega, enne kui inimesed harjusid suurte arvudega. Inimene läks arvult üks ehk üheliselt üle suurte arvude juurde väga aeglaselt.

§ 2. Loendamine rühmade kaupa.

Loendades mitmesuguseid esemeid, tulid inimesed järeldusele, et otstarbekam on loendada mitte ühikute kaupa, vaid ühikute rühmade kaupa.

Kuipalju see on otstarbekam, nähtub kas või sellest, et loendamine rühmade kaupa on säilinud kuni käesoleva ajani. Väga sageli loendatakse ka tänapäeval esemeid kahekaupa ehk paarikaupa. Näiteks, õpilane ostab kauplusest sulgi. Müüja loendab need suled paarikaupa, s. t. ta lükkab kõrvale kahe sule kaupa ja loeb: üks, kaks, kolm, neli, viis paari. Tähendab, ta eraldas 10 sulge.

Tihti loendatakse ka kolmekaupa. Mingisuguste väikeste esemete, näiteks nööpide, pliiatsite, nõelte, tikutooside, neetide jne. loendamisel võetakse need kolmekaupa ja loendatakse mitte üksikute esemete arv, vaid nende esemete kolmikute arv. Väga laialt on levinud loendamine viiekaupa. See on ka arusaadav, sest inimese käel on viis sõrme.

Kõigile on teada, et paljusid esemeid me loendame kümnekaupa: mune, õunu, pirne, kurke jne.

Kuid milliste rühmade abil on parem loendada? Tänapäeval loetakse kõige otstarbekamaks loendamist kümnekaupa. Kümnekaupa loendamist kasutatakse laialdaselt nii igapäevases elus ja ka teaduses. Aritmeetikas on arvul kümme eriti suur tähtsus.

§ 3. Suuline numeratsioon.

Kui võib-olla meie esivanemad mitte täiesti ei mõistnud, et igal arvul peab olema oma nimetus, ja inimene võis küsimusele, kui palju on temal nooli, lihtsalt näidata viit sõrme, siis tänapäeval me mõistame, et igale arvule peab andma oma nimetuse. Kuid arve on väga palju, kuna on kogumikke, milledes on väga palju esemeid. Seepärast kerkib üles küsimus: kuidas saavutada seda, et kõik arvud saaksid nimetuse, kuid et erinevaid sõnu selleks ei oleks väga palju. See saavutatakse järgmisel viisil: algul määratakse kindlaks esimese kümne arvu nimetused; seejärel, lähtudes nendest nimetustest, saadakse nende nimetuste mitmesuguste ühendamiste ja mõnede uute sõnade kasutuselevõtmise teel kõigi järgnevate arvude nimetused. Kujutame endale ette, et me loendame mingisuguseid esemeid ja seejuures ütleme sõnu: üks, kaks, kolm, neli, viis, kuus, seitse, kaheksa, üheksa, kümme. Selles loendamise protsessis me saime esimese kümne arvu nimetused.

Jätkates loendamist, me ütleme: üksteist, kaksteist, kolmteist, neliteist, viisteist, kuusteist, seitseteist, kaheksateist, üheksateist, kakskümmend.

Mõtleme nüüd järele, kuidas me moodustame teise kümne arvu nimetused. Kõigepealt, kui me hääldame neid arve, siis on kuulda iga kord sõna «teist». See tuleneb sõnast «teine». Tähendab, teise kümne arvu nimetusi tuleb mõista nii: üks teisest kümnest, kaks teisest kümnest, kolm teisest kümnest jne. Käändelistes vormides on säilinud ka sõna «kümme», näiteks: üheteistkümne, kaheteistkümne, üheteistkümnest, kaheteistkümnest jne. Sõna «kakskümmend» tähistab kahte kümnelist.

Pöörake tähelepanu sellele, et erinevaid arve oli meil praegu kakskümmend, täiesti erinevaid nimetusi aga ainult kümme, sest et teise kümne arvu nimetused me moodustasime esimese kümne arvu nimetuste ja sõna «teist» abil.

Loendame edasi: kakskümmend üks, kakskümmend kaks, kakskümmend kolm, kakskümmend neli, kakskümmend viis, kakskümmend kuus, kakskümmend seitse, kakskümmend kaheksa, kakskümmend üheksa, kolmkümmend.

Me saime järgmise kümne arvu nimetused. Need nimetused saime, kui sõnale «kakskümmend» lisasime juurde esimese kümne arvu nimetused, s. t. me saime: kakskümmend ja üks, kakskümmend ja kaks jne. Viimane nimetus «kolmkümmend» tähistab kolme kümnelist.

Jätkates loendamist, me saame neljanda kümne arvu nimetused, seejärel viienda, kuuenda, seitsmenda, kaheksanda, üheksanda ja kümnenda. Uutele arvudele saame nimetused samal viisil nagu kolmanda kümne arvudelegi. Ainult ühel juhul võtame kasutusele uue sõna, ja nimelt kümne kümnelise tähistamiseks — sõna s a d a.

Sajast suuremate arvude nimetused moodustatakse sõnast «sada» ja esimese ning järgmiste kümnete arvude nimetustest. Niisugusel teel saadakse nimetused: sada üks, sada kaks, . . ., sada üheksa, sada kümme, sada üksteist, . . . , sada kakskümmend jne. Loendanud uue saja, me saame kaks sajalist, mida lühidalt nimetatakse «kakssada». Kahestsajast suuremate arvude saamiseks me kasutame uuesti esimese ja järgmiste kümnete arvude nimetusi, millised lisame juurde sõnale «kakssada». Kui me seejärel loendame järgmisi sajalisi, siis pärast iga uut sajalist saame uue nimetuse: kolmsada, nelisada, viissada jne. seni, kuni jõuame kümne sajaliseni, mida nimetatakse t u h a n d e k s.

Üle tuhande loendatakse nii: lisades tuhandele järjest ühekaupa, saame kaks tuhat, kolm tuhat, neli tuhat jne. Kui me loendame tuhat tuhandelist, siis nimetame seda arvu m i l j o n i k s (ladina k. *mille* — tuhat). Edasi loendame miljonilisi seni, kuni jõuame tuhande miljoniliseni. Saadud uut arvu (tuhat miljonit) nimetatakse b i l j o n i k s (ladina keeles eesliide *bi* tähendab kahekordset). Biljonit nimetatakse veel ka m i l j a r d i k s. Tuhat biljonit (miljardit) kannab nimetust t r i l j o n. Et mitte koormata mälu, me piirdume ainult nende nimetustega.

Seega, et loendada kõiki arve ühest triljonini kaasa arvatud, vajatakse ainult 15 erinevat sõna: **üks, kaks, kolm, neli, viis, kuus, seitse, kaheksa, üheksa, kümme, sada, tuhat, miljon, biljon, triljon.** Kõikide teiste arvude nimetused me saame nendest põhinimetustest.

§ 4. Kirjalik numeratsioon.

Arvude kirjutamiseks ehk tähistamiseks kasutatakse kümmet erinevat märki, mida nimetatakse numbriteks:

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Nende kümne numbri abil võib kirjutada mistahes arvu. Seda tehakse järgmiselt. Esimesed üheksa arvu — ühest üheksani — kirjutatakse eespool antud märkide abil: 1; 2;...; 9.

Üheksast suuremad arvud kirjutatakse samade märkide ja märgi 0 (null) abil, s. t. nii: 0 (null näitab, et selles arvus pole ühelisi), 11, 12, 13 jne.

Pöörame tähelepanu sellele, et arvude 11 kuni 19 nimetused ei ole kooskõlas kirjutamisviisiga; kui me ütleme «üksteist», siis nimetame algul ühelise (üks teisest kümnest), kirjutame aga algul kümnelise ja siis ühelise.

Järgmised 20-st suuremad arvud kirjutatakse järgmiselt: 21; 22; 23 jne.

Märgime, et siin ei ole erinevusi arvude lugemise ja kirjutamisviisi vahel; kuidas me loeme arvu, nii me ta ka kirjutame.

Arvud 30-st kuni 100-ni kirjutatakse sama põhimõtte järgi nagu arvud 20-st kuni 30-ni.

Tähendab, arvu ühelised kirjutatakse paremalt esimesele kohale, kümnelised aga teisele kohale, s. t. ühelistest vasakule.

Arvud 100-st kuni 1000-ni kirjutatakse nii: ühelised paremalt esimesele kohale, kümnelised teisele kohale ja sajalised kolmandale kohale.

Null tähistab vastavalt kas üheliste, kümneliste või sajaliste puudumist. Näiteks, arvus sada kaks (102) ei ole kümnelisi, nende kohal on null; arvus kolmsada kakskümmend (320) ei ole ühelisi, mistõttu paremalt esimesel kohal on null; arvus tuhat (1000) on paremal kolm nulli, s. t. nullid on nii üheliste, kümneliste kui ka sajaliste kohal.

Tuhandest suuremad arvud kirjutatakse järgmiselt. Olgu vaja kirjutada arv tuhat kakssada kolmkümmend neli. Selle arvu kirjutamiseks vajatakse nelja numbrit: paremalt esimesele kohale kirjutatakse üheliste number, teisele kohale kümneliste number, kolmandale kohale sajaliste number ja neljandale kohale tuhandeliste number. Tähendab, antud arvul on järgmine kuju: 1234.

Kirjutame nüüd arvu kaks tuhat nelikümmend viis. See arv kirjutatakse samuti nelja numbriga, kuna selles aga pole näidatud sajaliste arvu, siis sajaliste kohale kirjutame nulli: 2045.

Kuna tuhandelisi me loendame samuti kümnete ja sadade kaupa, näiteks me ütleme kakskümmend tuhat, kolmsada tuhat, siis on kerge mõista, et osates kirjutada kümnelistest ja sajalistest koosnevaid arve, oskame me kirjutada ka arve, mis koosnevad mistahes kümne- ja sajatuhandelistest. Kirjutame näiteks arvud kolmkümmend viis tuhat kuussada seitsekümmend kaheksa ja nelisada kaks tuhat viissada üheksa:

35 678; 402 509.

Teises arvus on kümneliste ja kümnetuhandeliste kohal nullid.

Arvu «üks» nimetatakse *esimese järgu ühikuks*; kümmet esimese järgu ühikut, s. t. arvu «kümme», nimetatakse *teise järgu ühikuks*; kümmet teise järgu ühikut (kümme kümnelist), s. t. arvu «sada» nimetatakse *kolmanda järgu ühikuks*. Nii võime jätkata ka edasi, s. t. kümme mingi madalama järgu ühikut moodustavad temale järgneva kõrgema järgu ühe ühiku.

Eelpool nimetatud kolm esimest järku ühendatakse üheks rühmaks ja nimetatakse *esimeseks klassiks* ehk *üheliste klassiks*. Esimesse klassi kuuluvad ühelised, kümnelised ja sajalised.

Kümme sajalist moodustavad *neljanda* järgu ühiku — tuhandelise. Kümme tuhandelist moodustavad *viienda* järgu ühiku, sada tuhandelist aga *kuuenda* järgu ühiku. Kolmele järgule lisandusid veel kolm uut järku (neljas, viies ja kuues). Need järgud moodustavad *teise klassi* ehk *tuhandeliste klassi*. Teise klassi kuuluvad tuhandelised, kümnetuhandelised ja sajatuhandelised.

Teisele klassile järgneb *kolmas klass* — *miljoniliste klass*, mis koosneb samuti kolmest järgust: seitsmendast, kaheksandast ja üheksandast järgust, s. t. miljonilistest, kümnemiljonilistest ja sajamiljonilistest.

Me kirjeldasime, kuidas loetakse arve ja kuidas neid kirjutatakse. Vaatamata sellele, et me ei vaadelnud iga arvu ühest triljonini (milleks kuluks väga palju ruumi ja aega), võime me nüüd lugeda ja ühtlasi ka kirjutada mistahes arvu neis piires. See on võimalik seepärast, et lähtudes mõningate mitte suurte arvude vaatlemisest, püstitasime *üldised reeglid* arvude lugemise ja kirjutamise kohta. Reeglite kogumikku, mida kasutatakse arvude lugemisel ja kirjutamisel, nimetatakse **arvusüsteemiks** ehk **numeratsiooniks.**

Meie poolt esitatud süsteemis on eriline tähtsus arvul 10 ja seepärast nimetatakse seda süsteemi **kümnendsüsteemiks.**

Kirjutame arvu 285 468, märkides iga numbri juurde koha, kus ta asetseb selles arvus.

$$\underbrace{\overset{2}{\text{sajalised}}\quad\overset{8}{\text{kümnelised}}\quad\overset{5}{\text{ühelised}}}_{\text{tuhandeliste klass}}\qquad\underbrace{\overset{4}{\text{sajalised}}\quad\overset{6}{\text{kümnelised}}\quad\overset{8}{\text{ühelised}}}_{\text{üheliste klass}}$$

Pöörake tähelepanu sellele, et number 8 esineb selles arvus kaks korda. Ta asetseb paremalt esimesel kohal, s. t. üheliste kohal, ja paremalt viiendal kohal, s. t. kümnetuhandeliste kohal.

Seega ei sõltu mistahes numbri väärtus mitte ainult sellest, *kui palju ühelisi* on temale vastavas arvus, vaid ka sellest, *missugusel kohal* asetseb ta arvu kirjutises. Seepärast nimetatakse kümnendsüsteemi ka *positsiooniliseks* arvusüsteemiks ehk kohaväärtuse alusel ülesehitatud arvusüsteemiks.

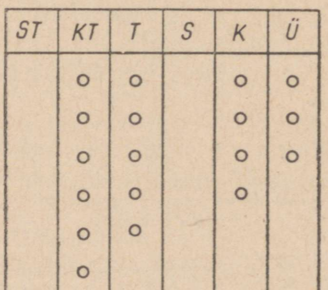
Arve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., mis tekivad loendamise protsessis, nimetatakse **täisarvudeks;** nende arvude hulka, kui arvud on paigutatud kasvavasse järjekorda, nimetatakse aga **naturaalarvude reaks.** Väikseimaks selle rea arvuks on arv 1, suurimat arvu aga pole, sest kui suure arvu me ka ei võtaks, suurendanud seda ühelise võrra, saame uue arvu, mis on suurem kui eelmine. Seda mõtet võib väljendada järgmiselt: **naturaalarvude rida on lõpmatu.**

Arvu, mis koosneb ühest numbrist, nimetatakse ühekohaliseks arvuks, näiteks 9; arvu, mis koosneb kahest numbrist, nimetatakse kahekohaliseks arvuks, näiteks 23; arvu, mis koosneb kolmest numbrist, nimetatakse kolmekohaliseks arvuks, näiteks 509, jne. Kasutatakse ka veel terminit «mitmekohalised arvud».

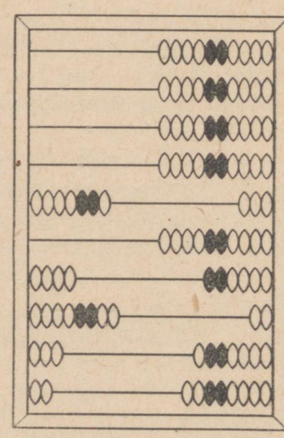
§ 5. Abakus (arvutusraam) ja arvelaud.

Kirjaoskus oli kauges minevikus arenenud nõrgalt, kuid loendada oli vajalik igal inimesel, seepärast tuligi loendamiseks kasutada kivikesi, helmeid ja teisi esemeid.

Aja jooksul mõtlesid inimesed loendamiseks välja lihtsa, kuid täiesti praktilise vahendi, mida nimetati *abakuseks.* Abakust kasutasid vanad kreeklased, roomlased ja teised rahvad. Abakuse ehitus erinevatel aegadel ja erinevatel kohtadel muutus, kuid tema kasutamise põhimõte oli üks ja sama ning seisnes järgmises. Abakus oli tahvel pikuti soonekestega, milledesse paigutati esialgu kivikesi, hilisematel aegadel aga erilisi žetoone. Abakusel paremalt esimene sooneke oli üheliste jaoks, järgmine — kümneliste jaoks jne. Kujutame endale ette, et abakusel oli tar-



Joon. 1.



Joon. 2.

vis võtta arv 65 043; siis žetoonid paigutati soonekestesse järgmisel viisil (joon. 1).

Tulpa, mis joonisel on tähistatud tähtedega *KT* ja mis tähistab kümnetuhandelisi, on paigutatud 6 žetooni; see tähendab, et antud arvus on 6 kümnetuhandelist. Järgmises tulbas paremal, mis on märgitud tähega *T* (tuhandelised), on 5 žetooni, s. t. 5 tuhandelist. Tähega *S* (sajalised) märgitud tulp on tühi, sest antud arvus pole sajalisi, nende kohal on null (0). Kahes järgmises tulbas paremal on nii palju žetoone, kui palju kümnelisi ja ühelisi on vaadeldavas arvus.

Ka meie maal kasutasid vanad slaavlased abakusele sarnlevaid vahendeid. Kõige vanemad neist vahendeist meenutasid oma välimuselt abakust. Hilisem ja kõige täielikum vahend koosnes aga nööridest sellele lükitud luust kettakestega. See vahend oligi arvatavasti tänapäeva arvelaua eelkäijaks. Arvelauda kasutatakse ka seniajani väga laialdaselt ja edukalt kõigis rahalistes ja teistes arvestustes.

Arvelaud kujutab endast puust neljakandilist raami. Raami vahele on paigutatud paralleelsed traadid, milledele on lükitud ümmargused kettad. Igal traadil on 10 ketast (joon. 2).

Alt esimesel traadil on ühelised, teisel — kümnelised, kolmandal — sajalised, neljandal — tuhandelised jne.

Kui arvelaual pole võetud ühtegi arvu, siis peavad kõik kettad olema lükatud paremale. Oletame, et meil on vaja võtta arvelaual arv 704 832; siis kuuendal traadil lükatakse vasakule 7 ketast (s. t. seitse sajatuhandelist); viiendal traadil kettaid ei liigutata, kuna antud arvus ei ole kümnetuhandelisi; neljandal traadil lükatakse vasakule 4 ketast (s. t. neli tuhandelist), kolmandal — 8 ketast, teisel — 3 ketast ja esimesel — 2 ketast.

§ 6. Rooma numbrid.

Kümnendsüsteem, millest me rääkisime neljandas paragrahvis, tekkis Indias. Hiljem hakati kümnendsüsteemi nimetama «araabia süsteemiks», kuna araablased tõid selle süsteemi Euroopasse. Ka neid numbreid, mida me tänapäeval kasutame, nimetatakse araabia numbriteks.

Nende numbrite kõrval kasutati erinevatel aegadel ka teisi numbreid, mis tänapäeval on peaaegu kõik unustusse vajunud. Käesoleval ajal kohtame me siiski mõnikord veel rooma numbreid, näiteks kellade numbrilaudadel, raamatutes peatükkide ja osade tähistamisel, ametlikes dokumentides kuude tähistamisel jm.

Rooma numbritel on järgmine kuju:

I — üks	L — viiskümmend
V — viis	C — sada
X — kümme	D — viissada
M — tuhat	

Kuidas kirjutatakse arve nende numbrite abil?
Esimese kümne arvud kirjutatakse nii:

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX,	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Mõned numbrid kirjutatakse mingi teise numbri kordumise teel, näiteks: III (kolm), XXX (kolmkümmend).

Kui väiksem number asetseb suurema järel, siis see liidetakse suuremaga (VIII — 8, s. t. 5+3=8).

Kui väiksem number asetseb suurema ees, siis lahutatakse see suuremast (IV — 4, s. t. 5—1=4; sel juhul väiksem number ei või korduda mitu korda).

Näiteid. LXX = 70; CX = 110; XC = 90.

§ 7. Pikkusmõõdud.

Õppinud loendama ümbritsevaid esemeid, sai inimesel võimalikuks võrrelda nende esemete mitmesuguseid kogumikke. Näiteks, kui ühes karjas on 20 lehma ja teises 17, siis on ilmne, et esimene kari on teisest suurem. Seega, loendanud mitmesuguste kogumike esemeid, me võime neid kogumikke võrrelda, s. t. võime anda vastuse küsimusele, missugune kogumik on suurem ja missugune väiksem. Järk-järgult õppisid inimesed lahendama enam keerukamaid ülesandeid. Näiteks, inimene elab teatud kohas ja märkab, et tema elamust on metsani rohkem maad kui jõeni. Kuidas aga võrrelda neid vahemaid? Mida tuleb siin loendada? Antud juhul tuleb valida mingi mõõduühik ja mõõta sellega mõlemad vahemaad. Tähendab, sellel juhul tuleb leida mõõduühikute arv. Kumb neist kahest arvust osutub suuremaks, sellele vastab ka suurem vahemaa.

Kust aga võtta mõõduühikut? Vanasti kasutasid inimesed selleks näiteks oma sammu pikkust, käe pikkust, väljasirutatud pöidla ja esimese sõrme otste vahelist kaugust jm.

Kui inimesed elavad aga kollektiivis, on nendel siiski vaja ühesuguseid ja enam täpsemaid mõõduühikuid, vastasel korral lakkaksid nad üksteist mõistmast. Seepärast tekkis juba ammu vajadus ühtsete mõõduühikute järele, algul oma kogukonnas, hiljem aga juba oma maa piirides. Tootmise ja kaubanduse arenemisega tekkis tarvidus ühtsete mõõduühikute järele ka juba rahvusvahelises ulatuses.

Tänapäeval on peaaegu kõigis maailma maades kasutusel **meetermõõdustik,** mis võeti kasutusele XVIII sajandil Prantsusmaal. Selle mõõdustiku loojad püüdsid leida niisugust pikkuse mõõduühikut, mis oleks võetud loodusest, s. t. mis kujutaks endast Maal eksisteerivat mingit vahemaad. Niisugust mõõduühikut on alati võimalik taastada selle vahemaa uuestimõõtmise teel.

Meetermõõdustiku loojad mõõtsid Maa meridiaani pikkuse ja võtsid pikkusühikuks lõigu, mis sisaldub veerandmeridiaanis 10 000 000 korda. Seda pikkust hakati nimetama **meetriks**, mis on tuletatud kreeka keelest ja tähendab «mõõtmist». Hilisemad mõõtmised näitasid, et esialgsed mõõtmised ei olnud küllalt täpsed ja et algmeeter ainult ligikaudselt oli võrdne veerandmeridiaani kümnemiljondikuga. Kuna aga viga oli tühine, siis esialgne algmeeter säilitati. Tänapäeval kasutatavad meetrid on selle XVIII sajandil Prantsusmaal valmistatud algmeetri koopiad. Algmeetrit hoitakse Rahvusvahelises Mõõtude ja Kaalude Büroos Sèvre'is, Pariisi lähedal.

Meil NSV Liidus kehtestati meetersüsteem üldiseks kasutamiseks 1918-ndal aastal.

Peale meetri kasutatakse ka mõõduühikuid, mis on meetrist suuremad või väiksemad.

Meetrist suuremate ühikute nimetuste moodustamiseks kasutatakse kreeka päritoluga eessõnu: deka (kümme), hekto (sada), kilo (tuhat), meetrist väiksemate ühikute nimetuste moodustamiseks kasutatakse aga ladina päritoluga eessõnu: detsi (üks kümnendik), senti (üks sajandik), milli (üks tuhandik). Nii saadakse järgmine pikkusmõõtude tabel:

kilomeeter (km) = 10 hektomeetrit = 1 000 meetrit,
hektomeeter (hm) = 10 dekameetrit = 100 meetrit,
dekameeter (Dm) = 10 meetrit,
meeter (m) = 10 detsimeetrit = 100 sentimeetrit,
detsimeeter (dm) = 10 sentimeetrit,
sentimeeter (cm) = 10 millimeetrit (mm).

§ 8. Raskusmõõdud.

Raskusmõõdud olid kuni XVIII sajandi lõpuni eri maadel isesugused. Üheaegselt pikkusühiku — meetri kasutuselevõtmisega loodi ka raskusühikud. Tähtsaimad raskusühikud on **gramm** ja **kilogramm.**

Miks valiti just need mõõduühikud ja kuidas need saadi, seda selgitame hiljem (§ 55). Grammist väiksematel raskusühikutel on järgmised nimetused: detsigramm, sentigramm ja milligramm. Need on seotud grammiga järgmiselt:

1 gramm (g) = 10 detsigrammi,
1 detsigramm (dg) = 10 sentigrammi,
1 sentigramm (cg) = 10 milligrammi.

Grammist suuremad raskusühikud on järgmised:

1 kilogramm (kg) = 1 000 grammi,
1 tsentner (ts) = 100 kilogrammi,
1 tonn (t) = 1 000 kilogrammi.

§ 9. Arvude ümardamine.

Me õppisime lugema ja kirjutama arve. Nende arvude abil me võime väljendada esemete kõikvõimalikke kogumikke ja mitmesuguste suuruste mõõtmise tulemusi. Neid arve kasutame me kõige mitmekesisemate ülesannete lahendamisel. Toome mõningaid arvuliste andmetega näiteid.

1. Seppade perekonnas on 5 inimest.
2. Moskvast Kiievi on 860 km.
3. Linnas *N* elab 87 000 inimest.

Nendesse arvudesse peame suhtuma erinevalt. Kui me ütleme, et Seppade perekonnas on 5 inimest, siis see arv väljendab täpselt nimetatud perekonna suurust.

Kui me ütleme, et Moskvast Kiievini on 860 km, siis seda arvu ei saa lugeda nii täpseks kui perekonnaliikmete arvu, sest niisuguse suure vahemaa mõõtmist ei saa teostada täpselt. Seepärast, kui me loeme, et Moskva ja Kiievi vahemaa on 860 km, siis see tähendab, et Moskva ja Kiievi vahemaa on lähedane sellele arvule; ta võib olla kas natuke suurem arvust 860 km või väiksem, käsiraamatutesse trükitakse aga «ümardatud» arv 860 km.

Toodud kolmandas näites arv 87 000 tähistab linna *N* elanikkonda. Suure linna elanike arv ei saa olla püsiv isegi ühe päeva jooksul, kuna inimesi tuleb iga päev juurde ja lahkub. Tähendab, niisuguseid arve on tarvis «ümardada», ja ei ole kahtlust selles, et arv 87 000 on ümardatud, sest selles me näeme ainult tuhandeliste arvu, sajalisi, kümnelisi ja ühelisi pole antud ja nende kohal on nullid.

Ülesannete lahendamisel ja mitmesuguste arvutuste juures tuleb tihti ümardada paljusid arve. Ümardamist teostatakse järgmisel viisil. Võtame kaks arvu: 38 246 ja 27 958. Olgu vaja kumbki arv ümardada, säilitades nendes tuhandelised. Alustame esimese arvuga. Kui palju on selles tuhandelisi? — 38 tuhandelist. Peale tuhandeliste on selles arvus veel 246 ühelist, mis ei moodusta mitte ühtegi tuhandelist. Selleks et ümardada seda arvu tuhandelisteni, säilitatakse ainult tuhandelised, ülejäänud numbrid jäetakse ära ja nende kohale kirjutatakse nullid. Saame 38 000.

Kui me hakkame aga ümardama teist arvu kuni tuhandelisteni, siis sellega tuleb toimida teisiti. Arvus 27 958 on 27 tuhandelist ja peale selle veel 958 ühelist. Need ühelised moodustavad peaaegu terve tuhandelise. Seepärast niisuguste arvude ümardamisel on parem võtta mitte 27, vaid 28 tuhandelist. Sajaliste, kümneliste ja üheliste kohale tuleb ka sel juhul kirjutada nullid. Saame 28 000.

Siit saame järgmise arvude ümardamise reegli: **kui ümardamisel vasakult esimene ärajäetud number on väiksem kui 5, siis viimast säilitatavat numbrit ei suurendata; kui esimene ärajäetud number on suurem kui 5 või võrdne 5-ga, millele järgnevad nullist erinevad numbrid, siis viimast säilitatavat numbrit suurendatakse ühe võrra; lõpuks, kui ümardamisel jäetakse ära ainult üks number, mis on**

võrdne 5-ga, siis viimast säilitatavat numbrit ei suurendata, kui see on paarisarv, ja suurendatakse ühe võrra, kui see on paaritu arv.

Näiteid. *a*) Ümardada tuhandelisteni arv 32 176. Siin esimene ärajäetav number on 1 (arve loendatakse vasakult paremale). Järelikult, ümardatud arv on 32 000.

b) Ümardada sajalisteni arv 32 176. Esimene ärajäetav number on 7. Tähendab, ümardatud arv on 32 200.

Teine peatükk.

ARITMEETILISED TEHTED.

§ 10. Aritmeetiliste tehete mõiste.

Vaatleme ülesannet: «Õpilane ostis 20 ruudulist ja 10 joonelist vihikut. Kui palju ostis õpilane üldse vihikuid?»

Et vastata sellele küsimusele, tuleb võtta ruuduliste vihikute arv, s. o. 20, ja jooneliste vihikute arv, s. o. 10, ning nendest arvudest moodustada uus arv, mis näitabki meile, kui palju ostis õpilane üldse vihikuid.

Vaatleme teist ülesannet. «Möödunud aastal osteti einelaua jaoks 24 klaasi. Katki on vahepeal läinud 5 klaasi. Kui palju klaase on järel?»

See juhtum erineb eelmisest mitte ainult selle poolest, et siin on jutt paljudest esemetest, vaid ka selle poolest, et siin räägitakse vähenemisest, mõningate varem eksisteerinud esemete hävinemisest. Siin huvitab meid järelejäänud esemete arv. Ka sel juhtumil tuleb kahest antud arvust 24 ja 5 moodustada uus arv, mis annaks meile selle jäägi.

Vaadeldud ülesannetes esitati meile, või nagu öeldakse, anti kaks arvu ja, teades neid (antud) arve, tuli leida uus arv. Kui kahe antud arvu järgi tuleb leida uus arv, siis öeldakse, et nende arvudega tuleb sooritada aritmeetiline tehe. Tähendab, aritmeetiliseks tehteks nimetatakse kolmanda arvu leidmist kahe antud arvu järgi. Leitud arvu nimetatakse selle tehte tulemuseks.

Järgmistel lehekülgedel me õpime tundma nelja aritmeetilist tehet: liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist.

LIITMINE.

§ 11. Liitmise mõiste.

Vaatleme ülesannet: «Ma ostsin mõned õunad. Kaupluses pakiti need õunad kahte pakki. Tulnud koju, asetasin ma ostetud õunad taldrikule ja leidsin, et esimeses pakis oli 9 õuna, teises 6. Kui palju õunu ma ostsin?»

Et vastata sellele küsimusele, tuleb taldrikule asetamisel need õunad loendada, näiteks, asetades õunad esimesest pakist taldrikule, me loendame: üks, kaks, kolm jne. kuni üheksani, seejärel, võttes õunad teisest pakist, jätkame loendamist: kümme, üksteist, kaksteist, kolmteist, neliteist, viisteist. Tähendab, üldse oli 15 õuna.

Vaatleme veel ühte ülesannet. «Õpetaja korjab kokku aritmeetika kontrolltööde vihikud. Klassis on kaks rida pinke. Esimesest reast korjas õpetaja 14 vihikut, teisest reast — 13. Mitu kontrolltööde vihikut korjas õpetaja kokku?»

Ka sellel juhtumil me loendame esimese paki vihikute arvule juurde teise paki vihikute arvu ja saame kõigi vihikute üldarvu, s. t. 27.

Nendes ülesannetes sooritatud tehet kahe arvuga nimetatakse liitmiseks.

Järelikult, liitmisel ühendatakse kaks arvu üheks arvuks, mis sisaldab endas kõik antud arvude ühelised. Arve, mida liidetakse, nimetatakse **liidetavateks,** liitmise tulemust, s. t. liitmisel saadud arvu, nimetatakse **summaks.**

Liitmine kujutab endast tehet, mis on alati teostatav, s. t. ükskõik millised arvud me ka ei võtaks liidetavateks, alati saame leida nende summa. Liitmise tulemus väljendub alati kindla ühese arvuga.

Märkus. Nulli liitmine arvule ei muuda seda arvu, sest null näitab üheliste puudumist. Seepärast

$$10 + 0 = 10$$
$$0 + 10 = 10$$
$$0 + 0 = 0$$

§ 12. Liitmise seadused.

Arvude liitmine põhineb kahele seadusele: **vahetuvuse (kommutatiivsuse)** seadusele ja **ühenduvuse (assotsiatiivsuse)** seadusele.

1. **Vahetuvuse (kommutatiivsuse) seadus.** Võtame kaks arvu, näiteks 3 ja 5. Otsime nende summat. Summa leidmiseks võime võtta arvu 3 ja loendada sellele järjest juurde arvu 5 kõik ühelised. Saame arvu 8.

Kuid me võime võtta ka arvu 5 ja loendada sellele järjest juurde kõik arvu 3 ühelised. Me saaksime uuesti 8.

Tähendab, me võime ütelda, et kui

$$3 + 5 = 8, \text{ siis ka } 5 + 3 = 8.$$

Ja seega võime kirjutada:

$$3 + 5 = 5 + 3 = 8.$$

Seda omadust nimetataksegi vahetuvuse seaduseks. Sõnadega võib seda väljendada järgmiselt: **summa ei muutu liidetavate järjekorra muutmisel.**

Tehete seadusi, omadusi ja mitmesuguseid reegleid, milledega me hiljem kohtume, on otstarbekohane kirjutada tähtede abil, s. t. asendada arvud tähtedega. On lepitud kokku kasutada selleks ladina tähestiku tähti. Kirjutame vahetuvuse seadusi tähtede abil ehk, nagu öeldakse, **üldkujul.** Selleks tähistame esimese liidetava tähega a ja teise liidetava tähega b, siis vahetuvuse seaduse võime kirjutada üles alljärgneva võrduse kujul:

$$a + b = b + a$$

See üleskirjutus paistab esimesel pilgul vähe arusaadav, kuid juba nüüd võime hinnata selle suurt väärtust.

Kõigepealt see üleskirjutus näitab, et vahetuvuse seadus kehtib mitte ainult kahe kindla arvu puhul, vaid ka kõikide teiste arvude puhul.

2. **Ühenduvuse (assotsiatiivsuse) seadus.** Võtame kolme arvu summa:

$$5 + 4 + 8 = 17.$$

Selle summa võime leida mitmel viisil. Näiteks võib võtta algul kahe esimese arvu summa ja liita sellega järelejäänud kolmas arv, s. t.

$$5+4=9;\ 9+8=17.$$

Teiselt poolt võime aga algul leida teise ja kolmanda liidetava summa ning siis liita sellega esimene arv:

$$4 + 8 = 12;\ 5 + 12 = 17.$$

Me ühendasime kaks liidetavat ühte rühma, leidsime nende summa ja seejärel liitsime selle summaga kolmanda liidetava. Mõlemal juhtumil saime ühe ja sama tulemuse.

Järelikult võime teha järgmise järelduse: **summa ei muutu, kui asendame mingi liidetavate rühma nende summaga.** See ongi ühenduvuse seadus. Selle seaduse nimetus juba ütleb, et liidetavaid võib ühendada rühmadesse.

Me selgitasime seda seadust, liites kaks korda erineval viisil. Seda protsessi võiks kirjutada aga ka teisiti. Selleks tuleks kasutada sulgusid ( ); siis saadakse:

$$5 + 4 + 8 = (5 + 4) + 8 = 5 + (4 + 8) = 17.$$

On kombeks ütelda, et me võtsime arvud 5 ja 4 sulgudesse, samuti aga ka 4 ja 8. Võttes sulgudesse mingid arvud, me sellega väljendame mõtet, et need arvud tuleb liita e s i m e s e s j ä r j e k o r r a s. Kui me võtame $5 + 4$ sulgudesse, siis see tähendab, et kõigepealt tuleb 5 liita arvuga 4, siis aga liita 8; teises suluavaldises tuleb algul 4 liita arvuga 8, siis aga liita 5.

Kasutame tähelist kirjutamisviisi. Tähistame esimese liidetava tähega a, teise liidetava tähega b ja kolmanda liidetava tähega c. Siis võime kirjutada:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

Liidetavaid võib olla muidugi ka rohkem kui kolm.

§ 13. Ühekohaliste arvude liitmine.

Et õppida liitma mitmekohalisi arve, peame me kõigepealt oskama liita ühekohalisi arve. See on tarvilik seepärast, et mitmekohaliste arvude liitmisel kasutame me järjekindlalt ühekohaliste arvude liitmise põhimõtteid.

Eelkõige on tarvis koostada ühekohaliste arvude liitmise tabel. Selleks tuleb võtta kõigepealt arv 1 ja sellega järjest liita kõik ühekohalised arvud 1-st kuni 9-ni.

Pärast seda tuleb võtta arv 2 ja jälle liita sellega kõik arvud 1-st kuni 9-ni, siis võtta arv 3, arv 4 jne. ning liita nendega ühekohalised arvud 1-st kuni 9-ni. Viimaseks arvuks, millega tulevad liita ühekohalised arvud, on loomulikult arv 9. Niiviisi saadakse tabelis 81 summat. See tabel õpitakse selgeks algkoolis ning seda on vaja alati meeles pidada, et mitte iga kord kasutada loendamist.

Liitmise tabel annab võimaluse liita mitte ainult ühelisi, vaid ka kümnelisi, sajalisi, tuhandelisi jne. Olgu meil tarvis liita arvud 10 ja 10. Arutleme nii: üks kümneline ja veel üks kümneline moodustavad kaks kümnelist. Kirjutame selle numbritega:

$$10 + 10 = 20.$$

Täpselt samuti, kui meil tuleb liita 200 ja 300, siis liidame 2 ja 3 ning kirjutame summale 5 juurde kaks nulli:

$$200 + 300 = 500.$$

§ 14. Mitmekohaliste arvude kirjalik liitmine.

1. Liidame kolmekohalised arvud:

$$123 + 234.$$

Lahutame need arvud järkudeks:

$$100 + 20 + 3 + 200 + 30 + 4.$$

Nüüd ühendame sajalised üheks rühmaks, kümnelised teiseks rühmaks ja ühelised kolmandaks rühmaks:

$$(100+200)+(20+30)+(3+4).$$

Liites sajalised sajalistega, kümnelised kümnelistega ja ühelised ühelistega, saame:

$$\begin{aligned}100+200&=300,\\ 20+\ 30&=\ 50,\\ 3+\ \ 4&=\ \ 7.\end{aligned}$$

Kui liita aga sajalised, kümnelised ja ühelised omavahel, siis saame:

$$123+234=357.$$

2. Liidame veel kaks kolmekohalist arvu:

$$126+348.$$

Toimime samuti nagu eelmiselgi juhul:

$$100+20+6+300+40+8$$

ehk

$$(100+300)+(20+40)+(6+8).$$

Liidame järkude kaupa:

$$\begin{aligned}100+300&=400,\\ 20+\ 40&=\ 60,\\ 6+\ \ 8&=\ 14.\end{aligned}$$

Nüüd jääb meil leida ainult lõplik summa. Toimime nii: ühe kümnelise, mille me saime üheliste liitmisel, liidame kümnelistega, milliseid meil on 6, kuna kümneliste liitmisel saime 60. Tähendab, meil tuleb liita:

$$400+60+10+4=474.$$

On kerge märgata, et liitmisel me toetusime vahetuvuse ja ühenduvuse seadusele ning kümnendsüsteemi alustele.

Nende kahe harjutuse abil me näitasime, kuidas toimida arvude liitmisel. Tuleb meeles pidada, et kahekohaliste, kolmekohaliste ja üldiselt mitmekohaliste arvude liitmist teostatakse j ä r k u d e k a u p a. Kasutatud üleskirjutamise viis ei ole aga kõige otstarbekohasem ja seetõttu kasutame edaspidi niisugust üleskirjutamise viisi, mida kasutatakse ka suurte arvude liitmisel kõigis praktilistes arvutustes. Sel juhul kirjutatakse liidetavad üksteise alla.

Vaatleme näiteid:

a) $\begin{array}{r} 352 \\ +\ 634 \\ \hline 986 \end{array}$ *b*) $\begin{array}{r} 2\,450 \\ +\ 328 \\ \hline 2\,778 \end{array}$ *c*) $\begin{array}{r} 1 \\ 213 \\ +\ 123 \\ 456 \\ \hline 792 \end{array}$ *d*) $\begin{array}{r} 673 \\ +\ 5\,928 \\ 3\,627 \\ 1\,492 \\ \hline 11\,720 \end{array}$

Harjutuses «*c*» saime üheliste liitmisel 12, s. t. ühe kümnelise ja kaks ühelist, kaks ühelist me kirjutasime üheliste alla, ühe kümnelise aga kümneliste kohale ning liitsime siis selle kümnelistega. Seda kümnelist võib ka mitte kirjutada, vaid pidada meeles.

Liitmise kontrollimine. Liitmist võib kontrollida liitmisega, milleks tuleb liidetavad liita teises järjekorras. Teist liitmise kontrollimise meetodit kirjeldame hiljem (§ 44.).

§ 15. Summa liitmine arvuga ja arvu liitmine summaga.

1. Praktilistes arvutustes tuleb sageli ü h e a r v u g a l i i t a m i t m e a r v u s u m m a. Olgu näiteks tarvis arvuga 1 234 liita summa 123+234+345=702.

Teostame liitmise:

$$1\,234+702=\mathbf{1\,936}$$

Kuid võib ka antud arvuga 1 234 liita järjest selle summa üksikud liidetavad, s. t.

a) 1 234+123=1 357.
b) 1 357+234=1 591.
c) 1 591+345=**1 936**.

Tulemuseks saadakse seesama arv.

Et liita mingi arvuga mitme arvu summa, võib selle arvuga liita esimese liidetava, saadud summaga teise liidetava jne.

2. Olgu tarvis antud arvude s u m m a g a: 123+234+345+ +456+567+789=2 514 l i i t a a r v 6 543. Teostame selle, s. t. liidame summaga 2 514 arvu 6 543:

$$2\,514+6\,543=9\,057.$$

Sama tulemuse võib saada ka teisiti: arvu 6 543 võib liita mistahes antud arvuga, ülejäänud arvud aga ilma igasuguste muutusteta liita saadud kahe arvu summaga.

a) 123+6 543=6 666.
b) 6 666+(234+345+456+567+789)=6 666+2 391=9 057.

Et liita summaga mingi arv, võib liita selle arvu mingi ühe liidetavaga, jättes teised muutusteta.

§ 16. Peast liitmine.

Eelmises paragrahvis me käsitlesime kõiki, mis kuulub kirjaliku liitmise juurde. Teeme nüüd mõningad märkused peast liitmise kohta.

Peast liitmise juures me rakendame neidsamu reegleid ja seadusi, milledel põhineb ka kirjalik liitmine. Et aga tehteid sooritada peast, tuleb omandada suur vilumus nende seaduste kiireks ja teadlikuks kasutamiseks antud arvudega peast, mitte paberil.

On selge, et mitmekohaliste arvude liitmine peast on raske ja seepärast liidetakse need kirjalikult.

Ü h e k o h a l i s t e arvude liitmise tulemusi peab teadma peast (peab jätma meelde). Sel juhtumil ei sooritata mingeid arvutusi, ei peast ega ka kirjalikult.

Kahekohaliste arvude liitmist on soovitav teostada peast. Peast võib teostada mõnikord ka kolmekohaliste arvude liitmist.

1. Liidame 20 ja 34. Arutleme nii: kujutame teise liidetava summana $30+4$ ja teostame liitmise järgmisel viisil $(20+30)+4$.

$$20+30=50, \text{ seejärel } 50+4=54.$$

2. Liidame 42 ja 56. Kujutame kummagi liidetava kümneliste ja üheliste summana ($40+2$ ja $50+6$). Liidame 40 ja 50, saame 90; seejärel liidame 2 ja 6, saame 8 ja lõpuks, liitnud 90 ja 8, saame 98.

3. Liidame veel 78 ja 24. Sooritame tehte lühemalt kui varem. Jättes esimese liidetava muutmata, kujutame teise summana $20+4$. Siis võime algul 78-ga liita 20, saame 98, ja seejärel 98-ga liita 4. Saame 102.

4. $574+325=500+300+74+25=899$.

5. Liidame 48 ja 35. Ümardame esimese liidetava 50-ks, pärast lahutame aga saadud summast 2, s. t.

$$48+35=50+35-2=85-2=83.$$

Seda võtet nimetatakse ümardamise võtteks.

6. Peast mitme arvu liitmisel on tihti kasulik rakendada liitmise vahetuvuse seadust. Olgu tarvis liita kolm arvu: $23+59+17$.

Et neid arve kiiremini liita, tuleb liidetavad paigutada ümber järgmiselt:

$$23+17+59.$$

Siis esimese kahe liidetava summa on kohe 40 ja jääb veel liita 59:

$$40+59=99.$$

Liidetavate ümberpaigutus teostatakse muidugi mõttes.

Üldine võte peast liitmise juures seisneb selles, et lahutada liidetavad järkudeks ja teostada liitmine, alates kõrgematest järkudest.

§ 17. Arvelaual liitmise lihtsaimad juhud.

Arvude liitmist on mugav teostada arvelaual. Näitame algul lihtsamaid liitmise juhtumeid, edaspidi vaatleme aga kõiki ülejäänud juhtumeid.

1. Liita 23 ja 32. Esimene liidetav (23) võetakse arvelaual nii: teisel traadil võetakse 2 ketast (kaks kümnelist), esimesel traadil aga 3 ketast (kolm ühelist). Teine liidetav võetakse arvelaual järgmiselt: teisel traadil — 3 ketast ja esimesel — 2 ketast. Arvelaua vasakul osal me saame: teisel traadil 5 ketast (5 kümnelist) ja esimesel traadil samuti 5 ketast (5 ühelist). Tähendab, otsitav summa on 55, s. t. $23+32=55$.

2. Liita 135 ja 252. Selgitame lühidalt. Esimene liidetav: võtame kolmandal traadil ühe ketta, teisel 3 ketast ja esimesel 5 ketast. Teine liidetav: võtame kolmandal traadil 2 ketast, teisel 5 ketast ja esimesel 2 ketast. Tulemus: 387, s. t. $135+252=387$.

3. Liita 52 314 ja 5 362.

Esimene liidetav: võtame viiendal traadil 5, neljandal 2, kolmandal 3, teisel 1 ja esimesel 4 ketast.

Teine liidetav: võtame neljandal traadil 5, kolmandal 3, teisel 6 ja esimesel 2 ketast. Tulemus: 57 676, s. t. $52\,314+5\,362=57\,676$.

LAHUTAMINE.

§ 18. Lahutamise mõiste.

Vaatleme ülesannet: «Klaasija klaasis uue maja aknaraame. Esimesel päeval klaasis ta 9 aknaraami, teisel päeval ülejäänud 6 raami. Mitu aknaraami klaasis ta kahe päevaga?»

See ülesanne lahendatakse liitmise abil:

$$9+6=15.$$

Siin oli antud meile kaks liidetavat 9 ja 6 ning leidsime nende summa 15.

Nüüd muudame seda ülesannet järgmisel viisil: klaasija, kes sai tellimuse klaasida uue maja aknaraamid, tundis kõigepealt huvi, kui palju on aknaraame, ja selgitas, et neid oli 15; seega summa oli tal teada juba varem. Kui esimesel päeval klaasis ta 9 aknaraami, siis kerkis üles küsimus: mitu raami tuli tal klaasida teisel päeval?

Sellel juhtumil ei tule tal teostada liitmist, sest ei ole tarvis leida summat, kuna ta teab seda, vaid tuleb leida jääk. Jääk leitakse aga teise tehte abil, mis seisneb selles, et antud summast loendatakse ära t u n t u d liidetav.

Vaatleme veel ühte ülesannet: «Sõites lõunasse puhkusele, võtsin ma endaga kaasa 20 ümbrikku. Lõunast saatsin ma kodustele ja tuttavatele 12 kirja. Kui palju jäi mul ümbrikke järele?»

Ei ole raske võtta mõttes ümbrikute üldarvust (20) ära kulutatud ümbrikute arv ja leida jääk, s. t. järelejäänud ümbrikute arv (8).

Ka selles ülesandes oli antud esemete üldarv — esemete summa (20) ja üks liidetav, s. t. kulutatud esemete arv (12), tuli leida aga ülejäänud esemete arv ehk teine liidetav.

Niisuguseid ülesandeid lahendatakse l a h u t a m i s e g a. Järelikult **lahutamiseks nimetatakse tehet, mille abil antud summa ja ühe liidetava järgi leitakse teine liidetav.**

Teises ülesandes tuli arvust 20 lahutada arv 12. Selle tehte tulemuseks saadud arv 8 on ka ülesande küsimusele vastuseks.

Arvu, millest lahutatakse, nimetatakse **vähendatavaks.** Arvu, mida lahutatakse, nimetatakse **lahutatavaks.** Arvu, mis saadakse tehte tulemuseks, nimetatakse **vaheks.**

Lahutamine kujutab endast tehet, mis on võimalik kõigil neil juhtumeil, mil lahutatav ei ole suurem vähendatavast.

Kui võrrelda lahutamist liitmisega, siis võib teha järgmise järelduse: liitmisel antakse liidetavad (näiteks $10+5$) ja otsitakse summat (15), lahutamisel antakse aga summa ja üks liidetavaist (15 ja, näiteks, 10) ning otsitakse teist liidetavat (5). Seega arv, mis on liitmisel otsitav, osutub lahutamisel antuks ja ümberpöördult. Seetõttu nimetatakse lahutamist liitmise p ö ö r d t e h t e k s.

M ä r k u s. 1. Nulli lahutamine arvust ei muuda seda arvu, s. t. $5-0=5$.

2. Kui vähendatav on võrdne lahutatavaga, siis vahe on võrdne nulliga, näiteks

$$10-10=0.$$

§ 19. Lahutamise põhiomadused.

Esimene omadus. Vaatleme niisugust näidet. Kui arvust 11 on vaja lahutada kahe arvu 2 ja 3 summa, siis võib seda teha kahel viisil.

1) Algul võib leida selle summa ($2+3=5$), siis aga lahutada see 11-st, s. t.: $11-(2+3)=11-5=6$.

2) Kuid võib toimida ka teisiti. Leidmata arvude 2 ja 5 summat, võib teostada järjestikku kaks lahutamist, s. t. algul lahutada üheteistkümnest 2 ja siis saadud summast 3, s. t.

$$11-(2+3)=11-2-3=9-3=6.$$

J ä r e l d u s. **Et lahutada summa arvust, võib sellest arvust lahutada esimese liidetava, saadud vahest — teise liidetava jne.**

See ongi lahutamise e s i m e n e o m a d u s. Tähistame vähendatava tähega a, lahutatava summa üksikud liidetavad aga tähtedega b ja c; siis võib esimese omaduse üles kirjutada järgmiselt:

$$a-(b+c)=a-b-c.$$

Teine omadus. Vaatleme niisugust näidet. Kui summast $10+5$ tuleb lahutada 4, siis võib toimida kahel viisil. 1) Algul leida see summa ja siis lahutada sellest 4, s. t. $10+5=15$; $15-4=11$. 2) Või toimida nii: lahutada 4 mingist liidetavast, jättes teise liidetava muutmata:

$$(10+5)-4=(10-4)+5=10+(5-4)=11.$$

Selles seisnebki lahutamise t e i n e o m a d u s, mida võib sõnastada järgmiselt:

Et lahutada arv summast, võib lahutada selle mingist ühest liidetavast (eeldatakse, et liidetav on suurem lahutatavast).

Kirjutame nüüd selle omaduse üles tähtede abil:

$$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c).$$

§ 20. Ühekohaliste arvude lahutamine.

Selleks et õppida lahutama m i t m e k o h a l i s i arve, tuleb õppida tundma kõigepealt ü h e k o h a l i s t e arvude lahutamist ühekohalistest või kahekohalistest arvudest, kui vaheks saadakse ühekohaline arv. Seda võib teha nii. Algul tegeldakse üheliste lahutamisega, siis kaheliste lahutamisega, seejärel kolmeliste lahutamisega jne.

Me saame lahutamise tabeli, mis tekib liitmise tabelist, ainult et siin esimesel kohal seisab summa, millest lahutatakse üks liidetav, teisele poole võrdusmärki on kirjutatud aga teine liidetav. Seda tabelit on tarvis teada peast.

Kasutades seda tabelit, me võime mitte ainult lahutada ühekohalisi arve ja saada ühekohalise vahe, vaid lahutada ka kõrgemate järkude, s. t. kümneliste, sajaliste jne. ühikuid. Tõepoolest, lahutame 5-st kümnelisest 2 kümnelist, saame 3 kümnelist. Seda võib kirjutada numbritega järgmiselt:

$$50-20=30.$$

§ 21. Mitmekohaliste arvude kirjalik lahutamine.

1. Võtame lahutamiseks kolmekohalised arvud:

$$654-123$$

ja, kujutanud need järkude summana:

$$(600+50+4)-(100+20+3),$$

lahutame järkude kaupa:

$$(600-100)+(50-20)+(4-3)=500+30+1=531.$$

Või tulbas:

$$\begin{array}{r} -\ 654 \\ 123 \\ \hline 531 \end{array}$$

2. Vaatleme nüüd keerukamat juhtumit: 782—437. Raskus seisneb siin selles, et vähendatav sisaldab 2 ühelist, lahutatav aga 7 ja järelikult vähendatava ühelistest ei saa lahutada lahutatava ühelisi. Niisugusel juhtumil toimitakse järgmiselt: võetakse, või nagu öeldakse, «laenatakse» 8-st kümnelisest üks kümneline, mis sisaldab 10 ühelist; kui lisada nendele 2 olemasolevat ühelist, siis saame kokku 12 ühelist. Lahutades 12-st ühelisest 7, saame 5 ühelist. Nüüd tuleb lahutada kümnelised. Meil jäi vähendatavasse 7 kümnelist, kuna ühe kümnelise me peenestasime ühelisteks. Tähendab, 7-st kümnelisest tuleb lahutada 3, saame 4 kümnelist.

Kirjutame selle:

$$\begin{array}{r} -\ 7\dot{8}2 \\ 437 \\ \hline 345 \end{array}$$

Numbri 8 kohale on asetatud punkt, mis peab tuletama meelde, et sellest arvust me «laenasime» ühiku. (Selle punkti võib ka ära jätta). Jääb veel 7-st sajalisest lahutada 4 sajalist.

V a s t u s. Vahe on 345.

§ 22. Lahutamise kontrollimine.

Kontrollimine liitmisega. Lahutamist võib kontrollida liitmisega selle põhjal, et vähendatav on summa, lahutatav ja vahe — liidetavad. Seepärast tuleb lahutamise kontrollimiseks liita lahutatav vahega. Kui tulemus on võrdne vähendatavaga, siis on väga tõenäoline, et tehe on sooritatud õigesti.

H a r j u t u s. $\begin{array}{r} -\ 13\,968 \\ 9\,543 \\ \hline 4\,425 \end{array}$ K o n t r o l l. $\begin{array}{r} +\ 9\,543 \\ 4\,425 \\ \hline 13\,968 \end{array}$

Kontrollimine lahutamisega. Kuna vähendatav on summa, lahutatav ja vahe aga liidetavad ning peale selle summa ei muutu liidetavate ümberpaigutamisel, siis lahutamise kontrollimiseks võib vähendatavast lahutada vahe. Kui tulemuseks saadakse lahutatav, siis on väga tõenäoline, et lahutamine on sooritatud õigesti.

H a r j u t u s. $\begin{array}{r} 23\,456 \\ -\ 15\,432 \\ \hline 8\,024 \end{array}$ K o n t r o l l. $\begin{array}{r} 23\,456 \\ -\ 8\,024 \\ \hline 15\,432 \end{array}$

§ 23. Vahe liitmine ja lahutamine.

Praktikas esineb sageli niisuguseid juhtumeid, kus liitmine ja lahutamine esinevad koos. Vaatleme neid juhtumeid.

1. Olgu tarvis arvuga liita vahe, näiteks: arvuga 123 liita arvude 78 ja 56 vahe, s. t. 22. Teostame selle tehte:

$$123+22=145.$$

Selle asemel võiks aga algul liita arvuga vähendatava ja seejärel lahutada lahutatava, tulemus oleks sama:

$$\text{a) } 123+78=201; \text{ b) } 201-56=145.$$

Et liita arvuga vahe, võib liita selle arvuga vähendatava ja saadud summast lahutada lahutatava.

Üldkujul võib seda kirjutada nii:

$$a+(b-c)=a+b-c.$$

2. Olgu tarvis arvust l a h u t a d a v a h e, näiteks: arvust 234 lahutada arvude 98 ja 35 vahe, s. t. 63. Lahutame algul selle vahe arvust 234:

$$234-63=171.$$

Toimime nüüd teisiti: lahutame algul arvust 234 arvu 98 ja saadud tulemusega liidame 35:

$$\text{a) } 234-98=136; \text{ b) } 136+35=171.$$

Milleks me seda tegime? Me pidime arvust 234 lahutama mitte 98, vaid arvude 98 ja 35 vahe. Kui me algul arvust 234 lahutasime 98, siis osutus, et me lahutasime 35 ühelise võrra rohkem kui vaja. Selleks et parandada seda viga, liitsime tulemusele 35 ühelist.

Et lahutada arvust vahe, võib lahutada sellest vähendatava (kui see on võimalik) **ja saadud tulemusega liita lahutatava.**

Üldkujul võib seda kirjutada nii:

$$a-(b-c)=a-b+c.$$

§ 24. Peast lahutamine.

Vaatleme mõningaid näiteid peast lahutamise kohta.

1. Arvust 69 lahutada 45. Kujutame 45 arvude 40 ja 5 summana; siis võib kirjutada: 69−(40+5). Lahutades algul arvust 69 arvu 40, saame 29; lahutades seejärel arvust 29 veel 5, saame lõpliku tulemuse 24. Tähendab, 69−45=24. Seega, me alustasime lahutamist kõrgematest järkudest.

2. Vaatleme enam keerukamat harjutust. Arvust 75 lahutada 47. Teostame lahutamise järgmisel viisil:

$$75-50+3=25+3=28.$$

Ümardanud algul 47 arvuks 50, me lahutasime arvust 75 liigselt 3 ühelist, millised me aga hiljem juurde liitsime.

3. Vaatleme nüüd järgmist lahutamise juhtumit. Olgu vaja arvust 100 lahutada 86. Arutleme nii: arvule 86 lähim ümardatud arv on 90, erinevus nende vahel on 4, 90 ja 100 vahe on 10. Tähendab, 100 ja 86 vahe on 4+10=14. Me teostasime lahutamise täiendusmeetodil.

4. Vaatleme harjutust, mille lahendamisel tuleb kasutada lahutamise teist põhiomadust (§ 19). Olgu tarvis arvust 114 lahutada 26. Eraldame vähendatavas sajalise, s. t. kujutame selle harjutuse nii: (100+14)−26. Lahutame arvust 100 arvu 26, saame 74, seejärel liidame aga arvuga 74 arvu 14, saame 88, s. t.

$$114-26=88.$$

5. Vaatleme harjutust liitmise kohta, mille lahendamisel tuleb kasutada lahutamist: 34+47.

Kujutame 47 vahena 50−3, siis saame:

$$34+50-3=84-3=81.$$

Seda võtet kasutatakse harilikult nendel juhtumitel, mil tuleb liita arv, mis lõpeb 6-ga; 7-ga; 8-ga või 9-ga.

Näiteks:

$$367+198=367+200-2=567-2=565.$$

§ 25. Liitmine ja lahutamine arvelaual.

§ 17 oli esitatud arvelaual liitmise lihtsaimad juhtumid. Vaatleme nüüd keerukamaid juhtumeid.

1. Liita 156 ja 278. Võtame kolmandal, teisel ja esimesel traadil liidetava 156. Seejärel võtame kolmandal traadil teise liidetava 2 sajalist. Seitset kümnelist teisel traadil võtta aga ei saa, mistõttu võtame kolmandal traadil veel ühe sajalise ja teiselt traadilt ära 3 kümnelist. Nüüd läheme üle üheliste juurde. Teise liidetava

kaheksat ühelist esimesel traadil võtta ei saa, mistõttu me võtame teisel traadil ühe kümnelise ja esimeselt traadilt ära 2 ühelist. Saame summa 434, tähendab, 156+278=434.

