Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Marin-Brith Põldma

Lipschitzi funktsiooni peaaegu kõikjal diferentseeruvus

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Alvin Lepik

Tartu 2025

LIPSCHITZI FUNKTSIOONI PEAAEGU KÕIKJAL DIFERENTSEERUVUS

Bakalaureusetöö

Marin-Brith Põldma

Lühikokkuvõte

Bakalaureusetöös tõestatakse Rademacheri teoreem kasutades selleks tõkestatud muuduga ja monotoonsete funktsioonide omadusi. Tõestus põhineb ühe muutuja Lipschitzi peaaegu kõikjal diferentseeruvusel ning mitme muutuja Lipschitzi suunatuletise peaaegu kõikjal eksisteerimisel.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: diferentseeruvus, Lipschitzi tingimus, monotoonne funktsioon, tõkestatud muuduga funktsioon.

LIPSCHITZ FUNCTION'S DIFFERENTIABILITY ALMOST EVERYWHERE

Bachelor's thesis

Marin-Brith Põldma

Abstract

In this bachelor's thesis, Rademacher's theorem is proven using properties of functions of bounded variation and monotone functions. The proof is based on the almost everywhere differentiability of one-dimensional Lipschitz functions and the almost everywhere existence of directional derivatives of multi-dimensional Lipschitz functions.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key Words: differentiability, Lipschitz condition, monotone function, function of bounded variation.

Sisukord

Sissejuhatus

Töös anname detailse tõestuse Rademacheri teoreemile. Teoreemi sõnastus on järgmine:

Teoreem. Olgu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzi funktsioon. Siis f on diferentseeruv $\mathcal{L}^n$-peaaegu kõikjal.

Tulemus on oluline, sest Lipschitzi funktsioonide peamiseks uurimisvaldkonnaks on nende seos diferentseeruvusega. Nähtavasti ei viita Lipschitzi funktsiooni definitsioon mitte kuidagi võimalusele lähendada funktsiooni f lineaarkujutusega. Samuti on Rademacheri teoreem hea viis illustreertimaks Fubini-Tonelli teoreemi omadust laiendada ühemõõtmelisi juhte mitmemõõtmelistele või heaks tööriistaks teiste teoreemide tõestamisel.

Käesolev bakalaureusetöö koosneb kolmest peatükist.

Esimeses peatükis tutvume tõkestatud muuduga funktsioonidega ning tõestame, et tõkestatud muuduga funktsioonid on esitatavad kahe monotoonse funktsiooni vahena.

Teises peatükis tõestame Lebesgue'i diferentseerimise teoreemi ehk näitame, et kinnisel lõigul defineeritud monotoonne funktsioon on diferentseeruv peaaegu kõikjal.

Kolmandas peatükis tõestame Rademacheri teoreemi. Teoreemi tõestuse oleme omakorda jaganud kolmeks osaks, kus esimeses tõestame ühe muutuja Lipschitzi peaaegu kõikjal diferentseeruvuse, teises näitame, et mitme muutuja Lipschitzi funktsioonil eksisteerib suunatuletis peaaegu kõikjal koos arvutuseeskirjaga ning viimaks tõestame diferentseeruvuse peaaegu kõikjal.

Töö on valdavalt referatiivne ning tugineb Evansi [3], Tao [9] ja Weaveri [10] Rademacheri teoreemi tõestustel.

1 Tõkestatud muuduga funktsioonid

Alustame tõkestatud muuduga funktsioonidest. Meie eesmärk selles alajaotuses on tõestada, et tõkestatud muuduga funktsioon on esitatav kahe monotoonse funktsiooni vahena.

Definitsioon 1. Ruumi $\mathbb{R}^n$ osahulga $K \subset \mathbb{R}^n$ katteks nimetatakse osahulkade $K_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ süsteemi, mille puhul $K \subset \bigcup_\alpha K_\alpha$. Katet nimetatakse lahtiseks, kui kõik kattesse kuuluvad hulgad K_α on lahtised.

Definitsioon 2. Hulka $K \subset \mathbb{R}^n$ nimetatakse kompaktseks, kui tema iga lahtine kate sisaldab lõpliku alamkatet.

Kompaktsetel alamhulkadel ruumis $\mathbb{R}^n$ on järgmine hästi tuntud kirjeldus.

Teoreem 1 (Heine-Borel)**.** Olgu $K \subset \mathbb{R}^n$. Hulk K on kompaktne parajasti siis kui ta on kinnine ja tõkestatud.

Edasine selles alajaotuses tugineb alajaotusele 2 raamatus [6]. Olgu funktsioon ϕ defineeritud kompaktsel lõigul $[a, b]$ ja olgu $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ suvaline alajaotus lõigust $[a, b]$. Defineerime ϕ muudu alajaotuse P suhtes kui

$$\Delta(\phi, P) = \sum_{i=1}^{n} |\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})|$$

ja täismuudu kui

$$\mathcal{T}(\phi) = \sup\{\Delta(\phi, P) \mid P \text{ on lõigu } [a, b] \text{ alajaotus}\}.$$

Definitsioon 3 ([7])**.** Kompaktsel lõigul defineeritud funktsioon $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ on tõkestatud muuduga, kui tema täismuut on lõplik ehk $\mathcal{T}(\phi) < \infty$.

Olgu $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ lõigu $[a, b]$ alajaotus P, tähistame kõigi lõigu $[a, b]$ alajaotuste hulga kui $\mathfrak{P}([a, b])$ ja defineerime suurused

$$\Delta(\phi, P)^+ = \sum_{i=1}^{n} [\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]^+, \qquad \Delta(\phi, P)^- = \sum_{i=1}^{n} [\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]^-,$$

$$\Delta(\phi, P) = \Delta(\phi, P)^+ + \Delta(\phi, P)^- = \sum_{i=1}^{n} |\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})|$$

iga $i = 1, \ldots, n$ korral, kus

$$[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]^+ = \begin{cases} \phi(x_i) - \phi(x_{i-1}), & \text{kui } \phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) \geq 0, \\ 0, & \text{kui } \phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) < 0, \end{cases}$$

$$[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]^- = \begin{cases} -(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})), & \text{kui } \phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) \leq 0, \\ 0, & \text{kui } \phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) > 0. \end{cases}$$

Märgime, et $\phi(b) - \phi(a) = \Delta(\phi, P)^+ - \Delta(\phi, P)^-$, sest

$$\begin{aligned} \Delta(\phi, P)^+ - \Delta(\phi, P)^- &= \sum_{i=1}^{n} [\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]^+ - \sum_{i=1}^{n} [\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]^- \\ &= \sum_{i=1}^{n} ([\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]^+ - [\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})]^-) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) = \phi(b) - \phi(a). \end{aligned}$$

Tähistame

$$\mathcal{P}(\phi) = \sup_{P \in \mathfrak{P}([a,b])} \Delta(\phi, P)^+, \quad \mathcal{N}(\phi) = \sup_{P \in \mathfrak{P}([a,b])} \Delta(\phi, P)^-, \quad \mathcal{T}(\phi) = \sup_{P \in \mathfrak{P}([a,b])} \Delta(\phi, P).$$

Lemma 1 ([6]. Lemma 4)**.** Kui ϕ on lõigul $[a, b]$ tõkestatud muuduga, siis

$$\mathcal{T}(\phi) = \mathcal{P}(\phi) + \mathcal{N}(\phi) \quad \text{ja} \quad \phi(b) - \phi(a) = \mathcal{P}(\phi) - \mathcal{N}(\phi).$$

Tõestus. Iga lõigu $[a, b]$ alajaotuse P korral

$$\Delta(\phi, P)^+ = \Delta(\phi, P)^- + \phi(b) - \phi(a).$$

Võttes supreemumi üle kõigi lõigu $[a, b]$ alajaotuste, saame

$$\mathcal{P}(\phi) = \mathcal{N}(\phi) + \phi(b) - \phi(a). \tag{1}$$

Märgime, et see võrdus kehtib, sest kuna ϕ on tõkestatud muuduga, siis on supreemumid lõplikud. Kuna

$$\Delta(\phi, P) = \Delta(\phi, P)^+ + \Delta(\phi, P)^- = \Delta(\phi, P)^+ + \Delta(\phi, P)^+ - (\phi(b) - \phi(a))$$

ja ϕ on tõkestatud muuduga, siis võttes taaskord supreemumi üle kõigi $P \in \mathfrak{P}([a, b])$, kehtib

$$\mathcal{T}(\phi) = 2 \cdot \mathcal{P}(\phi) - (\phi(b) - \phi(a)) \overset{(1)}{=} \mathcal{P}(\phi) + \mathcal{N}(\phi) < \infty.$$

□

Definitsioon 4. Olgu $A \subset \mathbb{R}$, funktsioon $\phi : A \to \mathbb{R}$ ja $B \subset A$. Funktsiooni $\phi_B : B \to \mathbb{R}$ nimetatakse funktsiooni ϕ ahendiks alamhulgale B, kui

$$\phi_B(x) = \phi(x) \quad \text{iga } x \in B \text{ korral.}$$

Teoreem 2 ([6]. Teoreem 5)**.** Olgu funktsioon $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud muuduga, siis ϕ on kahe lõigul $[a, b]$ monotoonse funktsiooni vahe.

