TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 102 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

11002

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

II

TARTU 1961

Redaktsioonikolleegium:
J. Aul, G. Kangro, P. Kard, N. Rägo.
H. Kozlova (sekretär)
Vast. toimetaja S. Baron

Редакционная коллегия:
Ю. Аул, Г. Кангро, П. Кард, Н. Ряго.
Х. Козлова (секретарь)
Отв. редактор С. Барон

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ I. ТЕОРИЯ КРИВИЗНЫ

Ю. Г. Лумисте
Кафедра геометрии

Излюбленным предметом для геометров от Лагранжа до наших дней являются минимальные поверхности как обычного трехмерного пространства, так и многомерных пространств, в которых они также определяются как «экстремали» некоторой определенной вариационной задачи (см. [5], стр. 100).

В настоящей статье ограничиваются двумерными поверхностями V_2 в n-мерных евклидовых или неевклидовых пространствах. Такие поверхности являлись предметом многих исследований. Ряд из них (см. напр. работы Пинла [11, 12, 13]) исходит из свойства этих поверхностей являться поверхностями переноса своих мнимых изотропных кривых (см. [7], а также [5], стр. 192). Настоящая статья примыкается к работам Борувки [8, 9, 10], в которых главное внимание уделяется т. н. индикатрисам нормальной кривизны и связанным с ними понятиям.

Индикатрисы нормальной кривизны — основные построения теории кривизны двумерной поверхности V_2 в многомерном пространстве — являются в высших нормальных плоскостях, как известно, довольно сложными рациональными кривыми (см. [10], а также [5], § 12). Оказывается, что в частном случае двумерной минимальной поверхности V_2 картина сильно упрощается: все нормальные плоскости такой поверхности двумерны, все индикатрисы кривизны — эллипсы с центрами в точке поверхности. Это позволяет на V_2 ввести ряд инвариантных величин и направлений.

§ 1. Нормальные плоскости

1. Известно, что как евклидовы пространства R_n, так и неевклидовы пространства — эллиптические пространства S_n или гиперболические пространства ${}^1S_n$ — можно рассматривать как проективные пространства, метризованные при помощи некото-

рой квадрики, называемой абсолютом пространства (см. напр. [4], гл. III).

Любую точку, лежащую на поляре точки M по отношению к абсолюте пространства S_n, назовем *вектором* в точке[1] M. В дальнейшем всегда пользуемся репером, состоящем из точки M и из n линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, n)$ в точке M. Инфинитезимальное перемещение такого репера определятся формулами (см. напр. [3])

$$dM = \omega^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha, \tag{1. 1}$$

$$d\boldsymbol{e}_\alpha = -cg_{\alpha\beta}\omega^\beta M + \omega_\alpha{}^\beta \boldsymbol{e}_\beta, \tag{1. 2}$$

в которых пфаффовы формы ω^α и $\omega_\alpha{}^\beta$ удовлетворяют т. н. структурным уравнениям

$$D\omega^\alpha = [\omega^\beta \omega_\beta{}^\alpha], \tag{1. 3}$$

$$D\omega_\alpha{}^\beta = [\omega_\alpha{}^\gamma \omega_\gamma{}^\beta] - \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} \cdot c(g_{\alpha\varrho}g_{\gamma\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\gamma\varrho})[\omega^\varrho \omega^\sigma], \tag{1. 4}$$

и т. н. уравнениям инвариантности абсолюта (или метрики)

$$dg_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta}\omega_\alpha{}^\gamma + g_{\alpha\gamma}\omega_\beta{}^\gamma, \tag{1. 5}$$

где $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ являются, соответственно, ко- и контравариантными метрическими тензорами пространства, а постоянная c равна кривизне пространства.

Абсолют определяется в неевклидовом случае уравнением

$$g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + \frac{1}{c}(x^\circ)^2 = 0,$$

в евклидовом случае уравнениями

$$g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0, \; x^\circ = 0.$$

Метрика пространства определяется уравнением

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\omega^\alpha \omega^\beta. \tag{1. 6}$$

Число

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$$

называется скалярным произведением векторов $\boldsymbol{x} = x^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ и $\boldsymbol{y} = y^\beta \boldsymbol{e}_\beta$. Угол φ между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}}.$$

---

[1] В евклидовом пространстве R_n, в котором поляра любой точки совпадает с бесконечно удаленной гиперплоскостью, понятие вектора уже не зависит от точки M и совпадает с известным аффинным понятием вектора.

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, то векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называются ортогональными. Если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1$, то вектор $\boldsymbol{x}$ называется нормированным.

2. Пусть в S_n задана двумерная поверхность V_2. Репер присоединяется к ее точке $M = M(u^1, u^2)$ так, чтобы первые два вектора $\boldsymbol{e}_i$ $(i, j = 1,2)$ были нормированы, ортогональны и лежали в касательной плоскости к поверхности V_2, а остальные векторы $\boldsymbol{e}_{\alpha_0}$ $(\alpha_0, \beta_0, \ldots = 3, \ldots, n)$ были ортогональны к ним. Тогда

$$g_{11} = g_{22} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{i\alpha_0} = 0 \tag{1.7}$$

и $dM = \omega^i \boldsymbol{e}_i$, т. е.

$$\omega^{\alpha_0} = 0. \tag{1.8}$$

Из (1.5), в силу (1.7),

$$\omega_1{}^1 = \omega_2{}^2 = 0,\ \omega_2{}^1 = -\omega_1{}^2, \tag{1.9}$$

$$\omega_{\alpha_0}{}^i = -g_{\alpha_0\beta_0}\omega^{i\beta_0}. \tag{1.10}$$

Если продолжить уравнения (1.8) (т. е. продифференцировать их внешним образом, а затем к полученным ковариантам применить лемму Картана; см. [6]), то получаются уравнения

$$\omega_i{}^{\alpha_0} = h_{ij}{}^{\alpha_0}\omega^j,\ h_{ij}{}^{\alpha_0} = h_{ji}{}^{\alpha_0}. \tag{1.11}$$

Легко показать, что плоскость, натянутая на точку M и векторы $h_{ij}{}^{\alpha_0}\boldsymbol{e}_{\alpha_0}$, инвариантно связана с поверхностью V_2 в точке M. Она называется первой нормальной плоскостью поверхности V_2.

Вектор

$$\boldsymbol{h} = h^{\alpha_0}\boldsymbol{e}_{\alpha_0},\ h^{\alpha_0} = h_{11}{}^{\alpha_0} + h_{22}{}^{\alpha_0}$$

называется вектором средней кривизны поверхности V_2 (см. [5], стр. 99).

3. Минимальные поверхности V_2 характеризуются, как известно, равенством

$$\boldsymbol{h} = 0$$

(см. [5], стр. 100), или, в данном случае, совпадением векторов $h_{11}{}^{\alpha_0}\boldsymbol{e}_{\alpha_0}$ и $-h_{22}{}^{\alpha_0}\boldsymbol{e}_{\alpha_0}$.

Может случиться, что эти векторы коллинеарны с вектором $h_{12}{}^{\alpha_0}e_{\alpha_0}$. Тогда первая нормальная плоскость вырождается в прямую и вектор $\boldsymbol{e}_3$ репера можно выбрать лежащим на этой прямой. Такой выбор приводит к равенствам $h_{ij}{}^{\alpha_1} = 0$ $(\alpha_1 = 4, \ldots, n)$, в силу которых из (1.11) следует, что

$$\omega_1{}^3 = a_3\omega^1 + b_3\omega^2,\ \omega_2{}^3 = b_3\omega^1 - a_3\omega^2,\ \omega_1{}^{\alpha_1} = \omega_2{}^{\alpha_1} = 0.$$

При внешнем дифференцировании последних двух уравнений получаются коварианты

$$[a_3\omega^1 + b_3\omega^2,\ \omega_3{}^{\alpha_1}] = 0,\ [b_3\omega^1 - a_3\omega^2,\ \omega_3{}^{\alpha_1}] = 0,$$

из которых $\omega_3{}^{\alpha_1} = 0$. Отсюда по соответствующим общим соображениям (см. напр. [2], § 1, п. 5) следует, что поверхность V_2 лежит в трехмерном пространстве.

Следовательно, если минимальная поверхность V_2 не лежит в трехмерном пространстве, то векторы

$$h_{11}{}^{\alpha_0}\boldsymbol{e}_{\alpha_0} = -h_{22}{}^{\alpha_0}\boldsymbol{e}_{\alpha_0},\ h_{12}{}^{\alpha_0}\boldsymbol{e}_{\alpha_0} \qquad (1.\ 12)$$

линейно независимы и первая нормальная плоскость поверхности V_2 двумерна.

Нормированные векторы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ репера можно выбрать коллинеарными соответственно к векторам (1. 12), а векторы $\boldsymbol{e}_{\alpha_1}$ $(\alpha_1, \beta_1, \ldots = 5, \ldots, n)$ — ортогональными к ним. Тогда

$$h_{11}{}^4 = h_{22}{}^4 = 0,\ h_{12}{}^3 = 0,\ h_{ij}{}^{\alpha_1} = 0, \qquad (1.\ 13)$$

$$g_{33} = g_{44} = 1,\ g_{34} = \cos\gamma_1,\ g_{i\alpha_1} = 0, \qquad (1.\ 14)$$

$$(i_1, j_1, \ldots = 3, 4),$$

где γ_1 — угол между векторами $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$.

Если обозначить

$$h_{11}{}^3 = -h_{22}{}^3 = a_3,\ h_{12}{}^4 = a_4,$$

то из (1. 11), в силу (1. 13),

$$\omega_1{}^3 = a_3\omega^1,\ \omega_2{}^3 = -a_3\omega^2, \qquad (1.\ 15)$$

$$\omega_1{}^4 = a_4\omega^2,\ \omega_2{}^4 = a_4\omega^1, \qquad (1.\ 16)$$

$$\omega_1{}^{\alpha_1} = 0,\ \omega_2{}^{\alpha_1} = 0. \qquad (1.\ 17)$$

Из (1. 5), в силу (1. 7) и (1. 14),

$$\omega_3{}^3 = -\cos\gamma_1\omega_3{}^4,\ \omega_4{}^4 = -\cos\gamma_1\omega_4{}^3, \qquad (1.\ 18)$$

$$d\gamma_1 = -\sin\gamma_1\ (\omega_3{}^4 + \omega_4{}^3), \qquad (1.\ 19)$$

$$\omega_{\alpha_1}{}^{i_1} = -g^{i_1j_1}g_{\alpha_1\beta_1}\omega_{j_1}{}^{\beta_1}, \qquad (1.\ 20)$$

где

$$g^{33} = g^{44} = \frac{1}{\sin^2\gamma_1},\ g^{34} = -\frac{\cos\gamma_1}{\sin^2\gamma_1}. \qquad (1.\ 21)$$

4. При внешнем дифференцировании уравнений (1. 17) получаются, в силу (1. 15) и (1. 16), коварианты

$$a_3[\omega_3{}^{\alpha_1}\omega^1] + a_4[\omega_4{}^{\alpha_1}\omega^2] = 0, \qquad (1.\ 22)$$

$$a_4[\omega_4{}^{\alpha_1}\omega^1] - a_3[\omega_3{}^{\alpha_1}\omega^2] = 0, \qquad (1.\ 23)$$

которые при развертывании по лемме Картана дают уравнения

$$a_3\omega_3^{\alpha_1} = A_1^{\alpha_1}\omega^1 + A_2^{\alpha_1}\omega^2, \tag{1.24}$$

$$a_4\omega_4^{\alpha_1} = A_2^{\alpha_1}\omega^1 - A^{\alpha_1}\omega^2. \tag{1.25}$$

Новые коэффициенты позволяют определить два вектора $A_1^{\alpha_1}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}$ и $A_2^{\alpha_1}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}$. Если эти векторы равны нулю, то $\omega_3^{\alpha_1} = 0$, $\omega_4^{\alpha_1} = 0$ и поверхность V_2 лежит в четырехмерном пространстве. Если оба эти векторы не равны нулю, то они определяют некоторую плоскость, проходящую через точку M. Эта плоскость называется второй нормальной плоскостью поверхности V_2 в точке M.

Может случиться, что эта плоскость вырождается в прямую. В этом случае вектор $\boldsymbol{e}_5$ репера можно выбрать на этой прямой. Такой выбор приводит к равенствам $A_1^{\alpha_2} = A_2^{\alpha_2} = 0$ $(\alpha_2 = 6, \ldots, n)$, в силу которых из (1.24) и (1.25) следует, что

$$a_3\omega_3^5 = a_5\omega^1 + b_5\omega^2,\ a_4\omega_4^5 = b_5\omega^1 - a_5\omega^2,$$

$$\omega_3^{\alpha_2} = 0,\ \omega_4^{\alpha_2} = 0. \tag{1.26}$$

При внешнем дифференцировании последних двух уравнений получаются коварианты

$$[a_5\omega^1 + b_5\omega^2,\ \omega_5^{\alpha_2}] = 0,\ [b_5\omega^1 - a_5\omega^2,\ \omega_5^{\alpha_2}] = 0,$$

из которых $\omega_5^{\alpha_2} = 0$. Отсюда следует, что поверхность V_2 лежит в 5-мерном пространстве.

Следовательно, если минимальная поверхность V_2 не лежит в 5-мерном пространстве, то векторы $A_1^{\alpha_1}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}$ и $A_2^{\alpha_1}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}$ линейно независимы и вторая нормальная плоскость поверхности V_2 двумерна. Нормированные векторы $\boldsymbol{e}_5$ и $\boldsymbol{e}_6$ репера можно выбрать коллинеарными соответственно к этим двум векторам, а векторы $\boldsymbol{e}_{\alpha_2}$ $(\alpha_2, \beta_2, \ldots = 7, \ldots, n)$ — ортогональными к ним. Тогда

$$A_1^6 = A_1^{\alpha_2} = 0,\ A_2^5 = A_2^{\alpha_2} = 0, \tag{1.27}$$

$$g_{55} = g_{66} = 1,\ g_{56} = \cos\gamma_2,\ g_{i_2\alpha_2} = 0\ (i_2, j_2, \ldots = 5, 6), \tag{1.28}$$

где γ_2 — угол между векторами $\boldsymbol{e}_5$ и $\boldsymbol{e}_6$.

Если обозначить

$$A_1^5 = a_5,\ A_2^6 = a_6,$$

то из (1.24) и (1.25), в силу (1.27),

$$a_3\omega_3^5 = a_5\omega^1,\ a_4\omega_4^5 = -a_5\omega^2, \tag{1.29}$$

$$a_3\omega_3^6 = a_6\omega^2,\ a_4\omega_4^6 = a_6\omega^1, \tag{1.30}$$

$$\omega_3^{\alpha_2} = 0,\ \omega_4^{\alpha_2} = 0. \tag{1.31}$$

Из (1.5), в силу (1.7), (1.28),

$$\omega_5{}^5 = -\cos\gamma_2\,\omega_5{}^6,\quad \omega_6{}^6 = -\cos\gamma_2\,\omega_6{}^5, \tag{1.32}$$

$$d\gamma_2 = -\sin\gamma_2\,(\omega_5{}^6 + \omega_6{}^5), \tag{1.33}$$

$$\omega_{\alpha_2}{}^{i_2} = -g^{i_2 j_2} g_{\alpha_2\beta_2}\omega_{j_2}{}^{\beta_2}, \tag{1.34}$$

где

$$g^{55} = g^{66} = \frac{1}{\sin^2\gamma_2},\quad g^{56} = -\frac{\cos\gamma_2}{\sin^2\gamma_2}. \tag{1.35}$$

5. Дальнейшее построение нормальных плоскостей поверхности V_2 в точке M происходит совершенно аналогично и никаких принципиальных трудностей не представляет. Последовательно получаются формулы

$$a_{2k-3}\omega_{2k-3}^{2k-1} = a_{2k-1}\omega^1,\quad a_{2k-2}\omega_{2k-2}^{2k-1} = -a_{2k-1}\omega^2, \tag{1.36}$$

$$a_{2k-3}\omega_{2k-3}^{2k} = a_{2k}\,\omega^2,\quad a_{2k-2}\omega_{2k-2}^{2k} = a_{2k}\omega^1, \tag{1.37}$$

$$\omega_{2k-3}^{\alpha_{k-1}} = 0,\ \omega_{2k-2}^{\alpha_{k-1}} = 0\ \ (\alpha_{k-1} = 2k+1, \ldots, n), \tag{1.38}$$

обобщающие формулы (1.29—31), и формулы

$$g_{2k-1\,2k-1} = g_{2k\,2k} = 1,\ g_{2k-1\,2k} = \cos\gamma_{k-1},\ g_{i_{k-1}\alpha_{k-1}} = 0 \tag{1.39}$$

$$(i_{k-1},\ j_{k-1} = 2k-1,\ 2k),$$

$$\omega_{2k-1}^{2k-1} = -\cos\gamma_{k-1}\omega_{2k-1}^{2k},\quad \omega_{2k}^{2k} = -\cos\gamma_{k-1}\omega_{2k}^{2k-1}, \tag{1.40}$$

$$d\gamma_{k-1} = -\sin\gamma_{k-1}\,(\omega_{2k-1}^{2k} + \omega_{2k}^{2k-1}), \tag{1.41}$$

$$\omega_{\alpha_{k-1}}^{ik-1} = -g^{ik-1\,jk-1} g_{\alpha k-1\beta k-1}\omega_{jk-1}^{\beta k-1}, \tag{1.42}$$

$$g^{2k-1\,2k-1} = g^{2k\,2k} = \frac{1}{\sin^2\gamma_{k-1}},\quad g^{2k-1\,2k} = -\frac{\cos\gamma_{k-1}}{\sin^2\gamma_{k-1}}, \tag{1.43}$$

обобщающие формулы (1.28) и (1.32—35). Справедливость этих формул для последовательных значений k легко доказать методом математической индукции.

Указанный процесс построения нормальных плоскостей минимальной поверхности V_2 при конечном n не может бесконечно продолжаться. При некотором значении k, допустим при $k = p$, получается нормальная плоскость (или же прямая), которая является уже ортогональным дополнением всех предыдущих в пространстве, вмещающем поверхность V_2.

Если эта нормальная плоскость двумерна, то все нормальные плоскости поверхности V_2 двумерны, поверхность V_2 лежит в $2p$-мерном пространстве и при значениях $k = 2, \ldots, p$ справедливы формулы (1.36—42).

Если эта нормальная плоскость одномерна (т. е. вырождается в прямую), то все предыдущие нормальные плоскости поверхности V_2 двумерны и поверхность V_2 лежит в $(2p-1)$-мерном

пространстве. При $k=2, \ldots, p-1$ справедливы формулы (1.36—42); при $k=p$ получаются формулы

$$a_{2p-3}\omega_{2p-3}^{2p-1}=a_{2p-1}\omega^1+b_{2p-1}\omega^2, \tag{1.44}$$

$$a_{2p-2}\omega_{2p-2}^{2p-1}=b_{2p-1}\omega^1-a_{2p-1}\omega^2, \tag{1.45}$$

которые обобщают формулы (1.26).

§ 2. Индикатрисы кривизны

1. Для каждой кривой на поверхности V_2 можно составить формулы Френе

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{i}_0\,ds,\\ d\boldsymbol{i}_0 &= (-c\boldsymbol{M}+\varkappa_1\boldsymbol{i}_1)\,ds,\\ d\boldsymbol{i}_1 &= (-\varkappa_1\boldsymbol{i}_0+\varkappa_2\boldsymbol{i}_2)\,ds,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ d\boldsymbol{i}_k &= -\varkappa_k\boldsymbol{i}_{k-1}\,ds, \end{aligned}$$

где нормированный вектор $\boldsymbol{i}_0$ лежит на касательной, нормированный вектор $\boldsymbol{i}_\nu$ — на ν-той нормали кривой, а $\varkappa_\nu$ — ν-тая кривизна кривой. Из этих формул легко получить следующий результат: если векторный компонент аналитической точки $d^\nu M$ на ν-той нормали делить на ds^ν, то получается вектор, который не зависит от параметризации кривой и равен

$$\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{\nu-1}\boldsymbol{i}_{\nu-1}.$$

Этот вектор называется вектором $(\nu-1)$-ой кривизны кривой. Легко видеть, что он лежит в плоскости, натянутой на точку M, на касательную плоскость и на первые $\nu-1$ нормальные плоскости поверхности V_2.

Компонент этого вектора на $(\nu-1)$-ой нормальной плоскости поверхности V_2 называется вектором $(\nu-1)$-ой нормальной кривизны кривой. Он, очевидно, равен вектору, который получается, если векторный компонент аналитической точки $d^\nu M$ на $(\nu-1)$-ой нормальной плоскости делить на ds^ν.

2. Из (1.1—2) и (1.15—17) следует, что векторный компонент аналитической точки d^2M на первой нормальной плоскости равен

$$a_3[(\omega^1)^2-(\omega^2)^2]\boldsymbol{e}_3+2a_4\omega^1\omega^2\boldsymbol{e}_4. \tag{2.1}$$

Если этот компонент делить на $ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$, то получается вектор первой нормальной кривизны некоторой линии на поверхности V_2. Этот вектор, как видно, зависит только от направления $\omega^1:\omega^2$ этой линии на касательной плоскости. Если

угол поворота вектора $dM = \omega^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega^2 \boldsymbol{e}_2$ от вектора $\boldsymbol{e}_1$ обозначить через φ, то

$$\omega^1 = ds \cos\varphi, \quad \omega^2 = ds \sin\varphi \tag{2.2}$$

и соответствующий вектор первой нормальной кривизны равен

$$a_3 \cos 2\varphi \, \boldsymbol{e}_3 + a_4 \sin 2\varphi \, \boldsymbol{e}_4. \tag{2.3}$$

Геометрическое место концов векторов (2.3), отложенных от точки M, называется первой индикатрисой кривизны поверхности V_2 в точке M. Ее параметрические уравнения на первой нормальной плоскости в неоднородных координатах (т. е. в координатах, в которых $x^0 = 1$) имеют вид

$$x^3 = a_3 \cos 2\varphi,$$
$$x^4 = a_4 \sin 2\varphi.$$

Отсюда

$$\left(\frac{x^3}{a_3}\right)^2 + \left(\frac{x^4}{a_4}\right)^2 = 1.$$

3. Из (1.1—2) следует, что векторный компонент аналитической точки d^3M на второй нормальной плоскости равен такому же компоненту дифференциала от вектора (2.1). Если учесть еще (1.27—29), (2.2) и (2.3), то получается, что этот компонент равен

$$ds^3 \{a_5[\cos 2\varphi \cos\varphi - \sin 2\varphi \sin\varphi]\boldsymbol{e}_5 + \\ + a_6[\cos 2\varphi \sin\varphi + \sin 2\varphi \cos\varphi]\boldsymbol{e}_6\} = \\ = ds^3 \{a_5 \cos 3\varphi \, \boldsymbol{e}_5 + a_6 \sin 3\varphi \, \boldsymbol{e}_6\},$$

где в фигурных скобках стоит, очевидно, вектор второй нормальной кривизны.

Геометрическое место концов векторов второй нормальной кривизны, отложенных от точки M, называется второй индикатрисой кривизны поверхности V_2 в точке M. Ее параметрические уравнения на второй нормальной плоскости в неоднородных координатах имеют вид

$$x^5 = a_5 \cos 3\varphi,$$
$$x^6 = a_6 \sin 3\varphi.$$

Отсюда

$$\left(\frac{x^5}{a_5}\right)^2 + \left(\frac{x^6}{a_6}\right)^2 = 1.$$

4. Допустим, что векторный компонент аналитической точки $d^{k-1}M$ на $(k-2)$-ой нормальной плоскости равен

$$ds^{k-1} \{a_{2k-3} \cos (k-1)\varphi \, \boldsymbol{e}_{2k-3} + a_{2k-2} \sin (k-1)\varphi \, \boldsymbol{e}_{2k-2}\}. \tag{2.4}$$

Легко видеть, что тогда компонент вектора d^kM на $(k-1)$-ой нормальной плоскости равен такому же компоненту дифферен-

циала от вектора (2. 4), имеющему, в силу (1. 1—2), (1. 34—36) и (2. 2), вид

$$ds^k\{a_{2k-1}[\cos(k-1)\varphi\cos\varphi-\sin(k-1)\varphi\sin\varphi]\boldsymbol{e}_{2k-1}+$$
$$+a_{2k}[\cos(k-1)\varphi\sin\varphi+\sin(k-1)\varphi\cos\varphi]\boldsymbol{e}_{2k}\}=$$
$$=ds^k\{a_{2k-1}\cos k\varphi\boldsymbol{e}_{2k-1}+a_{2k}\sin k\varphi\boldsymbol{e}_{2k}\}.$$

Здесь в фигурных скобках стоит вектор $(k-1)$-ой нормальной кривизны. Геометрическое место концов этих векторов, отложенных от точки M, называется $(k-1)$-ой индикатрисой кривизны поверхности V_2 в точке M. Ее параметрические уравнения на $(k-1)$-ой нормальной плоскости в неоднородных координатах имеют вид

$$x^{2k-1}=a_{2k-1}\cos k\varphi,$$
$$x^{2k}=a_{2k}\sin k\varphi.$$

Отсюда

$$\left(\frac{x^{2k-1}}{a_{2k-1}}\right)^2+\left(\frac{x^{2k}}{a_{2k}}\right)^2=1. \qquad (2.5)$$

Следовательно, *все индикатрисы кривизны на двумерных нормальных плоскостях минимальной поверхности V_2 являются овальными линиями второго порядка.* При этом каждая из них имеет внутренний центр в точке M поверхности V_2.

§ 3. Инвариантные направления и величины

1. Полученный выше результат позволяет в каждой точке M поверхности V_2 определить ряд инвариантных направлений и величин. Прежде всего можно выяснить геометрические особенности выбранного нами репера. Из уравнения (2. 5) непосредственно видно, что направления векторов $\boldsymbol{e}_{2k-1}$ и $\boldsymbol{e}_{2k}$ сопряжены по отношению к $(k-1)$-ой индикатрисе кривизны. При этом направление первого из них, очевидно, совпадает с направлением вектора $(k-1)$-ой нормальной кривизны $a_{2k-1}\cos k\varphi\boldsymbol{e}_{2k-1}+$ $+a_{2k}\sin k\varphi\boldsymbol{e}_{2k}$, соответствующего значению $\varphi=0$, т. е. направлению вектора $\boldsymbol{e}_1$. Таким образом, выбор ортонормированных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ на касательной плоскости полностью определяет весь репер. Но этот выбор пока свободен. При желании можно вектор $\boldsymbol{e}_1$ выбрать так, чтобы на некоторой определенной нормальной плоскости, например, на $(l-1)$-ой, соответствующий ему вектор $\boldsymbol{e}_{2l-1}$ был направлен по главному направлению соответствующей индикатрисы кривизны (т. е. по одному из двух направлений в точке M, являющихся одновременно ортогональными и сопряженными по отношению к индикатрисе). Тогда вектор $\boldsymbol{e}_{2l}$, по направлению ему сопряженный, становится ортогональным к ним.

Следовательно, $\varphi_{l-1}=\frac{\pi}{2}$ и формулы (1.39—43) при $k=l$ соответственно упрощаются.

2. Аналогичные соображения позволяют высказать следующее более общее утверждение: *Направления двух векторов $(k-1)$-ой нормальной кривизны, соответствующих двум направлениям на касательной плоскости, составляющим угол $\Delta\varphi$, коллинеарны, если $\Delta\varphi=\varkappa\cdot\frac{\pi}{k}(\varkappa=0,\pm 1,\ \ldots,\ \pm k)$, и сопряжены по отношению к $(k-1)$-ой индикатрисе, если $\Delta\varphi=(2\varkappa-1)\frac{\pi}{2k}$ $(\varkappa=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm(k-1),\ k)$.*

На касательной плоскости определяются, в общем случае, две серии направлений, которым на $(k-1)$-ой нормальной плоскости соответствуют главные направления $(k-1)$-ой индикатрисы кривизны. Каждая из этих серий состоит, в общем случае, из k направлений, составляющих последовательно друг с другом одинаковые углы $\frac{\pi}{k}$. Направления одной серии делят пополам углы между соседними направлениями другой серии. Направления обеих серий назовем *главными направлениями порядка* $k-1$ (ср. [5], стр. 111).

Специальный выбор репера, о котором говорилось выше, можно теперь характеризовать тем, что вектор $\boldsymbol{e}_1$ направлен по одному из главных направлений порядка $k-1$.

3. Если минимальная поверхность V_2 лежит в четномерном пространстве, то все ее нормальные плоскости двумерны. В этом случае вышеизложенное относится ко всем нормальным плоскостям.

Если поверхность V_2 лежит в нечетномерном пространстве с размерностью $2p-1$, то последняя нормальная плоскость вырождается в прямую и при $k=p$ справедливы формулы (1.44) и (1.45), в силу которых вектор $(p-1)$-ой нормальной кривизны, соответствующий направлению (2.2), равен

$$[a_{2p-1}\cos p\varphi+b_{2p-1}\sin p\varphi]\,\boldsymbol{e}_{2p-1}.$$

Здесь коэффициент называется $(p-1)$-ой нормальной кривизной поверхности V_2 в рассматриваемом направлении. На касательной плоскости имеется одна серия направлений, в которых этот коэффициент обращается в нуль (*асимптотические направления порядка* $p-1$), и вторая серия направлений, в которых этот коэффициент имеет экстремальное значение (главные направления порядка $p-1$). Обе серии состоят из p направлений, составляющих последовательно друг с другом одинаковые углы $\frac{\pi}{p}$. При этом направления одной серии делят пополам углы между соседними направлениями другой серии.

4. Индикатриса кривизны (2.7) на $(k-1)$-ой нормальной плоскости определяет в каждой точке M поверхности V_2 также некоторые числовые инварианты. Такими являются, например, коэффициенты уравнения

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{a_{2k-1}}\right)^2 - \lambda & -\lambda\cos\gamma_{k-1} \\ -\lambda\cos\gamma_{k-1} & \left(\frac{1}{a_{2k}}\right)^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которое равносильно уравнению

$$(a_{2k-1}^2 a_{2k}^2 \sin^2\gamma_{k-1})\lambda^2 - (a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2)\lambda + 1 = 0,$$

т. е. величины[2]

$$\delta_{k-1} = a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2, \tag{3.1}$$

$$\Delta_{k-1} = a_{2k-1}\, a_{2k} \sin\gamma_{k-1}. \tag{3.2}$$

Эти величины играют важную роль в формулах, определяющих внешние дифференциалы от вторичных форм ω_i^j и $\omega_{i\varkappa}^{j\varkappa}$ $(\varkappa = 1, \ldots, p-1)$.

Именно, из (1.9) следует, что

$$D\omega_1{}^1 = D\omega_2{}^2 = 0, \quad D\omega_2{}^1 = -D\omega_1{}^2,$$

а из (1.4), в силу (1.7—10) и (1.14—17), получается

$$D\omega_1{}^2 = -(c - \delta_1)\ [\omega^1\omega^2], \tag{3.3}$$

следовательно

$$K = c - \delta_1 \tag{3.4}$$

является гауссовой кривизной поверхности V_2 (ср. [13], гл. IV). Так как $\delta_1 \geqslant 0$, то гауссова кривизна минимальной поверхности V_2 не превышает кривизну пространства и равна ей только в случае плоскости.

Далее, из (1.18) и (1.19) следует, что

$$D(\omega_3{}^3 + \omega_4{}^4) = 0, \quad D(\omega_3{}^4 + \omega_4{}^3) = 0,$$

---

[2] Инвариантность этих величин составляет в евклидовом случае содержание известных теорем Аполлония. В неевклидовом случае они являются числовыми инвариантами двух линий второго порядка на проективной плоскости, одной из которых является индикатриса (2.7), а другой — абсолют.

$$(x^{2k-1})^2 + (x^{2k})^2 + 2x^{2k-1}x^{2k}\cos\gamma_{k-1} + \frac{1}{C} = 0$$

$(k-1)$-ой нормальной плоскости (см. [4], стр. 334).

а из (1. 4), в силу (1. 7—29), получается

$$-D\omega_4{}^4 = D\omega_3{}^3 = [\omega_3^{i_1}\omega_{i_1}^3] + \operatorname{cot}\gamma_1\left(2\Delta_1 - \frac{\delta_2}{\Delta_1}\right)[\omega^1\omega^2], \quad (3.\ 5)$$

$$-D\omega_4{}^3 = D\omega_3{}^4 = [\omega_3^{i_1}\omega_{i_1}^4] - \frac{1}{\sin\gamma_1}\left(2\Delta_1 - \frac{\delta_2}{\Delta_1}\right)[\omega^1\omega^2], \quad (3.\ 6)$$

где величину δ_2, которая при $n \geqslant 6$ определяется формулой (3. 1), в случае $n = 5$ нужно заменить величиной $a_5{}^2 + b_5{}^2$.

Аналогично, из (1. 30) и (1. 31),

$$D(\omega_5{}^5 + \omega_6{}^6) = 0,\ D(\omega_5{}^6 + \omega_6{}^5) = 0,$$

а из (1. 4)

$$-D\omega_6{}^6 = D\omega_5{}^5 = [\omega_5^{i_2}\omega_{i_2}^5] + \operatorname{cot}\gamma_2\left(\Delta_2\frac{\delta_1}{\Delta_1} - \frac{\delta_3}{\Delta_2}\right)]\omega^1\omega^2], \quad (3.\ 7)$$

$$-D\omega_6{}^5 = D\omega_5{}^6 = [\omega_5^{i_2}\omega_{i_2}^6] - \frac{1}{\sin\gamma_2}\left(\Delta_2\frac{\delta_1}{\Delta_1} - \frac{\delta_3}{\Delta_2}\right)[\omega^1\omega^2], \quad (3.\ 8)$$

где в случае $n = 7$ величина δ_3 заменяется величиной $a_7{}^2 + b_7{}^2$.

Вообще получаются формулы, обобщающие (3. 5—8),

$$-D\omega_{2k}^{2k} = D\omega_{2k-1}^{2k-1} = [\omega_{2k-1}^{i_{k-1}}\omega_{i_{k-1}}^{2k-1}] + \\ + \operatorname{cot}\gamma_{k-1}\left(\Delta_{k-1}\frac{\delta_{k-2}}{\Delta_{k-2}} - \frac{\delta_k}{\Delta_{k-1}}\right)[\omega^1\omega^2], \quad (3.\ 9)$$

$$-D\omega_{2k}^{2k-1} = D\omega_{2k-1}^{2k} = [\omega_{2k-1}^{i_{k-1}}\omega_{i_{k-1}}^{2k}] - \\ - \frac{1}{\sin\gamma_{k-1}}\left(\Delta_{k-1}\frac{\delta_{k-2}}{\Delta_{k-1}} - \frac{\delta_k}{\Delta_{k-1}}\right)[\omega^1\omega^2], \quad (3.\ 10)$$

где в случае $n = 2p - 1$ величина δ_{p-1} заменяется величиной $a_{2p-1}^2 + b_{2p-1}^2$.

Справедливость формул (3. 9) и (3. 10) легко установить методом математической индукции.

Литература

1. Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию. Москва, 1957.
2. Лумисте Ю. Г., О n-мерных поверхностях с асимптотическими полями p-направлений. Изв. вузов МВО, Матем., 1959, 1(8), 105—113.
3. Лумисте Ю. Г., О трехмерных поверхностях с тремя ортогональными семействами асимптотических. Изв. вузов МВО, Матем., 1959, **3**(10), 173—185.
4. Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства. Москва, 1955.
5. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II. Москва, 1948.
6. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1948.
7. Bompiani, E., Surfaces de translation et surfaces minima dans les espaces courbes. C. r. Acad. Sci., 1919, **169**, 840—843.
8. Borůvka, O., Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante. C. r. Acad. Sci., 1928, **187**, 334—336.

9. Borůvka, O., Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante. C. r. Acad. Sci., 1928, **187**, 1271—1273.
10. Borůvka, O., Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante, I, II, III. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, 1932, **165**, 1—22; 1935, **212**, 1—20; 1935, **214**, 1—25.
11. Pinl, M., Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen. Arch. Math., 1953, **4**, 369—373.
12. Pinl, M., B-Kugelbilder reeller Minimalflächen in R_4. Math. Z., 1953, **59**, 290—295.
13. Pinl, M., Minimalflächen fester Gaußschen Krümmung. Math. Ann., 1958, **136**, 34—40.

Поступило
28 IX 1959

KAHEMÕÕTMELISTE MINIMAALPINDADE TEOORIAST I. KÕVERUSTEOORIA

Ü. Lumiste
Geomeetriakateeder

Resümee

Artiklis käsitletakse kahemõõtmeliste minimaalpindade kõverusteooriat n-mõõtmelises eukleidilises või mitteeukleidilises ruumis. Mitmemõõtmelise ruumi üldiste kahemõõtmeliste pindade kõverusteooria põhilised konstruktsioonid — normaalkõveruse indikatrissid — osutuvad kõrgemat järku normaaltasandeis teatavasti keerulisteks ratsionaalseteks kõverateks (vt. [10]). Artiklis näidatakse, et minimaalpinna erijuhul pilt tunduvalt lihtsustub: kahemõõtmelise minimaalpinna kõik normaaltasandid osutuvad kahemõõtmelisteks, kõik normaalkõveruse indikatrissid — ellipseiks keskpunktidega pinna punktis. See võimaldab sisse tuua pinnaga tema suvalises punktis invariantselt seotud sihid (mitmesugust järku peasihid, kõrgemat järku asümptootilised sihid) ning suurused (indikatrisside algebralised invariandid). Need sihid ja suurused omakorda võimaldavad liikuva reeperi sobiva valiku teel lihtsustada infinitesimaalse nihke valemeid ja ruumi struktuurivõrrandeid.

ZUR THEORIE DER ZWEIDIMENSIONALEN MINIMALFLÄCHEN I. KRÜMMUNGSTHEORIE

Ü. Lumiste

Zusammenfassung

In dem Artikel wird die Krümmungstheorie der zweidimensionalen Minimalflächen im n-dimensionalen euklidischen oder nichteuklidischen Raum behandelt. Es wird gezeigt, daß die grundlegenden Konstruktionen der Krümmungstheorie der zweidimensionalen Flächen im n-dimensionalen Raum — die Indikatrizen der Normalkrümmung, welche im allgemeinen Falle in höheren Normalräumen bekanntlich ganz komplizierte Kurven sind (s. [10]), im speziellen Falle der Minimalflächen sich stets als diejenigen Ellipsen in den zweidimensionalen Normalebenen erweisen, deren Mittelpunkte im Flächenpunkt liegen. Dieses Ergebnis ermöglicht die invarianten Richtungen (Hauptrichtungen verschiedener Ordnung, asymptotische Richtungen höherer Ordnung) und die invarianten Größen (algebraische Invarianten der Indikatrizen) einzuführen. Mit deren Hilfe kann man das bewegliche n-Bein spezialisieren und die Formeln der infinitesimalen Bewegung sowie auch deren Integrabilitätsbedingungen vereinfachen.

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ II. ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Ю. Г. Лумисте
Кафедра геометрии

В предыдущей статье [1] под тем же общим заглавием была построена теория кривизны минимальной поверхности V_2 в n-мерном евклидовом или неевклидовом пространстве. В частности, были введены инварианты δ_1 и Δ_1 — числовые инварианты (инварианты Аполлония) индикатрисы кривизны на первой нормальной плоскости. Оказалось, что инвариант $K = c - \delta_1$, где c — кривизна пространства, является гауссовой кривизной поверхности V_2 и тем самым принадлежит к внутренней геометрии V_2.

В евклидовом пространстве R_3, как известно, не существует минимальных поверхностей постоянной гауссовой кривизны. Недавно Пинлу [6] удалось этот результат обобщить на случай поверхностей V_2 евклидова пространства R_n. Зато в эллиптическом пространстве S_3 давно известна одна такая поверхность — прямоугольная поверхность Клиффорда. В настоящей статье доказывается, что она является единственно возможной вещественной минимальной поверхностью постоянной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом или неевклидовом пространстве.

Первые примеры минимальных V_2 постоянной кривизны в эллиптических пространствах S_4 и S_5 указал Борувка [3, 4] — это поверхности с $\delta_1 = 2\Delta_1 = \text{const}$ (т. е. поверхности с конгруэнтными круговыми индикатрисами кривизны). В настоящей статье доказывается, что в пространстве S_5 существует еще более общий класс поверхностей с $\delta_1 = \text{const}$, $\Delta_1 = \text{const}$. Устанавливается, что этим найдены все вещественные минимальные поверхности V_2 постоянной кривизны в 4- и 5-мерных евклидовых или неевклидовых пространствах. Оказывается, кроме того, что в случае $n = 4$ условие $\Delta_1 = \text{const}$ влечет за собой постоянство гауссовой кривизны K (случай $n = 5$ остается еще открытым). Доказано также, что постоянным отношением $\delta_1 : \Delta_1$ могут обладать, кроме этих поверхностей, только поверхности с круговыми

индикатрисами кривизны. Полученные в работе поверхности с $\delta_1 = \text{const}$ являются системами импримитивности некоторых групп движений как в пространстве S_4, в котором они обладают гауссовой кривизной $\frac{1}{3}c$, так и в пространстве S_5, в котором они несут евклидову метрику.

§ 1. Поверхности с «подобными» первыми индикатрисами кривизны

1. В этом параграфе рассматриваются такие минимальные поверхности V_2, инварианты δ_1 и Δ_1 которых имеют постоянное отношение

$$\delta_1 : \Delta_1 = \text{const}. \tag{1.1}$$

Геометрически такая поверхность, в случае евклидова пространства R_n, характеризуется следующим свойством: ее первые индикатрисы кривизны подобны между собой во всех точках поверхности. [1]

Исследование рассматриваемых поверхностей удобно вести в реперé, в котором как векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ на касательной плоскости, так и векторы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ на первой нормальной плоскости попарно ортогональны (существование такого репера доказано в [1], § 3, п. 1). Тогда в формулах (1.18—21) и (3.1—2) в [1] при $k = 2$ $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$, и они имеют, соответственно, вид

$$\omega_3{}^3 = \omega_4{}^4 = 0, \quad \omega_4{}^3 = -\omega_3{}^4, \tag{1.2}$$

$$\delta_1 = a_3{}^2 + a_4{}^2, \quad \Delta_1 = a_3 a_4, \tag{1.3}$$

и условие (1.1) равносильно условию

$$a_4 = \varkappa a_3, \quad \varkappa = \text{const}.$$

Следовательно, в уравнениях

$$da_3 = a_3'\omega^1 + a_3''\omega^2, \tag{1.4}$$

$$da_4 = a_4'\omega^1 + a_4''\omega^2, \tag{1.5}$$

$$2a_3\omega_1{}^2 - a_4\omega_3{}^4 = a_3''\omega^1 - a_3'\omega^2, \tag{1.6}$$

$$2a_4\omega_1{}^2 - a_3\omega_3{}^4 = a_4''\omega^1 - a_4'\omega^2, \tag{1.7}$$

которые получаются продолжением уравнений (1.15—16) из [1],

$$a_4' = \varkappa a_3', \quad a_4'' = \varkappa a_3''.$$

---

[1] В случае неевклидова пространства индикатрисы получаются друг из друга движением и преобразованием, которое переводит точку P с расстоянием ϱ от фиксированной точки M в такую точку P' полупрямой MP, расстояние ϱ' которой от точки M определяется по формуле

$$\tan \sqrt{c}\varrho' = \lambda \tan \sqrt{c}\varrho, \quad \lambda = \text{const}.$$

Из уравнений (1.6—7) следует теперь

$$(1-\varkappa^2)\,a_3\omega_3{}^4=0.$$

Если поверхность V_2 отлична от плоскости, то $a_3\neq 0$, и, следовательно, или 1) $\varkappa^2=1$, или же 2) $\omega_3{}^4=0$.

2. В первом случае $\varkappa=\pm 1$, следовательно, $a_4=\pm a_3$, и первые индикатрисы кривизны являются окружностями. Здесь всегда можно перейти к равенству

$$a_4=a_3=a, \tag{1.8}$$

заменив, если это нужно, вектор $\boldsymbol{e}_4$ вектором $-\boldsymbol{e}_4$. Уравнения (1.4—7) дают теперь

$$d\ln a=a'\omega^1+a''\omega^2, \tag{1.9}$$

$$2\omega_1{}^2-\omega_3{}^4=a''\omega^1-a'\omega^2, \tag{1.10}$$

где $a'=a_3':a$, $a''=a_3'':a$. При внешнем дифференцировании этих уравнений получаются коварианты

$$[\Delta a'\omega^1]+[\Delta a''\omega^2]=0,$$

$$[\Delta a''\omega^1]-[\Delta a'\omega^2]=0,$$

где

$$\Delta a'=da'-a''\omega_1{}^2-\left(2c-6a^2-\frac{\delta_2}{a^2}\right)\omega^1,$$

$$\Delta a''=da''+a'\omega_1{}^2.$$

Им присоединяются ковариванты (1.22—23) из [1], которые получаются при внешнем дифференцировании уравнений (1.17) в [1]. При такой системе ковариантов, очевидно, $s_1=2(n-3)$, $s_2=0$, т. е. $Q=2(n-3)$. С другой стороны, $N=2(n-3)$. Следовательно, минимальные поверхности V_2, первые индикатрисы которых являются окружностями, существуют и определяются с произволом $2(n-3)$ функций одного аргумента.

3. Во втором случае, когда $\omega_3{}^4=0$, ограничиваемся поверхностями в 4- и 5-мерных пространствах.

Случай $n=4$. В этом случае внешнее дифференцирование уравнения $\omega_3{}^4=0$ дает сразу противоречие $2\varkappa a_3{}^2=0$. Следовательно, *минимальная поверхность V_2 в пространстве R_4, S_4 или ${}^1S_4$ имеет «подобные» индикатрисы кривизны тогда и только тогда, если последние являются окружностями.*

Случай $n=5$. В этом случае внешнее дифференцирование уравнения $\omega_3{}^4=0$ при помощи формул (1.26) из [1] дает конечное соотношение

$$\alpha^2+\beta^2=2\varkappa^2a^2, \tag{1.11}$$

где обозначено

$$a=a_3,\ \alpha=\frac{a_5}{a},\ \beta=\frac{b_5}{a}.$$

Сами формулы (1. 26) в [1] имеют в новых обозначениях вид

$$\omega_3{}^5 = a\omega^1 + \beta\omega^2,$$
$$\varkappa\omega_4{}^5 = \beta\omega^1 - a\omega^2.$$

Их продолжение дает уравнения

$$da - \beta\omega_1{}^2 = \varepsilon\omega^1 + \eta\omega^2,$$
$$d\beta + a\omega_1{}^2 = \eta\omega^1 - \varepsilon\omega^2.$$

Теперь дифференцированием конечного соотношения (1. 11) получается система уравнений, из которой

$$\varepsilon = aa' - \beta a'',$$
$$\eta = \beta a' + aa''.$$

Таким образом имеем систему

$$d\ln a = a'\omega^1 + a''\omega^2, \tag{1.12}$$
$$2\omega_1{}^2 = a''\omega^1 - a'\omega^2, \tag{1.13}$$
$$2da = (2aa' - \beta a'')\omega^1 + (\beta a' + 2aa'')\omega^2, \tag{1.14}$$
$$2d\beta = (2\beta a' + aa'')\omega^1 - (aa' - 2\beta a'')\omega^2. \tag{1.15}$$

Внешнее дифференцирование первых двух уравнений и развертывание полученных ковариантов дает:

$$da' = \varrho\omega^1 + \sigma\omega^2,$$
$$da'' = \sigma\omega^1 - [\varrho + 2(\delta_1 - c) - \tfrac{1}{2}(a'^2 + a''^2)]\omega^2.$$

Теперь внешним дифференцированием последних двух уравнений получаются соотношения

$$\beta(\delta_1 - c) = 0,\ a(\delta_1 - c) = 0.$$

Отсюда, по формуле (3. 4) в [1],

$$K = c - \delta_1 = 0, \tag{1.16}$$

или

$$a^2(1 + \varkappa^2) = c. \tag{1.17}$$

В случае $c \leqslant 0$ полученное равенство оказывается противоречивым.

Следовательно, *единственными минимальными поверхностями V_2 с «подобными» индикатрисами кривизны в пространствах R_5 и ${}^1S_5$ являются поверхности с окружностями в качестве индикатрис кривизны.*

4. Что касается поверхностей в эллиптическом пространстве S_5, то здесь возможно исключение. Именно, из (1. 17) видно, что

$$a = \sqrt{\frac{c}{1 + \varkappa^2}} = \text{const}.$$

Следовательно, в уравнениях (1. 12—15) $a' = a'' = 0$, и, стало быть,

$$\omega_1{}^2 = 0,\ \alpha = \text{const},\ \beta = \text{const}.$$

Теперь $D\omega^1 = 0$, $D\omega^2 = 0$, т. е.

$$\omega^1 = du^1,\ \omega^2 = du^2.$$

На основании (1. 11) можно еще писать:

$$\alpha = \varkappa a \sqrt{2} \cos\lambda,\ \beta = \varkappa a \sqrt{2} \sin\lambda,\ \lambda = \text{const}.$$

Рассматриваемая поверхность V_2 определяется теперь системой

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = 0,\ \omega_1{}^5 = 0,\ \omega_2{}^5 = 0, \tag{1.18}$$

$$\omega_1{}^3 = a du^1,\ \omega_2{}^3 = -a du^2,\ \omega_1{}^4 = \varkappa a du^2,\ \omega_2{}^4 = \varkappa a du^1, \tag{1.19}$$

$$\omega_1{}^2 = 0,\ \omega_3{}^4 = 0, \tag{1.20}$$

$$\omega_3{}^5 = \varkappa a \sqrt{2}\ (du^1 \cos\lambda + du^2 \sin\lambda),$$

$$\omega_4{}^5 = a \sqrt{2}\ (du^1 \sin\lambda - du^2 \cos\lambda). \tag{1.21}$$

Эта система оказывается вполне интегрируемой, и она, следовательно, определяет поверхность V_2 при заданных $\varkappa$ и λ с произволом 13 постоянных.

Поверхность обладает гауссовой кривизной $K = 0$ и ее индикатрисы кривизны не только подобны, но и конгруэнтны.

§ 2. Минимальные поверхности постоянной гауссовой кривизны

1. Хорошо известно, что в эвклидовом пространстве R_3 не существует минимальных поверхностей постоянной гауссовой кривизны. В эллиптическом пространстве S_3 имеется пример такой поверхности — прямоугольная поверхность Клиффорда. Оказывается, что этот пример единственный для рассматриваемых поверхностей в пространствах R_3, S_3 и ${}^1S_3$.

Действительно, минимальная поверхность V_2 определяется в случае $n = 3$ системой

$$\omega^3 = 0,\ \omega_1{}^3 = a_3\omega^1 + b_3\omega^2,\ \omega_2{}^3 = b_3\omega^1 - a_3\omega^2. \tag{2.1}$$

Ее гауссовой кривизной является величина

$$K = c - a_3{}^2 - b_3{}^2. \tag{2.2}$$

Если векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ репера направлены по главным направлениям поверхности V_2, то $b_3 = 0$ и из (2. 2) следует при $K = \text{const}$, что

$$a_3 = \text{const}.$$

Внешним дифференцированием уравнений (2. 1) получаются коварианты

$$2a_3\,[\omega_1{}^2\omega^2] = 0,\ 2a_3\,[\omega_1{}^2\omega^1] = 0,$$

из которых

$$\omega_1{}^2 = 0.$$

Отсюда внешним дифференцированием получается, что

$$K = c - a_3{}^2 = 0,$$

т. е. $c > 0$, и поверхность V_2 является, следовательно, «развертывающейся поверхностью» Бианки в эллиптическом пространстве S_3. Известно, что минимальной среди этих поверхностей является только прямоугольная поверхность Клиффорда (см. [2], § 23).

2. Что касается минимальных поверхностей V_2 постоянной гауссовой кривизны в n-мерных евклидовых или неевклидовых пространствах, то здесь известен результат Пинла [5] о том, что в евклидовом пространстве R_n таких поверхностей нет. Оказывается, что в эллиптических пространствах S_4 и S_5, также как и в S_3, такие поверхности имеются. В S_5 такими являются, например, поверхности, изученные в § 1, п. 4.

Постоянной гауссовой кривизной могут обладать и минимальные поверхности с окружностями в качестве индикатрис кривизны.

Действительно, так как гауссова кривизна такой поверхности равна $K = c - 2a^2$, то из $K = \text{const}$ следует $a = \text{const}$, и поэтому, в силу (1. 9) и (1. 10),

$$2\omega_1{}^2 = \omega_3{}^4.$$

Отсюда внешним дифференцированием по формулам (3. 3) и (3. 6) из [1] получается равенство

$$-2(c - 2a^2) = -2a^2 + \frac{1}{2a^2}\,(a_5{}^2 + b_5{}^2). \qquad (2.3)$$

При $n = 4$, когда $a_5 = b_5 = 0$, отсюда получается, что $c > 0$ и $a = \sqrt{\frac{c}{3}}$. Рассматриваемая поверхность V_2 существует, следовательно, только в эллиптическом пространстве S_4 и определяется в нем системой

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega_1{}^3 - \sqrt{\frac{c}{3}}\,\omega^1 = \omega_2{}^3 + \sqrt{\frac{c}{3}}\,\omega^2 =$$

$$= \omega_1{}^4 - \sqrt{\frac{c}{3}}\,\omega^2 = \omega_2{}^4 - \sqrt{\frac{c}{3}}\,\omega^1 = 0, \qquad (2.4)$$

$$2\omega_1{}^2 - \omega_3{}^4 = 0, \qquad (2.5)$$

оказывающейся вполне интегрируемой.

Отметим, что гауссова кривизна поверхности равна $\frac{1}{3}c$.

При $n=5$ можно векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ репера, которые в случае кругового индикатриса могут свободно вращаться в касательной плоскости поверхности V_2, направить по главным направлениям второго порядка поверхности V_2. Тогда $b_5=0$, и из (2.3)

$$a_5{}^2=4a^2(3a^2-c)=\text{const}.$$

Уравнения (1.26) в [1] имеют теперь вид

$$a\omega_3{}^5=a_5\omega^1,\ a\omega_4{}^5=-a_5\omega^2,$$

и их внешнее дифференцирование дает ковариванты, из которых

$$\omega_1{}^2=0.$$

Из (3.3) в [1] следует теперь, что

$$K=c-2a^2=0,$$

т. е. $c>0$. Поверхность существует только в эллиптическом пространстве S_5 и определяется в нем вполне интегрируемой системой

$$\omega^3=\omega^4=\omega^5=0,\ \omega_1{}^5=\omega_2{}^5=0,$$

$$\omega_1{}^3-\sqrt{\frac{c}{2}}\,\omega^1=\omega_2{}^3-\sqrt{\frac{c}{2}}\,\omega^2=0,$$

$$\omega_1{}^4-\sqrt{\frac{c}{2}}\,\omega^2=\omega_2{}^4-\sqrt{\frac{c}{2}}\,\omega^1=0,\ \omega_3{}^5-\sqrt{2c}\,\omega^1=$$

$$=\omega_4{}^5+\sqrt{2c}\,\omega^2=0,$$

$$\omega_1{}^2=\omega_3{}^4=0.$$

Ее можно рассматривать как частный случай поверхности, изученной в § 1, п. 4, соответствующий значениям [2] $\varkappa=1$, $\lambda=0$.

3. Оказывается, что полученные примеры являются *единственными минимальными поверхностями V_2 постоянной гауссовой кривизны в евклидовых или неевклидовых пространствах с размерностями $n=4$ и $n=5$.*

Детальное доказательство этого утверждения проводим только в случае $n=4$, когда оно получается сравнительно легко.

Так как гауссова кривизна минимальной поверхности V_2 равна величине

$$K=c-(a_3{}^2+a_4{}^2),$$

то поверхности, для которых $K=\text{const}$, характеризуются условием

$$a_3{}^2+a_4{}^2=k^2,\ k=\text{const}.$$

---

[2] Отметим, что полученные в этом пункте результаты фактически содержатся уже в заметках Борувки [3, 4], в которых сообщается, что в эллиптических пространствах S_4 и S_5 существуют минимальные V_2, индикатрисы которых являются окружностями с одинаковыми радиусами.

Отсюда

$$a_3 = k\cos\vartheta,\ a_4 = k\sin\vartheta.$$

Уравнения (1.4—7) принимают теперь вид

$$d\vartheta = \vartheta'\omega^1 + \vartheta''\omega^2, \tag{2.6}$$

$$\cos 2\vartheta\omega_3{}^4 = -\vartheta''\omega^1 + \vartheta'\omega^2, \tag{2.7}$$

$$2\omega_1{}^2 = \sin 2\vartheta\cdot\omega_3{}^4, \tag{2.8}$$

где

$$\vartheta' = a_4'\cos\vartheta - a_3'\sin\vartheta,\ \ \vartheta'' = a_4''\cos\vartheta - a_3''\sin\vartheta.$$

Внешнее дифференцирование уравнения (2.8) дает, в случае $n = 4$, конечное соотношение

$$\vartheta'^2 + \vartheta''^2 = h^2, \tag{2.9}$$

где

$$h^2 = h^2(\vartheta) \equiv \frac{k^2}{2}(2 + \sin^2 2\vartheta) - c. \tag{2.10}$$

Внешним дифференцированием уравнений (2.6) и (2.7) получаются коварианты, из которых

$$d\vartheta' - \vartheta''\omega_1{}^2 + H\omega^1 = \sigma'\omega^1 + \sigma''\omega^2, \tag{2.11}$$

$$d\vartheta'' + \vartheta'\omega_1{}^2 = \sigma''\omega^1 - \sigma'\omega^2, \tag{2.12}$$

где

$$H = H(\vartheta) \equiv 2h^2\tan 2\vartheta + \frac{k^2}{2}\sin 4\vartheta. \tag{2.13}$$

Так как соотношение (2.9) равносильно равенствам

$$\vartheta' = h\cos\chi,\ \ \vartheta'' = h\sin\chi,$$

то уравнениям (2.11) и (2.12) можно дать вид

$$dh + H\omega^1\cos\chi = \chi^1\omega^1 + \chi''\omega^2, \tag{2.14}$$

$$h(d\chi + \omega_1{}^2) - H\omega^1\sin\chi = \chi''\omega^1 - \chi^1\omega^2. \tag{2.15}$$

Дифференцированием соотношения (2.10) получается

$$2h\,dh = hk^2\sin 4\vartheta(\omega^1\cos\chi + \omega^2\sin\chi).$$

Отсюда, или $h = 0$, и, следовательно, $\vartheta' = \vartheta'' = 0$, т. е. $\vartheta = \text{const}$, а также $a_4 : a_3 = \tan\vartheta = \text{const}$, и утверждение доказано, или же

$$dh = \frac{k^2}{2}\sin 4\vartheta(\omega^1\cos\chi + \omega^2\sin\chi).$$

В последнем случае из уравнения (2.14) получаются соотношения, которые вместе с уравнениями (2.7) и (2.8) позволяют уравнение (2.15) писать в виде

$$hd\chi = X(\omega^1\sin\chi - \omega^2\cos\chi),$$

где

$$X = X(\vartheta) = H + \frac{1}{2}(h^2 \tan 2\vartheta + k^2 \sin 4\vartheta). \qquad (2.16)$$

При внешнем дифференцировании последнего уравнения получается ковариант

$$[dh\, d\chi] = X'[d\vartheta,\ \omega^1 \sin\chi - \omega^2 \cos\chi] + \\ + X\,[d\chi + \omega_1{}^2,\ \omega^1 \cos\chi + \omega^2 \sin\chi],$$

который, после умножения на h и выполнения нужных подстановок, приводит к конечному соотношению

$$h^2 X' - X\left(\frac{k^2}{2}\sin 4\vartheta - \frac{h^2}{2}\tan 2\vartheta + X\right) = 0.$$

При помощи (2.10), (2.13) и (2.16) легко проверить, что это равенство не сводится к тождеству. Получается некоторое конечное уравнение для определения ϑ, из которого $\vartheta = \text{const}$. Но тогда $a_4 : a_3 = \tan\vartheta = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Доказательство этого утверждения в случае $n = 5$ можно провести аналогичным путем, т. е. последовательные продолжения системы (2.6—8) довести до результата $\vartheta = \text{const}$. Нужно, однако, сказать, что это связано с довольно длинными выкладками: придется привлечь еще уравнения (1.26) из [1], коэффициенты которых связаны соотношением

$$a_5{}^2 + b_5{}^2 = k^2(h^2 - \vartheta'^2 - \vartheta''^2),$$

которое заменяет в случае $n = 5$ соотношение (2.10).

§ 3. Минимальные поверхности V_2 с постоянным инвариантом Δ_2

Рассмотрим еще минимальные поверхности V_2 с постоянным инвариантом $\Delta_2 = a_3 a_4$, т. е. при условии [3]

$$a_3 a_4 = k,\ k = \text{const}.$$

Оказывается, что *в случае* $n = 4$ *такие поверхности также совпадают с ранее изученными поверхностями*, т. е. в евклидовом пространстве R_4 и в гиперболическом пространстве ${}^1S_4$ их нет, а в эллиптическом пространстве такие поверхности имеются и являются в то же время поверхностями постоянной гауссовой кривизны.

Для доказательства нужно исходить из уравнений (1.4—7) и подставить туда

$$a_3 = a,\ a_4 = \frac{k}{a}.$$

[3] В евклидовом пространстве R_n такие поверхности, если бы они существовали, имели бы первые индикатрисы кривизны с одинаковой площадью.

Получается система

$$da = a'\omega^1 + a''\omega^2, \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{k} - \frac{k}{a}\right)\omega_3{}^4 = a''\omega^1 - a'\omega^2, \tag{3.2}$$

$$4k\omega_1{}^2 = \left(a^2 + \frac{k^2}{a^2}\right)\omega_3{}^4. \tag{3.3}$$

При внешнем дифференцировании уравнения (3.3) по формулам (3.4) и (3.5) из [1] получается, в случае $n = 4$, конечное соотношение

$$a'^2 + a''^2 = h^2, \tag{3.4}$$

где

$$h^2 = \frac{1}{2}(a^4 - 2ca^2 + k^2). \tag{3.5}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (3.1) и (3.2) дает коварианты, из которых

$$da' - a''\omega_1{}^2 + H\omega^1 = \beta'\omega^1 + \beta''\omega^2, \tag{3.6}$$

$$da'' + a'\omega_1{}^2 = \beta''\omega^1 - \beta'\omega^2, \tag{3.7}$$

где

$$H = -\frac{3a^4 + k^2}{a(a^4 - k^2)}h^2 - \frac{1}{a}(a^4 - k^2).$$

Соотношение (3.4) равносильно двум равенствам

$$a' = h\cos\alpha,\ a'' = h\sin\alpha.$$

Поэтому уравнения (3.6) и (3.7) можно писать в виде

$$dh + H\omega^1\cos\alpha = a'\omega^1 + a''\omega^2, \tag{3.8}$$

$$h(d\alpha + \omega_1{}^2) - H\omega^1\sin\alpha = a''\omega^1 - a'\omega^2. \tag{3.9}$$

Из (3.5) получается дифференцированием

$$2hdh = ah(a^2 - c)(\omega^1\cos\alpha + \omega^2\sin\alpha).$$

Отсюда, или $h = 0$, следовательно, из (3.4) $a' = a'' = 0$, т. е. $a = \text{const}$, и утверждение доказано, или же

$$dh = a(a^2 - c)(\omega^1\cos\alpha + \omega^2\sin\alpha).$$

Из (3.8) получаются соотношения, позволяющие уравнение (3.9) писать в виде

$$hda = A(\omega^1\sin\alpha - \omega^2\cos\alpha), \tag{3.10}$$

где

$$A = H + a(a^2 - c) - h^2\frac{a^4 + k^2}{2a(a^4 - k^2)}.$$

При внешнем дифференцировании уравнения (3.10) получается ковариант

$$[dhd\alpha] = A'[da,\ \omega^1 \sin\alpha - \omega^2 \cos\alpha] +$$
$$+ A\,[d\alpha + \omega_1{}^2,\ \omega^1 \cos\alpha + \omega^2 \sin\alpha],$$

который, после умножения на h и выполнения нужных подстановок, дает конечное соотношение

$$A'h^2 - A\,(2a^3 - 2ca + H) = 0.$$

Это равенство не сводится к тождеству. Следовательно, величина a удовлетворяет некоторому уравнению с постоянными коэффициентами, т. е. $a = \text{const}$. Это и требовалось доказать.

§ 4. Рассматриваемые поверхности как системы импримитивности в S_4 и S_5

1. Известно, что поверхности Клиффорда, в частности и прямоугольные, являются системами импримитивности двупараметрической группы движений в пространстве S_3 — именно группы, являющейся прямым произведением двух однопараметрических групп паратактических сдвигов.

Оказывается, что некоторым аналогичным свойством обладают и другие поверхности, полученные в § 2, т. е. минимальные поверхности V_2 постоянной гауссовой кривизны в пространствах S_4 и S_5. Именно, любые две точки M_0 и $M_0{}^*$ такой поверхности V_2 могут быть совмещены некоторым движением в S_4 или S_5, оставляющем V_2 инвариантным.

Для доказательства рассмотрим движение, которое приводит точку $M_0{}^*$ вместе с связанным с ней репером, использованным нами в § 2, в совпадение с точкой M_0 и соответствующим ей репером. Обозначим новое положение поверхности V_2 при таком движении через $\tilde{V}_2$, а формы инфинитезимального перемещения на $\tilde{V}_2$ через $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2$, $\tilde{\omega}_1{}^2$ и т. д.

2. Случай $n = 4$. В этом случае формы инфинитезимального перемещения репера на V_2 и $\tilde{V}_2$ связаны уравнениями (2.4—5). Поэтому система

$$\omega^1 = \tilde{\omega}^1,\ \ \omega^2 = \tilde{\omega}^2,\ \ \omega_1{}^2 = \tilde{\omega}_1{}^2$$

вполне интегрируема. Следовательно, с произволом трех постоянных существует преобразование между главными параметрами u^1, u^2 и $\tilde{u}^1$, $\tilde{u}^2$ на поверхностях V_2 и $\tilde{V}_2$, которое приводит в совпадение формы ω^i и $\tilde{\omega}^i$ $(i = 1, 2)$, а также формы $\omega_1{}^2$ и $\tilde{\omega}_1{}^2$.

Тогда, в силу (2.4—5), совпадают все формы в формулах инфинитезимального перемещения. Произвольные постоянные можно при этом выбрать так, чтобы точке M_0 как на V_2, так и на $\tilde{V}_2$ отвечали те же значения параметров u^1, u^2. Точки M и $\tilde{M}$

поверхностей V_2 и $\tilde{V}_2$ вместе с векторами соответствующих подвижных реперов на этих поверхностях (точнее их координаты в некотором неподвижном репере) являются теперь двумя решениями вполне интегрируемой системы, отвечающим одним и тем же начальным условиям в точке M_0. Отсюда следует, что поверхности V_2 и $\tilde{V}_2$ действительно совпадают. Этим утверждение доказано.

Доказано даже больше: совместить можно не только точки M_0 и M_0^*, но и направления, произвольно взятые в этих точках, не меняя при этом самой поверхности V_2.

Полученный результат можно выразить в следующем виде: *минимальная поверхность V_2 постоянной гауссовой кривизны в эллиптическом пространстве S_4 является системой импримитивности некоторой трехпараметрической группы движений пространства S_4. В частности, такая поверхность допускает вращение вокруг любой своей двумерной нормальной плоскости.*

3. Случай $n=5$. В этом случае формы инфинитезимального перемещения связаны уравнениями (1.18—21). Главные формы являются теперь полными дифференциалами от некоторых параметров, которые определяются с произволом постоянных слагаемых. Эти слагаемые можем выбрать так, чтобы точке M_0 как на V_2, так и на $\tilde{V}_2$ отвечали те же значения параметров.

Из (1.18—21) следует, что формулы инфинитезимального перемещения репера на поверхностях V_2 и $\tilde{V}_2$ совершенно одинаковы. Одинаковы и начальные условия, которым удовлетворяют начальная точка и векторы репера в точке M. Отсюда, также как и в случае $n=4$, следует совпадение поверхностей V_2 и $\tilde{V}_2$.

Разница по сравнению с предыдущим случаем состоит в том, что теперь поверхность является системой импримитивности только двупараметрической группы движений и никакого вращения, в общем случае, не допускает. Исключением является, конечно, поверхность с окружностями в качестве индикатрис кривизны.

Литература

1. Лумисте Ю. Г., К теории двумерных минимальных поверхностей I. Теория кривизны. Настоящий журнал, стр. 3—15.
2. Blaschke, W., Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik, I, II, III. Leipzig—Berlin, 1942.
3. Borůvka, O., Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constant. C. r. Acad. Sci., 1928, **187**, 334—336.

4. Borůvka, O., Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constant. C. r. Acad. Sci., 1928, **187**, 1271—1273.
5. Pinl, M., Minimalflächen fester Gaußschen Krümmung. Math. Ann., 1958, **136**, 34—40.

Поступило
24 V 1960

KAHEMÕÕTMELISTE MINIMAALPINDADE TEOORIAST II. KONSTANTSE KÕVERUSEGA PINNAD

Ü. Lumiste
Geomeetriakateeder

Resümee

Eelmises artiklis [1] sama üldpealkirjaga käsitleti kahemõõtmelise minimaalpinna kõverusteooriat n-mõõtmelises eukleidilises või mitteeukleidilises ruumis. Käesolevas artiklis leitakse kõik konstantse Gaussi kõverusega minimaalpinnad n-mõõtmelistes ruumides ($n \leqslant 5$). Näidatakse, et selliseid pindu leidub ainult elliptilistes ruumides, kus nad osutuvad teatavate liikumiste rühmade imprimitiivsuse süsteemideks. Siinjuures ruumis S_4 on nende Gaussi kõverus võrdne ühe kolmandikuga ruumi kõverusest, ruumis S_3 ja S_5 aga võrdub nulliga.

ZUR THEORIE DER ZWEIDIMENSIONALEN MINIMALFLÄCHEN II. FLÄCHEN FESTER KRÜMMUNG

Ü. Lumiste

Zusammenfassung

Im vorhergehenden Artikel [1] mit derselben gemeinsamen Überschrift betrachtete man die Krümmungstheorie der zweidimensionalen Minimalflächen im n-dimensionalen euklidischen oder nichteuklidischen Raum. Im vorliegenden Artikel werden alle möglichen Minimalflächen fester Gauss'schen Krümmung im n-dimensionalen Räume ($n \leqslant 5$) gefunden. Es wird gezeigt, daß solche Flächen nur in elliptischen Räumen existieren und dort die Imprimitivssysteme einiger gewissen Gruppen der Bewegungen sind. Ihre Gauss'sche Krümmung ist im S_4 ein Drittel der Krümmung des Raumes, im S_3 und S_5 aber verschwindet sie.

СХОДИМОСТЬ ПО ОТРЕЗКАМ И УМНОЖЕНИЕ СУММИРУЕМЫХ РЯДОВ

Э. Реймерс
Кафедра математического анализа

В настоящей работе мы доказываем несколько теорем умножения Коши для реверсивных и нереверсивных (теорема 2. 3. 1) методов суммирования. В работе приведены только те результаты, где решения оказались достаточно эффективными. Для достижения эффективности мы пользуемся понятиями слабой (также сильной) сходимости по отрезкам (§ 1) и равномерной транслятивности (§ 2). Из общих теорем мы выводим соответствующие теоремы для методов Рисса и Вороного-Нерлунда (§ 3).

§ 1. Обозначения, основные понятия и леммы

1. 1. Определение суммируемости. Мы будем рассматривать следующие классы последовательностей[1] $x=\{x_\nu\}$: c — класс сходящихся последовательностей ($\lim x_\nu = x'$), a — класс абсолютно сходящихся последовательностей[2] ($\Sigma|\overline{\Delta}_\nu x_\nu|<\infty$), и классы к нулю сходящихся последовательностей cn ($x\in c$ и $x'=0$) и an ($x\in a$ и $x'=0$). Буквой α мы будем обозначать один из классов c и a, а буквами an один из классов cn и an.

Определим теперь понятие α-суммируемости ряда

$$\Sigma a_k \tag{1.1.1}$$

при помощи последовательности ее частичных сумм

$$x=(x_0, x_1, \ldots)=\{x_\nu\}=\{\sum_{k=0}^{\nu} a_k\}. \tag{1.1.2}$$

---

[1] Везде, где пределы изменения индексов не указаны, они пробегают все целочисленные значения 0, 1, 2, ... Поэтому ниже $\Sigma a_k = \sum_k a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\lim x_\nu = \lim_\nu x_\nu = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$.

[2] $\overline{\Delta}_\nu x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$ $(x_{-1}=0)$, $\Delta_\nu x_\nu = x_\nu - x_{\nu+1}$.

Мы скажем, что ряд (1. 1. 1) α-суммируем методом $A=(a_{n\nu})$ (или A_α-суммируем) к сумме $A(x)$, если $\{A_n(x)\}\epsilon\alpha$, где $A_n(x)=\sum_\nu a_{n\nu}x_\nu$, и если $\lim A_n(x)=A(x)$. Иногда вместо ряда (1. 1. 1) будем говорить, что последовательность (1. 1. 2) A_α-суммируема к $A(x)$.

Метод $A=(a_{n\nu})$ мы будем называть треугольным, если $a_{n\nu}=0$ при $\nu>n$, и нормальным, если при этом еще $a_{nn}\neq 0$.

1. 2. Поля суммирования. Множество всех A_α-суммируемых рядов обозначим через αA. αA мы будем называть полем α-суммирования метода A.

Метод A называется α-реверсивным, если любой последовательности $\{A_n(x)\}\epsilon\alpha$ соответствует одна и только одна последовательность $x\epsilon\alpha A$. Треугольный метод A α-реверсивен тогда и только тогда, когда он нормален.

Определим для каждой $x\epsilon cA$ число

$$\|x\|_A^c=\sup_n|A_n(x)|, \tag{1. 2. 1}$$

и для каждой $x\epsilon\alpha A$ число

$$\|x\|_A^\alpha=\Sigma|\overline{\Delta}_nA_n(x)|. \tag{1. 2. 2}$$

Если A α-реверсивен, то эти числа $\|x\|_A^\alpha$ определят норму для $x\epsilon\alpha A$ и αA будет нормированным пространством. При нормальном A αA будет $БК$-пространством, т. е. пространством Банаха, где имеет место сходимость по координатам.

1. 3. Консервативные методы. Метод A называется α-консервативным, если он α-суммирует любую последовательность $x\epsilon\alpha$. Аналогично A называется ac-консервативным, если он c-суммирует любую $x\epsilon\alpha$. Если A сохраняет также и сумму для $x\epsilon\alpha$, то вместо консервативности мы будем говорить о соответствующей регулярности метода A.

С этими понятиями связаны следующие условия[3]

(a) $\lim_n a_{n\nu}=a_\nu$,

(b) $\lim_n \sum_\nu a_{n\nu}=a$,

(c) $\sum_\nu|a_{n\nu}|<M$,

(d) $|\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}|<M$,

(e) $\sum_n|\overline{\Delta}_n\sum_{\nu=k}^{\infty}a_{n\nu}|<M$ $\quad(\sum_\nu a_{n\nu}$ сходится).

---

[3] Здесь и всюду в дальнейшем буквой M обозначаем некоторую положительную постоянную.

Из этих условий необходимы и достаточны для

c-консервативности: (a), (b), (c);

ac- „ : (a), (b), (d);

a- „ : (e).

Если рассматривать консервативность метода относительно классов cn и an, то условие (e) нужно опустить. Для α-регулярности дополнительно к условиям α-консервативности должно быть $a_\nu = 0$ и $a = 1$.

При c- и ac-консервативности связь между суммами имеет вид

$$A(x) = a \lim_\nu x_\nu + \sum_\nu a_\nu (x_\nu - \lim_\nu x_\nu). \qquad (1.3.1)$$

1.4. Основные множества. Ниже нам будут нужны последовательности

$$e_\nu = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\nu \text{ нулей}}, 1, 0, \ldots) \text{ и } e = (1, \dot{1}, \ldots).$$

Пусть метод A α-реверсивен. Мы скажем, что множество G лежит плотно в αA, если для любого $\varepsilon > 0$ и $x \in \alpha A$ найдется такой элемент $g \in G$, что $\| x - g \|_A^\alpha < \varepsilon$. Множество $E \subset \alpha A$ называется основным множеством пространства αA, если линейные комбинации всех элементов из E лежат плотно в αA.

В пространствах c и a основное множество составляют последовательности e_ν и e.

1.5. Совершенные методы. Понятие совершенности метода суммирования мы определим при помощи отрезков. Отрезком $g_\alpha = \{g_\alpha^\nu\}$ для пространства αA мы будем называть линейную комбинацию элементов основного множества пространства α. Следовательно

$$g_\alpha = \sum_{\nu=0}^{k} g_\nu e_\nu + ge,$$

где g_ν и g произвольные числа.

При пользовании отрезками нужно всегда предполагать, что $g_\alpha \in \alpha A$. Если A α-консервативен, то $g_\alpha \in \alpha A$, так как мы имеем разложение

$$A_n(g_\alpha) = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} g_\nu + g \sum_\nu a_{n\nu}. \qquad (1.5.1)$$

Мы называем α-реверсивный α-регулярный метод A α-совершенным, если для любого $x \in \alpha A$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой отрезок g_α, что

$$\| x - g_\alpha \|_A^\alpha < \varepsilon. \qquad (1.5.2)$$

Если выполняется условие (1.5.2), то отрезки g_α лежат плотно в αA. Следовательно имеет место

Лемма 1.5.1. *α-реверсивный α-регулярный метод A тогда и только тогда α-совершенный, когда множество $\{e_\nu, e\}$ является основным множеством пространства αA.*

Лемма 1.5.2. *α-реверсивный α-регулярный метод A тогда и только тогда α-совершеннный, когда для любого в αA линейного и непрерывного функционала f, удовлетворяющего условию $fe_\nu = fe = 0$, заключается $fx = 0$ при всех $x \in \alpha A$.*

Эта лемма заключается из предыдущей (см. Банах [1], стр. 58, теорема 7; см. также [7]).

1.6. Сходимость по отрезкам. Определим понятие отрезка $\overset{k}{x}_\alpha$ для последовательности $x \in \alpha A$ следующим образом:

$$\overset{k}{x}_\alpha = \sum_{\nu=0}^{k} (x_\nu - A(x)) + A(x)e.$$

По определению отрезок $\overset{k}{x}_\alpha$ будет частным случаем общего отрезка g_α в αA. Поэтому также $\overset{k}{x}_\alpha \in \alpha A$, если A α-консервативен. Разложение (1.5.1) для $\overset{k}{x}_\alpha$ имеет вид

$$A_n(\overset{k}{x}_\alpha) = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}(x_\nu - A(x)) + A(x) \sum_\nu a_{n\nu}.$$

Мы скажем, что в нормированном пространстве αA имеет место сходимость по отрезкам (сокращенно СО), если для всех $x \in \alpha A$ $\lim\limits_k \overset{k}{x}_\alpha = x$ по норме в αA, и слабая сходимость по отрезкам (ССО), если при любом линейном непрерывном функционале f, определенном в αA, выполняется равенство $\lim\limits_k f\overset{k}{x} = fx$ для всех $x \in \alpha A$.

Следует отметить, что из СО всегда заключается ССО.

Лемма 1.6.1. *Пусть метод A α-реверсивен и α-регулярен. Если в αA имеет место* ССО, *то A α-совершенен.*

Доказательство. Пусть функционал f линейный и непрерывный на αA и такой, что $fe_\nu = fe = 0$. Тогда также $f\overset{k}{x}_\alpha = 0$ для любого $x \in \alpha A$ и мы из-за ССО имеем $fx = \lim\limits_k f\overset{k}{x}_\alpha = 0$. По лемме 1.5.2 метод A α-совершенный.

Пусть в дальнейшем

$$A_{nk}(x) = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} x_\nu.$$

Лемма 1.6.2. *Пусть A с-реверсивен и с-регулярен. В cA имеет место* ССО *тогда и только тогда, когда*

$$|A_{nk}(x)| < M \| x \|_A^c. \qquad (1.6.1)$$

Доказательство. Нужно показать, что последовательность $\{y_n^k\} = \{A_n(\overset{k}{x_c})\}$ при $k \to \infty$ сходится слабо к $\{y_n\} = \{A_n(x)\}$ в пространстве с (см. напр. [4], теорема 3.5). Для этого необходимо и достаточно выполнения условий (см. [1], стр. 136) (i) $\sup\limits_k |y_n^k| < M$, (ii) $\lim\limits_k y_n^k = y_n$, (iii) $\lim\limits_k (\lim\limits_n y_n^k) = \lim\limits_n y_n$. Условие (i) эквивалентно условию (1.6.1), так как x_ν линейный непрерывный функционал на cA. Условия (ii) и (iii) всегда выполнены.

Лемма 1.6.3. *Пусть A с-регулярен и с-реверсивен. Если в cA имеет место* ССО, *то также* СО.

Доказательство. Пусть отрезок g_c имеет разложение (1.5.1). Тогда для последовательности $y = x - g_c$ отрезком будет $\overset{k}{y_c} = \overset{k}{x_c} - g_c$ и мы можем написать из-за условия (1.6.1), что $\| \overset{k}{y_c} \| \leqslant M \| y \|_A^c$. Следовательно

$$\| x - \overset{k}{x_c} \|_A^c \leqslant \| x - g_c \|_A^c + \| \overset{k}{y_c} \|_A^c \leqslant (M+1) \| x - g_c \|_A^c.$$

Ввиду леммы 1.6.1 для любого $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать g_c при достаточно большом k так, что будет $\| x - g_c \| < \varepsilon / (M+1)$. Тогда $\| x - \overset{k}{x_c} \| < \varepsilon$. Лемма доказана.

Лемма 1.6.4. *Пусть A а-реверсивен и а-регулярен. В aA имеет место* СО *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_k \sum_n \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=k}^{\infty} a_{n\nu} (x_\nu - A(x)) \right| = 0. \qquad (1.6.2)$$

Доказательство. По определению СО должно выполняться условие

$$\lim_k \sum_n |\overline{\Delta}_n A_n(x - \overset{k}{x_c})| = 0.$$

Это условие эквивалентно условию леммы.

§ 2. Умножение суммируемых рядов

2.1. Постановка проблемы. Мы будем рассматривать умножение Коши. Пусть даны ряды Σu_k и Σv_k. Составим из этих рядов ряд-произведение Σw_k по правилу Коши, т. е. ряд Σw_k, где

$$w_k = \sum_{\nu=0}^{k} v_{k-\nu} u_\nu.$$

Пусть $U_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} u_k$, $V_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} v_k$, $W_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} w_k$. Тогда $U = \{U_\nu\}$, $V = \{V_\nu\}$ и $W = \{W_\nu\}$ будут последовательностями частичных сумм рассматриваемых рядов. Для $W = \{W_\nu\}$ имеем

$$W_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} u_{\nu-k} V_k = \sum_{k=0}^{\nu} v_{\nu-k} U_k.$$

Мы будем рассматривать следующую проблему:

Проблема. *Если Σu_k любой α-сходящий ряд, то каким условиям должен удовлетворять ряд Σv_k, чтобы ряд-произведение Σw_k был α-суммируем заданным методом A.*

Мы дадим решение этой проблемы в тех случаях, когда оно будет эффективным и парктически применимым. При этом мы воспользуемся следующими условиями:

$$a_p{}^n = \lim_m \frac{a_{n\,m+p}}{a_{n-p\,m}},$$

$$\sum_\nu \left| \Delta_\nu \frac{a_{n\,\nu+p}}{a_{n-p\,\nu}} \right| < M, \quad |a_p{}^n| < M, \tag{2.1.1}$$

$$\sum_{n=p}^{\infty} \sum_\nu \left| \bar{\Delta}_n \Delta_\nu \frac{a_{n\,\nu+p}}{a_{n-p\,\nu}} \right| < M, \quad \sum_{n=p}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_n a_p{}^n \right| < M. \tag{2.1.2}$$

2.2. Транслятивные методы. Определим важное при суммировании произведения рядов понятие равномерной α-транслятивности метода суммирования.

Если из $x \in \alpha A$ следует $x^p \in \alpha A$, где

$$x^p = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p \text{ нулей}}, x_0, x_1, \ldots),$$

то скажем, что метод A α-транслятивен слева для x. Если это свойство выполняется для всех $x \in \alpha A$, то скажем, что A α-транслятивен слева.

Очевидно, что для определения α-транслятивности слева достаточна уже A_α-суммируемость последовательности x^1, так как A_α-суммируемость последовательностей x^2, x^3, ... следует по индукции.

Мы скажем, что метод A равномерно α-транслятивен слева для x, если он α-транслятивен слева для x, и если существует такое число $M(x)$, что $\| x^p \|_A^\alpha < M(x)$ для всех $p = 1, 2, \ldots$. Если это свойство выполняется для всех $x \in \alpha A$, то скажем, что A равномерно α-транслятивен слева.

Следующие две леммы дают достаточные условия для равномерной α-транслятивности.

Лемма 2.2.1. *Если метод A с-реверсивен, с-регулярен, удовлетворяет условию* (2.1.1) *и в cA имеет место* CCO, *то A равномерно с-транслятивен слева, причем $A(x^p) = A(x)$.*

Доказательство. Мы можем написать

$$\sum_{\nu=0}^{m} a_{n\,\nu+p} x_\nu = \sum_{\nu=0}^{m-1} \Delta_\nu \frac{a_{n\,\nu+p}}{a_{n-p\,\nu}} A_{n-p\,\nu}(x) + \frac{a_{n\,m+p}}{a_{n-p\,m}} A_{n-p\,m}(x)$$

и из-за (2.1.1)^a имеем

$$|A_n(x^p)| \leqslant M \| x \|_A^c.$$

Ввиду леммы 1.6.3 для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом k имеем

$$|A_n(x^p) - A_n(\overset{k}{x_c}{}^p)| \leqslant M \| x - \overset{k}{x_c} \| < \varepsilon.$$

Поскольку $\lim\limits_n A_n(\overset{k}{x_c}{}^p) = A(x)$, то также $\lim\limits_n A_n(x^p) = A(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2.2.2. *Если метод A а-реверсивен, а-регулярен, удовлетворяет условию* (2.1.2) *и в aA имеет место* CO, *то A равномерно а-транслятивен слева, причем $A(x^p) = A(x)$.*

Доказательство. Мы имеем

$$\bar{\Delta}_n A_n(x^p) = \sum_\nu \bar{\Delta}_n \left[\Delta_\nu \frac{a_{n\,\nu+p}}{a_{n-p\,\nu}} A_{n-p\,\nu}(x)\right] + \bar{\Delta}_n [a_p{}^n A_{n-p}(x)].$$

Используя равенство $\bar{\Delta}_n(a_n b_n) = \bar{\Delta}_n a_n \cdot b_n + a_{n-1} \bar{\Delta}_n b_n$, мы получим

$$|\bar{\Delta}_n A_n(x^p)| \leqslant \sum_\nu \left|\bar{\Delta}_n \Delta_\nu \frac{a_{n\,\nu+p}}{a_{n-p\,\nu}}\right| |A_{n-p\,\nu}(x)| +$$

$$+ \sum_\nu \left|\Delta_\nu \frac{a_{n-1\,\nu+p}}{a_{n-p-1\,\nu}}\right| |\bar{\Delta}_n A_{n-p\,\nu}(x)| + |\bar{\Delta}_n a_p{}^n| \, |A_{n-p}(x)| +$$

$$+ |a_p^{n-1}| \, |\bar{\Delta}_n A_{n-p}(x)| = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}.$$

Из (2.1.2.) следует, что $\sum\limits_{n=p}^{\infty} \mathrm{I} < M$ и $\sum\limits_{n=p}^{\infty} \mathrm{III} < M$. Из-за равенства

$$\frac{a_{n-1\,\nu+p}}{a_{n-p-1\,\nu}} = \sum_{k=p}^{n-1} \bar{\Delta}_k \frac{a_{k\,\nu+p}}{a_{k-p\,\nu}},$$

условий (2.1.2), (1.6.2) и a-регулярности

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \mathrm{II} \leqslant \sum_\nu \sum_{k=p}^{\infty} \left|\bar{\Delta}_k \Delta_\nu \frac{a_{k\,\nu+p}}{a_{k-p\,\nu}}\right| \sum_{n=k+1}^{\infty} |\bar{\Delta}_n A_{n-p\,\nu}(x)| < M,$$

$$\sum_{n=p}^{\infty} \mathrm{IV} < M.$$

Следовательно мы имеем

$$\sum_{n=p}^{\infty} |\bar{\Delta}_n A_n(x^p)| \leqslant M$$

для любого $p = 1, 2, \ldots$. Равенство $A(x^p) = A(x)$ следует аналогично лемме 2.2.1.

2.3. Решение проблемы. При постановке вопроса в соответствии с проблемой, мы можем получить эффективные необходимые и достаточные условия для суммируемости ряда-произведения Σw_k, если предполагать α-сходимость ряда Σu_k. Мы используем здесь вспомогательный метод суммирования $H = (h_{nk})$, где

$$h_{nk} = \sum_{\nu=k}^{\infty} a_{n\nu} v_{\nu-k}.$$

Лемма 2.3.1. *Пусть ряд Σv_k A_α-суммируем. Метод $H = (h_{nk})$ α-суммирует любой αn-сходящий ряд Σu_k к сумме $\Sigma h_k U_k$ тогда и только тогда, когда метод $A = (a_{nk})$ равномерно α-транслятивен слева для V.*

Доказательство. Мы можем написать

$$\sum_{k=0}^{p} h_{nk} = \sum_{\nu=0}^{p} a_{n\nu} V_\nu + \sum_{\nu=p+1}^{\infty} a_{n\nu} \sum_{k=0}^{p} v_{\nu-k} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p} a_{n\nu} V_\nu + \sum_{\nu=p+1}^{\infty} a_{n\nu} (V_\nu - V_{\nu-p-1}).$$

Таким образом мы имеем

$$\sum_{k=0}^{p} h_{nk} = A_n(V) - A_n(V^{p+1}), \tag{2.3.1}$$

$$h_{np} = \bar{\Delta}_p \sum_{k=0}^{p} h_{nk} = A_n(V^p) - A_n(V^{p+1}).$$

Для того, чтобы метод H существовал и выполнялось

$$\lim_n h_{nk} = h_k$$

необходимо и достаточно, чтобы метод A был α-транслятивен слева для V. Из (2.3.1) видно, что условия

$$\left| \sum_{k=0}^{p} h_{nk} \right| < M, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_n \sum_{k=0}^{p} h_{nk} \right| < M$$

совпадают соответственно с условиями равномерной c- и α-транслятивности слева для V. Остается только применить условия α-консервативности.

Теперь мы можем доказать основную теорему этого параграфа. Пусть $U' = \lim U_k$ и введем равенство

$$A(W) = A(V) U' + \Sigma h_k (U_k - U'). \tag{2.3.2}$$

Теорема 2.3.1. *Пусть метод A с произвольной матрицей. Ряд-произведение Σw_k при любом a-сходящем ряде Σu_k тогда и только тогда A_α-суммируем к сумме* (2.3.2), *когда*

1° *ряд Σv_k A_α-суммируем,*

2° *метод A равномерно a-транслятивен слева для V.*

Доказательство. Мы можем написать

$$A_n(W) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \sum_{k=0}^{\nu} v_{\nu-k} U_k = \lim_m \sum_{k=0}^{m} h_{mk}^n U_k,$$

где

$$h_{mk}^n = \sum_{\nu=k}^{m} a_{n\nu} v_{\nu-k}.$$

Поскольку последнее равенство должно выполняться при любом $\{U_k\} \in a$, то должно быть $\lim_m h_{mk}^n = h_{nk}$, $\lim_m \sum_{k=0}^{m} h_{mk}^n = A_n(V)$, $\left| \sum_{k=0}^{p} h_{mk}^n \right| < M(n)$. По равенству (1.3.1) имеем

$$A_n(W) = A_n(V) U' + \sum_k h_{nk}(U_k - U').$$

Если взять $U = e$, то необходимость условия 1° очевидна. Остальное следует из леммы 2.3.1.

Теорема 2.3.2. *Пусть метод A c-реверсивен, c-регулярен и удовлетворяет условию* (2.1.1). *Пусть в cA имеет место* ССО.

Ряд-произведение Σw_k при любом a-сходящем ряде Σu_k тогда и только тогда A_c-суммируем к сумме $A(W) = A(V) U'$, когда ряд Σv_k A_c-суммируем.

Доказательство. Теорема следует из теоремы 2.3.1 и леммы 2.2.1.

Теорема 2.3.3. *Пусть метод A a-реверсивен, a-регулярен и удовлетворяет условию* (2.1.2). *Пусть в aA имеет место* СО.

Ряд-произведение Σw_k при любом a-сходящем ряде Σu_k тогда и только тогда A_a-суммируем к сумме $A(W) = A(V) U'$, когда ряд Σv_k A_a-суммируем.

Доказательство. Теорема следует из теоремы 2.3.1 и леммы 2.2.2.

Если метод A нормален, то в теореме 2.3.2 мы можем вместо ССО предположить, что A удовлетворяет ТСЗ 1, т. е. теореме о среднем значении (см. [2]), а в теореме 2.3.3 вместо СО предположить, что A удовлетворяет ТСЗ 2, т. е. теореме о среднем значении для абсолютного суммирования. Тогда из этих теорем 2.3.2 и 2.3.3 следует теорема 4 статьи [2].

§ 3. Методы Вороного-Нерлунда и Рисса

3.1. Метод Вороного-Нерлунда. Метод Вороного-Нерлунда (WN, a_ν) матричный метод $A = (a_{n\nu})$, где элементы $a_{n\nu}$ определяются следующим образом:

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{a_{n-\nu}}{A_n}, & \text{если } \nu \leqslant n, \\ 0, & \text{,, } \nu > n, \end{cases}$$

где $\{a_\nu\}$ заданная последовательность и такая, что $A_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \neq 0$. Метод (WN, a_ν) нормален.

Ниже для этого метода мы дадим условия равномерной α-транслятивности слева.

Лемма 3.1.1. *Метод (WN, a_ν) равномерно c-транслятивен слева тогда и только тогда когда*

$$1^\circ \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-p}}{A_n} \text{ существует,}$$

$$2^\circ \left|\frac{A_{n-p}}{A_n}\right| < M.$$

Доказательство. Пусть

$$N_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{n-\nu}}{A_n} x_\nu,$$

тогда мы можем написать

$$N_n(x^p) = \frac{A_{n-p}}{A_n} N_{n-p}(x). \tag{3.1.1}$$

Если взять $x = e$, то $N_{n-p}(e) = 1$ и необходимость условий очевидна. Достаточность условий также следует из (3.1.1).

Лемма 3.1.2. *Метод (WN, a_ν) равномерно a-транслятивен слева тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=p}^{\infty} \left|\bar{\Delta}_n \frac{A_{n-p}}{A_n}\right| < M. \tag{3.1.2}$$

Доказательство. Необходимость условия (3.1.2) очевидна, если взять $x = e$. Достаточность условия следует из равенства

$$\bar{\Delta}_n N_n(x^p) = \bar{\Delta}_n \frac{A_{n-p}}{A_n} N_{n-p}(x) + \frac{A_{n-p-1}}{A_{n-1}} \bar{\Delta}_n N_{n-p}(x),$$

так как из-за (3.1.2) мы также имеем $|A_{n-p}/A_n| < M$.

Имея теперь условия равномерной α-транслятивности, нетрудно из теоремы 2.3.1 получить соответствующие теоремы

умножения для метода Вороного-Нерлунда, доказанные Мэарс ([3], теоремы 10' и 11').

3.2. Метод Рисса. Метод Рисса (R, a_ν) матричный метод $A=(a_{n\nu})$, где элементы $a_{n\nu}$ определяются следующим образом:

$$a_{n\nu}=\begin{cases}\dfrac{a_\nu}{A_n}, & \text{если } \nu\leqslant n,\\ 0, & \text{если } \nu>n,\end{cases}$$

где $\{a_\nu\}$ заданная последовательность и такая, что $A_n=\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu\neq 0$. Метод (R, a_ν) нормален, если $a_\nu\neq 0$.

c-транслятивность слева метода (R, a_ν) решена Хиллом [2]. Ниже для этого метода мы дадим условия равномерной a-транслятивности слева.

Лемма 3.2.1. *Регулярный нормальный метод (R, a_ν) равномерно c-транслятивен слева, когда*

$$1^0\ \sum_{\nu=0}^{n-p-1}\left|\frac{A_\nu}{A_n}\Delta_\nu\frac{a_{\nu+p}}{a_\nu}\right|<M,$$

$$2^0\ \left|\frac{A_{n-p}a_n}{A_n a_{n-p}}\right|<M,$$

причем $R(x^p)=R(x)$.

Доказательство. Пусть

$$R_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a_\nu}{A_n}x_\nu.$$

Мы можем написать, используя преобразование Абеля,

$$R_n(x^p)=\sum_{\nu=0}^{n-p-1}\frac{A_\nu}{A_n}\Delta_\nu\frac{a_{\nu+p}}{a_\nu}R_\nu(x)+\frac{A_{n-p}a_n}{A_n a_{n-p}}R_{n-p}(x),\quad (3.2.1)$$

и достаточность условий очевидна.

Равенство $R(x_p)=R(x)$ обеспечено c-регулярностью метода (R, a_ν).

Лемма 3.2.2. *Нормальный a-регулярный метод (R, a_ν) равномерно a-транслятивен слева тогда и только тогда, когда*

$$\left|\frac{A_{n-p}a_n}{A_n a_{n-p}}\right|<M, \qquad (3.2.2)$$

причем $R(x^p)=R(x)$.

Доказательство. Из равенства (3.2.1) и определения равномерной a-транслятивности видно, что должно выполняться условие a-регулярности (условие (е)), т. е. условие (где $k\geqslant p$)

$$\left|\frac{A_{k-p}a_k}{A_k a_{k-p}}\right| + \left|\frac{A_{k-p}}{A_{k+1}}\Delta_k\frac{a_k}{a_{k-p}} + \bar{\Delta}_k\left(\frac{A_{k+1-p}a_{k+1}}{A_{k+1}a_{k+1-p}}\right)\right| +$$

$$+\sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\bar{\Delta}_n\frac{1}{A_n}\sum_{\nu=k}^{n-2}A_{\nu-p}\Delta_\nu\frac{a_\nu}{a_{\nu-p}} + \frac{A_{n-1-p}}{A_n}\Delta_n\frac{a_{n-1}}{a_{n-1-p}} + \Delta_n\left(\frac{A_{n-p}a_n}{A_n a_{n-p}}\right)\right| =$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} < M.$$

Здесь член I дает необходимое и достаточное условие (3. 2. 2), так как II и III всегда ограничены из-за условия (3. 2. 2) и a-регулярности метода (R, a_ν), т. е. из-за условия

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\bar{\Delta}_n\frac{A_k}{A_n}\right| < M. \qquad (3.2.3)$$

Действительно, член II ограничен из-за (3. 2. 2.) и $|A_k/A_{k+1}| < M$ (последнее выполнено из-за (3. 2. 3)), а в остальной части III имеем

$$\sum_{\nu=k}^{n-2}A_{\nu-p}\Delta_\nu\frac{a_\nu}{a_{\nu-p}} = A_{k-p}\frac{a_k}{a_{k-p}} - A_k + A_{n-2} - A_{n-2-p}\frac{a_{n-1}}{a_{n-1-p}}.$$

Подставив это в III, мы получим, что должно быть

$$\mathrm{III} = \sum_{n=k+2}^{\infty}|\mathrm{III}_1 - \mathrm{III}_2 + \mathrm{III}_3| < M,$$

где

$$\mathrm{III}_1 = \bar{\Delta}_n\frac{1}{A_n}A_{k-p}\frac{a_k}{a_{k-p}},\quad \mathrm{III}_2 = \bar{\Delta}_n\frac{1}{A_n}A_k,$$

и

$$\mathrm{III}_3 = \bar{\Delta}_n\frac{1}{A_n}\left(A_{n-2} - A_{n-2-p}\frac{a_{n-1}}{a_{n-1-p}}\right) + \frac{A_{n-1-p}}{A_n}\Delta_n\frac{a_{n-1}}{a_{n-1-p}} +$$

$$+ \bar{\Delta}_n\left(\frac{A_{n-1}a_n}{A_n a_{n-p}}\right).$$

Из-за (3. 2. 2) и (3. 2. 3) имеем

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}|\mathrm{III}_1 - \mathrm{III}_2| < M.$$

Поскольку $\mathrm{III}_3 = 0$, то $\mathrm{III} < M$. Равенство $R(x^p) = R(x)$ обеспечено условием $\lim A_n = \infty$, что необходимо для a-регулярности.

Имея теперь условия равномерной α-транслятивности, нетрудно из теоремы 2. 3. 1 получить соответствующие теоремы умножения для метода Рисса, доказанные Г. Кангром (см. [5], теоремы 22 и 23), и следующую теорему:

Теорема 3. 2. 1. *Пусть метод* (R, a_ν) *нормален, абсолютно* a*-регулярен и удовлетворяет условию* (3. 2. 2).

Ряд-произведение Σw_k при любом a-сходящем ряде Σu_k тогда и только тогда $(R, a_\nu)_a$-суммируем к сумме $R(W) = R(U)\Sigma u_k$, когда ряд Σv_k $(R, a_\nu)_a$-суммируем.

Литература

1. Banach, S., Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.
2. Hill, J. D., Some properties of summability. Duke Math. J., 1942, **9**, 373—381.
3. Mears, F. M., The inverse Nörlund Means. Ann. Math. (2), 1943, **44**, 401—410.
4. Zeller, K., Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z., 1952, **55**, 55—70.
5. Кангро Г. Ф., О суммировании бесконечных рядов при помощи матричных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 150—190.
6. Реймерс Э. Г., Теоремы о среднем значении и умножение суммируемых рядов. Докл. АН СССР, 1958, **120**, 1196—1199.
7. Реймерс Э. Г., Теоремы о среднем значении и умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 50—83.

Поступило
4 V 1960

LÕIKEKOONDUVUS JA SUMMEERUVATE RIDADE KORRUTAMINE

E. Reimers
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Tähistame tähtede c ja a abil vastavalt koonduvate ja absoluutselt koonduvate jadade hulka ja α abil ühte nendest hulkadest. Vaatleme summeerimismenetlust A jada-jada teisenduse kujul

$$y = \{y_n\} = \{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} x_\nu\}$$

ja defineerime arvud $\|x\|^c = \sup |y_n|$ ja $\|x\|^a = \Sigma |y_n - y_{n-1}|$ vastavalt A_c- ja A_a-summeeruvate jadade jaoks (s. t. $y \in c$ ja $y \in a$ jaoks, vastavalt).

Definitsioon. *Kui jada $x = (x_0, x_1, \ldots)$ A_α-summeeruvusest järeldub jada $x^p = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, x_0, x_1, \ldots)$ A_α-summeeruvus ja $\|x^p\|^\alpha < C$ $(C = const)$ iga $p = 1, 2, \ldots$ korral, siis ütleme, et A on ühtlaselt α-translatiivne vasakule jada x jaoks.*

Olgu Σw_k ridade Σu_k ja Σv_k Cauchy korrutis (s. t. $w_k = \sum_{\nu=0}^{k} v_{k-\nu} u_\nu$).

Põhiteoreem, mille me tõestame, on järgmine (vt. teoreem 2. 3. 1 käesolevas töös):

Teoreem. *A olgu suvaline. Cauchy korrutisrida Σw_k iga absoluutselt koonduva rea Σu_k korral on A_α-summeeruv siis ja ainult siis, kui*

1° *Σv_k on A_α-summeeruv,*

2° *menetlus A on ühtlaselt α-translatiivne vasakule Σv_k jaoks.*

Eeldades, et A rahuldab piisavaid tingimusi α-translatiivsuseks, võime teoreemis tingimuse 2^0 ära jätta (vt. teoreemid 2. 3. 2 ja 2. 3. 3).

Lõpuks me vaatleme samu küsimusi erijuhtudel, Riesz'i ja Voronoi-Nörlund'i menetluse korral.

SECTION-CONVERGENCE AND MULTIPLICATION OF SUMMABLE SERIES

E. Reimers

Summary

Let the letters c and a denote sets of convergent and absolutely convergent sequences respectively, and let α denote one of these sets. We take the method of summability A in sequence to sequence form,

$$y = \{y_n\} = \{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} x_\nu\},$$

and define the numbers $\|x\|^c = \sup |y_n|$ and $\|x\|^a = \Sigma |y_n - y_{n-1}|$ for x summable A_c and A_a respectively (that is, for $y \in c$ and $y \in a$ respectively).

Definition. *If* $x = (x_0, x_1, \ldots)$ *is summable* A_α *implies that* $x^p = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, x_0, x_1, \ldots)$ *is summable* A_α *and* $\|x^p\|^\alpha < C$ $(C = const)$ *for every* $p = 1, 2, \ldots$, *we say that* A *is uniformly* α*-translative left for* x.

Let Σw_k be the Cauchy product of the series Σu_k and Σv_k (that is $w_k = \sum_{\nu=0}^{k} v_{k-\nu} u_\nu$). The main theorem we prove is as follows (theorem 2. 3. 1 in the present paper).

Theorem. *Let* A *be arbitrary. The product series* Σw_k *for any absolutely convergent series* Σu_k *is summable* A_α *if and only if*

1^0 Σv_k *is summable* A_α,

2^0 *method* A *is uniformly* α*-translative left for* Σv_k.

By assuming that A satisfies sufficient conditions for uniform α-translativity we may omit the condition 2^0 in the theorem. (see theorems 2. 3. 2 and 2. 3. 3).

And, finally, we consider these questions in special cases, the methods being those of Riesz and Voronoi-Nörlund.

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

Э. Реймерс
Кафедра математического анализа

В настоящей статье мы дадим точные условия для последовательности x, чтобы из ее A-суммируемости следовало ее B-суммируемость, налагая некоторые ограничения на методы A и B (§ 2, раздел 2. 1). Из этих условий мы выводим точные условия для сходимости, т. е. когда B — единичный метод (§ 2, раздел 2. 2), а также доказываем некоторые специальные условия для сходимости (§ 2, раздел 2. 3).

В § 3 мы даем слабые достаточные условия для последовательности x, чтобы из ее A-суммируемости следовало ее B-суммируемость. Рассматриваются также некоторые частные результаты.

1. Обозначения и основные понятия

1. 1. Определение суммируемости. Мы будем рассматривать следующие классы последовательностей[1] $x=\{x_\nu\}$: c — класс сходящихся последовательностей ($\lim\limits_\nu x_\nu=\xi$ существует), a — класс абсолютно сходящихся последовательностей[2] ($\Sigma|\Delta_\nu x_\nu|<\infty$), и классы к нулю сходящихся последовательностей cn ($x\in c$ и $\xi=0$) и an ($x\in a$ и $\xi=0$). Буквой α мы будем обозначать один из этих классов c, a, cn и an.

Определим теперь понятие α-суммируемости последовательности $x=\{x_\nu\}$. Мы скажем, что последовательность $x=\{x_\nu\}$ α-суммируем треугольным матричным методом $A=(a_{n\nu})$ (или A_α-суммируем) к сумме $A(x)$, если $\{A_n(x)\}\in\alpha$, где

---

[1] Везде, где пределы изменения индексов не указаны, они пробегают все целочисленные значения 0, 1, 2, ... Поэтому ниже $\Sigma a_k=\sum\limits_k a_k=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$,

[2] $\overline{\Delta}_\nu x_\nu=x_\nu-x_{\nu-1}$ ($x_{-1}=0$), $\Delta_\nu x_\nu=x_\nu-x_{\nu+1}$.

$$A_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} x_\nu,$$

и если $\lim A_n(x) = A(x)$.

Множество всех A_α-суммируемых последовательностей $x = \{x_\nu\}$ обозначим через αA. Множество αA мы будем называть полем α-суммирования метода A.

Если метод $A = (a_{n\nu})$ — единичный метод (т. е. такой, что $a_{nn} = 1$ и $a_{n\nu} = 0$ при $\nu < n$), то его полем α-суммирования будет класс α и тогда вместо A_α-суммируемости мы можем просто говорить о α-сходимости последовательности $x = \{x_\nu\}$.

Мы скажем, что метод A α-реверсивен, если любой последовательности $\{A_n(x)\} \in \alpha$ соответствует одна и только одна $x \in \alpha A$. Треугольный метод A тогда и только тогда α-реверсивен, когда он нормален, т. е. когда $a_{nn} \neq 0$. Таким образом при нормальном $A = (a_{n\nu})$ существует обратная матрица $A^{-1} = (a'_{\nu k})$, так что

$$x_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} a'_{\nu k} A_k(x).$$

1.2. Включение методов суммирования. Пусть даны треугольные методы $A = (a_{n\nu})$ и $B = (b_{n\nu})$. В случае метода B мы будем пользоваться теми же обозначениями, которые определены выше для метода A.

Мы скажем, что метод A α-включает метод B, если $\alpha B \subseteq \alpha A$. Мы скажем, что метод A регулярно α-включает метод B, если он α-включает метод B и если $B(x) = A(x)$ при каждом $x \in \alpha B$, и пишем, что $\alpha B \subseteq \alpha A$ регулярно.

Если B — единичный метод, то при α-включении имеем $\alpha \subseteq \alpha A$, т. е. метод A α-суммирует все α-сходящиеся последовательности. Если $\alpha \subseteq \alpha A$ регулярно, т. е. $A(x) = \lim x_\nu$ при всех $x \in \alpha$, то будем говорить, что метод A α-регулярен.

Введем условия для α-регулярности[3]:

(a) $$\lim_n a_{n\nu} = 0,$$

(b) $$\lim_n \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} = 1,$$

(c) $$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| < M,$$

(d) $$\sum_{n=p}^{\infty} |\Delta_n \sum_{\nu=p}^{n} a_{n\nu}| < M.$$

[3] Здесь и в дальнейшем M — некоторая постоянная.

Из доказательств этих теорем видно, что вместо $aB \subseteq aA$ можно предположить более слабое условие, а именно доказать следующие теоремы.

Теорема 2.1.3. *Пусть методы A и B такие, что* $\lim \sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu} = 1$. *Для того, чтобы из $x \in cA$ следовало $x \in cB$, необходимо и достаточно выполнения условия* (2.1.1).

Теорема 2.1.4. *Пусть методы A и B такие, что*

$$\{\sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu}\} \in a, \quad \lim \sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu} = 1.$$

Для того, чтобы из $x \in aA$ следовало $x \in aB$, необходимо и достаточно выполнения условия (2.1.4).

2.2. Условия для сходимости. В этом разделе мы дадим необходимые и достаточные условия для последовательности $x = \{x_\nu\}$, чтобы из $x \in aA$ следовало $x \in a$. Эти условия мы получим из предыдущих теорем, заменив там метод B на единичный метод. Тогда метод $C = A$ и мы получим вместо $D_{n+1}^{B}(x)$

$$D_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} u_{k+1}, \tag{2.2.1}$$

где $u_{k+1} = \overline{\Delta}_k x_{k+1}$, причем будем полагать, что $D_0(x) = u_0$. Вместо равенства (2.1.3) мы можем написать

$$x_{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} = A_n(x) + D_{n+1}(x). \tag{2.2.2}$$

Теперь из теоремы 2.1.3 заключается

Теорема 2.2.1. *Если A удовлетворяет условию* $\lim \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} = 1$, *то для того, чтобы из $x \in cA$ следовало $x \in c$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\lim D_n(x) = 0.$$

Из теоремы 2.1.4 заключается

Теорема 2.2.2. *Если A удовлетворяет условиям*

$$\{\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\} \in a, \quad \lim \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} = 1,$$

то для того, чтобы из $x \in aA$ следовало $x \in a$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\{D_n(x)\} \in an.$$

2.3. Специальные условия для сходимости. В этом разделе мы дадим более простые условия, чтобы из $x \in aA$ следовало $x \in a$, налагая некоторые ограничения на метод A.

Пусть метод $A=(a_{nv})$ нормален. Рассмотрим еще следующий метод суммирования $\mathfrak{A}=(a_{nv})$, где

$$a_{nv}=\overline{\Delta}_v\frac{a_{nv}}{a_{vv}}.$$

Из последовательности $x=\{x_v\}$ составим последовательность $u^a=\left\{\frac{u_{v+1}}{a_{vv}}\right\}$, где по-прежнему $u_{v+1}=\overline{\Delta}_v x_{v+1}$.

Мы можем написать, используя равенство (1.2.2),

$$x_n=\sum_{v=0}^{n}\overline{\Delta}_v\left(\frac{a_{nv}}{a_{vv}}x_v\right)=\sum_{v=0}^{n}\overline{\Delta}_v\frac{a_{nv}}{a_{vv}}x_v+\sum_{v=1}^{n}\frac{a_{n\,v-1}}{a_{v-1\,v-1}}u_v=$$

$$=\sum_{v=0}^{n}a_{nv}x_v+\sum_{v=0}^{n-1}a_{nv}\frac{u_{v+1}}{a_{vv}}.$$

Следовательно, мы имеем

$$x_{n+1}=\mathfrak{A}_n(x)+A_n(u^a), \tag{2.3.1}$$

где

$$\mathfrak{A}_n(x)=\sum_{v=0}^{n}a_{nv}x_v.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть $c\mathfrak{A}\supseteq cA$ регулярно и пусть A c-регулярен. Для того, чтобы из $x\in cA$ следовало $x\in c$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$u^a\in cnA. \tag{2.3.2}$$

Теорема следует из равенства (2.3.1).

Теорема 2.3.2. *Пусть $a\mathfrak{A}\supseteq aA$ регулярно и пусть A a-регулярен. Для того, чтобы из $x\in aA$ следовало $x\in a$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$u^a\in anA. \tag{2.3.3}$$

Теорема следует из равенства (2.3.1).

В этих теоремах 2.3.1 и 2.3.2 можно также условия $c\mathfrak{A}\supseteq cA$ и $a\mathfrak{A}\supseteq aA$ заменить другими более слабыми условиями. Например, имеют место следующие теоремы, где m — множество всех ограниченных последовательностей $x=\{x_v\}$.

Теорема 2.3.3. *Пусть $c\mathfrak{A}\supseteq cA\cap m$. Для того, чтобы из $x\in cA$ и $x\in m$ следовало $x\in c$, необходимо и достаточно выполнения условия* (2.3.2).

Теорема 2.3.4. *Пусть $a\mathfrak{A}\supseteq aA\cap m$. Для того, чтобы из $x\in aA$ и $x\in m$ следовало $x\in a$, необходимо и достаточно выполнения условия* (2.3.3).

3. Слабые тауберовы условия

3.1. Условия для суммируемости. В этом разделе мы дадим слабые достаточные условия для последовательности x, чтобы из $x \in aA$ следовало $x \in aB$.

Пусть метод A треугольен и B нормален. Выберем последовательность отличных от нуля чисел $\{c_k\}$ так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=0}^{n} \left| c_k \sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu} \right| < M. \tag{3.1.1}$$

Имеет место следующая

Теорема 3.1.1. *Пусть $cB \subseteq cA$ регулярно и пусть выполняется условие* (3.1.1). *Из $x \in cA$ следует $x \in cB$, когда*

$$\lim \frac{b_{n+1}(x)}{c_n} = 0. \tag{3.1.2}$$

Доказательство. Мы можем написать

$$D^B_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu} \frac{b_{k+1}(x)}{c_k}.$$

Пусть $d^B_{nk} = c_k \sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu}$, тогда

$$D^B_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} d^B_{nk} \frac{b_{k+1}(x)}{c_k}.$$

Метод $D^B = (d^B_{nk})$ удовлетворяет условиям

1° $\lim_n d^B_{nk} = 0$, так как $\lim_n c_{n\nu} = 0$ из-за $cB \subseteq cA$;

2° $\sum_{k=0}^{n} |d^B_{nk}| < M$ из-за (3.1.1).

Следовательно D^B cn-регулярен, значит, $\{D_n{}^B(x)\} \in cn$ из-за (3.1.2). Результат следует из теоремы 2.1.1.

Выберем теперь последовательность отличных от нуля чисел $\{c_k\}$ так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=p}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{k=p}^{n} c_k \sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu} \right| < M. \tag{3.1.3}$$

Имеет место следующая

Теорема 3.1.2. *Пусть $aB \subseteq aA$ регулярно и пусть выполняется условие* (3.1.3). *Из $x \in aA$ следует $x \in aB$, когда*

$$\left\{ \frac{b_{n+1}(x)}{c_n} \right\} \in an.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

3.2. Условия для сходимости. В этом разделе мы дадим слабые достаточные условия для последовательности x, чтобы из $x \in aA$ следовало $x \in a$. Эти условия мы получим из предыдущих теорем, заменив там метод B на единичный метод.

Выберем последовательность отличных от нуля чисел $\{a_k\}$ так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=0}^{n} \left| a_k \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \right| < M. \qquad (3.2.1)$$

Имеет место следующая (следствие теоремы 3.1.1)

Теорема 3.2.1. *Пусть метод A c-регулярен и пусть выполняется условие* (3.2.1). *Из $x \in cA$ следует $x \in c$, когда*

$$\lim \frac{u_{k+1}}{a_k} = 0.$$

Выберем последовательность отличных от нуля чисел $\{a_k\}$ так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=p}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{k=p}^{n} a_k \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \right| < M. \qquad (3.2.2)$$

Как следствие теоремы 3.1.2 имеет место

Теорема 3.2.2. *Пусть метод A a-регулярен и пусть выполняется условие* (3.2.2). *Из $x \in aA$ следует $x \in a$, когда*

$$\left\{ \frac{u_{k+1}}{a_k} \right\} \in ap.$$

Интересно отметить, что, если A нормален, то иногда можно положить

$$a_k = a_{kk}.$$

3.3. Специальные условия для сходимости. В этом разделе мы дадим более простые достаточные условия, чтобы из $x \in aA$ следовало $x \in a$, налагая некоторые ограничения на нормальный метод A. Здесь мы используем опять метод $\mathfrak{A} = (a_{n\nu})$, определенный выше, и последовательность $u^a = \left\{ \frac{u_{\nu+1}}{a_{\nu\nu}} \right\}$.

Теорема 3.3.1. *Пусть $c\mathfrak{A} \supseteq cA$ регулярно и пусть A c-регулярен. Из $x \in cA$ следует $x \in c$, когда*

$$\lim \frac{u_{\nu+1}}{a_{\nu\nu}} = 0.$$

Доказательство. Из-за c-регулярности метода A $u^a \in cnA$ и результат следует из теоремы 2.3.1.

Аналогично из теоремы 2.3.2 следует

Теорема 3.3.2. *Пусть $a\mathfrak{A} \supseteq aA$ регулярно и пусть A a-регулярен. Из $x \in aA$ следует $x \in a$, когда $u^a \in ap$.*

Поступило
25 V 1960

TAUBERI TÜÜPI TEOREEMID MAATRIKS-SUMMEERIMISMENETLUSTE JAOKS

E. Reimers

Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Tähistame aA ja aB abil vastavalt maatriksmenetlustega A ja B summeeruvate või absoluutselt summeeruvate jadade hulgad.

Käesolevas artiklis me anname tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et tingimusest $x \in aA$ järelduks $x \in aB$, kui A sisaldab menetlust B (s. t. $aA \supseteq aB$) või osaliselt sisaldab menetlust B (vt. teoreemid 2. 1. 1 — 2. 1. 4). Nendest üldistest teoreemidest me tuletame seejärel samad teoreemid erijuhu $B = I$ jaoks (I = identne menetlus) (vt. teoreemid 2. 2. 1 ja 2. 2. 2).

Samuti tõestame mõned piisavad teoreemid.

TAUBERIAN THEOREMS FOR MATRIX METHODS OF SUMMABILITY

E. Reimers

Summary

Let aA and aB be the sets of sequences summable or absolutely summable by matrix methods A and B respectively.

In the present article we give the necessary and sufficient conditions in order that from $x \in aA$ there should follow $x \in aB$, if A includes B (that is $aA \supseteq aB$) or includes B partially (see theorems 2. 1. 1 — 2. 1. 4). From these general theorems we then derive the same theorems for the special case $B = I$ (I = identical method) (see theorems 2. 2. 1 and 2. 2. 2).

We also prove some sufficient theorems.

ЛАКУНАРНЫЕ ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ АБСОЛЮТНОГО СУММИРОВАНИЯ

С. Гейсберг

Кафедра математического анализа

§ 1

Пусть $P = (a_{nk})$ — действительная матрица. Ряд[1] $\Sigma\xi_k$ называется суммируемым (абсолютно суммируемым) методом P, если сходится ряд $\sum_n \sum_k a_{nk}\xi_k$ (соответственно, сходится ряд $\sum_n |\sum_k a_{nk}\xi_k|$).

Пусть $Q = \{a_k(x)\}$ — последовательность функций, непрерывных на промежутке X (конечном или бесконечном). Ряд $\Sigma\xi_k$ называется суммируемым (абсолютно суммируемым) методом Q, если ряд $\Sigma a_k(x)\xi_k$ сходится для всех $x \in X$ и существует $\int_X (\Sigma a_k(x)\xi_k)\,dx$ (соответственно, существует $\int_X |\Sigma a_k(x)\xi_k|\,dx$).

Множество рядов, суммируемых (абсолютно суммируемых) методом P, будем также обозначать через P ($|P|$).

Определение. *Последовательность натуральных чисел* $\varphi = \{\varphi_k\}$, $\varphi_k \uparrow \infty$ *называется абсолютно лакунарной относительно метода* P *(соответственно* Q*), заданного матрицей* $P = (a_{nk})$ *(последовательностью* $Q = \{a_k(x)\}$*), или* $|P|$*-лакунарной* ($|Q|$*-лакунарной), если для метода* P^φ (Q^φ)*, заданного матрицей* $P^\varphi = (a_{n,\varphi_k})$ *(последовательностью* $Q^\varphi = \{a_{\varphi_k}(x)\}$*), имеет место*

$$|P^\varphi| \subset l \quad (|Q^\varphi| \subset l|),$$

где l *— множество абсолютно сходящихся рядов.*

---

[1] Если пределы суммирования не обозначены, то суммирование производится по всем целым неотрицательным значениям индекса.

Отметим следующие очевидные соотношения:

$|P| \subset |Q|$ влечёт $|P^\varphi| \subset |Q^\varphi|$; $P \subset |Q|$ влечёт $P^\varphi \subset |Q^\varphi|$;

$|P| \subset Q$ влечёт $|P^\varphi| \subset Q^\varphi$; $P \subset Q$ влечёт $P^\varphi \subset Q^\varphi$.

Мы рассмотрим следующие методы:

1) Метод Чезаро порядка α, или метод (C, α), $(\alpha > -1)$:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k = 0, \\ \dfrac{k\binom{n-k+\alpha-1}{\alpha-1}}{n\binom{n+\alpha}{\alpha}}, & n \geqslant 1;\ n \geqslant k \geqslant 0, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

2) Метод Эйлера порядка α, или метод (E, α) $(\alpha > 0)$:

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{n-k}}{(\alpha+1)^{n+1}}\binom{n}{k}, & n \geqslant k \geqslant 0, \\ 0 \quad ; & k > n. \end{cases}$$

3) Метод Абеля, или метод A:

$$a_k(x) = ke^{-kx};\ X = (0, \infty).$$

4) Интегральный метод Бореля, или метод B:

$$a_k(x) = e^{-x}\frac{x^k}{k!};\ X = [0, \infty).$$

Заметим, что, если ряд $\Sigma \xi_k$ суммируем одним из методов 3) — 4), то соответствующий ряд $\Sigma a_k(x)\xi_k$ сходится равномерно на любом замкнутом промежутке $[a, b] \subset X$ и, следовательно, его можно почленно интегрировать на $[a, b]$. Поэтому данные определения суммируемости для методов 1) — 4) совпадают с обычными определениями (см. [10], стр. 104, 130, 110, 134).

Обрешков [8] получил достаточные условия $|(C, \alpha)|$-лакунарности. В настоящей статье даются необходимые и достаточные условия абсолютной лакунарности последовательности φ для методов 1) — 4). Некоторые результаты этой статьи опубликованы в [1].

§ 2

Мы сперва докажем две общие теоремы, которые позволят нам в дальнейшем найти необходимые условия для абсолютной лакунарности методов 1) — 4).

Теорема 1. *Пусть метод P задан матрицей (a_{nk}), причем выполнены следующие условия:*

1° $\sum\limits_k |a_{nk}| < \infty$ $(n = 0, 1, \ldots)$,

2° $l \subset |P|$,

3° *если* $\Sigma\xi_k \in |P|$ *и* $\xi_k = O(1)$, *то* $\Sigma\xi_k \in l$.

Тогда существуют такой индекс p и число $q>0$, что для любого ряда $\Sigma\xi_k \in l$ имеет место неравенство:

$$\sum_n \Big|\sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}\xi_k\Big| > q\sum_{k=p}^{\infty}|\xi_k|. \tag{1}$$

Доказательство. Так как $l \subset |P|$, то $\sum\limits_n |a_{nk}| = O(1)$ (см. [6]).