2. Liita 2 536 ja 5 829. Võtnud esimese liidetava, võtame järkjärgult, juhindudes eespool tehtud märkustest, teise liidetava. Saame 8 365.

Läheme lahutamise juurde.

1. Lahutada 1 234 arvust 9 876. Võtame arvelaual vähendatava 9 876 ja järk-järgult neljandalt, kolmandalt, teiselt ning esimeselt traadilt ära 1, 2, 3 ja 4 ketast. Saame: 9 876−1 234=8 642.

2. Lahutada 734 arvust 2 568. Võtame arvelaual vähendatava 2 568 ja lahutame sellest alljärgnevalt lahutatava. Me ei saa kolmandalt traadilt võtta ära 7 sajalist, mistõttu võtame neljandalt traadilt ära 1 tuhandelise, kolmandale trāadile paneme aga juurde 3 sajalist. Teiselt traadilt võtame ära 3 ketast ja esimeselt 4. Saame: 2 568−734=1 834.

KORRUTAMINE.

§ 26. Korrutamise mõiste.

Vaatleme järgmist liitmise juhtumit:

$$3+3+3+3+3+3+3+3+3+3=30.$$

Siin on 10 liidetavat, mis on kõik üksteisega võrdsed. Nende üleskirjutis võtab enda alla peaaegu terve rea. Kui aga liidetavaid oleks rohkem kui 10, siis läheks nende kirjutamiseks vaja enam kui üks rida. Peale selle on äärmiselt väsitav liita palju liidetavaid ja seejuures võib kergesti tekkida viga. Kui näiteks tuleks arv 456 liita 123 korda, siis kestaks see liitmine kaunis kaua. Niisugust liitmist tuleb kergendada ja lihtsustada. Seda tehakse järgmiselt: algul kirjutatakse üks kord arv, mis tuleb liita iseendaga, seejärel kirjutatakse aga arv, mis näitab, kui palju peab olema liidetavaid, nende vahele pannakse kaldrist. Näiteks, kui arv 3 peab liidetavana korduma 10 korda, siis kirjutatakse: $3\times10=30$.

Me saime uue tehte, mida nimetatakse korrutamiseks. Järelikult, **korrutamiseks nimetatakse tehet, mis seisneb ühesuguste liidetavate summa leidmises.**

Võib öelda ka teisiti: korrutada üks arv (3) teisega (10) — see tähendab esimese arvu kordumist liidetavana nii mitu korda, kui mitu ühelist on teises arvus.

Liidetavaks olevat arvu nimetatakse **korrutatavaks;** arvu, mis näitab, kui palju on niisuguseid ühesuguseid liidetavaid, nimetatakse **korrutajaks.** Tehte tulemust, s. t. korrutamisel saadud arvu, nimetatakse **korrutiseks.** Korrutatavat ja korrutajat nimetatakse mõnikord ühe sõnaga **tegureiks.**

Kaldristi asemel, mida me kasutasime korrutamismärgina, kasutatakse sageli punkti (·), mis asetatakse korrutatava ja korrutaja vahele. Näiteks, $7 \cdot 5=35$. Kui korrutamisel numbrite asemele kirjutada tähed, siis korrutamismärki võib ka mitte kirjutada: $a \cdot b = ab$.

Korrutamistehe on alati võimalik ja antud tegurite puhul annab ühese tulemuse.

M ä r k u s i. 1. Kui korrutatav on võrdne ühelisega (1), siis korrutis on võrdne korrutajaga ($1 \cdot 6=6$, kuna $1+1+1+1+1+1=6$).

2. Kui korrutaja võrdub ühelisega, siis korrutis võetakse võrdseks korrutatavaga ($7 \cdot 1=7$).

3. Kui korrutatav on võrdne nulliga (0), siis korrutis on võrdne nulliga ($0 \cdot 5=0$, sest $0+0+0+0+0=0$).

4. Kui korrutaja on võrdne nulliga, siis korrutis võetakse võrdseks nulliga ($5 \cdot 0=0$).

§ 27. Korrutamise seadused.

Edaspidi kasutame mitmesuguste arvude korrutamisel kolme seadust: vahetuvuse (kommutatiivsuse) seadust, ühenduvuse (assotsiatiivsuse) seadust ja jaotuvuse (distributiivsuse) seadust.

1. Vahetuvuse (kommutatiivsuse) seadus. Võtame arvud 3 ja 4 ning korrutame need. Nende arvude korrutamise võib asendada liitmisega, s. t. $3 \times 4=3+3+3+3=12$. Siin arv 3 on korrutatavaks, arv 4 — korrutajaks. Kui me need ümber vahetame, siis saame: $4 \times 3=4+4+4=12$. Tulemus ei muutunud. Järelikult, arvude korrutamisel võime tegurite kohad ümber vahetada. Selles seisnebki korrutamise vahetuvuse (kommutatiivsuse) seadus, mida võib sõnastada järgmiselt: **tegurite ümberpaigutamisel korrutis ei muutu.**

Vahetuvuse seaduse olemust võib väljendada tähtede abil. Kui tähistada esimene tegur tähega a, teine tegur aga tähega b, siis võib vahetuvuse seaduse kirjutada järgmise võrduse kujul:

$$a \cdot b=b \cdot a.$$

Kui tegureid on enam kui kaks, näiteks kolm, siis jääb vahetuvuse seadus samuti kehtima:

$$abc=bac=cab=\text{jne.}$$

2. Ühenduvuse (assotsiatiivsuse) seadus. Võtame kolm arvu: 3, 4 ja 5 ning korrutame need omavahel. Algul korrutame esimese teguri teisega (3 ja 4), seejärel aga saadud korrutise kolmandaga (5):

1) $3 \times 4=12$; 2) $12 \times 5=60$.

Sulgude abil võib seda kirjutada järgmiselt:

$$3 \times 4+5=(3 \times 4) \times 5=12 \times 5=60.$$

Tähendab, kolmest meile antud tegurist eraldasime algul rühma, mis sisaldas kaks tegurit, leidsime nende korrutise ja korrutasime selle siis kolmanda teguriga.

On täiesti ilmne, et me võisime võtta mitte selle arvude paari, vaid ka teise. Näiteks võime me algul korrutada teise teguri kolmandaga (4×5) ja saadud korrutise esimese teguriga (3). Sulgude abil võib seda kirjutada nii:

$$3 \times 4 \times 5 = 3 \times (4 \times 5) = 3 \times 20 = 60.$$

Tulemus saadakse sama, kuid tegurite rühmitus oli teistsugune: algul ühendasime ühte rühma esimese ja teise teguri, hiljem aga — teise ja kolmanda. Selles seisnebki teine korrutamise seadus, mida võib sõnastada järgmiselt: **korrutis ei muutu, kui mingi kõrvutiasetsevate tegurite rühma asendame nende korrutisega.**

Seda seadust nimetatakse ühenduvuse (assotsiatiivsuse) seaduseks. See nimetus peab meile meelde tuletama seda, et mitme arvu korrutamisel võib tegureid ühendada rühmadeks.

Üldkujul võib seda seadust kirjutada järgmiselt:

$$abc = (ab)c = a(bc).$$

3. Jaotuvuse (distributiivsuse) seadus. Võtame kahe arvu 12 ja 6 summa ning korrutame selle 3-ga. Seda võib kirjutada nii:

$$(12+6) \times 3 = 18 \times 3 = 54.$$

Siin me liitsime kõigepealt sulgudes olevad arvud, saime $12+6=18$; seejärel korrutasime summat 3-ga; saime $18 \times 3 = 54$. Kuid võib toimida ka teisiti, nimelt: algul korrutada 3-ga esimest liidetavat, seejärel teist ning siis liita need korrutised:

$$12 \times 3 = 36; \quad 6 \times 3 = 18; \quad 36 + 18 = 54.$$

Teise meetodi võib lühidalt kirjutada järgmiselt:

$$12 \times 3 + 6 \times 3 = 54.$$

Kuna mõlemal juhtumil saadakse üks ja sama tulemus, siis võib kirjutada võrduse:

$$(12+6) \times 3 = 12 \times 3 + 6 \times 3.$$

Selles seisnebki korrutamise jaotuvuse (distributiivsuse) seadus, mida võib sõnastada järgmiselt: **mitme arvu summa ja mingi arvu korrutis on võrdne üksikute liidetavate ning selle arvu korrutiste summaga.**

Kirjutame selle üldkujul kolme liidetava jaoks:

$$(a+b+c)d = ad + bd + cd.$$

4. Vahe korrutamine arvuga. Meie poolt esitatud jaotuvuse seadus kehtib mitte ainult liitmise, vaid ka lahutamise puhul. Olgu tarvis arvude 54 ja 38 vahe, s. t. 16, korrutada arvuga 18:

$$16 \times 18 = 288.$$

Teostame arvutused teisel teel:

a) $54 \times 18 = 972$; b) $38 \times 18 = 684$; c) $972 - 684 = 288$.

Et korrutada vahe mingi arvuga, võib selle arvuga korrutada eraldi vähendatava ja lahutatava ning seejärel esimesest korrutisest lahutada teise.

Üldkujul võib seda kirjutada nii:

$$(a-b)c = ac - bc.$$

§ 28. Ühekohaliste arvude korrutamine.

Kõigepealt tuleb koostada tabel ühekohaliste arvude korrutamise kohta ühekohaliste arvudega, õppida see pähe ja kasutada seda, kui selleks tekib vajadus.

Kõigi ühekohaliste arvude korrutamist teostatakse korrutamistabeli abil.

Korrutamistabel võimaldab korrutada ka mitmekohalisi arve, mis lõpevad nullidega, s. t. 10, 20, 30, . . .; 100, 200, 300, . . .; 1 000, 2 000, 3 000 jne. mistahes ühekohaliste arvudega. Korrutame 10 arvuga 3. Selleks asendame korrutamise liitmisega: $10 \times 3 = 10 + 10 + 10 = 30$.

Tulemuses saime 3 kümnelist. Nii võib leida ka teisi korrutisi, näiteks $20 \times 4 = 80$; $30 \times 5 = 150$; $400 \times 4 = 1\,600$.

§ 29. Mitmekohaliste arvude kirjalik korrutamine.

Vaatleme mitmekohaliste arvude korrutamise mitmesuguseid juhtumeid.

1. Mitmekohalise arvu korrutamine ühekohalise arvuga. Näiteks:

$$236 \times 4.$$

Kasutades korrutamise jaotuvuse seadust võime esitada arvu 236 kolme liidetava summana $(200+30+6)$, korrutada sajalised, kümnelised ja ühelised eraldi 4-ga ning saadud korrutised liita:

$$(200+30+6) \times 4 = 200 \times 4 + 30 \times 4 + 6 \times 4 =$$
$$= 800 + 120 + 24 = 944.$$

Kuna niisugune üleskirjutis võtab palju ruumi, siis on hakatud korrutama madalamatest järkudest, vahepealsed tehted sooritatakse aga peast:

$$236 \times 4 = 944.$$

Seejuures tuleb arutleda järgmiselt. Alustame üheliste korrutamisest: $4 \times 6 = 24$; arvu 4 kirjutame, 2 kümnelist peame aga meeles, et hiljem liita need kümnelistega; 3 kümnelist korrutame 4-ga, saame 12 kümnelist, kuna 2 kümnelist oli meeles, siis on meil kokku 14 kümnelist; 4 kümnelist kirjutame, 10 kümnelist, s. t. sajalise peame aga meeles, et liita see hiljem sajalistega; 2 sajalist korrutame 4-ga, saame 8 sajalist, ja veel 1 sajaline — kokku 9 sajalist.

2. **Mitmekohalise arvu korrutamine arvuga, mida väljendab number 1 koos ühe või mitme nulliga.** Võtame mitte suure arvu, näiteks 16, ja korrutame selle 10-ga. Kuna liidetavaid ei ole väga palju, siis võib korrutamise asendada liitmisega:

$$16 \times 10 = 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 = 160.$$

Seega, $16 \times 10 = 160$. Me näeme, et see tehe viis arvu 16 korrutamisele ühelisega ja nulli juurdekirjutamisele.

Korrutamine 100-ga, 1 000-ga jne. seisneb korrutatavale kahe, kolme, nelja jne. nulli juurdekirjutamises. Näiteks:

$$23 \times 100 = 2\,300.$$
$$83 \times 1\,000 = 83\,000.$$

3. **Mitmekohalise arvu korrutamine arvuga, milles kõik numbrid peale kõrgema järgu numbri on nullid.** (Neid arve nimetatakse mõnikord «ümardatud arvudeks»). Korrutame näiteks 25 arvuga 30. Selleks piisab, kui 25 korrutada 3-ga ja korrutisele kirjutada juurde null:

$$25 \times 30 = 750.$$

Veel näide: 125×800. 125 tuleb korrutada 8-ga ja korrutisele juurde kirjutada kaks nulli. Tähendab:

$$125 \times 800 = 100\,000.$$

4. **Mitmekohalise arvu korrutamine mitmekohalise arvuga.** Korrutame 618 arvuga 325.

$$\begin{array}{r} \times\,618 \\ 325 \\ \hline 3090 \\ +\;1236 \\ 1854 \\ \hline 200850 \end{array}$$

Siin on korrutaja kolmekohaline arv. Seepärast korrutasime korrutatava algul korrutaja *ühelistega* (618×5) ja saime esimese osakorrutise 3 090; siis korrutasime korrutatava korrutaja *kümnelistega* (618×2), saime teise osakorrutise 1 236 ning kirjutasime selle esimese osakorrutise kümneliste alla; seejärel korrutasime korrutatava korrutaja *sajalistega* (618×3), saime kolmanda osakorrutise

1 854, mille kirjutasime esimese osakorrutise sajaliste alla. Lõpuks, liitnud kolm osakorrutist, leidsime lõpliku korrutise — 200 850.

Korrutame 642 arvuga 305:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}642\\305\end{array} \\ \hline 3210 \\ +\ 000 \\ 1926 \\ \hline 195810 \end{array}$$

Siin peatume ainult selle juhtumi iseärasustel. Korrutajaks oleval arvul on kümneliste kohal null. Me korrutasime selle nulliga korrutatavat 642 ja saime teise osakorrutise, mis on võrdne nulliga. See osakorrutis on meil tähistatud kolme nulliga, kuna me arutlesime järgmiselt:

$$642\times0=0, \text{ sest } 2\times0=0;\ 4\times0=0 \text{ ja } 6\times0=0.$$

Viimasest näitest teeme järeldused: a) Osakorrutis tuleb kirjutada selle järguühiku alla, millega korrutatakse, näiteks, kolmanda osakorrutise parempoolne number 6 on kirjutatud sajaliste alla, kuna see saadi korrutamisel sajalistega.

b) Nullid, mis on teise osakorrutise kohal, võib jätta ka kirjutamata, kuid tuleb meeles pidada, et kolmanda osakorrutise äärmine parempoolne number peab asetsema sajaliste all, mitte aga kümneliste all, tähendab, üldkasutataval üleskirjutisel on järgmine kuju:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}642\\305\end{array} \\ \hline 3210 \\ +\,1926 \\ \hline 195810 \end{array}$$

Korrutamise kontrollimine. Korrutamist võib kontrollida korrutamisega; selleks tuleb tegurid ümber paigutada ja need uuesti korrutada.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}123\\456\end{array} \\ \hline 738 \\ +\ 615 \\ 492 \\ \hline 56088 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}456\\123\end{array} \\ \hline 1368 \\ +\ 912 \\ 456 \\ \hline 56088 \end{array}$$

Teine korrutamise kontrollimise meetod on esitatud tagapool (§ 47).

§ 30. Arvu korrutamine korrutisega ja korrutise korrutamine arvuga.

Korrutamisel võib kohtuda järgmiste juhtumitega.

1. **Arvu korrutamine korrutisega.** Olgu tarvis arv 12 korrutada kolme arvu korrutisega: $15\times16\times18$, s. t. 4 320-ga. Teostame algul selle korrutamise:

$$12\times4\,320=51\,840.$$

Nüüd proovime korrutada järk-järgult, s. t.

a) $12 \times 15 = 180$; b) $180 \times 16 = 2\,880$; c) $2\,880 \times 18 = 51\,840$.

Saime sama tulemuse. Järelikult, **et arv korrutada mitme arvu korrutisega, võib selle arvu korrutada esimese teguriga, saadud korrutis korrutada teise teguriga, seejärel kolmandaga jne.**

2. **Korrutise korrutamine arvuga.** Olgu tarvis korrutis $3 \times 5 \times 8 = 120$ korrutada arvuga 12.

Korrutanud selle korrutise 12-ga, saame: $120 \times 12 = 1\,440$. See ongi otsitav tulemus.

Nüüd proovime korrutada teisiti:

a) $(3 \times 12) \times 5 \times 8 = 1\,440$;
b) $(5 \times 12) \times 3 \times 8 = 1\,440$;
c) $(8 \times 12) \times 3 \times 5 = 1\,440$.

Kõigil juhtumeil saime ühe ning sama tulemuse. Järelikult, **et korrutis korrutada mingi arvuga, võib selle arvuga korrutada ühe tegureist, jättes teised muutmata.**

§ 31. Peast korrutamine.

1. Korrutame peast 48 arvuga 3; selleks esitame 48 kümneliste ja üheliste summana, s. t. $40+8$. Seejärel, toetudes korrutamise jaotuvuse seadusele, korrutame eraldi 40 arvuga 3, saame 120, ja 8 arvuga 3, saame 24 ning liidame 120 ja 24. Korrutamise lõplik tulemus on 144.

Seega, peast korrutamisel lahutatakse korrutatav järkudeks ja korrutatakse siis eraldi iga järk, alates kõrgemast, saadud osakorrutised liidetakse.

2. Kahekohalise arvu korrutamist kahekohalise arvuga võib teostada järgmisel viisil. Olgu tarvis korrutada 15 arvuga 12. Esitame 12 arvude 10 ja 2 summana, s. t. kirjutame:

$$15 \times (10+2).$$

Tähendab, me võime algul 15 korrutada 10-ga, saame 150, seejärel 15 korrutada 2-ga, saame 30, ning lõpuks liita: $150+30=180$.

Sel juhtumil võiks kasutada ka järjestikuse korrutamise võtet, nimelt: kujutada 12 korrutisena 4×3, siis lahendus kirjutatakse nii:

$$15 \times 12 = 15 \times 4 \times 3 = (15 \times 4) \times 3 = 60 \times 3 = 180.$$

Veel näide:

$$15 \times 16 = 15 \times (10+6) = 150+90 = 240,$$

või

$$15\times16=15\times4\times4=(15\times4)\times4=60\times4=240,$$

või, lõpuks,

$$15\times16=(10+5)\times16=160+80=240.$$

3. Kolmekohalise arvu korrutamist peast ühekohalise arvuga teostatakse järgmiselt:

$$532\times3=(500+30+2)\times3=1\,500+90+6=1\,596.$$

4. Mõnikord võib korrutamisel ühe tegureist kujutada vahena, näiteks:

$$23\times18=23\times(20-2)=23\times20-23\times2=460-46=414.$$

§ 32. Korrutamine arvelaual.

Kuna korrutamine täisarvuga kujutab endast ühesuguste liidetavate liitmist, siis korrutamist arvelaual võib teostada korrutatava korduva liitmise teel nii mitu korda, kui mitu ühelist on kordajas. See toiming on aga äärmiselt aeglane, eriti nendel juhtumeil, mil korrutaja on suhteliselt suur arv. Seepärast tuleb jätta meelde mõned erivõtted, mis tunduvalt kiirendavad arvutusprotsessi.

Kõigepealt vaatleme korrutamist järguühikuga (10, 100, 1000, 10 000 jne.).

Et korrutada arvuga, mida kujutab arv 1 temale järgnevate nullidega, tuleb korrutatav võtta arvelaual nii mitu traati kõrgemal, kui mitu nulli on korrutajas.

N ä i d e. 567×100.

Et korrutada 567 arvuga 100, tuleb võtta see arv kaks traati kõrgemal, s. t. tuleb alata viiendast traadist, millel tuleb võtta 5 ketast, järelejäänud numbrid (6 ja 7) tuleb võtta vastavalt neljandal ja kolmandal traadil. Niiviisi arvelaual võetud arv annabki meile otsitava korrutise, s. t. 56 700.

Sageli tuleb meil teatavate arvudega korrutamise asemel jagada 2-ga. See on abivõte, mis tihti kergendab korrutamist. Seepärast vaatlemegi siin arvude jagamist 2-ga, olgugi et see küsimus ei kuulu korrutamise, vaid jagamise juurde.

N ä i d e 1. Jagada 2 468 arvuga 2.

Jagamist teostatakse järgmiselt. Arvelaual võetakse jagatav 2 468 ja seejärel eraldatakse igalt traadilt pooled kettad, alustades kõige madalamast järgust. Saadakse 1 234.

N ä i d e 2. Jagada 2 654 arvuga 2.

Selles arvus on 5 kümnelist, 5 kümnelist aga 2-ga ei jagu, seepärast tuleb siin toimida järgmiselt: esimeselt traadilt tuleb eraldada pooled kettad, s. t. 2, teiselt traadilt tuleb eraldada 3 ketast, s. t. 3 kümnelist, kuid kuna siin eraldame liigselt 5 ühelist, siis on tarvilik esimesele traadile lisada juurde 5 ketast (5 ühelist). Seejärel tuleb kolmandalt traadilt eraldada 3 ketast ja neljandalt — üks.

Tähendab, 2-ga jagamist teostatakse järgmisel viisil: arvelaual võetakse jagatav ja igalt traadilt eraldatakse pooled kettad, minnes madalamate järkude poolt kõrgemate poole; nendel juhtumitel, mil eraldada tuleb liigselt üks ketas, likvideeritakse see viie ketta lisamisega lähimale madalamale järgule.

Nüüd asume arvude korrutamise juurde arvelaual.

N ä i d e 1. 367 korrutada 2-ga.

Arvu korrutamisel 2-ga tuleb võtta see arv arvelaual kaks korda. Tähendab, korrutamine asendatakse liitmisega, s. t.

$$367 \times 2 = 367 + 367 = 734.$$

N ä i d e 2. 372 korrutada 3-ga.

Arvu korrutamine 3-ga asendatakse samuti liitmisega; tähendab, selleks et korrutada arv 3-ga, tuleb võtta see arvelaual kolm korda:

$$372 \times 3 = 372 + 372 + 372 = 1\ 116.$$

N ä i d e 3. 286 korrutada 4-ga.

Et korrutada arv 4-ga, tuleb kõigepealt võtta see arv arvelaual kaks korda, seejärel aga saadud arvuga liita esimese liitmise tulemus:

$$286 \times 4 = 286 + 286 + 572 = 1\ 144.$$

N ä i d e 4. 356 korrutada 5-ga.

Et korrutada arv 5-ga, tuleb see arv korrutada kõigepealt 10-ga, s. t. võtta ta üks traat kõrgemal, siis aga saadud tulemus jagada 2-ga.

$$356 \times 5 = (356 \times 10) : 2 = 1\ 780.$$

N ä i d e 5. 248 korrutada 6-ga.

Et korrutada arv 6-ga, tuleb see arv korrutada kõigepealt 5-ga ja saadud tulemusega liita korrutatav.

$$248 \times 6 = 248 \times 5 + 248 = 1\ 488.$$

N ä i d e 6. 356 korrutada 7-ga.

Et korrutada arv 7-ga, tuleb see arv korrutada kõigepealt 5-ga ja saadud tulemusega liita kaks korda korrutatav.

$$356 \times 7 = 356 \times 5 + 356 + 356 = 2\ 492.$$

N ä i d e 7. 345 korrutada 8-ga.

Et korrutada arv 8-ga, tuleb korrutada see arv 10-ga ja saadud korrutisest lahutada kaks korda korrutatav.

$$345 \times 8 = 345 \times 10 - 345 - 345 = 2\,760.$$

N ä i d e 8. 284 korrutada 9-ga.

Et korrutada arv 9-ga, tuleb korrutada see arv 10-ga ja saadud korrutisest lahutada korrutatav.

$$284 \times 9 = 284 \times 10 - 284 = 2\,556.$$

Korrutamist arvudega 11 kuni 19 teostatakse järgmiselt: kõigepealt korrutatakse ühelistega, nii nagu eespool näidatud, seejärel liidetakse aga saadud korrutisega korrutatava ja 10 korrutis, s. t. võetakse korrutatav üks traat kõrgemal. Näiteks: 142×11. Võtame arvelaual korrutatava üks kord, seejärel liidame sellega sama arvu üks traat kõrgemal, s. t. korrutame seda 10-ga:

$$142 + (142 \times 10) = 1\,562.$$

§ 33. Korrutamine tabelite abil.

Arvutuste kiirendamiseks kasutatakse sageli tabeleid. Näiteks on olemas kahekohaliste arvude korrutamise tabel kahekohaliste arvudega. Et selgitada, kuidas seda kasutada, vaatleme tabelit, kus on esitatud arvu 53 korrutised arvudega 1-st kuni 30-ni.

53

1	53	11	583	21	1113
2	106	12	636	22	1166
3	159	13	689	23	1219
4	212	14	742	24	1272
5	265	15	795	25	1325
6	318	16	848	26	1378
7	371	17	901	27	1431
8	424	18	954	28	1484
9	477	19	1007	29	1537
10	530	20	1060	30	1590

Selgitame, kuidas tuleb kasutada seda tabelit.

N ä i d e 1. Korrutame 53 arvuga 24. Korrutatav on meil 53, ta on kirjutatud üles tabeli kohale; korrutaja 24 leiame tabeli ühest vertikaalsest tulbast; sellest paremalt samast reast leiame otsitava korrutise 1 272.

N ä i d e 2. Korrutada 53 arvuga 27. Korrutatav on kirjutatud üles tabeli peale, korrutaja leiame aga tabeli ühest vertikaalsest tulbast. Otsitav korrutis asetseb korrutatavast paremal samas reas. See võrdub 1 431.

Selle väikese tabeli abil võib leida arvu 53 korrutised mistahes arvuga 1-st kuni 30-ni. Kui näiteks tuleb korrutada 48 arvuga 76, siis tuleb leida tabelites lehekülg kas arvuga 48 üleval või arvuga 76 all.

Peale nende tabelite on olemas veel teisi enam täielikumaid korrutamistabeleid, kuid juba tunduvalt suuremaid oma mahu poolest.

JAGAMINE.

§ 34. Jagamise mõiste.

Vaatleme ülesannet: «Tisler teeb iga päev 5 aknaraami. Mitu aknaraami teeb ta 6 päevaga?»

See ülesanne lahendatakse korrutamisega:

$$5 \times 6 = 30 \text{ (raami)}.$$

Nüüd muudame ülesande tingimusi järgmiselt: «Tisler andis ära 30 valmis aknaraami. Iga päev tegi ta 5 aknaraami. Mitu päeva kulus tisleril nende raamide valmistamiseks?»

Võrdleme neid kahte ülesannet. Esimeses ülesandes olid antud tegurid, tuli leida korrutis.

Teises ülesandes oli antud korrutis, s. t. 30, ja üks tegureist (5), leida tuli aga teine tegur.

Niisugused ülesanded lahendatakse tehte abil, mida nimetatakse *jagamiseks*.

Järelikult, **jagamiseks nimetatakse tehet, mille abil kahe teguri antud korrutise ja ühe teguri järgi leitakse teine tegur.**

Meie ülesandes tuleb arv 30 jagada 5-ga, tulemuseks saadakse 6. Arvu, mida jagatakse, nimetatakse **jagatavaks;** arvu, millega jagatakse, nimetatakse **jagajaks;** arvu, mis saadakse jagamise tulemusena, nimetatakse **jagatiseks.**

Kui võrrelda jagamist korrutamisega, siis saame teha järgmise järelduse: korrutamisel antakse kaks arvu (näiteks, 8×3), otsitakse aga nende korrutist (24); jagamisel antakse korrutis (24) ja üks tegureist (näiteks 8), otsitakse aga teist tegurit (3). Seega arv, mis korrutamisel on otsitavaks, on jagamisel antud ja ümberpöördult. Seepärast nimetatakse jagamist korrutamise *pöördtehteks.*

Märkusi. 1. Kui jagatav on jagajaga võrdne, siis jagatis on üks ($9 : 9 = 1$).

2. Kui jagaja on üks (1), siis jagatis on jagatavaga võrdne ($12 : 1 = 12$).

3. Jagamine nulliga (0) on võimatu.

Tõepoolest, kui jagatav on mingi arv, näiteks 12, siis jagada see nulliga tähendaks leida niisugune arv, mis pärast nulliga korrutamist annaks 12, kuid sellist arvu pole, kuna iga arv nulliga korrutamisel annab nulli. Kui jagatav ise on null, siis seda nulliga jagada on võimalik, kuid jagatis on määramatu, sest mistahes arvu korrutamisel nulliga saadakse korrutiseks null. Tähendab, null ei või olla jagajaks.

Jagamist, mida me praegu kirjeldasime, võib nimetada **täpseks jagamiseks.** Niisugune jagamine pole aga alati võimalik. Näiteks ei saa kõnelda täpsest jagamisest, kui arv 17 tuleb jagada 5-ga, kuna ei leidu sellist täisarvu, mis korrutamisel 5-ga annaks 17. Seepärast tuleb täpsest jagamisest, millest me kõnelesime eespool, eraldada **jäägiga jagamine.**

Nimelt kohtume selle jagamise juhtumiga ka siis, kui proovime jagada 17 arvuga 5. Kui suur on iga osa, kui jagame 17 viieks võrdseks osaks? Igasse ossa saadakse 3 ühelist ja peale selle jääb järele 2 liigset ühelist. Sellel juhtumil kasutatakse järgmist terminoloogiat: arvu 17 nimetatakse endiselt jagatavaks, arvu 5 — jagajaks, arvu 3 — ligikaudseks jagatiseks ja arvu 2 — jagamisel tekkinud jäägiks.

§ 35. Jagamise põhiomadused.

Esimene omadus. Oletame, et meil tuleb jagada arvude 4 ja 6 summa 2-ga. Seda võib kirjutada nii:

$$(4+6):2.$$

Kõigepealt võiks liita, seejärel aga jagada, s. t.:

$$1)\ 4+6=10; \quad 2)\ 10:2=5.$$

Kuid sama tulemuse võime saada ka teisel teel: jagame algul iga liidetava 2-ga ja liidame siis tulemused, s. t.

$$1)\ 4:2=2; \quad 2)\ 6:2=3; \quad 3)\ 2+3=5.$$

Tulemused osutuvad võrdseteks. Seda võib üles kirjutada järgmiselt:

$$(4+6):2=4:2+6:2=2+3=5.$$

Seda omadust võib sõnastada järgmiselt: **et jagada summa mingi arvuga, võib jagada selle arvuga iga liidetava ja saadud jagatised liita.** (Eeldatakse, et kõiki jagamisi on võimalik teostada ilma jäägita.)

See omadus on õige mistahes arvude puhul. Tähtede abil võib seda kirjutada nii:

$$(a+b):c=a:c+b:c.$$

Teine omadus. Olgu tarvis arvude 18 ja 6 vahe jagada 3-ga. Seda võib kirjutada sulgude abil nii:

$$(18-6):3.$$

Leiame kõigepealt sulgudes olevate arvude vahe ning seejärel jagame:

$$1)\ 18-6=12;\quad 2)\ 12:3=4.$$

Nüüd proovime lahendada seda harjutust teisiti: jagame kõigepealt vähendatava (18) arvuga 3, seejärel lahutatava (6) arvuga 3 ja esimesest jagatisest lahutame teise:

$$1)\ 18:3=6;\quad 2)\ 6:3=2;\quad 3)\ 6-2=4.$$

Tulemused osutuvad võrdseteks. Seega võib kirjutada:

$$(18-6):3=18:3-6:3=6-2=4.$$

Seda omadust võib sõnastada järgmiselt: **et jagada vahe mingi arvuga, võib jagada selle arvuga eraldi vähendatava ja lahutatava ning seejärel esimesest jagatisest lahutada teine.** (Eeldatakse, et nii vähendatav kui ka lahutatav jaguvad selle arvuga.)
Tähtede abil võib selle omaduse kirjutada järgmiselt:

$$(a-b):c=a:c-b:c.$$

§ 36. Mitmekohaliste arvude jagamine.

Vaatleme jagamise mitmesuguseid juhtumeid.
Ühekohalise jagaja juhtum. Esitanud jagatava järkude summana, võime jagada iga järgu eraldi.

$$a)\ 864:2=(800+60+4):2=400+30+2=432.$$
$$b)\ 936:9=(900+36):9=100+4=104.$$

Harilikult vahepealsed arvutused teostatakse peast ja kirjutatakse kohe jagatis:

$$936:9=104;\quad 124:4=31 \text{ jne.}$$

Mitmekohalise jagaja juhtum. Arvu jagamisel mitmekohalise jagajaga võib esineda kaks juhtumit: 1) j a g a t i s osutub ü h e k o h a l i s e k s; 2) j a g a t i s osutub m i t m e k o h a l i s e k s. Enne kui vaadelda neid juhtumeid, lahendame järgmise küsimuse. Kuidas saada varem teada, millal jagatiseks saadakse ühekohaline arv ja millal mitmekohaline? Olgu tarvis 256 jagada 32-ga. Korrutame jagaja 32 arvuga 10, saame 320. Võrdleme nüüd jagatavat 256 arvuga 320. Arv 256 on väiksem arvust 320. Seda kirjutatakse nii:

$$256<320.$$

Tähendab, 256 jagamisel 32-ga peab saama arvu, mis on väiksem kui 10, s. t. ühekohalise arvu.

Vaatleme teist harjutust: 516 : 43. Korrutame jagaja 43 arvuga 10, saame 430. Siin jagatav 516 on suurem kui 430. Seda kirjutatakse nii:

$$516>430$$

Tähendab, arvu 516 jagamisel 43-ga jagatis ei saa olla ühekohaline arv.

1) Jagatis on ühekohaline. Jagame 2 244 arvuga 374. Kõigepealt määrame jagatise numbrite arvu. $374\times10=3\,740$. Antud arv $2\,244<3\,740$; tähendab, jagatis on ühekohaline, s. t. et jagatis on nulli (0) ja kümne (10) vahel. Kuidas aga leida, millega see jagatis võrdub? On soovitav jätta mõttes jagajas paremalt ära nii palju numbreid, et temast jääks järele ainult üks number ja sama palju numbreid jätta ära ka jagatavas. Antud juhtumil jätame ära kaks viimast numbrit, siis jääb meil järele 22 sajalist, mis tuleb jagada 3 sajalisega. Milline saadakse jagatis? Võib oletada, et jagatis on võrdne 7-ga, kuid seda oletust tuleb kontrollida. Jagatis on loomulikult lähedane arvule 7, sest et korrutamistabeli järgi $3\times7=21$, kuid kuna me enne jagamist jätsime nii jagatavas kui ka jagajas ära kaks numbrit, siis tagada me seda muidugi ei saa. Kontrollime: $374\times7=2\,618$. Meie kahtlustused osutusid õigeks: meie poolt võetud jagatis osutus suureks. Proovime nüüd arvu, mis on 1 võrra väiksem kui 7, s. t. 6. Teostame korrutamise: $374\times6=2\,244$. Saadud korrutis ühtib täpselt jagatavaga. Tähendab, $2\,244:374=6$.

Pöörake tähelepanu sellele, et mõttes alustame numbrite ärajätmist jagajast, mitte aga jagatavast, s. t. me jätame jagajas ära nii palju viimaseid numbreid, et jääks järele ainult üks vasakpoolne number, seejärel jätame jagatavas ära niisama palju numbreid.

Mõnikord on jagatise numbrite määramisel soovitav jagaja esimest vasakut numbrit suurendada 1 võrra. See on otstarbekohane neil juhtumeil, mil jagaja teine number on suurem kui 5. Proovime jagada 29 976 arvuga 4 996. Siin jagaja 4 996 on lähedasem 5 000-le kui 4 000-le, seepärast on jagaja viimase kolme numbri ärajätmisel otstarbekohasem võtta mitte 4, vaid 5 ning seejärel 29 tuhandelist jagada 5 tuhandelisega. Kuna 29 on väga lähedal 30-le, siis võib võtta 6 korda. Kontrollime: $4\,996\times6=29\,976$. Tulemus ühtib jagatavaga. Tähendab:

$$29\,976:4\,996=6.$$

Nende harjutuste vaatlemisest võib teha järgmise järelduse: mitmekohalise arvu jagamisel mitmekohalise arvuga saadava ühekohalise jagatise määramiseks tuleb leida, jätnud kõigepealt jagatavas ja jagajas paremalt ära ühesuguse arvu numbreid nii, et jagajas jääks järele ainult üks number, mitu korda saadud ühekohaline jagaja sisaldub saadud uues jagatavas.

2) Jagatis on mitmekohaline. Jagame 58 296

arvuga 347. Määrame jagatise numbrite arvu: $347 \times 10 = 3\,470$, jagatav $58\,296 > 3\,470$, tähendab, jagatis on suurem kui 10.

Tehet alustatakse sellega, et jagatavas eraldatakse nii mitu numbrit, alates kõrgematest järkudest, et nendest moodustunud arv ei oleks väiksem jagajast.

Tehe paigutatakse järgmiselt:

```
_58296 | 347
  347  |----
  ---  | 168
 _2359
  2082
  ----
  _2776
   2776
   ----
      0
```

Võtame 582 sajalist ja jagame selle 347-ga, jagatises saame ühelise, seejärel lahutame 582-st sajalisest arvude 347 ja 1 korrutise ning leiame jäägi — 235 sajalist. Selleks, et leida jagatise kümnelisi, tuleb jääk 235 teisendada kümnelisteks (milliseid on 2 350) ja liita sellega jagajas olev kümneliste arv, s. t. 9, saadakse 2 359. Jagame 2 359 kümnelist 347-ga, jagatises saame 6 kümnelist. Lahutame 2 359-st kümnelisest arvude 347 ja 6 korrutise, s. t. 2 082 kümnelist, ja leiame jäägi — 277 kümnelist. Jagatise üheliste leidmiseks kirjutame jäägile paremale juurde jagatava 6 ühelist, saame 2 776, jagame selle 347-ga, jagatises saame 8. Seega, $58\,296 : 347 = 168$.

§ 37. Jagamise kontrollimine.

Kontrollimine korrutamisega. Jagamist võib kontrollida korrutamisega selle põhjal, et jagatav on korrutiseks, jagaja ja jagatis — tegureiks. Seepärast tuleb jagamise kontrollimiseks jagaja ja jagatis korrutada. Kui tulemus on võrdne jagatavaga, siis on väga tõenäoline, et tehe on sooritatud õigesti (see on kehtiv jäägita jagamise korral)

N ä i d e. $5\,535 : 45 = 123$. K o n t r o l l. $123 \cdot 45 = 5\,535$.

Kontrollimine jagamisega. Kuna jagatav on jagaja ja jagatise korrutis, siis jagatava jagamisel jagatisega peame saama jagaja. Seepärast võib jagamise kontrollimiseks jagatav jagada jagatisega. N ä i d e. $13\,104 : 56 = 234$. K o n t r o l l. $13\,104 : 234 = 56$.

§ 38. Üheaegne korrutamine ja jagamine.

Jagamispraktikas võib kohtuda järgmiste juhtumitega.

1. Arvu jagamine korrutisega. Olgu tarvis 960 jagada korrutisega: $4 \times 6 \times 8 = 192$. Leiame kõigepealt otsitava tulemuse:

$$960 : 192 = 5.$$

Nüüd teostame jagamise järk-järgult:

$$\text{a) } 960 : 4 = 240; \quad \text{b) } 240 : 6 = 40; \quad \text{c) } 40 : 8 = 5.$$

Siit saame: **et jagada arv korrutisega, võib jagada selle arvu esimese teguriga, saadud jagatise teise teguriga, uue jagatise kolmanda teguriga jne.**

2. **Korrutise jagamine arvuga.** Olgu tarvis arvude 10; 24 ja 18 korrutis, s. t. 4 320, jagada 8-ga. Jagame selle korrutise 8-ga.

$$4\,320 : 8 = 540.$$

Toimime nüüd teisiti. Üks tegureist (24) jagub 8-ga. Jagame selle 8-ga ja korrutame tulemuse ülejäänud teguritega:

a) $24 : 8 = 3$; b) $3 \times (10 \times 18) = 3 \times 180 = 540$.

Tulemus osutub samaks. Järelikult: **et jagada korrutis mingi arvuga, võib jagada selle arvuga ühe teguri, jättes teised tegurid muutmata.** Eeldatakse, et tegurite hulgas leidub vähemalt üks tegur, mis jagub antud arvuga.

Mõlemaid vaadeldud võtteid kasutatakse ainult neil juhtumeil, mil jagamist saab teostada ilma jäägita.

3. **Arvu korrutamine jagatisega.** Olgu tarvis 6 korrutada arvude 200 ja 5 jagatisega, s. t. 40-ga:

$$6 \times 40 = 240.$$

Toimime nüüd teisiti. Meil tuleb leida:

$$6 \times (200 : 5);$$

korrutame 6 arvuga 200 ja saadud korrutise jagame 5-ga:

$$6 \times 200 = 1\,200,$$
$$1200 : 5 = 240.$$

Tulemus osutus samaks. Tähendab, **et korrutada arv jagatisega, tuleb see arv korrutada jagatavaga ja saadud korrutis jagada jagajaga.**

Üldkujul:

$$a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c.$$

4. **Arvu jagamine jagatisega.** Olgu tarvis 360 jagada arvude 180 ja 6 jagatisega, s. t. 30-ga.

$$360 : 30 = 12.$$

Toimime nüüd teisiti. Meil tuleb arvutada:

$$360 : (180 : 6);$$

jagame 360 arvuga 180 ja korrutame jagatise 6-ga:

$$360 : 180 = 2,$$
$$2 \times 6 = 12.$$

Tulemus osutus samaks. Tähendab, **et jagada arv jagatisega, tuleb jagada see arv jagatavaga ja saadud jagatis korrutada jagajaga.**

Üldkujul:

$$a:(b:c)=(a:b)\cdot c.$$

§ 39. Peast jagamine.

1. Jagame 484 arvuga 4. Selleks esitame jagaja kujus $2\cdot 2$ ja jagame järk-järgult: $284:2=242$; $242:2=121$.

2. Jagamisel võib mõningail erijuhtumeil jagatava esitada liidetavate summana. Vaatleme näiteks, kuidas võib 868 jagada 7-ga. Esitame jagatava järgmiselt:

$$868:7=(700+140+28):7=100+20+4=124.$$

Siin me eraldasime algul mitte 8 sajalist, vaid 7 sajalist, seejärel eraldasime arvu 140 nendel kaalutlustel, et see jaguks 7-ga. Tähendab, jagamise edukus sõltub sellest, kui otstarbekohaselt me jaotame jagatava liidetavateks.

3. Vaatleme veel harjutust, mis on sarnane eelmisega:

$$984:8=(800+160+24):8=100+20+3=123.$$

4. Jagamisel on mõnikord kasulik esitada jagatav vahena, näiteks:

$$483:7=(490-7):7=70-1=69.$$

5. Jagamisel võib mõnikord jagatava lahutada tegureiks, näiteks:

$$90\,000:15=(45\cdot 2\,000):15=3\cdot 2\,000=6\,000.$$

§ 40. Ligikaudne jagatis.

Arvude jagamine erineb liitmisest ja korrutamisest selle poolest, et jagamine pole alati teostatav ilma jäägita. Selles suhtes meenutab ta lahutamist, mis samuti pole kõigil juhtumeil teostatav.

Me ei saa näiteks arvu 23 jagada 5-ga, sest et ei ole olemas sellist täisarvu, mis 5-ga korrutamisel annaks arvu 23. Kuidas aga toimida nendel juhtumitel?

Selle küsimuse selgitamiseks vaatleme üheaegselt kahte harjutust. Jagame 387 arvuga 12 ja 1 373 arvuga 16:

$$387:12=32 \text{ (jääk 3)}; \quad 1\,373:16=85 \text{ (jääk 13)}.$$

Mõlemal juhtumil saadakse jagamisel jääk, kuid esimesel juhtumil on jääk 3 tunduvalt väiksem jagajast, s. t. 12-st, ta on väiksem isegi poolest jagajast. Teisel juhtumil on jääk 13 oma suuruselt lähedane jagajale, s. t. 16-le, ta on tunduvalt suurem poolest jagajast. Sellest lähtudes, et teisel juhtumil ärajäetav jääk on suur (13), on parem võtta jagatiseks mitte 85, vaid 86, s. t. 1 373 : : 16≈86.

Märki ≈ kasutatakse ligikaudse võrdsuse tähistamiseks.

On kombeks ütelda, et esimesel juhtumil ligikaudne jagatis on võetud puuduga, teisel juhtumil — liiaga.

Näiteks saame 23 jagamisel 7-ga jagatiseks 3 ja jäägiks 2; 47 jagamisel 8-ga me eelistame võtta jagatiseks 6, mitte aga 5, sest kui me võtame 5, siis kadu on tervelt 7 ühelist. Tähendab, 23 ja 7 jagatise võtsime puuduga, 47 ja 8 jagatise aga liiaga.

Edaspidi juhindume järgmisest reeglist. **Jäägiga jagamisel tuleb jagatis võtta puuduga, kui ärajäetav jääk on väiksem poolest jagajast. Jagatist tuleb suurendada 1 võrra** (s. t. tuleb võtta liiaga), **kui ärajäetav jääk on suurem poolest jagajast, kui ärajäetav jääk on võrdne poole jagajaga, siis jagatist tuleb suurendada 1 võrra sel juhtumil, mil ta lõpeb paaritu arvuga, ja jätta muutmata, kui ta lõpeb paarisarvuga.**

Kui jagamisel saadakse jääk, siis jagatis ei ole täpne arv, mõlemal juhtumil (võetud puuduga ja liiaga) on ta **ligikaudne.** See tähendab, et kui me kirjutame:

$$23:7\approx 3 \text{ ja } 47:8\approx 6,$$

siis mõlemal juhtumil, nagu on kombeks ütelda, lubame teatud «vea».

Selgitame seda mõtet. Olgu meil 23 rubla (rublalistes) ja olgu tarvis see jaotada võrdselt seitsme isiku vahel. Me võime anda igale 3 rubla, kuid seejuures jääb järele 2 rubla. Igaüks seitsmest isikust sai natuke vähem, kui ta oleks pidanud saama. Kui palju sai ta vähem või «kaotas»? Vähem kui üks rubla (mõned kopikad). Tähendab, jaotamisel sai igaüks teatud osa vähem, mis oli väiksem kui üks rubla. See ongi veaks.

Kui jagamisel osutub viga väiksemaks ühest, siis öeldakse, et jagatis on leitud täpsusega kuni 1.

§ 41. Aritmeetiline keskmine.

Vaatleme ülesannet: «Rong oli teel 4 tundi. Esimese tunniga läbis ta 40 km, teisega 42 km, kolmandaga 38 km ja neljandaga 36 km. Leida rongi keskmine kiirus.»

Rongi liikumise keskmise kiiruse all mõeldakse niisuguse rongi kiirust, mis väljub lähtejaamast üheaegselt antud rongiga ja saabub lõppjaama sellega üheaegselt, kusjuures ta liigub kogu aeg ühtlaselt.

Et leida seda kiirust, arvutame kõigepealt rongi poolt 4 tunni jooksul läbitud tee pikkuse. Selleks liidame ülesandes antud vahemaad:

$$40+42+38+36=156 \text{ (km)}.$$

Kuna rong oli teel 4 tundi, siis keskmise kiiruse leidmiseks tuleb 156 jagada 4-ga:

$$156:4=39 \ (\frac{\text{km}}{\text{t}}).$$

Leitud arv $39\frac{\text{km}}{\text{t}}$ ongi rongi liikumise keskmine kiirus. Mis tuli teha, et leida keskmist kiirust? Oli tarvis kõigepealt liita üksikutes tundides läbitud vahemaad ja seejärel saadud summa jagada vahemaade arvuga.

Vaatleme teist näidet: «Neli õpilast mõõtsid kooli juurviljaaia tara pikkust. Igaüks mõõtis iseseisvalt. Esimene sai tara pikkuseks 507 m, teine 508 m, kolmas 511 m ja neljas 506 m. Missugune nendest arvudest väljendab kõige täpsemalt tara pikkust?»

Kuna kõik neli mõõtmist andsid täiesti erinevad arvulised tulemused, kusjuures üks arv on võib-olla veidi suurem tõelisest väärtusest, teine veidi väiksem, on tara tõeline pikkus aga meile teadmata, siis kõige tõenäolisemaks väärtuseks võetakse nende arvude aritmeetiline keskmine.

Kuidas seda leida? Täpselt samuti nagu esimese harjutuse puhulgi, s. t. leiame kõigepealt mõõtmistel saadud arvude summa ja jagame siis selle summa mõõtmiste arvuga; s. t.

$$507+508+511+506=2032 \text{ (m)}$$
$$2032:4=508 \text{ (m)};$$

508 m ongi tara keskmine pikkus.

Nendes kahes harjutuses me leidsime keskmised arvud. Kuigi nendel harjutustel oli erinev mõte: esimeses oli jutt rongi kiirusest, teises — tara pikkusest, ometi oli keskmiste arvude leidmise viis üks ja sama. See seisnes selles, et algul leiti kõikide arvude summa, seejärel see summa jagati liidetavate arvuga.

Aritmeetikas nimetatakse niisugusel meetodil leitud arvu *arvude aritmeetiliseks keskmiseks*. Mida nimetatakse aritmeetiliseks keskmiseks?

Mitme arvu aritmeetiliseks keskmiseks nimetatakse nende arvude summa ja nende (liidetavate) arvu jagatist.

§ 42. Tehete järjekord. Sulud.

Meie poolt vaadeldud neli tehet — liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine — on jaotatud kokkuleppe kohaselt kaheks järguks. Esimest kahte tehet, s. t. liitmist ja lahutamist, nimetatakse esimest järku teheteks, viimast kahte tehet, s. t. korrutamist ja jagamist, nimetatakse aga teist järku teheteks. Igas järgus on järelikult üks otsene tehe ja selle pöördtehe.

Me nimetame aritmeetiliseks avaldiseks iga arvude ja märkide kogu, kusjuures märgid näitavad, missuguseid tehteid tuleb sooritada nende arvudega.

Ülesannete lahendamisel kohtume tihti avaldistega, mis sisaldavad kas esimest järku tehteid või teist järku tehteid või esimest ja teist järku tehteid. Näiteks:

$$\left.\begin{array}{r}23+12-5\\ 38-18+11\end{array}\right\}\text{ esimest järku tehted;}$$

$$\left.\begin{array}{r}60\times 24:8\\ 100:5\times 6\end{array}\right\}\text{ teist järku tehted;}$$

$$\left.\begin{array}{r}80\times 20+10\\ 120:12-8\\ 90+60:4\\ 150+300\times 6\end{array}\right|\begin{array}{c}\text{esimest ja teist järku}\\ \text{tehted}\end{array}$$

Kerkib üles küsimus: missuguses järjekorras me peame teostama need tehted? Paljude avaldiste arvutamisel tuleb sageli tehted sooritada selles järjekorras, millises nad on kirjutatud; kuid esineb ka selliseid juhtumeid, kus see järjekord ei pea paika.

Kui avaldises esinevad ainult esimest järku tehted, siis need sooritatakse sellises järjekorras, millises nad on kirjutatud (vasakult paremale). Lahendame need harjutused, mis olid antud eespool.

$$23+12-5=35-5=30;$$
$$38-18+11=20+11=31.$$

Kui tehted tuleb teostada teises järjekorras, siis kasutatakse sulgusid. Näiteks:

$$150-(24-10)-(30-14)=150-14-16=120.$$

Siin me teostasime kõigepealt sulgudes olevad tehted.

Samasugune tehete sooritamise järjekord kehtib ka avaldiste puhul, mis sisaldavad ainult teist järku tehteid.

Läheme nüüd üle teist järku tehete järjekorra juurde. See seisneb järgmises. **Kui avaldises esinevad ainult teist järku tehted, siis sooritatakse need sellises järjekorras, millises nad on kirjutatud (vasakult paremale).** Näiteks:

$$60\times 24:8=1440:8=180;$$
$$100:5\times 6=20\times 6=120.$$

Kui tehted tuleb teostada teises järjekorras, siis kasutatakse sulgusid, näiteks:

$$72:(36:4)=8;\quad 120:(4\times 10)=3.$$

Kummaski harjutuses tuleb kõigepealt teostada sulgudes asetsevad tehted.

Kui avaldises esinevad nii esimest kui ka teist järku tehted, siis kõigepealt tuleb teostada teist järku tehted, seejärel aga esimest järku tehted, sõltumata sellest, missuguses järjekorras nad on kirjutatud.

1) $80 \times 20 + 10 = 1600 + 10 = 1610$.

2) $90 + 60 : 4 = 90 + 15 = 105$.

Igasugust kõrvalekaldumist sellest järjekorrast tuleb tähistada sulgudega. Näiteks:

$$(15+10) \times 4 - (27-9) : 3 = 25 \times 4 - 18 : 3 = 100 - 6 = 94.$$

Kolmas peatükk.

ANTUD ARVUDE JA NENDEGA SOORITATUD TEHETE TULEMUSTE VAHELISED SEOSED.

§ 43. Liitmine.

Vaatleme järgmist fakti. Klassi nimekirjas on 28 õpilast. Tunnis oli 25 õpilast, puudus 3 õpilast. Seda võib kirjutada liitmise abil järgmiselt:

$25+3=28$, s. t. tunnis olevate õpilaste arvu ja puuduvate õpilaste arvu summa on 28. Nüüd mõtleme, kuidas võib klassi astunud õpetaja kiiresti arvestada, kui palju õpilasi on tunnis. Klassi õpilaste üldarv on tal teada klassipäevikust, puudujate arvu ütleb korrapidaja. Et teada saada, kui palju õpilasi on tunnis, peab õpetaja 28-st lahutama 3. Kui klassis olevate õpilaste arvu tähistame tähega x, mis on tundmatu, siis

$$x+3=28;$$

s. t. kui klassis olevate õpilaste arvule liita puudujate arv, siis saame klassi õpilaste üldarvu. Kuna me teame summat ja ühte liidetavat, siis võib leida tundmatu liidetava:

$$x=28-3 \text{ ehk } x=25.$$

Saame reegli: **et leida tundmatu liidetav, tuleb kahe liidetava summast lahutada tuntud liidetav.**

Toome näite:

$$x+10=30; \quad x=30-10; \quad x=20.$$

Kasutades tähelist märkimisviisi, võib kirjutada:

$$\text{kui } a+b=c,$$
$$\text{siis } a=c-b$$
$$\text{ja } b=c-a.$$

§ 44. Liitmise kontrollimine.

Eelmises paragrahvis sõnastatud reegel võimaldab kontrollida liitmise õigsust. Oletame, et me liitsime kaks arvu: $346+588=934$. Kuna üks kahest liidetavast on võrdne summa ja teise liidetava vahega, siis lahutades summast 934 mingi liidetava, näiteks esimese, me peame saama teise liidetava. Loomulikult esineb see ainult sel juhtumil, kui me ei teinud viga liitmisel ja uut viga lahutamisel.

Teostame lahutamise: $934-346=588$. Liitmine oli tehtud õigesti.

§ 45. Lahutamine.

Ülesanne. Ma ostsin 25-rublase albumi. Kuidas leida, kui palju raha oli mul enne albumi ostmist, kui pärast ostu oli mul 53 rubla?

Oletame, et mul oli x rubla. Ma kulutasin 25 rubla, kusjuures järele jäi 53 rubla. Kirjutame selle üles lahutamise abil:

$$x-25=53.$$

Kui palju raha oli mul algul? Et vastata sellele küsimusele, tuleb liita kulutatud ja järelejäänud raha, s. t.

$$x=25+53; \quad x=78.$$

Tähendab, algul oli mul 78 rubla.

Vaadeldud ülesandes oli vähendatav tundmatu, lahutatav ja vahe olid aga teada. Et leida vähendatavat, me liitsime lahutatavale vahe. Siit saame reegli: **et leida tundmatu vähendatav, tuleb lahutatavaga liita vahe.** Toome näite:

$$x-7=9; \quad x=7+9; \quad x=16.$$

Kirjutame selle reegli, kasutades tähelist märkimisviisi: kui

$$a-b=c,$$

siis lahutatava ja vahe järgi vähendatava leidmise reegli põhjal võib kirjutada:

$$a=b+c.$$

Lahendame veel ühe ülesande: «Õpilased töötasid kooli maatükil. Valvur andis enne töö algust igaühele ühe labida. Kuidas leida, kui palju anti välja labidaid, kui üldse oli neid 90, pärast väljaandmist jäi neid järele aga 50?» Kui väljaantud labidate arv tähistada x-ga, siis $90-x=50$.

Kuidas leida x? Kui me labidate üldarvust lahutame järelejäänud labidate arvu, siis saame vastuse esitatud küsimusele. Et leida x, tuleb 90-st lahutada 50. Siit tuleneb järgmine reegel: **et leida tundmatu lahutatav, tuleb vähendatavast lahutada vahe.** Seda võib kirjutada nii:

$$x=90-50; \quad x=40.$$

Toome näite:

$$9-x=5; \quad x=9-5; \quad x=4.$$

Kirjutame viimase reegli, kasutades tähelist märkimisviisi: kui $a-b=c$, siis vähendatava ja vahe järgi lahutatava leidmise reegli põhjal:

$$b=a-c.$$

§ 46. Korrutamine.

Vaatleme järgmist fakti: Pakkija pakkis kompvekivabrikus igasse karpi 32 kompvekki. Laohoidja, andes pakkijale kompvekke, ütles: «Ma annan teile kompvekke saja karbi jaoks», ja lisas: «Tähendab, $32\times 100=3\,200$». Ta leidis kompvekkide arvu, oletades, et karpe on 100. Kui karpe oleks olnud vähem, näiteks 50, siis ka kompvekkide arv oleks olnud väiksem; kui aga karpe oleks olnud rohkem, näiteks 120, siis ka kompvekkide arvu oleks tulnud suurendada.

Järelikult, iga kord kui tuleb leida kompvekkide arv, lahendatakse järgmine ülesanne:

$$32\cdot x=?$$

Teades suurust x, me võime leida vajalike kompvekkide arvu. Kuid laohoidja, mitte teades karpide arvu, võib arutleda veel ka nii: ma annan teile 4 000 kompvekki, pärast näeme, kui palju karpe saab nendega täita. Tähendab, sellel juhtumil saadakse:

$$32\cdot x=4\,000.$$

Siin on üks tegureist tundmatu. Et seda leida, tuleb korrutis (4 000) jagada antud teguriga (32):

$$x=4\,000:32; \quad x=125 \text{ (karpi)}.$$

Reegel: **et leida tundmatu tegur, tuleb kahe teguri korrutis jagada antud teguriga.**

Toome näite:

$$25\cdot x=850; \quad x=850:25; \quad x=34.$$

Kirjutame selle reegli, kasutades tähelist märkimisviisi:

$$\text{kui } a\cdot b=c,$$
$$\text{siis } a=c:b; \quad b=c:a.$$

§ 47. Korrutamise kontrollimine.

Eelmises paragrahvis käsitletu põhjal võib korrutamise kontrollimist teostada järgmisel viisil.

Oletame, et on teostatud korrutamine

$$125 \times 36 = 4\,500.$$

Kuna üks tegur on võrdne korrutise ja teise teguri jagatisega, siis korrutamise kontrollimiseks võib korrutise 4 500 jagada näiteks teise teguriga. Kui tulemuseks saadakse esimene tegur 125, siis on väga tõenäoline, et tehe on tehtud õigesti:

$$4\,500 : 36 = 125.$$

§ 48. Jagamine.