Tõestus. Olgu ϕ tõkestatud muuduga lõigul $[a, b]$ ja tähistame $g(x) := \mathcal{P}(\phi_{[a,x]})$ ning $h(x) := \mathcal{N}(\phi_{[a,x]})$ iga $x \in [a, b]$ korral.

Näitame, et g on mittekahanev funktsioon, st kui $u < v$, siis $g(u) \leq g(v)$.

Olgu $P_1 = \{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = u\}$ lõigu $[a, u]$ suvaline alajaotus ja moodustame lõigu $[a, v]$ alajaotuse nii, et $P_2 = P_1 \cup \{v\} = \{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = u, a_{n+1} = v\}$, siis

$$\Delta(\phi_{[a,u]}, P_1)^+ = \sum_{i=1}^{n} [\phi(a_i) - \phi(a_{i-1})]^+$$

ja

$$\Delta(\phi_{[a,v]}, P_2)^+ = \sum_{i=1}^{n} [\phi(a_i) - \phi(a_{i-1})]^+ + [\phi(a_{n+1}) - \phi(a_n)]^+.$$

Seega

$$\Delta(\phi_{[a,v]}, P_2)^+ = \Delta(\phi_{[a,u]}, P_1)^+ + [\phi(a_{n+1}) - \phi(a_n)]^+ \geq \Delta(\phi_{[a,u]}, P_1)^+.$$

Võttes nüüd supreemumi üle vastavate alajaotuste, saame

$$g(u) = \mathcal{P}(\phi_{[a,u]}) \leq \sup_{P \in \mathfrak{P}([a,u])} \Delta(\phi_{[a,v]}, P \cup \{v\})^+ \leq \mathcal{P}(\phi_{[a,v]}) = g(v).$$

Analoogiliselt saame näidata ka funktsiooni h monotoonsust.

Kusjuures $h(x)$ ja $g(x)$ omandavad ainult lõplike väärtusi, sest

$$0 \leq \mathcal{P}(\phi_{[a,x]}) \leq \mathcal{T}(\phi_{[a,x]}) \leq \mathcal{T}(\phi_{[a,b]}) < \infty$$

ja

$$0 \leq \mathcal{N}(\phi_{[a,x]}) \leq \mathcal{T}(\phi_{[a,x]}) \leq \mathcal{T}(\phi_{[a,b]}) < \infty.$$

Lemma 1 põhjal aga $\phi(x) = g(x) - (h(x) - \phi(a))$ ja seega, kuna $h(x) - \phi(a)$ on monotoonne funktsioon, oleme näidanud, et ϕ avaldub kui kahe monotoonse funktsiooni vahe. $\square$

Märgime tõestuseta, et kehtib ka teistpidine implikatsioon. See tähendab, et monotoonsete funktsioonide vahe on tõkestatud muuduga. Seda meil edasises töös vaja ei lähe.

2 Monotoonse funktsiooni diferentseeruvus

Antud alajaotuses tõestame väite, et kinnisel lõigul monotoonne funktsioon on diferentseeruv $\mathcal{L}$-p.k. See on tuntud Lebesgue'i diferentseerimise teoreemina ning on ka tõestatud raamatus [6] alajaotuses 5.1 tuginedes Vitali lemmale. Käesolevas töös tõestame teoreemi tuginedes Botsko [2] antud alternatiivsele tõestusele.

Lemma 2 ([2]. Lemma 1)**.** Olgu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ lõigu $[a,b]$ alajaotus, $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mittetühi ja $A > 0$.

1. Kui $f(a) \le f(b)$ ja
$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} < -A$$
iga $i \in S$ korral, siis
$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > |f(b) - f(a)| + AL,$$
kus $L = \sum_{i \in S}(x_i - x_{i-1})$.
2. Kui $f(a) \ge f(b)$ ja
$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} > A$$
iga $i \in S$ korral, siis
$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > |f(b) - f(a)| + AL,$$
kus $L = \sum_{i \in S}(x_i - x_{i-1})$.

Tõestus. Tõestame esimese väite. Kuna $f(a) \le f(b)$, siis

$$\begin{aligned}|f(b) - f(a)| = f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i \in S}(f(x_i) - f(x_{i-1})) + \sum_{i \notin S}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< -A\sum_{i\in S}(f(x_i)-f(x_{i-1})) + \sum_{i\notin S}(f(x_i)-f(x_{i-1})) \\
&\le -AL + \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|,
\end{aligned}
$$

millest järeldame, et

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| > |f(b)-f(a)| + AL.$$

Tõestame teise väite. Olgu $g=-f$, siis $g(a)\le g(b)$ ja $\frac{g(x_i)-g(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} < -A$. Seega lemma eelmise punkti põhjal

$$\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})| > |g(b)-g(a)| + AL$$

kust absoluutväärtuse omadustest järeldub, et ka

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| > |f(b)-f(a)| + AL.$$

Lemma on tõestatud. □

Definitsioon 5 ([5]. Def 2.2)**.** Öeldakse, et kogum $\mathfrak{A}\subset\mathcal{P}(X)$ on (hulga $X\subset\mathbb{R}^n$ alamhulkade) σ-algebra, kui

(a) $\emptyset, X\in\mathfrak{A}$;

(b) $A\in\mathfrak{A} \implies A^c\in\mathfrak{A}$;

(c) $A_j\in\mathfrak{A},\ j=1,2,\ldots \implies \bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\in\mathfrak{A}$.

Siin A^c on alamhulga A täiend hulga X suhtes.

Definitsioon 6 ([5]. Def 2.4)**.** Vähimat hulga $X\subset\mathbb{R}^n$ alamhulkade σ-algebrat, mis sisaldab kogumit $\mathcal{E}\subset\mathcal{P}(X)$, nimetatakse kogumi $\mathcal{E}$ poolt genereeritud σ-algebraks.

Definitsioon 7 ([5]. Def 2.5)**.** Ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtiste hulkade kogumi poolt genereeritud σ-algebrat nimetatakse ruumi $\mathbb{R}^n$ Boreli σ-algebraks $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Ruumi $\mathbb{R}^n$ Boreli σ-algebra hulki nimetatakse selle ruumi Boreli hulkadeks.

Definitsioon 8 ([5]. Märkus 5.5)**.** Lebesgue'i mõõduks hulgal $\mathbb{R}$ nimetatakse hulgafunktsiooni $\mathcal{L} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$, mis iga Boreli hulga A korral defineeritakse võrdusega

$$\mathcal{L}(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \;\middle|\; a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ i \in \mathbb{N},\ \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \supset A \right\}.$$

Definitsioon 9. Öeldakse, et alamhulga $A \subset \mathbb{R}^n$ elementidel on mingi omadus (P) $\mathcal{L}^n$-peaaegu kõikjal, lühidalt $\mathcal{L}^n$-p.k, kui

$$\mathcal{L}^n\{x \in A : \text{elemendil } x \text{ pole omadust (P)}\} = 0.$$

Antud juhul võtame $n = 1$. Mõõtu $\mathcal{L}^n$ kirjeldame viimases alajaotuses.

