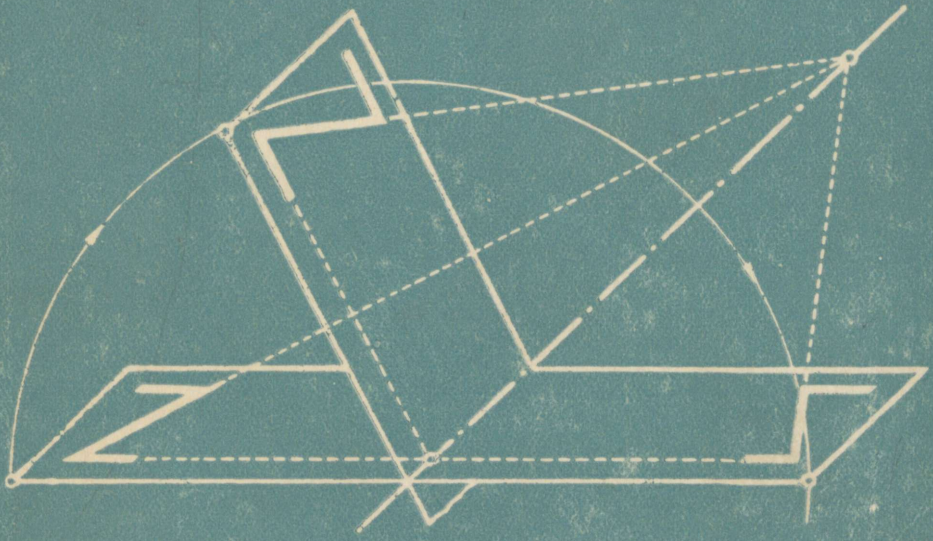
E. ETVERK
O. PRINITS
G. ROSENBERG
A. VIHMAN

MATEMAATIKA

X KLASSILE



ARH

2/677777

E. ETVERK, O. PRINITS, G. ROSENBERG, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

X KLASSILE

2. väljaanne

KIRJASTUS «VALGUS» * TALLINN 1966

51
E95

Kaanekujundus *L. Kruusmaa.*

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

ARHIIVKOGU

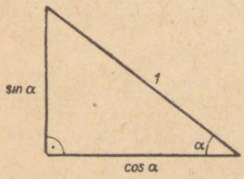
2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
67777

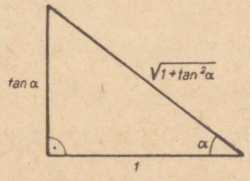
I. TRIGONOMEETRILISTE AVALDISTE TEISENDAMINE.

§ 1. TRIGONOMEETRIA EELMISE OSA KORDAMISEKS.

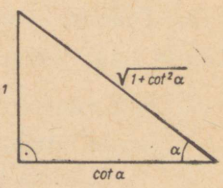
1. a) Kui täisnurkses kolmnurgas hüpotenuus võrdub pikkusühikuga ja ühe teravnurga suurus on α (joon. 1), siis selle teravnurga vastaskaateti pikkus on $\sin\alpha$ ja lähiskaateti pikkus $\cos\alpha$ (joon. 1). Põhjenda seda!



Joon. 1



Joon. 2



Joon. 3

b) Tuleta joonise 1 abil trigonomeetriliste funktsioonide vahelised järgmised seosed (nn. põhiseosed):

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\alpha;$$

$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1.$$

2. a) Täisnurkse kolmnurga teravnurga α lähiskaatet on valitud pikkusühikuks. Näita, et teise kaateti pikkus on siis $\tan\alpha$ ja hüpotenuusi pikkus $\sqrt{1+\tan^2\alpha}$ (joon. 2).

b) Tuleta joonise 2 abil järgmised valemid:

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}};\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

3. a) Näita, et kui täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on α ja selle nurga vastaskaateti pikkus on 1, siis lähiskaateti pikkus on $\cot\alpha$ ja hüpotenuusi pikkus $\sqrt{1+\cot^2\alpha}$ (joon. 3).

b) Tuleta joonise 3 abil järgmised valemid:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}};\quad \cos\alpha=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}.$$

4. Avalda:

a) $\sin\alpha$ nurga α koosinuse kaudu;
b) $\cos\alpha$ nurga α siinuse kaudu;
c) nurga tangens selle nurga siinuse kaudu;
d) nurga tangens selle nurga koosinuse kaudu;
e) nurga kootangens selle nurga siinuse kaudu;
f) nurga kootangens selle nurga koosinuse kaudu.

5. Teades, et $\tan\alpha=\frac{4}{3}$, arvuta $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$ väärtus.

6. Teades, et $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ ja $a>b>0$, avalda nurga α ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

7. Kui suured on trigonomeetriliste funktsioonide väärtused
1) nurkade 30°, 45° ja 60° puhul?
2) nurkade 0°, 90°, 180°, 270° ja 360° puhul?
3) nurga $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$ ja 2π puhul?

8. Nurk x kasvab 0°-st 360°-ni. Kuidas muutub samal ajal
1) $\sin x$? 2) $\cos x$? 3) $\tan x$?

9. Näita, et pole olemas niisugust nurka, mille siinuse ja koosinuse summa on $\sqrt{3}$.

10. 1) Arvuta $\cos 150°$.
2) Lihtsusta antud avaldis:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2.$$

§ 2. KAHE NURGA SUMMA JA VAHE TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

1. Kahe nurga summa siinuse võrdlemine nende nurkade siinuste summaga.

Kui tahame näiteks 30°-se ja 45°-se nurga funktsioonide järgi arvutada 75°-se nurga siinust, siis peame oskama avaldada $\sin(30°+45°)$ liidetavate nurkade funktsioonide kaudu.

Et kahe nurga summa siinus ei võrdu liidetavate nurkade siinuste summaga, seda näitab järgmine näide:

$$\sin(30°+60°)=\sin 90°=1,$$

kuid

$$\sin 30°+\sin 60°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 1.$$

Seega,

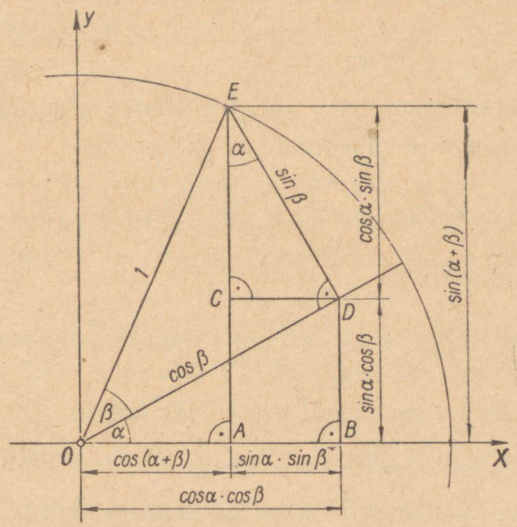
$$\sin(\alpha+\beta)\neq\sin\alpha+\sin\beta.$$

Samal viisil veendume, et näiteks

$$\cos(\alpha-\beta)\neq\cos\alpha-\cos\beta.$$

2. Kahe nurga summa siinus.

Olgu antud teravnurgad α ja β nii, et ka nende summa on



Joon. 4.

teravnurk. Niisiis $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ ja $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$.

Joonestame nurgad α ja β xy-teljestikus võetud ühikringi kesknurkadena (joon. 4):

$$\alpha=\angle DOB,\ \beta=\angle EOD,\ \alpha+\beta=\angle EOB.$$

Joonestame nurga β lõppraadiuse otspunktist E lõigu EA risti nurga α algraadiusega ja lõigu ED risti nurga α lõppraadiusega. Seega

$$EA\perp OB;\ ED\perp OD \text{ ja } DC\perp EA.$$

Siis kolmnurgas DCE nurk $CED=\alpha$.
Et ühikringi raadius $r=OE=1$, siis saame:
kolmnurgas OAE lõik $AE=\sin(\alpha+\beta)$,
kolmnurgas ODE lõik $ED=\sin\beta$ ja lõik $OD=\cos\beta$,
kolmnurgas ECD lõik $EC=\cos\alpha\cdot\sin\beta$,
kolmnurgas OBD lõik $DB=\sin\alpha\cdot\cos\beta$.
Et $DB=AC$ ja $AE=AC+CE$, siis

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta} \qquad (1)$$

Seega oleme saanud valemi (1) kahe teravnurga summa siinuse avaldamiseks antud nurkade siinuse ja koosinuse kaudu, kusjuures see summa ise on ka teravnurk.

Kui üks nurkadest on terav- ja teine täisnurk, näiteks kui $\beta=\frac{\pi}{2}$, siis taandamisvalemite rakendamisel saame:

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

Valem (1) annab:

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{2}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{2}=\cos\alpha.$$

Siit näeme, et ka sel korral valem (1) kehtib.

Kui nurkade α ja β asemel võtta $\frac{\pi}{2}$ võrra suuremad nurgad, s. o. nurgad $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ja $\beta+\frac{\pi}{2}$, siis taandamisvalemite kasutamisel saame:

$$\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sin[(\alpha+\beta)+\pi]=$$
$$=-\sin(\alpha+\beta)=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Valem (1) annab sel korral:

$$\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha\sin\beta-$$
$$-\sin\alpha\cos\beta=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Siit nähtub, et valem (1) kehtib selgi korral.

Nurkasid α ja β niiviisi samm-sammult suurendades veendume, et valem (1) kehtib igasuguste nurkade korral.

3. Kahe nurga summa koosinus.

Valemi kahe nurga summa koosinuse avaldamiseks antud nurkade siinuse ja koosinuse kaudu saame analoogiliselt eelnevaga joonise 4 abil:

$$\cos(\alpha+\beta)=OA=OB-AB=OB-CD=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Seega

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \qquad (2)$$

Ka valemi (2) kehtivuses igasuguste nurkade korral saame veenduda nurkasid α ja β samm-sammult $\frac{\pi}{2}$ võrra suurendades.

4. Kahe nurga vahe siinus ja koosinus.

Valemid kahe nurga vahe siinuse ja koosinuse avaldamiseks antud nurkade siinuse ja koosinuse kaudu saame, kasutades taandamisvalemeid:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[2\pi+(\alpha-\beta)]=\sin[\alpha+(2\pi-\beta)]=$$
$$=\sin\alpha\cdot\cos(2\pi-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(2\pi-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Seega

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta} \qquad (3)$$

Samal viisil saame:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[2\pi+(\alpha-\beta)]=\cos[\alpha+(2\pi-\beta)]=$$
$$=\cos\alpha\cdot\cos(2\pi-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(2\pi-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Seega

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \qquad (4)$$

Valemeid (1), (2), (3) ja (4) nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide liitmislauseteks.

Eespool tuletatud valemite abil saame ka valemid $\tan(\alpha+\beta)$ ja $\tan(\alpha-\beta)$ teisendamiseks.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Jagades viimase murru lugeja ja nimetaja avaldisega $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, saame avaldise:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

Niisiis,

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

Kasutades seost

$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,$$

saame

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

Ülesandeid.

11. Arvuta: 1) $\sin 75°$ 2) $\cos 75°$ 3) $\tan 75°$ 4) $\sin 15°$ 5) $\cos 15°$ 6) $\tan 15°$

12. Arvuta $\cos(\alpha-\beta)$ väärtus, teades, et $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\cos\beta=\frac{5}{13}$ ja et α ja β on teravnurgad.

13. Arvuta $\sin(\alpha+\beta)$ väärtus, teades, et α ja β on teravnurgad ning $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\sin\beta=\frac{12}{13}$.

14. Arvuta $\cos(\alpha+\beta)$, teades, et $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\beta=\frac{1}{3}$ ja α ja β on teravnurgad.

15. Arvuta $\cos(\alpha-\beta)$, kui $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{4}$ ning α ja β on teravnurgad.

16. Arvuta $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$, kui α ja β on teravnurgad ning $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ja $\cos\beta=\frac{2}{3}$.

17. 1) Näita, et $\sin(45°+x)+\cos(45°+x)=\sqrt{2}\cdot\cos x$.

2) Näita, et $\sin(45°+x)-\cos(45°-x)=\sqrt{2}\cdot\cos x$.

18. Kolmnurgas on kahe teravnurga koosinused vastavalt $\frac{15}{17}$ ja $\frac{9}{41}$. Arvuta antud nurkadega mitte kõrvuti asetseva välisnurga siinus.

19. Kolmnurga kahe teravnurga siinused on vastavalt $\frac{7}{25}$ ja $\frac{4}{5}$. Arvuta kolmanda nurga koosinus.

20. Kolmnurga ABC sees olevast punktist O on küljed AB, AC ja BC näha nürinurkade all. Teades, et $\sin\widehat{AOB}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\cos\widehat{BOC}=-\frac{1}{3}$, arvuta $\sin\widehat{AOC}$.

21. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin(\alpha+30°)-\sin(\alpha-30°)$

2) $\cos(\alpha+45°)-\cos(\alpha-45°)$

22. Arvuta:

1) $\sin 20°\cos 40°+\cos 20°\sin 40°$

2) $\cos 47°\cos 17°+\sin 47°\sin 17°$

3) $\frac{\tan 70°-\tan 40°}{1+\tan 70°\tan 40°}$

4) $\frac{\tan 70°+\tan 80°}{1-\tan 70°\tan 80°}$

5) $\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{5\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{5\alpha}{2}}$, kui $\alpha=15°$

6) $\sin 60°\cos 30°-\cos 60°\sin 30°$

23. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$

2) $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

24. On teada, et α ja β on teravnurgad ja et $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ ning $\tan\beta=\frac{1}{7}$.

Tõesta, et $\alpha+\beta=45°$.

25. Tõesta, et

1) $\tan 2°+\tan 12°=\dfrac{\sin 14°}{\cos 2°\cdot\cos 12°}$

2) $\dfrac{\sin 5°}{\sin 15°}=\dfrac{\tan 10°-\tan 5°}{\tan 10°+\tan 5°}$

26. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 10°\cos 50°+\cos 10°\sin 50°$

2) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$

27. Kahe nurga tangensite summa on 2, kuid nende nurkade summa tangens on 4.

Leia nende nurkade tangensite korrutis.

28. Kahe nurga summa koosinus on 0,3 ja nende nurkade vahe koosinus on 0,8.

Leia nende nurkade siinuste korrutis.

§ 3. KAHEKORDSE NURGA JA POOLNURGA SIINUS, KOOSINUS JA TANGENS.

Valemid kahekordse nurga siinuse, koosinuse ja tangensi avaldamiseks ühekordse nurga funktsioonide kaudu saame, kui kahe nurga summa siinuse, koosinuse ja tangensi valemites võtame liidetavad nurgad teineteisega võrdseks.

Võttes $\beta=\alpha$, saame

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\tan(\alpha+\alpha) = \tan 2\alpha = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

Valemid poolnurga siinuse ja koosinuse avaldamiseks antud nurga funktsioonide kaudu saame järgmiselt.

Esiteks kasutame põhiseost

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1. \qquad (1)$$

Teiseks asendame kahekordse nurga koosinuse valemis nurga α nurgaga $\frac{\alpha}{2}$, saame

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

ehk

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha. \qquad (2)$$

Lahutades nüüd võrduse (1) pooltest võrduse (2) vastavad pooled, saame

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Sellest saamegi poolnurga siinuse valemi:

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

Liites võrduste (1) ja (2) vastavad pooled, saame

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha, \tag{4}$$

millest

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Siit

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

Et tangens on siinuse ja koosinuse jagatis, siis

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}:\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}:\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

ehk

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

Märgi poolnurga valemites oleva radikaali ees määrab muidugi see, mis veerandis nurk $\frac{\alpha}{2}$ lõpeb.

Poolnurga tangensi saab nurga siinuse ja koosinuse kaudu avaldada ka r a t s i o n a a l s e l t (s. o. radikaalivabalt). Selleks korrutame võrduse

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

paremal pool oleva murru lugejat ja nimetajat avaldisega $2\cos\frac{\alpha}{2}$ ning arvestades võrdust (4), saame

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Korrutades võrduse

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

parema poole lugeja ja nimetaja avaldisega $1-\cos\alpha$, saame pärast taandamist

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Seega

$$\boxed{\begin{aligned}\tan\frac{\alpha}{2}&=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\\ \tan\frac{\alpha}{2}&=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{aligned}}$$

Kahekordse nurga ja poolnurga siinuse, koosinuse ja tangensi valemeid kasutame avaldiste teisendamisel ja mõne nurga funktsiooni väärtuse arvutamisel.

Näide 1. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga siinus on $\frac{5}{13}$. Leia tipunurga siinus ja koosinus.

Lahendus. Tähistame alusnurga tähega α ja tipunurga tähega β, siis

$$\beta=180^\circ-2\alpha$$

ja

$$\sin\beta=\sin(180^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

Seega,

$$\sin\beta=2\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13}=\frac{120}{169}.$$

$$\cos\beta=\cos(180^\circ-2\alpha)=-\cos 2\alpha=$$

$$=-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\left(\frac{5}{13}\right)^2-\left(\frac{12}{13}\right)^2=-\frac{119}{169}.$$

Näide 2. Arvuta $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$.

Lahendus. Võttes valemis

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$\alpha=45^\circ$, saame

$$\tan 22\frac{1^\circ}{2}=\frac{\sin 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}-1=0{,}414.$$

Ülesandeid.

29. Rombi külje ja diagonaali vahelise nurga siinus on 0,2. Leia rombi nurkade koosinused.

30. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga koosinus on $\frac{3}{4}$. Leia tipunurga koosinus.

31. Ringjoone veerandist väiksemale kaarele toetuva kesknurga koosinus on $\frac{1}{9}$. Leia samale kaarele toetuva piirdenurga siinus, koosinus ja tangens.

32. Kontrolli võrdust

$$\sin 35^\circ \sin 55^\circ = \frac{1}{2}\cos 20^\circ.$$

33. Avalda x ja y vaheline seos, milles ei esine nurka α:

1) $\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha \\ y = \sin 2\alpha \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos 2\alpha \end{cases}$

34. On teada, et $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5}$. Leia $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$.

35. Lihtsustada avaldised:
1) $2\sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ$
2) $(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ) \cdot (\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)$
3) $\sin(60^\circ+\alpha) \cdot \cos(60^\circ-\alpha) - \cos(60^\circ+\alpha) \cdot \sin(60^\circ-\alpha)$

36. Arvuta avaldise väärtus:
1) $\cos(38^\circ+\alpha)\sin(52^\circ-\alpha) + \sin(38^\circ+\alpha)\cos(52^\circ-\alpha)$;
2) $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$;
3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) - \sin 2\alpha$

§ 4. KAHE NURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE SUMMA JA VAHE TEISENDAMINE KORRUTISEKS.

Kasutades kahe nurga summa ja vahe siinuse ning kahe nurga summa ja vahe koosinuse valemeid:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \quad (1)$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y; \quad (2)$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \quad (3)$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y; \quad (4)$$

saame tuletada valemid kahe nurga siinuste summa ja vahe ning koosinuste summa ja vahe teisendamiseks korrutiseks.

Kahe nurga siinuste summa valemi tuletamiseks liidame võrduste (1) ja (2) vastavad pooled:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y. \qquad (5)$$

Tähistades nurgad $x+y$ ja $x-y$ vastavalt tähtedega α ja β, saame nurgad x ja y avaldada α ja β kaudu järgmisest võrrandisüsteemist:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=\beta. \end{cases}$$

Siit

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{ja} \quad y=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tehes nüüd asendused, saame võrdusele (5) anda kuju

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Seega,

kahe nurga siinuste summa võrdub nende nurkade poolsumma siinuse ja poolvahe koosinuse kahekordse korrutisega.

Kui kahe nurga siinuste summa valemis asendame nurga β nurgaga $-\beta$ ning peame silmas, et

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta,$$

siis saame valemi kahe nurga siinuste vahe jaoks:

$$\sin\alpha+\sin(-\beta)=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ehk

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Niisiis,

kahe nurga siinuste vahe võrdub nende nurkade poolsumma koosinuse ja poolvahe siinuse kahekordse korrutisega.

Kahe nurga koosinuste summa korrutiseks teisendamise valemi saamiseks liidame võrduste (3) ja (4) vastavad pooled:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y.$$

Tehes siin asendused, nagu eelmiselgi korral, saame valemi:

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Järelikult,

kahe nurga koosinuste summa võrdub nende nurkade poolsumma ja poolvahe koosinuste kahekordse korrutisega.

Kirjutades viimases valemis nurga β asemele $180°-\beta$ ja pidades silmas, et $\cos(180°-\beta)=-\cos\beta$, saame:

$$\cos\alpha+\cos(180°-\beta)=2\cos\frac{\alpha+180°-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-180°+\beta}{2}$$

ehk

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\cos\left(90°+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-90°\right).$$

Et

$$\cos\left(90°+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=-\cos\left(180°-90°-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=-\cos\left(90°-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$
$$=-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ja

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-90°\right)=\cos\left(90°-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

siis saame

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

s. t.

kahe nurga koosinuste vahe võrdub nende nurkade poolsumma ja poolvahe siinuste kahekordse korrutise vastandarvuga.

Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe korrutiseks teisendamise valemid võimaldavad avaldisi lihtsustada ja ker-

gendavad avaldiste väärtuste arvutamist. Toome selle kohta mõned näited.

Näide 1. Arvutada avaldise $\sin 75° + \sin 15°$ väärtus.

Lahendus.

$$\sin 75° + \sin 15° = 2 \sin \frac{75° + 15°}{2} \cos \frac{75° - 15°}{2} =$$

$$= 2 \sin 45° \cos 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \approx 1{,}224.$$

Näide 2. Teisendada üksliikmeks avaldis

$$\sin(60° + x) - \sin(60° - x).$$

Lahendus.

$$\sin(60° + x) - \sin(60° - x) =$$

$$= 2 \cos \frac{60° + x + 60° - x}{2} \cdot \sin \frac{60° + x - 60° + x}{2} =$$

$$= 2 \cos 60° \sin x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin x = \sin x.$$

Näide 3. Lihtsusta avaldis

$$\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}.$$

Lahendus.

$$\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos 0° - \cos \alpha}{\cos 0° + \cos \alpha} = \frac{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Näide 4. Teisenda korrutiseks avaldis $1 + 2 \cos \alpha$.

Lahendus.

$$1 + 2 \cos \alpha = 2\left(\frac{1}{2} + \cos \alpha\right) = 2(\cos 60° + \cos \alpha) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cos \left(30° + \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(30° - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4 \cos \left(30° + \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(30° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Näide 5. Taandada murd $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.

Lahendus. Taandaja selgitamisel esitame murru lugeja ja nimetaja korrutistena.

Teisendame nimetaja korrutiseks:

$$1-\sin 2x=\sin 90^\circ-\sin 2x=2\cos(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x).$$

Teisendades lugeja korrutiseks, saame:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=$$
$$=[\sin(90^\circ-x)+\sin x]\cdot[\sin(90^\circ-x)-\sin x]=$$
$$=2\sin 45^\circ\cdot\cos(45^\circ-x)\cdot 2\cdot\cos 45^\circ\cdot\sin(45^\circ-x)=$$
$$=2\cos(45^\circ-x)\cdot\sin(45^\circ-x)\cdot$$

Nüüd on

$$\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=\frac{2\cos(45^\circ-x)\sin(45^\circ-x)}{2\cos(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x)}=$$
$$=\frac{\cos(45^\circ-x)}{\cos(45^\circ+x)}=\frac{\sin(45^\circ+x)}{\cos(45^\circ+x)}=\tan(45^\circ+x).$$

Näide 6. Teisendada korrutiseks avaldis $\sin\alpha+\cos\alpha$.

Lahendus.

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\alpha)=$$
$$=2\sin 45^\circ\cos(-45^\circ+\alpha)=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha).$$

Ülesandeid.

37. Tuleta kahe nurga siinuste vahe valem § 4 alguses leiduva võrduse (1) pooltest võrduse (2) vastavate poolte lahutamise teel.

38. Tuleta kahe nurga koosinuste vahe valem § 4 alguses leiduva võrduse (3) pooltest võrduse (4) vastavate poolte lahutamise teel.

39. Kasutades seoseid $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ja $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ tõesta, et

a) $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

b) $\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

40. Tuleta § 4 alguses leiduvate seoste (1) ja (2) abil valem

$$\sin x\cos y=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2},$$

mis võimaldab ühe nurga siinuse ja teise nurga koosinuse korrutise teisendada kahe nurga siinuste summaks.

41. Tuleta § 4 alguses leiduvate seoste (3) ja (4) abil kahe nurga koosinuste korrutise summaks teisendamise valem:

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}.$$

42. Kasutades § 4 alguses leiduvaid seoseid (3) ja (4), tuleta kahe nurga siinuste korrutise vaheks teisendamise valem:

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}.$$

43. Teisenda korrutiseks ja arvuta siis avaldise väärtus (kasutades tarbe korral tabeleid):

1) $\sin 75° - \sin 15°$;
2) $\cos 48° + \cos 12°$;
3) $\cos 135° + \cos 45°$;
4) $\cos 135° - \cos 45°$;
5) $\cos 5° - \cos 35°$;
6) $\tan 20° + \tan 70°$;
7) $\sin 80° + \sin 10°$;
8) $\cos 58° + \cos 32°$.

44. Lihtsusta avaldis ja seejärel arvuta ta väärtus (kasutades tarbe korral tabeleid):

1) $\frac{\sin 55° + \sin 35°}{\sin 55° - \sin 35°}$;
2) $\frac{\cos 54° + \cos 36°}{\cos 54° - \cos 36°}$;
3) $\frac{\sin 36° + \sin 24°}{\sin 36° - \sin 24°}$;
4) $\frac{\sin 24° + \sin 6°}{\cos 24° + \cos 6°}$;
5) $\frac{\sin 29° - \sin 9°}{\sin 29° + \sin 9°}$;
6) $\frac{\sin 100° - \sin 80°}{\sin 100° + \sin 80°}$;
7) $\sin^2 50° - \sin^2 40°$;
8) $\frac{\cos 5° - \cos 25°}{\sin 5° + \sin 25°}$;
9) $\frac{\cos 65° + \cos 35°}{\sin 65° - \sin 35°}$;
10) $\sin^2 70° - \cos^2 50°$.

45. Teisenda korrutiseks.

1) $\sin\alpha + \frac{1}{2}$
2) $\sin\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
3) $1 + \sin\alpha$
4) $1 + 2\sin\alpha$
5) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$
6) $\frac{1}{2} + \cos\alpha$
7) $\sqrt{3} + \tan\alpha$
8) $1 - 4\sin^2\alpha$
9) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$
10) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$

46. Lihtsusta.

1) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$

2) $\dfrac{\sin\frac{2}{3}\alpha+\sin\frac{4}{3}\alpha}{\cos\frac{2}{3}+\cos\frac{4}{3}}$

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$

4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$

47. Teisenda korrutiseks.

1) $\sin(45°+x)+\sin(45°-x)$
2) $\sin(30°+x)+\sin(30°-x)$
3) $\sin(45°+x)-\sin(45°-x)$
4) $\cos(30°+x)-\cos(30°-x)$

48. Tõesta samasus.

1) $\dfrac{\cos 3\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha\sin 2\alpha}=-1$

2) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\tan^2(45°+\alpha)$

3) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\tan^2(45°-\alpha)$

4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\tan\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

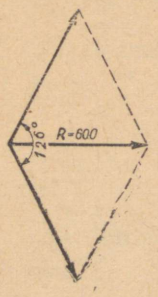
5) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan(45°+\alpha)$

6) $1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

7) $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

49. Tõestada, et

1) $\sin 10°+\sin 50°-\cos 20°=0$;
2) $\cos 85°+\cos 35°-\cos 25°=0$.



Joon. 5.

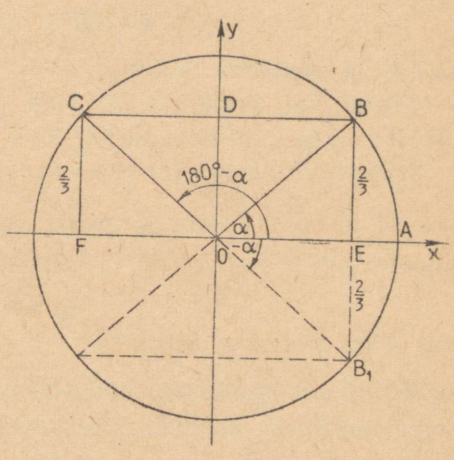
50. Rombi lühema diagonaali pikkus on 4 cm ja teravnurk on 68°. Arvuta teise diagonaali pikkus.

51. Jõud $R=600$ kG lahutatakse kaheks absoluutväärtuselt võrdseks komponendiks, mis moodustavad teineteisega 126°-se nurga (joon. 5). Kui suured on need komponendid?

§ 5. NURGA LEIDMINE TRIGONOMEETRILISE FUNKTSIOONI ANTUD VÄÄRTUSE JÄRGI.

1. Nurga leidmine antud siinuse järgi.

Olgu lahendada ülesanne: konstrueerida nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$. Selle ülesande lahendamiseks jaotame ühikringjoone raadiuse (joon. 6) kolmeks võrdseks osaks ning võtame siis y-teljel lõigu $OD=\frac{2}{3}r$. Punktist D joonestame x-teljega paralleelse sirge CB. Nurk $AOB=\alpha$ ongi nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$.



Joonis 6.

Kuid kõikidel nurkadel, mille lõppraadiuse otspunkt asub punktis B, on siinuse väärtus $\frac{2}{3}$. Seetõttu rahuldavad meie ülesande tingimust nurgad α, $\alpha\pm360°$, $\alpha\pm2\cdot360°$, $\alpha\pm3\cdot360°$, ..., $\alpha\pm n\cdot360°$, mis järeldub ka sellest, et siinus on perioodiline funktsioon perioodiga 360°.

Peale nurga $AOB=\alpha$ (joon. 6.) leidub ka teises veerandis nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$; selleks on nurk $AOC=180°-\alpha$.

Järelikult, meie ülesande tingimust rahuldavad siis veel nurgad $180°-\alpha$, $180°-\alpha\pm360°$, $180°-\alpha\pm2\cdot360°$, ..., $180°-\alpha+n\cdot360°$.

Seega on lõpmata hulk nurki, mille siinus on $\frac{2}{3}$. Neid nurki väljendavad avaldised

$$\alpha+n\cdot360°$$

ja

$$180°-\alpha+n\cdot360°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Neid kaht avaldist saab asendada üheainsa avaldisega, pannes tähele, et

$$\alpha+n\cdot360°=2n\cdot180°+\alpha \qquad (1)$$

ja

$$180° - \alpha + n \cdot 360° = 2n \cdot 180° + 180° - \alpha = \\ = (2n+1) \cdot 180° - \alpha. \qquad (2)$$

Need teisendamisel saadud avaldised võib kirjutada ühe avaldisena

$$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot \alpha, \qquad (3)$$

kus k on mistahes täisarv.

Tõesti, kui avaldises (3) k on paarisarv $2n$, siis saame avaldise (1), kui k on paaritu arv $2n+1$, siis saame avaldise (2).

Niisiis, võrdsete siinustega nurkade üldavaldiseks on

$$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot \alpha,$$

nii et

$$\sin \alpha = \sin [k \cdot 180° + (-1)^k \cdot \alpha],$$

kus k on mistahes täisarv.

Antud siinus võib olla ka negatiivne arv, näiteks $-\frac{2}{3}$. Sel korral on üheks nurgaks, mis ülesande tingimust rahuldab, negatiivne nurk $AOB_1 = -\alpha$ (joon. 6).

Eelmise arutluse eeskujul leiame üldavaldise kõikidele nurkadele, mille siinus on $-\frac{2}{3}$:

$$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot (-\alpha).$$

Leides siinuste tabelist nurga, mille siinus on $\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$, saame:

$$\alpha = 41°49'$$

ja

$$-\alpha = -41°49'$$

ning üldavaldisteks on siis

$$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot (-41°49')$$

ehk

$$k \cdot 180° - (-1)^k \cdot 41°49'.$$

Üldiselt, kui antud arv m täidab tingimust, et $|m| \leqslant 1$ (sest siinuse absoluutväärtus ei või olla 1-st suurem), siis on lõpmata hulk nurki, mille siinus on m. Kuid üks neist nurkadest on väikseima absoluutväärtusega.

Nagu jooniselt 6 näha, on väikseima absoluutväärtusega nurk vahemikus $-90°$ kuni $90°$ (need kaasa arvatud).

Näiteks väikseima absoluutväärtusega nurk

$\alpha = 30°$, kui $\sin \alpha = \frac{1}{2}$;

$\alpha = -30°$, kui $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$;

$\alpha = 60°$, kui $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\alpha = -45°$, kui $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\alpha = 0°$, kui $\sin \alpha = 0$.

Väikseima absoluutväärtusega nurgale, mille siinus on m, on antud nimetus **arkussiinus m** *ja teda tähistatakse sümboliga*

arcsin m.

Seega,

arcsin m on väikseima absoluutväärtusega nurk, mille siinus on m.

Sümbolites:

$\sin(\arcsin m) = m$ ja $-90° \leqslant \arcsin m \leqslant 90°$.

Näiteks,

$$\arcsin \frac{1}{2} = 30° = \frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -45° = -\frac{\pi}{4};$$

$$\arcsin(-1) = -90° = -\frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin 0 = 0°.$$

Kui $0 \leqslant m \leqslant 1$, siis leiame nurga arcsin m otse siinuste tabelist, näiteks arcsin $0{,}6667 = 41°49'$.

Kui $-1 \leqslant m < 0$, siis avaldame antud arkussiinuse positiivse arvu arkussiinuse kaudu.

Näitame joonise 6 varal, et

arcsin(−m) = −arcsin m.

Jooniselt 6 näeme, et nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$, on $\angle AOB$, ja nurk, mille siinus on $-\frac{2}{3}$, on $\angle AOB_1$, kusjuures

$$\angle AOB_1 = -\angle AOB,$$

s. t. $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = -\arcsin\frac{2}{3}$

ehk üldiselt

$$\arcsin(-m) = -\arcsin m.$$

Nüüd saame kõikide nurkade, mille siinus on m, üldavaldiseks

$$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot \arcsin m$$

ehk radiaanides

$$k \cdot \pi + (-1)^k \cdot \arcsin m$$

N ä i d e 1. Leia nurk, mille siinus on 0,83.

L a h e n d u s. Nende nurkade üldavaldis on

$$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot \arcsin 0{,}83.$$

Tabelist leiame, et $\arcsin 0{,}83 = 56°06'$. Seega otsitavate nurkade üldavaldis on

$$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot 56°06'.$$

N ä i d e 2. Leia nurk, mille siinus on $(-0{,}3535)$.

L a h e n d u s. $\arcsin(-0{,}3535) = -\arcsin 0{,}3535 = -20°42'$. Otsitavate nurkade üldavaldis on seega

$$k \cdot 180° - (-1)^k \cdot 20°42'.$$

Ülesandeid.

52. Selgita, mida tähendavad sümbolid:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin(-0{,}75)$.

53. Konstrueeri nurk ja leia nende väärtused, kui

1) $\arcsin 0{,}8$; 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$; 3) $\arcsin\frac{3}{5}$.

54. Anna üldavaldis nurkadele, mille siinus on

1) 0,3156; 2) 0,0087; 3) $-0{,}4051$.

2. Nurga leidmine antud koosinuse järgi.

Et ehitada nurka, mille koosinus on näiteks $\frac{1}{2}$, selleks ehitame ühikringjoone (joon. 7) punkti, mille abstsiss on $\frac{1}{2}$, poolitades selleks abstsissteljel asuva raadiuse. Otsitavaks nurgaks on $\angle AOB = \alpha$. Koosinuse perioodilisuse tõttu rahuldavad meie ülesande tingimust ka nurgad

$$n \cdot 360° + \alpha,$$

kus n on mistahes täisarv.

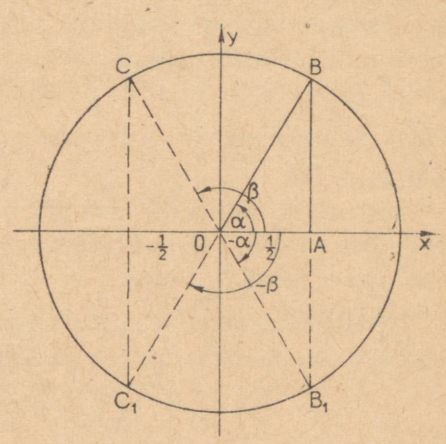
Jooniselt 7 näeme, et leidub veel nurki, mille koosinus on $\frac{1}{2}$. Üheks niisuguseks nurgaks on negatiivne teravnurk

$$\angle AOB_1 = -\alpha,$$

sest kolmnurkade AOB ja AOB_1 võrdsuse tõttu on nurkade AOB ja AOB_1 absoluutväärtused võrdsed.

Seega täidavad ülesande tingimust veel kõik nurgad kujuga

$$n \cdot 360° - \alpha.$$



Joonis 7.

Avaldisi $n \cdot 360° + \alpha$ ja $n \cdot 360° - \alpha$ saab väljendada ühe avaldise abil:

$$n \cdot 360° \pm \alpha.$$

See on üldavaldis nurkadele, mille koosinus on $\frac{1}{2}$.

Antud juhul $\alpha = 60°$.

Seega, üldavaldiseks kõikidele nurkadele, mille koosinus on $\frac{1}{2}$, on

$$n \cdot 360° \pm 60°.$$

Antud koosinus, mille järgi nõutakse nurga ehitamist, võib olla ka negatiivne, näiteks $-\frac{1}{2}$. Sel korral on otsitavateks nurka-

deks nurgad $AOC=\beta$ ja $AOC_1=-\beta$ ning seega kõik nurgad, mida väljendab avaldis

$$n \cdot 360° \pm \beta.$$

Üldiselt, kui antud koosinuse väärtus m on vahemikust

$$-1 \leqslant m \leqslant 1,$$

ehk lühemalt $|m| \leqslant 1$ (koosinuse absoluutväärtus ei saa olla suurem kui 1), siis niisuguse koosinusega nurki on lõpmata hulk. Kõiki neid nurki saab avaldada ühe nurga kaudu. Selleks nurgaks kasutame väikseimat positiivset nurka, mille koosinus on m. Selleks nurgaks ei kõlba nüüd väikseima absoluutväärtusega nurk, nagu antud siinuse korral, sest kui $|m| \leqslant 1$, siis igale m väärtusele vastab kaks nurka, mille absoluutväärtused on võrdsed, näiteks kui $m=\frac{1}{2}$, siis need nurgad on 60° ja $-60°$.

Kui $m>0$, siis väikseim positiivne nurk on esimesest veerandist, kui $m<0$, siis teisest veerandist, s. t. vahemikust 0° kuni 180°, need kaasa arvatud.

Seda väikseimat positiivset nurka nimetatakse arvu m **arkuskoosinuseks** *ja tähistatakse sümboliga*

arccos m.

Seega,

arccos m on väikseim positiivne nurk, mille koosinus on m.

Seesama definitsioon sümbolites:

$$\cos(\arccos m)=m \text{ ja } 0° \leqslant \arccos m \leqslant 180°.$$

Näiteks,

$$\arccos \frac{1}{2}=60°=\frac{\pi}{3};\ \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}=45°=\frac{\pi}{4};$$

$$\arccos 1=0°=0;\ \arccos 0=90°=\frac{\pi}{2}.$$

Selgitame joonise 7 varal, et kehtib valem

$$\arccos(-m)=180°-\arccos m.$$

Jooniselt 7 näeme, et väikseim positiivne nurk, mille koosinus on $-\frac{1}{2}$, on $\angle AOC$. Seega $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\angle AOC$; väikseim posi-

tiivne nurk, mille koosinus on $\frac{1}{2}$, on $\angle AOB$, nii et $\arccos\frac{1}{2} = \angle AOB$.

Kuid $\angle AOC = 180° - \angle AOB$, niisiis

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 180° - \arccos\frac{1}{2}.$$

Kui arvu $\frac{1}{2}$ asemel võtta üldiselt arv m, saamegi

$$\textbf{arccos}(-m) = 180° - \textbf{arccos}\ m.$$

Positiivse m korral leiame arccos m väärtuse otse koosinuste tabelist, negatiivse arvu m arkuskoosinuse avaldame positiivse arvu arkuskoosinuse kaudu, kasutades viimast valemit.

Näiteks,

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 180° - \arccos\frac{1}{2} = 180° - 60° = 120° = \frac{2\pi}{3}$;

$\arccos(-1) = 180° - \arccos 1 = 180° = \pi$;

$\arccos(-0{,}4955) = 180° - \arccos 0{,}4955 = 180° - 60°18' =$
$= 119°42'$.

Nüüd võime anda üldavaldise nurkadele, mille koosinus on m, kujul

$$\boxed{n \cdot 360° \pm \arccos m}$$

kus n on mistahes täisarv.

Ülesandeid.

55. Selgita, mida tähendavad sümbolid:

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos\frac{2}{3}$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) arccos 0,9673; 5) arccos (−0,4848)

ja leia nende väärtused.

56. Konstrueeri nurk:

1) $\arccos\frac{3}{4}$; 2) arccos (−0,25).

57. Anna üldavaldis nurkadele, mille koosinus on:

1) 0,4; 2) $-\frac{5}{7}$; 3) 0,8616; 4) −0,342.

3. Nurga leidmine antud tangensi järgi.

Et iga arv m võib olla tangensi väärtuseks, siis tangensi igale etteantud väärtusele leidub vastav nurk α.

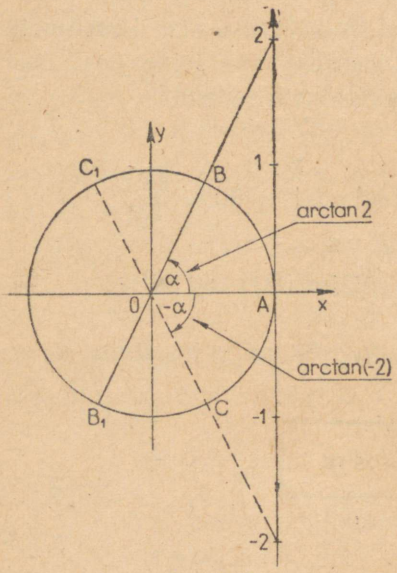
Kui on leitud üks nurk α, mille tangens on m, siis tangensi perioodilisuse tõttu (periood 180°) rahuldavad ülesande nõuet ka nurgad

$$\alpha \pm 180°,\ \alpha \pm 2 \cdot 180°,\ \alpha \pm 3 \cdot 180°, \ldots$$

ehk üldiselt nurgad

$$\alpha + n \cdot 180°,$$

kus n on mistahes täisarv.



Joonis 8.

Nurga konstrueerimiseks, mille tangens on näiteks 2, paigutame tangensteljele (joon. 8) lõigu pikkusega 2 ja ühendame selle otspunkti ühikringi keskpunktiga. Nagu jooniselt 8 näeme, vastavad tangensi väärtusele 2 nurga lõpphaara kaks asendit OB ja OB_1. Nurgad AOB ja AOB_1 erinevad teineteisest 180° või selle kordse võrra, s. o. tangensi perioodi võrra. Seetõttu saab üldavaldise kõikide nurkade jaoks, mille tangens on 2, anda ühe nurga kaudu. Selleks kasutame väikseima absoluutväärtusega nurka. Kui etteantud tangens on -2, siis vastavaks väiksema absoluutväärtusega nurgaks on negatiivne nurk AOC.

Niisiis, väikseima absoluutväärtusega nurgaks, mille tangens on m, on nurk vahemikust $-90°$-st kuni 90°-ni, need välja arvatud, sest neil nurkadel tangensid puuduvad. *Seda väikseima absoluutväärtusega nurka nimetatakse arvu m* **arkustangensiks** *ja tähistatakse sümboliga*

arctan m.

Seega,

arctan m on väikseima absoluutväärtusega nurk, mille tangens on m.

Seesama definitsioon sümbolites:

$$\tan(\arctan m) = m \text{ ja } -90 < \arctan m < 90°.$$

Jooniselt 8 näeme, et negatiivse tangensi korral kehtib valem

$$\arctan(-2) = -\arctan 2.$$

Tõesti, nurgad AOB ja AOC on absoluutväärtuste poolest võrdsed, kuid teine neist on negatiivne, seega

$$\angle AOC = -\angle AOB, \text{ s. o.}$$
$$\arctan(-2) = -\arctan 2$$

ehk üldiselt

$$\textbf{arctan}(-m) = -\textbf{arctan}\, m.$$

Positiivse m korral leiame nurga arctan m otse tangensite tabelist, negatiivse m korral kasutame saadud valemit.

Nüüd saame anda üldavaldise nurkadele, mille tangens on m. Selleks üldavaldiseks on

$$\boxed{n \cdot 180° + \arctan m,}$$

kus n on mistahes täisarv.

Näiteid.

1. Kui $\tan\alpha = 1$, siis $\alpha = n \cdot 180° + \arctan 1 =$
$= n \cdot 180° + 45° = n \cdot \pi + \frac{\pi}{4}$.
2. Nurk, mille tangens on -2, väljendub valemiga
$n \cdot 180° + \arctan(-2) = n \cdot 180° - \arctan 2 =$
$= n \cdot 180° - 63°26'$.
3. Üldavaldis nurkadele, mille tangens on $-\sqrt{3}$, on $n \cdot 180° +$
$+ \arctan(-\sqrt{3}) = n \cdot 180° - \arctan\sqrt{3} = n \cdot 180° - 60° =$
$= n \cdot \pi - \frac{\pi}{3}$.

Ülesandeid.

58. Selgita sümboli tähendus ja leia ta väärtus:

1) $\arctan 2{,}5$; 2) $\arctan(-3)$; 3) $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$.

59. Konstrueeri nurk:

1) $\arctan 3$; 2) $\arctan(-3)$; 3) $\arctan 1{,}5$.

60. Anna üldavaldis nurkadele, mille tangens on:

1) 2; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) -1.

61. Arvuta:

1) $\arctan 1 + \arctan \sqrt{3}$;

2) $\arccos 1 + 2 \arcsin \frac{1}{2}$;

3) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$;

4) $8 \arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7}$;

5) $\arctan 1 - \frac{\pi}{4}$;

6) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2}\right)$;

7) $\sin(\arcsin 0{,}5)$;

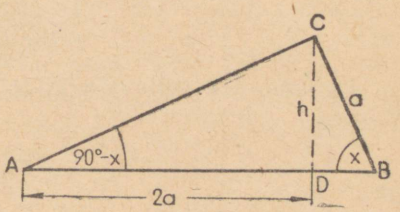
8) $\tan(\arctan 1{,}3)$.

II. TRIGONOMEETRILISED VÕRRANDID.

§ 6. TRIGONOMEETRILISE VÕRRANDI MÕISTE.

On ülesandeid, mille lahendamine viib niisuguse võrrandi lahendamisele, milles otsitav esineb trigonomeetrilise funktsiooni argumendis.

Näide 1. Täisnurkses kolmnurgas on ühe kaateti projektsioon hüpotenuusil kaks korda pikem kui teine kaatet. Arvuta selle kolmnurga nurgad.



Joon. 9.

Lahendamisel saame kolmnurgast ADC (joon. 9)

$$h = 2a \tan (90° - x)$$

ja kolmnurgast BDC

$$h = a \sin x.$$

Seega saame võrrandi

$$a \sin x = 2a \tan (90° - x)$$

ehk

$$\sin x = 2 \tan (90° - x).$$

See on trigonomeetriline võrrand.

Trigonomeetriliseks võrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles tundmatu esineb mingi trigonomeetrilise funktsiooni argumendis.

Tundmatu x väljendab trigonomeetrilises võrrandis tavaliselt nurga suurust kraadides või radiaanides, mõnikord (sõltuvalt ülesande tingimustest) aga ka abstraktset arvu, nagu näiteks võrrandis

$$x+\sin x=\frac{1}{2}.$$

Siin $\sin x$ tähendab x-radiaanise nurga siinust, näiteks

$$\sin 2{,}6=\sin 148°58'=\sin 31°02'=0{,}5155.$$

Trigonomeetrilise võrrandi lahendamisel püüame võrrandit nii teisendada, et see sisaldaks ainult üht trigonomeetrilist funktsiooni, näiteks ainult funktsiooni $\sin x$.

Eespool saadud võrrandit

$$\sin x=2\tan(90°-x) \text{ ehk } \sin x=2\cot x$$

on kerge teisendada niisuguseks, et see sisaldaks ainult funktsiooni $\cos x$. Teeme seda:

$$\sin x=2\cdot\frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\sin^2 x=2\cos x,$$
$$1-\cos^2 x=2\cos x,$$
$$\cos^2 x+2\cos x-1=0.$$

Lahendades selle võrrandi, mis $\cos x$ suhtes on ruutvõrrand, leiame

$$\cos x=0{,}414$$

ja

$$\cos x=-2{,}414.$$

Saadud kahest uuest võrrandist teisel lahend ilmselt puudub, sest pole olemas nurka, mille koosinus on $-2{,}414$. Seega jääb nüüd lahendada lihtne võrrand

$$\cos x=0{,}414.$$

Et otsitav nurk on täisnurkse kolmnurga nurk, siis meie ülesande ainsaks lahendiks on

$$x=\arccos 0{,}414=65°33'.$$

Kolmnurga teine teravnurk on

$$90°-65°33'=24°27'.$$

Näide 2. Kolmnurga üks nurk on teisest kaks korda suurem, kusjuures nende nurkade siinuste suhe on $\frac{5}{3}$. Leia kolmnurga nurgad.

Olgu üks nurk x kraadi, siis teine on $2x$ kraadi. Ülesande tingimuste kohaselt saame võrrandi

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{5}{3}$$

ehk

$$3 \sin 2x = 5 \sin x.$$

Selle võrrandi vasakul poolel on siinuse argumendiks $2x$, paremal poolel aga x. Teisendame võrrandit nii, et see sisaldaks ainult ühe ja sama argumendi funktsioone, kasutades selleks valemit

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Saame

$$6 \sin x \cos x - 5 \sin x = 0.$$

Tuues $\sin x$ sulgude ette, saame

$$\sin x (6 \cos x - 5) = 0.$$

Nüüd kas

$$\sin x = 0$$

või

$$6 \cos x - 5 = 0,$$

millest

$$\cos x = \frac{5}{6}.$$

Näeme, et ka selle ülesande lahendamisel saadud võrrand taandus lihtsatele võrranditele:

$$\sin x = 0 \text{ ja } \cos x = \frac{5}{6}.$$

Neist esimene võrrand meie ülesandele lahendit ei anna, sest kolmnurga nurk ei saa olla 0° ega 180°.

Teisest võrrandist aga saame

$$x = \arccos \frac{5}{6} = \arccos 0{,}8333 = 33°33'.$$

Teine nurk on

$$2x = 67°06'$$

ja kolmas nurk on

$$180° - (33°33' + 67°06') = 79°21'.$$

Nende näidisülesannete lahendamiskäigust selgub, et trigonomeetrilise võrrandi lahendamise üldplaan võiks olla järgmine:

1) antud võrrand teisendatakse niisuguseks, mis sisaldab ainult ühe argumendi üht ja sama funktsiooni;

2) saadud võrrand taandatakse üheks või mitmeks trigonomeetriliseks põhivõrrandiks;

3) lahendatakse saadud trigonomeetrilised põhivõrrandid, milleks on:

$$\sin x = m,$$
$$\cos x = m,$$
$$\tan x = m.$$

Vaatleme trigonomeetriliste põhivõrrandite lahendamist.

§ 7. TRIGONOMEETRILISED PÕHIVÕRRANDID.

1. Võrrandi sin x = m lahendamine.

Selle võrrandi lahendamise võimalus sõltub arvust m. Vaatleme kõiki võimalikke juhtumeid.

a) Kui $|m|>1$, s. o. $m>1$ või $m<-1$, siis võrrandil lahend puudub, sest ei ole olemas nurka, mille siinus on suurem kui 1 või väiksem kui -1.

b) Kui $m=1$, siis võrrandi üheks lahendiks on 90°. Siinuse perioodilisuse tõttu rahuldavad võrrandit aga ka nurgad

$$90° + 360° = 5 \cdot 90°,$$
$$90° + 2 \cdot 360° = 9 \cdot 90°,$$
$$90° + 3 \cdot 360° = 13 \cdot 90°,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$90° + n \cdot 4 \cdot 90° = (4n+1) \cdot 90°.$$

Seega võrrandi

$$\sin x = 1$$

üldlahend on

$$x = (4n+1) \cdot 90°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Andes n-le täisarvulisi väärtusi ... -1, 0, 1, 2, ..., saame võrrandi erilahendid $-3 \cdot 90° = -270°$; 90°; $5 \cdot 90° = 450°$; $9 \cdot 90° = 810°$, jne.

Erilahendit $\arcsin 1 = 90°$ nimetatakse ka *pealahendiks*. Seega juhtumil $m=1$ on võrrandil lõpmata palju lahendeid.

c) Kui $|m|<1$, s. o. kui $-1<m<1$, siis võrrandil on lõpmata

palju lahendeid. Nendeks on nimelt kõik nurgad, mille siinus on m. Seega üldlahend on

$$x = n \cdot 180° + (-1)^n \cdot \arcsin m,$$

kus n on mistahes täisarv.

Pealahendiks on $\arcsin m$.

Näiteks võrrandi

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

üldlahend on

$$x = n \cdot 180° + (-1)^n \cdot 45°$$

ja pealahend on $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$.

d) Kui $m = -1$, siis üheks lahendiks on $-90°$, kuid perioodilisuse tõttu on lahenditeks ka nurgad

$$-90° + 4 \cdot 90° = 3 \cdot 90°;\ 7 \cdot 90°;\ 11 \cdot 90°;\ \ldots,\ (4n-1) \cdot 90°.$$

Seega üldlahendiks on

$$x = (4n-1) \cdot 90°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Ülesandeid.

62. Lahenda võrrandid:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\sin x = 0$

3) $\sin x = 0{,}849$ 4) $\sin x = -\frac{2}{5}$

2. Võrrandi $\cos x = m$ lahendamine.

a) Kui $|m| > 1$, siis võrrandil lahend puudub.

b) Kui $m = 1$, siis üldlahend on

$$x = n \cdot 360°,$$

kus n on mistahes täisarv.

c) Kui $|m| < 1$, s. o. kui $-1 < m < 1$, siis üldlahend on

$$x = n \cdot 360° \pm \arccos m.$$

d) Kui $m = -1$, siis üldlahendiks on

$$x = n \cdot 360° \pm 180°$$

ehk

$$x = (2n \pm 1) \cdot 180°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Seega juhtudel, kui m on vahemikust

$$-1 \leqslant m \leqslant 1,$$

on võrrandil $\cos x = m$ lõpmata palju lahendeid.

Ülesandeid.

63. Lahenda võrrandid:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\cos x = \frac{1}{2}$ 4) $\cos x = 0{,}9646$

5) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

3. Võrrandi tan x = m lahendamine.

Et iga arv m võib olla tangensi väärtuseks, siis ka igasuguse m korral on võrrandil $\tan x = m$ lahendid olemas; lahenditeks on nimelt kõik nurgad, mille tangens on m.

Seega, võrrandi

$$\tan x = m$$

üldlahend on

$$x = n \cdot 180° + \operatorname{arctan} m.$$

Ülesandeid.

64. Lahenda võrrandid:

1) $\tan x = 1$ 2) $\tan x = 3$ 3) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

§ 8. VÕRRANDID, MIS OTSESELT TAANDUVAD PÕHIVÕRRANDEIKS.

Vaatleme nüüd võrrandeid, mis otseselt taanduvad põhivõrrandeiks. Säärasteks on võrrandid, mille vasaku poole kui trigonomeetrilise funktsiooni argumendiks on mingi x funktsioon ning paremaks pooleks on mingi arv.

Niisugused on näiteks võrrandid

1) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$;

3) $\tan 4x=1$.

Selliste võrrandite lahendamisel vaatleme vasakul poolel esineva trigonomeetrilise funktsiooni argumenti abitundmatuna, sest siis on antud võrrand abitundmatu suhtes põhivõrrand. Näiteks võrrand

$$\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

on $3x$ suhtes põhivõrrand; võrrand

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

on seda $2x+\frac{\pi}{3}$ suhtes ja võrrand

$$\tan 4x=1$$

$4x$ suhtes.

Niisuguste võrrandite lahendamisel lahendame esmalt põhivõrrandi abitundmatu suhtes ning seejärel leiame otsitava abitundmatu väärtuste järgi.

Näide 1. $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$3x=n\cdot 180°+(-1)^n\cdot \text{arc sin}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ehk

$$3x=n\cdot 180°+(-1)^n\cdot 60°.$$

Sellest võrrandist leiame nüüd x:

$$x=n\cdot 60°+(-1)^n\cdot 20°.$$

Kui saadud üldlahendi kirjutame kahe valemi abil, siis saame lihtsamad avaldised ja ka lahendite kontrollimine on kergem.

1) Võttes $n=2k$, saame

$$x_1=2k\cdot 60°+20°=6k\cdot 20°+20°=(6k+1)\cdot 20°;$$

2) Võttes $n=2k+1$, saame

$$x_2=(2k+1)\cdot 60°-20°=(6k+3)\cdot 20°-20°=(6k+2)\cdot 20°.$$

Kontroll.

1) $\sin 3x=\sin[3\cdot(6k+1)\cdot 20°]=\sin[6k+1)\cdot 60°]=$

$=\sin(k\cdot 360°+60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\sin 3x = \sin[3\cdot(6k+2)\cdot 20°] = \sin[(6k+2)60°] =$
$= \sin(k\cdot 360° + 120°) = \sin 120° = \sin(180° - 120°) =$
$= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mõlemad lahendite sarjad rahuldavad võrrandit.

Näide 2. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

$$2x + \frac{\pi}{3} = n\cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{2};$$

$$2x = n\cdot 2\pi - \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2};$$

$$x = n\pi - \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4}.$$

Selle üldlahendi võib kirjutada kahe sarjana:

$$x_1 = n\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{12};$$

$$x_2 = n\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = n\pi - \frac{5\pi}{12}.$$

Kontroll.

1) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(n\pi + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] =$
$= \cos\left(n\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$

2) $\cos\left[2\left(n\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(n\cdot 2\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) =$
$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Mõlemad lahendite sarjad rahuldavad võrrandit.

Ülesandeid.

65. Lahenda võrrandid ja kontrolli lahendid:

1) $\tan 4x = 1$ 2) $3\cos\frac{x-45°}{2} = 2$

3) $\tan 2x = -1$ 4) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

§ 9. VÕRRANDID, MILLE VASAK POOL ON KORRUTIS JA PAREM POOL NULL.

Olgu lahendada võrrand

$$\sin 2x \cdot \cos 3x = 0.$$

See võrrand on rahuldatud, kui vasaku poole esimene tegur on null, ja ka siis, kui teine tegur on null. Seega saame kaks võrrandit:

$$\sin 2x = 0 \text{ ja } \cos 3x = 0.$$

Nende lahendamisel saame:

$2x = n \cdot 180°$; $\quad x_1 = n \cdot 90°$.

$3x = n \cdot 360° \pm 90°$;

$x = n \cdot 120° \pm 30°$ ehk

$x_2 = n \cdot 120° + 30° = (4n+1) \cdot 30°$;

$x_3 = n \cdot 120° - 30° = (4n-1) \cdot 30°$.

Kontroll näitab, et kõik kolm sarja rahuldavad antud võrrandit.

Kui korrutises üks tegureist võrdub nulliga, siis ei saa aga alati ütelda, et ka korrutis võrdub nulliga. Seda ei saa ütelda siis, kui ühe teguri nulliga võrdumise puhul mõni ülejäänud tegureist kaotab arvu tähenduse. Näiteks, kui võrrandis

$$\tan x \cdot \left(1 - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$$

$$\tan x = 0,$$

s. t.

$$x = n \cdot 180°,$$

siis teine tegur kaotab arvu mõtte, sest kui

$$x = n \cdot 180°,$$

siis $\sin x = 0$ ja murrul $\frac{1}{\sin x}$ puudub arvu tähendus. Kui selle võrrandi vasakul poolel teine tegur

$$1 - \frac{1}{\sin x} = 0$$

ehk

$$\sin x = 1,$$

millest

$$x = n \cdot 180° + (-1)^n \cdot 90°,$$

siis esimesel teguril puudub arvu tähendus.

Niisiis, kui korrutises üks tegureist võrdub nulliga ja teistel teguritel on sel puhul arvu tähendus, siis võrdub korrutis nulliga.

Siit saame juhise:

et lahendada võrrandit, mille vasak pool on korrutis ja parem pool null, võrrutame nulliga iga teguri eraldi, lahendame saadud võrrandid ja kõrvaldame lahendite hulgast need, mille puhul mõnel teguritest puudub arvu tähendus.

Näide 1. $\sin 2x \cdot \tan x = 0$.

$$\sin 2x = 0; \qquad \tan x = 0;$$
$$2x = n \cdot 180°; \qquad x_2 = n \cdot 180°.$$
$$x_1 = n \cdot 90°.$$

Lahendite sari x_2 rahuldab võrrandit, kuna sel korral on vasaku poole mõlemal teguril arvu tähendus. Kuid sari x_1 ei ole võrrandi lahendiks paarituarvulise n korral, sest $\tan(n \cdot 90°)$ ei oma siis arvu tähendust; paarisarvulise m korral annab see sari samad lahendid mis sari x_2.

Seega on antud võrrandi ainsaks lahendiks

$$x = n \cdot 180°.$$

Kui võrrandi parem pool on null ja vasak pool ei ole korrutis, kuid on korrutiseks teisendatav, siis teeme seda ning lahendame edasi nii, nagu eespool kirjeldatud.

Näide 2. $1 + \sin x + \cos 3x + \sin x \cos 3x = 0$.

Lahutades vasaku poole tegureiks, saame:

$$1 + \sin x + \cos 3x(1 + \sin x) = 0;$$
$$(1 + \sin x)(1 + \cos 3x) = 0.$$

Siit saame:

$$1 + \sin x = 0; \qquad 1 + \cos 3x = 0;$$
$$\sin x = -1; \qquad \cos 3x = -1;$$
$$x_1 = (4n - 1) \cdot 90°. \qquad 3x = n \cdot 360° \pm 180°;$$
$$x = n \cdot 120° \pm 60°;$$
$$x = (2n \pm 1)\,60°.$$

Et sari $(2n-1) \cdot 60°$ on samane sarjaga $(2n+1) \cdot 60°$, siis

$$x_2 = (2n+1) \cdot 60°.$$

Mõlemad sarjad rahuldavad võrrandit.

Ülesandeid.

66. Lahenda võrrandid:
    1) $\cos^2 x = 0{,}25$
    2) $(4 \sin x - 1)(2 \sin x + 1) = 0$
    3) $\sin^2 2x = \cos^2 x$
67. Lahenda võrrandid:
    1) $(2 \tan x - 1)(\tan x + 1) = 0$
    2) $(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$
    3) $\sin^2 4x - \sin 4x \sin 2x = 0$

§ 10. VÕRDSETE SIINUSTEGA NURKADE ÜLDAVALDIS.

Olgu x ja y kaks niisugust nurka, mille siinused on võrdsed:

$$\sin x = \sin y$$

ehk

$$\sin x - \sin y = 0.$$

Siit

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = 0.$$

See seos jääb õigeks, kui

$$\cos \frac{x+y}{2} = 0,$$

millest

$$\frac{x+y}{2} = (2n+1) \cdot 90°,$$

$$x + y = (2n+1) \cdot 180°,$$

$$x_1 = (2n+1) \cdot 180° - y.$$

Eespool toodud seos jääb õigeks ka siis, kui

$$\sin \frac{x-y}{2} = 0,$$

millest

$$\frac{x-y}{2} = n \cdot 180°,$$

$$x - y = 2n \cdot 180°,$$

$$x_2 = 2n \cdot 180° + y.$$

Avaldisi $x_1 = (2n+1) \cdot 180° - y$ ja

$x_2 = 2n \cdot 180° + y$

saab ühendada üheks avaldiseks

$$x = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot y,$$

sest kui viimases avaldises k asendada paaritu arvuga $2n+1$, siis saame avaldise x_1, ja kui k asendada paarisarvuga $2n$, saame avaldise x_2.

Avaldis

$$x = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot y$$

on võrdsete siinustega nurkade üldavaldiseks.

Seda üldavaldist saab kasutada kaheliikmelise trigonomeetrilise võrrandi lahendamisel, kui mõlemad liikmed on siinused (või mida saab selliseks teisendada).

Näide. Leida vahemikust 0° kuni 360° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit

$$\sin 2x = \cos x.$$

Saame

$$\sin 2x = \sin(90° - x),$$

millest

$$2x = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot (90° - x).$$

Siit saame lahendite kaks sarja:

1) kui k on paaritu arv, siis

$2x = k \cdot 180° - (90° - x)$,
$2x = k \cdot 180° - 90° + x$,
$x = k \cdot 180° - 90°$

ehk

$x_1 = (2k-1) \cdot 90°$, kus k on paaritu arv;

2) kui k on paarisarv, siis

$2x = k \cdot 180° + 90° - x$,
$3x = k \cdot 180° + 90°$,
$x = k \cdot 60° + 30°$

ehk

$x_2 = (2k+1) \cdot 30°$, kus k on paarisarv.

Esimese täispöörde ulatuses x_1 ja x_2 annavad

$$30°, 90°, 150°, 270°,$$

mis kõik rahuldavad antud võrrandit, nagu näha alljärgnevast tabelist

x	30°	90°	150°	270°
$\sin 2x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Ülesandeid.

68. Leia vahemikust 0° kuni 360° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit:

1) $\sin x - \cos x = 0$

2) $\sin 2x + \cos x = 0$

69. Leia vahemikust $-180°$ kuni 180° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit:

1) $\sin 3x = \sin x$

2) $\sin 2x = \sin (x - 90°)$

§ 11. VÕRDSETE KOOSINUSTEGA NURKADE ÜLDAVALDIS.

Võrdusest

$$\cos x = \cos y$$

saame

$$\cos x - \cos y = 0,$$

$$-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0.$$

Samasuguse arutlusega, nagu eelmises paragrahvis, saame siit:

1) $\sin \frac{x+y}{2} = 0,$

$\frac{x+y}{2} = n \cdot 180°,$

$x + y = n \cdot 360°,$

$x_1 = n \cdot 360° - y,$

2) $\sin \frac{x-y}{2} = 0,$

$\frac{x-y}{2} = n \cdot 180°,$

$x - y = n \cdot 360°,$

$x_2 = n \cdot 360° + y.$

Kaht viimast avaldist koos kirjutades saame võrdsete koosinustega nurkade üldavaldise

$$x = n \cdot 360° \pm y,$$

mida saab rakendada kaheliikmelise trigonomeetrilise võrrandi lahendamisel, kui selle mõlemad liikmed on koosinused.

Näide.

$$\cos(2x+30°)=\cos(60°-x).$$

Saame

$$2x+30°=n\cdot 360°\pm(60°-x),$$

millest

1) $2x_1+30°=n\cdot 360°+60°-x,$
$3x_1=n\cdot 360°+30°,$
$x_1=n\cdot 120°+10°=(12n+1)\cdot 10°.$

2) $2x_2+30°=n\cdot 360°-(60°-x),$
$2x_2+30°=n\cdot 360°-60°+x,$
$x_2=n\cdot 360°-90°=(4n-1)\cdot 90°.$

Kontroll näitab, et mõlemad sarjad on võrrandi lahendeiks.

Ülesandeid.

70. Lahenda võrrand:

1) $\cos 3x=\cos(60°-x)$
2) $\cos(x-60°)=\sin 2x$

§ 12. VÕRDSETE TANGENSITEGA NURKADE ÜLDAVALDIS.

Võrdsete tangensitega nurkade üldavaldise saame järgmiselt. Olgu

$$\tan x=\tan y,$$
$$\tan x-\tan y=0,$$
$$\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}=0,$$
$$\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=0,$$
$$\sin x\cos y-\cos x\sin y=0,$$
$$\sin(x-y)=0,$$

millest

$$x-y=n\cdot 180°$$

ehk

$$x=n\cdot 180°+y.$$

Sedagi üldavaldist saame rakendada kaheliikmelise trigono-

meetrilise võrrandi lahendamisel, nimelt siis, kui võrrandi mõlemad liikmed on tangensid.

Näide. Lahenda võrrand

$$\tan(2x-30°)=\tan(x+60°).$$

Lahendus.

$$\tan(2x-30°)=\tan(x+60°),$$
$$2x-30°=n\cdot 180°+x+60°,$$
$$x=n\cdot 180°+90°=(2n+1)\cdot 90°.$$

Kontroll.

v. p. $\tan[2\cdot(2n+1)\cdot 90°-30°]=\tan[(2n+1)\cdot 180°-30°]=$
$=\tan(2n\cdot 180°+150°)=\tan 150°;$

p. p. $\tan[(2n+1)\cdot 90°+60°]=\tan(n\cdot 180°+150°)=\tan 150°.$

Ülesandeid.