Пусть (1) неверно. Тогда существуют последовательность индексов $\{k_i\}$, $k_i \uparrow \infty$, последовательность положительных чисел $\{q_i\}$, $q_i \downarrow 0$ и последовательность $\{x_i\}$ абсолютно сходящихся рядов, $x_i = \sum\limits_k \xi_{ik}$ (причем $x_i \neq 0$) такие, что

$$\sum_n \Big|\sum_{k=k_i}^{\infty} a_{nk}\,\xi_{ik}\Big| \leqslant q_i \sum_{k=k_i}^{\infty}|\xi_{ik}|. \tag{2}$$

Можно считать, что последовательность $\{q_i\}$ выбрана так, что $\Sigma\, q_i < \frac{1}{2}$. Выберем последовательность $\{\eta_i\}$ так, что

$$\sum_{k=\eta_i+1}^{\infty}|\xi_{ik}| < q_i \sum_{k=k_i}^{\infty}|\xi_{ik}|, \tag{3}$$

и обозначим

$$\omega_i = \sum_{k=k_i}^{\eta_i}|\xi_{ik}|.$$

Тогда

$$\omega_i = \sum_{k=k_i}^{\infty}|\xi_{ik}| - \sum_{k=\eta_i+1}^{\infty}|\xi_{ik}| > (1-q_i)\sum_{k=k_i}^{\infty}|\xi_{ik}| > \frac{1}{2}\sum_{k=k_i}^{\infty}|\xi_{ik}|. \tag{4}$$

Далее, в силу (2)

$$\sum_n \Big|\sum_{k=k_i}^{\eta_i} a_{nk}\,\xi_{ik}\Big| \leqslant \sum_n \Big|\sum_{k=k_i}^{\infty} a_{nk}\,\xi_{ik}\Big| + \sum_n \Big|\sum_{k=\eta_i+1}^{\infty} a_{nk}\,\xi_{ik}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant q_i \sum_{k=k_i}^{\infty}|\xi_{ik}| + \sum_{k=\eta_i+1}^{\infty}|\xi_{ik}|\sum_n a_{nk}|,$$

откуда в силу (3) и (4) получаем

$$\sum_n \Big|\sum_{k=k_i}^{\eta_i} a_{nk}\xi_{ik}\Big| = O(1)\; q_i\omega_i. \tag{5}$$

Выделим из последовательности $\{k_i\}$ подпоследовательность $\{k_{i_j}\}$ такую, что

$$k_{i_0} = 0;\; k_{i_{j+1}} > \eta_{i_j} \geqslant k_{i_{j+1}-1},$$

и положим

$$\tau_\nu = \begin{cases} \dfrac{\xi_{i_j,\,\nu}}{\omega_{i_j}}, & k_{i_j} \leqslant \nu \leqslant \eta_{i_j}, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots, \\ 0, & \text{для остальных } \nu. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим ряд $\Sigma\tau_\nu$. Так как $\tau_\nu = O(1)$, то в силу 1° для любого n $\sum\limits_\nu |a_{n\nu}\tau_\nu| < \infty$. Поэтому для любого m имеем в силу (5)

$$\sum_{n=0}^{m} \left| \sum_\nu a_{n\nu}\tau_\nu \right| = \sum_{n=0}^{m} \left| \sum_j \sum_{\nu=k_{i_j}}^{\eta_{i_j}} \frac{a_{n\nu}\xi_{i_j,\,\nu}}{\omega_{i_j}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \frac{\sum\limits_{n=0}^{m} \left| \sum\limits_{\nu=k_{i_j}}^{\eta_{i_j}} a_{n\nu}\xi_{i_j,\,\nu} \right|}{\omega_{i_j}} = O(1)\,\Sigma q_{i_j} = O(1),$$

и, следовательно, $\Sigma\,\tau_\nu \in |P|$. А тогда из 3° следует, что $\Sigma\,|\tau_\nu| < \infty$. Но поскольку

$$\sum_{\nu=0}^{\eta_{i_m}} |\tau_\nu| = \sum_{j=0}^{m} \frac{\sum\limits_{\nu=k_{i_j}}^{\eta_{i_j}} |\xi_{i_j,\,\nu}|}{\omega_{i_j}} = m+1 \to \infty,$$

то мы пришли к противоречию. Тем самым теорема доказана.

Следствие 1. *Если* $|P| = l$ *и выполнено условие* 1°, *то существуют такой индекс* p *и число* $q > 0$, *что для всех* $k \geqslant p$ *имеем*

$$\sum_n |a_{nk} - a_{n,\,k+1}| > q. \tag{6}$$

Доказательство. Так как $|P| = l$, то условия 2° и 3° теоремы 1 выполнены, поэтому имеет место неравенство (1). Положив

$$\xi_{ik} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k < i, \\ 1, & k = i, \\ -1, & k = i+1, \\ 0, & k > i+1 \end{cases}$$

и применяя неравенство (1) к рядам $x_i = \sum\limits_k \xi_{ik}$, получаем (6).

Аналогично доказываются

Теорема 2. *Пусть метод* Q *задан последовательностью функций* $\{a_k(x)\}$ *на промежутке* X, *причем выполнены следующие условия:*

1° $\Sigma |a_k(x)| < \infty$ *для всех* $x \in X$,

2° $l \subset |Q|$,

3° *если* $\Sigma \xi_k \in |Q|$ *и* $\xi_k = O(1)$, *то* $\Sigma \xi_k \in l$.

Тогда существуют такой индекс p *и число* $q > 0$, *что для любого ряда* $\Sigma \xi_k \in l$ *имеет место неравенство*

$$\int_X \left| \sum_{k=p}^{\infty} a_k(x) \xi_k \right| dx > q \sum_{k=p}^{\infty} |\xi_k|. \tag{7}$$

Следствие 2. *Если* $|Q| = l$ *и выполнено условие* 1° *теоремы* 2, *то существуют такой индекс* p *и число* $q > 0$, *что для всех* $k \geqslant p$ *имеем*

$$\int_X |a_k(x) - a_{k+1}(x)| \, dx > q. \tag{8}$$

§ 3.

В этом параграфе мы доказываем теорему, дающую необходимые и достаточные условия для абсолютной лакунарности последовательности относительно методов (C, α), $\alpha > 0$ и метода A.

Теорема 3. *Для того, чтобы последовательность* $\varphi = \{\varphi_k\}$ *была*

а) $|(C, \alpha)|$*-лакунарной*, $\alpha > 0$,

б) $|A|$-лакунарной,

необходимо и достаточно существование индекса S *и числа* $r > 1$, *что при* $k > S$

$$\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} > r. \tag{9}$$

Необходимость. Так как $|(C, \alpha)| \subset |A|$ (см. [5]), то и $|(C, \alpha)^{\varphi}| \subset |A^{\varphi}|$. Поэтому достаточно доказать необходимость условия (9) для метода (C, α). Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}$ $|(C, \alpha)|$-лакунарна, т. е. $|(C, \alpha)^{\varphi}| \subset l$. Очевидно, что для $(C, \alpha)^{\varphi}$ выполнено условие 1° теоремы 1 и что $l \subset |(C, \alpha)^{\varphi}|$. Поэтому $(C, \alpha)^{\varphi}$ удовлетворяет всем условиям следствия 1 и, следовательно, для $(C, \alpha)^{\varphi}$ выполняется неравенство (6), т. е. существуют такой индекс p и число $q > 0$, что при $k \geqslant p$

$$A_k = \sum_{n=\varphi_k}^{\varphi_{k+1}-1} \frac{U_k(n)}{n \binom{n+\alpha}{\alpha}} + \sum_{n=\varphi_{k+1}}^{\infty} \frac{|U_k(n) - U_{k+1}(n)|}{n \binom{n+\alpha}{\alpha}} > q, \tag{10}$$

где

$$U_k(n) = \varphi_k \binom{n - \varphi_k + \alpha - 1}{\alpha - 1}.$$

Мы рассмотрим отдельно два случая: $\alpha \leqslant 1$ и $\alpha > 1$.

1. Пусть $\alpha \leqslant 1$. Тогда нетрудно показать, что при $n \geqslant \varphi_{k+1}$ $U_k(n) \leqslant U_{k+1}(n)$. Поэтому

$$A_k = \sum_{n=\varphi_k}^{\varphi_{k+1}-1} \frac{U_k(n)}{n\binom{n+\alpha}{\alpha}} + \sum_{n=\varphi_{k+1}}^{\infty} \frac{U_{k+1}(n)}{n\binom{n+\alpha}{\alpha}} - \sum_{n=\varphi_{k+1}}^{\infty} \frac{U_k(n)}{n\binom{n+\alpha}{\alpha}} =$$

$$= S_1 + S_2 - S_3. \qquad (11)$$

Далее имеем

$$U_k(n) = \begin{cases} \varphi_k, & n = \varphi_k, \\ \dfrac{\varphi_k (n-\varphi_k)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[1 + O\left(\dfrac{1}{n-\varphi_k}\right)\right], & n > \varphi_k, \end{cases}$$

$$\binom{n+\alpha}{\alpha} = \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad n > 0.$$

Поэтому

$$S_1 = \alpha\varphi_k \sum_{n=\varphi_k+1}^{\varphi_{k+1}-1} \frac{(n-\varphi_k)^{\alpha-1}}{n^{\alpha+1}} + O(\varphi_k) \sum_{n=\varphi_k+1}^{\varphi_{k+1}-1} \frac{(n-\varphi_k)^{\alpha-2}}{n^{\alpha+1}} + O(\varphi_k{}^{-\alpha}),$$

считая $\varphi_0 > 0$. Но так как

$$\sum_{n=\varphi_k+2}^{\varphi_{k+1}-1} \int_n^{n+1} \left| \left(1-\frac{\varphi_k}{n}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^2} - \left(1-\frac{\varphi_k}{x}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x^2} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant O(1) \sum_{n=\varphi_k+2}^{\varphi_{k+1}-1} \int_n^{n+1} \left(1-\frac{\varphi_k}{x-1}\right)^{\alpha-2} \frac{dx}{(x-1)^3} \leqslant$$

$$\leqslant O(\varphi_k{}^{-2}) \left| \int_{\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}}^{\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}} (1-x)^{\alpha-2}\, dx \right| = O(\varphi_k{}^{-(1+\alpha)}),$$

и, аналогично,

$$\sum_{n=\varphi_k+2}^{\varphi_{k+1}-1} \int_n^{n+1} \left| \left(1-\frac{\varphi_k}{n}\right)^{\alpha-2} \frac{1}{n^3} - \left(1-\frac{\varphi_k}{x}\right)^{\alpha-2} \cdot \frac{1}{x^3} \right| dx = O(\varphi_k{}^{-(1+\alpha)}),$$

то

$$S_1 = -\alpha \int_{\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}}^{\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}} (1-x)^{\alpha-1}dx + O(\varphi_k^{-\alpha}) = \left(1-\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\right)^{\alpha} + O(\varphi_k^{-\alpha}). \tag{12}$$

Аналогично можно получить, что

$$S_2 = 1 + O(\varphi_k^{-\alpha}); \quad S_3 = 1 - \left(1-\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\right)^{\alpha} + O(\varphi_k^{-\alpha}). \tag{13}$$

Подставляя оценки (12) и (13) в (11), получаем

$$A_k = 2\left(1-\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\right)^{\alpha} + O(\varphi_k^{-\alpha}). \tag{14}$$

В силу (10) и (14) найдется индекс S и число $q_1 > 0$, что при $k > S$

$$1-\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}} > q_1,$$

т. е.

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}} > \frac{1}{1-q_1},$$

а это и означает, что (9) выполнено при $k > S$ и $r = \frac{1}{1-q_1} > 1$.

2. Пусть $\alpha > 1$. Тогда для каждого k существует такое целое n_k, что $n_k \geqslant \varphi_{k+1}$ и

$$\begin{aligned} U_{k+1}(n) &\geqslant U_k(n) \text{ при } n \geqslant n_k, \\ U_{k+1}(n) &< U_k(n) \text{ при } n < n_k. \end{aligned} \tag{15}$$

С помощью (15), точно так же, как в **1**, мы можем из (10) получить, что существуют индекс p_1 и число $q_1 > 0$, что при $k > p_1$

$$\left(1-\frac{\varphi_k}{n_k}\right)^{\alpha} - \left(1-\frac{\varphi_{k+1}}{n_k}\right)^{\alpha} > q_1. \tag{16}$$

Пусть теперь P будет множество таких $k > p_1$, что

$$\frac{\varphi_{k+1}}{n_k} \geqslant 1 - \left(\frac{q_1}{4}\right)^{\alpha-1},$$

и Q — множество остальных $k > p_1$. Тогда для любого $k \in P$ имеем

$$\frac{\varphi_k}{n_k} \geqslant \frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\left[1-\left(\frac{q_1}{4}\right)^{\alpha-1}\right],$$

и из (16) получаем

$$\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} \geqslant \frac{1-\left(\frac{q_1}{4}\right)^{\alpha-1}}{1-q_1^{\alpha-1}} = q_2 > 1. \tag{17}$$

С другой стороны,

$$\lim_{k\in Q,\ k\to\infty} (n_k - \varphi_{k+1}) = \infty,$$

и из (15) имеем

$$\lim_{\substack{k\in Q\\ k\to\infty}} \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} \geqslant \lim_{\substack{k\in Q\\ k\to\infty}} \frac{(n_k-\varphi_k)^{\alpha-1}\left[1+O\left(\frac{1}{n_k-\varphi_k}\right)\right]}{(n_k-\varphi_{k+1})^{\alpha-1}\left[1+O\left(\frac{1}{n_k-\varphi_{k+1}}\right)\right]} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\substack{k\in Q\\ k\to\infty}} \left(\frac{1-\frac{\varphi_k}{n_k}}{1-\frac{\varphi_{k+1}}{n_k}}\right)^{\alpha-1}.$$

Но тогда из (16) получаем, что существует индекс p_2, что при $k\in Q$, $k > p_2$

$$\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} \geqslant (1+q_1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = q_3 > 1. \tag{18}$$

Положим $S = p_1 + p_2$, $r = \inf(q_2, q_3)$. Тогда из (17) и (18) получаем, что при $k > S$

$$\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} > r > 1,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Так как $|(C, \alpha)| \subset |A|$ (см. [5]), то мы можем ограничиться случаем б). Пусть выполнено условие (9) и ряд $\Sigma\xi_k \in |A^\varphi|$, т. е.

$$\int_0^\infty |\Sigma_k \varphi_k \xi_k e^{-\varphi_k x}| dx = H < \infty. \tag{19}$$

Положим, как в [4] (стр. 219) для R целого, $R > 2$,

$$Q(y) = \{q(y)\}^R = \{4(2^{-y} - 2^{-2y})\}^R.$$

Здесь $q(y)$ равно нулю при $y = 0$, возрастает до достижения максимума, равного единице при $y = 1$, а затем убывает и стремится к нулю при $y \to \infty$. $q(y)$ равно $O(y)$ для малых и $O\left(\frac{1}{y}\right)$ для больших y, так что для любого $c > 0$ ряды

$$\Sigma_\tau q(c^{-\tau}), \quad \Sigma_\tau q(c^\tau)$$

сходятся (см. [4], стр. 219). Далее

$$Q(y) = \sum_{r=R}^{2R} p_r e^{-ry\ln 2},$$

причем

$$\sum_{r=R}^{2R} |p_r| \leqslant \{4(1+1)\}^R = 8^R.$$

Поэтому, полагая $F(x) = \sum \varphi_k \xi_k Q(\varphi_k x)$, в силу (19) имеем

$$\int_0^\infty |F(x)|\,dx \leqslant \sum_{r=R}^{2R} |p_r| \int_0^\infty \Big|\sum_k \varphi_k \xi_k e^{-r(\ln 2)\varphi_k x}\Big| dx \leqslant H\frac{2\cdot 8^R}{R}. \qquad (20)$$

Мы можем считать, что $s = 0$ и $\varphi_0 \geqslant 1$. Фиксируем некоторое r_0, $r > r_0 > 1$. Тогда в силу (9) при $r_0 \geqslant \tau \geqslant 1$ и $k > m$

$$Q\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_m{}^\tau}\right) \leqslant Q\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_m r_0}\right) = O\left(\frac{\varphi_m}{\varphi_k}\right)\left[q\left(\frac{r^{k-m}}{r_0}\right)\right]^{R-1},$$

а при $k < m$

$$Q\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_m{}^\tau}\right) \leqslant Q\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_m}\right) = O\left(\frac{\varphi_m}{\varphi_k}\right)[q(r^{k-m})]^{R+1}.$$

Поэтому при $r_0 \geqslant \tau \geqslant 1$

$$\left|F\left(\frac{1}{\varphi_m{}^\tau}\right)\right| \geqslant |\xi_m|\varphi_m Q\left(\frac{1}{\tau}\right) - \sum_{k\neq m} |\xi_k|\varphi_k Q\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_m{}^\tau}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \varphi_m\Big\{|\xi_m| Q\left(\frac{1}{r_0}\right) - O(1)\sum_{k=m+1}^{\infty}\left[q\left(\frac{r^{k-m}}{r_0}\right)\right]^{R-1}|\xi_k| -$$

$$- O(1)\sum_{k=0}^{m-1}[q(r^{k-m})]^{R+1}|\xi_k|\Big\}$$

и

$$\int_{\frac{1}{\varphi_{n+1}}}^{\frac{1}{\varphi_0}} |F(x)|\,dx = \sum_{m=0}^{n}\int_{\frac{1}{\varphi_{m+1}}}^{\frac{1}{\varphi_m}} |F(x)|\,dx \geqslant \sum_{m=0}^{n}\int_{\frac{1}{\varphi_m r_0}}^{\frac{1}{\varphi_m}} |F(x)|\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \left(1-\frac{1}{r_0}\right)\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\varphi_m}\inf_{1\leqslant\tau\leqslant r_0}\left|F\left(\frac{1}{\varphi_m{}^\tau}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{r_0-1}{r_0}\Big[\sum_{m=0}^{n}|\xi_m|A_m - \sum_{m=n+1}^{\infty}|\xi_m|B_m\Big],$$

где

$$A_m = Q\left(\frac{1}{r_0}\right) - O(1)\sum_{k=0}^{m-1}\left[q\left(\frac{r^{m-k}}{r_0}\right)\right]^{R-1} - O(1)\sum_{k=m+1}^{n}[q(r^{m-k})]^{R+1},$$

$$B_m = \sum_{k=0}^{n}\left[q\left(\frac{r^{m-k}}{r_0}\right)\right]^{R-1}.$$

Оценим A_m и B_m. Имеем

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left[q\left(\frac{r^{m-k}}{r_0}\right)\right]^{R-1} \leqslant \left[q\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]^{R-2}\sum_{k=0}^{m-1} q\left(\frac{r^{m-k}}{r_0}\right) = O(1)\left[q\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]^{R-2},$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}[q(r^{m-k})]^{R+1} \leqslant [q(r)]^R \sum_{k=m+1}^{\infty} q(r^{m-k}) = O(1)[q(r)]^R.$$

Поэтому

$$A_m = [q(r_0^{-1})]^R - O(1)[q(rr_0^{-1})]^R. \tag{21}$$

Аналогично при $n < m$

$$B_m = O(1)[q(r^{m-n-1})]^R. \tag{22}$$

Далее, согласно [4] (теорема 114), ряд $\Sigma\xi_k$ сходится; следовательно $\xi_k = O(1)$, и, учитывая (20), (21) и (22), окончательно получаем для всех n

$$\frac{2H8^R}{R} \geqslant \frac{r_0 - 1}{r_0}\{[q(r_0^{-1})]^R - O(1)\ [q(rr_0^{-1})]^R\}\sum_{m=0}^{n}|\xi_m| - O(1). \tag{23}$$

Покажем теперь, что мы можем так выбрать r_0 и R, что выражение в фигурных скобках станет положительным. Для этого заметим, что неравенство (23) лишь усилится, если мы заменим r на любое r_1, $r > r_1 \geqslant r_0$. Кроме того, для малых $|y|$ имеем

$$q(1+y) = 1 - 2y^2\ln^2 2 + O(y^3). \tag{24}$$

Положим $r_0 = \sqrt{r}$. Тогда $r^{\frac{1}{2}} - 1 > 1 - r^{-\frac{1}{2}}$ и, взяв r достаточно близким к единице, мы в силу (24) будем иметь

$$q(r^{-\frac{1}{2}}) > q(r^{\frac{1}{2}}).$$

Но теперь мы можем выбрать в (23) R так, что

$$[q(r^{-\frac{1}{2}})^R - O(1)[q(r^{\frac{1}{2}})]^R > \frac{1}{2}[q(r^{-\frac{1}{2}})]^R > 0.$$

Таким образом существуют такие R и $\delta > 0$, что для всех n

$$\frac{2H8^R}{R} \geqslant \delta\sum_{m=0}^{n}|\xi_m| - O(1),$$

откуда $\Sigma|\xi_m| < \infty$. Это доказывает теорему.

§ 4.

В этом параграфе мы найдем необходимые и достаточные условия для абсолютной лакунарности последовательности относительно методов (E, α), $\alpha > 0$ и метода B. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения, к доказательству которых мы и переходим.

Лемма 1. (см. [7]) *Имеют место следующие соотношения*:

1° $l \subset |(E, \alpha)|$ *при* $\alpha > 0$,
2° $l \subset |B|$.

Действительно, для любого ряда $\Sigma\xi_k$, $\Sigma|\xi_k| < \infty$ имеем

$$\sum_n \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{n-k}}{(\alpha+1)^{n+1}} \binom{n}{k} \xi_k \right| \leqslant \sum_k |\xi_k| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\alpha^{n-k}}{(\alpha+1)^{n+1}} \binom{n}{k} < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} \left| \sum_k e^{-x} \frac{x^k}{k!} \xi_k \right| dx \leqslant \sum_k |\xi_k| \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^k}{k!}\, dx < \infty.$$

Лемма 2. (см. [7]) *Для любого* $\alpha > 0$ $|(E, \alpha)| \subset |B|$.

Нетрудно проверить, что при $\Sigma\xi_k \in |(E, \alpha)|$ имеем

$$e^{-x} \sum_n \xi_n \frac{x^n}{n!} = e^{-(\alpha+1)x} \sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{n-k}}{(\alpha+1)^{n+1}} \binom{n}{k} \xi_k \right) \frac{[(\alpha+1)x]^n}{n!}.$$

Но тогда из леммы 1 следует, что $\Sigma\xi_k \in |B|$. Этим лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть*

$$x > 0,\ u_m(x) = e^{-x} \frac{x^m}{m!} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{7}{12}.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} \Big(\sum_{|m-x| > x^{\delta}} u_m(x) \Big)\, dx < \infty \tag{25}$$

и при $|m - x| < x^{\delta}$

$$u_m(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^{-\frac{(m-x)^2}{2x}} \left[1 + O\left(\frac{|x-m|+1}{x} \right) \right] + O\left(\frac{|x-m|^3}{x^2} \right). \tag{26}$$

Обе оценки являются очевидными следствиями формул (9. 1. 6) и (9. 1. 8) из [4].

Лемма 4. *Пусть* $\xi_n = O(1)$ *и*

$$\xi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1, \\ \xi_n, & n \leqslant t < n+1 \quad (n \geqslant 1). \end{cases}$$

Тогда для $T>0$ *имеем*

$$\int_0^T \Big|\sum_{m=0}^{n} u_m(x)\xi_m\Big|\,dx \geqslant \int_0^T \Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\int_0^{n+1} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}}\xi(t)\,dt\Big|\,dx - $$

$$-O(1)\Big[1+\sum_{m=1}^{n}|\xi_m|m^{-\frac{1}{2}}\Big]. \qquad (27)$$

Доказательство. Положим

$$\alpha_m=\int_0^\infty \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\,e^{-\frac{(m-x)^2}{2x}}\frac{|x-m|}{x}\,dx,$$

$$\beta_m=\int_0^\infty \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\,e^{-\frac{(m-x)^2}{2x}}\frac{|x-m|^3}{x^2}\,dx.$$

Взяв

$$\omega=\frac{x-m}{\sqrt{x}},$$

имеем при $m>0$

$$\alpha_m=O(1)\int_0^\infty e^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega\sup_{x>0}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+m}\right)d\omega=O(m^{-\frac{1}{2}}),$$

$$\beta_m=O(1)\int_0^\infty e^{-\frac{\omega^2}{2}}\omega^3\sup_{x>0}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+m}\right)d\omega=O(m^{-\frac{1}{2}}).$$

Отсюда и из (25) и (26) следует, что

$$\int_0^T\Big|\sum_{m=0}^{n}u_m(x)\xi_m\Big|\,dx\geqslant\int_0^T\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\Big|\sum_{m=0}^{n}e^{-\frac{(x-m)^2}{2x}}\xi_m\Big|\,dx -$$

$$-O(1)\int_0^\infty\Big(\sum_{m=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2x}}\left[\frac{|x-m|+1}{x}+\frac{|x-m|^3}{x^2}\right]|\xi_m|\Big)\,dx -$$

$$-O(1)\geqslant\int_0^T\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\Big|\sum_{m=0}^{n}e^{-\frac{(x-m)^2}{2x}}\xi_m\Big|\,dx -$$

$$-O(1)\sum_{m=1}^{n}|\xi_m|(\alpha_m+\beta_m)-O(1).$$

Поэтому мы получим (27), если покажем, что

$$A=\int_0^\infty\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\Big|\sum_{m=0}^{n}e^{-\frac{(x-m)^2}{2x}}\xi_m-\int_0^{n+1}e^{-\frac{(x-t)^2}{2x}}\xi(t)\,dt\Big|\,dx=$$

$$=O(1)\Big[\sum_{m=1}^{n}|\xi_m|m^{-\frac{1}{2}}+1\Big]. \qquad (28)$$

Но при $2<m<t<m+1$ и $x>1$

$$\left|e^{-\frac{(x-m)^2}{2x}}-e^{-\frac{(x-t)^2}{2x}}\right|\leqslant\left|\int_t^m e^{-\frac{(x-u)^2}{2x}}\frac{x-u}{x}\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant 10\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2x}}\frac{|x-m|+1}{x}.$$

Поэтому

$$A=O(1)\sum_{m=1}^{n}|\xi_m|\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2x}}\frac{|x-m|}{x}\,dx+O(1)=$$

$$=O(1)\,[\sum_{m=1}^{n}|\xi_m|m^{-\frac{1}{2}}+1].$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\xi(t)=O(1)$, *c — комплексное, и*

$$\varphi(x,\ t)=\sqrt{\frac{ab}{\pi}}\,\frac{(a-b)x}{(ax-bt)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{ab\,(t-x)^2}{ax-bt}\right\},$$

$$f_c(x)=\sqrt{\frac{c}{\pi x}}\int_0^T e^{-\frac{c(x-t)^2}{x}}\xi(t)\,dt.$$

Тогда при $0<b<a$ *имеем*

$$f_b(x)=\int_0^{\frac{ax}{b}}\varphi(x,\ t)\,f_a(t)\,dt.$$

Доказательство. Действительно

$$\sqrt{\frac{ab}{\pi}}\int_0^{\frac{ax}{b}}\frac{(a-b)\,x}{(ax-bt)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{ab\,(t-x)^2}{ax-bt}\right\}f_a(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^T\xi(u)\int_0^x\frac{(a-b)x}{(x-t)^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{(at-bx)^2}{b\,(x-t)}\right\}t^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{(at-bu)^2}{bt}\right\}dt\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^T\xi(u)\exp(2au)\exp\left[\left(\frac{a^2}{b}-2a\right)x\right](a-b)\,x\int_0^x(x-t)^{-\frac{3}{2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{(a-b)^2x^2}{b\,(x-t)}\right]t^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{bu^2}{t}\right)dtdu.$$

Положим

$$g(x)=\int_0^x(x-t)^{-\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{(a-b)^2x^2}{b\,(x-t)}\right]t^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{bu^2}{t}\right)dt$$

и пусть $G(s)$ — преобразование Лапласа функции $g(x)$.

Тогда в силу формул (2. 1. 20) и (7. 13. 5) из [3] имеем

$$G(s) = \frac{\pi\sqrt{b}}{(a-b)x\sqrt{s}} \exp\left[-2\sqrt{\frac{s}{b}}(ub + x(a-b))\right].$$

Поэтому

$$g(x) = \frac{\sqrt{\pi b}}{(a-b)x\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{1}{x}\left[u\sqrt{b} + \frac{x(a-b)}{\sqrt{b}}\right]^2\right\}.$$

Но тогда

$$\int_0^{\frac{ax}{b}} \varphi(x, t) f_a(t)\, dt = \sqrt{\frac{b}{\pi x}} \int_0^T \xi(u) \exp\left[-\frac{1}{x}(-2uxb + bu^2 + bx^2)\right] du = f_b(x),$$

что и требовалось.[2]

Согласно [3] (стр. 275) лемма 5 имеет место и при более слабых предположениях.

Лемма 6. *В условиях леммы 5 для* $H > 0$

$$\int_0^H \left| \int_0^{\frac{ax}{b}} \varphi(x, t) f_a(t)\, dt \right| dx = O(1) \int_0^{\frac{aH}{b}} |f_a(t)|\, dt.$$

Очевидно, что это имеет место, если

$$A = \sup_{t>0} \int_{\frac{bt}{a}}^{\infty} |\varphi(x, t)|\, dx < \infty.$$

Положим

$$\omega = \frac{x-t}{\sqrt{ax - bt}}.$$

Тогда

$$A = O(1) \sup_{\infty > x > \frac{bt}{a} > 0} \left(\frac{x}{ax + (a-2b)t}\right) \int_0^{\infty} e^{-ab\omega^2}\, d\omega < \infty.$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем перейти к решению основной задачи.

Теорема 3. а) *Для того, чтобы последовательность* $\varphi = \{\varphi_k\}$ *была* $|(E, \alpha)|$*-лакунарной, необходимо, а при выполнении дополнительного условия*

$$\Sigma \xi_k \in |(E, \alpha)^{\varphi}| \text{ влечет } \xi_k = O(\gamma^{\sqrt{\varphi_k}}) \text{ для некоторого } \gamma > 0 \quad (29)$$

[2] Нетрудно видеть, что все проведенные преобразования справедливы, так как $\xi(t) = O(1)$ и все интегралы абсолютно сходятся.

достаточно существование индекса p *и числа* $r>0$, *что при* $k>p$

$$\varphi_{k+1}-\varphi_k>r\sqrt{\varphi_k}. \tag{30}$$

б) *Для того, чтобы последовательность* $\varphi=\{\varphi_k\}$ *была* $|B|$-*лакунарной, необходимо, а при выполнении дополнительного условия*

$$\Sigma\xi_k\in|B^{\varphi}| \text{ влечет } \xi_k=O(\gamma^{\sqrt{\varphi_k}}) \text{ для некоторого } \gamma>0, \tag{31}$$

достаточно выполнение условия (30).

Замечание. Условия (29), (31) нам нужны лишь для обеспечения ограниченности членов любого ряда $\Sigma\xi_k\in|(E,\alpha)^{\varphi}|$, соответственно $\Sigma\xi_k\in|B^{\varphi}|$.

Необходимость. Так как в силу леммы 2 $|(E,\alpha)|\subset|B|$, то и $|(E,\alpha)^{\varphi}|\subset|B^{\varphi}|$. Поэтому мы можем ограничиться доказательством необходимости условия (30) для $|(E,\alpha)|$-лакунарности.

Пусть $\varphi=\{\varphi_k\}$ $|(E,\alpha)|$-лакунарна. В силу леммы 1 $l\subset|(E,\alpha)|$, следовательно $l\subset|(E,\alpha)^{\varphi}|$. Поэтому мы можем применить к $(E,\alpha)^{\varphi}$ следствие 1, согласно которому существуют такой индекс s и число $q>0$, что при $k>s$

$$\sum_{n=\varphi_k}^{\varphi_{k+1}-1}u_n(\varphi_k)+\sum_{n=\varphi_{k+1}}^{\infty}|u_n(\varphi_k)-u_n(\varphi_{k+1})|>q, \tag{32}$$

где

$$u_n(k)=(\alpha+1)^{-(n+1)}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}.$$

Используя оценки, доказанные в теореме 139 книги [4], мы можем выбрать такой индекс s_1, что при $k>s_1$, $\delta=\frac{7}{12}$ будем иметь

1° $\sum\limits_{|M-n|>k^{\delta}}u_n(k)<\frac{q}{8}$, где $M=[(\alpha+1)k]$.

2° Если $|M-n|<k^{\delta}$, то

$$u_n(k)=\sqrt{\frac{1}{2\pi M}}\,e^{-\frac{(M-n)^2}{2M}}[1+O(k^{-\frac{1}{4}})].$$

Далее

$$\sum_{\substack{n \\ |M-n|>k^{\delta}}} \sqrt{\frac{1}{2\pi M}}\, e^{-\frac{(M-n)^2}{2M}} = O(1)\sqrt{\frac{1}{M}} \int_{k^{\delta}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2M}}\, dt = O\left(\frac{k^{\delta}}{M}\right),$$

а в силу теоремы 140 книги [4]

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi M}} \sum_{n} e^{-\frac{(M-n)^2}{2M}} = 1 + o(1).$$

Поэтому существует индекс s_2, что при $k > s_2$ из (32) будем иметь

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi M_k}} \sum_{n=\varphi_k}^{\varphi_{k+1}-1} e^{-\frac{(M_k-n)^2}{2M_k}} + \sum_{n=\varphi_{k+1}}^{\infty} \left| \sqrt{\frac{1}{2\pi M_k}}\, e^{-\frac{(M_k-n)^2}{2M_k}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{1}{2\pi M_{k+1}}}\, e^{-\frac{(M_{k+1}-n)^2}{2M_{k+1}}} \right| = A_1 + A_2 > \frac{q}{8}, \qquad (33)$$

где

$$M_k = [(\alpha + 1)\varphi_k].$$

Уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi M_k}}\, e^{-\frac{(M_k-n)^2}{2M_k}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi M_{k+1}}}\, e^{-\frac{(M_{k+1}-n)^2}{2M_{k+1}}}$$

легко решается логарифмированием; его единственным положительным решением является

$$x_{0k} = \sqrt{M_{k+1} M_k \left(1 + \frac{\ln M_{k+1} - \ln M_k}{M_{k+1} - M_k}\right)} = \sqrt{M_{k+1} M_k}\,(1 + O(\varphi_k^{-1})).$$

Если $x_{0k} < \varphi_{k+1}$, то $\varphi_{k+1} \geqslant (1 + \alpha)^2 \varphi_k$; поэтому мы можем считать, что $x_{0k} > \varphi_{k+1}$. Тогда имеем:

$$A_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi M_k}} \sum_{n=\varphi_{k+1}}^{[x_{0k}]} e^{-\frac{(M_k-n)^2}{2M_k}} - \sqrt{\frac{1}{2\pi M_{k+1}}} \sum_{n=\varphi_{k+1}}^{[x_{0k}]} e^{-\frac{(M_{k+1}-n)^2}{2M_{k+1}}} -$$

$$- \sqrt{\frac{1}{2\pi M_k}} \sum_{n=[x_{0k}]+1}^{\infty} e^{-\frac{(M_k-n)^2}{2M_k}} + \sqrt{\frac{1}{2\pi M_{k+1}}} \sum_{n=[x_{0k}]+1}^{\infty} e^{-\frac{(M_{k+1}-n)^2}{2M_{k+1}}} =$$

$$= S_1 - S_2 - S_3 + S_4.$$

Перейдем от сумм к интегралам аналогично тому, как это было сделано при выводе (28). Тогда мы получим:

$$
\left.
\begin{aligned}
A_1 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi M_k}} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}-1} e^{-\frac{(M_k-t)^2}{2M_k}}\,dt + O(\varphi_k^{-\frac{1}{2}}) = O(1)\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{\sqrt{\varphi_k}};\\
S_1 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\int_0^{\frac{M_k-\varphi_{k+1}}{\sqrt{M_k}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \int_0^{\sqrt{M_{k+1}}-\sqrt{M_k}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right] + \\
&\qquad + O(\varphi_k^{-\frac{1}{2}});\\
S_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\sqrt{M_{k+1}}-\sqrt{M_k}}^{\frac{M_{k+1}-\varphi_{k+1}}{\sqrt{M_{k+1}}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + O(\varphi_k^{-\frac{1}{2}});\\
S_3 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\sqrt{M_{k+1}}-\sqrt{M_k}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + O(\varphi_k^{-\frac{1}{2}});\\
S_4 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_0^{\sqrt{M_{k+1}}-\sqrt{M_k}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right] + O(\varphi_k^{-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}
\right\} \quad (34)
$$

Далее, так как $\sqrt{M_k} = \sqrt{(\alpha+1)\varphi_k} + O(\varphi_k^{-\frac{1}{2}})$, то эти оценки не изменятся при замене M_k на $(\alpha+1)\varphi_k$ и M_{k+1} на $(\alpha+1)\varphi_{k+1}$. А тогда, подставляя (34) в (33) и упрощая, получаем, что при $k > s_2$

$$
4\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\alpha+1}(\sqrt{\varphi_{k+1}}-\sqrt{\varphi_k})} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + O(1)\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{\sqrt{\varphi_k}} + O(\varphi_k^{-\frac{1}{2}}) > \frac{q}{8}.
$$

Отсюда немедленно следует, что существуют индекс p и число $r > 0$, что при $k > p$

$$
\sqrt{\varphi_{k+1}} - \sqrt{\varphi_k} > r,
$$

что эквивалентно (30).

Достаточность. Пусть выполнено (30). Мы докажем следующее предложение: если $\Sigma\xi_k \in |B^{\varphi}|$ и $\xi_k = O(1)$, то $\Sigma\xi_k \in l$. Так как в силу леммы 2 $|(E, \alpha)| \subset |B|$, а в силу теоремы 31 из [9]

при выполнении условия (29) $\Sigma\xi_k\epsilon\,|\,(E,\ \alpha)^{\varphi}|$ влечет $\xi_k = O(1)$, то доказательство этого предложения равносильно доказательству достаточности в случае а).

Аналогично в силу теоремы 31 из [9] при выполнении условия (31) $\Sigma\xi_k\epsilon\,|\,B^{\varphi}|$ влечет $\xi_k = O(1)$. Поэтому доказательство вышеупомянутого предложения равносильно доказательству условий достаточности теоремы 3. Мы разобьём его на 4 этапа.

А. Итак, пусть для $\varphi = \{\varphi_k\}$ выполняется (30), а $\Sigma\xi_k\epsilon\,|\,B^{\varphi}\,|$, т. е.

$$\int_0^{\infty} \Big|\sum_k \xi_k \frac{x^{\varphi_k}}{\varphi_k!} e^{-x}\Big|\,dx = H < \infty, \tag{35}$$

и $\xi_k = O(1)$. Так как из $|\,B\,|$-лакунарности последовательности следует $|\,B\,|$-лакунарность любой её подпоследовательности, то мы можем считать, что

$$\varphi_0 > 0 \text{ и } \varphi_k - \varphi_{k-1} < 2\sqrt{\varphi_{k-1}}, \quad k \geqslant 1.$$

В силу леммы 3 имеем

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_n} \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k \frac{x^{\varphi_k}}{\varphi_k!} e^{-x}\Big|\,dx = O(1) + \int_{\varphi_0}^{\varphi_n} \Big|\sum_{\substack{k\geqslant n+1 \\ \varphi_k - x < x^{\delta}}} \xi_k \frac{x^{\varphi_k}}{\varphi_k!} e^{-x}\Big|\,dx =$$

$$= O(1) + \int_{\varphi_0}^{\varphi_n} \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\Big|\sum_{\substack{k\geqslant n+1 \\ \varphi_k - x < x^{\delta}}} e^{-\frac{(\varphi_k - x)^2}{2x}} \xi_k \Big[1 +$$

$$+ O\Big(\frac{\varphi_k - x}{x}\Big) + O\Big(\frac{(\varphi_k - x)^3}{x^2}\Big)\Big]\Big|\,dx,$$

следовательно,

$$A = O(1)\Big[1 + \int_{\varphi_0}^{\varphi_n} \sqrt{\frac{1}{x}}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\frac{(\varphi_k - x)^2}{2x}} |\,\xi_k\,|\Big)\,dx\Big]. \tag{36}$$

Далее при $\varphi_{k-1} > x$

$$\Big[\sqrt{\frac{1}{x}}\, e^{-\frac{(x-\varphi_k)^2}{2x}}\Big]'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\frac{(x-\varphi_k)^2}{2x}}\Big[\frac{\varphi_k^2 - x^2}{x^2} - \frac{1}{x}\Big] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\frac{(x-\varphi_k)^2}{2x}}\Big(\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{x} - \frac{1}{x}\Big) > 0$$

для достаточно больших x, скажем $x > \varphi_{s_1}$. Поэтому при $n > s_1$ и $k > n$

$$\int_{\varphi_{s_1}}^{\varphi_n} \sqrt{\frac{1}{x}}\, e^{-\frac{(x-\varphi_k)^2}{2x}}\, dx = \sum_{i=s_1+1}^{n} \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \sqrt{\frac{1}{x}}\, e^{-\frac{(x-\varphi_k)^2}{2x}}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\sqrt{\varphi_{i-1}}}\, e^{-\frac{(\varphi_k-\varphi_i)^2}{2\varphi_i}} \leqslant 2r \sum_{i=0}^{n} e^{-\frac{k-i}{2}r^2} = O(1)\, e^{-\frac{(k-n)r^2}{2}}.$$

Следовательно,

$$\int_{\varphi_{s_1}}^{\varphi_n} \sqrt{\frac{1}{x}} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\frac{(x-\varphi_k)^2}{2x}} |\xi_k| \Big)\, dx =$$

$$= O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\frac{(k-n)r^2}{2}} = O(1). \tag{37}$$

Кроме того,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_{s_1}} \sqrt{\frac{1}{x}} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\frac{(x-\varphi_k)^2}{2x}} |\xi_k| \Big)\, dx =$$

$$= O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\frac{(\varphi_k-\varphi_{s_1})^2}{\varphi_{s_1}}} = O(1). \tag{38}$$

Из (36), (37) и (38) окончательно следует, что $A = O(1)$. Поэтому из (35) имеем

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_n} \Big| \sum_{k=0}^{n} \xi_k \frac{x^{\varphi_k}}{\varphi_k!} e^{-x} \Big|\, dx \leqslant H + A = O(1).$$

Отсюда и из (27) и (28) получаем

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_n} \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \left| \sum_{k=0}^{n} \xi_k e^{-\frac{(x-\varphi_k)^2}{2x}} \right| dx = O(1) \sum_{m=1}^{n} \xi_m m^{-\frac{1}{2}} + O(1), \tag{39}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_n} \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \Big| \int_{0}^{\varphi_n} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}}\, \xi(t)\, dt \Big|\, dx = O(1) \sum_{m=1}^{n} \xi_m m^{-\frac{1}{2}} + O(1), \tag{40}$$

где

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_i, & \varphi_i \leqslant t < \varphi_i + 1 \quad (i = 0, 1, \ldots), \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases}$$

Б. Положим для $c>0$

$$F_c^n(x)=\sqrt{\frac{c}{\pi x}}\sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{c(x-\varphi_k)^2}{x}}\xi_k$$

и зафиксируем некоторое γ, $0<\gamma<\frac{r}{2}$. Тогда при $0\leqslant\tau\leqslant\gamma$ для любого $m\leqslant n-1$ имеем

$$F_c^n(\varphi_m+\tau\sqrt{\varphi_m})\geqslant|\xi_m|\sqrt{\frac{c}{\pi\left(\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}\right)}}e^{-c\gamma^2}-$$

$$-|\xi_n|\sqrt{\frac{c}{\pi\left(\varphi_m+\tau\sqrt{\varphi_m}\right)}}\,e^{-\frac{c\left(\varphi_n-\varphi_m-\tau\sqrt{\varphi_m}\right)^2}{\varphi_m+\tau\sqrt{\varphi_m}}}-$$

$$-\sqrt{\frac{c}{\pi\varphi_m}}\sum_{k=0}^{m-1}e^{-\frac{c(\varphi_m-\varphi_k)^2}{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}}}|\xi_k|-$$

$$-\sqrt{\frac{c}{\pi\varphi_m}}\sum_{k=m+1}^{n-1}e^{-\frac{c\left(\varphi_k-\varphi_m-\gamma\sqrt{\varphi_m}\right)^2}{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}}}|\xi_k|.$$

Поэтому

$$\sum_{m=0}^{n-1}\int_{\varphi_m}^{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}}|F_c^n(x)|\,dx\geqslant\gamma\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m|\left[\sqrt{\frac{c\varphi_m}{\pi\left(\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}\right)}}e^{-c\gamma^2}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{c}{\pi}}\sum_{k=0}^{m-1}e^{-\frac{c\left(\varphi_k+\gamma\sqrt{\varphi_k}-\varphi_m\right)^2}{\varphi_k+\gamma\sqrt{\varphi_k}}}-\sqrt{\frac{c}{\pi}}\sum_{k=m+1}^{n-1}e^{-\frac{c\left(\varphi_k-\varphi_m\right)^2}{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}}}\right]-$$

$$-|\xi_n|\sum_{m=0}^{n-1}\int_{\varphi_m}^{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}}\sqrt{\frac{c}{\pi x}}e^{-\frac{c(x-\varphi_n)^2}{x}}dx. \qquad (41)$$

Но в силу (30) имеем при $k<m$

$$e^{-\frac{c(\varphi_k+\gamma\varphi_k-\varphi_m)^2}{\varphi_k+\gamma\sqrt{\varphi_k}}}\leqslant e^{-\frac{c(r-\gamma)^2}{2(1+\gamma)}(m-k)}\leqslant e^{-\frac{cr^2}{8(1+r)}(m-k)},$$

а так как при $x>\varphi_m$

$$\left[\frac{(x-\varphi_m)^2}{x+\gamma\sqrt{x}}\right]'_x=\frac{x-\varphi_m}{2\sqrt{x}(x+\gamma\sqrt{x})^2}[2x\sqrt{x}+2\varphi_m\sqrt{x}+3\gamma x+\gamma\varphi_m]>0,$$

то при $k > m$

$$e^{-\frac{c(\varphi_k-\varphi_m)^2}{\varphi_k+\gamma\sqrt{\varphi_k}}} \leqslant e^{-\frac{cr^2}{8(1+r)}(k-m)}.$$

Кроме того

$$\sqrt{\frac{\varphi_m}{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}}} = 1 + O(\varphi_m^{-\frac{1}{2}}\gamma),$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \int_{\varphi_m}^{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}} \sqrt{\frac{c}{\pi x}}\, e^{-\frac{c(x-\varphi_n)^2}{x}}\, dx = O(\gamma).$$

Поэтому из (41) получаем

$$\sum_{m=0}^{n-1} \int_{\varphi_m}^{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}} |F_c^n(x)|\, dx > \gamma\sqrt{\frac{c}{\pi}} \sum_{m=0}^{n-1} |\xi_m| \Bigg[e^{-c\gamma^2} - $$

$$- \sum_{k=0}^{m-1} e^{-\frac{cr^2}{8(1+r)}(m-k)} - \sum_{k=m+1}^{n-1} e^{-\frac{cr^2}{8(1+r)}(k-m)} \Bigg] - O(\gamma),$$

откуда следует, что

$$\sum_{m=0}^{n-1} \int_{\varphi_m}^{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}} |F_c^n(x)|\, dx > \gamma A(\gamma, c) \sum_{m=0}^{n-1} |\xi_m| - O(\gamma), \qquad (42)$$

где

$$A(\gamma, c) = \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left[e^{-c\gamma^2} - 2e^{-\frac{cr^2}{8(1+r)}} \left(1 - e^{-\frac{cr^2}{8(1+r)}}\right)^{-1} \right].$$

Рассмотрим неравенство (42). Полагая $c = \frac{1}{2}$, получаем

$$\sum_{m=0}^{n-1} \int_{\varphi_m}^{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}} |F_{\frac{1}{2}}^n(x)|\, dx > \gamma A(\gamma, \tfrac{1}{2}) \sum_{m=0}^{n-1} |\xi_m| - O(1). \qquad (43)$$

Далее, в силу (39) имеем

$$\sum_{m=0}^{n-1} \int_{\varphi_m}^{\varphi_m+\gamma\sqrt{\varphi_m}} |F_{\frac{1}{2}}^n(x)|\, dx \leqslant \int_0^{\varphi_n} |F_{\frac{1}{2}}^n(x)|\, dx =$$

$$= O(1)\left[1 + \sum_{m=1}^{n-1} |\xi_m| m^{-\frac{1}{2}}\right]. \qquad (44)$$

Из (43) и (44) получаем, что для всех $n \geqslant 2$

$$O(1) \sum_{m=1}^{n-1} |\xi_m| m^{-\frac{1}{2}} > \gamma A(\gamma, \tfrac{1}{2}) \sum_{m=0}^{n-1} |\xi_m| - O(1). \qquad (45)$$

Если мы теперь предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$2e^{-\frac{cr^2}{8(1+r)}}\left(1-e^{-\frac{cr^2}{8(1+r)}}\right)^{-1} < 1-\varepsilon, \tag{46}$$

то, выбрав $r_0 < \frac{r}{2}$ так, что $0 < r_0^2 < -2\ln(1-\varepsilon)$, мы получим, что $A(r_0, \frac{1}{2}) = \delta > 0$, и из неравенства (45) с $\gamma = r_0$ следует, что для всех $n \geqslant 2$

$$O(1)\sum_{m=1}^{n-1}|\xi_m|\,m^{-\frac{1}{2}} > \delta r_0 \sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m| - O(1).$$

Отсюда легко получаем, что $\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m| = O(1)$.

Таким образом, мы доказали наше утверждение для всех r, удовлетворяющих (46). Чтобы убедиться в справедливости теоремы для всех значений r, нам придется несколько уточнить рассуждения.

В. Возьмем последовательность $\{\gamma_n\}$, $\frac{r}{8\sqrt{1+r}} > \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_n \to 0$, и выберем $c_0 > 0$ так, что

$$A\left(\frac{r}{8\sqrt{1+r}},\ c_0\right) > 0.$$

Такое c_0 всегда найдется. Пусть функция $F_{c_0}^n(x)$ имеет нули в сегментах

$$\Delta_n^i = [\varphi_{k_i},\ \varphi_{k_i} + \gamma_n\sqrt{\varphi_{k_i}}]$$

и не имеет нулей в сегментах

$$s_n^\nu = [\varphi_{k_\nu},\ \varphi_{k_\nu} + \gamma_n\sqrt{\varphi_{k_\nu}}].$$

Тогда при $x \in \Delta_n^i$

$$|F_{c_0}^n(x)| = O(1)\gamma_n \sup_{x\in\Delta_n^i}|[\sqrt{x}F_{c_0}^n(x)]'_x| =$$

$$= O(1)\gamma_n \sup_{x\in\Delta_n^i}\left(\sum_{m=0}^{n}\left[e^{-\frac{c_0(x-\varphi_m)^2}{x}}\frac{|x^2-\varphi_m^2|}{x^2}|\xi_m|\right]\right) =$$

$$= O(1)\gamma_n \sum_{m=0}^{n} e^{-\frac{c_0(\varphi_{k_i}-\varphi_m)^2}{2(1+r)\varphi_{k_i}}}\frac{|\varphi_{k_i}^2-\varphi_m^2|}{\varphi_{k_i}^2}|\xi_m| + O(\gamma_n)\frac{|\xi_i|}{\sqrt{\varphi_{k_i}}}.$$

Поэтому

$$\sum_{k_i<n}\int_{\Delta_n^i}|F_{c_0}^n(x)|\,dx=$$

$$=O(\gamma_n^2)\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}e^{-\frac{c_0(\varphi_k-\varphi_m)^2}{2(1+r)\varphi_k}}\frac{|\varphi_k^2-\varphi_m^2|}{\varphi_k^2}\sqrt{\varphi_k}\,|\xi_m|+O(\gamma^2)\sum_{m=0}^{n}|\xi_m|. \quad (47)$$

Далее, аналогично выводу оценки (28), можно показать, что

$$\sum_{k=0}^{n}e^{-\frac{c_0(\varphi_k-\varphi_m)^2}{2(1+r)\varphi_k}}\frac{|\varphi_k^2-\varphi_m^2|}{\varphi_k^2}\sqrt{\varphi_k}=$$

$$=O(1)\int_0^{\varphi_n}e^{-\frac{c_0(t-\varphi_m)^2}{2(1+r)t}}\frac{|t^2-\varphi_m^2|}{t^2}\,dt=O(1),$$

и из (47) получаем

$$\sum_{k_i<n}\int_{\Delta_n^i}|F_{c_0}^n(x)|\,dx=O(\gamma_n^2)\sum_{m=0}^{n}|\xi_m|. \quad (48)$$

Положим

$$a_n^\nu=\operatorname*{sgn}_{x\in s_n^\nu}F_{c_0}^n(x)$$

и

$$\Phi_n(c)=\sum_{k_\nu<n}a_n^\nu\int_{s_n^\nu}F_c^n(x)\,dx,$$

где $c=\sigma+i\tau$ — комплексное число. Взяв в (42) $\gamma=\gamma_n$, в силу (48) получаем

$$\Phi_n(c_0)=\sum_{m=0}^{n-1}\int_{\varphi_m}^{\varphi_m+\gamma_n\sqrt{\varphi_m}}|F_{c_0}^n(x)|\,dx-\sum_{k_i<n}\int_{\Delta_n^i}|F_{c_0}^n(x)|\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\gamma_nA(\gamma_n,\,c_0)\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m|-O(\gamma_n)-O(\gamma_n^2)\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m|,$$

т. е.

$$\Phi_n(c_0)\geqslant\gamma_n(\delta+h_n)\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m|, \quad (49)$$

где $h_n\to0$ при $\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m|\to\infty$ и $\delta=A(\gamma_1,\,c_0)>0$.

Далее, пусть D — область комплексной плоскости

$$\frac{1}{4}<\sigma<c_0+1;\ |\tau|<1;\ \ c=\sigma+i\tau\in D.$$

Очевидно, $\Phi_n(c)$ аналитическая функция в D. Покажем, что

$$\Phi_n(c) = O(\gamma_n) \sum_{m=0}^{n-1} |\xi_m| \tag{50}$$

при $c \in D$. Действительно

$$|\Phi_n(c)| \leqslant \sum_{k_\nu < n} \int_{s_n^\nu} |F_{c_0}^n(x)|\, dx =$$

$$= O(1) \sum_{k_\nu < n} \int_{\varphi_{k_\nu}}^{\varphi_{k_\nu}+\gamma_n\sqrt{\varphi_{k_\nu}}} \left[x^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{n} e^{-\frac{\sigma(x-\varphi_m)^2}{x}} |\xi_m|\right] dx =$$

$$= O(1) \sum_{m=0}^{n} |\xi_m| \sum_{k=0}^{n} \int_{\varphi_k}^{\varphi_k+\gamma_n\sqrt{\varphi_k}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\sigma(x-\varphi_m)^2}{x}} dx = O(\gamma_n) \sum_{m=0}^{n-1} |\xi_m|.$$

Здесь последняя оценка получена тем же методом, каким мы пользовались при выводе (37).

Нам понадобится еще одна оценка модуля функции $\Phi_n(c)$. Будем считать, что $\frac{1}{4} < c \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда

$$|\Phi_n(c)| \leqslant \int_{\varphi_0}^{\varphi_n} |F_c^n(x)|\, dx. \tag{51}$$

Совершенно аналогично выводу (28) легко показать, что

$$\int_0^{\varphi_n} \left|F_c^n(x) - \sqrt{\frac{c}{\pi x}} \int_0^{\varphi_n} e^{-\frac{c(x-t)^2}{x}} \xi(t)\, dt\right| dx =$$

$$= O(1)\left[1 + \sum_{m=1}^{n-1} |\xi_m| m^{-\frac{1}{2}}\right], \tag{52}$$

где $\xi(t)$ — та же функция, что и в (40). Далее, в силу лемм 4 и 5 и оценки (40)

$$\int_0^{\varphi_n} \sqrt{\frac{c}{\pi x}} \int_0^{\varphi_n} \left| e^{-\frac{c(x-t)^2}{x}} \xi(t)\, dt \right| dx =$$

$$= O(1) \int_0^{\frac{\varphi_n}{2c}} \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \left| \int_0^{\varphi_n} e^{-\frac{(x-t)^2}{2x}} \xi(t)\, dt \right| dx =$$

$$\| O(1)\left[1+\sum_{m=1}^{n}|\xi_m| m^{-\frac{1}{2}}\right]+O(1)\int_{\varphi_n}^{\frac{\varphi_n}{2c}}\sqrt{\frac{1}{x}}\left|\int_0^{\varphi_n} e^{-\frac{(x-t)^2}{2x}}\xi(t)\,dt\right|dx,$$

а так как

$$\int_{\varphi_n}^{\frac{\varphi_n}{2c}}\sqrt{\frac{1}{x}}\left|\int_0^{\varphi_n} e^{-\frac{(x-t)^2}{2x}}\xi(t)\,dt\right|dx=$$

$$=O(1)\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m|\int_{\varphi_n}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{x}}\,e^{-\frac{(x-\varphi_m-1)^2}{2x}}dx=$$

$$=O(1)\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m|\sum_{i=n}^{\infty}\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{\sqrt{\varphi_i}}e^{-\frac{(\varphi_i-\varphi_m-1)^2}{2\varphi_i}}=$$

$$=O(1)\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m|\sum_{i=n}^{\infty}e^{-\frac{r(i-m)}{4}}=O(1)\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m|e^{-\frac{r(n-m)}{4}}=O(1),$$

то

$$\int_0^{\varphi_n}\sqrt{\frac{c}{\pi x}}\left|\int_0^{\varphi_n} e^{-\frac{c(x-t)^2}{x}}\xi(t)\,dt\right|dx=O(1)\left[1+\sum_{m=1}^{n-1}|\xi_m| m^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Наконец, отсюда и из (51) и (52) следует, что

$$|\Phi_n(c)|=O(1)\left[1+\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m| m^{-\frac{1}{2}}\right]. \tag{53}$$

Теперь мы подошли к завершающему этапу доказательства.

Г. Если $\sum_{m=0}^{n}|\xi_m|\to\infty$, то мы можем выбрать последовательность $\{\gamma_n\}$ так, чтобы, кроме выше перечисленных, она удовлетворяла еще условиям

$$\gamma_n>m^{-\frac{1}{4}};\quad \lim_{n\to\infty}\gamma_n\sum_{m=0}^{n-1}|\xi_m|=\lim_{n\to\infty}p_n=\infty.$$

Рассмотрим функции

$$R_n(c)=\frac{\Phi_n(c)}{p_n}.$$

Они аналитические и, в силу (50), равномерно ограничены в D.

Из (53) следует, что при $\frac{1}{4} < c \leqslant \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(c) = 0.$$

По теореме Витали [2] отсюда получаем, что для всех $c \in D$ и, в частности, для $c = c_0$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(c_0) = 0.$$

Но из (49) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n(c_0) \geqslant \delta > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Литература

1. Гейсберг С., О некоторых свойствах методов суммирования. Докл. АН СССР, 1961, **137**, № 2.
2. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций. Москва, 1950.
3. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье. Москва-Ленинград, 1948.
4. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
5. Fekete, M., On the absolute summability A on infinite series. Proc. Edinburg Math., Soc., 1932, **3**, 1—4.
6. Knopp, K., Lorentz, G. G., Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math., 1949, **2**, 10—16.
7. Obrechkoff, N., Sommation par la transformation d'Euler les series de Dirichlet, les series de facultes et la serie de Newton. Ann. Univ. Sofia, II, 1939, **1**, 1—148.
8. Obrechkoff, N., Sur la sommation absolue des series lacunaires. Докл. Болгар. АН, 1955, **8**, 1—4.
9. Pitt, H. R., Tauberian theorems. Oxford, 1958.
10. Zeller, K., Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin, 1958.

Поступило
6 V 1960

LAKUNAARSED TAUBERI TÜÜPI TEOREEMID ABSOLUUTSE SUMMEERUVUSE PUHUL

S. Geisberg
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas töös tõestatakse lakunaarsed Tauberi tüüpi teoreemid absoluutse summeeruvuse puhul Cesàro, Abeli, Euleri ja Boreli menetlusega.

DIE TAUBERSCHE LÜCKENSÄTZE FÜR ABSOLUTE SUMMIERBARKEIT

S. Geisberg

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Tauberschen Lückensätze für absolut Cesàro-, Abel-, Euler- oder Borel-summierbarkeit bewiesen.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МАТРИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

С. Гейсберг
Кафедра математического анализа

В § 1 настоящей работы мы устанавливаем некоторые соотношения между полями суммирования матричных методов A и B (см. § 1, формулы (3), (11), (12), (13)). В § 2 даются следствия из полученных общих теорем § 1. § 3 посвящен применению результатов § 2 для получения лакунарных тауберовых теорем для методов Чезаро и Эйлера. В § 4 мы рассматриваем некоторые взаимоотношения между свойствами матрицы A и метода суммирования, порождаемого ею. Результаты этой работы частично опубликованы в [2].

§ 1. Общие теоремы

Рассмотрим преобразование [1]

$$\eta_n = \sum_k a_{nk}\xi_k \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

где $A = (a_{nk})$ — комплексная матрица, $\xi = \{\xi_k\}$ — последовательность комплексных чисел.

Определение 1. *Последовательность* $\xi = \{\xi_k\}$ *называется*
а) $|A|$*-суммируемой*, б) A*-ограниченной*, в) A*-суммируемой, если соответственно*
а) $\Sigma|\eta_n| < \infty$, б) $\eta_n = O(1)$, в) *последовательность* $\{\eta_n\}$ *сходится.*

Множество всех $|A|$-суммируемых (A-ограниченных, A-суммируемых) последовательностей обозначим через $|A|$ (соответственно A^0, A^c).

Множества последовательностей $\xi = \{\xi_k\}$, для которых
а) $\Sigma|\xi_k| < \infty$, б) $|\xi_k| = O(1)$, в) существует $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k$,
обозначим, соответственно, через l, m, c.

---

[1] Если пределы суммирования не обозначены, то суммирование производится по всем целым значениям индекса от 0 до ∞.

Предположим, что матрицы $A=(a_{nk})$ и $B=(b_{nk})$ преобразований A и B удовлетворяют условию

$$\sum_k |a_{nk}|<\infty, \quad \sum_k |b_{nk}|<\infty \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{2}$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *Если* $|A| \subset |B|$, *то для любого* $\delta>0$ *существует индекс* $p(\delta)$ *и число* $q(\delta)>0$, *что для каждой последовательности* $\xi=\{\xi_k\} \in |A| \cap m$ *имеет место неравенство*

$$\sum_n \Big|\sum_{k=p(\delta)}^{\infty} a_{nk}\xi_k\Big| + q(\delta)\,\delta \sup_{k\geqslant p(\delta)} |\xi_k| > q(\delta) \sum_n \Big|\sum_{k=p(\delta)}^{\infty} b_{nk}\xi_k\Big|. \tag{3}$$

Доказательство. Для любой последовательности введем обозначения

$$\|\xi\|_1^p = \sum_n \Big|\sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}\xi_k\Big|, \quad \|\xi\|_2^p = \sum_n \Big|\sum_{k=p}^{\infty} b_{nk}\xi_k\Big|,$$

и предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда для некоторого $\delta=\delta_0>0$ и каждого целого $p\geqslant 0$ найдутся такие последовательности $\xi^{ip}=\{\xi_k^{ip}\} \in |A| \cap m$ и последовательность $\{\varepsilon_i^p\}$, $\varepsilon_i^p \searrow 0$ при $i\to\infty$, что

$$\|\xi^{ip}\|_1^p + \delta_0 \varepsilon_i^p \sup_{k\geqslant p} |\xi_k^{ip}| \leqslant \varepsilon_i^p \|\xi^{ip}\|_2^p. \tag{4}$$

Исходя из (4), построим последовательность $\{H^s\}$ последовательностей $H^s=\{h_k^s\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1° $\|H^s\|_1^0 \leqslant 2^{-s}$;

2° $\sum_k (|a_{nk}|+|b_{nk}|)\,|h_k^s| < 2^{-s}$ при $n\leqslant s$;

3° для каждого s существует такой индекс n_s, что

а) $\sum_{n=0}^{n_s} \Big|\sum_k b_{nk}h_k^s\Big| \geqslant s + \sum_{\tau=0}^{s-1} \|H^\tau\|_2^0$,

б) $\sum_{n=0}^{n_s} \Big|\sum_k b_{nk}h_k^\tau\Big| < 2^{-\tau}$ при $\tau>s$;

4° при каждом k лишь конечное число h_k^s отлично от нуля.

За H^0 возьмем произвольную последовательность из $|A| \cap m$, удовлетворяющую условиям 1° и 2° при $s=0$, и положим $n_0=1$. Предположим, что мы построили последовательности $H^0, H^1, \ldots, H^{i-1}$ такие, что они удовлетворяют условиям 1°, 2°, 3°а) и условию 3°б) при $\tau\leqslant i-1$.

Пусть

$$a_i = \sum_{s=0}^{i-1} \|H^s\|_2^0 + 1, \quad \mu_i = \sup_{s<i-1} (n_s+s). \tag{5}$$

В силу (2) найдется индекс k_i, что

$$k_i > i, \tag{6}$$

$$(i+\alpha_i)\frac{\sum\limits_{n=0}^{\mu_i}\sum\limits_{k=k_i}^{\infty}(|a_{nk}|+|b_{nk}|)}{\delta_0} < 2^{-i}. \tag{7}$$

Используя (4), по k_i можно найти последовательность $\xi^i = \{\xi_k{}^i\}$ такую, что $\xi^i \in |A| \cap m$ и

$$\|\xi^i\|_1^{k_i} + \frac{\delta_0}{(\alpha_i+i)2^i}\sup_{k\geqslant k_i}|\xi_k{}^i| \leqslant \frac{1}{(\alpha_i+i)2^i}\|\xi^i\|_2^{k_i}. \tag{8}$$

Положим

$$h_k{}^i = \begin{cases} \dfrac{\xi_k^i}{\|\xi^i\|_2^{k_i}}(\alpha_i+i), & k \geqslant k_i, \\ 0, & k < k_i, \end{cases}$$

и $H^i = \{h_k{}^i\}$. Далее, зафиксируем некоторое ν такое, что

$$\sum_{n=0}^{\nu}\left|\sum_k b_{nk}h_k{}^i\right| > \|H^i\|_2^0 - 2^{-(i+1)}, \tag{9}$$

и положим $n_i = \nu$.

Нетрудно проверить, что последовательности $H^0, \ldots, H^i$ удовлетворяют условиям 1°, 2°, 3°а) и условию 3°б) при $\tau \leqslant i$. Действительно, условие 1° удовлетворено в силу (8). Далее, из (8) следует, что

$$\sup_k |h_k{}^i| < (i+\alpha_i)\delta_0^{-1}, \tag{10}$$

и в силу (7) условие 2° выполняется. Условие 3°б) при $\tau \leqslant i$ удовлетворено в силу (5), (7), (10). Очевидно, что условие 3°а) выполняется при $s \leqslant i-1$. При $s = i$ имеем в силу (5) и (9)

$$\sum_{n=0}^{n_i}\left|\sum_k b_{nk}h_k{}^i\right| > \|H^i\|_2^0 - 2^{-(i+1)} > \sum_{s=0}^{i-1}\|H^s\|_2^0 + i.$$

Аналогично построению H^i мы можем построить последовательности H^{i+1}, H^{i+2}, и т. д. Последовательности $H^0, H^1, \ldots, H^i, \ldots$ удовлетворяют условиям 1°—4°. Выполнение условий 1°—3° следует из самого построения H^i. Условие 4° удовлетворено ввиду (6).

Положим теперь

$$z_k = \sum_i h_k{}^i,$$

и рассмотрим последовательность $z=\{z_k\}$. В силу 4° $|z_k|<\infty$. Далее, для любого n по 2° и (2) имеем

$$\sum_k |a_{nk}|\,|z_k| \leqslant \sum_k |a_{nk}| \sum_i |h_k^i| = \sum_i \sum_k |a_{nk}|\,|h_k^i| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_k |a_{nk}|\,|h_k^i| + \sum_{i=n}^{\infty} \sum_k |a_{nk}|\,|h_k^i| < \infty.$$

Аналогично

$$\sum_k |b_{nk}|\,|z_k| \leqslant \sum_k |b_{nk}| \sum_i |h_k^i| < \infty.$$

Поэтому

$$\sum_k a_{nk} z_k = \sum_i \sum_k a_{nk} h_k^i,$$

$$\sum_k b_{nk} z_k = \sum_i \sum_k b_{nk} h_k^i.$$

Отсюда и из 1° следует, что z $|A|$-суммируема. Действительно:

$$\sum_n \left|\sum_k a_{nk} z_k\right| = \sum_n \left|\sum_i \sum_k a_{nk} h_k^i\right| \leqslant \sum_i \|H^i\|_1^0 < \infty.$$

Но z не суммируема $|B|$. Именно, для любого s в силу 3° имеем

$$\sum_{n=0}^{n_s} \left|\sum_k b_{nk} z_k\right| = \sum_{n=0}^{n_s} \left|\sum_i \sum_k b_{nk} h_k^i\right| \geqslant \sum_{n=0}^{n_s} \left|\sum_k b_{nk} h_k^s\right| -$$

$$- \sum_{i=0}^{s-1} \sum_n \left|\sum_k b_{nk} h_k^i\right| - \sum_{i=s+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_s} \left|\sum_k b_{nk} h_k^i\right| > s-1.$$

Таким образом, мы построили последовательность z такую, что $z \in |A|$ и $z \bar{\in} |B|$, а это противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Полагая

2) $\|\xi\|_1^p = \sum_n \left|\sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}\,\xi_k\right|$; $\quad \|\xi\|_2^p = \sup_n \left|\sum_{k=p}^{\infty} b_{nk}\,\xi_k\right|$;

3) $\|\xi\|_1^p = \sup_n \left|\sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}\,\xi_k\right|$; $\quad \|\xi\|_2^p = \sup_n \left|\sum_{k=p}^{\infty} b_{nk}\,\xi_k\right|$;

4) $\|\xi\|_1^p = \sup_n \left|\sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}\,\xi_k\right|$; $\quad \|\xi\|_2^p = \sum_n \left|\sum_{k=p}^{\infty} b_{nk}\,\xi_k\right|$,

можно совершенно аналогично доказать следующие теоремы:

Теорема 2. *Если* $|A| \subset B^c$, *то для любого* $\delta > 0$ *существует индекс* $p(\delta)$ *и число* $q(\delta)$, *что для каждой последовательности* $\xi = \{\xi_k\} \in |A| \cap m$ имеем

$$\sum_n \left|\sum_{k=p(\delta)}^{\infty} a_{nk}\,\xi_k\right| + q(\delta)\,\delta \sup_{k>p(\delta)} |\xi_k| > q(\delta) \sup_n \left|\sum_{k=p(\delta)}^{\infty} b_{nk}\,\xi_k\right|. \quad (11)$$

Теорема 3. *Если* $A^c \subset B^c$, *то для любого* $\delta > 0$ *существует индекс* $p(\delta)$ *и число* $q(\delta) > 0$, *что для каждой последовательности* $\xi = \{\xi_k\} \in A^c \cap m$ *имеем*

$$\sup_n \left| \sum_{k=p(\delta)}^{\infty} a_{nk}\xi_k \right| + q(\delta)\,\delta \sup_{k \geqslant p(\delta)} |\xi_k| > q(\delta) \sup_n \left| \sum_{k=p(\delta)}^{\infty} b_{nk}\xi_k \right|. \quad (12)$$

Теорема 4. *Если* $A^c \subset |B|$, *то для любого* $\delta > 0$ *существует индекс* $p(\delta)$ *и число* $q(\delta) > 0$, *что для каждой последовательности* $\xi = \{\xi_k\} \in A^c \cap m$ *имеем*

$$\sup_n \left| \sum_{k=p(\delta)}^{\infty} a_{nk}\,\xi_k \right| + q(\delta)\,\delta \sup_{k \geqslant p(\delta)} |\xi_k| > q(\delta) \sum_n \left| \sum_{k=p(\delta)}^{\infty} b_{nk}\,\xi_k \right|. \quad (13)$$

Замечание. Из хода доказательства следует, что для конечнострочных матриц A и B в (3), (11), (12), (13) можно положить $\delta = 0 (p(0) < \infty, q(0) > 0)$. Мы воспользуемся этим в § 3.

§ 2. Следствия из общих теорем

Обозначим через E тождественное преобразование $\eta_n = \xi_n$. Тогда, полагая в (11) и (12) $B \equiv E$ и $\delta = \frac{1}{2}$, получаем соответственно следующие теоремы:

Теорема 5. *Если* $|A| \subset m$, *то существует индекс* p *и число* $q > 0$, *что для всех* $\xi = \{\xi_k\} \in |A|$ *имеем*

$$\sum_n \left| \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}\,\xi_k \right| > q \sup_{k \geqslant p} |\xi_k|. \quad (14)$$

Теорема 6. (см. [1]) *Если* $A^c \subset m$, *то существует индекс* p *и число* $q > 0$, *что для всех* $\xi = \{\xi_k\} \in A^c$ *имеем*

$$\sup_n \left| \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}\,\xi_k \right| > q \sup_{k \geqslant p} |\xi_k|. \quad (15)$$

Условия (14), (15) означают, что если $|A|(A^c)$ не содержит неограниченной последовательности, то $|A|(A^c)$ оказывается пространством Банаха с нормой

$$\|\xi\| = \sum_n \left| \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}\,\xi_k \right| + \sup_{k<p} |\xi_k|, \quad (16)$$

(соответственно

$$\|\xi\| = \sup_{k<p} |\xi_k| + \sup_n \left| \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}\,\xi_k \right|). \quad (17)$$

Этот факт, в свою очередь, позволяет доказать такие предложения:

Теорема 7. *Если* $\sum_k |a_{nk}| = O(1)$, $l \subset |A| \subset m$ *и система уравнений*

$$\sum_n \tau_n a_{nk} = 0 \quad (k = p, p+1, \ldots)$$

для любого p *не имеет решения* $\tau = \{\tau_n\}$ *в* [2] $m - l$, *то* $|A| \subset c$.

Доказательство. Обозначим через e_i последовательности $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i}, 1, 0, \ldots)$. В силу (14) нам достаточно показать, что e_i плотны в B-пространстве $|A|$ с нормой (16). Нетрудно видеть, что любой функционал на $|A|$, непрерывный в смысле нормы (16), имеет вид

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \xi_k + \sum_n f_n \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} \xi_k, \tag{18}$$

где $\xi = \{\xi_k\}$ — произвольный элемент из $|A|$, а $|f_n| = O(1)$. Поэтому, если для некоторого f $f(e_i) = 0$, то из (18) получаем, что

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1),$$
$$\sum_n f_n a_{nk} = 0 \quad (k = p, p+1, \ldots). \tag{19}$$

Отсюда следует, что $\{f_n\} \in l$. Но тогда из (18) и (19) вытекает, что для всех $\xi = \{\xi_k\} \in |A|$ $f(\xi) = 0$, т. е. $f \equiv 0$. Таким образом, не существует отличного от нуля функционала на $|A|$, равного на всех e_i нулю. Следовательно, e_i плотны в $|A|$ в смысле нормы (16), и теорема доказана.

Опираясь на (15) и (17), можно аналогично доказать следующую теорему.

Теорема 8. *Если* $c \subset A^c \subset m$, *то* $A^c = c$.

Теорема 8 доказана, однако несколько другим способом, в работе [5]. Теорема 7, очевидно, представляет собой аналог теоремы 8 для случая абсолютного суммирования.

§ 3. Лакунарные тауберовы теоремы

В этом параграфе мы применим предыдущие результаты к получению лакунарных тауберовых теорем.

Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}$ — подпоследовательность последовательности натуральных чисел, $A = (a_{nk})$ — действительная матрица. Обозначим через A^φ матрицу (a_{n, φ_k}), и пусть (C, α) — матрица Чезаро порядка α ([6], стр. 104), (E, α) — матрица Эйлера порядка α ([6], стр. 130).

---

[2] $m - l$ обозначает разность множеств m и l.

Теорема 9. *Если* $1 \geqslant \alpha > \beta > 0$ *и* $|(C, \alpha)^{\varphi}| \subset |(C, \beta)^{\varphi}|$, *то* $|(C, \alpha)^{\varphi}| = l$.

Доказательство. Так как $(C, \alpha)^{\varphi}$ и $(C, \beta)^{\varphi}$ конечно-строчные матрицы, то, в силу теоремы 1 и замечания на стр. 82, из $|(C, \alpha)^{\varphi}| \subset |(C, \beta)^{\varphi}|$ следует, что существует такой индекс p и число $q > 0$, что для любой последовательности $\xi = \{\xi_k\} \in |(C, \alpha)^{\varphi}|$ имеем

$$\sum_{n=p}^{\infty} \left| \sum_{\substack{k \geqslant p \\ \varphi_k < n}} \frac{\varphi_k \binom{n-\varphi_k+\alpha-1}{\alpha-1}}{n \binom{n+\alpha}{\alpha}} \xi_k \right| > q \sum_{n=p}^{\infty} \left| \sum_{\substack{k \geqslant p \\ \varphi_k < n}} \frac{\varphi_k \binom{n-\varphi_k+\beta-1}{\beta-1}}{n \binom{n+\beta}{\beta}} \xi_k \right|. \tag{20}$$

Очевидно, $l \subset |(C, \alpha)^{\varphi}|$. Поэтому (20) справедливо, в частности, для последовательностей $\xi^i = \{\xi_k^i\}$, где

$$\xi_k^i = \begin{cases} 0, & k < i-1, \\ -1, & k = i-1, \\ 1, & k = i, \\ 0, & k > i, \end{cases} \tag{21}$$

т. е. для всех $k \geqslant p$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=\varphi_k}^{\varphi_{k+1}-1} \frac{\varphi_k \binom{n-\varphi_k+\alpha-1}{\alpha-1}}{n \binom{n+\alpha}{\alpha}} + \\ &+ \sum_{n=\varphi_{k+1}}^{\infty} \left| \frac{\varphi_k \binom{n-\varphi_k+\alpha-1}{\alpha-1}}{n \binom{n+\alpha}{\alpha}} - \frac{\varphi_{k+1} \binom{n-\varphi_{k+1}+\alpha-1}{\alpha-1}}{n \binom{n+\alpha}{\alpha}} \right| \geqslant \\ &\geqslant q \left\{ \sum_{n=\varphi_k}^{\varphi_{k+1}-1} \frac{\varphi_k \binom{n-\varphi_k+\beta-1}{\beta-1}}{n \binom{n+\alpha}{\alpha}} + \right. \\ &\left. + \sum_{n=\varphi_{k+1}}^{\infty} \left| \frac{\varphi_k \binom{n-\varphi_k+\beta-1}{\beta-1}}{n \binom{n+\beta}{\beta}} - \frac{\varphi_{k+1} \binom{n-\varphi_{k+1}+\beta-1}{\beta-1}}{n \binom{n+\beta}{\beta}} \right| \right\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Далее, в силу оценок (9), (10), (11) статьи [3] из (22) получаем, что для всех $k \geqslant p$

$$2\left(1-\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\right)^{\alpha}+O(\varphi_k^{-\alpha})>q\left[2\left(1-\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\right)^{\beta}+O(\varphi_k^{-\beta})\right]. \quad (23)$$

Из (23) следует, что $(\varphi_{k+1}-\varphi_k)\to\infty$ при $k\to\infty$, т. к. в противном случае мы имели бы слева величину порядка $\varphi_k^{-\alpha}$, а справа — порядка $\varphi_k^{-\beta}$, чего, очевидно, не может быть. Поэтому из (23) получаем для некоторых $p_1>p$ и $1>q_1>0$, что при $k>p_1$

$$\left(1-\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\right)^{\alpha}>q_1\left(1-\frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}}\right)^{\beta},$$

или

$$\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}>\frac{1}{1-q_1^{(\alpha-\beta)^{-1}}},$$

что, в силу теоремы 2 из [3], эквивалентно утверждению теоремы.

Опираясь на теорему 5 и используя формулы (8)—(17) из работы [3], аналогичным методом доказывается

Теорема 10. *Если* $\alpha>0$ *и* $|(C,\alpha)^{\varphi}|\subset m$, *то* $|(C,\alpha)^{\varphi}|=l$.

Точно так же теорема 5 в сочетании с теоремой 3 из [3] позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 11. *Если* $\alpha>0$ *и* $|(E,\alpha)^{\varphi}|\subset m$, *то* $|(E,\alpha)^{\varphi}|=l$.

§ 4. Дополнительные результаты

Теперь мы докажем одну теорему, вскрывающую связь между свойствами матрицы как метода абсолютного суммирования и ее алгебраическими свойствами.

Пусть M — нормированное кольцо матриц $A=(a_{nk})$ с нормой

$$\|A\|=\sup_n \sum_k (|a_{nk}|+|a_{kn}|)<\infty.$$

Обозначим через A_s ($_sA$) матрицу A, у которой первые s строк (столбцов) заменены нулями, и пусть E — единичная матрица. Имеет место

Теорема 12. *Пусть* $A\in M$. *Для того, чтобы уравнения*[3]

$$A_p\circ X=E_p;\ Y\circ {}_qA={}_qE$$

имели для некоторых индексов p *и* q *решение в* M, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$1^\circ\ |A|\cap(m-l)=\emptyset,\quad 2^\circ\ |A'|\cap(m-l)=\emptyset,$$

где A' — *транспонированная матрица* A.

[3] $A\circ B$ обозначает произведение матриц A и B, $\emptyset$ — пустое множество.

Необходимость. Мы ограничимся выводом необходимости условия 1°, необходимость условия 2° доказывается аналогично. Предположим, что 1° не выполнено, а A абсолютно суммирует некоторую последовательность $\xi \in m - l$. Тогда, очевидно, ${}_qA$ также абсолютно суммирует некоторую последовательность $\eta \in m - l$, т. е. ${}_qA\eta = \tau \in l$. Отсюда следует, что ${}_qE\eta = Y\tau \in l$. (см. [4]). Тогда и $\eta \in l$, что противоречит с выбором η. Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $A \in M$ и выполнены условия 1° и 2°. Тогда в силу теоремы 1 из [3] существуют такие индексы p и q и числа $r > 0$, $s > 0$, что для любой последовательности $\xi = \{\xi_k\} \in l$ имеем

$$\sum_n \left|\sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}\xi_k\right| > r\sum_{k=p}^{\infty}|\xi_k|, \tag{24}$$

$$\sum_n \left|\sum_{k=q}^{\infty} \xi_k a_{kn}\right| > s\sum_{k=q}^{\infty}|\xi_k|. \tag{25}$$

Рассмотрим последовательности $v_n = \{a_{nk}\}$, $n = 0, 1, \ldots$. Очевидно, $v_n \in l$. Пусть W — линейная оболочка v_n в l, $F(W)$ — множество функционалов на l, равных нулю на W. Тогда $F(W)$ не более, чем p-мерно. Действительно, любой $f \in F(W)$ имеет вид

$$f(\xi) = \sum f_k\xi_k, \quad \xi = \{\xi_k\} \in l, \quad f_k = O(1).$$

Далее, если $\{f_k\} \in m - l$, то $f \in F(W)$, иначе мы бы имели для всех n $\sum a_{nk}f_k = 0$, что противоречит с условием 1°. Поэтому, если бы $F(W)$ содержало более, чем p линейно независимых функционалов, то нашлась бы последовательность $g = \{g_k\} \in l$, что для всех n $\sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}g_k = 0$, что противоречит с (24).

Пусть $f_1 \in F(w)$ и

$$e_i = (\underbrace{0, 0, \ldots . 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots).$$

Существует e_{i_1}, что $f_1(e_{i_1}) \neq 0$. Если $W + \{\lambda e_{i_1}\} \neq l$, то существует $f_2 \in F(W)$ и e_{i_2}, что $f_2(e_{i_1}) = 0$ и $f_2(e_{i_2}) \neq 0$. Будем продолжать этот процесс выбора f_j и e_{i_j}. Он должен закончиться после $h \leqslant p$ шагов, т. к. все f_j, очевидно, линейно независимы и $f_j \in F(W)$. В результате мы получим, что последовательности v_n и e_{i_j}, $1 \leqslant j \leqslant h \leqslant p$ плотны в l. Поэтому для каждого ν существуют такие линейные комбинации

$$W_m^{\nu} = \sum_{n=0}^{m} a_{mn}^{\nu} v_n + \sum_{j=1}^{h} \psi_{mj}^{\nu} e_{i_j}$$

последовательностей v_n и e_{i_j}, что $W_m^{\nu} \to e_{\nu}$ в смысле l.

Мы сможем считать, что f_j выбраны так, что $f_j(e_{i_j}) = 1$. Тогда имеем

$$f_j(W_m^\nu) = \sum_{k=j}^{h} \psi_{mk}^\nu f_j(e_{i_k}) \to f_j(e_\nu), \quad 1 \leqslant j \leqslant h.$$

Отсюда следует, что для всех ν и $1 \leqslant j \leqslant h$ существует $\lim\limits_{m\to\infty} \psi_{mj}^\nu = \psi_j^\nu$. Далее, если среди первых $(q-1)$ последовательностей v_n найдутся линейно зависимые от остальных v_n и e_{i_j}, то мы заменим их соответствующими линейными комбинациями. Будем считать, что это уже проделано. Тогда $\alpha_{mn}^\nu = 0$ для v_n, $n < q$, линейно зависимых от остальных v_n и e_{i_j}. Для любой v_{n_0} из остальных v_n, $n < q$, можно будет построить функционал f_{n_0} такой, что

$$f_{n_0}(v_{n_0}) = 1; \quad f_{n_0}(v_n) = 0, \; n \neq n_0; \; f_{n_0}(e_{i_j}) = 0, \; 1 \leqslant j \leqslant h.$$

Тогда

$$f_{n_0}(W_m^\nu) = \alpha_{mn_0}^\nu \to f_{n_0}(e_\nu) = \alpha_{n_0}^\nu.$$

Поэтому мы можем всегда считать, что при $n < q$ $\lim \alpha_{mn}^\nu = \alpha_n^\nu$. Но тогда в силу выбора W_m^ν

$$\lim_{m\to\infty} \sum_k \Big| \sum_{n=q}^{m} \alpha_{mn}^\nu a_{nk} - \sum_{n=q}^{m+p} \alpha_{m+p,\,n}^\nu a_{nk} \Big| = 0,$$

и из (25) следует, что для всех $n \geqslant q$ существует $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_{mn}^\nu = \alpha_n^\nu$, причем

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=q}^{m} |\alpha_{mn}^\nu - \alpha_n^\nu| = 0.$$

Так как $W_m^\nu \to e_\nu$ в l, то из всего сказанного выше следует, что для любого ν существуют такие α_n^ν и ψ_j^ν, что

$$\sum_n \alpha_n^\nu v_n + \sum_{j=1}^{h} \psi_j^\nu e_{i_j} = e_\nu, \tag{26}$$

причем, как нетрудно заметить из проведенного рассуждения,

$$\sum_n |\alpha_n^\nu| = O(1); \quad |\psi_j^\nu| = O(1). \tag{27}$$

Полагая $w_k = \{a_{nk}\}$, аналогичным методом можно показать, что существуют такие β_k^ν, φ_μ^ν, e_{i_μ}, $1 \leqslant \mu \leqslant T \leqslant q$, что для любого ν

$$\sum_k \beta_k^\nu w_k + \sum_{\mu=1}^{T} \varphi_\mu^\nu e_{i_\mu} = e_\nu, \tag{28}$$

причем

$$\sum_k |\beta_k^\nu| = O(1); \quad |\varphi_\mu^\nu| = O(1). \tag{29}$$

Далее, согласно построению функционалов f_j, из (26) имеем

$$\sum_{k=j}^{h} \psi_k^\nu = f_j(e_\nu), \quad j = 1, \ldots, h. \tag{30}$$

Но $f_j \in F(W)$, поэтому $\sum_\nu a_{n\nu} f_j(e_\nu) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$. А тогда из (24) и (30) немедленно получаем, что

$$\sum_\nu |\psi_k^\nu| = O(1).$$

Аналогично, опираясь на (28), можно показать, что

$$\sum_\nu |\varphi_\mu^\nu| = O(1).$$

Если среди v_n, $n \leqslant i_h + i_T$ найдется v_{n_0}, линейнозависимая от остальных v_n и e_{i_j}, то мы можем заменить ее соответствующей линейной комбинацией v_n, $n \neq n_0$, и e_{i_j}. Будем считать, что такая операция уже проделана, и в (26) $a_{n_0}^\nu \not\equiv 0$, $n_0 \leqslant i_h + i_T$ означает, что v_{n_0} линейно независима от остальных v_n и e_{i_j}. Тогда для каждой v_{n_0}, $a_{n_0}^\nu \not\equiv 0$, $n_0 \leqslant i_h + i_T$ мы можем построить такой функционал f_{n_0}, что

$$f_{n_0}(v_{n_0}) = 1; \; f_{n_0}(v_n) = 0, \; n \neq n_0; \; f_{n_0}(e_{i_j}) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_k a_{nk} f_{n_0}(e_k) = 0, \; n \neq n_0; \; f_{n_0}(e_k) = O(1).$$

Поэтому в силу (24) $\sum_k |f_{n_0}(e_k)| = O(1)$. Но, с другой стороны, из (26) имеем

$$f_{n_0}(e_\nu) = a_{n_0}^\nu,$$

следовательно

$$\sum_\nu |a_n^\nu| < \infty.$$

Таким образом мы можем считать, что

$$\sum_\nu |\alpha_n^\nu| < \infty, \; n \leqslant i_h + i_T. \tag{31}$$

Аналогично из (28) можем получить, что

$$\sum_\nu |\beta_n^\nu| < \infty, \; n \leqslant i_h + i_T, \tag{32}$$

изменяя, как мы это делали для α_n^ν, в случае необходимости некоторые β_n^ν.

Запишем теперь (26) и (28) в таком виде

$$\sum_n a_{\nu n} a_{nk} + \sum_{j=1}^{h} \psi_j^h \delta_{ki_j} = \delta_{\nu k}, \tag{33}$$

$$\sum_k a_{nk} \beta_{k\nu} + \sum_{k=1}^{T} \psi_k^\nu \delta_{ni_k} = \delta_{\nu n}, \tag{34}$$

где

$$a_{\nu n} = \alpha_n^\nu; \quad \beta_{k\nu} = \beta_k^\nu; \quad \delta_{\nu k} = \begin{cases} 0, & \nu \neq k, \\ 1, & \nu = k. \end{cases}$$

Тогда в силу (27), (29), (33), (34) для всех ν и n имеем

$$a_{\nu n} + \sum_{j=1}^{h} \psi_j^\nu \beta_{ni_j} = \beta_{n\nu} + \sum_{k=1}^{T} \varphi_k^\nu a_{\nu, i_k}.$$

Отсюда, учитывая (31) и (32), немедленно следует, что

$$\sum_\nu |\alpha_{\nu n}| = O(1); \quad \sum_\nu |\beta_{k\nu}| = O(1). \tag{35}$$

Обозначим через Y матрицу $(a_{\nu k})$, а через X — матрицу $(\beta_{n\nu})$. В силу (27), (29) и (35) $X \in M$, $Y \in M$, а в силу (33) и (34) имеем

$$A_{i_T} \circ X = E_{i_T}, \quad Y \circ_{i_h} A = E_{i_h}.$$

Этим теорема доказана.

Литература

1. Брудно А. Л., Относительные нормы матриц Теплица. Докл. АН СССР, 1953, **91**, 197—201.
2. Гейсберг С., О некоторых свойствах методов суммирования. Докл. АН СССР, 1961, **137**, № 2.
3. Гейсберг С., Лакунарные тауберовы теоремы для абсолютной суммируемости. Настоящий журнал, стр. 52—77.
4. Knopp, K., Lorentz, G., Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math. 1949/50, **2**, 10—16.
5. Zeller, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. 1951, **53**, 463—487.
6. Zeller, K., Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin, 1958.

Поступило
24 V 1960

MAATRIKSTEISENDUSTE MÕNINGAIST OMADUSTEST

S. Geisberg
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas töös püstitatakse mõningad võrratused maatriksmenetluste A ning B summeerimisväljade vahel, mida rakendatakse lakunaarsete Tauberi teoreemide saamiseks Cesàro ja Euler'i menetluste jaoks.

Peale selle vaadeldakse vahekorda maatriksi A ja tema poolt määratud summeerimismenetluste vahel.

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN VON MATRIXTRANSFORMATIONEN

S. Geisberg

Zusammenfassung

In dieser Arbeit stellt man einige Ungleichungen zwischen den Wirkfeldern der Matrixverfahren A und B fest, die man zur Anwendung der Tauberschen Lückensätze für Verfahren Cesàro's und Euler's gebraucht.

Außerdem betrachtet man die gegenseitigen Beziehungen zwischen Matrixe A und durch dasselbe hervorgerufene Summierungsverfahren.

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ, СУММИРУЕМЫХ ИЛИ ОГРАНИЧЕННЫХ МЕТОДОМ ЧЕЗАРО ВЕЩЕСТВЕННОГО ПОРЯДКА

С. Барон
Кафедра математического анализа

§ 1. Предварительные замечания

В статье [10] изучались множители суммируемости типа [1] (X, Y), где X — один из классов $C_r^{\alpha,\beta}$-суммируемых, $C_b^{\alpha,\beta}$-суммируемых или $C^{\alpha,\beta}$-ограниченных двойных рядов, а Y — один из классов $C^{\gamma,\delta}$-, $C_b^{\gamma,\delta}$- или $C_r^{\gamma,\delta}$-суммируемых двойных рядов. Для названных девяти типов множителей суммируемости в статье [10] устанавливаются эффективные необходимые и достаточные условия ([10], теоремы 5, 6 и 7; [9], теоремы 1, 2 и 3). Однако в этих статьях доказательство достаточности найденных эффективных необходимых условий ограничивается целочисленными $\alpha, \beta \geqslant 0$. Настоящая статья имеет целью восполнить этот пробел, т. е. доказать достаточность условий следующих теорем для произвольных вещественных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$.

Теорема 1. *Для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* а) $(C_r^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, б) $(C_r^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta})$, в) $(C_r^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* [2]

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha}(n+1)^{\beta} |\Delta^{\alpha+1}{}_{mn}{}^{\beta+1}\varepsilon_{mn}| < \infty, \qquad (B)$$

$$\sum_{m} (m+1)^{\alpha} |\Delta_m^{\alpha+1}\varepsilon_{mn}| = O[(n+1)^{\delta-\beta}], \qquad (C_1)$$

[1] В настоящей статье придерживаемся определений и обозначений, использованных в [9, 10].

[2] Во всех условиях и оценках, если не оговорено противное, свободные индексы имеют значения 0, 1, 2, ...

$$\sum_n (n+1)^{\beta} |\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn}| = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}], \qquad (C_2)$$

$$\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{\delta-\beta}]. \qquad (D)$$

Теорема 2. *Для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* а) $(C_b^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, б) $(C_b^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta})$, в) $(C_b^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* (B), (C), (D) *и, кроме них, в случаях* а) *и* б) — *условия*

$$\lim_n (n+1)^{\beta-\delta} \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} = 0, \qquad (E_1)$$

$$\lim_m (m+1)^{\alpha-\gamma} \Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn} = 0; \qquad (E_2)$$

а в случае в) — *условия*

$$\lim_n (n+1)^{\beta-\delta} \varepsilon_{mn} = 0, \qquad (F_1)$$

$$\lim_m (m+1)^{\alpha-\gamma} \varepsilon_{mn} = 0. \qquad (F_2)$$

Теорема 3. *Для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* а) $(C_0^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, б) $(C_0^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta})$, в) $(C_0^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* (B),

$$\lim_n (n+1)^{\beta-\delta} \sum_m (m+1)^{\alpha} |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}| = 0, \qquad (G_1)$$

$$\lim_m (m+1)^{\alpha-\gamma} \sum_n (n+1)^{\beta} |\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn}| = 0, \qquad (G_2)$$

$$\lim_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma} (n+1)^{\beta-\delta} \varepsilon_{mn} = 0. \qquad (H)$$

Метод доказательства названных теорем для целочисленных α, β по существу превращается в тот же метод, что в статьях [9, 10].

Для доказательства этих теорем нам нужны следующие леммы.

Лемма 1. а) *Если* $s, t > -1$, $\sigma, \tau > 0$ *и* $s+\sigma$, $t+\tau > 0$, *причем* $s \geqslant 0$ *при* $\sigma = 0$ *и* $t \geqslant 0$ *при* $\tau = 0$, *то из условия*

$$\varepsilon_{mn} = O(1) \qquad (A)$$

следует соотношение

$$\Delta_{mn}^{st}(\Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn}) = \Delta_{mn}^{s+\sigma\, t+\tau} \varepsilon_{mn}. \qquad (1)$$

б) *Если* $s, t \geqslant -1$, $\sigma, \tau \geqslant 0$ *и* $s+\sigma, t+\tau \geqslant 0$, *то из условия*

$$r\text{-}\lim_{m,\,n} \varepsilon_{mn} = 0$$

следует соотношение[3] (1).

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$x_m^{\sigma s} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\varkappa=m+1-k}^{m} |A_k^{-\sigma-1} A_\varkappa^{-s-1}|, \quad z_m^{\sigma s} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{m} |A_k^{-\sigma-1} A_\varkappa^{-s-1}|.$$

Очевидно, что

$$x_m^{0s} = z_m^{0s} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Как показал Андерсен (см. [1], стр. 22—24) для всех $\sigma > 0$ имеют место оценки

$$\left.\begin{aligned} x_m^{\sigma s} &= O(m^{-\sigma}) + O(m^{-s-1}) + O(m^{-s-\sigma}) \\ z_m^{\sigma s} &= O(m^{-\sigma}) + O(m^{-s-\sigma}) \end{aligned}\right\} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Далее, обозначив $\varepsilon_{\mu+k,\,\nu+l} = e_{kl}$ и учитывая сходимость всех рядов

$$\sum_{k,\,l} A_k^{-\sigma-1} A_l^{-\tau-1} e_{k+\varkappa,\,l+\lambda} \quad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \ldots),$$

по формуле

$$\sum_{\varrho=\mu}^{n} A_{\varrho-\mu}^{\varkappa} A_{n-\varrho}^{\lambda} = A_{n-\mu}^{\varkappa+\lambda+1} \tag{2}$$

находим

$$\sum_{\varkappa,\,\lambda=0}^{m,\,n} A_\varkappa^{-s-1} A_\lambda^{-t-1} \Delta_{\varkappa\lambda}^{\sigma\tau} e_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varkappa,\,\lambda=0}^{m,\,n} A_\varkappa^{-s-1} A_\lambda^{-t-1} \sum_{k,\,l=\varkappa,\,\lambda}^{\infty} A_{k-\varkappa}^{-\sigma-1} A_{l-\lambda}^{-\tau-1} e_{kl} =$$

$$= \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} A_k^{-s-\sigma-1} A_l^{-t-\tau-1} e_{kl} + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

где

$$\mathrm{I} = \sum_{k,\,l=m+1,0}^{\infty,\,n} A_l^{-t-\tau-1} e_{kl} \sum_{\varkappa=0}^{m} A_{k-\varkappa}^{-\sigma-1} A_\varkappa^{-s-1},$$

$$\mathrm{II} = \sum_{k,\,l=0,\,n+1}^{m,\,\infty} A_k^{-s-\sigma-1} e_{kl} \sum_{\lambda=0}^{n} A_{l-\lambda}^{-\tau-1} A_\lambda^{-t-1},$$

$$\mathrm{III} = \sum_{k,\,l=m+1,\,n+1}^{\infty} e_{kl} \sum_{\varkappa,\,\lambda=0}^{m,\,n} A_{k-\varkappa}^{-\sigma-1} A_{l-\lambda}^{-\tau-1} A_\varkappa^{-s-1} A_\lambda^{-t-1}.$$

---

[3] Случай б) леммы 1 опубликован без доказательства в [6]. Из леммы 1 при $\tau = t = 0$ вытекает известная лемма Андерсена о сумме порядков обобщенных разностей ([1], стр. 20).

Для доказательства леммы 1 остается показать, что

$$\lim_{m,n} \mathrm{I} = \lim_{m,n} \mathrm{II} = \lim_{m,n} \mathrm{III} = 0.$$

Обозначив

$$\sup_{s,t} |e_{m+s,\,n+t}| = \delta'_{mn}, \quad \sup_{s} |e_{m+s,\,l}| = \delta''_{ml}, \quad \sup_{t} |e_{k,\,n+t}| = \delta'''_{kn},$$

$$\max(\delta'_{mn}, \delta''_{mn}, \delta'''_{mn}) = \delta_{mn},$$

имеем в случае а) $\delta_{mn} = O(1)$, а в случае б) $r\text{-}\lim\limits_{m,n} \delta_{mn} = 0$. Следовательно,

$$\lim_{m,n} |\mathrm{III}| \leqslant \lim_{m,n} \delta_{mn} \sum_{\varkappa,\lambda=0}^{m,n} \sum_{k,\,l=m+1-\varkappa,\,n+1-\lambda}^{\infty} |A_k^{-\sigma-1} A_l^{-\tau-1} A_\varkappa^{-s-1} A_\lambda^{-t-1}| =$$

$$= \lim_{m,n} \delta_{mn} \left\{ x_m^{\sigma s} x_n^{\tau t} + x_m^{\sigma s} z_n^{\tau t} + z_m^{\sigma s} x_n^{\tau t} + z_m^{\sigma s} z_n^{\tau t} \right\} = 0,$$

а в силу сходимости всех рядов

$$\sum_k A_k^{-\sigma-1} e_{k+\varkappa,\,l} \quad (l,\ \varkappa = 0,\ 1,\ \ldots)$$

находим также

$$\lim_{m,n} |\mathrm{I}| \leqslant \lim_{m,n} \sum_{l=0}^{n} |A_l^{-t-\tau-1}| \sum_{\varkappa=0}^{m} \sum_{k=m+1-\varkappa}^{\infty} |A_k^{-\sigma-1} A_\varkappa^{-s-1} e_{k+\varkappa,\,l}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_l |A_l^{-t-\tau-1}| \lim_m \delta_{ml} (x_m^{\sigma s} + z_m^{\sigma s}) = 0.$$

Аналогично доказывается, что также $\lim\limits_{m,n} \mathrm{II} = 0$.

Лемма 2. *Если*

$$\varepsilon_m = O(1), \tag{3}$$

$$\sum_m (m+1)^\alpha |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_m| < \infty, \tag{4}$$

то для любого $0 < \sigma \leqslant \alpha + 1$ *имеет место неравенство*

$$\sum_m A_m^{\sigma-1} |\Delta_m^\sigma \varepsilon_m| \leqslant \sum_m A_m^\alpha |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_m|.$$

Лемма 3. *Из условий* (3) *и* (4) *следует*

$$\Delta_m^\sigma \varepsilon_m = o(m^{-\sigma})$$

для всех $0 < \sigma \leqslant \alpha$.

Лемма 4. *Из условий* (A) *и* (B) *для любых* $0 < \sigma,\ \tau \leqslant \alpha + 1,\ \beta + 1$ *вытекает*

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\sigma-1} (n+1)^{\tau-1} |\Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn}| < \infty.$$

Лемма 5. *Из условий* (A) *и* (B) *для всех* $0 < \sigma \leqslant \alpha + 1$ *и* $0 < \tau \leqslant \beta$ *следует*

$$\lim_n (n+1)^{\tau} \sum_m (m+1)^{\sigma-1} |\Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn}| = 0,$$

а для всех $0 < \sigma \leqslant \alpha$ *и* $0 < \tau \leqslant \beta + 1$

$$\lim_m (m+1)^{\sigma} \sum_n (n+1)^{\tau-1} |\Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn}| = 0.$$

Лемма 6. *Из условий* (A) *и* (B) *для любых* $0 < \sigma,\ \tau \leqslant \alpha,\ \beta$ *вытекает*

$$r\text{-}\lim_{m,\,n} (m+1)^{\sigma} (n+1)^{\tau} \Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn} = 0.$$

Лемма 7. *Из условий* (A) *и* (C_1) *для* $0 < \sigma \leqslant \alpha$ *следует*

$$\Delta_m^{\sigma} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\sigma} (n+1)^{\delta-\beta}],$$

а из условий (A) *и* (C_2) *для* $0 < \tau \leqslant \beta$

$$\Delta_n^{\tau} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha} (n+1)^{-\tau}].$$

Для изучения множителей суммируемости типов $(C_0^{\alpha,\beta}, Y)$ нам нужны еще следующие леммы.

Лемма 8. *Из условий* (A) *и* (G_1) *для всех* $0 < \sigma \leqslant \alpha$ *вытекает*

$$r\text{-}\lim_{m,\,n} (m+1)^{\sigma} (n+1)^{\beta-\delta} \Delta_m^{\sigma} \varepsilon_{mn} = 0,$$

а из условий (A) *и* (G_2) *для всех* $0 < \tau \leqslant \beta$

$$r\text{-}\lim_{m,\,n} (m+1)^{\alpha-\gamma} (n+1)^{\tau} \Delta_n^{\tau} \varepsilon_{mn} = 0.$$

Лемма 9. *Из условий* (A), (G) *и* (H) *при* $0 \leqslant \gamma,\ \delta \leqslant \alpha,\ \beta$ *следуют условия* (D) *и* (F).

Леммы 2 и 3 принадлежат Андерсену [1]. Леммы 4, 7 и 8 полностью доказаны в [10] (леммы 7 и 8 имеют в [10] несколько иную формулировку). Лемма 4 и частично 5 и 6 имеются также в [9].

Доказательство леммы 5. В доказательстве леммы 14 статьи [10] фактически показано, что в условиях леммы 5 существует

$$\lim_n (n+1) a_n = a,$$

где

$$a_n = (n+1)^{\tau-1} \sum_m (m+1)^{\sigma-1} |\Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn}|.$$

Так как по лемме 4 ряд Σa_n сходится, то $a=0$, чем первая часть леммы 5 доказана. Вторая часть доказывается аналогично.

Доказательство леммы 6. В доказательстве леммы 15 статьи [10] фактически показано, что в условиях леммы 6 существует

$$\lim_{m,\,n} b_{mn} = b,$$

где

$$b_{mn} = (m+1)^{\sigma}(n+1)^{\tau}\Delta_{mn}^{\sigma\tau}\varepsilon_{mn}.$$

Так как по лемме 5 $\lim\limits_{n} b_{mn} = \lim\limits_{m} b_{mn} = 0$, то из теоремы о двойном и повторных пределах следует, что и $b=0$.

Доказательство леммы 9. Из условий (A) и (G) по лемме 2 вытекает [4]

$$\lim_{n}(n+1)^{\beta-\delta}\sum_{m}(m+1)^{a}\,|\Delta_{m}^{a+1}\varepsilon_{mn}| = 0,$$

$$\lim_{m}(m+1)^{\alpha-\gamma}\sum_{n}(n+1)^{b}\,|\Delta_{n}^{b+1}\varepsilon_{mn}| = 0.$$

Отсюда, учитывая доказательство леммы 21 статьи [10], получаем требуемое.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 нам надо показать, что из условий (B), (C) и (D) следует условие (c^1) статьи [10].

Имеет место формула

$$\mathfrak{D}_{mn}^{*}\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{i,j=0}^{a+1,\,b+1}\binom{a+1}{i}\binom{b+1}{j}\sum_{k,\,l=\mu,\,\nu}^{m-i,\,n-j}A_{k-\mu}^{a-\alpha-1}A_{l-\nu}^{b-\beta-1}A_{m-i-k}^{i+\gamma-a-1}A_{n-j-l}^{j+\delta-b-1}\Delta_{kl}^{ij}\varepsilon_{kl}, \tag{5}$$

где

$$\mathfrak{D}_{mn}^{*}\varepsilon_{\mu\nu} = A_{m}^{\gamma}A_{n}^{\delta}\mathfrak{D}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}.$$

Формула (5) доказывается последовательным применением преобразования Абеля $a+1$ раз по индексу k и $b+1$ раз по индексу l аналогично, как формула (14) статьи [8].

Из формулы (5) заключаем, что вместо условия (c^1) можем из условий (B), (C) и (D) вывести соотношение [5]

---

[4] Здесь и всюду в дальнейшем будем применять обозначения

$$a=[\alpha],\quad b=[\beta],\quad c=[\gamma],\quad d=[\delta].$$

[5] Мы можем $m-i$, $n-j$ заменить на m, n, так как $m-i$, $n-j$ и m, n изменяются в тех же пределах.

$$\sum_{i,j=0}^{a+1,\,b+1} \underset{\mu,\nu}{X} |B_{n\nu}^{j\beta\delta} B_{m\mu}^{i\alpha\gamma} \varepsilon_{\mu\nu}| = O(1),$$

или

$$\sum_{i,j=0}^{a+1,\,b+1} \underset{\mu,\nu}{X} |B_2{}^j B_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}| = O(1), \tag{6}$$

где для краткости через $B_1{}^i$, $B_2{}^j$ и $\underset{\mu,\nu}{X}$ обозначены следующие операторы

$$B_1{}^i a_{\mu\nu} = B_{m\mu}^{i\alpha\gamma} a_{\mu\nu} = \sum_{k=\mu}^{m} A_{k-\mu}^{a-\alpha-1} A_{m-k}^{i+\gamma-a-1} \Delta_k^i a_{k\nu},$$

$$B_2{}^j b_{\mu\nu} = B_{n\nu}^{j\beta\delta} b_{\mu\nu} = \sum_{l=\nu}^{n} A_{l-\nu}^{b-\beta-1} A_{n-l}^{j+\delta-b-1} \Delta_l^j b_{\mu l},$$

$$\underset{\mu,\nu}{X} c_{\mu\nu} = (A_m^\gamma A_n^\delta)^{-1} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,\,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta c_{\mu\nu}.$$

При этом здесь и всюду в дальнейшем в целях сокращенной записи операторов вместо совокупности индексов $\alpha\gamma m\mu$ будем всегда писать номер 1, а вместо совокупности индексов $\beta\delta n\nu$ — номер 2. Через $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ будем, как правило, обозначать некоторые относительно индексов $\mu\nu$ ограниченные двойные последовательности, а для $c_{\mu\nu}$ считаем дополнительно $c_{\mu\nu} \geqslant 0$.

Для доказательства того, что условия (B), (C) и (D) влекут за собой условие (6), мы, по существу, применим метод статьи [8], который для целых $\alpha, \beta \geqslant 0$ является тем же, что в статьях [9, 10].

Чтобы применить этот метод, мы должны все члены суммы (6), в зависимости от поведения чисел $A_m^{i+\gamma-a-1}$ и $A_n^{j+\delta-b-1}$ в ней, разделить на группы согласно следующим признакам: 1) члены в которых i (или j) таковы, что $\sum\limits_m |A_m^{i+\gamma-a-1}| < \infty$ (или $\sum\limits_n |A_n^{j+\delta-b-1}| < \infty$); 2) члены, в которых i (или j) таковы, что $i + \gamma - a - 1 \geqslant 0$ и тем самым $A_m^{i+\gamma-a-2} \geqslant 0$ (или $j + \delta - b - 1 \geqslant 0$ и, значит, $A_n^{j+\delta-b-2} \geqslant 0$); 3) члены, в которых i (или j) таковы, что ни одно из условий 1) или 2) не выполняется.

Согласно сказанному для выведения соотношения (6) из условий (B), (C) и (D) разобьем сумму (6) на девять слагаемых согласно следующей схеме:

$$\sum_{i,j=0}^{a+1,\,b+1} B_2^j B_1^i =$$

$$= \Big(\sum_{i,j=0}^{P,\,Q} + \sum_{i,j=a-c+1,0}^{a+1,\,Q} + \sum_{i,j=0,\,b-d+1}^{P,\,b+1} + \sum_{i,j=a-c+1,\,b-d+1}^{a+1,\,b+1} \Big) B_2^j B_1^i + \tag{7}$$

$$+ \sum_{j=0}^{Q} B_2^j B_2^{a-c} + \sum_{i=0}^{P} B_2^{b-d} B_1^i + B_2^{b-d} B_1^{a-c} +$$

$$+ \sum_{i=a-c+1}^{a+1} B_2^{b-d} B_1^i + \sum_{j=b-d+1}^{b+1} B_2^j B_1^{a-c}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем обозначаем

$$P = \begin{cases} a-c-1 & \text{при } \gamma > c, \\ a-c & \text{при } \gamma = c, \end{cases} \qquad Q = \begin{cases} b-d-1 & \text{при } \delta > d, \\ b-d & \text{при } \delta = d. \end{cases}$$

При этом в правой части схемы (7) считаем равными нулю пятое, седьмое и девятое слагаемые при $P = a - c$, т. е. при $\gamma = 0, 1, \ldots$; шестое, седьмое и восьмое слагаемые при $Q = b - d$, т. е. при $\delta = 0, 1, \ldots$; также все слагаемые с $P = -1$ или $Q = -1$.

Остается оценить каждое из девяти слагаемых схемы (7) в отдельности. Для этого будем неоднократно пользоваться всеми соответствующими[6] оценками, выведенными в [8] для доказательства теоремы 2 этой статьи.

1. Легче всего оцениваются те члены суммы (6), для которых i, j таковы, что $\sum\limits_m |A_m^{i+\gamma-a-1}| < \infty$, $\sum\limits_n |A_n^{j+\delta-b-1}| < \infty$. Такое положение налицо при $i, j \leqslant P, Q$. Действительно, поскольку

$$\sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha |B_1^i a_{\mu\nu}| \leqslant \sum_{k=0}^{m} |A_{m-k}^{i+\gamma-a-1} \Delta_k^i a_{k\nu}| \sum_{\mu=0}^{k} A_\mu^\alpha |A_{k-\mu}^{a-\alpha-1}| =$$

$$= O(1) \sum_{k=0}^{m} A_k^\alpha |A_{m-k}^{i+\gamma-a-1} \Delta_k^i a_{k\nu}|,$$

то очевидно для всех $i = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha |B_1^i a_{\mu\nu}| = O(1) \sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^\alpha |A_k^{i+\gamma-a-1} \Delta_m^i a_{m-k,\,\nu}|. \tag{8}$$

Аналогично, для всех $j = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\beta |B_2^j a_{\mu\nu}| = O(1) \sum_{l=0}^{n} A_{n-l}^\beta |A_l^{j+\delta-b-1} \Delta_n^j a_{\mu,\,n-l}|. \tag{9}$$

---

[6] В обозначении операторов сохраняем здесь сходство с суммами статьи [8], и тем самым будем пользоваться оценками § 2 статьи [8] обычно без ссылок на них в каждом отдельном случае.

Поэтому, в силу условия (D), из (8) следует

$$\sum_{i,j=0}^{P,Q} X_{\mu,\nu} |B_2^j B_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = O(1) \sum_{i,j=0}^{P,Q} \sum_{k,l=0}^{m,n} |A_k^{i+\gamma-a-1} A_l^{j+\delta-b-1}| = O(1),$$

чем оценка для первого слагаемого схемы (7) доказана, ибо в этом слагаемом на последовательность $\varepsilon_{\mu\nu}$ действуют «однотипные» операторы B_1^i и B_2^j, и поэтому его оценка такова же, как и для простых рядов.

2. Прежде чем приступить к оценке других слагаемых схемы (7), заметим, что при $i, j > P, Q$ числа $|A_m^{i+\gamma-a-1}|$, $|A_n^{j+\delta-b-1}|$ не являются членами сходящихся рядов. Поэтому для оценки остальных слагаемых схемы (7) проведем следующее рассуждение.

В силу формулы (2) и леммы 1 имеем

$$B_1^i = C_1^i - D_1^i, \tag{10}$$

где

$$C_1^i b_{\mu\nu} = A_{m-\mu}^{i+\gamma-a-1} \Delta_\mu^{i+\alpha-a} b_{\mu\nu},$$

$$D_1^i b_{\mu\nu} = \begin{cases} \sum_{\varkappa=0}^{m-\mu} A_\varkappa^{i+\gamma-a-2} \sum_{k=m-\varkappa+1}^{\infty} A_{k-\mu}^{a-\alpha-1} \Delta_k^i b_{k\nu} & \text{при } \alpha > a, \\ 0 & \text{при } \alpha = a. \end{cases}$$

Поскольку из (10) вытекает

$$B_2^j B_1^i = B_2^j C_1^i - B_2^j D_1^i, \tag{11}$$

то, соответственно (11), разделим второе слагаемое схемы (7) на две части и оценим каждую из них в отдельности, принимая во внимание, что здесь $i + \gamma - a - 1 \geqslant 0$, $A_m^{i+\gamma-a-2} \geqslant 0$ и $\sum_n |A_n^{j+\delta-b-1}| < \infty$.

Так как

$$(A_m^\gamma)^{-1} A_\mu^\alpha A_{m-\mu}^{i+\gamma-a-1} = O(1)(\mu+1)^{i+\alpha-a-1} \quad (i = a-c+1, \ldots, a+1), \tag{12}$$

и аналогично

$$(A_n^\delta)^{-1} A_\nu^\beta A_{n-\nu}^{j+\delta-b-1} = O(1)(\nu+1)^{j+\beta-b-1} \quad (j = b-d+1, \ldots, b+1), \tag{13}$$

то, положив в (9) $a_{\mu\nu} = C_1^i \varepsilon_{\mu\nu}$, можем в силу леммы 1 и формулы (12) писать

$$\sum_{i,\ j=a-c+1,0}^{a+1,\ Q} \underset{\mu,\nu}{X} |B_2{}^j C_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}| = \tag{14}$$

$$= O(1) \sum_{i,\ j=a-c+1,0}^{a+1,\ Q} \sum_{l=0}^{n} |A_l^{j+\delta-b-1}| \frac{A_{n-l}^{\beta}}{A_n^{\delta}} \sum_{\mu} (\mu+1)^{i+\alpha-a-1} |\Delta_{\mu n}^{i+\alpha-a\ j} \varepsilon_{\mu,\ n-l}|,$$

вследствие чего ограниченность последнего выражения вытекает из условий (A) и (C_1) по лемме 2.

Если $\alpha = a$, то второе слагаемое правой части (11) исчезает, и, значит, оценка для второго слагаемого схемы (7) в этом случае доказана.

Если же $\alpha > a$, то приступая к оценке второго члена правой части (11), заметим предварительно, что из условий[7] (A) и ($C_1{}^2$), согласно леммам[8] 1 и 2 и формуле (2), для всех $i = a - c + 1, \ldots, a + 1$ и $j \geqslant 0$ следует

$$\sum_{k=m-\varkappa+1}^{\infty} A_{k-\mu}^{a-\alpha-1} \Delta_{k\nu}^{ij} \varepsilon_{k\nu} = O(1) A_{m-\mu-\varkappa}^{a-\alpha} \sum_{s=\mu}^{\infty} A_{s-\mu}^{\alpha-a-1} |\Delta_{s\nu}^{i+\alpha-a\ j} \varepsilon_{s\nu}|. \tag{15}$$

Учитывая, что $A_{\varkappa}^{i+\gamma-a-2} \geqslant 0$ в $D_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}$ для всех $i = a - c + 1, \ldots, a + 1$, из (15) и (2) находим

$$\sum_{i,\ j=a-c+1,0}^{a+1,\ Q} \underset{\mu,\nu}{X} |B_2{}^j D_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}| =$$

$$= \frac{O(1)}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \sum_{i,\ j=a-c+1,0}^{a+1,\ Q} \sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu}^{\beta} (\underset{\mu}{K_1{}^i} + \underset{\mu}{L_1{}^i}) |B_2{}^j \Delta_{\mu}^{i+\alpha-a} \varepsilon_{\mu\nu}|, \tag{16}$$

где обозначено

$$\underset{\mu}{K_1{}^i} c_{\mu\nu} = \sum_{s=0}^{m} c_{s\nu} \sum_{\mu=0}^{s} A_{\mu}^{\alpha} A_{m-\mu}^{i+\gamma-\alpha-1} A_{s-\mu}^{\alpha-a-1},$$

$$\underset{\mu}{L_1{}^i} c_{\mu\nu} = \sum_{s=m+1}^{\infty} c_{s\nu} \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} A_{m-\mu}^{i+\gamma-\alpha-1} A_{s-\mu}^{\alpha-a-1}.$$

Считая сначала $i > a - \gamma + 1$ (и, следовательно, $\gamma > 0$), при помощи (2) и оценок стр. 56 статьи [8] заключаем, что

$$(m+1)^{-\gamma} \underset{\mu}{K_1{}^i} c_{\mu\nu} = O(1) \sum_{s=0}^{m} \left(\frac{s+1}{m+1}\right)^{\xi} (s+1)^{i+\alpha-a-1} c_{s\nu}, \tag{17}$$

$$(m+1)^{-\gamma} \underset{\mu}{L_1{}^i} c_{\mu\nu} = O(1) \sum_{s=m+1}^{\infty} (s+1)^{i+\alpha-a-1} c_{s\nu}, \tag{18}$$

где число ξ подобрано так, что $\xi \leqslant \gamma$ и $a + 1 - i < \xi < \alpha + 1 - i$.

[7] Условие ($C_1{}^2$) — это условие (C_1) при $\delta = \beta$ (т. е. условие (25) статьи [10]); условие ($C_2{}^1$) — это условие (C_2) при $\gamma = \alpha$ (т. е. условие (26) статьи [10]). Аналогичные обозначения будем применять и для условий (D), (E), (F), (G) и (H).

[8] Если $j > 0$, то можем условие ($C_1{}^2$) и лемму 2 заменить соответственно условием (B) и леммой 4.

Применяя к правой части (16) формулу (9) (с $a_{\mu\nu} = \Delta_{\mu}^{i+\alpha-a}\varepsilon_{\mu\nu}$), можем в силу леммы 1 и соотношений (17) и (18) (с $c_{\mu\nu} = |\Delta_{\mu\nu}^{i+\alpha-a\,j}\varepsilon_{\mu\nu}|$) писать

$$\sum_{j=0}^{Q}\sum_{i>a-\gamma+1}^{a+1} X_{\mu,\nu} |B_2^j D_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = \tag{19}$$

$$= O(1)\sum_{j=0}^{Q}\sum_{l=0}^{n} |A_l^{j+\delta-b-1}| \sum_{i>a-\gamma+1}^{a+1} \frac{A_{n-l}^{\beta}}{A_n^{\delta}} \sum_s (s+1)^{i+\alpha-a-1} |\Delta_{sn}^{i+\alpha-a\,j}\varepsilon_{s,\,n-l}|,$$

вследствие чего ограниченность выражения (19) вытекает из условий (A) и (C_1) по лемме 2.

Что касается случая $i = a - \gamma + 1$ при $\gamma = c \geqslant 1$, то, положив в (9) $a_{\mu\nu} = D_1^{a-\gamma+1}\varepsilon_{\mu\nu}$, аналогично, как в [8] (стр. 57), при помощи [9] леммы 7 и формулы (2) из условий (A) и (C_1) выводим

$$\sum_{j=0}^{Q} X_{\mu,\nu} |B_2^j D_1^{a-\gamma+1}\varepsilon_{\mu\nu}| = O(1). \tag{20}$$

Таким образом, учитывая (11), ограниченность выражений (14) и (19), и (20), мы доказали, что условия (A) и (C_1) влекут за собой при $\gamma > 0$ (а для $\alpha = a$ также при $\gamma = 0$) оценку для второго слагаемого схемы (7).

Случай $\gamma = 0$ при $\alpha > a$ рассмотрим ниже отдельно.

3. Аналогично можем доказать, что условия (A) и (C_2) влекут за собой при $\delta > 0$ (а для $\beta = b$ также при $\delta = 0$) оценку для третьего слагаемого схемы (7).

4. Для оценки четвертого слагаемого схемы (7) заметим, что из леммы 1 и (10) вытекает

$$B_2^j B_1^i = C_2^j C_1^i - C_2^j D_1^i - D_2^j C_1^i + D_2^j D_1^i. \tag{21}$$

Соответственно (21) разделим четвертое слагаемое схемы (7) на четыре части (при $\alpha = a$ второй и четвертый члены в (21) исчезают, а при $\beta = b$ — третий и четвертый) и оценим каждую из них в отдельности, пользуясь тем, что здесь имеют место (12) и (13) и $A_m^{i+\gamma-a-2}$, $A_n^{j+\delta-b-2} \geqslant 0$.

При помощи леммы 4 и формул (12) и (13) убеждаемся в том, что условия (A) и (B) влекут за собой не только ограниченность, но и равномерную сходимость (относительно m, n) ряда

$$\sum_{\mu,\nu}\sum_{i,\ j=a-c+1,\ b-d+1}^{a+1,\ b+1} (A_{m+i}^{\gamma} A_{n+j}^{\delta})^{-1} A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} |C_2^j C_1^i \varepsilon_{\mu\nu}|. \tag{22}$$

---

[9] Лемма 7 применима, ибо $0 < a - \gamma + 1 \leqslant a$ при $1 \leqslant \gamma \leqslant a$.

