

ALBERT BORKVELL

Arvutuslühkati

TEORIA JA
KÄSITSEMINE



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

2 eks

1000 2

ARVUTUSLOKATI

TEORIA JA KASITSEMINE

KA 1/06

Kustutatud	8 ^{II}
inv. nr.	5268 641

ALBERT BORKVELL

ARVUTUSLÜKATI TEOORIA JA KÄSITSEMINE

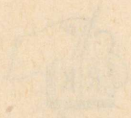


EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1950

ALBERT BORKVELL

ARVUTUSLÜKATI
EORIA JA KASITSEMINE

Tartu Ülikooli Raamatukogu



EESTI RAAMATUKOGU
TARTU 1938

Eessõna.

Käesoleva raamatu ülesanne seisab juhatus ja juhiste andmises tavalise arvutuslükati (logaritmilise liineali) käsitlemiseks. Raamatu tarvitaja ärgu kasutagu raamatut ainult läbilugemiseks ja selles esinevate juhiste päheõppimiseks, vaid ühtlasi läbitöötamiseks koos arvutuslükatiga. Siin teooria ja praktika moodustavad orgaanilise terviku. Selleks, et omandada tarvilikku oskust ja vilumust arvutuslükati käsitlemiseks, tuleb raamatus esinevate juhiste kohaselt arvutuslükatiga tingimata läbi arvutada raamatus esitatud näited ja harjutused. Raamatus esinevate näidete ja harjutuste tulemused on märgitud niisuguse täpsusega, mida on võimalik saavutada tavalise 25 cm pikkuse arvutuslükatiga, kusjuures nii täpsete kui ka ligikaudsete (teatava täpsusega) tulemuste puhul esineb raamatus igal pool võrdusmärk (=).

Käesolev raamat on määratud peale üldise tarvitamise ka käsiraamatuks kõikides Eesti NSV kesk- ja kõrgemates õppeasutistes, kus tuleb matemaatiliste, tehniliste ja statistiliste arvutuste puhul kasutada arvutuslükatit. Nõukogude Liidu teaduse ja tehnika arengu kiire tempo juures tuleks meil igati levitada praktiliste arvutuste läbiviimist arvutuslükati abil.

Olgu käesolev raamat vahendiks eesrindlike meetodite juurutamiseks arvutuste läbiviimisel nii koolis kui ka tegelikus elus, säästes sellega töötava inimese aega ja vaeva ning tõstes ühtlasi tööviljakust.

Autor.

Section

Faint, illegible text covering the majority of the page, appearing to be bleed-through from the reverse side.

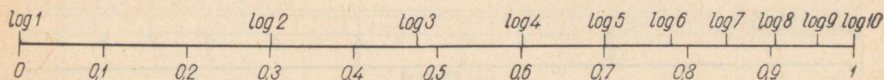
Page

§ 1. Logaritmilised skaalad.

1. Arvutuslükati konstruktsioonist arusaamise ja käsitlemise viisiga tutvumise otstarbel selgitame kõigepealt, mida kujutab endast logaritmiline skaala ehk astmik. Selleks võtame mingisuguse pikkusühiku (joonis 1), mille alguspunkt on tähistatud arvuga 0 ja lõpp-punkt — arvuga 1, ning jaotame selle pikkusühiku võrdseteks osadeks — edaspidise konstruktsiooni piltlikkuse mõttes näiteks punktidega

0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1

kümneks võrdseks osaks (joonisel alumine jaotus).



Joonis 1.

Võttes täisarvude 1 kuni 10 logaritmid

$$\log 1 = 0,00000$$

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\log 3 = 0,47712$$

$$\log 4 = 0,60206$$

$$\log 5 = 0,69897$$

$$\log 6 = 0,77815$$

$$\log 7 = 0,84510$$

$$\log 8 = 0,90309$$

$$\log 9 = 0,95424$$

$$\log 10 = 1,00000$$

näeme, et nende arvude logaritmid väärtusi võime kanda valitud kujutus- ehk pikkusühikule, alates $\log 1 = 0$ ja lõpetades $\log 10 = 1$. Paigutades sellele pikkusühikule — alates algus-

punktist — lõigud, mis kujutavad tähendatud logaritmade väärtusi, saame skaala, mille lõigud skaala algusest kuni märgitud punktideni (kriipsudeni) on võrdelised arvude

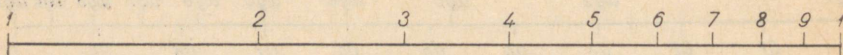
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

logaritmidega (joonisel ülemine jaotus). Säärast skaalat nimetatakse logaritmiliseks skaalaks. Logaritmilise skaala ehitamisel kasutatud kujutusühikut, s. o. lõiku $\log 1$ kuni $\log 10$, nimetatakse ka logaritmiliseks ühikuks.

Et logaritmilisel skaalal ei esineks liiga palju tähiseid, selleks jäetakse sümbol „log” igal pool ära, mille järele (nagu pärastpoole näeme) polegi tarvidust. Kahekohalise arvu 10 asemel logaritmilisel skaalal märgitakse harilikult ühekohaline arv 1. Nii jäävad ainult arvud (joonis 2):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1.

Need arvud joonisel määravad ära nende arvude logaritmade väärtusi pikkusmõõdus.



Joonis 2.

Logaritmilise skaala jaotised, s. o. järjestikuste arvudega märgitud punktide (kriipsude) vahed, ei ole võrdsed, vaid lähenedes logaritmilise ühiku lõpp-punktile vähenevad järjest (lähenevad lühemaks).

Sellel logaritmilisel skaalal on märgitud kriipsud, mis vastavad ainult täisarvude 1 kuni 10 logaritmadele. Kuid märgitud kriipsudevahelised jaotised võime jagada veel omakorda kümneks osaks, vastavalt logaritmadele

$$\log 1,1 = 0,04139$$

$$\log 1,2 = 0,07918$$

$$\log 1,3 = 0,11394$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\log 9,8 = 0,99123$$

$$\log 9,9 = 0,99564.$$

Nii saame logaritmilise skaala saja jaotisega (joonis 3), mis samuti vasakult paremale lugedes järk-järgult lähevad lühemaks.

Logaritmilisel skaalal 1 ja 2 vahel märgitud väiksemad numbrid

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

tähendavad logaritmide

$\log 1,1$; $\log 1,2$; $\log 1,3$; $\log 1,4$; $\log 1,5$; $\log 1,6$; $\log 1,7$;
 $\log 1,8$; $\log 1,9$

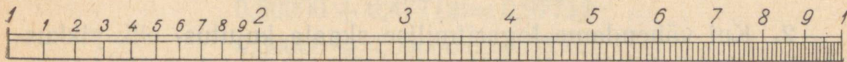
vastavaid väärtusi, seepärast loeme neid

1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9.

Kriipsud 2 ja 3 vahel (numbrid on skaalal märkimata) tähendavad

2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9.

Säärased jaotised järgnevad kuni 10-ni. Need on logaritmilise skaala kümnendik-jaotised.



Joonis 3.

Analoogilise jaotuse võime teha edasi, kus nüüd kümnendike vahed, s. o. 1 ja 1,1 vahe, 1,1 ja 1,2 vahe jne. võime jaotada igauhe omakorda kümneks osaks vastavalt logaritmidelle

$$\log 1,01 = 0,00432$$

$$\log 1,02 = 0,00860$$

$$\log 1,03 = 0,01284$$

.....

$$\log 9,98 = 0,99913$$

$$\log 9,99 = 0,99957.$$

Need oleksid logaritmilise skaala sajandik-jaotised. Kui ruum logaritmilisel skaalal lubaks, võiks võtta veelgi peenemaid jaotisi. Tavaliste arvutuslükatite logaritmilise skaala suurimaks pikkuseks on 25 cm, seepärast tuhandik-jaotisi on neil juba raske märkida, ja seal esinevad täielikult ainult kümnendik-jaotised ja osaliselt sajandik-jaotised. Harilikku 25 cm pikkusega

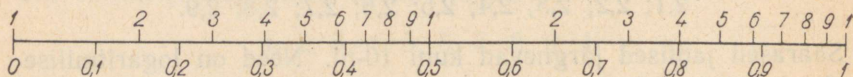
logaritmilist skaalat näeme joonisel I (raamatu lõpus). Sajandik-jaotised esinevad siin täielikult 1-st kuni 2-ni. Edasi 2-st paremale poole tuleksid sajandik-jaotised liiga tihedad, seepärast märgitakse sellel logaritmilisel skaalal 2-st kuni 4-ni sajandik-jaotised kahekaupa, s. o.

2,02; 2,04; 2,06; ...; 3,98; 4,00;

ja 4-st kuni 10-ni viiekaupa, s. o.

4,05; 4,10; 4,15; ...; 9,95; 10,00.

Seda logaritmilist skaalat, mille pikkus tavalistel arvutuslükatitel on 25 cm, nimetame arvutuslükati põhiskaalaks. Põhiskaala sisaldab ühe logaritmilise ühiku.



Joonis 4.

2. Kui vähendame logaritmilise skaala kujutus- ehk pikkusühikut kaks korda, siis võime eelpool-kirjeldatud põhiskaala pikkusesse mahutada uue logaritmilise skaala, mis sisaldab kaks (ühepikkust) logaritmilist ühikut. Nimetame neist vasakpoolse esimeseks ja parempoolse teiseks logaritmiliseks ühikuks (joonis 4). Kaks korda vähendatud mõõtkavas ehk mastaaabis võetud logaritmilisel ühikul on jaotised kaks korda lühemad põhiskaala logaritmilise ühiku vastavatest jaotistest.

Et

$$\frac{\log 2}{2} = \frac{0,30103}{2} = 0,15052$$

$$\frac{\log 3}{2} = \frac{0,47712}{2} = 0,23856$$

$$\frac{\log 4}{2} = \frac{0,60206}{2} = 0,30103$$

$$\frac{\log 5}{2} = \frac{0,69897}{2} = 0,34949$$

$$\frac{\log 6}{2} = \frac{0,77815}{2} = 0,38908$$

$$\frac{\log 7}{2} = \frac{0,84510}{2} = 0,42255$$

$$\frac{\log 8}{2} = \frac{0,90309}{2} = 0,45155$$

$$\frac{\log 9}{2} = \frac{0,95424}{2} = 0,47712$$

$$\frac{\log 10}{2} = \frac{1,00000}{2} = 0,50000,$$

siis niisugustes pikkustes esinevad logaritmilised lõigud valitud mõõduühiku puhul esimesel logaritmilisel ühikul. Teisel logaritmilisel ühikul lõppevate logaritmiliste lõikude pikkused, mida loeme esimese logaritmilise ühiku algusest, on siis

$$0,50000 + 0,15052 = 0,65052$$

$$0,50000 + 0,23856 = 0,73856$$

$$0,50000 + 0,30103 = 0,80103$$

$$0,50000 + 0,34949 = 0,84949$$

$$0,50000 + 0,38908 = 0,88908$$

$$0,50000 + 0,42255 = 0,92255$$

$$0,50000 + 0,45155 = 0,95155$$

$$0,50000 + 0,47712 = 0,97712$$

$$0,50000 + 0,50000 = 1,00000,$$

mis on samad nagu

$$\frac{\log 20}{2} = \frac{1,30103}{2} = 0,65052$$

$$\frac{\log 30}{2} = \frac{1,47712}{2} = 0,73856$$

$$\frac{\log 40}{2} = \frac{1,60206}{2} = 0,80103$$

$$\frac{\log 50}{2} = \frac{1,69897}{2} = 0,84949$$

$$\frac{\log 60}{2} = \frac{1,77815}{2} = 0,88908$$

$$\frac{\log 70}{2} = \frac{1,84510}{2} = 0,92255$$

$$\frac{\log 80}{2} = \frac{1,90309}{2} = 0,95155$$

$$\frac{\log 90}{2} = \frac{1,95424}{2} = 0,97712$$

$$\frac{\log 100}{2} = \frac{2,00000}{2} = 1,00000.$$

Sellest arvutusest näeme: kui esimesel logaritmilisel ühikul esinevad jaotuskriipsud vastavad arvudele

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

siis teisel logaritmilisel ühikul vastavad samadele jaotuskriipsudele arvud

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

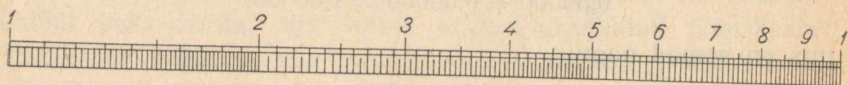
Seega esinevad neil kahel logaritmilisel ühikul kõik arvud 1-st kuni 100-ni. Ära märgitud on sellel (kahe logaritmilise ühikuga) skaalal lihtsuse mõttes tavaliselt ainult ühekohalised arvud

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1,

mis tähendavad aga

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

Mõne arvutuslükati teisel logaritmilisel ühikul on siiski märgitud kahekohalised arvud ja 100 (joonis VIII) või teise logaritmilise ühiku algul on 10 ja lõpul 100.



Joonis 5.

Et harilike arvutuslükatite põhiskaalad on 25 cm pikad ja kahe logaritmilise ühikuga skaala iga üksik logaritmiline ühik on kaks korda lühem põhiskaala logaritmilisest ühikust, siis pole võimalik kahe ühikuga skaalal märkida sajandik-jaotisi sama kriipsude arvuga, nagu ühe logaritmilise ühikuga skaalal. 25 cm pikkusel kahe logaritmilise ühikuga skaalal esinevad kõik kümnendik-jaotised (joonis 5). Sajandik-jaotised esinevad 1-st kuni 2-ni kahekaupa, s. o.

1,02; 1,04; 1,06; ...; 1,98; 2,00

ja 2-st kuni 5-ni viiekaupa:

2,05; 2,10; 2,15; ...; 4,95; 5,00.

Edasi 5-st kuni 10-ni sajandik-jaotisi enam ei ole märgitud.

Analoogilised eelmistega on jaotised teisel logaritmilisel ühikul, s. o. 10-st kuni 100-ni. Joonis 5 kujutab nii esimest kui ka teist logaritmilist ühikut joonisega 4 võrreldes kahekordses mõõtkavas.

Kriips, mis esimesel logaritmilisel ühikul tähistab arvu 1,1, tähendab teisel logaritmilisel ühikul arvu 11; kriips, mis esimesel logaritmilisel ühikul tähistab arvu 1,2, tähendab teisel logaritmilisel ühikul arvu 12, jne.; esimese logaritmilise ühiku 6-le vastab 60 teisel logaritmilisel ühikul; esimese logaritmilise ühiku lõppkriipsule 10 vastab teisel logaritmilisel ühikul lõppkriips 100.

§ 2. Arvutuslükati konstruksioon.

Eespool kirjeldatud logaritmilisi skaalasid esineb arvutuslükatil neli (joonis II): kaks ühesugust alumist ühe logaritmilise ühikuga ja kaks ühesugust ülemist kahe logaritmilise ühikuga.

Märgime need skaalad järjekorras ülalt allapoole lugedes tähtedega A, B, C ja D. A ja B on ülemised skaalad — kahe logaritmilise ühikuga; C ja D — alumised skaalad — ühe logaritmilise ühikuga. Nimetame neid A-skaalaks, B-skaalaks, C-skaalaks ja D-skaalaks. A- ja B-skaala sisaldavad C- ja D-skaala üldpikkuses kaks ühepikkust logaritmilist ühikut. A- ja B-skaala erinevad C- ja D-skaalast ainult mastaabilt: C- ja D-skaala logaritmilised ühikud on kaks korda suuremas mastaabis kui A- ja B-skaala logaritmilised ühikud. A- ja B-skaala esimest logaritmilist ühikut loeme 1-st kuni 10-ni, teist — 10-st kuni 100-ni. Seega asuvad A- ja B-skaalal kõik arvud 1-st kuni 100-ni, C- ja D-skaalal kõik arvud 1-st kuni 10-ni.

A- ja B-skaala algusarv 1 asetseb kohakuti C- ja D-skaala algusarvuga 1; A- ja B-skaala lõpparv 100 asetseb kohakuti C- ja D-skaala lõpparvuga 10.

Need neli logaritmilist skaalat (A, B, C ja D) esinevad arvutuslükati kahel osal: põhiosal ja keelel. Arvutuslükati põhiosal esinevad A- ja D-skaala, arvutuslükati keelel — B- ja

C-skaala. Arvutuslükati keelt võime liigutada edasi-tagasi põhi-osa suhtes, kus esinevad A- ja D-skaala. A- ja B-skaala moodustavad arvutuslükati ülemise jaotuse, C- ja D-skaala — alumise jaotuse. Ülemisel jaotusel on pikkus 1-st kuni 10-ni sama, mis pikkus 10-st kuni 100-ni, ja kogu pikkus ülemisel jaotusel 1-st kuni 100-ni on sama, kui alumine jaotus 1-st kuni 10-ni.

Arvutuslükatid on tehtud kas papist, puidust või metallist. Puidust arvutuslükatid on kaetud pealt valge tselluloidiga, millele on kantud tumedad logaritmilised skaalad A, B, C ja D. Tselluloidiga on nad kaetud selleks, et skaalad oleksid puhtad ja selged, kergesti loetavad ja ei määrduks. Et temperatuuri ja niiskuse mõju ei segaks arvutuslükati tarvitamist, s. o. et arvutuslükati keel ei hakkaks arvutuslükati põhiosa vahel logisema ega paisuks ka kinni, selleks valmistatakse arvutuslükati põhiosa kahest osast. Üks osa A-skaalaga ja teine — D-skaalaga ühendatakse metallplaadiga (või plaatidega) nõnda, et arvutuslükati põhiosa oleks ette- ja tahapoole painduv. Seega ei tekita temperatuuri muutus arvutuslükati keele edasi-tagasi lükkamisel erilist takistust. Kuid siiski ei ole soovitatav arvutuslükatit hoida väga kaua palava päikese käes või jälle liiga niiskes kohas, sest tselluloidiga kaetud osa võiks rikneda.

Arvutuslükati keelt tuleb liigutada võimalikult nii, et näpud ei puudutaks keele servi, vaid ainult keele külgi (mis on kaetud tselluloidiga), sest vastasel korral kandub näppude higi keele puidust servadele, mille tagajärjel takistatakse keele sujuv liikumine. Korrapäratult liikuva keele servi võib nühkida ja puhastada villase lapiga, talgiga või parafiiniga.

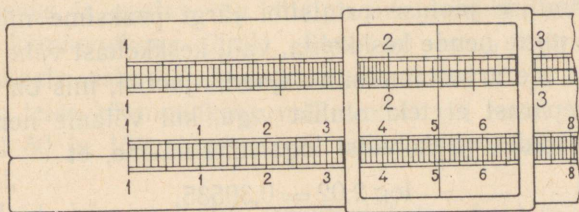
Tselluloidiga kaetud arvutuslükati määrdunud osi tuleb puhastada kas pehme kummiga või viinas niisutatud lapiga. Neid osi ei tohi puhastada bensiiniga, puupiiritusega ega ka veega, sest bensiin hävitab kriipsud, puupiiritus lahustab tselluloidi ja vesi võib paisutada lükati puidust osi.

Arvutuslükati tuleb pärast tarvitamist panna tema jaoks määratud tuppe.

Arvude lugemiseks skaaladel, nende ülesotsimiseks, äramärgimiseks ja alumiste skaalade (C ja D) pealt üleminemiseks skaa-

ladele A ja B ning ümberpöörduvalt, tarvitatakse arvutuslükati juures veel kolmandat osa — märkijat (mida nimetatakse ka sillaks või aknakeseks) *. See on tehtud klaasist või läbipaistvast plastmassist ning varustatud kriipsuga, mida nimetame teistest kriipsudest eraldamiseks „niidiks” (joonis 6). Klaas on kinnitatud alumiiniumist raami, mis ühendab märkijat arvutuslükatiga nõnda, et märkijat võib vabalt edasi-tagasi liigutada piki skaalalaid. Niit klaasil on skaaladel olevate jaotiste otsimiseks, märkimiseks ja lugemiseks ning sidepidajaks alumiste ja ülemiste skaalade vahel.

Nagu juba nimetasime eelmises §-s, on tavalise arvutuslükati põhiskaala pikkus 25 cm. On ka lühemaid arvutuslükateid (tas- kus kandmiseks): 16 cm ja 12,5 cm pikkuste põhiskaaladega; kuid



Joonis 6.

nende abil ei ole võimalik leida arvutamisel nii suurt täpsust, kui eelmise abil. Veel suurema täpsuse saamiseks tarvitatakse arvutuslükatit, mille põhiskaala pikkus on 50 cm. See on nn. b ü r o o - l ü k a t.

Allpool järgnev arvutuslükati käsitusviis ja seletused ei olene arvutuslükati pikkusest: käsitusviis ja seletused on ühised igasuguse pikkusega arvutuslükati suhtes.

§ 3. Arvude märkimine ja lugemine.

Enne kui hakata töötama arvutuslükatiga, tuleb kõigepealt ära õppida skaaladel olevate jaotiste lugemine, s. o. kriipsude

* Venelased nimetavad märkijat „бегунок”, prantslased „courseur”, inglased „cursor” ehk „runner”, ameeriklased „indicator”, sakslased „Läufer”.

ja nendevaheliste jaotiste tähendus, mis teeb alguses mõnelegi suuri raskusi. Tuleb panna rõhku sellele, et skaaladel olevad jaotised võetaks ja loetaks õieti ja võimalikult täpselt.

Nagu nägime, esinevad C- ja D-skaalal sajandik-jaotised täielikult 1-st kuni 2-ni; edasi 2-st kuni 4-ni — kahekaupa, ja 4-st lõpuni — viiekaupa. Seega kriipsud ühe ja kahe vahel määravad ära iga arvu kahe kümnendkohaga, mille täisosa on 1. Kriipsud 2 ja 4 vahel määravad ära arve vahemikus 2-st kuni 4-ni kahe kümnendkohaga, millede teine kümnendkoht on paarisarv. 2-le järgnev kriips tähendab seega 2,02, teine kriips — 2,04, kolmas kriips — 2,06 jne. Et ära märkida niidiga arv 2,03, selleks tuleb niit paigutada kriipsude 2,02 ja 2,04 vahele, s. o. nende kriipsude vahelise jaotise keskkoha.

Logaritmilise jaotuse printsiibi järgi peaksime niidi paigutama õieti mitte nende keskkoha, vaid keskkohast vähe paremale poole, kuid me arvestame siin sajandik-jaotisi, mis on väga kitsad, ja seepärast ei teki olulist viga, kui võtame nende keskkoha. Arvestades viiekohalisi logaritme näeme, et

$$\log 2,02 = 0,30535$$

$$\log 2,03 = 0,30750$$

$$\log 2,04 = 0,30963$$

ja nende vahed

$$0,30750 - 0,30535 = 0,00215$$

$$0,30963 - 0,30750 = 0,00213$$

on praktiliselt võrdsed (lahkumine vahedes on ligikaudu ainult 1%). Säärane käsitusviis oleks ka A- ja B-skaala esimesel logaritmilisel ühikul 1-st kuni 2-ni teise kümnendkoha märkimisel või teisel logaritmilisel ühikul 10-st kuni 20-ni esimese kümnendkoha märkimisel.

Kriipsud 4 ja 10 vahel C- ja D-skaalal määravad ära arve vahemikus 4-st kuni 10-ni kahe kümnendkohaga, mis lõpevad numbriga 5 või 0. 4-le järgnev esimene kriips tähendab 4,05, teine kriips — 4,10, kolmas kriips — 4,15 jne. kuni 9,95, mis on C- ja D-skaalal eelviimane kriips. Et niidiga ära märkida C- või D-skaalal näiteks arvu 4,27, selleks tuleb kriipsude 4,25 ja 4,30 vahe silma järgi jaotada viieks võrdseks osaks ja paigu-

tada niit nõnda, et niidist vasakule (kuni 4,25) oleks kaks osa ja niidist paremale (kuni 4,30) — kolm osa. Otsitav koht tuleb seega võtta niidiga silma järgi. Säärane käsitsemisviis oleks ka A- ja B-skaala esimesel logaritmilisel ühikul 2-st kuni 5-ni teise kümnendkoha märkimisel või teisel logaritmilisel ühikul 20-st kuni 50-ni esimese kümnendkoha märkimisel.

Et mitte eksida, sajandik-jaotiste märkimisel ja lugemisel, selleks tuleb tähele panna, mitmeks osaks on jaotatud kriipsudega kümnendik-jaotised — kas kümneks, viieks või kaheks osaks.

Kolmandaid kümnendkohti (tuhandik-jaotisi) C- ja D-skaalal on võimalik niidiga otsida ainult 1 ja 2 vahel. Siin tuleb iga kõrvuti oleva kahe kriipsu vahe silma järgi jaotada kümneks võrdseks osaks ja vastav osa niidiga ära märkida antud arvu kolmanda kümnendkoha järele. Sedaviisi tuleb toimetada ka A- ja B-skaala esimesel logaritmilisel ühikul 5 ja 10 vahel asuva arvu teise kümnendkoha määramisel või teisel logaritmilisel ühikul 50 ja 100 vahel asuva arvu esimese kümnendkoha määramisel.

Neljandaid kümnendkohti arvutuslükati skaaladel niidiga ära märkida või, ümberpöörduvalt, niidi kohalt lugeda pole võimalik.

H a r j u t u s i: Märkida niidiga järgmised arvud D-skaalal, mis on tähistatud kriipsudega:

3; 3,2; 3,7; 8,5; 8,9; 2,4; 2,6; 9,1; 9,9; 1,4; 1,1; 1,45; 1,52; 1,87; 1,99; 1,15; 1,23; 1,06; 1,01; 1,09; 1,95; 1,59; 2,46; 2,82; 3,34; 3,72; 2,04; 3,06; 3,02; 4,25; 4,05; 7,75; 9,95.

Märkida niidiga järgmised arvud D-skaalal, millede kujutisteks kriipsud puuduvad:

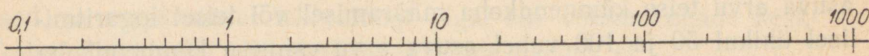
2,25; 3,33; 3,07; 2,01; 4,42; 4,74; 5,81; 6,03; 6,13; 9,09; 1,255; 1,845; 1,115; 1,035; 1,005; 1,123; 1,714; 1,468; 1,333; 1,991; 1,099.

Kui arvus, millel on ühekohaline täisosa, on rohkem kui kaks kümnendkohta, siis tuleb arvestada kolmandat kümnendkohta niidiga võttes — kui võimalik — ainult silma järgi. Näiteks: niidiga märkides võime C- või D-skaalal arvude 1,642 ja 1,643

vahel vahet teha, kuid arvude 8,672 ja 8,673 vahel pole enam võimalik seda teha. Järgmised kümnendkohad (alates neljandast kümnendkohast) ei saa tulla enam arvestamisele. Nad võiksid arvestamisele tulla, nagu näeme pärastpoole, ainult siis, kui arvu täisosa on 0. Näiteks, kui esinevad arvud 1,87425, 1,23687 ja 9,66247, siis võime niidiga märkida ainult 1,874, 1,237 ja 9,66. A- või B-skaalal saab ära märkida umbes needsamad arvud, kuid täpsus on igatahes väiksem. Kui pärastpoole esineb meil näiteks niisugune arv nagu 0,0152391, siis tuleb võtta 0,01524; kui esineb arv 136287, siis tuleb võtta 136300.

Arvu $\pi = 3,1416$ jaoks on harilikult A- ja B- ning C- ja D-skaalal eri kriips (joonis II või IV).

Harjutusi: Märkida niidiga järgmised arvud D-skaalal: 2,462; 2,433; 5,658; 8,838; 4,012; 4,006; 1,1234; 1,8765; 1,0659; 1,0407; 1,0032; 1,0008.



Joonis 7.

Märkida niidiga järgmised arvud A-skaalal:

4; 60; 64; 71; 3,7; 9,9; 1,3; 1,28; 1,08; 2,15; 6,55; 7,77; 82,5; 34,5; 36,4; 30,3; 18,4; 10; 8; 10,5; 10,1; 6,248; 5,081; 8,802; 44,22; 40,57; 40,08; 1,123; 1,014; 1,007; 2,003; 2,032; 2,6751.

Et esimene logaritmiline ühik 1-st kuni 10-ni on samade jaotistega nagu talle järgnev teine logaritmiline ühik 10-st kuni 100-ni, siis samade jaotistega oleks ka teisele logaritmilisele ühikule järgnev kolmas logaritmiline ühik 100-st kuni 1000-ni, kolmandale logaritmilisele ühikule järgnev neljas logaritmiline ühik 1000-st kuni 10000-ni jne. ning samuti samade jaotistega oleks ka esimesele logaritmilisele ühikule eelnev logaritmiline ühik 0,1-st kuni 1-ni, siis sellele eelnev logaritmiline ühik 0,01-st kuni 0,1-ni jne. (joonis 7). Mitme logaritmilise ühikuga skaala on seega *periodiline*. See logaritmilise skaala perioodilisuse omadus võimaldab, nagu pärastpoole näeme, igasuguste kümnendmurdude korrutamise, jagamise, logaritmitamise ja antiloga-

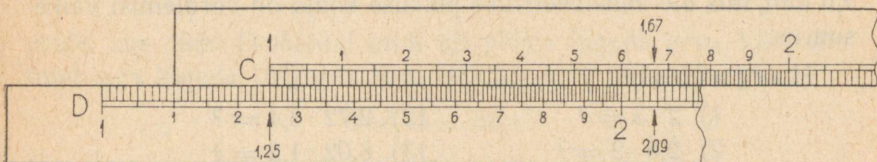
ritmimise üle kanda ainult ühe logaritmilise ühikuga skaalale ja nimelt põhiskaalale, mille tõttu võime näiteks arvu 4 tähendavat kriipsu põhiskaalal niisama hästi lugeda kas arvudeks 40, 400, 4000 jne. või arvudeks 0,4; 0,04; 0,004 jne. Seega kriips numbriga 4 tähendab üldiselt $4 \cdot 10^k$, kus $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

§ 4. Korrutamine.

1. Arvutuslükati abil kahe arvu a ja b korrutise leidmiseks tuleb logaritmilisel skaalal liita nende arvude logaritmidelle vastavad pikkused, sest et

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Arvude korrutamisel arvutuslükati abil tuleb arvestada seda, et arvutuslükat võimaldab kolme- ja osaliselt neljanumbrilise



Joonis 8.

täpsuse, seepärast otsitav korrutis saadakse suuremalt osalt ligikaudne — teatava täpsusega.

Näide 1. $1,25 \cdot 1,67 = ?$

Nihutame arvutuslükati keele keskasendist paremale nõnda, et C-skaala algus, s. o. C-1, oleks D-skaalal asuva kriipsu 1,25 kohal (joonis 8). Siis viime niidi C-skaalal oleva arvu 1,67 peale ja vaatame, missugune arv esineb samal kohal D-skaalal niidi all. Näeme, et D-skaalal niidi alt võime ligikaudu lugeda arvu 2,09. See on otsitav ligikaudne korrutis. Seega oleme liitnud $\log 1,25 + \log 1,67$, mis on sama nagu $\log (1,25 \cdot 1,67)$. Tähendab,

$$1,25 \cdot 1,67 = 2,09.$$

Samaselt võime toimida ka arvutuslükati ülemiste skaaladega: asetame arvutuslükati keelel oleva B-skaala alguse, s. o. B-1, A-1,25 kohale ja viime niidi B-1,67 peale. Niidi all A-skaalal

esineb nende ligikaudne korrutis 2,09. Siin on lühemate jaotiste tõttu korrutise kolmandat numbrit raskem määrata kui alumisel skaalal. Seepärast on soovitatav suurema täpsuse saamiseks korrutamist toimetada arvutuslükati alumisel poolel, s. o. C- ja D-skaalaga.

Vaatame, kui suur viga tekib siin arvutuslükati tarvitamisel. Täppis korrutis on 2,0875. Kui arvutamise täppis resultaat on t ja arvutuslükati abil saadud resultaat l , siis absoluutne viga on

$$v_a = l - t = 2,09 - 2,0875 = 0,0025,$$

ja relatiivne viga on

$$v_r = \frac{100(l-t)}{t} = \frac{100 \cdot 0,0025}{2,0875} = 0,12\%,$$

millest näeme, et viga on võrdlemisi väike. Näiteks, kui võtame 2,09 m ja 2,0875 m, siis näeme, et absoluutne viga on ainult 2,5 mm, mis üle kahemeetrilise pikkuse kohta on võrdlemisi väike suurus.

Harjutusi:

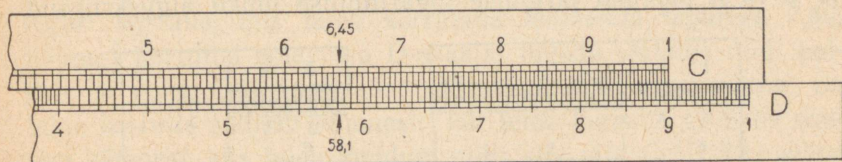
- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| 1) $2 \cdot 3 = ?$ | 12) $2,72 \cdot 3,4 = ?$ |
| 2) $2,5 \cdot 2 = ?$ | 13) $8,02 \cdot 1,2 = ?$ |
| 3) $3,4 \cdot 2 = ?$ | 14) $1,07 \cdot 4,4 = ?$ |
| 4) $2,3 \cdot 4 = ?$ | 15) $2,548 \cdot 3,1 = ?$ |
| 5) $3,6 \cdot 1,2 = ?$ | 16) $3,025 \cdot 1,6 = ?$ |
| 6) $5,8 \cdot 1,3 = ?$ | 17) $2,13 \cdot 2,07 = ?$ |
| 7) $1,1 \cdot 7,7 = ?$ | 18) $4,07 \cdot 1,06 = ?$ |
| 8) $1,54 \cdot 5 = ?$ | 19) $5,123 \cdot 1,24 = ?$ |
| 9) $2,06 \cdot 3 = ?$ | 20) $6,723 \cdot 1,045 = ?$ |
| 10) $5,05 \cdot 1,8 = ?$ | 21) $2,505 \cdot 3,0521 = ?$ |
| 11) $3,33 \cdot 2,3 = ?$ | 22) $1,005 \cdot 4,7232 = ?$ |

[Vastused: 1) 6. 2) 5. 3) 6,8. 4) 9,2. 5) 4,32. 6) 7,54. 7) 8,47. 8) 7,70. 9) 6,18. 10) 9,09. 11) 7,66. 12) 9,25. 13) 9,62. 14) 4,71. 15) 7,90. 16) 4,84. 17) 4,41. 18) 4,31. 19) 6,35. 20) 7,03. 21) 7,65. 22) 4,75.]

Näide 2. $9 \cdot 6,45 = ?$

Kui toimetaksime korrutamist eelmise näite kohaselt, lükates C-1 D-9 kohale ja viies niidi C-6,45 peale, siis näeksime, et niit

satub väljapoole D-skaala piirkonda. See tuleb sellest, et korrutise väärtus on suurem kümnest. Siin peaks D-skaalast paremal olema veel üks logaritmiline ühik, millel jaotisi oleks 10-st kuni 100-ni, mis võimaldaks kohe otsitava korrutise leidmise. Sel juhul näeksime, et (skaala perioodilisuse tõttu) C-1-le ja C-10-le vastaks D-skaalal üks ja sama jaotusarv. Seepärast arvude 9 ja 6,45 korrutamisel, kus korrutis on suurem kümnest, nihutame arvutuslükati keele vasakule nõnda, et C-skaala parempoolne ots C-10 tuleks D-9 kohale (joonis 9). Viime niidi C-6,45



Joonis 9.

peale, kus nüüd D-skaalal niidi alt võime lugeda arvu 58,1, mis tuleb aga lugeda 10 korda suurendatult, s. o. 58,1. Seega

$$9 \cdot 6,45 = 58,1.$$

Tähendab, kui arvutuslükati keel korrutamisel tuleb nihutada vasakule, siis tuleb D-skaalal võetav korrutis lugeda 10 korda suurendatult.

Selles näites, kui meil oleks tegemist pikkusmõõduga sentimeetrites, oleks absoluutne viga 58,1 cm kohta ainult 0,5 mm, sest täppis resultaat $t = 58,05$ ja seega absoluutne viga

$$v_a = l - t = 58,1 - 58,05 = 0,05;$$

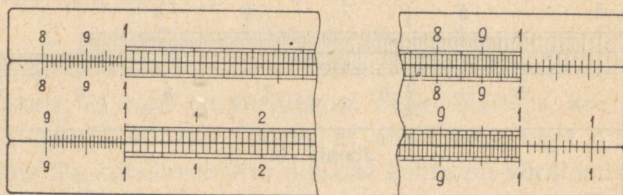
ning relatiivne viga oleks samuti väga väike, s. o.

$$v_r = \frac{100(l-t)}{t} = \frac{100 \cdot 0,05}{58,05} = 0,08\%.$$

Otsustamine, kummale poole lükata korrutamisel arvutuslükati keel, ei tekita raskust, sest et juba tegurite täisosadele vaadates võime ette näha, kas korrutis on suurem või väiksem kümnest. Ainult mõnel üksikul juhul on seda raske ette näha, näiteks, kui võtame $3,14 \cdot 3,21$. Siin tuleb lihtsalt katsetada. Kui

arvutuslükati keel korrutamisel jääb paremale, siis tuleb korrutiseks lugeda sama arv, mis esineb D-skaalal; jääb aga arvutuslükati keel korrutamisel vasakule, siis tuleb lugeda korrutiseks D-skaalal saadud arvust 10 korda suurem arv.

Mõnede arvutuslükatite C- ja D-skaalal on selleks otstarbeks, kui otsekohe ei saa ütelda, kas korrutis on suurem või väiksem kümnest, C-1-st ja D-1-st vasakul ning C-10-st ja D-10-st paremal veel mõned jaotuskriipsud (joonis 10): C-1-st ja D-1-st vasakul on eelneva logaritmilise ühiku lõppkriipsud ning C-10-st ja D-10-st paremal järgmise logaritmilise ühiku alguskriipsud.



Joonis 10.

Niisugusel korral võimaldab nii parempoolne kui ka vasakpoolne arvutuslükati keele lüke korrutise lugemise. Samaselt võivad esineda A-1-st ja B-1-st vasakul A- ja B-skaala logaritmilise ühiku lõppkriipsud ning A-100-st ja B-100-st paremal A- ja B-skaala logaritmilise ühiku alguskriipsud (joonis 10).

