

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Rasmus Born
**Jõustamismeetod: kontiinumihüpoteesi sõltumatus
ZFC-hulgateooriast**

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Kaitsmisjärgsete paranduste ning täiendustega

Juhendaja Tõnu Tamme, MSc

TARTU 2023

JÕUSTAMISMEETOD: KONTIINUMIHÜPOTEESI SÕLTUMATUS ZFC-HULGATEOORIAST

Bakalaureusetöö

Rasmus Born

Kaitsmisjärgsete paranduste ning täiendustega

Lühitutvustus

Hulgateoorias kutsutakse kontiinumihüpoteesiks väidet, et ei leidu hulka, mille võimsus oleks rangelt naturaalarvuhulga ning selle potentshulga võimsuste vahepeal. Matemaatik Paul J. Coheni poolt 1963. aastal leiutatud jõustamismeetodiga on tõestatud, et kontiinumihüpotees on kõige klassikalisemast hulgateooria aksiomaatikast ehk ZFC-hulgateooriast sõltumatu. Tähendab, kui ZFC-hulgateooria on süntaktiliselt mittevasturääkiv, pole teooria aksiomaatikale tuginedes võimalik tuletada kontiinumihüpoteesi ega selle eitust. Siin bakalaureusetöös antakse ülevaade jõustamismeetodi ühest võimalikust kujust, sealjuures on toodud arusaamiseks tarvilik loogika ning hulgateooria taust. Näiteks räägitakse töös Gentzeni sekventsiaalsest predikaatarvutusest, klassidest, transitiivsetest hulkadest ning transitiivsest sulundist, väga üldisest potentselt regulaarsest induksioonist-rekursioonist, Zermelo – von Neumanni kumulatiivsest hierarhiast, Tarski-Scotti võttest, valemi ahendamisest, absoluutsusest, Mostowski-Shepherdsoni transitiivsest kollapsist ning Lévy-Montague'i peegeldumisprintsibist. Pea kõik tulemused on toodud põhjalike tõestustega. Jõustamisteoorias tuuakse esile seosed P-nimede ning Weaveri P-nimede vahel. Teema eestikeelsel esitamisel täiendati matemaatika oskussõnavara. Autor loodab, et teksti saab tulevikus kasutada ka teistkordse sissejuhatava õppematerjalina ranges hulgateoorias.

CERCS teaduseriala: P110 „Matemaatiline loogika, hulgateooria, kombinatoorika“

märksõnad: hulgateooria, ZFC, kontiinumihüpotees, sõltumatus, jõustamine, forsseerimine

METHOD OF FORCING: INDEPENDENCE OF THE CONTINUUM HYPOTHESIS FROM ZFC SET THEORY

Bachelor thesis

Rasmus Born

With minor corrections and clarifications issued after defense of thesis

Abstract

In set theory, the continuum hypothesis is the supposition that there exists no set whose cardinality lies strictly between the sizes of the set of natural numbers and that of its power set. The method of forcing, first introduced by mathematician Paul J. Cohen in 1963, has been used to prove the independence of the continuum hypothesis from the most classical system of axiomatic set theory known as ZFC. Neither the continuum hypothesis nor its negation can be derived by means restricted to ZFC alone, provided that ZFC itself is syntactically consistent. This bachelor thesis is an overview of one pathway to the forcing method, which includes logic and set theory as background crucial to understanding. Among the topics discussed are Gentzen's sequential predicate calculus, classes, transitive sets and transitive closure, very general principles of well-founded induction and recursion, the Zermelo – von Neumann cumulative hierarchy, the Tarski-Scott trick, relativising well-formed formulae, absoluteness, the Mostowski-Shepherdson transitive collapse, and the reflection principle due to Lévy and Montague. Nearly all results are provided with thorough proofs. The relationship between traditional P-names and Weaver P-names in forcing theory is emphasised. In presenting the material, additions were made to Estonian mathematical terminology. The author hopes that the text may also eventually be read as a second introduction to rigorous set theory.

CERCS research specialisation: P110 Mathematical logic, set theory, combinatorics

Key words: set theory, ZFC, continuum hypothesis, independence, forcing

Sisukord

Sissejuhatus	5
I Loogika ja hulgateooria taust	7
1. Formaalne esimest järku predikaatarvutus	7
1.1. Sümbolid ja loogilise valemi definitsioon	7
1.2. Tuletised, aksioomid, tuletusreeglid Gentzeni süsteemis	9
1.3. Võrdusega predikaatarvutus	12
1.4. Objektteooria ja metateooria	13
2. Zermelo-Fraenkeli hulgateooria	14
2.1. Teooria omaaksioomid ja baasmõisted	14
2.2. Klassid ja pärisklassid hulgateoorias	20
2.3. Transitiiivne hulk	21
2.4. Järjestusseosed. Ordinaalarvud	23
2.4.1. Naturaalarvud. Naturaalarvude hulk	27
2.4.2. Ordinaalarvud	29
2.5. Potentselt regulaarne induktsioon ja rekursioon	34
2.5.1. Alumised naabertipud. E -transitiivsus, -transitiivne sulund	34
2.5.2. Potentselt regulaarne seos	36
2.5.3. Induktsiooni- ja rekursiooniteoreemiskeemid	39
2.5.4. Astakufunktsioon	45
2.6. Zermelo – von Neumanni kumulatiivne hierarhia	48
2.6.1. Hulga astak	52
2.6.2. Tarski-Scotti võte	55
II Valemi tõkestamine ja absoluutsus. Laiend ZFC⁺	57
1. Valemi tõkestamine. Valemi absoluutsus kvaasimodeli suhtes	58
1.1. Tõkestamise ja epsilon-kvaasimodeli definitsioon	58
1.2. Valemi tähenduse invariantus. Valemi absoluutsus	60
1.3. Δ_0 - ning Δ_0^T -valemid. Hulgateooria valemite Lévy hierarhia	64
1.4. Hulgateooria põhikonstruktsioonide absoluutsusest	66
1.4.1. Potentselt regulaarse rekursiooni ja astaku absoluutsus	74
1.5. Epsilonisomorfism. Mostowski-Shepherdsoni transitiiivne kollaps	79
1.6. Lévy-Montague'i peegeldumisprintsip	85
2. Laiendamine teooriaks ZFC ⁺	89
2.1. Mitteabsoluutseid hulgateooria omadusi ja konstruktsioone	91

III Jõustamine	95
1. Jõustamise põhimõisted ja -konstruktsioonid	97
1.1. Jõustamiskogum. Geneeriline ideaal	97
1.2. Mõistete sisu selgitav näide	99
1.3. Geneerilise ideaali leiduvus ja kuuluvus	102
1.4. Tugevuse abimõisted ja -tulemused	105
1.5. P -nimed, Weaveri P -nimed. P -nimede kandjad. Laiend $M[G]$	107
1.5.1. P -nime definitsioon ja absoluutsus	109
1.5.2. P -nime kandja definitsioon ja absoluutsus	115
1.5.3. P -nime poolt genereeritud Weaveri P -nimi. Laiend $M[G]$. .	119
1.5.4. Juurega jõustamis- ning tingimuskogum	123
1.5.5. Kanooniliste P -nimede definitsioon ja absoluutsus	126
1.6. Jõustamislaiendi $M[G]$ lihtsamad omadused	129
2. Jõustamise põhimetateoreemiskeem	135
2.1. Tõesuslemma ja defineeritavuse lemma	136
2.2. Laiend $M[G]$ rahuldab teooria ZFC aksioome	138
2.3. Kontiinumihüpoteesi sõltumatus	143
Lisad	147
Lisa A. Näide tuletusest Gentzeni süsteemis	147
Lisa B. Transitiivse eelsulundi teoreemiskeemi tõestus	148
Lisa C. Epsilon-kvaasimudeli korrektsuse tõestus	151
Lisa D. Deduktsiooni-metateoreemiskeemi sõnastus	153
Lisa E. Ideaali eri definitsioonid	155
Viited ja kasutatud kirjandus	156
<i>Kaitsmisjärgsetest muudatustest</i>	160
<i>Note on Modifications Issued After Defence of Thesis</i>	160
<i>Lihthitsents</i>	161

Sissejuhatus

Matemaatilise hulgateooria rajaja, saksa matemaatik Georg Cantor sõnastas 1877. aastal *kontiinumihüpoteesi*na tuntuks saanud väite [Can77]. Cantor oletas ja proovis pikki aastaid tõestada, et naturaalarvude hulga $\mathbb{N}$ ning selle potentshulga $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ suuruste vahel ei leidu kolmandat võimsust. Hilberti 1900. aastal esitletud kahekümne kolme vastuseta matemaatilise küsimuse seas oli kontiinumihüpotees esimesel kohal. Pärast Zermelo-Fraenkeli valikuaksioomiga hulgateooria (ZFC) püstitamist selgus, et klassikalisest hulgateooriast ei piisa kontiinumihüpoteesi tõesuses veendumiseks ei ühte- ega teistpidi. 1940. aastal näitas Kurt Gödel, et kontiinumihüpoteesi eitust pole ZFC-teoorias võimalik tõestada [Göd40]. 1963. aastal tõestas Paul J. Cohen samasuguse tulemuse kontiinumihüpoteesi jaoks [Coh63; Coh64].* Kontiinumihüpotees osutus klassikalisest hulgateooriast *sõltumatuks* väiteks.

Gödeli ning Coheni meetodid erinevad oluliselt teineteisest. Teatud tähenduses leidis Gödel antud mudeli seest üles väiksema mudeli, *konstruktiivse hierarhia*, samas kui Cohen laiendas olemasoleva mudeli suuremaks mudeliks, *jõustamislaiendiks*. Erinevalt Gödeli toimimisviisist saab Coheni meetodiga tõestada kontiinumihüpoteesi kogu sõltumatuse. Sel põhjusel uurime just Coheni leiutatud *jõustamismeetodit* (van *forsseerimine* [Wik13]). Täpsemini anname ülevaate ühest võimalikust jõustamisteooria kujust, toetudes eeskätt Weaveri [Wea14] ning Kuneni [Kun80; Kun13] töödele. Samuti selgitame teooria ülesehitamiseks ning teemast arusaamiseks vajalikku matemaatilist loogikat ja hulgateooriat.

Esimeses peatükis tutvustame formaalset võrdusega esimest järku predikaatarvutust. Tule- tuste ilmestamiseks valime Gentzeni sekventsiaalse süsteemi, kus sekvensi antetsedendis on täpselt üks valem. Räägime meta- ning objektteooriast. Nimetame Zermelo-Fraenkeli vali- kuaksioomiga hulgateooria omaaksioomid ning mainime nende vahetuid järeldusi. Seletame, kuidas saab puhtas hulgateoorias kasutada pärisklasse. Toome sisse *transitiivse hulga* mõiste. Transitiivse hulga erijuhtudena räägime naturaali- ning ordinaalarvudest. Tõestame, et igal

*Allika [Jec02, lk 199] järgi teatas Gödel oma avastusest 1938. aastal [Göd38], avaldas tõestuse idee 1939. aastal [Göd39] ning põhjalik selgitus ilmus 1940. aastal [Göd40]. Coheni artiklid valmisid 1963. aasta sügiseks [Coh63; Coh64], neist hilisem [Coh64] avaldati 1964. aasta 1. jaanuaril.

hulgal X leidub transitiivne sulund $TC(X)$. Defineerime *potentselt regulaarse seose* mõiste ning tõestame väga üldised potentselt regulaarse induksiooni ning rekursiooni meetodid. Ehitame Zermelo – von Neumanni kumulatiivse hierarhia $(V_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ ja tõestame Tarski-Scotti võtte.

Teises peatükis on kesksel kohal valemi *epsilon-tõkend* ja *absoluutsus*. Toome segaduse vältimise eesmärgil sisse *epsilon-kvaasimudeli* mõiste. Tõestame epsilon-kvaasimudeli korrektsuse ning põhiliste hulgateoreetiliste omaduste ning konstruktsioonide absoluutsuse. Määratleme *epsilonisomorfismi* mõiste ja tõestame *Mostowski-Shepherdsoni transitiivse kollapsi* teoreemiskeemi. Anname *Lévy-Montague'i peegeldumisprintsipi* põhjenduse. Laiendame teooria ZFC uueks teooriaks ZFC^+ , milles pääseme ligi aksioomide hulga $Ax(ZFC)$ epsilon-kvaasimudelile. Tõestame, et ZFC^+ on alge ZFC -hulgateooria konservatiivne laiend. Näitame, kuidas teooria ZFC^+ abil saab tuletada väite ϕ sõltumatuse ZFC -hulgateooriast. Gentzeni tõestusteoreetilise süsteemiga saame anda täpsemad tõestused epsilon-kvaasimudeli korrektsuse metateoreemiskeemile ning ZFC^+ -teooria metatulemustele, kui muus kirjanduses on kombeks.

Viimases peatükis kirjeldame Coheni jõustamismeetodit. Defineerime olulised mõisted, nagu *jõustamis-* ja *tingimuskogum*, *geneeriline ideaal*, *(Weaveri) P-nimed*, *P-nime kandjad*, *jõustamislaiend*, *jõustamisseos*. Avame, mis tähenduses võib vaheldumisi kasutada tavalisi P - ja Weaveri P -nimesid, samuti juureta ning juurega jõustamiskogumeid. Jõustamise põhi-metateoreemiskeemi jaotame kolmeks. Esimese jao tõestame täielikult, suuremal määral teise. Kolmanda osa, *tõesuslemma* ning *defineeritavuse lemma*, esitame tõestuseta. Põgusalt vihjame, kuidas tõestatakse jõustamismeetodiga kontiinumihüpoteesi sõltumatus ZFC -hulgateooriast.

Autor usub, et bakalaureusetööd õnnestub tulevikus kasutada range hulgateooria õppematerjalina. Vähemalt nendel, kes on loogika ja naiivse hulgateooriaga juba korra või parem kaks korda kokku puutunud.

I peatükk

Loogika ja hulgateooria taust

Zermelo-Fraenkeli hulgateooria (ZF, valikuaksioomiga ZFC) on formaalne aksiomaatiline teooria. See rajaneb täpselt kokku lepitud aksioomidel ning teoreeme tõestatakse rangete tuletusreeglite järgi. Need tuletusreeglid pärib ZF võrdusega esimest järku süntaktilisest predikaatarvutusest. Pole esmatähtis, kuidas predikaatarvutus üles ehitatakse: peaasi, et ta on korrektne ja täielik standardse predikaatarvutuse semantika suhtes. Korrektsuse, täielikkuse omadused on näiteks olemas kahel tuntud loogilisel raamistikul – Hilberti süsteemil [Kul64, lk 147] ning Gentzeni meetodikal [PP04, lk-d 2, 97, 99; Pra04, lk 133].

Teooriat arendame lihtsuse eesmärgil vabas, mittetehnilises vormis. Erandkorras, kui loogilise raamistiku nüanssidesse süüvimisest ei pääse, valime lähemaks selgitamiseks Gentzeni sekventsiaalse predikaatarvutuse.

1. Formaalne esimest järku predikaatarvutus

Formaalne aksiomaatiline teooria püstitatakse järgmiselt. 1) Valitakse lubatud sümbolite metahulk ehk *tähestik*. 2) Määratakse esimest järku *valemi* rekursiivne definitsioon. 3) Fikseeritakse teoorias tuletatavate objektide ehk *tuletiste* liik. 4) Lepitakse kokku, millised tuletised on aksioomid. 5) Loetakse kehtivaks metalõplik kogus tuletusreegleid.

1.1. Sümbolid ja loogilise valemi definitsioon

Esimest järku loogika tähestik koosneb loogiliste tehete märkidest, signatuurist, indiviidmuutujaist ning kirjavahemärkidest. Valime teooria loogilisteks baasteheteks $\forall$, $\neg$ ja $\Rightarrow$. Ülejäänud, nagu $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, olgu avaldatud esimeste kaudu traditsioonilisel viisil. Signatuur σ on järjes-

tatud kolmik $\langle \text{Cons}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$, kus $\text{Cons}, \text{Func}, \text{Pred}$ on vastavalt konstant-, funktsionaal- ning predikaatsümbolite metahulgad, $\text{Pred} \neq \emptyset$. Signatuuriga käib kaasas tüüp τ ([HJ99, lk 58]), mis omistab funktsionaal- ning predikaatsümbolitele aarsused n , kus $n \geq 1$ on metanaturaalarv. Täpsema signatuuri fikseerime alles hiljem. Indiviidmuutujate metahulk Indv olgu suuruselt loenduv. Tüüpiliselt kasutame eesti-ladina järjestustähestikku $a, b, c, \dots, x, y$, kreeka tähestikku $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, neile vastavaid trükitähti või indekse, priimide, katustega täiendatud kujusid. Kontekstist on alati selge, missugune sümbol parasjagu indiviidmuutuja rolli täidab. Kirjavahemärkidenä lubame koma , ja ümarsulgi (,).

Valemi rekursiivne definitsioon toetub varasemale *termi* mõistele. Olgu fikseeritud signatuur $\sigma = \langle \text{Cons}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$, tüüp τ ja indiviidmuutujad metahulgaga Indv .

Metadefinitsioon I.1 (term, [PP04, lk 49]). *Termiks* kutsutakse avaldist, mis on parajasti saadud alltoodud eeskirja põhjal.

- a. Iga indiviidmuutuja $x \in \text{Indv}$ on term.
- b. Iga konstantsümbol $c \in \text{Cons}$ on term.
- c. Kui funktsionaalsümbol $f \in \text{Func}$ on aarsusega $\tau(f) =: n$ ning $t_1, \dots, t_n$ on termid, siis $f(t_1, \dots, t_n)$ on term.

Termi rakendatakse just valemi rekursiooni atomaarses sammus. Korraga defineeritakse valem kui ka temas esinevate muutujate seotus.

Metadefinitsioon I.2 (loogiline valem, vaba/seotud indiviidmuutuja, [Pra04, lk 79]). *Valemi* nimetatakse avaldist, mis on parajasti saadud järgmise eeskirja põhjal.

- a. Kui predikaatsümbol $P \in \text{Pred}$ on aarsusega $\tau(P) =: n$ ning $t_1, \dots, t_n$ on termid, siis $P(t_1, \dots, t_n)$ on valem. Kõik baasis ehk *atomaarses valemis* $P(t_1, \dots, t_n)$ esinevad indiviidmuutujad on vabad.
- b. Kui $\mathcal{F}$ on valem, siis $\neg \mathcal{F}$ on valem. Vabad ja seotud indiviidmuutujad ei teisene.
- c. Kui $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on valemid, kus ükski indiviidmuutuja pole korraga ühes valemis vaba ja teises seotud, siis $(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})$ on valem. Vabad ja seotud indiviidmuutujad ei teisene.
- d. Kui $\mathcal{F}$ on valem, kus indiviidmuutuja $x \in \text{Indv}$ esineb vabalt, siis $\forall x(\mathcal{F})$ on valem. Vabad ja seotud indiviidmuutujad ei teisene, v.a indiviidmuutuja x , mis valemis $\forall x(\mathcal{F})$ on seotud.

Valemite metahulka teoorias T tähistame kui $\text{Form}(T)$. Valemit kutsutakse *kinniseks*, kui temas vabu muutujaid pole. Kirjutades valemi $\mathcal{F}$ asemel $\mathcal{F}(x)$, mõtleme, et x ei esine valemis $\mathcal{F}$

seotult. Kirjapilt $\mathcal{F}[x]$ tähistab, et muutuja x esineb kindlasti vabalt, kujuga $\mathcal{F}[\hat{x}]$ nõuame, et indiviidmuutuja x ei esine vabalt. Termi t puhul tähendab $\mathcal{F}[t]$, et kõik termis t esinevad indiviidmuutujad on valemis $\mathcal{F}$ vabad. Analoogiliselt tõlgendame tähistusi $t[x]$ ja $\mathcal{F}[t](x)$. Termi t asendamist termiga u valemis $\mathcal{F}[t]$ tähistame kui $\mathcal{F}[t/u]$. Hoiatame, et asendamisel saadud süntaktiline avaldis ei pruugi enam olla valem. Kirjapildiga $\mathcal{F}[\hat{x}](x)$ saame näidata, et indiviidmuutuja x puudub täielikult valemist $\mathcal{F}$.

Sümbolijärjendite süntaktilist võrdust (sealhulgas kokkuleppelist) tähistame täppvõrdusega $\doteq$. Teooria arendamisel lubatakse peale tähestiku ka teiste, *abisümbolite* kasutamist, kui nende tähendus ja kontekst on fikseeritud tähestiku sümbolite kaudu. Niimoodi tuleb mõista tehtemärkide $\exists, \wedge, \vee, \Leftrightarrow$ kasutamist. Näiteks valemite $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ korral $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \doteq \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$. Eriti kasulikuks saavad abisümbolid hulgateooria juures. Ümarsulge on lubatud ära jätta üldtuntud kokkulepete järgi.

Valemi *osa*- ehk *alamvalem* ning *peatehte* definitsioon antakse rekursiooniga vastupidises suunas valemi definitsiooniga võrreldes. Valemi peatehteks on valemi ehitamisel viimasena kasutatud loogiline tehe (eitus, implikatsioon või üldisuskvantor). Valemi osavalemiteks on kõik valemid, mis ehituse rekursioonis läbi käidi, nende hulgas ka valem ise.

Metadefinitsioon I.3 (osa- ehk alamvalem, valemi peatehe, [PP04, lk 50]). Valemi $\mathcal{H}$ *osa*- ehk *alamvalem*id ning *peatehte* määratakse järgmise eeskirja abil.

- a. Valemi $\mathcal{H}$ osavalemiteks on $\mathcal{H}$ ise ja punktidega b.–d. määratud *ranged osavalem*id. Atomaarsel valemil pole peatehet.
- b. Kui $\mathcal{H} \doteq \neg\mathcal{F}$, siis valemi $\mathcal{H}$ rangeteks osavalemiteks on valemi $\mathcal{F}$ osavalemid. Valemi $\mathcal{H}$ peatehteks on eitus „ $\neg$ “.
- c. Kui $\mathcal{H} \doteq (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})$, siis valemi $\mathcal{H}$ rangeteks osavalemiteks on valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ osavalemid. Valemi $\mathcal{H}$ peatehteks on implikatsioon „ $\Rightarrow$ “.
- d. Kui $\mathcal{H} \doteq \forall x(\mathcal{F})$, siis valemi $\mathcal{H}$ rangeteks osavalemiteks on valemi $\mathcal{F}$ osavalemid. Valemi $\mathcal{H}$ peatehteks on üldisuskvantor „ $\forall$ “.

Alamvalemi mõistet kasutame näiteks Lévy-Montague'i peegeldumisprintsibi tõestuse struktuurses induktsioonis.

1.2. Tuletised, aksioomid, tuletusreeglid Gentzeni süsteemis

Gentzeni sekventsiaalses süsteemis võetakse tuletisteks *sekvents*id – süntaktilised objektid üldkujuga $\Gamma \vdash \Omega$, kus Γ ja Ω on valemite komaga eraldatud järjendid. Sekvents eesliiget Γ

kutsutakse *antetsedendiks*, tagaliiget *suktsedendiks*. Meie vaatleme süsteemi, kus suksedent koosneb parajasti ühest valemist, *konsekvendist*. Antetsedent võib erijuhul olla tühi. Sümbolit $\vdash$ võiks nimetada näiteks *sekviks*, *lipuks* või allika eeskujul [Laa23, lk 47] *lingiks*.

Olgu Γ, Δ valemite järjendid ning $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ valemid. *Tuletus* ehk *formaalne tõestus* on sekventsides süntaktiline puu aksioomidest tulemuseni, kus üleminekud põhjendatakse tuletusreeglite abil. Aksioomid, millest tõestusi alustatakse, on Gentzeni predikaatarvutuses ainult ühte tüüpi: *samasus-* ehk *identsusaksioomid* üldkujuga

$$\mathcal{F} \vdash \mathcal{F}.$$

Iga konkreetse valemi $\mathcal{F}$ korral saame iseseisva aksioomi, ja kindlat sekventsist uurides võime alati veenduda, kas sekvents on aksioom või mitte. Niisugust kontrollitavat reeglit, mis määrab korraga rohkem kui ühe aksioomi kehtivuse, nimetatakse *aksioomiskeemiks*. Aksioomide meta-hulk on puhtas predikaatarvutuses loenduv nagu valemite metahulkki, kuid need aksioomid on kirjeldatavad ainsa aksioomiskeemiga. Sarnaselt tuleb suhtuda terminitesse *definiitsiooniskeem*, *lause-* või *teoreemiskeem*. Näiteks kokkulepe $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \doteq \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$ liigitub definiitsiooniskeemiks, sest kehtib suvaliste valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ puhul. Edasises rõhutame, kui väide on tegelikult väiteskeem, aga definiitsiooniskeemidest räägime ikka kui lihtsalt definiitsioonidest.

Ühest või kahest tuletisest järgmiseni liigutakse tõestuses *tuletusreeglite abil*. Reeglid jagunevad kahte ülemrühma: nn *lausearvutuslikud* ehk *kvantoriteta reeglid* ning *predikaatarvutuslikud* või *kvantoritega reeglid*. Lausearvutuslik reegel võib baasis $\neg, \Rightarrow, \forall$ olla omakorda kolme tüüpi ning kvantoritega reegel kahte tüüpi, nagu nähtub tabelitest I.1 ja I.2.

Tabel I.1. Lausearvutuslikud ehk kvantoriteta tuletusreeglid, [PP04, lk 88]

Paremale sissetoomine	Paremalt eemaldamine	Struktuurne reegel
$\frac{\Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\Gamma \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})} (\vdash \Rightarrow)^\ddagger$	$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{F} \quad \Gamma \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})}{\Gamma \vdash \mathcal{G}} (\vdash \Rightarrow)^\ddagger$	$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{F}}{\Gamma, \mathcal{G} \vdash \mathcal{F}} (\text{S}+)$
$\frac{\Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \quad \Gamma, \mathcal{F} \vdash \neg\mathcal{G}}{\Gamma \vdash \neg\mathcal{F}} (\vdash \neg)$	$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\mathcal{F}}{\Gamma \vdash \mathcal{F}} (\vdash \neg)$	$\frac{\Gamma, \Delta, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\Gamma, \mathcal{F}, \Delta \vdash \mathcal{G}} (\text{S}\sim)$

[‡] Reegli rakendamisel tuleb kontrollida, et sümbolijärjend $(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})$ oleks valem, see tähendab, et ükski indiviidmuutuja ei tohi olla korraga ühes valemis vaba ja teises seotud.

Kvantoritega reegleid on kokku kaks. Mõlemale kehtib kitsendus, kusjuures tärniga (*) reegli ahendamine tuleneb loogika kaalutlustest [PP04, lk 98], seevastu kui ristiga (†) kitsendus johtub otseselt valemi metadefiniitsiooni punktist d.

Tabel I.2. Predikaatarvutuslikud ehk kvantoritega tuletusreeglid, [PP04, lk 97]

Paremale sissetoomine	Vasakule sissetoomine
$\frac{\Gamma[\hat{x}] \vdash \mathcal{F}[x]}{\Gamma[\hat{x}] \vdash \forall x(\mathcal{F})} (\vdash \forall)^*$	$\frac{\Gamma, \mathcal{F}[t](x) \vdash \mathcal{G}}{\Gamma, \forall x(\mathcal{F}[t/x]) \vdash \mathcal{G}} (\forall \vdash)^\dagger$

* Valemite jaoks defineeritud kirjepilti $[\hat{x}]$ (vt [metadef I.2 järg. osa](#)) on laiendatud järjendile Γ . Reegli rakendamiseks tuleb kontrollida, et universaalkvantori muutuja ei esineks vabalt valemijärjendis Γ .

† Reegli rakendamisel tuleb kontrollida, et valemis $\mathcal{F}$ ei esineks muutuja x seotult. Muus osas on termi t valik piiramata.

Tuletuse pikkus kasvab ruttu, vähegi keerukama tõestuse viimine aksiomideni pole praktiliselt mõistlik. Sel põhjusel lubatakse tõestuses algtipuna tulemusi, mis on ennist tõestatud. Peale varem tõestatud sekventsides ning aksiomide võib puu tipp olla tuletatav eelduse järgi, näiteks struktuurses induksioonis. Neid kolme juhtu tähistame tuletuspuus isemoodi joontega, vt [tabelit I.3](#).

Tabel I.3. Jooned tuletuspuu algtippude jaoks

Aksiom	Varasemast tuletatud	Tuletatav eeldusest
$\frac{\overline{\overline{\Gamma \vdash \mathcal{F}}}}{\Gamma \vdash \mathcal{F}} \text{ (aks)}$	$\frac{\overline{\Gamma \vdash \mathcal{F}}}{\Gamma \vdash \mathcal{F}} \text{ (var)}$	$\frac{\overline{\overline{\overline{\overline{\Gamma \vdash \mathcal{F}}}}}}{\Gamma \vdash \mathcal{F}} \text{ (eeld)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Pole keeruline näha, et kõik sekventsikujul $\Gamma, \mathcal{F}, \Delta \vdash \mathcal{F}$ on tuletatavad. Tõepoolest, olgu valemid järjendis Δ kokku $n \geq 0$, järjendis Γ kokku $m \geq 0$ valemid. Rakendame lisamise reeglit (S+) järjest n korda, seejärel korra asukoha vahetamise struktuurset reeglit (S~), lõpuks taas m korda struktuurset reeglit (S+). Jõuame samasusaksiomini $\mathcal{F} \vdash \mathcal{F}$. [Lisas A](#) toome näite, mis ilmestab tuletamist Gentzeni süsteemis: teeme läbi abireegli

$$\frac{\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}} (\wedge \vdash)^\ddagger$$

teatava ekvivalendi põhjendamise.

Defineerime veel formaalse aksiomaatilise teooria *süntaktilise vasturääkivuse* mõiste.

Metadefinitsioon I.4 (süntaktiline vasturääkivus, mittevasturääkivus, [Pra04, lk 105]).
Formaalset aksiomaatilist teooriat T nimetatakse *süntaktiliselt vasturääkivaks*, kui leidub valem $\phi \in \text{Form}(T)$, mispuhul on tuletatav nii valem ϕ kui ka selle eitus $\neg\phi$, see tähendab

$$T \Vdash \vdash \phi \quad \text{ja} \quad T \Vdash \vdash \neg\phi.$$

Teooriat kutsutakse *süntaktiliselt mittevasturääkivaks*, kui teooria pole süntaktiliselt vasturääkiv. Sümboliga $\Vdash$ tähistame niisiis sobiva tuletuse leidumist, maha tõmmatud paarilisega $\nVdash$ tuletuse puudumist.

Klassikalisele predikaatarvutusele toetuv as süntaktiliselt vasturääkivas teoorias on kõik valemid $\varphi \in \text{Form}(T)$ tuletatavad [Kul64, lk 40], s.o iga valemi $\varphi \in \text{Form}(T)$ korral $T \Vdash \vdash \varphi$. Niisugust standardse loogika nähtust kutsutakse *plahvatusprintsiiiks*. Plahvatusprintsiiibi tõestuseks rakendame kõigepealt reeglit $(\vdash \neg)$ ja seejärel reeglit $(\vdash \neg)$, võttes järjendi Γ rolli tühja järjendi, valemiks $\mathcal{F} := \varphi$ ning valemiks $\mathcal{G} := \phi$.

1.3. Võrdusega predikaatarvutus

Senine formaalne süsteem pole eriti konkreetne. Näiteks teame, et predikaatsümbolite hulk Pred pole tühi, kuid ei midagi kindlamat. Taolist üldist tausta andvat süsteemi kutsutakse *puhtaks loogikaks*. Esimese sammuna teooria täpsustamisel lisame signatuurile võrdusmärgi kui *poolloogilise* sümboli, s.o kehtib $= \in \text{Pred}$. Märgi $=$ näol on tegu kahekohalise predikaatsümboliga. Võrdusmärgiga koos täiendatakse tüüpiliselt teooria aksiomaatikat, nimetades kolm uut aksiomiskeemi.

Olgu $\mathcal{F}$ suvaline valem, $t, t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_n$ termid, $f \in \text{Func}$ funktsionaal- ning $P \in \text{Pred}$ predikaatsümbol. Aksiomiskeemid võrdusega predikaatarvutuses on toodud tabelis I.4.

Tabel I.4. Aksiomiskeemid võrdusega predikaatarvutuses, [PP04, lk 101]

Puhas loogika	Võrdusmärgi refleksiivsus	Asendus funktsionaal- sümbolisse	Asendus predikaat- sümbolisse
$\mathcal{F} \vdash \mathcal{F}$	$\vdash t = t$	$t_1 = u_1, \dots, t_n = u_n \vdash$ $\vdash f(t_1, \dots, t_n) = f(u_1, \dots, u_n)$	$t_1 = u_1, \dots, t_n = u_n \vdash$ $\vdash (P(t_1, \dots, t_n) \Rightarrow P(u_1, \dots, u_n))$

Tuntud võrdusseose omadused nagu sümmeetrilisus ja transitiivsus on võrdusega predikaatarvutuses tuletatavad, vt [PP04, lk-d 101–102]. Võrdusega predikaatarvutusele rajame hiljem Zermelo-Fraenkeli hulgateooria. Kahekohaliseks predikaatsümboliks loeme veel märgi $\in$ ning

teooriat laiendame *omaaksioomide* ehk *mitteloogiliste aksioomide* võrra.

1.4. Objektteooria ja metateooria

Iga kirjalik matemaatiline arutelu eeldab lugejalt elementaarset lugemisoskust ning analüüsi- ja arvutamist. Ta peab mõistma, et ühesugune sümbol ruumis nihutatuna viitab ikkagi samale objektile, v.a juhul, kui tähenduse muutus on kontekstist selge. Lugejal tuleb aru saada termi ning valemi mõistetest tasemel, mis võimaldab antud sümbolijärjendi puhul kindlaks määrata, kas märgijada nendeks liigitub või mitte. Sarnaselt osaku lugeja veenduda tuletuste korrektsuses. Nõndasugust lihttasemel arusaamist kutsume *minimaalseks taust-* ehk *metateooriaks*. Pangem tähele, et minimaalsesse taustteooriasse kuulub hulga või *metahulga* mõiste tundmine. Seda elementaarsel tasemel, kus „metahulk“ on kõigest süntaktiliste objektide kogum, kusjuures saab määrata, kas element kogumisse kuulub või ei kuulu. [Kle52, lk 65]

Üldisemalt on *taust-* ehk *metateooria* on loogiline süsteem, milles analüüsitakse teise teooria meetodeid ja struktuuri [Ins09]. Nimetatud teiseks teooriaks võetakse harilikult põhiteooria, milles tuletusi tehakse ja mida kutsutakse *objektteooriaks*. Arusaadavalt on meie põhiteooriaks Zermelo-Fraenkeli hulgateooria koos valikuaksioomiga. Metateooria valik sõltub vahenditest, mida kasutada soovime. Mõistliku ulatusega metateoorias saab rääkida naturaalarvudest, kodeerida valemi ja tuletuse mõisted Gödeli nummerdusega, viia valemitel läbi (kodeeritud kujul) struktuurset induktsiooni. Näiteks sobib metateooriaks Peano aritmeetika [Wea14, lk-d 1, 4], aga metateooriaks saab võtta ka objektteooria enda ehk ZFC. Formaalse metateooria korral tõuseb varasem minimaalne metateooria taseme võrra kõrgemale, meta-metateooriaks [Kle52, lk 65].

Meie metateooriat rangelt ei formaliseeri, jättes selle lugeja intuitsiooni tasemele.

Märkus 1.5. Indiviidmuutujate, valemite ja aksioomide metahulkade loenduvust võib võtta ka kui *potentsiaalselt loenduvust*. Näiteks indiviidmuutujaid pole kunagi „päriselt“ lõpmatu kogus, kuid neid on alati piisavalt. Metanaturaalarvudest võib esimeses lähenduses mõelda kui kriipsudest, s.o $1 \doteq |$, $2 \doteq ||$, $5 \doteq |||||$, $0 \doteq _$. Põhiline, et metanaturaalarvud oleksid üksteisest süntaktiliselt eristatavad ja oleks mõistetav, mida tähendavad elementaarsed operatsioonid, nagu $1 + 1$, $3 \geq 0$ või $\max\{1, 5\}$. Struktuurse induktsiooni kui „lõpmatu“ meetodi võib samuti asendada selle potentsiaalselt lõpmatu lihtsustusega.

2. Zermelo-Fraenkeli hulgateooria

Fikseerime signatuuri $\langle \emptyset, \emptyset, \{=, \in\} \rangle$. Paljas Zermelo-Fraenkeli teoorias pole konstant- ega funktsionaalsümboleid. Teooriasse kuuluvad üksnes hulgalised objektid, st *urelemendid* ehk *aatomid* puuduvad. Lepime kokku, et võrdust ja hulka kuuluvust märgime prefikstähistuse asemel infikstähistusega, näiteks $=(x, y)$ asemel kirjutame $x = y$. Hulgateooria aksioome on loenduv kogus, seda tänu kahele aksioomiskeemile. Aksioomidega tutvume järk-järgult, et hõlbustada nende sisu selgitamist.

2.1. Teooria omaaksioomid ja baasmõisted

Tutvustame ZF-hulgateooria aksioome, nende esmaseid järeldusi ning defineerime edasiseks tarvilikud abisümbolid. Toome välja aksioomide predikaatarvutusliku kuju, samal ajal selgitame tavakeeles nende sisu ja tähendust. Toodud aksioomid moodustavad ühe võimaluse mitmest, kuidas ZF-teooriat esitada. Paljuski, enamasti isegi üdini, langevad teooria tõestata- vad tulemused kokku, kuigi tõestuste käik ei pruugi ühtida. Meie valik tugineb allikatele [Jec02, lk-d 6–13, 47, 63] ja [Kul64, lk-d 212–213]. Üldlevinud kokkuleppe järgi jätame aksioomides liigsed sulud panemata.

Ilma ühegi täiendava aksioomita (iseги võrduse aksioomideta) võime tõestada, et mingisugune hulk peab leiduma: piisab mõelda sekventsile $\vdash \exists X(X = X \vee \neg X = X)$. Tühja hulga või üldse täpsemate omadustega hulga leidumise küsimus jääks aga lahtiseks.

①. Hulgad on võrdsed parajasti siis, kui neisse kuuluvad samad elemendid.

$$\vdash \forall X \forall Y (X = Y \Leftrightarrow \forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y))$$

Ekstensionaalsusaksioom – oluline on sisu, ulatus, mitte mõte või moodustamise viis

Ekstensionaalsuse esimese ekvivalentsi $\Rightarrow$ -suund kehtib tegelikkuses juba võrdusega predikaatarvutuses. Vastupidi taandub ekstensionaalsusaksioomi järgselt osa võrduse aksioomidest ebavajalikku rolli. Näiteks refleksiivsus $\vdash X = X$ on ekstensionaalsuse najal tuletatav.

②. Olgu $n \geq 0$ metanaturaalarv ja $p_1, \dots, p_n$ hulgad. Kui X on hulk ja $\mathcal{S} \doteq \doteq \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \dots, p_n](X, Y)$ valem hulgateooriast, siis leidub hulgast X eraldatud hulk $Y := \{x \in X \mid \mathcal{S}\}$ ehk teisiti $\{x \in X : \mathcal{S}\}$ on hulk. Kõik aksioomid kujuga

$$\vdash \forall p_1 \cdots \forall p_n \forall X \exists Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \dots, p_n](X, Y)).$$

Eraldamisaksioomiskeem – moodus, kuidas uusi hulki luua, eraldades need välja olemasolevatest

Hulgad $p_1, \dots, p_n$ on parameetrite rollis (erijuhul $n = 0$ parameetreid pole). Tüüpilise eraldamisaksioomiskeemi rakendamisel on hulgad p_i fikseeritud hulgad, mis täidavad kindlaid lisatingimusi.

Eraldamisaksioomiskeem väldib Russeli antinoomiat [Jec02, lk 4], kuna reeglit $\mathcal{S}$ rakendatakse kindlale, juba olemasolevale hulgale X . Vigureid vormis $x \in Y \Leftrightarrow x \notin Y$ ei saa luua, sest individmuutujat Y ei tohi valemis $\mathcal{S}$ vabalt esineda. Saab tõestada, et leidub parajasti üks tühi hulk $\emptyset$, kus $x = \emptyset$ parajasti siis, kui $\forall y(y \notin x)$ (põhjenduseks võtta suvaline hulk X ja valemiks $\mathcal{S}[x, \hat{Y}] := x \neq x$, ühesuseks rakendada ekstensionaalsust). Kõikide hulkade hulka $\mathbf{U}$ ei leidu. Kui leiduks, oleks $Y := \{x \in \mathbf{U} \mid x \notin x\}$ niisamuti hulk. Mõlemad variandid, nii $Y \in Y$ kui $Y \notin Y$, annaksid vastuolu. Eraldamisaksioomiskeemiga defineeritakse hulkade *ühisosa* ja *vahe* üldtuntud viisil.

Defineerime alam- ehk osahulka tähistava abisümboli, $X \subseteq Y := \forall z(z \in X \Rightarrow z \in Y)$.

- ③ Iga hulga X ja Y korral saab moodustada nende järjestamata paari (hulgapaari) Z , s.o hulga $Z = \{X, Y\}$, mille ainukesed elemendid on X ja Y .

$$\vdash \forall X \forall Y \exists Z \forall z (z \in Z \Leftrightarrow z = X \vee z = Y)$$

Hulgapaari moodustamise aksioom – kahest hulgast saab moodustada nende järjestamata paari

Võiksime nõuda vähemat, võttes aksioomiks hoopis $\vdash \forall X \forall Y \exists Z (X \in Z \wedge Y \in Z)$. Nii ütleksime, et $X, Y \in Z$, rõhutamata, kas hulka Z kuulub teisi elemente. Piltlikult väidaks alternatiivne hulgapaari moodustamise aksioom, et leidub hulk Z nii, et $\{X, Y\} \subseteq Z$. Konkreetset hulgapaari leidumine ja ühesus johtuks eraldamisaksioomist ning ekstensionaalsusest. Nõndasugused märkused kehtivad samuti ühendi ning potents hulga moodustamise aksioomide juures. Kui $X = Y$, saame hulga $\{X, X\}$, mida tähistame kui $\{X\}$. [Hal14, lk 9]

Kolmas viis olemasolevatest hulkadest uusi moodustada on ühendi võtmise kaudu.

- ④ Iga hulga X korral saab moodustada selle elementidest Z ühendi Y , s.o hulga $Y = \bigcup X$, mille elemendid on hulga X elementide Z elemendid z .

$$\vdash \forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow \exists Z (z \in Z \wedge Z \in X))$$

Ühendi moodustamise aksioom – hulga elementidest saab moodustada nende

ühendhulga

Kahe hulga A_1 ja A_2 ühend $A_1 \cup A_2$ saadakse hulgapaari ja ühendi aksioomi koosmõjus, $A_1 \cup A_2 = \bigcup \{A_1, A_2\}$.

- ⑤ Iga hulga X puhul leidub selle potentshulk Y , s.o hulk $Y = \mathcal{P}(X)$, mille elemendid Z on parajasti hulga X osahulgad.

$$\vdash \forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \Leftrightarrow Z \subseteq X)$$

Potentshulga moodustamise aksioom – hulga osahulkadest saab moodustada koondhulga

Kazimierz Kuratowski järgi määratletakse *järjestatud paar* kui $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Aksioomidele 1–3 tuginedes Kuratowski paar leidub ja täidab järjestatud paaride põhiomadust:

$$\forall a \forall b \forall c \forall d ((a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d).$$

Potentshulga aksioomiga tõestatakse, et iga hulga A ning B puhul leidub nende *otsekorruis* $A \times B$. Idee seisneb sisalduvuses $A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Harilikult samastatakse hulgateoorias seosed ja funktsioonid nende graafikutega. Binaarne *seos* R on suvaline paaridest koosnev hulk. Seos hulkade A, B vahel on osahulk $R \subseteq A \times B$. Seosega käivad kaasas *määramispiirkonna* ning *muutumispiirkonna* mõisted, vastavalt

$$\begin{aligned} \text{dom } R &= \{a \in \bigcup \bigcup R \mid \exists b (a, b) \in R\}, \\ \text{ran } R &= \{b \in \bigcup \bigcup R \mid \exists a (a, b) \in R\}. \end{aligned}$$

Funktsioon ehk *kujutus* on seos f , mispuhul $(x, y_1) \in f$ ja $(x, y_2) \in f$ tähendab võrdust $y_1 = y_2$. Kirjutame $f: X \rightarrow Y$, kui $\text{dom } f = X$ ja $\text{ran } f \subseteq Y$. Hulga A kujutis $R(A)$ ning pöördkujutis $R^{-1}(A)$ seosega R defineeritakse tavalisel moel, samuti funktsiooni $f: X \rightarrow Y$ *injektiivsus*, *sürjektiivsus* ning *bijektiivsus*. Kahe funktsiooni f ja g *liitfunktsiooni*, kui $\text{ran } f \subseteq \text{dom } g$, märgime kui $g \circ f$ või lühemalt gf . Funktsiooni f *ahendit hulgale* A tähistame kriipsuga $f|_A$. [Hal14, lk-d 22–33, 38–41]

Defineerime hulga x järglashulga x^+ mõiste $x^+ := x' := x \cup \{x\}$. Naturaalarvude leidmiseks objekt- ehk hulgateooriast valime von Neumanni järgi nime saanud toimimisviisi. Von Neumanni naturaalarvud ehitatakse üles järglashulga operatsiooni kordamisel. Niisiis $0 := \emptyset$,

$1 := 0^+$, $2 := 1^+$, $3 := 2^+$ ja nõnda edasi. Samaväärselt

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ 1 &= \{\emptyset\}, \\ 2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ 3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

või

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ 1 &= \{0\}, \\ 2 &= \{0, 1\}, \\ 3 &= \{0, 1, 2\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Märkame, et hulgas 0 on null elementi, hulk 1 sisaldab parajasti ühte elementi ja üldisemalt on hulgas n kokku n elementi. Loendamist võib siin mõista metateoreetilisena, kuigi kehtib samamoodi (tautoloogiana) kardinaalarvude klassikalise definitsiooni mõttes. [Hal14, lk-d 43–44]

Kui soovime rääkida naturaalarvude hulgast tervikuna, vajame täiendavat hulga leidumise aksioomi [Hal14, lk 44]. Kui hulk $A \neq \emptyset$ sisaldab iga elemendi $a \in A$ korral järglast $a^+ \in A$, nimetame hulka A *induktiivseks hulgaks* ehk *koondjärglashulgaks*. Induktiivset hulka, mis sisaldab tühja hulka, kutsume *standardseks*. Abivalemiga $\emptyset \in A$ peame silmas valemite $\exists a(a \in A \wedge a = \emptyset)$. Loeme selle üldiseks põhimõtteks: kui ζ on mingi üheselt leiduv hulgaline objekt, siis valemiga $\zeta \in Y$ peame silmas valemite $\exists y(y \in Y \wedge y = \zeta)$.

- ⑥. Leidub hulk A , mille sisaldab elemendina tühja hulka $\emptyset$ ja iga oma elemendi $a \in A$ järglast a^+ .

$$\vdash \exists A(\emptyset \in A \wedge \forall a(a \in A \Rightarrow a^+ \in A))$$

Lõpmatu hulga leidumise aksioom – leidub standardseks induktiivne hulk

Alamhulgalise sisalduvuse mõttes vähim tühja hulka sisaldav koondjärglashulk ω ongi soovitud von Neumanni naturaalarvude hulk. Lõpmatu hulga leidumise aksioom nõuab niisuguse hulga

A olemasolu, mispuhul $\omega \subseteq A$. Alternatiivse ja pealtnäha kitsama, kuid ZF-teooria raames samaväärsel lõpmatusaksioomi

$$\vdash \exists B(B \neq \emptyset \wedge \forall b(b \in B \Rightarrow \exists c(c \in B \wedge b \subsetneq c)))$$

leiab allikast [Kul64, lk 213].

Regulaarsuse aksioom on tähtis mudeliteoorias näiteks absoluutsuse juures. See aksioom välistab muu hulgas lõpmatult kahanevate $\in$ -ahelate võimalikkuse. Regulaarsuse aksioomi kasutame hiljem oluliselt Tarski-Scotti võttes ning väites, et kõik hulgad kuuluvad Zermelo – von Neumanni hierarhiasse V , samuti epsiloninduktsioonis. Hulgateooriaga tavamatemaatika üles ehitamisel pole regulaarsuse aksioomi järele vajadust [HJ99, lk 259]. Seda põhjusel, et paljud olulised hulgad, näiteks naturaalarvud ning ordinaalarvud, on juba regulaarsuse aksioomiga tugevalt regulaarsed.

⑦. Igas mittetühjas hulgas $X \neq \emptyset$ leidub rangelt $\in$ -minimaalne element x .

$$\vdash \forall X(X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x(x \in X \wedge \neg \exists z(z \in X \wedge z \in x)))$$

Regulaarsuse aksioom – hulk on tühi või sisaldab rangelt $\in$ -minimaalset elementi

Tooduga vahetult samaväärne on kirjpilt

$$\vdash \forall X(X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x(x \in X \wedge X \cap x = \emptyset)).$$

Teine lõpmatu aksioomide kogum on asendamisaksioomiskeem. See lubab olemasoleva hulga elemendid funktsioonilise reegli abil asendada. Valemit $\Phi[x, y]$ nimetame täisfunktsiooniliseks, kui iga hulga x puhul leidub üheselt määratud y nii, et $\Phi[x, y]$ kehtib. Teisisõnu peab täisfunktsioonilisuseks kehtima

$$\forall x \exists! y \Phi[x, y] := \forall x (\exists y (\Phi[x, y] \wedge \forall z (\Phi[x, y] \wedge \Phi[x, y/z] \Rightarrow y = z))).$$

⑧. Olgu $n \geq 0$ metanaturaalarv ning $p_1, \dots, p_n$ hulgad. Kui X on hulk ja $\Phi \doteq \Phi[x, y, \hat{Y}, p_1, \dots, p_n](X, Y)$ on täisfunktsiooniline valem hulgateooriast, siis leidub hulgast X asendamise teel saadud hulk $Y := \{y \mid \exists x(x \in X \wedge \Phi)\}$. Kõik aksioomid kujuga

$$\vdash \forall x \exists! y \Phi[x, y] \Rightarrow \forall p_1 \dots \forall p_n \forall X \exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow \exists x(x \in X \wedge \Phi[x, y, \hat{Y}, p_1, \dots, p_n](X, Y))).$$

Asendamisaksioomiskeem – moodus, kuidas uusi hulki luua, asendades olemasolevas hulgas elemente

Asendamisaksioomiskeemist järeldub eraldamisaksioomiskeemi abiga n-ö *osalise asendamise* või *asendamise-kustutamise teoreemiskeem*. Selles väites leevendatakse täisfunktsioonilisuse tingimus osaliseks, nõudes üksnes, et

$$\forall x \forall y \forall z (\Phi[x, y] \wedge \Phi[x, y/z] \Rightarrow y = z).$$

Elemente x , mille korral sobivat elementi y ei leidu, pole millegagi asendada. Osalise skeemi korral niisugused elemendid kustutatakse. Asendamise-kustutamise teoreemiskeemi tõestuseks laiendame esmalt valemit Φ kohtadesse, kus element y puudus (näiteks võttes kujutiseks alati tühja hulga). Seejärel rakendame asendamisaksioomiskeemi. Lõpptulemuseni jõuame eraldamisaksioomiskeemiga, seades $\mathcal{S}[x, \hat{Y}] := \exists y \Phi[x, y]$. Sarnaselt näeme, et asendamisaksioomiskeemi rakendamiseks hulga Y piisab teadmisest, et valem $\Phi[x, y]$ on täisfunktsiooniline hulgal Y , s.o $\forall x (x \in Y \Rightarrow \exists! y \Phi[x, y])$.

Asendamisaksioomiskeemi abil tuletatakse väga rohkesti olulisi teoreeme. Sellele tuginedes tõestatakse transitiivse sulundi leidumine, tulemusi ordinaalarvude aritmeetikas ning erinevate rekursioonide korrektsus, näiteks potentselt regulaarse rekursiooni teoreem. Paljude hulgateoorias tuntud hulkade leidumist ei saaks asendamisaksioomiskeemita tõestada. Üheks näiteks on Zermelo naturaalarvuhulk, vt [Kun13, lk 126].

Aksioome punktidest 1–8 nimetatakse Zermelo-Fraenkeli aksioomideks. Viimane puuduolev aksioom on valikuaksioom, mis lubab ühekorraga ja eeskirjata „valida“ lõpmatu koguse elemente. Kui X on suvaline hulk, siis *valikufunktsiooniks hulgal X (eriväärtusega a)* nimetatakse funktsiooni $\tilde{\nu}: X \rightarrow (\bigcup X) \cup \{a\}$, kus iga $\emptyset \neq x \in X$ korral $\tilde{\nu}(x) \in x$, lisaks $\emptyset \in X$ puhul $\tilde{\nu}(\emptyset) = a$.

⑨ Iga hulga X korral leidub valikufunktsioon ν hulgal $X \setminus \{\emptyset\}$.

$$\vdash \forall X (\exists \nu: X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \bigcup X \wedge \forall x (x \in X \wedge x \neq \emptyset \Rightarrow \nu(x) \in x))$$

Valikuaksioom – igal hulgal $X \setminus \{\emptyset\}$ leidub valikufunktsioon

Olgu a suvaline hulk. Valikuaksioomi kohese järeldusena leidub igal hulgal X valikufunktsioon $\tilde{\nu}$ eriväärtusega a , võttes $\tilde{\nu} := \nu \cup \{(\emptyset, a)\}$, kui kehtib $\emptyset \in X$. Zermelo-Fraenkeli hulgateooriat koos valikuaksioomiga kutsutakse **ZFC-teooriaks**. Ekvivalentne ning pikalt välja kirjutatud valikuaksioom tuuakse allikas [Kul64, lk-d 212–213].

Edasises jätame sekventsiaalse tähistuse ära, kui selle rõhutamise pole oluline. Gentzeni süsteemile viitame näiteks [valemite absoluutsuse](#) juures, [epsilon-kvaasimudeli korrektsuse metateoreemiskeemis](#) ning [ZFC⁺-teooriaga seotud tulemustes](#). Rohkesti kasutame *tõkestatud kvantoreid* $\forall x \in y$ ja $\exists x \in y$, kus ükskõik missuguse valemi $\mathcal{F} \doteq \mathcal{F}(y)$ jaoks

$$\begin{aligned}\forall x \in y(\mathcal{F}) &\doteq \forall x((x \in y \Rightarrow \mathcal{F})), \\ \exists x \in y(\mathcal{F}) &\doteq \exists x(x \in y \wedge \mathcal{F}).\end{aligned}$$

Toodud aksioomide pisut teistsugustest vormidest, samuti parameetrite kohta eraldamis- ning asendamisaksioomiskeemides, võib lugeda Lévy artiklist, vt [[Lév74](#)].

2.2. Klassid ja pärisklassid hulgateoorias

Kujutlegem ette hulgateooriat, kus kehtivad kõik ZFC aksioomid, kuid lõpmatusaksioomi asemele on lisatud tema eitus. Niisuguses teoorias $\text{ZFC} - \text{Inf} + \neg \text{Inf}$ on kõik hulgad *lõplikud*, bijektsioonis unikaalse naturaalarvuga. Kõigi naturaalarvude hulka ω kui lõpmatut hulka ei leidu. Hulga ω puudumine ei takista meid rääkimast naturaalarvude kogumist ega nende omadustest.

Otsene lähenemine siiski ei tööta. Võiksime küll kirjutada valemi $\mathcal{I}[x]$, mis väidab, et hulk x on induktiivne ja sisaldab tühja hulka:

$$\mathcal{I}[x] \doteq \emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow y^+ \in x).$$

Samuti saaksime anda valemi $\mathcal{M}[y]$, mis ütleb, et y on $\subseteq$ -vähim tühja hulka sisaldav induktiivne hulk,

$$\mathcal{M}[y] \doteq \forall x(\mathcal{I}[x] \Rightarrow y \subseteq x).$$

Mure on selles, et kui standardset induktiivset hulka x ei leidu, võib hulga y rolli võtta ükskõik missuguse hulga. Küll aga võib naturaalarvuks olemise defineerida valemiga $\mathcal{N}[y]$, kus

$$\mathcal{N}[y] \doteq \text{„}y \text{ on ordinaalarv“} \wedge \neg \exists z(z \neq 0 \wedge \text{„}z \text{ on piirordinaalarv“} \wedge z \in y).$$

(Ordinaalarvu ning piirordinaalarvu mõisted defineerime [ordinaalarvude jaotises](#).)

Teoorias $\text{ZFC} - \text{Inf} + \neg \text{Inf}$ saame seega väljendada lauseid kujul „iga naturaalarvu n puhul ...“ valemiga $\forall n(\mathcal{N}[y/n] \Rightarrow \dots)$. Võime piltlikumalt vaadelda valemit $\mathcal{N}$ rahuldavaid hulki mõttelise kogumina N . Siis teiseneb varasem kujule $\forall n(n \in N \Rightarrow \dots)$ või isegi vormi $\forall n(n \in \omega \Rightarrow \dots)$, võttes $\omega := N$. Kirjeldatud vaatenurgast on naturaalarvude kogum ω

pärisklass, teooria objektidest väljapoole jääv kujundlik assotsiatsioon.

Teoorias ZFC on ω loomulikult hulk, mitte pärisklass, ent sarnaseid süntaktilisi trikke tehakse siingi. Näiteks räägitakse kõigi hulkade klassist **U** (valemiga $x = x$), veel näiteks ordinaalarvude **Ord**, kardinaalarvude **Card** ja tugevalt regulaarsete hulkade klassist **WF**. Viimased kolm pärisklassi defineerime hiljem. Võtame senise arutelu kokku täpsema metadefinitsiooniga.

Metadefinitsioon I.6 (klass, pärisklass). *Klassiks* $\mathcal{C}$ või $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ (defineeriva valemiga $\mathcal{N}[x]$, põhimuutujaga x) nimetame mõttelist kogumit, mispuhul

$$x \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}} \doteq \mathcal{N}[x].$$

Pärisklass on klass, mis ei ole hulk: $\neg \exists X (\forall x (x \in X \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}))$.

ZFC-teoorias on klassid niisiis omamoodi süntaktilised lühendid. Klassidel saab arusaadaval moel defineerida seosed, sealhulgas klasside võrduse ja funktsioonid (funktsiooniline valem), rääkida ühisosast (klasside konjunktsioon) ning ühendist (disjunktsioon). Klassid lühendavad arutelu, aga iga klasse sisaldava väite võime asendada väitega, mis klassidest ei räägi. On olemas hulgateooriaid, mis lubavad hulkade kõrval *tõelisi klasse*. Tõelised klassid laiendavad varem kirjeldatud klasside ulatust, selles kontekstis tuleks ülemistest pärisklassidest rääkida kui *parameetritega defineeritavatest pärisklassidest teoorias* ZFC. [Jec02, lk-d 5–6, 70] Kõik ZFC-teooria hulgad on klassid. Põhjendusena märgime, et kui M on suvaline hulk, siis valime lihtsalt $\mathcal{M}[x] \doteq x \in M$.

Toome näite klasside terminoloogia rakendamisest. Nimelt saame klassi mõistega anda mõnele aksioomile alternatiivse esituse. Eraldamisaksioomiskeemi võime sõnastada järgmiselt: iga hulga X ja iga klassi $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\mathcal{S}[x, \hat{Y}](X, Y, p_1, \dots, p_n)}$ korral on ka $Y = X \cap \mathcal{C}$ hulk. Iseäranis mugava tõlgenduse võtab asendamisaksioomiskeem [Jec02, lk 13], mis väidab, et iga hulga X korral on klass $F(X)$ hulk, kus $F := F_{\Phi[x, y, \hat{Y}](X, Y, p_1, \dots, p_n)}$ ja $F(X)$ on hulga X kujutis klassifunktsiooniga F .

Selguse huvides kasutame klasside jaoks ka edaspidises tavapärasest erinevat kirjatüüpi.

2.3. Transitiivne hulk

Keskne mõiste hulga- ja mudeliteoorias on *transitiivne hulk*. Hulka loetakse transitiivseks, kui sisalduvusseos $\in$ hulgal on teatud mõttes transitiivne.

Definitsioon I.7 (transitiivne hulk, [Kun80, lk 16]). Hulk X on transitiivne siis, kui iga tema element on ühtlasi alamhulk. Valemina „ X on transitiivne“ $\doteq \forall x (x \in X \Rightarrow x \subseteq X)$.

Tühi hulk on näide transitiivsest hulgast. Pole raske näha, et järgmised tingimused on ekvivalentseks.

Lause I.1 (hulga transitiivsuse teised kujud). *Tingimused (i)–(iv) on samaväärsed:*

- (i) *hulk X on transitiivne,*
- (ii) $\forall u, v (u \in v \wedge v \in X \Rightarrow u \in X),$
- (iii) $\bigcup X \subseteq X,$
- (iv) $X \subseteq \mathcal{P}(X).$

Sarnasus seose transitiivsuse omadusega on kõige selgem väites (ii). Esimese lause põhjendamise jätame lugeja ülesandeks.

Hulga ja selle elementide transitiivsus pole otseses seoses. Kui hulk X on transitiivne, ei pruugi elemendid transitiivsed olla. Vastunäide: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. Kahtlemata on tegu transitiivse hulgaga, kuid element $\{\{\emptyset\}\}$ ise transitiivne pole. Teisipidine samuti ei kehti, st hulga kõigi elementide transitiivsusest ei järeldu hulga enda transitiivsust. Vastunäiteks sobib $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Varasema näite $X := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ põhjal ei tarvitse transitiivse hulga alamhulk transitiivne olla, sest mittetransitiivne hulk $\{\{\emptyset\}\}$ oli ka hulga X osahulk. Vaadeldes kogumeid $\{\{\emptyset\}\}$ ja $\mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$, märkame, et kogumi hulkade transitiivsusest ei johtu kogumi potentshulga transitiivsust. Puudub element $\{\emptyset\}$.

Eitavatest tulemustest hoolimata on transitiivsetel hulkadel ja nende kogumitel ka häid omadusi.

Lause I.2. (1) *Transitiivsete hulkadest koosneva hulga C ühend $\bigcup C$ on transitiivne.*

- (2) *Transitiivsete hulkade kogumi $C \neq \emptyset$ ühisosa $\bigcap C$ on transitiivne.*
- (3) *Kui kogum C koosneb transitiivsetest hulkadest, on seos $\in|_C$ kogumil C transitiivne.*
- (4) *Transitiivse hulga X potentshulk $\mathcal{P}(X)$, ühend $\bigcup X$ ning $X \neq \emptyset$ korral (ja regulaarsuse aksioomi kasutades) ühisosa $\bigcap X$ on transitiivsed.*
- (5) *Transitiivse hulga X järglashulk $X^+ = X \cup \{X\}$ on transitiivne. Üldisemalt kui X on transitiivne ja $x \subseteq X$, siis $X \cup \{x\}$ on transitiivne.*

Tõestus. Tõestame näitlikustamiseks väite (1).

- (1) Kui $C = \emptyset$, siis $\bigcup C = \emptyset$, mistõttu tulemus vahetu. Olgu $C \neq \emptyset$ transitiivsetest

hulkadest koosnev hulk, st kuuluvusest $c \in C$ järeljub c transitiivsus. Tahame tõestada, et $\bigcup C$ on transitiivne. Kasutame lause I.1 tingimust (ii).