Lebesgue'i mõõdu definitsioonist järeldub vahetult järgmine omadus.

Omadus 1 ([2])**.** Hulga $E \subset (a, b)$ mõõt on positiivne, kui leidub $\varepsilon_0 > 0$ nii, et $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}(J_i) \geq \varepsilon_0$ iga $\mathcal{J}$ korral, kus $\mathcal{J}$ on loenduv lahtiste vahemike kogum, mis katab hulga E ja iga i korral $J_i \in \mathcal{J}$.

Alajaotuse põhiteoreemi tõestuseks vajame abitulemusi ([2, Lemma 2, Märkus 2]). Esitame need järgmise lemmana. Me kaldume kõrvale Botsko tõestusest kasutades vahetult Lebesgue'i mõõdu regulaarsuse omadust.

Definitsioon 10 ([5]. Def. 3.6)**.** Olgu $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$. Öeldakse, et monotoonne hulgafunktsioon $\rho\colon\ \mathcal{E} \to [0, \infty]$ on seest regulaarne hulgal $E \subset \mathcal{E}$, kui

$$\rho(E) = \sup\{\rho(C)\colon\ \text{hulga } C \subset \mathcal{E} \text{ sulund } \overline{C} \text{ on kompaktne ja } \overline{C} \subset E\}.$$

Lemma 3. Olgu E vahemiku (a, b) positiivse mõõduga alamhulk ning antud ka $\varepsilon_0 > 0$ nagu omaduse 1 sõnastuses. Kehtivad järgmised väited.

1. Olgu $\mathcal{J}$ lõigu $[a, b]$ lahtiste alamintervallide kogum, mis katab hulga E. Siis leidub kogumi $\mathcal{J}$ lõplik lõikumatute vahemike alamkogum $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_N\}$,

nii, et

$$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}(I_i) > \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

2. Olgu $P \subset [a,b]$ lõplik alamhulk ja $\mathcal{J}$ lõigu $[a,b]$ lahtiste alamintervallide kogum, mis katab hulga $E \setminus P$. Siis leidub kogumi $\mathcal{J}$ lõplik lõikumatute vahemike kogum $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_N\}$ nii, et

$$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}(I_i) > \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Tõestus. Tõestame esimese väite. Kuna Lebesgue'i mõõt on seest regulaarne ([8, Teoreem 2.20]), siis ülemise raja mõiste kohaselt sisaldab E kompaktset alamhulka K, mille korral

$$\mathcal{L}(K) > \frac{2\varepsilon_0}{3}.$$

Kuna $K \subset \bigcup_{I \in \mathcal{J}} I$, siis $\mathcal{J}$ on hulga K lahtine kate ning kompaktsuse tõttu saame eraldada temast lõpliku alamkatte $J_1, \ldots, J_p$. Leitud alamkatte puhul võime veel eeldada, et see on minimaalne selles mõttes, et iga $j = 1, \ldots, p$ korral

$$J_j \not\subset \bigcup_{i \neq j} J_i.$$

Põhjenduseks, kui mingi j korral $J_j \subset \bigcup_{i \neq j} J_i$, siis jätame selle hulga kattest välja ja jätkame ellimineerimist seni kuni eelnimetatud minimaalne kuju on saavutatud. Tähistame $J_i = (c_i, d_i)$, kus $c_i, d_i \in (a,b)$ ja $i \in \{1, \ldots, p\}$. Indeksite järjekorda vajadusel vahetades võime siis eeldada, et $c_1 < \ldots < c_p$ ja $d_1 < \ldots < d_p$.

Eeldame, et $p \geq 3$ ja näitame, et kaks sama paarsusega indeksiga hulka on lõikumatud. Võtame näiteks hulgad J_1 ja J_3, muudel juhtudel on põhjendus analoogiline. Kui $J_1 \cap J_3 \neq \emptyset$, siis lahtisuse tõttu peab ta sisaldama vahemikku, seega $c_3 < d_1$. Sellisel juhul aga $J_2 \subset J_1 \cup J_3$, mis on vastuolus katte minimaalsusega.

Niisiis sõltuvalt arvu p paarsusest saame vaadata lõplikke alamkogumeid lõikumatutest intervallidest kujudel $\{J_1, J_3, J_5, \ldots\}$ ja $\{J_2, J_4, J_6, \ldots\}$. Erijuhtudel, kui $p = 1$ või $p = 2$, saame vastavalt alamkogumid $\{J_1\}$ ning $\{J_1\}$ ja $\{J_2\}$. Järelikult, kehtib kas

$$\sum_{\substack{i=1\\ i \text{ on paaritu}}}^{p} \mathcal{L}(J_i) \geq \sum_{i=1}^{p} \frac{\mathcal{L}(J_i)}{2} \quad \text{või} \quad \sum_{\substack{i=1\\ i \text{ on paaris}}}^{p} \mathcal{L}(J_i) \geq \sum_{i=1}^{p} \frac{\mathcal{L}(J_i)}{2}.$$

Tähistame kogumi, mille korral võrratus kehtib sümboliga $\mathcal{I}$ ning märgime, et

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} \mathcal{L}(I) \geq \sum_{i=1}^{p} \frac{\mathcal{L}(J_i)}{2} > \frac{2\varepsilon_0}{6} = \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

Tõestame teise väite. Tähistame elementide arvu $|P| = m \in \mathbb{N}$. Kui P sisaldab lõigu otspunkte, siis neid võime eirata, sest $E \subset (a, b)$. Niisiis, iga $x \in P$ korral võime eeldada, et $x \in (a, b)$, seega saame valida mingi $\delta_x > 0$ selliselt, et kehtib $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (a, b)$. Valime $\delta > 0$ selliselt, et

$$\delta < \frac{\varepsilon_0}{24m} \quad \text{ja} \quad \delta < \min \{\delta_x \mid x \in P\}.$$

Lisame kogumisse $\mathcal{J}$ vahemikud $(x - \delta, x + \delta), x \in P$, ja tähistame saadud kogumit sümboliga $\mathcal{J}'$, mis on nüüd alamhulga E lahtine kate. Esimese osa põhjal leidub lõplik alamkogum $\mathcal{I}$ lõikumatutest intervallidest kogumist $\mathcal{J}'$, mille pikkuste summa on suurem kui $\varepsilon_0/3$. Kui me eemaldame kogumist $\mathcal{I}$ kõik juurde lisatud intervallid, siis alles jäänud intervallide pikkuste summa peab olema vähemalt

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} \mathcal{L}(I) - 2m\delta > \frac{\varepsilon_0}{3} - 2m\frac{\varepsilon_0}{24m} = \frac{\varepsilon_0}{3} - \frac{\varepsilon_0}{12} = \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Lemma on tõestatud. □

Järgmise lause kohaselt võime diferentseeruvuse uurimise kitsendada funktsiooni pidevuspunktidele.

Lause 1. Olgu $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mittekahanev funktsioon. Siis funktsioonil ϕ on ülimalt loenduv arv katkevuspunkte.