Toimetades korrutamist $9 \cdot 6,45$ arvutuslükati ülemistel skaaladel, jääb arvutuslükati keel paremale ja otsitava korrutise leiame A-skaala teisel logaritmilisel ühikul.

Harjutusi:

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| 1) $3 \cdot 5 = ?$ | 10) $2,27 \cdot 5,42 = ?$ |
| 2) $3,4 \cdot 6 = ?$ | 11) $7,03 \cdot 4,85 = ?$ |
| 3) $8,3 \cdot 7 = ?$ | 12) $1,29 \cdot 8,55 = ?$ |
| 4) $5,4 \cdot 6,3 = ?$ | 13) $5,014 \cdot 7,6 = ?$ |
| 5) $7,3 \cdot 2,7 = ?$ | 14) $4,709 \cdot 6,7 = ?$ |
| 6) $9,8 \cdot 1,9 = ?$ | 15) $2,008 \cdot 5,52 = ?$ |
| 7) $4,25 \cdot 7,2 = ?$ | 16) $3,381 \cdot 8,37 = ?$ |
| 8) $6,06 \cdot 8,1 = ?$ | 17) $6,062 : 1,885 = ?$ |
| 9) $1,74 \cdot 6,5 = ?$ | 18) $1,202 \cdot 8,756 = ?$ |

[Vastused: 1) 15. 2) 20,4. 3) 58,1. 4) 34,0. 5) 19,71. 6) 18,62. 7) 30,6. 8) 49,1. 9) 11,31. 10) 12,30. 11) 34,1. 12) 11,03. 13) 38,1. 14) 31,6. 15) 11,08. 16) 28,3. 17) 11,43. 18) 10,52.]

Näide 3. $2,6 \cdot 1,15 \cdot 7,46 \cdot 3,02 = ?$

Siin on neli tegurit, seega esineb siin kolmekordne korrutamine. Korrutame enne kaks tegurit, siis saadud korrutise kolmanda teguriga ja viimaks neljandaga. Seame C-1 D-2,6 kohale ja viime niidi C-1,15 peale. Niidi all D-skaalal on kahe esimese teguri korrutis, mis tuleb korrutada kolmanda teguriga 7,46. Esimest korrutist pole vaja D-skaalal lugeda. Jätame niidi paigale ja viime C-10 niidi alla (mitte C-1, sest, nagu näeme, on teine korrutis suurem kümnest; kui teine korrutis ei oleks suurem kümnest, siis tuleb muidugi niidi alla viia C-1). Siis viime niidi C-7,46 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal on teine korrutis (kahekohalise täisosaga, sest arvutuslükati keel läks vasakule). Ka seda korrutist pole tarvis lugeda. Jäägu niit jälle paigale ja viime C-1 niidi alla (nüüd C-1, sest nagu näha, on kolmas korrutis väiksem kümnest, kui lugeda eelmist korrutist 10 korda vähendatult). Lõpuks viime niidi C-3,02 peale, kus nüüd niidi all D-skaalal leiame arvu 6,74, mis on 10 korda suurendatult otsitav ligikaudne korrutis, s. o. 67,4 (sest arvutuslükati keel käis üks kord korrutamisel vasakul). Seega

$$2,6 \cdot 1,15 \cdot 7,46 \cdot 3,02 = 67,4.$$

Mitme teguri korrutamisel pole vajadust lugeda vahepealseid korrutisi. Ainult tuleb meles pidada, mitu korda arvutuslükati keel käis vasakul: kui üks kord, siis tuleb D-skaalal esinev arv 10 korda suurendada, kui kaks korda, siis 100 korda suurendada jne.

Harjutusi:

- 1) $2,6 \cdot 3,3 \cdot 5 = ?$
- 2) $7,4 \cdot 2,4 \cdot 4,1 = ?$
- 3) $5,16 \cdot 4,3 \cdot 3,7 = ?$
- 4) $3,62 \cdot 7,04 \cdot 1,9 = ?$
- 5) $1,76 \cdot 2,37 \cdot 3,06 = ?$
- 6) $2,155 \cdot 4,025 \cdot 6,345 = ?$

$$7) 8,071 \cdot 1,251 \cdot 3,105 = ?$$

$$8) 7,2 \cdot 3,15 \cdot 4,05 \cdot 5,3 = ?$$

$$9) 9,1 \cdot 7,6 \cdot 2,68 \cdot 5,4 = ?$$

$$10) 5,03 \cdot 1,755 \cdot 3,1416 \cdot 8,8 = ?$$

[Vastused: 1) 42,9. 2) 72,8. 3) 82,1. 4) 48,4. 5) 12,76. 6) 55,0. 7) 31,4. 8) 487. 9) 1001. 10) 244.]

11) Telliskivi-müüri pikkus on 4,85 m, kõrgus 2,64 m ja paksus 45 cm. Palju kaalub nimetatud müür, kui selle mahukaal on $1,89 \text{ t/m}^3$?

[Vastus: 10,9 tonni.]

$$\text{Näide 4. } 23,8 \cdot 0,00865 = ?$$

Eelmistes näidetes oli igal teguril ühekohaline täisosa. Siin aga on üks tegur suurem kümnest ja teine väiksem ühest. Nii-sugusel korral arvutuslükati abil korrutades suurendame või vähendame tegureid komade edasi- või tagasiviimisega nõnda, et igal teguril oleks ühe kohaga täisosa. Võetud näites tuleb esimene tegur vähendada 10 korda ja teine tegur suurendada 1000 korda. Meil jääks siis $2,38 \cdot 8,65$, mida võime märkida järgmiselt:

$$2'3,8 \cdot 0,008'65,$$

mis on otsitavast korrutisest 100 korda suurem. Neid tegureid tuleb korrutada näite 2 järgi. Korrutamisel läheb arvutuslükati keel vasakule, mis annab korrutamisel 10-kordse suurenduse. Korrutist määrav arv D-skaalal 2,06 tuleb seega ühelt poolt 10 korda suurendada ja teiselt poolt 100 korda vähendada. Täheleb, D-skaalal leitud korrutis tuleb üldiselt 10 korda vähendada. Saame

$$23,8 \cdot 0,00865 = 0,206.$$

2. Arvutuslükatiga korrutamisel tarvitatakse korrutise suurusejärgu määramiseks mõnikord ka teissugust võtet. Selle võtte rakendamiseks jaotame arvud üldiselt kolme ossa: arvud, millel on a) positiivne kohtade arv, b) negatiivne kohtade arv ja c) kohtade arv võrdne nulliga.

a) Ühest suurematel arvudel loeme komast vasakul oleva täisosa numbrite arvu positiivseks kohtade arvuks; näiteks, arvul 12,45 on kaks positiivset kohta, arvul 4300 on neli positiivset kohta.

b) Arvudel, mis on väiksemad 0,1-st, loeme komast paremal pool järgemööda esinevate nullide arvu negatiivseks kohtade arvuks; näiteks, arvul 0,000204 on kolm negatiivset kohta.

c) Arvusid, mis on 1 ja 0,1 vahel, loeme nullkohalisteks; näiteks arv 0,42 on nullkohaline (0-kohaline).

Nii loeme, et arv

346000	on	+6-kohaline
172,06	„	+3-kohaline
5,15	„	+1-kohaline
0,18	„	0-kohaline
0,064	„	-1-kohaline
0,000051	„	-4-kohaline.

Arvestades positiivset ja negatiivset kohtade arvu võime korrutada, ilma et üksikuid tegureid 10, 100 jne. korda suurendaksime või vähendaksime. Et kahte tegurit korrutada, selleks loeme mõlema teguri kohtade arvu ja liidame nad. Saadud summat kasutame korrutise kohtade arvu määramiseks järgmiselt:

a) läheb kahe arvu korrutamisel arvutuslükati keel vasakule, s. o. kasutades korrutamisel arvutuslükati keele lõppkriipsu C-10, on korrutise kohtade arv võrdne tegurite kohtade summaga;

b) läheb aga kahe arvu korrutamisel arvutuslükati keel paremale, s. o. kasutades korrutamisel arvutuslükati keele alguskriipsu C-1, on korrutise kohtade arv võrdne tegurite kohtade summaga miinus üks.

Seepärast mõne arvutuslükati parempoolses otsas (joonis III või IV) on D-skaala lõpus märgitud P — 1 (Produit — 1), mis tähendab, et kui korrutamisel arvutuslükati keel läheb paremale, tuleb korrutise kohtade arv vähendada ühe koha võrra.

Võtame eelmise näite:

$$23,8 \cdot 0,00865.$$

Esimesel teguril on +2 kohta ja teisel teguril -2 kohta. Nende summa on null:

$$+2 + (-2) = 0.$$

Korrutamisel läheb arvutuslükati keel vasakule, s. o. korrutamisel tarvitame arvutuslükati lõppkriipsu C-10, seega D-skaalalt võetava korrutise kohtade arv on null, s. o. vastus on 0,206.

M ä r k u s. Et arvude korrutamisel arvutuslükatiga pole vaja lugeda vahepealseid korrutisi ja komade arvestamine korrutamise protsessis pole oluline, siis võime näiteks arve 23,8 ja 0,00865 lugeda nagu 238 ja 865 ning D-2,38 ja C-8,65 asemel märkida D-238 ja C-865, mida loeme järgmiselt: D-(kaks kolm kaheksa) ja C-(kaheksa kuus viis).

N ä i d e 5. $48,5 \cdot 0,0156 \cdot 0,0062 = ?$

Paigutame C-1 D-485 (mis tehte toimingus on sama nagu D-4,85) kohale ja viime niidi C-156 peale; lükkame C-10 niidi alla ja viime niidi D-62 peale. Niidi all D-skaalal leiame arvu 469. Siin vahepealset korrutist polnud vaja lugeda ja komade arvestamine korrutamise protsessis polnud oluline. Lõppkorrutise kohtade märkimiseks arvestame ainult tegurite kohtade summat ja tähist P — 1. Et esimesel teguril on +2 kohta, teisel teguril -1 koht ja kolmandal teguril -2 kohta, siis nende kohtade summa on

$$+2 + (-1) + (-2) = -1.$$

Et korrutamisel arvutuslükati keel käis üks kord paremal pool, tuleb saadud summa vähendada ühe koha võrra, s. o.

$$-1 - 1 = -2,$$

millest järeldame, et leitud korrutis peab olema -2-kohaline, s. o. 0,00469. Tähendab,

$$48,5 \cdot 0,0156 \cdot 0,0062 = 0,00469.$$

Kui korrutamisel esineb rohkem kui kaks tegurit, siis tuleb korrutise kohtade määra-

miseks tegurite kohtade summa vähendada nii mitme koha võrra, kui mitu korda arvutuslükati keel korrutamisel käis paremal, s. o. $P - 1$ poolel.

3. Korrutise koma asetuse määramiseks kasutatakse tihti antud tegurite asemel jämedalt ümardatud arvusid. Näiteks, näites 4 toodud tegurite 23,8 ja 0,00865 asemel võetakse lihtsalt arvud 25 ja 0,008. Viimaste arvude peast korrutamisel saame 0,2. Sellega on määratud korrutise suuruse järk. Me võime tegureid ümardades (võrreldes täpse tulemusega) eksida mõne või ka mõnekümne protsendi võrra, kuid me naljalt ei saa eksida koma asetusega. Kasutades arvutuslükatit saime korrutamise tulemusena teatavasti 0,206.

Näites 5 toodud arvude 48,5, 0,0156 ja 0,006 asemel võtame (jämedalt ümardades) tegurid 50, 0,02 ja 0,005. Et mitte väga palju eksida, püüame mitme arvu korrutamisel ühtede arvude suurendamisel teisi muidugi vähendada, või ümberpöörduvalt. Käesolevas näites esimese kahe arvu korrutis on 1 ja kolme arvu korrutis seega 0,005. Sellega on jällegi määratud korrutise suuruse järk. Nagu nägime, arvutuslükatiga saavutatud korrutis 0,00469 on ligikaudselt saadud tulemusele (0,005) suhteliselt lähedane.

Viimasel ajal kasutatakse väga palju seda nn. koma asetuse määramise võtet jämedalt ümardatud andmete abil. Sel puhul jääb ära tegurite kohtade arvu määramine ja paremale poole teostatud keele lükete meelespidamine. Paljudel uuematel lükatitel ei esinegi enam märki $P - 1$. Igal juhtumil on jämedalt ümardatud andmete võte kasulik eespool käsitletud koma määramise juhustega teostatud arvutustulemuste kontrollimisel.

Harjutusi:

- 1) $12 \cdot 3 = ?$
- 2) $15 \cdot 2,6 = ?$
- 3) $8,3 \cdot 33 = ?$
- 4) $0,42 \cdot 9 = ?$
- 5) $0,56 \cdot 0,8 = ?$

- 6) $85,9 \cdot 113 = ?$
- 7) $34 \cdot 0,58 = ?$
- 8) $52 \cdot 0,016 = ?$
- 9) $0,63 \cdot 0,57 = ?$
- 10) $31,6 \cdot 0,0081 = ?$
- 11) $0,202 \cdot 7,08 = ?$
- 12) $152,5 \cdot 0,0042 = ?$
- 13) $26 \cdot 0,071 \cdot 4,6 = ?$
- 14) $0,08 \cdot 26,8 \cdot 0,35 = ?$
- 15) $125 \cdot 37,1 \cdot 0,64 = ?$
- 16) $46 \cdot 67 \cdot 0,6 \cdot 17,2 = ?$
- 17) $0,0156 \cdot 0,42 \cdot 8,2 \cdot 15,6 = ?$
- 18) $0,009 \cdot 0,06 \cdot 84 \cdot 73,5 = ?$

[Vastused: 1) 36. 2) 39. 3) 274. 4) 3,78. 5) 0,448.
 6) 9710. 7) 19,72. 8) 0,832. 9) 0,359. 10) 0,256. 11) 1,430.
 12) 0,640. 13) 8,49. 14) 0,750. 15) 2970. 16) 31800. 17) 0,838.
 18) 3,33.]

§ 5. Jagamine.

1. Et leida arvutuslükati abil kahe arvu a ja b jagatis, selleks tuleb logaritmilistel skaaladel lahutada nende arvude logaritmidele vastavad pikkused, sest et

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Näide 1. $8,55 : 3,24 = ?$

Viime niidi D-8,55 peale ja toome arvutuslükati keelega C-3,24 niidi alla. Siis arv, mis on D-skaalal C-skaala alguse C-1 kohal, on otsitav jagatis. C-1 kohal D-skaalal esineb 2,64. Seega

$$8,55 : 3,24 = 2,64$$

on otsitav jagatis kahe kümnendkohaga.

Sama tulemuse saame, kui võtame jagatava 8,55 C-skaalal ja jagaja 3,24 D-skaalal, siis tuleb aga jagatis lugeda C-skaalal D-1 kohalt. Selleks viime niidi D-3,24 peale ja toome arvutus-

lükati keelega C-8,55 niidi alla, kusjuures nüüd jagatis 2,64 on C-skaalal D-1 kohal.

Analoogiliselt võime toimetada jagamist arvutuslükati ülemisel poolel A- ja B-skaalaga.

Vaatame, kui suur viga tekib käesoleva näite puhul arvutuslükati tarvitamisel. Arvutuslükatiga saadud resultaati on siin $l = 2,64$ ja täppis jagatis

$$t = \frac{8,55}{3,24} = 2,63(8).$$

Absoluutne viga on siis

$$v_a = l - t = 2,64 - 2,63(8) = 0,00(2)$$

ja relatiivne viga

$$v_r = \frac{100(l - t)}{t} = \frac{100 \cdot 0,00(2)}{2,63(8)} = 0,08\%,$$

millest nähtub, et viga on väga väike. Kui meil on tegemist näiteks meetritega, siis absoluutne viga on ligikaudu kõigest 2 mm, mis üle 2,5-meetrilise pikkuse kohta on võrdlemisi väga väike suurus.

Harjutusi:

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| 1) $6 : 2 = ?$ | 12) $4,07 : 1,82 = ?$ |
| 2) $10 : 7 = ?$ | 13) $2,66 : 2,44 = ?$ |
| 3) $6 : 4,8 = ?$ | 14) $3 : 1,235 = ?$ |
| 4) $7,4 : 5 = ?$ | 15) $5,565 : 3,2 = ?$ |
| 5) $3,8 : 2,9 = ?$ | 16) $2,074 : 1,45 = ?$ |
| 6) $5,3 : 3,9 = ?$ | 17) $3,368 : 1,83 = ?$ |
| 7) $9,8 : 6,7 = ?$ | 18) $7,07 : 2,468 = ?$ |
| 8) $2 : 1,14 = ?$ | 19) $8,18 : 4,024 = ?$ |
| 9) $5,45 : 4 = ?$ | 20) $2,876 : 2,345 = ?$ |
| 10) $8,35 : 5,6 = ?$ | 21) $6,008 : 1,005 = ?$ |
| 11) $7,2 : 2,04 = ?$ | 22) $4,602 : 3,028 = ?$ |

[Vastused: 1) 3. 2) 1,429. 3) 1,250. 4) 1,480. 5) 1,310. 6) 1,359. 7) 1,463. 8) 1,754. 9) 1,362. 10) 1,491. 11) 3,53.

12) 2,24. 13) 1,090. 14) 2,43. 15) 1,738. 16) 1,430. 17) 1,840.
 18) 2,86. 19) 2,03. 20) 1,226. 21) 5,98. 22) 1,520.]

Näide 2. $2,06 : 5,83 = ?$

Siin toimetame samuti nagu eelmiseski näites: toome niidi D-2,06 peale ja lükkame C-5,83 niidi alla. Kuid siin C-skaala algus langeb D-skaala piirkonnast välja vasakule poole. Seejärest võtame jagatise D-skaalal C-skaala parempoolse otsa C-10 kohalt. Sealt leiame 3,53. See arv on 10 korda tõelisest jagatisest suurem. Seega saadud arv tuleb 10 korda vähendada. Tähendab,

$$2,06 : 5,83 = 0,353.$$

Kui viiksime niidi D-5,83 peale ja tooksime C-2,06 niidi alla, siis tuleks jagatis lugeda C-skaalal D-10 kohalt, mida tuleks samuti 10 korda vähendada.

Tähendab, kui jagamisel jagatis võetakse D-skaalal C-skaala parempoolse otsa C-10 (või C-skaalal D-skaala parempoolse otsa D-10) kohalt, tuleb jagatist näitav arv lugeda 10 korda vähendatult.

Viimases näites, kui meil on tegemist pikkusmõõduga meetrites, oleks absoluutne viga ($l = 0,353$ m kohta) ainult ligikaudu 0,34 mm, sest täppis resultaati

$$t = \frac{2,06}{5,83} = 0,35334 \dots$$

ja seega absoluutne viga

$$v_a = t - l = 0,35334 - 0,353 = 0,00034$$

ning relatiivne viga

$$v_r = \frac{100(t - l)}{t} = \frac{100 \cdot 0,00034}{0,35334} = 0,096\%.$$

Võrreldes käesolevas ja eelnevas näites ning samuti eelmise paragrahvi näidetes 1 ja 2 arvutuslükatiga korrutamisel ja jagamisel tekkinud relatiivse vea suurusi, nähtub, et arvutuslükatiga korrutamisel ja jagamisel tekkiva relatiivse vea suurus on keskmiselt 1⁰/₁₀₀.

Harjutusi:

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| 1) $2 : 6 = ?$ | 10) $4,9 : 9,15 = ?$ |
| 2) $1 : 7 = ?$ | 11) $3,74 : 7,12 = ?$ |
| 3) $3,4 : 7 = ?$ | 12) $5,75 : 6,05 = ?$ |
| 4) $6 : 8,4 = ?$ | 13) $1,115 : 8 = ?$ |
| 5) $5,2 : 7,8 = ?$ | 14) $2,235 : 4,2 = ?$ |
| 6) $1,6 : 9,3 = ?$ | 15) $7,009 : 9,09 = ?$ |
| 7) $3 : 4,35 = ?$ | 16) $3,8 : 4,255 = ?$ |
| 8) $1,64 : 3 = ?$ | 17) $4,18 : 6,688 = ?$ |
| 9) $2,85 : 5,8 = ?$ | 18) $1,005 : 5,555 = ?$ |

[Vastused: 1) 0,333. 2) 0,1429. 3) 0,486. 4) 0,714.
5) 0,667. 6) 0,1720. 7) 0,690. 8) 0,547. 9) 0,491. 10) 0,536.
11) 0,525. 12) 0,950. 13) 0,1394. 14) 0,532. 15) 0,771.
16) 0,893. 17) 0,625. 18) 0,1809.]

Näide 3. $0,244 : 7,15 = ?$

Kujutades jagatavat 10 korda suurendatult võime kirjutada:

$$0,2'44 : 7,15.$$

Seega suureneb jagatis 10 korda. Tähendab, lõppresultaati peame vähendama 10 korda. Jagamisel näeme, et jagatis tuleb lugeda D-skaalal C-10 (või C-skaalal D-10) kohalt, mille põhjal peame D-skaalal (või C-skaalal) esineva jagatise vähendama veel 10 korda. Seega tuleb D-skaalal C-10 (või C-skaalal D-10) kohal esinev arv 3,41 vähendada 100 korda, s. o.

$$0,244 : 7,15 = 0,0341.$$

2. Jagatise suurusejärgu määramiseks tarvitatakse arvutuslükatiga töötades ka kohtade arvu määramise võtet.

Jagatise kohtade arv määratakse järgmiselt:

a) loetakse jagatis D-skaalal C-skaala parempoolse otsa C-10 (või C-skaalal D-skaala parempoolse otsa D-10) kohalt, on jagatise kohtade arv võrdne jagatava ja jagaja kohtade vahega;

b) loetakse aga jagatis D-skaalal C-skaala vasakpoolse otsa C-1 (või C-skaalal D-skaala vasakpoolse otsa D-1) kohalt, on jagatise kohtade arv

võrdne jagatava ja jagaja kohtade vahega pluss üks.

Seepärast arvutuslükati vasakpoolses otsas (joonis III või IV) on märgitud D-skaala alguses $Q + 1$ (Quotient + 1), mis tähendab, et kui jagatis loetakse D-skaalal C-1 (või C-skaalal D-1) kohalt, tuleb jagatise kohtade arv suurendada ühe positiivse koha võrra.

Võtame eelmise näite:

$$0,244 : 7,15.$$

Siin jagatav on 0-kohaline ja jagaja +1-kohaline ning nende vahe on

$$0 - (+1) = -1.$$

Jagades arvutuslükati abil näeme, et jagatis D-skaalal (või C-skaalal) tuleb lugeda C-10 (või D-10) kohalt. Seepärast pole tarvis juurde lisada üht positiivset kohta. Jagatise kohtade arv on siis -1 , s. o. 0,0341.

Märkus. Jagatise kohtade määramise juhust kasutades tuleb meeles pidada, et säärase jagamise puhul nagu $10^k : a$, kus $k = \dots, +2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, tuleb jagatav 10^k võtta ikka D-skaala (või C-skaala) vasakpoolse otsa D-1 (või C-1) kohalt, kuid mitte D-skaala (või C-skaala) parempoolse otsa D-10 (või C-10) kohalt, mille puhul jagatise kohtade määramise juhust pole rakendatav.

3. Rakendame ka jagamisel jämedalt ümardatud andmete võtet. Näites 1 toodud arvude 8,55 ja 3,24 asemel võtame arvud 9 ja 3. Nende arvude jagatis on 3 — seega on tegemist ühekohalise arvuga. Lükatiga saadav tulemus on samas suurusejärgus, nimelt 2,64.

Näites 2 toodud arvude 2,06 ja 5,83 asemel võtame 2 ja 6. Käesoleva näite ligikaudne vastus on $\frac{1}{3}$ ehk 0,333. Täpsema jagatise saab muidugi lükatiga; see on igal juhtumil nullkohaline (0,353).

Näites 3 on toodud arvud 0,244 ja 7,15. Nende asemel võtame 0,24 ja 8. Ilmselt on ligikaudne jagatis 0,03. Täpsem resultaat on teatavasti 0,0341.

Harjutusi:

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| 1) $0,9 : 6 = ?$ | 10) $0,05 : 7 = ?$ |
| 2) $8 : 13 = ?$ | 11) $0,06 : 4,8 = ?$ |
| 3) $0,3 : 2,6 = ?$ | 12) $0,075 : 5,9 = ?$ |
| 4) $1 : 17 = ?$ | 13) $0,0345 : 2,14 = ?$ |
| 5) $10 : 243 = ?$ | 14) $0,0712 : 54,6 = ?$ |
| 6) $3,7 : 24 = ?$ | 15) $0,0026 : 162,5 = ?$ |
| 7) $49,4 : 16,7 = ?$ | 16) $0,0466 : 0,75 = ?$ |
| 8) $0,6 : 72 = ?$ | 17) $0,1 : 0,0105 = ?$ |
| 9) $0,27 : 32,6 = ?$ | 18) $12,8 : 0,0825 = ?$ |

[Vastused: 1) 0,15. 2) 0,615. 3) 0,1154. 4) 0,0588.
5) 0,0412. 6) 0,1542. 7) 2,96. 8) 0,00833. 9) 0,00828. 10) 0,00714.
11) 0,01250. 12) 0,01271. 13) 0,01612. 14) 0,001304.
15) 0,00001600. 16) 0,0621. 17) 9,52. 18) 155,1.]

Näide 4. $\frac{9,6 \cdot 2,55}{4,32} = ?$

Käesolevas näites tuleb 9,6 enne jagada 4,32-ga ja siis korrutada 2,55-ga. Kui teeksime enne korrutamise ja pärast jagamise, siis tuleks meil kaks korda lükata arvutuslükati keelt. Jagades enne ja korrutades pärast teeme arvutuslükati keelega ainult ühe lükke. (Mida vähem lükkeid, seda väiksem ka kõrvalekaldu mine õigest resultaadist.) Paigutame C-4,32 D-9,6 kohale, siis jagatis D-skaalal on C-1 kohal, mis tuleb korrutada 2,55-ga. Siin pole enam tarvis lükata arvutuslükati keelt, pole ka tarvis viia niiti C-1 peale ega ka C-1 kohalt D-skaalal lugeda jagatist, vaid viime niidi C-2,55 peale, kus nüüd D-skaalal niidi alt loeme lõppresultaadi 5,67. Arvutuslükati keel jäi paremale poole, seepärast suurendust ega vähendust ei ole.

Või arvestades lugeja ja nimetaja kohtade arvu näeme, et lugeja esimene tegur on +1-kohaline, teine tegur +1-kohaline ja nimetaja ka +1-kohaline, seega lõppresultaadi kohtade arv on

$$(+1) + (+1) - (+1) = +1.$$

Tähendab,

$$\frac{9,6 \cdot 2,55}{4,32} = 5,67.$$

Esineb meil lugejas ja nimetajas aga rohkem kui kaks tegurit, siis tuleb lugeja esimene tegur jagada nimetaja esimese teguriga ja korrutada lugeja teise teguriga, siis saadud resultaat jagada nimetaja teise teguriga ja korrutada lugeja kolmanda teguriga, siis jälle saadud resultaat jagada nimetaja kolmanda teguriga ja korrutada lugeja neljanda teguriga jne. Tegurite järjekord võib olla vabalt valitav. Tegurite järjekorra võib nõnda valida, et korrutamisel kui ka jagamisel arvutuslükati keel läheks võimalikult ühepalju kordi ühele poole, siis tuleb meil kas ühelt poolt kümnekordseid suurendusi ja vähendusi vähem meeles pidada või teiselt poolt vähem tarvitada tähiseid $P - 1$ ja $Q + 1$. Vahepealseid arve, s. o. jagatise ja korrutise, pole tarvis lugeda.

N ä i d e 5.
$$\frac{22,6 \cdot 0,00042 \cdot 0,74 \cdot 3800}{135 \cdot 56,5 \cdot 0,095} = ?$$

Lõppresultaadi kohtade arv peaks olema

$$(+2) + (-3) + (0) + (+4) - (+3) - (+2) - (-1) = -1.$$

Järk-järgult jagades ja korrutades näeme, et arvutuslükati keele lükkamine ühele või teisele poole ei too kohtade arvu muutust. Seega lõppresultaat on 0,0368.

Rakendame lõppresultaadi kohtade arvu määramiseks ka ümardatud andmete võtet. Käesoleval juhtumil võiksime näites toodud arvude asemel kirjutada:

$$\frac{25 \cdot 0,0004 \cdot 1 \cdot 3000}{150 \cdot 50 \cdot 0,1} = \frac{0,4 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{0,4}{10} = 0,04.$$

Lõppresultaat on siin ilmselt -1 -kohaline.

Sääraste ülesannete lahendamisel, kus esineb korrutamine ja jagamine üheskoos, teotsedes arvutuslükatiga võidame väga palju aega.

N ä i d e 6. Linna elanike arv on 26415 inimest: 17276 eestlast, 7872 venelast, 818 lätlast, 317 juuti ja 132 teistest rahvustest. Missugune on linnas olevate rahvuste protsentuaalne vahekord?

Siin tuleb arvutuslükati keelt lükata ainult üks kord, kui toimetame jagamist ja korrutamist A- ja B-skaalaga. Paigutame

B-26415 A-10 kohale ja loeme niidiga A-skaalalt järk-järgult B-17276, B-7872, B-818, B-317 ja B-132 kohalt vastavad arvud, s. o.

65,4%, 29,8%, 3,1%, 1,2%, 0,5%,

sest

$$\frac{17276 \cdot 100}{26415} = 65,4\% \text{ eestlasi}$$

$$\frac{7872 \cdot 100}{26415} = 29,8\% \text{ venelasi}$$

$$\frac{818 \cdot 100}{26415} = 3,1\% \text{ lätlasi}$$

$$\frac{317 \cdot 100}{26415} = 1,2\% \text{ juute}$$

$$\frac{132 \cdot 100}{26415} = 0,5\% \text{ teistest rahvustest}$$

Kokku: = 100,0%.

Harjutusi:

1) $\frac{6,4 \cdot 3,2}{5,7} = ?$

2) $\frac{2,8 \cdot 8,9}{6,6} = ?$

3) $\frac{3,6 \cdot 7,2}{8,5} = ?$

4) $\frac{1,4 \cdot 2,6}{7,3} = ?$

5) $\frac{2,14 \cdot 3,45 \cdot 4,05}{1,82 \cdot 2,7} = ?$

6) $\frac{3,03 \cdot 5,24 \cdot 9,8}{7,6 \cdot 4,86} = ?$

7) $\frac{8,47 \cdot 5,13 \cdot 2,52}{9,05 \cdot 4,75} = ?$

8) $\frac{5,7 \cdot 7,8 \cdot 11,2}{9,7 \cdot 8,5} = ?$

9) $\frac{1,4 \cdot 1,06 \cdot 3,45}{2,02 \cdot 6,62} = ?$

10) $\frac{3,16 \cdot 7,34 \cdot 4,55}{15,3 \cdot 8,84} = ?$

11) $\frac{0,14 \cdot 52,7}{2,7} = ?$

12) $\frac{0,031 \cdot 7,16}{0,465} = ?$

13) $\frac{0,605 \cdot 24,3}{36,4} = ?$

14) $\frac{12,6 \cdot 514 \cdot 0,36}{44,2 \cdot 152} = ?$

15) $\frac{0,00547 \cdot 0,0336}{0,0000469} = ?$

16) $\frac{74,6 \cdot 0,043}{0,525} = ?$

[Vastused: 1) 3,59. 2) 3,78. 3) 3,05. 4) 0,499. 5) 6,08. 6) 4,21. 7) 2,55. 8) 6,04. 9) 0,383. 10) 0,780. 11) 2,73. 12) 0,477. 13) 0,404. 14) 0,347. 15) 3,92. 16) 6,11.]

17) Mitu protsenti moodustab 260 rubla a) 4000 rublast, b) 650 rublast, c) 340 rublast, d) 200 rublast, e) 80 rublast?

[Vastused: a) 6,5%; b) 40%; c) 76,5%; d) 130%; e) 325%.]

§ 6. Ruudud.

Arvutuslükati alumisel osal on logaritmiline skaala log 1 kuni log 10, ülemisel osal on logaritmiline skaala log 1 kuni log 100. Ülemise skaala logaritmilise ühiku pikkus on kaks korda lühem alumise skaala logaritmilise ühiku pikkusest. Arvutuslükati põhi-osal (samuti ka keelel) on alumine ja ülemine skaala paigutatud nii, et nende algused (A-1 ja D-1, samuti ka B-1 ja C-1) asetsevad kohakuti. Oletame, et alumise skaala mingile punktile vastab arv a . Selgitame, milline arv x vastab ülemise skaala punktile, mis asetseb alumise skaala nimetatud punktiga kohakuti.

On selge, et alumise skaala lõik 1-st a -ni ja ülemise skaala lõik 1-st x -ni on võrdsed. Et aga alumise skaala lõik 1-st a -ni on $l \log a$, kus l tähendab skaala pikkust, ja ülemise skaala lõik 1-st x -ni on $\frac{l}{2} \cdot \log x$, siis

$$\frac{l}{2} \log x = l \log a.$$

Siit leiame, et

$$\log x = 2 \log a$$

ehk

$$\log x = \log a^2.$$

Järelikult

$$x = a^2.$$

Seega alumise skaala arvudele vastavad ülemisel skaalal nende arvude ruudud.

N ä i d e 1. $6,82^2 = ?$

Arvu ruutimist toimetatakse ainult niidiga. Viime niidi alumisel skaalal 6,82 peale ja loeme niidi alt ülemisel skaalal tema ligikaudse ruudu, s. o. 46,5. Ülemisel skaalal võib siin lugeda ainult ühe kümnendkoha. Seega

$$6,82^2 = 46,5.$$

Astendamisel ei ole tarvidust, et arvutuslükati keele skaalad peaksid olema kohakuti arvutuslükati põhiosa skaaladega. Kui

need skaalad ei ole kohakuti, vaid arvutuslükati keel on paremal või vasakul, siis tuleb astendamisel D-skaalalt üle minna A-skaalale, või C-skaalalt B-skaalale.

Harjutusi:

- | | |
|-----------------|-------------------|
| 1) $3^2 = ?$ | 9) $7,75^2 = ?$ |
| 2) $8^2 = ?$ | 10) $9,32^2 = ?$ |
| 3) $1,5^2 = ?$ | 11) $5,245^2 = ?$ |
| 4) $1,9^2 = ?$ | 12) $1,815^2 = ?$ |
| 5) $7,7^2 = ?$ | 13) $2,042^2 = ?$ |
| 6) $1,16^2 = ?$ | 14) $2,718^2 = ?$ |
| 7) $2,25^2 = ?$ | 15) $\pi^2 = ?$ |
| 8) $4,08^2 = ?$ | |

[Vastused: 1) 9. 2) 64. 3) 2,25. 4) 3,61. 5) 59,3. 6) 1,346. 7) 5,06. 8) 16,65. 9) 60,1. 10) 86,9. 11) 27,5. 12) 3,29. 13) 4,17. 14) 7,39. 15) 9,87.]

Näide 2. $0,152^2 = ?$

Siin viime koma ühe koha võrra paremale poole, suurendades seega astme alust 10 korda ja astet 100 korda. Viime niidi D-1,52 peale ja loeme niidi alt A-skaalal tema ligikaudse ruudu, s. o. 2,31. Seda vähendades 100 korda saame

$$0,152^2 = 0,0231.$$

Näide 3. $38,5^2 = ?$

Viime koma ühe koha võrra vasakule, vähendades seega astet 100 korda. Viies niidi D-3,85 peale loeme A-skaalal niidi alt 14,8. Seda suurendades 100 korda saame astme ligikaudse väärtuse

$$38,5^2 = 1482.$$

Arvude ruutimisel astme kohtade arvu määramiseks võime kasutada järgmist juhust:

a) tuleb ruutimisel astme väärtus lugeda A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul, on astme kohtade arv $2n - 1$, kus n on astme aluse kohtade arv;

b) tuleb ruutimisel astme väärtus lugeda A-skaala teisel logaritmilisel ühikul, on astme kohtade arv $2n$.

Näide 4. $0,000218^2 = ?$

Siin on astme aluse kohtade arv -3 . Paigutades niidi D-218 peale näeme, et niidi all A-skaalal on 475, mis asub A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul. Seega astme kohtade arv on

$$2(-3) - 1 = -7$$

ja aste

$$0,000218^2 = 0,0000000475.$$

Näide 5. $564,5^2 = ?$

Paigutades niidi D-5645 peale näeme, et ta astme väärtus on A-skaala teisel logaritmilisel ühikul (s. o. 319). Astme aluse kohtade arv on $+3$. Seega astme kohtade arv

$$2 \cdot (+3) = +6$$

ja aste

$$564,5^2 = 319000.$$

Harjutusi:

- | | |
|------------------|--------------------|
| 1) $0,2^2 = ?$ | 13) $15,2^2 = ?$ |
| 2) $0,6^2 = ?$ | 14) $40,8^2 = ?$ |
| 3) $0,9^2 = ?$ | 15) $55,5^2 = ?$ |
| 4) $0,1^2 = ?$ | 16) $91,9^2 = ?$ |
| 5) $12^2 = ?$ | 17) $0,05^2 = ?$ |
| 6) $25^2 = ?$ | 18) $0,014^2 = ?$ |
| 7) $73^2 = ?$ | 19) $0,326^2 = ?$ |
| 8) $69^2 = ?$ | 20) $0,0017^2 = ?$ |
| 9) $0,11^2 = ?$ | 21) $183^2 = ?$ |
| 10) $0,16^2 = ?$ | 22) $112,5^2 = ?$ |
| 11) $0,38^2 = ?$ | 23) $40,25^2 = ?$ |
| 12) $0,81^2 = ?$ | 24) $72,11^2 = ?$ |

[Vastused: 1) 0,04. 2) 0,36. 3) 0,81. 4) 0,01. 5) 144.
 6) 625. 7) 5330. 8) 4760. 9) 0,01210. 10) 0,0256. 11) 0,1444.
 12) 0,656. 13) 231. 14) 1665. 15) 3080. 16) 8450. 17) 0,00250.
 18) 0,0001960. 19) 0,1063. 20) 0,00000289. 21) 33500.
 22) 12660. 23) 1620. 24) 5200.]