Valime suvalise $u \in \bigcup C$. Ühendi definitsiooni põhjal leidub $c \in C$, mispuhul $u \in c$. Samuti ühendi definitsioonist $c \subseteq \bigcup C$. Kui nüüd $v \in u$, siis c transitiivsusest $v \in c$ ja alamhulgalisusest $v \in \bigcup C$. ■

Ordinaalarvud defineerime hiljem eritüüpi transitiivsete hulkadena. Von Neumanni naturaalarvud ning kõigi naturaalarvude hulk ω on ka transitiivsed. Iga hulga X korral leidub temast „minimaalselt suurem“ transitiivne hulk, nimelt *transitiivne eelsulund* $tc(X)$, mille koostame samuti [hiljem](#).

2.4. Järjestusseosed. Ordinaalarvud

Binaarset seost $\leq$ kutsutakse *osalise järjestuse seoseks*, kui see on refleksiivne, antisümmeetiline ning transitiivne. Irrefleksiivset ja transitiivset seost $<$ nimetatakse *range järjestuse seoseks*, mistõttu kutsutakse osalise järjestuse seost vahel ka *mitterange järjestuse seoseks*. Ettetuleva mitterange järjestuse võime alati teha võrduse keelamisega rangeks, vastupidi range seose muuta mitterangeks võrduse lubamise teel. Refleksiivset ja transitiivset seost $\preceq$ kutsutakse *eel-* ehk *kvaasijärjestuseks*. Terutame, et need mõisted sobivad nõndasamuti pärisklasside kontekstis.

Defineerime minimaalsed-maksimaalsed, vähimad ja suurimad elemendid. Loomulik on need mõisted sõnastada osalise järjestuse jaoks, kuid meil läheb tarvis üldisemat määratlust.

Definitsioon I.8 (*E*-ekstreemsed elemendid, [HJ99, lk 251]). Olgu *E* suvaline seos klassil *X*.

- Klassi *X* elementi ξ nimetatakse *rangelt E-minimaalseks*, kui $\xi \in X$ ja ei leidu sellele *E*-eelnevat elementi klassis *X*, s.o $\forall x \in X(\neg x E \xi)$. Analoogiliselt defineeritakse *rangelt E-maksimaalne* element Ξ .
- Klassi *X* elementi m nimetatakse *E-minimaalseks*, kui $m \in X$ ja ei leidu sellele *rangelt E*-eelnevat elementi klassis *X*, s.o $\forall x \in X(x E m \Rightarrow x = m)$. Analoogiliselt defineeritakse *E-maksimaalne* element M .
- Klassi *X* elementi m_0 nimetatakse *E-vähimaks*, kui $m_0 \in X$ ja see eelneb igale klassi *X* elemendile, s.o $\forall x \in X(m_0 E x)$. Analoogiliselt defineeritakse *E-suurim* element M_0 .

Kui osalise järjestuse seose kõik elemendid on omavahel võrreldavad (kehtib *trihhotoomia*), räägitakse järjestuse *lineaarsuse* omadusest. Eritüüpi lineaarne järjestus on *potentne järjestus*.

Definitsioon I.9. Osalist järjestust $\leq$ hulgal P nimetatakse *potentseks järjestuseks*, kui igas mittetühjas P alamhulgas leidub $\leq$ -vähim element. Samasuguse omadusega ranget järjestust kutsutakse *rangeks potentseks järjestuseks*.

Märkus I.10. Eestikeelses kirjanduses kutsutakse potentset järjestust *täielikuks järjestuseks* [Oja06, lk 63]. Eirame niisugust traditsiooni kolmel põhjusel. Esiteks, sõna „potentne“ viitab alamhulkadele potentshulga kontekstis, mispärast kirjeldab see järjestuse omadust hulkade korral täpsemini kui võreteoorias tuntud „täielikkus“. Teiseks on täielikkus järjestusteoorias üledefineeritud, korraga mitmes eri tähenduses, raskendades liikumist eesti ning inglise keele vahel. Täielik järjestus võib viidata potentsle järjestusele (ingl *complete order* või *well-order*), aga ka lineaarsele järjestusele (*connected/total order*), isegi reaalarvude pidevuse omadusele (*completeness*). Kolmandaks, hiljem sõnastame mõiste *potentselt regulaarne seos* (*well-founded relation*), mille erijuhuks on range potentne järjestus. Usume, et loetletud põhjused kaaluvad üles terminoloogia muutusest tuleneva harjumatuse.

Olulised on funktsioonid, mis järjestust säilitavad. Osalistele järjestustele $\leq$ ning $\leq$ vastavaid rangeid järjestusi tähistame kui $<$ ning $\leq$.

Definitsioon I.11 (kasvav funktsioon, sarnasus, [Oja06, lk 61]). Olgu $(P, \leq)$ ja $(Q, \leq)$ osaliselt järjestatud hulgad. *Kasvavaks* ehk *järjestust säilitavaks* nimetatakse funktsiooni $f: P \rightarrow Q$, mispuhul

$$\forall x_1, x_2 \in P (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Bijektsiooni $f: P \rightarrow Q$ nimetatakse *kasvavaks isomorfismiks* ehk *sarnasuskujutuseks*, vastavaid hulki P, Q *sarnasteks*, kui

$$\forall x_1, x_2 \in P (x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Tähistame $P \simeq Q$.

Sarnasuskujutuse pöördkujutus on sarnasuskujutus. Kui on antud kaks sarnasuskujutust, mille puhul leidub liitfunktsioon, jääb kompositsioon samuti kasvavaks isomorfismiks. Siinset kasvavat funktsiooni võiks täpsemini nimetada „ $(<, \leq)$ -kasvavaks“. Näiteks hõlmab definitsioon ka funktsioone, mida matemaatilises analüüsis kutsutakse kahanevateks: sobib võtta $P := Q := \mathbb{R}$, $\leq := \leq|_{\mathbb{R}}$ ja $\leq := \geq|_{\mathbb{R}}$.

Tõestame kaks lemmat, lause ja teoreemi, mis kirjeldavad potentse järjestuse ning kasvavate funktsioonide suhet.

Lemma I.3 ([Jec02, lk 18]). *Kasvav teisendus $f: W \rightarrow W$ potentse järjestusega hulgal $(W, \leq)$*

sisendit ei vähenda, s.o $\forall w \in W (w \leq f(w))$.

Tõestus. Oletame vastuväitena, et $X := \{x \in W \mid x > f(x)\} \neq \emptyset$. Järjestuse $\leq$ potentsusest leidsuks hulgas X vähim element $m_0 \in X$. Hulga X definitsioonist $m_0 > f(m_0)$, funktsiooni f kasvavusest $f(m_0) > f(f(m_0))$. Teist korda hulga X definitsiooni põhjal $f(m_0) \in X$, mis on vahekorra $m_0 > f(m_0)$ kaudu vastuolus elemendi m_0 minimaalsusega hulgas X . ■

Osalise järjestuse puhul saame rääkida *eellaste hulga*.

Definitsioon I.12 (mitterange, range segment, [Hal14, lk 56; Jec02, lk 18]). Olgu $(P, \leq)$ osaliselt järjestatud hulk, vastav range järjestus $<$ ja $x \in P$.

- Hulka $x^{\leq} := \{y \in P \mid y \leq x\} = \leq^{-1}(\{x\})$ nimetame elemendi x (*mitterangete*) *eellaste hulgaks* ehk *mitterangeks segmendiks*.
- Hulka $x^{<} := \{y \in P \mid y < x\} = <^{-1}(\{x\})$ nimetame elemendi x (*rangete*) *eellaste hulgaks* ehk (*rangeks*) *segmendiks* või *eelsegmendiks*.

Lemmast I.3 järeldeb järgmine

lause I.4. [Jec02, lk 18] Olgu $(W, \leq)$ potentselt järjestatud hulk.

- Hulk W ei saa olla kasvavalt isomorfnene oma elemendi range segmendiga.
- Ainus kasvav automorfism $f: W \rightarrow W$ on identsusteisendus Id_W .
- Kui leidub kasvav isomorfism hulga $(W, \leq)$ potentselt järjestatud hulka $(V, \leq)$, siis see isomorfism on üheselt määratud (hulkade W ja V järjekorra täpsuseni).

Tõestus. (1) Selge, kui $W = \emptyset$. Las $W \neq \emptyset$, sealjuures oletame vastuväitena, et mingi $x \in W$ korral $W \cong x^{<}$. Määramis- ja muutumispiirkonnast tulenevalt $f(x) \in x^{<}$, st eelsegmendi definitsioonist $f(x) < x$. Vastuolu lemmaga I.3.

- Valime $w \in W$. Lemma I.3 rakendamisest automorfismile f johtub, et $w \leq f(w)$. Pöördfunktsiooni f^{-1} kasvavusest seega $f^{-1}(w) \leq w$. Lemma I.3 kasutamine pöördfunktsiooni kui automorfismi jaoks annab $w \leq f^{-1}(w)$. Antisümmeetriast $f^{-1}(w) = w$ ehk $f = \text{Id}_W$.
- Kui $f, g: W \rightarrow V$ on kasvavad isomorfismid, siis funktsioonid $g^{-1} \circ f$ ning $f \circ g^{-1}$ peavad olema punkti (2) alusel vastavalt identsusteisendused Id_W ja Id_V . Järelikult $f^{-1} = g^{-1}$ ja $f = g$. ■

Potentselt järjestatud hulkade sarnasuskujutus säilitab rangete eellaste hulki.

Lemma I.5. *Olgu $(W, \leq)$ ning $(V, \leq)$ potentselt järjestatud hulgad, kusjuures $W \stackrel{f}{\simeq} V$. Siis iga $w \in W$ puhul leidub täpselt üks $v \in V$ nii, et $w^< \simeq v^<$. Täpsemini $v = f(w)$.*

Tõestus. Alustame ühesusest. Olgu $w \in W$ ja $v_1, v_2 \in V$ niisugused, et $w^< \stackrel{f_1, f_2}{\simeq} v_1^<, v_2^<$. Üldisust kaotamata ja lineaarsust kasutades oletame, et $v_1 \leq v_2$, kust $v_1^< \subseteq v_2^<$. Samal ajal $v_1^< \stackrel{f_1 \circ f_2^{-1}}{\simeq} v_2^<$. Lause I.4 osa (1) järgi ei saa v_2 olla kasvavalt isomorfne oma range segmendiga. Järelikult $v_1 = v_2$. Ühesus sai põhjendatud.

Injektiivsuse alusel kehtib $w^< \stackrel{f|_{w^<}}{\simeq} f(w^<)$, kus $f(w^<)$ on hulga $w^<$ kujutis funktsiooniga f . Seega edasises piisab tõestada, et $f(w^<) = f(w)^<$. Põhjendame kumbagi pidi sisalduvust. Kui $w_1 \in w^<$ ehk $w_1 < w$, siis funktsiooni f kasvavusest $f(w_1) \leq f(w)$, s.o $f(w_1) \in f(w)^<$. Teisipidi, võttes $z \in f(w)^<$, järeldub sarnaselt $f^{-1}(z) \in w^<$. Hulga kujutise määratlusest $f(f^{-1}(z)) = z \in f(w^<)$. ■

Oleme valmis tõestama teoreemi, mis seob kõik potentsed järjestused trihhotoomiaga kokku.

Teoreem I.6 (potentsete järjestuste võrdlusteoreem, [Jec02, lk-d 18–19]). *Potentselt järjestatud hulkade $(W, \leq)$ ning $(V, \leq)$ korral täitub täpselt üks kolmest tingimusest:*

- (1) *hulk W on sarnane hulgaga V ,*
- (2) *hulk W on sarnane mingi hulga V range segmendiga,*
- (3) *hulk V on sarnane mingi hulga W range segmendiga.*

Olukorras $W = \emptyset$ või $V = \emptyset$ on tulemus ilmne. Olgu niisiis W ja V mittetühjad. Üldisust kaotamata (vajadusel W ja V ümber nimetades) oletame, et korraga kehtivad (1) ja (2) bijektsioonidega $f: W \rightarrow V$ ja $g: W \rightarrow v^<$, $v \in V$. Niimoodi saaksime, et V on sarnane oma range algsegmendiga, $V \stackrel{g \circ f^{-1}}{\simeq} v^<$. Vastuolu lause I.4 osaga (1). Samuti ei saa üheskoos kehtida väited (2) ja (3) sarnasuskujutustega $t: W \rightarrow v^<$ ning $u: V \rightarrow w^<$, kus $v \in V$, $w \in W$. Siis oleks $t|_{w^<} \circ u: V \rightarrow v^< \subseteq V$ kasvav teisendus. Lemma I.3 järgi $v \leq t(u(v))$, kuid $t(u(v)) \in v^<$ annab rangelt $t(u(v)) \leq v$. Vastuolu antisümmeetriaga.

Korraga kehtib niisiis ülimalt üks tingimustest (1)–(3). Jääb näidata, et alati on vähemalt üks alamväidetest tuletatav. Selleks ehitame sarnasuskujutuse S , millel üks omadustest alati leidub.

Teoreemi I.6 tõestus. (Trihhotoomia rangus tõestusele eelnenud arutelust.) Konstrueerime

hulgas $W \times V$ seose S , mis koondab endasse sarnaseid eelsegmente. Olgu

$$S := \{ (w, v) \in W \times V \mid w^< \simeq v^< \}.$$

Seos S kas on kogu hulgal W määratud või ei ole. Kui mitte, siis leidub $\leq$ -vähim element $w_0 \in W$, mille puhul S ei ole määratud. Vähima elemendi definitsioonist $\text{dom}(S) = w_0^<$. Samamoodi saame arutleda seose S muutumispiirkonna $\text{ran}(S)$ jaoks. Järelikult on kokku neli varianti:

- i) $\text{dom}(S) = W$ ja $\text{ran}(S) = V$,
- ii) $\text{dom}(S) = W$ ja $\text{ran}(S) = v_0^<$,
- iii) $\text{dom}(S) = w_0^<$ ja $\text{ran}(S) = V$,
- iv) $\text{dom}(S) = w_0^<$ ja $\text{ran}(S) = v_0^<$,

kus hulk v_0 on elemendi $w_0 \in W$ analoog hulgas V .

Seos S on funktsioon. Kui $(w, v_1) \in S$ ja $(w, v_2) \in S$ ning üldisust kaotamata $v_1 \leq v_2$, siis $v_1 \neq v_2$ tähendaks, et $v_2^<$ on sarnane oma range segmentiga $v_1^<$. Peegelpildis läheb samaväärne mõttekäik läbi üksühesuse põhjendamisel, niisiis S on injektiivne funktsioon. Kujutus S on kasvav. Tõesti, las $(w_1, v_1), (w_2, v_2) \in S$ ja $w_1 < w_2$ ehk $w_1 \in w_2^<$. Olgu $f: w_2^< \rightarrow v_2^<$ sarnasuskujutus. Et $w_1^< \simeq v_1^<$, siis lemmast 1.5 saame $v_1 = f(w_1)$. Samas $f(w_1) \in v_2^<$, seega $S(w_1) = v_1 \leq S(w_2) = v_2$.

Kokkuvõttes sobib S juhtudel i)–iii) sarnasusfunktsiooniks, kust i) $\Rightarrow$ (1), ii) $\Rightarrow$ (2) ja iii) $\Rightarrow$ (3). Tõestuse lõpetamiseks välistame juhu iv). Kui variant iv) täituks, oleks $w_0^< \simeq v_0^<$ ehk definitsiooni järgi $(w_0, v_0) \in S$. Tekib vastuolu nii w_0 kui v_0 valikuga – nende korral pidi S olema määramata. ■

2.4.1. Naturaalarvud. Naturaalarvude hulk

Lõpmatusaksioom tagab mingisuguse standardse induktiivse hulga ehk koondjärglashulga A leidumise. Aksioomide juures mainisime, et hulga A seest saame leida naturaalarvude hulga ω kui $\subseteq$ -vähima standardse induktiivse hulga. Selgitame mõttekäiku üksikasjalikumalt. Kui $\mathcal{A} \neq \emptyset$ koosneb üksnes standardsetest koondjärglashulkadest, on $\bigcap \mathcal{A}$ samuti standardne koondjärglashulk. Järelikult hulga A standardse induktiivsuse korral on standardselt induktiivne ka $\bigcap \mathcal{A}$, kus

$$\mathcal{A} := \{ C \in \mathcal{P}(A) \mid „C \text{ on standardne koondjärglashulk}“ \}.$$

Kui B on suvaline standardne koondjärglashulk, siis $A \cap B$ on standardne koondjärglashulk, sealjuures $A \cap B \subseteq A$, seega $A \cap B \in \mathcal{A}$. Lõpuks $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A \cap B \subseteq B$. Alamhulgaline sisalduvus $\bigcap \mathcal{A} \subseteq B$ tähendab B suvalisuse tõttu, et $\bigcap \mathcal{A}$ on $\subseteq$ -vähim induktiivne hulk standardselt induktiivsete hulkade klassis **Ind**. [Hal14, lk-d 44–45] Toonitame, et lõpmatusaksioomi kasutati siin arutelus selleks, et nõuetele vastav $\mathcal{A} \neq \emptyset$ leiduks (konkreetselt, hulgast A sõltunud hulka $\mathcal{A}$ ei saaks lõpmatusaksioomita isegi koostada).

Tähistame $\omega := \bigcap \mathcal{A}$. Selle hulga elemente kutsutakse (*von Neumanni*) *naturaalarvudeks*. Hulga ω definitsioonist ehk $\subseteq$ -vähimisest järeldub koheselt hästi tuntud induktsiooniteoreem.

Teoreem I.7 (naturaalarvulise induktsiooni teoreem, [Hal14, lk 46]). *Kui S on naturaalarvude hulga ω osahulk ja samas koondjärglashulk, siis $S = \omega$. See tähendab, kui*

- 1) $S \subseteq \omega$,
- 2) $\emptyset \in S$,
- 3) $\forall s \in S (s^+ \in S)$,

siis $S = \omega$.

Naturaalarvude vallas tõestatakse oluline osa teoreemidest vähemasti kaudselt induktsiooni-teoreemi abil. Mainime paari sõnaga mõnda niisugust omadust. Need omadused saab tõestada regulaarsuse aksioomita.

Lause I.8 ([Hal14, lk-d 47, 49]). (1) *Ükski naturaalarv pole ühegi oma elemendi alamhulgaks.*

(2) *Naturaalarv ei ole kunagi iseenese element, s.o seos $\in$ on hulgal ω irrefleksiivne.*

(3) *Naturaalarvude hulk ω pole iseenese element.*

(4) *Naturaalarv on transitiivne hulk. Järelikult seos $\in|_{\omega}$ on hulgal ω transitiivne.*

(5) *Naturaalarvude hulk ω on transitiivne.*

(6) *Naturaalarvude hulk on ühendi võtmise suhtes püsipunkt, s.o $\omega = \bigcup \omega$.*

Põhjendame toodud väiteid õige napilt, piirdudes kohati üksnes teoreemi I.7 mõttes hulga S määramisega.

Tõestus. (1) Väide on, et $\forall n \forall k (n \in \omega \wedge k \in n \Rightarrow \neg n \subseteq k)$. Seega tuleks võtta $S := \{ n \in \omega \mid \forall k (k \in n \Rightarrow \neg n \subseteq k) \}$ ja kontrollida induktsiooniteoreemi I.7 eeldusi.

(2) Kui oleks $n \in n$, siis alamhulgalisus $n \subseteq n$ annaks vastuolu jaotisega (1).

- (3) Kui kehtiks $\omega \in \omega$, siis oleks hulk ω naturaalarv. Vastuolu jaotisega (2).
- (4) Transitiiivsuse definitsioonist lähtudes vaadelda hulka $S := \{ n \in \omega \mid \forall k(k \in n \Rightarrow k \subseteq n) \}$. Seose $\in|_\omega$ transitiivus lause I.2 osast (3).
- (5) Vastavalt lause I.1 tingimusele (ii) vaadata hulka $S := \{ v \in \omega \mid \forall u(u \in v \Rightarrow u \in \omega) \}$.
- (6) Jaotise (5) järgi on hulk ω transitiiivne. Lause I.1 tingimuse (iii) järgi $\bigcup \omega \subseteq \omega$. Jääb näidata, et $\omega \subseteq \bigcup \omega$. Üldiselt kehtib $X \subseteq \bigcup X$ parajasti siis, kui $\forall x \in X \exists y \in X (x \in y)$. Suvalise naturaalarvu n korral aga ilmselgesti $n \in n^+ \in \omega$. ■

Tähistame sisalduvusest saadud mitteranget seost kui $\subseteq$, s.o $a \subseteq b \doteq a \in b \vee a = b$.

Lause I.9. (1) *Seos $\subseteq$ on naturaalarvude hulgal lineaarne järjestusseos.*

(2) *Seosed $\in$ ja $\subsetneq$ on naturaalarvude hulgal samaväärsed.*

(3) *Naturaalarvude hulk on seose $\subseteq$ järgi potentselt järjestatud.*

Kuigi lauset I.9 saaks induktsiooni abil otse tõestada, järeldame tulemused hoopis allpool ordinaalarvude üldistest omadustest. Lugejale, kes soovib naturaalarvudega rohkem tutvuda, näiteks rekursiooniga, aritmeetikaga või lõplike hulkadega, soovitame allikaid [Hal14], [HJ99], [Jec02]. Meie tuletame rekursiooniteoreemi üldisemast versioonist, nimelt [potentselt regulaarsest rekursioonist](#).

2.4.2. Ordinaalarvud

Sissejuhatavas hulgateoorias kardinaalarvude mõistet ei defineerita. Räägitakse võimsusest, täpsemini asjaolust, millal hulkadel on sama võimsus. Öeldakse, et hulgad X ja Y on (*võimsuse mõttes*) *ekvivalentsed*, ja kirjutatakse $X \sim Y$, kui leidub bijektsioon hulkade vahel,

$$X \sim Y \doteq \exists \text{ bij } f: X \rightarrow Y.$$

Sarnaselt ei defineerita ordinaalarvu mõistet, vaid räägitakse *järjestustüübist* ning *sarnasusest*. Sealjuures on ordinaalarv ja järjestustüüp samasuguses vahekorras nagu kardinaalarv ning võimsus. Ordinaal- ning kardinaalarvude vahelist analoogiat avab täpsemini tabel I.5. Järgnevas väljume sissejuhatava hulgateooria raamest selles mõttes, et fikseerime konkreetselt ordinaalarvu mõiste. Ordinaalarvu määratleme erilise transitiiivse potentselt järjestatud hulgana. Kardinaalarv defineeritakse spetsiaalset laadi ordinaalarvuna. Siin bakalaureusetöös kardinaalarve ei defineerita (vt siiski jaotist III.2.3).

Definitsioon I.13 (ordinaalarv, [Jec02, lk 19]). Hulka α kutsutakse (*von Neumanni*) ordi-

Tabel I.5. Mõistete võrdlus kardinaal- ning ordinaalarvude korral

kardinaalarvud	–	ordinaalarvud
võimsus	–	järjestustüüp
bijektsioon (hulkade isomorfism)	–	sarnasuskujutus (järjestust säilitav isomorfism)
$X \sim Y$	–	$X \simeq Y$
$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$	–	$\overline{X} = \overline{Y}$

naalarvuks ehk järgarvuks, kui α on transitiivne hulk ja seose $\subseteq$ suhtes potentselt järjestatud.

Muu hulgas on $\subseteq$ järjestusseos, s.o hulgal α refleksiivne, antisümmeetriline ning transitiivne. Kuna ordinaalarv on definitsiooni järgi $\subseteq$ suhtes potentselt järjestatud, siis $\in$ mõttes on tegu range potentse järjestusega. Järelikult on $\in$ ordinaalarvude klassil irrefleksiivne regulaarsuse aksioomi kasutamata.

Ordinaalarvu tähistame reeglina kreeka väiketähega tähestiku algusest, s.o $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Ordinaalarvude klassi tähistame kui **Ord**.

Kehtivad järgmised ordinaalarvude omadused.

Lause I.10 ([Jec02, lk-d 19–20]).

- (1) Kui α on ordinaalarv, siis ka järglashulk $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ on ordinaalarv.
- (2) Ordinaalarvu β iga element $\alpha \in \beta$ on ordinaalarv.
- (3) Kui α ja β on ordinaalarvud, siis $\alpha \subsetneq \beta \Rightarrow \alpha \in \beta$.
- (4) Kui α ja β on ordinaalarvud, siis välistavalt $\alpha \subsetneq \beta$ või $\beta \subsetneq \alpha$ või $\alpha = \beta$.
- (5) Ordinaalarv α^+ on esimene ordinaalarv pärast ordinaalarvu α , st α^+ on vähim ordinaalarv, mispuhul sisaldab elemendina arvu α .

Tõestus. Tõestame näitena väite (2).

- (2) Olgu β suvaline ordinaalarv, $\alpha \in \beta$ mingi element. Definitsiooni järgi tuleb näidata, et α on transitiivne ning seose $\subseteq$ suhtes potentselt järjestatud. Kui $\alpha = \emptyset$, pole väites kahtlust. Olgu $\alpha \neq \emptyset$. Element α on potentselt järjestatud, sest arvu β transitiivsus

annab tingimusest $\alpha \in \beta$ alamhulgalisuse $\alpha \subseteq \beta$, kus β oli potentselt järjestatud.

Põhjendame ordinaalarvu α transitiivsust. Las $\gamma \in \alpha$. Kui $\gamma = \emptyset$, siis korras. Muidu olgu $\delta \in \gamma$. Hulga β transitiivsusest nii $\gamma \in \beta$ kui $\delta \in \beta$. Seose $\in$ kui range järjestuse transitiivsus hulgal β annab sisalduvuste $\delta \in \gamma \in \alpha$ tõttu $\delta \in \alpha$. Ordinaalarvu α transitiivsus järeldub lausest I.1 osast (ii). ■

Lausest I.10 järeldub, et ordinaalarvude korral on seosed $\subsetneq$ ning $\in$ samaväärsed. Vasakult paremale kasutada jaotist (3). Parevalt vasakule piisab ordinaalarvu transitiivsusest ning seose $\in$ irrefleksiivsusest klassil **Ord**. Lepime kokku, et ordinaalarvude korral tähistab $\leq$ seost $\subseteq$. Võrdväärselt tähistab $\leq$ seost $\subseteq$.

Ühendi ning ühisosa suhestumisest ordinaalarvudesse kirjeldab

lause I.11 ([Jec02, lk 20]). *Olgu C suvaline ordinaalarvudest koosnev hulgaline kogum.*

- (1) Ühend $\bigcup C$ on ordinaalarv, sealjuures $\bigcup C = \sup_{\subseteq} C$.
- (2) Kui $C \neq \emptyset$, on ühisosa $\bigcap C$ ordinaalarv, sealjuures $\bigcap C = \inf_{\subseteq} C$.

Supreemum ja infiimum defineeritakse loomulikul viisil. Näiteks kirja pildiga $\bigcap C = \inf_{\subseteq} C$ peame silmas, et iga $\alpha \in C$ korral $\bigcap C \subseteq \alpha$, s.o $\bigcap C \leq \alpha$ ehk $\bigcap C$ on arv α alumine tõke. Ja kui x on kõigi arvude $\alpha \in C$ alumine tõke, siis $x \leq \bigcap C$. Teisisõnu on $\bigcap C$ hulga C suurim alumine tõke järjestuse $\subseteq$ mõttes.

Tõestus. Põhjendame väite (2).

- (2) Valime $\alpha \in C \neq \emptyset$. Ühisosa $\bigcap C$ on selgesti α osahulk, st $\bigcap C \subseteq \alpha$. Kogumi C olemuse järgi liigitub α ordinaalarvuks, mistõttu lause I.10 osast (3) kehtib mitterange sisalduvus $\bigcap C \subseteq \alpha$. Võrduse korral ilmne, et $\bigcap C$ on ordinaalarv. Muidu kasutada lause I.10 jaotist (2).

Nägame juba, et iga $\alpha \in C$ puhul $\bigcap C \leq \alpha$. Olgu x niisugune, et $x \leq \alpha$ iga $\alpha \in C$ korral. Ordinaalarvu transitiivsusest $x \subseteq \alpha$ iga $\alpha \in C$ puhul. Ühisosa definitsioonist $x \subseteq \bigcap C$. Kokkuvõttes $\bigcap C = \inf_{\subseteq} C$. ■

Tegelikult on infiimum $\inf_{\subseteq} C$ isegi hulga C vähim element. Lausete I.11 ja I.10 jaotiste (1) põhjal moodustame ordinaalarvud $(\sup_{\subseteq} C)$ ning $(\sup_{\subseteq} C)^+$. Väidame, et $C \subseteq (\sup_{\subseteq} C)^+$. Tõesti, kui $\alpha \in C$, siis $\alpha \subseteq \bigcup C = \sup_{\subseteq} C$, kust lause I.10 osa (3) abil kehtib $\alpha \subseteq \sup_{\subseteq} C$. Järelikult $\alpha \in (\sup_{\subseteq} C)^+$. Kuna $\emptyset \neq C \subseteq (\sup_{\subseteq} C)^+$ ja $(\sup_{\subseteq} C)^+$ on potentselt järjestatud, peab hulgas C sisalduma vähim element $m_0 \in C$. Vähima elemendi leidumise korral aga

vähim element ja infimum ühtivad, $m_0 = \inf_{\subseteq} C$.

Vahemärgusest tuleneb

järeldus I.12. *Suvaline ordinaalarvudest koosnev transitiivne hulk τ on ordinaalarv.*

Tõestus. Eelduse järgi on τ transitiivne. Seega piisab näidata, et τ on seose $\subseteq$ suhtes potentselt järjestatud. Olgu $\emptyset \neq C \subseteq \tau$ suvaline alamhulk (kui mittetühja osahulka pole, siis tulemus vahetu). Hulga C vähim element on $\bigcap C$. Tõepoolest, lause I.11 osast (2) ja vahemärgusest $\bigcap C = \inf_{\subseteq} C = \min_{\subseteq} C$. ■

Lause I.10 osa (1) põhjal on iga naturaalarv ordinaalarv (formaalne tõestus induktsiooni-teoreemiga I.7). Naturaalarvude hulk ω koosneb niisiis ordinaalarvudest. Lause I.8 jaotise (5) järgi on hulk ω transitiivne. Järeldusest I.12 saame, et ω on samuti ordinaalarv. Sellega põhjendasime lause I.9. Naturaalarvude hulk lause I.8 osa (3) alusel iseendas ei sisaldu, osa (6) järgi $\omega = \bigcup \omega$. Järelikult lause I.11 osa (a) supremum ei pruugi olla maksimum.

Kõigele lisaks tuleneb järeldusest I.12 fakt, et klass **Ord** on pärisklass [Jec02, lk 20]. Eeldame vastuväiteliselt, et **Ord** eksisteerib hulgana. Lause I.10 osa (2) järgi on kõik ordinaalarvude elemendid jätkuvalt ordinaalarvud, seega **Ord** oleks transitiivne hulk. Loomulikult koosneb klass **Ord** üksnes ordinaalarvudest. Järelduse I.12 tõttu kuuluks klass **Ord** ise samuti ordinaalarvude sekka. Definitsioonist johtuks $\mathbf{Ord} \in \mathbf{Ord}$, vastuolu seose $\in$ irrefleksiivsusega klassil **Ord**. Burali-Forti antinoomiat ei teki.

Ordinaalarvude kõik elemendid olid ordinaalarvud. Niisiis ordinaalarv on transitiivne hulk, mis koosneb ainult transitiivsetest hulkadest. Regulaarsuse aksioomist järeldub ka vastupidine: kui hulk A on transitiivne ja kõik elemendid $a \in A$ on transitiivsed, siis A on ordinaalarv.

Lause I.13. *Ordinaalarv on parajasti niisugune transitiivne hulk, mille kõik elemendid on samuti transitiivsed.*

Tõestus. Selgitame $\Leftarrow$ -suuna kehtivust. Las olla A transitiivne hulk, mille elemendid on transitiivsed. Piisab näidata, et A on potentselt $\subseteq$ -järjestatud. Sisulisel juhul $A \neq \emptyset$. Valime mittetühja alamhulga $\emptyset \neq B \subseteq A$. Regulaarsuse aksioom ütleb, et hulgas B esineb rangelt $\in$ -minimaalseid elemente. Olgu üks neist $m \in B$.

Kui m oleks kõigi B elementidega seose $\subseteq$ mõttes võrreldav, siis oleks otsitav vähim element käes. Vastasel juhul vaatleme hulka

$$C := \{ b \in B \mid \overbrace{b \text{ pole } m\text{-iga võrreldav}}^{\neg(b \in m \vee m \in b \vee b = m)} \},$$

kus vastuväitelise oletuse põhjal $C \neq \emptyset$. Niisiis leidub selleski rangelt $\in$ -minimaalne element, näiteks $c_0 \in C$. Hulk c_0 ei tohi olla hulgaga m võrreldav, kuid kõik c_0 elemendid peavad olema hulgaga m võrreldavad. Kui $d \in c_0$, on välistatud $d = m$, muidu kehtiks $m \in c_0$ ehk m ja c_0 oleksid võrreldavad. Sarnaselt on välistatud $m \in d$, sest sisalduvusest $c_0 \in A$ saaksime c_0 transitiivsuse kaudu taas $m \in c_0$. Järelikult $d \in m$ ehk $c_0 \subseteq m$.

Selgesti on m ka hulgas $D := \{b \in B \mid \exists b' \in B, b \text{ pole } b' \text{-iga võrreldav}\} \subseteq B$ rangelt $\in$ -minimaalne element ning $c_0 \in D$. Eelmise lõiguga analoogne argument annab seega, et $m \subseteq c_0$. Kahepoolsest alamhulgalisusest johtub võrdus $c_0 = m$, mis on vastuolus hulkade c_0 ja m võrreldamatusega. Kokkuvõttes $C = \emptyset$, st m oligi $\subseteq$ -vähim hulga B element. ■

Lause I.13 ekvivalentsi kasutame ordinaalarvuks olemise absoluutsuse tõestamisel.

Ordinaalarvud sobivad potentselt järjestatavate hulkade järjestustüübiks.

Teoreem I.14 (ordinaalarv kui potentse järjestuse tüüp, [Wea14, lk 14]). *Olgu $(W, \leq)$ potentselt järjestatud hulk. Leidub üheselt määratud ordinaalarv $\alpha \in \mathbf{Ord}$ nii, et $W \simeq \alpha$.*

Vastavat ordinaalarvu tähistame ühekordse ülakriipsuga, s.o $\alpha =: \overline{W}$.

Tõestus. Alustame ühesusest. Olgu $W \simeq \alpha_1$ ja $W \simeq \alpha_2$, kus $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{Ord}$. Sarnasuse sümmeetrisusest ja transitiivsusest $\alpha_1 \simeq \alpha_2$. Oletame vastuväiteliselt ja üldisust kaotamata, et $\alpha_1 \in \alpha_2$. Järelikult on α_1 ordinaalarvu α_2 range segment, nad ei saa olla sarnased (lause I.4 osa (1)). Vastuolu, seetõttu ikkagi $\alpha_1 = \alpha_2$.

Tõestame leiduvuse. Teoreemi I.6 alusel on iga ordinaalarvu α korral kolm mõeldavat olukorda. Kui $\alpha \simeq W$ või $\beta \in \alpha$ puhul $\beta = \beta^\infty \simeq W$, on tulemus tõestatud. Vastasel korral leidub iga ordinaalarvu α puhul erinev ja üheselt määratud $w \in W$ nii, et $w^< \simeq \alpha$. Asendamisaksioomiga moodustame hulgast W hulga $\{w^< \mid w \in W\}$, sellest omakorda asendamisaksioomi abil hulga $\{\alpha \mid \alpha \in \mathbf{Ord} \wedge w^< \simeq \alpha \wedge w \in W\} = \{\overline{w^<} \mid w \in W\}$. Vastuväite kehtivusel $\{\alpha \mid \alpha \in \mathbf{Ord} \wedge w^< \simeq \alpha \wedge w \in W\} = \mathbf{Ord}$. Vastuolu, sest ordinaalid moodustavad pärisklassi, mitte hulga. ■

Defineerime veel kaks mõistet, *järglas-* ning *piirordinaalarvu*.

Definitsioon I.14 ([Jec02, lk 20]). Ordinaalarvu $\alpha \in \mathbf{Ord}$ nimetame *järg-* ehk *järglasordinaalarvuks*, kui leidub ordinaalarv $\beta \in \mathbf{Ord}$, mispuhul $\alpha = \beta^+$. Kõiki teisi ordinaalarve kutsume *piirordinaalarvudeks*.

Märgime, et kõik naturaalarvud alates ühest on järglasordinaalarvud, samas kui 0 ning ω on piirordinaalarvud [Jec02, lk 20].

Potentselt järjestatud hulkadel ning ordinaalarvude klassil tuntakse palju erinevaid indukt-siooni- ning rekursiooniteoreeme. Näiteks räägitakse ordinaalarvude kontekstis *transfinitiitest* induksioonist ja rekursioonist. Kuigi saaks ka teisiti, järeldame meie need tulemused veelgi üldisematest versioonidest: potentselt regulaarsest induksioonist ja rekursioonist.

2.5. Potentselt regulaarne induksioon ja rekursioon

Leidub rohkesti erisuguseid induksiooni- ning rekursiooniteoreeme. Kõige tavalisem indukt-sioon ja rekursioon käib üle naturaalarvude hulga. Laiendatud analoog kehtib potentselt järjestatud hulga ning ordinaalarvude klassi jaoks. Alajaotise lõpuks tõestame väga üldise printsiibi, mis kõiki eelmisi avardab – *potentselt regulaarse induksiooni* ning *rekursiooni teoreemiskeemid*.

2.5.1. Alumised naabertipud. E -transitiivsus, -transitiivne sulund

Järjestatud hulkade juures tutvusime eellaste hulga ehk segmendi mõistega. Segmendi mõistet üldistab

definiitsioon I.15 (alumiste naabertippude klass, [Jec02, lk 67]). Olgu antud klass $\mathcal{C}$ ning klassiseos $E \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Kui $x \in \mathcal{C}$, kirjutame

$$z \in \text{ext}_E(x) := z \in \mathcal{C} \wedge z E x,$$

kus klassi $\text{ext}_E(x)$ kutsume *tipu x alumiste E -naabertippude* või *E -eellaste klassiks*. Teisisõnu $\text{ext}_E(x) = E^{-1}(\{x\})$.

Vahel tähistatakse veel $\text{ext}_E(x) =: \text{ext}_{\mathcal{C},E}(x) =: \text{pred}_{\mathcal{C},E}(x)$ [Kun13, lk 44]. Üldjuhul ei tarvitse eellaste klass olla hulk. Seost E nimetame *hulgalaadseks klassil $\mathcal{C}$* , kui iga tipu $x \in \mathcal{C}$ korral klass $\text{ext}_E(x)$ on hulk. [Kun13, lk 44] Kirjutame siis kuju $\text{ext}_E(x)$ asemel $\text{ext}_E(x)$.

Laiendame hulga transitiivsuse mõistet klassile D ja klassiseosele E .

Definiitsioon I.16 (E -transitiivsus, [HJ99, lk 253]). Olgu antud klass $\mathcal{C}$, alamklass $D \subseteq \mathcal{C}$ ning klassiseos $E \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Klass D on E -transitiivne, kui tingimustest $u \in D$ ja $v E u$ järeldub, et $v \in D$. Teisisõnu peab iga $u \in D$ korral kehtima $\text{ext}_E(u) \subseteq D$.

Juhul, kui $\mathcal{C} = \mathbf{U}$, $D := D$ on hulk ning $E = \in$, saame tavalise transitiivsuse. Märgime, et kui C on E -transitiivsetest hulkadest koosnev hulk, siis $\bigcup C$ on samuti E -transitiivne. Kui X on E -transitiivne hulk ja $\text{ext}_E(x) \subseteq X$, siis ka $X \cup \{x\}$ on E -transitiivne. Tõestused analoogilised tavalise transitiivsusega, vrd lausega I.2.

Olgu $x \subseteq \mathcal{C}$ suvaline hulk. Hulk x ei pruugi olla $\mathbf{E}$ -transitiivne, aga on teatud mõttes niisuguseks hulgaks jätkatav. Vastavat vähimat jätku nimetatakse *$\mathbf{E}$ -transitiivseks sulundiks*. Järgmises definitsioonis on seos $\mathbf{E}$ hulgalaadne.

Definitsioon I.17 (hulga $\mathbf{E}$ -transitiivne sulund, [HJ99, lk 253]). Hulga x *$\mathbf{E}$ -transitiivseks eelsulundiks* nimetatakse $\subseteq$ -vähimat $\mathbf{E}$ -transitiivset hulka T , mispuhul $T \subseteq \mathcal{C}$ ning $\text{ext}_{\mathbf{E}}(x) \subseteq T$. Tähistatakse kui $\text{tc}_{\mathbf{E}}(x)$. Kui vahetada alamhulgalise sisalduvuse nõue $\text{ext}_{\mathbf{E}}(x) \subseteq T$ tavalise sisalduvusega $x \in T$, saame hulga x *$\mathbf{E}$ -transitiivse sulundi* $\text{TC}_{\mathbf{E}}(x)$.

Olukorras, kus $\mathbf{E} = \in$ ja $\mathcal{C} := \mathbf{U}$, räägitakse lihtsalt transitiivsest eelsulundist $\text{tc}(x)$ ning transitiivsest sulundist $\text{TC}(x)$ [Jec02, lk 64]. On lihtne näha, et hulgalaadse seose puhul $\text{TC}_{\mathbf{E}}(x) = \text{tc}_{\mathbf{E}}(x) \cup \{x\}$.

Kui seos $\mathbf{E}$ on hulgalaadne, siis $\mathbf{E}$ -transitiivne eelsulund ja sulund alati leiduvad. Piisab tõestada, et leidub $\mathbf{E}$ -transitiivne eelsulund.

Teoreemiskeem I.15 ($\mathbf{E}$ -transitiivne eelsulund leidub, [Jec02, lk 67; HJ99, lk 253]). *Olgu $\mathcal{C}$ klass, $\mathbf{E} \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ hulgalaadne klassiseos ning $X \subseteq \mathcal{C}$ suvaline hulk. $\mathbf{E}$ -transitiivne eelsulund $\text{tc}_{\mathbf{E}}(X)$ alati leidub.*

Tõestus. Idee on ehitada jada $(u_n)_{n \in \omega}$, mispuhul

$$\begin{cases} u_0 := \text{ext}_{\mathbf{E}}(X), \\ u_{n+} := \bigcup \{ \text{ext}_{\mathbf{E}}(y) \mid y \in u_n \}, \end{cases}$$

kus kõigepealt seatakse hulgaga u_n vastavusse asendamisaksioomiga $\{ \text{ext}_{\mathbf{E}}(y) \mid y \in u_n \}$, seejärel võetakse ühend. Otsitav $\mathbf{E}$ -transitiivne eelsulund on jadast $(u_n)_{n \in \omega}$ ehitatav järjekordse ühendiga $\text{tc}_{\mathbf{E}}(X) = \bigcup \text{ran}(u_n)_{n \in \omega}$.

Põhjalikum ja tehnilisem tõestus on toodud lisas B. ■

Järgmine lauseskeem iseloomustab kuuluvust transitiivsesse eelsulundisse $\text{tc}_{\mathbf{E}}(x)$. Toodavat samaväärset tingimust kasutame näiteks potentselt regulaarse rekursiooni teoreemiskeemi tõestuses ning lause I.28 osas (4).

Lauseskeem I.16 ([HJ99, lk 256]). *Olgu $\mathbf{E}$ hulgalaadne seos klassil $\mathcal{C}$ ning $x \subseteq \mathcal{C}$ suvaline*

hulk. Kehtib ekvivalentsus

$$y \in \text{tc}_E(x) \Leftrightarrow \text{leidub hulkade lõplik jada } (x_k)_{k \leq m}, \text{ kus } y \in \mathcal{C} \\ x_m = y E x_{m-1} E \cdots E x_1 E x = x_0 \text{ ja } m \in \omega, m \geq 1.$$

Tõestus. Põhjendus naturaalarvulise induktsiooni teoreemiga I.7. Defineerime

$$S := \{ n \in \omega \mid \forall y (y \in u_n \Leftrightarrow y \in \mathcal{C} \text{ ja leidub jada } x_{n+1} = y E x_n E \cdots E x_1 E x = x_0) \},$$

kus $(u_n)_{n \in \omega}$ on jada, mis pärineb E -transitiivse eelsulundi olemasolu teoreemiskeemi I.14 tõestusest lisas B, s.o $\text{tc}_E(X) = \bigcup \text{ran}(u_n)_{n \in \omega}$. Tõestuseks piisab näidata, et $S = \omega$, kuivõrd $y \in \text{tc}_E(x) \Leftrightarrow \exists n \in \omega (y \in u_n)$. Kontrollime induktsiooniteoreemi eeldusi.

- 1) Vahetult $S \subseteq \omega$.
- 2) Kui $y \in u_0$, siis $y \in \text{ext}_E(x)$ ehk $y \in \mathcal{C}$ ja $y E x$. Jadaks sobib $\{(0, y), (1, x)\}$. Teisipidi kui $y \in \mathcal{C}$ korral on antud $x_1 = y E x = x_0$, siis $y E x$, st $y \in \text{ext}_E(x) = u_0$. Järelikult $0 \in S$.
- 3) Viimaks olgu $n \in S$ ning y' suvaline. Kui $y' \in u_{n+}$, siis vastavalt hulga u_{n+} definitsioonile $y' \in \bigcup \{ \text{ext}_E(y) \mid y \in u_n \}$. Tähendab, et mingi konkreetse $y \in u_n$ korral $y' \in \text{ext}_E(y)$. Induktsioonieeldusest hulga y jaoks leidub jada $x_{n+1} = y E x_n E \cdots E x_1 E x = x_0$, seetõttu jada ühendiga pikendamisel $x_{n+1} := y' E y E x_n E \cdots E x_1 E x = x_0$. Teisipidi kui on antud $x_{n+1} = y' E x_n E \cdots E x_1 E x = x_0$ ja $y' \in \mathcal{C}$, saame induktsioonieeldusest juhul $y := x_{n+}$, et $x_{n+} = x_{n+1} \in u_n$. Et $y' E x_{n+1}$ ja $y' \in \mathcal{C}$, siis $y' \in \text{ext}_E(x_{n+1})$. Meenutades hulga u_{n+} definitsiooni, saame $y' \in \bigcup \{ \text{ext}_E(y) \mid y \in u_n \} = u_{n+}$. Kokkuvõttes $n^+ \in S$.

Järelikult $S = \omega$, tulemus on tõestatud. ■

2.5.2. Potentselt regulaarne seos

Induktsiooni- ning rekursiooniteoreemiskeemide juures on keskne mõiste *potentselt regulaarne seos*. Niisugune relatsioon rahuldab parasjagu kahte tingimust. Neist esimene, *klassi potentne E -regulaarsus*, annab induktsiooniga või rekursiooniga alustamiseks lähtekoha. Teine tingimus on *hulgalaadsus*, mis lubab elemendi eellased hulgaks rühmitada ja induktsiooni või rekursiooni sammu läbi viia.

Definitsioon I.18 (potentselt regulaarne seos, [Jec02, lk 67]). Ütleme, et *klassiseos* $E \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ on *potentselt regulaarne*, kui

- a. klass $\mathcal{C}$ on *potentselt E -regulaarne*, s.o kui $x \subseteq \mathcal{C}$ ja „ x on hulk“ korral kas $x = \emptyset$ või hulgas x leidub rangelt E -minimaalne element;
- b. seos E on *hulgalaadne* ehk iga tipu $x \in \mathcal{C}$ korral on E -eellaste klass $\text{ext}_E(x)$ hulk, s.o iga $x \in \mathcal{C}$ puhul leidub X nii, et $\forall z(z \in X \Leftrightarrow z \in \text{ext}_E(x))$.

Kui seos $E \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ on potentselt regulaarne klassil $\mathcal{C}$ ja $D \subseteq \mathcal{C}$, siis on $E|_D$ potentselt regulaarne klassil D .

Võttes $\mathcal{C} := \mathbf{U}$ ja $E := \in$, kehtib $\text{ext}_E(x) = \{z \in \mathbf{U} \mid z \in x\} = x$. Vastava potentse $\in$ -regulaarsuse tähendus ühtib siis regulaarsuse aksioomi tähendusega. Seos $\in$ on ordinaalarvude klassil $\mathbf{Ord}$ potentselt regulaarne ilma regulaarsuse aksioomita, järelalusena lause I.11 osast (2). Kui $\mathcal{C} := W$ on hulk ning võtame lineaarse järjestusseose $E := < \subseteq W \times W$, saame range potentselt järjestatud seose mõiste.

Kuigi definitsiooni I.18 tingimus a. käib klassi alamhulkade kohta, üldistub sama nõue alamklassidele.

Lemmaskeem I.17 ([Jec02, lk 67]). *Olgu E potentselt regulaarne seos klassil $\mathcal{C}$. Igal mittetühjal alamklassil $D \subseteq \mathcal{C}$ leidub range E -minimaalne element.*

Tõestus. Et $D \neq \emptyset$, valime temast mingi elemendi $d \in D$. Kui d on rangelt E -minimaalne klassis D , pole midagi tõestada. Eeldame seega, et d pole rangelt E -minimaalne klassis D . Järelikult $\text{ext}_E(d) \cap D \neq \emptyset$. Teoreemiskeemi I.15 järgi leidub E -transitiivne eelsulund $\text{tc}_E(d)$. Kuna $\text{ext}_E(d) \cap D \neq \emptyset$ ja $\text{ext}_E(d) \subseteq \text{tc}_E(d)$, siis ka $\text{tc}_E(d) \cap D \neq \emptyset$. Eraldamisaksioomi alusel on $\text{tc}_E(d) \cap D$ hulk ning $\text{tc}_E(d) \cap D \subseteq \mathcal{C}$. Seose E potentselt regulaarsusest leidub hulgas $\text{tc}_E(d) \cap D$ mingi rangelt E -minimaalne element, näiteks ξ .

Väidame, et ξ on klassi D rangelt E -minimaalne element. Vastasel korral leiduks $\tilde{d} \in D$ nõnda, et $\tilde{d} E \xi$. Kuivõrd $\xi \in \text{tc}_E(d)$, siis viimase E -transitiivsusest $\tilde{d} \in \text{tc}_E(d)$. Kokkuvõttes oleks $\tilde{d} E \xi$ ja $\tilde{d} \in \text{tc}_E(d) \cap D$, vastuolu elemendi ξ range $\in$ -minimaalsusega. Element ξ ikkagi sobib klassi D rangelt E -minimaalseks elemendiks. ■

Kuna kõik ordinaalarvud on võrreldavad, järelalus, et igas ordinaalarvude klassi $\mathbf{Ord}$ mittetühjas alamklassis leidub $\subseteq$ -vähim element.

Tõestame mõne potentselt regulaarsete seoste omaduse. Potentselt regulaarne seos on irrefleksiivne ja transitiivne, samuti ei leidu tsüklilisi ega lõpmatult kahanevaid E -ahelaid.

Lauseskeem I.18 ([HJ99, lk 252]). *Olgu E potentselt regulaarne seos klassil $\mathcal{C}$.*

- (1) Iga $x \in \mathcal{C}$ korral $x \not E x$ (irrefleksiivsus).

(2) Iga $x, y \in \mathcal{C}$ korral, kui $x \mathbf{E} y$, siis $y \nmathbf{E} x$ (asümmeetrilisus).

(3) Tsüklilist $\mathbf{E}$ -ahelat ei leidu. See tähendab, ei leidu hulki $x_0, x_1, \dots, x_n$ jada $(x_k)_{k \leq n}$ mõttes nii, et

$$x_0 \mathbf{E} x_1 \mathbf{E} \dots \mathbf{E} x_n \mathbf{E} x_0,$$

kus $n \in \omega$, $n \geq 1$.

(4) Lõpmatult kahanevat $\mathbf{E}$ -ahelat pikkusega $\alpha \geq \omega$, $\alpha \in \mathbf{Ord}$, ei leidu. See tähendab, ei saa olla jada $(x_n)_{n \in \mathbf{Ord}}$, kus

$$\dots \mathbf{E} x_n \mathbf{E} \dots \mathbf{E} x_2 \mathbf{E} x_1 \mathbf{E} x_0.$$

Tõestus. Kõik vastuväiteliselt. Hulkadel (1) $\{x\}$, (2) $\{x, y\}$, (3) $\text{ran}(x_k)_{k \leq n} = \{x_0, \dots, x_n\}$, (4) $\text{ran}(x_n)_{n \in \omega} = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$ poleks rangelt $\mathbf{E}$ -minimaalset elementi. ■

Transitiivse eelsulundi ning sulundi kaudu defineeritakse kaks olulist mõistet: *tugev regulaarsus* ning *päranduv omadus*. Tugeva regulaarsuse mõiste tähtsus ja tähendus avaneb Zermelo – von Neumanni hierarhia kontekstis, kui regulaarsuse aksioomist loobuda, vt teoreemi I.27.

Definitsioon I.19 (tugev regulaarsus, [HJ99, lk 256]). Hulka x kutsutakse *tugevalt regulaarseks*, kui seos $\in$ on hulgal $\text{tc}(x)$ potentselt regulaarne.

Seose $\in$ potentne regulaarsus hulgal $\text{tc}(x)$ ehk hulga x tugev regulaarsus on samaväärne hulga $\text{tc}(x)$ potentse $\in$ -regulaarsusega, sest $y \in \text{tc}(x)$ korral on hulgalaadsus $\text{ext}_{\text{tc}(x), \in}(y) = y$ vahetu. Juhul kui hulk on transitiivne, langeb hulga x tugev regulaarsus lisaks ühte hulga x potentse $\in$ -regulaarsusega. Seda põhjusel, et transitiivse hulga puhul $x = \text{tc}(x)$. Kui hulk x pole transitiivne, järeldub hulga x tugevast regulaarsusest hulga x potentne $\in$ -regulaarsus, aga regulaarsuse aksioomi puudumisel vastupidist tõestada ei saa. Lauseskeemi I.16 ja transitiivse sulundi TC definitsiooni valguses pole raske mõista, et tugeva regulaarsuse definitsioonis võib transitiivse eelsulundi $\text{tc}(x)$ asendada transitiivse sulundiga $\text{TC}(x)$.

Tugevalt regulaarsete hulkade klassi tähistame kui $\mathbf{WF}$. Regulaarsuse aksioomi korral on kõik hulgad potentselt regulaarsed hulgale ahendatud sisalduvuse $\in$ suhtes, seega on potentselt regulaarsed ka kõik transitiivsed eelsulundid. Järelikult regulaarsuse aksioomi eeldusel on kõik hulgad tugevalt regulaarsed, $\mathbf{WF} = \mathbf{U}$.

Hulgal on päranduvalt mingisugune omadus, kui selle igal elemendil on vastav omadus, omakorda nende kõigil elementidel ja nii „lõpuni välja“.

Definitsioon I.20 (hulga päranduv omadus, [Cai18]). Olgu $\varphi[x]$ hulgateooria valem. Hulgal x on *päranduvalt omadus* $\varphi[x]$ (omadus $\varphi[x]$ on hulgas x päranduv), kui hulga x transitiivse

sulundi $\text{TC}(x)$ igal elemendil on omadus $\varphi[x]$, s.o

$$„x \text{ on päranduvalt } \varphi[x]“ \Leftrightarrow \forall z(z \in \text{TC}(x) \Rightarrow \varphi[x/z]).$$

Näiteks x on päranduvalt lõplik, kui x on lõplik ja iga hulga x element on lõplik, nende elementide elemendid on lõplikud ning nõnda edasi. Niisiis hulk $\{0, 1, \{\{2\}\}\}$ on päranduvalt lõplik, samas $\{\{\{\{\omega\}\}\}\}$ mitte. Seda näidet üldistades nähtub, et üldjuhul pole päranduvuse kontrollimiseks vajalike sammude arv tõkestatud. Transitiivsus on siinkohal eriline. Piisab üksnes kahe taseme kontrollist, st hulk x on päranduvalt transitiivne parajasti siis, kui x on transitiivne ja kõik tema elemendid on transitiivsed. Päranduvast transitiivusest tuleb kohe hulga x ning selle elementide transitiivsus. Vastupidi, kui hulk x on transitiivne, siis piisab tõestada, et kõik eelsulundi $\text{tc}(x)$ elemendid on transitiivsed. Ent transitiivsusest $x = \text{tc}(x)$ ja hulga x kõik elemendid on eelduse järgi transitiivsed.

2.5.3. Induktsiooni- ja rekursiooniteoreemiskeemid

Oleme valmis induktsiooni- ning rekursiooniteoreemiskeemi sõnastamiseks ja tõestamiseks.

Teoreemiskeem I.19 (potentselt regulaarne induktsioon, [Jec02, lk 68]). *Las olla E potentselt regulaarne seos klassil $\mathcal{C}$. Olgu $\varphi[x]$ niisugune väide ehk hulgateooria valem, mispuhul*

- 1) *iga rangelt E -minimaalse elemendi $\xi \in \mathcal{C}$ korral kehtib $\varphi[x/\xi]$,*
- 2) *iga $x \in \mathcal{C}$ puhul, kui kõigi E -eelnevate $z \in \mathcal{C}$, korral kehtib $\varphi[x/z]$, siis kehtib ka $\varphi[x]$.*

Sellisel juhul kehtib $\forall x \in \mathcal{C}(\varphi[x])$.

Tingimustes 1) ja 2) võime nõude 1) ära jätta. Rangelt minimaalsel elemendil ei ole eellasi, seega tingimus 2) on *vaikimisi tõene*. Tingimuse 2) saame ekvivalentset sõnastada nii:

- 2') *iga $x \in \mathcal{C}$ puhul, kui kõigi $z \in \text{ext}_E(x)$ korral kehtib $\varphi[x/z]$, siis kehtib ka $\varphi[x]$.*

Tõestus. Fikseerime teoreemiskeemi eeldusi täitva valemi $\varphi[x]$. Oletame, et teoreemi väide ei kehti: leidugu $x \in \mathcal{C}$ nii, et $\neg\varphi[x]$. Järelikult alamklass $D \subseteq \mathcal{C}$, kus

$$d \in D \doteq d \in \mathcal{C} \wedge \neg\varphi[x/d],$$

on mittetühi, $D \neq \emptyset$. Lemmaskeemi I.17 alusel leidub klassis D teatav rangelt E -minimaalne element, näiteks $\xi \in D$. Element ξ ei saa olla klassi $\mathcal{C}$ rangelt E -minimaalne element, sest eelduse 1) järgi kehtiks siis $\varphi[x/\xi]$, vastuolu kuuluvusega $\xi \in D$. Niisiis leidub elemente $z \in \mathcal{C}$,

mispuhul $z E \xi$.

Olgu $z \in \mathcal{C}$ suvaline, mil $z E \xi$. Et ξ oli klassis D rangelt E -minimaalne, peab vastuolu vältimiseks olema $\varphi[x/z]$. Niisiis iga E -eelneva elemendi $z \in \mathcal{C}$ puhul $\varphi[x/z]$, kust tingimuse 2) järgi peab kehtima $\varphi[x/\xi]$. Vastuolu, sest $\xi \in D$ põhjal $\neg\varphi[x/\xi]$. Järeldame, et siiski $D = \emptyset$. ■

Induktsiooni teoreemiskeemiga tõestatakse väga oluline

teoreemiskeem I.20 (potentselt regulaarne rekursioon, [Jec02, lk 68; HJ99, lk-d 115–117]).
Olgu E potentselt regulaarne seos klassil $\mathcal{C}$. Olgu G klassifunktsioon klassil $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$. Leidub üheselt määratud klassifunktsioon F (täisfunktsioonilise valemiga $\mathcal{F}$), mispuhul

$$F(x) = \begin{cases} G(x, F|_{\text{ext}_E(x)}), & \text{kui } x \in \mathcal{C}, \\ \emptyset & \text{mujal.} \end{cases} \quad (*)$$

Potentselt regulaarse rekursiooni teoreemiskeem koosneb tegelikkuses kahest teoreemiskeemist. Esimene väidab, et tõestuses toodav valem $\mathcal{F}[x, y]$ on täisfunktsiooniline, sealjuures täidab tingimust (*). Teine teoreemiskeem ütleb, et kaks omadust (*) rahuldavat klassifunktsiooni on võrdsed.

Tõestus. Defineerime valemi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x, y] &:= F(x) = y := x \in \mathcal{C} \wedge \exists f („f \text{ on funktsioon}“ \wedge \\ &\quad \wedge „\text{dom } f \subseteq \mathcal{C} \text{ on } E\text{-transitiivne}“ \wedge \\ &\quad \wedge (\forall z \in \text{dom } f)(f(z) = G(z, f|_{\text{ext}_E(z)})) \wedge \\ &\quad \wedge f(x) = y) \vee \\ &\quad \vee x \notin \mathcal{C} \wedge y = \emptyset. \end{aligned} \quad (\dagger)$$

Tõestame esmalt, et valem $\mathcal{F}[x, y]$ on täisfunktsiooniline. Kui $x \notin \mathcal{C}$, on asi selge: $y = \emptyset$ alati leidub ja on üheselt määratud. Fikseerime niisiis $x \in \mathcal{C}$. Sellisel juhul on kujutise y leiduvus ja ühesus seotud vastava funktsiooniga f . Alustame ühesusest, näidates, et kujutus f on teatud mõttes üheselt määratud.

Nimelt kui leiduvad tingimust $(\dagger)$ rahuldavad funktsioonid f ja g , siis iga $z \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$ korral $f(z) = g(z)$. Põhjendame potentselt regulaarse induktsiooniga teoreemiskeemist I.19. Arusaadavalt $\text{dom } f \cap \text{dom } g \subseteq \mathcal{C}$, mistõttu on seos E potentselt regulaarne hulgal $\text{dom } f \cap$

$\cap \text{dom } g$. 1) Olgu $\xi \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$ ükskõik milline rangelt E -minimaalne element. Siis $f(\xi) = G(\xi, f|_{\emptyset}) = G(\xi, \emptyset) = G(\xi, g|_{\emptyset}) = g(\xi)$, kus $\emptyset = \text{ext}_E(\xi)$. 2) Kehtigu väide $f(b) = g(b)$ mingi $a \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$ jaoks iga $b \in \text{ext}_E(a)$ korral. Järelikult $f|_{\text{ext}_E(a)} = g|_{\text{ext}_E(a)}$, kust $f(a) = G(a, f|_{\text{ext}_E(a)}) = G(a, g|_{\text{ext}_E(a)}) = g(a)$. Kokkuvõttes funktsioonid f ja g ühtivad oma määramamispiirkondade ühisosas. Vahetult järelneb, et kui $F(x) = y_1$ ja $F(x) = y_2$, siis kindlasti $y_1 = y_2$.

Valemi $\mathcal{F}$ täisfunktsioonilisusest on puudu teadmine, et elemendi $x \in \mathcal{C}$ korral leidub alati hulk y , mispuhul $F(x) = y$. Selleks näitame, et leidub sobiv kujutus f . Põhjendame kujutuse f eksistentsi taas potentselt regulaarse induktsiooniga skeemist I.19.

