

TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Matemaatika eriala

Svetlana Frolova

Ruutspainidega kollokatsioonimeetod Fredholmi teist liiki
integraalvõrrandi lahendamiseks

Matemaatika eriala

Magistritöö (30EAP)

Juhendaja: professor Arvet Pedas

TARTU 2019

Ruutsplainidega kollokatsioonimeetod Fredholmi teist liiki integraalvõrrandi lahendamiseks

Magistritöö

Svetlana Frolova

Lühikokkuvõte. Käesolevas magistritöös vaadeldakse funktsioonide interpoleerimist ruutsplainidega ning ruutsplanide kasutamist lineaarse teist liiki Fredholmi integraalvõrrandi ligikaudseks lahendamiks kollokatsioonimeetodiga. Töö eesmärk on uurida esitatud meetodi koonduvust ning koonduvuskiirust.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: ruutsplainid, integraalvõrrandid, kollokatsioonimeetod.

Quadratic spline collocation method for solving Fredholm integral equations of the second kind

Master's thesis

Svetlana Frolova

Abstract. In the present master's thesis we consider the interpolation by quadratic splines and find an approximate solution for the second kind Fredholm integral equation with a quadratic spline collocation method. The purpose of this thesis is to study convergence and convergence rate of the proposed algorithm.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key words: interpolation by quadratic splines, integral equation, collocation method.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Abitulemused	5
2 Ruutsplainid	8
2.1 Ruutsplaini mõiste.....	8
2.2 Interpoleeriva ruutsplaini esitus esimeste momentide kaudu.....	9
2.3 Ruutsplaini esitus baassplainide kaudu.....	14
3 Fredholmi tesist liiki integraalvõrrandi laendi olemasolu, ühesus ja siledus	16
4 Kollokatsioonimeetod	20
4.1 Meetodi kirjeldu.....	20
4.2 Kollakatsioonimeetodi koondumine.....	21
5 Arvulised tulemused	28
5.1 Näide 1.....	28
5.2 Näide 2.....	30
Kasutatud kirjandus	31
Lisa	34

Sissejuhatus

Käesolevas magistritöös arendatakse edasi ja üldistatakse töös [3] saadud tulemusi. Magistritöös vaadeldakse lõigul $[a,b]$ määratud funktsiooni u väärtuste u_0, u_1, \dots, u_n interpoleerimist võrguga $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ seotud ruutsplainiga. Saadud tulemusi kasutatakse lineaarse integraalvõrrandi

$$u(x) = \int_a^b |x - y|^{-\alpha} K(x, y) u(y) dy + f(x) \quad (x \in [a, b], 0 \leq \alpha < 1)$$

(1)

ligikaudsel lahendamisel. Eeldatakse, et f ja K on antud funktsioonid, mis on pidevad vastavalt lõigul $[a,b]$ ja ruudul $[a,b] \times [a,b]$ ning u on otsitav. Käsitletakse võrrandi (1) lahendi olemasolu ja ühesusega ning siledusega seotud küsimusi. Integraalvõrrandi lahendile u lähendi u_n leidmiseks kasutatakse ruutsplainidega kollokatsioonimeetodit. Uuritakse vaadeldava meetodi koonduvust ja vea $u - u_n$ käitumist, kui $n \rightarrow \infty$. Saadud teoreetilisi tulemusi võrreldakse testülesannete lahendamisel saadud arvuliste tulemustega.

Magistritöö koosneb viiest osast. Esimeses osas on esitatud abitulemused. Teises osas on käsitletud ruutsplaini mõistet ja interpoleeriva ruutsplaini esitamist nii splaini esimest järku tuletise väärtuste kaudu kui ka B-splainide abil. Kolmandas osas on käsitletud Fredholmi teist liiki integraalvõrrandi lahendi olemasolu, ühesust ja silledust. Neljandas osas on vaadeldud integraalvõrrandi (1) lahendamist kollokatsioonimeetodiga. On tõestatud kollokatsioonimeetodi koonduvus (Teoreem 11) ja hinnatud lähislahendite viga (Teoreem 12). Viimases osas on töös välja töötatud ruutsplainidega kollokatsioonimeetodit rakendatud konkreetsete integraalvõrrandite ligikaudsel lahendamisel. Arvuliste tulemuste saamiseks on kasutatud paketti Mathcad.

1 Abitulemused

Esitame mõned käesolevas töös kasutatavad mõisted ja abitulemused.

Olgu R reaalarvude hulk ja N naturaalarvude hulk. Sümboliga $C^m[a, b]$ ($m \in N$) tähistame kõigi lõigul $[a, b]$ m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka. Kui $m = 0$, siis $C^0[a, b] = C[a, b]$ on kõigi lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulk. Hulk $C[a, b]$ on Banachi ruum normiga

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|, x \in C[a, b]. \quad (1.1)$$

Olgu E ja F normeeritud ruumid. Tähistame sümboliga $\mathcal{L}(E, F)$ pidevate lineaarsete operaatorite hulka ruumist E ruumi F .

Definitsioon 1. Olgu E ja F normeeritud ruumid. Operaatorit $A: E \rightarrow F$ nimetatakse kompaktsiks, kui ta ruumi E iga tõekestatud hulga teisendab suhteliselt kompaktsiks hulgaks ruumis F (vt [4], lk 229). Hulka K normeeritud ruumis nimetatakse suhteliselt kompaktsiks, kui igast K elementidest moodudtatud jadast saab eraldada koonuva osajada (vt [4], lk 39).

Definitsioon 2. Hulka $D \subset E$ nimetatakse põhihulgaks normeeritud ruumis E , kui hulga D lineaarne kate (s.o. hulga D elementide kõikvõimalike lineaarsete kombinatsioonide hulk) on kõikjal tihe ruumis E , s.t. $\overline{L(D)} = E$ (vt [4], lk 135).

Definitsioon 3. Olgu E ja F normeeritud ruumid. Öeldakse, et operaatorite jada $A_n: E \rightarrow F$ koondub punktiviisi ehk kõikjal ruumis E , kui iga $x \in E$ korral jada $A_n x$ koondub ruumis F (vt [4], lk 135).

Teoreem 1 (Banach-Steinhausi teoreem, vt [4], lk 134-136).

Olgu E Banachi ruum, F normeeritud ruum ja D põhihulk ruumis E . Jada $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ koondub punktiviisisi operaatoriks $A \in \mathcal{L}(E, F)$ (st $A_n x \rightarrow Ax$ iga $x \in E$ korral) parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:

- 1) $\exists M \in R, \|A_n\| \leq M \forall n \in N$;
- 2) $A_n x \rightarrow Ax$, kui $n \rightarrow \infty$ iga $x \in D$ korral.

Teoreem 2 (vt [4] lk 223). Olgu E Banachi ruum ja olgu $T: E \rightarrow E$ lineaarne kompaktne operaator. Võrrand $x = Tx + f$ on iga $f \in E$ korral lahenduv parajasti siis, kui homogeesel võrrandil $x = Tx$ on ainult triviaalne lahend. Sel juhul on võrrand $x = Tx + f$ iga $f \in E$ korral üheselt lahenduv.

Definitsioon 4. Maatriksit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ nimetatakse domineeriva peadiagonaaliga maatriksiks, kui

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Olgu antud lineaarne algebraline võrrandisüsteem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (1.2)$$

kus x_1, x_2, \dots, x_n on otsitavad ning a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) ja b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) on antud suurused.

Teoreem 3 (vt [2], lk 333). Kui võrrandisüsteemi (1.2) maatriks $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ on domineeriva peadiagonaaliga, siis on süsteem (1.2) ühiselt lahenduv ning tema lahendi x_1, x_2, \dots, x_n korral kehtib hinnang

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq \frac{1}{q} \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|,$$

kus

$$q = \min_{1 \leq i \leq n} \left(|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right).$$

Olgu E Banachi ruum. Olgu $f \in E$ ja $K: E \rightarrow E$ pidev lineaarne operaator.

Vaatleme operaatorvõrrandeid kujul

$$u = Ku + f \quad (1.3)$$

ja

$$u_n = P_n Ku_n + P_n f, \quad n \in N, \quad (1.4)$$

kus $P_n: E \rightarrow E$ on projektorid, s.t. pidevad lineaarsed operaatorid omadusega $P_n^2 = P_n$.

Teoreem 4 (vt [6], lk 59). Olgu K lineaarne kompaktne operaator Banachi ruumis E . Homogeensel võrrandil $v = Kv$ olgu vaid null-lahend $v = 0$. Projektorid P_n ($n \in N$) koondugu $n \rightarrow \infty$ korral punktiivisi ühikoperaatoriks :

$$P_n u \rightarrow u, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

st iga $u \in E$ korral

$$\|P_n u - u\|_E \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Siis võrrand (1.3) on iga $f \in E$ korral üheselt lahenduv ja leidub selline n_0 , et $n \geq n_0$ korral on ka võrrandid (1.4) üheselt lahenduvad. Võrrandite (1.4) lahendid u_n koonduvad $n \rightarrow \infty$ korral võrrandi (1.3) lahendiks u : $\|u_n - u\|_E \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$. Kehtib veahinnang

$$\|u_n - u\|_E \leq c \|u - P_n u\|_E, \quad n \geq n_0, \quad (1.6)$$

kus konstant c on mingi positiivne konstant, mkis ei sõltu arvust n ega vabaliikmest f .