Näide 6. $(2,25 \cdot 3,19)^2 = ?$

Toimetame korrutamist arvutuslükati alumisel jaotusel, viies C-1 D-2,25 kohale ja siis niidi C-3,19 peale, ning loeme niidi alt A-skaalal lõppresultaadi 51,5. Seega

$$(2,25 \cdot 3,19)^2 = 51,5.$$

Harjutusi:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1) $(2 \cdot 4)^2 = ?$ | 12) $(2,6 \cdot 8)^2 = ?$ |
| 2) $(3,6 \cdot 2)^2 = ?$ | 13) $(4,5 \cdot 3,2)^2 = ?$ |
| 3) $(1,3 \cdot 2,6)^2 = ?$ | 14) $(8,8 \cdot 2,15)^2 = ?$ |
| 4) $(1,7 \cdot 4,1)^2 = ?$ | 15) $(5,05 \cdot 6,75)^2 = ?$ |
| 5) $(2,7 \cdot 2,8)^2 = ?$ | 16) $(5,45 \cdot 3,32)^2 = ?$ |
| 6) $(1,52 \cdot 5,3)^2 = ?$ | 17) $(0,8 \cdot 5)^2 = ?$ |
| 7) $(2,05 \cdot 3,14)^2 = ?$ | 18) $(0,16 \cdot 2,8)^2 = ?$ |
| 8) $(6,25 \cdot 1,04)^2 = ?$ | 19) $(0,42 \cdot 71)^2 = ?$ |
| 9) $(4,5 \cdot 2,025)^2 = ?$ | 20) $(0,73 \cdot 12,5)^2 = ?$ |
| 10) $(1,015 \cdot 1,555)^2 = ?$ | 21) $(0,064 \cdot 42,6)^2 = ?$ |
| 11) $(3 \cdot 4)^2 = ?$ | 22) $(0,013 \cdot 902)^2 = ?$ |

[Vastused: 1) 64. 2) 51,8. 3) 11,42. 4) 48,6. 5) 57,2.
 6) 64,9. 7) 41,4. 8) 42,2. 9) 83,0. 10) 2,49. 11) 144,0. 12) 433.
 13) 207. 14) 358. 15) 1162. 16) 327. 17) 16. 18) 0,201.
 19) 889. 20) 83,3. 21) 7,43. 22) 137,6.]

Näide 7. $\left(\frac{5,15}{3,34}\right)^2 = ?$

Toimetame jagamist arvutuslükati alumisel jaotusel, viies C-3,34 D-5,15 kohale, ja loeme B-1 kohalt A-skaalal lõppresultaadi 2,38. Seega

$$\left(\frac{5,15}{3,34}\right)^2 = 2,38.$$

Harjutusi:

$$1) \left(\frac{6}{2}\right)^2 = ?$$

$$9) \left(\frac{6,3}{7,5}\right)^2 = ?$$

$$2) \left(\frac{5,2}{3}\right)^2 = ?$$

$$10) \left(\frac{1,44}{6,75}\right)^2 = ?$$

$$3) \left(\frac{7}{4,5}\right)^2 = ?$$

$$11) \left(\frac{41,5}{27,2}\right)^2 = ?$$

$$4) \left(\frac{8,7}{5,6}\right)^2 = ?$$

$$12) \left(\frac{0,83}{0,15}\right)^2 = ?$$

$$5) \left(\frac{2,16}{1,54}\right)^2 = ?$$

$$13) \left(\frac{0,47}{0,023}\right)^2 = ?$$

$$6) \left(\frac{4}{7}\right)^2 = ?$$

$$14) \left(\frac{0,33}{12,5}\right)^2 = ?$$

$$7) \left(\frac{2,9}{3}\right)^2 = ?$$

$$15) \left(\frac{30,5}{0,82}\right)^2 = ?$$

$$8) \left(\frac{5}{8,2}\right)^2 = ?$$

$$16) \left(\frac{0,175}{0,053}\right)^2 = ?$$

[Vastused: 1) 9. 2) 3,00. 3) 2,42. 4) 2,41. 5) 1,97. 6) 0,326. 7) 0,934. 8) 0,372. 9) 0,706. 10) 0,0455. 11) 2,33. 12) 30,6. 13) 417. 14) 0,000697. 15) 1380. 16) 10,9.]

Näide 8. $4,15 \cdot 2,3^2 = ?$

Astendame kõigepealt kahega: selleks viime C-1 D-2,3 kohale, siis $2,3^2$ on B-1 kohal A-skaalal. Ilma et enam oleks tarvis lükata arvutuslükati keelt, toimetame korrutamist 4,15-ga ülemisel jaotusel: viime niidi B-4,15 peale ja loeme lõppsaaduse niidi alt A-skaalal, s. o. 22,0. Seega

$$4,15 \cdot 2,3^2 = 22,0.$$

Harjutusi:

$$1) 2,6^2 \cdot 3 = ?$$

$$9) 5,06^2 \cdot 11,7 = ?$$

$$2) 3,2^2 \cdot 1,5 = ?$$

$$10) 2,47^2 \cdot 21,2 = ?$$

$$3) 1,71^2 \cdot 8,15 = ?$$

$$11) 0,16^2 \cdot 2,1 = ?$$

$$4) 9,05^2 \cdot 7,2 = ?$$

$$12) 0,47^2 \cdot 47,5 = ?$$

$$5) 4,42^2 \cdot 3,38 = ?$$

$$13) 0,85^2 \cdot 0,52 = ?$$

$$6) 8,62^2 \cdot 3,65 = ?$$

$$14) 0,062^2 \cdot 742 = ?$$

$$7) 3,4^2 \cdot 0,6 = ?$$

$$15) 0,918^2 \cdot 0,602 = ?$$

$$8) 8,5^2 \cdot 0,7 = ?$$

$$16) 0,855^2 \cdot 24,5 = ?$$

[Vastused: 1) 20,3. 2) 15,4. 3) 23,8. 4) 590. 5) 66,0.
6) 271. 7) 6,94. 8) 50,6. 9) 300. 10) 129,3. 11) 0,0538.
12) 10,5. 13) 0,376. 14) 2,85. 15) 0,507. 16) 17,9.]

Näide 9. $\frac{3,33^2}{6,2} = ?$

Astendame 3,33 kahega ja toimetame jagamist ülemisel jaotusel: viime niidi D-3,33 peale ja B-6,2 niidi alla, loeme lõppresultaadi B-1 kohalt A-skaalal, s. o. 1,79. Seega

$$\frac{3,33^2}{6,2} = 1,79.$$

Harjutusi:

1) $\frac{2,2^2}{3,1} = ?$ 5) $\frac{4,08^2}{7,95} = ?$ 9) $\frac{0,34^2}{0,86} = ?$

2) $\frac{8,3^2}{7,3} = ?$ 6) $\frac{2,6^2}{14} = ?$ 10) $\frac{12,2^2}{64,4} = ?$

3) $\frac{1,4^2}{5,6} = ?$ 7) $\frac{3,45^2}{45,5} = ?$ 11) $\frac{14,2^2}{21,5} = ?$

4) $\frac{2,38^2}{9,9} = ?$ 8) $\frac{5,4^2}{0,72} = ?$ 12) $\frac{0,0241^2}{0,0606} = ?$

[Vastused: 1) 1,56. 2) 9,44. 3) 0,350. 4) 0,572. 5) 2,09.
6) 0,483. 7) 0,262. 8) 40,5. 9) 0,134. 10) 2,31. 11) 9,38.
12) 0,00958.]

Näide 10. $\frac{7,6}{5,65^2} = ?$

Siin toimetatakse jagamist samuti ülemisel jaotusel. Viime niidi A-7,6 peale ja C-5,65 niidi alla, siis $5,65^2$ on B-skaalal niidi all, mis kujutab ülemisel jaotusel jagamist. Jagatise väärtuse A-skaalal loeme B-100 kohalt. B-100 kohal A-skaalal esineb arv 23,8. Et arvutuslükati keel läks vasakule poole, seepärast tuleb leitud arv vähendada 100 korda. Saame 0,238. Või viime niidi D-5,65 peale ja toome B-7,6 niidi alla ning sama jagatise loeme B-skaalal A-100 kohalt 100 korda vähendatult. Tähendab,

$$\frac{7,6}{5,65^2} = 0,238.$$

Harjutusi:

1) $\frac{8}{2,1^2} = ?$

5) $\frac{5,45}{7,28^2} = ?$

9) $\frac{27,6}{6,15^2} = ?$

2) $\frac{7,6}{1,5^2} = ?$

6) $\frac{2,13}{8,65^2} = ?$

10) $\frac{0,76}{2,24^2} = ?$

3) $\frac{3,8}{2,7^2} = ?$

7) $\frac{56}{5,4^2} = ?$

11) $\frac{0,55}{0,94^2} = ?$

4) $\frac{1}{3,4^2} = ?$

8) $\frac{18,3}{1,975^2} = ?$

12) $\frac{38,6}{13,7^2} = ?$

[Vastused: 1) 1,81. 2) 3,38. 3) 0,521. 4) 0,0865.
5) 0,103. 6) 0,0285. 7) 1,92. 8) 4,69. 9) 0,730. 10) 0,1515.
11) 0,622. 12) 0,206.]

§ 7. Ruutjuured.

Juurimine on astendamisele vastupidine tehe. Et leida arvu ruutjuur, tuleb märkida niidiga juuritav arv arvutuslükati ülemisel skaalal ja vastav ruutjuure väärtus lugeda niidi alt alumisel skaalal. Sest, nagu näeme ruutjuure logaritmime põhimõttest,

$$\log \sqrt{a} = \frac{\log a}{2}.$$

Näide 1. $\sqrt{5,6} = ?$

Viime niidi A-5,6 peale ja loeme niidi alt D-skaalal ruutjuure väärtuse (kahe kümnendkohaga), s. o. 2,37. Tähenab,

$$\sqrt{5,6} = 2,37.$$

Näide 2. $\sqrt{59,2} = ?$

Toimetades analoogiliselt eelmise näitega saame

$$\sqrt{59,2} = 7,69.$$

Harjutusi:

- | | | |
|--------------------|---------------------|----------------------|
| 1) $\sqrt{7}=?$ | 6) $\sqrt{16}=?$ | 11) $\sqrt{18,05}=?$ |
| 2) $\sqrt{6,3}=?$ | 7) $\sqrt{55}=?$ | 12) $\sqrt{99,2}=?$ |
| 3) $\sqrt{3,75}=?$ | 8) $\sqrt{42,8}=?$ | 13) $\sqrt{10,08}=?$ |
| 4) $\sqrt{1,37}=?$ | 9) $\sqrt{13,1}=?$ | 14) $\sqrt{40}=?$ |
| 5) $\sqrt{8,46}=?$ | 10) $\sqrt{30,3}=?$ | 15) $\sqrt{10}=?$ |

[Vastused: 1) 2,65. 2) 2,51. 3) 1,936. 4) 1,170. 5) 2,91.
6) 4,00. 7) 7,42. 8) 6,54. 9) 3,62. 10) 5,50. 11) 4,25. 12) 9,96.
13) 3,18. 14) 6,33. 15) 3,16.]

Näide 3. $\sqrt{346,5}=?$

Viime juuritavas arvus koma kahe koha võrra vasakule. Seega vähendame juuritavat arvu 100 korda ja juure väärtust 10 korda. Otsime juure arvust 3'46,5 ja suurendame saadud juure väärtust 10 korda, saame

$$\sqrt{346,5} = 18,6.$$

Kui juuritava arvu täisososa on 0, siis tuleb koma viia paremale poole kahe või nelja või kuue jne. koha võrra nõnda, et juuritava arvu täisosaks jääks ühe või kahekohaline arv, ja lõpuks saadud juure väärtust vähendada vastavalt 10 või 100 või 1000 jne. korda. Näiteks

$$\sqrt{0,00052} = \sqrt{0,0005'2} = 0,0228.$$

Arvude ruutjuure leidmisel võime kasutada juure kohtade arvu määramiseks järgmist juhust:

a) on juuritavas arvus paaritu arv kohti, siis tuleb juuritav arv võtta A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul ja juure kohtade arv on $\frac{n+1}{2}$, kus n on juuritava arvu kohtade arv;

b) on juuritavas arvus paarisarv kohti, siis tuleb juuritav arv võtta A-skaala tei-

sel logaritmilisel ühikul ja juure kohtade arv on $\frac{n}{2}$.

Et näiteks eelmise näite juuritava arvu (0,00052) kohtade arv on paaritu arv (—3), siis juure kohtade arv peab olema

$$\frac{-3+1}{2} = -1.$$

Harjutusi:

- | | | |
|---------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1) $\sqrt{144} = ?$ | 5) $\sqrt{0,16} = ?$ | 9) $\sqrt{2468} = ?$ |
| 2) $\sqrt{137} = ?$ | 6) $\sqrt{0,43} = ?$ | 10) $\sqrt{2578} = ?$ |
| 3) $\sqrt{250} = ?$ | 7) $\sqrt{0,154} = ?$ | 11) $\sqrt{0,017} = ?$ |
| 4) $\sqrt{755} = ?$ | 8) $\sqrt{205,5} = ?$ | 12) $\sqrt{0,0742} = ?$ |

[Vastused: 1) 12,00. 2) 11,70. 3) 15,81. 4) 27,5.
5) 0,400. 6) 0,656. 7) 0,392. 8) 14,34. 9) 49,7. 10) 50,8.
11) 0,1304. 12) 0,272.]

Näide 4. $\sqrt{3,52 \cdot 6,06} = ?$

Siin tuleb korrutamist toimetada arvutuslükati ülemisel jaotusel: viime B-1 A-3,52 kohale ja niidi B-6,06 peale, siis korrutise juur on niidi all D-skaalal. Saame

$$\sqrt{3,52 \cdot 6,06} = 4,62.$$

Harjutusi:

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sqrt{3 \cdot 6} = ?$ | 9) $\sqrt{23,5 \cdot 3,6} = ?$ |
| 2) $\sqrt{4,7 \cdot 2,2} = ?$ | 10) $\sqrt{66 \cdot 4,5} = ?$ |
| 3) $\sqrt{5,6 \cdot 3,7} = ?$ | 11) $\sqrt{0,72 \cdot 5,5} = ?$ |
| 4) $\sqrt{8,2 \cdot 7,5} = ?$ | 12) $\sqrt{0,33 \cdot 26,5} = ?$ |
| 5) $\sqrt{5,14 \cdot 4,9} = ?$ | 13) $\sqrt{42 \cdot 72,5} = ?$ |
| 6) $\sqrt{6,15 \cdot 2,08} = ?$ | 14) $\sqrt{85,9 \cdot 113} = ?$ |
| 7) $\sqrt{2,16 \cdot 7,56} = ?$ | 15) $\sqrt{0,0021 \cdot 14,2} = ?$ |
| 8) $\sqrt{12 \cdot 7} = ?$ | 16) $\sqrt{0,0535 \cdot 2,64} = ?$ |

[Vastused: 1) 4,24. 2) 3,22. 3) 4,55. 4) 7,84. 5) 5,02. 6) 3,58. 7) 4,04. 8) 9,17. 9) 9,20. 10) 17,2. 11) 1,99. 12) 2,96. 13) 55,2. 14) 98,5. 15) 0,173. 16) 0,376.]

Näide 5. Kui täisnurkse kolmnurga üks kaatet on a ja hüpotenuus on c , siis teise kaateti b väärtuse võime leida arvutuslükati abil sarnaselt näitega 4:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c + a)(c - a)}.$$

Näiteks kui $a = 11,6$ cm ja $c = 14,2$ cm, siis

$$b = \sqrt{(14,2 + 11,6)(14,2 - 11,6)} = \sqrt{25,8 \cdot 2,6} = 8,19 \text{ cm}.$$

Näide 6. $\sqrt{\frac{5}{12}} = ?$

Jagamist toimetatakse arvutuslükati ülemisel jaotusel. Jagatis on B-100 juures A-skaalal, kuid 100 korda suurendatult. Selle ruutjuur on siis D-skaalal 6,46, mis tuleb vähendada 10 korda. Tähendab,

$$\sqrt{\frac{5}{12}} = 0,646.$$

Harjutusi:

1) $\sqrt{\frac{28}{5}} = ?$

7) $\sqrt{\frac{8,6}{0,4}} = ?$

2) $\sqrt{\frac{14}{38}} = ?$

8) $\sqrt{\frac{81,5}{0,42}} = ?$

3) $\sqrt{\frac{9,8}{2,45}} = ?$

9) $\sqrt{\frac{0,67}{0,014}} = ?$

4) $\sqrt{\frac{17,2}{63,5}} = ?$

10) $\sqrt{\frac{4465}{3025}} = ?$

5) $\sqrt{\frac{0,8}{4,7}} = ?$

11) $\sqrt{\frac{1111}{3985}} = ?$

6) $\sqrt{\frac{0,56}{74,5}} = ?$

12) $\sqrt{\frac{5,9 \cdot 3,4}{4,75}} = ?$

[Vastused: 1) 2,37. 2) 0,607. 3) 2. 4) 0,520. 5) 0,413. 6) 0,0867. 7) 4,64. 8) 13,93. 9) 6,92. 10) 1,214. 11) 0,528. 12) 2,06.]

Näide 7. $3,7 \cdot \sqrt{2,55} = ?$

Viime niidi A-2,55 peale ja C-1 niidi alla. Siis viime niidi C-3,7 peale ja loeme korrutise niidi alt D-skaalal, s. o. 5,91. Seega

$$3,7 \cdot \sqrt{2,55} = 5,91.$$

Harjutusi:

1) $3 \cdot \sqrt{7} = ?$

10) $7,5 \cdot \sqrt{0,5} = ?$

2) $4,4 \cdot \sqrt{5} = ?$

11) $1,74 \cdot \sqrt{0,149} = ?$

3) $5,05 \cdot \sqrt{3,7} = ?$

12) $36 \cdot \sqrt{38} = ?$

4) $7,2 \cdot \sqrt{8,2} = ?$

13) $56 \cdot \sqrt{0,71} = ?$

5) $3,32 \cdot \sqrt{7,34} = ?$

14) $0,29 \cdot \sqrt{0,12} = ?$

6) $7,21 \cdot \sqrt{4,92} = ?$

15) $0,051 \cdot \sqrt{11,1} = ?$

7) $7,21 \cdot \sqrt{49,2} = ?$

16) $0,88 \cdot \sqrt{0,464} = ?$

8) $0,3 \cdot \sqrt{3} = ?$

17) $5 \cdot \sqrt{55} = ?$

9) $0,8 \cdot \sqrt{12,5} = ?$

18) $5 \cdot \sqrt{5,5} = ?$

[Vastused: 1) 7,94. 2) 9,84. 3) 9,72. 4) 20,6. 5) 8,99. 6) 15,99. 7) 50,6. 8) 0,520. 9) 2,83. 10) 5,30. 11) 0,672. 12) 222. 13) 47,2. 14) 0,1005. 15) 0,170. 16) 0,599. 17) 37,1. 18) 11,73.]

Näide 8. Kui täisnurkse kolmnurga kaatetid on a ja b , siis hüpotenuusi c väärtuse saame arvutuslükati abil järgmiselt:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Näiteks kui $a = 3,08$ cm ja $b = 2,16$ cm, siis

$$c = 3,08 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2,16}{3,08}\right)^2};$$

siin kõige enne jagame $\left(\frac{2,16}{3,08}\right)$ alumisel jaotusel, siis tõstame tulemuse ruutu ja liidame sellega 1, juurime ja korrutame saadud juure väärtust alumisel jaotusel 3,08-ga, saame 3,76. Seega

$$c = 3,76 \text{ cm.}$$

Näide 9. $\frac{\sqrt{11,5}}{2,32} = ?$

Paigutame niidi A-11,5 peale ja siis C-2,32 niidi alla. Jagatis on C-1 kohal D-skaalal, s. o. 1,462. Seega

$$\frac{\sqrt{11,5}}{2,32} = 1,462.$$

Harjutusi:

1) $\frac{\sqrt{8}}{2} = ?$

9) $\frac{\sqrt{7,42}}{16,9} = ?$

2) $\frac{\sqrt{60}}{5,2} = ?$

10) $\frac{\sqrt{22}}{22} = ?$

3) $\frac{\sqrt{30}}{8,8} = ?$

11) $\frac{\sqrt{0,26}}{31} = ?$

4) $\frac{\sqrt{7,4}}{6,05} = ?$

12) $\frac{\sqrt{0,11}}{0,17} = ?$

5) $\frac{\sqrt{5}}{0,7} = ?$

13) $\frac{\sqrt{0,845}}{0,99} = ?$

6) $\frac{\sqrt{69,5}}{0,3} = ?$

14) $\frac{\sqrt{6}}{6} = ?$

7) $\frac{\sqrt{0,3}}{1,05} = ?$

15) $\frac{\sqrt{60}}{6} = ?$

8) $\frac{\sqrt{0,132}}{3,18} = ?$

16) $\frac{\sqrt{600}}{6} = ?$

[Vastused: 1) 1,414. 2) 1,490. 3) 0,622. 4) 0,450.
5) 3,19. 6) 27,8. 7) 0,522. 8) 0,1142. 9) 0,1612. 10) 0,213.
11) 0,01645. 12) 1,951. 13) 0,928. 14) 0,408. 15) 1,291.
16) 4,08.]

Näide 10. $\frac{9,8}{\sqrt{13,4}} = ?$

Viime niidi D-9,8 peale ja B-13,4 niidi alla. Saame jagamise alumisel jaotusel, kus jagatise väärtus on C-1 kohal D-skaalal, s. o. 2,68.

Või viime niidi A-13,4 peale ja toome C-9,8 niidi alla ning loeme sama jagatise C-skaalal D-1 kohalt. Tähendab,

$$\frac{9,8}{\sqrt{13,4}} = 2,68.$$

Harjutusi:

$$1) \frac{6}{\sqrt{6}} = ?$$

$$7) \frac{0,2}{\sqrt{6}} = ?$$

$$13) \frac{10}{\sqrt{4,2}} = ?$$

$$2) \frac{8,5}{\sqrt{39}} = ?$$

$$8) \frac{0,8}{\sqrt{55,5}} = ?$$

$$14) \frac{51,5}{\sqrt{0,18}} = ?$$

$$3) \frac{5,07}{\sqrt{8,4}} = ?$$

$$9) \frac{8,6}{\sqrt{0,4}} = ?$$

$$15) \frac{0,34}{\sqrt{0,84}} = ?$$

$$4) \frac{2,62}{\sqrt{9,25}} = ?$$

$$10) \frac{1}{\sqrt{0,7}} = ?$$

$$16) \frac{0,031}{\sqrt{0,075}} = ?$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{6}} = ?$$

$$11) \frac{1,18}{\sqrt{0,89}} = ?$$

$$17) \frac{80}{\sqrt{80}} = ?$$

$$6) \frac{1}{\sqrt{60}} = ?$$

$$12) \frac{4,7}{\sqrt{17}} = ?$$

$$18) \frac{3}{\sqrt{1,5}} = ?$$

[Vastused: 1) 2,45. 2) 1,361. 3) 1,749. 4) 0,862.
5) 0,408. 6) 0,1291. 7) 0,0816. 8) 0,1074. 9) 13,60. 10) 1,195.
11) 1,251. 12) 1,140. 13) 4,88. 14) 121,4. 15) 0,371. 16) 0,1132.
17) 8,94. 18) 2,45.]

§ 8. Kuubid ja kuupjuured.

1. Arvude kuupide ja kuupjuurte otseseks arvutamiseks on täielikumatel arvutuslükatitel peale A-, B-, C- ja D-skaala lükati ülemisel äärel veel viies skaala, nn. **kuupskala**, mida nime-tame lühidalt **K-skaalaks** (joonis IV). Sellel skaalal on lükati põhiskaala pikkuses kolm logaritmilist ühikut. K-skaalal on märgitud numbrid

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1,

mis tähendavad aga

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,
200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000.

Seega esinevad K-skaalal kõik arvud 1-st kuni 1000-ni. Mõne arvutuslükati K-skaalal on ainult logaritmiliste ühikute lõppu-

del märgitud vastavalt 10, 100 ja 1000, et selgemini piiritleda neid ühikuid, kuna mujal esinevad ühekohalised arvud.

K-skaala võimaldab ainult niidiga teotsemisel järgmisi matemaatilisi tehteid (arvuga a):

$$a^3, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2}, \sqrt{a^3} = a \sqrt{a}.$$

Et

$$\log a^3 = 3 \log a \text{ ja } \log \sqrt[3]{a} = \frac{\log a}{3},$$

siis esimesel juhul — pannes niidi D-skaala arvu a peale — on a^3 väärtus K-skaalal niidi all ja teisel juhul ümberpöördukt — pannes niidi K-skaalal arvu a peale — on $\sqrt[3]{a}$ väärtus D-skaalal niidi all. Et samuti

$$\log \sqrt[3]{a^2} = \frac{2}{3} \log a \text{ ja } \log \sqrt{a^3} = \frac{3}{2} \log a,$$

siis esimesel juhul — pannes niidi K-skaalal arvu a peale — on $\sqrt[3]{a^2}$ väärtus A-skaalal niidi all ja teisel juhul ümberpöördukt — pannes niidi A-skaalal arvu a peale — on $\sqrt{a^3} = a \sqrt{a}$ väärtus K-skaalal niidi all. Näiteks:

$$1,63^3 = 4,33; \quad \sqrt[3]{26,2} = 2,97;$$

$$\sqrt[3]{56^2} = 14,6; \quad \sqrt{5,6^3} = 13,25.$$

Arvude kuupimisel kohtade arvu määramiseks kasutatakse järgmist juhust:

a) loetakse kuubi väärtus K-skaala esimeselt logaritmiliselt ühikult, siis kuubi kohtade arv on $3n - 2$, kus n on astme aluse kohtade arv;

b) loetakse kuubi väärtus K-skaala teiselt logaritmiliselt ühikult, siis kuubi kohtade arv on $3n - 1$;

c) loetakse kuubi väärtus K-skaala kolmandalt logaritmiliselt ühikult, siis kuubi kohtade arv on $3n$.

Näide 1. $0,00365^3 = ?$

Paigutades niidi D-365 peale näeme, et niit on K-skaala teisel logaritmilisel ühikul K-486 kohal. Astme aluse kohtade arv on -2 . Seega astme kohtade arv on

$$3(-2) - 1 = -7$$

ja aste (K-skaalal niidi alt loetult)

$$0,00365^3 = 0,0000000486.$$

Kuupjuure leidmisel jaotatakse juuritav arv komast paremale või vasakule rühmadesse kolme numbriga. Kõige eelmisesse rühma võib jääda seega kas üks, kaks või kolm numbrit. Jääb kõige eelmisesse rühma üks number, siis võetakse juuritav arv K-skaala esimesel logaritmilisel ühikul; jääb kaks numbrit, — siis teisel logaritmilisel ühikul; jääb kolm numbrit, — siis kolmandal logaritmilisel ühikul. Kuupjuure kohtade arvu määramiseks võime tarvitada järgmist juhust:

a) võetakse juuritav arv K-skaala esimesel logaritmilisel ühikul, siis juure kohtade arv on $\frac{n+2}{3}$, kus n on juuritava arvu kohtade arv;

b) võetakse juuritav arv K-skaala teisel logaritmilisel ühikul, siis juure kohtade arv on $\frac{n+1}{3}$;

c) võetakse juuritav arv K-skaala kolmandal logaritmilisel ühikul, siis juure kohtade arv on $\frac{n}{3}$.

Näide 2. $\sqrt[3]{2740000} = ?$

Juuritava arvu kohtade arv on $+7$. Juurimisel jääb niit K-skaala esimesele logaritmilisele ühikule (sest niit tuleb viia K-2'740'000 peale). Juure kohtade arv on siis

$$\frac{7+2}{3} = 3$$

ja juur (D-skaalal niidi alt loetult)

$$\sqrt[3]{2740000} = 140.$$

Märkus. Mõnel arvutuslükatil on K-skaala paigutatud lükati alumisele servale ning sellel skaalal arvude märkimiseks ja lugemiseks on märkija alumisel serval kriips, mis on kohakuti märkija niidiga.

Harjutusi:

1) $2,6^3 = ?$

2) $0,4^3 = ?$

3) $0,46^3 = ?$

4) $15,6^3 = ?$

5) $0,013^3 = ?$

6) $0,0081^3 = ?$

7) $\pi^3 = ?$

8) $0,00033^3 = ?$

9) $\sqrt[3]{5} = ?$

10) $\sqrt[3]{50} = ?$

11) $\sqrt[3]{500} = ?$

12) $\sqrt[3]{5000} = ?$

13) $\sqrt[3]{0,12} = ?$

14) $\sqrt[3]{0,012} = ?$

15) $\sqrt[3]{0,0012} = ?$

16) $\sqrt[3]{4,62} = ?$

17) $\sqrt[3]{0,106} = ?$

18) $2,5^{\frac{2}{3}} = ?$

19) $8,15^{\frac{2}{3}} = ?$

20) $0,63^{\frac{2}{3}} = ?$

21) $3,2^{\frac{3}{2}} = ?$

22) $4,5^{\frac{3}{2}} = ?$

23) $5,45^{\frac{3}{2}} = ?$

24) $8,4^{\frac{3}{2}} = ?$

25) $10,6^{\frac{3}{2}} = ?$

26) $0,71^{\frac{3}{2}} = ?$

[Vastused: 1) 17,6. 2) 0,064. 3) 0,097. 4) 3800.
5) 0,0000022. 6) 0,00000053. 7) 31. 8) 0,000000000036. 9) 1,710.
10) 3,68. 11) 7,94. 12) 17,10. 13) 0,493. 14) 0,229. 15) 0,1063.
16) 1,667. 17) 0,473. 18) 1,842. 19) 4,05. 20) 0,735. 21) 5,72.
22) 9,55. 23) 12,7. 24) 24,3. 25) 34,5. 26) 0,598.]

2. Nende arvutuslükatite abil, millel puudub K-skaala, võime arvude kuupe ja kuupjuuri leida alljärgnevates näidetes kirjeldatud võtete kohaselt.

Näide 3. $2,48^3 = ?$

Astendame 2,48 kahega ja korrutame saaduse 2,48-ga. Viime C-1 D-2,48 kohale ja niidi B-2,48 peale ning loeme A-skaalal niidi alt kuubi väärtuse, s. o. 15,25.

Harjutusi:

- | | | |
|-----------------|------------------|------------------|
| 1) $3^3 = ?$ | 5) $7,05^3 = ?$ | 9) $2,45^3 = ?$ |
| 2) $1,6^3 = ?$ | 6) $0,62^3 = ?$ | 10) $1,86^3 = ?$ |
| 3) $2,14^3 = ?$ | 7) $23,5^3 = ?$ | 11) $1,09^3 = ?$ |
| 4) $8,65^3 = ?$ | 8) $0,083^3 = ?$ | 12) $1,02^3 = ?$ |

[Vastused: 1) 27,0. 2) 4,10. 3) 9,80. 4) 647. 5) 350. 6) 0,238. 7) 13000. 8) 0,000572. 9) 14,7. 10) 6,43. 11) 1,295. 12) 1,061.]

Näide 4. $\sqrt[3]{55,5} = ?$

Viime niidi A-55,5 peale ja lükkame arvutuslükati keele niisugusele kohale, et niidi all B-skaalal ja C-1 kohal D-skaalal tuleks ühesugune arv. Saame

$$\sqrt[3]{55,5} = 3,81.$$

Harjutusi:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1) $\sqrt[3]{8} = ?$ | 8) $\sqrt[3]{600} = ?$ |
| 2) $\sqrt[3]{3} = ?$ | 9) $\sqrt[3]{6000} = ?$ |
| 3) $\sqrt[3]{18} = ?$ | 10) $\sqrt[3]{100} = ?$ |
| 4) $\sqrt[3]{21,5} = ?$ | 11) $\sqrt[3]{52,5} = ?$ |
| 5) $\sqrt[3]{\pi} = ?$ | 12) $\sqrt[3]{6,12} = ?$ |
| 6) $\sqrt[3]{6} = ?$ | 13) $\sqrt[3]{7,4} = ?$ |
| 7) $\sqrt[3]{60} = ?$ | 14) $\sqrt[3]{0,055} = ?$ |

15) $\sqrt[3]{0,06} = ?$

17) $\sqrt[3]{0,0007} = ?$

16) $\sqrt[3]{1225} = ?$

18) $\sqrt[3]{0,0045} = ?$

[Vastused: 1) 2,00. 2) 1,442. 3) 2,62. 4) 2,78. 5) 1,464.
6) 1,817. 7) 3,91. 8) 8,43. 9) 18,17. 10) 4,64. 11) 3,74.
12) 1,829. 13) 1,949. 14) 0,380. 15) 0,391. 16) 10,70.
17) 0,0888. 18) 0,1651.]

§ 9. Logaritmid.

Mõne arvutuslükati alumisel äärel esineb veel kuues skaala (joonis IV), mis on arvude kümnendlogaritmid murdosade määramiseks ja mida nimetame L-skaalaks.

L-skaala on jaotatud kümneks võrdseks osaks, mis on tähistatud numbritega

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

L-skaala vasakpoolse otsa alguskriips tähendab 0, parempoolse otsa lõppkriips tähendab 10. Numbrid 0 ja 10 L-skaalale kantud ei ole. Iga üksik osa on jaotatud kriipsudega veel kümneks võrdseks osaks ja lõppeks need omakorda viieks võrdseks osaks. Nii on L-skaala jaotiste arv $10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$. Kriipsud 0-kriipsust alates tähendavad

002, 004, 006, 008, 010, 012, ..., 998, 1000.

Kriipsudevahelised keskkohad on siis

001, 003, 005, 007, 009, 011, ..., 997, 999.

Seega võime L-skaalal märkida ja lugeda vähemalt kolm kohta (numbrit). Need on logaritmid murdosade kolm kohta. Sellest järeldub ühtlasi, et arvutuslükati L-skaala asendab täielikult kolmekohalisi logaritmilisi tabeleid. Logaritmitavad arvud on D-skaalal ja nende logaritmid murdosad L-skaalal. Logaritmid täisosasid L-skaalal märgitud ei ole, sest teatavasti logaritmi täisosa on ühe võrra väiksem logaritmitava arvu (positiivsete

või negatiivsete) kohtade arvust, ja ümberpöörduvalt: logaritmitava arvu kohtade arv on ühe võrra suurem logaritmi täisosast.

Näide 1. $\log 2,68 = ?$

Logaritmi täisosa teame logaritmitava arvu kohtade järgi, s. o. 0. Meil on tarvis leida ainult logaritmi murdosa. Et leida $\log 2,68$ murdosa, selleks viime märkija niidi D-268 peale ja loeme L-skaalal niidi alt vastava arvu. Näeme, et L-skaalal niidi all on 428. See on otsitava logaritmi murdosa. Seega

$$\log 2,68 = 0,428.$$

Näide 2. $\log x = 1,554$; $x = ?$

Viime niidi L-554 peale ja loeme D-skaalal niidi alt otsitava logaritmitava arvu x . Seal on 358. Et antud logaritmi täisosa on 1, siis

$$x = 35,8.$$

Harjutusi:

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|---------------------|
| 1) $\log 5 = ?$ | 4) $\log 5,15 = ?$ | 7) $\log 0,164 = ?$ |
| 2) $\log 17 = ?$ | 5) $\log 1,24 = ?$ | 8) $\log 0,204 = ?$ |
| 3) $\log 3,8 = ?$ | 6) $\log 62,5 = ?$ | 9) $\log 0,084 = ?$ |
| 10) $\log x = 0,244$; $x = ?$ | 13) $\log x = 1,045$; $x = ?$ | |
| 11) $\log x = 1,514$; $x = ?$ | 14) $\log x = \bar{1},081$; $x = ?$ | |
| 12) $\log x = 3,308$; $x = ?$ | 15) $\log x = 0,250$; $x = ?$ | |

[Vastused: 1) 0,699. 2) 1,230. 3) 0,580. 4) 0,712.
5) 0,093. 6) 1,796. 7) $\bar{1},215$. 8) $\bar{1},310$. 9) $\bar{2},924$. 10) 1,754.
11) 32,7. 12) 2032. 13) 11,09. 14) 0,1205. 15) 1,778.]

Näide 3. $4,15^{2,62} = ?$

Siin tuleb logaritmid, korrutada ja antilogaritmid, s. o. leida numerus ($2,62 \cdot \log 4,15$). Paigutame niidi D-415 kohale ja loeme selle logaritmi murdosa L-skaalal niidi alt. Seal on 618. Seega $\log 4,15 = 0,618$. Selle arvu korrutame (D-skaalal) astendajaga 2,62, saame 1,619. See on astme logaritm, mille murdosa kolme kohaga on 619. Viime niidi L-619 peale ja loeme

D-skaalal niidi alt otsitava astme väärtuse, s. o. 41,6, sest astme logaritmi (1,619) täisosa on 1. Tähendab,

$$4,15^{2,62} = 41,6.$$

N ä i d e 4. $0,017^{1,53} = ?$

Logaritmime, viies niidi D-17 peale; L-skaalal niidi all on 230, s. o.

$$1,53 \cdot \log 0,017 = 1,53 \cdot \bar{2},230;$$

astme logaritmi saamiseks korrutame (D-skaalal) järgmiselt

$$1,53 \cdot \bar{2},23 = 1,53 \cdot (-1,77) = -2,71 = \bar{3},290;$$

astme leidmiseks paigutame niidi L-290 kohale, kus nüüd D-skaalal niidi all on 195. Et astme logaritmi täisosa on -3 , siis seega

$$0,017^{1,53} = 0,00195.$$

N ä i d e 5. $10^{0,064} = ?$

Niisuguse näite puhul, kus astme aluseks on 10, on astme logaritm võrdne astendajaga. Järelikult, viies siin otsekohe niidi L-064 peale, on D-skaalal niidi all astme väärtus 1,159, mis on $+1$ -kohaline arv, sest logaritmi täisosa on 0. Seega

$$10^{0,064} = 1,159.$$

Kui käesoleval juhul astendaja oleks negatiivne, siis teisen-dame teda nii, et täisosa oleks negatiivne ja murdosa positiivne.

$$10^{-1,535} = 10^{\bar{2},465} = 0,0292.$$

H a r j u t u s i:

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 1) $2^{2,4} = ?$ | 9) $0,4^{8,2} = ?$ |
| 2) $8^{1,5} = ?$ | 10) $0,5^{0,12} = ?$ |
| 3) $3,4^{1,2} = ?$ | 11) $0,093^{3,72} = ?$ |
| 4) $1,2^{4,75} = ?$ | 12) $0,65^{0,045} = ?$ |
| 5) $1,18^{7,05} = ?$ | 13) $10^{-3,27} = ?$ |
| 6) $2,67^{1,55} = ?$ | 14) $1,14^{-2,31} = ?$ |
| 7) $\pi^{2,12} = ?$ | 15) $0,51^{-0,72} = ?$ |
| 8) $21,4^{0,62} = ?$ | 16) $1,01^{-1,01} = ?$ |

[Vastused: 1) 5,28. 2) 22,6. 3) 4,34. 4) 2,38. 5) 3,21. 6) 4,58. 7) 11,32. 8) 6,68. 9) 0,000545. 10) 0,920. 11) 0,0001455. 12) 0,981. 13) 0,000537. 14) 0,739. 15) 1,624. 16) 0,990.]