- 1) Kui $\xi \in \mathcal{C}$ on rangelt E -minimaalne, võtame $f := \{(\xi, G(\xi, \emptyset))\}$. Valitud f on selgesti funktsioon, $\text{dom } f = \{\xi\} \subseteq \mathcal{C}$, $\text{dom } f$ on vaikumisi E -transitiivne ja ainukese $z := \xi \in \text{dom } f$ korral $f(z) = f(\xi) = G(\xi, \emptyset) = G(\xi, f|_{\emptyset}) = G(z, f|_{\text{ext}_E(\xi)})$. Siin $y := G(\xi, \emptyset)$.
- 2) Leidugu induktsioonihüpoteesina mingi $a \in \mathcal{C}$ jaoks iga $b \in \text{ext}_E(a)$ korral valemi $\mathcal{F}[x/b, y]$ eksistentsikvantori-osa rahuldav f_b . Arvestades lisaks varasemat ühesust, johtub induktsioonieeldusest, et valem

$$\begin{aligned} \Phi[b, \tilde{f}] &:= b \in \text{ext}_E(a) \wedge \text{„}\tilde{f} \text{ on funktsioon“} \wedge \\ &\quad \wedge \text{dom } \tilde{f} = \text{TC}_E(b) \wedge \\ &\quad \wedge \forall z \in \text{dom } \tilde{f} (\tilde{f}(z) = G(z, \tilde{f}|_{\text{ext}_E(z)})) \wedge \\ &\quad \vee b \notin \text{ext}_E(a) \wedge \tilde{f} = \emptyset \end{aligned}$$

on täisfunktsiooniline. Võrduse $\text{dom } \tilde{f} = \text{TC}_E(b)$ saamiseks kasutasime määramispiirkonna E -transitiivsust: kuivõrd $b \in \text{dom } f_b$, siis $\subseteq$ -vähimusest $\text{TC}_E(b) \subseteq \text{dom } f_b$. Eraldamisaksioomiskeem annab soovitud võrduse. Valemi Φ täisfunktsioonilisus lubab rakendada asendusaksioomiskeemi hulga $\text{ext}_E(a)$. Tulemuseks on hulk $Y := \{\tilde{f} \mid b \in \text{ext}_E(a) \wedge \Phi[b, \tilde{f}]\}$. Otsitavaks funktsiooniks f sobib võtta

$$\begin{aligned} &\text{panustab määramispiirkonda} \\ &\text{hulga } \bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b) \text{ elemendid} \\ f &:= \underbrace{\left(\bigcup Y \right) \cup \left\{ (a, G(a, (\bigcup Y)|_{\text{ext}_E(a)})) \right\}}_{\text{panustab määramispiirkonda hulga } a}. \end{aligned}$$

Selge, et f on binaarne seos. Määramispiirkond on $(\bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b)) \cup \{a\}$. Kõigepealt võetakse E -transitiivsete hulkade ühend, seega $\bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b)$ on E -transitiivne. Kuna $\text{ext}_E(a) \subseteq \bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b)$, siis ka $(\bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b)) \cup \{a\}$ on E -transitiivne. E -transi-

tiivse sulundi definitsioonist ja tõigast $a \in \mathcal{C}$ järel, et $(\bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b)) \cup \{a\} \subseteq \mathcal{C}$. Seos f on funktsioon, sest kokku kleebitakse funktsioone $\tilde{f}$, mis lõikuvates osades ühtivad, ning $a \notin (\bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b))$. Vastasel korral lauseskeemist 1.16 leiduks ahel $x_m := a \mathbf{E} x_{m-1} \mathbf{E} \cdots \mathbf{E} x_1 \mathbf{E} b =: x_0$, kus $b \mathbf{E} a$, $b \in \mathcal{C}$. Kuivõrd $b \mathbf{E} a$, siis järelikult $x_m = a \mathbf{E} x_{m-1} \mathbf{E} \cdots \mathbf{E} x_1 \mathbf{E} b = x_0 \mathbf{E} a = x_m$. Vastuolu lauseskeemi I.18 osaga (3).

Olgu $z \in \text{dom } f = (\bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b)) \cup \{a\}$. Kui $z = a$, siis

$$f(z) = f(a) = G(a, (\bigcup Y)|_{\text{ext}_E(a)}) = G(a, f|_{\text{ext}_E(a)}) = G(z, f|_{\text{ext}_E(z)}),$$

kus eelviimases võrduses kasutasime ahelat $f|_{\text{ext}_E(a)} = (f|_{\bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b)})|_{\text{ext}_E(a)} = (\bigcup Y)|_{\text{ext}_E(a)}$, mis omakorda johtub teadmisesest $f|_{\bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b)} = \bigcup Y$ ja asjaolust $a \notin \text{ext}_E(a)$. Korras. Las olla nüüd $z \neq a$ ehk $z \in \bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b)$. Järelikult mingisuguse $b_z \in \text{ext}_E(z)$ korral $z \in \text{TC}_E(b_z)$ ja hulga Y konstruktsiooni põhjal kehtib $\Phi(b_z, \tilde{f}_{b_z})$, seega

$$f(z) = \tilde{f}_{b_z}(z) = G(z, \tilde{f}_{b_z}|_{\text{ext}_E(z)}) = G(z, f|_{\text{ext}_E(z)}).$$

Sobib võtta $y := G(a, (\bigcup Y)|_{\text{ext}_E(a)})$.

Sellega on valemi $\mathcal{F}[x, y]$ täisfunktsioonilisus põhjendatud.

Valemi $\mathcal{F}[x, y]$ täisfunktsioonilisuse tõestusest johtub tingimuse (*) kehtivus. Klassifunktsiooni F ühesus tõestatakse samuti potentselt regulaarse induktsiooniga 1.19. Olgu F ja F' klassifunktsioonid, mis rahuldavad nõuet (*). Nende erinevus ei saa tulla väljaspoolt klassi $\mathcal{C}$, kuivõrd seal $F(x) = \emptyset = F'(x)$. Olgu niisiis $x \in \mathcal{C}$. Kui element $x = \xi$ on klassis $\mathcal{C}$ rangelt E -minimaalne, siis klassi G funktsioonilisusest $F(\xi) = G(\xi, F|_{\text{ext}_E(\xi)}) = G(\xi, F|_{\emptyset}) = G(\xi, F'|_{\text{ext}_E(\xi)}) = F'(\xi)$. Kehtigu klassifunktsioonide võrdus hulga x jaoks iga $z \mathbf{E} x$, $z \in \mathcal{C}$, korral. Järelikult $F|_{\text{ext}_E(x)} = F'|_{\text{ext}_E(x)}$, kust $F(x) = G(x, F|_{\text{ext}_E(x)}) = G(x, F'|_{\text{ext}_E(x)}) = F'(x)$.

Tulemus on tõestatud. ■

Märkus 1.21. a. Seose E hulgalaadsus on oluline. Kui $\text{ext}_E(x)$ pole hulk, ei ole rekursioonisamm $G(x, F|_{\text{ext}_E(x)})$ hästi defineeritud. [Kun80, lk 104]

b. Funktsioon G oli kahe argumendiga. Esimese argumendi x puudumise korral oleks rekursioon kitsam, sest kehtiks alati $F(x_1) = F(x_2)$, kui $\text{ext}_E(x_1) = \text{ext}_E(x_2)$. Iseäranis oleks $F(\xi_1) = F(\xi_2)$ kõigi rangelt E -minimaalsete elementide ξ_1 ja ξ_2 korral. Kahe argumendiga funktsioonist saame ühe argumendiga versiooni, kui esimene muutuja klassis G on fiktiivne. [Jec02, lk 68]

c. Funktsioon G võib sisaldada parameetreid. Tõestuses pole neid ilmutatult rõhutatud.

Seda seetõttu, et ilmutatud parameetritega tõestus läheb läbi sama moodi kui ilmutamata parameetriteta. Parameetrit tuleb tõestuses lihtsalt kaasas kanda, muud midagi. [HJ99, lk 117]

- d. Tõestust saaks lühendada, eriti valemi $(\dagger)$ funktsiooni f ühesuse osas, võttes valemis $(\dagger)$ kohe $\text{dom } f = \text{TC}_E(a)$. Leiduvuse osas tuleks lisaks näidata, et $\text{TC}_E(a) = (\bigcup_{b \in \text{ext}_E(a)} \text{TC}_E(b)) \cup \{a\}$, mis jäeldub E -transitiivsuse omadustest ja E -transitiivse sulundi definitsioonist. Muutusega kaasneks aga valemi $(\dagger)$ süntaktilise keerukuse kasv. Autor ei tea, kas keerukuse kasvul oleks negatiivseid tagajärgi.
- e. Tõestatud teoreemiskeemidest I.19 ja I.20 järelduvad eri tüüpi induktsiooni- ja rekursiooniteoreemid.
 - 1) Juhul, kui $E = \in|_{\mathcal{C}}$, nimetatakse meetodeid *epsiloninduktsiooniks*, *epsilonrekursiooniks*. Seose $\in$ globaalne potentne regulaarsus johtub regulaarsuse aksioomist. Epsiloninduktsiooni ning -rekursiooni kasutatakse tihti, kui klass $\mathcal{C}$ on transitiivne. Transitiivse mittetühja klassi ainus rangelt $\in$ -minimaalne element on tühi hulk $\emptyset$. [Jec02, lk 66] Niisugust epsiloninduktsiooni kasutame näiteks lause I.29 tõestuses.
 - 2) Kui $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{Ord}$ ja $E = \in|_{\mathcal{C}}$, räägitakse *transfinitiitsest induktsioonist* ja *rekursioonist*. Teoreemi I.14 valguses kutsutakse samamoodi induktsiooni- ning rekursiooniteoreeme suvaliste potentselt järjestatud hulkade korral.
 - 3) Erijuhul, kui $\mathcal{C} = \omega$, saame *naturaalarvulise induktsiooni* ning *rekursiooni* [Jec02, lk 66]. Rõhutame, et naturaalarvuline induktsioon ei jäeldu siin potentselt regulaarsest induktsioonist, sest viimase tõestuses kasutatakse esimest (transitiivse eelsulundi olemasolu teoreemi kaudu, vt lisa B).
 - 4) Struktuurne induktsioon ja rekursioon on piisava metateooria kontekstis niisamuti potentselt E -regulaarse versiooni alamjuhud. Näiteks struktuursel induktsioonil mööda valemi struktuuri sobiks võtta $\mathcal{C} := \{\text{I järku valemid}\}$ ning $\mathcal{F} E \mathcal{G}$ parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}$ on valemi $\mathcal{G}$ range osavalem.
- f. Potentselt regulaarset induktsiooni-rekursiooni võib kutsuda *Noetheri-Montague'i induktsiooniks* ja *rekursiooniks* matemaatikute Amalie Emmy Noetheri [Wik23; Ham13] ning Richard Merritt Montague'i [Mon55] auks. Montague andis esimesena siinse teoreemiskeemi kõige üldisema versiooni [Mon55].

Sõnastame tähtsad transfinitiitse induktsiooni rekursiooni variandid, mis järelduvad skeemidest I.19 ja I.20. Selles versioonis eristatakse järglas- ning piirordinaalarvuseid. Järeldusskeemi I.22 kasutame näiteks Zermelo – von Neumanni hierarhia definitsioonis ja skeemi I.21

mitmes tõestuses, näiteks lause I.25 juures.

Järeldusskeem I.21 ([Jec02, lk 21]). *Olgu $\varphi[x]$ valem, mispuhul*

- 1) *kui $x = 0$, siis $\varphi[x]$,*
- 2) *kui järgordinaalarvu $x = \beta^+$ korral $\varphi[x/\beta]$, siis $\varphi[x]$,*
- 3) *kui piirordinaalarvu $x \neq 0$ jaoks kõigi $\beta < x$ korral $\varphi[x/\beta]$, siis $\varphi[x]$.*

Sel juhul kehtib võrdus $\forall x \in \mathbf{Ord}(\varphi[x])$.

Tõestus. Teoreemiskeemi I.19 tähistuses $E := \in =: <$, $\mathcal{C} := \mathbf{Ord}$. Oletame, et kehtib implikatsiooni eeldus potentselt regulaarse induktsiooni alternatiivsest tingimusest 2') hulga x jaoks, st iga $z < x$ korral $\varphi[x/z]$. Kui ühtegi $z < x$ ei leidu, siis $x = \emptyset$ ja siinsest eeldusest 1) järeldub $\varphi[x]$. Vastasel korral on x kas järgordinaalarv või nullist erinev piirordinaalarv. Esimesel rakendada fakti, et $\beta < x$, ja eeldust 1). Teisel juhul piisab vahetult eeldusest 3). ■

Vastav rekursiooniskeem on

järeldusskeem I.22 ([Jec02, lk 22; HJ99, lk-d 115–117]). *Olgu G_1, G_2 ja G_3 klassifunktsioonid klassil $\mathbf{U}$ täisfunktsiooniliste valemitega $\mathcal{G}_1[f, y]$, $\mathcal{G}_2[f, y]$, $\mathcal{G}_3[f, y]$. Siis leidub üheselt määratud klassifunktsioon F nii, et ordinaalarvude korral*

$$\begin{cases} F(0) = G_1(0), \\ F(\alpha^+) = G_2(F(\alpha)), \\ F(\alpha) = G_3(F|_\alpha), \text{ kui } \alpha \neq 0 \text{ on piirordinaalarv,} \end{cases}$$

ning mujal $F(x) = \emptyset$.

(Tegelikuses on jälle tegu kahe kokkupanud järeldusskeemiga.)

Tõestus. Teoreemiskeemi I.20 jaoks defineerime klassifunktsiooni G klassil $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ valemiga

$\mathcal{G}[f, y](x)$ järgmiselt:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[f, y](x) := & f = 0 \wedge \mathcal{G}_1[f, y] \vee \\ & \vee \text{„}f \text{ on funktsioon“} \wedge \exists \alpha \in \mathbf{Ord}(\text{dom } f = \alpha^+ \wedge \mathcal{G}_2[f(\alpha), y]) \vee \\ & \vee \text{„}f \text{ on funktsioon“} \wedge \exists \alpha \in \mathbf{Ord}(\text{dom } f = \alpha \neq 0 \wedge \\ & \quad \wedge \text{„}\alpha \text{ on piirordinaalarv“} \wedge \mathcal{G}_3[f, y]) \vee \\ & \vee (\text{„}f \text{ pole funktsioon“} \vee \text{„}f \text{ on funktsioon“} \wedge \text{dom } f \notin \mathbf{Ord}) \wedge y = \emptyset. \end{aligned}$$

Argument x on valemis $\mathcal{G}[f, y](x)$ fiktiivne (formaalselt võib ta lisada tingimusega $x = x$) ja y on funktsiooni väärtus kohal f . Vahetult on kontrollitav, et saadav G on tõepoolest klassifunktsioon. Kirjutame $G(f) = y$, kui kehtib $\mathcal{G}[f, y](x)$. Teoreemiskeemist I.20 saame $E := \in$ ja $\mathcal{C} := \mathbf{Ord}$ korral üheselt määratud klassifunktsiooni F , mispuhul

$$F(x) = \begin{cases} G(x, F|_{\text{ext}_\in(x)}) = G(F|_x), & \text{kui } x \in \mathbf{Ord}, \\ \emptyset & \text{mujal.} \end{cases}$$

Oleme arvestanud, et alati $\text{ext}_\in(x) = x$.

Tõestuse, et F rahuldab nõutud tingimusi, lõpetab juhtude läbivaatus. Näiteks $x = 0$ korral $F(0) = G(F|_0) = G(F|_\emptyset) = G(\emptyset) = G_1(\emptyset) = G_1(0)$. Kui $x = \alpha^+$ mingi ordinaalarvu α korral, siis $F(\alpha^+) = G(F|_{\alpha^+}) = G_2(F|_{\alpha^+}(\alpha)) = G_2(F(\alpha))$. Analoogiliselt ülejäänud kaks juhtu, kasutades valemi $\mathcal{G}[f, y](x)$ määratlust. ■

Järeldusskeem I.22 annab ühe võimaliku tee ordinaalarvude aritmeetika defineerimiseks. Huvitatud lugeja suuname allikasse [Jec02, lk 23].

2.5.4. Astakufunktsioon

Lubame edasises klassifunktsiooni defineerimisel vabamat tähistust, n-ö tükati defineerimise vormi, selmet välja kirjutada vastav valem. Samuti jätame täisfunktsioonilisuse põhjenduse reeglina lugeja intuitsiooni tasemele ja nõudlikumale lugejale ise tõestamiseks.

Potentselt regulaarse seosega $E \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ käib kaasas rekursiivselt defineeritav *astakufunktsioon* $\text{rank}_E: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Ord}$, mispuhul $\text{rank}_E(x) = \sup \{ (\text{rank}_E(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z E x \}$, kui $x \in \mathcal{C}$.

Teoreemiskeem I.23 (astakufunktsiooni leidumine, [Jec02, lk 68]). *Olgu E potentselt regu-*

laarne seos klassil $\mathcal{C}$. Leidub funktsioon $F: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Ord}$, mispuhul

$$\forall \tilde{z}, x \in \mathcal{C} (\tilde{z} E x \Rightarrow F(\tilde{z}) < F(x)) \quad (\ddagger)$$

ning $F(x) =: \mathbf{rank}_E(x) = \sup \{ (\mathbf{rank}_E(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z E x \}$, kui $x \in \mathcal{C}$.

Tõestus. Defineerime klassifunktsiooni

$$G(f) = \begin{cases} \bigcup \{ y^+ \mid y \in \text{ran } f \}, & \text{kui „} f \text{ on funktsioon“, } \text{ran } f \subseteq \mathbf{Ord}, f \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{mujal.} \end{cases}$$

Teoreemiskeemi 1.20 ja märkuse I.21 osa b. põhjal leidub üheselt määratud klassifunktsioon $F: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Ord}$ nii, et

$$F(x) = \begin{cases} G(F|_{\text{ext}_E(x)}), & \text{kui } x \in \mathcal{C}, \\ \emptyset & \text{mujal,} \end{cases}$$

kus fiktiivse argumendi jätsime ära. Tähistame funktsiooni F kui $\mathbf{rank}_E$. Niisiis $x \in \mathcal{C}$ korral $\mathbf{rank}_E(x) = G(\mathbf{rank}_E|_{\text{ext}_E(x)}) = G(\{ (z, y) \in \mathbf{rank}_E \mid z \in \mathcal{C}, z E x \})$. Kogum $\{ (z, y) \in \mathbf{rank}_E \mid z \in \mathcal{C}, z E x \}$ on hulk tänu seose E hulgalaadsusele, asendusaksioomiskeemile ning klassifunktsiooni $\mathbf{rank}_E$ alusvalemi täisfunktsioonilisusele.

Tõestame potentselt regulaarse induktsiooniga 1.19 korraga klassifunktsiooni muutumispiirkonna alamklassilisuse $\text{ran}(\mathbf{rank}_E) \subseteq \mathbf{Ord}$ ning võrduse $\mathbf{rank}_E(x) = \sup \{ (\mathbf{rank}_E(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z E x \}$, kui $x \in \mathcal{C}$. Selge, kui $x \notin \mathcal{C}$. Kui $\xi \in \mathcal{C}$ on rangelt E -minimaalne, siis

$$\mathbf{rank}_E(\xi) = G(\mathbf{rank}_E|_{\text{ext}_E(\xi)}) = G(\mathbf{rank}_E|_{\emptyset}) = G(\emptyset) = \emptyset \in \mathbf{Ord}$$

ja $\sup \emptyset = \emptyset$. Oletame nüüd, et mitte minimaalse elemendi x jaoks kõigi $z E x$, $z \in \mathcal{C}$, korral $\mathbf{rank}_E(z) \in \mathbf{Ord}$. Taolises olukorras on $\mathbf{rank}_E|_{\text{ext}_E(x)} = \{ (z, y) \in \mathbf{rank}_E \mid z \in \mathcal{C}, z E x \} \neq \emptyset$ funktsioon ja

$$\text{ran}(\{ (z, y) \in \mathbf{rank}_E \mid z \in \mathcal{C}, z E x \}) = \{ \mathbf{rank}_E(z) \mid z \in \mathcal{C}, z E x \} \neq \emptyset$$

mittetühi ordinaalarvudest koosnev hulk, nii ka sellest asendusaksioomiga saadud järglasordi-

naalide hulk $\{\text{rank}_E(z)^+ \mid z \in \mathcal{C}\}$. Järeldame, et

$$\begin{aligned} \text{rank}_E(x) &= \mathcal{G}(\text{rank}_E|_{\text{ext}_E(x)}) = \bigcup \{(\text{rank}_E(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z \in E x\} = \\ &= \sup \{(\text{rank}_E(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z \in E x\} \in \mathbf{Ord}. \end{aligned}$$

Viimane võrdus ning sisalduvus tulevad lause I.11 osast (1).

Lõpuks veendume tingimuses (‡). Rangelt E -minimaalse elemendi $x = \xi$ korral kehtib (‡) vaikumisi. Olgu nüüd $\tilde{z} \in E x$, $\tilde{z} \in \mathcal{C}$. Vahetult definitsioonist

$$\begin{aligned} \text{rank}_E(\tilde{z}) &< (\text{rank}_E(\tilde{z}))^+ \in \{(\text{rank}_E(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z \in E x\} \leq \\ &\leq \sup \{(\text{rank}_E(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z \in E x\} = \text{rank}_E(x). \end{aligned}$$

Tulemus on tõestatud. ■

Teoreemiskeemi I.23 tingimust (‡) rahuldav funktsioon pole üheselt määratud. Astakufunktsiooni asemele võib võtta funktsiooni, mispuhul järglase kohale pannakse järglase järglane või üldisemalt liidetakse suvaline ordinaalarv $\alpha \geq 1$. Astakufunktsioon on aga väärtuste mõttes vähim funktsioon, mis nõuet (‡) täidab. Tõestus vahetult potentselt regulaarse induktsiooni ja supreemumi definitsiooni põhjal.

Teoreemiskeemile I.23 leidub osaline pöördlauseskeem, mis annab piisava tingimuse klassi $\mathcal{C}$ potentselt E -regulaarsuseks.

Lauseskeem I.24. *Olgu E niisugune seos klassil $\mathcal{C}$, et leidub funktsioon $F: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Ord}$ omadusega*

$$\forall z, x \in \mathcal{C} (z \in E x \Rightarrow F(z) < F(x)).$$

Siis klassi $\mathcal{C}$ igas alamklassis $\emptyset \neq D \subseteq \mathcal{C}$ leidub rangelt E -minimaalne element. Eriti on klass $\mathcal{C}$ potentselt E -regulaarne.

Tõestus. Vaikumisi tõene, kui $\mathcal{C} = \emptyset$. Olgu $\mathcal{C} \neq \emptyset$, kust $F(\mathcal{C}) \neq \emptyset$. Seos $\in$ on klassil $\mathbf{Ord}$ range potentne järjestus, järelikult potentselt $\in$ -regulaarne seos. Olgu ξ üks klassi $F(\mathcal{C})$ rangelt $\in$ -regulaarsetest elementidest (tegelikult isegi $\xi = \bigcap F(\mathcal{C})$ rangelt $\in$ -vähim, lause I.11 osa (2) üldistus). Olgu $c \in \mathcal{C}$ suvaline, mispuhul $F(c) = \xi$. Väidame, et c on kindlasti klassi $\mathcal{C}$ rangelt E -minimaalne element. Kui nii poleks, siis leiduks $z \in \mathcal{C}$, mispuhul $z \in E c$, kust eelduse järgi $F(z) < F(c) = \xi$. Vastuolu hulga ξ minimaalsusega klassis $F(\mathcal{C})$.

Klasside jaoks on tulemus tõestatud. Kõik hulgad olid klassid, sestap johtub klassi $\mathcal{C}$ potentne

E -regulaarsus. ■

Täielikku pöördlauseskeemi ei leidu, sest lauseskeemi 1.24 eeldused ei taga seose hulgalaadsust. Võtame $\mathcal{C} := \mathbf{U}$ ning $z \mathbf{E} x := x = \{\{\emptyset\}\} \wedge z \neq x$. Funktsioon $F: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Ord}$,

$$F(x) = \begin{cases} \emptyset, & x \neq \{\{\emptyset\}\}, \\ \{\emptyset\}, & x = \{\{\emptyset\}\}, \end{cases}$$

rahuldab lauseskeemi 1.24 eeldust. Kui $z, x \in \mathbf{U}$, siis $z \mathbf{E} x$ tähendab, et $z \neq \{\{\emptyset\}\}$ ja $x = \{\{\emptyset\}\}$. Järelikult $F(z) = \emptyset = 0 < 1 = \{\emptyset\} = F(x)$. Ent $\{\{\emptyset\}\} \in \mathbf{U}$ ja $\text{ext}_E(\{\{\emptyset\}\}) = \mathbf{U} \setminus \{\{\{\emptyset\}\}\}$ ehk tegu pole hulgaga.

2.6. Zermelo – von Neumanni kumulatiivne hierarhia

Olgu antud klassifunktsioon $W: \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{U}$ või $(W_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{Ord}}$ ehk *hierarhia*. Hierarhiat $(W_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{Ord}}$ kutsutakse *kumulatiivseks*, kui $W_0 = \emptyset$, iga $\alpha \in \mathbf{Ord}$ korral $W_\alpha \subsetneq W_{\alpha^+} \subseteq \mathcal{P}(W_\alpha)$ ja piirordinaalarvulise α puhul $W_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta$. Kumulatiivsest hierarhiast võib mõelda kui järkjärgulisest hulkade „loomise“ protsessist. Alustame tühjast hulgast, $W_0 = \emptyset$. Järgordinaalarvulisel sammul jäävad varasemad hulgad alles, $W_\alpha \subsetneq W_{\alpha^+}$, samuti lisatakse hulki juurde. Uusi hulki võetakse ainult varasemate hulkade alamhulkade seast, st $W_{\alpha^+} \subseteq \mathcal{P}(W_\alpha)$. Piirordinaalarvulisel sammul kogume varasematel sammudel saadud hulgad kokku, $W_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta$. [Jec02, lk 171]

Kumulatiivse hierarhia $(W_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{Ord}}$ iga aste W_α on mittetühi, kui $\alpha \geq 1$, ning alati transitiivne. Esimene väide tuleneb rangest sisalduvusest $W_\alpha \subsetneq W_{\alpha^+}$ ja nullist erinevate piirordinaalarvude korral ühendi definitsioonist. Transitiivsus on ilmne, kui $\alpha = 0$, ja vahetu mujal, sest $x \in W_\alpha$ korral $x \in \mathcal{P}(W_\alpha)$ ehk $x \subseteq W_\alpha$. Klassist $W = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{Ord}} W_\alpha$ räägitakse kui *kumulatiivsest universumist üle hierarhia* $(W_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{Ord}}$.

Zermelo – von Neumanni kumulatiivne hierarhia on kumulatiivse hierarhia mõiste erijuht. Alamhulgalise sisalduvuse mõttes on Zermelo – von Neumanni hierarhia suurim kumulatiivne hierarhia. Definitsioonis I.22 rakendame järeldusskeemi 1.22.

Definitsioon I.22 (Zermelo – von Neumanni hierarhia, universum, [Jec02, lk 64]). Hierarhiat

$(V_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{Ord}}$ nimetatakse *Zermelo – von Neumanni (kumulatiivseks) hierarhiaks*, kui

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset, \\ V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha), \\ V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta, \text{ kui } \alpha \neq 0 \text{ on piirordinaalarv.} \end{cases}$$

Vastavat ühendklassi $V = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{Ord}} V_\alpha$ kutsutakse *Zermelo – von Neumanni (kumulatiivseks) universumiks*. Vahel kirjutatakse V_α ja V asemel R_α ja R [Kun80, lk 95].

Tõestame Zermelo – von Neumanni hierarhia kohta mõne lihtsama väite.

- Lause I.25** ([Jec02, lk-d 64–65; Wea14, lk-d 15–16]). (1) *Kui hulk x saadakse kätte sammul α , siis kõik tema elemendid on mingist varasemast sammust $\beta < \alpha$ juba olemas. See tähendab, et iga $x \in V_\alpha$ ja $y \in x$ korral leidub $\beta < \alpha$ nii, et $y \in V_\beta$.*
- (2) *Zermelo – von Neumanni hierarhia on kumulatiivne. Iga sammu koondhulk V_α on transitiivne.*
- (3) *Varasema sammu elemendid ei lähe kaotsi: kui $\beta \leq \alpha$, siis $V_\beta \subseteq V_\alpha$.*
- (4) *Iga $\alpha \in \mathbf{Ord}$ korral $\alpha \subseteq V_\alpha$.*
- (5) *Iga $\alpha \in \mathbf{Ord}$ korral $\alpha \in V_{\alpha^+} \setminus V_\alpha$.*
- (6) *Kui hulga X kõik elemendid x on teataval sammul $\alpha_x \in \mathbf{Ord}$ kätte saadud, siis hulk X kuulub samuti mingisse hierarhia astmesse V_β . Predikaatarvutuse keeles*

$$\forall X (\forall x \in X \exists \alpha \in \mathbf{Ord} (x \in V_\alpha) \Rightarrow \exists \beta \in \mathbf{Ord} (X \in V_\beta)).$$

Tõestus. (1) Kasutame transfiniitset induktsiooni I.21 valemi

$$\varphi[\alpha] := \forall x, y (x \in V_\alpha \wedge y \in x \Rightarrow \exists \beta (\beta < \alpha \wedge y \in V_\beta))$$

korral. Tulemus on selge piirarvuliste α väärtuste jaoks: kui $\alpha = 0$, vaikumisi tõene, muul juhul johtub alamhulgalisus ühendilisest definitsioonist $\bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$. Kehtigu nüüd väide $\varphi[\alpha/\gamma]$ järgarvulise $\gamma^+ = \alpha$ jaoks. Siis väide $\varphi[\alpha]$ kehtib, sest eeldusel $x \in V_\alpha = \mathcal{P}(V_\gamma)$ saame $x \subseteq V_\gamma$ ehk kui $y \in x$, siis $y \in V_\gamma$. Sobib võtta $\beta := \gamma$.

- (2) Vahetult kokkuleppes $V_0 = \emptyset$ ning $\alpha \in \mathbf{Ord}$ korral $V_{\alpha^+} \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha)$. Jääb näidata, et $V_\alpha \subsetneq V_{\alpha^+}$. Mitterange alamhulgalisus $V_\alpha \subseteq V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ on lause I.1 osa (iv) järgi hulga

V_α transitiivsus. Transfinitse induktsiooniga. Tühi hulk on transitiivne, transitiivsete hulkade kogumi ühend on transitiivne ning transitiivse hulga potentshulk on transitiivne, vt lause I.2 jaotisi (1) ja (4). Võrduse $V_\alpha = \mathcal{P}(V_\alpha)$ välistab Cantori teoreem [HJ99, lk 96], ei leidu injeksiooni hulga potentshulgast algsesse hulka.

- (3) Transfinitne induktsioon valemi $\varphi[\alpha] := \forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow V_\beta \subseteq V_\alpha)$ korral. Tulemus on ilmne piirarvuliste α väärtuste jaoks. Järgarvulise α puhul $\gamma^+ = \alpha$ oletame, et väide $\varphi[\alpha/\gamma]$ kehtib. Näitame, et järeldub väide $\varphi[\alpha]$. Kuna iga $\beta < \gamma$ korral $V_\beta \subseteq V_\gamma$, piisab näidata, et $V_\gamma \subseteq V_{\gamma^+} = \mathcal{P}(V_\gamma)$. See on juba teada jaotisest (2). Kui eelduses kehtib võrdus, s.o $\beta = \alpha$, on tulemus ilmne.
- (4) Transfinitne induktsioon valemiga $\Phi[\alpha] := \alpha \subseteq V_\alpha$. Kehtigu väide $\alpha \in \mathbf{Ord}$ korral. Vaja, et $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq V_{\alpha^+}$. Eeldusest $\alpha \subseteq V_\alpha$, potentshulga võtmisest järelikult $\alpha \in V_{\alpha^+}$. Osa (3) järgi, sest $\alpha < \alpha^+$, saame $V_\alpha \subseteq V_{\alpha^+}$. Järelikult eeldusest $\alpha \subseteq V_\alpha$ ka $\alpha^+ \subseteq V_{\alpha^+}$. Edasi vaatleme piirordinaalarve. Juhul $\alpha = 0$ asi klaar, kuna $\emptyset$ on iga hulga osahulk. Kehtigu nüüd mingi piirarvulise $\alpha \neq 0$ jaoks väide kõigi arvude $\beta < \alpha$ korral. Näitame, et $\alpha \subseteq V_\alpha$. Olgu $\gamma \in \alpha$, s.o $\gamma < \alpha$. Kuna α on piirordinaalarv ja γ^+ on järgordinaalarv, siis ka $\gamma^+ < \alpha$, lause I.10 osa (5). Induktsiooni eeldusest $\gamma^+ \subseteq V_{\gamma^+}$. Jaotisest (3) $V_{\gamma^+} \subseteq V_\alpha$. Et $\gamma \in \gamma^+$, siis $\gamma \in V_\alpha$.
- (5) Eelmise jaotise põhjal $\alpha \subseteq V_\alpha$, mistõttu potentshulga võtmisest $\alpha \in V_{\alpha^+}$. Seetõttu tõestame, et $\alpha \notin V_\alpha$. Transfinitse induktsiooniga ja vastuväiteliselt. Kehtigu väide $\alpha \notin V_\alpha$ mingi $\alpha \in \mathbf{Ord}$ korral, st $\alpha \notin V_\alpha$. Kui oleks $\alpha^+ \in V_{\alpha^+}$, siis $\alpha^+ \subseteq V_\alpha$, kust $\alpha \in V_\alpha$, vastuolu. Liigume piirordinaalarvude juurde. Tühja hulga korral mittesisalduvus ilmne, $0 \notin V_0 = \emptyset$. Kehtigu tulemus mingi piirarvulise $\alpha \neq 0$ jaoks iga ordinaalarvu $\beta < \alpha$ korral. Oletame vastuväiteliselt, et $\alpha \in V_\alpha$. Piirarvulisel astmel võetakse ühend, seega leiduks mingi $\gamma < \alpha$ nii, et $\alpha \in V_\gamma$. Transitiivsusest $\alpha \subseteq V_\gamma$. Kuid $\gamma < \alpha$, st $\gamma \in \alpha$, järelikult $\gamma \in V_\gamma$. Vastuolu induktsiooni eeldusega.
- (6) Kehtigu implikatsiooni

$$\forall X(\forall x \in X \exists \alpha \in \mathbf{Ord}(x \in V_\alpha) \Rightarrow \exists \beta \in \mathbf{Ord}(X \in V_\beta)).$$

eeldused ja las $X \neq \emptyset$. Kuivõrd igale elemendile $x \in X$ vastab $\alpha_x \in \mathbf{Ord}$ (neid võib olla mitu), mispuhul $x \in V_{\alpha_x}$, leidub ka vähim niisuguse omadusega ordinaalarv. Vastavat omadust kirjeldab valem

$$\Phi[x, \alpha] := x \in V_{\alpha^+} \wedge x \notin V_\alpha.$$

Väljendusviis on korrektne, kuna $\mathbf{V}_0 = \emptyset$, piirordinaalarvulisel sammul $\alpha \neq 0$ koondatakse ühendiga üksnes juba varem saadud hulki; ja kui juba $x \in \mathbf{V}_\delta$, $\Delta \in \mathbf{Ord}$, siis $x \in \mathbf{V}_\gamma$ iga ordinaalarvu $\gamma \geq \delta$ korral – jaotis (3). Valem $\Phi[x, \alpha]$ on hulgal X täisfunktsiooniline. Leiduvus tuleneb implikatsiooni eeldusest, ühesus arvu α vähimusest.

Asendamisaksioomiskeemi alusel leidub hulk $Y_X := \{ \alpha \mid x \in X \wedge \Phi[x, \alpha] \}$. Et $x \in X$ ja $\Phi[x, \alpha]$ korral just $x \in \mathbf{V}_{\alpha^+}$, mitte $x \in \mathbf{V}_\alpha$, siis rakendame korra veel funktsioonilist asendust järgarvude elemendiviisiliseks võtmiseks, $Y := \{ \alpha^+ \mid \alpha \in Y_X \}$. Hulk Y koosneb ordinaalarvudest, mistõttu lause I.11 osa (1) abil järeldame, et ka $\bigcup Y$ on ordinaalarv, sealjuures $\bigcup Y = \sup_{\in} Y =: \beta'$.

Asendamisaksioomiskeemi kolmandal rakendamisel saame hulga $\{ \mathbf{V}_\gamma \mid \gamma < \beta' \}$. Järelikult saame võtta sellest hulgast ühendi, kusjuures ülesehituse viisi tõttu on X tema osahulk, st $X \subseteq \bigcup_{\gamma < \beta'} \mathbf{V}_\gamma$. Jaotise (3) järgi iga $\gamma < \beta'$ korral $\mathbf{V}_\gamma \subseteq \mathbf{V}_{\beta'}$, kust $\bigcup_{\gamma < \beta'} \mathbf{V}_\gamma \subseteq \mathbf{V}_{\beta'}$ ja millest omakorda $X \subseteq \mathbf{V}_{\beta'}$. Hierarhia järgmisel sammul jõutaksegi seega hulgani X , sest $X \in \mathcal{P}(\mathbf{V}_{\beta'}) = \mathbf{V}_{(\beta')^+}$. Teoreemi implikatsiooni väitesse sobib võtta $\beta := (\beta')^+$. ■

Hulka X kutsusime tugevalt regulaarseks, kui seos $\in$ oli tolle transitiivsel eelsulundil $\text{tc}(X)$ on potentselt regulaarne. Järgmine lemma ütleb, et Zermelo – von Neumanni hierarhia astmed $\mathbf{V}_\alpha$ on tugevalt regulaarsed. Astmete $\mathbf{V}_\alpha$ transitiivsuse tõttu on väide samaväärne nende hulkade $\mathbf{V}_\alpha$ potentse regulaarsusega. Tõestus ei kasuta regulaarsuse aksioomi.

Lemma I.26 ([HJ99, lk 258]). *Zermelo – von Neumanni kumulatiivse hierarhia iga aste $\mathbf{V}_\alpha$ on tugevalt regulaarne.*

Tõestus. Vaatleme sisulist juhtu $\mathbf{V}_\alpha \neq \emptyset$ ja $\emptyset \neq B \subseteq \mathbf{V}_\alpha$. Kuivõrd $B \cap \mathbf{V}_\alpha \neq \emptyset$, leidub

$$\beta := \min \{ \tilde{\beta} \leq \alpha \mid B \cap \mathbf{V}_{\tilde{\beta}} \neq \emptyset \}.$$

Eriti $B \cap \mathbf{V}_\beta \neq \emptyset$. Ükskõik milline selle ühisosa element sobib algse hulga B rangelt $\in$ -minimaalseks elemendiks. Olgu $\xi \in B \cap \mathbf{V}_\beta$ suvaline. Kui ξ poleks $\in$ -rangelt minimaalne hulgas B , leiduks $\tilde{\xi} \in \xi \cap B$. Lause I.25 osa (1) järgi, kuna ξ on olemas sammul β , peab $\tilde{\xi}$ olema kätte saadud varasemast sammust $\tilde{\beta} < \beta$, s.o $\tilde{\xi} \in \mathbf{V}_{\tilde{\beta}}$. Siis aga $\tilde{\xi} \in B \cap \mathbf{V}_{\tilde{\beta}} \neq \emptyset$ ja $\tilde{\beta} < \beta \leq \alpha$. Vastuolu arvu β valikust tuleneva range minimaalsusega. ■

Kehtib klasside võrdus $\mathbf{WF} = \mathbf{V}$, st Zermelo – von Neumanni universum koosneb parajasti kõigist tugevalt regulaarsetest hulkadest. Seda ka regulaarsuse aksioomi puudumisel. Regulaarsuse aksioomi kontekstis $\mathbf{WF} = \mathbf{U}$, järelikult sel juhul on Zermelo – von Neumanni

kumulatiivne hierarhia kõikehõlmav ehk $V = U$.

Teoreem I.27 ($WF = V$, [HJ99, lk 258]). *Zermelo – von Neumanni universum V koosneb parajasti tugevalt regulaarsetest hulkadest ehk $WF = V$, st*

$$\forall X (,X \text{ on tugevalt regulaarne} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbf{Ord} (X \in V_\alpha)).$$

Tõestus. Põhjendame kumbagi suunda, alustades pöördimplikatsioonist.

($,\Leftarrow$) Las $X \in V_\alpha$, $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Hulk V_α on lemma I.26 järgi tugevalt regulaarne, järelikult potentselt regulaarne. Tugeva regulaarsuse definitsioonile järgnenud arutelu järgi on hulk X tugevalt regulaarne, kui vastav transitiivne sulund $TC(X)$ on potentselt regulaarne. Piisab näidata, et $TC(X) \subseteq V_\alpha$. Toodud alamhulgalisus järeldub transitiivse sulundi $\subseteq$ -vähimusest transitiivsete hulkade seas, mis sisaldavad hulka X : hulk V_α rahuldab loetletud omadusi.

($,\Rightarrow$) Oletame vastuväiteliselt, et mingi tugevalt regulaarne hulk X ei kuulu ühessegi hierarhia astmesse. Lause I.25 osa (6) järgi peab leiduma $x \in X$ nii, et iga $\alpha \in \mathbf{Ord}$ korral $x \notin V_\alpha$. Vaatleme hulka

$$Z := \{z \in tc(X) \mid \forall \alpha \in \mathbf{Ord} (z \notin V_\alpha)\}.$$

Et $X \subseteq tc(X)$, siis $x \in Z$ ehk $Z \neq \emptyset$. Olgu ξ hulga Z rangelt $\in$ -minimaalne element – selline leidub, sest hulk X on tugevalt regulaarne. Kuna $\xi \in Z$, ei saa olla $\xi = \emptyset$, sest $\emptyset \in V_1$. Kui $\tilde{\xi} \in \xi$, siis sulundi transitiivsusest $\xi \in tc(X)$. Seetõttu peab $\tilde{\xi}$ kuuluma mingisse hulka V_α , muidu oleks $\tilde{\xi} \in Z$ ja vastuolu ξ range minimaalsusega. Lause I.25 osa (6) järgi taas ξ kuulub mingisse astmesse V_β . Vastuolu kuuluvusega $\xi \in Z$. Kokkuvõttes peab X ikkagi Zermelo – von Neumanni universumisse kuuluma. ■

2.6.1. Hulga astak

Regulaarsuse aksioomist järeldus, et kõik hulgad on tugevalt regulaarsed. Teoreemi I.27 põhjal on Zermelo – von Neumanni hierarhia kõikehõlmav. Valem

$$\Phi[X, \alpha] := X \in V_{\alpha+} \wedge X \notin V_\alpha$$

on seetõttu täisfunktsiooniline sarnase aruteluga nagu lause I.25 punktis (6) (täisfunktsioonilisus on siin kogu universumis, mitte ainult hulgal X , leiduvuses kasutatud induktsiooneeldust

asendab regulaarsuse aksioom). Suvalise hulga X korral tähistame

$$\alpha = \text{Rank}(X) := \Phi[X, \alpha].$$

Ordinaalarvu $\text{Rank}(X)$ kutsume *hulga X astakuks*. Suurus $\text{Rank}(X)$ on esimene ordinaalarv, mispuhul $X \in \mathbf{V}_{\text{Rank}(X)+}$: iga $\beta \leq \text{Rank}(X)$ korral $X \notin \mathbf{V}_\beta$. [Jec02, lk 64]

Järgmine lause sõnastab kolm lihtsamat astaku omadust [Jec02, lk-d 64–65] ja ühe pisut keerukama omaduse.

Lause I.28 ([Jec02, lk-d 64–65]). *Olgu X suvaline hulk ja α ordinaalarv.*

- (1) $\text{Rank}(\alpha) = \alpha$
- (2) $X \in \mathbf{V}_\alpha \Leftrightarrow \text{Rank}(X) < \alpha$
- (3) *Kui $x \in X$, siis $\text{Rank}(x) < \text{Rank}(X)$.*
- (4) *Kui $x \in \text{tc}_\epsilon(X) = \text{tc}(X)$, siis $\text{Rank}(x) < \text{Rank}(X)$.*

Tõestus. (1) Hulga astaku definitsioon ning lause I.25 osa (5).

- (2) Kui $X \in \mathbf{V}_\alpha$, siis astaku vähimusest $\text{Rank}(X)^+ \leq \alpha$ ehk $\text{Rank}(X) < \alpha$. Vastupidi kui $\text{Rank}(X) < \alpha$, siis $\text{Rank}(X)^+ \leq \alpha$. Astakufunktsiooni definitsioonist ja lause I.25 osast (3) $X \in \mathbf{V}_{\text{Rank}(X)+} \subseteq \mathbf{V}_\alpha$.
- (3) Astaku määratlus ja lause I.25 osa (1).
- (4) Lauseskeemi I.16 järgi kehtib ekvivalentsus

$$x \in \text{tc}(X) \Leftrightarrow \text{leidub hulkade lõplik jada } (f_k)_{k \leq m}, \text{ kus} \\ f_m = x \in f_{m-1} \in \cdots \in f_1 \in X = f_0 \text{ ja } m \in \omega, m \geq 1.$$

Tulemuse saab niisiis tõestada naturaalarvulise induktsiooniga I.7 hulgal

$$S := \{ m \in \omega \mid m = 0 \vee m \geq 1 \wedge \text{iga } y, Y \text{ ja lõpliku jada } (f_k)_{k \leq m} \text{ korral, kus} \\ f_m = y \in f_{m-1} \in \cdots \in f_1 \in Y = f_0, \\ \text{kehtib } \text{Rank}(y) < \text{Rank}(Y) \},$$

see tähendab

$$S := \left\{ m \in \omega \mid m = 0 \vee m \geq 1 \wedge \forall y, Y, f \left(„f \text{ on funktsioon}“ \wedge \text{dom } f = m^+ \wedge \right. \right. \\ \left. \wedge f(m) = y \wedge f(0) = Y \wedge \right. \\ \left. \wedge \forall \ell (0 \leq \ell \leq m-1 \Rightarrow f(\ell^+) \in f(\ell)) \Rightarrow \right. \\ \left. \Rightarrow \text{Rank}(y) < \text{Rank}(Y) \right\}.$$

Kontrollime teoreemi 1.7 eelduste kehtivust. Selgesti $S \subseteq \omega$ ja $0 \in S$. Olgu nüüd $m \in S$. Näitame, et $m^+ \in S$. Valime vabalt hulga $\tilde{y}$, $\tilde{Y}$ ja funktsiooni $\tilde{f}$, kus $\text{dom } \tilde{f} = m^{++}$, $\tilde{f}(m^+) = \tilde{y}$, $\tilde{f}(0) = \tilde{Y}$ ja iga $0 \leq \ell \leq m$ puhul $\tilde{f}(\ell^+) \in \tilde{f}(\ell)$. Induktsiooneeldusest juhul $y := \tilde{f}(m)$, $Y := \tilde{Y}$ ja $f := \tilde{f}|_{m^+}$ saame, et $\text{Rank}(\tilde{f}(m)) < \text{Rank}(\tilde{Y})$. Et $\tilde{y} \in \tilde{f}(m)$, siis osast (3) johtuvalt $\text{Rank}(\tilde{y}) < \text{Rank}(\tilde{f}(m))$. Järjestuse transitiivsusest $\text{Rank}(\tilde{y}) < \text{Rank}(\tilde{Y})$. Seega $m^+ \in S$, teoreemist 1.7 tuleneb võrdus $S = \omega$. ■

Sisalduvusseos $\in$ on regulaarsuse aksioomi tõttu kõigi hulkade klassil $\mathbf{U}$ potentselt regulaarne seos. Teoreemiskeemi 1.23 järgi leidub astakufunktsioon $\text{rank}_\epsilon: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Ord}$, mispuhul

$$\text{rank}_\epsilon(x) = \sup \{ (\text{rank}_\epsilon(z))^+ \mid z \in x \}.$$

Minuskliga rank_ϵ ja majuskliga Rank on klassifunktsioonidena võrdsed. Seesugune teadmine läheb käiku hulga astakufunktsiooni Rank absoluutsuse tõestamisel.

Lause 1.29 ([Kun80, lk 104]). *Sisalduvuse astakufunktsioon rank_ϵ ning hulga astakufunktsioon Rank ühtivad, s.o $\text{rank}_\epsilon = \text{Rank}$.*

Tõestus. Tõestame tulemuse epsiloninduktsiooniga klassil $\mathbf{U}$. Hulkade klassi $\mathbf{U}$ kui mittetühja transitiivse klassi ainus rangelt epsilonminimaalne element on tühi hulk. Tühja hulga sisendil klassifunktsioonid ühtivad:

$$\text{Rank}(\emptyset) = 0 = \sup \{ (\text{rank}_\epsilon(z))^+ \mid z \in \emptyset \} = \text{rank}_\epsilon(\emptyset),$$

sest $\emptyset \in \mathbf{V}_1$. Kehtigu väide mingi hulga X korral iga $x \in X$ jaoks. Siis

$$\begin{aligned} \text{rank}_\epsilon(X) &= \sup \{ \text{rank}_\epsilon(x)^+ \mid x \in X \} = \\ &= \sup \{ \text{Rank}(x)^+ \mid x \in X \}. \end{aligned}$$

Järelikult $X \subseteq \mathbf{V}_{\text{rank}_\epsilon(X)}$, kust $\text{Rank}(X) \leq \text{rank}_\epsilon(X)$. Lause 1.28 osa (3) järgi iga $x \in X$ puhul $\text{Rank}(x) < \text{Rank}(X)$, kust $\text{Rank}(x)^+ \leq \text{Rank}(X)$. Supreemumi mõistest lähtudes $\text{rank}_\epsilon(X) =$

$= \sup \{ \text{Rank}(x)^+ \mid x \in X \} \leq \text{Rank}(X)$. Kokkuvõttes $\text{rank}_\in(X) = \text{Rank}(X)$. ■

2.6.2. Tarski-Scotti võtte

Tarski-Scotti võtte eesmärk on etteantud pärisklassist $\mathcal{C}$ saada selle klassiga piisavalt sarnane hulgaline „kehastus“ $\check{\mathcal{C}}$. Konstruktsioon kasutab regulaarsuse aksioomi, kuid valikuaksioomi pole tarvis. [Jec02, lk 65; Pro22, lk-d 909–910] Võtte sisu aitab selgitada

lemmaskeem I.30. *Olgu $\mathcal{C}$ mingi klass, las $\eta \in \mathcal{C}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

- (i) *iga $c \in \mathcal{C}$ korral $\text{Rank}(\eta) \leq \text{Rank}(c)$,*
- (ii) *η on klassi $\mathcal{C}$ vähima astakuga $\subseteq$ -minimaalne element.*

Tõestus. („ $\Rightarrow$ “) Lause I.28 osa (3) ja eeldusena antud võrratuse vahetu järeldus.

(„ $\Leftarrow$ “) Vastuväiteliselt eeldada, et hulk $D_\eta \subseteq \mathcal{C}$, kus

$$D_\eta := \{ d \in \mathcal{C} \mid \text{Rank}(d) < \text{Rank}(\eta) \},$$

on mittetühi (tegu on hulga, sest on eraldatav hulgast $V_{\text{Rank}(\eta)^+}$). Rakendada regulaarsuse aksioomi ning lemmaskeemi I.17. ■

Lühidalt öeldes koosneb hulk $\check{\mathcal{C}}$ klassi $\mathcal{C}$ kõigist vähima astakuga $\subseteq$ -minimaalsetest elementidest. Täpsemini saadakse klassi $\mathcal{C}$ hulgaline kehastus $\check{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}$ järgmiste sammudega.

- 1) Antud on klass $\mathcal{C} \neq \emptyset$, soovime selle hulgalist vastet $\check{\mathcal{C}} \neq \emptyset$.
- 2) Moodustame klassi kujutise $\text{Rank}(\mathcal{C})$, mis on samuti klass. Kõik klassi $\mathcal{C}$ kuuluvad hulgad on tugevalt regulaarsed tänu regulaarsuse aksioomile, vt näiteks arutelu definitsiooni I.19 järel, seega $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{V}$ ja $\text{Rank}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$. Lisaks $\text{Rank}(\mathcal{C}) \subseteq \mathbf{Ord}$.
- 3) Kuivõrd klassi $\mathcal{C}$ näol on tegu ordinaalarvude klassi mittetühja alamklassiga, leidub klassis $\text{Rank}(\mathcal{C})$ kindlasti $\subseteq$ -vähim element α_0 . Põhjendus leitav lemmaskeemile I.17 järgnenud osast.
- 4) Defineerime klassi $\check{\mathcal{C}}$ kui hulga $\{\alpha_0\}$ originaali ahendatuna klassile $\mathcal{C}$. Vastavalt konstruktsioonile kindlasti $\check{\mathcal{C}} \neq \emptyset$.

$$\check{\mathcal{C}} := \text{Rank}^{-1}(\{\alpha_0\}) \cap \mathcal{C} = \{ \eta \in \mathcal{C} \mid \text{Rank}(\eta) = \alpha_0 \}.$$

Elemendi α_0 valiku alusel $\eta \in \check{\mathcal{C}}$ parajasti siis, kui $\eta \in \mathcal{C}$ ja iga $c \in \mathcal{C}$ korral kehtib

võrratus $\text{Rank}(\eta) \leq \text{Rank}(c)$. Lemmaskeemi I.30 järgi koosnebki $\check{\mathcal{C}}$ täpselt kõigist klassi $\mathcal{C}$ minimaalsetest elementidest seose $\subseteq$ järgi. Arusaadavalt

$$\check{\mathcal{C}} = (V_{\alpha_0^+} \setminus V_{\alpha_0}) \cap \mathcal{C} = V_{\alpha_0^+} \cap \mathcal{C},$$

sest $V_{\alpha_0} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Niisiis on klass $\check{\mathcal{C}}$ saadav hulgast $V_{\alpha_0^+}$ eraldamisaksioomiskeemi kaudu. Järelikult on $\check{\mathcal{C}}$ hulk.

Tarski-Scotti võtet rakendatakse näiteks siis, kui tahetakse defineerida ekvivalentsiseost, aga otsene määratlus viib pärisklassini. Niisugune on lugu näiteks kardinaalarvude naiivse defineerimiskatse korral. Hulkade võrdvõimsuslikkus on teatavasti ekvivalentsiseos kõikide hulkade klassil $\mathbf{U}$, ent vastav klass $[\mathbf{x}]_{\sim}$ pole kunagi hulk, kui $x \neq \emptyset$. Teame, et $\widehat{[\mathbf{x}]_{\sim}}$ on hulk, ning osutub, et taoliste klassidele vastaval seosel on küllaldaselt palju häid omadusi, et kutsuda saadavat ekvivalentsiklassi $\widehat{[\mathbf{x}]_{\sim}}$ hulga x võimsuseks. Erinevalt klassikalisest von Neumanni kardinaalarvude definitsioonist ei vaja kirjeldatud konstruktsioon valikuaksioomi, aga kasutab oluliselt regulaarsuse aksioomi. [Jec02, lk 65; Pro22, lk-d 909–910]

Meil läheb Tarski-Scotti võtet tarvis hoopis mujal, Lévy-Montague'i peegeldamisprintsibi tõestamiseks.

II peatükk

Valemi tõkestamine ja absoluutsus. Laiend ZFC^+

Hulgateoreetiline väide φ on *ZFC-hulgateooriast sõltumatu*, kui $ZFC \not\vdash \varphi$ ja $ZFC \not\vdash \neg\varphi$. Ekvivalentselt võime öelda, et teooriad $ZFC + \varphi$ ja $ZFC + \neg\varphi$ on vastastikku süntaktiliselt mittevasturääkivad. Naiivses metateoorias tõestatakse niisugust sõltumatust *mudelite* abil [Pra04, lk 132]. Peaksime leidma mudelid M_φ ning $M_{\neg\varphi}$, kus piltlikult

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\varphi \models ZFC, \\ M_\varphi \models \varphi \end{array} \right. \quad \text{ja} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{\neg\varphi} \models ZFC, \\ M_{\neg\varphi} \models \neg\varphi. \end{array} \right.$$

ZFC on hulgateooria, sestap võiksime proovida niisuguseid mudeleid leida teooriast endast. Peaksime otsima ZFC seest nii-öelda *miniversumeid*, mis rahuldaksid ZFC aksioome, kuid täiendavalt kehtiks neis veel lisatingimus φ või $\neg\varphi$.

Niisugune protseduur oleks aga vastuolus Gödeli teise mittetäielikkuse teoreemiga. ZFC on usutavasti rekursiivselt loetlev teooria, kusjuures Peano aritmeetikat etendab näiteks von Neumanni naturaalarvude hulk. Seetõttu ei suuda ZFC klassikalises mõttes väidet $\text{Con}(ZFC)$ tõestada, kui ZFC on süntaktiliselt mittevasturääkiv.

Õnneks on kirjeldatud takistus teatud mõttes ületatav. Meie selgitame edasises järgmist meetodit.

- 1) Selle asemel, et tõestada teooria $ZFC + \phi$ *üldist kodeeritud mittevasturääkivust*, tõestatakse *suhteline süntaktiline mittevasturääkivus*. Näitame, et kui teoorias ZFC pole vasturääkivust, ei saa vasturääkivust olla ka laiendis $ZFC + \phi$. Muu seas Weaveri [Wea14,

lk 27] järgi defineerime selleks teatava vahelaiendi ZFC⁺. Teoorias ZFC-pluss on juures konstantsümbol **M** ning loenduv kogus aksioome, mis väidavad midagi hulga **M** kohta.

- 2) Mõisted nagu $M_\phi \models \text{ZFC}$ jätame defineerimata. Nende asemel kasutame *valemi tõkendi* mõistet $\phi|_M$. Intuitiivses tähenduses ütleb tõkend $\phi|_M$, kas ϕ kehtib, kui selle tähendus on tõkestatud konteksti M . Kui valemi semantiline sisu „heade“ klasside M puhul on alati üks ja seesama, öeldakse, et valem ϕ on heade klasside suhtes *absoluutne*.

Siin peatükis defineerime valemi tõkendi mõiste, paneme kokku teooria ZFC⁺ ja uurime mõlema omadusi.

1. Valemi tõkestamine. Valemi absoluutsus kvaasimudeli suhtes

1.1. Tõkestamise ja epsilon-kvaasimudeli definitsioon

Kui tahame veenduda, et mingi klassi $\mathcal{C}$ korral valem φ kehtib, peame valemi sisu esmalt „tõlkima“ just vastava klassi konteksti. Selleks defineerime tõkendi, täpsemini *epsilontõkendi* ehk *epsilonaehendi* mõiste. On võimalik uurida üldisemat tõkestamist [Jec02, lk 161], kuid meil pole selle järele tarvidust.

Metadefinitsioon II.1 (epsilontõkend, [Jec02, lk 161]). Valemi $\varphi \in \text{Form}(\text{ZFC})$ *epsilontõkendiks* ehk *epsilonaehendiks* klassile $\mathcal{C}$ (defineeriva valemiga $\mathcal{C}[q]$) nimetatakse rekursiivsete asenduste teel saadavat valemit $\varphi|_{\mathcal{C}}$, kus

- a. kui φ on atomaarne, siis $\varphi|_{\mathcal{C}}$ on lihtsalt valem φ ise, s.o $\varphi|_{\mathcal{C}} := \varphi$;
- b. tõkendi võtmine on lausearvutuse tehetega kooskõlas, s.o kui $\varphi := \neg\phi$, siis $\varphi|_{\mathcal{C}} := \neg\phi|_{\mathcal{C}}$, kui $\varphi := (\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$, siis $\varphi|_{\mathcal{C}} := (\phi_1|_{\mathcal{C}} \Rightarrow \phi_2|_{\mathcal{C}})$;
- c. kvantorid tuleb asendada tõkestatud kvantoritega, s.o kui $\varphi := \forall x(\phi[x])$, siis $\varphi|_{\mathcal{C}} := \forall x((\mathcal{C}[q/x] \Rightarrow \phi[x]|_{\mathcal{C}}))$ ehk $\varphi|_{\mathcal{C}} := \forall x \in \mathcal{C}(\phi[x]|_{\mathcal{C}})$.

Vajadusel tuleb metadefinitsiooni II.1 kasutades veenduda, et klassile ahendades ei teki vastuolu loogilise valemi määratluses muutujatele tehtud kitsendustega. Vahetu kontroll näitab, et epsilontõkendi määratlus on korrektne ses tähenduses, et kooskõla teiste lausearvutuse tehete ning eksistentsiaalkvantori suhtes järeldub toodud nõuetest. Näiteks mittevälitava disjunktsiooni puhul

$$(\phi_1 \vee \phi_2)|_{\mathcal{C}} := ((\neg\phi_1 \Rightarrow \phi_2))|_{\mathcal{C}} := (\neg\phi_1|_{\mathcal{C}} \Rightarrow \phi_2|_{\mathcal{C}}) := \phi_1|_{\mathcal{C}} \vee \phi_2|_{\mathcal{C}}.$$

Valemijärjendi Γ epsilonahendiks nimetame järjendit $\Gamma|_{\mathcal{C}}$, kus kõik valemid on asendatud vastavate epsilon-tõkenditega. Tühja järjendi tõkendiks loeme tühja järjendit. Märgime, et kui klassi $\mathcal{M}$ põhimuutuja q ei esine antud valemijärjendis Γ vabalt, ei esine see muutuja vabalt ka tõkestatud järjendis $\Gamma|_{\mathcal{M}}$.

Epsilon-tõkendi abil defineeritakse *epsilon-kvaasimodeli* mõiste.

Metadefinitsioon II.2 (epsilon-kvaasimudel, [Kun80, lk 112]). *Valemite metahulga* $\Psi \subseteq \text{Form}(\text{ZFC})$ *epsilon-kvaasimodeliks teooria* $\mathcal{T}$ *suhtes* nimetatakse klassi $\mathcal{M}$, mispuhul iga valemi $\psi \in \Psi$ korral kehtib $\psi|_{\mathcal{M}}$ teoorias $\mathcal{T}$, s.o

$$\text{iga valemi } \psi \in \Psi \text{ korral } \mathcal{T} \models \vdash \psi|_{\mathcal{M}}.$$

Ülemist kirjaipilti tuleb mõista nii, et klassi $\mathcal{M}$ definitsioon on fikseeritud ning sedagi tohib kasutada sekventsi $\vdash \psi|_{\mathcal{M}}$ tõestuses. (Vahel räägitakse *teooria* $\mathcal{S}$ *epsilon-kvaasimodelist* (*teoorias* $\mathcal{T}$ *või teooria* $\mathcal{T}$ *suhtes*), kui valemite hulga Ψ rollis on teooria $\mathcal{S}$ omaaksioomid, nt [Kun80, lk 119].)

Märkus II.3. Teoorial $\mathcal{T}$ lubame lahkned a teooriast ZFC kahel viisil.

- Teoorias $\mathcal{T}$ võib olla konstantsümbolaid, st $\text{Cons}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$. Täpsemini lubame ülimalt ühe konstantsümboli lisamist, kuivõrd rohkemaks pole meil tarvidust.
- Teooria $\mathcal{T}$ omaaksioomid võivad olla erinevad: neid võib olla asendatud, ära võetud või juurde lisatud. Nõuame, et omaaksioomid on tühja antetsedendiga. Võime üldisust kaotamata eeldada, et omaaksioomid on kõik kinnised valemid (vabade muutujatega valem ning selle universaalsulund on samaaegselt tuletatavad). Terutame, et $\mathcal{T}$ omaaksioomid tohivad sisaldada lisatud konstantsümbolit.

Niisugust teisendatud teooriat kutsume edasises ZFC *asendusteooriaks* või lihtsalt *asendus-teooriaks*. Rõhutame, et metadefinitsioonides II.1 ja II.2 võivad klasside $\mathcal{C}$ ning $\mathcal{M}$ kirjeldused sisaldada asendusteooria $\mathcal{T}$ konstantsümbolit. Rääkides teooriast $\mathcal{T} \cap \text{Form}(\text{ZFC})$, peame silmas teooria $\mathcal{T}$ seda osa, millel pole pistmist konstantsümboliga.