2 Ruutspalainid

2.1 Ruutsplaini mõiste

Olgu antud lõik $[a,b]$, kus $-\infty < a < b < \infty$. Olgu $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$. Valime punktihulga

$$\Delta_n = \{x_0, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \quad (2.1)$$

mida nimetame võrguks ehk lõigu $[a,b]$ jaotuseks antud n korral.

Denitsioon 5. Võrgule Δ_n vastavaks ruutsplainiks nimetatakse funktsiooni

$$s_2 = s_2(x) = s_{2,\Delta_n}(x), \text{ mis rahuldab järgmisi tingimusi :}$$

1) s_2 on igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) ülimalt ruutpolünoom, s.t.

$$s_2(x) = c_{0i} + c_{1i}x + c_{2i}x^2, \text{ kui } x \in [x_{i-1}, x_i];$$

2) s_2 on pidevalt diferentseeruv lõigul $[a,b]$, s.t. $s_2 \in C^1[a,b]$.

Edaspidi jaotuse Δ_n punkte x_0, x_1, \dots, x_n nimetame splaini s_2 sõlmedeks ning kõigi jaotusega Δ_n seotud ruutsplainide hulga tähistame suurusega $S_2(\Delta_n)$.

On lihtne näha, et kui $s_2^{(1)}, s_2^{(2)} \in S_2(\Delta_n)$ on kaks suvalist spalini ning λ ja μ on suvalised reaalarvud, siis ka $s_2 = \lambda s_2^{(1)} + \mu s_2^{(2)} \in S_2(\Delta_n)$. Seega $S_2(\Delta_n)$ on vektorruum. Osutub, et tema dimensioon on $n + 2$:

$$\dim S_2(\Delta_n) = n + 2.$$

Tõepoolest, et ruutsplaini $s_2 \in S_2(\Delta_n)$ määravad ära $3n$ parameetrit c_{0i}, c_{1i}, c_{2i} , $i = 1, 2, \dots, n$. Tingimus $s_2 \in C^1[a,b]$ aga seab igas sõlmes x_1, x_2, \dots, x_{n-1} splainile $s_2(x)$ kaks kitsendavat tingimust, sest nii $s_2(x)$ kui ka $s_2'(x)$ peavad olema pidevad punktides x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Seega saame kokku $2(n-1)$ tingimust, mis kitsendavad parameetrite c_{0i}, c_{1i}, c_{2i} ($i = 1, 2, \dots, n$) valikut. Niisiis, ruutsplain $s_2 \in S_2(\Delta_n)$ sisaldab üldiselt

$$3n - 2(n-1) = 3n - 2n + 2 = n + 2$$

vaba parameetrit. See ongi aluseks väidele, et $\dim S_2(\Delta_n) = n + 2$.

Ruutsplaini $s_2 \in S_2(\Delta_n)$ parameetrite määramiseks seame tingimused, et ruutsplain s_2 interpoleerib punktides $z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}$ etteantud väärtusi $u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$:

$$s_2(z_i) = u_i, \quad i=0, 1, \dots, n+1, \quad (2.2)$$

kus

$$z_0 = x_0 = a, \quad (2.3)$$

$$z_{i+1} = x_i + \delta_i(x_{i+1} - x_i), \quad \delta_i \in (0,1), \quad i=0, \dots, n-1, \quad (2.4)$$

$$z_{n+1} = x_n = b. \quad (2.5)$$

Rõhutame, et suurused $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ on suvalised (kuid fikseeritud) arvud vahenikus $(0,1)$.

Edaspidi suuruseid u_0, u_1, \dots, u_{n+1} tõlgendame mingi lõigul $[a,b]$ määratud funktsiooni $u = u(x)$ väärtustena vastavalt punktides z_0, z_1, \dots, z_{n+1} :

$$u_i = u(z_i), \quad i = 0, 1, \dots, n+1. \quad (2.6)$$

Interpolatsioonitingimusi (2.2) rahuldavaid splaine $s_2 \in S_2(\Delta_n)$ nimetatakse interpoleerivateks ruutsplainideks.

2.2. Interpoleeriva ruutsplaini esitus esimeste momentide kaudu

Olgu antud võrk Δ_n ja funktsiooni $u \in C[a,b]$ väärtused $u_i = u(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Olgu

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Tingimusi (2.2) rahuldava ruutsplaini $s_2 \in C[a,b]$ saame konstrueerida järgmisel teel. Tähistame

$$m_i = s_2'(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Suurusi m_0, \dots, m_n nimetatakse splaini s_2 esimesteks momentideks.

Kuna $s_2'(x)$ on igal lõigul $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) lineaarne, siis ta avaldub kujul

$$s_2'(x) = \frac{x_{i+1}-x}{h_i} m_i + \frac{x-x_i}{h_i} m_{i+1}, \quad (2.8)$$

kus $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Splaini $s_2(x)$ leidmiseks integreerime avaldist (2.8):

$$\int_{x_i}^x s_2'(t) dt = \int_{x_i}^x \left[\frac{x_{i+1}-t}{h_i} m_i + \frac{t-x_i}{h_i} m_{i+1} \right] dt$$

ehk

$$s_2(x) = s_2(x_i) - m_i \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + m_i \frac{h_i}{2} + m_{i+1} \frac{(x-x_i)^2}{2h_i}, \quad (2.9)$$

kus $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Võttes siin $x = z_{i+1}$, saame

$$s_2(z_{i+1}) = s_2(x_i) - m_i \frac{(x_{i+1}-z_{i+1})^2}{2h_i} + m_i \frac{h_i}{2} + m_{i+1} \frac{(z_{i+1}-x_i)^2}{2h_i}.$$

Kuna

$$z_{i+1} - x_i = \delta_i(x_{i+1} - x_i) = \delta_i h_i, \quad ,$$

$$x_{i+1} - z_{i+1} = x_{i+1} - x_i - \delta_i(x_{i+1} - x_i) = h_i(1 - \delta_i),$$

siis

$$s_2(z_{i+1}) = s_2(x_i) - m_i \frac{h_i(1-\delta_i)^2}{2} + m_i \frac{h_i}{2} + m_{i+1} \frac{h_i \delta_i^2}{2}.$$

Tingimuste (2.2) ja (2.6) tõttu saame siit leida

$$s_2(x_i) = u(z_{i+1}) + m_i \frac{h_i(1-\delta_i)^2}{2} - m_i \frac{h_i}{2} - m_{i+1} \frac{h_i \delta_i^2}{2}. \quad (2.10)$$

Arvestades seost (2.10), saame avaldise (2.9) kirjutada kujul

$$s_2(x) = u(z_{i+1}) + m_i \frac{h_i(1-\delta_i)^2}{2} - m_i \frac{h_i}{2} - m_{i+1} \frac{h_i \delta_i^2}{2} - m_i \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + m_i \frac{h_i}{2} + m_{i+1} \frac{(x-x_i)^2}{2h_i}$$

ehk

$$s_2(x) = u(z_{i+1}) + m_i \left[\frac{h_i(1-\delta_i)^2}{2} - \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} \right] + m_{i+1} \left[\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} - \frac{h_i \delta_i^2}{2} \right], \quad (2.11)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], i=0,1,\dots,n-1.$$

Paneme tähele , et kui võrduses (2.11) võtta $x = z_{i+1}$, siis saame

$$\begin{aligned} s_2(z_{i+1}) &= u(z_{i+1}) + m_i \left[\frac{h_i(1-\delta_i)^2}{2} - \frac{(x_{i+1}-z_{i+1})^2}{2h_i} \right] + m_{i+1} \left[\frac{(z_{i+1}-x_i)^2}{2h_i} - \frac{h_i \delta_i^2}{2} \right] = \\ &= u(z_{i+1}) + m_i \left[\frac{h_i(1-\delta_i)^2}{2} - \frac{h_i^2(1-\delta_i)^2}{2h_i} \right] + m_{i+1} \left[\frac{(h_i \delta_i)^2}{2h_i} - \frac{h_i \delta_i^2}{2} \right] = \\ &= u(z_{i+1}), i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Seega spline kujul (2.11) tõepoolest rahuldab interpolatsioonitingimusi (2.2).

Selleks, et $s_2(x)$ oleks pidevalt diferentseeruv tervel lõigul $[a,b]$, on vaja, et $s_2(x)$ ja $s_2'(x)$ oleksid pidevad funktsioonid punktides x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , s.t. peab kehtima

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} s_2(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} s_2(x), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} s_2'(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} s_2'(x), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

Kui (2.13) on esituse (2.11) korral automaatselt täidetud, siis (2.12) kehtivust tuleb esituselt (2.11) eraldi nõuda.