71. Lahenda võrrandid:
1) $\tan 3x=\tan 2x$
2) $\tan 3x=\cot(70°+x)$

§ 13. SIINUSE JA KOOSINUSE SUHTES HOMOGEENNE TRIGONOMEETRILINE VÕRRAND.

Trigonomeetrilist võrrandit nimetame homogeenseks siinuse ja koosinuse suhtes, kui selle võrrandi kõik liikmed sisaldavad üksnes ühe ja sama argumendiga siinust ja koosinust ning kõik liikmed on ühe ja sama astmelised.

Näiteks võrrandid

$2\sin x+3\cos x=0,$

$2\sin^2x-7\sin x\cos x+6\cos^2x=0,$

$8\sin^3x=2\sin x\cos^2x+(\cos^2x-\sin^2x)\sin x$ on homogeensed.

Võrrandi liikme astme järgi nimetame võrrandit vastavalt esimese, teise, kolmanda jne. astme võrrandiks.

Mõnda mittehomogeenset võrrandit saab kirjutada homogeense võrrandina kasutades seost

$$\sin^2x+\cos^2x=1.$$

Näiteks võrrandile

$$5\sin^2x-7\sin x\cos x+4\cos^2x=1$$

saame anda homogeense võrrandi kuju:

$$5\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 4\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

ehk

$$4\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

Samuti võrrand

$$9\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 7$$

on kirjutatav homogeense võrrandina

$$9\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 7(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

ehk

$$9\sin x\cos x - 2\sin^2 x - 7\cos^2 x = 0.$$

Homogeense võrrandi lahendamisel tuuakse võrrandi liikmete ühistegur sulgude ette või, kui see ühistegur ei võrdu nulliga, jagatakse võrrandi liikmed selle ühisteguriga, mille tulemusena saame tangensi suhtes algebralise võrrandi.

Näide 1.

Lahendame võrrandi

$$2\sin x + 3\cos x = 0.$$

Siin $\cos x \neq 0$, sest vastasel juhul oleks $x = \frac{\pi}{2}$ ja $2\sin x = 2$, mis on vastuolus antud võrrandiga.

Seepärast võime võrrandi liikmed jagada arvuga $\cos x$ ja saame

$$2\tan x + 3 = 0$$

millest

$$\tan x = -\frac{3}{2},$$

siit

$$x = k\pi + \operatorname{arctan}\left(-\frac{3}{2}\right).$$

Näide 2. Leia kõik nurgad esimese täispöörde ulatuses, mis rahuldavad võrrandit

$$\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$$

Lahendus. Et $\cos x \neq 0$ (miks?), võime võrrandi kõiki liikmeid jagada avaldisega $\cos^2 x$. Saame:

$$\tan^2 x - 10\tan x + 21 = 0,$$

millest

$$\tan x = 5 \pm 2;$$

$$\tan x_1 = 7; \quad \tan x_2 = 3.$$

$$x_1 = n \cdot 180° + \arctan 7 = n \cdot 180° + 81°52';$$

$$x_2 = n \cdot 180° + \arctan 3 = n \cdot 180° + 71°34'.$$

Seega, antud võrrandi lahendid on

$$71°34',\ 81°52',\ 251°34' \text{ ja } 261°52'.$$

Näide 3. Lahenda võrrand

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 4.$$

Lahendus.

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 4 (\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 4 \sin^2 x + 4 \cos^2 x,$$

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0,$$

$$2 \tan^2 x - 5 \tan x + 3 = 0,$$

$$\tan x = \frac{5 \pm 1}{4},$$

$$\tan x_1 = 1{,}5, \quad \tan x_2 = 1.$$

$$x_1 = n\pi + \arctan 1{,}5;$$

$$x_2 = n\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Ülesandeid.

72. Lahenda võrrandid:

1) $2 \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

2) $\sin^2 x - 2 \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x = 0$

3) $\sin^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \sin 2x = 1$

73. Lahenda võrrandid:

1) $\sin 6x = \sin 4x$

2) $\sin 3x = \cos 2x$

3) $\sin (8x + 60°) + \sin 2x = 0$

4) $\cos 4x - \cos 2x = 0$

5) $\cos 8x + \cos 4x = 0$

6) $\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \tan x = 0$

7) $\sin 2x = \cos 3x$

8) $\tan x = \cot x$

74. Lahenda võrrandid:

1) $2\sin^2 x = 3\cos x$
2) $2\cos^2 x = 1 - \sin x$
3) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$
4) $\cos x + \sin x = 1$

75. Leia vahemikust 0° kuni 180° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit:

1) $3\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$
2) $3\cos x + \sin x = 0$
3) $\sin^2 x - \sin x = 1$
4) $2\cos^2 x + 5\cos x = 3$
5) $2\sin^2 x = 3\cos x$
6) $\cos^2 x - 2 = \cos x$
7) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
8) $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$
9) $\tan 3x + \tan x = 0$
10) $\tan^3 x = 8$.

76. Jaota täisnurk kahte ossa nii, et nende siinuste suhe oleks $1 : \sqrt{3}$.

77. Lahenda võrrandid:

1) $2\sin x - 1 = 0$ 2) $\sin 6x = 0{,}5$

78. Lahenda võrrandid:

1) $2\cos(2x - 60°) + 1 = 0$ 2) $3\tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$
3) $\cos x \sin x - 0{,}25 = 0$ 4) $\sin(x + 40°) = 1$

79. Lahenda võrrandid:

1) $\tan^2 x - \tan x = 0$ 2) $2\sin^2 x = \sin x$
3) $\tan^3 x = 3\tan x$ 4) $\sin^2 x - \cos x = 0$

80. Lahenda võrrandid:

1) $\sin 2x = \sin(x - 90°)$ 2) $\cos 4x + \cos x = 0$

81. Täisnurkse kolmnurga nurkade siinused moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leia kolmnurga nurgad.

82. Täisnurkse kolmnurga poolnurkade tangensid moodustavad aritmeetilise progressiooni. Leia kolmnurga nurgad.

83. Täisnurkse kolmnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on võrdne hüpotenuusil asuvate kaatetite projektsioonide vahega. Leia kolmnurga nurgad.

84. Lahenda võrrandid:

1) $3 \sin x = 2 \cos^2 x$
2) $\tan x + 3 \cot x = 4$
3) $\cos^2 x + 3 \sin^2 x = 2$
4) $\cos^2 x + \cos 2x = \frac{1}{2}$
5) $3 \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x = 0$
6) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$
7) $\cos 2x + \cos x = 0$

85. Arvuta võrdhaarse kolmnurga nurgad, kui alusnurga siinus võrdub tipunurga kahekordse siinusega.

86. Lahenda võrrandid:

1) $\sin x = 2 \cos x$
2) $\sin^2 3x = 3 \cos^2 3x$
3) $\sin 3x = \cos 3x$

87. Ruudusse on joonestatud teine ruut. Arvuta ruutude külgede vaheline väiksem nurk, teades, et ruutude pindalade suhe on 1,5.

88. Lahenda võrrandid:

1) $\cos^2 x = 0{,}25$
2) $\cos(2x + 45°) = 0$
3) $\sin 2x + \sin x = 0$
4) $\cos 2x + \cos x = 0$
5) $\cos 3x = \cos(60° - x)$
6) $\sin 4x = \sin 2x$
7) $\sin^2 x + \cos 2x = \frac{3}{4}$
8) $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 0$
9) $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x}$
10) $6 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x = 1$
11) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$

Kordamisülesandeid.

89. Lihtsusta avaldis $\sin^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha$.

90. Tõesta, et $\sin x \cdot \cot x = \cos x$.

91. Tõesta, et $\cos x \cdot \sin x \cdot \tan x = 1 - \cos^2 x$.

92. Tõesta, et $\frac{\cos(90° - x)}{\cos x} = \tan x$.

93. Lihtsusta avaldis $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$.

94. Lihtsusta avaldis $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

95. Tõesta, et
$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x)$.

96. Tõesta, et
$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x)$.

97. Tõesta, et $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

98. Teades, et $\sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, avalda $\tan x + \cot x$ suuruste a ja b kaudu.

99. Avalda x kaudu avaldis $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$, teades, et $\tan\alpha = x$ ja $\tan\beta = \frac{1}{x}$.

100. Kolmnurgas ABC on $\sin B = \frac{1}{3}$ ja $\sin C = \frac{1}{2}$. Leia $\sin A$.

101. Kolmnurgas ABC on $\sin B = \frac{3}{5}$ ja $\sin C = \frac{1}{4}$. Leia suhe $AB : BC$.

102. Kuidas saab funktsiooni $y = \sin x$ graafikust funktsiooni $y = |\sin x|$ graafiku? Kas viimane on perioodiline funktsioon? Kui suur on periood?

103. Joonesta funktsiooni $y = |\cos x|$ graafik.

104. Arvuta peast:

1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cos\pi$
2) $\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{3}$
3) $\tan 60° \sin 90°$
4) $\cos\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}\sin\pi$
5) $\cot\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}$
6) $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{3}$
7) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
8) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\arccos(-1)$

105. Arvuta:

1) $x + \cos x$, kui $x = 1{,}295$
2) $x + \cos\frac{1}{x}$, kui $x = \pi$

106. Lihtsusta avaldised:

1) $2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 3\cos^2\frac{\alpha}{2}$
2) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2 - \sin 2\alpha$
3) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$
4) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}$
5) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$
6) $\frac{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$

107. Tõesta, et

1) $\cos(45°+\alpha)-\sin(45°-\alpha)=0$

2) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$

108. Lihtsusta algul avaldist ja arvuta siis ta väärtus:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$, kui $\alpha=60°$ ja $\beta=30°$

2) $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\beta}}\right)^2$, kui $\alpha=30°$ ja $\beta=45°$

109. Lahenda võrrandid:

1) $3(1-\sin x)=1+\cos 2x$

2) $\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}-2}{\sin^2 2x(1+\cot^2 2x)}=\frac{1}{2}$

3) $\frac{(\cos x+\sin x)^2-\sin 2x}{\cos^4 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x}=2$

4) $\cos x^2=1$

5) $\sin|x|=1$

6) $|\sin x|=1$

110. Taanda ja lahenda seejärel võrrand

$$\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0.$$

111. Jaga võrrandi liikmed avaldisega $\cos x$ ja lahenda seejärel saadud võrrand

1) $\sin x=-\cos x$

2) $2\sin x-3\cos x=0$

3) $2\sin x+3\cos x=0$

112. Lahenda võrrandid:

1) $1-\cos x=\sin\frac{x}{2}$

2) $\sin(x-60°)=\cos(x+30°)$

113. Leia niisuguse nurga siinus, mille tangens on $\frac{2a}{1-a^2}$.

114. Tabeleid kasutamata näita, et

$$\frac{\sin 50°+\sin 70°}{\sin 35°-\cos 125°}=\frac{\sqrt{3}\cos 10°}{2\sin 35°}.$$

TRU Raamatukogu

115. Teades, et $0°<x<90°$, näita, et

$$\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}=\tan\left(45°+\frac{x}{2}\right).$$

116. Näita, et

$$(\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\cos^2\frac{x+y}{2}.$$

117. Näita, et

$$\left(\sin^2 x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

118. Näita, et

$$\frac{\sin 2x+\sin x}{\cos x+\cos 2x}=\tan\frac{3x}{2}.$$

119. Näita, et

$$(1-\tan^4 x)\cos^2 x+\tan^2 x=1$$

120. Arvuta tabeleid kasutamata avaldise

$$\cos 20°+\cos 100°+\cos 140°$$

väärtus.

121. Näita, et

$$\frac{\sin 85°-\sin 55°}{\cos 85°-\cos 55°}=-\tan 20°.$$

122. Näita, et

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin 3x-\sin x}=\tan 2x.$$

123. Leia kaks teravnurka, mis rahuldavad võrrandit

$$\tan x+\sqrt{3}\cot x=1+\sqrt{3}.$$

124. Lahenda võrrand

$$\sin^2 2x-\sin^2 x=\sin 2x\sin x.$$

125. Lihtsusta avaldis

$$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}.$$

126. Lahenda võrrand:

1) $1-\cos 2x=\sin x$; 2) $2\sin 2x=3\cos x$.

127. On teada, et $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Arvuta $\tan 2\alpha$.

128. Võttes $3\alpha = \alpha + 2\alpha$, avalda nurga α funktsioonide kaudu:

1) $\sin 3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$; 3) $\tan 3\alpha$.

129. Leia nurk, mille siinus on 2 korda suurem kui koosinus.

130. Leia nurk, mille siinus on pool koosinusest.

131. Leia nurk, mille siinuse ja koosinuse summa on $\sqrt{2}$.

III. FUNKTSIOONIDE UURIMINE.

§ 14. FUNKTSIOONI MÄÄRAMISPIIRKOND.

Iga funktsiooni definitsiooni saab alles siis lugeda täielikuks, kui selles on öeldud või sellest järeldub, milliseid väärtusi saab omandada argument.

Näiteid.

1. On antud funktsioon x^2+3x, kus $-1 \leqslant x \leqslant 3$, s. t. et funktsioon on määratud, kui argument omandab väärtusi arvust -1 kuni arvuni 3, need mõlemad väärtused kaasa arvatud.

2. On antud funktsioon $\frac{x-1}{x+2}$, kus $0<x<2$, s. t. et funktsioon on määratud, kui argument omandab väärtusi arvust 0 kuni arvuni 2, need mõlemad väärtused välja arvatud.

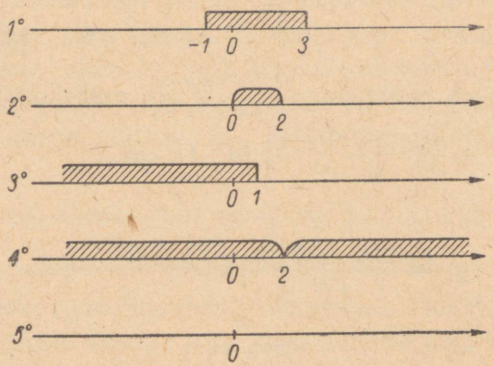
3. On antud funktsioon $\sqrt{1-x}$. Siin pole lisatud tingimust argumendi muutumise kohta, kuid antud avaldisest järeldub, et argument omandab väärtusi, mis on väiksemad kui 1 või võrdub 1-ga, s. t. kui $x \leqslant 1$. Seega, antud funktsioon on määratud, kui $x \leqslant 1$.

4. On antud funktsioon $\frac{x}{x-2}$. See funktsioon on määratud, kui $x<2$ ja kui $x>2$. Juhul, kui $x=2$, on funktsiooni väärtuseks $\frac{2}{0}$, millel puudub arvu tähendus.

5. On antud funktsioon $3x-5$. Antud avaldisele saab leida väärtusi, kui argumendiks on mistahes reaalarv. Seda tõsiasja saab üles märkida nn. lõpmatuse sümboli «∞» abil. See funktsioon on määratud, kui $-\infty < x < \infty$.

Väärtuste hulka, mida argument võib antud funktsiooni puhul omandada, nimetatakse selle funktsiooni määramispiirkonnaks.

Esimeses näites on määramispiirkonnaks **kinnine vahemik** ehk **lõik** $-1 \leqslant x \leqslant 3$, mida tähistatakse ka sümboliga $[-1, 3]$ (vt. joon. 10).



Joon. 10.

Teises näites on määramispiirkonnaks **lahtine vahemik** ehk lihtsalt **vahemik** $0 < x < 2$, mida tähistatakse ka sümboliga $(0, 2)$.

Kolmandas näites on määramispiirkonnaks nn. **poolkinnine vahemik** ehk **poollõik** $-\infty < x \leqslant 1$, mida tähistatakse sümboliga $(-\infty, 1]$.

Neljanda näite puhul koosneb määramispiirkond kahest vahemikust $(-\infty, 2)$ ja $(2, \infty)$.

Viiendas näites on määramispiirkonnaks vahemik $(-\infty, \infty)$.

§ 15. NÄITEID FUNKTSIOONI MÄÄRAMISPIIRKONNA LEIDMISE KOHTA.

1. Funktsiooni $\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ määramispiirkond.

Murruna avalduva funktsiooni määramispiirkonda ei kuulu niisugused argumendi väärtused, mille korral nimetaja saab võrdseks nulliga.

Leiame funktsiooni $y = \frac{5x^2-2x+6}{3x^2-2x-1}$ määramispiirkonna.

Nimetaja nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi

$$3x^2-2x-1=0.$$

Lahenditeks on $x_1=1$ ja $x_2=-\frac{1}{3}$. Seega,

antud funktsioon on määratud: 1) *kui* $x<-\frac{1}{3}$;

2) *kui* $-\frac{1}{3}<x<1$;

3) *kui* $x>1$ (joon. 11).

Seega koosneb funktsiooni $\frac{5x^2-2x+6}{3x^2-2x-1}$ määramispiirkond vahemikest: $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ ja $(1, \infty)$.

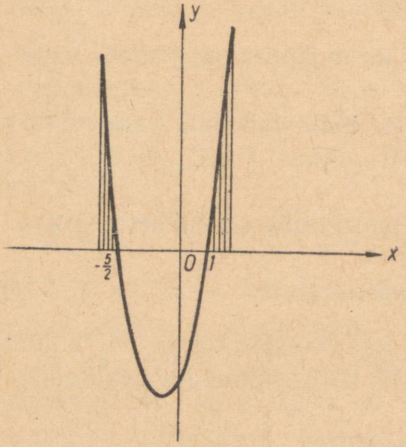


Joon. 11.

2. Funktsiooni $\sqrt{ax^2+bx+c}$ määramispiirkond.

Et ruutjuurt saab leida ainult mittenegatiivsetest arvudest, siis antud funktsiooni määramispiirkonnaks on see x väärtuste hulk, mis rahuldab tingimust

$$ax^2+bx+c\geqslant 0.$$



Joon. 12.

Leiame funktsiooni $y=\sqrt{2x^2+3x-5}$ määramispiirkonna.

Ülesande lahendamiseks tuleb leida ruutfunktsiooni

$$2x^2+3x-5$$

positiivsuspiirkond koos nullkohtadega. Lahendades ruutvõrrandi

$$2x^2+3x-5=0,$$

saame lahendeiks $x_1=-\frac{5}{2}$ ja

$x_2 = 1$. Et ruutliikme kordaja on positiivne, siis saame positiivsuspiirkonnaks kaks piirkonda $x < -\frac{5}{2}$ ja $x > 1$ (joon. 12).

Et ka nullkohad kuuluvad määramispiirkonda, siis koosneb antud funktsiooni määramispiirkond järgmisest kahest poollõigust: $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$ ja $[1, \infty)$.

Kui argumendiks on mingi konkreetne suurus, nagu kolmnurga nurga suurus, ruudu külje pikkus, korrapärase hulknurga nurkade arv jm., siis funktsiooni määramispiirkonna moodustavad (kui definitsioonis pole teisiti öeldud) argumendi need väärtused, mida antud konkreetne suurus võib omandada. Näiteks, kui argumendiks on kolmnurga nurga suurus, siis määramispiirkonnaks on vahemik $(0, \pi)$.

3. Täisnurkses kolmnurgas on teravnurkade α ja β summa $\frac{\pi}{2}$, s. t. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Siit $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ehk $\beta = -\alpha + \frac{\pi}{2}$. Seega on täisnurkse kolmnurga teravnurgad lineaarses sõltuvuses. Tähistame siin nagu tavaliselt funktsiooni tähega y ja argumenti tähega x, siis

$$y = -x + \frac{\pi}{2}.$$

Et siin argument x tähendab teravnurka, siis

$$0 < x < \frac{\pi}{2},$$

mis ongi vaadeldava funktsiooni määramispiirkonnaks.

4. Meres sügavusel h on veesamba kaal p võrdeline sügavusega:

$$p = ch, \text{ kus } c \text{ on konstant.}$$

Kogurõhk r samas kohas koosneb veesamba kaalust p ja atmosfääri rõhust b:

$$r = p + b$$

ehk

$$r = ch + b.$$

Seega on kogurõhk lineaarselt sõltuv sügavusest. Sügavust mõõdetakse alates merepinnast ja seetõttu

$$h \geqslant 0,$$

mis ongi vaadeldava lineaarse funktsiooni määramispiirkonnaks.

Ülesandeid.

132. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

1) $y=\frac{1}{2-x}$ 4) $y=\frac{3}{x^2-1}$ 7) $y=\frac{x^2+3}{x^2-5x+6}$

2) $y=\frac{3x}{x+4}$ 5) $y=\frac{5}{x^2+4x}$ 8) $y=\frac{4x^2-20}{x^2+2x-35}$

3) $y=\frac{2x-1}{3x+2}$ 6) $y=\frac{2x-3}{x^2-2x+1}$ 9) $y=\frac{2x^2-3x-2}{2x^2-3x+1}$

133. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

1) $y=\sqrt{x}$ 5) $y=(-2x+1)^{\frac{1}{2}}$ 9) $y=\sqrt{-x^2-2x+8}$

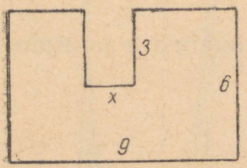
2) $y=\sqrt{x+2}$ 6) $y=(x^2-9)^{\frac{1}{2}}$ 10) $y=\sqrt{2x^2-4x-1}$

3) $y=\sqrt{3x}$ 7) $y=(2x^2-3x)^{\frac{1}{2}}$ 11) $y=\sqrt{-3x^2-5}$

4) $y=\sqrt{4x+2}$ 8) $y=(x^2-4x+3)^{\frac{1}{2}}$ 12) $y=\sqrt{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}}$

134. Avalda poja vanus p funktsioonina isa vanusest i, kui isa vanus poja sündimisel oli s. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond?

135. Pendelkella keti ülespoole liikuva osa pikkus on x, allapoole liikuva osa pikkus y, ketti kandva hammasratta raadius r ning kogu keti pikkus l. Avalda y funktsioonina x-st. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond?



Joon. 13.

136. Avalda joonisel 13 esitatud kujundi pindala s suuruse x funktsioonina. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond?

137. Ringis raadiusega 5 cm on võetud keskpunktist 3 cm kaugusel punkt P. Seda punkti läbib kõõl MN. Avalda kõõlu lõik $MP=y$ funktsioonina lõigust $NP=x$, kui kõõl pöörleb ümber punkti P. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond?

138. Punkt P liigub mööda lõiku AB, mille pikkus on a. Avalda suurus $y=AP^2+PB^2$ suuruse $x=AP$ funktsioonina. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond?

Teatavasti nimetatakse üht suurust y teise suuruse x funktsiooniks, kui suuruse x igale väärtusele tema määramispiirkonnast vastab suuruse y üks kindel väärtus.

Seda asjaolu, et suurus y on suuruse x funktsioon, märgitakse sümbolites kujul

$$y=f(x),$$

mida loetakse «igrek on funktsioon f iksist». Selles võrduses paremal seisev sümbol $f(x)$ on funktsiooni üldtähis, s. t. sümbol, mille abil märgitakse suvalist suurust, mis sõltub suurusest x. Tähe f asemel võib selles esineda mistahes muu täht (välja arvatud x). Nii tähistavad x funktsioone ka sümbolid

$$F(x),\ g(x),\ h(x),\ y(x) \text{ jne.}$$

Analoogiliselt tähistavad sümbolid

$$f(u),\ y(t),\ z(v)$$

vastavalt suuruste u, t ja v mingeid funktsioone.

Kui suuruse x funktsioonina $f(x)$ mõtleme üht konkreetset funktsiooni, näiteks funktsiooni $\sin^2 x$, siis kirjutame:

$$f(x)=\sin^2 x.$$

Siin täht f tähistab neid tehteid (operatsioone), mida tuleb teha suurusega x, et saada suurust $f(x)$.

Funktsiooni $f(x)$ väärtusi, mis vastavad argumendi x konkreetsetele väärtustele

$$2,\ -4,\ a \text{ jne.},$$

tähistatakse vastavalt sümbolitega

$$f(2),\ f(-4),\ f(a) \text{ jne.}$$

Näiteks, kui

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1},$$

siis

$$f(2)=\frac{2^2+1}{2-1}=5;\ f(-4)=\frac{(-4)^2+1}{-4-1}=-3\frac{2}{5};\ f(a)=\frac{a^2+1}{a-1}.$$

Tulemusi loeme järgmiselt: funktsiooni $f(x)$ väärtus kohal 2 on 5,

funktsiooni $f(x)$ väärtus kohal -4 on $-3\frac{2}{5}$ ja funktsiooni $f(x)$ väärtus kohal a on $\frac{a^2+1}{a-1}$. Lühemalt aga: f kohal -2 on 5 jne.

Ülesandeid.

139. Antud on funktsioon

$$f(x)=2x^2-3x+1.$$

Leia $f(0)$; $f(3)$; $f(-2)$; $f(2{,}3)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

140. Antud on funktsioon

$$F(u)=u^3-1.$$

Leia $F(1)$; $F(a)$; $F(a+1)$; $F(a-1)$; $2F(2a)$.

141. Antud on funktsioon

$$g(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t.$$

Näita, et $g(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$.

142. Antud on funktsioonid

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1} \text{ ja } \varphi(x)=\frac{x+2}{x-1}.$$

Leia $f(-x)$; $f(1)$; $\varphi(-3)$; $\varphi(a)$; $f(4)+\varphi(1)$.

§ 17. PAARISFUNKTSIOON JA PAARITU FUNKTSIOON.

1. Paarisfunktsioon.

Olgu funktsiooni $f(x)$ väärtused kohtadel $x=-a$ ja $x=a$ võrdsed (joon. 14), s. t.

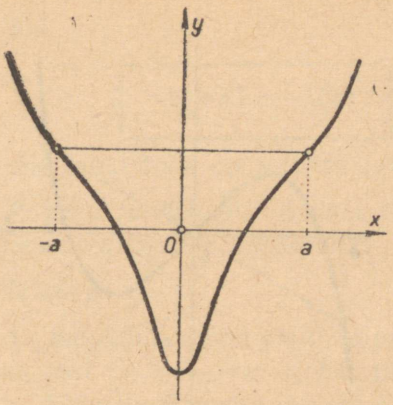
$$f(-a)=f(a).$$

Siis neile vastavad funktsiooni graafiku punktid $[-a, f(-a)]$ ja $[a, f(a)]$ on y-telje suhtes sümmeetrilised, sest y-telg on nende ühenduslõigu keskristsirgeks (põhjenda seda!). Kui see asjaolu leiab aset x kõikide väärtuste puhul, s. t. kui

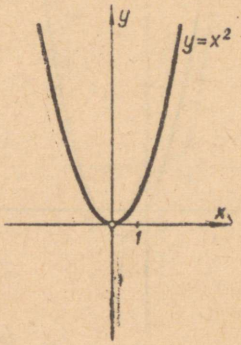
$$f(-x)=f(x),$$

siis antud funktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.

Ümberpöördult, kui funktsiooni $f(x)$ graafik on sümmeetriline y-telje suhtes, siis $f(-x)=f(x)$.



Joon. 14.



Joon. 15.

Funktsiooni, mille väärtused kohtadel $-x$ ja x on võrdsed, nimetatakse paarisfunktsiooniks.

Kasutades funktsiooni üldtähist võime sama definitsiooni üles kirjutada järgmiselt:

kui

$$f(-x)=f(x)$$

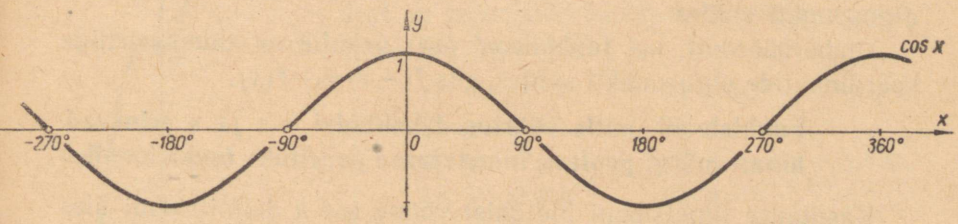
siis funktsioon on paarisfunktsioon.

Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.

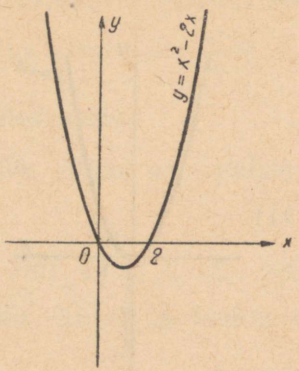
Näiteid.

1. Ruutfunktsioon $y=x^2$ on paarisfunktsioon, sest $(-x)^2=x^2$ (joon. 15).

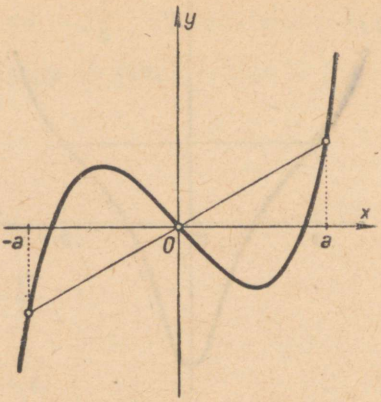
2. Koosinusfunktsiooni $y=\cos x$ graafik on sümmeetriline y-telje suhtes, sest $\cos(-x)=\cos x$ (joon. 16).



Joon. 16.



Joon. 17.



Joon. 18.

3. Ruutfunktsiooni $y=x^2-2x$ graafik pole sümmeetriline y-telje suhtes, sest $(-x)^2-2(-x)\neq x^2-2x$ (joon. 17).

2. Paaritu funktsioon.

Olgu funktsiooni $f(x)$ väärtused kohal $x=-a$ ja kohal $x=a$ erinevad ainult märgi poolest (joon. 18):

$$f(-a)=-f(a).$$

Siis neile vastavad funktsiooni graafiku punktid $[-a,\ f(-a)]$ ja $[a,\ -f(a)]$ on koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetrilised, sest punkt $[-a,\ f(-a)]$ on sümmeetriline y-telje suhtes punktiga $[a,\ f(a)]$ ning viimane on x-telje suhtes sümmeetriline punktiga $[a,\ -f(a)]$.

Kui kõigi x-väärtuste puhul kehtib seos

$$f(-x)=-f(x),$$

siis antud funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Ümberpöördult, kui funktsiooni $f(x)$ graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, siis $f(-x)=-f(x)$.

Funktsiooni, mille väärtused kohtadel $-x$ ja x erinevad ainult märgi poolest, nimetatakse paarituks funktsiooniks.

Kasutades funktsiooni üldtähist võime sama definitsiooni üles kirjutada järgmiselt:

kui

$$f(-x) = -f(x)$$

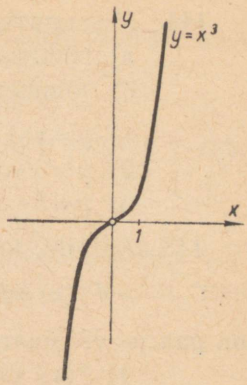
siis funktsioon on paaritu funktsioon.

Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

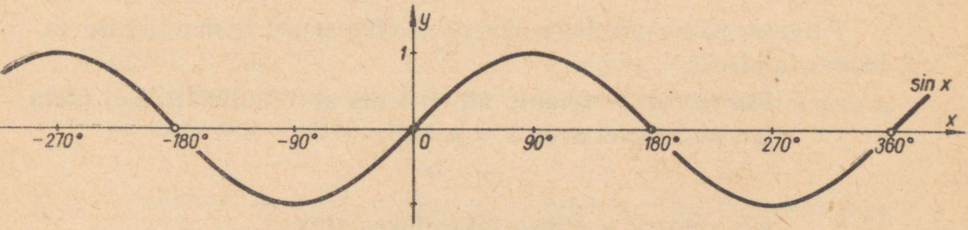
Näiteid.

1. Kuupfunktsioon $y = x^3$ on paaritu funktsioon, sest $(-x)^3 = -x^3$ (joon. 19).

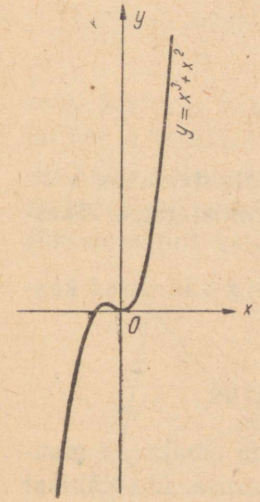
2. Siinusfunktsiooni $y = \sin x$ graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, sest $\sin(-x) = -\sin x$ (joon. 20).



Joon. 19.



Joon. 20.



Joon. 21.

3. Kuupfunktsiooni $y = x^3 + x^2$ graafik pole sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, sest $(-x)^3 + (-x)^2 \neq -(x^3 + x^2)$ (joonis 21).

Ülesandeid.

143. Missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid, missugused paaritud funktsioonid?

1) $y = x^4$
2) $y = x^{-3}$
3) $y = x^2 + x$
4) $y = x^3 + x$
5) $y = \frac{1}{x}$
6) $y = x^4 - 2x^2 + 5$
7) $y = \tan x$
8) $y = \sin x + \cos x$
9) $y = x$
10) $y = \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}$

144. Missugustel järgmistest funktsioonidest on graafik
a) sümmeetriline y-telje suhtes,
b) sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

1) $y=x^{-1}$ 4) $y=-x^3$
2) $y=3-x^2$ 5) $y=-2x^2$
3) $y=3-x^3$ 6) $y=-3x^3$

145. Selgita, kas funktsioonid

$$F_1(x)=f(x)+f(-x) \text{ ja } F_2(x)=f(x)-f(-x)$$

on paaris- või paaritud funktsioonid, kui
1) $f(x)$ on paarisfunktsioon;
2) $f(x)$ on paaritu funktsioon.

§ 18. SUURUSE TÄHTSAMAD MUUTUMISVIISID.

Tutvume mõne mõistega, mis on loodud suuruste muutumise iseloomustamiseks.

Kui suurus u muutub nii, et tema absoluutväärtus ei ületa üht positiivset arvu T, s. t. kui

$$|u|\leqslant T,$$

siis suurust u nimetatakse tõkestatuks.

Näiteks on $\sin x$ tõkestatud suurus, sest

$$|\sin x|\leqslant 1$$

ehk

$$-1\leqslant \sin x\leqslant 1,$$

argumendi x mistahes väärtuse korral.

Kui suurus u muutub nii, et tema absoluutväärtus võib saada kuitahes suureks, siis suurust u nimetatakse tõkestamata suuruseks.

Näiteks on $\tan x$ tõkestamata suurus, sest $\tan x$ väärtused kasvavad üle iga määra, kui x läheneb 90°-le.

§ 19. MUUTUVA SUURUSE PIIRVÄÄRTUS.

Nii tõkestatud kui ka tõkestamata suurus võib omakorda muutuda mitmeti. Vaatleme esmalt tõkestatud suuruse üht tähtsat muutumisviisi. Alustame näitega.

Muutugu suurus u nii, et tema väärtused moodustavad lõpmatu arvujada

$$0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ \ldots$$

Seda muutumist iseloomustab asjaolu, et suuruse u ja arvu 1 vahe absoluutväärtus

$$|u-1|$$

võib saada kuitahes väikeseks (väiksemaks igast kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust). Tõepoolest, arvutades need väärtused, saame

$$0.1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots,$$

kus jada jätkamisel leiame kuitahes väikesi arve.

Suuruse u sellist muutumist iseloomustatakse sõnadega

u läheneb arvule 1

ehk

u piirväärtus on arv 1.

Üldiselt,

kui suurus u muutub nii, et tema ja mingi jääva suuruse A vahe absoluutväärtus

$$|u-A|$$

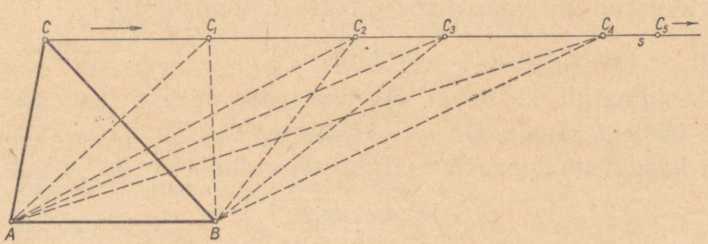
saab ja suuruse u edasisel muutumisel ka jääb kuitahes väikeseks, siis öeldakse, et suurus u läheneb arvule A ehk suuruse u piirväärtus on arv A.

Kirjeldatud muutumist märgitakse lühidalt kujul

$$u \to A \text{ ehk } \lim u = A,$$

mida loetakse vastavalt nii: u läheneb arvule A ehk u piirväärtus on arv A (sümbol lim tuleneb ladinakeelsest sõnast *limes* — piir).

Sageli on suuruseks A null, s. t. suurus u ise saab absoluutväärtuse poolest kuitahes väikeseks. Sel korral nimetatakse suurust u **tõkestamatult kahanevaks suuruseks.**



Joon. 22.

Vaatleme joonist 22. Läbi kolmnurga ABC tipu C on tõmmatud küljega AB paralleelne sirge s, millel on fikseeritud rida järjest kaugenevaid punkte C_1, C_2, C_3 jne. Jälgime kolmnurga nurkade muutumist, kui tipp C hakkab liikuma mööda sirget s noolega näidatud suunas. Nurgad tipu A ja tipu C juures saavad kuitahes väikeseks, need on tõkestamatult kahanevad suurused. Nurk tipu B juures läheneb sirgnurgale. Seega $\lim \angle B = \pi$.

§ 20. TÕKESTAMATULT KASVAVAD SUURUSED.

Vaatleme nüüd tõkestamata suuruse üht tähtsat muutumisviisi. Alustame jällegi näitega.

Muutugu suurus nii, et tema väärtused moodustavad lõpmatu arvujada

$$-9,\ -99,\ -999,\ -9999, \ldots$$

Seda muutumist iseloomustab asjaolu, et suuruse u absoluutväärtus saab suuremaks igast kuitahes suurest etteantud arvust. Näiteks, kui etteantud arvuks oleks 10^{100}, siis alates 101. liikmest on arvujada arvude absoluutväärtused temast suuremad. Tõepoolest, võttes antud arvude absoluutväärtused, saame

$$9,\ 99,\ 999,\ 9999, \ldots,$$

kus jada jätkamisel saame leida kuitahes suuri arve.

Suuruse u sellist muutumist iseloomustatakse sõnadega

u kasvab tõkestamatult.

Üldiselt,

kui suurus u muutub nii, et tema absoluutväärtus saab ja edasisel muutumisel ka jääb suuremaks igast kuitahes suurest etteantud arvust, siis nimetatakse suurust u tõkestamatult kasvavaks suuruseks.

Kirjeldatud muutumist märgitakse lühidalt kujul

$$u \to \infty .$$

Tõkestamatult kasvaval suurusel pole piirväärtust, sest ta ei lähene ühelegi arvule. On aga kokku lepitud kasutada ka tõkestamatult kasvavate suuruste märkimiseks sümbolit lim järgmiselt:

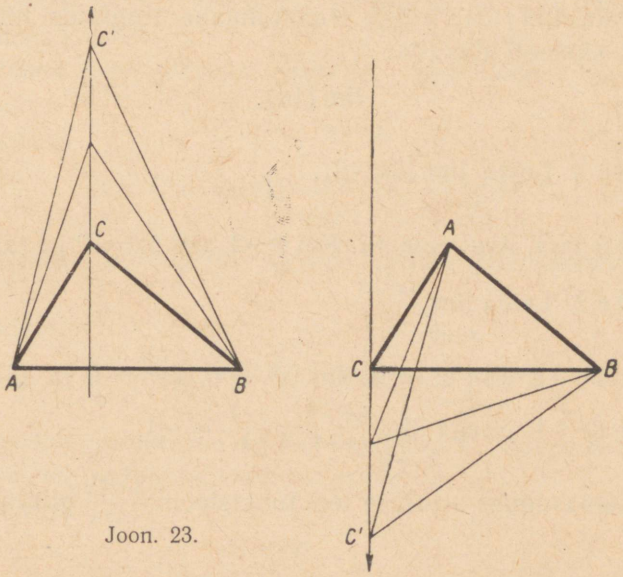
$$\lim u = \infty ,$$

mida loetakse: u piirväärtuseks on lõpmatus.

Jälgides joonisel 22 kolmnurga külgede muutumist, paneme tähele, et küljed AC ja BC on tõkestamatult kasvavad suurused.

Ülesandeid.

146. Joonisel 23 on esitatud kahe kolmnurga muutumine tipu C nihkumisel mööda joonisel näidatud sirget. Tee kindlaks, missugused elemendid osutuvad seal tõkestamatult kasvavaiks, missugused tõkestamatult kahanevaiks ja missugustel neist on nullist erinev piirväärtus.



Joon. 23.

147. Missugusest n väärtusest alates saab ja jääb avaldise $3n^3$ väärtus suuremaks kui 3000?

148. Missugusest n väärtusest alates saab ja jääb

1) avaldise $n+15$ väärtus suuremaks kui 1000,
2) avaldise $5n-3$ väärtus suuremaks kui 18 007,
3) avaldise n^2+8 väärtus suuremaks kui 633?

149. Missugusest n väärtusest alates saab ja jääb avaldise $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ väärtus väiksemaks arvust 0,0002?

150. Missugusest n väärtusest alates saab ja jääb avaldise $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ väärtus väiksemaks kui 0,005?

151. Missugusest n väärtusest alates korrapärase n-nurga välisnurk saab ja jääb väiksemaks kui $1''$?

Olgu muutuv suurus u funktsioon x-st, s. t.

$$u=f(x).$$

Funktsiooni (kui sõltuva muutuja) muutumist põhjustab argumendi muutumine. Seega, kui huvitume funktsiooni piirväärtusest, siis peab olema antud, kuidas muutub sõltumatu muutuja ehk argument.

Seega ei oma mõtet ülesanne: leida $\lim f(x)$. Mõte on aga ülesandel: leida $\lim f(x)$, kui $x \to a$. Viimane tingimus kirjutatakse tavaliselt sümboli lim alla:

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Näide 1. Leida $\lim_{x \to 2} (5x-6)$.

Lahendus. Arutleme nii. Kui $x \to 2$, siis $5x \to 10$ ja $(5x-6) \to 4$.

Näide 2. Leida $\lim_{x \to 0} \frac{5x^2-1}{x+1}$.

Lahendus. Kui $x \to 0$, siis $x^2 \to 0$, $5x^2 \to 0$ ja $(5x^2-1) \to 1$ ning $(x+1) \to 1$. Seega $\lim_{x \to 0} \frac{5x^2-1}{x+1} = \frac{-1}{1} = -1$.

Leia samasuguse arutluse teel funktsiooni $\frac{4-7x}{\cos x}$ piirväärtus, kui $x \to 0$.

Ülesandeid.

152. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \to 0$ ja kui $x \to 1$.

a) $-4x+3$; $7+\frac{1}{3}x$; x^2+2x-3; $(2x-1)^2$

b) $\frac{4}{x+6}$; $\frac{3-x}{2}$; $\frac{4+2x}{3x-5}$; $\frac{\frac{1}{3}x-6}{3-\frac{1}{6}x}$

c) $\frac{x^2+x+1}{3-2x}$; $\frac{-x^2-x+5}{3+2x-x^2}$; $\frac{(3x-2)^2}{6-3x}$; $\left(\frac{0{,}14x-2{,}8}{0{,}7+8{,}6x}\right)^2$

153. a) Missuguseks suuruseks osutub funktsioon $\frac{1}{x}$, kui $x \to 0$?

b) Missuguseks suuruseks osutub funktsioon $\frac{1}{x}$, kui $x \to \infty$?

§ 22. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUSE ARVUTAMINE.

1. Eespool toodud arutlusest ilmneb, et piirväärtuse leidmisel kasutatakse lauseid:

1) *summa piirväärtus võrdub liidetavate piirväärtuste summaga,*

sümbolites

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x);$$

2) *korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega,*

sümbolites

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x);$$

3) *jagatise piirväärtus võrdub jagatava ja jagaja piirväärtuste jagatisega, kui jagaja piirväärtus ei ole* 0,

sümbolites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \text{ kui } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

Samuti ilmneb eelnenud aruteludest, et

konstandi piirväärtuseks on konstant ise,

sümbolites

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

Nende lausete rakendamisel eeldame, et liidetavatel, teguritel ning lugejal ja nimetajal on piirväärtus olemas ja et nimetaja piirväärtus ei võrdu nulliga. Kuidas toimub piirväärtuse leidmine aga siis, kui nimetatud eeldused pole täidetud, seda vaatleme punktis 2.

Ülesandeid.

154. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x\to 4}(2x-3)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}(4-x^2)$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^4-x^2+1)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2-2x^2-1)$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2+3}$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$

g) $\lim\limits_{x\to a}\frac{2}{3-x}$

h) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-1}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1}$

j) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+1}$

k) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2-1}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\tan x}{\cos x}$

m) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x}\right)$

n) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{3-x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{4}}\left[\frac{(4-x)^2}{3x}-\frac{3x^2}{4-x}\right]$

p) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4x^3+1)^3$

q) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+1}{2x+1}$

r) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x}$

2. Vaatleme nüüd näiteid piirväärtuse arvutamise kohta juhtumeil, kui mõni eespool toodud lausetest piirväärtuse arvutamiseks ei kehti.

1° $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$.

Kui $x\to 1$, siis $(1-x)\to 0$; seega murru nimetaja läheneb nullile ja lugeja ühele. Et praegusel juhul murru nimetaja osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks, samal ajal kui lugeja jääb lõplikuks, siis on murd tõkestamatult kasvav suurus. Seega puudub temal lõplik piirväärtus. Seda tõsiasja märgime üles järgmiselt.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}=\infty$$

(loeme: argumendi lähenemisel 1-le kasvab funktsioon $\frac{x}{1-x}$ tõkestamatult või funktsiooni $\frac{x}{1-x}$ piirväärtuseks on lõpmatus).

2° $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{1+x^2}$.

Et siin murru nimetaja on tõkestamatult kasvav suurus (kui $x \to \infty$, siis ka $(1+x^2) \to \infty$) ja murru lugeja on lõplik arv, siis on murd tõkestamatult kahanev suurus:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

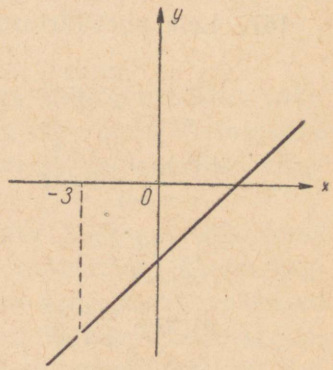
3° $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$.

Siin on nii murru lugeja kui ka nimetaja piirväärtus 0. Et $x \neq -3$, siis tuleb avaldist nii teisendada, et saaksime taandada teguriga $x+3$, mis läheneb nullile nii lugejas kui ka nimetajas.

Seega lahendame selle ülesande järgmiselt:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x \to -3} (x-3) = -6.$$

Saadud tulemust võime selgitada ka joonise 24 abil. Funktsioon $\dfrac{x^2-9}{x+3} = x-3$, kui $x \neq 3$. Seega antud funktsiooni graafikuks on sirge, mis katkeb kohal $x=-3$. Jälgides aga funktsiooni väärtuste muutumist, kui $x \to -3$, siis on ilmne, et $\dfrac{x^2-9}{x+3} \to -6$, s. t. funktsiooni $x-3$ väärtusele kohal $x=-3$.



Joon. 24.

4° $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$.

Selles ülesandes pole lugejal ega nimetajal piirväärtust — nad mõlemad on tõkestamatult kasvavad suurused. Et x omab lõplikke väärtusi, mis järjest suurenevad, siis tuleb siin lugeja ja nimetaja nii tegureiks lahutada, et saaksime x kõrgeima astendajaga astmega taandada. Antud ülesande lahendame järgmiselt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^3+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ülesandeid.

155. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{5x}$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x}{5x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{3x}$ e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{3x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{x^3}$

156. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \to \infty$.

a) $3+x$ b) x^2+5 c) $\frac{1}{x}$

$5x$ $16-x$ $3+\frac{1}{x}$

x^2 x^3-1 $x+\frac{3}{x}$

157. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-2}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x+3}{12+4x}$ f) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-x-12}{x^2-2x-15}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x-1}$ g) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2+4x-5}$

d) $\lim\limits_{x \to -5} \frac{x^3+5x^2}{x^2+5x}$ h) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

158. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ d) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

159. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^4-5x}{x^2-3x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$

160. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \to 0$ ja kui $x \to \infty$.

a) $\frac{2x-5}{x+3}$ b) $\frac{3x^2+5x-2}{4x^2-3x+1}$

161. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x}$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\tan x+\sin x}$

§ 23. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUSE RAKENDUSI.

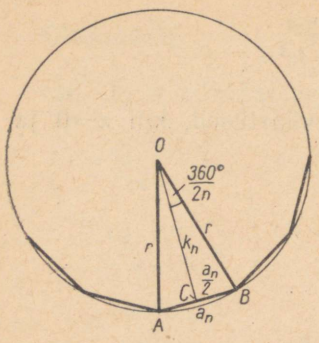
1. Ringjoone pikkuse mõiste.

Ringjoon on kõverjoon, pikkusühik aga sirglõigu pikkus (näiteks 1 mm, 1 cm, 1 dm jne.), seetõttu ei ole võimalik ringjoone pikkust otseselt mõõta ja on vaja defineerida, mida mõista ringjoone pikkuse all.

Kui ringi sisse joonestada korrapärane hulknurk, siis tema ümbermõõt, mida saab pikkusühiku abil mõõta, on lühem ringjoone pikkusest, sest hulknurga küljed kui kahe punkti vahelised sirglõigud on lühemad igast teisest nende punktide vahelisest joonest, seega ka lühemad neile vastavatest ringjoone kaartest. Kui hulknurga tippude arvu kahekordistada, saame uue hulknurga, mille ümbermõõt on pikem eelmise hulknurga ümbermõõdust ja lühem ringjoone pikkusest. Miks? Seda kahekordistamise protsessi jätkates saame hulknurgad, mille ümbermõõdud ikka enam ja enam lähenevad ringjoone pikkusele. Tee vastav joonis!

Seda tähelepanekut aluseks võttes defineeritaksegi ringjoone pikkust järgmiselt.

Ringjoone pikkuseks nimetatakse ringi sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade ümbermõõtude piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab.



Joon. 25.

Olgu ringi sisse joonestatud korrapärane n-nurk (joon. 25). Ühendades hulknurga tipud ringi keskpunktiga, tekivad võrdhaarsed kolmnurgad alusega a_n ja haaraga r. Selle kolmnurga tipunurk on $\frac{360°}{n}$. Tõmbame hulknurga apoteemi, mis on ka vaadeldava võrdhaarse kolmnurga kõrguseks. See apoteem jaotab antud kolmnurga OAB kaheks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks OAC ja OBC. Nendes kolmnurkades on üks nurk $\frac{360°}{2n}$ ja selle nurga vastaskaatet $\frac{a_n}{2}$. Täisnurksest kolmnurgast OBC võime kirjutada:

$$\frac{\frac{a_n}{2}}{r} = \sin\frac{360°}{2n}$$

ehk

$$\frac{a_n}{2r} = \sin\frac{360°}{2n}.$$

Korrutades nüüd võrduse mõlemad pooled arvuga $2rn$, saame

$$n \cdot a_n = 2r \cdot n \cdot \sin\frac{360°}{2n}.$$

Et $n \cdot a_n$ väljendab ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga ümbermõõtu, siis on ringjoone pikkuseks

$$\lim_{n \to \infty}(n \cdot a_n) = \lim_{n \to \infty}\left(2r \cdot n \cdot \sin\frac{360°}{2n}\right).$$

2. Arv π.

Vaatame, kuidas muutub avaldis $n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$, kui n kasvab. Selleks koostame alljärgneva tabeli.

n	$\frac{360°}{2n}$	$\sin\frac{360°}{2n}$	$n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$
3	60°	0,8660	2,5980
6	30°	0,5	3,0
12	15°	0,2588	3,1056
24	7°30′	0,1305	3,1320
48	3°45′	0,0654	3,1392

Selle tabeli jätkamiseks ei piisa enam neljakohalisest siinuste tabelist. Kui aga kasutada järjest suurema arvu kohtadega tabeleid, siis võib tähele panna, et peale 3,1, mis jäi juba antud tabelis püsima $n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$ väärtusena, jäävad edaspidi n suurenemisel püsima

3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; jne.

Avaldise $n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$ piirväärtust tähistatakse kreeka tähega π.

Seega

$$\lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n} \right) = \pi$$

π lähisväärtusena on kõige enam kasutusel arv 3,14.

3. Ringjoone pikkus.

Et $\lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n} \right) = \pi$ ja ringjoone pikkus on

$\lim_{n \to \infty} \left(2r \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n} \right)$, siis tähistades ringjoone pikkuse tähega c, võime kirjutada

$$c = \lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n) = \lim_{n \to \infty} \left[2r \cdot \left(n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n} \right) \right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2r \cdot \lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n} \right) = 2r \cdot \pi$$

ehk, jättes vahepealsed kirjutused ära,

$$\mathbf{c = 2\pi r}$$

Et $2r = d$, siis ka

$$\mathbf{c = \pi d.}$$

Avaldades sellest võrdusest π, saame

$$\pi = \frac{c}{d},$$

mis ütleb, et *iga ringjoone pikkuse ja läbimõõdu suhe on konstantne ja võrdub* π*-ga.*

4. Ringi pindala.

Ringi pindala S *all mõistame ringi sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade pindalade* S_n *piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab, s. t.*

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Teades, et korrapärase hulknurga pindala avaldub tema ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisega, võime kirjutada (joon. 25):

$$S_n = (n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2}$$

ja

$$S = \lim_{n \to \infty} \left[(n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2} \right].$$

Et $\lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r$ ja $\lim_{n \to \infty} k_n = r$, siis

$$S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$$

ehk, jättes ära vahepealse avaldise,

$$\boxed{S = \pi r^2}$$

Avaldades saadud võrdusest π, saame

$$\pi = \frac{S}{r^2},$$

mis ütleb, et *ringi pindala ja selle ringi raadiusele ehitatud ruudu pindala suhe on konstantne ja võrdub* π*-ga.*

Enne leidsime, et $\pi = \frac{c}{d}$, seega

$$\frac{c}{d} = \frac{S}{r^2}.$$

See tähendab, et

ringjoone pikkus on läbimõõdust nii palju kordi pikem, kui ringi pindala on suurem tema raadiusele ehitatud ruudust.

Ülesandeid.

162. Ringi raadius on r.

a) Kui suur on 1° kesknurgale vastava kaare pikkus?

b) Kui suur on 1° kesknurgale vastava sektori pindala?

163. Ringi raadius on 10 cm.

a) Kui suur on 15° kesknurgale vastava kaare pikkus?

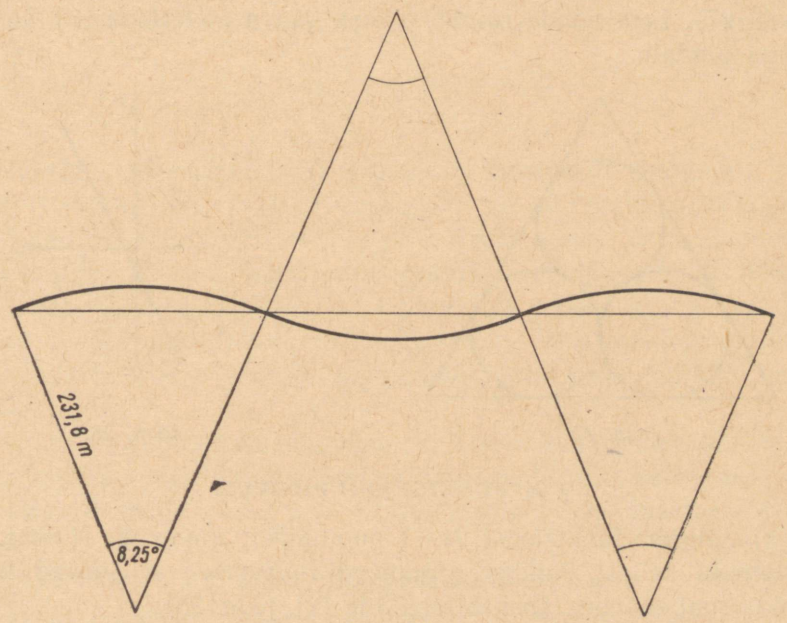
b) Kui suur on 100° kesknurgale vastava sektori pindala?

164. Sõnasta ringjoone kaare pikkuse leidmise eeskiri.

165. Sõnasta ringi sektori pindala leidmise eeskiri.

166. Mis on ringi segment? Sõnasta ringi segmendi pindala leidmise eeskiri.

167. Ringi raadius on 15 cm. Leia 25° kesknurgale vastava segmendi pindala.



Joon. 26.

168. 1 meeter on ligikaudu $\frac{1}{40\,000\,000}$ Maa ümbermõõdust, kui Maad vaadelda kerana. Kui pikk on Maa raadius?

169. Kui pikk on meridiaani kraad, kui Maa raadius on 6370 km?

170. Meridiaani minuti pikkust nimetatakse m e r e m i i l i k s.

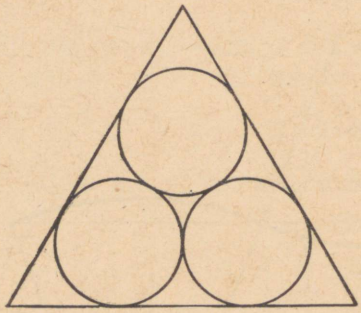
Leia meremiili pikkus meetrites, kasutades eelmise ülesande andmeid.

171. Mitu pööret teeb vaguniratas minutis, kui tema diameeter on 0,85 m ja rong sõidab kiirusega 80 km tunnis?

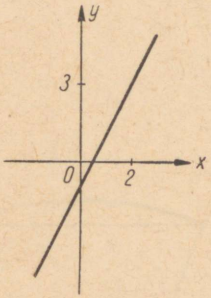
172. Poiss käib ümber ringikujulise tiigi 7 minutiga. Kui suur on tiigi pindala, kui poiss käib 10 minutiga 900 m?

173. Sportlane ei jookse 100 meetrit mitte oma raja keskjoont mööda, vaid joonisel 26 näidatud kolme võrdse ringjoone kaart mööda, kusjuures vastavate ringide raadiused on 231,8 m ja kaartele vastav kesknurk 8,25°. Kui pika maa jooksis sportlane tegelikult? Kui palju kaotas sportlane aega, kui sirgjoont mööda joostes oleks ta läbinud 100 m 11 sekundiga?

174. Võrdkülgsesse kolmnurka, mille külg on a, on joonestatud kolm võrdset ringi, mis puudutavad üksteist ja kolmnurga külge (joon. 27). Leia nende ringide vahele jääva kõverjoonelise kolmnurga pindala.



Joon. 27.



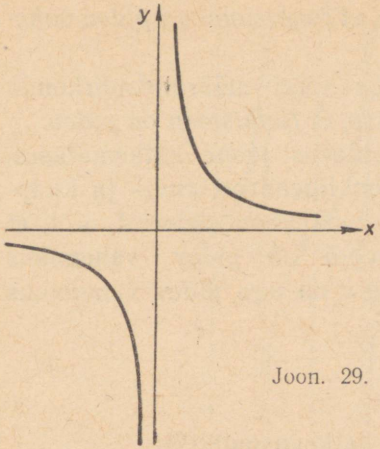
Joon. 28.

§ 24. FUNKTSIOONI PIDEVUS.

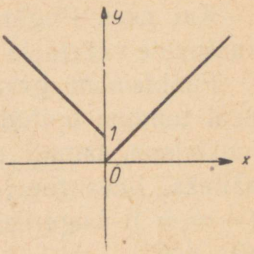
a) Jälgime funktsiooni $2x-1$ muutumist, kui $x \to 2$. Näeme, et sõltumata sellest, kuidas argumendi väärtused lähenevad 2-le, funktsiooni väärtus läheneb ikka 3-le (vt. joon. 28).

b) Funktsiooni $\frac{1}{x}$ väärtused kasvavad tõkestamatult positiivses suunas, kui $x \to 0$ (paremalt), ja kasvavad tõkestamatult negatiivses suunas, kui $x \to 0$ (vasakult) (vt. joon. 29).

c) Funktsiooni piirväärtuse käsitlemisel selgitasime, et funktsioonil $\frac{x^2-9}{x+3}$ puudub väärtus, kui $x=-3$. Küll on tal aga piirväärtuseks -6, kui $x \to -3$ (vt. joon. 24).



Joon. 29.



Joon. 30.

d) Vaatleme funktsiooni $f(x)$, mis on defineeritud järgmiselt:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{kui } x \leqslant 0, \\ x, & \text{kui } x>0. \end{cases}$$

Jälgime selle funktsiooni muutumist graafikult (joon. 30). Kui $x \to 0$ (vasakult), siis $f(x) \to 1$, kui aga $x \to 0$ (paremalt), siis $f(x) \to 0$.

Juhul a) on funktsiooni graafik vaadeldava koha ümbruses pidev; juhul b) kaob funktsiooni graafik vaadeldava koha ümbruses meie vaateväljast; juhul c) katkeb funktsiooni graafik vaadeldaval kohal; juhul d) toimub see katkemine koos funktsiooni väärtuste ulatuslikuma muutumisega vaadeldava koha lähimas ümbruses.

Juhul a) nimetatakse funktsiooni antud kohal **pidevaks,** kõigil teistel vaadeldud juhtudel aga **mittepidevaks** ehk **katkevaks.**

Funktsiooni pidevuse analüütiline tingimus on sõnastatav järgmiselt:

funktsiooni $f(x)$ nimetatakse pidevaks kohal a, kui

1) *tal on kohal a väärtus olemas, s. t. eksisteerib $f(a)$,*
2) *tal on olemas lõplik piirväärtus, kui $x \to a$, s. t. eksisteerib $\lim\limits_{x \to a} f(x)$,*
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$.

Kui need tingimused kehtivad argumendi kõigi väärtuste kohta

vahemikus c-st kuni d-ni, siis öeldakse, et *funktsioon on pidev vahemikus* (c, d).

Kui need tingimused kehtivad aga kõigi määramispiirkonda kuuluvate väärtuste korral, siis öeldakse, et *funktsioon on pidev*.

Funktsiooni graafikul kajastub pidevus joone katkematuses. Seni tundma õpitud funktsioonidest on lineaarne, ruut- ja kuupfunktsioon, samuti siinus- ja koosinusfunktsioon pidevad, s. t. et näiteks lineaarne funktsioon $y=ax+b$ on pidev vahemikus $(-\infty, \infty)$. Logaritmfunktsioon $y=\log x$ on aga pidev vahemikus $(0, \infty)$.

Ülesandeid.

175. Leia järgmiste funktsioonide katkevuspunktid:

a) $y=-\frac{3}{x}$; b) $y=\frac{1}{x-2}$; c) $y=\frac{2}{4-x^2}$.

Joonesta nende funktsioonide graafikud!

176. Leia järgmiste funktsioonide katkevuspunktid:

a) $y=\frac{2-x}{4-x^2}$; b) $y=\frac{x-1}{x^2+2x-3}$.

177. Leia järgmiste funktsioonide katkevuspunktid:

a)

$$y=\begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{kui } x\neq 2 \\ 0, & \text{kui } x=2, \end{cases}$$

b)

$$y=\begin{cases} 0{,}5x^2, & \text{kui } |x|<2 \\ 2{,}5, & \text{kui } |x|=2 \\ 3, & \text{kui } |x|>2, \end{cases}$$

c)

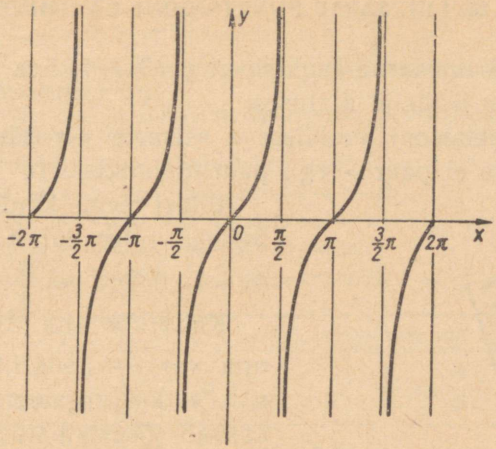
$$y=\begin{cases} 2, & \text{kui } |x|=2 \\ 4-x^2, & \text{kui } |x|<2 \\ 4, & \text{kui } |x|>2. \end{cases}$$

Joonesta nende funktsioonide graafikud!

178. Kas funktsioon $y=\frac{a}{x}$ on kohal

$$-a,\ 0,\ a,\ 1,\ 10$$

pidev või katkev?



Joon. 31.

179. Kas tangensfunktsioon on kohal

$$-\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$$

pidev või katkev (vt. joon. 31)?

§ 25. FUNKTSIOONI UURIMISE SKEEM.

Funktsiooni uurimine tähendab saada täielik ülevaade funktsiooni muutumise kohta vastavalt argumendi muutumisele.

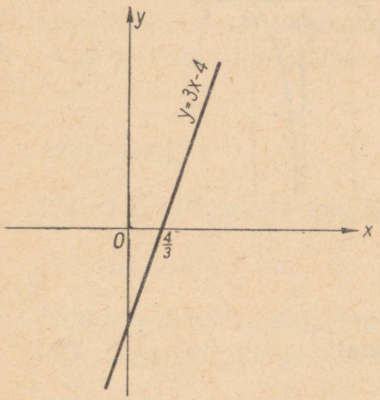
Et funktsiooni esitusviisidest on kõige täielikum analüütiline esitusviis, siis kõige täielikuma ülevaate funktsiooni muutumise kohta saame, kui uurime tema analüütilist esitust.

Funktsiooni uurimisel tehakse kindlaks:

1) *määramispiirkond;*
2) *kas antud funktsioon on paaris- või paaritu funktsioon või ei kumbki;*
3) *ekstreemumpunktid;*
4) *kasvamis- ja kahanemispiirkonnad;*
5) *nullkohad;*
6) *positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad;*
7) *funktsiooni muutumine argumendi tõkestamatul kasvamisel (mõnikord ka argumendi tõkestamatul kahanemisel).*

Olgu antud lineaarne funktsioon $y=3x-4$. See funktsioon on määratud kogu arvtelje ulatuses.

Pannes funktsiooni avaldisse x asemele $-x$ näeme, et antud funktsioon pole ei paaris- ega paaritu funktsioon.



Joon. 32.

Edasi teeme kindlaks nullkoha. Selleks tuleb lahendada võrrand $3x-4=0$. Siit $x=\frac{4}{3}$.

Kui $x\to\infty$, siis $(3x-4)\to\infty$; kui aga $x\to-\infty$, siis $(3x-4)\to-\infty$, s. t. et kui argument positiivsena kasvab tõkestamatult, siis ka antud funktsioon kasvab positiivsena tõkestamatult, ning kui argument negatiivsena kasvab tõkestamatult, siis ka antud funktsioon kasvab negatiivsena tõkestamatult.

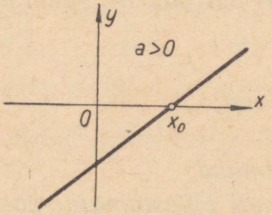
Funktsiooni graafikult (joon. 32) näeme, et

$$3x-4>0, \text{ kui } x>\frac{4}{3}, \text{ ja } 3x-4<0, \text{ kui } x<\frac{4}{3}.$$

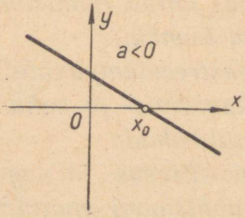
Samuti näeme, et antud funktsioon on kogu ulatuses kasvav.

Uurime nüüd lineaarset funktsiooni tema üldisel kujul.

1. Lineaarne funktsioon $ax+b$ on määratud argumendi iga väärtuse korral, s. t. piirkonnas $-\infty<x<\infty$.
2. Lineaarne funktsioon pole üldiselt ei paaris- ega paaritu funktsioon, ainult erijuhul, kui $b=0$, esitab ta paaritut funktsiooni.
3. Lineaarsel funktsioonil ei ole maksimum- ega miinimumpunkti.
4. a) Lineaarne funktsioon on kasvav, kui $a>0$ (joon. 33).
   b) Lineaarne funktsioon on kahanev, kui $a<0$ (joon. 34).



Joon. 33.



Joon. 34.

5. Lineaarse funktsiooni nullkohaks on $x_0 = -\frac{b}{a}$.

6. a) Kui $a>0$, siis on lineaarse funktsiooni positiivsuspiirkonnaks $x>x_0$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x<x_0$.

b) Kui $a<0$, siis on lineaarse funktsiooni positiivsuspiirkonnaks $x<x_0$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x>x_0$.

7. a) Kui $a>0$ ja $x\to\infty$, siis $(ax+b)\to\infty$;
kui $a>0$ ja $x\to-\infty$, siis $(ax+b)\to-\infty$.

b) Kui $a<0$ ja $x\to\infty$, siis $(ax+b)\to-\infty$;
kui $a<0$ ja $x\to-\infty$, siis $(ax+b)\to\infty$.

Märgime funktsiooni $y=3x-4$ uurimise tulemused tabelisse.