Tõestus. Tõestus tugineb lühikommentaarile ([1, lk 159]) ning on tõestatud ka raamatus [8]. Olgu $c \in [a,b]$ ja tähistame suurused

$$\phi(c+) := \lim_{x\to c+} \phi(x) \quad \text{ja} \quad \phi(c-) := \lim_{x\to c-} \phi(x).$$

Mittekahanevuse tõttu $\phi(c-) \leq \phi(c+)$. Kui $\phi(b) = \phi(a)$, siis ϕ on konstantne ja seega pidev. Oletame, et $\phi(b) - \phi(a) =: A > 0$ ning vaatleme nüüd hulki

$$K_n := \left\{ c \in [a,b] \ : \ \phi(c+) - \phi(c-) \geq \frac{A}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja oletame, et $|K_n| > n$. Siis leiduvad $m \geq n+1$ ja punktid $c_1, \ldots, c_m \in K_n$, kusjuures võime eeldada, et $c_1 < \ldots < c_m$. Mittekahanevuse tõttu kehtib iga $i = 1, \ldots, m-1$ korral $\phi(c_i+) \leq \phi(c_{i+1}-)$, kuid siis on meil rohkem kui n lõikumatut lahtist alamintervalli pikkusega vähemalt $\frac{A}{n}$ lõigus $[\phi(a), \phi(b)]$, mis on võimatu. Järelikult, iga $n \in \mathbb{N}$ korral $|K_n| \leq n$. Pidevuse mõiste kohaselt peab iga katkevuspunkt kuuluma vähemalt ühte hulkadest K_n, seega katkevuspunkte on ülimalt loenduv hulk. □

Definitsioon 11. Olgu $E \subset \mathbb{R}$ ja $f \ : \ E \to \mathbb{R}$. Funktsiooni f ülemiseks ja alumiseks piirväärtuseks hulga E kuhjumispunktis a nimetatakse vastavalt suurusi

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} (\sup\{f(x) \ : \ x \in E, \ |x-a| < \delta\})$$

ja

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} (\inf\{f(x) \ : \ x \in E, \ |x-a| < \delta\}).$$

Märgime, et monotoonsusprintsiibi tõttu on mõlemad piirväärtused olemas ning

$$\liminf_{x\to a} f(x) \leq \limsup_{x\to a} f(x).$$

Kui kehtib teist pidi võrratus, siis on ka olemas vastav piirväärtus protsessis $x \to a$.

Definitsioon 12. Funktsiooni $\phi \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ alumiseks ja ülemiseks tuletiseks nimetatakse vastavalt suurusi

$$\underline{D}\phi(x) \colon = \liminf_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \quad \text{ja} \quad \overline{D}\phi(x) \colon = \limsup_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}.$$

Märkus 1. Märgime, et kui $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ on mittekahanev, siis iga $x \in (a,b)$ korral $\underline{D}\phi(x) \geq 0$.

Tõestus. Olgu $x \in (a,b)$ ja $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mittekahanev. Näitame, et $\underline{D}\phi(x) \geq 0$.

Kuna ϕ on mittekahanev, siis iga $h > 0$ korral $\phi(x) \leq \phi(x+h)$ ja seega

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \geq 0.$$

Analoogiliselt, iga $h < 0$ korral $\phi(x+h) \leq \phi(x)$ ja seega jälle

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \geq 0.$$

Iga $\delta > 0$ korral võime siis öelda, et

$$\inf\left\{ \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \;\middle|\; 0 < |h| < \delta \right\} \geq 0$$

ning võrratus jääb ka kehtima protsessis $\delta \to 0$, seega $\underline{D}\phi(x) \geq 0$. □

Teoreem 3 ([2]. Teoreem 1)**.** Olgu ϕ monotoonne funktsioon lõigul $[a,b]$, siis ϕ on diferentseeruv $\mathcal{L}$-peaaegu kõikjal.

Tõestus. Üldisust kitsendamata eeldame, et ϕ on mittekahanev.

Kuna mittekahaneval funktsioonil on lause 1 põhjal ülimalt loenduv arv katkevuspunkte, siis

$$\mathcal{L}(\{x \,:\, x \in (a,b), \phi \text{ ei ole pidev punktis } x\}) = 0.$$

Et pidevus on tarvilik diferentseeruvuseks, siis

$$\begin{aligned} F' &= \{x \,:\, x \in (a,b),\ \phi \text{ ei ole diferentseeruv}\} \\ &= \{x \,:\, x \in (a,b),\ \phi \text{ ei ole pidev punktis } x\} \\ &\cup \{x \,:\, x \in (a,b),\ \phi \text{ on pidev punktis } x \text{ ja } \overline{D}\phi(x) > \underline{D}\phi(x)\} \end{aligned}$$

ning meil piisab näidata, et hulga

$$F = \{x \,:\, x \in (a,b),\ \phi \text{ on pidev punktis } x \text{ ja } \overline{D}\phi(x) > \underline{D}\phi(x)\}$$

mõõt on null. Kuna ratsionaalarvud asetsevad reaalarvudes tihedalt, siis saame hulga F esitada kujul

$$\begin{aligned} F &= \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}} E_{r,s} \\ &= \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}} \{x \;:\; x\in(a,b),\ \phi \text{ on pidev punktis } x \text{ ja } \overline{D}\phi(x) > r > s > \underline{D}\phi(x)\}, \end{aligned}$$

Oletame, et leiduvad sellised ratsionaalarvud $r > s$ nii, et $E \coloneqq E_{r,s}$ on positiivse mõõduga ja olgu $\varepsilon_0 > 0$ selline, et ta rahuldab omadust 1.

Kui valida $A = \frac{r-s}{2}$, $B = \frac{r+s}{2}$ ja $g(x) = \phi(x) - Bx$, siis

$$\overline{D}g(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \limsup_{h\to 0} \frac{\phi(x+h)-\phi(x)-Bh}{h} = \overline{D}\phi(x) - B$$

ning analoogiliselt saame näidata, et $\underline{D}g(x) = \underline{D}\phi(x) - B$.

Kui $x \in E$, siis $\overline{D}\phi(x) > r > s > \underline{D}\phi(x)$, mistõttu

$$\begin{aligned} \overline{D}g(x) &= \overline{D}\phi(x) - B > r - B = r - \frac{r+s}{2} = \frac{r-s}{2} = A, \\ \underline{D}g(x) &= \underline{D}\phi(x) - B < s - B = s - \frac{r+s}{2} = -\frac{r-s}{2} = -A. \end{aligned}$$

Kuna ϕ pidevus punktis x on samaväärne g pidevusega punktis x, siis kehtib võrdus

$$E = \{x \;:\; x\in(a,b),\ g \text{ on pidev punktis } x,\ \overline{D}g(x) > A \text{ ja } \underline{D}g(x) < -A\}.$$

Olgu $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ lõigu $[a,b]$ suvaline alajaotus, siis

$$\begin{aligned} \Delta(g,P) &= \sum_{i=1}^{n} |g(p_i) - g(p_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\phi(p_i) - Bp_i - \phi(p_{i-1}) + Bp_{i-1}| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \phi(p_i) - \phi(p_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} |Bp_{i-1} - Bp_i| \\ &= \phi(b) - \phi(a) + B(b-a). \end{aligned}$$

Näeme, et g on tõkestatud muuduga, seega leidub $\mathcal{T} := \mathcal{T}(g) = \sup\limits_P \Delta(g, P) < \infty$. Kuna A ja ε_0 on mõlemad positiivsed reaalarvud, siis ülemise raja mõiste kohaselt saame valida alajaotuse $P_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ selliselt, et

$$\Delta(g, P_0) > \mathcal{T} - \frac{A\varepsilon_0}{4}.$$

Olgu $x \in E \setminus P_0$, siis $x \in E \cap (x_{k-1}, x_k)$ mingi k korral. Vaatame kahte varianti.

Esiteks, kui $g(x_{k-1}) < g(x_k)$, siis tingimuse $\underline{D}g(x) < -A$ tõttu saame valida mingid punktid $a_x < x < b_x$ ja vahemiku $(a_x, b_x) \subset (x_{k-1}, x_k)$ piisavalt väikese nii, et

$$\frac{g(b_x) - g(a_x)}{b_x - a_x} < -A. \tag{2}$$

Näitame, et selline vahemik eksisteerib.

Olgu $\underline{D}g(x) = M$. Olgu $\varepsilon_1 > 0$ piisavalt väike nii, et $M < -A - \varepsilon_1$. Alumise piirväärtuse mõiste kohaselt leidub h piisavalt väike nii, et

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} < -A - \varepsilon_1.$$

Vaatame abifunktsiooni

$$G : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad G(\gamma) = \frac{g(x+h) - g(x - \gamma h)}{(1+\gamma)h}. \tag{3}$$

Olgu jada $\gamma_n \to 0$ antud, siis kehtivad koondumised

$$(1 + \gamma_n)h \to h \neq 0 \qquad \text{ja} \qquad g(x - \gamma_n h) \to g(x),$$

kus teine koondumine kehtib g pidevuse tõttu punktis x. Piirväärtuse omadustest järeldub siis, et $G(\gamma_n) \to G(0)$, seega oleme näidanud, et G on pidev punktis $\gamma = 0$. Valime $\gamma > 0$ piisavalt väikese nii, et $|G(\gamma) - G(0)| < \varepsilon_1$, siis

$$G(\gamma) = \frac{g(x+h) - g(x - \gamma h)}{(1+\gamma)h} < -A - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = -A.$$

Seega, kui $h > 0$, siis piisab võtta $a_x = x - \gamma h$ ja $b_x = x + h$ ja olemegi saanud võrratuse (2). Kui $h < 0$, siis valime lihtsalt $a_x = x + h$ ja $b_x = x - \gamma h$.