Далее, поскольку из условий [8] (A) и (B) по леммам 1 и 4 следует справедливость соотношения (15), то

$$\sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} |C_2^j D_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = O(1) A_{n-\nu}^{j+\delta-b-1} (K_1^i + L_1^i) |\Delta_{\mu\nu}^{i+\alpha-a\, j+\beta-b} \varepsilon_{\mu\nu}|,$$

откуда при помощи (13), (17) и (18) находим

$$\underset{\mu,\nu}{X} |C_2^j D_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = \left\{ \sum_{s=0}^{m} \left(\frac{s+1}{m+1} \right)^{\xi} + \sum_{s=m+1}^{\infty} \right\} (s+1)^{i+\alpha-a-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu} (\nu+1)^{j+\beta-b-1} |\Delta_{s\nu}^{i+\alpha-a\, j+\beta-b} \varepsilon_{s\nu}|,$$

вследствие чего, согласно лемме 4, из условий (A) и (B) вытекает [10]

$$b\text{-}\lim_{m,n} \sum_{j=b-d+1}^{b+1} \sum_{i>a-\gamma+1}^{a+1} \underset{\mu,\nu}{X} |C_2^j D_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \tag{23}$$

Если же $\gamma = c \geqslant 1$, то при помощи (13) получаем

$$\underset{\mu,\nu}{X} |D_1^{a-\gamma+1} (C_2^j \varepsilon_{\mu\nu})| = \frac{O(1)}{A_m^{\gamma}} \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_{k-\mu}^{a-\alpha-1}| \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu} (\nu+1)^{j+\beta-b-1} |\Delta_{k\nu}^{a+1-\gamma\, j+\beta-b} \varepsilon_{k\nu}|,$$

откуда, аналогично доказательству (20), согласно лемме 5 из условий (A) и (B) выводим

$$b\text{-}\lim_{m,n} \sum_{j=b-d+1}^{b+1} \underset{\mu,\nu}{X} |C_2^j D_1^{a-\gamma+1} \varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \tag{24}$$

Сопоставляя (23) и (24), заключаем из условий (A) и (B) при $\gamma > 0$ (для $\alpha = a$ также при $\gamma = 0$) справедливость соотношения

$$b\text{-}\lim_{m,n} \sum_{i,j=a-c+1,\ b-d+1}^{a+1,\ b+1} \underset{\mu,\nu}{X} |C_2^j D_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \tag{25}$$

Аналогично доказывается, что при $\delta > 0$ (для $\beta = b$ также при $\delta = 0$) из условий (A) и (B) следует

$$b\text{-}\lim_{m,n} \sum_{i,j=a-c+1,\ b-d+1}^{a+1,\ b+1} \underset{\mu,\nu}{X} |D_2^j C_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \tag{26}$$

Наконец, из условий (A) и (B) можно вывести соотношение, аналогичное (15) (ср. соотношение (16) статьи [8]), и, следовательно,

---

[10] Символ $b\text{-}\lim\limits_{m,n} S_{mn} = S$ означает $\lim\limits_{m,n} S_{mn} = S$ при $S_{mn} = O(1)$.

$$\underset{\mu,\nu}{X}|D_2^jD_1^i\varepsilon_{\mu\nu}|=$$

$$=\frac{O(1)}{A_m^\gamma A_n^\delta}\,(\underset{\nu}{K_2^j}\underset{\mu}{K_1^i}+\underset{\nu}{K_2^j}\underset{\mu}{L_1^i}+\underset{\nu}{L_2^j}\underset{\mu}{K_1^i}+\underset{\nu}{L_2^j}\underset{\mu}{L_1^i})\,|\Delta_{\mu\nu}^{i+\alpha-aj+\beta-b}\varepsilon_{\mu\nu}|,$$

откуда, воспользовавшись оценками (17) и (18), из условий (A) и (B) по лемме 4 заключаем

$$r\text{-}\lim_{m,n}\sum_{i,j>a-\gamma+1,\,b-\delta+1}^{a+1,\,b+1}\underset{\mu,\nu}{X}|D_2^jD_1^i\varepsilon_{\mu\nu}|=0. \tag{27}$$

Если же $\gamma=c\geqslant 1$, $\delta=d\geqslant 1$, то, аналогично доказательству соотношения (24), из условий (A) и (B) по лемме 6 выводим

$$r\text{-}\lim_{m,n}\underset{\mu,\nu}{X}|D_2^{b-\delta+1}D_1^{a-\gamma+1}\varepsilon_{\mu\nu}|=0. \tag{28}$$

Сопоставляя (27) и (28) и рассмотрев таким же образом еще случаи, когда одно из чисел γ или δ целое, а другое нет, мы видим, что условия (A) и (B) влекут за собой

$$r\text{-}\lim_{m,n}\sum_{i,j=a-c+1,\,b-d+1}^{a+1,\,b+1}\underset{\mu,\nu}{X}|D_2^jD_1^i\varepsilon_{\mu\nu}|=0. \tag{29}$$

Теперь, учитывая (21), мы видим, что из ограниченности (22) и соотношений (25), (26) и (29) следует оценка для четвертого слагаемого схемы (7) при $\gamma,\delta>0$ (для $\alpha=a$ также при $\gamma=0$, а для $\beta=b$ — при $\delta=0$).

5. Согласно определению чисел P и Q и сделанных при этом соглашений, оставшиеся слагаемые схемы (7) мы должны оценить лишь в случаях $\gamma>c$ или $\delta>d$.

Поскольку $A_m^{i+\gamma-a-1}=A_m^{\gamma-c-1}$ при $i=a-c$ и $A_n^{j+\delta-b-1}=A_n^{\delta-d-1}$ при $j=b-d$, то, приступая к оценке оставшихся слагаемых схемы (7), заметим, что при $\gamma,\delta>c,d$ числа $A_m^{\gamma-c-1}$, $A_n^{\delta-d-1}$ не являются членами сходящихся рядов, в то время как числа $A_m^{\gamma-c-2}$, $A_n^{\delta-d-2}$ не являются знакопостоянными. Поэтому предыдущие рассуждения здесь неприменимы. Для оценки оставшихся слагаемых схемы (7) применим следующее рассуждение.

Обозначив

$$x=\gamma-c+a-\alpha,\quad y=\delta-d+b-\beta,$$

при помощи преобразования Абеля и формулы (2) находим

$$B_1^{a-c}=E_1+F_1, \tag{30}$$

где

$$E_1 b_{\mu\nu} = A_{m-\mu}^{x-1} \Delta_m^{a-c} b_{m+1,\nu},$$

$$F_1 b_{\mu\nu} = \sum_{k=\mu}^{m} \Delta_k^{a+1-c} b_{k\nu} \sum_{\varkappa=\mu}^{k} A_{\varkappa-\mu}^{a-\alpha-1} A_{m-\varkappa}^{\gamma-c-1}.$$

Поскольку из (30) вытекает

$$B_2^j B_1^{a-c} = B_2^j E_1 + B_2^j F_1, \tag{31}$$

то, соответственно (31), разделим пятое слагаемое схемы (7) на две части.

Положив в (9) $a_{\mu\nu} = E_1 \varepsilon_{\mu\nu}$, получаем

$$\sum_{j=0}^{Q} \sum_{\mu,\nu} X \left| B_2^j E_1 \varepsilon_{\mu\nu} \right| = \tag{32}$$

$$= \frac{O(1)}{A_m^\gamma A_n^\delta} \sum_{j=0}^{Q} \sum_{\mu,l=0}^{m,n} A_\mu^\alpha A_{n-l}^\beta \left| A_{m-\mu}^{x-1} A_l^{j+\delta-b-1} \Delta_{mn}^{a-c\,j} \varepsilon_{m+1,\,n-l} \right|.$$

Ограниченность (32) следует из условия (D) при $x \leqslant 0$ и из условий (A) и (C_1) по лемме [11] 7 и формуле (2) при $x > 0$.

Далее, (см. [8], стр. 58) имеют место соотношения

$$F_1 b_{\mu\nu} = O(1)(\mu+1)^{c-\alpha} A_{m-\mu}^{\gamma-c-1} \sum_{s=\mu}^{\infty} (s+1)^{\alpha-c} \left| \Delta_s^{\alpha+1-c} b_{s\nu} \right|, \tag{33}$$

$$F_2 b_{\mu\nu} = O(1)(\nu+1)^{d-\beta} A_{n-\nu}^{\delta-d-1} \sum_{t=\nu}^{\infty} (t+1)^{\beta-d} \left| \Delta_t^{\beta+1-d} b_{\mu t} \right|: \tag{34}$$

Поэтому, положив в (9) $a_{\mu\nu} = F_1 \varepsilon_{\mu\nu}$, в силу (33) (с $b_{\mu\nu} = \Delta_\nu^j \varepsilon_{\mu\nu}$) получаем

$$\sum_{j=0}^{Q} \sum_{\mu,\nu} X \left| B_2^j F_1 \varepsilon_{\mu\nu} \right| = \frac{O(1)}{A_m^\gamma} \sum_{\mu,l=0}^{m,n} A_\mu^c A_{m-\mu}^{\gamma-c-1} \left| A_l^{j+\delta-b-1} \right| \cdot \tag{35}$$

$$\cdot \frac{A_{n-l}^\beta}{A_n^\delta} \sum_{s=\mu}^{\infty} (s+1)^{\alpha-c} \left| \Delta_{sn}^{\alpha+1-c\,j} \varepsilon_{s,\,n-l} \right|,$$

ограниченность которого вытекает из условий (A) и (C_1) по лемме 2 и формуле (2).

Таким образом, сопоставляя (31) с (32) и (35), мы доказали, что условия (C_1) и (D) влекут за собой оценку для пятого слагаемого схемы (7).

6. Аналогично можем доказать, что условия (C_2) и (D) влекут за собой оценку для шестого слагаемого схемы (7).

---

[11] Лемма 7 применима, ибо $a - c > 0$ при $x > 0$. Аналогично, $b - d > 0$ при $y > 0$.

7. Для оценки седьмого слагаемого схемы (7) заметим, что из (30) следует

$$B_2^{b-d}B_1^{a-c} = E_2E_1 + E_2F_1 + F_2E_1 + F_2F_1. \tag{36}$$

Соответственно (36), разделим седьмое слагаемое схемы (7) на четыре части.

Так как

$$\underset{\mu,\nu}{X}|E_2E_1\varepsilon_{\mu\nu}| \leqslant |\Delta_{mn}^{a-c\ b-d}\varepsilon_{m+1,\,n+1}|\ \underset{\mu,\nu}{X}|A_{m-\mu}^{x-1}A_{n-\nu}^{y-1}|, \tag{37}$$

то, в случае $x,\ y \leqslant 0$ из условия (D), в случае $x \leqslant 0,\ y > 0$ при помощи леммы 7 из условий (A) и (C_2), в случае $x > 0,\ y \leqslant 0$ при помощи леммы 7 из условий (A) и (C_1), заключаем ограниченность (37), а в случае $x,\ y > 0$ при помощи леммы 6 из условий (A) и (B) даже

$$r\text{-}\lim_{m,n}\ \underset{\mu,\nu}{X}|E_2E_1\varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \tag{38}$$

Далее, положив в (33) $b_{\mu\nu} = E_2\varepsilon_{\mu\nu}$, находим, что

$$\underset{\mu,\nu}{X}|E_2F_1\varepsilon_{\mu\nu}| = \tag{39}$$

$$= \frac{O(1)}{A_m^{\gamma}A_n^{\delta}}\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_\mu^c A_\nu^\beta A_{m-\mu}^{\gamma-c-1}|A_{n-\nu}^{y-1}|\sum_{s=\mu}^{\infty}(s+1)^{\alpha-c}|\Delta_{sn}^{\alpha+1-c\ b-d}\varepsilon_{s,\,n+1}|,$$

вследствие чего выражение (39) ограничено, в силу условий (A) и (C_1), в случае $y \leqslant 0$ по лемме 2 и, в силу условий (A) и (B), в случае $y > 0$ по лемме 5.

Оператор F_2E_1 оценивается аналогично.

Наконец, при помощи лемм 1 и 4 и соотношения, аналогичного (33) и (34), из условий (A) и (B) выводим [12]

$$r\text{-}\lim_{m,n}\ \underset{\mu,\nu}{X}|F_2F_1\varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \tag{40}$$

Таким образом, учитывая (36), мы доказали, что условия (C) и (D) влекут за собой оценку для седьмого слагаемого схемы (7).

8. Для оценки восьмого слагаемого схемы (7) заметим, что из (10) и (30) вытекает

$$B_2^{b-d}B_1{}^i = E_2C_1{}^i + F_2C_1{}^i - E_2D_1{}^i - F_2D_1{}^i. \tag{41}$$

---

[12] Здесь применяется также следующая формула

$$r\text{-}\lim_{m,n}\,(A_m^{\varkappa+\lambda+1}A_n^{\varkappa'+\lambda'+1})^{-1}\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}A_\mu^{\varkappa}A_{m-\mu}^{\lambda}A_\nu^{\varkappa'}A_{n-\nu}^{\lambda'}x_{\mu\nu} = 0,$$

где $r\text{-}\lim\limits_{m,n} x_{mn} = 0$, $\varkappa,\ \lambda,\ \varkappa',\ \lambda',\ \varkappa+\lambda,\ \varkappa'+\lambda' > -1$, которая следует из одного результата Гамильтона (см. [5], теорема 158).

Соответственно (41), разделим восьмое слагаемое схемы (7) на четыре части.

При помощи (12) получаем

$$\sum_{i=a-c+1}^{a+1} \underset{\mu,\nu}{X} |E_2 C_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}| = \frac{O(1)}{A_n^{\delta}} \sum_{i=a-c+1}^{a+1} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\beta} |A_{n-\nu}^{\gamma-1}| \cdot$$
$$\cdot \sum_{\mu} (\mu+1)^{i+\alpha-a-1} |\Delta_{\mu n}^{i+\alpha-a\ b-d} \varepsilon_{\mu, n+1}|, \tag{42}$$

вследствие чего выражение (42) ограничено при $\gamma \leqslant 0$ по лемме 2, в силу условий (A) и (C_1), а при $\gamma > 0$ по лемме 5, в силу условий (A) и (B).

Далее, положив $b_{\mu\nu} = C_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}$ в (34) и применяя (12), находим

$$\underset{\mu,\nu}{X} |F_2 C_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}| = \frac{O(1)}{A_n^{\delta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{d} A_{n-\nu}^{\delta-d-1} \sum_{t=\nu}^{\infty} (t+1)^{\beta-d} \cdot$$
$$\cdot \sum_{\mu} (\mu+1)^{i+\alpha-a-1} |\Delta_{\mu t}^{i+\alpha-a\ \beta+1-d} \varepsilon_{\mu t}|, \tag{43}$$

откуда при помощи леммы 4 выводим [13], что условия (A) и (B) влекут за собой

$$b\text{-}\lim_{m,n} \sum_{i=a-c+1}^{a+1} \underset{\mu,\nu}{X} |F_2 C_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \tag{44}$$

Далее, поскольку из условий (A) и (B) по леммам [8] 1 и 4 следует справедливость соотношения (15), то

$$\sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^{\alpha} |E_2 D_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}| = O(1) (K_1{}^i + \underset{\mu}{L_1{}^i}) |E_2 \Delta_\mu^{i+\alpha-a} \varepsilon_{\mu\nu}|,$$

и, следовательно, ввиду (17) и (18), мы вправе писать

$$\sum_{i>a-\gamma+1}^{a+1} \underset{\mu,\nu}{X} |E_2 D_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}| = \frac{O(1)}{A_n^{\delta}} \sum_{i>a-\gamma+1}^{a+1} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\beta} |A_{n-\nu}^{\gamma-1}| \cdot$$
$$\cdot \sum_{s} (s+1)^{i+\alpha-a-1} |\Delta_{sn}^{i+\alpha-a\ b-d} \varepsilon_{s, n+1}|. \tag{45}$$

Выражение (45) ограничено по тем же причинам, что и выражение (42).

Если же $\gamma = c \geqslant 1$, то

$$\underset{\mu,\nu}{X} |E_2 D_1^{a-\gamma+1} \varepsilon_{\mu\nu}| = \frac{O(1)}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\beta} |A_{n-\nu}^{\gamma-1}| \cdot$$
$$\cdot \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^{\alpha} \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_{k-\mu}^{a-\alpha-1} \Delta_{kn}^{a-\gamma+1\ b-d} \varepsilon_{k, n+1}|, \tag{46}$$

[13] Здесь применяется также следующее очевидное соотношение $\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\varkappa} A_{n-\nu}^{\lambda} a_\nu = o(A_n^{\varkappa+\lambda+1})$, где $a_n = o(1)$, $\varkappa$, λ, $\varkappa+\lambda > -1$.

и поэтому выражение (46) ограничено при $y \leqslant 0$ по лемме 7, в силу условий (A) и (C_1), а при $y > 0$ по лемме 6, в силу условий (A) и (B).

Наконец, положив в (34) $b_{\mu\nu} = \Delta_\mu^{i+\alpha-a}\varepsilon_{\mu\nu}$ и применяя (17) и (18), аналогично выводу соотношения (45), получаем для $i > \alpha - \gamma + 1$ соотношение, напоминающее (43), из которого, аналогично (44), следует

$$r\text{-}\lim_{m,n} \sum_{i>a-\gamma+1}^{a+1} \sum_{\mu,\nu}^{X} |F_2 D_1^{\,i}\varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \tag{47}$$

Положив в (34) еще $b_{\mu\nu} = D_1^{a-\gamma+1}\varepsilon_{\mu\nu}$, получаем

$$\sum_{\mu,\nu}^{X} |F_2 D_1^{a-\gamma+1}\varepsilon_{\mu\nu}| = \frac{O(1)}{A_m^\gamma A_n^\delta} \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \sum_{k=m+1}^{\infty} |A_{k-\mu}^{a-\alpha-1}| \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^d A_{n-\nu}^{\delta-d-1} \sum_{t=\nu}^{\infty} (t+1)^{\beta-d} |\Delta_{kt}^{a-\gamma+1\ \beta+1-d}\varepsilon_{kt}|,$$

откуда при помощи леммы 5 и формулы (2) заключаем [13], что условия (A) и (B) влекут за собой

$$r\text{-}\lim_{m,n} \sum_{\mu,\nu}^{X} |F_2 D_1^{a-\gamma+1}\varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \tag{48}$$

Таким образом, согласно (41), мы доказали, что условия (A), (B) и (C_1) влекут за собой при $\gamma > 0$ (а для $\alpha = a$ также при $\gamma = 0$) оценку для восьмого слагаемого схемы (7).

9. Аналогично можем доказать, что условия (A), (B) и (C_2) влекут за собой при $\delta > 0$ (а для $\beta = b$ также при $\delta = 0$) оценку для девятого слагаемого схемы (7).

10. Итак, мы из условий (B), (C) и (D) вывели оценку для всех девяти слагаемых схемы (7), кроме тех частных случаев, когда $\gamma = 0$ при $\alpha > a$ или $\delta = 0$ при $\beta > b$. В заключение рассмотрим эти оставшиеся случаи.

Пусть $\gamma = \delta = 0$ при $\alpha, \beta > a, b$. Поскольку по условию (A)

$$\sum_{k,\,l=\mu,\,\nu}^{m,n} A_{k-\mu}^{-\alpha-2} A_{l-\nu}^{-\beta-2}\varepsilon_{kl} = \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\ \beta+1}\varepsilon_{\mu\nu} - \sum_{l=n+1}^{\infty} A_{l-\nu}^{-\beta-2}\Delta_\mu^{\alpha+1}\varepsilon_{\mu l} -$$

$$- \sum_{k=m+1}^{\infty} A_{k-\mu}^{-\alpha-2}\Delta_\nu^{\beta+1}\varepsilon_{k\nu} + \sum_{k,\,l=m+1,\,n+1}^{\infty} A_{k-\mu}^{-\alpha-2} A_{l-\nu}^{-\beta-2}\varepsilon_{kl}, \tag{49}$$

то из условий (B), (C) и (D) легко вывести непосредственно соотношение (c^1), так как, например,

$$\sum_{\mu,\nu}^{X} |\sum_{l=n+1}^{\infty} A_{l-\nu}^{-\beta-2}\Delta_\mu^{\alpha+1}\varepsilon_{\mu l}| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\beta \sum_{l=n+1}^{\infty} |A_{l-\nu}^{-\beta-2}| \sum_{\mu} A_\mu^\alpha |\Delta_\mu^{\alpha+1}\varepsilon_{\mu l}| \tag{50}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\beta \sum_{l=n+1}^{\infty} |A_{l-\nu}^{-\beta-2}|\, O(l^{-\beta}) = O(1)$$

по условию (C_1):

Легко усмотреть, как вывести соотношение (c^1) из условий (B), (C) и (D), если одно из чисел γ, δ равно нулю, а другое нет.

Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Докажем, что из условий (B), (C), (D) и (E) следует условие $(d_1{}^4)$ статьи [10], для чего, используя (5) и условие (A), заменим условие $(d_1{}^4)$ следующим (более сильным)

$$\lim_{m,\,n} \sum_{i,\,j=0}^{a+1,\,b+1} \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha |M_{mn}^{ij}\varepsilon_{\mu\nu}| = 0, \tag{51}$$

где

$$M_{mn}^{ij}\varepsilon_{\mu\nu} = (A_{m+i}^{\gamma}A_{n+j}^{\delta})^{-1} B_2{}^j B_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu}^{a+1-i\ b+1-j}\mathbf{1}\cdot\Delta_{\mu\nu}^{i+\alpha-a\ j+\beta-b}\varepsilon_{\mu\nu}.$$

Следовательно,

$$|M_{mn}^{ij}\varepsilon_{\mu\nu}| \leqslant (A_m^{\gamma}A_n^{\delta})^{-1}\,|B_2{}^j B_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}|, \text{ если } i \neq a+1 \text{ или } j \neq b+1,$$

$$M_{mn}^{a+1\ b+1}\varepsilon_{\mu\nu} = (A_{m+a+1}^{\gamma}A_{n+b+1}^{\delta})^{-1} B_2^{b+1} B_1^{a+1}\varepsilon_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\ \beta+1}\varepsilon_{\mu\nu}.$$

Поэтому в последующих рассуждениях оператор M_{mn}^{ij} заменим (где это допустимо) операторами, определенными в § 2.

По тем же причинам, что в § 2, разобьем сумму (51) на пять слагаемых согласно следующей схеме

$$\sum_{i,\,j=0}^{a+1,\,b+1} M_{mn}^{ij} = \Big(\sum_{i,\,j=0}^{P,\,b} + \sum_{i,\,j=a-c+1,\,0}^{a+1,\,b-d} + \sum_{i,\,j=a-c+1,\,b-d+1}^{a+1,\,b+1}\Big) M_{mn}^{ij} + \\ + \sum_{i=0}^{P} M_{mn}^{i\ b+1} + \sum_{j=0}^{b+1} M_{mn}^{a-c\ j}, \tag{52}$$

где в правой части считаем равными нулю последнее слагаемое при $P = a - c$, а первое и четвертое при $P = -1$.

Для краткости будем через $\underset{\mu}{X}$ обозначать оператор

$$\underset{\mu}{X}\, c_{\mu\nu} = (A_{m+i}^{\gamma}A_{n+j}^{\delta})^{-1} \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha c_{\mu\nu}.$$

1. В силу (8) из условия (D^2) заключаем

$$\lim_{m,\,n} \sum_{i,\,j=0}^{P,\,b} \underset{\mu}{X} |B_2{}^j B_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu}| = \lim_{m,\,n} O(1) \sum_{i,\,j=0}^{P,\,b} \sum_{l=\nu}^{n} \frac{\left|A_{n-l}^{j+\delta-b-1}\right|}{A_n^{\delta}} |A_{l-\nu}^{b-\beta-1}| \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{A_{m-k}^{\alpha}}{A_m^{\gamma}} O\{(m+1-k)^{\gamma-\alpha}\}\,|A_k^{i+\gamma-a-1}| = 0.$$

2. Второе слагаемое схемы (52) разобьем, соответственно (11), на две части.

В силу (12) и леммы 2 из условий (A) и (C_1^2) выводим

$$\lim_{m,n} \sum_{i,j=a-c+1,0}^{a+1,b-d} X_\mu |B_2^j C_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = \lim_{m,n} O(1) \sum_{i,j=a-c+1,0}^{a+1,b-d} \sum_{l=\nu}^{n} \frac{|A_{n-l}^{j+\delta-b-1}|}{A_n^\delta} \cdot$$

$$\cdot |A_{l-\nu}^{b-\beta-1}| \sum_\mu (\mu+1)^{i+\alpha-a-1} |\Delta_{\mu l}^{i+\alpha-a\,j} \varepsilon_{\mu l}| = 0.$$

Учитывая вытекающее из условий (A) и (C_1^2) соотношение (16), оценки (17) и (18) и лемму 2, из условий (A) и (C_1^2) получаем

$$\lim_{m,n} \sum_{j=0}^{b-d} \sum_{i>a-\gamma+1}^{a+1} X_\mu |B_2^j D_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = \lim_{m,n} \frac{O(1)}{A_m^\gamma} \sum_{j=0}^{b-d} \sum_{i>a-\gamma+1}^{a+1} \sum_{l=\nu}^{n} \frac{|A_{n-l}^{j+\delta-b-1}|}{A_n^\delta} \cdot$$

$$\cdot |A_{l-\nu}^{b-\beta-1}| (K_1^i + L_1^i)_\mu |\Delta_{\mu l}^{i+\alpha-a\,j} \varepsilon_{\mu l}| = 0,$$

а в силу леммы 7 и формулы (2) из тех же условий при $\gamma = c \geqslant 1$ выводим

$$\lim_{m,n} \sum_{j=0}^{b-d} X_\mu |B_2^j D_1^{a-\gamma+1} \varepsilon_{\mu\nu}| = \lim_{m,n} O(1) \sum_{j=0}^{b-d} \sum_{l=\nu}^{n} \frac{|A_{n-l}^{j+\delta-b-1}|}{A_n^\delta} |A_{l-\nu}^{b-\beta-1}| = 0.$$

Случай $\gamma = 0$ при $\alpha > a$ рассмотрим ниже.

3. Третье слагаемое схемы (52) оценивается легко, так как ввиду вытекающих из условий (A) и (B) равномерной сходимости (относительно m, n) ряда (22) и соотношений (25), (26) и (29) при γ, $\delta > 0$ (для $\alpha = a$ также при $\gamma = 0$, а для $\beta = b$ также при $\delta = 0$), согласно (21), имеем

$$\lim_{m,n} \sum_{i,j=a-c+1,b-d+1}^{a+1,b+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta |M_{mn}^{ij} \varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \qquad (53)$$

Если же $\gamma = \delta = 0$ при α, $\beta > a$, b, то, в силу (49), из условий (B), (C_1^2), (D^2) и (E_2) легко вывести непосредственно условие (d_1^4), ибо (ср. (50)), например, по условию (C_1^2)

$$\lim_{m,n} X_\mu \sum_{l=n+1}^{\infty} A_{l-\nu}^{-\beta-2} \Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu l}| \leqslant \lim_n \sum_{l=n+1}^{\infty} |A_{l-\nu}^{-\beta-2}| \sum_\mu A_\mu^\alpha |\Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu l}| = 0,$$

а по условию (E_2) для всех $\nu = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{m,n} X_\mu \sum_{k=m+1}^{\infty} A_{k-\mu}^{-\alpha-2} \Delta_\nu^{\beta+1} \varepsilon_{k\nu}| =$$

$$= \lim_m A_m^\alpha o[(m+1)^{-\alpha}] \sum_{\mu=0}^{m} (m+1-\mu)^{-\alpha-1} = 0.$$

Легко усмотреть, как провести вывод соотношения (d_1^4) из условий (B), (C), (D) и (E), если одно из чисел γ, δ равно нулю, а другое нет.

4. Чтобы оценить четвертое слагаемое схемы (52), разобьем его на две части, соответственно вытекающему из леммы 1 и (10) соотношению

$$M_{mn}^{i\,b+1} = C_2^{b+1} B_1{}^i - D_2^{b+1} B_1{}^i.$$

Положив в (8) $a_{\mu\nu} = C_2^{b+1} \varepsilon_{\mu\nu}$, в силу условия ($E_2$) получаем

$$\lim_{m,\,n} \sum_{i=0}^{P} \sum_{\mu} X \left| C_2^{b+1} B_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu} \right| = \lim_{m} O(1) \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{m} \left| A_k^{i+\gamma-a-1} \right| \cdot$$

$$\cdot \frac{A_{m-k}^{\alpha}}{A_m^{\gamma}} \left| \Delta_{m\nu}^{i\,\beta+1} \varepsilon_{m-k,\,\nu} \right| = 0.$$

Если же $\beta > b$, то, положив далее $a_{\mu\nu} = D_2^{b+1} \varepsilon_{\mu\nu}$ в (8) и воспользовавшись формулой (2), из условия (D^2) выводим

$$\lim_{m,\,n} \sum_{i=0}^{P} \sum_{\mu} X \left| D_2^{b+1} B_1{}^i \varepsilon_{\mu\nu} \right| = \lim_{m,\,n} \frac{O(1)}{A_n^{\delta}} \sum_{i=0}^{P} \sum_{k=0}^{m} \left| A_k^{i+\gamma-a-1} \right| \cdot$$

$$\cdot \sum_{\lambda=0}^{n-\nu} A_{\lambda}^{\delta-1} \sum_{l=n-\lambda+1}^{\infty} \left| A_{l-\nu}^{b-\beta-1} \right| = \lim_{n} O(1) \frac{A_{n-\nu}^{\delta+b-\beta}}{A_n^{\delta}} = 0.$$

5. Чтобы оценить пятое слагаемое схемы (52), разобьем его на четыре части соответственно вытекающему из (30), леммы 1 и (10) соотношению

$$\sum_{j=0}^{b+1} M_{mn}^{a-c\,j} = \sum_{j=0}^{b} B_2{}^j E_1 + \sum_{j=0}^{b+1} B_2{}^j F_1 + C_2^{b+1} E_1 - D_2^{b+1} E_1.$$

Из условия (D^2) при $x \leqslant 0$ и из условий (A) и (C_1^2) по лемме 7 при $x > 0$ заключаем

$$\lim_{m,\,n} \sum_{j=0}^{b} \sum_{\mu} X \left| B_2{}^j E_1 \varepsilon_{\mu\nu} \right| \leqslant \lim_{m,\,n} \sum_{j=0}^{b} \sum_{l=\nu}^{n} \frac{\left| A_{n-l}^{j+\delta-b-1} \right|}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \cdot$$

$$\cdot \left| A_{l-\nu}^{b-\beta-1} \Delta_{ml}^{a-c\,j} \varepsilon_{m+1,\,l} \right| \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} \left| A_{m-\mu}^{x-1} \right| = 0.$$

При помощи (33) из условий (A) и (C_1^2) по лемме 2 выводим [13]

$$\lim_{m,\,n} \sum_{j=0}^{b+1} \sum_{\mu} X \left| B_2{}^j F_1 \varepsilon_{\mu\nu} \right| = \lim_{m,\,n} O(1) \sum_{j=0}^{b+1} \sum_{l=\nu}^{n} \frac{\left| A_{n-l}^{j+\delta-b-1} \right|}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \left| A_{l-\nu}^{b-\beta-1} \right| \cdot$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{c} A_{m-\mu}^{\gamma-c-1} \sum_{s=\mu}^{\infty} (s+1)^{\alpha-c} \left| \Delta_{sl}^{\alpha+1-c\,j} \varepsilon_{sl} \right| = 0.$$

Далее, из условия (E_2) при $x \leqslant 0$ и по лемме 6 (или 5) из условий (A) и (B) при $x > 0$ получаем

$$\lim_{m,n} X \mu |C_2^{b+1} E_1 \varepsilon_{\mu\nu}| \leqslant \lim_{m} |\Delta_{m\nu}^{a-c\ \beta+1} \varepsilon_{m+1,\nu}| (A_m^{\gamma})^{-1} \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^{\alpha} |A_{m-\mu}^{x-1}| = 0.$$

Наконец, в случае $\beta > b$, в силу (2), из условия (D^2) при $x \leqslant 0$ и по лемме 6 (или 5) из условий (A) и (B) при $x > 0$ следует

$$\lim_{m,n} X \mu |D_2^{b+1} E_1 \varepsilon_{\mu\nu}| \leqslant \lim_{m,n} (A_m^{\gamma} A_n^{\delta})^{-1} \sum_{\lambda=0}^{n-\nu} A_\lambda^{\delta-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{l=n-\lambda+1}^{\infty} |A_{l-\nu}^{b-\beta-1} \Delta_{ml}^{a-c\ b+1} \varepsilon_{m+1,l}| \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^{\alpha} |A_{m-\mu}^{x-1}| = 0.$$

Итак, нами доказано, что условие (d_1^4) вытекает из условий (B), (C_1^2), (D^2) и (E_2). Аналогично можем обнаружить, что условия (B), (C_2^1), (D^1) и (E_1) влекут за собой условие (d_2^4) (теоремы 2 статьи [10]).

Далее, доказательство того, что условие (f_1^4) (соответственно (f_2^4)) теоремы 3 статьи [10] вытекает из условий (A), (C_1^2) и (F_2) (соответственно (A), (C_2^1) и (F_1)) почти таково же, как доказательство теоремы 3 статьи [8]. (Основную роль в этом доказательстве играют леммы 2 и 3).

Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 нам надо показать, что из условий (A), (B), (G) и (H) следует условие (d^5) теоремы 4 статьи [10]. Используя (5) и условие (A), заменим условие (d^5) следующим (более сильным)

$$\lim_{m,n} \sum_{i,j=0}^{a+1,\,b+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,\,n} A_\mu^{\alpha} A_\nu^{\beta} |M_{mn}^{ij} \varepsilon_{\mu\nu}| = 0. \tag{54}$$

Для того, чтобы вывести соотношение (54) из условий (A), (B), (G) и (H), разобьем сумму в (54) на те же девять слагаемых (кроме четвертого), что и в схеме (7), причем будем неоднократно пользоваться всеми оценками, полученными в § 2.

1. Первое слагаемое схемы (7) оценивается легко, поскольку в силу условий (D) и (H) из (8) выводим

$$\lim_{m,n} \sum_{i,j=0}^{P,Q} X \mu |B_2^j B_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = \lim_{m,n} O(1) \sum_{i,j=0}^{P,Q} \sum_{k,l=0}^{m,n} |A_k^{i+\gamma-a-1} A_l^{j+\delta-b-1}| \cdot$$

$$\cdot \frac{A_{m-k}^{\alpha} A_{n-l}^{\beta}}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} |\Delta_{mn}^{ij} \varepsilon_{m-k,\,n-l}| = 0.$$

2. Второе слагаемое схемы (7) разобьем, соответственно (11), на две части.

Ввиду (14) из условий (A) и (G_1) по лемме 2 вытекает

$$\lim_{m,n} \sum_{i,\,j=a-c+1,\,0}^{a+1,\,Q} \sum_{\mu,\nu}^{X} |B_2^j C_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = 0.$$

Далее, если $\alpha > a$ и $\gamma > 0$, то, в силу лемм 2 и 8, соотношения (9) и аналогичного соотношению (20), из условий (A) и (G_1) выводим

$$\lim_{m,n} \sum_{i,\,j=a-c+1,\,0}^{a+1,\,Q} \sum_{\mu,\nu}^{X} |B_2^j D_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = 0.$$

Случай $\gamma = 0$ при $\alpha > a$ рассмотрим ниже отдельно.

3. Аналогично можем доказать, что из условий (A) и (G_2) вытекает при $\delta > 0$ (а в случае $\beta = b$ также при $\delta = 0$) оценка третьего слагаемого схемы (7).

4. Что касается четвертого слагаемого схемы (7), то в § 3 уже доказано, что из условий (A) и (B) при $\gamma, \delta > 0$ (в случае $\alpha = a$ также при $\gamma = 0$, а в случае $\beta = b$ также при $\delta = 0$) вытекает (53).

5. Чтобы оценить пятое слагаемое схемы (7), разделим его, соответственно (31), на две части.

Ввиду (32) из условий (D) и (H) при $x \leqslant 0$ и из условий (A) и (G_1) по лемме 8 и формуле (2) при $x > 0$ получаем

$$\lim_{m,n} \sum_{j=0}^{Q} \sum_{\mu,\nu}^{X} |B_2^j E_1 \varepsilon_{\mu\nu}| = 0.$$

Далее, учитывая (35) и (2), из условий (A) и (G_1) по лемме 2 выводим также

$$\lim_{m,n} \sum_{j=0}^{Q} \sum_{\mu,\nu}^{X} |B_2^j F_1 \varepsilon_{\mu\nu}| = 0.$$

6. Аналогично доказывается, что условия (A), (D), (G_2) и (H) влекут за собой оценку для шестого слагаемого схемы (7).

7. Седьмое слагаемое схемы (7) разобьем соответственно (36) на четыре части, но поскольку из условий (A) и (B) следует (40), то остается оценить лишь первые три части из (36).

Вследствие (37), в случае $x, y \leqslant 0$ из условий (H) и (F), в случае $x \leqslant 0$, $y > 0$ при помощи леммы 8 из условий (A) и (G_2), в случае $x > 0$, $y \leqslant 0$ при помощи леммы 8 из условий (A) и (G_1), и в случае $x, y > 0$ при помощи леммы 6 из условий (A) и (B), заключаем справедливость соотношения (38).

Далее, воспользовавшись (39), из условий (A) и (G_1) по лемме 2 в случае $y \leqslant 0$ и из условий (A) и (B) по лемме 5 в случае $y > 0$, получаем [13]

$$\lim_{m,n} \sum_{\mu,\nu}^{X} |E_2 F_1 \varepsilon_{\mu\nu}| = 0.$$

Аналогично оценивается третья часть из (36).

8. Восьмое слагаемое схемы (7) разобьем, соответственно (41), на четыре части, но поскольку из условий (A) и (B) при $\gamma > 0$ вытекают (44), (47) и (48), то остается оценить лишь первую и третью части из (41).

Однако, вследствие (42) и (45), из условий (A) и (G_1) по лемме 2 в случае $\gamma \leqslant 0$ и из условий (A) и (B) по лемме 5 в случае $\gamma > 0$ заключаем

$$\lim_{m,n} \sum_{i=a-c+1}^{a+1} \underset{\mu,\nu}{X} |E_2 C_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = 0,$$

$$\lim_{m,n} \sum_{i>a-\gamma+1}^{a+1} \underset{\mu,\nu}{X} |E_2 D_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = 0,$$

а, вследствие (46), из условий (A) и (G_1) по лемме 8 при $\gamma \leqslant 0$ и из условий (A) и (B) по лемме 6 при $\gamma > 0$ для случая $\gamma = -c \geqslant 1$ выводим также

$$\lim_{m,n} \underset{\mu,\nu}{X} |E_2 D_1^{a-\gamma+1} \varepsilon_{\mu\nu}| = 0.$$

Случай $\gamma = 0$ при $\alpha > a$ рассмотрим ниже отдельно.

9. Аналогично можем доказать, что из условий (A), (B) и (G_2) вытекает при $\delta > 0$ (а для $\beta = b$ также при $\delta = 0$) оценка для девятого слагаемого схемы (7).

10. Остается рассмотреть те частные случаи, при которых $\gamma = 0$ при $\alpha > a$ или $\delta = 0$ при $\beta > b$.

Если $\gamma = \delta = 0$ при $\alpha, \beta > a, b$, то в силу (49) и (50) из условий (B), (D), (G) и (H) легко вывести непосредственно условие (d^5) статьи [10].

Легко усмотреть, как надо провести вывод условия (d^5) статьи [10] из условий (A), (B), (G) и (H), если одно из чисел γ, δ равно нулю, а другое нет.

Принимая во внимание лемму 9, теорема 3 доказана.

§ 5. О некоторых конкретных множителях суммируемости

Учитывая, что теоремы 1, 2 и 3 настоящей статьи доказаны для произвольных $\alpha, \beta \geqslant 0$, можем все теоремы § 10 статьи [10] обобщить для произвольных $\alpha, \beta \geqslant 0$. Оказывается, что все эти результаты можно распространить, с другой стороны, и для комплексных s, t, причем *все теоремы* § 10 *статьи* [10] *сохраняют силу, если в их условиях заменить* s, t *соответственно через* [14] $\mathrm{Re}s$, $\mathrm{Re}t$.

---

[14] Конечно, ограничения $s \neq 0$ или $t \neq 0$ остаются и при комплексных s, t.

Для доказательства последнего нам надо первым долгом обобщить формулу (82) статьи [10], т. е. доказать формулу

$$\Delta_m^{\varkappa}(m+1)^{-s} \sim \lambda (m+1)^{-\sigma-\varkappa} \quad (s \neq 0,\ \sigma,\ \varkappa \geqslant 0), \tag{55}$$

где $\sigma = \mathrm{Res}$, а $\lambda \neq 0$ является некоторым комплексным числом, зависящим лишь от s, $\varkappa$.

Действительно, если $\varkappa > 0$ не целое число и $s > 0$, то, обозначив $\varphi = [\varkappa + 1]$, $\psi = \varkappa - \varphi$, по формулам (82) и (80) статьи [10] и лемме 1 находим

$$\Delta_m^{\varkappa}(m+1)^{-s} = \Delta_m^{\psi}[\Delta_m^{\varphi}(m+1)^{-s}] \sim M_1 \sum_{k=m}^{\infty} A_{k-m}^{-\psi-1} \frac{1}{A_k^{s+\varphi}} = \frac{M_2}{A_m^{s+\varkappa}},$$

или

$$\Delta_m^{\varkappa}(m+1)^{-s} \sim M(m+1)^{-s-\varkappa} \quad (s > 0,\ \varkappa \geqslant 0), \tag{56}$$

где $M > 0$ не зависит от m. Далее, для случая $\sigma > 0$, $\varkappa \geqslant 0$, имеем

$$\begin{aligned}
\Delta_m^{\varkappa}(m+1)^{-s} &= \sum_k A_k^{-\varkappa-1}(k+m+1)^{-s} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{\varepsilon \to +0} \sum_k A_k^{-\varkappa-1} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (-\ln t)^{s-1} t^{m+k}\, dt = \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (-\ln t)^{s-1} t^m \sum_k A_k^{-\varkappa-1} t^k\, dt = \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 (-\ln t)^{s-1} t^m (1-t)^{\varkappa}\, dt.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (56) по теореме о среднем значении выводим

$$\Delta_m^{\varkappa}(m+1)^{-s} = \mu \int_0^1 (-\ln t)^{\sigma-1} t^m (1-t)^{\varkappa}\, dt \sim \mu M (m+1)^{-\sigma-\varkappa},$$

где [15] $\mu \neq 0$ не зависит от m, ибо, с другой стороны, по той же теореме, обозначив $\mathrm{Im}\, s = \varsigma$, находим

$$\Delta_m^{\varkappa}(m+1)^{-s} = \lim_{\varepsilon \to +0} \mu_{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (-\ln t)^{\sigma-1} t^m (1-t)^{\varkappa}\, dt,$$

и при $\varepsilon \to +0$

$$\mu_{\varepsilon} = \frac{1}{\Gamma(s)} \{\cos[\varsigma \ln(-\ln c_{\varepsilon}')] + i \sin[\varsigma \ln(-\ln c_{\varepsilon}'')]\} \to \mu$$

$$(\varepsilon \leqslant c_{\varepsilon}',\ c_{\varepsilon}'' \leqslant 1 - \varepsilon).$$

---

[15] Действительно, если $\varkappa \geqslant 0$ целое, то очевидно $\mu \neq 0$. Если же при нецелом $\varkappa$ имели бы $\mu = 0$, то по лемме 1 мы получили бы $\mu = 0$ при целом $\varkappa$, что невозможно.

Наконец, если $\sigma = 0$, $\varsigma \neq 0$, $\varkappa \geqslant 0$, то по доказанному и формулам (5) и (7) статьи [8] имеем

$$\Delta_m^{\varkappa}(m+1)^{-s} = \Delta_m^{\varkappa}\frac{m+1}{(m+1)^{1+s}} = (m+1+\varkappa)\,\Delta_m^{\varkappa}(m+1)^{-1-s} -$$

$$-\varkappa\Delta_m^{\varkappa-1}(m+1)^{-1-s} \sim \mu' M'(m+1)^{-\sigma-\varkappa},$$

чем завершается доказательство формулы (55).

Далее, имеют место формулы

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{A_{k-m}^{\delta}}{kA_k^{\sigma}} = \frac{1}{mA_m^{\sigma-\delta-1}}, \tag{57}$$

$$(\operatorname{Re}\sigma > -1,\ \operatorname{Re}(\sigma-\delta) > 0,\ m = 1, 2, \ldots);$$

$$\sum_k \frac{A_k^{\delta}}{A_{k+m}^{\tau}} = \frac{\tau}{\tau-\delta-1}\,\frac{1}{A_m^{\tau-\delta-1}} \quad (\operatorname{Re}\tau \geqslant 0,\ \operatorname{Re}(\tau-\delta) > 1). \tag{58}$$

Формула (57) для вещественных σ, δ доказана Чжоу [4]. Доказательство Чжоу сохраняется и для комплексных σ, δ. Из формулы (57) сразу вытекает[16] формула (58) для случая $\operatorname{Re}\tau > 0$; случай $\tau = 0$ по формуле (2) очевиден, а случай $\operatorname{Re}\tau = 0$ при $\tau \neq 0$ выводится из формулы (5) статьи [8] и (57). Тем самым обобщена для комплексного s и формула (81) статьи [10].

Из последних частей обобщенных теорем[17] 10 и 12 статьи [10] непосредственно вытекают следующие обобщения теоремы Енсена ([2], стр. 77).

Теорема 4. *Если двойной ряд Дирихле*

$$\sum_{m,n} a_{mn}(m+1)^{-x}(n+1)^{-y}$$

$C^{\alpha,\beta}$-ограничен в точке (x_0, y_0), то он $C_r^{\gamma,\delta}$-суммируем во всех точках (x, y), для которых выполнены условия

$$\operatorname{Re}x,\ \operatorname{Re}y > \operatorname{Re}x_0,\ \operatorname{Re}y_0 \text{ и } \operatorname{Re}x,\ \operatorname{Re}y > \operatorname{Re}x_0 + \alpha - \gamma,\ \operatorname{Re}y_0 + \beta - \delta.$$

Условия теоремы ослабить нельзя.

Теорема 5. *Если двойной ряд Дирихле*

$$\sum_{m,n} a_{mn}(m+n+1)^{-x}$$

---

[16] Формула (58) для случая $\operatorname{Re}\tau > 0$ легко доказывается и непосредственно такими же рассуждениями, как Чжоу доказывает соотношение (57). Для $\delta \leqslant -1$ формула (58) имеется уже у Андерсена ([1], стр. 19).

[17] Об аналоге этих теорем в теории простых рядов см. [3], стр. 453.

$C^{\alpha,\beta}$-ограничен в точке (x_0, y_0), то он $C_r^{\gamma,\delta}$-суммируем во всех точках (x, y), для которых выполнены условия

$$\mathrm{Re}x > \mathrm{Re}x_0, \quad \mathrm{Re}x > \mathrm{Re}x_0 + \alpha - \gamma, \quad \mathrm{Re}x > \mathrm{Re}x_0 + \beta - \delta,$$
$$\mathrm{Re}x > \mathrm{Re}x_0 + \alpha + \beta - \gamma - \delta.$$

Условия теоремы ослабить нельзя.

Для доказательства, например, теоремы 5 следует в последней части обобщенной теоремы 12 статьи [10] положить $s = x - x_0$, т. е. считать

$$u_{mn} = a_{mn}\,(m + n + 1)^{-x_0}, \quad \varepsilon_{mn} = (m + n + 1)^{x_0 - x}.$$

Аналогичные следствия можем вывести и из других частей обобщенных теорем 10 и 12 статьи [10].

Литература

1. Andersen, A. F., Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode. Kopenhagen, 1921.
2. Bohr, H., Sur la série de Dirichlet. C. r. Acad. sci., 1909, **148**, 75—80.
3. Bosanquet, L. S., Note on a theorem of M. Riesz. Proc. London Math. Soc., (3), 1951, **1**, 453—**461**.
4. Chow, H. C., Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1954, **29**, 459—476.
5. Hamilton, H. J., Transformations of multiple sequences. Duke Math. J., 1936, **2**, 29—60.
6. Барон С., О множителях суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро. Науч. докл. высш. школы. Физ.-мат. н., 1958, **5**, 19—20.
7. Барон С. А., Множители суммируемости для двойных рядов, автореферат диссертации. Тарту, 1959.
8. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, 1960, **9**, 47—68.
9. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых методом Чезаро. Докл. АН СССР, 1959, **124**, 751—753.
10. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 3—49.

Поступило
6 IV 1960

SUMMEERUVUSTEGURID REAALSET JÄRKU CESÀRO MENETLUSEGA SUMMEERUVATE VÕI TÕKESTATUD KAHEKORDSETE RIDADE JAOKS

S. Baron
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis üldistatakse töö [10] teoreemid 5—13 juhule, kus järgud $\alpha, \beta \geqslant 0$ on reaalarvud (teoreemide 5—7 üldistamisel on kasutatud artikli [8] tõestusmeetodit), ning teiselt poolt artikli [10] teoreemid 10—13 juhule, kus s, t on kompleksarvud. Antakse ka tuntud Jenseni teoreemi ([2], lk. 77) üldistusi.

Üldistatakse kahekordsetele jadadele ka Anderseni [1] tuntud lemma diferentside järkude summa kohta.

SUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR DOPPELREIHEN, DIE CESÀRO-SUMMIERBAR REELLER ORDNUNGEN ODER CESÀRO-BESCHRÄNKT SIND

S. Baron

Zusammenfassung

In dem vorliegendem Aufsatz werden die Theoreme 5—13 der Arbeit [10] auf reelle Ordnungen α, $\beta \geqslant 0$ und, andrerseits, die Theoreme 10—13 aus [10] auch auf komplexe s, t übertragen. Nachher wird der bekannte Satz von Jensen ([2], S. 77) verallgemeinert. Um die Theoreme 5—7 aus [10] zu verallgemeinern, benutzen wir die Beweismethode des Artikels [8]. Auch wird der bekannte Differenzensatz von Andersen [1] auf Doppelfolgen übertragen.

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ И АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ, АБСОЛЮТНО СУММИРУЕМЫХ МЕТОДОМ ЧЕЗАРО

С. Барон
Кафедра математического анализа

§ 1. Неэффективные точные условия

В настоящей статье изучаются множители суммируемости типа[1] $(C_l^{\alpha,\beta}, D)$ для двойных рядов, где D означает один из классов $C^{\gamma,\delta}$-, $C_b^{\gamma,\delta}$-, $C_r^{\gamma,\delta}$- или $C_l^{\gamma,\delta}$-суммируемых двойных рядов, причем $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$ — произвольные[2] вещественные числа. Напомним, что *двойной ряд*

$$\sum_{m,n} u_{mn} \tag{1}$$

называется абсолютно $C^{\alpha,\beta}$*-суммируемым* (*коротко* $C_l^{\alpha,\beta}$*-суммируемым*) *при* $\alpha, \beta > -1$, *если двойной ряд*

$$\sum_{m,n} u'_{mn} \tag{2}$$

сходится абсолютно, где[3]

$$u'_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \frac{\mu\nu}{mn} \frac{A_{m-\mu}^{\alpha-1} A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}} u_{\mu\nu}. \tag{3}$$

Поставленную проблему будем (также, как в статье [10]) решать методом обратного преобразования. При этом, сначала найдем точные условия для множителей суммируемости типов

---

[1] В настоящей статье придерживаемся определений и обозначений, использованных в [7, 8, 10, 13]. Определение множителей суммируемости см. [13], стр. 3, или [8], стр. 7.

[2] В статье [7] поставленная проблема решена лишь для целых $\alpha, \beta \geqslant 0$.

[3] См. [12], стр. 34—35. Здесь и всюду в дальнейшем считаем $\frac{0}{0} = 1$.

$(C_l^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$ и $(C_l^{\alpha,\beta}, C_l^{\gamma,\delta})$, а потом докажем, что они совпадают, чем и будет решена проблема множителей суммируемости типа $(C_l^{\alpha,\beta}, D)$.

Чтобы найти множители суммируемости типа $(C_l^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, мы, по определению множителей суммируемости [1], должны найти точные условия для того, чтобы из абсолютной сходимости двойного ряда (2) всегда следовала сходимость двойной последовательности

$$U''_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \frac{A_{m-\mu}^{\gamma} A_{n-\nu}^{\delta}}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \varepsilon_{\mu\nu} u_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Нахождение этих условий нетрудно свести к исследованию некоторого матричного преобразования двойного ряда в двойную последовательность, так как при помощи обратной матрицы метода Чезаро из (3) получаем [4]

$$u_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \frac{\mu\nu}{mn} A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} A_{m-\mu}^{-\alpha-1} A_{n-\nu}^{-\beta-1} u'_{\mu\nu}, \tag{5}$$

а, вставляя (5) в (4), сразу получаем

$$U''_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} \mathfrak{E}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} \cdot u'_{\mu\nu}, \tag{6}$$

где

$$\mathfrak{E}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} = \mu\nu \sum_{k,l=\mu,\nu}^{m,n} A_{k-\mu}^{-\alpha-1} A_{l-\nu}^{-\beta-1} \frac{A_{m-k}^{\gamma} A_{n-l}^{\delta}}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \frac{\varepsilon_{kl}}{kl}.$$

Проблему нахождения множителей суммируемости типа $(C_l^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$ мы можем теперь сформулировать так: каким условиям должны удовлетворять числа ε_{mn} для того, чтобы преобразование (6) переводило все абсолютно сходящиеся двойные ряды (2) в сходящиеся последовательности (4). Применяя к преобразованию (6) условия Кулля ([14], стр. 21) для линейного преобразования $l \to c$, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(C_l^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, необходимы и достаточны условия*

$$A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} |\mathfrak{E}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}| = O(1) \quad (m, n \geqslant N;\ \mu, \nu = 0, 1, \ldots), \tag{b^3}$$

существует предел

$$\lim_{m,n} \mathfrak{E}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}. \tag{d^1}$$

---

[4] Ср. [2], стр. 465; или [6], стр. 146.

Далее, чтобы найти множители суммируемости типа $(C_l^{\alpha,\beta},\ C_l^{\gamma,\delta})$, мы должны найти точные условия для того, чтобы из абсолютной сходимости двойного ряда (2) всегда следовала абсолютная сходимость двойного ряда

$$\sum_{m,n} u''_{mn},$$

где

$$u''_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \frac{\mu\nu}{mn} \frac{A_{m-\mu}^{\gamma-1} A_{n-\nu}^{\delta-1}}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \varepsilon_{\mu\nu} u_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Нахождение этих условий нетрудно свести к исследованию некоторого матричного преобразования двойного ряда в двойной ряд, так как, вставляя (5) в (7), сразу находим

$$u''_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \mathfrak{G}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} \cdot u'_{\mu\nu}, \tag{8}$$

где

$$\mathfrak{G}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{\mu\nu}{mn} \sum_{k,l=\mu,\nu}^{m,n} A_{k-\mu}^{-\alpha-1} A_{l-\nu}^{-\beta-1} \frac{A_{m-k}^{\gamma-1} A_{n-l}^{\delta-1}}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \varepsilon_{kl}.$$

Применяя к преобразованию (8) условия Кулля ([14], стр. 21) для линейного преобразования $l \to l$, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(C_l^{\alpha,\beta},\ C_l^{\gamma,\delta})$, необходимо и достаточно условие*

$$\sum_{m,n=\mu,\nu}^{\infty} |\mathfrak{G}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}| = O[(\mu+1)^{-\alpha}(\nu+1)^{-\beta}]. \tag{g^1}$$

Условия теорем 1 и 2 неэффективны: их практически трудно проверять. Поэтому нашей дальнейшей задачей является: пользуясь теоремами 1 и 2, найти другие, более эффективные точные условия для нашей проблемы.

Принимая во внимание, что условия, необходимые для множителей суммируемости типа[5] $(C_l^{\alpha,\beta},\ C^{\gamma,\delta})$, подавно необходимы для типов $(C_l^{\alpha,\beta},\ C_b^{\gamma,\delta})$, $(C_l^{\alpha,\beta},\ C_r^{\gamma,\delta})$ и $(C_l^{\alpha,\beta},\ C_l^{\gamma,\delta})$; а условия, достаточные для типа $(C_l^{\alpha,\beta},\ C_l^{\gamma,\delta})$, подавно достаточны для типов $(C_l^{\alpha,\beta},\ C^{\gamma,\delta})$, $(C_l^{\alpha,\beta},\ C_b^{\gamma,\delta})$ и $(C_l^{\alpha,\beta},\ C_r^{\gamma,\delta})$, то в последующем рассуждении из теоремы 1 выведем эффективные необходимые условия для типа $(C_l^{\alpha,\beta},\ C^{\gamma,\delta})$, а затем докажем, что из последних необходимых условий вытекает условие (g^1) теоремы 2.

[5] См. [12], § 3, теоремы 1 и 5.

§ 2. Нахождение эффективных необходимых условий

Для нахождения эффективных необходимых условий нам нужны следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $r\text{-}\lim\limits_{m,n} e_{mn} = 0$ *и для* $\alpha, \beta \geqslant 0$

$$\Delta_{mn}^{\alpha\beta} e_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha-1}(n+1)^{-\beta-1}], \tag{9}$$

то при $0 \leqslant \sigma, \tau \leqslant 1$ *и* $\alpha - \sigma, \beta - \tau \geqslant 0$ *имеет место*

$$\Delta_{mn}^{-\alpha-\beta}(\Delta_{mn}^{\alpha\beta} e_{mn}) = \Delta_{mn}^{-\alpha+\sigma-\beta+\tau}(\Delta_{mn}^{\alpha-\sigma\,\beta-\tau} e_{mn}).$$

Доказательство. Обозначив $e_{\mu+m,\nu+n} = e'_{\mu\nu}$, по лемме 1 и формуле (2) статьи [10] имеем

$$\Delta_{mn}^{-\alpha+\sigma-\beta+\tau}(\Delta_{mn}^{\alpha-\sigma\,\beta-\tau} e_{mn}) = \sum_{\mu,\nu} A_\mu^{\alpha-\sigma-1} A_\nu^{\beta-\tau-1} \Delta_{\mu\nu}^{-\sigma-\tau}(\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} e'_{\mu\nu}) =$$

$$= \sum_{\mu,\nu} A_\mu^{\alpha-\sigma-1} A_\nu^{\beta-\tau-1} \sum_{k,\,l=\mu,\nu}^{\infty} A_{k-\mu}^{\sigma-1} A_{l-\nu}^{\tau-1} \Delta_{kl}^{\alpha\beta} e'_{kl} =$$

$$= \sum_{k,l} \Delta_{kl}^{\alpha\beta} e'_{kl} \sum_{\mu,\nu=0}^{k,l} A_{k-\mu}^{\sigma-1} A_{l-\nu}^{\tau-1} A_\mu^{\alpha-\sigma-1} A_\nu^{\beta-\tau-1} =$$

$$= \Delta_{mn}^{-\alpha-\beta}(\Delta_{mn}^{\alpha\beta} e_{mn}).$$

Перестановка порядка суммирования оправдана, ибо из условия (9) обнаруживаем[6], что

$$\sum_{\mu,\nu} A_\mu^{\alpha-\sigma-1} A_\nu^{\beta-\tau-1} \sum_{k,\,l=\mu,\nu}^{\infty} A_{k-\mu}^{\sigma-1} A_{l-\nu}^{\tau-1} |\Delta_{kl}^{\alpha\beta} e'_{kl}| =$$

$$= O(1) \sum_{\mu,\nu} A_\mu^{\alpha-\sigma-1} A_\nu^{\beta-\tau-1} \sum_{k,\,l=\mu,\nu}^{\infty} \frac{A_{k-\mu}^{\sigma-1} A_{l-\nu}^{\tau-1}}{A_k^{\alpha+1} A_l^{\beta+1}} = O(1).$$

Лемма 2. *Если при* $\alpha \geqslant 0$ *выполнены условия* $\varepsilon_m = O(1)$ *и*

$$\Delta_m^\alpha \frac{\varepsilon_m}{m} = O[(m+1)^{-\alpha-1}] \quad (m \geqslant 1),$$

то имеет место

$$\Delta_m^\alpha \varepsilon_m = O[(m+1)^{-\alpha}].$$

Доказательство дано в [5], стр. 419—420.

---

[6] Здесь и часто в дальнейшем применяем без ссылок на нее формулу (58) из статьи [10].

Следующая лемма дает одно общее относительно некоторых методов суммирования необходимое условие для множителей суммируемости.

Лемма 3. *Пусть X — метод, сохраняющий абсолютную сходимость, и $У = (\beta_{mn\mu\nu})$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{m,n} \beta_{mn\mu\nu} = 1. \tag{10}$$

Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(X_l, У)$, необходимо выполнение условия (A).

Доказательство. Преобразование

$$U''_{mn} = \sum_{\mu,\nu} a_{mn\mu\nu} u_{\mu\nu}$$

с $a_{mn\mu\nu} = \beta_{mn\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}$ должно преобразовать все абсолютно сходящиеся ряды (1) в сходящиеся последовательности. Из условий для преобразования $l \to c$ (см. [14], стр. 21) и условия (10) вытекает условие (A).

Лемма 4. *Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(C_l^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, необходимы условия* (A), (D), (D^1), (D^2) *и*

$$\Delta_{mn}^{\alpha\beta}\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha}(n+1)^{-\beta}], \tag{J}$$

$$\Delta_m^{\alpha}\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha}(n+1)^{\delta-\beta}], \tag{K_1}$$

$$\Delta_n^{\beta}\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{-\beta}], \tag{K_2}$$

$$\Delta_m^{\alpha}\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha}], \tag{K_1^2}$$

$$\Delta_n^{\beta}\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\beta}]. \tag{K_2^1}$$

Доказательство. Необходимость условия (A) вытекает из леммы 3.

1. Доказательство необходимости условия (J). В случае $m = n = 0$ условие (J) содержится в условии (A).

Далее, переходя к пределу при $m, n \to \infty$ в выражении

$$\mathfrak{E}_{mn}\varepsilon_{\mu 0} = \mu \sum_{k=\mu}^{m} A_{k-\mu}^{-\alpha-1} \frac{A_{m-k}^{\gamma}}{A_m^{\gamma}} \frac{\varepsilon_{k0}}{k} \quad (\mu \geqslant 1),$$

согласно лемме 3 и теореме 1, из условий (A) и (b^3) выводим, что необходимо

$$\Delta_{\mu}^{\alpha} \frac{\varepsilon_{\mu 0}}{\mu} = O[(\mu+1)^{-\alpha-1}],$$

откуда и из (A), согласно лемме 2, вытекает

$$\Delta_{\mu}^{\alpha}\varepsilon_{\mu 0} = O[(\mu+1)^{-\alpha}],$$

и, следовательно, необходимо

$$\Delta_{m0}^{\alpha\beta}\varepsilon_{m0} = O[(m+1)^{-\alpha}]. \tag{11}$$

Аналогично доказывается необходимость условия

$$\Delta_{0n}^{\alpha\beta}\varepsilon_{0n} = O[(n+1)^{-\beta}]. \tag{12}$$

Взяв, далее, в условии (b^3) $\mu, \nu \geqslant 1$ и переходя в нем к пределу при $m, n \to \infty$, согласно теореме 1 и лемме 3, получаем необходимое условие

$$\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu\nu} = O[(\mu+1)^{-\alpha-1}(\nu+1)^{-\beta-1}] \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Если $\alpha = \beta = 0$, то (J) равносильно условию (A). Если, например, $\alpha \geqslant 0$ и $\beta = 0$, то (J) следует из (A) и (13) по лемме 2. Поэтому предположим $\alpha, \beta > 0$ и докажем, что из условий (A) и (13) вытекает необходимость условия

$$\varepsilon_{mn} = mn\,\Delta_{mn}^{-\alpha-\beta}\left(\Delta_{mn}^{\alpha\beta}\frac{\varepsilon_{mn}}{mn}\right) \quad (m, n = 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

а из (14), в свою очередь, условие (J).

Не ограничивая общности, можем считать $\alpha \geqslant \beta$. Положим

$$\frac{\varepsilon_{mn}}{mn} = e_{mn}, \quad \sigma = \frac{\alpha}{a+1} < 1, \quad \tau = \frac{\beta}{a+1} < 1.$$

В силу включений[7]

$$C_l^{\alpha-j\sigma,\,\beta-j\tau} \subset C_l^{\alpha,\beta} \quad (j = 0, \ldots, a+1),$$

из (13) выводим необходимость условий

$$\Delta_{mn}^{\alpha-j\sigma\;\beta-j\tau}e_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha+j\sigma-1}(n+1)^{-\beta+j\tau-1}] \quad (j = 0, \ldots, a+1). \tag{15}$$

Применяя последовательно лемму 1, что допустимо, ввиду необходимости условий (A) и (15), находим

$$\Delta_{mn}^{-\alpha-\beta}(\Delta_{mn}^{\alpha\beta}e_{mn}) = \Delta_{mn}^{-\alpha+\sigma\;-\beta+\tau}(\Delta_{mn}^{\alpha-\sigma\;\beta-\tau}e_{mn}) =$$

$$= \ldots = \Delta_{mn}^{-\sigma-\tau}(\Delta_{mn}^{\sigma\tau}e_{mn}) = e_{mn},$$

и необходимость условия (14) доказана.

---

[7] См. [11], теорема 1. Хотя формулировка этой теоремы утверждает включение $C_l^{\alpha,\beta} \subset C_l^{\alpha+h,\beta+\eta}$ лишь при $h, \eta > 0$, но доказан в ней фактически и случай $h, \eta \geqslant 0$.

Далее, обозначив

$$\Delta_{mn}^{\alpha\beta} e_{mn} = g_{mn} \quad (m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

при помощи формулы

$$\sum_{\varrho=0}^{n} \varrho A_{\varrho}^{\varkappa} A_{n-\varrho}^{\lambda} = (\varkappa + 1) A_{n-1}^{\varkappa+\lambda+2},$$

и формул (2) и (58) статьи [10], из необходимости условий (14) и (13) заключаем

$$\Delta_{mn}^{\alpha\beta} \varepsilon_{mn} = \sum_{\mu,\nu=m,\,n}^{\infty} A_{\mu-m}^{-\alpha-1} A_{\nu-n}^{-\beta-1} \mu\nu \sum_{\varkappa,\,\lambda=\mu,\,\nu}^{\infty} A_{\varkappa-\mu}^{\alpha-1} A_{\lambda-\nu}^{\beta-1} g_{\varkappa\lambda} =$$

$$= \sum_{\varkappa,\,\lambda=m,\,n}^{\infty} g_{\varkappa\lambda} \sum_{\mu=0}^{\varkappa-m} A_{\varkappa-m-\mu}^{\alpha-1} A_{\mu}^{-\alpha-1} (m+\mu) \sum_{\nu=0}^{\lambda-n} A_{\lambda-n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu}^{-\beta-1} (n+\nu) =$$

$$= \alpha\beta \sum_{\varkappa,\,\lambda=m+1,\,n+1}^{\infty} g_{\varkappa\lambda} - \beta m \sum_{\lambda=n+1}^{\infty} g_{m\lambda} - \alpha n \sum_{\varkappa=m+1}^{\infty} g_{\varkappa n} + mn g_{mn} =$$

$$= O[(m+1)^{-\alpha}(n+1)^{-\beta}],$$

ибо в силу формулы (58) статьи [10] и необходимости условия (13) (ср. доказательство леммы 1) перестановка порядка суммирования оправдана. Отсюда и из (11) и (12) следует необходимость условия (J).

2. Доказательство необходимости условий (K). Из условия (J) при $\beta = 0$ (в силу включения $C_l^{\alpha,0} \subset C_l^{\alpha,\beta}$) вытекает необходимость условия (K_1^2).

Далее, поскольку

$$A_{\mu}^{\alpha} A_{n}^{\beta} \mathfrak{E}_{mn} \varepsilon_{\mu n} = \mu A_{\mu}^{\alpha} \frac{A_n^{\beta}}{A_n^{\delta}} \sum_{k=\mu}^{m} A_{k-\mu}^{-\alpha-1} \frac{A_{m-k}^{\gamma}}{A_m^{\gamma}} \frac{\varepsilon_{kn}}{k},$$

то из условия (A) и условия (b^3) теоремы 1 получаем (при $m \to \infty$)

$$\Delta_{\mu}^{\alpha} \frac{h_{\mu n}}{\mu} = O[(\mu+1)^{-\alpha-1}] \quad (\mu \geqslant 1,\ n \geqslant N), \tag{16}$$

где обозначено

$$h_{mn} = \frac{A_n^{\beta}}{A_n^{\delta}} \varepsilon_{mn}.$$

Так как

$$A_n^{\beta} \mathfrak{E}_{mn} \varepsilon_{0n} = h_{0n},$$

то из условия (b^3) теоремы 1 и (в силу включения $C_l^{0,\beta} \subset C_l^{\alpha,\beta}$) из (16) при $\alpha = 0$ обнаруживаем, что необходимо

$$h_{mn} = O(1) \qquad (m = 0, 1, \ldots ; \; n \geqslant N).$$

Из последнего условия и (16) по лемме 2 выводим

$$\Delta_m^{\alpha} h_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha}] \qquad (m = 0, 1, \ldots ; \; n \geqslant N).$$

Последнее вместе с условием (K_1^2) дает условие (K_1).

Аналогично доказывается необходимость условий (K_2^1) и (K_2).

3. Доказательство необходимости условий (D). В силу соответствующих включений из условий (K_1) и (K_2) вытекает необходимость условий (D^1) и (D^2), которые, вместе с вытекающим из условия (b^3) теоремы 1 условием

$$A_m^{\alpha} A_n^{\beta} |\mathfrak{E}_{mn} \varepsilon_{mn}| = \frac{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} |\varepsilon_{mn}| = O(1) \qquad (m, \; n \geqslant N),$$

дают условие (D).

Лемма 4 доказана.

§ 3. Некоторые следствия из необходимых условий

Лемма 4 дает эффективные необходимые условия для множителей суммируемости типа ($C_l^{\alpha,\beta}$, D). Оказывается, что эти найденные необходимые условия влекут за собой условие (g^1) теоремы 2 и являются тем самым и достаточными для множителей суммируемости типа ($C_l^{\alpha,\beta}$, D). Предварительной работой для доказательства последнего являются следующие[8] две леммы.

Лемма 5. *Из условий* (A) *и* (J) *для всех* $0 < \sigma, \tau \leqslant \alpha, \beta$ *следует*

$$\Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\sigma} (n+1)^{-\tau}].$$

Доказательство. Пусть утверждение леммы 5 имеет место для некоторых $\sigma = \varkappa$, $\tau = \lambda$, где $0 < \varkappa, \lambda \leqslant \alpha, \beta$. В таком случае при $0 \leqslant s, t < 1$ с $\varkappa - s, \lambda - t > 0$ по условию (A), в силу леммы 1 статьи [10], получаем

$$|\Delta_{mn}^{\varkappa - s \; \lambda - t} \varepsilon_{mn}| = |\Delta_{mn}^{-s \; -t} (\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda} \varepsilon_{mn})| =$$

$$= \sum_{\mu, \nu = m, n}^{\infty} A_{\mu - m}^{s-1} A_{\nu - n}^{t-1} O[(\mu+1)^{-\varkappa} (\nu+1)^{-\lambda}] =$$

$$= O(1) \sum_{\mu, \nu = m, n}^{\infty} \frac{A_{\mu - m}^{s-1} A_{\nu - n}^{t-1}}{A_{\mu}^{\varkappa} A_{\nu}^{\lambda}} = O[(m+1)^{-\varkappa + s} (n+1)^{-\lambda + t}].$$

[8] Лемма 5 опубликована без доказательства в [7].

Если теперь, например, $\alpha - \sigma \geqslant \beta - \tau$, то, согласно доказанному, положив

$$s = \frac{\alpha - \sigma}{[\alpha - \sigma + 1]} < 1, \quad t = \frac{\beta - \tau}{[\alpha - \sigma + 1]} < 1$$

и придав $\varkappa$, λ последовательно значения

$$\varkappa = \alpha, \alpha - s, \ldots, \sigma + s, \sigma, \quad \lambda = \beta, \beta - t, \ldots, \tau + t, \tau,$$

из условий (A) и (J) заключаем утверждение леммы.

Лемма 6. *Из условий* (A) *и* (K_1) *для всех* $0 < \sigma \leqslant \alpha$ *вытекает*

$$\Delta_m^\sigma \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\sigma}(n+1)^{\delta-\beta}],$$

а из условий (A) *и* (K_2) *для всех* $0 < \tau \leqslant \beta$

$$\Delta_n^\tau \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{-\tau}].$$

Доказательство по существу такое же, как у леммы 5. Положив, например, в первой части леммы 6 $n = 0$, получаем известную лемму Бозанкет-Чжоу, впервые доказанную в [1] для целых α, σ, затем в [2] для произвольных α, σ.

§ 4. Множители суммируемости типа $(C_l^{\alpha,\beta}, D)$

Принимая во внимание все сказанное в конце § 1, для нахождения множителей суммируемости типа $(C_l^{\alpha,\beta}, D)$, согласно теореме 2, нам остается доказать, что условия леммы 4 влекут за собой условие (g^1) теоремы 2.

В зависимости от соотношений между α, β и γ, δ, рассмотрим отдельно четыре случая.

A. Пусть $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$. Докажем, что условие ($g^1$) вытекает из условий (J), (K) и (D). Доказательство последнего в основном опирается на лемму 1 статьи [10] и леммы 5 и 6.

Аналогично формуле (5) статьи [10] легко показать, что *имеет место*

$$\mathfrak{G}_{mn}^* \varepsilon_{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{a,b} \binom{a}{i}\binom{b}{j} \sum_{k,l=\mu,\nu}^{m-i,n-j} A_{k-\mu}^{a-\alpha-1} A_{l-\nu}^{b-\beta-1} A_{m-i-k}^{i+\gamma-a-1} A_{n-j-l}^{j+\delta-b-1} \Delta_{kl}^{ij} \varepsilon_{kl}, \tag{17}$$

где

$$\mathfrak{G}_{mn}^* \varepsilon_{\mu\nu} = \frac{mn}{\mu\nu} A_m^\gamma A_n^\delta \mathfrak{G}_{mn} \varepsilon_{\mu\nu}.$$

Из формулы (17) заключаем, что вместо условия (g^1) теоремы 2 можем из условий (J), (K) и (D) вывести соотношение[9]

[9] В последующем доказательстве все здесь неопределяемые операторы имеют те же значения, что и в статье [10], а вводя новые операторы, сохраняем сходство с суммами статьи [9]. Тем самым будем пользоваться всеми оценками, выведенными в § 1 статьи [9], обычно без ссылок на них в каждом отдельном случае.

$$\sum_{i,\,j=0}^{a,\,b} Y|B_2^j B_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = O(1), \tag{18}$$

где

$$Yc_{\mu\nu} = (\mu+1)^{\alpha+1}(\nu+1)^{\beta+1} \sum_{m,\,n=\mu,\,\nu}^{\infty} \frac{1}{A_m^{\gamma+1} A_n^{\delta+1}} c_{\mu\nu},$$

поскольку непосредственно по условию (D)

$$\sum_{m,\,n=\mu,\,\nu}^{\mu+a,\,\nu+b} |\mathfrak{G}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}| = O[(\mu+1)^{-\alpha}(\nu+1)^{-\beta}],$$

а по условиям (D) и (K_1) в силу доказательства соответствующей теоремы для простых рядов [10]

$$\sum_{m,\,n=\mu+a+1,\,\nu}^{\infty,\,\nu+b} |\mathfrak{G}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}| =$$

$$= O[(\nu+1)^{-\delta}] \sum_{m=\mu+a+1}^{\infty} \frac{\mu}{mA_m^{\gamma}} \Big| \sum_{k=\mu}^{m} A_{k-\mu}^{-\alpha-1} A_{m-k}^{\gamma-1} \varepsilon_{k\nu} \Big| =$$

$$= O[(\mu+1)^{-\alpha}(\nu+1)^{-\beta}],$$

и, аналогично, по условиям (D) и (K_2)

$$\sum_{m,\,n=\mu,\,\nu+b+1}^{\mu+a,\,\infty} |\mathfrak{G}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}| = O[(\mu+1)^{-\alpha}(\nu+1)^{-\beta}].$$

Чтобы вывести соотношение (18) из условий (J), (K) и (D), разобьем сумму (18), в зависимости от поведения чисел $A_m^{i+\gamma-a-1}$ и $A_n^{j+\delta-b-1}$ в ней, аналогично (7) в статье [10] (и по тем же причинам) на девять слагаемых согласно следующей схеме:

$$\sum_{i,\,j=0}^{a,\,b} B_2^j B_1^i =$$

$$= \Big(\sum_{i,\,j=0}^{P,\,Q} + \sum_{i,\,j=a-c+1,\,0}^{a,\,Q} + \sum_{i,\,j=0,\,b-d+1}^{P,\,b} + \sum_{i,\;j=a-c+1,\,b-d+1}^{a,\,b} \Big) B_2^j B_1^i +$$

$$+ \sum_{j=0}^{Q} B_2^j B_1^{a-c} + \sum_{i=0}^{P} B_2^{b-d} B_1^i + B_2^{b-d} B_1^{a-c} + \tag{19}$$

$$+ \sum_{i=a-c+1}^{a} B_2^{b-d} B_1^i + \sum_{j=b-d+1}^{b} B_2^j B_1^{a-c}.$$

---

[10] Ср. теорему 1 с формулой (12) в статье [5], или теорему 1 с формулой (3) в статье [9].

По лемме 5 условия (A) и (J) влекут за собой

$$\sum_{i,\ j=a-c+1,\ b-d+1}^{a,\ b} Y|C_2^j C_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = O(1),$$

ибо здесь на $\varepsilon_{\mu\nu}$ действуют два «однотипных» оператора.

Далее, если $\alpha > a$, аналогично (21) имеем

$$\sum_{i,\ j=a-c+1,\ b-d+1}^{a,\ b} Y|C_2^j D_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = O[(\mu+1)^{\alpha+1}(\nu+1)^{j+\beta-b}] \cdot$$

$$\cdot \sum_{i,\ j=a-c+1,\ b-d+1}^{a,\ b} \sum_{m=\mu}^{\infty} \frac{1}{A_m^{\gamma+1}} \sum_{\varkappa=0}^{m-\mu} A_\varkappa^{i+\gamma-a-2} \sum_{k=m-\mu-\varkappa+1}^{\infty} |A_k^{a-\alpha-1} \Delta_{k\nu}^{ij+\beta-b} \varepsilon_{k+\mu,\ \nu}|,$$

ограниченность которого вытекает, согласно лемме 5, из условий (A) и (J).

Таким же образом из условий (A) и (J) выводим

$$\sum_{i,\ j=a-c+1,\ b-d+1}^{a,\ b} Y|D_2^j C_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = O(1) \quad \text{при } \beta > b,$$

$$\sum_{i,\ j=a-c+1,\ b-d+1}^{a,\ b} Y|D_2^j D_1^i \varepsilon_{\mu\nu}| = O(1) \quad \text{при } \alpha,\ \beta > a,\ b.$$

5. Для оценки пятого слагаемого схемы (19) разобьем его, соответственно соотношению (31) статьи [10], на две части.

Положив в (20) $a_{\mu\nu} = E_1 \varepsilon_{\mu\nu}$, получаем

$$\sum_{j=0}^{Q} Y|B_2^j E_1 \varepsilon_{\mu\nu}| = O[(\mu+1)^{\alpha+1}(\nu+1)^{\beta-\delta}] \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{Q} \sum_{m=\mu}^{\infty} \frac{1}{A_m^{\gamma+1}} |A_{m-\mu}^{\varkappa-1}| \sum_{l=\nu}^{\infty} |A_{l-\nu}^{b-\beta-1} \Delta_{ml}^{a-cj} \varepsilon_{m+1,\ l}|,$$

вследствие чего его ограниченность следует из условия (D) при $x \leqslant 0$ и из условий (A) и (K_1) по лемме 6 при $x > 0$. Далее, согласно лемме 1 статьи [10], из условия (A) заключаем

$$F_1 = C_1^{a-c} + H_1 + I_1, \tag{22}$$

где [11]

$$H_1 b_{\mu\nu} = \sum_{s=m+1}^{\infty} \Delta_s^{\alpha-c} b_{s\nu} \sum_{k=\mu}^{m} A_{s-k}^{\alpha-a-2} \sum_{\varkappa=\mu}^{k} A_{\varkappa-\mu}^{a-\alpha-1} A_{m-\varkappa}^{\gamma-c-1},$$

$$I_1 b_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=\mu}^{m} A_{m-\varkappa}^{\gamma-c-2} \sum_{s=\varkappa+1}^{m} \Delta_s^{\alpha-c} b_{s\nu} \sum_{p=\mu}^{\varkappa} A_{s-p}^{\alpha-a-1} A_{p-\mu}^{a-\alpha-1}.$$

---

[11] Так как в случае $\alpha = a$ справедливо равенство $B_1^{a-c} = C_1^{a-c}$, то из (22) заключаем, что операторы H_1 и I_1 нам надо оценивать лишь в случае $\alpha > a$.

Оценить оператор H_1 так, как на стр. 54 статьи [9], нам здесь не целесообразно. Для оценки оператора H_1 при $\alpha > a$ выберем некоторое число η такое, чтобы $0 < \eta < \eta'$, где $\eta' = \min(\alpha - a, \gamma - c)$. Тогда, принимая во внимание соотношение (12) и последующую оценку для суммы H' на стр. 65 статьи [9], ввиду (22) получаем

$$\sum_{m=\mu}^{\infty} \frac{1}{A_m^{\gamma+1}} |F_1 b_{\mu\nu}| =$$

$$= \begin{cases} O(1) \sum\limits_{m=\mu}^{\infty} \dfrac{1}{A_m^{\gamma+1}} \left\{ A_{m-\mu}^{\gamma-c-1} (|\Delta_\mu^{\alpha-c} b_{\mu\nu}| + |\Delta_m^{\alpha-c} b_{m\nu}|) + \right. \\ \left. + A_{m-\mu}^{\gamma-c-\eta-1} \sum\limits_{s=m}^{\infty} A_{s-m}^{\eta-1} |\Delta_s^{\alpha-c} b_{s\nu}| \right\} \quad \text{при } \alpha > a, \\ O(1) \sum\limits_{m=\mu}^{\infty} \dfrac{1}{A_m^{\gamma+1}} A_{m-\mu}^{\gamma-c-1} |\Delta_\mu^{\alpha-c} b_{\mu\nu}| \qquad \text{при } \alpha = a. \end{cases} \tag{23}$$

Положив сначала в (20) $a_{\mu\nu} = F_1 \varepsilon_{\mu\nu}$, а потом в (23) $b_{\mu\nu} = \Delta_\nu^j \varepsilon_{\mu\nu}$, в случае $\alpha > a$, например, находим

$$\sum_{j=0}^{Q} Y |B_2^j F_1 \varepsilon_{\mu\nu}| =$$

$$= O[(\mu+1)^{\alpha+1} (\nu+1)^{\beta-\delta}] \sum_{j=0}^{Q} \sum_{l=\nu}^{\infty} |A_{l-\nu}^{b-\beta-1}| \sum_{m=\mu}^{\infty} \frac{1}{A_m^{\gamma+1}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ A_{m-\mu}^{\gamma-c-1} (|\Delta_{\mu\nu}^{\alpha-cj} \varepsilon_{\mu\nu}| + |\Delta_{m\nu}^{\alpha-cj} \varepsilon_{m\nu}|) + A_{m-\mu}^{\gamma-c-\eta-1} \sum_{s=m}^{\infty} A_{s-m}^{\eta-1} |\Delta_{s\nu}^{\alpha-cj} \varepsilon_{s\nu}| \right\},$$

ограниченность которого вытекает из условий (A) и (K_1) по лемме 6.

6. Аналогично можем доказать, что условия (D) и (K_2) влекут за собой оценку для шестого слагаемого схемы (19).

7. Чтобы доказать оценку для седьмого слагаемого схемы (19), разобьем его, соответственно соотношению (36) статьи [10], на четыре части.

Оценку

$$Y |E_2 E_1 \varepsilon_{\mu\nu}| = O(1)$$

заключаем при $x, y \leqslant 0$ из условия (D); при $x \leqslant 0, y > 0$ по лемме 6 из условий (A) и (K_2); при $x > 0, y \leqslant 0$ по лемме 6 из условий (A) и (K_1); при $x, y > 0$ по лемме 5 из условий (A) и (J).

Далее, положив в (23) $b_{\mu\nu} = E_2 \varepsilon_{\mu\nu}$, в случае $\alpha > a$, например; получаем

$$Y|E_2F_1\varepsilon_{\mu\nu}| = O[(\mu+1)^{\alpha+1}(\nu+1)^{\beta+1}] \sum_{m,\,n=\mu,\,\nu}^{\infty} \frac{|A_{n-\nu}^{y-1}|}{A_m^{\gamma+1}A_n^{\delta+1}} \cdot$$

$$\cdot\left\{A_{m-\mu}^{\gamma-c-1}(|\Delta_{\mu n}^{\alpha-c\ b-d}\varepsilon_{\mu,\,n+1}| + |\Delta_{mn}^{\alpha-c\ b-d}\varepsilon_{m,\,n+1}|) + \right.$$

$$\left. + A_{m-\mu}^{\gamma-c-\eta-1} \sum_{s=m}^{\infty} A_{s-m}^{\eta-1} |\Delta_{sn}^{\alpha-c\ b-d}\varepsilon_{s.\,n+1}|\right\},$$

ограниченность которого вытекает при $y \leqslant 0$ из условий (A) и (K_1) по лемме 6, а при $y > 0$ из условий (A) и (J) по лемме 5.

Оператор F_2E_1 оценивается аналогично, а, в силу (23), из условий (A) и (J) по лемме 5 выводим также

$$Y|F_2F_1\varepsilon_{\mu\nu}| = O(1).$$

В итоге мы доказали, что условия (A), (K) и (D) влекут за собой оценку для седьмого слагаемого схемы (19).

8. Применяя такие же рассуждения, как при оценке второго и шестого слагаемых схемы (19), можем из условий (A), (K_1) и (J) вывести оценку для восьмого слагаемого схемы (19).

9. Аналогично из условий (A), (K_2) и (J) вытекает оценка для девятого слагаемого схемы (19).

Б. Пусть $\gamma > \alpha$, $\delta \leqslant \beta$. Для множителей суммируемости типа $(C_l^{\alpha,\beta}, C_l^{\alpha,\delta})$ достаточны условия (J), (K_1), (K_2') и (D'). В силу включения[7] $C_l^{\alpha,\delta} \subset C_l^{\gamma,\delta}$ эти условия достаточны и для типа $(C_l^{\alpha,\beta}, C_l^{\gamma,\delta})$, а по лемме 4 и необходимы.

В. Пусть $\gamma \leqslant \alpha$, $\delta > \beta$. Аналогично случаю Б здесь необходимы и достаточны условия (J), (K_1''), (K_2) и (D'').

Г. Пусть $\gamma, \delta > \alpha, \beta$. Аналогично случаям Б и В теперь необходимы и достаточны условия (J), (K_1''), (K_2') и (A).

Итак, доказана[12]

Теорема 3. *Если* $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$, *то для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* а) $(C_l^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, б) $(C_l^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta})$, в) $(C_l^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$, г) $(C_l^{\alpha,\beta}, C_l^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* (J), (K) *и* (D).

Если $\delta > \beta$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\delta = \beta$.

Если $\gamma > \alpha$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\gamma = \alpha$.

Дополнение к теореме 3. *Если* $\delta = 0$, *то можем опустить условия* (J) *и* (K_2), *а если* $\gamma = 0$ — *условия* (J) *и* (K_1).

Доказательство очевидно.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

---

[12] Для случая целых $\alpha, \beta \geqslant 0$ теорема 3 опубликована в [7].

Теорема 4. *Если* $\varepsilon_{mn} = \varepsilon'_m \cdot \varepsilon''_n$, *то для того, чтобы числа* ε_{mn} *были при* $0 \leqslant \gamma,\ \delta \leqslant \alpha,\ \beta$ *множителями суммируемости типа* $(C_l^{\alpha,\beta},\ D)$, *необходимы и достаточны условия* (J) *и* (D).

Если $\delta > \beta$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\delta = \beta$.

Если $\gamma > \alpha$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\gamma = \alpha$.

§ 5. О некоторых конкретных множителях суммируемости

Учитывая все рассуждения и формулы § 10 статьи [13] и § 5 статьи [10], можем из теоремы 4 вывести следующую теорему.

Теорема 5. *Числа* а) $x^m y^n (x, y \neq 0, 1)$, б) $(m+1)^{-s}(n+1)^{-t}$ $(s, t \neq 0)$, в) $(A_m^s A_n^t)^{-1}$ $(s, t \neq 0)$, г) $(-1)^{m+n}\ (m+1)^{-s}(n+1)^{-t}$, д) $(-1)^{m+n}\ (A_m^s A_n^t)^{-1}$, *тогда и только тогда являются множителями суммируемости типа* $(C_l^{\alpha,\beta},\ D)$, *если выполнены условия* а) $|x|, |y| < 1$, *и, кроме того, в случае* $\alpha = 0$ *при* $|x| = 1$, *в случае* $\beta = 0$ *при* $|y| = 1$;
б) *или* в) $\mathrm{Re}\, s, \mathrm{Re}\, t \geqslant 0$ *и* $\mathrm{Re}\, s, \mathrm{Re}\, t \geqslant \alpha - \gamma,\ \beta - \delta$;
г) *или* д) $\mathrm{Re}\, s, \mathrm{Re}\, t \geqslant \alpha, \beta$.

Из теоремы 3 (и леммы 22 статьи [13]) вытекает

Теорема 6. *Числа* а) $(m+n+1)^{-s}$ $(s \neq 0)$, б) $(A_{m+n}^s)^{-1}$ $(s \neq 0)$, в) $(-1)^{m+n}\ (m+n+1)^{-s}$, г) $(-1)^{m+n}\ (A_{m+n}^s)^{-1}$, д) $(m+1)^{-s} + (n+1)^{-t}$ $(|s| + |t| \neq 0)$, *тогда и только тогда являются множителями суммируемости типа* $(C_l^{\alpha,\beta},\ D)$, *если выполнены условия*

а) *или* б) $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\, s \geqslant \alpha - \gamma$, $\mathrm{Re}\, s \geqslant \beta - \delta$ *и* $\mathrm{Re}\, s \geqslant \alpha + \beta - \gamma - \delta$;
в) *или* г) $\mathrm{Re}\, s \geqslant \alpha + \beta$;
д) $\mathrm{Re}\, s, \mathrm{Re}\, t \geqslant 0$ *и* $\alpha, \beta \leqslant \gamma, \delta$.

Замечание 1. Части б) и в) теоремы 5 и части а) и б) теоремы 6 являются обобщениями на двойные ряды аналогичного (правда более узкого) результата Когбетлианца [3], передоказанного Пейеримхоффом [4].

Замечание 2. Положив в части в) теоремы 5 $\gamma = \delta = 0$, $s = \alpha$, $t = \beta$ и рассмотрев аналогичным образом также случаи $s = 0$ с $t = \beta$ и $s = \alpha$ с $t = 0$, получаем следующее предложение Жака, приведенное в [11] (стр. 641) и полностью доказанное в [12] (стр. 36):

Если ряд (1) $C_l^{\alpha,\beta}$*-суммируем, то ряд* $\sum_{m,n} (A_m^\alpha A_n^\beta)^{-1} u_{mn}$ *сходится абсолютно.*

Литература

1. Bosanquet, L. S., Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1945, **20**, 39—48.
2. Chow, H. C., Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1954, **29**, 459—476.
3. Kogbetliantz, E., Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques. Bull. Sci. math., (2), 1925, **49**, 234—256.
4. Peyerimhoff, A., Über einen Satz von Herrn Kogbetliantz aus der Theorie der absoluten Cesàroschen Summierbarkeit. Arch. Math., 1952, **3**, 262—265.
5. Peyerimhoff, A., Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen. Math. Z, 1954, **59**, 417—424.
6. Peyerimhoff, A., Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren I. Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, **8**, 139—156.
7. Барон С., О множителях суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро. Научн. докл. высш. школы. Физ.-мат. н., 1958, **5**, 19—20.
8. Барон С. А., Множители суммируемости для двойных рядов, автореферат диссертации. Тарту, 1959.
9. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, 1960, **9**, 47—68.
10. Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом Чезаро вещественного порядка. Настоящий журнал, стр. 91—117.
11. Жак И. Е., Абсолютная суммируемость двойных числовых рядов. Докл. АН СССР, 1950, **73**, 639—642.
12. Жак И. Е., Тиман М. Ф., О суммировании двойных рядов Матем. сб., 1954, **35** (77), 21—56.
13. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 3—49.
14. Кулль И. Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.

Поступило
28 IV 1960

SUMMEERUVUS- JA ABSOLUUTSED SUMMEERUVUSTEGURID CESÀRO MENETLUSEGA ABSOLUUTSELT SUMMEERUVATE KAHEKORDSETE RIDADE JAOKS

S. Baron
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis leitakse kahekordsete ridade jaoks summeeruvustegurid tüüpi $(C_l^{\alpha,\beta}, D)$, kus $D = C^{\gamma,\delta}$, $C_b^{\gamma,\delta}$, $C_r^{\gamma,\delta}$ või $C_l^{\gamma,\delta}$, reaalarvuliste järkude $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$ korral. Selleks on kasutatud töö [9] tõestusmeetodit. Saadud tarvilikud ja piisavad tingimused rakendatakse 10 näite puhul.

SUMMIERBARKEITS- UND ABSOLUTE SUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR ABSOLUT CESÀRO-SUMMIERBARE DOPPELREIHEN

S. Baron

Zusammenfassung

In diesem Artikel werden Summierbarkeitsfaktoren des Typus $(C_l^{\alpha,\beta}, D)$, wo $D = C^{\gamma,\delta}$, $C_b^{\gamma,\delta}$, $C_r^{\gamma,\delta}$ oder $C_l^{\gamma,\delta}$, mit reellen Ordnungen α, β, γ, $\delta \geqslant 0$ für Doppelreihen gefunden. Dazu benutzen wir die Beweismethode der Arbeit [9]. Die erhaltenen genauen Bedingungen wenden wir in 10 Beispielen an.

МНОЖИТЕЛИ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ ЧЕЗАРО-СУММИРУЕМЫХ И ЧЕЗАРО-ОГРАНИЧЕННЫХ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

С. Барон
Кафедра математического анализа

§ 1. Неэффективные точные условия

В настоящей статье изучаются множители суммируемости типа[1] $(A,\ C_l^{\gamma,\delta})$, т. е. множители суммируемости типов а) $(C_0^{\alpha,\beta},\ C_l^{\gamma,\delta})$, б) $(C_b^{\alpha,\beta},\ C_l^{\gamma,\delta})$, в) $(C_r^{\alpha,\beta},\ C_l^{\gamma,\delta})$, которые приводят к следующей проблеме: каким условиям должны удовлетворять числа ε_{mn} для того, чтобы для любого $C^{\alpha,\beta}$-ограниченного (или $C_b^{\alpha,\beta}$-суммируемого, или $C_r^{\alpha,\beta}$-суммируемого) двойного ряда $\sum\limits_{m,\,n} u_{mn}$ двойной ряд $\sum\limits_{m,\,n} \varepsilon_{mn} u_{mn}$ был бы $C_l^{\gamma,\delta}$-суммируемым.

Поставленную проблему будем (также, как в статьях [7, 8]) решать методом обратного преобразования. Действительно, при помощи обратной матрицы метода Чезаро получаем[2]

$$u''_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,\,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \mathfrak{H}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}\cdot U'_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где

$$\mathfrak{H}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{k,\,l=\mu,\,\nu}^{m,\,n} A_{k-\mu}^{-\alpha-2} A_{l-\nu}^{-\beta-2} \frac{A_{m-k}^{\gamma-1} A_{n-l}^{\delta-1}}{mn\, A_m^\gamma A_n^\delta}\,\omega_{kl},$$

$$\omega_{mn} = mn\,\varepsilon_{mn}.$$

Нашу проблему мы можем теперь сформулировать так: каким условиям должны удовлетворять числа ε_{mn} для того, чтобы

---

[1] См. сноску [1] в статье [8].
[2] См. [8], формула (7); [9], формулы (6) и (3).

преобразование (1) переводило все r-сходящиеся (или b-сходящиеся, или ограниченные) двойные последовательности $\{U'_{\mu\nu}\}$ в абсолютно сходящиеся двойные ряды $\sum\limits_{m,\,n} u''_{mn}$. Ответ на этот вопрос дает

Лемма 1. *Для того, чтобы преобразование*

$$u''_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu} a_{mn\mu\nu}\, U'_{\mu\nu} \tag{2}$$

двойной последовательности в двойной ряд существовало и переводило все r-сходящиеся (или b-сходящиеся, или ограниченные) двойные последовательности в абсолютно сходящиеся двойные ряды, необходимо и достаточно

а) *существование постоянной M такой, что*

$$\sum_{m,\,n} \Big| \sum_{\mu,\,\nu \in \mathfrak{M}} a_{mn\mu\nu} \Big| \leqslant M \tag{k}$$

для любого $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ означает конечное множество пар неотрицательных целых чисел;

или б) *существование такой постоянной M′, чтобы для любого $\mathfrak{M}$ было*

$$\sum_{\mu,\,\nu} \Big| \sum_{m,\,n \in \mathfrak{M}} a_{mn\mu\nu} \Big| \leqslant M'; \tag{k_1}$$

или в) *чтобы для любой ограниченной последовательности $\{d_{mn}\}$ было*

$$\sum_{\mu,\,\nu} \Big| \sum_{m,\,n} a_{mn\mu\nu} d_{mn} \Big| < \infty. \tag{k_2}$$

Доказательство частей а) и б) дано И. Г. Куллем (см. [10], § 3, теорема и примечание 1).

Докажем часть в) леммы 1. Для этого[3] преобразование (2) сопоставим с преобразованием

$$u''_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu} a^*_{mn\mu\nu}\, U'_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\,\nu} a_{\mu\nu mn}\, U'_{\mu\nu}. \tag{3}$$

Поскольку

$$\sum_{m,\,n} \Big| \sum_{\mu,\,\nu \in \mathfrak{M}} a^*_{mn\mu\nu} \Big| = \sum_{\mu,\,\nu} \Big| \sum_{m,\,n \in \mathfrak{M}} a_{mn\mu\nu} \Big|,$$

то условие (k) для преобразования (3) является ни чем иным, как условие (k_1) для преобразования (2), вследствие чего, согласно а) и б), преобразования (2) и (3) одновременно переводят все ограниченные двойные последовательности в абсолютно сходящиеся двойные ряды. Для последнего, как видно из (3), необходимо и достаточно условие

$$\sum_{m,\,n} \Big| \sum_{\mu,\,\nu} a_{\mu\nu mn}\, U'_{\mu\nu} \Big| < \infty,$$

---

[3] Ср. [2], стр. 142, теорема 2.

равносильное условию (k_2). Но, так как по условиям (k) или (k_1) любое условие, необходимое для преобразования $b \to l$, также необходимо для преобразований $bc \to l$ и $rc \to l$, то тем самым лемма 1 доказана.

Применяя части б) и в) леммы 1 к преобразованию (1), сразу получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типа* $(A, C_l^{\gamma,\delta})$, *необходимо и достаточно*

а) *существование такой постоянной* M, *чтобы для любого* $\mathfrak{M}$ *было*

$$\sum_{\mu,\nu} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \Big| \sum_{m,n\in\mathfrak{M}} \mathfrak{H}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} \Big| \leqslant M, \qquad (k^1)$$

или б) *чтобы для любой ограниченной последовательности* $\{d_{mn}\}$ *было*

$$\sum_{\mu,\nu} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \Big| \sum_{m,n=\mu,\nu}^{\infty} \mathfrak{H}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}\cdot d_{mn} \Big| < \infty. \qquad (k^2)$$

Условия теоремы 1 неэффективны: их практически трудно проверять. Поэтому в дальнейших рассуждениях из условий теоремы 1 выведем более эффективные необходимые условия, а затем докажем их достаточность, и именно: докажем, что эти эффективные необходимые условия влекут за собой условие (k^1) теоремы 1.

§ 2. Эффективные необходимые условия

Лемма 2. *Для множителей суммируемости типа* $(A, C_l^{\gamma,\delta})$ *необходимы условия*[4] (A), (B),

$$\sum_{m,n} (m+1)^\alpha (n+1)^{\beta-\delta} \left| \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} \right| < \infty, \qquad (L_1)$$

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma} (n+1)^\beta \left| \Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn} \right| < \infty, \qquad (L_2)$$

$$\sum_{m,n} (m+1)^\alpha (n+1)^{-1} \left| \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} \right| < \infty, \qquad (L_1^2)$$

$$\sum_{m,n} (m+1)^{-1} (n+1)^\beta \left| \Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn} \right| < \infty, \qquad (L_2^1)$$

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma} (n+1)^{\beta-\delta} |\varepsilon_{mn}| < \infty, \qquad (M)$$

$$\sum_{m,n} (m+1)^{-1} (n+1)^{\beta-\delta} |\varepsilon_{mn}| < \infty, \qquad (M^1)$$

---

[4] Условия (L_1^2) и (M^2) — это условия (L_1) и (M) при $\delta = \beta + 1$; условия (L_2^1) и (M^1) — это условия (L_2) и (M) при $\gamma = \alpha + 1$.

$$\sum_{m,\,n}(m+1)^{\alpha-\gamma}(n+1)^{-1}|\varepsilon_{mn}|<\infty, \qquad (M^2)$$

$$\sum_{m,\,n}(m+1)^{-1}(n+1)^{-1}|\varepsilon_{mn}|<\infty. \qquad (M^3)$$

Доказательство. Необходимость условий (A) и (B) вытекает из лемм 1 и 2 статьи [9] (необходимость условия (A) вытекает также из леммы 4 статьи [8]).

Докажем необходимость условий (L). В силу условия (A) и формулы (57) статьи [7] имеем

$$\sum_{m=\mu}^{\infty}\mathfrak{H}_{m\nu}\,\varepsilon_{\mu\nu}=\frac{1}{A_\nu^\delta}\sum_{k=\mu}^{\infty}A_{k-\mu}^{-\alpha-2}\,k\varepsilon_{k\nu}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{A_{m-k}^{\gamma-1}}{mA_m^\gamma}=\frac{1}{A_\nu^\delta}\Delta_\mu^{\alpha+1}\varepsilon_{\mu\nu},$$

вследствие чего из условия (k^1) теоремы 1 вытекает

$$\lim_p\sum_{\mu,\,\nu=0}^{k,\,l}A_\mu^\alpha A_\nu^\beta\Big|\sum_{m=\mu}^{p}\mathfrak{H}_{m\nu}\,\varepsilon_{\mu\nu}\Big|=\sum_{\mu,\,\nu=0}^{k,\,l}A_\mu^\alpha\frac{A_\nu^\beta}{A_\nu^\delta}\,|\Delta_\mu^{\alpha+1}\varepsilon_{\mu\nu}|\leqslant M$$

$$(k,\,l=0,\,1,\,\ldots),$$

что равносильно условию (L_1).

Аналогично доказывается необходимость условия (L_2).

Необходимость остальных условий леммы 2 выведем из условия (k^2) теоремы 1. Для этого перепишем условие (k^2) сначала в виде [5]

$$\sum_{\mu,\,\nu}A_\mu^\alpha A_\nu^\beta\,|\Delta^{\alpha+1}{}_{\mu\nu}{}^{\beta+1}(\omega_{\mu\nu}\sum_{m,\,n=\mu,\,\nu}^{\infty}\frac{A_{m-\mu}^{\gamma-1}A_{n-\nu}^{\delta-1}}{mnA_m^\gamma A_n^\delta}d_{mn})|<\infty, \qquad (4)$$

что допустимо в силу необходимости условия (A).

Положив в (4) $d_{mn}\equiv 1$, по формуле (57) статьи [7] получаем заново необходимость условия (B).

Положив $d_{mn}\equiv A_n^\delta:A_n^{\delta+i\psi}$ ($\psi\neq 0$ и вещественно) в (4), по формуле (57) статьи [7] находим необходимое для множителей суммируемости типа $(A,\,C_l^{\gamma,\,\delta})$ условие

$$\sum_{\mu,\,\nu}A_\mu^\alpha A_\nu^\beta\left|\Delta^{\alpha+1}{}_{\mu\nu}{}^{\beta+1}\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{A_\nu^{i\psi}}\right|<\infty,$$

откуда и из условия (A) по лемме 4 статьи [7] выводим необходимость условия

$$\sum_{\mu,\,\nu}A_\mu^\alpha\left|\Delta_\mu^{\alpha+1}\left(\Delta_\nu\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{A_\nu^{i\psi}}\right)\right|<\infty.$$

---

[5] Ср. [21], стр. 152, 155 и 17; [3], стр. 210.

Из последнего условия вместе с условиями (A) и (B), в силу соответствующих включений (или по лемме 4 статьи [7]), ввиду соотношения

$$\Delta_\nu \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{A_\nu^{i\psi}} = \frac{i\psi}{1+i\psi} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{A_\nu^{1+i\psi}} + \frac{\Delta_\nu \varepsilon_{\mu\nu}}{A_{\nu+1}^{i\psi}}, \tag{5}$$

вытекающего из формул (12) статьи [9] и (58) статьи [7], получаем

$$\left|\frac{i\psi}{1+i\psi}\right| \sum_{\mu,\nu} A_\mu^\alpha \left| \frac{1}{A_\nu^{1+i\psi}} \Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mu,\nu} A_\mu^\alpha \left| \frac{1}{A_{\nu+1}^{i\psi}} \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\,1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| + \sum_{\mu,\nu} A_\mu^\alpha \left| \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\,1} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{A_\nu^{i\psi}} \right| < \infty,$$

и, значит, необходимость условия (L_1^2), ибо

$$\frac{1}{\left|A_\nu^{1+i\psi}\right|} \sim \frac{|\Gamma(2+i\psi)|}{\nu+1} \quad \text{и} \quad \Gamma(2+i\psi) \neq 0.$$

Аналогично доказывается необходимость условия (L_2^1).

Докажем необходимость условий (M). Так как

$$A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \mathfrak{H}_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = \frac{A_\mu^\alpha A_\nu^\beta}{A_\mu^\gamma A_\nu^\delta} \varepsilon_{\mu\nu},$$

то необходимость условия (M) непосредственно вытекает из условия (k^1) теоремы 1.

Далее, положив в (4) $d_{mn} = \dfrac{A_m^\gamma A_n^\delta}{A_m^{\gamma+i\varphi} A_n^{\delta+i\psi}}$ ($\varphi,\ \psi \neq 0$ и вещественны), как и выше, выводим необходимое условие

$$\sum_{\mu,\nu} \left| \Delta_{\mu\nu} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{A_\mu^{i\varphi} A_\nu^{i\psi}} \right| < \infty.$$

Из последнего условия, в силу соотношения, аналогичного (5), и соответствующих включений, из условий (B), (L_1^2) и (L_2^1) заключаем необходимость условия (M^3).

Наконец, перепишем условие (k^2) теоремы 1 в виде

$$\sum_{\mu,\nu} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \left| \Delta_\mu^{\alpha+1} \left\{ \sum_{m=\mu}^{\infty} \frac{A_{m-\mu}^{\gamma-1}}{m A_m^\gamma} \sum_n d_{m,\,n+\nu} \sum_{l=\nu}^{n+\nu} A_{l-\nu}^{-\beta-2} \omega_{\mu l} \frac{A_{n+\nu-l}^{\delta-1}}{(n+\nu) A_{n+\nu}^\delta} \right\} \right| < \infty,$$

что допустимо по условию (A).

Положив здесь $d_{m,n+\nu} = A_n^{-1}$ по формуле (57) статьи [7], получаем заново необходимость условия (L_1); положив $d_{m,n+\nu} = \dfrac{A_m^{\gamma} A_n^{-1}}{A_m^{\gamma+i\varphi}}$, по той же формуле, выводим необходимость условия

$$\sum_{\mu,\nu} A_\mu^\alpha \frac{A_\nu^\beta}{A_\nu^\delta} \left| \Delta_\mu^{\alpha+1} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{A_\mu^{i\varphi}} \right| < \infty,$$

откуда рассуждениями, аналогичными предыдущим, выводится необходимость условия (M^1).

Аналогично можем заново получить необходимость условия (L_2) и доказать необходимость условия (M^2).

Лемма 2 доказана.

§ 3. Некоторые леммы об обобщенных разностях

Поскольку в общем случае $\omega_{mn} \neq O(1)$, то для дальнейшего вместо леммы 1 статьи [7] нам нужны следующие леммы.

Лемма 3а. *Если* $s \geqslant 0$ *и* $\sigma \geqslant 1$, *то из условия*

$$\varepsilon_m = O(1) \tag{6}$$

следует соотношение

$$\Delta_m^s (\Delta_m^\sigma m\varepsilon_m) = \Delta_m^{s+\sigma} m\varepsilon_m. \tag{7}$$

Лемма 3б. а) *Из условий* (6) *и* $\Delta_m m\varepsilon_m = O(1)$ *следует соотношение* (7), *если* $s > -1$, $\sigma > 1$ *и* $s + \sigma > 1$.

б) *Из условий* (6) *и* $\Delta_m m\varepsilon_m = o(1)$ *следует соотношение* (7), *если* $s \geqslant -1$, $\sigma \geqslant 1$ *и* $s + \sigma \geqslant 1$.

Доказательство лемм 3а и 3б дано в [6] (стр. 60—61).

Формулировка леммы 6б статьи [6] ошибочна (ввиду ошибочного цитирования леммы 1) и ее следует заменить формулировкой леммы 3б данной статьи.

Лемма 4а. *Если* $s, t \geqslant 0$ *и* $\sigma, \tau \geqslant 1$, *то из условия*[5] (A) *следует соотношение*

$$\Delta_{mn}^{st} (\Delta_{mn}^{\sigma\tau} \omega_{mn}) = \Delta_{mn}^{s+\sigma\ t+\tau} \omega_{mn}. \tag{8}$$

Лемма 4б. а) *Из условий* (A) *и* $\Delta_{mn}\omega_{mn} = O(1)$ *следует соотношение* (8) *для всех* $s, t > -1$, $\sigma, \tau > 1$ *и* $s + \sigma, t + \tau > 1$.

б) *Из условий* (A) *и* $r\text{-}\lim\limits_{m,n} \Delta_{mn}\omega_{mn} = 0$ *следует соотношение* (8) *для всех* $s, t \geqslant -1$, $\sigma, \tau \geqslant 1$ *и* $s + \sigma, t + \tau \geqslant 1$.

Доказательство лемм 4а и 4б аналогичны доказательствам лемм 3а и 3б; они основываются на лемме 1 статьи [7].

[5] Лемма очевидно имеет место, если (A) заменить условием $\omega_{mn} = O[(m+1)(n+1)]$.

§ 4. Некоторые следствия из необходимых условий

Для того, чтобы вывести условие (k^1) теоремы 1 из условий леммы 2, нам нужны следующие леммы.

Лемма 5. *Из условий* (A), (L_1) *и* (M^1) *для всех* $1 \leqslant \sigma \leqslant \alpha + 1$ *вытекает*

$$\sum_{m,\,n} (m+1)^{\sigma-2}(n+1)^{\beta-\delta-1} |\Delta_m^{\sigma} \omega_{mn}| < \infty,$$

а из условий (A), (L_2) *и* (M^2) *для всех* $1 \leqslant \tau \leqslant \beta + 1$

$$\sum_{m,\,n} (m+1)^{\alpha-\gamma-1}(n+1)^{\tau-2} |\Delta_n^{\tau} \omega_{mn}| < \infty.$$

Доказательство. Из соотношения (28) статьи [6] и леммы 2 статьи [7], в силу условий (A), (L_1) и (M^1), выводим

$$\sum_{m} (m+1)^{\sigma-2} |\Delta_m^{\sigma} \omega_{mn}| =$$

$$= O(1) n \sum_{m} (m+1)^{\sigma-1} |\Delta_m^{\sigma} \varepsilon_{mn}| + \sigma n \sum_{m} (m+1)^{\sigma-2} |\Delta_m^{\sigma-1} \varepsilon_{mn}| =$$

$$= \begin{cases} O(1) \sum\limits_{m} (m+1)^{\alpha} |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}| < \infty & \text{при } 1 < \sigma \leqslant \alpha + 1, \\ O(1) \sum\limits_{m} (m+1)^{\alpha} |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}| + n \sum\limits_{m} \dfrac{|\varepsilon_{mn}|}{m+1} < \infty & \text{при } \sigma = 1. \end{cases}$$

Умножая обе части полученного равенства на $(n+1)^{\beta-\delta-1}$ и суммируя по индексу n, по теореме о двойном и повторных рядах, из условия (L_1) при $1 < \sigma \leqslant \alpha + 1$ и из условий (L_1) и (M^1) при $\sigma = 1$ заключаем утверждение первой части доказываемой леммы. Вторая часть ее доказывается аналогично.

Лемма 6. *Из условий* (B), (L_1^2), (L_2^1) *и* (M^3) *следует условие* (A).

Доказательство. Такими же рассуждениями, как в доказательстве леммы 1 статьи [1], убеждаемся в том, что из условия (M^3) вытекает абсолютная сходимость разностей $\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda} \varepsilon_{mn}$ при $\varkappa, \lambda \geqslant 0$. Поэтому имеет место

$$\Delta^{\alpha+1}{}_{mn}{}^{\beta+1} \varepsilon_{mn} = \Delta_m^{\alpha+1} (\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn}),$$

и так же, как в доказательстве леммы 4 статьи [1], из условий (B) и (M^3) выводим

$$\sum_{m} A_m^{\alpha-a} |\Delta_m^{\alpha-a+1} (\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn})| \leqslant \sum_{m} A_m^{\alpha} |\Delta_m^{\alpha+1} (\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn})|,$$

и, значит, по теореме о двойном и повторных рядах

$$\sum_{m,\,n} A_m^{\alpha-a} A_n^{\beta} |\Delta^{\alpha-a+1}{}_{mn}{}^{\beta+1} \varepsilon_{mn}| \leqslant \sum_{m,\,n} A_m^{\alpha} A_n^{\beta} |\Delta^{\alpha+1}{}_{mn}{}^{\beta+1} \varepsilon_{mn}|.$$

Аналогичным образом убеждаемся и в том, что

$$\sum_{m,\,n} A_m^{\alpha-a} A_n^{\beta-b} \left| \Delta^{\alpha-a+1\ \beta-b+1}_{mn} \varepsilon_{mn} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m,\,n} A_m^{\alpha-a} A_n^{\beta} \left| \Delta^{\alpha-a+1\ \beta+1}_{mn} \varepsilon_{mn} \right| < \infty. \tag{9}$$

Далее, ввиду вытекающего из условия (M^3) (см. [1], стр. 78, доказательство леммы 4) соотношения

$$\Delta^{\alpha-a+1\ \beta-b+1}_{mn} \varepsilon_{mn} = \Delta_{mn} (\Delta^{\alpha-a\ \beta-b}_{mn} \varepsilon_{mn}),$$

из (9) следует существование предела

$$\lim_{m,\,n} (\Delta^{\alpha-a\ \beta-b}_{m0} \varepsilon_{mn} + \Delta^{\alpha-a\ \beta-b}_{0n} \varepsilon_{0n} - \Delta^{\alpha-a\ \beta-b}_{mn} \varepsilon_{mn}). \tag{10}$$

Аналогично тому, как мы вывели соотношение (9) из условий (B) и (M^3), можем из (9) и (M^3) вывести, что (см. [1], стр. 78—79; ср. [6], доказательство леммы 7)

$$\sum_m A_m^{\alpha-a} \left| \Delta^{\alpha-a+1\ \beta-b}_{mn} \varepsilon_{mn} \right| < \infty, \quad \sum_n A_n^{\beta-b} \left| \Delta^{\alpha-a\ \beta-b+1}_{mn} \varepsilon_{mn} \right| < \infty,$$

откуда, в свою очередь, вытекают

$$\lim_m \Delta^{\alpha-a\ \beta-b}_{mn} \varepsilon_{mn} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_n \Delta^{\alpha-a\ \beta-b}_{mn} \varepsilon_{mn} = 0,$$

которые вместе с условием (10) дают

$$r\text{-}\lim_{m,\,n} \Delta^{\alpha-a\ \beta-b}_{mn} \varepsilon_{mn} = 0.$$

Из последнего условия и (M^3) нетрудно вывести, что

$$r\text{-}\lim_{m,\,n} \Delta_{mn} \varepsilon_{mn} = 0.$$

Теперь, учитывая условие (M^3), можем пользоваться леммой 4б, вследствие чего

$$\Delta_{mn} \varepsilon_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu=m,\,n}^{\infty} A_{\mu-m}^{\alpha-a-1} A_{\nu-n}^{\beta-b-1} \Delta^{\alpha-a+1\ \beta-b+1}_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu},$$

и, следовательно, в силу (9) имеем

$$\sum_{m,\,n} |\Delta_{mn} \varepsilon_{mn}| \leqslant \sum_{\mu,\,\nu} A_\mu^{\alpha-a} A_\nu^{\beta-b} \left| \Delta^{\alpha-a+1\ \beta-b+1}_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \right| < \infty,$$

откуда заключаем

$$\varepsilon_{0n} + \varepsilon_{m0} - \varepsilon_{mn} = O(1) \qquad (m, n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Наконец, из условий ($L_1{}^2$), ($L_2{}^1$) и (M^3), в силу леммы 7 статьи [6], получаем

$$\varepsilon_{m0} = O(1) \text{ и } \varepsilon_{0n} = O(1),$$

которые вместе с условием (11) дают условие (A).

Лемма 7. *Из условий* (B), (L_1^2), (L_2^1) *и* (M^3) *для всех* $1 \leqslant \sigma, \tau \leqslant \alpha + 1, \beta + 1$ *вытекает*

$$\sum_{m,\,n} (m+1)^{\sigma-2} (n+1)^{\tau-2} |\Delta_{mn}^{\sigma\tau} \omega_{mn}| < \infty.$$

Доказательство. Вследствие соотношения, аналогичного (28) статьи [6], можем для доказательства леммы исследовать на сходимость следующие четыре ряда:

$$\sum_{m,\,n} (m+1)^{\sigma-1} (n+1)^{\tau-1} |\Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn}|, \tag{12}$$

$$\sum_{m,\,n} (m+1)^{\sigma-1} (n+1)^{\tau-2} |\Delta_{mn}^{\sigma\tau-1} \varepsilon_{mn}|, \tag{13}$$

$$\sum_{m,\,n} (m+1)^{\sigma-2} (n+1)^{\tau-1} |\Delta^{\sigma-1}{}_{mn}^{\ \ \tau} \varepsilon_{mn}|, \tag{14}$$

$$\sum_{m,\,n} (m+1)^{\sigma-2} (n+1)^{\tau-2} |\Delta^{\sigma-1}{}_{mn}^{\ \ \tau-1} \varepsilon_{mn}|. \tag{15}$$

Сходимость ряда (12) вытекает из леммы 4 статьи [7], в силу условий (A) и (B), даже для всех $0 < \sigma, \tau \leqslant \alpha + 1, \beta + 1$.

Сходимость ряда (13) для $0 < \sigma \leqslant \alpha + 1$ заключаем при $1 < \tau \leqslant \beta + 2$ из той же леммы и в силу тех же условий, а при $\tau = 1$ — из леммы 2 статьи [7], ввиду вытекающего из нее, в силу условий (A) и (L_1^2), соотношения

$$\sum_{m,\,n} (m+1)^{\sigma-1} (n+1)^{-1} |\Delta_m^{\sigma} \varepsilon_{mn}| = \\ = O(1) \sum_{m,\,n} (m+1)^{\alpha} (n+1)^{-1} |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}|. \tag{16}$$

Аналогично сходимость ряда (14) для всех $1 \leqslant \sigma \leqslant \alpha + 2$, $0 < \tau \leqslant \beta + 1$ вытекает из условий (A), (B) и (L_2^1).

Наконец, сходимость ряда (15) при $1 < \sigma, \tau \leqslant \alpha + 2, \beta + 2$ следует из условий (A) и (B); при $\sigma = \tau = 1$ — из условия (M^3); при $1 < \sigma \leqslant \alpha + 2$, $\tau = 1$ — из условий (A) и (L_1^2) (что вытекает из соотношения (16), если заменить в нем σ на $\sigma - 1$); при $\sigma = 1$, $1 < \tau \leqslant \beta + 2$ — из условий (A) и (L_2^1).

В силу леммы 6 условие (A) можем опустить, и, тем самым, лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Из условий* (B), (L_1^2), (L_2^1) *и* (M^3) *следует*

$$\Delta_m m \varepsilon_{mn} = O(1) \quad \text{при } \alpha \geqslant 1,$$
$$\Delta_n n \varepsilon_{mn} = O(1) \quad \text{при } \beta \geqslant 1,$$
$$\Delta_{mn} \omega_{mn} = O(1) \quad \text{при } \alpha, \beta \geqslant 1.$$

Доказательство. Из условий леммы 8 следует условие (A).

Обратившись к теории простых рядов, находим, что условия, необходимые для множителей суммируемости типа $(C_0^{\alpha}, C^{\alpha+1})$,

подавно необходимы и для типа $(C_0^{\alpha}, |C^{\alpha+1}|)$. Поэтому, согласно теоремам 3 и 4 статьи [6], условия

$$\sum_m A_m^{\alpha} |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}| < \infty \quad \text{и} \quad \sum_m \frac{|\varepsilon_{mn}|}{m+1} < \infty \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

вытекающие из условий (L_1^2) и (M^3), влекут за собой условие

$$\lim_m \varepsilon_{mn} = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots). \qquad (F_2^1)$$

Аналогично, условия (L_2^1) и (M^3) влекут за собой условие (F_1^2).

Поскольку по лемме 18 статьи [9] из условий (A), (B), (F_1^2) и (F_2^1) для всех $0 \leqslant \sigma, \tau \leqslant \alpha, \beta$ следует

$$(m+1)^{\sigma} (n+1)^{\tau} \Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn} = O(1),$$

то, в силу соотношения

$$\Delta_m m \varepsilon_{mn} = (m+1) \Delta_m \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn},$$

получаем утверждение первой части доказываемой леммы; вторая часть доказывается аналогично; а третью заключаем отсюда при помощи соотношения

$$\Delta_{mn} \omega_{mn} = (m+1)(n+1) \Delta_{mn} \varepsilon_{mn} - (m+1) \Delta_m \varepsilon_{mn} - \\ - (n+1) \Delta_n \varepsilon_{mn} + \varepsilon_{mn}.$$

§ 5. Множители суммируемости типа $(A, C_l^{\gamma, \delta})$

Учитывая все сказанное в конце § 1, согласно теореме 1, нам остается доказать, что из условий леммы 2 вытекает условие (k^1) теоремы 1.

И в настоящей статье, в зависимости от соотношений между α, β и γ, δ, будем отдельно рассматривать четыре случая.

А. Пусть $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha + 1, \beta + 1$. Докажем, что условие (k^1) следует из условий (B), (L) и (M). Доказательство последнего несколько осложняется тем, что в общем случае $\omega_{mn} \neq O(1)$ и, кроме этого, здесь надо рассматривать не только случай $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$, но и случаи $\alpha, \beta < \gamma, \delta \leqslant \alpha + 1, \beta + 1$.

Очевидно условие (k^1) вытекает из условия [6]

$$\sum_{\mu, \nu} A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} \sum_{m, n=\mu, \nu}^{\infty} |\mathfrak{H}_{mn} \varepsilon_{\mu\nu}| < \infty. \qquad (17)$$

---

[6] Как следует из статьи И. Г. Кулля (см. [10], примечание 2) условие (17) достаточно для множителей суммируемости типа $(A, C_l^{\gamma, \delta})$, но вообще не является необходимым.

Аналогично формуле (5) статьи [7] легко убедиться, что *имеет место*

$$\mathfrak{H}^{*}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} = \tag{18}$$

$$= \sum_{i,j=0}^{a+1,\,b+i} \binom{a+1}{i}\binom{b+1}{j} \sum_{k,\,l=\mu,\,\nu}^{m,n} A^{a-\alpha-1}_{k-\mu} A^{b-\beta-1}_{l-\nu} A^{i+\gamma-a-2}_{m-i-k} A^{j+\delta-b-2}_{n-j-l} \Delta^{ij}_{kl}\omega_{kl},$$

где

$$\mathfrak{H}^{*}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} = mnA^{\gamma}_{m}A^{\delta}_{n}\mathfrak{H}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}.$$

Далее, таким же рассуждением, как на стр. 127 статьи [8], можем (принимая во внимание равносильность условий теоремы 4 и условия (25) статьи [6]) в силу формулы (18) и условий (L) и (M) заменить условия (17) следующим[7] (более сильным)

$$\sum_{i,j=0}^{a+1,\,b+1} Z_{\mu,\,\nu} |B'^{j}_{2}B'^{i}_{1}\omega_{\mu\nu}| < \infty, \tag{19}$$

где

$$B'^{i}_{1}a'_{\mu\nu} = \sum_{k=\mu}^{m} A^{a-\alpha-1}_{k-\mu} A^{i+\gamma-a-2}_{m-k} \Delta^{i}_{k}a'_{k\nu},$$

$$Zc'_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\,\nu} A^{\alpha}_{\mu}A^{\beta}_{\nu} \sum_{m,\,n=\mu,\,\nu}^{\infty} \frac{1}{A^{\gamma+1}_{m}\,A^{\delta+1}_{n}} c'_{\mu\nu},$$

а через $a'_{\mu\nu}$, $b'_{\mu\nu}$, $c'_{\mu\nu}$ будем обозначать некоторые последовательности, для которых относительно индексов $\mu\nu$ имеет место оценка $O[(\mu+1)(\nu+1)]$, а для $c'_{\mu\nu}$ считаем дополнительно $c'_{\mu\nu} \geqslant 0$.