	Funktsioonid		
	$3x-4$	$\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}$	$-2x+\frac{2}{3}$
1. Määramispiirkond	$-\infty<x<\infty$		
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon	ei kumbki		
3. a) Maksimumpunkt	puudub		
b) Miinimumpunkt	puudub		
4. a) Kasvamispiirkond	$-\infty<x<\infty$		
b) Kahanemispiirkond	puudub		
5. Nullkoht	$x=\frac{4}{3}$		
6. a) Positiivsuspiirkond	$x>\frac{4}{3}$		
b) Negatiivsuspiirkond	$x<\frac{4}{3}$		
7. a) Kui $x\to\infty$, siis	$(3x-4)\to\infty$		
b) Kui $x\to-\infty$, siis	$(3x-4)\to-\infty$		

Täida tabel ka funktsioonide $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}$ ja $-2x+\frac{2}{3}$ osas!

Küsimusi ja ülesandeid.

180. Milles seisneb funktsiooni uurimine?

181. Missugust funktsiooni nimetatakse lineaarseks funktsiooniks?

182. Mis on sirge tõus?

183. Millal nimetatakse funktsiooni kasvavaks (kahanevaks)?

184. Mis on funktsiooni positiivsuspiirkond (negatiivsuspiirkond)?

185. Kasutades tabeleid, tee kindlaks, kui suure nurga moodustavad x-teljega järgmised sirged:

a) $y=2{,}13x-5$; c) $y=1{,}6x+3$;
b) $y=-0{,}421x+1$; d) $y=-5{,}2x-4$.

186. Leia eelmises ülesandes antud sirgete (a) ja (b) vaheline ning (c) ja (d) vaheline nurk.

187. Uuri järgmisi funktsioone.

a) $3x+2$ c) $\frac{3}{4}(x+2)$ e) $12x-64$

b) $\frac{2x-6}{3}$ d) $-3{,}22x-15{,}6$ f) $2{,}14-\frac{3}{5}x$

Skitseeri uurimistulemuste põhjal vastavad graafikud!

§ 27. RUUTFUNKTSIOONI UURIMINE.

Uurime näiteks funktsiooni $3x^2-4x-4$.

1. Et antud funktsioon on ruutfunktsioon, siis on tema määramispiirkonnaks $-\infty<x<\infty$.

2. Asendades antud funktsiooni avaldises x $(-x)$-ga, saame $3x^2+4x-4$. Kui antud funktsiooni tähistada $f(x)$-ga, siis ei kehti siin võrdused: $f(x)=f(-x)$, $f(-x)=-f(x)$. Seega antud funktsioon pole ei paaris- ega paaritu funktsioon.

3. Haripunkti koordinaadid leiame täisruuduks teisendamise võtte abil järgmiselt:

$$3x^2-4x-4=3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-4=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-4-\frac{4}{3}=$$

$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-5\frac{1}{3}.$$

Selle ruutfunktsiooni graafiku haripunktiks on seega punkt

$$\left(\frac{2}{3};\ -5\frac{1}{3}\right).$$

4. Et siin $a>0$, siis on kahanemispiirkonnaks $x<\frac{2}{3}$ ja kasvamispiirkonnaks $x>\frac{2}{3}$.

5. Nullkohtade leidmiseks lahendame ruutvõrrandi

$$3x^2-4x-4=0.$$

Lahenditeks on:

$$x_1=-\frac{2}{3};\ x_2=2.$$

6. Teades kasvamis- ja kahanemispiirkondi ning nullkohti, saab kohe välja kirjutada positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

Vaadeldaval juhul

$$3x^2-4x-4<0, \text{ kui } -\frac{2}{3}<x<2;$$

$$3x^2-4x-4>0, \text{ kui } x<-\frac{2}{3} \text{ ja kui } x>2.$$

7. Et $a=3>0$, siis x tõkestamatul kasvamisel kas positiivses või negatiivses suunas osutub funktsioon ikka tõkestamatult kasvavaks positiivses suunas.

Uurimise tulemused paigutame tabelisse.

	Funktsioonid		
	$3x^2-4x-4$	$2x^2-3x$	$-x^2+4$
1. Määramispiirkond	$-\infty<x<\infty$		
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon	ei kumbki		
3. a) Maksimumpunkt	puudub		
b) Miinimumpunkt	$\left(\frac{2}{3};\ -5\frac{1}{3}\right)$		
4. a) Kasvamispiirkond	$x>\frac{2}{3}$		
b) Kahanemispiirkond	$x<\frac{2}{3}$		
5. Nullkohad	$x=-\frac{2}{3};\ x=2$		
6. a) Positiivsuspiirkonnad	$x<-\frac{2}{3};\ x>2$		
b) Negatiivsuspiirkond	$-\frac{2}{3}<x<2$		
7. a) Kui $x\to\infty$, siis b) Kui $x\to-\infty$, siis	$(3x^2-4x-4)\to\infty$		

Täida tabel ka funktsioonide $2x^2-3x$ ja $-x^2+4$ osas!

Uurime ruutfunktsiooni tema üldisel kujul.

1. Ruutfunktsioon ax^2+bx+c on määratud argumendi iga väärtuse korral, s. t. piirkonnas $-\infty<x<\infty$.

2. Ruutfunktsioon pole üldiselt ei paaris- ega paaritu funktsioon. Erijuhul, kui $b=c=0$, esitab ta paarisfunktsiooni.

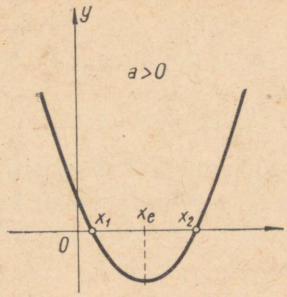
3. Ruutfunktsiooni ekstreemumkohaks on $x_e=\frac{-b}{2a}$.

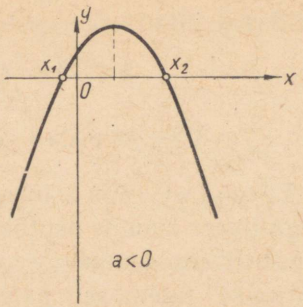
4. a) Kui $a>0$, siis ruutfunktsioon on kasvav piirkonnas $x>x_e$ ja kahanev piirkonnas $x<x_e$ (joon. 35).

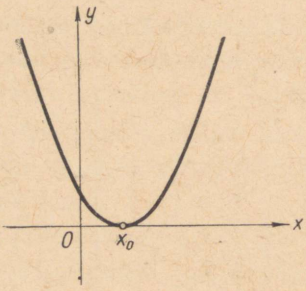
b) Kui $a<0$, siis ruutfunktsioon on kasvav piirkonnas $x<x_e$ ja kahanev piirkonnas $x>x_e$ (joon. 36).

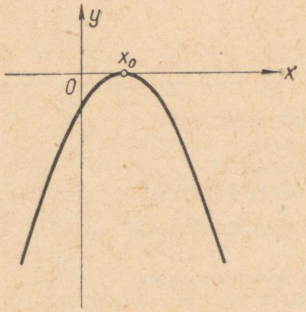
5. Ruutfunktsiooni nullkohtadeks on ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid x_1 ja x_2, kusjuures

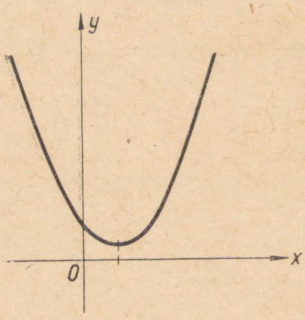
a) tal on kaks erinevat nullkohta ($x_1\neq x_2$), kui $b^2-4ac>0$;

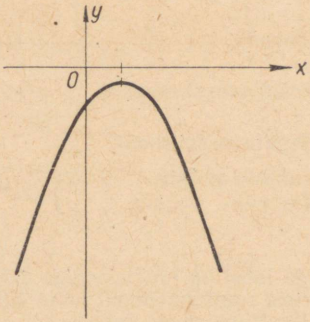












Joon. 35. Joon. 36.

b) tal on kaks ühtelangevat nullkohta ($x_1=x_2$), kui $b^2-4ac=0$;
c) tal pole nullkohti, kui $b^2-4ac<0$.

6. Ruutfunktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad on nullkohtadega määratud järgmiselt:

a) kui $a>0$ ja nullkohtadeks on x_1 ja x_2, kusjuures $x_1<x_2$, siis $ax^2+bx+c>0$ piirkondades $x<x_1$ ja $x>x_2$ ning $ax^2+bx+c<0$ piirkonnas $x_1<x<x_2$;

b) kui $a>0$ ja nullkohad on ühtelangevad, s. t. $x_1=x_2=x_0$, siis $ax^2+bx+c>0$ kõikjal, välja arvatud punkt, kus $x=x_0$; negatiivsuspiirkond sel juhul puudub;

c) kui $a>0$ ja nullkohad puuduvad, siis $ax^2+bx+c>0$ kõigi x väärtuste korral; negatiivsuspiirkond sel juhul puudub;

d) kui $a<0$ ja nullkohtadeks on x_1 ja x_2, kusjuures $x_1<x_2$, siis $ax^2+bx+c>0$ piirkonnas $x_1<x<x_2$ ja $ax^2+bx+c<0$ piirkondades $x<x_1$ ja $x>x_2$;

e) kui $a<0$ ja nullkohtadeks on x_1 ja x_2, kusjuures $x_1=x_2=x_0$, siis $ax^2+bx+c<0$ kõikjal, välja arvatud punkt, kus $x=x_0$; positiivsuspiirkond sel juhul puudub;

f) kui $a<0$ ja nullkohad puuduvad, siis $ax^2+bx+c<0$ kõigi x väärtuste korral; positiivsuspiirkond sel juhul puudub.

7. a) Kui $a>0$ ja $x\to\infty$, siis $(ax^2+bx+c)\to\infty$;
kui $a>0$ ja $x\to-\infty$, siis $(ax^2+bx+c)\to\infty$.

b) Kui $a<0$ ja $x\to\infty$, siis $(ax^2+bx+c)\to-\infty$;
kui $a<0$ ja $x\to-\infty$, siis $(ax^2+bx+c)\to-\infty$.

Küsimusi ja ülesandeid.

188. Missugust funktsiooni nimetatakse ruutfunktsiooniks?

189. Missuguseid funktsiooni graafiku punkte nimetatakse maksimumpunktideks, miinimumpunktideks, ekstreemumpunktideks?

190. Missuguseid argumendi väärtusi nimetatakse funktsiooni maksimumkohaks, miinimumkohaks, ekstreemumkohaks?

191. Kuidas tehakse kindlaks, kas parabooli haripunkt on maksimumpunktiks või miinimumpunktiks?

192. Uuri funktsioone ja esita tulemused tabelis.

a) $2x^2-5x+3$
b) $-3x^2+3$
c) $x^2-24x+144$
d) $0{,}2x^2+2{,}6x$
e) $x(2x+3)+1$
f) $(x-3)(x-1)-15$
g) $2x^2-13x+15$
h) $-3x^2-8$

Skitseeri uurimistulemuste põhjal ka vastavad graafikud.

Märkus. Ülesannete 193 kuni 197 lahendamiseks koosta võrrand!

193. Ristkülikukujulise muruplatsi mõõtmed on 20 m ja 36 m. Selle ümber rajatakse ühelaiune lillepeenar, mille pindala on 12% muruplatsi pindalast. Kui lai on rajatav lillepeenar?

194. Koolipeoks müüdi kahesuguse hinnaga pileteid, kokku 400 piletit. Õpilaspilet oli 20 kopikat odavam täiskasvanu piletist. Õpilaspiletite müügist laekus 60 rubla ja muude piletite müügist 40 rubla. Kui kallid olid piletid?

195. Kui kuubi üht mõõdet vähendati 2 cm võrra, teist 3 cm võrra, kolmandat aga suurendati 4 cm võrra, siis vähenes ruumala 216 cm^3 võrra. Leida kuubi serva pikkus.

196. Kolhoosikeskusest raudteejaama on maanteed mööda 24 km, metsavaheteed mööda aga 15 km. Rong väljub kell 14.38. Autobuss ja hobusõiduk asuvad rongileminejatega teele vastavalt kell 13.50 ja 13.20; autobuss sõidab mööda maanteed, hobusõiduk mööda metsavaheteed. Autobuss sõidab tunnis 28 km rohkem kui hobusõiduk ja jõuab jaama 9 minutit varem kui hobusõiduk. Kas kõik jõudsid rongile?

197. Raudteejaama veetorni paak täitub peapumba kaudu 3,5 tunni võrra lühema ajaga kui tagavarapumba kaudu. Mõlema pumba töötades täitub paak 6 tunni jooksul. Leia aeg, mis on tarvilik paagi täitmiseks peapumba kaudu.

198. Missuguste ruutfunktsioonide nullkohtade leidmisele taandusid ülesanded 193—198? Kas ühe ja sama ülesande lahendamine võib taanduda erinevate funktsioonide nullkohtade leidmisele? Too näiteid.

§ 28. ASTMEFUNKTSIOONI UURIMINE.

Tunneme astmefunktsiooni $y=x^n$ astendaja n järgmistel väärtustel: a) $n=1;\ 2;\ 3$; b) $n=-1;\ -2;\ -3$; c) $n=\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}$.

Joonistel 37, 38, ja 39 on esitatud nende funktsioonide graafikud.

Uurime funktsiooni $y=x^{-3}$ (joon. 38).

1. See funktsioon ei ole määratud, kui $x=0$. Tema määramispiirkonnaks on seega: $-\infty<x<0$ ja $0<x<\infty$.

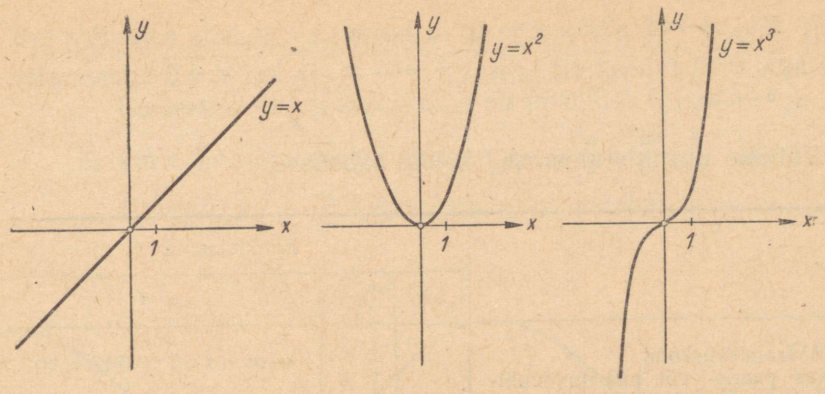
2. Asendades x $(-x)$-ga, saame $(-x)^{-3}=-x^{-3}$. Seega vaadeldav funktsioon on paaritu funktsioon. Graafik on tsentraalsümmeetriline, kusjuures sümmeetria keskpunktiks on koordinaatide alguspunkt.

3. Sellel funktsioonil ei ole maksimum- ega miinimumpunkti.

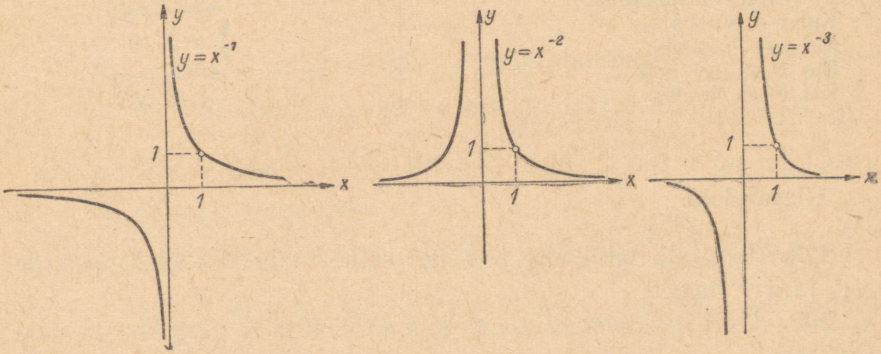
4. Vaadeldav funktsioon kahaneb nii vahemikus $-\infty<x<0$ kui ka vahemikus $0<x<\infty$.

5. Funktsiooni graafik ei lõika x-telge, sest ei leidu niisugust x väärtust, mille puhul kehtiks võrdus $\frac{1}{x^3}=0$.

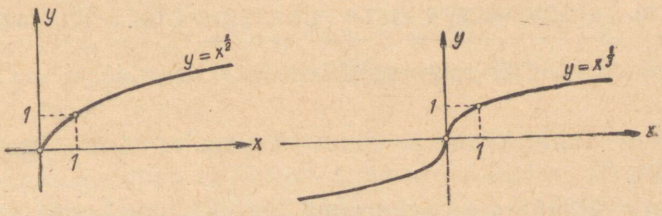
6. Vahemikus $-\infty<x<0$ on funktsiooni väärtused negatiivsed, sest negatiivse arvu kuup on negatiivne, ja vahemikus $0<x<\infty$ positiivsed, sest positiivse arvu kuup on positiivne.



Joon. 37.



Joon. 38.



Joon. 39.

7. Kui $x \to \infty$, siis $x^{-3} \to 0$, ja kui $x \to -\infty$, siis samuti $x \to 0$. Kui aga $x \to 0$ (vasakult), siis $x^{-3} \to -\infty$, ja kui $x \to 0$ (paremalt), siis $x^{-3} \to \infty$.

Võtame uurimistulemused kokku tabelisse.

	Funktsioonid		
	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}
1. Määramispiirkond			$-\infty < x < 0$ ja $0 < x < \infty$
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon			paaritu
3. a) Maksimumpunkt			puudub
b) Miinimumpunkt			puudub
4. a) Kasvamispiirkond			puudub
b) Kahanemispiirkond			$-\infty < x < 0$ ja $0 < x < \infty$
5. Nullkohad			puudub
6. a) Positiivsuspiirkond			$0 < x < \infty$
b) Negatiivsuspiirkond			$-\infty < x < 0$
7. Kui $x \to \infty$, siis Kui $x \to -\infty$, siis			$x^{-3} \to 0$
Kui $x \to 0$ (v), siis			$x^{-3} \to -\infty$
Kui $x \to 0$ (p), siis			$x^{-3} \to \infty$

Ülesandeid.

199. Joonesta vihikusse ja täida eelnev tabel ka funktsioonide x^{-1} ja x^{-2} osas.

200. Uuri funktsioone $y = x^n$, kus $n = 1$, 2 ja 3, ning koosta vastav tabel.

201. Uuri funktsioone $y = x^n$, kus $n = \frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$, ning koosta vastav tabel.

§ 29. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE UURIMINE.

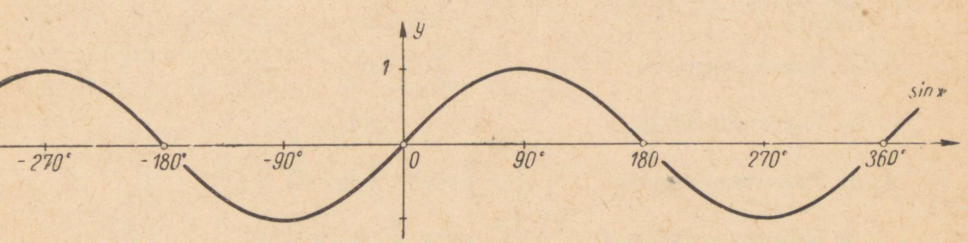
Oleme tuttavad trigonomeetriliste funktsioonidega: $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$.

Uurime funktsiooni $y = \sin x$, tuginedes tema graafikule (joon. 40).

1. $\sin x$ on määratud argumendi iga väärtuse korral.
2. $\sin x$ on paaritu funktsioon (§ 17).

3. a) $\sin x$ maksimumpunktideks on $x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}$ jne. Üldiselt, $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, kus n on mistahes täisarv.

b) $\sin x$ miinimumpunktideks on $x = -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}$ jne. Üldiselt, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, kus n on mistahes täisarv.



Joon. 40.

4. a) Vastavalt maksimum- ja miinimumpunktide asukohtadele on $\sin x$ kasvav vahemikkudes: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ jne. Üldiselt, $\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ kus n on mistahes täisarv (joon. 40).

b) Kahanemispiirkondadeks on vahemikud: $\left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ jne. Üldiselt, $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)$, kus n on mistahes täisarv.

5. Nullkohtadeks on $x = -\pi$, 0, π, 2π jne. Üldiselt, $x = n\pi$, kus n on mistahes täisarv.

6. a) $\sin x$ on positiivne vahemikkudes: $(-2\pi, -\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ jne. Üldiselt, $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, kus n on mistahes täisarv.

b) $\sin x$ on negatiivne vahemikkudes $(-\pi, 0)$, $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$ jne. Üldiselt, $((2n-1)\pi, 2n\pi)$, kus n on mistahes täisarv.

7. Kui x kasvab tõkestamatult kas positiivses või negatiivses suunas, siis $\sin x$ ei lähene mingile kindlale väärtusele ega kasva ka tõkestamatult, vaid tema väärtused võnguvad -1 ja 1 vahel.

Kanname uurimistulemused tabelisse.

	Funktsioonid		
	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
1. Määramispiirkond	$-\infty < x < \infty$		
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon	paaritu		
3. a) Maksimumpunktid	$\frac{\pi}{2} + 2n\pi$		
b) Miinimumpunktid	$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$		
4. a) Kasvamispiirkonnad	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$		
b) Kahanemispiirkonnad	$\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)$		
5. Nullkohad	$n\pi$		
6. a) Positiivsuspiirkonnad	$(2n\pi, (2n+1)\pi)$		
b) Negatiivsuspiirkonnad	$((2n-1)\pi, 2n\pi)$		
7. Kui $x \to \infty$, siis	} võngub		
Kui $x \to -\infty$, siis			

Ülesandeid.

202. Uuri funktsioone $\cos x$ ja $\tan x$ ning esita tulemused tabelis (vt. joonised 16 ja 31).

203. Uuri funktsioone $\sin 2x$ ja $\cos \frac{x}{2}$ ning esita tulemused tabelis.

PÖÖRDFUNKTSIOON.

§ 30. PÖÖRDFUNKTSIOONI MÕISTE JA GRAAFIK.

1. Sirgega $y=x$ sümmeetriliste punktide koordinaadid.

Olgu koordinaatteljestikus antud punkt $A(a, b)$ ja temaga sirge $y=x$ suhtes sümmeetriline punkt B (joon. 41). Ülesandeks on näidata, et $B(b, a)$.

Tõestuseks paneme läbi punkti A sirge $x=a$, mis lõikab sirget $y=x$ punktis C. Teame, et lõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje punkti C sümmeetriliste punktidega A ja B, on võrdsed ja moodustavad teljega $y=x$ võrdsed nurgad, s. t. et

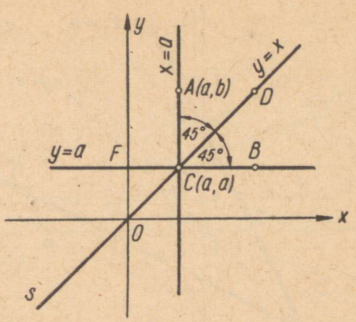
1° $AC=CB$.

Et aga $AC=b-a$ (põhjenda!), siis ka $CB=b-a$.

2° $\angle ACD=\angle DCB=45°$ (põhjenda!).

Järelikult on $\angle ACB$ täisnurk ja punkt B asetseb x-teljega paralleelsel sirgel $y=a$, s. t. et punkti B ordinaat on a. Et punkti B abstsiss on $FC+CB=a+(b-a)=b$, siis

$$B(b,\ a).$$



Joon. 41.

Seega,

antud punktiga sirge y=x suhtes sümmeetrilise punkti koordinaadid erinevad antud punkti koordinaatidest ainult järjekorra poolest.

Tõestame ka selle teoreemi pöördteoreemi:

kui antud kahe punkti koordinaadid erinevad ainult järjekorra poolest, siis on nad sümmeetrilised sirge y=x suhtes.

Et punkt $A(a,\ b)$ asetseb sirgel $x=a$ ja punkt $B(b,\ a)$ sirgel $y=a$ ning et need mõlemad sirged lõikuvad sirgega $y=x$ punktis $C(a,\ a)$, siis $AC=CB=b-a$. Kuna $\angle ACB$ on täisnurk, mille tipp on sirgel $y=x$ ja selle nurga haarad on paralleelsed telgedega, siis $\angle ACD=\angle DCB$ ja järelikult on punktid A ja B sümmeetrilised sirge $y=x$ suhtes.

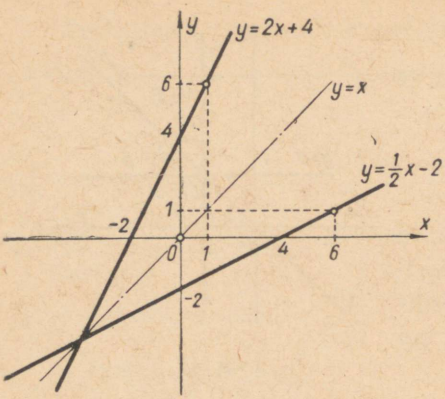
2. Pöördfunktsiooni mõiste ja graafik.

Olgu antud lineaarne funktsioon $y=2x+4$. Avaldades sellest võrdusest argumendi x, saame

$$x=\frac{1}{2}y-2.$$

Kui loeme selles võrduses y argumendiks, siis võrduse vasak pool on funktsioon, mille tähiseks on x. Nii moodustatud uut funktsiooni nimetatakse antud funktsiooni $y=2x+4$ **pöördfunktsiooniks.**

Üldiselt, kui on antud mingi funktsioon $y=f(x)$, siis aval-



Joon. 42.

dades siit x ja lugedes y argumendiks, saame antud funktsiooni pöördfunktsiooni, mille tähiseks on x, s. t. $x=g(y)$.

Et meil seni on x olnud ikka argumendi tähiseks ja y funktsiooni tähiseks, siis on otstarbekohane võtta saadud pöördfunktsiooni esitises samuti x argumendi tähiseks ja y funktsiooni tähiseks. Seega on funktsiooni $y=2x+4$ pöördfunktsiooniks $y=\frac{1}{2}x-2$ (joon. 42).

Võrdust $y=2x+4$ rahuldab arvupaar (1; 6). Sama arvupaar rahuldab ka võrdust $x=\frac{1}{2}y-2$. Kui viimases võrduses vahetame tähised x ja y, s. t. esitame selle võrduse kujul $y=\frac{1}{2}x-2$, siis seda võrdust rahuldab arvupaar (6; 1).

Rahuldagu võrdust $y=f(x)$ arvupaar $(a; b)$. Teisendame selle võrduse kujule $x=g(y)$ ja vahetame siis selles tähised x ja y. Saame võrduse $y=g(x)$, mida rahuldab arvupaar $(b; a)$.

Seega leidub igale punktile $(a; b)$ antud funktsiooni graafikul temale vastav punkt $(b; a)$ pöördfunktsiooni graafikul.

Et punkt $(a; b)$ on suvaliselt valitud punkt ja seega igale suvalisele punktile antud funktsiooni graafikul vastab temaga sirge $y=x$ suhtes sümmeetriline punkt $(b; a)$ pöördfunktsiooni graafikul, siis

funktsiooni graafik ja tema pöördfunktsiooni graafik on sümmeetrilised sirge y=x suhtes.

§ 31. RUUTFUNKTSIOONI PÖÖRDFUNKTSIOON.

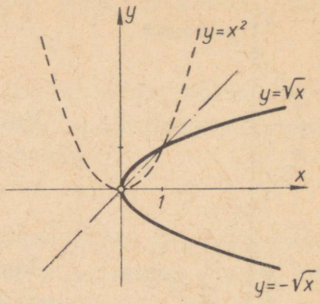
Vaatleme ruutfunktsiooni tema kõige lihtsamal kujul $y=x^2$. Kui siit avaldada x, saame kaks võrdust

$$x=\sqrt{y} \text{ ja } x=-\sqrt{y};$$

vahetades neis tähised, saame võrdused kujul

$$y=\sqrt{x} \text{ ja } y=-\sqrt{x},$$

millest kumbki osutub ruutfunktsiooni pöördfunktsiooniks.



Joon. 43.

Antud ruutfunktsiooni graafikuks on teatavasti parabool, mille haripunkt on koordinaatide alguspunktis ning mille sümmeetriateljeks on y-telg (joon. 43). Peegeldades seda graafikut sirge $y=x$ suhtes, saame parabooli, mille sümmeetriateljeks on x-telg. Selle parabooli ülemine osa on graafikuks funktsioonile $y=\sqrt{x}$ ja alumine osa on graafikuks funktsioonile $y=-\sqrt{x}$.

Niisiis, ruutfunktsioonile $y=x^2$ argumendi positiivsete väärtuste piirkonnas on pöördfunktsiooniks $y=\sqrt{x}$ ja argumendi negatiivsete väärtuste piirkonnas $y=-\sqrt{x}$.

Ülesanne.

204. Uuri funktsiooni $y=-\sqrt{x}$.

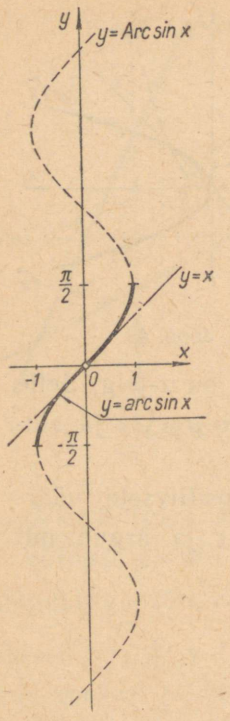
§ 32. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PÖÖRDFUNKTSIOONID.

1. Siinusfunktsiooni pöördfunktsioon (ehk arkussiinusfunktsioon).

Nurga leidmisel $\sin\alpha$ antud väärtuse järgi tutvusime ka arkussiinuse mõistega: kui $\sin\alpha=m$, siis väikseima absoluutväärtusega nurka α, mis seda võrdust rahuldab, tähistasime sümboliga arcsin m.

Matemaatikas on kasutusel veel sümbol Arcsin m, mis erineb eelmisest oma suure algustähe poolest ja millega tähistatakse kõigi nende nurkade hulka, mis võrdust $\sin\alpha=m$ rahuldab.

Olgu nüüd antud funktsioon $y=\sin x$. Kui vaatleme siin suurust x otsitavana, siis sellel võrrandil on lõpmata palju lahendeid, mille koguhulga võime üles kirjutada sümboliga Arcsin y.



Joon. 44.

Seega

$$x = \text{Arcsin } y.$$

Vahetades tähised, saame siinusfunktsiooni pöördfunktsioonina funktsiooni

$$y = \text{Arcsin } x.$$

Joonestame selle funktsiooni graafiku sümmeetrilisena siinusfunktsiooni graafikuga sirge $y = x$ suhtes (joon. 44). Jooniselt näeme, et igale x väärtusele piirkonnas $[-1; 1]$ vastab lõpmata palju funktsiooni väärtusi.

Lugedes funktsiooni $y = \text{Arcsin } x$ väärtused lõigust $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ argumendi x väärtustele vastavateks, saame funktsiooni, mille argumendi igale väärtusele piirkonnas $-1 \leqslant x \leqslant 1$ vastab üksainus funktsiooni väärtus. Joonisel 44 on selle funktsiooni graafik kujutatud pideva joonena.

Tema tähistamiseks kasutatakse sümbolit

$$y = \arcsin x.$$

2. Funktsiooni $y = \arcsin x$ uurimine.

1) Jooniselt 44 näeme, et funktsioon $y = \text{Arcsin } x$ graafik asub ribas -1 kuni 1. Seega on ka $y = \arcsin x$ määratud, kui $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
2) Et $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, siis on ta paaritu funktsioon.
3) Sellel funktsioonil on miinimumpunktiks $\left(-1; -\frac{\pi}{2}\right)$ ja maksimumpunktiks $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$.
4) Funktsioon $y = \arcsin x$ on kasvav kogu ulatuses.
5) $\arcsin x = 0$, kui $x = 0$.
6) $\arcsin x > 0$, kui $0 < x \leqslant 1$;
   $\arcsin x < 0$, kui $-1 \leqslant x < 0$.
7) Et argumendi väärtused on piiratud -1 ja 1-ga, siis pole mõtet uurida funktsiooni, kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$.

Joonesta vastav tabel ja esita uurimistulemused tabelis!

3. Koosinusfunktsiooni pöördfunktsioon (ehk arkuskoosinusfunktsioon).

Analoogiliselt arkussiinusfunktsiooni tuletamisega võime koosinusfunktsioonist $y=\cos x$ lähtudes saada pöördfunktsioonina arkuskoosinusfunktsiooni

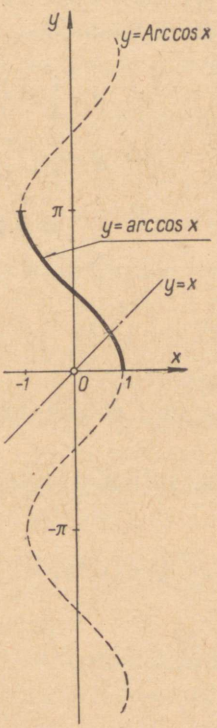
$$y=\operatorname{Arccos} x,$$

mille graafik (joon. 45) osutub koosinusfunktsiooni graafiku peegelduseks sirgest $y=x$. Sellest graafikust kasutatakse harilikult ainult seda osa, mis joonisel on esitatud pidevjoonega ja mis on funktsiooni

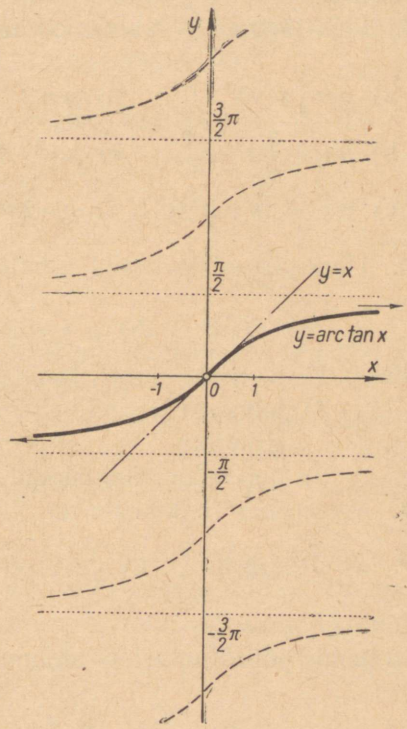
$$y=\arccos x$$

graafikuks.

Graafikule tuginedes uuri selle funktsiooni käitumist ja kanna tulemused tabelisse!



Joon. 45.



Joon. 46.

4. Tangensfunktsiooni pöördfunktsioon (ehk arkustangensfunktsioon).

Eestpoolt tuttavate mõttekäikudega saame tangensfunktsioonist $y=\tan x$ lähtudes tuletada pöördfunktsioonina arkustangensfunktsiooni

$$y=\operatorname{Arctan} x,$$

mille graafik (joon. 46) on tangensfunktsiooni graafiku peegelduseks sirgest $y=x$. Vaatleme jällegi ainult graafiku seda osa, mis joonisel on esitatud pidevjoonega. See on funktsiooni

$$y=\arctan x$$

graafik.

Uuri seda funktsiooni ja esita tulemused tabelis!

Ülesandeid.

205. Leia järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid.

a) $y=\frac{3}{4}x-5$ d) $y=3x^2$ g) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-2$

b) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{5}$ e) $y=-4x^2+6$ h) $y=\frac{3-x}{4+x}$

c) $y=35{,}2x+17{,}6$ f) $y=2x^2-3x$ i) $y=\frac{5}{x^2+1}$

206. Uuri järgmiste antud funktsioonide pöördfunktsioone.

a) $y=x^3$ b) $y=-2x^2$ c) $y=\sqrt[3]{x^2}$

Selleks: 1) joonesta antud funktsiooni graafik;
2) joonesta peegeldusteisenduse abil pöördfunktsiooni graafik;
3) uuri pöördfunktsiooni tema graafikule tuginedes.

207. Missugune funktsioon on

a) $y=\arcsin x$, b) $y=\arccos x$, c) $y=\arctan x$

pöördfunktsiooniks.

Leia nende pöördfunktsioonide määramispiirkond.

IV. EKSPONENTFUNKTSIOON JA LOGARITMFUNKTSIOON.

EKSPONENTFUNKTSIOON.

§ 33. EKSPONENTFUNKTSIOONI MÕISTE.

Ülesanne. Paberipoognast valmistatakse väikesi kaardikesi. Selleks murtakse poogen pooleks, saadud pooled omakorda pooleks jne. Kokku poolitati 8 korda. Mitu kaardikest saadakse? Mitu kaardikest saadakse pärast x-kordset poolitamist?

1. poolitamise tulemusena saadakse 2^1 kaarti;
2. „ „ „ 2^2 „
3. „ „ „ 2^3 „
. . . . . .
8. „ „ „ 2^8 „
x. „ „ „ 2^x „

Seega pärast 8-kordset poolitamist saadakse $2^8=256$ kaarti ja pärast x-kordset poolitamist 2^x kaarti.

Kui paberipoognaid on näiteks 5, siis saadakse pärast 8-kordset poolitamist $5 \cdot 2^8$ ja pärast x-kordset poolitamist $5 \cdot 2^x$ kaarti. Kui antud paberipoognaid on 10, saadakse kaarte vastavalt $10 \cdot 2^8$ ja $10 \cdot 2^x$.

Kui paberipoogen ja tema osad tükeldatakse iga kord kolmeks, siis pärast x-kordset kolmeks jaotamist saadakse 3^x kaarti. Kui tükeldusarv oleks 5, siis saadakse 5^x kaarti jne.

Ülesande lahendamisel saadud tulemused on erijuhud nn. eksponentfunktsioonist

$$k \cdot a^x,$$

kus x on argument, k ja a aga konstandid.

Funktsiooni $y=k\cdot a^x$, kus x on argument ning k ja a on konstandid ($a\neq 0$ ja $k\neq 0$), nimetatakse eksponentfunktsiooniks.

Konstandi a suhtes kehtestatakse sageli tingimused $a>0$ ja $a\neq 1$.

Tingimuse $a>0$ põhjustab asjaolu, et negatiivse a korral argumendi x teatud väärtuste puhul funktsioonil väärtus puudub: näiteks, kui $a=-4$ ja $x=\frac{1}{2}$, siis saame funktsiooni väärtuse arvutamisel avaldise

$$(-4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-4},$$

millel ei ole reaalset väärtust.

Kui eksponentfunktsiooni ka^x määramispiirkonnaks on järjestikused naturaalarvud alates 1-st, siis on tema väärtusi võimalik leida ka juhul, kui $a<0$. Seda asjaolu kasutamegi edaspidi geomeetrilise progressiooni defineerimisel.

Juhul, kui $a=1$, taandub eksponentfunktsioon lihtsalt konstandiks k, sest $1^x=1$ iga x korral.

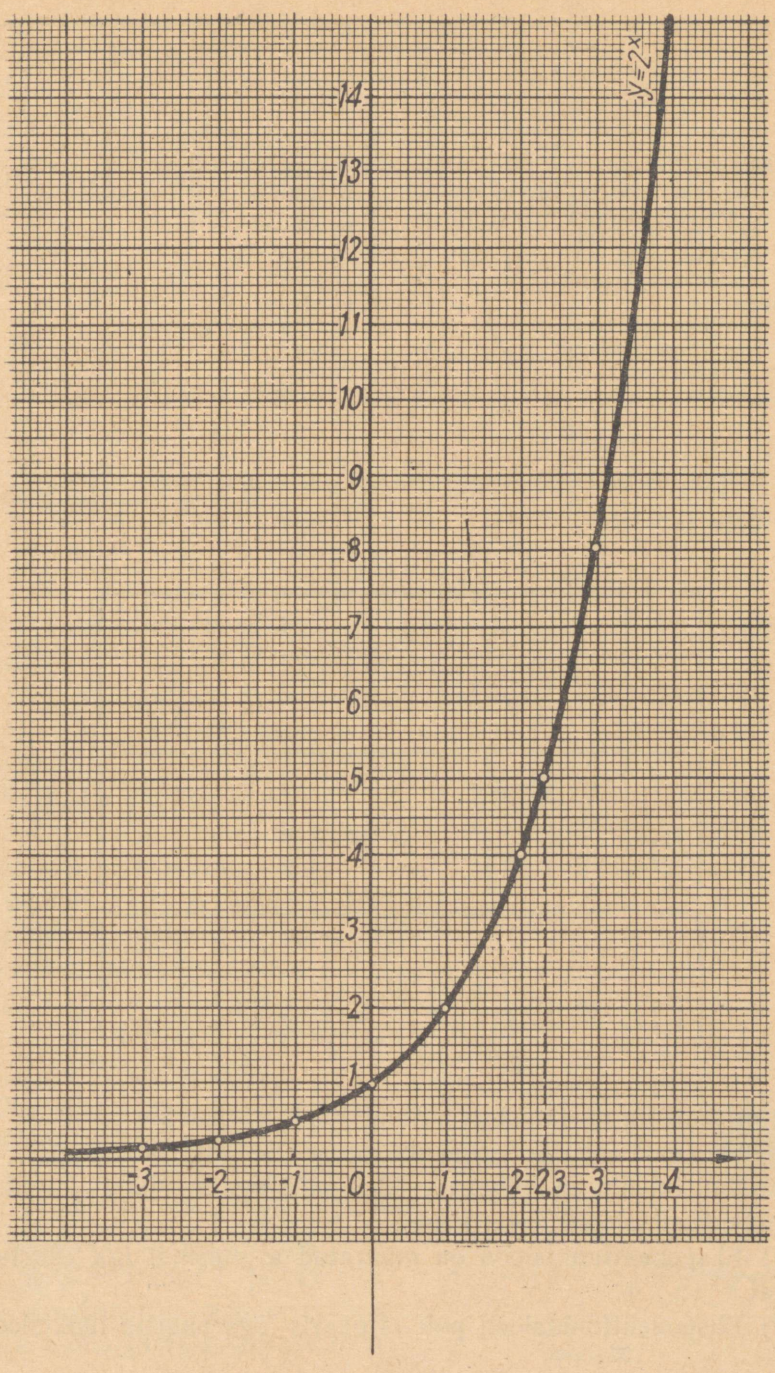
Eksponentfunktsiooni uurimisel piirdumegi funktsioonidega, kus nimetatud tingimused on täidetud, s. t. uurime funktsioone ka^x, kus $a>0$ ja $a\neq 1$.

§ 34. EKSPONENTFUNKTSIOONI UURIMINE.

Vaatleme eksponentfunktsiooni juhul, kui $k=1$ ja $a=2$. Vastava eksponentfunktsiooni $y=2^x$ graafiku joonestamiseks (joon. 47) koostame tabeli:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Saadud graafikule tuginedes uurime funktsiooni $y=2^x$ ja esitame tulemused tabelis.



Joon. 47

	Funktsioonid	
	2^x	3^x
1. Määramispiirkond	$-\infty < x < \infty$	
2. Paaris- või paaritu funktsioon	ei kumbki	
3. a) Maksimumpunktid	puuduvad	
b) Miinimumpunktid		
4. a) Kasvamispiirkond	$-\infty < x < \infty$	
b) Kahanemispiirkond	puudub	
5. Nullkohad	puuduvad	
6. a) Positiivsuspiirkond	$-\infty < x < \infty$	
b) Negatiivsuspiirkond	puudub	
7. Kui $x \to \infty$, siis	$2^x \to \infty$	
Kui $x \to -\infty$, siis	$2^x \to 0$	

Koostame nüüd funktsioonide $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ja $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ väärtuste tabelid.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

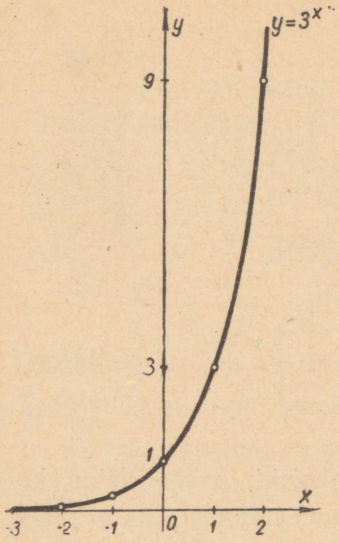
ning esitame ka vastavad graafikud (joon. 48, 49, 50).

Nende funktsioonide uurimistulemused paiguta tabelisse!

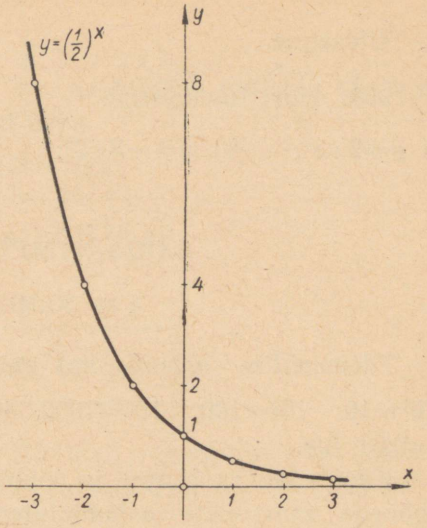
Uurimistulemused lubavad teha mõningaid üldisi järeldusi eksponentfunktsiooni $y=a^x$ kohta.

1) Eksponentfunktsioon on määratud argumendi iga väärtuse korral.

2) Eksponentfunktsioon pole ei paaris- ega paaritu funktsioon.



Joon. 48.



Joon. 49.

3) Eksponentfunktsioonil ei ole maksimum- ega miinimumpunkte.

4) Eksponentfunktsioonil ei ole nullkohti.

5) Eksponentfunktsioon on positiivne.

6) Kui $x=0$, siis $a^x=1$.

7) Kui $a>1$, siis eksponentfunktsioon on kasvav.

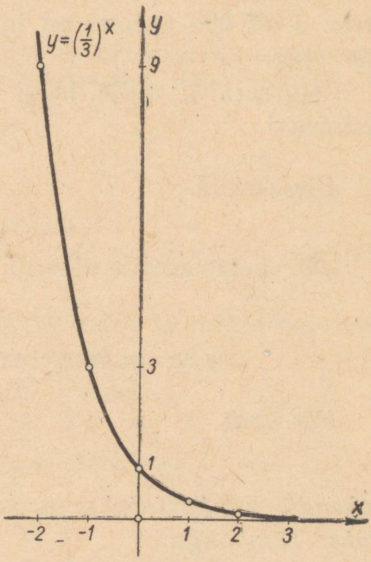
8) Kui $a>1$ ja $x\to-\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kahanevad tõkestamatult.

9) Kui $a>1$ ja $x\to+\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kasvavad tõkestamatult.

10) Kui $0<a<1$, siis eksponentfunktsioon on kahanev.

11) Kui $0<a<1$ ja $x\to-\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kasvavad tõkestamatult.

12) Kui $0<a<1$ ja $x\to+\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kahanevad tõkestamatult.



Joon. 50

Ülesanne.

208. Uuri funktsioone

a) $y=2\cdot 3^x$, b) $y=-3\cdot 2^x$, c) $y=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

LOGARITMFUNKTSIOON.

§ 35. KÜMNE ASTMED.

Täisarvulise astendajaga kümne astmed on järguühikud: $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$ jne.; $10^0=1$, $10^{-1}=0{,}1$, $10^{-2}=0{,}01$ jne.

Kasutades ruutjuure ja kuupjuure tabeleid, saame leida ka mõnede murruliste astendajatega kümne astmete ligikaudseid väärtusi.

Näiteks: $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3{,}162$,

$10^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{10^2}=4{,}642$.

Mõnikord on otstarbekas järguühikuid kirjutada kümne astmetena: 1 000 000 asemel on lihtsam kirjutada 10^6; 0,00001 asemel 10^{-5} jne.

Leia eeskiri, mille järgi saab järguühikut kirjutada kümne astmena!

Ülesandeid.

209. Leia tabelite abil $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{3}{4}}$, $10^{-\frac{1}{2}}$, $10^{-\frac{3}{2}}$, $10^{\frac{1}{3}}$, $10^{-\frac{4}{3}}$.

§ 36. KÜMNENDLOGARITMI DEFINITSIOON.

Võrrandi

$$10^x=a$$

lahendit x nimetatakse arvu a **kümnendlogaritmiks** *ja tähistatakse sümboliga*

$$\log a.$$

Seega,

arvu kümnendlogaritm on astendaja, millega kümmet astendades saame antud arvu.

Näiteid. $\log 100 = 2$, sest $10^2 = 100$;
$\log 0{,}1 = -1$, sest $10^{-1} = 0{,}1$;
$\log 2 = 0{,}3010$, sest $10^{0{,}3010} = 2$.[1]

Üldiselt,

$$\log a = b, \text{ kui } 10^b = a$$

Et arvu a kümnendlogaritm (lühidalt $\log a$) tähendab astendajat, millega kümmet astendades saame arvu a, siis peab kehtima samasus

$$10^{\log a} = a$$

Näiteid.

$10^{\log 100} = 100$;
$10^{\log 0{,}1} = 0{,}1$;
$10^{\log 2} = 2$ jne.

Märkus. Negatiivsetel arvudel ja arvul 0 puudub kümnendlogaritm, sest ei ole olemas arvu, millega kümmet astendades saaksime negatiivse arvu või arvu null.

Ülesandeid.

210. Leia järgmised kümnendlogaritmid:
$\log 10\,000$, $\log 1000$, $\log 10$, $\log 1$, $\log 0{,}1$, $\log 0{,}01$, $\log 0{,}001$.

211. Sõnasta eeskiri, mille järgi saab leida kümnendlogaritmi järguühikutest.

212. Kasutades samasust $10^{\log a} = a$, arvuta:
$10^{\log 2}$, $10^{\log 7}$, $10^{\log 1}$, $10^{\log 2{,}5}$.

213. Kirjuta järgmised arvud kümne astmetena:
3, 5, $0{,}7$, b, x, ab, $\frac{a}{b}$.

[1] Kuigi siin ei kehti täpne võrdus, on kokku lepitud kasutada arvu logaritmi üleskirjutamisel võrdusmärki.

214. Teisendades antud astmed astmete korrutiseks, leia:
$10^{\log 2 + \log 3}$, $10^{\log 4 + \log 3}$, $10^{\log 5 + \log 2}$,
$10^{\log 3 + \log 5 + \log 2}$, $10^{1 + \log 3}$.

215. Teisendades antud astmed astmete jagatiseks, leia:
$10^{\log 6 - \log 2}$, $10^{\log 12 - \log 4}$, $10^{\log 8 - \log 2 - \log 2}$,
$10^{2 - \log 5}$, $10^{\log 8 - \log 2 + \log 2}$.

216. Teisendades antud astmed astme astmeks, leia:

$$10^{2 \log 5}, \quad 10^{3 \log 3}, \quad 10^{-2 \log 4}, \quad 10^{\frac{1}{2} \log 4}.$$

§ 37. LOGARITMI DEFINITSIOON.

On antud eksponentfunktsioon a^x, kus $a>0$ ja $a\neq 1$, ning positiivne arv b. Ülesandeks on leida argumendi x väärtus, mille puhul funktsiooni väärtuseks on b, s. t. tuleb leida lahend võrrandile

$$a^x = b.$$

Selle võrrandi lahendit x nimetatakse arvu b logaritmiks alusel a ja tähistatakse sümboliga

$$\log_a b.$$

Seega,

antud arvu logaritmiks alusel a nimetatakse astendajat, millega alust a astendades saame antud arvu.

Näiteid.

1. $\log_5 25 = 2$, sest $5^2 = 25$.
2. $\log_3 \frac{1}{27} = -3$, sest $3^{-3} = \frac{1}{27}$.
3. $\log_9 3 = \frac{1}{2}$, sest $9 = 3$.

Üldiselt,

$$\boxed{\log_a b = c, \text{ kui } a^c = b}$$

Et arvu logaritm alusel a tähendab astendajat, millega arvu a astendades saame b, siis peab kehtima samasus

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Näiteid.

1. $2^{\log_2 7}=7$.
2. $5^{\log_5 \frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.
3. $8^{\log_2 3}=(2^3)^{\log_2 3}=(2^{\log_2 3})^3=3^3=27$.
4. $5^{\log_5 4+\log_5 3}=5^{\log_5 4}\cdot 5^{\log_5 3}=4\cdot 3=12$.
5. $a^{\log_a 8-\log_a 2}=a^{\log_a 8}:a^{\log_a 2}=8:2=4$.

Ülesandeid.

217. Leia aste ja avalda saadud võrdusest astendaja.

a) 4^3 d) $(-3)^3$ g) $4^{\frac{1}{2}}$

b) 2^5 e) $(-2)^6$ h) $27^{\frac{1}{3}}$

c) 5^4 f) $(-4)^3$ i) $16^{\frac{1}{4}}$

218. Leia:

a) $\log_5 25$ e) $\log_2 16$

b) $\log_2 \frac{1}{8}$ f) $\log_3 \frac{1}{81}$

c) $\log_9 81$ g) $\log_6 36$

d) $\log_{11} 121$ h) $\log_5 125$

219. Leia:

a) $\log_7 49$ b) $\log_2 \frac{1}{32}$ c) $\log_6 216$ d) $\log_3 81$

e) $\log_5 625$ f) $\log_{25} 625$ g) $\log_9 729$ h) $\log_4 64$

220. Leia x.

a) $\log_3 \frac{1}{9}=x$ d) $\log_6 \frac{1}{216}=x$

b) $\log_4 \frac{1}{64}=x$ e) $\log_7 \frac{1}{343}=x$

c) $\log_5 \frac{1}{625}=x$ f) $\log_8 \frac{1}{512}=x$

221. Leia x.

a) $\log_5 \sqrt{5}=x$ d) $\log_4 1=x$

b) $\log_4 \sqrt[3]{4}=x$ e) $\log_8 1=x$

c) $\log_6 6=x$ f) $\log_{75} 1=x$

222. Leia x, kui

a) $\log_2 x=5$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 4=x$; c) $\log_x 2=2$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} x=-3$; e) $\log_2 \frac{1}{8}=x$; f) $\log_x 0{,}125=-2$;

g) $\log_2 x=4$; h) $\log_{0{,}1} 10=x$; i) $\log_x 8=\frac{3}{4}$.

223. Leia:

a) $2^{\log_2 8}$; b) $3^{\log_3 9}$; c) $36^{\log_6 2}$; d) $25^{\log_5 3}$;
e) $81^{\log_9 7}$.

224. Kirjuta arv 5 arvude 3, 7 ja 2 astmena.

225. Kirjuta arvud 11, 8, 7, u, v arvu a astmena.

226. Lihtsusta.

a) $3^{\log_3 5+\log_3 7}$
b) $5^{\log_5 12-\log_5 4}$
c) $a^{\log_a 2+\log_a 3+\log_a 4}$
d) $2^{\log_2 18-\log_2 3-\log_2 2}$
e) $2^{2+\log_2 5}$
f) $4^{-\log_2 6}$

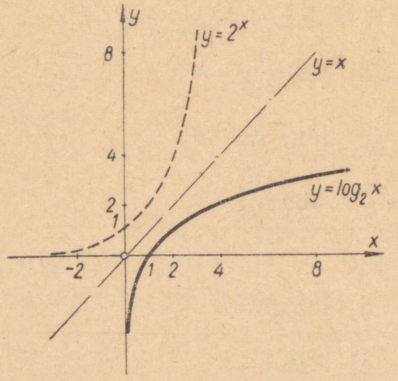
§ 38. LOGARITMFUNKTSIOONI MÕISTE JA GRAAFIK.

1. Võrdusest $y=a^x$ saame x avaldada järgmiselt:

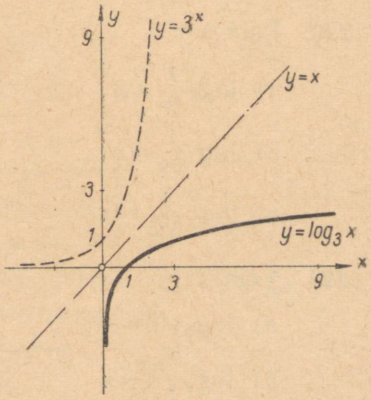
$$\log_a y=x.$$

Vaatleme siin y argumendina ja x funktsioonina. Vahetades tähised, saame:

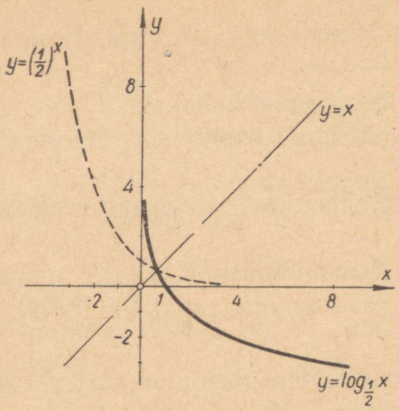
$$y=\log_a x.$$



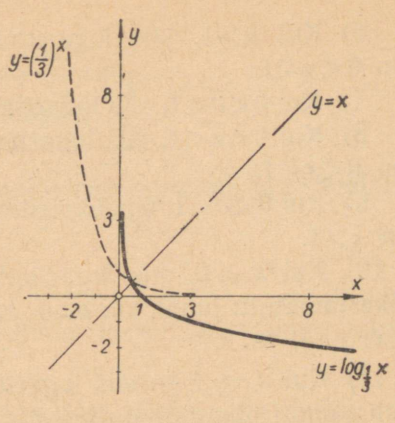
Joon. 51



Joon. 52



Joon. 53.



Joon. 54.

Seda funktsiooni nimetatakse logaritmfunktsiooniks.

Niisiis,

eksponentfunktsiooni $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) pöördfunktsiooni $y=\log_a x$ nimetatakse logaritmfunktsiooniks.

2. Lähtudes eksponentfunktsioonide

$$2^x,\ 3^x,\ \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ ja } \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

graafikuist (joon. 47—50), on hõlbus saada nende pöördfunktsioonide ehk vastavate logaritmfunktsioonide

$$y=\log_2 x,\ y=\log_3 x,\ y=\log_{\frac{1}{2}} x \text{ ja } y=\log_{\frac{1}{3}} x$$

graafikud (joon. 51—54), kasutades peegeldamist sirgest $y=x$.

Uuri neid funktsioone ja esita tulemused tabelis!

Logaritmfunktsiooni omadused võtame lõpuks kokku järgmiselt.

1) Logaritmfunktsioon on määratud argumendi kõigi positiivsete väärtuste korral.

2) Logaritmfunktsioonil ei ole maksimum- ega miinimumpunkte.

3) $\log_a x=0$, kui $x=1$.

4) Kui $a>1$, siis logaritmfunktsioon on kasvav.

5) Kui $a>1$, siis logaritmfunktsiooni positiivsuspiirkonnaks on $x>1$.

6) Kui $a>1$, siis logaritmfunktsiooni negatiivsuspiirkonnaks on $0<x<1$.

7) Kui $0<a<1$, siis logaritmfunktsioon on kahanev.

8) Kui $0<a<1$, siis logaritmfunktsiooni positiivsuspiirkonnaks on $0<x<1$.

9) Kui $0<a<1$, siis logaritmfunktsiooni negatiivsuspiirkonnaks on $x>1$.

10) Kui $x \to 0$, siis logaritmfunktsiooni absoluutväärtus kasvab tõkestamatult: juhul, kui $a>1$, $f(x) \to -\infty$ ning juhul, kui $0<a<1$, $f(x) \to +\infty$.

11) Kui $x \to +\infty$, siis logaritmfunktsiooni absoluutväärtus kasvab samuti tõkestamatult: juhul, kui $a>1$, $f(x) \to +\infty$ ning juhul, kui $0<a<1$, $f(x) \to -\infty$.

§ 39. KORRUTISE, JAGATISE, ASTME JA JUURE LOGARITM.

1. Korrutise logaritm.

Ülesandeks on avaldada korrutise logaritm tegurite logaritmide kaudu. Selleks kirjutame arvud u ja v arvu a astmena:

$$a^{\log_a u} = u,$$

$$a^{\log_a v} = v.$$

Siit saame, et

$$uv = a^{\log_a u} \cdot a^{\log_a v} = a^{\log_a u + \log_a v}.$$

Seega,

$$\log_a uv = \log_a a^{\log_a u + \log_a v} = \log_a u + \log_a v.$$

Niisiis,

$$\boxed{\log_a uv = \log_a u + \log_a v}$$

Korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga.

2. Astme logaritm.

Et

$$u^n = (a^{\log_a u})^n = a^{n \log_a u},$$

siis

$$\log_a u^n = \log_a a^{n \log_a u} = n \log_a u.$$

Seega,

$$\log_a u^n = n \log_a u$$

Astme logaritm võrdub astme aluse logaritmi ja astendaja korrutisega.

3. Jagatise logaritm.

Et $\log_a \frac{u}{v} = \log_a (uv^{-1})$, siis kasutades korrutise ja astme logaritmi, saame:

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u + \log_a v^{-1} = \log_a u - \log_a v.$$

Niisiis,

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

Jagatise logaritm võrdub jagatava logaritmi ja jagaja logaritmi vahega.

4. Juure logaritm.

Et juurt saab avaldada murrulise astendajaga astmena ja astme logaritmi oskame juba leida, siis

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \log_a u^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a u = \frac{\log_a u}{n}.$$

Seega,

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$$

Juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

Teades, kuidas leitakse korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmi, saame lahendada mitmesuguseid ülesandeid.

N ä i t e i d. Teades, et $\log_2 8 = 3$ ja $\log_2 4 = 2$, leia $\log_2 32$, $\log_2 2$, $\log_2 64$ ja $\log_2 \sqrt{8}$.

a) $\log_2 32 = \log_2 (8 \cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$,

b) $\log_2 2 = \log_2 (8 \cdot 4) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$,

c) $\log_2 64 = \log_2 4^3 = 3 \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$,

d) $\log_2 \sqrt{8} = \frac{1}{2} \log_2 8 = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5$.

Ülesandeid.

227. Teades, et $\log_a b = 6$ ja $\log_a c = 4$, arvuta:

1) $\log_a (bc)$,
2) $\log_a \frac{b}{c}$,
3) $\log_a c^2$,
4) $\log_a \sqrt[3]{b}$,
5) $\log_a b^{-2}$,
6) $\log_a \sqrt{c^3}$,
7) $\log_a (a \cdot b)$,
8) $\log_a \frac{a^2}{c}$.

228. Missuguse avaldise logaritm on:

1) $\log_a s + \log_a t$,
2) $\log_a r - \log_a m$,
3) $1 + \log_a b$,
4) $\log_a b - 2$,
5) $2 \log_a k$,
6) $\frac{1}{3} \log_a d$,
7) $\frac{2}{3} \log_a b$,
8) $-\log_a c^2$?

§ 40. AVALDISE LOGARITM.

Kümnendlogaritmiks nimetatakse logaritmi alusel 10.

Et praktikas kasutatakse peamiselt kümnendlogaritme, siis ongi kokku lepitud, et alus 10 jäetakse kirjutamata (vt. § 36). Seega tähendab $\log 100$ arvu 100 kümnendlogaritmi ja $\log b$ arvu b kümnendlogaritmi.

Rakendades teoreeme korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmi kohta, saame leida üksliikmete logaritme.

Näide 1. $\log \frac{ab}{c} = \log ab - \log c = \log a + \log b - \log c$.

Näide 2. $\log \frac{a\sqrt[3]{c}}{b^2 d} = \log a\sqrt[3]{c} - \log b^2 d = \log a + \log \sqrt[3]{c} -$

$$- (\log b^2 + \log d) = \log a + \frac{1}{3} \log c - (2 \log b + \log d) =$$

$$= \log a + \frac{1}{3} \log c - 2 \log b - \log d.$$

Murdavaldise logaritmi leidmine muutub lihtsamaks, kui murd-

avaldise esitame täisavaldisena, kasutades selleks negatiivseid astendajaid. Ka juuri on soovitav kirjutada murrulise astendajaga astmetena.

Ülesandeid.

229. Leia järgmiste avaldiste kümnendlogaritmid:

1) abc 2) a^2x 3) $\frac{2a}{b}$ 4) $\frac{0{,}7\,a^2}{b}$ 5) $\frac{a+b}{c^2}$ 6) $a\sqrt[3]{b^2}$ 7) $\sqrt{\frac{1}{xy}}$

8) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 9) $\frac{(a-b)^2}{c}$ 10) $\frac{(a+b)d}{(a-b)c}$ 11) $a\sqrt{b}$ 12) $\frac{a^2b}{c^4}$ 13) $\frac{d^2fc}{h\sqrt{g}}$

14) $\frac{10\sqrt{a^2-b^2}}{a^2b^2}$ 15) $\sqrt[5]{(e+f)\sqrt{h}}$ 16) $\sqrt{\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}}$ 17) $\frac{a^{-1}b^{\frac{1}{2}}}{c}$

18) $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{5}}}{c^{-1}d}$ 19) $\frac{\sqrt[5]{x\sqrt{y}}}{\frac{a+b}{c}}$

230. Teades, et $\log 2=0{,}3010$, $\log 3=0{,}4771$, $\log 5=0{,}6990$ ja $\log 7=0{,}8451$, arvuta:

1) $\log 14$; $\log 35$; $\log 1{,}4$; $\log 0{,}4$; $\log 25$.

2) $\log\frac{7}{5}$; $\log 125$; $\log\sqrt[3]{7}$; $\log 5^4$.

231. Kasutades ülesandes 230 antud arvude logaritme, arvuta:

1) $\log(2\cdot 3\cdot 7)$ 2) $\log\frac{5\cdot 3}{2}$ 3) $\log(3^2\cdot\sqrt{5})$

4) $\log\frac{5^3\cdot\sqrt[3]{7}}{3^3}$ 5) $\log\frac{1}{2^5\cdot\sqrt{3}}$

§ 41. KÜMNENDLOGARITMI OMADUSED.

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist (§ 39) ja teades, et $\log 2=0{,}3010$, saame arvutada $\log 20$; $\log 200$; $\log 2000$; $\log 0{,}2$; $\log 0{,}02$; $\log 0{,}002$ jne.

$\log 20=\log(10\cdot 2)=\log 10+\log 2=1+0{,}3010=1{,}3010$;

$\log 200=\log(100\cdot 2)=\log 100+\log 2=2+0{,}3010=$
$=2{,}3010$ jne.

$\log 0{,}2=\log(0{,}1\cdot 2)=\log 0{,}1+\log 2=-1+0{,}3010=$
$=-0{,}6990$.

$-0{,}6990 = -1 + 0{,}3010$ asemel aga kirjutatakse $\bar{1}{,}3010$ (loe: üks miinusega koma 3010).

Niisugust kümnendmurdu, mille täisosa on negatiivne, murdosa aga positiivne, nimetatakse **poolnegatiivseks arvuks.**

$$\log 0{,}02 = \log(0{,}01 \cdot 2) = \log 0{,}01 + \log 2 = -2 + 0{,}3010 = \bar{2}{,}3010.$$

Teades, et $\log 3{,}728 = 0{,}5714$, võime samuti leida, et

$\log 37{,}28 = 1{,}5714$;
$\log 372{,}8 = 2{,}5714$;
$\log 3728 = 3{,}5714$;
$\log 37280 = 4{,}5714$ jne.

$\log 0{,}3728 = \bar{1}{,}5714$;
$\log 0{,}03728 = \bar{2}{,}5714$;
$\log 0{,}003728 = \bar{3}{,}5714$ jne.

Esitatust selgub, et *arvu kümnendlogaritm on kümnendmurd, mille* **täisosa** *sõltub koma asukohast antud arvus ja alati positiivne* **murdosa** *sõltub arvu tüvest.*

Kümnendlogaritmi täisosa ja murdosa nimetatakse vastavalt ka tema **karakteristikuks** *ja* **mantissiks.**

Toodud näidete põhjal võime öelda, et

a) *arvust 1 suurema arvu kümnendlogaritmi täisosa on positiivne ja võrdub $(n-1)$-ga, kui arvul on n numbrit koma ees;*

b) *arvust 1 väiksema arvu kümnendlogaritmi täisosa on negatiivne ja selle absoluutväärtus võrdub nullide arvuga tüve ees (koma ees seisev null kaasa arvatud).*

Näiteks arvu 287,4 kümnendlogaritmi täisosa on 2, sest koma ees on kolm numbrit. Arvu 0,00047 kümnendlogaritmi täisosa on $\bar{4}$, sest tüve 47 ees seisab neli nulli.

Ülesandeid.

232. Määra järgmiste arvude kümnendlogaritmide täisosad:

1) 32,4; 300; 4,576; 6; 0,643; 0,0007; 1,008; 100.
2) 23 000 000; 0,0080; 0,001; 682 397; 0,00006602; 1,5788.

§ 42. TEHTED POOLNEGATIIVSETE ARVUDEGA.

Ühest väiksemate positiivsete arvude kümnendlogaritmid on poolnegatiivsed arvud. Niisuguseid arve saab kirjutada negatiivse täisarvu ja positiivse murdosa summana.

Näiteks:

$$\overline{2},7409 = -2 + 0,7409.$$

See summa on negatiivne. Poolnegatiivset arvu saab muuta negatiivseks, kui arvutame negatiivse täisosa ja positiivse murdosa summa.