§ 10. Geomeetrilisi arvutusi.

Arvutuslükati abil võime leida rutemini kui hariliku arvutamisega ringjoone pikkuse, ringi pindala ja pöördkehade (silinder, koonus, kera) pind- ning ruumala. Et rutemini leida nimetatud resultaate, selleks tuleb vastavaid geomeetrilisi valemeid ümber moodustada, väljendades viimaseid diameetri (mitte raadiuse) kaudu ning C- ja D-skaalal märgitud suuruse (joonised III ja IV)

$$c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,1284$$

või suuruse

$$c_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = c \sqrt{10} = 3,568$$

kaudu.

Ringjoone pikkus, silindri, koonuse ja kera pindala on kohasem leida diameetri kaudu, sest ka igapäevases elus mõõtmistel leitakse mitte ringi raadius, vaid diameeter. Seega, kui ringi diameeter on d , silindri kõrgus — h ja koonuse moodustaja — l , siis

$$\text{ringjoone pikkus} = \pi d,$$

$$\text{silindri külgpindala} = \pi d h,$$

$$\text{koonuse külgpindala} = \pi d \frac{l}{2},$$

$$\text{kera pindala} = \pi d^2.$$

Ringi pindala valemi (πr^2) võime ümber moodustada järgmiselt:

$$\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{d^2}{\frac{4}{\pi}} = \left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}} \right)^2 = \left(\frac{d}{c} \right)^2.$$

N ä i d e 1. Leida ringi pindala, kui ta diameeter on 3 cm.

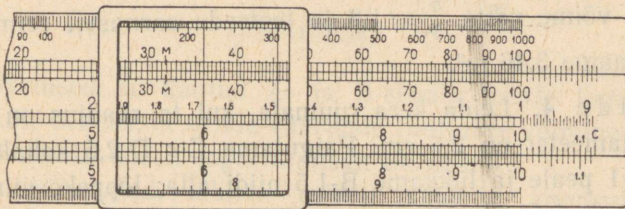
Paigutame C-skaalal oleva tähe c D-3 kohale ja loeme jagatise ruudu $\left(\frac{3}{c}\right)^2$ B-1 kohalt A-skaalal, s. o. 7,07. Või paigutame tähe c_1 D-3 kohale ja loeme jagatise ruudu $\left(\frac{3}{c}\right)^2$ B-10 kohalt

A-skaalal. Tähendab, kui ringi diameeter on 3 cm, siis ta pindala

$$S = 7,07 \text{ cm}^2.$$

Kui paigutame C-c D-1 kohale, siis A- ja C-skaala moodustavad ringi diameetri ja ringi pindala suhtes vastastikuse tabeli: niidi all C-skaalal asuvad siis ringide diameetrid ja niidi all A-skaalal vastavad ringide pindalad.

Arvutuslükati märkija klaasil esineb tihti kolm niiti (joonis 11), millede kaugus üksteisest on $c = 1,128$. Seepärast, kui on antud ringi diameeter, pole tarvis lükata arvutuslükati keelt, vaid ainult teotseda märkijaga. Nii näiteks, kui ringi diameeter on 3, siis paigutame märkija teise (keskmise) niidi D-3 peale ja loeme $\left(\frac{3}{c}\right)^2$ väärtuse A-skaalal esimese niidi alt, s. o. 7,07; või paigutame märkija kolmanda niidi D-3 peale ja loeme otsitava pindala väärtuse A-skaalal teise niidi alt, mis on sama eelmisega.



Joonis 11.

Kui aga ringi diameeter on vahemikus $1 < d < c$, siis võime ringi pindala otsimisel märkijaga (ilma arvutuslükati keele lükketa) teotseda ainult siis, kui skaalade otstes on eespool (§ 4, p. 1) kirjeldatud lisakriipsud (joonised 10 ja V).

H a r j u t u s i: Leida ringi pindala, kui ringi diameeter on: 2 cm; 8 cm; 4,2 cm; 45 cm; 0,34 dm; 0,085 m.

[V a s t u s e d: 3,14 cm²; 50,3 cm²; 13,85 cm²; 15,90 dm²; 9,08 cm²; 56,7 cm².]

Leida ringi diameetri pikkus, kui ringi pindala on: 8,2 cm²; 0,6 dm²; 0,036 m²; 63 cm².

[V a s t u s e d: 3,23 cm; 0,874 dm; 0,214 m; 8,96 cm.]

Silindri, koonuse ja kera ruumala leidmiseks tarvitatakse arvutuslükatiga töötamisel järgmisi ümbermoodustatud valemeid:

$$\text{silindri ruumala} = \pi r^2 h = \left(\frac{d}{c}\right)^2 \cdot h,$$

$$\text{koonuse ruumala} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \left(\frac{d}{c}\right)^2 \cdot \frac{h}{3},$$

$$\text{kera ruumala} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4r}{3} \pi r^2 = \frac{4d}{6} \left(\frac{d}{c}\right)^2 = \left(\frac{d}{c}\right)^2 \cdot \frac{d}{1,5}.$$

Näide 2. Leida silindri ruumala, kui ta diameeter on 3,4 dm ja kõrgus 8,2 dm.

Paigutame C-c D-3,4 kohale ja lükkame niidi B-8,2 peale. Otsitav silindri ruumala väärtus on A-skaalal niidi all, s. o. 74,4 dm³.

Näide 3. Leida koonuse ruumala, kui ta põhja diameeter on 1,84 m ja kõrgus 3,9 m.

Siin võime võtta $\frac{h}{3} = 1,3$ ja teetseda sarnaselt eelmise näitega. Saame 3,46 m³.

Näide 4. Leida kera ruumala, kui ta raadius on 1,3 cm. Kera diameeter on 2,6 cm. Paigutame C-c D-2,6 kohale; viime niidi B-1 peale ja lükkame B-1,5 niidi alla; lõppeks viime niidi B-2,6 peale ja loeme kera ruumala väärtuse A-skaalal niidi alt, s. o. 92,0 cm³.

Harjutusi: Leida silindri ja koonuse ruumala, kui

- 1) $d = 2$ m, $h = 6$ m
- 2) $d = 1,7$ dm, $h = 8,4$ dm
- 3) $d = 7,5$ cm, $h = 9,2$ cm
- 4) $d = 32$ cm, $h = 6,6$ dm
- 5) $d = 0,52$ m, $h = 0,46$ m
- 6) $d = 0,27$ m, $h = 12,6$ dm.

[Vastused: 1) 18,85 m³; 6,28 m³. 2) 19,07 dm³; 6,36 dm³. 3) 406 cm³; 135,4 cm³. 4) 53,1 dm³; 17,7 dm³. 5) 97,7 dm³; 32,6 dm³. 6) 72,1 dm³; 24,0 dm³.]

Leida kera ruumala, kui

- 1) $d = 4$ dm 4) $d = 24$ cm 7) $d = 0,14$ m
2) $d = 5,2$ dm 5) $d = 38,5$ cm 8) $r = 0,35$ m
3) $d = 1,66$ dm 6) $d = 562$ cm 9) $r = 0,027$ m

[Vastused: 1) 33,8 dm³. 2) 73,6 dm³. 3) 2,39 dm³.
4) 7,24 dm³. 5) 29,9 dm³. 6) 93,0 m³. 7) 1,436 dm³. 8) 22,4 dm³.
9) 103,1 cm³.]

Et paljude geometriliste arvutuste puhul esineb tihti nii π pöördväärtus $\frac{1}{\pi}$ kui ka ta veerandväärtus $\frac{\pi}{4}$, siis on mõnede arvutuslükatite A- ja B-skaala teisel logaritmilisel ühikul π pöördväärtus tähistatud tähega M (joonised 11 ja V), s. o.

$$M = \frac{1}{\pi} = 0,3183,$$

ja π veerandväärtus (ilma tähiseta) kriipsuna (joonised 11, IV ja V)

$$\frac{\pi}{4} = 0,7854.$$

Need väärtused on kantud A- ja B-skaala teisele logaritmilisele ühikule selleks, et nende väärtuste ruutjuure võtmine toimub A- või B-skaala teiselt logaritmiliselt ühikult.

Peale nimetatud tähiste esineb mõnede arvutuslükatite C-skaalal ka ruutjuure tähis $\sqrt{\quad}$, mis tähendab

$$\sqrt{2g} = 4,429,$$

millise arvuga tuleb sageli tegemist teha vesiehituste arvutuste puhul.

§ 11. Võrded.

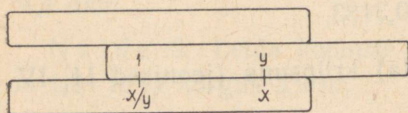
1. Arvude x ja y jagamist D- ja C-skaalaga näitavad joonised 12-a ja 12-b, kus murru $\frac{x}{y}$ lugeja x on võetud D-skaalal ja nimetaja y on võetud C-skaalal. Et x ja y on mistahes arvud vastavalt D- ja C-skaalal, siis sellest järeldub, et neil skaala-

del kohakuti seisvad arvud kujutavad ikka ja alati üht ja sama suhet, vaatamata sellele, kas arvutuslükati keel on lükatud paremale või vasakule.

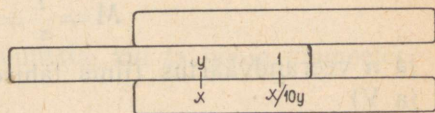
Kui paigutame näiteks C-1 D-1,4 kohale, siis näeme, et D- ja C-skaalal kohakuti olevad kriipsud esitavad arve, millede suhted on võrdsed, nagu

$$\frac{1,4}{1} = \frac{3,5}{2,5} = \frac{5,95}{4,25} = \frac{8,4}{6} = \frac{9,45}{6,75} = \frac{10}{7,14}.$$

Need suhted kujutavad võrdseid murdarve, kus murrukriipsuks võime lugeda D- ja C-skaala vahelist pīlu, kusjuures D-skaalal esinevad murdude lugejad ja C-skaalal murdude nimetajad, või ümberpöördult. Käesoleval juhul on arvutuslükati keel paremal



Joon. 12-a.



Joon. 12-b.

pool, mille puhul esitatud suhete ehk murdude väärtuse kohtade arv (välja arvatud viimane äärmine suhe $\frac{10}{7,14}$) on võrdne lugeja ja nimetaja kohtade vahega $+1$, sest siin tuleb arvestada tähist $Q + 1$.

Kui paigutame aga C-10 D-1,4 kohale, mille puhul arvutuslükati keel läheb vasakule, siis näeme, et neil skaaladel kohakuti olevad kriipsud esitavad arve, millede suhted on samuti võrdsed, nagu

$$\frac{1,4}{10} = \frac{1,31}{9,36} = \frac{1,26}{9} = \frac{1,21}{8,64} = \frac{1,15}{8,22} = \frac{1}{7,14},$$

kuid kõik need suhted on 10 korda väiksemad eelmistest suhetest (kus arvutuslükati keel oli lükatud paremale).

Et viimased suhted oleksid eelmistega võrdsed, tuleb viimaseid suurendada 10 korda. Viimaste suhete ehk murdude väärtuse kohtade arv (välja arvatud esimene äärmine suhe $\frac{1,4}{10}$) on võrdne lugeja ja nimetaja kohtade vahega.

Näide 1. Leida x_1, x_2, x_3 ja x_4 , kui

$$\frac{1}{2,5} = \frac{x_1}{4,2} = \frac{x_2}{5,5} = \frac{x_3}{7,8} = \frac{x_4}{9,7}.$$

Paigutame C-2,5 D-1 kohale. Viime märkija niidi järk-järgult C-skaalal murdude nimetajate 4,2; 5,5; 7,8 ja 9,7 peale ning loeme igakord niidi alt D-skaalal vastavad murdude lugejad

$$x_1 = 1,680; \quad x_2 = 2,20; \quad x_3 = 3,12; \quad x_4 = 3,88.$$

Et siin esimese murru lugeja ja kõik murdude nimetajad on +1-kohalised arvud, siis on ka otsitavad lugejad x_1, x_2, x_3 ja x_4 +1-kohalised.

Näide 2. Leida y_1, y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{22,2}{y_1} = \frac{30,8}{y_2} = \frac{58,5}{y_3} = 15,2.$$

Siin võime arvu 15,2 vaadelda kui murdu $\frac{15,2}{1}$, mille lugejaks on 15,2. Paigutades nüüd C-1 D-152 kohale, loeme niidiga D-skaalal esinevate murdude lugejate 22,2; 30,8 ja 58,5 kohalt C-skaalal murdude vastavad nimetajad

$$y_1 = 1,461; \quad y_2 = 2,03; \quad y_3 = 3,85.$$

Et siin kõik murdude lugejad on +2-kohalised ja viimase murru nimetaja (1) on +1-kohaline, siis on ka otsitavad nimetajad y_1, y_2 ja y_3 +1-kohalised.

Näide 3. Leida x_1, x_2, y_1 ja y_2 , kui

$$\frac{x_1}{0,028} = \frac{x_2}{3,25} = \frac{13,2}{y_1} = \frac{5,55}{y_2} = \frac{4,35}{0,58}.$$

Et siin viimase murru lugeja on +1-kohaline ja nimetaja on 0-kohaline arv, siis selle murru (ja samuti ka kõikide teiste murdude) väärtus peab olema +1—0 = +1-kohaline arv. Paigutame siin C-58 D-435 kohale, viime niidi C-skaalal esimese murru nimetaja 0,028 peale, s. o. C-28 peale, mille kohal niidi all D-skaalal on 210. Et suhe $\frac{x_1}{0,028}$ oleks võrdne antud suhtega $\frac{4,35}{0,58}$, mille väärtus on +1-kohaline, siis peab murru lugeja x_1 olema 0-kohaline arv, s. o. $x_1 = 0,210$. Teise murru lugeja x_2 leidmiseks viime niidi C-325 peale, kus D-skaalal niidi all on

244, mille loeme eelneva arvestuse kohaselt +2-kohaliseks arvuks, s. o. $x_2 = 24,4$. Kolmanda murru nimetaja y_1 leidmiseks viime niidi D-132 peale, kus nüüd C-skaalal niidi all on 176, mis peab olema +1-kohaline arv, s. o. $y_1 = 1,760$. Neljanda murru nimetaja y_2 leidmiseks viime niidi D-555 peale ja loeme niidi alt C-skaalal 740, mis peab olema nullkohaline arv, s. o. $y_2 = 0,740$. Seega

$$x_1 = 0,210; \quad x_2 = 24,4; \quad y_1 = 1,760; \quad y_2 = 0,740.$$

Näide 4. Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{0,32}{1,88} = \frac{0,25}{y_1} = \frac{0,15}{y_2} = \frac{0,64}{y_3}.$$

Viime niidi D-32 peale ja toome C-188 niidi alla. Nimetajate y_1 ja y_3 väärtused leiame niidiga C-skaalal D-25 ja D-64 kohalt, s. o. $y_1 = 1,469$ ja $y_3 = 3,76$. Nimetaja y_2 leidmiseks tuleb arvutuslükati keel üle viia paremalt poolt vasakule nõnda, et C-10 satuks D-skaala sellele kohale, kus enne oli C-1, s. o. D-17 kohale. Siis viime niidi D-15 peale, kus nüüd niidi all C-skaalal on y_2 väärtus, mis tuleb võtta 0-kohalise arvuna, s. o. $y_2 = 0,881$. Seega

$$y_1 = 1,469; \quad y_2 = 0,881; \quad y_3 = 3,76.$$

Nagu käesolevast näitest näeme, tuleb mõnikord võrrete arvutamise protsessis arvutuslükati keel ühelt poolt üle viia teisele poole. Niisugusel juhul arvutame ja kirjutame üles kõik otsitavad suurused, mida saab leida enne keele üleviimist, ja alles siis viime keele teisele poole ülejäänud otsitavate suuruste leidmiseks.

Harjutusi:

1) Leida x_1 , x_2 ja x_3 , kui

$$\frac{x_1}{14} = \frac{x_2}{32} = \frac{x_3}{51} = 0,105.$$

2) Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{0,82}{y_1} = \frac{0,63}{y_2} = \frac{0,47}{y_3} = 0,76.$$

3) Leida x_1 , x_2 , y_1 ja y_2 , kui

$$\frac{x_1}{1,82} = \frac{x_2}{0,47} = \frac{18,5}{y_1} = \frac{3,88}{y_2} = 5,15.$$

4) Leida x_1, x_2, y_1 ja y_2 , kui

$$\frac{2,51}{0,18} = \frac{x_1}{4,14} = \frac{x_2}{0,07} = \frac{0,61}{y_1} = \frac{46,9}{y_2}.$$

[Vastused:

- 1) $x_1 = 1,470; x_2 = 3,36; x_3 = 5,36;$
- 2) $y_1 = 1,079; y_2 = 0,829; y_3 = 0,618;$
- 3) $x_1 = 9,37; x_2 = 2,42; y_1 = 3,59; y_2 = 0,753;$
- 4) $x_1 = 57,7; x_2 = 0,976; y_1 = 0,0437; y_2 = 3,36.]$

2. Nagu nägime, kui D-skaalal võtta mistahes arv x ja sellega kohakuti C-skaalal arv y , siis on nende arvude suhe ikka mingisugune konstantne suurus, s. o.

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = \text{konst.}$$

Edasi vaatleme suhteid, mida võimaldab C-skaala koos A- ja K-skaalaga. Tähistame A-skaala arve tähega z ja K-skaala arve tähega u . Kui D-skaala arvud x_1, x_2, \dots, x_n on A-skaala vastavate arvude z_1, z_2, \dots, z_n ruutjuured, s. o.

$$x_1 = \sqrt{z_1}, x_2 = \sqrt{z_2}, \dots, x_n = \sqrt{z_n},$$

ja K-skaala vastavate arvude u_1, u_2, \dots, u_n kuupjuured, s. o.

$$x_1 = \sqrt[3]{u_1}, x_2 = \sqrt[3]{u_2}, \dots, x_n = \sqrt[3]{u_n},$$

siis — asendades need D-skaala arvud võrdsete A-skaala arvude ruutjuurtega või K-skaala arvude kuupjuurtega — saame A-skaala arvude ruutjuurte ja K-skaala arvude kuupjuurte suhted C-skaala vastavate arvudega

$$\frac{\sqrt{z_1}}{y_1} = \frac{\sqrt{z_2}}{y_2} = \dots = \frac{\sqrt{z_n}}{y_n}$$

$$\frac{\sqrt[3]{u_1}}{y_1} = \frac{\sqrt[3]{u_2}}{y_2} = \dots = \frac{\sqrt[3]{u_n}}{y_n}.$$

Tõstes esimesed suhted ruutu ja teised suhted kuupi, saame esimesel juhul A-skaala arvude suhted C-skaala vastavate arvude

ruutudega ja teisel juhul K-skaala arvude suhted C-skaala vastavate arvude kuupidega, s. o.

$$\frac{z_1}{y_1^2} = \frac{z_2}{y_2^2} = \dots = \frac{z_n}{y_n^2}$$

$$\frac{u_1}{y_1^3} = \frac{u_2}{y_2^3} = \dots = \frac{u_n}{y_n^3}.$$

N ä i d e 5. Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{\sqrt{5}}{3,6} = \frac{\sqrt{8}}{y_1} = \frac{\sqrt{13}}{y_2} = \frac{\sqrt{37}}{y_3}.$$

Viime niidi A-5 peale ja toome C-3,6 niidi alla, kus nüüd jagatis 0-kohalise arvuna on C-10 kohal D-skaalal. Sama jagatise saame, kui viime niidi järk-järgult A-8, A-13 ja A-37 peale, kusjuures nende ruutjuured (kui jagatavad) on D-skaalal ja nende ruutjuurtega kohakuti C-skaalal on vastavad jagajad y_1 , y_2 ja y_3 , s. o.

$$y_1 = 4,55; \quad y_2 = 5,80; \quad y_3 = 9,79.$$

N ä i d e 6. Leida a ja b , kui

$$\frac{a}{\sqrt[3]{8,8}} = \frac{b}{\sqrt[3]{26,5}} = \frac{1,12}{\sqrt[3]{3,4}}.$$

Viime niidi K-3,4 peale ja toome C-1,12 niidi alla, mille jagatis 0-kohalise arvuna on D-10 kohal C-skaalal. Sama jagatise saame, kui viime niidi järk-järgult K-8,8 ja K-26,5 peale, kusjuures nende kuupjuured (kui jagajad) on D-skaalal ja nende kuupjuurtega kohakuti C-skaalal on vastavad jagatavad a ja b , s. o.

$$a = 1,538; \quad b = 2,22.$$

N ä i d e 7. Leida z_1 , z_2 ja z_3 , kui

$$\frac{2,02^2}{6,55} = \frac{1,63^2}{z_1} = \frac{1,53^2}{z_2} = \frac{1,13^2}{z_3}.$$

Viime niidi A-6,55 peale ja toome C-2,02 niidi alla, mille ruut on niidi all B-skaalal ja selle jagatis 6,55-ga on A-100 kohal B-skaalal, võttes viimast jagamise reegli kohaselt 0-kohalise arvuna. Sama jagatise saame, kui viime niidi järk-järgult C-1,63, C-1,53 ja C-1,13 peale, kusjuures nende ruudud (kui jaga-

tavad) on B-skaalal ja nende ruutudega kohakuti A-skaalal on vastavad jagajad z_1 , z_2 ja z_3 , s. o.

$$z_1 = 4,26; \quad z_2 = 3,76; \quad z_3 = 20,5.$$

Näide 8. Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{2,5}{2,6^3} = \frac{3,7}{y_1^3} = \frac{13,4}{y_2^3} = \frac{88}{y_3^3}.$$

Paigutame niidi K-2,5 peale ja viime C-2,6 niidi alla. Viime niidi järk-järgult K-3,7, K-13,4 ja K-88 peale ja loeme niidi alt C-skaalal vastavad y_1 , y_2 ja y_3 väärtused, s. o.

$$y_1 = 2,96; \quad y_2 = 4,55; \quad y_3 = 8,52.$$

Harjutusi:

1) Leida z_1 , z_2 ja z_3 , kui

$$\frac{\sqrt{12}}{2,8} = \frac{\sqrt{z_1}}{4,2} = \frac{\sqrt{z_2}}{6,7} = \frac{\sqrt{z_3}}{7,9}.$$

2) Leida u_1 , u_2 ja u_3 , kui

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{1,17} = \frac{\sqrt[3]{u_1}}{2,47} = \frac{\sqrt[3]{u_2}}{4,92} = \frac{\sqrt[3]{u_3}}{5,35}.$$

3) Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{2,56}{y_1^2} = \frac{4,03}{y_2^2} = \frac{7,75}{y_3^2} = 1,84.$$

4) Leida y_1 , y_2 ja y_3 , kui

$$\frac{26}{y_1^3} = \frac{40}{y_2^3} = \frac{77}{y_3^3} = \frac{18}{2^3}.$$

5) Leida y_1 , y_2 , y_3 , y_4 ja y_5 , kui

$$\frac{9}{6,35^2} = \frac{8}{y_1^2} = \frac{3}{y_2^2} = \frac{0,5}{y_3^2} = \frac{0,2}{y_4^2} = \frac{0,15}{y_5^2}.$$

[Vastused: 1) $z_1 = 27,0$; $z_2 = 68,7$; $z_3 = 95,5$.

2) $u_1 = 66$; $u_2 = 520$; $u_3 = 670$.

3) $y_1 = 1,18$; $y_2 = 1,48$; $y_3 = 2,05$.

4) $y_1 = 2,26$; $y_2 = 2,61$; $y_3 = 3,25$.

5) $y_1 = 5,99$; $y_2 = 3,67$; $y_3 = 1,498$;

$y_4 = 0,947$; $y_5 = 0,820$.]

§ 12. Pöördkaala kasutamine.

1. Täiuslikkudel arvutuslükatitel esineb peale eespool-tähen-
datud (A, B, C, D, K, L) skaalade veel seitsmes, tavaliselt
punane skaala, mis asub arvutuslükati keelel B-skaala ja C-
skaala vahel (joonis V). See skaala on oma jaotuselt ja pikku-
selt sama mis C- või D-skaala, kuid logaritmilised jaotised esi-
nevad ümberpööratud järjestuses — algavad paremalt poolt
skaala otsast ja lähevad vasakule. Selle nn. p ö ö r d s k a a l a
(mida nimetame lühidalt E-skaalaks) jaotisi tuleb lugeda samuti
paremalt poolt vasakule, nagu näitavad ka sellel skaalal märgi-
tud numbrid. Siin E-1 asub C-10 kohal ja E-10 asub C-1 kohal.

Kui paigutame märkija niidi C-skaalal (või D-skaalal, kui ta
on kohakuti C-skaalaga) mingi arvu x peale, siis on niit ühtlasi
E-skaalal mingi teise arvu y peal, mis on kohakuti arvuga x .
Niisugusel korral on C-skaala osa 1-st kuni x -ni niisama pikk kui
E-skaala osa 10-st kuni y -ni, mis ütleb, et

$$\log x = \log 10 - \log y,$$

millest

$$x \cdot y = 10.$$

Sellest näeme, et C-skaala ja E-skaala moodustavad tabeli,
mis võimaldab leida arvupaare, millede korrutis on võrdne küm-
nega. Iga niisugune arvupaar on kohakuti (niidi all) C- ja E-
skaalal. Näiteks:

kui	C-skaalal $x =$	1,1	2,5	4	5	6,8	8,55	...
siis	E-skaalal $y =$	9,1	4	2,5	2	1,47	1,17

Kohakuti asetsevate arvude korrutis on võrdne (või peaaegu
võrdne) kümnega. Need arvud võivad olla ka negatiivsed, sest
kahe negatiivse arvu korrutis on samuti positiivne.

Puudub arvutuslükatil E-skaala, siis saame sama tabeli, kui
vahetame arvutuslükati keele otsad ümber ja paigutame keele
teistpidi nõnda, et A-1 oleks C-10 kohal ja C-1 oleks A-100
kohal. Siin E-skaala aset täidab C-skaala ning D- ja C-skaala
moodustavad sama tabeli, mis moodustavad D- ja E-skaala.

Pole kahe arvu korrutis 10, vaid mistahes arv a , siis selleks, et leida neid arvupaare, millede korrutis oleks võrdne a -ga, lükkame arvutuslükati keelega E-1 D- a kohale (enne viime niidi D- a peale ja siis E-1 niidi alla). Lükkame niidi vasakule nõnda, et D-skaalal oleks niidi all mingi arv x , siis E-skaalal on niidi all mingi teine arv y . Nüüd näeme, et D-skaala osa x -st kuni a -ni on niisama pikk kui E-skaala osa y -st kuni 1-ni, mis ütleb, et

$$\log a - \log x = \log y,$$

millest

$$x \cdot y = a.$$

Nii moodustavad D-skaala ja E-skaala jällegi tabeli, mis võimaldab leida arvupaare, millede korrutis on mistahes konstantne suurus a . See on pöördvõrdeliste suuruste tabel.

Erijuhtumil, kui $a = 1$, siis

$$x \cdot y = 1 \quad \text{ehk} \quad x = \frac{1}{y},$$

mis ütleb, et E-skaalal esinevad arvud 10 korda vähendatult kujutavad C-skaala vastavate (s. o. E-skaala arvudega kohakuti olevate) arvude pöördväärtusi.

Näide 1. $x \cdot y = 5,8$.

Lükkame arvutuslükati keele vasakule poole ja paigutame E-1 D-5,8 kohale. Siis võime D- ja E-skaalalt järk-järgult niidi abil (niidi alt) lugeda vastavaid x -i ja y -i väärtusi.

Näiteks:

kui D-skaalal $x =$	1	1,16	1,61	2,4	4,5	5,8,
siis E-skaalal $y =$	5,80	5,00	3,60	2,42	1,290	1.

Nõnda leiame x -i ja y -i väärtusi 1-st kuni 5,8-ni, s. o. kui $1 \leq x \leq 5,8$, siis $5,8 \geq y \geq 1$.

Samaselt võime leida x -i või y -i väärtusi 10-st kuni 58-ni, 100-st kuni 580-ni jne., kui loeme ühe neist teguritest 10, 100 jne. korda suurendatult ning teise vastavalt 10, 100 jne. korda vähendatult, nagu näiteks:

kui D-skaalal $x =$	10	11,6	16,1	24	45	58,
siis E-skaalal $y =$	0,580	0,500	0,360	0,242	0,1290	0,1.

Nende tegurite väärtuste tabelitest nähtub, et tegurite kohtade summa on ühe võrra suurem tegurite korrutise kohtade arvust.

Kui kahe arvu korrutise a puhul paigutaksime E-10 D- a kohale ja lükkaksime niidi paremale nõnda, et D-skaalal oleks niidi all mingi arv x ja temaga kohakuti E-skaalal mingi teine arv y , siis nähtub, et D-skaala osa a -st kuni x -ni on nii sama pikk kui E-skaala osa y -st kuni 10-ni ning seega

$$\log x - \log a = \log 10 - \log y,$$

millest

$$\frac{x \cdot y}{10} = a,$$

mis näitab, et üks teguritest — kas x D-skaalal või y E-skaalal — tuleb lugeda 10 korda vähendatult.

Tähendab, kui käesolevas näites tahame leida x -i või y -i väärtusi, mis on suuremad 5,8-st ja väiksemad 10-st, siis lükkame arvutuslükati keele paremale ja paigutame E-10 D-5,8 kohale. Lugeses nüüd niidi abil D- ja E-skaalalt (niidi alt) vastavaid x -i ja y -i väärtusi, tuleb üks neist teguritest (kas D-skaalal või E-skaalal) lugeda 10 korda vähendatult. Näiteks:

kui D-skaalal $x =$	6,3	6,9	7,95	8,35	9,5,
siis E-skaalal $y =$	0,920	0,840	0,729	0,695	0,610

või

$x =$	0,63	0,69	0,795	0,835	0,95,
$y =$	9,20	8,40	7,29	6,95	6,10,

kus esimesel juhul x -i ja y -i väärtused peituvad vastavalt vahemikes $5,8 < x < 10$ ja $1 > y > 0,58$ ning teisel juhul $0,58 < x < 1$ ja $10 > y > 5,8$.

Samaselt võime leida x -i ja y -i väärtusi 58-st kuni 100-ni, 580-st kuni 1000-ni jne., kui loeme ühe neist teguritest, näiteks x -i D-skaalal 10, 100 jne. korda suurendatult ning y -i E-skaalal vastavalt 100, 1000 jne. korda vähendatult, või ümberpöörduvalt, nagu näiteks:

kui D-skaalal $x =$	63	69	79,5	83,5	95,
siis E-skaalal $y =$	0,0920	0,0840	0,0729	0,0695	0,0610

või

$$\begin{array}{rcccccc} x = & 0,063 & 0,069 & 0,0795 & 0,0835 & 0,095, \\ y = & 92,0 & 84,0 & 72,9 & 69,5 & 61,0, \end{array}$$

kus esimesel juhul $58 < x < 100$ ja $0,1 > y > 0,058$ ning teisel juhul $0,058 < x < 0,1$ ja $100 > y > 58$.

Viimasest neljast tegurite väärtuste tabelist nähtub, et tegurite kohtade summa on võrdne tegurite korrutise kohtade arvuga.

N ä i d e 2. $x \cdot y = -24$.

Selles näites peab olema üks teguritest (kas x või y) negatiivne. Kui paigutame E-1 D-2,4 kohale, siis võime D- ja E-skaalalt niidi abil (niidi alt) lugeda vastavaid x -i ja y -i väärtusi, kusjuures kas D- või E-skaalalt võetud arv tuleb suurendada 10 korda (sest antud korrutis on kahekohaline arv). Peale selle tuleb üks teguritest lugeda negatiivseks. Näiteks:

$$\begin{array}{rcccccc} \text{kui D-skaalal } x = & 1 & 1,2 & 1,5 & 1,8 & 2,16 & 2,4, \\ \text{siis E-skaalal } y = & -24 & -20 & -16 & -13,33 & -11,11 & -10 \end{array}$$

või

$$\begin{array}{rcccccc} x = & -1 & -1,2 & -1,5 & -1,8 & -2,16 & -2,4, \\ y = & 24 & 20 & 16 & 13,33 & 11,11 & 10 \end{array}$$

või

$$\begin{array}{rcccccc} x = & 10 & 12 & 15 & 18 & 21,6 & 24, \\ y = & -2,4 & -2 & -1,6 & -1,333 & -1,111 & -1 \end{array}$$

või

$$\begin{array}{rcccccc} x = & -10 & -12 & -15 & -18 & -21,6 & -24, \\ y = & 2,4 & 2 & 1,6 & 1,333 & 1,111 & 1, \end{array}$$

milledest nähtub ühtlasi, et tegurite kohtade summa on ikka ühe võrra suurem nende tegurite korrutise kohtade arvust.

Kui aga paigutame E-10 D-2,4 kohale, siis esinevad D- ja E-skaalal niidi all otsekohe x -i ja y -i väärtused; ainult üks teguritest tuleb lugeda negatiivseks. Näiteks:

$$\begin{array}{rcccccc} \text{kui D-skaalal } x = & 3 & 4,5 & 6,8 & 9,25, \\ \text{siis E-skaalal } y = & -8 & -5,33 & -3,53 & -2,59 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x = & -3 & -4,5 & -6,8 & -9,25, \\ y = & 8 & 5,33 & 3,53 & 2,59, \end{array}$$

kusjuures nüüd tegurite kohtade summa on võrdne nende tegurite korrutise kohtade arvuga.

Arvestades käesolevaid näiteid, võime üles seada järgmise juhise:

a) jääb arvu a kahe teguri otsimisel arvutuslükati keel vasakule, s. o. jääb E-1 D- a kohale, siis tegurite kohtade summa on võrdne arvu a kohtade arvuga $+1$;

b) jääb aga arvu a kahe teguri otsimisel arvutuslükati keel paremale, s. o. jääb E-10 D- a kohale, siis tegurite kohtade summa on võrdne arvu a kohtade arvuga.

Harjutusi (arvude kaheks teguriks lahutamiseks):

- | | |
|------------------------|----------------------------|
| 1) $x \cdot y = 4$ | 7) $x \cdot y = -15,2$ |
| 2) $x \cdot y = 6,5$ | 8) $x \cdot y = -242$ |
| 3) $x \cdot y = -5,34$ | 9) $x \cdot y = 0,7$ |
| 4) $x \cdot y = -1,53$ | 10) $x \cdot y = 0,36$ |
| 5) $x \cdot y = 23$ | 11) $x \cdot y = -0,159$ |
| 6) $x \cdot y = 60,6$ | 12) $x \cdot y = -0,045$. |

13) Õhupumbas, mille kolb on 29 cm kaugusel pumba põhjast, on rõhk 1,5 atmosfääri. Milline peaks olema rõhk Boyle-Mariotte'i seaduse järgi, kui kolb on pumba põhjast järgmistel kaugustel: a) 41 cm, b) 33 cm, c) 25 cm, d) 16 cm, e) 10 cm?

[Vastused: a) 1,061 at, b) 1,318 at, c) 1,740 at, d) 2,72 at, e) 4,35 at.]

14) 32 töolist taastasid spordiplatsi 550 tunniga. Mitme tunniga oleksid taastanud sama platsi a) 20 töolist, b) 30 töolist, c) 53 töolist, d) 88 töolist, e) 108 töolist?

[Vastused: a) 880 t, b) 587 t, c) 332 t, d) 200 t, e) 163 t.]

2. E-skaala kasutamine võimaldab tihti kolme teguri korrutise

$$a \cdot b \cdot c$$

leidmise nõnda, et arvutuslükati keelega tuleb teha ainult üks lüke. Seda võtet selgitavad alljärgnevad näited.

Näide 3. $0,66 \cdot 25,8 \cdot 4,37 = ?$

Kasutades käesolevas näites E-skaalat, saame korrutamist toimetada sääraselt, et arvutuslükati keelega teeme ainult ühe lükke, kusjuures korrutise kohtade arv on võrdne tegurite kohtade summaga —1. Paigutame E-66 D-258 kohale ja viime niidi C-437 peale, siis on niidi all D-skaalal 744, mis tuleb lugeda otsitava korrutise +2-kohaliseks väärtuseks, s. o. 74,4, sest — arvestades tegurite kohtade summat ja keele lüket — korrutise kohtade arv on $(0 + 2 + 1) - 1 = 2$. Seega

$$6,6 \cdot 2,58 \cdot 4,37 = 74,4.$$

Esineb meil aga rohkem kui kolm tegurit, siis tuleb kaks tegurit korrutada D- ja E-skaalaga ning saadud resultaat korrutada kolmanda teguriga tavalisel viisil (niidiga C-skaala kaudu), siis edasi saadud resultaat korrutada neljanda teguriga E-skaala lükke abil ning see resultaat korrutada viienda teguriga tavalisel viisil (niidiga C-skaala kaudu) jne., kusjuures tegurite järjekord võib olla vabalt valitav. Tegurite korrutamise järjekorda tuleb katsuda valida ikka nõnda, et tegurite kolmikute (s. o. esimese kolme teguri, siis nende korrutise ning neljanda ja viienda teguri, siis edasi nende korrutise ning kuuenda ja seitsmenda teguri, jne.) igakordsel korrutamisel arvutuslükati keelt tuleks lükata ainult üks kord, kusjuures siis lõppresultaadi kohtade arv on võrdne tegurite kohtade summaga, mis on vähendatud kolmikute arvu võrra.