Kasutades võrdust (2.11) osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$, saame

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i^-} s_2(x) &= \lim_{x \rightarrow x_i^-} \left[u(z_i) + m_{i-1} \left[\frac{h_{i-1}(1-\delta_{i-1})^2}{2} - \frac{(x_i-x)^2}{2h_{i-1}} \right] + \right. \\ &+ m_i \left[\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}\delta_{i-1}^2}{2} \right] \left. \right] = u(z_i) + m_{i-1} \left[\frac{h_{i-1}(1-\delta_{i-1})^2}{2} \right] + \\ &+ m_i \left[\frac{(h_{i-1})^2}{2h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}\delta_{i-1}^2}{2} \right] = u(z_i) + m_{i-1} \left[\frac{h_{i-1}(1-\delta_{i-1})^2}{2} \right] + m_i \left[\frac{h_{i-1}(1-\delta_{i-1}^2)}{2} \right] \end{aligned}$$

Kasutades valemit (2.11) osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$, saame

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i^+} s_2(x) &= \lim_{x \rightarrow x_i^+} \left[u(z_{i+1}) + m_i \left[\frac{h_i(1-\delta_i)^2}{2} - \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} \right] + \right. \\ &+ m_{i+1} \left[\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} - \frac{h_i\delta_i^2}{2} \right] \left. \right] = u(z_{i+1}) + m_i \left[\frac{h_i(1-\delta_i)^2}{2} - \frac{(h_i)^2}{2h_i} \right] + \\ &+ m_{i+1} \left[-\frac{h_i\delta_i^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Seose (2.12) kohaselt peab seega kehtima

$$\begin{aligned} u(z_i) + m_{i-1} \left[\frac{h_{i-1}(1-\delta_{i-1})^2}{2} \right] + m_i \left[\frac{h_{i-1}(1-\delta_{i-1}^2)}{2} \right] &= u(z_{i+1}) + m_i \left[\frac{h_i(1-\delta_i)^2}{2} - \frac{(h_i)^2}{2h_i} \right] + \\ &+ m_{i+1} \left[-\frac{h_i\delta_i^2}{2} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Saadud seosed võime teisendada kujule

$$\frac{(1-\delta_{i-1})^2 h_{i-1}}{2(h_{i-1}+h_i)} m_{i-1} + \frac{(1-\delta_{i-1})^2 h_{i-1} + [1-(1-\delta_i)^2] h_i}{2(h_{i-1}+h_i)} m_i + \frac{\delta_i^2 h_i}{2(h_{i-1}+h_i)} m_{i+1} = \frac{[u(z_{i+1})-u(z_i)]}{(h_{i-1}+h_i)}, \quad (2.14)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Saime $n - 1$ võrrandist koosneva lineaarse algebraise võrrandisüsteemi suuruste m_0, m_1, \dots, m_n leidmiseks. Kuna selles süsteemis on $n+1$ tundmatu m_0, m_1, \dots, m_n leidmiseks vaid $n - 1$ võrrandit, siis tuleb lisada kaks täiendavat võrrandit. Tingimuste $s_2(z_0) = u(z_0)$ ja $s_2(z_{n+1}) = u(z_{n+1})$ tõttu saame leida võrranditele (2.14) kaks võrrandit lisaks. Tingimusest $s_2(z_0) = u(z_0)$ leiame esituse (2.11) abil, et

$$u(z_0) = u(z_1) + m_0 \left[\frac{(1 - \delta_0)^2 - 1}{2} h_0 \right] + m_1 \left[-\frac{\delta_0^2}{2} h_0 \right]$$

ehk

$$\frac{1 - (1 - \delta_0)^2}{2} m_0 + \frac{\delta_0^2}{2} m_1 = \frac{u(z_1) - u(z_0)}{h_0}$$

Tuginedes võrdusele $s_2(z_{n+1}) = u(z_{n+1})$, saame esituse (2.11) abil, et

$$u(z_{n+1}) = u(z_n) + m_{n-1} \left[\frac{(1 - \delta_{n-1})^2 h_{n-1}}{2} \right] + m_n \left[\frac{(1 - \delta_{n-1}^2) h_{n-1}}{2} \right]$$

ehk

$$\frac{(1 - \delta_{n-1})^2}{2} m_{n-1} + \frac{1 - \delta_{n-1}^2}{2} m_n = \frac{u(z_{n+1}) - u(z_n)}{h_{n-1}}.$$

Kokkuvõttes saame järgmise võrrandisüsteemi suuruste m_0, m_1, \dots, m_n leidmiseks:

$$\begin{cases} \frac{1 - (1 - \delta_0)^2}{2} m_0 + \frac{\delta_0^2}{2} m_1 = d_0, \\ \frac{(1 - \delta_{i-1})^2 h_{i-1}}{2(h_{i-1} + h_i)} m_{i-1} + \frac{(1 - \delta_{i-1}^2) h_{i-1} + [1 - (1 - \delta_i)^2] h_i}{2(h_{i-1} + h_i)} m_i + \frac{\delta_i^2 h_i}{2(h_{i-1} + h_i)} m_{i+1} = d_i, \\ \frac{(1 - \delta_{n-1})^2}{2} m_{n-1} + \frac{1 - \delta_{n-1}^2}{2} m_n = d_n, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

kus

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{u(z_1) - u(z_0)}{h_0} \\ d_i &= \frac{[u(z_{i+1}) - u(z_i)]}{(h_{i-1} + h_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \\ d_n &= \frac{u(z_{n+1}) - u(z_n)}{h_{n-1}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Esitame süsteemi (2.15) ka maatrikskujul:

$$A\vec{m} = \vec{d},$$

kus A on $n + 1$ reast ja veerust koosnev ruutmaatriks kujul

$$\begin{pmatrix} \frac{1-(1-\delta_0)^2}{2} & \frac{\delta_0^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{(1-\delta_0)^2 h_0}{2(h_0+h_1)} & \frac{(1-\delta_0^2)h_0+[1-(1-\delta_1)^2]h_1}{2(h_0+h_1)} & \frac{\delta_1^2 h_1}{2(h_0+h_1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\delta_1)^2 h_1}{2(h_1+h_2)} & \frac{(1-\delta_1^2)h_1+[1-(1-\delta_2)^2]h_2}{2(h_1+h_2)} & \frac{\delta_2^2 h_2}{2(h_1+h_2)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(1-\delta^2)h_{n-2}+[1-(1-\delta)^2]h_{n-1}}{2(h_{n-2}+h_{n-1})} & \frac{\delta^2 h_{n-1}}{2(h_{n-2}+h_{n-1})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(1-\delta_{n-1})^2}{2} & \frac{1-\delta_{n-1}^2}{2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

ning

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Siin otsivaks on vektor \vec{m} ning vektori \vec{d} komponendid on määratud seostega (2.16).

Võrrandisüsteemi (2.15) lahenduvuse uurimisel tuginema teoreemile 3.

Osutub, et maatriks (2.17) on domineeriva peadiagonaaliga. Tõepoolest, me saame:

$$\begin{aligned} \frac{1-(1-\delta_0)^2}{2} - \frac{\delta_0^2}{2} &= \frac{2\delta_0 - 2\delta_0^2}{2} = \delta_0(1-\delta_0) > 0; \\ \frac{(1-\delta_{i-1}^2)h_{i-1} + [1-(1-\delta_i)^2]h_i}{2(h_{i-1}+h_i)} - \frac{(1-\delta_{i-1})^2 h_{i-1}}{2(h_{i-1}+h_i)} - \frac{\delta_i^2 h_i}{2(h_{i-1}+h_i)} &= \\ = \frac{(1-\delta_{i-1}^2)h_{i-1} + [1-(1-\delta_i)^2]h_i - (1-\delta_{i-1})^2 h_{i-1} - \delta_i^2 h_i}{2(h_{i-1}+h_i)} &= \\ = \frac{(2\delta_{i-1} - 2\delta_{i-1}^2)h_{i-1} + (2\delta_i - 2\delta_i^2)h_i}{2(h_{i-1}+h_i)} = \frac{\delta_{i-1}(1-\delta_{i-1})h_{i-1} + \delta_i(1-\delta_i)h_i}{(h_{i-1}+h_i)} &\geq \\ \geq \min_{0 \leq i \leq n} \delta_i(1-\delta_i) > 0; \end{aligned}$$

$$\frac{1-\delta_{n-1}^2}{2} - \frac{(1-\delta_{n-1})^2}{2} = \frac{2\delta_{n-1} - 2\delta_{n-1}^2}{2} = \delta_{n-1}(1-\delta_{n-1}) > 0.$$

Teoreemi 3 põhjal on võrrandisüsteem (2.15) üheselt lahenduv ning tema lahendi m_0, m_1, \dots, m_n jaoks kehtib hinnang

$$\max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \leq \frac{1}{q} \max_{0 \leq i \leq n} |d_i|,$$

kus

$$q = \min_{0 \leq i \leq n} \delta_i (1 - \delta_i)$$

ja suurused d_i ($i = 0, 1, \dots, n$) on määratud võrdustega (2.16). Kuna suurused m_0, m_1, \dots, m_n on võrrandisüsteemist (2.15) üheselt määratud, siis on üheselt määratud ka spline $s_2(x)$ kujul (2.11).

Märkus 1. Kui $\delta_i = \frac{1}{2}$ ($i = 0, 1, \dots, n$), siis suuruste m_0, m_1, \dots, m_n jaoks kehtib hinnang

$$\max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \leq 4 \max_{0 \leq i \leq n} |d_i|, \quad (2.18)$$

kus suurused d_i ($i = 0, 1, \dots, n$) on määratud võrdustega (2.16)

2.3. Ruutsplaini esitus baassplainide kaudu

Olgu Δ_n seosega (2.1) antud võrk punktidega x_0, x_1, \dots, x_n . Kuna $S_2(\Delta_n)$ on vektorruum, mille dimensioon on $n + 2$, siis võime valida ruumis $S_2(\Delta_n)$ baasi, see tähendab mingid $n + 2$ splaini $B_2^0, B_2^1, \dots, B_2^{n+1} \in S_2(\Delta_n)$, mis on lineaarselt sõltumatud lõigul $[a, b]$ ning esitada $S_2(\Delta_n)$ suvalise elemendi s_2 baassplainide lineaarse kombinatsioonina:

$$s_2(x) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j B_2^j(x), \quad x \in [a, b].$$

Siis c_0, c_1, \dots, c_{n+1} on mingid konstandid.