Для выведения соотношения (19) из условий (B), (L) и (M) разобьем сумму (19), в зависимости от поведения чисел $A^{i+\gamma-a-2}_{m}$ и $A^{j+\delta-b-2}_{n}$ в ней (аналогично, как в статьях [7, 8] и по тем же причинам), на девять слагаемых согласно следующей схеме:

$$\sum_{i,j=0}^{a+1,\,b+1} B'_{2}{}^{j}B'_{1}{}^{i} =$$

$$= \Big(\sum_{i,j=0}^{P+1,\,Q+1} + \sum_{i,j=a-c+2,\,0}^{a+1,\,Q+1} + \sum_{i,j=0,\,b-d+2}^{P+1,\,b+1} + \sum_{i,j=a-c+2,\,b-d+2}^{a+1,\,b+1}\Big) B'_{2}{}^{j}B'_{1}{}^{i} + \tag{20}$$

$$+ \sum_{j=0}^{Q+1} B'_{2}{}^{j}B'_{1}{}^{a-c+1} + \sum_{i=0}^{P+1} B'_{2}{}^{b-d+1}B'_{1}{}^{i} + B'_{2}{}^{b-d+1}B'_{1}{}^{a-c+1} +$$

$$+ \sum_{i=a-c+2}^{a+1} B'_{2}{}^{b-d+1}B'_{1}{}^{i} + \sum_{j=b-d+2}^{b+1} B'_{2}{}^{j}B'_{1}{}^{a-c+1},$$

---

[7] Номера (индексы) 1 и 2 имеют те же значения, что в статье [7]. В обозначении операторов сохраняем здесь сходство с суммами § 4 статьи [6] и, тем самым, будем часто пользоваться выведенными там оценками обычно без ссылок на них в каждом отдельном случае.

где в правой части равны нулю все те же слагаемые, что и в схеме (19) статьи [8], лишь с тем отличием, что вместо слагаемых с $P=-1$, $Q=-1$, $a=0$ или $b=0$ здесь равны нулю соответственно слагаемые с $P=-2$, $Q=-2$, $a=c=0$ или $b=d=0$.

Остается оценить каждое из этих девяти слагаемых в отдельности. При этом не будем повторять все пояснительные замечания § 2 статьи [7].

1. Первое слагаемое схемы (20) оценивается легко: из условия (M) вытекает

$$\sum_{i,j=0}^{P+1,\,Q+1} Z_{\mu,\nu} \left| B'_2{}^{j} B'_1{}^{i} \omega_{\mu\nu} \right| =$$

$$= O(1) \sum_{i,j=0}^{P+1,\,Q+1} \sum_{k,l} (k+1)^{\alpha-\gamma-1} (l+1)^{\beta-\delta-1} \left| \Delta^{ij}_{kl} \omega_{kl} \right| < \infty,$$

поскольку имеет место

$$\sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{\nu} A^{\beta}_{\nu} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{A^{\delta+1}_{n}} \left| B'_2{}^{j} a'_{\mu\nu} \right| = O(1) \sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{l} (l+1)^{\beta-\delta-1} \left| \Delta^{j}_{l} a'_{\mu l} \right|. \quad (21)$$

2. На основе леммы 3а для $i \geqslant 1$ имеем

$$B'_1{}^{i} = C'_1{}^{i} - D'_1{}^{i}, \quad (22)$$

где

$$C'_1{}^{i} b_{\mu\nu} = A^{i+\gamma-a-2}_{m-\mu} \Delta^{i+\alpha-a}_{\mu} b'_{\mu\nu},$$

$$D'_1{}^{i} b'_{\mu\nu} = \begin{cases} \sum_{\varkappa=0}^{m-\mu} A^{i+\gamma-a-3}_{\varkappa} \sum_{k=m-\varkappa+1}^{\infty} A^{a-\alpha-1}_{k-\mu} \Delta^{i}_{k} b'_{k\nu} & \text{при } \alpha > a, \\ 0 & \text{при } \alpha = a. \end{cases}$$

Далее, поскольку из (22) для $i \geqslant 1$ вытекает

$$B'_2{}^{j} B'_1{}^{i} = B'_2{}^{j} C'_1{}^{i} - B'_2{}^{j} D'_1{}^{i}, \quad (23)$$

то соответственно (23) разделим второе слагаемое схемы (20) на две части и оценим каждую из них в отдельности.

Положив в (21) $a'_{\mu\nu} = C'_1{}^{i} \omega_{\mu\nu}$, можем [8], в силу условия (A), писать

$$\sum_{i,j=a-c+2,0}^{a+1,\,Q+1} Z_{\mu,\nu} \left| B'^{j}_2 C'^{i}_1 \omega_{\mu\nu} \right| =$$

$$= O(1) \sum_{i,j=a-c+2,0}^{a+1,\,Q+1} \sum_{\mu,l} (\mu+1)^{i+\alpha-a-2} (l+1)^{\beta-\delta-1} \left| \Delta^{i+\alpha-a\ j}_{\mu l} \omega_{\mu l} \right|,$$

---

[8] Из условия (A) следует абсолютная сходимость разностей $\Delta^{\varkappa\lambda}_{mn} \omega_{mn}$ для всех $\varkappa, \lambda \geqslant 1$. Этим замечанием и леммой 6 будем постоянно пользоваться в дальнейшем без ссылок на них.

вследствие чего сходимость последнего вытекает из условий (A), (L_1) и (M^1) по лемме 5.

Далее, приступая к оценке второй части из (23), заметим предварительно, что при $\alpha > 1$, согласно леммам 8, 3б и 5, из условий (B), (L_1), (L_2^1) и (M^1) для всех $i \geqslant 2$ получаем, что имеет место [9]

$$\sum_{k=m-\varkappa+1}^{\infty} A_{k-\mu}^{a-\alpha-1} \Delta_{kl}^{ij} \omega_{kl} = O(1) A_{m-\mu-\varkappa}^{a-\alpha} \sum_{s=\mu}^{\infty} A_{s-\mu}^{\alpha-a-1} | \Delta_{sl}^{i+\alpha-a\,j} \omega_{sl} |. \quad (24)$$

Отсюда, для всех $i = a - c + 2, \ldots, a + 1$ при $c \leqslant a$ и всех $i = a - c + 3, \ldots, a + 1$ при $c = a + 1$ из тех же условий, в силу (21) и леммы 5, так как $A_{\varkappa}^{i+\gamma-a-3} \geqslant 0$, выводим

$$\sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{\mu,\nu} Z \, | B_2'^j D_1'^i \omega_{\mu\nu} | = \sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{\mu,\nu} Z \, A_{m-\mu}^{i+\gamma-\alpha-2} \sum_{s=\mu}^{\infty} A_{s-\mu}^{\alpha-a-1} | B_2'^j \Delta_s^{i+\alpha-a} \omega_{s\nu} | =$$

$$= O(1) \sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{s,l} (s+1)^{i+\alpha-a-2} (l+1)^{\beta-\delta-1} | \Delta^{i+\alpha-a\,j}_{sl} \omega_{sl} | < \infty.$$

Если же $c = a + 1$ при $\alpha > a$, то вместо $D_1'^{a-c+2}$ нам удобнее рассматривать $B_1'^1 = B_1'^{a-c+2}$, ибо имеет место

$$B_1'^1 = P_1 + Q_1, \quad (25)$$

где

$$P_1 b'_{\mu\nu} = \sum_{k=\mu}^{m} A_{k-\mu}^{a-\alpha} A_{m-k}^{\gamma-c-1} \Delta_k b'_{k\nu},$$

$$Q_1 b'_{\mu\nu} = \sum_{k=\mu}^{m-1} A_{k-\mu}^{a-\alpha} A_{m-1-k}^{\gamma-c} \Delta_k^2 b'_{k\nu}.$$

Положив в (21) $a'_{\mu\nu} = P_1 \omega_{\mu\nu}$, из условий (A), ($L_1$) и ($M^1$) по лемме 5 выводим

$$\sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{\mu,\nu} Z \, | B_2'^j P_1 \omega_{\mu\nu} | = O(1) \sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{k,l} (k+1)^{-1} (l+1)^{\beta-\delta-1} | \Delta_{kl}^{1j} \omega_{kl} | < \infty.$$

Далее, из рассуждений, приведенных на стр. 63—64 статьи [6], следует

$$\sum_{\mu} A_{\mu}^{\alpha} \sum_{m=\mu}^{\infty} \frac{1}{A_m^{\gamma+1}} | Q_1 b'_{\mu\nu} | = O(1) \sum_{\mu} (\mu+1)^{\alpha-a-1} | \Delta_{\mu}^{\alpha+1-a} b'_{\mu\nu} |. \quad (26)$$

---

[9] В силу леммы 8 допустимо применение леммы 3б. Законность перестановки порядка суммирования в доказательстве справедливости соотношения (24) оправдывается леммой 5. Ср. доказательство соотношения (15) статьи [7], или формулы (16) статьи [6].

Теперь, положив сначала в (21) $a'_{\mu\nu} = Q_1 \omega_{\mu\nu}$, а потом в (26) $b'_{\mu\nu} = \Delta^j_\nu \omega_{\mu\nu}$, из условий (A), ($L_1$) и ($M^1$), согласно лемме 5, выводим

$$\sum_{j=0}^{Q+1} Z \underset{\mu,\nu}{} |B_2^{'j} Q_1 \omega_{\mu\nu}| =$$

$$= \sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{\mu,\,l} (\mu+1)^{\alpha-a-1} (l+1)^{\beta-\delta-1} |\Delta^{\alpha+1-a}_{\mu l}{}^{j} \omega_{\mu l}| < \infty.$$

3. Аналогично можем доказать, что условия (A), (B), (L_1^2), (L_2) и (M^2) влекут за собой оценку для третьего слагаемого схемы (20).

4. На основе леммы 4а для всех $i, j \geqslant 1$ из (22) выводим

$$B_2^{'j} B_1^{'i} = C_2^{'j} C_1^{'i} - C_2^{'j} D_1^{'i} - D_2^{'j} C_1^{'i} + D_2^{'j} D_1^{'i}. \tag{27}$$

Соответственно (27), разделим четвертое слагаемое схемы (20) на четыре части.

При помощи леммы 7 из условий (B), (L_1^2), (L_2^1) и (M^3) заключаем

$$\sum_{i,\,j=a-c+2,\,b-d+2}^{a+1,\,b+1} Z \underset{\mu,\nu}{} |C_2^{'j} C_1^{'i} \omega_{\mu\nu}| = O(1) \sum_{i,\,j=a-c+2,\,b-d+2}^{a+1,\,b+1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\mu,\,\nu} (\mu+1)^{i+\alpha-a-2} (\nu+1)^{j+\beta-b-2} |\Delta^{i+\alpha-a}_{\mu\nu}{}^{j+\beta-b} \omega_{\mu\nu}| < \infty.$$

Далее, приступая к оценке второй части из (27) при $\alpha > a$, заметим, что в случае $\alpha > 1$ из условий (B), (L_1^2), (L_2^1) и (M^3) вытекает справедливость (24) для всех $i = a - c + 2, \ldots, a + 1$ при $c \leqslant a$ и всех $i = a - c + 3, \ldots, a + 1$ при $c = a + 1$, вследствие чего по лемме 7 заключаем

$$\sum_{j=b-d+2}^{b+1} Z \underset{\mu,\nu}{} |C_2^{'j} D_1^{'i} \omega_{\mu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{j=b-d+2}^{b+1} Z \underset{\mu,\nu}{} A^{i+\gamma-\alpha-2}_{m-\mu} \sum_{s=\mu}^{\infty} A^{\alpha-a-1}_{s-\mu} |C_2^{'j} \Delta_s^{i+\alpha-a} \omega_{s\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{j=b-d+2}^{b+1} \sum_{s,\,\nu} (s+1)^{i+\alpha-a-2} (\nu+1)^{j+\beta-b-2} |\Delta^{i+\alpha-a}_{s\nu}{}^{j+\beta-b} \omega_{s\nu}| < \infty.$$

Если же $c = a + 1$, то, учитывая (25), по лемме 7 из условий (B), (L_1^2), (L_2^1) и (M^3) выводим

$$\sum_{j=b-d+2}^{b+1} Z \underset{\mu,\nu}{} |C_2^{'j} P_1 \omega_{\mu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{j=b-d+2}^{b+1} \sum_{k,\,\nu} (k+1)^{-1} (\nu+1)^{j+\beta-b-2} |\Delta^{1}_{k\nu}{}^{j+\beta-b} \omega_{k\nu}| < \infty,$$

а, положив в (26) $b'_{\mu\nu} = C_2'^{j}\omega_{\mu\nu}$, также получаем

$$\sum_{j=b-d+2}^{b+1} Z_{\mu,\nu} |C_2'^{j} Q_1 \omega_{\mu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{j=b-d+2}^{a+1} \sum_{\mu,\nu} (\mu+1)^{\alpha-a-1}(\nu+1)^{j+\beta-b-2} |\Delta^{\alpha+1-a\ j+\beta-b}_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}| < \infty.$$

Аналогично, из тех же условий вытекает соответствующая оценка для третьей части из (27).

Чтобы оценить четвертую часть из (27), заметим предварительно, что при α, $\beta > 1$ согласно леммам 8, 4б и 7 из условий (B), (L_1^2), (L_2^1) и (M^3) для всех i, $j \geqslant 2$ получаем, что имеет место [10]

$$\sum_{k,\ l=m-\varkappa+1,\ n-\lambda+1}^{\infty} A^{a-\alpha-1}_{k-\mu} A^{b-\beta-1}_{l-\nu} \Delta^{ij}_{kl}\omega_{kl} =$$

$$= O(1) A^{\overline{a-\alpha}}_{m-\mu-\varkappa} A^{b-\beta}_{n-\nu-\lambda} \sum_{s,\ t=\mu,\nu}^{\infty} A^{\alpha-a-1}_{s-\mu} A^{\beta-b-1}_{t-\nu} |\Delta^{i+\alpha-a\ j+\beta-b}_{st}\omega_{st}|.$$

Следовательно, из тех же условий для всех $i = a-c+2, \ldots, a+1$, кроме $i = a-c+2 = 1$ при $c = a+1$, и для всех $j = b-d+2, \ldots, b+1$, кроме $j = b-d+2 = 1$ при $d = b+1$, выводим

$$\sum_{\mu,\nu} Z |D_2'^{j} D_1'^{i} \omega_{\mu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{s,t} (s+1)^{i+\alpha-a-2}(t+1)^{j+\beta-b-2} |\Delta^{i+\alpha-a\ j+\beta-b}_{st}\omega_{st}| < \infty.$$

Далее, при помощи (25) и (26) приведенными рассуждениями легко рассмотреть также случай i, $j = 1$ при c, $d = a+1$, $b+1$; случай $i = 1$ при $c = a+1$, $b \leqslant d$; или случай $j = 1$ при $c \leqslant a$, $b = d+1$.

Итак, ввиду (27) оценка для четвертого слагаемого схемы (20) вытекает из условий (B), (L_1^2), (L_2^1) и (M^3).

5. Доказательство оценки для пятого слагаемого схемы (20) существенно зависит от взаимоотношений между a и c.

Пусть сначала $c \leqslant a$. В этом случае доказательство в основном таково же, как при оценке пятого слагаемого схемы (19) в статье [8]. Действительно, поскольку имеет место

$$B_1'^{a-c+1} = E_1' + F_1', \tag{28}$$

---

[10] В силу леммы 8 допустимо применение леммы 4б. Законность перестановки порядка суммирования в доказательстве этого соотношения оправдывается леммой 7. Ср. доказательство соотношения (24).

где

$$E_1' b_{\mu\nu}' = A_{m-\mu}^{x-1} \Delta_m^{a-c+1} b_{m+1,\nu}',$$

$$F_1' b_{\mu\nu}' = \sum_{k=\mu}^{m} \Delta_k^{a+2-c} b_{k\nu}' \sum_{x=\mu}^{k} A_{x-\mu}^{a-\alpha-1} A_{m-x}^{\gamma-c-1},$$

то в случае $c \leqslant a$ разобьем пятое слагаемое схемы (20) на две части, соответственно вытекающему из (28) соотношению

$$B_2'^j B_1'^i = B_2'^j E_1' + B_2'^j F_1'. \tag{29}$$

Первая часть из (29) оценивается сразу, так как, учитывая (21), из условия (M) при $x \leqslant 0$ выводим

$$\sum_{j=0}^{Q+1} Z_{\mu,\nu} |B_2'^j E_1' \omega_{\mu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{m,l} (m+1)^{\alpha-\gamma-1} (l+1)^{\beta-\delta-1} |\Delta^{a-c+1}{}_{ml}{}^j \omega_{m+1,l}| < \infty,$$

а при $x > 0$ получаем такую же оценку (где в правой части $\alpha - \gamma$ заменено на $a - c$) из условий (A), (L_1) и (M^1) по лемме 5 (ибо $a - c + 1 \geqslant 1$).

Далее, учитывая выкладки, приведенных на стр. 65—66 статьи [6], имеем

$$\sum_{\mu} A_{\mu}^{\alpha} \sum_{m=\mu}^{\infty} \frac{1}{A_m^{\gamma+1}} |F_1' b_{\mu\nu}'| = O(1) \sum_{\mu} (\mu+1)^{\alpha-c-1} |\Delta_{\mu}^{\alpha+1-c} b_{\mu\nu}'|. \tag{30}$$

Положив теперь сначала в (21) $a_{\mu\nu}' = F_1' \omega_{\mu\nu}$ и потом в (30) $b_{\mu\nu}' = \Delta_{\mu\nu}^{j} \omega_{\mu\nu}$, из условий (A), ($L_1$) и ($M^1$) по лемме 5 заключаем

$$\sum_{j=0}^{Q+1} Z_{\mu,\nu} |B_2'^j F_1' \omega_{\mu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{\mu,l} (\mu+1)^{\alpha-c-1} (l+1)^{\beta-\delta-1} |\Delta_{\mu l}^{\alpha+1-c\ j} \omega_{\mu l}| < \infty.$$

Что касается случая $c = a + 1$, то ввиду того, что леммы 5 и 7 предполагают, чтобы показатели разностей ω_{mn} были не меньше единицы, мы должны для рассмотрения оператора $B_1'^{a-c+1} = B_1'^{0}$ перейти от ω_{mn} обрато к ε_{mn}.

Имеем

$$B_1'^{0} = (a - \alpha) T_1 + (\mu - \alpha + \alpha) V_1,$$

где

$$T_1 b_{\mu\nu} = \sum_{k=\mu}^{m} A_{k-\mu}^{\alpha-\alpha} A_{m-k}^{\gamma-c-1} b_{k\nu},$$

$$V_1 b_{\mu\nu} = \sum_{k=\mu}^{m} A_{k-\mu}^{\alpha-\alpha-1} A_{m-k}^{\gamma-c-1} b_{k\nu}.$$

Положив в (21) $a'_{\mu\nu} = T_1 v\varepsilon_{\mu\nu}$, из условия (M^1) выводим

$$\sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{\mu,\nu} Z \,|B_2'^{j} T_1 v\varepsilon_{\mu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{k,l} (k+1)^{-1}(l+1)^{\beta-\delta-1} |\Delta_l^j l\varepsilon_{kl}| < \infty.$$

Для оценки оператора V_1 воспользуемся соотношением

$$V_1 = E_1'' + F_1'',$$

где

$$E_1'' b_{\mu\nu} = A_{m-\mu}^{x-1} b_{m+1,\nu},$$

$$F_1'' b_{\mu\nu} = \sum_{k=\mu}^{m} \Delta_k b_{k\nu} \sum_{x=\mu}^{k} A_{x-\mu}^{\alpha-\alpha-1} A_{m-x}^{\gamma-c-1}.$$

Принимая во внимание (21) и, что здесь $x = \gamma - \alpha - 1 \leqslant 0$, из условия (M) заключаем

$$\sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{\mu,\nu} Z\,(\mu+1)\,|B_2'^{j} E_1'' v\varepsilon_{\mu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{m,l} (m+1)^{\alpha-\gamma}(l+1)^{\beta-\delta-1} |\Delta_l^j l\varepsilon_{m+1,l}| < \infty.$$

Наконец, аналогично соотношению (20) статьи [6], имеем

$$F_1'' b_{\mu\nu} = O(1) A_{m-\mu}^{\gamma-c-1} \sum_{s=\mu}^{\infty} |\Delta_s^{\alpha+1-a} b_{s\nu}|,$$

вследствие чего, учитывая (21), из условий (A) и (L_1), в силу леммы 2 статьи [7], получаем

$$\sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{\mu,\nu} Z\,(\mu+1)\,|B_2'^{j} F_1'' v\varepsilon_{\mu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{j=0}^{Q+1} \sum_{s,l} (s+1)^{\alpha-a}(l+1)^{\beta-\delta-1} |\Delta_{sl}^{\alpha+1-a\,j} l\varepsilon_{sl}| < \infty.$$

Итак, по доказанному оценка для пятого слагаемого схемы (20) вытекает из условий (A), (L_1) и (M).

6. Аналогично, оценка для шестого слагаемого схемы (20) следует из условий (A), (L_2) и (M).

7. В силу всего сказанного легко усмотреть, как доказать оценку для седьмого слагаемого схемы (20), потому что все основные моменты доказательства у нас налицо. Отметим здесь, что оценку для седьмого слагаемого схемы (20) влекут за собой условия (B), (L) и (M).

8. Оценку для восьмого слагаемого схемы (20) влекут за собой условия (B), (L_1), (L_2^1) и (M^1).

9. Оценку для девятого слагаемого схемы (20) влекут за собой условия (B), (L_1^2), (L_2) и (M^2).

Б. Пусть $\gamma > \alpha + 1$, $\delta \leqslant \beta + 1$. По доказанному, для множителей суммируемости типа $(A, C_l^{\alpha+1,\,\delta})$ достаточны условия (B), (L_1), (L_2^1) и (M^1). В силу включения [11] $C_l^{\alpha+1,\,\delta} \subset C_l^{\gamma,\,\delta}$ эти условия достаточны и для типа $(A, C_l^{\gamma,\,\delta})$, а по лемме 2 и необходимы.

В. Пусть $\gamma \leqslant \alpha + 1$, $\delta > \beta + 1$. Аналогично случаю Б здесь необходимы и достаточны условия (B), (L_1^2), (L_2) и (M^2).

Г. Пусть γ, $\delta > \alpha + 1$, $\beta + 1$. Аналогично случаям Б и В теперь необходимы и достаточны условия (B), (L_1^2), (L_2^1) и (M^3).

Итак, доказана

Теорема 2. *Если* $0 \leqslant \gamma$, $\delta \leqslant \alpha + 1, \beta + 1$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$, *то для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* а) $(C_0^{\alpha,\beta}, C_l^{\gamma,\delta})$, б) $(C_b^{\alpha,\beta}, C_l^{\gamma,\delta})$, в) $(C_r^{\alpha,\beta}, C_l^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* (B), (L) *и* (M).

Если $\delta > \beta + 1$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\delta = \beta + 1$.

Если $\gamma > \alpha + 1$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\gamma = \alpha + 1$.

Дополнение к теореме 2. *Если* $\delta = 0$, *то можем опустить условия* (B) *и* (L_2). *Если* $\gamma = 0$, *то можем опустить условия* (B) *и* (L_1).

Доказательство очевидно.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Если* $\varepsilon_{mn} = \varepsilon'_m \cdot \varepsilon''_n$, *то для того, чтобы числа* ε_{mn} *были при* $0 \leqslant \gamma$, $\delta \leqslant \alpha + 1$, $\beta + 1$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$ *множителями суммируемости типа* $(A, C_l^{\gamma,\,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* (B) *и* (M).

Если $\delta > \beta + 1$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\delta = \beta + 1$.

Если $\gamma > \alpha + 1$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\gamma = \alpha + 1$.

---

[11] См. сноску [7] в статье [8].

§ 6. О некоторых конкретных множителях суммируемости

Аналогично, как в § 5 статьи [8], при помощи теоремы 3 легко доказывается

Теорема 4. *Числа* а) $x^m y^n (x,\ y \neq 0)$, б) $(m+1)^{-s}(n+1)^{-t}$ $(s,\ t \neq 0)$, в) $(A_m^s A_n^t)^{-1}$ $(s,\ t \neq 0)$, г) $(-1)^{m+n}(m+1)^{-s}(n+1)^{-t}$, д) $(-1)^{m+n}(A_m^s A_n^t)^{-1}$, *тогда и только тогда являются множителями суммируемости типа* $(A,\ C_1^{\gamma,\delta})$, *если выполнены условия*

а) $|x|,\ |y| < 1$;

б) *или* в) $\mathrm{Re}\, s,\ \mathrm{Re}\, t > 0$ *и* $\mathrm{Re}\, s,\ \mathrm{Re}\, t > \alpha - \gamma + 1,\ \beta - \delta + 1$;

г) *или* д) $\mathrm{Re}\, s,\ \mathrm{Re}\, t > \alpha + 1,\ \beta + 1$.

Из теоремы 2 выводится

Теорема 5. *Числа* а) x^{mn}, б) $(m+n+1)^{-s}$ $(s \neq 0)$, в) $(A_{m+n}^s)^{-1}$ $(s \neq 0)$, г) $(-1)^{m+n}(m+n+1)^{-s}$, д) $(-1)^{m+n}(A_{m+n}^s)^{-1}$, е) $(m+1)^{-s} + (n+1)^{-t}$ $(|s| + |t| \neq 0)$, *тогда и только тогда являются множителями суммируемости типа* $(A,\ C_1^{\gamma,\delta})$, *если выполнены условия*

а) $|x| < 1$;

б) *или* в) $\mathrm{Re}\, s > 0,\ \mathrm{Re}\, s > \alpha - \gamma + 1,\ \mathrm{Re}\, s > \beta - \delta + 1$ *и* $\mathrm{Re}\, s > 2 + \alpha + \beta - \gamma - \delta$;

г) *или* д) $\mathrm{Re}\, s > 2 + \alpha + \beta$;

е) *ни при каких* $s,\ t$.

Для доказательства теоремы 5 удобна

Лемма 9. *Для сходимости ряда*

$$\sum_{m,\,n} \frac{(m+1)^x (n+1)^y}{(m+n+1)^z}$$

при $x,\ y \geqslant -1$ *необходимо и достаточно условие*

$$z > 2 + x + y.$$

Доказательство. Если $x = y = -1$, то очевидно необходимо и достаточно условие $z > 0 = 2 + x + y$. Если же, например, $y \geqslant -1$, $x > -1$, то необходимо и достаточно условие $z > 2 + x + y$, ибо тогда

$$\sum_n (n+1)^y \sum_m \frac{(m+1)^x}{(m+n+1)^z} = O(1) \sum_n (n+1)^{y+x+1-z} < \infty.$$

Проверяя при помощи леммы 9 выполнение условий (B), (L) и (M) теоремы 2, получаем доказательство случаев б), в), г) и д) теоремы 5. Чтобы доказать случай а) теоремы 5, достаточно заметить, что при помощи обобщенного алгебраического признака Коши ([4], стр. 16), в силу соотношения $\lim_{m,\,n} \sqrt[mn]{(m+1)^{\varkappa}(n+1)^{\lambda}|x|^{mn}} = |x|$ ($\varkappa,\ \lambda$ — произвольны), для вы-

полнения условий (M) необходимо и достаточно условие $|x| < 1$. При этом условии тем же признаком убеждаемся в выполнении условий (B) и (L).

Случай e) исчерпывается тем, что условия (L) не выполняются ни при каких s, t.

Из части a) теоремы 4 непосредственно вытекает следующее обобщение теоремы Абеля на двойные ряды.

Теорема 6. *Если степенной ряд*

$$\sum_{m,\,n} a_{mn}(x-a)^m(y-b)^n$$

$C^{\alpha,\beta}$*-ограничен в точке* (x_0, y_0), *то он* $C_l^{\gamma,\delta}$*-суммируем (при* α, β, γ, $\delta \geqslant 0$) *во всех точках* (x, y), *удовлетворяющих неравенствам*

$$|x-a| < |x_0-a|,\ |y-b| < |y_0-b|.$$

Условия теоремы ослабить нельзя.

Доказательство очевидно, если члены исследуемого ряда написать в виде

$$a_{mn}(x-a)^m(y-b)^n = a_{mn}(x_0-a)^m(y_0-b)^n\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^m\left(\frac{y-b}{y_0-b}\right)^n.$$

Из теорем 4 и 5 можем вывести и другие следствия, например, теоремы, аналогичные теоремам 4 и 5 статьи [7].

Литература

1. Bosanquet, L. S., Chow, H. C., Some remarks on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1957, **32**, 73—82.
2. Peyerimhoff, A., Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren. Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, **8**, 139—156; 1956, **10**, 1—18.
3. Tatchell, J. B., A note on a theorem by Bosanquet. J. London Math. Soc., 1954, **29**, 207—211.
4. Барон С. А., Вывод признаков сходимости двойных числовых рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **55**, 9—20.
5. Барон С. А., Множители суммируемости для двойных рядов, автореферат диссертации. Тарту, 1959.
6. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, 1960, **9**, 47—68.
7. Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом Чезаро вещественного порядка. Настоящий журнал, стр. 91—117.
8. Барон С., Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро. Настоящий журнал, стр. 118—134.
9. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 3—49.
10. Кулль И. Г., Линейные преобразования некоторых классов двойных последовательностей. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, 1961, **10**, 13—21.

Поступило
25 V 1960

ABSOLUUTSED SUMMEERUVUSTEGURID CESÀRO-SUMMEERUVATE JA CESÀRO-TÕKESTATUD KAHEKORDSETE RIDADE JAOKS

S. Baron
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis leitakse kahekordsete ridade jaoks summeeruvustegurid tüüpi $(A, C_l^{\gamma,\delta})$, kus $A = C_O^{\alpha,\beta}$, $C_b^{\alpha,\beta}$ või $C_r^{\alpha,\beta}$, reaalarvuliste järkude $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$ korral. Selleks on kasutatud artikli [6] tõestusmeetodit. Saadud tarvilikud ja piisavad tingimused rakendatakse 11 näite puhul.

ABSOLUTE SUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR CESÀRO-SUMMIERBARE UND CESÀRO-BESCHRÄNKTE DOPPELREIHEN

S. Baron

Zusammenfassung

In diesem Artikel werden Summierbarkeitsfaktoren des Typus $(A, C_l^{\gamma,\delta})$, wo $A = C_O^{\alpha,\beta}$, $C_b^{\alpha,\beta}$ oder $C_r^{\alpha,\beta}$, mit reellen Ordnungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$ für Doppelreihen abgeleitet. Dazu benutzen wir die Beweismethode der Arbeit [6]. Die erhaltenen genauen Bedingungen wenden wir in 11 Beispielen an.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ МЕРСЕРА НА СЛУЧАЙ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Т. Сырмус
Кафедра математического анализа

1. В 1907 г. была опубликована следующая теорема Мерсера [5]:

Теорма 1.1. *Если* $\alpha > 0$, $\lambda \neq \infty$ *и*

$$\lim_n \left[\alpha s_n + (1-\alpha) \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} \right] = \lambda,$$

то [1]

$$\lim_n s_n = \lambda.$$

Эта теорема скоро заинтересовала многих математиков; результатом около 40 работ различных авторов является большое количество обобщений и аналогов теоремы Мерсера. Все работы, за исключением двух, исследуют вопросы, связанные с приведенной теоремой в случае простых последовательностей.

Приведенная выше теорема получает свое обобщение на случай двойных последовательностей сразу же в указанной выше работе [5], но в следующем виде:

Теорема 1.2. *Если* $\alpha, \beta > -1$, $\lambda \neq \infty$ *и*

$$\lim_{m,n} \left[s_{m+1,n+1} + \alpha \frac{\sum_{k=1}^{m} s_{k,n+1}}{m} + \beta \frac{\sum_{l=1}^{n} s_{m+1,l}}{n} + \alpha\beta \frac{\sum_{k,l=1}^{m,n} s_{k,l}}{mn} \right] = \lambda,$$

то

$$\lim_{m,n} s_{m+1,n+1} = \lim_{m,n} \frac{\sum_{k=1}^{m} s_{k,n+1}}{m} = \lim_{m,n} \frac{\sum_{l=1}^{n} s_{m+1,l}}{n} =$$

[1] В рамках данной работы символы $\lim_n x_n$, $\lim_{m,n} x_{mn}$, $\sum_k a_k$, $\sum_{k,l} a_{kl}$ обозначают:

$$\lim_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_n;\ \lim_{m,n} x_{mn} = \lim_{m,n\to\infty} x_{mn};\ \sum_k a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k;\ \sum_{k,l} a_{kl} = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}.$$

$$= \lim_{m,\,n} \frac{\sum\limits_{k,\,l=1}^{m,\,n} s_{k,\,l}}{mn} = \frac{\lambda}{(\alpha+1)(\beta+1)}.$$

Из этого видно, что простой вид теоремы 1. 1 в таком обобщении исчезает.

Целью настоящей статьи является показать, что теорема Мерсера распространяется на случай двойных последовательностей с полным сохранением вида теоремы 1. 1.

2. Для проведения доказательств этого обобщения нам понадобятся некоторые леммы и вспомогательные теоремы, в которых будем пользоваться следующими обозначениями.

Матричные методы будем обозначать первыми прописными буквами латинского алфавита, т. е. A, B и т. д.; им соответствующие элементы матриц — $a_{mn\mu\nu}$, $b_{mn\mu\nu}$ и т. д. Обратную матрицу матрице A отмечаем символом A^{-1} с элементами $a'_{mn\mu\nu}$. Последовательность, соответствующую преобразованию последовательности матрицей A, назовем A-трансформацией данной последовательности.

В работе встречающиеся классы последовательностей будем обозначать в общепринятых символах Гамильтона из его работы [3].

Для обозначения конечных разностей воспользуемся символами из работы Реймерса [2].

Лемма 2. 1. *Пусть* $A = (a_{mn\mu\nu})$ *— нормальный метод, удовлетворяющий условию* $\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} a_{mn\mu\nu} = 1$.

Из равенства

$$t_{mn} = \alpha\, s_{mn} + (1-\alpha)\, \sigma_{m-1,\,n-1}, \tag{1}$$

где

$$\sigma_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} a_{mn\mu\nu} s_{\mu\nu}, \tag{2}$$

вытекает равенство

$$\sigma_{mn} = \frac{\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} \gamma_{mn\,\mu\nu}\, t_{\mu\nu}}{\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} \gamma_{mn\,\mu\nu}}, \tag{3}$$

в котором

$$\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} \gamma_{mn\,\mu\nu} = \frac{\alpha \gamma_{mnmn}}{a_{mnmn}}, \tag{4}$$

при условии, что γ_{mnmn} *— произвольная величина, а все остальные* $\gamma_{mn\mu\nu}$ *удовлетворяют системе*:

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=\nu}^{n} \gamma_{mnml}\, a'_{mlm\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \sum\limits_{k=\mu}^{m} \gamma_{mnkn}\, a'_{kn\mu n} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m-1), \\ \alpha \sum\limits_{k,\, l=\mu,\, \nu}^{m,\, n} \gamma_{mnkl}\, a'_{kl\mu\nu} + (1-\alpha)\, \gamma_{mn\mu+1,\, \nu+1} = 0, \\ (\mu = 1, 2, \ldots, m-1;\ \nu = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Учитывая определение (2), приведем (1) к виду

$$t_{m,\, n} = \alpha \sum_{\mu,\, \nu\, =1}^{m,\, n} a'_{mn\mu\nu}\, \sigma_{\mu\nu} + (1-\alpha)\, \sigma_{m-1,\, n-1}.$$

Обе части полученного равенства преобразуем треугольной матрицей $\Gamma = (\gamma_{mn\mu\nu})$, оставляя первоначально элементы матрицы неопределенными. Полученое преобразование легко привести к виду

$$\sum_{\mu,\, \nu=1}^{m,\, n} \gamma_{mn\mu\nu} t_{\mu\nu} = \alpha\, \gamma_{mnmn}\, a'_{mnmn}\, \sigma_{mn} +$$

$$+ \alpha \sum_{\nu=1}^{n-1} \Big(\sum_{l=\nu}^{n} \gamma_{mnml}\, a'_{mlm\nu} \Big) \sigma_{m\nu} + \alpha \sum_{\mu=1}^{m-1} \Big(\sum_{k=\mu}^{m} \gamma_{mnkn}\, a'_{kn\mu n} \Big) \sigma_{\mu n} +$$

$$+ \sum_{\mu,\, \nu=1}^{m-1,\, n-1} \Big[\alpha \sum_{k,\, l=\mu,\, \nu}^{m,\, n} \gamma_{mnkl}\, a'_{kl\mu\nu} + (1-\alpha)\, \gamma_{mn\mu+1,\, \nu+1} \Big] \sigma_{\mu\nu}.$$

Требуя теперь, чтобы элементы матрицы Γ удовлетворяли системе (5), можно предыдущее равенство привести к виду

$$\sigma_{mn} = \frac{\sum\limits_{\mu,\, \nu=1}^{m,\, n} \gamma_{mn\mu\nu} t_{\mu\nu}}{\alpha \gamma_{mnmn}\, a'_{mnmn}}.$$

Из полученного равенства непосредственно вытекает равенство (4), если преобразование (1) применить к последовательности $s_{\mu\nu} \equiv 1$, что в сущности, с учетом последнего полученного равенства, и завершает доказательство леммы.

Буквально так же доказывается следующая

Лемма 2. 2. *Пусть* $A = (a_{mn\mu\nu})$ *— нормальный метод, удовлетворяющий условию* $\sum\limits_{\mu,\, \nu\, =1}^{m,\, n} a_{mn\mu\nu} = 1$.

Из равенства

$$t_{mn} = \frac{\alpha}{2\alpha - 1} s_{mn} + \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1} \sigma_{m-1,\, n-1} \tag{1'}$$

вытекает равенство

$$\sigma_{mn} = \frac{\sum\limits_{\mu,\, \nu = 1}^{m,\, n} \gamma_{mn\mu\nu} t_{\mu\nu}}{\sum\limits_{\mu,\, \nu = 1}^{m,\, n} \gamma_{mn\mu\nu}}, \tag{3'}$$

в котором

$$\sum_{\mu,\, \nu = 1}^{m,\, n} \gamma_{mn\mu\nu} = \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \frac{\gamma_{mnmn}}{a_{mnmn}}, \tag{4'}$$

при условии, что γ_{mnmn} — произвольная величина, а все остальные $\gamma_{mn\mu\nu}$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=\nu}^{n} \gamma_{mnml}\, a'_{mlm\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \sum\limits_{k=\mu}^{m} \gamma_{mnkn}\, a'_{kn\mu n} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m-1), \\ \alpha \sum\limits_{k,\, l = \mu,\, \nu}^{m,\, n} \gamma_{mnkl}\, a'_{kl\mu\nu} + (\alpha - 1)\, \gamma_{mn\mu+1,\nu+1} = 0 \\ (\mu = 1, 2, \ldots, m-1;\ \nu = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases} \tag{5'}$$

Далее дадим аналог известной теореме Мазура и Орлича [4] о суммировании расходящейся последовательности регулярным методом для случая двойных последовательностей. Аналог этой теоремы получает следующую формулировку.

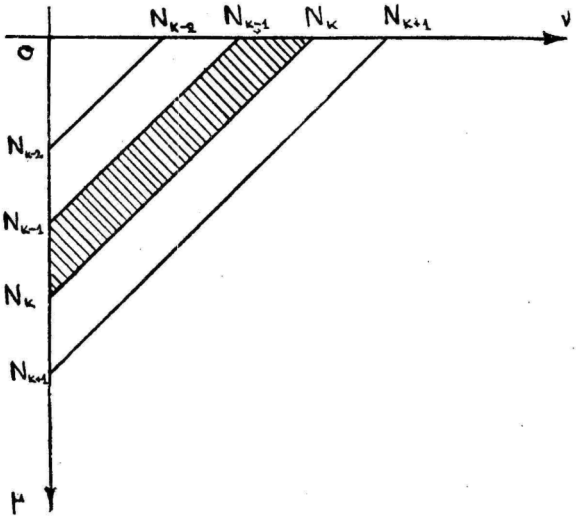
Теорема 2. 1. *Если регулярный метод ограниченно суммирует расходящуюся последовательность, то он ограниченно суммирует некоторую неограниченную расходящуюся последовательность.*

Доказательство этой теоремы осуществляется фактически дословным повторением доказательства Даревского [1] теореме Мазура и Орлича, если учесть следующее:

а) Разбиение на зоны, данной в теореме, ограниченной расходящейся последовательности $\{s_{\mu\nu}\}$ производится здесь диагонально, как показано на нижеследующем чертеже.

Из этого ясно, что в k-тую зону последовательности $\{s_{\mu\nu}\}$ принадлежат те ее члены, у которых индексы μ и ν удовлетворяют условию

$$N_{k-1} < \mu + \nu \leqslant N_k.$$



б) Расходящаяся неограниченная последовательность $\{\xi_{\mu\nu}\{$ конструируется здесь при помощи определенной последовательности индексов N_k аналогично Даревскому, т. е. в k-той зоне неограниченной последовательности имеем члены в форме

$$\xi_{\mu\nu} = \sqrt{k}\, s_{\mu\nu}.$$

в) При оценке преобразования последовательности $\{\xi_{\mu\nu}\}$ регулярной матрицей $A = (a_{mn\mu\nu})$ представим A-трансформацию последовательности $\{\xi_{\mu\nu}\}$ в виде

$$\eta_{mn} = \sum_{\mu,\nu} a_{mn\mu\nu}\xi_{\mu\nu} = \sum_{\tau=2}^{N_{k-1}} \sum_{\mu+\nu=\tau} a_{mn\mu\nu}\xi_{\mu\nu} +$$

$$+ \sum_{\tau=N_{k-1}+1}^{N_k} \sum_{\mu+\nu=\tau} a_{mn\mu\nu}\xi_{\mu\nu} + \sum_{\tau=N_k+1}^{N_{k+1}} \sum_{\mu+\nu=\tau} a_{mn\mu\nu}\xi_{\mu\nu} + \dots .$$

г) Для завершения доказательства нужно еще отметить, что ограниченность и сходимость последовательности $\{\eta_{mn}\}$ следуют из последней получающейся оценки для общего элемента последовательности $\{\eta_{mn}\}$.

Теорема 2.1. нам необходима для получения обобщения на случай двойных последовательностей следующей, известной в теории рядов, теоремы Виланского [7].

Теорема. *Матрица A, сохраняющая сходимость и обладающая обратной матрицей A^{-1}, суммирует расходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда*

$$\sup_n \sum_k |a'_{nk}| = \infty.$$

Для доказательства аналога этой теоремы в случае двойных последовательностей, кроме теоремы 2. 1, нужна

Лемма 2. 3. *Соответственно каждому методу* $B = (b_{mn\mu\nu})$, *который удовлетворяет условию*

$$\sup_{m,n} \sum_{\mu,\nu} |b_{mn\mu\nu}| = \infty, \tag{6}$$

найдется такая ограниченная сходящаяся последовательность, B-трансформация которой расходится.

Доказательство. а) В случае данного метода B, условие (6) окажется выполненным, если найдется хоть одна пара чисел m и n, при которых

$$\sum_{\mu,\nu} |b_{mn\mu\nu}| = \infty.$$

Но в этом случае, по лемме 2 в работе Робизона [6], найдется такая последовательность из класса *bcn*, B-трансформация которой расходится.

Так, в этом случае наша лемма доказана.

б) По доказанной части леммы мы имеем далее право предполагать, что

$$\sum_{\mu,\nu} |b_{mn\mu\nu}| < \infty$$

при любых m и n и в то же время имеет место (6).

Возьмем далее некоторую последовательность из класса *rcrn* (она особенно принадлежит к классу *bc*). По исследованиям Гамильтона в работе [3] (§ 5, пункт 5, и § 6, пункт 6) необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность из класса *rcrn* преобразовалась в последовательность из класса *b*, заключается в выполнении условия

$$\sum_{\mu,\nu} |b_{mn\mu\nu}| < K \qquad (m,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

По условиям доказываемой леммы метод B последнему условию не может удовлетворять. Следовательно, выбранная последовательность из класса *rcrn* имеет неограниченную B-трансформацию. Из оценки, данной Гамильтоном (§ 5, пункт 5) в работе [3] для общего элемента B-трансформации рассматриваемой последовательности, следует и расходимость этой трансформации, что и завершает доказательство леммы.

Теперь мы в состоянии доказать аналог теоремы Виланского.

Теорема 2. 2. *Треугольный регулярный метод* $A = (a_{mn\mu\nu})$ *ограниченно суммирует расходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{m,n} \sum_{\mu,\nu=1}^{m,n} |a_{mn\mu\nu}| = \infty. \tag{7}$$

Необходимость. Предположим противоречиво, что

$$\sup_{m,\,n} \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} |a'_{mn\mu\nu}| = c < \infty. \tag{8}$$

По теореме 2. 1 можем предполагать, что A ограниченно суммирует неограниченную расходящуюся последовательность. Пусть этой последовательностью будет $\{x_{\mu\nu}\}$. Тогда

$$y_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} a_{mn\mu\nu}\, x_{\mu\nu}$$

и по условиям теоремы $\{y_{mn}\} \in bc$.

Но на основании сделанного предположения (8) мы получаем

$$|x_{mn}| \leqslant \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} |a'_{mn\mu\nu}|\,|y_{\mu\nu}| \leqslant cK,$$

где $K = \sup\limits_{\mu,\,\nu} y_{\mu\nu}$, что противоречит выбранному характеру последовательности $\{x_{\mu\nu}\}$.

Достаточность. Пусть выполнено условие (7). По лемме 2. 3 найдется последовательность $\{x_{\mu\nu}\}$ из класса bcn (особенно $rcrn$), A'-трансформация которой расходится, т. е.

$$y_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} a'_{mn\mu\nu}\, x_{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \{y_{mn}\} \bar{\in} c.$$

Для доказательства теоремы остается убедиться в том, что метод A ограниченно суммирует последовательность $\{y_{mn}\}$. Но

$$\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} a_{mn\mu\nu}\, y_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} a_{mn\mu\nu} \sum_{k,\,l=1}^{\mu,\,\nu} a'_{\mu\nu kl}\, x_{kl} =$$

$$= \sum_{k,\,l=1}^{m,\,n} \Big(\sum_{\mu,\,\nu=k,\,l}^{m,\,n} a_{mn\mu\nu}\, a'_{\mu\nu kl} \Big) x_{kl} = x_{mn},$$

и при этом $\{x_{mn}\} \in bcn$, что и требовалось доказать.

3. Ознакомившись с этими вспомогательными теоремами, приступим к доказательству следующего обобщения теоремы Мерсера, воспользовавшись следующими обозначениями:

$$\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} p_{\mu\nu} = P_{mn} \quad \text{и} \quad R_{mn} = \frac{\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} p_{\mu\nu} s_{\mu\nu}}{P_{mn}},$$

где $p_{\mu\nu}$ — положительные числа.

Теорема 3.1. *Если при* $\alpha > 0$, $\lambda \neq \infty$ *и неограниченно возрастающем* P_{mn} *последовательность*

$$t_{m+1,\,n+1} = \alpha s_{m+1,\,n+1} + (1-\alpha) R_{mn}$$

ограниченно сходится к пределу λ, *то и* $\{s_{mn}\}$ *ограниченно сходится к этому же пределу* λ.

Простое рассуждение покажет, что теорема 3.1 получается следствием из нижеследующей теоремы 3.2.

Именно если $\{t_{mn}\} \in bc$, то $\{t_{mn} - \lambda\} \in bcn$. Но так как

$$t_{mn} - \lambda = \alpha (s_{mn} - \lambda) + (1-\alpha) \frac{\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} p_{\mu\nu}(s_{\mu\nu} - \lambda)}{P_{mn}},$$

то ясно, что из результата $\{s_{mn} - \lambda\} \in bcn$ получается необходимый результат теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Если при* $\alpha > 0$, $\lambda \neq \infty$ *и неограниченно возрастающем* P_{mn} *последовательность*

$$t_{m+1,\,n+1} = \alpha s_{m+1,\,n+1} + (1-\alpha) R_{mn} \tag{9}$$

ограниченно сходится к нулю, то и $\{s_{mn}\}$ *ограниченно сходится к нулю.*

Доказательство. По лемме 2.1 из равенства (9) получаем

$$R_{m+1,\,n+1} = \frac{\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\, t_{\mu\nu}}{\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}}, \tag{10}$$

где

$$\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu} = \alpha \frac{P_{m+1,\,n+1}}{p_{m+1,\,n+1}} \gamma_{m+1,\,n+1,\,m+1,\,n+1}. \tag{11}$$

$\gamma_{m+1,\,n+1,\,m+1,\,n+1}$ произвольна, а все остальные $\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}$ определяются системой, соответствующей системе (5) и имеющей вид

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_{\mu} \dfrac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu,\,n+1}}{p_{\mu,\,n+1}} = 0 \quad (\mu = 2, 3, \ldots, m+1), \\ \overline{\Delta}_{\nu} \dfrac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,m+1,\,\nu}}{p_{m+1,\,\nu}} = 0 \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n+1), \\ \overline{\Delta}_{\mu\nu} \dfrac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} + \beta \dfrac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}}{P_{\mu-1,\,\nu-1}} = 0 \\ (\mu = 2, 3, \ldots, m+1;\ \nu = 2, 3, \ldots, n+1), \end{cases} \tag{12}$$

где $\beta = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$. Этой системе удовлетворяет следующее решение.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu,\,n+1} = \frac{p_{\mu,\,n+1}}{p_{m+1,\,n+1}}\,\gamma_0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),\\
&\gamma_{m+1,\,n+1,\,m+1,\,\nu} = \frac{p_{m+1,\,\nu}}{p_{m+1,\,n+1}}\,\gamma_0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n),\\
&\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu} = \frac{p_{\mu\nu}}{p_{m+1,\,n+1}}\,\gamma_0 \left(1 - \beta \sum_{s,\,t=\mu,\,\nu}^{m,\,n} \frac{p_{s+1,\,t+1}}{P_{s,\,t}} + \right.\\
&\quad + \beta^2 \sum_{s_1,\,t_1=\mu,\,\nu}^{m-1,\,n-1} \sum_{s,\,t=s_1+1,\,t_1+1}^{m,\,n} \frac{p_{s_1+1,\,t_1+1}\cdot p_{s+1,\,t+1}}{P_{s_1,\,t_1}\cdot P_{s,\,t}} - \\
&- \beta^3 \sum_{s_2,\,t_2=\mu,\,\nu}^{m-2,\,n-2} \sum_{s_1,\,t_1=s_2+1,\,t_2+1}^{m-1,\,n-1} \sum_{s,\,t=s_1+1,\,t_1+1}^{m,\,n} \frac{p_{s_2+1,\,t_2+1}\cdot p_{s_1+1,\,t_1+1}\cdot p_{s+1,\,t+1}}{P_{s_2,\,t_2}\cdot P_{s_1,\,t_1}\cdot P_{s,\,t}} + \\
&\quad + \ldots + (-1)^{m-\mu+1}\beta^{m-\mu+1} \sum_{t_{m-\mu}=\nu}^{n-(m-\mu)} \sum_{t_{m-\mu-1}=t_{m-\mu}+1}^{n-(m-\mu)+1} \ldots \\
&\quad \left. \ldots \sum_{t=t_1+1}^{n} \frac{p_{\mu+1,\,t_{m-\mu}+1}\cdot p_{\mu+2,\,t_{m-\mu-1}+1}\cdots p_{m+1,\,t+1}}{P_{\mu,\,t_{m-\mu}}\cdot P_{\mu+1,\,t_{m-\mu-1}}\cdots P_{m,\,t}} \right)\\
&\quad (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n - (m - \mu)),\\
&\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu} = \frac{p_{\mu\nu}}{p_{m+1,\,n+1}}\,\gamma_0 \left(1 - \beta \sum_{s,\,t=\mu,\,\nu}^{m,\,n} \frac{p_{s+1,\,t+1}}{P_{s,\,t}} + \right.\\
&\quad + \beta^2 \sum_{s_1,\,t_1=\mu,\,\nu}^{m-1,\,n-1} \sum_{s,\,t=s_1+1,\,t_1+1}^{m,\,n} \frac{p_{s_1+1,\,t_1+1}\cdot p_{s+1,\,t+1}}{P_{s_1,\,t_1}\cdot P_{s,\,t}} - \\
&- \beta^3 \sum_{s_2,\,t_2=\mu,\,\nu}^{m-2,\,n-2} \sum_{s_1,\,t_1=s_2+1,\,t_2+1}^{m-1,\,n-1} \sum_{s,\,t=s_1+1,\,t_1+1}^{m,\,n} \frac{p_{s_2+1,\,t_2+1}\cdot p_{s_1+1,\,t_1+1}\cdot p_{s+1,\,t+1}}{P_{s_2,\,t_2}\cdot P_{s_1,\,t_1}\cdot P_{s,\,t}} + \\
&\quad + \ldots + (-1)^{n-\nu+1}\beta^{n-\nu+1} \sum_{s_{n-\nu}=\mu}^{m-(n-\nu)} \sum_{s_{n-\nu-1}=s_{n-\nu}+1}^{m-(n-\nu)+1} \ldots \\
&\quad \left. \ldots \sum_{s=s_1+1}^{m} \frac{p_{s_{n-\nu}+1,\,\nu+1}\cdot p_{s_{n-\nu-1}+1,\,\nu+2}\cdots p_{s+1,\,n+1}}{P_{s_{n-\nu},\,\nu}\cdot P_{s_{n-\nu-1},\,\nu+1}\cdots P_{s,\,n}} \right)\\
&\quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots, m - (n - \nu)),
\end{aligned}
\right\} \quad (13)
$$

где $\gamma_0 = \gamma_{m+1,\ n+1,\ m+1,\ n+1}$ — произвольная величина.

Из равенства (10) следует, что сходящаяся к нулю последовательность преобразуется матрицей

$$
C = \left(\frac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}}{\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}} \right)
$$

в последовательность $R_{m+1,\,n+1}$. Элементы матрицы C определены равенствами (11) и (13).

Из выражений в равенствах (13) следует, что $\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}$ зависит от величины β. Поэтому для нижеследующих рассуждений полезно ввести обозначение

$$\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu} = \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\,(\beta).$$

Для матрицы C оценим величину

$$D_{m+1,\,n+1} = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \left| \frac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}}{\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}} \right|.$$

1) При $\beta < 0$ (т. е. $\alpha > 1$) из равенств (13) следует, что $|\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\,(\beta)| = \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\,(\beta)$, и, следовательно,

$$D_{m+1,\,n+1} = 1 \quad \text{при} \quad m,\, n = 1,\, 2,\, \ldots\,.$$

2) При $\beta > 0$ (т. е. $\alpha < 1$) на основе равенств (13) имеем

$$|\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\,(\beta)| \leqslant \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\,(-\beta)$$

и, следовательно,

$$D_{m+1,\,n+1} \leqslant \frac{\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\,(-\beta)}{\left| \sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\,(\beta) \right|},$$

где

$$\left| \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\,(\beta) \right| = \alpha \frac{P_{m+1,\,n+1}}{p_{m+1,\,n+1}} |\gamma_0|.$$

Для вычисления величины $\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\,(-\beta)$ используем лемму 2.2, по которой в данном случае система (5′) приобретает вид

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_{\mu} \dfrac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu,\,n+1}}{p_{\mu,\,n+1}} = 0 & (\mu = 2, 3, \ldots, m+1), \\ \overline{\Delta}_{\nu} \dfrac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,m+1,\,\nu}}{p_{m+1,\,\nu}} = 0 & (\nu = 2, 3, \ldots, n+1), \\ \overline{\Delta}_{\mu\nu} \dfrac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}}{p_{\mu\nu}} - \beta \dfrac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}}{P_{\mu-1,\,\nu-1}} = 0 & \\ (\mu = 2, 3, \ldots, m+1;\ \nu = 2, 3, \ldots, n+1). & \end{cases} \tag{14}$$

Можно проверить, что решением системы (14) будет решение системы (12), если в нем β заменить на $-\beta$.

Но по формуле, соответствующей формуле (4′), имеем

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}(-\beta) = \frac{\alpha}{2\alpha-1}\,\frac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,m+1,\,n+1}(-\beta)}{p_{m+1,\,n+1}}\,P_{m+1,\,n+1}.$$

Произвольную величину $\gamma_{m+1,\,n+1,\,m+1,\,n+1}(-\beta)$ теперь определим так:

$$\gamma_{m+1,\,n+1,\,m+1,\,n+1}(-\beta) = (2\alpha-1)\,|\gamma_0|,$$

что дает величине $D_{m+1,\,n+1}$ оценку

$$D_{m+1,\,n+1} \leqslant \frac{\alpha\,|\gamma_0|\,P_{m+1,\,n+1}}{p_{m+1,\,n+1}} \cdot \frac{p_{m+1,\,n+1}}{\alpha\,|\gamma_0|\,P_{m+1,\,n+1}} = 1$$

при $m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots$.

Таким образом при произвольном $\alpha > 0$ преобразованием C выполняется условие

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m+1,\,n+1} \left| \frac{\gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}}{\sum\limits_{k,\,l=1}^{m+1,\,n+1} \gamma_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}} \right| \leqslant 1 \quad \text{при } m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots . \tag{15}$$

Зная матрицу C и учитывая (9), выпишем результат обращения равенства (9)

$$s_{m+1,\,n+1} = \frac{1}{\alpha}\,t_{m+1,\,n+1} - \beta \sum_{\mu,\nu=1}^{m,\,n} \frac{\gamma_{mn\mu\nu}}{\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{m,\,n} \gamma_{mn\mu\nu}}\,t_{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{m+1,\,n+1} c_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}\,t_{\mu\nu}.$$

Из полученного равенства и неравенства (15) имеем

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m+1,\,n+1} |c_{m+1,\,n+1,\,\mu\nu}| \leqslant \frac{1}{\alpha} + |\beta| \quad \text{при } m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots .$$

Но тогда по теореме 2.2 и проведенному рассуждению понятно, что последовательность $\{s_{mn}\}$ не может быть расходящейся.

Для завершения доказательства остается показать, что последовательность $\{s_{mn}\}$ может (к тому же она оказалась сходящейся) быть только ограниченной. Предполагая противное, т. е. $\{s_{m,\,n}\} \in c$, но $\{s_{mn}\} \bar{\in} b$, можно сконструировать противоречие так же, как оно было получено в доказательстве необходимости условия (7) теоремы 2.2.

Ясно, что из теоремы 3.1 непосредственно следует аналог теоремы Мерсера, т. е.

Теорема 3. 3. *Если при* $\alpha > 0$ *и* $\lambda \neq \infty$ *последовательность*

$$t_{m+1,\,n+1} = \alpha\, s_{m+1,\,n+1} + (1-\alpha)\,\frac{\sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{m,\,n} s_{\mu\nu}}{mn}$$

ограниченно сходится к пределу λ, *то* $\{s_{\mu\nu}\}$ *так же ограниченно сходится к пределу* λ.

Замечание. На основе приведенной теоремы Мазура-Орлича (т. е. теоремы 2. 1) доказательство теоремы 3. 1 в сущности совсем отпадает, когда ограничиться только случаем $\alpha > \frac{1}{2}$ (т. е. $|\beta| < 1$).

Литература

1. Даревский В. М., О внутренно совершенных методах суммирования. Изв. АН СССР, сер. мат., 1946, **10**, 97—104.
2. Реймерс Э., Теоремы о среднем значении и умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 50—83.
3. Hamilton, H. J., Transformations of multiple sequences. Duke Math. J., 1936, **2**, 29—60.
4. Mazur, S., Orlicz, W., Sur les méthodes linéaires de sommations. C.r. Acad. sci., 1933, **196**, 32—34.
5. Mercer, J., On the limit of real variants. Proc. London Math. Soc., (2), 1907, **5**, 206—224.
6. Robison, G. H., Divergent double sequences and series. Trans. Amer. Math. Soc., 1926, **28**, 50—73.
7. Wilansky, A., A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, 914—916.

Поступило
23 V 1960

ÜHEST MERCERI TEOREEMI ÜLDISTUSEST KAHEKORDSETELE JADADELE

T. Sõrmus

Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis üldistatakse kahekordsetele jadadele tuntud Merceri teoreem, mis lubab järeldada jada koonduvust sellest jadast ja tema aritmeetilisest keskmisest moodustatud lineaarse kombinatsiooni koonduvusest.

Kõne all olev üldistus saadakse niisugusest Merceri teoreemi üldistusest, milles jada aritmeetiline keskmine asendatakse jada Riesz'i teisendusega.

Viimati mainitud üldistatud teoreemi tõestamiseks osutus vajalikuks anda kahekordsete jadade tarvis analoog Wilansky teoreemile, mis annab tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et regulaarne menetlus summeeriks hajuva jada. Wilansky teoreemi tõestamiseks tuli omakorda üle kanda kahekordsetele jadadele Mazur-Orliczi teoreem hajuva jada kuuluvusest regulaarse menetluse summeerimisvälja.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DES SATZES VON MERCER FÜR DOPPELFOLGEN

T. Sõrmus

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird der bekannte Satz von Mercer [5] für den Fall der Doppelfolgen bewiesen. Der Mercersche Satz sagt, daß aus der Existenz von

$$\lim_n \left[\alpha s_n + (1-\alpha) \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} \right]$$

auch die Existenz von $\lim s_n$ und die Gleichheit beider Grenzwerte folgt.

Gleichzeitig ist der Satz für die Rieszsche Transformation verallgemeinert, was den Fall des aritmetischen Mittels in sich beschließt.

Um den Beweis für den verallgemeinerten Satz abzuleiten, hat man in diesem Artikel die Sätze von Mazur-Orlicz [4] (über die Summierbarkeit einer divergenten Folge mit der Hilfe der regulären Transformation) und Wilansky [7] (der Satz, der die notwendingen und hinreichenden Bedingungen für die Summierbarkeit der divergenten Folge mit der Hilfe der regulären Transformation gibt) auch für die Doppelfolgen bewiesen.

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ МЕРСЕРА

Т. Сырмус
Кафедра математического анализа

В статье [3] мы получили одно обобщение теоремы Мерсера [6] для двойных последовательностей. В настоящей статье мы докажем несколько обобщений теоремы Мерсера на случай простых последовательностей.

О теореме Мерсера важно отметить следующее.

Многие математики рассматривали нижеследующие два основных вида теоремы Мерсера, из которых первая принадлежит самому Мерсеру.

Теорема I. *Если* $\lambda > 0$, $l \neq \infty$ *и* [1]

$$\lim_n \left(\lambda s_{n+1} + (1-\lambda) \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n} \right) = l,$$

то

$$\lim_n s_n = l.$$

Теорема II. *Если* $\lambda > 0$, $l \neq \infty$ *и*

$$\lim_n \left(\lambda s_n + (1-\lambda) \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n} \right) = l,$$

то

$$\lim_n s_n = l.$$

Понятно, что эти теоремы близки друг другу, однако они не тождественны. Как показал Наруми [7] в 1917 году, эти теоремы оказываются тождественными только в некоторой области значений параметра λ.

В статье Польняковского [8], сформулировано следующее обобщение теоремы II:

[1] Под символом $\lim_n S_n = S$ мы подразумеваем $\lim_{n \to \infty} S_n = S$.

Теорема III. *В случае методов*[2] C^α *и* H^α *с* $\alpha = 2, 3, \ldots$ *существуют постоянные, соответственно,* λ'_α *и* λ''_α *такие, что из условия* $\lim\limits_n (\lambda s_n + (1-\lambda) t_n) = l$, *где* t_n *означает, соответственно,* C_n^α *или* H_n^α, *следует* $\lim\limits_n s_n = l$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda > \lambda'_\alpha$ *или* $\lambda > \lambda''_\alpha$. *Обе последовательности,* $\{\lambda'_\alpha\}$ *и* $\{\lambda''_\alpha\}$, *являются возрастающими при* $\alpha \geqslant 2$, *неотрицательными и сходящимися к значению* $1/2$.

Справедливы следующие асимптотические представления

$$\lambda'_\alpha \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{48}\,\frac{\pi^4}{\ln^2 \alpha} \quad \text{и} \quad \lambda''_\alpha = \frac{\cos^\alpha \frac{\pi}{\alpha}}{1 + \cos^\alpha \frac{\pi}{\alpha}} \sim \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8\alpha}.$$

Доказательство этой теоремы дано в статье Польняковского [9].

Теорема III, которая является обобщением теоремы II, показывает, что для методов C^α и H^α имеет место теорема Мерсера в случае $\lambda > \lambda'_\alpha$ или $\lambda > \lambda''_\alpha$ при $\alpha = 2, 3, \ldots$.

В настоящей статье мы дадим несколько обобщений теоремы I. В частности, в наших результатах содержится аналог теоремы III для методов C^α и H^α с $\alpha > 0$ и параметром $\lambda > 0$.

В первом параграфе данной статьи мы изложим символику, необходимые нам теоремы и проведем доказательство одной вспомогательной формулы. Во втором параграфе докажем теорему Мерсера на случай преобразования Хаусдорфа и выведем следствия полученной теоремы, а в третьем параграфе частично расширим теорему III.

§ 1.

Мы будем обозначать матричные преобразования первыми прописными буквами латинского алфавита с соответствующими элементами, т. е. $A = (a_{nk}), \ldots$, а обратные преобразования, соответственно, символом $A^{-1}, \ldots$ с элементами $a'_{nk}, \ldots$. Для конечных разностей воспользуемся общепринятыми символами.

Ниже используем следующую теорему.

Теорема 1.1. (Виланский [10])

Матрица A, сохраняющая сходимость и имеющая обратную матрицу A^{-1}, *суммирует расходящиеся последовательности тогда и только тогда, когда*

$$\sup_n \sum_k |a'_{nk}| = \infty.$$

---

[2] Определения методов Чезаро C^α, Гелдера H^α и Хаусдорфа (H, μ_k) даны в Харди [2].

В данной статье мы имеем дело с линейной системой уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = c_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для решения этой системы мы воспользуемся рекуррентной формулой

$$x_k = c_k - \sum_{s=k+1}^{n} a_{ks}x_s, \tag{1.2}$$

справедливость которой очевидна.

Имеет место формула:

$$\sum_{n=k}^{s} (-\mu_{k-1}) \binom{s-(k-1)}{n-(k-1)} \Delta^{n-(k-1)} \frac{1}{\mu_{k-1}} \Delta^{s-n}\mu_n = \Delta^{s-(k-1)}\mu_{k-1}, \tag{1.3}$$

где $k \geqslant 1$ и $s \geqslant k$ целые числа, а μ_k некоторая действительная последовательность.

Доказательство. Пусть k фиксированное число. Для $s = k$ справедливость формулы (1.3) очевидна, а для $s > k$ имеем:

$$S = \sum_{n=k}^{s}(-\mu_{k-1}) \binom{s-(k-1)}{n-(k-1)} \Delta^{n-(k-1)} \frac{1}{\mu_{k-1}} \Delta^{s-n}\mu_n =$$

$$= \sum_{n=k}^{s}(-\mu_{k-1}) \binom{s-(k-1)}{n-(k-1)} \sum_{l=0}^{n-(k-1)} (-1)^l \binom{n-(k-1)}{l} \frac{1}{\mu_{k-1+l}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{s-n} (-1)^m \binom{s-n}{m} \mu_{n+m} =$$

$$= \sum_{n=k}^{s} \sum_{l=0}^{n-(k-1)} \sum_{m=0}^{s-n} (-1)^{l+m+1} \binom{s-(k-1)}{l} \cdot$$

$$\cdot \binom{s-(k-1)-l}{n-(k-1)-l} \binom{s-n}{m} \mu_{k-1} \frac{\mu_{n+m}}{\mu_{k-1+l}} =$$

$$= \sum_{t=0}^{s-k} \sum_{l=0}^{t+1} \sum_{m=0}^{s-t-k} (-1)^{l+m+1} \binom{s-(k-1)}{l} \cdot$$

$$\cdot \binom{s-(k-1)-l}{t+1-l} \binom{s-k-t}{m} \mu_{k-1} \frac{\mu_{t+k+m}}{\mu_{k-1+l}} = S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \sum_{t=0}^{s-k} \sum_{m=0}^{s-k-t} (-1)^{m+1} \binom{s-(k-1)}{t+1} \binom{s-k-t}{m} \mu_{k+t+m}$$

и

$$S_2 = \sum_{l=1}^{s-(k-1)} \sum_{t=l-1}^{s-k} \sum_{m=0}^{s-t-k} (-1)^{l+m+1} \binom{s-(k-1)}{l} \cdot$$

$$\cdot \binom{s-(k-1)-l}{t+1-l} \binom{s-k-t}{m} \mu_{k-1} \frac{\mu_{k+t+m}}{\mu_{k-1+l}},$$

которые получены при изменении порядка суммирования по t и l в последнем полученном выражении суммы S.

Выбирая в сумме S_1 новый индекс суммирования $u = t + m$, получаем:

$$S_1 = \sum_{t=0}^{s-k} \sum_{u=t}^{s-k} (-1)^{u-(t-1)} \binom{s-(k-1)}{t+1} \binom{s-k-t}{u-t} \mu_{k+u} =$$

$$= \sum_{u=0}^{s-k} (-1)^u \mu_{k+u} \sum_{t=0}^{u} (-1)^{t-1} \binom{s-(k-1)}{t+1} \binom{s-k-t}{u-t} =$$

$$= \sum_{u=0}^{s-k} (-1)^u \mu_{k+u} \sum_{\tau=1}^{u+1} (-1)^{\tau} \binom{s-(k-1)}{\tau} \binom{s-(k-1)-\tau}{u+1-\tau} =$$

$$= \sum_{u=0}^{s-k} (-1)^u \mu_{k+u} \binom{s-(k-1)}{u+1} \sum_{\tau=1}^{u+1} (-1)^{\tau} \binom{u+1}{\tau} =$$

$$= -\sum_{u=0}^{s-k} (-1)^u \binom{s-(k-1)}{u+1} \mu_{k+u} = \Delta^{s-(k-1)} \mu_{k-1} - \mu_{k-1},$$

ибо $\sum_{\tau=1}^{u+1} (-1)^{\tau} \binom{u+1}{\tau} = -1$, так как $u + 1 \neq 0$. Итак, мы получили

$$S_1 = \Delta^{s-(k-1)} \mu_{k-1} - \mu_{k-1}.$$

Далее вычисляем:

$$S_2 = \sum_{l=1}^{n-(k-1)} \sum_{\tau=0}^{s-(k-l)-l} \sum_{m=0}^{s-(k-l)-l-\tau} (-1)^{l+m+1} \binom{s-(k-1)}{l} \cdot$$

$$\cdot \binom{s-(k-1)-l}{\tau} \binom{s-(k-1)-l-\tau}{m} \mu_{k-1} \frac{\mu_{k-1+l+m+\tau}}{\mu_{k-1+l}} =$$

$$= \sum_{l=1}^{s-(k-1)} (-1)^l \binom{s-(k-1)}{l} \frac{\mu_{k-1}}{\mu_{k-1+l}} \cdot S_3,$$

где

$$S_3 = \sum_{\tau=0}^{s-(k-l)-l} \sum_{m=0}^{s-(k-l)-l-\tau} (-1)^{m+1} \binom{s-(k-1)-l}{\tau} \cdot$$

$$\cdot \binom{s-(k-1)-l-\tau}{m} \mu_{k-1+l+m+\tau} =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{s-(k-1)-l} \sum_{u=\tau}^{s-(k-1)-l} (-1)^{u-\tau+1} \binom{s-(k-1)-l}{\tau} \cdot$$

$$\cdot \binom{s-(k-1)-l-\tau}{u-\tau} \mu_{k-1+l+u} =$$

$$= \sum_{u=0}^{s-(k-1)-l} (-1)^{u+1} \mu_{k+l-1+u} \binom{s-(k-1)-l}{u} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\tau=0}^{u} (-1)^{\tau} \binom{u}{\tau} = -\mu_{k+l-1},$$

так как

$$\sum_{\tau=0}^{u} (-1)^{\tau} \binom{u}{\tau} = \begin{cases} 0, \text{ при } u \neq 0, \\ 1, \text{ при } u = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $S_3 = -\mu_{k+l-1}$ и

$$S_2 = \sum_{l=1}^{s-(k-1)} (-1)^l \binom{s-(k-1)}{l} (-\mu_{k-1}) =$$

$$= -\mu_{k-1} \sum_{l=1}^{s-(k-1)} (-1)^l \binom{s-(k-1)}{l} = \mu_{k-1},$$

так как $\sum_{l=1}^{s-(k-1)} (-1)^l \binom{s-(k-1)}{l} = -1$, ибо $s-(k-1) \neq 0$.

По найденным значениям S_1 и S_2 получаем:

$$S = S_1 + S_2 = \Delta^{s-(k-1)} \mu_{k-1},$$

что и доказывает формулу (1.3).

§ 2.

В данном параграфе будем рассматривать методы Хаусдорфа (H, μ_k) и докажем следующее обобщение теоремы Мерсера.

Теорема 2.1. *Если $\lambda > 0$, $l \neq \infty$, а последовательность Хаусдорфа μ_k абсолютно монотонна и регулярна, то из равенства*

$$\lim_n \left(\lambda s_n + (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^{n-1-k} \mu_k s_k\right) = l$$

вытекает

$$\lim_n s_n = l.$$

Доказательство. Введем обозначения $\binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k = h_{nk}$, $\sum_{k=0}^{n} h_{nk} s_k = H_n$ и

$$t_n = \lambda s_n + (1-\lambda) H_{n-1} \qquad (2.1)$$

или

$$t_n = \lambda \sum_{k=0}^{n} h'_{nk} H_k + (1 - \lambda) H_{n-1}. \qquad (2.2)$$

Найдем обратное преобразование преобразованию (2.2) известным методом Шура. С этой целью помножим обе части равенства (2.2) на величины γ_{mn} и просуммируем от $n = 0$ до $n = m$. Величины γ_{mn} определим ниже. Получаем:

$$\sum_{n=0}^{m} \gamma_{mn} t_n = \lambda \sum_{n=0}^{m} \gamma_{mn} \sum_{k=0}^{n} h'_{nk} H_k + (1 - \lambda) \sum_{n=0}^{m} \gamma_{mn} H_{n-1} =$$

$$= \lambda \gamma_{mm} h'_{mm} H_m + \sum_{k=0}^{m-1} \left(\lambda \sum_{n=k}^{m} \gamma_{mn} h'_{nk} + (1 - \lambda) \gamma_{m,\, k+1} \right) H_k.$$

Требуя теперь, чтобы удовлетворялась система

$$\sum_{n=k}^{m} \gamma_{mn} h'_{nk} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \gamma_{m,\, k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1), \qquad (2.3)$$

находим из предыдущего равенства

$$H_m = \frac{\sum_{n=0}^{m} \gamma_{mn} t_n}{\lambda \gamma_{mm} h'_{mm}}. \qquad (2.4)$$

По условиям теоремы из равенства (2.1) следует, что при $s_n \equiv 1$ будет и $t_n \equiv 1$ и $H_n \equiv 1$, а следовательно

$$\sum_{n=0}^{m} \gamma_{mn} = \lambda \gamma_{mm} h'_{mm}, \qquad (2.5)$$

что вытекает из равенства (2.4).

Это показывает, что обратное преобразование для (2.2) определено матрицей

$$C = \left(\frac{\gamma_{mn}}{\sum_{n=0}^{m} \gamma_{mn}} \right) = \left(\frac{\gamma_{mn}}{\lambda \gamma_0 h'_{mm}} \right), \qquad (2.6)$$

где величина $\gamma_0 = \gamma_{mm}$ взята произвольно, а остальные γ_{mn} определены системой (2.3).

Для окончательного определения преобразования C приступим к решению системы (2.3). В случае преобразования Хаусдорфа с элементами $h_{nk} = \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k$, имеем $h'_{nk} = \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \frac{1}{\mu_k}$. Этим система (2.3) приводится к виду:

$$\sum_{n=k}^{m-1} \gamma_{mn}\mu_k \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \frac{1}{\mu_k} = -\gamma_0 \mu_k \binom{m}{k} \Delta^{m-k} \frac{1}{\mu_k} - c\mu_k \gamma_{m,\,k+1} \tag{2.7}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1),$$

где $c = \dfrac{1-\lambda}{\lambda}$.

Так как система (2.7) линейна, то из вида столбца свободных членов следует, что величины $\gamma_{mn} (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1)$ можно искать в виде

$$\gamma_{mn} = X_{mn} + Y_{mn} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1), \tag{2.8}$$

где X_{mn} и Y_{mn} определяются ситемами

$$\sum_{n=k}^{m-1} X_{mn} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \frac{1}{\mu_k} = -\gamma_0 \binom{m}{k} \Delta^{m-k} \frac{1}{\mu_k} \tag{2.9}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1)$$

и, соответственно,

$$\sum_{n=k}^{m-1} Y_{mn}\mu_k \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \frac{1}{\mu_k} = -c\mu_k \gamma_{m,\,k+1} \tag{2.10}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1).$$

Система (2.9) решается очень просто. Для этого нужно только заметить, что нахождение методом Шура обратного преобразования для $s_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \frac{1}{\mu_k} H_k$ привело бы нас именно к системе (2.9), но ведь тогда

$$\frac{X_{mn}}{\sum_{n=0}^{m} X_{mn}} = \binom{m}{n} \Delta^{m-n} \mu_n,$$

а так как

$$\sum_{n=0}^{m} X_{mn} = \gamma_0 \frac{1}{\mu_m},$$

то

$$X_{mn} = \gamma_0 \frac{1}{\mu_m} \binom{m}{n} \Delta^{m-n} \mu_n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1), \tag{2.11}$$

что и является решением системы (2.9).

Система (2.10) имеет следующее решение (в чем убедимся ниже):

$$Y_{mn} = -c\gamma_0 \sum_{\sigma=n}^{m-1} \frac{1}{\mu_m} \binom{m}{\sigma+1} \Delta^{m-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \binom{\sigma}{n} \Delta^{\sigma-n} \mu_n +$$

$$+ c^2\gamma_0 \sum_{\sigma_1=n}^{m-2} \sum_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-1} \frac{1}{\mu_m} \binom{m}{\sigma+1} \Delta^{m-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \binom{\sigma}{\sigma_1+1} \Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)} \mu_{\sigma_1+1} \cdot$$

$$\cdot \binom{\sigma_1}{n} \Delta^{\sigma_1-n} \mu_n - \tag{2.12}$$

$$- c^3\gamma_0 \sum_{\sigma_2=n}^{m-3} \sum_{\sigma_1=\sigma_2+1}^{m-2} \sum_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-1} \frac{1}{\mu_m} \binom{m}{\sigma+1} \Delta^{m-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \cdot$$

$$\cdot \binom{\sigma}{\sigma_1+1} \Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)} \mu_{\sigma_1+1} \binom{\sigma_1}{\sigma_2+1} \Delta^{\sigma_1-(\sigma_2+1)} \mu_{\sigma_2+1} \binom{\sigma_2}{n} \Delta^{\sigma_2-n} \mu_n + \dots$$

$$\dots + (-1)^{m-n} c^{m-n} \gamma_0 \mu_n \mu_{n+1} \dots \mu_{m-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

С учетом формул (2.8), (2.11) и (2.12) мы видим, что решение системы (2.7) имеет вид полинома относительно параметра c.

Этим полностью определено обратное преобразование преобразованию (2.2), а, следовательно, обратное преобразование преобразованию (2.1) имеет вид:

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} b'_{mn} t_n = \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{k=n}^{m} h'_{mk} \frac{\gamma_{kn}}{\lambda\gamma_0 \dfrac{1}{\mu_k}} \right) t_n,$$

или (см. 2.5)

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{k=n}^{m} h'_{mk} \frac{\gamma_{kn}}{\sum\limits_{n=0}^{k} \gamma_{kn}} \right) t_n. \tag{2.13}$$

Вычисляя b'_{mn}, с учетом (2.1) и формул (2.8), (2.11) и (2.12) мы находим:

$$\begin{cases} b'_{mm} = \dfrac{1}{\lambda} \\ b'_{mk} = \dfrac{1}{\lambda} \left[-c \binom{m-1}{k} \Delta^{m-1-k} \mu_k + \right. \\ \quad + c^2 \sum\limits_{\sigma=k}^{m-2} \binom{m-1}{\sigma+1} \Delta^{m-1-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \binom{\sigma}{k} \Delta^{\sigma-k} \mu_k - \\ \quad - c^3 \sum\limits_{\sigma_1=k}^{m-3} \sum\limits_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-2} \binom{m-1}{\sigma+1} \Delta^{m-1-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \cdot \\ \quad \cdot \binom{\sigma}{\sigma_1+1} \Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)} \mu_{\sigma_1+1} \binom{\sigma_1}{k} \Delta^{\sigma_1-k} \mu_k + \dots \\ \left. \dots + (-1)^{m-k} c^{m-k} \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_{m-1} \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1). \end{cases} \tag{2.14}$$

Полученные формулы (2. 14) показывают, что b'_{mk} являются полиномами относительно параметра c. Коэффициенты этого полинома, взятые без знака перед степенью c, положительны, что следует из условий теоремы. Так как значение элементов b'_{mk} зависит от параметра c, нам будет полезно ввести обозначение $b'_{mn}(c) = b'_{mn}$, а также $\gamma_{mn}(c) = \gamma_{mn}$.

Для доказательства теоремы Мерсера нам нужно показать, что преобразование (2. 1) может суммировать лишь сходящиеся последовательности. В справедливости этого мы убедимся применением теоремы 1. 1. С этой целью покажем, что преобразование (2. 1) не удовлетворяет необходимому и достаточному условию теоремы 1. 1, т. е. что

$$\sup_m \sum_{k=0}^{m} |b'_{mk}| \neq \infty. \tag{2. 15}$$

Рассмотрим 2 случая.

1) Пусть $c < 0$, т. е. $\lambda > 1$. В этом случае ясно по формулам (2. 14), что $|b'_{mn}| = b'_{mn}$. Из равенства (2. 13) теперь следует, что

$$\sum_{n=0}^{m} |b'_{mn}| = \sum_{n=0}^{m} b'_{mn} = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=n}^{m} h'_{mk} \frac{\gamma_{kn}}{\sum_{n=0}^{k} \gamma_{kn}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} h'_{mk} \sum_{n=0}^{k} \frac{\gamma_{kn}}{\sum_{n=0}^{k} \gamma_{kn}} = \sum_{k=0}^{m} h'_{mk} = 1,$$

так как по условию теоремы $\sum_{k=0}^{m} h_{mk} = 1$, а, следовательно, и $\sum_{k=0}^{m} h'_{mk} = 1$. Значит выполняется условие (2. 15).

2) Пусть $c > 0$, т. е. $0 < \lambda < 1$. В этом случае по формулам (2. 14) следует, что $|b'_{mn}(c)| \leqslant b'_{mn}(-c)$, поскольку $b'_{mn}(-c) > 0$.

По равенству (2. 13) ясно, что

$$b'_{mn}(-c) = \sum_{k=n}^{m} h'_{mk} \frac{\gamma_{kn}(-c)}{\sum_{n=0}^{k} \gamma_{kn}(-c)},$$

а, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{m} |b'_{mn}(c)| \leqslant \sum_{n=0}^{m} b'_{mn}(-c) = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=n}^{m} h'_{mk} \frac{\gamma_{kn}(-c)}{\sum_{n=0}^{k} \gamma_{kn}(-c)} = 1,$$

что доказывается так же как и в случае 1).

Из теоремы 1. 1 и проведенных рассуждений 1) и 2) мы заключаем, что преобразование (2. 1) не может суммировать расходящиеся последовательности, т. е. что $\{s_n\}$ может быть только сходящейся.

Для завершения доказательства, нам осталось только убедиться в справедливости формул (2. 12). С этой целью приступим к решению системы (2. 10), которую приведем к виду:

$$Y_{mk} + \mu_k \left[\binom{k+1}{k} \Delta^1 \frac{1}{\mu_k} + c \right] Y_{m,\,k+1} + \sum_{n=k+2}^{m-1} Y_{mn} \mu_k \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \frac{1}{\mu_k} =$$

$$= - c \mu_k X_{m,\,k+1} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1).$$

Полученная система имеет вид системы (1. 1), а, следовательно, для решения системы применима рекуррентная формула (1. 2). Применение этой формулы позволяет нам непосредственно убедиться в справедливости формул (2. 12) в случаях $k = m-1$, $k = m-2$ и $k = m-3$.

Далее предполагаем, что формула (2. 12) справедлива еще в случае индекса k и покажем, что мы получаем этот же результат в случае индекса $k-1$.

Применяя рекуррентную формулу (1. 2), мы имеем:

$$Y_{m,\,k-1} = - c \mu_{k-1} X_{mk} - \mu_{k-1} \left[\binom{k}{k-1} \Delta^1 \frac{1}{\mu_{k-1}} + c \right] Y_{mk} -$$

$$- \sum_{n=k+1}^{m-1} \mu_{k-1} \binom{n}{k-1} \Delta^{n-(k-1)} \frac{1}{\mu_{k-1}} Y_{mn} = L + M + N. \qquad (2.16)$$

Из соотношений (2. 11), (2. 12) и (2. 16) видно, что $Y_{m,\,k-1}$ является полиномом степени $m-(k-1)$ относительно параметра c. Остается только убедиться в том, что коэффициенты этого полинома соответствуют формуле (2. 12).

1) Из выражения (2. 16) ясно, что член полинома со степенью $c^{m-(k-1)}$ содержится только во второй части слагаемого M, а, следовательно, имеет вид

$$- \mu_{k-1} c (-1)^{m-k} c^{m-k} \gamma_0 \mu_k \mu_{k+1} \ldots \mu_{m-1} =$$
$$= (-1)^{m-(k-1)} c^{m-(k-1)} \gamma_0 \mu_{k-1} \ldots \mu_{m-1},$$

который соответствует формуле (2. 12).

2) Член полинома со степенью c^{m-k} содержится только в слагаемом M выражения (2. 16) и имеет вид:

$$(-1)^{m-k} c^{m-k} \gamma_0 (-\mu_{k-1}) \binom{k}{k-1} \Delta^1 \frac{1}{\mu_{k-1}} \cdot \mu_k \ldots \mu_{m-1} -$$

$$- \mu_{k-1} (-1)^{m-(k+1)} c^{m-(k+1)} \cdot \gamma_0 c \sum_{\sigma_{m-k}=k}^{k+1} \sum_{\sigma_{m-k-1}=\sigma_{m-k}+1}^{k+2} \ldots$$

$$\cdots \sum_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-1} \frac{1}{\mu_m} \binom{m}{\sigma+1} \Delta^{m-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \cdot \binom{\sigma}{\sigma_1+1} \Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)} \mu_{\sigma_1+1} \cdots$$

$$\cdots \binom{\sigma_{m-k-1}}{\sigma_{m-k}+1} \Delta^{\sigma_{m-k-1}-(\sigma_{m-k}+1)} \mu_{\sigma_{m-k}+1} \binom{\sigma_{m-k}}{k} \Delta^{\sigma_{m-k}-k} \mu_k =$$

$$= (-1)^{m-k} c^{m-k} \gamma_0 \binom{k}{k-1} \Delta^1 \mu_{k-1} \cdot \mu_{k+1} \cdots \mu_{m-1} +$$

$$+ (-1)^{m-k} c^{m-k} \gamma_0 \sum_{\sigma_{m-k}=k}^{k+1} \cdots \sum_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-1} \frac{1}{\mu_m} \cdot$$

$$\cdot \binom{m}{\sigma+1} \Delta^{m-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \binom{\sigma}{\sigma_1+1} \Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)} \mu_{\sigma_1+1} \cdots$$

$$\cdots \binom{\sigma_{m-k-1}}{\sigma_{m-k}+1} \Delta^{\sigma_{m-k-1}-(\sigma_{m-k}+1)} \mu_{\sigma_{m-k}+1} \cdot$$

$$\cdot \binom{\sigma_{m-k}}{k} \Delta^{\sigma_{m-k}-k} \mu_k \binom{k-1}{k-1} \Delta^0 \mu_{k-1} =$$

$$= (-1)^{m-k} c^{m-k} \gamma_0 \sum_{\sigma_{m-(k-1)}=k-1}^{k} \sum_{\sigma_{m-k}=\sigma_{m-(k-1)}+1}^{k+1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-1} \frac{1}{\mu_m} \binom{m}{\sigma+1} \Delta^{m-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \cdot$$

$$\cdot \binom{\sigma}{\sigma_1+1} \Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)} \mu_{\sigma_1+1} \cdots$$

$$\cdots \binom{\sigma_{m-k}}{\sigma_{m-(k-1)}+1} \Delta^{\sigma_{m-k}-(\sigma_{m-(k-1)}+1)} \mu_{\sigma_{m-(k-1)}+1} \cdot$$

$$\cdot \binom{\sigma_{m-(k-1)}}{k-1} \Delta^{\sigma_{m-(k-1)}-(k-1)} \mu_{k-1},$$

что и соответствует формуле (2. 12).

3) Остальные члены полинома со степенями c^l, где $l = m-k-1, \ldots, 2$, получаем из слагаемых M и N выражения (2. 16), а при $l=1$ из слагаемых L, M и N. Каждый из этих членов полинома вычисляем следующим образом.

$$R = (-1)^{l-1} c^{l-1} (-\mu_{k-1}) \cdot c\gamma_0 \sum_{\sigma_{l-2}=k}^{m-(l-1)} \cdots \sum_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-1} \frac{1}{\mu_m} \cdot$$

$$\cdot \binom{m}{\sigma+1} \Delta^{m-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \cdot \binom{\sigma}{\sigma_1+1} \Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)} \mu_{\sigma_1+1} \cdots$$

$$\cdots \binom{\sigma_{l-3}}{\sigma_{l-2}+1} \Delta^{\sigma_{l-3}-(\sigma_{l-2}+1)} \mu_{\sigma_{l-2}+1} \binom{\sigma_{l-2}}{k} \Delta^{\sigma_{l-2}-k} \mu_k + T =$$

$$= (-1)^l c^l \gamma_0 \sum_{\sigma_{l-2}=(k-1)+1}^{m-(l-2+1)} \cdots \sum_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-1} \frac{1}{\mu_m} \cdot$$

$$\cdot \binom{m}{\sigma+1} \Delta^{m-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \binom{\sigma}{\sigma_1+1} \Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)} \mu_{\sigma_1+1} \cdots$$

$$\cdots \binom{\sigma_{l-3}}{\sigma_{l-2}+1} \Delta^{\sigma_{l-3}-(\sigma_{l-2}+1)} \mu_{\sigma_{l-2}+1} \binom{\sigma_{l-2}}{k-1+1} \Delta^{\sigma_{l-2}-(k-1+1)} \mu_{(k-1)+1} \cdot$$

$$\cdot \binom{k-1}{k-1} \Delta^{k-1-(k-1)} \mu_{k-1} + T,$$

где

$$T = -\sum_{n=k}^{m-l} \mu_{k-1} \binom{n}{k-1} \Delta^{n-(k-1)} \frac{1}{\mu_{k-1}} \cdot$$

$$\cdot (-1)^l c^l \gamma_0 \sum_{\sigma_{l-1}=n}^{m-l} \sum_{\sigma_{l-2}=\sigma_{l-1}+1}^{m-(l-1)} \cdots$$

$$\cdots \sum_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-1} \frac{1}{\mu_m} \binom{m}{\sigma+1} \Delta^{m-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \cdot \binom{\sigma}{\sigma_1+1} \Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)} \mu_{\sigma_1+1} \cdots$$

$$\cdots \binom{\sigma_{l-2}}{\sigma_{l-1}+1} \Delta^{\sigma_{l-2}-(\sigma_{l-1}+1)} \mu_{\sigma_{l-1}+1} \binom{\sigma_{l-1}}{n} \Delta^{\sigma_{l-1}-n} \mu_n =$$

$$= (-1)^l c^l \gamma_0 \sum_{\sigma_{l-1}=k}^{m-l} \sum_{\sigma_{l-2}=\sigma_{l-1}+1}^{m-(l-1)} \cdots$$

$$\cdots \sum_{\sigma=\sigma_1+1}^{m-1} \frac{1}{\mu_m} \binom{m}{\sigma+1} \Delta^{m-(\sigma+1)} \mu_{\sigma+1} \binom{\sigma}{\sigma_1+1} \Delta^{\sigma-(\sigma_1+1)} \mu_{\sigma_1+1} \cdots$$

$$\cdots \binom{\sigma_{l-2}}{\sigma_{l-1}+1} \Delta^{\sigma_{l-2}-(\sigma_{l-1}+1)} \mu_{\sigma_{l-1}+1} \cdot T_1,$$

причем

$$T_1 = \sum_{n=k}^{\sigma_{l-1}} (-\mu_{k-1}) \binom{n}{k-1} \Delta^{n-(k-1)} \frac{1}{\mu_{k-1}} \binom{\sigma_{l-1}}{n} \Delta^{\sigma_{l-1}-n} \mu_n =$$

$$= \binom{\sigma_{l-1}}{k-1} \Delta^{\sigma_{l-1}-(k-1)} \mu_{k-1},$$

что вытекает из формулы (1. 3).

Теперь можем в сумме R объединить оба слагаемых общим знаком суммы $\sum_{\sigma_{l-1}=k-1}^{m-l} \ldots$, что и дает сумме R вид члена со степенью c^l в сумме (2. 12), если в ней взять $n = k - 1$.

Этим теорема 2.1 полностью доказана.

В § 11.12 работы Харди [2] даны функции ограниченной вариации, которые определяют последовательности Хаусдорфа для методов H^α и C^α при $\alpha > 0$. Легко установить, что они возрастающие функции, следовательно, последовательности Хаусдорфа, соответствующие преобразованиям H^α и C^α абсолютно монотонны.

Это показывает, что теорема 2.1 содержит две следующие теоремы, которые и представляют собой обобщенный аналог теоремы III.

Теорема 2.2. *Если* $\lambda > 0$, $l \neq \infty$, $\alpha > 0$ *и*

$$\lim_n (\lambda s_n + (1-\lambda) H^\alpha_{n-1}(s)) = l,$$

то

$$\lim s_n = l.$$

Теорема 2.3. *Если* $\lambda > 0$, $l \neq \infty$, $\alpha > 0$ *и*

$$\lim_n (\lambda s_n + (1-\lambda)\, C^\alpha_{n-1}(s)) = l,$$

то

$$\lim_n s_n = l.$$

§ 3.

Вышеприведенные теоремы являются обобщениями той теоремы Мерсера, которая выше была обозначена цифрой I. Далее докажем одно обобщение теоремы II, которое в то же время будет и частичным расширением теоремы III.

Теорема 3.1. *Если* $\lambda > 0$, $l \neq \infty$, $0 < \alpha < 1$ *и*

$$\lim_n (\lambda s_n + (1-\lambda) H^\alpha_n(s)) = l,$$

то

$$\lim_n s_n = l.$$

Доказательство. Обозначим

$$t_n = \lambda s_n + (1-\lambda) H^\alpha_n(s). \tag{3.1}$$

Последовательность Хаусдорфа, соответствующая преобразованию (3.1), имеет вид

$$\mu_n = \lambda + (1-\lambda)\frac{1}{(n+1)^\alpha} \tag{3.2}$$

и является регулярной последовательностью, как это следует из теоремы 210 в работе Харди [2] и того факта, что $\lambda + (1-\lambda) =$

$= 1$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что преобразование (3. 1) не может суммировать расходящихся последовательностей. С этой целью применим теорему 1. 1 и покажем, что необходимое и достаточное условие теоремы 1. 1 в случае преобразования (3. 1) не выполняется, т. е. что

$$\sup_m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left| \Delta^{m-k} \frac{1}{\mu_k} \right| \neq \infty. \tag{3.3}$$

Так как

$$\frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{c}{(k+1)^\alpha + c}\right),$$

где $c = \frac{1-\lambda}{\lambda}$, то

$$\Delta^{m-k} \frac{1}{\mu_k} = \Delta^{m-k} \frac{1}{\lambda} - \frac{c}{\lambda} \Delta^{m-k} \frac{1}{(k+1)^\alpha + c}$$

и, слеводательно,

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left| \Delta^{m-k} \frac{1}{\mu_k} \right| \leqslant \frac{1}{\lambda} + \frac{|c|}{\lambda} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left| \Delta^{m-k} \frac{1}{(k+1)^\alpha + c} \right|.$$

Из этого ясно, что для доказательства неравенства (3. 3) достаточно доказать следующее неравенство

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left| \Delta^{m-k} \frac{1}{(k+1)^\alpha + c} \right| \leqslant M \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.4}$$

Для этого заметим, что

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha + c} = \int_0^1 x^{(k+1)^\alpha + c - 1}\, dx,$$

но тогда

$$I = \Delta^{m-k} \frac{1}{(k+1)^\alpha + c} = \int_0^1 x^c \cdot x^{-1} \Delta^{m-k} x^{(k+1)^\alpha}\, dx.$$

Рассматривая теперь случай $c > 0$, мы можем применить формулу Бонне [1]. Тогда получим для $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, что

$$I = \int_\xi^1 x^{-1} \Delta^{m-k} x^{(k+1)^\alpha}\, dx = \Delta^{m-k} \int_\xi^1 x^{-1} \cdot x^{(k+1)^\alpha}\, dx =$$

$$= \Delta^{m-k} \frac{1}{(k+1)^\alpha} - \Delta^{m-k} \frac{\xi^{(k+1)^\alpha}}{(k+1)^\alpha}.$$

Следовательно,

$$\left| \Delta^{m-k} \frac{1}{(k+1)^\alpha + c} \right| \leqslant \Delta^{m-k} \frac{1}{(k+1)^\alpha} + \left| \Delta^{m-k} \frac{\xi^{(k+1)^\alpha}}{(k+1)^\alpha} \right|. \tag{3.5}$$

Из полученного видно, что неравенство (3. 4) окажется выполненным, если мы покажем, что последовательность

$$\mu_k' = \frac{\xi^{(k+1)^\alpha}}{(k+1)^\alpha}$$

является моментом, т. е. соответствует преобразованию Хаусдорфа, которое сохраняет сходимость.

Но так как

$$\mu_k' = \frac{1}{(k+1)^\alpha} \cdot \xi^{(k+1)^\alpha}$$

и $\frac{1}{(k+1)^\alpha}$ — момент, то по теореме 210 из Харди [2], ясно, что и μ_k' — момент, если $\xi^{(k+1)^\alpha}$ окажется моментом. Мы имеем $\xi^{(k+1)^\alpha} = e^{(k+1)^\alpha \ln \xi}$ и $\ln \xi = -q$, где $q > 0$. В § 9 работы Хаусдорфа [4], доказано, что последовательности вида $\nu_k = e^{-Q(k+a)^\alpha}$, при $Q > 0$, $a \geqslant 0$ и $0 < \alpha < 1$ абсолютно монотонны. Но тогда $\xi^{(k+1)^\alpha}$ — момент, что и доказывает теорему в случае $c > 0$.

Теорема 3. 1 в случае $c < 0$ вытекает без затруднений из равенства (3. 1), если к нему применить известную теорему Мазура и Орлича [5] о суммируемости расходящейся последовательности регулярным методом.

Литература

1. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Москва, 1948.
2. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1949.
3. Сырмус Т., Об одном обобщении теоремы Мерсера для двойных последовательностей. Настоящий журнал, стр. 156—168.
4. Hausdorff, F., Summationsmethoden und Momentfolgen. I. Math. Z. 1921, **9**, 74—109.
5. Mazur, S., Orlicz, W., Sur les methodes lineaires de sommations. C. r. Acad. sci., 1933, **196**, 32—43.
6. Mercer, J., On the Limit of Real Variants. Proc. London Math. Soc., (2), 1907, **5**, 206—224.
7. Narumi, S., A Theorem on Limits. Tôhoku Math. J., 1917, **12**, 275—290.
8. Polniakovski, Z., О некоторых теоремах типа Мерсера. Бюл. Польской АН, отд. 3, 1956, **4**, № 5, 239—242.
9. Polniakovski, Z., Polynomial Hausdorff Transformations. Ann. polon. Math., 1958, **5**, 1—24.
10. Wilansky, A., A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, 914—916.

Поступило
13 II 1961

MÕNINGATEST MERCERI TEOREEMI ÜLDISTUSTEST

T. Sõrmus
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas töös tõestame tuntud Merceri [6] teoreemi järgmise üldistuse:
Kui $\lambda > 0$, $l \neq \infty$ *ja Hausdorffi jada* μ_k *on totaalselt monotoonne ning regulaarne, siis võrdusest*

$$\lim_n (\lambda s_n + (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^{n-1-k} \mu_k s_k) = l$$

järeldub

$$\lim_n s_n = l.$$

Sellest teoreemist saame erijuhuna Merceri teoreemi üldistused mistahes positiivse järguga Cesàro ja Hölderi menetluste tarvis. Saadud tulemused on üldisemad Polniakovski [8, 9] analoogilistest tulemustest Cesàro ja Hölderi menetluste kohta.

Lõpuks näitame, et Polnikovski [8, 9] teoreemi saab Hölderi menetluse korral veel avardada juhule $0 < \lambda < 1$.

ÜBER EINIGE VERALLGEMEINERUNGEN DES SATZES VON MERCER

T. Sõrmus

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird der bekannte Satz von Mercer [6] auf folgende Weise verallgemeinert:

μ_k sei eine total-monotone reguläre Folge; es sei $\lambda > 0$ und $l \neq \infty$. Dann folgt aus der Existenz von

$$\lim_n (\lambda s_n + (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^{n-1-k} \mu_k s_k) = l$$

auch die Existenz von $\lim_n s_n$ *und die Gleichheit beider Grenzwerte.*

Gleichzeitig sind die Mercersche Sätze für das Hölder- und das Cesàro-Verfahren bewiesen.

Damit ist auch ein analoger Satz von Polniakowski [8, 9], der die Fälle des Hölder- und des Cesàro-Verfahrens behandelt, bewiesen.

Es wird noch gezeigt, daß der Satz von Polniakowski [8, 9], für den Fall des Hölder-Verfahrens noch bei $0 < \lambda \leqslant 1$ in Geltung bleibt.

УМНОЖЕНИЕ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО ПРАВИЛУ ДИРИХЛЕ

И. Г. Кулль
Кафедра геометрии

Целью настоящей статьи является обобщение правила умножения Дирихле для двойных рядов. На основе этого правила доказывается две теоремы об умножении сходящихся рядов. В случае умножения рядов, суммируемых методами Чезаро и Вороного-Нерлунда, рассматривается частный случай $D(p, q)$ этого обобщенного правила, которой все же шире известного правила Коши.

Методы и результаты настоящей статьи тесно связаны с работой [4] автора.

1. Правило умножения Дирихле для двойных рядов Σu_{kl} и Σv_{st} определяется аналогично, как в случае простых рядов.[1,2]

Пусть заданы строго возрастающие в бесконечность последовательности $\{\lambda_n'\}$, $\{\lambda_n''\}$, $\{\mu_n'\}$ и $\{\mu_n''\}$. Образуем всевозможные суммы $\lambda_k' + \lambda_s''$ $(k, s = 0, 1, \ldots)$ и $\mu_l' + \mu_t''$ $(l, t = 0, 1, \ldots)$. Упорядочив эти суммы по их величинам, получаем строго возрастающие в бесконечность последовательности $\{\lambda_m\}$ и $\{\mu_n\}$, причем все равные суммы $\lambda_k' + \lambda_s''$ (соотв. $\mu_l' + \mu_t''$) определяют один член λ_m (соотв. μ_n). Теперь определяем член ряда-произведения Σw_{mn} формулой

$$w_{mn} = \sum_{\lambda_k'+\lambda_s''=\lambda_m} \sum_{\mu_l'+\mu_t''=\mu_n} u_{kl} v_{st} \quad (m, n = 0, 1, \ldots). \qquad (1)$$

Ряд Σw_{mn}, определяемый формулой (1), называется рядом-произведением рядов Σu_{kl} и Σv_{st} по правилу Дирихле типа $(\lambda', \lambda''; \mu', \mu'')$. Для умножения Дирихле любого фиксированного типа $(\lambda', \lambda''; \mu', \mu'')$ справедливо следующее предложение.

Если член $u_{kl}v_{st}$ принадлежит частичной сумме $W_{mn} = \sum_{p,q=0}^{m,n} w_{pq}$

---

[1] Определение правила умножения Дирихле дано в [1] (стр. 95—96), [2] (стр. 61—68), [5] (стр. 297).

[2] Если индексы и пределы суммирования не указаны, то суммирование происходит по всем целочисленным значениям индексов от 0 до ∞.

ряда-произведения Σw_{pq}, то все члены $u_{k'l'} v_{s't'}$ (где $k' \leqslant k$, $l' \leqslant l$, $s' \leqslant s$ и $t' \leqslant t$) принадлежат этой сумме W_{mn}.[3]

Это предложение имеет простой геометрический смысл, на который мы опираемся при обобщении правила умножения Дирихле.

2. Пусть заданы функции $r_1(m)$, $r_2(n)$, $v_1(m, k)$ и $v_2(n, l)$, имеющие неотрицательные значения и возрастающие (нестрого) в бесконечность при $m \to \infty$ или соответственно $n \to \infty$. Кроме того, пусть $v_1(m, k)$ и $v_2(n, l)$ (нестрого) убывают до 0 при $k \to \infty$ или соответственно $l \to \infty$.

Определим теперь частичную сумму ряда-произведения следующим образом:

$$W_{mn} = \sum_{k,\, l=0}^{r_1(m),\, r_2(n)} \; \sum_{s,\, t=0}^{v_1(m,\, k),\, v_2(n,\, l)} u_{kl} v_{st} \quad (m,\, n = 0,\, 1,\, \ldots), \qquad (2)$$

или, меняя порядок суммирования, следующим образом:

$$W_{mn} = \sum_{s,\, t=0}^{r_3(m),\, r_4(n)} \; \sum_{k,\, l=0}^{v_3(m,\, s),\, v_4(n,\, t)} u_{kl} v_{st} \quad (m,\, n = 0,\, 1,\, \ldots), \qquad (3)$$

где положены $r_3(m) = v_1(m,\ 0)$, $r_4(n) = v_2(n,\ 0)$, $v_3(m, s) = \max k\{v_1(m, k) \geqslant s\}$ и $v_4(n, t) = \max l\{v_2(n, l) \geqslant t\}$.

Легко видеть, что приведенное здесь определение W_{mn} дает более общее правило составления ряда-произведения, чем обычное правило Дирихле по формуле (1). Мы назовем правило умножения (2) и (3) обобщенным правилом Дирихле по функциям r_i, v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

3. Из формул (2) и (3) получаем

$$W_{mn} = \sum_{k,\, l=0}^{r_1(m),\, r_2(n)} u_{kl}\, V_{v_1(m,\, k),\, v_2(n,\, l)} \quad (m,\, n = 0,\, 1,\, \ldots) \qquad (4)$$

и

$$W_{mn} = \sum_{s,\, t=0}^{r_3(m),\, r_4(n)} U_{v_3(m,\, s),\, v_4(n,\, t)}\, v_{st} \quad (m,\, n = 0,\, 1,\, \ldots), \qquad (5)$$

где

$$U_{pq} = \sum_{k,\, l=0}^{p,\, q} u_{kl} \quad \text{и} \quad V_{pq} = \sum_{k,\, l=0}^{p,\, q} v_{kl} \quad (p,\, q = 0,\, 1,\, \ldots).$$

Например, на основе формулы (5) (или же (4)) можем вывести теоремы для умножения сходящихся рядов. Соотношение (5) можем рассматривать как билинейное преобразование

$$W_{mn} = \sum_{k,\, l,\, s,\, t} h_{mnklst}\, U_{kl}\, v_{st} \quad (m,\, n = 0,\, 1,\, \ldots), \qquad (6)$$

---

[3] См. [3], стр. 706.

где

$$h_{mnklst} = \begin{cases} 1, \text{ если } k = v_3(m, s) \text{ и } l = v_4(n, t), \\ \qquad s \leqslant r_3(m) \text{ и } t \leqslant r_4(n); \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Исходя из (4) или (5) получаем билинейное преобразование вида

$$W_{mn} = \sum_{k, l, s, t} h^1_{mnklst} U_{kl} V_{st} \qquad (m, n = 0, 1, \ldots), \tag{7}$$

где

$$h^1_{mnklst} = \begin{cases} 1, \text{ если } k = v_3(m, s), \ l = v_4(n, t); \\ \quad \text{или } k = v_3(m, s+1), \ l = v_4(n, t+1); \end{cases} \left.\begin{array}{l} \text{если} \\ s \leqslant r_3(m) - 1, \\ t \leqslant r_4(n) - 1, \\ v_3(m, s) \neq \\ \neq v_3(m, s+1), \\ v_4(n, t) \neq \\ \neq v_4(n, t+1); \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} -1, \text{ если } k = v_3(m, s), \ l = v_4(n, t+1); \\ \quad \text{или } k = v_3(m, s+1), \ l = v_4(n, t); \end{cases} \left.\begin{array}{l} \text{если} \\ s \leqslant r_3(m) - 1, \\ t = r_4(n), \\ v_3(m, s) \neq \\ \neq v_3(m, s+1); \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 1, \text{ если } k = v_3(m, s), \ l = v_4(n, r_4); \\ -1, \text{ если } k = v_3(m, s+1), \ l = v_4(n, r_4); \end{cases} \left.\begin{array}{l} \text{если} \\ s = r_3(m), \\ t \leqslant r_4(n) - 1, \\ v_4(n, t) \neq \\ \neq v_4(n, t+1); \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 1, \text{ если } k = v_3(m, r_3), \ l = v_4(n, t); \\ -1, \text{ если } k = v_3(m, r_3), \ l = v_4(n, t+1); \\ 1, \text{ если } k = v_3(m, r_3), \ l = v_4(n, r_4), \ s = r_3(m), \ t = r_4(n); \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Притом h^1_{mnklst} можно аналогичным образом выражать через $r_1(m)$, $r_2(n)$, $v_1(m, k)$ и $v_2(n, l)$.

Проверяя для матриц (h_{mnklst}) и (h^1_{mnklst}) условия билинейных преобразований соответственно c_{13}, d_{i1}, f_{i1} $(i = 1, 2, 3, 4)$ и c_{11}, d_{ij}, f_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, получаем следующие теоремы: [4]

Теорема 1. *Если ряд Σu_{kl} является сходящимся в смысле α $(\alpha = mc, r, l)$ к сумме U и ряд Σv_{kl} является абсолютно сходящимся к сумме V, то необходимым и достаточным условием для сходимости ряда-произведения Σw_{kl} в смысле β $(\beta = mc, r, l, c)$ к сумме $W = UV$ является включение*

$$\alpha \subset \beta,$$

[4] Условия для билинейных преобразований даны в [4] на стр. 25—26.

где ряд-произведение определено при помощи функций r_i, v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.[5]

Теорема 2. *Если ряд* Σu_{kl} *является сходящимся в смысле* α $(\alpha = mc, r)$ *к сумме* U *и ряд* Σv_{kl} *является сходящимся в смысле* β $(\beta = mc, r)$ *к сумме* V, *то необходимыми и достаточными условиями для сходимости рядя-произведения* Σw_{kl} *в смысле* γ $(\gamma = c, mc, r)$ *к сумме* $W = UV$ *являются*

$$1^\circ\ \{W_{kl}\} \in \begin{cases} m, \text{ если } \gamma = mc \text{ или } r, \\ \tilde{m}, \text{ если } \gamma = c; \end{cases}$$

$$2^\circ\ \alpha \subset \gamma \quad \text{и} \quad \beta \subset \gamma,$$

где ряд-произведение определяется при помощи функций r_i, v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.[6]

4. Умножение суммируемых рядов рассмотрим в частном случае правила Дирихле, когда частичная сумма ряда-произведения определяется формулой

$$W_{mn} = \sum_{k,\, l=0}^{m+p,\, n+q} U_{m+p-k,\ n+q-l}\, v_{kl} \quad (m, n = 0, 1, \ldots), \tag{8}$$

где p и q — фиксированные неотрицательные целые числа. При $p = q = 0$ получаем из формулы (8) известное правило умножения Коши. Обозначим правило умножения, определенное формулой (8), через $D(p, q)$.

Рассмотрим следующую проблему.[7] Если ряд Σu_{kl} A_α-суммируем к сумме U' и ряд Σv_{kl} B_β-суммируем к сумме V', то при каких условиях ряд-произведение Σw_{kl}, составленное по правилу $D(p, q)$, является C_γ-суммируемым (к сумме W') и, кроме того, при каких условиях имеет место соотношение

$$W' = U'V'. \tag{9}$$

Отметим, что в предположении B_β-суммируемости последовательности $e = \{\xi_{\mu\nu}\}$ $(\xi_{\mu\nu} = 1;\ \mu, \nu = 0, 1, \ldots)$ последовательность $\{W_{mn}\} = \{U_{m+n,\ n+q}\}$ должна быть C_γ-суммируемой при любой A_α-суммируемой последовательности $\{U_{mn}\}$. Такое соотношение между методами C_γ и A_α назовем транслятивным включением методов C_γ и A_α со сдвигом (p, q) и обозначим его

$$A_\alpha \subseteq C_\gamma \quad (p, q). \tag{10}$$

---

[5] Определения классов двойных последовательностей даны в [4]. Случай $\alpha = \beta = l$ проверяется непосредственно.

[6] Теоремы 1 и 2 обобщают теоремы XIII, XIV и XVI в работе Мэарс [3] (стр. 706—709).

[7] Понятие A_α-суммируемости двойного ряда Σu_{kl} дано в работе [4].

Аналогично, при A_α-суммируемости последовательности e получаем

$$B_\beta \subseteq C_\gamma \quad (p, q). \tag{11}$$

При $p = q = 0$ получаем обычное включение методов $A_\alpha \subseteq C_\gamma$ и, соответственно, $B_\beta \subseteq C_\gamma$. Все сказанное здесь непосредственно вытекает из формулы (8).

Нам нужно еще понятие транслятивности метода суммирования. Мы скажем, что метод A транслятивен (справа) по строкам в смысле α, если из A_α-суммируемости последовательности $\{U_{mn}\}$ следует A_α-суммируемость последовательности $\{U_{m+1,\ n}\}$. Аналогично, метод A транслятивен (справа) по столбцам в смысле α, если из A_α-суммируемости $\{U_{mn}\}$ следует A_α суммируемость последовательности $\{U_{m,\ n+1}\}$. Метод A назовем транслятивным (справа) в смысле α, если он транслятивен (справа) по строкам и столбцам.

Из определения транслятивности (справа) вытекает, что если метод A транслятивен (справа) в смысле α, то из A_α-суммируемости последовательности $\{U_{mn}\}$ следует A_α-суммируемость последовательности $\{U_{m+p,\ n+q}\}$ при любых фиксированных p и q.

Легко также показать, что соотношение (10) имеет место, если

1° $A_\alpha \subseteq C_\gamma$,

2° C транслятивен (справа) в смысле γ,

и соотношение (11), если имеет место 2°, и

3° $B_\beta \subseteq C_\gamma$.

При рассмотрении проблемы умножения рядов для простоты предположим, что выполняются условия 1°, 2° и 3°.

Транслятивность (справа) по строкам нормального матричного метода $A = (a_{mnkl})$ в смысле α равносильно тому, что метод $T = (t_{mnkl})$ с элементами

$$t_{mnkl} = \sum_{\mu=\varkappa}^{m} \sum_{\nu=l}^{n} a_{mn\mu\nu}\, a'_{\mu+1,\,\nu kl} \quad (m, n, k, l = 0, 1, \ldots), \tag{12}$$

где

$$\varkappa = \begin{cases} k-1, & \text{если } k \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } k = 0, \end{cases}$$

и $a'_{\mu\nu kl}$ — элементы обратного метода A^{-1} — должен удовлетворить условиям линейного преобразования $\alpha \to \alpha$.

В случае метода Чезаро $(C;\ a,\ b)$ величины $a_{mn\nu\mu}$ и $a'_{\mu\nu kl}$ такие:

$$a_{mn\mu\nu}=\begin{cases}\dfrac{\binom{m-\mu+a-1}{m-\mu}}{\binom{m+a}{m}}\cdot\dfrac{\binom{n-\nu+b-1}{n-\nu}}{\binom{n+b}{n}}, & \text{если } \mu\leqslant m \text{ и } \nu\leqslant n,\\ 0, \text{ в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$a'_{\mu\nu kl}=\begin{cases}\binom{k+a}{k}\binom{\mu-k-a-1}{\mu-k}\binom{l+b}{l}\binom{\nu-l-b-1}{\nu-l}, & \text{если } k\leqslant\mu \text{ и } l\leqslant\nu,\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Вычисляя t_{mnkl}, получаем

$$t_{mnkl}=\begin{cases}-\dfrac{\binom{m+a}{a-1}}{\binom{m+a}{a}}, & \text{если } k=0,\ n=l,\\ \dfrac{\binom{m+a+1}{a}}{\binom{m+a}{a}}, & \text{если } k=m+1,\ n=l,\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Теперь можно легко проверить, что $T=(t_{mnkl})$ удовлетворяет условиям преобразования $mc\to mc(c_1, d_3, d_4)$ и $r\to r$ (c_1, d_2, d_3, f_1, f_2, f_3) и предел преобразованной последовательности равен пределу преобразуемой последовательности (см. формулы (24) и (25) работы [4]).

Учитывая все сказанное, можем на основе теорем 15, 16 и 17 ([4], стр. 45) получить следующие теоремы:

Теорема 3. *Если ряд* Σu_{mn} $(C;\ a\ b)_\alpha$*-суммируем и ряд* Σv_{mn} $(C;\ c,\ d)_\alpha$*-суммируем, то ряд-произведение* Σw_{mn}*, составленное по правилу* $D(p,\ q)$*, является* $(C;\ a+c+1,\ b+d+1)_\alpha$*-суммируемым для любых* $p,\ q=0,\ 1,\ \ldots$*, где* $a,\ b,\ c,\ d>-1$ *и* $\alpha=mc$ *или* r*. При этом имеет место соотношение* (9).

Теорема 4. *Если ряд* Σu_{mn} $(C;\ a,\ b)_\alpha$*-суммируем и ряд* Σv_{mn} $(C;\ c,\ d)_1$*-суммируем, то ряд-произведение* Σw_{mn}*, составленное по правилу* $D(p,\ q)$*, является* $(C;\ a+c,\ b+d)_\alpha$*-суммируемым для любых* $p,\ q=0,\ 1,\ \ldots$*, где* $a,\ b,\ c,\ d\geqslant 0$ *и* $\alpha=mc$ *или* r*. При этом имеет место соотношение* (9).

Теорема 5. *Если ряд* Σu_{mn} $(C;\ a,\ b)_\alpha$*-суммируем и ряд* Σv_{mn} $(C;\ c,\ d)_\alpha$*-суммируем и* $(C;\ c-1,\ d-1)$*-ограничен, то ряд-произведение* Σw_{mn}*, составленное по правилу* $D(p,\ q)$*, является* $(C;\ a+c,\ b+d)_\alpha$*-суммируемым для любых* $p,\ q=0,\ 1,\ \ldots$*, где* $a,\ b\geqslant 0$ *и* $c,\ d>0$ *и* $\alpha=mc$ *или* r*. Соотношение* (9) *имеет место.*

В случае метода Вороного-Нерлунда $(WN;\ p_{kl})$ при анализе транслятивности (справа) нужно поступить несколько иначе, так как прямое применение формулы (12) не целесообразно.

Обозначая

$$U'_{mn}=\frac{1}{P_{mn}}\sum_{k,\,l=0}^{m,\,n}p_{m-k,\,n-l}\,U_{kl},\quad (m,\ n=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$U''_{mn}=\frac{1}{P_{mn}}\sum_{k,\,l=0}^{m,\,n}p_{m-k,\,n-l}\,U_{k+1,\,l}\quad (m,\ n=0,\ 1,\ \ldots)$$

и

$$U'''_{mn}=\frac{1}{P_{mn}}\sum_{l=0}^{n}p_{m,\,n-l}\,U_{0l},\quad (m,\ n=0,\ 1,\ \ldots),$$

получаем

$$U''_{mn}=\frac{P_{m+1,\,n}}{P_{mn}}\,U'_{m+1,\,n}-\frac{P_{m+1,\,n}}{P_{mn}}\,U'''_{m+1,\,n}. \tag{13}$$

Рассматриваем здесь такие методы $(WN;\ p_{kl})$, для которых из $\{U'_{mn}\}\in\alpha$ вытекает $\{U_{mn}'''\}\in\alpha$ $(\alpha=c,\ mc,\ r,\ c_\lambda)$. Последнее утверждение означает, что первая строка последовательности $\{U_{kl}\}$ также является $(WN;\ p_{kl})\,\alpha$-суммируемой. Из соотношения (13) видно, что тогда для транслятивности (справа) по строкам необходимо и достаточно, что $\left\{\frac{P_{m+1,\,n}}{P_{mn}}\right\}\in\alpha$. Аналогично, рассматривая транслятивность (справа) по столбцам, потребуем, что первый столбец $\{U_{kl}\}$ является $(WN,\ p_{kl})\,\alpha$-суммируемой. Тогда аналогичным образом получаем, что для транслятивнотси (справа) по столбцам необходимо и достаточно $\left\{\frac{P_{m,\,n+1}}{P_{mn}}\right\}\in\alpha$.

Предполагая $(WN;\ p_{kl})\,\alpha$-суммируемость первой строки и первого столбца, нужно для транслятивности (справа) в смысле α $\left\{\frac{P_{m+1,\,n}}{P_{mn}}\right\}\in\alpha$ и $\left\{\frac{P_{m,\,n+1}}{P_{mn}}\right\}\in\alpha$. Тогда можем получить из теорем умножения рядов по Коши теоремы об умножении рядов по правилу $D(p,q)$. Например, из теоремы 1 ([4] стр. 37) получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Если ряд* Σu_{mn} $(WN;\ a_{mn})\,\alpha$*-суммируем и ряд* $\Sigma v_{mn}(WN;\ b_{mn})\,\beta$*-суммируем и*

1° $(WN,\ a_{mn})\,\alpha\subseteq(WN,\ d_{mn})\,\gamma$,

2° $(WN,\ b_{mn})\,\beta\subseteq(WN,\ d_{mn})\,\gamma$,

3° $\left\{\frac{D_{m+1,\,n}}{D_{mn}}\right\} \in \gamma, \quad \left\{\frac{D_{m,\,n+1}}{D_{mn}}\right\} \in \gamma,$

4° *в случае* $\alpha = \beta = r$ *существуют пределы*

$$\lim_{m,\,n\to\infty} \frac{A_{k,\,n-l} B_{m-k,\,l}}{D_{mn}}, \quad \lim_{m,\,n\to\infty} \frac{A_{m-k,\,l} B_{k,\,n-l}}{D_{mn}}, \quad (k, l = 0, 1, \ldots),$$

то ряд-произведение Σw_{mn}, *составленное по правилу* $D(p, q)$, *является* $(WN, d_{mn})\gamma$-*суммируемым для любого* $p, q = 0, 1, \ldots$ $(\alpha, \beta = mc$ *или* r; $\gamma = c, mc, r$ *или* $c_\lambda)$.

Литература

1. Chandrasekharan, K., Minakshisundaram, S., Typical means. Oxford, 1952.
2. Hardy, G. H., Riesz, M., The general Theory of Dirichlet's series. Cambridge, 1915.
3. Mears, Florence M., Riesz summability for double series. Trans. Amer. Math. Soc., 1928, **30**, 686—709.
4. Кулль И. Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
5. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.

Поступило
25 IV 1960

KAHEKORDSETE RIDADE KORRUTAMINE DIRICHLET' REEGLI JÄRGI

I. Kull

Geomeetriakateeder

Resümee

Käesolevas artiklis antakse kahekordsete ridade korrutise Dirichlet' definitsiooni üldistus (valem (2)) ja uuritakse selle definitsiooni alusel moodustatud koonduvate ridade korrutist (teoreemid 1 ja 2). Summeeruvate ridade puhul vaadeldakse selle korrutisdefinitsiooni erijuhtu $D(p, q)$ (valem (8)), mis on üldisem Cauchy korrutisdefinitsioonist. Artiklis esitatakse mõningad autori tulemused Cesàro ja Voronoi-Nörlundi menetlustega summeeruvate ridade korrutamise kohta (teoreemid 3—6), kus korrutisrida on moodustatud definitsiooni $D(p, q)$ alusel.

DIRICHLET PRODUCT OF DOUBLE SERIES

I. Kull

Summary

The present paper deals with a generalisation of the Dirichlet product of double series (formula (2)). The product of convergent series is studied on the basis of this definition (theorems 1 and 2). In the case of summable series a special case $D(p, q)$ of this definition is considered which is more general than the definition given by Cauchy. The paper presents some of the author's results on the product of the series summable by the methods of Cesàro and Voronoy-Nörlund (theorems 3—6) where the product-series is formed on the basis of the definition $D(p, q)$.

МАТРИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КЛАССОВ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. Г. Кулль
Кафедра геометрии

Целью настоящей статьи является обобщение результатов автора, полученных в работе [2] для линейных преобразований классов двойных последовательностей с комплексными членами. Применяемый в настоящей статье метод аналогичен методу в работе [2]. Метод приложим в случае, если $\alpha = mc$, r, l, $c_{\varphi\psi}^{\delta}$, c_{χ}^{δ} $(\delta = z, c, m)$, mc_{Φ}, r_{Φ} и если β — один из вышеприведенных классов (кроме класса l), класс c или c_{λ}. Случай $\alpha = \beta = l$ рассматривается отдельно.