Vaatleme järgmist fakti. Aednik, kes rajab viljapuuaeda, teeb paberile viljapuude paigutuse esialgse visandi. Kokku on 24 rida viljapuid. Kui igasse ritta istutada 35 puud, siis oleks tarvis üldse 840 puud ($35 \times 24 = 840$). Kui istutada puud aga harvemini, siis vajatakse neid vähem. Näiteks, et igas 24-s reas oleks 30 puud, piisab 720-st puust. Võib võtta puid aga ka rohkem, näiteks 912, siis peavad need olema istutatud tihedamalt: igasse ritta 38 puud.

Tähendab, et iga kord, kui tuleb leida puude arv igas reas, lahendatakse ülesanne:

$$x : 24 = ?$$

x asemele võib kirjutada kas 840 või 720 või 912 või mõne teise arvu.

Kuid aednik võiks arutleda ka teisiti: plaanilt on näha, et kõige sobivam puude asetus saadakse siis, kui igas reas on 32 puud. Siis saame:

$$x : 24 = 32.$$

Siin on jagatav tundmatu. Et seda leida, tuleb jagaja korrutada jagatisega, s. t.

$$x = 32 \times 24; \quad x = 768 \text{ (puud)}.$$

Teeme järelduse. Täht x tähistab jagatavat. Et seda leida, me korrutasime jagaja jagatisega. Saame järgmise reegli: **et leida tundmatu jagatav, tuleb jagaja korrutada jagatisega.**

Toome näite:

$$x : 6 = 9; \quad x = 6 \times 9; \quad x = 54.$$

Lahendame veel ühe ülesande. «600 geograafilist kaarti jaotati võrdselt rajooni koolide vahel. Iga kool sai 25 kaarti. Mitmele koolile jagati geograafilisi kaarte?

Kui tundmatu koolide arvu tähistame tähega x, siis

$$600 : x = 25.$$

Selles võrduses on tundmatuks jagaja. Et seda leida, tuleb jagatav jagada jagatisega:

$$x = 600 : 25; \; x = 24.$$

Siit saame reegli: **et leida tundmatu jagaja, tuleb jagatav jagada jagatisega.**

Toome näite:

$$200 : x = 8; \; x = 200 : 8; \; x = 25.$$

Tähistanud jagatava, jagaja ja jagatise vastavalt tähtedega a, b ja c, võime kirjutada:

$$a : b = c;$$

siit $a = b \cdot c$ ja $b = a : c$.

Neljas peatükk.

TEHETE TULEMUSTE MUUTUMINE KOMPONENTIDE MUUTUMISEL.

§ 49. Summa muutumine.

Käesolevas peatükis me kõneleme sellest, kuidas muutuvad aritmeetiliste tehete tulemused, kui muutuvad arvud, milledega teostatakse need tehted.

1. Võtame kahe liidetava summa: $20 + 32 = 52$, ja vaatleme, kuidas muutub see summa, kui me hakkame muutma liidetavaid. Hakkame suurendama e s i m e s t l i i d e t a v a t, jättes teise muutmata. Kirjutame tulemused välja tabeli kujul:

Esimene liidetav	20	21	23	26	30	35	41
Teine liidetav	32	32	32	32	32	32	32
Summa	52	53	55	58	62	67	73

Esimeses tulbas on kirjutatud, et $20 + 32 = 52$. Teises tulbas me suurendasime esimest liidetavat ühelise võrra, summa suurenes seejuures samuti ühelise võrra. Vaadelge selle tabeli kõiki tulpe ja te veendute, et kui ühte liidetavat suurendatakse mõne ühelise võrra, teine liidetav aga jäetakse muutmata, siis summa suureneb nii mitme ühelise võrra, kui mitme ühelise võrra suurendati esimest liidetavat.

J ä r e l d u s. **Kui kahest liidetavast ühte suurendada mõne ühe-**

lise võrra, jättes teise liidetava muutmata, siis summa suureneb sama arvu üheliste võrra.

Üldkujul: kui

$$a+b=c,$$

siis

$$(a+m)+b=c+m.$$

2. Hakkame nüüd vähendama liidetavat. Selleks võtame eelmise tabeli ja vaatleme seda paremalt vasakule.

Paremalt äärmises tulbas on liidetavad 41 ja 32, millede summa on 73. Alates paremalt teisest tulbast, me vähendame esimest liidetavat algul 6 võrra, siis 5 võrra, seejärel 4 võrra jne. Seejuures väheneb ka summa vastavalt 6 võrra, 5 võrra, 4 võrra jne.

Järeldus. **Kui kahest liidetavast ühte vähendada mõne ühelise võrra, jättes teise liidetava muutmata, siis summa väheneb sama arvu üheliste võrra.**

Üldkujul: kui

$$a+b=c,$$

siis

$$(a-m)+b=c-m.$$

Siin esitatud summa kahte omadust võib kasutada liitmise kergendamiseks. Olgu vaja kiiresti liita 37 ja 58. Arutleme nii: suurendame esimest liidetavat 40-ni, s. t. liidame temale 3 ühelist, arve 40 ja 58 on kergem liita kui antud arve, sest et esimesel kohal on ümardatud arv kümnelisi (40). Kuid esimese omaduse põhjal on saadud summa (98) suurem otsitavast nii palju, kui palju liitsime esimese liidetavaga, s. t. 3 ühelise võrra. Tähendab, kui me lahutame sellest summast 3 juurdelisatud ühelist, siis saame liidetavate 37 ja 58 otsitava summa, s. t. 95. Seda võtet kasutasime juba paragrahvis 16.

§ 50. Vahe muutumine.

Võtame kahe arvu vahe: 93—35=58 ja jälgime, kuidas see muutub vähendatava ja lahutatava muutumisel.

1. Suurendame vähendatavat, jättes lahutatava muutmata. Kirjutame need muutumised üles tabelisse.

Vähendatav	93	94	96	99	103	108	114	125
Lahutatav	35	35	35	35	35	35	35	35
Vahe	58	59	61	64	68	73	79	86

Teises tulbas on vähendatavat suurendatud ühe võrra, vahe suurenes samuti ühe võrra. Kolmandas tulbas on vähendatavat suurendatud 2 võrra, niisama palju suurenes ka vahe. Ülejäänud tulpe vaadelda iseseisvalt.

Järeldus. **Kui vähendatavat suurendada mõne ühelise võrra,**

jättes lahutatava muutmata, siis vahe suureneb sama arvu üheliste võrra.

2. Hakkame nüüd vähendama vähendatavat ja esitame tulemused järgmise tabeli kujul:

Vähendatav	93	92	90	87	83	78	72	65
Lahutatav	35	35	35	35	35	35	35	35
Vahe	58	57	55	52	48	43	37	30

Kui me vaatleme seda tabelit järk-järgult, tulp tulba järele, siis märkame, et kui mitme ühelise võrra me vähendasime vähendatavat, nii mitme ühelise võrra vähenes iga kord ka vahe.

Järeldus. **Kui vähendatavat vähendada mõne ühelise võrra, jättes lahutatava muutmata, siis vahe väheneb sama arvu üheliste võrra.**

3. Vaatleme lahutatava muutumist. Kuidas muutub vahe lahutatava suurenemisel? Võtame kas või eelmise harjutuse lahutamise kohta ja koostame tabeli.

Vähendatav	93	93	93	93	93	93	93	93
Lahutatav	35	36	38	41	45	50	56	63
Vahe	58	57	55	52	48	43	37	30

Teises tulbas me suurendasime lahutatavat ühe võrra (oli 35, on 36). Vahe vähenes samuti ühe võrra. Samasugune olukord ilmneb ka kõigi teiste tulpade juures.

Järeldus. **Kui lahutatavat suurendada mõne ühelise võrra, jättes vähendatava muutmata, siis vahe väheneb sama arvu üheliste võrra.**

4. Vaatleme nüüd vahe muutumist lahutatava vähenemisel. Võtame aluseks võrduse 93—35=58 ja koostame tabeli.

Vähendatav	93	93	93	93	93	93	93	93	93
Lahutatav	35	34	32	29	25	20	14	7	0
Vahe	58	59	61	64	68	73	79	86	93

Esimese tulba arvude võrdlemine teise tulba arvudega näitab, et kui lahutatav vähenes ühe võrra, siis vahe suurenes ühe võrra. Esimese ja viienda tulba arvude võrdlemine näitab aga, et lahutatava vähenemisel 10 võrra suurenes vahe 10 võrra. Samasugune olukord ilmneb ka kõigi teiste tulpade võrdlemisel.

Järeldus. **Kui lahutatavat vähendada mõne ühelise võrra, jättes vähendatava muutmata, siis vahe suureneb sama arvu üheliste võrra.**

5. Vaatleme lõpuks juhtumit, kui vähendatav ja lahutatav muutuvad üheaegselt. Koostame kaks tabelit: ühe tabeli aluseks võtame vahe 10—7=3 ja teise aluseks vahe 100—98=2. Esimeses tabelis on kujutatud vähendatava ja lahutatava suurenemine, teises — nende vähenemine.

I	Vähendatav	10	11	13	16	20	25	31	38	46	56
	Lahutatav	7	8	10	13	17	22	28	35	43	53
	Vahe	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
II	Vähendatav	100	98	95	93	83	71	57	41	23	2
	Lahutatav	98	96	93	91	81	69	55	39	21	0
	Vahe	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Need tabelid näitavad, et vaatamata vähendatava ja lahutatava suurtele muutustele vahe üldse ei muutunud.

Järeldus. **Kui vähendatavat ja lahutatavat üheaegselt suurendada või vähendada ühe ning sama arvu üheliste võrra, siis vahe ei muutu.**

Me õppisime tundma viit omadust, mis kuuluvad vahe muutumise juurde. Esitame need omadused üldkujul. Kui me kirjutame lahutamise järgmise võrduse kujul: $a—b=c$, siis esitatud omadusi võib üles kirjutada nii:

1. $(a+m)—b=c+m$; 3. $a—(b+m)=c—m$;
2. $(a—m)—b=c—m$; 4. $a—(b—m)=c+m$;
5. $(a+m)—(b+m)=c$ ja $(a—m)—(b—m)=c$.

Kasutame näiteks viimast võrdust arvutuste kiirendamiseks. Olgu tarvis teostada lahutamine:

$$234—176$$

Liidame vähendatavaga ja lahutatavaga kummagagi 24, selleks et lahutatav väljenduks täissajalistes; siis saame:

$$258—200=58.$$

Seda tehet võib teostada peast. Järelikult,

$$234—176=58.$$

§ 51. Korrutise muutumine.

1. Võtame kahe arvu korrutise: $4\times36=144$. Suurendame mingi arv korda esimest tegurit ning esitame tulemused tabeli kujul:

Esimene tegur	4	8	12	16	20	24	28	32
Teine tegur	36	36	36	36	36	36	36	36
Korrutis	144	288	432	576	720	864	1008	1152

Kui me võrdleme esimest tulpa teisega, siis näeme, et esimene tegur teises tulbas on 2 korda suurem kui esimeses, vastavalt sellele on ka korrutis teises tulbas (288) 2 korda suurem kui esimeses tulbas (144).

Jälgige, kuidas muutub korrutis järelejäänud tulpades ühe teguri suurenemisel.

J ä r e l d u s. **Kui ühte tegurit suurendada mingi arv korda, jättes teise muutmata, siis ka korrutis suureneb sama arv korda.**

Üldkujul:

$$\text{kui } ab=c, \text{ siis } (am)b=cm.$$

2. Kuidas muutub korrutis ühe teguri vähenemisel mingi arv korda, kui teine tegur ei muutu? Kasutame eelmist harjutust, kuid vaatleme tabelit paremalt vasakule.

Tabeli vaatlemisest selgub, et kui esimene tegur vähenes kaks korda ($32:2=16$), siis ka korrutis vähenes kaks korda ($1\,152:2=$ $=576$), kui aga esimene tegur vähenes 8 korda ($32:8=4$), siis ka korrutis vähenes 8 korda ($1\,152:8=144$).

J ä r e l d u s. **Kui ühte tegurit vähendada mingi arv korda, jättes teise muutmata, siis ka korrutis väheneb sama arv korda.**

Üldkujul:

$$\text{kui } ab=c, \quad \text{siis } (a:m)b=c:m.$$

Kuidas võib esimest reeglit rakendada praktikas?

N ä i t e i d. 82×5. Suurendame tegurit 5 kaks korda; saame $82\times10=820$. Korrutamine 10-ga seisneb aga ühe nulli juurdekirjutamises, kuid saadud korrutis on 2 korda suurem kui vaja; seetõttu tuleb see jagada 2-ga ($820:2=410$). Kirjutame järk-järgult kõik meie poolt sooritatud tehted:

$$82\times5=?; \quad 82\times10=820; \quad 820:2=410; \quad 82\times5=410.$$

Seega võib arvu korrutada 5-ga järgmisel viisil: algul korrutame selle arvu 10-ga, siis aga jagame saadud tulemuse 2-ga.

§ 52. Jagatise muutumine.

1. Võtame arvude 12 ja 3 jagatise ning suurendame jagatavat järjest kaks, kolm, neli jne. korda. Muutumise tulemused kirjutame välja järgmise tabeli kujul:

Jagatav	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
Jagaja	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Jagatis	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Teise tulba võrdlemine esimesega näitab, et jagatav on teises tulbas kaks korda suurem kui esimeses ($24=2\times12$), kuid samal ajal on ka jagatis teises tulbas kaks korda suurem kui esimeses. Võrrelge iseseisvalt ülejäänud tulpe.

Järeldus. **Kui jagatavat suurendada mingi arv korda, jättes jagaja muutmata, siis jagatis suureneb sama arv korda.**

2. Vaatleme nüüd jagatise muutumist sõltuvalt jagaja muutumisest. Koostame vastava tabeli, lähtudes järgmisest jagamistehtest: 240 : 2 = 120. Suurendame jagajat mingi arv korda.

Jagatav	240	240	240	240	240	240	240	240	240
Jagaja	2	4	6	8	10	12	16	20	24
Jagatis	120	60	40	30	24	20	15	12	10

Teises tulbas jagaja suurenes kaks korda, kuid koos sellega vähenes jagatis samuti kaks korda (oli 120, on 60).

Samale järeldusele tuleme, kui võrdleme jagajaid teistes tulpades nendele vastavate jagatistega.

Järeldus. **Kui jagajat suurendada mingi arv korda, jättes jagatava muutmata, siis jagatis väheneb sama arv korda.**

4. Hakkame nüüd jagajat vähendama. Kuidas muutub jagatis jagaja vähenemisel mingi arv korda? Et vastata sellele küsimusele, vaatleme tabelit, mis algab arvude 400 ja 100 jagamisega:

Jagatav	400	400	400	400	400	400	400	400	400
Jagaja	100	50	25	20	10	5	4	2	1
Jagatis	4	8	16	20	40	80	100	200	400

Tabelist on näha, et kui jagaja vähenes 2 korda (teine tulp), siis jagatis suurenes 2 korda. Kui jagaja vähenes (neljas tulp) esimese tulbaga võrreldes 4 korda, siis jagatis suurenes 4 korda.

Järeldus. **Kui jagajat vähendada mingi arv korda, jättes jagatava muutmata, siis jagatis suureneb sama arv korda.**

5. Vaatleme juhtumit, kui jagatav ja jagaja muutuvad üheaegselt. Seda huvitavat ja tähtsat juhtumit vaatleme kahel tabelil korraga. I tabelis on esitatud jagatava ja jagaja üheaegne suurenemine, II tabelis — nende üheaegne vähenemine.

I	Jagatav	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	Jagaja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Jagatis	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
II	Jagatav	1800	900	450	300	150	75	60	45	30	15
	Jagaja	600	300	150	100	50	25	20	15	10	5
	Jagatis	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Tabelis I suurendatakse nii jagatavat kui ka jagajat 2 korda, 3 korda ja, lõpuks, 10 korda. Te näete, et niisugune muutumine ei mõjuta jagatist. Jagatis on kõigil neil juhtumeil võrdne 3-ga.

Tabelis II on esitatud jagatava ja jagaja üheaegne vähenemine üks ning sama arv korda.

Järeldus. **Kui jagatavat ja jagajat üheaegselt suurendada või vähendada üks ning sama arv korda, siis jagatis ei muutu.**

Üldkujul võib selles paragrahvis käsitletud viit jagatise omadust esitada järgmiselt. Kui on antud jagamistehe kujul $a : b = c$, siis nimetatud omadused võib kirjutada järgmiselt:

1. $(a \cdot m) : b = c \cdot m$; 3. $a : (b \cdot m) = c : m$;
2. $(a : m) : b = c : m$; 4. $a : (b : m) = c \cdot m$;
5. $(a \cdot m) : (b \cdot m) = c$ ja $(a : m) : (b : m) = c$.

Viimast jagatise omadust kasutatakse sageli praktilistes arvutustes, kui jagamist teostatakse «nullideta». Kui näiteks 60 tuleb jagada 20-ga, siis võib kõigepealt jätta nii jagatavas kui ka jagajas ära ühe nulli, mis on samaväärne jagatava ja jagaja vähendamisega 10 korda, ning seejärel 6 jagada 2-ga.

Viies peatükk.

SUURUSED JA NENDE MÕÕTMINE.

§ 53. Sissejuhatus.

Vaatleme ülesannet: «Rong väljus jaamast *A* kell 12 päeval ja saabus jaama *B* kell 17. Leida jaamade *A* ning *B* vaheline kaugus, kui rong läbis tunnis keskmiselt 40 km.»

Rong oli teel 5 tundi.

Kui rong läbis 1 tunniga 40 km, siis 5 tunniga läbib ta 5 korda rohkem; tähendab:

$$40 \times 5 = 200 \text{ (km)}.$$

Mõtleme järele, missuguste arvudega me kohtusime selles ülesandes.

Esiteks, ülesandes oli antud aeg, mille jooksul rong läbis *A* ja *B* vahemaa (5 tundi). Teiseks, oli antud rongi liikumise kiirus. Kolmandaks, me arvutasime ülesandes antud arvude järgi jaamade *A* ja *B* vahemaa. Sõna «vahemaa» asemel võib ütelda, et me arvutasime jaamade *A* ja *B* vahelise tee pikkuse.

Vaatleme veel ühte ülesannet ja leiame, missugused arvud esinevad selles ülesandes.

«Osteti 120 kg küpsiseid 10 rubla kilogramm. Kui palju tuleb maksta kogu ostu eest?»

1 kg küpsiste hind on 10 rubla, üldse osteti küpsiseid aga 120 kg. Tähendab, ostu koguhinna võib leida 10 ja 120 korrutamise teel, arutledes nii: kui 1 kg küpsiseid maksab 10 rubla, siis 120 kg küpsiseid maksab 120 korda rohkem. Tähendab,

$$10 \times 120 = 1\,200 \text{ (rubla)}.$$

Missuguste arvudega me siin kohtusime ja kas selles ülesandes on midagi uut võrreldes esimese ülesandega? — Ja. Kõigepealt võime ütelda, et sellel ülesandel on hoopis teine sisu. Esimeses ülesandes oli jutt rongi ühtlasest liikumisest kahe jaama vahel, teises ülesandes aga küpsiste ostust. Teises ülesandes on antud ostu *kaal* kilogrammides (120 kg) ja 1 kg küpsiste *hind* (10 rubla), arvutada tuleb aga *ostu koguhind*. Teeme nüüd järeldused nendest kahest vaadeldud ülesandest.

Nendes ülesannetes antud arvud tähistasid:

läbitud tee *pikkust*,
kogu tee läbimiseks kulunud *aega*,
ühtlase liikumise *kiirust*,
ostetud kauba *kaalu*,
ostu *koguhinda*,
selle ostu ühe ühiku *hinda*.

Pikkus, aeg, kiirus, kaal, koguhind, hind — kõik need on suurused. Suuruste all mõeldakse kõike seda, mida võib mõõta ja väljendada arvudega. Suurusi on loomulikult palju rohkem, kui meie eelpool nimetasime. Me nimetasime siin ainult neid, millised esinesid meie kahes ülesandes.

Selle raamatu alguses me vaatlesime kahte kõige tähtsamat suurust: pikkust ja kaalu, ning kirjeldasime nende suuruste mõõduühikuid. Nüüd aga vaatleme veel järgmisi suurusi: pindala, ruumala, aega, temperatuuri ja koguhinda.

§ 54. Pindala mõõtmine.

Praktilises mõttes on kõige tähtsamaks suuruseks kujundi *pindala*. Me räägime väga sageli toa, hoovi, aia, maatüki, järve jne. pindala mõõtmisest.

Selles peatükis kõneleme aga ainult niisuguste kujundite pindalast, milliseid nimetatakse **ristkülikuteks.** Ristkülikukujuliste kujunditega kohtume sageli. Piisab, kui ütelda, et paberi poognal, raamatu leheküljel, lael, seinal, aknal, uksel ja paljudel teistel kujunditel on ristküliku kuju.

Ristkülikut, mille pikkus ja laius on võrdsed, nimetatakse ruuduks.

Joon. 3.

Joon. 4.

Kuidas mõõdetakse ristküliku pindala? Mis tuleb teha selleks, et mõõta joonisel 3 kujutatud ristküliku pindala?

Kõigepealt tuleb kindlaks määrata pindala mõõtmise ühik — mõõduühik. Pindala mõõduühikuks võetakse ruut, mille külg on võrdne mingi pikkusühikuga, s. t. sentimeetriga, detsimeetriga, meetriga jne. Kui niisuguse ruudu külg on sentimeeter, siis nimetatakse tema pindala **ruutsentimeetriks**; kui tema külg on 1 meeter, siis nimetatakse tema pindala ruutmeetriks jne.

Kui meil on olemas mõõduühik, siis võime arvutada ristküliku pindala.

Et arvutada ristküliku pindala, tuleb ühe ning sama mõõduühikuga mõõta tema pikkus ja laius ning saadud arvud korrutada. Korrutis näitab, kui palju ruutühikuid sisaldub ristküliku pindalas.

Näiteks kui ristküliku pikkus on 5 cm ja laius 3 cm, siis ristküliku pindala on:

$$5 \times 3 = 15\ (cm^2).$$

Kuidas on omavahel seotud pindalade mõõduühikud?

Meetersüsteemis on iga järgmine kõrgem ruutühik 100 korda suurem temale eelnevast madalamast ühikust. Selle põhjal võime koostada järgmise ruutmõõtude tabeli:

1 $km^2 = 100\ hm^2$;	1 $m^2 = 100\ dm^2$;
1 $hm^2 = 100\ Dm^2$;	1 $dm^2 = 100\ cm^2$;
1 $Dm^2 = 100\ m^2$;	1 $cm^2 = 100\ mm^2$.

Tuletame meelde, et ruutdekameetrit, s. t. ruutu, mille külje pikkus on 10 m, nimetatakse **aariks** (a). Tähendab, aaris on 100 m^2. Ruuthektomeetrit, mis kujutab endast 100 m küljepikkusega ruudu pindala, nimetatakse ka veel **hektariks** (ha). Seega hektar võrdub 100 aariga ehk 10 000 ruutmeetriga.

§ 55. Ruumala mõõtmine.

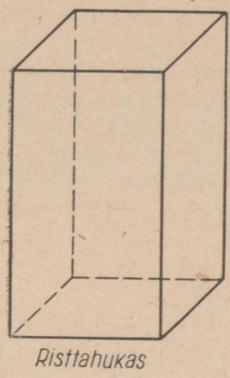
Mitte ainult teaduses, vaid ka igapäevases elus tuleb tihti mõõta mitmesuguste esemete ja ehituste ruumalasid, näiteks toa ruumala, lao ruumala, augu ruumala jne.

Selles raamatus vaatleme esemeid, milledel on risttahuka kuju (joon. 5).

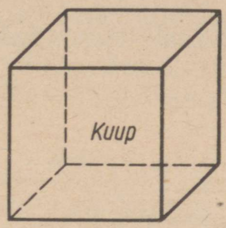
Risttahuka mudeliks võib näiteks olla tikutoos.

Risttahukat, mille pikkus, laius ja kõrgus on võrdsed, nimetatakse kuubiks.

Kuidas mõõdetakse risttahuka ruumala? Selleks tuleb kõigepealt kindlaks määrata ruumalaühik. Ruumalaühikuks võetakse kuubi (joon. 6) ruumala, mille külg võrdub mingi pikkusühikuga.



Joon. 5.



Joon. 6.

Kui kuubi serva pikkus on 1 sentimeeter, siis niisuguse kuubi ruumala on 1 **kuupsentimeeter;** kui kuubi serv on 1 meeter, siis selle kuubi ruumala on 1 kuupmeeter; kui kuubi serv on 1 detsimeeter, siis kuubi ruumala on 1 kuupdetsimeeter jne.

Kui meil on olemas ruumala mõõduühik, siis võime arvutada risttahuka ruumala.

Et arvutada risttahuka ruumala, tuleb mõõta ühe ning sama mõõduühikuga tema pikkus, laius ja kõrgus, ning saadud arvud korrutada.

Korrutis näitab, kui palju kuupühikuid sisaldub risttahuka ruumalas.

Näiteks: kui risttahuka pikkus on 5 cm, laius 4 cm ja kõrgus 6 cm, siis tema ruumala on:

$$5 \times 4 \times 6 = 120 \ (\text{cm}^3).$$

Kuidas on omavahel seotud erinevad ruumala mõõduühikud?

Meetersüsteemis on iga järgmine kõrgem kuupühik 1 000 korda suurem temale eelnevast madalamast ühikust. Selle põhjal võib koostada järgmise tabeli.

1 $\text{km}^3 = 1\,000\ \text{hm}^3$;	1 $\text{m}^3 = 1\,000\ \text{dm}^3$;
1 $\text{hm}^3 = 1\,000\ \text{Dm}^3$;	1 $\text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$;
1 $\text{Dm}^3 = 1\,000\ \text{m}^3$;	1 $\text{cm}^3 = 1\,000\ \text{mm}^3$.

Paragrahvis 8 me kõnelesime raskusmõõtudest, kuid ei selgitanud, kuidas need mõõdud olid saadud. Teeme seda nüüd.

Ühe raskusmõõdu põhiühiku — **kilogrammi** määramisel taheti teha nii, et 1 kg oleks võrdne ühe kuupdetsimeetri puhta vee kaaluga temperatuuril 4° C. Siis 1 g oleks võrdne ühe kuupsentimeetri vee kaaluga.

Mõõtmised, mis tehti XVIII sajandi lõpul, ei olnud aga küllalt täpsed; seetõttu ei nimetata kilogrammiks ja grammiks vee vastavate ruumalade kaalu, vaid neid vihtisid, mis tol ajal valmistati. Nendest vihtidest on tehtud arvukalt koopiaid. Viga, mis tol korral tehti, on väga väike; seetõttu võib igapäevases elus lugeda, et 1 dm³ puhast vett kaalub 1 kg, 1 cm³ samasugust vett kaalub aga 1 g.

Kuupdetsimeetrit on hakatud nimetama **liitriks.** Liitrit kasutatakse harilikult vedelikkude, nagu piima, petrooleumi jt. ruumalade mõõtmiseks.

§ 56. Aja mõõtmine.

Aeg on suurus, millega me pidevalt kohtume oma igapäevases elus ja peaaegu kõigis teaduslikes mõõtmistes. Juba kauges minevikus oli inimestel ettekujutus ajast ning nad püüdsid seda mõõta mitmesuguste meetoditega.

Missuguste ühikutega mõõdetakse aega? Aja mõõduühik on võetud loodusest ja seda nimetatakse **aastaks.** Aasta kujutab endast ligikaudselt seda ajavahemikku, mille jooksul Maa sooritab täisringi ümber Päikese.

Teist aja mõõduühikut nimetatakse **ööpäevaks.** Ööpäev kujutab endast ajavahemikku, mille jooksul Maa teeb ühe täispöörde ümber oma telje. Nende kahe mõõduühiku vahel on järgmine seos: lihtaastas on 365 ööpäeva, liigaastas aga 366 ööpäeva. Ööpäev jaguneb 24 tunniks, tund 60 minutiks ja minut omakorda 60 sekundiks.

§ 57. Temperatuuri mõõtmine.

Temperatuur on üks tähtsamatest suurustest. Me räägime sageli õhu, vee ja samuti ka inimese keha temperatuurist.

Temperatuuri mõõtmiseks kasutatakse termomeetreid. Kõige rohkem leiavad kasutamist igapäevases elus elavhõbetermomeetrid. Nende ehitus põhineb elavhõbeda soojuspaisumisel.

Elavhõbetermomeeter koosneb peenest suletud klaastorust keraksega selle alumises otsas. Kerake ja osa torust on täidetud elavhõbedaga. Klaastoru kinnitatakse puust või mõnest muust materjalist alusele, millele märgitakse võrdsed jaotused. Nende jaotuste seas on kaks tähtsat punkti: ühte punkti tähistatakse nulliga (0), mis vastab puhta jää sulamistemperatuurile; teist punkti aga arvuga 100, mis vastab puhta vee keemistemperatuurile. Nende punktide vahemaa on jaotatud sajaks võrdseks osaks. Iga niisugust osa nimetatakse **kraadiks.**

Sellist tüüpi termomeetreid nimetatakse Celsiuse termomeetriteks Rootsi õpetlane A n d r e s C e l s i u s e (1701—1744) nime järgi. Neid termomeetreid kasutatakse nii teaduslike kui ka praktiliste mõõtmiste puhul.

§ 58. Rahaühikud.

Esemete väärtuse me väljendame harilikult rahaühikutes. Põhiliseks rahaühikuks on meil rubla. Rublas on 100 kopikat.

Rahad võivad olla nii metallist kui ka paberist. Väikesi arvestusi teostatakse uushõbedast või pronksist rahade abil.

Uushõbedast rahad on järgmiste väärtustega: 20 kopikat; 15 kopikat; 10 kopikat.

Pronksist rahad on järgmiste väärtustega: 5 kopikat; 3 kopikat; 2 kopikat; 1 kopikas.

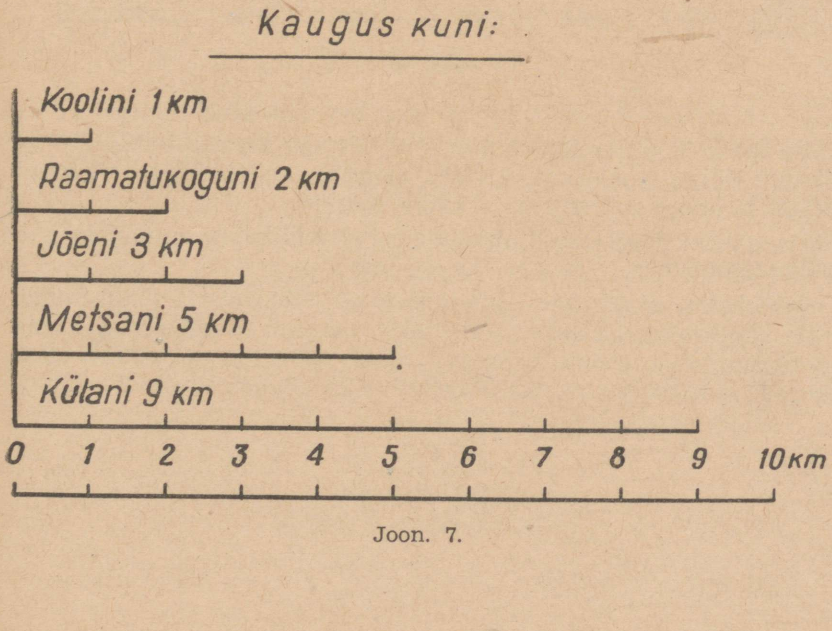
Paberrahad, mis kannavad nimetust «Riigipanga piletid», on järgmiste väärtustega: 100 rubla; 50 rubla; 25 rubla; 10 rubla.

Paberrahad, mis kannavad nimetust «Riigikassa piletid», on järgmiste väärtustega: 5 rubla; 3 rubla; 1 rubla.

§ 59. Suuruste näitlik kujutamine.

Mitmesuguste praktiliste ülesannete lahendamisel tuleb sageli võrrelda vaadeldavaid esemeid nende suuruste järgi. Sellel eesmärgil me mõõdame iga eseme, mõõtmistulemused väljendame arvudega ja seejärel võrdleme saadud arve. Väga näitliku kujutluse võrreldavate esemete suurusest annab aga joonis.

Vaatleme näidet. Õpilane mõõtis vahemaad oma kodust mitmesuguste kohtadeni: koolini oli 1 km, raamatukoguni 2 km, jõeni 3 km, metsani 5 km, naaberkülani 9 km. Õpilane kirjutas need vahemaad märkmikku, seejärel kujutas need aga vähendatud kujul joonisel. Joonisel kujutas ta 1 km pikkuse vahemaa 1 cm pikkuse lõiguna. Õpilane sai järgmise joonise (vt. joon. 7).



Joon. 7.

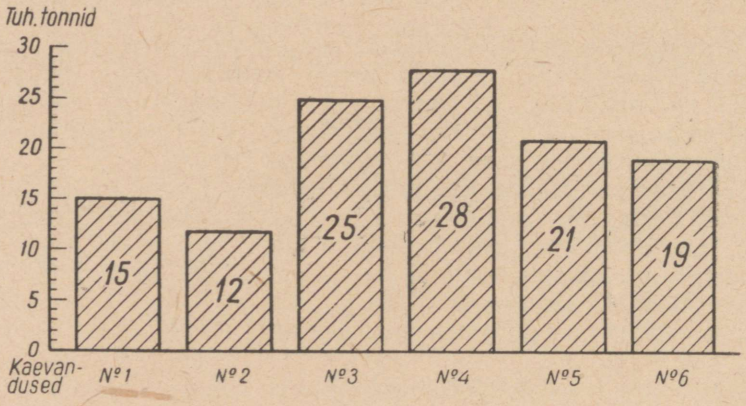
Lugeda jooniselt need vahemaad ja teha samasugune joonis oma vihikusse. Leida vahemaad oma kodust koolini ja nende kohtadeni, kuhu teil tuleb sageli minna või sõita. Kujutada need vahemaad joonisel.

Joonist, mida me siin kasutasime, nimetatakse **diagrammiks.**

Siin kujutatud diagrammi nimetatakse **lineaarseks,** sest selle ehitamiseks kasutasime sirglõike. Diagrammidele võib anda ka teise kuju.

Vaatleme diagrammi, mis kujutab kivisöe tootmist kuues kaevanduses (joon. 8). Olgu see toodang väljendatud järgmiste arvudega:

kaevandus nr. 1—15 000 t		kaevandus nr. 4—28 000 t
„ nr. 2—12 000 t		„ nr. 5—21 000 t
„ nr. 3—25 000 t		„ nr. 6—19 000 t



Joon. 8.

Siin on igas kaevanduses toodetud kivisöe hulk kujutatud ristkülikuna. Kõige väiksemale kivisöe hulgale vastab kõige väiksem ristkülik ja kõige suuremale — kõige suurem.

Niisuguseid diagramme nimetatakse **ristkülikdiagrammideks** ehk **tulpdiagrammideks.**

Ajalehtedes, ajakirjades ja raamatutes võib kohata diagramme, mis on väga erinevad oma välise kuju poolest. Mõnikord tehakse diagrammid selle eseme kujulised, mida vaadeldakse antud ülesandes.

GEOMEETRILISE SISUGA ÜLESANNETE JA AJA ARVUTAMISE ÜLESANNETE LAHENDAMINE.

§ 60. Ristküliku ümbermõõt ja pindala.

Vaatleme mõningaid ülesandeid, milledes kohtume eespool kirjeldatud suurustega.

1. Ristkülikukujulise põllu pikkus on 150 m ja laius 80 m. Leida põllupeenra pikkus.

Põllupeenar koosneb kahest 150 m pikkusest küljest ja kahest 80 m pikkusest küljest. Ülesandes tuleb leida kõigi nende külgede summa. See summa võrdub:

$$150+150+80+80=460 \text{ (m)}.$$

Ristküliku kõigi külgede summat nimetatakse ristküliku **ümbermõõduks** e. **perimeetriks.**

2. Ristkülikukujulise arbuusivälja pikkus on 3 km 500 m ja laius 2 km 500 m. Valvur kõnnib mööda arbuusivälja piirjoont, keskmise kiirusega 4 km tunnis. Mitme tunniga võib valvur käia ümber selle põllu?

Leiame kõigepealt selle ristküliku ümbermõõdu:

3 km 500 m + 3 km 500 m + 2 km 500 + 2 km 500 m = 12 km.

Leiame aja:

$$12 \text{ km} : 4 \text{ km} = 3 \text{ (tundi)}.$$

3. Ristkülikukujulise saali pikkus on 15 m ja laius 8 m. Leida saali põranda pindala.

Rakendades paragrahvis 54 sõnastatud reeglit, saame:

$$15 \times 8 = 120 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Tähistades ristküliku pikkuse tähega a, laiuse tähega b ja pindala tähega S, saame valemi ristküliku pindala arvutamiseks:

$$S = a \cdot b.$$

§ 61. Risttahuka ruumala.

1. Kasti pikkus on 86 cm, laius 60 cm ja kõrgus 50 cm. Leida kasti ruumala.

Kastil on risttahuka kuju eespool antud mõõtudega. Et leida kasti ruumala, rakendame paragrahvis 55 sõnastatud reeglit:

$$86 \times 60 \times 50 = ?$$
$$86 \times 60 = 5\,160;$$
$$5\,160 \times 50 = 258\,000 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Kirjutame risttahuka ruumala (V) arvutamise valemi. Kui tähistame risttahuka mõõdud, mis on väljendatud ühesugustes mõõduühikutes, järgmiselt: pikkuse tähega a, laiuse tähega b ja kõrguse tähega c, siis ruumala valemil on kuju:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

2. Klassi pikkus on 10 m, laius 6 m ja kõrgus 4 m. Kui palju õpilasi on selles klassis, kui iga õpilase kohta tuleb 8 m³ õhku?

Leiame kõigepealt klassi ruumala:

$$10 \times 6 \times 4 = 240 \ (\text{m}^3).$$

Leiame nüüd õpilaste arvu:

$$240 : 8 = 30 \ (\text{õpilast}).$$

Tähendab, selles klassis on 30 õpilast.

3. Leida malmplaadi kaal, kui selle plaadi pikkus on 180 cm, laius 150 cm ja kõrgus 10 cm, ning kui 1 cm³ malmi kaalub 7 g.

Leiame kõigepealt malmplaadi ruumala kuupsentimeetrites:

$$180 \times 150 \times 10 = 270\,000 \ (\text{cm}^3).$$

Arvutame nüüd selle plaadi kaalu grammides:

$$7 \times 270\,000 = 1\,890\,000 \ (\text{g}).$$

Kilogrammides on see 1 890 kg.

§ 62. Aja arvutamine.

Aja arvutamisel vaatleme kolme liiki ülesandeid. Neid võib iseloomustada järgmiselt:

1. Leida sündmuse kestus, kui on antud tema algus ja lõpp.
2. Leida sündmuse lõpp, kui on antud tema algus ja kestus.
3. Leida sündmuse algus, kui on antud tema kestus ja lõpp.

1. Leida sündmuse kestus.

Ülesanne. Raudtee ehitamine algas 15. aprillil 1947. a. ja lõppes 20. juunil 1950. a. Kui kaua ehitati raudteed?

Lahendus. Leiame algul, mitu aastat, kuud ja päeva on möödunud ajaarvamise algusest kuni 15. aprillini 1947. a.:

1946 aastat 3 kuud 14 päeva.

Nüüd leiame, mitu aastat, kuud ja päeva on möödunud ajaarvamise algusest kuni 20. juunini 1950. a.:

1949 aastat 5 kuud 19 päeva.

Arvutame lõpuks, mitu aastat, kuud ja päeva ehitati raudteed:

$$\begin{array}{r} -\ 1949 \text{ aastat } 5 \text{ kuud } 19 \text{ päeva} \\ 1946 \text{ aastat } 3 \text{ kuud } 14 \text{ päeva} \\ \hline 3 \text{ aastat } 2 \text{ kuud } 5 \text{ päeva.} \end{array}$$

Raudteed ehitati 3 aastat 2 kuud ja 5 päeva.

2. Leida sündmuse lõpp.

Ülesanne. Raudtee ehitamine algas 15. aprillil 1947. aastal ja kestis 3 aastat 2 kuud ja 5 päeva. Millal lõpetati raudtee ehitamine?

Lahendus. Leiame algul, mitu aastat, kuud ja päeva on möödunud ajaarvamise algusest kuni 15. aprillini 1947. a.:

1946 aastat 3 kuud 14 päeva.

Nüüd leiame, mitu aastat, kuud ja päeva on möödunud ajaarvamise algusest sündmuse lõpuni, s. t. raudtee ehitamise lõpetamiseni:

$$\begin{array}{r} +\ 1946 \text{ aastat } 3 \text{ kuud } 14 \text{ päeva} \\ 3 \text{ aastat } 2 \text{ kuud } 5 \text{ päeva} \\ \hline 1949 \text{ aastat } 5 \text{ kuud } 19 \text{ päeva.} \end{array}$$

Lõpuks vastame küsimusele, millal lõpetati raudtee ehitamine, või, nagu öeldakse, läheme üle aja aritmeetiliselt avaldiselt kalendaarsele. Saame: raudtee ehitamine lõpetati 20. juunil 1950. a.

3. Leida sündmuse algus.

Ülesanne. Raudtee ehitamine kestis 3 aastat 2 kuud ja 5 päeva ning lõpetati 20. juunil 1950. a. Millal alustati raudtee ehitamist?

Lahendus. Leiame algul, mitu aastat, kuud ja päeva on möödunud ajaarvamise algusest kuni 20. juunini 1950. a., s. t. raudtee ehitamise lõpetamiseni:

1949 aastat 5 kuud 19 päeva.

Nüüd arvutame, mitu aastat, kuud ja päeva on möödunud ajaarvamise algusest raudtee ehitamise alguseni:

$$\begin{array}{r} -\ 1949 \text{ aastat } 5 \text{ kuud } 19 \text{ päeva} \\ 3 \text{ aastat } 2 \text{ kuud } 5 \text{ päeva} \\ \hline 1946 \text{ aastat } 3 \text{ kuud } 14 \text{ päeva} \end{array}$$

Lõpuks vastame küsimusele, millal alustati raudtee ehitamist. Raudtee ehitamist alustati 15. aprillil 1947. a.

Seitsmes peatükk.

ARVUDE JAGUVUS.

§ 63. Peatüki sisu.

Me õppisime tundma täisarvude liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist. Liitmine ja korrutamine on alati teostatavad, sõltumata sellest, missuguste arvudega on meil tegemist.

Teisiti on aga lugu pöördtehetega, s. t. lahutamise ja jagamisega. Lahutamise puhul me ütlesime, et see on võimalik ainult nendel juhtumitel, kui lahutatav ei ole suurem vähendatavast (§ 18). Märksa suuremate raskustega on aga seotud jagamine. Kõigepealt tekib raskus siis, kui jagatav on jagajast väiksem (14 : 20), kuid see on spetsiaalne küsimus, mida me käsitleme oma raamatu järgmises osas. Pöördume teise juhtumi juurde. Te teate, et jagamist teostatakse mõnikord jäägita, mõnikord jäägiga. Kerkib üles küsimus: missugused peavad olema antud arvud, et üks neist jaguks teisega, s. t. jagamine oleks teostatav ilma jäägita? Kas võib antud arvude mingisuguste tunnuste järgi määrata kindlaks, et jagamine antud juhtumil on teostatav?

§ 64. Kordne ja jagaja.

D e f i n i t s i o o n. **Kui üks arv jagub teisega, siis esimest nimetatakse teise kordseks, teist aga esimese jagajaks.**

Tähendab, arv 6 on arvu 3 kordne, arv 3 ise on aga arvu 6 jagajaks. Arv 15 on arvu 5 kordne, 5 ise on aga arvu 15 jagajaks.

Arv võib olla paljude arvude kordne. Näiteks arv 36 on arvude 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18 ja 36 kordne.

Kahega jaguvaid arve nimetatakse p a a r i s a r v u d e k s. Arv null (0) kuulub samuti paarisarvude hulka. Kõik ülejäänud arvud on p a a r i t u d a r v u d. Järelikult:

0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; ... — paarisarvud,
1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; ... — paaritud arvud.

§ 65. Summa ja vahe jaguvus.

1. Vaatleme järgmist tähtsat **summa omadust. Kui iga liidetav jagub mingi arvuga, siis ka summa jagub selle arvuga.**

N ä i d e:

14 jagub 7-ga,
21 jagub 7-ga,

nende summa 14+21, s. t. 35, jagub samuti 7-ga.

Veel näide:

39 jagub 13-ga,
65 jagub 13-ga,

nende summa $39+65=104$ jagub samuti 13-ga.

Me võime võtta enam kui kahe liidetava summa, näiteks kolme liidetava summa, kuid ka siin jääb nimetatud omadus kehtima:

25 jagub 5-ga,
35 jagub 5-ga,
50 jagub 5-ga.

Summa $25+35+50$ jagub samuti 5-ga.

Seda summa omadust võime kasutada siis, kui tahame teada saada, kas mingi arv jagub teisega või mitte. Näiteks, ma tahan teada saada jagamist teostamata, kas 756 jagub 7-ga. Võib toimida nii: 756 kujutada kahe arvu summana $700+56$. Nüüd tuleb vaadata, kas mõlemad liidetavad jaguvad 7-ga. Siit on juba kerge näha, et 700 jagub 7-ga ja et ka 56 jagub 7-ga, tähendab ka summa, s. t. 756 jagub 7-ga.

Kerkib üles küsimus: kui liidetavad ei jagu mingi arvuga, kas siis summa jagub selle arvuga või mitte?

Et vastata sellele küsimusele, tuleb vaadelda kõikvõimalikke juhtumeid:

a) Liidetavad 21 ja 22 ei jagu 5-ga; nende summa 43 samuti ei jagu 5-ga.

b) Liidetavad 22 ja 23 ei jagu 5-ga; nende summa 45 jagub aga 5-ga.

Tähendab, **kui üksikud liidetavad ei jagu antud arvuga, siis nende summa võib mõningail juhtumeil jaguda selle arvuga.**

Nüüd mõtleme, kas kahe liidetava summa jagub mingi arvuga, kui üks liidetavaist ei jagu selle arvuga, teine aga jagub.

Olgu üks liidetavaist 33, teine 17. Nende summa on 50. Esimene liidetav (33) jagub 11-ga, teine (17) aga ei jagu, ka summa (50) ei jagu 11-ga.

Võtame kolme liidetava summa: $15+20+23=58$. Kaks esimest liidetavat (15 ja 20) jaguvad 5-ga, kuid kolmas liidetav 23 ei jagu 5-ga, summa 58 samuti ei jagu 5-ga.

Nende näidete põhjal võime teha järelduse:

Kui kõik liidetavad peale ühe jaguvad mingi arvuga, see üks liidetav aga ei jagu selle arvuga, siis ka kõigi nende liidetavate summa ei jagu selle arvuga.

Kasutame seda omadust küsimuse lahendamisel, kas arv 150 jagub 14-ga või mitte. Kujutame 150 järgmiselt:

$$150=140+10.$$

5*

Selle summa esimene liidetav (140) jagub 14-ga, kuid kuna teine liidetav, s. t. 10, 14-ga ei jagu, siis ka 150 ei jagu 14-ga.

2. Vaatleme nüüd tähtsat **vahe omadust.**

Kui vähendatav ja lahutatav jaguvad mingi arvuga, siis ka vahe jagub selle arvuga.

Näide:

45 jagub 9-ga,
18 jagub 9-ga,

nende vahe 45—18, s. t. 27, jagub samuti 9-ga.

Veel näide:

88 jagub 11-ga,
33 jagub 11-ga,

nende vahe 88—33=55 jagub samuti 11-ga.

Seda vahe omadust võime mõnikord edukalt kasutada nende küsimuste selgitamisel, kas üks arv jagub teisega või mitte. Olgu tarvis vastata küsimusele, kas arv 693 jagub 7-ga. Liidame 693-ga 7, saame 700. Seega võime kirjutada järgmise võrduse: 700—7= =693. Selles vähendatav 700 jagub 7-ga, lahutatav 7 jagub samuti 7-ga, tähendab ka vahe 693 jagub 7-ga.

§ 66. Arvude jaguvuse tunnustest.

Väga paljudel juhtumitel on tähtis määrata jagamist teostamata, kas üks arv jagub teisega või mitte. Olgu tarvis näiteks vastata küsimusele, kas 156 jagub arvuga 4. Niisuguseid küsimusi esineb edaspidi väga sageli, näiteks murdude käsitlemisel. Et vastata esitatud küsimusele, võib muidugi jagada esimese arvu teisega, kuid niisugune võte ei ole otstarbekohane. Seepärast püütakse aritmeetikas jagamist teostamata leida, kas üks arv jagub teisega või mitte. Seepärast tegeleme nüüd arvude niisuguste iseärasuste või omaduste tundmaõppimisega, mis lubavad otsustada, kas üks arv jagub teisega või mitte. Me esitame alljärgnevalt mõned nendest jaguvuse «tunnustest».

§ 67. 2-ga jaguvuse tunnus.

Missugused arvud jaguvad 2-ga? Mille poolest erinevad 2-ga jaguvad arvud arvudest, mis ei jagu 2-ga? Võtame kaks arvu: 35 ja 32. Esimene neist, s. t. 35, ei jagu 2-ga, teine, 32 aga jagub 2-ga. Milles on nende vaheline erinevus? Me teame eelnevast, et kui kumbki kahest arvust jaguvad kolmandaga, siis ka nende summa jagub selle arvuga. Kujutame antud arvud kümneliste ja üheliste summana:

35=30+5;
32=30+2.

35 koosneb kolmest kümnelisest ja viiest ühelisest. Iga kümneline jagub 2-ga, tähendab ka 3 kümnelist, s. t. 30, jagub 2-ga, kuid teine liidetav, s. t. 5, ei jagu 2-ga; seepärast ei jagu ka 35 arvuga 2.

Kui me vaatleme arvu 32, siis näeme, et see on arvude 30 ja 2 summa, s. t. niisuguste arvude summa, milledest kumbki jagub 2-ga. Tähendab, arv 32 jagub 2-ga.

Vaatleme veel üht näidet. Võtame 32-st tunduvalt suurema arvu, näiteks 876. Selle arvu võime kujutada järgmiselt:

$$876 = 870 + 6.$$

Esimene liidetav 870 jagub 2-ga, kuna ta koosneb 87-st kümnelisest, teine liidetav 6 jagub samuti 2-ga, tähendab ka kogu arv 876 jagub 2-ga.

Nendest näidetest selgub, et arvu jaguvus 2-ga sõltub eranditult teise liidetava (üheliste) jaguvusest. Arv 35 ei jagunud 2-ga sellepärast, et teine liidetav ei jagunud 2-ga. Kui arv lõpeb 0-ga, 2-ga, 4-ga, 6-ga, 8-ga, . . ., siis ta jagub 2-ga, vastasel korral aga mitte.

Käsitletud 2-ga jaguvuse tunnuse võime seega sõnastada järgmiselt: **2-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis lõpevad paarisnumbriga.** (Null kuulub paarisarvude hulka.)

§ 68. 4-ga jaguvuse tunnus.

Esitame kõigepealt järgmise fakti: 4-ga jagub arv 100 ja järelikult ka iga arv, mis kujutab endast sajaliste summat (200, 300, . . ., 1 400, 1 500, . . ., 2 000, . . .). Kuid iga arv, mis on sajaliste summa, lõpeb kahe nulliga. Tähendab, 4-ga jagub iga arv, mis lõpeb kahe nulliga.

Võtame nüüd arvu, mis ei lõpe nullidega, vaid mingisuguste teiste numbritega, näiteks 123 456.

Kujutame selle kahe liidetava summana järgmisel viisil:

$$123\,400 + 56.$$

Selle summa esimene liidetav (123 400) jagub 4-ga, sest et ta lõpeb kahe nulliga. Kui teine liidetav (56) jagub 4-ga, siis ka summa (123 456) jagub 4-ga. Teine liidetav jagub 4-ga. Tähendab, ka arv 123 456 jagub 4-ga.

Võtame arvu 1 634 ja esitame selle kahe liidetava summana nii: 1 600 + 34. Selle summa esimene liidetav 1 600 jagub 4-ga, teine liidetav (34) aga ei jagu. Tähendab, summa, s. t. arv 1 634, ei jagu 4-ga.

Seega, **4-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis lõpevad kahe nulliga või mille kaks viimast numbrit moodustavad 4-ga jaguva arvu.**

Näiteks jaguvad 4-ga: 460, 1 264; ei jagu 4-ga: 110, 4 562.

§ 69. 5-ga jaguvuse tunnus.

Märgime kõigepealt, et 5-ga jagub arv 10 ja, tähendab, ka iga arv, mis koosneb kümnelistest (20, 30, ..., 140, 150, ..., 2 160, 2 170 ...).

Teisest küljest võib aga iga mitmekohalist arvu vaadelda kümneliste ja üheliste summana.

Esimene liidetav jagub alati 5-ga, kuna see koosneb kümnelistest. Tähendab, mistahes mitmekohalise arvu jaguvus 5-ga sõltub eranditult sellest, kas teine liidetav, s. t. üheliste arv, jagub 5-ga või mitte.

Kuid üheliste seas on ainult üks arv, mis jagub 5-ga, ja see arv on 5 ise. Järelikult, 5-ga jaguvatel arvudel peab teine liidetav olema 5.

Kui me võtame näiteks arvu 2 347, milles üheliste kohal ei ole mitte arv 5, vaid 7, siis see arv ei jagu 5-ga, kuna summa 2 340+7 esimene liidetav jagub, teine liidetav (7) aga ei jagu 5-ga.

Selle põhjal võib 5-ga jaguvuse tunnuse sõnastada järgmiselt: **5-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis lõpevad nulliga või numbriga 5.**

Näiteks jaguvad 5-ga: 1 320; 4 065; 5-ga ei jagu: 21; 432; 6 543.

§ 70. 25-ga jaguvuse tunnus.

Arv 100 jagub 25-ga. Järelikult ka iga arv, mis koosneb sajalistest, peab jaguma 25-ga (200; 300; ...; 1 400; 1 500; ...; 5 600; ...). Kuid kuna sajalistest koosnev arv lõpeb kahe nulliga, siis 25-ga peavad jaguma kõik kahe nulliga lõpevad arvud.

Võtame nüüd kaks arvu, mis ei lõpe nullidega, vaid mingisuguste teiste numbritega:

23 456 ja 34 875.

Kumbagi neist võib esitada kahe liidetava summana järgmiselt:

23 400+56 ja 34 800+75.

Esimesel juhtumil teine liidetav (56) ei jagu 25-ga, seepärast ka kogu arv (summa) ei jagu 25-ga. Teisel juhtumil teine liidetav (75) jagub 25-ga, seepärast ka kogu arv jagub 25-ga. Tähendab, arvu jaguvus 25-ga sõltub sellest, kas kahest viimasest numbrist moodustunud arv jagub 25-ga või mitte. Saja piires on ainult kolm niisugust arvu: 25, 50 ja 75.

Selle põhjal võime ütelda, et **25-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis lõpevad 00-ga; 25-ga; 50-ga ja 75-ga.**

§ 71. 9-ga ja 3-ga jaguvuse tunnused.

Missugused arvud jaguvad 9-ga? Kõigepealt jaguvad 9-ga kõik arvud, mis on kirjutatud numbri 9 abil, s. t.

9; 99; 999; 9 999 jne.

Meenutame, et arvud, milliseid väljendab number 1 koos nullidega, annavad 9-ga jagamisel jäägi 1.

Tõepoolest: $10:9=1$ ja jääk 1; $100:9=11$ ja jääk 1; $1\,000:9=$ $=111$ ja jääk 1; $10\,000:9=1\,111$ ja jääk 1.

Arvestades seda märkust, jagame 9-ga arvu 567. Kujutame 567 järguühikute summana:

$$567=500+60+7.$$

Arv 500 annab jagamisel 9-ga jäägi viis (5) ühelist, sest et iga sajaline annab 9-ga jagamisel jäägi 1.

Arv 60 annab jagamisel 9-ga jäägi kuus (6) ühelist, sest et iga kümneline annab 9-ga jagamisel jäägi 1.

Arv seitse (7) ei jagu 9-ga ja seega on jäägiks.

Saime järgmised jäägid: 5; 6 ja 7.

Kui nende jääkide summa, s. t. $5+6+7=18$, jagub 9-ga, siis ka arv 567 jagub 9-ga. Antud juhtumil jääkide summa jagub 9-ga.

Kui me võtame mingi teise arvu, näiteks 476, mille jääkide summa, nagu eelmise põhjal kerge leida, on:

$$4+7+6=17,$$

siis siin jääkide summa ei jagu 9-ga, tähendab ka kogu arv 476 ei jagu 9-ga.

Mida kujutab endast see jääkide summa? See on nende arvude summa, mis vastavad antud arvu numbritele (lühidalt öeldakse, et see on arvu numbrite summa e. ristsumma).

Seepärast võib 9-ga jaguvuse tunnuse sõnastada järgmiselt: **9-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, millede numbrite summa jagub 9-ga.**

Iga 9-ga jaguv arv jagub ka 3-ga (mitte aga ümberpöördult). Me võime teostada analoogilised arutlused ka arvu 3 suhtes. Siis 3-ga jaguvuse tunnuse võime sõnastada nii: **3-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, millede numbrite summa jagub 3-ga.**

Näiteks jaguvad 3-ga: 51; 231; 8 112; 12 345.

JAGAJAD JA KORDSED. ALGTEGURID.

§ 72. Alg- ja kordarv.

Võtame mõned arvud ja vaatleme, missuguste arvudega need jaguvad.

5 jagub 1-ga ja 5-ga;
6 jagub 1-ga, 2-ga, 3-ga ja 6-ga;
9 jagub 1-ga, 3-ga ja 9-ga;
11 jagub 1-ga ja 11-ga;
12 jagub 1-ga, 2-ga, 3-ga, 4-ga, 6-ga ja 12-ga.

Me näeme, et toodud arvud erinevad üksteisest jagajate arvu poolest. Arvul 12 on kõige rohkem jagajaid (6), arvudel 5 ja 11 aga kõige vähem, nimelt kummalgi kaks jagajat: 1 ja arv ise.

Iga arvu, peale 1, mis jagub ainult ühega ja iseendaga, nimetatakse algarvuks.

Kõiki teisi arve nimetatakse kordarvudeks. Järelikult, kordarvud jaguvad mitte ainult ühega ja iseendaga, vaid veel ka teiste arvudega.

Märkus. Arv 1 (üheline) ei kuulu ei algarvude ega ka kordarvude hulka.

Esimese saja piires, s. t. 1-st kuni 100-ni, on algarve 25, ja nimelt: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

Esimesel pilgul võib näida, et algarve on üsna palju ainult naturaalarvude rea alguses, s. t. kui arvud ei ole eriti suured, ja et arvude suurenemisega kasvab lootus, et algarvud hakkavad esinema järjest harvemini ja lõpuks täiesti kaovad. Niisugune oletus ei ole aga õige, kuna tegelikult on algarve lõpmatu hulk.

Kuidas teada saada, kas mingi arv on algarv või kordarv? Et lahendada seda küsimust, võetakse antud arv ja jagatakse see järjest algarvudega, alates arvust 2.

Tänapäeval on koostatud algarvude tabelid kuni miljonini.

Me anname lk. 73 algarvude tabeli kahe esimese saja piires. Algarve on selles vahemikus 46. Asetame need nii, et igas reas on ainult ühe kümne algarvud. Tähendab, esimeses reas on esimese kümne algarvud, teises reas — teise kümne jne.