Nii on

$$\overline{2},7409 = -2 + 0,7409 = -1,2591,$$
$$\overline{1},7880 = -1 + 0,7880 = -0,2120,$$
$$\overline{3},0336 = -3 + 0,0336 = -2,9664 \text{ jne.}$$

Kui tahame negatiivset arvu teisendada poolnegatiivseks, toimime nii:

$$-1,2591 = -1 - 0,2591 = (-1-1) + (-0,2591+1) =$$
$$= -2 + 0,7409 = \overline{2},7409.$$

Siit selgub, et negatiivse arvu teisendamisel poolnegatiivseks peame täisosaga liitma -1 ja murdosa asemele kirjutama tema täienduse üheni. Lühidalt kirjutame:

$$\overset{-1+1}{-1,2591} = \overline{2},7409,$$
$$\overset{-1+1}{-2,4240} = \overline{3},5760,$$
$$\overset{-1+1}{-0,6605} = \overline{1},3395 \text{ jne.}$$

Ülesandeid.

233. Teisenda alljärgnevad poolnegatiivsed arvud negatiivseiks:

1) $\overline{1},4462$; $\overline{2},0738$; $\overline{5},6804$; $\overline{1},2480$; $\overline{3},0073$.
2) $\overline{1},0008$; $\overline{1},6200$; $\overline{4},7000$; $\overline{2},2219$; $\overline{6},3040$.
3) $\overline{1},5999$; $\overline{2},9990$; $\overline{3},3001$; $\overline{4},0048$; $\overline{1},8548$.

234. Teisenda alljärgnevad negatiivsed arvud poolnegatiivseiks:

1) $-3,7082$; $-2,0563$; $-1,8455$; $-0,6639$; $-0,0470$.

2) $-0{,}5861$; $-2{,}0009$; $-4{,}9991$; $-0{,}2$; $-5{,}76$.
3) $-3{,}408$; $-4{,}4000$; $-0{,}02$; $-1{,}0001$; $-4{,}4739$.

*

Poolnegatiivseid arve saab liita ja lahutada nagu kümnendmurde, kirjutades need üksteise alla nii, et vastavad järgud oleksid kohakuti. Siinjuures ei tohi aga unustada, et täisosad on negatiivsed!

Näide 1.

$$\begin{array}{r} \overline{2},8647 \\ + \\ \overline{1},7438 \\ \hline \overline{2},6085. \end{array}$$

Täisosade liitmisel peame silmas, et kümnendike liitmisel saime 16 kümnendikku. Siit saame ühe positiivse ühelise, mille liidame antud täisosadega

$$1+(-2)+(-1)=-2.$$

Näide 2.

$$\begin{array}{r} \dot{\dot{\overline{1}}},7608 \\ - \\ \overline{2},9462 \\ \hline 0{,}8146 \end{array}$$

Täisosade lahutamisel peame silmas, et kümnendike lahutamiseks oli vähendatavas vaja üks üheline peenestada kümnendikeks (seda tähistab punkt vähendatava täisosa kohal). Selle tulemusena muutus vähendatava täisosa ühe võrra väiksemaks. Seega pärast kümnendike lahutamist on vähendatava täisosa -2 ja vahe täisosa on

$$-2-(-2)=0.$$

Näide 3.

$$\begin{array}{r} 2,\dot{7}\dot{6}48 \\ - \\ 4,4766 \\ \hline \overline{2},2882 \end{array}$$

Ülesandeid.

235. Soorita alljärgnevad tehted:

1) $\overline{1},7446+0,8367$
$\overline{1},5834+0,4293$
$2,6737-\overline{1},4636$
$0,6351-\overline{2},9442$

2) $\overline{4},6385-\overline{2},8856$
$\overline{1},9074+\overline{1},5229$
$2,1788-\overline{5},0669$
$\overline{3},4467-\overline{1},6262.$

3) $\overline{1},7735+\overline{2},6849+2,5327$
$4,3374+\overline{5},5228+\overline{1},5781+0,6117$
$\overline{3},0805+\overline{4},5901+5,3306+\overline{2},7717+0,4862$
$0,8840+\overline{8},6162+4,5287+\overline{5},5613+3,7494$

*

Poolnegatiivsete arvude korrutamisel ja jagamisel teisendame need üldiselt enne negatiivseteks, sooritame siis korrutamise või jagamise ja muudame tarbe korral saadud vastuse uuesti poolnegatiivseks.

Näiteid. 1) $1,2\cdot\overline{3},4675=1,2\cdot(-2,5325)=-3,0390=$
$=\overline{4},9610.$

2) $\overline{2},8896:2,4=-1,1104:2,4=-0,4627=$
$=\overline{1},5373.$

Erijuhtumeil, kui korrutaja või jagaja on naturaalarv, saab poolnegatiivseid arve korrutada ja jagada negatiivseks teisendamata.

Näide. $3\cdot\overline{4},7708=\overline{10},3124.$

Peame silmas, et $3\cdot(-4)=-12$ ja 2 meeles annab -10.

Kui negatiivne täisosa jagub jagajaga, saame poolnegatiivset arvu kohe jagada.

Näide. $\overline{6},4672:2=\overline{3},2336.$

Kui negatiivne täisosa ei jagu jagajaga, siis poolnegatiivse arvu kirjutame negatiivse täisosa ja positiivse murdosa summana. Seejärel täiendame täisosa negatiivse arvuni, mis jagub jagajaga. Positiivse murdosaga liidame aga selle täienduse vastandarvu, et summa ei muutuks, ja sooritame siis jagamise.

Näide. $\overline{7},6438 : 3 = (\overset{-2+2}{-7}+0,6438) : 3 =$

$= (-9+2,6438) : 3 =$

$= -3+0,8813 = \overline{3},8813.$

Kasutades lühemat kirjutusviisi, saame viimast ülesannet lahendada ka nii:

$$\overset{-2+2}{\overline{7}},6438 : 3 = 3,8813,$$

kusjuures positiivne täiendus tuleb mõelda murdosa ette.

Ülesandeid.

236. Soorita alljärgnevad tehted:

1) $2 \cdot \overline{2},1323$ 2) $\overline{1},5472 : 2$ 3) $\overline{2},7567 : 6$

$3 \cdot \overline{3},8813$ $\overline{8},4666 : 2$ $\overline{14},6735 : 5$

$4 \cdot \overline{1},7633$ $\overline{4},0833 : 3$ $\overline{5},1852 : 4$

$7 \cdot \overline{1},8043$ $\overline{9},4572 : 4$ $\overline{3},0051 : 3$

4) $\overline{1},4766 : 0,2$; $2,5 \cdot \overline{1},5825$; $7,5 \cdot \overline{3},7604$

§ 43. LOGARITMIDE TABELID.

Eespool nägime, et kui

$x = 100$, siis $\log x = 2$;

$x = 1000$, siis $\log x = 3$;

$x = 2$, siis $\log x = 0,3010$ jne.

Siit näeme, et kui avaldises $\log x$ vaadelda x muutuva suurusena, siis igale x väärtusele vastab avaldise $\log x$ kindel väärtus. See aga tähendab, et avaldis $\log x$ on muutuva suuruse x funktsioon. Valemi kujul kirjutatakse seda järgmiselt:

$$y = \log x,$$

kus y on funktsioon ja x argument. Sellist funktsiooni nimetasime logaritmfunktsiooniks.

Kuna kümnendlogaritme kasutatakse laialdaselt arvutustöös, siis töö lihtsustamiseks on koostatud kümnendlogaritmide tabelid. Kuna kümnendlogaritmi täisosa on leitav peast, siis on tabelisse kantud ainult logaritmide murdosad. Vastavalt sellele, mitme kohaga on murdosa antud, nimetatakse logaritme ja ka tabeleid

kolme-, nelja- jne. kohalisteks. Tabeli valik sõltub arvutustöö täpsusest. Et neljakohalised tabelid on piisavad enamiku igapäevases elus esinevate ülesannete lahendamiseks, siis vaatleme ainult neid.

Koolis kasutatava V. Bradise logaritmide tabeli abil saab leida ülimalt nelja tüvenumbriga arvu kümnendlogaritmi murdosa. Kui arvul on rohkem tüvenumbreid, siis ümardame selle neljale tüvenumbrile.

Näiteks: $27{,}4683 \approx 27{,}47$.
$397\,732 \approx 397\,700$ jne.

Selgitame arvu kümnendlogaritmi murdosa leidmist näitevaral.

Väljavõte neljakohaliste logaritmide tabelist.

N	0	1	2	3	4	...	9	1	2	3	4	...	9
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
20	3010	3032	3054	3075	3096	...	3201	2	4	6	8	...	19
21	3222	3243	3263	3248	3304	...	3404	2	4	6	8	...	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	...	3598	2	4	6	8	...	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	...	3784	2	4	6	7	...	17
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Paranduste tabel

Tabeli esimesse, N-ga tähistatud veergu on trükitud arvu esimene ja teine tüvenumber, esimesse ritta aga kolmas tüvenumber. Sisenedes arvu kolme esimese tüvenumbri järgi tabelisse, leiame tabeli seest arvu kümnendlogaritmi murdosa.

Näiteks arvu 214 logaritmi murdosa on 3304,
„ 2,32 „ „ „ 3655,
„ 20,4 „ „ „ 3096,
„ 20,9 „ „ „ 3201,
„ 22 „ „ „ 3424,
„ 2 „ „ „ 3010 jne.

Kui arvul on neli tüvenumbrit, siis kasutame arvu logaritmi murdosa leidmiseks paranduste tabelit.

Algul leiame logaritmi murdosa arvu esimese kolme tüvenumbri järgi, siis siirdume samal real paranduste tabelisse, kus on trükitud neljandale tüvenumbrile vastav parandus.

Näiteks arvu 2234 puhul saame 223 järgi murdosa 3483 ja paranduste tabelis 4 järgi paranduse 8. Seega arvu 2234 logaritmi murdosa on 3483+8=3491. Samuti leiame, et

arvu 2321 logaritmi murdosa on 3657,
„ 2,002 „ „ „ 3014,
„ 0,2199 „ „ „ 3422,
„ 20,43 „ „ „ 3102,
„ 20,94 „ „ „ 3209 jne.

Arvu kümnendlogaritmi määramisel leiame tabelite abil arvu kümnendlogaritmi murdosa, kümnendlogaritmi täisosa aga leiame peast. Sel teel saame näiteks, et

$$\log 2234 = 3{,}3491,$$
$$\log 2{,}002 = 0{,}3014,$$
$$\log 0{,}02303 = \bar{2}{,}3623,$$
$$\log 209{,}1 = 2{,}3203.$$

Ülesandeid.

237. Leia alljärgnevate arvude kümnendlogaritmid.
1) 2,55; 67,3; 52; 40; 0,4; 0,0308; 0,01.
2) 28,62; 0,5323; 2,646; 705 200; 0,004508; 1,006.
3) 1,5848; 17 523; 832 960; 60 953; 0,0079527; 1,0008.

§ 44. ARVU LEIDMINE TEMA KÜMNENDLOGARITMI JÄRGI.

1. Arvu kümnendlogaritmi leidmise pöördtehteks on arvu leidmine tema kümnendlogaritmi järgi, mida nimetatakse *antilogaritmi leidmiseks*.

Võrrandi

$$\log x = a$$

lahendamine nõuab kümne astendamist arvuga a. Selleks võime kasutada logaritmide tabelit, kusjuures antud kümnendlogaritmi a murdosa otsime tabeli seest ja kui see on leitud, siis saame x tüvenumbrid lugeda tabeli äärtelt. Koma asukoha aga määrame kümnendlogaritmi täisosa järgi.

Leiame näiteks x, kui $\log x = 1{,}3464$.

Leidnud tabeli seest kümnendlogaritmi murdosa 3464, saame tabeli äärtelt lugeda x tüvenumbrid 222. Koma asukoha määrame

sellise kaalutlusega, et otsitava x kümnendlogaritmi täisosa oleks 1. See aga saab olla 1 ainult siis, kui x täisosas on kaks numbrit. Seega

$$x = 22{,}2.$$

Leiame x, kui $\log x = 0{,}3681$.

Kui oleme kindlaks teinud, et kümnendlogaritmi murdosa 3681 asub tabeliarvude 3674 ja 3692 vahel, siis määrame paranduse, mis tuleb liita väiksemale tabeliarvule, et saada antud kümnendlogaritmi murdosa. Käesoleval juhul on see $3681 - 3674 = 7$. Siirdudes real, millel seisab väiksem tabeliarv 3674, paranduste tabelisse, otsime sealt 7-ga võrdse või lähima paranduse; selle paranduse veerunumber annabki meile arvu neljanda tüvenumbri 4.

$$x = 2{,}334.$$

2. Kümnendlogaritmi järgi arvu leidmist hõlbustab veelgi antilogaritmide tabel.

Väljavõte antilogaritmide tabelist.

m	0	1	2	3	...	9	1	2	3	...	9
...	...	...	...	...	...	...	..	..	..	...	..
,40	2512	2518	2523	2529	...	2564	1	1	2	...	5
,41	2570	2576	2582	2588	...	2624	1	1	2	...	5
,42	2630	2636	2642	2649	...	2685	1	1	2	...	6
,43	2692	2698	2704	2710	...	2748	1	1	2	...	6
...	...	...	...	...	...	...	..	..	..	...	..

Paranduste tabel

Selle tabeli esimesse m-ga tähistatud veergu on trükitud arvu kümnendlogaritmi murdosa kaks esimest numbrit ja esimesse rida kolmas number.

Sisenenud tabelisse kümnendlogaritmi murdosa kolme esimese numbri järgi, leiame tabelist arvu tüvenumbrid, millele tuleb veel liita kümnendlogaritmi murdosa neljanda numbri järgi saadud parandus paranduste tabelist.

Näiteks leiame antilogaritmide tabeli abil x, kui

$$\log x = 2{,}4123.$$

Kümnendlogaritmi murdosa esimese kolme numbri 412 järgi leiame tabeli seest tüvenumbrid 2582. Samal real paranduste tabe-

list saame kümnendlogaritmi murdosa neljanda tüvenumbri 3 järgi paranduse 2. Seega on otsitava x tüvenumbrid 2584. Määranud kümnendlogaritmi täisosa (2) järgi koma asukoha, saame, et

$$x = 258{,}4.$$

Samuti leiame, et kui

$$\log x = 0{,}4101, \text{ siis } x = 2{,}571,$$
$$\log x = \bar{2}{,}4333, \text{ siis } x = 0{,}02712,$$
$$\log x = 4{,}4009, \text{ siis } x = 25\,170,$$
$$\log x = \bar{1}{,}0377, \text{ siis } x = 0{,}1091,$$
$$\log x = 1{,}0086, \text{ siis } x = 10{,}20 \text{ jne.}$$

Ülesandeid.

238. Leia x, kui:

1) $\log x = 2{,}5478$; $\log x = \bar{1}{,}8035$; $\log x = 0{,}1703$.
2) $\log x = \bar{3}{,}3350$; $\log x = 4{,}8751$; $\log x = \bar{2}{,}9317$.
3) $\log x = 1{,}0622$; $\log x = 0{,}0096$; $\log x = \bar{1}{,}0007$.
4) $\log x = 5{,}7762$; $\log x = 4{,}6068$; $\log x = \bar{3}{,}4004$.
5) $\log x = 0{,}0520$; $\log x = \bar{4}{,}6000$; $\log x = \bar{2}{,}9746$.

§ 45. ARVUTAMINE KÜMNENDLOGARITMIDE ABIL.

Kümnendlogaritmide kasutamine arvutamisel hõlbustab tööd, sest korrutamine taandub liitmisele, jagamine — lahutamisele, astendamine — korrutamisele ja juurimine — jagamisele. Arvutustulemuste täpsus neljakohaliste murdosadega kümnendlogaritmide kasutamisel ei ületa küll nelja tüvenumbrit, kuid tavaliselt on selline täpsus piisav.

Kümnendlogaritmide rakendamist arvutamisel selgitame mõne konkreetse näite varal.

Näide 1. Leia korrutis

$$x = 29{,}78 \cdot 6{,}546.$$

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log x = \log 29{,}78 + \log 6{,}546.$$

Tabelist leiame $\log 29{,}78$ ja $\log 6{,}546$ väärtused:

$$\log x = 1{,}4740 + 0{,}8160 = 2{,}2900.$$

Antilogaritmide tabelist leiame kümnendlogaritmi murdosa 2900

järgi x tüvenumbrid 195. Et karakteristik on 2, siis peab arvu täisosa olema kolmekohaline, seega

$$x = 195.$$

Näide 2. Arvuta: $x = \frac{763{,}6 \cdot 0{,}8445}{42{,}94 \cdot 2{,}706}$.

Kirjutame murdavaldise täisavaldisena

$$x = 763{,}6 \cdot 0{,}8445 \cdot 42{,}94^{-1} \cdot 2{,}706^{-1}$$

ja logaritmime

$$\log x = \log 763{,}6 + \log 0{,}8445 - \log 42{,}94 - \log 2{,}706.$$

Kui oleme tabelist leidnud arvude kümnendlogaritmid, saame:

$$\log x = 2{,}8828 + 1{,}9266 - 1{,}6329 - 0{,}3423 = 0{,}8342.$$

Antilogaritmide tabelist leiame, et

$$x = 6{,}826.$$

Näide 3. Arvuta:

$$x = \frac{0{,}0874^2 \cdot \sqrt[3]{68150^2}}{1{,}488^4 \cdot \sqrt{0{,}00547}}.$$

Esitanud murdavaldise täisavaldisena ja juured murruliste astendajatega astmetena, saame

$$x = 0{,}0874^2 \cdot 68150^{\frac{2}{3}} \cdot 1{,}488^{-4} \cdot 0{,}00547^{-\frac{1}{2}}.$$

Edasi leiame avaldise logaritmi:

$$\log x = 2 \log 0{,}0874 + \frac{2}{3} \log 68150 - 4 \log 1{,}488 - \frac{1}{2} \log 0{,}00547.$$

Arvutuste käepärasemaks muutmiseks koostame tabeli.

N	$\log N$	n	$n \cdot \log N$
0,0874	2,9415	2	$\overline{3}$,8830
68150	4,8334	$\frac{2}{3}$	3,2223
			1,1053
1,488	0,1726	4	0,6904
0,00547	$\overline{3}$,7380	$\frac{1}{2}$	$\overline{2}$,8690
			$\overline{1}$,5594

$\log x = 1{,}5459$;
$x = 35{,}15$

Tabelis arvutame esiteks positiivsete liikmete summa ja teiseks negatiivsete liikmete summa. Lahutanud positiivsete liikmete summast negatiivsete liikmete summa, saame $\log x$ väärtuse. Lõpuks leiame antilogaritmide tabelist x väärtuse.

Ülesandeid.

239. 1) $68{,}4 \cdot 3{,}764$ 2) $459{,}2 \cdot 0{,}08063$
3) $65410 \cdot 0{,}01728$ 4) $17{,}66 \cdot 1{,}8647$
5) $56397 \cdot 0{,}8804365$ 6) $1{,}7588 \cdot 0{,}4294$

240. 1) $\frac{15{,}3 \cdot 1{,}206}{44{,}8}$ 2) $\frac{0{,}4921 \cdot 75{,}8}{0{,}1422}$
3) $\frac{4608 \cdot 3}{67{,}45 \cdot 0{,}72}$ 4) $\frac{0{,}1}{2{,}66 \cdot 0{,}3666 \cdot 4}$
5) $\frac{1}{24{,}32 \cdot 0{,}0092}$ 6) $\frac{29{,}61 \cdot 0{,}0532}{0{,}8177 \cdot 163{,}4}$

241. 1) $8{,}803^5 : 0{,}6146^4$ 2) $31{,}73^{2{,}2} : 0{,}562^{0{,}12}$
3) $\sqrt[3]{5713} : \sqrt[5]{9417}$ 4) $\sqrt[7]{10} : \sqrt[10]{1000}$
5) $62{,}4 \cdot 17{,}8^2$ 6) $\frac{0{,}7324^3}{\sqrt{0{,}0142}}$ 7) $0{,}158^2 \cdot \sqrt{77{,}2}$

242. 1) $\frac{14{,}85 \cdot \sqrt[3]{0{,}9308}}{5{,}78^2 \cdot \sqrt{0{,}126}}$ 2) $\frac{6{,}85^2 \cdot \sqrt[5]{667{,}9}}{11{,}42^3 \cdot \sqrt[4]{0{,}033}}$
3) $\frac{66240 \cdot \sqrt[3]{0{,}09405 \cdot 1{,}52^2}}{0{,}868^3 \cdot \sqrt{226{,}2 \cdot 0{,}78}}$ 4) $\frac{0{,}004492 \cdot \sqrt[5]{17900^2}}{\sqrt[7]{55{,}2^4} \cdot 0{,}00895^3}$
5) $\sqrt[3]{\frac{17{,}96^2 \cdot \sqrt{0{,}52}}{42{,}8}}$ 6) $\frac{\sqrt[4]{0{,}04671}}{0{,}0728^3 \cdot \sqrt[5]{0{,}000496}}$

243. Torni katus on ruudukujulise põhjaga korrapärane püramiid. Leia katuse pindala, kui põhiserv on 6,78 m ja külgtahu apoteem 8,06 m.

244. Koonuse põhja diameeter on 522 mm ja kõrgus 472 mm. Leia koonuse ruumala.

245. Kera raadius on 8,27 cm. Kui suur on kera ruumala?

246. Vagonett sõidab paigalseisust 1 minuti ja 13 sekundi

kestel kallakust alla kiirendusega 14,8 $\frac{cm}{s^2}$. Kui pika tee läbib vagonett selle ajaga ja milline on vagoneti kiirus tee lõpul?

*

Kui avaldises esinevad liitmise ja lahutamise tehted, siis peame need sooritama eraldi, sest summat ja vahet ei saa logaritmida.

Näide 4. $\frac{16,73}{0,5208}+\frac{6,38^2\sqrt[3]{42,2}}{44,7}$.

Selle ülesande lahendamisel arvutame algul logaritmide abil esimese ja teise liikme eraldi ja siis liidame tulemused.

Teosta nimetatud tehted!

Näide 5. $\frac{84,17\sqrt{36,42^2-17,85^2}}{72,63}$.

Selle ülesande lahendamisel arvutame ruutude tabelite abil $36,42^2-17,85^2$, mille tulemusena saame juba logaritmitava avaldise.

Ülesandeid.

Arvuta:

247. $\sqrt{3,442^2-0,67888^2}$

248. $\sqrt{\frac{848,3}{766,5}}+\sqrt[3]{\frac{42,55^2}{2067}}$

249. $\sqrt[3]{\frac{14+\sqrt{14}}{81-\sqrt{170}}}$

250. $\frac{3,64^3\sqrt{18,72^2-66,4}}{15,52\sqrt{3,974^3+8,693^2}}$

251. Arvuta ülesannete 243 ja 244 andmete põhjal torni katuse-aluse ruumala ja koonuse täispindala.

§ 46. LIHTSAMAID EKSPONENTVÕRRANDEID.

Olgu ülesandeks leida argumendi x väärtus, mille korral funktsioon ka^x on b, s. t. leida x, mis rahuldab võrrandit

$$ka^x = b.$$

Seda võrrandit nimetatakse **eksponentvõrrandiks.**

Kui vastava eksponentfunktsiooni graafik on olemas, siis saab antud ülesande vastuse leida selle graafiku abil. Joonisel 47 on esitatud funktsiooni $y = 2^x$ graafik. Sealt leiame näiteks, et võrrandi

$$2^x = 5$$

lahendiks on $x = 2{,}3$.

Kui funktsiooni graafik puudub, siis kasutame selle võrrandi lahendamiseks nn. logaritmimise võtet.

Selleks logaritmime antud võrrandi mõlemaid pooli, saame

$$x \log 2 = \log 5$$

ja siit

$$x = \frac{\log 5}{\log 2} = 2{,}32.$$

Mõnikord on taoliste ülesannete puhul võimalik kasutada logaritmimise võtte asemel nn. aluste võrdsustamise võtet.

Näiteks olgu lahendada võrrand

$$2^x = 8.$$

Et $8 = 2^3$, siis

$$2^x = 2^3.$$

Kui astmed on võrdsed ja astme alused on võrdsed, siis peavad ka astendajad olema võrdsed.

Järelikult

$$x = 3.$$

Ülesandeid.

252. Kasutades joonisel 47 esitatud graafikut, leia lahend võrranditele:

a) $2^x = 3$, b) $2^x = 1{,}5$, c) $2^x = 6$.

253. Lahenda järgmised võrrandid, kasutades aluste võrdsustamise võtet:

a) $2^x=64$ d) $2^x=\frac{1}{4}$ g) $2^{2x}=128$

b) $3^x=81$ e) $3^x=\frac{1}{27}$ h) $3^{3x}=243$

c) $5^x=625$ f) $5^x=\frac{1}{125}$ i) $5^{5x}=3125$

254. Lahenda järgmised võrrandid, kasutades logaritmimise võtet:

a) $2^x=7$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{6}{7}$ g) $13{,}4^x=219$

b) $7^x=2$ e) $\left(\frac{12}{13}\right)^x=5$ h) $3{,}62^x=42{,}7$

c) $3^x=5$ f) $2{,}4^x=6{,}7$ i) $0{,}872^x=0{,}761$

255. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $3^x=9$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=16$

b) $2^x=16$ e) $3{,}42^x=1{,}38$

c) $4^x=64$ f) $67^x=22$

*

Üldiselt,

eksponentvõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, kus tundmatu esineb astendajas.

Seega on eksponentvõrrandiks näiteks ka

$$3^{2x}-3^x=702.$$

Sellise võrrandi lahendamiseks kasutatakse asendusvõtet. Asendame $3^x=z$, siis $3^{2x}=z^2$, ja lahendame võrrandi

$$z^2-z=702.$$

Selle ruutvõrrandi lahendeiks on $z_1=-26$ ja $z_2=27$. Tundmatu x leidmiseks tuleb lahendada võrrandid:

$$3^x=-26 \text{ ja } 3^x=27.$$

Et $3^x > 0$ x iga väärtuse korral, siis esimesel võrrandil puudub lahend. Teisest võrrandist saame, et

$$x = 3,$$

mis rahuldab ka antud võrrandit.

Ülesandeid.

256. Lahenda võrrandid:

a) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$ c) $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16$
b) $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ d) $3^{2x+5} - 3^{x+2} = 2$

§ 47. LIHTSAMAID LOGARITMVÕRRANDEID.

Logaritmvõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, kus tundmatu esineb logaritmitavas.

Nii on näiteks logaritmvõrrandid:

$$\log x = 2;$$

$$\log (x+6) - \frac{1}{2} \log (2x-3) = 2 - \log 25.$$

Võrrandit $\log x = a$ saame lahendada, kui kasutame logaritmfunktsiooni graafikut või antilogaritmide tabelit.

Analüütilisel lahendamisel kasutatakse samade alustega logaritmide võrdsustamise võtet ja asendusvõtet.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$\log (x+6) - \frac{1}{2} \log (2x-3) = 2 - \log 25.$$

Teades, et logaritmide vahe on jagatise logaritm ja et $2 = \log 100$, võime antud võrrandi esitada kujul

$$\log \frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = \log \frac{100}{25}.$$

Kui sama alusega logaritmid on võrdsed, siis on ka logaritmitavad võrdsed. Järelikult

$$\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = 4.$$

Selle juurvõrrandi lahendeiks on $x_1=6$ ja $x_2=14$, mis mõlemad rahuldavad antud võrrandit.

Näide 2. Lahendada võrrand

$$\frac{1}{12}\log^2 x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\log x.$$

Asendame $\log x=z$, saame võrrandi

$$\frac{1}{12}z^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}z.$$

See võrrand on teisendatav kujule

$$z^2+3z-4=0,$$

mille lahendeiks on $z_1=-4$ ja $z_2=1$.

Seega

$$\log x_1=-4.$$
$$x_1=10^{-4}$$

ja

$$\log x_2=1,$$
$$x_2=10.$$

Mõlemad lahendid rahuldavad antud võrrandit.

Ülesandeid.

257. Lahenda võrrandid:

a) $\log x=2-\log 5$

b) $\frac{\log x}{1-\log 2}=2$

c) $\log\left(\frac{1}{2}+x\right)=\log\frac{1}{2}-\log x$

d) $\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=1$

258. Lahenda võrrandid:

a) $x^{\log x+2}=1000$

b) $x^{2-\frac{\log x}{2}}=100$

c) $100^{\log(x+2)}=10\,000$

d) $(0{,}1)^{-(x^2-5x+8)}=100$

§ 48. EKSPONENTFUNKTSIOONI PÕHIOMADUS.

Vaatleme eksponentfunktsiooni $2 \cdot 3^x$. Muutugu argument näiteks 2 võrra, siis saame funktsiooni väärtuseks $2 \cdot 3^{x+2}$. Moodustades saadud avaldise ja esialgse avaldise suhte, saame

$$\frac{2 \cdot 3^{x+2}}{2 \cdot 3^x} = \frac{2 \cdot 3^x \cdot 3^2}{2 \cdot 3^x} = 3^2.$$

Muutugu eksponentfunktsiooni $y = ka^x$ argument Δx võrra, siis funktsioon muutub selle tagajärjel Δy võrra. Saame, et

$$y + \Delta y = ka^{x+\Delta x}.$$

Jagame saadud avaldise esialgse avaldisega:

$$\frac{ka^{x+\Delta x}}{ka^x} = \frac{a^x \cdot a^{\Delta x}}{a^x} = a^{\Delta x}.$$

Seega,

kui eksponentfunktsiooni ka^x argument muutub Δx võrra, siis nii saadava funktsiooni väärtuse $ka^{x+\Delta x}$ ja tema esialgse väärtuse suhe on konstant $a^{\Delta x}$.

Kui $\Delta x = 1$, saame suhte väärtuseks a.

§ 49. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI MÕISTE.

Eksponentfunktsiooni $y = ka^x$, kus $k \neq 0$ ja $a \neq 0$, väärtuste jada, mis on saadud argumendi väärtustel 1, 2, 3, 4, . . ., nimetatakse geomeetriliseks progressiooniks.

Näiteks saame eksponentfunktsioonist 5^x geomeetrilise progressiooni:

$$5, 25, 125, 625, \ldots$$

Analoogiliselt saame funktsioonidest $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ ja $0{,}3 \cdot 2^x$ progressioonid:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \ldots$$
$$0{,}6;\ 1{,}2;\ 2{,}4;\ 4{,}8; \ldots$$

Geomeetrilise progressiooni arve nimetatakse vastavalt tema esimeseks, teiseks, kolmandaks jne. **liikmeks.**

Moodustagu arvud

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

geomeetrilise progressiooni, s. t. tabeliliselt on antud üks eksponentfunktsioon:

x	1	2	3	...	$n-1$	n	...
ka^x	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-1}	a_n	...

Et siin $\Delta x=1$, siis eksponentfunktsiooni põhiomaduse kohaselt

$$a=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\ldots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\ldots$$

Seega,

geomeetrilises progressioonis on teisest liikmest alates iga liikme suhe temale eelnevaga jääv suurus.

Nii on esimeses näites

$$5=\frac{25}{5}=\frac{125}{25}=\frac{625}{125}=\ldots,$$

teises näites

$$\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{16}}=\frac{\frac{1}{256}}{\frac{1}{64}}=\ldots$$

ja kolmandas näites

$$2=\frac{1{,}2}{0{,}6}=\frac{2{,}4}{1{,}2}=\frac{4{,}8}{2{,}4}=\ldots$$

Seda igale geomeetrilisele progressioonile omast jäävat suurust nimetatakse vastava progressiooni **teguriks** ja tähistatakse tähega q (lad.*quotiens* — kui sageli). Nii on esimeses näites teguriks 5, teises $\frac{1}{4}$ ja kolmandas 2.

Olgu nüüd antud arvujada $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1}, a_n,\ \ldots$, kus teisest liikmest alates on iga liikme suhe temale eelnevaga jääv suurus, s. t.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\ldots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\ldots=a.$$

Need arvud rahuldavad eksponentfunktsiooni põhiomadust ja on seega eksponentfunktsiooni ka^x väärtusteks, kui argumendi

väärtusteks on järjestikused naturaalarvud 1, 2, 3, ..., n, ..., s. t. antud arvud moodustavad geomeetrilise progressiooni.

Seega,

kui antud arvujadas alates teisest liikmest on iga liikme suhe temale eelnevaga jääv suurus, siis need arvud moodustavad geomeetrilise progressiooni.

Näiteks on arvujadad

$$2,\ -4,\ 8,\ -16,\ 32,\ldots$$

ja

$$36,\ 9,\ 2\frac{1}{4},\ \frac{9}{16},\ \frac{9}{64},\ldots$$

geomeetrilised progressioonid, sest

$$\frac{-4}{2}=\frac{8}{-4}=\frac{-16}{8}=\frac{32}{-16}=\ldots$$

ja

$$\frac{9}{36}=\frac{2\frac{1}{4}}{9}=\frac{\frac{9}{16}}{2\frac{1}{4}}=\frac{\frac{9}{64}}{\frac{9}{16}}=\ldots$$

Seevastu arvujada

$$1,\ -4,\ 8,\ -12,\ 18,\ldots$$

pole geomeetriline progressioon, sest

$$\frac{-4}{1}\neq\frac{8}{-4}\neq\frac{-12}{8}=\frac{18}{-12}=\ldots$$

§ 50. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI ÜLDLIIKME VALEM.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$-1,\ 2,\ -4,\ 8,\ -16,\ldots.$$

Leiame eksponentfunktsiooni, mille väärtuste jadaks see geomeetriline progressioon osutub.

Eksponentfunktsiooni üldine kuju on kq^x.

Progressiooni tegur on antud progressioonist kohe leitav:

$$q=-2.$$

Kordaja k määramiseks paneme tähele, et võrdusest $y=ka^x$ on $y=k$, kui $x=0$. Seega vajame k leidmiseks otsitava eksponent-

funktsiooni väärtust kohal 0. Seda saab aga leida eksponentfunktsiooni põhiomadusele tuginedes:

$$\frac{-1}{k} = -2, \text{ kust } k = \frac{1}{2}.$$

Seega on otsitavaks eksponentfunktsiooniks

$$y = \frac{1}{2} \cdot (-2)^x.$$

Lahendame oma ülesande ka üldkujul.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Otsitava eksponentfunktsiooni tabelikujuline esitus on järgmine:

x	1	2	3	...	n
kq^x	a_1	a_2	a_3	...	a_n

Et tegur q on koos progressiooniga antud ja kordaja k avaldub eksponentfunktsiooni põhiomaduse kohaselt võrdusest

$$k = \frac{a_1}{q},$$

siis avaldub otsitav eksponentfunktsioon antud suuruste kaudu järgmiselt:

$$y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$$

ehk

$$y = a_1 q^{x-1}.$$

Et kõik tabelis antud väärtuspaarid rahuldavad seda võrdust, siis rahuldab seda ka paar $(n; a_n)$, s. t. kehtib seos

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

Seda võrdust nimetatakse geomeetrilise progressiooni **üldliikme valemiks.** Andes siin n-ile mingi naturaalarvulise väärtuse, võime leida progressiooni selle liikme, mille järjekorranumbriks on antud naturaalarv.

Nii on geomeetrilise progressiooni

$$2, 6, 18, 54, \ldots$$

üldliikme valemiks

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Kui tahame leida selle progressiooni kümnendat liiget, siis võtame viimases valemis $n = 10$ ja saame

$$a_{10} = 2 \cdot 3^9 = 2 \cdot 19\,683 = 39\,366.$$

Ülesandeid.

259. Leia eksponentfunktsioonidele

$$3^x; \left(\frac{2}{3}\right)^x; \quad \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 2{,}3 \cdot (1{,}2)^x$$

vastavate geomeetriliste progressioonide neli esimest liiget.

260. Leia alljärgnevatele progressioonidele vastavad eksponentfunktsioonid.

a) 1, 3, 9, 27, ...

b) 64, 32, 16, 8, ...

c) 10, 2, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{25}$, ...

d) $\frac{5}{6}$, $1\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$, ...

e) -1, 2, -4, 8, ...

f) 0,7; 0,07; 0,007; 0,0007; ..

261. Leia eelmises ülesandes toodud progressioonide üldliikme valemid.

262. Tee kindlaks, missugused järgmistest arvude jadadest on aritmeetilised ja missugused geomeetrilised progressioonid.

a) 1, 2, 3, 4, 5, ...

b) 2, 4, 8, 16, ...

c) -5, -1, 3, 7, ...

d) $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{12}$, ...

e) 6; 0; -6, -12, ...

f) -32, -16, 16, 32, ...

g) 14, -7, 3,5 $-\frac{7}{4}$, ...

h) 456, 233, 10, -213, ...

263. Leia geomeetrilise progressiooni nõutud elemendid.

a) 5. liige, kui $a_1 = 3$ ja $q = 2$;

b) 4. liige, kui $a_3 = 35$ ja $q = 5$;

c) 6. liige, kui $a_9 = \frac{2}{3}$ ja $q = \frac{1}{2}$;

d) 1. liige, kui $a_8 = 256$ ja $q = 4$;

e) 13. liige, kui $a_7 = 0{,}2187$ ja $q = 1\frac{2}{3}$;

f) 6. liige ja tegur, kui $a_5=4$ ja $a_4=169$;
g) 9. liige ja tegur, kui $a_8=64$ ja $a_{10}=9$.

264. Leia geomeetrilise progressiooni esimene liige a_1, kui
a) $a_8=640$ ja $q=2$;
b) $a_6=500$ ja $q=1{,}2$;
c) $a_6=3125$ ja $q=2{,}5$.

265. Leia geomeetrilise progressiooni tegur q, kui
a) $a_1=\frac{1}{9}$ ja $a_{10}=2187$;
b) $a_1=6{,}25$ ja $a_7=0{,}0256$;
c) $a_1=\frac{1}{64}$ ja $a_{13}=64$.

266. Leia geomeetrilise progressiooni liikmete arv n, kui
a) $a_1=6$, $a_n=96$ ja $q=4$;
b) $a_1=0{,}3$, $a_n=0{,}108$ ja $q=0{,}6$;
c) $a_1=74{,}67$, $a_n=2{,}333$ ja $q=0{,}5$.

267. Arvuta logaritmide abil
a) a_1, kui $q=0{,}75$ ja $a_5=1{,}9$;
b) a_1, kui $q=1{,}083$ ja $a_{41}=239{,}6$;
c) a_{20}, kui $a_1=2$ ja $q=1{,}229$;
d) a_{25}, kui $a_1=1$ ja $q=1{,}334$.

§ 51. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI SUMMA VALEM.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n;$$

nõutakse leida summat

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n.$$

Kui liikmeid on vähe, siis on seda summat lihtne leida otsese liitmise teel. Näiteks

$$5+25+125+625=780.$$

Kui liikmeid on palju, siis otsene liitmine oleks tülikas ja aeganõudev. Seepärast on otstarbekohane siin samuti nagu aritmeetilise progressiooni puhulgi tuletada valem, mis hõlbustab otsitava summa arvutamist.

Kasutades üldliikme valemit, esitame summa S_n kõik liidetavad progressiooni esimese liikme ja teguri kaudu:

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}.$$

Korrutades selle võrduse mõlemad pooled q-ga, saame võrduse

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n.$$

Lahutades teise võrduse pooltest esimese võrduse vastavad pooled, saame

$$S_n q - S_n = (a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n) - (a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}).$$

Avades sulud, saame pärast koondamist

$$S_n q - S_n = a_1 q^n - a_1$$

ehk

$$S_n (q-1) = a_1 (q^n - 1),$$

millest $q \neq 1$ korral

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}}$$

Saadud valem ongi geomeetrilise progressiooni **summa valem.** Leiame selle abil näiteks progressiooni

$$2, 6, 18, 54, \ldots$$

üheksa esimese liikme summa.

Siin on $a_1 = 2$, $q = 3$ ja $n = 9$. Seega

$$S_9 = \frac{(3^9 - 1) \cdot 2}{3-1} = 3^9 - 1 = 19\,683 - 1 = 19\,682.$$

Missugusel kujul on otstarbekohane esitada geomeetrilise progressiooni summa valem juhul, kui $0 < q < 1$? Miks?

Geomeetrilise progressiooni summa valemile võib anda ka teistsuguse kuju. Selleks avame kõigepealt lugejas sulud:

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1};$$

rakendades saadud murru lugeja esimeses liikmes progressiooni üldliikme valemit $a_n = a_1 q^{n-1}$, saame selle liikme kirjutada kujul $a_n q$ ning summa valemi kujul:

$$\boxed{S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}}$$

Viimast summa valemi kuju kasutame juhul, kui on teada progressiooni viimane liige a_n.

Ülesandeid.

268. Leia geomeetrilise progressiooni summa valemi abil järgmised summad.

a) $34+68+136+272+544+1088$

b) $7+3\frac{1}{2}+1\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{7}{16}+\frac{7}{32}$

c) $2-10+50-250+1250-6250$

d) $15-12+9{,}6-7{,}68+6{,}144$

269. Leia geomeetrilise progressiooni

a) $6,\ 3\sqrt{3};\ 4\frac{1}{2};$ . . . 12 liikme summa;

b) $\sqrt[3]{16};\ \sqrt[3]{4};\ 1;$ . . . 9 liikme summa;

c) $-12{,}5;\ 5;\ -2;$ . . . 10 liikme summa.

270. Leia neli arvu, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni, kui teine arv on esimesest 12 võrra suurem ja neljas arv kolmandast 108 võrra suurem.

271. Geomeetrilises progressioonis on kolmas liige $3\frac{1}{8}$ ja neljas liige $4\frac{11}{16}$. Leia selle progressiooni 8 liikme summa.

272. Geomeetrilises progressioonis, milles on 8 liiget, on kaks keskmist liiget $9\sqrt{2}$ ja $9\sqrt{6}$. Leia selle progressiooni summa.

273. Joonesta alljärgnev geomeetrilise progressiooni elementide tabel vihikusse ning täida lüngad.

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	15		
4	5		1 562 500	
1		9		6 725 601
	6	11	241 864 704	
	−2		262 144	174 763
1		20	−524 288	
32	$2\frac{1}{2}$			5 187
	3	10		$3\,280\frac{4}{9}$
	2	13	64	
2 187	$\frac{2}{3}$	12		
	$1\frac{1}{2}$	13	$132\,860\frac{1}{4}$	
−0,0256	−2,5			−11,1534
6,25		7	0,0256	
	0,5		6,25	51 193,75

274. Alljärgnevate summade liidetavad moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leia igal antud juhul: 1) progressiooni tegur, 2) puuduvad liidetavad, 3) liidetavate arv ja 4) summa.

a) $a^{10}+a^9b+a^8b^2+\ \ldots\ +b^{10}$

b) $a^7-a^6b+a^5b^2-a^4b^3+\ \ldots\ -b^7$

c) $a+\sqrt[5]{a^4b}+\sqrt[5]{a^3b^2}+\ \ldots\ +b$

d) $a+\sqrt[7]{a^6b}+\sqrt[7]{a^5b^2}+\ \ldots\ +b$

e) $\sqrt[8]{a^7}+\sqrt[8]{a^6b}+\sqrt[8]{a^5b^2}+\ \ldots\ +\sqrt[8]{b^7}$.

275. Aednik tellis endale haruldase taime 20 seemet. Ta külvas esimesel ja igal järgmisel kevadel kõik seemned ja sai igal sügisel igalt taimelt 7 seemet. Oletades, et ükski seeme ei lähe kaduma, leia, mitmendal aastal saab aednik 5 kg seemneid, kui 40 seemet kaalub 1 g.

276. Päevalill annab aastas keskmiselt 2 000 seemet. Oletame, et kasvutingimused on päevalillele ühesugused üle kogu maakera, et iga taim vajab jõudsaks arenemiseks 1 m^2 pinda, et ükski seeme ei lähe kaduma, vaid idaneb ja annab uue taime, ning et taim annab aastas ühe lõikuse. Mitu aastat kuluks, et ühest päevalilleseemnest arenenud taimed kataksid maakera kogu maismaa osa? Maakera raadius on 6 400 km ja mered moodustavad 72% maakera pinnast.

277. Geomeetrilises progressioonis on 20 liiget. Paarisarvulise indeksiga kohtadel olevate liikmete summa on a ja paarituarvulise indeksiga kohtadel olevate liikmete summa on b. Leia esimene liige ja progressiooni tegur.

278. Geomeetrilises progressioonis on 40 liiget. Esimese kahekümne liikme summa on a ja viimase kahekümne liikme summa on b. Leia esimene liige ja progressiooni tegur.

279. Keegi räägib uudise kahele tuttavale. Need räägivad selle edasi kumbki omakorda kahele tuttavale jne. Oletame, et edasirääkimine toimub veerand tunni jooksul ja ainult neile, kes seda uudist veel ei tea. Mis kellaks on see uudis 7-miljonilise elanikkonnaga linnas kõigile teada, kui esimene rääkimine toimub kell 7 hommikul?

280. Kolhoos suurendab igal aastal oma põllupinda $\frac{1}{15}$ osa võrra eelmise aasta pinnast. Mitmendal aastal ületab põllupinna kogukasv 50% lähtepinnast?

281. Positiivsete liikmetega geomeetrilise progressiooni kolme esimese liikme summa on 221. Selle progressiooni kolmanda ja esimese liikme vahe on 136. Leia selle progressiooni kuue esimese liikme summa.

282. Tõesta, et geomeetrilises progressioonis on iga liige (välja arvatud esimene) temale eelneva ja järgneva liikme geomeetriline keskmine.

283. Tõesta, et kui kolm arvu x, y ja z moodustavad geomeetrilise progressiooni, siis

$$(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2.$$

284. Tõesta, et iga geomeetrilise progressiooni algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete korrutis on jääv ning võrdub äärmiste liikmete korrutisega.

285. Kasutades eelmises ülesandes leitud omadust, tuleta geomeetrilise progressiooni n liikme korrutise valem.

286. Leia progressiooni 1, 4, 16, ... kuue esimese liikme korrutis.

287. India prints Schiram oli malemängust nii vaimustatud, et lubas mängu leiutajale Sissa Ibn Dahirile autasuna iga summa, mille see peaks küsima. Mängu leiutaja palus endale autasu nisuterades ja nimelt: 1 tera malelaua esimesele ruudule, 2 tera teisele, 4 tera kolmandale, 8 tera neljandale jne. Mitu tera palus endale Sissa Ibn Dahir?

Terade hulgast kujutluse saamiseks olgu antud järgmised andmed: 1 kott (70 kg) sisaldab ligikaudu $1{,}6 \cdot 10^6$ tera; ühe kaubavaguni kandejõud on 16 tonni.

§ 52. TÕKESTAMATULT KAHANEVA GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI MÕISTE.

Eksponentfunktsiooni a^x uurimiskäigust teame, et kui $0<a<1$, siis argumendi tõkestamatul kasvamisel eksponentfunktsioon osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks. Sellest järeldub, et kui geomeetrilise progressiooni tegur on lihtmurd, s. t. $|q|<1$, siis liikmete arvu tõkestamatul kasvamisel geomeetrilise progressiooni liikmed kahanevad tõkestamatult. Näiteks progressiooni

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

puhul tegur $q=\frac{1}{2}$ ning seetõttu, kui $n\to\infty$, siis $a_n\to 0$.

Sama võib öelda progressiooni

$$3;\ -1;\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ -\frac{1}{81};\ldots$$

kohta, milles tegur on negatiivne, kuid absoluutväärtuselt väiksem kui 1 $\left(\text{antud juhul } q=-\frac{1}{3}\right)$.

Progressiooni nimetatakse lõpmatuks, kui tema liikmete arv n on tõkestamatult kasvav suurus, s. t. kui $n \to \infty$. Geomeetrilist progressiooni nimetatakse kahanevaks, kui $|q|<1$.

Paragrahvi algul toodud arutluse põhjal võime nüüd öelda, et lõpmatu ja kahaneva geomeetrilise progressiooni üldliige on tõkestamatult kahanev suurus. Sümboleis:

$$\text{kui } n\to\infty \text{ ja } |q|<1, \text{ siis } a_n \to 0.$$

Seepärast võib lõpmatut ja kahanevat geomeetrilist progressiooni nimetada ka tõkestamatult kahanevaks geomeetriliseks progressiooniks. Seega,

lõpmatu geomeetriline progressioon osutub tõkestamatult kahanevaks, kui teguri absoluutväärtus on väiksem kui 1.

§ 53. TÕKESTAMATULT KAHANEVA GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI SUMMA.

Olgu vaja leida lõpmatu geomeetrilise progressiooni

$$2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125;\ldots$$

kõigi liikmete summa. Eespool tuletatud summa valemeid ei saa nüüd kasutada, sest need kõlbavad ainult siis, kui liikmete arv n on lõplik. Seepärast võtamegi liikmete arvu esialgu lõpliku ning uurime summa muutumist liikmete arvu järsul suurenemisel. Näiteks kümne, saja ja tuhande esimese liikme summa arvutamisel saaksime valemi põhjal:

$$S_{10} = \frac{2(1-0{,}5^{10})}{1-0{,}5} = 4(1-0{,}5^{10});$$
$$S_{100} = 4(1-0{,}5^{100});$$
$$S_{1000} = 4(1-0{,}5^{1000}).$$

Märkame, et liikmete arvu kasvamisel antud progressiooni summa järjest vähem erineb väärtusest 4, sest kui $n\to\infty$, siis

$0{,}5^n \to 0$. Nii jõuame otsusele, et antud lõpmatu progressiooni kõigi liikmete summa peaks olema nimelt 4.
Seetõttu on loomulik, et

tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summaks S loetakse selle progressiooni n esimese liikme summa S_n piirväärtust, kui n tõkestamatult kasvab, s. t.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Et

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ kus } |q| < 1,$$

siis

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Põhjenda saadud tulemust!
Seega

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

mis ongi tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valemiks. Valemi rakendamise näitena arvutame järgmise lõpmatu progressiooni summa:

$$3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots$$

Siin $a_1 = 3$ ja $q = -\frac{1}{3}$, seega

$$S = \frac{3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

Ülesandeid.

288. Leia iga järgmise lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa.

a) $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$

b) $16 + 4 + 1 + \frac{1}{4} + \dots$

c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{9}{32} + \dots$

d) $3 \cdot 2 + 2 + \frac{2}{3} + \dots$

289. Joonesta tabelid vihikusse ja täida tühjad kohad, kui a_1 on tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni esimene liige, q — tegur ja S — summa.

a_1	q	S
7	$\frac{1}{2}$	
	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
5		$7\frac{1}{2}$
14	$-\frac{2}{5}$	
	0,2	15

a_1	q	S
117		90
	0,96	250
0,88		0,5
0,94	0,53	
	−0,1	1,2

290. Leia tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni esimene liige ja tegur, kui summaks on:

a) $\frac{1}{2-y}$; b) $\frac{1}{5+2y}$; c) $\frac{3}{4+y}$.

Missugust väärtust ei tohi $|y|$ ületada?

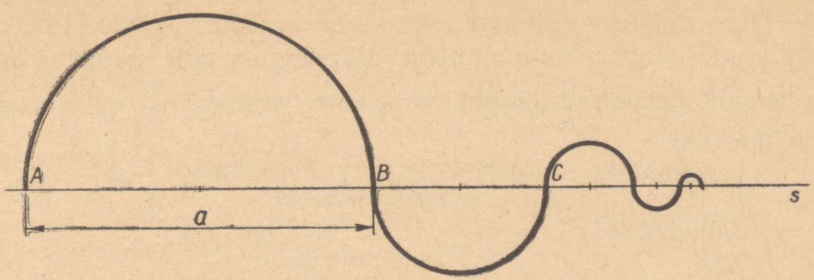
Näide. Olgu $S=\frac{1}{8+3y}$. Et $S=\frac{a_1}{1-q}$, siis tuleb antud murd teisendada niisugusele kujule, kus nimetajas oleks esimeseks liikmeks 1. Selle kuju saame murru lugeja ja nimetaja jagamisel 8-ga:

$$S=\frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{3}{8}y}.$$

Siit võime kirjutada, et $a_1=\frac{1}{8}$ ja $q=-\frac{3}{8}y$. Et rahuldada tingimust $|q|<1$, peab olema $|y|<\frac{8}{3}$.

291. 45°-se nurga haaral on võetud punkt, mis on nurga tipust kaugusel a. Sellest punktist on ehitatud ristlõik teisele haarale, selle ristlõigu aluspunktist on ehitatud ristlõik esimesele haarale jne. lõpmata. Leia nende ristlõikude pikkuste summa.

292. Sirgel s kujutatud lõiku $AB=a$ (joon. 55) pikendatakse tema poole võrra ja saadakse punkt C. Lõiku BC pikendatakse



Joon. 55.

omakorda tema poole võrra jne. Kõigile nii saadud lõikudele kui diameetritele joonestatakse poolringjooned vaheldumisi üks ühele, teine teisele poole sirget s. Leia tekkiva kõverjoone kogupikkus p ning kõigi poolringide pindalade summa S.

§ 54. HARILIKU MURRU TEISENDAMINE KÜMNENDMURRUKS.

Hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks jagatakse murru lugeja murru nimetajaga. See jagamine annab tulemuseks kas täpse arvu, nagu näiteks

$$\frac{5}{4} = 1{,}25,$$

või saame tulemuseks lõputu perioodilise kümnendmurru, nagu näiteks

$$\frac{4}{3} = 1{,}3333\ldots,$$

mida lühemalt kirjutatakse nii:

$$\frac{4}{3} = 1{,}(3).$$

Et kümnendmurd on võrdne hariliku murruga, mille nimetajaks on kümne aste, siis lõpliku kümnendmurruna avalduvad need harilikud murrud, mille nimetajas ei ole teisi tegureid peale 2 ja 5. Põhjenda seda!

Kui murru lugeja ei jagu täpselt nimetajaga, siis tekib jääk. Jäägile kirjutatakse juurde 0, saadud arv jagatakse uuesti nimetajaga, tekib uus jääk jne. Kui nimetaja teguriks on arv, mis ei ole 2 ega 5, siis jätkub jagamise protsess lõputult. Jagatiseks saame lõpmatu kümnendmurru. Jääk on alati väiksem kui nimetaja. Näiteks, kui on antud murd $\frac{a}{b}$, siis jääkideks võivad olla arvud 1, 2, ..., $(b-1)$, s. t. võimalik jääkide arv on lõplik ja võrdub

(b−1)-ga. Niisiis, kui jagamise protsess on lõputu, siis arv, mis on kord olnud jäägiks, kordub hiljem jälle jäägina. Siis korduvad aga ka temale järgnevad jäägid. Näiteks teisendame $\frac{37}{7}$ ja $\frac{19}{14}$ kümnendmurruks.

```
37 | 7
20 | 5,285714...
60
40
50
10
30
20
```

```
19 | 14
50 | 1,3571428...
80
100
20
60
40
120
80
```

Siin saime esimese ülesande jääkideks arvud 2, 6, 4, 5, 1, 3 ja siis tuli jäägiks jälle 2, millele järgnevad uuesti 6, 4, 5, 1, 3 ning jällegi 2. Nii kordub see lõputult.

Jääkidele 2, 6, 4, 5, 1, 3 vastavad jagatises numbrid 2, 8, 5, 7, 1, 4, mis samuti hakkavad korduma. Need numbrid, mis jagatises hakkavad korduma, moodustavad jagatise perioodi. Et jagatiseks on lõputu kümnendmurd, siis ei saa seda täielikult üles kirjutada. Seetõttu on kokku lepitud kirjutada jagatises ainult üks periood ja eraldada see sulgudega.

Nii kirjutame

$$\frac{37}{7} = 5,(285714) \text{ ja } \frac{19}{14} = 1,3(571428).$$

Kui periood algab kohe pärast koma, siis nimetatakse seda arvu **puhtperioodiliseks kümnendmurruks.** Kui aga periood ei alga kohe pärast koma, siis nimetatakse seda arvu **segaperioodiliseks kümnendmurruks.** Seega esimene toodud näidetest on lõputu puhtperioodiline ja teine lõputu segaperioodiline kümnendmurd.

Ülesandeid.

293. Missugused järgmistest murdudest on esitatavad lõpliku kümnendmurruna:

$$\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{4}{35}, \frac{12}{17}, \frac{11}{8}, \frac{14}{15}, \frac{121}{16}, \frac{1024}{625}?$$

294. Esita järgmised murrud kümnendmurdudena:

$$\frac{9}{5},\ \frac{29}{64},\ \frac{132}{25},\ \frac{17}{6},\ \frac{35}{32},\ \frac{16}{11},\ \frac{87}{63}.$$

§ 55. PERIOODILISE KÜMNENDMURRU ESITAMINE HARILIKU MURRUNA.

Olgu antud perioodiline kümnendmurd

$$4{,}5(62).$$

Vaatleme seda arvu summana

$$4.5+0{,}0(62).$$

Esitame teise liidetava harilike murdude abil:

$$0{,}0(62)=\frac{62}{1000}+\frac{62}{100\,000}+\frac{62}{10\,000\,000}+\ldots$$

Tulemuseks on tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa, kus $a_1=\frac{62}{1000}$ ja $q=\frac{1}{100}$. Kasutades vastavat summa valemit, leiame, et

$$0{,}0(62)=\frac{\frac{62}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{62\cdot 100}{1000\cdot 99}=\frac{62}{990}.$$

Seega

$$4{,}5(62)=4{,}5+\frac{62}{990}=\frac{45}{10}+\frac{62}{990}=\frac{4455+62}{990}=\frac{4517}{990}.$$

Ülesandeid.

295. Esita hariliku murruna järgmised puhtperioodilised kümnendmurrud: 0,(9); 0,(23); 0,(061); 2,(71); 63,(418).

296. Tuginedes eelmise ülesande lahendustele, sõnasta eeskiri puhtperioodilise kümnendmurru teisendamiseks harilikuks murruks.

297. Esita hariliku murruna järgmised segaperioodilised kümnendmurrud: 0,2(8); 0,3(54); 0,13(9); 2,65(15).

298. Tuginedes eelmise ülesande lahendustele, sõnasta eeskiri segaperioodilise kümnendmurru teisendamiseks harilikuks murruks.

299. Näita, et

$$0{,}11\ldots+0{,}222\ldots+0{,}333\ldots+\ldots+0{,}999\ldots=5.$$

Hoiukassasse hoiule antud rahasummale, nn. **hoiusele,** arvestatakse iga aasta lõpul juurde teatud kindel osa hoiusest. Näiteks, kui aasta algul anti hoiule 50 rubla ja juurde arvestatakse 2% hoiusest, s. o. 1 rubla, siis on järgmise aasta algul hoiul 51 rubla.

Juurdearvestatud summat nimetatakse **intressiks** ja arvu, mis näitab, mitmendik osa hoiusest kuulub juurdearvestamisele, nimetatakse **intressimääraks.**

Seega on toodud näites intressiks 1 rubla ja intressimääraks 0,02.

Ülesanne 1. Aasta algul on hoiul 60 rubla ning intressimäär on 3%. Kui suur on hoius järgmise aasta algul?

Lahendus. Aasta jooksul kasvab hoius 3% võrra 60-st rublast, s. o. 1,8 rubla; seega järgmise aasta alguseks on hoiul 61,8 rubla.

Ülesanne 2. Aasta algul viiakse hoiule k rubla; intressimäär on p%. Leida hoiuse väärtus teise, kolmanda, ..., $n+1$ aasta alguseks, kui intressi arvestatakse ainult esialgu hoiule viidud summalt.

Lahendus.

Esialgne hoiusumma: k;

teise aasta algul: $k+\frac{kp}{100}$;

kolmanda aasta algul: $k+\frac{kp}{100}+\frac{kp}{100}=k+2\cdot\frac{kp}{100}$;

neljanda aasta algul: $k+3\cdot\frac{kp}{100}$;

. . . . . .

$n+1$ aasta algul: $k+n\cdot\frac{kp}{100}$.

Näeme, et sel viisil intressi arvestades moodustavad hoiuse väärtused aritmeetilise progressiooni, mille vaheks on aastaintress $\frac{kp}{100}$. Sel viisil n aasta jooksul saadavat koguintressi $\frac{nkp}{100}$ nimetatakse **lihtintressiks.**

Ülesanne 3. Aasta algul viiakse hoiule k rubla; intressimäär on p%. Leida hoiuse väärtus $n+1$ aasta algul, kui igal aastavahetusel liidetakse intress hoiuse senisele väärtusele juurde, s. t. kui intressi arvestatakse ka intressilt.

Lahendus.

Esialgne hoiusumma: k;

teise aasta algul: $k+\frac{kp}{100}=k\left(1+\frac{p}{100}\right)$;

kolmanda aasta algul: $k\left(1+\frac{p}{100}\right)+k\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{p}{100}=$

$=k\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$;

neljanda aasta algul: $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$;

. . . . . .

$n+1$ aasta algul: $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

Kirjeldatud viisil arvestatavat intressi nimetatakse **liitintressiks.** Kirjutades sel viisil arvutatud hoiuse väärtused aastate järgi ritta, saame geomeetrilise progressiooni

$$k;\ k\left(1+\frac{p}{100}\right);\ k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ldots,\ k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Selle progressiooni tegurit $q=1+\frac{p}{100}$ nimetatakse **intressiteguriks.** Niisiis,

liitintressi korral kasvab hoiule viidud rahasumma k n aasta jooksul intressiteguri n-nda astme kordseks.

Sümboleis:

$$\boxed{L=k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

kus L on hoiuse lõppväärtus.

Kui hoiusummat tahetakse aasta keskel suurendada või tahetakse osa summat välja võtta, siis on tarvis arvutada intressi ka kuude ja päevade eest. Rahanduslikes küsimustes loetakse aasta päevade arvuks 360. Seega, kui ühe aasta intress on $\frac{kp}{100}$ rubla, siis ühe kuu intress on $\frac{kp}{12\cdot 100}$ rubla ja ühe päeva intress on $\frac{kp}{360\cdot 100}$ rubla.

Hoiukassades makstakse hoiustelt, milliseid võib välja võtta ükskõik millal, nn. nõudmiseni-hoiustelt, 2% intressi ja tähtajalistelt hoiustelt, s. o. hoiustelt, mis on antud hoiule kuni kindla tähtajani, 3% intressi.

Kui hoiustusaeg on üle ühe aasta, siis arvestatakse intressi ikka liiteviisil, s. t. igal aastavahetusel liidetakse aastaintress hoiusummale juurde.

§ 57. SUURUSTE LIITPROTSENDILINE MUUTUMINE.

Liitintressiga analoogilise mõttekäigu juurde jõuame mitmete muude ülesannete lahendamisel. Need ülesanded kuuluvad *suuruste liitprotsendilise muutumise* valdkonda. Toome mõned näited.

Näide 1. Kolhoosi aastast piimatoodangut k liitrit otsustati suurendada igal aastal $p\%$ võrra. Kui suur on kolhoosi piimatoodang m aasta pärast?

Esimese aasta jooksul suureneb piimatoodang $\frac{kp}{100}$ liitri võrra, seega:

esimese aasta jooksul toodetakse piima $k\left(1+\frac{p}{100}\right)$ liitrit;

teise aasta jooksul toodetakse piima $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ liitrit;

. . . . . .

m-nda aasta jooksul toodetakse piima $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^m$ liitrit.

Näide 2. Õhurõhu kohta, kehtib seadus: 100-meetrilisele tõusule vastab õhurõhu vähenemine 1,2% võrra. Arvutada õhurõhk 400 m kõrgusel, kui merepinnal valitseb normaalrõhk (760 mm).

Kui õhurõhk merepinnal tähistada a_1, 100 m kõrgusel a_2 jne., siis rõhud 100-meetriliste kõrgusvahede tagant moodustavad geomeetrilise progressiooni:

$$760;\ 760\left(1-\frac{1{,}2}{100}\right);\ 760\left(1-\frac{1{,}2}{100}\right)^2,\ldots$$

Selle progressiooni tegur

$$q=1-0{,}012=0{,}988.$$

Vastuseks on progressiooni viies liige $760\cdot 0{,}988^4\approx 724$ (mm). Seega on õhurõhk 400 m kõrgusel 724 mm.

Näide 3. Rahvaarvu aastane juurdekasv olgu 1%. Kui suur peab olema põllumajandussaaduste toodangu aastase juurdekasvu protsent, et 15 aasta pärast tuleks ühe elaniku kohta põllumajandussaadusi 2 korda rohkem kui praegu?

Eelkõige tuleb leida, mitmekordseks kasvab elanikkond 15 aasta jooksul.

Loeme praeguse elanike arvu ühikuks, siis $a_1 = 1$. Aastase juurdekasvu tegur $q = 1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$. Otsitav on progressiooni kuueteistkümnes liige.

$$a_{16} = a_1 \cdot q^{15} = 1 \cdot 1{,}01^{15} \approx 1{,}16.$$

Seega kasvab elanikkond 15 aasta jooksul 1,16-kordseks. Põllumajandussaaduste toodang peab sama aja jooksul kasvama 2 korda suuremaks, s. o. 2,32-kordseks.

Kui praegune põllumajandussaaduste toodang lugeda ühikuks, siis $a_1 = 1$ ja $a_{16} = 2{,}32$.

$$2{,}32 = 1 \cdot q^{15}$$

$$q \approx 1{,}06 = 1 + \frac{6}{100}.$$

Püstitatud nõue on seega täidetud siis, kui põllumajandussaaduste toodangu aastane juurdekasv on 6%.

Ülesandeid.

300. Õpilane pani 31. augustil oma suvisest teenistusest 25 rbl. hoiukassasse hoiule «nõudmiseni». Kui suur oli õpilase hoius järgmise aasta 31. augustiks?

301. Tööline kogus raha mööbli ja televiisori ostmiseks. Selleks pani ta iga aasta algul hoiukassasse hoiule «nõudmiseni» oma ühe kuu palga 95 rubla. Hoiukassa arvestab liitintressi määraga 2%. Kui suur oli töölise hoiusumma teise aasta algul? kolmanda aasta algul? Kui suure summa võis tööline välja võtta viienda aasta algul?

302. Õpetaja viis hoiukassasse hoiule «nõudmiseni» iga kuu 12% oma palgast. Kui suur oli õpetaja hoiusumma 1 kuu pärast, 2 kuu pärast, 12 kuu pärast (kõik enne järjekordset sissemaksu), kui õpetaja kuupalk on 85 rubla?

303. 3. septembril 1963. a. toimunud raha- ja asjade loterii järjekordsel loosimisel võitis 8. klassi õpilane 65-rublase külmutuskapi. Ta võttis eseme väärtuse välja rahas ja andis hoiukassasse tähtajaliselt hoiule kuni kooli lõpetamiseni, s. o. 3. juulini 1967. a. Hoiukassa maksab liitintressi määraga 3%. Kui suur on tähtpäeval väljavõetav summa?

304. Isa pani temale makstud preemiast 24% tähtajaliselt

(liitintressimääraga 3%) hoiule oma poja jaoks, kes hakkas parajasti õppima 1. klassis. Kui suure summa saab poeg pärast kooli lõpetamist (11 aastat hiljem), kui isale makstud preemia oli 50 rubla?

305. Tööstuse sisseseade maksis uuena 15 000 rubla. Tema väärtuse iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseade vananemise ja kulumise tõttu 8% eelmise aasta väärtusest. Kui suur on sisseseade väärtus 10 aasta pärast?

306. Ameerika Ühendriikide president ja teadlane Benjamin Franklin pärandas oma testamendiga 1790. aastal Bostoni linnale 1000 naela tingimusel, et see kapital liitintressi kandes kasvaks tähtajaliselt 100 aastat. Saadud summast, 130 000 naelast, kuulus 100 000 naela linnale, jääk tuli aga jätta uuesti sajaks aastaks tähtajaliselt hoiule. Missugust intressimäära arvestas Franklin?

307. Puu kõrguse iga-aastane juurdekasv on 80% eelmise aasta juurdekasvust. Mitme sentimeetri võrra kasvab puu teisel aastal, viiendal aastal, kui ta esimesel aastal kasvas 25 cm võrra?

308. Tööstuse toodangut kavatsetakse suurendada igal aastal 15% võrra, võrreldes eelneva aastaga. Mitme protsendi võrra suureneb tööstuse aastatoodang seitseaastaku jooksul?

309. Radioaktiivse aine aatomeist laguneb ööpäeva vältel 2,8%. Mitme ööpäeva vältel laguneb pool selle aine aatomeist?

310. Toas, mille temperatuur on 20°, on keha, mille temperatuur on 100°. Olgu keha soojusisolatsiooni tingimused sellised, et keha temperatuur langeb igas minutis 2% võrra keha temperatuuri ja toa temperatuuri vahest. Leia keha temperatuur poole tunni pärast.

311. Kuumutamisel laguneb vesinikülihapend (H_2O_2) veeks ja hapnikuks. 10 minutit pärast reaktsiooni algust oli vesinikülihapendi kontsentratsioon $8\,\frac{g}{l}$ ja 10 minutit hiljem $4{,}8\,\frac{g}{l}$. Arvuta vesinikülihapendi esialgne kontsentratsioon eeldusel, et kontsentratsioon väheneb iga minuti jooksul sama protsendi võrra minuti algul olnud kontsentratsioonist.