Funktsioone $B_2^0, B_2^1, \dots, B_2^{n+1}$ nimetatakse võrgul Δ_n antud teist järku baassplainideks.

Teist järku baassplainidena ehk B-splainidena hakkame kasutama funktsioone $B_2^0, B_2^1, \dots, B_2^{n+1}$ (vt näiteks [2], [5], [9]):

$$B_2^0(x) = \begin{cases} \frac{(x_1-x)^2}{(x_1-x_0)^2} & x \in [x_0, x_1), \\ 0 & \text{mujal,} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$B_2^1(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{(x_1-x_0)^2} + \frac{(x_2-x)(x-x_0)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)} & x \in [x_0, x_1), \\ \frac{(x_2-x)^2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} & x \in [x_1, x_2), \\ 0 & \text{mujal,} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$B_2^i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-2})^2}{(x_i-x_{i-2})(x_{i-1}-x_{i-2})} & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}), \\ \frac{(x-x_{i-2})(x_i-x)}{(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})} + \frac{(x_{i+1}-x)(x-x_{i-1})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})} & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ \frac{(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0 & \text{mujal,} \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (2.21)$$

$$B_2^n(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{n-2})^2}{(x_n-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})} & x \in [x_{n-2}, x_{n-1}), \\ \frac{(x-x_{n-2})(x_n-x)}{(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})} + \frac{(x_n-x)(x-x_{n-1})}{(x_n-x_{n-1})^2} & x \in [x_{n-1}, x_n), \\ 0 & \text{mujal,} \end{cases} \quad (2.22)$$

$$B_2^{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{n-1})^2}{(x_n-x_{n-1})^2} & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases} \quad (2.23)$$

3. Fredholmi teist liiki integraalvõrrandi lahendi olemasolu, ühesus ja siledus

Olgu antud integraalvõrrand kujul

$$u(x) = \int_a^b |x - y|^{-\alpha} K(x, y) u(y) dy + f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (3.1)$$

Siin $0 \leq \alpha < 1$, $K \in C([a, b] \times [a, b])$ ja $f \in C[a, b]$ on antud ning u on otsitav.

Kui $0 < \alpha < 1$, siis funktsiooni

$$H(x, y) = |x - y|^{-\alpha} K(x, y) \quad (x, y \in [a, b], x \neq y)$$

nimetatakse nõrgalt singulaarseks tuumaks, sest sel korral

$$\max_{0 \leq x \leq b} \int_a^b |H(x, y)| dy < \infty. \quad (3.2)$$

Kui võrrandi (3.1) tuum on nõrgalt singulaarne, siis võrrandit (3.1) nimetatakse nõrgalt singulaarse tuumaga Fredholmi teist liiki integraalvõrrandiks.

Võrrandi (3.1) lahendi olemasolu ja ühesus on kirjeldatav järgmise teoreemiga.

Teoreem 6. Olgu $0 \leq \alpha < 1$, $f \in C[a, b]$ ja $K \in C([a, b] \times [a, b])$. Olgu võrrandile (3.1) vastaval homogeenisel integraalvõrrandil

$$u(x) = \int_a^b |x - y|^{-\alpha} K(x, y) u(y) dy \quad (x \in [a, b]), \quad (3.3)$$

olemas vaid triviaalne lahend $u = 0$.

Siis võrrandil (3.1) on parajasti üks lahend u , mis on pidev funktsioon lõigul $[a, b]$, s.t. $u \in C[a, b]$.

Tõestus: Integraalvõrrandit (3.1) vaatleme operaatorvõrrandina

$$u = Tu + f \quad (3.4)$$

Banachi ruumis $E = C[a, b]$, kus operaator T on defineeritud valemiga

$$(Tv)(x) = \int_a^b |x - y|^{-\alpha} K(x, y) v(y) dy, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad x \in [a, b], \quad v \in C[a, b]. \quad (3.5)$$

Valemiga (3.4) defineeritud operaator T on lineaarne ja kompaktne, kui operaator ruumist $C[a, b]$ ruumi $C[a, b]$ (vt.[4], lk 215).

Eelduse kohaselt on võrrandile (3.1) vastaval homogeenisel võrrandil $u = Tu$ vaid nulllahend. Sel korral järeldub teoreemist 2, et võrrand (3.3) on üheselt lahenduv ja tema lahend $u \in C[a, b]$. ■

Teoreem 7. Vaatleme võrrandit (3.1), kus $\alpha = 0$, s.t. võrrandit

$$u(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (3.6)$$

Eeldame, et $K \in C^m([a, b] \times [a, b])$ ja $f \in C^m[a, b]$, kus $m \in \mathbb{N}$.

Olgu võrrandile (3.6) vastaval homogeenisel võrrandil

$$u(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy, \quad x \in [a, b],$$

ruumis $C[a, b]$ vaid nulllahend.

Siis võrrandi (3.6) lahendi u on m korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, b]$: $u \in C^m[a, b]$.

Tõestus: Teoreemist 6 järeldub, et võrrand (3.6) on üheselt lahenduv ning tema lahend u on pidev lõigul $[a, b]$: $u \in C[a, b]$. Järgnevas näitame, et $m = 1$ korral $u \in C^1[a, b]$.

Samasuse

$$u(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy + f(x)$$

diferentseerimisel saame

$$u'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^b K(x, y)u(y)dy + f'(x) \quad (3.7)$$

Kuna $K \in C^1([a, b] \times [a, b])$, siis on olemas osatuletis $\frac{\partial K(x, y)}{\partial x}$. mis on pidev, kui

$(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ ning seetõttu

$$\frac{d}{dx} \int_a^b K(x, y)u(y)dy = \int_a^b \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} u(y)dy, \quad x \in [a, b].$$

Kuna integreeritav funktsioon $\frac{\partial K(x, y)}{\partial x} u(y)$ on pidev ruudus $[a, b] \times [a, b]$, siis

matemaatilise analüüsi kursusest teame, et integraal

$$\int_a^b \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} u(y)dy \quad (x \in [a, b])$$

kui muutuja x funktsioon on pidev lõigul $[a, b]$.

Seose (3.7) põhjal saame nüüd, et

$$u'(x) = \int_a^b \frac{\partial K(x,y)}{\partial x} u(y) dy + f'(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.8)$$

kus võrduse (3.8) parem pool on pidev iga $x \in [a, b]$ korral. Järelikult funktsioonil u leidub $u' \in C[a, b]$ ja teoreemi väide kehtib $m = 1$ korral.

Olgu nüüd $m = 2$. Näitame, et siis $u \in C^2[a, b]$. Lähtume saadud samasusest (3.8). Samasuse (3.8) diferentseerimisel saame, et

$$u''(x) = \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\right)^2 K(x,y) u(y) dy + f''(x), \quad x \in [a, b]. \quad (3.9)$$

Seejuures (3.9) parem pool on pidev funktsioon lõigul $[a, b]$. Järelikult funktsioonil u' leidub tuletis $u''(x) \in C[a, b]$ ning teoreemi väide kehtib $m = 2$ korral.

Analoogiliselt jätkates näeme, et teoreemi väide kehtib mistahes $m \in N$ korral. ■

Märkus 2. Olgu $0 < \alpha < 1$, $K \in C^m([a, b] \times [a, b])$, $f \in C^m[a, b]$, $m \in N$. Olgu võrrandil (3.3) olemas vaid triviaalne lahend $u = 0$. Siis Teoreemi 6 põhjal on võrrandil (3.1) olemas ühene lahend $u \in C[a, b]$. Sel korral aga üldiselt $u \notin C^m[a, b]$.

Tõepoolest, olgu lihtsuse mõttes $K(x, y) = 1$, $m = 1$, $f \in C^1[a, b]$ ja oletame, et $u \in C^1[a, b]$ on võrrandi (3.1) lahend. Kirjutame võrrandi (3.1) kujul

$$u(x) = \int_a^x (x-y)^{-\alpha} u(y) dy + \int_x^b (y-x)^{-\alpha} u(y) dy + f(x)$$

ehk

$$u(x) = \int_0^{x-a} \tau^{-\alpha} u(x-\tau) d\tau + \int_0^{b-x} \tau^{-\alpha} u(x+\tau) d\tau + f(x), \quad x \in [a, b].$$

Diferentseerime viimast võrdust x järgi. Me saame

$$\begin{aligned} u'(x) &= (x-a)^{-\alpha} u(a) + \int_0^{x-a} \tau^{-\alpha} u'(x-\tau) d\tau + \\ &+ (b-x)^{-\alpha} u(b) + \int_0^{b-x} \tau^{-\alpha} u'(x+\tau) d\tau + f'(x) \end{aligned}$$

ehk

$$u'(x) = (x-a)^{-\alpha} u(a) + (b-x)^{-\alpha} u(b) + \int_a^b |x-y|^{-\alpha} u'(y) dy + f', \quad (3.10)$$

kus $a < x < b$. Kuna $u' \in C[a, b]$, siis $h(x) = \int_a^b |x-y|^{-\alpha} u'(y) dy$ on pidev iga $x \in [a, b]$ korral, st $h \in C[a, b]$. Eelduse järgi $f' \in C[a, b]$ ja $u' \in C[a, b]$.

Me näeme, et võrduse (3.10) vasakul pool on funktsioon $u'(x)$, mis on pidev iga $x \in [a, b]$ korral, kuis selle võrduse paremal poolel olev funktsioon on pidev vaid $x \in (a, b)$ korral ning on tõkestamata, kui $x \rightarrow a$ ja/või $x \rightarrow b$ (eeldades, et $u(a) \neq 0$, $u(b) \neq 0$). Saadud vastuolu näitabki, et üldiselt nõrgalt singulaarse integraalvõrrandi lahendi u puhul $u \notin C^1[a, b]$.