Soovitame vaadelda seda tabelit, pöörates erilist tähelepanu sellele, et niisuguseid algarve, mis lõpeksid 4-ga, 6-ga, 8-ga, 0-ga, ei ole ja et 2-ga lõppevate algarvude tulbas on ainult üks arv —2 ise, samuti ka 5-ga lõppevate algarvude hulgas on ainult üks arv, s. t. 5. Järelikult, kõik algarvud, välja arvatud 2 ja 5, lõpevad 1-ga; 3-ga; 7-ga; 9-ga.

Hoiatame võimalike vigade eest: ei tohi arvata, et kõik arvud,

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
—	2	3	—	5	—	7	—	—	—
11	—	13	—	—	—	17	—	19	—
—	—	23	—	—	—	—	—	29	—
31	—	—	—	—	—	37	—	—	—
41	—	43	—	—	—	47	—	—	—
—	—	53	—	—	—	—	—	59	—
61	—	—	—	—	—	67	—	—	—
71	—	73	—	—	—	—	—	79	—
—	—	83	—	—	—	—	—	89	—
—	—	—	—	—	—	97	—	—	—
101	—	103	—	—	—	107	—	109	—
—	—	113	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	127	—	—	—
131	—	—	—	—	—	137	—	139	—
—	—	—	—	—	—	—	—	149	—
151	—	—	—	—	—	157	—	—	—
—	—	163	—	—	—	167	—	—	—
—	—	173	—	—	—	—	—	179	—
181	—	—	—	—	—	—	—	—	—
191	—	193	—	—	—	197	—	199	—

mis lõpevad 1-ga; 3-ga; 7-ga; 9-ga on tingimata algarvud, näiteks arvud 21, 33, 27, 39 on kordarvud.

Algarvude tabeli koostamisega tegelesid matemaatikud juba kauges minevikus. Esimene katse sooritati Aleksandria matemaatiku ja geograafi Eratosthenese poolt (elas III saj. e. m. a.). Eratosthenese meetod seisneb selles, et naturaalarvude reast eraldatakse järk-järgult kõik kordarvud. Niisugust algarvude koostamise tabelit on hakatud nimetama «Eratosthenese sõelaks».

§ 73. Arvude algtegureiks lahutamine.

Iga kordarvu võib kujutada algarvude korrutisena. Näitame seda algul väikeste arvude puhul. Arv 4 jagub 2-ga, jagatiseks saame 2. Kuna jagatav on võrdne jagaja ja jagatise korrutisega, siis võib kirjutada: $4=2\cdot2$. Arv 6 jagub 2-ga ja annab jagatiseks 3, seepärast võib kirjutada: $6=2\cdot3$. Võtame veel ühe näite:

$$8=2\cdot2\cdot2.$$

Siin on 3 algtegurit (kolm kahte). Need leidsime järgmisel viisil. Algul jagasime 8 arvuga 2 ja saime jagatiseks 4, kuid kuna 4 on samuti kordarv, siis võime ka selle esitada kahe kahelise korrutisena. Selle toimingu võime üles kirjutada järgmiselt:

$$8=2\cdot4=2\cdot2\cdot2.$$

Toome veel mõningaid näiteid ilma selgitusteta:

$$9=3\cdot3;\ 10=2\cdot5;\ 15=3\cdot5;\quad 16=2\cdot2\cdot2\cdot2.$$

Me võtsime kordarvu ja kujutasime igaühe neist algarvude korrutisena. Arvu niisugust kujutamist nimetatakse arvu algtegureiks lahutamiseks. Lahutada arv algtegureiks — **tähendab kujutada see arv algarvude korrutisena.**

Kordarv lahutub algtegureiks üheselt. See tähendab seda, et kui näiteks arv 20 lahutada kaheks kaheliseks ja üheks viieliseks, siis ta lahutub alati niisuguste tegurite korrutiseks, sõltumatult sellest, kas me alustame tegureiks lahutamist väiksematest teguritest või suurematest. Harilikult alustatakse tegureiks lahutamist aga väiksematest teguritest, s. t. kahelistest, kolmelistest jne. See on otstarbekohasem seepärast, et arvu jaguvust 2-ga, 3-ga, 5-ga on kergem kindlaks teha, kui arvu jaguvust näiteks 37 või 53-ga.

Kuidas teostatakse tegureiks lahutamist? Võtame arvu 24 ja lahutame selle tegureiks. Alustame väikseimast jagajast; arv 24 jagub 2-ga ja annab jagatiseks 12; 12 jagub omakorda 2-ga ja annab jagatiseks 6; edasi, arv 6 jagub uuesti 2-ga ja annab jagatiseks algarvu 3. Tähendab, algtegureiks lahutuse võime üles kirjutada järgmiselt:

$$24=2\cdot2\cdot2\cdot3.$$

Algtegureiks lahutamise juures tuleb arutleda nii: 24 on võrdne kahe (kirjutame 2) ja 12 korrutisega (arvu 12 ei kirjuta, vaid peame meeles); 12 on võrdne kahe (kirjutame 2) ja 6 korrutisega (6 peame meeles); 6 on võrdne kahe ja 3 korrutisega (kirjutame 2 ja 3).

Suurte arvude lahutamine algtegureiks ei erine millegi poolest väikeste arvude algtegureiks lahutamisest. Lahutame algtegureiks arvu 100:

$$100=2\cdot2\cdot5\cdot5.$$

Aritmeetikas kasutatakse veel ühte teist üleskirjutamise vormi, mis kergendab suurte arvude algtegureiks lahutamist. See seisneb selles, et kirjutatakse üles mitte ainult jagajad, vaid ka jagatised, tegurid ise paigutatakse mitte ritta, vaid tulpa. Lahutame näiteks algtegureiks arvu 1 260. Tõmbame sellest arvust paremale püstjoone ja selle taha kirjutame 1 260 väikseima jagaja, mis on ühest suurem. See on 2. Jagame antud arvu 2-ga ja kirjutame jagatise 630 joonest vasakule antud arvu alla. Leiame nüüd 630 jaoks väikseima jagaja, jagame sellega arvu 630 ja kirjutame jagatise uuesti vasakule poole püstjoont. Jagaja on 2, jagatis 315. Edasised tehted teostatakse täpselt samuti. Lõpuks saame jagatiseks algarvu (7), jagame selle 7-ga ja leiame viimase jagatise (1).

$$\begin{array}{r|l} 1\,260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Toome veel mõningaid näiteid suurte arvude algtegureiks lahutamise kohta «tulbas»:

$$
\begin{array}{r|l}
5\,390 & 2 \\
2\,695 & 5 \\
539 & 7 \\
77 & 7 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
2\,310 & 2 \\
1\,155 & 3 \\
385 & 5 \\
77 & 7 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}
$$

Pärast tegureiks lahutamist «tulbas» tuleb tegurid kirjutada ritta, näiteks:

$$5\,390=2\cdot5\cdot7\cdot7\cdot11.$$

Mõningail juhtumeil võib lihtsustamise eesmärgil lahutada antud suure arvu lihtsamateks teguriteks, mida on kerge märgata. Näiteks võime arvu 3 600 lahutada algul tegureiks nii: $3\,600=36\cdot100$, seejärel aga lahutada 36 ja 100 eraldi tegureiks, s. t.

$$36=2\cdot2\cdot3\cdot3;\quad 100=2\cdot2\cdot5\cdot5.$$

Järelikult,

$$3\,600=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5.$$

Märkus. Algtegurid kirjutatakse harilikult nende kasvavas järjekorras.

Te loomulikult märkasite, et otstarbekohane on eraldada tegur, mis lõpeb nullidega. Sellega seoses on kasulik meenutada, kuidas lahutuvad tegureiks arvud, mille moodustavad üks temale järgnevate nullidega. Kõik need arvud lahutuvad kaheliste ja viieliste korrutiseks, kusjuures kahelisi ja viielisi on võrdselt, s. t. nii palju kui on kahelisi, niisama palju on ka viielisi. Näiteks:

$$
\begin{aligned}
10&=2\cdot5,\\
100&=2\cdot2\cdot5\cdot5,\\
1\,000&=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5,\\
10\,000&=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5.
\end{aligned}
$$

Kuna kahelisi või viielisi on niisama palju, kui palju on nulle, siis neid tegureiks lahutusi on kerge meeles pidada.

§ 74. Tegureiks lahutuse lühike kirjutusviis.

Toodud näidetest algtegureiks lahutamise kohta selgub, et igal arvul on oma kindel ühene tegurite koosseis. Kui arvu tegurite hulgas on võrdseid, siis võib kasutada väga otstarbekohast lühendatud kirjutusviisi. Lahutame algtegureiks kaks arvu: 30 ja 32:

$$
\begin{aligned}
30&=2\cdot3\cdot5.\\
32&=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2.
\end{aligned}
$$

Esimese arvu tegurid on kõik erinevad, teise tegurid aga kõik võrdsed. Esimesel juhtumil ei ole võimalik tegureiks lahutust kirjutada lühemalt, teisel juhtumil on see aga võimalik: korduv tegur kirjutatakse üks kord, arv aga, mis näitab, mitu korda see tegur esineb, kirjutatakse temast paremale üles väikese numbriga:

$$32=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^5.$$

Toome veel ühe näite. Lahutame algtegureiks arvu 729:

$$729=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^6.$$

Eelmise paragrahvi lõpus näitasime niisuguste arvude algtegureiks lahutamist, milliseid kujutab üheline nullidega. Nüüd võime selle kirjutada lühemalt:

$$10=2\cdot5; \qquad 10\,000=2^4\cdot5^4;$$
$$100=2^2\cdot5^2; \qquad 100\,000=2^5\cdot5^5;$$
$$1\,000=2^3\cdot5^3; \qquad 1\,000\,000=2^6\cdot5^6.$$

Kuidas tuleb lugeda niisuguseid kirjutisi? Võtame arvu 625 ja lahutame selle algtegureiks:

$$625=5\cdot5\cdot5\cdot5 \text{ ehk } 625=5^4.$$

Viimase võrduse mõte seisneb selles, et arvu 625 algtegureiks lahutuses tegur 5 esineb 4 korda ehk teiste sõnadega, arv 625 lahutub neljaks viieliseks. Kirjutist 5^4 loetakse nii: viis neljandas **astmes.** Pidage meeles, et

10^2 loetakse: 10 teises astmes e. 10 ruudus;
9^3 „ 9 kolmandas astmes e. 9 kuubis;
8^4 „ 8 neljandas astmes.

Loomulikult tuleb mitte ainult osata lugeda neid avaldisi, mis siin on kirjutatud, vaid ka teada, kui palju saadakse igal üksikul juhtumil. Teostame arvutuse: $10^2=10\cdot10=100$. Seda võrdust võib kirjutada ka vastupidises järjekorras, s. t. paremalt vasakule: $100=10^2$.

Teostame ülejäänud arvutused:

$$9^3=9\cdot9\cdot9=729, \text{ ümberpöördult } 729=9^3;$$
$$8^4=8\cdot8\cdot8\cdot8=4\,096, \text{ ümberpöördult } 4\,096=8^4.$$

Seega esines siin kaks ülesannet. Esimene seisnes selles, et lahutada mingi arv algtegureiks, s. t. kujutada see algarvude korrutisena.

Näiteks, lahutada algtegureiks arv 720:

$$720=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5=2^4\cdot3^2\cdot5.$$

Teine ülesanne (esimese pöördülesanne) seisneb selles, et mingi arvu antud algtegurite järgi leida see arv. Näiteks, on antud algtegureiks lahutus: $2^3\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$. Selgitame, missugust arvu kujutab see avaldis. Selleks teostame nõutavad tehted:

$$2^3\cdot3^2\cdot5^2\cdot7=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7=8\cdot9\cdot25\cdot7=12\,600.$$

Selle asemel, et kirjutada $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, võib, nagu te teate, kirjutada: 10^5 ja lugeda seda kirjutist nii: 10 viiendas astmes. Selles kirjutises on üldse kaks arvu: 10 ja 5. Esimest arvu (10) nimetatakse antud juhtumil **astme aluseks** e. **astendatavaks**, teist arvu (5) aga **astme näitajaks** e. **astendajaks**. Ühesuguste tegurite korrutist ennast nimetatakse **astmeks**. Tähendab, antud juhtumil aste on 100 000, seepärast et $10^5 = 100\,000$.

Seega, kui me kirjutame $2^{10} = 1024$, siis 2 on siin astendatav, 10 astendaja ja arv 1 024 aste.

§ 75. Suurim ühisjagaja.

Võtame kolm arvu 60, 90 ja 120. Igaüks neist jagub 30-ga. Tähendab, arv 30 on iga arvu jagajaks. Öeldakse, et arv 30 on arvude 60, 90 ja 120 ühisjagajaks.

Edaspidi tuleb meil sageli otsida ühisjagajat kahele, kolmele jne. arvule. Peame meeles, et **mitme arvu ühisjagajaks nimetatakse arvu, millega jaguvad kõik antud arvud.**

Märgime, et mõnedel arvudel võivad üldse puududa ühisjagajad, välja arvatud üheline, teistel võib aga olla neid palju. Näiteks ei ole arvudel 27 ja 32 ühisjagajaid, välja arvatud 1; arvudel 25 ja 35 on ühisjagajaks arv 5; arvudel 42 ja 105 on ühisjagajaiks arvud: 3; 7; 21; arvudel 21, 35 ja 49 on ühisjagajaks arv 7.

Arve, millel ei ole ühisjagajaid (peale arvu 1), nimetatakse ühisjagajata (ka ühistegurita) arvudeks.

Võtame kaks arvu: 60 ja 75, ning vaatleme, missugused on nende ühisjagajad. Arv 60 jagub 2-ga, 3-ga, 4-ga, 5-ga, 6-ga 10-ga, 12-ga, 15-ga, 20-ga ja 30-ga; kuid mitte kõik need jagajad pole võetud arvude ühisjagajateks. Näiteks arv 75 ei jagu 2-ga, 4-ga, 6-ga, 10-ga, 12-ga, 20-ga, ja 30-ga. Jääb järele kolm jagajat, mis on ka arvude 60 ja 75 ühisjagajateks, need on 3; 5 ja 15.

Suurim nendest kolmest jagajast on arv 15. Seda arvu nimetataksegi arvude 60 ja 75 suurimaks ühisjagajaks.

Mitme arvu suurimaks ühisjagajaks nimetatakse suurimat arvu, millega jaguvad kõik need arvud.

Eespool näitasime, missuguseid arve nimetatakse ühisjagajata arvudeks: nüüd väljendame sama mõtte teisiti. **Kahte arvu, millede suurim ühisjagaja on 1, nimetatakse ühisjagajata (ka ühistegurita) arvudeks.**

Kuidas leida mitme arvu suurimat ühisjagajat?

Võtame algul kaks arvu: 63 ja 84, ning leiame nende suurima ühisjagaja. Lahutame need arvud algteguriteks:

$$63 = 3 \cdot 3 \cdot 7; \quad 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Et kumbki arv jaguks mingi kolmanda arvuga (suurima ühisjagajaga), on tarvilik, et selles kolmandas arvus sisalduksid kõik kummagi antud arvu ühised tegurid. Suurim ühisjagaja saadakse ühiste algtegurite korrutamise teel. Antud arvude ühised tegurid on 3 ja 7. Tähendab, nende arvude (63 ja 84) suurim ühisjagaja on 21. Lühidalt kirjutatakse see järgmiselt:

S. Ü. (63 ja 84) = 21.

Vaatleme veel ühte näidet. Leiame kolme arvu: 420, 630 ja 1 260 suurima ühisjagaja. Lahutame iga arvu algteguriteks:

420	2	630	2	1 260	2
210	2	315	3	630	2
105	3	105	3	315	3
35	5	35	5	105	3
7	7	7	7	35	5
1		1		7	7
				1	

Kirjutame välja tegurid, mis on ühised nendele kolmele arvule. Arv 2 on kõigi kolme antud arvu ühisteguriks, kuid ainult üks kord; teine kord esineb 2 veel esimeses ja kolmandas arvus, kuid ei esine arvus 630. Arv 3 esineb üks kord kõigis antud arvudes, teist korda esineb ainult kahes viimases arvus. Arvud 5 ja 7 on kõigi antud arvude tegureiks. Tähendab, ühised tegurid on järgmised: 2, 3, 5 ja 7. Nende korrutis, s. t. 210, ongi antud arvude suurimaks ühisjagajaks.

Siit järeldub reegel:

et leida mitme arvu suurimat ühisjagajat, tuleb lahutada need arvud algtegureiks ja korrutada omavahel kõikide arvude ühised tegurid.

§ 76. Väikseim ühiskordne.

Me ütlesime (§ 64), et kui üks arv jagub teisega, siis esimest nimetatakse teise kordseks, teist aga esimese jagajaks. Arvu 60, mis jagub 15-ga, nimetatakse arvu 15 kordseks, arvu 15 aga 60 jagajaks.

Kuid 60 jagub mitte ainult 15-ga, vaid ka teiste arvudega, näiteks 20-ga; 30-ga jne. Tähendab, meil on õigus ütelda, et 60 on mitte ainult arvu 15 kordne, vaid ka arvude 20 ja 30 kordne.

Igale arvule vastab lõpmatu hulk kordseid. Näiteks, arvule 7 vastavad järgmised kordsed: 14; 21; 35; 70; 77 jne.

Kahele või mitmele arvule vastab samuti lõpmatu hulk kordseid. Näiteks, arvude 12 ja 20 kordsed on: 60, 120, 180, 240, 300 jne.

Kõik need on arvude 12 ja 20 ühiskordsed.

Antud arvude ühiskordseks nimetatakse iga arvu, mis jagub kõigi antud arvudega.

Kõigist ühiskordseist pakub erilist huvi väikseim ühiskordne, antud juhtumil 60.

Mitme antud arvu väikseimaks ühiskordseks nimetatakse kõige väiksemat arvu, mis jagub iga antud arvuga.

Näiteks, arvude 10 ja 15 väikseimaks ühiskordseks (lühidalt V. Ü.) on arv 30; arvude 12 ja 18 puhul on selleks 36; arvude 10; 15 ja 20 puhul aga ilmselt arv 60.

Olgu tarvis leida arvude 90, 60 ja 50 väikseim ühiskordne. Eelkõige lahutame need arvud algtegureiks:

$$90=2\cdot3\cdot3\cdot5;$$
$$60=2\cdot2\cdot3\cdot5;$$
$$50=2\cdot5\cdot5.$$

Väikseim ühiskordne peab jaguma 90-ga, tähendab, temas peavad sisalduma kõik arvu 90 tegurid. Edasi, väikseim ühiskordne peab jaguma ka 60-ga, s. t. temas peavad sisalduma ka kõik selle arvu tegurid, ja lõpuks peab väikseim ühiskordne jaguma ka viimase arvuga — 50-ga, järelikult peavad temas sisalduma ka selle viimase arvu tegurid. Teades seda, toimime järgmiselt: kirjutame algul välja kõik esimese arvu (90) tegurid, seejärel aga, et otsitav kordne jaguks ülejäänud arvudega, täiendame esimese arvu tegureid teiste arvude nende teguritega, mis arvu 90 lahutuses puuduvad. Saame:

$$\text{V. Ü. } (90;\ 60;\ 50)=2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot\ 2\cdot5=900.$$

Siit saame reegli:

et leida mitme arvu väikseim ühiskordne, tuleb lahutada need arvud algtegureiks, seejärel täiendada ühe arvu tegureiks lahutust teiste arvude nende teguritega, mis esimeses puuduvad, ja kõik need tegurid omavahel korrutada.

Kui antud arvudest suurim jagub kõigi ülejäänutega, siis see ongi nende arvude väikseimaks ühiskordseks. Näiteks arvude 120; 60 ja 40 väikseimaks ühiskordseks on 120.

Kui antud arvude ükski paar ei oma ühistegureid, siis nende arvude väikseima ühiskordse leidmiseks tuleb antud arvud korrutada. Näiteks arvude 11, 14 ja 15 väikseim ühiskordne on võrdne nende arvude korrutisega, s. t.:

$$\text{V. Ü. } (11,\ 14 \text{ ja } 15)=11\cdot14\cdot15=2\,310.$$

TEINE OSA

HARILIKUD MURRUD

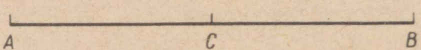
Üheksas peatükk.

PÕHIMÕISTED.

§ 77. Ühiku osadest.

Me õppisime tundma täisarvude omadusi ja tehteid nendega. Peale täisarvude on olemas veel murdarvud, milledega me nüüd tutvumegi. Kui õpilane ütleb, et temal kulub kodust kooli tulekuks *pool tundi*, siis ta ei väljenda aega mitte *tervetes* tundides, vaid tunni *osades*. Kui arst soovitab haigel lahustada pulber neljandikus klaasis kuumas vees, siis mõõdetakse siin vett mitte tervetes klaasides, vaid selle *osades*. Kui arbuus tuleb jaotada võrdselt kolme poisi vahel, siis iga poiss võib saada ainult *kolmandik* arbuusi.

Kõigil neil juhtumeil me kõnelesime mitte tervetest ühikutest, vaid ühiku osadest. Osad võivad olla kõige mitmekesisemad, näiteks gramm on *tuhandik* kilogrammist, millimeeter — *miljondik* kilomeetrist. Käsitleme algul kõige lihtsamaid osi (poolt, kolmandikku, neljandikku ehk veerandit jne.).



Joon. 9.

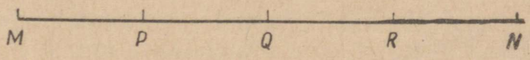
Suurema näitlikkuse saamiseks kujutame need osad sirglõikudena.

Kui võtame lõigu AB ühikuks (joon. 9), siis, jaotanud selle kaheks võrdseks osaks, võime öelda, et saadud lõik AC ja samuti lõik CB moodustab poole lõigust AB.

Joon. 10.

Kui võtame lõigu DE (joon. 10) ühikuks ja jaotame selle kolmeks võrdseks osaks, siis igaüks neist saadud lõikudest (DF, FH ja HE on võrdne kolmandikuga lõigust DE, lõik DH on aga võrdne kahe kolmandikuga lõigust DE. Täpselt samuti on ka lõik FE kaks kolmandikku lõigust DE.

Võtame ühikuks lõigu MN (joon. 11) ja jaotame selle neljaks võrdseks osaks, siis igaüks nendest lõikudest (MP, PQ, QR ja RN) on võrdne ühe neljandikuga lõigust MN; igaüks lõikudest MQ, PR, QN on võrdne kahe neljandikuga lõigust MN ja kumbki lõikudest MR, PN on võrdne kolme neljandikuga lõigust MN.



Joon. 11.

Vaadeldud näidetes tutvusime poolega, kolmandikuga, neljandikuga, kahe kolmandikuga, kahe neljandikuga, kolme neljandikuga, s. t. kas ühiku ühe, kahe või kolme omavahel võrdse osaga. Arvu, mis koosneb ühiku ühest või mitmest võrdsest osast, nimetatakse **murruks.**

Seega on selles paragrahvis nimetatud arvud: pool ehk üks kahendik, üks kolmandik, üks neljandik, kaks kolmandikku ja teised, kõik murrud.

Sageli tuleb vaadelda mitte ainult esemete osi, vaid nendega koos ka terveid esemeid. Näiteks, kaks poissi otsustasid jaotada omavahel võrdselt viis õuna. On ilmne, et kumbki võtab algul 2 õuna, järelejäänud viimase õuna lõikavad aga kaheks võrdseks osaks. Siis kummalgi on kaks ja pool õuna. Siin kummalgi poisil olevate õunte arvu väljendatakse täisarvu (kaks) ja mingi murruga (pool). Arve, mis koosnevad täis- ja murdarvudest, nimetatakse **segaarvudeks.**

§ 78. Murdude kirjutamine.

Vaatleme eelmise paragrahvi viimast joonist (joon. 11). Me ütlesime, et lõik MR moodustab kolm neljandikku lõigust MN. Nüüd tekib küsimus, kuidas seda murdu, s. t. k o l m e n e l j a n d i k k u, kirjutada numbrite abil. Meenutame, kuidas tekkis murd kolm neljandikku. Me võtsime lõigu MN ühikuks, jaotasime selle neljaks võrdseks osaks ja võtsime nendest osadest 3 osa. Niisuguse murru tekkimise protsess peab peegelduma ka tema kirjutises, s. t. sellest kirjutisest peab olema näha, et ühik on jaotatud 4-ks võrdseks osaks ja saadud osi on võetud 3. Selle põhjal kujutatakse murd kahe arvu abil, mis eraldatakse horisontaaljoonega. Joone alla kirjutatakse arv, mis näitab, mitmeks võrdseks osaks on jaotatud ühik, millest võetakse murd, joone peale kirjutatakse aga teine arv, mis näitab, mitu osa sisaldab antud murd. Murd kolm neljandikku kirjutatakse seega järgmiselt: $\frac{3}{4}$.

Arvu, mis asetseb joone peal, nimetatakse murru **lugejaks;** see arv näitab antud murrus sisalduvate osade arvu.

Arvu, mis asetseb joone all, nimetatakse murru **nimetajaks;** see näitab, mitmeks võrdseks osaks on jaotatud ühik.

$$\frac{3 \text{ — lugeja,}}{4 \text{ — nimetaja.}}$$

Joont, mis eraldab lugeja nimetajast, nimetatakse murrujooneks. Lugejat ja nimetajat koos nimetatakse murru liikmeteks. Kirjutame näiteks järgmised murrud: kaks kolmandikku ($\frac{2}{3}$); viis kaheteistkümnendikku ($\frac{5}{12}$).

§ 79. Murdude tekkimine.

Vaatleme küsimust, kuidas ja millest tekivad murrud, miks ja missugustel asjaoludel nad esinevad.

Võtame näiteks niisuguse fakti. Meil tuleb mõõta meetri abil klassitahvli p i k k u s. Selleks võtame puust meetripuu ja asetame selle korduvalt vastu tahvli alumist äärt, liikudes seejuures vasakult paremale. Oletame, et meeter mahtus tahvli alumisele äärele kaks korda, kuid seejuures jäi järele veel mingi tahvli osa, kuhu mõõdupuu kolmandat korda enam ei mahtunud, sest et järelejäänud osa pikkus oli väiksem mõõdupuu pikkusest. Kui järelejäänud tahvli osa sisaldab näiteks pool meetrit, siis tahvli pikkus on kaks ja pool ($2\frac{1}{2}$) meetrit.

Mõõdame nüüd tahvli l a i u s e sellesama mõõdupuuga. Oletame, et see mahtus tahvli laiusesse üks kord, kuid pärast ühekordset paigutamist jäi järele väike jääk, mis oli meetrist väiksem. Asetades meetri sellele tahvli osale, oletame, et meil õnnestus määrata, et see oli üks neljandik ($\frac{1}{4}$) meetrit. Tähendab, tahvli laius on $1\frac{1}{4}$ m.

Seega saime tahvli pikkuse ja laiuse mõõtmisel arvud $2\frac{1}{2}$ m ja $1\frac{1}{4}$ m (s. t. murdarvud).

Mitte ainult esemete pikkust ja laiust, vaid ka väga paljusid teisi suurusi väljendatakse sageli murdarvude abil.

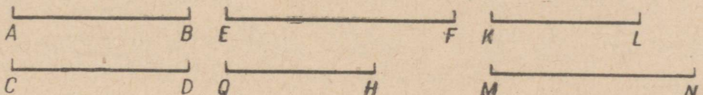
Aega me mõõdame mitte ainult tundides, minutites ja sekundites, vaid sageli ka tundide, minutite ja isegi sekundite osades.

Väga sageli väljendatakse kaalu murdarvude abil, näiteks öeldakse: $\frac{1}{2}$ kg, $1\frac{1}{2}$ kg, $\frac{1}{2}$ g, $\frac{3}{4}$ g, $\frac{1}{2}$ t jne.

Kuni antud momendini me rääkisime murdude tekkimisest mõõtmise tulemusena, kuid on veel üks murdude tekkimise allikas — see on *jagamistehe*. Peatume selle juures. Olgu tarvis 3 õuna jaotada 4 poisi vahel; on ilmne, et iga poiss ei saa tervet õuna, sest et õunu on vähem kui lapsi. Võtame algul 2 õuna ja jaotame kumbki pooleks. Saame 4 poolt, kuna aga poisse oli samuti 4, siis igale võib anda pool õuna. Järelejäänud neljanda õuna jaotame neljaks osaks ja anname igale poisile veel ühe neljandiku õunast, siis kõik õunad on jaotatud ja iga poiss saab pool õuna ning veel ühe neljandiku õuna. Kuid kuna igas pooles on kummaski 2 neljandikku, siis võib ütelda, et iga poiss saab 2 neljandikku pluss üks neljandik, s. t. kokku kolm neljandikku ($\frac{3}{4}$) õuna.

§ 80. Murdude võrdlemine suuruse järgi.

Kui me võrdleme omavahel mingisugust kahte suurust, näiteks kahte lõiku, siis võib juhtuda, et üks neist võrdub täpselt teisega, on suurem kui teine või on sellest väiksem.

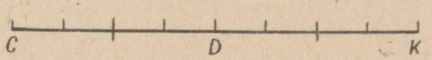


Joon. 12.

Joonisel 12 lõik AB on võrdne lõiguga CD; lõik EF on *suurem* lõigust QH; lõik KL on *väiksem* lõigust MN.

Samasuguse kolme juhtumiga kohtume ka murdude võrdlemisel. Proovime võrrelda omavahel mõningaid murdusid.

1. Kahte murdu loetakse võrdseteks, kui nendele murdudele vastavad suurused on omavahel võrdsed (ühe ja sama mõõduühiku puhul). Võtame lõigu CK ühikuks.

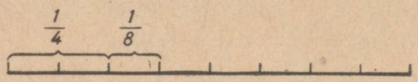


Joon. 13.

Jaotame lõigu CK punktiga D pooleks (joon. 13). Siis selle lõigu osa CD tähistame murruga $\frac{1}{2}$. Kui me sellesama lõigu CK jaotame neljaks võrdseks osaks, siis lõik CD vastab murrule $\frac{2}{4}$; kui me jaotame lõigu CK kaheksaks võrdseks osaks, siis lõik CD vastab murrule $\frac{4}{8}$. Kuna me võtsime kolm korda ühe ning sama lõigu, siis murrud $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ ja $\frac{4}{8}$ on omavahel võrdsed.

2. Võtame kaks võrdsete lugejatega murdu: $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{8}$, ning vaatleme, missugused suurused nendele vastavad. Esimesel juhtumil on mingi suurus jaotatud neljaks võrdseks osaks, teisel juhtumil on s e e s a m a suurus jaotatud kaheksaks võrdseks osaks.

Jooniselt 14 näeme, et $\frac{1}{4}$ on suurem kui $\frac{1}{8}$. Järelikult on kahest võrdsete lugejatega murrust suurem see murd, mille nimetaja on väiksem.



Joon. 14.

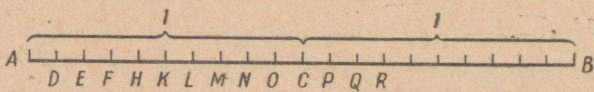
3. Võtame kaks võrdsete nimetajatega murdu: $\frac{5}{8}$ ja $\frac{3}{8}$. Kui me märgime joonisel 14 kummagi nendest murdudest, siis näeme, et esimesele murrule vastav lõik on suurem teisele murrule vastavast lõigust.

4. Kui on antud kaks erinevate lugejate ja erinevate nimetajatega murdu, siis otsustada nende suuruse üle saame, kui võrrelda kumbagi neist ühega. Näiteks, $\frac{2}{3}$ on väiksem kui $\frac{4}{5}$, sest et esimene murd erineb ühest $\frac{1}{3}$ võrra, teine aga $\frac{1}{5}$ võrra, s. t. teine murd erineb ühest vähem.

Palju kergem on aga võrrelda niisuguseid murde, kui teisendada need ühenimelisteks, mida käsitleme hiljem.

§ 81. Liht- ja liigmurrud. Segaarvud.

Võtame mingi kahe pikkusühikuga võrdse lõigu AB (joon. 15). Jaotame kummagi ühiku kümneks võrdseks osaks, siis iga osa võrdub $\frac{1}{10}$-ga, s. t.



Joon. 15.

$$AD = DE = EF = FH = \ldots = \frac{1}{10} AC.$$

Vaatleme teisi lõike ja leiame, missuguste murdudega need väljenduvad. Näiteks, $AF - \frac{3}{10}$, $AK - \frac{5}{10}$, $AM - \frac{7}{10}$, $AO - \frac{9}{10}$, $AC - \frac{10}{10}$, $AP - \frac{11}{10}$, $AR - \frac{13}{10}$. Kõiki võetud lõike väljendasime niisuguste murdarvudega, mille nimetaja on 10. Esimesel neljal murrul $(\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10})$ on lugejad väiksemad kui nimetajad, seega iga murd on väiksem kui 1. Järjekorras viiendal murrul $(\frac{10}{10})$ on lugeja võrdne nimetajaga, murd ise on aga võrdne ühega, sest see vastab ühikuks võetud lõigule AC. Kahel viimasel murrul $(\frac{11}{10}, \frac{13}{10})$ on lugejad suuremad kui nimetajad, kumbki murd on aga suurem kui üks.

Murdu, millel lugeja on väiksem kui nimetaja, nimetatakse **lihtmurruks.** Nagu eespool nimetatud, on lihtmurd väiksem kui üks. Tähendab, esimesed neli murdu on lihtmurrud ja seepärast võime kirjutada:

$$\frac{3}{10} < 1, \quad \frac{5}{10} < 1, \quad \frac{7}{10} < 1, \quad \frac{9}{10} < 1.$$

Murdu, mille lugeja on võrdne nimetajaga või sellest suurem, nimetatakse **liigmurruks.** Seega, liigmurd kas on võrdne ühega või on sellest suurem. Tähendab, kolm viimast murdu on liigmurrud ja seega võib kirjutada:

$$\frac{10}{10} = 1, \quad \frac{11}{10} > 1, \quad \frac{13}{10} > 1.$$

Vaatleme kahte viimast murdu (liigmurdusid). Murd $\frac{11}{10}$ koosneb ühest tervest ja lihtmurrust $\frac{1}{10}$, tähendab, teda võib kirjutada nii: $1\frac{1}{10}$. Saime arvu, mis kujutab endast täisarvu ja lihtmurru ühendust, s. t. segaarvu. Sama võime korrata ka liigmurru $\frac{13}{10}$ puhul. Seda võime kujutada nii: $1\frac{3}{10}$. See on samuti segaarv.

Tingimata on tarvis õppida tundma liigmurru teisendamist segaarvuks. Kaks eelmist liigmurdu me asendasime kergesti segaarvudega. Kuid kui meil on näiteks murd $\frac{545}{32}$, siis sellest on juba raskem eraldada täisosa, ilma täisosa eraldamiseta on aga raske otsustada selle murru suuruse üle.

Teisest küljest on sageli mitmesuguste ülesannete lahendamisel otstarbekohasem kasutada mitte segaarve, vaid liigmurde. Tähendab, lihtsustamise eesmärgil tuleb osata ka pöördteisendust, s. t. tuleb osata teisendada segaarvu liigmurruks.

§ 82. Liigmurru teisendamine segaarvuks ja selle pöördtehe.

Võtame liigmurru $\frac{9}{4}$ ja katsume asendada selle segaarvuga. Arutleme järgmiselt: kuna ühes terves on 4 neljandikku, siis üheksas neljandikus on nii mitu tervet, kui mitu korda 4 neljandikku sisaldub üheksas neljandikus. Et vastata sellele küsimusele, tuleb 9 jagada 4-ga. Saadud jagatis näitab tervete arvu, jääk annab aga neljandikkude arvu, mis ei moodusta ühte tervet. 4 sisaldub 9-s kaks korda, kusjuures jääk on 1.

Tähendab, $\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$, kuna $9:4=2$ (jääk 1).

Teisendame liigmurru $\frac{545}{32}$ segaarvuks:

$545:32=17$ (jääk 1), tähendab $\frac{545}{32}=17\frac{1}{32}$.

Et teisendada liigmurd segaarvuks, tuleb murru lugeja jagada nimetajaga ja leida jääk; jagatis näitab tervete üheliste arvu, jääk aga ühelise osade arvu.

Kuna liigmurru teisendamisel segaarvuks me iga kord eraldame täisosa, siis seda teisendust nimetatakse ka täisosa eraldamiseks liigmurrust.

Vaatleme juhtumit, kui liigmurd on võrdne t ä i s a r v u g a. Olgu tarvis eraldada täisosa liigmurrust $\frac{36}{12}$. Reegli järgi saame: $36:12=3$ (jääk 0), s. t. lugeja jagub nimetajaga, tähendab $\frac{36}{12}=3$.

Vaatleme nüüd pöördteisendust, s. t. segaarvu teisendamist liigmurruks.

Võtame segaarvu $3\frac{3}{4}$ ja teisendame selle liigmurruks. Arutleme järgmiselt: iga terve sisaldab 4 neljandikku, 3 ühelist aga 3 korda rohkem, s. t. $4\times3=12$ neljandikku. Tähendab, kolmes terves on 12 neljandikku, kuid segaarvu murdosas on veel 3 neljandikku, kokku on seega 15 neljandikku ehk $\frac{15}{4}$. Järelikult $3\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$.

N ä i d e. Teisendame segaarvu $8\frac{4}{9}$ liigmurruks:

$$8\frac{4}{9}=\frac{9\cdot8+4}{9}=\frac{76}{9}.$$

Et teisendada segaarv liigmurruks, tuleb nimetaja korrutada täisarvuga, saadud korrutisega liita lugeja ja võtta see summa otsitava murru lugejaks, nimetaja aga jätta endiseks.

§ 83. Täisarvu teisendamine liigmurruks.

Iga täisarvu võib väljendada ühelise mistahes osades. Seda on mõnikord kasulik rakendada arvutuste juures. Olgu näiteks tarvis arv 5 väljendada kuuendikkudes.

Arutleme järgmiselt: kuna ühes terves on 6 kuuendikku, siis viies on neid mitte 6, vaid 5 korda rohkem, s. t. $6 \times 5 = 30$ kuuendikku. Tehe kirjutatakse tavaliselt nii:

$$5 = \frac{6 \cdot 5}{6} = \frac{30}{6}.$$

Samal viisil võime iga täisarvu esitada mistahes nimetajaga liigmurruna. Võtame arvu 10 ja esitame selle mitmesuguste nimetajatega liigmurdudena:

nimetaja 2, siis $10 = \frac{2 \cdot 10}{2} = \frac{20}{2}$;

nimetaja 3, siis $10 = \frac{3 \cdot 10}{3} = \frac{30}{3}$;

nimetaja 5, siis $10 = \frac{5 \cdot 10}{5} = \frac{50}{5}$.

Seega, **et väljendada täisarv antud nimetajaga liigmurruna, tuleb see nimetaja korrutada antud arvuga, saadud korrutis võtta lugejaks ja selle alla kirjutada antud nimetaja.**

Väikseim võimalik nimetaja on üks (1). Seepärast võetakse sageli, kui täisarv tuleb kujutada murruna, nimetajaks arv 1 ($12 = \frac{12}{1}$). Seda mõtet väljendatakse mõnikord nii: iga täisarvu võib vaadelda murruna, mille nimetaja on võrdne ühega ($2 = \frac{2}{1}$; $3 = \frac{3}{1}$; $4 = \frac{4}{1}$; $5 = \frac{5}{1}$ jne.).

§ 84. Murru suuruse muutumine tema liikmete muutmisel.

Selles paragrahvis vaatleme, kuidas muutub murru suurus tema liikmete muutmisel.

1. küsimus. Mis juhtub murru suurusega, kui tema lugejat suurendada mingi arv korda? Võtame murru $\frac{1}{12}$ ja suurendame tema lugejat järjest 2, 3, 4 jne. korda. Siis saame järgmised murrud:

$$\frac{1}{12}; \frac{2}{12}; \frac{3}{12}; \frac{4}{12}; \frac{5}{12}; \frac{6}{12}; \frac{7}{12}; \frac{8}{12}; \frac{9}{12}; \frac{10}{12}.$$

Kui võrrelda neid murde omavahel, siis näeme, et need järjest suurenevad: teine murd on 2 korda suurem esimesest, sest et selles on 2 korda rohkem osi, kolmas murd on 3 korda suurem eelmisest jne.

Siit võib teha järelduse: **kui murru lugejat suurendada mingi arv korda, siis murd suureneb sama arv korda.**

2. küsimus. Mis juhtub murru suurusega, kui tema lugejat vähendada mingi arv korda? Võtame murru $\frac{24}{25}$ ja vähendame tema lugejat järjest 2, 3, 4 jne. korda. Siis saame järgmised murrud:

$$\frac{24}{25}; \frac{12}{25}; \frac{8}{25}; \frac{6}{25}; \frac{4}{25}; \frac{3}{25}; \frac{2}{25}; \frac{1}{25}.$$

Vaadelge üksteise järel neid murde vasakult paremale ja te veendute, et teine murd ($\frac{12}{25}$) on 2 korda väiksem esimesest ($\frac{24}{25}$), sest temas on 2 korda vähem osi, s. t. lugeja on 2 korda väiksem; neljas murd ($\frac{6}{25}$) on 4 korda väiksem esimesest ja 2 korda väiksem teisest. Tähendab, **kui murru lugejat vähendada mingi arv korda, siis murd väheneb sama arv korda.**

3. küsimus. Mis juhtub murru suurusega, kui murru nimetajat suurendada mingi arv korda? Sellele küsimusele võime vastata, kui võtame mingi murru, näiteks $\frac{1}{2}$, ja suurendame selle nimetajat, jättes lugeja muutmata. Suurendame nimetajat näiteks 2, 3 jne. korda ning vaatleme, mis toimub seejuures murruga:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}; \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}; \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}; \frac{1}{2 \cdot 10} = \frac{1}{20}; \frac{1}{2 \cdot 50} = \frac{1}{100}.$$

Suurendades järk-järgult nimetajat, suurendasime selle lõpuks arvuni 100. Nimetaja sai küllalt suureks, kuid sama palju vähenes osa suurus; nimelt sai see võrdseks ühe sajandikuga. Siit selgub, et murru nimetaja suurendamine viib paratamatult murru enda vähenemisele. Tähendab, **kui murru nimetajat suurendada mingi arv korda, siis murd väheneb sama arv korda.**

4. küsimus. Mis juhtub murru suurusega, kui murru nimetajat vähendada mingi arv korda? Võtame samad murrud, mis eelmise küsimuse puhulgi, kuid kirjutame need ümberpööratud järjekorras; siis esimene murd on kõige väiksem, viimane — kõige suurem, kuid see-eest on esimese murru nimetaja kõige suurem, viimase murru nimetaja aga kõige väiksem:

$$\frac{1}{100}; \frac{1}{20}; \frac{1}{10}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}.$$

Siit on kerge jõuda järelduseni: **kui murru nimetajat vähendada mingi arv korda, siis murd suureneb sama arv korda.**

5. küsimus. Mis juhtub murruga, kui üheaegselt suurendada või vähendada lugejat ja nimetajat üks ning sama arv korda?

Võtame murru $\frac{1}{2}$ ja suurendame üheaegselt selle lugejat ning nimetajat. Murdude kõrvale üles kirjutame korrutaja, millega me korrutame esimese murru liikmeid:

$$\frac{1}{2};\ \frac{2^{(2)}}{4};\ \frac{3^{(3)}}{6};\ \frac{4^{(4)}}{8};\ \frac{5^{(5)}}{10};\ \frac{6^{(6)}}{12}.$$

Me kirjutasime kuus murdu, mis on erinevad oma välise kuju poolest, kuid ei ole raske veenduda, et kõik need murrud on omavahel võrdsed. Võrdleme kõigepealt kas või esimest murdu teisega. Esimene murd on $\frac{1}{2}$; kui suurendada 2 korda tema lugejat, siis murd suureneb kaks korda, kui aga samal ajal suurendada ka murru nimetajat 2 korda, siis murd väheneb 2 korda, s. t., teiste sõnadega, murru suurus ei muutu. Tähendab, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. Samasugust mõttekäiku võib korrata ka teiste murdude puhul.

Järeldus: **kui murru lugejat ja nimetajat korrutada ühe ning sama arvuga** (suurendada üks ning sama arv korda), **siis murru suurus ei muutu.**

Kirjutame selle omaduse üldkujul. Tähistame murru lugeja tähega *a*, nimetaja tähega *b* ja arvu, millega korrutatakse lugeja ja nimetaja, tähega *m*. Siis sõnastatud omaduse võime esitada järgmise võrduse kujul:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}.$$

Vaatleme veel küsimust lugeja ja nimetaja üheaegsest vähendamisest üks ning sama arv korda.

Kirjutame mõned murrud ritta, kus esimesel kohal on murd $\frac{36}{48}$, viimasel $\frac{3}{4}$:

$$\frac{36}{48}=\frac{18}{24}=\frac{12}{16}=\frac{9}{12}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Kõik need murrud on omavahel võrdsed, milles võib kergesti veenduda, kui võrrelda mistahes kahte naabermurdu. Näiteks, vähendades esimese murru lugejat (36) kaks korda, me vähendame murdu 2 korda; kuid vähendades 2 korda ka tema nimetajat (48), me suurendame murdu 2 korda, s. t. tulemusena murru suurus ei muutu.

Järeldus: **Kui murru lugejat ja nimetajat jagada ühe ning sama arvuga** (vähendada üks ning sama arv korda), **siis murru suurus ei muutu:**

$$\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}.$$

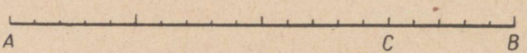
Kahe viimase järelduse olemus seisneb selles, et **lugeja ja nimetaja üheaegsel suurendamisel või vähendamisel üks ning sama arv korda murru suurus ei muutu.**

Sellel murru omadusel on suur tähtsus, mispärast me nimetame seda omadust murru **põhiomaduseks.**

§ 85. Murdude taandamine.

Võtame lõigu AB (joon. 16) ja jaotame selle 20-ks võrdseks osaks, siis iga osa on võrdne $\frac{1}{20}$-ga. Lõik AC, mis sisaldab 15 niisugust osa, kujutab murdu $\frac{15}{20}$.

Katsume nüüd s u u r e n d a d a osi, näiteks jaotame lõigu mitte 20-ks, vaid 4-ks võrdseks osaks. Uued osad osutuvad eelmistest suuremateks, kuna iga uus osa sisaldab 5 eelmist, mida selgesti näeme joonisel. Nüüd leiame, millega on võrdne uue jaotuse puhul lõik AC, mis esimese jaotuse puhul oli võrdne $\frac{15}{20}$ lõigust AB. Jooniselt on näha, et kui lõik AB jaotada 4-ks osaks, siis lõik AC on võrdne $\frac{3}{4}$ lõigust AB. Niisiis, lõik AC võib kujutada, sõltuvalt sellest, mitmeks osaks jaotatakse lõik AB, kas murdu $\frac{15}{20}$ või murdu $\frac{3}{4}$. Suuruse järgi on see aga üks ja sama murd, kuna see mõõdab üht ja sama lõiku ühtedes või teistes mõõduühikutes. Tähendab, murru $\frac{15}{20}$ asemel võime kasutada murdu $\frac{3}{4}$ ja ümberpöördult.



Joon. 16.

Tekib küsimus, kumba murdu on otstarbekohasem kasutada? Otstarbekohasem on kasutada teist murdu, kuna siin on lugeja ja nimetaja väljendatud väiksemate arvudega ja seetõttu on see lihtsam.

Arutluse käigus osutus, et üks suurus (lõik AC) väljendus kahe murruga, mis olid erinevad oma välise kuju poolest, kuid võrdsed suuruse poolest ($\frac{15}{20}$, $\frac{3}{4}$). On ilmne, et niisuguseid murde võib olla mitte ainult kaks, vaid lõpmata palju. Toetudes murdude põhiomadusele, võime esimesele murrule anda niisuguse kuju, et lugeja ja nimetaja oleksid väikseimad. Tõepoolest, kuna murru $\frac{15}{20}$ lugeja ja nimetaja jaguvad 5-ga, siis murd $\frac{15}{20}$ on võrdne $\frac{3}{4}$-ga, s. t. $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

Seda teisendust (lugeja ja nimetaja üheaegne vähendamine üks ning sama arv korda), mis lubab saada murrust, mille lugeja ja nimetaja on suured arvud, välise kuju poolest teistsugust, kuid suuruse poolest esimesega võrdset väiksemate liikmetega murdu, nimetataksegi murdude taandamiseks.

Järelikult, **murru taandamiseks nimetatakse selle murru asendamist teise, temaga võrdse murruga, mille liikmed on väiksemad ja mis saadakse lugeja ja nimetaja jagamisel ühe ning sama arvuga.**

Me taandasime murru $\frac{15}{20}$ ja saime $\frac{3}{4}$. Seda murdu taandada enam ei saa, sest et selle liikmetel 3 ja 4 ei ole ühisjagajat (peale arvu 1). Niisugust murdu nimetatakse **taandumatuks murruks.**

Murdude taandamiseks on kaks teed. Esimene tee seisneb selles, et murd taandatakse järk-järgult, mitte korraga, s. t. pärast esimest taandamist saadakse uuesti taanduv murd, mida siis uuesti taandatakse, kusjuures see protsess võib olla väga pikk, kui lugeja ja nimetaja on väljendatud suurte arvudega ning kui nendel on palju ühistegureid.

Võtame murru $\frac{60}{120}$ ja taandame seda järk-järgult. Taandame algul 2-ga, saame $\frac{60}{120}=\frac{30}{60}$. Uut murdu ($\frac{30}{60}$) võib samuti taandada 2-ga, saame $\frac{30}{60}=\frac{15}{30}$. Uue murru ($\frac{15}{30}$) liikmetel on ühistegureid, seepärast võib seda murdu taandada 3-ga, saame $\frac{15}{30}=\frac{5}{10}$. Lõpuks võib viimast murdu taandada 5-ga, s. t. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. Selles seisnebki murdude järkjärguline taandamine.

Ei ole aga raske märgata, et antud murdu ($\frac{60}{120}$) oleks võinud taandada kohe 60-ga ja me oleksime saanud sama tulemuse. Milleks on 60 arvudele 60 ja 120? Suurimaks ühisjagajaks. Tähendab, murru taandamine tema liikmete suurima ühisjagajaga võimaldab anda murrule kohe taandumatu murru kuju. See on murdude taandamise teine tee.

§ 86. Murdude teisendamine ühenimelisteks.

Võtame mõned murrud:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{5}.$$

Kui me hakkame võrdlema esimest murdu teisega, siis tekib teatud raskus. Muidugi, me teame, et pool on suurem ühest kolmandikust, kuna esimesel juhtumil on suurus jaotatud kaheks võrdseks osaks, teisel juhtumil aga kolmeks võrdseks osaks; kuid kui suur on nende vahe, sellele on siiski raske vastata. Hoopis teisiti on aga teise ja kolmanda murruga ($\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$), neid võrrelda on kerge, kuna kohe on näha, et teine murd on kolmandast ühe kolmandiku võrra väiksem. Pole raske märgata, et siis, kui võrrelda ühesuguste nimetajatega murdusid, raskusi ei teki; kui aga võrreldavate murdude nimetajad on erinevad, siis esinevad teatud raskused. Selles võib veenduda, kui võrrelda järelejäänud murde.

Seepärast kerkib küsimus: kas ei saa kahe murru võrdlemisel teisendada neid nii, et murdude nimetajad oleksid ühesugused? Seda võib teha, toetudes murdude põhiomadusele, s. t. kui me mingi arv korda suurendame murru nimetajat, siis selleks, et murru suurus ei muutuks, peame sama arv korda suurendama ka murru lugejat.

Selle põhjal võime erinevate nimetajatega murdusid teisendada ühenimelisteks.

Kui on nõutud teisendada mingid murrud ühenimelisteks, siis kõigepealt tuleb leida arv, mis jaguks kõigi antud murdude nimetajatega. Järelikult, esimese sammuna tuleb murdude ühenimeliseks teisendamise protsessis leida antud murdude nimetajate väikseim ühiskordne. Pärast seda, kui väikseim ühiskordne on leitud, tuleb jagada see iga nimetajaga ja nii leida iga murru jaoks nõndanimetatud laiendustegur e. laiendaja. See on arv, mis näitab, mitu korda tuleb suurendada iga murru lugejat ja nimetajat, et kõikide meie murdude nimetajad saaksid võrdseteks. Vaatleme näiteid.

1. Teisendame ühenimelisteks murrud $\frac{7}{30}$ ja $\frac{8}{15}$. Leiame nimetajate 30 ja 15 väikseima ühiskordse. Antud juhtumil on selleks esimese murru nimetaja, s. t. 30.

See ongi murdude $\frac{7}{30}$ ja $\frac{8}{15}$ väikseimaks ühiseks nimetajaks. Nüüd leiame laiendustegurid: $30:30=1$, $30:15=2$. Tähendab, esimese murru laiendustegur on 1, teise murru laiendustegur aga 2. Esimene murd jääb seega samaks. Korrutades teise murru liikmeid laiendusteguriga, saame murru, mille nimetaja on 30:

$$\frac{8}{15}=\frac{8\cdot2}{15\cdot2}=\frac{16}{30}.$$

2. Teisendame ühenimelisteks kolm murdu: $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{60}$ ja $\frac{3}{70}$. Leiame nimetajate 30, 60 ja 70 väikseima ühiskordse:

$$30=2\cdot3\cdot5,$$
$$60=2\cdot2\cdot3\cdot5,$$
$$70=2\cdot5\cdot7.$$

Väikseim ühiskordne on $2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7=420$.

See ongi antud murdude väikseimaks ühisnimetajaks.

Leiame nüüd laiendustegurid: $420:30=14$; $420:60=7$;

420 : 70 = 6. Tähendab, esimesel murrul on laiendustegur 14, teisel murrul 7 ja kolmandal 6. Korrutades murdude liikmeid vastavate laiendusteguritega, saame võrdsete nimetajatega murrud:

$$\frac{7}{30}=\frac{7\cdot14}{30\cdot14}=\frac{98}{420};\quad \frac{11}{60}=\frac{11\cdot7}{60\cdot7}=\frac{77}{420};\quad \frac{3}{70}=\frac{3\cdot6}{70\cdot6}=\frac{18}{420}.$$

3. Teisendame ühenimelisteks murrud: $\frac{8}{25}$ ja $\frac{5}{12}$. Nende murdude nimetajad (25 ja 12) on omavahel ühistegurita arvud. Seepärast saadakse väikseim ühiskordne nende korrutamisel: $25\times12=$ $=300$. Esimese murru laiendustegur on 12, teise murru laiendustegur 25. Antud murrud teisenduvad järgmisteks:

$$\frac{8}{25}=\frac{8\cdot12}{25\cdot12}=\frac{96}{300};\quad \frac{5}{12}=\frac{5\cdot25}{12\cdot25}=\frac{125}{300}.$$

Et teisendada murrud ühenimelisteks, tuleb kõigepealt leida kõigi nimetajate väikseim ühiskordne ja iga nimetaja jaoks määrata laiendustegur, seejärel aga iga murru kumbagi liiget korrutada vastava laiendusteguriga.

Pärast seda, kui me oskame teisendada murde ühenimelisteks, ei tee murdude suuruste võrdlemine enam mingeid raskusi. Me võime nüüd võrrelda mistahes kahe murru suurusi, teisendades need eelkõige ühenimelisteks.

Kümnes peatükk.

TEHTED MURDARVUDEGA.

§ 87. Murdude liitmine.

Murdude liitmisel on palju sarnasust täisarvude liitmisega. Murdude liitmine on tehe, mis seisneb selles, et mitu antud murdu (liidetavat) ühendatakse üheks arvuks (summaks), mis sisaldab endas kõik liidetavate ühelised ja ühelise osad.

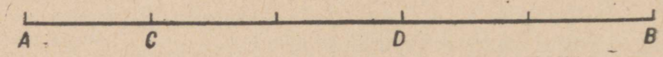
Me vaatleme järjekorras kolme juhtumit:

1. Võrdsete nimetajatega murdude liitmine.
2. Erinevate nimetajatega murdude liitmine.
3. Segaarvude liitmine.

1. Võrdsete nimetajatega murdude liitmine.

Vaatleme näidet: $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$.

Võtame lõigu *AB* (joon. 17) ühikuks ja jaotame selle 5-ks võrdseks osaks, siis selle lõigu osa *AC* on $\frac{1}{5}$ lõigust *AB*, sama lõigu osa



Joon. 17.

CD on aga $\frac{2}{5}$ lõigust *AB*. Jooniselt on näha, et kui võtta lõik *AD*, siis see on $\frac{3}{5}$ lõigust *AB*; kuid lõik *AD* ongi lõikude *AC* ja *CD* summa. Tähendab, võib kirjutada:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

Vaadeldes antud liidetavaid ja saadud summat, näeme, et summa lugeja saadi liidetavate lugejate liitmisest, nimetaja jäi aga samaks.

Siit saame järgmise reegli: **et liita võrdsete nimetajatega murde, tuleb liita nende lugejad ja jätta seesama nimetaja.**

Vaatleme näidet:

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{9}{8}=\frac{18}{8}=2\frac{2}{8}=2\frac{1}{4}.$$

2. Erinevate nimetajatega murdude liitmine.

Liidame murrud: $\frac{3}{4}+\frac{3}{8}$. Eelkõige tuleb need teisendada ühenimelisteks:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6+3}{8}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}.$$

Vahepealset tehet $\frac{6}{8}+\frac{3}{8}$ võib ka mitte kirjutada; me kirjutasime selle siin selguse mõttes.

Seega, **et liita erinevate nimetajatega murde, tuleb eelkõige teisendada need ühenimelisteks, liita nende lugejad ja selle alla kirjutada ühine nimetaja.**

Vaatleme näidet (laiendustegurid kirjutame vastavate murdude kohale):

$$\frac{{}^{15}3}{8}+\frac{{}^{12}7}{10}+\frac{{}^{10}5}{12}=\frac{45+84+50}{120}=\frac{179}{120}=1\frac{59}{120}.$$

3. Segaarvude liitmine. Liidame arvud: $2\frac{3}{8}+3\frac{5}{6}$.

Teisendame algul antud arvude murdosad ühenimelisteks ja kirjutame need uuesti välja:

$$2\frac{3}{8}+3\frac{5}{6}=2\frac{9}{24}+3\frac{20}{24}.$$

Nüüd liidame eraldi täis- ja murdosad:

$$2\frac{9}{24}+3\frac{20}{24}=5\frac{9+20}{24}=5\frac{29}{24}=6\frac{5}{24}.$$

§ 88. Murdude lahutamine.

Murdude lahutamist defineeritakse samuti nagu täisarvude lahutamistki. See on tehe, mille abil kahe liidetava antud summa ja ühe liidetava järgi leitakse teine liidetav.

Vaatleme järjekorras kolme juhtumit:

1. Võrdsete nimetajatega murdude lahutamine.
2. Erinevate nimetajatega murdude lahutamine.
3. Segaarvude lahutamine.

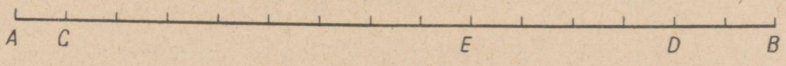
1. Võrdsete nimetajatega murdude lahutamine.

Vaatleme näidet:

$$\frac{13}{15}-\frac{4}{15}.$$

Võtame lõigu AB (joon. 18) ühikuks ja jaotame selle 15-ks võrdseks osaks; siis selle lõigu osa AC kujutab endast $\frac{1}{15}$ lõigust AB, sama lõigu osa AD aga $\frac{13}{15}$ lõigust AB. Võtame veel lõigu ED, mis on võrdne $\frac{4}{15}$ lõigust AB. Meil tuleb lahutada murrust $\frac{13}{15}$ murd $\frac{4}{15}$. Joonisel see tähendab, et lõigust AD tuleb võtta ära lõik ED. Järele jääb lõik AE, mis moodustab $\frac{9}{15}$ lõigust AB. Tähendab, me võime kirjutada:

$$\frac{13}{15}-\frac{4}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$



Joon. 18.