1. Рассматриваем двойные последовательности $x = \{\xi_{kl}\}$, члены которых ξ_{kl} $(k, l = 0, 1, \ldots)$ принадлежат некоторому банахову пространству X. Рассматриваем следующие классы двойных последовательностей: c, mc, r, l, c_{λ}, $c_{\varphi\psi}^{z}$, $c_{\varphi\psi}^{c}$, $c_{\varphi\psi}^{m}$, c_{χ}^{z}, c_{χ}^{c}, c_{χ}^{m}, m, $\tilde{m}$, m_{λ}, $m_{\varphi\psi}^{m}$ и m_{χ}^{m}, определения которых можно найти в работе [2] (стр. 5—6). Кроме того, пользуемся и другими классами двойных последовательностей: m_{Φ}, mc_{Φ}, r_{Φ} и l_{Φ}, определения которых даны в статье [3]. Наконец, определяем класс rn следующим образом: $x = \{\xi_{kl}\} \in rn$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{kl} = \Theta$ $(l = 0, 1, \ldots)$, $\lim\limits_{l\to\infty} \xi_{kl} = \Theta$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и $\lim\limits_{k,\, l\to\infty} \xi_{kl} = \Theta$, где Θ — нулевой элемент пространства X. Аналогично, как в статье [3], можно определить и класс rn_{Φ}.

2. Пусть заданы непрерывные линейные операторы f_{mnkl} $(m, n, k, l = 0, 1, \ldots)$, определенные в банаховом пространстве X со значениями в банаховом пространстве Y.
Нашей задачей является нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы преобразование

$$\eta_{mn} = \sum_{k,\, l} f_{mnkl}\, \xi_{kl} \quad (m, n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

переводило каждую последовательность $x = \{\xi_{kl}\}$ из некоторого класса α в последовательность $y = \{\eta_{mn}\}$ класса β.[1] Необходимым условием при этом является сходимость двойного ряда (1) при любых $x \in \alpha$ и m, n. Кроме того, нужны дополнительные необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразованная последовательность $y = \{\eta_{mn}\}$ принадлежала именно классу β. Все эти условия (кроме случая $\beta = l$) можно получить на основе теоремы III статьи [2] (стр. 10). Приводим эту теорему в слегка модифицированном виде.

Теорема. *Для того, чтобы двойная последовательность непрерывных линейных операторов*

$$F_{mn}(x) \qquad (m, n = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

сходилась для любого x в некотором банаховом пространстве α в смысле β, необходимо и достаточно, чтобы

1° *двойная последовательность норм $\{\|F_{mn}\|\}$ $(m, n = 0, 1, \ldots)$ принадлежала бы классу ограниченности, соответствующему классу β;*

2° *сходимость последовательности* (2) *в смысле β имело место на основном множестве пространства α.*[2]

Очевидно, что существование преобразования (1) равносильно сходимости последовательности операторов

$$F_{mnpq}(x) = \sum_{k,\, l=0}^{p,\, q} f_{mnkl}\, \xi_{kl} \tag{3}$$

по p, q (в некотором смысле) при любых $x \in \alpha$ и m, n.

Условия для $y = \{\eta_{mn}\} \in \beta$ равносильны условиям для сходимости последовательности операторов

$$F_{mn}(x) = \sum_{k,\, l} f_{mnkl}\, \xi_{kl} \quad (m, n = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

для любых $x \in \alpha$ в смысле β.

Для применения вышеформулированной теоремы необходимо рассматривать классы α как банаховы пространства.

3. Нормы элементов $x \in \alpha$ и $\xi \in X$ обозначаем соответственно $\|x\|$ и $\|\xi\|$ без специального значка для пространства. Нормы же определяем следующим образом (ср. [2], стр. 13—15):

---

[1] Если пределы суммирования не указаны, то суммирование происходит по отмеченным индексам от 0 до ∞. Выражение $f_{mnkl}\xi_{kl}$ нужно понимать как результат применения оператора f_{mnkl} на элемент ξ_{kl} пространства X.

[2] Классам mc, r, rn соответствует класс ограниченности m, классу $c - \tilde{m}$, классу $c_\lambda - m_\lambda$, классам $c^z_{\varphi\psi}$, $c^c_{\varphi\psi}$, $c^m_{\varphi\psi} - m^m_{\varphi\psi}$, классам c^z_χ, c^c_χ, $c^m_\chi - m^m_\chi$ и классами mc_Φ, r_Φ, $rn_\Phi - m_\Phi$.

Множество $R \subset \alpha$ назовем основным множеством пространства α, если линейные комбинации элементов R всюду плотны в α.

если $\alpha = m$, mc, r или rn, то

$$\|x\| = \sup_{k,\,l} \|\xi_{kl}\|, \tag{5}$$

если $\alpha = l$, то

$$\|x\| = \sum_{k,\,l} \|\xi_{kl}\|, \tag{6}$$

если $\alpha = m_\Phi$, mc_Φ, или rn_Φ, то

$$\|x\| = \sup_{k,\,l} \frac{\|\xi_{kl}\|}{\Phi_{kl}}, \tag{7}$$

а в случае $\alpha = l_\Phi$

$$\|x\| = \sum_{k,\,l} \frac{\|\xi_{kl}\|}{\Phi_{kl}}. \tag{8}$$

В случае классов $c^\delta_{\varphi\psi}$, $m^m_{\varphi\psi}$, c^δ_χ и m^m_χ $(\delta = z, c, m)$ рассматриваем подклассы $c^\delta_{\varphi\psi}(\tau)$, $m^m_{\varphi\psi}(\tau)$, $c^\delta_\chi(\tau)$ и $m^m_\chi(\tau)$ $(\delta = z, c, m)$, где

$$\sup_{k,\,l \geqslant \tau} \|\xi_{kl}\| < +\infty.$$

Нормы в этих подклассах определяем так:

если $\alpha = c^\delta_{\varphi\psi}(\tau)$ или $m^m_{\varphi\psi}(\tau)$, то

$$\|x\| = \max\left(\sup_{k,\,l \not\geqslant \tau} \frac{\|\xi_{kl}\|}{\varphi(k)\,\psi(l)},\ \sup_{k,\,l \geqslant \tau} \|\xi_{kl}\|\right), \tag{9}$$

если $\alpha = c^\delta_\chi(\tau)$ или $m^m_\chi(\tau)$, то

$$\|x\| = \max\left(\sup_{k,\,l \not\geqslant \tau} \frac{\|\xi_{kl}\|}{\chi(k,l)},\ \sup_{k,\,l \geqslant \tau} \|\xi_{kl}\|\right).^{3} \tag{10}$$

Линейность этих пространств очевидна.

Полнота же проверяется (например, в случае $\alpha = mc$) следующим образом. Пусть дана фундаментальная последовательность $x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, где $x^n = \{\xi_{kl}{}^n\} \in \alpha$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$, так что из $m, n > N(\varepsilon)$ следует

$$\|\xi^m_{kl} - \xi^n_{kl}\| < \varepsilon \tag{11}$$

для любых k, l. Так как X полно, то существует $\lim\limits_m \xi_{kl}{}^m = \xi_{kl} \in X$.

Положим $x = \{\xi_{kl}\}$. Переходя в (11) к пределу по k, l, получаем

$$\|\xi^m - \xi^n\| \leqslant \varepsilon \quad (m, n > N(\varepsilon)), \tag{12}$$

[3] Неравенство $k, l \not\geqslant \tau$ понимается как отрицание неравенства $k, l \geqslant \tau$.

где $\xi^m = \lim\limits_{k,\,l} \xi_{kl}{}^m$. Из (12) вытекает $\lim\limits_{m} \xi^m = \xi$. Наконец, $\lim\limits_{k,\,l} \xi_{kl} = \xi$, что вытекает из неравенства

$$\|\xi_{kl} - \xi\| \leqslant \|\xi_{kl} - \xi_{kl}^m\| + \|\xi_{kl}^m - \xi^m\| + \|\xi^m - \xi\|.$$

4. Для того, чтобы выписать основные множества этих пространств, нужно определить некоторые типы двойных последовательностей.

$e_{kl}(\xi)$ — последовательность, в которой член с индексами k, l равен $\xi \neq \Theta$, а другие члены равны Θ;

$e_k(\xi)$ — последовательность, в которой члены k-той строки равны $\xi \neq \Theta$, а другие члены равны Θ;

$e^l(\xi)$ — последовательность, в которой члены l-того столбца равны $\xi \neq \Theta$, а другие члены равны Θ;

$e(\xi)$ — последовательность, в которой все члены равны $\xi \neq \Theta$;

$e_k(\xi_\nu)$ — последовательность, в которой члены k-той строки образуют ограниченную последовательность ξ_ν (т. е. $\|\xi_\nu\| = O(1)$, а другие члены равны Θ;

$e^l(\xi_\nu)$ — определяется аналогично как в предыдущем случае, но только для l-того столбца.

Нам нужны еще следующие последовательности $\chi = \{\chi(k,\ l)\}$, $\varphi\psi = \{\varphi(k)\psi(l)\}$ и $\Phi = \{\Phi_{kl}\}$ и операция почленного умножения двух последовательностей. Эту операцию обозначаем через $\cdot$ и определяем для последовательностей $x = \{\xi_{kl}\}$ и $\Phi = \{\Phi_{kl}\}$ равенством $\Phi \cdot x = \{\Phi_{kl}\xi_{kl}\}$.

Основные множества следующие:

для rn, rn_Φ, l и l_Φ — $e_{kl}(\xi)$;

для r — $e_{kl}(\xi)$, $e_k(\xi)$, $e^l(\xi)$, $e(\xi)$;

для mc — $e_k(\xi_\nu)$, $e^l(\xi_\nu)$, $e(\xi)$;

для r_Φ — $e_{kl}(\xi)$, $e_k(\xi)\cdot\Phi$, $e^l(\xi)\cdot\Phi$, $e(\xi)\cdot\Phi$;

для mc_Φ — $e_k(\xi_\nu)\cdot\Phi$, $e^l(\xi_\nu)\cdot\Phi$, $e(\xi)\cdot\Phi$;

для $c^z_{\varphi\psi}(\tau)$ и $c^z_\chi(\tau)$ — $e_{kl}(\xi)$, $e_k(\xi_\nu)$ $(k = \tau, \ldots)$, $e^l(\xi_\nu)$ $(l = \tau, \ldots)$, $e(\xi)$;

для $c^c_{\varphi\psi}(\tau)$ — $e_{kl}(\xi)$, $e_k(\xi_\nu)$ $(k = \tau, \ldots)$, $e^l(\xi_\nu)$ $(l = \tau, \ldots)$, $e_k(\xi)\cdot\varphi\psi$ $(k = 0, \ldots, \tau - 1)$, $e^l(\xi)\cdot\varphi\psi$ $(l = 0, \ldots, \tau - 1)$, $e(\xi)$;

для $c^m_{\varphi\psi}(\tau)$ — $e_k(\xi_\nu)$ $(k = \tau, \ldots)$, $e^l(\xi_\nu)$ $(l = \tau, \ldots)$, $e_k(\xi_\nu)\cdot\varphi\psi$ $(k = 0, \ldots, \tau - 1)$, $e^l(\xi_\nu)\cdot\varphi\psi$ $(l = 0, \ldots, \tau - 1)$, $e(\xi)$;

для $c^c_\chi(\tau)$ — $e_{kl}(\xi)$, $e_k(\xi_\nu)$ $(k = \tau, \ldots)$, $e^l(\xi_\nu)$ $(l = \tau, \ldots)$, $e_k(\xi)\cdot\chi$ $(k = 0, \ldots, \tau - 1)$, $e^l(\xi)\cdot\chi$ $(l = 0, \ldots, \tau - 1)$, $e(\xi)$;

для $c_\chi^m(\tau)$ — $e_k(\xi_\nu)$ $(k=\tau;\ \ldots)$, $e^l(\xi_\nu)$ $(l=\tau,\ \ldots)$, $e_k(\xi_\nu)\cdot\chi$ $(k=0,\ \ldots,\ \tau-1)$, $e^l(\xi_\nu)\cdot\chi$ $(l=0,\ \ldots,\ \tau-1)$, $e(\xi)$;

где индексы k и l имеют все неотрицательные целочисленные значения (если нет никаких ограничений), ξ и ξ_ν имеют всевозможные значения $(\|\xi_\nu\|=O(1))$.

5. Сходимость ряда (1) или же последовательности (3) возможно определить в смысле c_λ, c, mc, r, или в смысле $\sum\limits_{k,\,l}\|f_{mnkl}\xi_{kl}\|<+\infty$, или еще и в других смыслах.

Если требовать сходимость последовательности (3) в смысле c_λ для любого $x=\{\xi_{kl}\}\in\alpha$, то из этого вытекает, что сходимость последовательности (3) в действительности должна иметь место в смысле r. В самом деле, определяем последовательность

$$\xi'_{kl}=\begin{cases}\xi_{kl}, & \text{если } l\leqslant t,\\ \Theta, & \text{если } l>t.\end{cases}$$

Очевидно, что $\{\xi_{kl}'\}\in\alpha$. Тогда должен существовать предел

$$\lim_{\substack{p,\,q\\ \frac{1}{\lambda}<\frac{p}{q}<\lambda}}\sum_{k,\,l=0}^{p,\,q} f_{mnkl}\,\xi_{kl}'=\lim_{p}\sum_{k,\,l=0}^{p,\,t} f_{mnkl}\,\xi_{kl},$$

из чего и вытекает наше утверждение.[4] Таким образом без ограничения общности можем требовать сходимости (3), например, в смысле mc. Применяем теорему, получаем условия:

1° $\sup\limits_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\alpha}}\|\sum\limits_{k,\,l=0}^{p,\,q} f_{mnkl}\,\xi_{kl}\|\leqslant M_{mn}$ $(p,\ q=0,\ 1,\ \ldots;\ m,\ n=0,\ 1,\ \ldots)$

2° предел $\lim\limits_{p,\,q}\sum\limits_{k,\,l=0}^{p,\,q} f_{mnkl}\,\xi_{kl}$ $\quad(m,\ n=0,\ 1,\ \ldots)$

должен существовать на основном множестве пространства α.

Условие 1° существования преобразования можно написать и в другом виде:

1°° существуют числа M_{mn}, что для любых $x\in\alpha$ и $p,q=0,\ 1,\ \ldots$ выполняется неравенство

$$\|\sum_{k,\,l=0}^{p,\,q} f_{mnkl}\,\xi_{kl}\|\leqslant M_{mn}\,\|x\| \qquad (m,\ n=0,\ 1,\ \ldots).$$

[4] Аналогичное обстоятельство имеет место и для числовых последовательностей: из требования сходимости ряда $\sum a_{mnkl}\xi_{kl}$ в смысле c_λ для любого $x=\{\xi_{kl}\}\in\alpha$ вытекает, что этот ряд должен сходиться для любых $x\in\alpha$ даже абсолютно.

Если же требовать сходимость в (1) в смысле $\sum_{kl} \|f_{mnkl}\,\xi_{kl}\| < \infty$ для любого $x = \{\xi_{kl}\} \in \alpha$, то получаем для существования (1) аналогичные условия как в случае числовых рядов (условия a_1, a_3, a_4, a_5 в [2], на стр. 18—19).

6. Теперь напишем условия ограниченности норм операторов $F_{mn}(x)$. Из выражения нормы

$$\|F_{mn}\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \alpha}} \Big\| \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\,\xi_{kl} \Big\|$$

получаем, соответственно смыслу ограниченности $\tilde{m}$, m, или m_λ, следующие условия

$$\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \alpha}} \Big\| \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\,\xi_{kl} \Big\| \leqslant M, \qquad \text{если } m, n > N;$$

$$\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \alpha}} \Big\| \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\,\xi_{kl} \Big\| \leqslant M, \qquad \text{если } m, n = 0, 1, \ldots;$$

$$\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \alpha}} \Big\| \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\,\xi_{kl} \Big\| \leqslant M_\lambda, \qquad \text{если } \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$$

при любом $\lambda \geqslant 1$.

Условия ограниченности можно написать и в другом виде. Например, ограниченность в смысле $\tilde{m}$ можно формулировать так: существует число M, что для любых $x \in \alpha$

$$\Big\| \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\,\xi_{kl} \Big\| \leqslant M\,\|x\|, \qquad \text{если } m, n > N.$$

7. Требуя сходимость последовательности (4) (например, в смысле mc) в случае элементов $e_k(\xi_\nu)$ и $e^l(\xi_\nu)$ основного множества, получаем условия следующего вида: предел

$$\lim_{m,\,n} \sum_{k} f_{mnkl}\,\xi_k \tag{13}$$

должен существовать для любого ξ_k ($\|\xi_k\| = O(1)$) и $l = 0, 1, \ldots$.

Необходимые и достаточные условия для существования предела (13) для любого $\|\xi_k\| = O(1)$ суть следующие:

1) для любого $x = \{\xi_k\}$ ($\|\xi_k\| = O(1)$) и $\varepsilon > 0$ должны найтись $p(\varepsilon, x) > 0$ и $q(\varepsilon, x) > 0$, так что

$$\Big\| \sum_{k=s}^{s+t} f_{mnkl}\,\xi_k \Big\| < \varepsilon, \tag{14}$$

если $s > p(\varepsilon, x)$ и $m, n > q(\varepsilon, x)$ при любом t;

2) предел

$$\lim_{m,\,n} f_{mnkl}\,\xi_k \tag{15}$$

должен существовать для любого ξ_k.

Достаточность. Предел (15) определяет непрерывный линейный оператор f_{kl} из X в Y:

$$\lim_{m,\,n} f_{mnkl}\,\xi_k = f_{kl}\,\xi_k.$$

Далее, $\sum_k f_{kl}\,\xi_k$ сходится для любого $\|\xi_k\| = O(1)$. Это можно доказать, используя (14) и полноту Y.

Теперь покажем, что

$$\lim_{m,\,n}\sum_k f_{mnkl}\,\xi_k = \sum_k f_{kl}\,\xi_k \tag{16}$$

для любого $\|\xi_k\| = O(1)$ и $l = 0, 1, \ldots$. Действительно, из (14) получаем

$$\Big\|\sum_{k=s}^{s+t} f_{mnkl}\,\xi_k - \sum_{k=s}^{s+t} f_{m'n'kl}\,\xi_k\Big\| < 2\varepsilon,$$

если m, n, m', $n' > q(\varepsilon, x)$ и $s > p(\varepsilon, x)$. После предельного перехода m', $n' \to \infty$ и затем $t \to \infty$ получаем

$$\Big\|\sum_{k=s}^{\infty} f_{mnkl}\,\xi_k - \sum_{k=s}^{\infty} f_{kl}\,\xi_k\Big\| \leqslant 2\varepsilon, \tag{17}$$

если $s > p(\varepsilon, x)$ и $m, n > q(\varepsilon, x)$.

Далее, имеет место

$$\Big\|\sum_{k=0}^{s-1} f_{mnkl}\,\xi_k - \sum_{k=0}^{s-1} f_{kl}\,\xi_k\Big\| < \varepsilon, \tag{18}$$

если $m, n > N(\varepsilon, x)$. Из (17) и (18) получаем

$$\Big\|\sum_k f_{mnkl}\,\xi_k - \sum_k f_{kl}\,\xi_k\Big\| < 3\varepsilon,$$

если $m, n > \max(q(\varepsilon, x), N(\varepsilon, x))$, что и доказывает (16).

Необходимость.[5] Необходимость условия 2) очевидна. Необходимость условия 1) доказывается от противного. Предположим, что условие 1) не выполняется. Тогда существуют $\|\xi_k\| = O(1)$ и $\varepsilon > 0$, так что при любых $p > 0$ и $q > 0$ найдутся $s > p$, $m, n > q$ и t, при которых

$$\Big\|\sum_{k=s}^{s+t} f_{mnkl}\,\xi_k\Big\| > \varepsilon. \tag{19}$$

Дальше выбираем последовательность чисел $\varepsilon_{ij} > 0$, так что $\sum \varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon}{12}$. Дальше выбираем индексы m_1, n_1 и конечное множество K_1 последовательных натуральных чисел, так что

$$\Big\|\sum_{k \in K_1} f_{m_1 n_1 kl}\,\xi_k\Big\| > \varepsilon,$$

что возможно по условию (19).

[5] Здесь обобщен метод Хана ([4], стр. 13—16).

Теперь найдем индекс k_1, который удовлетворяет двум условиям:

1) k_1 больше каждого числа множества K_1 (условно обозначим это через $K_1 < k_1$),

2) $\| \sum_{k=k_1}^{k_1+t} f_{m_1 n_1 k l} \xi_k \| < \varepsilon_{11}$

для любого t. Это возможно, учитывая сходимость ряда $\sum_k f_{m_1 n_1 k l} \xi_k$.

Далее найдем число $p_1 > m_1, n_1$, так что

$$\| \sum_{k \in K_1} f_{mnkl} \xi_k - \sum_{k \in K_1} f_{m'n'kl} \xi_k \| < \frac{\varepsilon}{6},$$

если $m, n, m', n' \geqslant p_1$.

Тогда найдем число $r_1 > k_1$, так что

$$\| \sum_{k=r_1}^{r_1+t} f_{p_1 p_1 k l} \xi_k \| < \varepsilon_{11}$$

для любого t. Это возможно, учитывая сходимость ряда $\sum_k f_{p_1 p_1 k l} \xi_k$.

Далее возьмем $m_2, n_2 > p_1$ и конечное множество K_2 последовательных натуральных чисел, наименьший из которых $\geqslant r_1$ (условно обозначим это через $r_1 \leqslant K_2$), так что

$$\| \sum_{k \in K_2} f_{m_2 n_2 k l} \xi_k \| > \varepsilon.$$

Обозначим $S_2 = K_1 \cup K_2$.

Тогда найдем k_2, которое должно удовлетворять условиям

1) $K_2 < k_2$,

2) $\| \sum_{k=k_2}^{k_2+t} f_{m_1 n_1 k l} \xi_k \| < \varepsilon_{21}$ для любого t,

3) $\| \sum_{k=k_2}^{k_2+t} f_{m_2 n_2 k l} \xi_k \| < \varepsilon_{22}$ для любого t.

Тогда найдем $p_2 > m_2, n_2$, так что

$$\| \sum_{k \in S_2} f_{mnkl} \xi_k - \sum_{k \in S_2} f_{m'n'kl} \xi_k \| < \frac{\varepsilon}{6};$$

если $m, n, m', n' \geqslant p_2$.

Далее выбираем $r_2 > k_2$, так что

1) $\| \sum\limits_{k=r_2}^{r_2+t} f_{p_1 p_1 kl}\, \xi_k \| < \varepsilon_{21}$ для любого t,

2) $\| \sum\limits_{k=r_2}^{r_2+t} f_{p_2 p_2 kl}\, \xi_k \| < \varepsilon_{22}$ для любого t.

Продолжая построение таким же образом, получаем возрастающие последовательности:

$$m_1,\ n_1 < p_1 < m_2,\ n_2 < p_2 < \ldots < m_i, \quad n_i < p_i < m_{i+1},\ n_{i+1} < \ldots$$

и

$$K_1 < k_1 < r_1 \leqslant K_2 < k_2 < r_2 \leqslant \ldots \leqslant K_i < k_i < r_i \leqslant K_{i+1} < k_{i+1} < r_{i+1} \leqslant \ldots .$$

При этом выполняются условия

1) $\| \sum\limits_{k \in K_i} f_{m_i n_i kl}\, \xi_k \| > \varepsilon$, для любого $i = 1, 2, \ldots$,

2) $\| \sum\limits_{k=k_i}^{k_i+t} f_{m_j n_j kl}\, \xi_k \| < \varepsilon_{ij}$, для любого t и $i \geqslant j$,

3) $\| \sum\limits_{k=r_i}^{r_i+t} f_{p_j p_j kl}\, \xi_k \| < \varepsilon_{ij}$, для любого t и $i \geqslant j$,

4) $\| \sum\limits_{k \in S_i} f_{mnkl}\, \xi_k - \sum\limits_{k \in S_i} f_{m'n'kl}\, \xi_k \| < \frac{\varepsilon}{6}$, если $m, n, m', n' \geqslant p_i$.

Здесь $S_i = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_i$, $K_i \cap K_j = \Lambda$ (Λ — пустое множество), если $i \neq j$. Обозначим $K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_i \cup \ldots$, $R_i = K_{i+1} \cup K_{i+2} \ldots$. Тогда $K = S_i \cup R_i$.
Получаем

$$\| \sum_{k \in K} f_{m_i n_i kl}\, \xi_k - \sum_{k \in K} f_{p_{i-1} p_{i-1} kl}\, \xi_k \| \geqslant$$

$$\geqslant \| \sum_{k \in K_i} f_{m_i n_i kl}\, \xi_k \| - \| \sum_{k \in S_{i-1}} f_{m_i n_i kl}\, \xi_k - \sum_{k \in S_{i-1}} f_{p_{i-1} p_{i-1} kl}\, \xi_k \| -$$

$$- \| \sum_{k \in R_i} f_{m_i n_i kl}\, \xi_k \| - \| \sum_{k \in R_{i-1}} f_{p_{i-1} p_{i-1} kl}\, \xi_k \| . \qquad (20)$$

Оценим две последние нормы:

$$\| \sum_{k \in R_i} f_{m_i n_i kl}\, \xi_k \| \leqslant \sum_{j=i+1}^{\infty} \| \sum_{k \in K_j} f_{m_i n_i kl}\, \xi_k \| =$$

$$= \sum_{j=i+1}^{\infty} \| \sum_{k=k_{j-1}}^{k_{j-1}+t} f_{m_i n_i kl}\, \xi_k - \sum_{k=k_{j-1}}^{k_{j-1}+t'} f_{m_i n_i kl}\, \xi_k \| < 2 \sum_{j=i+1}^{\infty} \varepsilon_{j-1,\, i} < 2 \frac{\varepsilon}{12} = \frac{\varepsilon}{6},$$

где $K_j = \{k_{j-1} + t' - 1, \ldots, k_{j-1} + t\}$.

$$\| \sum_{k \in R_{i-1}} f_{p_{i-1} p_{i-1} kl} \xi_k \| \leqslant \sum_{j=i}^{\infty} \| \sum_{k \in K_j} f_{p_{i-1} p_{i-1} kl} \xi_k \| =$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} \| \sum_{k=r_{j-1}}^{r_{j-1}+t} f_{p_{i-1} p_{i-1} kl} \xi_k - \sum_{k=r_{j-1}}^{r_{j-1}+t'} f_{p_{i-1} p_{i-1} kl} \xi_k \| < 2 \sum_{j=i}^{\infty} \varepsilon_{i-1, i-1} < \frac{\varepsilon}{6},$$

где

$$K_j = \{r_{j-1} + t' - 1, \ldots, r_{j-1} + t\}.$$

Таким образом получаем из (20)

$$\| \sum_{k \in K} f_{m_i n_i kl} \xi_k - \sum_{k \in K} f_{p_{i-1} p_{i-1} kl} \xi_k \| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}$$

при любых i. Это неравенство означает, что предел

$$\lim_{m, n} \sum_{k} f_{mnkl} \xi_k'$$

не существует для последовательности

$$\xi_k' = \begin{cases} \xi_k, & \text{если } k \in K, \\ \Theta, & \text{если } k \bar{\in} K. \end{cases}$$

Полученное противоречие доказывает необходимость условия 1).

Отметим, наконец, что из условий 1) и 2) (именно из формулы (16)), а на основе вышедоказанного и из условия (13), следует

$$\lim_{m, n} \| \sum_{k} (f_{mnkl} - f_{kl}) \xi_k \| = 0 \tag{21}$$

для любого $\|\xi_k\| = O(1)$ и $l = 0, 1, \ldots$. С другой стороны, учитывая сходимость ряда $\sum_k f_{mnkl} \xi_k$, должен сходиться и ряд $\sum_k f_{kl} \xi_k$. Тогда из (21) вытекает соотношение

$$\lim_{m, n} \sum_{k} f_{mnkl} \xi_k = \sum_{k} f_{kl} \xi_k$$

для любого $\|\xi_k\| = O(1)$ и $l = 0, 1, \ldots$. Значит, условие (21) равносильно также требованию (13).

Все вышеизложенные построения и результаты имеют место и в случае предельного процесса $(m, n)_\lambda \to \infty$ (т. е. $m, n \to \infty$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$) и для элементов $e_k(\xi_\nu) \cdot \varphi\psi$, $e^l(\xi_\nu) \cdot \varphi\psi$, $e_k(\xi_\nu) \cdot \chi$, $e^l(\xi_\nu) \cdot \chi$. Например, существование предела

$$\lim_{(m, n)_\lambda \to \infty} \sum_{k} \chi(k, l) f_{mnkl} \xi_k,$$

где $\|\xi_k\| = O(1)$, эквивалентно условию

$$\lim_{(m,n)_\lambda \to \infty} \| \sum_k \chi(k, l)\ (f_{mnkl} - f_{kl})\,\xi_k \| = 0.$$

8. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы преобразование (1) преобразовало любую последовательность $x = \{\xi_{kl}\} \in l_X$ в последовательность $y = \{\eta_{mn}\} \in l_Y$, следующее:

$$\sum_{m,\,n} \|f_{mnkl}\,\xi\| \leqslant M\,\|\xi\| \qquad (k,\ l = 0, 1, \ldots) \tag{22}$$

для любых $\xi \in X$.

Так как доказательство этого утверждения проводится иным путем, приводим его здесь.[6]

Достаточность вытекает из неравенства

$$\sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} \|\eta_{mn}\| \leqslant \sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} \sum_{k,\,l} \|f_{mnkl}\,\xi_{kl}\| = \sum_{k,\,l} \sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} \|f_{mnkl}\,\xi_{kl}\|,$$

откуда на основе (22) находим

$$\sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} \|\eta_{mn}\| \leqslant M \sum_{k,\,l} \|\xi_{kl}\| = M\,\|x\|.$$

Необходимость. Для существования преобразования (1) необходимо

$$\| \sum_{k,\,l=0}^{s,\,t} f_{mnkl}\,\xi_{kl} \| \leqslant M_{mn}\,\|x\| \qquad (m,\ n = 0, 1, \ldots;\ s,\ t = 0, 1, \ldots)$$

для любого $x = \{\xi_{kl}\} \in l_X$. Так как предел по s, t существует, то

$$\| \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\,\xi_{kl} \| \leqslant M_{mn}\,\|x\| \qquad (m,\ n = 0, 1, \ldots) \tag{23}$$

для любого $x = \{\xi_{kl}\} \in l_X$.

Определяем оператор $y = F_{pq}(x)$, где $y = \{\eta_{mn}\}$, следующим образом

$$\eta_{mn} = \begin{cases} \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\,\xi_{kl}, & \text{если } m \leqslant p \text{ и } n \leqslant q, \\ \Theta & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Этот оператор отображает l_X в l_Y. Линейность оператора очевидна. Непрерывность его следует из неравенства

$$\|F_{pq}(x)\| = \sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} \|\eta_{mn}\| = \sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} \| \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\,\xi_{kl} \| \leqslant \sum_{m,\,n=0}^{p,\,q} M_{mn}\,\|x\|,$$

справедливого на основе (23).

[6] См. [5], теорема 1, и [1], теорема 4.

Определяем оператор $y = F(x)$, где $y = \{\eta_{mn}\}$ и η_{mn} определяется соотношением (1).

Утверждения

$$\|F_{pq}(x) - F(x)\| < \varepsilon, \quad \text{если } p, q > N(\varepsilon)$$

и

$$\sum_{m, n \leq p, q} \|\eta_{mn}\| < \varepsilon, \quad \text{если } p, q > N(\varepsilon),$$

равносильно. Так как $y = \{\eta_{mn}\} \in l_Y$, то эти соотношения имеют место. Тогда по теореме IV работы [2] оператор $F(x)$ должен быть непрерывным линейным оператором во всем пространстве l_X. Тогда

$$\|F(x)\| \leqslant M\|x\| \tag{24}$$

для любых $x \in l_X$. Возьмем $x = e_{kl}(\xi)$ и подставляем в (24). Получаем

$$\|F(e_{kl}(\xi))\| \leqslant M\|\xi\|,$$

или подробнее

$$\sum_{m, n} \|f_{mnkl}\,\xi\| \leqslant M\|\xi\|,$$

чем необходимость условия (22) доказана.

9. На основе теоремы V работы [2] можно получить формулы для вычисления предела преобразованной последовательности.

Обозначим $\xi = \lim\limits_{k, l} \xi_{kl}$ и $\eta = \lim\limits_{m, n} \eta_{mn}$.

Тогда в случае $\alpha = mc$, $c^{\delta}_{\varphi\psi}(\tau)$ и $c^{\delta}_{\chi}(\tau)$ $(\delta = z, m)$ получаем

$$\eta = f\xi + \sum_{k, l} f_{kl}(\xi_{kl} - \xi), \tag{25}$$

где

$$f\xi = \lim_{m, n} \sum_{k, l} f_{mnkl}\xi$$

и

$$f_{kl}\xi = \lim_{m, n} f_{mnkl}\xi.$$

В случае $\alpha = r$ получаем

$$\eta = f\xi + \sum_{k, l} f_{kl}(\xi_{kl} - \xi_k' - \xi_l + \xi) + \\ + \sum_{k} f_k'(\xi_k' - \xi) + \sum_{l} f_l(\xi_l - \xi), \tag{26}$$

где

$$\xi_k' = \lim_{l} \xi_{kl}, \quad \xi_l = \lim_{k} \xi_{kl},$$

$$f_l\xi = \lim_{m, n} \sum_{k} f_{mnkl}\xi, \quad f_k'\xi = \lim_{m, n} \sum_{l} f_{mnkl}\xi.$$

В случае $\alpha = rn$ и l получаем

$$\eta = \sum_{k,\,l} f_{kl}\xi_{kl}. \tag{27}$$

Во-первых, нужно доказать сходимость рядов в формулах (25), (26) и (27). Это вытекает из формул (13) и (14) и из сходимости на основном множестве пространства α. Во-вторых, нужно показать, что соотношения (25), (26) и (27) имеют место. Для этого, на основе теоремы V работы [2], необходимо и достаточно их справедливость на основном множестве соответствующего пространства α. Последнее можно проверить непосредственно.

10. Чтобы сформулировать точные условия для матричных преобразований классов двойных последовательностей в банаховом пространстве, можно заранее привести перечень нужных условий, как в работе [2] (стр. 18—21).

Так как основные множества этих пространств приведены, выписывание (и на основе п. 7 модифицирование) этих условий никаких трудностей не представляет. Поэтому мы здесь такого перечня не приводим, а обратимся к нескольким примерам.

Пример 1. Найдем необходимые и достаточные условия для преобразования $mc \to c_\lambda$. Выписываем прежде всего условия существования преобразования (существование понимается в смысле mc):

$$\|\sum_{k,\,l}^{p,\,q} f_{mnkl}\xi_{kl}\| \leqslant M_{mn}\|x\| \quad (p,\ q = 0,\ 1,\ \ldots;\ m,\ n, = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{28}$$

для любого $\{\xi_{kl}\} \in mc$. Кроме того, должны существовать пределы

$$\lim_{p} \sum_{k=0}^{p} f_{mnkl}\xi_k, \quad (m,\ n,\ l = 0,\ 1,\ \ldots),$$

$$\lim_{q} \sum_{l=0}^{q} f_{mnkl}\xi_l, \quad (m,\ n,\ k = 0,\ 1,\ \ldots),$$

$$\lim_{p,\,q} \sum_{k,\,l=0}^{p,\,q} f_{mnkl}\xi, \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

для любых $\xi_k \in X$ $(\|\xi_k\| = O(1))$, $\xi_l \in X$ $(\|\xi_l\| = O(1))$ и $\xi \in X$.

Условие ограниченности в смысле m_λ добавляет к ним еще

$$M_{mn} \leqslant M_\lambda,$$

если $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$ для любого $\lambda \geqslant 1$.

Условие сходимости в смысле c_λ на основном множестве пространства mc дает (учитывая п. 7)

$$\lim_{(m,\,n)_\lambda \to \infty} \|\sum_k (f_{mnkl} - f_{kl})\xi_k\| = 0 \quad (l = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{29}$$

$$\lim_{(m,\,n)_\lambda \to \infty} \|\sum_l (f_{mnkl} - f_{kl})\xi_l\| = 0 \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots),$$

$$\lim_{(m,\,n)_\lambda \to \infty} \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\xi = f\xi,$$

для любых $\|\xi_k\| = O(1)$, $\|\xi_l\| = O(1)$ и $\xi \in X$. Последний предел должен быть независимым от λ. Оператор f_{kl} определяется равенством $f_{kl}\xi = \lim\limits_{(m,\,n)_\lambda \to \infty} f_{mnkl}\xi$.

Пример 2. Найдем необходимые и достаточные условия для преобразования $mc_\Phi \to c_\lambda$. Для этого нужно выписать точные условия для преобразования $mc \to c_\lambda$, только с той разницей, что в каждом месте нужно заменить f_{mnkl} на $\Phi_{kl}f_{mnkl}$. Например, из условия (28) получается условие:

$$\|\sum_{k,\,l}^{p,\,q} \Phi_{kl}f_{mnkl}\xi_{kl}\| \leqslant M_{mn}\|x\| \quad (p,\ q = 0,\ 1,\ \ldots;\ m,\ n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

для любого $\{\xi_{kl}\} \in mc$ и из условия (29):

$$\lim_{(m,\,n)_\lambda \to \infty} \|\sum_k \Phi_{kl}(f_{mnkl} - f_{kl})\xi_k\| = 0 \quad (l = 0,\ 1,\ \ldots)$$

для любых $\|\xi_k\| = O(1)$.

Пример 3. Найдем необходимые и достаточные условия для преобразования $l \to r$. Условие существования преобразования такое:

$$\|\sum_{k,\,l=0}^{p,\,q} f_{mnkl}\xi_{kl}\| \leqslant M_{mn}\|x\| \quad (p,\ q = 0,\ 1,\ \ldots;\ m,\ n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

для любого $x \in l$. Условие ограниченности в смысле m добавляет к нему еще

$$M_{mn} \leqslant M \qquad (m,\ n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Сходимость в смысле r на основном множестве пространства l дает следующие условия: пределы

$$\lim_{m,\,n} f_{mnkl}\xi = f_{kl}\xi \quad (k,\ l = 0,\ 1,\ \ldots),$$

$$\lim_{m} f_{mnkl}\xi = f_{nkl}\xi \quad (n,\ k,\ l = 0,\ 1,\ \ldots),$$

$$\lim_{n} f_{mnkl}\xi = f'_{mkl}\xi \quad (m,\ k,\ l = 0,\ 1,\ \ldots)$$

должны существовать для любого $\xi \in X$.

Пример 4. Найдем необходимые и достаточные условия для преобразования $c_\chi^m \to mc$. Для этого найдем прежде всего точные условия для $c_\chi^m(\tau) \to mc$ и учитываем, что имеет место $c_\chi^m = \bigcup_\tau c_\chi^m(\tau)$. Значит, найденные условия должны иметь место для любого $\tau = 0, 1, \ldots$.

Из условий существования выписываем только одно

$$\| \sum_{k,\, l=0}^{p,\, q} f_{mnkl}\xi_{kl}\| \leqslant M_{mn}\|x\| \quad (p, q = 0, 1, \ldots;\ m, n = 0, 1, \ldots)$$

для любого $x \in c_\chi^m$. Условие ограниченности добавляет к ним еще

$$M_{mn} \leqslant M \qquad (m, n = 0, 1, \ldots).$$

Условия сходимости в смысле mc на основном множестве пространства $c_\chi^m(\tau)$ для любого τ дают (учитывая п. 7)

$$\lim_{m,\, n} \sum_{k,\, l} f_{mnkl}\xi = f\xi,$$

$$\lim_{m,\, n} \|\sum_k f_{mnkl} - f_{kl})\,\xi_k\| = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_{m,\, n} \|\sum_l f_{mnkl} - f_{kl})\,\xi_l\| = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_{m,\, n} \|\sum_k \chi(k, l)\ (f_{mnkl} - f_{kl})\,\xi_k\| = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_{m,\, n} \|\sum_l \chi(k, l)\ (f_{mnkl} - f_{kl})\,\xi_l\| = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

для любого ξ, $\|\xi_k\| = O(1)$ и $\|\xi_l\| = O(1)$.

Литература

1. Кангро Г. Ф., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, 1956, **5**, 108—128.
2. Кулль И. Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. Зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
3. Кулль И. Г., Линейные преобразования некоторых классов двойных последовательностей. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, 1961, **10**, 13—21.
4. Hahn, H., Über Folgen linearer Operationen. Monatsh. Math. und Phys., 1922, **32**, 3—88.
5. Knopp, K., Lorentz, G., Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math., 1949/50, **2**, 10—16.

Поступило
7 V 1960

KAHEKORDSETE JADADE KLASSIDE MAATRIKSTEISENDUSED BANACHI RUUMIDES

I. Kull
Geomeetriakateeder

Resümee

Olgu antud pidevad lineaarsed operaatorid f_{mnkl} $(m, n, k, l = 0, 1, \ldots)$, mis on defineeritud Banachi ruumis X ja mille väärtused on Banachi ruumis Y.

Töös antakse meetod tarvilike ja piisavate tingimuste leidmiskes, mille korral teisendus

$$\eta_{mn} = \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\xi_{kl} \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ \ldots;\ \xi_{kl} \in X,\ \eta_{mn} \in Y)$$

teisendaks iga jada $x = \{\xi_{kl}\}$ klassist α klassi β mingiks jadaks $y = \{\eta_{mn}\}$. Meetod on rakendatav juhul, kui $\alpha = mc,\ r,\ l,\ c^{\delta}_{\varphi\psi},\ c^{\delta}_{\chi}(\delta = z,\ c,\ m),\ mc_{\Phi},\ r_{\Phi}$ ja kui β on üks ülalmärgitud klassidest (välja arvatud klass l), klass c või c_{λ}. Juht $\alpha = \beta = l$ käsitletakse eraldi.

MATRIX TRANSFORMATIONS OF THE CLASSES OF DOUBLE SEQUENCES IN BANACH SPACES

I. Kull

Summary

Let us consider continuous linear operators f_{mnkl} $(m, n, k, l = 0, 1, \ldots)$ defined in a Banach space X the values of which belong to a Banach space Y.

In the present paper a method for finding the necessary and sufficient conditions is presented, so that the transformation

$$\eta_{mn} = \sum_{k,\,l} f_{mnkl}\xi_{kl} \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ \ldots;\ \xi_{kl} \in X,\ \eta_{mn} \in Y)$$

transforms any sequence $x = \{\xi_{kl}\}$ of the class α to a certain sequence $y = \{\eta_{mn}\}$ of the class β. This method is applicable in case $\alpha = mc,\ r,\ l,\ c^{\delta}_{\varphi\psi}$, $c^{\delta}_{\chi}(\delta = z,\ c,\ m)\ mc_{\Phi},\ r_{\Phi}$ and if β is one of the classes mentioned above (except the class l) or the class c or c_{λ}. The case $\alpha = \beta = l$ is examined separatelv.

ОБ АБСТРАКТНЫХ МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДА ВЗВЕШЕННЫХ СРЕДНИХ РИССА

Г. Кангро и Ф. Вихманн
Кафедра математического анализа

Введение

1. Пусть X, Y — банаховы пространства, ε_ν — непрерывные линейные операторы из X в Y, $\mathfrak{X}$ — некоторый класс последовательностей в пространстве X и B — метод суммирования рядов. Будем говорить, что операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа $(\mathfrak{X}, B)$ (соответственно $(\mathfrak{X}, |B|)$), если для каждой последовательности $\{x_\nu\} \in \mathfrak{X}$ ряд [1]

$$\Sigma \varepsilon_\nu x_\nu$$

B-суммируем (соответственно абсолютно B-суммируем). Класс $\mathfrak{X}$ определяется в дальнейшем при помощи некоторого метода суммирования A и состоит из всех A-суммируемых, или A-ограниченных, или абсолютно A-суммируемых последовательностей, или из последовательностей членов всех A-суммируемых, или A-ограниченных, или абсолютно A-суммируемых рядов. Эти классы будем обозначать соответственно через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0$, $|\mathfrak{A}|$, A, A_0, $|A|$. В случае, когда A и B — методы суммирования Чезаро, соответствующие абстрактные множители суммируемости рассматривались в [2]. В настоящей статье устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы операторы ε_ν были множителями суммируемости типов $(\mathfrak{A}, B)$, $(\mathfrak{A}_0, B)$, $(|\mathfrak{A}|, B)$, $(|\mathfrak{A}|, |B|)$, (A, B), (A_0, B), $(|A|, B)$ и $(|A|, |B|)$, где A — метод взвешенных средних Рисса, а B — произвольный матричный метод суммирования рядов, удовлетворяющий некоторым условиям типа регулярности. В случае, когда $X = Y = R_1$ (одномерное евклидово пространство) и ε_ν — численные множители, основные результаты принадлежат Юркату, Пейеримхоффу и Кангро [3, 5—9]. Слу-

[1] Если пределы суммирования не указаны, то индекс суммирования пробегает все целочисленные значения 0, 1, ...

чай, когда $X = R_1$, $Y = M(a, b)$ (пространство равномерной сходимости) и ε_ν — функциональные множители, данные на (a, b), рассмотрен Божоровым [1]. Их результаты вытекают как следствия из теорем настоящей статьи.

2. Метод взвешенных средних Рисса (R, p_n), который мы будем кратко обозначать через P, определяется при помощи преобразования последовательности в последовательность матрицей $(a_{n\nu})$ с

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{p_\nu}{P_n} & \text{при } \nu \leqslant n, \\ 0 & \text{при } \nu > n, \end{cases} \tag{0.1}$$

где $\{p_\nu\}$ — данная числовая последовательность, $P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \neq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $P_{-1} = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что $p_\nu \neq 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$.

Метод суммирования B будем определять преобразованием ряда в последовательность матрицей $(\beta_{n\nu})$. Согласно одной известной теореме Хана [4], метод B сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда [2]

$$1^\circ \text{ существует } \lim_n \beta_{n\nu} = \beta_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \sum_\nu |\Delta\beta_{n\nu}| \leqslant M \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

причем регулярность метода B характеризуется добавочным условием $\beta_\nu = 1$. Метод B, сохраняющий сходимость, называем корегулярным, если $\lim_\nu \beta_\nu \neq 0$, и конулевым, если $\lim_\nu \beta_\nu = 0$. Если B сохраняет сходимость, то существует $\lim_\nu \beta_{n\nu}$, причем без ограничения общности можем предполагать, что $\lim_\nu \beta_{n\nu} = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, поскольку в противном случае B суммировал бы лишь сходящиеся ряды [3].

Как показал Суноути [10], метод B сохраняет абсолютную сходимость тогда и только тогда, когда

$$\sum_n |\bar{\Delta}\beta_{n\nu}| \leqslant M \quad (\nu = 0, 1, \ldots).$$

---

[2] Мы используем следующие обозначения: $\Delta\beta_{n\nu} = \beta_{n\nu} - \beta_{n,\nu+1}$ и $\bar{\Delta}\beta_{n\nu} = \beta_{n\nu} - \beta_{n-1,\nu}$ $(\beta_{-1,\nu} = 0)$, причем при наличии двух индексов Δ всегда применяется ко второму, а $\bar{\Delta}$ к первому индексу. Символ $\lim_n$ означает $\lim_{n\to\infty}$.

Приступая к нахождению необходимых и достаточных условий для множителей суммируемости перечисленных выше типов, мы в начале требуем от метода A лишь нормальности [3] ($a_{n\nu}=0$ при $\nu>n$, $a_{nn}\neq 0$ $(n=0, 1, \ldots)$), не фиксируя элементов $a_{n\nu}$. При этом применяется метод статьи [3], но с тем изменением [4], что метод A дается при изучении множителей суммируемости типов $(|\mathfrak{A}|, B)$ и $(|\mathfrak{A}|, |B|)$ преобразованием последовательности в ряд матрицей $(a'_{n\nu})$ с $a'_{n\nu}=\overline{\Delta}a_{n\nu}$, а при изучении множителей суммируемости $(|A|, B)$ и $(|A|, |B|)$ — преобразованием ряда в ряд матрицей $(a'_{n\nu})$ с $a'_{n\nu}=\overline{\Delta}\sum_{k=\nu}^{n} a_{nk}$. Тем самым доказательства соответствующих теорем, а также условия теорем 12 и 17 статьи [3] несколько упрощаются.

3. Вместо лемм 1°—8° статьи [3] мы в дальнейшем будем использовать следующие леммы о преобразовании последовательности в последовательность

$$y_n=\sum_{\nu} A_{n\nu}x_\nu \quad (n=0, 1, \ldots), \tag{0.2}$$

где $x_\nu\in X$, $y_n\in Y$ и $A_{n\nu}$ — непрерывные линейные операторы из X в Y.

Лемма 1. *Преобразование* (0.2) *переводит каждую сходящуюся к нулю последовательность в сходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда*

1° *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} A_{n\nu}x=A_\nu x$ $(x\in X;\ \nu=0, 1, \ldots)$,

2° $\sup\limits_{\|x_\nu\|\leqslant 1}\|\sum\limits_{\nu=0}^{k} A_{n\nu}x_\nu\|\leqslant M$ $(n, k=0, 1, \ldots)$,

причем для всех сходящихся к нулю последовательностей $\{x_\nu\}$ *имеет место формула*

$$\lim_n y_n=\sum A_\nu x_\nu. \tag{0.3}$$

Лемма 2. *Если существует* $\lim\limits_{n\to\infty} A_{n\nu}=A_\nu$ *по норме* $(\nu=0, 1, \ldots)$, *то преобразование* (0.2) *переводит каждую ограниченную последовательность в сходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда*

1° $\sum\limits_{\nu} A_{n\nu}x_\nu$ сходится равномерно при $\|x_\nu\|\leqslant 1$ $(n=0, 1, \ldots)$,

2° $\lim\limits_n \sup\limits_{\|x_\nu\|\leqslant 1}\|\sum\limits_{\nu}(A_{n\nu}-A_\nu)x_\nu\|=0$,

---

[3] Метод P нормален тогда и только тогда, когда $p_\nu\neq 0$ $(\nu=0, 1, \ldots)$.

[4] В [3] A может быть реверсивный метод, исключая случаи $(\mathfrak{A}_O, B)$ и (A_O, B).

и для всех ограниченных последовательностей справедливо (0. 3).

Лемма 3. *Преобразование* (0. 2) *переводит каждую последовательность* $\{x_\nu\}$ *с* $\Sigma \|x_\nu\| < \infty$ *в сходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда*

1° *существует* $\lim\limits_n A_{n\nu}x = A_\nu x (x \in X;\ \nu = 0, 1, \ldots)$,

2° $\|A_{n\nu}\| \leqslant M \quad (n, \nu = 0, 1, \ldots)$,

и для всех последовательностей $\{x_\nu\}$ *с* $\Sigma \|x_\nu\| < \infty$ *справедливо* (0. 3).

Лемма 4. *Преобразование* (0. 2) *переводит каждую последовательность* $\{x_\nu\}$ *с* $\Sigma \|x_\nu\| < \infty$ *в последовательность* $\{y_n\}$ *с* $\Sigma \|y_n\| < \infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_n \|A_{n\nu}x\| \leqslant M \|x\| \qquad (x \in X;\ \nu = 0, 1, \ldots).$$

Лемма 5. *Если преобразование* (0. 2) *переводит каждую абсолютно сходящуюся последовательность в сходящуюся последовательность, то*

$$\Big\|\sum_{\nu=0}^{k} A_{n\nu}\Big\| \leqslant M \quad (n, k = 0, 1, \ldots).$$

Лемма 6. *Если преобразование* (0. 2) *переводит каждую абсолютно сходящуюся последовательность в абсолютно сходящуюся последовательность, то*

$$\sum_n \Big\| \sum_{\nu=0}^{k} \overline{\Delta} A_{n\nu}x\Big\| \leqslant M \|x\| \quad (x \in X;\ k = 0, 1, \ldots).$$

Лемма 7. *Если преобразование* (0. 2) *переводит каждую последовательность* $\{x_\nu\}$ *со сходящимися суммами* $\sum\limits_{\nu=0}^{k} x_\nu$ *в сходящуюся последовательность, то*

$$\Big\|\sum_{\nu=0}^{k} \Delta A_{n\nu}\Big\| \leqslant M \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Лемма 8. *Если существует* $\lim\limits_n A_{n\nu} = A_\nu$ *по норме* $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *и преобразование* (0. 2) *переводит каждую последовательность* $\{x_\nu\}$ *с ограниченными суммами* $\sum\limits_{\nu=0}^{k} x_\nu$ *в сходящуюся последовательность, то*

$$\lim_n \Big\|\sum_\nu \Delta (A_{n\nu} - A_\nu)\Big\| = 0.$$

Доказательства лемм 1°—4° имеются в [2] и [11]. При этом условия леммы 2 немного видоизменены. Леммы 5°—8° нетрудно привести к соответствующим леммам 1°—4°.

§ 1. Множители суммируемости типа $(\mathfrak{P}, B)$

Аналогично теоремам 1 и 5 статьи [3] можно при помощи леммы 1 доказать следующую общую теорему.

Теорема 1. *Операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа $(\mathfrak{A}, B)$ $[(A, B)]$ тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ\ \sum_\nu \xi_{\nu k}\varepsilon_\nu x \text{ и } \sum \xi_\nu \varepsilon_\nu x \ B\text{-суммируемы } (x \in X;\ k = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ\ \sup_{\|x_\nu\|\leqslant 1} \Big\| \sum_{\nu=0}^{l} c_{k\nu}^n x_\nu \Big\| \leqslant M_n \ (k, l = 0, 1, \ldots),$$

$$3^\circ\ \sup_{\|x_\nu\|\leqslant 1} \Big\| \sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu} x_\nu \Big\| \leqslant M \ (n, k = 0, 1, \ldots),$$

где

$$(\xi_{n\nu}) = (a_{n\nu})^{-1}\ [(\xi_{n\nu}) = (\sum_{k=\nu}^{n} a_{nk})^{-1}],\ \xi_n = \sum_{\nu=0}^{n} \xi_{n\nu}, \tag{1.1}$$

$$c_{k\nu}^n = \sum_{\mu=\nu}^{k} \beta_{n\mu}\xi_{\mu\nu}\varepsilon_\mu,\quad c_{n\nu}x = \lim_k c_{k\nu}^n \ (x \in X). \tag{1.2}$$

Если $A = P$, то из (0.1), первого варианта (1.1) и из (1.2) мы находим:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_{\nu\nu} = \dfrac{P_\nu}{p_\nu},\quad \xi_{\nu+1,\,\nu} = -\dfrac{P_\nu}{p_{\nu+1}},\quad \xi_{n\nu} = 0 \\ \text{при } n > \nu + 1 \text{ или } n < \nu,\ \xi_n = 1, \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_{k\nu}^n = \begin{cases} P_\nu\, \Delta \dfrac{\beta_{n\nu}\,\varepsilon_\nu}{p_\nu} & \text{при } \nu < k, \\ P_k \dfrac{\beta_{nk}\,\varepsilon_k}{p_k} & \text{при } \nu = k, \\ 0 & \text{при } \nu > k, \end{cases} \\ c_{n\nu} = P_\nu\, \Delta \dfrac{\beta_{n\nu}\,\varepsilon_\nu}{p_\nu}. \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Теорема 2. *Если P сохраняет сходимость и B корегулярен, то операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа $(\mathfrak{P}, B)$ тогда и только тогда, когда*

1° $\Sigma\, \varepsilon_\nu x$ *B-суммируем* $(x \in X)$,

2° $\sup\limits_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \| \sum\limits_{\nu=0}^{k} P_\nu \left(\Delta \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu \| \leqslant M \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots)$,

3° $\left\| P_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| \leqslant M \quad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots)$.

Необходимость. Если операторы ε_ν — множители суммируемости типа $(\mathfrak{P}, B)$, то преобразование (0.2) с $A_{n\nu} = \beta_{n\nu}\, \varepsilon_\nu$ должно переводить каждую последовательность класса $\mathfrak{P}$ — и в частности каждую сходящуюся к нулю последовательность — в сходящуюся последовательность. Согласно лемме 1 для этого, в частности, необходимо выполнение условия

$$\| \sum_{\nu=0}^{k} \beta_{n\nu}\, \varepsilon_\nu \| \leqslant M \quad (n,\ k = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{1.5}$$

вследствие чего из тождества

$$P_k \frac{\beta_k\, \varepsilon_k}{p_k} = \sum_{\nu=0}^{k} \beta_\nu\, \varepsilon_\nu - \sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu\, \Delta \frac{\beta_\nu\, \varepsilon_\nu}{p_\nu},$$

ввиду условия 3° теоремы 1 и корегулярности метода B, вытекает условие 3° теоремы 2. Так как $\left\{ \frac{P_\nu}{P_{\nu+1}} \right\}$ ограничена [3], то из тождества

$$\sum_{\nu=0}^{k} P_\nu\, \beta_{n\nu} \left(\Delta \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu = \sum_{\nu=0}^{k} c_{n\nu}\, x_\nu - \frac{P_\nu}{P_{\nu+1}} (\Delta \beta_{n\nu})\, P_{\nu+1} \frac{\varepsilon_{\nu+1}}{p_{\nu+1}} x_\nu, \tag{1.6}$$

принимая во внимание условия 3° теорем 1 и 2, а также то, что B сохраняет сходимость, мы после предельного перехода $n \to \infty$ получаем

$$\sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \| \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu\, \beta_\nu \left(\Delta \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu \| \leqslant M \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots),$$

откуда, в силу корегулярности B, вытекает необходимость условия 2° теоремы 2. Необходимость условия 1° теоремы 2 непосредственно следует из условия 1° теоремы 1.

Достаточность. Выполнение условия 1° теоремы 1, ввиду условия 1° теоремы 2, очевидно. Далее, имея в виду, что B сохраняет сходимость, из преобразования Абеля

$$\sum_{\nu=0}^{k} P_\nu\, \beta_{n\nu} \left(\Delta \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k-1} (\Delta \beta_{n\nu}) \sum_{\mu=0}^{k} P_\mu \left(\Delta \frac{\varepsilon_\mu}{p_\mu} \right) x_\mu + \beta_{nk} \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu \left(\Delta \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu,$$

в силу условия 2° теоремы 2, мы находим

$$\sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \| \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu \beta_{n\nu} \left(\Delta \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu \| \leqslant M \quad (n, k = 0, 1, \ldots).$$

Выполнение условий 2° и 3° теоремы 1 теперь следует из тождества (1.6) при помощи условия 3° теоремы 2, если принять во внимание, что B сохраняет сходимость.

§ 2. Множители суммируемости типа $(\mathfrak{P}_0, B)$

Аналогично теореме 1 при помощи леммы 2 нетрудно доказать следующую общую теорему.

Теорема 3. *Операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа $(\mathfrak{A}_0, B)$ $[(A_0, B)]$ тогда и только тогда, когда*

1° $\sum_\nu c_{n\nu} x_\nu$ *сходится равномерно при* $\|x_\nu\| \leqslant 1 \quad (n = 0, 1, \ldots)$,

2° $\lim_k \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \| \sum_\nu (c^n_{k\nu} - c_{n\nu}) x_\nu \| = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$,

3° $\lim_n \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \| \sum_\nu (c_{n\nu} - c_\nu) x_\nu \| = 0,$

где $c^n_{k\nu}$ определяется соотношениями (1.1) и (1.2), а $c_{n\nu}$ и c_ν вычисляются по формулам

$$c_{n\nu} = \lim_k c^n_{k\nu}, \quad c_\nu = \lim_n c_{n\nu}, \tag{2.1}$$

в которых предполагается существование пределов по норме.

Если $A = P$, то $c^n_{k\nu}$ и $c_{n\nu}$ даются формулами (1.4), а

$$c_\nu = P_\nu \Delta \frac{\beta_\nu \varepsilon_\nu}{p_\nu}$$

и сходимость по норме в (2.1) проверяется без труда.

Теорема 4. *Если P сохраняет сходимость и B корегулярен, то операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа $(\mathfrak{P}_0, B)$ тогда и только тогда, когда*

1° $\Sigma P_\nu \left(\Delta \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu}\right) x_\nu$ *сходится равномерно при* $\|x_\nu\| \leqslant 1$,

2° $\lim\limits_{\nu} \left\| P_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| = 0.$

Необходимость. Если операторы ε_ν — множители суммируемости типа $(\mathfrak{P}_O, B)$, то преобразование (0. 2) с $A_{n\nu} = \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu$ должно переводить каждую ограниченную последовательность в сходящуюся последовательность. Согласно лемме 2 для этого необходимо выполнение условия

$$\lim_n \| \sum_\nu (\beta_{n\nu} - \beta_\nu)\varepsilon_\nu \| = 0. \tag{2.2}$$

Кроме того, из условия 3° теоремы 3 мы получаем

$$\lim_n \| \sum_\nu (c_{n\nu} - c_\nu) \| = 0$$

или, используя тождество

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} (c_{n\nu} - c_\nu) = \sum_{\nu=0}^{k} (\beta_{n\nu} - \beta_\nu)\varepsilon_\nu - (\beta_{nk} - \beta_k) P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}$$

при $k \to \infty$ с учетом условия $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_{nk} = 0$ и условия 3° теоремы 2,

$$\lim_n \left\| \sum_\nu (\beta_{n\nu} - \beta_\nu)\varepsilon_\nu + \lim_k \beta_k P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right\| = 0. \tag{2.3}$$

Поскольку B корегулярен, то (2. 2) и (2. 3) влекут за собой условие 2° теоремы 4. Условие 1° теоремы 4 вытекает, ввиду корегулярности B, из условия 1° теоремы 3.

Достаточность. Нетрудно убедиться, что при $A = P$ и $B = E$, где E — метод сходимости (определяемый элементами $\beta_{n\nu} = 1$ при $\nu \leqslant n$, $\beta_{n\nu} = 0$ при $n > \nu$), условия 1°—3° теоремы 3 непосредственно превращаются в условия 1° и 2° теоремы 4. Так как P сохраняет сходимость, то тем самым достаточность условий 1° и 2° теоремы 4 доказана.

§ 3. Множители суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, B)$

Аналогично доказательству теоремы 1, с той лишь разницей, что метод A определяется не при помощи преобразования последовательности в последовательность, а ряда в последовательность, можно при помощи леммы 3 доказать следующую общую теорему.

Теорема 5. *Операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{A}|, B)$ $[(|A|, B)]$ тогда и только тогда, когда*

1° $\sum\limits_\nu \xi'_{\nu k}\varepsilon_\nu x$ *B-суммируем* $(x \in X;\ k = 0, 1, \ldots)$,

2° $\|c^n_{k\nu}\| \leqslant M_n \quad (k, \nu = 0, 1, \ldots)$,

3° $\|c_{n\nu}\| \leqslant M \quad (n, \nu = 0, 1, \ldots)$,

где

$$(\xi'_{n\nu}) = (\overline{\Delta} a_{n\nu})^{-1}\,[(\xi'_{n\nu}) = (\overline{\Delta} \sum_{k=\nu}^{n} a_{nk})^{-1}], \tag{3.1}$$

$$c^n_{k\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{k} \beta_{n\mu}\xi'_{\mu\nu}\varepsilon_\mu, \quad c_{n\nu}x = \lim_{k\to\infty} c^n_{k\nu}x\ (x \in X). \tag{3.2}$$

В частном случае $A = P$ из (0.1), первого варианта (3.1) и из (3.2) мы находим:

$$\xi'_{\nu\nu} = \frac{P_\nu}{p_\nu}, \quad \xi'_{n\nu} = 1 \text{ при } n > \nu, \quad \xi'_{n\nu} = 0 \text{ при } n < \nu, \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{aligned} c^n_{k\nu} &= \begin{cases} P_\nu \dfrac{\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu} + \sum\limits_{\mu=\nu+1}^{k} \beta_{n\mu}\varepsilon_\mu & \text{при } \nu < k, \\ P_k \dfrac{\beta_{nk}\varepsilon_k}{p_k} & \text{при } \nu = k, \\ 0 & \text{при } \nu > k, \end{cases} \\ c_{n\nu} &= P_\nu \frac{\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu} + \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \beta_{n\mu}\varepsilon_\mu. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Теорема 6. *Если P сохраняет абсолютную сходимость и B корегулярен, то операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, B)$ тогда и только тогда, когда*

1° $\Sigma\,\varepsilon_\nu x$ *B-суммируем* $(x \in X)$,

2° $\Sigma\,\varepsilon_\nu$ *имеет ограниченные частные суммы,*

3° $\left\| P_\nu \dfrac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| \leqslant M \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$.

Необходимость. Если операторы ε_ν — множители суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, B)$, то преобразование (0.2) с $A_{n\nu} = \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu$ должно переводить каждую абсолютно сходящуюся последова-

гельность в сходящуюся последовательность. Согласно лемме 5 для этого необходимо выполнение условия (1.5). Теперь из условия 3° теоремы 5 в силу (1.5) и корегулярности B следует условие 3° теоремы 6. Необходимость условия 2° теоремы 6 вытекает из (1.5) при $n \to \infty$, если принять во внимание корегулярность B. Необходимость условия 1° теоремы 6 непосредственно получается из условия 1° теоремы 5.

Достаточность. Выполнение условия 1° теоремы 5, ввиду условия 1° теоремы 6, очевидно. Выполнение условий 2° и 3° теоремы 5 без труда вытекает из условий 2° и 3° теоремы 6 при помощи преобразования Абеля

$$\sum_{\nu=0}^{k} \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^{k-1} (\Delta\beta_{n\nu}) \sum_{\mu=0}^{\nu} \varepsilon_\mu + \beta_{nk} \sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu .$$

§ 4. Множители суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, |B|)$

Аналогично теореме 5 при помощи лемм 3 и 4 нетрудно доказать следующую общую теорему.

Теорема 7. *Операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{A}|, |B|)$ $[(|A|, |B|)]$ тогда и только тогда, когда*

1° *существует* $\lim\limits_k c^n_{k\nu} x$ $(x \in X;\ n,\ \nu = 0,\ 1,\ \ldots)$,

2° $\|c^n_{k\nu}\| \leqslant M_n$ $(k,\ \nu = 0,\ 1,\ \ldots)$,

3° $\sum\limits_n \|\bar{\Delta} c_{n\nu} x\| \leqslant M \|x\|$ $(x \in X;\ \nu = 0,\ 1,\ \ldots)$,

где $c^n_{k\nu}$ и $c_{n\nu}$ определяются соотношениями (3.1) *и* (3.2).

В частном случае $A = P$ величины $c^n_{k\nu}$ и $c_{n\nu}$ определяются формулами (3.4).

Теорема 8. *Если P и B сохраняют абсолютную сходимость и B корегулярен, то операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, |B|)$ тогда и только тогда, когда*

1° $\sum\limits_\nu \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu x$ *сходится* $(x \in X,\ n = 0,\ 1,\ \ldots)$,

2° $\left\| P_\nu \dfrac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| \leqslant M$ $(\nu = 0,\ 1,\ \ldots)$,

3° $\sum\limits_n \left\| \sum\limits_{\nu=0}^{k} \bar{\Delta}\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu x \right\| \leqslant M \|x\|$ $(x \in X;\ k = 0,\ 1,\ \ldots)$.

Необходимость. Если операторы ε_ν — множители суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, |B|)$, то преобразование (0.2) с $A_{n\nu} = \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu$ должно переводить каждую абсолютно сходящуюся последовательность в абсолютно сходящуюся последователь-

ность. Согласно лемме 6 для этого необходимо выполнение условия 3° теоремы 8. Необходимость условия 2° теоремы 8 следует из теоремы 6, а необходимость условия 1° — из условия 1° теоремы 7.

Достаточность. Условие 1° теоремы 8 обеспечивает выполнение условия 1° теоремы 7. Выполнение условий 2° и 3° теоремы 7 без труда вытекает из условий 2° и 3° теоремы 8, если принять во внимание, что B сохраняет абсолютную сходимость.

§ 5. Множители суммируемости типа (P, B)

Применяя для нахождения абстрактных множителей суммируемости типа (P, B) второй вариант теоремы 1, из формул (1.1) и (1.2) мы находим:

$$\xi_{\nu\nu}=\frac{P_\nu}{p_\nu},\quad \xi_{\nu+1,\,\nu}=-P_\nu\left(\frac{1}{p_\nu}+\frac{1}{p_{\nu+1}}\right),\quad \xi_{\nu+2,\,\nu}=\frac{P_\nu}{p_{\nu+1}},$$

$$\xi_{n\nu}=0 \text{ при } n>\nu+2 \text{ или } n<\nu,\ \xi_0=1,\ \xi_n=0 \text{ при } n>0,$$

$$\left.{}^{n}_{k\nu}=\begin{cases} P_\nu\,\Delta\dfrac{\Delta(\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu)}{p_\nu} & \text{при } \nu<k-1,\\[2ex] P_{k-1}\,\Delta\dfrac{\Delta(\beta_{n,\,k-1}\varepsilon_{k-1})}{p_{k-1}}-\beta_{n,\,k+1}P_{k-1}\dfrac{\varepsilon_{k+1}}{p_k} & \text{при } \nu=k-1,\\[2ex] P_k\dfrac{\beta_{nk}\varepsilon_k}{p_k} & \text{при } \nu=k,\\[2ex] 0 & \text{при } \nu>k, \end{cases}\right\}\quad (5.1)$$

$$\left.{}'_{n\nu}=P_\nu\,\Delta\dfrac{\Delta(\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu)}{p_\nu}.\right\}$$

Теорема 9. *Если P сохраняет сходимость и B регулярен, то операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа (P, B) тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ\quad \sup_{\|x_\nu\|\leqslant 1}\Big\|\sum_{\nu=0}^{k}P_\nu\left(\Delta\frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu}\right)x_\nu\Big\|\leqslant M\quad (k=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$2^\circ\quad \left\|P_\nu\frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu}\right\|\leqslant M\quad (\nu=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$3^\circ\quad \left\|P_\nu\frac{\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu}\right\|\leqslant M_n\quad (\nu=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$4^\circ\quad \sup_{\|x_\nu\|\leqslant 1}\Big\|\sum_{\nu=0}^{k}P_\nu\left(\Delta\frac{\Delta\beta_{n\nu}}{p_\nu}\right)\varepsilon_{\nu+1}x_\nu\Big\|\leqslant M\quad (n,\ k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Необходимость. Условие 1° теоремы 9 вытекает, в силу регулярности B, из условия 3° теоремы 1 при $n \to \infty$. Если операторы ε_ν — множители суммируемости типа (P, B), то преобразование (0.2) с $A_{n\nu} = \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu$ должно переводить каждую последовательность $\{x_\nu\}$ со сходящимися суммами $\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu$ в сходящуюся последовательность. Из условия леммы 7 теперь при $n \to \infty$ получаем

$$\| \sum_{\nu=0}^{k} \Delta\varepsilon_\nu \| \leqslant M \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

вследствие чего из тождества

$$P_k \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k} = \sum_{\nu=0}^{k} \Delta\varepsilon_\nu - \sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu \Delta \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu},$$

ввиду условия 1° теоремы 9, следует условие 2° теоремы 9. Необходимость условия 3° теоремы 9 непосредственно получается из условия 2° теоремы 1, а необходимость условия 4° — из условия 3° теоремы 1 на основании тождества

$$c_{n\nu} = (\Delta\beta_{n\nu} + \Delta\beta_{n,\nu+1}) P_\nu \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu} + \beta_{n,\nu+2} P_\nu \Delta \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu} + \\ + P_\nu \left(\Delta \frac{\Delta\beta_{n\nu}}{p_\nu} \right) \varepsilon_{\nu+1}, \tag{5.2}$$

если иметь в виду условия 1° и 2° теоремы 9, а также то, что B сохраняет сходимость.

Достаточность. Из тождества (5.2), в силу условий 1°, 2° и 4° теоремы 9 и того, что B сохраняет сходимость, вытекает условие 3° теоремы 1. Так как

$$c^n_{k,k-1} = c_{n,k-1} - c^n_{kk} + P_k \frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k} + \beta_{n,k+1}\varepsilon_{k+1}, \tag{5.3}$$

то, в силу тождества

$$P_k \frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k} = \beta_{n0}\varepsilon_0 - \beta_{n,k+1}\varepsilon_{k+1} - \sum_{\nu=0}^{k-1} c_{n\nu}, \tag{5.4}$$

мы имеем

$$c^n_{k,k-1} = \beta_{n0}\varepsilon_0 - c^n_{kk} - \sum_{\nu=0}^{k-2} c_{n\nu}. \tag{5.5}$$

Следовательно, условие 2° теоремы 1, ввиду условий 3° теорем 1 и 9 и того, что B сохраняет сходимость, выполнено. Условие 1 теоремы 1 автоматически выполнено.

§ 6. Множители суммируемости типа (P_0, B)

Для нахождения абстрактных множителей суммируемости типа (P_0, B) применяем второй вариант теоремы 3. Тогда величины $c_{k\nu}^n$ и $c_{n\nu}$ вычисляются по формулам (5.1), а

$$c_\nu = P_\nu \Delta \frac{\Delta \varepsilon_\nu}{p_\nu},$$

и сходимость по норме в (2.1) устанавливается без труда.

Теорема 10. *Если P сохраняет сходимость и B регулярен, то операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа (P_0, B) тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ\ \Sigma P_\nu \left(\Delta \frac{\Delta \varepsilon_\nu}{p_\nu}\right) x_\nu \text{ сходится равномерно при } \|x_\nu\| \leqslant 1,$$

$$2^\circ\ \lim_\nu \left\| P_\nu \frac{\Delta \varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| = 0,$$

$$3^\circ\ \lim_\nu \left\| P_\nu \frac{\beta_{n\nu} \varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$4^\circ\ \lim_\nu \left\| P_\nu (\Delta \beta_{n\nu}) \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$5^\circ\ \lim_n \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \Sigma_\nu P_\nu \left(\Delta \frac{\Delta \beta_{n\nu}}{p_\nu}\right) \varepsilon_{\nu+1} x_\nu \right\| = 0.$$

Необходимость. Необходимость условия 1° теоремы 10 вытекает из условий 1° и 3° теоремы 3. Если операторы ε_ν — множители суммируемости типа (P_0, B), то преобразование (0.2) с $A_{n\nu} = \beta_{n\nu} \varepsilon_\nu$ должно переводить каждую последовательность $\{x_\nu\}$ с ограниченными суммами $\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu$ в сходящуюся последовательность. Согласно лемме 8 для этого необходимо выполнение условия

$$\lim_n \left\| \Sigma_\nu \Delta (\beta_{n\nu} \varepsilon_\nu - \varepsilon_\nu) \right\| = 0,$$

откуда, в силу соотношения $\lim_k \beta_{nk} = 0$, получается

$$\lim_\nu \|\varepsilon_\nu\| = 0. \tag{6.1}$$

Далее, из (5.5) при $k \to \infty$ и из (5.4) при $n \to \infty$, $k \to \infty$, на основании (6.1) и условий 2° и 3° теоремы 3, мы находим

$$\sum_\nu c_{n\nu} = \beta_{n0}\varepsilon_0,\ \sum c_\nu = \varepsilon_0 - \lim_k P_k \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k},$$

вследствие чего из условия 3° теоремы 3 следует условие 2° теоремы 10. Условия 3° и 4° теоремы 10 вытекают из условия 2° теоремы 3, если учесть соотношения (5. 3), (6. 1) и условие 2° теоремы 10. Наконец, необходимость условия 5° теоремы 10 получается из (вытекающего из (5. 2)) неравенства

$$\left\| \sum_\nu P_\nu \left(\Delta \frac{\Delta\beta_{n\nu}}{p_\nu} \right) \varepsilon_{\nu+1} x_\nu \right\| \leqslant \left\| \sum_\nu (c_{n\nu} - c_\nu) x_\nu \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_\nu (\Delta\beta_{n\nu} + \Delta\beta_{n,\nu+1}) P_\nu \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu} x_\nu \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_\nu (\beta_{n,\nu+2} - 1) P_\nu \left(\Delta \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu \right\|,$$

если принять во внимание условие 3° теоремы 3, условия 1° и 4° теоремы 10 и регулярность метода B.

Достаточность. Выполнение условия 3° теоремы 3 следует из (вытекающего из (5. 2)) неравенства

$$\left\| \sum_\nu (c_{n\nu} - c_\nu) x_\nu \right\| \leqslant \left\| \sum_\nu P_\nu \left(\Delta \frac{\Delta\beta_{n\nu}}{p_\nu} \right) \varepsilon_{\nu+1} x_\nu \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_\nu (\Delta\beta_{n\nu} + \Delta\beta_{n,\nu+1}) P_\nu \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu} x_\nu \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_\nu (\beta_{n,\nu+2} - 1) P_\nu \left(\Delta \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu \right\|,$$

если иметь в виду условия 1°, 2°, 5° теоремы 10 и регулярность метода B. Выполнение условия 2° теоремы 3 обеспечивается условиями 2°—4° теоремы 10, соотношением (5. 3) и условием 1° теоремы 3, причем выполнение условия 1° теоремы 3 получается из (5. 2) на основании условий 1°, 2°, 5° теоремы 10 и того, что B регулярен.

§ 7. Множители суммируемости типа ($|P|$, B)

Применяя для нахождения абстрактных множителей суммируемости типа ($|P|$, B) второй вариант теоремы 5, из формул (3. 1) и (3. 2) мы получаем:

$$\xi'_{\nu\nu} = \frac{P_\nu}{p_\nu},\quad \xi'_{\nu+1,\nu} = -\frac{P_{\nu-1}}{p_\nu},\quad \xi'_{n\nu} = 0 \text{ при } n > \nu+1 \text{ или } n < \nu,$$

$$c_{kv}^{n} = \begin{cases} P_v \dfrac{\Delta(\beta_{nv}\varepsilon_v)}{p_v} + \beta_{n,v+1}\varepsilon_{v+1} & \text{при } v < k, \\ P_k \dfrac{\beta_{nk}\varepsilon_k}{p_k} & \text{при } v = k, \\ 0 & \text{при } v > k, \end{cases} \qquad (7.1)$$

$$c_{nv} = P_v \frac{\Delta(\beta_{nv}\varepsilon_v)}{p_v} + \beta_{n,v+1}\varepsilon_{v+1}.$$

Теорема 11. *Если P сохраняет абсолютную сходимость и B регулярен, то операторы ε_v являются множителями суммируемости типа $(|P|, B)$ тогда и только тогда, когда*

1° $\|\varepsilon_v\| \leqslant M \quad (v = 0, 1, \ldots)$,

2° $\left\|P_v \dfrac{\Delta\varepsilon_v}{p_v}\right\| \leqslant M \quad (v = 0, 1, \ldots)$,

3° $\left\|P_v \dfrac{\beta_{nv}\varepsilon_v}{p_v}\right\| \leqslant M_n \quad (v = 0, 1, \ldots)$,

4° $\left\|P_v (\Delta\beta_{nv}) \dfrac{\varepsilon_v}{p_v}\right\| \leqslant M \quad (n, v = 0, 1, \ldots)$.

Необходимость. Если операторы ε_v — множители суммируемости типа $(|P|, B)$, то преобразование (0.2) с $A_{nv} = \beta_{nv}\varepsilon_v$ должно переводить каждую последовательность $\{x_v\}$ с $\sum \|x_v\| < \infty$ в сходящуюся последовательность. Условие 1° теоремы 11 получается теперь из условия 2° леммы 3 при $n \to \infty$. Условие 2° теоремы 11 вытекает тогда из условия 3° теоремы 5 при $n \to \infty$, условие 3° теоремы 11 из условия 2° теоремы 5, а условие 4° — из соотношения

$$P_v(\Delta\beta_{nv})\frac{\varepsilon_v}{p_v} = c_{nv} - \beta_{n,v+1}P_v\frac{\Delta\varepsilon_v}{p_v} - \beta_{n,v+1}\varepsilon_{v+1}, \qquad (7.2)$$

ввиду условия 3° теоремы 5, условий 1° и 2° теоремы 1 и того, что B сохраняет сходимость.

Достаточность. Из соотношения (7.2), в силу условий 1°, 2° и 4° теоремы 11 и того, что B сохраняет сходимость, следует условие 3° теоремы 5. Условие 2° теоремы 5 получается из условий 3° теоремы 5 и 11, а условие 1° теоремы 5 выполняется автоматически.

§ 8. Множители суммируемости типа $(|P|, |B|)$

Для нахождения абстрактных множителей суммируемости типа $(|P|, |B|)$ применяем второй вариант теоремы 7. Тогда величины $c_{k\nu}^{n}$ и $c_{n\nu}$ определяются формулами (7.1).

Теорема 12. *Если P и B сохраняют абсолютную сходимость и B регулярен, то операторы ε_ν являются множителями суммируемости типа $(|P|, |B|)$ тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad \|\varepsilon_\nu\| \leqslant M \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \quad \left\| P_\nu \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| \leqslant M \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

$$3^\circ \quad \left\| P_\nu \frac{\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| \leqslant M_n \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

$$4^\circ \quad \left\| P_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| \sum_n |\overline{\Delta}(\Delta\beta_{n\nu})| \leqslant M \quad (\nu = 0, 1, \ldots).$$

Необходимость. Необходимость условий 1°—3° следует из теоремы 11. Необходимость условия 4° вытекает из условия 3° теоремы 7 на основании формулы (7.2), если иметь в виду условия 1°, 2° теоремы 12 и то, что B сохраняет абсолютную сходимость.

Достаточность. Из формулы (7.2) следует выполнение условия 3° теоремы 7, если принять во внимание условия 1°, 2° и 4° теоремы 12 и то, что B сохраняет абсолютную сходимость. Выполнение условий 1° и 2° теоремы 7 вытекает из теоремы 11.

Литература

1. Божоров Е., Равномерно $(\overline{R}, p_n)$-сумирае. Годишник Хим. Технол. ин-т, 1955, **2**, 113—122.
2. Кангро Г. Ф., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
3. Кангро Г. Ф., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, 1956, **5**, 108—128.
4. Hahn, H., Über Folgen linearer Operationen. Monatsh. Math. und Phys., 1922, **32**, 3—88.
5. Jurkat, W., Über Konvergenzfaktoren bei Rieszschen Mitteln. Math. Z., 1951, **54**, 262—271.
6. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 1952, **55**, 92—108.
7. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1953, **58**, 186—203.
8. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1952, **55**, 23—54.

9. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 1953, **57**, 256—290.
10. Sunouchi, G., Absolute summability of series with constant terms. Tohoku Math. J., 1949, **1**, 57—65.
11. Zeller, K., Verallgemeinerte Matrixtransformationen. Math. Z., 1952, **56**, 18—20.

Поступило
21 V 1960

ABSTRAKTSETEST SUMMEERUVUSTEGURITEST RIESZI KAALUTUD KESKMISTE MENETLUSE PUHUL

G. Kangro ja F. Vichmann
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Töös [3] uuriti kaheksat tüüpi summeeruvustegureid Rieszi kaalutud keskmiste menetluste jaoks. Käesolevas töös on need uurimused üldistatud juhule, kus summeeruvustegurid kujutavad pidevaid lineaarseid operaatoreid ühest Banachi ruumist teise. Absoluutse summeeruvuse puhul on sealjuures väikese muudatuse teel tõestusmeetodis saadud lihtsustada mõnede teoreemide tingimusi töös [3].

ÜBER DIE ABSTRAKTEN SUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR DAS VERFAHREN DER BEWICHTETEN MITTEL VON RIESZ

G. Kangro und F. Vichmann

Zusammenfassung

In [3] wurden acht Typen von Summierbarkeitsfaktoren für das Verfahren der bewichteten Mittel von Riesz untersucht. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen auf den Fall, wo die Summierbarkeitsfaktoren stetige lineare Operatoren zwischen zwei Banachschen Räume darstellen, verallgemeinert. Für den Fall der absoluten Summierbarkeit wird dabei durch leichte Änderung der Beweismethode gewisse Vereinfachung der Bedingungen einiger Sätze von [3] erreicht.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ

Ф. Вихманн
Кафедра математического анализа

Пусть A, B и C — произвольные матричные методы суммирования. Мы называем комплексные числа ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|, C)$ $[(|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}, C)]$, если ряд[1] $\Sigma\varepsilon_\nu X_\nu Y_\nu$ является C-суммируемым при всех $|A|$-суммируемых последовательностях $\{X_\nu\}$ и $|B|$-суммируемых (B-суммируемых) последовательностях $\{Y_\nu\}$, и множителями суммируемости типа $(|A|, |B|, C)$ $((|A|, B, C))$, если ряд $\Sigma\varepsilon_\nu x_\nu y_\nu$ является C-суммируемым при всех $|A|$-суммируемых рядах Σx_ν и $|B|$-суммируемых (B-суммируемых) рядах Σy_ν.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы комплексные числа ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ были обобщенными множителями суммируемости вышеуказанных типов при произвольных методах A, B и C. Эти результаты применяются в случае, когда методы A и B — метод Рисса с разрывным параметром порядка 1 или метод Чезаро. В работе обобщается метод Пейеримхоффа, разработанный в статьях [6] и [7] для простых множителей суммируемости, для обобщенных множителей суммируемости. При конкретных методах A и B оказывается полезным соединить метод Пейеримхоффа с методом Шура (например, [1] для метода взвешенных средних Рисса).

§ 1. Некоторые вспомогательные понятия и леммы

Лемма 1 (Кожима — Шур). *Метод $A = (a_{n\nu})$ преобразует каждую сходящуюся последовательность в сходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда*

[1] Если пределы суммирования не указаны, то индекс суммирования пробегает все значения 0, 1, 2, ... Символ $\lim$ означает $\lim_{n \to \infty}$.

1° *существует* $\lim\limits_{n} a_{n\nu} = a_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$,

2° *существует* $\lim\limits_{n} \sum\limits_{\nu} a_{n\nu} = a$,

3° $\sum\limits_{\nu} |a_{n\nu}| \leqslant M \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Если $a_\nu = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *и* $a \neq 1$, *то метод* A *регулярен.*

Лемма 2 (Мэарс). *Метод* $A = (a_{n\nu})$ *преобразует каждую абсолютно сходящуюся последовательность в абсолютно сходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда*[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \overline{\Delta} \sum_{\nu=\varrho}^{\infty} a_{n\nu} \Big| \leqslant M \quad (\varrho = 0, 1, \ldots).$$

Лемма 3 (Хан). *Метод* $A = (a_{n\nu})$ *преобразует каждую абсолютно сходящуюся последовательность в сходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда*

1° *существует* $\lim\limits_{\nu} a_{n\nu} = a_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$,

2° $\Big| \sum\limits_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \Big| \leqslant M \quad (k, n = 0, 1, \ldots)$.

Лемма 4 (Хан). *Метод* $A = (a_{n\nu})$ *преобразует каждый сходящийся ряд в сходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда*

1° *существует* $\lim\limits_{n} a_{n\nu} = a_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$,

2° $\sum\limits_{\nu} |\Delta a_{n\nu}| \leqslant M \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Если $a_\nu = 1$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, *то метод* A *регулярен.*

Рассматриваем билинейное преобразование

$$w_n = \sum_{\nu, \mu} a_{n\nu\mu} u_\nu v_\mu. \tag{1.1}$$

Методом, развитым И. Куллем в статье [2], для этого преобразования можно доказать следующие три леммы.

Лемма 5. *Билинейное преобразование* (1.1) *преобразует все абсолютно сходящиеся ряды* $\sum u_\nu$ *и* $\sum v_\mu$ *в сходящуюся последовательность* $\{w_n\}$ *тогда и только тогда, когда*

---

[2] Разность $\overline{\Delta} a_{n\nu}$ дается равенством $\overline{\Delta} a_{n\nu} = a_{n\nu} - a_{n-1,\nu}$ и разность $\Delta a_{n\nu}$ равенством $\Delta a_{n\nu} = a_{n\nu} - a_{n,\nu+1}$. При наличии двух индексов разность $\overline{\Delta}$ в настоящей статье всегда берется по первому индексу, а разность Δ — по второму индексу.

1° *существует* $\lim\limits_{n} a_{n\nu\mu} = a_{\nu\mu}$ $(\nu,\ \mu = 0,\ 1,\ \ldots)$,

2° $|a_{n\nu\mu}| \leqslant M$ $(n,\ \nu,\ \mu = 0,\ 1,\ \ldots)$.

При выполнении условий 1° *и* 2° *справедливо равенство*

$$\lim_{n} \sum_{\nu,\mu} a_{n\nu\mu} u_\nu v_\mu = \sum_{\nu,\mu} a_{\nu\mu} u_\nu v_\mu .$$

Лемма 6. *Билинейное преобразование* (1.1) *преобразует все абсолютно сходящиеся ряды* Σu_ν *и* Σv_μ *в ограниченную последовательность* $\{w_n\}$ *тогда и только тогда, когда*

$$|a_{n\nu\mu}| \leqslant M \quad (n,\ \nu,\ \mu = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Лемма 7. *Билинейное преобразование* (1.1) *преобразует каждый абсолютно сходящийся ряд* Σu_ν *и каждую сходящуюся последовательность* $\{v_\mu\}$ *в сходящуюся последовательность* $\{w_n\}$ *тогда и только тогда, когда*

1° *существует* $\lim\limits_{n} a_{n\nu\mu} = a_{\nu\mu}$ $(\nu,\ \mu = 0,\ 1,\ \ldots)$,

2° *существует* $\lim\limits_{n} \sum\limits_{\mu} a_{n\nu\mu} = a_\nu$ $(\nu = 0,\ 1,\ \ldots)$,

3° $\sum\limits_{\mu} |a_{n\nu\mu}| \leqslant M$ $(n,\ \nu = 0,\ 1,\ \ldots)$.

В дальнейшем будем обозначать множество всех A-суммируемых и $|A|$-суммируемых последовательностей $x = \{X_\nu\}$ соответственно через A^* и $|A|^*$. Как известно, [8], поля суммирования A^* и $|A|^*$ для реверсивного метода A суть пространства типа BK (пространство Банаха со сходимостью по координатам). Мы будем говорить, что в поле нулевого суммирования A_0^* (абсолютного нулевого суммирования $|A|_0^*$) имеет место сходимость по отрезкам, если отрезки $x^{(n)} = \{X_0,\ X_1,\ \ldots\ X_n,\ 0,\ \ldots\}$ сходятся к элементу $x = \{X_i\} \in A_0^*$ $(x = \{X_i\} \in |A|_0^*)$ по норме.

Лемма 8 (Целлер [9]). *В пространстве* $A_0^* \supset N$, *где* N — *множество всех последовательностей с конечным числом ненулевых членов, имеет место сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда*

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} X_\nu\Big| \leqslant M \quad (k,\ n = 0,\ 1,\ \ldots\ ;\ \{X_\nu\} \in A_0^*), \qquad (1.2)$$

где постоянная M *зависит от* x.

Лемма 9 (Юркат — Пейеримхофф [4]). *Условие* (1.2) *вы-*

полнено, если $a_{nv} \neq 0$ $(n, v = 0, 1, \ldots)$, $0 \leqslant -\frac{a_{mv}}{a_{nv}} \leqslant K$ $(0 \leqslant v \leqslant$

$\leqslant n \leqslant m)$ *и* $\frac{a_{m,\,v-1}}{a_{n,\,v-1}} \geqslant \frac{a_{mv}}{a_{nv}}$ $(1 \leqslant v \leqslant n \leqslant m)$.

Лемма 10 (Юркат — Пейеримхофф [4]). *Если в поле нулевого суммирования* A_0^* *нормального метода* A *имеет место сходимость по отрезкам, то для всех* $x = \{X_n\} \in A_0$ *выполняется*

$$a_{nn}X_n = o(1) \quad (n \to \infty).$$

Это условие точное в том смысле, что не найдется ни одной последовательности $\{\lambda_n\}$ $[\lim \lambda_n = \infty, \lambda_n > 0$ $(n = 0, 1, \ldots)]$, что $\lambda_n a_{nn} X_n = o(1)$ $(n \to \infty)$ для всех $x = \{X_n\} \in A_0^*$.

Мы называем нормальный метод суммирования $A = (a_{nv})$ в виде преобразования последовательностей в последовательности *абсолютно совершенным*, если он преобразует последовательности[3] $x_n = \{\delta_{nv}\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ в последовательности, абсолютно сходящиеся к нулю, и если для каждого $x \in |A|_0^*$ и $\varepsilon > 0$ найдется отрезок $q = \{Q_v\}$ $(Q_v = 0$ при $v > v_0)$, что

$$\Sigma\, |\overline{\Delta}\sigma_n(x - q)| < \varepsilon,$$

где

$$\sigma_n(x - q) = \sum_{v=0}^{n} a_{nv}(X_v - Q_v).$$

Лемма 11 (Пейеримхофф [7]). *Нормальный абсолютно регулярный метод* A *заведомо абсолютно совершенен, если*

$$\sum_{n=v}^{\infty} |a'_{nv}| < \infty \quad (v = 0, 1, \ldots),$$

где (a'_{nv}) — *матрица, обратная для матрицы* (a_{nv}).

Лемма 12 (Реймерс [3]). *В поле абсолютного нулевого суммирования* $|A|_0^*$ *нормального абсолютно совершенного метода* A *имеет место сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \Big| \sum_{v=0}^{k} a_{nv}X_v - \sum_{v=0}^{k} a_{n-1,\,v}X_v \Big| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots ;\ x \in |A|_0^*), \quad (1.3)$$

где постоянная M *зависит от* x.

Лемма 13 (Пейеримхофф [7]). *Если* $a_{nv} \geqslant 0$ $(v \leqslant n = 0, 1, \ldots)$, $a_{nv} - a_{n-1,\,v} \leqslant 0 (v < n)$ *и* $\lim\limits_{n} a_{nv} = 0$ $(v = 0, 1, \ldots)$, *то условие* (1.3) *выполнено.*

---

[3] Символ Кронекера $\delta_{nv} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = v, \\ 0 & \text{при } n \neq v. \end{cases}$

Лемма 14. *Если в поле абсолютного нулевого суммирования* $|A|_0^*$ *нормального метода* A *имеет место сходимость по отрезкам, то для всех* $x = \{X_n\} \in |A|_0^*$ *выполняется точное условие*

$$X_n a_{nn} = o(1) \quad (n \to \infty).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5 из [2].

Пусть дан взаимно-однозначный непрерывный линейный оператор A, преобразующий линейное пространство X в банахово пространство X'. Если в пространстве X определить норму $\|x\| = \|x'\|$, где $x = A^{-1}x'$, то тем самым пространство X становится банаховым пространством.

Пусть дан еще второй взаимно-однозначный непрерывный линейный оператор B, преобразующий линейное пространство Y в банахово пространство Y'. Образуем топологическое произведение $X \times Y$ пространств X и Y. Очевидно, что $X \times Y$ — банахово пространство с нормой $\|(x, y)\| = \|x'\| + \|y'\|$, где $x = A^{-1}x'$ и $y = B^{-1}y'$. Рассматриваем в пространстве $X \times Y$ непрерывный билинейный функционал $f(x, y)$.

Лемма 15. *Пусть* $A \in (X \to X')$ и $B \in (Y \to Y')$ — *взаимно-однозначные непрерывные линейные операторы, причем пространства* X' и Y' — *банаховы пространства. Пусть* $f(x, y)$ — *произвольный непрерывный билинейный функционал в* $X \times Y$. *Тогда* $g(x', y') = f(A^{-1}x', B^{-1}y')$ *есть общий вид непрерывного билинейного функционала в* $X' \times Y'$.

Доказательство. Функционал $g(x', y')$ билинеен; непрерывность его следует из неравенства

$$|g(x', y')| \leqslant \|f\| \, \|A^{-1}x'\| \, \|B^{-1}y'\| = \|f\| \, \|x'\| \, \|y'\|.$$

С другой стороны, пусть $g^*(x', y')$ — произвольный непрерывный билинейный функционал в $X' \times Y'$. Тогда

$$|g^*(Ax, By)| \leqslant \|g\| \, \|Ax\| \, \|By\| = \|g\| \, \|x\| \, \|y\|.$$

Так как билинейность $g^*(Ax, By)$ относительно $X \times Y$ очевидна, то $g^*(Ax, By)$ — непрерывный билинейный функционал $\overline{f}(x, y)$ в $X \times Y$. Отсюда $g^*(x', y') = \overline{f}(A^{-1}x', B^{-1}y')$. При помощи леммы 15 можно дать общий вид непрерывного билинейного функционала в $X \times Y$, если известен общий вид непрерывного билинейного функционала в $X' \times Y'$.

Лемма 16. *Каждый непрерывный билинейный функционал* $f(x, y)$ *в пространстве* $l \times l$ *представим в виде*

$$f(x, y) = \sum_{i, k} c_{ik} x_i y_k, \text{ где } |c_{ik}| \leqslant M \ (i, k = 0, 1, \ldots) \text{ и } \Sigma x_i \in l, \ \Sigma y_k \in l.$$

Доказательство. Пусть $\Sigma x_i \in l$, $\Sigma y_k \in l$ и $e_k = \{\delta_{kv}\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Так как $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$, то (x, y) —

$-\lim_n (\sum_{i=0}^{n} x_i e_i, \sum_{k=0}^{n} y_k e_k) = 0$. Если теперь $f(x, y)$ — произвольный непрерывный билинейный функционал в $l \times l$, то

$$f(x, y) = \sum_{i,k} f(e_i, e_k) x_i y_k.$$

Применяя здесь лемму 5, получаем $|c_{ik}| = |f(e_i, e_k)| \leqslant M$ $(i, k = 0, 1, \ldots)$. С другой стороны, выражение $\varphi(x, y) = \sum_{i,k} c_{ik} x_i y_k$ с произвольными коэффициентами $c_{ik}[|c_{ik}| \leqslant M$ $(i, k = 0, 1, \ldots)]$ есть непрерывный билинейный функционал, так как оно билинейно и $|\varphi(x, y)| \leqslant M \|x\| \|y\|$.

Лемма 17. *Каждый непрерывный билинейный функционал $f(x, y)$ в пространстве $l \times c$ представим в виде*

$$f(x, y) = \beta \sum_i c_i x_i + \sum_{i,k} c_{ik} x_i (y_k - \beta),$$

где $|c_i| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$, $\sum_k |c_{ik}| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$, $\sum x_i \in l$, $\{y_k\} \in c$ *и* $\lim_k y_k = \beta$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 16 (используется лемма 7).

Принимая за пространства X и Y поля суммирования $|A|^*$ и $|B|^*$ ($|A|^*$ и B^*), получаем следующие леммы.

Лемма 18. *Каждый непрерывный билинейный функционал $f(x, y)$ в пространстве $|A|^* \times |B|^*$ представим в виде*

$$f(x, y) = \sum_{i,k} c_{ik} (\sum_\nu \bar{a}_{i\nu} X_\nu)(\sum_\mu \bar{b}_{k\mu} Y_\mu), \text{ где } |c_{ik}| \leqslant M \ (i, k = 0, 1, \ldots),$$

$$x = \{X_\nu\} \in |A|^* \text{ и } y = \{Y_\mu\} \in |B|^*.$$

Здесь методы суммирования A и B представлены в виде преобразований последовательностей в ряды.

Лемма 19. *Каждый непрерывный билинейный функционал $f(x, y)$ в пространстве $|A|^* \times B^*$ представим в виде*

$$f(x, y) = \sum_{i,k} c_{ik} (\sum_\nu \bar{a}_{i\nu} X_\nu)(\sum_\mu b_{k\mu} Y_\mu - \lim_l \sum_\mu b_{l\mu} Y_\mu) +$$

$$+ (\lim_l \sum_\mu b_{l\mu} Y_\mu) \sum_i c_i \sum_\nu \bar{a}_{i\nu} X_\nu,$$

где $|c_i| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$, $\sum_k |c_{ik}| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$, $x = \{X_\nu\} \in |A|^*$ *и* $y = \{Y_\nu\} \in B^*$.

Здесь метод суммирования A представлен в виде преобразования последовательностей в ряды, а метод суммирования B — в виде преобразования последовательностей в последовательности.

§ 2. Обобщенные множители суммируемости при произвольных методах A и B

Теорема 1. *Пусть* $A = (\bar{a}_{n\nu})$ *и* $B = (\bar{b}_{n\nu})$ *— произвольные реверсивные методы суммирования в виде преобразований последовательностей в ряды, для которых* $\sum\limits_n \sum\limits_\nu \bar{a}_{n\nu} = \bar{a} \neq 0$ *и* $\sum\limits_n \sum\limits_\nu \bar{b}_{n\nu} = \bar{b} \neq 0$; $e_k = \{\delta_{k\nu}\} \in |A|_0^*$, $|B|_0^*$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *и* $e = \{\delta_{\nu\nu}\} \in |A|^*$, $|B|^*$; *в полях абсолютного нулевого суммирования* $|A|_0^*$ *и* $|B|_0^*$ *имеет место сходимость по отрезкам и* $C = (\gamma_{n\nu})$ *— произвольный регулярный метод суммирования в виде преобразования рядов в последовательности. Комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|, C)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *найдутся комплексные числа* c_{ik} $(i, k = 0, 1, \ldots)$, *что*

$$\sum_{i,k} c_{ik} \bar{a}_{i\nu} \bar{b}_{k\mu} = \begin{cases} \varepsilon_\nu & \text{при } \nu = \mu, \\ 0 & \text{при } \nu \neq \mu \ (\nu, \mu = 0, 1, \ldots), \end{cases}$$

$$\sum_{i,k} c_{ik} \Big(\sum_s \bar{a}_{is} \Big) \bar{b}_{k\nu} = \varepsilon_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

$$\sum_{i,k} c_{ik} \bar{a}_{i\nu} \Big(\sum_s \bar{b}_{ks} \Big) = \varepsilon_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

где $|c_{ik}| \leqslant M$ $(i, k = 0, 1, \ldots)$,

2° *ряд* $\Sigma \varepsilon_\nu$ C*-суммируем.*

Доказательство. Если ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ суть множители суммируемости типа $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|, C)$, то при всех последовательностях $x = \{X_\nu\} \in |A|^*$ и $y = \{Y_\nu\} \in |B|^*$ существует $\lim\limits_n \sum\limits_\nu \gamma_{n\nu} \varepsilon_\nu X_\nu Y_\nu$. Так как X_ν и Y_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ — непрерывные линейные функционалы соответственно в $|A|^*$ и $|B|^*$, то вышеприведенный предел есть непрерывный билинейный функционал[4] $f(x, y)$ в $|A|^* \times |B|^*$:

$$\lim_n \sum_\nu \gamma_{n\nu} \varepsilon_\nu X_\nu Y_\nu = f(x, y).$$

При $x = \{\delta_{k\nu}\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ $x = \{\delta_{\nu\nu}\}$, $y = \{\delta_{l\nu}\}$ $(l = 0, 1, \ldots)$

[4] Так как предельный функционал сходящейся последовательности непрерывных билинейных функционалов есть функционал непрерывный и билинейный.

и $y=\{\delta_{\nu\nu}\}$ из этого равенства получаем:

$$\left.\begin{aligned} f(e_k, e_l) &= \begin{cases} \varepsilon_k & \text{при } k=l, \\ 0 & \text{при } k\neq l \end{cases} \quad (k, l=0, 1, \ldots), \\ f(e_k, e) &= \varepsilon_k \quad (k=0, 1, \ldots), \\ f(e, e_l) &= \varepsilon_l \quad (l=0, 1, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Если выполнено (2.1), то

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu X_\nu Y_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} f(e_\nu, e_\nu) X_\nu Y_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} f(X_\nu e_\nu, Y_\nu e_\nu) =$$

$$= f\Big(\sum_{\nu=0}^{n} X_\nu e_\nu, \sum_{\nu=0}^{n} Y_\nu e_\nu\Big) = f(x, y),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu X_\nu = f(x, e) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu Y_\nu = f(e, y).$$

Если теперь в $|A|_0^*$ и $|B|_0^*$ имеет место сходимость по отрезкам, то $\lim\limits_n f(x, y) = f(x, y)$, $\lim\limits_n f(x, e) = f(x, e)$ и $\lim\limits_n f(e, y) = f(e, y)$, и ряды $\sum\limits_\nu \varepsilon_\nu X_\nu Y_\nu$, $\sum\limits_\nu \varepsilon_\nu X_\nu$ и $\sum\limits_\nu \varepsilon_\nu Y_\nu$ сходятся при всех $x \in |A|_0^*$ и $y \in |B|_0^*$.

Пусть теперь $x \in |A|^*$ и $y \in |B|^*$ таковы, что $\sum\limits_n \sum\limits_\nu \bar{a}_{n\nu} X_\nu = \alpha\bar{a}$ и $\sum\limits_n \sum\limits_\nu \bar{b}_{n\nu} Y_\nu = \beta\bar{b}$, где $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Тогда

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu X_\nu Y_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu (X_\nu - \alpha)(Y_\nu - \beta) + \beta \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu (X_\nu - \alpha) +$$

$$+ \alpha \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu (Y_\nu - \beta) - \alpha\beta \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu.$$

Отсюда видно, что для C-суммируемости ряда $\sum \varepsilon_\nu Y_\nu X_\nu$ при всех $x \in |A|^*$ и $y \in |B|^*$ необходимы и достаточны C-суммируемость ряда $\sum \varepsilon_\nu$ и выполнение условия (2.1). Используя общий вид непрерывного билинейного функционала в $|A|^* \times |B|^*$, найденный в лемме 18, находим, что (2.1) и есть условие 1°.

Примечание. При применении теоремы 1 для конкретных методов нахождение величин c_{ik} иногда весьма трудно. Легче найти их методом Шура, который использует элементы матриц,

обратных для A и B, и который дает для c_{ik} следующее выражение: [5]

$$c_{ik} = \lim_n \sum_\nu \gamma_{n\nu}\, \varepsilon_\nu\, \xi_{\nu i}'\, \eta_{\nu k} \quad (i, k = 0, 1, \ldots), \text{ где } x_n' = \sum_i \bar{a}_{ni} X_i,$$

$$y_n = \sum_i \bar{b}_{ni} Y_i, \quad X_n = \sum_i \xi_{ni}'\, x_i', \quad Y_n = \sum_i \eta_{ni}'\, y_i' \quad (n = 0, 1, \ldots). \quad (2.2)$$

Здесь, как и в теореме 3, величины c_{ik}, найденные непосредственно из условия 1°, могут отличаться от найденных методом Шура только на константу, одинаковую для всех c_{ik} $(i, k = 0, 1, \ldots)$.

Так как при методе Шура величины c_{ik} удовлетворяют еще некоторым дополнительным условиям, то всегда нужна проверка условия 1° найденными методом Шура величинами c_{ik}, которая и дает дополнительные условия, являющиеся, очевидно, необходимыми. Необходимость проверки остается в силе и для аналогичных условий теорем 2—8.

Теорема 2. *Пусть $A = (\bar{a}_{n\nu})$ — реверсивный метод суммирования в виде преобразования последовательностей в ряды и $B = (b_{n\nu})$ — реверсивный метод суммирования в виде преобразования последовательностей в последовательности, для которых* $\sum_n \sum_\nu \bar{a}_{n\nu} = \bar{a} \neq 0$ *и* $\lim_n \sum_\nu b_{n\nu} = b \neq 0$; $e_k \in |A|_0^*$, B_0^* $(k = 0, 1, \ldots)$ *и $e \in |A|^*, B^*$; в поле абсолютного нулевого суммирования $|A|_0^*$ и нулевого суммирования B_0^* имеет место сходимость по отрезкам и $C = (\gamma_{n\nu})$ — произвольный регулярный метод суммирования в виде преобразования рядов в последовательности. Комплексные числа ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ суть множители суммируемости типа $(|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}, C)$ тогда и только тогда, когда*

1° *найдутся комплексные числа $c_i (i = 0, 1, \ldots)$ и $c_{ik} (i, k = 0, 1, \ldots)$, что*

$$\sum_{i,k} c_{ik}\, \bar{a}_{i\nu}\, b_{k\mu} = \begin{cases} \varepsilon_\nu & \text{при } \nu = \mu, \\ 0 & \text{при } \nu \neq \mu \ (\nu, \mu = 0, 1, \ldots), \end{cases}$$

$$b \sum_i c_i \bar{a}_{i\nu} + \sum_{i,k} c_{ik}\, \bar{a}_{i\nu} \Big(\sum_\mu b_{k\mu} - b \Big) = \varepsilon_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

$$\sum_{i,k} c_{ik} \Big(\sum_s \bar{a}_{is} \Big) b_{k\nu} = \varepsilon_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

где $|c_i| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$ *и* $\sum_k |c_{ik}| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$,

2° *ряд $\sum \varepsilon_\nu$ C-суммируем.*

---

[5] Здесь и в дальнейшем $x_\nu = X_\nu - X_{\nu-1}$, $X_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} x_\mu$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Примечание. Метод Шура дает для величин c_i и c_{ik} следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} &c_i = \lim_n \sum_\nu \gamma_{n\nu}\varepsilon_\nu \xi_{\nu i}'\eta_\nu \quad \text{и} \quad c_{ik} = \lim_n \sum_\nu \gamma_{n\nu}\varepsilon_\nu \xi_{\nu i}'\eta_{\nu k} \\ &\qquad\qquad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots), \\ &\text{где } x_n' = \sum_i \bar{a}_{ni}X_i,\quad Y_n' = \sum_i b_{ni}Y_i,\quad X_n = \sum_i \xi_{ni}'x_i', \\ &Y_n = \eta_n \lim_k Y_k' + \sum_i \eta_{ni}(Y_i' - \lim_l Y_l') \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \\ &\lim_n \sum_i b_{ni}\eta_i = 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Теорема 3. *При предположениях теоремы* 1 *относительно методов суммирования A, B, и C и нормальности методов A и B комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0,\ 1,\ \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|A|, |B|, C)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *найдутся комплексные числа* c_{ik} $(i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots)$, *что*

$$\sum_{i,\,k=\nu,\,\mu}^{\infty} c_{ik}\,\bar{a}_{i\nu}\,\bar{b}_{k\mu} = \begin{cases} \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} & \text{при } \nu = \mu, \\ -\varepsilon_\mu & \text{при } \nu + 1 = \mu, \\ -\varepsilon_\nu & \text{при } \nu = \mu + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\sum_{i,\,k=0,\,\nu}^{\infty} c_{ik}\Big(\sum_{s=0}^{i}\bar{a}_{is}\Big)\bar{b}_{k\nu} = \delta_{\nu 0}\varepsilon_0 \quad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots),$$

$$\sum_{i,\,k=\nu,\,0}^{\infty} c_{ik}\,\bar{a}_{i\nu}\Big(\sum_{s=0}^{k}\bar{b}_{ks}\Big) = \delta_{\nu 0}\varepsilon_0 \quad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots),$$

где $|c_{ik}| \leqslant M$ $(i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots)$,

2° *последовательность* $\{\varepsilon_{n+1}X_nY_n\}$ *C-суммируема для всех* $x \in |A|_0^*$ *и* $y \in |B|_0^*$.

Доказательство. Если ε_ν $(\nu = 0,\ 1,\ \ldots)$ суть множители суммируемости типа $(|A|, |B|, C)$, то при всех $x = \{X_\nu\} = \sum x_\nu \in |A|^*$ и $y = \{Y_\nu\} = \sum y_\nu \in |B|^*$ существует $\lim_n \sum_\nu \gamma_{n\nu}\varepsilon_\nu x_\nu y_\nu$. Так как x_ν и y_ν $(\nu = 0,\ 1,\ \ldots)$ — непрерывные линейные функционалы соответственно в $|A|^*$ и $|B|^*$, то вышеприведенный предел есть непрерывный билинейный функционал $f(x,\ y)$ в $|A|^* \times |B|^*$:

$$\lim_n \sum_\nu \gamma_{n\nu}\varepsilon_\nu x_\nu y_\nu = f(x,\ y).$$

При $x = e_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и $y = e_l$ $(l = 0, 1, \ldots)$ из этого равенства получаем:

$$f(e_k, e_l) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{при } l = k, \\ -\varepsilon_{k+1} & \text{при } l = k-1, \\ -\varepsilon_k & \text{при } l = k+1, \\ \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} & \text{в остальных случаях.} \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

Принимая во внимание общий вид непрерывного билинейного функционала в $|A|^* \times |B|^*$ (лемма 18), находим, что условие (2.4) совпадает с первой системой равенств условия 1°. Остальные две системы суть условия $f(e, e_\nu) = \delta_{\nu 0}\varepsilon_0$ и $f(e_\nu, e) = \delta_{\nu 0}\varepsilon_0$, которые гарантируют однозначность c_{ik} до произвольной постоянной, одинаковой для всех c_{ik} $(i, k = 0, 1, \ldots)$.

Вычисляем величины $f(\overset{n}{x}, \overset{n}{y})$ и $\overset{n}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} \varepsilon_\nu x_\nu y_\nu$ при условии, что (2.4) выполнено.

$$f(\overset{n}{x}, \overset{n}{y}) = f\Big(\overset{n}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} X_\nu e_\nu, \overset{n}{\underset{\mu=0}{\Sigma}} Y_\mu e_\mu\Big) = \overset{n}{\underset{\nu,\mu=0}{\Sigma}} X_\nu Y_\mu f(e_\nu, e_\mu) =$$

$$= \overset{n}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} (\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1}) X_\nu Y_\nu - \overset{n-1}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} \varepsilon_{\nu+1} X_\nu Y_{\nu+1} - \overset{n}{\underset{\nu=1}{\Sigma}} \varepsilon_\nu X_\nu Y_{\nu-1} =$$

$$= \overset{n}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} \varepsilon_\nu X_\nu y_\nu - \overset{n-1}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} \varepsilon_{\nu+1} X_\nu y_{\nu+1} + \varepsilon_{n+1} X_n Y_n;$$

$$\overset{n}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} \varepsilon_\nu x_\nu y_\nu = \overset{n}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} \varepsilon_\nu (X_\nu - X_{\nu-1}) y_\nu = \overset{n}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} \varepsilon_\nu X_\nu y_\nu - \overset{n-1}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} \varepsilon_{\nu+1} X_\nu y_{\nu+1}.$$

Отсюда

$$\overset{n}{\underset{\nu=0}{\Sigma}} \varepsilon_\nu x_\nu y_\nu = f(\overset{n}{x}, \overset{n}{y}) - \varepsilon_{n+1} X_n Y_n.$$

Теперь очевидно, что для C-суммируемости ряда $\Sigma \varepsilon_\nu x_\nu y_\nu$ при всех $\Sigma x_\nu \in |A|_0^*$ и $\Sigma y_\nu \in |B|_0^*$ необходимо и достаточно, если в $|A|_0^*$ и $|B|_0^*$ имеет место сходимость по отрезкам, выполнение условия (2.4) и C-суммируемость последовательности $\{\varepsilon_{n+1} X_n Y_n\}$.

Пусть теперь $x = \{X_\nu\} = \Sigma x_\nu \in |A|^*$ и $y = \{Y_\nu\} = \Sigma y_\nu \in |B|^*$ таковы, что $\overset{n}{\underset{\nu}{\Sigma\Sigma}} \bar{a}_{n\nu} X_\nu \neq 0$ и $\overset{n}{\underset{\nu}{\Sigma\Sigma}} \overline{b}_{n\nu} Y_\nu \neq 0$. Тогда хоть один из [6] $x_\nu = X_\nu - X_{\nu-1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ и один из $y_\nu = Y_\nu - Y_{\nu-1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ отличен от нуля. Пусть первые отличающиеся от нуля элементы суть соответственно x_k и y_l. Тогда найдутся $a \neq 0$

[6] $X_{-1} = y_{-1} = 0$.

и $\beta \neq 0$ такие, что

$$\sum_n \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{a}_{n\nu} X_\nu - \Big(\sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\nu=k}^{n} \tilde{a}_{n\nu} \Big) \alpha x_k = 0$$

и

$$\sum_n \sum_{\nu=0}^{n} \overline{b}_{n\nu} Y_\nu - \Big(\sum_{n=l}^{\infty} \sum_{\nu=l}^{n} \overline{b}_{n\nu} \Big) \beta y_l = 0.$$

Для таких $x \in |A|^*$ и $y \in |B|^*$ справедливо равенство $(n > k, l)$:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu x_\nu y_\nu = f(\overset{n}{x^*}, \overset{n}{y^*}) - \varepsilon_{n+1} (X_n - \alpha x_k)(Y_n - \beta y_l) + \alpha \varepsilon_k x_k y_k + \beta \varepsilon_l x_l y_l,$$

где

$$\overset{n}{x^*} = \{X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}, X_k - \alpha x_k, X_{k+1} - \alpha x_k, \ldots, X_n - \alpha x_k, 0, \ldots\},$$

$$\overset{n}{y^*} = \{Y_0, Y_1, \ldots, Y_{l-1}, Y_l - \beta y_l, Y_{l+1} - \beta y_l, \ldots, y_n - \beta y_n, 0, \ldots\}.$$

И здесь ряд $\Sigma \varepsilon_\nu x_\nu y_\nu$ C-суммируем тогда и только тогда, когда выполнено (2.4) и последовательность $\{\varepsilon_{n+1} X_n Y_n\}$ C-суммируема для всех $x = \{X_n\} \in |A|_0^*$ и $y = \{Y_n\} \in |B|_0^*$. Теорема доказана.

Теорема 4. *При предположениях теоремы 3 относительно методов A и B комплексные числа ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ суть множители сходимости относительно $|A|$ и $|B|$ тогда и только тогда, когда*

1° *выполнено условие* 1° *теоремы* 3,

2° $\left| \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\tilde{a}_{nn} \overline{b}_{nn}} \right| \leqslant M \quad (n = 0, 1, \ldots).$

Доказательство. Надо показать, что условие 2° гарантирует сходимость последовательности $\{\varepsilon_{n+1} X_n Y_n\}$ при всех $x = \{X_n\} \in |A|_0^*$ и $y = \{Y_n\} \in |B|_0^*$. По лемме 14 для методов A и B выполнены следующие точные условия роста:

$X_n a_{nn} = o(1)$ $(n \to \infty)$ и $Y_n \overline{b}_{nn} = o(1)$ $(n \to \infty)$ при всех $x \in |A|_0^*$ и $y \in |B|_0^*$.

Очевидно тогда и $X_n Y_n a_{nn} \overline{b}_{nn} = o(1)$ $(n \to \infty)$ при всех $x \in |A|_0^*$ и $y \in |B|_0^*$. Это точное условие, т. е. для произвольной последовательности $\{\lambda_n\}$ $[\lim\limits_n \lambda_n = \infty, \lambda_n > 0 \ (n = 0, 1, \ldots)]$ найдутся $x^* \in |A|_0^*$ и $y^* \in |B|_0^*$, что $\lambda_n X_n^* Y_n^* \tilde{a}_{nn} \overline{b}_{nn} \neq o(1)$ $(n \to \infty)$. Ибо, если это не так, то $\lambda_n \tilde{a}_{nn} \overline{b}_{nn} X_n Y_n = \lambda_n \tilde{a}_{nn} \overline{b}_{nn} \Big(\sum\limits_{\nu=0}^{n} \xi_{n\nu'} x_{\nu'} \Big) \cdot$

$$\cdot \Big(\sum_{\mu=0}^{n} \eta_{n\mu'} y_{\mu'} \Big) = \lambda_n \tilde{a}_{nn} \overline{b}_{nn} \sum_{\nu, \mu=0}^{n} \xi_{n\nu'} \eta_{n\mu'} x_{\nu'} y_{\mu'} = \sum_{\nu, \mu=0}^{n} c_{n\nu\mu} x_{\nu'} y_{\mu'},$$

где $\xi_{n\nu}'$ и $\eta_{n\mu}'$ определены формулами (2.2), и преобразование с матрицей $(c_{n\nu\mu})$ должно преобразовать пространство $l \times l$ в пространство всех сходящихся к нулю последовательностей c_0. Тогда $|c_{nnn}| = \lambda_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ должно быть ограничено, что противоречит определению $\{\lambda_n\}$.

Очевидно, что условие 2° достаточно для сходимости $\{\varepsilon_{n+1} X_n Y_n\}$ при всех $x \in |A|_0^*$ и $y \in |B|_0^*$. Если условие 2° не выполнено, то $\varepsilon_n = \varrho_n \bar{a}_{nn} \bar{b}_{nn}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, где $\varrho_n \neq O(1)$. Но тогда и $\{\varepsilon_{n+1} X_n Y_n\}$ не сходится при всех $x \in |A|_0^*$ и $y \in |B|_0^*$, так как для $\{\lambda_n\} = \{\sqrt[4]{|\varrho_n|}\}$ найдутся $x^* \in |A|_0^*$, $y^* \in |B|_0^*$, натуральные числа N_1 и N_2 и положительное число $\varepsilon > 0$, что

$$\sqrt[4]{|\varrho_n|}\, \bar{a}_{nn} X_n^* = k_n', \quad \text{где } |k_n'| \geqslant \varepsilon, \quad \text{если } n > N_1,$$

и

$$\sqrt[4]{|\varrho_n|}\, \bar{b}_{nn} Y_n^* = k_n'', \quad \text{где } |k_n''| > \varepsilon, \quad \text{если } n > N_2.$$

Отсюда

$$|\varepsilon_{n+1} X_n^* Y_n^*| = \sqrt{|\varrho_n|} \cdot |k_n' k_n''| \neq O(1) \quad (n \to \infty),$$

чем необходимость условия 2° доказана.

Теорема 5. *Если кроме предположений теоремы* 3 *методы суммирования A и B удовлетворяют оценкам* $\sum\limits_{n=\nu+1}^{\infty} |\bar{a}_{n\nu}| \leqslant M\, |\bar{a}_{\nu\nu}|$,

$\sum\limits_{n=\nu+1}^{\infty} |\bar{b}_{n\nu}| \leqslant M\, |\bar{b}_{\nu\nu}|$ *и* $|\bar{a}_{\nu+1,\nu+1}| \leqslant M\, |\bar{a}_{\nu\nu}|$ *или* $|\bar{b}_{\nu+1,\nu+1}| \leqslant M\, |\bar{b}_{\nu\nu}|$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, *то комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|A|, |B|, C)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1° *теоремы* 3.

Доказательство. Покажем, что из условия 1° теоремы 3 следует условие 2° теоремы 4. Действительно, так как из условия 1° теоремы 3 вытекают условия $|\varepsilon_{\nu+1}| \leqslant M\, |\bar{a}_{\nu+1,\nu+1} \bar{b}_{\nu\nu}|$ и $|\varepsilon_{\nu+1}| \leqslant M\, |\bar{a}_{\nu\nu} \bar{b}_{\nu+1,\nu+1}|$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, то выполнение условия 2° теоремы 4 при сделанных предположениях очевидно.

Примечание. Метод Шура дает для величин c_{ik} следующее выражение:

$$\left.\begin{aligned} c_{ik} &= \lim_n \sum_{\nu=\max(i,k)}^{\infty} \gamma_{n\nu}\, \varepsilon_\nu\, \xi_{\nu i}''\, \eta_{\nu k}'' \quad (i, k = 0, 1, \ldots), \\ \text{где } x_n' &= \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_{ni} X_i, \quad y_n' = \sum_{i=0}^{n} \bar{b}_{ni} Y_i, \quad x_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_{ni}'' x_i', \\ y_n &= \sum_{i=0}^{n} \eta_{ni}''\, y_i' \quad (n = 0, 1, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

Теорема 6. *При предположениях теоремы 2 относительно методов суммирования A, B и C и нормальности A и B, комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|A|, B, C)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *найдутся комплексные числа* c_{ik} $(i, k = 0, 1, \ldots)$, *что*

$$\sum_{i,\,k=\nu,\,\mu}^{\infty} c_{ik}\,\bar{a}_{i\nu}\,b_{k\mu} = \begin{cases} \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} & \text{при } \mu = \nu, \\ -\varepsilon_\mu & \text{при } \mu = \nu + 1, \\ -\varepsilon_\nu & \text{при } \mu + 1 = \nu, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 0, 1 \ldots),$$

$$\sum_{i,\,k=0,\,\nu}^{\infty} c_{ik}\,(\Sigma \bar{a}_{is})\,b_{k\nu} = \delta_{\nu 0}\varepsilon_0 \quad (\nu = 0,\ 1 \ldots,),$$

где $\sum\limits_{k} |c_{ik}| \leqslant M \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots),$

2° *последовательность* $\{\varepsilon_{n+1} X_n Y_n\}$ *C-суммируема при всех* $x \in |A|_0^*$ *и* $y \in B_0^*$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3 (с использованием леммы 19).

Теорема 7. *При предположениях теоремы 6 относительно методов A и B комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *суть множители сходимости относительно* $|A|$ *и B тогда и только тогда, когда*

1° *выполнено условие 1° теоремы 6,*

$$2^\circ \quad \left| \frac{\varepsilon_{n+1}}{\bar{a}_{nn} b_{nn}} \right| \leqslant M \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Теорема 8. *Если кроме предположений теоремы 6 методы суммирования A и B удовлетворяют оценкам*

$$\sum_{n=\nu+1}^{\infty} |\bar{a}_{n\nu}| \leqslant M\,|\bar{a}_{\nu\nu}| \quad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots), \qquad |b_{n\nu}| \leqslant M\,|b_{\nu\nu}| \quad (n \geqslant \nu;$$

$\nu = 0, 1, \ldots)$ *и* $|\bar{a}_{\nu+1,\,\nu+1}| \leqslant M\,|\bar{a}_{\nu\nu}|$ *или* $|b_{\nu+1,\,\nu+1}| \leqslant M\,|b_{\nu\nu}|$ $(\nu = 0,\ 1,\ \ldots)$, *то комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0,\ 1,\ \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|A|, B, C)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие 1° теоремы 6.*

Доказательство теорем 7 и 8 аналогично доказательству теорем 4 и 5 (с использованием лемм 10 и 14).