Selleks, et iseloomustada integraalvõrrandi (3.1) lahendi tuletiste käitumist $0 < \alpha < 1$ korral, toome sisse kaaluruumi $C^{m,\alpha}(a, b)$.

Mis tahes $m \in \mathbb{N}$ ja $0 < \alpha < 1$ korral defineerime hulga $C^{m,\alpha}(a, b)$, mis koosneb funktsioonile $u \in C[a, b] \cap C^m(a, b)$, mille puhul

$$\sum_{j=1}^m \sup_{a < x < b} w_{\alpha+j-1}(x) |u^{(j)}(x)| < \infty,$$

kus $w_{\alpha+j-1}(x) = (a-x)^{\alpha+j-1}(b-x)^{\alpha+j-1}$, $a < x < b$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Hulk $C^{m,\alpha}(a, b)$ ($m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$) on Banachi ruum normiga

$$\|u\|_{m,\alpha} = \|u\|_{C[a,b]} + \sum_{j=1}^m \sup_{a < x < b} w_{\alpha+j-1}(x) |u^{(j)}(x)|, \quad u \in C^{m,\alpha}(a, b).$$

Kui $u \in C^{m,\alpha}(a, b)$ ($m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$), siis $u \in C[a, b]$ ja $u \in C^m(a, b)$ ning kehtivad järgmised hinnangud:

$$|u^{(j)}(x)| \leq c_j (a-x)^{1-\alpha-j} (b-x)^{1-\alpha-j} \leq c_j \left[\frac{1}{(a-x)^{\alpha+j-1}} + \frac{1}{(b-x)^{\alpha+j-1}} \right],$$

$$a < x < b, j = 1, 2, \dots, m,$$

kus c_1, c_2, \dots, c_m on mingid positiivsed konstandid (mis võivad sõltuda parameetrist $\alpha \in (0,1)$, kuid ei sõltu argumentidest x).

Paneme tähele, et

$$C^m[a, b] \subset C^{m,\alpha}(a, b) \subset C^{m,\beta}(a, b) \subset C[a, b], \quad m \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha < \beta < 1.$$

Tööst [7] järeldub, et kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 8. Vaatleme integraalvõrrandit (3.1), kus $K \in C^m([a, b] \times [a, b])$,

$f \in C^{m,\alpha}(a, b)$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$. Olgu võrrandile (3.1) vastaval homogeenisel

homogeenisel võrrandil (3.3) vaid triviaalne lahend $u = 0$. Siis võrrand (3.1) on üheselt

lahenduv ja tema lahend u kuulub ruumi $C^{m,\alpha}(a, b)$.

4. Kollokatsioonimeetod

4.1 Kollokatsioonimeetodi kirjeldus

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = \int_a^b |x - y|^{-\alpha} K(x, y) u(y) dy + f(x), \quad x \in [a, b], \quad (4.1)$$

kus $0 \leq \alpha < 1$, $K \in C([a, b] \times [a, b])$, $f \in C[a, b]$.

Olgu lõigul $[a, b]$ antud võrk Δ_n (vt 2.1) ja olgu sellele võrgule vastavad ruut- baassplainid $B_2^0, B_2^1, \dots, B_2^{n+1}$ esitatud kujul (2.19) - (2.23). Integraalvõrrandi (4.1) lähislahendit $u_n \in S_2(\Delta_n)$ otsime ruutsplainina kujul

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j B_2^j(x), \quad x \in [a, b], \quad (4.2)$$

kus c_0, c_1, \dots, c_{n+1} otsitavad kordajad. Nende leidmiseks asetame valemiga (4.2) määratud funktsiooni $u_n(x)$ võrrandisse (4.1) ja nõuame, et võrrand oleks rahuldatud võrdustega (2.3)-(2.5) määratud punktides z_0, z_1, \dots, z_{n+1} , s.t.

$$u_n(z_i) = \int_a^b |z_i - y|^{-\alpha} K(z_i, y) u_n(y) dy + f(z_i), \quad i = 0, 1, \dots, n + 1. \quad (4.3)$$

Neid tingimusi nimetatakse kollokatsioonitingimusteks.

Esituse (4.2) tõttu võtavad tingimused (4.3) kujul

$$\sum_{j=0}^{n+1} c_j B_2^j(z_i) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j \left[\int_a^b |z_i - y|^{-\alpha} K(z_i, y) B_2^j(y) dy \right] + f(z_i), \quad i = 0, 1, \dots, n + 1$$

ehk

$$\sum_{j=0}^{n+1} \left[B_2^j(z_i) - \int_a^b |z_i - y|^{-\alpha} K(z_i, y) B_2^j(y) dy \right] c_j = f(z_i), \quad i = 0, 1, \dots, n + 1. \quad (4.4)$$

Võrdused kujul (4.4) on lineaarne algebraline võrrandisüsteem suuruste c_0, c_1, \dots, c_{n+1} leidmiseks. Selle süsteemi võib kirjutada ka kujul

$$A\vec{c} = \vec{d},$$

ehk

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & \dots & a_{0,n} & a_{0,n+1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,0} & a_{n+1,1} & \dots & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_n \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z_0) \\ f(z_1) \\ \dots \\ \dots \\ f(z_n) \\ f(z_{n+1}) \end{pmatrix},$$

milles $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \dots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ on otsitav ning

$$a_{ij} = B_2^j(z_i) - \int_a^b |z_i - y|^{-\alpha} K(z_i, y) B_2^j(y) dy, \quad i, j = 0, 1, \dots, n+1.$$

4.2 Kollokatsioonimeetodi koonduvus

Olgu $S_2(\Delta_n)$ võrguga Δ_n (vt (2.1)) seotud ruutsplainide hulk.

Toome sisse operaatori $P_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, mis igale pidevale funktsioonile

$u \in C[a, b]$ seab vastavusse funktsiooni $P_n u \in S_2(\Delta_n) \subset C[a, b]$ ja rahuldab tingimusi

$$(P_n u)(z_i) = u(z_i) \quad i = 0, 1, \dots, n+1, \quad (4.5)$$

kus interpolatsioonipunktid z_i ($i = 0, 1, \dots, n+1$) on määratud seostega (2.3)-(2.5).

Punktis 2.2 näitasime, et ruutsplain $s_2 = P_n u \in S_2(\Delta_n)$ on tingimustega (4.5) üheselt määratud ja avaldub kujul (2.11):

$$(P_n u)(x) = u(z_{i+1}) + m_i \left[\frac{h_i(1-\delta_i)^2}{2} - \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} \right] + m_{i+1} \left[\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} - \frac{h_i\delta_i^2}{2} \right], \quad (4.6)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

On ilmne (interpolatsioonitingimuste (4.5) lineaarsuse tõttu), et operaator

$P_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ on lineaarne. Kuna funktsioon $P_n u \in S_2(\Delta_n) \subset C[a, b]$ kujul (4.6) on iga $u \in C[a, b]$ korral tingimustega (4.5) üheselt määratud, siis $P_n^2 = P_n$, st P_n on projektor.

Olgu E ja F Banachi ruumid. Tähistame sümboliga $\mathcal{L}(E, F)$ kõigi pidevate lineaarsete operaatorite $A: E \rightarrow F$ ruumi normiga $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup\{\|A\|_F: u \in E, \|u\|_E = 1\}$.

Lihtsuse mõttes edaspidi hakkame vaatlema ühtlast võrku, mille tähistame

sümboliga Δ_h , st Δ_h võrk on Δ_n (vt (2.1)), mille sõlmed avalduvad kujul

$$x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n,$$

kus $h = \frac{b-a}{n}$. Veel eeldame, et $\delta_i = \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), st et interpolatsioonipunktid

(vt (2.3)-(2.5)) avalduvad kujul $z_0 = x_0 = a$, $z_{n+1} = x_n = b$, $z_i = x_i - \frac{h}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Sel korral kehtib järgmine lemma.

Lemma 1. Olgu $P_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ operaator, mis igale funktsioonile $u \in C[a, b]$ seab vastavusse funktsiooni $P_n u \in S_2(\Delta_h)$ ja rahuldab tingimusi (4.5). Siis

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b], C[a,b])} \leq 9. \quad (4.7)$$

Tõestus: Kasutades esitust (2.11), saame iga $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) korral funktsiooni $(P_n u)(x)$ hinnata järgmiselt:

$$\begin{aligned} |(P_n u)(x)| &\leq |u(z_{i+1})| + m_i \left[\frac{h}{8} - \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h} \right] + m_{i+1} \left[\frac{(x - x_i)^2}{2h} - \frac{h}{8} \right] \\ &\leq \|u\|_{C[a,b]} + \max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \left[\frac{h}{8} + \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h} + \frac{(x - x_i)^2}{2h} + \frac{h}{8} \right] \\ &= \|u\|_{C[a,b]} + \max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \left[\frac{h^2 + 2(x_{i+1} - x)^2 + 2(x - x_i)^2}{2h} \right]. \end{aligned}$$

Kuna funktsioon $h^2 + 2(x_{i+1} - x)^2 + 2(x - x_i)^2$ saavutab oma maksimaalse väärtuse punktis

$$x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},$$

siis saame

$$\begin{aligned} |(P_n u)(x)| &\leq \|u\|_{C[a,b]} + \max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \left[\frac{h^2 + 2(x_{i+1} - \frac{x_i + x_{i+1}}{2})^2 + 2(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_i)^2}{2h} \right] \\ &= \|u\|_{C[a,b]} + \max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \left[\frac{h^2 + 2(x_i + h - \frac{x_i}{2} - \frac{x_i + h}{2})^2 + 2(\frac{x_i}{2} + \frac{x_i + h}{2} - x_i)^2}{2h} \right] \\ &= \|u\|_{C[a,b]} + \max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \left[\frac{h^2 + 2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2h} \right] \\ &= \|u\|_{C[a,b]} + \max_{0 \leq i \leq n} |m_i| h. \end{aligned}$$

Võrratuse (2.18) abil saame nüüd, et

$$|(P_n u)(x)| \leq \|u\|_{C[a,b]} + 4h \max_{0 \leq i \leq n} \frac{|u(z_{i+1}) - u(z_i)|}{h}$$

$$\leq \|u\|_{C[a,b]} + 4h \frac{2\|u\|_{C[a,b]}}{h} = 9\|u\|_{C[a,b]}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i=0, 1, \dots, n-1,$$

millest järeldub hinnang (4.7).