Märkus II.4. Termin *epsilon-kvaasimudel* toome sisse täpsuse huvides. Mõistel *udel* on mitu küllalt sarnast, kuid detailides erinevat tähendust, mõni neist vajab aksiomaatilise teooria eelnevat kodeerimist ning põhjalikku eeltööd. Meie epsilon-kvaasimudel on rohkem tõestusteoreetilisemat laadi. Täiendsõna *epsilon-* viitab asjaolule, et definitsioon kasutab just epsilon-tõkendit, mitte mingit üldisemat valemi ahendit.

Piisavalt võimekas epsilon-kvaasimudel saab oma teooriaga hästi läbi. Kui lause on teoorias

kindlatel eeldustel tuletatav, saab samas teoorias eelduste tõkenditest tõestada lause tõkendi.

Metateoreemiskeem II.1 (epsilon-kvaasimudeli korrektsus, [Kun13, lk 101]). *Las olla teooria T asendusteooria. Olgu φ ZFC-hulgateooria kinnine valem ning Γ ZFC-teooria kinniste valemite järjend, sealjuures $T \cap \text{Form}(\text{ZFC}) \Vdash \Gamma \vdash \varphi$. Kasutagu sekvents $\Gamma \vdash \varphi$ mingi tõestus τ teoorias $T \cap \text{Form}(\text{ZFC})$ parasjagu omaaksiome, mille konsekvendid pärinevad metahulgast $\mathcal{A}_\tau := \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\} \subseteq \text{Form}(\text{ZFC})$. Leidugu valemite metahulgal $\mathcal{A}_\tau$ epsilon-kvaasimudel M teooria T suhtes, kusjuures klass M olgu mittetühi teoorias T . Eeldame, et klassi M kirjeldus $M[q]$ ei kasuta kuskil individuumutujaid, mis esinevad tõestuses τ .*

Sellisel juhul kehtib ka $T \Vdash \Gamma|_M \vdash \varphi|_M$.

Tõestus. Põhjendus käib struktuurse induksiooniga mööda tõestuse τ tuletuspuud. Baasis vaadatakse puu juuri ehk aksiomide ahendeid. Eeldusena võetakse, et teoreem kehtib eelnevate tippude jaoks, sammus näidatakse, et tulemus kehtib siis ka käesoleva tipu korral. Tipust tippu liikumisel tuleb analüüsida, kuidas valemi tõkestamine suhestub tuletusreeglitega. Lausearvutusliku reegli analüüs on lihtsam kui predikaatarvutusliku reegli uurimine. Kvantoriga reegli käsitlemine on kergem, kui tõkestamine viib lokaalses mõttes konsekvendi nõrgestamiseni. Kitsendust klassimuutujate kohta kasutatakse selleks valemi ahend oleks ikka valem ning valemijärjendi ahend oleks valemijärjend. Samuti saame siis kitsendusega tuletusreegleid vabalt kasutada.

Täispikk tõestus on toodud lisas C. ■

1.2. Valemi tähenduse invariantus. Valemi absoluutsus

Eelmises jaotises sõnastasime valemi tõkendi mõiste. Tõkendit $\varphi|_M$ võib mõista kui teatavat valemi tähenduse ahendamist üldisemast kontekstist (klassis U) kitsamale juhule, nimelt klassile M . Kui valemi tähendus teatud mõttes ei muutu, öeldakse, et *valemi φ tähendus on klassi M suhtes absoluutne* või lühidalt, *valem φ on klassi M suhtes absoluutne*.

Metadefinitsioon II.5 (valemi invariantus, absoluutsus, [Kun80, lk 117]). Olgu $\varphi \in \text{Form}(\text{ZFC})$ ja vabad muutujad $\text{Free}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (erijuhul neid polegi). Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ klassid, kusjuures $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Las olla T asendusteooria.

- a. Ütleme, et *valemi φ tähendus on klasside $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ vahel invariantne (teoorias T)*, st *valem φ on $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$ -invariantne (teoorias T)*, kui

$$T \Vdash \vdash \forall x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C} (\varphi[x_1, \dots, x_n]|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n]|_{\mathcal{D}}).$$

- b. Valemi φ tähendus on klassi $\mathcal{C}$ suhtes absoluutne (teoorias T), eriti lühidalt φ on $\mathcal{C}$ -absoluutne (teoorias T), kui valem φ on $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathbf{U})$ -invariantne (teoorias T).

Sealjuures klassile $\mathbf{U}$ tõkestamine valemit sisuliselt ei muuda, kuivõrd ülimalt lisatakse valemisse tingimusi $x = x$, kus $x \in \text{Indv}$ on indiviidmuutuja. Klasside $\mathcal{C}$ ja D definitsioonid võivad sisaldada asendusteooria T konstantsümbolit. Sisalduvus $\mathcal{C} \subseteq D$ olgu tõestatav teoorias T .

Juba süntaktiliselt lihtne valem ei pruugi olla lihtsa hulga suhtes absoluutne, isegi mitte täisteoorias ZFC. Näiteks $\varphi[y] := \forall x(x \notin y)$, mis määrab üheselt tühja hulga $y = \emptyset$, pole absoluutne hulga $\mathcal{C} := C := \{\{\emptyset\}\}$ suhtes. Hulga C arvates on tühi hulk ka $\{\emptyset\}$, kuna hulgas C pole ühtegi elementi, mis oleks omakorda hulga $\{\emptyset\}$ elemendiks. Pole raske tuua näidet, kus mõne hulga arvates leidub rohkem kui üks „mittestandardset“ tühja hulka. [Kun80, lk 118] Hiljem näeme, et transitiivse klassi või piisavalt võimeka transitiivse epsilon-kvaasimudeli $\mathcal{C}$ korral on olukord parem.

Valemi $(\mathcal{C} \leftrightarrow D)$ -invariantsuseks piisab näidata invariantsust ükskõik missuguse sellega ekvivalentse valemi jaoks, kui klassid $\mathcal{C}$ ja D on küllaldaselt võimekad.

Metalemmaskeem II.2 ([Kun80, lk 119]). *Olgu teoorias $T \cap \text{Form}(\text{ZFC})$ tõestatav ekvivalentsi $\varphi \Leftrightarrow \psi$ universaalsulund, st*

$$T \cap \text{Form}(\text{ZFC}) \Vdash \vdash \frac{\forall x_1, \dots, x_n (\varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Leftrightarrow \psi[y_1, \dots, y_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_b}](x_1, \dots, x_n))}{\varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Leftrightarrow \psi[y_1, \dots, y_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_b}](x_1, \dots, x_n)}$$

(kus kõik vabad muutujad on näidatud ja indiviidmuutujate metahulgad ei lõiku, $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \{y_1, \dots, y_k\} = \emptyset$, $1 \leq i_1 < \dots < i_a \leq k \geq 0$, $1 \leq j_1 < \dots < j_b \leq n \geq 0$). Olgu $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq D$ sulundatud ekvivalentsi mingis tõestuses τ kasutatud teooria $T \cap \text{Form}(\text{ZFC})$ omaaksioomide $\mathcal{A}_\tau$ epsilon-kvaasimudelid teoorias T . Siis teoorias T on valemid φ ja ψ samaaegselt $(\mathcal{C} \leftrightarrow D)$ -invariantsed.

Selgitame kirjalpilti, kus valemi kõik vabad muutujad on nurksulgudes näidatud, kuid ümar-sulgudesse on pandud täiendavad indiviidmuutujad. Niimoodi tagame, et ümarsulu muutujad ei esine valemis seotult. Võinuksime kirjutada pikemalt, et

$$\varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k](y_1, \dots, y_k),$$

kuid peaksime ikkagi nõudma, et kõik vabad muutujad on näidatud. Klassi $\mathcal{C}$ mittetühjus olgu tõestatav teoorias T .

Tõestus. Vajadusel klasside $\mathcal{C}$ ja D indiviidmuutujaid ümber nimetades on täidetud kõik

metateoreemiskeemi II.1 eeldused. Nimetatud teoreemiskeemi kahekordsel rakendamisel saame teoorias T tõestused sekventsile

$$\begin{aligned} \vdash \forall_{y_1, \dots, y_k \in \mathcal{C}} \left(\varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Big|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \right. \\ \left. \Leftrightarrow \psi[y_1, \dots, y_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_b}](x_1, \dots, x_n) \Big|_{\mathcal{C}} \right), \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \vdash \forall_{y_1, \dots, y_k \in \mathcal{D}} \left(\varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Big|_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow \right. \\ \left. \Leftrightarrow \psi[y_1, \dots, y_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_b}](x_1, \dots, x_n) \Big|_{\mathcal{D}} \right). \end{aligned} \quad (\dagger)$$

Sisalduvuse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ alusel seosest $(\dagger)$

$$\begin{aligned} \vdash \forall_{y_1, \dots, y_k \in \mathcal{C}} \left(\varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Big|_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow \right. \\ \left. \Leftrightarrow \psi[y_1, \dots, y_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_b}](x_1, \dots, x_n) \Big|_{\mathcal{D}} \right). \end{aligned} \quad (\ddagger)$$

Oletame, et valem φ on $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$ -invariantne, sidudes kokku veel $\varphi|_{\mathcal{C}}$ ja $\varphi|_{\mathcal{D}}$:

$$\begin{aligned} \vdash \forall_{y_{i_1}, \dots, y_{i_a} \in \mathcal{C}} \left(\varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Big|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \right. \\ \left. \Leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Big|_{\mathcal{D}} \right). \end{aligned} \quad (\star)$$

Ekvivalentsi jaoks kehtib asendamisomadus, mida kasutame edasises tõestuseta. Saame järgmised üleminekud.

$$\begin{aligned} \vdash \forall_{y_{i_1}, \dots, y_{i_a} \in \mathcal{C}} \left(\varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Big|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \right. \\ \left. \Leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Big|_{\mathcal{D}} \right) \end{aligned} \quad (\star \text{ tõttu})$$

$$\begin{aligned} \vdash \forall_{y_1, \dots, y_k \in \mathcal{C}} \left(\psi[y_1, \dots, y_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_b}](x_1, \dots, x_n) \Big|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \right. \\ \left. \Leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Big|_{\mathcal{D}} \right) \end{aligned} \quad (* \text{ tõttu})$$

$$\begin{aligned} \vdash \forall_{y_1, \dots, y_k \in \mathcal{C}} \left(\psi[y_1, \dots, y_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_b}](x_1, \dots, x_n) \Big|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \right. \\ \left. \Leftrightarrow \psi[y_1, \dots, y_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_b}](x_1, \dots, x_n) \Big|_{\mathcal{D}} \right) \end{aligned} \quad (\ddagger \text{ tõttu})$$

Täiesti analoogiliselt tehakse vastupidises suund, kus valem ψ on $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$ -invariantne. ■

Lausearvutuslikud tehted säilitavad $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$ -invariantsust. Meil ei lähe tühjale klassile ahendamist niikuinii kunagi tarvis, seega eeldame kahes järgmises lauseskeemis, et klass $\mathcal{C}$ on mittetühi, kuigi tõestusteks mittetühjuse nõuet tarvis pole (invariantsuse sekvents algab

universaalkvantoritega, tõestustes ei rakendata metateoreemiskeemi II.1).

Lemmaskeem II.3 ([Kun80, lk 118]). *Olgu $(\emptyset \neq) \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ klassid. Valemid*

$$\varphi[x_1, \dots, x_n](y_1, \dots, y_k), \quad \psi[y_1, \dots, y_k](x_1, \dots, x_n) \in \text{Form}(\text{ZFC})$$

olgu $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$ -invariantsed. Siis ka valemid $\neg\varphi$ ja $(\varphi \Rightarrow \psi)$ on $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$ -invariantsed.

Tõestus. Olgu $x_1, y_1, \dots, x_n, y_k \in \mathcal{C}$ fikseeritud. Lubame järgnevas vabamat kirja pilti (jättes universaalkvantorid ning esinevad muutujad märkimata).

- Predikaatarvutuses kehtib samaväärsus $\varphi|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \varphi|_{\mathcal{D}} \equiv \neg(\varphi|_{\mathcal{C}}) \Leftrightarrow \neg(\varphi|_{\mathcal{D}})$. Tõkendi kooskõllalisusest eitusega johtuvad $\neg(\varphi|_{\mathcal{C}}) \doteq (\neg\varphi)|_{\mathcal{C}}$ ja $\neg(\varphi|_{\mathcal{D}}) \doteq (\neg\varphi)|_{\mathcal{D}}$, mistõttu ka $(\neg\varphi)|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (\neg\varphi)|_{\mathcal{D}}$. Eitusega korras.
- Predikaatarvutuse järeldumisest

$$(\varphi|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \varphi|_{\mathcal{D}}) \wedge (\psi|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \psi|_{\mathcal{D}}) \models (\varphi|_{\mathcal{C}} \Rightarrow \psi|_{\mathcal{C}}) \Leftrightarrow (\varphi|_{\mathcal{D}} \Rightarrow \psi|_{\mathcal{D}}).$$

Tõkendi kooskõllalisusest implikatsiooniga tulenevad $(\varphi|_{\mathcal{C}} \Rightarrow \psi|_{\mathcal{C}}) \doteq (\varphi \Rightarrow \psi)|_{\mathcal{C}}$ ning $(\varphi|_{\mathcal{D}} \Rightarrow \psi|_{\mathcal{D}}) \doteq (\varphi \Rightarrow \psi)|_{\mathcal{D}}$, millest $(\varphi \Rightarrow \psi)|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)|_{\mathcal{D}}$. Implikatsiooniga korras. ■

Tõkestatud kvantorid säilitavad $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$ -invariantsust, kui klass $\mathcal{C}$ on transitiivne.

Lemmaskeem II.4 ([Kun80, lk 118]). *Kui klass $(\emptyset \neq) \mathcal{C}$ on transitiivne, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ ja valem $\varphi[x_1, \dots, x_n](x, y) \in \text{Form}(\text{ZFC})$ on $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$ -invariantne asendusteoorias $\mathcal{T}$, siis ka valem*

$$\exists x \in y(\varphi[x_1, \dots, x_n](x, y))$$

on $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$ -invariantne asendusteoorias $\mathcal{T}$. Siin $\text{Free}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n, x, y\}$.

Tõestus. Olgu $y, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}$ suvalised. Lubades vabamat kirjaviisi, saame järgmise ekvi-

valentside ahela:

$$\begin{aligned}
(\exists x \in y \varphi[x_1, \dots, x_n](x, y))|_{\mathcal{C}} &\Leftrightarrow \exists x (x \in y \wedge x \in \mathcal{C} \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n](x, y)|_{\mathcal{C}}) \Leftrightarrow && (\text{tõkendi def}) \\
&\Leftrightarrow \exists x (x \in y \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n](x, y)|_{\mathcal{C}}) \Leftrightarrow && (\mathcal{C} \text{ trans.}, y \in \mathcal{C}) \\
&\Leftrightarrow \exists x (x \in y \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n](x, y)|_D) \Leftrightarrow && ((\mathcal{C} \leftrightarrow D)\text{-invar.}) \\
&\Leftrightarrow \exists x (x \in y \wedge x \in D \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n](x, y)|_D) \Leftrightarrow && \left(\begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ trans.}, \\ y \in \mathcal{C}, \mathcal{C} \subseteq D \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in y \varphi[x_1, \dots, x_n](x, y))|_D. && (\text{tõkendi def})
\end{aligned}$$

Rõhutame, et vabu muutujaid $x_1, \dots, x_n$ ei pruugi üldse olla, mis on kodeeritud juhuga $n = 0$. ■

1.3. Δ_0 - ning Δ_0^T -valemid. Hulgateooria valemite Lévy hierarhia

ZFC keeles nimetatakse valemite Δ_0 -valemiks, kui kõik valemis esinevad kvantorid on tõkestatud (kvantorid võivad üldse puududa).

Metadefinitsioon II.6 (Δ_0 -valem, [Kun80, lk 118]). ZFC-hulgateooria valemite nimetame Δ_0 -valemiks, kui see on saadav järgmiselt.

- a. Kõik atomaarsed valemid on Δ_0 -valemid.
- b. Δ_0 -valemite hulk on kinnine lausearvutuse tehete suhtes.
- c. Δ_0 -valemite hulk on kinnine tõkestatud kvantorite suhtes. Kui $\varphi(x, y)$ on Δ_0 -valem, $x, y \in \text{Indv}$ on individmuutujad, siis $\forall x((x \in y \Rightarrow \varphi(x, y)))$ on Δ_0 -valem, s.o $\forall x \in y(\varphi(x, y))$ on Δ_0 -valem.

Δ_0 -valemitest pannakse kokku Lévy süntaktiline hierarhia.

Metadefinitsioon II.7 (hulgateooria valemite Lévy süntaktiline hierarhia, [Hab22]). Defineerime rekursiivselt valemite metahulkade hierarhiad

- a. $\Sigma_0 := \Delta_0$ ja $\Pi_0 := \Delta_0$;
- b. $\varphi \in \Sigma_{n+1}$ parajasti siis, kui $\varphi \doteq \exists \vec{x}(\psi[\vec{x}])$, kus $\psi[\vec{x}] \in \Pi_n$;
- c. $\varphi \in \Pi_{n+1}$ parajasti siis, kui $\varphi \doteq \forall \vec{x}(\psi[\vec{x}])$, kus $\psi[\vec{x}] \in \Sigma_n$.

Õeldakse, et niimoodi jõutakse hulgateooria valemite (süntaktilise) Lévy hierarhiani. (Vektor-tähistusega mõeldakse, et kvantoreid võib olla rohkem kui üks.)

Veendumaks, missugusesse astmesse valem kuulub, piisab valemi süntaktilisest uurimisest. Selles tähenduses on metadefinitsioon II.7 lokaalne. Praktikaks kasutatakse rohkem niisugust Lévy hierarhiat, milles kuuluvust hinnatakse ekvivalentsi täpsuseni [Jec02, lk-d 183–184; Hab22].

Metadefinitsioon II.8 (hulgateooria valemite Lévy hierarhia, [Jec02, lk-d 183–184; Hab22]). Olgu $\mathcal{T}$ asendusteooria. Ütleme, et ZFC-hulgateooria valem φ on Γ_n^T , kus Γ on Σ või Π , kui teoorias $\mathcal{T} \cap \text{Form}(\text{ZFC})$ on tuletatav valemi φ ekvivalents Γ_n valemiga universaalsulundi mõttes. See tähendab, kui kehtib

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \cap \text{Form}(\text{ZFC}) \models \vdash \forall_{x_1, \dots, x_n} \forall_{y_1, \dots, y_k} (\varphi[x_1, \dots, x_n, y_{i_1}, \dots, y_{i_a}](y_1, \dots, y_k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \psi[y_1, \dots, y_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_b}](x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

mingisuguse $\psi \in \Gamma_n$ korral (kusjuures kõik vabad muutujad on näidatud ning $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \{y_1, \dots, y_k\} = \emptyset$, $i_1 < \dots < i_a \leq k \geq 0$, $j_1 < \dots < j_b \leq n \geq 0$). Eraldi defineeritakse

$$\Delta_n^T := \Sigma_n^T \cap \Pi_n^T.$$

Tavaliselt räägitakse vabamalt, et *omadus on* Γ_n^T , kus Γ on Σ , Π või Δ , mõeldes sellega, et omadust väljendav valem φ on Γ_n^T -valem [Jec02, lk-d 183–184].

Meil läheb edasises tarvis just Δ_0^T -valemeid. Rõhutame, et omaaksoome ei pruugi üldse olla, mispuhul saame $\Delta_0^\emptyset$ -valemeid. Need on hulgateooria signatuuri valemid, mis on ekvivalentsed Δ_0 -valemiga juba võrdusega predikaatarvutuse raames. Δ_0 - ja Δ_0^T -valemite olulisus seisneb teoreemiskeemis II.5 ning metateoreemiskeemis II.6.

Teoreemiskeem II.5 (Δ_0 -valemite absoluutsus transitiivse klassi suhtes, [Kun80, lk 119]). Olgu $(\emptyset \neq) \mathcal{C}$ transitiivne klass asendusteoorias $\mathcal{T}$. Iga Δ_0 -valem $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ on absoluutne klassi $\mathcal{C}$ suhtes ehk $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathbf{U})$ -invariantne asendusteoorias $\mathcal{T}$. Tähendab, sel juhul

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C} (\varphi[x_1, \dots, x_n] \models_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n])$$

asendusteoorias $\mathcal{T}$.

Tõestus. Tõestame tulemuse struktuurse induksiooniga Δ_0 -valemi definitsiooni mööda. Olgu $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}$ suvalised ning lühiduse huvides jätame sulgudes need individuaalmuutujad märkimata.

- Atomaarse valemi φ korral ilmne, sest tõkend ühtib valemi endaga.

- Olgu nüüd $\varphi \doteq \neg\psi$ ning tulemus valemi ψ jaoks teada. Rakendub lemmaskeem II.3 (juhul $D := U$). Kokkuvõttes $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_C$.
- Kehtigu võrdus $\varphi \doteq (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$ ning olgu tulemus valemite ψ_1 ning ψ_2 jaoks teada. Rakendub lemmaskeem II.3 (juhul $D := U$). Kokkuvõttes $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_C$.
- Olgu $\varphi \doteq \forall x \in y(\psi(x, y))$, kus y on individumuutuja. Samaväärselt $\varphi \equiv \neg\exists x \in y(\neg\psi(x, y))$. Tulemus järeldub juba varasem vaadeldud induktsioonisammudest ning lemmaskeemist II.4.

Teoreemiskeem on tõestatud. ■

Metateoreemiskeem II.6 (Δ_0^T -valemite absoluutsus transitiivse epsilon-kvaasimodeli suhtes, [Kun80, lk 119]). *Olgu T asendusteooria. Las olla $\varphi[x_1, \dots, x_n] \in \Delta_0^T$, kusjuures kasutagu sealse ekvivalentsi $\varphi \Leftrightarrow \psi$, kus $\psi \in \Delta_0$, mingisugune universaalsulundi tõestus τ teoorias $T \cap \text{Form}(\text{ZFC})$ parajasti omaaksioome $\mathcal{A}_\tau \subseteq \text{Form}(\text{ZFC})$. Kui klass $\mathcal{C} \neq \emptyset$ on transitiivne ning lisaks teooria T suhtes metahulga $\mathcal{A}_\tau$ epsilon-kvaasimudel, siis valem $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ on klassi $\mathcal{C}$ suhtes absoluutne ehk $(\mathcal{C} \leftrightarrow U)$ -invariantne teoorias T . See tähendab, sel juhul*

$$\forall x_1, \dots, \in \mathcal{C}(\varphi[x_1, \dots, x_n]|_C \Leftrightarrow \varphi[x_1, \dots, x_n])$$

teoorias T .

Tõestus. Vajadusel klassi $\mathcal{C}$ muutujaid ümber nimetades võime eeldada, et individumuutuja-tega ebasobivaid kattuvusi pole. Sisalduvus $\mathcal{C} \subseteq U$ on ilmne. Eelduse järgi on φ teoorias T ekvivalentne Δ_0 -valemiga. Δ_0 -valemid olid teoorias T transitiivse klassi $\mathcal{C}$ suhtes absoluutsed teoreemiskeemi II.5 alusel. Vastav absoluutsus kandub üle valemile φ tänu metalemmaskeemile II.2, võttes sealse tähistuses $D := U$. Tulemus on tõestatud. ■

1.4. Hulgateooria põhikonstruktsioonide absoluutsusest

Oleme tõestanud, et Δ_0^T -tüüpi omadused on „head“ ehk absoluutsed. Täpsemini, kui klass $M \neq \emptyset$ on teoorias T transitiivne ning piisavalt võimekas epsilon-kvaasimudel, siis omadus klassi M sees tähendab sama nagu universumis U . Siin jaotises näitame, et arvestatav osa hulgateooria põhikonstruktsioonidest on Δ_0^T -valemiga väljendatavad, seega metateoreemiskeemi II.6 alusel head ehk absoluutsed.

Lepime kokku järgmises tähistuses [Kun13, lk 17; Lév74]:

- ZF tähendab endiselt teooriat ZFC, kust on eemaldatud valikuaksioom;

- Z tähendab teooriat ZF , kust on eemaldatud asendusaksioomiskeem;
- $T - S$ on teooria T , kuid eraldamisaksioomiskeemita;
- $T - U$ on teooria T ühendi moodustamise aksioomita;
- $T - P$ on teooria T , kuid potentshulga leidumise aksioomita;
- $T - \text{Inf}$ on teooria T , aga lõpmatu hulga leidumise aksioomita;
- T^- on teooria T , ent regulaarsuse aksioomita;
- $\emptyset$ on nüüdki teooriat, kus omaaksioome pole, st võrdusega predikaatarvutust.

Järgmine teoreemiskeem annab paljude (kuigi mitte kõigi) hulgateooria aluskonstruksioonide absoluutsuse piisavalt heade epsilon-kvaasimudelite suhtes. Teoreemiskeemis toodud teooriad ei pruugi olla „minimaalse tugevusega“, meile pole see oluline.

Metateoreemiskeem II.7 (hulgateooria põhikonstruktsioonide absoluutsus piisavate epsilon-kvaasimudelite suhtes, [Jec02, lk-d 164–165; Kun80, lk-d 119–120, 121, 126; Kun13, lk-d 96, 118–119]). *Olgu T asendusteooria, mida täpsustame allpool. Toodavad valemid (omadused, objektidega võrdumised) on väljendatavad Δ_0^T -valemiga ehk on teoorias $T \cap \text{Form}(ZFC)$ ekvivalentsed Δ_0 -valemiga. Teisisõnu – metateoreemiskeemi II.6 valguses – on need valemid (omadused, objektiga võrdumised) teoorias T absoluutsed valemite metahulga $\text{Ax}(T) \cap \text{Form}(ZFC)$ suvalise transitiivse mittetühja epsilon-kvaasimudeli M suhtes.*

- (1) Teoorias $T = \emptyset$: i) $x \in y$ ja $x \notin y$; ii) $x = y$ ja $x \neq y$; iii) $x \subseteq y$; iv) $x = \emptyset$; v) „ x on transitiivne“.
- (2) Teoorias $T = Z^- - S - U - P - \text{Inf}$: i) $x = \{u, v\}$ ja $x = \{u\}$; ii) $x = (u, v)$.
- (3) Teoorias $T = Z^- - U - P - \text{Inf}$: i) $Z = X \cap Y$; ii) $Z = X \setminus Y$ ja $Z = X'_Y$ (täiend hulga Y suhtes).
- (4) Teoorias $T = Z^- - S - P - \text{Inf}$: i) $Z = \bigcup X$; ii) $Z = X^+ = X \cup \{X\}$; iii) $Z = X \triangle Y$, iv) $Z = \bigcup \bigcup X$.
- (5) Teoorias $T = Z^- - \text{Inf}$: i) $Z = X \times Y$; ii) $Z = \text{dom } R$ ja $Z = \text{ran } R$; iii) „ R on seos“ ja „ f on funktsioon“; iv) $x R y$ ja $y = f(x)$; $S = R|_X$ ja $g = f|_X$ (seose, funktsiooni ahendid hulgal X); v) $Z = R^{-1}(Y)$ (seose või funktsiooni originaal hulgal Y); vi) „seos R on (ir)refleksiivne/(anti-, a)sümmeetriline/transitiivne (hulgal X)“; vii) „ R on osalise järjestuse seos / ekvivalentsiseos (hulga X suhtes)“; viii) „ ξ on hulgas X (rangelt) R -minimaalne/-maksimaalne/-vähim/-suurim element“; ix) „ f on injektiivne“, „ f on

sürjektiivne (hulga Y suhtes)“ ja „ f on bijektiivne (hulga Y suhtes)“.

(6) Teoorias $T = Z - P$: i) „ x on ordinaalarv“; ii) „ x on järgordinaalarv“ ja „ x on piirordinaalarv“; iii) „ x on (von Neumanni) naturaalarv“; iv) $x = \omega$.

(7) Teoorias $T = Z$: „ x on lõplik“.

Loomulikult jäävad metateoreemiskeemi II.7 järeltused kehtima, kui võtta tugevam asendusteooria $T' \supseteq T$, nõudes üksnes, et klass M on valemite metahulga $\mathbf{Ax}(T) \cap \mathbf{Form}(\mathbf{ZFC})$ epsilon-kvaasimudel teoorias T' . Rakendustes kasutame kõige sagedamini olukorda, kus $T' := \mathbf{ZFC}^+$. Praeguses sõnastuses on ühisosa võtmine valemite metahulgaga $\mathbf{Form}(\mathbf{ZFC})$ üleliigne, sest $\mathbf{Form}(T) = \mathbf{Form}(\mathbf{ZFC})$. Üldistuses teooria T' jaoks on kitsendus oluline, sest asendusteooria T' võib sisaldada konstantsümbolit.

Tõestus. Tõestused on küllalt sarnased. Vastav valem (omadus, objektiga võrdumine) tuleb teooria piirangute raames esitada ekvivalentse Δ_0 -valemiga. Kuna ekvivalentsid on usutavalt tõesed, esitame need pikema tõestuseta. Kirjutame mõne juhu jaoks välja Δ_0 -valemi või anname olulise vaheidee.

(1) Teooria $T = \emptyset$

iv) Tühjaks hulgaks olemine $x = \emptyset$ oli definitsiooni järgi $\forall y(y \notin x)$, mis pole Δ_0 -valem. Küll aga on tegu $\Delta_0^\emptyset$ -valemiga, sest võrdusega predikaatarvutuses

$$\forall y(y \notin x) \Leftrightarrow \forall y \in x(y \neq y).$$

(2) Teooria $T = Z^- - S - P - \text{Inf}$

i) Sellises teoorias on paari leidumine ühese objektina tõestatav. Sealjuures on oluline, et hulgapaari moodustamise aksioomis on ekvivalents, mitte implikatsioon, sest eraldamisaksioomiskeemi teooriale T seatud piirangu tõttu kasutada ei tohi. Paariks olemine $x = \{u, v\}$ tähendab, et

$$u \in x \wedge v \in x \wedge \forall y \in x(y = u \vee y = v),$$

mis on Δ_0 -valem.

ii) Järjestatud paariks olemine $x = (u, v)$ oli defineeritud Kuratowski järgi, st $x = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ ehk see on avaldatav kujul

$$\exists y \in x(y = \{u\}) \wedge \exists z \in x(z = \{u, v\}) \wedge \forall w \in x(w = \{u\} \vee w = \{u, v\}),$$

mis on taas Δ_0 -valem.

(5) Teooria $T = Z^- - \text{Inf}$

Otsekorrutis on vahetum. Teiste jaoks on kasulik esimese vahesammuna tõestada, et $z \in \text{dom } R$ ja $z \in \text{ran } R$ on absoluutsed. Rõhutame, et siin me ei nõua, et R oleks tingimata seos, kuid kui R on seos, peavad tähendused kattuma. Võtame, et

$$\begin{aligned} z \in \text{dom } R &\Leftrightarrow \exists a \in R \exists b \in a \exists \alpha \in \beta(a = (z, \alpha)), \\ z \in \text{ran } R &\Leftrightarrow \exists a \in R \exists b \in a \exists c \in b(b = \{c\} \wedge a = (c, z)). \end{aligned}$$

Teise, eelmisest sõltumatu vahesammuna märgime, et kui φ on Δ_0^T -valem, siis kõik neli kombinatsiooni $(\forall, \exists z \in \text{dom } R, \text{ran } R)\varphi$ on absoluutsed. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} (\forall z \in \text{dom } R)\varphi &\Leftrightarrow \forall x \in R \forall y \in x \forall z \in y \forall u \in y(x = (z, u) \Rightarrow \varphi), \\ (\exists z \in \text{dom } R)\varphi &\Leftrightarrow \neg((\forall z \in \text{dom } R)\neg\varphi), \\ (\forall z \in \text{ran } R)\varphi &\Leftrightarrow \forall x \in R \forall y \in x \forall z \in y \forall u \in y(x = (u, z) \Rightarrow \varphi), \\ (\exists z \in \text{ran } R)\varphi &\Leftrightarrow \neg((\forall z \in \text{ran } R)\neg\varphi). \end{aligned}$$

(Rõhutame, et teises vahesammus ei saa absoluutsuseks kohe rakendada tulemusi $z \in \text{dom } R$ ja $z \in \text{ran } R$ jaoks rakendada, sest otseselt poleks kombinatsioonid $(\forall, \exists z \in \text{dom } R, \text{ran } R)\varphi$ varasemas mõttes ahendid individuumutujaile. Tähendab, lemmaskeemid II.3 ega II.4 poleks otse kasutatavad.)

Antud alampunkti ülejäänud väljendused on vahesammude abiga juba kergemad. Näiteks

$$\text{ii) } Z = \text{dom } R \Leftrightarrow \forall z \in Z(z \in \text{dom } R) \wedge (\forall x \in \text{dom } R)(x \in Z).$$

(6) Teooria $T = Z - P$

- i) Lause I.13 järgi on ordinaalarv parajasti selline transitiivne hulk, mille kõik elemendid on samuti transitiivsed.
- iii) Esitada naturaalarvuks olemine piirordinaalarvu mõiste kaudu, vt klasside osa valemit $\mathcal{N}[y]$.
- iv) Kasutada piirordinaalarvu mõistet ning eelmise punkti naturaalarvuks olemise mõistet.

(7) Teooria $T = Z$

Lõplikkuse-osa tõestame pärast metalemmaskeemi II.8. ■

Lõplikkuse absoluutsuse tõestamiseks kasutame

metalemmaskeemi II.8 ([Kun80, lk-d 126–127]). Olgu $M \neq \emptyset$ metahulga $\mathbf{Ax}(Z)$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias $T \supseteq Z$. Kehtivad kaks järgmist väidet:

- (a) kui $x \subseteq M$ on lõplik, siis $x \in M$,
- (b) kui $f: n \rightarrow M$, kus $n \in \omega$, siis $f \in M$.

Tõestus. (a) Olgu $x \subseteq M$ bijektsioonis naturaalarvuga $n \in \omega$. Kui $n = \emptyset$, siis $x = \emptyset$. Et $x = \emptyset$ on klassi M suhtes absoluutne, siis ka klassi M arvates $x = \emptyset$. Teooria Z on enam kui piisav näitamaks, et $\exists! y(y = \emptyset)$, sestap ka $\exists! y \in M(y = \emptyset)$, kuna M on teooria Z mittetühi epsilon-kvaasimudel. Nõnda $x = \emptyset \in M$. Edasi naturaalarvulise induktsiooniga (teooria Z on selleks piisav). Oletame, et mingi n jaoks on tulemus teada. Kui $x \subseteq M$, $x \sim n^+$, siis $x' := x \setminus \{z\} \sim n$ teatava $z \in x \subseteq M$ korral. Induktsiooni eeldusest $x' \in M$, sest $x' \subseteq M$. Teooria Z tõestab, et hulk $x = x' \cup \{z\}$ leidub. Epsilon-kvaasimudeli eeldusest, ühendiks ja paariks olemise absoluutsusest, kuivõrd $x', z \in M$, siis ka $x = x' \cup \{z\} \in M$.

(b) Kui $f: n \rightarrow M$, siis $f \subseteq n \times M$, kus $M \subseteq M$ on lõplik. Osa (a) järgi $M \in M$. Teooria Z tõestab naturaalarvude hulga ω leidumise, transitiivsusest ja absoluutsusest $\omega \subseteq M$ ja naturaalarvuks olemine on absoluutne. Sestap $n \in M$. Teooria Z tõestab otsekorrutise leidumise $n \times M$. Sisalduvustest $n, M \in M$ ning otsekorrutise absoluutsusest $n \times M \in M$. Alamhulgalisuse absoluutsusest ja transitiivsusest seega $f \subseteq n \times M \subseteq M$, osast (a) kokkuvõttes $f \in M$, sest f on lõplik. ■

Metateoreemiskeemi II.7 osa (7) tõestus. Olgu $M \neq \emptyset$ teooria Z epsilon-kvaasimudel teoorias $T \supseteq Z$. Teatavasti

$$„x \text{ on lõplik}“ \Leftrightarrow \exists n \exists f \overbrace{ („n \text{ on naturaalarv}“ \wedge „f: n \rightarrow x \text{ on bijektsioon}“)}^{\psi(f, n, x) \doteq}.$$

Tähistame parempoolset valemit kui $\exists n \exists f \psi(f, n, x)$. Siin on kaks tõkestamata kvantorit, seega peame veel vaeva nägema. Absoluutsuseks tuleks näidata, et

$$\forall x \in M \quad (\exists n \in M \exists f \in M \psi(f, n, x)|_M \Leftrightarrow \exists n \exists f \psi(f, n, x)).$$

Arvestades valemit $\psi(f, n, x)$ absoluutsust klassi M suhtes, piisab näidata, et

$$\forall x \in M \quad (\exists n \in M \exists f \in M \psi(f, n, x) \Leftrightarrow \exists n \exists f \psi(f, n, x)).$$

Sisalduvusest $M \subseteq U$ johtub kohe implikatsioon suunaga vasakult paremale. Vastupidises suunas metalemmaskeemi II.8 osa (b) järgi $f \in M$ ja tolle tõestuse sees nägime, et $n \in M$.

Tulemus on tõestatud. ■

Hilisemat arutelu lihtsustavad *objekti absoluutsuse* ja *tõkendi* mõisted. Muu hulgas lepime kokku viisis, kuidas objekti $\mathcal{O}$ puhul rääkida tõkestatud objektist $\mathcal{O}^M$. Hoiatame, et järgmise metadefinitsiooni raames kasutatakse looksulge ka pärisklasside jaoks.

Metadefinitsioon II.9. (objekti absoluutsus, tõkend [Kum80, lk-d 128–129; Jec02, lk 182])
Defineerime absoluutsuse mõisted klassi, seose, funktsiooni ning konstandi jaoks. Olgu T asendusteooria.

- a. Klass $\mathcal{C}$ defineeriva valemiga $\mathcal{C}[x] \in \text{Form}(\text{ZFC})$ on *klassina absoluutne* (klassi M suhtes teoorias T), kui valem $\mathcal{C}[x]$ on vastavalt valemına absoluutne, s.o

$$T \models \vdash \forall x \in M \quad (\mathcal{C}[x]|_M \Leftrightarrow \mathcal{C}[x]).$$

Kui piltlikult kirjutada $\mathcal{C}^M = \{x \in M \mid \mathcal{C}[x]|_M\}$, võib klassi absoluutsuse tingimust väljendada vormis $\mathcal{C}^M = \mathcal{C} \cap M$.

- b. n -aarne klassiseos R defineeriva valemiga $R[x_1, \dots, x_n] \in \text{Form}(\text{ZFC})$ on *seosena absoluutne* (klassi M suhtes teoorias T), kui valem $R[x_1, \dots, x_n]$ on valemına vastavalt valemına absoluutne, s.o

$$T \models \vdash \forall x_1, \dots, x_n \in M \quad (R[x_1, \dots, x_n]|_M \Leftrightarrow R[x_1, \dots, x_n]).$$

Kui piltlikult kirjutada $R^M = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid R[x_1, \dots, x_n]|_M\}$, võib nõude kirja panna kui $R^M = R \cap M^n$. Siin $n \geq 2$.

- c. n -aarne klassifunktsioon F kõikjal klassis U^n täisfunktsionaalse defineeriva valemiga $F[x_1, \dots, x_n, y] \in \text{Form}(\text{ZFC})$ on *funktsioonina absoluutne* (klassi M suhtes teoorias T), kui

$$T \models \vdash \underbrace{\forall x_1, \dots, x_n \in M \exists! y \in M \quad F[x_1, \dots, x_n, y]|_M}_{\text{funktsiooni } F \text{ defineeritus ehk tõkestatud valem } F[x_1, \dots, x_n, y]|_M \text{ niisugune täisfunktsionaalsus klassil } M, \text{ kus ka vastav } y \in M} \wedge \\ \wedge \underbrace{\forall x_1, \dots, x_n, y \in M \quad (F[x_1, \dots, x_n, y]|_M \Leftrightarrow F[x_1, \dots, x_n, y])}_{\text{absoluutsus } (n+1)\text{-kohalise seosena}}.$$

Kui piltlikult kirjutada $F^M = \{ (x_1, \dots, x_n, y) \in M^{n+1} \mid F[x_1, \dots, x_n, y]_M \}$, siis võime tingimuse kirja panna kui $F^M = F|_M$, kus viimane $F|_M$ tähistab funktsiooni F ahendit klassile M funktsioonide ahendamise mõttes. Kui funktsioon F pole esialgu kõikjal klassil U^n määratud, mõeldakse funktsiooni F absoluutsusest rääkides reeglina vastava tühilaiendi $\tilde{F}$ absoluutsust. Tühilaiend $\tilde{F}$ on nõndasugune:

$$\tilde{F}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} F(x_1, \dots, x_n), & \text{kui } \exists y F[x_1, \dots, x_n, y], \\ \emptyset & \text{mujal.} \end{cases}$$

Siin $n \geq 1$. (Kui kehtib eitus $\neg \exists y F[x_1, \dots, x_n, y]$, on tühja hulga $\emptyset$ võtmine eriti loomulik valik siis, kui valem $x = \emptyset$ on M -absoluutne ja $\emptyset \in M$.)

- d. Konstant c defineeriva valemiga $c[x] \in \text{Form}(\text{ZFC})$ (ehk kehtib $\exists! x(c[x])$ vastava unikaalse elemendiga c) on *konstandina absoluutne* (klassi M suhtes teoorias T), kui

$$T \models \overbrace{\exists! x \in M(c[x]|_M)}^{\text{konstandi } c \text{ defineeritus klassil } M} \wedge \forall x \in M(c[x]|_M \Leftrightarrow c[x]).$$

Rõhutame, et teoorias T defineerib valem $c[x]$ konstandi, kui teoorias T kehtib $\exists! x(c[x])$. Konjunktsiooni tagumise osas võib üldisust kaotamata asendada ekvivalentsusmärgi implikatsiooniga (eelduse järgi $\exists! x c[x]$). Järjendi $\forall x \in M$ saab asendada järjendiga $\forall x$. Täiesti samaväärselt võiksime nõuda, et

$$T \models \exists! x \in M(c[x])$$

ehk et $c \in M$. Kui tähistada c^M -iga unikaalset klassi M elementi x , mispuhul $c[x]|_M$, siis ülemise konjunktsiooni tagumine pool väidab, et $c^M = c$.

Konstantideks on piisavas teoorias muu hulgas $\emptyset = 0, 1, 2$, naturaalarvude hulk ω , ka $\{\omega\}$ ja nii edasi. Binaarseteks funktsioonideks on näiteks ühisosa $y = x_1 \cap x_2$, ühend $y = x_1 \cup x_2$, otsekorutus $y = x_1 \times x_2$, kahekohaliseks seoseks näiteks $x_1 \in \bigcup \bigcup x_2$.

Toome näiteid hulkadest, konstantidest ning funktsioonidest, mis on objektidena absoluutsed piisava teooria mudelite suhtes.

Metateoreemiskeem II.9 (objektide absoluutsus piisavate epsilon-kvaasimudelite suhtes, [Kun80, lk-d 121–122, 126; Kun13, lk 120]). *Olgu T asendusteooria, mida täpsustame allpool. Toodavad objektid (funktsioonid, konstandid) on teoorias T absoluutsed (konstandina, funktsioonina, seosena) valemite metahulga $\text{Ax}(T) \cap \text{Form}(\text{ZFC})$ suvalise transitiivse mittetühja*

epsilon-kvaasimudeli M suhtes.

- (1) Teoorias $T = Z^- - U - P - \text{Inf}$: i) $\emptyset$; ii) $(u, v) \mapsto \{u, v\}$ ja $u \mapsto \{u\}$; iii) $(u, v) \mapsto (u, v)$; iv) $(X, Y) \mapsto X \cap Y$; v) $(X, Y) \mapsto X \setminus Y$ ja $(X, Y) \mapsto X'_Y$ (täiend hulga Y suhtes); vi) $X \mapsto \bigcap X$.
- (2) Teoorias $T = Z^- - P - \text{Inf}$: i) $X \mapsto \bigcup X$; ii) $X \mapsto X^+ = X \cup \{X\}$; iii) $(X, Y) \mapsto X \triangle Y$; iv) $x \in \bigcup \bigcup X \mapsto \bigcup \bigcup X$; v) $1, 2, 3, \dots, 100$ ja nii edasi.
- (3) Teoorias $T = Z^- - \text{Inf}$: i) $(X, Y) \mapsto X \times Y$; ii) $R \mapsto \text{dom } R$ ja $R \mapsto \text{ran } R$; iii) $x \in R^{-1}(Y)$.
- (4) Teoorias $T = Z - P$: i) ω ; ii) kõik naturaalarvud (käsitledes fikseeritud naturaalarvu kui parameetrit).

Noolega $\mapsto$ tähistame funktsiooni. Kui järjestatud paar (x, y) asub siin noolest vasakul, on tegu järjestatud paariga metateoorias, kui noolest paremal pool, siis Kuratowski järjestatud paariga objektiteoorias. Sarnaselt metateoreemiskeemiga II.7 võib võtta tugevama teooria $T' \supseteq T$. Tulemus jääb kehtima, metahulka $\text{Ax}(T) \cap \text{Form}(\text{ZFC})$ muutma ei pea.

Tõestus. Tõestused on kõigi puhul analoogilised. Valitud teoorias on objekti ühene leidumine tõestatav. Et klass M on teooria mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel, on tõestatav tõkestatud objekti leidumine klassis M (metateoreemiskeem II.1). Objekti ja tõkestatud objekti vahel pole erinevust, sest vastavaks objektiks olemine on absoluutne (metateoreemiskeem II.7). Mõnel puhul peetakse silmas tühilaiendit (ühisosa, muutumis- ning määramispiirkond). Jaotise (4) osas (ii) konstandi $n \in \omega$ juures mõeldakse näiteks valemit $c[x, n] := x = n$, kus tuleb arvu $n \in \omega$ võtta kui juba fikseeritud parameetrit. ■

Järgmised mõisted ei ole absoluutsed, isegi mitte valemite metametahulga $\text{Ax}(\text{ZFC})$ transitiivse epsilon-kvaasimudeli suhtes teooria ZFC laiendis: potentshulgaga võrdumine, Zermelo – von Neumanni kumulatiivse hierarhia astmeks olemine, võrdvõimsuslikkus, loenduvus. [Jec02, lk 165]

Metalauskeem II.10 (mitteabsoluutsuse näiteid). *Leidub teooria ZFC laiend (asendus-teooria) T , kus*

- (1) T on ZFC konservatiivne laiend;
- (2) kui ZFC on süntaktiliselt mittevasturääkiv, on süntaktiliselt mittevasturääkiv ka T ;
- (3) leidub valemite metahulga $\text{Ax}(\text{ZFC})$ mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel M asendusteoorias T , mille suhtes i) $X = \mathcal{P}(Y)$, ii) $X \sim Y$, iii) „ X on loenduv“, iv) $X = V_\alpha$

ei ole absoluutsed.

Metalause II.10 põhjendame hiljem, vt jaotist „Mitteabsoluutseid hulgateooria omadusi ja konstruktsioone“.

1.4.1. Potentselt regulaarse rekursiooni ja astaku absoluutsus

Potentselt regulaarse rekursiooni absoluutsuse küsimus väärrib eraldi alamjaotust. Rekursiooni absoluutsusest johtub muu hulgas Zermelo – von Neumanni astaku absoluutsus, samuti jõustamises kasutatavate P -nimedega seotud omaduste ning konstruktsioonide absoluutsused.

Mugavuse huvides olgu siin toodud varem tõestatud

teoreemiskeem I.20 (potentselt regulaarne rekursioon, [Jec02, lk 68; HJ99, lk-d 115–117]).
Olgu E potentselt regulaarne seos klassil $\mathcal{C}$. Olgu G klassifunktsioon klassil $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$. Leidub üheselt määratud klassifunktsioon F (täisfunktsioonilise valemiga $\mathcal{F}$), mispuhul

$$F(x) = \begin{cases} G(x, F|_{\text{ext}_E(x)}), & \text{kui } x \in \mathcal{C}, \\ \emptyset & \text{mujal.} \end{cases} \quad (*)$$

Meenutame, et potentselt regulaarse rekursiooni teoreemiskeem koosnes päriselt kahest teoreemiskeemist. Kui seos E , klass $\mathcal{C}$ ja klassifunktsioon G on fikseeritud, saab esimesest teoreemiskeemist põhimõtteliselt teoreem vormis

$$\begin{aligned} \text{„}E \text{ on pot. reg kl-il } \mathcal{C}\text{“, } \forall x_1, x_2 \exists! y (G(x_1, x_2) = y) \vdash \forall x \exists! y (F(x) = y) \wedge \\ \wedge \text{„}F \text{ täidab tingimust } (*)\text{“,} \end{aligned} \quad (\mathcal{A})$$

kus klassifunktsioon F on defineeritud teoreemiskeemi I.20 tõestuses, vt sealset valemit $(\dagger)$.

Olgu $T \supseteq \text{ZF}$ asendusteooria ja M valemite metahulga $\text{Ax}(T) \cap \text{Form}(\text{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias T . Siis metateoreemiskeemiga II.1 saame tingimusest $(\mathcal{A})$, et

$$\begin{aligned} \text{„}E \text{ on pot. reg kl-il } \mathcal{C}\text{“}|_M, \forall x_1, x_2 \in M \exists! y \in M (G^M(x_1, x_2) = y) \vdash \forall x \in M \exists! y \in M (F^M(x) = y) \wedge \\ \wedge \text{„}F^M \text{ täidab tingimust } (*)\text{“}|_M. \end{aligned}$$

Nõue „ F^M täidab tingimust $(*)|_M$ “ on kirjutatav kujul

$$F^M(x) = \begin{cases} G^M(x, F^M|_{(\text{ext}_E(x))^M}), & \text{kui } x \in C^M, \\ \emptyset, & \text{kui } x \notin C^M, \end{cases}$$

kus oleme arvestanud tühja hulga ning ahendi M -absoluutsusi. Kui klassifunktsioon G on ternaarse seosena absoluutne, siis

$$F^M(x) = \begin{cases} G(x, F^M|_{(\text{ext}_E(x))^M}), & \text{kui } x \in C^M, \\ \emptyset, & \text{kui } x \notin C^M. \end{cases}$$

Kui klass C on klassina absoluutne, siis $C^M = C \cap M$. Seega, kui $x \in M$, võime tingimust „ F^M täidab tingimust $(*)|_M$ “ veel lihtsustada:

$$F^M(x) = \begin{cases} G(x, F^M|_{(\text{ext}_E(x))^M}), & \text{kui } x \in C, \\ \emptyset, & \text{kui } x \notin C. \end{cases}$$

Alumiste naabertippude osa lihtsustamiseks tõestame järgmise metalemmaskeemi. Metalemmaskeem on sõnastatud kohe tugevama teooria T' jaoks, mistõttu võime ühisosa metahulgaga $\text{Form}(\text{ZFC})$ ära jätta.

Metalemmaskeem II.11. Olgu $T \supseteq Z^- - U - P - \text{Inf}$ asendusteooria ja $M \neq \emptyset$ valemite metahulga $\text{Ax}(Z^- - U - P - \text{Inf})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias T . Olgu

- 1) „ E on hulgalaadne kl-il C “ $|_M$,
- 2) klass C klassina M -absoluutne,
- 3) seos E binaarse seosena M -absoluutne

teoorias T . Kehtigu lisaks iga $x \in C \cap M$ korral sisalduvus $\text{ext}_E(x) \subseteq M$. Siis klassifunktsioon $x \mapsto \text{ext}_E(x)$ on funktsioonina M -absoluutne teoorias T .

Kui $x \notin C$, siis nõue $\text{ext}_E(x) \subseteq M$ kehtiks vaikimisi: rakenduks tühilaiendi eeldus, s.o saaksime selgesti kehtiva sisladuvuse $\text{ext}_E(x) = \emptyset \subseteq M$. Teades klassi C absoluutsust, on ühisosa $C \cap M$ sama mis C^M .

Tõestus. Alumiste naabertippude klassifunktsioon on tühilaindina määratav nõnda:

$$y = \text{ext}_E(x) \Leftrightarrow x \in \mathcal{C} \wedge \forall z \in y (z \in \mathcal{C} \wedge z E x) \wedge \forall w (w \in \mathcal{C} \wedge w E x \Rightarrow w \in y) \vee \\ \vee x \notin \mathcal{C} \wedge y = \emptyset.$$

Kuivõrd „ E on hulgalaadne kl-il $\mathcal{C}$ “ _{M} , siis teoorias T hulgalaadsuse ning ahendamise definit-siooni järgi, samuti tühja hulga absoluutsusest konstandina

$$\forall x \in M \exists! y \in M (y = \text{ext}_E(x))|_M.$$

Defineeritus käes. Tähistame vastavat objekti kui $(\text{ext}_E(x))^M$, millest

$$y = \text{ext}_E(x) \Leftrightarrow x \in \mathcal{C} \cap M \wedge \forall z \in y \cap M (z \in \mathcal{C} \wedge z E x) \wedge \forall w \in M (w \in \mathcal{C} \wedge w E x \Rightarrow w \in y) \vee \\ \vee x \notin \mathcal{C} \cap M \wedge y = \emptyset.$$

kus oleme arvestanud klassi $\mathcal{C}$ absoluutsust klassina, seose E absoluutsust seosena ning juba varem tõestatud absoluutsuse tulemusi. Peame veel tõestama, et iga $x \in M$ korral $\text{ext}_E(x) = (\text{ext}_E(x))^M$ ehk

$$\forall x, y \in M (y = \text{ext}_E(x) \Leftrightarrow y = (\text{ext}_E(x))^M).$$

Olgu $x, y \in M$. Konjunktsioonidega $x \in \mathcal{C}$ ja $x \in \mathcal{C} \cap M$ ega nende eitustega pole muret, sest $x \in M$ niikuinii. Võrdus $y = \emptyset$ on mõlemas valemis samasugune. Teiste konjunktsioonidega $\forall z \in y (z \in \mathcal{C} \wedge z E x)$ ning $\forall z \in y \cap M (z \in \mathcal{C} \wedge z E x)$ on korras, sest M on transitiivne ja $y \in M$. Kolmandate konjunktsioonidega $\forall w (w \in \mathcal{C} \wedge w E x \Rightarrow w \in y)$ ja $\forall w \in M (w \in \mathcal{C} \wedge w E x \Rightarrow w \in y)$ pole probleemi, sest $\text{ext}_E(x) \subseteq M$.

Tulemus on tõestatud. ■

Metalemmaskeemi II.11 eelduste kehtivuse korral saame tingimuse „ F^M täidab tingimust $(*)$ “ _{M} viia kujule

$$\forall x \in M \quad F^M(x) = \begin{cases} G(x, F^M|_{\text{ext}_E(x)}), & \text{kui } x \in \mathcal{C}, \\ \emptyset, & \text{kui } x \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

Teine metalemmaskeem annab piisavad tingimused, millal klassi $\mathcal{C}$ potentsest E -regulaar-

susest järeldub tõkestatud „klassi $\mathcal{C}$ potentne E -regulaarsus“ $|_M$.

Metalemmaskeem II.12. *Olgu $T \supseteq Z^- - U - P - \text{Inf}$ asendusteooria ja $M \neq \emptyset$ valemite metahulga $\mathbf{Ax}(Z^- - U - P - \text{Inf})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias T . Olgu klass $\mathcal{C}$ klassina M -absoluutne, seos E binaarse seosena M -absoluutne teoorias T . Siis*

„klass $\mathcal{C}$ on potentselt E -regulaarne“ $\Rightarrow$ „klass $\mathcal{C}$ on potentselt E -regulaarne“ $|_M$.

Tõestus. Olgu klass $\mathcal{C}$ potentselt E -regulaarne, st

$$\forall x(x \neq \emptyset \wedge x \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \exists \xi \in x(\forall y \in \mathcal{C} \neg(y E \xi))).$$

Et $M \subseteq U$, siis

$$\forall x \in M(x \neq \emptyset \wedge x \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \exists \xi \in x(\forall y \in \mathcal{C} \cap M \neg(y E \xi))).$$

Transitiivsusest

$$\forall x \in M(x \neq \emptyset \wedge x \subseteq \mathcal{C} \cap M \Rightarrow \exists \xi \in x \cap M(\forall y \in \mathcal{C} \cap M \neg(y E \xi))).$$

Arvestades klassi $\mathcal{C}$ klassina M -absoluutsust, seose E absoluutsust binaarse seosena, saame

$$\forall x \in M(x \neq \emptyset \wedge x \subseteq \mathcal{C}^M \Rightarrow \exists \xi \in x \cap M(\forall y \in \mathcal{C}^M \neg(y E^M \xi))).$$

See aga ongi soovitud „klass $\mathcal{C}$ on potentselt E -regulaarne“ $|_M$. ■

Oleme valmis sõnastama potentselt regulaarse rekursiooni absoluutsuse metateoreemiskeemi. Rekursiooni absoluutsuseks peavad kõik koostisosad olema absoluutsed.

Metateoreemiskeem II.13 (potentselt regulaarse rekursiooni absoluutsus, [Kun80, lk 129; Kun13, lk-d 124–125]). *Olgu $T \supseteq \mathbf{ZF}$ asendusteooria ja M valemite metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZF})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias T . Olgu E potentselt regulaarne seos klassil $\mathcal{C}$. Olgu G klassifunktsioon klassil $U \times U$. Kui*

- 1) klass $\mathcal{C}$ on klassina M -absoluutne,
- 2) klassiseos E on seosena M -absoluutne,
- 3) klassifunktsioon G on binaarse funktsioonina M -absoluutne,
- 4) „ E on hulgalaadne klassil $\mathcal{C}$ “ $|_M$,
- 5) iga $x \in \mathcal{C} \cap M$ korral $\text{ext}_E(x) \subseteq M$,

siis metateoreemiskeemi I.20 (üheselt määratud) klassifunktsioon F on ühekohalise funktsiooni-na absoluutne klassi M suhtes.

Tõestus. Metalemmaskeemi II.12 eeldused on jõus. Seega „klass C on pot. E -regulaarne“ $|_M$. Et „ E on hulgalaadne klassil C “ $|_M$, siis „ E on pot. reg kl-il C “ $|_M$. Varasema arutelu põhjal saame metateoreemiskeemiga II.1 potentselt regulaarse rekursiooni teoreemiskeemist sekventsi $(A)|_M$, mille antetsedendid on praegu tõesed. Järelikult kehtib konsekvent, s.o

$$\forall x \in M \exists! y \in M (F^M(x) = y) \wedge „F^M täidab tingimust $(*)|_M$ “.$$

Defineeritus on käes. Ka metalemmaskeemi II.11 nõuded on rahuldatud, mistõttu saame tingimuse „ F^M täidab tingimust $(*)|_M$ “ viia eespool toodud lihtsustatud vormi

$$\forall x \in M \quad F^M(x) = \begin{cases} G(x, F^M|_{\text{ext}_E(x)}), & \text{kui } x \in C, \\ \emptyset, & \text{kui } x \notin C. \end{cases}$$

Absoluutsuseks peame veel põhjendama, et iga $x \in M$ puhul $F^M(x) = F(x)$. See johtub vahetult potentselt E -regulaarse induktsiooniga. ■

Metateoreemiskeemi II.13 rakendusena tõestame hulga astaku Rank absoluutsuse funktsioonina. Põhjenduses arvestame lause I.29 väidet, et $\text{Rank} = \text{rank}_\in$.

Metalauskeem II.14 ([Kun80, lk-d 129–130]). Olgu $T \supseteq \text{ZF}$ asendusteooria ja M valemite metahulga $\text{Ax}(\text{ZF})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel. Hulga astak Rank on funktsioonina M -absoluutne teoorias T .

Tõestus. Lause I.29 järgi $\text{Rank} = \text{rank}_\in$. Funktsioon $\text{rank}_\in$ on defineeritud potentselt regulaarse rekursiooniga, metalauskeemi tõestamiseks kasutame metateoreemiskeemi II.13. Meenutame, et teoreemiskeemiga I.23 defineeritakse $\text{rank}_\in$ nii, et $C := U$, $E := \in$ ja

$$G(f) = \begin{cases} \bigcup \{y^+ \mid y \in \text{ran } f\}, & \text{kui „}f\text{ on funktsioon“, } \text{ran } f \subseteq \text{Ord}, f \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{mujal,} \end{cases}$$

kus klassifunktsiooni G esimene muutuja on fiktiivne. Kontrollime metateoreemiskeemi II.13 eeldusi. Teooria T ja epsilon-kvaasimudel M sobivad. Seos $\in$ on potentselt regulaarne klassil U regulaarsuse aksiomi tõttu. Võttes arvesse klassifunktsiooni G fiktiivset muutujat, on tegu klassifunktsiooniga klassil $U \times U$. Edasi

- 1) $\mathbf{U}$ on klassina M -absoluutne, sest $x = x$ on absoluutne;
- 2) $\in$ on seosena M -absoluutne, sest $x \in y$ on absoluutne;
- 3) tingimused „ f on funktsioon“, $\text{ran } f \subseteq \mathbf{Ord}$, $f \neq \emptyset$ ja nende eitused on omadustena absoluutsed, funktsioonid $X \mapsto \bigcup X$, $R \mapsto \text{ran } R$ ja $X \mapsto X^+$ on funktsioonidena absoluutsed, $\emptyset$ on konstandina absoluutne. Seetõttu on ka $\mathcal{G}$ funktsioonina absoluutne, sealjuures hulga $\{y^+ \mid y \in \text{ran } f\}$ saamiseks kasutatav asendusaksioomiskeemi aksioomi valem Φ on absoluutne just seetõttu, et $X \mapsto X^+$ on funktsioonina absoluutne;
- 4) kui $x \in M$, siis $\text{ext}_\in(x) = x$. Sellest ka $(y = \text{ext}_\in(x))|_M \Leftrightarrow y = \text{ext}_\in(x)$ ja $\text{ext}_\in(x) \in M$. Tõepoolest saime, et „ $\in$ on hulgalaadne klassil $\mathbf{U}$ “ $|_M$;
- 5) kui $x \in \mathbf{U} \cap M = M$, siis $x = \text{ext}_\in(x)$ ja epsilon-kvaasimodeli M transitiivsuse tõttu $\text{ext}_\in(x) \subseteq M$.

Kõik eeldused on täidetud. Kokkuvõttes ongi hulga astak $\mathbf{Rank}$ funktsioonina M -absoluutne teoorias T . ■

1.5. Epsilonisomorfism. Mostowski-Shepherdsoni transitiivne kollaps

Bijektsiooni nimetatakse mõnikord „hulkade isomorfismiks“. Algebraisest seisukohast on niisugune kirjeldus ootuspärane. Üks põhilistest algebra uurimisobjektidest on algebraline struktuur, selle eri kehastused. „Algebraline isomorfism“ nõuab peale struktuuri põhihulkade bijektiivsuse veel tehete säilitamist. Hulk on aga vaadeldav struktuurina, millel pole ainsatki tehet, ning algebraline isomorfism lihtsustubki tavaliseks üksüheseks pealekujutuseks.

Hulgateoorias on kesksel kohal hulgad. Väga loomulik on uurida täiendavat tüüpi isomorfismi: bijektsiooni, mis austab hulgateoreetilist sisalduvust $\in$. Sellist kujutust kutsutakse *epsilonisomorfismiks*.

Definitsioon II.10 (hulkade epsilonisomorfism, [Wea14, lk 22]). Olgu X ja Y hulgad. Bijektsiooni $f: X \rightarrow Y$, kus

$$\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \in x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \in f(x_2)),$$

kutsutakse *epsilonisomorfismiks* (hulgast X hulka Y). Vastavaid hulki X ja Y kutsutakse *epsilonisomorfseteks* ning kirjutatakse $X \approx Y$.