Примечание. Метод Шура дает для величин c_{ik} следующее выражение:

$$\left.\begin{aligned} &c_{ik} = \lim_n \sum_{\nu=\max(i,k)}^{\infty} \gamma_{n\nu}\,\varepsilon_\nu\,\xi_{\nu i}''\,\eta_{\nu k}''' \quad (i, k = 0, 1, \ldots),\\ &\text{где}\quad x_n' = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_{ni} X_i,\ Y_n' = \sum_{i=0}^{n} b_{ni} Y_i,\ x_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_{ni}''\, x_i',\\ &y_n = \sum_{i=0}^{n} \eta_{ni}'''\, Y_i \quad (n = 0, 1, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

§ 3. Обобщенные множители суммируемости при методе Рисса R_λ^1

Метод суммирования Рисса с разрывным параметром $R_\lambda^\varkappa$ дается в виде преобразования последовательностей в последовательности матрицей (a_{nk}):

$$a_{nk} = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right)^\varkappa - \left(1 - \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{n+1}}\right)^\varkappa & \text{при } k < n,\\ \left(1 - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^\varkappa & \text{при } k = n,\\ 0 & \text{при } k > n, \end{cases}$$

где $\varkappa \geqslant 0$, $0 < \lambda_n < \lambda_{n+1}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $\lim\limits_n \lambda_n = \infty$.

Метод $R_\lambda^\varkappa$ регулярен и абсолютно регулярен. В дальнейшем будем рассматривать только случай $\varkappa = 1$.

Пусть $A = R_\lambda^1$ и $B = R_\mu^1$. Тогда предположение теорем 5 и 8 $|\bar{a}_{\nu+1,\nu+1}| \leqslant M |\bar{a}_{\nu\nu}|$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ превращается в условие $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} \cdot \dfrac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \leqslant M$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Остальные предположения теорем 1—8 относительно методов A и B при методе Рисса выполнены (см. леммы 8—14).

Теорема 9. *Комплексные числа ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ суть множители суммируемости типа $(|\mathfrak{R}_\lambda^1|, |\mathfrak{R}_\mu^1|, C)$ тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad \left| \varepsilon_k \frac{\lambda_{k+1}\,\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_k\,\Delta\mu_k} \right| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

2° $\left|\sum_{\nu=0}^{k}\varepsilon_\nu\right|\leqslant M$ $(k=0,1,\ldots)$,

3° *ряд* $\Sigma\varepsilon_\nu$ *C-суммируем.*

Доказательство: Условие 1° теоремы 1, когда $A=R_\lambda^1$ и $B=R_\mu^1$, принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&c_{kl}\frac{\Delta\lambda_k\Delta\mu_l}{\lambda_{k+1}\mu_{l+1}}+\frac{\Delta\lambda_k\Delta\mu_l}{\mu_{l+1}}\cdot\sum_{s=k+1}^{\infty}c_{sl}\frac{\Delta\lambda_s}{\lambda_s\lambda_{s+1}}+\\
&+\frac{\Delta\lambda_k\Delta\mu_l}{\lambda_{k+1}}\cdot\sum_{t=l+1}^{\infty}c_{kt}\frac{\Delta\mu_t}{\mu_t\mu_{t+1}}+\Delta\lambda_k\Delta\mu_l\cdot\\
&\cdot\sum_{\substack{s=k+1\\t=l+1}}^{\infty}c_{st}\frac{\Delta\lambda_s\Delta\mu_t}{\lambda_s\lambda_{s+1}\mu_t\mu_{t+1}}=\begin{cases}\varepsilon_k & \text{при } k=l,\\ 0 & \text{при } k\neq l\end{cases}\ (k,l=0,1,\ldots),\\
&c_{0k}\frac{\Delta\mu_k}{\mu_{k+1}}+\Delta\mu_k\cdot\sum_{s=k+1}^{\infty}c_{0s}\frac{\Delta\mu_s}{\mu_s\mu_{s+1}}=-\varepsilon_k\ (k=0,1,\ldots),\\
&c_{k0}\frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_{k+1}}+\Delta\lambda_k\cdot\sum_{s=k+1}^{\infty}c_{s0}\frac{\Delta\lambda_s}{\lambda_s\lambda_{s+1}}=-\varepsilon_k\ (k=0,1,\ldots).
\end{aligned}\right\}\quad(3.1)$$

Согласно (2.2), величины c_{ik} даются формулами:

$$c_{00}=C\{\Sigma\varepsilon_\nu\}=a,$$

$$c_{kk}=a+\varepsilon_k\frac{\lambda_{k+1}\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_k\cdot\Delta\mu_k}-\sum_{\nu=0}^{k-1}\varepsilon_\nu\quad(k=1,2,\ldots),$$

$$c_{kl}=a-\varepsilon_k\frac{\lambda_{k+1}}{\Delta\lambda_k}-\sum_{\nu=0}^{k-1}\varepsilon_\nu\quad(k>l=0,1,\ldots),$$

$$c_{kl}=a-\varepsilon_l\frac{\mu_{l+1}}{\Delta\mu_l}-\sum_{\nu=0}^{l-1}\varepsilon_\nu\quad(l>k=0,1,\ldots).$$

Так как R_μ^1 и R_λ^1 сохраняют абсолютную сходимость, то существует $\lim\limits_n\sum\limits_\nu\gamma_{n\nu}\varepsilon_\nu X_\nu$ при всех $\{X_\nu\}$, для которых $\Sigma|\overline{\Delta X}_\nu|<\infty$. Из этого по лемме 3 вытекает условие 2°. Условие 1° получается теперь из условия $|c_{kk}|\leqslant M$ $(k=0,1,\ldots)$. Принимая во внимание, что $-\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\leqslant M$ и $-\frac{\Delta\mu_n}{\mu_{n+1}}\leqslant M$ $(n=0,1,\ldots)$, находим, что условия 1° и 2° достаточны для ограниченности величин c_{ik}. Непосредственная проверка равенств (3.1) найденными c_{ik} $(i,k=0,1,\ldots)$ новых условий не дает (это замечание спра-

ведливо и для теорем 10—14). Так как эта проверка для метода Рисса тривиальна, то мы здесь и в дальнейшем ее не приводим.

Теорема 10. *Комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|\mathfrak{R}^1_\lambda|, \mathfrak{R}^1_\mu, C)$ *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad \sum \left| \mu_{k+1} \Delta \frac{\varepsilon_k}{\Delta \mu_k} \right| < \infty,$$

$$2^\circ \quad \left| \varepsilon_k \frac{\lambda_{k+1} \mu_{k+1}}{\Delta \lambda_k \Delta \mu_k} \right| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

3° *ряд* $\Sigma \varepsilon_\nu$ *сходится.*

Доказательство. Согласно (2.3), фигурирующие в условии 1° теоремы 2 величины c_i и c_{ik}, даются формулами:

$$c_i = \sum_{\nu=i+1}^{\infty} \varepsilon_\nu - \varepsilon_i \frac{\lambda_{i+1}}{\Delta \lambda_i} \quad (i = 0, 1, \ldots),$$

$$c_{kk} = \varepsilon_k \frac{\lambda_{k+1} \mu_{k+1}}{\Delta \lambda_k \Delta \mu_k} + \varepsilon_{k+1} \frac{\mu_{k+1}}{\Delta \mu_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$c_{k+1,\, k} = - \varepsilon_{k+1} \frac{\lambda_{k+2} \mu_{k+1}}{\Delta \lambda_{k+1} \Delta \mu_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$c_{ik} = - \mu_{k+1} \Delta \frac{\varepsilon_k}{\Delta \mu_k} \quad (k > i = 0, 1, \ldots),$$

$$c_{ik} = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Эти величины должны удовлетворять условиям $|c_i| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$ и $\sum\limits_k |c_{ik}| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Условия 1°—3° для этого, очевидно, необходимы и достаточны.

Теорема 11. *Комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *суть множители сходимости относительно* $|R^1_\lambda|$ *и* $|R^1_\mu|$ *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad \left| \varepsilon_k \frac{\lambda_{k+1} \mu_{k+1}}{\Delta \lambda_k \cdot \Delta \mu_k} \right| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \quad \left| \varepsilon_{k+1} \frac{\lambda_{k+1} \mu_{k+1}}{\Delta \lambda_k \cdot \Delta \mu_k} \right| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$3^\circ \quad \left| \varepsilon_{k+1} \frac{\lambda_{k+2} \mu_{k+1}}{\Delta \lambda_{k+1} \cdot \Delta \mu_k} \right| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$4^\circ \quad \left| \varepsilon_{k+1} \frac{\lambda_{k+1} \mu_{k+2}}{\Delta \lambda_k \cdot \Delta \mu_{k+1}} \right| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

Доказательство. Согласно (2.5), фигурирующие в условии 1° теоремы 4 величины c_{ik} даются формулами:

$$c_{kk} = \varepsilon_k \frac{\lambda_{k+1}\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_k \cdot \Delta\mu_k} + \varepsilon_{k+1}\left(1 + \frac{\lambda_{k+1}}{\Delta\lambda_k} + \frac{\mu_{k+1}}{\Delta\mu_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{k+1}\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_k \cdot \Delta\mu_k}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$c_{k+1,\,k} = -\varepsilon_{k+1}\frac{\lambda_{k+2}}{\Delta\lambda_{k+1}} - \varepsilon_{k+1}\frac{\lambda_{k+2}\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_{k+1}\cdot\Delta\mu_k} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$c_{k,\,k+1} = -\varepsilon_{k+1}\frac{\mu_{k+2}}{\Delta\mu_{k+1}} - \varepsilon_{k+1}\frac{\lambda_{k+1}\mu_{k+2}}{\Delta\lambda_k\cdot\Delta\mu_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$c_{ik} = 0$ в остальных случаях.

Эти величины c_{ik} $(i, k = 0, 1, \ldots)$ должны быть ограничены. Условие 2° теоремы 4 совпадает с условием 2° теоремы 11. Теперь уже почти очевидно, что условия 1°—4° необходимы и достаточны для ограниченности величин c_{ik}.

Теорема 12. *Комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|R^1_\lambda|, |R^1_\mu|, C)$ *при выполнении условия* $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+2}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{k+1}}{\Delta\lambda_k} \leqslant M$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad \left|\varepsilon_k \frac{\lambda_{k+1}\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_k\cdot\Delta\mu_k}\right| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \quad \left|\varepsilon_{k+1}\frac{\lambda_{k+2}\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_{k+1}\cdot\Delta\mu_k}\right| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Принимая во внимание формулы для c_{ik} (2.5), теорема 12 получается из теоремы 5 весьма элементарно.

Теорема 13. *Комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *суть множители сходимости относительно* $|R^1_\lambda|$ *и* R^1_μ *тогда и только тогда, когда выполнены условия теоремы* 11.

Доказательство. Согласно (2.6), фигурирующие в условии 1° теоремы 7 величины c_{ik} даются формулами:

$$c_{kk} = \varepsilon_k \frac{\lambda_{k+1}\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_k\cdot\Delta\mu_k} + \varepsilon_{k+1}\frac{\lambda_k\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_k}\left(\frac{1}{\Delta\mu_k} + \frac{1}{\Delta\mu_{k+1}}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$c_{k+1,\,k} = -\varepsilon_{k+1}\frac{\lambda_{k+2}\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_{k+1}}\left(\frac{1}{\Delta\mu_k} + \frac{1}{\Delta\mu_{k+1}}\right) -$$

$$- \varepsilon_{k+2}\frac{\lambda_{k+1}\mu_{k+1}}{\Delta\lambda_{k+1}\cdot\Delta\mu_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$c_{k,\,k+1} = -\varepsilon_{k+1}\frac{\lambda_k \mu_{k+2}}{\Delta\lambda_k \cdot \Delta\mu_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$c_{k+2,\,k} = \varepsilon_{k+2}\frac{\lambda_{k+3} \mu_{k+1}}{\Delta\lambda_{k+2} \cdot \Delta\mu_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$c_{ik} = 0$ в остальных случаях.

Эти величины c_{ik} $(i, k = 0, 1, \ldots)$ должны удовлетворять условию $\sum\limits_k |c_{ik}| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Так как условие 2° теоремы 7 совпадает с условием 2° теоремы 11, то легко убедиться, что условия 1°—4° необходимы и достаточны для выполнения $\sum\limits_k |c_{ik}| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$.

Теорема 14. *Комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|R^1_\lambda|, R^1_\mu, C)$ *при выполнении условия* $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+2}} \cdot \frac{\Delta\lambda_{k+1}}{\Delta\lambda_k} \leqslant M$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия теоремы* 12.

Доказательство аналогично доказательству теорем 11 и 12.

Примечание. Если $\lambda_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} p_\nu = P_n$ $(p_\nu > 0,\ P_{-1} = 0)$ и $\mu_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} q_\nu = Q_n$ $(q_\nu > 0,\ Q_{-1} = 0)$ $[n = 0, 1, \ldots]$, то из теорем 9—14 получаются соответствующие теоремы для методов взвешенных средних Рисса $R(\bar{p}_n)$ и $R(\bar{q}_n)$. Но оказывается, что из теорем 1—8 вытекают соответствующие теоремы и для таких методов Рисса, у которых $p_i \neq 0$, $q_i \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Это обусловлено тем, что предположения теорем 1—8 относительно A и B [за исключением условия $|\bar{a}_{\nu+1,\,\nu+1}| \leqslant M\,|\bar{q}_{\nu\nu}|$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$] автоматически выполнены для абсолютно регулярных $R(\bar{p}_n)$ и $R(\bar{q}_n)$ (соответственно абсолютно регулярного $R(\bar{p}_n)$ и регулярного $R(\bar{q}_n)$), а условия (1.2) и (1.3) для методов $R(\bar{p}_n)$, сохраняющих сходимость и абсолютную сходимость. Абсолютно регулярный метод $R(\bar{p}_n)$ является и абсолютно совершенным ([5], теорема 1).

§ 4. Обобщенные множители суммируемости при методе Чезаро.

Метод суммирования Чезаро C^α дается в виде преобразования последовательностей в последовательности матрицей $(a_{n\nu})$:

$$a_{n\nu}=\begin{cases}\dfrac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} & \text{при } \nu\leqslant n,\\ 0 & \text{при } \nu>n,\end{cases}$$

где $A_n^{\alpha}=\binom{n+\alpha}{n}$, $A_0^{\alpha}=1$.

Если $\alpha\geqslant 0$, то метод C^{α} регулярен и абсолютно регулярен. Пусть $A=C^{\alpha}$ и $B=C^{\beta}$. Если $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ и $0\leqslant\beta\leqslant 1$, то C^{α} и C^{β} удовлетворяют всем предположениям теорем 1—8 (см. леммы 8—14). В теоремах 15—18 предполагается, что $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ и $0\leqslant\beta\leqslant 1$.

Теорема 15. *Комплексные числа* ε_ν $(\nu=0, 1, \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|\mathfrak{C}^{\alpha}|, |\mathfrak{C}^{\beta}|, C)$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\left|\sum\limits_{\mu,\,\nu=0}^{m,\,n} A_\nu^{\alpha}A_\mu^{\beta}\sum\limits_{s=\max(\mu,\,\nu)}^{\infty}A_{s-\nu}^{-\alpha-1}A_{s-\mu}^{-\beta-1}\varepsilon_s\right|\leqslant M \quad (m, n=0, 1, \ldots)$,

2° $\left|\sum\limits_{\nu=0}^{m} A_\nu^{\alpha}\sum\limits_{s=\nu}^{\infty}A_{s-\nu}^{-\alpha-1}\varepsilon_s\right|\leqslant M \quad (m=0, 1, \ldots)$,

3° $\left|\sum\limits_{\mu=0}^{n} A_\mu^{\beta}\sum\limits_{s=\mu}^{\infty}A_{s-\mu}^{-\beta-1}\varepsilon_s\right|\leqslant M \quad (n=0, 1, \ldots)$,

4° $\varepsilon_\nu=o(1)$,

5° *ряд* $\Sigma\varepsilon_\nu$ *C-суммируем.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.

Теорема 16. *Комплексные числа* ε_ν $(\nu=0, 1, \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|\mathfrak{C}^{\alpha}|, \mathfrak{C}^{\beta}, C)$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\sum\limits_{\mu}A_\mu^{\beta}\left|\sum\limits_{\nu=0}^{m}A_\nu^{\alpha}\sum\limits_{s=\max(\mu,\,\nu)}^{\infty}A_{s-\nu}^{-\alpha-1}A_{s-\mu}^{-\beta-1}\varepsilon_s\right|\leqslant M \quad (m=0, 1, \ldots)$,

2° $\sum\limits_{\mu}A_\mu^{\beta}\left|\sum\limits_{s=\mu}^{\infty}A_{s-\mu}^{-\beta-1}\varepsilon_s\right|<\infty$,

3° *ряд* $\Sigma\varepsilon_\nu$ *сходится.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 10.

Теорема 17. *Комплексные числа* ε_ν $(\nu=0, 1, \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|C^{\alpha}|, |C^{\beta}|, C)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\nu^{\alpha+\beta}|\varepsilon_\nu|=O(1)\ (\nu\to\infty).$$

Доказательство. Согласно (2.5), фигурирующие в условии 1° теоремы 8 величины c_{ik} даются формулами:

$$\left.\begin{aligned} &c_{00} = \varepsilon_0, \\ &c_{ik} = ikA_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sum_{\nu=\max(i,\,k)}^{\infty} \varepsilon_\nu \nu^{-2} A_{\nu-i}^{-\alpha-1} A_{\nu-k}^{-\beta-1} \\ &\qquad\qquad (i+k>0;\ i,\ k=0,\ 1,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

Условие теоремы 17, очевидно, необходимо, так как оно совпадает с условием 2° теоремы 4. Покажем, что $|c_{ik}| \leqslant M$ $(i, k = 0, 1, \ldots)$.

$$ikA_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sum_{\nu=\max(i,\,k)}^{\infty} \varepsilon_\nu \nu^{-2} A_{\nu-i}^{-\alpha-1} A_{\nu-k}^{-\beta-1} =$$

$$= O(1)\, ikA_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sum_{\nu=\max(i,\,k)}^{\infty} \nu^{-\alpha-\beta-2} \left| A_{\nu-i}^{-\alpha-1} A_{\nu-k}^{-\beta-1} \right| =$$

$$= O(1) \frac{ikA_i^{\alpha} A_k^{\beta}}{[\max(i,k)]^{\alpha+\beta+2}} \sum_{\nu=\max(i,\,k)}^{\infty} \left| A_{\nu-i}^{-\alpha-1} A_{\nu-k}^{-\beta-1} \right| = O(1) \quad (k \to \infty,\ l \to \infty).$$

Непосредственная проверка равенств условия 1° теоремы 5 величинами (4.1) новых условий не дает.

Теорема 18. *Комплексные числа* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *суть множители суммируемости типа* $(|C^{\alpha}|, C^{\beta}, C)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\nu^{\alpha+\beta} |\varepsilon_\nu| = O(1) \quad (\nu \to \infty).$$

Доказательство. Согласно (2.6) фигурирующие в условии 1° теоремы 8 величины c_{ik} даются формулами:

$$\left.\begin{aligned} &c_{00} = \varepsilon_0, \\ &c_{ik} = iA_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sum_{\nu=\max(i,\,k)}^{\infty} \varepsilon_\nu \nu^{-1} A_{\nu-i}^{-\alpha-1} A_{\nu-k}^{-\beta-2} \\ &\qquad\qquad (i+k>0;\ k,\ l=0,\ 1,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \quad (4.2)$$

Так как условие теоремы 18, очевидно, необходимо, то покажем, что оно гарантирует выполнение условия $\sum\limits_k |c_{ik}| \leqslant M$ $(i = 0, 1, \ldots)$.

Значит, необходимо доказать ограниченность суммы

$$\sum_{k=0}^{i-1} \left| iA_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sum_{\nu=i}^{\infty} \varepsilon_\nu \nu^{-1} A_{\nu-i}^{-\alpha-1} A_{\nu-k}^{-\beta-2} \right| +$$

$$+ \sum_{k=i}^{\infty} \left| iA_i^{\alpha} A_k^{\beta} \sum_{\nu=k}^{\infty} \varepsilon_\nu \nu^{-1} A_{\nu-1}^{-\alpha-1} A_{\nu-k}^{-\beta-2} \right| = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Рассмотрим два случая:

а) $\alpha > 0$. Тогда

$$\mathrm{I} = O(1) \sum_{k=0}^{i-1} \frac{i A_i^{\alpha} A_k^{\beta}}{i^{\alpha+\beta+1}} \sum_{\nu=i}^{\infty} | A_{\nu-i}^{-\alpha-1} A_{\nu-k}^{-\beta-2} | =$$

$$= O(1) \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k)^{\beta+2}} = O(1) \quad (i \to \infty),$$

$$\mathrm{II} = O(1) \frac{i A_i^{\alpha} A_i^{\beta}}{i^{\alpha+\beta+1}} \sum_{\nu=i}^{\infty} | A_{\nu-i}^{-\alpha-1} A_{\nu-i}^{-\beta-2} | +$$

$$+ O(1) \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{i A_i^{\alpha} A_k^{\beta}}{k^{\alpha+\beta+1} (k-i)^{\alpha+1}} \sum_{\nu=k}^{\infty} | A_{\nu-k}^{-\beta-2} | =$$

$$= O(1) + O(1) \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{(k-i)^{\alpha+1}} = O(1) \quad (i \to \infty).$$

б) $\alpha = 0$. Тогда

$$\mathrm{I} = \sum_{k=0}^{i-1} | \varepsilon_i A_k^{\beta} A_{i-k}^{-\beta-2} | = O(1) \sum_{k=0}^{i-1} | A_{i-k}^{-\beta-2} | = O(1) \quad (i \to \infty),$$

$$\mathrm{II} = | i A_i^{\beta} \varepsilon_i i^{-1} | = O(1) \quad (i \to \infty).$$

Непосредственная проверка равенств условия 1° теоремы 8 величинами (4. 2) новых условий не дает.

Литература

1. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
2. Кулль И. Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
3. Реймерс Э., Теоремы о среднем значении для абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1956, **42**, 113—134.
4. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 1951, **55**, 92—108.
5. Macphail, M., Some theorems on absolute summability. Canad. J. Math., 1951, **4**, 386—390.
6. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1951, **55**, 23—54.
7. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 1953, **57**, 265—290.
8. Zeller, K., Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z., 1951, **55**, 55—70.
9. Zeller, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. 1951, **53**, 463—487.

Поступило
1 X 1960

ÜLDISTATUD SUMMEERUVUSTEGURITEST

F. Vichmann
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis üldistatakse A. Peyerimhoffi poolt artiklites [6] ja [7] väljatöötatud meetod harilike summeeruvustegurite uurimiseks üldistatud summeeruvustegureile. Kompleksarve ε_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) nimetatakse ($|\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$, C) tüüpi summeeruvustegureiks, kui rida $\Sigma\varepsilon_\nu X_\nu Y_\nu$ on C-summeeruv iga $|A|$-summeeruva jada $\{X_\nu\}$ ja $|B|$-summeeruva jada $\{Y_\nu\}$ korral, ja ($|A|$, $|B|$, C) tüüpi summeeruvustegureiks, kui rida $\Sigma\varepsilon_\nu x_\nu y_\nu$ on C-summeeruv iga $|A|$-summeeruva rea Σx_ν ja $|B|$-summeeruva rea Σy_ν korral. Analoogiliselt defineeritakse ($|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{B}$, C) ja ($|A|$, B, C) tüüpi summeeruvustegurid. Paragrahvis 2 antakse tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et ε_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) oleksid ülaltoodud tüüpi summeeruvustegurid suvaliste menetluste A ja B korral. Paragrahvis 3 menetlusteks A ja B on Rieszi katkeva parameetriga menetlus (järguga 1) ja paragrahvis 4 — Cesàro menetlus.

GENERALIZED SUMMABILITY FACTORS

F. Vichmann

Summary

In the present article the method for the investigation of summability factors created by A. Peyerimhoff in [6] and [7] has been extended to generalized summability factors. Complex numbers ε_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) are defined as summability factors of type ($|\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$, C) when the series $\Sigma\varepsilon_\nu X_\nu Y_\nu$ is summable by method C for each sequence $\{X_\nu\}$ summable by method A and sequence $\{Y_\nu\}$ summable by method B, and of type ($|A|$, $|B|$, C) when the series $\Sigma\varepsilon_\nu x_\nu y_\nu$ is summable by method C for each series Σx_ν summable by method A and series Σy_ν summable by method B. Analogous is the definition for the factors of types ($|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{B}$, C) and ($|A|$, B, C). In section 2, necessary and sufficient conditions are given for ε_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) to be the above enumerated summability factors for arbitrary methods A and B. Methods A and B, in section 3, are both the Riesz methods of summability of order 1 and, in section 4, the Cesàro methods.

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ МЕТОДА ВЗВЕШЕННЫХ СРЕДНИХ РИССА

Г. Кангро и М. Тыннов
Кафедра математического анализа

Пусть $\{x_\nu\}$ — последовательность элементов банахова пространства X и ε_ν — непрерывные линейные операторы из X в некоторое банахово пространство Y. Операторы ε_ν называются множителями суммируемости в последовательности типа (A, B) ((A_0, B), (A_O, B), $(|A|, B)$), если при каждой A-суммируемой (A-суммируемой к нулю, A-ограниченной, абсолютно A-суммируемой) последовательности $\{x_\nu\}$ последовательность $\{\varepsilon_\nu x_\nu\}$ B-суммируема. Аналогично определяются множители суммируемости в последовательности типа $(|A|, |B|)$. Множители суммируемости в последовательности типов[1] (C_α, C_β) и $(|C_\alpha|, |C_\beta|)$, где C_α — метод Чезаро порядка α (α, β — неотрицательные целые числа), недавно изучили Бозанкет [2] и Тайлер [6]. В настоящей статье при помощи метода Шура устанавливаются необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости в последовательности типов (P, B), (P_o, B), (P_O, B), $(|P|, B)$ и $(|P|, |B|)$, где P — метод взвешенных средних Рисса, а B — произвольный матричный метод суммирования последовательностей. Множители суммируемости в последовательности типов (P_o, B) и (P_O, B) применяются к нахождению множителей суммируемости в ряде типов (P, B) и (P_O, B).

§ 1. Множители суммируемости в последовательности типов (P, B), (P_o, B) и (P_O, B)

1. Пусть A и B — матричные методы суммирования, данные при помощи преобразования последовательности в последовательность числовыми матрицами $(a_{n\nu})$ и $(b_{n\nu})$. Предположим, что метод A нормален, т. е. $a_{n\nu} = 0$ при $\nu > n$, $a_{nn} \neq 0$. Тогда су-

[1] для числовых последовательностей.

ществует обратная матрица, элементы которой обозначим через $\xi_{n\nu}$:

$$(\xi_{n\nu}) = (a_{n\nu})^{-1}.$$

Обозначив

$$\xi_n = \sum_{\nu=0}^{n} \xi_{n\nu},$$

мы можем аналогично теореме 1 статьи [1] доказать следующую общую теорему.

Теорема 1. *Операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа (A, B) тогда и только тогда, когда*

1° $\{\xi_{\nu k}\varepsilon_\nu x\}$ и $\{\xi_\nu \varepsilon_\nu x\}$ B-суммируемы $(x \in X;\ k = 0, 1, \ldots)$,

2° $\sup\limits_{\|x_\nu\|\leqslant 1} \| \sum\limits_{\nu=0}^{l} c_{k\nu}^n x_\nu \| \leqslant M_n,\ (k, l = 0, 1, \ldots)$,

3° $\sup\limits_{\|x_\nu\|\leqslant 1} \| \sum\limits_{\nu=0}^{k} c_{n\nu} x_\nu \| \leqslant M,\ (n, k = 0, 1, \ldots)$,

где [2]

$$c_{k\nu}^n = \sum_{\mu=\nu}^{k} b_{n\mu}\xi_{\mu\nu}\varepsilon_\mu,\ c_{n\nu} = \lim_{k\to\infty} c_{k\nu}^n. \tag{1}$$

Если $A = P$, т. е.

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{p_\nu}{P_n} & \text{при } \nu \leqslant n, \\ 0 & \text{при } \nu > n, \end{cases}$$

то имеем [3]

$$c_{k\nu}^n = \begin{cases} P_\nu \Delta \dfrac{b_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu} & \text{при } \nu < k, \\ P_k \dfrac{b_{nk}\varepsilon_k}{p_k} & \text{при } \nu = k, \\ 0 & \text{при } \nu > k, \end{cases} \tag{2}$$

---

[2] в смысле сходимости везде в X.

[3] В дальнейшем будем воспользоваться обозначениями $\Delta a_{n\nu} = a_{n\nu} - a_{n,\nu+1}$ и $\bar{\Delta} a_{n\nu} = a_{n\nu} - a_{n-1,\nu}$.

откуда

$$c_{nv} = P_v \Delta \frac{b_{nv}\varepsilon_v}{p_v}. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} b_{nv}$, *то операторы* ε_v *являются множителями суммируемости в последовательности типа* (P, B) *тогда и только тогда, когда*

1° $\{\varepsilon_v x\}$ *B-суммируема* $(x \in X)$,

$$2^\circ \quad \sup_{\|x_v\|\leqslant 1} \Big\| \sum_{v=0}^{k} P_v \left(\Delta \frac{b_{nv}\varepsilon_v}{p_v}\right) x_v \Big\| \leqslant M \quad (n, k = 0, 1, \ldots).$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы 2 без труда получается из условий 1° и 3° теоремы 1. Для доказательства достаточности условий теоремы 2 отметим, что из этих условий непосредственно вытекает выполнение условий 1° и 3°, а при $l < k$ также условия 2° теоремы 1. Если же $l \geqslant k$, то условие 2° теоремы 1 гласит:

$$\sup_{\|x_v\|\leqslant 1} \Big\| \sum_{v=0}^{k-1} P_v \left(\Delta \frac{b_{nv}\varepsilon_v}{p_v}\right) x_v + P_k \frac{b_{nk}\varepsilon_k}{p_k} x_k \Big\| \leqslant M_n \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Согласно теореме Банаха-Штейнгауза из условия 1° теоремы 2 заключаем об ограниченности по k норм

$$\Big\| \sum_{v=0}^{k} b_{nv}\varepsilon_v \Big\|,$$

вследствие чего из тождества

$$\sum_{v=0}^{k-1} P_v \Delta \frac{b_{nv}\varepsilon_v}{p_v} = \sum_{v=0}^{k} b_{nv}\varepsilon_v - P_k \frac{b_{nk}\varepsilon_k}{p_k},$$

в силу условия 2° теоремы 2, вытекает ограниченность по k норм

$$\left\| P_k \frac{b_{nk}\varepsilon_k}{p_k} \right\|.$$

Отсюда и из условия 2° теоремы 2 и следует выполнение условия 2° теоремы 1 при $l \geqslant k$.

Следствие 1. *Операторы* ε_v *представляют собой множители сходимости в последовательности для* P *тогда и только тогда, когда*

1° $\{\varepsilon_v x\}$ сходится $(x \in X)$,

$$2^\circ \quad \left\| P_v \frac{\varepsilon_v}{p_v} \right\| = O(1).$$

Для доказательства отметим, что если B сводится к методу сходимости [4], то условие 2° теоремы 2 гласит:

$$\sup_{\substack{\|x_{n-1}\|\leqslant 1\\ \|x_n\|\leqslant 1}} \left\| -P_{n-1}\frac{\varepsilon_n}{p_n}x_{n-1}+P_n\frac{\varepsilon_n}{p_n}x_n\right\| \leqslant M, \tag{4}$$

откуда при $x_{n-1}=\Theta$ (Θ — нулевой элемент пространства X) вытекает условие 2° следствия. Поскольку

$$P_{n-1}\frac{\varepsilon_n}{p_n}=\frac{P_n}{p_n}\varepsilon_n-\varepsilon_n,$$

и нормы $\|\varepsilon_n\|$, в силу условия 1° следствия, ограничены на основании теоремы Банаха-Штейнгауза, то условия следствия влекут за собой условие (4).

Примечание 1. Нетрудно убедиться, что для того, чтобы операторы ε_ν были множителями суммируемости в последовательности типа (P_o, B) (множителями сходимости в последовательности для P_o), необходимо и достаточно выполнение условия 2° теоремы 2 (следствия 1).

2. Аналогично теореме 2 статьи [1] доказывается следующая общая теорема.

Теорема 3. *Операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа (A_O, B) тогда и только тогда, когда* [5]

1° $\sum\limits_\nu c_{n\nu}x_\nu$ сходится равномерно при $\|x_\nu\|\leqslant 1$ $(n=0, 1, \ldots)$,

2° $\lim\limits_k \sup\limits_{\|x_\nu\|\leqslant 1} \left\|\sum\limits_\nu (c^n_{k\nu}-c_{n\nu})x_\nu\right\|=0$ $(n=0, 1, \ldots)$,

3° $\lim\limits_n \sup\limits_{\|x_\nu\|\leqslant 1} \left\|\sum\limits_\nu (c_{n\nu}-c_\nu)x_\nu\right\|=0$,

где $c^n_{k\nu}$, $c_{n\nu}$ вычисляются по формулам (1), *а $c_\nu=\lim\limits_n c_{n\nu}$, в предположении, что пределы $\lim\limits_k c^n_{k\nu}$ и $\lim\limits_n c_{n\nu}$ существуют по норме.*

Если $A=P$, то $c^n_{k\nu}$ и $c_{n\nu}$ даются формулами (2) и (3), а

$$c_\nu=P_\nu\frac{b_\nu\varepsilon_\nu}{p_\nu},$$

где $b_\nu=\lim\limits_n b_{n\nu}$.

---

[4] т. е. $b_{n\nu}=0$ при $\nu\neq n$, $b_{nn}=1$.

[5] Символ $\lim\limits_s$ означает $\lim\limits_{s\to\infty}$.

Теорема 4. *Если существуют пределы* $b_\nu = \lim\limits_n b_{n\nu}$, *то операторы* ε_ν *являются множителями суммируемости в последовательности типа* (P_0, B) *тогда и только тогда, когда*

1° $\sum\limits_\nu P_\nu \left(\Delta \frac{b_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu}\right) x_\nu$ *сходится равномерно при* $\|x_\nu\| \leqslant 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$,

2° $\lim\limits_k \left\| P_k \frac{b_{nk}\varepsilon_k}{p_k} \right\| = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$,

3° $\lim\limits_n \sup\limits_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum\limits_\nu P_\nu \Delta \left((b_{n\nu} - b_\nu) \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu \right\| = 0.$

Доказательство. Необходимость условий 1° и 3° непосредственно получается из условий 1° и 3° теоремы 3.

Условие 2° теоремы 3 гласит:

$$\lim_k \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| P_k \frac{b_{nk}\varepsilon_k}{p_k} x_k - \sum_{\nu=k}^{\infty} P_\nu \left(\Delta \frac{b_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu \right\| = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Отсюда и из условия 1° теоремы 3 вытекает необходимость условия 2° теоремы 4. Достаточность условий теоремы 4 доказывается без труда.

Следствие 2. *Операторы* ε_ν *представляют собой множители сходимости в последовательности для* P_0 *тогда и только тогда, когда*

1° $\|\varepsilon_\nu\| = o(1)$,

2° $\left\| P_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| = o(1)$.

Для доказательства следует иметь в виду, что если B сводится к методу сходимости, то условие 3° теоремы 4 превращается в

$$\lim_n \sup_{\substack{\|x_{n-1}\| \leqslant 1 \\ \|x_n\| \leqslant 1}} \left\| -P_{n-1} \frac{\varepsilon_n}{p_n} x_{n-1} + P_n \frac{\varepsilon_n}{p_u} x_n \right\| = 0, \tag{5}$$

откуда при $x_{n-1} = x_n$ вытекает условие 1° и при $x_{n-1} = \Theta$ — условие 2° следствия. Наоборот, из условий следствия следует условие (5).

Пример. Пусть $p_\nu > 0$ и $\lim\limits_\nu P_\nu = \infty$. Тогда числа

$$\varepsilon_\nu = \frac{p_\nu}{(P_\nu)^\sigma}$$

представляют собой множители сходимости в последовательности для P, если $\sigma > 1$ или $\sigma = 1$ и $\left\{\frac{p_\nu}{P_\nu}\right\}$ сходится. При $\sigma > 1$ числа ε_ν представляют собой даже множители сходимости в последовательности для P_0.

§ 2. Множители суммируемости в последовательности типов $(|P|, B)$ и $(|P|, |B|)$

1. Как известно, метод суммирования A дается при помощи преобразования последовательности в ряд матрицей $(\bar{\Delta} a_{n\nu})$, элементы обратной матрицы которой обозначим через $\xi'_{n\nu}$:

$$(\xi'_{n\nu}) = (\bar{\Delta} a_{n\nu})^{-1}.$$

Аналогично теореме 3 статьи [1] мы можем доказать следующую общую теорему.

Теорема 5. *Операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа $(|A|, B)$ тогда и только тогда, когда*

1° $\{\xi'_{\nu k}\, \varepsilon_\nu\, x\}$ B-суммируема $(x \in X;\ k = 0, 1, \ldots)$,

2° $\|\gamma^n_{k\nu}\| \leqslant M_n$ $(k,\ \nu = 0, 1, \ldots)$,

3° $\|\gamma_{n\nu}\| \leqslant M$ $(n, \nu = 0, 1, \ldots)$,

где

$$\gamma^n_{k\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{k} b_{n\mu}\, \xi'_{\mu\nu}\, \varepsilon_\mu,\quad \gamma_{n\nu} = \lim_k \gamma^n_{k\nu}. \tag{6}$$

Если $A = P$, то имеем

$$\gamma^n_{k\nu} = \begin{cases} P_\nu \dfrac{b_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu} + \sum\limits_{\mu=\nu+1}^{\infty} b_{n\mu}\varepsilon_\mu & \text{при } \nu < k, \\ P_k \dfrac{b_{nk}\varepsilon_k}{p_k} & \text{при } \nu = k, \\ 0 & \text{при } \nu > k, \end{cases} \tag{7}$$

откуда

$$\gamma_{n\nu} = P_\nu \frac{b_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu} + \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} a_{n\mu}\varepsilon_\mu. \tag{8}$$

Теорема 6. *Если P сохраняет абсолютную сходимость и существуют пределы $\lim\limits_n b_{n\nu}$, то операторы ε_ν являются множите-*

лями суммируемости в последовательности типа $(|P|, B)$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\{\varepsilon_\nu x\}$ *B-суммируема* $(x \in X)$,

2° $\| \sum_{\nu=0}^{k} b_{n\nu}\varepsilon_\nu \| \leqslant M \quad (n, k = 0, 1, \ldots)$,

3° $\left\| P_\nu \frac{b_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| \leqslant M \quad (n, \nu = 0, 1, \ldots)$.

Доказательство. Необходимость условия 1° непосредственно получается из условия 1° теоремы 5 при $k = 0$. Если операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа $(|P|, B)$, то для каждой $|P|$-суммируемой последовательности — и в частности для каждой абсолютно сходящейся последовательности $\{x_\nu\}$ — существует предел

$$\lim_n \sum_\nu b_{n\nu}\varepsilon_\nu x_\nu.$$

Поэтому, согласно лемме 5 статьи [1], необходимо выполнение условия 2°. Необходимость условия 3° теперь без труда вытекает из условия 3° теоремы 5.

Для доказательства достаточности условий теоремы 6 отметим, что, ввиду условия 1° теоремы 6, существует предел

$$\lim_n \left(P_k \frac{b_{nk}\varepsilon_k}{p_k} x + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} b_{n\nu}\varepsilon_\nu x\right) \quad (x \in X;\ k = 0, 1, \ldots),$$

т. е. выполнено условие 1° теоремы 5. Далее, поскольку в силу условия 2° теоремы 6 имеем

$$\| \sum_{\mu=\nu+1}^{k} b_{n\mu}\varepsilon_\mu \| \leqslant \| \sum_{\mu=0}^{k} b_{n\mu}\varepsilon_\mu \| + \| \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{n\mu}\varepsilon_\mu \| \leqslant 2M,$$

то из условия 3° теоремы 6 следует выполнение условий 2° и 3° теоремы 5.

Следствие 3. *Операторы* ε_ν *представляют собой множители сходимости в последовательности для* $|P|$ *тогда и только тогда, когда* [6]

1° $\{\varepsilon_\nu x\}$ *сходится* $(x \in X)$,

2° $\left\| P_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| = O(1)$.

[6] В теореме 6 предполагается, что P сохраняет абсолютную сходимость. При формулировке следствия 3 можно освободиться от этого предположения, если вывести следствие 3 прямо из теоремы 5.

2. Аналогично теореме 4 статьи [1] доказывается следующая общая теорема.

Теорема 7. *Операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа $(|A|, |B|)$ тогда и только тогда, когда*

1° *существует предел* $\lim\limits_k \gamma_{k\nu}^n$ $(x \in X;\ n, \nu = 0, 1, \ldots)$,

2° $\|\gamma_{k\nu}^n\| \leqslant M_n$ $(k,\ \nu = 0, 1, \ldots)$,

3° $\sum\limits_n \|\bar{\Delta}\gamma_{n\nu} x\| \leqslant M \|x\|$ $(x \in X;\ \nu = 0, 1, \ldots)$,

где $\gamma_{k\nu}^n$, $\gamma_{n\nu}$ вычисляются по формулам (6).

Если $A = P$, то $\gamma_{k\nu}^n$ и $\gamma_{n\nu}$ даются формулами (7) и (8).

Теорема 8. *Если P сохраняет абсолютную сходимость и существуют пределы* $\lim\limits_n b_{n\nu}$, *то операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа $(|P|, |B|)$ тогда и только тогда, когда*

1° $\sum b_{n\nu} \varepsilon_\nu x$ сходится $(x \in X;\ n = 0, 1, \ldots)$,

2° $\left\| P_\nu \dfrac{b_{n\nu} \varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| \leqslant M_n$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$,

3° $\sum\limits_n \| \sum\limits_{\nu=0}^{k} \bar{\Delta} b_{n\nu} \varepsilon_\nu x \| \leqslant M \| x \|$ $(x \in X;\ k = 0, 1, \ldots)$,

4° $\left\| P_\nu \dfrac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| \sum\limits_n |\bar{\Delta} b_{n\nu}| \leqslant M$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$.

Доказательство. Необходимость условий 1° и 2° непосредственно вытекает из условий 1° и 3° теоремы 6. Если операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа $(|P|, |B|)$, то для каждой $|P|$-суммируемой последовательности — и в частности для каждой абсолютно сходящейся последовательности $\{x_\nu\}$ — последовательность $\{\sum\limits_\nu b_{n\nu} \varepsilon_\nu x_\nu\}$ абсолютно сходится. Поэтому, согласно лемме 6 статьи [1], необходимо выполнение условия 3°. Необходимость условия 4° теперь без труда вытекает из условия 3° теоремы 7.

Для доказательства достаточности условий теоремы 8 достаточно иметь в виду, что условие 1° теоремы 7 непосредственно получается из условия 1° теоремы 8, условие 2° — из условий 1° и 2° теоремы 8, а условие 3° — из условий 3° и 4° теоремы 8.

Следствие 4. *Операторы* ε_ν *представляют собой множители абсолютной сходимости для* $|P|$ *тогда и только тогда, когда*[7]

1° $\{\varepsilon_\nu x\}$ *сходится абсолютно* $(x \in X)$,

2° $\left\| P_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right\| = O(1)$.

§ 3. Применение множителей суммируемости в последовательности к изучению множителей суммируемости в ряде

Операторы ε_ν называются множителями суммируемости в ряде типа (A, B) $((A_0, B), (A_0, B))$, если при каждом A-суммируемом (A-суммируемом к нулю, A-ограниченном) ряде Σu_ν ряд $\Sigma \varepsilon_\nu u_\nu$ B-суммируем. В этом параграфе мы предположим, что методы суммирования A и B регулярны, причем A, по-прежнему, нормален. Если, сверх того, метод A удовлетворяет теореме о среднем значении, т. е.

$$\| \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} x_\nu \| \leqslant M \max_{0 \leqslant \nu \leqslant k} \| x'_\nu \|,$$

где

$$x'_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\nu\mu} x_\mu,$$

то имеется некоторый связь между множителями суммируемости в ряде и в последовательности, как показали Пейеримхофф и Юркат в случае числовых множителей суммируемости[8]. Поскольку регулярный метод взвешенных средних Рисса удовлетворяет теореме о среднем значении, то для этого метода множители суммируемости в последовательности можно использовать к нахождению множителей суммируемости в ряде. Рассмотрим множители суммируемости в ряде типов (P, B) и (P_0, B).

1. Нетрудно убедиться, что для регулярного B множители суммируемости в ряде типов (A, B) и (A_0, B) совпадают. Если обозначим

$$x_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} u_\mu,$$

то для всех A-суммируемых к нулю рядов Σu_ν при помощи метода Шура без затруднений можно показать справедливость

[7] В теореме 8 предполагается, что P сохраняет абсолютную сходимость. При формулировке следствия 4 можно освободиться от этого предположения, если вывести следствие 4 прямо из теоремы 7.

[8] См. [3] — [5].

формулы

$$\lim_n \sum_\nu b_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \varepsilon_\mu u_\mu = \sum_\nu \gamma_\nu x_\nu', \tag{9}$$

где γ_ν — непрерывные линейные операторы из X в Y, удовлетворяющие условию

$$\sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \| \sum_{\nu=0}^{k} \gamma_\nu x_\nu \| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{10}$$

Из (9) при $u_\mu = \overline{\Delta} \delta_{\mu k} x$ ($x \in X$; $\delta_{\mu k}$ — элемент единичной матрицы) мы находим

$$\Delta \varepsilon_k = \sum_{\nu=k}^{\infty} a_{\nu k} \gamma_\nu, \tag{11}$$

где операторы γ_ν удовлетворяют условию (10).

Если A удовлетворяет теореме о среднем значении, то аналогично случаю числовых последовательностей можно показать справедливость соотношения [9]

$$\lim_p \sup_n \| \sum_{\nu=p}^{k} a_{n\nu} x_\nu \| = 0 \quad (k > p)$$

для каждой последовательности $\{x_\nu\}$, A-суммируемой к нулю. Из этого соотношения вытекает сходимость ряда $\Sigma (\Delta \varepsilon_\nu) x_\nu$ при каждой последовательности $\{x_\nu\}$, A-суммируемой к нулю. Действительно, в силу (11) имеем

$$\| \sum_{\nu=p}^{k} (\Delta \varepsilon_\nu) x_\nu \| = \| \sum_{n=p}^{\infty} \gamma_n \sum_{\nu=p}^{k'} a_{n\nu} x_\nu \| \leqslant$$

$$\leqslant M \sup_n \| \sum_{\nu=p}^{k'} a_{n\nu} x_\nu \| = o(1) \quad (\text{при } p \to \infty),$$

где $k' = \min(k, n)$. Так как

$$\sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu u_\nu = \sum_{\nu=0}^{k-1} (\Delta \varepsilon_\nu) x_\nu + \varepsilon_k x_k, \tag{12}$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть методы A и B регулярны и A удовлетворяет теореме о среднем значении. Тогда операторы ε_ν представляют собой множители суммируемости в ряде типа (A, B) тогда и только тогда, когда выполнено условие* (11) *и операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа (A_0, B).*

[9] см. [7].

Если $A = P$, то условие (11) имеет вид

$$\Delta\varepsilon_k = p_k \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{P_\nu}, \tag{13}$$

где операторы γ_ν удовлетворяют условию (10). Так же, как в случае числовых последовательностей, можно показать, что условие (13) равносильно условиям

$$\sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu \left(\Delta \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu \right\| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$\|\Delta\varepsilon_k\| = o\ (|p_k|).$$

Согласно примечанию 1, для того, чтобы операторы ε_ν были множителями суммируемости в последовательности типа (P_o, B), необходимо и достаточно выполнение условия 2° теоремы 2. Упростим это условие.

Так как

$$\Delta \frac{b_{n\nu}\varepsilon_\nu}{p_\nu} = b_{n\nu} \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu} + \left(\Delta \frac{b_{n\nu}}{p_\nu} \right) \varepsilon_{\nu+1},$$

а на основании (13)

$$\left\| P_k \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k} \right\| = O(1)$$

и, следовательно,

$$\sup_{\|x_\nu\| < 1} \left\| \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu b_{n\nu} \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu} x_\nu \right\| \leqslant M \quad (n,\ k = 0, 1, \ldots),$$

то условие 2° теоремы 2 можно заменить условием

$$\sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu \left(\Delta \frac{b_{n\nu}}{p_\nu} \right) \varepsilon_{\nu+1} x_\nu \right\| \leqslant M \quad (n,\ k = 0, 1, \ldots).$$

Тем самым из теоремы 9 получается следующий результат.

Теорема 10. *Операторы ε_ν представляют собой множители суммируемости в ряде типа (P, B) для регулярных P и B тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu \left(\Delta \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{P_\nu} \right) x_\nu \right\| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \quad \|\Delta\varepsilon_k\| = o(|p_k|),$$

$$3^\circ \quad \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu \left(\Delta \frac{b_{n\nu}}{p_\nu} \right) \varepsilon_{\nu+1} x_\nu \right\| \leqslant M \quad (n,\ k = 0, 1, \ldots).$$

2. Аналогично предыдущему можно показать, что для того, чтобы операторы ε_ν были множителями суммируемости в ряде типа (A_0, B), необходимо выполнение условия

$$\Delta\varepsilon_k = \sum_{\nu=k}^{\infty} a_{\nu k}\gamma_\nu, \tag{14}$$

где операторы γ_ν такие, что ряд $\Sigma\gamma_\nu x_\nu$ сходится равномерно при $\|x_\nu\| \leqslant 1$. Если теперь A удовлетворяет теореме о среднем значении, то для каждой A-ограниченной последовательности мы имеем

$$\Big\| \sum_{\nu=p}^{k} (\Delta\varepsilon_\nu) x_\nu \Big\| = \Big\| \sum_{n=p}^{\infty} \gamma_n \sum_{\nu=p}^{k'} a_{n\nu} x_\nu \Big\| = o(1) \quad (\text{при } p \to \infty),$$

так как суммы $\sum\limits_{\nu=p}^{k'} a_{n\nu} x_\nu$ ограничены. Тем самым ряд $\Sigma (\Delta\varepsilon\nu) x_\nu$ сходится при каждой A-ограниченной последовательности $\{x_\nu\}$, вследствие чего из тождества (12) вытекает следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть методы A и B регулярны и A удовлетворяет теореме о среднем значении. Тогда операторы ε_ν представляют собой множители суммируемости в ряде типа (A_0, B) тогда и только тогда, когда выполнено условие* (14) *и операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа (A_0, B).*

Аналогично теореме (10) из теоремы 11 при помощи теоремы 4 выводится следующий результат.

Теорема 12. *Операторы ε_ν представляют собой множители суммируемости в ряде типа (P_0, B) для регулярных P и B тогда и только тогда, когда*

1° $\Sigma P_\nu \left(\Delta \dfrac{\Delta\varepsilon_\nu}{p_\nu}\right) x_\nu$ *сходится равномерно при* $\|x_\nu\| \leqslant 1$,

2° $\|\Delta\varepsilon_\nu\| = o(|p_\nu|)$,

3° $\lim\limits_k \left\| P_k \dfrac{b_{nk}\varepsilon_k}{p_k} \right\| = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$,

4° $\lim\limits_n \sup\limits_{\|x_\nu\|\leqslant 1} \Big\| \sum\limits_\nu P_\nu \left(\Delta \dfrac{b_{n\nu}}{p_\nu}\right) \varepsilon_{\nu+1} x_\nu \Big\| = 0.$

Примечание 2. Если метод B треуголен, т. е. $b_{n\nu} = 0$ при $\nu > n$, то его можно определить при помощи преобразования ряда в последовательность матрицей $(\beta_{n\nu})$, причем $b_{n\nu} = \Delta\beta_{n\nu}$.

Тогда теоремы 10 и 12 представляют собой частные случай теорем 10 и 12 статьи [1]. В общем случае можно получить теоремы 10 и 12 статьи [1] для регулярного P, изложенным в настоящем параграфе методом, если при нахождении множителей суммируемости в последовательности типов (P_0, B) и (P_0, B) задать метод B вместо матрицы $(b_{n\nu})$ матрицей $(\beta_{n\nu})$ преобразования ряда в последовательность. Приводим без доказательства соответствующие результаты.

Теорема 13. *Операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа (P_0, B) при регулярных P и B тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad \left\| P_k \frac{\beta_{nk}\varepsilon_k}{p_k} \right\| \leqslant M_n \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \quad \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \| \sum_{\nu=0}^{k} P_\nu \Delta \left(\frac{(\Delta\beta_{n\nu})\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu \| \leqslant M \quad (n, k = 0, 1, \ldots).$$

Теорема 14. *Операторы ε_ν являются множителями суммируемости в последовательности типа (P_0, B) при регулярных P и B тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad \lim_k \left\| P_k \frac{\beta_{nk}\varepsilon_k}{p_k} \right\| = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$2^\circ \quad \lim_k \left\| P_k (\Delta\beta_{nk}) \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right\| = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$3^\circ \quad \lim_n \sup_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \| \sum_\nu P_\nu \left(\Delta \frac{(\Delta\beta_{n\nu})\varepsilon_\nu}{p_\nu} \right) x_\nu \| = 0.$$

Из теорем 13 и 14 нетрудно вывести теоремы 10 и 12 статьи [1] для регулярного P.

Литература

1. Кангро Г., Вихман Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Настоящий журнал, стр. 209—225.
2. Bosanquet, L. S., On convergence and summability factors in a sequence. Mathematika, 1954, **1**, 24—44.
3. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 1952, **55**, 92—108.
4. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1953, **58**, 186—203.
5. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1952, **55**, 23—54.

6. Tyler, B., Absolute convergence and summability factors in a sequence. J. London Math. Soc., 1958, **33**, 341—351.
7. Wilansky, A., Zeller, K., Abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen; starke Limitierbarkeit. Math. Z., 1955, **64**, 258—269.

Поступило
21 V 1960

JADA SUMMEERUVUSTEGURID RIEZSI KAALUTUD KESKMISTE MENETLUSE PUHUL

G. Kangro ja M. Tõnnov
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Olgu $\{x_\nu\}$ Banachi ruumi X elementide jada ja ε_ν — pidevad lineaarsed operaatorid ruumist X Banachi ruumi Y. Operaatoreid ε_ν nimetatakse jada summeeruvustegureiks tüüpi (A, B) $((A_0, B), A_0, B), (|A|, B))$, kui iga A-summeeruva (nulliks A-summeeruva, A-tõkestatud, absoluutselt A-summeeruva) jada $\{x_\nu\}$ korral jada $\{\varepsilon_\nu x_\nu\}$ osutub B-summeeruvaks. Analoogiliselt defineeritakse jada summeeruvustegurid tüüpi $(|A|, |B|)$. Jada summeeruvustegurid tüüpi (C_α, C_β) ja $(|C_\alpha|, |C_\beta|)$, kus C_α tähendab α-järku Cesàro menetlust, on arvjadade puhul uurinud Bosanquet [2] ja Tyler [6]. Käesolevas töös antakse tarvilikud ja piisavad tingimused jada summeeruvustegureile tüüpi (P, B), (P_0, B), (P_0, B), $(|P|, B)$ ja $(|P|, |B|)$, kus P on Rieszi kaalutud keskmiste menetlus ja B suvaline maatriksmenetlus. Jada summeeruvustegureid tüüpi (P_0, B) ja (P_0, P) rakendatakse rea summeeruvustegurite uurimiseks.

FOLGENSUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR DAS VERFAHREN DER BEWICHTETEN MITTEL VON RIESZ

G. Kangro und M. Tõnnov

Zusammenfassung

Es seien $\{x_\nu\}$ eine Folge von Elementen des Banachschen Raumes X und ε_ν — stetige lineare Operatoren aus X in einen Banachschen Raum Y. Man nennt die Operatoren ε_ν Folgensummierbarkeitsfaktoren des Typus (A, B) $((A_0, B), (A_0, B), (|A|, B))$, wenn für jede A-summierbare (zu Null A-summierbare, A-beschränkte, absolut A-summierbare) Folge $\{x_\nu\}$ die Folge $\{\varepsilon_\nu x_\nu\}$ B-summierbar ist. Ganz analog definiert man Folgensummierbarkeitsfaktoren des Typus $(|A|, |B|)$. Folgensummierbarkeitsfaktoren der Typen (C_α, C_β) und $(|C_\alpha|, |C_\beta|)$, wo C_α das Cesàrosche Verfahren der Ordnung α bedeutet, haben für Zahlenfolgen Bosanquet [2] und Tyler [6] untersucht. In der vorliegenden Arbeit werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Folgensummierbarkeitsfaktoren der Typen (P, B), (P_0, B), (P_0, B), $(|P|, B)$ und $(|P|, |B|)$, wo P das Verfahren der bewichteten Mittel von Riesz und B ein willkürliches Matrixverfahren bezeichnet, aufgestellt. Folgensummierbarkeitsfaktoren der Typen (P_0, B) und (P_0, B) werden zur Untersuchung der Reihensummierbarkeitsfaktoren angewendet.

О РЕШЕНИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О ЧЕТЫРЕХ КРАСКАХ

Х. Яаксон
Кафедра математического анализа

1. Как известно [1], топологическая проблема о четырех красках может быть рассматриваема как топологическая проблема о двух красках с решениями первого вида.

Всякое решение задачи о двух красках дается парой сопряженных зон, отделенных друг от друга замкнутыми межзональными линиями. В общей проблеме о двух красках безразлично, являются ли межзональные линии четными или нечетными, т. е. состоящими из четного или же нечетного числа звеньев. Если же потребовать, чтобы все эти линии без исключения были четными, то мы имеем дело уже со специальной проблемой о двух красках. Оказывается, что задача о четырех красках и специальная задача о двух красках столь тесно связаны друг с другом, что исходя из любого решения одной из этих задач нетрудно построить соответственные решения другой задачи.

В данной работе мы займемся изучением специальной проблемы о двух красках.

В главе I мы введем понятие характеристики и дадим применения характеристик, в частности, при выводе необходимых условий для пары сопряженных зон.

В главе II мы сведем построение решений специальной задачи о двух красках к построению начальных условий в виде систем $S(\mathrm{I})$ и $S(\mathrm{II})$, удовлетворяющих условию A. Мы покажем, что условие A является для нашей цели достаточным.

В части II работы будут изучаться вопросы о выполнимости условия A, о построении систем $S(\mathrm{I})$ и $S(\mathrm{II})$ и о классификации решений специальной задачи о двух красках.

I
Характеристики и их применения

2. **Определения**. Мы будем называть характеристикой m-угольника целое число

$$k_m = m - 2 \quad (m = 2, 3, 4, \ldots).$$

Мы будем называть характеристикой системы многоугольников сумму характеристик многоугольников, входящих в эту систему.

Сообразно этому мы будем, в частности, называть характеристикой данной топологической карты сумму характеристик всех многоугольников этой карты.

3. Рассмотрим два приема, каждый из которых позволяет уменьшить порядок карты на 1, и выясним, как от этого изменятся характеристики отдельных многоугольников и всей карты.

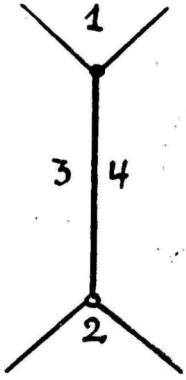


Рис. 1

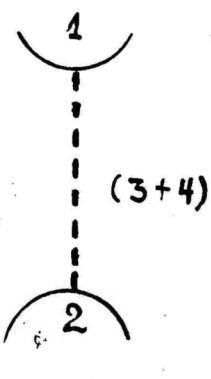


Рис. 2

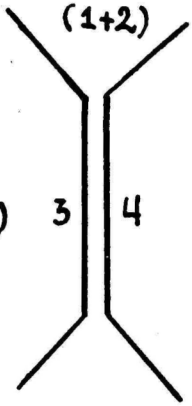


Рис. 3

Берем часть карты с четырьмя многоугольниками: 1, 2, 3, 4 (Рис. 1). Характеристиками их пусть будут соответственно числа: m_1, m_2, m_3, m_4.

Предположим, что многоугольники 3 и 4 не имеют более одной общей стороны. Тогда позволительно удалить эту общую сторону, в результате чего от слияния друг с другом многоугольников 3 и 4 образуется новый многоугольник $(3+4)$ (Рис. 2), а характеристику K $(3+4)$ его дает

Лемма 1.

$$K\ (3+4) = m_3 + m_4 - 2. \qquad (1)$$

Предположим теперь, что число сторон у каждого из многоугольников 3 и 4 не меньше, чем 4. Тогда можно провести коридор вдоль их общей стороны и посредством него привести к слиянию друг с другом многоугольники 1 и 2. Образуется новый многоугольник $(1+2)$. Характеристику K $(1+2)$ его дает

Лемма 2.

$$K\ (1+2) = m_1 + m_2. \qquad (2)$$

Примечание. Когда первое предположение не соответствует действительности, то, как нетрудно понять, второе предположение непременно будет выполнено, а поэтому во всяком случае по крайней мере один из описанных только что приемов применим. Каждый из них вызывает понижение порядка карты на 1.

Принимая, в одном случае, во внимание формулу (1) и изменения в числе сторон у многоугольников 1 и 2 (Рис. 2), а, в другом случае, — формулу (2) и изменения в числе сторон у многоугольников 3 и 4 (Рис. 3), нетрудно проверить, что, как в одном, так и в другом случае верна

Теорема 1. *Понижение порядка карты на 1 при применении каждого из вышеописанных приемов вызывает уменьшение характеристики карты на 4.*

4. Зависимость характеристики K_n топологической карты от порядка n этой карты устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Характеристика K_n всякой нормальной топологической карты порядка n равна 4n*

$$K_n = 4n. \tag{3}$$

Для доказательства теоремы используем результаты, полученные в предыдущем пункте (п. 3). Как мы там видели, всегда возможно привести данную нормальную карту порядка n к новой нормальной карте порядка $n-1$. При этом характеристика новой карты на 4 меньше характеристики первоначальной карты $K_n - 4 = K_{n-1}$. Аналогично, последнюю карту можно, в свою очередь, привести к новой, причем $K_{n-1} - 4 = K_{n-2}$ или же $K_n - 2.4 = K_{n-2}$. Через n этапов мы приведем ее к карте нулевого порядка, причем $K_n - n4 = K_0$. Но характеристика K_0 карты нулевого порядка равна нулю, так как карта нулевого порядка состоит из трех двуугольников, а характеристика двуугольника, согласно определению, равна нулю. По сему $K_n - 4n = 0$, откуда и получается формула (3).

5. При помощи формулы (3) выведем теперь новую формулу, имеющую важное значение при изучении структуры топологической карты. Пусть дана карта n-го порядка. Пусть среди многоугольников на ней многоугольником с наибольшим числом сторон будет m-угольник. Обозначим через a_h число h-угольников на нашей карте ($h \leqslant m$), а через k_h характеристику h-угольника. Когда на данной карте нет некоторых h-угольников, то соответствующие $a_h = 0$.

Число всех многоугольников на данной карте N выразится, очевидно, так:

$$N = a_2 + a_3 + \ldots + a_h + \ldots + a_m.$$

С другой стороны, $N = n + 3$, где n порядок карты. Значит,

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_h + \ldots + a_m = n + 3$$

и

$$k_2a_2 + k_3a_3 + \ldots + k_ha_h + \ldots + k_ma_m = 4n.$$

Из этих двух равенств элиминируем n. Тогда получим $(k_2 - 4)a_2 + (k_3 - 4)a_3 + \ldots + (k_h - 4)a_h + \ldots + (k_m - 4)a_m =$

$= -12$. Ввиду того, что $k_6 = 4$, член $(k_6 - 4)\alpha_6 = 0$ независимо от того, какова рассматриваемая карта.

Назовем весом h-угольника число $p_h = k_h - 4 = h - 6$ и весом всякой системы многоугольников сумму весов этих многоугольников.

Тогда полученное равенство может быть переписано в виде

$$\sum_{h=2}^{m} p_h \alpha_h = -12. \qquad (4)$$

Отсюда

Теорема 3. *Вес всякой нормальной топологической карты неизменно равен* -12.

Примечание. Введенное только что понятие веса многоугольника позволяет провести следующую классификацию многоугольников:

h-угольник считается мелким, когда $p_h < 0$, промежуточным, когда $p_h = 0$ и крупным, когда $p_h > 0$. Согласно этому, к мелким следует отнести двуугольники, треугольники, четырехугольники и пятиугольники, к промежуточным — шестиугольники и к крупным — многоугольники, число сторон которых $\geqslant 7$.

Из формулы (4) вытекают непосредственно некоторые следствия:

Следствие 1. *Из одних мелких многоугольников можно составить лишь конечное число нормальных топологических карт.*

Следствие 2. *Из одних шестиугольников невозможно образовать ни одной нормальной топологической карты* ([2], [3]).

Следствие 3. *Всякая нормальная топологическая карта, состоящая из одних пяти- и шестиугольников, содержит неизменно* 12 *пятиугольников.*

Следствие 4. *Не существует такой нормальной топологической карты, которая не содержала бы ни одного мелкого многоугольника* ($\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = 0$) ([2], [3]).

Следствие 5. *Если* $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$, *то* $\alpha_5 = 12 + \sum_{h=7}^{m} p_h \alpha_h$

и $\alpha_6 = N - \alpha_5 - \sum_{h=7}^{m} \alpha_h = N - 12 - \sum_{h=7}^{m} (p_h + 1)\alpha_h$.

6. Пусть данная нормальная топологическая карта n-го порядка разбита на пару сопряженных зон Z_1 и Z_2. Так как эти две зоны (Z_1 и Z_2) охватывают все многоугольники данной карты, то сумма их характеристик равна характеристике карты ($4n$):

$$K(Z_1) + K(Z_2) = 4n. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что $K(Z_1)$ и $K(Z_2)$ либо оба четные, либо оба нечетные числа. Вопрос о четности или нечетности $K(Z_1)$ и $K(Z_2)$ окончательно решается следующей теоремой.

Теорема 4. *Характеристики сопряженных зон $K(Z_1)$ и $K(Z_2)$ обе четные числа.*

Докажем теорему при помощи метода совершенной индукции. Не представляет никакого труда убедиться в верности теоремы для карт нулевого и первого порядка. Остается, значит, доказать, что если теорема верна для всех нормальных топологических карт до порядка n —-1 (включительно), то она останется верной и для карт n-го порядка.

Итак, пусть дана нормальная карта n-го поряка и пусть ее многоугольники разбиты на пару сопряженных зон Z_1 и Z_2. Выберем два смежных многоугольника, принадлежащих одной и той же зоне (скажем, зоне Z_2). Снабдим их номерами 3 и 4. Их общая сторона опирается тогда концами на многоугольники 1 и 2, принадлежащие зоне Z_1 (Рис. 1). Могут представиться два случая: либо многоугольники 3 и 4 не имеют более одной общей стороны, либо же число их общих сторон больше единицы.

В первом случае, согласно п. 3, мы можем привести многоугольники 3 и 4 к слиянию друг с другом, удаляя их общую сторону (Рис. 2), в результате чего порядок карты понизится на 1, а характеристики зоны Z_2, как и зоны Z_1 уменьшатся обе на 2. Во втором случае (п. 3) мы можем привести к слиянию многоугольники 1 и 2 через коридор вдоль общей стороны многоугольников 3 и 4 (Рис. 3), в результате чего порядок карты опять-таки понизится на 1, характеристика зоны Z_1 останется неизменной, а характеристика зоны Z_2 уменьшится на 4.

Как в том, так и в другом случае операция понижения порядка карты связана с уменьшением характеристик зон на четные числа, а, значит, обратная операция, т. е. восстановление первоначальной карты, связана с увеличением их на четные числа. По предположению теорема верна для всех нормальных топологических карт до порядка $n-1$ (включительно). Следовательно и характеристики зон для образовавшихся выше карт $(n-1)$-го порядка суть также числа четные. Увеличивая их на соответствующие четные числа, получим характеристики зон первоначальной карты, которые являются таким образом тоже четными числами. Этим наша теорема доказана.

7. Пусть данная нормальная топологическая карта раскрашена четырьмя красками a, b, c, d соответственно основным условиям, предъявляемым в топологической проблеме о четырех красках. Обозначим через $S(a), S(b), S(c), S(d)$ системы многоугольников, раскрашенных соответственно красками a, b, c, d; а их характеристики — через $K(a), K(b), K(c), K(d)$.

Теорема 5. *Характеристики $K(a), K(b), K(c), K(d)$ являются все зараз либо четными, либо нечетными числами.*

В самом деле, раскраске данной карты четырьмя красками a, b, c, d соответствуют три различные разбивки этой карты на пары сопряженных зон.

Разбивка карты	Зона Z_1	Зона Z_2
Разбивка 1	$S(a)$ и $S(b)$	$S(c)$ и $S(d)$
Разбивка 2	$S(a)$ и $S(c)$	$S(b)$ и $S(d)$
Разбивка 3	$S(a)$ и $S(d)$	$S(c)$ и $S(b)$

Для каждой из этих шести зон применима теорема 4 (п. 6). Поэтому каждая из шести сумм:

$$K(a)+K(b), \qquad K(c)+K(d);$$
$$K(a)+K(c), \qquad K(b)+K(d);$$
$$K(a)+K(d), \qquad K(b)+K(c)$$

является числом четным, откуда непосредственно следует верность теоремы 5.

8. Теорема 6. *Необходимым условием для того, чтобы межзональная линия была цельной, нераспаадющейся на части замкнутой линией, является равенство характеристик зон*

$$K(Z_1)=2n=K(Z_2), \tag{6}$$

где n — порядок рассматриваемой топологической карты.

Докажем теорему при помощи метода совершенной индукции. В верности теоремы для карт нулевого и первого порядка можно легко убедиться непосредственно. Остается доказать, что если теорема верна для карт до порядка $n-1$ (включительно), то она остается верной и для карт порядка n.

Пусть мы имеем дело с разбивкой на пару сопряженных зон карты n-го порядка, причем межзональная линия не распадается на части.

Приведем к слиянию друг с другом два смежных многоугольника одной и той же зоны, удаляя их общую сторону, опирающуюся обоими концами на межзональную линию. Как мы видели выше, результатом этой операции является, с одной стороны, понижение порядка карты на 1, с другой же стороны, уменьшение на 2 характеристик обеих зон

$$K(Z_1')=K(Z_1)-2,\ K(Z_2')=K(Z_2)-2.$$

По предположению теорема верна для получившейся карты $n-1$-го порядка

$$K(Z_1')=2(n-1)=K(Z_2').$$

Отсюда непосредственно следует, что теорема верна и для карт n-го порядка. Этим теорема доказана.

9. Теорема 7. *Необходимое условие для того, чтобы при разбивке данной карты на пару сопряженных зон Z_1 и Z_2 одна зона оказалась связной областью, а другая зона Z_2 распалась на $p+1$ частей, изолированных друг от друга многоугольниками зоны Z_1, состоит в том, что*

$$K(Z_1) = K(Z_2) + 4p. \tag{7}$$

При доказательстве теоремы будем иметь в виду, что в рассматриваемом случае межзональная линия очевидно распадается на $p+1$ отличных друг от друга замкнутых линий. Каждая из этих линий имеет по крайней мере две линии связи с другой или с другими частями межзональных линий. Эти линии связи являются общими сторонами многоугольников зоны Z_1, опирающимися одним концом на одну и другим концом на другую межзональную линию. Число сторон у этих многоугольников больше или равно 4. Поэтому, согласно *п.* 3, вдоль общей стороны этих многоугольников можно провести коридор, соединяющий первоначально отделенные друг от друга обе части зоны Z_2. Через стенки коридора сливаются в одну замкнутую межзональную линию две первоначально различные линии. Число их уменьшится таким образом на 1. Характеристика зоны Z_1 уменьшится на 4, а характеристика зоны Z_2 останется неизменной. В результате p таких операций мы дойдем до карты с нераспадающейся на части межзональной линией. На основании теоремы 6

$$K(Z_1') = 2(n-p) = K(Z_2'),$$

но

$$K(Z_1') = K(Z_1) - 4p,\ K(Z_2') = K(Z_2),$$

так что $K(Z_1) - 4p = K(Z_2)$ или же $K(Z_1) = K(Z_2) + 4p$, что и требовалось доказать.

Из формул (7) и (5) вытекает

Следствие:

$$K(Z_1) = 2n + 2p,\ K(Z_2) = 2n - 2p. \tag{8}$$

10. Теорема 8. *Необходимое условие для того, чтобы при разбивке данной карты на пару сопряженных зон Z_1 и Z_2 зона Z_1 распалась на $q+1$ изолированных частей и зона Z_2 на $p+1$ изолированных частей, состоит в том, что*

$$K(Z_1) = K(Z_2) + 4p - 4q. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 8 аналогично доказательству теоремы 7.

Из формул (9) и (5) вытекает

Следствие:

$$K(Z_1) = 2n + 2p - 2q,\ K(Z_2) = 2n - 2p + 2q. \tag{10}$$

Отсюда при $q = p$ получим

$$K(Z_1) = 2n = K(Z_2),$$

причем безразлично, будет ли $p = 0$ (п. 8) или же $p > 0$ (п. 10).

II

Система начальных условий и связанные с нею решения

11. При решении специальной задачи о двух красках для данной нормальной топологической карты необходимо все многоугольники этой карты разбить на пару сопряженных зон Z_1 и Z_2 так, чтобы межзональные линии все, без исключения, состояли из четного числа звеньев.

Оказывается, что достаточно лишь часть многоугольников отметить зональными значками I, II и для части многоугольников оставить покамест открытым вопрос о принадлежности их той или другой зоне. Часть многоугольников, отмеченных значками I, дает систему S(I). Аналогично многоугольники, отмеченные значками II, составляют систему S(II), а обе эти системы вместе взятые образуют систему S (I, II). Раз система S (I, II) образована удачно, т. е. раз для нее выполняются известные условия, то такая система вполне гарантирует существование для данной карты специальных решений о двух красках, позволяя без труда определить для каждого из многоугольников, не вошедших в систему S (I, II), принадлежность его зоне Z_1 или же зоне Z_2. В общем случае это добавочное распределение по зонам может быть произведено различным образом. В соответствии с этим получатся и различные решения, число которых может быть подчас весьма значительным. То общее, что у всех них имеется, — это система S (I, II). Условимся называть ее системой начальных условий.

12. Впредь мы будем рассматривать лишь такие системы S (I, II), для которых выполняются следующие условия (A):

(A)
1° система S (I) содержит изолированные друг от друга многоугольники; то же самое относится и к системе S (II);
2° система S (I, II) представляет собою зону, так что к каждой узловой точке данной карты сходится по крайней мере один многоугольник из системы S (I, II);
3° зона, образованная многоугольниками системы S (I, II), является связной областью.

По условию 1° в системе S(I) нет пары смежных многоугольников, т. е. многоугольников, имеющих общую сторону; то же самое относится и к системе S (II). Отсюда следует, что многоугольник данной карты, к которому примыкает по крайней мере один многоугольник системы S (I) и по крайней мере один мно-

гоугольник системы S (II), не входит в систему S (I, II). Будем отмечать его знаком — (минус). Ясно, что к каждой узловой точке данной карты сходится по крайней мере один многоугольник, не входящий в систему S (I, II) и имеющий следовательно значок —. Все эти многоугольники вместе составляют систему S (—), которая, как не трудно видеть, представляет собою зону, сопряженную с зоной S (I, II).

В то время, как зона, образованная системой S (I, II), по условию 3°, представляет собою связную область, система S (—) в общем случае дает зону несвязную, распадающуюся на $(p+1)$ частей $(p \geqslant 0)$; только в частном случае, когда $p=0$, и система S (—) будет связной.

13. Теорема 9. *Межзональные линии, соответствующие паре сопряженных зон S (I, II) и S (—), имеют все четные числа звеньев.* В случае $p=0$ это очевидно, так как в этом случае цельная, нераспадающаяся на части межзональная линия проходит через все узловые точки данной карты, а число их, как известно, равно $2(n+1)$, где n — порядок данной карты.

Когда $p>0$, то межзональная линия состоит из $p+1$ замкнутых линий. Рассмотрим ближе какую-нибудь одну из них. На нее опираются вообще как с одной, так и с другой стороны общие стороны двух смежных многоугольников как зоны S (I, II), так и зоны S (—). Одни из этих сторон, а именно стороны из зоны S (—), опираются на межзональную линию обоими концами, другие же стороны, а именно стороны из зоны S (I, II), опираются одним концом на одну и другим концом на другую межзональную линию. Каждой стороне первой категории соответствует пара узловых точек, а каждой стороне второй категории — одна узловая точка на рассматриваемой части межзональной линии. Следовательно, остается лишь убедиться в том, что число сторон второй категории, опирающихся на рассматриваемую линию, есть число четное. А это действительно так, потому что каждая сторона второй категории отделяет друг от друга многоугольник со значком I от многоугольника со значком II. А так как, в силу условия 1°, вдоль нашей линии расположены попеременно многоугольники со значками I и II, то ясно, что число сторон II категории, опирающихся на нашу линию, число четное. Таким образом рассматриваемая часть межзональной линии проходит действительно через четное число узловых точек и состоит, следовательно, из четного числа звеньев.

То же самое относится, конечно, к любой из $(p+1)$ частей межзональной линии.

Следствие. *Пара сопряженных зон S (I, II) и S (—) дает специальное решение о двух красках, а, следовательно, и решение о четырех красках для данной топологической карты.*

Последнее получается так. Из четырех красок a, b, c, d берем одну краску, скажем a, и раскрасим ею все многоугольники системы S (I); аналогично другой краской, скажем b, раскрасим

все многоугольники системы S (II). Двумя оставшимися красками c и d раскрасим все многоугольники системы S (—) и сделаем это так, чтобы ни одна пара смежных многоугольников системы S (—) не оказалась раскрашенной одной и той же краской (c и d). А это вполне возможно, потому что ни зона S (—), ни какая-нибудь из $(p+1)$ частей ее не представляет собою кольцеобразной области, как это следует из условия 3°. Ведь в противном случае часть зоны S (I, II) была бы изолирована от остальной части этой кольцеобразной областью, а, значит, S (I, II) не была бы связной, что противоречило бы нашему предположению. Берем какой-нибудь многоугольник одной из $(p+1)$ частей системы S (—). Раскрасим его, скажем, краской c, раскрасим краской d все смежные с ним многоугольники системы S (—), раскрасим краской c все смежные с последним многоугольники системы S (—) и т. д. Поступая так повторно, мы можем быть уверены в том, что в конце концов все многоугольники рассматриваемой части зоны S (—) окажутся раскрашенными и при том так, что не получится ни одной пары смежных многоугольников, которые были бы раскрашены одной и той же краской. Последнее явление могло бы произойти, очевидно, лишь в случае кольцеобразности рассматриваемой части зоны S (—), но этого, как мы только что видели, быть не может.

Раскрашивая аналогично все $(p+1)$ частей зоны S (—) красками c и d, вдобавок к раскраске красками a, b зоны S (I, II), мы и получим в результате решение задачи о четырех красках для данной топологической карты.

14. При определении числа решений следует иметь в виду, что два решения не считаются различными, если они отличаются друг от друга лишь тем, что все значки c заменены значками d и наоборот или же все значки a — значками b и наоборот и. т. д. Поэтому зафиксируем значки трех многоугольников, сходящихся к одной узловой точке. Пусть эти многоугольники будут: один из системы S (I), другой из S (II) и третий из S (—). Раскрасим их соответственно красками a, b, c. Оставив их раскраску неизменной, сосчитаем, сколькими различными способами можно раскрасить остальные многоугольники. Не трудно видеть, что в рассматриваемом нами случае число различных раскрасок равно 2^p, так как из $p+1$ частей зоны S (—) все, кроме одной, допускают по 2 раскраски.

15. Разбивка данной карты на зоны S (I, II) и S (—) дала нам одно решение специальной задачи о двух красках. Из него мы получили 2^p различных решений задачи о четырех красках. Используя теперь эти последние, можем легко образовать новые решения специальной задачи о двух красках. Действительно S (—) можно рассматривать как состоящую их следующих пар систем:

$$S_i(c),\ S_i(d) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p+1),$$

где $S_i(c)$ и $S_i(d)$ обозначают системы многоугольников, раскрашенных соответственно краской c или краской d.

Мы можем отнести к зоне Z_1: 1) $S(\mathrm{I})$ и $S_i(c)$ или же 2) $S(\mathrm{I})$, $S_i(d)$, а к зоне Z_2 соответственно: 1) S (II), $S_i(d)$ или же 2) $S(\mathrm{II})$, $S_i(c)$.

Вместе с прежним решением будем таким образом иметь всего $2^{p+1}+1$ решений специальной задачи о двух красках для данной топологической карты.

Согласно теореме VII, число p удовлетворяет соотношению

$$K(\mathrm{I}, \mathrm{II}) - K(-) = 4p,$$

где $K(\mathrm{I}, \mathrm{II})$ и $K(-)$ суть характеристики систем $S(\mathrm{I}, \mathrm{II})$, $S(-)$. Полученные результаты можно сформулировать в виде теоремы:

Теорема 10. *Система начальных условий* $S(\mathrm{I}, \mathrm{II})$, *удовлетворяющая условиям* (A), *позволяет сконструировать* 2^p *различных решений задачи о четырех красках и* $2^{p+1}+1$ *решений специальной задачи о двух красках. Число* p *определяется при этом из равенства*

$$K(\mathrm{I}, \mathrm{II}) - K(-) = 4p.$$

Примечание. Следует иметь в виду, что полученные только что решения далеко не исчерпывают всего запаса различных решений.

Вопрос о числе различных решений задачи о четырех красках подробно разработан Ю. Нуутом [4].

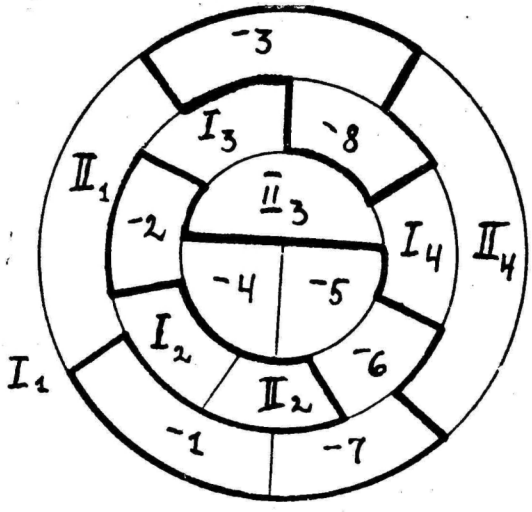


Рис. 4.

Пример. Дадим (Рис. 4) системы $S(\mathrm{I}, \mathrm{II})$ и $S(-)$ для карты порядка $n=13$, причем $p=1$.

Следствие из теоремы 10. *Для доказательства теоремы о существовании решений топологической проблемы о че-*

тырех красках достаточно показать, что для каждой нормальной карты можно построить систему начальных условий S (I, II), удовлетворяющую условиям A.

При этом, нисколько не нарушая общности результата, можно ограничиться рассмотрением лишь неприводимых топологических карт, так как приводимая карта, как известно, может быть разбита на конечное число неприводимых составляющих карт, а по решениям для последних без всякого труда строятся и решения для приводимой карты.

Литература

1. Яаксон Х., О решениях топологической проблемы о двух красках. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 43—62.
2. Heawood, P. J., Map-colour theorem. Quart. J. Math., 1890, **24**, 332—338.
3. Sarv, J., Zum Beweis des Vierfarbensatzes. Уч. зап. Тартуск. ун-та, сер. A, 1927, **13**, 1—10.
4. Nuut, J., Uber die Anzahl der Lösungen der Vierfarbenaufgabe. Уч. зап. Тартуск. ун-та, сер. A, 1929, **15**, 1—52.

Поступило
22 II 1960

TOPOLOOGILISE NELJAVÄRVIÜLESANDE LAHENDEIST

H. Jaakson

Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas töös käsitletakse spetsiaalset topoloogilist kahevärviülesannet. See ülesanne on niivõrd tihedalt seotud topoloogilise neljavärviülesandega, et lähtudes ühe ülesande mingist lahendist, osutub võimalikuks ilma raskusteta konstrueerida teise ülesande vastavad lahendid.

I peatükis antakse karakteristika mõiste ja esitatakse karakteristika rakendusi, eriti tarvilikkude tingimuste tuletamisel kaasvööndite paaride tarvis.

II peatükis taandatakse spetsiaalse kahevärviülesande lahendite konstrueerimine teatavate algtingimuste süsteemide konstrueerimisele. Viimased esinevad kujul $S(I)$ ja $S(II)$, mis rahuldavad tingimust A. Töös näidatakse, et tingimus A on piisav eespool nimetatud taanduse teostumiseks.

ÜBER DIE LÖSUNGEN DER TOPOLOGISCHEN VIERFARBENAUFGABE

H. Jaakson

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die spezielle topologische Zweifarbenaufgabe und ihre Lösungen untersucht. Diese Aufgabe ist so eng mit der topologischen Vierfarbenaufgabe verknüpft, daß man auf Grund irgend einer Lösung der einen Aufgabe ohne Schwierigkeit im Stande ist, die entsprechenden Lösungen der anderen Aufgabe zu konstruieren.

Im Kapitel I wrid der Begriff der Charakteristik eingeführt und sodann angewandt, besonders bei der Aufstellung einiger notwendigen Bedingungen für die konjugierten Zonenpaare, durch welche die Lösungen der topologischen Zweifarbenaufgabe gebildet werden.

Im Kapitel II wird die Lösung der speziellen Zweifarbenaufgabe auf die Bildung einer gewissen Bedingung A genügender Systeme von Anfangsbedingungen $S(I)$ und $S(II)$ reduziert. Die Bedingung A erweist sich dabei als hinreichend.

О ПОВЕРХНОСТЯХ С ПОЛЯМИ АБСОЛЮТНО ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Р. Муллари
Кафедра геометрии

В настоящей работе рассматриваются m-мерные поверхности V_m в евклидовом пространстве R_n. К каждому одномерному направлению в плоскости R_m, касательной к V_m, присоединяется некоторая вполне ортогональная система направлений (не обязательно одномерных) в R_m, называемых главными направлениями относительно данного одномерного направления [1]. Если некоторое направление в R_m является главным относительно всех одномерных направлений из R_m, то его называют *абсолютно главным направлением поверхности.* В случае поверхности V_2 в R_4 такие направления определены в [8].

Изучаются поверхности V_m в R_n, обладающие полем p-мерных абсолютно главных направлений. При $p=1$ удалось исследование довести до конца лишь для m-сопряженных систем [3] из абсолютно главных направлений. Частным случаем таких поверхностей являются m-мерные поверхности Клиффорда [2].

При $p=2$ изучаемые поверхности V_m с одним полем двумерных абсолютно главных направлений, не вырожденные тангенциально [4], оказываются поверхностями переноса двух вполне ортогональных поверхностей, причем одна из переносимых поверхностей является минимальной поверхностью V_2 с круговой индикатрисой нормальной кривизны [5]. При $p>2$ существование абсолютно главного p-направления равносильно тангенциальному вырождению поверхности V_m в этом направлении.

Автор выражает благодарность доц. Ю. Г. Лумисте, который при составлении настоящей работы помог ему многими ценными указаниями.

§ 1. Абсолютно главные направления

1. Пусть в точке M m-мерной поверхности V_m n-мерного евклидова пространства R_n задан подвижный репер M, $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}_\alpha$ ($a, b, \ldots = 1, \ldots, m$; $\alpha = m+1, \ldots, n$), где векторы $\boldsymbol{e}_a$ лежат

в касательной плоскости R_m, а векторы $\boldsymbol{e}_\alpha$ в нормальной плоскости R_{n-m} поверхности V_m в точке M. Поверхность V_m определяется системой $\omega^\alpha = 0$, при продолжении [6] которой получим

$$\omega^\alpha_a = b^\alpha_{ab}\,\omega^b; \quad b^\alpha_{ab} = b^\alpha_{ba}.$$

Выберем два произвольных единичных касательных вектора $\boldsymbol{p} = p^a\boldsymbol{e}_a$ и $\boldsymbol{q} = q^a\boldsymbol{e}_a$ поверхности V_m в точке M. Вектор

$$\boldsymbol{R}[(p), (q)] = p^a q^b \boldsymbol{b}_{ab},$$

где $\boldsymbol{b}_{ab} = b^\alpha_{ab}\boldsymbol{e}_\alpha$, назовем *вектором кривизны поверхности V_m в направлениях (p) и (q)* векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Очевидно, что $\boldsymbol{R}[(p), (q)] = \boldsymbol{R}[(q), (p)]$ и что вектор $\boldsymbol{R}[(q), (q)]$ является вектором нормальной кривизны поверхности V_m в направлении (q) [5].

Если при фиксированном направлении (q) направление (p) свободно изменяется, то направления (p_g), соответствующие стационарным значениям функции $\boldsymbol{R}^2[(p), (q)]$, назовем *главными направлениями относительно направления* (q). Они определяются решениями системы

$$\begin{cases} p^a(\boldsymbol{b}_{ac}\boldsymbol{b}_{bd}q^cq^d - kg_{ab}) = 0 \\ Det\,|\boldsymbol{b}_{ac}\boldsymbol{b}_{bd}q^cq^d - kg_{ab}| = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

или, что эквивалентно, решениями системы

$$p^ap^bq^cq^d\boldsymbol{b}_{ac}\,(g_{eb}\boldsymbol{b}_{df} - g_{fb}\boldsymbol{b}_{de}) = 0. \tag{1.2}$$

Главные направления относительно данного могут быть и многомерными.

Все главные направления относительно данного, не являющиеся поднаправлениями таких же направлений бóльших размерностей, образуют в касательной плоскости R_m вполне ортогональную систему.

Геометрическое значение этих понятий дано нами в статье [1].

2. Если направление (p) является главным относительно всех касательных направлений поверхности V_m в точке M, то назовем его *абсолютно главным направлением поверхности.* Из этого определения и из того, что главные направления относительно данного вполне ортогональны, следует ортогональность абсолютно главных направлений, не являющихся поднаправлениями таких же направлений бóльших размерностей. По той же причине сумма размерностей абсолютно главных направлений не может быть $m-1$, так как в этом случае одномерное направление, ортогонально их дополняющее, оказалось бы, очевидно, также абсолютно главным.

Как следует из (1.2), абсолютно главные направления поверхности определяются решениями системы

$$p^ap^b[\boldsymbol{b}_{ac}(g_{eb}\boldsymbol{b}_{df} - g_{fb}\boldsymbol{b}_{de}) + \boldsymbol{b}_{ad}(g_{eb}\boldsymbol{b}_{cf} - g_{fb}\boldsymbol{b}_{ce})] = 0.$$

Если репер ортонормирован, тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы направление вектора $\boldsymbol{e}_1$ было абсолютно главным, является выполнение соотношений

$$\boldsymbol{b}_{1b}\boldsymbol{b}_{ac} + \boldsymbol{b}_{1c}\boldsymbol{b}_{ab} = 0, \tag{2.1}$$

где $a \neq 1$.

При $a, b, c = 1,2$ условия (2.1) имеют вид

$$\boldsymbol{b}_{11}\boldsymbol{b}_{22} + \boldsymbol{b}_{12}^2 = 0, \quad \boldsymbol{b}_{11}\boldsymbol{b}_{12} = \boldsymbol{b}_{22}\boldsymbol{b}_{12} = 0. \tag{2.2}$$

Векторы $\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_{11} - \boldsymbol{b}_{12})$ и $\boldsymbol{b}_{12}$ являются при ортонормированном репере сопряженными радиус-векторами эллипса, описанного концом вектора нормальной кривизны, отложенного из точки M, если соответствующее направление изменяется в плоскости векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. (В случае $m = 2$ этот эллипс является индикатрисой нормальной кривизны поверхности V_2). Это можно доказать, используя формулы преобразования ортонормированного репера $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и учитывая то, что вектор $\boldsymbol{b}_{11}$ является в этом репере вектором нормальной кривизны поверхности V_m в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$.

Из этого и из (2.2) следует, что в случае $m = 2$ абсолютно главные направления существуют тогда и только тогда, когда точка поверхности V_2 находится на окружности, проходящей через фокусы соответствующей индикатрисы нормальной кривизны ортогонально к ее плоскости. Абсолютно главным направлениям соответствуют концы большой оси индикатрисы. Все касательные направления поверхности V_2 в точке M абсолютно главные тогда и только тогда, когда индикатриса нормальной кривизны поверхности V_2 в точке M — окружность, а точка M находится в центре этой окружности. *В пространстве R_3 единственным примером абсолютно главных направлений являются главные направления развертывающейся поверхности.*

Более детальное исследование, на котором мы здесь не будем останавливаться, показывает, что поверхности V_2, несущие поля абсолютно главных направлений, существуют в пространстве $R_n (n > 4)$ с произволом $n - 4$ функций двух переменных. Исследование произвола существования и свойств общих многомерных поверхностей, несущих поля абсолютно главных направлений, из-за технических осложнений не доведено до конца. Мы ограничиваемся некоторыми наиболее простыми частными случаями.

3. Рассмотрим случай, когда направление вектора $\boldsymbol{e}_1$ абсолютно главное и имеет $(m-1)$-мерное сопряженное направление, но не является асимптотическим. (Случай асимптотического абсолютно главного направления приводит, как следует из (2.1), к равенствам $\boldsymbol{b}_{1a} = 0$. Это равносильно тангенциальному вырождению поверхности V_m в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$).

Здесь уравнение

$$q^a \boldsymbol{b}_{1a} = 0, \tag{3.1}$$

определяющее сопряженное направление направления вектора $\boldsymbol{e}_1$, должно иметь $(m-1)$-мерное решение.

Пусть репер ортонормирован, тогда из (2. 1) получим, что

$$\boldsymbol{b}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{b}_{\mathrm{I}A}=0 \quad (A,\ B,\ \ldots=2,\ \ldots,\ m).$$

Следовательно, уравнение (3. 1) еквивалентно уравнению

$$q^A\boldsymbol{b}_{\mathrm{I}A}=0,$$

которое должно уже удовлетворяться тождественно. Отсюда видно, что $(m-1)$-мерное направление, сопряженное направлению вектора $\boldsymbol{e}_1$, ему ортогонально. Также видно, что $\boldsymbol{b}_{\mathrm{I}A}=0$.

Теперь из (2. 1) следует, что $\boldsymbol{b}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{b}_{AB}=0$.

Пусть репер выбран так, что $\boldsymbol{b}_{\mathrm{II}}\parallel\boldsymbol{e}_{m+1}$, а плоскость векторов $\boldsymbol{b}_{AB}$ совпадает с плоскостью векторов $\boldsymbol{e}_{m+2},\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_l$. Тогда поверхности V_m, несущие поля искомых направлений, являются интегральным многообразиям системы Пфаффа [4]

$$\begin{cases} \omega_1^{m+1}=a\omega^1 & \omega_A^{m+1}=0 \\ \omega_1^{\alpha}=0 & \omega_A^{\alpha}=b_{AB}^{\alpha}\omega^B \\ \omega_1^{\varrho}=0 & \omega_A^{\varrho}=0 \\ \omega^{m+1}=\omega^{\alpha}=\omega^{\varrho}=0. \end{cases}$$

Здесь $\alpha=m+2,\ \ldots,\ l;\ \varrho=l+1,\ \ldots,\ n$, а нормальная кривизна поверхности V_m в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$ равна a.

При продолжении этой системы среди некоторых других соотношений получим

$$\begin{cases} da=a^1\omega^1+\sum\limits_B a^B\omega^B \\ \omega_1{}^A=\dfrac{1}{a}\,a^A\omega^1+\gamma_B{}^A\omega^B \\ a^AR_{ABCD}=0, \end{cases}$$

где $\gamma_B{}^A=\gamma_A{}^B$ и $R_{ABCD}=\boldsymbol{b}_{AC}\boldsymbol{b}_{BD}-\boldsymbol{b}_{AD}\boldsymbol{b}_{BC}$ — риманов тензор кривизны [7]. Но так как в данном случае $\boldsymbol{b}_{\mathrm{I}A}=0$ и $\boldsymbol{b}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{b}_{AB}=0$, то

$$a^aR_{abcd}=0. \tag{3.2}$$

Вектор $a^a\boldsymbol{e}_a$ является градиентом скалярного поля a, т. е. поля модуля вектора нормальной кривизны поверхности V_m в абсолютно главном направлении. Условие (3. 2) означает, что при параллельном перенесении этого градиентного вектора по бесконечно малому замкнутому контуру на поверхности V_m, разность между конечным и начальным значениями этого вектора есть бесконечно малая величина не второго, как обычно [7], а по крайней мере третьего порядка.

Нетрудно видеть, что абсолютные линии кривизны являются в данном случае геодезическими на V_m тогда и только тогда, когда направление градиентного вектора скалярного поля a совпадает с данным абсолютно главным направлением.

Так как здесь уравнение $\omega^1 = 0$ вполне интегрируемо, то конгруенция абсолютных линий кривизны на поверхности V_m является нормальной.

§ 2. m — сопряженная система абсолютно главных направлений

4. Рассмотрим класс поверхностей V_m, несущих m полей неасимптотических одномерных абсолютно главных направлений таких, чтобы каждое абсолютно главное направление имело $(m-1)$-мерное сопряженное направление. Здесь в силу результатов предыдущего пункта получится m-сопряженная система [3] абсолютно главных направлений. Обозначим такие поверхности через C_m.

Если единичные векторы репера выбрать в абсолютно главных направлениях, то таким же образом, как в п. 3, можно показать, что

$$\boldsymbol{b}_{aa}\boldsymbol{b}_{bb} = 0,\ \boldsymbol{b}_{ab} = 0 \tag{4.1}$$

при $a \neq b$. Отсюда видно, что риманов тензор R_{abcd} равен нулю и, следовательно, на поверхности C_m господствует в малом евклидова геометрия.

Выберем единичные векторы репера $\boldsymbol{e}_{m+a}$ так, чтобы[1] $\boldsymbol{b}_{aa} = a^a\boldsymbol{e}_{m+a}\,|\,(a)$, где a^a — нормальная кривизна поверхности C_m в направлении вектора $\boldsymbol{e}_a$. В этом репере поверхности C_m являются интегральными многообразиями системы Пфаффа

$$\begin{cases} \omega^\alpha = 0 \quad (\alpha > m) \\ \omega_a^\varrho = 0\ (\varrho > 2m) \\ \omega_a^{m+b} = \delta_a{}^b a^b \omega^b. \end{cases} \tag{4.2}$$

Из системы ее ковариантов получим, что

$$\begin{cases} \omega_a{}^b = c_a{}^b a^a \omega^a - c_b{}^a a^b \omega^b \\ \omega_{m+a}^{m+b} = c_b{}^a a^a \omega^a - c_a{}^b a^b \omega^b \\ da^a = s^a \omega^a + \sum\limits_c (a^a)^2 c_a{}^c \omega^c \\ \omega_{m+a}^\varrho = k_a^\varrho\, \omega^a, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $c_a{}^a = 0$ и не происходит суммирования по a и b. Поверхности C_m существуют в пространстве R_n $(n \geqslant 2m)$ с произволом $m\,(n-m)$ функций одного переменного.

При помощи выражения дифференциала вектора $\boldsymbol{e}_a$

$$d\boldsymbol{e}_a = (c_a{}^b a^a \omega^a - c_b{}^a a^b \omega^b)\boldsymbol{e}_b + a^a \omega^a \boldsymbol{e}_{m+a}\,|\,(a)$$

[1] Обозначение «$|\,(a)$» значит: «В последнем соотношении не происходит суммирования по индексу a».

и (4. 1) приходим к выводу, что $(m-1)$-мерные подповерхности поверхности C_m, ортогональные к абсолютным линиям кривизны, соответствующих вектору $\boldsymbol{e}_c$, являются поверхностиями C_{m-1} тогда и только тогда, когда не больше одного из величин $c_a{}^c$ отлично от нуля.

Своеобразный вид имеет индикатриса нормальной кривизны поверхности C_m. Она является $(m-1)$-мерным симплексом, который описывается концом вектора

$$\begin{cases} \sum\limits_a (p^a)^2 \boldsymbol{b}_{aa} \ (= \sum\limits_a (p^a)^2 a^a \boldsymbol{e}_{m+a}) \\ \sum\limits_a (p^a)^2 = 1, \end{cases} \tag{4.4}$$

отложенного из точки M поверхности C_m. Вершины симплекса совпадают с концами векторов $\boldsymbol{b}_{aa}$.

Нетрудно видеть, что все направления касательной плоскости R_m, симметричные друг с другом относительно плоскостей, определяемых абсолютно главными направлениями, соответствуют одной и той же точке симплекса-индикатрисы.

В [1] касательное направление (p), в котором вектор нормальной кривизны приобретает стационарную длину, называется главным направлением поверхности. При помощи (4. 4) можно установить, что касательное направление (p) поверхности C_m является главным тогда и только тогда, когда оно параллельно вектору

$$\boldsymbol{p}^* = \sum_a \varepsilon_a \frac{1}{a^a} \boldsymbol{e}_a,$$

где $\varepsilon_a = 0, 1, -1$. Отсюда видно, что поверхность C_m носит $\sum\limits_a C_m{}^a 2^{a-1}$ полей главных направлений поверхности.

Все главные направления, симметричные друг с другом относительно плоскостей, определяемых абсолютно главными направлениями, имеют одно и то же сопряженное направление, которым является ортогональное дополнение плоскости этих главных направлений до касательной плоскости R_m.

5. Скаляры a^a — модулы векторов нормальной кривизны поверхности C_m в абсолютно главных направлениях — определяют m скалярных полей. Рассмотрим случай, когда направления градиентных векторов этих скалярных полей совпадают со соответствующими абсолютно главными направлениями. Это равносильно условиям

$$da^a = s^a \omega^a.$$

Обозначим соответствующие поверхности через C_m'.

Из (4. 2) и (4. 3) получим, что

$$\omega_a{}^b = \omega_{m+a}^{m+b} = 0 \tag{5.1}$$

и что поверхности C_m' существуют в пространстве $R_n (n \geqslant 2m)$ с произволом $m(n-2m+1)$ функций одного переменного.

Поверхности C_m' расслаиваются абсолютными линиями кривизны на вполне геодезические подповерхности C_a'.

Нетрудно убедиться, что все подповерхности V_a поверхности C_m', пересекающие соответствующие абсолютные линии кривизны под постоянным углом — геодезические.

В силу (4.2), (5.1) и того, что здесь репер является голономным, получим

$$d\boldsymbol{e}_a = a^a \omega^a \boldsymbol{e}_{m+a} = a^a du^a \boldsymbol{e}_{m+a} \,|\, (a).$$

С другой стороны,

$$d\boldsymbol{e}_a = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{(\partial u^a)^2} du^a + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^a \partial u^b} du^b \,|\, (a),$$

где $a \neq b$ и $\boldsymbol{M}$ — радиус-вектор точки M поверхности C_m'. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^a \partial u^b} = 0$$

при $a \neq b$, т. е. поверхность C_m' можно задать векторфункцией вида

$$\boldsymbol{M} = \sum_a \boldsymbol{M}_a (u^a),$$

она является поверхностью переноса относительно всех ее подповерхностей C_a'.

6. Рассмотрим в пространстве R_{2m} случай, когда скалярные поля модулей векторов нормальной кривизны поверхности C_m в абсолютно главных направлениях — постоянные, т. е. когда

$$da^a = 0.$$

Обозначим такие поверхности через C_m''.

Нетрудно установить, что поверхности C_m'' существуют с произволом только постоянных.

Обозначим $\boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{M} + \sum_a \frac{1}{a^a} \boldsymbol{e}_{m+a}$. Так как здесь

$$d\boldsymbol{M}^* = 0,$$

то поверхность C_m'' находится на гиперсфере S_{2m-1}. Радиус-вектором центра гиперсферы является $\boldsymbol{M}^*$, а радиус ее равен $\sqrt{\sum_a \left(\frac{1}{a^a}\right)^2}$.

Обозначим символ дифференцирования в направлении вектора $\sum_a \varepsilon_a \frac{1}{a^a} \boldsymbol{e}_a$ через δ. Тогда

$$\delta \left(\sum_a \varepsilon_a \frac{1}{a^a} \boldsymbol{e}_a \right) = \sum_a \varepsilon_a \frac{1}{a^a} \omega^a (\delta) \boldsymbol{e}_{m+a} = \sum_a \varepsilon_a \frac{1}{a^a} \boldsymbol{e}_{m+a} \delta s$$

и

$$\delta\left(\Sigma\,\varepsilon_a \frac{1}{a^a}\boldsymbol{e}_{m+a}\right) = \ldots \qquad \ldots = -\Sigma\,\varepsilon_a \frac{1}{a^a}\boldsymbol{e}_a \delta s.$$

Отсюда следует, что все линии кривизны поверхности C_m'' — окружности. Линии кривизны, направляющим вектором которых является $\Sigma \frac{\pm 1}{a^a}\boldsymbol{e}_a$ — большие окружности гиперсферы S_{2m-1}, содержащей поверхность C_m''. Назовем их основными линиями кривизны поверхности C_m''.

Абсолютные линии кривизны расслаивают поверхность C_m'' на подповерхности C_a''. Каждая не абсолютная линия кривизны поверхности C_m'' является основной на одной из подповерхностей C_a''.

Из составления системы Пфаффа, определяющей поверхность C_m'', и из полной интегрируемости этой системы следует, что дифференциальные окрестности всех точек M поверхности C_m'' — конгруентны. Также следует, что поверхность C_m'' и ее положение в пространстве R_{2m} однозначно определены, если заданы дифференциальная окрестность и ее положение хотя бы одной точки поверхности C_m''. Отсюда видно, что *в пространстве R_{2m} существует m-параметрическая группа вращений, системой импримитивности которой является поверхность C_m''*. Обозначим эту группу через T.

Находим все одномерные системы импримитивности группы T. Для этого вычислим дифференциал вектора $\boldsymbol{M} + x^a\boldsymbol{e}_a + x^{m+a}\boldsymbol{e}_{m+a}$, где x^a и x^{m+a} — постоянные:

$$d\left(\boldsymbol{M} + x^a\boldsymbol{e}_a + x^{m+a}\boldsymbol{e}_{m+a}\right) = \sum_a \left[\left(1 - a^a x^{m+a}\right)\boldsymbol{e}_a + a^a x^a \boldsymbol{e}_{m+a}\right]\omega^a.$$

Необходимым и достаточным для того, чтобы точка с радиус-вектором $\boldsymbol{M} + x^a\boldsymbol{e}_a + x^{m+a}\boldsymbol{e}_{m+a}$ оказалась точкой одномерной системы импримитивности группы T, является коллинеарность векторов

$$\boldsymbol{r}_a = \left(1 - a^a x^{m+a}\right)\boldsymbol{e}_a + a^a x^a \boldsymbol{e}_{m+a} \mid (a).$$

Для каждого значения a получим

$$\begin{cases} x^{m+b} = \dfrac{1}{a^b} \\ x^b = 0 \quad (b \neq a). \end{cases}$$

Отсюда видно, что все искомые однопараметрические системы импримитивности, вместе взятые, заполняют m вполне ортогональных двумерных плоскостей, проходящих через центр гиперсферы S_{2m-1}, содержащей поверхность C_m''. Каждая из этих плоскостей параллельна плоскости одной из абсолютных линий кривизны. Если пересечь эти плоскости семейством гиперсфер, имеющих общий центр с гиперсферой S_{2m-1}, то получим все од-

номерные системы импримитивности группы T. В пересечении этих плоскостей с гиперсферой S_{2m-1} получим m больших окружностей l_a этой сферы.

Из вышеизложенного следует, что *поверхность C_m'' на гиперсфере S_{2m-1} как в $(2m-1)$-мерном эллиптическом пространстве является еквидистантной поверхностью прямых l_a, т. е. многомерным обобщением поверхности Клиффорда* [2]. Основные линии кривизны поверхности C_m'' в пространстве R_{2m} являются прямолинейными образующими m-мерной поверхности Клиффорда в эллиптическом пространстве S_{2m-1}.

§ 3. Двумерные абсолютно главные направления

7. Рассмотрим поверхности V_m с полем двумерных абсолютно главных направлений. Обозначим такие поверхности через B_m.

Выберем ортонормированный репер так, чтобы векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ лежали в двумерном абсолютно главном направлении. Условия (2.1) должны быть выполнены инвариантно относительно преобразования репера

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \cos\alpha\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha\,\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2' = -\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\alpha\,\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_A' = \boldsymbol{e}_A \qquad (A,\ B,\ \ldots = 3,\ \ldots,\ m). \end{cases} \tag{7.1}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_{11}' = \sin 2\alpha\,\boldsymbol{b}_{12} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_{11} - \boldsymbol{b}_{22}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_{11} + \boldsymbol{b}_{22}) \\ \boldsymbol{b}_{22}' = -\sin 2\alpha\,\boldsymbol{b}_{12} - \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_{11} - \boldsymbol{b}_{22}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_{11} + \boldsymbol{b}_{22}) \\ \boldsymbol{b}_{12}' = \cos 2\alpha\,\boldsymbol{b}_{12} - \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_{11} - \boldsymbol{b}_{22}). \end{cases} \tag{7.2}$$

Из инвариантности соотношений (2.1) при преобразовании (7.2) получим

$$\boldsymbol{b}_{22} = -\boldsymbol{b}_{11} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b}_{12}^2 = \boldsymbol{b}_{11}^2. \tag{7.3}$$

Если абсолютно главное направление трехмерно, то таким же способом получим еще

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_{33} &= -\boldsymbol{b}_{11}, \quad \boldsymbol{b}_{33}^2 = \boldsymbol{b}_{13}^2, \\ \boldsymbol{b}_{33} &= -\boldsymbol{b}_{22}, \quad \boldsymbol{b}_{33}^2 = \boldsymbol{b}_{23}^2, \end{aligned}$$

что вместе с (7.3) дает равенства $\boldsymbol{b}_{\varphi\xi} = 0\,(\varphi,\ \xi = 1, 2, 3)$, являющиеся равносильными тангенциальному вырождению поверхности в этом направлении. Это относится и к более чем трехмерным абсолютно главным направлениям.

Учитывая (7.3) и вычисляя выражения и для $\boldsymbol{b}_{1A'}$, $\boldsymbol{b}_{2A'}$ и $\boldsymbol{b}_{AB'}$ при преобразовании (7.1), получим

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_{11'} = \sin 2\alpha\, \boldsymbol{b}_{12} + \cos 2\alpha\, \boldsymbol{b}_{11} \\ \boldsymbol{b}_{22'} = -\sin 2\alpha\, \boldsymbol{b}_{12} - \cos 2\alpha\, \boldsymbol{b}_{11} \\ \boldsymbol{b}_{12'} = \cos 2\alpha\, \boldsymbol{b}_{12} + \sin 2\alpha\, \boldsymbol{b}_{11} \\ \boldsymbol{b}_{1A'} = \cos\alpha\, \boldsymbol{b}_{1A} + \sin\alpha\, \boldsymbol{b}_{2A} \\ \boldsymbol{b}_{2A'} = -\sin\alpha\, \boldsymbol{b}_{1A} + \cos\alpha\, \boldsymbol{b}_{2A} \\ \boldsymbol{b}_{AB'} = \boldsymbol{b}_{AB}. \end{cases} \tag{7.4}$$

Соотношение

$$\boldsymbol{b}_{11}\boldsymbol{b}_{BC} + \boldsymbol{b}_{1B}\boldsymbol{b}_{1C} = 0$$

(см. (2.1)) должно быть инвариантным при преобразовании (7.4). Отсюда в силу (2.1) получим

$$\boldsymbol{b}_{11}\boldsymbol{b}_{BC} = \boldsymbol{b}_{2B}\boldsymbol{b}_{2C} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b}_{12}\boldsymbol{b}_{BC} = 0.$$

Из инвариантности последнего соотношения следует

$$\boldsymbol{b}_{11}\boldsymbol{b}_{BC} = \boldsymbol{b}_{2B}\boldsymbol{b}_{2C} = \boldsymbol{b}_{1B}\boldsymbol{b}_{1C} = 0.$$

Отсюда при $B = C$ получим $\boldsymbol{b}_{1B} = \boldsymbol{b}_{2B} = 0$.

Учитывая полученные в этом параграфе результаты и (2.1), можно утверждать, что направление векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ является двумерным абсолютно главным направлением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_{22} = -\boldsymbol{b}_{11} & \boldsymbol{b}_{11}\boldsymbol{b}_{BC} = 0 \\ \boldsymbol{b}_{11}\boldsymbol{b}_{12} = 0 & \boldsymbol{b}_{12}\boldsymbol{b}_{BC} = 0 \\ \boldsymbol{b}_{11}^2 = \boldsymbol{b}_{12}^2 & \boldsymbol{b}_{1B} = \boldsymbol{b}_{2B} = 0. \end{cases} \tag{7.5}$$

Уравнение для нахождения сопряженных направлений направления вектора $\boldsymbol{e}_1$

$$p^1\boldsymbol{b}_{11} + p^2\boldsymbol{b}_{12} + p^A\boldsymbol{b}_{1A} = 0$$

удовлетворяется тождественно при $p^1 = p^2 = 0$. Отсюда следует, что *двумерное абсолютно главное направление и его ортогональное дополнение до касательной плоскости* R_m *составляют сопряженную систему* [3].

Пусть репер выбран так, чтобы $\boldsymbol{b}_{11} = a\boldsymbol{e}_{m+1}$; $\boldsymbol{b}_{12} = a\boldsymbol{e}_{m+2}$ и плоскость векторов $\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha = m+3, \ldots, r)$ совпадает с плоскостью векторов $\boldsymbol{b}_{AB}$. Тогда поверхности B_m являются интегральными многообразиями системы Пфаффа

$$\begin{cases} \omega_1^{m+1} = a\omega^1 & \omega_2^{m+1} = -a\omega^2 & \omega_A^{m+1} = 0 \\ \omega_1^{m+2} = a\omega^2 & \omega_2^{m+2} = a\omega^1 & \omega_A^{m+2} = 0 \\ \omega_1^\alpha = 0 & \omega_2^\alpha = 0 & \omega_A^\alpha = b_{AB}^\alpha\,\omega^B \\ \omega_1^\varrho = 0 & \omega_2^\varrho = 0 & \omega_A^\varrho = 0 \\ \omega^{m+1} = \omega^{m+2} = \omega^\alpha = \omega^\varrho = 0, \end{cases} \tag{7.6}$$

где $\varrho = r+1, \ldots, n$.

При продолжении этой системы получим ряд необходимых условий существования искомых поверхностей:

$$\begin{cases} da = \alpha_1\omega^1 + \alpha_2\omega^2 + \alpha_B\omega^B \\ 2\omega_1^2 - \omega_{m+1}^{m+2} = \frac{1}{a}\alpha_2\omega^1 - \frac{1}{a}\alpha_1\omega^2 + \beta_B\omega^B \\ \omega_1^A = \frac{1}{a}\alpha_A\omega^1 + \beta_A\omega^2 \\ \omega_2^A = -\beta_A\omega^1 + \frac{1}{a}\alpha_A\omega^2 \\ \omega_{m+1}^{\alpha} = \omega_{m+2}^{\alpha} = 0 \\ \omega_{m+1}^{\varrho} = \sigma_1^{\varrho}\omega^1 + \sigma_2^{\varrho}\omega^2 \\ \omega_{m+2}^{\varrho} = \sigma_2^{\varrho}\omega^1 - \sigma_1^{\varrho}\omega^2 \\ \sum_A \alpha_A \boldsymbol{b}_{AB} = \sum \beta_A \boldsymbol{b}_{AB} = 0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Нетрудно видеть, что двумерные абсолютно главные направления огибают двумерные подповерхности тогда и только тогда, когда $\beta_A = 0$. Эти подповерхности являются минимальными поверхностями, индикатрисы нормальной кривизны которых являются окружностями.

8. В силу (7.5) последнее из условий (7.7) приобретает вид

$$\sum_A \alpha_A \boldsymbol{b}_{Aa} = \sum_A \beta_A \boldsymbol{b}_{Aa} = 0.$$

Это означает, что направление, определяемое векторами $\sum_A \alpha_A \boldsymbol{e}_A$ и $\sum_A \beta_A \boldsymbol{e}_A$, является сопряженным относительно всех направлений касательной плоскости R_m. Следовательно, поверхность B_m тангенциально вырождена в этом направлении.

Если $\alpha_A = 0$, т. е. градиентный вектор скалярного поля a лежит в двумерном абсолютно главном направлении, тогда при продолжении уравнений

$$\begin{cases} \omega_1{}^A = \beta_A\omega^2 \\ \omega_2{}^A = -\beta_A\omega^1 \end{cases}$$

получим

$$d\beta_A - \beta_C\omega_A{}^C = 0.$$

Это означает, что векторное поле $\sum_A \beta_A \boldsymbol{e}_A$ имеет абсолютный параллелизм во всех направлениях, ортогональных к двумерному абсолютно главному направлению [7].

Рассмотрим случай $\alpha_A = \beta_A = 0$. Это имеет место всегда, когда поверхность B_m не вырождена тангенциально. Немного

сильнее условие в данном случае такое, чтобы существовала касательное направление поверхности B_m, ортогональное к двумерному абсолютно главному направлению, не имеющее трехмерного сопряженного направления.

Произведем преобразование репера $\boldsymbol{e}_{A'} = A^{A}_{A'}\boldsymbol{e}_A$, $\boldsymbol{e}_{k'} = A^{k}_{k'}\boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, 2)$ такое, чтобы репер стал голономным. Здесь $\omega^{A'} = du^{A'}$ и, следовательно,

$$D(du^{A'}) = [du^{k'}\omega^{A'}_{k'}] + [du^{C'}\omega^{A'}_{C'}] = 0.$$

В силу $\omega^{A'}_{k'} = A^{k}_{k'}A^{A'}_{A}\omega^{A}_{k} = 0$ получим

$$\omega^{A'}_{C'} = \Gamma^{A'}_{C'B'}\,du^{B'}$$

и так же

$$\omega^{m+k}_{A'} = 0 \quad \text{и} \quad \omega^{\alpha}_{A'} = b^{\alpha}_{A'C'}\,du^{C'}.$$

Следовательно,

$$d\boldsymbol{e}_{A'} = \Gamma^{B'}_{A'C'}\,du^{C'}\boldsymbol{e}_{B'} + b^{\alpha}_{A'C'}\,du^{C'}\boldsymbol{e}_{\alpha}.$$

С другой стороны

$$d\boldsymbol{e}_{A'} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^{A'}\,\partial u^{C'}}\,du^{C'} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^{A'}\,\partial u^{k'}}\,du^{k'},$$

где $\boldsymbol{M}$ — радиус-вектор точки M поверхности B_m. Отсюда получим

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u^{A'}\,\partial u^{k'}} = 0$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{*}(u^{1'}, u^{2'}) + \boldsymbol{M}^{**}(u^{3'}, \ldots, u^{m'}).$$

В итоге можем сформулировать следующую теорему:

Пусть a — модуль вектора нормальной кривизны поверхности B_m в любом поднаправлении двумерного абсолютно главного направления. Если градиентный вектор скалярного поля a лежит в двумерном абсолютно главном направлении и если эти двумерные направления огибают двумерные подповерхности поверхности B_m, тогда B_m является поверхностью переноса двух вполне ортогональных поверхностей, причем одна из переносимых поверхностей является минимальной поверхностью V_2, индикатрисы нормальной кривизны которой являются окружностями.

Нетрудно видеть, что предположения теоремы необходимы и достаточны для того, чтобы полученные подповерхности V_2 были геодезическими в B_m.

В частности, поверхности B_3 существуют в пространстве R_n $(n > 5)$ с произволом $3(n-5)$ функций одного переменного. Если направление, ортогональное к двумерному абсолютно глав-

ному направлению, является асимптотическим, то такие поверхности B_3 являются конгруенциями прямых и существуют в пространстве $R_n (n > 4)$ с произволом $2(n-3)$ функций одного переменного. Они могут и не расслаиваться на двумерные подповерхности.

Если поверхность V_{2m} носит полную систему неасимптотических двумерных абсолютно главных направлений, то, очевидно, она не вырождена тангенциально и, следовательно, вполне расслаивается на подповерхности V_{2a} такого же вида. Относительно этих подповерхностей она является поверхностью переноса.

Литература

1. Мулларн Р. Р., О главных направлениях m-мерной поверхности. Докл. АН СССР (печатается).
2. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии. Москва, 1957.
3. Рыжков В. В., Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Тр. Моск. матем. о-ва, 1958, **7**. 179—226.
4. Рыжков В. В., О тангенциально вырожденных поверхностях. Докл. АН СССР, 1960, **135**, 20—22.
5. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы в дифференциальной геометрии, т. II. Москва—Ленинград, 1948.
6. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1948.
7. Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия. Москва, 1948.
8. Yong-Chow Wong, A new curvature theory for surfaces in an Euclidean 4-space. Comment. Math. Helv., 1952, **26**, 152—170.

Поступило
2 II 1961

ABSOLUUTSETE PEASIHIVÄLJADEGA PINDADEST

R. Mullari

Geomeetriakateeder

Resümee

Eukleidilise ruumi R_n m-mõõtmelise pinna V_m punktis M antud iga ühemõõtmelise puutujasihiga saab siduda pinna puutujatasandis olevate ortogonaalsete sihtide (erijuhul mitmemõõtmeliste) süsteemi. Selle süsteemi sihte nimetame peasihtideks antud puutujasihi suhtes. Kui antud siht osutub peasihiks kõigi puutujasihtide suhtes, siis nimetame teda pinna absoluutseks peasihiks.

Enam kui kahemõõtmelise absoluutse peasihi olemasolu on samaväärne pinna tangensiaalse kõdumisega selles sihis.

Kahemõõtmeliste absoluutsete peasihtide välja kandvad tangensiaalselt kõdumata pinnad osutuvad translatsioonipindadeks.

Erijuhuks pindadest, millel absoluutsed peasihid moodustavad kaassihtide täieliku süsteemi, on sfääril S_{2m-1} kui elliptilises ruumis olev m-mõõtmeline Cliffordi pind.

ON SURFACES WITH FIELDS OF ABSOLUTE PRINCIPLE DIRECTIONS

R. Mullari

Summary

At the point M of m-surface V_m of Euclidean n-space R_n every one-dimensional tangent direction can be connected with a system of orthogonal tangent directions (in special cases many-dimensional). The directions of this system are called principle directions relative to the given direction. If the direction proves to be the principle direction relative to all the tangent directions, we call it the absolute principle direction of the surface.

The existence of a more than two-dimensional absolute principle direction is equal to the tangent degeneration of the surface in this direction.

The tangent non-degenerated surfaces with the field of two-dimensional absolute principle direction prove to be transportation surfaces.

A special case among the surfaces, of which the absolute principle directions form a complete system of conjugate directions, is the m-dimensional Clifford surface on the sphere S_{2m-1} as existing in the elliptic space.

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ, ЛИШЕННЫЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОДГРУПП

Е. Габович
Кафедра геометрии

Группа G называется частично упорядоченной, если она является частично упорядоченным множеством и из $a \geqslant b$ следует $c + a + d \geqslant c + b + d$ для любых $a, b, c, d \in G$.

Подгруппа B частично упорядоченной группы G называется выпуклой, если из $a, b \in B$, $c \in G$ и $a \geqslant c \geqslant b$ следует $c \in B$.

Минимальная выпуклая подгруппа B частично упорядоченной аддитивной группы G, содержащая элемент a, должна, кроме элементов вида na ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), содержать элементы b, удовлетворяющие соотношению

$$n_1 a \leqslant b \leqslant n_2 a \tag{1}$$

при любых целых числах n_1 и n_2. Множество B' всех элементов $b \in G$, удовлетворяющих соотношению (1), само является выпуклой подгруппой. Действительно, из $b_1, b_2 \in B'$, $c \in G$, $b_1 \leqslant c \leqslant b_2$ и $n_1 a \leqslant b_1 \leqslant m_1 a$, $n_2 a \leqslant b_2 \leqslant m_2 a$ следует

$$(n_1 + n_2)a \leqslant b_1 + b_2 \leqslant (m_1 + m_2)a,$$
$$-m_1 a \leqslant -b_1 \leqslant -n_1 a, \quad n_1 a \leqslant b_1 \leqslant c \leqslant b_2 \leqslant m_2 a,$$

откуда $b_1 + b_2$, $-b_1$, $c \in B'$ и, следовательно, $B' = B$. Таким образом наименьшая выпуклая подгруппа частично упорядоченной группы G, содержащая элемент a, состоит из элементов b, удовлетворяющих соотношению (1), и только из них.

В случае отсутствия нетривиальных выпуклых подгрупп в частично упорядоченной группе G ее любая выпуклая подгруппа B, образованная каким-нибудь элементом $a \neq 0$ из G, совпадает со всей группой G.

Если такая группа упорядочена тривиально, то любая ее подгруппа является выпуклой и, следовательно, группа не имеет собственных подгрупп, т. е. является циклической группой порядка p, где p — простое число.

В дальнейшем будем предполагать, что наша группа упорядочена нетривиально. В этом случае в G отсутствуют отличные

от нуля элементы конечного порядка, ибо в противном случае в G нашлась бы конечная подгруппа, которая, ввиду того, что конечные группы поддаются только тривиальному упорядочению, является выпуклой, но не совпадает с группой G, ввиду нетривиальной упорядоченности последней.

Частично упорядоченная группа G называется архимедовски упорядоченной, если из $a, b \in G$ при $a \neq 0$ следует существование такого целого числа n, что $na \geqslant b$.