Edaspidi vajame ka järgmist tulemust (vt [1],[2]).

Lemma 2. Olgu $Q_n: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ operaator, mis igale funktsioonile $u \in C[a,b]$ seab vastavusse funktsiooni $Q_n u \in S_2(\Delta_h)$, mis on defineeritud valemiga

$$Q_n u = \sum_{i=0}^{n+1} \left[-\frac{1}{2}u(x_{i-1}) + 2u\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) - \frac{1}{2}u(x_i) \right] B_2^i,$$

kus $x_{-1} = x_0, x_{n+1} = x_n, x_i \in \Delta_h$ ($i = 0, 1, \dots, n$) ja baasplainid B_2^i on defineeritud valemitega (2.19) - (2.23). Siis iga osalõigu $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) korral

$$\|u - Q_n u\|_{C[x_i, x_{i+1}]} \leq 4 \text{dist}_{[x_{i-1}, x_{i+2}]}(u, \pi_2), \quad (4.8)$$

kus

$$\text{dist}_{[x_i, x_{i+1}]}(u, \pi_2) = \inf_{p \in \pi_2} \|u - p\|$$

ja π_2 on ruutpolünoomide hulk.

Teoreem 9 Olgu $P_n: C[a,b] \rightarrow S_2(\Delta_h)$ ($n \in N$) interpolatsioonioperaator, mis rahuldab tingimusi (4.5). Olgu $0 < \alpha < 1$, siis iga $u \in C^{3,\alpha}(a,b)$ korral

$$\|u - P_n u\|_{C[a,b]} \leq c_1 h^{1-\alpha}, \quad h = \frac{b-a}{n}. \quad (4.9)$$

Kui $u \in C^3[a,b]$, siis

$$\|u - P_n u\|_{C[a,b]} \leq c_2 h^3, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

$$(4.10)$$

Siin c_1 ja c_2 on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest h .

Tõestus: Olgu $u \in C^{3,\alpha}[a,b]$ antud. Siis $u \in C[a,b]$ lemmade 1 ja 2 põhjal

$$\begin{aligned} \|u - P_n u\|_{C[a,b]} &= \|u - Q_n u + Q_n u - P_n u\|_{C[a,b]} \\ &= \|u - Q_n u\|_{C[a,b]} + \|Q_n u - P_n u\|_{C[a,b]} \\ &= \|u - Q_n u\|_{C[a,b]} + \|P_n(Q_n u - u)\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|u - Q_n u\|_{C[a,b]} + \|P_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b], C)[a,b]} \|u - Q_n u\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|u - Q_n u\|_{C[a,b]} (1 + \|P_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b], C)[a,b]}) \\ &\leq 10 \|u - Q_n u\|_{C[a,b]}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Järgnevas hindame suurust $\|u - Q_n u\|_{C[a,b]}$.

Olgu $x \in [x_i, x_{i+1}]$, kus $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ja $x_{-1} = x_0, x_{n+1} = x_n$. Vaatleme Taylori valemit funktsiooni u jaoks punktis $t_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+2}}{2}$ integraalse jääkliikmega (vt näiteks [8] lk 224):

$$u(x) = T_{u,2,i}(x) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^x (x-y)^2 u'''(y) dy,$$

kus

$$T_{u,2,i}(x) = u(t_i) + u'(t_i)(x - t_i) + \frac{u'''(t_i)}{2}(x - t_i)^2.$$

Kuna $T_{u,2,i}$ on ruutpolünoom, siis saame

$$\text{dist}_{[x_{i-1}, x_{i+2}]}(u, \pi_2) \leq \|u - T_{u,2,i}\|_{C[x_{i-1}, x_{i+2}]}$$

Hinnangu (4.8) põhjal

$$\|u - Q_n u\|_{C[x_i, x_{i+1}]} \leq 4 \|u - T_{u,2,i}\|_{C[x_{i-1}, x_{i+2}]}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.12)$$

Hindame suurust $\|u - T_{u,2,i}\|_{C[x_{i-1}, x_{i+2}]}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Olgu $x \in [x_{i-1}, t_i]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Kasutades eeldust $u \in C^{3,\alpha}(a, b)$, saame teoreemi 8 põhjal, et

$$|u'''(y)| \leq c[(y-a)^{-\alpha-2} + (b-y)^{-\alpha-2}], \quad a < y < b, \quad c = \text{const} > 0.$$

Seega

$$\begin{aligned} |u(x) - T_{u,2,i}(x)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{t_i}^x (x-y)^2 u'''(y) dy \right| \leq \frac{1}{2} \int_x^{t_i} (y-x)^2 |u'''(y)| dy \\ &\leq \frac{c}{2} \int_x^{t_i} (y-x)^2 [(y-a)^{-\alpha-2} + (b-y)^{-\alpha-2}] dy \\ &= \frac{c}{2} \int_x^{t_i} (y-x)^2 (y-a)^{-\alpha-2} dy + \frac{c}{2} \int_x^{t_i} (y-x)^2 (b-y)^{-\alpha-2} dy \\ &\leq \frac{c}{2} \int_x^{t_i} (y-x)^{-\alpha} dy + \frac{c}{2} \int_x^{t_i} (y-x)^2 (b-y)^{-\alpha-2} dy \\ &\leq c' h^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Kui $u \in C^3[a, b]$, siis

$$|u(x) - T_{u,2,i}(x)| \leq \frac{1}{2} \left| \int_{t_i}^x (x-y)^2 u'''(y) dy \right| \leq c'' h^3.$$

Siin c' ja c'' on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest h .

Analoogiliselt saame $x \in [t_i, x_{i+2}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1, x_{n+1} = x_n$) korral, et kui $u \in C^{3,\alpha}(a, b)$, siis

$$|u(x) - T_{u,2,i}(x)| \leq c''' h^{1-\alpha}$$

ning $u \in C^3[a, b]$ puhul

$$|u(x) - T_{u,2,i}(x)| \leq c'''' h^3,$$

Kus $c''' > 0$ ja $c'''' > 0$ on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest h .

Seega

$$\|u - T_{u,2,i}\|_{C[x_{i-1}, x_{i+2}]} \leq c_1^* h^{1-\alpha}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

kui $u \in C^{3,\alpha}(a, b)$ ning

$$\|u - T_{u,2,i}\|_{C[x_{i-1}, x_{i+2}]} \leq c_2^* h^3, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

kui $u \in C^3[a, b]$. Ka siin $c_1^* > 0$ ja $c_2^* > 0$ on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest h .

Võrratusest (4.12) järeldeb nüüd hinnang

$$\|u - Q_n u\|_{C[x_i, x_{i+1}]} \leq 4c_1 h^{1-\alpha}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

kui $u \in C^{3,\alpha}(a, b)$ ning hinnangu

$$\|u - Q_n u\|_{C[x_i, x_{i+1}]} \leq 4c_2 h^3, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

kui $u \in C^3[a, b]$. Viimases kahest võrratusest ja võrratusest (4.11) saame lõpuks hinnangud (4.9) ja (4.10). ■

Teoreem 10. Rahuldagu operaator P_n ($n \in N$) lemma 1 tingimusi. Siis iga funktsiooni $u \in C[a, b]$ korral

$$\|P_n u - u\|_{C[a, b]} \rightarrow 0, \quad \text{kui } n \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

Tõestus: lemma 1 kohaselt $\|P_n\|_{\mathcal{L}(C[a, b], C[a, b])} \leq 9$ iga $n \in N$ korral. Kuna

$C^3[a, b] \subset C^{3,\alpha}(a, b)$ ($0 < \alpha < 1$), siis teoreemist 9 põhjal iga $u \in C^3[a, b]$ põhjal

$$\|P_n u - u\|_{C[a, b]} \rightarrow 0, \quad \text{kui } n \rightarrow \infty.$$

Kuna $C^3[a, b] \subset C[a, b]$ on tihe ruumis $C[a, b]$, siis teoreemi 10 väide (4.13) järeldeb Bnach-Steinhausi teoreemist 1.