Hulkade $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ ning $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ võrdlemine näitab, et ekvivalentsust ei saa reeglina implikatsiooniga asendada. Epsilonisomorfismi pöördkujutus on samuti epsilonisomorfism

ning hulkade epsilonisomorfism, $X \approx Y$, on ekvivalentsusseos kõigi hulkade klassil $\mathbf{U}$. Epsilonisomorfism on varem defineeritud sarnasusseose erijuht, kus range osalise järjestusena vaadeldakse sisalduvust $\in$. Teisisõnu on epsilonisomorfism sarnasus ühe loomuliku hulkade järjestuse mõttes.

Teatud mõttes säilitab epsilonisomorfism $X \leftrightarrow Y$ -invariantsust.

Lauseskeem II.15 ([Wea14, lk 22]). *Las $\varphi \in \text{Form}(\text{ZFC})$, $\text{Free}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (erijuhul neid polegi ehk $n = 0$). Puudugu valemist φ individmuutujad $y_1, \dots, y_n$. Kehtib järgmine väide.*

$$\begin{aligned} \forall X, Y, f \left(X \overset{f}{\approx} Y \Rightarrow \forall_{x_1, \dots, x_n \in X} \forall_{y_1, \dots, y_n \in Y} (y_1 = f(x_1) \wedge \dots \wedge y_n = f(x_n) \Rightarrow \right. \\ \left. \Rightarrow (\varphi[x_1, \dots, x_n]_X \Leftrightarrow \varphi[x_1/y_1, \dots, x_n/y_n]_Y) \right) \end{aligned}$$

Tõestus. Las X ja Y suvalised hulgad ning $f: X \rightarrow Y$ on epsilonisomorfism. Tõestame väite esimese implikatsiooni struktuurse induktsiooniga valemite ehitamisviisi järgi. Baasis on ainsad atomaarsed valemid kujul $x_i \in x_j$ ja $x_i = x_j$, kus võib olla $i = j$. Kvantoreid pole, seega tõkestamine neid valemeid ei muuda. Teoreem väidab, et $y_i = f(x_i)$ ja $y_j = f(x_j)$ korral kehtivad

$$\begin{aligned} x_i \in x_j &\Leftrightarrow y_i \in y_j, \\ x_i = x_j &\Leftrightarrow y_i = y_j. \end{aligned}$$

Neist ülemine tuleneb otse epsilonisomorfismi kooskõlalisusest sisalduvusega $\in$. Alumise saame funktsioonilisusest ning injektiivsusest. (Kui vabu muutujaid valemis φ pole, on ZFC keele valemis kindlasti universaalkvantor, st tegu ei saaks olla atomaarse valemiga.)

Sammudes tuleb analüüsida eituse, implikatsiooni ning universaalkvantori juhte. Eituse ning implikatsiooni osas saab lisaks induktsioonieeldusele kasutada samasugust loogilist samaväärsust ning järeldumist nagu lemmaskeemis II.3. Pöörame seetõttu tähelepanu universaalkvantorile.

Eeldame, et teoreemi väide kehtib valemi $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ jaoks. Olgu $x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$ suvaline individmuutuja. Peame tõestama, et kokkulepitud tähistuste ning eelduste kehtivuse korral

$$\begin{aligned} \forall_{x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n \in X} \forall_{y_1, \dots, \widehat{y_i}, \dots, y_n \in Y} \left(y_1 = f(x_1) \wedge \dots \wedge \widehat{y_i = f(x_i)} \wedge \dots \wedge y_n = f(x_n) \Rightarrow \right. \\ \Rightarrow ((\forall x_i \varphi[x_1, \dots, x_n])[x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n]_X \Leftrightarrow \quad, \\ \left. \Leftrightarrow (\forall x_i \varphi[x_1, \dots, x_n])[x_1/y_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n/y_n]_Y) \right) \end{aligned}$$

kus katusega näitame, et vastav süntaktiline osa järjendist puudub. Valime $x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n \in X$ ja $y_1, \dots, \widehat{y_i}, \dots, y_n \in Y$ nõndamoodi, et $y_1 = f(x_1), \dots, \widehat{y_i = f(x_i)}, \dots, y_n = f(x_n)$. Peame näitama, et

$$\forall x_i \in X(\varphi[x_1, \dots, x_n]|_X) \Leftrightarrow \forall x_i \in Y(\varphi[x_1/y_1, \dots, x_i, \dots, x_n/y_n]|_Y).$$

Selguse huvides tõestame samaväärse tulemuse

$$\forall x_i \in X(\varphi[x_1, \dots, x_n]|_X) \Leftrightarrow \forall y_i \in Y(\varphi[x_1/y_1, \dots, x_i/y_i, \dots, x_n/y_n]|_Y).$$

Põhjendame kumbagi pidi implikatsiooni.

(„ $\Rightarrow$ “) Kehtigu $\forall x_i \in X(\varphi[x_1, \dots, x_n]|_X)$. Olgu $y_i \in Y$ suvaline. Sürjektiivsuse alusel leidub $x_i \in X$ nii, et $f(x_i) = y_i$. Implikatsiooni eelduse järgi $\varphi[x_1, \dots, x_n]|_X$. Sellele rakendame induktsioonieelduse $\Rightarrow$ -suunda, kust johtub $\varphi[x_1/y_1, \dots, x_i/y_i, \dots, x_n/y_n]|_Y$. Kuna $y_i \in Y$ oli suvaline, siis ka $\forall y_i \in Y \varphi[x_1/y_1, \dots, x_i/y_i, \dots, x_n/y_n]|_Y$.

(„ $\Leftarrow$ “) Kehtigu $\forall y_i \in Y(\varphi[x_1/y_1, \dots, x_i/y_i, \dots, x_n/y_n]|_Y)$. Olgu $x_i \in X$ suvaline. Funktsioonilisuse alusel leidub $y_i \in Y$ nii, et $f(x_i) = y_i$. Muus osas sarnane ekvivalentsi $\Rightarrow$ -suunaga, ainult induktsioonieeldusest võtta kasutusele $\Leftarrow$ -suund.

Tulemus on tõestatud. ■

Epsilonisomorfismi mõistet võib kahel moel üldistada. Esiteks, hulgad X ja Y saab asendada klassidega $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ ning epsilonisomorfismi $f: X \rightarrow Y$ klassifunktsiooniga $F: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$. Täiesti analoogiliselt lauseskeemiga II.10 on tõestatud asendustega üldistus. Meil taolist üldistatud lauseskeemi tarvis ei lähe. Teises epsilonisomorfismi üldistusviisis asendatakse sisalduvused $\in$ suvaliste seostega R ja S .

Mostowski-Shepherdsoni teoreemiskeemi üldises variandis läheb tarvis mõlemat üldistusviisi sisaldava isomorfismi definitsiooni.

Definitsioon II.11 (klasside (R, S) -isomorfism, [Jec02, lk 69]). Olgu X ja Y klassid, olgu R seos klassil X , S seos klassil Y . Bijektiivset klassifunktsiooni $F: X \rightarrow Y$, kus

$$\forall x_1, x_2 \in X(x_1 R x_2 \Leftrightarrow F(x_1) S F(x_2)),$$

kutsutakse (R, S) -isomorfismiks (klassist X klassi Y). Vastavaid klasse X ja Y kutsutakse (R, S) -isomorfseteks ning kirjutatakse $(X, R) \approx (Y, S)$. Kui $R = S = \in$, räägime lihtsalt klasside epsilonisomorfismist.

Järgnevas kasutame just $(\mathcal{R}, \in)$ -isomorfisme ning klasside epsilonisomorfisme. Jaotise lõpus näeme, et „heade“ klassi $\mathcal{C}$ ning seose E korral leidub üheselt määratud transitiivne klass $\pi(\mathcal{C})$, mis on algse klassiga $(\mathcal{R}, \in)$ -isomorfne. Vastav teoreem kannab Mostowski ning Shepherdsoni nimesid.

Kui kaks transitiivset klassi on epsilonisomorfised, on need klassid tegelikult võrdsed ning epsilonisomorfism on samasusteisendus.

Lemmaskeem II.16 ([Jec02, lk 69]). *Olgu T_1 ja T_2 transitiivsed klassid ning $F: T_1 \rightarrow T_2$ epsilonisomorfism. Siis $T_1 = T_2$ ja $F: T_1 \rightarrow T_1$ on identsusteisendus.*

Tõestus. Tõestame epsiloninduktsiooniga klassil T_1 (kasutame regulaarsuse aksioomi) väite, et F on identsusteisendus. Transitiivse hulga ainus rangelt $\in$ -minimaalne element on $\emptyset$, mille jaoks epsilonisomorfismi eeldus ütleb selgesti, et $F(\emptyset) = \emptyset$. Oletame, et mingi $t \in T_1$ puhul on võrdus $F(t') = t'$ olemas iga $t' \in t$ jaoks. Tõestame, et siis ka $F(t) = t$.

Näitame kahtepidi sisalduvust. Kui $t' \in t$, siis sisalduvuse austamise nõudest ja induktsiooneeldusest $t' = F(t') \in F(t)$. Järelikult $t \subseteq F(t)$. Kui $u \in F(t)$, siis klassi T_2 transitiivsusest $u \in T_2$, kuna $F(t) \in T_2$. Sürjektiivsuse järgi leidub $u_1 \in T_1$, mispuhul $F(u_1) = u$. Seega $F(u_1) \in F(t)$. Kooskõllalisusest sisalduvusega $u_1 \in t$. Induktsiooneeldusest ja elemendi u_1 valiku järgi $u = F(u_1) = u_1 \in t$. Nõnda $F(t) \subseteq t$.

Kokkuvõttes $F(t) = t$. Märkuse I.21 jaotise e osa 1) alusel on F identsusteisendus. Ülejäänud tulemus johtub vahetult klassifunktsiooni F bijektiivsusest (klasside T_1, T_2 suhtes). ■

Potentselt regulaarse rekursiooniga tõestatakse *Mostowski kollapsifunktsiooni* leidumine.

Definitsioon II.12 (Mostowski kollapsifunktsioon, [Jec02, lk 68]). Olgu $\mathcal{C}$ klass ja E potentselt regulaarne seos klassil $\mathcal{C}$. Funktsiooni $\pi: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$, kus iga $x \in \mathcal{C}$ korral

$$\pi(x) = \{\pi(z) \mid z \in \mathcal{C}, z E x\} = \{\pi(z) \mid z \in \text{ext}_E(x)\},$$

mujal võrdne tühja hulgaga, nimetatakse *Mostowski kollapsifunktsiooniks*. Veel tähistatakse $\pi = \pi_{\mathcal{C}, E} = \text{mos}_{\mathcal{C}, E}$ [Kun13, lk 56].

Rekursiooniteoreemiskeemi I.20 tähenduses võtta $G(f) = \text{ran } f$. Mostowski kollapsifunktsiooni väärtus väljaspool konkreetset klassi $\mathcal{C}$ ei paku meile huvi. Edasises käsitleme Mostowski kollapsifunktsiooni kui klassifunktsiooni $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \pi(\mathcal{C})$. Klassi $\pi(\mathcal{C})$ kutsutakse *klassi $\mathcal{C}$ Mostowski-Shepherdsoni (transitiivseks) kollapsiks*.

Mostowski kollapsifunktsioon $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \pi(\mathcal{C})$ on arusaadavalt sürjektiivne. Lisaks kehtib

lemmaskeem II.17 ([Jec02, lk 68]). Olgu $\mathcal{C}$ klass ja E potentselt regulaarne seos klassil $\mathcal{C}$.

(1) Mostowski-Shepherdsoni kollaps $\pi(\mathcal{C})$ on transitiivne klass.

(2) Mostowski kollapsifunktsioon on „ $(E, \in)$ -kasvav“, s.o

$$\forall x, y \in \mathcal{C} (x E y \Rightarrow \pi(x) \in \pi(y)).$$

(3) Mostowski kollapsifunktsioon pole üldiselt injektiivne klassil $\mathcal{C}$. Kui aga Mostowski kollapsifunktsioon on injektiivne klassil $\mathcal{C}$, siis on see ka „ $(\in, E)$ -kasvav“, st

$$\forall x, y \in \mathcal{C} (x E y \Leftarrow \pi(x) \in \pi(y)).$$

Niisiis, kui kollapsifunktsioon on injektiivne, on Mostowski kollapsifunktsioon $(E, \in)$ -isomorfism klasside $\mathcal{C}$ ning $\pi(\mathcal{C})$ vahel.

Tõestus. (1) Las olla $y \in \pi(\mathcal{C})$ suvaline. Järelikult leidub $x \in \mathcal{C}$ nii, et $\pi(x) = y$. Transitiivsuseks näitame, et $y \subseteq \pi(\mathcal{C})$. Olgu $y' \in y = \pi(x)$. Vastavalt Mostowski kollapsifunktsiooni määratlusele on olemas $z \in \mathcal{C}$, kus $z E x$ ja mispuhul $y' = \pi(z)$. Otse klassi $\pi(\mathcal{C})$ määratlusest $y' \in \pi(\mathcal{C})$.

(2) Vahetu kollapsifunktsiooni definitsioonist.

(3) Olgu $x, y \in \mathcal{C}$. Kui $\pi(x) \in \pi(y)$, siis definitsiooni järgi leidub $z E y$, $z \in \mathcal{C}$, nii, et $\pi(z) = \pi(x)$. Injektiivsusest $z = x$, seega $x E y$ ehk π on $(\in, E)$ -kasvav. Osa (2) ja süurjektiivsuse põhjal ongi tegu $(E, \in)$ -isomorfismiga klasside $\mathcal{C}$ ning $\pi(\mathcal{C})$ vahel.

Injektiivsuse vastunäiteks sobib klass (hulk) $\mathcal{C} := C := \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ seosega $E := \in|_C$. Siis $\pi(\emptyset) = \pi(\{\{\emptyset\}\}) = \emptyset$ ja $\pi(C) = \{\emptyset\}$. ■

Kui Mostowski kollapsifunktsioon on injektiivne, leidub klassis $\mathcal{C}$ täpselt üks rangelt E -minimaalne element. Seda seetõttu, et alati $\text{ext}_E(\xi) = \emptyset$, kui ξ on rangelt E -minimaalne. Vastupidine ei kehti, nagu näitab hulk $\mathcal{C} := C := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}$ seosega $E := \in|_C$. Ainus $\in|_C$ -minimaalne element on $\emptyset$. Siiski $\pi(\{\emptyset\}) = \pi(\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}) = \{\emptyset\}$, sest $\text{ext}_{\in|_C}(\{\emptyset\}) = \text{ext}_{\in|_C}(\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}) = \{\emptyset\}$. Näide ning Mostowski kollapsifunktsiooni definitsioon viivad loomulikult viisil *ekstensionaalse seose* definitsioonini.

Definitsioon II.13 (ekstensionaalne seos, [Jec02, lk 68]). Olgu $\mathcal{C}$ klass ning E seos sellel

klassil. Ütleme, et seos E on ekstensionaalne (klassil $\mathcal{C}$), kui

$$\forall x, y \in \mathcal{C} (x \neq y \Rightarrow \text{ext}_E(x) \neq \text{ext}_E(y)).$$

Klassi $\mathcal{C}$ kutsutakse E -ekstensionaalseks.

Ekstensionaaalsuse korral saab klassis $\mathcal{C}$ olla ülimalt üks rangelt E -minimaalne element. Seose ekstensionaaalsus on Mostowski kollapsifunktsiooni $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \pi(\mathcal{C})$ injektiivsuse jaoks tarvilik ning piisav.

Lemmaskeem II.18 ([Jec02, lk-d 68–69]). *Olgu $\mathcal{C}$ klass ning E potentselt regulaarne seos sellel klassil. Siis Mostowski kollapsifunktsioon π on injektiivne parajasti siis, kui seos E on ekstensionaalne klassil $\mathcal{C}$, s.o*

$$„\pi: \mathcal{C} \rightarrow \pi(\mathcal{C}) \text{ on injektiivne}“ \Leftrightarrow „E \text{ on ekstensionaalne}“.$$

Tõestus. („ $\Rightarrow$ “) Kui $\text{ext}_E(x) = \text{ext}_E(y)$, siis kollapsifunktsiooni definitsiooni põhjal $\pi(x) = \pi(y)$ ja injektiivsusest $x = y$.

(„ $\Leftarrow$ “) Tõestame potentselt E -regulaarse induktsiooniga injektiivsuse, st

$$\forall x, y \in \mathcal{C} (\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow x = y).$$

Kui $x \in \mathcal{C}$ on rangelt E -minimaalne, tulemus kehtib, sest $\emptyset = \pi(x) = \pi(y)$ tõttu on y rangelt E -minimaalne klassis $\mathcal{C}$, ekstensionaaalsusest johtus minimaalse elemendi ühesus ehk $x = y$. Olgu nüüd $x \in \mathcal{C}$ mingi niisugune, mispuhul kõigi $z \ E \ x$, $z \in \mathcal{C}$, jaoks tulemus $\pi(z) = \pi(y') \Rightarrow z = y'$ kehtib iga $y' \in \mathcal{C}$ korral. Las $y \in \mathcal{C}$ ja $\pi(x) = \pi(y)$, tahame tõestada, et $x = y$. Ekstensionaaalsuse tõttu piisab näidata, et $\text{ext}_E(x) = \text{ext}_E(y)$. Kahtepidi alamhulgalisusega. Kui $z \ E \ x$, siis $\pi(z) \in \pi(x) = \pi(y)$. Seega leidub $y' \ E \ y$, $y' \in \mathcal{C}$, nii, et $\pi(y') = \pi(z)$. Induktsiooniaeldusest $y' = z$, seetõttu $z \ E \ y$. Kokkuvõttes $z \in \text{ext}_E(y)$ ehk $\text{ext}_E(x) \subseteq \text{ext}_E(y)$. Vastupidi analoogiliselt. ■

Oleme eelneva aruteluga tõestanud ka Mostowski-Shepherdsoni transitiivse kollapsi teoreemi.

Teoreemiskeem II.19 (Mostowski-Shepherdsoni transitiivne kollaps, [Jec02, lk 69]). *Olgu $\mathcal{C}$ klass ning E potentselt regulaarne ekstensionaalne seos klassil $\mathcal{C}$. Leidub üheselt määratud transitiivne klass T nii, et klassid $\mathcal{C}$ ja T on $(E, \in)$ -isomorfsed. Isomorfism on samuti unikaalne. Sealjuures T on Mostowski-Shepherdsoni transitiivne kollaps $\pi(\mathcal{C})$, $T = \pi(\mathcal{C})$, ja isomorfism on Mostowski kollapsifunktsioon $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \pi(\mathcal{C})$, st $(\mathcal{C}, E) \stackrel{\pi}{\approx} (\pi(\mathcal{C}), \in)$.*

Klassi $\mathcal{C}$ omadusena on $\in|_{\mathcal{C}}$ -ekstensionaalsus samaväärne väitega, et klass $\mathcal{C}$ on ekstensionaalsuse aksiomi epsilon-kvaasimudel ehk tuletatav on ekstensionaalsuse aksiomi $\mathcal{C}$ -ahend. Sellest pärineb ka mõiste terminoloogiline valik. [Wea14, lk 23] Samaväärsuse põhjendus on üsna vahetu, mõistlik on kasutada ekstensionaalsuse aksiomi järgset märkust $\Rightarrow$ -suuna ebavajalikkusest võrduse aksiomide kontekstis.

Meile pakub huvi eeskätt Mostowski-Shepherdsoni teoreemi järeldus hulkade jaoks. Seda rakendame Lévy-Montague'i peegeldusprintsipi tõestuses.

Järeldusskeem II.20 ([Wea14, lk 23]). *Olgu X hulk, mis on iseendale tõkestatuna ekstensionaalne. Leidub hulgaga X epsilonisomorfne transitiivne hulk T , s.o $X \approx T$.*

1.6. Lévy-Montague'i peegeldumisprintsip

Algavas jaotises tõestame Lévy-Montague'i peegeldumisprintsipi. Printsip väidab, et ükskõik missuguse kinnise ZFC-keele valemi φ jaoks leidub ülimalt loenduv ning transitiivne hulk M nii, et $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_M$. Meie kasutame peegeldumisteoreemiskeemi tõestamiseks, et teooria ZFC^+ on teooria ZFC konservatiivne laiend.

Peegeldumisprintsipi tõestuses kasutatakse lemmaskeemi, milles ehitatakse fikseeritud valemi jaoks teatud „rahuldushulk“ või „tunnistajate hulk“. Täielikus tõestuses kasutame nii regulaarsuse aksiomi kui ka valikuaksiomi.

Lemmaskeem II.21 ([Wea14, lk-d 25–26; Jec02, lk 169]). *Olgu $\varphi[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \text{Form}(\text{ZFC})$ ja $\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = \text{Free}(\varphi)$, $n \geq 0$. Olgu $i \in \{1, \dots, n+1\}$ fikseeritud metanaturaalarv. Las olla M_0 ülimalt loenduv hulk. Siis leidub mittetühi ülimalt loenduv hulk M , kus $M_0 \subseteq M$ ning*

$$\forall x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1} \in M (\exists x_i \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}] \Rightarrow \exists x_i \in M \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}]).$$

Tõestus. Kehtigu tähistused lemmaskeemi püstitusest. Defineerime klassid $\mathcal{C}_{x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}}[c]$, kus $x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}$ on parameetrid ning

$$c \in \mathcal{C}_{x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}} \doteq \varphi[x_1, \dots, x_i/c, \dots, x_{n+1}].$$

Regulaarsuse aksiomi kasutanud Tarski-Scotti võttega loome neist hulgad $\check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}}$, sealjuures $\check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}} \neq \emptyset$, kui $\mathcal{C}_{x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}} \neq \emptyset$. Muuseas kehtib

$$\forall x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1} \left(\overbrace{(\exists x_i \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}])}^{\mathcal{C}_{x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}} \neq \emptyset} \Rightarrow \exists x_i \in \check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}} \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}] \right), \quad (*)$$

kuna $\check{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}$. Toodud implikatsioon on lemma väitega küllalt sarnane, kuid hulga $\check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}}$ võimsus pole teada, samuti on teadmata sisalduvus $M_0 \subseteq \check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}}$.

Rekursiivse definitsiooni teoreemiga moodustame hulkade jada $(M'_j)_{j \in \omega}$, kus

$$\begin{cases} M'_0 &:= M_0 \cup \{\emptyset\}, \\ M'_{j+} &:= M'_j \cup \bigcup \{ \check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}} \mid x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1} \in M'_j \}. \end{cases}$$

Tähistame ära jada $(M'_j)_{j \in \omega}$ ühendi, $M' := \bigcup \text{ran}(M'_j)_{j \in \omega}$. Konstruktsiooni, ühendi tähenduse ning tingimuse (*) abil saab ilma valikuaksioomita näidata, et M' rahuldab *peaaegu* kõiki lemma tingimusi, v.a võib-olla ülimalt loenduvust.

Valikuaksioomi abil saame aga kokku panna kõiki tingimusi rahuldava hulga M . Looime hulga $\mathcal{P}(M')$, vaatleme sellel valikufunktsiooni ν eriväärtusega $\emptyset$. Defineerime uue hulkade jada $(M''_j)_{j \in \omega}$ nõnda, et

$$\begin{cases} M''_0 &:= M_0, \\ M''_{j+} &:= M''_j \cup \underbrace{\{ \nu(\check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}} \cap M') \mid x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1} \in M''_j \}}_{\substack{\text{kõigepealt } (M''_j)^n, \text{ siis asendusega} \\ (x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \mapsto \check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}} \cap M', \\ \text{viimaks hulga kujutis } \nu\text{-ga}}}. \end{cases}$$

Ühend $M := \bigcup \text{ran}(M''_j)_{j \in \omega}$ täidab kõiki ülesande nõudeid. Loomulikult $M_0 \subseteq M$. Hulk M pole tühi: äärmisel juhul oleks $M_0 = \emptyset$, lisaks kõigi jada liikmete M''_j ning $x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1} \in M''_j$ korral $\check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}} \cap M' = \emptyset$, ent isegi siis valikufunktsiooni eriväärtuse tõttu $\emptyset \in M''_{j+}$ ja nii ka $\emptyset \in M$. Ülimalt loenduvust põhjendab niisugune skeem:

$$\begin{cases} M''_0 &:= \overbrace{M_0}^{\text{ülimalt loenduv}}, \\ M''_{j+} &:= \underbrace{M''_j}_{\text{ülimalt loenduv}} \cup \underbrace{\{ \nu(\check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}} \cap M') \mid x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1} \in M''_j \}}_{\substack{\text{ülimalt sama suur kui } (M''_j)^n, \\ \text{seega ülimalt loenduv}}}, \end{cases}$$

kus lõpuks $M = \bigcup \text{ran}(M''_j)_{j \in \omega}$ on ülimalt loenduvate hulkade (M''_j) loenduv ühend, seega ülimalt loenduv. (Range tõestus, et hulgad M''_j on ülimalt loenduvad, käib naturaalarvulise induktsiooniga.)

Põhjendamata on lemma implikatsioon. Olgu $i \in \{1, \dots, n\}$. Valime $x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1} \in M$ nõnda, et $\exists x_i \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Tingimusest (*) tuleb, et $\exists x_i \in \check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}} \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Olgu mingi selline $x_i \in \check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}}$ tähistatud kui c' . Jada $(M''_j)_{j \in \omega}$ konstruktsiooni põhjal $M''_0 \subseteq M''_1 \subseteq M''_2 \subseteq \dots$, seetõttu mingi $J \in \omega$ korral $x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1} \in M''_J$. Kuivõrd alati $M''_j \subseteq M'_j$, eriti $M''_J \subseteq M'_J$, siis $x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1} \in M'_J$. Seega $c' \in M'_{J+}$, nõnda ka

$c' \in M'$. Järelikult valikufunktsiooni rakendamine kujul $\nu(\check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}} \cap M')$ on ühisosa mittetühjuse tõttu sisukas: $\nu(\check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}} \cap M') =: c'' \in \check{\mathcal{C}}_{x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}}$ korral $c'' \in M_{J+}$, kust $\exists x_i \in M_{J+} \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}]$ ning viimaks $\exists x_i \in M \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}]$.

Tulemus on tõestatud. ■

Lemmaskeemi II.21 saab üldistada suvalise metalõpliku arvu valemite $\phi_1, \dots, \phi_m$ jaoks, kus $m \geq 1$ ja vähemalt ühes valemis on vähemalt üks vaba muutuja [Wea14, lk-d 25–26; Jec02, lk 169]. Kui muutujate kollisiooni ei teki ning tähistame $\mathbf{Free}(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_m) =: \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, piisab võtta $\varphi[x_1, \dots, x_{n+1}] := \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_m$. Niisugust üldistust kasutame Lévy-Montague'i peegeldumisprintsipi tõestuse struktuurse induktsiooni universaalkvantoriga osas.

Teoreemiskeem II.22 (Lévy-Montague'i peegeldumisprintsip, [Wea14, lk 26; Jec02, lk-d 168, 170]). *Suvalise kinnise valemi $\varphi \in \mathbf{Form}(\mathbf{ZFC})$ korral leidub (täpselt) loenduv transitiivne hulk M nii, et $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_M$.*

Hulka M kutsutakse valemite φ peegeldavaks hulgaks. Lévy-Montague'i peegeldumisprintsipi tõestuses toome valemia φ_0 sisse ekstensionaalsuse aksioomi, et hiljem rakendada Mostowski-Shepherdsoni transitiivse kollapsi teoreemiskeemi.

Tõestus. Olgu φ_0 ekstensionaalsuse aksioom. Las olla $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ parajasti kõik valemite φ_0 ja φ osavalemid, korduvatele osavalemitele anname erinevad indeksid. Nende hulgas on kindlasti atomaarne valem, mis sisaldab vaba muutujat, ning valemid φ_0 ja φ ise. Vaatame need m valemite muutujate kollisiooni vältimiseks ühehaaval läbi. Kui $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ ja valem φ_i sisaldab vaba muutujat x_ℓ , mis muus valemis φ_j , $i \neq j$, esineb seotult, asendame ühtlaselt kõigis valemites $\varphi_{k \neq i}$ universaalkvantori alla jäävad muututuja x_ℓ esinemised. Sealjuures valime asendusmuutuja nii, et see ei esineks üldse üheski valemist $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Uusi valemite tähistame kui $\varphi_1 \mapsto \varphi'_1, \dots, \varphi_m \mapsto \varphi'_m$, muide $\varphi'_i \doteq \varphi_i$. Kordame protsessi teiste probleemsete muutujate jaoks valemitega $\varphi'_1, \dots, \varphi'_m$, saades mingi metalõpliku arvu K sammu järel kollisioonita valemid $\varphi_1^{(K)}, \dots, \varphi_m^{(K)}$. Oluline on märkida, et valemid φ_i ja $\varphi_i^{(K)}$ on loogiliselt samaväärsed, s.o $\varphi_i \equiv \varphi_i^{(K)}$, mistõttu on tuletatavad ekvivalentsid $\varphi_i \Leftrightarrow \varphi_i^{(K)}$ ja nende universaalsulundid, $i = 1, \dots, m$. Samuti säilivad peatehted (implikatsioon jääb implikatsiooniks, eituseks ning universaalkvantor universaalkvantoriks) ja vabade, seotud muutujate absoluutarvud. Edasises tõestuses kasutame nii algseid valemite $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ kui ka uusi valemite $\varphi_1^{(K)}, \dots, \varphi_m^{(K)}$.

Rakendame lemmaskeemi II.21 üldistust valemitele $\neg \varphi_1^{(K)}, \dots, \neg \varphi_m^{(K)}$. Eelmise lõigu põhjal on lemmaskeemi rakendamine korrektne. Võttes mainitud lemmaskeemi mõttes $M_0 := \omega$, tähistame saadavat *täpselt* loenduvat hulka tähega N . Olgu $\varphi_i = \varphi_i[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}]$, $\mathbf{Free}(\varphi_i) =$

$= \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}\}$, kus $1 \leq i_1 < \dots < i_{n_i} \geq 0$. Tõestame, et iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral on φ_i hulga N suhtes absoluutne, st

$$\forall x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}} \in N (\varphi_i[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}] \Leftrightarrow \varphi_i[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}]_M). \quad (*)$$

Kasutame selleks struktuurset induksiooni mööda valemite φ_0 ning φ ehitust. Induksiooni tehes võime piirduda valemitega $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, sest need ongi parajasti valemite φ_0 ja φ_0 osavalemid.

Kui φ_i on atomaarne valem, siis tõkestamine valemite ei muuda, tulemus kehtib. Las $\varphi_i \doteq \neg\varphi_{j_1}$ või $\varphi_i \doteq (\varphi_{j_1} \Rightarrow \varphi_{j_2})$, $j_1 \neq j_2 \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$. Kui $(*)$ kehtib valemite φ_{j_1} ja φ_{j_2} jaoks, saame tulemuse üle kanda valemile φ_i nagu lemmaskeemi II.3 tõestuseski. Urime seega universaalkvantoriga valemite. Olgu $\varphi_i[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}] \doteq \forall x_p \varphi_j[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}, x_p]$, $x_p \notin \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}\}$, $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$. Eeldame, et φ_j jaoks $(*)$ kehtib ehk

$$\forall x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}, x_p \in N (\varphi_j[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}, x_p] \Leftrightarrow \varphi_j[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}, x_p]_M).$$

Näitame, et siis ka

$$\forall x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}} \in N (\forall x_p (\varphi_j[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}, x_p]) \Leftrightarrow \forall x_p \in N (\varphi_j[x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}, x_p]_M)).$$

Varasema ekvivalentsi põhjal ning metalemmaskeemi II.2 järgi piisab tõestada, et induksioonieeldusel

$$\forall \tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p \in N (\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p] \Leftrightarrow \varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]_N)$$

kehtib

$$\forall \tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}} \in N (\forall \tilde{x}_p (\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]) \Leftrightarrow \forall \tilde{x}_p \in N (\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]_N)),$$

kus katusega on märgitud asendamisel saadud indiidmuutujaid. $\Rightarrow$ -suund on ilmne: kasutada induksioonieeldust ning üleminekut universumilt $\mathbf{U}$ hulga N , s.o sisalduvast $N \subseteq \mathbf{U}$. Põhjene-
dame $\Leftarrow$ -suuna. Olgu $\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p \in N$ suvalised, kehtigu $\forall \tilde{x}_p \in N (\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]_N)$. Oletame vastuväitena, et $\forall \tilde{x}_p (\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p])$ ei kehti. Siis $\exists \tilde{x}_p (\neg \varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p])$. Hulga N konstruktsiooni järgi $\exists \tilde{x}_p \in N (\neg \varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p])$. Induksioonieelduse ja ekvivalentsitehte olemuse põhjal saame, et $\exists \tilde{x}_p \in N (\neg \varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]_N)$. Vastuolu eeldusega $\forall \tilde{x}_p \in N (\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]_N)$.

Niisiis kehtib väide $(*)$ iga φ_i jaoks, $i = 1, \dots, m$. Muude seas on see väide tõene valemite φ_0

ning φ korral. Valemid φ_0 ja φ on kinnised, nende jaoks lihtsalt $\varphi_0 \Leftrightarrow \varphi_0|_N$ ja $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_N$. Esimene ekvivalents $\varphi_0 \Leftrightarrow \varphi_0|_N$ ütleb, et hulk N on iseendale tõkestatuna ekstensionaalne. Rakendub Mostowski-Shepherdsoni transitiivse kollapsi teoreemiskeemi järeldusskeem II.20: saame transitiivse hulga M , mispuhul $M \approx N$. Sestap hulk M on täpselt loenduv ning lauseskeemi II.15 alusel (kinnise valemi φ jaoks) johtub, et $\varphi|_N \Leftrightarrow \varphi|_M$. Ekvivalentsi transitiivsusest $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_M$.

Kokkuvõttes hulk M rahuldab teoreemiskeemi nõudeid. Tulemus on tõestatud. ■

Lévy-Montague'i peegeldumisprintsipi üldistub samuti metalõpliku arvu valemite $\phi_1, \dots, \phi_m$ jaoks, võttes $\varphi := \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_m$, kui individuumutujate kollisiooni pole.

2. Laiendamine teooriaks ZFC^+

Laiend ZFC^+ on asendusteooria. ZFC^+ pärib kõigepealt kogu teooria ZFC , sealhulgas signatuuri, aksioomid ja tuletusreeglid. Seda täiendatakse kolmes osas:

- lisatakse konstantsümbol $\mathbf{M}$,
- lisatakse kõigi ZFC omaaksioomide ahendid hulgale $\mathbf{M}$,
- lisatakse väide, et $\mathbf{M}$ on loenduv ja transitiivne.

Teooria ZFC^+ kasulikkus peitub faktis, et hulk $\mathbf{M}$ ise ja temast hiljem koostatavad *jõustamis-laiendid* $\mathbf{M}[G]$ on aksioomide metametahulga $\mathbf{Ax}(ZFC)$ epsilon-kvaasimudelid. Seega saame ligipääsu konkreetsetele hulgalistele epsilon-kvaasimudelitele. Ilmutamata kujul avaldub sellise ligipääsu tähtsus näiteks metateoreemiskeemis II.25. Teooriat ZFC^+ vaatame Weaveri [Wea14, lk 27] ning Joseph R. Shoenfieldi [Kun80, lk-d 233, 235] eeskujul.

Teooriat ZFC , kuhu on lisatud konstantsümbol $\mathbf{M}$, kuid pole lisatud ühtegi omaaksioomi, tähistame kui ZFC' . Tähistust ZFC' kasutame ainult järgmise metateoreemiskeemi tõestuses. Skeem väidab, et laiend ZFC^+ ei muuda nende väidete tuletatavust, mis on kirja pandavad ZFC keeles. Tõestuses kasutatud *deduktsiooni-metateoreemiskeemi* sõnastus on toodud lisas D.

Metateoreemiskeem II.23 (ZFC^+ kui ZFC konservatiivne laiend). ZFC^+ on ZFC konservatiivne laiend, st

$$\forall \Gamma \in \mathbf{Form}(ZFC)^{\text{len } \Gamma}, \forall \varphi \in \mathbf{Form}(ZFC) \quad ZFC \Vdash \Gamma \vdash \varphi \text{ parajasti siis, kui } ZFC^+ \Vdash \Gamma \vdash \varphi.$$

Tõestus. $\Rightarrow$ -suund on selge, sest ZFC^+ on ZFC laiend ehk ZFC -teooria on ZFC^+ -teooria alam-

teooria. Tõestame $\Leftarrow$ -suuna. Oletame, et $ZFC^+ \Vdash \Gamma \vdash \varphi$, olgu τ sekvents $\Gamma \vdash \varphi$ mingi tõestus. Tuletus τ saab peale ZFC vahendite kasutada teadmist, et $\mathbf{M}$ on loenduv ja transitiivne, ning metalõplikku arvu $\mathbf{M}$ -tõkestatud ZFC omaaksioome $\varphi'_1, \dots, \varphi'_m$. Nimetame omaaksioomides $\varphi'_1, \dots, \varphi'_m$ seotud muutujaid ümber nii, et need ei kattuks valemi φ vabade muutujatega. Olgu saadud valemid $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Puudugu individuumuutuja M tõestusest τ ja erinegu kõigist muutujatest valemite $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Defineerime abivalemi $CT_{\varphi_1, \dots, \varphi_m}[M]$, kus

$$CT_{\varphi_1, \dots, \varphi_m}[M] := „M \text{ on loenduv}“ \wedge „M \text{ on transitiivne}“ \wedge \varphi_1|_M \wedge \dots \wedge \varphi_m|_M.$$

Individuumuutujate kollisiooni olla ei saa, sest valemite φ_i näol on (sisuliselt) tegu ZFC-hulgateooria aksioomidega, tähendab kinniste valemitega.

Valemi CT konstruktsioonist seega $ZFC' + CT_{\varphi_1, \dots, \varphi_m}[M/\mathbf{M}] \Vdash \Gamma \vdash \varphi$. Deduktsiooni-meta-teoreemiskeemist johtub, et $ZFC' \Vdash \Gamma, CT_{\varphi_1, \dots, \varphi_m}[M/\mathbf{M}] \vdash \varphi$. Struktuurne induktsioon mööda tuletusreegleid annab $ZFC' \Vdash \Gamma, CT_{\varphi_1, \dots, \varphi_m}[M] \vdash \varphi$ (iga reegel, mis sobib konstandi $\mathbf{M}$ jaoks, sobib individuumuutuja M jaoks). Edasi tuletusreegli $(\exists\vdash)^*$ abil $ZFC' \Vdash \Gamma, \exists M(CT_{\varphi_1, \dots, \varphi_m}[M]) \vdash \varphi$. Arusaadavalt siis $ZFC' \Vdash \Gamma \vdash (\exists M(CT_{\varphi_1, \dots, \varphi_m}[M]) \Rightarrow \varphi)$. Viimaks

$$\frac{\frac{\frac{}{\vdash \exists M(CT_{\varphi_1, \dots, \varphi_m}[M])} \text{ (peegeld., aksioomid)}}{\Gamma \vdash \exists M(CT_{\varphi_1, \dots, \varphi_m}[M])} \text{ (len}(\Gamma) \times (S+))}{\Gamma \vdash \varphi} \quad \frac{\frac{}{\Gamma \vdash (\exists M(CT_{\varphi_1, \dots, \varphi_m}[M]) \Rightarrow \varphi)} \text{ (eeld)}}{\Gamma \vdash \varphi} \text{ (} \vdash \nRightarrow \text{)}^\dagger,$$

kus vasakpoolne haru kasutab Lévy-Montague'i peegeldumisprintsipi II.22 valemi $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m$ korral, samuti teadmist, et $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m$ on teoorias ZFC' tuletav, kuna valemite $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ näol on sisuliselt tegu ZFC aksioomidega.

Järelikult $ZFC' \Vdash \Gamma \vdash \varphi$. Kuivõrd ZFC' oli lihtsalt ZFC koos konstantsümboliga $\mathbf{M}$, johtub (taas struktuurse induktsiooniga mööda tuletusreegleid) soovitud tulemus $ZFC \Vdash \Gamma \vdash \varphi$. ■

Kui teoorias ZFC pole süntaktilist vasturääkivust, ei saa süntaktilist vasturääkivust olla teoorias ZFC^+ .

Metajäreldus II.24 ([Wea14, lk-d 27–28]). *Kui teooria ZFC on süntaktiliselt mittevasturääkiv, on süntaktiliselt mittevasturääkiv ka ZFC^+ .*

Tõestus. Oletame, et ZFC^+ on süntaktiliselt vasturääkiv. Plahvatusprintsipi tõttu on tuletavad kõik keeles kirja pandavad valemid, eriti on tuletatav $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ mingi (iga) $\varphi \in \text{Form}(ZFC)$ korral. Metateoreemiskeemi II.23 alusel oli ZFC^+ teooria ZFC konservatiivne laiend, sestap $ZFC \Vdash \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Niisiis on süntaktiliselt vasturääkiv ka teooria ZFC. ■

Kontiinumihüpoteesi sõltumatuse tõestus tugineb järgmisele metateoreemiskeemile. Taas rakendame deduktsiooni-metateoreemiskeemi.

Metateoreemiskeem II.25 (väite ϕ sõltumatus, [Wea14, lk 28]). *Olgu $\phi \in \text{Form}(ZFC)$ kinnine valem. Leidugu valemite hulgal $\text{Ax}(ZFC) \cup \{\phi\}$ mittetühi epsilon-kvaasimudel N teoorias ZFC^+ . Siis kui teooria ZFC on süntaktiliselt mittevasturääkiv, on süntaktiliselt mittevasturääkiv ka $ZFC + \phi$.*

(Teisisõnu, lause ϕ on teooriast ZFC sõltumatu.)

Tõestus. Olgu teooria $ZFC + \phi$ süntaktiliselt vasturääkiv. Plahvatusprintsipi muu seas $ZFC + \phi \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$ mingi (iga) kinnise valemi $\Psi \in \text{Form}(ZFC)$ jaoks. Deduktsiooni-metateoreemiskeemist $ZFC \vdash \phi \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$. Kuna ZFC^+ on ZFC laiend, siis $ZFC^+ \vdash \phi \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$. Metateoreemiskeemi II.1 järgi, võttes $T := ZFC^+$, $\Gamma := \phi$, $\varphi := \Psi \wedge \neg \Psi$, $M := N$ ning vajadusel epsilon-kvaasimudeli N muutujaid ümber nimetades, saame $ZFC^+ \vdash \phi|_N \vdash (\Psi \wedge \neg \Psi)|_N$. (Metateoreemiskeemis II.1 nõutakse valemi $\varphi \doteq \Psi$ kinnisust.) Eelduse järgi oli $ZFC^+ \vdash \vdash \phi|_N$, niisiis reegli $(\vdash \Rightarrow)^\dagger$ kaudu $ZFC^+ \vdash \vdash (\Psi \wedge \neg \Psi)|_N$ ehk ahendamise definitsiooni põhjal $ZFC^+ \vdash \vdash \Psi|_N \wedge \neg \Psi|_N$. Tähendab, teooria ZFC^+ on süntaktiliselt vasturääkiv, metajäreldusest II.24 oleks süntaktiliselt vasturääkiv ka teooria ZFC . ■

2.1. Mitteabsoluutseid hulgateooria omadusi ja konstruktsioone

Oleme valmis põhjendama varasemat metalauseskeemi II.10. Rääkides „välisest seisukohast“, kasutame mõistete ja seoste tähendusi n -ö tavalises, universumi U vaatenurgast lähtudes. Kui ütleme „sisemisest seisukohast“, siis mõtleme samu mõisteid ja seoseid ahendatuna hulga M . Välisest seisukohast rääkides öeldakse tihti „meie“, sisemisest seisukoha korral räägitakse „nendest“ või „ M -elanikest“. [Kun80, lk 141; Wea14, lk 45]

Metalauseskeem II.10 (mitteabsoluutsuse näiteid). *Leidub teooria ZFC laiend (asendus-teooria) T , kus*

- (1) *T on ZFC konservatiivne laiend;*
- (2) *kui ZFC on süntaktiliselt mittevasturääkiv, on süntaktiliselt mittevasturääkiv ka T ;*
- (3) *leidub valemite metahulga $\text{Ax}(ZFC)$ mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel M asendusteoorias T , mille suhtes i) $X = \mathcal{P}(Y)$, ii) $X \sim Y$, iii) „ X on loenduv“, iv) $X = V_\alpha$ ei ole absoluutsed.*

Tõestus. Teooria T rolli sobib ZFC^+ . Väited (1) ja (2) on vastavalt metateoreemiskeem II.23

ja metajäreldus II.24. Teooria ZFC⁺ ülesehituse põhjal on hulk $\mathbf{M}$ valemite metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel, arusaadavalt mittetühi, näiteks $\omega^{\mathbf{M}} = \omega \in \mathbf{M}$.

- i) Uurime hulka $X := \mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega^{\mathbf{M}}) = \mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega) \in \mathbf{M}$. Transitiiivsusest $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega) \subseteq \mathbf{M}$, ja kuna välisest seisukohast on $\mathbf{M}$ loenduv, siis on $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ universumi mõttes ülimalt loenduv: meie arvates leidub bijektsioon hulkade ω ning $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ vahel. Cantori teoreemi tõttu on $\mathcal{P}(\omega)$ mitteloenduv. Johtub, et $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega) \neq \mathcal{P}(\omega)$.
- ii), iii) Hulk $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ on universumi mõttes ka vähemalt loenduv. Iga naturaalarvu $n \in \omega$ korral $n^{\mathbf{M}} = n \in \mathbf{M}$ (transitiivsus ja metateoreemiskeem II.9 jaotis (4) osa ii)). Sestap $\{n\} \in \mathbf{M}$. Kuivõrd $\{n\} \subseteq \omega$ ja alamhulgalisus on absoluutne, siis $\{n\}^{\mathbf{M}} = \{n\} \in \mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ iga $n \in \omega$ puhul (metateoreemiskeem II.9 jaotis (1) osa ii)). Järeldame, et „välisest seisukohast“ lähtudes on $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ vähemalt loenduv, kokkuvõttes osa i) põhjal täpselt loenduv. Sisemisest seisukohast pole $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ loenduv, põhjenduseks Cantori teoreemi ahendus ning metateoreemiskeem II.1. Järelikult ei saa loenduvus ega võrdvõimsuslikkus $\mathbf{M}$ -absoluutsed olla.
- iv) Näiteks $\mathbf{V}_{\text{Rank}(\mathcal{P}(\omega))^+}$ on mitteloenduv, aga $\mathbf{V}_{\text{Rank}(\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega))^+}^{\mathbf{M}}$ on välisest seisukohast loenduv. Seega $\mathbf{V}_{\text{Rank}(\mathcal{P}(\omega))^+} \neq \mathbf{V}_{\text{Rank}(\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega))^+}^{\mathbf{M}}$. ■

Ehkki tegu pole absoluutsete omadustega, võime mitteabsoluutsust ositi ohjeldada.

Metalause II.26 ([Kun80, lk 130]). *Olgu $T \supseteq \mathbf{ZF}$ asendusteooria. Olgu $\mathbf{M}$ valemite metahulga $\Psi \subseteq \mathbf{Form}(\mathbf{ZFC})$ mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias T , kus metahulka Ψ täpsustame allpool. Kehtivad järgmised väited.*

- (1) *Valemihulgaga $\Psi = \mathbf{Ax}(\mathbf{Z} - \mathbf{P})$: klass $\mathbf{M}$ on potentshulga moodustamise aksioomi epsilon-kvaasimudel parajasti siis, kui iga $X \in \mathbf{M}$ korral $\mathcal{P}(X) \cap \mathbf{M} \in \mathbf{M}$.*
- (2) *Valemihulgaga $\Psi = \mathbf{Ax}(\mathbf{Z})$: iga $X \in \mathbf{M}$ korral on hulk $\mathcal{P}(X)$ klassina absoluutne kvaasimudeli $\mathbf{M}$ suhtes, st $\mathcal{P}(X)^{\mathbf{M}} = \mathcal{P}(X) \cap \mathbf{M}$.*
- (3) *Valemihulgaga $\Psi = \mathbf{Ax}(\mathbf{Z}^- - \mathbf{Inf})$: võrdvõimsuslikkus on klassist $\mathbf{M}$ ülespoole absoluutne, st iga $X, Y \in \mathbf{M}$ korral $(X \sim Y)|_{\mathbf{M}} \Rightarrow X \sim Y$.*
- (4) *Valemihulgaga $\Psi = \mathbf{Ax}(\mathbf{ZF})$: iga $\alpha \in \mathbf{Ord} \cap \mathbf{M} = \mathbf{Ord}^{\mathbf{M}}$ puhul on Zermelo – von Neumanni kumulatiivse hierarhia α . aste klassina absoluutne kvaasimudeli $\mathbf{M}$ suhtes, st $\mathbf{V}_{\alpha}^{\mathbf{M}} = \mathbf{V}_{\alpha} \cap \mathbf{M}$.*

Tõestus. (1) Meenutame [potentshulga moodustamise aksioomi I](#) peatükist:

$$\vdash \forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \Leftrightarrow Z \subseteq X).$$

Selle ahend klassile M on, arvestades metateoreemiskeemi [II.7](#),

$$\vdash \forall X \in M \exists Y \in M \forall Z \in M (Z \in Y \Leftrightarrow Z \subseteq X).$$

Väite ekvivalentsi tõestamiseks tuleks näidata mõlemas suunas, et tõkestatud potentshulga moodustamise aksioomi mõttes sobib võtta $Y := \mathcal{P}(X) \cap M$. Märgime, et hulga $\mathcal{P}(X)$ ühese leidumise tagab siinkohal asjaolu, et $T \supseteq ZF \supseteq Z$.

(„ $\Rightarrow$ “) Kehtigu potentshulga moodustamise aksioom. Teoorias Z on tõestatud potentshulkade ühene leidumine. Klass M on valemihulga Z mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias T . Metateoreemiskeemi [II.1](#) mõttes läheb potentshulga ühese leiduvuse tõestus läbi klassis M . Järelikult iga $X \in M$ jaoks on hulk $Y := \mathcal{P}(X)^M$ korrektselt määratud, sealjuures

$$\forall Z \in M (Z \in \mathcal{P}(X)^M \Leftrightarrow Z \subseteq X).$$

Kvaasimudeli M transitiivsuse alusel ekvivalentset

$$\forall Z (Z \in \mathcal{P}(X)^M \Leftrightarrow Z \subseteq X \wedge Z \in M).$$

Samal ajal $\forall Z (Z \in \mathcal{P}(X) \cap M \Leftrightarrow Z \subseteq X \wedge Z \in M)$ ühisosa ning potentshulga määratlustest. Ekstensionaaalsusaksioomist $\mathcal{P}(X)^M = \mathcal{P}(X) \cap M$.

(„ $\Leftarrow$ “) Valime $X \in M$. Võtame $Y := \mathcal{P}(X) \cap M$. Kuuluvus $Y \in M$ eeldusest $\mathcal{P}(X) \cap M \in M$. Väide $\forall Z \in M (Z \in \mathcal{P}(X) \cap M \Leftrightarrow Z \subseteq X)$ kehtib selgesti ühisosa ning potentshulga definitsioonide põhjal.

(2) Tõestatud jaotise (1) tarvilikkuse osas, s.o $\Rightarrow$ -suunas.

(3) Vahetu, sest $M \subseteq U$, bijektiivseks funktsiooniks olemine on absoluutne klassi M suhtes, vt metateoreemiskeemi [II.7](#) jaotise [\(5\) osasid osasid iii\) ja viii\)](#).

(4) Olgu $\alpha \in \mathbf{Ord} \cap M$. Transitiivsusest tuleneva sisalduvuse $V_\alpha^M \subseteq M$ tõttu piisab tõestada, et iga $x \in M$ korral $x \in V_\alpha^M \Leftrightarrow x \in V_\alpha$. Teoorias ZF on tõestatud väite $x \in V_\alpha \Leftrightarrow \mathbf{Rank}(x) < \alpha$ universaalsulund, lause [I.28](#) osa [\(2\)](#). Metateoreemiskeemi [II.1](#) järgi on tõestatud selle universaalsulundi M -ahend, kust tuleb [hulga astakufunktsiooni absoluutsuse](#) ning sisaldu-

vuste $\alpha, x \in M$ põhjal väide $x \in V_\alpha^M \Leftrightarrow \text{Rank}(x) < \alpha$. Järelikult tõesti $x \in V_\alpha \Leftrightarrow x \in V_\alpha^M$.

■

III peatükk

Jõustamine

Hulk $\mathbf{M}$ on valemimetahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ mittetühi epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathbf{ZFC}^+$, sealjuures loenduv ja transitiivne. Metateoreemiskeemi II.1 mõttes lähevad hulgas $\mathbf{M}$ läbi kõik teoreemid ning konstruktsioonid nagu universumis $\mathbf{U}$, kuigi mitteabsoluutsete võtete ja elementide puuduse tõttu ei pruugi tõkestatud tegevuse tulemus ühtida tõkestamata tegevuse tulemiga. Palju tuttavaid objekte on kvaasimodelis $\mathbf{M}$ siiski tuvastavad, kas või $\emptyset$, ω , ω^2 , põhjenduseks metateoreemiskeem II.9.

Transitiivsusest ja välisest loenduvusest johtub, et hulk $\mathbf{M}$ sisaldab, meie universumi seisukohast lähtuvalt, üksnes ülimalt loenduvaid elemente. Teiste seas on päriselt loenduvad $\mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} = \mathcal{P}(\omega) \cap \mathbf{M}$ (metalauseskeemi II.10 jaotise (3) osade (i–iii) tõestus ja metalause II.26 osa (2)) ning $\aleph_1^{\mathbf{M}}$, kus $\aleph_1$ on väiksuselt teine lõpmatu kardinaalarv. Ei saa järeldada, et kontiinumihüpotees kvaasimodelis $\mathbf{M}$ kehtib: ükski bijektsioon $f: \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \rightarrow \aleph_1^{\mathbf{M}}$ ei pruugi hulka $\mathbf{M}$ kuuluda. Metateoreemiskeemist II.1 selliste bijektsioonide ehitamisel abi pole, sest funktsiooni $f: \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \rightarrow \aleph_1^{\mathbf{M}}$ konstruktsioon sisaldab konstantsümbolit $\mathbf{M}$. Metateoreemiskeemi nõuete seas oli tõik, et valemid on just $\mathbf{ZFC}$ -keeles. Üleüldse defineerisime valemi ahendamise ainult $\mathbf{ZFC}$ -keele valemitele. $\mathbf{M}$ -kodanikud ei tea, et neil on erinevaid hulki ja funktsioone puudu, meie aga küll.

Oletame, et tõesti ükski bijektsioon $f: \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \rightarrow \aleph_1^{\mathbf{M}}$ ei kuulu hulka $\mathbf{M}$, $f \notin \mathbf{M}$. Metateoreemiskeemi II.25 näol tahaksime kontiinumihüpoteesi kooskõlalisuse tõestamiseks leida valemihulgale $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC}) \cup \{\phi\}$ mittetühja transitiivse epsilon-kvaasimodeli $\mathcal{N}$, kus ϕ väidab, et $\mathcal{P}(\omega) \sim \aleph_1$. Kõige naiivsemad katsed kvaasimodeli $\mathcal{N}$ ehitamiseks nurjuvad. Katsetame näiteks varianti $\mathcal{N} := \mathbf{M} \cup \{f\}$. Niisuguse valikuga on vähemalt kolm muret.

- 1) Hulk $\mathcal{N}$ ei ole ilmtingimata transitiivne. Probleemi võime lahendada, võttes hoopis

$N := \text{TC}(\mathbf{M} \cup \{f\})$. Selline hulk N on muide välisest seisukohast loenduv, sest hulgad $\mathbf{M}$ ja $\{f\}$ on regulaarsed ja [päranduvalt](#) ülimalt loenduvad.

- 2) Kõigest ühe elemendi f lisamine ega transitiivse sulundi rakendamine ei taga, et N jääks valemimetahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ epsilon-kvaasimudeliks N . Näiteks, kas vastavalt nõuetele kehtib sisalduvus $\bigcup(\omega^2 \times f^3) \times f \times \mathcal{P}^N(\aleph_5^N) \in N$? Kui ühehaaval võimalikke puuduolevaid elemente veel lisada, satume tagasi punktidesse 1) ja 2) ehk astume tsüklisse.
- 3) Eeldame, et kavala nipiga õnnestuks lisada funktsioon $f: \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \rightarrow \aleph_1^{\mathbf{M}} \in N$ nii, et N on jätkuvalt valemimetahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel. Ikkagi langeme lõksu, kuivõrd objektid $\mathcal{P}(\omega)^N$ ja $\aleph_1^N$ ei pruugi ühtida algsete hulkadega $\mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}}$ ja $\aleph_1^{\mathbf{M}}$. Uues kvaasimodelis N aga just olekski tarvis bijektsiooni $g: \mathcal{P}(\omega)^N \rightarrow \aleph_1^N \in N$. [[Wea14](#), lk 30]

Seega laiendamist või üldisemalt, transitiivse epsilon-kvaasimodeli N koostamist tuleb teha väga suure hoole ning tõsise tähelepanelikkusega. *Jõustamise meetod* (van *forsseerimine* [[Wik13](#)], ingl *forcing* [[Wik22](#)]) seda võimaldabki. Lihtsustatult öeldes

- hulk $N := N$ ehitatakse hulga $\mathbf{M}$ laiendina, täpsemini $N := \mathbf{M}[G]$.
- Vajaliku objekti otsese lisamise asemel vaadeldakse hulka $\emptyset \neq P \in \mathbf{M}$, mis koosneb puudu olnud objekti n -ö osalistest või potentsiaalsetest konstruktsioonidest, lähendustest. Lähendused on $\mathbf{M}$ -kodanikele nähtavad, sest $P \in \mathbf{M}$. Hulka P kutsutakse *tingimuskogumiks*.
- Lähenduste-tingimuste kogum $G \subseteq P$ on „heade omadustega“, kui tegu on *geneerilise ideaaliga*. Sealjuures kuigi $G \subseteq P$, on reeglina $G \notin \mathbf{M}$. Seega geneeriline ideaal G tuleb juurde võtta, lisada. Hoolimata sellest, et lähendused ise on hulgas $\mathbf{M}$ olemas, sest $G \subseteq \mathbf{M}$.
- Tagamaks, et on saadav N on jätkuvalt valemimetahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel, ei saa piirduda hulga G lisamisega ega sellejärgse lõpliku lappimisega. Lisamist tehakse hoopis kahe potentselt regulaarse rekursiooniga. Esimese potentselt regulaarse rekursiooniga tähendatakse üles kõik „potentsiaalsed“ hulga N elemendid (*P-nimed*). Teises rekursioonis „leitakse üles“ hulka $N = \mathbf{M}[G]$ kuuluvad elemendid (*P-nimede kandjad*).
- Jõustamise põhimetateoreemiskeem ütleb, et kirjeldatud konstruktsioon on korrektne ning sisukas.

Selgub, et $\mathbf{M}[G]$ on $\subseteq$ -vähim aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaa-

simudel, kus $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}[G]$ ja $G \in \mathbf{M}[G]$ [Kun80, lk 189]. Kvaasimudelil $\mathbf{M}$ puuduva G lisamise soov on lõppeks niisiis võrreldav algebras tehtavaga, kui ehitatakse korpuse laiendeid. Alustades näiteks korpusest $\mathbb{R}$, lisatakse element i nii, et saadav N oleks ikkagi korpus ning $i^2 = -1$. Teame, et $N = \mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$. Jõustamine kui laiendamisprotsess on komplitseeritum kui korpuse laiendamine, sest ZFC on korpusteorias aksioomide mõttes keerulisem. Algebraisest analoogiast pärineb ka tähistus $\mathbf{M}[G]$.

Vahetult järgnevas defineerime vajaminevad mõisted täpsemalt. Seejärel teeme läbi tingimuskogumi ja geneerilise ideaali tähendust ilmestava näite. Tõestame osaliselt jõustamise põhiteoreemi koos tarvilike eeltulemustega. Kontiinumihüpoteesi sõltumatuse tõestuses, millest meie anname üksnes üldsise ülevaate, laiendatakse hulk $\mathbf{M}$ kaheks uueks loenduvaks, transitiivseks epsilon-kvaasimudeliks M_1 ja M_2 . Peale hulgateooria aksioomide mudeldaksid need M_1 ning M_2 vastavalt valemeid ϕ ja $\neg\phi$, kus ϕ tähistab kontiinumihüpoteesi. Täpsemini leitakse kaks hulka $\emptyset \neq P_1, P_2 \in \mathbf{M}$ ja geneerilist ideaali $G_1 \subseteq P_1, G_2 \subseteq P_2$, mille abil moodustatakse jõustamisprotseduuriga sobivad $M_1 := N_1 := \mathbf{M}[G_1]$ ja $M_2 := N_2 := \mathbf{M}[G_1]$. Meie kontiinumihüpoteesi sõltumatust tõestada ei jõua, piirdume üksnes sobivate hulkade P_1 ja P_2 välja toomisega ning viidetega kirjandusele.

Jõustamise defineeris esimesena matemaatik Paul Joseph Cohen 1963. aastal [Coh63; Coh64]. Teooriat täiendasid, avasid või lihtsustasid Dana Stewart Scott, Robert Martin Solovay ning Joseph Robert Shoenfield [Kun80, lk 235], samuti Petr Vopěnka ning Petr Hájek [Jec02, lk 224]. Meie teoriakäsitlus tugineb eeskätt Nik Weaverile [Wea14], Herbert Kenneth Kunenile [Kun80; Kun13] ja läbi nende Joseph Robert Shoenfieldile [Kun80, lk-d 235–236].

1. Jõustamise põhimõisted ja -konstruktsioonid

Jõustamise teooria arendamiseks on eri võimalusi. Meie kasutame Weaveri [Wea14] järgi *ideaale* ning järjestusena osahulgalist üksnes alamhulgalist sisalduvust $\subseteq$. Räägime edasises taas abstraktsemalt epsilon-kvaasimudelil M , mitte konkreetsest kvaasimudelil $\mathbf{M}$.

1.1. Jõustamiskogum. Geneeriline ideaal

Defineerime kvaasimudelil M puuduvate objektide lähendamisega seotud mõisted.

Metadefinitsioon III.1 (jõustamiskogum, tugevus, geneeriline ideaal, [Wea14, lk 30]). Olgu M valemihulga $\text{Form}(\text{ZFC})$ loenduv transitiivne epsilon-kvaasimudel asendusasendus-teoorias $T \supseteq \text{ZFC}$.

- a. Suvalist hulga M mittetühja elementi $\emptyset \neq P \in M$ kutsutakse *tingimuskogumiks*. Paari

$(P, \subseteq_P) \in M$ nimetatakse *jõustamiskogumiks*. (Siin $\subseteq_P := \{(x, y) \in P \times P \mid x \subseteq y\}$.)

- Tingimuskogumi P elemente $p \in P$ kutsutakse *jõustamistingimusteks*.
- Kui $p, q \in P$ on jõustamistingimused ja $p \subseteq q$, siis ütleme, et q on tugevam kui p või p on nõrgem kui q . Rõhutame, et tugevus on defineeritud *mitterangena* ehk refleksiivsena, iga tingimus on muuseas iseendast tugevam. Võib mõelda, et tugevam jõustamistingimus annab lähendatava objekti kohta rohkem teavet kui nõrgem tingimus [HJ99, lk-d 275–276].
- Kaks jõustamistingimust $p, q \in P$ on *ühitavad* ehk *teineteisega kooskõlas*, kui leidub mõlemast tugevam tingimus $r \in P$, s.o $p, q \subseteq r$. Ühitavate tingimuste jagatav teave pole vastuoluline.

b. Tingimuskogumi P alamhulki $D \subseteq P$ kutsutakse *alamkogumiteks*.