Analoogiliselt, kui $g(x_{k-1}) \geq g(x_k)$, siis $\overline{D}g(x) > A$ tõttu saame valida punktid $a_x < x < b_x$ ja vahemiku $(a_x, b_x) \subset (x_{k-1}, x_k)$ piisavalt väikese nii, et

$$\frac{g(b_x) - g(a_x)}{b_x - a_x} > A. \tag{4}$$

Valime siis iga x korral sellised vahemikud ning vaatame kogumit

$$\mathcal{J} = \{(a_x, b_x) \mid x \in E \setminus P_0\}.$$

See on hulga $E \setminus P_0$ lahtine kate ja lemma 3 teise punkti põhjal leidub temas lõplik lõikumatute intervallide alamkogum $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_N\}$ nii, et

$$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}(I_i) > \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Moodustame lõigul $[a, b]$ alajaotuse

$$Q = \{a = y_0, y_1, \ldots, y_m = b\},$$

kus y_i on hulgast P_0 või hulga $\mathcal{I}$ intervallide otspunktide hulgast. Vaatame mõnda osalõiku $[x_{k-1}, x_k]$, mis sisaldab vähemalt ühte hulga $\mathcal{I}$ intervalli. See tähendab, et sellel osalõigul saame omakorda vaadelda alajaotust

$$Q_k = \{x_{k-1} = z_0, z_1, \ldots, z_r = x_k\}.$$

Kui $g(x_{k-1}) < g(x_k)$, siis võtame lemma 2 sõnastuses S rolli nende indeksite hulga, mille korral kehtib võrratus (2) ning järeldame, et

$$\Delta(g_{[x_{k-1}, x_k]}, Q_k) = \sum_{i=1}^{r} |g(z_i) - g(z_{i-1})| > |g(x_k) - g(x_{k-1})| + A \sum_{i \in S} (z_i - z_{i-1}).$$

Järeldame sama, kui $g(x_{k-1}) \geq g(x_k)$. Sel juhul võtame S rolli nende indeksite hulga, mille korral kehtib võrratus (4).

Nüüd aga järeldame funktsiooni g muudu kohta alajaotuse Q suhtes, et

$$\Delta(g,Q) > \Delta(g,P_0) + A\sum_{i=1}^{N}\mathcal{L}(I_i) > \mathcal{T} - \frac{A\varepsilon_0}{4} + A\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right) = \mathcal{T},$$

kuid see on vastuolus arvu $\mathcal{T}$ valikuga. Järelikult, hulga E mõõt on null ja seega ka hulga F mõõt on null. $\square$

Teoreem 4 ([2]. Teoreem 2)**.** Kui ϕ on mittekahanev funktsioon lõigul $[a,b]$, siis ϕ' on lõplik $\mathcal{L}$-peaaegu kõikjal.

Tõestus. Kuna ϕ on mittekahanev ja märkuse 1 põhjal on $\overline{D}\phi(x) \geq \underline{D}\phi(x) \geq 0$ iga $x \in (a,b)$ korral, siis meil piisab näidata, et $\overline{D}\phi(x) < \infty$ peaaegu kõikjal vahemikus (a,b). Defineerime hulga

$$E = \{x \in (a,b) : \overline{D}\phi(x) = \infty,\ \ \phi \text{ on pidev punktis } x\}$$

ja näitame, et ta mõõt on null.

Oletame vastuväiteliselt, et E mõõt ei ole null. Olgu M suvaline suure väärtusega reaalarv ja rahuldagu $\varepsilon_0 > 0$ omaduse 1 tingimusi. Olgu $x \in E$, siis $\overline{D}\phi(x) > M$ ja leiduvad analoogiliselt teoreemi 3 tõestuses defineeritud abifunktsiooni (3) põhjal punktid a_x ning b_x nii, et $a_x < x < b_x,\ (a_x, b_x) \subset (a,b)$ ja

$$\frac{\phi(b_x) - \phi(a_x)}{b_x - a_x} > M.$$

Seega $\mathcal{J} := \{(a_x, b_x)\ :\ x \in E\}$ katab hulga E ning lemma 3 kohaselt leidub lõikumatute intervallide lõplik alamkogum $\mathcal{I} := \{I_1, I_2, \ldots, I_N\}$ nii, et $\sum_{i=1}^{N}\mathcal{L}(I_i) > \frac{\varepsilon_0}{3}$. Olgu $I_i = (a_i, b_i)$ iga i korral, siis ϕ mittekahanemise tõttu

$$\phi(b) - \phi(a) \geq \sum_{i=1}^{N}(\phi(b_i) - \phi(a_i)) > \sum_{i=1}^{N} M(b_i - a_i) > M\frac{\varepsilon_0}{3},$$

mis on vastuolus arvu $\phi(b) - \phi(a)$ lõplikkusega. $\square$

3 Rademacheri teoreem

Nüüd oleme valmis tõestama Rademacheri teoreemi - st väite, et Lipschitzi funktsioon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv $\mathcal{L}^n$-peaaegu kõikjal.

Definitsioon 13. Funktsiooni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nimetatakse Lipschitzi funktsiooniks, kui leidub konstant C nii, et iga $x, y \in \mathbb{R}^n$ korral

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|.$$

Teoreemi tõestuse võime jämedalt öeldes jagada kolmeks osaks.

3.1 Ühe muutuja Lipschitzi funktsiooni diferentseeruvus

Näitamaks, et Lipschitzi funktsioon $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv $\mathcal{L}$-p.k, piisab eelneva töö põhjal näidata, et ϕ ahend igal kompaktsel lõigul on tõkestatud muuduga. Seda on mugav teha kasutades absoluutse pidevuse mõistet.

Definitsioon 14. Funktsioon $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ on absoluutselt pidev lõigul $[a, b]$ kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et mistahes paarikaupa lõikumatute alamintervallide $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, $i = 1, \ldots, n$, kus $n \in \mathbb{N}$, korral kehtib implikatsioon

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\phi(b_i) - \phi(a_i)| < \varepsilon.$$

Lause 2 ([7]. Lause 7)**.** Olgu ϕ Lipschitzi funktsioon kinnisel tõkestatud lõigul $[a, b]$, siis ϕ on absoluutselt pidev.

Tõestus. Olgu ϕ Lipschitzi funktsioon. See tähendab, et leidub $C > 0$ nii, et

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|$$

iga $x, y \in [a, b]$ korral. Näitame, et sellest järeldub ϕ absoluutne pidevus. Olgu $\varepsilon > 0$ ja valime $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Siis mistahes paarikaupa lõikumatute $(x_i, y_i) \subset [a, b]$,

$i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$ korral, kus

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \delta,$$

saame hinnata

$$\sum_{i=1}^{n} |\phi(x_i) - \phi(y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} C|x_i - y_i| = C \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < C \cdot \delta = \varepsilon.$$

Definitsiooni kohaselt tähendab see, et ϕ on absoluutselt pidev. □

Lause 3 ([6]. Lemma 11)**.** Olgu ϕ absoluutselt pidev kinnisel tõkestatud lõigul $[a, b]$. Siis ϕ on tõkestatud muuduga lõigul $[a, b]$.