Esitatud näitest selgub, et vahe lugeja saadi lugejate lahutamisest, nimetaja jäi aga samaks.

Järelikult, **et lahutada võrdsete nimetajatega murde, tuleb lahutada lahutatava lugeja vähendatava lugejast ja jätta endine nimetaja.**

2. Erinevate nimetajatega murdude lahutamine.

Näide.

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}.$$

Kõigepealt teisendame need murrud ühenimelisteks:

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{6}{8}-\frac{5}{8}=\frac{6-5}{8}=\frac{1}{8}.$$

Vahepealne tehe $\frac{6}{8}-\frac{5}{8}$ on kirjutatud siin selguse mõttes, edaspidi võib selle ära jätta.

Seega, **et lahutada murd murrust, tuleb kõigepealt teisendada need ühenimelisteks, seejärel vähendatava lugejast lahutada lahutatava lugeja ja nende vahe alla kirjutada ühine nimetaja.**

Vaatleme näidet:

$$\frac{11}{12}-\frac{5}{8}=\frac{22-15}{24}=\frac{7}{24}.$$

3. Segaarvude lahutamine.

N ä i d e.

$$10\frac{3}{4}-7\frac{2}{3}.$$

Teisendame vähendatava ja lahutatava murdosad ühenimelisteks:

$$10\frac{3}{4}-7\frac{2}{3}=10\frac{9}{12}-7\frac{8}{12}=3\frac{1}{12}.$$

Me lahutasime täisosa täisosast ja murru murrust. Kuid esineb ka juhtumeid, kus lahutatava murdosa on suurem vähendatava murdosast. Niisugustel juhtumitel tuleb võtta vähendatava täisosast üks üheline, peenestada see niisugusteks osadeks, missugustes on väljendatud murdosa, ja liita vähendatava murdosaga. Seejärel tuleb lahutamine teostada samade reeglite järgi, nagu eelmise näite puhulgi:

$$9\frac{2}{5}-4\frac{7}{10}=9\frac{4}{10}-4\frac{7}{10}=8\frac{14}{10}-4\frac{7}{10}=4\frac{7}{10}.$$

§ 89. Murdude korrutamine.

Murdude korrutamise õppimisel vaatleme järgmisi küsimusi:

1. Murru korrutamine täisarvuga.
2. Osa leidmine antud arvust.
3. Täisarvu korrutamine murruga.
4. Murru korrutamine murruga.
5. Segaarvude korrutamine.
6. Protsendi mõiste.
7. Protsendi leidmine antud arvust.

Vaatleme neid järjekorras.

1. Murru korrutamine täisarvuga. Murru korrutamisel täisarvuga on sama mõte, mis täisarvu korrutamisel täisarvugagi. Korrutada murd (korrutatav) täisarvuga (korrutaja) — see tähendab koostada võrdsete liidetavate summa, milles iga liidetav on võrdne korrutatavaga, liidetavate arv on aga võrdne korrutajaga.

Tähendab, kui $\frac{1}{9}$ tuleb korrutada 7-ga, siis seda võib teostada järgmiselt:

$$\frac{1}{9} \cdot 7 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

Me leidsime kergesti tulemuse, kuna tehe taandus võrdsete nimetajatega murdude liitmisele. Järelikult,

$$\frac{1}{9} \cdot 7 = \frac{7}{9}.$$

Selle tehte vaatlemine näitab, et murru korrutamine täisarvuga on samaväärne selle murru suurendamisega nii mitu korda, kui mitu ühelist on selles täisarvus. Kuna aga murdu saame suurendada kas tema lugeja suurendamise teel ($\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{8}$) või tema nimetaja vähendamise teel ($\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{8 : 2} = \frac{3}{4}$), siis võime korrutada kas lugeja täisarvuga või jagada sellega nimetaja, kui niisugune jagamine on võimalik.

Siit saame reegli:

Et korrutada murd täisarvuga, tuleb korrutada murru lugeja selle täisarvuga ja jätta sama nimetaja ehk, kui võimalik, jagada nimetaja selle arvuga, jättes lugeja endiseks.

Korrutamisel on võimalikud ka taandamised, näiteks:

$$\frac{3}{10} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{10} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}; \quad \frac{5}{8} \cdot 16 = \frac{5 \cdot 16}{8} = 10.$$

2. Osa leidmine antud arvust. On olemas palju ülesandeid, millede lahendamisel tuleb leida osa antud arvust. Nende ülesannete erinevus harilikest seisneb selles, et nendes antakse mingisuguste esemete või mõõduühikute arv ja nõutakse leida selle arvu osa, kusjuures see osa on antud ülesandes murru kujul. Et paremini sellest aru saada, toome niisuguste ülesannete näiteid, seejärel tutvume aga nende lahendamise meetoditega.

Ü l e s a n n e 1. Minul oli 60 rubla; $\frac{1}{3}$ sellest rahast kulutasin ma raamatute ostmiseks. Kui palju maksid raamatud?

2. Ü l e s a n n e 2. Rong pidi läbima linnade A ja B vahemaa, mis oli 300 km. Ta on läbinud juba $\frac{2}{3}$ sellest vahemaast. Mitu kilomeetrit see on?

Ü l e s a n n e 3. Külas on 400 maja, kusjuures $\frac{3}{4}$ neist on tellistest, ülejäänud puust. Mitu maja on üldse tellistest selles külas?

Siin me esitasime mõningad nendest rohkearvulistest ülesannetest osa leidmise kohta antud arvust, milledega meil tuleb kohtuda. Neid ülesandeid harilikult nimetataksegi antud arvust osa leidmise ülesanneteks.

Ü l e s a n d e 1 l a h e n d u s. 60-st rublast kulutasin ma raamatute ostmiseks $\frac{1}{3}$. Tähendab, raamatute väärtuse leidmiseks tuleb arv 60 jagada 3-ga:

$$60 : 3 = 20.$$

Ü l e s a n d e 2 l a h e n d u s. Ülesande mõte seisneb selles, et tuleb leida $\frac{2}{3}$ vahemaast 300 km. Leiame algul $\frac{1}{3}$ arvust 300; selle saame, kui jagame 300 km 3-ga:

$$300 : 3 = 100 \text{ (see ongi } \frac{1}{3} \text{ arvust 300).}$$

Kahe kolmandiku leidmiseks 300-st tuleb saadud jagatist suurendada kaks korda, s. t. korrutada 2-ga:

$$100 \times 2 = 200 \text{ (see ongi } \frac{2}{3} \text{ arvust 300).}$$

Ü l e s a n d e 3 l a h e n d u s. Siin tuleb määrata tellistest majade arv, mis moodustab $\frac{3}{4}$ arvust 400. Leiame algul $\frac{1}{4}$ arvust 400.

$$400 : 4 = 100 \text{ (see ongi } \frac{1}{4} \text{ arvust 400).}$$

Kolme neljandiku leidmiseks 400-st tuleb saadud jagatist suurendada kolm korda, s. t. korrutada 3-ga:

$$100 \times 3 = 300 \text{ (see ongi } \frac{3}{4} \text{ arvust 400).}$$

Nende ülesannete lahendamise põhjal võime anda järgmise reegli:

Et leida murruga määratud osa antud arvust, tuleb see arv jagada murru nimetajaga ja saadud jagatis korrutada murru lugejaga.

3. Täisarvu korrutamine murruga. Varem (§ 26) oli kokku lepitud, et täisarvude korrutamise all tuleb mõista võrdsete liidetavate liitmist ($5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$). Selles paragrahvis (punkt 1) nägime, et murru korrutamine täisarvuga tähendab leida selle murruga võrdsete liidetavate summa.

Mõlemal juhtumil seisneb korrutamine võrdsete liidetavate summa leidmises.

Nüüd vaatleme aga täisarvu korrutamist murruga. Siin kohtume näiteks niisuguse korrutisega: $9 \cdot \frac{2}{3}$. On täiesti ilmne, et varem antud korrutamise definitsioon ei kehti antud juhtumi puhul. See on näha sellest, et me ei saa niisugust korrutamist asendada omavahel võrdsete arvude liitmisega.

Selle põhjal tuleb meil anda uus korrutamise definitsioon, s. t., teiste sõnadega, vastata küsimusele, mida tuleb mõista murruga korrutamise all, kuidas tuleb sellest tehtest aru saada.

Täisarvu murruga korrutamise mõte selgub järgmisest definitsioonist: **täisarvu (korrutatav) korrutamine murruga (korrutaja) tähendab leida selle murruga määratud osa korrutatavast.**

Nimelt, korrutada 9 murruga $\frac{2}{3}$ — see tähendab leida $\frac{2}{3}$ üheksast ühelisest. Eelmises punktis me lahendasime niisuguseid ülesandeid, mistõttu on kerge leida, et tulemuseks saadakse 6.

Kuid nüüd kerkib üles huvitav ja tähtis küsimus: miks niisuguseid esimesel pilgul täiesti erinevaid tehteid, nagu võrdsete arvude summa leidmine ja osa leidmine arvust, nimetatakse aritmeetikas ühe ja sama sõnaga «korrutamine»?

See toimub sellepärast, et endine tehe (arvu kordumine liidetavana mitu korda) ja uus tehe (osa leidmine arvust) annavad vastuse ühelaadsele küsimusele. Tähendab, me lähtume siin nendest kaalutlustest, et ühelaadseid küsimusi või ülesandeid lahendatakse ühe ja sama tehte abil.

Et sellest aru saada, vaatleme järgmist ülesannet: «1 m riiet maksab 50 rubla. Kui palju maksab 4 m samasugust riiet?»

See ülesanne lahendatakse rublade arvu (50) korrutamise teel meetrite arvuga (4), s. t. $50 \times 4 = 200$ (rubla).

Võtame samasuguse ülesande, ainult et selles on riide hulk väljendatud murdarvudega: «1 m riiet maksab 50 rubla. Kui palju maksab $\frac{3}{4}$ m samasugust riiet?»

See ülesanne tuleb lahendada samuti rublade arvu (50) korrutamise teel meetrite arvuga $\left(\frac{3}{4}\right)$.

Võib veel mitu korda ülesande mõtet muutmata muuta ülesandes arve, näiteks võtta $\frac{9}{10}$ m või $2\frac{3}{10}$ m jne.

Kuna nendel ülesannetel on üks ja sama sisu, erinevad aga ainult arvude poolest, siis me nimetame tehet, mida kasutatakse nende lahendamisel, ühe ja sama sõnaga — korrutamiseks.

Kuidas teostatakse täisarvu korrutamist murruga?

Võtame viimases ülesandes antud arvud:

$$50 \cdot \frac{3}{4} = ?$$

Kooskõlas definitsiooniga võime leida $\frac{3}{4}$ arvust 50. Leiame algul $\frac{1}{4}$ arvust 50, seejärel $\frac{3}{4}$.

$$\frac{1}{4} \text{ arvust } 50 \text{ on } \frac{50}{4};$$
$$\frac{3}{4} \text{ arvust } 50 \text{ on } \frac{50 \cdot 3}{4}.$$

Järelikult,

$$50 \cdot \frac{3}{4} = \frac{50 \cdot 3}{4} = \frac{25 \cdot 3}{2} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}.$$

Vaatleme veel ühte näidet: $12 \cdot \frac{5}{8} = ?$

$$\frac{1}{8} \text{ arvust } 12 \text{ on } \frac{12}{8};$$
$$\frac{5}{8} \text{ arvust } 12 \text{ on } \frac{12 \cdot 5}{8}.$$

Järelikult,

$$12 \cdot \frac{5}{8} = \frac{12 \cdot 5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Siit saame reegli:

Et korrutada täisarv murruga, tuleb täisarv korrutada murru lugejaga ja võtta see korrutis lugejaks, selle alla kirjutada nimetajaks aga antud murru nimetaja.

Kirjutame selle reegli tähtede abil:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

Et see reegel oleks täiesti arusaadav, tuleb meenutada, et murdu võib vaadelda kui jagatist. Seepärast on leitud reeglit kasulik võrrelda reegliga arvu korrutamise kohta jagatisega, mis sõnastati paragrahvis 38. Pöörake tähelepanu sellele, et seal saadi samasugune reegel.

Tuleb meeles pidada, et enne korrutamist tuleb t a a n d a d a (kui see on võimalik), näiteks: $10 \cdot \frac{3}{4} = \frac{10 \cdot 3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$.

4. Murru korrutamine murruga. Murru korrutamisel murruga on sama mõte, mis täisarvu korrutamisel murrugagi, s. t. murru korrutamisel murruga tuleb esimesest murrust (korrutatavast) leida teise murruga määratud osa.

Nimelt, korrutada $\frac{3}{4}$ murruga $\frac{1}{2}$ (poolega) — see tähendab leida pool $\frac{3}{4}$-st.

Kuidas teostada murru korrutamist murruga?

Võtame näite: korrutada $\frac{3}{4}$ murruga $\frac{5}{7}$. See tähendab, et tuleb leida $\frac{5}{7}$ arvust $\frac{3}{4}$. Leiame algul $\frac{1}{7}$ arvust $\frac{3}{4}$, seejärel aga $\frac{5}{7}$.

$$\frac{1}{7} \text{ arvust } \frac{3}{4} \text{ on: } \frac{3}{4 \cdot 7}$$

$$\frac{5}{7} \text{ arvust } \frac{3}{4} \text{ on: } \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$$

Seega,

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}.$$

Veel näide: korrutada $\frac{5}{8}$ murruga $\frac{4}{9}$.

$$\frac{1}{9} \text{ arvust } \frac{5}{8} \text{ on } \frac{5}{8 \cdot 9};$$

$$\frac{4}{9} \text{ arvust } \frac{5}{8} \text{ on } \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 9}.$$

Seega, $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 9} = \frac{5}{18}$.

Nende näidete põhjal võib anda järgmise reegli.

Et korrutada murd murruga, tuleb lugeja korrutada lugejaga ja nimetaja nimetajaga ning esimene korrutis võtta lugejaks, teine korrutis nimetajaks.

Selle reegli võib üldkujul kirjutada nii:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Korrutamisel on tingimata vaja (kui võimalik) taandada. Vaatleme näiteid:

$$\text{a) } \frac{7}{12} \cdot \frac{9}{14} = \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 14} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8};$$

$$\text{b) } \frac{5}{18} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 3}{18 \cdot 10} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 2} = \frac{1}{12}.$$

5. Segaarvude korrutamine. Kuna segaarve võib kergesti teisendada liigmurdudeks, siis harilikult kasutataksegi seda asjaolu segaarvude korrutamisel. See tähendab, et nendel juhtumitel, kui korrutatav või korrutaja või mõlemad tegurid on väljendatud segaarvudega, siis asendatakse need liigmurdudega. Korrutame näiteks segaarvud: $2\frac{1}{2}$ ja $3\frac{1}{5}$. Teisendame mõlemad segaarvud liigmurdudeks ja seejärel korrutame saadud murrud murdude korrutamise reegli järgi:

$$2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{5} = \frac{5}{2}\cdot\frac{16}{5} = \frac{5\cdot 18}{2\cdot 5} = \frac{1\cdot 8}{1\cdot 1} = 8\,.$$

R e e g e l. **Et korrutada segaarve, tuleb need kõigepealt teisendada liigmurdudeks ja seejärel korrutada saadud liigmurrud murdude korrutamise reegli järgi.**

M ä r k u s. Kui üks tegureist on täisarv, siis korrutamist võib teostada jaotuvuse seaduse põhjal järgmiselt:

$$4\frac{2}{5}\cdot 3 = (4+\frac{2}{5})\cdot 3 = 4\cdot 3 + \frac{2}{5}\cdot 3 = 12 + \frac{6}{5} = 13\frac{1}{5}\,.$$

6. Protsendi mõiste. Ülesannete lahendamisel ja mitmesuguste praktiliste arvestuste sooritamisel me kasutame kõikvõimalikke murde. Kuid tuleb pidada silmas, et paljusid suurusi võib väljendada mitte mistahes murdudega, vaid nende alljaotuste suhtes loomulike murdudega. Näiteks võib võtta ühe sajandiku $(\frac{1}{100})$ rublast, see on 1 kopikas; kaks sajandikku, kolm sajandikku — see on vastavalt 2 kopikat, 3 kopikat. Samuti võib võtta $\frac{1}{10}$ rublast, see on 10 kopikat; pool rublast, s. t. 50 kopikat. Kuid praktiliselt ei saa võtta näiteks $\frac{2}{7}$ rublast sellepärast, et rubla seitsmeks osaks ei jagu.

Raskusmõõduühik, s. t. kilogramm, lubab kõigepealt kümnendikjaotusi, näiteks $\frac{1}{10}$ kg ehk 100 g. Kilogrammi niisuguseid osasid nagu $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$ ei kasutata.

Üldiselt on meie (meeter-) mõõdud seotud kümnendsüsteemiga ja seepärast lubavad need kümnendikjaotusi.

Tuleb ainult märkida, et väga kasulik ja otstarbekohane on kasutada ka kõige erinevamatel juhtumitel suuruste ühesuguseid alljaotusi. Kogemused on näidanud, et niisuguseks end hästi õigustanud jaotiseks on «sajaline» jaotis. Vaatleme mõningaid näiteid, mis kuuluvad praktilise elu kõige erinevamatesse valdkondadesse.

1. Raamatu hinda alandati $\frac{12}{100}$ võrra esialgsest hinnast.

N ä i d e. Raamatu esialgne hind oli 10 rubla. Hinda alandati 1 rubla 20 kopika võrra.

2. Hoiukassa maksab hoiustajale aasta jooksul $\frac{2}{100}$ hoiukassasse paigutatud summalt (hoiuselt).

N ä i d e. Hoiukassasse pandi 500 rubla. Aasta jooksul saadi sellelt summalt tulu 10 rubla.

3. Ühe kooli abiturientide arv moodustas $\frac{5}{100}$ õpilaste üldarvust.

N ä i d e. Koolis õppis üldse 1 200 õpilast, nendest lõpetas kooli 60.

Arvu sajandikku nimetatakse protsendiks.[1] Näiteks võib selle asemel, et ütelda: tehas andis möödunud kuul praaki $\frac{1}{100}$ tema poolt toodetud produktidest, ütelda: tehas andis möödunud kuul praaki üks protsent. Selle asemel, et ütelda: tehas tootis produkte $\frac{4}{100}$ võrra rohkem kui plaanis ette nähtud, me ütleme: tehas ületas plaani 4 protsendi võrra.

Eespool käsitletud näiteid võib sõnastada ka teisiti, näiteks järgmiselt:

1. Raamatu hinda alandati 12 protsendi võrra esialgsest hinnast.
2. Hoiukassa maksab hoiustajale aastas 2 protsenti hoiukassase paigutatud summalt.
3. Ühe kooli abiturientide arv moodustas 5 protsenti selle kooli kõigi õpilaste arvust.

Kirjutusviisi lühendamiseks kasutatakse sõna «protsent» asemel märki %.

Tuleb ainult meeles pidada, et arvutustes märki % harilikult ei kirjutata, see kirjutatakse ülesande tingimustes ja lõpptulemuses. Arvutuste teostamisel tuleb selle märgiga täisarv asendada murruga, mille nimetaja on 100.

Me peame oskama asendada täisarvu, märgiga %, murruga, mille nimetaja on 100:

$$2\% = \frac{2}{100}; \quad 25\% = \frac{25}{100}; \quad 4\% = \frac{4}{100}; \quad 40\% = \frac{40}{100}.$$

Samuti peame me oskama ümberpöördud tehet, s. t. peame oskama asendada murdu, mille nimetaja on 100, % märgi ja arvuga:

$$\frac{1}{100} = 1\%; \quad \frac{19}{100} = 19\%; \quad \frac{3}{100} = 3\%; \quad \frac{27}{100} = 27\%.$$

7. Protsendi leidmine antud arvust. Ü l e s a n n e 1. Koolile toodi 200 m³ puid, kusjuures kasepuid toodi 30%. Kui palju toodi kasepuid?

Selle ülesande mõte seisneb selles, et kasepuud moodustasid ainult osa koolile toodud puudest ja see osa väljendus murruga $\frac{30}{100}$. Tähendab, meil on ülesanne osa leidmise kohta antud arvust.

---

[1] Sõna «protsent» on laenatud ladina keelest ja tema tüvi «*tsent*» tähendab s a d a. Koos eessõnaga (*pro centum*) tähendab see «saja eest». Niisuguse väljenduse mõte tuleneb sellest asjaolust, et esialgselt nimetati vanas Roomas protsentideks raha, mida maksis võlgnik laenuandjale «iga saja rahaühiku eest». Sõna «*tsent*» on tuttav juba sõnadest: tsentner (sada kilogrammi), sentimeeter.

Selle lahendamiseks peame 200 korrutama murruga $\frac{30}{100}$ (ülesanded osa leidmise kohta antud arvust lahendatakse arvu korrutamise teel murruga).

$$200 \cdot \frac{30}{100} = \frac{200 \cdot 30}{100} = 60 \ (m^3).$$

Tähendab, 30% arvust 200 on 60.

Selles ülesandes esinevat murdu saab taandada 10-ga. Seepärast võib kõigepealt taandada seda murdu; ülesande lahendus sellest ei muutu.

Ü l e s a n n e 2. Laagris oli 300 erineva vanusega last. 11-aastasi lapsi oli 21%, 12-aastasi 61% ja lõpuks 13-aastasi 18%. Kui palju oli laagris eraldi 11-aastasi, 12-aastasi ja 13-aastasi lapsi?

Selles ülesandes tuleb teha kolm arvutust, s. t. leida 11-aastaste laste arv, siis 12-aastaste laste arv ja lõpuks 13-aastaste laste arv. Tähendab, siin tuleb kolm korda leida osa antud arvust. Teeme seda:

1) Kui palju oli 11-aastasi lapsi?

$$300 \cdot \frac{21}{100} = \frac{300 \cdot 21}{100} = 63.$$

2) Kui palju oli 12-aastasi lapsi?

$$300 \cdot \frac{61}{100} = \frac{300 \cdot 61}{100} = 183.$$

3) Kui palju oli 13-aastasi lapsi?

$$300 \cdot \frac{18}{100} = \frac{300 \cdot 18}{100} = 54.$$

Pärast ülesande lahendamist on soovitav liita leitud arvud; nende summa peab olema 300:

$$63 + 183 + 54 = 300.$$

Samuti tuleb pöörata tähelepanu sellele, et ülesande tingimustes antud protsentide summa on 100:

$$21\% + 61\% + 18\% = 100\%.$$

See ütleb seda, et laagris viibivate laste üldarv oli võetud sajaks protsendiks.

Ü l e s a n n e 3. Tööline sai kuus 1 200 rubla. Sellest kulutas ta 65% toidule, 6% korterile ja küttele, 4% gaasile, elektrile ja raadiole, 10% kultuurilisteks vajadusteks, järelejäänud 15% pani ta aga hoiukassasse. Kui palju raha kulutas tööline igaks nimetatud tarbeks?

Selle ülesande lahendamiseks tuleb 5 korda leida osa arvust 1 200. Teeme seda.

1) Kui palju raha kulutati toidule? Ülesandes on antud, et see kulu moodustas 65% kogu teenistusest, s. t. $\frac{65}{100}$ arvust 1 200. Arvutame:

$$1\,200 \cdot \frac{65}{100} = \frac{1\,200 \cdot 65}{100} = 780 \text{ (rubla)}.$$

2) Kui palju raha maksti korteri ja kütte eest? Arutledes analoogiliselt eelmisele, saame:

$$1\,200 \cdot \frac{6}{100} = \frac{1\,200 \cdot 6}{100} = 72 \text{ (rubla)}.$$

3) Kui palju raha maksti gaasi, elektri ja raadio eest?

$$1\,200 \cdot \frac{4}{100} = \frac{1\,200 \cdot 4}{100} = 48 \text{ (rubla)}.$$

4) Kui palju raha kulutati kultuurilisteks vajadusteks?

$$1\,200 \cdot \frac{10}{100} = \frac{1\,200 \cdot 10}{100} = 120 \text{ (rubla)}.$$

5) Kui palju raha pani tööline hoiukassasse?

$$1\,200 \cdot \frac{15}{100} = \frac{1\,200 \cdot 15}{100} = 180 \text{ (rubla)}.$$

Kontrollimiseks on otstarbekohane liita need 5 leitud arvu. Nende summa peab olema 1 200 rubla. Kogu teenistus võetakse tavaliselt sajaks protsendiks, et kergesti kontrollida (liites protsentide arvud) ülesande tingimustes antud andmeid.

Me lahendasime kolm ülesannet. Vaatamata sellele, et nendes ülesannetes käsitleti erinevaid suurusi (puude toomist koolile, erineva vanusega laste arvu, töölise kulutusi), lahendati need ühel ja samal meetodil. Seda seepärast, et kõigis neis ülesannetes oli tarvis leida protsendiga määratud osa antud arvust.

§ 90. Murdude jagamine.

Murdude jagamise õppimisel vaatleme järgmisi küsimusi:

1. Täisarvu jagamine täisarvuga.
2. Murru jagamine täisarvuga.

3. Täisarvu jagamine murruga.
4. Murru jagamine murruga.
5. Segaarvude jagamine.
6. Arvu leidmine tema antud osa järgi.
7. Arvu leidmine tema antud protsendi järgi.

Vaatleme neid küsimusi antud järjekorras.

1. Täisarvu jagamine täisarvuga. Nagu oli öeldud täisarvude osas, nimetatakse jagamiseks tehet, mis seisneb selles, et antud kahe teguri korrutise (jagatav) ja ühe teguri (jagaja) järgi leitakse teine tegur.

Täisarvu jagamist täisarvuga me vaatlesime selle raamatu esimeses osas. Seal kohtusime kahe jagamise juhtumiga: jäägita jagamisega ($150:10=15$) ja jäägiga jagamisega ($100:9=11$ ja jääk 1). Me võime järelikult ütelda, et täisarvude vallas pole täpne jagamine alati võimalik, sest et jagatav ei ole mitte alati jagaja ja mingi täisarvu korrutis. Pärast murruga korrutamise tundmaõppimist võime aga täisarvude iga jagamise juhtumi lugeda võimalikuks (välja arvatud jagamine nulliga).

Näiteks, jagada 7 arvuga 12 — see tähendab leida niisugune arv, mille korrutis 12-ga oleks võrdne 7-ga. Selliseks arvuks on murd $\frac{7}{12}$, sest et $\frac{7}{12}\cdot 12=7$. Veel näide: $14:25=\frac{14}{25}$, sest et $\frac{14}{25}\cdot 25=14$.

Seega, **et jagada täisarv täisarvuga, tuleb moodustada murd, mille lugeja on võrdne jagatavaga ja nimetaja — jagajaga.**

2. Murru jagamine täisarvuga. Jagada murd $\frac{6}{7}$ arvuga 3. Kooskõlas eespool antud jagamise definitsiooniga on meil siin korrutis $(\frac{6}{7})$ ja üks tegureist (3); tuleb leida niisugune teine tegur, mille korrutamine 3-ga annaks antud korrutise $\frac{6}{7}$. On ilmne, et see teine tegur peab olema kolm korda väiksem korrutisest $\frac{6}{7}$. Tähendab, ülesanne seisneb selles, et murdu $\frac{6}{7}$ vähendada 3 korda.

Me teame juba, et murdu võib vähendada kas tema lugeja vähendamise teel või tema nimetaja suurendamise teel. Seepärast võib kirjutada:

$$\frac{6}{7}:3=\frac{6:3}{7}=\frac{2}{7}.$$

Antud juhtumil lugeja 6 jagub 3-ga, mistõttu tuleb vähendada 3 korda lugejat.

Võtame teise näite: $\frac{5}{8}$ jagada 2-ga. Siin lugeja 5 ei jagu 2-ga, tähendab, selle arvuga tuleb korrutada nimetajat:

$$\frac{5}{8}:2=\frac{5}{8\cdot 2}=\frac{5}{16}.$$

Selle põhjal võib sõnastada järgmise reegli: **et jagada murd täisarvuga, tuleb jagada selle täisarvuga murru lugeja** (kui see on võimalik) **ja jätta sama nimetaja, või korrutada selle arvuga murru nimetaja ja jätta sama lugeja.**

Jagamise juures on võimalikud ka taandamised, näiteks:

a) $\frac{8}{15}:6=\frac{8}{15\cdot 6}=\frac{4}{15\cdot 3}=\frac{4}{45}$; b) $\frac{10}{11}:15=\frac{10}{11\cdot 15}=\frac{2}{11\cdot 3}=\frac{2}{33}$.

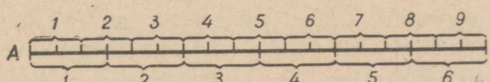
3. Täisarvu jagamine murruga. Olgu tarvis jagada 5 murruga $\frac{1}{2}$, s. t. leida niisugune arv, mis pärast korrutamist $\frac{1}{2}$-ga annaks korrutiseks 5. On ilmne, et see arv peab olema suurem kui 5, kuna $\frac{1}{2}$ on lihtmurd, arvu korrutamisel lihtmurruga aga korrutis on väiksem tegurist. Et see oleks selgem, kirjutame selle tehte järgmiselt: $5:\frac{1}{2}=x$, tähendab, $x\cdot\frac{1}{2}=5$.

Me peame leidma niisuguse arvu x, mis korrutamisel $\frac{1}{2}$-ga annaks 5. Kuna mingi arvu korrutamine $\frac{1}{2}$-ga tähendab leida $\frac{1}{2}$ sellest arvust, siis järelikult $\frac{1}{2}$ tundmatust arvust x on võrdne 5-ga, kogu arv x on aga kaks korda suurem, s. t. $5\cdot 2=10$.

Seega, $5:\frac{1}{2}=5\cdot 2=10$.

Kontrollime: $10\cdot\frac{1}{2}=\frac{10\cdot 1}{2}=5$.

Vaatleme veel ühte näidet. Olgu tarvis 6 jagada $\frac{2}{3}$-ga. Katsume algul leida otsitava tulemuse joonise abil (joon. 19). Kujutame lõigu AB, mis on võrdne 6 mingi pikkusühikuga, ja jaotame iga



Joon. 19.

ühiku 3-ks võrdseks osaks. Igas ühikus on kolm kolmandikku ($\frac{3}{3}$, kogu lõigus AB aga 6 korda rohkem, s. t. $\frac{18}{3}$. Ühendame väikeste sulgude abil saadud 18 lõiku kahekaupa rühmadeks; saame 9 rühma. Tähendab, murd $\frac{2}{3}$ sisaldub kuues ühikus 9 korda või, teiste sõnadega, murd $\frac{2}{3}$ on 9 korda väiksem 6-st tervest ühikust. Järelikult,

$$6 : \frac{2}{3} = 9.$$

Kuidas saadakse see tulemus jooniseta, ainult arvutuste abil? Arutleme järgmiselt: 6 tuleb jagada $\frac{2}{3}$-ga, s. t. tuleb vastata küsimusele, mitu korda $\frac{2}{3}$ sisaldub arvus 6. Leiame algul, mitu korda $\frac{1}{3}$ sisaldub arvus 6. Terves ühelises on 3 kolmandikku, 6 ühelises aga 6 korda rohkem, s. t. 18 kolmandikku; selle arvu leidmiseks me peame korrutama 6 arvuga 3. Tähendab, $\frac{1}{3}$ sisaldub 6-s ühelises 18 korda, $\frac{2}{3}$ sisaldub aga 6-s ühelises mitte 18 korda, vaid kaks korda vähem, s. t. $18 : 2 = 9$. Järelikult, 6 jagamisel $\frac{2}{3}$-ga me teostasime järgmised tehted:

$$6 : \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Siit saame reegli täisarvu jagamise kohta murruga.

Et jagada täisarv murruga, tuleb see täisarv korrutada antud murru nimetajaga ja võtta see korrutis lugejaks ning jagada antud murru lugejaga.

Kirjutame selle reegli tähtede abil:

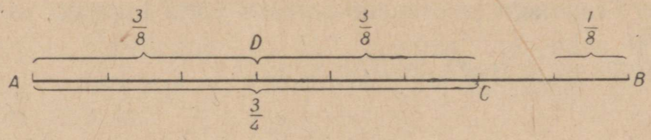
$$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Et sellest reeglist täiesti aru saada, meenutame, et murdu võib vaadelda kui jagatist. Seepärast on saadud reeglit kasulik võrrelda reegliga arvu jagamise kohta jagatisega, mida käsitleti § 38. Pöörake tähelepanu sellele, et seal saadi samasugune sõnastus.

Jagamisel on võimalikud ka taandamised, näiteks:

$$12 : \frac{9}{10} = \frac{12 \cdot 10}{9} = \frac{4 \cdot 10}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

4. Murru jagamine murruga. Olgu tarvis $\frac{3}{4}$ jagada $\frac{3}{8}$-ga. Mida tähistab jagamise tulemuseks saadav arv? See arv annab vastuse küsimusele, mitu korda murd $\frac{3}{8}$ sisaldub murrus $\frac{3}{4}$. Et selgitada seda küsimust, teeme joonise (joon. 20).



Joon. 20.

Võtame lõigu AB ühikuks, jaotame selle 4-ks võrdseks osaks ja märgime ära 3 niisugust osa. Lõik AC on võrdne $\frac{3}{4}$ lõigust AB. Jaotame nüüd igaühe nendest neljast esialgsest lõigust pooleks, siis lõik AB jaotub kaheksaks võrdseks osaks, kusjuures iga osa on võrdne $\frac{1}{8}$ lõigust AB. Ühendame loogeliste sulgude abil need lõigud kolmekaupa rühmadeks, siis kumbki lõikudest AD ja DC on võrdne $\frac{3}{8}$ lõigust AB. Jooniselt näeme, et lõik, mis on võrdne $\frac{3}{8}$-ga lõigust AB, sisaldub $\frac{3}{4}$-ga võrdses lõigus täpselt 2 korda; tähendab, jagamistehte võib kirjutada järgmiselt:

$$\frac{3}{4} : \frac{3}{8} = 2.$$

Vaatleme veel ühte näidet. Olgu tarvis $\frac{15}{16}$ jagada $\frac{3}{32}$-ga.

Siin võime arutleda järgmiselt: meil tuleb leida niisugune arv, mis pärast korrutamist $\frac{3}{32}$-ga annab korrutiseks $\frac{15}{16}$. Kirjutame selle tehte üles nii:

$$\frac{15}{16} : \frac{3}{32} = x;$$

siit

$$\frac{3}{32} \cdot x = \frac{15}{16},$$

$\frac{3}{32}$ tundmatust arvust x on $\frac{15}{16}$,

$\frac{1}{32}$ tundmatust arvust x on $\frac{15}{16 \cdot 3}$,

$\frac{32}{32}$ arvust x on $\frac{15 \cdot 32}{16 \cdot 3}$

Järelikult,

$$\frac{15}{16} : \frac{3}{32} = \frac{15 \cdot 32}{16 \cdot 3} = 10.$$

Seega, **et jagada murd murruga, tuleb esimese murru lugeja korrutada teise murru nimetajaga, esimese murru nimetaja aga**

teise murru lugejaga ja esimene korrutis võtta lugejaks ning teine nimetajaks.

Kirjutame selle reegli tähtede abil:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Jagamise juures on võimalikud taandamised, näiteks:

$$\frac{2}{3}:\frac{8}{15}=\frac{2\cdot15}{3\cdot8}=\frac{1\cdot5}{1\cdot4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}.$$

5. **Segaarvude jagamine.** Segaarvude jagamisel tuleb need kõigepealt teisendada liigmurdudeks, seejärel aga teostada saadud murdude jagamine murdarvude jagamise reegli järgi. Vaatleme näidet:

$$7\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}.$$

Teisendame segaarvud liigmurdudeks:

$$7\frac{1}{2}=\frac{15}{2},\quad 3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}.$$

Nüüd jagame:

$$\frac{15}{2}:\frac{10}{3}=\frac{15\cdot3}{2\cdot10}=\frac{3\cdot3}{2\cdot2}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}.$$

Seega, **et jagada segaarve, tuleb teisendada need liigmurdudeks ja seejärel jagada murdude jagamise reegli järgi.**

6. **Arvu leidmine tema antud osa järgi.** Mitmesuguste ülesannete hulgas murdude kohta esineb sageli niisuguseid, millistes on antud tundmatu arvu mingi osa ja tuleb leida see tundmatu arv. Seda tüüpi ülesanded on pöördülesanded nende ülesannete suhtes, millistes tuleb leida osa antud arvust; nendes ülesannetes oli antud arv ja tuli leida mingi osa sellest arvust, siin antakse aga osa arvust ja tuleb leida arv ise. See mõte saab enam selgemaks, kui vaatleme seda tüüpi ülesannete lahendusviise.

Ülesanne 1. Esimesel päeval klaasis klaasija 50 akent, mis moodustab $\frac{1}{3}$ ehitatud maja kõigist akendest. Mitu akent oli üldse sellel majal?

Lahendus. Ülesandes on öeldud, et klaasitud 50 akent moodustab $\frac{1}{3}$ maja kõigist akendest, tähendab, üldse on aknaid 3 korda rohkem, s. t. $50\cdot3=150$.

Majal on 150 akent.

Ülesanne 2. Kauplus müüs 1 500 kg jahu, mis moodustab $\frac{3}{8}$ kogu kaupluses olevast jahu tagavarast. Kui suur oli jahu tagavara?

L a h e n d u s. Ülesande andmetest on näha, et müüdud 1 500 kg jahu moodustab $\frac{3}{8}$ kogu tagavarast; tähendab, $\frac{1}{8}$ sellest tagavarast on 3 korda väiksem, s. t. selle leidmiseks tuleb 1 500 vähendada 3 korda:

$$1\,500 : 3 = 500 \text{ (see on } \frac{1}{8} \text{ tagavarast).}$$

On ilmne, et kogu tagavara on 8 korda suurem. Järelikult,

$$500 \cdot 8 = 4\,000 \text{ (kg).}$$

Esialgne jahu tagavara oli kaupluses 4 000 kg.

Selle ülesande põhjal võime anda järgmise reegli:

Et leida arvu tema antud osa järgi, tuleb see antud osa jagada murru lugejaga ja tulemus korrutada murru nimetajaga.

Me lahendasime kaks ülesannet arvu leidmise kohta tema antud osa järgi. Niisuguseid ülesandeid, nagu see on eriti hästi näha eelnevast, lahendatakse kahe tehtega: jagamisega (kui leitakse ühte osa) ja korrutamisega (kui leitakse kogu arv).

Tundes aga murdude jagamist, võime eespool käsitletud ülesandeid lahendada ainult ühe tehtega ja nimelt: murruga jagamisega.

Näiteks võib eelmist ülesannet lahendada ühe tehtega järgmiselt:

$$1\,500 : \frac{3}{8} = \frac{1\,500 \cdot 8}{3} = 4\,000 \text{ (kg)}$$

Edaspidi me lahendame kõik ülesanded arvu leidmise kohta tema antud osa järgi ühe tehtega — jagamisega.

7. Arvu leidmine tema protsentide järgi. Nendes ülesannetes tuleb leida arv, teades tema protsente.

Ü l e s a n n e 1. Käesoleva aasta algul sain ma hoiukassast 60 rubla tulu summalt, mille ma paigutasin hoiukassasse aasta tagasi. Kui palju raha paigutasin ma hoiukassasse? (Kassa annab hoiustajale aastas 2% tulu).

Ülesande mõte seisneb selles, et ma olin teatud summa raha paigutanud hoiukassasse, mis oli seal aasta. Aasta möödudes sain ma sellelt summalt 60 rubla tulu, mis moodustab $\frac{2}{100}$ hoiukassasse paigutatud rahast. Kui palju raha panin ma hoiukassasse?

Järelikult, teades selle raha osa, mis on väljendatud kahel viisil (rublades ja murru kujul), peame leidma kogu summa, mis on praegu veel teadmata. See on harilik ülesanne arvu leidmise kohta tema antud osa järgi. Niisuguseid ülesandeid lahendatakse jagamistehtega:

$$60 : \frac{2}{100} = \frac{60 \cdot 100}{2} = 3\,000 \text{ (rubla).}$$

Seega hoiukassasse oli paigutatud 3 000 rubla.

Ü l e s a n n e 2. Kalurid täitsid kahe nädalaga kuuplaanist 64%, püüdes 512 t kala. Kui suur oli nende kuuplaan?

Ülesande andmetest on teada, et kalurid täitsid osa plaanist. See osa oli võrdne 512 tonniga, mis moodustas 64% plaanist. Mitu tonni kala tuleb aga püüda plaani järgi, see on meil teadmata. Selle arvu leidmises seisnebki ülesande lahendus.

Niisugused ülesanded lahendatakse jagamisega:

$$512 : \frac{64}{100} = \frac{512 \cdot 100}{64} = 800 \text{ (t)}.$$

Tähendab, plaani järgi tuleb püüda 800 t kala.

Ü l e s a n n e 3. Rong sõitis Riiast Moskvasse. Kui rong möödus 276-ndast kilomeetripostist, küsis üks reisijatest konduktorilt, kui suure osa teest on nad juba läbinud. Selle peale vastas konduktor: «30% kogu teest». Mitu kilomeetrit on Riiast Moskvasse?

Ülesande andmetest nähtub, et 30% Riia ja Moskva vahemaast on 276 km. Meil tuleb leida aga kogu see vahemaa, s. t. antud osa järgi tuleb leida terve:

$$276 : \frac{30}{100} = \frac{276 \cdot 100}{30} = 920 \text{ (km)}.$$

§ 91. Pöördarvud. Jagamise asendamine korrutamisega.

Võtame murru $\frac{2}{3}$ ja vahetame selle lugeja nimetajaga, saame $\frac{3}{2}$. Me saime murru, mida nimetatakse antud murru p ö ö r d m u r r u k s. Et saada murdu, mis oleks antud murru pöördmurruks, tuleb antud murru lugeja paigutada nimetaja kohale, nimetaja aga lugeja kohale. Sel viisil võime leida mistahes murru pöördmurru. Näiteks:

$$\frac{3}{4}, \text{ pöördmurd } \frac{4}{3}; \quad \frac{5}{6}, \text{ pöördmurd } \frac{6}{5}.$$

Kahte murdu, mis on niisuguse omadusega, et esimese lugeja on teise nimetajaks, esimese nimetaja aga teise lugejaks, nimetatakse **teineteise pöördmurdudeks.**

Vaatleme nüüd, missugune murd on murru $\frac{1}{2}$ pöördmurruks. On ilmne, et selleks on $\frac{2}{1}$ ehk lihtsalt 2. Otsides murdu, mis oleks antud murru pöördmurruks, me saime täisarvu. See juhtum ei esine mitte ainult üks kord, vastupidi, kõigi nende murdude pöördmurrud, mille lugeja on 1 (üheline), on täisarvud, näiteks:

$$\frac{1}{3}, \text{ pöördmurd } 3; \quad \frac{1}{5}, \text{ pöördmurd } 5.$$

Kuna pöördmurdude leidmisel võime saada ka täisarvud, siis edaspidi me räägime mitte pöördmurdudest, vaid pöördarvudest.

Selgitame, kuidas kirjutada arvu, mis oleks täisarvu pöördarvuks. Murdude puhul on see lihtne: tuleb ainult nimetaja asetada lugeja kohale. Selle meetodi abil võib leida ka täisarvu pöördarvu, kuna iga täisarvu võib mõttes kujutada murruna, mille nimetaja on 1. Tähendab, arvu 7 pöördarvuks on $\frac{1}{7}$, sest et $7 = \frac{7}{1}$; arvu 10 pöördarvuks on $\frac{1}{10}$, kuna $10 = \frac{10}{1}$.

Seda mõtet võib sõnastada ka teisiti: **arvu pöördarvu leidmiseks tuleb arv 1 jagada antud arvuga.** See reegel ei ole õige mitte ainult täisarvude puhul, vaid ka murdarvude puhul. Tõepoolest, kui meil tuleb kirjutada arv, mis oleks murru $\frac{5}{9}$ pöördarvuks, siis võime võtta arvu 1 ja jagada selle $\frac{5}{9}$-ga, s. t.

$$1 : \frac{5}{9} = \frac{9}{5} \text{ ehk } \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Näitame nüüd ühte pöördarvude omadust, mille teadmine on meile kasulik: **pöördarvude korrutis võrdub ühega.** Tõepoolest:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1; \quad \frac{1}{12} \cdot 12 = 1; \quad \frac{9}{17} \cdot \frac{17}{9} = 1.$$

Kasutades seda omadust, võime leida pöördarvud järgmisel viisil. Olgu tarvis leida arvu 8 pöördarv. Tähistame selle tähega x, siis $8 \cdot x = 1$, siit $x = \frac{1}{8}$. Leiame veel murru $\frac{7}{12}$ pöördarvu; tähistame selle tähega x, siis $\frac{7}{12} \cdot x = 1$, siit $x = 1 : \frac{7}{12}$ ehk $x = \frac{12}{7}$.

Me käsitlesime siin pöördarvude mõistet sellepärast, et täiendada teadmisi murdude jagamisest.

Kui jagada arv 6 murruga $\frac{3}{5}$, siis sooritame järgmised tehted:

$$6 : \frac{3}{5} = \frac{6 \cdot 5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{1} = 10.$$

Pöörake eriti tähelepanu avaldisele $\frac{6 \cdot 5}{3}$ ja võrrelge seda antud avaldisega: $6 : \frac{3}{5}$.

Kui vaadelda ainult avaldist $\frac{6 \cdot 5}{3}$, ilma et see oleks seoses eelnevaga, siis ei saa lahendada küsimust, millest see avaldis tekkis: kas 6 jagamisest $\frac{3}{5}$-ga või 6 korrutamisest $\frac{5}{3}$-ga. Mõlemal juhtumil saadakse üks ja sama avaldis. Seepärast võime ütelda, et **arvu jagamist teisega võib vaadelda kui jagatava korrutamist jagaja pöördarvuga.**

Näited, mida me allpool esitame, kinnitavad seda järeldust:

$$1)\ 12 : \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{4}{3} = \frac{12 \cdot 4}{3} = 16;$$

$$2)\ 18 : \frac{5}{6} = 18 \cdot \frac{6}{5} = \frac{18 \cdot 6}{5} = \frac{108}{5} = 21\frac{3}{5}.$$

Üheteistkümnes peatükk.

TEHETE SEADUSTE JA OMADUSTE LAIENDAMINE MURDARVUDELE.

§ 92. Liitmine.

Täisarvude käsitlemisel me vaatlesime mitmesuguseid tehete omadusi. Nüüd pärast murdudega tutvumist näitame, et need omadused jäävad kehtima ka murdarvude puhul.

1. Murdarvude summa allub vahetuvuse (kommutatiivsuse) seadusele, s. t. summa ei muutu liidetavate järjekorra muutmisel.

Võtame kaks murdu: $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$.

Nende kahe murru summa $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ võrdub $\frac{5}{6}$-ga sõltumata sellest, missuguses järjekorras me need murrud liidame, s. t.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}.$$

2. Murdarvude summa allub ühenduvuse (assotsiatiivsuse) seadusele, s. t. summa ei muutu, kui asendame mingi liidetavate rühma nende summaga.

Kolme murru $\frac{1}{15}$, $\frac{4}{15}$ ja $\frac{8}{15}$ summa võime saada liidetavate mitmesuguste rühmitamiste teel, näiteks:

$$\frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{8}{15} = (\frac{1}{15} + \frac{4}{15}) + \frac{8}{15} = \frac{1}{15} + (\frac{4}{15} + \frac{8}{15}) = \frac{13}{15}.$$

3. Kui mingit liidetavat suurendada või vähendada mingi arvu võrra, siis ka summa suureneb või väheneb sama arvu võrra.

Leiame kahe murru summa, näiteks:

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{4}=\frac{5}{8}+\frac{6}{8}=\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}.$$

Liidame esimesele liidetavale $\frac{1}{8}$ ja vaatleme, kuidas muutub seejuures summa:

Kui teostame liitmise, siis näeme, et summa suurenes $\frac{1}{8}$ võrra, s. t. niisama palju, kui palju suurendasime esimest liidetavat.

Samuti võib kontrollida, et ühe liidetava vähendamisel mingi arvu võrra ka summa väheneb sama arvu võrra.

§ 93. Lahutamine.

Murdarvude vahe muutub antud arvude, s. t. vähendatava ja lahutatava, muutmisel täpselt samuti nagu täisarvude vahegi.

1. $\frac{7}{10}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. Liidame vähendatavaga $\frac{1}{10}$; saame:

$$\frac{7}{10}+\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},$$

lahutame nüüd murrust $\frac{4}{5}$ lahutatava, s. t. $\frac{1}{5}$, saame:

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}.$$

Uus vahe $(\frac{3}{5})$ on eelmisest vahest $(\frac{1}{2})$ suurem $\frac{1}{10}$ võrra. Tähendab, **kui vähendatavat suurendada mingi arvu võrra, jättes lahutatava muutmata, siis ka vahe suureneb sama arvu võrra.**

2. On ilmne, et **kui vähendatavat vähendada mingi arvu võrra, jättes lahutatava muutmata, siis vahe väheneb sama arvu võrra.**

Soovitame kontrollida selle väite õigsust, võttes lahutamiseks mistahes kaks murdu.

3. Vaatleme nüüd lahutatavat. Oletame, et leidsime kahe murru vahe:

$$\frac{14}{15}-\frac{11}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}.$$

Liidame lahutatavaga murru $\frac{2}{15}$:

$$\frac{11}{15}+\frac{2}{15}=\frac{13}{15}.$$

Lahutame nüüd murrust $\frac{14}{15}$ uue lahutatava $\frac{13}{15}$:

$$\frac{14}{15}-\frac{13}{15}=\frac{1}{15}.$$

Vahe ei võrdu nüüd $\frac{1}{5}$-ga, vaid $\frac{1}{15}$-ga, s. t. vahe vähenes $\frac{2}{15}$ võrra.

Tähendab, **kui lahutatavat suurendada mingi arvu võrra, siis vahe väheneb sama arvu võrra.**

4. Võtame nüüd murrud $\frac{10}{11}$ ja $\frac{1}{2}$ ning lahutame suuremast väiksema:

$$\frac{10}{11}-\frac{1}{2}=\frac{20}{22}-\frac{11}{22}=\frac{9}{22}.$$

Kui me vähendame lahutatavat ja seejuures jälgime, mis toimub vahega, siis näeme, et **lahutatava vähendamisel mingi arvu võrra vahe suureneb sama arvu võrra.**

5. Leiame kahe järgmise murru vahe:

$$\frac{31}{40}-\frac{27}{40}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}.$$

Suurendame üheaegselt nii vähendatavat kui ka lahutatavat $\frac{1}{40}$ võrra ning lahutame uuesti:

$$\left(\frac{31}{40}+\frac{1}{40}\right)-\left(\frac{27}{40}+\frac{1}{40}\right)=\frac{32}{40}-\frac{28}{40}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}.$$

Me näeme, et üheaegne vähendatava ja lahutatava suurendamine ühe ning sama arvu võrra ei muuda vahet.

Vähendame nüüd üheaegselt nii vähendatavat kui ka lahutatavat $\frac{3}{40}$ võrra ning lahutame uuesti:

$$\left(\frac{31}{40}-\frac{3}{40}\right)-\left(\frac{27}{40}-\frac{3}{40}\right)=\frac{28}{40}-\frac{24}{40}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}.$$

Vahe jäi ka nüüd muutmatuks. Seega võib ütelda, et: **kui vähendatavat ja lahutatavat suurendada või vähendada ühe ning sama arvu võrra, siis vahe ei muutu.**

§ 94. Korrutamine.

1. **Murdarvude korrutamine allub vahetuvuse (kommutatiivsuse) seadusele,** s. t. korrutis ei muutu tegurite ümberpaigutamisel.

Kui võtta kaks mingisugust murdu, näiteks $\frac{4}{5}$ ja $\frac{2}{3}$, siis võib kirjutada:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}.$$

2. **Murdarvude korrutamine allub ühenduvuse (assotsiatiivsuse) seadusele,** s. t. korrutis ei muutu, kui mingi kõrvutiasetsevate tegurite rühma asendame nende korrutisega.

Kolme murdarvu: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ korrutise võib leida tegurite mitmesuguse rühmitamise teel, näiteks:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

3. **Murdarvude korrutamine allub jaotuvuse (distributiivsuse) seadusele,** s. t. mitme murdarvu summa ja mingi arvu korrutis võrdub iga murdarvu ning selle arvu korrutiste summaga. Näiteks:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\cdot 6=\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{3}{4}\cdot 6=11\frac{1}{2}.$$

Märgime, et korrutaja võib olla ka murdarv.

4. Vaatleme korrutise muutumist sõltuvalt tegurite muutmisest. Leiame $\frac{14}{15}$ ja $\frac{1}{2}$ korrutise:

$$\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{15}.$$

Suurendame esimest tegurit 3 korda ja korrutame uuesti:

$$\left(\frac{14}{15}\cdot 3\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{5}.$$

Võrdleme seda tulemust eelmisega jagamise abil:

$$\frac{7}{5}:\frac{7}{15}=\frac{7\cdot 15}{5\cdot 7}=3.$$

Seega uus korrutis on 3 korda suurem eelmisest.

Järelikult me võime ütelda, et: **kui kahest tegurist ühte suurendada mingi arv korda, teine aga jätta muutmata, siis korrutis suureneb sama arv korda.**

Vähendame nüüd 2 korda näiteks teist tegurit ja korrutame uuesti:

$$\frac{14}{15} \cdot \left(\frac{1}{2} : 2\right) = \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{30}.$$

Esialgne korrutis oli $\frac{7}{15}$, uus on aga $\frac{7}{30}$. Nende murdude lugejad on võrdsed, kuid esimese murru nimetaja on 2 korda väiksem kui teise murru nimetaja; tähendab, esimene murd on teisest 2 korda suurem.

Saadud tulemus näitab, et vähendades ühte tegureist 2 korda, me vähendame sellega ka korrutist 2 korda. Järelikult, **kui ühte tegureist vähendada mingi arv korda, siis korrutis väheneb sama arv korda.**

§ 95. Jagamine.

Murdarvude jagatis muutub jagatava ja jagaja muutmisel täpselt samuti, nagu muutub täisarvude jagatis.

1. Võtame näite: $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$.

Kui nüüd *suurendame jagatavat* näiteks 2 korda ja vaatleme, kuidas seejuures muutus jagatis, siis näeme, et uus jagatis on 2 korda suurem esialgsest jagatisest.

Seega, **kui jagatavat suurendada mingi arv korda, siis jagatis suureneb sama arv korda.**

2. Võtame sama näite: $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ ja *vähendame jagatavat* 3 korda, seejärel aga vaatleme, mis toimus jagatisega.

Teostanud vajalikud arvutused, näeme, et jagatis vähenes 3 korda. Järelikult, **kui jagatavat vähendada mingi arv korda, siis jagatis väheneb sama arv korda.**

3. Jagame nüüd $\frac{7}{8}$ murruga $\frac{1}{4}$:

$$\frac{7}{8} : \frac{1}{4} = \frac{7 \cdot 4}{8 \cdot 1} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Kui *suurendame jagajat* $\left(\frac{1}{4}\right)$ näiteks 2 korda ja uuesti jagame, siis näeme, et jagatis väheneb samuti 2 korda.

Tähendab, **kui suurendada jagajat mingi arv korda, siis jagatis väheneb sama arv korda.**

4. Võtame harjutuse: $\frac{7}{8} : \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2}$, ja *vähendame jagajat* $\left(\frac{1}{4}\right)$ näiteks 4 korda, seejärel aga jagame uuesti.

Arvutused näitavad, et **kui jagajat vähendada mingi arv korda, siis jagatis suureneb sama arv korda.**

5. Vaatleme lõpuks, mis toimub jagatisega, kui suurendame või vähendame üheaegselt nii jagatavat kui ka jagajat üks ning sama arv korda.

a) Leiame murdude $\frac{4}{9}$ ja $\frac{5}{12}$ jagatise:

$$\frac{4}{9} : \frac{5}{12} = \frac{4 \cdot 12}{9 \cdot 5} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}.$$

Suurendame jagatavat ja jagajat 3 korda ning jagame uuesti:

$$\left(\frac{4}{9} \cdot 3\right) : \left(\frac{5}{12} \cdot 3\right) = \frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15},$$

Jagatis jäi samaks.

b) Vähendame eelmises harjutuses jagatavat ja jagajat 4 korda ning jagame:

$$\left(\frac{4}{9} : 4\right) : \left(\frac{5}{12} : 4\right) = \frac{1}{9} : \frac{5}{48} = \frac{1 \cdot 48}{9 \cdot 5} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}.$$

Jagatis jäi uuesti samaks.

Seega, **kui murdarvude jagamisel suurendada või vähendada üheaegselt nii jagatavat kui ka jagajat üks ning sama arv korda, siis jagatis ei muutu.**

Kaheteistkümnes peatükk.

SUURUSTE SUHE.

§ 96. Suhte mõiste.

Vaatleme ülesannet: «5 m pikkune nööritükk maksab 2 rubla. Kui palju maksab 20 m pikkune nööritükk?»

Sellele küsimusele võime vastata järgmiselt: leiame algul nööri ühe meetri hinna:

2 rubla : 5 = 40 kop.

Nüüd leiame 20 m hinna:

40 kop. · 20 = 800 kop. = 8 rubla.

Seega, 5 m nööri maksab 2 rubla, 20 m nööri aga 8 rubla.

Seda ülesannet võib lahendada ka teisiti: algul määrata kindlaks, mitu korda on teine nööritükk esimesest pikem. Selleks piisab, kui 20 m jagada 5 meetriga:

$$20\text{ m} : 5\text{ m} = 4 \text{ ehk } \frac{20\text{ m}}{5\text{ m}} = 4.$$

Teine nööritükk on 4 korda pikem esimesest, tähendab, ta maksab 4 korda rohkem kui esimene (8 rubla).

Samal meetodil, s. t. jagamise abil, võib võrrelda esimese nööritüki pikkust teise pikkusega. Siis saadakse:

$$5\text{ m} : 20\text{ m} \text{ ehk } \frac{5\text{ m}}{20\text{ m}} = \frac{1}{4}.$$

See tähendab, et esimene nööritükk moodustab neljandiku teisest.

Selles ülesandes me vaatlesime erineva pikkusega nööritükke:

esimene 5 m;
teine 20 m;

ning võrdlesime teist esimesega: $\frac{20\text{ m}}{5\text{ m}} = 4$ (teise nööritüki pikkus on 4 korda suurem esimese pikkusest), ja esimest teisega: $\frac{5\text{ m}}{20\text{ m}} = \frac{1}{4}$ (esimese nööritüki pikkus moodustab neljandiku teise pikkusest).

Matemaatikas öeldakse, et 20 m ja 5 m suhe on 4 m, 5 m ja 20 m suhe on aga $\frac{1}{4}$.

Suuruste suhet kasutatakse sageli kõige erinevamate ülesannete lahendamisel.

Kujutame endale ette, et me jälgisime kolme aasta jooksul suviseid ilmu ja kirjutasime üles, et ühel suvel oli päikesepaistelisi päevi 60, vihmaseid aga 30; järgmisel aastal päikesepaistelisi 45, vihmaseid samuti 45, ja lõpuks kolmandal aastal päikesepaistelisi 40 ning vihmaseid 50.

Me näeme, et esimesel aastal oli päikesepaistelisi päevi rohkem kui vihmaseid. Samuti võime vastata küsimusele, mitu korda üks arv on teisest suurem ehk: mitu korda teine arv sisaldub esimeses. Vastuse sellele küsimusele leiame jagamise abil:

$$60 : 30 = 2 \text{ ehk } \frac{60}{30} = 2.$$

Harilikult seda jagamist ei viida lõpuni, s. t. ei leita suhte suurust 2, vaid seotakse antud arvud jagamise märgiga, s. t. kas kaksikpunkti või murrujoonega:

$$60 : 30 \text{ ehk } \frac{60}{30}.$$

See kirjutusviis on otstarbekohane selle poolest, et seetõttu säilitame võrreldavad arvud ega unusta neid ära. Arvud 60 ja 30 annavad vastuse küsimusele, kui palju oli päikesepaistelisi ja kui palju vihmaseid päevi, jagamise märk nende vahel näitab aga võrdlemise fakti ennast. Eespool esitatud tüüpi üleskirjutus loetakse järgmiselt: päikesepaisteliste päevade arv s u h t u b vihmaste päevade arvusse nagu 60 suhtub 30-sse.