Teoreem 11. Eeldame, et integraalvõrrandi (3.1) tuuma $|x - y|^{-\alpha}K(x, y)$ korral $0 \leq \alpha < 1$ ja $K \in C([a, b] \times [a, b])$. Olgu $f \in C[a, b]$ ja olgu võrrandile (3.1) vastaval homogeesel võrrandil (3.3) olemas ainult triviaalne lahend $u = 0$. Olgu kasutusel ühtlane võrk Δ_h ning interpolatsioonipunktid z_0, z_1, \dots, z_{n+1} , olgu antud seostega (2.3)-(2.5), kus $\delta_i = \frac{1}{2}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Siis võrrand (3.1) on üheselt lahenduv ja tema lahend $u \in C[a, b]$. Leidub selline n_0 , et $n \geq n_0$ korral kollokatsioonitingimused (4.3) määravad üheselt lahendi u lahendi $u_n \in S_2(\Delta_h)$ kujul (4.2) ning leiab aset koondumine

$$\|u_n - u\|_{C[a,b]} \rightarrow 0, \quad \text{kui } n \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Tõestus: Kirjutame võrrandi (3.1) operaatorkujul (3.4), kus operaator T on defineeritud valemiga (3.5). Kuna võrrandil $u = Tu$ on olemas ainult triviaalne lahend, siis teoreemi 10 põhjal lähtevõrrand (3.1) on üheselt lahenduv ja tema lahend $u \in C[a, b]$.

Kollokatsioonitingimused (4.3) on kirjutatavad kujul

$$u_n = P_n T u_n + P_n f, \quad (4.15)$$

kus $P_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ on käesoleva punkti alguses defineeritud interpolatsiooniprojektor.

Teoreemi 10 põhjal operaatorid P_n ($n \in \mathbb{N}$) koonduvad $n \rightarrow \infty$ korral punktiviisi ühikoperaatoriks. Teoreemi 4 kohaselt leidub selline n_0 , et $n \geq n_0$ korral on võrrand (4.15) üheselt lahenduv ja tema lahendi u_n korral kehtib järgmine veahinnang:

$$\|u_n - u\|_{C[a,b]} \leq c \|u - P_n u\|_{C[a,b]}, \quad n \geq n_0, \quad (4.16)$$

kus $u \in C[a, b]$ on integraalvõrrandi (3.1) lahend. Koonduvus (4.14) järeldeb teoreemist 10.

Teoreem 12. Eeldame, et võrrandi (3.1) korral $0 < \alpha < 1$, $K \in C^3([a, b] \times [a, b])$ ja $f \in C^{3,\alpha}[a, b]$. Olgu võrrandile (3.1) vastaval homogeesel võrrandil (3.3) olemas vaid triviaalne lahend. Siis leidub n_0 , et $n \geq n_0$ korral kehtib hinnang

$$\|u_n - u\|_{C[a,b]} \leq c_1 h^{1-\alpha}, \quad (4.17)$$

kus $h = \frac{b-a}{n}$, u on võrrandi (3.1) lahend ja u_n on lahendi u lähend, mis saadud kollokatsioonimeetodil (4.2)-(4.3). Kui $u \in C^3[a, b]$, siis

$$\|u_n - u\|_{C[a,b]} \leq c_2 h^3. \quad (4.18)$$

Siin c_1 ja c_2 on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest $h = \frac{b-a}{n}$.

Tõestus: Teoreemi 8 kohaselt kuulub võrrandi (3.1) lahend ruumi $C^{m,\alpha}(a,b)$. Teoreemist 11 järeldeb, et $n \geq n_0$ korral määravad kollokatsioonitingimused (4.3) üheselt lahendi u lähendi $u_n \in S_2(\Delta_h)$ ning kehtib võrratus (4.16). Rakendades teoreemi 9, saame hinnangud (4.17) ja (4.18). ■

5. Arvulised tulemused

Antud peatükis esitame kaks näidet käesoleva töös teoreetiliste tulemuste testimiseks. Nendes ülesannetes on vaadeldud integraalvõrrandi

$$u(x) = \int_a^b |x - y|^{-\alpha} K(x, y) u(y) dy + f(x) \quad (x \in [a, b], 0 \leq \alpha < 1) \quad (5.1)$$

lahendamist punktis 4.1 kirjeldatud kollokatsioonimeetodiga (4.2)-(4.3) ühtlasel võrgul Δ_h sõlmedega

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.2)$$

Interpoleerimispunktid on määratud seostega (2.3)-(2.5), kus $\delta_i = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

5.1 Näide 1

Vaatleme integraalvõrrandit (5.1) lõigul $[a, b] = [0, 4]$. Eeldame, et

$$\alpha = 0, \quad K(x, y) = e^{x-y}, \quad f(x) = e^x.$$

Sel korral on võrrandi (5.1) lahendiks funktsioon

$$u(x) = -\frac{1}{3} e^x.$$

Teoreem 12 põhjal kehtib vaadeldaval juhul kehtib veahinnang

$$\max_{a \leq x \leq b} |u_n(x) - u(x)| \leq ch^3, \quad (5.3)$$

kus u_n on meetodi {(4.2), (4.3)} abil saadud võrrandi (5.1) lahendi u lähend, c aga mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest h . Paneme tähele, et võrratuse (5.3) parema poole suhe n ja $2n$ korral on 8. Võrratuse (5.3) vasakul poolel oleva vea liigikaudseks arvutamiseks toome sisse suuruse

$$\varepsilon_n = \max_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq k \leq 10}} |u_n(x_{ik}) - u(x_{ik})|, \quad (5.4)$$

kus

$$x_{ik} = x_i + k \frac{h}{10}, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, 10. \quad (5.5)$$

Mõned saadud arvulised tulemused erinevate n väärtuste korral on toodud tabelis 1, mille esimeses veerus on osalõikude arv, teises veerus on viga ε_n ja kolmandas veerus on suhe $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$. Tabelis toodud tulemused on kooskõlas teoreetilise hinnanguga (5.3): osalõikude arvu n suurendamisel viga ε_n väheneb ja suhe $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$ läheneb arvule 8.

Tabel 1

Osaloikude arv n	ε_n	$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$
4	0,1651	
8	0,0202	8,315
16	$2,427 \times 10^{-3}$	8,233
32	$2,948 \times 10^{-4}$	8,138
64	$3,623 \times 10^{-5}$	8,074
128	$4,487 \times 10^{-6}$	8,039

5.2 Näide 2

Vaatleme integraalvõrrandit (5.1) lõigul $[a,b] = [0,1]$. Eeldame, et

$$\alpha = \frac{1}{2}, K(x, y) = 1,$$

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}x - \frac{(1+\sqrt{1-x})^2}{4} + \frac{x^2}{4(1+\sqrt{1-x})^2} - x \ln(1 + \sqrt{1-x}) + \frac{x \ln x}{2}.$$

Võrrandi (5.1) lahendiks on

$$u(x) = \sqrt{x}.$$

Teoreemist 12 järeldeb, et vaadeldaval juhul kehtib veahinnang

$$\max_{a \leq x \leq b} |u_n(x) - u(x)| \leq ch^{1-\alpha}, \quad (5.6)$$

kus u_n on meetodi $\{(4.2), (4.3)\}$ abil saadud võrrandi (5.1) lahendi u lähend, c aga mingi positiivne konstant, mis ei sõlltu suurusest h . Paneme tähele, et võrratuse (5.6) parema poole suhe n ja $2n$ korral on $\sqrt{2} \approx 1,414$. Võrratuse (5.6) vasakul poolel oleva vea liigikaudseks arvutamiseks toome sisse suuruse

$$\varepsilon_n = \max_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq k \leq 10}} |u_n(x_{ik}) - u(x_{ik})|, \quad (5.7)$$

kus

$$x_{ik} = x_i + k \frac{h}{10}, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, k = 0, 1, \dots, 10. \quad (5.8)$$

Mõned saadud arvulised tulemused erinevate n väärtuste korral on toodud tabelis 2, mille esimeses veerus on osalõikude arv, teises veerus on viga ε_n ja kolmandas veerus on suhe $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$. Me näeme, et tabelis 2 toodud tulemused on kooskõlas teoreetilise hinnanguga (5.6).

Tabel 2

Osaloikude arv n	ε_n	$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$
4	0,112	
8	0,068	1,571
16	0,043	1,499
32	0,029	1,467
64	0,02	1,452
128	0,014	1,434

Kasutatud kirjandus

1. De Boor, C. „On Uniform Approximation by Splines“, Journal of Approximation theory 1, 219-235, 1968.
2. Kangro R., Pedas A., Pallav R., „Quadratic spline collocation method for weakly singular integral equations“, Estonia Academy of Sciences, Physics Mathematics, 47-60, 2002.
3. Raudvee M., Bakalaurusetöö, „Ruutsplainidega kollokatsioonimeetod integraalvõrrandi lahendamiseks“, Tartu, 2018
4. Oja E, Oja P., „Funktsionaalanalüüs“, Tartu TÜ trükikoda, 1991.
5. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н., „Сплайны в вычислительной математике“, Москва, 1976.
6. Vainikko G., Kiirguslevi. „Matemaatilise füüsika täiendavad peatükid“, Tartu Ülikool, 1990
7. Vainikko G. , Pedas A., „Integral equations with diagonal and boundary singularities of the kernel“, ZAA, 2006, 487-516.
8. Vainikko G. , Pedas A., „Harilikud diferentsiaalvõrrandid“, Tartu, 2011
9. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л., „Методы сплайн-функций“, Москва, 1980.