Näide 4. $725 \cdot 4,25 \cdot 0,63 \cdot 0,0137 \cdot 0,213 \cdot 30,8 \cdot 0,012 = ?$
Siin tegurite kohtade summa on

$$3 + 1 + 0 + (-1) + 0 + 2 + (-1) = 4$$

ning korrutamisel esineb kolm kolmikut, mille puhul lõppresultaadi kohtade arv on $4 - 3 = 1$. Et iga kolmiku puhul arvutus-

lükati keelega teha ainult üks lüke, tuleb käesoleva näite puhul tegurite järjekorda valida. Siin võime esimeseks kolmikuks võtta näiteks esimese, teise ja neljanda teguri, teiseks kolmikuks võime võtta saadud korrutise koos kolmanda ja kuuenda teguriga ning kolmandaks kolmikuks viimase korrutise koos viienda ja seitsmenda teguriga. Tähendatud järjekorras D-, E- ja C-skaalaga korrutades ning lugedes lõppresultaadi +1-kohaliseks arvuks, saame

$$725 \cdot 4,25 \cdot 0,63 \cdot 0,0137 \cdot 0,213 \cdot 30,8 \cdot 0,012 = 2,09.$$

Lõppresultaadi kohtade arvu määramiseks võib muidugi kasutada ka ümardatud andmete võtet. Käesoleval juhtumil võiksime (peast arvutamiseks) näites toodud arvude asemel korrutada

$$750 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 0,01 \cdot 0,2 \cdot 30 \cdot 0,01 = 1,8.$$

Korrutis on ühekohaline. Lükatiga arvutades saame selle väärtuseks 2,09.

Harjutusi:

1) $0,151 \cdot 34,2 \cdot 6,66 = ?$

2) $4,65 \cdot 0,0111 \cdot 0,0585 = ?$

3) $8,32 \cdot 0,041 \cdot 16,4 \cdot 0,333 \cdot 5,23 = ?$

4) $123 \cdot 0,321 \cdot 2,35 \cdot 0,0842 \cdot 0,825 = ?$

5) $0,00178 \cdot 5,69 \cdot 0,0333 \cdot 44,4 \cdot 7,07 \cdot 222 \cdot 5 = ?$

[Vastused: 1) 34,4. 2) 0,00302. 3) 9,75. 4) 6,45. 5) 117,7.]

§ 13. Ruutvõrrandi lahendamine.

1. Rakendades eelmises §-s käsitletud konstantse suuruse kaheks teguriks lahutamise võtet, võimaldavad D- ja E-skaala (või D-skaala ja ümberkeeratud C-skaala) ruutvõrrandid

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ehk

$$x^2 + px + q = 0,$$

kus $p = \frac{b}{a}$ ja $q = \frac{c}{a}$, reaallahendite leidmise. Viimase ruut-

võrrandi lahendite korrutis on võrdne ruutvõrrandi vabaliikmega q , s. o.

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

ja lahendite summa on x -i koefitsient p vastandmärgiga, s. o.

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Ruutvõrrandi lahendamiseks arvutuslükati abil normime ehk teisendame esitatud ruutvõrrandi, jagades tema mõlemad pooled x -ga; seega saame

$$x + \frac{q}{x} = -p$$

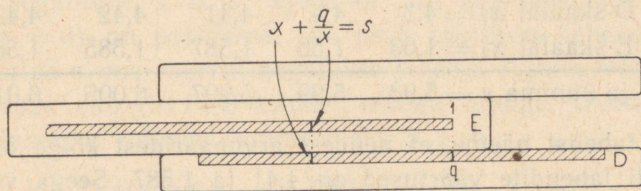
ehk

$$x + \frac{q}{x} = s,$$

mida nimetame ruutvõrrandi normitud kujuks ehk lühidalt normvõrrandiks, kus

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \text{ja} \quad x_1 + x_2 = s,$$

mis võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed suurused.



Joonis 13.

Nii siis, et leida arvutuslükati abil ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

reaallahendeid x_1 ja x_2 , selleks muudame teda normvõrrandiks

$$x + \frac{q}{x} = s,$$

paigutame E-1 või E-10 D-q kohale ja otsime D-skaalal niisugust arvu x , mille summa E-skaalal (x -ga kohakuti) oleva arvuga $\frac{q}{x}$ on s (joonis 13).

Paigutades E-1 või E-10 D-q kohale, võime niidi abil lugeda (niidi alt) D- ja E-skaala arvupaare, mis kõik rahuldavad

korrutist $x_1 \cdot x_2 = q$. Nendest arvupaaridest tuleb võtta ainult niisugune, mis rahuldab ruutvõrrandit. Selleks kasutame normvõrrandi lahendite teist omadust, s. o. $x_1 + x_2 = s$. Tähendab, kõikidest arvupaaridest tuleb võtta ainult see arvupaar, mille summa on s . Nii leiame üheaegselt ruutvõrrandi mõlemad lahendid x_1 ja x_2 .

Näide 1. Leida ruutvõrrandi $x^2 - 6x + 7 = 0$ lahendid. Ruutvõrrandi normitud kuju on

$$x + \frac{7}{x} = 6,$$

mille mõlemad lahendid on positiivsed, sest et nende korrutis ja summa on mõlemad positiivsed, s. o.

$$x_1 \cdot x_2 = 7 \quad \text{ja} \quad x_1 + x_2 = 6.$$

Paigutame E-1 D-7 kohale ja lükkame niidi niisugusele kohale, et D-skaalal ja E-skaalal niidi all olevate arvude summa oleks 6. Näiteks,

kui D-skaalal $x_1 = 4,3$	4,4	4,41	4,42	4,43,
siis E-skaalal $x_2 = 1,63$	1,59	1,587	1,585	1,58
ja summa $s = 5,93$	5,99	5,997	6,005	6,01.

Sellest tabelist näeme, et nendest arvupaaridest kõige õigemad võrrandi lahendite väärtused on 4,41 ja 1,587. Seega võrrandi $x^2 - 6x + 7 = 0$ lahendid kahe kümnendkohaga on

$$x_1 = 4,41 \quad \text{ja} \quad x_2 = 1,59.$$

Näide 2. Leida ruutvõrrandi $x^2 + 5x + 3 = 0$ lahendid. Selle ruutvõrrandi normitud kuju on

$$x + \frac{3}{x} = -5,$$

mille mõlemad lahendid on negatiivsed, sest et nende korrutis on positiivne ja nende summa on negatiivne, s. o. $x_1 \cdot x_2 = 3$ ja $x_1 + x_2 = -5$. Paigutame E-1 D-3 kohale ja otsime niidiga D-skaalal ja E-skaalal arve, millede summa oleks -5 (mis arvutuslükati abil arvutades on sama kui $+5$). Niidiga kõik arvupaarid läbi otsides ja järele proovides näeme, et D- ja E-skaalal

niidi all ei leidu niisuguseid arve, millede summa oleks 5. Selleks paigutame siis E-10 D-3 kohale ja otsime nüüd niidiga niisugust arvupaari, mille summa oleks 5:

kui D-skaalal $x_1 =$	-4,25	-4,29	-4,30	-4,31	-4,32,
siis E-skaalal $x_2 =$	-0,705	-0,700	-0,698	-0,696	-0,695
ja summa $s =$	-4,955	-4,990	-4,998	-5,006	-5,015,

millest näeme, et nendest arvupaaridest võrrandi kõige õigemad lahendite väärtused on -4,30 ja -0,698. Seega võrrandi lahendid kahe kümnendkohaga on

$$x_1 = -4,30 \quad \text{ja} \quad x_2 = -0,70.$$

Näide 3. Leida ruutvõrrandi $x^2 - 3x - 8 = 0$ lahendid. Selle ruutvõrrandi normitud kuju on

$$x - \frac{8}{x} = 3$$

ja ta lahendid on erinevate märkidega, sest et lahendite korrutis on negatiivne, s. o. $x_1 \cdot x_2 = -8$. Et aga lahendite summa ($x_1 + x_2 = 3$) on positiivne, siis peab positiivse lahendi absoluutväärtus olema suurem negatiivse lahendi absoluutväärtusest. Paigutades siin E-1 D-8 kohale, otsime niidiga D-skaalal ja E-skaalal arve, millede summa oleks 3, s. o.

kui D-skaalal $x_1 =$	4,60	4,70	4,75,
siis E-skaalal $x_2 =$	-1,74	-1,70	-1,68
ja summa $s =$	2,66	3,00	3,07.

Tähendab, antud ruutvõrrandi ligikaudsed lahendid on

$$x_1 = 4,70 \quad \text{ja} \quad x_2 = -1,70.$$

Näide 4. Leida ruutvõrrandi $x^2 + 7x - 15 = 0$ lahendid. Siis on normvõrrand

$$x + \frac{15}{x} = -7,$$

mille lahendid on samuti vastandmärkidega, sest et lahendite korrutis on negatiivne, s. o. $x_1 \cdot x_2 = -15$, kuid positiivse lahendi absoluutväärtus on siin väiksem negatiivse lahendi absoluut-

väärtusest, sest lahendite summa ($x_1 + x_2 = -7$) on negatiivne. Paigutame käesoleval juhtumil E-10 D-15 kohale ja otsime niidiga D-skaalal ja E-skaalal arve, millede summa oleks -7 , s. o.

kui D-skaalal $x_1 =$	$-8,70$	$-8,71$	$-8,72$	$-8,73$	$-8,74$,
siis E-skaalal $x_2 =$	$1,725$	$1,721$	$1,72$	$1,72$	$1,718$
ja summa $s =$	$-6,975$	$-6,989$	$-7,00$	$-7,01$	$-7,022$.

Sellest tabelist nähtub, et vaadeldava ruutvõrrandi lahendid kahe kümnendkohaga on

$$x_1 = -8,72 \quad \text{ja} \quad x_2 = 1,72.$$

Harjutusi: Lahendada ruutvõrrandid:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1) $x^2 - 4x + 2 = 0$ | 7) $x^2 - 1,2x - 1,2 = 0$ |
| 2) $x^2 - 5x + 2,8 = 0$ | 8) $x^2 - x - 2 = 0$ |
| 3) $x^2 - 7,7x + 6 = 0$ | 9) $x^2 - 12x - 5 = 0$ |
| 4) $x^2 + 9x + 4 = 0$ | 10) $x^2 + 6x - 3 = 0$ |
| 5) $x^2 + 8x + 2,9 = 0$ | 11) $x^2 + x - 2 = 0$ |
| 6) $x^2 + 4,2x + 3,2 = 0$ | 12) $x^2 + 3,6x - 2,72 = 0$. |

[Vastused: 1) 3,41; 0,59. 2) 4,36; 0,64. 3) 6,82; 0,88.
 4) $-8,53$; $-0,47$. 5) $-7,62$; $-0,38$. 6) $-3,20$; $-1,00$.
 7) 1,849; $-0,649$. 8) 2,00; $-1,00$. 9) 12,40; $-0,40$.
 10) $-6,46$; 0,46. 11) $-2,00$; 1,00. 12) $-4,24$; 0,64.]

2. Eespool nägime, et ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendite arvutamisel näidetes 1 ja 3 paigutasime E-1 D- q kohale ja otsisime ruutvõrrandi lahendite absoluutväärtusi vahemikus D-1 kuni D- q ja E-1 kuni E- q , kuid näidetes 2 ja 4 paigutasime E-10 D- q kohale ja otsisime ruutvõrrandi lahendite absoluutväärtusi vahemikus D- q kuni D-10 ja E- q kuni E-10, arvestades seejuures muidugi lahendite märke ja kohtade arvu. Kumb E-skaala ots $-$ kas E-1 või E-10 $-$ paigutada D- q kohale, saame määrata katselisel teel normvõrrandi

$$x + \frac{q}{x} = s$$

kaudu.

Ruutvõrrandi üks või teine lahend peab ikka sattuma D-skaala (või E-skaala) ühte positiivsesse või negatiivsesse vahemikku vahemikest

..., (0,01; 0,1), (0,1; 1), (1; 10), (10; 100), (100; 1000), ...
või

..., (-0,01; -0,1), (-0,1; -1), (-1; -10), (-10; -100),
(-100; -1000), ...

ehk lühidalt, vahemikku (10^k ; 10^{k+1}) või vahemikku (-10^k ; -10^{k+1}), kus $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Peale selle peab ruutvõrrandi üks lahend sattuma ühtlasi D-skaala ühte või teise osavahemikku, s. o. D-1 kuni D- q või D- q kuni D-10; teine lahend satub siis vastavalt E-skaala osavahemikku E-1 kuni E- q või E- q kuni E-10. Et näha millises D-skaala (või E-skaala) vahemikus asetseb ruutvõrrandi üks või teine lahend, selleks algame harilikult selle vahemiku uurimisest, milles asetseb arv q . Kui näiteks $q = -0,065$, siis asetseb q vahemikus (-0,01; -0,1), sest

$$-0,01 > -0,065 > -0,1,$$

ja järelikult algame uurimist sellest vahemikust.

Et kindlaks määrata, millisesse D-skaala vahemikku ja ühtlasi osavahemikku satub ruutvõrrandi üks või teine lahend, selleks võtame vaatluse alla mingisuguse konkreetse ruutvõrrandi.

Näide 5. Leida D- ja E-skaalal osavahemikud, milledes asetsevad ruutvõrrandi $x^2 - 16,45x + 0,82 = 0$ lahendid.

Anneme ruutvõrrandile normitud kuju:

$$x + \frac{0,82}{x} = 16,45.$$

Selle ruutvõrrandi mõlemad lahendid on positiivsed, sest $q = 0,82$ ja $s = 16,45$ on positiivsed, ning seega üks lahend peab asetsema D-skaala positiivses ja teine E-skaala positiivses vahemikus.

Esiteks teeme kindlaks, millisesse D-skaala vahemikku satub selle ruutvõrrandi üks või teine lahend; kas..., (0,01; 0,1) või (0,1; 1) või (1; 10) või (10; 100) jne. Et

selles võrrandis $q=0,82$, siis algame vahemikust, millesse kuulub q , s. o. vahemikust $(0,1; 1)$. Paigutame selle vahemiku algväärtuse $x=0,1$ ja lõppväärtuse $x=1$ järgemööda normvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$0,1 + \frac{0,82}{0,1} = 8,3 \quad \text{ja} \quad 1 + \frac{0,82}{1} = 1,82.$$

Et need mõlemad saadused on väiksemad kui normvõrrandi parempoolne osa 16,45, siis ei saa ruutvõrrandi lahend asetseda tähendatud vahemikus, sest et selles vahemikus ka kõik teised x -i väärtused teevad normvõrrandi vasakpoolse osa väiksemaks kui 16,45. Täheleb, vahemikus $(0,1; 1)$ antud ruutvõrrandil pole lahendit. Et siin normvõrrandi vasakpoolne osa on $x=1$ puhul võrdne 1,82-ga ja $x=0,1$ puhul 8,3-ga, mis on lähemal 16,45-le, siis sellest järeldub, et ruutvõrrandi lahend peab asetsema vaadeldud vahemikust vasakul.

Võtame vaadeldud vahemikust vasakul oleva vahemiku $(0,01; 0,1)$ ja paigutame selle vahemiku algväärtuse $x=0,01$ normvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$0,01 + \frac{0,82}{0,01} = 82,01,$$

millest nüüd nähtub, et antud ruutvõrrandi üks lahend peab peituma vahemikus $(0,01; 0,1)$, sest et $x=0,1$ puhul normvõrrandi vasakpoolne osa oli 8,3 ning seega

$$82,01 > 16,45 > 8,3,$$

mis ütleb, et ruutvõrrandi üks lahend peab asetsema 0,01 ja 0,1 vahel, sest selles vahemikus x -i üks väärtus rahuldab antud võrrandi.

Et näha, kas see ruutvõrrandi lahend on nüüd D-skaala vasakpoolses osavahemikus $(0,01; 0,082)$ või parempoolses osavahemikus $(0,082; 0,1)$, selleks paigutame $x=0,082$ normvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$0,082 + \frac{0,82}{0,082} = 10,082.$$

Sellest nähtub nüüd, et ruutvõrrandi üks lahend peab asetsema D-skaala vasakpoolses osavahemikus $(0,01; 0,082)$, sest

$$82,01 > 16,45 > 10,082,$$

mille puhul antud ruutvõrrandi lahendite otsimiseks tuleb E-1 paigutada D-82 kohale.

Paigutades nüüd E-1 D-82 koha'e, otsime niidiga D- ja E-skaalal arve, millede summa oleks 16,45, s. o.

kui D-skaalal $x_1 = 0,0505$ 0,0503 0,05 0,0496,
 siis E-skaalal $x_2 = 16,2$ 16,3 16,4 16,5

ja summa $s = 16,2505$ 16,3503 16,45 16,5496,

millest nähtub, et ruutvõrrandi $x^2 - 16,45x + 0,82 = 0$ ligikaudsed lahendid on

$$x_1 = 0,050 \quad \text{ja} \quad x_2 = 16,40.$$

Ruutvõrrandi lahendi x_1 otsimisel D-skaala (või E-skaala) vahemikus (0,01; 0,1) leiame üheaegselt ka teise lahendi $x_2 = 16,4$, mis kuulub E-skaala (või D-skaala) vahemikku (10; 100) ja ühtlasi osavahemikku (10; 82). Sest kui oleksime alguses võtnud vahemiku (10; 100) ja paigutanud tema algväärtuse $x = 10$ ja lõppväärtuse $x = 100$ ning selle vahemiku osavahe-
 mike ühendusväärtuse $x = 82$ järgemööda normvõrrandi väsk-
 poolsesse ossa x -i asemele, saaksime

$$10 + \frac{0,82}{10} = 10,082; \quad 100 + \frac{0,82}{100} = 100,0082;$$

$$82 + \frac{0,82}{82} = 82,01,$$

mis näitab samuti, et teine lahend x_2 kuulub just vahemikku (10; 100) ja ühtlasi osavahemikku (10; 82), sest

$$10,082 < 16,45 < 82,01 < 100,0082.$$

Seega ruutvõrrandi

$$x^2 - 16,45x + 0,82 = 0$$

üks lahend peitub D-skaala osavahemikus (0,01; 0,082) ja teine E-skaala osavahemikus (10; 82), või ümberpöörduvalt. Lahendite kohtade arvu pole siin vaja eraldi arvutada, sest osavahemik määrab automaatselt ka temas peituva lahendi kohtade arvu.

Kui uuriksime käesoleva ruutvõrrandi lahendite otsimisel näiteks D-skaala vahemikku (0,1; 1) ja nimelt selle vahemiku parempoolset osavahemikku (0,82; 1), siis näeksime, et osavahe-

miku algväärtuse $x=0,82$ ja lõppväärtuse $x=1$ puhul normvõrrandi vasakpoolsed osad on võrdsed, s. o.

$$0,82 + \frac{0,82}{0,82} = 1,82 \quad \text{ja} \quad 1 + \frac{0,82}{1} = 1,82,$$

kuid selle osavahemiku vahepealsete x -i väärtuste puhul normvõrrandi vasakpoolsed osad on ikkagi erinevad. Niisugust erandlikku osavahemikku nimetatakse kriitiliseks. Kriitilise osavahemiku alg- ja lõppväärtuse puhul ei saa kindlaks määrata, kas selles osavahemikus peitub või ei peitu ruutvõrrandi üks või teine lahend. Selleks tuleb uurida vahepealseid väärtusi.

Kriitiliseks osavahemikuks on see osavahemik, mis sisaldab \sqrt{q} *. Kui q on negatiivne, siis kriitilist osavahemikku ei ole. Kui aga q on positiivne, siis esineb ikka ja alati kaks kriitilist osavahemikku — positiivne ja negatiivne — vastavalt arvudele $+\sqrt{q}$ ja $-\sqrt{q}$, kuid ruutvõrrandi lahend võib peituda ainult ühes kriitilises osavahemikus, sõltuvalt normvõrrandi parempoolse osa s märgist. Käesoleva ruutvõrrandi puhul teiseks kriitiliseks osavahemikuks on $(-0,82; -1)$, sest et $\sqrt{q} = \sqrt{0,82} = \pm 0,905$, mis asetsevad vahemikes

$$0,82 < 0,905 < 1 \quad \text{ja} \quad -0,82 > -0,905 > -1.$$

Osavahemiku, millesse kuulub ruutvõrrandi

$$x + \frac{q}{x} = s$$

üks või teine lahend, kindlaksmääramiseks võime üles seada järgmise juhise:

* Märgime normvõrrandi vasakpoolse osa x -i funktsioonina, s. o.

$$f(x) = x + \frac{q}{x}.$$

See funktsioon omab maksimumi või miinimumi, kui $x = \sqrt{q}$; sest võrrutades funktsiooni tuletise nulliga:

$$f'(x) = 1 - \frac{q}{x^2} = 0,$$

saame viimasest võrdusest $x = \sqrt{q}$.

a) On osavahemiku algväärtuse x_0 ja lõppväärtuse x_n puhul

$$x_0 + \frac{q}{x_0} < s < x_n + \frac{q}{x_n}$$

või

$$x_0 + \frac{q}{x_0} > s > x_n + \frac{q}{x_n},$$

siis asetseb ruutvõrrandi lahend selles osavahemikus.

b) On aga

$$x_0 + \frac{q}{x_0} < s \text{ ja } x_n + \frac{q}{x_n} < s$$

või

$$x_0 + \frac{q}{x_0} > s \text{ ja } x_n + \frac{q}{x_n} > s,$$

siis ruutvõrrandil selles osavahemikus pole lahendit.

c) Kui

$$x_0 + \frac{q}{x_0} = x_n + \frac{q}{x_n},$$

siis on osavahemik kriitiline, mille puhul tuleb uurida vahepealseid $(x + \frac{q}{x})$ väärtusi, kusjuures $x = \sqrt{q}$ puhul $x + \frac{q}{x}$ omab kriitilises osavahemikus maksimaalset või minimaalset väärtust.

d) Juhtumil kui ruutvõrrandi lahend ei kuulu ühtegi osavahemikku, siis on need lahendid kompleksed (kompleksarvud).

Kõigest sellest arutusest nähtub, et ruutvõrrandi lahendite leidmine arvutuslükatiga toimub katselisel teel. Algajale näib see katseline tee rohkem aega ja tähelepanu nõudva toiminguks kui võrrandi lahendamise algebrast tuntud ruutvõrrandi valemi järgi. Kuid, kui on lahendada palju ruutvõrrandeid, siis pärast teatavat praktikat ilmneb, et ruutvõrrandi lahendite leidmist arvutuslükati abil saame siiski läbi viia kiiremini arvutamisest valemitega tavalisel viisil, eriti siis, kui on tegemist

sarja samatüübiliste võrranditega ja kui ruutvõrrandi koefitsiendid on murdarvulised.

Üksiku võrrandi lahendamisel võib arvutuslükatit eduga kasutada ka arvutamisel tavalise ruutvõrrandi valemi järgi, kui on selge astendamine ja juurimine.

Näide 6. Leida ruutvõrrandi $x^2 + 42,222x - 1,182 = 0$ lahendid. Anname võrrandile normitud kuju:

$$x - \frac{1,182}{x} = -42,222.$$

Siin kriitilist osavahemikku ei ole, sest $q = -1,182$ on negatiivne. Et ka s on negatiivne, siis selle võrrandi üks lahend on positiivne ja teine — negatiivne, kusjuures viimase absoluutväärtus on suurem positiivse lahendi absoluutväärtusest. Et $q = -1,182$, siis uurime kõige pealt vahemikku $(-1; -10)$. Paigutame $x = -1$ ja $x = -10$ järgemööda normvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$-1 + \frac{1,182}{1} = 0,182 \quad \text{ja} \quad -10 + \frac{1,182}{10} = -9,8818,$$

kus nüüd

$$0,182 > -9,8818 > -42,222,$$

mis ütleb, et tuleb siirduda järgneva vahemiku $(-10; -100)$ uurimisele. Paigutame nüüd $x = -100$ normvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$-100 + \frac{1,182}{100} = -99,98818.$$

Et nüüd $x = -10$ ja $x = -100$ puhul

$$-9,8818 > -42,222 > -99,98818,$$

siis kuulub ruutvõrrandi lahend vahemikku $(-10; -100)$. Osavahemiku leidmiseks paigutame $x = -11,82$ normvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$-11,82 + \frac{1,182}{11,82} = -11,72.$$

Et siin

$$-11,72 > -42,222 > -99,98818,$$

siis kuulub ruutvõrrandi lahend osavahemikku $(-11,82; -100)$, mille puhul lahendi otsimiseks tuleb E-10 paigutada D-1182 kohale. Arvutades näeme, et

$$\begin{array}{rcccc} \text{kui D-skaalal } x_1 = & -42,2 & -42,25 & -42,3 & -42,4, \\ \text{siis E-skaalal } x_2 = & 0,0281 & 0,028 & 0,028 & 0,0279 \\ \hline \text{ja summa } s = & -42,1719 & -42,222 & -42,272 & -42,3721, \end{array}$$

millest nähtub, et ruutvõrrandi $x^2 + 42,222x - 1,182 = 0$ ligikaudsed lahendid on

$$x_1 = -42,25 \text{ ja } x_2 = 0,028.$$

Näide 7. Leida ruutvõrrandi $x^2 - 1,52x + 0,54 = 0$ lahendid.

Selle võrrandi normitud kuju on

$$x + \frac{0,54}{x} = 1,52,$$

mille mõlemad lahendid on positiivsed. Siin suuruste $q = 0,54$ ja $s = 1,52$ järgi võib juba ette öelda, et antud ruutvõrrandi lahendid peaksid kuuluma vahemikku $(0,1; 1)$, milles asetseb ka q . Paigutame $x = 0,1$, $x = 0,54$ ja $x = 1$ järgemööda normvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$0,1 + \frac{0,54}{0,1} = 5,5; \quad 0,54 + \frac{0,54}{0,54} = 1,54; \quad 1 + \frac{0,54}{1} = 1,54,$$

kus nüüd $(0,54; 1)$ on kriitiline osavahemik, mis sisaldab

$$\sqrt{q} = \sqrt{0,54} = 0,735.$$

Selles kriitilises osavahemikus peab peituma ruutvõrrandi lahend, sest et igas teises osavahemikus on ikka

$$x + \frac{0,54}{x} > 1,52,$$

kuid kriitilises osavahemikus $x = 0,735$ puhul

$$x + \frac{0,54}{x} = 0,735 + \frac{0,54}{0,735} = 1,485,$$

mis (kui funktsiooni $f(x) = x + \frac{0,54}{x}$ minimaalne väärtus) on väiksem 1,52-st.

Et (0,54; 1) on D-skaala parempoolne osavahe­mik, siis paigutame E-10 D-54 kohale ja otsime ruutvõrrandi lahendit selles osavahe­mikus, s. o.

kui D-skaalal $x_1 = 0,565$	0,566	0,567,
siis E-skaalal $x_2 = 0,956$	0,954	0,952
ja summa $s = 1,521$	1,520	1,519,

millest näeme, et

$$x_1 = 0,566 \text{ ja } x_2 = 0,954.$$

Harjutusi: Lahendada ruutvõrrandid:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------------|
| 1) $x^2 - 2,4x + 0,16 = 0$ | 9) $x^2 - 5,76x + 8,3 = 0$ |
| 2) $x^2 - 0,6x + 0,05 = 0$ | 10) $x^2 + 8,8x + 15,52 = 0$ |
| 3) $x^2 + 3,2x + 0,72 = 0$ | 11) $x^2 - 1,62x - 3,41 = 0$ |
| 4) $x^2 + 14x + 8,3 = 0$ | 12) $x^2 + 1,73x - 2,16 = 0$ |
| 5) $x^2 - 0,5x - 7,65 = 0$ | 13) $x^2 + 1,8x + 1,2 = 0$ |
| 6) $x^2 - 3,2x - 0,83 = 0$ | 14) $5x^2 - 5,1x + 0,8 = 0$ |
| 7) $x^2 + 4,5x - 22 = 0$ | 15) $7,2x^2 - 87,1x + 139,6 = 0$ |
| 8) $x^2 + 34x - 13 = 0$ | 16) $0,017x^2 + 2,53x + 85,7 = 0$ |

[Vastused: 1) $x_1 = 0,069$; $x_2 = 2,331$. 2) $x_1 = 0,100$; $x_2 = 0,500$. 3) $x_1 = -0,244$; $x_2 = -2,956$. 4) $x_1 = -0,620$; $x_2 = -13,380$. 5) $x_1 = -2,53$; $x_2 = 3,03$. 6) $x_1 = -0,241$; $x_2 = 3,441$. 7) $x_1 = -7,45$; $x_2 = 2,95$. 8) $x_1 = -34,378$; $x_2 = 0,378$. 9) $x_1 = x_2 = 2,88$. 10) $x_1 = -6,36$; $x_2 = -2,44$. 11) $x_1 = 2,827$; $x_2 = -1,207$. 12) $x_1 = -2,570$; $x_2 = 0,840$. 13) Lahendid on kompleksed. 14) $x_1 = 0,194$; $x_2 = 0,826$. 15) $x_1 = 10,20$; $x_2 = 1,90$. 16) $x_1 = -96,6$; $x_2 = -52,2$.]

§ 14. Kuupvõrrandi lahendamine.

1. Esineb kuupvõrrand kujus

$$x^3 + px + q = 0,$$

kus p ja q on reaalarvud, siis on arvutuslükati abil võimalik leida tema reaallahendeid, mis võivad olla üksteisest erinevad või

võrdsed. Selleks jagame kuupvõrrandi mõlemad pooled x -ga ja esitame ta kujus

$$x^2 + \frac{q}{x} = -p$$

ehk

$$x^2 + \frac{q}{x} = s,$$

mida nimetame kuupvõrrandi normitud kujuks. Selle kuju järgi x on võrrandi lahend, kui x^2 ja $\frac{q}{x}$ summa on võrdne s -ga.

Siin suuruste x^2 ja $\frac{q}{x}$ valik toimub samaselt nagu ruutvõrrandi puhulgi, ainult selle vahega, et nüüd tuleb A-skaalal esinev arv x^2 liita E-skaalal (või ümberkeeratud C-skaalal) esineva arvuga $\frac{q}{x}$, mis mõlemad on kohakuti D-skaalal esineva arvuga x (joonis 14). Liitmise puhul tuleb muidugi arvestada liidetavate märke ja kohti.

Nii vahemiku kui ka osavahemiku valik toimub siin analoogiliselt toiminguga ruutvõrrandi lahendamise puhul, kusjuures kriitilisi osavahemikke võib olla ainult üks ja nimelt siis, kui ta

sisaldab arvu $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, kus q võib olla nii positiivne kui ka negatiivne*.

Kuupvõrrandi puhul tuleb nii vahemikku kui ka osavahemikku otsida iga lahendi jaoks eraldi. Kui kuupvõrrandi lahendamise

* Kui märgime normvõrrandi vasakpoolses osas x -i funktsioonina, s. o.

$$f(x) = x^2 + \frac{q}{x},$$

siis omab see funktsioon maksimaalset või minimaalset väärtust, kui

$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$; sest võrrutades funktsiooni tuletise nulliga

$$f'(x) = 2x - \frac{q}{x^2} = 0,$$

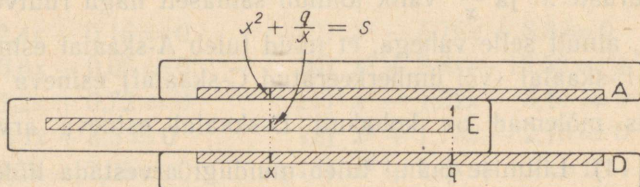
saame viimasest võrdusest $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

dite vahemike ja osavahemike otsimisel leidub ainult üks osavahemik, siis on kuupvõrrandil ka ainult üks reaallahend, kusjuures kaks teist lahendit on kompleksed.

Näide 1. Leida kuupvõrrandi $x^3 - 6,08x + 2,45 = 0$ lahendid. Selle kuupvõrrandi normitud kuju on

$$x^2 + \frac{2,45}{x} = 6,08,$$

küs $q = 2,45$ ja $s = 6,08$. Neid suurusi arvestades võime aimata, et kuupvõrrandi üks lahend peaks asetsema kas vahemikus $(0,1; 1)$ või vahemikus $(1; 10)$. Paigutame $x = 0,1$; $x = 1$ ja



Joonis 14.

$x = 10$ järgemööda normvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$0,1^2 + \frac{2,45}{0,1} = 24,51; \quad 1^2 + \frac{2,45}{1} = 3,45;$$

$$10^2 + \frac{2,45}{10} = 100,245,$$

millest nähtub, et üks lahend peitub vahemikus $(0,1; 1)$ ja teine lahend vahemikus $(1; 10)$, sest et ühelt poolt

$$24,51 > 6,08 > 2,45$$

ja teiselt poolt

$$2,45 < 6,08 < 100,245.$$

Esimese lahendi osavahemiku üks piirväärtus on $x = 0,245$ ja teise lahendi osavahemiku üks piirväärtus on $x = 2,45$. Asetades need x -i väärtused järgemööda normvõrrandi vasakpoolsesse ossa, saame

$$0,245^2 + \frac{2,45}{0,245} = 10,06; \quad 2,45^2 + \frac{2,45}{2,45} = 7,$$

mis ütleb, et kuupvõrrandi üks lahend peitub D-skaala parempoolses osavahemikus (0,245; 1) ja teine — D-skaala vasakpoolses osavahemikus (1; 2,45), sest et esimesel juhul

$$10,06 > 6,08 > 2,45$$

ja teisel juhul

$$2,45 < 6,08 < 7.$$

Esimese lahendi leidmiseks paigutame E-10 D-245 kohale ja otsime niidiga A- ja E-skaalalt arve x^2 ja $\frac{q}{x}$, millede summa oleks 6,08, s. o.

kui A-skaalal $x^2 = 0,170$	0,171	0,172	0,173	0,174,
siis E-skaalal $\frac{q}{x} = 5,94$	5,93	5,91	5,89	5,87
ja summa $s = 6,11$	6,101	6,082	6,063	6,044,

millest nähtub, et $x^2 = 0,172$ ja $\frac{q}{x} = \frac{2,45}{x} = 5,91$ on õigeimad väärtused, mis rahuldavad antud kuupvõrrandit. Kui nüüd niit on A-0,172 peal, siis D-skaalal niidi all on $x = 0,415$, mis on kuupvõrrandi lahend, s. o.

$$x_1 = 0,415.$$

Teise lahendi leidmiseks paigutame E-1 D-245 kohale ja otsime niidiga A- ja E-skaalal arve x^2 ja $\frac{q}{x}$, millede summa oleks 6,08, s. o.

kui A-skaalal $x^2 = 4,95$	4,96	4,97	4,98	4,99	5,00,
siis E-skaalal $\frac{q}{x} = 1,101$	1,100	1,099	1,098	1,097	1,096
ja summa $s = 6,051$	6,060	6,069	6,078	6,087	6,096,

millest näeme, et kui $x^2 = 4,98$ ehk $\frac{q}{x} = 1,098$, siis $x = 2,23$, mis on antud kuupvõrrandi teine lahend, s. o.

$$x_2 = 2,23.$$

Katselisel teel võime näha, et antud kuupvõrrandi kolmas lahend ei satu ühtegi ülejäänud positiivsesse vahemikku ega ka

osavahe-
mikk. Seepärast tuleb kolmandat lahendit otsida mõnest negatiivsest vahemikust ja seega ühtlasi ka negatiivsest osavahe-
mikkust. Võtame neile osavahe-
mikele, milles asetsesid leitud
positiivsed lahendid, vastavad negatiivsed osavahe-
mikkud, s. o. $(-0,245; -1)$ ja $(-1; -2,45)$, ja katsetame neid, paigutades $x = -0,245$, $x = -1$ ja $x = -2,45$ järgemööda normvõrrandi vasakpoolsesse ossa x -i asemele, saame

$$(-0,245)^2 - \frac{2,45}{0,245} = -9,4; \quad (-1)^2 - \frac{2,45}{1} = -1,45;$$

$$(-2,45)^2 - \frac{2,45}{2,45} = 5,$$

kus nüüd

$$-9,4 < -1,45 < 5 < 6,08,$$

millest nähtub, et kuupvõrrandi kolmas lahend ei asetse neis vahemikes. Kuid viimaste võrratuste põhjal võime nüüd eeldada, et kolmas lahend peitub osavahe-
mikus $(-2,45; -10)$. Nagu nähtub rajaväärtuse $x = -10$ puhul, normvõrrandi vasakpoolne osa on

$$(-10)^2 - \frac{2,45}{10} = 99,755$$

ning seega

$$5 < 6,08 < 99,755.$$

Kolmanda lahendi leidmiseks paigutame E-10 D-245 kohale ja otsime niidiga A- ja D-skaalalt arve x^2 ja $\frac{q}{x}$, millede summa (ehk õigemini vahe, sest x on negatiivne) oleks 6,08, s. o.

$$\text{kui A-skaalal } x^2 = \begin{array}{ccc} 7,00 & 7,01 & 7,02, \end{array}$$

$$\text{siis E-skaalal } \frac{q}{x} = \begin{array}{ccc} -0,926 & -0,925 & -0,924 \end{array}$$

$$\text{ja summa } s = \begin{array}{ccc} 6,074 & 6,085 & 6,096, \end{array}$$

kus õigeimad väärtused on $x^2 = 7,01$ ja $\frac{q}{x} = \frac{2,45}{x} = -0,925$ ning seega $x = -2,65$, mis on antud kuupvõrrandi kolmas lahend, s. o.

$$x_3 = -2,65.$$

Seega kuupvõrrandi $x^3 - 6,08x + 2,45 = 0$ kolm reaallahendit on

$$x_1 = 0,415; \quad x_2 = 2,23; \quad x_3 = -2,65.$$

Eespooltoodust nähtub, et kuupvõrrandi $x^3 + px + q = 0$ lahendite leidmine toimub analoogiliselt ruutvõrrandi lahendite leidmisele. Ruutvõrrandi puhul leidsime mõlemad lahendid korraga, kuid kuupvõrrandi puhul tuleb neid otsida eraldi.

Olgu siinjuures tähendatud, et kui arvutuslükatiga on leitud kuupvõrrandi

$$x^3 + px + q = 0$$

kaks lahendit, siis kolmandat võime leida leitud lahendite kaudu kuupvõrrandi lahendite ühest või teisest omadusest:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

või

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -q,$$

s. o.

$$x_3 = -(x_1 + x_2)$$

või

$$x_3 = -\frac{q}{x_1 x_2}.$$

Kui aga vaadeldava kuupvõrrandi kõik kolm lahendit on leitud arvutuslükatiga, siis võime tähendatud omadusi kasutada vastuste kontrollimiseks.