- Alamkogum $T \subseteq P$ on P suhtes tugev (tihe), kui igal jõustamistingimusel $p \in P$ leidub temast tugevam tingimus q hulgas T , $q \in T$.
- Olgu $G \subseteq P$ alamkogum, mis täidab allpoolseid nõudeid 1) ja 2).
 - 1) G on nõrgemate tingimuste suhtes kinnine. See tähendab, iga jõustamistingimuse $g', g \in P$ korral, kui $g \in G$ ja $g' \subseteq g$, siis ka $g' \in G$. Teisisõnu peab iga tingimuse $p \in G$ korral kehtima $g^{\subseteq_P} \subseteq G$, st $g^{\subseteq} \cap P \subseteq G$ ehk $\mathcal{P}(g) \cap P \subseteq G$.
 - 2) G sisaldab oma elementide kooskõlalise tunnistajaid. Teisiti öeldes on G $\subseteq$ -suunatud hulk. Pikemalt väljendatuna peab iga tingimuse $g_1, g_2 \in G$ korral leiduma mõlemast tugevam jõustamistingimus $h \in G$.

Nõudeid 1) ja 2) täitvat alamkogumit $G \subseteq P$ kutsutakse (*jõustamistooria*) *ideaaliks*.

- Ideaali $G \subseteq P$ nimetatakse *geneeriliseks ideaaliks*, kui see lõikub iga tingimuskogumi P suhtes tugeva M -nähtava alamkogumiga T . Tähendab $G \cap T \neq \emptyset$, kui $T \in M$ on P suhtes tugev alamkogum.

(Hulga M elemente $m \in M$ kutsume aeg-ajalt *M -nähtavateks*.)

Jõustamistooria ideaalil on põhimõtteliselt sama tähendus nagu ideaalil järjestusteoorias osaliselt järjestatud hulga $(P, \subseteq_P)$ kontekstis. Üks erinevus on fakt, et järjestusteoorias nõutakse ideaalilt veel mittetühjust, st $G \neq \emptyset$. Meile pole ideaali tühjus-mittetühjus otseselt oluline, kuivõrd tegutseme genereerilise ideaaliga, mille jaoks on mittetühjus tõestatav. Põhjenduseks märgime, et tingimuskogum P ise on P suhtes tugev, kust $G \cap P \neq \emptyset$ annab, et $G \neq \emptyset$. Teine,

sarnane erinevus on meie nõue, et $P \neq \emptyset$, mis vastupidi puudub järjestusteooria ideaali definitsioonist. Lahknevust selgitab taas jõustamisteooria keskendumine genereerilisele ideaalile. Olukorras $P = \emptyset$ ei leiduks ühtegi genereerilist ideaali, samuti järeldub järjestusteooria ideaali mittetühjusest kohe hulga P mittetühjus. Kolmandaks, jõustamisteooria ideaali definitsioon on formaalselt antud valemihulga $\mathbf{Form}(\mathbf{ZFC})$ loenduva transitiivne epsilon-kvaasimudeli M kontekstis, milleks järjestusteooria üldisemas käsitluses pole tarvidust. Viimaks kasutatakse järjestusteoorias sisalduvuse $\subseteq_P$ asemel üldisemat mitteranget eeljärjestust $\preceq$ hulgal P . M -nähtavaid eeljärjestusi $\preceq \in M$ võib kasutada ka jõustamisteoorias, kuigi täiendavat võimekust võrreldes sisalduvusega $\subseteq_P$ ei lisandu, vt [Wea14, lk-d 121–122].

Jõustamisteooria ideaali ning hulgateooria ideaali võrdlus on üsna identne jõustamis- ja järjestusteooria ideaalide kõrvutamise, kui järjestusteooria eeljärjestuseks võtta $\subseteq$. Arutelu lahkneb teise erinevuse koha pealt. Hulgateoorias alustatakse suvalisest hulgast S ja seejärel võetakse $P := \mathcal{P}(S)$, mistõttu $P \neq \emptyset$ on vahetu järeldus. Tingimuskogum P aga ei pruugi olla ühegi hulga potentshulgaks, välises mõttes ei saakski olla, kui P on välises mõttes loenduv – järeldus Cantori teoreemist. Märgime, et tühi hulk kuulub hulgateooria ideaali, sest $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$. Jõustamisteoorias kutsutakse niisugust tingimushulka P , mispuhul $\emptyset \in P$, *juurega tingimuskogumiks*. Juurelisuse eeldamine on [teatud kontekstis](#) kasulik [ega vii üldisuse kaoni](#), vt jaotist [III.1.5.4](#). Teine muutus on kooskõlalise tunnistaja osas. Nimelt nõutakse hulgateooria ideaali puhul kooskõlalise tunnistajana just ühendit. Tähendab, tingimus 2) asendatakse tugevama nõudega, et iga $g_1, g_2 \in G$ korral $g_1 \cup g_2 \in G$. Meil pole nii spetsiifilist kooskõlalise tunnistajat tarvis. Üldise topoloogia ideaal on hulgateooria mõttes ideaal, kus lisaks nõutakse kogu lähtehulga S puudumist, $S \notin G$.

Soovitame lugejal alati veenduda, missugust ideaali (filtri) määratlust on autor kasutanud. Eelnenud võrdluses kasutatud definitsioonid on toodud lisas [E](#).

1.2. Mõistete sisu selgitav näide

Tegemist on jõustamisteooria klassikalise näitega [Jec02, lk 202; Wea14, lk-d 31–32; Kun80, lk-d 192–193], kuid mille sisu oleme kirjandusest põhjalikumalt avanud.

Vaatleme konkreetse mõttes valemihulga $\mathbf{Form}(\mathbf{ZFC})$ loenduva transitiivse epsilon-kvaasimudeli osas hulka $\mathbf{M}$. Nägime, et $\mathbf{M}$ ei sisalda kõiki funktsioone $f: \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \rightarrow \aleph_1^{\mathbf{M}}$. On palju teisigi funktsioone, mis välisest seisukohas peavad hulgast $\mathbf{M}$ puuduma. Näiteks ei tohi välise loenduvuse tõttu hulgas $\mathbf{M}$ olla kõiki funktsioone hulgast $\omega^{\mathbf{M}} = \omega$ hulka $\{0, 1\}^{\mathbf{M}} = \{0, 1\}$. Teatavasti kodeerivad niisugused funktsioonid naturaalarvude hulga ω alamhulki, mida on välisest (ja sisemisest) seisukohast lähtudes mitteloenduv kogus, kuid välisest vaatenurgast

peab hulka $\mathbf{M}$ kuuluma loenduvalt palju naturaalarvulisi alamhulki (sest $\mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} = \mathcal{P}(\omega) \cap \mathbf{M}$ oli loenduv).

Naturaalarvude hulk ω ja kaheelemendiline $\{0, 1\}$, samuti $\omega \times \{0, 1\}$, on konstantidena $\mathbf{M}$ -absoluutsed. Iga funktsioon $g: \omega \rightarrow \{0, 1\}$ on hulga $\omega \times \{0, 1\}$ osahulk, $g \subseteq \omega \times \{0, 1\}$. Osahulgaks olemine on $\mathbf{M}$ -absoluutne, ka funktsioonilisus. Loetletud faktidest ei piisa kõigi funktsioonide $g: \omega \rightarrow \{0, 1\}$ kuulumiseks hulka $\mathbf{M}$, absoluutsus seda ei taotle. Absoluutsuse definitsioon algab tõkestatud kvantoritega, seega räägib see just hulga $\mathbf{M}$ elementidest. Absoluutsus väidab, et kui $g \in \mathbf{M}$, siis meie universum $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{M}$ nõustuvad hinnangus, kas g on funktsioon hulgast ω hulka $\{0, 1\}$. Olukorras ($g: \omega \rightarrow \{0, 1\}$) $\notin \mathbf{M}$ – väline loendus ütleb, et niisuguseid funktsioone on mittemoenduv kogus – ei teki absoluutsusega vastuolu, just põhjusel, et $g \notin \mathbf{M}$. Kui ZFC on süntaktiliselt mittevasturääkiv teooria, ei õnnestu tõestada kõigi kujutuste $g: \omega \rightarrow \{0, 1\}$ funktsioonilist absoluutsust.

Oletame, et tahame juurde lisada ükskõik millist puudunud funktsiooni $g: \omega \rightarrow \{0, 1\}$. Kirjeldame, kuidas võiks taolise lähte- ning sihthulgaga „geneerilist“ (‘konkreetsemalt täpsustamata’) kujutust geneerilise ideaaliga „lähendada“. Võtame jõustamiskogumiks $(P, \subseteq_P)$, kus tingimuskogumiks on

$$P := \{h: A \rightarrow \{0, 1\} \mid A \subseteq \omega \wedge \text{„}A \text{ on lõplik“}\}.$$

Selgesti $P \neq \emptyset$, kuna $\emptyset \in P$. Korrektsuseks peame tõestama, et $P \in \mathbf{M}$. Eelmise lõigu arutelu põhjal annaks seotud objektide ja omaduste absoluutsuse kasutamine, et $P^{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$, kus

$$P^{\mathbf{M}} = \{(h: A \rightarrow \{0, 1\}) \in \mathbf{M} \mid A \subseteq \omega \wedge \text{„}A \text{ on lõplik“}\},$$

millest meile *a priori* ei piisa. Oleks tarvis, et $P^{\mathbf{M}} = P$. Selgesti $P^{\mathbf{M}} \subseteq P$. Tõestame vastupidise sisalduvuse $P^{\mathbf{M}} \supseteq P$. Olgu $h \in P$ suvaline. Põhjenduses teeme sisuliselt läbi metalemmaskeemi II.8 (b) osa [tõestuse](#) funktsiooni $h: A \rightarrow \{0, 1\}$ jaoks. Naturaalarvuhulga ω absoluutsusest ja hulga $\mathbf{M}$ transitiivsusest $\omega \subseteq \mathbf{M}$. Kui $A \subseteq \omega$, siis $A \subseteq \mathbf{M}$. Metalemmaskeemi II.8 osa (a) põhjal $A \in \mathbf{M}$, sest A on lõplik. Seega otsekorrutise absoluutsusest $A \times \{0, 1\} \in \mathbf{M}$, hulga $\mathbf{M}$ transitiivsusest $A \times \{0, 1\} \subseteq \mathbf{M}$. Arusaadavalt $h \subseteq A \times \{0, 1\} \subseteq \mathbf{M}$. Kuna h on lõplik, siis uuesti metalemmaskeemi II.8 osa (a) järgi $h \in \mathbf{M}$. Kokkuvõttes $P^{\mathbf{M}} \supseteq P$, kust $P^{\mathbf{M}} = P$ ja $P \in \mathbf{M}$, nagu soovisime.

Tingimuskogumi P elemendid ehk tingimused on siin kõikvõimalikud lõplikud funktsioonid $h: A \rightarrow \{0, 1\}$. Funktsiooni $g: \omega \rightarrow \{0, 1\}$ lähendamist võib mõista nii, et võetakse üha pikemaid funktsioone (lõplikke jadasid), mis jadaga $g: \omega \rightarrow \{0, 1\}$ igal võrreldaval kohal üh-

tivad. Üks tingimus h_2 on tugevam tingimusest h_1 , kui $h_1 \subseteq h_2$. Teisisõnu on h_2 funktsiooni h_1 jätk ja vastupidi, h_1 funktsiooni h_2 ahend. Tingimused $h_1, h_2 \in P$ on ühitatavad või teineteisega kooskõlas, kui neile leidub ühine jätk $h_{12} \in P$, kus $h_1, h_2 \subseteq h_{12}$. Niisugune laiend h_{12} leidub parajasti siis, kui h_1, h_2 on funktsioonidena ühitatavad, st iga $n \in \text{dom}(h_1) \cap \text{dom}(h_2)$ korral $h_1(n) = h_2(n)$. Sealjuures sobib kooskõlalise tunnistajaks ka funktsioonide ühend $h_1 \cup h_2$.

Kõik tingimused pole ühitatavad, *kaugeltki mitte*. Nullide-ühete jada $(h(k))_{k \in \omega}$ pikkusega $\text{dom}(h) = \omega$ on ühitatav parajasti $\omega + 1$ hulga P funktsiooniga, mille määramispiirkond sisaldub arvus ω . Kõiki funktsioone hulgas P määramispiirkonnaga ülimalt ω on $2^{\omega} - 1$. Vastav suhe $\omega / (2^{\omega} - 1)$ läheneb lõpliku jada pikkuse kasvades selgesti nullile. Asümptootiline tihedus on null, selles mõttes on ühitatavaid funktsioone kõigi hulga P jadade seas kõigest tühine kogus. Tingimuste kooskõlalises pole ka ekvivalentsiseos. Transitivsus ei ole, kuna võime paarikaupa kooskõlalises säilitades „vahetada“ binaarse rekursiooni haru: 00 on kooskõlas 0-iga, mis on kooskõlas 01-iga. Tipud 00 ja 01 ühitatavad pole.

Antud juhul on kooskõlalised parajasti niisugused funktsioonid, mis tekivad binaarse rekursiooni ühes „fikseeritud“ harus. Üks näide kooskõlaliste funktsioonidega alamkogumist on ideaal. Ideaali teine tingimus – kooskõlalise tunnistaja olemasolu ideaalis – tagab otseselt ideaali kuuluvate jadade ühitatavuse. Kinnisus nõrgemate tingimuste suhtes tagab, et kui funktsioon h kuulub ideaali, siis kuuluvad sinna ka kõik funktsiooni h ahendid. Selles mõttes mäletab ideaal endasse kuuluvate funktsioonide konstruktsiooni binaarses rekursioonis. Ma inime praegu täpsemalt selgitamata, et kinnisusest nõrgemate tingimuste suhtes järelduvad [tugevuse abitulemused](#) ning tuleneb hiljem defineeritava [jõustamiseseose koherentsus](#). Paraku ei lähenda ideaal ilmtingimata ühtegi täisfunktsiooni $g: \omega \rightarrow \{0, 1\}$, kuna ideaali ei pruugi kuuluda kuitahes suure pikkusega jadasid. Ideaal saab olla ka auklik, sisaldamata naturaalarvu $n \in \omega$ korral ühtegi funktsiooni, mis oleks kohal n määratud. Aukude puudumisel poleks pikkuse probleem võimalik, kuna funktsioonide h_k , kus $k = 0, \dots, n \in \omega$ ja $k \in \text{dom}(h_k)$, kooskõlalise tunnistaja on vähemalt pikkusega $n + 1$.

Ideaali „auklikkuse probleemi“ lahendamaks täiendav geneerilisuse omadus. Põhjus seisneb asjaolus, et hulgad T_n , kus $n \in \omega$ ja

$$T_n := \{ u \in P \mid n \in \text{dom } u \} \subseteq P,$$

kuuluvad hulka $\mathbf{M}$ ning on hulga P suhtes tugevad. Kuuluvus hulka $\mathbf{M}$ johtub teadmisest, et $P \in \mathbf{M}$, hulgale $\mathbf{M}$ tõkestatud eraldamisaksioomiskeemist ning valemi $n \in \text{dom } u$ absoluutsusest. Tugevus hulga P suhtes tuleneb juhtude läbi vaatamisest. Olgu $h \in P$ suvaline. On

kaks varianti: kas $n \in \text{dom } h$ või $n \notin \text{dom } h$. Esimesel juhul $h \in T_n$ ja tugevuse refleksiivsuse tõttu asi korras. Teisel juhul võime funktsiooni h laiendada funktsiooniks u , võttes näiteks $u := h \cup \{(n, 0)\}$, ning $u \in T_n$ on tugevam kui h . Ideaali geneerilisuse implikatsiooni eeldus on täidetud. Seega kui $G \subseteq P$ on geneeriline ideaal, siis iga $n \in \omega$ korral $T_n \cap G \neq \emptyset$. Järelikult auke ei saa geneerilises ideaalis olla, iga $n \in \omega$ korral leidub $h \in G$, mispuhul $n \in \text{dom } h$. Kuna auke pole, ei saa olla pikkuse probleemi.

Geneerilise ideaali $G \subseteq P$ poolt lähendatava funktsiooni $g: \omega \rightarrow \{0, 1\}$ kohta võime veel öelda, et $g = \bigcup G$. Ühend kleebib siin kõik g osalised konstruktsioonid kokku, aukude puudumise ja liimitavate lõplike jadade ühitatavuse tõttu on tegu täisfunktsiooniga hulgal ω . Reaalarvude binaarsest esitusest kantuna kutsutakse niisugust funktsiooni g *Coheni geneeriliseks reaalarvuks*. Teisest vaatenurgast lisab G uue loenduva „geneerilise“ naturaalarvuhulga, sest $\{n \in \omega \mid g(n) = 1\}$ on funktsiooni g abiga absoluutselt eraldatav. Sõna „geneeriline“ viitab siin meie teadmatusete sellest, missugune on lisatav funktsioon g . Näiteks pole teada (ja antud juhul polegi võimalik teada saada) kujutuse g väärtust ühegi sisendi korral. Võiksime algset tingimuskogumit muuta, võttes tingimuskogumiks P_0 , kus

$$P_0 := \{h \in P \mid 0 \in \text{dom } h \wedge h(0) = 0\}.$$

Nõnda jätkates saaksime jada $g_{P_{012\dots n}}$, mille kohta teame kõiki väärtusi kohani $n \in \omega$, kuid kirjeldus on ikkagi osaline, mitte täielik. Alles olukorras, kus jõustamiskogum on järgmise jaotise metalause III.2 mõttes *triviaalne*, saab kirjeldus olla täielik, kuid siis pole laiendamisel mõtet: juba alguses kehtiks $G \in \mathbf{M}$.

Funktsiooni g väärtuste teada saamise võimatus johtub [Rasiowa-Sikorski lemmast](#), mis ütleb, et iga $p \in P$ korral leidub geneeriline ideaal $G \subseteq P$ nii, et $p \in G$. Antud näite kontekstis tähendab see, et ükskõik mis valikuid oleme binaarses rekursioonis seni teinud, jääb ikka alles „valikute komplekt“, mis viib geneerilise ideaalini. Järgmises jaotiseses tehtavast järeldub muide, et sinne G ei kuulu hulka $\mathbf{M}$, s.o $G \notin \mathbf{M}$, vt lk 105.

Täpsuse huvides mainime veel, et toodud tingimuskogumi P enda elemendid pole tava-mõttes saadavad mitte binaarse, vaid *ternaarse* rekursiooniga, kus nulli või ühe võtmise asemel on kolmandaks variandiks „mitte millegi“ valimine, valimata jätmine (ehk funktsiooni defineerimata jätmine vastaval sisendil).

1.3. Geneerilise ideaali leiduvus ja kuuluvus

Ükskõik millise tingimuskogumi P korral leidub alati ideaal $G \subseteq P$, nimelt tühi hulk. Vastamata on küsimus, kas geneerilisuse omadusega ideaal üldse leidub. Rasiowa-Sikorski lemma väidab,

et geneeriline ideaal on alati olemas, sealjuures võime nõuda lisatingimuse kehtivust. Teise küsimusena uurime, millal kuulub geneeriline ideaal G algsesse epsilon-kvaasimudelisse M , st millal kehtib $G \in M$.

Teoreem III.1 (Rasiowa-Sikorski lemma, [Wea14, lk 32]). *Olgu K ülimalt loenduv hulk, $P \in K$ ja $\emptyset \neq P \subseteq K$. Iga $p_0 \in P$ jaoks leidub geneeriline ideaal $G \subseteq P$ nii, et $p_0 \in G$.*

asendusteoorias $T \supseteq \text{ZFC}$ aksioomide metahulga $\text{Ax}(\text{ZFC})$ transitiivse ja loenduva epsilon-kvaasimodeli $K := M$ ning tingimuskogumi $P \in M$ korral on Rasiowa-Sikorski lemma eeldused loomulikult täidetud. Ent hulga M kui epsilon-kvaasimodeli omadusi pole siin üldse tarvis, mistõttu pole me seda teoreemi sõnastuses nõudnud. Geneerilise ideaali leiduvust võiks siin samuti mõista niisuguses üldisemas kontekstis. Tõestuses ei kasutata transitiivsust, sest oleme täiendavalt nõudnud alamhulgalisust $P \subseteq K$.

Hulga K ülimalt loenduvus on aga määrava tähtsusega. See on üks tulemus, mille jaoks on tarvis meie kvaasimodeli M loenduvust. Tõestuses pole valikuaksioomi vaja.

Rasiowa-Sikorski lemma tõestus. Hulk K on ülimalt loenduv, seega hulga P suhtes tugevaid alamkogumeid hulgas K on samuti ülimalt loenduv kogus, üks neist $P \in K$ ise. Olgu $(T_k)_{k \in \omega}$ tugevate hulkade ammendav loend (kordused lubatud), kusjuures $T_0 := P$. Et $P \neq \emptyset$, siis iga $k \in \omega$ korral $T_k \neq \emptyset$. Iga $k \in \omega$ puhul $T_k \subseteq P \subseteq K$, järelikult ühend $T := \bigcup_{k \in \omega} T_k = \bigcup \text{ran}(T_k)_{k \in \omega}$ on ülimalt loenduv. Nummerdame hulga T elemendid ammendavalt jadana $(\tau_k)_{k \in \omega}$, kus kordused on lubatud.

Paneme tähele, et hulk T on potentselt järjestatav: saame järjestuse naturaalarvuhulgalt ω üle kanda ja vältida valikuaksioomi kasutamist. Nimelt kahe elemendi $t_1, t_2 \in T$ kõrvutamiseks võrdleme vähimaid indekseid $k_1, k_2 \in \omega$, mispuhul $\tau_{k_1} = t_1$, $\tau_{k_2} = t_2$. Geneerilise ideaali komplekteerimiseks ehitame kujutuse $(u_n)_{n \in \omega}$. Jada n^+ . sammul valime P suhtes tugevast hulgast T_{n^+} vähima elemendi, mis ühtlasti on tugevam jada eelmisest liikmest u_n . Täpsemini $u: \omega \rightarrow T$, kus

$$\begin{cases} u_0 &:= p_0, \\ u_{n^+} &:= G(n^+, u(n)), \end{cases}$$

milles $G: \omega \times T \rightarrow T$ ja

$$\begin{aligned} G(k, x) = t &\Leftrightarrow t \in T_k \wedge \exists \ell \in \omega (t = \tau_\ell \wedge \tau_\ell \supseteq x \wedge \\ &\wedge \forall m \in \omega (t = \tau_m \wedge \tau_m \supseteq x \Rightarrow l \leq m)). \end{aligned}$$

Funktsiooni G definitsioon on korrektne: nõutav arv $\ell \in \omega$ ja element $t = \tau_\ell \in T_k$ alati leiduvad,

sest T_k on P suhtes tugev. Jada u_n ehitust võib põhjendada näiteks järeltusskeemi I.22 varian- dig, milles fiktiivne muutuja x on hoopis aktiivne ja p_0 on parameeter. (Siin on G vaadeldav ka hulgafunktsioonina, mitte ainult klassifunktsioonina. Kasutame ikkagi klassitähistust, et vältida segadust geneerilise ideaaliga G .)

Geneeriliseks ideaaliks sobib võtta

$$\begin{aligned} G &:= \mathcal{P}(\text{ran}(u_n)_{n \in \omega}) \cap P = \\ &= (\text{ran}(u_n)_{n \in \omega})^{\subseteq P} = \\ &= \{p \in P \mid \exists n \in \omega (p \subseteq u_n)\}. \end{aligned}$$

Selgesti $G \subseteq P$. Kehtib lisatingimus $p_0 \in G$, sest $P \ni p_0 \subseteq u_0$. Alamhulgalisuse $\subseteq$ transi- tiivsusest johtub G kinnisus nõrgemate tingimuste suhtes. Tingimuste $g, g' \in G$, kus $g \subseteq u_n$, $g' \subseteq u_{n'}$, kooskõlalise tunnistajaks sobib $u_{\max\{n, n'\}}$, sest kujutus $(u_n)_{n \in \omega}$ on konstruktsiooni tõttu $\subseteq$ -kasvav. Kokkuvõttes on G ideaal. Geneerilisus on vahetu, sest $(T_k)_{k \in \omega}$ oli ammendav loetelu P suhtes tugevatest hulkadest ning $u_k \in T_k$ iga $k \in \omega$ korral. ■

Rasiowa-Sikorski lemma rakendamisel kasutame hulga M transitiivsust selleks, et saada alamhulgaline sisalduvus $P \subseteq M$.

Kui K on sisemisest seisukohast lähtudes ülimalt loenduv, saaksime **Rasiowa-Sikorski lemma** üle kanda epsilon-kvaasimudelisse M metateoreemiskeemiga II.1. Samas rangelt me- tadefinitsiooni III.1 mõttes geneerilist ideaali hulgas $K := M$ me niimoodi ei saa. Hulk M ei ole sisemisest vaatenurgast ehk M -kodanike jaoks loenduv. Hulk M pole M -kodanikele isegi hulk, vaid pärisklass $\mathbf{U}$. Hulga M sees ei pruugi olla tõestuses vaja läinud tugevate hulkade jada $(T_k)_{k \in \omega}$, seega ka mitte jadasid $(\tau_k)_{k \in \omega}$ ega $(u_n)_{n \in \omega}$. Eriti kehtib toodud arutelu juhul $M := \mathbf{M}$.

Missuguste tingimuskogumite P korral leidub M -nähtav geneeriline ideaal $G \in M$? Vastuse annab järgmine

metalause III.2 (geneerilise ideaali kuuluvus kvaasimudelisse, [Wea14, lk 33]). *Olgu M aksioomide metametahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusasen- dusteoorias $T \supseteq \mathbf{ZFC}$. Ütleme, et jõustamistingimus $p \in P$ on triviaalne, kui kõik sellest tugevamad tingimused hulgas P on omavahel kooskõlas. Kehtib tulemus*

$$\begin{aligned} \forall \emptyset \neq P \in M (\exists p \in P („p on triviaalne“) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists G \in M („G \subseteq P \text{ on geneeriline ideaal“})). \end{aligned}$$

Tõestus. Anname tõestuse idee.

(„ $\Rightarrow$ “) Kui $p \in P$ on triviaalne tingimus, sobib võtta

$$G := \{ g \in P \mid \exists s \in P(p, g \subseteq s) \},$$

sealjuures $G \in M$, sest defineeriv tingimus $\exists s \in P(p, g \subseteq s)$ on M -absoluutne, $P \in M$ ning M on eraldamisaksioomiskeemi epsilon-kvaasimudel.

(„ $\Leftarrow$ “) Triviaalse tingimuse puudumisest johtub, et hulk $P \setminus G$ on P suhtes tugev. Kui oleks $G \in M$, siis hulkade vahe M -absoluutsusest funktsioonina $P \setminus G \in M$. Ideaali geneerilisus nõuaks võimatut lõikuvust $G \cap (P \setminus G) \neq \emptyset$, vastuolu. ■

Reeglina jõustamiskogumis triviaalset tingimust ei leidu, seega tavaliselt $G \notin M$ ning laiendamine on oma olemuselt sisukas.

Jaotise 1.2 näite jätk, [Kun80, lk-d 192–193]. Meenutame, et tingimuskogumiks $P \in \mathbf{M}$ oli

$$P = \{ p: A \rightarrow \{0, 1\} \mid A \subseteq \omega \wedge „A \text{ on lõplik}“ \}.$$

Niisugusel tingimuskogumil pole kunagi geneerilist ideaali $G \in \mathbf{M}$, sest triviaalne jõustamistingimus puudub. Kui $p \in P$ on suvaline, siis $\max A + 1 \notin \text{dom } p =: A$. Tingimused $q_0 := p \cup \{(\max A + 1, 0)\}$ ja $q_1 := p \cup \{(\max A + 1, 1)\}$ on tugevamad kui p , kuid pole omavahel kooskõlas (mõlemast tugevam tingimus ei oleks funktsioon).

Saime, et $G \notin \mathbf{M}$. Kas on mõeldav, et sellest hoolimata $g := \bigcup G \in \mathbf{M}$? Vastus on eitav. Nimelt alamkogum $T := \{ q \in P \mid \neg(q \subseteq g) \}$ on P suhtes tugev. Kui $p \in P$ ja $A := \text{dom } p$, siis

$$q := p \cup \{(\max A + 1, 0), (\max A + 1, 1)\} \setminus \{(\max A + 1, g(\max A + 1))\}$$

on tugevam kui p ning $q \in T$. Samal ajal $G \cap T = \emptyset$, sest olukorras $g' \in G$ arusaadavalt $g' \subseteq \bigcup G = g$. Kui oleks $g \in \mathbf{M}$, annaks $\mathbf{M}$ -tõkestatud eraldamisaksioomiskeem, et $T \in \mathbf{M}$. Ideaali geneerilisusest tuleneks $G \cap T \neq \emptyset$, vastuolu. $\triangle$

1.4. Tugevuse abimõisted ja -tulemused

Sõnastame kaks metatulemust, mida on mugav kasutada jõustamise põhimetateoreemiskeemi tõestuses [Wea14, lk-d 38–39]. Metatulemuste endi põhjenduseks kasutame omakorda abimetalemmat. Abimetalemma ütleb, et geneeriline ideaal lõikub ka teatud hulkadega, mis ei tarvitse olla P suhtes tugevad.

Abimetalemma III.3 ([Wea14, lk-d 38–39]). Olgu M aksioomide metahulga $\text{Ax}(\text{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \text{ZFC}$. Las olla $P \in M$ tingimuskogum, $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Olgu $D \in M$ alamkogum $D \subseteq P$, mispuhul iga G element on mingi D elemendiga ühitatav. Siis $G \cap D \neq \emptyset$.

Tõestus. Vaatleme hulka

$$T_D := \{ \tau \in P \mid \text{„}\tau \text{ on tugevam kui mingi } D \text{ element“} \vee \\ \vee \text{„}\tau \text{ pole ühegi } D \text{ elemendiga ühitatav“} \}.$$

Selgesti $T_D \subseteq P$. Lisaks $T_D \in M$, sest see on eraldatud M -nähtavast hulgast P eraldamisaksioomi abil, kusjuures eraldamiseks kasutatav valem on M -absoluutne ning parameeter D on samuti M -nähtav.

Alamkogum T_D on hulga P suhtes tugev. Tõesti, olgu $p \in P$. On kaks võimalust. Kui p pole ühegi T_D elemendiga kooskõlas, siis kohe $p \in T_D$ ja tugevuse refleksiivsuse tõttu korras. Kui p on ühitatav mingi D elemendiga d , siis p ja d kooskõlalisuse tunnistaja $q \supseteq p, d$ on tugevam kui $d \in D$, sestap $q \in T_D$, korras. Ideaali geneerilisusest johtub, et $G \cap T_D \neq \emptyset$.

Valime $g \in G \cap T_D$. Abilemma eelduse järgi on $g \in G$ hulga D mingi elemendiga kooskõlas, seega $g \in T_D$ kaudu kehtib hulga T_D defineerinud disjunktsiooni esimene pool. Tähendab, g on tugevam kui teatav $D \subseteq P$ element d' . Ideaal on nõrgemate tingimuste suhtes kinnine, kust $d' \in G$ ja viimaks $d' \in G \cap D \neq \emptyset$. ■

Lemmade sõnastamiseks on mõistlik defineerida paar täiendavat tugevusega seotud mõistet.

Definitsioon III.2 (hulga tugevus, ülitugevus, täielik ülitugevus, [Wea14, lk 30]).

- Alamkogumit $T \subseteq P$ nimetatakse *tingimuse p suhtes tugevaks*, kui hulgas T leidub tingimusest p tugevam element.
- Alamkogumit $T \subseteq P$ nimetatakse *alamkogumi $E \subseteq P$ suhtes tugevaks*, kui T on iga $e \in E$ suhtes tugev. (Varem oli defineeritud tugevus konkreetset P suhtes.)
- Ütleme, et alamkogum $T \subseteq P$ on *tingimuse p suhtes ülitugev*, kui T on hulga

$$\{ q \in P \mid \text{„}q \text{ on tugevam kui } p\text{“} \} = p^\supseteq \cap P$$

suhtes tugev (kogum $p^\supseteq$ on pärisklass, $p^\supseteq \neq p^\subseteq$). Erijuhul sisaldab T kõiki tingimusest p tugevamaid elemente, $p^\supseteq \cap P \subseteq T$. Sel juhul räägime alamkogumi T *täielikust*

ülitugevusest p suhtes.

Täielikust ülitugevusest tingimuse p suhtes johtub ülitugevus iga tingimusest p tugevama elemendi suhtes. Ülitugevusest p suhtes järeldub tugevus kõigi tingimusest p tugevamate elementide suhtes.

Sõnastame ja tõestame metalemmad. Mõlema tõestuses rakendame abimetalemmat III.3.

Metalemma III.4 ([Wea14, lk-d 38–39]). *Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteorias $T \supseteq \mathbf{ZFC}$. Las olla $P \in M$ tingimuskogum, $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Kui alamkogum $T \subseteq P$ on M -nähtav ja ükskõik millise $g' \in G$ suhtes ülitugev, siis $G \cap T \neq \emptyset$.*

Tõestus. Eelduste põhjal $T \subseteq P$, $T \in M$ ja T on tingimuse g' suhtes ülitugev. Abimetalemma III.3 tarbeks näitame, et ideaali G iga element on ühitatav mingi T elemendiga. Las $g \in G$. Ideaali definitsiooni põhjal leidub g ja g' kooskõlalise tunnistaja q . Hulk T on ülitugev g' suhtes, järelikult tugev q suhtes. Tugevuse tunnistaja $\tau \in T$, kus $\tau \supseteq q$, tunnistab ka elementide g ja τ ühitatavust. Abimetalemma III.3 nõuded on rahuldatud, võttes $D := T$, seega $G \cap T \neq \emptyset$. ■

Teine metalemma ütleb, et iga alamkogum $H \supseteq G$ on mingi G elemendi suhtes täielikult ülitugev.

Metalemma III.5 ([Wea14, lk-d 38–39]). *Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteorias $T \supseteq \mathbf{ZFC}$. Las olla $P \in M$ tingimuskogum, $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Kui alamkogum $H \subseteq P$ on M -nähtav ja $G \subseteq H$, siis H on mingi tingimuse $\tilde{g} \in G$ suhtes täielikult ülitugev.*

Tõestus. Kuna $G \subseteq H$, siis $G \cap (P \setminus H) = \emptyset$. Vältimaks abilemma III.3 rakendumist hulgale $D := P \setminus H$ ja seega vastuolu tingimusega $G \cap (P \setminus H) \neq \emptyset$, peab leiduma niisugune $\tilde{g} \in G$, mis pole ühegi $P \setminus H$ elemendiga kooskõlas. Iseäranis ongi H tingimuse $\tilde{g}$ suhtes täielikult ülitugev. Kui ükskõik milline elemendist $\tilde{g}$ tugevam q ei kuuluks hulka H , kehtiks $q \in P \setminus H$ ja q sobiks tingimuste $\tilde{g}$ ja q kooskõlalise tunnistajaks, vastuolu $\tilde{g}$ valikuga. ■

1.5. P -nimed, Weaveri P -nimed. P -nimede kandjad. Laiend $M[G]$

Üldiselt jäi geneeriline ideaal $G \subseteq P$ väljapoole loenduvast epsilon-kvaasimudelitest M . Meta-lause III.2 järgi kuulus $G \in M$ parajasti siis, kui tingimuskogumis P leidis triviaalne tingimus. Tavaliselt triviaalset tingimust ei eksisteeri, seega peame kvaasimudelile M geneerilise ideaali G

lisama. Sealjuures tuleb tagada, et saadav $M[G]$ oleks jätkuvalt valemimetahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathbf{ZFC}^+$. [Wea14, lk 33]

Mudeldamise säilitamiseks peame jõustamislaendis arvestama „uute hulkadega“, mis kvaasimudelis M olid nähtamatud. Kui M -kodanik saaks ilmutuse geneerilisest ideaalist $G \notin M$, võiks niisugune kodanik moodustada kvaasimudeli M hulkade $X \in M$ varem tundmatuid alamhulki:

$$R^{-1}(G) := \{x \in X \mid \exists p \in G((x, p) \in R)\},$$

kus $R \subseteq X \times P$ on suvaline M -nähtav seos. Paraku on uusi M -hulki palju rohkem. Kui uus $Y \in M$ on käes, võib hulga X asendada näiteks hulgaga Y või $\mathcal{P}(Y \times Y)^M$ ja pöördseoste moodustamist korrata. Vajame meetodit, kuidas ühekorraga uusi hulki kirjeldada. [Wea14, lk 34]

Osutub, et uute hulkade leidmise protsessi saab jagada kahte ossa [Wea14, lk 34].

- 1) Kõigepealt moodustame seoste hierarhia $(V_\alpha^P)_{\alpha \in \mathbf{Ord}}$, mida kutsutakse *P-nimede hierarhiaks*. Hierarhia moodustamine ei sõltu geneerilisest ideaalist G , kuid viiakse ikkagi läbi meie universumis.
 - Weaveri [Wea14, lk 34] eeskujul eraldame P -nimede hulgast ülespoole $\subseteq$ -kinniste P -nimede hierarhia. P -nimeks ja ülespoole kinniseks P -nimeks $(W_\alpha^P)_{\alpha \in \mathbf{Ord}}$ olemine on absoluutne. Niisuguses tähenduses saab epsilon-kvaasimudeli M aru, kas selle element on (ülespoole $\subseteq$ -kinnine) P -nimi või mitte.
- 2) Saadud seostest ehk P -nimedest moodustame pöördseosed, saadav hulk on *jõustamislaend* $M[G]$. Vastavaid pöördseoseid kutsume *P-nimede kandjateks*. Protsess toimub tüüpiliselt väljaspool epsilon-kvaasimudelit M , sest reeglina $G \notin M$. [Kun80, lk-d 188–189]

Märkus III.3. Bakalaureusetöös toodud Weaveri P -nimi ja Weaveri [Wea14, lk 34] mõttes P -nimi lõpuni ei kattu. Weaveri [Wea14, lk 34] P -nimi oleks meie mõttes **M**-tõkestatud Weaveri P -nimi, vt metadefinitsiooni III.6. Niisugususe muudatuse tegime, et paremini avada tavaliste ning Weaveri P -nimede omavahelist seost, mis on kahe nimevariandi paralleelseks rakendamiseks tarvilik. Mõlemat variandi tundes saame valida sellise P -nime, mille kasutamine on parasjagu lihtsam. Märgive ka, et ainult Weaveri [Wea14, lk 34] definitsiooniga piirdudes poleks varasemate absoluutsuse tulemuste kasutamine võimalik, sest vastav definitsioon poleks antav teooria $\mathbf{ZFC}$ keeles, sisaldades konstantsümbolit **M**.

Järgnevas viies alamjaotises 1.5.1–1.5.5 ning jaotises 1.6 defineerime nimetatud mõisted rangelt ja tõestame nende kohta käivaid põhilisi omadusi.

1.5.1. P -nime definitsioon ja absoluutsus

Alustame P -nime definitsioonist ehk seoste hierarhiast. P -nimed ehitatakse transfiniitse rekursiooniga (järelusskeem 1.22, tingimuskogum P on parameetri rollis). Tingimuskogumi P definitsioonist johtuvalt on kõik tingimuskogumist rääkivad definitsioonid ning tulemused tegelikult metadefinitsioonid ning metatulemused. Kui aga epsilon-kvaasimudeli M pole sõnastuses ega definitsioonis tähtis, jätame täiendsõna *meta*- täpsust kaotamata ära.

Definitsioon III.4 (P -nimi, nimeastak, [Wik22; Kun80, lk 188]). Olgu P tingimuskogum. Hierariat $(V_\alpha^P)_{\alpha \in \text{Ord}}$ nimetatakse P -nime hierarhiaks, kui

$$\begin{cases} V_0^P &= \emptyset, \\ V_{\alpha^+}^P &= \mathcal{P}(V_\alpha^P \times P), \\ V_\alpha^P &= \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta^P, \text{ kui } \alpha \neq 0 \text{ on piirordinaalarv.} \end{cases}$$

Vastavat ühendklassi $V^P = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha^P$ kutsutakse P -nime klassiks. Elemente $\tau \in V^P$ kutsutakse P -nime deks. Hulga x nimeastak defineeritakse järgmiselt:

$$\text{nRank}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{kui } x \in V_{\alpha^+}^P \wedge x \notin V_\alpha^P, \\ \emptyset & \text{mujal.} \end{cases}$$

Weaveri [Wea14, lk 34] järgi defineerime ülespoole $\subseteq$ -kinnised P -nimed, nimeastaku.

Definitsioon III.5 (ülespoole $\subseteq$ -kinnine ehk Weaveri P -nimi, [Wea14, lk 34]). Olgu P tingimuskogum. Hierariat $(W_\alpha^P)_{\alpha \in \text{Ord}}$ nimetatakse P -nime hierarhiaks, kui

$$\begin{cases} W_0^P &= \emptyset, \\ W_{\alpha^+}^P &= \{ \tau \in \mathcal{P}(W_\alpha^P \times P) \mid \text{„}\tau \text{ on ülespoole } \subseteq\text{-kinnine“} \}, \\ W_\alpha^P &= \bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta^P, \text{ kui } \alpha \neq 0 \text{ on piirordinaalarv,} \end{cases}$$

kus

$$\text{„}\tau \text{ on ülespoole } \subseteq\text{-kinnine“} \doteq (\forall \sigma \in \text{dom } \tau)(\forall p, q \in P)((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q \Rightarrow (\sigma, q) \in \tau).$$

Vastavat ühendklassi $W^P = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} W_\alpha^P$ kutsutakse ülespoole $\subseteq$ -kinniste P -nime klassiks. Elemente $\tau \in W^P$ kutsutakse ülespoole $\subseteq$ -kinnisteks P -nime deks. Lühemalt räägime Weaveri

P-nimedest. Hulga x Weaveri nimeastak defineeritakse järgmiselt [Wea14, lk 34]:

$$\bar{\mathbf{n}}\mathbf{Rank}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{kui } x \in \mathbf{W}_{\alpha+}^P \wedge x \notin \mathbf{W}_{\alpha}^P, \\ \emptyset & \text{mujal.} \end{cases}$$

Võrdle nimeastakute definitsiooni hulga astaku mõistega.

Järgmine lause valgustab (Weaveri) *P*-nimede struktuuri ning tavaliste ning Weaveri *P*-nimede omavahelist seost.

Lause III.6. *Kehtivad järgmised väited.*

- (1) Tühi hulk $\emptyset$ on (Weaveri) *P*-nimi (Weaveri) nimeastakuga 0. Iga $1 \geq \alpha \in \mathbf{Ord}$ puhul $\emptyset \in \mathbf{V}_{\alpha}^P \cap \mathbf{W}_{\alpha}^P$.
- (2) Kui τ on (Weaveri) *P*-nimi ja $x \in \tau$, siis $x = (\sigma, p)$, kus σ on mingisugune (Weaveri) *P*-nimi, $p \in P$ ning $(\bar{\mathbf{n}}\mathbf{Rank}(\sigma) < \bar{\mathbf{n}}\mathbf{Rank}(\tau)) \mathbf{nRank}(\sigma) < \mathbf{nRank}(\tau)$.
- (3) Iga ordinaalarvu α, β korral, kui $\alpha \leq \beta$, siis $\mathbf{V}_{\alpha}^P \subseteq \mathbf{V}_{\beta}^P$ [Van16, lk 21] ja $\mathbf{W}_{\alpha}^P \subseteq \mathbf{W}_{\beta}^P$.
- (4) Kui hulk τ koosneb paaridest (σ, p) , kus σ on *P*-nimi ja $p \in P$, siis τ on *P*-nimi. Kui hulk τ koosneb paaridest (σ, p) , kus σ on Weaveri *P*-nimi, $p \in P$, ja τ on ülespoole $\subseteq$ -kinnine, siis τ on Weaveri *P*-nimi.
- (5) Iga $\alpha \in \mathbf{Ord}$ korral $\mathbf{W}_{\alpha}^P \subseteq \mathbf{V}_{\alpha}^P$.
- (6) Iga τ korral kehtib implikatsioon

$$„\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi}“ \Rightarrow „\tau \text{ on } P\text{-nimi}“.$$

Vastupidine implikatsioon reeglina ei kehti.

- (7) Iga hulga τ puhul $\bar{\mathbf{n}}\mathbf{Rank}(\tau) \leq \mathbf{nRank}(\tau)$. Kui τ on Weaveri *P*-nimi, siis $\bar{\mathbf{n}}\mathbf{Rank}(\tau) = \mathbf{nRank}(\tau)$.

Tõestus. Põhjendame näitlikustamiseks väite (3) Weaveri *P*-nimede ning väite (4) *P*-nimede jaoks.

- (3) Induktsioonihüpoteesi tugevdamiseks toome sisse abimuutuja γ ning tõestame väite

$$(\forall \gamma \in \mathbf{Ord}) \overbrace{\forall \beta, \alpha (\alpha < \beta \leq \gamma \Rightarrow \mathbf{W}_{\alpha}^P \subseteq \mathbf{W}_{\beta}^P)}^{\varphi[\gamma]}.$$

Kasutame teoreemiskeemi I.19 ühe eeldusega transfiniitset versiooni valemile $\varphi[\gamma]$. Oletame, et mingi $\gamma \in \mathbf{Ord}$ jaoks kehtib iga $\delta < \gamma$ korral väide $\varphi[\gamma/\delta]$, s.o ekvivalentselt võtame induktsiooneelduseks

$$\forall \beta', \alpha' (\alpha' < \beta' \leq \delta \Rightarrow \mathbf{W}_{\alpha'}^P \subseteq \mathbf{W}_{\beta'}^P),$$

ja näitame, et siis kehtib ka $\varphi[\gamma]$. Olgu $\beta \leq \gamma$. Väide $\varphi[\gamma]$ on vahetult ühendi definit-sioonist tuletatav, kui β on piirordinaalarv. Olgu seetap $\beta := b^+$. Kui nüüd $\alpha < b$, siis induktsiooneeldusest $\mathbf{W}_{\alpha}^P \subseteq \mathbf{W}_b^P$, võttes $\alpha' := \alpha$, $\beta' := b$ ning $\delta := b^+$. Järelikult piisab tõestada, et $\mathbf{W}_b^P \subseteq \mathbf{W}_{b^+}^P$.

Las $\tau \in \mathbf{W}_b^P$, siis τ on ülespoole $\subseteq$ -kinnine ning leidub $b' < b$ nii, et $\tau \subseteq \mathbf{W}_{b'}^P \times P$. Taas pea identselt induktsiooneeldusest $\mathbf{W}_{b'}^P \subseteq \mathbf{W}_b^P$, millest $\tau \subseteq \mathbf{W}_{b'}^P \times P \subseteq \mathbf{W}_b^P \times P$. Seetõttu

$$\tau \in \{ \sigma \in \mathcal{P}(\mathbf{W}_b^P \times P) \mid \text{„}\sigma \text{ on ülespoole } \subseteq\text{-kinnine“} \} = \mathbf{W}_{b^+}^P.$$

Kokkuvõttes $\mathbf{W}_b^P \subseteq \mathbf{W}_{b^+}^P$, nagu oli tarvis.

- (4) Tõestame tulemuse üksnes P -nimede jaoks, Weaveri P -nimede korral on tõestus analoogiline. Koosnegu τ paaridest (σ, p) , kus σ on P -nimi ja $p \in P$. Asendusaksioomiskeemiga moodustame hulga

$$\mathbf{nRank}(\text{dom } \tau) = \{ \alpha \in \mathbf{Ord} \mid \exists \sigma, p ((\sigma, p) \in \tau \wedge \alpha = \mathbf{nRank}(\sigma)) \}.$$

Lause I.11 osa (1) ning lause I.10 osa (5) järgi on $(\bigcup \mathbf{nRank}(\text{dom } \tau))^+ =: \beta$ ordinaalarv, sealjuures suurem kui kõik ordinaalarvud hulgas $\mathbf{nRank}(\text{dom}(\tau))$. Osa (3) ja nimeastaku definitsiooni põhjal $\tau \subseteq \mathbf{V}_{\beta}^P \times P$, kust hiljemalt $\tau \in \mathbf{V}_{\beta^+}^P$. Seega $\tau \in \mathbf{V}^P$ ehk tegu tõesti P -nimega. ■

Järeldamise lause põhieesmärk on tõestada, et omadus „ τ on (Weaveri) P -nimi“ on absoluutne piisava epsilon-kvaasimudeli suhtes. Selleks ehitame vastavale omadusele karakteristliku klassifunktsiooni. Kasutame potentselt regulaarset rekursiooni. Seoseks $z \mathbf{E} x$ võtame $z \in \bigcup \bigcup x$. P -nimeks olemise absoluutsus tuleneb potentselt regulaarse rekursiooni absoluutsusest, meta-teoreemiskeemist II.13.

Lause III.7 (P -nimeks olemise absoluutsus). (1) *Seos $z \mathbf{E} x \doteq z \in \bigcup \bigcup x$ on potentselt regulaarne klassil $\mathbf{U}$.*

- (2) i) Olgu $G_1: \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \{0, 1\}$ klassifunktsioon [Kun80, lk 188], kus

$$G_1(\tau, f) = \begin{cases} 1, & \text{kui „}\tau \text{ on seos“} \wedge (\forall \sigma \in \text{dom } \tau)(f(\sigma) = 1) \wedge \\ & \wedge (\forall p \in \text{ran } \tau)(p \in P), \\ 0 & \text{vastasel korral.} \end{cases}$$

Tähistame klassil $\mathbf{U}$ seosega E osast (1) ja klassifunktsiooniga G_1 läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui F_1 . Kehtib ekvivalents $\tau \in \mathbf{V}^P \Leftrightarrow F_1(\tau) = 1$ [Kun80, lk 188] ehk

$$\text{„}\tau \text{ on } P\text{-nimi“} \Leftrightarrow F_1(\tau) = 1.$$

- ii) Olgu $G_2: \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \{0, 1\}$ klassifunktsioon, kus

$$G_2(\tau, f) = \begin{cases} 1, & \text{kui „}\tau \text{ on seos“} \wedge (\forall \sigma \in \text{dom } \tau)(f(\sigma) = 1) \wedge \\ & \wedge (\forall p \in \text{ran } \tau)(p \in P) \wedge \text{„}\tau \text{ on ülespoole } \subseteq\text{-kinnine“}, \\ 0 & \text{vastasel korral.} \end{cases}$$

Tähistame klassil $\mathbf{U}$ seosega E osast (1) ja klassifunktsiooniga G_2 läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui F_2 . Kehtib ekvivalents $\tau \in \mathbf{W}^P \Leftrightarrow F_2(\tau) = 1$ ehk

$$\text{„}\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“} \Leftrightarrow F_2(\tau) = 1.$$

- (3) Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZF})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \mathbf{ZF}$, sh tingimuskogum kuulugu klassi M , s.o $P \in M$. Omadused „ τ on P -nimi“ [Kun80, lk 188] ning „ τ on Weaveri P -nimi“ on M -absoluutsed.

Lause III.7 osa (3) on tegelikult omaette metalauseskeem.

Tõestus. (1) Seos $z E x := z \in \bigcup \bigcup x$ on hulgalaadne, sest $\text{ext}_E(x) = \{z \in \mathbf{U} \mid z E x\} = \bigcup \bigcup x$ on hulk. Põhjendame, miks klass $\mathbf{U}$ on potentselt E -regulaarne. Kui $x \neq \emptyset$, siis saame regulaarsuse aksioomi kasutades valida vähima astakuga Rank elemendi $\xi \in x$. See ξ sobib rangelt E -minimaalseks elemendiks hulgas x . Vastasel korral leiduks $\xi' \in x$ nii, et $\xi' \in \bigcup \bigcup \xi$. Eriti siis $\xi' \in \text{tc}_E(\xi) = \text{tc}(\xi)$, lause I.28 osa (4) järgi $\text{Rank}(\xi') < \text{Rank}(\xi)$. Vastuolu elemendi ξ valikuga.

- (2) Tõestame tulemuse üksnes Weaveri P -nimede jaoks, tavaliste P -nimede korral on tõestus analoogiline.

- ii) Selgesti on $G_2(\tau, f)$ klassifunktsioon klassil $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$, seose E potentne regulaarsus

klassil $\mathbf{U}$ osast (1). Rekursioon on korrektne (teoreemiskeem I.20). Olgu rekursioonist saadud üheselt määratud klassifunktsioon F_2 . Tõestame, et kehtib ekvivalents

$$„\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi}“ \Leftrightarrow F_2(\tau) = 1.$$

Potentselt regulaarse induktsiooniga seose E järgi. Oletame, et mingi hulga τ jaoks kehtib ekvivalents kõigi $\sigma \in \bigcup \bigcup \tau$ korral. Näitame, et sellest järeldub ekvivalents τ jaoks. Vaatleme kahte juhtu.

($\Leftarrow$) $F_2(\tau) = 1$. Siis $G_2(\tau, F_2(\tau)|_{\bigcup \bigcup \tau}) = 1$. Järelikult τ on ülespoole $\subseteq$ -kinnine seos, mille elemendid $(\sigma, p) \in \tau$ on sellised, et $F_2(\sigma) = 1$ ja $p \in P$. Kuratowski järjestatud paari definitsioonist $\sigma E \tau$, induktsioonihüpoteesist on σ Weaveri P -nimi. Niisiis hulk τ koosneb paaridest (σ, p) , kus σ on Weaveri P -nimi, $p \in P$, ja τ on ülespoole $\subseteq$ -kinnine. Lause III.6 osa (4) põhjal on τ Weaveri P -nimi.

($\Rightarrow$) $F_2(\tau) = 0$. Siis $G_2(\tau, F_2(\tau)|_{\bigcup \bigcup \tau}) = 0$. Peab kehtima klassifunktsiooni G_2 konjunktsiooni eitus. Kui τ pole ülespoole $\subseteq$ -kinnine, pole vahetult definitsioonist tegu Weaveri P -nimega. Lause III.6 osa (2) järgi on Weaveri P -nimi seos, koosnedes sealjuures paaridest (σ, p) , kus σ on Weaveri P -nimi ja $p \in P$. Seega kui τ pole seos või kui leidub $p \in \text{ran } \tau$ nii, et $p \notin P$, ei saa τ olla Weaveri P -nimi. Viimane variant on, et leidub $\sigma \in \text{dom } \tau$, mispuhul $F_2(\sigma) = 0$. Induktsioonihüpoteesist pole siis σ Weaveri P -nimi, kust ka τ pole Weaveri P -nimi.

- (3) Tõestame tulemuse taas Weaveri P -nimede jaoks. Osa (2) põhjal on hulk τ Weaveri P -nimi parajasti siis, kui $F_2(\tau) = 1$. Ekvivalentsi tõestus on asendusteoorias T kenasti tehtav, seega läheb see metateoreemiskeemi II.1 mõttes läbi epsilon-kvaasimudel M . Funktsiooni F_2 defineerisime potentselt regulaarse rekursiooniga. Absoluutsuse tõestamiseks piisab niisiis näidata, et funktsiooni F_2 saamise rekursioon on M -absoluutne.

Kontrollime metateoreemiskeemi II.13 eeldusi. Teooria T ja epsilon-kvaasimudel M sobivad. Edasi

- 1) $\mathbf{U}$ on klassina M -absoluutne, sest $x = x$ on absoluutne;
- 2) E on seosena M -absoluutne, sest $z \in \bigcup \bigcup x$ on absoluutne;
- 3) tingimused „ τ on seos“, $(\forall \sigma \in \text{dom } \tau)(f(\sigma) = 1)$, $(\forall p \in \text{ran } \tau)(p \in P)$ ja nende eitused on absoluutsed, lisaks $P \in M$. Funktsioonid $\tau \mapsto \text{dom } \tau$, $\tau \mapsto \text{ran } \tau$ on

funktsioonidena absoluutsed, 0, 1 on konstantidena absoluutsed. Seetõttu on ka $\mathcal{G}$ funktsioonina absoluutne;

- 4) kui $x \in M$, siis $(y = \bigcup \bigcup x)|_M \Leftrightarrow y = \bigcup \bigcup x$. Samuti $\bigcup \bigcup x \in M$, sest $x \mapsto \bigcup \bigcup x$ on funktsioonina absoluutne. Seega tõesti saame, et „ E on hulgalaadne klassil $\mathbf{U}|_M$ “;
- 5) kui $x \in \mathbf{U} \cap M = M$, siis $\text{ext}_\epsilon(x) = \bigcup \bigcup x \in M$ ja epsilon-kvaasimudeli M transitiivsuse tõttu $\text{ext}_\epsilon(x) \subseteq M$.

Kõik eeldused on täidetud. Kokkuvõttes ongi omadus „ τ on Weaveri P -nimi“ asendusteoorias $\mathcal{T}M$ -absoluutne. ■

Lause III.7 osa (3) väite ümbersõnastusena võime öelda, et klassid V^P ja W^P on M -absoluutsed piisava epsilon-kvaasimudeli M suhtes, st

$$(V^P)^M = V^P \cap M, \quad (W^P)^M = W^P \cap M.$$

Metadefinitsioon III.6 (tõkestatud (Weaveri) P -nimede klass). Olgu M aksioomide meta-hulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $\mathcal{T} \supseteq \mathbf{ZFC}$. Las P olla tingimuskogum hulgas M .

- a. Tõkestatud P -nimede klassiks M^P [Kun80, lk 189] kutsutakse hulka

$$\begin{aligned} M^P &:= \{ \tau \in M \mid \text{„}\tau \text{ on } P\text{-nimi“}|_M \} = \{ \tau \in M \mid \text{„}\tau \text{ on } P\text{-nimi“} \} = \\ &= V^P \cap M = (V^P)^M. \end{aligned}$$

- b. Tõkestatud Weaveri P -nimede klassiks M_W^P [Wea14, lk 34] kutsutakse hulka

$$\begin{aligned} M_W^P &:= \{ \tau \in M \mid \text{„}\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“}|_M \} = \{ \tau \in M \mid \text{„}\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“} \} \\ &= W^P \cap M = (W^P)^M. \end{aligned}$$

P -nimedest ja Weaveri P -nimedest on kõige olulisemad just tõkestatud nimed. Tõestame, et lause III.6 osa (2) esimene pool kehtib analoogselt tõkestatud (Weaveri) P -nimede jaoks.

Metalemma III.8. Olgu M aksioomide meta-hulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $\mathcal{T} \supseteq \mathbf{ZFC}$, las olla $P \in M$ tingimuskogum. Kui τ on tõkestatud (Weaveri) P -nimi ja $y \in \tau$, siis $y = (\sigma, p)$, kus σ on mingisugune tõkestatud (Weaveri) P -nimi

ning $p \in P$.

Tõestus. (Weaveri) P -nimeks olemise absoluutsuse tõttu on tõkestatud (Weaveri) P -nimed ka päriselt (Weaveri) P -nimed. Kui τ on tõkestatud (Weaveri) P -nimi ja $y \in \tau$, siis lause III.6 osa (2) järgi $y = (\sigma, p)$, kus σ on (Weaveri) P -nimi, $p \in P$. Kuratowski järjestatud paari definitsiooni järgi $\sigma \in \bigcup \bigcup \tau$. Ühendi absoluutsusest funktsioonina $\bigcup \bigcup \tau \in M$, transitiivsusest $\bigcup \bigcup \tau \subseteq M$, sestap $\sigma \in M$. Uuesti (Weaveri) P -nimeks olemise absoluutsusest tulenevalt on σ tõkestatud Weaveri P -nimi. ■

1.5.2. P -nime kandja definitsioon ja absoluutsus

Siin jaotises defineerime (Weaveri) P -nimede kandjad ehk moodustame seoste hierarhia kaudu sobivad pöördseosed. Olgu $D \subseteq P$ suvaline alamkogum, rakendustes on hiljem D geneeriline ideaal. Kui τ_1 on P -nimi ja τ_2 Weaveri P -nimi, tähistame vastavaid kandjaid kui $\text{val}_D(\tau_1)$ ning $\overline{\text{val}}_D(\tau_2)$. Need hulga ehitatakse potentselt regulaarse rekursiooniga klassidel $\mathbf{V}^P$ ning $\mathbf{W}^P$, piltlikult defineeritakse [Kun80, lk 189; Wea14, lk 35]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{val}_D(\emptyset) = \emptyset, \\ \text{val}_D(\tau_1) = \{ \text{val}_D(\sigma_1) \mid \sigma_1 \in \tau_1^{-1}(D) \} \end{array} \right\} \quad \text{ja} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\text{val}}_D(\emptyset) = \emptyset, \\ \overline{\text{val}}_D(\tau_2) = \{ \overline{\text{val}}_D(\sigma_2) \mid \sigma_2 \in \tau_2^{-1}(D) \}. \end{array} \right.$$

Siin tähistab $\tau_i^{-1}(D)$ hulga D originaali seosega τ_i , tähendab

$$\sigma_i \in \tau_i^{-1}(D) \Leftrightarrow \exists p \in D((\sigma_i, p) \in \tau_i).$$

Kandja saamise rekursioon on loogiline ses mõttes, et kui τ_i jaoks kandjat defineeritakse, on „varasemad kandjad“ juba valmis, s.o

$$\exists p \in D((\sigma_i, p) \in \tau_i) \Rightarrow \text{nRank}(\sigma_i) < \text{nRank}(\tau_i)$$

tänu lause III.6 osale (2).

Vastavate rekursioonide range vorm on toodud järgmises

lauses III.9 ([Vso22]). Olgu $D \subseteq P$, kus P tingimuskogum.

(1) Seos $\sigma \mathbf{E} \tau \doteq \sigma \in \tau^{-1}(D)$ on potentselt regulaarne klassidel $\mathbf{V}^P$ ja $\mathbf{W}^P$.

(2) Olgu $G: \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ klassifunktsioon, kus

$$G(\tau, f) = G(f) = \begin{cases} \text{ran } f, & \text{kui „}f\text{ on funktsioon“,} \\ \emptyset & \text{vastasel korral.} \end{cases}$$

(Muutuja τ on fiktiivne.)

i) Tähistame klassil $\mathbf{V}^P$ seosega E osast (1) ja klassifunktsiooniga G läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui val_D . Kehtib väide

$$(\forall \tau \in \mathbf{V}^P) \quad \text{val}_D(\tau) = \{ \text{val}_D(\sigma) \mid \sigma \in \tau^{-1}(D) \}.$$

ii) Tähistame klassil $\mathbf{W}^P$ seosega E osast (1) ja klassifunktsiooniga G läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui $\overline{\text{val}}_D$. Kehtib väide

$$(\forall \tau \in \mathbf{W}^P) \quad \overline{\text{val}}_D(\tau) = \{ \overline{\text{val}}_D(\sigma) \mid \sigma \in \tau^{-1}(D) \}.$$

Tõestus. (1) Klasside $\mathbf{V}^P$ ja $\mathbf{W}^P$ potentse E -regulaarsuse tõestamiseks kasutame lauseskeemi 1.24. Piisab näidata, et leidub klassifunktsioon $F: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Ord}$ nii, et

$$\forall \sigma, \tau \in \mathbf{V}^P (\sigma E \tau \Rightarrow F(\sigma) < F(\tau)).$$

Sobib võtta $F := \mathbf{nRank}$, vastav range võrratus põhjendatud lausele III.9 vahetult eelnevas osas. Klassi $\mathbf{W}^P$ korral võtta $F := \mathbf{\bar{n}Rank}$ või kasutada kohe Weaveri P -nimede $\varrho \in \mathbf{W}^P$ jaoks kehtivat võrdust $\mathbf{nRank}(\varrho) = \mathbf{\bar{n}Rank}(\varrho)$ (lause III.6 osa (7)).