Lisad

Programmide kirjeldused

Lisas 1 on toodud paketi Mathcad koostatud programmid, mida kasutatakse näidetes toodud integraalvõrrandi (5.1) lahendamisel ruutspalin-kollokatsioonimeetodiga. Esmalt leitakse programmiga $X(n,a,b)$ võrgu punktid (2.1) ja programmiga $Z(n,a,b)$ interpoleerimispunktid (2.3)-(2.5). Vaadeldava integraalvõrrandi tuum $|x - y|^{-\alpha}K(x,y)$, parameeter $\alpha \in [0,1)$, vabaliige $f(x)$, lahend $u(x)$ ja lõik $[a,b]$ tuleb iga näite jaoks eraldi ette anda. Avaldised $B200(t,x,H)$, $B210(t,x,H)$, $B211(t,x,H)$, $B220(j,t,x,H)$, $B221(j,t,x,H)$, $B222(j,t,x,H)$, $B230(n,t,x,H)$, $B231(n,t,x,H)$ ja $B240(n,t,x,H)$ määravad baasruutspainide esitused (2.17)-(2.21). Programm $M(n,x)$ arvutab võrrandisüsteemi (4.4) kordajate $\{c_j\}_{j=0}^{n+1}$ maatriksi. Kasutades Mathcadi funktsiooni $Isolve$, leiame võrrandisüsteemi (4.5) lahendi $VSLAHEND(n,a,b)$. Integraalvõrrandi lahendi ja lähilahendi arvutame vastavalt programmidega $LAHEND(n,m,a,b)$ ja $LÄHISLAHEND(n,m,a,b)$. Integraalvõrrandi lahendi ja lähilahendi erinevust lisasõlmedes (5.5) uurib programm $MAXVIGA(s,m,a,b)$. Kasutajal tuleb ette anda sõlmede arv $s = n$ ja lisasõlmede arv m (näidetes $m = 10$).

Lisa 1

Võrgu (2.1) punktid x_0, x_1, \dots, x_n :

$$X(n, a, b) := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n \\ x_j \leftarrow a + j \cdot \frac{b-a}{n} \\ x \end{array} \right.$$

Interpoleerimispunktid (2.3)-(2.5) z_0, z_1, \dots, z_{n+1} :

$$Z(n, a, b) := \left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow X(n, a, b) \\ h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \delta \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ z_{j+1} \leftarrow x_j + \delta \cdot h \\ \text{for } j \in 0 \\ z_j \leftarrow a \\ \text{for } j \in n \\ z_{n+1} \leftarrow b \\ z \end{array} \right.$$

Ruutspalinid (2.17)-(2.21):

$$B200(t, x, H) := \frac{(x_1 - t)^2}{H^2}$$

$$B210(t, x, H) := \frac{(t - x_0)(x_1 - t)}{H^2} + \frac{(x_2 - t)(t - x_0)}{2 \cdot H^2}$$

$$B211(t, x, H) := \frac{(x_2 - t)^2}{2 \cdot H^2}$$

$$B220(j, t, x, H) := \frac{(t - x_{j-2})^2}{2 \cdot H^2}$$

$$B221(j, t, x, H) := \frac{(t - x_{j-2}) \cdot (x_j - t) + (x_{j+1} - t) \cdot (t - x_{j-1})}{2 \cdot H^2}$$

$$B222(j, t, x, H) := \frac{(x_{j+1} - t)^2}{2 \cdot H^2}$$

$$B230(n, t, x, H) := \frac{(t - x_{n-2})^2}{2 \cdot H^2}$$

$$B231(n, t, x, H) := \frac{(t - x_{n-2})(x_n - t)}{2 \cdot H^2} + \frac{(x_n - t)(t - x_{n-1})}{H^2}$$

$$B240(n, t, x, H) := \frac{(t - x_{n-1})^2}{H^2}$$

$$B20(t, n) := \begin{cases} x \leftarrow X(n, a, b) \\ h \leftarrow \frac{b - a}{n} \\ \frac{(x_1 - t)^2}{h^2} & \text{if } x_0 \leq t < x_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B21(t, n) := \begin{cases} x \leftarrow X(n, a, b) \\ h \leftarrow \frac{b - a}{n} \\ \frac{(t - x_0)(x_1 - t)}{h^2} + \frac{(x_2 - t)(t - x_0)}{2 \cdot h^2} & \text{if } x_0 \leq t < x_1 \\ \frac{(x_2 - t)^2}{2 \cdot h^2} & \text{if } x_1 \leq t < x_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B22(j,t,n) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow X(n, a, b) \\ h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \frac{(t-x_{j-2})^2}{2 \cdot h^2} \text{ if } x_{j-2} \leq t < x_j \\ \frac{(t-x_{j-2}) \cdot (x_j - t) + (x_{j+1} - t) \cdot (x_j - t)}{2 \cdot h^2} \\ \frac{(x_{j+1} - t)^2}{2 \cdot h^2} \text{ if } x_j \leq t < x_{j+1} \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$$B23(t,n) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow X(n, a, b) \\ h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \frac{(t-x_{n-2})^2}{2 \cdot h^2} \text{ if } x_{n-2} \leq t < x_{n-1} \\ \frac{(t-x_{n-2})(x_n - t)}{2 \cdot h^2} + \frac{(x_n - t)(t-x_{n-1})}{h^2} \text{ if } x_{n-1} \leq t < x_n \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$$B24(t,n) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow X(n, a, b) \\ h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \frac{(t-x_{n-1})^2}{h^2} \text{ if } x_{n-1} \leq t \leq x_n \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

Võrrandisüsteemi (4.5) suuruste $c_j, j=0,1,\dots, n+1$, kordajate maatriks:

$$\begin{array}{l}
 M(n,x) := \left| \begin{array}{l}
 h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\
 \alpha \leftarrow \frac{1}{2} \\
 x \leftarrow X(n,a,b) \\
 z \leftarrow Z(n,a,b) \\
 \text{for } j \in 0..n+1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 I_{j,0} \leftarrow B20(z_j,n) - \int_{x_0}^{x_1} (|z_j-y|)^{-\alpha} \cdot K(z_j,y) \cdot B20(y,x,h) dy \\
 I_{j,1} \leftarrow B21(z_j,n) - \int_{x_0}^{x_1} (|z_j-y|)^{-\alpha} \cdot K(z_j,y) \cdot B21(y,x,h) dy - \int_{x_1}^{x_2} (|z_j-y|)^{-\alpha} \cdot K(z_j,y) \cdot B21(y,x,h) dy \\
 \text{for } k \in 2..n-1 \\
 I_{j,k} \leftarrow B22(k,z_j,n) - \int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} (|z_j-y|)^{-\alpha} \cdot K(z_j,y) \cdot B22(k,y,x,h) dy - \int_{x_{k-1}}^{x_k} (|z_j-y|)^{-\alpha} \cdot K(z_j,y) \cdot B22(k,y,x,h) dy - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (|z_j-y|)^{-\alpha} \cdot K(z_j,y) \cdot B22(k,y,x,h) dy \\
 I_{j,n} \leftarrow B23(z_j,n) - \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} (|z_j-y|)^{-\alpha} \cdot K(z_j,y) \cdot B23(n,y,x,h) dy - \int_{x_{n-1}}^{x_n} (|z_j-y|)^{-\alpha} \cdot K(z_j,y) \cdot B23(n,y,x,h) dy \\
 I_{j,n+1} \leftarrow B24(z_j,n) - \int_{x_{n-1}}^{x_n} (|z_j-y|)^{-\alpha} \cdot K(z_j,y) \cdot B24(n,y,x,h) dy
 \end{array} \right. \\
 \text{I}
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{VSLAHEND } (n, a, b) := \left| \begin{array}{l}
 x \leftarrow X(n, a, b) \\
 z \leftarrow Z(n, a, b) \\
 A \leftarrow M(n, x) \\
 \text{for } i \in 0..n+1 \\
 F_i \leftarrow f(z_i) \\
 F \\
 \text{lsolve}(A, F)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

LÄHISLAHEND(n, m, a, b) :=

x	← X(n, a, b)
h	← $\frac{b-a}{n}$
C	← VSLAHEND(n, a, b)
for i	∈ 0..n-1
for k	∈ 0..m
un _{i·m+k}	← $C_0 \cdot B20\left(x_i + k \cdot \frac{h}{m}, n\right) + C_1 \cdot B21\left(x_i + k \cdot \frac{h}{m}, n\right) + \sum_{j=2}^{n-1} \left(C_j \cdot B22\left(j, x_i + k \cdot \frac{h}{m}, n\right)\right) + C_n \cdot B23\left(x_i + k \cdot \frac{h}{m}, n\right) + C_{n+1} \cdot B24\left(x_i + k \cdot \frac{h}{m}, n\right)$
un	

LAHEND(n, m, a, b) :=

x	← X(n, a, b)
h	← $\frac{b-a}{n}$
for i	∈ 0..n-1
for k	∈ 0..m
g _{i·m+k}	← $u\left(x_i + k \cdot \frac{h}{m}\right)$
g	

MAXVIGA(s, m, a, b) :=

for p	∈ 0..s
n	← 2^{p+2}
un	← LÄHISLAHEND(n, m, a, b)
u	← LAHEND(n, m, a, b)
y _p	← $\max\left(\overrightarrow{ u - un }\right)$
s _p	← 2^{p+2}
M ^{<0>}	← s
M ^{<1>}	← y
M	

suhted(s, m, a, b) :=

mv	← MAXVIGA(s, m, a, b) ^{<1>}
for i	∈ 0..s-1
suhe _i	← $\frac{mv_i}{mv_{i+1}}$
suhe	

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Svetlana Frolova ,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Ruutspainidega kollokatsioonimeetod Fredholmi teist liiki integraalvõrrandi lahendamiseks”, mille juhendaja on Arvet Pedas,

reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Svetlana Frolova

15.05.2019