Tõestus. Näitamaks, et ϕ on tõkestatud muuduga, piisab näidata, et tema muut on tõkestatud. Kuna ϕ on absoluutselt pidev, siis leidub $\delta > 0$ selliselt, et mistahes paarikaupa lõikumatute alamintervallide $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, $i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$ korral kehtib implikatsioon

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\phi(b_i) - \phi(a_i)| < 1.$$

Valime lõigu $[a, b]$ alajaotuse $P' := \{a = a_0, a_1, \ldots, a_m = b\}$ selliselt, et iga $i = 1, \ldots, m-1$ korral $a_i - a_{i-1} = \frac{\delta}{2}$ ja $a_m - a_{m-1} \leq \frac{\delta}{2}$. Sellest järeldub, et

$$m \leq \frac{2(b-a)}{\delta} + 1 < \infty.$$

Olgu nüüd $P := \{a = b_0, b_1, \ldots, b_n = b\}$ suvaline lõigu $[a, b]$ alajaotus. Moodustame alajaotuse

$$P^* := P \cup P' = \{a = c_0, c_1, \ldots, c_N = b\}$$

ning tähistame sümboliga P_i^* nende punktide hulka, mis kuuluvad lõiku $[a_{i-1}, a_i]$, kus $i = 1, \ldots, m$. See tähendab, et iga $i = 1, \ldots, m$ korral

$$P_i^* = \{c_{i_k} \in P^* \mid c_{i_k} \in [a_{i-1}, a_i]\}.$$

Olgu igas hulgas P_i^* elementide arv $r_i \in \mathbb{N}$. Siis kehtivad võrratused

$$\begin{aligned}\Delta(\phi, P) = \sum_{i=1}^{n} |\phi(b_i) - \phi(b_{i-1})| \leq \Delta(\phi, P^*) \\ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} |\phi(c_{i_j}) - \phi(c_{i_{j-1}})| \\ \leq m.\end{aligned}$$

Et alajaotus P on suvaline, siis funktsiooni ϕ muut on tõkestatud. □

Järeldus 1. Lipschitzi funktsioon $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv $\mathcal{L}$-peaaegu kõikjal.

Tõestus. Kui $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lipschitzi funktsioon, siis tema ahend igal kompaktsel intervallil $[-M, M]$, $M \in \mathbb{N}$, on ka Lipschitzi funktsioon. Lausete 2 ja 3 põhjal on ta sellel lõigul ka absoluutselt pidev ja seega tõkestatud muuduga, mistõttu ta on teoreemi 2 põhjal esitatav kahe monotoonse funktsiooni vahena.

Järelikult teoreemi 3 põhjal on $\phi: [-M, M] \to \mathbb{R}$ diferentseeruv $\mathcal{L}$-p.k. iga naturaalarvu M korral. See tähendab, et iga $M \in \mathbb{N}$ korral me saame vaadata hulka

$$A_M = \{x \mid x \in [-M, M],\ \phi(x) \text{ ei ole diferentseeruv}\}$$

ja teame, et $\mathcal{L}(A_M) = 0$. Defineerime hulga

$$A = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} A_M.$$

Kuna A on nullmõõduga hulkade loenduv ühend ja Lebesgue'i mõõt on loenduvalt subaditiivne, siis $\mathcal{L}(A) = 0$. See tähendabki, et ϕ on diferentseeruv peaaegu kõikjal kogu reaalteljel $\mathbb{R}$. □

3.2 Suunatuletise arvutamine

Teise sammuna Rademacheri teoreemi tõestuseks näitame, et Lipschitzi funktsioonil on olemas kõik osatuletised $\mathcal{L}^n$-peaaegu kõikjal ning et suunatuletist arvutatakse nendes punktides, kus gradient eksisteerib, täpselt samamoodi nagu analüüsi kursustes oleme näinud.

Kirjeldame kõigepealt mõõtu $\mathcal{L}^n$.

Definitsioon 15 ([3]. Def 1.16)**.** Olgu $\mu : X \to [0,\infty]$ ja $\nu : Y \to [0,\infty]$ mõõdud. Korrutismõõt $\mu \times \nu : 2^{X\times Y} \to [0,\infty]$ defineeritakse võrdusega

$$(\mu \times \nu)(S) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i)\right\}$$

iga $S \subseteq X \times Y$ korral, kus $A_i \subseteq X$ ja $B_i \subseteq Y$, $i \in \mathbb{N}$ on vastavalt μ- ja ν-mõõtuvad hulgad selliselt, et

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \times B_i).$$

Ruumi $\mathbb{R}^n$ n-mõõtmeline Lebesgue'i mõõt defineeritakse induktiivselt võrdusega

$$\mathcal{L}^n := \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1 = \underbrace{\mathcal{L}^1 \times \cdots \times \mathcal{L}^1}_{\text{n korda}}.$$

Märkus 2. Näitame, kuidas ruumis $\mathbb{R}^n$ antud sirge alamhulki mõõta ühemõõtmelise Lebesgue'i mõõduga. Olgu $x \in \mathbb{R}^n$ ja $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ning antud sirge $L = \{x + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$. Defineerime funktsiooni

$$\gamma_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma_x(t) = x + tv \in L.$$

Kuna γ_x on pidev, siis ta on ka mõõtuv. Olgu nüüd $E \subset \mathbb{R}^n$ ja vaatame hulka

$$A := \gamma_x^{-1}(E \cap L) = \{t \in \mathbb{R} \mid x + tv \in E \cap L\}.$$

Muutuja vahetuse ([4]. Teoreem 7.23) põhjal saame

$$\mathcal{L}^n(E \cap L) = \int_{E\cap L} d\mathcal{L}^n(s) = \int_A \chi_{E\cap L}(\gamma_x(t))d\mathcal{L}^1(t) = \int_A d\mathcal{L}^1(t) = \mathcal{L}^1(A).$$

Tähistame siis sellisel juhul $\mathcal{L}^1(E \cap L) := \mathcal{L}^1(A)$.

Järgnevat teoreemi nimetatakse Fubini teoreemiks. Sõnastame selle meile tarvis erijuhu järgi.

Teoreem 5 ([5]. Teoreem 3.6)**.** Olgu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-integreeruv. Siis funktsioon

$$f^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^x(y) = f(x, y),$$

on $\mathcal{L}$-integreeruv peaaegu iga $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ korral (st $\mathcal{L}^{n-1}$-p.k) ning kehtib võrdus

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^x d\mathcal{L} \right) d\mathcal{L}^{n-1}.$$

Tõestuse käigus on meil tarvis vahetada piirväärtuse võtmise ning integreerimise operatsioone. Seda võimaldab meil teha hästi tuntud Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreem.

Teoreem 6 ([5]. Teoreem 3.4)**.** Olgu funktsioonid f_n, $n \in \mathbb{N}$, integreeruvad ja $f\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ sellised, et

(a) $f_n \to f$ p.k.;

(b) leidub integreeruv funktsioon g selliselt, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $|f_n| \leq g$ p.k.

Siis ka f on integreeruv, kusjuures

$$\int f = \lim_{n \to \infty} \int f_n.$$

Mõnikord on raske otse näidata, et kaks funktsiooni on võrdsed peaaegu kõikjal. Selleks on hea kasutada järgmist tulemust, mida kasutatakse ka kõikides viidatud allikate Rademacheri teoreemi tõestustes. Tulemus on näiteks sõnastatud ülesandena 2.2.5 raamatus [9] ning tihti nimetatakse seda ka variatsioonarvutuse põhilemmaks.

Meenutame, et sümboliga $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tähistatakse kompaktsel kandjal lõpmatult diferentseeruvate (st siledate) funktsioonide hulka ruumis $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4. Olgu $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Lebesgue'i mõttes) integreeruv igal kompaktsel alamhulgal. Kui iga $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ korral

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)g(x)dx = 0,$$

siis $F = 0$ $\mathcal{L}^n$-peaaegu kõikjal.

Definitsioon 16 ([3]. Def 1.10)**.** Funktsioon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on Boreli mõttes mõõtuv, kui iga Boreli hulga $U \subseteq \mathbb{R}$ korral $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$ on Boreli hulk.

Meenutame, et funktsiooni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suunatuletiseks nimetatakse piirväärtust

$$D_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

kus $x \in \mathbb{R}^n$, v on ühikvektor ja $t \in \mathbb{Q}$.

Mõnikord defineeritakse gradient diferentseeruvate funktsioonide jaoks. Käesolevas töös mõistame gradiendi all mingis ette antud punktis selles punktis antud osatuletiste vektorit, eeldusel, et see eksisteerib.