Hulgalaadsuseks märgime, et

$$\begin{aligned} \text{ext}_{\mathbf{V}^P, E}(\tau) &= \{ \sigma \in \mathbf{V}^P \mid \sigma E \tau \} = \\ &= \{ \sigma \in \mathbf{V}^P \mid \sigma \in \tau^{-1}(D) \} = \\ &= \{ \sigma \in \tau^{-1}(D) \mid \sigma \in \mathbf{V}^P \} = \\ &= \{ \sigma \in \tau^{-1}(D) \mid \text{„}\sigma \text{ on } P\text{-nimi“} \} \end{aligned}$$

on eraldamisaksioomiskeemi põhjal hulk. Analoogiliselt on hulk

$$\text{ext}_{\mathbf{W}^P, E}(\tau) = \{ \sigma \in \tau^{-1}(D) \mid \text{„}\sigma \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“} \}.$$

- (2) Tõestame Weaveri P -nimede jaoks ehk alamosa ii), tavaliste P -nimede korral igati analoogiline. Olgu $\tau \in \mathbf{W}^P$. Teoreemiskeemist I.20 (arvestades, et τ on praegusel juhul klassifunktsioonis $\mathcal{G}$ fiktiivne)

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{val}}_D(\tau) &= \mathcal{G}(\tau, \overline{\mathbf{val}}_D|_{\text{ext}_{\mathbf{W}^P, E}(\tau)}) = \\
&= \mathcal{G}(\overline{\mathbf{val}}_D|_{\text{ext}_{\mathbf{W}^P, E}(\tau)}) = \\
&= \text{ran } \overline{\mathbf{val}}_D|_{\text{ext}_{\mathbf{W}^P, E}(\tau)} = \\
&= \{ \overline{\mathbf{val}}_D(\sigma) \mid \sigma \in \text{ext}_{\mathbf{W}^P, E}(\tau) \} = \\
&= \{ \overline{\mathbf{val}}_D(\sigma) \mid \sigma \in \mathbf{W}^P \wedge \sigma E \tau \} = \\
&= \{ \overline{\mathbf{val}}_D(\sigma) \mid \sigma \in \mathbf{W}^P \wedge \sigma \in \tau^{-1}(D) \} = \\
&= \{ \overline{\mathbf{val}}_D(\sigma) \mid \sigma \in \tau^{-1}(D) \}.
\end{aligned}$$

Viimases võrduses kasutame tingimuse $\sigma \in \mathbf{W}^P$ ära jätmiseks teadmist, et τ oli Weaveri P -nimi, sisalduvust $D \subseteq P$ ning lause III.6 osa (2)). ■

Saame anda range (Weaveri) P -nime kandjate määratluse.

Definitsioon III.7 ((Weaveri) P -nime kandja). Olgu P tingimuskogum, las $D \subseteq P$ alamkogum. Olgu $\mathbf{val}_D$ ja $\overline{\mathbf{val}}_D$ klassifunktsioonid vastavalt lause III.9 osa (2) jaotistest i) ning ii).

- Klassi $\mathbf{val}_D(\mathbf{V}^P)$ elemente $\mathbf{val}_D(\tau)$, $\tau \in \mathbf{V}^P$, kutsume P -nimede D -kandjateks [Kun80, lk 189].
- Klassi $\overline{\mathbf{val}}_D(\mathbf{W}^P)$ elemente $\overline{\mathbf{val}}_D(\tau)$, $\tau \in \mathbf{W}^P$, kutsume Weaveri P -nimede D -kandjateks [Wea14, lk 35].

Kui hulk D on kontekstist selge, räägime lihtsalt (Weaveri) P -nimede kandjatest. Kirjanduses kohtab P -nime kandja $\mathbf{val}_D(\tau)$ jaoks tähistusi $\mathbf{val}(\tau, D)$ [Kun13, lk 247], τ^D [Wea14, lk 35] ja τ_D [Kun80, lk 189]. Erandkorras, kui on tarvis rõhutada tingimuskogumit P , kirjutame kuju $\mathbf{val}$ asemel $\mathbf{val}^P$.

P -nime D -kandjate klassifunktsioonid $\mathbf{val}_D$ ja $\overline{\mathbf{val}}_D$ on funktsioonidena absoluutsed piisava epsilon-kvaasimudeli $\mathcal{M}$ suhtes, kui sealjuures $D \in \mathcal{M}$. Niisugune absoluutsus on oluline alles hiljem, kui tõestame jõustamislaiendi $M[G]$ vähimust. [Kun80, lk 189]

Metalauskeem III.10 (kandja klassifunktsioonide absoluutsus funktsioonina). Las olla $\mathcal{M}$ aksiomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZF})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \mathbf{ZF}$.

Olgu $P \in \mathcal{N}$ tingimuskogum, $D \subseteq P$ alamkogum ning lisaks $\underline{D} \in \mathcal{N}$. Siis

- (1) klassifunktsioon $\mathbf{val}_D$ on funktsioonina $\mathcal{N}$ -absoluutne [Kun80, lk 189],
- (2) klassifunktsioon $\overline{\mathbf{val}}_D$ on funktsioonina $\mathcal{N}$ -absoluutne.

Tõestus. Täiesti analoogilised, tõestame Weaveri P -nime kandjate jaoks.

- (2) Kontrollime metateoreemiskeemi II.13 eeldusi. Teooria $\mathcal{T}$ ja epsilon-kvaasimudel $\mathcal{N}$ sobivad. Edasi

- 1) $\mathbf{W}^P$ on klassina $\mathcal{N}$ -absoluutne, lause III.7 osa (3);
- 2) $\mathbf{E}$ ehk $\sigma \in \tau^{-1}(D)$ on seosena $\mathcal{N}$ -absoluutne, sest $\sigma \in \tau^{-1}(D) \Leftrightarrow \exists p \in D((\sigma, p) \in \tau)$ ja $\exists p \in D((\sigma, p) \in \tau)$ on absoluutne;
- 3) tingimus „ f on funktsioon“ ja selle eitus on absoluutsed. Funktsioon $\tau \mapsto \text{dom } \tau$ funktsioonina absoluutne, $\emptyset$ konstandina absoluutne. Seetõttu ka rekursioonist pärit $\mathcal{G}$, kus

$$\mathcal{G}(\tau, f) = \mathcal{G}(f) = \begin{cases} \text{ran } f, & \text{kui „}f \text{ on funktsioon“,} \\ \emptyset & \text{vastasel korral,} \end{cases}$$

on funktsioonina absoluutne;

- 4) kui $\tau \in \mathcal{N}$, siis $(y = \tau^{-1}(D))|_{\mathcal{N}} \Leftrightarrow y = \tau^{-1}(D)$, metateoreemiskeemi II.7 jaotise (5) osa (v). Samuti $\tau^{-1}(D) \in \mathcal{N}$, sest $\tau \mapsto \text{dom } \tau$ on funktsioonina absoluutne ja

$$\tau^{-1}(D) = \{ \sigma \in \text{dom } \tau \mid \exists p \in D((\sigma, p) \in \tau) \}$$

on saadav eraldamisaksioomiskeemiga. Iseäranis just $\mathcal{N}$ -ahendatud eraldamisaksioomiga, sest eraldamistingimus on absoluutne ning $\underline{D} \in \mathcal{N}$. Seega tõesti saame, et „ $\mathbf{E}$ on hulgalaadne klassil $\mathcal{U}|_{\mathcal{N}}$ “;

- 5) kui $\tau \in \mathbf{W}^P \cap \mathcal{N} = \mathcal{N}_W^P$, siis $\text{ext}_{\mathbf{E}}(x) = \tau^{-1}(D) \in \mathcal{N}$ ja epsilon-kvaasimudeli $\mathcal{N}$ transitiivsuse tõttu $\text{ext}_{\mathbf{E}}(x) \subseteq \mathcal{N}$.

Kõik eeldused on täidetud. Kokkuvõttes ongi $\overline{\mathbf{val}}_D$ on funktsioonina $\mathcal{N}$ -absoluutne. ■

Kavatsetud rakenduses on alamkogum D just geneeriline ideaal G . Piisab G kinnisusest nõrgemate tingimuste suhtes, et näidata kandjaklasside võrdusi $\mathbf{val}_G(\mathbf{V}^P) = \overline{\mathbf{val}}_G(\mathbf{W}^P)$ ja $\mathbf{val}_G(M^P) = \overline{\mathbf{val}}_G(M_W^P)$. Nende klasside võrduse tõestame järgnevas alamjaotises *geneereeritud*

Weaveri P -nimede abil. Samuti läheb tarvis lihtsat

lemmat III.11 ([Wea14, lk 35]). Olgu P tingimuskogum ning $D \subseteq P$ alamkogum. Kui τ on Weaveri P -nimi, siis $\text{val}_D(\tau) = \overline{\text{val}}_D(\tau)$.

Tõestus. Vahetu transfiniitne induktsioon ükskõik kumma nimeastaku järgi või potentselt regulaarne induktsioon seosel $\sigma \in \bigcup \bigcup \tau$. ■

1.5.3. P -nime poolt genereeritud Weaveri P -nimi. Laiend $M[G]$

Toome sisse P -nime τ poolt genereeritud Weaveri P -nime $\text{gW}(\tau)$ mõiste. Mõte on defineerida

$$\begin{cases} \text{gW}(\emptyset) = \emptyset, \\ \text{gW}(\tau) = \{ (\text{gW}(\sigma), q) \mid q \in P \wedge \exists p \in P ((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q) \}. \end{cases}$$

Niisiis saadakse genereeritud Weaveri P -nimi algsest P -nimest rekursiooniga, varasemast astmest võetakse kaasa juba loodud genereeritud nimed ning uuel astmel tagatakse ülespoole $\subseteq$ -kinnisus.

Märkus III.8. Siinne genereeritud Weaveri P -nimi on Weaveri [Wea14, lk 35] mõttes genereeritud P -nime üldistus. Lisaks märkuses III.3 kirjeldatud lahknevusele on erinevus selles, et Weaveri definitsioon ei ole (ega peagi olema) rekursiivse iseloomuga, samas kui meie määratlus on ja peabki olema rekursiivne. Weaver [Wea14] ei kasuta üldse tavalisi P -nimesid. Ta lähtub P -nime genereerimisel hulgast τ_0 , mille elementideks on paarid (σ, p) , kus σ on Weaveri P -nimi, kuid hulk τ_0 pole ülespoole $\subseteq$ -kinnine [Wea14, lk 35]. Seega piisab Weaveri P -nime saamiseks võtta hulgast τ_0 üks kord „ülespoole $\subseteq$ -sulund“. Meie lähtekohaks on hulk τ , mille paaride esimene koordinaat võib olla tavaline P -nimi. Sestap peame „ülespoole $\subseteq$ -sulundit“ võtma korduvalt ja rekursiivselt.

Rekursiooni range kuju, omadused ja absoluutsus on kirjas

lemmas III.12. Olgu P tingimuskogum ning seos $\sigma \mathbf{E} \tau \doteq \sigma \in \bigcup \bigcup \tau$ klassil $\mathbf{V}^P$. Olgu $G: \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ klassifunktsioon, kus

$$G(\tau, f) = \begin{cases} \{x \in \text{ran } f \times P \mid (\exists \sigma \in \text{dom } \tau)(\exists q \in P)((f(\sigma), q) = x \wedge \\ \quad \wedge \exists p \in P((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q))\}, \\ \text{kui „}\tau \text{ on seos“ ja „}f \text{ on funktsioon“,} \\ \emptyset \quad \text{vastasel korral.} \end{cases}$$

(Muutuja τ on aktiivne ning P on parameetri rollis.) Tähistame klassil $\mathbf{V}^P$ seosega $\mathbf{E}$ ja

klassifunktsiooniga G läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui gW . Siis

$$(\forall \tau \in V^P) \quad gW(\tau) = \{ (gW(\sigma), q) \mid q \in P \wedge \exists p \in P((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q) \}.$$

Lisaks saame järgmised võrdused ja omadused.

- (1) Iga P -nime τ korral on $gW(\tau)$ Weaveri P -nimi. Iga Weaveri P -nime τ korral $gW(\tau) = \tau$.
- (2) Kehtib klasside võrdus $gW(V^P) = W^P$.
- (3) Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(ZF)$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq ZF$, sealjuures $P \in M$. Klassifunktsioon $gW: V^P \rightarrow W^P$ on funktsioonina M -absoluutne.
- (4) Kehtib tõkestatud nimedest koosnevate klasside võrdus $gW(M^P) = M_W^P$, kus $P \in M$.

Osa (3), metalemmaskeem, annab muuseas Weaveri P -nimedele alternatiivse kirjelduse genereeritud Weaveri P -nimede kaudu.

Tõestus. Olgu $\tau \in V^P$ suvaline. Siis

$$\begin{aligned} gW(\tau) &= G(\tau, gW|_{\bigcup \bigcup \tau}) = \\ &= \{ x \in \text{ran}(gW|_{\bigcup \bigcup \tau}) \times P \mid (\exists \sigma \in \text{dom } \tau)(\exists q \in P)((gW(\sigma), q) = x \wedge \\ &\quad \wedge \exists p \in P((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q)) \} = \\ &= \{ (gW(\sigma), q) \mid \sigma \in \bigcup \bigcup \tau \wedge q \in P \wedge \exists p \in P((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q) \} = \\ &= \{ (gW(\sigma), q) \mid q \in P \wedge \exists p \in P((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q) \}. \end{aligned}$$

Põhjendame konspektiivselt ka võrdusi ning omadusi.

- (1) Kui τ on P -nimi, siis $gW(\tau)$ on Weaveri P -nimi. Näiteks transfiinitne induktsioon tavalise nimeastaku järgi või potentselt regulaarse induktsiooni abil seosega $\sigma \in \bigcup \bigcup \tau$. Sammus kasutada lause III.6 osa (4) ja põhjendada ülespoole $\subseteq$ -kinnisust. Weaveri P -nimede püsipunktilisus samuti transfiinitse induktsiooniga (Weaveri) nimeastaku järgi või samasuguse potentselt regulaarse induktsiooniga. Sammus $\tau \subseteq gW(\tau)$ korral kasutada lause III.6 osa (2), suunas $\tau \supseteq gW(\tau)$ nime τ ülespoole $\subseteq$ -kinnisust.
- (2) Osa (1) põhjal.
- (3) Taas metateoreemiskeemi II.13 eelduste kontroll. Enamiku põhjendusi saab üle kanda analoogilistest lausest III.7 ja metalauseskeemist III.10. Tõestame üksnes, et käesoleva

lemma $\mathcal{G}$ on funktsioonina absoluutne.

- 3) Tingimused „ τ on seos“, „ f on funktsioon“ ja nende eitused on absoluutsed. Funktsioonid $\tau \mapsto \text{dom } \tau$, $(f, X) \mapsto \text{ran } f \times X$ on funktsioonidena absoluutsed (metateoreemiskeem II.9), samuti $P \in \mathcal{M}$, seega $f \in \mathcal{M}$ korral $\text{ran } f \times P \in \mathcal{M}$. Klass $\mathcal{M}$ mudeldab eraldamisaksioomiskeemi ning vastav eraldamistingimus on metateoreemiskeemi II.7 järgi absoluutne. Tühi hulk $\emptyset$ on konstandina absoluutne. Kokkuvõttes on ka $\mathcal{G}$ funktsioonina absoluutne.

- (4) Osade (1) ja (3) põhjal, vt ka tõkestatud nimede metadefinitsiooni III.6.

Tulemus on tõestatud. ■

Olgu D_{cl} nõrgemate tingimuste suhtes kinnine alamkogum. Siis iga P -nime τ korral $\text{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau) = \overline{\text{val}}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau)) = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau))$. Tähendab, P -nime τ ja selle poolt genereeritud Weaveri P -nime $\text{gW}(\tau)$ D_{cl} -kandjad ühtivad.

Lemma III.13. *Olgu P tingimuskogum ning $D_{\text{cl}} \subseteq P$ olgu nõrgemate tingimuste suhtes kinnine alamkogum. Kehtib väide*

$$\forall \tau \in \mathbf{V}^P \quad \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau) = \overline{\text{val}}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau)) = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau)).$$

Tõestus. Olgu $\tau \in \mathbf{V}^P$ suvaline. Lemma III.12 osa (1) järgi on $\text{gW}(\tau)$ Weaveri P -nimi. Lemmast III.11 $\overline{\text{val}}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau)) = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau))$. Järelikult peame üksnes põhjendama, miks $\text{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau) = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau))$. Kasutame potentselt regulaarset rekursiooni seosega $\sigma \in \bigcup \bigcup \tau$. Kehtigu $\text{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma) = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\sigma))$ iga $\sigma \in \bigcup \bigcup \tau$ korral.

- $\text{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau) \subseteq \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau))$. Las $x \in \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau)$, siis $x = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma)$, kus $\sigma \in \tau^{-1}(D_{\text{cl}})$. Tähendab, et leidub $p \in D_{\text{cl}}$ nii, et $(\sigma, p) \in \tau$. Kuna $D_{\text{cl}} \subseteq P$, siis $p \in P$, $p \subseteq \subseteq p$ ja $(\sigma, p) \in \tau$. Lemma III.12 võrduse alusel $(\text{gW}(\sigma), p) \in \text{gW}(\tau)$. Seega leidub $p \in \in D_{\text{cl}}$ nõnda, et $(\text{gW}(\sigma), p) \in \text{gW}(\tau)$, vastavalt kandja määratlusele $\text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\sigma)) \in \in \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau))$. Induktsioonihüpoteesist $\text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\sigma)) = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma)$, mistõttu ka $x = = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma) \in \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau))$.
- $\text{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau) \supseteq \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau))$. Las $x \in \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\tau))$, siis $x = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\sigma))$ ja leidub $q \in D_{\text{cl}}$ nii, et $(\text{gW}(\sigma), q) \in \text{gW}(\tau)$. Sestap leidub $p \in P$, mille korral $(\sigma, p) \in \tau$ ja $p \subseteq q$. Alamkogum D_{cl} oli nõrgemate tingimuste suhtes kinnine, järelikult $p \in D_{\text{cl}}$. Niisiis leidub $p \in D_{\text{cl}}$, mispuhul $(\sigma, p) \in \tau$. Seetõttu $\text{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma) \in \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau)$. Induktsioonieeldusest $\text{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma) = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\sigma))$, mistõttu ka $x = \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\text{gW}(\sigma)) \in \text{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau)$. ■

Oleme valmis tõestama kandjaklasside võrdusi.

Metalauskeskeem III.14. Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $\mathcal{T} \supseteq \mathbf{ZFC}$. Olgu $P \in M$ tingimuskogum ja $G \subseteq P$ nõrgemate tingimuste suhtes kinnine alamkogum. Siis $\mathbf{val}_G(\mathbf{V}^P) = \overline{\mathbf{val}}_G(\mathbf{W}^P)$ ja $\mathbf{val}_G(M^P) = \overline{\mathbf{val}}_G(M_W^P)$.

Tõestus. Lause III.6 osa (6) põhjal $\mathbf{V}^P \supseteq \mathbf{W}^P$ ja lause III.7 osa (3) absoluutsusest $M^P \supseteq M_W^P$. Seetõttu pöördsisalduvused $\mathbf{val}_G(\mathbf{V}^P) \supseteq \overline{\mathbf{val}}_G(\mathbf{W}^P)$ ja $\mathbf{val}_G(M^P) \supseteq \overline{\mathbf{val}}_G(M_W^P)$ on ilmsed, kuna Weaveri P -nimede τ korral $\mathbf{val}_G(\tau) = \overline{\mathbf{val}}_G(\tau)$. Sisalduvus $\mathbf{val}_G(\mathbf{V}^P) \subseteq \overline{\mathbf{val}}_G(\mathbf{W}^P)$ tuleneb lemmast III.13, võttes $D_{\text{cl}} := G$, s.o võrdusest $\mathbf{val}_G(\tau) = \overline{\mathbf{val}}_G(\mathbf{gW}(\tau))$. Sisalduvuse $\mathbf{val}_G(M^P) \subseteq \overline{\mathbf{val}}_G(M_W^P)$ jaoks lisaks tarvis teadmist, et kui $\tau \in M$, siis $\mathbf{gW}(\tau) \in M$ – lemma III.12 osa (3). ■

Anname jõustamislaiendi $M[G]$ metadefinitsiooni. Metadefinitsioonis esinevad võrdused järelduvad metalauskeskeemist III.14, lemmast III.11 ning tõkestatud nimede hulkade määratlusest ehk metadefinitsioonist III.6.

Metadefinitsioon III.9 (jõustamislaiend, [Wea14, lk 35; Kun80, lk 189]). Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $\mathcal{T} \supseteq \mathbf{ZFC}$. Olgu $P \in M$ jõustamiskogum ja $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Asendusaksioomiskeemiga saadavat hulka $M[G]$,

$$\begin{aligned} M[G] &:= \mathbf{val}_G(M^P) = \mathbf{val}_G(M_W^P) = \overline{\mathbf{val}}_G(M_W^P) = \\ &= \{ \mathbf{val}_G(\tau) \mid \tau \in M \wedge \text{„}\tau \text{ on } P\text{-nimi“} \} = \\ &= \{ \mathbf{val}_G(\tau) \mid \tau \in M \wedge \text{„}\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“} \}, \end{aligned}$$

kutsutakse jõustamislaiendiks. Algset kvaasimodelit M nimetatakse sellises kontekstis jõustamislaiendi $M[G]$ baas-kvaasimodeliks. Erandkorras, kui on tarvilik rõhutada tingimuskogumit P , kirjutame $M[G]$ asemel $M^P[G]$.

Tõkestatud P -nimede ja tõkestatud Weaveri P -nimede kandjad ühtisid metalauskeskeemi III.14 järgi. Tähendab, lõpuks saadav jõustamislaiend $M[G]$ on neil üks ja seesama. Selline teadmine lubab edasisi jõustamislaiendi $M[G]$ kohta käivaid tõestusi lihtsustada: sõltuvalt olukorrast kasutame P -nimesid või Weaveri P -nimesid.

Märgime veel, et kui P -nimede korral $\sigma \subseteq \tau$, siis mõistagi $\sigma^{-1}(G) \subseteq \tau^{-1}(G)$ ja seetõttu $\mathbf{val}_G(\sigma) \subseteq \mathbf{val}_G(\tau)$. Vastupidine implikatsioon reeglina ei kehti. Näiteks võib võtta $P := \{1, \{\omega\}\}$, $G := \{1\}$, $\sigma := \{(0, 1)\}$, $\tau := \{(0, 1), (0, \{\omega\})\}$. Siis $\mathbf{val}_G(\sigma) = \{\mathbf{val}_G((0, 1))\} =$

$= \{0\} = \{\emptyset\} = \text{val}_G(\tau)$, kuid $\tau \not\subseteq \sigma$.

1.5.4. Juurega jõustamis- ning tingimuskogum

Mõnes jõustamisteooria aspektis ning rakenduses on kasulik eeldada, et tingimuskogum P on *juurega*, s.o $\emptyset \in P$ [Wea14, lk 85; Kun80, lk-d 186, 239]. Näitame, et sellise eelduse saab metalauseskeemi III.15 mõttes teha üldisust kaotamata. Kõigepealt sõnastame definitsiooni.

Definitsioon III.10 (juurega jõustamiskogum, tingimuskogum). Tingimuskogumit P kut-
sutakse *juurega tingimuskogumiks*, kui $\emptyset \in P$. Järjestatud kolmikut $(P, \subseteq_P, \emptyset)$, kus P on
juurega tingimuskogum, nimetatakse *juurega jõustamiskogumiks*.

Selgesti iga $p \in P$ puhul $\emptyset \subseteq p$ ehk juurega tingimuskogumis on tühi hulk $\subseteq$ -vähimaks
elemendiks.

Järgmise metalauseskeemi tähenduses pole vahet, kas tingimuskogumilt juurelisust eeldada
või mitte.

Metalauseskeem III.15 (juurega ja juureta jõustamine, [Kun80, lk 239]). *Las olla M
valemihulga $\text{Form}(\text{ZFC})$ loenduv transitiivne epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \text{ZFC}$.
Olgu $P \in M$ juureta tingimuskogum kvaasimudelil M . s.o $\emptyset \notin P$. Tähistame $Q := P \cup \{\emptyset\}$.
Siis*

- (1) *kui P on juureta M -tingimuskogum, siis Q on juurega M -tingimuskogum,*
- (2) *G on geneeriline ideaal hulgas P parajasti siis, kui $G \cup \{\emptyset\}$ on geneeriline ideaal
hulgas Q ,*
- (3) *vastavad jõustamislaiendid on võrdsed, $M^P[G] = M^{G \cup \{\emptyset\}}[Q]$.*

Enne tõestuse kallale asumist peame osa (3) jaoks tegema eeltööd. Sisalduvusega $M^P[G] \subseteq$
 $\subseteq M^{G \cup \{\emptyset\}}[Q]$ on olukord kergem, vastupidise sisalduvusega keerulisem. Leidub Q -nimesid,
mis ei ole P -nimed, sest parasjagu kehtib eeldus $\emptyset \notin P$. Tuleb näidata, et iga tõkestatud
 Q -nime korral leidub tõkestatud P -nimi, mille kandjad ühtivad. Otsitava nime moodusta-
me klassifunktsiooniga $\mathbf{rW}$, mis seab Weaveri Q -nimega vastavusse sobiva Weaveri P -nime.
Metadefinitsiooni III.9 raames võime põhjendused tuua Weaveri P -nimede kaudu. Weaveri
 P -nimedega on mugavam tõestada lemmat III.17 ja seega ka metalauseskeemi III.15.

Klassifunktsiooni $\mathbf{rW}: W^Q \rightarrow W^P$ moodustamise idee on lihtne: suvalisest Q -nimest tuleb

rekursiivselt eemaldada paarid, mille teiseks argumendiks on tühi hulk.

$$\begin{cases} \mathbf{rW}(\emptyset) = \emptyset, \\ \mathbf{rW}(\tau) = \{ (\mathbf{rW}(\sigma), q) \mid (\sigma, q) \in \tau \wedge q \neq \emptyset \}. \end{cases}$$

Rekursiooni range vormi, omadused ja absoluutsuse leiab järgmisest lemmast (osa (3) on metalemmaskeem).

Lemma III.16. *Olgu P juureta tingimuskogum ning $Q := P \cup \{\emptyset\}$ juurega tingimuskogum. Defineerime seose $\sigma \mathbf{E} \tau \doteq \sigma \in \bigcup \bigcup \tau$ klassil $\mathbf{W}^Q$. Olgu $\mathbf{G}: \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ klassifunktsioon, kus*

$$\mathbf{G}(\tau, f) = \begin{cases} \{x \in \tau \mid (\exists \sigma \in \text{dom } \tau)(\exists q \in P)((f(\sigma), q) = x)\}, & \text{kui „}\tau \text{ on seos“ ja „}f \text{ on funktsioon“,} \\ \emptyset & \text{vastasel korral.} \end{cases}$$

(Muutuja τ on aktiivne ning P on parameetri rollis.) Tähistame klassil $\mathbf{W}^Q$ seosega $\mathbf{E}$ ja klassifunktsiooniga $\mathbf{G}$ läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui $\mathbf{rW}$. Siis

$$(\forall \tau \in \mathbf{W}^Q) \quad \mathbf{rW}(\tau) = \{ (\mathbf{rW}(\sigma), q) \mid (\sigma, q) \in \tau \wedge q \neq \emptyset \}.$$

Lisaks saame järgmised võrdused ja omadused.

- (1) Iga Weaveri Q -nime τ korral on $\mathbf{rW}(\tau)$ Weaveri P -nimi. Iga Weaveri P -nime τ korral $\mathbf{rW}(\tau) = \tau$.
- (2) Kehtib klasside võrdus $\mathbf{rW}(\mathbf{W}^Q) = \mathbf{W}^P$.
- (3) Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZF})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \mathbf{ZF}$, sealjuures $P \in M$. Klassifunktsioon $\mathbf{rW}: \mathbf{W}^Q \rightarrow \mathbf{W}^P$ on funktsioonina M -absoluutne.
- (4) Kehtib tõkestatud nimedest koosnevate klasside võrdus $\mathbf{rW}(M_W^Q) = M_W^P$, kus $P \in M$.

Tõestuses kasutame muu hulgas fakti, et $\mathbf{W}^P \subseteq \mathbf{W}^Q$. See on vahetult tõestatav potentselt regulaarse induktsiooniga, kasutades sammus lause III.6 osi (2) ja (4) ning lisaks asjaolu, et tühja hulga kohalolek ei saa kuidagi mõjutada nime ülespoole $\subseteq$ -kinnisust.

Tõestus. Olgu $\tau \in \mathbb{W}^Q$ suvaline. Siis

$$\begin{aligned} \mathbf{rW}(\tau) &= \mathcal{G}(\tau, \mathbf{rW}|_{\bigcup \tau}) = \\ &= \{x \in \tau \mid (\exists \sigma \in \text{dom } \tau)(\exists q \in P)((\mathbf{rW}(\sigma), q) = x)\} = \\ &= \{(\mathbf{rW}(\sigma), q) \mid (\sigma, q) \in \tau \wedge q \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Viimases võrduses oleme kasutanud Q -nimede jaoks lause III.6 osa (2) ja teadmist, et $\emptyset \notin P$. Põhjendame lühidalt võrdusi ning omadusi. Väga analoogiline lemmaga III.12.

- (1) Potentselt regulaarse induktsiooni abil seosega $\sigma \in \bigcup \tau$.
- (2) Osa (1) põhjal, kasutades lisaks teadmist $\mathbb{W}^P \subseteq \mathbb{W}^Q$.
- (3) Taas metateoreemiskeemi II.13 eelduste kontroll. Sarnane lausega III.7, metalauseskeemiga III.10 ja lemmaga III.12. Lisaks, kuna $P \in M$, $\emptyset \in M$ ning ühend on funktsioonina M -absoluutne, siis $Q \in M$.
- (4) Osade (1) ja (3) põhjal, vt ka tõkestatud nimede metadefinitsiooni III.6. ■

Vajame veel järgmist lemmat kandjate kohta. Siin täidab $D_{\text{cw}} \neq \emptyset$ ideaalisuse teist tingimust, st igal kahel hulga D_{cw} elemendil leidub kooskõllalisuse tunnistaja hulgas D_{cw} .

Lemma III.17. *Olgu $P \in M$ juureta tingimuskogum ning $Q := P \cup \{\emptyset\}$. Olgu $\emptyset \neq D_{\text{cw}} \subseteq P$ alamkogum, mis sisaldab oma elementide kooskõllalisuse tunnistajaid. Siis*

- (1) iga Weaveri P -nime τ korral $\mathbf{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\tau) = \mathbf{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\tau)$,
- (2) iga Weaveri Q -nime τ korral $\mathbf{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\mathbf{rW}(\tau)) = \mathbf{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\tau)$.

Tõestus. Osa (1) järeldub osast (2), sest $\mathbb{W}^P \subseteq \mathbb{W}^Q$ ning lemma III.16 jaotisest (1) $\mathbf{rW}(\tau) = \tau$, kui $\tau \in \mathbb{W}^P$. Põhjendame osa (2). Jälle kasutame potentselt regulaarset induktsiooni. Kehtigu $\mathbf{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\mathbf{rW}(\sigma)) = \mathbf{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\sigma)$ iga $\sigma \in \bigcup \tau$ korral.

- $\mathbf{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\mathbf{rW}(\tau)) \supseteq \mathbf{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\tau)$. Las $x \in \mathbf{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\tau)$, siis $x = \mathbf{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\sigma)$, kus $\sigma \in \tau^{-1}(D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\})$. Tähendab, et leidub $p \in D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}$ nii, et $(\sigma, p) \in \tau$. Kuivõrd P oli juureta tingimuskogum ja $D \neq \emptyset$, leidub $\emptyset \neq p' \in D$. Olgu $q \in D$ tingimuste p, p' kooskõllalisuse tunnistaja. Weaveri Q -nimede ülespoole $\subseteq$ -kinnisusest $(\sigma, q) \in \tau$, kusjuures $p' \subseteq q$ alusel $q \neq \emptyset$. Et $(\sigma, q) \in \tau$, $q \neq \emptyset$, siis lemma III.16 võrduse põhjal $(\mathbf{rW}(\sigma), q) \in \mathbf{rW}(\tau)$, kandjate definitsioonist $\mathbf{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\mathbf{rW}(\sigma)) \in \mathbf{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\mathbf{rW}(\tau))$. Induktsioonieeldusest $\mathbf{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\mathbf{rW}(\sigma)) = \mathbf{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\sigma)$, mistõttu ka $x = \mathbf{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\sigma) \in \mathbf{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\mathbf{rW}(\tau))$.

- $\text{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\text{rW}(\tau)) \subseteq \text{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\tau)$. Las $x \in \text{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\text{rW}(\tau))$, siis $x = \text{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\text{rW}(\sigma))$ ja leidub $q \in D_{\text{cw}}$ nii, et $(\text{rW}(\sigma), q) \in \text{rW}(\tau)$. Sestap III.16 võrduse põhjal $(\sigma, q) \in \tau$. Kandja määratlusest ning sisalduvusest $D_{\text{cw}} \subseteq D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}$ johtuvalt $\text{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\sigma) \in \text{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\tau)$. Induktsioonihüpoteesist $\text{val}_{D_{\text{cw}} \cup \{\emptyset\}}^Q(\sigma) = \text{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\text{rW}(\sigma))$, mistõttu ka $x = \text{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\text{rW}(\sigma)) \in \text{val}_{D_{\text{cw}}}^P(\tau)$.

Lemma on tõestatud. ■

Saame anda metalauseskeemi III.15 tõestuse.

- Metalauseskeemi III.15 tõestus.** (1) Et $P \in M$, siis tühja hulga $\emptyset$ M -absoluutsusest konstandina ja ühendi M -absoluutsusest funktsioonina (metateoreemiskeem II.9) järeldub $Q = P \cup \{\emptyset\} \in M$.
- (2) Rutiinne geneerilise ideaali tingimuste kasutamine. Piisavuse-osas rakendada lisaks eeldust, et P on juureta tingimuskogum.
- (3) Kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}
 M^P[G] &= \text{val}_G^P(M_W^P) = && \text{(def)} \\
 &= \text{val}_G^P(\text{rW}(M_W^Q)) = && \text{(lemma III.16 (4))} \\
 &= \text{val}_{G \cup \{\emptyset\}}^Q(M_W^Q) = && \text{(lemma III.17 (2))} \\
 &= M^Q[G \cup \{\emptyset\}]. && \text{(def)}
 \end{aligned}$$

Tulemus on tõestatud. ■

Varem, metadefinitsiooni III.9 ümbritsevas arutelus nägime, et jõustamislaiendi omadustega tegeledes võime kasutada tavalisi P -nimesid või Weaveri P -nimesid. Valiku teeme selle järgi, kumb meetod on parajasti mugavam. Praeguse jaotise järeldusena võime lisaks nõuda või jätta nõudmata, et tingimuskogum P omab juurt. Näiteks eeldame tingimuskogumi juurelisust kanooniliste P -nimede juures. Üldise märkusena konstateerime, et töö raamidest väljuva *iteeritud* ehk järkjärgulise jõustamise puhul on samuti kombeks võtta juurega jõustamiskogum [Wea14, lk 85; Kun80, lk-d 239, 253].

1.5.5. Kanooniliste P -nimede definitsioon ja absoluutsus

Siin jaotises defineerime kahte tüüpi *kanoonilised P -nimed* [Kun80, lk 190]. Hiljem tõestame nende abiga, et jõustamislaiend on tõepoolest laiend, s.o $M \subseteq M[G]$, ning et alati $G \in M[G]$.

Olgu P juurega tingimuskogum. Et oleme juba mitu sarnast definitsiooni ja rekursiooni eelnevalt läbi teinud, anname kohe kanooniliste nimede definitsiooni.

Definitsioon III.11 (kanoonilised P -nimed, [Kun80, lk 190]). Hulga x kanooniliseks P -nimeks nimetatakse hulka $\text{can}(x)$, kus

$$\text{can}(x) = \{ (\text{can}(y), \emptyset) \mid y \in x \}.$$

Kirjandusest leiab veel tähistusi $\tilde{x}$ [Kun80, lk 190] ja $\text{encode}(x)$ [Van16, lk 23]. Konstantseks kanooniliseks P -nimeks kutsume hulka Γ , mispuhul

$$\Gamma := \{ (\text{can}(p), p) \mid p \in P \}.$$

Kanoonilised P -nimed on defineeritakse kõigi hulkade jaoks ja potentselt regulaarse rekursiooniga. Kui aga kanoonilised P -nimed on kord defineeritud, on konstantne kanooniline P -nimi saadav hulgast

$$\{(p, p) \in P \times P\} = \{ x \in P \times P \mid \exists p \in P (x = (p, p)) \}$$

asendusaksioomiskeemi abil täiendava rekursioonita. Asendatakse $(p, p) \mapsto (\text{can}(p), p)$.

Kanooniliste P -nimede idee on „märgistada“ kõik hulga x elemendid geneerilise ideaali $G \subseteq P$ elemendiga [Wea14, lk 35]. P -nime kandja definitsiooni järgi korjab $\text{val}_G(\text{can}(x))$ siis üles kõik kandjad $\text{val}_G(\text{can}(y))$, kus $y \in x$. Vahetu epsiloninduktsioon näitab, et $\text{val}_G(\text{can}(x)) = x$. Tühi hulk on kindlasti G element, sest P oli juurega jõustamistingimus ja $G \neq \emptyset$ on kinnine nõrgemate tingimuste suhtes. Üldist tulemust $\text{val}_G(\text{can}(x)) = x$ teades pole keeruline mõista, et $\text{val}_G(\Gamma) = G$. Konstantne kanooniliste P -nimi Γ märgistab ära kõik tingimuskogumi P elemendid, aga üksnes iseendaga [Wea14, lk 35]. Geneeriline ideaal korjab kandjatena üles ainult endasse kuuluvate teiste koordinaatidega P -nimed. Kanooniliste P -nimede korral on määrava tähtsusega nende absoluutsus funktsioonina, s.o kui $x \in M$, siis $\text{can}(x) \in M$, ja $\Gamma \in M$. Eriti pole võimalik kasutada Γ määratluses hulka G , kuna reeglina $G \notin M$.

Sõnastame seni öeldu rangelt lausena. Osa (3) on omaette metalauseskeem.

Lause III.18 ([Kun80, lk 190]). Olgu P juurega tingimuskogum. Defineerime klassifunktsiooni $G: \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$, kus

$$G(x, f) = G(f) = \begin{cases} \text{ran } f \times \{\emptyset\}, & \text{kui „}f\text{ on funktsioon“,} \\ \emptyset & \text{vastasel korral.} \end{cases}$$

(Muutuja x on fiktiivne.) Tähistame klassil $\mathbf{U}$ seosega $\in$ ja klassifunktsiooniga G läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui $\mathbf{can}$. Siis

$$(\forall x \in \mathbf{U}) \quad \mathbf{can}(x) = \{ (\mathbf{can}(y), \emptyset) \mid y \in x \}.$$

Lisaks saame järgmised võrdused ja omadused.

- (1) Kanoonilised P -nimed on P -nimed. Iga hulga x puhul on $\mathbf{can}(x)$ P -nimi. Konstantne kanooniline P -nimi Γ on P -nimi.
- (2) Olgu $\emptyset \in G \subseteq P$ alamkogum. Iga hulga x korral $\mathbf{val}_G(\mathbf{can}(x)) = x$. Samuti $\mathbf{val}_G(\Gamma) = G$.
- (3) Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZF})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \mathbf{ZF}$, sealjuures $P \in M$. Klassifunktsioon $\mathbf{can}: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}^P$ on funktsioonina M -absoluutne. Samuti $\Gamma \in M$.

Tõestus. Tegemist epsilonrekursiooniga, seose $\in$ potentne regulaarsus tuleneb regulaarsuse aksioomist. Kui x on ükskõik milline hulk, siis

$$\begin{aligned} \mathbf{can}(x) &= G(x, \mathbf{can}|_{\mathbf{ext}_\in(x)}) = \\ &= G(\mathbf{can}|_{\mathbf{ext}_\in(x)}) = \\ &= G(\mathbf{can}|_x) = \\ &= \text{ran}(\mathbf{can}|_x) \times \{\emptyset\} = \\ &= \{ (\mathbf{can}(y), \emptyset) \mid y \in x \} \times \{\emptyset\} = \\ &= \{ (\mathbf{can}(y), \emptyset) \mid y \in x \}. \end{aligned}$$

- (1) Epsiloninduktsiooniga. Oletame, et iga $y \in x$ puhul juba teame, et $\mathbf{can}(y)$ on P -nimi. Siis $\mathbf{can}(x) = \{ (\mathbf{can}(y), \emptyset) \mid y \in x \}$ on P -nimi tänu lause III.6 osale (4). Pärast seda järeldub sama lause samast punktist, et $\Gamma = \{ (\mathbf{can}(p), p) \mid p \in P \}$ on P -nimi.

(2) Taas epsiloninduktsiooniga. Saame

$$\begin{aligned}
 \text{val}_G(\text{can}(x)) &= \{ \text{val}_G(\text{can}(y)) \mid \exists g \in G((\text{can}(y), g) \in \text{can}(x)) \} = & (\approx \text{ def}) \\
 &= \{ \text{val}_G(\text{can}(y)) \mid y \in x \} = & (\emptyset \in G) \\
 &= \{ y \mid y \in x \} = & (\text{ind-eeldus}) \\
 &= x. & (\text{hulk } x)
 \end{aligned}$$

(3) Metateoreemiskeemi II.13 eelduste kontroll. Analoogiline lausega III.7, metalauseskeemiga III.10 ning lemmadega III.12 ja III.16. Seetõttu põhjendame kõigest, miks $\Gamma \in M$. Esiteks, kuna $P \in M$ ja otsekorutus on funktsioonina M -absoluutne, siis $P \times P \in M$. Eraldamisaksioomiskeemi mudeldamisest ja tingimuse $\exists p \in P(x = (p, p))$ absoluutsusest

$$\{(p, p) \in P \times P\} = \{x \in P \times P \mid \exists p \in P(x = (p, p))\} \in M.$$

Klassifunktsiooni can ja järjestatud paari absoluutsustest funktsioonidena on ka

$$(x, y) \mapsto (\text{can}(x), y)$$

funktsioonina absoluutne. Asendamisaksioomiskeemi mudeldamisest sestap

$$\{(\text{can}(p), p) \mid p \in P\} = \{(\text{can}(p), p) \mid (p, p) \in P \times P\} = \Gamma \in M.$$

Lause on tõestatud. ■

1.6. Jõustamislaiendi $M[G]$ lihtsamad omadused

Nüüdseks oleme teinud piisavalt eeltööd, et tõestada jõustamise põhimetateoreemiskeemi kaks lihtsamat osa.

Metateoreemiskeem III.19 (jõustamise põhimetateoreemiskeem, I osa, [Kun80, lk-d 190–191; Wea14, lk-d 35–36; Jec02, lk 203]). *Olgu M aksioomide metahulga $\text{Ax}(\text{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \text{ZFC}$. Las olla $P \in M$ tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Kehtivad järgmised väited.*

$$(1) \quad M \subseteq M[G], \quad G \in M[G], \quad M[G] \neq \emptyset$$

$$(2) \quad M \supseteq M[G] \text{ ja } M = M[G] \text{ parajasti siis, kui } G \in M.$$

- (3) Olgu N aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \mathbf{ZFC}$, mispuhul $M \subseteq N$ ning $G \in N$. Siis $M[G] \subseteq N$.
- (4) $M[G]$ on (välisest seisukohast) transitiivne ning loenduv.

Tõestuses on olulisel kohal kanoonilised P -nimed, konstantne kanooniline P -nimi ning P -nime kandja klassifunktsiooni $\mathbf{val}$ absoluutsus funktsioonina.

Tõestus. (1) Las $x \in M$. Kanoonilise P -nime kandja funktsiooni $\mathbf{can}$ M -absoluutsusest funktsioonina $\mathbf{can}(x) \in M$. Jõustamislaiendi metadefinitsiooni järgi $\mathbf{val}_G(\mathbf{can}(x)) \in M[G]$. Lause III.18 osast (2) $\mathbf{val}_G(\mathbf{can}(x)) = x$, seega $x \in M[G]$. Analoogiliselt, kuna konstantne P -nimi $\Gamma \in M$, siis $G = \mathbf{val}_G(\Gamma) \in M[G]$. Arusaadavalt $M[G] \neq \emptyset$, kas või $G \in M[G]$, aga ka $M \subseteq M[G]$ ja $M \neq \emptyset$.

- (2) Osale (1) toetudes teame, et alati $M \subseteq M[G]$. Nõnda piirdume väitega, et $M \supseteq M[G]$ parajasti siis, kui $G \in M$. Kui $G \notin M$, siis jällegi osast (1) $M \subsetneq M[G]$, sest $G \in M[G]$. Olgu nüüd $G \in M$. Kvaasimudel M rahuldab sel juhul metalauseskeemi III.10 tingimusi, mistõttu $\mathbf{val}^G$ on funktsioonina M -absoluutne. Kui $x \in M$, siis $\mathbf{val}_G(x) \in M$, kust tulebki $\mathbf{val}_G(M^P) = M[G] \subseteq M$, kuna $M^P \subseteq M$.
- (3) Kuna $M \subseteq N$, siis ka $M^P \subseteq N$. Kvaasimudel N rahuldab metalauseskeemi III.10 eeldusi. Sestap $\mathbf{val}_G(M^P) = M[G] \subseteq N$.
- (4) Olgu $x \in M[G]$. Definitsiooni järgi leidub $\tau \in M^P$ nii, et $\mathbf{val}_G(\tau) = x$. Kandja määratlusest tulenevalt on kõik hulga x elemendid $y \in x$ seetõttu kujul $y = \mathbf{val}_G(\sigma)$, kus mingi $g \in G$ korral $(\sigma, g) \in \tau$. Metalemma III.8 ja järjestatud paari põhiomaduse põhjal on σ tõkestatud P -nimi, sestap $y = \mathbf{val}_G(\sigma) \in M[G]$. Transitiivsus välisest seisukohast lähtuvalt on tõestatud.

Põhjendame loenduvuse, arutelu lähtub välisest seisukohast. $M^P \subseteq M$, seega M^P on ülimalt loenduv. Kujutus $M^P \ni \tau \mapsto \mathbf{val}_G(\tau) \in M[G]$ on sürjektiivne, järelikult ka $M[G]$ on ülimalt loenduv. Teisalt $M \subseteq M[G]$ ning M oli loenduv. Kokkuvõttes on $M[G]$ (välisest seisukohast) loenduv. ■

Järgmisena tõestame, et jõustamislaiend rahuldab viit lihtsamat $\mathbf{ZFC}$ -teooria aksioomi.

Metateoreemiskeem III.20 (jõustamise põhimetateoreemiskeem, II osa, [Kun80, lk-d 191, 202; Wea14, lk 36]). Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \mathbf{ZFC}$. Las olla $P \in M$ tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Jõustamislaiend $M[G]$ rahuldab (1) ekstensionaalsusaksioomi, (2) regulaarsuse aksioo-

mi, (3) hulgapaari moodustamise aksioomi, (4) ühendi moodustamise aksioomi, (5) lõpmatu hulga leidumise aksioomi.

Aksioomi rahuldamise all peame silmas, et asendusteoorias T on tuletatav vastava aksioomi epsilontõkend hulgale $M[G]$. Sekventsimärgid jätame mugavuse tõttu välja toomata.

Tõestus. Tõestame vastavalt toodud nummerdusele. Toome kõigepealt välja aksioomid algsel kujul.

- (1) $\forall X \forall Y (X = Y \Leftrightarrow \forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y))$
- (2) $\forall X (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x (x \in X \wedge \neg \exists z (z \in X \wedge z \in x)))$
- (3) $\forall X \forall Y \exists Z \forall z (z \in Z \Leftrightarrow z = X \vee z = Y)$
- (4) $\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow \exists Z (z \in Z \wedge Z \in X))$
- (5) $\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall a (a \in A \Rightarrow a^+ \in A))$

Kirjutame aksioomid ümber teisele kujule, kus tõkestatud kvantorid on rohkem fookuses. Alternatiivsed kujud on tühja omateooria ehk võrdusega predikaatarvutuse mõttes ekvivalentsed algsetega. Meenutame, et niisugust vahetust lubab teha metalemmaskeem II.2.

- (1) $\forall X \forall Y (X = Y \Leftrightarrow \forall z \in X (z \in Y) \wedge \forall z \in Y (z \in X))$
- (2) $\forall X (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in X (\neg \exists z \in X (z \in x)))$
- (3) $\forall X \forall Y \exists Z (X \in Z \wedge Y \in Z \wedge \forall z \in Z (z = X \vee z = Y))$
- (4) $\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow \exists Z \in X (z \in Z))$
- (5) $\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall a \in A (a^+ \in A))$

Nende valemite epsilontõkendid hulgale $M[G]$ on järgmised.

- (1') $\forall X, Y \in M[G] (X = Y \Leftrightarrow \forall z \in X (z \in Y) \wedge \forall z \in Y (z \in X))|_{M[G]}$
- (2') $\forall X \in M[G] (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in X (\neg \exists z \in X (z \in x)))|_{M[G]}$
- (3') $\forall X, Y \in M[G] \exists Z \in M[G] (X \in Z \wedge Y \in Z \wedge \forall z \in Z (z = X \vee z = Y))|_{M[G]}$
- (4') $\forall X \in M[G] \exists Y \in M[G] \forall z \in M[G] (z \in Y \Leftrightarrow \exists Z \in X (z \in Z))|_{M[G]}$
- (5') $\exists A \in M[G] (\emptyset \in A \wedge \forall a \in A (a^+ \in A))|_{M[G]}$

Valemite (1')–(4') sulgavaldiste kõik koostisosad on absoluutsed iga mittetühja transitiivse hulga suhtes tänu metateoreemiskeemi II.7 osale (1). Lemmaskeemide II.3 ja II.4 järgi säilita-

vad lausearvutuslikud tehted ning tõkestatud kvantorid absoluutsust. Nimetatud sulgavaldistes muud polegi. Kuna metateoreemiskeemi III.19 osa (4) järgi on jõustamislaiend $M[G]$ mittetühi ja transitiiivne, võime sulgavaldiste tõkestamise neis ära jätta. Valemi (5') puhul on täiendava koostisosana hulga a järglaseks $a^+ = a \cup \{a\}$ olemine. Niisuguse absoluutsuse saame metateoreemiskeemi II.7 osast (4). Eelnevalt peame aga teadma, et $M[G]$ on teooria $Z^- - S - P - \text{Inf}$ aksioomide hulga epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $\mathcal{T}$. Kui põhjendame ahendatud aksioomide kehtivust ülemise järjekorra alusel, on punktini (5') jõudes see puuduv eeldus täidetud. Järjekorra kokkuleppesest kinni pidades võime sestap ka valemis (5) sulgavaldiste tõkestamisest loobuda.

$$(1') \quad \forall X, Y \in M[G] (X = Y \Leftrightarrow \forall z \in X (z \in Y) \wedge \forall z \in Y (z \in X))$$

$$(2') \quad \forall X \in M[G] (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in X (\neg \exists z \in X (z \in x)))$$

$$(3') \quad \forall X, Y \in M[G] \exists Z \in M[G] (X \in Z \wedge Y \in Z \wedge \forall z \in Z (z = X \vee z = Y))$$

$$(4') \quad \forall X \in M[G] \exists Y \in M[G] \forall z \in M[G] (z \in Y \Leftrightarrow \exists Z \in X (z \in Z))$$

$$(5') \quad \exists A \in M[G] (\emptyset \in A \wedge \forall a \in A (a^+ \in A))$$

Väited (1') ja (2') johtuvad kohe vastavalt üldistest, tõkestamata ekstensionaalsuse ning regulaarsuse aksioomidest. Väited erinevad aksioomidest üksnes selle poolest, et tõkestamata üldisuskvantor on asendatud tõkestatud üldisuskvantoriga, mis väite kehtivust ei mõjuta. Lõpmatu hulga leidumise aksioomi alusel sobiks tõkestatud varianti (5') võtta $A := \omega$, kui oleks teada $\omega \in M[G]$. Baas-kvaasimudel M rahuldab metateoreemiskeemi II.9 osa (4) eeldusi, järelikult $\omega \in M$. Teoreemiskeemi III.19 osa (1) põhjal $M \subseteq M[G]$, seega $\omega \in M[G]$ nagu soovitud. Järele on jäänud väited (3') ja (4').

Tõestame tõkestatud hulgapaari leidumise aksioomi (3') ehk

$$\forall X, Y \in M[G] \exists Z \in M[G] (X \in Z \wedge Y \in Z \wedge \forall z \in Z (z = X \vee z = Y)).$$

Hulgapaari tähistamise tavast tulenevalt piisab tõestada, et

$$\forall X, Y \in M[G] \exists Z \in M[G] (Z = \{X, Y\}),$$

kus kirjpildiga $\{X, Y\}$ peame silmas meie universumi järjestamata hulgapaari elementidega X ja Y . Valime $X, Y \in M[G]$. Jõustamislaiendi definitsiooni järgi leiduvad $\tau_X, \tau_Y \in M^P$ nii, et $X = \text{val}_G(\tau_X)$ ja $Y = \text{val}_G(\tau_Y)$. Järjestatud ja järjestamata paaride moodustamised on funktsioonidena M -absoluutsed, sestap $\tau := \{(\tau_X, \emptyset), (\tau_Y, \emptyset)\} \in M$. Lause III.6 osa (4) põhjal $\tau \in M^P$. P -nime kandja määratluse alusel $\text{val}_G(\tau) = \{\text{val}_G(\tau_X), \text{val}_G(\tau_Y)\}$, hulkade X, Y

valiku põhjal $\{\text{val}_G(\tau_X), \text{val}_G(\tau_Y)\} = \{X, Y\}$. Jõustamislaiendi definitsioonist $\text{val}_G(\tau) = \{X, Y\} \in M[G]$, mida soovisimegi.

Asume tõkestatud ühendi moodustamise aksioomi

$$\forall X \in M[G] \exists Y \in M[G] \forall z \in M[G] (z \in Y \Leftrightarrow \exists Z \in X (z \in Z))$$

kallale. Siingi piisab, kui näitame, et

$$\forall X \in M[G] \exists Y \in M[G] \forall z \in M[G] (Y = \bigcup X),$$

kuid tingimuses $Y = \bigcup X$ kindlam veendumine taandub ikkagi pikema suluavaldise kontrollile. Olgu $X \in M[G]$ suvaline. Mingi $\tau \in M_W^P$ korral $X = \text{val}_G(\tau)$. Tahame leida tõkestatud Weaveri P -nime ϱ , mispuhul

$$\begin{aligned} \text{val}_G(\varrho) &= \bigcup X = \bigcup \text{val}_G(\tau) = \\ &= \bigcup \{ \text{val}_G(\sigma) \mid \sigma \in \tau^{-1}(G) \} = \\ &= \{ \text{val}_G(\pi) \mid (\exists \sigma \in \text{dom } \tau) (\pi \in \sigma^{-1}(G) \wedge \sigma \in \tau^{-1}(G)) \} = \\ &= \{ \text{val}_G(\pi) \mid (\exists \sigma \in \text{dom } \tau) (\exists g_1, g_2 \in G) ((\pi, g_1) \in \sigma \wedge (\sigma, g_2) \in \tau) \} = \\ &= \{ \text{val}_G(\pi) \mid (\exists \sigma \in \text{dom } \tau) (\exists g \in G) ((\pi, g) \in \sigma \wedge (\sigma, g) \in \tau) \}. \end{aligned}$$

Viimases võrduses kasutasime ideaali kooskõlalisuse tunnustajate omadust ning Weaveri P -nimede ülespoole $\subseteq$ -kinnisust. Väidame, et sobib võtta

$$\varrho := \{ (\pi, p) \in \bigcup \text{dom } \tau \mid (\exists \sigma \in \text{dom } \tau) ((\pi, p) \in \sigma \wedge (\sigma, p) \in \tau) \}.$$

Kuna $(\sigma, p) \in \tau$ ja $(\pi, p) \in \sigma$, siis lause III.6 osa (2) kahekordsest rakendamisest järeldeb, et π on Weaveri P -nimi ja $p \in P$. Järelikult koosneb ϱ paaridest (π, p) , mille esimene koordinaat π on Weaveri P -nimi ja teine koordinaat p tingimuskogumi P element. Kui $(\pi, p) \in \varrho$ ning $q \in P$ on tugevam kui p , siis nimede σ ja τ ülespoole $\subseteq$ -kinnisusest $(\pi, q) \in \sigma$ ja $(\pi, q) \in \tau$, järelikult lause III.6 osa (4) põhjal on ϱ Weaveri P -nimi. Seose määramispiirkonna ning ühendi absoluutsustest funktsioonidena, kuivõrd $\tau \in M$, siis $\bigcup \text{dom } \tau \in M$. Kvaasimudel M mudeldab eraldamisaksioomiskeemi, sealjuures $\tau \in M$, $P \in M$, ja tingimuse

$$(\exists \sigma \in \text{dom } \tau) ((\pi, p) \in \sigma \wedge (\sigma, p) \in \tau)$$

absoluutsuse põhjal $\varrho \in M_W^P$. Niisiis $\text{val}_G(\varrho) \in M[G]$. Lõpuks

$$\begin{aligned} \text{val}_G(\varrho) &= \{ \text{val}_G(\pi) \mid \pi \in \varrho^{-1}(G) \} = \\ &= \{ \text{val}_G(\pi) \mid (\exists g \in G)((\pi, g) \in \varrho) \} = \\ &= \{ \text{val}_G(\pi) \mid (\exists g \in G)((\pi, g) \in \bigcup \text{dom } \tau \wedge (\exists \sigma \in \text{dom } \tau)((\pi, g) \in \sigma \wedge (\sigma, g) \in \tau)) \}. \end{aligned}$$

Kuna $(\pi, g) \in \bigcup \text{dom } \tau$ kehtib parajasti siis, kui $(\exists \sigma \in \text{dom } \tau)((\pi, g) \in \sigma)$, siis

$$\begin{aligned} \text{val}_G(\varrho) &= \{ \text{val}_G(\pi) \mid (\exists g \in G)((\pi, g) \in \bigcup \text{dom } \tau \wedge \\ &\quad \wedge (\exists \sigma \in \text{dom } \tau)((\pi, g) \in \sigma \wedge (\sigma, g) \in \tau)) \} = \\ &= \{ \text{val}_G(\pi) \mid (\exists g \in G)(\exists \sigma \in \text{dom } \tau)((\pi, g) \in \sigma \wedge (\sigma, g) \in \tau) \} = \\ &= \{ \text{val}_G(\pi) \mid (\exists \sigma \in \text{dom } \tau)(\exists g \in G)((\pi, g) \in \sigma \wedge (\sigma, g) \in \tau) \} = \\ &= \bigcup \text{val}_G(\tau) = \bigcup X. \end{aligned}$$

Üle-eelviimases võrduses kasutasime samaliigiliste tõkestatud kvantorite kommutatiivsust.

Tulemus on tõestatud. ■

Jaotise viimase tulemusena tõestame, et nime kandja astak ei saa olla suurem kui vasta-va nime astak. Taolist astakute võrratust rakendame pärast põhiteoreemiskeemis võrduse $\text{Ord}^M = \text{Ord}^{M[G]}$ põhjendamiseks.

Lemma III.21. *P-nime kandja astak ei ületa nime astakut: iga $\tau \in V^P$ korral kehtib mitterange võrratus $\text{Rank}(\text{val}_G(\tau)) \leq \text{Rank}(\tau)$.*

Lemma tõestus ei kasuta G ideaalisust ega geneerilisust.

Tõestus. Potentselt regulaarse induktsiooniga klassil V^P seosega $\sigma \in \tau^{-1}$. Korrektsus lau-se III.9 osast (1). Oletame, et iga $\sigma \in \tau^{-1}$ korral $\text{Rank}(\text{val}_G(\sigma)) \leq \text{Rank}(\sigma)$. Siis

$$\begin{aligned} \text{Rank}(\text{val}_G(\tau)) &= \sup \{ (\text{Rank}(\text{val}_G(\sigma)))^+ \mid \text{val}_G(\sigma) \in \text{val}_G(\tau) \} = && \text{(lause I.29)} \\ &= \sup \{ (\text{Rank}(\text{val}_G(\sigma)))^+ \mid \sigma \in \tau^{-1}(G) \} \leq && \text{(lause III.9 (2) i)} \\ &\leq \sup \{ (\text{Rank}(\sigma))^+ \mid \sigma \in \tau^{-1}(G) \} \leq && \text{(ind-eeld)} \\ &\leq \sup \{ (\text{Rank}(\sigma))^+ \mid \sigma \in \bigcup \bigcup \tau \} \leq && \text{(ülemhulk)} \\ &\leq \sup \{ (\text{Rank}((\sigma, p))^+ \mid (\sigma, p) \in \tau \} = && \text{(lause I.28 (4))} \\ &= \text{Rank } \tau. && \text{(lause I.29)} \end{aligned}$$

Kokkuvõttes $\text{Rank}(\text{val}_G(\tau)) \leq \text{Rank } \tau$, nagu oli soovitud. ■

2. Jõustamise põhimetateoreemiskeem

Las olla P tingimuskogum ja $\tau_1, \dots, \tau_n$ tõkestatud (Weaveri) P -nimed. Olgu $\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n] \in \text{Form}(\text{ZFC})$, sealjuures $\text{Free}(\Phi) = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, $n \geq 0$. On loomulik küsida, milliste geneeriliste ideaalide jaoks kehtib väide

$$(\Phi|_{M[G]})(\tau_1/\text{val}_G(\tau_1), \dots, \tau_n/\text{val}_G(\tau_n))$$

või kuidas niisuguse väite paikapidavuses veenduda. Struktuurselt kõige lihtsam on juht, kui üheainsa elemendi $p \in P$ kuuluvus geneerilisse ideaali $p \in G$ tagab koheselt väite kehtivuse vastava jõustamislaiendi $M[G]$ jaoks. Kui tõepoolest järeldeb valemi Φ kehtivus kuuluvusest $p \in G$, siis öeldakse, et p jõustab valemid Φ ja kirjutatakse $p \Vdash_P \Phi$. [Wea14, lk 37]

Metadefinitsioon III.12 (jõustamisseos, [Wea14, lk 37; Kun80, lk 194]). Olgu M aksiomide metahulga $\text{Ax}(\text{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \text{ZFC}$. Olgu $P \in M$ tingimuskogum. Olgu $\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n] \in \text{Form}(\text{ZFC})$, sealjuures $\text{Free}(\Phi) = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, $n \geq 0$. Kirjutame

$$\begin{aligned} p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \dots, \tau_n] & \doteq \forall G' \forall y'_1, \dots, y'_n (G' \subseteq P \wedge „G' \text{ on geneeriline ideaal}“ \wedge \\ & \wedge y'_1 = \text{val}_{G'}(\tau_1) \wedge \dots \wedge y'_n = \text{val}_{G'}(\tau_n) \wedge \\ & \wedge p \in G' \Rightarrow \Phi[\tau_1/y'_1, \dots, \tau_n/y'_n]|_{M[G']}) \end{aligned}$$

ja avaldist „ $p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ “ loeme kui *tingimus p jõustab valemid $\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$* .