312. Kinnises anumas on vedela väävli kohal esialgu 1 g vesinikku. Reaktsiooni tõttu väheneb vesiniku hulk 12 tunni jooksul 0,832 grammini. Arvuta, kui palju vesinikku on anumas 24 tunni pärast, arvestades, et vesiniku hulk väheneb iga tunni jooksul sama % võrra tunni algul olnud hulgast.

Kordamisküsimusi ja ülesandeid.

313. Mis on funktsioon?

314. Mis on funktsiooni määramispiirkond?

315. Missugust funktsiooni nimetatakse paarisfunktsiooniks?

316. Mis on funktsiooni negatiivsuspiirkond?

317. Mis on funktsiooni $y=3x$ positiivsuspiirkonnaks?

318. Kas lineaarne funktsioon $y=2-x$ on kasvav või kahanev?

319. Millal on ruutfunktsiooni graafikul maksimumpunkt?

320. Kuidas avaldub funktsiooni $y=-345-x$ pöördfunktsioon?

321. Missugune joon on funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikute sümmeetriateljeks?

322. Missuguses vahemikus asetsevad funktsiooni $y=\arctan x$ väärtused?

323. Mida nimetatakse arvu a logaritmiks alusel b?

324. Missugust funktsiooni nimetatakse eksponentfunktsiooniks?

325. Mis on aritmeetiline progressioon?

326. Mis on geomeetriline progressioon?

327. Kuidas avaldub aritmeetilise progressiooni n liikme summa valem?

328. Kuidas avaldub geomeetrilise progressiooni üldliikme valem?

329. Missugust geomeetrilist progressiooni nimetatakse tõkestamatult kahanevaks?

330. Kuidas defineeritakse tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa?

331. Mis on lõputu segaperioodiline kümnendmurd?

332. Mis on liitintress?

333. Kuidas teostatakse tehteid harilike murdudega?

334. Missugust võrrandit nimetatakse eksponentvõrrandiks?

335. Missugust võrrandit nimetatakse logaritmvõrrandiks?

336. Aritmeetilise progressiooni kolmas liige on 6 ja kaheksas liige 24. Leia kümne liikme summa.

337. Arvude 7 ja 92 vahele aseta 16 niisugust arvu, mis koos antud arvudega moodustaksid aritmeetilise progressiooni.

338. Linnas on praegu 138 000 elanikku. 16 aastat tagasi oli

selles linnas 115 000 elanikku. Leia selle linna elanike arvu aastane juurdekasvu protsent.

339. Missugune peaks olema linna elanike arvu aastane juurdekasvu protsent, et 34 aasta pärast oleks selles linnas 2 korda rohkem elanikke?

340. Esita hariliku murruna

$$0{,}444\ldots; \qquad 0{,}272727\ldots; \qquad 3{,}3(81).$$

341. Keha paigutatakse vee ja sulava jää segusse. Keha jahtub siis nõnda, et tema temperatuur väheneb iga minuti lõpuks murru $\frac{p}{q}$ võrra temperatuurist selle minuti alguses. Olgu keha temperatuur katse alguses (jäässe paigutamisel) t_0, tema temperatuur n-nda minuti lõpul peale katse algust t_n. Anna arvude n ja t_n vaheline seos.

Kui suur on temperatuuri kahanemistegur minutilt minutile?

342. Päikesekiired tungivad läbi klaasplaatide kihi, kusjuures läheb igas plaadis kaduma murdosa $\frac{p}{q}$ plaadile langenud valgusest. Olgu plaatide kihile langeva valguse tugevus T_0 ja plaatide hulk kihis n. Avalda 1., 2., 3., ..., n-ndast plaadist läbitungiva valguse tugevused T_1, T_2, ..., T_n andmete kaudu.

Kui suur on valguse tugevuse kahanemistegur plaadilt plaadile?

Leia T_n, kui $\frac{p}{q}=\frac{1}{10}$.

343. Lahenda järgmised võrrandid:

a) $3\cdot 2^x=48$

b) $3\log x=2\log 8$

c) $11^x=23$

d) $\log^2 x-3\log x+2=0$

ARVUTUSLÜKATI.

§ 58. FUNKTSIOONI SKAALA MÕISTE.

Koordinaatteljestikus kujutatakse argumendi ja vastava funktsiooni väärtusi kahe arvtelje — abstsisstelje ja ordinaattelje abil.

On olemas võte argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste graafiliseks kujutamiseks ühe arvtelje abil. Selleks paigutatakse pärast mõõtühiku valimist arvteljele alguspunktist alates lõigud, mille pikkused kujutavad funktsiooni väärtusi; nende lõikude lõpp-punktide juurde aga kirjutatakse argumendi vastavad väär-

tused. Funktsiooni väärtusi joonisele ei kirjutata, sest need on lõigu pikkustena mõõdetavad. Sel teel saadaksegi pilt nii argumendi kui ka funktsiooni vastavatest väärtustest ühelainsal arvteljel. Niisugust arvtelge nimetatakse funktsiooni **astmikuks** ehk **skaalaks**.

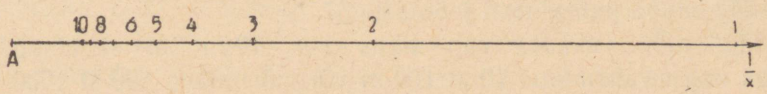
Valmistame näitena funktsiooni

$$y = \frac{1}{x}$$

skaala. Selleks koostame kõigepealt argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste tabeli.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$

Kui valime mõõtühikuks lõigu pikkusega 1 dm, siis argumendi väärtustele 1, 2, 3 jne. vastavad funktsiooni väärtused võime kujutada lõikudena, mille pikkused on 1 dm, 5 cm, 3,3 cm jne. Paigutame need lõigud arvteljele nii, et kõikide nende alguspunktid ühtivad teljel võetud kindla punktiga A ning lõpp-punktide juurde kirjutame vastavad argumendi väärtused (joon. 56).



Joon. 56.

Ülesandeid.

344. Valmista skaala, millel on kujutatud funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ väärtused, mis vastavad x väärtustele.

$-1, -2, -3, -4, -5, -8;\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$

345. Valmista funktsiooni $y = x^2$ skaala argumendi väärtustel

$$\frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2},\ 3.$$

346. Valmista funktsiooni $y = \frac{1}{x+1}$ skaala.

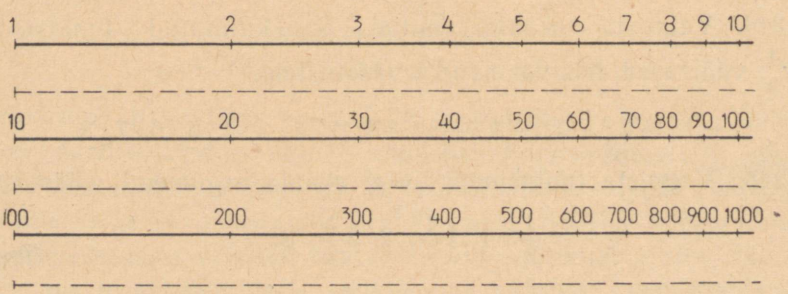
Valmistades funktsiooni $y = \log x$ *skaala, saame* **logaritmilise skaala.**

Selle skaala ehitamiseks koostame esmalt funktsiooni $y = \log x$ väärtuste tabeli, ümardades logaritmide väärtused kahe numbrini koma järel.

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
1	0,00	10	1,00	100	2,00
2	0,30	20	1,30	200	2,30
3	0,48	30	1,48	300	2,48
4	0,60	40	1,60	400	2,60
5	0,70	50	1,70	500	2,70
6	0,78	60	1,78	600	2,78
7	0,85	70	1,85	700	2,85
8	0,90	80	1,90	800	2,90
9	0,95	90	1,95	900	2,95
10	1,00	100	2,00	1000	3,000

Valides logaritmide lõikudena kujutamisel mõõtühikuks 1 dm, saame log 2 puhul lõigu pikkusega 3 cm, log 3 puhul 4,8 cm, log 10 puhul 10 cm, log 20 puhul 13 cm, log 30 puhul 14,8 cm jne. Paigutades kõik need lõigud ühisest alguspunktist alates arvteljele ja kirjutades nende lõikude otspunktide juurde vastavad argumendi x väärtused, saame logaritmilise skaala. See skaala on osade kaupa paigutatud joonisele 57.

Nagu näha, skaala vahemikus 1-st 10-ni on samasuguse kujuga nagu vahemikus 10-st 100-ni või vahemikus 100-st 1000-ni, sest logaritmide väärtused teises tulbas erinevad esimese tulba logaritmide vastavatest väärtustest ühe võrra ja kolmanda tulba väärtused — kahe võrra.



Joon. 57.

Logaritmilist skaalat vahemikus 1-st 10-ni nimetatakse **logaritmiliseks põhiskaalaks,** sest ta kujutab ühtlasi ka funktsiooni $y = \log x$ skaalat vahemikus 10-st 100-ni, 100-st 1000-ni jne.; samuti ka vahemikus 0,1-st 1-ni, 0,01-st 0,1-ni jne. Seetõttu tuleb skaalale märgitud arvude all mõista ainult argumendi x tüve. Näiteks arv 2 võib tähistada argumendi x väärtusi ... 0,02; 0,2; 2; 20; 200; ...

Varem õpitud korrutamine ja jagamine ning ruudu, kuubi, ruutjuure ja kuupjuure leidmine arvutuslükati abil pole seni põhjendamist leidnud. Olles tutvunud kümnendlogaritmidega ja logaritmilise skaalaga, osutub see nüüd võimalikuks, sest arvutuslükatile trükitud skaalad K, A, B, R, C ja D on logaritmilised skaalad.

§ 60. KORRUTAMINE LÜKATI SKAALADE D JA C ABIL.

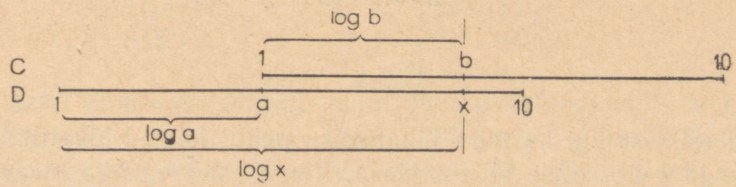
Skaalat C saab viia ühtima skaalaga D. Selles võib veenduda otsese võrdlemisega. Kui viia skaala C ja D esimesed kriipsud ühtimisele, siis langevad ka kõik nende ülejäänud vastavad kriipsud kokku.

Et hõlbustada lükatil teostatavate operatsioonide kirjeldamist, tähistame erinevate skaalade jaotuskriipsu lühidalt skaala tähega, millele järgnevad jaotuskriipsule vastava arvu tüvenumbrid.

Näiteks D-27 tähendab skaala D jaotuskriipsu, mis vastab arvule, mille tüvenumbrid on 2 ja 7, näiteks 2,7; 27; 270; 0,27 jne. C-475 tähendab skaala C jaotuskriipsu, mis vastab arvule, mille tüvenumbrid on 4—7—5, näiteks 4,75; 47,5; 0,475 jne.

Selleks, et korrutada arve a ja b, paigutame C-1 D-a kohale ja märgime märkijaga C-b. Arvude a ja b korrutise x leiame skaalalt D märkija alt.

Tõestuseks vaatleme joonisel 58 kujutatud logaritmiliste skaa-



Joon. 58.

lade D ja C ning püstkriipsuga tähistatud märkija seisu, millest nähtub, et

$$\log a + \log b = \log x.$$

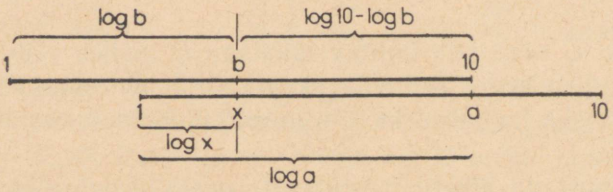
Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log ab = \log x,$$

millest

$$ab = x.$$

Kui C-d peaksid sattuma väljapoole skaala D piirkonda, siis viime C-1 asemel C-10 D-a kohale. Niisugust skaala C otste vahetamist nimetatakse keele ü l e l ü k k e k s. Peale ülelükke teostamist on lükatil joonisel 59 näidatud seis ja me leiame korrutise x tüvenumbrid C-d kohalt skaalal D.



Joon. 59.

Tõestuseks vaatleme joonist 59, millest nähtub, et

$$\log a = \log x + \log 10 - \log b,$$

millest

$$\log a + \log b = \log x + \log 10.$$

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log ab = \log (x \cdot 10),$$

kust

$$ab = x \cdot 10$$

ja

$$\frac{ab}{10} = x.$$

Nii esimese kui ka teise lükatiseisu puhul leiame lükatilt kahe arvu a ja b korrutise tüvenumbrid. Koma asukoha aga määrame vastuse ligikaudse hindamise teel.

Näiteks korrutades lükatil

$$2{,}78 \cdot 1{,}28,$$

leiame esmalt vastuse kolm tüvenumbrit 3—5—6. Koma asukoha määramiseks ümardame $2{,}78 \approx 3$ ja $1{,}28 \approx 1$. Et $3 \cdot 1 = 3$, siis peab vastus olema

$$3{,}56.$$

Täpne vastus on 3,5584, mis erineb lükatil saadud vastusest 0,0016 võrra.

Ülesandeid.

347. Kontrolli lükatiga järgnevad korrutised:

1) $2{,}2 \cdot 4{,}5 = 9{,}90$
$3{,}7 \cdot 1{,}8 = 6{,}66$
$5{,}8 \cdot 1{,}23 = 7{,}13$
$4{,}9 \cdot 2{,}02 = 9{,}90$

2) $6{,}5 \cdot 4{,}4 = 28{,}6$
$7{,}8 \cdot 2{,}05 = 16{,}0$
$8{,}6 \cdot 5{,}07 = 60{,}6$
$3{,}2 \cdot 5{,}7 = 18{,}2$

3) $13{,}5 \cdot 28 = 378$
$256 \cdot 4{,}7 = 1200$
$48{,}5 \cdot 333 = 16150$
$208 \cdot 7{,}2 = 1500$

4) $3{,}78 \cdot 0{,}64 = 2{,}42$
$256 \cdot 0{,}072 = 18{,}4$
$80{,}5 \cdot 0{,}473 = 38{,}0$
$0{,}082 \cdot 0{,}407 = 0{,}0334$

348. Korruta:

1) $3{,}8 \cdot 1{,}9$
$3{,}08 \cdot 1{,}9$
$2{,}75 \cdot 2{,}8$
$1{,}2 \cdot 5{,}7$

2) $7{,}8 \cdot 3{,}4$
$6{,}45 \cdot 4{,}05$
$8{,}3 \cdot 2{,}7$
$8{,}03 \cdot 2{,}7$

3) $32 \cdot 1{,}4$
$2{,}8 \cdot 308$
$11{,}5 \cdot 66$
$545 \cdot 37{,}8$

4) $7{,}8 \cdot 0{,}24$
$0{,}675 \cdot 323$
$0{,}094 \cdot 0{,}52$
$2060 \cdot 0{,}0132$

349. Kolhoosis maksti enne rahalisele töötasule üleminekut naturaaltasu normipäevade eest alljärgneva arvestustabeli järgi, kusjuures ühe normipäeva eest maksti 5,7 kg kartuleid ja 3,4 kg teravilja.

Jrk. nr.	Kolhoosniku nimi	Normipäevade arv	Kartuleid (kg)	Teravilja (kg)
1.	Mägi, J.	128		
2.	Jõgi, K.	203		
3.	Mets, M.	171		
4.	Karu, P.	84		
5.	Oja, V.	264		
6.	Meri, J.	193		
	KOKKU			

Täida arvestustabeli tühjad lahtrid.

Kuidas tuleb arvutuslükatil arvutada, et keele nihkeid oleks võimalikult vähe?

Kuidas saab kontrollida arvutuste õigsust?

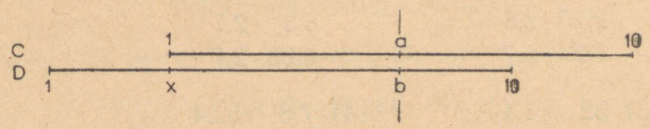
§ 61. JAGAMINE LÜKATI SKAALADE D JA C ABIL.

Korrutise $x \cdot a = b$ leidmisel on lükatiseis selline, nagu joonistel 60 ja 61.

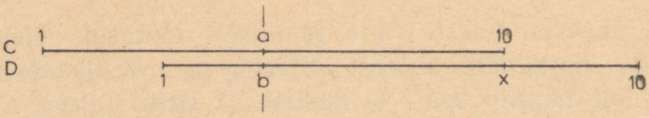
Siit järeldame, et jagatise

$$x = \frac{b}{a}$$

leidmiseks peame *D*-*b* ja *C*-*a* viima üksteise kohale ja vastuse lugema skaalalt *D* *C*-1 või *C*-10 kohalt.



Joon. 60.



Joon. 61.

Näiteks jagades

$$545 : 13{,}8,$$

märgime märkijaga *D*-545 ja viime siis *C*-138 märkija kriipsu alla. Selliselt toimides satuvad *D*-545 ja *C*-138 üksteise kohale ja me saame jagatise tüvenumbrid 3—9—5 lugeda skaalalt *D* *C*-l kohalt.

Koma asukoha määramiseks ümardame $545 \approx 500$; $13{,}8 \approx 10$ ja jagame $500 : 10 = 50$, millest järeldame, et jagatis peab olema kahekohalise täisosaga arv. Seega

$$545 : 13{,}8 = 39{,}5.$$

Samuti leiame, et

$$6{,}85 : 2{,}77 = 2{,}47,$$
$$1760 : 38 = 46{,}3,$$
$$0{,}346 : 6{,}9 = 0{,}0502 \text{ jne.}$$

Ülesandeid.

350. Kontrolli lükatiga järgmised jagatised:

1) $5{,}3 : 2{,}9 = 1{,}825$
$8{,}8 : 3{,}7 = 2{,}38$
$6{,}55 : 4{,}5 = 1{,}455$
$3{,}07 : 1{,}16 = 2{,}64$

2) $4{,}8 : 7{,}2 = 0{,}667$
$1{,}06 : 6{,}8 = 0{,}156$
$2{,}43 : 2{,}85 = 0{,}853$
$7{,}4 : 9{,}05 = 0{,}818$

3) $16{,}7 : 3{,}06 = 5{,}46$
$882 : 72 = 12{,}25$
$6{,}3 : 17{,}8 = 0{,}354$
$44 : 960 = 0{,}0458$

4) $0{,}81 : 3{,}72 = 0{,}218$
$62{,}5 : 0{,}48 = 130$
$7{,}7 : 0{,}0203 = 379$
$0{,}505 : 0{,}065 = 7{,}77.$

351. Arvuta:

1) $6{,}9 : 5{,}3$
$4{,}75 : 1{,}92$
$9{,}6 : 7{,}85$
$3{,}78 : 2{,}04$

2) $5{,}3 : 7{,}8$
$5{,}53 : 9{,}55$
$6{,}73 : 8{,}9$
$1{,}17 : 4{,}07$

3) $18{,}3 : 4{,}7$
$29{,}3 : 61$
$3{,}07 : 98$
$528 : 370$

4) $6{,}42 : 0{,}87$
$0{,}465 : 3{,}93$
$0{,}1095 : 0{,}082$
$333 : 0{,}71$

352. Leia voolu tugevused tabelis antud takistustega juhtmetes, kui pinge on 220, 170 ja 32 volti.

Jrk. nr.	Juhtme takistus oomides	Voolutugevused amprites		
		220 V	170 V	32 V
1.	17			
2.	8,6			
3.	54			
4.	3,4			
5.	0,72			

§ 62. MÕNEDE MURDUDE ARVUTAMINE LÜKATIGA.

Murde, mille lugejas olevate tegurite arv võrdub nimetajas olevate tegurite arvuga või on sellest ühe võrra suurem, arvutatakse kõige lihtsamalt nii, et jagamise ja korrutamise tehteid sooritatakse vaheldumisi.

Näide.

$$x = \frac{2{,}7 \cdot 0{,}84 \cdot 62}{3{,}3 \cdot 4{,}7}.$$

Alustame alati jagamisega:

$$\begin{aligned} 2{,}7 : 3{,}3 &= v_1, \\ v_1 \cdot 0{,}84 &= v_2, \\ v_2 : 4{,}7 &= v_3, \\ v_3 \cdot 62 &= x. \end{aligned}$$

Niisuguse tehete järjekorra juures on erinevate lükatiseisude arv minimaalne ja peale selle pole tarvis lugeda ja märkida vahepealseid tulemusi v_1, v_2, v_3. Kui lõpptulemuse tüvenumbrid 9—0—5 on leitud, määrame koma asukoha murru väärtuse hindamise teel, näiteks nii:

$$\begin{aligned} 2{,}7 : 3{,}3 &\approx 1, \\ 1 \cdot 0{,}84 &\approx 0{,}8, \\ 0{,}8 \cdot 60 &\approx 50, \\ 50 : 4{,}7 &\approx 10. \end{aligned}$$

Seega,

$$x = 9{,}05.$$

Ülesandeid.

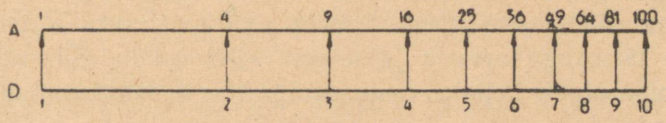
353. 1) $\frac{6 \cdot 17{,}4}{8{,}3}$ 2) $\frac{72 \cdot 0{,}34}{6{,}8}$

354. 1) $\frac{14,6 \cdot 81}{34,2 \cdot 26}$ 2) $\frac{0,55 \cdot 4,3 \cdot 23}{0,08 \cdot 11,2}$

355. 1) $\frac{1,83 \cdot 20,4 \cdot 7,8}{0,4 \cdot 10,5 \cdot 8,9}$ 2) $\frac{93 \cdot 0,58 \cdot 48 \cdot 1,09}{68,5 \cdot 16,2 \cdot 0,26}$

§ 63. RUUTUDE JA RUUTJUURTE LEIDMINE LÜKATIGA.

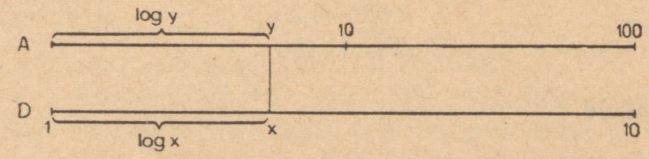
Skaalade A ja B peamine ülesanne ei seisne mitte korrutamis- ja jagamistehete teostamises, vaid arvu ruudu ning ruutjuure leidmises.



Joon. 62.

Võrdleme skaalade A ja D kohakuti seisvaid arve (joon. 62). Võrdlus näitab, et skaala D arvudele vastavad skaalal A nende arvude ruudud.

Tõestuseks vaatleme kahte suvalist teineteise kohal asuvat arvu y ja x skaalal A ja D (joon. 63).



Joon. 63.

Nende arvude kümnendlogaritmidele $\log y$ ja $\log x$ vastavad lõigud skaaladel on võrdsed. Kuna aga esimese lõigu kujutamisel kasutatud ühik on kaks korda väiksem teise lõigu kujutamisel kasutatud ühikust, siis $\log y$ arvuline väärtus on kaks korda suurem $\log x$ arvulisest väärtusest:

$$\log y = 2 \log x.$$

Kuid siis

$$\log y = \log x^2$$

ja

$$y = x^2.$$

Sedasama võime tõestada ka skaalade *B* ja *C* kohakuti seisvate arvude kohta.

Arvu ruudu leidmiseks paigutame märkija skaala *D* vastavale kriipsule ja arvu ruudu tüvenumbrid loeme skaalalt *A* märkija alt.

Kui arv on ühekohalise täisosaga, siis arvu ruut võib olla ühe- või kahekohalise täisosaga. Kas arvu ruut on ühe- või kahekohalise täisosaga, seda näeme otsekohe skaalalt *A*. Kui arv ei ole ühekohalise täisosaga, siis loeme skaalalt *A* ainult arvu ruudu tüvenumbrid ja koma asukoha määrame hindamise teel. Koma asukoha määramisel võime rakendada ka ruutude tabeli puhul kasutatavat koma nihutamise võtet. Selleks vaatleme arvu esmalt ühekohalise täisosaga arvuna ja leiame selle ruudu. Siis nihutame arvus koma õigele kohale, vastuses aga teeme sama komanihutuse kaks korda.

N ä i d e 1. Et leida 354^2, leiame esmalt $3{,}54^2 = 12{,}5$. Nüüd nihutame arvus koma õigele kohale, s. o. kahe koha võrra paremale. Arvu ruudus aga teeme sama komanihutuse kaks korda, s. t. nihutame koma paremale nelja koha võrra ja me saame

$$354^2 = 125\,000.$$

N ä i d e 2. Samuti leiame $0{,}208^2$.

$$2{,}08^2 = 4{,}33,$$
$$0{,}208^2 = 0{,}0433$$

Ülesandeid.

Leia järgmiste arvude ruudud:

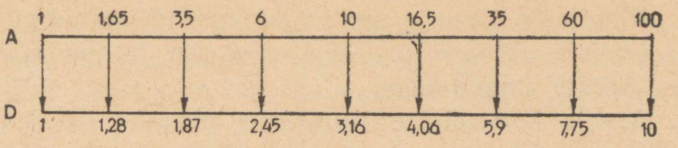
356. 4; 7; 10; 7; 26; 3,16; 0,41; 50,5; 0,155.

357. 91,3; 88; 8,08; 0,0745; 2380; 667; 6,07; 0,137.

*

On arusaadav, et kui asetada märkija skaala *A* mingile arvule, siis peab märkija all skaalal *D* olema arv, mis vastab skaala *A* arvu ruutjuurele. Ruutjuure leidmisel peame skaala *A* esimese poole arve lugema ühekohalise täisosaga arvudeks, teise poole arve aga kahekohalise täisosaga arvudeks ja skaala *D* arve ühekohalise täisosaga arvudeks.

Joonisel 64 on näidatud ruutjuurte leidmine nii ühekohalise kui ka kahekohalise täisosaga arvudest.



Joon. 64.

Arve, mis pole ühe- või kahekohalise täisosaga, muudame niisugusteks koma nihutamisega k a h e k o h a kaupa ja leiame siis ruutjuure. Kui ruutjuur on leitud, siis viime arvus koma õigele kohale tagasi, vastuses aga teeme sama komanihutuse kaks korda vähem.

Näiteks $\sqrt{360}$ leidmisel nihutame mõttes koma kahe koha võrra vasakule ja leiame $\sqrt{3{,}6}=1{,}9$. Siis viime arvus koma õigele kohale, s. o. kaks kohta paremale, vastuses aga teeme sama komanihutuse kaks korda vähem, s. o. viime koma ühe koha võrra paremale. Seega, $\sqrt{360}=19$.

Samuti leiame veel, et $\sqrt{0{,}73}=0{,}855$; $\sqrt{66\,000}=257$;

$$\sqrt{1780}=42{,}2;\ \sqrt{0{,}005}=0{,}0707;\ \sqrt{3850000}=1960.$$

Ülesandeid.

358. Leia ruutjuured järgmistest arvudest:
1) 3,9; 39; 2,02; 202; 115; 0,115; 6000; 0,6.
2) 0,07; 0,7; 440; 82000; 0,0051; 1080; 920000.

359. Lahenda lükati abil järgmised ülesanded:

1) $8{,}4^2+6{,}75^2$;
2) $\sqrt{32{,}5^2-17{,}6^2}$;
3) $\sqrt{520}+\sqrt{425}$;
4) $\sqrt{\sqrt{0{,}42}-\sqrt{0{,}32}}$.

360. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 425 m ja 380 m. Leia hüpotenuus.

361. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 9,2 cm ja üks kaatet 7,8 cm. Leia teine kaatet.

362. Võrdhaarse trapetsi lühem alus on 17,6 m, pikem alus 28 m ja haar 20,8 m. Leia trapetsi pindala.

363. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 68,6 cm ja haar 19,2 cm. Leia kolmnurga pindala.

364. Ringile on ühest ja samast punktist tõmmatud puutuja ja lõikaja. Lõikaja välisosa pikkus on 4,9 cm ja puutuja pikkus 7,05 cm. Arvuta ringi raadius.

365. Arvuta korrapärase kuusnurga pindala, kui kuusnurga külje pikkus on 5,6 m.

Märkus. Ruutude ja ruutjuurte leidmisel võib skaalade *A* ja *D* asemel kasutada ka skaalasid *B* ja *C*.

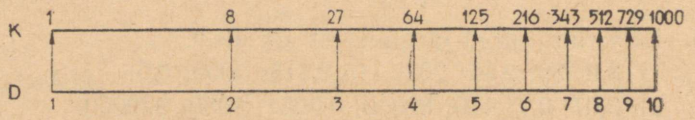
§ 64. KUUPIDE JA KUUPJUURTE LEIDMINE LÜKATIGA

Skaala *K* koosneb kolmest ühepikkusest osast, mille põhijaotuskriipsud on tähistatud arvudega 1, 2, 3, ..., 9. Vaadates nendele arvudele vasakpoolses osas kui üheliste numbritele, keskmises osas kui kümnelistele ja parempoolses osas kui sajalistele, võime skaalal *K* märkida arve vahemikus 1-st 1000-ni.

Tee kindlaks kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus skaala üksikutes põhikriipsuvahedes!

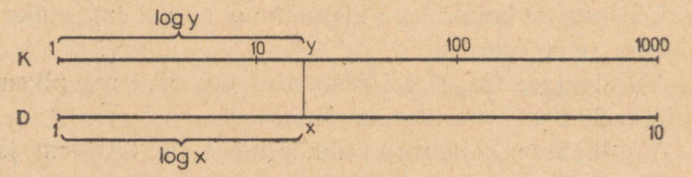
Arvutamisel opereerime ainult arvu tüvenumbritega.

Ühekohalise täisosaga arvu kuubi leidmiseks paigutame märkija skaala *D* vastavale arvule ja vastuse loeme skaalal *K* märkija alt (joon. 65).



Joon. 65.

Tõestuseks vaatleme kahte suvalist kohakuti seisvat arvu y ja x skaalal *K* ja skaalal *D*. Nende arvude kümnendlogaritmidele ($\log y$ ja $\log x$) vastavad lõigud skaaladel on võrdsed (joon. 66).



Joon. 66.

Kuna aga esimese lõigu kujutamisel kasutatud ühik on kolm korda väiksem teise lõigu kujutamisel kasutatud ühikust, siis $\log y$ arvuline väärtus on kolm korda suurem $\log x$ arvulisest väärtusest:

$$\log y = 3 \log x.$$

Kuid siis

$$\log y = \log x^3$$

ja

$$y = x^3.$$

Ülesandeid.

Leia järgmiste arvude kuubid:

366. 2; 4; 7; 1,5; 2,7; 6,3; 8,3; 4,7; 9,1.

367. 2,66; 1,72; 1,06; 3,72; 3,08; 9,05; 7,75.

368. 3,87; 6,23; 7,07; 8,88; 1,915; 2,05; 4,33.

*

Kui arvu täisosa ei ole ühekohaline, siis teeme ta selliseks koma nihutamise teel ja leiame kuubi. Seejärel viime arvus koma endisele kohale tagasi, vastuses aga teeme sama komanihutuse kolm korda.

Näiteks, et leida 528^3, leiame esmalt $5{,}28^3 = 147$. Nüüd nihutame koma arvus endisele kohale, s. o. 2 kohta paremale. Vastuses peame tegema sama komanihutuse kolm korda, s. t. peame viima koma 6 kohta paremale, seega

$$528^3 = 147\,000\,000.$$

Niisamuti leiame $0{,}214^3$:

$$2{,}14^3 = 9{,}8;$$
$$0{,}214^3 = 0{,}0098.$$

Ülesandeid.

Leia järgmiste arvude kuubid:

369. 15,4; 154; 288; 92,5; 0,0444; 0,007; 1729.

370. 2760; 17,85; 2970; 0,955; 0,3; 0,03; 1040.

*

Kuupjuure leidmisel talitame ümberpöördult, s. t. märgime arvu skaalal K ja loeme vastuse skaalalt D. Kui antud arv on ühe-, kahe- või kolmekohalise täisosaga, kasutame vastavalt esimest, teist või kolmandat skaala K osa. Vastuse saame niisuguse arvu korral alati ühekohalise täisosaga.

Näiteid. $\sqrt[3]{5{,}2} = 1{,}73$; $\sqrt[3]{29{,}5} = 3{,}09$; $\sqrt[3]{380} = 7{,}25$.

Ülesandeid.

Leia kuupjuured järgmistest arvudest:

371. 5; 50; 500; 325; 17,2; 1,48; 22,6; 10; 100.

372. 304; 3,4; 25,6; 820; 93,5; 73,3; 1,89; 1,09.

*

Kui arv ei ole ühe-, kahe- või kolmekohalise täisosaga, siis teeme ta kõigepealt selliseks, nihutades koma kolme koha kaupa. Pärast juurimist viime koma arvus endisele kohale tagasi, vastuses aga teeme sama komanihutuse kolm korda vähem.

Näiteks $\sqrt[3]{37000000}$ arvutamiseks leiame esmalt $\sqrt[3]{37}=3{,}33$. Siis viime arvus koma endisele kohale, s. o. 6 kohta paremale; vastuses aga peame koma nihutama 2 kohta paremale, seega

$$\sqrt[3]{37000000}=333.$$

Samuti leiame $\sqrt[3]{0{,}27}$:

$$\sqrt[3]{270}=6{,}46;$$

$$\sqrt[3]{0{,}27}=0{,}646.$$

Ülesandeid.

Leia lükatil kuupjuured järgmistest arvudest:

373. 4320; 43200; 0,432; 0,22; 0,2; 100000; 0,01.

374. 0,0008; 72000000; 40500; 0,067; 0,129; 0,0125.

Arvuta:

375. $\sqrt[3]{14{,}8^2+6{,}7^3}$ 2) $\sqrt[3]{328^2-260^2}$

376. 1) $0{,}47^3-0{,}38^3$ 2) $\sqrt[3]{7600000}$

377. $\sqrt[3]{56^2}$; $\sqrt[3]{455^2}$; $\sqrt[3]{0{,}79^2}$; $\sqrt[3]{0{,}006^2}$.

378. $\sqrt[3]{6{,}8^3}$; $\sqrt[3]{380^3}$; $\sqrt[3]{0{,}157^3}$; $\sqrt[3]{0{,}026^3}$.

379. Kuubi ruumala on 85 cm³. Leia kuubi ühe tahu pindala.

380. Kui suur on kuubi ruumala, kui tahu pindala on 4,26 m²?

Keele keskmine skaala on samasugune nagu skaala C, kuid ta on trükitud keelele vastupidises järjekorras, nii et tema alguskriips on kohakuti skaala C lõppkriipsuga. Sellest sõltuvalt kasvavad jaotustele vastavad arvud paremalt vasakule, mida tuleb silmas pidada jaotuste märkimisel ja lugemisel. Seda skaalat nimetatakse pöördarvude skaalaks ja tähistatakse tähega R.

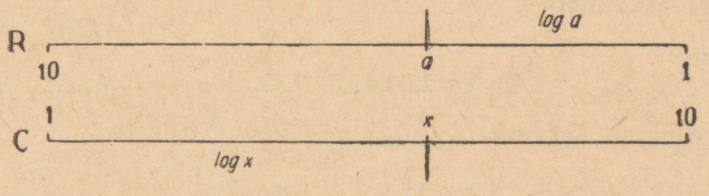
Märkides niidiga skaala R jaotuse a, loeme skaalal C niidi alt arvu a pöördväärtuse $\frac{1}{a}$ tüvenumbrid.

Näiteid. 1) Arvu 4,2 pöördarvu tüvenumbrid on 2—3—8, seega

$$\frac{1}{4{,}2}=0{,}238.\quad 2)\ \frac{1}{18{,}7}=0{,}0535.\quad 3)\ \frac{1}{710}=0{,}00141.\quad 4)\ \frac{1}{0{,}27}=3{,}7.$$

$$5)\ \frac{1}{0{,}052}=19{,}2.$$

Tõestuseks vaatleme joonist 67.



Joon. 67

Joonisel on näha, et

$$\log x+\log a=\log 10,$$

millest

$$x\cdot a=10$$

ja

$$x=\frac{10}{a}.$$

On ilmne, et arvudel $\frac{1}{a}$ ja $\frac{10}{a}$ on ühesugused tüvenumbrid.

Eespool toodud näidetest selgub, et kui arvu väärtus asub 1 ja 10 vahel, siis pöördarvu tüvenumbrite ees on 0; kui arvu väärtus asub 10 ja 100 vahel, siis pöördarvu tüvenumbrite ees on 0,0 jne. Aga kui arvu väärtus asub 1 ja 0,1 vahel, siis pöördarv on ühekohalise täisosaga; kui arvu väärtus asub 0,1 ja 0,01 vahel, siis pöördarv on kahekohalise täisosaga jne.

Ülesandeid.

381. Leia järgmiste arvude pöördarvud.
3,7; 22,6; 450; 1080; 0,54; 0,0062;
0,074; 0,209; 92500; 0,000164; 72,3.

382. Mitu % moodustab arv 1 arvudest 3,8; 21,4;
14,7; 0,403; 0,0695; 127; 0,595?

383. Takistused 8,2; 12,5; 17,8 ja 20,6 oomi on ühendatud paralleelselt. Leia kogutakistus.

§ 66. PÖÖRDARVUDE SKAALA KASUTAMINE AVALDISE VÄÄRTUSE ARVUTAMISEL.

Eespool nägime, et lükatiga on hõlbus arvutada avaldise väärtust, kui alustada saab jagamisega ja edasi sooritada korrutamise ja jagamise tehteid vaheldumisi. Kui niisugust tehete järjekorda ei saa kasutada avaldise arvutamisel, siis on mõnel juhul võimalik avaldist nii teisendada, et tehete järjekord muutub sobivamaks lükatiga arvutamisel.

Näide 1.

$$x = 2{,}6 \cdot 41{,}5 \cdot 0{,}82.$$

Teisendame korrutise kujule

$$x = 2{,}6 : \frac{1}{41{,}5} \cdot 0{,}82$$

ja teeme siis kõik tehted järjest, võttes arvu 41,5 skaalalt R.

Et viimane tehe on korrutamine, leiame skaalalt D niidi alt korrutise tüvenumbrid 8—8—5. Korrutise hindamisel saame kahekohalise täisosaga arvu, seega

$$x = 88{,}5.$$

Näide 2.

$$\frac{32{,}6}{15{,}4 \cdot 2{,}7 \cdot 0{,}42} = 32{,}6 : 15{,}4 \cdot \frac{1}{2{,}7} : 0{,}42 = 1{,}86.$$

Ülesandeid.

384. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1) $16{,}2 \cdot 5{,}8 \cdot 0{,}23$
2) $6{,}05 \cdot 72{,}1 \cdot 0{,}133 \cdot 4{,}8$
3) $\frac{8{,}3 \cdot 14{,}7 \cdot 0{,}67}{3{,}88}$

4) $\frac{5{,}55}{131 \cdot 0{,}27 \cdot 0{,}183}$

5) $\frac{1}{4{,}65 \cdot 0{,}72 \cdot 3{,}8}$

385. Vasest risttahuka mõõtmed on 15,8, 8,6 ja 7,2 cm. Leia risttahuka kaal. (Vase erikaal on 8,5.)

386. Siseujula basseini pikkus on 25 m ja laius 11,4 m. Kui kõrgele tõuseb veepind basseinis, kui sinna pumbata 430 m^3 vett?

*

Keerukama avaldise arvutamisel võib tekkida raskus koma koha määramisel. Sel juhul on otstarbekas kirjutada iga arv avaldises nii, et arv oleks ühekohalise täisosaga arvu ja kümne astme korrutis.

Näide.

$$\frac{8200 \cdot 0{,}037}{0{,}00072} = \frac{8{,}2 \cdot 10^3 \cdot 3{,}7 \cdot 10^{-2}}{7{,}2 \cdot 10^{-4}}.$$

Ülesandeid.

387. Arvuta.

1) $42000 \cdot 670 \cdot 840$

2) $22{,}8 \cdot 0{,}00485 \cdot 0{,}00017$

3) $\frac{0{,}056 \cdot 50300}{0{,}0091 \cdot 3{,}6 \cdot 6650}$

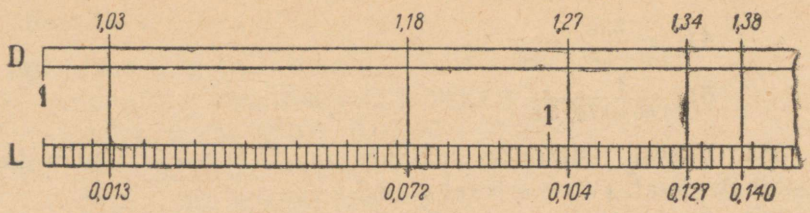
4) $\frac{192000 \cdot 470 \cdot 0{,}0069}{0{,}044 \cdot 0{,}0081}$

§ 67. LOGARITMIDE SKAALA.

Skaala D on logaritmfunktsiooni $y = \log x$ skaala. Et leida selle skaala abil mingi arvu x logaritmi y, peame mõõtma lõigu pikkuse, mis asub skaala D esimese jaotuskriipsu ja arvule x vastava jaotuskriipsu vahel, võttes mõõtühikuks kogu skaala pikkuse. Selleks kasutame lükati korpuse esikülje alumist skaalat L.

Skaala L mõõtühikuks on kogu skaala pikkus, mis on jaotatud kümnendikeks, kümnendikud omakorda sajandikeks ja sajandikud kahetuhandikeks.

Kui niidiga märgime arvu x skaalal D, siis on skaalal L niidi all arvu x logaritmi murdosa.



Joon. 68.

Joonisel 68 näeme, et

$\log 1{,}03 = 0{,}013$, $\log 1{,}27 = 0{,}104$;
$\log 1{,}18 = 0{,}072$, $\log 1{,}38 = 0{,}140$.

Logaritmi täisosa määrame varem õpitud reegli järgi. Nii on

$\log 103 = 2{,}013$, $\log 0{,}0013 = \overline{3},114$,
$\log 0{,}118 = \overline{1},072$, $\log 1380 = 3{,}140$.

Ülesandeid.

389. Leia lükati abil järgmiste arvude logaritmid ja võrdle tulemusi tabelite abil leitud logaritmidega:

2; 3; 8; 2,7; 5,8; 3,42; 7,45;
427; 5200; 0,0062; 0,0405; 72400; 100;
0,0005; 17,1; 0,101; 0,0925; 700000.

*

Kui on tarvis leida arvu tema antud logaritmi järgi, siis märgime niidiga skaalal L antud logaritmi murdosa ja loeme skaalalt D niidi alt arvu tüvenumbrid. Koma asukoha arvus määrame varem õpitud reegli järgi.

Näiteks, kui

1) $\log x = 0{,}114$, siis $x = 1{,}3$;
2) $\log x = 2{,}076$, siis $x = 119$;
3) $\log x = \overline{1},550$, siis $x = 0{,}355$;
4) $\log x = 1{,}4$, siis $x = 25{,}1$.

Ülesandeid.

390. Leia lükati abil arvud, kui arvude kümnendlogaritmid on:

$1{,}5$; $1{,}24$; $\bar{1}{,}06$; $2{,}448$; $0{,}526$; $0{,}062$;
$3{,}004$; $\bar{1}{,}737$; $\bar{2}{,}203$; $\bar{3}{,}048$; $2{,}402$; $1{,}007$.

*

Lükati skaalad D ja L asendavad kolmekohalisi logaritmide tabeleid.

Lahendame näiteks mõned ülesanded, kasutades tabelite asemel lükatit.

1) Arvutame x, kui

$$x = 7{,}25^4 \cdot \sqrt[5]{0{,}026}.$$

$$\log x = 4 \cdot \log 7{,}25 + \frac{1}{5} \log 0{,}026 = 4 \cdot 0{,}86 + \frac{1}{5} \cdot \bar{2}{,}415 =$$
$$= 3{,}440 + \bar{1}{,}683 = 3{,}123.$$
$$x = 1340.$$

2) Leiame x võrrandist

$$1{,}7^x = 5{,}9.$$
$$x \cdot \log 1{,}7 = \log 5{,}9;$$
$$x = \frac{\log 5{,}9}{\log 1{,}7} = \frac{0{,}771}{0{,}231} = 3{,}34.$$

3) Arvutame x, kui

$$x = \log_{2{,}7} 17{,}5.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal võime kirjutada

$$2{,}7^x = 17{,}5.$$

Saadud eksponentvõrrandi lahendame kümnendlogaritmide abil järgmiselt:

$$x \cdot \log 2{,}7 = \log 17{,}5;$$
$$x = \frac{\log 17{,}5}{\log 2{,}7} = \frac{1{,}243}{0{,}432} = 2{,}88.$$

Ülesandeid.

391. Kasutades lükatit, arvuta logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused.

1) $57{,}5^{1{,}2}$

2) $\sqrt[5]{1000}$

3) $15{,}8 \cdot \sqrt[7]{0{,}00805}$

4) $\frac{302^{0{,}8}}{47{,}5^{2{,}4}}$

5) $\frac{3{,}44 \cdot \sqrt[5]{4200}}{2{,}42^3}$ 6) $\frac{28{,}2 \cdot \sqrt[6]{0{,}685}}{1{,}93^5 \cdot \sqrt[5]{930}}$.

392. 1. Lahenda järgmised eksponentvõrrandid:

1) $4{,}4^x = 39{,}2$ 3) $3{,}82^x = 0{,}73$
2) $0{,}24^x = 60{,}5$ 4) $21{,}4^x = 1{,}83$

2. Leia järgmised logaritmid:

1) $\log_2 3$ 3) $\log_{19} 7{,}8$
2) $\log_{0{,}17} 2{,}1$ 4) $\log_{0{,}3} 7$

V. KOLMNURGA LAHENDAMINE.

§ 68. TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMINE LOGARITMIDE KASUTAMISEGA.

Kui andmetena esinevad arvud on enam kui kahe tüvenumbriga, siis kolmnurga lahendamisel on kasulik teha arvutusi logaritmide abil.

Matemaatiliste tabelite kogudes on peale nurgafunktsioonide tabelite ka nende funktsioonide logaritmide tabelid, kust saame leida kas nurga antud suuruse järgi soovitava funktsiooni logaritmi või ümberpöördult — nurgafunktsiooni logaritmi järgi nurga.

Näiteks:

$$\log \sin 31°42' = \overline{1},7205;$$
$$\log \cos 40°45' = \overline{1},8794;$$
$$\log \tan 69°20' = 0,4235.$$

Mõned näited ka nurga leidmise kohta nurgafunktsiooni antud logaritmi järgi:

$\log \sin \alpha = \overline{1},7723;$ $\alpha = 36°18'.$

$\log \tan \beta = \overline{1},3032;$ $\beta = 11°22'.$

Ülesandeid.

393. Leia.

1) $\log \sin 16°24'$, $\log \tan 19°30'$, $\log \cos 72°12'$, $\log \cot 32°12'$

2) $\log \sin 42°54'$, $\log \tan 59°18'$, $\log \cos 26°42'$, $\log \cot 7°36'$

3) $\log \sin 47°15'$, $\log \tan 8°08'$, $\log \cos 16°45'$, $\log \cot 56°17'$

4) $\log \sin 4°41'$, $\log \tan 30°04'$, $\log \cos 72°19'$, $\log \cot 83°16'$

394. Leia trigonomeetrilise funktsiooni antud logaritmi järgi vastav nurk.

1) $\log \sin x = \overline{2},7183$
$\log \tan x = \overline{2},8960$
$\log \cos x = \overline{1},8053$
$\log \cot x = \overline{1},9529$

2) $\log \sin y = \overline{1},9656$
$\log \tan y = 0,4068$
$\log \cos y = \overline{1},9998$
$\log \cot x = 0,5174$

3) $\log \sin x = \overline{1},5692$
$\log \tan x = \overline{1},7375$
$\log \cos x = \overline{1},9776$
$\log \cot x = 0,6934$

4) $\log \sin x = \overline{1},9320$
$\log \tan y = \overline{0},4496$
$\log \cos y = \overline{1},7199$
$\log \cot y = 1,7759$

Lahendame nüüd täisnurkse kolmnurga logaritmide kasutamisega.

Ülesanne. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 23,5$ mm ja kaatet $b = 24,1$ mm. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad ja hüpotenuus?

Lahendus.

1) $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{23,5}{24,1}$;
$\log \alpha = 1,3711$;
$\log b = 1,3820$;
$\log \tan \alpha = \overline{1},9891$;
$\alpha = 44°17' \approx 44°20'$.

2) $\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{24,1}{23,5}$;
$\log b = 1,3820$;
$\log a = 1,3711$;
$\log \tan \beta = 0,0109$;
$\beta = 45°43' \approx 45°40'$.

3) $\frac{a}{c} = \sin \alpha$;
$c = \frac{a}{\sin \alpha}$;
$\log a = 1,3711$;
$\log \sin \alpha = \overline{1},8439$;
$\log c = 1,5272$;
$c = 33,67 \approx 33,7$ mm.

Kontroll:
$a^2 = 552,2$;
$b^2 = 580,8$;
$a^2 + b^2 = 1133,0 = c^2$;
$c = \sqrt{1133} = 33,66 \approx 33,7$.

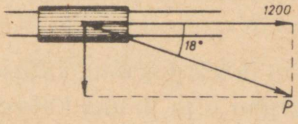
Vastus. Kolmnurga teravnurgad on 44°20′ ja 45°40′; hüpotenuus on 33,7 mm.

Ülesandeid.

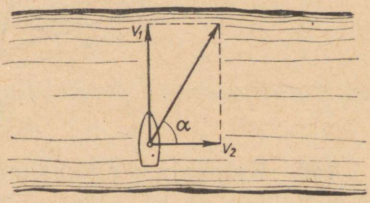
395. Lahenda täisnurkne kolmnurk, ümardades tulemused vastavalt andmetele.

1) $a=25$; $b=75$.
2) $a=31$; $c=76$.
3) $a=30{,}2$; $\beta=53°20'$.
4) $b=32{,}2$; $\beta=62°30'$.
5) $c=32{,}5$; $b=18{,}4$.
6) $c=4{,}56$; $a=2{,}88$.
7) $c=32{,}54$; $\alpha=26°42'$.
8) $a=12{,}75$; $c=20{,}58$.

396. Raudtee-vagunit, mida rööpme sihis mõjuv jõud 1200 kG võib paigast ära nihutada, tõmbab rööpme kõrval liikuv traktor (joon. 69). Vagunit ja traktorit ühendav vaier moodustab rööpme sihiga nurga 18°. Kui suure jõuga P tõmbab traktor?

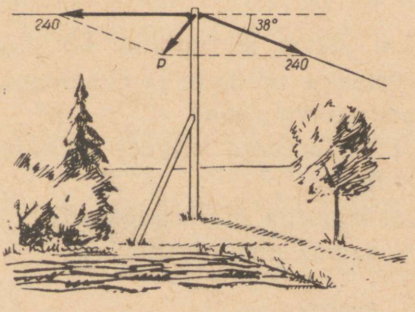


Joon. 69.

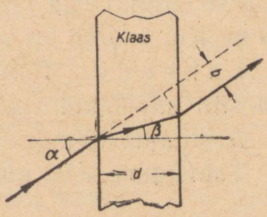


Joon. 70.

397. Mootorpaat sõidab kiirusega $v_1=1{,}7\ \frac{m}{s}$. Paat sõidab üle jõe, mille voolu kiirus $v_2=0{,}9\ \frac{m}{s}$ (joon. 70). Kui suure nurga α all liigub paat kalda suhtes, kui tüüritakse kaldaga risti?



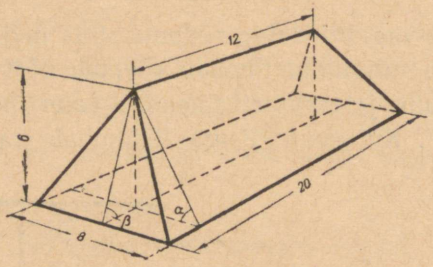
Joon. 71.



Joon. 72.

398. Kõrgepinge kaabel juhitakse ühest isolaatoripostist oma sihist horisontaaltasapinnas 38° võrra kõrvale (joon. 71). Kaabel on pingutatud jõuga 240 kG. Kui suur on horisontaalne jõud P, millega kaabel kisub posti viltu?

399. Tasaparalleelsele klaasplaadile kaldu langev valguskiir teeb plaati läbides paralleelse nihke b (joon. 72). Arvuta see nihe, kui plaadi paksus $d=26$ mm, murdumisnäitaja $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=1{,}5$ ja langemisnurk $\alpha=30°$.



Joon. 73.

400. Kelpkatuse pikkus on 20 m, laius 8 m ja kõrgus 6 m, katuse harja pikkus on 12 m (joon. 73). Arvuta nurgad α ja β, mis katuse pinnad moodustavad laega.

§ 69. VEA ÜLEMMÄÄR NURGA ARVUTAMISEL.

Kui lineaarsed andmed (pikkused) nurga arvutamiseks on saadud mõõtmise teel, siis on nad ligikaudsed arvud, mistõttu ka nurga suurus kui arvutustulemus on ligikaudne. Selle tulemuse ümardamisel peame teadma, kui suur viga võib ülimalt tekkida nurga arvutamisel. Selgitame nurga vea ülemmäära leidmist näidete varal.

N ä i d e 1. Laste mänguväljakul oleval muruplatsil on täisnurkse kolmnurga kuju, mille üks kaatet on 35 m ja hüpotenuus 60 m. Kui suured on selle muruplatsi teravnurgad?

L a h e n d u s. Paneme tähele, et kolmnurga külgede pikkused on siin mõõdetud veaga mitte üle 0,5 m.

Arvutame 35-meetrise kaateti vastasnurga suuruse tõkked.

Tähistades selle nurga tähega α, saame $\sin\alpha$ ülemtõkkeks

$$\frac{35{,}5}{59{,}5}=\frac{71}{119}=0{,}597;$$

seega nurga α enda ülemtõkkeks on

$$\arcsin 0{,}597 = 36°42'.$$

$\sin\alpha$ alamtõkkeks saame

$$\frac{34{,}5}{60{,}5} = \frac{69}{121} = 0{,}571,$$

millest nurga α alamtõkkena leiame

$$\arcsin 0{,}571 = 34°48'.$$

Ligikaudse suuruse k õ i g e t õ e n ä o l i s e m a k s väärtuseks loetakse ta ülemtõkke ja alamtõkke aritmeetilist keskmist. Niisiis

$$\alpha \approx \frac{36°42' + 34°48'}{2} = 35°45'.$$

Ligikaudse suuruse ülemtõkke ja alamtõkke vahet nimetatakse ligikaudse suuruse **kõikumisvahemikuks.**

Meie näites nurga α kõikumisvahemik on

$$36°42' - 34°48' = 1°52' \approx 2°.$$

Pool kõikumisvahemikust kannab ligikaudse suuruse **absoluutse vea ülemmäära** nime.

Antud juhul nurga α absoluutse vea ülemmäär on $2° : 2 = 1°$. Sümbolites märgitakse seda nõnda: $\Delta\alpha = 1°$ (kus kolmnurkne sümbol on kreeka suurtäht «delta»).

Et nurga α arvutamisel viga võib küündida 1°-ni, siis pole otstarbekohane vastuses näidata minuteid; vastuseks saadav arv tuleb ümardada kraadideni: $35°45' \approx 36°$.

Vastuse kirjutame nõnda:

$$\alpha \approx 36° (\pm 1°),$$

mida loetakse «nurk α on ligikaudu 36° veaga 1°».

Absoluutse vea ülemmäära ja ligikaudse arvu suhet nimetatakse ligikaudse arvu **relatiivse vea ülemmääraks.** See suhe antakse tavaliselt protsentides.

Meie näites on nurga α relatiivse vea ülemmääraks

$$1° : 36° = 0{,}028 \approx 0{,}03 = 3\,\%.$$

Tulemuse võib nüüd kirjutada ka nõnda:

$$\alpha \approx 36^\circ (\pm 3\%),$$

mida loetakse «nurk α on ligikaudu 36° veaga 3%».

Ülesandes esineva muruplatsi teine nurk $\beta \approx 54^\circ (\pm 1^\circ)$ ehk $\beta \approx 54^\circ (\pm 2\%)$.

N ä i d e 2. Ristküliku alus on 564 mm, kõrgus 162 mm. Kui pikk on selle ristküliku diagonaal ja kui suure nurga moodustab diagonaal alusega?

L a h e n d u s. Et pikkused on mõõdetud millimeetrise täpsusega, siis vea ülemmääraks on siin 0,5 mm.

Diagonaali arvutamisel võtame arvesse, et andmed on kolme tüvenumbriga arvud, mistõttu ka tulemuse ümardame kolme tüvenumbriga arvuks, ümardades seejuures vahepealsed tulemused nelja tüvenumbriga arvudeks.

Tähistades aluse tähega a, kõrguse tähega b ja diagonaali tähega d, saame:

$$\begin{aligned} a^2 &= 162^2 \approx 26\,240; \\ h^2 &= 569^2 \approx 328\,000; \\ \hline d^2 &\approx 355\,000; \\ d &= \sqrt{355\,000} \approx 595{,}8 \approx 596. \end{aligned}$$

Diagonaali ja aluse vahelise nurga α tangensi ülemtõke on

$$\frac{162{,}5}{568{,}5} = 0{,}2858,$$

millest nurga α ülemtõkkeks saame

$$\arctan 0{,}2858 = 15^\circ 57'.$$

Arvutades $\tan \alpha$ alamtõket, leiame

$$\frac{161{,}5}{569{,}5} = 0{,}2835,$$

millest nurga α enda alamtõkkeks saame

$$\arctan 0{,}2835 = 15^\circ 50'.$$

Nurga α absoluutse vea ülemmäära arvutamisel leiame, et

$$\Delta\alpha = \frac{15^\circ 57' - 15^\circ 50'}{2} \approx 4'.$$

Nurga α kõige tõenäolisem väärtus on

$$\alpha = \frac{15°57' + 15°50'}{2} = 15°54'.$$

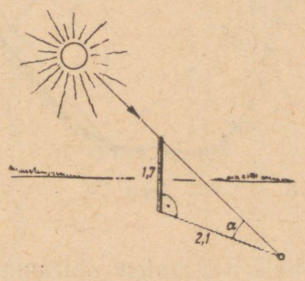
Seega $\alpha \approx 15°54'(\pm 0{,}4')$ ehk $\alpha \approx 15°54'(\pm 0{,}4\,\%)$.

Ülesandeid.

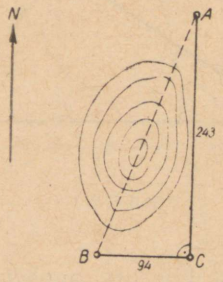
401. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on ligikaudu 4 m ja 6 m. Arvuta hüpotenuus ja nurgad. Nurga arvutamisel leia absoluutse vea ülemmäär ja relatiivse vea ülemmäär. Ümarda tulemused vastavalt andmetele.

402. Tarvis on joonestada täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet on 372 mm ja hüpotenuus 943 mm. Kui pikk tuleb teine kaatet ja kui suured tulevad nurgad? Kui suur viga võib tekkida nurkade arvutamisel?

403. Päikese kõrgusnurga α määramiseks löödi maa sisse püsti teivas, mille maapealse osa pikkuseks jäi 1,7 m; teiba varju pikkus oli 2,1 m (joon. 74). Arvuta Päikese kõrgusnurk α varju mõõtmise momendil.



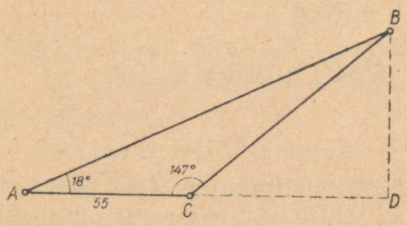
Joon. 74.



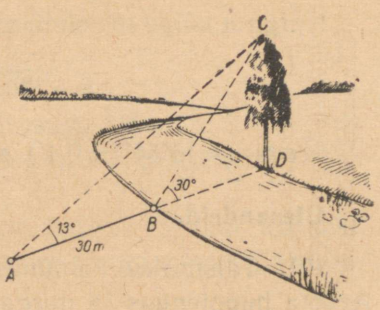
Joon. 75.

404. Punktide A ja B vahele on tarvis ehitada tunnel (joon. 75). Punkt C on valitud nõnda, et kolmnurk ABC on täisnurkne, kusjuures $BC = 94$ m ja $AC = 234$ m. Kui pikk tuleb ehitatav tunnel? Kui suure nurga moodustab tunneli siht AB põhja-lõuna sihiga AC ja kui suure nurga ta moodustab ida-lääne sihiga?

405. Arvuta nürinurkse kolmnurga ABC kõrgus BD, teades, et alus $AC = 55$ mm, alusnurk $BAC = 18°$ ja alusnurk $ACB = 147°$ (joon. 76).



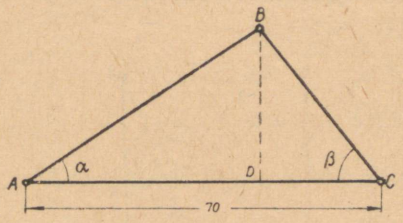
Joon. 76.



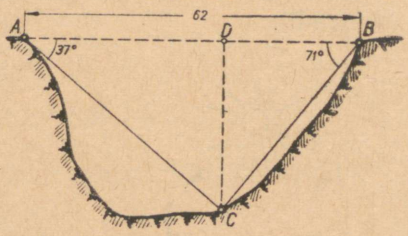
Joon. 77.

406. Jõe laiuse BD mõõtmiseks märgiti BD sihis pikkus $AB = 30$ m (joon. 77). Jõe teisel kaldal vee piiril kasvava puu latv C paistab punktist A nurgas 13° ja punktist B nurgas 30°. Kui lai on jõgi?

407. Kolmnurga ABC alus $AC = 70$ mm, nurk $\alpha = 32°20'$ ja nurk $\beta = 50°20'$ (joon. 78). Arvuta kõrgus BD.



Joon. 78.

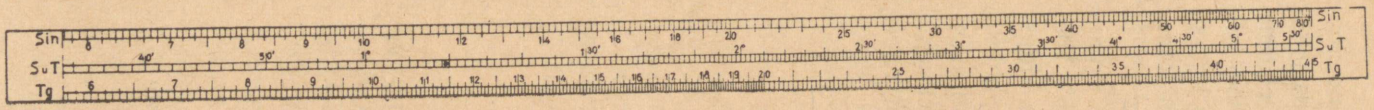


Joon. 79.

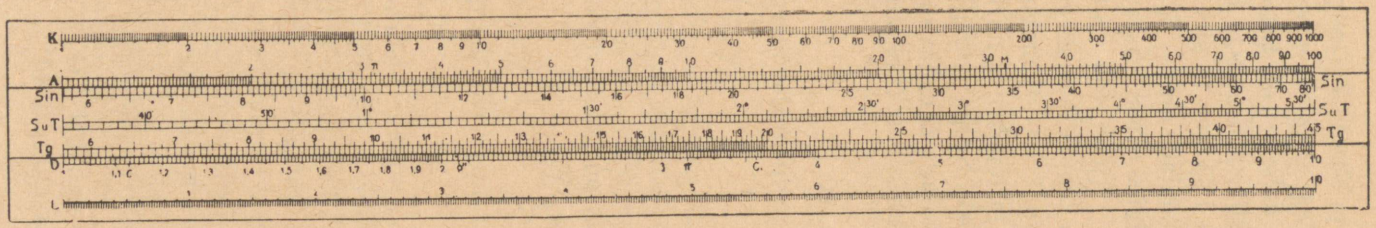
408. Üle oru punktide A ja B vahele hakatakse ehitama silda (joon. 79). Tugisamba DC kõrguse leidmiseks mõõdeti punkti C alangunurgad DAC ja DBC. Arvuta samba DC pikkus, teades, et $AB = 62$ m, $\angle DAC = 37°$ ja $\angle DBC = 71°$.

§ 70. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE SKAALAD ARVUTUSLÜKATIL.

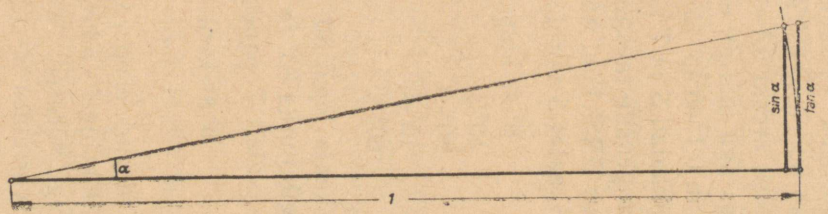
Antud nurga trigonomeetrilise funktsiooni või viimase järgi nurga leidmiseks võib kasutada arvutuslükati trigonomeetrilisi skaalasid, mis leiduvad keele tagaküljel (joon. 80): skaala S (siinuste skaala, joonisel «Sin»), skaala ST (siinuste ja tangensite



Joon. 80.



Joon. 81.



Joon. 82.

ühine skaala, joonisel «SuT») ja skaala T (tangensite skaala, joonisel «Tg»). Igaüht neist kolmest skaalast kasutatakse koos põhiskaalaga D. See võib toimuda kahel viisil. Esiteks nõnda, et tõmbame keele lükati korpusest välja, pöörame ta pikitelje ümber nii, et tagakülg saab esiküljeks, ja lükkame ta siis korpusesse tagasi, seades kõigi esiküljel olevate skaalade algus- ja lõppkriipsud kohakuti. Nüüd loeme skaala D alguskriipsu vastavaks arvule 0,1 ja lõppkriipsu vastavaks arvule 1 (joon. 81). Siis siinuste skaala algab suurusega 5°44′ ja tema lõppkriips märgib nurka 90°. Tõepoolest, arcsin 0,1 = 5°44′, arcsin 1 = 90°. Tangensite skaala alguskriips aga märgib nurka 5°43′ ja lõppkriips nurka 45°. Tõepoolest, arctan 0,1 = 5°43′ ja arctan 1 = 45°. Seega viimati kirjeldatud asendis skaalad S ja T koos põhiskaalaga D esitavad vastavalt siinuste ja tangensite tabelit, esimene vahemikus 5°44′ kuni 90°, teine vahemikus 5°43′ kuni 45°.

Skaalat S uurides märkame, et

6°-st	kuni	10°-ni	iga	kriipsuvahe	märgib	5′,
10°-st	„	20°-ni	„	„	„	10′,
20°-st	„	40°-ni	„	„	„	20′,
40°-st	„	60°-ni	„	„	„	30′,
60°-st	„	80°-ni	„	„	„	1°.

Skaala lõpul 80° ja 90° vahel on kaks kriipsu, millest esimene märgib nurka 83° ja teine nurka 85°.

Skaalalt T paneme tähele, et

6°-st	kuni	20°-ni	iga	kriipsuvahe	märgib	5′,
20°-st	„	45°-ni	„	„	„	10′.

Kui nurk α on väike, siis $\sin \alpha \approx \tan \alpha$. Seda näeme joonisel 82, kus ühikringjs väikese nurga α korral siinuslõik ja tangenslõik on peaaegu võrdsed. (Kontrolli seda ka siinuste ja tangensite tabelite abil, võrreldes 6°-st väiksemate nurkade siinuseid tangensitega!)

See asjaolu võimaldab väikeste nurkade siinuste ja tangensite jaoks kasutada ühist skaalat, milleks ongi skaala ST. Selle skaala kasutamisel koos skaalaga D loetakse skaala D alguskriips vastavaks arvule 0,01 ja lõppkriips vastavaks arvule 0,1. Skaala ST alguskriips märgib siis nurka 34′ ja lõppkriips nurka 5°44′, sest

$$\arcsin 0{,}01 \approx \arctan 0{,}01 \approx 34';$$
$$\arcsin 0{,}1 \approx \arctan 0{,}1 \approx 5°44'.$$

Paneme tähele, et skaalal *ST*

40′-st kuni 3°-ni iga kriipsuvahe märgib 1′,
3°-st „ 5°-ni „ „ „ 2′,
5°-st „ lõpuni „ „ „ 5′.

Niisiis skaala *ST* koos põhiskaalaga *D* kujutab siinuste ja tangensite ühist tabelit vahemikus 34′ kuni 5°44′.

Eeldusel, et keel on pööratud ja nurk α on vahemikus 5°44′ ... 90°, leiame $\sin \alpha$ väärtuse järgmiselt: märgime märkijaga skaalal *S* nurga α ja loeme niidi alt skaalalt *D* selle nurga siinuse väärtuse. Ümberpöördult, antud siinuse järgi nurga leidmisel märgime skaalal *D* antud siinuse ja loeme niidi alt skaalalt *S* nurga suuruse.

Analoogiliselt toimime antud nurga tangensi leidmisel ning antud tangensi järgi nurga leidmisel, kasutades sel korral vaid skaalat *T*.

Näiteks:

$\sin 45° = 0{,}707$; $\tan 15° = 0{,}268$;
$\arcsin 0{,}574 = 35°$; $\arctan 0{,}795 = 38°30′$.