H a r j u t u s i: Lahendada kuupvõrrandid:

- 1) $x^3 - 5x + 4 = 0$
- 2) $x^3 - 3,78x + 6,02 = 0$
- 3) $x^3 - 1,15x - 3,86 = 0$
- 4) $x^3 + 2,72x + 1,45 = 0$
- 5) $x^3 + 1,23x - 12,3 = 0$
- 6) $x^3 - 0,566x + 0,007 = 0$
- 7) $x^3 + 12,6x + 2,63 = 0.$

[Vastused: 1) $x_1 = 1,00; \quad x_2 = 1,56; \quad x_3 = -2,56.$
2) $x_1 = -2,49; \quad x_2$ ja x_3 on kompleksed. 3) $x_1 = 1,81; \quad x_2$ ja x_3

on kompleksed. 4) $x_1 = -0,490$; x_2 ja x_3 on kompleksed. 5) $x_1 = 2,13$; x_2 ja x_3 on kompleksed. 6) $x_1 = 0,746$; $x_2 = 0,0124$; $x_3 = -0,758$. 7) $x_1 = -0,208$; x_2 ja x_3 on kompleksed.]

2. Et leida arvutuslükati abil täieliku kuupvõrrandi

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

reaallahendeid, selleks teisendame teda eespool esinevaks lihtsamaks kujuks asendusega

$$x = z - \frac{a}{3},$$

saades

$$\left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

ehk

$$z^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)z + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0.$$

Tähistades

$$b - \frac{a^2}{3} = p, \quad \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = q,$$

saame kuupvõrrandi lihtsustatud kuju

$$z^3 + pz + q = 0,$$

kus p ja q on reaalarvud. Leides arvutuslükati abil viimase võrrandi lahendid, saame algvõrrandi lahendid, kui lahutame viimase võrrandi lahenditest $\frac{a}{3}$.

Näide 2. Leida kuupvõrrandi $x^3 + 2,52x^2 + 1,49x - 0,516 = 0$ lahendid.

Asendades

$$x = z - \frac{2,52}{3} = z - 0,84,$$

saame kuupvõrrandi lihtsustatud kuju

$$z^3 - 0,627z - 0,582 = 0,$$

sest

$$p = b - \frac{a^2}{3} = 1,49 - \frac{2,52^2}{3} = -0,627,$$

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{2 \cdot 2,52^3}{27} - \frac{2,52 \cdot 1,49}{3} - 0,516 = -0,582.$$

Selle kuupvõrrandi normitud kuju on

$$z^2 - \frac{0,582}{z} = 0,627.$$

Katsetades nii positiivseid kui ka negatiivseid vahemikke näeme, et selle normvõrrandi lahend võib asetteda ainult vahemikus (1; 10) ja nimelt selle vahemiku vasakpoolses osavahemikus (1; 5,82), sest

$$1^2 - \frac{0,582}{1} = 0,418 \quad \text{ja} \quad 5,82^2 - \frac{0,582}{5,82} = 33,8,$$

mis näitab, et

$$0,418 < 0,627 < 33,8.$$

Paigutades E-1 D-582 kohale, leiame A- ja E-skaalalt, et

$$\text{kui A-skaalal } z^2 = \quad 1,160 \quad 1,165 \quad 1,170,$$

$$\text{siis E-skaalal } \frac{q}{z} = -0,540 \quad -0,539 \quad -0,538$$

$$\text{ja summa } s = \quad 0,620 \quad 0,626 \quad 0,632,$$

kus nüüd õigeimad väärtused on $z^2 = 1,165$ ja $\frac{q}{z} = -\frac{0,582}{z} = -0,539$ ning seega $z = 1,08$, mis on kuupvõrrandi $z^3 - 0,627z - 0,582 = 0$ ainus reallahend. Kuupvõrrandi ülejäänud kaks lahendit on kompleksed, sest et ei leidu enam vahemikke, milledes peaksid peituma need ülejäänud lahendid.

Antud kuupvõrrandil

$$x^3 + 2,52x^2 + 1,49x - 0,516 = 0$$

on seega üks reallahend ja nimelt

$$x = z - 0,84 = 1,08 - 0,84 = 0,24.$$

Harjutusi: Lahendada kuupvõrrandid:

1) $x^3 - 3x^2 - 3x + 10 = 0$

2) $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$

3) $x^3 + 6x^2 + 6x - 7 = 0$

4) $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

5) $x^3 + 0,5x^2 - 9,06x + 5,04 = 0$

6) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$

7) $x^3 + 3,3x^2 - 3,9x - 2,542 = 0$.

[Vastused: 1) $x_1 = 2$; $x_2 = 2,79$; $x_3 = -1,79$.

2) $x_1 = 0,318$; x_2 ja x_3 on kompleksed.

3) $x_1 = 0,669$; $x_2 = -2,52$; $x_3 = -4,15$.

4) $x_1 = 1,84$; x_2 ja x_3 on kompleksed.

5) $x_1 = 0,600$; $x_2 = 2,40$; $x_3 = -3,50$.

6) $x_1 = 0,532$; $x_2 = -0,653$; $x_3 = -2,88$.

7) $x_1 = 1,283$; $x_2 = -0,483$; $x_3 = -4,10$.]

§ 15. Trigonomeetrilised skaalad ja nende lugemine.

1. Arvutuslükati keele tagaküljel asuvad trigonomeetrilised skaalad (joonis VI). Kaks äärmist skaalat keele tagaküljel (ülemisel ja alumisel keele äärel) on tähistatud tähtedega S ja T ning nendevaheline kolmas skaala tähtedega S & T. Tegemist on trigonomeetriliste funktsioonide logaritmiliste skaaladega. S tähistab siinusskaalat piirides $5^{\circ}44'$ kuni 90° , T — tangensskaalat, mis hõlmab $5^{\circ}43'$ kuni 45° ning S & T on väikeste nurkade ühine siinus- ja tangensskaala piirides $34,4'$ kuni $5^{\circ}44'$. Nimetame esimest neist S-skaalaks, teist — T-skaalaks ning kolmandat — S & T-skaalaks.

Arvutuslükati keelt välja tõmmates, ümber pöörates ja kohakuti asetades A- ning D-skaalaga näeme, et S-skaala jääb vastu A-skaalat ja T-skaala — vastu D-skaalat.

S-skaala. Sellel skaalal alguskriipsust kuni 10° -ni on jaotised märgitud $5'$ kaupa: esimene kriips alguskriipsu järele tähendab $5^{\circ}45'$ (skaalal nummerdamata), teine kriips — $5^{\circ}50'$ (nummerdamata), kolmas kriips — $5^{\circ}55'$ (nummerdamata), neljas kriips

— 6° (skaalal nummerdatud). Edasi 6° -st alates kuni 10° -ni esinevad S-skaalal numbrid 7, 8, 9 ja 10, mis tähendavad: 7° , 8° , 9° ja 10° . Nende vahepealsed $5'$ kaupa märgitud jaotuskriipsud ei ole nummerdatud.

10° -st alates kuni 20° -ni on kantud S-skaalale kas numbrid

12, 14, 16, 18, 20

või numbrid

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,

mis tähendavad kraade. 20° -st edasi kuni skaala lõpuni esinevad numbrid

25, 30, 35, 40, 50, 60, 70, 80

tähendavad samuti kraade. Nende kraadide vahepealsed ja 80° -le järgnevad kraadid ja minutid tuleb lugeda nummerdamata kriipsude järgi. 10° -st kuni 20° -ni on märgitud S-skaalal jaotised $10'$ kaupa, 20° -st kuni 40° -ni — $20'$ kaupa, 40° -st kuni 60° -ni (või 70° -ni) — $30'$ kaupa, 60° -st (või 70° -st) kuni 80° -ni — 1° kaupa; 80° ja 90° vahel on harilikult kolm kriipsu, mis tähendavad 82° , 84° ja 86° .

Et õigesti märkida ja lugeda minuteid tähistavaid kraadidevahelisi kriipse, tuleb tähele panna mitmeks osaks on jaotatud vaadeldav lõik: kas kaheteistkümneks, kuueks, kolmeks või kaheks osaks.

Kui S-skaala on kohakuti A- ja D-skaalaga, siis S-skaala alguskriipsu ehk $5^{\circ}44'$ kohal on D-skaalal arv 1 ja lõppkriipsu ehk 90° kohal on D-skaalal arv 10. Vahepealsetele S-skaala kraadidele ja minutitele vastavad arvud on nende kohal D-skaalal. D-skaalal esinevad logaritmilised lõigud on ühtlasi S-skaalal esinevate vastavate kraadide ja minutite siinuse (loomulikud) väärtused, kui loeme neid 10 korda vähendatult. Seega tuleb D-skaala alguskriipsu lugeda 0,1-ks, sest $\sin 5^{\circ}44' \approx 0,0999 = 0,1$ ja D-skaala lõppkriipsu lugeda 1-ks, sest $\sin 90^{\circ} = 1$. Järelikult vahemikus $5^{\circ}44'$ -st kuni 90° -ni tuleb lugeda D-skaalal esinevaid siinuse väärtusi nullkohalisteks arvudeks. Et leida arvutuslühkati abil vahemikus $5^{\circ}44'$ -st kuni 90° -ni siinusfunktsiooni väärtusi, selleks märgime niidiga kraade ja minuteid S-skaalal

ja vaatame, missugune arv on ta kohal niidi all D-skaalal. Viimast 10 korda vähendades saame siinuse vastava väärtuse. Näiteks:

$$\sin 27^{\circ}50' = 0,467.$$

Olgu tähendatud, et samal kohal niidi all on L-skaalal (kui see arvutuslükatil esineb) selle loomuliku väärtuse logaritmi murdosa, mis on seega siinusfunktsiooni logaritmi murdosaks, kusjuures logaritmi täisosaks on -1 . Seega

$$\log \sin 27^{\circ}50' = \bar{1},669.$$

Ümberpöörduvalt, siinuse väärtuse või logaritmi järgi võime leida vastava kraadide ja minutite arvu vahemikus $5^{\circ}44'$ -st kuni 90° -ni, märkides niidiga trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse murdosa D-skaalal või logaritmi murdosa L-skaalal, ja vaadates, missugune kraadide ja minutite arv esineb loomuliku väärtuse või logaritmi murdosa kohal niidi all S-skaalal. Näiteks:

$$\begin{aligned} \text{kui } \sin \alpha &= 0,446, & \text{siis } \alpha &= 26^{\circ}30'; \\ \text{kui } \log \sin \beta &= 1,598, & \text{siis } \beta &= 23^{\circ}20'. \end{aligned}$$

Koosinuse väärtusi ja logaritme vahemikus 0° -st kuni $90^{\circ} - 5^{\circ}44' = 84^{\circ}16'$ -ni leiame samuti S-skaala abil, kusjuures tuleb üle minna koosinusfunktsioonilt siinusfunktsioonile, kasutades selleks taandamisvalemit

$$\cos \alpha = \sin (90^{\circ} - \alpha).$$

T-skaala. Sellel skaalal esinevad kraadid ja minutid $5^{\circ}43'$ kuni 45° . Alguskriipsust kuni 20° -ni on kriipsudega märgitud T-skaala jaotised $5'$ kaupa. 20° -st kuni lõpuni (s. o. 45° -ni) — $10'$ kaupa. Esimene kriips alguskriipsu järel tähendab $5^{\circ}45'$, teine kriips — $5^{\circ}50'$, kolmas kriips — $5^{\circ}55'$, neljas kriips — 6° jne. T-skaalale on kantud harilikult järgmised numbrid

6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25, 30, 35, 40,

mis tähendavad kraade. Viimane kriips tähendab 45° . Nummerdatud kraadide vahepealsed kraadid ja minutid tuleb lugeda nummerdamata kriipsude järgi.

Kui T-skaala on kohakuti D-skaalaga, siis näeme, et T-skaala alguskriipsu ehk $5^{\circ}43'$ kohal on D-1 ja lõppkriipsu ehk 45° kohal on D-10. D-skaalal esinevad logaritmilised lõigud on seega T-skaalal esinevate vastavate kraadide ja minutite ($5^{\circ}43'$ -st kuni 45° -ni) tangensi väärtused, lugedes neid 10 korda vähendatult, sest $\tan 5^{\circ}43' = 0,1001 \approx 0,1$ ja $\tan 45^{\circ} = 1$. Selles vahemikus on D-skaalal esinevad tangensi väärtused nullkohalised arvud. T-skaalalt niidiga üle minnes D-skaalale, saame tangensi väärtuse ($0,1$ -st kuni 1 -ni), ja T-skaalalt niidiga üle minnes L-skaalale saame tangensi logaritmi (-1 -st kuni 0 -ni). Ümberpöörduvalt: D-skaalalt või L-skaalalt niidiga üle minnes T-skaalale, saame tangensi väärtuse või tangensi logaritmile vastava kraadide ja minutite arvu ($5^{\circ}43'$ -st kuni 45° -ni). Näiteks:

$$\tan 25^{\circ} = 0,466; \text{ kui } \tan \alpha = 0,633, \text{ siis } \alpha = 32^{\circ}20';$$

$$\log \tan 9^{\circ}10' = \bar{1},208; \text{ kui } \log \tan \beta = \bar{1},776, \text{ siis } \beta = 30^{\circ}50'.$$

Kootangensi väärtusi ja logaritme vahemikus 45° -st kuni $90^{\circ} - 5^{\circ}43' = 84^{\circ}17'$ -ni leiame samuti T-skaala abil, kusjuures tuleb üle minna kootangensfunktsioonilt tangensfunktsioonile, kasutades selleks taandamisvalemit

$$\cot \alpha = \tan (90^{\circ} - \alpha).$$

Kui tangensfunktsiooni puhul nurk α on suurem 45° -st ja ühtlasi väiksem kui $84^{\circ}17'$ või kootangensfunktsiooni puhul nurk α väiksem 45° -st ja ühtlasi suurem kui $5^{\circ}43'$, siis nende funktsioonide arvutamisel rakendatakse trigonomeetria vastavaid põhi-valemeid

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan (90^{\circ} - \alpha)} \text{ ja } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha},$$

mida käsitletakse järgnevas §-s.

S & T-skaala. Siinuse ja tangensi ühisel skaalal esinevad kraadid ja minutid $34,4'$ kuni $5^{\circ}44'$ (s. o. kraadide ja minutite arvuni, millest algab S-skaala). S & T-skaala abil võime leida nii siinuste kui ka tangensite väärtusi $34,4'$ -st kuni $5^{\circ}44'$ -ni, sest

väikeste nurkade (alla $5^{\circ}44'$) siinuste ja tangensite väärtused on praktiliselt võrdsed. Näiteks:

$$\begin{aligned}\sin 2^{\circ} &= 0,03490, \quad \tan 2^{\circ} = 0,03492 \\ \sin 4^{\circ}20' &= 0,07556, \quad \tan 4^{\circ}20' = 0,07578.\end{aligned}$$

Alguskriipsust kuni 3° -ni on kriipsudega märgitud S & T-skaala jaotised $1'$ kaupa (mõnikord alguskriipsust kuni 1° -ni on märgitud jaotuskriipsud ka $30''$ kaupa), 3° -st kuni 5° -ni — $2'$ kaupa ja 5° -st kuni lõpuni (s. o. $5^{\circ}44'$ -ni) — $5'$ kaupa. Esimene kriips alguskriipsu järel tähendab $35'$, teine kriips — $36'$, kolmas kriips — $37'$ jne.

S & T-skaalale on märgitud harilikult järgmised numbrid:

$$40, 50, 1, 130, 2, 230, 3, 330, 4, 430, 5, 530,$$

mis tähendavad

$$40', 50', 1^{\circ}, 1^{\circ}30', 2^{\circ}, 2^{\circ}30', 3^{\circ}, 3^{\circ}30', 4^{\circ}, 4^{\circ}30', 5^{\circ}, 5^{\circ}30'.$$

Nende kraadide ja minutite vahepealsed kraadid ja minutid tuleb lugeda nummerdamata kriipsude järgi.

Kui S & T-skaala on kohakuti A- ja D-skaalaga, siis S & T-skaala kraadidele ja minutitele vastavaid siinuse ja tangensi väärtusi loeme samuti D-skaalalt, lugedes neid ainult 100 korda vähendatult, sest et $\sin 34,4' = \tan 34,4' = 0,01$ ja $\sin 5^{\circ}44' = \tan 5^{\circ}44' = 0,1$. Selles vahemikus on D-skaalal esinevad siinuse ja tangensi väärtused miinus-ühekohalised arvud. S & T-skaalalt niidiga üle minnes D-skaalale, saame siinuse ja tangensi ühise väärtuse ($0,01$ -st kuni $0,1$ -ni), ja S & T-skaalalt niidiga üle minnes L-skaalale, loeme L-skaalal niidi alt siinuse ja tangensi ühise logaritmi murdosa, kusjuures logaritmi täisosaks on -2 . Paigutades niidi S & T-skaalal näiteks $1^{\circ}13'$ peale, on D-skaalal niidi all arv 212 ja L-skaalal niidi all 324, mis tähendab, et

$$\sin 1^{\circ}13' = \tan 1^{\circ}13' = 0,0212$$

ja

$$\log \sin 1^{\circ}13' = \log \tan 1^{\circ}13' = \bar{2},324.$$

Ümberpöörduvalt, D-skaalalt või L-skaalalt niidiga üle minnes S & T-skaalale, saame siinuse ja tangensi ühise väärtuse või loga-

ritmile vastava kraadide ja minutite arvu (34,4'-st kuni 5⁰44'-ni). Näiteks:

$$\begin{aligned} \text{kui } \sin \alpha &= 0,0445, \text{ siis } \alpha = 2^{\circ}33'; \\ \text{kui } \log \tan \beta &= 2,704, \text{ siis } \beta = 2^{\circ}54', \end{aligned}$$

sest paigutades niidi D-skaalal 445 peale, on S & T-skaalal niidi all 2⁰33', ning paigutades niidi L-skaalal 704 peale, on S & T-skaalal niidi all 2⁰54'.

Märkus. Et leida 34,4'-st väiksemate nurkade siinuse ja tangensi väärtusi, selleks peaks arvutuslükati keelele olema kantud veel neljas niisama pikk trigonomeetiline skaala 3'26,5"-st kuni 34,4'-ni, mille alguskriips (s. o. 3'26,5") oleks (skaalasisid kohakuti pannes) D-1 kohal ja lõppkriips (s. o. 34,4') — D-10 kohal, sest et $\sin 3'26,5'' = \tan 3'26,5'' = 0,001$ ja $\sin 34,4' = \tan 34,4' = 0,01$. Et aga väga harva tuleb tegemist teha väiksemate nurkadega kui 34,4', siis — et mitte liigselt koormata arvutuslükati keelt — sinna tavaliselt ei kanta rohkem trigonomeetrilisi skaalasisid. Kuid, nagu näeme pärastpoole (§ 18), on arvutuslükati abil ka niisuguste väikeste nurkade siinuse ja tangensi väärtuste leidmine siiski võimalik.

2. Et leida arvutuslükati abil trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi (ja tarbe korral nende logaritme), pole õieti vajadust keele ümberpööramiseks. Asetame arvutuslükati keele endiselt tagasi, nii et trigonomeetrilised skaalad jääksid allapoole. Pöörates kogu arvutuslükati ümber, näeme lükati kummaski otsas ovaalseid lõike. Mõlema lõigu servadel näeme musti kriipse: paremal pool kaks kriipsu — üks ülal ja teine all, vasakul — tavaliselt üks kriips all (mõnikord kaks kriipsu — üks all ja teine ülal). Nimetame neid lõikude servadel esinevaid kriipse „i n d e k s i t e k s” (joonis 15).

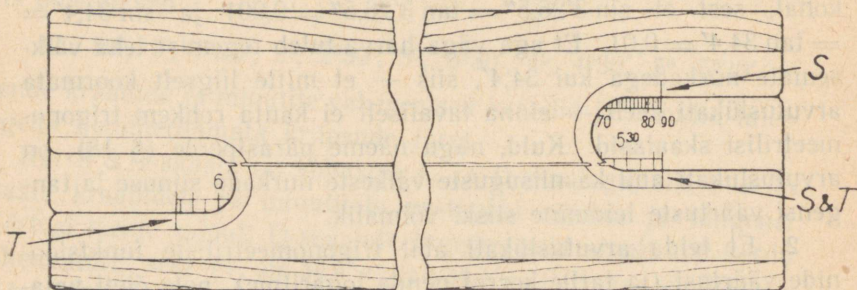
Parempoolse otsa ülemine indeks on S-skaala kraadide ja minutite märkimiseks ja lugemiseks, vasakpoolse otsa alumine indeks on T-skaala kraadide ja minutite ning parempoolse otsa alumine indeks (ja vasakpoolse otsa ülemine indeks, kui see on olemas) — S & T-skaala kraadide ja minutite märkimiseks ja lugemiseks. Nimetame neid indekseid vastavalt S - i n d e k s i k s, T - i n d e k s i k s ja S & T - i n d e k s i k s.

Trigonomeetriliste skaalade abil trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste (või nende logaritmide) leidmist ning ümberpöörduvalt, antud väärtustele (või nende logaritmidele) vastavate kraadide ja minutite leidmist selgitavad alljärgnevad näited.

Näide 1. $\sin 21^{\circ}20' = ?$ $\log \sin 21^{\circ}20' = ?$

Lükkame arvutuslükati keele paremale poole ja paigutame S-skaalal $21^{\circ}20'$ -le vastava jaotuskriipsu parempoolse lõigu S-indeksi kohale. Keerame arvutuslükati ümber ja loeme C-skaalal D-10 kohalt siinuse (loomuliku) väärtuse. Seal esineb 364. Seda nullkohaliseks arvuks lugedes saame otsitava siinuse väärtuseks 0,364. Tähendab,

$$\sin 21^{\circ}20' = 0,364.$$



Joonis 15.

Et leida $\log \sin 21^{\circ}20'$ väärtuse, tuleb samuti S- $21^{\circ}20'$ paigutada S-indeksi kohale ja C-skaalal D-10 kohalt üles lugeda siinuse väärtus 0,364. Viime nüüd niidi D-364 peale ja loeme siinuse logaritmi murdosa niidi alt L-skaalal. Seal on 561. Seega

$$\log \sin 21^{\circ}20' = \bar{1},561.$$

Näide 2. $\cos 54^{\circ}10' = ?$ $\log \cos 54^{\circ}10' = ?$

Et leida koosinusfunktsiooni väärtus, selleks tuleb üle minna täiendusnurga siinusele, s. o.

$$\cos 54^{\circ}10' = \sin (90^{\circ} - 54^{\circ}10') = \sin 35^{\circ}50',$$

mille leiame eelmises näites kirjeldatud viisil. Seega

$$\cos 54^{\circ}10' = \sin 35^{\circ}50' = 0,585.$$

Selle koosinuse logaritmi leiame, kui viime niidi D-585 peale, mille kohal niidi all L-skaalal on 767. Seega

$$\log \cos 54^{\circ}10' = \log \sin 35^{\circ}50' = \bar{1},767.$$

Näide 3. $\sin \alpha = 0,219$; $\alpha = ?$

Paigutame C-219 D-10 kohale, keerame arvutuslükati ümber ja loeme paremal pool ülal asuva S-indeksi kohalt S-skaalal kraadide ja minutite arvu $12^{\circ}40'$. Seega

$$\alpha = 12^{\circ}40'.$$

Näide 4. $\cos \alpha = 0,256$; $\alpha = ?$

Kui paigutame C-256 D-10 kohale ja keerame arvutuslükati ümber, siis näeme, et paremal pool ülal asuva S-indeksi kohal S-skaalal on $14^{\circ}50'$. Võttes täiendusnurga, saame

$$\alpha = 90^{\circ} - 14^{\circ}50' = 75^{\circ}10'.$$

Harjutusi:

1) $\sin 10^{\circ} = ?$ 10) $\cos 72^{\circ}50' = ?$

2) $\sin 55^{\circ} = ?$ 11) $\cos 23^{\circ}30' = ?$

3) $\sin 80^{\circ} = ?$ 12) $\cos 51^{\circ}45' = ?$

4) $\cos 75^{\circ} = ?$ 13) $\sin 8^{\circ}25' = ?$

5) $\cos 83^{\circ} = ?$ 14) $\sin 28^{\circ}15' = ?$

6) $\cos 14^{\circ} = ?$ 15) $\sin 83^{\circ}13' = ?$

7) $\sin 16^{\circ}30' = ?$ 16) $\cos 78^{\circ}23' = ?$

8) $\sin 42^{\circ}30' = ?$ 17) $\cos 84^{\circ}07' = ?$

9) $\sin 68^{\circ}30' = ?$ 18) $\cos 47^{\circ}38' = ?$

19) $\sin \alpha = 0,142$; $\alpha = ?$

20) $\sin \alpha = 0,315$; $\alpha = ?$

21) $\sin \alpha = 0,475$; $\alpha = ?$

22) $\cos \alpha = 0,670$; $\alpha = ?$

23) $\cos \alpha = 0,245$; $\alpha = ?$

24) $\cos \alpha = 0,158$; $\alpha = ?$

[Vastused: 1) 0,174. 2) 0,819. 3) 0,985. 4) 0,259.
5) 0,122. 6) 0,970. 7) 0,284. 8) 0,676. 9) 0,930. 10) 0,295.
11) 0,917. 12) 0,619. 13) 0,146. 14) 0,473. 15) 0,993.
16) 0,201. 17) 0,1025. 18) 0,674. 19) $8^{\circ}10'$. 20) $18^{\circ}22'$.
21) $28^{\circ}20'$. 22) $48^{\circ}00'$. 23) $75^{\circ}50'$. 24) $80^{\circ}55'$.]

Näide 5. $\tan 22^{\circ}30' = ?$

Siin kraadide arv on väiksem 45-st. Lükame arvutuslükati keele vasakule ja paigutame T- $22^{\circ}30'$ T-indeksi kohale. Keerame lükati ümber ja loeme C-skaalal D-1 kohalt tangensi väärtuse. D-1 kohal C-skaalal on 414. Seda nullkohaliseks arvuks lugedes saame otsitava tangensi väärtuseks 0,414. Seega

$$\tan 22^{\circ}30' = 0,414.$$

Näide 6. $\cot 83^{\circ} = ?$

Et siin kraadide arv on suurem 45-st, siis selle kootangensi väärtuse leiame täiendusnurga tangensi kaudu (eelmise näite kohaselt), s. o.

$$\cot 83^{\circ} = \tan (90^{\circ} - 83^{\circ}) = \tan 7^{\circ} = 0,1228.$$

Näide 7. $\tan \alpha = 0,135$; $\alpha = ?$

Paigutame C-135 D-1 kohale, keerame arvutuslükati ümber ja loeme T-indeksi kohalt T-skaalal kraadide ja minutite arvu, s. o.

$$\alpha = 7^{\circ}41'.$$

Harjutusi:

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| 1) $\tan 9^{\circ} = ?$ | 7) $\tan 7^{\circ}45' = ?$ |
| 2) $\tan 15^{\circ} = ?$ | 8) $\tan 21^{\circ}20' = ?$ |
| 3) $\tan 44^{\circ} = ?$ | 9) $\tan 43^{\circ}15' = ?$ |
| 4) $\cot 52^{\circ} = ?$ | 10) $\cot 47^{\circ}30' = ?$ |
| 5) $\cot 77^{\circ} = ?$ | 11) $\cot 63^{\circ}10' = ?$ |
| 6) $\cot 82^{\circ} = ?$ | 12) $\cot 80^{\circ}45' = ?$ |

$$13) \tan \alpha = 0,625; \alpha = ?$$

$$14) \tan \alpha = 0,805; \alpha = ?$$

$$15) \tan \alpha = 0,144; \alpha = ?$$

$$16) \cot \alpha = 0,880; \alpha = ?$$

$$17) \cot \alpha = 0,125; \alpha = ?$$

$$18) \cot \alpha = 0,201; \alpha = ?$$

[Vastused: 1) 0,1584. 2) 0,268. 3) 0,966. 4) 0,781.
5) 0,231. 6) 0,1405. 7) 0,1361. 8) 0,391. 9) 0,941. 10) 0,916.
11) 0,506. 12) 0,1629. 13) $32^{\circ}00'$. 14) $38^{\circ}50'$. 15) $8^{\circ}12'$.
16) $48^{\circ}40'$. 17) $82^{\circ}53'$. 18) $78^{\circ}38'$.]

Näide 8. $\sin 1^{\circ}15' = ?$

Et siin nurk on väiksem kui $5^{\circ}44'$, siis tuleb $1^{\circ}15'$ otsida S & T-skaalal. Lükkame arvutuslükati keele paremale ja paigutame S & T- $1^{\circ}15'$ all asuva S & T-indeksi kohale. Keerame lükati ümber ja loeme C-skaalal D-10 kohalt selle siinuse väärtuse. D-10 kohal C-skaalal on 218. Seda -1 -kohaliseks arvuks lugedes, saame otsitava siinuse loomuliku väärtuse 0,0218. Seega

$$\sin 1^{\circ}15' = 0,0218.$$

Sama väärtuse omab ka $\tan 1^{\circ}15'$.

Et leida $\log \sin 1^{\circ}15'$ või $\log \tan 1^{\circ}15'$, selleks viime niidi leitud loomuliku väärtuse, s. o. D-218, peale ja võtame niidi alt L-skaalal logaritmi murdosa 339, saame

$$\log \sin 1^{\circ}15' = \log \tan 1^{\circ}15' = \bar{2},339.$$

Näide 9. $\tan \alpha = 0,0515$; $\alpha = ?$

Paigutame C-515 D-10 kohale, keerame arvutuslükati ümber ja loeme S & T-indeksi kohalt S & T-skaalal kraadide ja minutite arvu, s. o.

$$\alpha = 2^{\circ}57'.$$

Harjutusi:

1) $\sin 3^{\circ}10' = ?$

7) $\tan 0^{\circ}54' = ?$

2) $\sin 3^{\circ}25' = ?$

8) $\cos 88^{\circ}17' = ?$

3) $\sin 1^{\circ}55' = ?$

9) $\cos 89^{\circ}21' = ?$

4) $\sin 0^{\circ}42' = ?$

10) $\cot 86^{\circ}49' = ?$

5) $\tan 2^{\circ}05' = ?$

11) $\cot 87^{\circ}54' = ?$

6) $\tan 2^{\circ}44' = ?$

12) $\cot 89^{\circ}23' = ?$

13) $\sin \alpha = 0,0445$; $\alpha = ?$

14) $\tan \alpha = 0,0221$; $\alpha = ?$

15) $\cos \alpha = 0,0712$; $\alpha = ?$

16) $\cot \alpha = 0,0809$; $\alpha = ?$

[Vastused: 1) 0,0552. 2) 0,0596. 3) 0,0334. 4) 0,01222. 5) 0,0364. 6) 0,0477. 7) 0,01571. 8) 0,0300. 9) 0,01135. 10) 0,0556. 11) 0,0367. 12) 0,01076. 13) $2^{\circ}33'$. 14) $1^{\circ}16'$. 15) $85^{\circ}55'$. 16) $85^{\circ}22'$.]

§ 16. Trigonomeetrilisi arvutusi.

Käesolevas paragrahvis käsitleme (peamiselt näidete varal) tehteid arvude ja trigonomeetriliste funktsioonidega ning trigonomeetriliste funktsioonide säärase väärtuste leidmist, mis pole otseselt loetavad arvutuslükatilt.

N ä i d e 1. $\frac{1}{\sin 15^{\circ}} = ?$

Paigutame S-15^o arvutuslükati S-indeksi kohale. Keerame lükati ümber ja loeme $\frac{1}{\sin 15^{\circ}}$ väärtuse (kui jagatise, mille kohtade arv on 1 — 0 = 1) D-skaalal C-1 kohalt. Saame

$$\frac{1}{\sin 15^{\circ}} = 3,86.$$

N ä i d e 2. $\frac{1}{\tan 24^{\circ}} = ?$

Paigutades T-24^o T-indeksi kohale, on jagatise $\frac{1}{\tan 24^{\circ}}$ väärtus D-skaalal C-10 kohal, s. o.

$$\frac{1}{\tan 24^{\circ}} = 2,245.$$

N ä i d e 3. $\frac{1}{\sin 1^{\circ}20' } = ?$

Siin paigutame S & T-1^o20' S & T-indeksi kohale. Jagatise $\frac{1}{\sin 1^{\circ}20' }$ väärtus on D-skaalal C-1 kohal, kuid 10 korda suurendatult, sest jagatise kohtade arv on siin 1 — (—1) = 2, s. o.

$$\frac{1}{\sin 1^{\circ}20' } = 42,9.$$

Samaselt arvutades leiame, et ka

$$\frac{1}{\tan 1^{\circ}20' } = 42,9.$$

Harjutusi:

$$1) \frac{1}{\sin 43^\circ} = ?$$

$$5) \frac{1}{\tan 33^\circ 10'} = ?$$

$$2) \frac{1}{\sin 16^\circ 40'} = ?$$

$$6) \frac{1}{\tan 7^\circ 14'} = ?$$

$$3) \frac{1}{\tan 27^\circ} = ?$$

$$7) \frac{1}{\sin 51'} = ?$$

$$4) \frac{1}{\sin 8^\circ 42'} = ?$$

$$8) \frac{1}{\tan 2^\circ 13'} = ?$$

[Vastused: 1) 1,466. 2) 3,49. 3) 1,963. 4) 6,61.
5) 1,530. 6) 7,88. 7) 67,4. 8) 25,8.]

Näide 4. $\tan 64^\circ = ?$

Kui tangensfunktsiooni puhul nurk on suurem 45° -st (kuid ühtlasi väiksem kui $90^\circ - 34,4' = 89^\circ 25,6'$), siis rakendame tangensi väärtuse leidmiseks valemi

$$\tan \alpha = \cot (90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan (90^\circ - \alpha)}.$$

Tähendab, et leida $\tan 64^\circ$ väärtust, tuleb selle asemel võtta $\frac{1}{\tan 26^\circ}$ ja toimetada arvutamist eespool esineva näite 2 kohaselt.

Saame

$$\tan 64^\circ = \frac{1}{\tan 26^\circ} = 2,05.$$

Näide 5. $\tan 88^\circ 55' = ?$

Siin võtame

$$\tan 88^\circ 55' = \frac{1}{\tan 1^\circ 05'}$$

ja toimetame arvutamist näite 3 kohaselt, saame

$$\tan 88^\circ 55' = \frac{1}{\tan 1^\circ 05'} = 52,8.$$

Näide 6. $\cot 19^\circ = ?$

Kui kootangensfunktsiooni puhul nurk on väiksem 45° -st (kuid ühtlasi suurem kui $34,4'$), siis rakendame kootangensi väärtuse leidmiseks valemi

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Et leida $\cot 19^\circ$ väärtust, selleks võtame ta asemel $\frac{1}{\tan 19^\circ}$ ja toimetame arvutamist näite 2 kohaselt. Saame

$$\cot 19^\circ = \frac{1}{\tan 19^\circ} = 2,90.$$

Näide 7. $\tan \alpha = 3,12$; $\alpha = ?$

Paigutades C-10 D-312 kohale, on T-indeksi kohal $17^\circ 45'$.
Seega

$$\alpha = 90^\circ - 17^\circ 45' = 72^\circ 15'.$$

Näide 8. $\tan \alpha = 31,2$; $\alpha = ?$

Paigutades C-1 D-312 kohale, on S & T-indeksi kohal $1^\circ 50'$.
Seega

$$\alpha = 90^\circ - 1^\circ 50' = 88^\circ 10'.$$

Harjutusi:

1) $\tan 50^\circ = ?$ 6) $\cot 42^\circ 25' = ?$

2) $\tan 63^\circ 40' = ?$ 7) $\tan 87^\circ 20' = ?$

3) $\tan 70^\circ 15' = ?$ 8) $\cot 1^\circ 55' = ?$

4) $\cot 15^\circ = ?$ 9) $\cot 0^\circ 48' = ?$

5) $\cot 21^\circ 40' = ?$ 10) $\tan 89^\circ 24' = ?$

11) $\tan \alpha = 1,56$; $\alpha = ?$

12) $\tan \alpha = 7,77$; $\alpha = ?$

13) $\tan \alpha = 16,35$; $\alpha = ?$

14) $\tan \alpha = 57,3$; $\alpha = ?$

15) $\cot \alpha = 3,27$; $\alpha = ?$

16) $\cot \alpha = 0,328$; $\alpha = ?$

[Vastused: 1) 1,192. 2) 2,02. 3) 2,79. 4) 3,73. 5) 2,52.
6) 1,095. 7) 21,5. 8) 29,9. 9) 71,6. 10) 95,5. 11) $57^\circ 20'$.
12) $82^\circ 40'$. 13) $86^\circ 30'$. 14) 89° . 15) 17° . 16) $71^\circ 50'$.]

Näide 9. $3,98 \cdot \sin 21^\circ 40' = ?$

Paigutades S- $21^\circ 40'$ S-indeksi kohale ja viies niidi D-398 peale, on otsitav korrutis (+1-kohalise arvuna) C-skaalal niidi all, s. o.

$$3,98 \cdot \sin 21^\circ 40' = 1,469.$$

Näide 10. $\frac{2,28}{\sin 2^{\circ}15'} = ?$

Paigutades S & T- $2^{\circ}15'$ S & T-indeksi kohale, on jagatise $\frac{1}{\sin 2^{\circ}15'}$ (+2-kohaline) väärtus D-skaalal C-1 kohal, mille korrutamiseks 2,28-ga viime niidi C-228 peale, kus nüüd niidi alt D-skaalal loeme korrutamise juhise kohaselt +3-kohalise arvu 580. Seega

$$\frac{2,28}{\sin 2^{\circ}15'} = 580.$$

Näide 11. $\frac{60,5}{\tan 38^{\circ}20'} = ?$

Paigutades T- $38^{\circ}20'$ T-indeksi kohale, on jagatise $\frac{1}{\tan 38^{\circ}20'}$, (+1-kohaline) väärtus D-skaalal C-10 kohal, mille korrutamiseks 60,5-ga viime niidi C-10 kohale ja C-1 niidi alla ning siis viime niidi C-605 peale, kus nüüd niidi alt D-skaalal loeme +2-kohalise arvu 76,5, sest et siin tuli korrutamisel arvestada tähist P — 1. Tähendab,

$$\frac{60,5}{\tan 38^{\circ}20'} = 76,5.$$

Märkus. Arvu korrutamist ja jagamist siinus- ja tangens-funktsiooniga võime toimetada ka sääraselt, et keerame arvutuskäik keele ümber, nii et S-skaala jääks vastu A-skaalat ja T-skaala jääks vastu D-skaalat. Sel juhul nii korrutamisel kui ka jagamisel C-skaala asendub kas S-skaalaga või T-skaalaga või S & T-skaalaga.