Teoreem 7. Olgu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzi funktsioon ja $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ühikvektor. Siis eksisteerib suunatuletis $D_v f(x)$ $\mathcal{L}^n$-peaaegu kõikjal ning kehtib arvutuseeskiri

$$D_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v$$

nendes punktides, kus gradient eksisteerib.

Tõestus. Olgu $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ühikvektor ja defineerime

$$A_v := \{x \in \mathbb{R}^n \mid D_v f(x) \text{ ei eksisteeri}\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{D}_v f(x) < \overline{D}_v f(x)\}.$$

Kuna f on pidev, siis ta on Boreli mõttes mõõtuv ([5]. Teoreem 1.2) ning ([5]. Teoreem 1.6) põhjal on ka

$$\overline{D}_v f(x) : = \limsup_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

kus t on ratsionaalarv, Boreli mõttes mõõtuv.

Analoogiliselt on ka

$$\underline{D}_v f(x) : = \liminf_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Boreli mõttes mõõtuv, mistõttu on A_v Boreli hulk.

Vaatame ühte v-sihilist sirget $L \subset \mathbb{R}^n$. See tähendab, et $L = \{x + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, kus $x \in \mathbb{R}^n$. Saame iga $x \in \mathbb{R}^n$ korral defineerida ühe muutuja funktsiooni

$$\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi_x(t) := f(x + tv), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kuna f on Lipschitzi funktsioon, siis ϕ_x on ka Lipschitzi funktsioon ning seega järelduse 1 põhjal diferentseeruv $\mathcal{L}^1$-p.k.

Täpsemalt, märkusele 2 tuginedes saame, et

$$\mathcal{L}^1(A_v \cap L) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_v \cap L}(x + tv) d\mathcal{L}^1(t) = 0.$$

Fubini teoreemi 5 põhjal järeldame, et

$$\mathcal{L}^n(A_v) = (\mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1)(A_v) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{L}^1(A_v \cap L_y) d\mathcal{L}^{n-1}(y) = 0,$$

kus eelviimane võrdus kehtib, sest kõik sirged sihivektoriga v on parametriseeritavad $\mathbb{R}^{n-1}$ kaudu. Kuna v on suvaline, siis näeme, et ka eraldi osatuletised eksisteerivad $\mathcal{L}^n$-p.k ja seega on ka olemas funktsiooni f gradient $\mathcal{L}^n$-p.k.

Olgu $v = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, siis

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{f(x + tv) - f(x)}{t}\right] g(x)\ dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\frac{g(x) - g(x - tv)}{t}\right]\ dx, \tag{5}$$

sest kasutades muutujavahetust $y = x + tv$ on $dy = dx$ ja

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{f(x + tv) - f(x)}{t}\right] g(x)\ dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)g(y - tv)}{t} dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)g(x)}{t} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)g(x - tv) - f(x)g(x)}{t} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\frac{g(x - tv) - g(x)}{t}\right]\ dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\frac{g(x) - g(x - tv)}{t}\right]\ dx.
\end{aligned}$$

Meenutame, et diferentseeruva (ka sileda) funktsiooni g korral

$$D_v g(x) = v \cdot \nabla g(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} v_i g_{x_i}(x). \tag{6}$$

Et integraalialune funktsioon on nullist erinev kompaktsel hulgal, siis ta on tõkestatud ja seega domineeritud koonduvuse 6 teoreemist järelduvad võrdused

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} D_v f(x) g(x)\, dx &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}\right] g(x)\, dx && \text{(Teoreem 6)}\\
&= -\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\frac{g(x)-g(x-tv)}{t}\right] dx && \text{(Võrdus (5))}\\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) D_v g(x)\, dx && \text{(Teoreem 6)}\\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sum_{i=1}^{n} v_i g_{x_i}(x)\, dx && \text{(Võrdus (6))}\\
&= -\sum_{i=1}^{n} v_i \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_{x_i}(x)\, dx\\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i \int_{\mathbb{R}^n} f_{x_i}(x) g(x)\, dx && \text{(Võrdus (5))}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} v_i f_{x_i}(x) g(x)\, dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (v \cdot \nabla f(x)) g(x)\, dx. && \text{(Võrdus (6))}
\end{aligned}$$

Kuna need võrdused kehtivad iga $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ korral, siis lemma 4 põhjal järeldame, et

$$D_v f(x) = v \cdot \nabla f(x) \quad (\mathcal{L}^n\text{-p.k}).$$

Teoreem on tõestatud. □

3.3 Lipschitzi funktsiooni diferentseeruvus

Definitsioon 17 ([3]. Def 3.2)**.** Funktsioon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $x \in \mathbb{R}^n$, kui leidub pidev lineaarkujutus $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nii, et

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x) - L(y - x)|}{\|x - y\|} = 0.$$

Kujutust L nimetatakse sel juhul ka funktsiooni f tuletiseks punktis x ning tähistatakse sümboliga $Df(x)$.

Rademacheri teoreemi tõestuse viimase sammuna näitame, et Lipschitzi funktsioon on diferentseeruv $\mathcal{L}^n$-peaaegu kõikjal, kusjuures tema tuletis $Df(x)$ on võrdne funktsiooni f gradiendiga $\mathcal{L}^n$-peaaegu kõikjal.

Sõnastame selle järgneva teoreemina.

Teoreem 8. Olgu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzi funktsioon. Siis f on diferentseeruv $\mathcal{L}^n$-peaaegu kõikjal, kusjuures

$$Df(x) = \nabla f(x) \quad (\mathcal{L}^n\text{-p.k}).$$

Tõestus. Olgu $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ ühiksfääri $S(1) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ loenduv ja kõikjal tihe osahulk. Defineerime iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$A_k \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid D_{v_k} f(x) \text{ ja } \nabla f(x) \text{ eksisteerivad ning } D_{v_k} f(x) = v_k \cdot \nabla f(x)\}$$

ja

$$A \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Märgime, et $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$, sest teoreemi 7 tõestuses näitasime, et $D_v f(x)$ ja $\nabla f(x)$ eksisteerivad $\mathcal{L}^n$-p.k.

Teoreemi tõestamiseks näitame, et f on diferentseeruv iga $x \in A$ korral.

Fikseerime $x \in A$ ja olgu $v \in S(1)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ ja defineerime

$$G(x, v, t) \coloneqq \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} - v \cdot \nabla f(x).$$

Nüüd olgu C funktsiooni f Lipschitzi konstant, siis

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}\right| \le \lim_{t\to 0}\frac{C\|x+tv-x\|}{|t|} = C$$

mistõttu, kui $v' \in S(1)$, kehtib

$$\begin{aligned}
|G(x,v,t)-G(x,v',t)| &= \left|\frac{f(x+tv)-f(x+tv')}{t} + (v-v')\cdot\nabla f(x)\right| \\
&\le \left|\frac{f(x+tv)-f(x+tv')}{t}\right| + |(v-v')\cdot\nabla f(x)| \\
&\overset{(*)}{\le} C\|v-v'\| + \|\nabla f(x)\|\cdot\|v-v'\| \\
&= \|v-v'\|\left|C + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)^2}\right| \\
&\le \|v-v'\||C+\sqrt{n}C| \\
&= (\sqrt{n}+1)C\|v-v'\|,
\end{aligned}$$

kus võrratus $(*)$ kehtib Lipschitzi tingimuse ning Algebra I materjalidest tuttava Cauchy-Schwarzi võrratuse tõttu.

Fikseerime $\varepsilon > 0$ suvaliselt. Kuna $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ on kõikjal tihe, siis me saame katta kogu ühiksfääri lahtiste keradega, keskpunktidega v_k, raadiusega

$$\frac{\varepsilon}{2(\sqrt{n}+1)C}.$$

Samal ajal ühiksfääri kompaktsuse tõttu saame valida mingi piisavalt suure N nii, et lahtised kerad keskpunktidega $v_1, \dots, v_N$ katavad ära kogu ühiksfääri.