Kui võrreldavatel arvudel on ühisjagaja, siis võib neid jagada sellega. Arve 60 ja 30 võib jagada 30-ga ning siis ülal kirjutatud avaldised saavad kuju:

$$2 : 1 \text{ ehk } \frac{2}{1};$$

lugeda võib neid nüüd aga järgmiselt: päikesepaisteliste päevade arv suhtub vihmaste päevade arvusse nii nagu 2 suhtub 1-sse. Selgitada seda mõtet võib nii: päikesepaistelisi päevi oli 2 korda rohkem kui vihmaseid. Õige küll, et pärast jagamist 30-ga ei esine enam antud arve ja me ei või ütelda, nähes üleskirjutust $2 : 1$ ehk $\frac{2}{1}$, kui palju oli ilusaid ja kui palju vihmaseid päevi, kuid see-eest säilus meil kergesti meeldejääv nendevaheline s u h e.

Läheme nüüd üle teise aasta juurde. Eespool oli öeldud, et teisel aastal oli 45 päikesepaistelist ja 45 vihmast päeva. Ka sellel juhtumil võib kirjutada ühe avaldistest:

$$45 : 45 \text{ ehk } \frac{45}{45}.$$

Kui jagada need arvud 45-ga, siis suhe saab kuju:

$$1 : 1 \text{ ehk } \frac{1}{1} \text{ (üks ühesse)}.$$

Kolmandal aastal oli päikesepaisteliste päevade arv 40 ja vihmaste päevade arv 50. Tähendab, nende vastastamiseks võib kirjutada:

$$40 : 50 \text{ ehk } \frac{40}{50}.$$

Siin saab neid arve ilmselt jagada 10-ga, siis saadakse $4 : 5$ ehk $\frac{4}{5}$. Iga nende kolme juhu puhul me leidsime kahe suuruse suhte.

Tähendab, **kahe samaliiki suuruse suhteks nimetatakse arvu (täis- või murdarvu), mis näitab, mitu korda üks suurus on teisest suurem või missuguse osa moodustab see suurus teisest suurusest.**

Kahte arvu, mis moodustavad suhte, nimetatakse **suhte liikmeteks.** Suhte esimest liiget nimetatakse **eesliikmeks,** teist aga **taga-**

liikmeks; näiteks suhtes $\frac{5}{9}$ arv 5 on eesliige, arv 9 tagaliige. Kahe arvu (a ja b) suhe kirjutatakse üldkujul nii: $\frac{a}{b}$, kus

a on suhte eesliige,
b on suhte tagaliige.

Tuletame mõningad **suhte omadused**. Kuna kahe arvu suhte leiame jagamise abil, siis suhte kohta jäävad õigeks kõik need omadused, mis kehtivad jagamise puhul.

1. Suhe ei muutu, kui tema liikmeid korrutada või jagada ühe ning sama arvuga.

Näiteks, kui meil on suhe $30:10$, siis korrutades selle liikmeid 5-ga, saame $150:50$ ja sellega me suhet ei muuda. Jagades suhte liikmeid aga näiteks 2-ga, saame $15:5$ ja ka sellega ei muuda me suhet. Näeme, et kõiki neid suhteid võib asendada suhtega: $3:1$.

Üldkujul võib seda omadust kirjutada järgmiselt:

$$a:b = am:bm = \frac{a}{m}:\frac{b}{m}.$$

2. Suhte esimene liige (eesliige) **võib olla mistahes arv, teine liige** (tagaliige) **võib samuti olla mistahes arv peale nulli.**

Eespool vaadeldud juhtumites esinesid ainult täisarvude suhted, kuid edaspidi kohtume sageli ka murdarvude suhetega. Näiteks on täiesti võimalikud niisugused suhted:

$$2\frac{1}{2}\ \mathrm{m} : 1\frac{1}{4}\ \mathrm{m} = 2 \text{ ehk } \frac{2\frac{1}{2}\ \mathrm{m}}{1\frac{1}{4}\ \mathrm{m}} = 2;$$

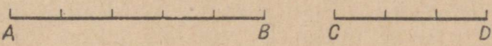
$$2\ \mathrm{kg} : \frac{1}{2}\ \mathrm{kg} = 4 \text{ ehk } \frac{2\ \mathrm{kg}}{\frac{1}{2}\ \mathrm{kg}} = 4.$$

Kahe murdarvu suhte võib asendada täisarvude suhtega. Võtame näiteks murdarvude suhte: $3\frac{1}{2}:\frac{2}{5}$ ja vabastame selle murrulistest liikmetest. Selleks teisendame kõigepealt segaarvu ($3\frac{1}{2}$) liigmurruks ja korrutame suhte liikmeid antud murdude nimetajate väikseima ühiskordsega:

$$3\frac{1}{2}:\frac{2}{5} = \frac{7}{2}:\frac{2}{5} = (\frac{7}{2}\cdot 10):(\frac{2}{5}\cdot 10) = 35:4.$$

Me korrutasime suhte ees- ja tagaliiget 10-ga. Esimese omaduse põhjal suhe ei muutunud. Murdarvude suhe $3\frac{1}{2}:\frac{2}{5}$ asendus seega täisarvude suhtega $35:4$.

Pöördsuhted. Olgu tarvis võrrelda kaht lõiku AB ja CD (joon. 21). Kui esimene neist sisaldab 5 pikkusühikut (näiteks sentimeetrit), teine aga 3, siis võime neid võrrelda, kui jagame 5 3-ga. Võrdlemise tulemus väljendatakse suhtega $5:3$ ehk $\frac{5}{3}$.



Joon. 21.

Lõikude AB ja CD võrdlemisel me lugesime esimeseks lõiku AB ja teiseks lõiku CD ning võtsime AB suhte CD-sse; kuid võib toimida ka ümberpöördult, s. t. otsida CD suhet AB-sse, siis saaksime järgmise suhte: $3:5$ ehk $\frac{3}{5}$.

Tähendab, suuruste võrdlemisel võime saada kaks niisugust suhet, millede puhul esimese eesliige on teise tagaliikmeks ja ümberpöördult. Niisugust kahte suhet nimetatakse **pöördsuhteks.**

Pidage meeles, et **pöördsuhete korrutis võrdub ühega.** Tõepoolest, eespool saadud suhete korrutis

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1.$$

Varem oli nimetatud, et suhe saadakse jagamise tulemusena. Mõningail juhtumeil seda jagamist ei viida lõpuni, vaid ainult tähistatakse $(5:3)$; teistel juhtumitel, näiteks ülesannete lahendamisel, arvutatakse suhte suurus ja väljendatakse see ühe arvuga; näiteks 15 m ja 3 m suhte võib kirjutada järgmiselt: $15:3 = 5$; meetri ja sentimeetri suhte $100:1 = 100$.

§ 97. Arvude protsentsuhte leidmine.

Sellel ülesandel on järgmine mõte: väljendada kahe antud arvu suhe protsentides. Te juba teate, et suhe võimaldab võrrelda arve, s. t. võimaldab määrata, missugune neist on suurim. Näiteks, kui minul on 6 musta pliiatsit ja 3 punast, siis suhe $6:3$ näitab, et musti pliiatseid on 2 korda rohkem kui punaseid; pöördsuhe $3:6$ aga näitab, et punaste pliiatsite arv moodustab poole mustade arvust. Need suhted me võiksime väljendada ka protsentides, s. t. leida mitte arvude hariliku suhte, vaid nende **protsentsuhte.** Kõige paremini võib seda küsimust selgitada ülesannete abil.

Ü l e s a n n e 1. Möödunud aastal lõpetasid ühes koolis seitsmenda klassi 200 õpilast. Nendest 120 õpilast jätkab õppimist 8-ndas klassis, ülejäänud aga astusid eriõppeasutustesse. Mitu protsenti õpilastest jätkab õppimist 8-ndas klassis?

Võib arutleda järgmiselt: kui kahesaja lõpetaja kohta tuleb 120 õpilast, kes jätkavad õppimist 8-ndas klassis, siis saja lõpetaja kohta tuleb neid 2 korda vähem, s. t. 60.

Teiste sõnadega, 60% seitsmenda klassi lõpetajate arvust jätkab õppimist 8-ndas klassis. See ongi arvude 120 ja 200 protsentsuhe.

Me vaatlesime väga lihtsat ülesannet. Kuidas aga lahendatakse üldse seda tüüpi ülesandeid? Et vastata sellele küsimusele, vaatleme uut ülesannet.

Ü l e s a n n e 2. Tuli üles künda 300 ha maad. Esimesel päeval künti 120 ha. Mitu protsenti maast künti üles esimesel päeval?

Selles ülesandes nõutakse vastust järgmisele küsimusele: mitu protsenti moodustab arv 120 arvust 300 ehk, teiste sõnadega: kui 300 ha on 100%, siis mitu protsenti on 120 ha.

Arutleme järgmiselt: 300 ha on 100%. Millega võrdub 1%? Ilmselt on see 100 korda väiksem, s. t.

$$300:100=3 \text{ (ha)}.$$

Nüüd vaatame, mitu protsenti moodustab 120 ha. Kui ühele protsendile vastab 3 ha, siis 120 ha vastab nii mitmele protsendile, kui mitu korda 3 mahub 120-sse, s. t.

$$120:3=40.$$

Tähendab, esimesel päeval künti üles 40% maast.

Et saada niisugust tüüpi ülesannete lahendamise reeglit, tuleb selgitada, missuguseid tehteid me sooritasime.

$$120:\frac{300}{100}=\frac{120\cdot 100}{300} \text{ ehk } \frac{120}{300}\cdot 100.$$

Tähendab, **et leida kahe arvu protsentsuhe, tuleb leida nende arvude suhe ja korrutada see 100-ga.**

Rakendame nüüd seda reeglit alljärgneva ülesande lahendamisel.

Ü l e s a n n e 3. Puhkekodus puhkab 200 inimest, 80 meest ja 120 naist. Leida meeste arvu ja naiste arvu protsentsuhe puhkajate üldarvust.

Mitu protsenti moodustab meeste arv?

$$\frac{80}{200}\cdot 100=40 \ (\%).$$

Mitu protsenti moodustab naiste arv?

$$\frac{120}{200}\cdot 100=60 \ (\%).$$

§ 98. Arvmõõtkava.

Kujutada mingi ese paberil loomulikus suuruses — see ei ole sageli võimalik. Kui eseme suurus ületab paberilehe suuruse, millele ese kujutatakse, siis see ese joonestatakse vähendatud kujul. Kuid iga joonis (või plaan) peab võimaldama otsustada temal kujutatud eseme tõelise suuruse üle, s. t. niisugusel joonisel peab olema märgitud, mitu korda paberil kujutatud lõigud on väiksemad vastavatest lõikudest looduses. Seda tehakse järgmisel viisil: kui klassitahvli laius on 1 m ja meie kujutame selle paberil 1 dm pikkuse lõiguna, siis eseme mõõt paberil on 10 korda väiksem tema mõõdust looduses. Sellel juhtumil öeldakse, et ese on kujutatud m õ õ t k a v a s (ka mastaabis) «üks kümnele» ja kirjutatakse: mõõtkava 1 : 10 ehk $\frac{1}{10}$. Siin arv üks tähistab 1 dm paberil, arv 10 aga 10 dm (1 m) looduses. Suhet 1 : 10 nimetatakse plaani **arvmõõtkavaks** (arvmastaabiks).

Üks arvmõõtkava abil lahendatavaist ülesandeist seisneb selles, et, omades mingi maatüki plaani ja teades mõõtkava, me võime arvutada selle maatüki või mingi selle osa tõelise suuruse. Näiteks, meile anti teatud maakoha plaan (või kaart). Sellele on märgitud arvmõõtkava 1 : 1 000. Tuleb leida kahe punkti vaheline kaugus looduses, teades, et nende punktide vaheline kaugus plaanil on 4 cm. Pöörates tähelepanu antud arvmõõtkavale, võime ütelda, et kõik pikkused looduses on 1 000 korda suuremad vastavatest pikkustest plaanil.

Järelikult, kahe antud punkti vahelise kauguse leiame, kui arvu 4 cm korrutame 1 000-ga.

$$4 \text{ cm} \times 1\,000 = 4\,000 \text{ cm} = 40 \text{ m}.$$

K o l m e t e i s t k ü m n e s p e a t ü k k.

GEOMEETRILISE SISUGA ÜLESANNETE LAHENDAMINE.

§ 99. Risttahuka ja kuubi pindala.

Ü l e s a n n e 1. Leida niisuguse kuubi täispindala, mille serva pikkus on 25 cm.

Kuubi täispindala koosneb kuuest omavahel võrdse ruudu pindalast. Tähendab, kuubi täispindala leidmiseks tuleb arvutada algul ühe ruudu (ühe tahu) pindala ja seejärel korrutada saadud arv tahkude arvuga, s. t. 6-ga.

Ülesande lahendus on järgmine:

1) Leiame ühe ruudu (ühe tahu) pindala:

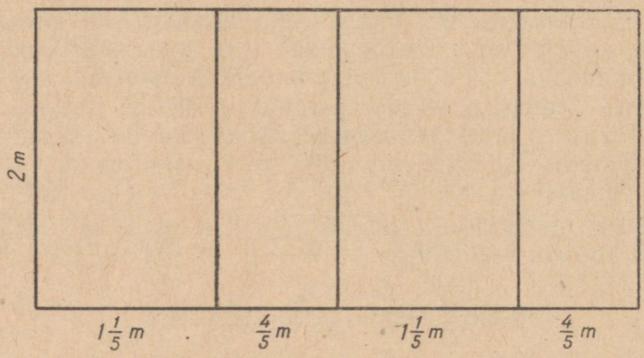
$$25 \times 25 = 625 \ (\mathrm{cm}^2).$$

2) Leiame 6 tahu pindala:

$$625 \times 6 = 3\,750 \ (\mathrm{cm}^2).$$

Ülesanne 2. Mitu ruutmeetrit vineeri vajatakse niisuguse puust kasti külgede katmiseks vineeriga, mille pikkus on $1\frac{1}{5}$ m, laius $\frac{4}{5}$ m ja kõrgus 2 m?

Kast on risttahukakujuline. Et vastata ülesande küsimusele, peame arvutama selle risttahuka külgpindala. Külgpindala koosneb nelja ristküliku pindalast. Võiks arvutada näiteks iga ristküliku pindala ja seejärel saadud tulemused liita. Kuid võib näidata ka teise, lühema tee selle ülesande lahendamiseks.



Joon. 22.

Kui me võtame risttahuka paberist mudeli, eraldame mõlemad alused («põhja» ja «kaane») ning laotame külgpindala laiali, siis saame kujundi, mis on esitatud joonisel 22. See ei ole aga midagi muud kui ristkülik, mille pikkus kujutab endast nelja arvu summat: $1\frac{1}{5}$ m $+ \frac{4}{5}$ m $+ 1\frac{1}{5}$ m $+ \frac{4}{5}$ m, laius aga 2 m. Selle ristküliku pindala arvutamiseks toimime järgmiselt:

$$\left(1\frac{1}{5} + \frac{4}{5} + 1\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \ (\mathrm{m}^2).$$

Mõtleme nüüd, mida kujutab endast sulgudes olevate arvude summa. See on nimelt risttahuka aluseks oleva ristküliku **ümbermõõt.** Ristküliku laius on võrdne risttahuka kõrgusega.

Siit võib teha järelduse: **risttahuka külgpindala arvutamiseks tuleb tema põhja ümbermõõt korrrutada kõrgusega.**

Ülesanne 3. Näitlike õppevahendite töökoda valmistas papist 1 000 risttahuka mudelit. Iga risttahuka pikkus on 16 cm, laius 12 cm ja kõrgus 25 cm. Mitu ruutmeetrit pappi kulutati nende mudelite valmistamiseks?

Leiame kõigepealt ühe risttahuka täispindala. Täispindala koosneb külgpindalast ja kahe teineteisega võrdse aluse pindalast. Kirjutame selle üles järgmiselt:

Külgpindala: $(16+12+16+12)\cdot 25$.

Kahe aluse pindala: $2(16\cdot 12)$.

Täispindala: $56\cdot 25+2\cdot 192=1\,784$ (cm^2).

Nüüd leiame, kui palju pappi läheb vaja 1 000 niisuguse mudeli valmistamiseks: $1\,784\cdot 1\,000=1\,784\,000$ (cm^2).

Väljendame ruutsentimeetrid ruutmeetreis:

$$\frac{1\,784}{10\,000}=178\frac{2}{5}\ (\text{m}^2).$$

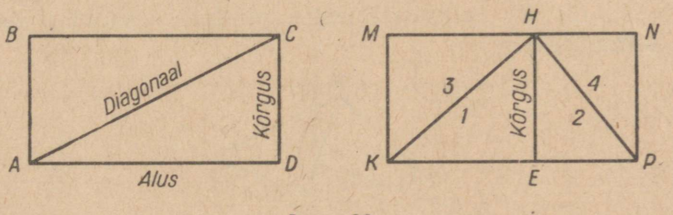
§ 100. Kolmnurga ja nelinurga pindala.

Kuidas arvutatakse kolmnurga pindala?

Me oskame arvutada ristküliku pindala.

Proovime vastandada ristkülikut ja kolmnurka.

Ristküliku aluseks võib võtta tema pikkuse, kõrguseks aga laiuse. Kolmnurga aluseks võib võtta mistahes külje, näiteks *KP*, kõrguseks (*HE*) aga lõigu, mis on tõmmatud selle külje vastas asetsevast tipust risti alusega (joon. 23).



Joon. 23.

Ristkülikus *ABCD* tõmbame diagonaali *AC*. See jaotab ristküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks *ABC* ja *ACD*. Et veenduda nende võrdsuses, piisab, kui lõigata paberist välja ristkülik, lõigata see mööda diagonaali kaheks osaks ja asetada tekkinud kolmnurgad teineteisele. Need täpselt ühtivad.

Siit järeldub, et ristküliku pindala on kaks korda suurem kummagi kolmnurga pindalast, milledeks jaotab diagonaal ristküliku. Ilmselt võib öelda ka ümberpöördult: kummagi kolmnurga pindala, millised on saadud ristkülikust, kui tõmmata selles diagonaal, on kaks korda väiksem ristküliku pindalast.

Selle järelduse tõestuseks vaatleme ristkülikut $KMNP$. Võtame tema küljel MN mingi punkti H ja ühendame selle punktidega K ja P. Saame kolmnurga KHP, mis samuti moodustab poole ristkülikust. Miks? Kolmnurk KHP koosneb kahest väikesest kolmnurgast, millised on joonisel tähistatud numbritega 1 ja 2. Peale selle, kui lõikaksime ristkülikust välja kolmnurga KHP, siis jääks järele kaks kolmnurka, mis on tähistatud numbritega 3 ja 4. Kolmnurk 3 on võrdne kolmnurgaga 1, kolmnurk 4 on aga võrdne kolmnurgaga 2. Kui kolmnurk 3 asetada võrdse küljega MK kolmnurga 4 juurde, siis moodustub uus kolmnurk, mis on võrdne kolmnurgaga KHP.

Tähendab, kolmnurk KHP moodustab poole temaga ühist alust ja kõrgust omavast ristkülikust.

Kui kolmnurga pindala tähistada tähega S, aluse tähega a ja kõrguse tähega h, siis võib kirjutada valemi kolmnurga pindala arvutamiseks:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}ah.$$

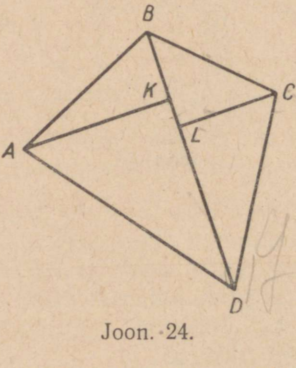
Kolmnurga pindala on võrdne tema aluse ja kõrguse poole korrutisega.

Ü l e s a n n e 1. Leida kolmnurkse plekk-katuse pindala, kui selle kolmnurga alus $a = 6\frac{1}{2}$ m ja tema kõrgus $h = 5\frac{3}{4}$ m.

Ülesande lahenduse võime kirjutada järgmisel kujul:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{2} \cdot 5\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{23}{4} = \frac{299}{16} = 18\frac{11}{16}\ (\text{m}^2).$$

Ü l e s a n n e 2. Leida nelinurga pindala, jaotades nelinurga kaheks kolmnurgaks.



Joon. 24.

Seda ülesannet tuleb lahendada järgmiselt. Tuleb konstrueerida meelevaldne nelinurk (joon. 24) ja tõmmata temas üks diagonaal. Saadakse kaks erinevat kolmnurka. Seejärel tuleb tõmmata kummagi kolmnurga kõrgused. Diagonaal on ühiseks aluseks mõlemale kolmnurgale. Pärast seda tuleb sirkli ja joonlaua abil mõõta kolmnurkade alus (diagonaal) ja kumbki kõrgus. Leidnud need, tuleb arvutada eraldi kummagi kolmnurga pindala ja saadud arvud liita.

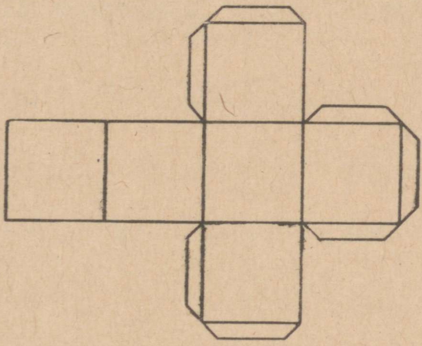
§ 101. Mudelid ja pinnalaotused.

Paragrahvis 61 vaatlesime risttahuka ruumala arvutamist. Me ütlesime, et risttahuka mudeliks võib olla näiteks tikutoos. Kuubi mudelit kohtame harvemini; laste mänguasjade hulgas esineb niinimetatud «liikuv aabits», mis koosneb kuubikestest, milledele on kujutatud tähestiku tähed.

Kõige kasulikum on aga valmistada mudelid ise, säilitada need hoolikalt ja kasutada siis, kui tekib selleks vajadus. Kuubi ja risttahuka mudelid võib valmistada mitmesugustest materjalidest — puust, kipsist, kriidist, klaasist, paberist jne.

Õppeotstarbeks on kõige kasulikumad need mudelid, mis on valmistatud paksust paberist ja mis võimaldavad laialilaotamist.

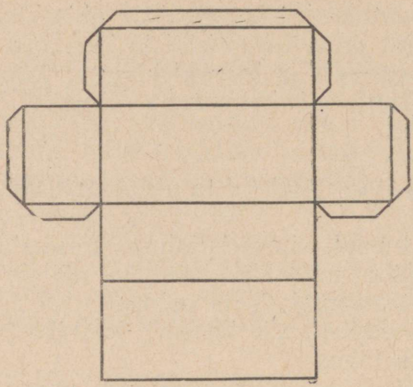
Me soovitame valmistada neli mudelit: kuupsentimeetri, kuupdetsimeetri, ühe mistahes mõõtudega kuubi ja risttahuka. Esimesed kaks mudelit on kuupsentimeetri ja kuupdetsimeetri suuruste näitlikuks kujutamiseks, kaks viimast on aga kasulikud ülesannete lahendamisel.



Joon. 25.

Kuubi pinnalaotuse (lõike) võib valmistada järgmiselt.

Tuleb võtta poogen paksu paberit ja lõigata sellest välja joonisel 25 esitatud kujund. See kujund koosneb kuuest omavahel võrdsest ruudust. Iga ruudu külg olgu võrdne näiteks 5 sentimeetriga. Kolmele ruudule tuleb jätta ääred kleepimiseks. Kui murda joonis kokku mööda näidatud sirgjooni ja kleepida ääred, siis saamegi kuubi.



Joon. 26.

Risttahuka pinnalaotuse võib valmistada järgmiselt. Valmistame risttahuka näiteks järgmiste mõõtmetega: pikkus 7 cm, laius 5 cm ja kõrgus 12 cm. Võtame poogna paksu paberit ja lõikame sellest välja joonisel 26 esitatud kujundi. See kujund koosneb kahest ristkülikust suurusega 12 cm×7 cm, kahest ristkülikust suurusega 12 cm×5 cm ja kahest ristkülikust suurusega 7 cm×5 cm. Kolmele ristkülikule tuleb jätta ääred kleepimise jaoks. Murdes joonise kokku mööda näidatud sirgjooni ja kleepides ääred, saame risttahuka.

KOLMAS OSA.

KÜMNENDMURRUD.

Neljateistkümnes peatükk.

ÜLDISED ANDMED KÜMNENDMURDUDEST.

§ 102. Eelselgitused.

Eelmises osas me vaatlesime kõikvõimalike nimetajatega murde ja nimetasime neid harilikeks murdudeks. Meid huvitas iga murd, mis tekkis mõõtmise või jagamise tulemusena, sõltumata sellest, missuguseks kujunes murru nimetaja.

Eraldame nüüd kõigi murdude hulgast murrud nimetajatega: 10, 100, 1 000, 10 000 jne., s. t. niisugused murrud, mille nimetajateks on numbri 1 ja temale järgnevate nullidega (ühe või mitmega) kujutatud arvud. Niisuguseid murde nimetatakse **kümnendmurdudeks.**

Toome mõningaid näiteid kümnendmurdude kohta:

$$\frac{1}{10}, \frac{3}{100}, \frac{7}{1\,000}, \frac{9}{10\,000}, \frac{11}{100\,000}, \frac{3}{1\,000\,000} \text{ jne.}$$

Kümnendmurdudega me kohtusime ka juba varem, kuid ei vaadelnud nende eriomadusi. Nüüd aga näitame, et nendel on tähelepanuväärseid omadusi, mistõttu lihtsustuvad kõik arvutused murdudega.

§ 103. Kümnendmurru kujutamine nimetajata.

Kümnendmurde ei kirjutata harilikult mitte nii, nagu harilikke murde, vaid täisarvude kirjutamise reeglite järgi.

Et mõista, mil viisil kirjutada kümnendmurdu ilma nimetajata, tuleb tuletada meelde, kuidas kümnendsüsteemis kirjutatakse mistahes täisarvu. Kui me kirjutame näiteks kolmekohalise arvu ainult ühe numbri 2 abil, s. t. arvu 222, siis iga kaks omab erineva väärtuse sõltuvalt sellest kohast, kus ta arvus asetseb. P a r e m a l t esimene kaks tähistab ühelisi, teine — kümnelisi, kolmas — sajalisi.

Seega iga number, mis asetseb mingi teise numbri kõrval, sellest vasakul, tähistab ühikuid, mis on 10 korda suuremad eelneva numbriga tähistatud ühikutest. Kui mingi järk puudub, siis selle kohale kirjutatakse null.

Niisiis, täisarvus paremalt esimesel kohal asetsevad ühelised, teisel kohal — kümnelised jne.

Nüüd küsime, missugune järguühik saadakse, kui näiteks arvus 222 paremale poole kirjutada veel üks number. Et vastata sellele küsimusele, tuleb pöörata tähelepanu sellele, et viimane kaks (paremalt esimene) tähistab ühelisi.

Järelikult, kui pärast ühelisi tähistavat numbrit 2 kirjutame (natuke eemale) veel mingi numbri, näiteks 3, siis see tähistab ühikuid, mis on kümme korda väiksemad eelmistest, teiste sõnadega, see tähistab ühelise kümnendikke; saadakse arv, mis sisaldab 222 tervet ja 3 kümnendikku.

Harilikult arvu täis- ja murdosa vahele asetatakse koma, s. t. kirjutatakse:

$$222{,}3$$

ja loetakse: kakssada kakskümmend kaks tervet ja 3 kümnendikku.

Kui me kirjutame selles arvus pärast kolme veel ühe numbri, näiteks 4, siis see tähistab 4 sajandikku; arvul on järgmine kuju:

$$222{,}34$$

ja loetakse: kakssada kakskümmend kaks tervet, kolmkümmend neli sajandikku.

Kui me kirjutame selles arvus pärast nelja veel ühe numbri, näiteks 5, siis see tähistab tuhandikke: 222,345 (kakssada kakskümmend kaks tervet, kolmsada nelikümmend viis tuhandikku).

Selguse mõttes võib täis- ja murdosa järkude asetuse arvus kujutada tabeli kujul:

Täisosa				Murdosa		
Sajalised	Kümnelised	Ühelised	,	Kümnendikud	Sajandikud	Tuhandikud
2	2	2	,	3	4	5

Seega me selgitasime, kuidas kirjutatakse kümnendmurdu ilma nimetajata. Kirjutame mõned niisugused murrud.

Et kirjutada ilma nimetajata murd $\frac{5}{10}$, tuleb pöörata tähelepanu kõigepealt sellele, et selles murrus pole terveid ja, tähendab, tervete asemele tuleb kirjutada null, s. t. $\frac{5}{10} = 0{,}5$.

Murd $2\frac{9}{100}$ kirjutatakse ilma nimetajata nii: 2,09, s. t. kümnendike kohale tuleb kirjutada null. Kui me jätaksime ära selle nulli, siis saadakse täiesti teine murd, nimelt 2,9, s. t. kaks tervet ja üheksa kümnendikku.

Tähendab, kümnendmurdude kirjutamisel tuleb puuduvate täis- ja murdosa järkude kohale kirjutada nullid:

0,325 — ei ole terveid,
0,012 — ei ole terveid ega ka kümnendikke,
1,208 — ei ole sajandikke,
0,20406 — ei ole terveid, sajandikke ega ka kümnetuhandikke.

Komast paremal pool asetsevaid numbreid nimetatakse **kümnendkohtadeks.**

Et mitte teha vigu kümnendmurdude kirjutamisel, tuleb meeles pidada, et pärast koma peab kümnendmurru kirjutises olema niisama palju numbreid, kui palju nulle on nimetajas, kui me selle murru kirjutaksime nimetajaga, s. t. $0{,}1 = \frac{1}{10}$ (nimetajas on üks null ja pärast koma üks number); $2{,}32 = 2\frac{32}{100}$; $4{,}567 = 4\frac{567}{1000}$; $8{,}9879 = 8\frac{9879}{10000}$.

§ 104. Nullide juurdekirjutamine kümnendmurrule.

Eelmises paragrahvis selgitati, kuidas kujutatakse kümnendmurdu ilma nimetajata. Kümnendmurdude kirjutamisel on suur tähtsus nullil. Igal lihtmurrul, mis on kujutatud kümnendmurruna, on täisosa kohal null, mis tähistab seda, et murrul täisosa puudub. Kirjutame mõned erinevad kümnendmurrud järgmiste numbrite abil: 0; 3 ja 5.

0,35 — 0 tervet 35 sajandikku,
0,035—0 tervet 35 tuhandikku,
0,305—0 tervet 305 tuhandikku,
0,0035— 0 tervet 35 kümnetuhandikku.

Selgitame nüüd, missugune tähtsus on n u l l i d e l, mis on kirjutatud kümnendmurru lõppu, s. t. p a r e m a l e.

Kui me võtame täisarvu, näiteks arvu 5, asetame pärast teda koma ja seejärel kirjutame nulli, siis see null tähistab null kümnendikku. Järelikult ei muuda paremale juurdekirjutatud null arvu suurust, s. t.

$$5 = 5{,}0.$$

Võtame nüüd arvu 6,1 ja kirjutame sellele paremale juurde nulli, saame 6,10, s. t. meil oli pärast koma $\frac{1}{10}$, saime $\frac{10}{100}$, kuid $\frac{10}{100}$ on võrdne $\frac{1}{10}$-ga. Tähendab, arvu suurus ei muutunud, muutus ainult arvu kuju ja nimetus (6,1 — kuus tervet, üks kümnendik; 6,10 — kuus tervet, kümme sajandikku).

Analoogiliste arutluste varal võime veenduda, et kümnendmurrule paremale nullide juurdekirjutamine ei muuda murru suurust. Järelikult võib kirjutada niisugused võrdused:

$$1 = 1{,}0,$$
$$2{,}3 = 2{,}300,$$
$$6{,}7 = 6{,}70000 \text{ jne.}$$

Kui me kirjutame kümnendmurrule vasakule juurde mõned nullid, siis ka neil ei ole mingit tähendust. Tõepoolest, kui me kirjutame arvule 4,6 vasakule juurde nulli, siis arvul on kuju 04,6. Missugusel kohal asetseb null? Null asetseb kümneliste kohal, s. t. null näitab, et selles arvus ei ole kümnelisi, kuid see on selge ka ilma nullita.

Tuleb siiski märkida, et mõnikord kirjutatakse kümnendmurrule paremale juurde mõned nullid. Näiteks. Olgu neli murdu: 0,32; 2,5; 13,1023; 5,238. Kirjutame nendele murdudele, milledel on vähem kümnendkohti peale koma, juurde mõned nullid: 0,3200; 2,5000; 13,1023; 5,2380.

Milleks see on tehtud? Kirjutades paremale juurde nulle, saime igas arvus pärast koma neli numbrit. Tähendab, iga murru nimetaja on 10 000, enne nullide juurdekirjutamist oli aga esimese murru nimetaja 100, teise murru nimetaja 10, kolmanda murru nimetaja 10 000 ja neljanda murru nimetaja 1000. Seega nullide juurdekirjutamisega me võrdsustasime kümnendkohtade arvu nendes murdudes, s. t. t e i s e n d a s i m e n e e d ü h e n i m e l i s t e k s. Järelikult, kümnendmurdude ühenimeliseks teisendamist teostatakse nullide juurdekirjutamise teel nendele murdudele.

Teisest küljest, kui mingil kümnendmurrul on paremal nullid, siis võime need ära jätta, kusjuures murru suurus ei muutu, näiteks: 2,60 = 2,6; 3,150 = 3,15; 4,200 = 4,2.

Kuidas tuleb mõista kümnendmurrus niisugust nullide ärajätmist? See on samaväärne murru taandamisega. Seda näeme, kui antud kümnendmurrud kirjutada nimetajatega:

$$2\frac{60}{100} = 2\frac{6}{10}; \quad 3\frac{150}{1000} = 3\frac{15}{100}; \quad 4\frac{200}{1000} = 4\frac{2}{10}.$$

§ 105. Kümnendmurdude võrdlemine.

Kümnendmurdude kasutamisel on väga tähtis osata võrrelda omavahel murde ja vastata küsimusele, missugused neist on võrdsed, missugused suuremad ja missugused väiksemad. Kümnendmurde võrreldakse teisiti kui täisarve. Näiteks kahekohaline täisarv on alati suurem kui ühekohaline täisarv, olenemata sellest, kui palju ühelisi ka ei oleks ühekohalises arvus; kolmekohaline arv on suurem kahekohalisest, ning ammugi siis juba ühekohalisest arvust. Kuid kümnendmurdude võrdlemisel oleks viga arvestada kõiki märke, mille abil on kirjutatud murrud.

Võtame kaks murdu: 3,5 ja 2,5, ning võrdleme neid suuruse järgi. Kümnendkohad on nendel samad, kuid esimesel murrul on 3 tervet, teisel 2. Esimene murd on suurem teisest, s. t.

$$3{,}5 > 2{,}5.$$

Võtame näiteks murrud: 0,4 ja 0,38. Nende murdude võrdlemisel on kasulik esimesele murrule kirjutada paremale juurde null. Seega võrdleme murde 0,40 ja 0,38. Kummalgi neist on pärast koma kaks numbrit: tähendab, kummalgi murrul on üks ning sama nimetaja 100.

Meil tuleb võrrelda ainult nende murdude lugejaid, kuid lugeja 40 on suurem kui 38. Tähendab, esimene murd on suurem teisest, s. t.

$$0{,}4 > 0{,}38.$$

Esimesel murrul on kümnendike arv suurem kui teisel, õige küll, et teisel murrul on veel 8 sajalist, kuid need on väiksemad ühest kümnendikust, seepärast et $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$.

Võrdleme nüüd järgmisi murde: 1,347 ja 1,35. Kirjutame teisele murrule paremale juurde nulli ja võrdleme kümnendmurde: 1,347 ja 1,350. Täisosad on nendel võrdsed, tähendab, tuleb võrrelda ainult murdosi: 0,347 ja 0,350. Nimetaja nendel murdudel on võrdne, kuid teise murru lugeja on suurem esimese lugejast, tähendab, teine murd on suurem esimesest, s. t. $1{,}35 > 1{,}347$.

Võrdleme lõpuks veel kahte murdu: 0,625 ja 0,62473. Kirjutame esimesele murrule juurde kaks nulli, et võrdsustada nimetajad ja võrdleme saadud murde: 0,62500 ja 0,62473. Nimetajad on nendel murdudel ühesugused, kuid esimese murru lugeja 62500 on suurem teise murru lugejast 62 473. Järelikult esimene murd on suurem teisest, s. t.

$$0{,}625 > 0{,}62473.$$

Esitatud näidete põhjal võime teha järgmise järelduse: **kahest kümnendmurrust on suurem see, mille täisosa on suurem; täisosade võrdsuse korral on suurem see murd, mille kümnendike arv on suurem; täisosade ja kümnendike võrdsuse korral on suurem see murd, mille sajandike arv on suurem jne.**

§ 106. Kümnendmurru suurendamine ja vähendamine 10, 100, 1000 jne. korda.

Me juba teame, et kümnendmurrule nullide juurdekirjutamine ei avalda mõju tema suurusele. Kui me õppisime tundma täisarve, siis nägime, et iga paremale juurdekirjutatud null suurendas arvu 10 korda. Ei ole raske aru saada, miks see toimus. Kui võtame täisarvu, näiteks 25, ja kirjutame temale paremale juurde nulli, siis arv suureneb 10 korda, kuna arv 250 on 10 korda suurem arvust 25. Kui paremale kirjutati null, siis arv 5, mis varem tähistas ühelisi, tähistab nüüd kümnelisi, aga arv 2, mis varem tähistas kümnelisi, tähistab nüüd sajalisi. Tähendab, nulli juurdekirjutamisega vahetusid eelnevad järgud uutega, nad suurenesid ning nihkusid ühe koha võrra vasakule.

Kui meil tuleb suurendada kümnendmurdu näiteks 10 korda, siis peame samuti nihutama järke ühe koha võrra vasakule, kuid seda nihutamist ei saa teostada nulli abil. Kümnendmurd koosneb täis- ja murdosast ning nendevaheliseks piiriks on koma. Komast vasakul asetseb madalaim täisosa järk, paremal — murdosa kõrgeim. Vaatleme murdu:

1234,5678.

Kuidas nihutada selles järke kas või ühe koha võrra, s. t. teiste sõnadega, kuidas saame seda murdu suurendada 10 korda? Kui me nihutame koma ühe koha võrra paremale, siis peegeldub see kõigepealt viielise olemuses: viieline satub murdarvude vallast täisarvude valda. Arvul on siis järgmine kuju: 12345,678. Muutus toimus ka kõigi teiste numbritega, mitte ainult viielisega. Kõik arvu kuuluvad numbrid omandasid uued väärtused, nimelt toimus järgmine muutus (vt. tabelit):

Tuhandelised	Sajalised	Kümnelised	Ühelised	,	Kümnendikud	Sajandikud	Tuhandikud	Kümnetuhandikud
1	2	3	4	,	5	6	7	8

Kümnetuhandelised	Tuhandelised	Sajalised	Kümnelised	Ühelised	,	Kümnendikud	Sajandikud	Tuhandikud
1	2	3	4	5	,	6	7	8

Kõik järgud muutsid oma nimetust ja kõik järguühikud niiöelda kõrgenesid ühe koha võrra, mistõttu kogu arv suurenes 10 korda.

Seega, **koma nihutamisel ühe koha võrra paremale suureneb arv 10 korda.**

Vaatleme veel näiteid: 1) Võtame murru 0,5 ja nihutame koma ühe koha võrra paremale; saame arvu 5, mis on 10 korda suurem arvust 0,5, sest varem tähistas number viis kümnendikke, nüüd aga terveid.

2) Nihutame arvus 1,234 koma kahe koha võrra paremale; arv saab kuju 123,4. See arv on 100 korda suurem eelmisest, seepärast, et temas number 3 tähistab nüüd ühelisi, number 2 kümnelisi ja number 1 sajalisi.

Seega, **et suurendada kümnendmurdu 10 korda, tuleb nihutada temas koma ühe koha võrra paremale; et suurendada kümnendmurdu 100 korda, tuleb nihutada temas koma kahe koha võrra paremale; et suurendada kümnendmurdu 1 000 korda — tuleb nihutada temas koma kolme koha võrra paremale jne.**

Kui seejuures tuleb puudu kümnendkohtadest, siis lisatakse paremale vajalik arv nulle. Näiteks, suurendame murdu 1,5 sada korda, nihutades koma kahe koha võrra paremale; saame 150. Suurendame murdu 0,6 tuhat korda; saame 600.

Ümberpöördult, kui nõutakse vähendada kümnendmurdu 10, 100, 1000 jne. korda, siis tuleb temas koma nihutada ühe, kahe, kolme jne. koha võrra vasakule. Olgu antud murd 20,5; vähendame seda 10 korda; selleks nihutame koma ühe koha võrra vasakule, saame murru 2,05. Vähendame murdu 0,015 sada korda; saame 0,00015. Vähendame arvu 334 kümme korda; saame 33,4.

Viieteistkümnes peatükk.

TEHTED KÜMNENDMURDUDEGA.

§ 107. Kümnendmurdude liitmine.

Kümnendmurde liidetakse samuti nagu täisarve. Veendume selles näidete varal.

1) 0,132+2,354. Kirjutame liidetavad üksteise alla. Siin 2 tuhandiku ja 4 tuhandiku liitmisel saadi 6 tuhandikku; 3 sajandiku ja 5 sajandiku liitmisel saadi 8 sajandikku; 1 kümnendiku ja 3 kümnendiku liitmisel — 4 kümnendikku ning 0 terve ja 2 terve liitmisel — 2 tervet.

$$+\begin{array}{r}0,132\\ 2,354\\ \hline 2,486\end{array}$$

2) 5,065+7,83. Teises liidetavas ei ole tuhandikke, mispärast on tähtis jälgida, et liidetavad kirjutatakse õigesti üksteise alla.

$$+\begin{array}{r}5,065\\ 7,83\\ \hline 12,895\end{array}$$

3) 1,2357+0,469+2,08+3,90701. Siin tuhandike liitmisel saadi 21 tuhandikku; me kirjutasime numbri 1 tuhandike alla, 2 liitsime aga sajandikega, seega sajandike järgus saime järgmised liidetavad: 2+3+6+8+0; summaks saime 19 sajandikku, kirjutasime 9 sajandike alla, ühelise liitsime aga kümnendikega jne.

$$
\begin{array}{r}
1{,}2357 \\
+\ 0{,}469 \\
2{,}08 \\
3{,}90701 \\
\hline
7{,}69171
\end{array}
$$

Seega, kümnendmurdude liitmisel tuleb kinni pidada järgmisest järjekorrast: murrud kirjutada üksteise alla nii, et kõikides liidetavates ühesugused järgud asetseksid üksteise all ja kõik komad ühes ja samas vertikaaltulbas; mõnedele liidetavatele kirjutatakse (kas või mõttes) kümnendkohtadest paremale niipalju nulle, et kõigil liidetavatel oleks pärast koma ühesugune arv numbreid. Seejärel liidetakse järkude kaupa, alates paremalt, ning saadud summas asetatakse koma samasse vertikaaltulpa, kus ta asetseb antud liidetavates.

§ 108. Kümnendmurdude lahutamine.

Kümnendmurde lahutatakse samuti nagu täisarve. Selgitame seda näidete varal.

1) 9,87−7,32.

Kirjutame lahutatava vähendatava alla nii, et sama järgu ühikud asetseksid teineteise all:

$$
\begin{array}{r}
-\ 9{,}87 \\
7{,}32 \\
\hline
2{,}55
\end{array}
$$

2) 16,29−4,75.

Kirjutame lahutatava vähendatava alla nii, nagu eelmises näites:

$$
\begin{array}{r}
-\ 16{,}29 \\
4{,}75 \\
\hline
11{,}54
\end{array}
$$

Et lahutada kümnendikke, tuleb võtta 6-st üks terve ja peenestada see kümnendikeks.

3) 14,0213−5,350712.

Kirjutame lahutatava vähendatava alla:

$$
\begin{array}{r}
2\,910 \\
-\ 14{,}021\,300 \\
5{,}350\,712 \\
\hline
8{,}670\,588
\end{array}
$$

Lahutamine on teostatud järgmiselt: kuna me ei saa lahutada 2 miljondikku 0-st, siis tuleb pöörduda lähima vasakul asetseva järgu juurde, s. t. sajatuhandike juurde; kuid sajatuhandike kohal asetseb samuti null, seepärast võtame 3-st kümnetuhandikust 1 kümnetuhandiku ja peenestame selle sajatuhandikeks, saame 10 sajatuhandikku, nendest 9 sajatuhandikku jätame sajatuhandike järku, 1 sajatuhandiku peenestame aga miljondikeks, saame 10 miljondikku. Seega kolmes viimases järgus saime: miljondikke 10, sajatuhandikke 9, kümnetuhandikke 2. See arv on selguse ja mugavuse (et mitte unustada) mõttes kirjutatud vähendatava murdosa vastavate järkude kohale. Nüüd võib hakata lahutama. 10-st miljondikust lahutame 2 miljondikku, saame 8 miljondikku; 9-st sajatuhandikust lahutame 1 sajatuhandiku, saame 8 sajatuhandikku jne.

Seega, kümnendmurdude lahutamisel peetakse kinni järgmisest järjekorrast: lahutatav kirjutatakse vähendatava alla nii, et ühesugused järgud asetseksid üksteise all ja kõik komad ühes ja samas vertikaaltulbas; paremale poole lisatakse vähendatavale või lahutatavale (kas või mõttes) juurde nii palju nulle, et nendel oleks pärast koma ühesugune arv numbreid, seejärel teostatakse lahutamine järkude kaupa, alates paremalt, ning saadud vahes asetatakse koma samasse vertikaaltulpa, millises ta asetseb vähendatavas ja lahutatavas.

§ 109. Kümnendmurdude korrutamine.

Vaatleme mõningaid näiteid kümnendmurdude korrutamise kohta.

1) $28 \times 2,3$.

Et leida nende arvude korrutist, võime arutleda järgmiselt: kui korrutajat suurendada 10 korda, siis mõlemad tegurid on täisarvud ja me võime neid korrutada täisarvude korrutamise reeglite järgi. Kuid me teame, et ühe teguri suurendamisel mingi arv korda ka korrutis suureneb sama arv korda. Tähendab, arv, mis saadakse täisarvude 28 ja 23 korrutamisel, on 10 korda suurem otsitavast korrutisest, et aga leida otsitavat korrutist, tuleb saadud korrutist vähendada 10 korda. Järelikult, siin tuleb üks kord korrutada 10-ga ja üks kord jagada 10-ga, kuid 10-ga korrutamist ning jagamist teostatakse koma nihutamise teel vastavalt kas paremale või vasakule ühe koha võrra. Seepärast tuleb toimida järgmiselt: korrutajas tuleb koma nihutada ühe koha võrra paremale, saame 23, seejärel tuleb korrutada saadud täisarvud:

$$\begin{array}{r} \times\, 28 \\ 23 \\ \hline 84 \\ +\,56 \\ \hline 644 \end{array}$$

See korrutis on 10 korda suurem otsitavast. Järelikult tuleb seda vähendada 10 korda, milleks nihutame koma ühe koha võrra vasakule. Seega saame: $28 \times 2,3 = 64,4$.

Kontrollimise eesmärgil võib kümnendmurru kirjutada nimetajaga ja teostada tehte harilike murdude korrutamise reegli järgi, s. t.

$$28 \cdot 2,3 = 28 \cdot 2\frac{3}{10} = \frac{28 \cdot 23}{10} = \frac{644}{10} = 64,4.$$

2) $12{,}27 \cdot 0{,}021$.

Selle näite erinevus eelmisest seisneb selles, et siin mõlemad tegurid on kümnendmurrud. Kuid ka siin ei pööra me korrutamisel tähelepanu komadele, s. t. suurendame üheaegselt korrutatavat 100 korda ja korrutajat 1000 korda, mistõttu korrutis suureneb 100 000 korda. Seega korrutame 1 227 arvuga 21:

$$1\,227 \cdot 21 = 25\,767.$$

Võttes arvesse, et saadud korrutis on 100 000 korda suurem otsitavast, peame nüüd vähendama seda korrutist 100 000 korda koma vastava nihutamise teel, siis saame:

$$12{,}27 \cdot 0{,}021 = 0{,}25767.$$

Kontrollime:

$$12{,}27 \cdot 0{,}021 = 12\frac{27}{100} \cdot \frac{21}{1000} = \frac{1227}{100} \cdot \frac{21}{1000} = \frac{25\,767}{100\,000} = 0{,}25767.$$

Seega, **et korrutada kaks kümnendmurdu, tuleb korrutada need kui täisarvud, jättes arvestamata komad, ning korrutises eraldada komaga paremalt nii mitu kümnendkohta, kui mitu on neid korrutatavas ja korrutajas kokku.**

Viimases näites saime korrutise viie kümnendkohaga. Kui niisugust suurt täpsust ei ole nõutud, siis teostatakse kümnendmurru ümardamine. Ümardamisel tuleb juhinduda nendest reeglitest, millised olid antud täisarvude kohta paragrahvis 9.

§ 110. Korrutamine tabelite abil.

Kümnendmurdude korrutamist võib mõnikord teostada ka tabelite abil. Sellel eesmärgil võib näiteks kasutada neid kahekohaliste arvude korrutamise tabeleid, mille kirjeldus oli antud eespool (§ 33).

1) Korrutame 53 arvuga 1,5.

Korrutame 53 arvuga 15. Tabelist leiame, et korrutis on 795. Seega saime 53 ja 15 korrutise, kuid meil oli teine tegur 10 korda väiksem, tähendab, korrutist tuleb vähendada 10 korda, s. o.

$$53 \cdot 1{,}5 = 79{,}5.$$

2) Korrutame 5,3 arvuga 4,7.

Algul leiame tabelist arvude 53 ja 47 korrutise, mis on 2 491. Kuid kuna me suurendasime korrutatavat ja korrutajat kokku 100 korda, siis on ka saadud korrutis 100 korda suurem tõelisest korrutisest; seepärast peame seda korrutist vähendama 100 korda:

$$5{,}3 \cdot 4{,}7 = 24{,}91.$$

3) Korrutame 0,53 arvuga 7,4.

Algul leiame tabelist arvude 53 ja 74 korrutise; see on 3 922. Kuid kuna me suurendasime korrutatavat 100 korda ja korrutajat 10 korda, siis korrutis suurenes 1 000 korda; seepärast peame nüüd korrutist vähendama 1 000 korda:

$$0{,}53 \cdot 7{,}4 = 3{,}922.$$

§ 111. Kümnendmurdude jagamine.

Kümnendmurdude jagamist vaatleme järgmises järjekorras: a) kümnendmurru jagamine täisarvuga ja b) kümnendmurru jagamine kümnendmurruga.

a) Kümnendmurru jagamine täisarvuga.

1) Jagame 2,46 arvuga 2.

$$2{,}46 : 2 = 1{,}23.$$

Me jagasime 2-ga algul täisosa, seejärel kümnendikud ja lõpuks sajandikud.

2) Jagame 32,46 arvuga 3.

$$32{,}46 : 3 = 10{,}82.$$

Me jagasime 3 kümnelist 3-ga, seejärel hakkasime jagama kahte ühelist 3-ga; kuna jagatava üheliste arv (2) on väiksem jagajast (3), siis tuli jagatises kirjutada 0; seejärel peenestasime 2 ühelist kümnendikkudeks, liitsime sellega 4 kümnendikku ja saadud 24 kümnendikku jagasime 3-ga; saime jagatises 8 kümnendikku; lõpuks jagasime 6 sajandikku 3-ga.

3) Jagame 1,2345 arvuga 5.

$$1{,}2345 : 5 = 0{,}2469.$$

Siin saime jagatises esimesel kohal null tervet, sest et üks terve ei jagu 5-ga.

4) Jagame 13,58 arvuga 4.

$$\begin{array}{r|l}
13{,}58 & 4 \\
-12 & \overline{3{,}395} \\
\hline
15 & \\
-12 & \\
\hline
38 & \\
-36 & \\
\hline
20 & \\
-20 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Selle näite iseärasus seisneb selles, et kui me saime jagatises 9 sajandikku, siis jäi järele jääk 2 sajandikku, mille me peenestasime tuhandikeks, saime 20 tuhandikku, ning jagasime selle 4-ga.

Reegel. **Kümnendmurru jagamist täisarvuga teostatakse samal viisil nagu täisarvude jagamistki, seejuures saadud jäägid peenestatakse järjest väiksemaiks ja väiksemaiks kümnendosadeks; jagamist jätkatakse seni, kuni jäägiks saadakse null.**

b) Kümnendmurru jagamine kümnendmurruga.

1) Jagame 2,46 arvuga 0,2. Kuna me oskame

juba jagada kümnendmurdu täisarvuga, siis mõtleme järele, kas ei saaks seda uut juhtumit taandada eelmisele? Me vaatlesime kogu aeg ühte tähelepanuväärset jagatise omadust, mis seisnes selles, et jagatis jäi muutmatuks jagatava ja jagaja üheaegsel suurendamisel või vähendamisel üks ning sama arv korda. Me teostaksime raskusteta antud arvude jagamist, kui jagaja oleks täisarv. Selleks piisab aga, kui suurendada jagajat 10 korda, õige jagatise saamiseks tuleb suurendada ka jagatavat sama arv korda, s. t. 10 korda. Siis antud arvude jagamine asendub järgmiste arvude jagamisega:

$$24{,}6 : 2,$$

kusjuures mingeid parandusi jagatises teha ei tule. Teostame jagamise:

$$24{,}6 : 2 = 12{,}3.$$

Tähendab, $2{,}46 : 0{,}2 = 12{,}3$.

2) Jagame 1,25 arvuga 1,6.

$$\begin{array}{r|l}
-12{,}5 & 16 \\
\underline{112} & \overline{0{,}78125} \\
-130 & \\
\underline{128} & \\
-20 & \\
\underline{16} & \\
-40 & \\
\underline{32} & \\
-80 & \\
\underline{80} & \\
0 &
\end{array}$$

Suurendame jagajat (1,6) 10 korda; et jagatis ei muutuks, suurendame ka jagatavat 10 korda; 12 tervet ei jagu 16-ga, seepärast kirjutame jagatises 0 ja jagame 125 kümnendikku 16-ga, saame jagatises 7 kümnendikku ja jäägis 13. Peenestame 13 kümnendikku sajandikeks nulli juurdekirjutamise teel ja jagame 130 sajandikku 16-ga jne.

Pöörame tähelepanu järgmistele asjaoludele:

a) kui jagatises ei saada terveid, siis nende kohale kirjutatakse null;

b) kui pärast jagatava numbri juurdekirjutamist jäägile saadakse arv, mis ei jagu jagatavaga, siis jagatises kirjutatakse null;

c) kui pärast jagatava viimase numbri juurdekirjutamist jäägile jagamine ei lõpe, siis, kirjutades jäägile juurde nulli, jätkatakse jagamist;

d) kui jagatav on täisarv, siis selleks, et jagada teda kümnendmurruga, suurendatakse jagatavat vastava arvu nullide juurdekirjutamise teel.

Seega, **et jagada mingi arv kümnendmurruga, tuleb jagajas jätta ära koma, seejärel suurendada jagatavat nii mitu korda, kui mitu korda suurendati jagajat koma ärajätmisega, seejärel teostada jagamine täisarvuga jagamise reegli järgi.**

§ 112. Ligikaudne jagatis.

Eelmises paragrahvis me vaatlesime kümnendmurdude jagamist, kusjuures kõigis lahendatud harjutustes oli jagamine viidud lõpuni, s. t. oli saadud **täpne jagatis.** Enamikel juhtumeil täpset jagatist aga ei saada, ükskõik kui palju me ka ei jätkaks jagamist. Näiteks üks niisugune juhtum: jagame 53 arvuga 101.

$$\begin{array}{r|l} 53 & 101 \\ \hline -530 & 0{,}5247 \\ 505 & \\ \hline 250 & \\ -202 & \\ \hline 480 & \\ -404 & \\ \hline 760 & \\ -707 & \\ \hline 53 & \end{array}$$

Me saime jagatises juba viis numbrit, kuid jagamine ei ole veel lõppenud ja ei ole ka lootust, et see kunagi lõpeb, kuna jäägis hakkavad korduma numbrid, mis esinesid meil juba varem. Jagatises hakkavad samuti korduma arvud: on ilmne, et numbri 7 järel tuleb number 5, seejärel 2 jne. lõpmatult. Niisugustel juhtumitel katkestatakse jagamine ja piirdutakse jagatise mõne esimese numbriga. Niisugust jagatist nimetatakse **ligikaudseks.** Kuidas seejuures teostada jagamist, näitame harjutuste varal.

Olgu tarvis 25 jagada 3-ga. On ilmne, et täpset jagatist, mis oleks väljendatud täisarvu või lõpliku kümnendmurruga, antud juhul me ei saa. Seepärast otsime ligikaudset jagatist:

$$25:3=8 \text{ (jääk 1)}.$$

Ligikaudne jagatis on 8; see jagatis on loomulikult väiksem täpsest jagatisest, sest jäi ka jääk 1. Et saada täpset jagatist, tuleb leitud ligikaudsele jagatisele, s. t. 8-le, liita murd, mis saadakse jäägi (1) jagamisel 3-ga; see on murd $\frac{1}{3}$. Tähendab, täpne jagatis väljendub segaarvuga $8\frac{1}{3}$. Kuna $\frac{1}{3}$ kujutab endast lihtmurdu, s. t. murdu, mis on ühest väiksem, siis jättes selle ära, teeme vea, mis on väiksem kui 1. Jagatis 8 on **puuduga võetud ligikaudne jagatis täpsusega kuni 1.** Kui me 8 asemel võtame jagatiseks 9, siis teeme samuti ühest väiksema vea, sest me ei liida juurde mitte tervet ühelist, vaid $\frac{2}{3}$. Niisugune jagatis on **liiaga võetud ligikaudne jagatis täpsusega kuni 1.**

Vaatleme näiteks järgmist jagamise juhtu. Olgu tarvis 27 jagada 8-ga. Kuna ka siin ei saada täpset jagatist, mis oleks väljendatud täisarvuga, siis otsime ligikaudset jagatist:

$$27:8=3 \text{ (jääk 3)}.$$

Siin viga $\frac{3}{8}$ on väiksem ühelisest; tähendab, ligikaudne jagatis (3) on võetud puuduga täpsusega kuni 1. Jätkame jagamist: peenestame jäägi 3 kümnendikkudeks, saame 30 kümnendikku; jagame need 8-ga.

$$\begin{array}{r|l} -27 & 8 \\ \hline 24 & 3{,}3 \\ \hline 30 & \\ -24 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

Saime jagatises kümnendike kohale 3 kümnendikku ja jäägiks 6 kümnendikku. Kui jagatises piirdume arvuga 3,3 ja jäägi 6 jätame ära, siis teeme vea, mis on väiksem ühest kümnendikust. Miks?

Seepärast, et täpne jagatis saadakse siis, kui arvule 3,3 lisaksime veel 6 kümnendiku ja 8 jagatise; see annaks $\frac{6}{80}$, mis on väiksem kui üks kümnendik. (Kontrollida!) Seega, kui jagatises piirdume kümnendikega, siis võib ütelda, et me leidsime jagatise **täpsusega kuni üks kümnendik** (puuduga).