Покажем, что необходимым и достаточным условием архимедовости частично упорядоченной группы G является отсутствие в ней нетривиальных выпуклых подгрупп. Достаточность этого утверждения вытекает из второй половины условия (1). Из архимедовости группы G следует для $a, b \in G$ $(a \neq 0)$ $b \leqslant na$ и $-b \leqslant ma$, откуда $-ma \leqslant b \leqslant na$, т. е. выпуклая подгруппа, порожденная элементом a, совпадает с G, что доказывает необходимость условия.

Мичиура и Жаффар [2, 3, 4] рассмотрели нетривиально частично упорядоченные группы без нетривиальных выпуклых подгрупп, наложив дополнительно условие полузамкнутости: из $nx \geqslant 0$ при натуральном n следует $x \geqslant 0$ (см., [4]). Однако даже коммутативная частично упорядоченная группа без нетривиальных выпуклых подгрупп не всегда полузамкнута, как показывает следующий пример.

Рассмотрим аддитивную группу Z целых чисел. К подгруппе Z^+ положительных элементов отнесем все натуральные числа, кроме единицы. Полученная частично упорядоченная группа не имеет собственных выпуклых подгрупп. Действительно, любая собственная подгруппа A группы Z имеет вид nZ, где n — наименьшее положительное число из A, а из соотношений

$$2 < 5 < 8, \quad 3 < 5 < 9, \quad n < n+2 < 2n \ (n \geqslant 4)$$

следует невыпуклость подгрупп $2Z$, $3Z$ и вообще nZ при любом n, т. е. всех подгрупп группы Z. Но в Z из $n = 1 \cdot n > 0$ не следует $1 > 0$, т. е. группа Z не является полузамкнутой.

Теорема. *Коммутативная нетривиально частично упорядоченная группа G, лишенная нетривиальных выпуклых подгрупп, изоморфна подгруппе D^* частично упорядоченной аддитивной группы D действительных чисел; из $a \geqslant b$ следует $a\varphi \geqslant b\varphi$, где φ — изоморфизм между G и D^*.*

Определим отображение группы G в группу D, поставив в соответствие элементу b из G действительное число b^*, определенное следующим образом заданным дедекиндовым сечением. Пусть $a > 0$ — фиксированный элемент группы G. Рациональное число $\frac{m}{n}$ $(n > 0)$ отнесем к верхнему классу сечения, если найдется такое натуральное число k, что $(km)a > (kn)b$, и к нижнему, если найдется такое k, что $(km)a \leqslant (kn)b$.

Одно из этих условий обязательно выполняется ввиду того, что для $ma - nb \neq 0$ всегда существует такое целое k, что $k(ma - nb) = (km)a - (kn)b > 0$, т. е. любое рациональное число попадает в один из классов сечения. Каждое рациональное число $\frac{m}{n}$ $(n > 0)$ попадет только в один класс. Действительно, если при одном натуральном k будет $(km)a > (kn)b$, а при другом k' — $(k'm)a \leqslant (k'n)b$, то, умножив эти соотношения на k' и k соответственно, получим

$$(kk'm)a > (k'kn)b \geqslant (k'km)a,$$

что является очевидным противоречием.

Убедимся в том, что выполняются и остальные свойства сечения. Ввиду (1) число n_1 принадлежит нижнему, а число n_2 (в случае $b \neq n_2 a$) — верхнему классу сечения $(k = 1)$. Если же $b = n_2 a$, то, поскольку среди элементов na нет равных (a — элемент бесконечного порядка), но есть сравнимые с $n_2 a$, найдется целое число m такое, что или $ma > b = n_2 a$, или $ma < b$. В первом случае число m, а во втором число $2n_2 - m$ принадлежит верхнему классу сечения $(k = 1)$, и, следовательно, ни один класс не пуст. Если $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ принадлежит верхнему, а $\frac{m}{n}$ $(n > 0)$ — нижнему классу сечения, то $kpa > kqb$ и $k'ma \leqslant k'nb$ $(k, k' > 0)$, откуда

$$kk'mqa \leqslant kk'nqb < kk'npa,$$

т. е. $mq < np$ и $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$. Таким образом все свойства сечения доказаны.

Если $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ $(n, q > 0)$ принадлежат верхним классам сечений, которыми определены соответственно числа b^* и c^*, то $kna > knb$, $k'pa > k'qc$ и $kk'mqa > kk'nqb$, $kk'npa > kk'nqc$, откуда

$$kk'(mqa + npa) > kk'(nqb + nqc)$$

и, ввиду коммутативности группы G,

$$kk'(mq + np)a > kk'nq(b + c),$$

т. е. дробь $\frac{mq+np}{nq} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ относится к верхнему классу сечения, определяющего число $(b + c)^*$. Проведя аналогичное рассуждение для нижних классов, приходим к равенству $(b + c)^* = b^* + c^*$.

Таким образом построенное нами соответствие является гомоморфизмом, а множество D^* всех действительных чисел, соответствующих элементам группы G, является группой. При этом

гомоморфизме элементам 0, a и na из G соответствуют числа 0,1 и n из D^*.

Легко убедиться, что из $b > c$ следует $b^* \geqslant c^*$. Действительно, из $(km)a > (kn)b$ следует, ввиду $(kn)b > (kn)c$, $(km)a > (kn)c$, т. е. любое рациональное число $\frac{m}{n}$ из верхнего класса сечения, определяющего число b^*, принадлежит верхнему классу сечения, соответствующего числу c^*. И наоборот, если рациональное число взять из нижнего класса сечения, соответствующего числу c^*, то оно окажется в нижнем классе сечения, определяющего число b^*.

Покажем, что из $b > c$ следует $b^* > c^*$. Пусть $d = b - c$. Из $b > c$ имеем $d > 0$ и, следовательно, $d \geqslant 0$. Если $d = na$, то $d^* = n > 0$. Если $d \neq na$, то найдутся, с одной стороны, такие n_1 и n_2, что

$$n_1 a < d < n_2 a,$$

с другой — такие m_1 и m_2, что

$$m_1 d \leqslant n_2 a < m_2 d.$$

Предположив, что $d^* = 0$, откуда $(m_2 d)^* = 0$, получим

$$0 = d^* \leqslant (n_2 a)^* \leqslant (m_2 d)^* = 0,$$

т. е. $(n_2 a)^* = n_2 = 0$. Но это является противоречием, поскольку из $d > 0$ и $n_2 a > d$ следует $n_2 > 0$. Этим доказано, что порядок группы G переносится на группу D^*.

Построенный нами гомоморфизм является изоморфизмом, ибо, как мы сейчас покажем, из $b^* = c^*$ следует $b = c$. Убедимся сперва, что число нуль соответствует только нулевому элементу группы G. Пусть $d^* = 0$ и $d \neq 0$. Тогда найдутся такие m_1 и m_2, что $m_1 d \leqslant a \leqslant m_2 d$, откуда $0 = m_1 d^* \leqslant 1 \leqslant m_2 d^* = 0$, что является противоречием. Следовательно, $d = 0$ и из $b^* = c^*$ действительно, ввиду $b^* - c^* = 0 = (b - c)^*$ и $b - c = 0$, следует $b = c$.

Теорема доказана.

Литература

1. Биркгоф Г., Теория структур. Москва, 1952.
2. Jaffard, P., Groupes archimédiens et para-archimédiens. C. r. Acad. sci., 1950, **231**, 1278—1280.
3. Jaffard, P., Contribution á l'étude des groupes ordonnés. J. Math. pures et appl., 1953, **32**, 203—280.
4. Michiura, Tadashi, On partially ordered groups without proper convex subgroups. Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, A **56**, 231—232; Indagationes math., 1953, **15**, 231—232.

Поступило
24 V 1960

OSALISELT JÄRJESTATUD RÜHMAD, MILLEDEL PUUDUVAD KUMERAD PÄRISALAMRÜHMAD

J. Gabovitš
Geomeetriakateeder

Resümee

Michiura [4] ja Jaffard [2, 3] üldistasid Hölderi teoreemi ([1], lk. 312) poolkinniste (seosest $nx \geqslant 0$ $n > 0$ korral järeldub, et $x \geqslant 0$) osaliselt järjestatud rühmade juhule.

Autor üldistab Hölderi teoreemi kommutatiivsetele osaliselt järjestatud rühmadele, mis ei tarvitse olla poolkinnised. On toodud üks näide rühma kohta, mis on kommutatiivne, aga ei rahulda Michiura teoreemi nõudeid.

TEILWEISEGEORDNETE GRUPPEN OHNE NICHTTRIVIALE KONVEXE UNTERGRUPPEN

J. Gabovitsch

Zusammenfassung

Hölders Theorem ([1], S. 312) war von Michiurs und Jaffard auf den Fall der halbgeschlossenen (aus $nx \geqslant 0$ und $n > 0$ folgt $x \geqslant 0$) teilweisegeordneten Gruppen verallgemeinert.

Der Autor macht dasselbe für die abelschen Gruppen ohne diese Bedingung und bringt als Beispiel eine dieser Gruppen, die nicht halbgeschlossen ist.

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ Ω-ГРУППЫ

Е. Габович
Кафедра геометрии

П. Дж. Хиггинсом [4] дано понятие группы с многоместными операторами (Ω-группы). Частными случаями Ω-групп являются группы, группы с операторами, обычные, дифференциальные и лиевы кольца и алгебры, линейные векторные пространства и некоторые другие алгебраические системы.

На случай Ω-групп переносятся (П. Дж. Хиггинс [4], А. Г. Курош [2]) некоторые результаты теории групп и колец, однако теория групп с многоместными операторами еще далека от завершения. В данной работе некоторые, большей частью известные для частично упорядоченных групп, результаты обобщаются на случай вводимых ниже частично упорядоченных Ω-групп.

§ 1. Основные понятия

Следуя Хиггинсу [4], будем говорить, что множество G допускает *систему Ω финитарных операторов,* если для любого оператора $\omega \in \Omega$ существует такое натуральное число $n = n(\omega)$, называемое *весом* оператора ω, что каждому упорядоченному множеству $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементов множества G оператор ω однозначно сопоставляет некоторый элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$, принадлежащий множеству G. Аддитивную группу (полугруппу с нулем) G будем называть Ω-группой (Ω-полугруппой), если выполняются условия

$\Omega 1$. множество G допускает систему Ω финитарных операторов;

$\Omega 2$. если 0 — нулевой элемент группы (полугруппы) G, то для каждого оператора $\omega \in \Omega$ имеет место равенство

$$00 \ldots 0\omega = 0.$$

Оператор $\omega \in \Omega$ называется *дистрибутивным,* если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место

$$a_1 a_2 \ldots a_{i-1}(a_i + b) a_{i+1} \ldots a_n \omega =$$
$$= a_1 a_2 \ldots a_n \omega + a_1 a_2 \ldots a_{i-1} b a_{i+1} \ldots a_n \omega$$

при любых $b \in G$, $a_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ω-группа называется *дистрибутивной,* если все операторы $\omega \in \Omega$ дистрибутивны. Если в дистрибутивной Ω-группе по крайней мере один из элементов a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равен нулю, то и элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \omega = 0$.

Ω-группа (Ω-полугруппа) G называется *частично упорядоченной*, если G — частично упорядоченная группа (полугруппа) и выполняется условие

$\Omega 3$. из $a_i \geqslant b_i$, $a_j \geqslant 0$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ i \neq j)$ для любого оператора $\omega \in \Omega$ при каждом i следует

$$a_1 a_2 \ldots a_n \omega \geqslant a_1 a_2 \ldots a_{i-1} b_i a_{i+1} \ldots a_n \omega.$$

Если группа (полугруппа) G упорядочена линейно, то Ω-группа (Ω-полугруппа) G называется *линейно упорядоченной.* Отображение φ: $g \to g' = g\varphi$ частично упорядоченной Ω-группы G на частично упорядоченную Ω-группу G' называется *гомоморфным*, если для любых $g_i \in G$, $g_i' = g_i\varphi \in G'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $\omega \in \Omega$ выполняются условия

1) $(g_1 + g_2)\varphi = g_1' + g_2'$;
2) $(g_1 g_2 \ldots g_n \omega)\varphi = g_1' g_2' \ldots g_n' \omega$;
3) если $g_1 \geqslant 0$, то и $g_1' \geqslant 0$;
4) если $g_1' \geqslant 0$, то найдется по крайней мере один элемент g_1 такой, что $g_1 \geqslant 0$ и $g_1' = g_1\varphi$.

При выполнении условий 1)—3) отображение φ называется *слабо гомоморфным.* Если (слабо) гомоморфное отображение взаимно однозначно, то будем говорить о (*слабом*) *изоморфизме* частично упорядоченных Ω-групп. Отметим, что в силу условий 1) и 2) отображение φ является обычным гомоморфизмом Ω-групп.

Подгруппа (содержащая нулевой элемент подполугруппа) A Ω-группы G называется Ω-подгруппой (Ω-подполугруппой), если A замкнута относительно всех операторов из Ω.

Ω-подгруппа A частично упорядоченной Ω-группы G называется *выпуклой*, если A, как подгруппа частично упорядоченной группы G, выпукла, т. е. если из $a, b \in A$, $c \in G$ и $a \geqslant c \geqslant b$ следует, что $c \in A$.

В дальнейшем предполагается знакомство читателя с понятием *идеала* (см. [4]) Ω-группы. Для дистрибутивной Ω-группы G идеал J можно определить, как аддитивную подгруппу группы G, удовлетворяющую условиям

J1. $-g + a + g \in J$ для любых $a \in J$, $g \in G$;

J2. $g_1 g_2 \ldots g_{i-1} a g_{i+1} \ldots g_n \omega \in J$ всякий раз, когда $\omega \in \Omega$, $a \in J$, $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$, и при любом $i = 1, 2, \ldots, n$.

§ 2. Упорядочение фактор-групп

В дальнейшем понадобится следующий признак упорядочиваемости дистрибутивных Ω-групп.

Теорема 1. *Для того, чтобы дистрибутивную Ω-группу можно было частично упорядочить, необходимо и достаточно, чтобы в этой Ω-группе G нашлась Ω-подполугруппа G^+, удовлетворяющая следующим условиям:*

U1. $-a+G^+ + a = G^+$ *для любого* $a \in G$;

U2. *если* $a \in G^+$ *и* $-a \in G^+$, *то* $a = -a = 0$.

Необходимость. Пусть G — частично упорядоченная Ω-группа. Ее элемент a называется *положительным*, если $a \geqslant 0$. В качестве G^+ выберем множество всех положительных элементов Ω-группы G, относительно которого известно (см. [1]), что оно является аддитивной подполугруппой с нулем в группе G и удовлетворяет условиям U1 и U2.

Покажем, что G^+ является Ω-полугруппой. Действительно, условие $\Omega 1$ выполняется: если $a_i \in G^+ (i = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. $a_i \geqslant 0$, то для любого оператора $\omega \in \Omega$ по определению частично упорядоченной Ω-группы имеем

$$a_1 a_2 \ldots a_n \omega \geqslant 0 \; a_2 \ldots a_n \omega = 0$$

(последнее равенство ввиду дистрибутивности оператора ω), т. е. $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in G^+$ и G^+ допускает систему Ω финитарных операторов. Следовательно, G^+ является Ω-подполугруппой, поскольку $\Omega 2$ выполняется для всех $\omega \in \Omega$ ввиду того, что G — Ω-группа.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Будем считать, что $a \geqslant b$ тогда и только тогда, когда $a - b \in G^+$. Как известно (см. [1]), при таком определении порядка группа G превращается в частично упорядоченную группу.

Проверим, выполнено ли условие $\Omega 3$. Для любого оператора $\omega \in \Omega$ из $a_i \geqslant b_i$, $a_j \geqslant 0$ $(a_i, b_i \in G, j, i = 1, 2, \ldots, n; i \neq j)$ или, что то же, из $a_i - b_i \in G^+$, $a_j \in G^+$ следует

$$a = a_1 a_2 \ldots a_{i-1}(a_i - b_i) a_{i+1} \ldots a_n \omega \in G^+,$$

ибо G^+ — Ω-полугруппа. Отсюда, поскольку оператор ω дистрибутивен, для любого i следует

$$a = a_1 a_2 \ldots a_n \omega - a_1 a_2 \ldots a_{i-1} b_i a_{i+1} \ldots a_n \omega \in G^+,$$

а это по определению значит, что

$$a_1 a_2 \ldots a_n \omega \geqslant a_1 a_2 \ldots a_{i-1} b_i a_{i+1} \ldots a_n \omega.$$

$\Omega 3$ выполнено и G является частично упорядоченной Ω-группой.

Известно, что всякая подгруппа A частично упорядоченной группы G сама является частично упорядоченной группой, полугруппой A^+ положительных элементов которой является пересечение A с G^+ — полугруппой положительных элементов группы G. Поскольку $\Omega 3$, будучи выполнено для G, выполняется и для A, то из вышеупомянутого факта следует, что всякая Ω-под-

группа частично упорядоченной Ω-группы сама частично упорядочена и ее Ω-подполугруппой положительных элементов является пересечение этой Ω-подгруппы с Ω-подполугруппой положительных элементов всей Ω-группы.

Возможность упорядочить *фактор-группу* (см. [4]) частично упорядоченной Ω-группы G по ее выпуклому идеалу J вытекает из следующего факта: *отличный от самого J смежный класс $J+a$ с положительным представителем не содержит элементов Ω-группы G, меньших нуля.* Действительно, при $a \geqslant 0$, $b \in J$ противное предположение $0 > b + a$ влечет $-b > a$ и $-a > b$, т. е. $-b > a \geqslant 0 \geqslant -a > b$, откуда, ввиду выпуклости идеала J, $a \in J$, что противоречит условию.

Пусть J — выпуклый, а A — какой-нибудь идеал дистрибутивной частично упорядоченной Ω-группы G. Будем говорить, что фактор-группа G/J *упорядочена по идеалу A,* если смежный класс считается положительным тогда и только тогда, когда он содержит хотя бы один положительный элемент, принадлежащий идеалу A.

Фактор-группа G/J, упорядоченная по идеалу A, является частично упорядоченной Ω-группой. Действительно, считая $J + a \geqslant J + b$ в случае $a - b \geqslant 0$, $a - b \in A$, мы сводим проверку аксиом I—IV частичной упорядоченности группы (см. [3], стр. 147) и аксиомы $\Omega 3$ для G/J на проверку этих же аксиом в A, для которго они выполняются.

В случае $A = G$ будем говорить, что G/J упорядочена *максимально.* Ω-группа G/J окажется тривиально упорядоченной тогда и только тогда, когда $A^+ \subseteq J$; в частности, если $A \subseteq J$. Действительно, в этом и только в этом случае единственным положительным смежным классом будет сам идеал J. Все остальные возможные упорядочения G/J по A занимают промежуточное положение между тривиальной и максимальной частичной упорядоченностью, каждое из них определяется каким-нибудь идеалом Ω-группы G, не содержащимся целиком в A.

§ 3. Теоремы о гомоморфизмах

Роль, аналогичная той, которую в теории Ω-групп играют идеалы, принадлежит в теории частично упорядоченных Ω-групп выпуклым идеалам.

Теорема 2. *Ядро J любого слабо гомоморфного (а, следовательно, и любого гомоморфного) отображения φ частично упорядоченной Ω-группы G на другую частично упорядоченную Ω-группу G' является выпуклым идеалом.*

Известно (см. [4]), что J — идеал. Пусть $a, b \in J$, $c \in G$, $c' = c\varphi$ и $a \geqslant c \geqslant b$. Тогда $a\varphi = 0 \geqslant c\varphi = c' \geqslant b\varphi = 0$, откуда $c' = 0$ и, следовательно, $c \in J$, т. е. J выпукл.

В дальнейшем все частично упорядоченные Ω-группы предполагаются дистрибутивными.

Теорема 3. *Если фактор-группа G/J частично упорядоченной Ω-группы G по ее выпуклому идеалу J максимально упорядочена, то естественное гомоморфное отображение G на G/J является гомоморфизмом (а, следовательно, и слабым гомоморфизмом) частично упорядоченных Ω-групп. Обратно, если частично упорядоченная Ω-группа G (слабо) гомоморфно отображается на частично упорядоченную Ω-группу G', то G' (слабо) изоморфна максимально упорядоченной фактор-группе G/J Ω-группы G по ядру J рассматриваемого гомоморфизма.*

Проверим, выполняются ли для естественного гомоморфного отображения $G \to G/J$ условия 3) и 4) определения гомоморфизма частично упорядоченных Ω-групп. Если в G $g \geqslant 0$, то по определению максимальной упорядоченности фактор-группы G/J смежный класс, соответствующий элементу g, будет положительным. Наоборот, если какой-либо смежный класс в G/J положителен, то в силу того же определения найдется положительный элемент, принадлежащий этому классу. Первая половина теоремы этим доказана.

Как известно (см. [4]), соответствие $g' \leftrightarrow J + g$, где g' — образ элемента g Ω-группы G при рассматриваемом гомоморфизме φ: $G \to G'$, является изоморфизмом Ω-групп G' и G/J. Покажем, что оно сохраняет порядок. Из положительности $J + g$ следует существование $g_1 \in J + g$ такого, что $g_1 \geqslant 0$, $g_1 = g\varphi$. Если φ: $G \to G'$ — слабый гомоморфизм, то $g' = g_1\varphi \geqslant 0$. Если же $G \to G'$ — гомоморфизм частично упорядоченных Ω-групп, то для $g' \geqslant 0$ найдется $g \geqslant 0$ и, следовательно, $J + g$ положителен. Теорема доказана.

Первая теорема об изоморфизме, которую можно было бы сформулировать следующим образом:

если A и J — Ω-подгруппы частично упорядоченной Ω-группы G, причем J является выпуклым идеалом в Ω-подгруппе $\{A, J\}$, то пересечение $A \cap J$ будет выпуклым идеалом в A и имеет место следующий изоморфизм максимально упорядоченных фактор-групп

$$A/J \cap A \simeq \{J, A\}/J,$$

как показывает сконструированный Е. П. Шимбиревой [3] пример, не переносится на случай частично упорядоченных Ω-групп, хотя выпуклость идеала $J \cap A$ в A легко проверяется:

из $a, b \in J \cap A$, $c \in A$, $a \geqslant c \geqslant b$ следует, ввиду выпуклости идеала J, что $c \in J$, откуда $c \in J \cap A$.

Однако *фактор-группа $A/J \cap A$ отображается на $\{A, J\}/J$ слабо изоморфно.* Действительно, если какой-нибудь смежный класс первой фактор-группы положителен, то он содержит по определению максимального порядка положительный элемент a Ω-

группы A. Но тогда соответствующий этому смежному классу смежный класс второй фактор-группы (им является $J+a$) будет также положительным.

Легко понять, почему имеет место лишь слабый изоморфизм: если смежный класс $J+a$ положителен, не исключена возможность того, что все элементы соответствующего смежного класса другой фактор-группы не сравнимы с нулем.

Следствием этого является следующее утверждение:

Первая теорема об изоморфизме имеет место для линейно упорядоченных Ω-групп.

Действительно, в этом случае из положительности $J+a$ всегда следует положительность соответствующего смежного класса другой фактор-группы, поскольку теперь все элементы смежного класса $J+a$ положительны.

В частном случае, *когда A является идеалом Ω-группы G, максимально упорядоченная фактор-группа $A/J \cap A$ изоморфна упорядоченной по идеалу A фактор-группе $\{J, A\}/J$.* Это утверждение является непосредственным следствием определения упорядочения фактор-группы по идеалу.

Теорема о соответствии между подгруппами при гомоморфном отображении, или, как ее еще называют, вторая теорема об изоморфизме, переносится на случай частично упорядоченных Ω-групп.

Теорема 4. *Произвольный гомоморфизм $\varphi: G \to G'$ одной частично упорядоченной G-группы на другую устанавливает взаимно однозначное соответствие между Ω-подгруппами A группы G, содержащими ядро J этого гомоморфизма, и Ω-подгруппами A' группы G', причем A' изоморфна максимально упорядоченной фактор-группе A/J. Если I' — выпуклый идеал в G', то соответствующий ему идеал I в G является выпуклым и имеет место следующий изоморфизм максимально упорядоченных фактор-групп*

$$G/I \cong G'/I'.$$

Поскольку φ: $G \to G'$ является, в частности, обычным гомоморфизмом Ω-групп, взаимно однозначное соответствие действительно имеет место (см. [4]). При этом индуцированный на A гомоморфизм $\varphi(A)$: $A \to A'$ переносит порядок из A в A'. Поскольку ядром гомоморфизма $\varphi(A)$ служит идеал J, то $A' \cong A/J$.

Пусть $a, b \in I$, $c \in G$, $a \geqslant c \geqslant b$, т. е. $a - c \geqslant 0$ и $c - b \geqslant 0$. Тогда $(a-c)\varphi = a\varphi - c\varphi \geqslant 0$ и $(c-b)\varphi = c\varphi - b\varphi \geqslant 0$, откуда $a\varphi \geqslant c\varphi \geqslant b\varphi$ в I'. Ввиду выпуклости идеала I', $c\varphi \in I'$ и, следовательно, $c \in I$, т. е. идеал I выпукл. Частично упорядоченная Ω-группа G гомоморфно отображается на G', эта в свою очередь — на G'/I'. Ядром гомоморфизма $G \to G'/I'$ является идеал I, поэтому по теореме 3

$$G/I \cong G'/I'.$$

Литература

1. Биркгоф Г., Теория структур. Москва, 1952.
2. Курош А. Г., Свободные суммы мультиоператорных групп. Acta Sci. Math. Szeged, 1960, **21**, № 3—4, 187—196.
3. Шимбирева Е. П., К теории частично упорядоченных групп. Матем. сб., 1947, **20** (62), 145—178.
4. Higgins, P. J., Groups with multiple operiators. Proc. London Math. Soc., (3), 1956, **6**, 366—416. [Русский перевод: Математика, 1959, **3**, № 4, 55—106.]

Поступило
10 II 1961

OSALISELT JÄRJESTATUD Ω-RÜHMAD

J. Gabovitš
Geomeetriakateeder

Resümee

P. J. Higginsi [4] poolt sissetoodud Ω-rühmade jaoks defineeritakse osaline järjestus. Faktorrühma kumera ideaali järgi järjestatakse mingi teise ideaali abil. Osaliselt järjestatud Ω-rühmade jaoks tõestatakse teoreem homomorfismidest ning esimene ja teine teoreem isomorfismidest.

PARTIALLY ORDERED Ω-GROUPS

J. Gabovitch

Summary

Partially ordered Ω-groups are considered. A necessary and sufficient condition is given for ordering Ω-groups. A rule is given for ordering factor-groups. The theorem about homomorfisms and first and second theorem about isomorfisms are proved.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Тамме и Р. Юргенсон

Кафедра математического анализа

Дифференциальные уравнения часто решаются путем замены данного уравнения более простым уравнением, которое в некотором смысле близко к решаемому уравнению. Важной проблемой является исследование точности такого метода. Некоторые оценки близости решений линейных дифференциальных уравнений получены в работах И. М. Власова [1, 2, 3]. В настоящей статье даются аналогичные оценки для линейных и нелинейных задач. Эти оценки в практике часто оказываются более просто применимыми и более точными, чем оценки, полученные И. М. Власовым.

При решении проблемы дифференциальное уравнение рассматривается как операторное уравнение в пространстве, обобщенно-нормированном посредством векторного пространства, и используются общие результаты, полученные в таких пространствах. Эти результаты приведены в § 1. Таким путем получаются более точные оценки, чем можно получить использованием обычной нормы банахового пространства, но сложность оценок не увеличивается.

В §§ 2—4 сформулированы результаты о близости решений дифференциальных уравнений в таком виде, чтобы при пользовании ими не надо было владеть аппаратом функционального анализа.

§ 1. Уравнения в обобщенно-нормированном пространстве

1. B^{++}-пространством называется полуупорядоченное пространство Банаха U (см. [8]), в котором

a) для каждого элемента u существует элемент $u' \geqslant 0$ такой, что $u' \geqslant u$;

b) из соотношений $0 \leqslant u_n' \leqslant u_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $\lim u_n = 0$ следует, что $\lim u_n' = 0$;

c) каждый ряд с положительными членами и ограниченными (по упорядоченности) частными суммами сходится.

Пусть линейное пространство X нормировано посредством B^{++}-пространства U (см. [8]), а A и M линейные непрерывные операторы, действующие соответственно в пространствах X и U.

О существовании обратного оператора в пространстве X имеет место следующая

Лемма 1. *Если*[1] $|A| \leqslant M$ *и существует положительный обратный оператор* $(I - M)^{-1}$, *то существует обратный оператор* $(E - A)^{-1}$, *причем*

$$|(E - A)^{-1}| \leqslant (I - M)^{-1},$$

где E *и* I *— единичные операторы соответственно в пространствах* X *и* U.

Эта лемма доказывается на основе результатов работы [8] (см. также [6]).

2. Пусть даны два уравнения

$$x = Ax + y, \tag{1}$$

$$x = Bx + z, \tag{2}$$

где A и B — линейные непрерывные операторы, действующие в пространстве X.

Лемма 2. *Если уравнение* (2) *имеет решение* x_0, *выполнены неравенства*

$$|x_0| \leqslant u_0, \ |y - z| \leqslant v, \ |A| \leqslant M, \ |A - B| \leqslant L$$

и существует положительный обратный оператор $(I - M)^{-1}$, *то уравнение* (1) *имеет единственное решение* x^*, *причем*

$$|x^* - x_k| \leqslant (I - M)^{-1} M^k (Lu_0 + v) \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{3}$$

где

$$x_k = x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^i [(A - B)x_0 + y - z]. \tag{4}$$

Доказательство. На основании леммы 1 существует обратный оператор $(E - A)^{-1}$ и уравнение (1) имеет единственное решение $x^* = (E - A)^{-1} y$. Из тождеств

$$x^* = Ax^* + y, \ x_0 = Bx_0 + z$$

получается после несложных преобразований

$$x^* - x_0 = (E - A)^{-1} [(A - B)x_0 + y - z].$$

Следовательно,

$$x^* - x_k = (E - A)^{-1} A^k [(A - B)x_0 + y - z],$$

из чего следует оценка (3).

[1] Символом $|A| \leqslant M$ обозначается соотношение, определенное в [8].

Примечание 1. Если $|z| \leqslant w$, $|B| \leqslant N$ и существует положительный обратный оператор $(I - N)^{-1}$, то $|x_0| \leqslant (I - N)^{-1} w$. Следовательно, в таком случае можно в оценке (3) взять $u_0 = (I - N)^{-1} w$.

3. Рассмотрим уравнение

$$P(x) = 0, \tag{5}$$

где P дважды дифференцируемый оператор, действующий из пространства X в некоторое линейное нормированное пространство. Если существуют обратные операторы $\Gamma_i = [P'(x_i)]^{-1}$, то для приближенного решения уравнения (5) применим обобщенный метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \Gamma_{i_k} P(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots; 0 \leqslant i_k \leqslant k), \tag{6}$$

где x_0 — начальное приближение искомого решения. Отметим, что приведенный метод при $i_k = k$ дает обычный и при $i_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ модифицированный метод Ньютона.

Лемма 3. *Предположим, что в области $|x - x_0| \leqslant u^*$ оператор P дважды непрерывно дифференцируется, существует обратный оператор $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ и $|\Gamma_0 P(x_0)| \leqslant Q_0$, $|\Gamma_0 P''(x)| \leqslant Q_2$ при $|x - x_0| \leqslant u^*$, где u^* такое положительное решение уравнения*

$$Q(u) \equiv u - Q_0 - \frac{1}{2} Q_2 u^2 = 0,$$

при котором существует положительный обратный оператор $(I - Q_2 u^*)^{-1}$.

Тогда уравнение (5) *имеет в области $|x - x_0| \leqslant u^*$ единственное решение x^*, к которому сходится полученная из* (6) *последовательность приближений $\{x_k\}$, причем справедливы оценки*

$$|x^* - x_k| \leqslant u^* - u_k \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

где $u_0 = 0$, $u_{k+1} = u_k - [Q'(u_{i_k})]^{-1} Q(u_k)$.

Эта лемма получается частным случаем из результатов, сформулированных в [8] (ср. также [5]).

4. В следующих параграфах изложим некоторые применения приведенных результатов к приближенному решению дифференциальных уравнений. При этом в качестве обобщенно-нормированного пространства X выберем пространства непрерывно дифференцируемых функций $C^{(k)}[a, b]$ и $C^{(1)}(D)$, нормированные посредством векторного пространства U.

Элементами пространства $C^{(k)}[a, b]$ $(k = 0, 1, \ldots)$ являются функции $x(s)$, k раз непрерывно дифференцируемые. Это пространство нормируем посредством $(k+1)$-мерного векторного пространства U, определяя

$$|x| \leqslant u = (u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}),$$

если при $a \leqslant s \leqslant b$

$$|x^{(i)}(s)| \leqslant u^{(i)} \quad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

Элементами пространства $C^{(1)}(D)$ являются функции двух переменных $x(s, t)$, непрерывные и имеющие непрерывные частные производные первого порядка в замкнутой области D. При этом считаем

$$|x| \leqslant u = (u_{00}, u_{10}, u_{01}),$$

если в D

$$\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j} x(s, t)\right| \leqslant u_{ij} \quad (i, j = 0, 1;\ i + j \leqslant 1).$$

Нетрудно проверить, что $C^{(k)}[a, b]$ и $C^{(1)}(D)$ являются пространствами, нормированными посредством B^{++}-пространства в смысле [8].

§ 2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(s) x^{(k)} = f(s) \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$U_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

где [2]

$$U_i(x) = \sum_{j=0}^{n-1} [a_{ij} x^{(j)}(a) + b_{ij} x^{(j)}(b)].$$

Пусть известно решение $x_0(s)$ уравнения

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(s) x^{(k)} = g(s), \tag{9}$$

удовлетворяющее условиям (8), и функция Грина $G(s, t)$ (см. [7]) уравнения

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} r_k(s) x^{(k)} = 0 \tag{10}$$

с краевыми условиями (8).

---

[2] Частным случаем такой общей краевой задачи является и задача Коши (при $b_{ij} = 0$).

Отметим, что требование однородности краевых условий не является существенным ограничением. Если дана задача с неоднородными линейными краевыми условиями и z_0 — некоторая функция, n раз непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющая этим условиям, то заменой переменной $z = x - z_0$ для z получается аналогичная краевая задача с однородными краевыми условиями.

Предположим, что функции $f(s)$, $g(s)$, $p_k(s)$, $q_k(s)$ и $r_k(s)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ являются непрерывными на отрезке $a \leqslant s \leqslant b$, и обозначим оценки

$$\left.\begin{aligned} &|g(s)| \leqslant \beta,\ |f(s)-g(s)| \leqslant \delta,\ |p_i(s)-r_i(s)| \leqslant \alpha_i, \\ &|q_i(s)-r_i(s)| \leqslant \beta_i,\ |p_i(s)-q_i(s)| \leqslant \delta_i, \\ &|x_0^{(i)}(s)| \leqslant \varkappa_i,\ \int_a^b \left|\frac{\partial^i}{\partial s^i} G(s, t)\right| dt \leqslant \mu_i, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где $i=0, 1, \ldots, n-1$ и $a \leqslant s \leqslant b$.

Тогда имеет место[3]

Теорема 1. *Если задача* {(9), (8)} *имеет решение* $x_0(s)$ *и*

$$\eta = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \alpha_j < 1,$$

то задача {(7), (8)} *имеет единственное решение* $x^*(s)$, *причем на отрезке* $a \leqslant s \leqslant b$

$$|x^{*(i)}(s) - x_0^{(i)}(s)| \leqslant \varepsilon \mu_i \quad (i=0, 1, \ldots, n-1), \quad (12)$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\eta} \sum_{j=0}^{n-1} (\delta_j \varkappa_j + \delta).$$

Доказательство. Используя основное свойство функции Грина, мы можем задачи {(7), (8)} и {(9), (8)} заменить эквивалентными интегро-дифференциальными уравнениями

$$x(s) = \int_a^b G(s, t) \sum_{k=0}^{n-1} [r_k(t) - p_k(t)] x^{(k)}(t)\, dt + \int_a^b G(s, t) f(t)\, dt,$$

$$x(s) = \int_a^b G(s, t) \sum_{k=0}^{n-1} [r_k(t) - q_k(t)] x^{(k)}(t)\, dt + \int_a^b G(s, t) g(t)\, dt.$$

Для доказательства теоремы рассмотрим эти уравнения как операторные уравнения в обобщенно-нормированном пространстве $C^{(n-1)}[a, b]$, и применим лемму 2.

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} Ax &= \int_a^b G(s, t) \sum_{k=0}^{n-1} [r_k(t) - p_k(t)] x^{(k)}(t)\, dt, \\ Bx &= \int_a^b G(s, t) \sum_{k=0}^{n-1} [r_k(t) - q_k(t)] x^{(k)}(t)\, dt, \\ y &= \int_a^b G(s, t) f(t)\, dt,\ z = \int_a^b G(s, t) g(t)\, dt \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

[3] Для удобства пользования этой и следующими теоремами в конце статьи приведена таблица оценок μ_k функций Грина некоторых задач.

и найдем нужные оценки. Очевидно [4]

$$|x_0| \leqslant (\varkappa_i) = u_0,\ |y - z| \leqslant (\mu_i \delta) = v.$$

Так как для всех $|x| \leqslant u = (u^{(i)})$ имеют место соотношения

$$|Ax| \leqslant (\mu_i \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^{(k)}),\ |(A - B)x| \leqslant (\mu_i \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k u^{(k)}),$$

то

$$|A| \leqslant (\mu_i \alpha_k) = M,\ |A - B| \leqslant (\mu_i \delta_k) = L.$$

Нетрудно видеть, что

$$(I - M)^{-1} u = u + \frac{1}{1 - \eta} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^{(k)} (\mu_i)$$

и

$$(I - M)^{-1} (Lu_0 + v) = (\varepsilon \mu_i).$$

Таким образом из леммы 2 при $k = 0$ следуют все утверждения теоремы.

Примечание 2. Если

$$\vartheta = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \beta_j < 1,$$

то в силу примечания 1 можно взять

$$\varkappa_i = \frac{\beta}{1 - \vartheta} \mu_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n - 1)$$

и таким образом применить оценки (12) и до фактического вычисления решения $x_0(s)$ задачи {(9), (8)}.

Примечание 3. Результаты, аналогичные приведенным в теореме 1, получены И. М. Власовым [1, 2], который брал в уравнении (10) $r_k(s) = q_k(s)$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Тогда в оценках (11) $\beta_j = 0$ и $\alpha_i = \delta_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Но часто удается подходящим выбором уравнения (10) значительно упростить применение теоремы. Например, можно взять $r_k(s) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Если использовать в качестве {(10), (8)} задачу, данную в приложенной к статье таблице, то для применения теоремы фактически не надо найти функцию Грина этой задачи.

Пример. Для приближенного решения уравнения

$$x^{\mathrm{IV}} + \frac{1}{4}(s + 1) x'' = \cos \frac{s}{2}$$

---

[4] Символом $(\varkappa_i)$ обозначается вектор с координатами $\varkappa_i$ $(i = 0, 1, \ldots n - 1)$ и символом $(\mu_i \alpha_k)$ матрица с элементами $\mu_i \alpha_k$ $(i, k = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

с начальными условиями $x^{(i)}(0) = 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ найдем точное решение

$$x_0(s) = 4\left(\operatorname{ch}\frac{s}{2} - \frac{s}{2}\sin\frac{s}{2} - \cos\frac{s}{2}\right)$$

задачи

$$x^{IV} + \frac{1}{2}x'' + \frac{1}{16}x = \operatorname{ch}\frac{s}{2},\ x^{(i)}(0) = 0\ (i = 0, 1, 2, 3).$$

Взяв в качестве (10) уравнение $x^{IV} = 0$, получим для отрезка $[0, \frac{1}{2}]$ из таблицы $\mu_0 = \frac{1}{384}$, $\mu_1 = \frac{1}{48}$, $\mu_2 = \frac{1}{16}$, $\mu_3 = \frac{1}{2}$. Нетрудно вычислить $\varkappa_0 = 0{,}0027$; $\varkappa_2 = 0{,}125$; $\delta = 0{,}063$; $\delta_0 = \frac{1}{16}$; $\delta_2 = \frac{1}{4}$; $a_2 = \frac{3}{8}$; $\varepsilon = 0{,}1$. На основании теоремы рассматриваемая задача имеет единственное решение $x^*(s)$, причем на отрезке $0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}$

$$|x^*(s) - x_0(s)| \leqslant 0{,}00027;\ |x^{*\prime}(s) - x_0'(s)| \leqslant 0{,}0021;$$
$$|x^{*\prime\prime}(s) - x_0''(s)| \leqslant 0{,}0063;\ |x^{*\prime\prime\prime}(s) - x_0'''(s)| \leqslant 0{,}05.$$

2. Если теорема 1 применима, но оказывается, что $x_0(s)$ не является достаточно точным приближением искомого решения $x^*(s)$, то для получения более точных приближений можно пользоваться итерационным процессом (4), в котором операторы A, B и функции y, z определены по формулам (13). Из леммы 2 следует

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то последовательность функций* $\{x_k(s)\}$, *определенных формулой* (4), *и их производных до порядка* $n - 1$ *сходится равномерно на отрезке* $[a, b]$ *соответственно к решению* $x^*(s)$ *задачи* {(7), (8)} *и его производным, причем для* $a \leqslant s \leqslant b$ *справедливы оценки*

$$|x^{*(i)}(s) - x_k^{(i)}(s)| \leqslant \varepsilon\eta^k\mu_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 0, 1, \ldots),$$

где обозначения те же, что и в формулировке теоремы 1.

Эта теорема обобщает теорему 1, их доказательства почти совпадают.

Примечание 4. Полученные теоремы применимы для оценки погрешности любого приближенного решения $x_0(s)$ задачи {(7), (8)}, если это приближение дано аналитически и удовлетворяет условиям (8). Для этого составим уравнение (9), взяв

$$q_k(s) = p_k(s) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$
$$g(s) = x_0^{(n)}(s) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(s)x_0^{(k)}(s).$$

Тогда $x_0(s)$ является решением задачи {(9), (8)}, а в оценках $\delta_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ и $\varepsilon = \frac{\delta}{1-\eta}$. Итерационным процессом (4) можно пользоваться для получения приближенных решений требуемой точности. В рассматриваемом случае $A - B = 0$.

Пример. Пусть требуется найти решение $x^*(s)$ задачи

$$x'' + x = s^3 + 5s, \quad x(0) = x(1) = 0$$

с прогрешностью 0,005. Исходя из начального приближения $x_0(s) = s^3 - s^2$, составим уравнение

$$x'' + x = s^3 - s^2 + 6s - 2,$$

решением которого оно является.

Используя функцию Грина задачи $x'' = 0$, $x(0) = x(1) = 0$, получим на основании теоремы 2 оценку

$$|x^*(s) - x_k(s)| \leqslant \frac{2}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^k \quad (0 \leqslant s \leqslant 1;\ k = 0, 1, \ldots),$$

т. е.

$$|x^*(s) - x_0(s)| \leqslant 0{,}29;\ |x^*(s) - x_1(s)| \leqslant 0{,}036;$$
$$|x^*(s) - x_2(s)| \leqslant 0{,}0045.$$

Несложные вычисления дают

$$x_1(s) = \frac{1}{12}(s^4 + 10s^3 - 11s),$$

$$x_2(s) = \frac{1}{360}(-s^6 + 3s^5 + 355s^3 - 357s).$$

Так как точным решением изучаемой задачи является $x^*(s) = s^3 - s$, то можем вычислить действительные прогрешности:

$$\max_{0<s<1} |x^*(s) - x_0(s)| = 0{,}25;\ \max_{0<s<1} |x^*(s) - x_1(s)| = \frac{5}{192} \approx 0{,}026;$$
$$\max_{0<s<1} |x^*(s) - x_2(s)| = \frac{61}{23040} \approx 0{,}00265.$$

§ 3. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть на отрезке $[a, b]$ надо решить дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} r_k(s) x^{(k)} = f(s, x, x', \ldots, x^{(m)}) \quad (m < n). \tag{14}$$

с краевыми условиями (8). Если при этих краевых условиях существует функция Грина $G(s, t)$ уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} r_k(s) x^{(k)} = 0,$$

то задачу {(14), (8)} можно заменить уравнением

$$P(x) \equiv x(s) - \int_a^b G(s,t) f[(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)]dt = 0. \quad (15)$$

Для приближенного решения полученного уравнения применим обобщенный метод Ньютона (6).

Рассматривая уравнение (15) операторным уравнением в пространстве $C^{(n-1)}[a, b]$, получаем из леммы 3 следующий результат о существовании, единственности и области расположения решения изучаемой задачи [5].

Теорема 3. *Пусть функция $x_0(s)$ является на отрезке $[a, b]$ n раз непрерывно дифференцируемой, удовлетворяющей условиям* (8), *и при $a \leqslant s \leqslant b$ известны оценки*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} r_k(s) x_0^{(k)}(s) - f[s, x_0(s), x_0'(s), \ldots, x_0^{(m)}(s)]\right| \leqslant \gamma,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x^{(j)}} f[s, x_0(s), x_0'(s), \ldots, x_0^{(m)}(s)]\right| \leqslant a_j,$$

$$\int_a^b \left|\frac{\partial^j}{\partial s^j} G(s,t)\right| dt \leqslant \mu_j \quad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

и в области (16)

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(k)}} f[s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(m)}(s)]\right| \leqslant \gamma_{jk} \quad (j, k = 0, 1, \ldots, m).$$

Предположим, что

1) $\eta = \sum_{j=0}^{m} \mu_j a_j < 1$;

2) *функции* $\frac{1}{r_n(s)}$ *и* $r_k(s)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ *являются непрерывными на отрезке $a \leqslant s \leqslant b$, а функция $f(s, x, x', \ldots, x^{(m)})$ — непрерывной по s $(a \leqslant s \leqslant b)$ и два раза непрерывно дифференцируемой по $x^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$* в области

$$|x^{(i)}(s) - x_0^{(i)}(s)| \leqslant \frac{2\gamma}{1-\eta} \mu_i \quad (i = 0, 1, \ldots, m); \quad (16)$$

3) $h = \frac{\gamma}{(1-\eta)^2} \sum_{j,k=0}^{m} \mu_j \mu_k \gamma_{jk} < \frac{1}{2}$.

Тогда задача {(14), (8)} *имеет в области* (16) *единственное решение $x^*(s)$. Последовательности функций $\{x_k(s)\}$, вычисленных при помощи формулы* (6), *и их производных до порядка*

[5] Частный случай этой теоремы для задачи $x'' = f(s, x)$, $x(0) = x(1) = 0$ дан в работе [4].

$n-1$ сходятся равномерно на отрезке $[a, b]$ соответственно к решению $x^*(s)$ и его производным, причем справедливы оценки

$$|x^{*(i)}(s) - x_k^{(i)}(s)| \leqslant (\xi^* - \xi_k)\mu_i$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 0, 1, \ldots;\ a \leqslant s \leqslant b),$$

где

$$\xi^* = \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} \cdot \frac{\gamma}{1-\eta},$$

$$\xi_0 = 0,\ \xi_{k+1} = \xi_k + \frac{\frac{h}{2}\xi_k^2 - \frac{\gamma}{1-\eta}\xi_k + \left(\frac{\gamma}{1-\eta}\right)^2}{\frac{\gamma}{1-\eta} - h\xi_{i_k}}.$$

Примечание 5. На основании леммы 3 мы можем улучшить оценки γ_{jk}, заменив область (16) областью

$$|x^{*(i)}(s) - x_0^{(i)}(s)| \leqslant \xi^*\mu_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, m).$$

§ 4. Уравнения с частными производными

Результаты § 1 применимы также при приближенном решении уравнений с частными производными. В качестве примера приведем результат, аналогичный теореме 1.

Пусть требуется найти решение эллиптического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + p_{10}(s, t)\frac{\partial x}{\partial s} + p_{01}(s, t)\frac{\partial x}{\partial t} + p_{00}(s, t)\,x = f(s, t) \quad (17)$$

внутри замкнутой области D, удовлетворяющее условию

$$x = 0 \text{ на границе области } D. \quad (18)$$

Пусть известно решение $x_0(s)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + q_{10}(s, t)\frac{\partial x}{\partial s} + q_{01}\frac{\partial x}{\partial t} + q_{00}(s, t)\,x = g(s, t) \quad (19)$$

с краевым условием (18) и функция Грина $G(s, t; \sigma, \tau)$ уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

при условии (18).

Предположим, что используемые функции являются непрерывными в замкнутой области D и что в этой области известны оценки

$$|f(s, t) - g(s, t)| \leqslant \delta,\ |p_{ij}(s, t)| \leqslant \alpha_{ij},$$

$$|p_{ij}(s,\ t) - q_{ij}(s,\ t)| \leqslant \delta_{ij},\ \left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i\,\partial t^j}\,x_0\ (s,\ t)\right| \leqslant \varkappa_{ij},$$

$$\iint\limits_D \left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i\,\partial t^j}\,G\ (s,\ t;\ \sigma,\ \tau)\right| d\sigma d\tau \leqslant \mu_{ij} \quad (i,\ j=0,\ 1;\ i+j \leqslant 1).$$

Теорема 4. *Если задача* {(19), (18)} *имеет решение* $x_0(s,\ t)$ *и*

$$\eta = \mu_{00}\alpha_{00} + \mu_{10}\alpha_{10} + \mu_{01}\alpha_{01} < 1,$$

то задача {(17), (18)} *имеет единственное решение* $x^*(s)$, *причем в области* D *справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i\,\partial t^j}\,x^*(s,\ t) - \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i\,\partial t^j}\,x_0\ (s,\ t)\right| \leqslant \varepsilon\mu_{ij} \quad (i,\ j=0,\ 1;\ i+j \leqslant 1),$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\eta}\,(\delta_{00}\varkappa_{00} + \delta_{10}\varkappa_{10} + \delta_{01}\varkappa_{01} + \delta).$$

Эту теорему получим из леммы 2, взяв в качестве X пространство $C^{(1)}(D)$. Ее доказательство весьма аналогично доказательству теоремы 1.

Литература

1. Власов И. М., Изучение близости решений линейных дифференциальных уравнений в линейных нормированных пространствах. Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1956, 8, 3—53.
2. Власов И. М., О близости решений некоторых краевых задач для линейных дифференциальных уравнений. Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1956, 8, 54—62.
3. Власов И. М., Об оценке близости решений краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1957, 11, 110—115.
4. Глинская Н. Н., Мысовских И. П., О численном решении граничной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, 8, 49—54.
5. Канторович Л. В., Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант. Докл. АН СССР, 1951, **80**, 849—852.
6. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Москва—Ленинград, 1950.
7. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы. Москва, 1954.
8. Тамме Э. Э., О принципе мажорант для итерационных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 84—118.

Поступило
13 IV 1960

Приложение

Таблица оценок функции Грина [6]

№	Уравнение	Краевые условия	Оценки $\int_a^b \left\lvert \frac{\partial^i}{\partial s^i} G(s, t) \right\rvert dt \leqslant \mu_i \quad (a \leqslant s \leqslant b)$
1	$x^{(n)} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$x^{(i)}(a) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$	$\mu_i = \frac{(b-a)^{n-i}}{(n-i)!} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$
2	$x' - rx = 0$	$x(a) = 0$	$\mu_0 = \frac{1}{r}(e^{\varrho} - 1)$
3	$x'' + r^2 x = 0$ $\left(0 < r \leqslant \frac{\pi}{b-a}\right)$	$x(a) = x'(a) = 0$	$\mu_0 = \frac{2}{r^2} \sin^2 \frac{\varrho}{2} \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}$, $\mu_1 = \frac{1}{r} \max(\sin \varrho, 2 - \sin \varrho) \leqslant b - a$
4	$x'' - r^2 x = 0$	$x(a) = x'(a) = 0$	$\mu_0 = \frac{2}{r^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\varrho}{2}$, $\mu_1 = \frac{1}{r} \operatorname{sh} \varrho$
5	$x'' - rx' = 0$	$x(a) = x'(a) = 0$	$\mu_0 = \frac{1}{r^2}(e^{\varrho} - 1 - \varrho)$, $\mu_1 = \frac{1}{r}(e^{\varrho} - 1)$
6	$x'' = 0$	$\alpha x(a) + \beta x(b) = 0$, $\gamma x'(a) + \delta x'(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{(b-a)^2(\lvert\gamma\rvert + \lvert\delta\rvert)}{2\lvert\alpha+\beta\rvert\lvert\gamma+\delta\rvert} \max(\lvert\alpha\rvert, \lvert\beta\rvert)$, $\mu_1 = \frac{b-a}{\lvert\gamma+\delta\rvert} \max(\lvert\gamma\rvert, \lvert\delta\rvert)$

[6] Для краткости обозначается $r(b-a) = \varrho$

№	Уравнение	Краевые условия	Оценки $\int_a^b \left\lvert \frac{\partial^i}{\partial s^i} G(s,\ t) \right\rvert dt \leqslant \mu_i \quad (a \leqslant s \leqslant b)$
7	$x'' = 0$	$\alpha x(a) + \beta x'(a) = 0,$ $\gamma x(b) + \delta x'(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{(b-a)^3 \lvert\alpha\gamma\rvert + 4(b-a)^2(\lvert\alpha\delta\rvert + \lvert\beta\gamma\rvert) + 8(b-a)\lvert\beta\delta\rvert}{8\lvert(b-a)\alpha\gamma + \alpha\delta - \beta\gamma\rvert},$ $\mu_1 = \frac{(b-a)^2\lvert\alpha\gamma\rvert + 2(b-a)\max(\lvert\alpha\delta\rvert,\ \lvert\beta\gamma\rvert)}{2\lvert(b-a)\alpha\gamma + \alpha\delta - \beta\gamma\rvert}.$
8	$x'' + r^2 x = 0$ $\left(0 < r < \frac{\pi}{b-a}\right)$	$x(a) = x(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{2}{r^2 \cos\frac{\varrho}{2}} \sin^2\frac{\varrho}{4} \leqslant \frac{(b-a)^2}{8\cos\frac{\varrho}{2}},$ $\mu_1 = \frac{1}{r}\operatorname{tg}\frac{\varrho}{2}$
9	$x'' - r^2 x = 0$	$x(a) = x(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{2}{r^2 \operatorname{ch}\frac{\varrho}{2}} \operatorname{sh}^2\frac{\varrho}{4},\ \mu_1 = \frac{1}{r}\operatorname{th}\frac{\varrho}{2}$
10	$x'' + r^2 x = 0$ $\left(0 < r < \frac{\pi}{b-a}\right)$	$x'(a) = x'(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{1}{r^2},\ \mu_1 = \frac{1}{r}\operatorname{tg}\frac{\varrho}{2}$
11	$x'' - r^2 x = 0$	$x'(a) = x'(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{1}{r^2},\ \mu_1 = \frac{1}{r}\operatorname{th}\frac{\varrho}{2}$
12	$x'' - rx' = 0$	$x(a) = x(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\varrho}{e^\varrho - 1} - \ln\frac{\varrho}{e^\varrho - 1} - 1\right),$ $\mu_1 = \frac{1}{r}\left(\frac{\varrho}{e^\varrho - 1} - 1 - \varrho\right)$

№	Уравнение	Краевые условия	Оценки $\int_a^b \left\| \frac{\partial^i}{\partial s^i} G(s, t) \right\| dt \leqslant \mu_i \quad (a \leqslant s \leqslant b)$
13	$x'' - rx' = 0$	$x(a) = x'(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{1}{r^2}(e^{-\varrho} - 1 + \varrho),\ \mu_1 = \frac{1}{r}(1 - e^{-\varrho})$
14	$x'' - rx' = 0$	$x'(a) = x(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{1}{r^2}(e^{\varrho} - 1 - \varrho),\ \mu_1 = \frac{1}{r}(e^{\varrho} - 1)$
15	$x^{IV} = 0$	$x(a) = x'(a) = 0,$ $x(b) = x'(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{1}{6}(b-a)^4,\ \mu_1 = \frac{5}{6}(b-a)^3,$ $\mu_2 = \frac{11}{12}(b-a)^2,\ \mu_3 = \frac{1}{2}(b-a)$
16	$x^{IV} = 0$	$x(a) = x'(a) = 0,$ $x''(b) = x'''(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{1}{8}(b-a)^4,\ \mu_1 = \frac{1}{6}(b-a)^3,$ $\mu_2 = \frac{1}{2}(b-a)^2,\ \mu_3 = b-a.$
17	$x^{IV} = 0$	$x(a) = x''(a) = 0,$ $x(b) = x''(b) = 0$	$\mu_0 = \frac{1}{30}(b-a)^4,\ \mu_1 = \frac{33}{72}(b-a)^3,$ $\mu_2 = \frac{1}{8}(b-a)^2,\ \mu_3 = \frac{1}{2}(b-a)$

DIFERENTSIAALVÕRRANDITE LIGIKAUDSEST LAHENDAMISEST

E. Tamme ja R. Jürgenson
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Praktikas leitakse sageli diferentsiaalvõrrandi ligikaudne lahend tema mingi lähisvõrrandi lahendamise teel. Käesolevas artiklis on uuritud selle meetodi täpsust.

Tõestatakse näiteks järgmine tulemus.

Olgu vaja lõigul $[a, b]$ lahendada alg- või rajatingimustega ülesanne {(7), (8)}.

Oletame, et meil on teada ülesande {(9), (8)} lahend $x_0(s)$ ja ülesande {(10, (8)} Greeni funktsioon $G(s, t)$ ning et võrrandite (7), (9), (10) korda-jad ja vabaliikmed on pidevad lõigul $[a, b]$.

Teoreem 1. *Kui ülesandel* {(9), (8)} *on lahend* $x_0(s)$ *ja*

$$\eta = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j a_j < 1,$$

siis ülesandel {(7), (8)} *on ainus lahend* $x^*(s)$, *kusjuures lõigul* $a \leqslant s \leqslant b$ *kehtivad hinnangud*

$$|x^{*(i)}(s) - x_0^{(i)}(s)| \leqslant \varepsilon\mu_i \quad (i = 0,1, \ldots, n-1),$$

kus

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\eta}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \delta_j \varkappa_j + \delta\right)$$

ning δ, a_j, δ_j, $\varkappa_j$ ja μ_j *on määratud võrratustega* (11).

Analoogilisi tulemusi on antud ka mittelineaarsete ja osatuletistega diferentsiaalvõrrandite jaoks (teoreemid 3 ja 4).

Artiklis on näidatud ka iteratsiooniprotsesse, mis võimaldavad täpsustada otsitava lahendi $x^*(s)$ alglähendit $x_0(s)$.

ÜBER ANGENÄHERTE LÖSUNG VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

E. Tamme und R. Jürgenson

Zusammenfassung

Oft wird die Näherungslösung einer Differentialgleichung als Lösung einer der Grundgleichung nahen Differentialgleichung gesucht. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Genauigkeitsuntersuchung dieser Methode.

Es wird z. B. folgendes Resultat bewiesen.

Es sei im Intervall $[a, b]$ die Anfangs- oder Randwertaufgabe {(7), (8)} zu lösen.

Wir nehmen an, daß die Lösung $x_0(s)$ der Aufgabe {(9), (8)} und die Greenische Funktion $G(s, t)$ der Aufgabe {(10), (8)} bekannt sind und daß die Koeffizienten und Störungsfunktionen der Gleichungen (7), (9), (10) im Intervall $[a, b]$ stetig sind.

Dann gilt der

Satz 1. *Wenn die Aufgabe* {(9), (8)} *die Lösung* $x_0(s)$ *hat und die Bedingung*

$$\eta = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j a_j < 1$$

erfüllt ist, dann hat die Aufgabe {(7), (8)} *die einzige Lösung* $x^*(s)$. *Dabei wird im Intervall* $a \leqslant s \leqslant b$ *der Abstand zwischen* $x_0(s)$ *und* $x^*(s)$ *mit ihren Ableitungen durch Ungleichung*

$$|x^{*(i)}(s) - x_0^{(i)}(s)| \leqslant \varepsilon\mu_i \quad (i = 0,1, \ldots, n-1)$$

geschätzt, wo

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\eta}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \delta_j \varkappa_j + \delta\right)$$

ist und die Größen δ, a_j, δ_j, $\varkappa_j$, μ_j *durch* (11) *bestimmt sind.*

Analogische Ergebnisse sind auch für nichtlineare und partielle Differentialgleichungen gegeben (Sätze 3 und 4).

In der Arbeit werden noch einige Iterationsverfahren betrachtet, die die Möglichkeit zur Verbesserung der Anfangsnäherung $x_0(s)$ der gesuchten Lösung $x^*(s)$ ergeben.

О ТОЧНОСТИ МЕТОДА МОМЕНТОВ

Э. Тамме
Кафедра геометрии

В § 1 настоящей статьи даются результаты (теоремы 1 и 2), аналогичные центральным теоремам общей теории приближенных методов Л. В. Канторовича (см. [3], гл. XIV). В следующих параграфах эти результаты применяются для исследования точности метода моментов при приближенном решении бесконечных систем и интегральных и дифференциальных уравнений. Использование обобщенной нормы уточняет результаты (ср. [7]).

§ 1. Общие результаты

Пусть X — пространство типа B_K, нормированное посредством KB-пространства U (см. [4]). Обобщенной нормой элемента $x \in X$ является элемент $\|x\|$ пространства U. Линейным ограниченным оператором называется регулярный в смысле [4] оператор. Будем говорить, что некоторый оператор имеет обратный, если он имеет линейный ограниченный обратный оператор. Оператор в полуупорядоченном пространстве называется положительным, если он преобразует все положительные элементы в положительные.

В частности X может быть банаховым пространством. Тогда норма $\|x\|$ — вещественное число.

Пусть A и B — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства X в то же пространство. Имеет место

Лемма[1] **1.** *Если существуют обратные операторы* A^{-1} *и*[2] $(J - \|A^{-1}(A - B)\|)^{-1} > 0$, *то существует обратный оператор* B^{-1}, *причем*

$$\|B^{-1}\| \leqslant (J - \|A^{-1}(A - B)\|)^{-1}\|A^{-1}\|.$$

---

[1] В случае банахова пространства этот результат хорошо известен (см. напр. [3], стр. 159).

[2] Через J обозначается единичный оператор в пространстве U, а через E — единичный оператор в X.

Утверждения этой леммы легко доказываются на основании тождества $B = A[E - A^{-1}(A - B)]$ и теоремы из [4] (стр. 462).

Лемма 2. *Пусть уравнение* $Ax = y$ *имеет решение* x^*. *Если существует* A^{-1}, *то*

$$\|x^* - x\| \leqslant \|A^{-1}\|\|Ax - y\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A^{-1}\|(\|A - B\|\|x\| + \|y - z\| + \|Bx - z\|).$$

Если существует B^{-1}, *то*

$$\|x^* - x\| \leqslant \|B^{-1}\|(\|A - B\|\,\|x^*\| + \|y - z\| + \|Bx - z\|).$$

Эти оценки следуют из очевидных тождеств

$$A(x^* - x) = y - Ax = -(A - B)x + y - z - (Bx - z);$$
$$B(x^* - x) = -(A - B)x^* + y - z - (Bx - z).$$

Пусть $\tilde{X}$ является подпространством пространства X и P — линейным ограниченным оператором, проектирующим X на $\tilde{X}$, т. е. таким, что $P^2 = P$ и $P(X) = \tilde{X}$. Через X_2 обозначим пространство, на которое $E - P$ проектирует X, т. е. $(E - P)(X) = X_2$.

Лемма 3. *Пусть* B_1 — *линейный ограниченный оператор из* $\tilde{X}$ *в* $\tilde{X}$ *и* B_2 — *из* X_2 *в* X_2. *Оператор*

$$B = B_1P + B_2(E - P) \in (X \to X)$$

имеет обратный тогда и только тогда, когда существуют $B_1^{-1} \in (\tilde{X} \to \tilde{X})$ *и* $B_2^{-1} \in (X_2 \to X_2)$. *При этом*

$$B^{-1} = B_1^{-1}P + B_2^{-1}(E - P).$$

Докажем необходимость. Если существует B^{-1}, то уравнение $Bx = y$ при любом $y \in X$ имеет единственное решение $x_0 = B^{-1}y$. Отсюда вытекает, что уравнения $B_1x = Py$ и $B_2x = (E - P)y$ имеют единственные решения, соответственно Px_0 и $(E - P)x_0$. Следовательно, существуют B_1^{-1} и B_2^{-1}.

Для доказательства достаточности проверим, что, если существуют B_1^{-1} и B_2^{-1}, то уравнение $Bx = y$ при любом $y \in X$ имеет единственное решение $x_0 = B_1^{-1}Py + B_2^{-1}(E - P)y$.

Лемма доказана.

Рассмотрим два линейных уравнения:
первое в пространстве X

$$Ax \equiv x - Kx = y \tag{1}$$

и второе в пространстве $\tilde{X}$

$$\tilde{A}\tilde{x} \equiv \tilde{x} - \tilde{K}\tilde{x} = \tilde{y}. \tag{2}$$

Определим оператор

$$B = \tilde{A}P + E - P = E - \tilde{K}P \in (X \to X),$$

и образуем в пространстве X уравнение $Bx = \tilde{y}$, имеющее те же решения, что и уравнение (2). На основании лемм 1—3 очевидным образом получим следующие результаты.

Теорема 1. *Если существуют обратные операторы* A^{-1} *и* $(J - \|A^{-1}\|\|K - \tilde{K}P\|)^{-1} > 0$, *то существует* $\tilde{A}^{-1}$, *причем*

$$\|\tilde{A}^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\| \leqslant (J - \|A^{-1}\|\,\|K - \tilde{K}P\|)^{-1}\|A^{-1}\|.$$

Теорема 2. *Если существуют обратные операторы* $\tilde{A}^{-1}$ *и* $(J - \|B^{-1}\|\|K - \tilde{K}P\|)^{-1} > 0$, *то существует* A^{-1} *и справедливы оценки*

$$\|A^{-1}\| \leqslant (J - \|B^{-1}\|\|K - \tilde{K}P\|)^{-1}\|B^{-1}\|,$$

$$\|x^* - \tilde{x}\| \leqslant \|B^{-1}\|(\|K - \tilde{K}P\|\,\|x^*\| + \|y - \hat{y}\| + \|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{y}\|),$$

$$\|x^* - \tilde{x}\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|A\tilde{x} - y\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A^{-1}\|(\|K - \tilde{K}P\|\,\|\tilde{x}\| + \|y - \tilde{y}\| + \|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{y}\|),$$

где $B^{-1} = \tilde{A}^{-1}P + E - P$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ *и* $x^* = A^{-1}y$ — *решение уравнения* (1).

Замечание 1. В теореме 2 за $\tilde{x}$ можно взять какой угодно элемент пространства $\tilde{X}$, но практически применимые оценки получим только тогда, когда за $\tilde{x}$ возьмем точное или приближенное решение уравнения (2). Оценки теоремы 2 дают возможность сравнительно просто учитывать погрешность решения уравнения (2). Если $\tilde{x}$ — точное решение этого уравнения, то $\|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{y}\| = 0$.

Замечание 2. В случае, если X — гильбертово пространство и подпространства $\tilde{X}$ и X_2 взаимно ортогональны, то

$$\|B^{-1}x\|^2 = \|\tilde{A}^{-1}Px\|^2 + \|(E - P)x\|^2,$$

откуда видно, что

$$\|B^{-1}\| = \max(\|\tilde{A}^{-1}\|, 1).$$

Замечание 3. Теоремы 1 и 2 применимы также в случае, когда приближенное решение уравнения (1) находят решением уравнения

$$\bar{A}\bar{x} \equiv \bar{x} - \bar{K}\bar{x} = \bar{y} \quad (\bar{K} \in (\bar{X} \to \bar{X})) \tag{3}$$

в пространстве $\bar{X}$, которое не является подпространством пространства $\tilde{X}$. Предполагаем только, что существует линейный ограниченный оператор φ_0, отображающий некоторое подпространство $\tilde{X}$ пространства X на $\bar{X}$ и имеющий обратный опера-

тор φ_0^{-1}. Тогда уравнение (3) равносильно уравнению (2), в котором $\tilde{K} = \varphi_0^{-1}\bar{K}\varphi_0$ и $\tilde{y} = \varphi_0^{-1}\bar{y}$. Поэтому теоремы 1 и 2 можно формулировать для уравнений (1) и (3), заменив только $\tilde{K}$, $\tilde{A}$, $\tilde{A}^{-1}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{x}$ соответственно на $\varphi_0^{-1}\bar{K}\varphi_0$, $\varphi_0^{-1}\bar{A}\varphi_0$, $\varphi_0^{-1}\bar{A}^{-1}\varphi_0$, $\varphi_0^{-1}\bar{y}$ и $\varphi_0^{-1}\bar{x}$.

Замечание 4. Приведенные результаты аналогичны результатам Л. В. Канторовича (см. [3], гл. XIV). Существенным различием является то, что условия Л. В. Канторовича I и II заменены требованием, что известно оценка для нормы $\|K - \bar{K}P\|$. Таким образом получим более простые и точные результаты, но сферу их применения ограничивает более сильное предположение. Ниже покажем на примере метода моментов, что приведенные теоремы вполне эффективны. Конечно, эти результаты применимы и для исследования точности других приближенных методов.

§ 2. Метод моментов

Пусть в пространстве X даны последовательности элементов $\{\psi_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и линейных ограниченных функционалов $\{g_k\}$ таких, что

$$g_i\psi_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \tag{4}$$

Замечание 5. Если в X даны системы линейно независимых элементов $\{\chi_k\}$ и линейных ограниченных функционалов $\{h_k\}$, не удовлетворяющих условиям биортогональности (4), то преобразованиями

$$\psi_k = \chi_k - \sum_{i=1}^{k-1} (g_i\chi_k)\psi_i,$$

$$g_k = \frac{1}{h_k\psi_k}\left[h_k - \sum_{i=1}^{k-1} (h_k\psi_i)g_i\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

получаются (если $h_k\psi_k \neq 0$) системы $\{\psi_k\}$ и $\{g_k\}$, уже удовлетворяющие условиям (4).

Для приближенного решения уравнения (1) пользуемся методом моментов. Приближенное решение ищем в виде

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\psi_k, \tag{5}$$

причем числа ξ_k найдем из системы

$$g_i(\tilde{x} - K\tilde{x} - y) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Обозначим

$$\eta_i = g_i y, \quad \varkappa_{ik} = g_i K\psi_k. \tag{6}$$

Тогда эта система приобретает вид

$$\xi_i - \sum_{k=1}^{n} \varkappa_{ik}\xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Для оценки погрешности приближенного решения, полученного методом моментов, пользуемся теоремой 2, учитывая замечание 3.

За $\overline{X}$ примем n-мерное векторное пространство с элементами $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и за $\tilde{X}$ — множество элементов пространства X, выражающихся в виде (5). Определим операторы P и φ_0:

$$Px = \sum_{k=1}^{n} (g_k x)\psi_k, \quad \varphi_0\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\psi_k\right) = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Тогда $\varphi_0^{-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\psi_k$.

Систему (7) можно рассматривать как уравнение (3), в котором

$$\bar{y} = (\eta_i), \ \overline{K} = (\varkappa_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$\tilde{y} = \varphi_0^{-1}\bar{y} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k\psi_k,$$

$$\tilde{K}Px = \varphi_0^{-1}\overline{K}\varphi_0 Px = \sum_{i,k=1}^{n} \varkappa_{ik}(g_k x)\psi_i$$

и $\bar{A} = \bar{E} - \bar{K}$, где $\bar{E}$ — единичная матрица порядка n. Обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда существует обратная матрица $\bar{A}^{-1} = (\gamma_{ik})$. При этом

$$B^{-1}y = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik}(g_k y)\psi_i + y - \sum_{i=1}^{n} (g_i y)\psi_i.$$

Пусть X — банахово пространство. Обозначим оценки[3]:

$$\left.\begin{gathered} \|K - \tilde{K}P\| \leqslant \alpha, \ \|B^{-1}\| \leqslant \gamma, \ \|y\| \leqslant \delta, \\ \|y - \tilde{y}\| \leqslant \delta_2, \ \|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{y}\| \leqslant \varepsilon_1, \\ \|A\tilde{x} - y\| \leqslant \varepsilon, \ \|\tilde{x}\| \leqslant \beta. \end{gathered}\right\} \tag{8}$$

Из теоремы 2 следует

---

[3] ε_1 характеризует погрешность решения $\bar{x} = \varphi_0\tilde{x}$ системы (7). Если последняя решается точно, то $\varepsilon_1 = 0$.

Теорема 3. *Если* $\alpha\gamma < 1$, *то уравнение* (1) *имеет единственное решение* $x^* \in X$ *и справедливы оценки*

$$\|x^* - \tilde{x}\| \leqslant \frac{\alpha\gamma^2\delta}{1-\alpha\gamma} + \gamma\delta_2 + \gamma\varepsilon_1, \tag{9}$$

$$\|x^* - \tilde{x}\| \leqslant \frac{\varepsilon\gamma}{1-\alpha\gamma} \leqslant \frac{\gamma}{1-\alpha\gamma}(\alpha\beta + \delta_2 + \varepsilon_1). \tag{10}$$

Замечание 6. В случае, если X — гильбертово пространство, $\{\psi_k\}$ — ортонормированная система элементов и $g_k x = (x, \psi_k)$, то $\eta_i = (y, \psi_i)$, $\varkappa_{ik} = (K\psi_k, \psi_i)$ и оценки ε_1, δ_2 и β найдем из

$$\|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \sum_{k=1}^{n} \varkappa_{ik}\xi_k - \eta_i|^2 \leqslant \varepsilon_1^2,$$

$$\|y - \tilde{y}\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 \leqslant \delta_2^2, \quad \|\tilde{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \leqslant \beta^2.$$

На основании замечания 2 $\|B^{-1}\| = \max(\|\tilde{A}^{-1}\|, 1)$, где $\|\tilde{A}^{-1}\|$ — норма матрицы $\tilde{A}^{-1}$ в эвклидовом пространстве R_n. Поэтому оценку γ можно, например, найти из

$$\|B^{-1}\| \leqslant \max\left(\left(\sum_{i,k=1}^{n} |\gamma_{ik}|^2\right)^{1/2}, 1\right) \leqslant \gamma$$

или из

$$\|B^{-1}\| \leqslant 1 + \left(\sum_{i,k=1}^{n} |\beta_{ik}|^2\right)^{1/2} \leqslant \gamma, \text{ где } \beta_{ik} = \gamma_{ik} - \delta_{ik}.$$

§ 3. Бесконечные системы

Пусть требуется решить бесконечную систему

$$\xi_i - \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_{ik}\xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

в некотором пространстве числовых последовательностей X. Эту систему можно рассматривать как операторное уравнение (1), причем

$$x = (\xi_i), \; y = (\eta_i), \; K = (\varkappa_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

Возьмем $\psi_k = (\delta_{ik})$, $g_k x = \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда $g_i y = \eta_i$, $g_i K\psi_k = \varkappa_{ik}$. Приближенное решение $\tilde{x} = \varphi_0^{-1}\tilde{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$ системы (11) найдем как решение усеченной системы (7), т. е. при таком выборе $\{\psi_k\}$ и $\{g_k\}$ метод моментов представляет собой т. н. метод редукции.

Для оценки погрешности метода редукции найдем:

$$\tilde{y} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, 0, 0, \ldots),$$

$$\tilde{K}P = (\lambda_{ik}),\ B^{-1} = (\alpha_{ik}),$$

где

$$\lambda_{ik} = \begin{cases} \varkappa_{ik} \text{ при } i, k = 1, 2, \ldots, n. \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} \gamma_{ik} \text{ при } i, k = 1, 2, \ldots, n, \\ \delta_{ik} \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Получаемые оценки зависят от выбора метрики пространства X.

а) Возьмем $X = m$, т. е. $\|x\| = \sup\limits_i |\xi_i|$. Тогда оценки (8) имеют следующие конкретные значения

$$\|K - \tilde{K}P\| = \sup_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=n+1,\ldots}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varkappa_{ik}|, \sum_{k=1}^{\infty} |\varkappa_{jk}| \right) \leqslant \alpha,$$

$$\|B^{-1}\| = \max_{i=1,\ldots,n} \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_{ik}|, 1 \right) \leqslant \gamma,$$

$$\|y\| = \sup_{i=1,2,\ldots} |\eta_i| \leqslant \delta,\ \|y - \tilde{y}\| = \sup_{j=n+1,\ldots} |\eta_j| \leqslant \delta_2,$$

$$\|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{y}\| = \max_{i=1,\ldots,n} \left| \xi_i - \sum_{k=1}^{n} \varkappa_{ik}\xi_k - \eta_i \right| \leqslant \varepsilon_1,$$

$$\|\tilde{x}\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\xi_i| \leqslant \beta,$$

$$\|A\tilde{x} - y\| \leqslant \sup_{i=n+1,\ldots} \left(\varepsilon_1, \left| \sum_{k=1}^{n} \varkappa_{jk}\xi_k + \eta_j \right| \right) = \varepsilon.$$

Очевидно можно взять $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \alpha\beta + \delta_2)$.

Если $\alpha\gamma < 1$, то теорема 3 утверждает существование единственного ограниченного решения $x^* = (\xi_i^*)$ системы (11) и дает оценки (9) и (10) для

$$\|x^* - \tilde{x}\| = \sup_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=n+1,\ldots}} (|\xi_i^* - \xi_i|, |\xi_j^*|).$$

б) Более точные оценки получаются, если нормировать X посредством двухмерного векторного пространства, определяя обобщенную норму

$$\|x\| = \left(\max_{i=1,\ldots,n} |\xi_i|, \sup_{j=n+1,\ldots} |\xi_j| \right).$$

Найдем оценки

$$\max_{i=1,\ldots,n} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varkappa_{ik}| \leqslant \alpha_2, \qquad \sup_{j=n+1,\ldots} \sum_{k=1}^{n} |\varkappa_{jk}| \leqslant \alpha_3,$$

$$\sup_{j=n+1,\dots}\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varkappa_{ik}|\leqslant\alpha_4,\qquad \max_{i=1,\dots,n}\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{ik}|\leqslant\gamma_1,$$

$$\max_{i=1,\dots,n}|\eta_i|\leqslant\delta_1,\qquad \sup_{j=n+1,\dots}|\eta_j|\leqslant\delta_2$$

и ε_1, β так же, как и в пункте а). Из теоремы 2 следует

Теорема 4. *Если* $\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\gamma_1<1$, *то система* (11) *имеет единственное ограниченное решение* $x^*=(\xi_i^*)$, *причем*

$$\left.\begin{aligned}&|\xi_i^*-\xi_i|\leqslant\alpha_2\gamma_1\vartheta+\gamma_1\varepsilon_1\qquad(i=1,\ 2,\ \dots,\ n),\\&|\xi_j^*|\leqslant\vartheta\qquad(j=n+1,\ n+2,\ \dots),\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

где $\vartheta=\dfrac{\alpha_3\gamma_1\delta_1+\delta_2}{1-\alpha_4-\alpha_2\alpha_3\gamma_1}$ *или* $\vartheta=\dfrac{\alpha_3\beta+\delta_2+\alpha_3\gamma_1\varepsilon_1}{1-\alpha_4-\alpha_2\alpha_3\gamma_1}$.

в) Возьмем $X=l^2$, т. е. $\|x\|^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2$. Найдем оценки ε_1, β и γ на основании замечания 6, а α, δ и δ_2 так, чтобы было

$$\|K-\tilde{K}P\|^2\leqslant\sum_{i,\,k=1}^{\infty}|\varkappa_{ik}|^2-\sum_{i,\,k=1}^{n}|\varkappa_{ik}|^2\leqslant\alpha^2,$$

$$\|y\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|\leqslant\delta^2,\ \|y-\tilde{y}\|^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}|\eta_j|^2\leqslant\delta_2{}^2.$$

При $\alpha\gamma<1$ теорема 3 дает оценки (ср. [1]) для

$$\|x^*-\tilde{x}\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i^*-\xi_i|^2+\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_j^*|^2.$$

Пример. Для приближенного решения системы

$$\xi_i-\sum_{k=1}^{\infty}5^{-i-k+1}\xi_k=5^{-i+1}\qquad(i=1,\ 2,\ \dots)$$

пользуемся методом редукций при $n=2$. Из системы двух уравнений найдем приближенное решение $\xi_1=\dfrac{125}{99}$, $\xi_2=\dfrac{25}{99}$. Оценим погрешность этого приближения:

	оценка (9)		оценка (12)	оценка (54) из [3], стр. 502; $X=l^2$	действительная погрешность[4]
	$X=m$	$X=l^2$			
$\max\limits_{i=1,\,2}\lvert\xi_i^*-\xi_i\rvert\leqslant$	0,07	0,072	0,0007	0,17	0,00054
$\sup\limits_{j=3,\,4,\dots}\lvert\xi_j^*\rvert\leqslant$	0,07	0,072	0,053	0,17	0,051

[4] Точным решением этой системы является $\xi_i^*=\dfrac{24}{19}\cdot5^{-i+1}$.

§ 4. Интегральные уравнения

Интегральное уравнение Фредгольма

$$x(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt + y(s) \qquad (13)$$

является операторным уравнением в виде (1), причем

$$Kx = \int_a^b K(s, t)x(t)dt.$$

Пусть даны две последовательности функций $\{\psi_k(s)\}$ и $\{\chi_k(s)\}$ таких, что

$$\int_a^b \psi_i(s)\overline{\chi_k(s)}ds = \delta_{ik},\ \psi_k \in X$$

и $g_k x = \int_a^b x(s)\overline{\chi_k(s)}ds$ — линейные ограниченные функционалы в пространстве X. Приближенное решение $\tilde{x}$ уравнения (13) ищем в виде (5), причем коэффициенты ξ_k найдем из системы (7), в котором

$$\eta_i = \int_a^b y(s)\overline{\chi_i(s)}ds,\ \varkappa_{ik} = \int_a^b\int_a^b K(s, t)\psi_k(t)\overline{\chi_i(s)}dtds.$$

Для оценки точности приближенного решения $\tilde{x}$ надо оценить норму операторов

$$(K - \tilde{K}P)x = \int_a^b [K(s, t) - \sum_{i,k=1}^n \varkappa_{ik}\psi_i(s)\overline{\chi_k(t)}]\, x(t)dt,$$

$$B^{-1}y = y + \sum_{i=1}^n \psi_i(s) \int_a^b \sum_{k=1}^n \beta_{ik}\overline{\chi_k(t)}y(t)dt,$$

где $\beta_{ik} = \gamma_{ik} - \delta_{ik}$.

а) Если $K(s, t)$ и $y(s)$ непрерывны при $a \leqslant s, t \leqslant b$, то можно взять $X = C[a, b]$, т. е. $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |x(s)|$. Найдем оценки (8):

$$\|K - \tilde{K}P\| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b |K(s, t) - \sum_{i,k=1}^n \varkappa_{ik}\psi_i(s)\overline{\chi_k(t)}|\, dt \leqslant \alpha,$$

$$\|B^{-1}\| \leqslant 1 + \max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b |\sum_{i,k=1}^n \beta_{ik}\psi_i(s)\overline{\chi_k(t)}|\, dt \leqslant \gamma,$$

$$\|y\| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} |y(s)| \leqslant \delta,\ \|y - \tilde{y}\| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} |y(s) - \sum_{i=1}^n \eta_i\psi_i(s)| \leqslant \delta_2,$$

$$\|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{y}\| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} |\sum_{i=1}^n (\xi_i - \sum_{k=1}^n \varkappa_{ik}\xi_k - \eta_i)\psi_i(s)| \leqslant \varepsilon_1.$$

При $\alpha\gamma < 1$ уравнение (13) имеет единственное непрерывное решение $x^*(s)$, причем для

$$\|x^* - \tilde{x}\| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} |x^*(s) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s)|$$

имеем оценки (9) и (10).

Замечание 7. Нетрудно видеть, что теорема 3 остается в силе, если коэффициенты $\varkappa_{ik}$ и свободные члены η_i системы (7) не вычислены по формулам (6), а являются соответствующими величинами некоторого другого приближенного метода. Функция $\tilde{x}(s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s)$, где коэффициенты ξ_i найдены из системы (7), есть решение интегрального уравнения Фредгольма с ядром $\sum_{i,k=1}^{n} \varkappa_{ik} \psi_i(s) \overline{\chi_k(t)}$ и свободным членом $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \psi_i(s)$. Таким образом получим в данном случае теорему из [5] (стр. 157) о замене ядра интегрального уравнения вырожденным. Оценка погрешности в последней работе совпадает с оценкой (9) при $\varepsilon_1 = 0$.

б) Взяв $X = L^2(a, b)$, т. е. $\|x\|^2 = \int_a^b |x(s)|^2 ds$, и $\chi_k(s) = \psi_k(s)$, найдем оценки ε_1, δ_2, β и γ на основании замечания 6, а α из

$$\|K - \tilde{K}P\|^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, dtds - \sum_{i,k=1}^{n} |\varkappa_{ik}|^2 \leqslant \alpha^2.$$

При $\alpha\gamma < 1$ теорема 3 дает оценки (ср. [1]) для

$$\|x^* - \tilde{x}\|^2 = \int_a^b |x^*(s) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s)|^2 \, ds.$$

§ 5. Дифференцальные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$(A_0 - T)x = f, \tag{14}$$

где A_0 и T — линейные (неограниченные) дифференциальные операторы, действующие из некоторого гильбертова пространства X в то же пространство.

Пусть оператор A_0 — положительно-определенный, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что $(A_0 x, x) \geqslant c^2 \|x\|^2$ при всех x из области определения D оператора A_0. Введением нового скалярного произведения $[x, y] = (A_0 x, y)$ определяем гильбертово пространство X_0 (см. [6], стр. 274), в котором норму обозначим $|[x]| = \sqrt{[x, x]}$.

Предположим, что оператор $A_0^{-1}T$ имеет расширение K, являющееся линейным непрерывным оператором из X_0 в X_0, и что

любое решение уравнения (1), где $y = A_0^{-1}f$, есть также решение уравнения (14).

Пусть дано последовательность $\{\psi_k\}$ такой, что $\psi_k \in D$ и $[\psi_i, \psi_k] = (A_0\psi_i, \psi_k) = \delta_{ik}$. Приближенное решение $\tilde{x}$ уравнения (14) ищем в виде (5), причем ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ найдем из системы (7), в котором

$$\eta_i = [y, \psi_i] = (f, \psi_i), \quad \varkappa_{ik} = [K\psi_k, \psi_i] = (T\psi_k, \psi_i).$$

Для оценки погрешности этого метода (метода Галеркина) найдем ε_1, δ_2 β и γ на основании замечания 6, а δ и α так, чтобы было

$$|[y]|^2 = (f, A_0^{-1}f) \leqslant \delta, \ |[K - \tilde{K}P]| \leqslant \alpha,$$

где $\tilde{K}Px = \sum\limits_{i,\,k=1}^{n} \varkappa_{ik}[x, \psi_k]\psi_i = \sum\limits_{i,\,k=1}^{n} \varkappa_{ik}(x, A_0\psi_k)\psi_i$.

При $\alpha\gamma < 1$ теорема 3 утверждает существование единственного решения $x^* \in X_0$ уравнения (14), дает оценки для $|[x^* - \tilde{x}]|$ и, следовательно, также для $\|x^* - \tilde{x}\| \leqslant \frac{1}{c}|[x^* - \tilde{x}]|$.

Пример. Рассмотрим граничную задачу

$$-x'' - p(s)x' - q(s)x = f(s), \ x(a) = x(b) = 0, \qquad (15)$$

где функции $p(s)$, $q(s)$ и $f(s)$ непрерывны на отрезке $a \leqslant s \leqslant b$. Возьмем $X = L^2(a, b)$, $A_0x = -x''$ и $Tx = p(s)x' + q(s)x$, причем область определения D оператора A_0 состоит из дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи (15). Тогда все сделанные предположения выполнены и

$$A_0^{-1}y = \int_a^b G(s, t)y(t)\,dt,$$

где

$$G(s, t) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a} & \text{при } s \leqslant t, \\ \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a} & \text{при } s \geqslant t. \end{cases}$$

Величину α можно найти из

$$|[K - \tilde{K}P]|^2 \leqslant \int_a^b\int_a^b \Big|\frac{\partial G(s, t)}{\partial s}p(t) - \int_a^t \frac{\partial G(s, \tau)}{\partial s}q(\tau)\,d\tau\Big|^2\,dt\,ds -$$

$$- \sum_{i,\,k=1}^{n} |\varkappa_{ik}|^2 = \mathrm{Re}\int_a^b \frac{b-s}{b-a}\{(s-a)|p(s)|^2 - 2[\overline{p(s)} -$$

$$- (b-s)\overline{q(s)}]\int_a^b (t-a)q(t)\,dt\}ds - \sum_{i,\,k=1}^{n} |\varkappa_{ik}|^2 \leqslant \alpha^2.$$

При $\alpha\gamma < 1$ задача (15) имеет единственное непрерывное решение $x^*(s)$ и теорема 3 дает оценки для

$$|[x^* - \tilde{x}]|^2 = \int_a^b |x^{*\prime}(s) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i'(s)|^2 \, ds.$$

Но, так как (см. [2])

$$\max_{a \leqslant s \leqslant b} |x^*(s) - \tilde{x}(s)| \leqslant \frac{1}{2} \sqrt{b-a} \, |[x^* - \tilde{x}]|,$$

то получим оценки и для максимальной абсолютной погрешности.

Литература

1. Altman, M., On linear functional equations in Hilbert space. Bull. Acad. polon. sci., Cl. III, 1957, **5**, 223—227.
2. Ильин В. И., Оценка погрешности в методе Ритца для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, **53**, 43—63.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
4. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Москва—Ленинград, 1950.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа. Москва—Ленинград, 1952.
6. Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике. Москва, 1957.
7. Слугин С. Н., Метод замены линейного уравнения в абстрактно-нормированном пространстве. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1960, **3** (16), 235—240.

Поступило
19 X 1960

MOMENTIDE MEETODI TÄPSUSEST

E. Tamme

Geomeetriakateeder

Resümee

Käesolevas artiklis tõestatakse teoreemid (teoreemid 1 ja 2), mis on analoogilised põhiliste teoreemidega L. V. Kantorovitši üldises lähendusmeetodite teoorias (vt. [3], pt. XIV). Neid teoreeme kasutatakse veahinnangute saamiseks taandamismeetodi (lõpmatute võrrandisüsteemide korral), momentide meetodi (integraalvõrrandite korral) ja Galjorkini meetodi (diferentsiaalvõrrandite korral) jaoks.

ÜBER DIE GENAUIGKEIT DER MOMENTENMETHODE

E. Tamme

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz werden die Sätze (Sätze 1 und 2) bewiesen, die analogish mit den Grundsätzen in der Kantorowitchschen allgemeinen Theorie der Näherungsmethoden sind (s. [3], Kap. XIV). Mit Hilfe dieser Sätze werden Fehlerabschätzungen für das Reduktionsverfahren (bei unendlichen Gleichungssystemen), für die Momentenmethode (bei Integralgleichungen) und für das Galerkinsche Verfahren (bei Differentialgleichungen) hergeleitet.

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РАЗЫСКАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Э. Тамме
Кафедра геометрии

§ 1. Нелинейные уравнения

Пусть Z — пространство типа B_K, нормированное посредством KB-пространства U (см. [3]).

Рассмотрим уравнение

$$F(z) = 0, \tag{1}$$

где F — оператор, действующий из пространства Z в некоторое линейное пространство W. Из результатов работы [2] несложным образом получается

Теорема 1. *Пусть $F(z)$ — в области*[1] $\|z - z_0\| \leqslant u^*$ *дважды непрерывно дифференцируемый оператор, Γ — линейный оператор из W в Z, имеющий обратный, и*

$$\|\Gamma F(z_0)\| \leqslant Q_0, \quad \|\Gamma F'(z_0) - E\| \leqslant Q_1,$$
$$\|\Gamma F''(z)\| \leqslant Q_2 \quad \text{при } \|z - z_0\| \leqslant u^*,$$

где u^* — наименьшее положительное решение[2] *уравнения*

$$Q(u) \equiv u - Q_0 - Q_1 u - \frac{1}{2} Q_2 u^2 = 0. \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) *имеет в области $\|z - z_0\| \leqslant u^*$ единственное решение z^*, к которому сходится последовательность*

$$z_{n+1} = z_n - \Gamma F(z_n) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

со скоростью

$$\|z^* - z_n\| \leqslant u^* - u_n \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

где $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n - Q(u_n)$.

[1] Символом $\|z\|$ обозначается обобщенная норма элемента $z \in Z$ ($\|z\| \in U$).
[2] Предполагаются существования $u^* > 0$.

Эта теорема успешно применима при исследовании точности приближенных методов решения нелинейных уравнений (напр. метода моментов). Если оказывается, что точность вычисленного приближения недостаточна, то для получения более точных приближений можно пользоваться итерационным процессом (3).

В следующих параграфах теорема 1 применяется для исследования точности приближенных методов разыскания собственных значений и собственных элементов линейных операторов. При этом задача о собственных значениях заменяется ей равносильным нелинейным уравнением.

§ 2. Задача о собственных значениях

Пусть K — линейный оператор[3], действующий из банахова пространства X в то же пространство. Рассмотрим метод приближенного решения задачи о собственных значениях оператора K, при котором фактически вычисляют собственные значения и элементы некоторого другого линейного оператора $\bar{K}$, действующего из банахова пространства $\bar{X}$ в то же пространство.

Предположим, что существует подпространство $\tilde{X}$ пространства X и линейный оператор φ_0, отображающий взаимно однозначно $\tilde{X}$ на $\bar{X}$ и имеющий линейное распространение φ на все X. Тогда существует φ_0^{-1}.

Введем пространства Z, $\tilde{Z}$ и $\bar{Z}$, элементами которых являются соответственно пары $z = (x, \lambda)$, $\tilde{z} = (\tilde{x}, \lambda)$ и $\bar{z} = (\bar{x}, \lambda)$, где $x \in X$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\bar{x} \in \bar{X}$ и λ — комплексное число. Эти пространства нормируем посредством двухмерного векторного пространства, определяя

$$\|z\| = (\|x\|, |\lambda|), \quad \|\bar{z}\| = (\|\bar{x}\|, |\lambda|).$$

Оператор $\Phi_0\tilde{z} = (\varphi_0\tilde{x}, \lambda)$ отображает $\tilde{Z}$ на $\bar{Z}$, $\Phi z = (\varphi x, \lambda)$ является его распространением на все Z и $\Phi_0^{-1}\bar{z} = (\varphi_0^{-1}\bar{x}, \lambda)$.

Обозначим через $\tilde{\lambda}_0$ точное или приближенное собственное значение оператора $\bar{K}$ и через $\bar{x}_0$ — соответствующий ему собственный элемент, нормированный условием $\bar{f}\bar{x}_0 = 1$, где $\bar{f}$ — линейный функционал[4] в пространстве $\bar{X}$. Тогда $\bar{z}_0 = (\bar{x}_0, \tilde{\lambda}_0)$ является (точным или приближенным) решением уравнения

$$\bar{F}(\bar{z}) \equiv (\bar{K}\bar{x} - \lambda\bar{x}, \ \bar{f}\bar{x} - 1) = 0.$$

---

[3] Под линейным оператором понимается линейный непрерывный оператор.

[4] В качестве $\bar{f}$ можно взять собственный элемент сопряженного оператора $\bar{K}^*$, соответствующий собственному значению $\tilde{\lambda}_0$.

Пусть λ_0 — искомое собственное значение оператора K и x_0 — соответствующий собственный элемент, нормированный условием $fx_0 = 1$, где $f = \bar{f}\varphi$. Тогда $z_0 = (x_0, \lambda_0)$ можно найти как решение уравнения

$$F(z) \equiv (Kx - \lambda x,\ fx - 1) = 0.$$

В качестве приближений к λ_0 и x_0 возьмем $\tilde{\lambda}_0$ и $\tilde{x}_0 = \varphi_0^{-1}\bar{x}_0$. Для оценки их погрешностей пользуемся теоремой 1.

Обозначим $\tilde{z}_0 = \Phi_0^{-1}\bar{z}_0 = (\tilde{x}_0,\ \tilde{\lambda}_0)$ и $\Delta z = (\Delta x,\ \Delta\lambda)$. Тогда

$$F(\tilde{z}_0) = (K\tilde{x}_0 - \tilde{\lambda}_0\tilde{x}_0,\ 0),$$

$$F'(\tilde{z}_0)\Delta z = (K\Delta x - \tilde{\lambda}_0\Delta x - \Delta\lambda\tilde{x}_0,\ f\Delta x),$$

$$F''(\tilde{z}_0)\Delta z^2 = -2(\Delta\lambda\Delta x,\ 0).$$

Оператор Γ конструируем следующим образом. Обозначим

$$G = \Phi_0^{-1}\bar{F}'(\tilde{z}_0)\Phi - \tilde{\lambda}_0(E - \Phi_0^{-1}\Phi),$$

где

$$\bar{F}'(\tilde{z}_0)\Delta\bar{z} = (\bar{K}\Delta\bar{x} - \tilde{\lambda}_0\Delta\bar{x} - \Delta\lambda\tilde{x}_0,\ \bar{f}\Delta\bar{x}),\ \Delta\bar{z} = (\Delta\bar{x},\ \Delta\lambda).$$

Предположим, что существует $[\bar{F}'(z_0)]^{-1} = \bar{\Gamma} \in (\bar{Z} \to \bar{Z})$ и что $\tilde{\lambda}_0 \neq 0$. Тогда на основании леммы 3 из [5] существует

$$G^{-1} = \Phi_0^{-1}\bar{\Gamma}\Phi - \tilde{\lambda}_0^{-1}(E - \Phi_0^{-1}\Phi).$$

Возьмем $\Gamma = G^{-1}$, и введем обозначения $\bar{\Gamma}_i$ и Γ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, определяя

$$\bar{\Gamma}\bar{z} = (\bar{\Gamma}_1\bar{x} + \bar{\Gamma}_3\lambda,\ \bar{\Gamma}_2\bar{x} + \bar{\Gamma}_4\lambda).$$

$$\Gamma z = (\Gamma_1 x + \Gamma_3\lambda,\ \Gamma_2 x + \Gamma_4\lambda).$$

Нетрудно проверить, что

$$\Gamma_1 = \varphi_0^{-1}\bar{\Gamma}_1\varphi - \tilde{\lambda}_0^{-1}(E - \varphi_0^{-1}\varphi),$$

$$\Gamma_2 = \bar{\Gamma}_2\varphi,\ \Gamma_3 = \varphi_0^{-1}\bar{\Gamma}_3,\ \Gamma_4 = \bar{\Gamma}_4.$$

Обозначим оценки

$$\|\Gamma_1\| \leqslant \gamma_1,\ \|\Gamma_2\| \leqslant \gamma_2,\ \|K - \varphi_0^{-1}\bar{K}\varphi\| \leqslant \alpha,\ \|K\tilde{x}_0 - \tilde{\lambda}_0\tilde{x}_0\| \leqslant \varepsilon, \quad (4)$$

и найдем величины, необходимые для применения теоремы 1:

$$Q_0 = (\gamma_1,\ \gamma_2)\varepsilon,\ Q_1 u = (\gamma_1,\ \gamma_2)\alpha u_1,$$

$$Q_2 u^2 = 2(\gamma_1,\ \gamma_2)u_1 u_2, \text{ где } u = (u_1,\ u_2).$$

Следовательно, уравнение (2) представляет собой систему

$$\begin{cases} u_1 = \gamma_1(\varepsilon + \alpha u_1 + u_1 u_2), \\ u_2 = \gamma_2(\varepsilon + \alpha u_1 + u_1 u_2), \end{cases}$$

которое имеет положительное решение

$$u_1^* = \gamma_1 c, \quad u_2^* = \gamma_2 c,$$

где

$$c = \frac{2\varepsilon}{1 - \alpha\gamma_1 + \sqrt{(1-\alpha\gamma_1)^2 - 4\gamma_1\gamma_2\varepsilon}}, \tag{5}$$

лишь только $\alpha\gamma_1 + 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2\varepsilon} \leqslant 1$.

Таким образом, из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть* $\tilde{\lambda}_0 \neq 0$, $\bar{f}\bar{x}_0 = 1$, *существует* $\bar{\Gamma}$ *и имеют место оценки* (4). *Если*

$$\alpha\gamma_1 + 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2\varepsilon} \leqslant 1, \tag{6}$$

то оператор K *имеет единственное собственное значение* λ_0 *и соответствующий ему единственный собственный элемент* x_0, *при которых* $fx_0 = 1$,

$$|\lambda_0 - \tilde{\lambda}_0| \leqslant \gamma_2 c, \quad \|x_0 - \varphi_0^{-1}\tilde{x}_0\| \leqslant \gamma_1 c,$$

где постоянная c *определена формулой* (5).

Замечание 1. Очевидно

$$\|K\tilde{x}_0 - \tilde{\lambda}_0\tilde{x}_0\| \leqslant \|K - \varphi_0^{-1}\bar{K}\varphi\|\,\|\tilde{x}_0\| + \|\varphi_0^{-1}(\bar{K}\tilde{x}_0 - \tilde{\lambda}_0\tilde{x}_0)\|.$$

Следовательно, если известны оценки

$$\|\tilde{x}_0\| \leqslant \beta, \quad \|\varphi_0^{-1}(\bar{K}\tilde{x}_0 - \tilde{\lambda}_0\tilde{x}_0)\| \leqslant \varepsilon_1,$$

то можно взять $\varepsilon = \alpha\beta + \varepsilon_1$. При этом ε_1 характеризует погрешность, которой фактически вычислены собственное значение $\tilde{\lambda}_0$ и собственный элемент $\tilde{x}_0$ оператора $\bar{K}$. Если $\tilde{\lambda}_0$ и $\tilde{x}_0$ найдены точно, то $\varepsilon_1 = 0$.

Замечание 2. Если взять $X = \bar{X}$ и $K = \bar{K}$, т. е. $\alpha = 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$, то теорема 2 дает оценки погрешностей

$$|\tilde{\lambda}^* - \tilde{\lambda}_0| \leqslant \gamma_2 c', \quad \|\tilde{x}^* - \tilde{x}_0\| \leqslant \gamma_1 c',$$

где $c' = \dfrac{2\varepsilon_1}{1 + \sqrt{1 - 4\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1}}$, $\tilde{\lambda}^*$ — точное собственное значение оператора $\bar{K}$ и $\tilde{x}^*$ — соответствующий точный собственный элемент, нормированный условием $\bar{f}\tilde{x}^* = 1$. Если эта погрешность оказывается слишком большой, то для ее уменьшения можно пользоваться итерационным процессом (3). Первый шаг дает приближения

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_0 - \bar{\Gamma}_2(\bar{K}\tilde{x}_0 - \tilde{\lambda}_0\tilde{x}_0), \quad \tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 - \bar{\Gamma}_1(\bar{K}\tilde{x}_0 - \lambda_0\tilde{x}_0),$$

причем

$$|\tilde{\lambda}^* - \tilde{\lambda}_1| \leqslant \gamma_2(c' - \varepsilon_1), \quad \|\tilde{x}^* - \tilde{x}_1\| \leqslant \gamma_1(c' - \varepsilon_1).$$

Замечание 3. Результаты, аналогичные теореме 2, получены Е. А. Троицкой в работе [6], но теорема 2 более проста и точна.

Отметим, что изложенная методика применима также для получения более общих результатов. Например, теорема 2 обобщается и для случая конечнократных собственных значений линейного уравнения в виде $Kx - \lambda Mx = 0$ (ср. [4]). Использование обобщенной нормы в пространстве X открывает возможность для дальнейшего уточнения результатов.

§ 3. Замена линейного оператора матрицей

В вычислительной практике для приближенного разыскания собственных значений и элементов часто пользуются методами, укладывающимися в следующую схему (ср. [1]). Вычисляются собственное значение $\tilde{\lambda}_0$ конечной матрицы $\bar{K} = (\varkappa_{ik})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ и соответствующий ему собственный вектор $\bar{x}_0 = (\xi_{i0})$, нормированный условием $\bar{f}\bar{x}_0 \equiv \sum_{k=1}^{n} f_k \xi_{k0} = 1$. В качестве приближений к собственному значению λ_0 и к собственному элементу x_0 оператора K принимают $\tilde{\lambda}_0$ и $\tilde{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i0} \psi_i$, где ψ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — заданные линейно независимые элементы пространства X. Займемся вопросом, как применить теорему 2 для оценки погрешности методов такого типа.

Пусть известны такие линейные функционалы g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в пространстве X, что

$$g_i \psi_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Элементами пространства $\bar{X}$ считаем векторы $\bar{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и элементами пространства $\tilde{X}$ — все элементы пространства X, выражающиеся в виде $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i$. Определим операторы φ_0 и φ:

$$\varphi_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i \right) = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \varphi x = (g_1 x, \ldots, g_n x).$$

Нетрудно найти, что

$$fx = \bar{f}\varphi x = \sum_{k=1}^{n} f_k (g_k x), \quad \varphi_0^{-1} \bar{K} \varphi x = \sum_{i,k=1}^{n} \varkappa_{ik} (g_k x) \psi_i,$$

$$\varphi_0^{-1} (\bar{K}\bar{x}_0 - \tilde{\lambda}_0 \bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \varkappa_{ik} \xi_{k0} - \tilde{\lambda}_0 \xi_{i0} \right) \psi_i,$$

$$\bar{F}'(\bar{z}_0)=\begin{pmatrix} \varkappa_{11}-\tilde{\lambda}_0 & \varkappa_{12} & \dots & \varkappa_{1n} & -\xi_{10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_{n1} & \varkappa_{n2} & \dots & \varkappa_{nn}-\tilde{\lambda}_0 & -\xi_{n0} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix}.$$

В теореме 2 предполагается существование обратной матрицы

$$\bar{\Gamma}=[\bar{F}'(\bar{z}_0)]^{-1}=(\gamma_{ik}) \quad (i,k=1,2,\dots,n+1).$$

Тогда

$$\bar{\Gamma}_1=(\gamma_{ik}),\ \bar{\Gamma}_2=(\gamma_{n+1,k}) \quad (i,k=1,2,\dots,n),$$

$$\Gamma_2 x=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{n+1,k}(g_k x),$$

$$\Gamma_1 x=\sum_{i,k=1}^{n}\gamma_{ik}(g_k x)\psi_i+\tilde{\lambda}_0^{-1}\sum_{i=1}^{n}(g_i x)\psi_i-\tilde{\lambda}_0^{-1}x=$$

$$=\sum_{i,k=1}^{n}\beta_{ik}(g_k x)\psi_i-\tilde{\lambda}_0^{-1}x, \text{ где } \beta_{ik}=\gamma_{ik}+\tilde{\lambda}_0^{-1}\delta_{ik}.$$

Легко видеть, что, если

$$\|g_i\|\leqslant\delta_i,\ \|\psi_i\|\leqslant\tau_i \ (i=1,2,\dots,n),$$

то можно взять

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_1=|\tilde{\lambda}_0|^{-1}+\sum_{i,k=1}^{n}|\beta_{ik}|\,\tau_i\delta_k,\ \gamma_2=\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{n+1,k}|\,\delta_k, \\ &\varepsilon_1=\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}\varkappa_{ik}\xi_{k0}-\tilde{\lambda}_0\xi_{i0}\Big|\,\tau_i,\ \beta=\sum_{i=1}^{n}|\xi_{i0}|\,\tau_i. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Замечание 4. Если X — гильбертово пространство, $\{\psi_i\}$ — ортонормированная система элементов и $g_i x=(x,\psi_i)$ (скалярное произведение), то оценки β, ε_1, γ_1 и γ_2 найдутся следующим образом (ср. [5]):

$$\|\tilde{x}_0\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\xi_{i0}|^2\leqslant\beta^2,$$

$$\|\varphi_0^{-1}(\bar{K}\bar{x}_0-\tilde{\lambda}_0\bar{x}_0)\|^2=\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}\varkappa_{ik}\xi_{k0}-\tilde{\lambda}_0\xi_{i0}\Big|^2\leqslant\varepsilon_1^2,$$

$$\|\Gamma_2\|^2=\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{n+1,k}|^2\leqslant\gamma_2^2,$$

$$\|\Gamma_1\|=\max\left(\|\bar{\Gamma}_1\|,\ |\tilde{\lambda}_0|^{-1}\right)\leqslant\gamma_1,$$

где $\|\bar{\Gamma}_1\|$ — норма матрицы $\bar{\Gamma}_1=(\gamma_{ik})$ $(i,k=1,2,\dots,n)$

в эвклидовом пространстве R_n. Можно, например, взять

$$\gamma_1^2 = \max_{i,\,k=1} \left(\sum^{n} |\gamma_{ik}|^2,\ |\tilde{\lambda}_0|^{-2}\right).$$

Замечание 5. Отметим, что вычисление обратной матрицы $\bar{\Gamma}$ открывает возможность не только для оценки погрешности, но на основании замечания 2 также для уточнения собственного значения и вектора матрицы $\bar{K}$ до требуемой точности.

Замечание 6. Примером приближенного метода рассматриваемого типа является метод моментов, при котором $\varkappa_{ik} = g_i K \psi_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Ниже покажем некоторые применения изложенных результатов (ср. [5]).

§ 4. Бесконечные матрицы

Пусть задача о собственных значениях бесконечной матрицы

$$K = (\varkappa_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, \ldots)$$

решается методом редукции, т. е. приближенные собственные значения и векторы найдутся как соответствующие величины конечной матрицы

$$\bar{K} = (\varkappa_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Возьмем $\psi_i = (\delta_{ik})$, $g_i x = \xi_i$ и применим теорему 2. Получаемые оценки зависят от выбора метрики пространства бесконечных последовательностей.

а) Если $X = m$, то оценим:

$$\|K - \varphi_0^{-1}\bar{K}\varphi\| = \sup_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=n+1,\ldots}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varkappa_{ik}|, \sum_{k=1}^{\infty} |\varkappa_{jk}|\right) \leqslant \alpha,$$

$$\|\Gamma_1\| = \max_{i=1,\ldots,n} \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_{ik}|,\ |\tilde{\lambda}_0|^{-1}\right) \leqslant \gamma_1,$$

$$\|\Gamma_2\| = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{n+1,\,k}| \leqslant \gamma_2,$$

$$\|\varphi_0^{-1}(\bar{K}\bar{x}_0 - \tilde{\lambda}_0\bar{x}_0)\| = \max_{i=1,\ldots,n} \left|\sum_{k=1}^{n} \varkappa_{ik}\xi_{k0} - \tilde{\lambda}_0\xi_{i0}\right| \leqslant \varepsilon_1,$$

$$\|\tilde{x}_0\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\xi_{i0}| \leqslant \beta,$$

$$\|K\tilde{x}_0 - \tilde{\lambda}_0\tilde{x}_0\| \leqslant \sup_{j=n+1,\ldots} \left(\varepsilon_1,\ \left|\sum_{k=1}^{n} \varkappa_{jk}\xi_{k0}\right|\right) \leqslant \varepsilon.$$

Очевидно можно взять $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \alpha\beta)$.

Если выполнено условие (6), то теорема 2 дает оценки погрешностей приближенного собственного значения $\tilde{\lambda}_0$ и собственного вектора $\tilde{x}_0$ бесконечной матрицы K.

б) Если $X = l^2$, то найдем β, ε_1, γ_1 и γ_2 на основании замечания 4, а α так, чтобы было

$$\|K - \varphi_0^{-1}\bar{K}\varphi\|^2 \leqslant \sum_{i,\,k=1}^{\infty} |\varkappa_{ik}|^2 - \sum_{i,\,k=1}^{n} |\varkappa_{ik}|^2 \leqslant \alpha^2.$$

§ 5. Интегральные операторы

Пусть приближенные собственные значения и функции интегрального уравнения

$$Kx - \lambda x = 0, \text{ где } Kx = \int_a^b K(s, t)x(t)\,dt,$$

вычисляются как соответствующие величины интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\tilde{K}(s, t) = \sum_{i,\,k=1}^{n} \varkappa_{ik}\psi_i(s)\overline{\chi_k(t)},$$

где функций $\psi_i(s)$ и $\chi_k(s)$ удовлетворяют условию

$$\int_a^b \psi_i(s)\overline{\chi_k(s)}\,ds = \delta_{ik}.$$

Если $\tilde{\lambda}_0$ — собственное значение матрицы

$$\bar{K} = (\varkappa_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

и $\tilde{x}_0 = (\xi_{i0})$ — соответствующий собственный вектор, нормированный условием $\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k\xi_{k0} = 1$, то $\tilde{\lambda}_0$ является также собственным значением ядра $\tilde{K}(s, t)$ и $\tilde{x}_0(s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i0}\psi_i(s)$ — соответствующей собственной функцией.

Возьмем

$$g_i x = \int_a^b \overline{\chi_i(s)}\,x(s)\,ds.$$

Тогда

$$\varphi_0^{-1}\bar{K}\varphi x = \int_a^b \tilde{K}(s, t)x(t)\,dt,$$

$$\Gamma_1 x = \int_a^b \sum_{i,\,k=1}^{n} \beta_{ik}\psi_i(s)\overline{\chi_k(t)}\,x(t)\,dt - \tilde{\lambda}_0^{-1}x(s),$$

$$\Gamma_2 x = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \gamma_{n+1,\,k}\,\overline{\chi_k(t)}\,x(t)\,dt.$$

а) Если ядро $K(s, t)$ непрерывно в квадрате $a \leqslant s, t \leqslant b$ и $X = C[a, b]$, то найдем α, δ_i и τ_i из условий

$$\|K - \varphi_0^{-1}\bar{K}\varphi\| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b |K(s, t) - \tilde{K}(s, t)|\, dt \leqslant \alpha,$$

$$\|g_i\| = \int_a^b |\chi_i(s)|\, ds \leqslant \delta_i, \quad \|\psi_i\| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} |\psi_i(s)| \leqslant \tau_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а γ_1, γ_2, ε_1 и β вычислим по формулам (7).

б) Взяв $X = L^2(a, b)$ и $\chi_i(s) = \psi_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, найдем β, ε_1, γ_1 и γ_2 на основании замечания 4, а α так, чтобы было

$$\|K - \varphi_0^{-1}\bar{K}\varphi\|^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b |K(s, t) - \tilde{K}(s, t)|^2\, dt ds \leqslant \alpha^2,$$

и применим теорему 2.

Литература

1. Гавурин М. К., Приближенное разыскание собственных чисел и теория возмущений. Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 173—175.
2. Канторович Л. В., Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант. Докл. АН СССР, 1951, **80**, 849—852.
3. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Москва—Ленинград, 1950.
4. Тамме Э. Э., О принципе мажорант для итерационных методов. Уч. зап. Тартуского ун-та, 1959, **73**, 84—118.
5. Тамме Э. Э., О точности метода моментов. Настоящий журнал, стр. 317—328.
6. Троицкая Е. А., Применение общей теории приближенных методов к исследованию задачи об определении собственных чисел и собственных векторов. Докл. АН СССР, 1957, **113**, 998—1001.

Поступило
19 X 1960

OMAVÄÄRTUSTE JA OMAELEMENTIDE LIGIKAUDSE LEIDMISE MEETODITE TÄPSUSEST

E. Tamme

Geomeetriakateeder

Resümee

Käesolevas artiklis tuletatakse veahinnang, mis võimaldab hinnata teatavat tüüpi meetodiga arvutatud omaväärtuste ja omaelementide lähendite täpsust. Vaadeldakse selle veahinnangu kasutamist lõpmatu maatriksi ja Fredholmi integraaloperaatori juhul.

ÜBER DIE GENAUIGKEIT DER METHODEN ZUR ANGENÄHERTEN BERECHNUNG VON EIGENWERTEN UND EIGENELEMENTEN

E. Tamme

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird eine Fehlerabschätzung für die mit einer angenäherten Methode berechneten Eigenwerte und Eigenelemente gegeben. Es werden die Anwendungen dieser Fehlerabschätzung bei unendlichen Matrizen und Fredholmschen Integraloperatoren betrachtet.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

М. Левин
Кафедра геометрии

В этой статье выводятся некоторые формулы для приближенного вычисления двойных интегралов.

Пусть дана функция $F(x, y)$, интегрируемая в квадрате $L = [-1 \leqslant x \leqslant 1, \ -1 \leqslant y \leqslant 1]$. Выберем точки (x_i, y_i) из L $(i = 0, 1, \ldots, n)$ так, что $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$, и такое число t, что $F(t, y_i) \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Построим в L для $F(x, y)$ приближение

$$\Phi(x, y) = F(t, y) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \tag{1}$$

так, чтобы было $\Phi(x_i, y_i) = F(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Легко убедиться, что при данных условиях функция $\Phi(x, y)$ существует, единственна и имеет вид

$$\Phi(x, y) = F(t, y) \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{k=0}^{n}{}^{(i)} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \frac{F(x_i, y_i)}{F(t, y_i)}, \tag{1a}$$

где

$$\prod_{k=0}^{n}{}^{(i)} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}.$$

Нетрудно видеть, что, если t одно из чисел x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, то для любого значения y

$$\Phi(t, y) = F(t, y).$$

Действительно, пусть $t = x_p$, где $0 \leqslant p \leqslant n$. Тогда по (1)

$$\Phi(t, y_p) = F(t, y_p) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i.$$

Так как $\Phi(t, y_p) = \Phi(x_p, y_p) = F(x_p, y_p) = F(t, y_p) \neq 0$, то $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i = 1$, что и доказывает наше утверждение.

Исходя из (1а), можно получить формулы для приближенного вычисления двойных интегралов, заменяя подинтегральную функцию ее приближением:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} F(t,y)\,dy \cdot \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{k=0}^{n}{}^{(i)} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \right) \frac{F(x_i,\, y_i)}{F(t,\, y_i)}\,dx.$$

Введя обозначение

$$C_i^{(n)} = \int_{-1}^{1} \prod_{k=0}^{n}{}^{(i)} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}\,dx,$$

получим приближенную формулу

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} F(t,y)\,dy \sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} \frac{F(x_i,\, y_i)}{F(t,\, y_i)}. \qquad (2)$$

Если интеграл, стоящий в правой части (2), вычислять приближенно, интерполируя $F(t, y)$ полиномом в узлах $y_0', y_1', \ldots, y_m'$, то (2) примет вид

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)\,dxdy = \Big[\sum_{j=0}^{m} C_j'^{(m)} F(t,\, y_j')\Big] \sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} \frac{F(x_i,\, y_i)}{F(t,\, y_i)}, \qquad (2а)$$

где

$$C_j'^{(m)} = \int_{-1}^{1} \prod_{k=0}^{m}{}^{(j)} \frac{y-y_k'}{y_j'-y_k'}\,dy.$$

Возьмем, к примеру, в (2а) $m=n=2$, $t=0$, $x_0=y_0'=-u$, $x_1=y_1=y_1'=0$, $x_2=y_2=y_2'=y_0=u$, где $u=\sqrt{0{,}6}$. Тогда получим формулу

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(x,y)\,dxdy = \frac{25}{81}\,[1{,}6\,F(0,0) + F(0,u) + F(0,-u)]\left[1{,}6 + \right.$$

$$\left. + \frac{F(u,\, u) + F(-u,\, u)}{F(0,\, u)}\right]. \qquad (3)$$

Легко проверить, что (3) точна для полиномов вида $F(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{12}xy^2 + a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{13}xy^3 + a_{31}x^3y + a_{04}y^4$, если $F(0, u) \neq 0$.

Примеры.

$$I_1 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{dx\,dy}{(x+y+10)^2} = 0{,}04082.$$

Вычисление по (3) дает $J_1 = 0{,}04075$; ошибка 0,00007.

$$J_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sqrt{(2-x)(2-y)}\,dxdy = 7{,}8256.$$

Вычисление по (3) дает $J_2 = 7{,}8258$, ошибка 0,0002.

Из (2) и (2а) легко получить формулы для приближенного вычисления двойных интегралов, когда область интегрирования произвольный прямоугольник.

Пусть теперь область интегрирования единичный круг с центром в начале координат. Тогда

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} F(x, y)\,dxdy =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{v+1}{2} F\left[\frac{v+1}{2}\cos\pi(w+1),\ \frac{v+1}{2}\sin\pi(w+1)\right] dv\,dw.$$

По (2а) при $m = n = 2$, $t = 0$, $v_0 = w_0' = -u$, $v_1 = w_1 = w_1' = 0$, $v_2 = w_2 = w_2' = w_0 = u$ получаем

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} F(x, y)\,dxdy = \frac{25\pi}{324}\left[1{,}6\,F\left(-\frac{1}{2}, 0\right) + \right.$$

$$\left. + F(\alpha_1, \alpha_2) + F(\alpha_1, -\alpha_2)\right]\left[1{,}6 + \frac{\beta_1 F(\alpha_3, \alpha_4) + \beta_2 F(\alpha_5, \alpha_6)}{F(\alpha_1, \alpha_2)}\right], \quad (4)$$

где

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 0{,}379792; & \alpha_2 = -0{,}325203; & \alpha_3 = 0{,}673980; \\ \alpha_4 = -0{,}577105; & \alpha_5 = 0{,}085607; & \alpha_6 = -0{,}073302; \\ \beta_1 = 1{,}774597; & \beta_2 = 0{,}225403. & \end{array}$$

Пример.

$$J_3 = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy = 0{,}667\pi.$$

Вычисление по (4) дает $J_3 = 0{,}674\pi$, ошибка $0{,}007\pi$. Если для сравнения вычислить этот интеграл по формуле из [1] (стр. 506), то получим $J_3 = 0{,}683\pi$, ошибка $0{,}016\pi$.

Рассмотренный метод построения формул для приближенного вычисления двойных интегралов легко обобщается на случай интегралов произвольной краткости.

Литература

1. Микеладзе Ш. Е., Численные методы математического анализа. Москва, 1953.

Поступило
13 II 1961

ÜHEST KAHEKORDSETE INTEGRAALIDE ARVUTAMISE MEETODIST

M. Levin
Geomeetriakateeder

Resümee

Artiklis tuletatakse rida uusi valemeid kahekordsete integraalide ligikaudseks arvutamiseks, kui integreerimispiirkond on ruut või ring.

A COMPUTING METHOD OF DOUBLE INTEGRALS

M. Levin

Summary

The new formulae are deduced for the numerical evaluation of double integrals in the quadratic or circular integration regions.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ ПРЯМОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Ю. Лепик
Кафедра теоретической механики

В статье рассматривается в концепции Энгессера-Кармана задача о поведении прямого сжатого упруго-пластического стержня в начальной части послекритической стадии. Поставленная задача решается методом разложения решения по степеням малого параметра; материал стержня считается несжимаемым и имеющим линейное упрочнение. Доказывается, что критическая нагрузка по Энгессеру-Карману оказывается и максимальной нагрузкой, удерживаемой стержнем.

§ 1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим сжатый продольной силой стержень, сечение которого обладает двумя осями симметрии. Пусть координатная ось x совпадает с касательной к оси стержня: для осей y и z выбираем оси симметрии поперечного сечения. Предположим, что изгиб стержня при потере устойчивости происходит в плоскости xz; за положительное направление оси z примем направление прогибов.

Имея в виду случай малых деформаций, но значительных углов поворота элементов стержня, можем уравнения равновесия написать в виде

$$T' = -N\varkappa,\ N' = T\varkappa,\ M'\ M' = N. \qquad (1.1)$$

В этих формулах символами T, N, M обозначены нормальное усилие, перерезывающая сила и изгибающий момент в стержне; $\varkappa$ — кривизна центральной оси стержня, которая вычисляется по формуле $\varkappa = -\dfrac{w''}{\sqrt{1-w'^2}}$ (здесь и в дальнейшем штрихами обозначены производные по x).

Первым двум соотношениям (1.1) можно удовлетворить, полагая [1]

$$T = -P\sqrt{1-w'^2}, \quad N = Pw'. \tag{1.2}$$

Учитывая соотношения (1.2), можем третье условие из (1.1) после интегрирования по x представить в виде

$$M = M_0 + Pw.$$

Здесь M_0 — момент заделки; так как мы в дальнейшем рассмотрим только стержень со свободно опертыми концами, то $M_0 = 0$.

Будем понимать под символом σ величину сжимающего напряжения в рассматриваемом сечении; под символом e — относительное укорочение элемента стержня. В случае линейного упрочнения материала эти величины связаны соотношением

$$\sigma - \sigma_0 = E(1-\lambda)(e - e_0). \tag{1.4}$$

Здесь обозначено $\lambda = 1 - \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{de}$; σ_0 и e_0 — значения величин σ и e в критическом состоянии.

Обозначая символом ε величину относительного укорочения среднего слоя $z = 0$, имеем по гипотезе плоских сечений (ср. [2], § 47)

$$e = \varepsilon - z\varkappa - \frac{1}{2}z^2\varkappa^2. \tag{1.5}$$

В дальнейшем предположим, что прогибы стержня настолько малы, что в выражении (1.5) можно последним членом пренебречь; это дает нам возможность заменить формулу (1.5) более простой $e = \varepsilon - z\varkappa$.

Величины тангенциального усилия T и изгибающего момента M вычисляем по формулам ($b(z)$ — ширина сечения, h — высота балки):

$$T = -\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma b(z)\,dz, \quad M = -\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma b(z)\,z\,dz. \tag{1.6}$$

При вычислении интегралов (1.6) нужно учитывать обстоятельство, что при потере устойчивости в стержне возникает и зона разгрузки. Обозначим через $z_p = z_p(x, y)$ уравнение поверхности, разделяющей зоны нагрузки и разгрузки; эту величину вычисляем из условия

$$\delta e = \delta\varepsilon - z_p\delta\varkappa = 0. \tag{1.7}$$

В рассматриваемом случае зона разгрузки определяется не-

[1] Нетрудно видеть, что P — сжимающая сила, приложенная в концах стержня.