Viimase näite

$$\frac{60,5}{\tan 38^{\circ}20'} = x$$

puhul (keerates arvutuskäik keele ümber) asendame jagamisel C-skaala T-skaalaga: viime niidi D-605 peale ja paigutame T- $38^{\circ}20'$ niidi alla, siis T-skaala parempoolse otsa (T- 45°) kohal D-skaalal on 765, mida tuleb lugeda +2-kohaliseks arvuks 76,5, sest käesoleval juhul jagamise juhise kohaselt on

jagatise kohtade arv võrdne jagatava ja jagaja kohtade vahega, s. o. $2 - 0 = 2$. Või kujutades viimase näite võrdena

$$\frac{60,5}{\tan 38^{\circ}20'} = \frac{x}{\tan 45^{\circ}}$$

näeme, et x peab olema $+2$ -kohaline arv.

Harjutusi:

1) $1,46 \cdot \sin 56^{\circ}30' = ?$

2) $0,16 \cdot \tan 22^{\circ}20' = ?$

3) $52 \cdot \sin 1^{\circ}55' = ?$

4) $3,05 \cdot \cos 63^{\circ}20' = ?$

5) $4,45 \cdot \cot 81^{\circ}15' = ?$

6) $1,46 \cdot \tan 56^{\circ}30' = ?$

7) $\frac{10}{\sin 15^{\circ}15'} = ?$

8) $\frac{1,25}{\sin 18^{\circ}15'} = ?$

9) $\frac{51,4}{\sin 45^{\circ}30'} = ?$

10) $\frac{634}{\sin 71^{\circ}} = ?$

11) $\frac{100}{\tan 18^{\circ}45'} = ?$

12) $\frac{13,9}{\tan 41^{\circ}} = ?$

13) $\frac{2,86}{\tan 40^{\circ}32'} = ?$

14) $\frac{3}{\cos 72^{\circ}} = ?$

15) $\frac{5}{\cot 75^{\circ}} = ?$

16) $\frac{0,706}{\tan 29^{\circ}05'} = ?$

17) $\frac{3,62}{\sin 3^{\circ}11'} = ?$

18) $\frac{0,101}{\tan 1^{\circ}33'} = ?$

[Vastused: 1) 1,217. 2) 0,0657. 3) 0,1740. 4) 0,1369. 5) 0,685. 6) 0,0221. 7) 38,0. 8) 3,99. 9) 72,1. 10) 671. 11) 295. 12) 15,99. 13) 3,34. 14) 9,71. 15) 18,66. 16) 1,269. 17) 65,2. 18) 3,73.]

Näide 12. Leida nurgad α_1 , α_2 , α_3 ja α_4 , kui

$$\frac{\sin 15^{\circ}}{2,4} = \frac{\sin \alpha_1}{3,8} = \frac{\sin \alpha_2}{5,2} = \frac{\sin \alpha_3}{7,3} = \frac{\sin \alpha_4}{8,1}$$

Võrrete arvutamiseks, kui neis esinevad trigonomeetrilised funktsioonid, keerame arvutuslükati keele ümber, nii et S-skaala jääb vastu A-skaalat ja T-skaala jääb vastu D-skaalat. Käesoleva näite puhul viime niidi D-2,4 peale ja lükkame S-15° niidi alla. Edasi viime niidi järk-järgult D-3,8, D-5,2, D-7,3 ja

D-8,1 peale ja loeme iga kord niidi alt S-skaalal vastavad kraadide ja minutite väärtused, s. o.

$$\alpha_1 = 24^{\circ}10', \quad \alpha_2 = 34^{\circ}10', \quad \alpha_3 = 52^{\circ}, \quad \alpha_4 = 61^{\circ}.$$

Näide 13. Leida nurgad $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ja β_5 , kui

$$\frac{0,32}{\tan 22^{\circ}} = \frac{0,26}{\tan \beta_1} = \frac{0,16}{\tan \beta_2} = \frac{0,12}{\tan \beta_3} = \frac{0,058}{\tan \beta_4} = \frac{0,032}{\tan \beta_5}.$$

Et siin esimese, teise, kolmanda ja neljanda murru lugejad on ühe ja sama kohalised (0-kohalised) ja esimese murru nimetajas esinev 22° kuulub T-skaalale, siis tuleb ka β_1, β_2 ja β_3 otsida T-skaalalt. Kuid β_4 ja β_5 tuleb otsida S & T-skaalalt, sest viimase kahe murru lugejad (kui -1 -kohalised) on ühe koha võrra väiksemad kui eelmiste murdude lugejad. Tähendab, viime niidi D-32 peale ja lükkame T- 22° niidi alla; siis viime niidi järk-järgult D-26, D-16 ja D-12 peale ning loeme iga kord niidi alt T-skaalal: $18^{\circ}10', 11^{\circ}25'$ ja $8^{\circ}36'$. Edasi viime niidi D-58 ja siis D-32 peale ning loeme niidi alt S & T-skaalal: $4^{\circ}12'$ ja $2^{\circ}19'$. Seega

$$\beta_1 = 18^{\circ}10', \quad \beta_2 = 11^{\circ}25', \quad \beta_3 = 8^{\circ}36', \quad \beta_4 = 4^{\circ}12', \quad \beta_5 = 2^{\circ}19'.$$

Harjutusi:

- 1) $\frac{\sin 30^{\circ}}{0,7} = \frac{\sin \alpha}{5}$; leida α .
- 2) $\frac{\sin 50^{\circ}}{3} = \frac{\sin \alpha_1}{2} = \frac{\sin \alpha_2}{0,5} = \frac{\sin \alpha_3}{0,12}$; leida α_1, α_2 ja α_3 .
- 3) $\frac{\tan 6^{\circ}55'}{1,77} = \frac{\tan \alpha_1}{2,42} = \frac{\tan \alpha_2}{3,98} = \frac{\tan \alpha_3}{0,242}$; leida α_1, α_2 ja α_3 .
- 4) $\frac{\tan 20^{\circ}}{21,8} = \frac{\tan 15^{\circ}}{y_1} = \frac{\tan 9^{\circ}}{y_2} = \frac{\tan 2^{\circ}}{y_3}$; leida y_1, y_2 ja y_3 .
- 5) $\frac{56}{\sin \alpha} = \frac{8,1}{\tan 5^{\circ}}$; leida α .
- 6) $\frac{3,5}{\sin 15^{\circ}} = \frac{4,4}{\sin \beta_1} = \frac{5,6}{\tan \beta_2} = \frac{6,1}{\cos \beta_3}$; leida β_1, β_2 ja β_3 .

[Vastused: 1) $\alpha = 20^{\circ}55'$. 2) $\alpha_1 = 30^{\circ}44', \alpha_2 = 7^{\circ}20', \alpha_3 = 1^{\circ}45'$. 3) $\alpha_1 = 9^{\circ}25', \alpha_2 = 15^{\circ}18', \alpha_3 = 57'$. 4) $y_1 = 16,05,$

$y_2 = 9,48$, $y_3 = 2,09$. 5) $\alpha = 37^\circ 10'$. 6) $\beta_1 = 19^\circ$, $\beta_2 = 22^\circ 30'$,
 $\beta_3 = 63^\circ 10'$.]

Näide 14. $6,25 \cdot \sin^2 28^\circ 40' = ?$

I lahendamisviis. Paigutame arvutuslükati keele endist moodi, nii et trigonomeetrilised skaalad jääksid allapoole (tagaküljele). Lükates nüüd S- $28^\circ 40'$ S-indeksi kohale, on siinuse ruudu 0-kohaline väärtus B-skaalal A-100 kohal, mille korrutamiseks 6,25-ga viime niidi A-625 peale ja loeme niidi alt B-skaalal otsitava korrutise 1440, mis tuleb korrutamise juhiste kohaselt lugeda +1-kohaliseks arvuks, s. o.

$$6,25 \cdot \sin^2 28^\circ 40' = 1,440.$$

II lahendamisviis. Keerame arvutuslükati keele ümber, nii et trigonomeetrilised skaalad jääksid ülespoole (esiküljele). Kujutades käesolevat näidet võrdena

$$\frac{6,25}{\sin^2 90^\circ} = \frac{x}{\sin^2 28^\circ 40'}$$

ehk

$$\frac{\sqrt{6,25}}{\sin 90^\circ} = \frac{\sqrt{x}}{\sin 28^\circ 40'}$$

paigutame S- 90° A-6,25 kohale ja viime niidi S- $28^\circ 40'$ peale, kus nüüd niidi all A-skaalal on otsitav x -i väärtus, s. o.

$$x = 1,440.$$

Näide 15. $\frac{0,325}{\tan^2 17^\circ 10'} = ?$

I lahendamisviis. Paigutades T- $17^\circ 10'$ T-indeksi kohale, on tangensi ruudu -1-kohaline väärtus B-skaalal A-1 kohal, millega jagades arvu 0,325 viime niidi B-325 kohale ja loeme niidi alt A-skaalal otsitava jagatise 340, mis tuleb jagamise juhiste kohaselt lugeda +1-kohaliseks arvuks, s. o.

$$\frac{0,325}{\tan^2 17^\circ 10'} = 3,40.$$

II lahendamisviis. Kujutades esitatud näidet võrdena

$$\frac{0,325}{\tan^2 17^\circ 10'} = \frac{x}{\tan^2 45^\circ}$$

ehk

$$\frac{\sqrt{0,325}}{\tan 17^{\circ}10'} = \frac{\sqrt{x}}{\tan 45^{\circ}},$$

viime ümberkeeratud keele puhul niidi A-32'5 peale ja T-17°10' niidi alla ning loeme x -i väärtuse T-skaala vasakpoolse otsa (T-5°43') kohalt A-skaalal, s. o.

$$x = 3,40.$$

Harjutusi:

1) $1,72 \cdot \sin^2 31^{\circ}20' = ?$

2) $0,415 \cdot \tan^2 27^{\circ}50' = ?$

3) $3,14 \cdot \sin^2 2^{\circ}15' = ?$

4) $321 \cdot \tan^2 52' = ?$

5) $11,8 \cdot \cos^2 54^{\circ}30' = ?$

6) $222 \cdot \cot^2 78^{\circ}40' = ?$

7) $\frac{0,325}{\sin^2 14^{\circ}20'} = ?$

8) $\frac{1,96}{\tan^2 22^{\circ}15'} = ?$

9) $\frac{0,0208}{\sin^2 1^{\circ}52'} = ?$

10) $\frac{0,121}{\cos^2 61^{\circ}20'} = ?$

11) $\frac{0,755}{\cot^2 81^{\circ}10'} = ?$

12) $\frac{43,2}{\cot^2 9^{\circ}50'} = ?$

[Vastused: 1) 0,465. 2) 0,116. 3) 0,00484. 4) 0,0735. 5) 3,98. 6) 8,92. 7) 5,30. 8) 11,70. 9) 19,6. 10) 5,26. 11) 31,3. 12) 1,30.]

§ 17. Kolmnurkade lahendamine.

1. Täisnurkse kolmnurga lahendamisel, s. o. ta otsitavate külgede ja nurkade leidmisel, võib esineda üldiselt neli juhtu, mida määravad kolmnurga antud elemendid:

1) üks kaatet ja hüpotenuus,

2) kaks kaatetit,

3) üks kaatet ja teravnurk,

4) hüpotenuus ja teravnurk,

millede puhul kolmnurkade lahendamist arvutuslükati abil selgitavad alljärgnevad näited.

Näide 1. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet $a = 0,345$ dm ja hüpotenuus $c = 0,585$ dm. Leida kolmnurga nurgad α ja β ning teine kaatet b .

I lahendamisviis. Et täisnurkses kolmnurgas kaateti ja hüpotenuusi suhe määrab sellele kaatetile vastasnurga siinuse, s. o.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{0,345}{0,585},$$

siis nurga α leidmiseks paigutame niidi D-585 peale ja viime C-345 niidi alla, kusjuures nüüd jagatis (kui 0-kohaline siinuse väärtus) on D-10 kohal C-skaalal, millele (arvutuslükatit ümber keerates) vastab S-indeksi kohal $36^{\circ}08'$. Seega

$$\alpha = 36^{\circ}08'$$

ja

$$\beta = 90^{\circ} - 36^{\circ}08' = 53^{\circ}52'.$$

Et täisnurkses kolmnurgas kaatet on võrdne hüpotenuusi ja vastasnurga siinuse korrutisega, siis teise kaateti b leiame valemi

$$b = c \sin \beta = 0,585 \cdot \sin 53^{\circ}52'$$

järgi. Paigutame S- $53^{\circ}52'$ S-indeksi kohale, kus nüüd 0-kohaline siinuse väärtus on C-skaalal D-10 kohal, mille korrutamiseks 0,585-ga viime niidi D-585 peale ja loeme niidi alt C-skaalal 472, mis tuleb korrutamise juhiste kohaselt võtta 0-kohalise arvuna, s. o.

$$b = 0,472 \text{ dm.}$$

II lahendamisviis. Keerame arvutuslükatit keele ümber, nii et S-skaala jääb vastu A-skaalat ja T-skaala jääb vastu D-skaalat. Nurga α leidmiseks paigutame niidi D-585 peale, lükkame S-skaala parempoolse otsa (S- 90°) niidi alla ja viime niidi D-345 peale, kus nüüd niidi all S-skaalal on nurga α väärtus, s. o.

$$\alpha = 36^{\circ}08',$$

ning seega

$$\beta = 90^{\circ} - 36^{\circ}08' = 53^{\circ}52'.$$

Viies niidi edasi S-53⁰52' peale, on teise kaateti b (0-kohaline) väärtus D-skaalal niidi all, s. o.

$$b = 0,472 \text{ dm.}$$

Märkus. Kui käesolevas näites oleks kaatet $a = 0,0345$ dm ja hüpotenuus $c = 0,585$ dm, siis sin a loomulik väärtus oleks 10 korda väiksem kui $a = 0,345$ dm puhul, ning seega oleks ta -1-kohaline arv, mille puhul nurga α väärtus tuleb lugeda niidi alt S & T-skaalal, s. o. $\alpha = 3^{\circ}23'$, ning seega $\beta = 86^{\circ}37'$. Viies nüüd niidi S-86⁰37' peale, on niidi all D-skaalal $b = 0,583$ dm.

Näide 2. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on $a = 8,15$ cm ja $b = 13,65$ cm. Leida kolmnurga nurgad α ja β ning hüpotenuus c .

I lahendamisviis. Täisnurkses kolmnurgas nurga tangens on võrdne vastaskaateti ja lähiskaateti suhtega, s. o.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \text{ ja } \tan \beta = \frac{b}{a},$$

milledest võtame selle nurga tangensi, mis on väiksem ühest, et otseselt leida nurk T-skaalalt (või S & T-skaalalt). Et siin a on väiksem b -st, siis võtame

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{8,15}{13,65}.$$

Nurga α leidmiseks paigutame niidi D-1365 peale ja viime C-815 niidi alla, kus jagatis (kui 0-kohaline tangensi väärtus) on D-1 kohal C-skaalal, millele vastab T-indeksi kohal 30⁰50'. Seega

$$\alpha = 30^{\circ}50'$$

ja

$$\beta = 90^{\circ} - 30^{\circ}50' = 59^{\circ}10'.$$

Hüpotenuusi c leiame valemi

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{8,15}{\sin 30^{\circ}50'}$$

järgi. Paigutades S-30⁰50' S-indeksi kohale, on jagatise $\frac{1}{\sin 30^{\circ}50'}$ (+1-kohaline) väärtus D-skaalal C-1 kohal, kuhu

asetame ka niidi; selle korrutamiseks 8,15-ga lükkame C-10 niidi kohale ja viime siis niidi C-815 peale, kus nüüd niidi alt D-skaalal loeme hüpotenuusi c (+2-kohalise) väärtuse, s. o.

$$c = 15,90 \text{ cm.}$$

II lahendamisviis. Ümberkeeratud keele puhul (arvestades eelmises lahendamisviisis esinevaid valemeid) nurga α leidmiseks paigutame T-skaala vasakpoolse otsa (T-5⁰43') D-1365 kohale ja viime niidi D-815 peale, kus nüüd niidi alt T-skaalal loeme nurga α väärtuse, s. o.

$$\alpha = 30^{\circ}50',$$

ning seega

$$\beta = 90^{\circ} - 30^{\circ}50' = 59^{\circ}10'.$$

Hüpotenuusi c leidmiseks toome S-30⁰50' niidi alla ja loeme c (+2-kohalise) väärtuse S-skaala vasakpoolse otsa (S-5⁰44') kohalt D-skaalal, s. o.

$$c = 15,90 \text{ cm.}$$

Näide 3. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet $a = 34,2$ cm ja vastasnurk $\alpha = 37^{\circ}30'$. Leida teine kaatet b ja hüpotenuus c . Teine terav nurk on siin

$$\beta = 90^{\circ} - 37^{\circ}30' = 52^{\circ}30'.$$

Kaatet b on võrdne kaateti a ja nurga β tangensi korrutisega, s. o.

$$b = a \cdot \tan \beta = 34,2 \cdot \tan 52^{\circ}30' = \frac{34,2}{\tan 37^{\circ}30'}.$$

Paigutades T-37⁰30' T-indeksi kohale, on jagatise $\frac{1}{\tan 37^{\circ}30'}$ (+1-kohaline) väärtus D-skaalal C-10 kohal, mille korrutamiseks 34,2-ga viime niidi C-10 kohale ja C-1 niidi alla ning siis viime niidi C-342 peale, kus nüüd niidi alt D-skaalal loeme 445, mis on kaateti b väärtus +2-kohalise arvuna, s. o.

$$b = 44,5 \text{ cm.}$$

Hüpoteenuusi c leiame valemi

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{34,2}{\sin 37^{\circ}30'}$$

järgi analoogiliselt eelmises näites esineva käsitusviisi kohaselt, saame

$$c = 56,2 \text{ cm.}$$

II lahendamisviis. Ümberkeeratud keele puhul viime niidi D-342 peale ja lükkame T-37°30' niidi alla, kus nüüd T-skaala parempoolse otsa (T-45°) kohal D-skaalal on kaateti b (+2-kohaline) väärtus, s. o.

$$b = 44,5 \text{ cm.}$$

Hüpoteenuusi c leidmiseks toome S-37°30' niidi alla ja loeme c (+2-kohalise) väärtuse S-skaala parempoolse otsa (S-90°) kohalt D-skaalal, s. o.

$$c = 56,2 \text{ cm.}$$

Näide 4. Täisnurkses kolmnurgas hüpoteenus $c = 485$ mm ja nurk $\alpha = 70^{\circ}$. Leida kaatetid a ja b .

Nurk β on siin

$$\beta = 90^{\circ} - 70^{\circ} = 20^{\circ}.$$

Kaatetid a ja b leiame valemite

$$a = c \sin \alpha = 485 \cdot \sin 70^{\circ},$$

$$b = c \sin \beta = 485 \cdot \sin 20^{\circ}$$

järgi analoogiliselt näites I esineva käsitusviisi kohaselt. Saame

$$a = 456 \text{ mm, } b = 166 \text{ mm.}$$

II lahendamisviis. Ümberkeeratud keele puhul viime niidi D-485 peale ja lükkame S-skaala parempoolse otsa (S-90°) niidi alla. Siis viime niidi järgemööda S-70° ja S-20° peale ning loeme niidi alt vastavalt kaatetite a ja b (+3-kohalised) väärtused, s. o.

$$a = 456 \text{ mm, } b = 166 \text{ mm.}$$

Harjutusi: Täisnurkses kolmnurgas:

- 1) $a = 15,8$ cm, $c = 21,4$ cm; $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $b = ?$
- 2) $b = 0,525$ dm, $c = 0,765$ dm; $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $a = ?$
- 3) $a = 3,02$ cm, $b = 4,16$ cm; $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $c = ?$
- 4) $a = 8,05$ cm, $b = 6,65$ cm; $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $c = ?$
- 5) $a = 6,45$ cm, $\alpha = 33^{\circ}30'$; $b = ?$ $c = ?$
- 6) $b = 11,1$ cm, $\alpha = 43^{\circ}50'$; $a = ?$ $c = ?$
- 7) $c = 0,745$ dm, $\beta = 27^{\circ}20'$; $a = ?$ $b = ?$

[Vastused:

- 1) $\alpha = 47^{\circ}35'$, $\beta = 42^{\circ}25'$, $b = 14,43$ cm.
- 2) $\alpha = 46^{\circ}40'$, $\beta = 43^{\circ}20'$, $a = 0,556$ dm.
- 3) $\alpha = 35^{\circ}59'$, $\beta = 54^{\circ}01'$, $c = 5,14$ cm.
- 4) $\alpha = 50^{\circ}27'$, $\beta = 39^{\circ}33'$, $c = 10,44$ cm.
- 5) $b = 9,74$ cm, $c = 11,68$ cm.
- 6) $a = 10,66$ cm, $c = 15,39$ cm.
- 7) $a = 0,662$ dm, $b = 0,342$ dm.]

2. Vaatleme üldkolmnurga lahendamist arvutuslükati abil, kui kolmnurga küljed on üldiselt a , b ja c ning neile külgedele vastasnurgad α , β ja γ . Üldkolmnurga lahendamisel saame üles seada samuti neli juhtu, mida määravad kolmnurga kolm antud elementi, millede hulgas on vähemalt üks külge, s. o.

- 1) üks külge ja kaks nurka,
- 2) kaks külge ja ühele antud küljele vastasnurk,
- 3) kaks külge ja nende vaheline nurk,
- 4) kolm külge.

Esimese ja teise juhu puhul arvutuslükati abil kolmnurka lahendades kasutame siinusvalemit

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

kolmanda juhu puhul tangensvalemit

$$\frac{a+b}{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a-b}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

ja neljanda juhu puhul poolnurga valemit

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

kus p on kolmnurga pool perimeetrit, s. o.

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Kolmnurkade lahendamiseks siinus- ja tangensvalemid (kui võrre) abil keerame arvutuslükati keele ümber, nii et S-skaala jääb vastu A-skaalat ja T-skaala jääb vastu D-skaalat. Tähen- datud valemite rakendamist kolmnurkade lahendamisel arvutus- lükati abil selgitavad alljärgnevad näited.

Näide 5. Kolmnurga üks külge $a=17,1$ cm, nur- gad $\beta=45^\circ$ ja $\gamma=60^\circ$. Leida a , b ja c .

Siin

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

Küljed b ja c leiame siinusvalemid

$$\frac{17,1}{\sin 75^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$$

järgi. Selleks viime niidi D-171 peale ja paigutame S-75° niidi alla; viime niidi S-45° peale, kus niidi all D-skaalal on 125,4, ja viies edasi niidi S-60° peale, on niidi all D-skaalal 153,6. Et käsitletavas siinusvalemis esimese osa lugeja on +2-koha- line ja kõik nimetajad on 0-kohalised arvud, siis peavad ka b ja c olema +2-kohalised, s. o.

$$b = 12,54 \text{ cm}, \quad c = 15,36 \text{ cm}.$$

Näide 6. Kolmnurgas on antud: $a=2,82$ cm, $b=2,38$ cm ja $\alpha=25^\circ 40'$. Leida c , β ja γ .

Siinusvalemid järgi

$$\frac{2,82}{\sin 25^\circ 40'} = \frac{2,38}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Viime niidi D-282 peale ja lükkame S-25°40' niidi alla; viies nüüd niidi D-238 peale, on nurga β väärtus S-skaalal niidi all 21°30'. Seega

$$\beta = 21^\circ 30'.$$

Siis on nurk

$$\gamma = 180^\circ - (25^\circ 40' + 21^\circ 30') = 132^\circ 50'$$

ja

$$\sin 132^{\circ}50' = \sin (180^{\circ} - 132^{\circ}50') = \sin 47^{\circ}10'.$$

Viies nüüd niidi edasi S-47°10' peale, on niidi all D-skaalal 477, mis tuleb lugeda +1-kohaliseks arvuks, sest et siinusvalemi esimese osa lugeja on +1-kohaline ja kõik nimetajad on 0-kohalised. Tähendab,

$$c = 4,77 \text{ cm.}$$

Näide 7. Kolmnurgas on antud: $a = 56,5$ cm, $b = 74,5$ cm ja $\alpha = 42^{\circ}30'$. Leida c , β ja γ .

Et siin antud nurgale vastaskülge on lühem kui teine antud külge, siis seega on kolmnurgal kaks lahendit. Kasutades siinusvalemit

$$\frac{56,5}{\sin 42^{\circ}30'} = \frac{74,5}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

viime niidi D-565 peale ja lükkame S-42°30' niidi alla ning siis viime niidi D-745 peale, kus nüüd niidi all S-skaalal on 63°. Seega

$$\beta_1 = 63^{\circ}, \quad \beta_2 = 180^{\circ} - 63^{\circ} = 117^{\circ}$$

ja

$$\gamma_1 = 180^{\circ} - (42^{\circ}30' + 63^{\circ}) = 180^{\circ} - 105^{\circ}30' = 74^{\circ}30',$$

$$\gamma_2 = 180^{\circ} - (42^{\circ}30' + 117^{\circ}) = 180^{\circ} - 159^{\circ}30' = 20^{\circ}30'.$$

Külge c kaks väärtust leiame, kui viime niidi edasi S-74°30' peale ja siis S-20°30' peale, kus esimesel korral niidi all on 805 ja teisel korral 292, mis tuleb lugeda +2-kohalisteks arvudeks, s. o.

$$c_1 = 80,5 \text{ cm}, \quad c_2 = 29,2 \text{ cm.}$$

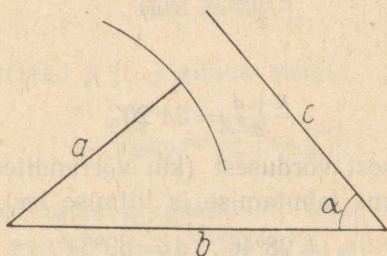
Näide 8. Kolmnurgas on antud: $a = 3$ cm, $b = 5$ cm ja $\alpha = 50^{\circ}$. Leida c , β ja γ .

Kasutades siinusvalemit

$$\frac{3}{\sin 50^{\circ}} = \frac{5}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

paigutame niidi D-3 kohale ja lükkame S-50° niidi alla. Viies nüüd niidi D-5 peale, näeme, et niit satub väljapoole S-skaalat. Sellest järeldub, et kolmnurgal pole lahendit, nagu nähtub

ka siinjuures toodud jooniselt 16, mis näitab, et külge a ei küüni küljeni c .



Joonis 16.

Näide 9. Kolmnurgas on antud: $a = 11,5$ cm, $b = 15,3$ cm ja $\gamma = 111^{\circ}20'$. Leida c , α ja β .

Et siin on antud kaks külge a ja b , kus a on väiksem b -st, ja nendevaheline nurk γ , siis kasutame kolmnurga lahendamiseks tangensvalemit järgmiselt:

$$\frac{b+a}{\tan \frac{\beta+\alpha}{2}} = \frac{b-a}{\tan \frac{\beta-\alpha}{2}},$$

s. o.

$$\frac{26,8}{\tan 34^{\circ}20'} = \frac{3,8}{\tan \frac{\beta-\alpha}{2}},$$

sest

$$b+a = 15,3 + 11,5 = 26,8,$$

$$b-a = 15,3 - 11,5 = 3,8,$$

$$\frac{\beta+\alpha}{2} = \frac{180^{\circ} - 111^{\circ}20'}{2} = 34^{\circ}20'.$$

Paigutame niidi D-268 peale ja lükkame T-34°20' niidi alla. Viies niidi edasi D-38 peale, tuleb kraadide arv võtta niidi alt S & T-skaalal (mitte T-skaalal), sest et tangensvalemis esimese murru lugeja (26,8) on +2-kohaline ja nimetaja 0-kohaline arv, kuid teise murru lugeja (3,8) on +1-kohaline, mille puhul nimetaja peab olema -1-kohaline arv, millele (kui tan-

gensi väärtusele) vastab kraadide ja minutite arv S & T-skaalal. Niidi all S & T-skaalal on 5°34'. Seega

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = 5^{\circ}34'.$$

Et aga

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = 34^{\circ}20',$$

siis kahest viimasest võrdusest (kui võrranditest kahe tundmatuga α ja β) leiame lahutamise ja liitmise teel, et

$$\alpha = 28^{\circ}46', \quad \beta = 39^{\circ}54'.$$

Kolmnurga külje c leiame siinusvalemi

$$\frac{11,5}{\sin 39^{\circ}54'} = \frac{c}{\sin 111^{\circ}20'} = \frac{c}{\sin 68^{\circ}40'}$$

järgi näite 5 kohaselt; saame

$$c = 16,70 \text{ cm.}$$

Näide 10. Kolmnurga küljed on $a = 7,12$ cm, $b = 6,34$ cm ja $c = 5,04$ cm. Leida α , β ja γ .

Selle kolmnurga lahendamiseks kasutame poolnurga valemit

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Et siin

$$p = \frac{7,12 + 6,34 + 5,04}{2} = 9,25,$$

$$p - a = 9,25 - 7,12 = 2,13,$$

$$p - b = 9,25 - 6,34 = 2,91,$$

$$p - c = 9,25 - 5,04 = 4,21,$$

siis

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2,91 \cdot 4,21}{9,25 \cdot 2,13}},$$

mille arvutamiseks paigutame arvutuslükati keele nõnda, et B-skaala jääks vastu A-skaalat ja C-skaala vastu D-skaalat. Toimetame juurealuse avaldise arvutamist lükati ülemisel jaotusel (s. o. A- ja B-skaalaga), saame juure väärtuse D-skaala

lal 0-kohalise arvuna 0,789, millele vastab T-skaalal $38^{\circ}15'$.
Seega

$$\alpha = 76^{\circ}30'.$$

Edasi leiame nurgad β ja γ siinusvalemi

$$\frac{7,12}{\sin 76^{\circ}30'} = \frac{6,34}{\sin \beta} = \frac{5,04}{\sin \gamma}$$

järgi. Selleks keerame arvutuslükati keele ümber, viime niidi D-712 peale ja paigutame S- $76^{\circ}20'$ niidi alla; siis loeme niidiga D-634 ja D-504 kohalt S-skaalal β ja γ väärtused, s. o.

$$\beta = 60^{\circ}, \quad \gamma = 43^{\circ}30'.$$

H a r j u t u s i: Lahendada kolmnurk, kui

- 1) $a = 26,3$ cm, $\alpha = 36^{\circ}20'$, $\beta = 71^{\circ}40'$; $b = ?$ $c = ?$
- 2) $b = 17,1$ cm, $\beta = 43^{\circ}30'$, $\gamma = 82^{\circ}$; $a = ?$ $c = ?$
- 3) $a = 4,15$ dm, $b = 5,05$ dm, $\beta = 63^{\circ}30'$; $\alpha = ?$ $\gamma = ?$ $c = ?$
- 4) $b = 18,3$ cm, $c = 15,6$ cm, $\gamma = 33^{\circ}10'$; $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $a = ?$
- 5) $a = 0,355$ dm, $b = 0,555$ dm, $\gamma = 133^{\circ}30'$; $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $c = ?$
- 6) $b = 8,04$ cm, $c = 3,36$ cm, $\alpha = 110^{\circ}50'$; $\beta = ?$ $\gamma = ?$ $a = ?$
- 7) $a = 18$ cm, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm; $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $\gamma = ?$
- 8) $a = 8,05$ cm, $b = 5,92$ cm, $c = 4,37$ cm; $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $\gamma = ?$

[V a s t u s e d: 1) $b = 42,1$ cm, $c = 42,2$ cm.

2) $a = 20,2$ cm, $c = 24,6$ cm.

3) $\alpha = 47^{\circ}20'$, $\gamma = 69^{\circ}10'$, $c = 5,27$ dm.

4) $\alpha = 106^{\circ}55'$, $\beta = 39^{\circ}55'$, $a = 27,3$ cm.

5) $\alpha = 17^{\circ}50'$, $\beta = 28^{\circ}40'$, $c = 0,841$ dm.

6) $\beta = 50^{\circ}22'$, $\gamma = 18^{\circ}48'$, $a = 9,74$ cm.

7) $\alpha = 78^{\circ}30'$, $\beta = 60^{\circ}40'$, $\gamma = 40^{\circ}50'$.

8) $\alpha = 102^{\circ}$, $\beta = 46^{\circ}$, $\gamma = 32^{\circ}$.]

§ 18. Tähised: ϱ^0 , ϱ' , ϱ'' , $\varrho_{''}$.

Arvutuslükati C- ja D-skaalal märgitud tähised ϱ^0 , ϱ' ja ϱ'' tähendavad radiaani väärtusi kraadides, minutites ja sekundites (joonised IV ja V), s. o.

$$\varrho^0 = \frac{360}{2\pi} = 57,3^0,$$

$$\varrho' = \frac{360 \cdot 60}{2\pi} = 3438',$$

$$\varrho'' = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} = 206265''.$$

Tähis $\varrho_{''}$ tähendab samuti radiaani väärtust sekundites, kuid võetud sentesimaaljaotuses, kus täisnurk on jaotatud 100 kraadiks, iga kraad 100 minutiks ja iga minut 100 sekundiks, s. o.

$$\varrho_{''} = \frac{400 \cdot 100 \cdot 100}{2\pi} = 636620''.$$

Nendest tähistest esinevad arvutuslükati C- ja D-skaalal (mõnikord ainult C-skaalal) peamiselt ϱ' ja ϱ'' ning neid kasutatakse:

a) nurga radiaalmõõdu või ringi kaare pikkuse leidmiseks, kui on antud vastav kesknurk ja ringi raadius või diameeter, ning samuti

b) väikeste ($< 34,4'$) nurkade siinuse ja tangensi väärtuste leidmiseks.

Kui ringi kaare pikkus on s ja selle kaare või vastava kesknurga kraadide, minutite või sekundite arv on α , siis kaare pikkust määrab valem

$$s = \frac{\alpha}{\varrho},$$

millest

$$\alpha = s \cdot \varrho,$$

kus α ja ϱ on mõlemad kraadides, minutites või sekundites.

Näide 1. Leida ringi kaare s pikkus, kui talle vastav kesknurk α sisaldab $18^030'$ (oletades, et ringi raadius $r=1$).

Lükatiga arvutamiseks muudame kesknurga kas kraadideks, s. o. $18^030' = 18,5^0$, või minutiteks, s. o. $18^030' = 1110'$. Kui

viime nüüd niidi näiteks D-1110 peale ja lükkame C- ϱ' niidi alla, siis on ka ühtlasi D-185 C- ϱ^0 kohal, kusjuures ringi kaare pikkuse määrab C-10 kohalt D-skaalal võetav arv 323, mis tuleb jaga-peale; siis loeme niidi alt D-skaalal esimesel juhul 905, s. o.

$$s = \frac{18,5^0}{\varrho^0} = \frac{1110'}{\varrho'} = 0,323 \text{ (raadiuse pikkust),}$$

mis on ühtlasi nurga $18^030'$ radiaalmõõduks.

Näide 2. Mitu kraadi ja minutit sisaldab nurk, mille radiaalmõõt on 0,158.

Paigutame C-1 D-158 kohale ja viime niidi C- ϱ^0 või C- ϱ' peale; siis loeme niidi alt D-skaalal esimesel juhul 905, s. o.

$$\alpha = 0,158 \cdot \varrho^0 = 9,05^0,$$

ja teisel juhul 543, s. o.

$$\alpha = 0,158 \cdot \varrho' = 543'.$$

Seega

$$9,05^0 = 543' = 9^03'.$$

Nagu eespool (§ 15, märkus) nägime, kui nurk α on väiksem $34,4'$ -st, siis S & T-skaala abil pole enam võimalik leida siinuse ja tangensi väärtusi. Niisuguste väikeste nurkade suhtes, kus s on kesknurgale α vastav ringi kaar, võime võtta

$$\sin \alpha = \tan \alpha = s = \frac{\alpha}{\varrho},$$

kus α ja ϱ on mõlemad minutites või sekundites.

Näide 3. $\sin 9' = ?$

Siin võime kirjutada ja jagades leida, et

$$\sin 9' = \frac{9'}{\varrho'} = 0,00262,$$

mis on antud nurga siinuse väärtuseks.

Näide 4. $\tan 46'' = ?$

Siin saame jagamisel tangensi väärtuse

$$\tan 46'' = \frac{46''}{\varrho''} = 0,000223.$$

Harjutusi. Leida ringi kaare radiaalmõõt, kui vastav kesknurk on:

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|----------|----------------|------------|
| 1) 40° | 4) $16^\circ 16'$ | 7) $52'$ | 10) $14' 20''$ | 13) $24''$ |
| 2) $62^\circ 40'$ | 5) $6^\circ 23'$ | 8) $20'$ | 11) $7' 16''$ | 14) $58''$ |
| 3) $84^\circ 20'$ | 6) $2^\circ 08'$ | 9) $8'$ | 12) $42''$ | 15) $6''$ |

[Vastused: 1) 0,698. 2) 1,094. 3) 1,472. 4) 0,214.
5) 0,1114. 6) 0,0373. 7) 0,01512. 8) 0,00582. 9) 0,00233.
10) 0,00417. 11) 0,00211. 12) 0,000204. 13) 0,0001164,
14) 0,000281. 15) 0,0000291.]

Leida nurk kraadides ja minutites, kui ta radiaalmõõt on:

- | | | |
|----------|---------|-------------|
| 1) 0,234 | 4) 1,56 | 7) 0,0885 |
| 2) 0,567 | 5) 2,72 | 8) 0,0424 |
| 3) 0,895 | 6) 3,89 | 9) 0,00555. |

[Vastused: 1) $13^\circ 24'$. 2) $32^\circ 29'$. 3) $51^\circ 17'$. 4) $89^\circ 23'$.
5) $155^\circ 51'$. 6) $222^\circ 53'$. 7) $5^\circ 04'$. 8) $2^\circ 26'$. 9) $19'$.]