Jätkame jagamist selleks, et leida veel ühte kümnendkohta. Peenestame 6 kümnendikku sajandikeks, saame 60 sajandikku; jagame need 8-ga.

```
_27 | 8
 24  ‾‾‾‾
 ‾‾  3,37
 _30
  24
  ‾‾
  _60
   56
   ‾‾
    4
```

Jagatises saime kolmandal kohal 7 sajandikku ja jäägiks 4 sajandikku; kui me need jätame ära, siis teeme vea, mis on väiksem ühest sajandikust, sest et 4 sajandiku ja 8 jagatis on väiksem ühest sajandikust. Niisugustel juhtumitel öeldakse, et jagatis on leitud **täpsusega kuni üks sajandik** (puuduga).

Vaadeldud näite puhul võime saada täpse jagatise, mis on väljendatud kümnendmurruga. Selleks tuleb viimane jääk, s. t. 4 sajandikku peenestada tuhandikeks ja jagada see 8-ga.

Enamikel juhtumeil täpset jagatist ei ole aga võimalik saada ja seetõttu tuleb piirduda jagatise ligikaudsete väärtustega. Vaatleme nüüd niisugust näidet:

$$40 : 7 = 5{,}71428571\ldots$$

Arvu lõppu asetatud punktid tähistavad seda, et jagamine ei ole lõpetatud, s. t. võrdus on ligikaudne. Harilikult ligikaudne võrdus kirjutatakse järgmiselt:

$$40 : 7 \approx 5{,}71428571.$$

Me võtsime jagatise kaheksa kümnendkohaga. Kui niisugust suurt täpsust ei ole nõutud, siis võib piirduda ainult jagatise täisosaga, s. t. arvuga 5 (täpsemini arvuga 6); suurema täpsuse saamiseks võiks võtta arvesse ka kümnendikud ning võtta jagatis võrdseks 5,7-ga; kui ka see täpsus mingil põhjusel ei ole küllaldane, siis võib võtta arvesse ka sajandikud 5,71 jne. Kirjutame välja ligikaudsed jagatised ja nimetame need:

Esimene	ligikaudne	jagatis	täpsusega	kuni	üks	6.
Teine	„	„	„	„	üks kümnendik	5,7
Kolmas	„	„	„	„	üks sajandik	5,71.
Neljas	„	„	„	„	üks tuhandik	5,714.

Seega, et leida ligikaudset jagatist teatava täpsusega, näiteks 3-nda kümnendkohani (s. t. kuni ühe tuhandikuni), katkestatakse jagamine niipea kui saadakse see koht. Seejuures tuleb silmas pidada ümardamise reegleid, mis olid toodud paragrahvis 40.

§ 113. Lihtsaimad ülesanded protsentide kohta.

Lahendame nüüd, pärast kümnendmurdude tundmaõppimist, veel mõned ülesanded protsentide kohta.

Need ülesanded on sarnased nendele, mis me lahendasime harilike murdude osas; kuid nüüd kirjutame sajandikud kümnendmurdude kujul, s. t. ilma selgestipaistva nimetajata.

Eelkõige tuleb osata kiiresti teisendada harilikke murde kümnendmurdudeks nimetajaga 100. Selleks tuleb lugeja jagada nimetajaga.

$$\frac{1}{2}=0{,}5=0{,}50, \quad \frac{1}{4}=0{,}25, \quad \frac{1}{7}\approx 0{,}14,$$
$$\frac{1}{3}\approx 0{,}33, \quad \frac{3}{4}=0{,}75, \quad \frac{2}{7}\approx 0{,}29,$$
$$\frac{2}{3}\approx 0{,}67, \quad \frac{5}{6}\approx 0{,}83, \quad \frac{3}{7}\approx 0{,}43.$$

Allpool esitatud tabelis on näidatud, mil viisil arv märgiga % (protsent) asendab kümnendmurdu nimetajaga 100:

1% = 0,01,	10% = 0,10,
2% = 0,02,	12% = 0,12,
5% = 0,05,	20% = 0,20,
8% = 0,08,	25% = 0,25.

Vaatleme nüüd mõningaid ülesandeid:

1. Protsendi leidmine antud arvust. Ülesanne 1. Ühes asulas elab üldse 1600 inimest. Kooliealiste laste arv moodustab 25% selle asula elanike üldarvust. Mitu kooliealist last on selles asulas?

Selles ülesandes tuleb leida 25% ehk 0,25 arvust 1600. Ülesanne lahendatakse korrutamisega:

$$1\,600 \cdot 0{,}25 = 400 \text{ (last)}.$$

Järelikult, 25% arvust 1 600 on 400.

Selle ülesande paremaks mõistmiseks märgime, et iga saja elaniku kohta tuleb 25 kooliealist last. Järelikult, et teada saada kõigi kooliealiste laste arvu, võib kõigepealt leida, mitu sajalist on arvus 1 600 (16), seejärel aga 25 korrutada sajaliste arvuga ($25 \times 16 = 400$). Niisugusel teel võib kontrollida lahenduse õigsust.

Ülesanne 2. Hoiukassad annavad hoiustajaile aastas 2% tulu. Kui palju tulu saab hoiustaja aastas, kellel on hoiukassas: a) 200 rbl.? b) 500 rbl.? c) 750 rbl.? d) 1 000 rbl.?

Kõigil neljal juhul tuleb ülesande lahendamiseks leida 0,02 antud summast, s. t. iga antud arv tuleb korrutada 0,02-ga. Teeme seda:

a) $200 \cdot 0,02=4$ (rbl.),
b) $500 \cdot 0,02=10$ (rbl.),
c) $750 \cdot 0,02=15$ (rbl.),
d) $1\,000 \cdot 0,02=20$ (rbl.).

Igat ülaltoodud juhtumit võib kontrollida järgmiste arutluste teel. Hoiukassad annavad hoiustajaile aastas 2% tulu, s. t. 0,02 hoiukassasse paigutatud summast. Kui see summa oleks 100 rubla, siis 0,02 sellest oleks 2 rbl. Tähendab, iga 100 rubla pealt saab hoiustaja 2 rubla tulu. Seega igal vaadeldud juhtumil tuleb leida, kui palju on antud arvus sajalisi ja selle sajaliste arvuga korrutada 2 rbl. Harjutuses a) on sajalisi 2, tähendab,

$$2 \cdot 2=4 \text{ (rbl.)}.$$

Harjutuses d) on sajalisi 10, tähendab,

$$2 \cdot 10=20 \text{ (rbl.)}.$$

2. Arvu leidmine tema protsendi järgi. Ülesanne 1. Kevadel lõpetas kooli 54 õpilast, mis moodustab 6% õpilaste üldarvust. Kui palju õpilasi oli koolis sel õppeaastal?

Selgitame kõigepealt, milles seisneb selle ülesande mõte. Kooli lõpetasid 54 õpilast, mis moodustab 6% õpilaste üldarvust ehk, teiste sõnadega, 6 sajandikku (0,06) selle kooli kõigist õpilastest. Tähendab, meil on teada õpilaste osa, mis on väljendatud arvuga (54) ja murruga (0,06), selle murru järgi peame leidma aga kogu arvu. Seega tuleb meil lahendada harilik ülesanne arvu leidmise kohta tema antud osa järgi. Seda tüüpi ülesandeid lahendatakse jagamisega:

$$54 : 0,06=900.$$

Tähendab koolis oli üldse 900 õpilast.

Niisuguseid ülesandeid on otstarbekohane kontrollida pöördülesande lahendamisega, s. t. pärast ülesande lahendamist tuleb kas või mõttes lahendada teist tüüpi ülesanne (protsendi leidmine antud arvust): võtta leitud arv (900) antuks ja leida sellest protsent, mis on antud lahendatud ülesandes, nimelt:

$$900 \cdot 0,06 = 54$$

Ülesanne 2. Perekonna ülalpidamiseks kulub kuus 780 rubla, mis moodustab 65% isa kuutöötasust. Leida tema kuutöötasu.

Sellel ülesandel on sama mõte, mis eelmiselgi. Ülesandes on antud kuutöötasu osa, mis on väljendatud rublades (780 rbl.), ning öeldakse, et see osa moodustab 65% ehk 0,65 kogu töötasust. Otsitavaks on kogu töötasu suurus:

$$780 : 0,65 = 1200.$$

Järelikult, otsitav töötasu on 1 200 rbl.

3. Arvude protsentsuhte leidmine. Ülesanne 1. Kooli raamatukogus on üldse 6 000 raamatut. Nende hulgas on 1 200 matemaatika-alast raamatut. Mitu protsenti moodustab matemaatikaalaste raamatute arv kõigi raamatukogus olevate raamatute arvust?

Me vaatlesime juba eelpool niisugust tüüpi ülesandeid ning jõudsime järeldusele, et kahe arvu protsentsuhte leidmiseks tuleb leida nende arvude suhe ja korrutada see 100-ga.

Selles ülesandes tuleb leida arvude 1 200 ja 6 000 protsentsuhe. Leiame algul nende arvude suhte ja korrutame selle siis 100-ga:

$$\frac{1\,200 \cdot 100}{6\,000} = 20.$$

Seega, arvude 1 200 ja 6 000 protsentsuhe on 20. Teiste sõnadega, matemaatika-alaste raamatute arv moodustab 20% kõigi raamatute üldarvust.

Kontrolliks lahendame pöördülesande: leida 20% arvust 6 000:

$$6\,000 \cdot 0{,}2 = 1\,200.$$

Ülesanne 2. Tehas pidi saama 200 t sütt. Kohale toodi 80 t. Mitu protsenti sütt toodi kohale?

Selles ülesandes küsitakse, mitu protsenti moodustab üks arv (80) teisest (200). Nende arvude suhe on $\frac{80}{200}$. Korrutame selle 100-ga:

$$\frac{80 \cdot 100}{200} = 40.$$

Tähendab, kohale toodi 40% sütt.

Kuueteistkümnes peatükk.

HARILIKE MURDUDE TEISENDAMINE KÜMNENDMURDUDEKS. PERIOODILISED MURRUD.

§ 114. Harilike murdude teisendamine kümnendmurdudeks.

Teisendada harilik murd kümnendmurruks — see tähendab leida niisugune kümnendmurd, mis oleks võrdne antud hariliku murruga. Harilike murdude teisendamisel kümnendmurdudeks kohtume kahe juhtumiga: 1) harilik murd teisendub kümnendmurruks **täpselt;** 2) harilik murd teisendub kümnendmurruks ainult **ligikaudselt.** Vaatleme neid juhtumeid.

1. Kuidas teisendada harilikku murdu kümnendmurruks ehk, teiste sõnadega, kuidas asendada harilik murd temaga võrdse kümnendmurruga?

Juhtumil, mil harilikud murrud teisenduvad kümnendmurdudeks täpselt, on olemas kaks niisuguse teisendamise viisi.

Meenutame, kuidas asendada ühte murdu teise, temaga võrdse murruga, ehk, kuidas minna ühelt murrult üle teisele, jättes esimese murru suuruse muutmata. Sellega tegelesime siis, kui teisendasime murde ühenimelisteks. Murdude ühenimeliseks teisendamisel toimime järgmiselt: leiame kõigepealt antud murdude ühise nimetaja, siis leiame iga murru laiendusteguri ning lõpuks korrutame iga murru lugeja ja nimetaja vastava laiendusteguriga.

Märkinud seda, võtame taandumatu murru $\frac{3}{20}$ ja püüame teisendada selle kümnendmurruks. Antud murru nimetaja on 20, see tuleb teisendada aga niisuguseks nimetajaks, mida kujutaks number 1 koos nullidega. Me otsime nimelt v ä i k s e i m a t nimetajat, mida väljendaks number 1 temale järgnevate nullidega.

E s i m e n e v i i s hariliku murru teisendamiseks kümnendmurruks põhineb nimetaja algtegureiks lahutamisel.

Kõigepealt peab leidma, missuguse arvuga tuleb korrutada arv 20, et korrutist väljendaks üheline nullidega. Et seda leida, tuleb meenutada, missugusteks algtegureiks lahutub arv, mida väljendab üheline nullidega.

Esitame mõningad lahutused:

$$10=2\cdot5$$
$$100=2\cdot2\cdot5\cdot5$$
$$1\,000=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5$$
$$10\,000=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$$

Me näeme esiteks, et arv, mida kujutab üheline nullidega, lahutub a i n u l t k a h t e d e k s j a v i i t e k s, teisi tegureid lahutuses ei esine. Teiseks esinevad need mõlemad tegurid lahutuses v õ r d n e a r v k o r d a. Ja lõpuks, mõlemate tegurite arv eraldi on võrdne n u l l i d e a r v u g a antud arvus.

Vaatleme nüüd, kuidas lahutub arv 20 algtegureiks: $20=2\cdot2\cdot5$. Sellest lahutusest on näha, et kahtesid on arvus 20 kaks, viisi aga üks. Tähendab, kui me sellele lahutusele lisame juurde veel ühe viie, siis saame arvu, mida kujutab number 1 koos nullidega. Teiste sõnadega, selleks et saada nimetajas arvu 20 asemel arvu, mida kujutab üks nullidega, tuleb 20 korrutada 5-ga, kuid selleks, et murru suurus ei muutuks, tuleb korrutada 5-ga ka murru lugejat, s. t.

$$\frac{3}{20}=\frac{3\cdot5}{20\cdot5}=\frac{15}{100}=0{,}15.$$

Seega, et teisendada harilik murd kümnendmurruks, tuleb selle hariliku murru nimetaja lahutada algtegureiks ning seejärel võrdsustada selles kahtede ja viite arvud, tuues nimetajasse (ja loomulikult ka lugejasse) puuduvaid tegureid vajalikul hulgal.

Rakendame seda järeldust mõningate murdude kohta.

Teisendada kümnendmurruks murd $\frac{3}{50}$. Selle murru nimetaja lahutub algtegureiks järgmiselt: $50=2\cdot5\cdot5$, tähendab, selles puudub üks kaks. Täiendame nimetajat puuduva kahega (loomulikult korrutame ka lugejat 2-ga): $\frac{3}{50}=\frac{3\cdot2}{50\cdot2}=\frac{6}{100}=0{,}06$.

Teisendada kümnendmurruks murd $\frac{7}{40}$. Selle murru nimetaja lahutub algtegureiks nii: $40=2\cdot2\cdot2\cdot5$, s. t. selles puudub kaks viit. Kirjutame need lugejasse ja nimetajasse teguritena:

$$\frac{7}{40}=\frac{7\cdot5\cdot5}{40\cdot5\cdot5}=\frac{175}{1000}=0{,}175.$$

Esitatust ei ole raske teha järeldust, missugused harilikud murrud teisenduvad kümnendmurdudeks täpselt. On täiesti ilmne, et taandumatu harilik murd, mille nimetaja ei sisalda teisi algtegureid peale tegurite 2 ja 5, teisendub kümnendmurruks täpselt. Kümnendmurrul, mis saadakse mingi hariliku murru teisendamisel, on nii mitu kümnendkohta, kui mitu korda esineb hariliku murru nimetajas pärast murru taandamist teguritest 2 ja 5 see, mida ta sisaldab suurem arv korda.

Kui me võtame murru $\frac{9}{40}$, siis, esiteks, teisendub see kümnendmurruks, sest et tema nimetaja koosneb teguritest $2\cdot2\cdot2\cdot5$, teiseks, saadud kümnendmurrul on 3 kümnendkohta, sest et arvuliselt ülekaalus olev tegur 2 esineb lahutises kolm korda. Tõepoolest:

$$\frac{9}{40}=\frac{9}{2\cdot2\cdot2\cdot5}=\frac{9\cdot5\cdot5}{2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5}=\frac{225}{1000}=0{,}225.$$

T e i n e v i i s (lugeja jagamine nimetajaga).

Olgu tarvis teisendada kümnendmurruks murd $\frac{3}{4}$. Me teame, et $\frac{3}{4}$ on arvude 3 ja 4 jagatis. Selle jagatise võime leida, jagades 3 arvuga 4. Teeme seda:

$$\begin{array}{r|l} -3{,}0 & 4 \\ \underline{28} & \overline{0{,}75} \\ -20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$$

Seega, $\frac{3}{4}=0{,}75$.

Veel näide: teisendada kümnendmurruks murd $\frac{5}{8}$.

$$\begin{array}{r|l} 5{,}0 & 8 \\ \underline{-48} & 0{,}625 \\ 20 & \\ \underline{-16} & \\ 40 & \\ \underline{-40} & \\ 0 & \end{array}$$

Seega, $\frac{5}{8}=0{,}625$.

Niisiis, **et teisendada harilik murd kümnendmurruks, tuleb hariliku murru lugeja jagada tema nimetajaga.**

2. Vaatleme nüüd teist juhtumit, millele juhtisime tähelepanu selle paragrahvi alguses, s. t. juhtumit, mil harilik murd ei teisendu kümnendmurruks täpselt.

Harilikku taandamatut murdu, mille nimetaja sisaldab 2-st ja 5-st erinevaid algtegureid, ei saa teisendada kümnendmurruks täpselt. Tõepoolest, näiteks murdu $\frac{8}{15}$ ei saa teisendada kümnendmurruks täpselt, kuna tema nimetaja 15 lahutub kaheks algteguriks: 3 ja 5.

Me ei saa kuidagi nimetajast eemaldada kolmelist. Ei saa leida niisugust täisarvu, et pärast antud nimetaja korrutamist sellega väljenduks korrutis ühelise ja nullidega.

Niisugustel juhtumitel võib rääkida ainult hariliku murru **ligikaudsest teisendamisest** kümnendmurruks.

Kuidas seda tehakse? Seda tehakse hariliku murru lugeja jagamise teel nimetajaga, s. t. sellel juhtumil kasutatakse teist viisi hariliku murru teisendamiseks kümnendmurruks. Tähendab, seda viisi kasutatakse nii täpse kui ka ligikaudse teisenduse juures.

Kui harilik murd teisendub kümnendmurruks täpselt, siis jagamisel saadakse lõplik kümnendmurd.

Kui harilik murd ei teisendu kümnendmurruks täpselt, siis jagamisel saadakse lõpmatu kümnendmurd. Kuna me ei saa teostada lõpmatult jagamise protsessi, siis peame katkestama jagamise mingi kümnendkoha juures, s. t. piirduma ligikaudse jagatisega. Me võime näiteks katkestada jagamise esimese kümnendkoha juures, s. t. võime piirduda kümnendikega; vastavalt vajadusele võime piirduda näiteks teise kümnendkohaga, s. t. sajandikega jne. Nendel juhtumitel öeldakse, et me **ümardame** lõpmatut kümnendmurdu. Ümardamist teostatakse niisuguse täpsusega, mis antud ülesande lahendamisel on vajalik.

§ 115. Perioodilise murru mõiste.

Lõpmatut kümnendmurdu, mille üks number või mitme numbri kogum kordub ühes ja samas järjekorras, nimetatakse **perioodiliseks** kümnendmurruks. Näiteks:

0,33333333...; 1,12121212...; 3,234234234...

Korduvate numbrite kogumikku nimetatakse selle murru **perioodiks.** Eespool kirjutatud perioodiliste murdude puhul on esimese murru perioodiks 3, teise murru perioodiks 12, kolmanda murru perioodiks 234. Tähendab, periood võib koosneda kuitahes mitmest numbrist — ühest, kahest, kolmest jne. Esimest korduvate numbrite kogumikku nimetatakse esimeseks perioodiks, teist kogumikku — teiseks perioodiks jne., s. t.

3,234 234 234
1. 2. 3. (periood).

Perioodilised murrud võivad olla kas puhtperioodilised või segaperioodilised. **Puhtperioodiliseks** murruks nimetatakse niisugust murdu, millel periood algab kohe esimesest numbrist pärast koma. Tähendab, eespool esitatud perioodilised murrud on kõik puhtperioodilised. Vastupidi, **segaperioodiliseks** murruks nimetatakse niisugust perioodilist murdu, millel koma ja perioodi vahel on üks või mitu mittekorduvat numbrit, näiteks:

2,5333333...; 4,123232323...; 0,2345345345345...

Kirjutamise lühendamiseks võib kirjutada perioodi üks kord sulgudesse ja jätta pärast sulgusid ära kolm punkti, s. t. 0,33... asemel võib kirjutada 0,(3); 2,515151... asemel võib kirjutada 2,(51); 0,2333... asemel võib kirjutada 0,2(3); 0,8333... asemel võib kirjutada 0,8(3).

Perioodilisi murde loetakse järgmiselt:
0,(3)—0 tervet, perioodis 3.
7,2(3)—7 koma 2, perioodis 3.
5,00(17)—5 koma 00, perioodis 17.

Kuidas tekivad perioodilised murrud? Me juba nägime, et harilike murdude teisendamisel kümnendmurdudeks võib esineda kaks juhtumit. E s i t e k s, hariliku taandumatu murru nimetaja ei sisalda teisi algtegureid peale 2 ja 5; sellel juhtumil teisendub harilik murd lõplikuks kümnendmurruks. T e i s e k s, hariliku taandumatu murru nimetaja sisaldab endas ka teisi algtegureid, mis e r i n e v a d 2-st ja 5-st; sellel juhtumil harilik murd ei teisendu lõplikuks kümnendmurruks. Kui me viimasel juhtumil püüame teisendada harilikku murdu kümnendmurruks lugeja jagamise teel nimetajaga, siis saame lõpmatu kümnendmurru, mis alati osutub p e r i o o d i l i s e k s. Et selles veenduda, vaatleme mingit näidet. Püüame teisendada kümnendmurruks murru $\frac{18}{7}$.

Me loomulikult teame juba varem, et niisuguse nimetajaga murdu ei saa teisendada lõplikuks kümnendmurruks, mistõttu räägime siin ainult ligikaudsest teisendusest. Jagame lugeja 18 nimetajaga 7.

```
_18 | 7
 14  2,57142857
 _40
  35
  _50
   49
   _10
      7
    _30
     28
     _20
      14
      _60
       56
       _40
        35
         50
```

Saime jagatises kaheksa kümnendkohta. Ei ole vajadust jätkata jagamist, kuna see niikuinii ei lõpe. Kuid siit on selge, et jagamist võib jätkata kuitahes kaua ja seega saada jagatises ikka uusi ja uusi numbreid. Need uued numbrid tekivad seetõttu, et meil kogu aeg jääb järele jääk; kuid jääk ei saa kunagi olla suurem jagajast, mis meil on 7.

Vaatleme, missugused olid meie jäägid: 4; 5; 1; 3; 2; 6, s. t. need olid kõik 7-st väiksemad arvud. Ilmselt ei saa jääke olla rohkem kui kuus ja jagamise edaspidisel jätkamisel peavad hakkama need korduma, mistõttu hakkavad korduma ka jagatise numbrid. Eespool esitatud näide kinnitab seda: kümnendkohad jagatises on sellises järjekorras: 571428, pärast seda tulevad uuesti numbrid 57. Tähendab, lõppes esimene periood ja algas teine.

Seega, **hariliku murru teisendamisel saadud lõpmatu kümnendmurd on alati perioodiline.** Kui mingi ülesande lahendamisel saadakse perioodiline murd, siis võetakse see niisuguse täpsusega, mida nõuab ülesande tingimus (kümnendiku, sajandiku, tuhandiku jne. täpsusega).

§ 116. Segaülesannete lahendamisest harilike ja kümnendmurdude kohta.

Mitmesuguste ülesannete lahendamisel kohtume sageli niisuguste juhtumitega, mil ülesandes esinevad nii harilikud kui ka kümnendmurrud.

Neid ülesandeid võib lahendada mitmel viisil.

1. Teisendada kõik murrud kümnendmurdudeks. See on otstarbekohane seepärast, et arvutused kümnendmurdudega on kergemad kui harilike murdudega. Näiteks,

$$\left(\frac{3}{4}+0,5\right)\cdot\left(1\frac{1}{5}-0,7\right).$$

Teisendame murrud $\frac{3}{4}$ ja $1\frac{1}{5}$ kümnendmurdudeks.

$$(0,75+0,5)\cdot(1,2-0,7)=1,25\cdot 0,5=0,625.$$

2. Teisendada kõik murrud harilikeks murdudeks. Nii toimitakse nendel juhtumitel, mil ülesandes esinevad harilikud murrud, mis ei teisendu lõplikeks kümnendmurdudeks. Näiteks,

$$\frac{(2\frac{1}{2}+0{,}75)\cdot\frac{4}{11}}{(45{,}5-44{,}3):0{,}2}.$$

Teisendame kümnendmurrud harilikeks murdudeks:

$$\frac{(2\frac{1}{2}+\frac{3}{4})\cdot\frac{4}{11}}{(45\frac{1}{2}-44\frac{3}{10}):\frac{1}{5}}=\frac{3\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{11}}{1\frac{1}{5}:\frac{1}{5}}=\frac{13\cdot4\cdot5\cdot1}{4\cdot11\cdot6\cdot5}=\frac{13}{66}.$$

3. **Arvutused teostatakse ilma ühte liiki murdusid teist liiki murdudeks teisendamata.** Seda võtet on eriti otstarbekohane kasutada nendel juhtumitel, mil harjutuses esinevad ainult korrutamine ja jagamine. Näiteks,

$$\frac{\frac{3}{4}\cdot2{,}5\cdot1{,}8}{0{,}75\cdot4{,}5\cdot\frac{5}{8}}.$$

Kirjutame harjutuse ümber järgmiselt:

$$\frac{3\cdot25\cdot18\cdot100\cdot10\cdot8}{4\cdot10\cdot10\cdot75\cdot45\cdot5}=1{,}6.$$

4. Mõningail juhtumeil teisendatakse kõik harilikud murrud kümnendmurdudeks (isegi need, mis teisenduvad perioodilisteks kümnendmurdudeks) ja leitakse ligikaudne tulemus. Näiteks,

$$\frac{2}{3}+0{,}125+0{,}234.$$

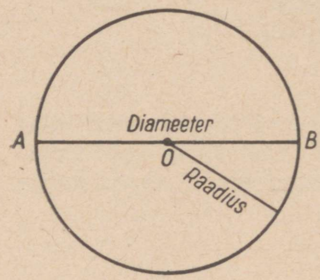
Teisendame $\frac{2}{3}$ kümnendmurruks, piirdudes tuhandikega:

$$0{,}666+0{,}125+0{,}234=1{,}025.$$

GEOMEETRILISE SISUGA ÜLESANNETE LAHENDAMINE.

§ 117. Ringjoone pikkus ja ringi pindala.

1. Ringjoone pikkus. Ringjooneks nimetatakse niisugust kinnist tasapinnalist kõverjoont, mille kõik punktid asetsevad ühest kindlast punktist (O), mida nimetatakse ringjoone **keskpunktiks**, ühel ja samal kaugusel (joon. 27).



Joon. 27.

Ringjoont joonestatakse sirkli abil. Selleks asetatakse see sirkli jalg, mille otsas on teravik, ringjoone keskpunkti, teist (pliiatsiga) jalga pööratakse aga ümber esimese seni, kuni pliiatsi ots joonestab täisringjoone. Vahemaad keskpunktist ringjoone mistahes punktini nimetatakse **raadiuseks.** Definitsioonist järeldub, et kõik raadiused on omavahel võrdsed.

Sirglõiku AB, mis ühendab ringjoone kahte mistahes punkti ja läbib tema keskpunkti, nimetatakse **diameetriks.** Kõik ühe ringjoone diameetrid on omavahel võrdsed; diameeter on võrdne kahe raadiusega.

Kuidas leida ringjoone pikkust? Praktiliselt võib mõningail juhtumeil leida ringjoone pikkuse vahetu mõõtmise teel. Seda võib teha näiteks mitte suurte esemete mõõtmisel (ämber, kann jne.). Selleks võib kasutada mõõdulinti, paela või nööri.

Matemaatikas määratakse aga ringjoone pikkus kaudselt. See arvutatakse nimelt teatud valemi järgi, mille me nüüd tuletame.

Kui võtame mõned suured ja väikesed ümmargused esemed (peenraha, kann, ämber, vaat jne.) ning mõõdame iga vaadeldava eseme ümbermõõdu (ringjoone pikkuse) ja diameetri, siis saame iga eseme jaoks kaks arvu (üks, mis mõõdab ringjoone pikkust, ja teine, mis mõõdab diameetri pikkust). Loomulikult on väikeste esemete puhul need arvud väikesed, suurte esemete puhul aga suured.

Kui me iga juhtumi puhul võtame saadud kahe arvu, nimelt ringjoone pikkuse ja diameetri pikkuse suhte, siis hoolikalt teostatud mõõtmiste puhul saame peaaegu ühe ning sama arvu. Tähistame ringjoone pikkuse tähega C ja diameetri pikkuse tähega D, siis suhtel on järgmine kuju $C : D$. Praktilistel mõõtmistel esinevad alati vältimatud vead. Kuid teostanud eespoolnimetatud katse ja arvutused, saame suhte $C : D$ jaoks ligikaudselt järgmised arvud: 3,13; 3,14; 3,15. Need arvud erinevad väga vähe üksteisest.

Matemaatikas on teoreetiliste arutluste teel leitud, et otsitav suhe $C : D$ mitte kunagi ei muutu ja et see on võrdne lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruga, mille ligikaudne väärtus täpsusega kuni üks kümnetuhandik on 3,1416. See tähendab, et iga ringjoon on pikem oma diameetrist üks ja sama arv korda. Seda arvu on hakatud tähistama kreeka tähega π (pii). Ringjoone pikkuse ja diameetri suhe kirjutatakse seega järgmiselt: $C : D = \pi$. Me piirdume selle arvu puhul sajandikega, s. t. võtame $\pi = 3{,}14$.

Kirjutame valemi ringjoone pikkuse määramiseks.

Kuna $C : D = \pi$, siis

$$\boxed{C = \pi D},$$

s. t. **ringjoone pikkus on võrdne arvu π ja diameetri korrutisega.**

Ülesanne 1. Leida ümmarguse toa ümbermõõt (C), kui toa diameeter $D = 5{,}5$ m.

Võttes arvesse eespool käsitletut, peame selle ülesande lahendamiseks suurendama diameetrit 3,14 korda:

$$5{,}5 \cdot 3{,}14 = 17{,}27 \text{ (m)}.$$

Ülesanne 2. Leida ratta raadius, kui ratta ümbermõõt on 125,6 cm.

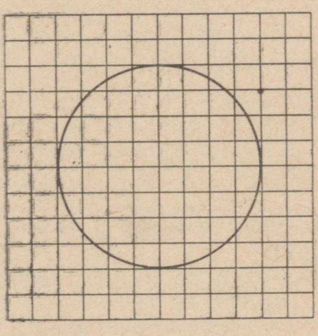
See ülesanne on vastupidine eelmisele. Leiame ratta diameetri:

$$125{,}6 : 3{,}14 = 40 \text{ (cm)}.$$

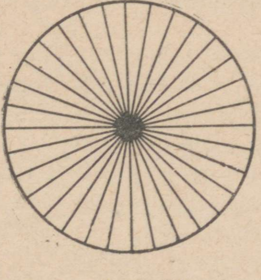
Leiame nüüd ratta raadiuse:

$$40 : 2 = 20 \text{ (cm)}.$$

2. Ringi pindala. Et määrata ringi pindala, võiks näiteks joonestada paberile antud raadiusega ring, katta see läbipaistva ruudulise paberiga ja seejärel loendada ringi sees asetsevad ruudud (joon. 28). Kuid selline meetod pole otstarbekohane paljude põhjuste tõttu. Esiteks, ringi piirjoone lähedal tekib terve rida poolikuid ruute, mille suuruse üle on väga raske otsustada. Teiseks, ei saa katta paberilehega suuri esemeid (ümmargust lillepeenart, bas-



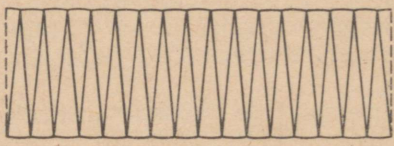
Joon. 28.



Joon. 29.

seini, purskkaevu jt.). Kolmandaks, loendanud ruudud, ei saa me siiski mingit reeglit, mis võimaldaks lahendada teist sarnast ülesannet.

Seetõttu toimime teisiti. Võrdleme ringi mingi meile tuntud kujundiga, ning teeme seda järgmisel viisil: lõikame paberist välja ringi, seejärel lõikame ringi mööda diagonaali pooleks, siis iga poole jälle pooleks, iga veerandi samuti pooleks jne. seni, kuni oleme lõiganud ringi näiteks 32-ks osaks, milledel on hammaste kuju (joon. 29). Seejärel asetame need nii nagu näidatud joonisel 30, s. t. algul asetame 16 hammast sae kujul, seejärel tekkinud vahedesse asetame 15 hammast ja lõpuks viimase järelejäänud hamba lõikame mööda raadiust pooleks ning asetame ühe osa vasakule, teise — paremale poole. Saame kujundi, mis meenutab ristkülikut. Selle kujundi pikkus (alus) võrdub ligikaudu poolringjoone pikkusega, kõrgus aga ligikaudu raadiusega. Niisuguse kujundi pindala võib leida, kui korrutada arvud, mis väljendavad poolringjoone pikkust ja raadiuse pikkust. Kui tähistada ringi pindala tähega S, ringjoone pikkus tähega C ja raadius tähega r, siis võime kirjutada valemi ringi pindala määramiseks:



Joon. 30.

$$\boxed{S = \frac{C}{2} \cdot r},$$

mida sõnastatakse järgmiselt: **ringi pindala on võrdne poolringjoone pikkuse ja raadiuse korrutisega.**

Ülesanne. Leida ringi pindala, kui ringi raadius on 4 cm.

Leiame algul ringjoone pikkuse, siis poolringjoone pikkuse ja seejärel korrutame poolringjoone pikkuse raadiusega.

1) Ringjoone pikkus $C = \pi \cdot D = 3{,}14 \cdot 8 = 25{,}12$ (cm).

2) Poolringjoone pikkus $\frac{C}{2} = 25{,}12 : 2 = 12{,}56$ (cm).

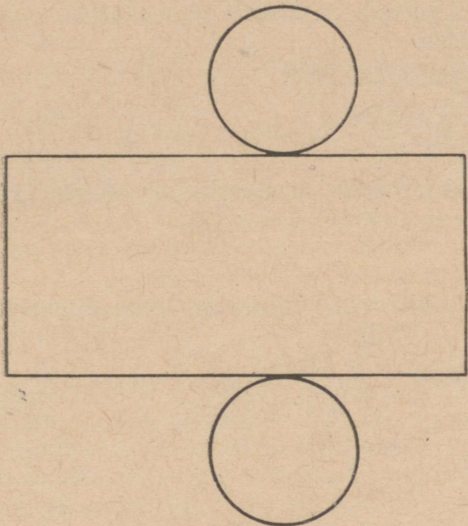
3) Ringi pindala $S = \frac{C}{2} \cdot r = 12{,}56 \cdot 4 = 50{,}24$ (cm^2).

§ 118. Silindri pindala ja ruumala.

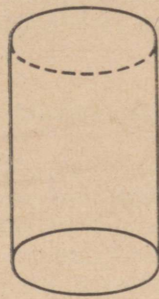
Ülesanne 1. Leida silindri täispindala, kui silindri põhja diameeter on 20,6 cm ja kõrgus 30,5 cm.

Silindri kuju (joon. 31) on näiteks pangel, klaasil (mittekandilisel), kastrulil ja paljudel teistel esemetel.

Silindri täispindala (nagu ka risttahuka pindala) koosneb külgpindalast ja kahest põhja pindalast (joon. 32). Et endale näitlikult



Joon. 31.



Joon. 32.

ette kujutada, millest on jutt, tuleb valmistada korralik silindri mudel. Kui me sellest silindrist eraldame kaks põhja, s. t. kaks ringi, külgpinna lõikame aga pikuti lõhki ning laotame laiali, siis saab täiesti selgeks, kuidas leida silindri täispindala. Külgpind moodustab nimelt ristküliku, mille alus võrdub ringjoone pikkusega. Seepärast ülesande lahendus on järgmine:

1) Ringjoone pikkus: $20{,}6 \cdot 3{,}14 = 64{,}684$ (cm).

2) Silindri külgpindala: $64{,}684 \cdot 30{,}5 = 1972{,}862$ (cm²).

3) Ühe põhja pindala: $32{,}342 \cdot 10{,}3 = 333{,}1226$ (cm²).

4) Silindri täispindala: $1972{,}862 + 333{,}1226 + 333{,}1226 = 2639{,}1072$ (cm²) ≈ 2639 (cm²).

Ü l e s a n n e 2. Leida silindrikujulise raudvaadi ruumala, kui vaadi mõõtmed on: põhja diameeter 60 cm ja kõrgus 110 cm.

Et arvutada silindri ruumala, tuleb meenutada, kuidas me arvutasime risttahuka ruumala (on kasulik lugeda läbi § 61).

Ruumala mõõduühikuks on meil kuupsentimeeter. Kõigepealt tuleb leida, mitu kuupsentimeetrit saab paigutada põhja pinnale ja seejärel saadud arv korrutada kõrgusega.

Et leida, mitu kuupsentimeetrit saab paigutada põhja pinnale, tuleb arvutada silindri põhja pindala. Kuna põhjaks on ring, siis tuleb leida ringi pindala. Ruumala määramiseks tuleb põhja pindala korrutada kõrgusega.

Ülesande lahendus on järgmine:

1) Ringjoone pikkus: $60 \cdot 3{,}14 = 188{,}4$ (cm).

2) Ringi pindala: $94{,}2 \cdot 30 = 2\,826$ (cm²).

3) Silindri ruumala: $2\,826 \cdot 110 = 310\,860$ (cm³).

Kui tähistame silindri ruumala tähega V, põhja pindala tähega S ja silindri kõrguse tähega H, siis võib kirjutada valemi silindri ruumala määramiseks:

$$\boxed{V = S \cdot H},$$

mida sõnastatakse järgmiselt: **silindri ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.**

§ 119. Tabelid ringjoone pikkuse arvutamiseks tema diameetri järgi.

Mitmesuguste tootmistöös esinevate ülesannete lahendamisel tuleb sageli arvutada ringjoone pikkust. Kujutame endale ette töölist, kes valmistab ümmargusi detaile antud diameetri järgi. Ta peab iga kord, teades diameetrit, arvutama ringjoone pikkuse. Et hoida kokku aega ja vältida vigu, kasutab ta valmis tabeleid, milledes on antud diameetrid ja nendele vastavad ringjoone pikkused.

Esitame väikese osa nendest tabelitest ja arutleme, kuidas neid kasutada.

D	Ringjoone pikkus	D	Ringjoone pikkus	D	Ringjoone pikkus
1	3,142	6	18,850	11	34,558
2	6,283	7	21,991	12	37,699
3	9,425	8	25,133	13	40,841
4	12,566	9	28,274	14	43,982
5	15,708	10	31,416	15	47,124

Olgu teada, et ringjoone diameeter on 5 m. Otsime tabelist üles vertikaaltulbas tähe D all arvu 5. See on diameetri pikkus. Sellest arvust paremal (tulbas, mille pealkiri on «Ringjoone pikkus» leiame arvu 15,708 m. Täpselt samal viisil leiame, et kui $D=10$ cm, siis ringjoone pikkus on 31,416 cm.

Selle tabeli abil võib sooritada ka pöördtehteid. Kui on teada ringjoone pikkus, siis võib leida tabelist temale vastava diameetri. Olgu ringjoone pikkus ligikaudu 34,56 cm. Leiame tabelis arvu, mis oleks kõige lähedasem antud arvule. Selleks on 34,558 (erinevus 0,002). Niisuguse pikkusega ringjoonele vastav diameeter on ligikaudu 11 cm.

Siin käsitletud tabelid esinevad mitmesugustes käsiraamatutes. Need esinevad ka V. B r a d i s e «Neljakohalistes matemaatilistes tabelites» ja S. P o n o m a r j o v i, N. S õ r n e v i aritmeetika ülesannete kogus.

K a h e k s a t e i s t k ü m n e s p e a t ü k k.

PROTSENDID.

§ 120. Protsendi leidmine antud arvust.

Me juba tegelesime ülesannete lahendamisega protsentide kohta. Nüüd vaatleme aga mõningaid keerulisemaid ülesandeid protsentide kohta ja esitame nende lahendamiseks teistsuguseid meetodeid. Ülesannete paigutusel peame kinni varajasemast järjekorrast.

Vaatleme ülesandeid, millistes tuleb leida teatud arv protsente antud arvust.

Ü l e s a n n e 1. Kirjutusmasina esialgset hinda 1 200 rbl. alandati 8,5% võrra. Mitme rubla võrra alandati kirjutusmasina hinda?

Ülesandes tuleb leida 8,5% arvust 1 200. Protsentide arv on väljendatud kümnendmurruga. Selle murruga tuleb toimida järgmiselt: 1% on 0,01, pool protsenti (0,5%) on pool 0,01-st, s. t. 0,005. Järelikult, 8,5% ei ole midagi muud kui 0,085.

Seepärast on ülesande lahendus järgmine:

$$1\,200 \cdot 0{,}085 = 102 \text{ (rbl.)}.$$

Ü l e s a n n e 2. Treial peab normi järgi valmistama päevas 500 detaili, kuid ta ületab normi. Esimesel päeval täitis ta 105% normist, teisel päeval 107%, kolmandal päeval 110%, neljandal päeval 106% ja viiendal päeval 108%. Mitu detaili valmistas ta igal nimetatud päeval?

See ülesanne erineb varajasematest selle poolest, et siin tuleb leida arvust rohkem kui 100%.

Hakkame lahendama seda ülesannet. Leiame töölise esimese päeva toodangu.

Ülesandes on öeldud, et esimesel päeval täitis tööline 105% normist. Asendame 105% kümnendmurruga. See on 1,05. Ülesande lahendamiseks tuleb 500 korrutada 1,05-ga:

$$500 \cdot 1{,}05 = 525.$$

Samal viisil leiame töölise toodangu ka järgmistel päevadel:

teisel päeval: $500 \cdot 1{,}07 = 535$;
kolmandal päeval: $500 \cdot 1{,}1 = 550$;
neljandal päeval: $500 \cdot 1{,}06 = 530$;
viiendal päeval: $500 \cdot 1{,}08 = 540$.

Ü l e s a n n e 3. Mööbli remondiks kulutas kool 1 200 rbl. 45% sellest summast läks puuseppadele töötasuks, ülejäänud osa aga materjali ostuks. Kui palju kulutati töötasuks ja kui palju materjali ostuks?

Leiame algul, kui palju maksti puuseppadele? Ülesande tingimusest on näha, et nendele maksti 45% 1 200-st rublast. Leiame 1% 1 200-st rublast. Selle saame, kui 1 200 jagame 100-ga. Siis leiame 45% 1 200-st rublast. Selleks korrutame saadud jagatise 45-ga. Tulemuse kirjutame järgmiselt:

$$\frac{1\,200 \cdot 45}{100} = 540 \text{ (rbl.)}.$$

Sellest avaldisest on näha, et mingi protsendi leidmiseks antud arvust tuleb see arv jagada 100-ga ja korrutada protsentide arvuga. Selle reegli võib esitada ka valemi kujul; tähistame otsitava arvu tähega b, ülesandes antud arvu tähega a ja protsentide arvu tähega p, siis valemil on kuju:

$$b = \frac{ap}{100}.$$

Nüüd tuleb meil leida veel materjali koguhind. Seda võib teha mitmel viisil. Toimime järgmiselt. Leiame kõigepealt, mitu protsenti moodustab materjali hind remondi üldsummast. Kuna tööjõule kulutati 45%, siis materjalile: 100%—45%=55%.

Järelikult tuleb meil leida 55% 1 200-st rublast. Me võime kasutada nüüd tuletatud valemit. Antud juhtumil tuleb a asemele panna 1 200, p asemele aga 55. Saame:

$$b = \frac{1\,200 \cdot 55}{100} = 660 \text{ (rbl.)}.$$

Seega 1 200-st rublast maksti töölistele 540 rbl., materjali ostuks kulutati aga 660 rbl.

Me lahendasime mõned ülesanded protsentide arvutamise kohta. Näitame nüüd, kuidas lahendada ülesandeid vastava tabeli abil.

Tabel protsentide arvutamiseks

Arv	2%	Arv	2%	Arv	2%	Arv	2%
1	0,02	10	0,2	100	2	1 000	20
2	0,04	20	0,4	200	4	2 000	40
3	0,06	30	0,6	300	6	3 000	60
4	0,08	40	0,8	400	8	4 000	80
5	0,1	50	1,0	500	10	5 000	100
6	0,12	60	1,2	600	12	6 000	120
7	0,14	70	1,4	700	14	7 000	140
8	0,16	80	1,6	800	16	8 000	160
9	0,18	90	1,8	900	18	9 000	180

Oletame, et hoiustajal on hoiukassas 8 754 rbl. Kassa maksab hoiustajale 2% aastas. Kui palju tulu saab hoiustaja ühe aasta pärast peale hoiuse sissemaksmist? Meil tuleb arvutada 2% antud summast; seepärast peame tabelis otsima üles tulba, kus on antud summa, ja tulba, mille kohale on kirjutatud 2%. Arutleme järgmiselt: tuleb leida 2% arvust 8 754. Tabeli järgi leiame 2% arvust 8 000, mis on 160; seejärel leiame 2% arvust 700, mis on 14; siis 2% arvust 50, mis on 1; ja lõpuks 2% arvust 4, mis on 0,08. Liites need arvud, saame 175,08 rbl.

Soovitame teha arvutused ja täiendada tabelit kuni 10%-ni.

§ 121. Arvu leidmine tema protsendi järgi.

Lahendame mõned ülesanded arvu leidmise kohta, kui on teada selle arvu osa, mis moodustab antud arvu protsente.

Ü l e s a n n e 1. Kooli lastevanemate koosolekust puudus 12 inimest, mis moodustas 7,5% lastevanemate üldarvust. Kui palju lastevanemaid pidi üldse võtma osa koosolekust?

Asendame 7,5% kümnendmurruga. See on 0,075. Tähendab, koosolekult puuduvad 12 inimest moodustavad 0,075 lastevanemate üldarvust. Seega tuleb selles ülesandes leida arv tema antud osa järgi. Leiame selle:

$$12 : 0{,}075 = 160.$$

Järelikult, lastevanemate koosolekust pidi osa võtma 160 inimest.

Ü l e s a n n e 2. Tehas pidi valmistama kuuplaani järgi teatud arvu mootoreid. Kuuplaani täitis tehas 116% ja valmistas 1 740 mootorit. Kui suur oli kuuplaan?

Võib arutleda järgmiselt: plaan kujutab endast 100%, ülesandes on antud 116%, mis väljendub arvuga 1 740. Arvutame algul 1% (jagamisega), siis 100% (korrutamisega):

$$1)\ 1\,740 : 116 = 15;$$
$$2)\ 15 \cdot 100 = 1\,500.$$

Seega pidi tehas plaani järgi valmistama 1 500 mootorit.

M ä r k u s. Võib esitada küsimuse: miks see ülesanne kuulub nende ülesannete hulka, kus tuleb leida arv tema protsendi järgi? Me oleme analoogiliste ülesannete hulgas harjunud leidma selliseid, millistes protsentide arv on väiksem kui 100, näiteks: «Tehas valmistas teatud aja jooksul 900 mootorit, mis moodustab 60% plaanist. Kui suur oli plaan?» Selles ülesandes tuleb leida arv tema protsendi järgi, seepärast tuleb 900 jagada 0,6-ga, mis annab tulemuseks 1 500.

Siin moodustas osa arvust 60%, s. t. 0,6. Teises ülesandes oli antud ebatavaline osa (116% ehk 1,16), mis oli suurem arvust endast. Matemaatikas ei loeta aga niisugust ülesannet erandiks ja teda võib lahendada harilikul viisil, s. t.

$$1\,740 : 1{,}16 = 1\,500.$$

Ülesanne 3. Meenutame eelmise paragrahvi kolmandat ülesannet. Selles oli antud remondiks eraldatud üldsumma (1 200 rbl.) ja protsentide arv, mis kulutati sellest summast töötasuks (45%), ning küsiti, kui palju kulutati töötasuks ja kui palju materjali ostuks.

Kujutame endale ette nüüd pöördülesannet. Olgu meil teada, et töötasuks kulutati 540 rbl. ja et see moodustas 45% remondi üldsummast. Asetame küsimuse: kui palju läks maksma mööbli remont?

Ülesandes tuleb leida, teades 45% arvust, 100% temast, s. t. terve arv. Toimime nii: leiame algul 1% (antud arvu jagamise teel arvuga 45), seejärel leiame aga 100% (korrutamisega):

$$\frac{540 \cdot 100}{45} = 1\,200 \text{ (rbl.)}$$

Sellest avaldisest on näha, et terve arvu leidmiseks tema antud protsendi järgi tuleb protsentidele vastav arv jagada protsentide arvuga ja korrutada 100-ga.

Selle reegli võib esitada valemi kujul. Selleks tähistame otsitava arvu tähega a, ülesandes antud protsentidele vastava arvu tähega b ja protsentide arvu tähega p, siis valemil on kuju:

$$a = \frac{b \cdot 100}{p}.$$

Kasutame seda valemit selleks, et, teades materjali ostuks kulutatud summat (660 rbl.) ja sellele vastavat protsentide arvu (55%), leida uuesti remondi koguhind:

$$a = \frac{660 \cdot 100}{55} = \frac{60 \cdot 20}{1} = 1\,200 \text{ (rbl.)}.$$

§ 122. Arvude protsentsuhte leidmine.

Vaatleme ülesandeid arvude protsentsuhte leidmise kohta.

Ülesanne 1. Koosolekust võttis osa 200 inimest. Esitatud resolutsiooni poolt hääletas 151 inimest. Mitu protsenti koosolekust osavõtjaist hääletas resolutsiooni poolt?

Ülesandes tuleb leida, mitu protsenti moodustab arv 151 arvust 200. Me juba lahendasime sarnaseid ülesandeid.

ning leidsime, et sellel juhtumil tuleb esimene arv jagada teisega ning saadud jagatis korrutada 100-ga, s. t.

$$\frac{151 \cdot 100}{200} = \frac{151}{2} = 75,5$$

V a s t u s. Resolutsiooni poolt hääletas 75,5%.

Ü l e s a n n e 2. Plaani järgi pidi tööline valmistama 800 detaili. Ta valmistas aga 996 detaili. Mitu protsenti plaanist täitis tööline?

Ülesande andmetest on näha, et tööline ületas plaani, s. t. ta täitis rohkem kui 100% plaanist. Seda ülesannet võib lahendada samal viisil nagu eelmistki, s. t.

$$\frac{996 \cdot 100}{800} = \frac{996}{8} = 124,5.$$

V a s t u s. Tööline täitis 124,5% plaanist.

Ü l e s a n n e 3. 10 kg jahust saadakse 4,5 kg juurdeküpsust. Mitu protsenti moodustab juurdeküpsus?

Püüame leida selle ülesande lahendamiseks valemi. Meenutame eelmises ülesandes tehtud märkust. Seal oli öeldud, et sarnaste ülesannete lahendamiseks tuleb üks arvudest jagada teisega (leida nende suhe) ning saadud jagatis korrutada 100-ga. Tähistame ühe arvudest tähega a, teise tähega A ja protsentide arvu tähega p. Siis valem on järgmine:

$$p = \frac{a \cdot 100}{A}.$$

Kasutame seda valemit antud ülesande lahendamiseks, asendades tähed vastavate arvudega:

$$p = \frac{4,5 \cdot 100}{10} = 4,5 \cdot 10 = 45.$$

V a s t u s. Juurdeküpsus moodustas 45%.

§ 123. Protsentsuhete tabel.

Protsentsuhe võib olla väljendatud, nagu näha eelmisest paragrahvist, ka murdarvuga, mitte ainult täisarvuga.

N ä i d e. Leida arvude 19 ja 70 protsentsuhe:

$$\frac{19 \cdot 100}{70} = \frac{1\,900}{70} \approx 27,14(\%).$$

Jagamisel saadakse siin perioodiline murd, mille perioodis on 6 numbrit. Me ei hakka välja arvutama kogu seda perioodi, vaid piirdume sajandikega.

Ülesandeid protsentsuhte leidmise kohta kasutatakse laialdaselt. Kui me anname näiteks plaani täitmise, õpilaste õppeedukuse, elanike juurdekasvu jne. protsendi, siis lahendame ülesande kahe arvu protsentsuhte leidmise kohta. Arvutuste kergendamiseks ja aja kokkuhoiuks on koostatud protsentsuhete tabelid. Need tabelid on väga suured, kuid et anda nendest ettekujutuse, esitame siin ainult väikese osa nendest.

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
61	100,00	98,39	96,83	95,31	93,85	92,42	91,04	89,71	88,41	87,14
62		100,00	98,41	96,88	95,39	93,94	92,54	91,18	89,86	88,57
63			100,00	98,44	96,92	95,45	94,03	92,65	91,30	90,00
64				100,00	98,46	96,37	95,52	94,12	92,75	91,43
65					100,00	98,48	97,01	95,59	93,20	92,86
66						100,00	98,51	97,06	95,65	94,29
67							100,00	98,53	97,10	95,71
68								100,00	98,55	97,14
69									100,00	98,57
70										100,00

Sellest tabeli osast võib leida arvude 61 kuni 70 ja nendega võrdsete või nendest suuremate arvude protsentsuhte. Siit võib leida arvude 61 ja 65, 61 ja 67 jne. protsentsuhted; 64 ja 66, 64 ja 68 jne. protsentsuhted.

Leiame näiteks, millega võrdub 62 ja 64 protsentsuhe. Esimese tulba kolmandas reas leiame arvu 62; selle rea ja tulba, mille kohal on arv 64, lõikekohast leiame protsentsuhte 62 : 64. See on 96,88. Kontrollime arvutamise teel selle suhte õigsust:

$$\frac{62 \cdot 100}{64} = \frac{31 \cdot 25}{8} = 96,875 \approx 96,88.$$

Arvutamise teel leitud arv ühtib peaaegu täpselt tabelist leitud arvuga.

Kasutame nüüd seda tabelit järgmise ülesande lahendamisel: «Maja kütmiseks tuleb varuda 70 t sütt. Esimeseks oktoobriks oli kohale toodud 65 t sütt. Mitu protsenti sütt oli kohale toodud esimeseks oktoobriks?»

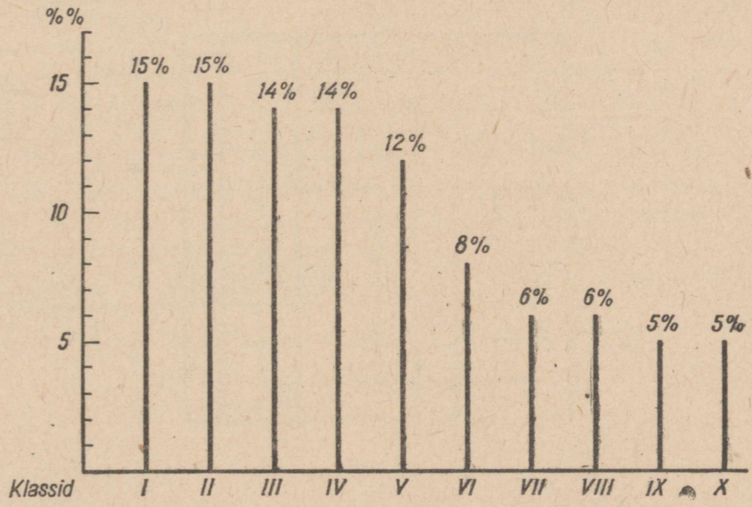
Ülesande lahendamiseks peab leidma kohaletoodud söe ja kogu söe hulga protsentsuhte, s. t. arvude 65 ja 70 suhte.

Selle suhte võime leida tabelist, mis on 92,86%.

§ 124. Diagrammid.

Viiendas peatükis olid esitatud kõige lihtsamate diagrammide näidised. Vaatleme veel mõningaid diagramme. Selles paragrahvis on andmed diagrammide ehitamiseks väljendatud protsentides.

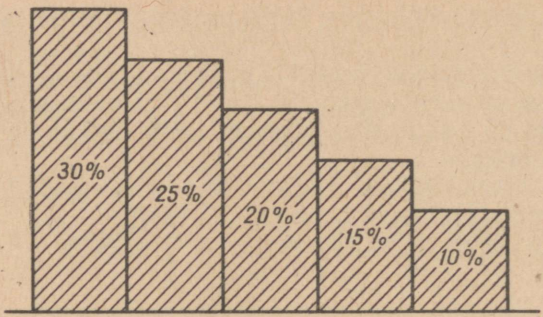
Ülesanne 1. Kümneklassilises koolis oli 300 õpilast. I klassis õpib 15% kõigist õpilastest, II klassis samuti 15%, III klassis 14%, IV klassis ka 14%, V klassis 12%, VI klassis 8%, VII klassis 6%, VIII klassis 6%, IX klassis 5% ja X klassis samuti 5%. Ehitada joondiagramm ja arvutada, mitu õpilast on igas klassis. Diagrammil on joonisel 33 näidatud kuju.



Joon. 33.

Õpilaste arv igas klassis arvutage ise.

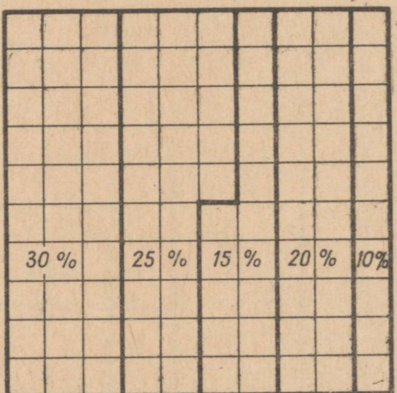
Ülesanne 2. 30% põllumajandustehnikumi katselapist on teravilja all, 25% — viljapuude all, 15% — marjapõõsaste all, 20% — juurvilja ja 10% — teiste kultuuride all. Joonestada diagramm.



Joon. 34.

Joonestame kaks diagrammi. Esimene on tulpdiagramm (joon. 34). Kõik tulbad on võrdse laiusega ja sellele ei pöörata tähelepanu. Tuleb vaadelda ainult tulpade kõrgusi.

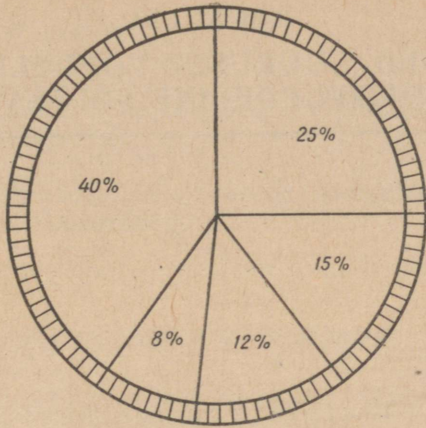
Teine diagramm (joon. 35) on ehitatud teisiti. See kujutab endast suurt ruutu, mis on jaotatud 100-ks väiksemaks ruuduks. Iga väike ruut vastab ühele protsendile. Siis 30 väikest ruutu kujutab 30%, 25 ruutu — 25%, 15 ruutu — 15%, 20 ruutu — 20% ja 10 ruutu — 10%.



Joon. 35.

Ülesanne 3. Klubile anti 10 000 rbl. See summa kulutati järgmiselt: 25% raamatukogu täiendamiseks, 40% loengulisele tööle, 8% radiofitseerimiseks, 12% inventari muretsemiseks ja 15% näitelava sisustamiseks.

Esitame need andmed sektordiagrammi abil. Sektordiagrammi all mõistetakse joonist, milles igale antud arvule vastab sektor, s. t. ringi osa, mis on piiratud kahe raadiuse ja kaarega.



Joon. 36.

Niisuguste diagrammide ehitamisel on otstarbekohane kasutada «protsentmalli». See kujutab endast ringi, mis on jaotatud mööda ringjoont 100-ks võrdseks osaks (joon. 36).