Seega, kui $v \in S(1)$, kehtib

$$\|v - v_k\| \le \frac{\varepsilon}{2(\sqrt{n}+1)C}$$

mingi $k \in \{1, \dots, N\}$ korral.

Nüüd, kuna

$$\lim_{t\to 0} G(x, v_k, t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x+tv_k) - f(x)}{t} - v_k \cdot \nabla f(x)\right) = D_{v_k} f(x) - v_k \cdot \nabla f(x) = 0,$$

siis meil leidub $\delta > 0$ nii, et

$$|G(x, v_k, t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

iga $0 < |t| < \delta$ korral, kus $k = 1, \ldots, N$. Niisiis iga $v \in S(1)$ korral leidub $k \in \{1, \ldots, N\}$ nii, et

$$\begin{aligned}
|G(x, v, t)| &= |G(x, v_k, t) + G(x, v, t) - G(x, v_k, t)| \\
&\leq |G(x, v_k, t)| + |G(x, v, t) - G(x, v_k, t)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + (\sqrt{n} + 1)C\|v - v'\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + (\sqrt{n} + 1)C \cdot \frac{\varepsilon}{2(\sqrt{n} + 1)C} = \varepsilon
\end{aligned}$$

kui $0 < |t| < \delta$.

Nüüd, valides suvalise $y \in \mathbb{R}^n$, kus $y \neq x$, siis saame defineerida $v := \frac{y-x}{\|y-x\|}$ nii, et $y = x + tv$ ja $t := \|x - y\|$. Sellisel juhul

$$\lim_{y\to x} \frac{|f(x+tv) - f(x) - tv \cdot \nabla f(x)|}{\|x - y\|} = \lim_{y\to x} \frac{|f(y) - f(x) - \nabla f(x)(y - x)|}{\|x - y\|} = 0.$$

See tähendabki, et f on diferentseeruv punktis x ja $Df(x) = \nabla f(x)$ iga $x \in A$ korral. Teoreem on tõestatud. $\square$

Viimane teoreem lõpetas ka meie Rademacheri teoreemi tõestuse.

3.4 Üks näide

Meenutame, et alamhulk $A \subset \mathbb{R}^n$ on kumer, kui mistahes punktide $x, y \in A$ ja $\lambda \in (0, 1)$ korral $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ (st sirglõik, mis ühendab punkte x, y sisaldub hulgas A).

Kumeral hulgal $A \subset \mathbb{R}^n$ defineeritud funktsioon $f : A \to \mathbb{R}$ on kumer, kui mistahes

$x, y \in A$ ja $\lambda \in (0,1)$ korral

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

(st sirglõik, mis ühendab kahte punkti funktsiooni graafikul jääb funktsiooni graafikust ülespoole). Kumerad funktsioonid on näiteks $f(x) = |x|$ või $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Näitamaks nüüd, et iga kumer funktsioon on diferentseeruv peaaegu kõikjal, piisab näidata, et kumer funktsioon on lokaalselt Lipschitzi funktsioon. Raamatu [3] teoreemi 6.7 põhjal kehtib järgmine.

Teoreem 9. Olgu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kumer. Siis f ahend igal kompaktsel alamhulgal on Lipschitzi funktsioon.

Tõestus. Näitame kõigepealt, et f on tõkestatud igas kompaktses alamhulgas. Olgu ruumis $\mathbb{R}^n$ antud n-mõõtmeline risttahukas $K = [-M, M]^n$, kus $M > 0$. Tähistame selle risttahuka tipud $\{v_1, \ldots, v_{2^n}\} = V$. Olgu $x \in K$, siis saame ta esitada kujul

$$x = \sum_{k=1}^{2^n} \lambda_k v_k,$$

kus $0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^n} \leq 1$ on sellised, et $\sum \lambda_k = 1$. Järelikult

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^{2^n} \lambda_k f(v_k) \leq \max_{v \in V} f(v) < \infty,$$

seega eksisteerib $S = \sup_{x \in K} f(x)$. Teiselt poolt, olgu jälle $x \in K$, siis

$$f(0) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}S,$$

millest järeldub, et

$$f(x) \geq 2f(0) - S.$$

Niisiis, f on tõkestatud hulgas K.

Näitamaks, et f ahend kompaktsel alamhulgal on Lipschitzi funktsioon, piisab näidata, et see kehtib kinnisel ühikkeral $B(1)$, st

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}, \quad r > 0.$$

Olgu $x, y \in B(1)$ nii, et $x \neq y$. Valime $\mu > 0$ selliselt, et

$$\|y + \mu(x - y)\| = 2.$$

Tähistame $z = y + \mu(x - y)$. Siis kehtivad

$$\mu = \frac{\|z - y\|}{\|x - y\|} > 1 \quad \text{ja} \quad x = \frac{1}{\mu} z + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) y.$$

Võtame $C = 2 \sup_{s \in B(2)} |f(s)| < \infty$, siis kumeruse põhjal saame, et

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{1}{\mu} f(z) + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) f(y) \\ &= f(y) + \frac{1}{\mu}(f(z) - f(y)) \\ &\leq f(y) + C\|x - y\|, \end{aligned}$$

kus viimane võrratus kehtib, sest $\|y - z\| \geq 1$ ning sellest omakorda järeldame

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|,$$

seega f ahend ühikkeral on Lipschitzi funktsioon, nagu tarvis. □

Märkus 3. Kuna pidevus on lokaalne omadus, siis näeme kõigepealt, et kumer funktsioon on pidev. Rademacheri teoreemist järeldub ka, et kumer funktsioon on diferentseeruv peaaegu kõikjal. Märgime veel tõestuseta, et kehtib veelgi tugevam väide. Kumer funktsioon on kaks korda diferentseeruv peaaegu kõikjal - see on Aleksandrovi teoreem (vt [3, Teoreem 6.9]).

Kokkuvõte

Töös anti detailne tõestus Rademacheri teoreemile. Tutvuti tõkestatud muuduga funktsioonidega ning tõestati nende esitus kahe monotoonse funktsiooni vahena. Samuti anti Lebesgue'i diferentseerimise teoreemi tõestus.

Saadud tulemusi kasutati viimaks Rademacheri teoreemi tõestamisel laiendades ühe muutuja Lipschitzi diferentseeruvust mitme muutuja juhule ning näidati, et mitme muutuja Lipschitzi funktsioonil eksisteerib suunatuletis peaaegu kõikjal koos arvutuseeskirjaga. Tõestus lõpetati Lipschitzi funktsiooni peaaegu kõikjal diferentseeruvuse näitamisega.

Lisaks illustreeriti Rademacheri teoreemi näitega, et iga kumer funktsioon on samuti diferentseeruv peaaegu kõikjal.

Kasutatud allikad

[1] R. P. Boas. *A Primer of Real Functions*. 3rd. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1981.

[2] M.W. Botsko. "An Elementary Proof of Lebesgue's Differentiation Theorem". *The American Mathematical Monthly* 110.9 (2003), lk. 834–838. URL: http://www.jstor.org/stable/3647803 (vaadatud 06.03.2025).

[3] L.C. Evans ja R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, 2015.

[4] J. Lember. *Tõenäosusteooria II loengukonspekt ja ülesanded*. Loengumaterjal. Tartu Ülikool. 2024.

[5] M. Põldvere. *Mõõt ja Lebesgue'i integraal*. Loengumaterjal. Tartu Ülikool, Mõõt ja Lebesgue'i integraal. 2021.

[6] H.L. Royden. *Real Analysis 3Rd Ed.* Prentice-Hall Of India Pvt. Limited, 1988.

[7] H.L. Royden ja P. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Prentice Hall, 2010.

[8] W. Rudin. *Real and complex analysis, 3rd ed.* USA: McGraw-Hill, Inc., 1987.

[9] T. Tao. *An Introduction to Measure Theory*. American Mathematical Society, 2011.

[10] N. Weaver. *Lipschitz algebras, second edition*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., juuni 2018, lk. 1–458. DOI: 10.1142/9911.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Marin-Brith Põldma,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose Lipschitzi funktsiooni peaaegu kõikjal diferentseeruvus, mille juhendaja on Alvin Lepik, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Marin-Brith Põldma
29.05.2025