равенствами $z_p < z < h/2$. Так как в этой зоне деформации происходят упруго, то при значениях $z_p < z < h/2$ в формуле (1.4) следует взять $\lambda = 0$.

Введем обозначения

$$B_i = \int_{-h/2}^{z_p} b(z) z^{i-1} dz \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.8}$$

Вычисляя на основании формул (1.4), (1.5), (1.8) интегралы в (1.6), приходим к следующим соотношениям (F — площадь сечения, I — момент инерции сечения):

$$\begin{gathered} T = -F\sigma_0 - EF(\varepsilon - \varepsilon_0) + E\lambda B_1(\varepsilon - \varepsilon_0) - E\lambda B_2 \varkappa, \\ M = EI\varkappa + E\lambda B_2(\varepsilon - \varepsilon_0) - E\lambda B_3 \varkappa. \end{gathered} \tag{1.9}$$

§ 2. Разложение решения по степеням малого параметра

Разложим все интересующие нас величины по степеням малого параметра f, за такой параметр принимаем прогиб в середине стержня:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 f + \varepsilon_2 f^2 + \ldots, & B_i = B_{i0} + B_{i1} f + B_{i2} f^2 + \ldots, \\ \varkappa = \varkappa_1 f + \varkappa_2 f^2 + \ldots, & P = P_0 + P_1 f + P_2 f^2 + \ldots, \\ w = w_1 f + w_2 f^2 + \ldots, & T = T_0 + T_1 f + T_2 f^2 + \ldots, \\ z_p = z_0 + z_1 f + z_2 f^2 + \ldots, & M = M_1 f + M_2 f^2 + \ldots. \end{array} \tag{2.1}$$

На основании соотношений, выведенных в п. 1 настоящей работы, находим следующие зависимости между коэффициентами разложений (2.1):

1) Так как

$$\delta\varepsilon = (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 f + 3\varepsilon_3 f^2 + \ldots)\delta f$$

и

$$\delta\varkappa = (\varkappa_1 + 2\varkappa_2 f + 3\varkappa_3 f^2 + \ldots)\delta f,$$

то из условия (1.7) получаем, что

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = z_0 \varkappa_1, \qquad \varepsilon_2 = z_0 \varkappa_2 + \frac{1}{2} z_1 \varkappa_1, \\ \varepsilon_3 = z_0 \varkappa_3 + \frac{2}{3} z_1 \varkappa_2 + \frac{1}{3} z_2 \varkappa_1. \end{gathered} \tag{2.2}$$

2) Из определения кривизны $\varkappa = -\dfrac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}}$ вытекает, что

$$\varkappa_1 = -w_1'', \quad \varkappa_2 = -w_2'', \quad \varkappa_3 = -w_3'' - \frac{1}{2} w_1'^2 w_1''. \tag{2.3}$$

3) Коэффициенты разложения величины B_i вычисляются на

основании (1.8) по формулам

$$B_{i0} = \int_{-h/2}^{z_0} b(z) z^{i-1} dz, \quad B_{i1} = b(z_0) z_0^{i-1} z_1,$$
$$B_{i2} = b(z_0) z_0^{i-1} z_2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dz_0} [b(z_0) z_0^{i-1}] z_1^2. \tag{2.4}$$

4) Из соотношений (1.2) и (1.3) следуют зависимости

$$T_1 = -P_1, \quad T_2 = -P_2 + \frac{1}{2} P_0 w_1'^2,$$
$$T_3 = -P_3 + \frac{1}{2} P_1 w_1'^2 + P_0 w_1' w_2' \tag{2.5}$$

и

$$M_1 = P_0 w_1, \quad M_2 = P_0 w_2 + P_1 w_1,$$
$$M_3 = P_0 w_3 + P_1 w_2 + P_2 w_1. \tag{2.6}$$

3. Нахождение решения поставленной задачи в последовáтельных приближениях

Будем искать решение задачи сначала в первом приближении; для того удержим в соотношениях (1.9) только члены с первой степенью параметра f:

$$T_1 = EF\varepsilon_1 + E\lambda B_{10}\varepsilon_1 - E\lambda B_{20}\varkappa_1,$$
$$M_1 = -EI\varkappa_1 + E\lambda B_{20}\varepsilon_1 - E\lambda B_{30}\varkappa_1. \tag{3.1}$$

Будем считать, что потеря устойчивости происходит при неизменяемых внешних силах, следовательно $P_1 = 0$. Учитывая еще, что $T_1 = -P_1$, $\varkappa_1 = -w_1''$, $\varepsilon_1 = z_0\varkappa_1$, можем условие $P_1 = 0$ на основании (3.1) переписать в виде

$$Fz_0 + \lambda(B_{20} - B_{10}z_0) = 0. \tag{3.2}$$

Полученное уравнение (3.2) дает возможность, если сечение стержня конкретно задано, определить единственную входящую в него неизвестную z_0.

Обозначим буквой K величину модуля Кармана:

$$K = E[1 + \frac{\lambda}{I}(B_{20}z_0 - B_{30})]. \tag{3.3}$$

Так как $M_1 = P_0 w_1$, то второе уравнение из (3.1) принимает вид

$$w_1'' + \frac{P_0}{KI} w_1 = 0. \tag{3.4}$$

Граничными условиями к этому уравнению являются [2]

$$w_1(0) = w_1(l) = w_1'(l/2) = 0,\ w_1(l/2) = 1.$$

Решая уравнение (3.4) при данных граничных условиях, находим, что

$$w_1 = \sin\frac{\pi x}{l},\quad P_0 = \frac{\pi^2 KI}{l^2}. \tag{3.5}$$

Нетрудно видеть, что формулы (3.2) и (3.5) определяют критическую нагрузку упруго-пластического стержня и совпадают с соответственными формулами, данными в монографии [1], § 18.

Перейдем к вычислению второго приближения. Учитывая соотношения (2.1) — (2.4) и (3.2) — (3.3) находим из формул (1.9), что

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} E(F - \lambda B_{10}) z_1 w_1'', \\ M_2 &= -KIw_2'' - \frac{1}{2} E\lambda B_{20} z_1 w_1''. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Докажем, что в формулах (3.6) можно пренебречь членом $\frac{1}{2} E\lambda B_{20} z_1 w_1''$. Для того нужно иметь в виду, что основные соотношения, данные в п. 1 настоящей работы, не являются точными. Приблизительный характер этих выражений обусловлен следующими предположениями, использованными нами при построении рассматриваемой теории:

1) Относительное укорочение e является малой величиной.

2) Последний член в формуле (1.5) можно отбросить, следовательно должно быть $|z\varkappa| \ll 1$.

Учитывая еще, что $z \sim h$ и $|\varkappa| \sim f/l^2$, можем требование $|z\varkappa| \ll 1$ заменить условием $\frac{hf}{l^2} \ll 1$. Последнее обстоятельство дает нам возможность при следующих вычислениях вычеркнуть все члены, которые имеют порядок малости $\frac{hf}{l^2}$ по сравнению с единицей.

Допустим, что порядок коэффициентов разложения величины P не превышает порядка этих коэффициентов в упругом случае (такое предположение вполне естественно, так как из опытов известно, что в послекритической стадии сопротивление к продольному изгибу упругопластического стержня не может быть большим, чем в случае упругого стержня). Следовательно коэффициенты P_0 и P_2 должны иметь порядки $P_0 \sim \frac{Eb_0 h^3}{l^2}$, $P_2 \sim \frac{Eb_0 h^3}{l^4}$,

[2] Граничное условие $w_1(l/2) = 1$ вытекает из определения параметра $f = w(l/2)$.

и из первого уравнения системы (3.6) мы находим, что $z_1 \sim \left(\frac{h}{l}\right)^2$. Но так как $\frac{z_1 f}{z_0} \sim \frac{hf}{l^2} \ll 1$, то член $z_1 f$ в разложении величины z_p не имеет существенного значения и его можно вычеркнуть.

Так как $z_1 \sim \left(\frac{h}{l}\right)^2$, то на основании (3.6) нетрудно видеть, что в выражении коэффициента M_2 второй член имеет порядок $\frac{Eb_0 h^4}{l^4}$ и что отношение величины $\frac{1}{2} E\lambda B_{20} z_1 w_1'' f^2$ к первому члену $M_1 f$ в разложении изгибающего момента M дает величину порядка $\frac{hf}{l^2}$. Следовательно во второй формуле из системы (3.6) можно член $\frac{1}{2} E\lambda B_{20} z_1 w_1''$ опустить, что и требовалось доказать.

Учитывая, что вторая формула из (3.6) получает теперь простой вид $M_2 = -KIw_2''$, приходим к следующему дифференциальному уравнению для определения коэффициента w_2:

$$w_2'' + \frac{\pi^2}{l^2} w_2 = 0.$$

Единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим граничным условиям $w_2(0) = w_2(l/2) = w_2(l) = w_2'(l/2) = 0$ является тривиальное решение $w_2 \equiv 0$.

Следует еще отметить, что из условия $z_1 = 0$ было бы неправильно делать вывод, что всегда и $T_2 = 0$ (в этом случае должно бы быть $P_2 = \frac{1}{2} P_0 w_1'^2$, что неверно). Дело в том, что — как указано уже выше — равенство $z_1 = 0$ является приблизительным и фактически означает, что величина z_1 имеет порядок $\left(\frac{h}{l}\right)^2$. Из (3.6) теперь следует, что $T_2 \sim \frac{Eb_0 h^3}{l^4}$ и $\frac{T_2 f^2}{T_0} \sim \left(\frac{f}{l}\right)^2$. Так как прогиб стержня может оказаться настолько большим, что величину $\left(\frac{f}{l}\right)^2$ нельзя пренебрегать по сравнению с единицей, то мы уже не можем в разложении усилия T вычеркнуть член $T_2 f^2$ и следовательно должно быть $T_2 \neq 0$.

Таким же образом найдем и приближения более высокого порядка. Отбросив опять некоторые несущественные члены, находим для третьего приближения

$$z_2 = 0,\ P_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 KI,\quad w_3 = -\frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} x;$$

для четвертого приближения $z_3 = 0$; $P_3 = 0$; $w_3 \equiv 0$ и. т. д.

Зависимость осевой силы P от прогиба f определяется теперь формулой

$$P = P_0\left[1 + \frac{1}{8}\pi^2\left(\frac{f}{l}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{3.7}$$

Интересно отметить, что распределение зон активных и пассивных деформаций при переходе от критической стадии в послекритическую не изменяется (это утверждение следует из обстоятельства, что $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = 0$).

Формула (3.7) выведена для случая со свободно опертыми концами стержня, однако нетрудно поверить, что аналогичный результат остается в силу и при других условиях закреплений.

4. Учет возникновения зон вторичных пластических деформаций в стержне

Все выкладки в пп. 1—3 были выполнены в предположении, что стрела прогиба f настолько мала, что в стержне не возникает зон пластических деформаций от растяжения. Последнее требование, как следует из дальнейшего, в значительном мере стесняет применение формулы (3.7), так как вторичные пластические деформаций в стержне возникают уже при сравнительно малых прогибах. Покажем, что это действительно так.

Ограничиваемся опять случаем линейного упрочнения материала и допустим, что диаграмма σe, характеризующая поведения материала в процессах нагружения и разгружения, известна. Условие для того, чтобы в рассматриваемой точке стержня не возникло пластических деформаций от растяжения, можно написать в виде

$$e_0 - e < \gamma(e_0)\, e_s. \tag{4.1}$$

Здесь символом $\gamma(e_0)$ отмечен некоторой параметр $\gamma(e_0) > 1$, величину которого можно определить из опытов.

Учитывая, что первые пластические деформации от растяжения возникают в точке $z = h/2$, $x = l/2$, можем неравенство (4.1) заменить условием

$$\varepsilon_0 - \varepsilon + \frac{h}{2}\varkappa < \gamma(e_0)\, e_s. \tag{4.2}$$

Вычисляя из первого уравнения системы (1.9) величину $\varepsilon_0 - \varepsilon$ и применяя соотношение (3.7), получим вместо неравенства (4.2) условие

$$\frac{h/2\,F + \lambda\,(B_2 - h/2\,B_1)}{F - \lambda B_1}\,\frac{l^2}{h^2}\,\varkappa - \frac{\pi^2 P_0 f^2}{8Eh^2(F - \lambda B_1)} < \gamma(e_0)\,\mu.$$

Символом μ здесь обозначено выражение $\mu = \dfrac{e_s l^2}{h^2}$.

Преобразуем полученный результат; учитывая формулу (3.2) и имея в виду, что до момента появления вторичных пластических деформаций $z_p = z_0$, находим

$$\left(\frac{h}{2} - z_0\right)\frac{l^2}{h^2}\varkappa - \frac{\pi^4 KIf^2}{8Eh^2 l^2 (F - \lambda B_1)} < \gamma(e_0)\mu.$$

Второй член, стоящий на левой стороне полученного неравенства, имеет относительно первого порядок $\frac{hf}{l^2}$ и, следовательно, его можно опустить; сделав это, находим

$$\left(\frac{h}{2} - z_0\right)\frac{l^2}{h^2}\varkappa < \gamma(e_0)\mu. \tag{4.3}$$

Так как в нашем случае потеря устойчивости происходит за пределом упругости, то $\sigma_0 > Ee_s$, что равносильно условию $\mu < \frac{\pi^2 KI}{EFh^2}$. Кривизну $\varkappa$ в точке $x = l/2$ определяем из условия

$$\varkappa = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f\left(1 + \frac{\pi^2}{8}\frac{f^2}{l^2} + \ldots\right) > \pi^2 \frac{f}{l^2}.$$

Учитывая неравенства $\mu < \frac{\pi^2 KI}{EFh^2}$ и $\varkappa > \frac{\pi^2 f}{l^2}$, можем формулу (4.3) переписать в виде

$$\left(\frac{h}{2} - z_0\right) f < \gamma(e_0)\frac{KI}{EF}. \tag{4.4}$$

Для случая прямоугольного сечения имеем в силу (3.2) — (3.3):

$$\frac{K}{E(h/2 - z_0)} = \frac{4}{h}\left(\frac{1}{2} - \frac{z_0}{h}\right) < \frac{2}{h}. \tag{4.5}$$

Так как влияние формы сечения стержня на значение модуля Кармана K в общем незначительно ([3], стр. 25), то формулу (4.5) можно считать действительным и для сечений, отличных от прямоугольного. Учитывая еще, что всегда $I < 1/4 h^2 F$, из неравенства (4.4) находим окончательно $f < \gamma(e_0) h/2$.

Из полученного результата следует, что такие состояния, при которых зоны вторичных пластических деформаций в стержне отсутствуют, возможны лишь при прогибах, не превосходящих высоту стержня h. В таком случае из условия $\frac{hf}{l^2} \ll 1$ вытекает, что и $\left(\frac{f}{l}\right)^2 \ll 1$; следовательно $1 - w'^2 \approx 1$, $\varkappa \approx -w''$, $T \approx -P$ и все зависимости, рассмотренные в п. 1, становятся линейными.

Теперь можем упростить и уравнение (3.7). Так как $(f/l)^2 \ll \ll 1$, то второй член из уравнения (3.7) отпадает и мы приходим

к условию $P = P_0 = const$. Имея в виду, что после появления зон вторичных пластических деформаций сопротивление стержня выпучиванию резко снижается, увидим, что если потеря устойчивости происходит за пределом упругости,то критическая нагрузка оказывается одновременно и разрушающей.

Литература

1. Ильюшин А. А., Пластичность. Москва, 1948.
2. Новожилов В. В., Основы нелинейной теории упругости. Москва, 1948.
3. Штаерман И. Я., Пиковский А. А., Основы теории устойчивости строительных конструкций. Москва, 1939.

Поступило
9 III 1960

SIRGE ELASTILIS-PLASTILISE VARDA PÄRASTKRIITILISE STAADIUMI ANALÜÜS

Ü. Lepik
Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis uuritakse Engesser-Kármáni kontseptsiooni kohaselt surutud elastilis-plastiliste varraste tasakaalu pärastkriitilise staadiumi algosas. Varda materjal loetakse kokkusurutamatuks ning lineaarselt kalestuvaks.

Püstitatud ülesanne lahendatakse häiritusmeetodil. Tõestatakse, et Engesser-Kármáni poolt antud kriitiline koormus on ühtlasi ka suurim koormus, mida varras võib kanda.

ZUR ANALYSE DES NACHKRITISCHEN STADIUMS ELASTISCH-PLASTISCHER DRUCKSTÄBE

Ü. Lepik

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird auf Grund der Engesser-Kármán-Konzeption ein Gleichgewichtsproblem gerader elastisch-plastischer Druckstäbe im nachkritischen Stadium behandelt. Es wird dabei angenommen, daß das Material des Stabes inkompressibel ist und eine lineare Verfestigung hat.

Die gestellte Aufgabe wird vermittels der Störungsmethode gelöst. Es wird gezeigt, daß die Knicklast von Engesser-Kármán gleichzeitig auch die obere Grenze der Belastungsfähigkeit des Stabes darstellt.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНОК РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ, В ЧАСТНОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ И ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ

Л. Роотс
Кафедра теоретической механики

В настоящей статье исследуется задача нахождения критической нагрузки для пластинок различной формы. Для решения этой задачи применяется метод Канторовича-Власова. В первой главе дается описание используемого метода. Во второй главе рассматривается задача об устойчивости свободно опертых пластинок, равномерно сжатых по всему контуру. В третьей главе рассматривается нахождение критической нагрузки для треугольных и трапециевидных пластинок при других условиях закрепления и нагружения.

I. Описание метода решения

Рассмотрим тонкую трапециевидную пластинку постоянной толщины, сжатую силами, действующими в ее плоскости (рис. 1).

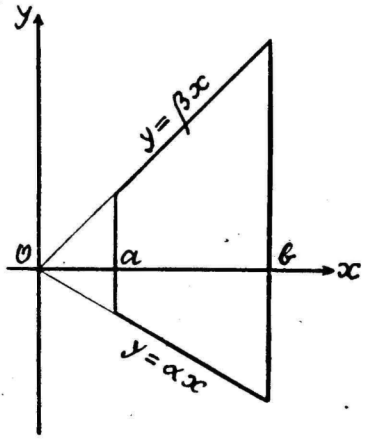


Рис. 1.

Если ограничиться случаем упругих деформаций, то дифференциальное уравнение для прогиба w срединной поверхности выпученной пластинки имеет вид

$$D\nabla^4 w = T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{1.1}$$

где

$$T_1 = X_x h;\ T_2 = У_y h;\ S = X_y h;$$

D — жесткость пластинки, h — ее толщина. Введем вместо прямоугольных координат x и y новые координаты ξ и η, определяемые формулами

$$\xi = x;\ \eta = \frac{y}{x}. \tag{1.2}$$

При такой замене переменных дифференциальное уравнение (1.1) примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 4\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2\cdot\frac{3\eta^2+1}{\xi^2}\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 4\cdot\frac{\eta^3+\eta}{\xi^3}\frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} + \\
&+ \frac{(\eta^2+1)^2}{\xi^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + 12\frac{\eta}{\xi^2}\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} - 8\cdot\frac{3\eta^2+1}{\xi^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + \\
&+ 12\cdot\frac{\eta^3+\eta}{\xi^4}\frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - 24\frac{\eta}{\xi^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + 12\frac{3\eta^2+1}{\xi^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \\
&+ 24\frac{\eta}{\xi^4}\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{T_1}{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\
&\left. + \frac{\eta^2}{\xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\frac{\eta}{\xi^2}\frac{\partial w}{\partial \eta}\right) + \frac{T_2}{D\xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \\
&+ 2\frac{S}{D}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\eta}{\xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial w}{\partial \eta}\right).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Несколько громоздкий вид уравнения (1.3) компенсируется легкостью подбора функций, удовлетворяющих граничным условиям на краях пластинки.

Для решения задачи о нахождении критической нагрузки мы воспользуемся методом приведения уравнения (1.3) обыкновенному дифференциальному уравнению (метод Канторовича-Власова, см. [2]). Этот метод уже нашел применение при решении задач об изгибе пластинок [1, 2, 6, 7, 8, 9], а также при решении задачи об устойчивости параллелограмной пластинки [5].

Применительно к нашему случаю этот метод состоит в следующем. Обозначим коротко уравнение (1.3) через $L(w) = 0$. Неизвестная функция в этом уравнении w задается в виде ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\xi)\, g_m(\eta), \tag{1.4}$$

где функции $g_m(\eta)$ выбирают так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям на непараллельных краях пластинки и обра-

зовали бы полную систему функции на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функции $f_m(\xi)$ определяют из условий

$$\int_{\alpha}^{\beta} L\left[\sum_{m=1}^{\infty} f_m(\xi) g_m(\eta)\right] g_k(\eta)\, d\eta = 0 \qquad (1.5)$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Далее при удовлетворении граничных условий на параллельных краях пластинки получают и уравнение для критической нагрузки.

В данной статье ограничимся в большинстве случаев нахождением первого приближения критической нагрузки, используя лишь один член из ряда (1.4). Точность полученных результатов оценивается путем их сравнения с уже имеющимися решениями частных случаев.

Если пластинка свободно оперта по всему контуру и сжата силами, равномерно распределеннными по всему контуру (рис. 2),

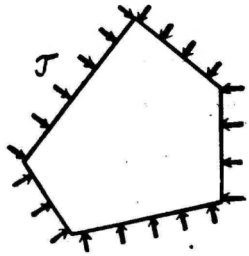


Рис. 2.

то решение можно упростить. В таком случае, если сжимающее усилие равно T, то дифференциальное уравнение устойчивости пластинки имеет вид

$$\nabla^4 w + \frac{T}{D}\nabla^2 w = 0. \qquad (1.6)$$

На контуре пластинки должны быть удовлетворены следующие краевые условия:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$$

или

$$w = 0, \quad \nabla^2 w = 0.$$

Введя новую неизвестную функцию $M = \nabla^2 w$, приведем (1.6) к виду

$$\nabla^2 M + \frac{T}{D} M = 0, \qquad (1.7)$$

с условием на контуре пластинки

$$M = 0. \qquad (1.8)$$

Дальше надо продолжать так же, как и при уравнении (1.1).

II. Нахождение критической нагрузки для равномерно сжатых свободно опертых пластинок

1. Прямоугольная пластинка.

Пусть размеры пластинки a и b (рис. 3). Применим метод, описанный в главе I. Исходя из уравнения (1.7), зададим M в виде ряда

$$M = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi y}{b} f_m(x), \qquad (2.1)$$

все члены которого удовлетворяют граничным условиям на

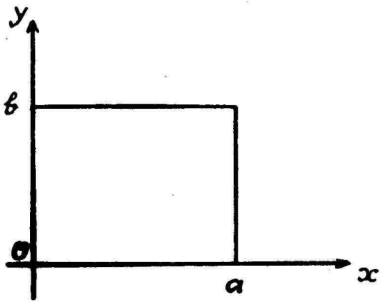


Рис. 3.

краях $y = 0$, $y = b$. Функции $f_m(x)$ определяются из условий

$$\int_0^b \left[\left(\nabla^2 + \frac{T}{D}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi y}{b} f_m(x)\right] \sin \frac{k\pi y}{b}\, dy = 0, \qquad (2.2)$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots),$$

которые после интегрирования примут вид

$$f_k''(x) + \left(\frac{T}{D} - \frac{k^2\pi^2}{b^2}\right) f_k(x) = 0 \qquad (2.3)$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Общими решениями уравнений (2.3) будут

$$f_k(x) = A_k \cos \alpha_k x + B_k \sin \alpha_k x, \qquad (2.4)$$

где

$$\alpha_k^2 = \frac{T}{D} - \frac{k^2\pi^2}{b^2}.$$

Подставив (2.4) в (2.1), получим

$$M = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi y}{b} \left(A_m \cos \alpha_m x + B_m \sin \alpha_m x\right). \qquad (2.5)$$

Из краевых условий $M(0, y) = 0$, $M(a, y) = 0$ вытекает, что

$A_m = 0$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ и что при некотором k $\sin a_k a = 0$, откуда

$$a_k a = n\pi;$$

$$a\sqrt{\frac{T}{D} - \frac{k^2\pi^2}{b^2}} = n\pi;$$

$$T = \frac{a^2k^2 + b^2n^2}{a^2b^2}\pi^2 D.$$

Критической нагрузкой является наименьшее возможное значение T. Это получается при $k = n = 1$, и оно будет равным

$$T_{kp} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}\pi^2 D. \qquad (2.6)$$

Эта формула совпадает с известной формулой из [10].

2. Косая пластинка.

Рассмотрим параллелограмную пластинку со сторонами a и b и острым углом α (рис. 4).

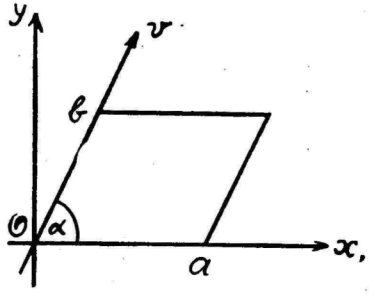


Рис. 4.

Применим и здесь метод Канторовича-Власова. Зададим

$$M = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi v}{b} f_m(u), \qquad (2.7)$$

где u, v означают косоугольные координаты, оси которых направлены по краям пластинки (рис. 4); они связаны с x, y формулами

$$u = x - y\cot\alpha, \quad v = \frac{y}{\sin\alpha}. \qquad (2.8)$$

Так как в координатах u, v оператор ∇^2 имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right),$$

то условия, из которых определяются функции $f_m(u)$, имеют в рассматриваемом случае вид

$$\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{T\sin^2\alpha}{D}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi v}{b} f_m(u)\right]\sin\frac{k\pi v}{b}\,dv = 0$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (2.9)$$

Интегрируя (3. 3), получим

$$f_k''(u) + 4\cos\alpha \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{\infty} \frac{km\,[(-1)^{k+m}-1]}{b\,(k^2-m^2)} f_m'(u) +$$

$$+\left(\frac{T\sin^2\alpha}{D} - \frac{k^2\pi^2}{b^2}\right) f_k(u) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (2.10)$$

Найдем первое приближение для T_{kp}, используя лишь один член из ряда (2. 7), т. е. полагая

$$M = \sin\frac{k\pi v}{b} f_k(u). \qquad (2.11)$$

Для $f_k(u)$ получим из (3. 4) уравнение

$$f_k''(u) + \left(\frac{T\sin^2\alpha}{D} - \frac{k^2\pi^2}{b^2}\right) f_k(u) = 0. \qquad (2.12)$$

Аналогично п. 2 находим, что минимальное значение T, получающееся при $k = 1$, равно

$$T_{kp}^{(1)} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2\sin^2\alpha}\pi^2 D. \qquad (2.13)$$

Второе приближение для T_{kp} получим, взяв из ряда (2. 7) два члена:

$$M = \sin\frac{\pi v}{b} f_1(u) + \sin\frac{2\pi v}{b} f_2(u). \qquad (2.14)$$

В этом случае получим из (3. 4)

$$\left.\begin{aligned} f_1''(u) + \frac{16\cos\alpha}{3b} f_2'(u) + \left(\frac{T\sin^2\alpha}{D} - \frac{\pi^2}{b^2}\right) f_1(u) = 0 \\ f_2''(u) - \frac{16\cos\alpha}{3b} f_1'(u) + \left(\frac{T\sin^2\alpha}{D} - \frac{4\pi^2}{b^2}\right) f_2(u) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

Решая уравнения (2. 15) и удовлетворяя граничным условиям

$$f_1(0) = 0,\ f_1(a) = 0,\ f_2(0) = 0,\ f_2(a) = 0,$$

находим T_{kp} (второе приближение). Далее возможно, поступая аналогично, найти третье, четвертое и т. д. приближение, пока не будет достигнута необходимая точность.

3. Трапециевидная и треугольная пластинки. Рассмотрим пластинку, изображенную на рис. 1. Введем вместо x, y новые координаты по формулам

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{x}. \qquad (2.16)$$

При этом уравнение (1. 7) примет вид

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\xi^2} - 2\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\eta^2+1}{\xi^2}\frac{\partial^2 M}{\partial\eta^2} + 2\frac{\eta}{\xi^2}\frac{\partial M}{\partial\eta} + \frac{T}{D}M = 0. \qquad (2.17)$$

Зададим

$$M=\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi(\eta-\alpha)}{\beta-\alpha}f_m(\xi). \tag{2.18}$$

Для $f_m(\xi)$ получим, согласно методу Канторовича-Власова, уравнения

$$\int_{\alpha}^{\beta}\Big[\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-2\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\eta^2+1}{\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+2\frac{\eta}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{T}{D}\Big)\cdot$$

$$\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi(\eta-\alpha)}{\beta-\alpha}f_m(\xi)\Big]\sin\frac{k\pi(\eta-\alpha)}{\beta-\alpha}d\eta=0 \tag{2.19}$$

$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

или, после интегрирования,

$$f_k''(\xi)+\frac{1}{\xi}\sum_{m=1}^{\infty}a_mf_m'(\xi)+\frac{1}{\xi^2}\sum_{m=1}^{\infty}b_mf_m(\xi)+\frac{T}{D}f_k(\xi)=0 \tag{2.20}$$

$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где

$$a_m=\begin{cases}\dfrac{4km[(-1)^{k+m}\beta-\alpha]}{(k^2-m^2)(\beta-\alpha)}, & \text{если } m\neq k;\\ 1, \text{ если } m=k,\end{cases}$$

$$b_m=\begin{cases}\dfrac{4km(k^2+m^2)[(-1)^{k+m}\beta-\alpha]}{(k^2-m^2)^2(\beta-\alpha)}, & \text{если } m\neq k;\\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{(3+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)k^2\pi^2}{3(\beta-\alpha)^2}, & \text{если } m=k.\end{cases}$$

Найдем первое приближение для T_{kp}, используя лишь один член из ряда (2.18), т. е. беря

$$M=\sin\frac{k\pi(\eta-\alpha)}{\beta-\alpha}f_k(\xi). \tag{2.21}$$

Из (2.20) получим для $f_k(\xi)$ уравнение

$$f_k''(\xi)+\frac{1}{\xi}f_k'(\xi)+\Big(\frac{T}{D}-\frac{p^2}{\xi^2}\Big)f_k(\xi)=0, \tag{2.22}$$

где

$$p^2=\frac{1}{2}+\frac{(3+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)k^2\pi^2}{3(\beta-\alpha)^2}.$$

Общее решение уравнения (2.22) выражается через бесселевы функции следующим образом:

$$f(\xi)=C_1J_p\Big(\sqrt{\frac{T}{D}}\xi\Big)+C_2N_p\Big(\sqrt{\frac{T}{D}}\xi\Big) \tag{2.23}$$

(J_p и N_p — бесселевы функции соответственно первого и второго рода порядка p). Удовлетворяя граничным условиям $f(a)=0$, $f(b)=0$, придем к уравнению для $T_{kp}^{(1)}$, имеющему вид

$$J_p\Big(\sqrt{\frac{T}{D}}a\Big)N_p\Big(\sqrt{\frac{T}{D}}b\Big)-J_p\Big(\sqrt{\frac{T}{D}}b\Big)N_p\Big(\sqrt{\frac{T}{D}}a\Big)=0. \tag{2.24}$$

В случае $a = 0$, т. е. когда пластинка треугольная, из краевых условий вытекает, что $C_2 = 0$; вследствие этого уравнение для критической нагрузки упрощается и принимает вид

$$J_p\left(\sqrt{\frac{T}{D}}\,b\right) = 0. \tag{2.25}$$

Вычисления показывали, что минимальное значение $T_{kp}^{(1)}$ получается всегда при $k = 1$.

Используя два члена из ряда (2.18), мы можем найти второе приближение $T_{kp}^{(2)}$. В этом случае

$$M = \sin\frac{\pi(\eta-\alpha)}{\beta-\alpha} f_1(\xi) + \sin\frac{2\pi(\eta-\alpha)}{\beta-\alpha} f_2(\xi); \tag{2.26}$$

из (2.20) получим уравнения для $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$:

$$f_1''(\xi) + \frac{1}{\xi}\left[f_1'(\xi) + \frac{8(\beta+\alpha)}{3(\beta-\alpha)} f_2'(\xi)\right] + \left[\frac{T}{D} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\xi^2}\cdot\left(\frac{(3+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\pi^2}{3(\beta-\alpha)^2} + \frac{1}{2}\right)\right] f_1(\xi) - \frac{40(\beta+\alpha)}{9(\beta-\alpha)}\cdot\frac{1}{\xi^2} f_2(\xi) = 0; \tag{2.27}$$

$$f_2''(\xi) + \frac{1}{\xi}\left[f_2'(\xi) - \frac{8(\beta+\alpha)}{3(\beta-\alpha)} f_1'(\xi) + \left[\frac{T}{D} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{\xi^2}\cdot\left(\frac{(3+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\,4\pi^2}{3(\beta-\alpha)^2} + \frac{1}{2}\right)\right] f_2(\xi) - \frac{40(\beta+\alpha)}{9(\beta-\alpha)}\,\frac{1}{\xi^2} f_1(\xi) = 0.$$

Решая эти уравнения и удовлетворяя краевым условиям

$$f_1(a) = 0,\ f_1(b) = 0,\ f_2(a) = 0,\ f_2(b) = 0,$$

получим уравнение для $T_{kp}^{(2)}$.

Вычисления проводились в следующих частных случаях:

1) Равнобедренный треугольник. Результаты вычислений для некоторых значений β даются в таблице 1.

Таблица 1

Угол при вершине треугольника	β	p	$T_{kp}^{(1)}$
30°	0,268	5,973	98,2 $\frac{D}{b^2}$
60°	0,577	2,935	40,0 „
90°	1,000	1,947	25,7 „
120°	1,732	1,465	19,8 „
150°	3,732	1,225	17,1 „

Для сравнения заметим, что точное значение критической нагрузки для случая $\beta = 1$, приведенное в [10], будет

$$T_{kp} = \frac{5\pi^2}{2}\,\frac{D}{b^2}.$$

Следовательно, ошибка значения, найденного нами, составляет около 4%. Для равностороннего треугольника $\left(\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ точное значение критической нагрузки дано в [11]; оно равняется

$$T_{кр} = 4\pi^2 \frac{D}{b^2};$$

наше значение отличается от этого около 1,3%.

2) Равнобедренная трапеция. Результаты вычислений проведены для некоторых случаев пластинки, острые углы которого равны 45°. Результаты вычислений представлены в таблице 2.

Таблица 2

$\lambda = \frac{b}{a}$	T_{kp} $(c = b - a)$
1,2	10,0 $\frac{D}{C^2}$
1,5	10,5 „
2,0	11,5 „

3) Прямоугольный треугольник, углы которого 30°, 60° и 90°. В этом случае было получено

$$T_{кр}^{(1)} = 93{,}7 \frac{D}{b^2}.$$

Это хорошо согласуется с найденным в [12] значением

$$T_{кр} = 92{,}1 \frac{D}{b^2}$$

(расхождение около 1,8%).

III. Пластинки с другими условиями закрепления и нагружения

1. Защемленная трапециевидная пластинка. Рассмотрим случай, когда непараллельные края изображенной на рисунке 1 пластинки защемлены. Из всех возможных видов нагрузки рассмотрим лишь такие, при которых во всей пластинке $S = 0$.

Граничные условия на краях $\eta = \alpha$ и $\eta = \beta$ $\left(w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0\right)$ будут удовлетворены, если задать

$$w = \left[1 - \cos \frac{2k\pi(\eta - \alpha)}{\beta - \alpha}\right] f(\xi), \qquad (3.1)$$

где k некоторое натуральное число. Если напряженное состояние в пластинке однородно, то из условия (1.5) получим для $f(\xi)$

следующее дифференциальное уравнение:

$$f^{IV}(\xi)+\frac{2}{\xi}f'''(\xi)+\left[1-\frac{8k^2\pi^2(1+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3(\beta-\alpha)^2}\right]\frac{1}{\xi^2}f''(\xi)+$$
$$+\left[-1+\frac{8k^2\pi^2(1+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3(\beta-\alpha)^2}\right]\frac{1}{\xi^3}f'(\xi)+\left[\frac{1}{2}-\right.$$
$$-\frac{4k^2\pi^2(1+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3(\beta-\alpha)^2}+\frac{16k^4\pi^4}{45(\beta-\alpha)^4}\left\{15+10(\alpha^2+\right.$$
$$\left.\left.+\alpha\beta+\beta^2)+\frac{3(\beta^5-\alpha^5)}{\beta-\alpha}\right\}\right]\frac{1}{\xi^4}f(\xi)=\frac{T_1}{D}f''(\xi)+$$
$$+\frac{T_1}{D\xi}f'(\xi)+\left[\left(\frac{1}{6}-\frac{4k^2\pi^2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{9(\beta-\alpha)^2}\right)\frac{T_1}{D}-\right.$$
$$\left.-\frac{4k^2\pi^2}{3(\beta-\alpha)^2}\frac{T_2}{D}\right]\frac{1}{\xi^2}f(\xi). \qquad (3.2)$$

Найти общее решение для (3.2) в общем случае не удается, поэтому приходится прибегнуть к численным методам. В данной работе используем для нахождения критической нагрузки метод конечных разностей в применении к уравнению (3.2).

Заменяя в (3.2) производные на их приближенные выражения через разности функции $f(\xi)$ по формулам

$$f'(\xi_i)=\frac{1}{2\varepsilon}[f(\xi_{i+1})-f(\xi_{i-1})];$$
$$f''(\xi_i)=\frac{1}{\varepsilon^2}[f(\xi_{i+1})-2f(\xi_i)+f(\xi_{i-1})];$$
$$f'''(\xi_i)=\frac{1}{2\varepsilon^3}[f(\xi_{i+2})-2f(\xi_{i+1})+2f(\xi_{i-1})-f(\xi_{i-2}];$$
$$f^{IV}(\xi_i)=\frac{1}{\varepsilon^4}[f(\xi_{i+2})-4f(\xi_{i+1})+6f(\xi_i)-4f(\xi_{i-1})+f(\xi_{i-2})],$$

получим систему уравнений

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\xi_i}\right)f(\xi_{i+2})+\left[-4-\frac{2\varepsilon}{\xi_i}+\left(1-\frac{8k^2\pi^2(1+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3(\beta-\alpha)^2}\right)\frac{\varepsilon^2}{\xi_i^2}+\right.$$
$$+\left(-1+\frac{8k^2\pi^2(1+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3(\beta-\alpha)^2}\right)\frac{\varepsilon^3}{2\xi_i^3}-\frac{T_1\varepsilon^2}{D}\left(1+\frac{\varepsilon}{2\xi_i}\right)\left.\right]f(\xi_{i+1})+\left[6-\right.$$
$$-\left(1-\frac{8k^2\pi^2(1+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3(\beta-\alpha)^2}\right)\frac{2\varepsilon^2}{\xi_i^2}+\left\{\frac{1}{2}-\frac{4k^2\pi^2(1+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3(\beta-\alpha)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{16k^4\pi^4}{45(\beta-\alpha)^4}\left(15+10(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\frac{3(\beta^5-\alpha^5)}{\beta-\alpha}\right)\right\}\frac{\varepsilon^4}{\xi_i^4}+\frac{T_1\varepsilon^2}{D}\left(2-\right.$$
$$\left.-\frac{\varepsilon^2}{6\xi_i^2}+\frac{4k^2\pi^2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{9(\beta-\alpha)^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{\xi_i^2}\right)+\frac{T_2\varepsilon^2}{D}\cdot\frac{4k^2\pi^2}{3(\beta-\alpha)^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{\xi_i^2}\left.\right]f(\xi_i)+$$
$$+\left[-4+\frac{2\varepsilon}{\xi_i}+\left(1-\frac{8k^2\pi^2(1+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3(\beta-\alpha)^2}\right)\frac{\varepsilon^2}{\xi_i^2}-\left(-1+\right.\right.$$

$$+\frac{8k^2\pi^2(1+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3(\beta-\alpha)^2}\Big)\cdot\frac{\varepsilon^3}{2\xi_i^3}+\frac{T_1\varepsilon^2}{D}\Big(\frac{\varepsilon}{2\xi_i}-1\Big)\Big]f(\xi_{i-1})+$$

$$+\Big(1-\frac{\varepsilon}{\xi_i}\Big)f(\xi_{i-2})=0, \qquad (3.3)$$

где $\varepsilon=\frac{b-a}{n}$ (n — число делений, на которые разбит отрезок $[a, b]$).

Условие существования нетривиального решения системы (3.3) дает уравнение для критической нагрузки. С увеличением числа делений найденные значения критической нагрузки приближаются к точному значению. Если процесс будет сходиться быстро, то использованный в данной работе метод оправдает себя.

Вычисления проводились в случае равнобедренных трапециев, острые углы которых равны 45°, равномерно сжатых по всему контуру ($T_1=T_2=-T$). Были найдены приближенные значения критической нагрузки при $n=12$ и $n=13$; затем вычислялись улучшенные значения $T_{кр}$ по методу, изложенному в [13]. Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

$\frac{b}{a}$	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
$\frac{b^2}{D}T_{kp}$	1420	354	159	114	96,2	77,2

2. Трапеция, непараллельные стороны которого защемлены, а параллельные свободно оперты.

Здесь также рассматривается случай $S=0$.

При таких краевых условиях можно w задать, как в предыдущем случае, формулой (3.1); для $f(\xi)$ получим тогда и в рассматриваемом случае уравнение (3.2). Для нахождения критической нагрузки и здесь придется использовать метод конечных разностей в применении к уравнению (3.2).

Особенность данного случая в том, что здесь нельзя точно удовлетворить граничному условию для момента на основаниях трапеции, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=0, \text{ если } \xi=a \text{ и } \xi=b,$$

или

$$\Big[\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}-2\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\eta^2}{\xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}+2\frac{\eta}{\xi^2}\frac{\partial w}{\partial\eta}\Big]_{\substack{\xi=a\\(\xi=b)}}=0. \qquad (3.4)$$

Условие (3.4) придется заменить интегральным условием

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\left[1-\cos\frac{2k\pi(\eta-\alpha)}{\beta-\alpha}\right]d\eta=0, \text{ если } \xi=a \text{ и } \xi=b.$$

Производя интегрирование, получим граничное условие в виде

$$f''(\xi)-\frac{1}{\xi}f'(\xi)=0, \text{ если } \xi=a \text{ и } \xi=b. \qquad (3.5)$$

Вычисления проводились для трапециев, у которых $\beta=-\alpha=1$; был рассмотрен случай равномерного сжатия ($T_1=T_2=-T$). Аналогично предыдущему пункту были получены результаты, приведенные в табл. 4.

Таблица 4

$\frac{b}{a}$	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
$\frac{b^2}{D}T_{kp}$	364	99,2	55,2	48,5	47,5	50,2

Удовлетворяя граничным условиям на основаниях трапеции интегрально, можно решить задачи устойчивости и для пластинок, имеющих на параллельных краях другие условия закрепления (например, свободная кромка и т. д.).

3. Устойчивость трапеции, основания которого защемлены.

При таком закреплении краев пластинки, изображенной на рис. 1, условия на основаниях трапеции следующие:

$$w=0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial n}=0, \text{ если } \xi=a \text{ и } \xi=b.$$

Эти условия удовлетворены, если взять

$$w=\left[1-\cos\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\right]g(\eta). \qquad (3.6)$$

Для случая однородного напряженного состояния при $S=0$ получим из условия (1.5) для $g(\eta)$ уравнение

$$A(\eta^2+1)^2 g^{IV}(\eta)+B(\eta^3+\eta)g'''(\eta)+\left[C(3\eta^2+1)+\right.$$
$$\left.+F\cdot\frac{T_1\eta^2+T_2}{D}\right]g''(\eta)+\left(H+K\frac{T_1}{D}\right)\eta g'(\eta)+$$
$$+\left(L+N\frac{T_1}{D}\right)g(\eta)=0, \qquad (3.7)$$

где

$A=c_1$;

$B=12c_1-\frac{8k\pi}{b-a}c_2$;

$$C = 12c_1 - \frac{16k\pi}{b-a}c_2 + \frac{8k^2\pi^2}{(b-a)^2}c_3;$$

$$H = 24c_1 - \frac{48k\pi}{b-a}c_2 + \frac{48k^2\pi^2}{(b-a)^2}c_3 + \frac{32k^3\pi^3}{(b-a)^3}c_4;$$

$$L = -\frac{16k^4\pi^4}{(b-a)^4}c_5;$$

$$F = -c_6;$$

$$K = -2c_6 + \frac{4k\pi}{b-a}c_4;$$

$$N = -\frac{4k^2\pi^2}{(b-a)^2}c_5,$$

а

$$c_1 = \int_a^b \frac{1}{\xi^4}\left[1 - \cos\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\right]^2 d\xi;$$

$$c_2 = \int_a^b \frac{1}{\xi^3}\left[1 - \cos\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\right]\sin\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\,d\xi;$$

$$c_3 = \int_a^b \frac{1}{\xi^2}\left[1 - \cos\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\right]\cos\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\,d\xi;$$

$$c_4 = \int_a^b \frac{1}{\xi}\left[1 - \cos\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\right]\sin\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\,d\xi;$$

$$c_5 = \int_a^b \left[1 - \cos\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\right]\cos\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\,d\xi;$$

$$c_6 = \int_a^b \frac{1}{\xi^2}\left[1 - \cos\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\right]^2 d\xi.$$

Критическую нагрузку находим, применяя к (3.7) метод конечных разностей. При этом, если непараллельные края трапеции также защемлены, то можно пользоваться точными граничными условиями

$$w = 0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \text{ если } \eta = \alpha \text{ и } \eta = \beta;$$

но если эти края свободно оперты, можно граничным условиям удовлетворить только интегрально, т. е. заменяя их на

$$w = 0,$$

$$\int_a^b \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\left[1 - \cos\frac{2k\pi(\xi-a)}{b-a}\right]d\xi = 0, \text{ если } \eta = \alpha \text{ и } \eta = \beta.$$

Аналогичным образом следует поступать и при других условиях закрепления на непараллельных краях.

4. Замечание к устойчивости трапеции при упруго-пластических деформациях.

Если исходить из теории малых упруго-пластических деформации и применить приближенный метод решения, предложенный А. А. Ильюшиным, то получим в случае однородного состояния дифференциальное уравнение устойчивости пластинки в виде (5.110), приведенного в [3]. К этому уравнению можно применить тот же приближенный метод решения, который в данной работе применялось к уравнению (1.1).

Это дает, например для критической нагрузки свободно опертой трапециевидной пластинки, равномерно сжатой со всех сторон, уравнение

$$J_p\left(\sqrt{\frac{\mu T}{D}}\,a\right)N_p\left(\sqrt{\frac{\mu T}{D}}\,b\right)-I_p\left(\sqrt{\frac{\mu T}{D}}\,b\right)N_p\left(\sqrt{\frac{\mu T}{D}}\,a\right)=0, \quad (3.8)$$

где

$$\mu=\frac{4}{1-\psi+3k},$$

$$k=\frac{4\dfrac{d\sigma_i}{de_i}}{\left(\sqrt{E}+\sqrt{\dfrac{d\sigma_i}{de_i}}\right)^2},$$

$$\psi=\omega\left(1-\frac{\sqrt{k}}{2}\right)\left[\left(1-\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\,\frac{k}{1-\omega\left(1-\dfrac{\sqrt{k}}{2}\right)}\right],$$

$$\omega=1-\frac{\sigma_i}{Ee_i},$$

а в частном случае для треугольной пластинки (т. е. когда $a=0$) уравнение

$$J_p\left(\sqrt{\frac{\mu T}{D}}\,b\right)=0. \quad (3.9)$$

Литература

1. Байков В. Т., Лоповок Б. Н., Трапезин И. И., Об изгибе косоугольной пластины. Тр. Моск. авиац. ин-та, 1956, **69**, 3—10.
2. Власов В. З., Строительная механика тонких упругих пластинок. Прикл. матем. и механика, 1946, **1**, 173—192.
3. Ильюшин А. А., Пластичность. Москва-Ленинград, 1948.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа. Ленинград—Москва, 1949.
5. Лоповок Б. Н., Трапезин И. О., Устойчивость пластины, очерченной по параллелограму, защемленной по контуру, при напряжениях, больших предела пропорциональности. Тр. Моск. авиац. ин-та. 1956, **69**, 39—50.
6. Недумов Н. В., Расчет пластинок в форме равнобедренной трапеции. Изв. высш. учебн. заведений, Машиностроение, 1958, **6**, 54—61.

7. Оселецько А. И., Об изгибе трапециевидных пластинок. Инженерный сб., 1955, **21**, 142—150.
8. Соболев Д. Н., Поперечный изгиб трапециевидных, треугольных и косых пластинок. Изв. высш. учебн. заведений. Стр-во и архитект., 1958, **6**, 34—49.
9. Соболев Д. Н., Применение вариационного метода проф. В. З. Власова к расчету тонких трапециевидных плит. Научн. докл. высш. школы, Строительство, 1959, **1**, 19—26.
10. Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки. Москва-Ленинград, 1948.
11. Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем. Москва, 1955.
12. Pan Lih-Chow, Equilibrium, Vibration and Bucking of a 30°—60°—90°-Triangular Plate, Simply Supported at the Edges. Scient. Sinica, 1957, **6**, 347—379.
13. Richardson, L. F., The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1911, **210**, 307—357.
14. Wittrick, W. A., Symmetrical Buckling of Right-Angled Isosceles Triangular Plates. Aeronaut. Quart., 1954, **5**, 131—143.

Поступило
9 III 1960

KOLMNURKSETE JA TRAPETSOIDAALSETE PLAATIDE STABIILSUSEST

L. Roots
Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse kriitilise koormuse leidmist mitmesuguse kujuga plaatide jaoks, eriti kolmnurksete ja trapetsoidaalsete plaatide jaoks. Selle ülesande lahendamiseks kasutatakse osatuletistega diferentsiaalvõrrandi ligikaudset lahendamist Kantorovitš-Vlassovi meetodil. Esimeses peatükis antakse lahendusmeetodi lühike kirjeldus. Teises peatükis käsitletakse kriitilise koormuse leidmist ühtlaselt surutud vabalt toetatud plaatide korral. Vaadeldakse ristkülikulise, rööpkülikulise ja trapetsoidaalse (erijuhul kolmnurkse) plaadi juhtu. Kolmandas peatükis vaadeldakse kriitilise koormuse leidmist kolmnurksete ja trapetsoidaalsete plaatide jaoks teistsuguste kinnitusviiside ja koormuse korral.

ON THE BUCKLING OF TRIANGULAR AND TRAPEZOIDAL PLATES

L. Roots

Summary

The article discusses the methods of determining critical loads for plates of various shape, particularly for triangular plates and plates tapered in planform. The problem has been solved by using the Kantorovich-Vlassov method of getting approximate solutions for partial differential equations. The method is outlined briefly in the first section. The next section deals with the finding of the critical load for simply supported plates in uniform compression. Cases of rectangular and oblique plates, as well as plates tapered in planform, and triangular ones in particular are considered.

The third section deals with the problem of determining the critical load of triangular plates and plates tapered in planform for boundary conditions and loads of other kinds.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАЩЕМЛЕННОГО РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Л. Роотс
Кафедра теоретической механики

В статье рассматривается задача об устойчивости жестко защемленной пластинки, имеющей форму равнобедренного треугольника. При решении применяется метод, изложенный в [1]. Используется задание w в виде тригонометрического ряда, аналогично решению для равнобедренного прямоугольного треугольника, данному в [3].

1. Метод нахождения критической нагрузки

Рассмотрим пластинку, имеющую вид равнобедренного треугольника, изображенного на рис. 1. Все края пластинки защем-

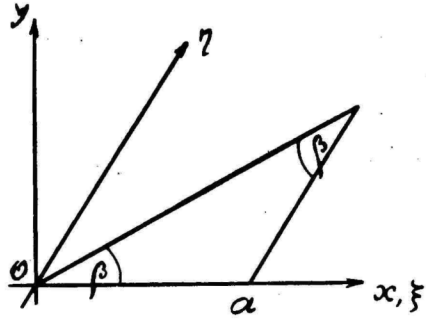


Рис. 1.

лены, т. е. на них

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{1.1}$$

Пусть на эту пластинку приложены силы в ее плоскости, под

действием которых в пластинке возникает однородное напряженное состояние с компонентами напряжений X_x, Y_y, X_y.

Применим для нахождения критической нагрузки метод, предложенный А. А. Ильюшиным в [1]. Этот метод состоит в следующем: w задается в виде ряда

$$w = \Sigma\Sigma a_{mn} w_{mn}(x, y), \tag{1.2}$$

где w_{mn} есть функции, удовлетворяющие краевым условиям на контуре пластинки и образующие полную систему функции для рассматриваемой треугольной области. Коэффициенты a_{mn} в (1.2) определяют из условия минимума величины

$$i^2 = \frac{Ea^2 \iint \{(1-\psi)[\varkappa_1^2 + 2\nu\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + 2(1-\nu)\varkappa_3^2] - \frac{3}{2}(1-\psi-k)\varkappa^2\}\, dxdy}{-\iint (X_x w_x^2 + Y_y w_y^2 + 2X_y w_x w_y)\, dxdy}, \tag{1.3}$$

где

$i^2 = \dfrac{Ea^2 h}{D}$ — гибкость пластинки,

h — ее толщина, D — ее жесткость,

$\varkappa_1 = w_{xx}$, $\varkappa_2 = w_{yy}$, $\varkappa_3 = w_{xy}$,

$\varkappa = (X_x\varkappa_1 + Y_y\varkappa_2 + 2X_y\varkappa_3) : \sigma_i$,

$$k = \frac{4\dfrac{d\sigma_i}{de_i}}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{\dfrac{d\sigma_i}{de_i}}\right)^2},$$

$$\psi = \omega\left(1 - \frac{\sqrt{k}}{2}\right)\left[\left(1 - \frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\frac{k}{1-\omega\left(1-\dfrac{\sqrt{k}}{2}\right)}\right], \text{ где } \omega = 1 - \frac{\sigma_i}{Ee_i}.$$

Если положить в (1.3) $\nu = \frac{1}{2}$, получим формулу (5.105) в [1]. Применяя (1.3) в случае упругих деформаций, нужно положить $k = 1$, $\psi = 0$; тогда получим известную формулу для критической гибкости упругой пластинки, данную С. П. Тимошенко (см. [2]).

Условие минимума i^2 дает для коэффициентов a_{mn} систему уравнений

$$\frac{\partial(i^2)}{\partial a_{pq}} = 0 \quad (p, q = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.4}$$

которая является линейной и однородной в отношений этих коэффициентов. Условие существования нетривиального решения этой системы дает уравнение для критической нагрузки в виде

$$\Delta = 0, \tag{1.5}$$

где Δ — определитель системы (1.4).

2. Нахождение критической нагрузки для защемленного равнобедренного треугольника

В данном случае удобно пользоваться безразмерными косоугольными координатами ξ, η, направление осей которых показано на рис. 1. Они связаны с x, y по формулам

$$\xi = \frac{1}{a}(x - y\cot\alpha),\quad \eta = \frac{y}{a\sin\alpha}, \tag{2.1}$$

где $\alpha = 2\beta$.

В координатах ξ, η (1.3) примет вид

$$i^2 = -\{E\sin^2\alpha \int_0^1\int_0^{\xi} (C_1 w_{\xi\xi}^2 + C_2 w_{\xi\xi} w_{\xi\eta} + C_3 w_{\xi\xi} w_{\eta\eta} + C_4 w_{\xi\eta}^2 + C_5 w_{\xi\eta} w_{\eta\eta} + C_6 w_{\eta\eta}^2)\, d\xi d\eta\} :$$
$$: \{\int_0^1\int_0^{\xi} [(X_x \sin^2\alpha - 2X_y \sin\alpha\cos\alpha + Y_y\cos^2\alpha) w_\xi^2 + 2(X_y\sin\alpha - Y_y\cos\alpha) w_\xi w_\eta + Y_y w_\eta^2] d\xi d\eta\}, \tag{2.2}$$

где

$$C_1 = \frac{1-\psi}{\sin^4\alpha} - \frac{3(1-\nu)(1-\psi-k)}{2\sigma_i^2}[X_x^2 - 4\cot\alpha X_x X_y + 2\cot^2\alpha(X_x Y_y + 2X_y^2) - 4\cot^3\alpha X_y Y_y + \cot^4\alpha Y_y^2],$$

$$C_2 = -\frac{4(1-\psi)\cot\alpha}{\sin^3\alpha} - \frac{6(1-\nu)(1-\psi-k)}{\sigma_i^2\sin\alpha}[X_x X_y - \cot\alpha(X_x Y_y + 2X_y^2) + 3\cot^2\alpha X_y Y_y - \cot^3\alpha Y_y^2],$$

$$C_3 = \frac{2(1-\psi)(\nu+\cot^2\alpha)}{\sin^2\alpha} - \frac{3(1-\nu)(1-\psi-k)}{\sigma_i^2\sin^2\alpha}[X_x Y_y - 2\cot\alpha X_y Y_y + \cot^2\alpha Y_y^2],$$

$$C_4 = \frac{2(1-\psi)(1-\nu+2\cot^2\alpha)}{\sin^2\alpha} - \frac{6(1-\nu)(1-\psi-k)}{\sigma_i^2\sin^2\alpha}[X_y^2 - 2\cot\alpha X_y Y_y + \cot^2\alpha Y_y^2],$$

$$C_5 = -\frac{4(1-\psi)\cot\alpha}{\sin^3\alpha} - \frac{6(1-\nu)(1-\psi-k)}{\sigma_i^2\sin^3\alpha}[X_y Y_y - \cot\alpha Y_y^2],$$

$$C_6 = \frac{1-\psi}{\sin^4\alpha} - \frac{3(1-\nu)(1-\psi-k)}{2\sigma_i^2\sin^4\alpha} Y_y^2.$$

Условия на контуре пластинки в случае жесткого защемления следующие:

$$\text{если } \eta = 0, \text{ то } w = 0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial\eta} = 0;$$
$$\text{„ } \xi = 1, \text{ „ } w = 0 \text{ „ } \frac{\partial w}{\partial\xi} = 0;$$
$$\text{„ } \eta = \xi, \text{ „ } w = 0 \text{ „ } \frac{\partial w}{\partial\xi} = \frac{\partial w}{\partial\eta}. \tag{2.3}$$

Все эти условия будут удовлетворены, если положить

$$w = 4\,\Sigma\Sigma a_{mn} w_{mn}, \tag{2.4}$$

где

$$w_{mn} = \sin \pi\xi \sin \pi\eta \left(\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta + \right.$$
$$+ \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta + 2 \sin \frac{(m-n)\pi\xi}{2} \sin \frac{(m-n)\pi\eta}{2} -$$
$$\left. - 2 \sin \frac{(m+n)\pi\xi}{2} \sin \frac{(m+n)\pi\eta}{2}\right), \tag{2.5}$$

($m+n$ — четное).

Подставив (2.4) в систему (1.4), получим для a_{mn} следующую систему уравнений:

$$\Sigma\Sigma a_{mn} D^*_{mnpq} = 0 \tag{2.6}$$
$$(p, q = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$m+n \text{ и } p+q \text{ четные}),$$

где

$$D^*_{mnpq} = D_{mnpq} + D_{nmpq} + D_{mnqp} + D_{nmqp} +$$
$$+ 2\left(D_{mn\,\frac{p-q}{2},\,\frac{p-q}{2}} + D_{nm\,\frac{p-q}{2},\,\frac{p-q}{2}} -\right.$$
$$- D_{mn\,\frac{p+q}{2},\,\frac{p-q}{2}} - D_{nm\,\frac{p+q}{2},\,\frac{p+q}{2}} +$$
$$+ D_{\frac{m-n}{2},\,\frac{m-n}{2}\,pq} + D_{\frac{m-n}{2},\,\frac{m-n}{2}\,qp} -$$
$$\left. - D_{\frac{m+n}{2},\,\frac{m+n}{2}\,pq} - D_{\frac{m+n}{2},\,\frac{m+n}{2}\,qp}\right) +$$
$$+ 4\left(D_{\frac{m-n}{2},\,\frac{m-n}{2},\,\frac{p-q}{2},\,\frac{p-q}{2}} - D_{\frac{m-n}{2},\,\frac{m-n}{2},\,\frac{p+q}{2},\,\frac{p+q}{2}} -\right.$$
$$\left. - D_{\frac{m+n}{2},\,\frac{m+n}{2},\,\frac{p-q}{2},\,\frac{p-q}{2}} + D_{\frac{m+n}{2},\,\frac{m+n}{2},\,\frac{p+q}{2},\,\frac{p+q}{2}}\right),$$

а

$$D_{mnpq} = i^2 A_{mnpq} + E\pi^2 \sin^2 \alpha\, B_{mnpq},$$

причем

$$A_{mnpq} = (X_x \sin^2 \alpha - 2X_y \sin \alpha \cos \alpha + Y_y \cos^2 \alpha) I^{(1)}_{mp} I^{(2)}_{nq} +$$
$$+ 2(X_y \sin \alpha - Y_y \cos \alpha) I^{(3)}_{mp} I^{(3)}_{nq} + Y_y I^{(2)}_{mp} I^{(1)}_{nq};$$
$$B_{mnpq} = C_1 I^{(4)}_{mp} I^{(2)}_{nq} + C_2 I^{(5)}_{mp} I^{(3)}_{qn} + C_3 I^{(1)}_{mp} I^{(1)}_{qn} +$$
$$+ C_4 I^{(1)}_{mp} I^{(1)}_{nq} + C_5 I^{(3)}_{mp} I^{(5)}_{qn} + C_6 I^{(2)}_{mp} I^{(4)}_{nq};$$

$$I^{(1)}_{mp} = \begin{cases} m^2 + 1, & \text{если } m = p; \\ -\frac{1}{2}(m+1)^2, & \text{,,} \quad m = p-2; \\ -\frac{1}{2}(m-1)^2, & \text{,,} \quad m = p+2; \\ 0 \text{ в других случаях;} \end{cases}$$

$$I_{mp}^{(2)} = \begin{cases} \frac{3}{2}, & \text{если } m = p = 1; \\ 1, & \text{„ } m = p \neq 1; \\ -\frac{1}{2}, & \text{„ } m = p \pm 2; \\ 0 \text{ в других случаях;} \end{cases}$$

$$I_{mp}^{(3)} = \begin{cases} \frac{32mp(m^2+p^2-2)}{\pi(m^2-p^2)[(m^2-p^2)^2-8(m^2+p^2-2)]}, & \text{если } m+p \text{ нечетное;} \\ 0, \text{ если } m+p \text{ четное;} \end{cases}$$

$$I_{mp}^{(4)} = \begin{cases} m^4+6m^2+1, & \text{если } m = p; \\ -\frac{1}{2}(m+1)^4, & \text{„ } m = p-2; \\ -\frac{1}{2}(m-1)^4, & \text{„ } m = p+2; \\ 0 \text{ в других случаях;} \end{cases}$$

$$I_{mp}^{(5)} = \begin{cases} \frac{64mp(m^2+m^2p^2+p^2-3)}{\pi(m^2-p^2)[(m^2-p^2)^2-8(m^2+p^2-2)]}, & \text{если } m+p \text{ нечетное;} \\ 0, \text{ если } m+p \text{ четное.} \end{cases}$$

Уравнение для критической нагрузки получим, приравнивая нулю определитель системы (2.6)

$$|D_{mnpq}^{*}| = 0. \qquad (2.6)$$

Вычисления проводились для прямоугольной треугольной пластинки, нагруженной на катетах сжимающими напряжениями p и напряжениями сдвига q, на гипотенузе только сжимающими напряжениями $p - q$. В таблице 1 приведены парами значения p и q, образующие критические комбинации (a — катет треугольника). Вычисления проведены на электронной вычислительной машине «Урал» в вычислительном центре Тартуского государственного университета.

Таблица 1

$\frac{a^2}{\pi^2 D}p$	0,00	4,00	8,40	11,94	14,23	14,71
$\frac{a^2}{\pi^2 D}q$	−30,38	−24,00	−16,00	−8,00	0,00	8,00

$\frac{a^2}{\pi^2 D}p$	13,54	11,13	7,91	4,25	0,00
$\frac{a^2}{\pi^2 D}q$	16,00	24,00	32,00	40,00	50,03

Литература

1. Ильюшин А. А., Пластичность. Москва—Ленинград, 1948.
2. Тимошенко С. П., Курсъ теоріи упругости, ч. 2. Петроградъ, 1916.
3. Wittrick, W. A., Symmetrical Buckling of Right-Angled Isosceles Triangular Plates. Aeronaut. Quart., 1954, **5**, 131—143.

Поступило
9 III 1960

JÄIGALT KINNITATUD VÕRDHAARSE KOLMNURGA STABIILSUS ELASTILIS-PLASTILISTE DEFORMATSIOONIDE PIIRKONNAS

L. Roots
Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis käsitletakse kriitilise koormuse leidmist võrdhaarse kolmnurga kujulise plaadi jaoks, mis on kogu kontuuril jäigalt kinnitatud. Vaadeldakse vaid juhtu, mil läbipaine w on sümmeetriline kolmnurga tipunurga poolitaja suhtes. Läbipainde esitamiseks kasutatakse kahekordseid trigonomeetrilisi ridu. Lahendus on analoogiline W. A. Wittrick'u lahendusega võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kujulise plaadi jaoks elastsete deformatsioonide juhul [3].

ON THE BUCKLING OF ISOSCELES TRIANGULAR PLATES

L. Roots

Summary

In this article the determining of the critical load for an isosceles triangular plate, clamped along the whole conture, is discussed. The buckling mode is assumed to be symmetrical with respect to the bisector of the vertical angle of the triangle. Double trigonometric series are used to describe the buckling mode. The solution is similar to Wittrick's solution for the isosceles rightangled triangular plate in the case of elastic strains [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК РАВНОМЕРНО СЖАТЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

Л. Роотс
Кафедра теоретической механики

В настоящей статье рассматривается задача об устойчивости равномерно сжатой треугольной пластинки, контур которой свободно оперт. Для решения задачи используется метод Галеркина.

1. Уравнение для критической нагрузки

Рассмотрим треугольную пластинку, длины двух из сторон которой a и b, а углы, стоящие против этих сторон, α и β

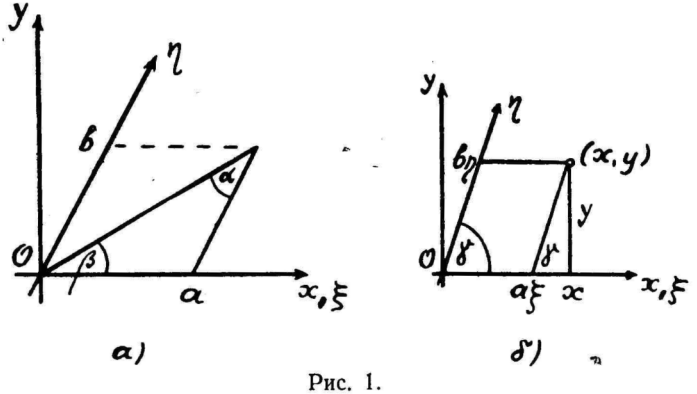


Рис. 1.

(рис. 1а). Предположим, что весь контур пластинки свободно оперт.

Если рассматриваемая пластинка сжимается силами, равномерно распределенными по всему контуру, то дифференциальное уравнение устойчивости ее можно привести к виду [1]

$$\nabla^2 M + \frac{T}{D} M = 0 \tag{1.1}$$

с условием на контуре

$$M = 0. \tag{1.2}$$

(Здесь $M = \nabla^2 w$; T — интенсивность сжимающих сил.)

Применяя безразмерные косоугольные координаты (рис. 1б)

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{a}(x - y\cot\gamma) \\ \eta = \dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{y}{\sin\gamma} \qquad (\gamma = \alpha + \beta), \end{cases} \tag{1.3}$$

получим из (1.1) следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\xi^2} - 2\mu\cos\gamma\frac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta} + \mu^2\frac{\partial^2 M}{\partial\eta^2} + \frac{a^2 T\sin^2\gamma}{D}M = 0 \tag{1.4}$$

($\mu = \dfrac{a}{b}$ — отношение длин сторон треугольника, параллельных осям координат). Краевое условие (1.2) примет вид

$$M(\xi, 0) = M(1, \eta) = M(\xi, \xi) = 0. \tag{1.5}$$

Условию (1.5) удовлетворяют все функции типа

$$w_{mn} = \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta - \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta; \tag{1.6}$$

эти функции образуют полную систему функций для треугольной области $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant \xi$. Решая задачу методом Галеркина, зададим

$$M = \sum_{m,\,n=1}^{\infty} a_{mn}(\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta - \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta). \tag{1.7}$$

Согласно методу имеем для коэффициентов ряда (1.7) систему уравнений

$$\int_0^1\int_0^{\xi}\Big\{\Big[\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2\mu\cos\gamma\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \mu^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{a^2 T\sin^2\gamma}{D}\Big)\cdot$$

$$\cdot\sum_{m,\,n=1}^{\infty} a_{mn}(\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta - \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta)\Big](\sin j\pi\xi \sin k\pi\eta -$$

$$- \sin k\pi\xi \sin j\pi\eta)\Big\}\,d\xi d\eta = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3, \ldots),$$

или

$$\sum_{m,\,n=1}^{\infty} a_{mn}A_{mnjk} = 0, \quad (j, k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.8}$$

где

$$A_{mnjk} = \Big(n^2 + \mu^2 m^2 - \frac{a^2 T\sin^2\gamma}{D\pi^2}\Big)(i^{(1)}_{nmkj} - i^{(1)}_{nmjk}) -$$

$$- \Big(m^2 + \mu^2 n^2 - \frac{a^2 T\sin^2\gamma}{D\pi^2}\Big)(i^{(1)}_{mnkj} - i^{(1)}_{mnjk}) -$$

$$- 2\mu mn\cos\gamma\,(i^{(2)}_{mnkj} - i^{(2)}_{mnjk} - i^{(2)}_{nmkj} + i^{(2)}_{nmjk}), \tag{1.9}$$

а

$$i^{(1)}_{mnjk} = \int_0^1\int_0^{\xi} \sin m\pi\xi \sin j\pi\xi \sin n\pi\eta \sin k\pi\eta\,d\xi d\eta,$$

$$i^{(2)}_{mnjk} = \int_0^1\int_0^{\xi} \cos m\pi\xi \cos j\pi\xi \sin n\pi\eta \sin k\pi\eta\,d\xi d\eta. \tag{1.10}$$

Уравнение для критической нагрузки получим, приравнивая к нулю определитель системы (1.8).

2. Симметрическая потеря устойчивости равнобедренной треугольной пластинки

В случае равнобедренного треугольника $\mu = 1$; $\alpha = \beta$; $\gamma = 2\alpha$.

Предположим в дальнейшем, что функция M имеет симметрию относительно биссектрисы вершинного угла треугольника. Это предположение кажется естественным, так как пластинка и нагрузка имеют такую же симметрию.

В предположении симметричности M относительно этой биссектрисы надо в ряду (1.7) учитывать лишь такие члены, при которых $m + n$ нечетное число. В таком случае получим из (1.9) — (1.10), что

$$A_{mnjk} = \left(m^2 + n^2 - \frac{a^2 T \sin^2 \gamma}{D\pi^2} \right) a_{mnjk} - 2 \cos 2\alpha \, mn \, b_{mnjk}, \quad (2.1)$$

где

$$a_{mnjk} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{если } m = j \text{ и } n = k; \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$b_{mnjk} = \frac{4jk}{\pi^2 (m^2 - k^2)(n^2 - j^2)}. \quad (2.2)$$

Результаты вычислений, проведенных в рассматриваемом случае, представлены в таблице 1 ($h = a \sin \alpha$).

Таблица 1

α		15°	30°	45°	60°	75°
$\frac{h^2}{D} T_{кр}^{(1)}$	учтен член $m = 2, n = 1$	16,5	18,8	24,7	42,3	138
$\frac{h^2}{D} T_{кр}^{(2)}$	члены $m = 2, n = 1$ $m = 2, n = 3$	15,3	18,3	24,7	39,8	107
$\frac{h^2}{D} T_{кр}^{(3)}$	члены $m = 2, n = 1$ $m = 2, n = 3$ $m = 4, n = 3$	14,8	18,1	24,7	39,7	104
точное $\frac{h^2}{D} T_{кр}$	—	—	—	24,7	39,5	—

Малое расхождение между $T_{кр}^{(2)}$ и $T_{кр}^{(3)}$ позволяет считать до $30° \leqslant \alpha \leqslant 60°$ результаты достаточно точными. При $\alpha = 45°$, 60°, 75° значения $T_{кр}^{(3)}$ хорошо согласуются с приведенными в [2]. В случаях малых α наше решение дает меньшие значения T_{kp}, чем решение, приведенное в [2].

3. Прямоугольный треугольник

В случае прямоугольного треугольника нужно при составлении уравнения для T_{kp} исходить прямо из формул (1.8) — (1.10), заменяя в них $\alpha + \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, $\mu = \tan\alpha$.

Первое приближение, которое можно найти, используя лишь один член ($m = 2$, $n = 1$) из ряда (1.7), равно

$$T_{кр}^{(1)} = \frac{5}{2}(1 + \tan^2\alpha)\frac{\pi^2 D}{a^2}.$$

Сравнение с имеющимися точными решениями [3], [4] показывает, что в интервале $30° \leqslant \alpha \leqslant 45°$ ошибка этого приближения не превосходит 7%. Некоторые значения $T_{кр}^{(1)}$ приведены в таблице 2.

Таблица 2

α	15°	22°,5	30°	87°,5	45°
$\frac{a^2}{D\pi^2} T_{кр}^{(1)}$	2,78	2,93	3,33	3,97	5,00
точное $\frac{a^2}{D\pi^2} T_{кр}$	—	—	3,11	—	5,00

Литература

1. Роотс Л., Об устойчивости пластинок различной формы, в частности треугольных и трапециевидных. Настоящий сборник, стр. 351—365.
2. Cox, H. L., Klein, B., The Buckling of Isosceles Triangular Plates. J. Aeron. Sc., 1955, **22**, 321—325.
3. Pan Lih-Chow, Equilibrium, Vibration and Buckling of a 30°—60°—90°-Triangular Plate, Simply Supported at the Edges. Scient. Sinica, 1957, **6**, 347—379.
4. Wittrick, W. A., Symmetrical Buckling of Right-Angled Isosceles Triangular Plates. Aeronaut. Quart., 1954, **5**, 131—143.

Поступило
16 XI 1960

ÜHTLASELT SURUTUD KOLMNURKSETE PLAATIDE KRIITILISE KOORMUSE LEIDMINE

L. Roots
Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Artiklis vaadeldakse ühtlaselt surutud kolmnurkse plaadi kriitilise koormuse leidmist vabalt toetatud kontuuri korral. Lahendamiseks kasutatakse Galerkini meetodit. Arvuliste tulemusteni on viidud võrdhaarse plaadi juht (tabel 1) ja täisnurkse plaadi juht (tabel 2).

THE BUCKLING OF TRIANGULAR PLATES UNDER UNIFORM COMPRESSION

L. Roots

Summary

In this article the buckling of simply supported triangular plates is considered. The case of uniform compression is discussed. The problem is solved by using Galerkin's method.

Numerical results are obtained in cases of isosceles plates (Tab. 1) and rectangular plates (Tab. 2).

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ГИБКОЙ КРУГЛОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ, СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПО КОНТУРУ

Э. Ааренд, Ю. Лепик и Л. Лухт
Кафедра теоретической механики

В работе рассматривается осесимметричный изгиб гибкой круглой пластинки за пределом упругости. Контур пластинки считается шарнирно закрепленным и свободно смещающимся. Поставленная задача решается методом, указанным в [2]: при этом исходится из теории малых упруго-пластических деформаций и считается материал пластинки несжимаемым и имеющим линейное упрочнение.

Рассматриваемая задача решена при помощи вариационного уравнения Лагранжа; варьировались три параметра. Вычисления выполнены в Вычислительном центре Тартуского гос. университета на электронной вычислительной машине типа «Урал» (программа составлена сотрудником Вычислительного центра А. Лауметсом).

1. Канонические уравнения проблемы

Как показано в работе [2], вариационное уравнение Лагранжа можно для рассматриваемого случая представить в виде [1]:

$$\int_0^a [(1-\tfrac{1}{2}\Omega_1)\,\delta P_\varepsilon - \tfrac{h}{2}\Omega_2 \delta P_{\varepsilon\varkappa} +$$

$$+\tfrac{h^2}{12}(1-\tfrac{3}{2}\Omega_3)\,\delta P_\varkappa - \tfrac{3q}{2Eh}\,\delta w]r\,dr = 0. \qquad (1.1)$$

К уравнению (1.1) относятся следующие граничные условия:

1) при $r=0$: $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, $\varkappa_1=\varkappa_2$, $u=0$, $dw/dr=0$; частные u/r и $\frac{1}{r}\,dw/dr$ должны быть ограничены;

[1] Все обозначения, смысл которых не указан в настоящей статье, взяты из работы [2].

2) при $r = a$: $w = 0$, $T_\nu = M_\nu = 0$.

Введем безразмерные величины (h — толщина пластинки):

$$u^* = \frac{a}{h^2} u, \quad w^* = \frac{w}{h}, \quad \varrho = \frac{r}{a}, \quad q^* = \frac{a^4 q}{Eh^4}. \tag{1.2}$$

Решение вариационной задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} u^* &= \varrho(C_1 + C_2\varrho^2 + C_3\varrho^4), \\ w^* &= w_0^*\left(1 - \frac{14}{11}\varrho^2 + \frac{3}{11}\varrho^4\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что в случае разложений (1.3) все геометрические граничные условия выполнены. Удовлетворим и статические краевые условия $T_\nu = M_\nu = 0$ при [2] $\varrho = 1$. Дадим этим условиям другой вид. На основании формул (1.4) — (1.5) работы [2] находим, что

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\frac{1}{Eh} T_1 &= \left(1 - \frac{1}{2}\Omega_1\right)\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right) - \frac{h}{4}\Omega_2\left(\varkappa_1 + \frac{1}{2}\varkappa_2\right), \\ \frac{9}{Eh^3} M_1 &= -\frac{3}{h}\Omega_2\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right) + \left(1 - \frac{3}{2}\Omega_3\right)\left(\varkappa_1 + \frac{1}{2}\varkappa_2\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Так как $M_\nu = M_1$ и $T_\nu = T_1$, то граничные условия для M_ν и T_ν можно заменить более простыми требованиями

$$\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 = 0, \qquad \varkappa_1 + \frac{1}{2}\varkappa_2 = 0 \qquad \text{при } \varrho = 1. \tag{1.5}$$

Компоненты деформаций ε_1, ε_2 и искривления $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ имеют в случае разложений (1.3) виды:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{h^2}{a^2}\left[C_1 + 3C_2\varrho^2 + 5C_3\varrho^4 + \frac{8}{121} w_0^{*2}\varrho^2(3\varrho^2 - 7)^2\right], \\ \varepsilon_2 &= \frac{h^2}{a^2}\left(C_1 + C_2\varrho^2 + C_3\varrho^4\right), \\ \varkappa_1 &= -\frac{4}{11}\frac{h}{a^2} w_0^*(9\varrho^2 - 7), \\ \varkappa_2 &= -\frac{4}{11}\frac{h}{a^2} w_0^*(3\varrho^2 - 7). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Из формул (1.6) вытекает, что условие $\varkappa_1 + {}^1/_2\varkappa_2 = 0$ выпол-

[2] Так как эти условия оказываются относительно вариационной задачи (1.1) естественными краевыми условиями, то удовлетворение их не является обязательным; однако сходимость метода значительно улучшается, если функции $u^*(\varrho)$ и $w^*(\varrho)$ удовлетворяют всем граничным условиям.

няется при $\varrho = 1$ автоматически; что касается условия $\varepsilon_1 + {}^1/_2\varepsilon_2 = 0$ при $\varrho = 1$, то оно удовлетворяется лишь при

$$C_3 = -\frac{1}{11}\left[3C_1 + 7C_2 + \left(\frac{16}{11}\right)^2 w_0^{*2}\right]. \tag{1.7}$$

Полученный результат обозначает, что в разложениях (1.3) независящими величинами следует считать только коэффициенты C_1, C_2, w_0^*.

Введем теперь обозначения

$$\begin{aligned}
f_1(\varrho) &= \frac{1}{11^2}(363 - 594\varrho^4 + 279\varrho^8),\\
f_2(\varrho) &= \frac{1}{11^2}\varrho^4(1573 - 3080\varrho^2 + 1519\varrho^4),\\
f_3(\varrho) &= \frac{1}{11^2}\varrho^2(1452 - 1386\varrho^2 - 1320\varrho^4 + 1302\varrho^6),\\
f_4(\varrho) &= \frac{24}{11^4}\varrho^2(5929 - 7194\varrho^2 - 4840\varrho^4 + 7066\varrho^6 - 1089\varrho^8),\\
f_5(\varrho) &= \frac{8}{11^4}\varrho^4(41503 - 91157\varrho^2 + 57085\varrho^4 - 7623\varrho^6),\\
f_6(\varrho) &= \frac{64}{11^4}\varrho^4(2401 - 5684\varrho^2 + 4252{,}35\varrho^4 - 1044\varrho^6 + 81\varrho^8),\\
f_7(\varrho) &= \frac{6}{11^2}(-77 + 66\varrho^2 + 63\varrho^4 - 60\varrho^6),\\
f_8(\varrho) &= \frac{12}{11^2}\varrho^2(-77 + 145\varrho^2 - 70\varrho^4),\\
f_9(\varrho) &= \frac{8}{11^4}\varrho^2(-11319 + 25053\varrho^2 - 15621\varrho^4 + 2079\varrho^6),\\
f_{10}(\varrho) &= \frac{8}{11^2}(49 - 84\varrho^2 + 39\varrho^4).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Формулы (1.11) работы [2] для определения величин z_0, z_ε, z_s приобретают вид:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{2}{3f_{10}w_0^*}(f_7C_1 + f_8C_2 + f_9w_0^{*2}),\\
z_\varepsilon^2 &= \frac{2}{3f_{10}w_0^{*2}}(f_1C_1^2 + f_2C_2^2 + f_3C_1C_2 +\\
&\quad + f_4C_1w_0^{*2} + f_5C_2w_0^{*2} + f_6w_0^{*4}),\\
z_s^2 &= \frac{\mu^2}{2f_{10}w_0^{*2}} \qquad \left(\mu = \frac{a^2e_s}{h^2}\right).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Обозначим еще символами α_i, β_i, γ и Q значения следующих интегралов

$$\alpha_i = \int_0^1 (1 - \tfrac{1}{2}\Omega_1) f_i(\varrho)\varrho d\varrho \qquad (i = 1, 2, \ldots 6),$$

$$\beta_i = \int_0^1 \Omega_2 f_i(\varrho)\,\varrho d\varrho \qquad (i = 7,\ 8,\ 9),$$

$$\gamma = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}\Omega_3\right) f_{10}(\varrho)\,\varrho d\varrho, \tag{1.10}$$

$$Q = \frac{3}{2}\int_0^1 q^*(\varrho)\left(1 - \frac{14}{11}\varrho^2 + \frac{3}{11}\varrho^4\right)\varrho d\varrho.$$

Учитывая введенные обозначения (1.8) и (1.10), можем вариационному уравнению (1.1) дать форму

$$\begin{aligned}&(2\alpha_1 C_1 + \alpha_3 C_2 + \alpha_4 w_0^{*2} + \beta_7 w_0^*)\,\delta C_1 + \\ &+ (\alpha_3 C_1 + 2\alpha_2 C_2 + \alpha_5 w_0^{*2} + \beta_8 w_0^*)\,\delta C_2 + \\ &+ \left[2\left(\alpha_4 C_1 + \alpha_5 C_2 + 2\alpha_6 w_0^{*2} + \frac{\gamma}{2}\right) w_0^* + \right. \\ &\left. + \beta_7 C_1 + \beta_8 C_2 + 3\beta_9 w_0^{*2} - Q\right]\delta w_0^* = 0.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Так как величины δC_1, δC_2, δw_0^* являются независимыми, то выражения, стоящие в формуле (1.11) перед этими вариациями равняются нулю; последнее условие дает

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{1}{\Delta}\left[(\alpha_3\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4)\,w_0^{*2} + (\alpha_3\beta_8 - 2\alpha_2\beta_7)\,w_0^*\right], \\ C_2 &= \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_3\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_5)\,w_0^{*2} + (\alpha_3\beta_7 - 2\alpha_1\beta_8)\,w_0^*\right], \\ Q &= 2\left(\alpha_4 C_1 + \alpha_5 C_2 + 2\alpha_6 w_0^{*2} + \frac{\gamma}{2}\right) w_0^* + \\ &\quad + \beta_7 C_1 + \beta_8 C_2 + 3\beta_9 w_0^{*2}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Формулы (1.12) являются и каноническими уравнениями проблемы (символом Δ обозначено выражение $\Delta = 4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2$); как показано в [2], их можно решить методом последовательных приближений. Для начального приближения целесообразно выбирать упругое решение, которое в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}C_1 &= 0{,}1292\,w_0^{*2}, \qquad C_2 = -0{,}8936\,w_0^{*2}, \\ Q &= 0{,}1318 w_0^{*3} + 0{,}6612 w_0^*.\end{aligned} \tag{1.13}$$

2. Результаты проведенных вычислений

Вычисления на электронной цифровой машине «Урал» были выполнены для следующих значений параметра μ, характеризующий гибкость пластинки: $\mu = 0{,}2$; $\mu = 2$; $\mu = 5$. Результаты этих вычислений представлены в таблице 1. Здесь символами T_0^* и M_0^* обозначены следующие величины (безразмерное усилие и

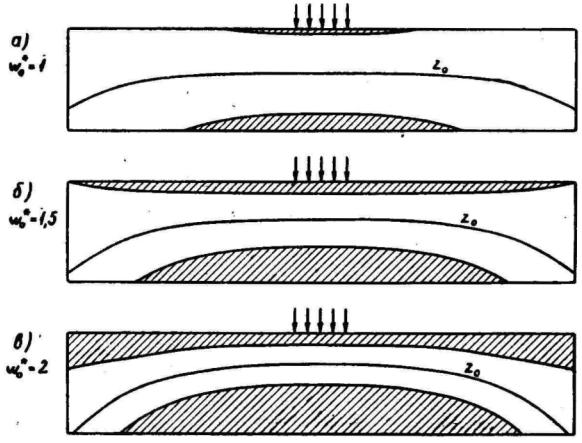
безразмерный момент в центре пластинки):

$$T_0^* = \frac{a^2}{Eh^3} T_1(0), \quad M_0^* = \frac{9a^2}{Eh^4} M_1(0). \qquad (2.1)$$

Таблица 1

λ	μ	w_0^*	C_1	C_2	Q	T_0^*	M_0^*	n
1	0,2	0,5	0,080	—0,299	0,117	0,025	0,439	7,16
		1,0	0,355	—1,265	0,136	0,056	0,414	16,28
1	2	0,5	0,032	—0,223	0,347	0,065	1,909	0,67
		1,0	0,146	—0,919	0,777	0,230	3,515	1,42
		1,5	0,446	—2,217	1,236	0,468	3,844	2,36
		2,0	0,923	—4,161	1,687	0,725	3,677	3,47
1	5	0,5	0,032	—0,223	0,347	0,065	1,909	0,27
		1,0	0,129	—0,894	0,793	0,258	3,818	0,56
		1,5	0,291	—2,011	1,437	0,581	5,727	0,88
		2,0	0,528	—3,592	2,364	0,991	7,368	1,23
0,9	2	0,5	0,032	—0,223	0,347	0,065	1,909	0,67
		1,0	0,144	—0,916	0,779	0,233	3,546	1,42
		1,5	0,424	—2,188	1,259	0,484	4,053	2,33
		2,0	0,851	—4,065	1,765	0,772	4,152	3,40

Величина интенсивности деформаций e_i в наиболее нагруженной точке пластинки $\varrho = 0$, $z^* = +1$ характеризовано в таблице отношением $n = {}^{(e_i)^{max}}/e_s$.



Фиг. 1.

Все вычисления были выполнены главным образом для идеально пластического материала (т. е. при $\lambda = 1$). С целью оценить влияние упрочнения были в случае $\mu = 2$ выполнены и вычисления при $\lambda = 0{,}9$. Однако, как видно из таблицы 1, влияние упрочнения на механические характеристики пластинки вообще небольшое.

Для случая $\mu = 2$ определено также распределение зон пластических деформаций по толщине пластинки (фиг. 1); пластические деформации на этом фигуре отмечены штриховкой.

3. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными

Экспериментальное исследование гибких круглых пластинок за пределом упругости осуществлено в настоящее время во многих работах (см., например, [1, 3, 5, 6]. Сравним некоторые из этих данных с теоретическими результатами, полученными нами выше. Найденные результаты представлены в таблице 2, где символом $Q_э$ отмечено экспериментальное значение параметра нагрузки Q и $\delta = (Q - Q_э) Q_э^{-1}$. Случаи I и II соответствуют пластинкам № 8 и № 3 из работы [3]; здесь поперечная нагрузка распределена равномерно по всей пластинке (т. е. $\varrho_1 = 1$). Что касается случая III, то оно соответствует данным работы [5], где равномерно распределенная поперечная нагрузка приложена в центральной части пластинки с радиусом [3] $r_1 = a\varrho_1 = 0{,}1a$.

Как явствует из таблицы 2, теоретические значения параметра нагрузки Q являются в общем несколько завышенными по сравнению с экспериментальными данными. На наш взгляд это обстоятельство объясняется главным образом принятой нами гипотезой о несжимаемости. Отметим еще, что в случае жесткой упругой пластинки неучет сжимаемости обусловливает при определении параметра нагрузки Q погрешность около 30% в сторону завышения этой величины (ср. [4], стр. 546). По мере развития пластических деформаций в пластинке неучет сжимаемости начинает играть меньшую роль, и расхождение между теоретическими и экспериментальными данными уменьшается, как это и явствует из таблицы 2.

Поступило
30 III 1960

[3] Все экспериментальные данные взяты из графиков в работах [3] и [5].

Таблица 2

	w_0^*	Q	$Q_э$	δ
Случай I	0,5	0,124	0,109	13,8%
($\lambda = 1$; $\mu = 0{,}212$	1	0,144	0,132	9,1%
$\varrho^*_1 = 1$)	1,5	0,179	0,174	2,9%
Случай II	0,5	0,347	0,28	23,9%
($\lambda = 1$; $\mu = 1{,}46$	1	0,712	0,59	20,7%
$\varrho^*_1 = 1$)	1,5	1,020	1,10	— 7,3%
	2	1,318	1,43	— 7,8%
Случай III	0,5	0,240	0,17	41,2%
($\lambda = 1$; $\mu = 0{,}46$	1	0,303	0,26	16,5%
$\varrho^*_1 = 0{,}1$)	1,4	0,355	0,34	4,4%
	1,77	0,413	0,41	0,7%

Литература

1. Григорьев А. С., Об изгибе плиты за пределом упругости. Прикл. матем. и механика, 1952, **16**, 111—115.
2. Лепик Ю. Р., О равновесии гибких пластинок за пределом упругости. Прикл. матем. и механика, 1957, **21**, 833—842.
3. Рассказов Н. И., К вопросу о работе круглой пластинки за пределом упругости. Тр. Моск. ин-та хим. машиностроения, 1957, **14**, 55—79.
4. Справочник по технической механики, Под редакцией акад. А. Н. Динника. Москва, 1949.
5. Haythornthwaite, R., Onat, E., The load-carrying capacity of initially flat circular steel plates under reversed loading. J. Aeronaut. Sci., 1955, **22**, 867—869.
6. Onat, E. A., Haythornthwaite, R., The load-carrying capacity of circular plates at large deflection. J. Appl. Mech., 1956, **23**, 49—67.

ÜMMARGUSE, KONTUURIL VABALT TOETATUD PLAADI SUURED LÄBIPAINDED PLASTILISTE DEFORMATSIOONIDE PIIRKONNAS

E. Aarend, Ü. Lepik ja L. Luht
Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Käesolevas töös on vaadeldud ümmarguse nõtke plaadi telgsümmeetrilist painet plastiliste deformatsioonide piirkonnas. Plaadi servad on vabalt toetatud ja võivad vabalt nihkuda plaadi tasapinnas. Püstitatud ülesanne lahendatakse töös [2] antud meetodi kohaselt; plaadi materjal loetakse kokkusurutamatuks ja lineaarselt kalestuvaks.

Ülesande lahendamisel on lähtutud Lagrange'i variatsioonvõrrandist, kusjuures varieeritud on kolme parameetrit. Numbriline arvutustöö on teostatud TRÜ arvutuskeskuses elektronarvutusmasinal «Ural»; saadud tulemused on esitatud tabelis 1. Leitud tulemusi on võrreldud eksperimentaalsete andmetega töödest [3] ja [5] (vt. tabel 2).

LARGE DEFLECTIONS OF CIRCULAR ELASTIC-PLASTIC PLATES, FREE SUPPORTED ON THE BOUNDARY

E. Aarend, Ü. Lepik and L. Luht

Summary

The problem of finite axissymmetric bending of circular plates in the case of a simply supported boundary is discussed beyond the elastic limit. The method of solution has been adopted from paper [2]; the material of the plate is regarded as noncompressible and linear strainhardening.

The problem set up has been resolved by means of the variational equation of Lagrange. Numerical work has been done by the electronic computer "Ural" at the Computing Centre of the University of Tartu. The achieved numerical results are shown in Table 1. These results have also been compared with the experimental results of papers [3] and [5] (see Table 2).

ИЗГИБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ В СЛУЧАЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО СЖАТИЯ

К. Велскер
Кафедра теоретической механики

В настоящей работе рассматривается изгиб упруго-пластического стержня под влиянием поперечной нагрузки, где предварительно стержень сжат.

В зависимости от возможности закрепления стержня по-разному, рассматриваемая проблема довольно обширна. Поэтому в работе ограничиваются при решении проблемы только одним способом закрепления — а именно способом, когда один конец стержня жестко защемлен, а другой оставляется совсем свободным.

Задачей работы является составление дифференциальных уравнений равновесия и их решение. При этом изучаются и расположение зон упругих и пластичных деформаций в балке при различных предварительных сжимающих усилиях.

1. Постановка задачи

Рассматриваем балку длиной l, толщиной h и площадью сечения F, сечение которого обладает двумя осями симметрии.

Пусть координатная ось x совпадает с касательной осью стержня; для осей y и z выбираем оси симметрии поперечного сечения. Начало координат помещаем в центр тяжести сечения закрепленного конца стержня.

В таком случае граничные условия следующие:

$$\begin{gathered} w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ M = 0 \quad \text{при} \quad x = l, \quad Q = \frac{dM}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Пусть на конце стержня $x = l$ приложено сжимающее усилие T.

Оставляя предварительное сжатие неизменным [1], приложим к стержню поперечную нагрузку интенсивностью q.

Нагружая балку в указанном виде, решаем задачу при следующих предположениях:

1° Материал балки несжимаем.

2° Диаграмма напряжения-сжатия апроксимирована с двумя пересекающимися прямыми (материал с линейным упрочнением).

3° Предел текучести материала на расстяжении и на сжатии одинаковый.

4° Разгрузка в стержне происходит упруго.

5° Прогибы стержня настолько малы, что можно считать $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$.

6° Размеры сечения стержня настолько большие, что потери устойчивости стержня не происходит.

7° Предварительное сжатие T настолько большое (или нагрузка настолько мала), что влиянием касательного напряжения параллельно оси z можно пренебрегать.

8° В стержне не возникают зоны вторичных пластических деформаций.

Дифференциальное уравнение равновесия стержня имеет в рассматриваемом случае вид

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q - T\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{1.2}$$

Интегрируя это уравнение два раза по x и определяя постоянные интегрирования, из граничных условий (1.1) находим

$$M = -\frac{q}{2}x^2 + Q_0x - Tw + M_0. \tag{1.3}$$

Символами Q_0 и M_0 обозначены перерезывающая сила и изгибающий момент в конце стержня $x = 0$; соотношения этих величин следующие:

$$\begin{aligned} Q_0 &= ql + T\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=l}, \\ M_0 &= -\frac{ql^2}{2} - T\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=l} l + Tw_{x=l}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Дальнейший ход решения задачи зависит от того, начинается ли изгибание стержня при упругих деформациях или является начальное сжатие T настолько большим, что пластические деформации в стержне возникают уже до приложения поперечной нагрузки q. В дальнейшем рассматриваем оба случая отдельно.

[1] За исключением слячая в параграфе 4.

В работе пользуются следующими символами:
$b(z)$ — ширина сечения балки,
I — момент инерции,
e — относительное укорочение,
σ — сжимающее напряжение,
λ — модуль упрочнения,
ε — относительное укорочение в слое $z = 0$.

2. Случай, когда предварительное сжатие меньше предела упругости

Здесь в начальный момент деформации происходят упруго, но после приложения поперечной нагрузки q вблизи края $z = \frac{h}{2}$ может возникать и зона пластических деформаций. При этом сжимающее напряжение определяется в различных зонах стержня различными формулами:

а) в зоне упругих деформаций

$$\sigma = E\left(\varepsilon + Z\frac{d^2w}{dx^2}\right), \tag{2.1}$$

б) в зоне пластических деформаций

$$\sigma = \lambda\sigma_s + E(1-\lambda)\left(\varepsilon + z\frac{d^2w}{dx^2}\right). \tag{2.2}$$

Применяя формулы (2.1), (2.2) и (1.3) и переходя к безразмерным величинам

$$\begin{aligned}
&\xi = \frac{1}{l}x \qquad \beta(z^*) = \frac{1}{b(0)}b(z) \qquad T^* = \frac{2l^2}{Eh^3b(0)}T\\
&w^* = \frac{1}{2h}w \qquad F^* = \frac{2}{hb(0)}F \qquad q^* = \frac{2l^4}{Eb(0)h^4}q\\
&z^* = \frac{2}{h}z \qquad I^* = \left(\frac{2}{h}\right)^3\frac{I}{b(0)} \qquad M^* = \frac{4l^2}{Eh^4b(0)}M\\
&\mu = \frac{l^2}{h^2}e_s \qquad B_i^*(z_e^*) = \left(\frac{2}{h}\right)^i\frac{B_i(Z_e)}{b(0)} \qquad Q_0^* = \frac{4l^3}{Eh^4b(0)}Q_0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

получим из соотношений

$$\begin{aligned}
T &= \int_{-h/2}^{+2/h}\sigma b(z)\,dz,\\
M &= \int_{-h/2}^{+h/2}\sigma b(z)\,z\,dz
\end{aligned} \tag{2.4}$$

следующие уравнения:

$$T^* = \frac{l^2}{h^2}\left[F^* - \lambda B_1^*(z_e^*)\right]\varepsilon - \lambda B_2^*(z_e^*)w^{*\prime\prime} + \lambda\mu B_1^*(z_e^*),$$

$$-q^*\xi^2+Q_0^*\xi-4T^*w^*+M_0^*=[I^*-\lambda B_3^*(z_e^*)]w^{*\prime\prime}-$$
$$-\frac{l^2}{h^2}\lambda\varepsilon B_2^*(z_e^*)+\lambda\mu B_2^*(z_e^*). \qquad (2.5)$$

Здесь

$$B_i(z_e)=\int_{z_e}^{h/2} b(z)z^{i-1}dz \quad (i=1,2,3). \qquad (2.6)$$

Границу между упругой и пластической зонами определяем из условия

$$e_s=\varepsilon+z_e\frac{d^2w}{dx^2}. \qquad (2.7)$$

Переходя предварительно к безразмерным величинам, формулы (2.5) и (2.7) можно преобразовать в

$$w^{*\prime\prime}=\frac{\mu F^*-T^*}{k_1(z_e^*)},$$
$$\frac{k_2(z_e^*)}{k_1(z_e^*)}=\frac{-q\xi^2+Q_0^*\xi-4T^*w^*+M_0^*}{\mu F^*-T^*}, \qquad (2.8)$$

где символами $k_1(z_e^*)$ и $k_2(z_e^*)$ обозначены выражения:

$$k_1(z_e^*)=[F^*-\lambda B_1^*(z_e^*)]z_e^*+\lambda B_2^*(z_e^*),$$
$$k_2(z_e^*)=\lambda B_2^*(z_e^*)z_e^*+I-\lambda B_3^*(z_e^*). \qquad (2.9)$$

Путем интегрирования системы (2.8) можем определить интересующие нас величины $z_e^*(\xi)$ и $w^*(\xi)$.

При этом надо иметь в виду, что изгиб стержня начинается при чисто-упругих деформациях, от чего и получим неравенство

$$T^*<\mu F^*. \qquad (2.10)$$

Кроме того должно быть выполнено условие, что в стержне не возникли бы зоны вторичных пластических деформаций. Указанное условие выражается неравенством

$$T^*>\mu\left[F^*-\frac{2k_1(z_e^*)}{z_e^*+1}\right]. \qquad (2.11)$$

Итак, уравнения (2.8) применяемы только в случае, когда неравенства (2.10) и (2.11) удовлетворены.

Из соотношений (2.9) не трудно видеть, что $k_1(z_e^*)$ и $k_2(z_e^*)$ в отношении z_e^* монотонно возрастающие функции. При том найдется некоторое значение $z_e^*=\bar{z}_e^*$ так, что $k_1(\bar{z}_e^*)=0$.

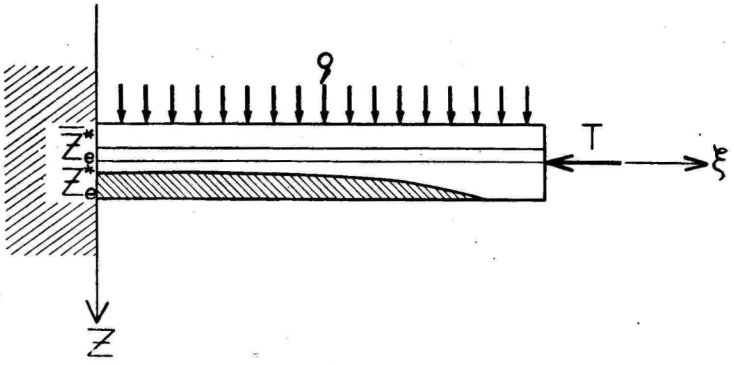
На основании этих обстоятельств можно делать следующие общие выводы, действительность которых является почти очевидным:

1) Во всех сечениях стержня выполняется условие $z_e^* > \bar{z}_e^*$ (Фиг. 1).

2) Толщина пластического слоя является наибольшей в точке, где величина $|w^{*\prime\prime}|$ имеет максимум.

3) Зона пластических деформаций не может подойти до свободного конца стержня $x = l$.

4) Толщина зоны пластических деформаций максимальна в конце стержня $x = 0$.



Фиг. 1.

3. Предварительное напряжение превосходит предел упругости

В рассматриваемом случае изгиб стержня начинается при чистопластических деформациях, т. е. удовлетворено неравенство

$$T^* > \mu F^*. \tag{3.1}$$

При изгибании у края стержня $z = -\frac{h}{2}$ возникает зона разгрузки.

Обозначаем координату границы между упругой и пластической зонами символом z_p. Кроме того пользуемся символами: σ_0 — сжимающее напряжение в момент приложения поперечной нагрузки; e_0 — относительное укорочение в тот же момент. В том случае и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0$.

В зоне активных пластических деформаций имеем соотношение

$$\sigma = \sigma_0 + E(1-\lambda)\left(\varepsilon - \varepsilon_0 + z\frac{d^2w}{dx^2}\right). \tag{3.2}$$

При пассивных пластических деформациях (т. е. в зоне разгрузки) следует иметь в виду, что напряжение σ в начале разгрузки может в некоторой мере превосходить значение σ_0. Если

обозначить значения величин σ и e перед началом разгрузки символами $\sigma_0 + \Delta\sigma$ и $e + \Delta e$, то имеем

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\Delta\sigma + E\left(\varepsilon - \varepsilon_0 + \frac{d^2w}{dx^2}\right). \qquad (3.3)$$

Применяя соотношение (3.2) и (3.3), найдем из соотношений (2.4) формулы для сжимающего усилия T и изгибающего момента M. В результате получим равенства

$$T = T_0 + E[F - \lambda B_1(z_p)](\varepsilon - \varepsilon_0) - E\lambda B_2(z_p)\frac{d^2w}{dx^2} - \Delta T,$$

$$M = E[I - \lambda B_3(z_p)]\frac{d^2w}{dx^2} - E\lambda(\varepsilon - \varepsilon_0)B_2(z_p) - \Delta M, \qquad (3.4)$$

где

$$\Delta T = \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_{-h/2}^{z_p}\Delta\sigma b(z)\,dz,$$

$$\Delta M = \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_{-h/2}^{z_p} z\Delta\sigma b(z)\,dz,$$

$$T_0 = \int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_0 b(z)\,dz.$$

Границу зоны разгрузки z_p найдем из равенства

$$\delta e = \delta\varepsilon + z_p\frac{d^2\delta w}{dx^2} = 0. \qquad (3.5)$$

При нашем предположении, что сжимающее усилие при изгибании стержня не изменяется, $T = T_0$ и $\delta T = 0$.

На основании равенств (3.4) нетрудно видеть, что и $\Delta T = \Delta M = 0$.

Учитывая эти результаты и равенство (3.5), получим при варьировании первого уравнения системы (3.4) тождество

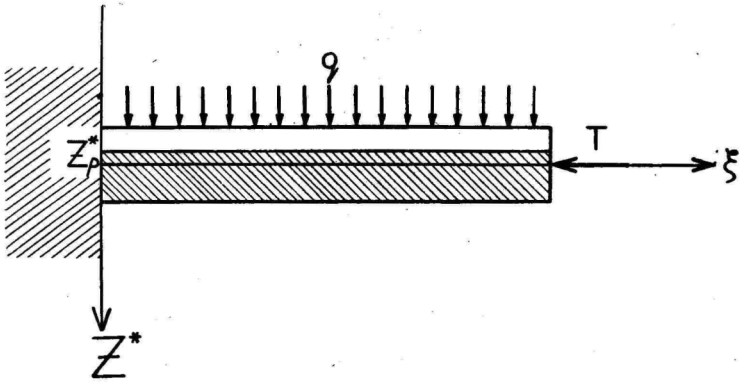
$$k_1(z_p^*) = [F^* - \lambda B_1^*(z_p^*)]z_p^* + \lambda B_2^*(z_p^*) \equiv 0. \qquad (3.6)$$

Из этого тождества вытекает, что во всем стержне $z_p^* = \bar{z}_p^* = \text{const}$. (Фиг. 2).

Второе уравнение системы (3.4) можем, при помощи полученных результатов, с учетом равенства (1.2) привести к виду

$$w^{*\prime\prime} + \frac{4T^*}{k_2(z_p^*)}w^* = -\frac{q^*}{k_2(z_p^*)}\xi^2 + \frac{Q_0^*}{k_2(z_p^*)}\xi + \frac{M_0^*}{k_2(z_p^*)}, \qquad (3.7)$$

решение которого нетрудно.



Фиг. 2.

Решение полученного дифференциального уравнения выражается в форме:

$$w^* = -\left(\frac{M_0^*}{k_2\alpha^2} + \frac{2q^*}{k_2\alpha^4}\right)\cos\alpha\xi - \frac{Q_0^*}{k_2\alpha^3}\sin\alpha\xi - \\ - \frac{q^*}{k_2\alpha^2}\xi^2 + \frac{Q_0^*}{k_2\alpha^2}\xi + \frac{M_0^*}{k_2\alpha^2} + \frac{2q^*}{k_2\alpha^4}, \tag{3.8}$$

где

$$\alpha^2 = \frac{4T^*}{k_2(z_p^*)}, \quad M_0^* = \frac{2q^*}{\alpha^2}(\cos\alpha - 1), \quad Q_0^* = \frac{2q^*}{\alpha}\sin\alpha.$$

Тот же результат получим, если решим задачу при условии $T^* = \mu F^*$. Для того, чтобы устранить возможность появления вторичных пластических деформаций, должно быть удовлетворено неравенство $e_0 - e < \gamma(e_0)e_s$, где $\gamma(e_0)$ какой-то параметр, который определяется из опыта.

Считая $\gamma(e_0) = 2$ и имея в виду, что вторичные пластичные деформации возникают впервые у края стержня $z^* = -1$, можно, пользуясь безразмерными величинами, указанное условие привести к форме

$$-q^*\xi^2 + Q_0^*\xi - 4T^*w^* + M_0^* < \frac{2\mu k_2(z_p^*)}{z_p^* + 1}.$$

В результате мы нашли формулу (3.8) для определения прогиба. Кроме того показали, что если сжимающее усилие T не изменяется в процессе изгиба стержня, то при приложении поперечной нагрузки возникает в стержне зона разгрузки, толщина которой в любом сечении одинакова и которая не зависит от величины поперечной нагрузки.

4. О влиянии сложного нагружения

Возвратимся еще раз к случаю $T^* > \mu F^*$, но теперь при предпосылке, что при изгибании сжимающее усилие T не остается неизменным, как в прежних случаях, а возрастает вместе с величиной q по данному закону $T - T_0 = f(q)$.

В таком случае уже нельзя считать вариацию δT равной нулю. Варьируя теперь соотношения (1.3) и (3.4) и переходя к безразмерным величинам, получим уравнения

$$v'' = -\frac{1}{k_1(z_p^*)}, \tag{4.1}$$

$$\frac{k_2(z_p^*)}{k_1(z_p^*)} = \frac{\delta q^*}{\delta T^*}\xi^2 - \frac{\delta Q_0^*}{\delta T^*}\xi + 4T^* v + 4w^* - \frac{\delta M_0^*}{\delta T^*},$$

где

$$v = \frac{\delta w^*}{\delta T^*}.$$

Имея в виду вышеполученные результаты для $k_1(z_p^*)$ и $k_2(z_p^*)$, видим, что при любом сечении выполняется условие $z_p^* < \bar{z}_p^*$.

Также нетрудно видеть, что зона разгрузки не доходит до свободного конца стержня $\xi = 1$.

Элиминируя в этой системе $\varepsilon - \varepsilon_0$ и переходя к безразмерным величинам, переписываем соотношения (3.4) в новом виде.

В результате получаем дифференциальное уравнение

$$w^{*\prime\prime} = (m - q^*\xi^2 - 4T^*w^* + Q_0^*\xi + M_0^*)\Phi_1(z_p^*) + \\ + [T_0^* - T^* - p]\Phi_2(z_p^*), \tag{4.2}$$

где

$$p = \frac{l^2}{h^2}\lambda \int_{-1}^{z_p^*} \Delta l\beta(z^*)\,dz^*,$$

$$m = \frac{l^2}{h^2}\lambda \int_{-1}^{z_p^*} \Delta l\beta(z^*)\,z^*dz^*. \tag{4.3}$$

Величины $\Phi_1(z_p^*)$ и $\Phi_2(z_p^*)$ определяем из равенств

$$[\Phi_1(z_p^*)]^{-1} = I^* - \lambda B_3^*(z_p^*) - \frac{\lambda^2[B_2^*(z_p^*)]^2}{F^* - \lambda B_1^*(z_p^*)}, \tag{4.4}$$

$$\Phi_2(z_p^*) = -\frac{\lambda B_2^*(z_p^*)}{F^* - \lambda B_1(z_p^*)}\Phi_1(z_p^*).$$

Если закон нагружения $T - T_0 = f(q)$ известен, можем и величину $\frac{\delta q^*}{\delta T^*}$ считать известной и найти интересующую нас ве-

личину прогиба w^*; при этом определям Q_0^* и M_0^* из равенств (1.4), переходя предварительно к безразмерным величинам (2.3).

При чисто-пластических деформациях $z_p^* = -1$. В таком случае уравнение (4.2) имеет форму:

$$w^{*\prime\prime} + \frac{4T^*}{I^*(1-\lambda)} w^* = -\frac{q^*}{I^*(1-\lambda)} \xi^2 + \frac{Q_0^*}{I^*(1-\lambda)} \xi + \frac{M_0^*}{I^*(1-\lambda)}. \quad (4.5)$$

Решение этого уравнения (4.5) имеет вид

$$w^* = -\frac{2q^*}{I^*(1-\lambda)\gamma^4} \cos(\gamma - \gamma\xi) - \frac{q^*}{I^*(1-\lambda)\gamma^2} \xi^2 + \frac{2q^*}{I^*(1-\lambda)\gamma^3} \xi \sin\gamma + + \frac{2q^*}{I^*(1-\lambda)\gamma^4} \cos\gamma, \quad (4.6)$$

где

$$M_0^* = \frac{2q^*}{\gamma^2}(\cos\gamma - 1), \qquad Q_0^* = \frac{2q^*}{\gamma} \sin\gamma. \quad (4.7)$$

Если сжимающее усилие T возрастает довольно быстро в сравнении с поперечной нагрузкой q, в стержне разгрузки не возникает и стержень деформируется чисто-пластически. Теперь пользуемся для определения прогиба соотношением (4.6).

Уравнения (3.7) и (4.5) можно рассматривать как дифференциальные уравнения для крайних случаев закона нагружения $T - T_0 = f(q)$.

Литература

1. Лепик Ю. Р., Изгиб упруго-пластического стержня в случае предварительного натяжения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 157—167.
2. Лепик Ю. Р., О влиянии начальной кривизны и эксцентричного нагружения на прогибы сжатого стержня за пределом упругости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 142—158.
3. Лепик Ю. Р., О равновесии упруго-пластических стержней. Прикл. матем. и механика, 1957, **21**, 101—108.

Поступило
30 III 1960

ELASTILIS-PLASTILISE VARDA PAINE EELNEVA SURVE KORRAL

K. Velsker

Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Käesolevas töös on vaadeldud konsooltala paindumist ristkoormuse mõjul, kusjuures tala on otstest eelnevalt surutud. On leitud tala tasakaalu diferentsiaalvõrrandid, mis on lahendatud kolmel erineval juhul: 1) tala pain-

dumine algab puhtelastsete deformatsioonide korral, 2) tala paindumine algab puhtplastiliste deformatsioonide korral ja 3) talale rakendatud eelnev surve ei jää muutumatuks nagu kahel eelneval korral, vaid muutub koos ristkoormusega etteantud seaduse järgi.

Seejuures on ka uuritud erinevate eelnevate survete korral talas tekkivate elastsete ning plastiliste deformatsioonide piirkondade jaotust.

DIE BIEGUNG EINES ELASTISCH-PLASTISCHEN STABES BEI VORANGEHENDEM DRUCK

K. Velsker

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Biegung eines axial komprimierten Trägers durch eine Querlast betrachtet. Die Differentialgleichungen des Gleichgewichts des Trägers wurden gefunden und für folgende drei Fälle gelöst: 1) für den Fall, wo die Durchbiegung des Trägers bei ausschließlich elastischen Deformationen beginnt; 2) für den Fall, wo die Durchbiegung des Trägers bei ausschließlich plastischen Deformationen beginnt, und 3) für den Fall, wo die Axialkraft T des Trägers nicht unverändert bleibt wie in den beiden vorangehenden Fällen, sondern sich zusammen mit der Querlast q der gegebenen Gesetzmäßigkeit nach verändert.

Dabei wurde auch die Verteilung der Bereiche der elastischen und der plastischen Deformationen im Träger bei verschiedenen Werten der Axialkraft erforscht.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Ю. Лумисте. К теории двумерных минимальных поверхностей I. Теория кривизны 3

Ü. Lumiste. Kahemõõtmeliste minimaalpindade teooriast I. Kõverusteooria. *Resümee* 15

Ü. Lumiste. Zur Theorie der zweidimensionalen Minimalflächen I. Krümmungstheorie. *Zusammenfassung* 15

Ю. Лумисте. К теории двумерных минимальных поверхностей II. Поверхности постоянной кривизны 16

Ü. Lumiste. Kahemõõtmeliste minimaalpindade teooriast II. Konstantse kõverusega pinnad. *Resümee* 28

Ü. Lumiste. Zur Theorie der zweidimensionalen Minimalflächen II. Flächen fester Krümmung. *Zusammenfassung* 28

Э. Реймерс. Сходимость по отрезкам и умножение суммируемых рядов 29

E. Reimers. Lõikekoonduvus ja summeeruvate ridade korrutamine. *Resümee* 41

E. Reimers. Section-convergence and Multiplication of Summable Series. *Summary* 42

Э. Реймерс. Теоремы тауберова типа для матричных методов суммирования 43

E. Reimers. Tauberi tüüpi teoreemid maatriks-summerimismenetluste jaoks. *Resümee* 51

E. Reimers. Tauberian Theorems for Matrix Methods of Summability. *Summary* 51

С. Гейсберг. Лакунарные тауберовы теоремы для абсолютного суммирования 52

S. Geisberg. Lakunaarsed Tauberi tüüpi teoreemid absoluutse summeeruvuse puhul. *Resümee* 77

S. Geisberg. Die Taubersche Lückensätze für absolute summierbarkeit. *Zusammenfassung* 77

С. Гейсберг. О некоторых свойствах матричных преобразований . . 78

S. Geisberg. Maatriksteisenduste mõningaist omadustest. *Resümee* . . 90

S. Geisberg. Über einige Eigenschaften von Matrixtransformationen. *Zusammenfassung* 90

С. Барон. Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом Чезаро вещественного порядка. 91

S. Baron. Summeeruvustegurid reaalset järku Cesàro menetlusega summeeruvate või tõkestatud kahekordsete ridade jaoks. *Resümee* . . . 117

S. Baron. Summierbarkeitsfaktoren für Doppelreihen, die Cesàro-summierbar reeller Ordnungen oder Cesàro-beschränkt sind. *Zusammenfassung* 117

С. Барон. Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро 118
S. Baron. Summeeruvus- ja absoluutsed summeeruvustegurid Cesàro menetlusega absoluutselt summeeruvate kahekordsete ridade jaoks. *Resümee* 133
S. Baron. Summierbarkeits- und absolute Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Doppelreihen. *Zusammenfassung* . . 134
С. Барон. Множители абсолютной суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов 135
S. Baron. Absoluutsed summeeruvustegurid Cesàro-summeeruvate ja Cesàro-tõkestatud kahekordsete ridade jaoks. *Resümee* 155
S. Baron. Absolute Summierbarkeitsfaktoren für Cesàro-summierbare und Cesàro-beschränkte Doppelreihen. *Zusammenfassung* 155
Т. Сырмус. Об одном обобщении теоремы Мерсера на случай двойных последовательностей 156
T. Sõrmus. Ühest Merceri teoreemi üldistusest kahekordsetele jadadele. *Resümee* 167
T. Sõrmus. Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Mercer für Doppelfolgen. *Zusammenfassung* 168
Т. Сырмус. О некоторых обобщениях теоремы Мерсера 169
T. Sõrmus. Mõningatest Merceri teoreemi üldistustest. *Resümee* . . . 184
T. Sõrmus. Über einige Verallgemeinerungen des Satzes von Mercer. *Zusammenfassung* 184
И. Кулль. Умножение двойных рядов по правилу Дирихле 185
I. Kull. Kahekordsete ridade korrutamine Dirichlet' reegli järgi. *Resümee* 192
I. Kull. Dirichlet Product of Double Series. *Summary* 192
И. Кулль. Матричные преобразования классов двойных последовательностей в банаховых пространствах 193
I. Kull. Kahekordsete jadade klasside maatriksteisendused Banachi ruumides. *Resümee* 208
I. Kull. Matrix Transformations of the Classes of Double Sequences in Banach Spaces. *Summary* 208
Г. Кангро и Ф. Вихман. Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса 209
G. Kangro ja F. Vichmann. Abstraktsetest summeeruvusteguritest Rieszi kaalutud keskmiste menetluse puhul. *Resümee* 225
G. Kangro und F. Vichmann. Über die abstrakten Summierbarkeitsfaktoren für das Verfahren der bewichteten Mittel von Riesz. *Zusammenfassung* 225
Ф. Вихманн. Об обобщенных множителях суммируемости 226
F. Vichmann. Üldistatud summeeruvusteguritest. *Resümee* 248
F. Vichmann. Generalized Summability Factors. *Summary* 248
Г. Кангро и М. Тыннов. Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса 249
G. Kangro ja M. Tõnnov. Jada summeeruvustegurid Rieszi kaalutud keskmiste menetluste puhul. *Resümee* 262
G. Kangro und M. Tõnnov. Folgensummierbarkeitsfaktoren für das Verfahren der bewichteten Mittel von Riesz. *Zusammenfassung* . . 262
Х. Яаксон. О решениях топологической задачи о четырех красках . 263
H. Jaakson. Topoloogilise neljavärviülesande lahendeist. *Resümee* . . 274

H. Jaakson. Über die Lösungen der topologischen Vierfarbenaufgabe. *Zusammenfassung* 274

Р. Муллари. О поверхностях с полями абсолютно главных направлений 275

R. Mullari. Absoluutsete peasihi-väljadega pindadest. *Resümee* . . . 287

R. Mullari. On Surfaces with Fields of Absolute Principle Directions. *Summary* 288

Е. Габович. Частично упорядоченные группы, лишенные нетривиальных выпуклых подгрупп 289

J. Gabovitš. Osaliselt järjestatud rühmad, milledel puuduvad kumerad pärisalamrühmad. *Resümee* 293

J. Gabovitsch. Teilweisegeordnete Gruppen ohne nichttriviale konvexe Untergruppen. *Zusammenfassung* 293

Е. Габович. Частично упорядоченные Ω-группы 294

J. Gabovitš. Osaliselt järjestatud Ω-rühmad. *Resümee* 300

J. Gabovitch. Partially Ordered Ω-groups. *Summary* 300

Э. Тамме и Р. Юргенсон. О приближенном решении дифференциальных уравнений 301

E. Tamme ja R. Jürgenson. Diferentsiaalvõrrandite ligikaudsest lahendamisest. *Resümee* 315

E. Tamme und R. Jürgenson. Über angenäherte Lösung von Differentialgleichungen. *Zusammenfassung* 315

Э. Тамме. О точности метода моментов 317

E. Tamme. Momentide meetodi täpsusest. *Resümee* 328

E. Tamme. Über die Genauigkeit der Momentenmethode. *Zusammenfassung* 328

Э. Тамме. О точности приближенных методов разыскания собственных значений и собственных элементов 329

E. Tamme. Omaväärtuste ja omaelementide ligikaudse leidmise meetodite täpsusest. *Resümee* 337

E. Tamme. Über die Genauigkeit der methoden zur angenäherten Berechnung von Eigenwerten und Eigenelementen. *Zusammenfassung* . . 337

М. Левин. Об одном способе вычисления двойных интегралов 338

M. Levin. Ühest kohekordsete integraalide arvutamise meetodist. *Resümee* 341

M. Levin. O Computing Method of Double Integrals. *Summary* 341

Ю. Лепик. К исследованию послекритической стадии прямого упруго-пластического стержня 342

Ü. Lepik. Sirge elastilis-plastilise varda pärastkriitilise staadiumi analüüs. *Resümee* 350

Ü. Lepik. Zur Analyse des nachkritischen Stadiums elastisch-plastischer Druckstäbe. *Zusammenfassung* 350

Л. Роотс. Об устойчивости пластинок различной формы, в частности треугольных и трапециевидных 351

L. Roots. Kolmnurksete ja trapetsoidaalsete plaatide stabiilsusest. *Resümee* 365

L. Roots. On the Buckling of Triangular and Trapezoidal Plates. *Summary* 365

Л. Роотс. Об устойчивости защемленного равнобедренного треугольника при упруго-пластических деформациях 366

L. Roots. Jäigalt kinnitatud võrdhaarse kolmnurga stabiilsus elastilis-plastiliste deformatsioonide piirkonnas. *Resümee* 371
L. Roots. On the Buckling of Isosceles Triangular Plates. *Summary* . . 371
Л. Роотс. Определение критических нагрузок равномерно сжатых треугольных пластинок 372
L. Roots. Ühtlaselt surutud kolmnurksete plaatide kriitilise koormuse leidmine. *Resümee* 376
L. Roots. The Buckling of Triangular Plates under Uniform Compression. *Summary* 376
Э. Ааренд, Ю. Лепик и Л. Лухт. Большие прогибы гибкой круглой упруго-пластической пластинки, свободно опертой по контуру. 377
E. Aarend, Ü. Lepik ja L. Luht. Ümmarguse, kontuuril vabalt toetatud plaadi suured läbipainded plastiliste deformatsioonide piirkonnas. *Resümee* 383
E. Aarend, Ü. Lepik and L. Luht. Large Deflections of Circular Elastic-plastic Plates, Free Supported on the Boundary. *Summary* 384
К. Велскер. Изгиб упруго-пластического стержня в случае предварительного сжатия 385
K. Velsker. Elastilis-plastilise varda paine eelneva surve korral. *Resümee* 393
K. Velsker. Die Biegung eines elastisch-plastischen Stabes bei vorangehendem Druck. *Zusammenfassung* 394

Тартуский государственный университет
Тарту, ул. Юликооли, 18
ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ. II
На русском, эстонском, немецком
и английском языках

*

Vastutav toimetaja S. Baron
Korrektorid L. Brafmann, E. Uuspõld,
F. Kibbermann, O. Mutt

Ladumisele antud 2. XI 1960. Trükkimisele antud 1. III 1961. Paber 60 × 92, 1/16. Trükipoognaid 25. Trükiarv 500. MB-01438. Tellimuse nr. 10250. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II

Hind rbl. 1.75