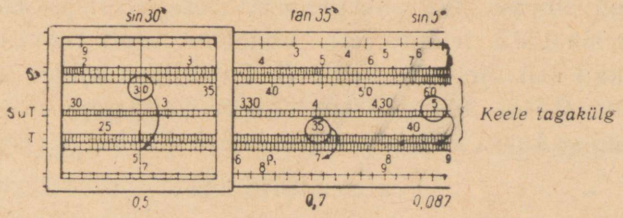
Kui antud nurk on vahemikus 34′ ... 5°44′, siis toimime täpselt eespool kirjeldatud viisil, kasutades skaalat *ST* ja pidades silmas, et siinuse ja tangensi väärtused on sel korral vahemikus 0,01 ... 0,1.

Näiteks:

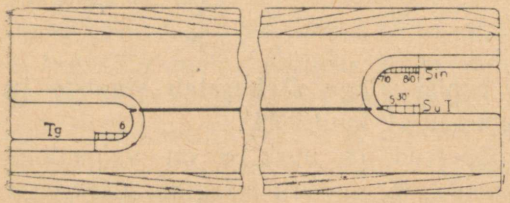
$\sin 1°30′ = 0{,}0262$; $\tan 2°18′ = 0{,}0402$;
$\arcsin 0{,}0405 = 2°19′$; $\arctan 0{,}0769 = 4°24′$.

Joonisel 83 on näidatud $\sin 30°$, $\tan 35°$ ja $\sin 5°$ leidmine lükatil, kui selle keel on pööratud.

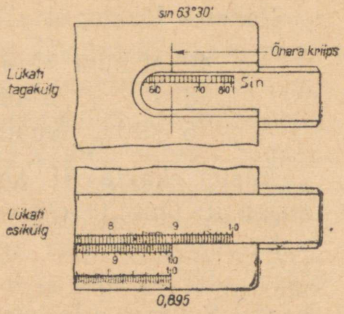
Kirjeldatud operatsioone saab lükatil teostada ka k e e l t p ö ö r a m a t a, kasutades selle asemel lükati korpuse otstes leiduvaid õnaraid. Pöörates lükatit pikitelje ümber 180°, näeme taga-



Joon. 83.



Joon. 84.



Joon. 85.

küljel õnarate äärtel kriipse: parempoolses otsas kaks kriipsu — üks ülal ja teine all, vasakpoolses otsas üks kriips — all (joon. 84).

Parempoolse otsa ülemist kriipsu kasutame kraadide ja minutite märkimiseks ja lugemiseks skaalal *S*, alumist skaalal *ST*; vasakpoolse otsa kriipsu kasutame seoses skaalaga *T*.

Leiame keelt pööramata näiteks sin 63°30′. Selleks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt paremale seni, kuni skaala *S* arvule 63°30′ vastav kriips tuleb kohakuti parempoolse õnara ülemise kriipsuga (joon. 85, ülal); siis pöörame lükati esikülje ette ja loeme skaala *D* lõppkriipsu kohalt skaalalt *C* (keele alumisel äärel) numbrid 8—9—5 (joon. 85, all); seega

$$\sin 63°30' = 0{,}895.$$

Antud nurga tangensi (näiteks tan 20°) leidmiseks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt vasakule seni, kuni skaalal *T* arvule 20° vastav kriips tuleb kohakuti vasakpoolse õnara kriipsuga; siis pöörame lükati esikülje ette ja loeme skaala *D* alguskriipsu kohalt skaalal *C* numbrid 3—6—4; seega

$$\tan 20° = 0{,}364.$$

Antud siinuse järgi nurga leidmiseks keelt pööramata (näiteks arcsin 0,515 leidmiseks), tõmbame keelt paremale seni, kuni lükati esiküljel põhiskaala *D* lõppkriipsu kohale tuleb skaala *C* väärtus 0,515; siis pöörame lükati tagakülje ette ja loeme parempoolse õnara ülemise kriipsu kohal skaalalt *S* arvu 31°; seega

$$\arcsin 0{,}515 = 31°.$$

Antud tangensi järgi nurga leidmiseks keelt pööramata (näi-

teks arctan 0,535 leidmiseks) tõmbame keelt vasakule seni, kuni lükati esiküljel põhiskaala D alguskriipsu kohale tuleb skaala C väärtus 0,535; siis pöörame lükati ümber ja loeme vasakpoolse õnara kriipsu kohal skaalalt T 28°10′; seega

$$\arctan 0{,}535 = 28°10'.$$

Kui antud nurk on väike (vahemikust 34′ ... 5°44′), siis nii siinuse kui ka tangensi leidmine (samuti nurga leidmine) toimub analoogiliselt, ainult selle erinevusega, et siis kasutame skaalat ST ja parempoolse õnara alumist kriipsu. Näiteks:

$$\sin 4° = \tan 4° = 0{,}0698;$$
$$\arcsin 0{,}0525 = \arctan 0{,}0525 = 3°.$$

Antud nurga koosinuse ja antud koosinuse järgi nurga leidmisel kasutame valemi

$$\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$$

vahendust; näiteks:

$$\cos 32° = \sin(90° - 32°) = \sin 58° = 0{,}848.$$

Olgu antud, et $\cos \alpha = 0{,}588$. Kui suur on α?
Sel korral $\sin(90° - \alpha) = 0{,}588$; siit

$$90° - \alpha = 36° \text{ ja } \alpha = 54°.$$

Antud nurga kootangensi leidmisel kasutame abivahendina seost

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Näiteks $\cot 25° = \frac{1}{\tan 25°}$ leidmiseks pöörame lükati tagaküljele ette, tõmbame keelt vasakule seni, kuni skaala T koht 25° tuleb kohakuti vasaku õnara kriipsuga; nüüd pöörame lükati esiküljele üles ning loeme skaalalt C (skaala D alguskriipsu kohalt) $\tan 25° = 0{,}466$, aga skaalalt D (skaala C lõppkriipsu kohalt) jagatise

$$\frac{1}{\tan 25°} = \frac{1}{0{,}466} = 2{,}14 = \cot 25°.$$

90°-st suurema nurga siinuse või koosinuse leidmisel rakendame taandamisvalemeid. Näiteks:

$$\sin 125° = \sin(180° - 125°) = \sin 55° = 0{,}82.$$

45°-st suurema nurga tangensi leidmisel rakendame seoseid

$$\tan\alpha = \cot(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan(90° - \alpha)}.$$

Näiteks

$$\tan 75° = \cot(90° - 75°) = \cot 15° = \frac{1}{\tan 15°} = 3{,}73.$$

Erilist käsitlust nõuavad trigonomeetrilised funktsioonid nurkade puhul, mis on väiksemad kui 34′. Sääraste nurkade korral nii siinuslõik kui ka tangenslõik on pikkuselt peaaegu võrdsed kaare pikkusega (vt. joon. 82). Kesknurka teatavasti mõõdab temale vastav kaar; niisiis, kui kesknurk on α radiaani, siis ka sellele nurgale vastav kaar on α radiaani. Teades, et

$$1 \text{ rad} = 57°18′ = 3438′,$$

leiame nurgale α' vastava kaare pikkuse radiaanides jagatisena:

$$\alpha' : 3438′.$$

Arvu 3438 kohal leidub lükati põhiskaalal märge ϱ', nii et

$$\varrho' = 3438′ \text{ ja (kui } \alpha < 34′)$$
$$\sin\alpha = \tan\alpha = \frac{\alpha'}{\varrho'}.$$

Näiteks $\sin 20′ = \frac{20′}{3438′} = \frac{20′}{\varrho'} = 0{,}00582.$

Sääraste jagatiste arvutamisel peame meeles:
kui $\alpha < 34′$, siis $\sin\alpha = \tan\alpha < 0{,}01$.

Ülesandeid.

409. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul:

1) sin 50°	2) sin 8°25′	3) cos 15°
sin 45°	sin 85°	cos 40°30′
sin 24°	sin 14°10′	cos 72°50′
sin 51°	sin 130°	cos 61°
sin 9°30′	sin 300°	cos 147°
4) tan 13°	5) tan 50°	6) cot 61°
tan 32°	tan 54°	cot 43°
tan 9°10′	tan 77°30′	cot 48°
tan 36°30′	tan 71°	cot 12°30′
tan 25°30′	tan 60°30′	cot 19°10′

7) sin 1°30′
tan 2°18′
tan 0°42′
tan 4°24′
tan 5°30′

8) sin 2°10′
sin 3°20′
sin 3°25′
sin 1°55′
sin 0°42′

9) tan 2°05′
tan 2°44′
tan 0°54′
cos 88°17′
cot 87°54′

410. Leia lükatilt keele normaalasendi puhul:

1) sin 30′
sin 27′
tan 25′
sin 17′
tan 6′

2) cot 89°45′
tan 89°44′
tan 88°45′
cos 89°15′
cos 88°20′

3) sin 15′
sin 32′
tan 18′
tan 21′
tan 46′

411. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul teravnurk x, kui:

1) $\sin x = 0{,}245$
$\sin x = 0{,}142$
$\sin x = 0{,}315$
$\sin x = 0{,}375$
$\sin x = 0{,}485$

2) $\cos x = 0{,}670$
$\cos x = 0{,}245$
$\cos x = 0{,}158$
$\cos x = 0{,}588$
$\cos x = 0{,}225$

3) $\sin x = 0{,}309$
$\sin x = 0{,}339$
$\sin x = 0{,}799$
$\sin x = -0{,}242$
$\sin x = -0{,}334$

4) $\tan x = 0{,}268$
$\tan x = 0{,}625$
$\tan x = 0{,}161$
$\tan x = 0{,}795$
$\tan x = 0{,}966$

5) $\tan x = 1{,}192$
$\tan x = 1{,}376$
$\tan x = 4{,}511$
$\tan x = 2{,}90$
$\tan x = 1{,}192$

6) $\cot x = 0{,}554$
$\cot x = 1{,}07$
$\cot x = 0{,}900$
$\cot x = 4{,}51$
$\cot x = 2{,}88$

412. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul:

1) arcsin 0,707
arcsin 0,375
arcsin 0,777
arcsin 0,165
arcsin 0,146

2) arctan 0,839
arctan 0,259
arctan 0,445
arctan 0,835
arctan 0,615

3) arctan 1,195
arctan 1,575
arccot 2,90
arccot 1,192
arccot 0,554

4) arcsin 0,0552
arcsin 0,0596
arcsin 0,0334
arcsin 0,0122
arcsin 0,030

5) arctan 0,0364
arctan 0,0477
arctan 0,0157
arctan 0,0114
arctan 0,0556

6) arcsin 0,00262
arctan 0,00582
arcsin 0,00728
arctan 0,00485
arcsin 0,00211

7) arcsin 0,00582
arcsin 0,00786
arctan 0,00728
arcsin 0,00512
arctan 0,00197

8) sin 31°
tan 19°
sin 1°15′
sin 3°40′
tan 2°10′

9) sin 1°40′
sin 40′
tan 9°
tan 17°
cot 52°

10) cot 76°
cot 87°
tan 43°20′
cot 47°40′
cot 62°20′

11) arctan 0,625
arctan 0,815
arctan 0,244
arctan 0,880
arctan 0,250

12) arcsin 0,707
arcsin 0,174
arcsin 0,819
arcsin 0,985
arcsin 0,259

§ 71. TRIGONOMEETRILISI ARVUTUSI LÜKATI KASUTAMISEGA.

Näiteid.

1) Leia nurk α, kui $\sin\alpha = \frac{12{,}6}{17{,}5}$.

Lahendame ülesande lükati keelt pööramata. Märgime skaalal *D* arvu 17,5; tõmbame keelt paremale niipalju, et skaala *C* arv 12,6 jääb kohakuti arvuga 17,5 skaalalt *D*. Pöörame nüüd lükati ümber ning loeme parempoolse õnara ülemise kriipsu järgi skaalalt *S* väärtuse 46°. Seega vastuseks on $\alpha = 46°$.

2) $\frac{3{,}6}{\sin 30°} = \frac{2{,}5}{\sin x}$. Leia x.

Lahendus pööratud keelega lükatil on järgmine. Märgime niidiga skaalal *D* arvu 3,6. Tõmbame keelega niidi alla 30° skaalalt *S*. Nüüd märgime niidiga skaalal *D* arvu 2,5. Niidi alt skaalal *S* loeme vastuseks 20°19′. Seega $x = 20°19′$.

3) Arvuta avaldis $14{,}6 \cdot \sin 56°30′$.

Lahendame ülesande lükati keelt pööramata. Lükatit tagaküljelt jälgides tõmbame keelt paremale niipalju, et skaalalt *S* tuleks õnara kriipsu kohale 56°30′. Pöörame nüüd lükati päripidi ning märgime niidiga skaalal *D* arvu 14,6. Vastuseks loeme niidi alt skaalalt *C* arvu 12,2.

Seega $14{,}6 \cdot \sin 56°30′ = 12{,}2$.

4) Teosta jagamine $\frac{13{,}9}{\tan 41°}$.

Lahendame ülesande lükatil keele pööratud asendis. Märgime niidiga skaalal *D* arvu 13,9, tõmbame niidi alla skaala *T* arvu 41 ning loeme keele lõpult skaalalt *D* tulemuseks 16. Seega

$$\frac{13{,}9}{\tan 41°} = 16.$$

5) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 250$ ja $b = 575$. Leia teravnurgad ja hüpotenuus.

Ülesannet lükati abil lahendades leiame kõigepealt, et

$$\tan\alpha = \frac{250}{575} = 0{,}435.$$

Nüüd seame skaala C arvu 0,435 kohakuti skaala D alguskriipsuga, pöörame lükati ümber ning loeme vasakpoolse õnara kriipsu kohalt skaalalt T arvu 23°30′. Seega

$$\alpha = 23°30'; \quad \beta = 90° - 23°30' = 66°30'.$$

Hüpotenuusi arvutame seosest

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \text{ ehk } c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{250}{\sin 23°30'}.$$

Viimase jagatise leiame järgmiselt. Pöörame keele ja märgime niidiga skaalal S koha 23°30′; niidi all skaalal D leidub siis vastav siinuse väärtus (0,399; selle väljalugemine pole tarvilik). Nüüd pöörame keele tagasi ja leiame jagatise

$$250 : \sin 23°30' = 627.$$

Kontrolliks kasutame Pütagorase teoreemi, arvutades lükatil

$$\begin{aligned} a^2 &= 250^2 = 62\,500; \\ b^2 &= 575^2 = 331\,000; \\ \hline a^2 + b^2 &= 393\,500 \approx 393\,000; \\ c^2 &= 627^2 \approx 393\,000. \end{aligned}$$

V a s t u s. $\alpha = 23°30'$; $\beta = 55°30'$; $c = 627$.

Ülesandeid.

413. Arvuta lükati abil nurk α, kui

1) $\sin\alpha = \frac{6{,}3}{8{,}6}$ 3) $\tan\alpha = \frac{37{,}6}{54{,}5}$

2) $\cos\alpha = \frac{18}{73}$ 4) $\cot\alpha = \frac{23}{52}$

414. Arvuta lükati kasutamisega avaldis:

1) $\frac{15{,}4}{\sin 69°30'}$ 5) $\frac{25{,}4}{\tan 35°}$ 9) $\frac{243}{\sin 71°}$

2) $\frac{13{,}8}{\sin 24°30'}$ 6) $\frac{12{,}5}{\sin 28°20'}$ 10) $\frac{1{,}43}{\tan 40°35'}$

3) $\frac{8{,}5}{\sin 76°}$ 7) $\frac{41{,}5}{\sin 45°30'}$ 11) $5{,}85 \cdot \sin 21°40'$

4) $\frac{52}{\sin 69°}$ 8) $\frac{26{,}2}{\sin 15°15'}$ 12) $2{,}4 \cdot \tan 22°20.$

13) $2{,}54 \cdot \tan 66°30'$. 14) $\frac{27{,}8}{\tan 42°}$ 15) $\frac{0{,}84}{\tan 28°10'}$

415. Arvuta lükati abil avaldis:

1) $\frac{25{,}2}{\sin 3°11'}$ 3) $\frac{0{,}28}{\sin 2°30'}$ 5) $78 \cdot \sin 1°55'$

2) $\frac{10}{\tan 2°20'}$ 4) $\frac{542}{\tan 4°20'}$ 6) $635 \cdot \tan 4°15'$

416. Lahenda lükati kasutamisega võrre:

1) $\frac{\sin 15°}{3{,}5} = \frac{\sin x}{6{,}9}$ 4) $\frac{\sin 10°}{2{,}4} = \frac{\sin x}{3{,}8}$

2) $\frac{43{,}3}{\sin 60°} = \frac{a}{\sin 30°}$ 5) $\frac{7{,}2}{\sin 30°} = \frac{5}{\sin x}$

3) $\frac{\tan 18°}{30} = \frac{\tan 32°}{x}$ 6) $\frac{\tan 40°}{3} = \frac{\tan x}{2}$

417. Arvuta lükati abil täisnurkse kolmnurga puuduvad küljed ja nurgad.

1) $a = 7{,}9$ cm; $c = 10{,}7$ cm
2) $b = 10{,}5$ dm; $c = 15{,}3$ dm
3) $a = 6{,}05$ m; $b = 8{,}32$ m
4) $a = 16{,}1$ cm; $b = 13{,}3$ cm
5) $a = 12{,}9$ mm; $\alpha = 33°30'$
6) $c = 74{,}5$ mm; $\alpha = 28°20'$

418. Joonestati kolmnurk külgede pikkustega $a = 8$ cm, $b = 5$ cm ja $c = 7{,}2$ cm. Nurkade mõõtmisel leiti, et $\alpha = 80°$, $\beta = 38°$ ja $\gamma = 62°$. Arvuta lükati abil suhted

$$\frac{a}{\sin \alpha}, \quad \frac{b}{\sin \beta} \text{ ja } \frac{c}{\sin \gamma}$$

ja võrdle tulemusi omavahel.

419. Joonesta kolmnurk, mille küljed on $a = 4$ cm, $b = 6$ cm ja $c = 8{,}9$ cm. Mõõda selle kolmnurga nurgad α, β ja γ.

Arvuta lükati abil suhted

$$\frac{a}{\sin \alpha}, \quad \frac{b}{\sin \beta} \text{ ja } \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Võrdle nende suhete suurusi. Joonesta saadud kolmnurga ümber ringjoon ja mõõda selle diameeter sentimeetrites; võrdle saadud arvu eelmiste suhetega.

420. Joonesta kolmnurk külgedega $a = 87$ mm, $b = 65$ mm ja

$c = 76$ mm. Mõõda saadud kolmnurga nurgad α, β ja γ ning arvuta lükati abil suhted

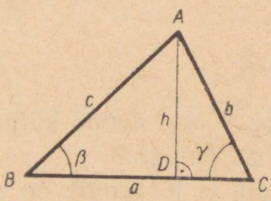
$$\frac{a}{\sin\alpha}, \quad \frac{b}{\sin\beta} \text{ ja } \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Võrdle neid tulemusi kolmnurga ümberringjoone läbimõõduga, kui viimane on mõõdetud millimeetrites.

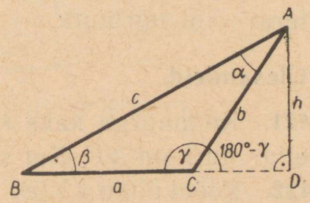
§ 72. KOLMNURGA PINDALA KAHE KÜLJE JA NENDEVAHELISE NURGA JÄRGI.

Kolmnurga pindala saab arvutada kahe külje ja nendevahelise nurga järgi. Vastava eeskirja saamiseks lähtume valemist

$$S = \frac{1}{2}\, ah.$$



Joon. 86.



Joon. 87.

Tõmmates kolmnurgas ABC kõrguse h alusele a (joonised 86 ja 87), saame täisnurkse kolmnurga ACD, milles $h = b \sin\gamma$ [nürinurkses kolmnurgas $h = b \sin(180° - \gamma) = b \sin\gamma$]. Asendades pindala valemis h avaldisega $b \sin\gamma$, saamegi otsitava valemi:

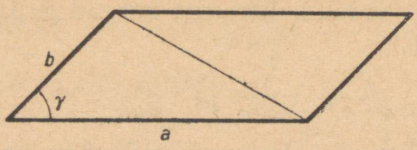
$$\boxed{S = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma}$$

Võttes kõrguse küljele b või küljele c, saame vastavalt valemid

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha} \qquad \boxed{S = \frac{1}{2}\, ac \sin\beta}$$

Niisiis,

kolmnurga pindala võrdub poolega kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisest.



Joon. 88.

J ä r e l d u s. Et diagonaal jaotab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks (joon. 88), millest kummagi pindala on $\frac{1}{2} ab \sin \gamma$, siis rööpküliku pindala arvutamiseks saame valemi:

$$S = ab \sin \gamma.$$

Rööpküliku pindala võrdub kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisega.

Eeskiri on õige sõltumata sellest, kas rööpküliku vaadeldav nurk on terav- või nürinurk.

Ülesandeid.

421. Kolmnurga kaks külge on 6 cm ja 9 cm; nende külgede vaheline nurk on 30°. Kui suur on kolmnurga pindala?

422. Rööpküliku küljed on 5 dm ja 12 dm ja teravnurk on 30°. Kui suur on rööpküliku pindala?

423. Tõesta, et diagonaalid jaotavad rööpküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

424. Tõesta, et diagonaalid jaotavad ristküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

425. Arvuta lükati abil kolmnurga pindala, kui

1) $a = 632$ m; $b = 496$ m; $\gamma = 134°20'$;
2) $b = 542$ mm; $c = 435$ mm; $\alpha = 35°40'$.

426. Arvuta rööpküliku pindala, kui küljed ja nurk on vastavalt

1) 4 cm, 6 cm ja 40°;
2) 4,6 m, 5,8 m ja 130°.

427. Võrdhaarse kolmnurga haar on 3,4 cm ja tipunurk 80°. Arvuta kolmnurga pindala.

428. Võrdkülgse kolmnurga külg on 15 cm. Arvuta pindala.

429. Kolmnurga kaks külge on 5 cm ja 6 cm. Kolmnurga pindala on 7,5 cm². Leia antud külgede vaheline nurk.

430. Arvuta ringi segmendi pindala, kui segmendi kaar on 70° ja ringi raadius on 20,2 cm.

431. Arvuta korrapärase viisnurga pindala, kui viisnurga ümberringjoone raadius on 3 cm.

§ 73. SIINUSTEOREEM.

Üldkujulist kolmnurka saab lahendada, kui tükeldada antud kolmnurk kõrgusega täisnurkseteks kolmnurkadeks ning arvutada nendest antud kolmnurga puuduvad elemendid. Lihtsam on aga siiski lahendada otseselt, kasutades mõnesuguseid kolmnurga elementide vahelisi seoseid. Üht niisugust seost väljendab nn. siinusteoreem:

kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}}$$

Tõestus. Lähtume kolmnurga pindala valemeist:

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\beta; \qquad (1)$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha; \qquad (2)$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma. \qquad (3)$$

Esimesest ja teisest võrdusest järeldub, et

$$ac\sin\beta=bc\sin\alpha$$

ehk

$$a\sin\beta=b\sin\alpha.$$

Siit

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}.$$

Esimesest ja kolmandast võrdusest järeldub, et

$$ac\sin\beta=ab\sin\gamma$$

ehk

$$c\sin\beta=b\sin\gamma.$$

Siit saame

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Seega tõesti

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Kui võrdes

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

kolm liiget on antud, siis neljanda saab arvutada. Seega siinusteoreem võimaldab

1) arvutada kolmnurga külge teise külje ja nende külgede vastasnurkade järgi; näiteks:

$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta};$$

2) arvutada kolmnurga nurka teise nurga ja nende nurkade vastaskülgede järgi; näiteks:

$$\sin\alpha=\frac{a\sin\beta}{b},$$

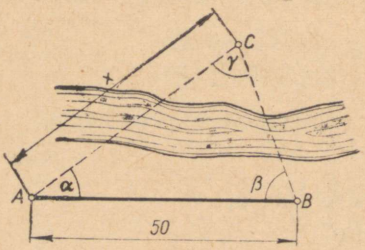
kust nurga α saame leida lükati või tabeli abil.

K o k k u v õ t t e s: *siinusteoreem võimaldab lahendada kolmnurka, millest on antud*

1) *kaks nurka ja üks külg või*

2) *kaks külge ja neist ühe külje vastasnurk.*

N ä i d e 1. Tahetakse mõõta ligipääsmatu punkti C kaugust punktist A. Selleks võetakse lõik $AB=50$ m baasiks ja mõõdetakse nurgad $CAB=\alpha$ ja $CBA=\beta$. Arvutame kauguse $AC=x$, kui $\alpha=36°30'$ ja $\beta=68°30'$ (joon. 89).



Joon. 89.

L a h e n d u s. Rakendades siinusteoreemi, saame:

1) $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$;

2) $\frac{x}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$,

millest

$$x=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Numbriliselt:

$$\gamma=180°-(36°30'+68°30')=180°-105°=75°.$$

Võrret $\frac{x}{\sin 68°30'}=\frac{50}{\sin 75°}$ lükatiga lahendades leiame, et $x=48{,}2$.

Seega on punktide A ja C vaheline kaugus ligikaudu 48 m.

Näide 2. Lahendada kolmnurk andmeil:

$$c=93{,}1; \quad b=49{,}5; \quad \gamma=110°50'.$$

Lahendus. Et antud nurk on nürinurk, siis peavad ülejäänud nurgad α ja β olema teravnurgad.

1) Arvutame nurga β, milleks rakendame siinusteoreemi:

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Asendades saame:

$$\frac{49{,}5}{\sin\beta}=\frac{93{,}1}{\sin 110°50'} \quad \text{ehk} \quad \frac{49{,}5}{\sin\beta}=\frac{93{,}1}{\sin 69°10'}.$$

Siit $\beta=29°50'$.

2) $\alpha=180°-(110°50'+29°50')=39°20'$.

3) Arvutame külje a:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \quad \text{ehk} \quad \frac{a}{\sin 39°20'}=\frac{49{,}5}{\sin 29°50'}.$$

Seega,

$$a=63{,}19\approx 63{,}2.$$

Paneme tähele, et

$$b<a<c \quad \text{ja} \quad \beta<\alpha<\gamma.$$

Vastus. $a=63{,}2$; $\alpha=39°20'$; $\beta=29°50'$.

Näide 3. Lahendada kolmnurk andmeil:

$$b=34; \quad c=46; \quad \beta=42°.$$

1) Arvutame nurga γ:

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\beta}, \text{ millest } \sin\gamma=\frac{c\sin\beta}{b} \text{ ehk}$$

$$\sin\gamma=\frac{46\cdot\sin 42°}{34} \text{ ehk } \sin\gamma=0{,}9054.$$

Nurga γ arvutamisel peame silmas pidama, et $\gamma>\beta$ (sest $c>b$), ja teiseks, et viimasel võrrandil on kaks lahendit; tõesti, ka

$$\sin(180°-\gamma)=0{,}9054.$$

Nurga γ väärtuseks saame antud juhul:

$$\gamma_1=53°32'\approx 53°30';$$
$$\gamma_2=126°30'.$$

Mõlemad väärtused võivad olla lahendatava kolmnurga nurgaks, sest mõlemad on suuremad kui β.

2) Leiame nurga α:
$\alpha_1 = 180° - (42° + 53°30') = 84°30'$;
$\alpha_2 = 180° - (42° + 126°30') = 11°30'$.

3) Külje a arvutamisel saame:

$$\frac{a_1}{\sin \alpha_1} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ millest } a_1 = \frac{b \sin \alpha_1}{\sin \beta}$$

ehk

$$a_1 = \frac{34 \cdot \sin 84°30'}{\sin 42°} \approx 50{,}5;$$

$$a_2 = \frac{34 \cdot \sin 11°30'}{\sin 42°} \approx 10{,}2.$$

Vastused.

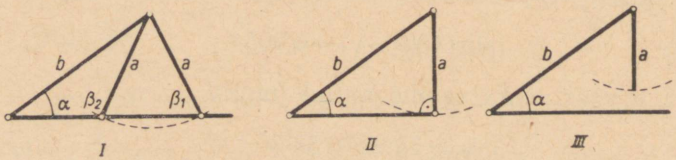
1) $\begin{cases} \alpha = 84°30' \\ \gamma = 53°30' \\ a = 50{,}5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \alpha = 11°30' \\ \gamma = 126°30' \\ a = 10{,}2 \end{cases}$

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja väiksema külje vastasnurk, siis, nagu teada, määravad need andmed kas kaks kolmnurka, ühe kolmnurga või ei määra ühtki kolmnurka. Olgu näiteks antud a, b ja α nii, et $a < b$; nurga β arvutamisel saame

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}.$$

Sõltuvalt andmetest a, b ja α võib juhtuda, et
1) $a > b \sin \alpha$; 2) $a = b \sin \alpha$; 3) $a < b \sin \alpha$, millele vastavalt peaks olema
1) $\sin \beta < 1$; 2) $\sin \beta = 1$; 3) $\sin \beta > 1$.

Esimesel juhul leidub alati teravnurk β_1, mis sellele siinusele vastab. Kuid siis leidub ka nürinurk β_2, millel on sama siinuse väärtus, sest $\sin \beta_1 = \sin(180° - \beta_1)$, seega $\beta_2 = 180° - \beta_1$. Lahendamisel saame sel korral kaks kolmnurka, ühe teravnurkse, teise nürinurkse (joon. 90-I).



Joon. 90.

Teisel juhul, kui $\sin\beta = 1$, saame lahendamisel ühe kolmnurga, nimelt täisnurkse, sest siis $\beta = 90°$ (joon. 90-II).

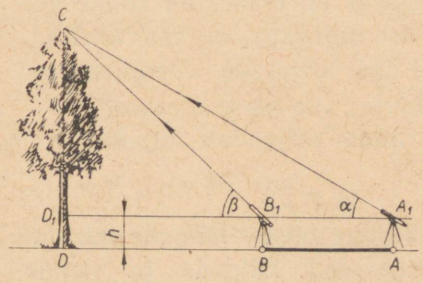
Kolmandal juhul, kui $\sin\beta > 1$, andmed a, b ja α ei määra ühtki kolmnurka, sest pole olemas nurka, mille siinus on suurem kui 1. Ülesandel sel korral lahend puudub (joon. 90-III).

Ülesandeid.

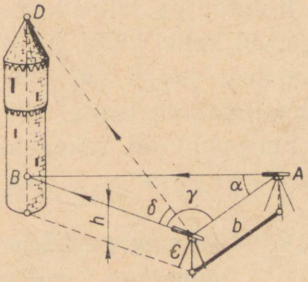
432. Lahenda kolmnurk andmeil:

1)	$a = 22$;	$\alpha = 36°$;	$\beta = 52°$.
2)	$b = 30$;	$\alpha = 52°$;	$\gamma = 58°$.
3)	$c = 24$;	$\beta = 122°$;	$\gamma = 35°$.
4)	$c = 174$;	$\beta = 36°30'$;	$\gamma = 63°30'$.
5)	$b = 72$;	$c = 45$;	$\beta = 58°20'$.
6)	$a = 416$;	$b = 635$;	$\beta = 28°10'$.
7)	$b = 85{,}76$;	$\beta = 36°55'$;	$\gamma = 74°18'$.
8)	$c = 144{,}7$;	$\alpha = 120°16'$;	$\beta = 42°24'$.
9)	$b = 56$;	$\alpha = 52°$;	$\gamma = 6°$.
10)	$a = 62$;	$b = 48$;	$\alpha = 50°$.
11)	$a = 32$;	$b = 48$;	$\beta = 40°$.
12)	$b = 35$;	$c = 45$;	$\beta = 46°$.
13)	$b = 127$;	$c = 283$;	$\beta = 70°30'$.
14)	$a = 99$;	$c = 68$;	$\gamma = 28°$.
15)	$a = 14{,}5$;	$b = 21{,}1$;	$\alpha = 63°50'$.

433. Mõõtmistöödel maastikul said õpilased ülesande mõõta niisuguse puu kõrgus, millele ei saanud ligi minna. Ülesande täitmiseks võeti puu tüve läbival sirgel baas $AB = 10$ m ning mõõdeti puu kõrgusnurgad α ja β vastavalt punktide A ja B juurest visee-



Joon. 91.



Joon. 92.

rimisega puu latva C (joon. 91). Saadi $\alpha = 28°17'$ ja $\beta = 41°20'$. Nurgamõõtja kõrgus $h = 1{,}3$ m. Kui kõrge oli puu?

434. Vabrikukorstna kõrguse kindlakstegemiseks mõõdeti korstna sihis baas $AB = 75$ m ning korstna kõrgusnurgad punktide A ja B kohal, saades $\alpha = 20°48'$ ja $\beta = 32°18'$. Nurgamõõtja kõrgus oli 1,3 m. Kui kõrge oli korsten? (Kasuta joonist 91.)

435. Veetorni kõrguse mõõtmiseks võeti maapinnal baas $b = AC$, mis ei asunud torni jalamit läbival sirgel. Mõõdeti nurgad $BAC = \alpha$, $BCA = \gamma$ ja $DCB = \delta$ (joon. 92). Arvuta torni kõrgus andmeil: $b = 35$ m; $\alpha = 47°43'$; $\gamma = 110°28'$; $\delta = 32°13'$. Teodoliidi kõrgus $h = 1{,}3$ m.

436. Näita, et siinusteoreem kehtib ka täisnurkse kolmnurga kohta.

437. Näita siinusteoreemi abil, et

1) kui kolmnurgas kaks nurka on võrdsed, siis on võrdsed ka nende nurkade vastasküljed;

2) kolmnurgas, mille kõik nurgad on võrdsed, on ka kõik küljed võrdsed.

438. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu $1 : 2 : 3$ ja ümbermõõt on 20 cm. Kui pikad on kolmnurga küljed?

439. Kolmnurgas ABC on joonestatud nurga B poolitaja BE, kus E on nurgapoolitaja ja külje AC ühine punkt. Rakendades siinusteoreemi, tõesta kolmnurga nurgapoolitaja omadus:

$$AE : EC = AB : BC.$$

§ 74. KOOSINUSTEOREEM.

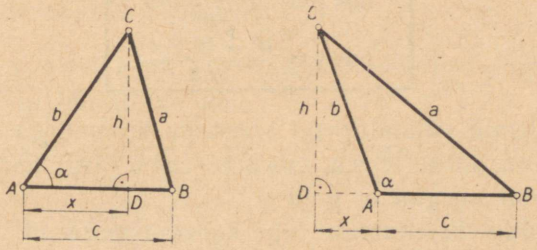
Kolmnurga lahendamist juhul, kui ta on määratud kolme küljega või kahe külje ja nendevahelise nurgaga, ei saa alustada siinusteoreemiga, sest sel korral ei saa kirjutada võrret, millest kolm liiget on teada.

Sel puhul on rakendatav seos, mida väljendab nn. koosinusteoreem:

kolmnurga külje ruut on võrdne teiste külgede ruutude summaga, millest on lahutatud külgede ja nendevahelise nurga koosinuse kahekordne korrutis.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

T õ e s t u s. Tõestame koosinusteoreemi ühtaegu nii teravnurkse kui ka nürinurkse kolmnurga kohta (joon. 93).



Joon. 93.

Tõmbame tipust C kõrguse $CD = h$. Tähistame tähega x külje b projektsiooni küljel c või selle pikendusel.

Pütagorase teoreemi põhjal saame kolmnurgast DBC:

teravnurkse kolmnurga korral:	nürinurkse kolmnurga korral:
$a^2 = h^2 + (c - x)^2$,	$a^2 = h^2 + (c + x)^2$,
$a^2 = h^2 + x^2 + c^2 - 2cx$.	$a^2 = h^2 + x^2 + c^2 + 2cx$.

Kolmnurgast ADC: $h^2 + x^2 = b^2$, seega

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$.	$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$.

Kolmnurgast ADC saame, et

$x = b \cos \alpha$.	$x = b \cos (180° - \alpha) =$ $= -b \cos \alpha$.

Kirjutades eespool saadud valemites tähe x asemele tema avaldised, saame

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha$.	$a^2 = b^2 + c^2 + 2c(-b \cos \alpha)$.

Seega saame nii teravnurkse kui ka nürinurkse kolmnurga puhul:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Analoogiliselt saame koosinusteoreemi tõestada ka külgede b ja c kohta.

Valemid, mis väljendavad koosinusteoreemi, võimaldavad arvutada kolmnurga külge kahe ülejäänud külje ja nendevahelise nurga järgi.

Eespool toodud valemeid võib kirjutada ka kujul:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Need valemid võimaldavad arvutada kolmnurga nurkasid, kui kõik küljed on antud. $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ järgi leiame tabelitest või lükati abil nurgad α, β ja γ.

Logaritmide kasutamine on koosinusteoreemi rakendamisel raskendatud, sest külje ruudu ja nurga koosinuse avaldised ei ole logaritmitavad.

Niisiis, *koosinusteoreem võimaldab lahendada kolmnurka, millest on antud*

1) *kaks külge ja nendevaheline nurk või*
2) *kolm külge.*

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja nendevaheline nurk, näiteks a, b ja γ, siis ülejäänud elemendid võime leida kahel erineval viisil.

A. Koosinusteoreemi põhjal:

1) rakendades valemit

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$ arvutame külje c;

2) rakendades valemit

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$ leiame nurga β;

3) rakendades valemit

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$ leiame nurga α.

Viis A on otstarbekohane siis, kui antud külgede mõõtarvud on ühe- või kahekohalised.

B. Koosinusteoreemi ja siinusteoreemi põhjal:

1) valemist $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ arvutame külje c;

2) rakendades siinusteoreemi, kirjutame võrde

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$ millest leiame nurga β;

3) võrdest $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ leiame lõpuks nurga α.

Kui kolmnurgast on antud kolm külge, siis võib nurkade arvutamine toimuda samuti kahel viisil:

A. Koosinusteoreemi põhjal, kasutades nurkade koosinuste valemeid leheküljelt 200.

B. Koosinusteoreemi ja siinusteoreemi põhjal järgmiselt:

1) kasutades valemit

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$ leiame nurga α;

2) kirjutades siinusteoreemi põhjal võrde

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta},$$ leiame sellest nurga β;

3) võrdest $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ leiame lõpuks nurga γ.

§ 75. KOLMNURGA LAHENDAMISE NÄITEID.

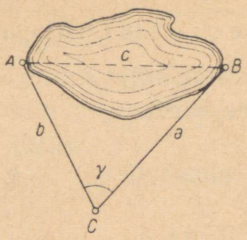
Näide 1. Arvuta tiigi pikkus AB (joon. 94), kui $AC=60$ m, $BC=80$ m ja nurk $ACB=88°$.

Lahendus. Tähistades pikkuse AB meetrites tähega c, võime koosinusteoreemi põhjal kirjutada:

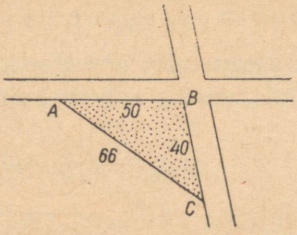
$$c^2=60^2+80^2-2\cdot 60\cdot 80\cdot\cos 88°=$$
$$=3600+6400-9600\cdot 0{,}0349=9665.$$
$$c=\sqrt{9665}=98{,}29\approx 98.$$

Seega on tiigi pikkus ligikaudu 98 m.

Näide 2. Risttänavate vahel on kolmnurkne haljasala ABC, mille külgede pikkused on vastavalt 50, 40 ja 66 m (joon. 95). Arvuta tänavatevaheline nurk ABC.



Joon. 94.



Joon. 95.

Lahendus. Tähistades otsitava nurga tähega β, võime koosinusteoreemi põhjal kirjutada:

$$\cos\beta = \frac{50^2+40^2-66^2}{2\cdot 50\cdot 40} = \frac{2500+1600-4356}{4000} = -0{,}0640.$$

Seega

$$\cos(180^\circ-\beta) = 0{,}0640;$$
$$180^\circ-\beta = 86^\circ 20';$$
$$\beta = 93^\circ 40' \approx 94^\circ.$$

Seega on tänavatevaheline nurk 94°.

Näide 3. Kui suured on nurgad kolmnurgas, mille küljed on: $a=195$, $b=169$, $c=182$?

Lähtudes koosinusteoreemist ja rakendades tuntud valemit

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

pole raske tuletada (proovi seda teha!) kolmnurga nn. **poolnurkade koosinuste valemeid:**

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

kus $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ tähendab kolmnurga poolt ümbermõõtu. Need valemid on eriti sobivad lükatiga arvutamiseks. Meie näite puhul korraldaksime arvutused nii:

$a=195;$	$p-a=273-195=\ 78;$
$b=169;$	$p-b=273-169=104;$
$c=182;$	$p-c=273-182=\ 91;$
$p=546:2=273;$	

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{273\cdot 78}{169\cdot 182}=0{,}692;$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-0{,}692=0{,}308; \qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{0{,}308};$$

$$\frac{\alpha}{2}=33°40'; \qquad \alpha=67°20'.$$

$$\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{273\cdot 104}{195\cdot 182}=0{,}800;$$

$$\sin^2\frac{\beta}{2}=1-0{,}800=0{,}200; \qquad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{0{,}200};$$

$$\frac{\beta}{2}=26°35'; \qquad \beta=53°10'.$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{273\cdot 91}{195\cdot 169}=0{,}753;$$

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-0{,}753=0{,}247; \qquad \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{0{,}247};$$

$$\frac{\gamma}{2}=29°45'; \qquad \gamma=59°30'.$$

Kontroll. $\alpha+\beta+\gamma=180°00'$.

Märkus. Arusaadavalt võiks näiteks 3. antud ülesande lahendada ka ainult koosinusteoreemi põhjal või rakendades viimast koos siinusteoreemiga (tee seda!).

Ülesandeid.

440. Lahenda kolmnurk järgmisil andmeil:

1) $a=16$; $b=12$; $\gamma=38°$.
2) $b=81{,}7$; $c=39{,}2$; $\alpha=122°10'$.
3) $a=52{,}84$; $c=14{,}88$; $\beta=24°55'$.
4) $a=8$; $b=12$; $c=16$.
5) $a=50$; $b=41$; $c=19$.
6) $a=6{,}4$; $b=8{,}8$; $c=10$.
7) $a=40$; $b=19$; $c=41$.
8) $a=1{,}5$; $b=2{,}5$; $c=1{,}8$.
9) $a=24{,}57$; $b=24{,}75$; $c=10{,}05$.
10) $a=0{,}2243$; $b=0{,}2469$; $c=0{,}3126$.

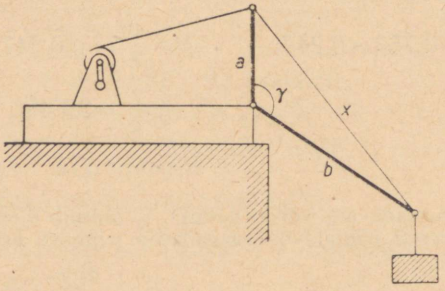
441. Arvuta järve pikkus AB (joon. 94), kui $AC=570$ m, $BC=860$ m ja nurk $\gamma=79°$.

442. Nelinurga küljed on järjestikku 16 m, 18 m, 24 m ja 26 m; üks diagonaal on 36 m. Arvuta nelinurga pindala.

443. Matkaja näeb oma asukohast P kolme mäetippu A, B ja C, millest A ja B paistavad talle ühes ja samas suunas ja millest A on talle kõige lähemal. Kaardi järgi on $AB=9{,}4$ km. $BC=6{,}0$ km ja $AC=11{,}2$ km. Matkaja mõõdab nurga BPC ja leiab selle olevat 12°. Kui kaugel on matkaja mäest C?

444. Ühest ja samast punktist alustasid ühtlast sirgjoonelist liikumist kaks keha, üks kiirusega 2 m sekundis, teine kiirusega 3 m sekundis. Kui kaugel on need kehad teineteisest 10 sekundi pärast, kui liikumise teed moodustavad nurga 34°?

445. Joonisel 96 on skemaatiliselt kujutatud tõstekraana, millel tugi $a=3{,}8$ m, õlg $b=6{,}5$ m ning nendevaheline nurk $\gamma=125°$. Arvuta trossi pikkus x.



Joon. 96.

§ 76. KOLMNURGA PINDALA VALEMID.

Kolmnurga pindala saab arvutada tuntud valemi

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ah} \qquad (1)$$

järgi, kus a tähendab kolmnurga alust ja h alusele tõmmatud kõrgust.

Kui kolmnurk on määratud kahe külje ja nendevahelise nurga kaudu, siis pindala arvutamiseks sobib valem (vt. § 72):

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma} \qquad (2)$$

Viimasest pindala valemist saab tuletada valemi kolmnurga pindala arvutamiseks ühe külje ja kolme nurga järgi.

Avaldame siinusteoreemi põhjal külje b:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}; \quad b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Asendades pindala valemis (2) külje b tema avaldisega, saame

$$S = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma;$$

$$\boxed{S = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}} \qquad (3)$$

Analoogiliselt saame valemid:

(3′) $\boxed{S = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2 \sin\beta}}$ $\boxed{S = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}}$ (3″)

Näide. Leida kolmnurga pindala, kui külg $c = 89$ m ja selle lähisnurgad on: $\alpha = 88°$, $\beta = 10°50'$.

Lahendus.

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 98°50' = 81°10'.$$

Valemi (3″) järgi kirjutame:

$$S = \frac{89^2 \cdot \sin 88° \cdot \sin 10°50'}{2 \cdot \sin 81°10'}.$$

Edasisi arvutusi lükati abil sooritades saame vastuse järgmiselt:

$$S = \frac{7900 \cdot 1 \cdot 0{,}188}{2 \cdot 0{,}988} = \frac{7900 \cdot 0{,}094}{0{,}988} = 756 \ (\text{m}^2).$$

Kolmnurga pindala saab arvutada ka kolme külje järgi. Selle-kohase valemi tuletamisel lähtume valemist (2) kujul

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

ning rakendame põhiseost

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)}.$$

Saame: $S = \frac{bc}{2} \sqrt{(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)}$.

Teisendame juuritavat avaldist. Liites koosinusteoreemist saadud valemis

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

mõlema poolega arvu 1, saame

$$1+\cos\alpha=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

ehk, lahutades viimase murru lugeja tegureiks,

$$1+\cos\alpha=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Tähistame kolmnurga ümbermõõdu sümboliga $2p$; siis

$$a+b+c=2p,$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c),$$
$$a+c-b=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b),$$
$$b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a).$$

Seega

$$1+\cos\alpha=\frac{2p(p-a)}{bc}.$$

Saadud võrduse mõlemaid pooli arvust 2 lahutades saame

$$1-\cos\alpha=2-\frac{2p(p-a)}{bc}=\frac{2}{bc}(bc-p^2+ap).$$

Asendades viimases sulgavaldises a väärtusega $2p-b-c$, saame sulgavaldist teisendada järgmiselt:

$$bc-p^2+ap=bc-p^2+2p^2-pb-pc=$$
$$=p^2-pb-pc+bc=$$
$$=(p-b)(p-c).$$

Järelikult

$$1-\cos\alpha=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Pindala valemi saame lõpuks nii:

$$S=\frac{bc}{2}\sqrt{\frac{2p(p-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \qquad (4)$$

Seda valemit nimetatakse Heroni pindalavalemiks. Kreeka matemaatik Heron elas II ja III sajandi vahetusel e.m.a. Viimasel ajal on selgunud, et valem oli tuntud juba enne Heronit.

Näide. Leida võrdhaarse kolmnurga pindala, kui haar on 4,6 m ja alus 5,8 m.

L a h e n d u s. Kasutades Heroni pindalavalemit, viime arvutused läbi järgmise skeemi järgi:

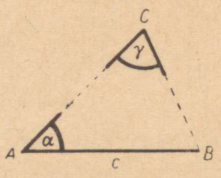
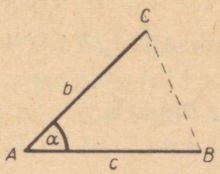
$a=4{,}6;$ $\quad p-a=2{,}9;$
$b=4{,}6;$ $\quad p-b=2{,}9;$
$c=5{,}8;$ $\quad p-c=1{,}7;$
$p=15{,}0:2=7{,}5;$

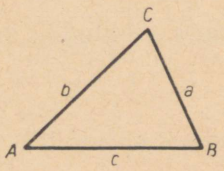
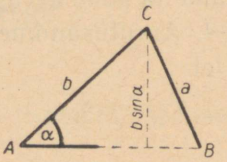
$$S=\sqrt{7{,}5\cdot 2{,}9^2\cdot 1{,}7}=2{,}9\cdot\sqrt{7{,}5\cdot 1{,}7}.$$

Edasi leiame lükatil korrutise $7{,}5\cdot 1{,}7$ skaalade A ja B abil; korrutise väärtust välja lugemata saame niidi alt skaalalt D ruutjuure väärtuse; viimastki välja lugemata korrutame ta kohe arvuga 2,9 ning loeme lõpptulemuseks numbrid 1—0—4. Arvutusandmete suurusjärke ja nimetusi arvestades otsustame, et

$$S=10{,}4\ (\text{m}^2).$$

§ 77. KOLMNURGA LAHENDAMISE SKEMAATILINE ÜLEVAADE.

Antud elemendid	Puuduvate elementide leidmine	Pindala
I. Külg ja kaks nurka 	1) $\beta=180^\circ-(\alpha+\gamma)$ $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ 2) $b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$ 3) $a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$	$S=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$
II. Kaks külge ja nurk nende vahel 	1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ 2) $\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}$ 3) $\sin\gamma=\frac{c\sin\alpha}{a}$	$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$

III. Kolm külge 	$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$	Heroni pindalavalem
IV. Kaks külge ja neist ühe vastasnurk 	A. Lahend puudub, kui $a<b\sin\alpha$ B. On üks lahend, kui 1) $a>b$ 2) $a=b$ ja $\alpha<90°$ 3) $a=b\sin\alpha$ C. Kaks lahendit, kui $b>a>b\sin\alpha$ $\frac{a}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$	

Ülesandeid.

446. Arvuta kolmnurga pindala järgmisil andmeil:

1) $a=93$; $b=65$; $\gamma=42°$.
2) $b=4{,}42$; $c=5{,}72$; $\alpha=65°20'$.
3) $a=50{,}8$; $c=32{,}3$; $\beta=23°30'$.
4) $a=20{,}73$; $b=36{,}26$; $\gamma=70°45'$.
5) $a=48{,}8$; $\beta=106°$; $\gamma=25°20'$.
6) $a=98{,}55$; $\alpha=23°42'$; $\beta=47°24'$.
7) $b=0{,}307$; $\alpha=32°40'$; $\beta=70°20'$.
8) $a=28$; $b=35$; $c=42$.
9) $a=0{,}18$; $b=0{,}23$; $c=0{,}09$.
10) $a=421{,}6$; $b=499{,}8$; $c=335{,}9$.

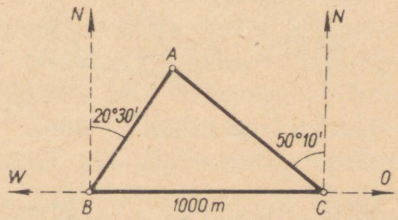
447. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 636 cm² ja kolmnurga suurim nurk on 92°42′. Arvuta kolmnurga haar.

448. Leia kolmnurga nurgad, kui kolmnurga pindala on 78 m² ja kaks külge on 13,8 m ja 24,6 m.

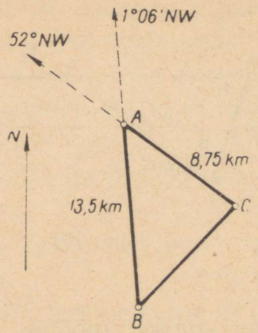
449. Joonisel 97 on kujutatud kolmnurgakujulise väljaku ABC plaan. Arvuta väljaku pindala.

450. Arvuta joonisel 98 kujutatud kolmnurga pindala.

451. Arvuta joonisel 99 kujutatud maatüki pindala.

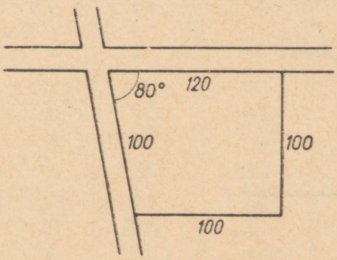


Joon. 97.

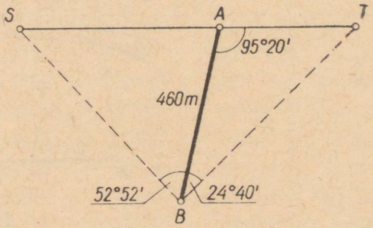


Joon. 98.

452. Ligipääsmatute punktide S ja T vahelise kauguse määramiseks mõõdeti baas AB, mille üks otspunkt A asus sirgel ST punktide S ja T vahel (joon. 100) ja mille pikkus oli 460 m. Peale selle mõõdeti nurgad $\angle BAT = 95°20'$, $\angle ABT = 24°40'$ ning $\angle ABS = 52°52'$. Arvuta kaugus ST.



Joon. 99.

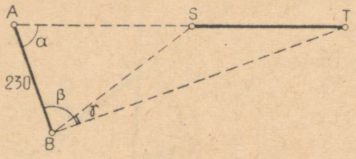


Joon. 100.

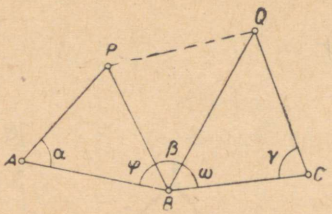
453. Ligipääsmatute punktide S ja T vahelise kauguse kindlakstegemiseks mõõdeti baas AB, mille otspunkt A asus lõigu ST pikendusel (joon. 101), ning nurgad $\angle SAB = \alpha$, $\angle ABS = \beta$ ja $\angle SBT = \gamma$.

Arvuta kaugus ST, kui $AB = 230$ m, $\alpha = 80°$, $\beta = 70°$ ja $\gamma = 25°$.

454. Punktid P ja Q teisel pool jõge on siinpoolselt kaldalt korraga nähtavad ainult punktist B (joon. 102). Punktid B ja P on korraga nähtavad punktist A. Punktid Q ja B on nähtavad punktist C. Pikkused AB ja BC on vastavalt 92,3 ja 72,1 m. Teodolii-



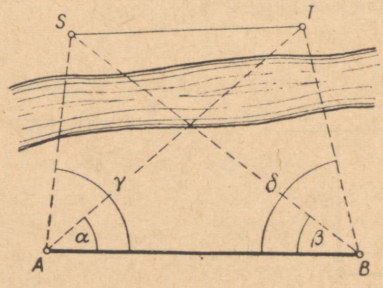
Joon. 101.



Joon. 102.

diga nurki mõõtes leiti, et $\alpha = 66°16'$, $\beta = 20°48'$, $\gamma = 82°25'$, $\varphi = 52°18'$ ja $\omega = 60°05'$. Arvuta pikkus PQ.

455. Punktid S ja T teisel pool jõge on korraga nähtavad nii punktist A kui ka punktist B siinpool jõge. Punktide S ja T vahelise kauguse (joon. 103) määramiseks mõõdeti AB ja nurgad α, β, γ ja δ. Arvuta kaugus ST, kui $AB = 100$ m, $\alpha = 52°$, $\beta = 57°$, $\gamma = 96°$ ja $\delta = 87°$.



Joon. 103.

N ä p u n ä i t e i d. 1) Arvuta AS kolmnurgast ASB. 2) Arvuta AT kolmnurgast ATB. 3) Arvuta ST kolmnurgast AST.

Kontrolliks arvuta samal viisil ST kolmnurgast BST.

456. Lahenda ülesanne 455 (joon. 103) järgmisil andmeil: $AB = 150$ m, $\alpha = 97°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 107°$, $\delta = 59°$.

Kordamisülesandeid.

457. Ristküliku pikem külg $a = 48{,}06$ mm; ühendades külgede keskpunktid, saame rombi, mille nurk $\alpha = 32°$. Arvuta ristküliku lühem külg.

458. Peegli ees asetseb kaks punkti, mille kaugused peegli tasapinnast on 2 cm ja 10 cm. Punktide kaugused teineteisest on 17 cm.

Kui suur langemisnurk on valguskiirel, mis väljudes ühest punktist läbib pärast peegeldumist teise punkti?

459. Täisnurkse kolmnurga pindala on 12,34 m^2 ja üks nurk on 36°24′. Leia kolmnurga hüpotenuus.

460. Arvuta korrapärase kümmenurga ümberringjoone raadius, kui kümmenurga apoteem on 26,8 cm.

461. Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a=10$ cm, $\alpha=60°$ ja $\beta=45°$. Mõõda külg b. Kontrolli mõõtmistulemust arvutamise teel.

462. Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a=54$ mm, $b=42$ mm ja $\alpha=135°$. Mõõda jooniselt nurk β ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

463. Alljärgnevas tabelis on antud kümne kolmnurga elemendid. Kontrolli nende sobivust.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	S
1.	5	12	13	22°37′	67°23′	90°	30
2.	16	63	65	14°15′	75°45′	90°	500
3.	6	5	5	73°44′	53°08′	53°08′	12
4.	55	110	110	28°58′	75°31′	75°31′	2 900
5.	84	72	45	89°35′	58°18′	32°07′	1 600
6.	416	635	970	18°02′	28°12′	133°46′	95 200
7.	133,1	85,76	137,5	68°47′	36°55′	74°18′	5 500
8.	52	56	6,3	52°	122°32′	5°28′	140
9.	17	8	11,9	116°	25°	39°	43
10.	108	81,7	39,2	122°06′	39°58′	17°56′	1 350

464. a) Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a=50$ mm, $b=70$ mm ja $\gamma=22°30′$. Mõõda jooniselt kolmas külg c ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

b) Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk, mille küljed on: $a=60$ mm, $b=70$ mm ja $c=80$ mm. Mõõda jooniselt kolmnurga nurgad ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

465. Alljärgnevas tabelis on antud kolmnurka määravad elemendid. Arvuta puuduvad elemendid.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	S
1.	7	8					14
2.	5			44°25′		101°32′	
3.	5	7					9,8
4.		14		53°08′		67°23′	
5.	13	20			67°23′		
6.		75	91			120°31′	
7.	9	65		6°22′			
8.		65	76		46°24′		
9.	9	1,7	8,9				
10.	8,95	6,88	10,2				

466. Kolmnurgas, mille küljed moodustavad aritmeetilise progressiooni, on üks külg 5 cm ja selle külje vastasnurk 120°. Arvuta teised küljed, nurgad ja pindala.

467. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud täisnurga tipuga. Millisteks osadeks jaguneb täisnurk?

468. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 2 : 3 : 4. Kuidas suhtuvad kolmnurga küljed?

469. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 2 : 3 : 4. Kuidas suhtuvad kolmnurga nurgad?

470. Kolmnurga pindala on 252 cm^2 ja kaks nurka on 53°08′ ja 120°31′. Arvuta kolmnurga küljed.

471. Nelinurga küljed on järjestikku 11 cm, 8,4 cm, 5,5 cm ja 4,2 cm; viimase kahe külje vaheline nurk on 70°. Arvuta nelinurga pindala.

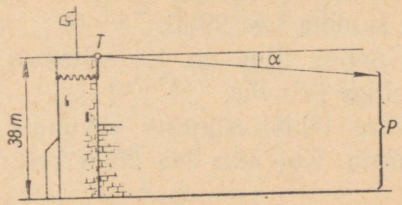
472. Täisnurkse kolmnurga teravnurga α siinus on $\frac{1}{3}$. Missuguse osa hüpotenuusist moodustab kaatet a?

473. Täisnurkse kolmnurga teravnurga β koosinus on $\frac{5}{8}$. Mitu protsenti hüpotenuusist on nurga β lähiskaatet?

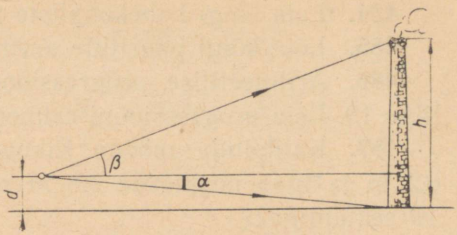
474. Missuguse nurga koosinus võrdub 45°-se nurga tangensiga?

475. Missuguse teravnurga tangens võrdub 30°-se nurga siinusega?

476. 38 m kõrguse torni tipust T vaadeldava punkti P alangunurk $\alpha = 4{,}3°$ (joon. 104). Arvuta punkti P kaugus torni tipust T.



Joon. 104.



Joon. 105.

477. Kõrguselt $d=9{,}30$ m vaadelduna paistab vabriku korstna jalg rõhtsihist nurga $\alpha=6{,}1°$ võrra allpool, korstna ülemine äär aga nurga $\beta=16{,}3°$ võrra kõrgemal (joon. 105). Arvuta korstna kõrgus h.

478. Leia vahemikust 0° kuni 360° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit:

a) $\cos x=\sin 2x$; b) $\cos x+\cos 2x=0$; c) $\sin x=2\cos x$.

*

479. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y=2x+9$ 3) $y=-\frac{1}{3}x+1$ 5) $y=\sin 2x$

2) $y=-x^2+x-12$ 4) $y=12-x-6x^2$ 6) $y=\cos\frac{1}{3}x$

480. Leia järgmiste funktsioonide positiivsuspiirkonnad:

1) $y=3x-6$ 3) $y=24-17x-20x^2$

2) $y=x^2+5x-14$ 4) $y=\sin x$, kui $0\leqslant x\leqslant 4\pi$

481. Leia järgmiste funktsioonide negatiivsuspiirkonnad:

1) $y=-0{,}3x+1{,}5$ 3) $y=2x^2+3x-2$

2) $y=-x^2-6x+16$ 4) $y=\cos x$, kui $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$

482. Leia järgmiste funktsioonide kasvamispiirkonnad:

1) $y=x^2+3x+22$ 3) $y=\tan x$, kui $0\leqslant x\leqslant 2\pi$,

2) $y=-x^2-x+2$ 4) $y=x^4$

483. Leia järgmiste funktsioonide kahanemispiirkonnad:

1) $y=x^2+3x-10$ 3) $y=x^3$

2) $y=2x^2-13x+15$ 4) $y=\sin x$, kui $0\leqslant x\leqslant 3\pi$

484. Leia kõigi kahekohaliste paarisarvude summa.

485. Leia kõigi paaritute arvude summa 1-st 99-ni.

486. Aritmeetilise progressiooni neljas liige on 10, seitsmes liige 19. Leia progressiooni esimene liige ja vahe.

487. Kaldpinda mööda liikuv kera läbib esimeses sekundis 0,5 m ja igas järgnevas 0,8 m rohkem. Kui pika tee läbib kera 10 sekundiga?

488. Leia progressiooni

$$\log 1;\ \log 10;\ \log 100;\ \log 1000;\ \ldots$$

10. liige

489. Arvuta avaldise

$$\frac{(x^2yz)^3-(8yz)^2}{4x^3y^2-3x^5z^2}$$

väärtus, kui $x=-2$, $y=5$ ja $z=-3$.

490. Lahenda proovimise teel võrrandid:

1) $4x^3-108=0$
2) $3x^4-48=0$

491. Järjesta suuruse järgi:

1) 3^9; $2{,}1^9$; 10^9; $(-9)^9$; $0{,}2^9$; $0{,}9^9$; $(-0{,}2)^9$; $(-31)^9$; $(-5)^9$.
2) 3^{10}; $2{,}1^{10}$; 10^{10}; $(-9)^{10}$; $0{,}2^{10}$; $0{,}9^{10}$; $(-0{,}2)^{10}$; $(-31)^{10}$; $(-5)^{10}$.

492. Lihtsusta avaldisi:

1) $(-2x\cdot 4yz^2)^3$ 2) $\frac{4^3a^4b^5c^2}{4^2a^7b^3c^3}$

3) $3x^2y^5\cdot 2x^4y^3-(2x^3y^4)^2+\frac{12x^9y^{10}}{3x^3y^2}$

493. Järjesta suuruse järgi:

1) 2^8; 2^{-8}; $(-2)^8$; $(-2)^{-8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$.
2) 3^7; 3^{-7}; $(-3)^7$; $(-3)^{-7}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-7}$.
3) 5^9; 5^{10}; $(-5)^9$; $(-5)^{10}$; 5^{-9}; 5^{-10}; $(-5)^{-9}$; $(-5)^{-10}$; $(-5)^0$; 5^0.

494. Lihtsusta avaldisi:

1) $3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ 2) $x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}}:x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{4}}$

3) $\left(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{5}{6}}\right)^2 \cdot \left(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

4) $(a^4b^6c)^{\frac{1}{2}} : \left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c\right)^2$

5) $\left[\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^4$

6) $\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}\right)^{-3}$

7) $\sqrt{a^2b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b}$

8) $\sqrt[3]{x^2y^4z} : \sqrt[4]{x^3y^2z^3}$

9) $(\sqrt{x^2y})^4 \cdot (\sqrt{xy})^3$

10) $\left[(\sqrt{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2b})^2\right]^{\frac{1}{3}}$

495. Järjesta suuruse järgi:

1) $52^{\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{1}{2}}$; $52^{-\frac{1}{2}}$; $2^{-\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

2) $3^{\frac{1}{3}}$; $(-3)^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $3^{-\frac{1}{3}}$; $(-3)^{-\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

3) 10^2; $10^{\frac{1}{2}}$; 10^{-2}; $10^{-\frac{1}{2}}$; 10^0; 10^3; 10^{-3}; $10^{\frac{1}{3}}$; $10^{-\frac{1}{3}}$.

496. Kirjuta järgmised murrud kujul, kus nimetaja on ratsionaalne:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2y}}$

2) $\frac{1}{1-\sqrt{14}}$

3) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

4) $\frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}$

5) $\frac{xy}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$

6) $\frac{(2-a)^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-(2-a)^{\frac{1}{2}}}$

497. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $3\sqrt{x}-75=0$

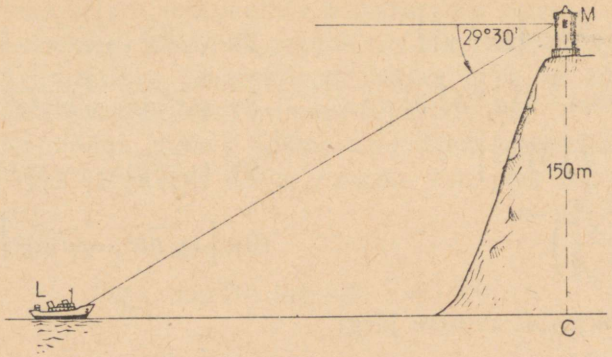
2) $(2-x)^{\frac{1}{2}}-7=0$

3) $(2y-1)^{\frac{1}{2}}-y=0$

4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}=0$

5) $(x+2)^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}=0$

498. Tuletornist, mis asub 150 m kõrgusel merepinnast, paistab laev horisontaaltasapinnast, mis läbib vaatleja silma, 29°30′ allpool. Kui kaugel on laev rannast (punktist C, joon. 106)?



Joon. 106.

499. Kahe kontsentrilise ringjoone raadiused on 16 mm ja 28 mm. Kui kaugel nende ringjoonte ühisest keskpunktist paistab suurem ring kaks korda suuremas nurgas kui väiksem? Kontrolli lahendit andmete ja saadud tulemuse järgi tehtud joonise abil.

500. Sarika pikkus maja seina kohalt katuse harjani on 3,8 m ja katuse kaldenurk on 35°. Leia aampalgi pikkus.

501. On antud lõik a ja nurk α. Konstrueeri sirkli ja joonlaua abil lõik:

1) $a \sin \alpha$; 2) $a \cos \alpha$.

502. Äratuskella kõlisti osuti on 6 peal. Kui suure nurga võrra peab seda osutit pöörama, et äratuskell kõliseks kell 8, kui kõlisti osutit saab pöörata tunniosuti pöörlemisele vastupidises suunas?

503. Hammasrattal on 72 hammast. Kui suure nurga võrra pöördub hammasratas, kui ta pöördub:

1) kellaosuti pöörlemisele vastupidises suunas 42; 300 hamba võrra?

2) kellaosuti pöörlemise suunas 24; 144 hamba võrra?

504. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 49° + \sin(-49°) + \cos 25° - \cos(-25°)$

2) $\cos 33° - \cos 17° - \cos(-33°) - \sin 40° + \cos(-17°) - -\sin(-40°)$

3) $\sin(\pi - 1) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha)$

505. Arvuta järgnevate avaldiste väärtused tabeleid kasutamata:

1) $\frac{\tan 26^\circ + \tan 19^\circ}{1 - \tan 26^\circ \tan 19^\circ}$

2) $\frac{\tan \frac{\pi}{15} + \tan \frac{4\pi}{15}}{1 - \tan \frac{\pi}{15} \tan \frac{4\pi}{15}}$

3) $\sin 18^\circ \cos 42^\circ + \cos 18^\circ \sin 42^\circ$

4) $\cos 48^\circ \cos 16^\circ + \sin 48^\circ \sin 16^\circ$

506. Lahenda võrrandid:

1) $\cos 4x + \cos 2x = 0$
2) $\tan 2x = \tan x$

507. Täisnurkses kolmnurgas on üks külg teise kahe külje geomeetriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?

508. Arvuta logaritmide abil:

1) $\frac{\sqrt{0{,}06768 \cdot \sqrt{0{,}001}}}{0{,}004837^3 \cdot \sqrt{10}}$

2) $\frac{17{,}62}{4{,}834^3 \cdot \sqrt{\frac{0{,}716}{8{,}55}}}$

3) $\frac{\sqrt[5]{1000} \cdot \sqrt[3]{100}}{\sqrt[4]{100000} \cdot \sqrt{10}}$

4) $\frac{\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt[5]{0{,}0001}}{\sqrt[3]{0{,}0001} \cdot \sqrt[8]{0{,}001}}$

5) Arvuta maakera ruumala, kui maakera raadius on 6371 km. Kui pikk oleks niisama suure ruumalaga kuubi serv?