Leida järgmiste nurgafunktsioonide väärtused:

- | | |
|------------------------|---------------------------------|
| 1) $\sin 25' = ?$ | 5) $\sin 32'' = ?$ |
| 2) $\tan 16' 40'' = ?$ | 6) $\tan 8'' = ?$ |
| 3) $\sin 7' 15'' = ?$ | 7) $\cos 89^\circ 57' = ?$ |
| 4) $\tan 51'' = ?$ | 8) $\cot 89^\circ 58' 18'' = ?$ |

[Vastused: 1) 0,00728. 2) 0,00485. 3) 0,00211.
4) 0,000247. 5) 0,00015. 6) 0,0000388. 7) 0,000873.
8) 0,000495.]

§ 19. Punkti koordinaatide ja kompleksarvude teisendamine.

1. Olgu tasapinnal punkti ristkoordinaadid x ja y , kus x on abstsissiks ja y on ordinaadiks, ning sama punkti polaarkoordinaadid r ja φ , kus r on polaarkauguseks, mida loeme alati positiivseks, ja φ on polaarnurgaks, mis peitub vahemikus 0° -st kuni 360° -ni. Rist- ja polaarkoordinaatide seost määravaid valemeid

$$x = r \cos \varphi \text{ ja } y = r \sin \varphi$$

võime kasutada arvutuslükatiga arvutamisel polaarkoordinaatidelt r ja φ üleminekuks ristkoordinaatidele x ja y .

Näide 1. Leida punkti ristkoordinaadid x ja y , kui ta polaarkoordinaadid on $r = 4,45$ ja $\varphi = 38^{\circ}30'$.

Esitatud valemite põhjal

$$\begin{aligned}x &= 4,45 \cdot \cos 38^{\circ}30' = 4,45 \cdot \sin 51^{\circ}30', \\y &= 4,45 \cdot \sin 38^{\circ}30',\end{aligned}$$

mille järgi (§ 16-s näite 9-nda või näitele 11 järgneva märkuse kohaselt) lükatiga arvutades leiame, et

$$x = 3,48 \text{ ja } y = 2,77.$$

Käesolevas näites esines meil I kvadranti nurk φ ($0^{\circ} < \varphi < 90^{\circ}$), mille puhul ristkoordinaadid x ja y on positiivsed. Kui φ on II, III või IV kvadranti nurk, siis kasutame lükatiga arvutamisel esitatud valemid taandatud kujus järgmiselt:

II kvadranti φ puhul ($90^{\circ} < \varphi < 180^{\circ}$)

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi = -r \cos (180^{\circ} - \varphi) = -r \sin (\varphi - 90^{\circ}), \\y &= r \sin \varphi = r \sin (180^{\circ} - \varphi),\end{aligned}$$

kus x on negatiivne ja y on positiivne;

III kvadranti φ puhul ($180^{\circ} < \varphi < 270^{\circ}$)

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi = -r \cos (\varphi - 180^{\circ}) = -r \sin (270^{\circ} - \varphi), \\y &= r \sin \varphi = -r \sin (\varphi - 180^{\circ}),\end{aligned}$$

kus x ja y on mõlemad negatiivsed;

IV kvadranti φ puhul ($270^{\circ} < \varphi < 360^{\circ}$)

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi = r \cos (360^{\circ} - \varphi) = r \sin (\varphi - 270^{\circ}), \\y &= r \sin \varphi = -r \sin (360^{\circ} - \varphi),\end{aligned}$$

kus x on positiivne ja y on negatiivne. Seega lükatiga arvutamisel kasutame ülemineku valemid polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele järgmiselt:

$$\text{I kvadrantis} \quad \begin{cases} x = r \sin (90^{\circ} - \varphi) \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\text{II kvadrantis} \quad \begin{cases} x = -r \sin (\varphi - 90^{\circ}) \\ y = r \sin (180^{\circ} - \varphi) \end{cases}$$

$$\text{III kvadrant} \quad \begin{cases} x = -r \sin (270^\circ - \varphi) \\ y = -r \sin (\varphi - 180^\circ) \end{cases}$$

$$\text{IV kvadrant} \quad \begin{cases} x = r \sin (\varphi - 270^\circ) \\ y = -r \sin (360^\circ - \varphi). \end{cases}$$

Sama võttega võime kompleksarvu trigonomeetrilise kuju
 $r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

teisendada algebraliseks kujuks

$$x + iy,$$

kus samuti

$$x = r \cos \varphi \text{ ja } y = r \sin \varphi,$$

kusjuures nüüd r on kompleksarvu mooduliks ja nurk φ on kompleksarvu argumendiks (amplituudiks) ning x on kompleksarvu reaalosaks ja y on imaginaarosade koefitsiendiks.

Näide 2. Anda kompleksarvule

$$21,2 (\cos 274^\circ + i \sin 274^\circ)$$

algebraline kuju.

Siin argument φ on IV kvadranti nurk, mille puhul

$$x = 21,2 \sin (274^\circ - 270^\circ) = 21,2 \cdot \sin 4^\circ,$$

$$y = -21,2 \sin (360^\circ - 274^\circ) = -21,2 \cdot \sin 86^\circ.$$

Reaalosaks x leidmiseks paigutame S & T-4° S & T-indeksi kohale ja viime niidi D-212 peale ning loeme niidi alt C-skaalal x -i (+1-kohalise) väärtuse 1,48. Imaginaarosade koefitsiendi y leidmiseks paigutame S-86° S-indeksi kohale ja viime niidi D-212 peale, kus nüüd niidi alt C-skaalal loeme y -i (+2-kohalise) negatiivse väärtuse $-21,1$. Seega

$$21,2 (\cos 274^\circ + i \sin 274^\circ) = 1,48 - i 21,1.$$

Harjutusi. Leia punktide ristkoordinaadid x ja y , kui nende polaarkoordinaadid on:

$$1) r = 5,2; \quad \varphi = 28^\circ 20'$$

$$2) r = 3,4; \quad \varphi = 5^\circ 10'$$

$$3) r = 2,64; \quad \varphi = 116^\circ 10'$$

$$4) r = 16,3; \quad \varphi = 176^\circ 20'$$

$$5) r = 0,88; \quad \varphi = 235^\circ 55'$$

$$6) r = 0,1234; \quad \varphi = 267^\circ 40'$$

$$7) r = 9,85; \quad \varphi = 300^\circ 30'$$

$$8) r = 71,2; \quad \varphi = 358^\circ.$$

- [Vastused: 1) $x = 4,58$; $y = 2,47$. 2) $x = 3,39$; $y = 0,306$.
 3) $x = -1,164$; $y = 2,37$. 4) $x = -16,27$; $y = 1,042$.
 5) $x = -0,493$; $y = -0,729$. 6) $x = -0,1233$; $y = -0,00502$.
 7) $x = 5,00$; $y = -8,49$. 8) $x = 71,2$; $y = -2,48$.]

Esitada kompleksarvud algebralisel kujul, kui nende trigonomeetrilised kujud on:

- 1) $3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$. 3) $0,666(\cos 250^\circ + i \sin 250^\circ)$.
 2) $8,2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$, 4) $12,9(\cos 340^\circ + i \sin 340^\circ)$.

- [Vastused: 1) $2,90 + i 0,776$. 3) $-0,228 - i 0,626$.
 2) $-7,10 + i 4,10$. 4) $12,12 - i 4,41$.]

2. Ümberpöördult, kui on antud punkti ristkoordinaadid x ja y , siis neilt üleminekuks polaarkoordinaatidele esinevad valemid

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad \text{ja} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

millede kasutamine lükatiga arvutamisel on raskepärane, eriti siis, kui x -i absoluutväärtus on väiksem y -i absoluutväärtusest. Teist valemit kasutades tuleks teda muuta järgmiselt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = x \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

ja polaarkaugus r leida § 7-s esineva näite 8-nda kohaselt. Kuid lükatiga arvutades tuleb neid valemeid rakendada teisiti, leides enne abinurga $\alpha < 45^\circ$ kaudu polaarnurk φ ja siis viimase kaudu polaarkaugus r .

Et x ja y võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed ning seega nurk φ võib olla kas I, II, III või IV kvadrantis, siis nurga φ väärtuse leidmiseks arvutuslükatiga rakendame järgmist abinurga α võtet:

a) kui $|x| \geq |y|$, siis leiame valemi

$$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right|$$

järgi nurga $\alpha \leq 45^\circ$, mille puhul

- I kvadrantis: $\varphi = \alpha$,
 II „ „ $\varphi = 180^\circ - \alpha$,

III kvadrantis: $\varphi = 180^\circ + \alpha$,

IV „ „ $\varphi = 360^\circ - \alpha$;

b) kui $|x| < |y|$, siis leiame valemi

$$\tan \alpha = \left| \frac{x}{y} \right|$$

järgi nurga $\alpha < 45^\circ$, mille puhul

I kvadrantis: $\varphi = 90^\circ - \alpha$,

II „ „ $\varphi = 90^\circ + \alpha$,

III „ „ $\varphi = 270^\circ - \alpha$,

IV „ „ $\varphi = 270^\circ + \alpha$.

Kui on leitud polaarnurk φ , siis polaarkauguse r leidmiseks kasutame valemit

$$r = \frac{y}{\sin \varphi},$$

mille arvutamisel taandame $\sin \varphi$ teravnurga siinuseks. Viimane valem määrab iga kvadranti puhul ikka ja alati polaarkauguse r positiivse väärtuse.

Kirjeldatud võttega võime samaselt iga kompleksarvu algebralise kuju

$$x + iy$$

teisendada trigonomeetriliseks kujuks

$$r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ja samuti ka eksponentsiaalkujuks

$$re^{i\varphi},$$

kus viimasel juhul φ tuleb esitada radiaalmõõdus.

Näide 3. Leida punkti polaarkoordinaadid r ja φ , kui ta ristkoordinaadid on $x = -0,382$ ja $y = 0,845$.

Siin abstsiss x on negatiivne ja ordinaat y on positiivne ning seega φ on II kvadrantis. Et siin $|x| < |y|$, siis arvutame valemi

$$\tan \alpha = \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{0,382}{0,845}$$

järgi nurga α . Paigutame (ümberkeeratud keele) T-skaala parempoolse otsa (T-45⁰) D-845 kohale ja viime niidi D-382 peale ning loeme niidi alt T-skaalal abinurga α väärtuse, s. o. $\alpha = 24^{\circ}20'$, kus nüüd polaarnurk

$$\varphi = 90^{\circ} + 24^{\circ}20' = 114^{\circ}20'.$$

Polaarkauguse r leiame valemi

$$r = \frac{0,845}{\sin 114^{\circ}20'} = \frac{0,845}{\cos 24^{\circ}20'} = \frac{0,845}{\sin 65^{\circ}40'}$$

järgi, saades (§ 16-s näite 10 või § 17-s näite 2 kohaselt)

$$r = 0,927.$$

Näide 4. Esitada kompleksarv $4,2 - i 3,4$ trigonomeetrilisel kujul.

Et siin kompleksarvu reaalosa on positiivne ja imaginaarosa on negatiivne, siis argument φ peab olema vahemikus 270° -st kuni 360° -ni. Et $|x| > |y|$, s. o. $4,2 > 3,4$, siis rakendame valemit

$$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{3,4}{4,2},$$

mille puhul paigutame T-skaala parempoolse otsa (T-45⁰) D-4,2 kohale ja viime niidi D-3,4 peale ning loeme niidi alt T-skaalal abinurga α väärtuse, s. o. $\alpha = 39^{\circ}$, kus nüüd kompleksarvu argument

$$\varphi = 360^{\circ} - 39^{\circ} = 321^{\circ}.$$

Kompleksarvu mooduli r leiame valemi

$$r = \frac{-3,4}{\sin 321^{\circ}} = \frac{-3,4}{-\sin 39^{\circ}} = \frac{3,4}{\sin 39^{\circ}}$$

järgi, saades

$$r = 5,40,$$

ning seega

$$4,2 - i 3,4 = 5,40 (\cos 321^{\circ} + i \sin 321^{\circ}).$$

Näide 5. Esitada kompleksarv $8 + i5$ eksponentsiaalkujus. Siin määrame argumendi φ radiaalmõõdus. Et siin $|x| > |y|$, s. o. $8 > 5$, siis võime märkida, et

$$\tan \varphi = \tan \alpha = \frac{5}{8},$$

millest saame

$$\varphi = \alpha = 32^\circ,$$

mis on radiaalmõõdus

$$\frac{32^\circ}{\rho^0} = 0,559.$$

Kompleksarvu mooduli r leiame valemi

$$r = \frac{5}{\sin 32^\circ}$$

järgi, saades

$$r = 9,43.$$

Seega

$$9 + i5 = 9,43e^{i0,559}.$$

H a r j u t u s i. Leida punktide polaarkoordinaadid r ja φ , kui nende ristkoordinaadid on:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) $x = 5,6; y = 3,2$ | 5) $x = -16,3; y = -12,4$ |
| 2) $x = 2,3; y = 6,5$ | 6) $x = -37,8; y = -61,3$ |
| 3) $x = -0,41; y = 0,37$ | 7) $x = 7,15; y = -3,46$ |
| 4) $x = -0,88; y = 0,99$ | 8) $x = 8,05; y = -11,35$ |

[Vastused: 1) $\varphi = 29^\circ 45'$; $r = 6,45$. 2) $\varphi = 70^\circ 30'$; $r = 6,89$. 3) $\varphi = 137^\circ 55'$; $r = 0,552$. 4) $\varphi = 131^\circ 40'$; $r = 1,325$. 5) $\varphi = 217^\circ 15'$; $r = 20,5$. 6) $\varphi = 238^\circ 20'$; $r = 72,0$. 7) $\varphi = 334^\circ 10'$; $r = 7,94$. 8) $\varphi = 305^\circ 20'$; $r = 13,92$.]

Esitada kompleksarvud trigonomeetrilisel kujul, kui nende algebralised kujud on:

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1) $15 + i 12$ | 5) $-0,4 - i 0,3$ |
| 2) $2,3 + i 5,7$ | 6) $-7,3 - i 15,2$ |
| 3) $-40 + i 30$ | 7) $8,6 - i 5,2$ |
| 4) $-6,2 + i 12,9$ | 8) $0,18 - i 0,75$ |

- [Vastused: 1) $19,21 (\cos 38^{\circ}40' + i \sin 38^{\circ}40')$
 2) $6,15 (\cos 66^{\circ} + i \sin 68^{\circ})$
 3) $50 (\cos 143^{\circ}08' + i \sin 143^{\circ}08')$
 4) $14,31 (\cos 115^{\circ}40' + i \sin 115^{\circ}40')$
 5) $0,50 (\cos 216^{\circ}52' + i \sin 216^{\circ}52')$
 6) $16,86 (\cos 244^{\circ}20' + i \sin 244^{\circ}20')$
 7) $10,05 (\cos 328^{\circ}50' + i \sin 328^{\circ}50')$
 8) $0,771 (\cos 283^{\circ}30' + i \sin 283^{\circ}30')]$

Esitada kompleksarvud eksponentsiaalkujus, kui nende algebralised kujud on:

- | | |
|-----------------|---------------------|
| 1) $5 + i8$ | 3) $-0,8 - i1,7$ |
| 2) $1,6 - i3,4$ | 4) $-0,022 + i0,48$ |

- [Vastused: 1) $9,43e^{i1,012}$. 2) $3,76e^{i5,15}$. 3) $1,879e^{i4,27}$.
 4) $0,481e^{i1,616}$.]

§ 20. Ühendatud S ja S & T-skaala ning L-pöördskaala.

1. Mõnel arvutuslükatil esineb keele tagaküljel ainult kaks trigonomeetrilist skaalat: ülal S-skaala ja all T-skaala. Säärasel arvutuslükatil T-skaala on samane eespool kirjeldatud T-skaalaga, kuid S-skaala hõlmab nurgad $34,4'$ -st kuni 90° -ni, nii et eespool kirjeldatud S- ja S & T-skaala on kujundatud üheks tervikuks, kusjuures skaala jaotised on kaks korda lühemad (joonis VII). Sellel ühendatud S ja S & T-skaalal, mida meil arvutuslükatitel nimetatakse lühidalt S-skaalaks, on märgitud jaotised alguskriipsust kuni 10° -ni $5'$ kaupa, 10° -st kuni 20° -ni — $10'$ kaupa, 20° -st kuni 40° -ni — $30'$ kaupa, 40° -st kuni 70° -ni — 1° kaupa, 70° -st kuni 80° -ni — 2° kaupa; 80° -le enam jaotisi ei järgne.

Arvutuslükati keelt ümberpöördult A- ja D- skaalaga kohakuti pannes näeme, et A-skaalal esinevad logaritmilised lõigud on nüüd S-skaalal vastavate kraadide ja minutite siinuse väärtused, kui loeme neid 100 korda vähendatult. Seega tuleb A-skaala alguskriipsu lugeda $0,01$ -ks, sest $\sin 34,4' = 0,01$, ja

lõppkriipsu lugeda 1-ks, sest $\sin 90^\circ = 1$. A-skaala keskmine kriips (kus on arv 10) tähendab 0,1 ja ta kohal S-skaalal on $5^{\circ}44'$, sest $\sin 5^{\circ}44' = 0,1$. Järelikult vahemikus $34,4'$ -st kuni $5^{\circ}44'$ -ni tuleb A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul esinevaid siinuse loomulikke väärtusi lugeda —1-kohalisteks arvudeks, mis on ühtlasi ka ($34,4'$ -st kuni $5^{\circ}43'$ -ni) tangensi väärtused; ja edasi vahemikus $5^{\circ}44'$ -st kuni 90° -ni tuleb A-skaala teisel logaritmilisel ühikul esinevaid siinuse väärtusi lugeda 0-kohalisteks arvudeks.

Et leida nüüd vahemikus $34,4'$ -st kuni 90° -ni siinuse väärtusi, selleks märgime niidiga kraadide ja minutite arvu S-skaalal ja loeme niidi alt A-skaalal siinuse vastava väärtuse, kusjuures A-skaala esimesel logaritmilisel ühikul võetud arv tuleb lugeda —1-kohaliseks ja teisel logaritmilisel ühikul võetud arv tuleb lugeda 0-kohaliseks arvuks, ning samuti, ümberpöörduvalt, võime leida siinuse väärtuse järgi vastava kraadide ja minutite arvu $34,4'$ -st kuni 90° -ni, märkides niidiga A-skaalal siinuse väärtuse ja vaadata, missugune kraadide ja minutite arv esineb ta kohal niidi all S-skaalal. Siinuse logaritmi leidmiseks tuleb aga siinuse väärtus A-skaalalt üle kanda D-skaalale ja siis sealt üle minna siinuse logaritmi võtmisele.

Sama S-skaala ja A-skaala esimese logaritmilise ühiku abil võime leida vahemikus $34,4'$ -st kuni $5^{\circ}43'$ -ni tangensi (—1-kohalisi) väärtusi ja ümberpöörduvalt, tangensi —1-kohaliste väärtuste järgi võime leida vastava kraadide ja minutite arvu $34,4'$ -st kuni $5^{\circ}43'$ -ni.

Arvutuslükati keelt endiselt tagasi pöörates, nii et S- ja T-skaala jääksid allapoole, näeme, et siin samuti lükati parempoolse (ja mõnikord ka vasakpoolse) ovaalse lõigu ülemise ääre kriipsud on S-indeksiks ning vasakpoolse lõigu alumise ääre kriips on T-indeksiks.

Kui paigutame siin S-skaalal kraade ja minuteid tähendava kriipsu parempoolse S-indeksi kohale, siis tuleb siinuse väärtus lugeda B-skaalalt A-100 kohalt. Kui aga paigutame S-skaala kraade ja minuteid esitava kriipsu vasakpoolse S-indeksi (selle olemasolu puhul) kohale, siis tuleb siinuse väärtus lugeda B-skaalalt A-1 kohalt.

2. Kui S-skaala sisaldab nurke $34,4'$ -st kuni 90° -ni, siis L-skaala esineb harilikult arvutuslükati keele tagaküljel S-skaala ja T-skaala vahel (joonis VII). Sel juhul L-skaala jaotisi tuleb lugeda paremalt poolt vasakule, kusjuures nende jaotiste märkimiseks ja lugemiseks on parempoolse ovaalse lõigu alumine kriips, mis on nüüd L - i n d e k s i k s. Siin L-skaala parempoolse otsa kriips tähendab 0 ja vasakpoolse otsa kriips tähendab 10. L-skaala on seega L - p ö ö r d s k a a l a k s. Logaritmitavad arvud esinevad siin samuti D-skaalal. Arvu logaritmi leidmiseks paigutame C-I D-skaalal esineva logaritmitava arvu kohale ja (arvutuslükatit ümber keerates) loeme otsitava logaritmi murdosa L-indeksi kohalt L-pöördskaalal, ja ümberpöördukt.

L-pöördskaala koos S- ja T-skaalaga (joonis VII) esineb ka nende arvutuslükatite keele tagaküljel, milliste esiküljel esinevad ainult A-, B-, C- ja D-skaala (joonised II ja III).

Harjutusülesandeid käesolevas paragrahvis kirjeldatud L-pöördskaala kui ka ühendatud S ja S & T-skaala rakendamiseks võib võtta vastavalt § 9-st ja § 16-st.

§ 21. Arvu e astmed ja loomulikud logaritmid.

1. Mõnel arvutuslükatil esineb koos A-, B-, C-, D- ja E-skaalaga lükati ülemisel ja alumisel äärel (K- ja L-skaala asemel) loomulike logaritmidel aluse $e = 2,718$ astmete skaalad, millel on märgitud e astmed $e^{0,1}$ kuni e^{10} (joonis VIII). Lükati ülemisel äärel esinevad põhiskaala logaritmilise ühiku pikkusel e astmed $e^{0,1} = 1,105$ kuni $e = 2,718$ ja alumisel äärel — e astmed $e = 2,718$ kuni $e^{10} = 22000$. Sel juhul on K-skaala paigutatud arvutuslükati alumisele servale ning sellel skaalal arvude märkimiseks ja lugemiseks on märkija alumisel serval indeks (kohakuti märkija niidiga). L-skaala esineb siis lükati keele tagaküljel S- ja T-skaala vahel, samaselt nagu näitab joonis VII.

Ülemisel ääreskaalal jaotised algavad õieti vasakul pool skaala algust arvuga 1,1 (sest kooskõlastatult A- ja D-skaala-

ga selle skaala alguseks loeme $e^{0,1} = 1,105$). Edasi on skaalal märgitud arvud

1,12; 1,14; 1,16; ...; 2,7; 2,8; 2,9; 3; 3,2,

kusjuures arvud 2,8 kuni 3,2 on väljaspool skaala lõppu ($e = 2,718$). Alumisel ääreskaalal jaotised tegelikult algavad vasakul pool skaala algust ($e = 2,718$) arvudega 2,5; 2,6; 2,7. Edasi järgnevad arvud

2,8; 2,9; 3; 3,5; 4; 4,5; ...; 40; 50; 100;

ja sealt veel edasi

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10^3 ; 2, 3, 4, 5, 10^4 ; 2, 3, 4, 5, 10^5 ,

kus esimesed 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 tähendavad lühendatult

200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900;

10^3 -le järgnevad 2, 3, 4 ja 5 tähendavad

2000, 3000, 4000, 5000

ja 10^4 -le järgnevad 2, 3, 4 ja 5 tähendavad

20000, 30000, 40000, 50000,

kusjuures lõpparvud 3, 4, 5 ja 10^5 on väljaspool skaala lõppu ($e^{10} = 22000$).

Arvu e astendajaiks on D-skaala arvud. Arvu e mistahes astme leidmiseks paigutatakse märkija niit D-skaalal astendaja peale ja vastav e aste loetakse niidi kohalt lükati ühelt või teiselt ääreskaalalt järgmiselt: kui D-skaalal võetav astendaja loetakse 0-kohaliseks arvuks, s. o. 0,1-st kuni 1-ni, siis e aste esineb lükati ülemisel ääreskaalal, ja kui D-skaalal võetav astendaja loetakse +1-kohaliseks arvuks, s. o. 1-st kuni 10-ni, siis e aste esineb lükati alumisel ääreskaalal. Näiteks, kui paigutame niidi D-284 peale, siis $e^{0,284}$ väärtus on niidi kohal ülemisel ääreskaalal, s. o. 1,328, ja $e^{2,84}$ väärtus on niidi kohal alumisel ääreskaalal, s. o. 17,12. Seega

$$e^{0,284} = 1,328 \quad \text{ja} \quad e^{2,84} = 17,12.$$

Harjutusi:

- | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------------|
| 1) $e^2 = ?$ | 5) $e^{1,111} = ?$ | 9) $e^{0,326} = ?$ |
| 2) $e^3 = ?$ | 6) $e^{9,65} = ?$ | 10) $\sqrt{e} = ?$ |
| 3) $e^{1,87} = ?$ | 7) $e^{0,139} = ?$ | 11) $e\sqrt{e} = ?$ |
| 4) $e^{7,4} = ?$ | 8) $e^{0,892} = ?$ | 12) $\sqrt[3]{e} = ?$ |

[Vastused: 1) 7,39. 2) 20,1. 3) 6,49. 4) 1636. 5) 3,04. 6) 15520. 7) 1,149. 8) 2,44. 9) 1,385. 10) 1,649. 11) 4,48. 12) 1,395.]

2. Arvu a loomuliku logaritmi $\ln a$ väärtuse arvutamisel teame, et kui $\ln a = x$, siis $a = e^x$. Et arv x loetakse D-skaalalt ja arv a ühelt või teiselt ääreskaalalt, siis arvu a loomuliku logaritmi $\ln a$ väärtuse x leidmiseks toimitakse eelmisele võttele ümberpöörduvalt: paigutatakse märkija niit ühel või teisel ääreskaalal logaritmitava arvu a peale ja loomuliku logaritmi väärtus loetakse D-skaalalt niidi alt. Siin logaritmitavad arvud 1,105 kuni 2,718 võetakse ülemiselt ääreskaalalt ja nende loomulikud logaritmid loetakse niidi alt D-skaalal, võttes logaritmi täisosaks 0; logaritmitavad arvud 2,718 kuni 22000 võetakse alumiselt ääreskaalalt ja nende loomulikud logaritmid loetakse niidi alt D-skaalal ühekohalise täisosaga. Näiteks leiame $\ln 1,36$ ja $\ln 136$. Esimesel juhul paigutame niidi ülemisel ääreskaalal 1,36 peale (kriips on olemas) ja loeme niidi alt D-skaalal 0,307. Teisel juhul paigutame niidi alumisel ääreskaalal 136 peale (kriips puudub) ja loeme niidi alt D-skaalal 4,91. Tähen-dab

$$\ln 1,36 = 0,307 \quad \text{ja} \quad \ln 136 = 4,91.$$

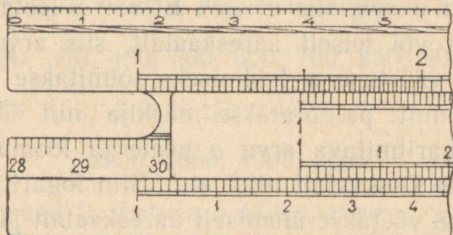
Harjutusi:

- | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| 1) $\ln 1,26 = ?$ | 5) $\ln 2,2 = ?$ | 9) $\ln 100 = ?$ |
| 2) $\ln 1,475 = ?$ | 6) $\ln 4,05 = ?$ | 10) $\ln 360 = ?$ |
| 3) $\ln 1,115 = ?$ | 7) $\ln 18,5 = ?$ | 11) $\ln 1450 = ?$ |
| 4) $\ln 1,965 = ?$ | 8) $\ln 58 = ?$ | 12) $\ln 2450 = ?$ |

[Vastused: 1) 0,231. 2) 0,389. 3) 0,1088. 4) 0,675.
 5) 0,788. 6) 1,399. 7) 2,92. 8) 4,06. 9) 4,61. 10) 5,86.
 11) 7,28. 12) 7,80.]

§ 22. Pikkuste mõõtmine.

Arvutuslükati ülemisel (mõnikord ka alumisel) serval on pikkuste mõõtmiseks sentimeetiline jaotus, mis algab skaalade alguskriipsu kohalt ja läheb kuni skaalade lõpuni, s. o. kuni 25 cm. Mõnede arvutuslükatite ülemisel serval algab sentimeetiline jaotus serva enese algusest ja läheb kuni serva lõpuni, kus on 28 cm, sest hariliku arvutuslükati üldpikkus on tavaliselt



Joonis 17.

selt 28 cm. Edasi selle sentimeeterjaotuse järg on mõnikord arvutuslükati põhjas (keele all), kus järgnevad arvud 29, 30, 31, 32 jne. kuni parempoolse otsani, s. o. kuni 56 cm-ni (joonis 17). Sel juhul arvutuslükati keelt paremale poole lükates näeme, et pikkusmõõdu arvuline väärtus arvutuslükati põhiosa vasakpoolsest otsast kuni arvutuslükati keele parempoolse otsani on keele vasakpoolse otsa kohal arvutuslükati põhjas.

§ 23. Märkija-luubi kasutamine.

Nagu nägime, võime arvutuslükatiga mitmesuguseid matemaatilisi arvutusi läbi viia palju kiiremini, kui seda võimaldavad paber ja pliiats. Arvutuslükat võimaldab suuremalt osalt arvutamise ligikaudse tulemuse teatava täpsusega. Võime ikka

otsitava arvu kolm numbrit lugeda skaaladelt, mõnes kohas koguni neli numbrit. On aga arvutuslükati skaalad lühemad kui 25 cm, siis, nagu teame, läheb arvude lugemine raskemaks ja täpsus väheneb. Selle kõrvaldamiseks tarvitatakse tihti lühemate (ja isegi ka harilike) arvutuslükatite juures skaalade jaotiste täpsemaks lugemiseks märkija tavalise klaasi asemel suurendavat klaasi — silindrilist luupi, mis on asetatud märkija alumiiniumist raami ja varustatud keskel niidiga (musta kriipsuga). See võimaldab ikkagi vähemalt kolmenumbrilise täpsuse, missugune täpsus praktilise elu nähtuste kohta on küllaldane.

Sisukord.

	Lk.
Eessõna	3
§ 1. Logaritmilised skaalad	5
§ 2. Arvutuslükati konstruktsioon	11
§ 3. Arvude märkimine ja lugemine	13
§ 4. Korrutamine	17
§ 5. Jagamine	26
§ 6. Ruudud	34
§ 7. Ruutjuured	40
§ 8. Kuubid ja kuupjuured	46
§ 9. Logaritmid	51
§ 10. Geomeetrilisi arvutusi	54
§ 11. Võrded	57
§ 12. Pöördkaala kasutamine	64
§ 13. Ruutvõrrandi lahendamine	70
§ 14. Kuupvõrrandi lahendamine	82
§ 15. Trigonomeetrilised skaalad ja nende lugemine	90
§ 16. Trigonomeetrilisi arvutusi	100
§ 17. Kolmnurkade lahendamine	107
§ 18. Tähisted: φ^0 , φ' , φ'' , φ_{II}	118
§ 19. Punkti koordinaatide ja kompleksarvude teisendamine	120
§ 20. Ühendatud S ja S & T-skaala ning L-pöördkaala	127
§ 21. Arvu e astmed ja loomulikud logaritmid	129
§ 22. Pikkuste mõõtmine	132
§ 23. Märkija-luubi kasutamine	132

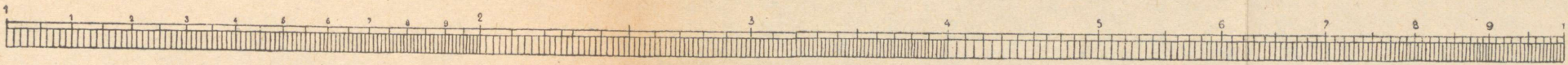
*Vastutav ja keeleline
toimetaja H. Võrk.
Tehniline toimetaja
E. Lellep.*

Ladumisele antud 18. I 1950.
Trükkimisele antud 1. IV 1950.
Trükiarv 3000. Paber 61×86, ¹/₁₆.
Trükipoognaid 8,5+2 lisa. Arves-
tuspoognaid 8,62. MB-01680.
Trükikoda „Hans Heidemann“,
Tartu, Vallikraavi 4.
Tellimise nr. 213.

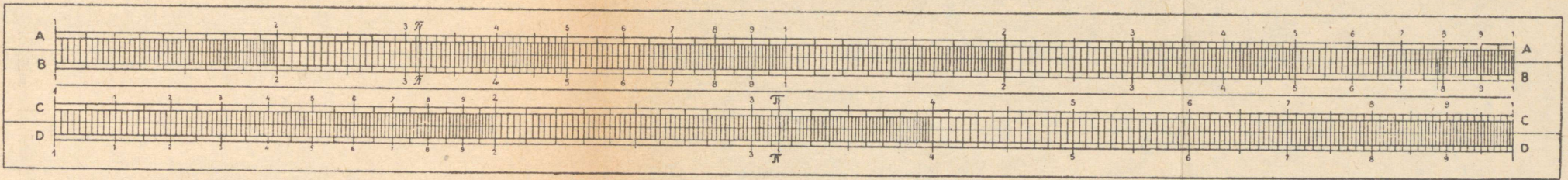
На эстонском языке.

А. Борквель. Теория и прак-
тика счетной линейки.

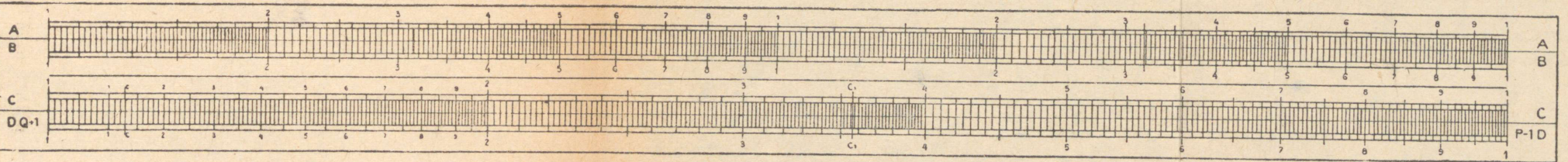
Hind rbl. 4.—



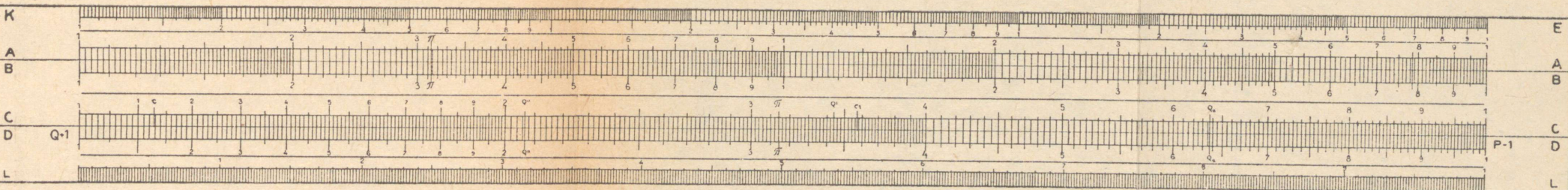
Joonis I.



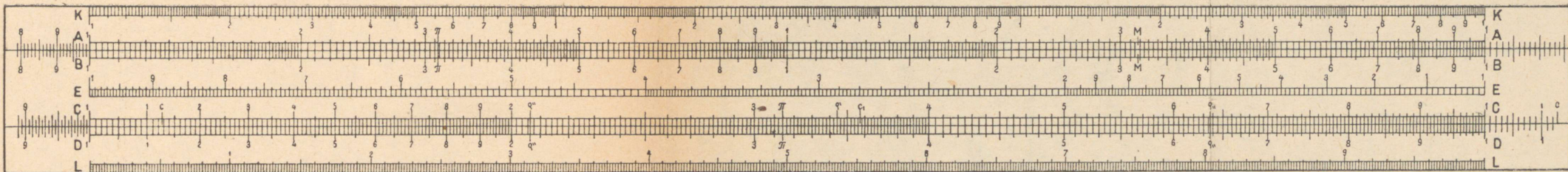
Joonis II.



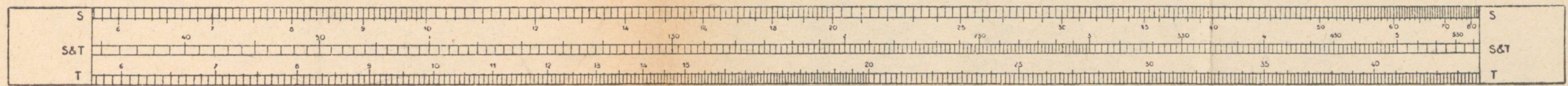
Joonis III.



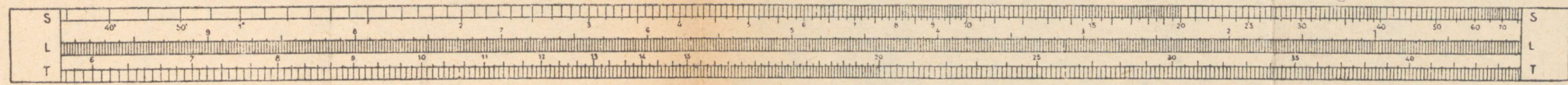
Joonis IV



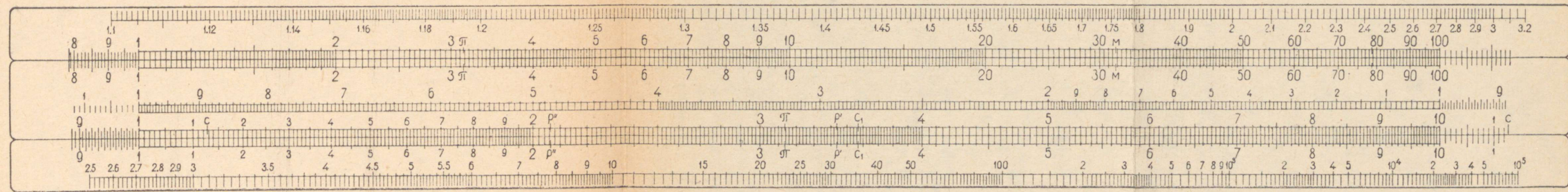
Joonis V.



Joonis VI.



Joonis VII.



Joonis VIII.

TRÜKIKODA „HANS HEIDEMANN”
Tartu, Vallikraavi 4

KONTROLL NR. 3

Raamatus leiduva defekti korral
palume raamat tagastada ümber-
vahetamiseks ühes selle etiketiga.

Rbl. 4.—

A
18332

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 01020929 6