Et ehitada diagrammi protsentmalli abil, tehakse paberile punkt ja tõmmatakse sellest paremale sirge. Seejärel asetatakse protsentmall paberile nii, et malli keskpunkt ühtiks märgitud punktiga ja algraadius (mis läheb keskpunktist nullpunktisse) tõmmatud sirgega. Et märkida 25%, teeme paberile punkti malli 25-nda jaotuse kohale ja tõmbame keskpunktist sellesse punkti raadiuse. Pärast seda võiks malli pöörata vastu kellaosuti liikumise suunda seni, kuni algraadius ühtib lõiguga, mis on tõmmatud punkti 25%, ning seejärel märkida 40%; võib jätta aga niisuguse pöörde ka tegemata ning toimida teisiti. Märkinud 25%, leida summa 25%+ +40%=65%, asetada punkt malli 65-nda jaotuse kohale ning ühendada keskpunkt selle punktiga. Analoogilisel viisil tõmmatakse ka ülejäänud lõigud.

Kui palju raha kulutati igaks otstarbeks, leidke ise.

NELJAS OSA

VÕRDED. SUURUSTE VÕRDELINE JA PÖÖRDVÕRDELINE SÕLTUVUS.

Üheksateistkümnes peatükk

VÕRDED.

§ 125. Võrde mõiste.

Võrdeks nimetatakse kahe suhte võrdsust. Esitame alljärgnevalt mõned võrdused, milliseid nimetatakse võrreteks:

1) $2:1=10:5$;
2) $2\,000:20=500:5$;
3) $0{,}5:2=0{,}75:3$;
4) $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3}{8}:\frac{1}{4}$.

Märkus. Suuruste nimetusi võrretes pole antud.

On tavaks lugeda võrdeid järgmiselt: 2 suhtub 1-sse (ühelisesse) nii, nagu 10 suhtub 5-sse (esimene võrre). Võib lugeda ka teisiti, näiteks: 2 on nii mitu korda suurem 1-st, kui mitu korda 10 on suurem 5-st. Kolmandat võrret võib lugeda nii: 0,5 on nii mitu korda väiksem 2-st, kui mitu korda 0,75 on väiksem 3-st.

Võrdesse kuuluvaid arve nimetatakse **võrde liikmeteks.** Tähendab, võrre koosneb neljast liikmest. Esimest ja viimast liiget, s. t. liikmeid, mis asetsevad väljaspool, nimetatakse **välisliikmeteks.** Neid võrde liikmeid, mis asetsevad keskel, nimetatakse **siseliikmeteks.** Tähendab, esimeses võrdes on arvud 2 ja 5 välisliikmed, arvud 1 ja 10 aga siseliikmed.

§ 126. Võrde põhiomadus.

Vaatleme võrret:

$$6:3=8:4.$$

Korrutame omavahel selle võrde sise- ja välisliikmed. Välisliikmete korrutis on $6\cdot4=24$, siseliikmete korrutis $3\cdot8=24$.

Vaatleme teist võrret:

$$10:5=12:6.$$

Korrutame ka siin omavahel sise- ja välisliikmed.

Välisliikmete korrutis on $10 \cdot 6=60$, siseliikmete korrutis $5 \cdot 12=60$.

V õ r d e p õ h i o m a d u s: **võrde välisliikmete korrutis on võrdne siseliikmete korrutisega.**

Üldkujul kirjutatakse võrde $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ põhiomadus üles järgmiselt: $ad=bc$.

Kontrollime seda mõningate võrrete puhul:

1) $12:4=30:10$.

Võrre on õige, kuna suhted, milledest võrre koosneb, on võrdsed. Peale selle, leidnud suhte välisliikmete korrutiste $(12 \cdot 10)$ ja tema siseliikmete korrutise $(4 \cdot 30)$, näeme, et need on omavahel võrdsed, s. t.

$$12 \cdot 10=4 \cdot 30.$$

2) $\frac{1}{2}:\frac{1}{48}=20:\frac{5}{6}$.

Võrre on õige, milles võib kergesti veenduda, kui lihtsustada esimest ja teist suhet. Võrde põhiomadusel on kuju:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}=\frac{1}{48} \cdot 20.$$

Võib kergesti veenduda selles, et kui kirjutame niisuguse võrduse, mille vasakul pool on mingi kahe arvu korrutis, paremal pool aga kahe teise arvu korrutis, siis nendest neljast arvust saab koostada võrde.

Olgu meil võrdus, milles neli arvu on paarikaupa korrutatud:

$$10 \cdot 7=2 \cdot 35,$$

need neli arvu võivad olla võrde liikmeteks. Seda võrret ei ole raske kirjutada, kui võtta esimene korrutis välisliikmete korrutiseks, teine aga siseliikmete korrutiseks. Sellest võrdusest võib koostada näiteks järgmise võrde:

$$10:2=35:7.$$

Üldiselt, võrdusest $ad=bc$ võib saada järgmised võrded:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \text{ ja } \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

Tehke iseseisvalt järgmine harjutus. On antud kaks kahe arvu korrutist. Kirjutage võrre, mis vastab kummalegi võrdusele:

a) $1 \cdot 6=2 \cdot 3$;
b) $2 \cdot 15=6 \cdot 5$.

§ 127. Võrde tundmatute liikmete arvutamine.

Võrde põhiomadus võimaldab arvutada võrde mistahes liikme, kui see on tundmatu. Võtame võrde:

$$x:4=15:3.$$

Selles võrdes on tundmatu üks välisliige. Me teame, et igas võrdes välisliikmete korrutis võrdub siseliikmete korrutisega. Selle põhjal võime kirjutada:

$$x\cdot 3=4\cdot 15.$$

Pärast arvu 4 korrutamist 15-ga võime kirjutada selle võrde nii:

$$x\cdot 3=60.$$

Vaatleme seda võrdust. Selles esimene tegur on tundmatu, teine tegur ja korrutis on aga teada. Me teame, et tundmatu teguri leidmiseks peame korrutise jagama teise (tuntud) teguriga. Siis saame:

$$x=60:3 \text{ ehk } x=20.$$

Kontrollime leitud tulemust. Selleks asetame antud võrdesse x asemele arvu 20:

$$20:4=15:3.$$

Võrre on õige.

Mõtleme järele, missuguseid tehteid tuli meil sooritada võrde tundmatu välisliikme leidmiseks. Võrde neljast liikmest oli meile tundmatu ainult üks välisliige, kaks siseliiget ja üks välisliige olid aga teada. Võrde välisliikme leidmiseks korrutasime kõigepealt siseliikmed (4 ja 15), seejärel jagasime leitud korrutise tuntud välisliikmega. Näitame nüüd, et tehe ei muutu, kui võrde tundmatu välisliige ei asetse mitte esimesel kohal, vaid viimasel. Võtame võrde:

$$70:10=21:x.$$

Võrde põhiomaduse põhjal võime kirjutada:

$$70\cdot x=10\cdot 21.$$

Korrutanud arvud 10 ja 21, kirjutame võrduse järgmisel kujul:

$$70\cdot x=210.$$

Siin on tundmatu üks tegur, mille leidmiseks tuleb korrutis (210) jagada teise teguriga (70), s. t.

$$x=210:70;\ x=3.$$

Seega võime ütelda, et **võrde iga välisliige on võrdne siseliikmete korrutise ja teise välisliikme jagatisega.**

Käsitleme nüüd tundmatu siseliikme arvutamist. Võtame võrde:

$$30 : x = 27 : 9.$$

Võrde põhiomaduse põhjal võime kirjutada:

$$30 \cdot 9 = x \cdot 27.$$

Leiame 30 ja 9 korrutise ning vahetame võrduse pooled:

$$x \cdot 27 = 270$$

Leiame tundmatu teguri:

$$x = 270 : 27 \text{ ehk } x = 10.$$

Kontrollime asendamise teel:

$$30 : 10 = 27 : 9.$$

Võrre on õige.
Võtame veel ühe võrde:

$$12 : 6 = x : 8.$$

Võrde põhiomaduse põhjal:

$$12 \cdot 8 = 6 \cdot x.$$

Korrutades 12 ja 8 ning vahetades võrduse pooled, saame:

$$6 \cdot x = 96.$$

Leiame tundmatu teguri:

$$x = 96 : 6 \text{ ehk } x = 16.$$

Seega, **võrde iga siseliige on võrdne välisliikmete korrutise ja teise siseliikme jagatisega.**

Leidke järgmiste võrrete tundmatud liikmed:

1) $a : 3 = 10 : 5$; 3) $2 : \frac{1}{2} = x : 5$;

2) $8 : b = 16 : 4$; 4) $4 : \frac{1}{3} = 24 : x$.

Kahte viimast reeglit võib kirjutada üldkujul järgmiselt:

1) Kui võrdel on kuju:

$$x : a = b : c,$$

siis

$$x = \frac{ab}{c}.$$

2) Kui võrdel on kuju:

$$a : x = b : c,$$

siis

$$x = \frac{ac}{b}.$$

§ 128. Võrde lihtsustamine ja tema liikmete ümberpaigutamine.

Käesolevas paragrahvis tuletame reeglid, mis võimaldavad lihtsustada võrdeid neil juhtumeil, kui võrdes esinevad suured arvud või murrud.

Teisendused, mis ei riku võrret, on järgmised:

1. Mistahes suhte kummagi liikme üheaegne suurendamine või vähendamine üks ning sama arv korda.

Näide. $40 : 10 = 60 : 15$.

Suurendanud 3 korda esimese suhte kumbagi liiget, saame:

$$120 : 30 = 60 : 15.$$

Võrre jääb kehtima.

Vähendanud 5 korda teise suhte kumbagi liiget, saame:

$$40 : 10 = 12 : 3.$$

Saime jällegi õige võrde.

2. Kummagi eesliikme või kummagi tagaliikme üheaegne suurendamine või vähendamine üks ning sama arv korda.

Näide. $16 : 8 = 40 : 20$.

Suurendame 2 korda kummagi suhte eesliiget:

$$32 : 8 = 80 : 20.$$

Saime õige võrde.

Vähendame 4 korda kummagi suhte tagaliiget:

$$16 : 2 = 40 : 5.$$

See teisendus võrret ei rikkunud.

Kahte viimast järeldust võib lühidalt sõnastada nii:

Võrre jääb kehtima, kui üheaegselt suurendada või vähendada üks ning sama arv korda võrde mistahes välisliiget ja mistahes siseliiget.

Näiteks, vähendanud 4 korda võrde $16 : 8 = 40 : 20$ esimest välisliiget ja teist siseliiget, saame:

$$4 : 8 = 10 : 20.$$

3. Võrde kõigi liikmete üheaegne suurendamine või vähendamine üks ning sama arv korda.

Näide. $36 : 12 = 60 : 20$.

Suurendame kõiki nelja arvu 2 korda:

$$72 : 24 = 120 : 40.$$

Võrre jääb kehtima.

Vähendame kõiki nelja arvu 4 korda:

$$9 : 3 = 15 : 5.$$

Võrre on õige.

Nimetatud teisendused võimaldavad, esiteks, lihtsustada võrdeid, teiseks, vabastada need murrulistest liikmetest. Toome näiteid.

1) Olgu antud võrre:

$$200 : 25 = 56 : x.$$

Selles on esimese suhte liikmeteks võrdlemisi suured arvud ning kui sooviksime leida x väärtust, siis tuleks meil teostada tehted nende arvudega. Kuid teades, et võrre jääb kehtima, kui suhte kumbagi liiget jagada ühe ning sama arvuga, võime jagada kummagi neist 25-ga. Võrdel on siis kuju:

$$8 : 1 = 56 : x.$$

Saime seega lihtsama võrde, millest x võib leida peast:

$$x = \frac{56 \cdot 1}{8} = 7.$$

2) Võtame võrde:

$$2 : \frac{1}{2} = 20 : 5.$$

Selles võrdes on murruline liige $(\frac{1}{2})$, mille võime kaotada. Selleks tuleb korrutada seda liiget näiteks 2-ga. Kuid võrde ü h t e siseliiget me ei või suurendada; koos sellega peame suurendama ka mingit välisliiget, sest ainult siis jääb võrre kehtima (esimese kahe punkti põhjal). Suurendame esimest välisliiget:

$$(2 \cdot 2) : (2 \cdot \frac{1}{2}) = 20 : 5 \text{ ehk } 4 : 1 = 20 : 5.$$

Suurendame teist välisliiget:

$$2 : (2 \cdot \frac{1}{2}) = 20 : (2 \cdot 5) \text{ ehk } 2 : 1 = 20 : 10.$$

Vaatleme veel kolme näidet võrde vabastamise kohta murrulistest liikmetest.

N ä i d e 1. $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 20 : 30.$

Teisendame murrud ühenimelisteks:

$$\frac{2}{8} : \frac{3}{8} = 20 : 30.$$

Korrutame esimese suhte kumbagi liiget 8-ga, saame:

$$2 : 3 = 20 : 30.$$

Näide 2. $12 : \frac{15}{14} = 16 : \frac{10}{7}$.

Teisendame murrud ühenimelisteks:

$$12 : \frac{15}{14} = 16 : \frac{20}{14}.$$

Korrutame kumbagi tagaliiget 14-ga, saame:

$$12 : 15 = 16 : 20.$$

Näide 3. $\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 20 : \frac{5}{6}$.

Korrutame võrde kõiki liikmeid 48-ga:

$$21 : 1 = 960 : 40.$$

Ülesannete lahendamisel, millistes esinevad mingid võrded, tuleb sageli mitmesugustel eesmärkidel paigutada ümber võrde liikmeid. Vaatleme, missugused ümberpaigutused on seaduspärased, s. t. mis ei riku võrret. Võtame võrde:

$$3 : 5 = 12 : 20. \qquad (1)$$

Paigutades selles võrdes ümber välisliikmed, saame:

$$20 : 5 = 12 : 3. \qquad (2)$$

Paigutame nüüd ümber siseliikmed:

$$3 : 12 = 5 : 20. \qquad (3)$$

Paigutame üheaegselt ümber nii välisliikmed kui ka siseliikmed:

$$20 : 12 = 5 : 3. \qquad (4)$$

Kõik need võrded on õiged. Asetame nüüd esimese suhte teise asemele ja teise — esimese asemele. Saame võrde:

$$12 : 20 = 3 : 5. \qquad (5)$$

Teeme selles võrdes needsamad ümberpaigutused, mis me tegime varem, s. t. paigutame algul ümber välisliikmed, seejärel siseliikmed ja lõpuks üheaegselt nii välisliikmed kui ka siseliikmed.

Saame veel kolm võrret, mis kõik on samuti õiged:

$$5:20=3:12. \tag{6}$$
$$12:3=20:5. \tag{7}$$
$$5:3=20:12. \tag{8}$$

Seega ühest antud võrdest võib saada ümberpaigutuste teel 7 võrret, mis koos antuga moodustavad 8 võrret.

Eriti kergesti näeme kõigi nende võrrete õigsust tähelise üleskirjutise puhul. Eespool saadud 8 võrret omavad sel juhul kuju:

$$a:b=c:d; \qquad c:d=a:b;$$
$$d:b=c:a; \qquad b:d=a:c;$$
$$a:c=b:d; \qquad c:a=d:b;$$
$$d:c=b:a; \qquad b:a=d:c.$$

Kergesti on näha, et võrde põhiomaduse rakendamisel igaüks nendest võrretest võtab kuju:

$$ad=bc.$$

Seega nimetatud ümberpaigutused ei riku võrde õigsust ning neid võib kasutada vajaduse korral.

Kahekümnes peatükk.

VÕRDELISED JA PÖÖRDVÕRDELISED SUURUSED.

§ 129. Eelselgitus.

Inimene tegeleb elus pidevalt kõige mitmesugusemate suurustega. Teenistuja ja tööline tahavad jõuda kindlaks **kellaajaks** tööle, jalakäija ruttab määratud punkti kõige lühemat **teed** mööda, kütja on rahutu, et **temperatuur** aurukatlas tõuseb liiga aeglaselt, majandusalal töötaja teeb plaani toodangu **hinna** alandamiseks jne.

Niisuguseid näiteid võib tuua lõpmata palju. Kellaaeg, vahemaa, temperatuur, hind — kõik need on erinevad suurused. Käesoleva raamatu esimeses ja teises osas me tutvusime eriti sagedasti esinevate suurustega: **pindalaga, ruumalaga, kaaluga.** Paljude suurustega kohtume füüsika ja teiste õppeainete õppimisel.

Kujutage endale ette, et te sõidate rongiga. Aeg-ajalt vaatate kella ning märgite, kui kaua olete juba teel. Te ütlete näiteks, et rongi väljumisest on möödunud 2, 3, 5, 10, 15 tundi jne. Need arvud tähistavad erinevaid ajavahemikke; neid nimetatakse selle suuruse (aja) **väärtusteks.** Või te vaatate läbi akna välja ja määrate kilomeetripostide järgi rongi poolt läbitud vahemaad. Teie ees vilksatavad arvud 110, 111, 112, 113, 114 km. Need arvud tähistavad erinevaid vahemaid. Neid nimetatakse ka sel korral väärtusteks, kuid teise suuruse (kahe punkti vahelise kauguse või tee) väärtusteks. Seega üks suurus, näiteks: aeg, vahemaa, temperatuur jne., võib omandada kuitahes palju e r i n e v a i d v ä ä r t u s i.

Pöörake tähelepanu sellele, et inimene peaaegu kunagi ei vaatle ainult ü h t e suurust, vaid alati s e o b selle mingisuguste t e i s t e suurustega. Temal tuleb üheaegselt tegelda kahe, kolme ja rohkema arvu suurustega. Kujutage endale ette, et teil tuleb kell 9 olla koolis. Te vaatate kella ja näete, et aega on veel 20 minutit. Seejärel arvestate kiiresti, kas sõidate trammiga või jõuate selle ajaga minna kooli ka jala. Järele mõelnud, otsustate minna jala. Samal ajal, kui mõtlesite, lahendasite teatud ülesande. See on tavaline lihtne ülesanne, sest niisuguseid ülesandeid lahendate iga päev. Selles ülesandes te kõrvutate kiiresti teatud suurused. Nimelt, kui te vaatasite kella, tähendab, arvestate a e g a, seejärel kujutate mõttes endale ette kodu ja kooli vahelist k a u g u s t; lõpuks võrdlete kahte suurust: oma käigu k i i r u s t ja trammi k i i r u s t, ning teete järelduse, et antud ajaga (20 minutiga) jõuda kooli. Sellest lihtsast näitest selgub, et praktikas teatud suurused on omavahel seotud, s. t. s õ l t u v a d üksteisest.

Kaheteistkümnendas peatükis käsitleti ühtliiki suuruste suhet. Näiteks, kui ühe lõigu pikkus oli 12 m ja teise lõigu pikkus 4 m, siis nende lõikude suhe on 12 : 4.

Me ütlesime, et see on kahe ü h t l i i k i suuruse suhe. Võib ütelda ka teisiti, et see on kahe s a m a n i m e l i s e arvu suhe.

Nüüd, olles enam tutvunud mitmesuguste suurustega ja toonud sisse **suuruse väärtuse** mõiste, võime anda suhte uue definitsiooni. Tõepoolest, kui me vaatlesime 12 m ja 4 m pikkusi lõike, siis kõnelesime ü h e s t suurusest — pikkusest, 12 m ja 4 m — need olid ainult selle suuruse k a k s erinevat v ä ä r t u s t.

Seepärast edaspidi, kui kõneleme suhtest, siis vaatleme seejuures mingi suuruse kahte väärtust, **suuruse ühe väärtuse ja sama suuruse teise väärtuse suhteks nimetame aga esimese väärtuse ning teise väärtuse jagatist.**

§ 130. Võrdelised suurused.

Vaatleme ülesannet, milles esineb kaks suurust: **vahemaa** ja **aeg.**

Ü l e s a n n e 1. Ühtlaselt ja sirgjooneliselt liikuv keha läbib igas sekundis 12 cm. Määrata tee pikkus, mille läbib keha 2, 3, 4, . . ., 10 sekundi jooksul.

Koostame tabeli, millest võiks jälgida aja ja vahemaa muutumist.

Aeg (sekundites)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Vahemaa (meetrites)	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

Tabel võimaldab võrrelda neid kahte väärtuste rida. Tabelist näeme, et kui esimese suuruse (aja) väärtused järjest suurenevad 2, 3, . . ., 10 korda, siis ka teise suuruse (vahemaa) väärtused suurenevad 2, 3, . . ., 10 korda. Seega ühe suuruse väärtuste suurenemisel mingi arv korda suurenevad ka teise suuruse väärtused sama arv korda ja ühe suuruse väärtuste vähenemisel mingi arv korda vähenevad ka teise suuruse väärtused sama arv korda.

Vaatleme nüüd ülesannet, milles esineb kaks järgmist suurust: riide **hulk** ja selle **koguhind.**

Ülesanne 2. 15 m riiet maksab 120 rbl. Arvutada selle kanga mingi teise alljärgnevas tabelis esitatud riidehulga koguhind.

Hulk (meetrites)	1	2	5	8	10	12	14	15	16	18	20
Koguhind (rublades)	8	16	40	64	80	96	112	120	128	144	160

Sellest tabelist näeme, kuidas kasvab kauba koguhind sõltuvuses tema hulga suurenemisest. Vaatamata sellele, et antud ülesandes esinevad täiesti teised suurused kui esimeses (esimeses ülesandes — aeg ja vahemaa, siin — kauba hulk ja selle koguhind), võib nende suuruste omavahelistes suhetes täheldada suurt sarnasust.

Tõepoolest, tabeli ülemises reas on arvud, mis tähistavad kanga meetrite arvu, nende alla on kirjutatud aga arvud, mis väljendavad kauba vastava hulga koguhinda. Juba esimesel pilgul näeme, et arvud nii ülemises kui ka alumises reas kasvavad; vaadeldes tabelit tähelepanelikumalt, ning võrreldes üksikuid tulpi, märkame, et kõigil juhtumeil kasvavad teise suuruse väärtused sama arv korda kui esimese suuruse väärtusedki, s. t. kui esimese suuruse väärtus kasvas näiteks 10 korda, siis ka teise suuruse vastav väärtus suurenes 10 korda.

Kui vaatleme tabelit paremalt vasakule, siis näeme, et suuruste vastavad väärtused vähenevad üks ning sama arv korda. Selles mõttes on esimese ja teise ülesande vahel absoluutne seos.

Suuruste paare, milledega me kohtusime esimeses ja teises ülesandes, nimetatakse **võrdelisteks.**

Seega, **kui kaks suurust on omavahel seotud nii, et ühe suuruse väärtuste suurenemisel (vähenemisel) mingi arv korda ka teise**

suuruse väärtused suurenevad (vähenevad) sama arv korda, siis niisuguseid suurusi nimetatakse võrdelisteks suurusteks.

Niisuguste suuruste kohta öeldakse ka, et nad on omavahel võrdelises sõltuvuses.

Looduses ja meid ümbritsevas elus võib kohata väga palju niisuguseid suurusi. Toome näiteid.

1. Töötamise **kestus** (päev, kaks päeva, kolm päeva jne.) ning teenistus, mis on saadud selle aja eest päevapalga põhjal.

2. Ühesugusest materjalist tehtud mingi eseme **ruumala** ja selle eseme **kaal.**

§ 131. Võrdeliste suuruste omadus.

Võtame ülesande, milles esinevad järgmised suurused: töötamise kestus ja teenistus. Kui ühepäevane teenistus on 20 rbl., siis teenistus 2 päeva eest on 40 rbl. jne. Otstarbekohane on aga koostada tabel, milles päevade määratud arvule vastab kindel teenistus.

Töötamise kestus (päevades)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Teenistus (rublades)	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200

Vaadeldes seda tabelit näeme, et mõlemad suurused omavad 10 erinevat väärtust. Esimese suuruse igale väärtusele v a s t a b teise suuruse kindel väärtus, näiteks kahele päevale vastab 40 rbl.; viiele päevale vastab 100 rbl. Tabelis on need arvud kirjutatud teineteise alla.

Me juba teame, et kui kaks suurust on võrdelised, siis kumbki neist oma muutumise protsessis suureneb niisama mitu korda, kui mitu korda suureneb teinegi. Siit järeldub: kui võtame esimese suuruse mingi kahe väärtuse suhte, siis see on võrdne teise suuruse kahe vastava väärtuse suhtega. Tõepoolest:

$$6:2=3;$$
$$120:40=3.$$

Miks see nii on? Seepärast, et need suurused on võrdelised, s. t. kui üks neist (töötamise kestus) suurenes 3 korda, siis ka teine (teenistus) suurenes 3 korda.

Me võime teha järelikult niisuguse järelduse: kui võtta esimese suuruse kaks mingit väärtust ja jagada need omavahel, seejärel jagada aga nendele vastavad teise suuruse väärtused, siis mõlemal juhtumil saadakse üks ning sama arv, s. t. üks ning sama suhe. Tähendab, need kaks suhet, mis me eespool kirjutasime, võime ühendada võrdusmärgiga, s. t.

$$6:2=120:40.$$

Ei ole kahtlust selles, et kui võtaksime mitte need suhted, vaid teised, ja mitte selles järjekorras, vaid ümberpööratud järjekorras, siis saaksime samuti suhete võrdsuse. Tõepoolest, vaatleme antud suuruste väärtusi vasakult paremale ja võtame kolmandad ning üheksandad väärtused:

$$3:9=\frac{1}{3},\quad 60:180=\frac{1}{3}.$$

Tähendab, me võime kirjutada:

$$3:9=60:180.$$

Siit järeldub: **kui kaks suurust on võrdelised, siis esimese suuruse kahe meelevaldselt võetud väärtuse suhe on võrdne teise suuruse kahe vastava väärtuse suhtega.**

§ 132. Võrdelise sõltuvuse valem.

Koostame tabeli kompvekkide erinevate koguste maksumuse kohta, kui 1 kg kompvekke maksab 10,4 rbl.

Kaal (kilogrammides)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maksumus (rubllades)	10,4	20,8	31,2	41,6	52	62,4	72,8	83,2	93,6	104

Nüüd toimime järgmiselt. Võtame teise rea mistahes arvu ja jagame selle esimese rea v a s t a v a arvuga. Näiteks:

$$10{,}4:1=10{,}4;$$
$$20{,}8:2=10{,}4;$$
$$31{,}2:3=10{,}4.$$

Te näete, et jagatiseks saadakse kogu aeg üks ning sama arv. Järelikult, **võrdeliste suuruste antud paari puhul on ühe suuruse mistahes väärtuse ja teise suuruse vastava väärtuse jagatis jääv arv** (s. t. muutumatu). Meie näites on see jagatis 10,4. Seda jäävat arvu nimetatakse **võrdeteguriks.** Antud juhtumil väljendab see mõõtühiku, s. t. ühe kilogrammi, kauba hinda.

Kuidas leida või arvutada võrdetegurit? Võrdeteguri leidmiseks tuleb võtta ühe suuruse mistahes väärtus ja jagada see teise suuruse vastava väärtusega.

Tähistame selle ühe suuruse meelevaldse väärtuse tähega y, teise suuruse vastava väärtuse aga tähega x; siis võrdeteguri (tähistame selle tähega (K) leiame jagamise abil:

$$\frac{y}{x}=K.$$

Selles võrduses on y jagatav, x jagaja ja K jagatis. Kuna jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega, siis võib kirjutada:

$$\boxed{y=Kx}.$$

Saadud võrdust nimetatakse **võrdelise sõltuvuse valemiks.** Kasutades seda valemit, võime arvutada kuitahes palju ühe võrdelise suuruse väärtusi, kui teame teise suuruse vastavaid väärtusi ning võrdetegurit.

Näide. Füüsikast teame, et mingi keha kaal P on võrdne tema erikaalu d ja selle keha ruumala V korrutisega, s. t. $P=dV$.

Võtame viis erineva ruumalaga rauatükki; teades raua erikaalu (7,8), võime arvutada nende rauatükkide kaalu valemi järgi:

$$P=7{,}8 \cdot V.$$

Võrreldes seda valemit valemiga $y=Kx$, näeme, et $y=P$, $x=V$ ja võrdetegur $K=7{,}8$. Valem on sama, ainult tähed on teised.

Kasutades seda valemit, koostame tabeli: olgu esimese rauatüki ruumala 8 cm³, siis tema kaal on $7{,}8 \cdot 8=62{,}4$ (g); olgu teise rauatüki ruumala 27 cm³, siis selle kaal on $7{,}8 \cdot 27=210{,}6$ (g).

Tabelil on kuju:

Ruumala (kuupsentimeetrites)	8	27	64	125	216
Kaal (grammides)	62,4	210,6			

Arvutage ise arvud, mis puuduvad selles tabelis, kasutades valemit $P=dV$.

§ 133. Võrdelisi suurusi sisaldavate ülesannete teisi lahendamisviise.

Eelmises paragrahvis lahendasime ülesande, milles esinesid võrdelised suurused. Ülesande lahendamiseks tuletasime kõigepealt võrdelise sõltuvuse valemi ja kasutasime siis seda. Nüüd näitame aga sarnaste ülesannete kaht teist lahendamise viisi.

1. Lahendamine ühiku kaudu. Koostame ülesande eelmises paragrahvis esitatud tabeli andmete põhjal.

Ülesanne. Rauatükk ruumalaga 8 cm³ kaalub 62,4 g. Kui palju kaalub rauatükk, mille ruumala on 64 cm³?

Lahendus. Raua kaal, nagu teada, on võrdeline tema ruumalaga. Kui 8 cm³ kaalub 62,4 g, siis 1 cm³ kaalub 8 korda vähem, s. t.

$$62{,}4 : 8=7{,}8 \text{ (g)}.$$

Rauatükk ruumalaga 64 cm³ kaalub 64 korda rohkem kui rauatükk, mille ruumala on 1 cm³, s. t.

$$7{,}8 \cdot 64 = 499{,}2 \text{ (g)}.$$

Me lahendasime selle ülesande ühiku kaudu. Selle nimetuse mõte seletub sellega, et ülesande lahendamiseks tuli meil kõigepealt leida ruumalaühiku kaal.

2. **Lahendamine võrde abil.** Lahendame sama ülesande võrde abil.

Kuna raua kaal ja tema ruumala on võrdelised suurused, siis ühe suuruse (ruumala) kahe väärtuse suhe on võrdne teise suuruse (kaalu) kahe vastava väärtuse suhtega, s. t.

$$\frac{64}{8} = \frac{P}{62{,}4}$$

(tähega P tähistasime rauatüki kaalu). Siit:

$$P = \frac{64 \cdot 62{,}4}{8} = 499{,}2 \text{ (g)}.$$

Ülesanne on lahendatud võrde abil. See tähendab, et ülesande lahendamiseks tuli moodustada võrre ülesandes esinevatest arvudest.

§ 134. Pöördvõrdelised suurused.

Vaatleme järgmist ülesannet: «Viis müürseppa võivad telliskivist maja seinad üles laduda 168 päevaga. Määrata, mitme päevaga võiksid selle töö ära teha 10, 8, 6 jne. müürseppa.»

Kui 5 müürseppa võivad maja seinad üles laduda 168 päevaga, siis 10 müürseppa võiksid teha selle töö kaks korda kiiremini (ühesuguse tootlikkuse juures), kuna 10 inimest teevad kaks korda rohkem tööd kui 5.

Koostame tabeli, millest võiks näha tööliste arvu ja tööaja muutumist.

Tööliste arv	5	6	7	8	9	10
Töö aeg (päevades)	168	140	120	105	≈93	84

Näiteks, et leida, mitu päeva vajaks 6 töölist maja seinte ladumiseks, tuleb kõigepealt arvutada, mitu päeva vajaks selleks üks tööline ($168 \times 5 = 840$) ning seejärel, mitu 6 töölist ($840 : 6 = 140$).

Vaadeldes tabelit, näeme, et kumbki suurus omab kuut erinevat väärtust. Esimese suuruse igale väärtusele vastab teise suuruse üks kindel väärtus, näiteks arvule 10 vastab 84; arvule 8 arv 105 jne.

Kui vaadelda kummagi suuruse väärtusi vasakult paremale, siis näeme, et ülemise suuruse väärtused k a s v a v a d, alumise suuruse väärtused aga k a h a n e v a d. Kasvamine ja kahanemine alluvad järgmisele seadusele: tööliste arvu väärtused suurenevad niisama mitu korda, kui mitu korda vähenevad kulutatud tööaja väärtused. Veel lihtsamalt võib seda mõtet väljendada järgmiselt: mida r o h k e m on võetud mingi töö tegemiseks tööle töölisi, seda v ä h e m aega vajavad nad selle tegemiseks. Kahte suurust, milledega me kohtusime selles ülesandes, nimetatakse **pöördvõrdelisteks.**

Seega, **kui kaks suurust on seotud omavahel nii, et ühe suuruse väärtuste suurenemisega (vähenemisega) mingi arv korda teise suuruse väärtused kahanevad (suurenevad) sama arv korda, siis niisuguseid suurusi nimetatakse pöördvõrdelisteks.**

Elus võib kohata palju niisuguseid suurusi. Toome näiteid.

1. Kui 150 rubla eest tuleb osta mõned kilogrammid kompvekke, siis kompvekkide h u l k sõltub ühe kilogrammi h i n n a s t. Mida k õ r g e m on hind, seda v ä h e m saab neid osta selle raha eest; seda näeme alljärgnevast tabelist:

1 kg hind (rublades)	10	12,5	15	20	25	30	50
Kaal (kilogrammides)	15	12	10	7,5	6	5	3

Kompvekkide hinna t õ u s m i s e g a mingi arv korda v ä h e n e b s a m a a r v k o r d a kilogrammide arv. Sellel juhtumil on need 2 suurust (kauba kaal ja kauba maksumus) pöördvõrdelised.

2. Kui kahe linna vaheline kaugus on 1 200 km, siis selle vahemaa võib läbida erineva ajaga sõltuvalt liikumise kiirusest. On olemas ju mitmesugused liikumise viisid: jalgsi, hobusega, jalgrattaga, aurikuga, autoga, rongiga, lennukiga. Mida v ä i k s e m on k i i r u s, seda r o h k e m a e g a läheb vaja selle vahemaa läbimiseks. See on näha tabelist:

Kiirus (km/t)	10	20	30	40	50	60	80	100	200	300
Aeg (tundides)	120	60	40	30	24	20	15	12	6	4

Kiiruse suurenemisega mingi arv korda väheneb selle vahemaa läbimiseks kuluv aeg sama arv korda. Tähendab, antud tingimuste puhul on kiirus ja aeg pöördvõrdelised suurused.

§ 135. Pöördvõrdeliste suuruste omadus.

Võtame eelmises paragrahvis vaadeldud teise näite. Seal oli meil nimelt tegemist kahe suurusega — liikumise kiiruse ja ajaga. Kui vaatleme tabelis nende suuruste väärtusi vasakult paremale, siis näeme, et esimese suuruse (kiiruse) väärtused kasvavad, teise suuruse (aja) väärtused aga kahanevad, kusjuures kiirus suureneb nii mitu korda, kui mitu korda väheneb aeg. Ei ole raske taibata, et kui kirjutada ühe suuruse mingisuguste väärtuste suhe, siis see ei ole võrdne teise suuruse vastavate väärtuste suhtega. Tõepoolest, kui me võtame ülemise suuruse neljanda ja seitsmenda väärtuse suhte (40 : 80), siis see ei ole võrdne alumise suuruse neljanda ja seitsmenda väärtuse suhtega (30 : 15). Seda võib üles kirjutada nii:

40 : 80 ei ole võrdne 30 : 15 ehk $40 : 80 \neq 30 : 15$.

Kui aga ühe suhte asemel võtta tema pöördsuhe, siis saame võrduse, s. t. nendest suhetest saab moodustada võrde. Näiteks,

$$80 : 40 = 30 : 15,$$

ehk

$$40 : 80 = 15 : 30.$$

Käsitletu põhjal võime teha järgmise järelduse: **kui kaks suurust on pöördvõrdelised, siis ühe suuruse kahe meelevaldselt võetud väärtuste suhe on võrdne teise suuruse vastavate väärtuste pöördsuhtega.**

§ 136. Pöördvõrdelise sõltuvuse valem.

Vaatleme ülesannet: «On olemas 6 erineva pikkuse ja erineva hinnaga siidriide tükki. Kõik tükid maksavad ühepalju. Ühes tükis on 100 m riiet hinnaga 20 rbl. meeter. Mitu meetrit on igas ülejäänud viies tükis, kui nende tükkide meetri hinnad on vastavalt 25, 40, 50, 80, 100 rbl.?»

Selle ülesande lahendamiseks koostame tabeli:

Meetrite arv tükis	100					
1 m hind (rbl.)	20	25	40	50	80	100

Meil tuleb täita selle tabeli ülemises reas asetsevad tühjad ruudud. Proovime kõigepealt määrata, mitu meetrit on teises tükis. Seda võib teha järgmiselt: Ülesande andmetest on teada, et kõik tükid maksavad ühepalju. Esimese tüki väärtust on kerge määrata: selles on 100 m riiet, kusjuures meeter maksab 20 rbl, tähendab, esimeses tükis on siidi 2000 rbl. eest. Kuna teises tükis on siidi niisama mitme rubla eest, siis, jaganud 2000 rbl. ühe meetri hinnaga, s. t. 25-ga, leiame teise tüki suuruse: 2000 : 25 = 80 (m). Samal viisil leiame kõigi ülejäänud tükkide suurused. Saame tabeli kujul:

Meetrite arv tükis	100	80	50	40	25	20
1 m hind (rbl.)	20	25	40	50	80	100

Ei ole raske näha, et meetrite arvu ja meetri hinna vahel on olemas pöördvõrdeline sõltuvus.

Kui te teete ise vajalikud arvutused, siis näete, et iga kord tuleb arv 2000 jagada 1 m hinnaga. Ümberpöördult, kui te hakkate nüüd korrutama tüki suurust meetrites 1 m hinnaga, siis saate kogu aeg arvu 2000. Seda ongi aga oodata, kuna iga tükk maksab 2000 rbl. Siit võime teha järgmise järelduse: **pöördvõrdeliste suuruste antud paari puhul on ühe suuruse mistahes väärtuse korrutis teise suuruse vastava väärtusega jääv arv** (s. t. muutumatu).

Eelnevas ülesandes oli see korrutis võrdne 2000-ga. Kontrollige, et ka selles ülesandes, kus kõneldi liikumise kiirusest ja ajast, mis kulub ühest linnast teise sõiduks, on olemas selle ülesande jaoks jääv arv (1200).

Pöörates tähelepanu kõigile öeldule, võib kergesti tuletada pöördvõrdelise sõltuvuse valemi. Tähistame ühe suuruse mingi väärtuse tähega x ja teise suuruse vastava väärtuse tähega y. Siis käsitletu põhjal peab x ja y korrutis olema võrdne mingi jääva suurusega, mille tähistame tähega K, s. t.

$$x \cdot y = K.$$

Selles võrduses on x korrutatav, y korrutaja ning K korrutis. Korrutamise omaduse põhjal võrdub korrutaja korrutise ja korrutatava jagatisega. Tähendab,

$$\boxed{y = \frac{K}{x}}\,.$$

See ongi **pöördvõrdelise sõltuvuse valem.** Kasutades seda valemit, võime arvutada kuitahes palju ühe pöördvõrdelise suuruse väärtusi, teades teise väärtusi ja jäävat arvu K.

Vaatleme veel ülesannet: «Ühe teose autor arvestas, et kui tema raamatul on harilik formaat, siis on selles 96 lehekülge, kui aga taskuformaat, siis on selles 300 lehekülge. Ta proovis mitmesuguseid variante, algas 96-leheküljelisest raamatust ning sai siis igale leheküljele 2 500 tähte. Seejärel võttis need lehekülgede arvud, mis on toodud alljärgnevas tabelis, ja arvutas uuesti, mitu tähte tuleb leheküljele.»

Lehekülgede arv	96	100	120	150	160	200	240	300
Tähtede arv leheküljel	2500							

Proovime ka meie arvutada, mitu tähte tuleb leheküljele, kui raamatus on 100 lehekülge.

Kogu raamatus on 240 000 tähte, kuna $2\,500 \cdot 96 = 240\,000$.

Arvestades seda, kasutame pöördvõrdelise sõltuvuse valemit (y — tähtede arv leheküljel, x — lehekülgede arv):

$$y = \frac{K}{x}.$$

Meie näites $K = 240\,000$, järelikult,

$$y = \frac{240\,000}{100} = 2\,400.$$

Niisiis, leheküljel on 2 400 tähte.

Samal viisil leiame, et kui raamatus on 120 lehekülge, siis tähtede arv leheküljel on:

$$y = \frac{240\,000}{120} = 2\,000.$$

Tabelil on seega kuju:

Lehekülgede arv	96	100	120	150	160	200	240	300
Tähtede arv leheküljel	2500	2400	2000					

Ülejäänud ruudud täitke ise.

§ 137. Pöördvõrdelisi suurusi sisaldavate ülesannete teisi lahendamisviise.

Eelmises paragrahvis lahendasime ülesandeid, mis sisaldasid pöördvõrdelisi suurusi. Me tuletasime pöördvõrdelise sõltuvuse valemi ning kasutasime siis seda valemit. Nüüd näitame aga samasuguste ülesannete kaht teist lahendamise viisi.

1. Lahendamine ühiku kaudu. Ülesanne. 5 treialit võivad teha teatud töö 16 päevaga. Mitme päevaga võivad selle töö teha 8 treialit?

Lahendus. Treialite arvu ja tööaja vahel on pöördvõrdeline sõltuvus. Kui 5 treialit teevad töö 16 päevaga, siis ühel treialil kulub sama töö tegemiseks 5 korda rohkem aega, s. t.

5 treialit teevad töö 16 päevaga,

1 treial teeb selle töö $16 \cdot 5 = 80$ päevaga.

Ülesandes küsitakse, mitme päevaga teevad selle töö 8 treialit. Ilmselt teevad nad töö 8 korda kiiremini kui 1 treial, s. t.

$$80 : 8 = 10 \text{ (päevaga)}.$$

See ongi ülesande lahendamine ühiku kaudu. Siin tuli kõigepealt määrata aeg, mis kulus ü h e l töölisel kogu töö tegemiseks.

2. Lahendamine võrde abil. Lahendame sama ülesande teisel viisil. Kuna tööliste arvu ja tööaja vahel on pöördvõrdeline sõltuvus, siis võib kirjutada:

$$\frac{\text{5 treiali töö kestus}}{\text{8 treiali töö kestus}} = \frac{\text{treialite uus arv (8)}}{\text{treialite esialgne arv (5)}}$$

Tähistame töö otsitava kestuse tähega x ja asetame sõnadega väljendatud võrdesse vajalikud arvud:

$$\frac{16}{x} = \frac{8}{5}.$$

Siit:

$$x = \frac{16 \cdot 5}{8} = 10 \text{ (päeva)}.$$

Seesama ülesanne on lahendatud võrde abil. Selle ülesande lahendamiseks tuli meil koostada võrre ülesandes esinevatest arvudest.

M ä r k u s. Eelmises paragrahvis me käsitlesime võrdelist ja pöördvõrdelist sõltuvust. Looduses ja elus võib leida palju näiteid suuruste võrdelise ja pöördvõrdelise sõltuvuse kohta. Tuleb ainult märkida, et need kaks sõltuvuse kuju on lihtsaimad. Nende kõrval esineb veel palju keerukamaid suurustevahelisi sõltuvusi. Samuti ei tule alati mõelda, et kui mingid kaks suurust üheaegselt kasvavad, et siis nende vahel on tingimata võrdeline sõltuvus. See ei ole kaugeltki nii. Näiteks sõidupileti hind kasvab sõltuvalt vahemaast: mida kaugemale sõidame, seda rohkem maksame, kuid see ei tähenda seda, et sõidupileti hind on võrdeline vahemaaga.

K a h e k ü m n e e s i m e n e p e a t ü k k.

VÕRDELINE JA PÖÖRDVÕRDELINE JAOTAMINE.

§ 138. Arvu jaotamine osadeks võrdeliselt antud arvudega.

Ü l e s a n n e. Aias on kahele peenrale istutatud 224 aedmaasika taime. Määrata, mitu taime on istutatud kummalegi peenrale, kui esimese peenra pindala on 8 m^2 ja teise pindala 24 m^2. (Igale ruutmeetrile on istutatud taimi võrdselt.)

Lahendame selle ülesande järgmiselt. Leiame kõigepealt, kui suur on nende kahe peenra pindala kokku:

$$8+24=32 \ (m^2).$$

Niisiis, kahe peenra pindala on kokku 32 m^2. Leiame nüüd, mitu taime tuleb keskmiselt 1 m^2 kohta:

$$224:32=7 \ (\text{tükki}).$$

Teades, mitu taime tuleb 1 m^2 kohta, leiame nüüd juba kergesti, mitu taime tuleb 8 m^2 ja 24 m^2 kohta, s. t. vastame ülesande küsimusele:

$$7\times8=56 \ (\text{tükki});\ 7\times24=168 \ (\text{tükki}).$$

Mõtleme järele, missugused suurused esinesid selles ülesandes ja kuidas need olid omavahel seotud. Ülesandes esinesid kaks suurust: 1) taimede hulk, 2) peenra pindala. Need kaks suurust on võrdelises sõltuvuses, sest mida suurem on peenra pindala, seda rohkem võib sellele istutada taimi. Paigutame arvud, milledega meil oli tegemist ülesandes, nii, et neid oleks kerge võrrelda:

8 m^2—56 tükki
24 m^2—168 tükki.

Siit näeme, et teine peenar on kolm korda suurem kui esimene, ja et sellel on kolm korda rohkem taimi kui esimesel.

Niisiis, selles ülesandes jaotasime taimede arvu võrdeliselt kahe peenra pindaladega. See ongi näiteks üks võimalikkudest ülesannetest võrdelise jaotamise kohta. Kuidas lahendatakse niisuguseid ülesandeid? Ülesandes tuli 224 jaotada kaheks osaks võrdeliselt arvudega 8 ja 24, s. t. jaotada arv 224 kaheks osaks nii, et need osad suhtuksid nagu 8 : 24. Tähistame esimese osa suuruse tähega x, teise osa suuruse tähega y ning kirjutame nende osade suhte:

$$\frac{x}{y}=\frac{8}{24}.$$

Osade leidmiseks sooritati järgmised tehted. Arv 224 jagati arvude 8 ja 24 summaga ning seejärel leitud jagatis korrutati kord 8-ga, kord 24-ga, s. t.

$$x=\frac{224}{8+24}\cdot8;\quad x=56;\quad y=\frac{224}{8+24}\cdot24;\quad y=168.$$

Neid võrdusi võib sõnastada järgmiselt: **et jaotada mingi arv osadeks võrdeliselt antud arvudega, tuleb jagada see arv antud**

arvude summaga ja saadud jagatis korrutada kummagi antud arvuga.

Vaatleme teist ülesannet: «Kolme üht ja sama sorti seebitüki eest maksti 4 rbl. Kui palju maksti iga seebitüki eest, kui esimene tükk kaalus 2 kg, teine 3 kg ja kolmas 5 kg?»

Selles ülesandes tuleb 40 rbl. jaotada kolmeks osaks võrdeliselt üksikute seebitükkide kaaluga. Tähistame esimese seebitüki hinna tähega x, teise hinna tähega y ja kolmanda hinna tähega z.

Kasutame esimese ülesande lahendamisel tuletatud reeglit. Selle reegli põhjal tuleb tundmatu arvu leidmiseks jaotamisele tulev arv jagada antud arvude summaga ja saadud jagatis korrutada järjest kõigi antud arvudega. Järelikult:

$$x=\frac{40}{2+3+5}\cdot 2=8; \qquad y=\frac{40}{2+3+5}\cdot 3=12;$$

$$z=\frac{40}{2+3+5}\cdot 5=20.$$

Seega, esimene seebitükk maksab 8 rbl., teine 12 rbl. ja kolmas 20 rbl. Leitud rublade arvud x, y ja z suhtuvad omavahel nii nagu ülesandes antud kaaluühikute arvud, s. t.

$$x:y:z=8:12:20=2:3:5.$$

Vaatleme nüüd ülesannet a b s t r a k t s e t e arvudega. Jaotada arv 180 kolmeks osaks võrdeliselt arvudega 3; 5; 7. Teiste sõnadega: selles ülesandes tuleb arv 180 jaotada kolmeks niisuguseks liidetavaks, et esimene suhtuks teisesse nii nagu 3 suhtub 5-sse, teine suhtuks kolmandasse nii nagu 5 suhtub 7-sse ja lõpuks esimene kolmandasse nii nagu 3 7-sse. Lühidalt võib seda kirjutada nii:

$$x:y:z=3:5:7,$$

kus x, y ja z tähistavad vastavalt esimest, teist ja kolmandat arvu.

Selle ülesande sisu võib selgitada veel järgmiselt: arv 180 tuleb jaotada kolmeks arvuks nii, et esimene arv sisaldaks kolm osa, teine viis ja kolmas seitse samasugust osa.

Kasutades eespool sõnastatud reeglit, võime kirjutada:

$$x=\frac{180}{3+5+7}\cdot 3=36; \qquad y=\frac{180}{3+5+7}\cdot 5=60;$$

$$z=\frac{180}{3+5+7}\cdot 7=84.$$

Saadud kolm arvu rahuldavad ülesande tingimusi: nende summa on 180, s. t.

$$36+60+84=180 \text{ ja } 3:5:7=36:60:84.$$

Me lahendasime kolm ülesannet võrdelise jaotamise kohta. Näitame nüüd niisuguste ülesannete teisi lahendamisviise.

Ü l e s a n n e 1. Määrata eraldi üür kahe toa eest ($8\ m^2$ ja $24\ m^2$), kui mõlemate eest makstakse kokku 64 rbl.

Tähistame $1\ m^2$ üüri tähega x; siis esimese toa eest tuleb maksta $8x$, teise toa eest aga $24x$. Tähendab, kummagi toa eest tuleb maksta kokku:

$$8x+24x=64.$$

Siit:

$$32x=64;$$
$$x=64:32=2\ \text{(rbl.)}.$$

Edasi lahendatakse ülesanne järgmiselt:

$$2\cdot 8=16\ \text{(rbl.)};$$
$$2\cdot 24=48\ \text{(rbl.)}.$$

Ü l e s a n n e 2. Leida eraldi iga kolme jahupaki hind, kui kokku maksavad nad 40 rbl. ja esimene kaalub 2 kg, teine 3 kg ning kolmas 5 kg.

Tähistame ühe kilogrammi jahu hinna tähega x, siis:

2 kg maksab $2x$;
3 kg „ $3x$;
5 kg „ $5x$,

kogu jahu maksab aga:

$$2x+3x+5x=40.$$

Siit:

$$10x=40; \quad x=40:10=4\ \text{(rbl.)}.$$

Pärast seda võime kergesti määrata iga paki hinna:

$$2x=2\cdot 4=\ \ 8\ \text{(rbl.)};$$
$$3x=3\cdot 4=12\ \text{(rbl.)};$$
$$5x=5\cdot 4=20\ \text{(rbl.)}.$$

Ü l e s a n n e 3. Jaotada arv 1 800 kolmeks liidetavaks võrdeliselt arvudega: 3, 5 ja 7.

Arutleme järgmiselt: esimeses liidetavas on 3 osa, teises 5 ning kolmandas 7.

Tähistades ühe osa suuruse tähega x, võime kirjutada:

$$3x+5x+7x=1\,800.$$

Siit:

$$15x=1\,800; \quad x=1\,800:15=120.$$

Järelikult:

$$3x=3\cdot 120=360;$$
$$5x=5\cdot 120=600;$$
$$7x=7\cdot 120=840.$$

Lahendame nüüd ülesande, milles tuleb mingi arv jaotada neljaks osaks võrdeliselt murdarvudega.

Ülesanne. Jaotada 968 neljaks osaks võrdeliselt arvudega: $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ ja $\frac{3}{8}$. See tähendab, et tuleb leida neli niisugust arvu (x, y, z, t,), mille suhted oleksid võrdsed antud arvude vastavate suhetega, s. t.

$$x:y:z:t=\frac{3}{2}:\frac{3}{4}:\frac{2}{5}:\frac{3}{8},$$

ning summa

$$x+y+z+t=968.$$

Asendame murdarvude suhte täisarvude suhtega, milleks teisendame need murrud ühenimelisteks:

$$\frac{3}{2}:\frac{3}{4}:\frac{2}{5}:\frac{3}{8}=\frac{60}{40}:\frac{30}{40}:\frac{16}{40}:\frac{15}{40}.$$

Jättes ära ühise nimetaja 40, saame:

$$60:30:16:15.$$

Leiame järjest iga otsitava arvu:

$$x=\frac{968}{60+30+16+15}\cdot 60=\frac{968\cdot 60}{121}=480;\quad y=\frac{968}{121}\cdot 30=240;$$

$$z=\frac{968}{121}\cdot 16=128;\quad t=\frac{968}{121}\cdot 15=120.$$

Vastus. $x=480$; $y=240$; $z=128$; $t=120$.

§ 139. Arvu jaotamine osadeks pöördvõrdeliselt antud arvudega.

Vaatleme nüüd niisuguste ülesannete lahendamist, kus tuleb mingi arv jaotada osadeks pöördvõrdeliselt antud arvudega.

Ülesanne. Kahes põllutöö brigaadis on kokku 70 kolhoosnikut. Kumbki brigaad sai ülesandeks harida ühesuurused maatükid. Mitu kolhoosnikut on kummaski brigaadis, kui esimene täitis tööülesande 6 päevaga ning teine 8 päevaga? (Eeldatakse, et kõik kolhoosnikud töötavad võrdse tootlikkusega.)

On ilmne, et me ei tohi jaotada kolhoosnikute arvu kaheks osaks võrdeliselt selle ajaga, mis kulub kummalgi brigaadil nimetatud töö tegemiseks, kuna see brigaad, kes kiiremini lõpetas oma töö, oli ilmselt suurem kui teine. Seepärast ei saa seda ülesannet lahendada nii, nagu me lahendasime eelmised ülesanded.

Arutleme järgmiselt. Esimene kolhoosnikute brigaad lõpetas oma töö 6 päevaga; tähendab, ühe päevaga tegi ta $\frac{1}{6}$ kogu tööst; teine brigaad lõpetas sama töö 8 päevaga, tähendab, ühe päevaga tegi teine brigaad $\frac{1}{8}$ kogu tööst. Võrdleme nüüd esimese brigaadi poolt päevas tehtud tööd tööga, mille tegi teine brigaad päevas. Need tööd väljenduvad murdudega $\frac{1}{6}$ ja $\frac{1}{8}$. Esimene murd on suurem kui teine. Tähendab, esimene brigaad võib ühes päevas teha rohkem kui teine. Kuna aga kõik kolhoosnikud töötavad võrdse tootlikkusega, siis järelikult on esimeses brigaadis rohkem kolhoosnikuid kui teises. Seega, kolhoosnikute arv kummaski brigaadis on võrdeline selle tööga, mille võib teha kumbki brigaad. Tähendab, me peame ülesandes antud arvu 70 jaotama kaheks osaks võrdeliselt arvudega $\frac{1}{6}$ ja $\frac{1}{8}$. Niisugust tüüpi ülesannetega oleme aga juba tuttavad. Teisendades murrud $\frac{1}{6}$ ja $\frac{1}{8}$ ühenimelisteks, leiame arvud, mille suhtes tuleb arv 70 jaotada võrdeliselt:

$$\frac{1}{6}:\frac{1}{8}=\frac{4}{24}:\frac{3}{24}=4:3,$$

s. t. arv 70 tuleb jaotada kaheks osaks võrdeliselt arvudega 4 ja 3. Tähistame esimese brigaadi kolhoosnikute arvu tähega x ja teise brigaadi kolhoosnikute arvu tähega y ning arvutame:

$$x=\frac{70}{7}\cdot 4=40; \qquad y=\frac{70}{7}\cdot 3=30.$$

Niisiis, esimeses brigaadis oli 40 inimest, teises aga 30.

Vaatleme nüüd selle ülesande lahendamise m e e t o d i t. Ülesandes esinevad kolm arvu: 70 (kolhoosnikute arv), 6 (päevade arv) ja 8 (päevade arv). Lahendamise käigus kasutasime veel kahte arvu: $\frac{1}{6}$ ja $\frac{1}{8}$, ning jaotasime arvu 70 kaheks osaks võrdeliselt nende murdudega. On ilmne, et arv 6 ja arv $\frac{1}{6}$ on teineteise pöördarvud. Samuti on teineteise pöördarvud ka 8 ja $\frac{1}{8}$.

Ülesande lahendamiseks tuleb 70 töölist jaotada kaheks mittevõrdseks brigaadiks, lähtudes sellest ajast (päevadest), mis kulub kummalgi brigaadil töö tegemiseks. See aeg väljendub arvudega 6 (päeva) ning 8 (päeva). Nende kahe arvu asemel võtame pöördarvud: $\frac{1}{6}$ ja $\frac{1}{8}$ ning jaotame arvu 70 (tööliste arvu) võrdeliselt nendega.

Niisuguse asenduse teeme seepärast, et tööliste arv ei ole mitte võrdeline, vaid pöördvõrdeline ajaga, mis kulub töö tegemiseks. Niisuguse ülesande puhul öeldakse, et arv 70 o n j a o t a t u d kaheks osaks p ö ö r d v õ r d e l i s e l t arvudega 6 ja 8, s. t. selles esimene osa ei suhtu teisesse mitte nii nagu 6 suhtub 8-sse, vaid nii nagu 8 suhtub 6-sse.

Niisiis, **et jaotada arv osadeks pöördvõrdeliselt antud arvudega, tuleb jaotada see arv osadeks võrdeliselt antud arvude pöördarvudega.**

Ülesanne. Jaotada arv 65 kolmeks osaks pöördvõrdeliselt arvudega 2, 3 ja 4.

Me teame nüüd, et jaotada mingi arv osadeks pöördvõrdeliselt antud arvudega — see tähendab jaotada arv osadeks võrdeliselt antud arvude pöördarvudega.

Kirjutame arvud, mis oleksid ülesandes antud arvude pöördarvud:

$$\text{antud arvud } 2,\ 3,\ 4;$$
$$\text{pöördarvud } \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}.$$

Arv 65 tuleb jaotada osadeks võrdeliselt nende viimaste arvudega. Teisendame murrud ühenimelisteks ning asendame seejärel murdarvude suhte täisarvude suhtega:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{6}{12} : \frac{4}{12} : \frac{3}{12} = 6 : 4 : 3.$$

Tähendab, arv 65 tuleb jaotada kolmeks osaks võrdeliselt arvudega 6 : 4 : 3.

Tähistame esimese osa tähega x, teise osa tähega y ja kolmanda osa tähega z.

Siis

$$x = \frac{65 \cdot 6}{6+4+3} = \frac{65}{13} \cdot 6 = 30; \quad y = \frac{65}{13} \cdot 4 = 20;$$
$$z = \frac{65}{13} \cdot 3 = 15.$$

65 · 6

Algarvude tabel (kuni 1 000).

2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	126	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	
59	139	233	337	439	557	653	769	883	

SISUKORD

Esimene osa.

TÄISARVUD.

Teine osa.

Harilikud murrud.

Kolmas osa.

Kümnendmurrud.

Neljas osa.

VÕRDED. SUURUSTE VÕRDELINE JA PÖÖRDVÕRDELINE SÕLTUVUS.

И. Н. Шевченко

АРИФМЕТИКА. УЧЕБНИК ДЛЯ 5 И 6 КЛАССОВ СЕМИЛЕТНЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

На эстонском языке

Эстонское Государственное Издательство

Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja R. Siirak

Tehniline toimetaja I. Vahtre

Korrektorid A. Nurmoja ja M. Teemägi

Ladumisele antud 30. III 1957. Trükkimisele antud 24. V 1957. Paber 60×92,1/16. Trükipoognaid 12,5. Arvutuspoognaid 11,34. Trükiarv 16000. Tellimise nr. 825. Trükikoda „Pioneer", Tartu, Kastani tn. 38.

Hind rbl. 2.25

6—6

Rbl. 2.25