6) Kui pika tee läbib Maa aastas, tehes täistiiru ümber Päikese? (Maa kaugus Päikesest on 149 700 000 km.)

7) Rauast kuup kaaluga 82,7 kg on asetatud rõhtsale lauale. Kui suurt rõhku avaldab kuup lauale? (Raua erikaal on 7,8 $\frac{G}{cm^3}$.)

8) Vasktraadi kera kaalub 24,67 kG. Mitu meetrit traati on keras, kui traadi läbimõõt on 1,5 mm? (Vase erikaal on 8,9 $\frac{G}{cm^3}$.)

9) Kolmnurga külgede pikkused on 283,5 m, 309,2 m ja 3467 m. Arvuta kolmnurga pindala.

509. Lahenda arvutuslükati abil järgmised ülesanded:

1) 0,722 · 268
14,9 : 0,066
0,0304 : 9,23
3,14 · 2030

2) 56,6 · 125,5
6200 : 19,8
0,87 : 52,3
942 : 40,7

3) $0{,}0288^2$ 4) $\sqrt{108000}$

137^3 $\sqrt[3]{0{,}01}$

8530^2 $\sqrt[3]{675000}$

$0{,}046^3$ $\sqrt{0{,}00007}$

5) $\sqrt[4]{28000}$; $\sqrt[6]{0{,}003}$

6) Leia x:

a) $x : 232 = 15{,}6 : 8{,}7$; $59{,}3 : x = 692 : 7{,}4$.

b) $19{,}9 : 0{,}79 = x : 36{,}5$; $0{,}0405 : 0{,}97 = 16{,}4 : x$.

7) $\frac{31{,}7 \cdot 9{,}25}{17{,}2}$ $\frac{0{,}281 \cdot 4{,}76 \cdot 18{,}9}{11{,}8 \cdot 0{,}647}$

$\frac{91{,}5 \cdot 107 \cdot 3{,}90}{16{,}4 \cdot 0{,}54 \cdot 522}$ $\frac{5200 \cdot 249}{3140 \cdot 178}$

8) Silikaatkivi standardmõõtmed on $6 \times 12 \times 25$ cm. Arvuta ühe kivi kaal, kui silikaatkivi erikaal on $2{,}1 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.

9) Ristkülik, mille mõõtmed on 87,5 m ja 17,2 m, tuleb jaotada sirgetega, mis on paralleelsed lühema küljega, osadeks, mille pindalad suhtuvad nagu 7 : 12 : 17. Leia osade pindalad ja mõõtmed.

10) Toa põranda mõõtmed on 4,26 m ja 3,72 m. Mitu 15 cm laiust ja 3,5 m pikkust lauda kulub selle põranda katmiseks, kui arvestada, et laudade parajaks saagimisel läheb kaduma 6% kogu materjalist.

11) Risttahuka mõõtmed on 56,7 cm, 67,5 cm ja 31,6 cm. Arvuta risttahuka tahkude diagonaalide pikkused.

12) Lahenda võrrandid:

a) $2{,}1x^2 - 4{,}7x - 5{,}85 = 0$

b) $0{,}2x^2 + 1{,}82x - 7{,}87 = 0$

510. Teisenda logaritmitavaks:

1) $\frac{\cos x + \sqrt{3} \sin x}{\cos x - \sqrt{3} \sin x}$ 2) $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

511. Teisenda avaldist

$$\sin 87° - \sin 59° - \sin 93° + \sin 61°.$$

512. Arvuta peast:

1) $\cos 40° \cos 10° + \sin 40° \sin 10°$

2) $\sin 10° \cos 50° + \cos 10° \sin 50°$

513. Lihtsusta:

1) $4 \cos\left(45° - \frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(45° - \frac{x}{2}\right)$

2) $\tan(30° + x) \cdot \tan(x - 60°)$

3) $\sin^2 2x(1 + \cot^2 2x)$

4) $\cos^4 \alpha + \sin^2 2\alpha$

514. 1) Missugustel argumendi väärtustel funktsioonid $y = \cos^2 x$ ja $y = 2(\sin x + 1)$ on võrdsed?

2) Missugusel argumendi väärtusel funktsiooni

$y = 2 \sin x \cdot \tan x + \cos x$ väärtus võrdub 1-ga?

515. Leia arvutamise teel niisuguste punktide koordinaadid, milles funktsiooni $y = 7(1 - \cos x) - 2 \sin^2 x$ graafik lõikab x-telge?

516. Lahenda võrrandid:

1) $5 \cos 2x = 4 \sin x$

2) $2 \cos x - \cos 2x = 1$

3) $\sin \frac{x}{3} = 1$

4) $\sin 10x = 2 \cos 5x$

5) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

6) $\cos 4x + \cos 2x = 0$

7) $\sin 5x - \sin x = 0$

8) $\sin \frac{\pi}{6} + \cos x = 1$

517. Teisenda korrutiseks:

1) $\sin \alpha + \frac{1}{2}$

2) $\sin \alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

518. Tõesta, et

1) $\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \cot^2 \frac{\alpha}{2}$

2) $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{2}{\sin \alpha}$

3) $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = 2 \tan \alpha$

519. Tõesta, et avaldise

$$\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$$

väärtuseks ei saa olla negatiivne arv.

520. Lihtsusta ja arvuta

$$\sin 27^\circ\cos 33^\circ+\sin 63^\circ\cos 57^\circ.$$

521. Teades, et α ja β on positiivsed teravnurgad, näita, et kui $\tan\alpha=\frac{1}{7}$ ja $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, siis $\alpha+2\beta=45^\circ$.

522. Kumb on suurem, kas sin 1 või sin 1°?

523. Missugustel x väärtustel funktsioon

$$y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

on määratud?

524. Leia niisugused x väärtused, mille puhul avaldise $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}$ väärtus on suurem kui 1?

525. Lahenda võrratus:

$$\tan\frac{\pi x}{4(x+1)}>1.$$

526. Lahenda võrrandid:

1) $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$

2) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$

3) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$

4) $x+x^{\frac{1}{2}}=6$

527. Lihtsusta avaldised:

1) $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

2) $\left[a+\left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[a-\left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$

528. Arvuta avaldise $\sin\alpha\cos\alpha$ väärtus, teades, et α ja β on täisnurkse kolmnurga teravnurgad ja et $\sin\alpha+\sin\beta=1{,}4$.

529. Arvuta murru $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ väärtus, teades, et $\tan\alpha=2{,}7$.

530. Kas on olemas niisugune nurk, mille puhul

1) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ja $\cos\alpha=\frac{1}{2}$?

2) $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$ ja $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{2}{3}}$?

531. Arvuta $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$, teades, et $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ja $\sin\alpha<0$.

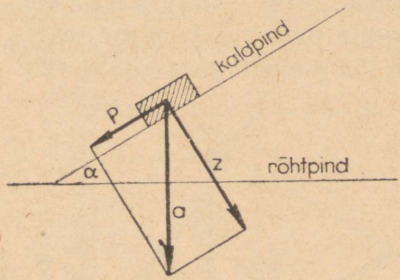
532. Arvuta kolmnurga nurga α funktsioonide väärtused, teades, et $\cos\alpha=-0{,}4$.

533. Tõesta, et

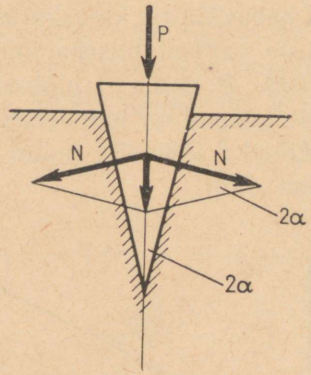
1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\geqslant\frac{1}{2}$

2) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\geqslant\frac{1}{4}$

534. Kaldpinnal (joon. 107) on keha, mille raskus $Q=50$ kG. Arvuta jõud P, mis keha kaldpinda mööda alla veab, ja kaldpinnale risti mõjuv jõud z, kui kaldpinna kaldenurk rõhttasapinna suhtes on $\alpha=30°$.



Joon. 107.



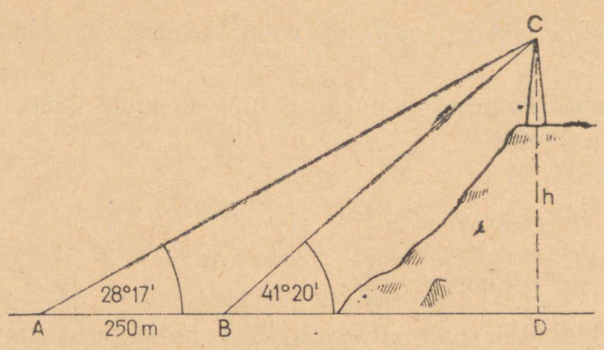
Joon. 108.

535. Kiilu silmale mõjuv jõud P jaotub kaheks komponendiks, mis kiilu põsktasapindadega on risti. Arvuta komponent N (joon. 108), kui kiilunurk $2\alpha=28°$.

536. Mäel asuva mälestusobeliski tipp C (joon. 109) paistab mäejalamist mööduval horisontaalsel teel punktist A nurgas $28°17'$. Punktist B, mis on obeliskile 250 meetrit lähemal, paistab tipp C nurgas $41°20'$. Arvuta obeliski tipu C kõrgus CD tee tasapinnast.

537. Tõesta, et

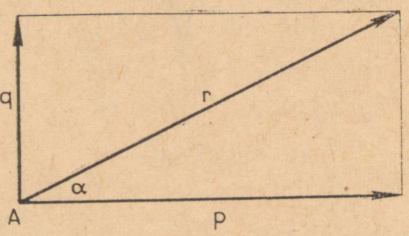
1) $\sin 10°+\sin 50°-\cos 20°=0$
2) $\cos 85°+\cos 35°-\cos 25°=0$



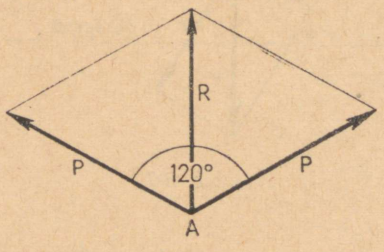
Joon. 109.

538. Kasvuhoone, mille pikkus on 16 m ja laius 6 m, on kaetud kaheviilulise klaaskatusega. Mitu ruutmeetrit klaasi kulub selle katuse valmistamiseks, kui katuse kalle on 48°?

539. Punktile A mõjuvad kaks jõudu $p=40$ kG ja $q=20$ kG, mille suunad on teineteisega risti. Arvuta punktile A mõjuv resultantjõud r, kui selle suund moodustab jõu p suunaga nurga $\alpha=28°$ (joon. 110).



Joon. 110.



Joon. 111.

540. Jõud $R=600$ kg lahutatakse kaheks absoluutväärtuselt võrdseks komponendiks, mis teineteisega moodustavad 120°-se nurga (joon. 111). Kui suured on need komponendid?

541. Tõesta, et

1) $\sin 10° + \sin 50° - \cos 20° = 0$;
2) $\cos 85° + \cos 35° - \cos 25° = 0$.

542. Arvuta $a \sin 2x + b \cos 2x$, teades, et $\tan x = \frac{a}{b}$.

543. Täisnurkses kolmnurgas on üks külg teise kahe külje geomeetriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?

544. Anna korrutise kuju avaldisele:

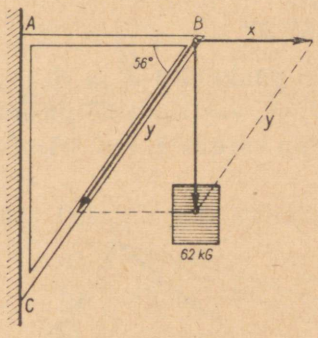
1) $\sin 52° + \frac{1}{2}$;
2) $\frac{3}{4} - \sin^2 42°$;
3) $3 - 4\cos^2 56°$;
4) $1 - 2\sin 15°$;
5) $\frac{1}{2} + \cos 81°$.

545. Lahenda võrrand.

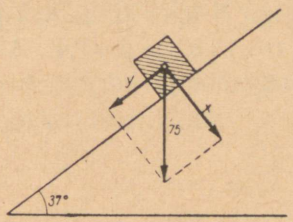
1) $\sin(x+30°) = \sin x$
2) $\cos(x-60°) = \sin 2x$
3) $\cos 3x + \cos 2x = 0$
4) $\sin 5x + \sin 3x = \cos x$

546. Kronsteini (seinapuki) ABC punktisse B on riputatud raskus 62 kG. Rõhtsa varda AB ja kaldtoe BC vaheline nurk on 56°. Kui suur jõud x mõjub varrast AB seinalt lahti rebivalt ja kui suur on surve y toele BC (joon. 112)?

Et siin andmed on mõõtmise teel saadud, seega ligikaudsed, siis ümarda tabelist saadavad trigonomeetriliste funktsioonide väärtused kahe tüvenumbrini ja anna ka lõpptulemus kahe tüvenumbriga. Arvutused tee arvutuslükatil!



Joon. 112.



Joon. 113.

547. Kaldpinnal, mis moodustab rõhttasapinnaga nurga 37° (joon. 113), on 75 kG raskune kast kaubaga. Kui suurt jõudu y on tarvis selle kasti hoidmiseks kaldpinnal tasakaalus (hõõrdumist arvestamata) ja kui suur on rõhk x kaldpinnale?

Lahendamisel arvesta märkust eelmise ülesande lõpus!

548. Lahenda täisnurkne kolmnurk, teades, et andmed on ligikaudsed arvud (kaatetid on a ja b, hüpotenuus c, kaateti a vastasnurk on α ja kaateti b vastasnurk β):

1) $c=8$ m; $\beta=40°$;
2) $c=12$ m; $\alpha=26°$;
3) $a=200$ m; $\beta=67°$;
4) $a=72$ mm; $\alpha=32°$;
5) $b=24$ m; $\beta=78°$;
6) $b=153$ mm; $\alpha=56°30'$.

549. Püstprisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on a ja b ning teravnurgad on α ja β. Prisma kõrgus on h. Arvuta prisma ruumala ja täispindala järgmistel andmetel:

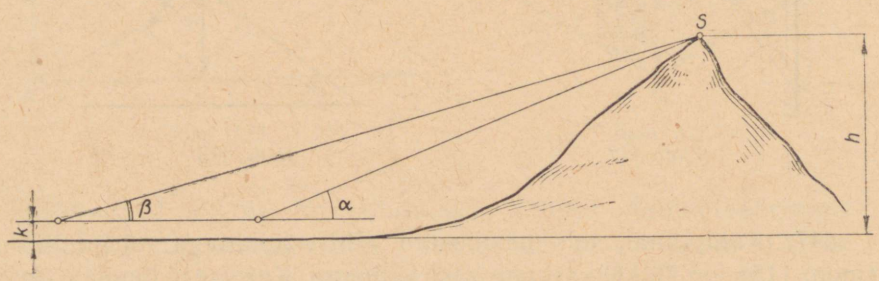
1) $a=48$ mm; $\alpha=35°$; $h=82$ mm;
2) $b=13{,}5$ cm; $\alpha=62°30'$; $h=11{,}2$ cm;
3) $b=2{,}72$ m; $\alpha=43°20'$; $h=1{,}55$ m;
4) $a=2{,}08$ dm; $\beta=59°10'$; $h=1{,}12$ dm.

550. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserv moodustab põhja mediaaniga nurga α. (Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrguse aluspunktiks on põhja mediaanide lõikepunkt.)

Arvuta püramiidi ruumala ja täispindala järgmistel andmetel:

1) $a=5$ cm; $\alpha=40°$;
2) $a=18$ cm; $\alpha=32°$;
3) $a=124$ mm; $\alpha=50°30'$.

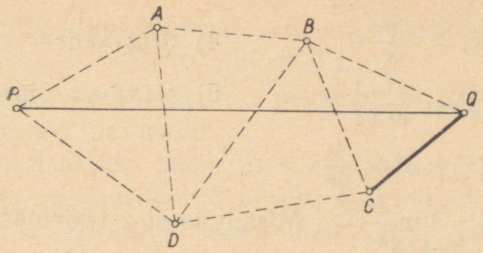
551. Mäetipp S (joon. 114) paistab punktidest A ja B, mis on punktiga S ühes ja samas püsttasapinnas, vastavalt kõrgusnurkadega $\alpha=15{,}5°$ ja $\beta=7{,}4°$. Arvuta mäetipu kõrgus h, kui $AB=538$ m ja nurgamõõtja kõrgus $k=1{,}65$ m.



Joon. 114.

552. Suurte kauguste mõõtmisel valitakse mõõdetava lõigu ümbruses vaatluspunktid nii, et igast vaatluspunktist on nähtavad kaks naabruses olevat punkti (triangulatsioonimeetod).

Mõõdetakse baas CQ (joon. 115) ja vajalikud nurgad. Arvuta kaugus PQ, teades, et $CQ=2{,}00$ km ja nurkade suurused on järg-



Joon. 115.

mised: $\angle APD = 83°20'$; $\angle PAD = 46°50'$; $\angle BAD = 71°20'$; $\angle ADB = 38°40'$; $\angle DBC = 62°10'$; $\angle BDC = 40°30'$; $\angle CBQ = 35°20'$; $\angle BCQ = 72°20'$.

Näpunäide.

1) Arvuta BC kolmnurgast BCQ;
2) „ BD ja DC „ DBC;
3) „ AD „ ABD;
4) „ PD „ PAD;
5) „ PC „ PCD;
6) „ PQ „ PQC.

Kontrolliks arvuta analoogiliselt PQ kolmnurgast PQB.

*

553. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkond:

a) $y = x\sqrt{4-x}$

b) $y = \sqrt{4x-x^2}$

c) $y = \sqrt{2\sin x}$

554. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkond:

a) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$

b) $y = \arccos (2x+3)$

c) $y = \frac{4x-x^2}{x^2-2x-35}$

555. $F(x) = x^2$. Arvuta:

1) $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$; 2) $F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

556. Missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid, missugused paaritud funktsioonid?

1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

2) $\varphi(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$

3) $F(x)=a^x+\frac{1}{a^x}$

4) $\Phi(x)=a^x-\frac{1}{a^x}$

5) $G(x)=x\cdot\sin^2 x-x^3$

557. a) Leia $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-3}{2x+1}$. Missugusest x väärtusest alates erinevad funktsiooni väärtused piirväärtusest vähem kui 0,001?

b) Leia $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{2+4x^2}$. Missugusest x väärtusest alates erinevad funktsiooni väärtused piirväärtusest vähem kui 0,01?

558. Leia järgmised piirväärtused:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\sin 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

f) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x+6}{x^3+8}$

g) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$

559. Leia järgmised piirväärtused:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

560. Uuri funktsioone:

a) $s=v_0t-gt^2$

b) $v=v_0-gt$

c) $y=-\frac{1}{2}\cdot 3^x$

d) $y=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$

561. Tühjuses ülesvisatud keha liigub seaduse järgi

$s=v_0t-4{,}9t^2$, $v=v_0-9{,}8t$,

kus t on aeg katse algusest arvates, v_0 — ülesviske kiirus, s — läbitud tee pikkus ja v — kiirus ajahetkel t.

Et pikk terav nool liigub õhus peaaegu nii nagu tühjuses, siis lahenda järgmised ülesanded.

1. Vibunool lastakse püstsihis üles kiirusega 20 m sekundis. Millal jõuab ta oma püstlennu piirile? Kui kõrgel see on?

2. Missuguse kiirusega jõuab nool vabal langemisel tagasi maapinnale?

3. Missugusel ajamomendil asetseb nool 15 m kõrgusel?

562. Doominokividel on silmi järgmiselt:

$0+0, 0+1, \ldots, 0+6;\ 1+1, 1+2, \ldots, 1+6;$
$2+2, 2+3, \ldots, 2+6; \ \ldots; 6+6.$

Leia doominokividele kantud silmade kogusumma.

563. Leia kõigi p-ga jaguvate arvude summa alates arvust mp kuni arvuni np, kus m ja n on täisarvud.

564. Lahenda järgmised võrrandid:

a) $\frac{1}{3}\log(1+x)=1-\log 2$

b) $\log(x+4)+\log x=2\log(x+1)$

c) $\log 5x+\log 7x=\log 140$

565. Lahenda järgmised võrrandid:

a) $\left(\frac{14}{9}\right)^x=\frac{5}{6}$

b) $(1{,}4)^x=8{,}1$

c) $(3{,}9)^x=1$

566. Mitu numbrit on pärast astendamist arvudes

$$2^{100}, \quad 43^{15}, \quad 5^{5^5}?$$

567. Mitu nulli on koma ja esimese nullist erineva numbri vahel pärast astendamist arvudes

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{100}, \ \left(\frac{10}{17}\right)^{20}, \ \left(\frac{13}{19}\right)^{50}?$$

568. Teame, et $\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{2}$ ja et $3>2$. Seega kehtib võrratus

$$3\log\tfrac{1}{2}>2\log\tfrac{1}{2}$$

ja siit

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

millest

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ ehk } \frac{1}{8} > \frac{1}{4}.$$

Kus on viga?

*

569. Kell on kolme ja nelja vahel ja minutiosuti katab tunniosutit. Kui palju on kell?

570. Poiss käis jalgrattaga raudteejaamas. Minnes oli tuul vastu, tulles tagant, mistõttu sinnasõit toimus kiirusega 12 km tunnis ja tagasisõit kiirusega 18 km tunnis. Jaamas kulus tal aega $\frac{1}{2}$ tundi. Kogu reis kestis aga 3 tundi. Kui kaugel raudteejaamast elas poiss?

571. Ruudukujulise tiigi keskpaigas kasvab pillirookõrs, mille veepealne osa on 1 jalg pikk. Kui selle roo tipp tõmmati tiigi külje keskkohta, puudutas tipp just veepinda. Tiigi külje pikkus on 10 jalga. Eeldades, et pillirookõrs jäi sirgeks, leia, kui sügav on tiik. (Tsin Kiu Tšaou, ca 2600 a. e. m. a.)

572. Üks mees lausub teisele: «Anna mulle 1 sent, siis on mul niipalju, kui sinul üle jääb.» Teine vastab: «Anna sina mulle 1 sent, siis on mul kaks korda niipalju, kui sinul üle jääb.» Kui palju raha on kummalgi? (Riese, a. 1524)

573. Poisil on kaks korda rohkem õdesid kui vendi, igal õel aga on niisama palju vendi kui õdesid. Mitu last on peres?

574. Kaks kontsentrilist ringi raadiustega 17 cm ja 10 cm on lõigatud sirgega, nii et kõõlu osa väiksemas ringis on $\frac{2}{5}$ suurema kõõlu pikkusest. Kui pikk on suurema ringi kõõl ja kui kaugel ta asetseb ringide keskpunktist?

575. Kahekohalise arvu jagamisel tema numbrite summaga saame jagatise 7 ja jäägi 3; jagamisel numbrite vahega saame jagatise 18 ja jäägi 1. Missugune kahekohaline arv see on?

576. Kui kahekohalise arvu jagame tema ristsummaga, siis saame jagatise 4 ja jäägi 9. Kui otsitavas arvus vahetame numbrid ja jagame saadud arvu ristsummaga, siis saame jagatise 6 ja jäägi 6. Leia see arv.

577. Tähesõitja B lähtub stardist m minutit hiljem kui tähesõitja A. A sõidab kiirusega a km tunnis ja B kiirusega b km tunnis. Mitme minuti pärast ja kui kaugel stardikohast möödub sõitja B sõitjast A?

578. Stopperid näitasid 100 m jooksus kahele esimesele kohale tulnud jooksja aegadeks 11,2 ja 11,3 sekundit. Võitja oli stardis kaotanud aega 0,3 sekundit. Mitu meetrit enne lõpujoont hakkas võitja «vedama», kui eeldada, et kõik jooksjad jooksid jääva kiirusega?

579. Näita, et

$$a^3+b^3=125-15ab,$$

kui $a+b=5$.

580. Konstrueeri punktid $A\ (-4; 0)$ ja $B\ (-1; 4)$ ning punktid A_1 ja B_1, mis on sümmeetrilised antud punktidega y-telje suhtes. Leia nende punktidega määratud trapetsi ümbermõõt ja pindala.

581. Konstrueeri kolmnurk, mille tipud on $A(-4; 2)$, $B(0; -1)$ ja $C(3; 3)$. Leia selle kolmnurga ümbermõõt ja pindala.

582. Leia võrrand ringjoonele, mille keskpunktiks on $C(3; 4)$ ja raadiuseks $r=5$. Kas sellel ringjoonel on punktid $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; 0)$ ja $D(4; 1)$?

583. Kuidas avalduvad koordinaattelgede vaheliste nurkade poolitajate võrrandid?

584. Konstrueeri sirged:

1) $3x+4y=12$
2) $3x-4y=0$
3) $2x-5=0$
4) $2y+5=0$

585. Leia parabooli haripunkt, kui parabooli võrrand on

1) $y=x^2-2x+2$;
2) $y=-3x^2+3x-3$.

VI. GEOMEETRILISED TEISENDUSED TASAPINNAL.

§ 78. GEOMEETRILISE TEISENDUSE MÕISTE.

1. Geomeetrilise teisenduse definitsioon ja näiteid.

Geomeetriliseks teisenduseks tasapinnal nimetatakse tasapinna antud punktidest mingi eeskirja järgi uute punktide tuletamist.

Antud punktideks võivad siin olla kas tasapinna üksikud punktid või mingi sellel tasapinnal asetseva kujundi (lõigu, ringjoone jm.) punktid või lõpuks selle tasapinna kõik punktid. Antud punktide hulka nimetatakse **originaalkujundiks** ehk lihtsalt **originaaliks.**

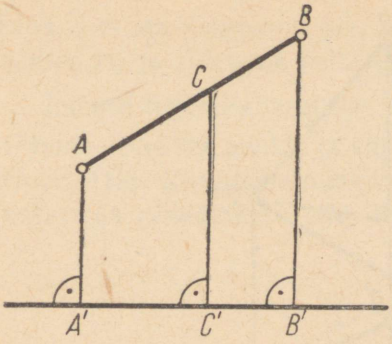
Antud punktidest tuletatud uusi punkte nimetatakse antud punktidele antud teisenduses vastavateks punktideks ehk antud punktide **teisenditeks.** Üleminek originaalkujundi juurest tema teisendi juurde ongi teisendus.

Eeskiri, mis ütleb, kuidas antud punktide järgi leida nende teisendeid, on **teisenduseeskiri.** Allpool näeme, et teisenduseeskiri antakse mõnikord sõnalise juhisena, mõnikord valemina või geomeetrilise konstruktsioonina.

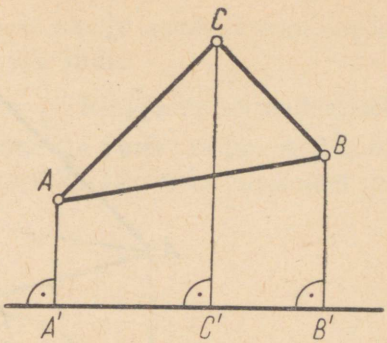
Kui teisendus on niisugune, et originaali igal punktil leidub ainult üks teisend ja viimane kujutab ainult üht originaali punkti, siis teisendust nimetatakse **üksüheseks.**

Vaatleme neid mõisteid ühenduses mõne näitega.

Näide 1. Tasapinnal on antud sirge ja väljaspool seda lõik AB (joon. 116). Loeme lõigu mistahes punkti C teisendiks antud sirge punkti C', kus punktist C antud sirgele tõmmatud ristsirge lõikab antud sirget, s. o. punkti C teisendiks loeme tema ristprojektsiooni antud sirgel.



Joon. 116.



Joon. 117.

Siin originaalkujundiks on lõik AB ja tema teisendiks on lõik $A'B'$. Vastavus originaali ja teisendi punktide vahel on üksühene: lõigu igal punktil on ainult üks projektsioon ja projektsiooni iga punkt kujutab ainult üht lõigu punkti.

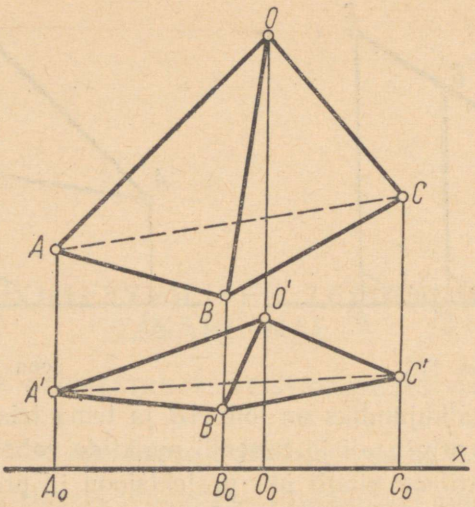
N ä i d e 2. Antud on kolmnurk ABC ja seda mittelõikav sirge (joon. 117). Mõistame siin kolmnurga all kinnist murdjoont (mitte sellega piiratud tasapinnatükki) ja loeme kolmnurga mistahes punkti teisendiks tema ristprojektsiooni antud sirgel. Siis kolmnurga külje AB teisendiks on lõik $A'B'$, külje BC teisendiks lõik $B'C'$, külje AC teisendiks lõik $A'C'$ ja kogu kolmnurga teisendiks samuti lõik $A'B'$.

Siin originaali (kolmnurga ABC) igale punktile vastab üks teisendi (lõigu $A'B'$) punkt, kuid teisendi iga punkt (välja arvatud A' ja B') kujutavad originaali kaht punkti. Näiteks teisendi punkt C' on kolmnurga tipu C teisendiks, aga ka külje AB selle punkti teisendiks, kus see külg lõikub sirgega CC'. Seega vastavus originaali ja teisendi punktide vahel ei ole üksühene.

N ä i d e 3. Tasapinnal on antud sirge x ja sellest ühel pool mingi kujund, näiteks kolmnurkse püramiidi kujutis $OABC$ (joon. 116). Teisendame kujundit nii, et originaali punkt ja selle teisend asetsevad sirgest x ühel ja samal pool selle sirge ühel ja samal ristsirgel, kusjuures teisendi ja originaalpunkti kaugused sirgest x on jääva suhtega m (joonisel 116 $m = \frac{1}{3}$).

Selle teisenduseeskirja puhul punktide teisendite kaugused sirgest x on võrdelised originaalpunktide kaugustega sellest sirgest, kusjuures võrdetegur on m:

$$A_0A' = m\,A_0A;\quad B_0B' = m\,B_0B;\quad C_0C' = m\,C_0C \text{ jne.}$$



Joon. 118.

On ilmne, et teisendus on üksühene. Kui $0<m<1$, siis seda teisendust võib nimetada tasapinna kokkusurumiseks sirge x poole suhtes m. Kui $m>1$, siis teisendus on tasapinna väljavenitamine.

Tasapinna kokkusurumist (samuti väljavenitamist) on kerge avaldada valemites, kui selleks sirgeks, mille poole ta kokku surutakse, võtta üks koordinaattelg. Näiteks, kui tasapinna kokkusurumine toimub x-telje poole suhtes m, siis originaalpunktil ja tema teisendil on üks ja sama abstsiss, kuid teisendi ordinaat on originaali ordinaadi m-kordne (vrd. joon. 118). Tähistades originaalpunkti koordinaate x ja y, tema teisendi koordinaate x' ja y', saame valemid:

$$x' = x, \tag{1}$$

$$y' = my. \tag{2}$$

Niisiis, punkt $A(x; y)$ teisendub punktiks $A'(x; my)$.

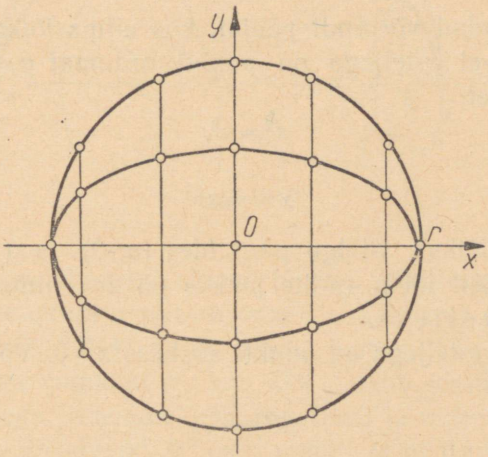
2. Ellips ringjoone teisendina.

Kasutades tasapinna kokkusurumist x-telje poole, tuletame ringjoonest ühe uue joone.

Olgu koordinaatteljestikus antud ringjoon, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja raadius on r. Leiame joone, milleks

teisendub see ringjoon, kui tasapind x-telje poole kokku suruda suhtes m, ja tuletame selle joone võrrandi.

Joonise tegemisel oletame, et $m=\frac{1}{2}$. Ringjoone teisendamiseks võtame sellel rea punkte ja vähendame iga punkti ordinaati 2 korda (joon. 119). Ringjoone punktide teisendid asetsevad ühel uuel joonel, mida nimetatakse **ellipsiks.**



Joon. 119.

Ellipsi võrrandi tuletamiseks kirjutame esmalt ringjoone võrrandi

$$x^2+y^2=r^2.$$

Nüüd avaldame punktis 1 saadud teisendusvalemitest (1) ja (2) x ja y teisendatud punkti koordinaatide x' ja y' kaudu:

$$x=x',$$

$$y=\frac{y'}{m}.$$

Asendades ringjoone võrrandis x ja y saadud avaldistega, saame seose ellipsi suvalise punkti koordinaatide x' ja y' vahel, s. t. ellipsi võrrandi:

$$(x')^2+\left(\frac{y'}{m}\right)^2=r^2.$$

Anname võrrandile esmalt kuju

$$\frac{(x')^2}{r^2}+\frac{(y')^2}{(mr)^2}=1.$$

Asendades selles r tähega a ja mr tähega b ning tähistades ellipsi suvalise punkti koordinaate nüüd tähtedega x ja y (kuna edasi vaatleme ainult seda joont), saame ellipsi võrrandi nn. kanoonilisel kujul:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.}$$

Leiame saadud võrrandi põhjal, kus ellips lõikab koordinaattelgi. Lõikumisel x-teljega on punkti ordinaat $y=0$. Võrrandist järeldub siis, et

$$x^2=a^2,$$

seega

$$x=\pm a.$$

Niisiis ellips lõikab x-telge punktides $(a;\ 0)$ ja $(-a;\ 0)$. Nende punktide vahelist lõiku (mille pikkus on $2a$) nimetatakse ellipsi pikemaks teljeks.

Lõikumisel y-teljega on punkti abstsiss $x=0$. Võrrandist järeldub siis, et

$$y^2=b^2,$$

seega

$$y=\pm b.$$

Niisiis ellips lõikab y-telge punktides $(0;\ b)$ ja $(0;\ -b)$. Nende punktide vaheline lõik (mille pikkus on $2b$) on ellipsi lühem telg.

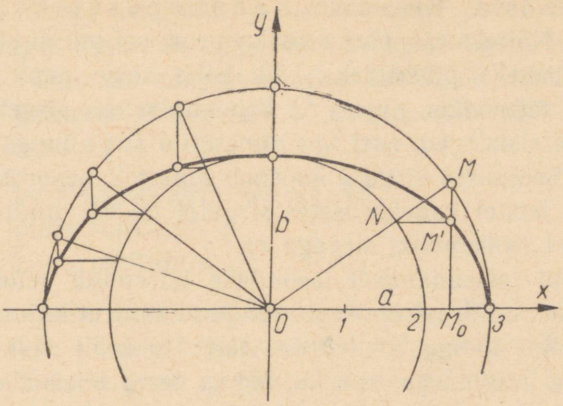
Ellipsi telgede lõikepunkti nimetatakse tema keskpunktiks ja telgede otspunkte tema haripunktideks. Lõik keskpunktist mingi haripunktini on ellipsi pooltelg.

Kui pooltelged on antud, siis ellips on määratud. Näiteks, kui ellipsi pooltelged on $a=3$ ja $b=2$, siis tema võrrand on

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Antud ellipsi joonestamiseks joonestame koordinaatide alguspunkti ümber ringjoone raadiusega 3 ja vähendame ringjoone punktide ordinaate suhtes $m=\frac{2}{3}$.

Ringjoone punktide ordinaatide vähendamist saab teostada ilma mõõtmise ja arvutamiseta, nimelt üsna lihtsa konstruktsiooni abil. Selleks joonestame ümber ellipsi keskpunkti veel teise ringjoone,



Joon. 120.

võttes viimase raadiuseks ellipsi lühema pooltelje (joon. 120). Välise ringjoone mingi punkti M teisendi saamiseks tõmbame selle punkti ordinaatlõigu MM_0 ja ühendame punkti M keskpunktiga O. Edasi joonestame punktist N, kus OM lõikab seesmist ringjoont, paralleeli x-teljega ja leiame selle paralleeli ja ordinaatlõigu MM_0 lõikepunkti. See lõikepunkt M' ongi punkti M otsitud teisend. Tõepoolest, M ja M' asetsevad x-teljest ühel ja samal pool ühel ja samal telje ristsirgel, kusjuures kiirteteoreemi põhjal nende punktide ordinaatide suhe võrdub pooltelgede b ja a suhtega:

$$M_0M' : M_0M = ON : OM = b : a = m.$$

Leides niiviisi küllaldase hulga ringjoone punktide teisendeid, saame nende ühendamisel ellipsi.

3. Tasapinna teisendamine iseendaks.

Kui teisendamisele võetakse kogu tasapinna punktid ja nende teisendid täidavad jällegi kogu tasapinna, siis kõneldakse t a s a p i n n a t e i s e n d a m i s e s t i s e e n d a k s. Järgnevatel lehekülgedel vaadeldakse ikka selliseid teisendusi. Selgema kujutluse saamiseks neist teisendustest on kasulik tasapinda mõelda kahekordsena: ühel kahest kokkulangevast tasapinnast asetsevad originaalkujundid, teisel nende teisendid.

Tasapinna teisendamisel iseendaks võib juhtuda, et mõni punkt (sirge) ühtib oma teisendiga. Selliseid punkte (sirgeid) nimeta-

takse vaadeldava teisenduse *kahekordseteks* punktideks (sirgeteks). Näiteks tasapinna kokkusurumisel mingi sirge x poole on kahekordseteks punktideks kõik selle sirge punktid ja ainult need. Sama teisenduse juures on kahekordseteks sirgeteks sirge x ja kõik selle ristsirged, sest iga nimetatud sirge langeb ühte oma teisendiga. Seejuures sirge x koosneb ainult kahekordsetest punktidest, kuid teistel kahekordsetel sirgetel leidub ainult üks kahekordne punkt (lõikepunkt sirgega x).

Tasapinna teisendamisel iseendaks teisendub selle tasapinna iga kujund sama tasapinna teatud kujundiks. Kui kujundi iga kahe punkti vaheline kaugus on võrdne tema teisendi vastavate punktide vahelise kaugusega, siis kujund ja tema teisend on võrdsed. Sellise omadusega teisendust nimetatakse **liikumisteisenduseks** ehk **liikumiseks.** Esimeses järjekorras ongi meie ülesandeks vaadelda liikumisteisendusi tasapinnal ja analüüsida liikumise liike. Teisenduste käsitlusel lähtume lõikude, nurkade ja kolmnurkade võrdsuse mõistest, kasutamata liikumise mõistet, mis on meile veel tundmata, ja tuletame neist liikumise mõiste.

Ei tule arvata, et iga teisendus on liikumine. Näiteks tasapinna kokkusurumine mingi sirge poole pole liikumine, sest mõnede lõikude pikkused sel teisendamisel muutuvad. Liikumisteisendused moodustavad kõige lihtsama (kuid väga tähtsa) geomeetriliste teisenduste rühma. Peale liikumisteisenduste vaatleme käesolevas peatükis veel *homoteetsust*, s. o. teisendust, mis võimaldab antud kujundist saada temaga sarnast kujundit.

Ülesandeid.

586. Arvtelje punktid M (x) on teisendatud sama telje punktideks $M'(x')$ valemi järgi $x'=3-2x$. Leia:

1) punktide $x=-2$, 0 ja 3 teisendid;
2) punktid, mille teisenditeks on punktid $x'=9$, -5 ja 0;
3) antud teisenduse kahekordne punkt;
4) punkti $x=5$ teisend ja punkt, mille teisend on $x'=5$.

587. Abstsisstelje punktid on teisendatud ordinaattelje punktideks valemi järgi $y=0{,}5x^2$. Leia punktide $x=2$, -3 ja 4 teisendid. Missuguse punkti teisendiks on punkt $y=18$? Milliseks y-telje osaks teisendub kogu x-telg?

588. On antud ringjoon ja selle mingi puutuja. Ühendame puutuja mingi punkti M ringjoone keskpunktiga O ning loeme punktile M vastavaks ringjoone selle punkti M', milles ringjoon ja lõik OM lõikuvad. Tee joonis ja selgita selle abil, mis kujund ringjoonel vastab

1) puutuja mingile lõigule AB;
2) puutepunktile;
3) kogu puutujale.

589. Kolmnurk, mille tipud on $A(-2; -3)$, $B(3; -1)$ ja $C(2; 3)$, projekteeritakse kord x-teljele, teine kord y-teljele. Leia tippude projektsioonid ja külgede projektsioonide pikkused ühel ja teisel juhul.

590. Joonesta ellips, mille poolteljed on 4 ja 3, leides küllaldase hulga tema punkte.

591. Ellipsi võrrand on

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

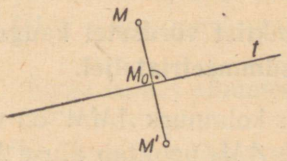
Missugustes punktides see ellips lõikab koordinaattelgi? Kas ta läbib punkti $(-\sqrt{3};\ 0{,}5)$? Skitseeri see ellips.

592. Skitseeri ellips, mis saadakse ringjoonest $x^2+y^2=9$, kui tasapind y-telje poole kokku suruda nii, et kaugused sellest teljest väheneksid 3 korda. Leia saadud ellipsi poolteljed ja võrrand.

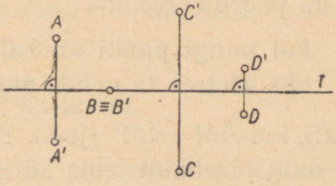
§ 79. TELJELINE SÜMMEETRIA.

1. Sirge suhtes sümmeetrilised punktid.

Olgu antud mingi sirge t ja väljaspool seda punkt M (joon. 121). Leiame punkti M' nii, et sirge t jääb lõigu MM' keskristsirgeks. Selleks joonestame sirge $MM' \perp t$ ja võtame sellel punkti M'



Joon. 121.



Joon. 122.

nii, et $M'M_0 = MM_0$, kus M_0 on sirgete MM' ja t lõikepunkt. Niisuguse omadusega punkti M' nimetatakse antud punktiga M sirge t suhtes sümmeetriliseks punktiks.

Lauset «Punkt M' on sirge t suhtes sümmeetriline punktiga M» kirjutame lühidalt kujul:

$$M' = t(M).$$

On selge, et kui $M' = t(M)$, siis ka $M = t(M')$; seega võime kõnelda kahest teineteisega (sirge t suhtes) sümmeetrilisest punktist. Sirget t nimetatakse nende punktide **sümmeetriateljeks.**

Niisiis:

> **tasapinna kaks punkti on sellel tasapinnal asetseva sirge suhtes sümmeetrilised, kui see sirge on nende punktide ühenduslõigu keskristsirgeks.**

Kui punkt asetseb sümmeetriateljel, siis loeme ta sümmeetriliseks iseendaga; igal muul juhul on punkt ja tema teisend kaks erinevat punkti (joon. 122).

2. Sümmeetriliste punktide põhiomadus.

Anname sirge suhtes sümmeetriliste punktide põhiomaduse järgmise teoreemi näol:

> **lõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje punkti kahe selle telje suhtes sümmeetrilise punktiga, on omavahel võrdsed ning moodustavad teljega võrdsed nurgad.**

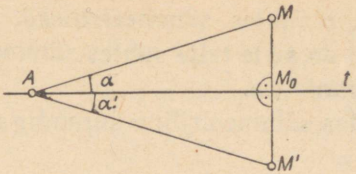
Tõepoolest, kui sümmeetriatelje t mingi punkti A ühendame punktidega M ja $M' = t(M)$ (joon. 123), siis saame kaks täisnurkset kolmnurka AM_0M ja AM_0M', mis on võrdsed tunnuse knk põhjal. Kolmnurkade võrdsusest järeldubki, et

$$AM = AM' \text{ ja } \alpha = \alpha'.$$

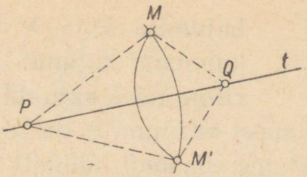
Kehtib ka pöördteoreem:

> **kui mingi punkt on kahest punktist võrdsetel kaugustel, siis asetseb ta nende punktide sümmeetriateljel.**

Tõesti, kui $AM = AM'$ (joon. 123), siis kolmnurk AMM' on võrdhaarne ning järelikult tema kõrgussirge AM_0 poolitab aluse MM', olles seega punktide M ja M' sümmeetriateljeks.



Joon. 123.



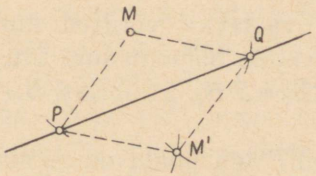
Joon. 124.

Vaadeldud teoreem võimaldab lahendada järgmise konstruktsioonülesande (kasutades ainuüksi sirklit):

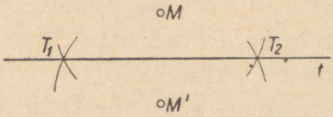
leida antud punktiga antud telje suhtes sümmeetriline punkt.

Lahendus. Võtame teljel t vabalt kaks punkti (P ja Q) ning tõmbame kummagi ümber ringjoone, mis läbib antud punkti M (joon. 124). Otsitav punkt M' peab asetsema kummalgi ringjoonel, järelikult on ta nende teine lõikepunkt.

Kui keskpunktid P ja Q võtta teljel mitte vabalt (nagu joonisel 124), vaid võrdsetel kaugustel antud punktist M (nagu joonisel 125), siis punktide P, M, Q ja M' järjestikusel ühendamisel saadakse romb; igal muul juhul aga tekib romboid (joon. 124), s. o. nelinurk, mille kahe vastastipu lähisküljed on paariti võrdsed.



Joon. 125.



Joon. 126.

Pöördteoreemi alusel laheneb järgmine konstruktsioonülesanne:

leida kahe antud punkti sümmeetriatelg.

Lahendus. Leiame kaks niisugust punkti T_1 ja T_2, mis asetsevad antud punktidest (M ja M') võrdsetel kaugustel (joon. 126). Neid läbiv sirge t ongi otsitav sümmeetriatelg.

3. Sirge suhtes sümmeetrilised kujundid.

Kahe mistahes kujundi teljelist sümmeetriat defineeritakse järgmiselt:

kujundid k ja k' on telje t suhtes sümmeetrilised, kui kummagi kujundi iga punkt on selle telje suhtes sümmeetriline teise kujundi mingi punktiga.

Lauset «Kujund k' on telje t suhtes sümmeetriline kujundiga k» kirjutame edaspidi lühidalt nii:

$$k' = t(k).$$

Antud definitsioonist lähtudes tõestame järgmise teoreemi:

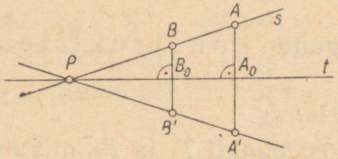
sirgega antud telje suhtes sümmeetriliseks kujundiks on sirge; mõlemad sirged lõikavad sümmeetriatelge ühes ja samas punktis või on teljega paralleelsed.

Tõestamisel eeldame esmalt, et antud sirge s l õ i k a b telge t, näiteks punktis P (joon. 127). Võtame sirgel s mingi punkti A, leiame teisendi $A' = t(A)$ ning veendume, et sirge $A'P$ ongi antud sirge s teisendiks. Selleks näitame, et kummagi sirge iga punkt on telje t suhtes sümmeetriline teise sirge mingi punktiga. Punkti P kohta on see ilmne: $P' = P$. Võtame nüüd ühel sirgetest, näiteks sirgel s, mingi punkti B ning tõmbame $BB_0 \perp t$ kuni lõikumiseni sirgega $A'P$ punktis B'. Siis

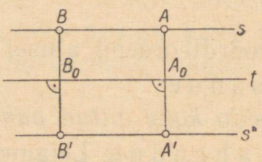
$$\Delta BPB_0 = \Delta B'PB_0,$$

sest neil on ühise külje PB_0 juures vastavalt võrdsed nurgad ($\angle BPB_0 = \angle B'PB_0$ sümmeetriliste punktide põhiomaduse alusel). Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $BB_0 = B'B_0$. Et ühtlasi $BB' \perp t$, siis on tõestatud, et $B' = t(B)$.

Niisamuti saab tõestada, et sirge $A'P$ iga punkt on sümmeetriline sirge s mingi punktiga.

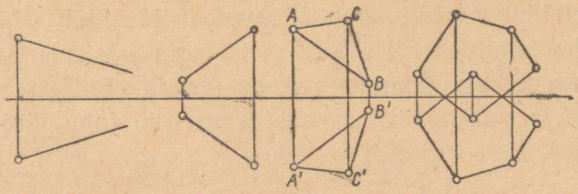


Joon. 127.



Joon. 128.

Kui sirge s on paralleelne teljega t (joon. 128), siis joonestame läbi punkti $A' = t(A)$ sirge $s' \parallel s$ ning näitame, et endisel viisil leitud punkt B' on sümmeetriline punktiga B. Kolmnurkade võrdsuse asemel tuleb nüüd kasutada ristkülikute vastaskülgede võrdsust: $BB_0 = AA_0 = A'A_0 = B'B_0$.



Joon. 129.

Tõestatud teoreemist järeldub (joon. 129), et

kiirega sümmeetriline kujund on kiir, lõiguga sümmeetriline kujund on lõik, kolmnurgaga sümmeetriline kujund on kolmnurk, hulknurgaga sümmeetriline kujund on antud hulknurgaga samanimeline hulknurk.

4. Sümmeetriliste kujundite võrdsus.

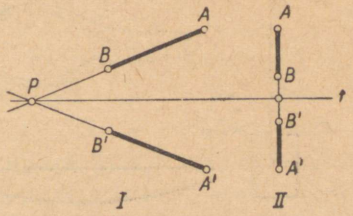
Näitame, et

iga kaks teineteisega mingi telje suhtes sümmeetrilist kujundit on võrdsed.

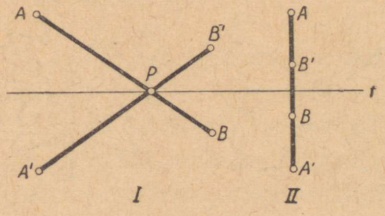
Vaatleme esmalt lõikusid. Kui teineteisega sümmeetrilised lõigud on omavahel paralleelsed (joon. 128), siis nad on võrdsed kui ühe ja sama ristküliku vastasküljed.

Kui sümmeetrilised lõigud pole paralleelsed ega lõika telge (nagu AB ja $A'B'$ joonistel 130, I ja 130, II), siis pikendame neid kuni teljega lõikumiseni mingis punktis P. Sümmeetriliste punktide põhiomaduse põhjal on siis $AP=A'P$ ja $BP=B'P$. Esimese võrduse pooltest teise võrduse pooli lahutades saame, et $AB=A'B'$.

Lõpuks, kui kahel sümmeetrilisel lõigul AB ja $A'B'$ leidub teljega ühine punkt P (joon. 131, I, II), siis saame endisel viisil võrdused $AP=A'P$ ja $BP=B'P$, mille vastavate poolte liitmine näitab, et $AB=A'B'$.



Joon. 130.

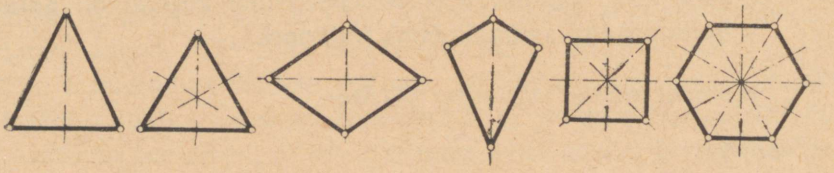


Joon. 131.

Sümmeetriliste lõikude võrdsusest järeldub (tunnuse kkk põhjal) kahe sümmeetrilise kolmnurga võrdsus ja kolmnurkade võrdsusest kahe sümmeetrilise nurga võrdsus. Sümmeetriliste lõikude ja nurkade võrdsusest aga saab juba järeldada iga kahe sümmeetrilise kujundi võrdsust.

5. Iseendaga sümmeetriline kujund.

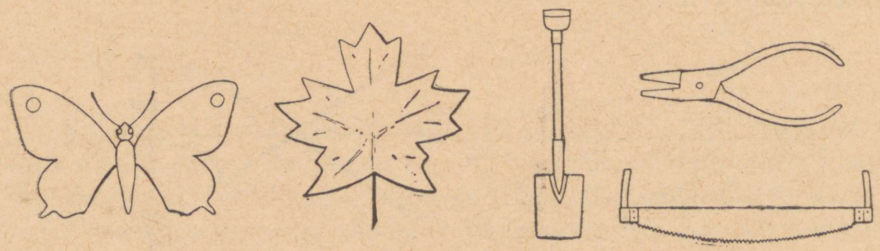
Leidub kujundeid, mis on mingi ühe (või mitme) sirge suhtes sümmeetrilised iseendaga. Iseendaga sümmeetrilised kujundid (joon. 132) on näiteks: võrdhaarne kolmnurk (üks sümmeetriatelg), võrdkülgne kolmnurk (kolm sümmeetriatelge), romb (kaks sümmeetriatelge), romboid (üks sümmeetriatelg), ruut (neli sümmeetriatelge), korrapärane kuusnurk (kuus sümmeetriatelge). Ringjoon aga on sümmeetriline iga sirge suhtes, mis läbib tema keskpunkti; seega



Joon. 132.

ringjoonel on lõpmata palju sümmeetriatelgi.

Iseendaga sümmeetrilise kujundi paljud omadused järelduvad kergesti tema sümmeetriast. Teades näiteks, et romb on sümmeetriline oma diagonaalsirge suhtes, järeldame kohe, et rombi dia-



Joon. 133.

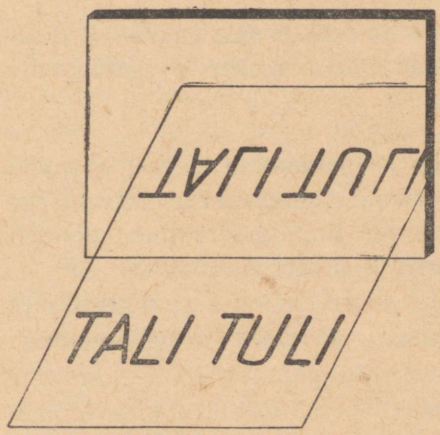
gonaal poolitab rombi nurga ning et rombi diagonaalid on omavahel risti ja poolitavad teineteist (põhjenda neid väiteid!).

Iseendaga sümmeetrilised on ka paljud looduslikud vormid ja inimese poolt valmistatud esemed (joon. 133).

6. Peegeldus sümmeetriateisendusena.

Üleminekut antud kujundilt temaga mingi sirge suhtes sümmeetrilisele kujundile nimetatakse antud kujundi **peegeldamiseks** (antud sirgest). Sirget nimetatakse siis **peegeldusteljeks,** peegeldamisel saadavat kujundit aga antud kujundi **peegelduseks.**

Sellist nimetust õigustab asjaolu, et kui asetada peegel joonise pinnaga risti (joon. 134), siis peeglist näeme antud joonisega sümmeetrilist joonist sirge suhtes, kus peegli tasapind lõikab joonise tasapinda.



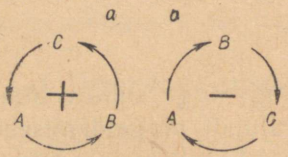
Joon. 134.



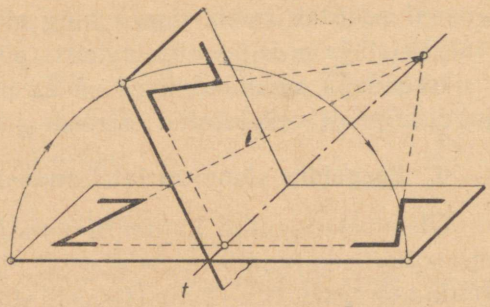
Joon. 135.

Kui peegeldatav objekt on ruumiline, siis ka peegeldus näib ruumilisena (joon. 135). Sel juhul on tegemist sümmeetriaga tasapinna suhtes.

Eespool nägime (vt. § 79, p. 4), et kujund ja tema peegeldus on võrdsed. Seega peegeldamine sirgest on üks liikumisteisendus. Seda liikumist iseloomustab kolmnurga (üldiselt hulknurga) tippude **ringjärjestuse** ehk **kolmnurga orientatsiooni** muutumine. Tõepoolest, näiteks joonisel 129 on kolmnurga ABC orientatsioon positiivne, s. t. tippude A, B ja C ringjärjestus on vastupidine kella-



Joon. 136.

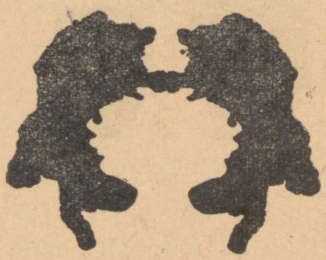


Joon. 137.

osuti liikumise suunale, kuid peegeldatud kolmnurgal $A'B'C'$ on see negatiivne, s. t. tipud A', B' ja C' järgnevad üksteisele kella-osuti liikumise suunas (võrdle joonisega 136, a ja b).

Kujund ja tema peegeldus on teineteisest saadavad tasapinna pööramise teel 180° võrra ümber peegeldustelje (joon. 137).

Seega sümmeetriateisendus ehk peegeldamine sirgest asendab geomeetrias tasapinna pööramist samal tasapinnal asetseva sirge ümber sirgnurga võrra. See tasapinna ümberpööramine kutsubki esile orientatsiooni muutumise.



Joon. 138.

Sellel seosel teljelise sümmeetria ja tasapinna pööramise vahel põhineb järgmine võte sümmeetriliste pildikeste saamiseks: paberilehele kantakse mõned tinditilgakesed või tehakse tindiga mingi joonis ja murtakse leht kahekorra, enne kui tint on kuivanud. Lehe avamisel näeme sellel murdejoone suhtes sümmeetrilist pilti (joon. 138).

7. Samasus kahekordse peegeldusena.

Olgu antud kujund k ja telg t. Leiame peegelduse $k' \equiv t(k)$. Nüüd võtame peegelduse k' lähtekujundiks ning endist telge kasutades leiame tema peegelduse k''. Ilmselt saame teise peegeldamise tulemuseks tagasi lähtekujundi k; seega $k'' \equiv k$:

peegelduse peegeldamisel samast teljest saame tulemuseks lähtekujundi.

Teisendust, mis annab tulemuseks lähtekujundi, nimetatakse *samasuseks*. Nii siis oleme leidnud, et

sama telje korral kahest sümmeetriateisendusest koosnev teisendus osutub samasuseks.

Ülesandeid.

593. a) Antud on kaks lõikuvat sirget. Leia nende sümmeetriateljed.

b) Antud on kaks paralleelset sirget. Leia nende sümmeetriateljed. Kui palju neid on?

594. a) Antud on kolmnurk ja seda mittelõikav sirge. Leia selle kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

b) Antud on kolmnurk ja seda lõikav sirge. Leia selle kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

595. Joonesta antud ringjoone mingi kõõlu suhtes sümmeetriline ringjoon. Mis tingimusel need kaks ringjoont ühtivad?

596. Kus asetsevad sümmeetriateisenduse kahekordsed punktid?

597. a) Missugused ringjooned vastavad sümmeetriateisenduses iseendale?

b) Missugused sirged vastavad sümmeetriateisenduses iseendale?

598. Lõika kahekorra murtud paberilehest mingi sümmeetriline puulehe kujutis.

599. a) Lõika paberist välja mingi teravnurkne kolmnurk ja leia kolmnurga voltimise teel selle ümberringjoone keskpunkt.

b) Lõika paberist välja mingi võrdhaarne kolmnurk ja leia kolmnurga voltimise teel selle siseringjoone keskpunkt.

600. Neljakordselt kokkumurtud paberilehe murdenurgast lõigatakse ära täisnurkne kolmnurk. Milline kuju on äralõigatud leheosal avatult?

601. Leia punktidega

$$(0;\ 3),\ (-2;\ 5),\ (4;\ -1),\ (-6;\ -4)$$

x-telje suhtes sümmeetrilised punktid.

602. Leia punktidega

$$(8;\ 0),\ (2;\ 3),\ (-6;\ 5),\ (0;\ -3)$$

y-telje suhtes sümmeetrilised punktid.

603. Leia punktiga (2; 5) sümmeetriline punkt 1) x-telje suhtes, 2) y-telje suhtes ja 3) sirge $y=x$ suhtes.

604. Leia järgmiste sirgetega x-telje suhtes sümmeetrilised sirged: 1) $y=2x+1$; 2) $y=1{,}5$; 3) $y=1{,}5x$; 4) $x=3$; 5) $y=-x+a$.

605. a) Milline punkt on punktiga $(x;\ y)$ sümmeetriline x-telje suhtes, milline y-telje suhtes?

b) Kasutades ellipsi võrrandit ja eelmise ülesande tulemust, näita, et ellips on sümmeetriline nii x-telje kui ka y-telje suhtes.

606. Kasutades sümmeetriat tõesta, et kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu, sellele vastava kesknurga ja kaare.

607. Kasutades sümmeetriat tõesta, et kui kahel ringjoonel leidub ühine punkt väljaspool nende keskpunkte läbivat sirget, siis neil leidub veel teine ühine punkt.

608. Kasutades sümmeetriat tõesta, et võrdhaarse trapetsi haarade pikendused lõikuvad aluse keskristsirgel.

§ 80. RÖÖPLÜKE.

1. Korduv peegeldamine.

Olgu antud kujund k ning kaks telge t_1 ja t_2. Peegeldame kujundi k esmalt teljest t_1 ning siis saadud peegelduse teljest t_2. Esimene peegeldus olgu k' ja teine k''. Siis võime lühidalt kirjutada nii:

$$k' \equiv t_1(k);\ k'' \equiv t_2(k').$$

Analoogiliselt võiksime kolmanda peegelduse (kolmandast teljest t_3) sümboolselt avaldada kujul

$$k''' \equiv t_3(k'').$$

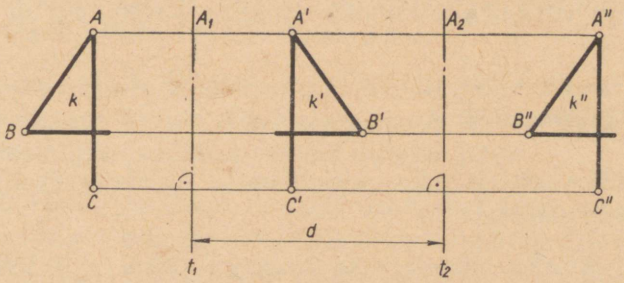
Mõttekäigu jätkamisel võime nii jõuda kuitahes suurele peegelduste kordusarvule.

Järgnevalt hakkame uurima kujundite k ja k'' (s. t. antud kujundi ja tema kahekordse peegelduse) vastastikust asendit sõl-

tuvalt peegeldustelgede vastastikusest asendist. Et iga peegeldus muudab kujundi orientatsiooni vastupidiseks, siis kahekordne peegeldus on alati sama orientatsiooniga mis antud kujund.

2. Rööplüke kahe peegelduse tulemusena.

Olgu peegeldusteljed t_1 ja t_2 omavahel paralleelsed (joon. 139). Kujundite k ja k'' vastastikuse asendi uurimiseks võtame kujundi k kolm punkti A, B ja C ning leiame neile vastavad kujundi k'' punktid A'', B'' ja C''. Et sirged t_1 ja t_2 on paralleelsed, siis nende ristsirged AA' ja $A'A''$ ühtivad; järelikult punktid A, A' ja A'' asetsevad ühel sirgel. Niisamuti asetsevad ühel sirgel punktid B, B' ja B'' ning ka punktid C, C' ja C''. Ühtlasi on $AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$ kui ühe ja sama sirge ristsirged.



Joon. 139.

Edasi näitame, et lõigud AA'', BB'' ja CC'' on võrdsed ja samasuunalised. Selleks avaldame need lõigud telgedevahelise kauguse d abil (joon. 139):

$$AA''=AA_1+A_1A'+A'A_2+A_2A''=$$
$$=2A_1A'+2A'A_2=2A_1A_2=2d.$$

Niisamuti saaksime, et $BB''=CC''=2d$. Et esitatud tuletus kehtiks antud kujundi ja telgede igasuguse vastastikuse asendi puhul, tuleks lõike AA_1, A_1A', ... vaadelda suunaga lõikudena. Meie juhul on võrdsete lõikude

$$AA''=BB''=CC''=\ldots$$

ühiseks suunaks suund telje t_1 poolt telje t_2 poole.

Nii on selgunud, et paralleelsete telgede korral kahe peegelduse

järjestikune rakendamine annab teisenduse, milles vastavate punktide ühenduslõigud on paralleelsed, võrdsed ja samasuunalised.

Teisendust, milles vastavate punktide ühenduslõigud on paralleelsed, võrdsed ja samasuunalised, nimetatakse rööplükkeks (või lühemalt lihtsalt **lükkeks**).
Rööplükkel sirge teisendub temaga paralleelseks sirgeks või samaks sirgeks.

Tõepoolest, kui sirge on lükke sihiline (nagu sirge AA' joonisel 139), siis ta teisendub samaks sirgeks; kui ta pole lükke sihiline, siis ta teisendub temaga paralleelseks sirgeks (näiteks joonisel 139 $AB \| A''B''$, sest $ABB''A''$ on rööpkülik).

Et rööplüke koosneb kahest peegeldusest ja neist kumbki ei muuda kujundi suurust ega kuju, siis rööplükkel iga kujund teisendub temaga võrdseks kujundiks. Tähendab, rööplüke on liikumisteisendus.

3. Rööplükke vektor.

Rööplükke kui teisenduse kirjeldamisel on otstarbekohane kasutada **vektori** mõistet.

Vektoriks nimetatakse suunaga lõiku, s. o. lõiku, mille üks otspunkt on loetud tema alguspunktiks ja teine lõpppunktiks.

Vektori suunaks on suund tema alguspunkti poolt lõpppunkti poole. Kui alguspunkt ja lõpp-punkt ümber vahetada, siis vektori suund muutub vastupidiseks ja vektorist saab endise vektori vastandvektor. Vektoril on kõik lõigu omadused, s. t. tal on kindel pikkus ja siht. Viimase määrab nurk, mille vektorit kandev sirge moodustab mingi kindla sirgega, näiteks x-teljega.

Vektoreid loetakse võrdseiks, kui neil on üks ja sama pikkus, siht ja suund.

Vektori alguspunkti asukoha ehk vektori rakenduspunkti võib vabalt valida. Vektorit kasutatakse nende suuruste iseloomustamiseks, millel peale arvuliste väärtuste on neid iseloomustav siht ja suund. Neid suurusi nimetatakse vektoriaalseteks ja nende hulka kuuluvad näiteks jõud, kiirendus, kiirus jm. Ka punk-

tide nihe rööplükkel on vektoriaalne suurus, sest tal on peale pikkuse oma siht ja suund.

Vektoreid märgitakse trükis rasvaselt trükitud väikeste tähtedega, kuna kirjas kasutatakse selleks noolekest tähe peal: $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\vec{a}$, $\vec{v}$.

Vektorit, mis on paralleelne, samasuunaline ja pikkuselt võrdne punktide nihetega rööplükkel, nimetatakse lükke vektoriks.

Lükke vektorit tähistame tähega $\mathbf{v}$.

Tähistades telgedevahelist vektorit (s. t. vektorit, mis läheb teljelt t_1 risti teljeni t_2) sümboliga $\mathbf{d}$, võime kirjutada:

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{d},$$

kus $2\mathbf{d}$ tähendab vektorit, mis on vektoriga $\mathbf{d}$ samasuunaline, kuid temast 2 korda pikem. Niisiis võime öelda, et

paralleelsete telgede korral kahest peegeldusest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub peegeldustelgede vahelise vektori kahekordsega.

Rööplüke kui teisendus on määratud, kui tema vektor $\mathbf{v}$ on antud. Seepärast võib kujundi k rööplüket märkida lihtsalt sümboliga $\mathbf{v}(k)$, kus $\mathbf{v}$ tähendab lükke vektorit. Tähistades antud kujundist k rööplükkel saadava kujundi (ehk antud kujundi lükketeisendi) tähega k', võime lühidalt kirjutada:

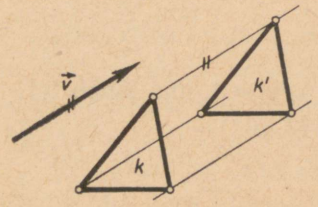
$$k' = \mathbf{v}(k),$$

s. t. kujund k' on kujundi k rööplüke, kui lükke vektoriks on $\mathbf{v}$.

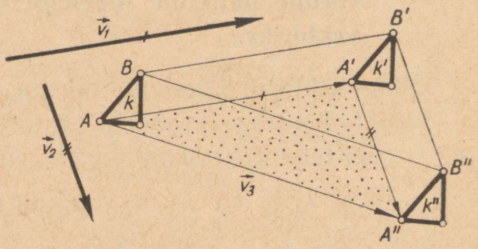
Eespool arendatud mõttekäik on pööratav, s. t. iga rööplüke on vaadeldav peegelduse peegeldusena, kusjuures peegeldusteljed on omavahel paralleelsed ja sihilt risti lükke vektoriga. Vastavas konstruktsioonis võtame esimese peegeldustelje risti lükke vektoriga (kuid muidu vabalt); teise telje aga joonestame esimesega paralleelselt nii, et see paikneks esimesest teljest lükke vektoriga määratud suunas ja sellest kaugusel, mis võrdub poolega lükke vektori pikkusest.

4. Rööplükke konstruktsioon.

Olgu antud kujund k ja lükke vektor $\mathbf{v}$ (joon. 140). Lükkekujundi $k' \equiv \mathbf{v}(k)$ saame järgmiselt. Kujundit k määravatest punktidest tõmbame lükke vektori $\mathbf{v}$ paralleelid ning kanname neile, alates kujundi punktidest, lükke vektori suunas lõigud, mis võrdu-



Joon. 140.



Joon. 141.

vad selle vektori pikkusega. Nende lõikude lõpp-punktid määravadki otsitava lükkekujundi $k' \equiv \mathbf{v}(k)$.

Rakendame nüüd antud kujundile k järjestikku kaks rööplüket vektoritega vastavalt $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$. Olgu esimene tulemus $k' \equiv \mathbf{v}_1(k)$ ja teine $k'' \equiv \mathbf{v}_2(k')$. Võrdleme teise lükke tulemust k'' lähtekujundiga k (joon. 141). Selleks vaatleme kujundi k mingit lõiku AB ja sellele kujundeis k' ja k'' vastavaid lõike $A'B'$ ja $A''B''$. Et rööplükkel lõik teisendub temaga paralleelseks (erijuhul samasihiliseks) ja võrdseks lõiguks, siis

$$AB \# A'B' \text{ ja } A'B' \# A''B''.$$

Kuid siis $AB \# A''B''$, mistõttu $ABB''A''$ on rööpkülik ja järelikult $AA'' \# BB''$. Nii selgub, et kujund k'' on saadav kujundist k ainsa rööplükkega, mille vektor $\mathbf{v}_3 = \overrightarrow{AA''}$. Viimase vektori loeme vektorite $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ summaks ning avaldame kujul:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

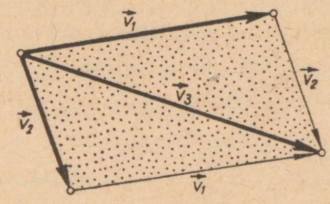
Jooniselt 141 nähtub, et kahe vektori $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ liitmiseks tuleb rööplükke abil teise liidetava alguspunkt teha ühtivaks esimese liidetava lõpp-punktiga (A') ning saadud murdjoone ($AA'A''$) alguspunkt lugeda vektorite summa alguspunktiks, murdjoone lõpp-punkt aga summa lõpp-punktiks. Niisiis on selgunud, et

kahest rööplükkest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub antud lükete vektorite summaga.

Nimetades antud lükked komponentideks ning neist saadava lükke resultandiks, tõestame lõpuks järgmise teoreemi:

resultantlüke ei sõltu komponentlükete järjekorrast.

Tõesti, liites vektoriga v_2 vektori v_1, saame summaks endise vektori v_3 (joon. 142). Sellest järeldame, et vektorite liitmiseks ees-



Joon. 142.

pool antud kolmnurga-reegli asemel võib kasutada ka järgmist nn. rööpkülikureeglit:

kui liidetavad vektorid on rööpküliku ühest tipust lähtuvateks külgvektoriteks, siis samast tipust lähtuv diagonaalvektor osutub nende liidetavate summaks.

Ülesandeid.

609. Antud on kaks paralleelset sirget ja nende vahel mingi kolmnurk. Joonesta kolmnurga peegeldus esmalt ühest sirgest, siis saadud peegelduse peegeldus teisest sirgest. Kas tulemus sõltub peegeldustelgede kasutamise järjekorrast?

610. Põhjenda väidet, et kolmnurk ja tema lüke on võrdsed.

611. Kas kolmnurga peegeldus ja lüke on võrdsed või mitte? Mille poolest nad siiski erinevad?

612. Liida kaks vabalt võetud vektorit.

613. On antud kahe vektori summa ja üks liidetav. Konstrueeri teine liidetav.

614. Põhjenda väidet, et rööplükkel kui teisendusel ei leidu kahekordseid punkte.

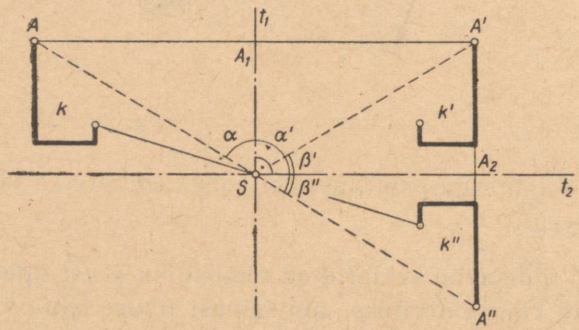
615. Milleks teisendub rööplükkel lükkevektori sihiline sirge ja milleks iga muu sirge?

616. Kolmnurgaga, mille tippudeks on $A(4; -1)$, $B(5; 5)$ ja $C(2; 3)$, on tehtud rööplüke, mis viib tipu A koordinaatide algus-punkti. Leia tippude B ja C uued asukohad.

§ 81. TSENTRAALSÜMMEETRIA.

1. Tsentraalsümmeetria kahe peegelduse liitteisendusena.

Peegeldame antud kujundi k teljest t_1 ning saadud peegelduse k' omakorda teljest t_2, mis on risti teljega t_1 (joon. 143). Viimasel peegeldamisel saame kujundi k''.



Joon. 143.

Tõestame, et kujundite k ja k'' vastavaid punkte ühendavad lõigud läbivad telgede lõikepunkti S ning poolituvad selles punktis, s. t. neil lõikudel on üks ja sama keskpunkt S.

Selleks ühendame kujundi k mingi punkti A, samuti tema teisendid A' ja A'' telgede lõikepunktiga S (joon. 143). Edasi näitame, et nurk ASA'' on sirgnurk. Tõesti:

$$\angle ASA'' = \alpha + \alpha' + \beta' + \beta'' = 2\alpha' + 2\beta' =$$
$$= 2(\alpha' + \beta') = 2 \cdot 90° = 180°.$$

Siin kasutasime tõsiasja, et nurgad, mis tekivad sümmeetriatelje punkti S ühendamisel kahe sümmeetrilise punktiga, on võrdsed ($\alpha = \alpha'$ ja $\beta' = \beta''$). Et nurk ASA'' on sirgnurk, siis punktid A, S ja A'' asetsevad ühel ja samal sirgel. Ühtlasi on punkt S lõigu AA''

keskpunktiks, sest sümmeetria tõttu $AS=A'S=A''S$. Analoogiliselt kehtib see kujundite k ja k'' iga kahe teineteisele vastava punkti kohta. Sellega on väide tõestatud.

Kaht kujundit, mille vastavate punktide ühenduslõikudel on üks ja sama keskpunkt, nimetatakse selle punkti suhtes sümmeetrilisteks. Punkti, mille suhtes kujundid on sümmeetrilised, nimetatakse nende sümmeetriakeskpunktiks.

Teljelisest sümmeetriast eristamiseks nimetatakse sümmeetriat punkti suhtes **tsentraalsümmeetriaks** ning selles teineteisele vastavaid kujundeid **tsentraalsümmeetrilisteks kujunditeks.** Kahest tsentraalsümmeetrilisest kujundist kumbagi võib nimetada ka teise **peegelduseks** (sümmeetriakeskpunktist). Sümmeetriakeskpunkti võib sel puhul nimetada ka **peegelduskeskpunktiks** ja kirjeldatud teisendust **tsentraalpeegelduseks.** Esitatud arutlusi kokku võttes ütleme, et

ristuvate peegeldustelgede korral kahest peegeldusest koosnev teisendus osutub tsentraalsümmeetriaks, mille keskpunktiks on telgede lõikepunkt.

Näitame, ümberpöördult, kuidas tsentraalpeegeldust, mis on antud ühe paari vastavate punktidega A ja A'' (joon. 143), saab asendada kahe järjestikuse peegeldusega sirgest. Selleks leiame esmalt peegelduskeskpunkti, milleks on lõigu AA'' keskpunkt. Edasi võtame peegeldusteljed: esimeseks teljeks t_1 võtame mistahes sirge läbi punkti S, kuna teiseks teljeks t_2 tuleb võtta sirgega t_1 ristuv sirge läbi punkti S. Kui nüüd leida punkt $A'\equiv t_1(A)$, siis punktid A' ja A'' on sirge t_2 suhtes sümmeetrilised. Tõepoolest, kolmnurk $A'SA''$ on võrdhaarne, sest

$$A'S=AS=A''S,$$

ja sirge t_2 poolitab tema tipunurga S:

$$\beta'=90°-\alpha' \text{ ja } \beta''=180°-90°-\alpha=90°-\alpha'.$$

Kuid võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja poolitab aluse ja on sellega risti, s. t.

$$A''=t_2(A').$$

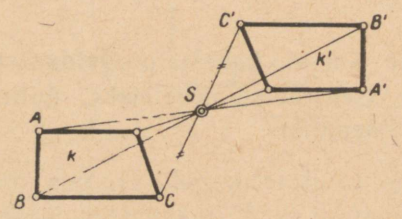
Kujundi k tsentraalsümmeetrilist teisendit ehk peegeldust

punktist S märgitakse sümboliga $S(k)$; seega kirjutus $k' = S(k)$ asendab lauset «Kujund k' on kujundi k peegeldus punktist S».

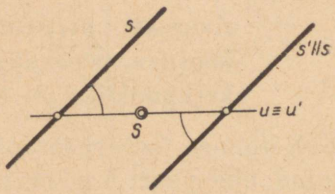
On kerge põhjendada, et kujund ja tema peegeldus mistahes punktist S on võrdsed: $k = S(k)$. See näitab, et ka peegeldus punktist on liikumisteisendus: ta on tasapinna pööramine peegeldus-keskpunkti ümber sirgnurga võrra.

2. Tsentraalpeegelduse konstruktsioon.

Kujundi tsentraalpeegeldus on määratud, kui peegelduskeskpunkt on antud. Konstruktsioonis tõmbame antud kujundit määravatest punktidest A, B, ... sirged läbi peegelduskeskpunkti S (joon. 144) ning märgime igal sirgel punkti, mis on punktist S sama kaugel kui kujundi vastav punkt. Saadud punktid A', B', ... määravadki otsitava peegelduskujundi.



Joon. 144.



Joon. 145.

Kirjeldatud viisil saame igale peegelduskeskpunktist erinevale punktile vastavaks üheainsa punkti. Peegelduskeskpunkti loeme vastavaks iseendale, mistõttu see on vaadeldava teisenduse kahekordne punkt.

Iga sirge, mis läbib peegelduskeskpunkti, on tsentraalpeegelduse kahekordne sirge,

sest tema iga punkt teisendub sama sirge punktiks.

Iga sirge, mis ei läbi peegelduskeskpunkti, teisendub temaga paralleelseks sirgeks.

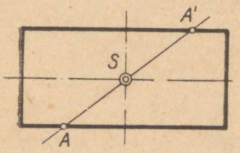
Tõepoolest, kui sirge s teisendub sirgeks s' (joon. 145), siis nende lõikamisel peegelduskeskpunkti S läbiva sirgega u tekib paar vastavaid punkte ja nende juurde paar vastavaid (seega võrdseid) nurki. Kuid need võrdsed nurgad on põiknurgad, mis tekivad kahe

sirge s ja s' lõikamisel sirgega u. Järelikult on sirged s ja s' paralleelsed.

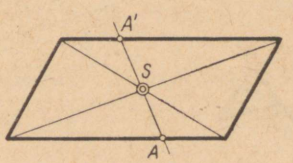
3. Iseendaga tsentraalsümmeetriline kujund.

Kujund võib olla mingi punkti suhtes sümmeetriline iseendaga. Sellise kujundi kohta öeldakse, et tal leidub sümmeetriakeskpunkt ehk et ta on tsentraalsümmeetriline. Kindlasti on tsentraalsümmeetriline iga kujund, millel leidub kaks teineteisega ristuvat sümmeetriatelge; säärase kujundi sümmeetriakeskpunktiks on telgede lõikepunkt. Näiteks ristküliku sümmeetriateljed (külgede keskristsirged) on teineteisega risti, mistõttu nende lõikepunkt S on ristküliku sümmeetriakeskpunktiks (joon. 146): iga sirge läbi selle punkti lõikab ristküliku külgi kahes punktis A ja A', mis on sümmeetrilised punkti S suhtes.

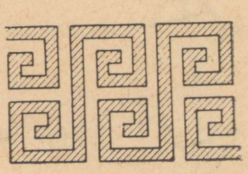
Kuid ristuvate sümmeetriatelgede olemasolu ei ole tarvilik sümmeetriakeskpunkti olemasoluks. Näiteks on rööpkülik tsentraalsümmeetriline oma diagonaalide lõikepunkti S suhtes, sest see punkt on vastastippude ühenduslõikude ühiseks keskpunktiks, kuid rööpkülikul ei leidu ühtki sümmeetriatelge (joon. 147).



Joon. 146.



Joon. 147.


Joon. 148.

Tsentraalsümmeetria leiab laialdast rakendamist tarbeesemete kujundamisel, eriti kaunistusmotiivides (joon. 148).

4. Kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus.

Kui peegeldame mingi kujundi esmalt punktist S ja siis saadud peegelduse veel kord samast punktist S, siis saame tulemuseks lähtekujundi. Niisiis:

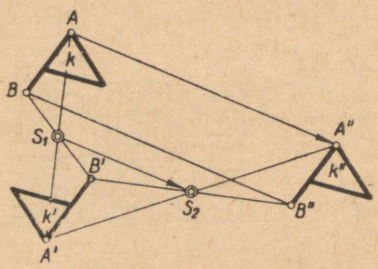
sama keskpunkti korral kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus osutub samasuseks.

Edasi uurime teisendust, mis koosneb kahest tsentraalpeegeldusest, kusjuures peegelduskeskpunktid on erinevad. Selleks tõestame järgmise teoreemi:

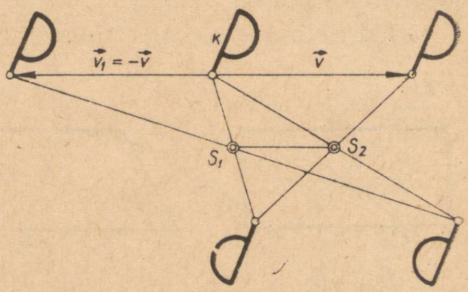
erinevate keskpunktide korral kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub esimesest keskpunktist teise viiva vektori kahekordsega.

Tõestus. Peegeldame antud kujundi k esmalt keskpunktist S_1 ning saadud peegelduse $k' \equiv S_1(k)$ omakorda teisest keskpunktist S_2 (joon. 149). Joonisel on vastavad teisenduskonstruktsioonid läbi viidud punktidega A ja B:

$$A' \equiv S_1(A); \qquad B' \equiv S_1(B);$$
$$A'' \equiv S_2(A'); \qquad B'' \equiv S_2(B').$$



Joon. 149.



Joon. 150.

Ühendades punkti A punktiga A'' ja punkti B punktiga B'', saame kaks kolmnurka $AA'A''$ ja $BB'B''$, millel on üks ja sama kesklõik S_1S_2. Tõesti, konstruktsiooni järgi $AS_1 = A'S_1$ ja $A'S_2 = A''S_2$ ning samuti $BS_1 = B'S_1$ ja $B'S_2 = B''S_2$. Kolmnurga kesklõigu omaduste tõttu kumbki lõikudest AA'' ja BB'' on paralleelne lõiguga S_1S_2 ning võrdub tema kahekordsega. Lisaks sellele on lõigud AA'' ja BB'' samasuunalised, sest kumbki neist on samasuunaline lõiguga S_1S_2. Sellega ongi tõestatud, et vaadeldav liitteisendus osutub tõesti rööplükkeks vektoriga

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \ldots = 2\overrightarrow{S_1S_2}.$$

Teoreemist järeldame, et

kahe tsentraalpeegelduse tulemus sõltub peegeldamiste järjekorrast.

Tõesti, kui peegeldame enne punktist S_2 ja pärast punktist S_1, siis tulemuse kui rööplükke vektoriks saame endise vektori vastandvektori (joon. 150):

$$\mathbf{v}_1 = 2\overrightarrow{S_2S_1} = -2\overrightarrow{S_1S_2} = -\mathbf{v}.$$

Teiseks järeldame (joon. 149), et

> **rööplükkest** (vektoriga AA'') **ja tsentraalpeegeldusest** (keskpunktiga S_2) **koosnev teisendus osutub tsentraalpeegelduseks** (meie joonisel keskpunktiga S_1).

Ülesandeid.

617. Näita joonise abil, et kahe peegelduse puhul, mille teljed on teineteisega risti, tulemus ei sõltu peegeldamiste järjekorrast.

618. Koordinaatteljestikus on antud punktid $A(3; 2)$, $B(-4; 3)$, $C(-1; -2)$ ja $D(5; -3)$. Leia neile koordinaatide alguse suhtes sümmeetrilised punktid.

619. Koordinaatteljestikus on antud kolmnurk tippudega $A(-2; 3)$, $B(2; 1)$ ja $C(4; 5)$. Leia sellele alguspunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk.

620. Koordinaatteljestikus on antud sirge $y = 3 - 2x$. Joonesta sellele koordinaatide alguse suhtes sümmeetriline sirge ja anna viimase võrrand.

621. Joonesta punktiga $A(1; 2)$ punkti $S(4; 3)$ suhtes sümmeetriline punkt ja määra selle koordinaadid.

622. Missugusel korrapärasel hulknurgal leidub sümmeetriakeskpunkt ja missugusel ei leidu?

623. Veendu konstruktsiooni abil, et neljast tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus, milles keskpunktideks on ühe rööpküliku järjestikused tipud, on samasus.

624. Joonesta võrdkülgsele kolmnurgale tema keskpunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk. Mitu sümmeetriatelge on tekkinud tähtkuusnurgal?

625. Mis on ringjoone sümmeetriakeskpunktiks?

626. Kasutades rööpküliku tsentraalsümmeetriat, tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

1. Pööre kui kahe peegelduse tulemus.

Peegeldame kujundit k järjestikku kahest teljest t_1 ja t_2 (joon. 151), mille vaheline teravnurk on α. Saadud kujundid olgu $k' \equiv t_1(k)$ ja $k'' \equiv t_2(k')$. Viimast kujundit k'' nimetatakse kujundi k **pöördeks** ja üleminekut kujundilt k kujundile k'' kujundi k **pööramiseks** (lühemalt — pöördeks) punkti O ümber. Punkti O nimetatakse **pöördekeskpunktiks.** Seega

> **pööre on kahe peegelduse tulemus lõikuvate peegeldustelgede korral; seejuures peegeldustelgede lõikepunkt on pöördekeskpunktiks.**

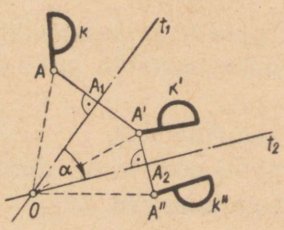
Vaadeldav teisendus on liikumine, sest lähtekujund ja tema teisend on võrdsed.

2. Pöörde põhiomadus.

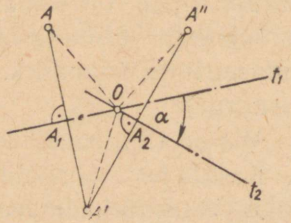
Pöörde põhiomadust väljendab järgmine teoreem:

> **kujundi punkti ja tema pöördeteisendit keskpunktiga ühendades saadakse võrdsed lõigud, mille vaheline nurk võrdub peegeldustelgede vahelise teravnurga kahekordsega.**

Tõestuseks võtame kujundil k mingi punkti A (joon. 151) ja leiame tema teisendid $A' \equiv t_1(A)$ ja $A'' \equiv t_2(A')$. Siis on $OA = OA'$ kui lõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje t_1 punkti O telje suhtes kahe sümmeetrilise punktiga. Niisamuti $OA' = OA''$. Neist kahest võrdusest järeldub, et $OA = OA''$, millega väite esimene pool on tõestatud.



Joon. 151.



Joon. 152.

Edasi tuleb tõestada, et lõikude OA ja OA'' vaheline nurk AOA'', mis on väiksem kui sirgnurk, võrdub telgede t_1 ja t_2 vahelise teravnurga α kahekordsega (joon. 151). Et sümmeetrilised lõigud OA ja OA' ning OA' ja OA'' moodustavad oma sümmeetriatelgedega võrdsed nurgad, siis

$$\angle AOA' = 2 \cdot \angle A_1OA',$$
$$\angle A'OA'' = 2 \cdot \angle A'OA_2.$$

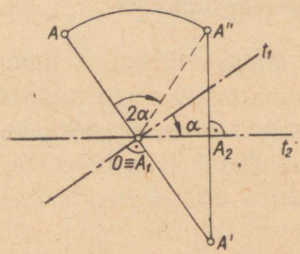
Nende võrduste vastavate poolte liitmisel ja paremal ühise teguri 2 sulgude ette toomisel saame:

$$\angle AOA'' = 2(\angle A_1OA' + \angle A'OA_2) = 2 \cdot \angle A_1OA_2$$

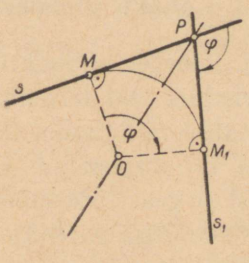
ehk

$$\angle AOA'' = 2\alpha.$$

Tõestusel kasutasime siin joonist, kus punkti A peegeldus A' langes telgede t_1 ja t_2 vahelise teravnurga sisse. Saab tõestada, et väide on õige ka punkti A teiste võimalike asendite puhul. Nii on võimalik näidata jooniste 152 ja 153 abil, et kui punkti A peegeldus



Joon. 153.



Joon. 154.

A' langeb telgedevahelise nürinurga sisse, siis sirgnurgast suurem lõikude OA ja OA'' vaheline nurk võrdub telgedevahelise nürinurga kahekordsega. Nende nurkade lahutamisel täispöördest järeldub otsekohe, et sirgnurgast väiksem nurk AOA'' võrdub endiselt telgedevahelise teravnurga kahekordsega.

Sellekohase joonise abil on kerge veenduda, et kui antud peegeldustelgi rakendada teises järjekorras (enne telge t_2, siis telge t_1), siis kujund pöördub sama suure nurga võrra, kuid vastassuunas. Tõestatud teoreemi võib kokkuvõtlikumalt sõnastada ka järgmiselt:

kujundi pööramisel tema tasapinna mingi punkti ümber pöördub kujundi iga punkt ühe ja sama nurga, nn. pöördenurga $\varphi = 2\alpha$ võrra,

kus α on teravnurk nende telgede vahel, millest peegeldumine kutsub esile antud pöörde.

Kujundi k pööret, mille määravad keskpunkt O ja pöördenurk φ, märgime lühidalt kujul $O_\varphi(k)$.

Kui pöördenurk $\varphi = 180°$, siis pööre osutub peegelduseks punktist O, sest peegeldusteljed on siis teineteisega risti.

3. Järeldusi pöörde põhiomadusest.

1) Kui kujundil k ja k' võtta kaks mingit teineteisele vastavat punkti, siis pöördekeskpunkt on neist punktidest võrdsetel kaugustel. Kuid kahest punktist võrdsetel kaugustel olev punkt asetseb teatavasti nende punktide sümmeetriateljel. Järelikult

kujundi ja tema pöörde iga kahe teineteisele vastava punkti sümmeetriatelg läbib pöördekeskpunkti.

2) Pöördekeskpunktist O (joon. 154) mingile sirgele s tõmmatud ristlõik OM teisendub pöördel keskpunktist O sirge teisendile tõmmatud ristlõiguks OM_1. Järelikult $OM = OM_1$, s. t. pöördekeskpunkt on sirgest ja tema teisendist võrdsetel kaugustel. Kuid kahest sirgest võrdsetel kaugustel olev punkt asetseb nende sirgete vahelise nurga poolitajal. Järelikult

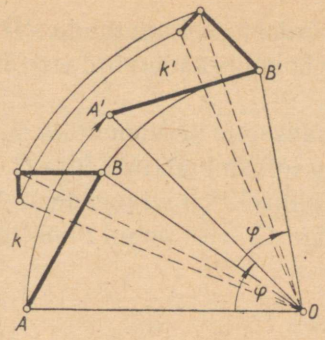
sirgjoone ja tema pöörde vahelise nurga poolitaja läbib pöördekeskpunkti.

3) **Sirgjoone ja tema pöörde vaheline nurk, mille poolitaja ei läbi pöördekeskpunkti, võrdub pöördenurgaga,**

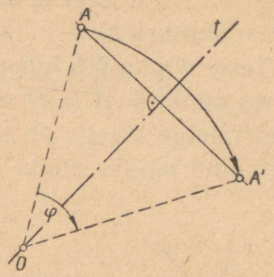
sest liites nende nurkadega ühe ja sama nurga MPM_1 saame sirgnurga (joon. 154).

4. Pöörde konstruktsioon.

Pöördekeskpunkti O ja pöördenurga φ andmisega on kujundi pööre kui teisendus üheselt määratud. Pöörde konstrueerimisel



Joon. 155.



Joon. 156.

tõmbame kujundi punktidest kaared ümber keskpunkti ja märgime igal kaarel kujundi punktile vastava punkti, kasutades antud pöördenurka φ. Leitud punkte õigesti ühendades saamegi pööratud kujundi (joon. 155).

Iga pööret, mis on antud oma keskpunkti ja nurgaga, saab mitmeti esitada kahe peegelduse näol, kusjuures peegeldusteljed läbivad pöördekeskpunkti. Selleks võtame ühe telje (näiteks t_1) vabalt läbi keskpunkti, teise telje aga nii, et telgedevaheline teravnurk võrduks poolega antud pöördenurgast (joonised 151 ja 152).

5. Põhiülesanded pöördest.

Ülesanne 1. Antud on kaks punkti A ja A'. Leida mingi pööre, mis teeks ühe punkti teisega ühtivaks.

Lahendus. Otsitav pöördekeskpunkt peab asetsema punktide A ja A' sümmeetriateljel (§ 82, p. 3, järeldus 1). Selle sümmeetriatelje t iga punkt O kõlbab pöördekeskpunktiks, kui pöördenurgaks võetakse nurk $\varphi = \angle AOA'$ (joon. 156). Ülesandel on seega lõpmata palju lahendeid.

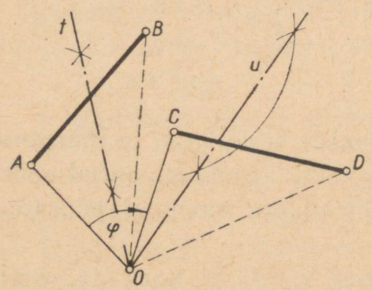
See lahendus näitab, et kahe punkti sümmeetriatelg on joon, millel asetsevad üht punkti teiseks teisendava pööre keskpunktid.

Ülesanne 2. Antud on kaks võrdset lõiku. Leida pööre, mis teeb ühe lõigu teisega ühtivaks.

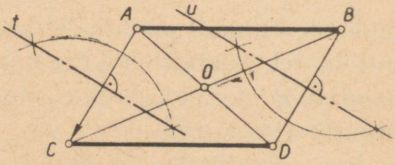
Lahendus. Olgu esimene lõik AB, teine CD (joon. 157). Leiame punktide A ja C sümmeetriatelje t ning punktide B ja D sümmeetriatelje u. Kui teljed t ja u lõikuvad, siis otsitavaks pöördekeskpunktiks on nende telgede lõikepunkt O ning pöördenurgaks $\varphi = \angle AOC$. Selle nurgaga võrdub nurk BOD, sest kumbki

neist koosneb nurgast BOC ja veel võrdsete kolmnurkade AOB ja COD ühest nurgast (põhjenda nende kolmnurkade võrdsust, kasutades tunnust *kkk*).

Teise võimaliku lahenduse puhul saaksime keskpunktiks punkti, milles punktide A ja D sümmeetriatelg lõikab punktide B ja C sümmeetriatelge. Seega on sel ülesandel üldiselt kaks lahendust. Neist ühe puhul langeb punkt A ühte punktiga C, teise puhul punktiga D.



Joon. 157.



Joon. 158.

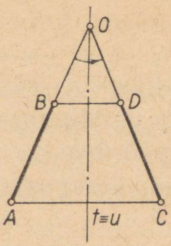
Kui punktipaaride A ja C ning B ja D (või A ja D ning B ja C) sümmeetriateljed ei lõiku, siis nad on paralleelsed või ühtivad.

Saab tõestada, et kui üks paar neist sümmeetriatelgedest on paralleelsed (näiteks $t \parallel u$, joon. 158), siis vastav pööre asendub rööplükkega, mille vektor on $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (joon. 158).

Kui üks paar neist sümmeetriatelgedest ühtib (näiteks $t \equiv u$, joon. 159—161), siis lõigud AB ja CD on sümmeetrilised selle ühise sümmeetriatelje suhtes. Kui lõigud AB ja CD ei ole paralleelsed selle teljega, siis nende lõikepunkt teljega on üheks pöördekeskpunktiks (joon. 159 ja 161). Kui aga AB ja CD on paralleelsed teljega, siis pööre asendub jällegi rööplükkega, mille vektor on $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (joon. 160).

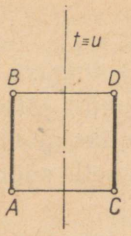
Ülesanne 3. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka. Leida pööre, mis teeb ühe kolmnurga teisega ühtivaks.

Lahendus. Antud võrdsed ja sama orientatsiooniga kolmnurgad olgu ABC ja $A'B'C'$ (joon. 162). Kolmnurkade vastavad küljed AB ja $A'B'$ on võrdsed. Kui need küljed pole paralleelsed,



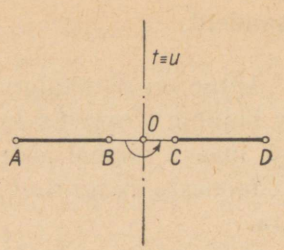
a

Joon. 159.



b

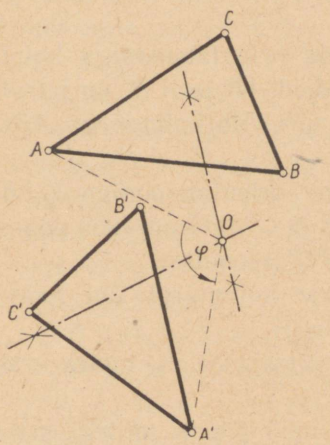
Joon. 160.



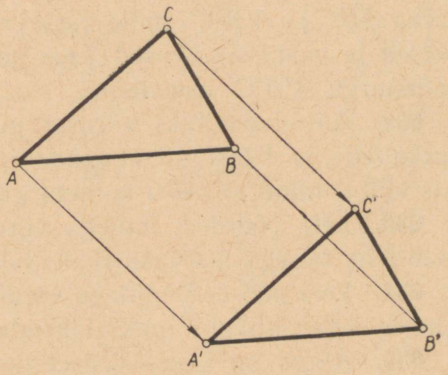
c

Joon. 161.

siis leiame eelmise ülesande eeskujul pöörde, mis teeb punkti A ühtivaks punktiga A' ja punkti B ühtivaks punktiga B'. Et kolmnurgad on sama orientatsiooniga, siis punkt C satub leitud pöörde puhul sirgest $A'B'$ samale poole, kus on punkt C', ning kolmnurkade võrdsuse tõttu üks kolmnurk ühtibki teisega (joon. 163).



Joon. 162.



Joon. 163.

Kui AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja samasuunalised, siis ei leidu pööret, mis teeks kolmnurgad ühtivaks, küll aga leidub selleks sobiv rööplüke (joon. 163).

Kui AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja vastassuunalised, siis ülesanne lahendub tsentraalpeegelduse abil.

Esitatud ülesannetest järeldame, et ka kahte võrdset ja sama orientatsiooniga h u l k n u r k a saab pöörde (või erijuhtumil rööplükke) abil teha ühtivaiks.

Ülesandeid.

627. Antud on võrdkülgne kolmnurk ja väljaspool seda N-tähe kujuline kujund. Peegelda kujundit järjestikku kolmnurga kahest küljest ja määra saadud pöörde keskpunkt ja pöördenurk.

628. Joonesta mingi ruut ja selle pööre ruudu keskpunkti ümber 45° võrra.

629. Missuguste nurkade võrra tuleb iga järgnevat kujundit pöörata tema keskpunkti ümber, nii et pööratud kujund ühtiks antud kujundiga: a) võrdkülgne kolmnurk, b) ruut, c) korrapärane kuusnurk, d) korrapärane viisnurk?

630. Antud on kaks lõikuvat sirget ja kummalgi üks punkt. Leia pööre, mis teeb ühe sirge ja sellel antud punkti vastavalt ühtivaks teise sirge ja sellel antud punktiga.

N ä p u n ä i d e. Pöördekeskpunktiks on punkt, kus lõikuvad antud punktide sümmeetriatelg ja antud sirgete (üks) sümmeetriatelg. Ülesandel on kaks lahendust.

631. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka ABC ja $A'B'C'$, mille vastavad küljed AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja vastassuunalised. Leia pööre, mis viib kolmnurga ABC kolmnurga $A'B'C'$ asendisse.

632. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka ABC ja $A'B'C'$ nii, et nende tipud B ja C' ühtivad. Leia pööre, mis viib kolmnurga ABC kolmnurga $A'B'C'$ asendisse.

633. Leia pöörded, millega võrdhaarse kolmnurga ühe haara saab teha teisega ühtivaks (kaks lahendust).

634. Leia pöörded, millega võrdhaarse trapetsi ühe haara saab teha teisega ühtivaks (kaks lahendust).

635. Antud on kaks võrdset nurka. Leia pööre, millega neid saab teha ühtivaiks.

636. Antud on võrdhaarne kolmnurk. Leia pööre, mis teeb ühe alusnurga teisega ühtivaks.

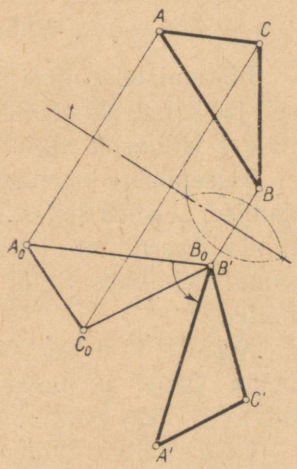
§ 83. LIIKUMINE TASAPINNAL.

Eespool tutvusime lihtsamate liikumistega tasapinnal, nimelt peegeldusega sirgest, rööplükkega, peegeldusega punktist ja pöördega. Seejuures liikumiseks tasapinnal nimetasime niisugust selle tasapinna teisendamist iseendaks, mille puhul selle tasapinna mis-

tahes kujund teisendub temaga võrdseks kujundiks. Et kõige lihtsam kujund, mille abil saab määrata teiste kujundite võrdsust, on kolmnurk, siis võime liikumiseks nimetada ka niisugust tasapinna teisendust iseendaks, mille puhul mistahes kolmnurk teisendub temaga võrdseks kolmnurgaks. Seega iga paar võrdseid kolmnurki määrab ühe liikumise tasapinnal. Ühenduses sellega tekib küsimus, kas ülalnimetatud liikumistega on ammendatud kõik liikumise liigid tasapinnal või mitte. Vastuse annab järgmine teoreem:

iga liikumist tasapinnal saab vaadelda koosnevana ülimalt kolmest peegeldusest.

Eespool nägime, et antud võrdseid ja sama orientatsiooniga kolmnurki saab viia ühtivusse kas rööplükke või pöörde abil (§ 82, p. 5, ülesanne 3). Et mõlemad nimetatud teisendused koosnevad vaid kahest peegeldusest, siis on väide tõestatud kõigi niisuguste liikumiste kohta, mis on määratud kahe sama orientatsiooniga kolmnurga abil.



Joon. 164.

Eeldame nüüd, et antud võrdsetel kolmnurkadel ABC ja $A'B'C'$ on orientatsioonid vastandlikud (joon. 164). Peegeldame üht neist, näiteks kolmnurka ABC, sirgest t, mis on ühe paari vastavate tippude, näiteks B ja B' sümmeetriateljeks. Siis kolmnurga tipu B peegelduseks on tipp B', aga tippude A ja C peegeldused olgu vastavalt A_0 ja C_0. Kolmnurk $A_0B'C_0$ on võrdne kolmnurgaga ABC, kuid vastandorientatsiooniga, s. t. ta on võrdne kolmnurgaga $A'B'C'$, millel on temaga ühine orientatsioon. Seetõttu võib juhtuda, et kolmnurgad $A_0B'C_0$ ja $A'B'C'$ ühtivad. Sel juhul oleks väide tõestatud, sest liikumine, mis teeks antud kolmnurgad ühtivaiks, oleks peegeldus sirgest t. Kui aga kolmnurgad $A_0B'C_0$ ja $A'B'C'$ ei ühti, siis saab neid panna ühtima pöörde abil ümber tipu B', sest nad on võrdsed ja sama orientatsiooniga. Et pööre koosneb kahest peegeldusest, siis kuluks nüüd antud kolmnurkade ühteviimiseks kokku kolm peegeldust. Sellega on väide täielikult tõestatud.

Ülesandeid.

637. Antud on kaks sama orientatsiooniga võrdset kolmnurka. Leia kaks järjestikust peegeldust, mis teevad need kolmnurgad ühtivaiks.

638. Antud on kaks erineva orientatsiooniga võrdset kolmnurka, mis pole sümmeetrilised sirge suhtes. Leia kolm järjestikust peegeldust, mis teevad need kolmnurgad ühtivaiks.

639. Leia, missuguse lihtsama liikumisega saab asendada

a) kahte rööplüket;
b) rööplüket koos tsentraalpeegeldusega;
c) kahte tsentraalpeegeldust;
d) nelja peegeldust, kui peegeldustelgedeks on vaheldumisi kaks ristuvat sirget.

§ 84. LIIKUMISTEISENDUSTE KASUTAMINE KONSTRUKTSIOONÜLESANNETE LAHENDAMISEL.

Liikumisteisendusi saab kasutada paljude teoreemide tõestamisel ja konstruktsioonülesannete lahendamisel. Vaatleme mõnda näidet viimaselt alalt.

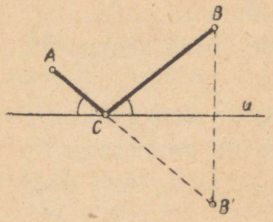
Teisenduste kasutamise meetod konstruktsioonülesannete lahendamisel seisneb selles, et vaadeldav kujund või selle mingi osa teisendatakse nii, et otsitav lahend (või lahendusviis) muutuks hõlpsamalt leitavaks. Selle meetodi sisu selgitavad lähemalt järgmised näited.

Näide 1. Ühel pool sirgest u on antud kaks punkti A ja B. Leida sirgel u punkt C nii, et lõikude summa (tee pikkus) $AC+CB$ oleks minimaalne (võimalikult väike).

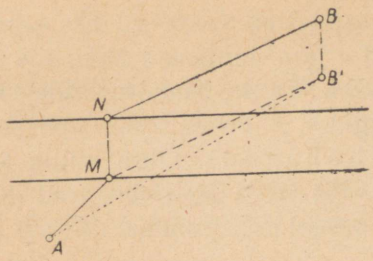
Lahendus. Olgu ACB otsitav murdjoon (joon. 165). Tema pikkus ei muutu, kui lõik CB asendada sirge u suhtes sümmeetrilise lõiguga CB'. Nüüd peaks lühima pikkusega olema murdjoon ACB'. Ta on seda siis, kui punkt C asetseb sirgel AB'. Siit selgub, et otsitav punkt on sirgete u ja AB' lõikepunkt, kus $B' \equiv u(B)$.

Märkus. Jooniselt selgub, et leitud punkti C puhul on võrdsed need teravnurgad, mis AC ja CB moodustavad sirgega u, s. t. lühim tee on see, mida mööda liigub valgus punktist A punktini B, peegeldudes sirgest u.

Näide 2. Ühel pool paralleelsete kallastega kanalit on küla A, teisel pool küla B. Üle kanali tuleb ehitada sild niisuguses kohas, et tee ühest külast teise oleks minimaalse pikkusega.



Joon. 165.



Joon. 166.

L a h e n d u s. Oletame, et MN on nõutud silla asukoht, nii et murdjoon $AMNB$ on võimalik lühim tee, mis külasid ühendab (joon. 166). Anname teeosale BN rööplükke, mille vektor on $\overrightarrow{NM}$, ning vaatleme uut murdjoont $AMB'B$, mille pikkus on võrdne endise murdjoone pikkusega. Et see pikkus oleks minimaalne, peaksid punktid A, M ja B' asetsema ühel sirgel. Siit selgub, et punkt M peab asetsema kohal, kus punkti A poolne kanali kallas lõikab sirget AB'.

N ä i d e 3. Konstrueerida ruut, mille kaks vastastippu asetsevad antud sirgel ja ülejäänud tippudest üks asetseb ühel ja teine teisel antud ringjoonel.

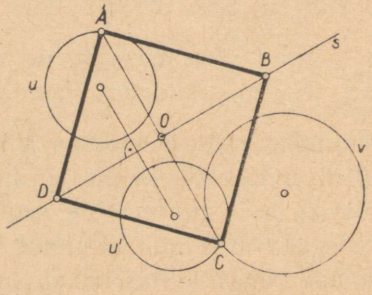
L a h e n d u s. Olgu antud sirgjoon s ja ringjooned u ja v (joon. 167). Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et $ABCD$ on otsitav ruut, mille tipud B ja D asetsevad antud sirgel s, tipp A ringjoonel u ja tipp C ringjoonel v. Siis punktid A ja C on sümmeetrilised sirge s suhtes, sest ruudu diagonaalid ristuvad ja poolitavad teineteist. Et punkt A asetseb ringjoonel u, siis temaga sirge s suhtes sümmeetriline punkt C asetseb ringjoonega u sirge s suhtes sümmeetrilisel ringjoonel u'. Siit selgub järgmine konstruktsioon: 1) leiame ringjoone $u' \equiv s(u)$; 2) märgime, kui see on olemas, punkti, näiteks C, milles lõikuvad ringjooned v ja u'; 3) leiame punkti $A \equiv s(C)$; 4) joonestame ruudu, mille diagonaaliks on lõik AC, järelikult on ruudu keskpunktiks sirgete s ja AC lõikepunkt O. Selle ruudu tipud B ja D satuvad sirgele s, sest nad on punktidest A ja C võrdsetel kaugustel. Ruut $ABCD$ rahuldabki ülesande kõiki nõudeid.

Ülesande lahendite arv on võrdne ringjoonte u' ja v ühiste punktide arvuga. Kui need ringjooned ei lõiku, siis ülesandel pole lahendit; kui ringjooned puudutavad või lõikavad teineteist, siis

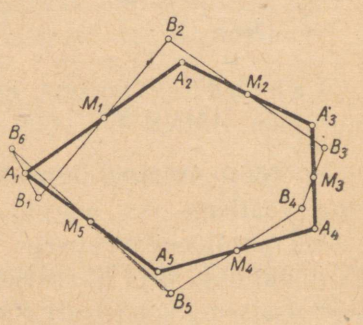
ülesandel on vastavalt üks lahend või kaks lahendit, kui ringjooned v ja u' langevad ühte, siis on lahendeid lõpmata palju.

Näide 4. Konstrueerida viisnurk külgede antud keskpunktide järgi.

Lahendus. Olgu antud viisnurga külgede keskpunktid M_1, M_2, M_3, M_4 ja M_5 (joon. 168). Kui otsitava viisnurga esimest tippu A_1 peegeldada punktist M_1, siis saadakse teine tipp A_2, seda peegeldades punktist M_2 saadakse kolmas tipp A_3 jne.; lõpuks tipu A_5 peegeldamisel punktist M_5 saadakse uuesti tipp A_1. Nii selgub, et punkt A_1 on viiest tsentraalpeegeldusest koosneva teisenduse kahekordne punkt, kui peegelduskeskpunktiks on punktid $M_1, \ldots, M_5$. Et kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus on rööplüke, rööplükkest ja tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus aga jälle tsentraalpeegeldus (§ 81, p. 4), siis neljast tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus on taas rööplüke, viiest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus aga — tsentraalpeegeldus. Viimase teisenduse ainus kahekordne punkt on peegelduskeskpunkt. Tähendab, punkt A_1 on viiekordsel tsentraalpeegeldusel saadava tsentraalpeegelduse keskpunkt. Tema leidmiseks võtame tasapinna mistahes punkti B_1, peegeldame seda punktist M_1, saadud peegeldust B_2 uuesti punktist M_2 jne., kuni saame punkti B_6. Et punktid B_1 ja B_6 on peegelduses teineteisele vastavad punktid, siis lõigu B_1B_6 keskpunkt ongi selle peegelduse keskpunkt, ühtlasi otsitav punkt A_1. Viisnurga ülejäänud tipud leiame peegeldamise teel antud punktidest.



Joon. 167.



Joon. 168.

Ülesandeid.

640. Tasapinnal on antud kolm sirget: s, t ja u. Leia sirgel punkt S, millega sirge t suhtes sümmeetriline punkt S' asetseb sirgel u.

641. Tasapinnal on antud sirge s ja sellest ühel pool punktid A ja B. Leia sirgel s punkt M nii, et sirged AM ja BM moodustaksid sirgega s võrdsed nurgad.

642. Tasapinnal on antud sirge s ja sellest teine teisel pool punktid A ja B. Leia sirgel s punkt M nii, et lõikude AM ja BM pikkuste vahe oleks võimalikult suur.

643. Tasapinnal on antud nurk tipuga A ja sirge t. Ehita ruut, mille kaks vastastippu asetsevad sirgel t ja ülejäänud tipud antud nurga haaradel või nende pikendustel üle tipu A.

644. Tasapinnal on antud nurk tipuga A ja selle sees punkt S. Joonesta läbi punkti S sirge nii, et tema lõik nurga haarade vahel poolituks punktis S.

645. Tasapinnal on antud sirgjoon, ringjoon ja punkt. Joonesta läbi antud punkti sirge, mille lõik antud sirgjoone ja ringjoone vahel poolituks antud punktis.

646. Joonesta tasapinnaline seitsenurk külgede antud keskpunktide järgi.

647. Joonesta läbi kahe antud ringjoone lõikepunkti sirge, mis ei läbi ringjoonte teist lõikepunkti ja millest need ringjooned lõikavad välja võrdsed kõõlud.

§ 85. HOMOTEETSUS TASAPINNAL.

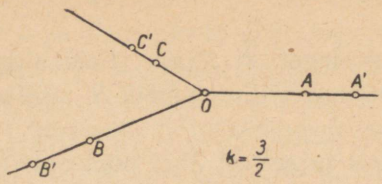
1. Homoteetsuse mõiste.

Homoteetsuseks tasapinnal nimetatakse järgmiste omadustega vastavust tasapinna punktide vahel:

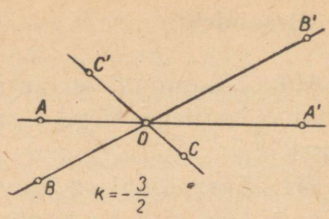
1) iga punkti ja sellele vastava punkti ühendussirge läbib üht ja sama punkti O, mida nimetatakse **homoteetsuskeskpunktiks.**

2) iga kaks teineteisele vastavat punkti asetsevad homoteetsuskeskpunktist kas ühel pool (**päripidine homoteetsus,** joon. 169) või teine teisel pool (**vastupidine homoteetsus,** joon. 170);

3) kui M ja M' on kaks teineteisele vastavat punkti, siis lõikude suhe $OM' : OM = k$ on jääv tasapinna kõigi punktide puhul. See



Joon. 169.



Joon. 170.

jääv suhe, mida nimetatakse **homoteetsusteguriks,** on päripidise homoteetsuse korral positiivne ja vastupidise homoteetsuse korral negatiivne, sest esimesel juhtumil on lõigud OM ja OM' samasuunalised, teisel juhtumil aga vastassuunalised.

Homoteetsusteguri definitsioonist järeldub, et

$$OM' = k \cdot OM,$$

millest nähtub, et keskpunkti O ja teguri k andmisega on homoteetsus määratud, sest nende andmete korral saab igale punktile M leida temale vastavat punkti M'. Kui punkt M ühtib keskpunktiga O, siis ühtib viimasega ka teisend M'; järelikult on keskpunkt homoteetsuse kahekordne punkt. Saab tõestada, et ta on homoteetsuse ainus kahekordne punkt.

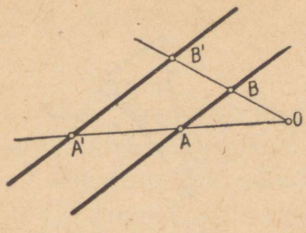
2. Homoteetsuse tähtsamad omadused.

1) Homoteetsuskeskpunkti läbiva sirge teisendiks on seesama sirge, iga muu sirge teisendiks aga tema paralleel.

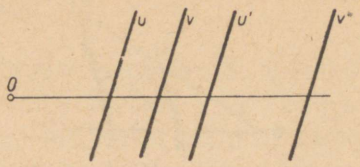
Homoteetsuskeskpunkti läbiva sirge kohta on väide ilmselt õige, sest homoteetsuse definitsiooni järgi on selle sirge punktide teisenditeks sellesama sirge punktid. Väite tõestamiseks homoteetsuskeskpunkti mitteläbiva sirge AB kohta eeldame, et homoteetsus on antud keskpunktiga O ja teguriga k (joon. 171). Leiame sirgel AB asetseva punkti, näiteks punkti A teisendi A', ning joonestame temast läbi sirge, mis on paralleelne sirgega AB. Lõigaku sirge OB joonestatud sirget punktis B'. Siis kiirteteoreemi põhjal

$$OB' : OB = OA' : OA.$$

Et viimane suhe väljendab homoteetsustegurit, siis teeb sedasama ka esimene: $OB' : OB = k$. See näitab, et sirgel AB asetseva punkti



Joon. 171.



Joon. 172.

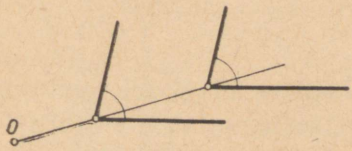
B homoteetseks teisendiks on punkt B' sirgel $A'B'$. Ilmselt kehtib see nende sirgete kõigi punktide kohta.

2) Paralleelsetele sirgetele vastavad paralleelsed sirged,

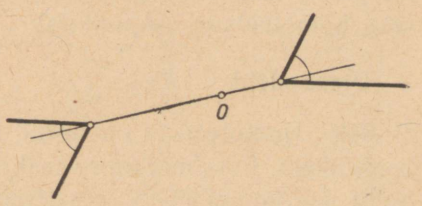
sest kui kaks sirget on paralleelsed, siis ka ühega ja teisega vastavalt paralleelsed sirged on omavahel paralleelsed (joon. 170): kui $u \| v$ ja $u' \| u$, $v' \| v$, siis $u' \| v'$.

3) Iga nurk teisendub temaga võrdseks nurgaks,

sest teisendatud nurga haarad on antud nurga haaradega vastavalt paralleelsed ja samasuunalised (joon. 173) või vastavalt paralleelsed ja vastassuunalised (joon. 174).



Joon. 173.



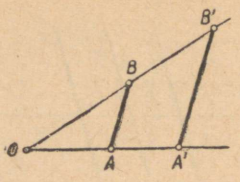
Joon. 174.

4) Iga kahe teineteisele vastava lõigu suhe võrdub homoteetsusteguriga,

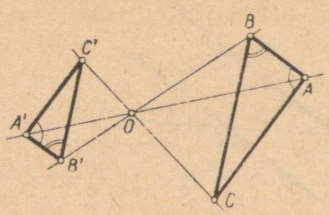
sest kolmnurkade OAB ja $OA'B'$ sarnasuse tõttu (põhjenda seda, joon. 175) võime kirjutada:

$$A'B' : AB = OA' : OA = k.$$

5) Iga kolmnurk (üldiselt iga kujund) **teisendub temaga sarnaseks kolmnurgaks** (kujundiks),



Joon. 176.



Joon. 175.

sest viimase kahe omaduse järgi nende nurgad on vastavalt võrdsed ja kõik vastavad lõigud on võrdelised (joon. 176).

Viimase omaduse tõttu nimetatakse homoteetsust ka **sarnasusteisenduseks** ning kahte homoteetset kujundit **perspektiivsarnasteks kujunditeks** (ehk sarnasteks kujunditeks sarnasusasendis). Kui ühega kahest perspektiivsarnasest kujundist teostada mingi liikumisteisendus, siis nende eriline vastastikune asend kaob ja me saame lihtsalt kaks sarnast kujundit. Seega võime öelda, et

kujundite sarnasus on homoteetsuse ja liikumisteisenduse järjestikusel rakendamisel püsima jääv kujundite omadus.

Lõpuks olgu märgitud, et kui homoteetsustegur $k=1$, siis homoteetsus osutub samasuseks (sest igale punktile vastavaks on siis see punkt ise); kui aga $k=-1$, siis homoteetsus osutub peegelduseks homoteetsuskeskpunktist.

Ülesandeid.

648. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Leia mõõtmise teel homoteetsustegur. Vaatle kaht juhtumit: kui homoteetsus on päripidine ja kui ta on vastupidine.

649. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Leia konstruktsiooni teel mingile punktile vastav punkt.

650. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Konstrueeri vabalt võetud kolmnurgale vastav kolmnurk.

651. Põhjenda väidet, et ringjoonega, mille raadius on r, homoteetseks kujundiks on ringjoon raadiusega kr, kus k on homoteetsustegur. (Kasuta omadust 4!)

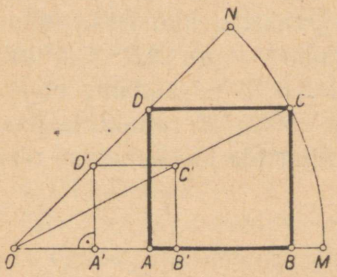
652. Põhjenda väidet, et vastupidine homoteetsus koosneb päripidisest homoteetsusest ja tsentraalpeegeldusest.

§ 86. HOMOTEETSUSE KASUTAMINE KONSTRUKTSIOONÜLESANNETE LAHENDAMISEL.

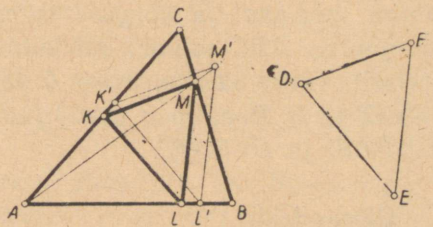
Nagu liikumisteisendusi, nii ka homoteetsust saab kasutada konstruktsioonülesannete lahendamisel. Vastav nn. s a r n a s u s m e e t o d seisneb selles, et esmalt konstrueeritakse otsitava kujundiga sarnane kujund ja siis homoteetsust kasutades otsitav kujund. Vaatleme selle meetodi rakendamist mõnede näidisülesannete lahendamisel.

N ä i d e 1. Antud sektorisse MON joonestada ruut, mille kaks tippu asetsevad sektori raadiusel OM, kolmas tipp raadiusel ON ja neljas tipp kaarel MN (joon. 177).

L a h e n d u s. Joonestame algul m i n g i ruudu $A'B'C'D'$ (joon. 177), mille tipud A' ja B' asetsevad antud sektori raadiusel OM ja tipp D' sektori raadiusel ON (kuidas seda teha?). Pikendame lõiku OC' kuni lõikumiseni sektori kaarega punktis C, kui ta juba ei lõika seda kaart. Teisendame ruutu $A'B'C'D'$ homoteetselt, võttes keskpunktiks punkti O ja üheks paariks vastavateks punktideks punktid C' ja C ($k = OC : OC'$). Teisendamisel saame ruudu $ABCD$, mis täidab ülesande tingimusi. Lahend on ühene.



Joon. 177.



Joon. 178.

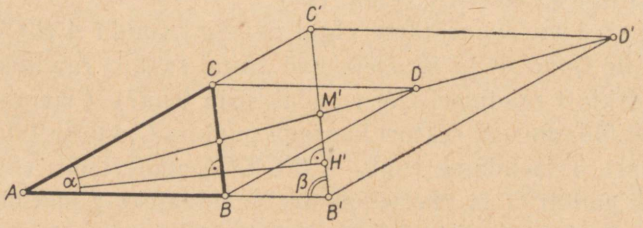
N ä i d e 2. Joonestada kolmnurk, mille tipud asetsevad antud kolmnurga ABC külgedel ja küljed on vastavalt paralleelsed teise antud kolmnurga DEF külgedega.

L a h e n d u s. Võtame küljel AC vabalt punkti K' ja joonestame esmalt otsitava kolmnurgaga KLM sarnase kolmnurga $K'L'M'$, mille tipp L' asetseb küljel AB ja mille küljed on vastavalt paralleelsed kolmnurga DEF külgedega (joon. 178). Kolmnurka $K'L'M'$ teisendame homoteetselt, võttes homoteetsuskeskpunktiks punkti A

ja üheks vastavate punktide paariks punktid M' ja M, kus M on sirgete AM' ja BC lõikepunkt.

Näide 3. Konstrueerida kolmnurk, mille kaks nurka α ja β ning nurga α tipust tõmmatud mediaani ja kõrguse summa on antud.

Lahendus. Konstrueerime otsitavaga sarnase kolmnurga $AB'C'$ (joon. 179), milles $\angle A=\alpha$, $\angle B'=\beta$ ja külg AB' on vabalt võetud. Edasi leiame tipust A tõmmatud mediaani AM' ja kõrguse AH' ning kanname kõrguse mediaani pikendusele. Nii saame tipust A tõmmatud mediaani ja kõrguse summaks lõigu AD'.



Joon. 179.

Samale sirgele AD' kanname alates punktist A otsitava kolmnurga mediaani ja kõrguse summa, saades lõigu AD. Otsitava kolmnurga ABC saame, kui kolmnurga $AB'C'$ teisendame homoteetselt, võttes keskpunktiks A ja üheks vastavate punktide paariks D' ja D. Punktid B ja C leiame paralleelide joonestamise teel: $DB \parallel D'B'$ ja $DC \parallel D'C'$.

Ülesandeid.

653. Joonesta antud kolmnurka ruut, mille kaks tippu asetsevad kolmnurga ühel küljel, kolmas tipp teisel küljel ja neljas tipp kolmandal küljel.

654. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja kolmanda nurga tipust tõmmatud mediaan.

655. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja nende nurkade tippudest tõmmatud mediaanide summa.

656. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja kolmanda nurga tipust tõmmatud kõrguse ja bisektori summa.

657. Antud on kaks lõikuvat sirget ja väljaspool neid punkt.

Joonesta ringjoon, mis läbib antud punkti ja puudutab antud sirgeid.

658. Joonesta antud kolmnurka ristkülik, mille kaks tippu asetsevad kolmnurga ühel küljel, kolmas tipp teisel küljel ja neljas tipp kolmandal küljel, kui ristküliku küljed suhtuvad nagu 3:2.

659. Antud on ringjoon ja sellel punkt A. Leia punktist A väljuva antud ringjoone kõõlu keskpunkti geomeetriline koht.

660. Joonesta antud segmenti ruut, mille kaks tippu asetsevad segmendi alusel ja kaks segmendi kaarel.

Kordamisküsimusi.

661. Mida nimetatakse peegelduseks sirgest? Mida võib öelda kolmnurga ja tema peegelduse orientatsiooni kohta?

662. Mida nimetatakse rööplükkeks? Kuidas rööplüke avaldub peegelduste kaudu?

663. Mida nimetatakse peegelduseks punktist? Kuidas peegeldus punktist avaldub teljelise sümmeetria kaudu?

664. Missugust teisendust nimetatakse pöördeks punkti ümber? Missuguste andmetega on pööre määratud?

665. Missugust teisendust nimetatakse homoteetsuseks? Missugune seos on homoteetsuse ja sarnasuse vahel?

666. Nimeta homoteetsuse tähtsamaid omadusi.

667. Kuidas teisendub täisnurkne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt ühest kaatetist ja siis saadud peegeldust peegeldada teisest kaatetist?

668. Kuidas teisendub täisnurkne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt ühe teravnurga poolitajast ja siis saadud peegeldust peegeldada teise teravnurga poolitajast?

669. Kuidas teisendub võrdkülgne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt kolmnurga ühest küljest ja siis saadud peegeldust peegeldada teisest küljest?

670. Joonesta vabalt võetud isekülgse kolmnurga peegeldus esmalt ühe nurga poolitajast, siis saadud peegelduse peegeldus teise nurga poolitajast ja lõpuks viimase peegeldus kolmanda nurga poolitajast.

671. Mitu sümmeetriatelge on korrapärasel viisnurgal?

672. Missugustel korrapärastel hulknurkadel leidub sümmeetriakeskpunkt ja missugustel ei leidu?

SISUKORD

I. Trigonomeetriliste avaldiste teisendamine. (*A. Vihman*) 3
§ 1. Trigonomeetria eelmise osa kordamiseks 3
§ 2. Kahe nurga summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid . . 5
§ 3. Kahekordse nurga ja poolnurga siinus, koosinus ja tangens . . 10
§ 4. Kahe nurga trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks 14
§ 5. Nurga leidmine trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtuse järgi 21

II. Trigonomeetrilised võrrandid. (*A. Vihman*) 31

§ 6. Trigonomeetrilise võrrandi mõiste 31
§ 7. Trigonomeetrilised põhivõrrandid 34
§ 8. Võrrandid, mis otseselt taanduvad põhivõrrandeiks 36
§ 9. Võrrandid, mille vasak pool on korrutis ja parem pool on null. . . 39
§ 10. Võrdsete siinustega nurkade üldavaldis 41
§ 11. Võrdsete koosinustega nurkade üldavaldis 43
§ 12. Võrdsete tangensitega nurkade üldavaldis 44
§ 13. Siinuse ja koosinuse suhtes homogeenne trigonomeetriline võrrand 45

III. Funktsioonide uurimine. (*O. Prinits*) 54

§ 14. Funktsiooni määramispiirkond 54
§ 15. Näiteid funktsiooni määramispiirkonna leidmise kohta 55
§ 16. Funktsiooni üldtähis 59
§ 17. Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon 60
§ 18. Suuruse tähtsamad muutumisviisid. 64
§ 19. Muutuva suuruse piirväärtus 64
§ 20. Tõkestamatult kasvavad suurused 66
§ 21. Funktsiooni piirväärtus 68
§ 22. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine 69
§ 23. Funktsiooni piirväärtuse rakendusi 73
§ 24. Funktsiooni pidevus 78
§ 25. Funktsiooni uurimise skeem 81
§ 26. Lineaarse funktsiooni uurimine 82
§ 27. Ruutfunktsiooni uurimine 84
§ 28. Astmefunktsiooni uurimine 88
§ 29. Trigonomeetriliste funktsioonide uurimine 90

Pöördfunktsioon 92

§ 30. Pöördfunktsiooni mõiste ja graafik 92
§ 31. Ruutfunktsiooni pöördfunktsioon 94
§ 32. Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid 95

IV. Eksponentfunktsioon ja logaritmfunktsioon. 99

Eksponentfunktsioon (*O. Prinits*) 99

§ 33. Eksponentfunktsiooni mõiste 99
§ 34. Eksponentfunktsiooni uurimine 100

Logaritmfunktsioon (*G. Rosenberg*) 104

§ 35. Kümne astmed 104
§ 36. Kümnendlogaritmi definitsioon. 104
§ 37. Logaritmi definitsioon 106
§ 38. Logaritmfunktsiooni mõiste ja graafik 108
§ 39. Korrutise, jagatise, astme ja juure logaritm 110
§ 40. Avaldise logaritm 112
§ 41. Kümnendlogaritmi omadused 113
§ 42. Tehted poolnegatiivsete arvudega 114
§ 43. Logaritmide tabelid 118
§ 44. Arvu leidmine tema kümnendlogaritmi järgi 120
§ 45. Arvutamine kümnendlogaritmide abil. 122

Eksponent- ja logaritmvõrrandid (*O. Prinits*) 126

§ 46. Lihtsamaid eksponentvõrrandeid 126
§ 47. Lihtsamaid logaritmvõrrandeid 128

Geomeetriline progressioon (*O. Prinits*) 130

§ 48. Eksponentfunktsiooni põhiomadus 130
§ 49. Geomeetrilise progressiooni mõiste 130
§ 50. Geomeetrilise progressiooni üldliikme valem 132
§ 51. Geomeetrilise progressiooni summa valem 135
§ 52. Tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni mõiste . . 139
§ 53. Tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa. . . 140
§ 54. Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks 143
§ 55. Perioodilise kümnendmurru esitamine hariliku murruna 145
§ 56. Liitintress 146
§ 57. Suuruste liitprotsendiline muutumine 148

Arvutuslükati (*G. Rosenberg*) 152

§ 58. Funktsiooni skaala mõiste 152
§ 59. Logaritmiline skaala 154
§ 60. Korrutamine lükati skaalade *D* ja *C* abil 155
§ 61. Jagamine lükati skaalade *D* ja *C* abil 158
§ 62. Mõnede murdude arvutamine lükatiga 160

§ 63. Ruutude ja ruutjuurte leidmine lükatiga 161
§ 64. Kuupide ja kuupjuurte leidmine lükatiga 164
§ 65. Pöördarvude leidmine lükatiga 167
§ 66. Pöördarvude skaala kasutamine avaldise väärtuse arvutamisel . . 168
§ 67. Logaritmide skaala 169

V. Kolmnurga lahendamine. *(A. Vihman)* 173

§ 68. Täisnurkse kolmnurga lahendamine logaritmide kasutamisega . . 173
§ 69. Vea ülemmäär nurga arvutamisel 176
§ 70. Trigonomeetriliste funktsioonide skaalad arvutuslükatil . . . 180
§ 71. Trigonomeetrilisi arvutusi lükati kasutamisega 188
§ 72. Kolmnurga pindala kahe külje ja nendevahelise nurga järgi . . 191
§ 73. Siinusteoreem 193
§ 74. Koosinusteoreem 198
§ 75. Kolmnurga lahendamise näiteid 201
§ 76. Kolmnurga pindala valemid 204
§ 77. Kolmnurga lahendamise skemaatiline ülevaade. 207

Ülesandeid kordamiseks 210

VI. Geomeetrilised teisendused tasapinnal. *(E. Etverk)* 230

§ 78. Geomeetrilise teisenduse mõiste 230
§ 79. Teljeline sümmeetria 237
§ 80. Rööplüke 246
§ 81. Tsentraalsümmeetria 252
§ 82. Pööre 258
§ 83. Liikumine tasapinnal 264
§ 84. Liikumisteisenduste kasutamine konstruktsioonülesannete lahendamisel 266
§ 85. Homoteetsus tasapinnal 269
§ 86. Homoteetsuse kasutamine konstruktsioonülesannete lahendamisel 273

Этверк Элмар Германович
Пуринитс Олаф Иоханнесович
Розенберг Георг Георгиевич
Вихман Арнольд Юрьевич
МАТЕМАТИКА ДЛЯ X КЛАССА

На эстонском языке
Обложка Л. Круузмаа

Издательство «Валгус»
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste

Kunstiline toimetaja H. Keigo

Tehniline toimetaja S. Kohu

Korrektorid E. Bitter ja M. Pall

Ladumisele antud 24. III 1966. Trükkimisele antud 7. VI 1966. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 17,5. Arvestuspoognaid 12,6. Trükiarv 8500. Tellimise nr. 2326. Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I
Trükipaber nr. 3 — M. Gorki nim. Paberivabrik nr. 1 — Leningrad

Hind 24 kop.

6—6

24 kop.

A-27740

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00426353 1