Rakendustes on alati $p \in P$ ning $\tau_1, \dots, \tau_n$ on tõkestatud (Weaveri) P -nimed. Rõhutama, et jõustamisseos $\Vdash_P$ sõltub epsilon-kvaasimudelist M , tingimuskogumist P ja valemist $\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$. Vahel tähistataksegi jõustamisseost kui $\Vdash_{M,P}$. Jõustamisseose näol on sisuliselt tegu süntaktilise kokkuleppega, nagu osutab märk $\doteq$. Oleme kasutanud geneerilise ideaali tähisena G asemel G' , sest jõustamise põhiteoreemiskeemi III osas tuleb seosele $p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ omakorda ümbris „Iga geneerilise ideaali $G \dots$ “ korral. Sarnane lugu on ülakomadega indiidmuutujate $y'_1, \dots, y'_n$ juures. Jõustamisseosest $\Vdash_P$ võib mõelda kui seosest metahulgal $P \times \text{Form}(\text{ZFC})$ metateoorias.

Jõustamise põhiteoreemiskeemi kaks esimest osa tõestasime eelmises jaotises 1.6. Põhiteoreemiskeemi kolmas osa väidab lihtsustatult kahte asja [Wea14, lk 37]. Olgu $G \subseteq P$ geneeriline ideaal ja $\tau_1, \dots, \tau_n$ tõkestatud (Weaveri) P -nimed.

- (1) Väite $(\Phi|_{M[G]})(\tau_1/\text{val}_G(\tau_1), \dots, \tau_n/\text{val}_G(\tau_n))$ kehtivus on tihedalt seotud jõustamisseosega. Nimelt kehtib $(\Phi|_{M[G]})(\tau_1/\text{val}_G(\tau_1), \dots, \tau_n/\text{val}_G(\tau_n))$ parajasti siis, kui lei-

dub valemite $\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ jõustav tingimus $p \in G$. Kirjeldatud ekvivalentsi kutsutakse *tõesuslemmaks* (ingl *truth lemma*). [Wea14, lk-d 41–42; Wik22]

- (2) Teadmine, kas mingi $p \in P$ jõustab valemite $\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ ehk kas $p \models_P \Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ või mitte, on olemas ja kättesaadav baas-kvaasimudelil M . Täpsemini leidub hulk $\mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]} \in M$ nii, et $p \in \mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ parajasti siis, kui $p \models_P \Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, ning nõuet $p \in \mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ on võimalik väljendada M -ahendatud valemiga. Taolist väidet kutsutakse *defineeritavuse lemmaks* (ingl *definability lemma*). [Wea14, lk-d 41–42; Wik22]

Kolmanda põhiteoreemiskeemi osa tõestus on küllaltki tehniline ja mahukas [Wea14, lk-d 37–42]. Ruumi kaalutlustel meie seda täispikkuses ei tõesta. Järgmises jaotises toome siiski III osa range sõnastuse ning anname tõestuse struktuuri üldkirjelduse. Mainime veel, et teatud mõttes pole vahet, kas tõestame põhiteoreemiskeemi jõustamiseose $\models_P$ kõigi P -nimede või ainult Weaveri P -nimede jaoks.

Metalauskeem III.22. *Las olla M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteorias $T \supseteq \mathbf{ZFC}$. Las olla $P \in M$ tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Võtame $\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n] \in \mathbf{Form}(\mathbf{ZFC})$, sealjuures $\mathbf{Free}(\Phi) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, $n \geq 0$ Olgu $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ tavalised P -nimed ning $\tau_1 := \mathbf{gW}(\sigma_1), \dots, \tau_n := \mathbf{gW}(\sigma_n)$.*

Iga $p \in P$ korral kehtib ekvivalentsus

$$p \models_P \Phi[\sigma_1, \dots, \sigma_n] \Leftrightarrow p \models_P \Phi[\sigma_1/\tau_1, \dots, \sigma_n/\tau_n].$$

Tõestus. Otse jõustamiseose definitsioonist ning teadmisest, et $\mathbf{val}_G(\sigma_i) = \mathbf{val}_G(\mathbf{gW}(\sigma_i)) = \mathbf{val}_G(\tau_i)$, $i = 1, \dots, n$. ■

2.1. Tõesuslemma ja defineeritavuse lemma

Peatselt toome *tõesuslemma* ja *defineeritavuse lemma* tõkestatud Weaveri P -nimede jaoks. Tõestuses kasutatakse järgmist märkust. Kõige tähtsamad on punktid b ja c. Osa a kasutatakse osa b põhjendamisel.

Märkus III.13 („Saame nõuda, et ... on tugevam kui ...“, [Wea14, lk 38]). Olgu P tingimuskogum ja $G \subseteq P$ geneeriline ideaal.

- Kui $p \in G$ ja $q \in G$, leidub $r \in G$, mis on tugevam kui p ja q . Niisiis, kui p on antud, saame elementi q valides nõuda, et q on tugevam kui p (võttes kohe $q := r$).
- Olgu antud (tõkestatud) Weaveri P -nimi τ , $(\sigma, p) \in \tau$ ja $p \in G$. Elementi $(\sigma, q) \in \tau$, $q \in G$, valides saame nõuda, et q on tugevam kui p . See järeldeb osast a ning Weaveri

P -nimede ülespoole $\subseteq$ -kinnisusest.

- c. Kui $p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ ja q on tugevam kui p , siis ka $q \Vdash_P \Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$. Põhjuseks ideaali kinnisus nõrgemate tingimuste suhtes: kui $q \in G$ ja $p \in P$ on nõrgem kui q , siis $p \in G$. Seega kui $g \in G$ ja mingi $p \in G$ korral $p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, saame nõuda, et p on tugevam kui g .

Omadust punktis c, kus tugevamad tingimused jõustavad vähemalt samu valemeid nagu nõrgemad tingimused, kutsutakse *jõustamiseose* $\Vdash_P$ *koherentsuse omaduseks* (ingl *coherence*, [Wik22]). Märkuse osas b seisneb Weaveri P -nimede oluline lihtsustav eelis tavaliste P -nimede ees [Wea14, lk-d 34–35, 38, 130].

Sõnastame *tõesuslemma* ning *defineeritavuse lemma* ehk jõustamise põhiteoreemiskeemi III osa.

Metateoreemiskeem III.23 (jõustamise põhiteoreemiskeem, III osa, [Wea14, lk-d 39, 41–42]). *Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $\mathcal{T} \supseteq \mathbf{ZFC}$. Olgu $P \in M$ tingimuskogum. Olgu $\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n] \in \mathbf{Form}(\mathbf{ZFC})$, sealjuures $\mathbf{Free}(\Phi) = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, $n \geq 0$.*

Iga tõkestatud Weaveri P -nime $\tau_1, \dots, \tau_n \in M_W^P$ korral kehtivad järgmised väited.

(1) *Tõesuslemma:*

$$\begin{aligned} \forall G \forall y_1, \dots, y_n \Big(G \subseteq P \wedge „G \text{ on geneeriline ideaal}“ \wedge \\ \wedge y_1 = \mathbf{val}_G(\tau_1) \wedge \dots \wedge y_n = \mathbf{val}_G(\tau_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\Phi[\tau_1/y_1, \dots, \tau_n/y_n] \Vdash_{M[G]} \Leftrightarrow \exists p \in G (p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \dots, \tau_n])) \Big) \end{aligned}$$

(2) *Defineeritavuse lemma: iga $p \in P$ korral*

- i) $(p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \dots, \tau_n] \Leftrightarrow p \in \mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]})$,
- ii) $\mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]} \in M$ ja tingimust $p \in \mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ on võimalik väljendada M -ahendatud valemiga

Toonitame, et hulkadel $\mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ on konkreetne definitsioon [Wea14, lk-d 37–38, 41], mida siin töös pole välja toodud. Kõigepealt defineeritakse potentselt regulaarse rekursiooniga $\mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ atomaarse võrduse jaoks, kui $\Phi[\tau_i, \tau_j] \doteq \tau_i = \tau_j$ [Wea14, lk-d 37–38]. Väite (2) alamjaotis ii) järeldub metateoreemiskeemi II.13 abil. Järgmisena sätestatakse, missugune on $\mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ atomaarse sisalduvuse korral, kus $\Phi[\tau_i, \tau_j] \doteq \tau_i \in \tau_j$ [Wea14, lk 41]. Seda tehakse rekursioo-

ni kasutamata, rajades definitsiooni juba olemasolevale võrdusele [Wea14, lk 41]. Viimaks defineeritakse $\mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ struktuurse rekursiooniga kõigi ülejäänud, mitteatomaarsete valemite $\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ jaoks [Wea14, lk 41].

Tõestuse üldstruktuuri kirjeldus. Sarnaselt hulkade $\mathbf{F}_{\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ ehitamisega viiakse tõestus läbi kolmes staadiumis. Kõigepealt tõestatakse väited (1) ja (2) atomaarse võrduse korral potentselt regulaarse induktsiooniga [Wea14, lk-d 39–40]. Seejärel asutakse atomaarse sisalduvuse kallale. Sisalduvuse korral pole induktsiooni tarvis, piisab tuginemisest juba tõestatud võrduse-osal [Wea14, lk-d 41–42]. Ülejäänud valemite jaoks tõestatakse väited (1) ja (2) struktuurse induktsiooniga, mil baasjuhud on võrduse ning sisalduvuse näol juba olemas. Sammus tuleb vaadata kolme juhtu, kus eitus, implikatsioon või universaalkvantor on valemis $\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ peatehteks. [Wea14, lk 42]

Tõestuse staadiumite alamosade, samuti sammu alamosade tõestused on üksteisega küllalt sarnased. Tõestuse igas osas kasutatakse märkuse III.13 osasid b ja c, lisaks seni kasutamata metalemmasid III.4 ja III.5. [Wea14, lk-d 38–42]

Võrduse jaoks leiab lugeja pikema tõestuse näiteks allikast Weaver [Wea14, lk-d 37–42]. ■

2.2. Laiend $M[G]$ rahuldab teooria ZFC aksioome

Metateoreemiskeemis III.20 nägime, et $M[G]$ rahuldab ekstensionaalsusaksioomi, regulaarsuse aksioomi, hulgapaari ja ühendi moodustamise aksioome ning lõpmatu hulga leidumise aksioomi. Siin jaotises tõestame, et jõustamislaiend $M[G]$ täidab ka eraldamisaksioomiskeemi ning potentshulga moodustamise aksioomi. Asendamisaksioomiskeemi ning valikuaksioomi rahuldamise esitame tõestuseta. Veel põhjendame, miks on baas-kvaasimudelil M ja jõustamislaiendil $M[G]$ ühesugused ordinaalarvud.

Metateoreemiskeem III.24 (jõustamise põhimetateoreemiskeem, II osa jätk, [Wea14, lk-d 42–43]). *Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \mathbf{ZFC}$. Las olla $P \in M$ tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Jõustamislaiend $M[G]$ rahuldab eraldamisaksioomiskeemi.*

Tõestuses eeldame, et $x, Y, p_1, \dots, p_k, X, \sigma, \tau, \tau_1, \dots, \tau_n$ on süntaktiliselt erinevad individ-muutujad.

Tõestus. Olgu $k \geq 0$ metanaturaalarv ja $\mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \dots, p_k](X, Y) \in \mathbf{Form}(\mathbf{ZFC})$, kusjuures

$\text{Free}(\mathcal{S}) \subseteq \{x, X, p_1, \dots, p_k\}$. Vastav eraldamisaksioomiskeem oli

$$\forall p_1 \dots \forall p_k \forall X \exists Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \dots, p_k](X, Y)).$$

Absoluutsuse tulemusi arvestades tuleb meil tõestada, et

$$\forall p_1, \dots, p_k, X \in M[G] \exists Y \in M[G] \forall x (x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \dots, p_k](X, Y)|_{M[G]}).$$

Jõustamislaiendi definitsiooni tõttu saame valida $p_i := \text{val}_G(\tau_i)$, $X := \text{val}_G(\tau)$, kus $\tau, \tau_i \in M_W^P$ ja $i = 1, \dots, k$. Peame tõestama, et leidub $\varrho \in M_W^P$, mispuhul $Y = \text{val}_G(\varrho)$, kus

$$Y = \{x \in X \mid \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \dots, p_k](X, Y)|_{M[G]}\}.$$

Väidame, et sobib võtta

$$\begin{aligned} \varrho &:= \{z \in \tau \mid (\exists \sigma \in \text{dom } \tau)(\exists p \in P)(z = (\sigma, p) \wedge p \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \dots, p_k/\tau_k](X/\tau, Y))\} \\ &= \{(\sigma, p) \in \tau \mid p \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \dots, p_k/\tau_k](X/\tau, Y)\}. \end{aligned}$$

Selgitame, miks $\varrho \in M_W^P$. [Defineeritavuse lemma](#) põhjal on

$$p \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \dots, p_k/\tau_k](X/\tau, Y)$$

väljendatav mingi valemi M -ahendina. Kuna $\tau, \tau_i \in M$ ning M rahuldab eraldamisaksioomiskeemi, siis $\varrho \in M$. Hulk ϱ koosneb järjestatud paaridest, mille esimene koordinaat on Weaveri P -nimi ja teine koordinaat hulga P element. Kui $(\sigma, p) \in \tau$ ja $q \in P$ on tugevam kui p , siis τ ülespoole $\subseteq$ -kinnisusest $(\sigma, q) \in \tau$. Jõustamiseose $\Vdash_P$ koherentsusest $q \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \dots, p_k/\tau_k](X/\tau, Y)$, sestap $(\sigma, q) \in \varrho$. Järelikult ϱ on ülespoole $\subseteq$ -kinnine. Lause III.6 osa (4) alusel on ϱ Weaveri P -nimi. Kokkuvõttes $\varrho \in M_W^P$.

Jääb näidata, et $\text{val}_G(\varrho) = Y$. Tõestame kumbagi pidi sisalduvused.

- $\text{val}_G(\varrho) \subseteq Y$. Olgu $x \in \text{val}_G(\varrho)$. Siis leidub $\sigma \in \varrho^{-1}(G)$ nii, et $x = \text{val}_G(\sigma)$. Järelikult $(\sigma, g) \in \varrho$ mingi $g \in G$ korral. Esiteks, hulga ϱ definitsioonist $(\sigma, g) \in \tau$, st $\sigma \in \tau^{-1}(G)$ ehk $x = \text{val}_G(\sigma) \in \text{val}_G(\tau) = X$. Teiseks, samuti hulga ϱ definitsioonist, kehtib $g \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \dots, p_k/\tau_k](X/\tau)$. Kuivõrd $g \in G$, järeldub jõustamiseose $\Vdash_P$ definitsioonist, võttes $G' := G$, $n := k + 2$, $\tau_1 := \tau_1, \dots, \tau_k := \tau_k$, $\tau_{k+1} := \sigma$, $\tau_{k+2} := \tau$ ja

$\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n] \doteq \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \dots, p_k/\tau_k](X/\tau, Y) \wedge (\tau = \tau)$, et

$$\left(\mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \dots, p_k/\tau_k](X/\tau, Y) \wedge (\tau = \tau) \right) [\tau_1/p_1, \dots, \tau_k/p_k, \sigma/x, \tau/X] \Big|_{M[G]},$$

kus $y'_j := p_j = \text{val}_G(\tau_j)$, $j = 1, \dots, k$, $y'_{k+1} := x = \text{val}_G(\sigma)$, $y'_{k+2} := X = \text{val}_G(\tau)$.
Tehes vastavad asendused, saame

$$\left(\mathcal{S}[x/\sigma/x, \hat{Y}, p_1/\tau_1/p_1, \dots, p_k/\tau_k/p_k](X/\tau/X, Y) \wedge (X = X) \right) \Big|_{M[G]},$$

mis on süntaktiliselt sama kui

$$\left(\mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \dots, p_k](X, Y) \wedge X = X \right) \Big|_{M[G]}.$$

Võrduse $\tau = \tau$ tõime sisse muutujate arvu kindlaks fikseerimiseks ja selle tulemusel tekkinud võrduse $X = X$ võib ära jätta. Kokkuvõttes kehtib $\mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \dots, p_k](X, Y) \Big|_{M[G]}$.
Varasemast $x \in X$, mistõttu ongi $x \in Y$, nagu oli soovitud.

- $\text{val}_G(\varrho) \supseteq Y$. Olgu $x \in Y$. Hulga Y määratlusest $x \in X = \text{val}_G(\tau)$, sestap leidub $\sigma \in \tau^{-1}(G)$ nõnda, et $x = \text{val}_G(\sigma)$. Järelikult $(\sigma, p) \in \tau$ teatava $p \in G$ puhul. Samuti hulga Y definitsioonist kehtib $\mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \dots, p_k](X, Y) \Big|_{M[G]}$, mille võime kirja panna ka kui

$$\left((\mathcal{S}[x/\sigma/x, \hat{Y}, p_1/\tau_1/p_1, \dots, p_k/\tau_k/p_k](X, Y) \wedge X = X)(X/\tau/X) \right) \Big|_{M[G]}.$$

Tõesuslemma ekvivalentsi $\Rightarrow$ -suunast, võttes sobivalt

$$\Phi[\tau_1, \dots, \tau_n] \doteq \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \dots, p_k/\tau_k](X/\tau, Y) \wedge \tau = \tau,$$

järeldub võrduse $\tau = \tau$ ära jätmisel, et mingi $q \in G$ korral

$$q \models_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \dots, p_k/\tau_k](X/\tau, Y).$$

Märkuse III.13 osa c põhjal saame nõuda, et q on tugevam kui p . Weaveri P -nimede ülespoole $\subseteq$ -kinnisusest $(\sigma, q) \in \tau$, sest $(\sigma, p) \in \tau$. Järelikult $(\sigma, q) \in \tau$, kusjuures q jõustab valemite $\mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \dots, p_k/\tau_k](X/\tau, Y)$. Hulga ϱ definitsiooni põhjal $(\sigma, q) \in \varrho$. Et $q \in G$, siis $x = \text{val}_G(\sigma) \in \text{val}_G(\varrho)$ ehk $x \in \text{val}_G(\varrho)$, mida soovisimegi.

Eraldamisaksioomiskeemi tõkestatud variandi kehtivus on tõestatud. ■

Oleme valmis põhjendama, miks baas-kvaasimudelil M ning jõustamislaiendil $M[G]$ on ühed ning samad ordinaalarvud.

Metateoreemiskeem III.25 (jõustamise põhimetateoreemiskeem, I osa jätk, [Wea14, lk-d 35–36; Kun80, lk 191]). *Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \mathbf{ZFC}$. Las olla $P \in M$ tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Jõustamislaiendil $M[G]$ ja baas-kvaasimudelil M on igas mõttes samad ordinaalarvud,*

$$\mathbf{Ord} \cap M = \mathbf{Ord}^M = \mathbf{Ord}^{M[G]} = \mathbf{Ord} \cap M[G].$$

Tõestus. Oleme näidanud, et metateoreemiskeemi eelduste täitmisel on jõustamislaiend $M[G]$ aksioomide hulga $\mathbf{Ax}(\mathbf{Z} - \mathbf{P})$ mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel. Metateoreemiskeemi II.7 osa (6) põhjal on ordinaalarvuks olemine järelikult $M[G]$ -absoluutne. Metadefinitsiooni II.9 osa a põhjal on ordinaalarvude klass $\mathbf{Ord}$ klassina $M[G]$ -absoluutne, s.o $\mathbf{Ord}^{M[G]} = \mathbf{Ord} \cap M[G]$. Loomulikult $\mathbf{Ord} \cap M = \mathbf{Ord}^M$. Järelikult piisab tõestada, et $\mathbf{Ord} \cap M = \mathbf{Ord} \cap M[G]$.

Teoreemiskeemi III.19 osa (1) järgi on jõustamislaiend $M[G]$ baas-kvaasimudeli M laiend, $M \subseteq M[G]$. Seega sisalduvus $\mathbf{Ord} \cap M \subseteq \mathbf{Ord} \cap M[G]$ kehtib. Põhjendame teisipidi alamhulgalisust $\mathbf{Ord} \cap M \supseteq \mathbf{Ord} \cap M[G]$. Valime $\mathbf{val}_G(\tau) \in \mathbf{Ord} \cap M[G]$, $\tau \in M^P$. Lemma III.21 järgi ei saa nime kandja astak olla suurem kui algse nime astak, $\mathbf{Rank}(\mathbf{val}_G(\tau)) \leq \mathbf{Rank}(\tau)$. Ordinaalarvud on astakufunktsiooni püsipunktid, lause I.28 osa (1). Seega $\mathbf{Rank}(\mathbf{val}_G(\tau)) = \mathbf{val}_G(\tau)$, mistõttu $\mathbf{val}_G(\tau) \leq \mathbf{Rank}(\tau)$. Metalauseskeemi II.14 põhjal on astakufunktsioon $\mathbf{Rank}$ funktsioonina M -absoluutne, mistõttu $\tau \in M_W^P \subseteq M$ alusel $\mathbf{Rank}(\tau) \in M$. Kui $\mathbf{val}_G(\tau) = \mathbf{Rank}(\tau)$, järeldub kohe $\mathbf{val}_G(\tau) \in M$. Kui $\mathbf{val}_G(\tau) < \mathbf{Rank}(\tau)$, järeldub $\mathbf{val}_G(\tau) \in M$ hulga M transitiivsusest.

Tulemus on tõestatud. ■

Viimasena tõestame, et jõustamislaiend $M[G]$ rahuldab potentshulga moodustamise aksioomi. Metalause II.26 osa (1) põhjal piisab näidata, et iga $X \in M[G]$ korral $\mathcal{P}(X) \cap M[G] \in M[G]$. Tegelikult võime isegi piirduda tõestusega, et leidub hulk $Y \in M[G]$, mispuhul $\mathcal{P}(X) \cap M[G] \subseteq Y$ [Hal14, lk 19]. Oleme tõestanud, et jõustamislaiend rahuldab eraldamisaksioomiskeemi ning hulgast Y saaksime hulga $\mathcal{P}(X) \cap M[G]$ eraldada absoluutse tingimusega $Z \subseteq X$.

Oletame, et P on juurega tingimuskogum. Eeldus ei too kaasa üldisuse kadu, vt metalauseskeemi III.15. Olgu τ mingi P -nimi. Tõestuses kasutame selle põhjal moodustatud

P -nime sub, kus

$$\begin{aligned} \text{sub}(\tau) &:= (\mathcal{P}(\tau) \cap M^P) \times \{\emptyset\} = \\ &= (\mathcal{P}^M(\tau) \cap \mathbf{V}^P) \times \{\emptyset\} = && (\text{metalause II.26 (2), metadef III.9}) \\ &= \{ (\sigma, \emptyset) \mid \sigma \subseteq \tau \wedge \text{„}\sigma \text{ on } M\text{-tõkestatud } P\text{-nimi“} \}. \end{aligned}$$

Kuna $\text{sub}(\tau)$ koosneb paaridest, kus esimene koordinaat on P -nimi ja teine on hulga P element, on tegu P -nimega. Kui $\tau \in M$, siis $\mathcal{P}^M(\tau) \in M$, P -nimeks olemise absoluutsusest $\mathcal{P}^M(\tau) \cap \mathbf{V}^P \in M$. Otsekorrutise absoluutsusest funktsioonina ja kuuluvusest $\{\emptyset\} \in M$ samuti $\mathcal{P}^M(\tau) \cap \mathbf{V}^P \times \{\emptyset\} \in M$. Järelikult kui $\tau \in M^P$, siis ka $\text{sub}(\tau) \in M^P$ ja $\text{val}_G(\text{sub}(\tau)) \in M[G]$.

Teoreemiskeemis tõestame, et $M[G] \ni X := \text{val}_G(\tau)$ korral sobib võtta $Y := \text{val}_G(\text{sub}(\tau))$. Tähendab, $\mathcal{P}(X) \cap M[G] \subseteq \text{val}_G(\text{sub}(\tau))$.

Teoreemiskeem III.26 (jõustamise põhiteoreemiskeem, II osa jätk, [Wea14, lk 43]). *Olgu M aksioomide metahulga $\mathbf{Ax}(\text{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \supseteq \text{ZFC}$. Las olla $P \in M$ tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Jõustamislaiend $M[G]$ rahuldab potentshulga moodustamise aksioomi.*

Tõestus. Olgu $X \in M[G]$. Järelikult leidub mingi $\tau \in M_W^P$, mispuhul $X = \text{val}_G(\tau)$. Eelnevale arutelule tuginedes tõestame, et $\mathcal{P}(X) \cap M[G] \subseteq \text{val}_G(\text{sub}(\tau))$. Las $Z \in \mathcal{P}(X) \cap M[G]$. Seega mingi $\sigma \in M^P$ puhul $Z = \text{val}_G(\sigma)$ ja $Z = \text{val}_G(\sigma) \subseteq \text{val}_G(\tau) = X$. Defineerime hulga

$$\varrho := \{ (\pi, p) \in \tau \mid p \Vdash_P (\pi \in \sigma) \}.$$

Koordinaatide nõuete, st lause III.6 osade (2) ja (4) põhjal on ϱ P -nimi. Metalauseskeemi III.22 ning defineeritavuse lemma alusel on $p \Vdash_P (\pi \in \sigma)$ esitatav M -ahendatud valemiga. Seega $\varrho \in M^P$. Selgesti $\varrho \subseteq \tau$, kust $(\varrho, \emptyset) \in \text{sub}(\tau)$. Tühi hulk kuulub alati juurega tingimuskogumi geneerilisse ideaali, sestap $\text{val}_G(\varrho) \in \text{val}_G(\text{sub}(\tau))$.

Tõestuse lõpetamiseks piisab näidata, et $Z = \text{val}_G(\varrho)$ ehk $\text{val}_G(\sigma) = \text{val}_G(\varrho)$. Uurime kumbagi pidi sisalduvust.

- $\text{val}_G(\varrho) \subseteq \text{val}_G(\sigma)$. Olgu $z \in \text{val}_G(\varrho)$. Siis $z = \text{val}_G(\varrho')$ teatava $\varrho' \in \varrho^{-1}(G)$ korral. Seetõttu mingi $p \in G$ puhul $(\varrho', p) \in \varrho$. Hulga ϱ definitsioonist $p \Vdash_P (\varrho' \in \sigma)$. Tõesuslemma ekvivalentsi $\Leftarrow$ -suunast ja sisalduvuse absoluutsusest $\text{val}_G(\varrho') \in \text{val}_G(\sigma)$. Seega $z \in \text{val}_G(\sigma)$, korras.

- $\text{val}_G(\varrho) \supseteq \text{val}_G(\sigma)$. Olgu $z \in \text{val}_G(\sigma)$. Et $\text{val}_G(\sigma) \subseteq \text{val}_G(\tau)$, siis ka $z \in \text{val}_G(\tau)$. Järelikult mingisuguse $\sigma' \in \tau^{-1}(G)$ korral $z = \text{val}_G(\sigma')$. Tahaksime, et $z \in \text{val}_G(\varrho)$, milleks tõestame, et $\text{val}_G(\sigma') \in \text{val}_G(\varrho)$. Selleks piisab leida $p \in G$, mispuhul $(\sigma', p) \in \varrho$, st $(\sigma', p) \in \tau$ ja $p \Vdash_P (\sigma' \in \sigma)$.

Kuivõrd $\sigma' \in \tau^{-1}(G)$, leidub $p' \in G$ nõnda, et $(\sigma', p') \in \tau$. Kuna $z \in \text{val}_G(\sigma)$, siis $\text{val}_G(\sigma') \in \text{val}_G(\sigma)$. Sisalduvuse absoluutsusest ning [tõesuslemma](#) ekvivalentsi $\Rightarrow$ -suunast leidub $q \in G$, mille korral $q \Vdash_P (\sigma' \in \sigma)$. Märkuse [III.13](#) osast [c](#) johtuvalt saame nõuda, et q on tugevam kui p' . Valime $p := q$. Seega $p \in G$, $p \Vdash_P (\sigma' \in \sigma)$ ning nime τ ülespoole $\subseteq$ -kinnisusest $(\sigma', p) \in \tau$. Seda soovisimegi. ■

Märgime, et $\subseteq$ -kinnisuse lihtsustav toime avaldub just tõestuse viimases lõigus. Lugeja võib veenduda, et kehtib ka vastupidine alamhulgalisus, st $\mathcal{P}(X) \cap M[G] \supseteq \text{val}_G(\text{sub}(\tau))$. Kasuks tuleb varasem teadmine, et P -nime kandja klassifunktsioon val on alamhulgalisuse suhtes monotoonne. Tähendab, kui $\sigma \subseteq \tau$, siis ka $\text{val}_G(\sigma) \subseteq \text{val}_G(\tau)$, mis on teada jaotise [III.1.5.3](#) lõpust.

Toome tõestuseta väite, et jõustamislaiend $M[G]$ rahuldab asendamisaksioomiskeemi ning valikuaksioomi.

Metateoreemiskeem III.27 (jõustamise põhimetateoreemiskeem, II osa jätk, [[Wea14](#), lk-d 43–44; [Kun80](#), lk-d 201–202]). *Olgu M aksioomide metahulga $\text{Ax}(\text{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel asendusteoorias $T \supseteq \text{ZFC}$. Las olla $P \in M$ tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Jõustamislaiend $M[G]$ rahuldab (1) asendamisaksioomiskeemi, (2) valikuaksioomi.*

Viide tõestusele. Põhjenduse võib leida nt allikatest Weaver [[Wea14](#), lk-d 43–44] ja Kunen [[Kun80](#), lk-d 201–202]. ■

2.3. Kontiinumihüpoteesi sõltumatus

Kõige lõpetuseks kirjeldame üldsõnaliselt kontiinumihüpoteesi sõltumatuse tõestust ZFC -hulgateooriast. Piirdume väite sõnastamisega, tingimuskogumite defineerimisega ning viidetega kirjandusele.

Läviordinaalarvaks kutsutakse ordinaalarvu α , mis pole ühegi väiksema ordinaalarvuga $\beta < \alpha$ üksüheses vastavuses, s.o $\neg(\beta \sim \alpha)$ [[HJ99](#), lk 129; [Wea14](#), lk 17]. Potentselt järjestatava hulga X *kardinaalarvaks* nimetatakse läviordinaalarvu α , mispuhul $X \sim \alpha$. Kardinaalarv on konkreetse hulga X korral üheselt määratud. [[HJ99](#), lk 130] Cantori-Zermelo teoreem

ütleb, et valikuaksioomi olemasolul on kõik hulgad potentselt järjestatavad, seetõttu on eelnevaga defineeritud iga hulga jaoks selle juurde kuuluv kardinaalarv [HJ99, lk-d 137–138]. Kardinaalarvu tähistame kahe ülakriipsuga [Oja06, lk-d 62–63], $\alpha =: \overline{\overline{X}}$.

Kardinaalarvude klass **Card** ei moodusta hulka. Lõplikud kardinaalarvud on parajasti von Neumanni naturaalarvude hulga ω elemendid [Jec02, lk 27]. Lõpmatud kardinaalarvud võib sättida teatavasse hierarhiasse, *alefite hierarhiasse* $(\aleph_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ [HJ99, lk 131]. Kardinaalarv $\aleph_0 = \omega$ on vähim lõpmatu kardinaalarv, $\aleph_1$ väiksuselt teine ja nõnda edasi. Cantori teoreem kardinaalarvude ja potentshulga vahekorra kohta [HJ99, lk 96] ütleb muu seas, et $\overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_0)}} > \aleph_0$.

Tekib küsimus, kus paikneb lõpmatu kardinaalarv $\aleph_1$. Kas kehtib $\aleph_0 < \aleph_1 < \overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_0)}}$ või $\aleph_0 < \overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_0)}} = \aleph_1$. Kontiinumihüpoteesiga (CH) pakuti, et $\overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_0)}} = \aleph_1$ [Can77]. Osutus aga, et ZFC-hulgateooria raames pole võimalik tõestada ei kontiinumihüpoteesi ega selle eitust [Göd40; Coh63; Coh64]. Vähemalt mitte siis, kui teooria ZFC on süntaktiliselt mittevasturääkiv. Teisisõnu, kontiinumihüpotees on ZFC-hulgateooriast *sõltumatu*. Või, kolmandas sõnastuses, nii $\text{ZFC} + \text{CH}$ kui $\text{ZFC} + \neg\text{CH}$ on vasturääkivustelt ühesugused teooriaga ZFC.

Kontiinumihüpoteesi sõltumatuse ZFC-hulgateooriast saab tõestada jõustamismeetodi abil, tuginedes metateoreemiskeemile II.25 [Wea14, lk-d 48, 52]. Metateoreemiskeemi II.25 tähistuses tuleks võtta $\phi := \text{CH}$ või $\phi := \neg\text{CH}$ ja hulga $M := N$ rolli sobiva tingimuskogumi P jõustamislaiend $\mathbf{M}[G]$.

Metateoreem III.28 (kontiinumihüpoteesi sõltumatus, [Göd40; Coh63; Coh64]). *Kontiinumihüpotees on ZFC-hulgateooriast sõltumatu.*

Tõestuse üldskeem, [Wea14, lk-d 47–52]. Tõestamiseks, et $\text{ZFC} + \text{CH}$ on vasturääkivuselt ühesugune teooriaga ZFC, võib tingimuskogumiks P_1 võtta

$$P_1 := \{(f: A \rightarrow B) \in \mathbf{M} \mid \text{„}f \text{ on bijektsioon“} \wedge \\ \wedge A \subseteq \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \wedge B \subseteq \aleph_1^{\mathbf{M}} \wedge \\ \wedge \text{„}A, B \text{ on loenduvad“} \mid_{\mathbf{M}}\}.$$

$\mathbf{M}$ -ahendatud eraldamisaksioomiskeemi ning absoluutsuse tulemuste põhjal $P_1 \in \mathbf{M}$. Olgu $G_1 \subseteq P_1$ geneeriline ideaal, mis leidub Rasiowa-Sikorski lemma põhjal. Tingimuskogumil P_1 on olulise omadusena ω -kinnisus, õieti $\mathbf{M}$ -tõkestatud ω -kinnisus. Selle omaduse abil tõestatakse, et $\mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}[G_1]} \sim \aleph_1^{\mathbf{M}[G_1]}$. [Wea14, lk-d 47–48]

Tõestamiseks, et $\text{ZFC} + \neg\text{CH}$ on vasturääkivuselt ühesugune teooriaga ZFC, saab tingimuskogumiks

gumiks P_2 võtta

$$P_2 := \{(f: A \rightarrow \{0, 1\}) \in \mathbf{M} \mid \begin{array}{l} \text{„}f \text{ on bijektsioon“} \wedge \\ \wedge A \subseteq \omega \times \aleph_2^{\mathbf{M}} \wedge \\ \wedge \text{„}A, B \text{ on lõplikud“} \end{array}\}.$$

Sarnaselt $P_2 \in \mathbf{M}$ ja [Rasiowa-Sikorski lemma](#) järgi leidub geneeriline ideaal $G_2 \subseteq P_2$. Nüüd on määravaks omaduseks tingimuskogumi P_2 $\mathbf{M}$ -tõkestatud *loenduvate antiahelate omadus* ehk $(c.ac.c)|_{\mathbf{M}}$. Sellele omadusele toetudes saab näidata, et $\overline{\overline{\mathcal{P}(\omega)}}^{\mathbf{M}[G_2]} \geq \aleph_2^{\mathbf{M}[G_2]}$. [[Wea14](#), lk-d 49–52]

Põhjalikuma selgituse leiab lugeja näiteks allikast [[Wea14](#), lk-d 45–52]. ■

Lisad

Lisa A. Näide tuletusest Gentzeni süsteemis

Tõestame, et Gentzeni aksiomaatilises süsteemis kehtib konjunktsiooni abisümboli $\wedge$ jaoks vasakule sissetoomise reegel, kui $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ on korrektne valem:

$$\frac{\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}} (\wedge \vdash)^\ddagger.$$

Õieti põhjendame, miks võib sekventsist $\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}$ alati „hüpata“ sekventsini $\Gamma, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}$.

Tõestuspuu ehitame suunaga alt üles. Kõigepealt kirjutame abiavaldise $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ määratluse pikemalt lahti.

$$\frac{\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}) \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}} (\wedge \doteq)$$

Edasi rakendame juba tuntud lausearvutuslikke reegleid. Eituse paremalt eemaldamise reegel ($\vdash \nearrow$) valmistab ette eituse paremale sissetoomist ($\vdash \neg$). Eituse paremale sissetoomisega ja struktuursete reeglite abil vabaneme implikatsioonist antetsedendis.

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \neg\mathcal{H} \vdash \mathcal{H}} (\text{S+}) \\ \frac{\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \neg\mathcal{H} \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{G}, \neg\mathcal{H}, \mathcal{F} \vdash \mathcal{H}} (\text{S}\sim) \\ \frac{\Gamma, \mathcal{G}, \neg\mathcal{H}, \mathcal{F} \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \neg\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}} (\text{S}\sim) \quad \frac{}{\Gamma, \neg\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \neg\mathcal{H}} (\text{var}) \\ \hline \frac{\Gamma, \neg\mathcal{H}, \mathcal{F} \vdash \neg\mathcal{G}}{\Gamma, \neg\mathcal{H} \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})} (\vdash \Rightarrow)^\ddagger \\ \hline \frac{\Gamma, \neg\mathcal{H}, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}) \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})}{\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}), \neg\mathcal{H} \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})} (\text{S+}) \\ \hline \frac{\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}), \neg\mathcal{H} \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})}{\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}) \vdash \neg\neg\mathcal{H}} (\text{S}\sim) \quad \frac{}{\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}), \neg\mathcal{H} \vdash \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})} (\text{var}) \\ \hline \frac{\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}) \vdash \neg\neg\mathcal{H}}{\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}) \vdash \mathcal{H}} (\vdash \nearrow) \\ \hline \frac{\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}) \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}} (\wedge \doteq) \end{array}$$

Jääb üle tõestada, et sekventsist $\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}$ saame tuletada sekvenssi $\Gamma, \neg\mathcal{H} \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$. Implikatsiooni sissetoomise $(\vdash \Rightarrow)^\dagger$ järel on uuesti rakendatav eituse paremale sissetoomine $(\vdash \neg)$. Struktuursed reeglid annavad nõutud lõppkuju.

Muude abitehete, näiteks olemasolukvantori jaoks leiab tuletusreeglid allikast [PP04, lk-d 88, 97].

Lisa B. Transitiiivse eelsulundi teoreemiskeemi tõestus

Põhjendame täpsemalt, miks E -transitiivne eelsulund alati leidub. Tõestuse põhiidee tõime jaotises I.2.5.1 teoreemiskeemi I.15 [esmakordses sõnastuses](#).

Teoreemiskeem I.15 (E -transitiivne eelsulund leidub, [Jec02, lk 67; HJ99, lk 253]). *Olgu $\mathcal{C}$ klass, $E \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ hulgalaadne klassiseos ning $X \subseteq \mathcal{C}$ suvaline hulk. E -transitiivne eelsulund $\text{tc}_E(X)$ alati leidub.*

Tõestus. Loetavuse lihtsustamiseks jaotame tõestuse alamosadeks.

(a) Abidefinitatsioonid

Defineerime kõigepealt täisfunktsioonilise abioperatsiooni $y = \lfloor E \rfloor z$, mida läheb tõestuses tarvis.

$$y = \lfloor E \rfloor z \doteq y = \bigcup \{ \text{ext}_E(z') \mid z' \in z \cap \mathcal{C} \}$$

Olgu $z \in \mathcal{C}$. Hulgalaadsuse põhjal leidub iga $z' \in z \cap \mathcal{C}$ jaoks E -eellaste hulk $\text{ext}_E(z')$. [Asendamise-kustutamise teoreemiskeemiga](#) ehitame hulgast z uue hulga $\{ \text{ext}_E(z') \mid z' \in z \cap \mathcal{C} \}$. Ekstensionaaalsuse järgi on viimane hulk üheselt määratud. Ühendi leidumise ning ekstensionaaalsuse tõttu leidub ka üheselt määratud hulk $\bigcup \{ \text{ext}_E(z') \mid z' \in z \cap \mathcal{C} \}$. Niisiis ongi valem $y = \lfloor E \rfloor z$ täisfunktsiooniline argumendi $z \in \mathcal{C}$ suhtes.

Edasi defineerime olulise abivalemi Recun , mis teeb tõestusesisest naturaalarvulist rekursiooni, sealjuures [vajamata](#) ühtegi varasemat rekursiooniteoreemi.

$$\begin{aligned} \text{Recun}[n, y, u, p_1] &\doteq \text{„}u \text{ on funktsioon“} \wedge \text{dom } u = n^+ \wedge (0, \text{ext}_E(p_1)) \in u \wedge \\ &\wedge \forall m \forall z (m < n \wedge (m, z) \in u \Rightarrow (m^+, y) \in u \wedge y = \lfloor E \rfloor z) \end{aligned}$$

Abitähistused on hulgateooria baaskeelega taandatavad. Valemi $\text{Recun}[n, y, u, p_1]$ definitsiooni sisse on kirjutatud tingimused $n \in \text{dom } u$, $u(0) = \text{ext}_E(p_1)$ ning $n \geq 1$ puhul $u(n) = \lfloor E \rfloor u(n-1)$.

Viimaks määrame valemile $\Phi[n, y, \hat{Y}, p_1/X](Y)$ tähenduseks

$$\begin{aligned} \Phi[n, y, \hat{Y}, p_1/X](Y) &:= n \in \omega \wedge \exists u(\mathbf{Recun}[n, y, u, p_1/X]) \vee \\ &\vee n \notin \omega \wedge y = \emptyset. \end{aligned}$$

Meenutame, et X on jätkuvalt hulk, mille jaoks objekti $\text{tc}_E(X)$ leidumist tõestame. Kui õnnestub näidata, et $\Phi[n, y, \hat{Y}, p_1/X](Y)$ on täisfunktsiooniline, siis hulgast ω tuleneb asendamisaksioomiskeemiga hulk

$$Y := \text{ran}(u_n)_{n \in \omega} = \underbrace{\{\text{ext}_E(X)\}}_{u(0)}, \underbrace{\{\underline{E}\text{ext}_E(X)\}}_{u(1)}, \underbrace{\{\underline{E}\underline{E}\text{ext}_E(X)\}}_{u(2)}, \underbrace{\{\underline{E}\underline{E}\underline{E}\text{ext}_E(X)\}}_{u(3)}, \dots \}.$$

Otsitav hulk oleks $\text{tc}_E(X) = \bigcup Y$. Asume niisiis põhjendama valemil $\Phi[n, y, \hat{Y}, p_1/X](Y)$ täisfunktsioonilisust.

(b) Valemi $\Phi[n, y, \hat{Y}, p_1/X](Y)$ täisfunktsioonilisus

Tõestuses kasutame kaks korda naturaalarvulise induktsiooni teoreemi 1.7. Lemmana läheb meil vaja teadmist, et kui $n \in \omega$ jaoks leiduvad u ning v nõnda, et $\mathbf{Recun}[n, y, u, p_1]$ ja $\mathbf{Recun}[n, y, u/v, p_1]$, siis $u = v$. Võtame

$$S_1 := \{k \in \omega \mid \forall u \forall v (\mathbf{Recun}[n/k, y, u, p_1/X] \wedge \mathbf{Recun}[n/k, y, u/v, p_1/X] \Rightarrow u = v) \}.$$

Mõistagi 1) $S_1 \subseteq \omega$, 2) $0 \in S_1$, sest leidub ülimalt üks funktsioon u , mispuhul $(0, \text{ext}_E(X)) \in u$ ja $\text{dom } u = 0^+ = \{0\}$. 3) Olgu nüüd $k \in S_1$ suvaline, s.o $k \in \omega$ korral implikatsioon kehtib. Näitame, et $k^+ \in S_1$. Oletame, et suvaliste v_1, v_2 korral on jõus eeldused $\mathbf{Recun}[n/k^+, y, u/v_1, p_1/X]$ ning $\mathbf{Recun}[n/k^+, y, u/v_2, p_1/X]$. Näitame, et $v_1 = v_2$. Võtame induktsiooni eelduses $u := v_1|_{k^+}$ ja $v := v_2|_{k^+}$. Induktsiooni eelduse implikatsiooni järelalusena $v_1|_{k^+} = v_2|_{k^+}$, eriti $v_1(k) = v_2(k)$. Kuna $y = \underline{E}z$ oli täisfunktsiooniline, siis ka $v_1(k^+) = \underline{E}v_1(k) = \underline{E}v_2(k) = v_2(k^+)$. Kokkuvõttes $v_1 = v_2$, mistõttu $k^+ \in S_1$. Induktsiooniteoreemist 1.7 tuleneb $S_1 = \omega$. Funktsiooni u ühesusest johtub niisamuti väärtuse y ühesus. Kui mingi $k \in \omega$ korral leiduksid erisugused $y_1 \neq y_2$, siis oleksid ka vastavad funktsioonid u_1 ja u_2 erinevad, kuna väärtused kohal k ei ühtiks.

Analoogiliselt tõestatakse, et $S_2 = \omega$, kus

$$S_2 := \{k \in \omega \mid \exists u(\mathbf{Recun}[n/k, y, u, p_1/X]) \}.$$

Lühidalt 1) $S_2 \subseteq \omega$, 2) $0 \in S_1$, sest sobib võtta $u := \{(0, \text{ext}_E(X))\}$, 3) ning kui $k \in \omega$

korral leidub u , siis k^+ puhul võime võtta $u' := u \cup \{(k^+, \lfloor_E u(k))\}$.

Viimaks põhjendame, miks valem $\Phi[n, y, \hat{Y}, p_1/X](Y)$ on täisfunktsiooniline ehk miks

$$\forall n \exists! y' \Phi[n, y/y', \hat{Y}, p_1/X](Y).$$

Tõestame otse. Kui $n \notin \omega$, siis korras. Olgu $n \in \omega$ suvaline. Teame, et leiduvad üheselt määratud u ja y nii, et $\text{Recun}[n, y, u, p_1/X]$. Sobibki võtta vastav y ehk $y' := \text{ext}_E(X)$, kui $n = 0$, ja $y' := u(n) = \lfloor_E u(n-1)$, kui $n \geq 1$.

Oleme valmis rakendama hulgale ω asendamisaksioomiskeemi valemi $\Phi[n, y, \hat{Y}, p_1/X](Y)$ korral. Olgu saadavaks hulgaks Y , s.o

$$y \in Y \Leftrightarrow \exists n (n \in \omega \wedge \Phi[n, y, \hat{Y}](p_1/X)).$$

Alles nüüd, kus hulk Y on olemas, saame defineerida lühitõestuses kasutatud jada $(u_n)_{n \in \omega}$, võttes

$$(u_n)_{n \in \omega} := \{ (n, y) \in \omega \times Y \mid \Phi[n, y, \hat{Y}, p_1/X](Y) \}.$$

Vahetult $Y = \text{ran}(u_n)_{n \in \omega}$. Puudub ainult selgitus, miks $\bigcup Y = \text{tc}_E(X)$.

(c) Võrdus $\bigcup Y = \text{tc}_E(X)$ ehk $\bigcup \text{ran}(u_n)_{n \in \omega} = \text{tc}_E(X)$

Kontrollime E -transitiivse eelsulundi nõuete täitmist. Esiteks, kuna $u_0 = \text{ext}_E(X)$, siis $\text{ext}_E(X) \subseteq \bigcup Y$. Teiseks, alamhulgeline sisalduvus klassis, $\bigcup Y \subseteq \mathcal{C}$, tõestatakse niisamuti naturaalarvulise induktsiooniga. Induktsiooni baasis $\text{ext}_E(X) \subseteq \mathcal{C}$ ja sammus suvalise Z korral, kui $Z \subseteq \mathcal{C}$, siis $\lfloor_E Z \subseteq \mathcal{C}$. Kolmandaks, hulk $\bigcup Y$ on E -transitiivne. Kui $x \in \bigcup Y$, siis $x \in u_n$ mingisuguse $n \in \omega$ korral. Võttes $z \mathrel{E} x$, kus $z \in \mathcal{C}$, saame $z \in \bigcup Y$. Seda seetõttu, et

$$\begin{aligned} z \in \text{ext}_E(x) &\subseteq \bigcup \{ \text{ext}_E(z') \mid z' \in u_n \} = \\ &= \bigcup \{ \text{ext}_E(z') \mid z' \in u_n \cap \mathcal{C} \} = \\ &= \lfloor_E u_n = u_{n+} \subseteq \bigcup \text{ran}(u_n)_{n \in \omega} = \bigcup Y. \end{aligned}$$

Olgu nüüd $T \subseteq \mathcal{C}$ suvaline E -transitiivne hulk, mispuhul $\text{ext}_E(X) \subseteq T$. Neljandaks näitame, et siis $\bigcup Y \subseteq T$ ehk $\bigcup Y$ on $\subseteq$ -vähim niisuguste omadustega hulk. Piisab

tõestada, et iga $n \in \omega$ korral $u_n \subseteq T$. Kasutame naturaalarvulist induktsiooni. Võtame

$$S := \{ n \in \omega \mid u_n \subseteq T \},$$

selgesti 1) $S \subseteq \omega$, 2) $0 \in S$, kuna $u_0 = \text{ext}_E(X) \subseteq T$ hulga T valiku järgi. 3) Olgu nüüd $n \in S$, seega $u_n \subseteq T$. Et T oli E -transitiivne, siis iga $z' \in u_n$ korral $\text{ext}_E(z') \subseteq T$. Teisisõnu järeldub, et $u_{n+} = \bigcup \{ \text{ext}_E(z') \mid z' \in u_n \cap \mathcal{C} \} \subseteq T$, nagu oligi tarvis. Induktsiooniteoreem I.7 annab võrduse $S = \omega$, hulga S olemusest lähtuvalt saame $\bigcup Y \subseteq T$.

Transitiivse eelsulundi ühesus tuleneb $\subseteq$ -vähimusest ja ekstensionaalsusest. Teoreem on tõestatud. ■

Lisa C. Epsilon-kvaasimudeli korrektsuse tõestus

Metateoreemiskeem II.1 (epsilon-kvaasimudeli korrektsus, [Kun13, lk 101]). *Las olla teooria T asendusteooria. Olgu φ ZFC-hulgateooria kinnine valem ning Γ ZFC-teooria kinniste valemite järjend, sealjuures $T \cap \text{Form}(\text{ZFC}) \Vdash \Gamma \vdash \varphi$. Kasutagu sekventsi $\Gamma \vdash \varphi$ mingi tõestus τ teoorias $T \cap \text{Form}(\text{ZFC})$ parasjagu omaaksioome, mille konsekvendid pärinevad metahulgast $\mathcal{A}_\tau := \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \text{Form}(\text{ZFC})$. Leidugu valemite metahulgal $\mathcal{A}_\tau$ epsilon-kvaasimudel M teooria T suhtes, kusjuures klass M olgu mittetühi teoorias T . Eldame, et klassi M kirjeldus $M[q]$ ei kasuta kuskil individuumtuujaid, mis esinevad tõestuses τ .*

Sellisel juhul kehtib ka $T \Vdash \Gamma|_M \vdash \varphi|_M$.

Tõestus. Kasutame struktuurset induktsiooni mööda tõestuse τ puud. Kirjapildiga $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ tähistame vastava puu mingit vaatluse all olevat tippu.

* Baas (aksioomid)

(a) Loogilised ja poolloogilised aksioomid

(1) Puhta loogika aksioomid

Oletame, et $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ on puhta loogika aksioom, st $\Gamma_i \doteq \varphi_i$ ehk $\varphi_i \vdash \varphi_i$. Pärast tõkestamist järelikult $\varphi_i|_M \vdash \varphi_i|_M$, seega tegemist endiselt aksioomiga ning kehtib $\Gamma_i|_M \vdash \varphi_i|_M$.

(2) Võrduse aksioomid

ZFC keeles on kahte tüüpi võrduseaksioome: refleksiivsuse aksioomid ning asen-

dused predikaatsümbolitesse. i) Refleksiivsus. Sekvents $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ korral oleks Γ_i tühi järjend ning $\varphi_i \doteq x_j = x_j$ mingi $x_j \in \text{Indv}$ korral, kusjuures x_j ei esine klassi M määratluses. Tegu oleks niisiis sekventsiga $\vdash x_j = x_j$. Tühja järjendi ahend ning atomaarse valemi ahend ühtivad algsega, mistõttu taas $\Gamma_i|_M \vdash \varphi_i|_M$.
 ii) Asendus predikaatsümbolisse. Sekvents $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ on kas $x_{j_1} = y_{j_1}, x_{j_2} = y_{j_2} \vdash (x_{j_1} = x_{j_2} \Rightarrow y_{j_1} = y_{j_2})$ või $x_{j_1} = y_{j_1}, x_{j_2} = y_{j_2} \vdash (x_{j_1} \in x_{j_2} \Rightarrow y_{j_1} \in y_{j_2})$ kus $x_{j_1}, x_{j_2}, y_{j_1}, y_{j_2}$ on indiviidmuutujad. Mõlemal juhul on antetsedendis ainult atomaarsed valemid, mis ahendamisel ei teisene. Konsekventides on implikatsioonid, mille suhtes ahendamine distributeerub. Sellest ühest sammust piisab, et jõuda atomaarsete valemiteni, mis ei teisene. Taas kord $\Gamma_i|_M \vdash \varphi_i|_M$.

(b) Mitteloogilised aksioomid ehk omaaksioomid

Kui $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ on omaaksioom, võisime eeldada, et antetsedent Γ on tühi (tegu asendusteooriaga). Teoreemi tingimustest saame, et $\varphi_i \doteq \mathcal{A}_j$, kus $\mathcal{A}_j \in \mathcal{A}_\tau$. Seega on vaatluse all sekvents $\vdash \mathcal{A}_j$, mille tõkend on $\vdash \mathcal{A}_j|_M$. Sekvents $\vdash \mathcal{A}_j|_M$ on tuletatav, kuna eelduse järgi on M valemihulga $\mathcal{A}_j$ epsilon-kvaasimudel teooria T suhtes.

* Eeldus

Kehtigu teoreemi väide tõestuse τ tipu $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ jaoks iga sellele tõestuses eelneva sekvents korral.

* Samm

Näitame, et tulemus kehtib siis ka tipu $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ puhul.

(a) Lausearvutuslikud reeglid

Sirgjooneline. Tõkestamine distributeerub kenasti iga lausearvutuse tehte suhtes. Vahetult on näha, et struktuursete reeglitega on korras.

(b) Kvantoritega reeglid

Predikaatarvutuse reeglid tahavad täpsemat kontrolli. Lihtsam on reegluga, kus tõkestamine viib lokaalses mõttes konsekventi nõrgestamiseni, keerulisem reegluga, mis nõrgestab antetsedenti.

(1) $(\vdash \forall)^*$ – nõrgestame väidet

Olgu $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ tuletatud reeglist $(\vdash \forall)^*$ ehk olgu see kujul $\Gamma_i[\hat{x}] \vdash \forall x(\Psi_i[x])$. Induktsiooni eeldus on järelikult sekvents $\Gamma_i[\hat{x}]|_M \vdash \Psi_i[x]|_M$ tuletatavus. Tõestada

154

Lisa E. Ideaali eri definitsioonid

Sõnastame *järjestusteooria*, *hulgateooria* ning *üldise topoloogia ideaali* määratlused. Nendele viitasime metadefinitsioonile III.1 järgnenud võrdluses.

Meenutame, et eel- või kvaasijärjestuseks hulgal P nimetasime refleksiivset ning transitiivset seost $\preceq$ hulgal P .

Definitsioon A.1 (järjestusteooria ideaal, [Gie+02, lk-d 1–3]). Olgu $(P, \preceq)$ eeljärjestatud hulk. Alamhulka $G \subseteq P$ kutsutakse *järjestusteooria ideaaliks*, kui

- $G \neq \emptyset$;
- G on väiksemate elementide suhtes kinnine. See tähendab, iga $g, g' \in P$ korral, kui $g \in G$ ja $g' \preceq g$, siis $g' \in G$;
- G on $\preceq$ -suunatud hulk. Kui $g_1, g_2 \in G$, leidub $h \in G$ nii, et $g_1 \preceq h$ ja $g_2 \preceq h$.

Definitsioon A.2 (hulgateooria ideaal, [Cie97, lk-d 14, 6]). Olgu S suvaline hulk ja $P := \mathcal{P}(S)$. Alamhulka $G \subseteq P$ kutsutakse *hulgateooria ideaaliks*, kui

- $G \neq \emptyset$;
- G on $\subseteq$ -väiksemate elementide suhtes kinnine. See tähendab, iga $g, g' \in P$ korral, kui $g \in G$ ja $g' \subseteq g$, siis $g' \in G$;
- G on $\subseteq$ -suunatud hulk, tunnistajaks sobib ühend. Kui $g_1, g_2 \in G$, siis $g_1 \cup g_2 =: h \in G$.

Definitsioon A.3 (üldise topoloogia ideaal, [Car37]). Olgu S suvaline hulk ja $P := \mathcal{P}(S)$. Alamhulka $G \subseteq P$ kutsutakse *üldise topoloogia ideaaliks*, kui

- $S \notin G$;
- G on $\subseteq$ -väiksemate elementide suhtes kinnine. See tähendab, iga $g, g' \in P$ korral, kui $g \in G$ ja $g' \subseteq g$, siis $g' \in G$;
- G on $\subseteq$ -suunatud hulk, tunnistajaks sobib ühend. Kui $g_1, g_2 \in G$, siis $g_1 \cup g_2 =: h \in G$.

(Allikas [Car37] on päriselt toodud filtri definitsioon, kuid ideaal on filtri duaalne mõiste.)

Viited ja kasutatud kirjandus

Viited

- [Cai18] Andrés Eduardo Caicedo. *Formal definition of "hereditarily"*. Mathematics Stack Exchange. 2018. URL: <https://math.stackexchange.com/a/2874533> (vaadatud 05.01.2023).
- [Can77] Georg F. L. P. Cantor. „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1877), lk-d 242–258. ISSN: 0075-4102. DOI: [10.1515/crll.1878.84.242](https://doi.org/10.1515/crll.1878.84.242).
- [Car37] Henri Paul Cartan. „Théorie des filtres“. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 205.2 (1937), lk-d 595–598. ISSN: 0001-4036.
- [Cie97] Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician*. London Mathematical Society Student Texts 39. Suurbritannia ja Põhja-Iiri Ühendkuningriik, Cambridge: Cambridge University Press, 1997. ISBN: 0-521-59465-0.
- [Coh63] Paul Joseph Cohen. „The Independence of the Continuum Hypothesis“. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 50.6 (1963), lk-d 1143–1148. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.50.6.1143](https://doi.org/10.1073/pnas.50.6.1143).
- [Coh64] Paul Joseph Cohen. „The Independence of the Continuum Hypothesis, II“. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 51.1 (1964), lk-d 105–110. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.51.1.105](https://doi.org/10.1073/pnas.51.1.105).
- [Gie+02] Gerhard Gierz, Karl Heinrich Hofmann, Klaus Keimel, Jimmie Don Lawson, Michael Mislove ja Dana Stewart Scott. *Continuous Lattices and Domains*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 93. Suurbritannia ja Põhja-Iiri Ühendkuningriik, Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0-521-80338-1.
- [Göd38] Kurt Friedrich Gödel. „The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis“. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 24.12 (1938), lk-d 556–557. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.24.12.556](https://doi.org/10.1073/pnas.24.12.556).
- [Göd39] Kurt Friedrich Gödel. „Consistency-Proof for the Generalized Continuum-Hypothesis“. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 25.4 (1939), lk-d 220–224. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.24.12.556](https://doi.org/10.1073/pnas.24.12.556).

- [Göd40] Kurt Friedrich Gödel. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Annals of Mathematics Studies 3. Ameerika Ühendriigid, New Jersey, Princeton: Princeton University Press, 1940.
- [Hab22] Miha E. Habič. *What exactly is Levy hierarchy?* Mathematics Stack Exchange. 2022. URL: <https://math.stackexchange.com/a/428867> (vaadatud 05.01.2023).
- [Ham13] Joel David Hamkins. *Well founded induction attributed to Noether*. MathOverflow. 2013. URL: <https://mathoverflow.net/q/149853> (vaadatud 10.02.2023).
- [Ins09] Eesti Keele Instituut. *Metateooria*. Teoses: *Eesti keele seletav sõnaraamat*. 2. väljaanne. Tallinn: Eesti Keele Sihtasutus, 2009. ISBN: 978-9985-79-269-8. URL: <https://www.eki.ee/dict/ekss/index.cgi?Q=metateooria&F=M> (vaadatud 05.01.2023).
- [Laa23] Valdis Laan. *Aine „Diskreetne matemaatika I“ loengukonspekt*. Tartu, 2023.
- [Lév74] Azriel Lévy. „Parameters in Comprehension Axiom Schemas of Set Theory“. Teoses: *Proceedings of the Tarski Symposium*. 2-1979. Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics 25. Ameerika Ühendriigid, Rhode Island, Providence: American Mathematical Society, 1974, lk-d 309–324. ISBN: 0-8218-1425-7.
- [Mon55] Richard Merritt Montague. „Well-Founded Relations; Generalizations of Principles of Induction and Recursion“. *Bulletin of the American Mathematical Society*. The June meeting in Vancouver. Logic and Foundations 61.5 (1955), lk 442. ISSN: 0273-0979.
- [Pro22] Open Logic Project. *The Open Logic Text. Complete Build*. d3a1905. Open Logic Project, 2022. URL: <https://builds.openlogicproject.org/open-logic-complete.pdf> (vaadatud 05.01.2023).
- [Wik13] Contributors to Wikipedia. *Forsseerimine (matemaatika)*. Teoses: *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 3566957. väljaanne. Wikimedia Foundation, 2013. URL: [https://et.wikipedia.org/w/index.php?title=Forsseerimine_\(matemaatika\)&oldid=3566957](https://et.wikipedia.org/w/index.php?title=Forsseerimine_(matemaatika)&oldid=3566957) (vaadatud 13.02.2023).
- [Wik22] Contributors to Wikipedia. *Forcing (mathematics)*. Teoses: *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 1125728201. väljaanne. Wikimedia Foundation, 2022. URL: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Forcing_\(mathematics\)&oldid=1125728201](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Forcing_(mathematics)&oldid=1125728201) (vaadatud 05.01.2023).

- [Wik23] Contributors to Wikipedia. *Well-founded relation*. Teoses: *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 1135902189. väljaanne. Wikimedia Foundation, 2023. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Well-founded_relation&oldid=1135902189 (vaadatud 10.02.2023).

Kasutatud kirjandus

- [Hal14] Pál Halmos. *Naive Set Theory*. Ameerika Ühendriigid, New York, New York: Springer-Verlag, 2014. ISBN: 978-0-387-90104-6.
- [HJ99] Karel Hrbáček ja Tomáš Jech. *Introduction to Set Theory*. 3. väljaanne. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 220. Ameerika Ühendriigid, New York, New York: Marcel Dekker, Inc, 1999. ISBN: 0-8247-7915-0.
- [Jec02] Tomáš Jech. *Set Theory*. 3; 4-2006. Springer Monographs in Mathematics. Saksa-maa, Berliin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. ISBN: 3-540-44085-2.
- [Kle52] Stephen Cole Kleene. *Introduction to Metamathematics*. Bibliotheca Mathematica. A Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics 1. Hollandi Kuningriik, Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1952.
- [Kul64] Ivar Kull. *Matemaatiline loogika*. Tallinn: Eesti Riiklik Kirjastus, 1964.
- [Kun80] Herbert Kenneth Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 102. Hollandi Kuningriik, Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1980. ISBN: 0-444-85401-0.
- [Kun13] Herbert Kenneth Kunen. *Set Theory*. 2. väljaanne. Studies In Logic. Mathematical Logic and Foundations 34. Suurbritannia ja Põhja-Iiri Ühendkuningriik, London: College Publications, 2013. ISBN: 978-1-84890-050-9.
- [Oja06] Peeter Oja. *Hulgateooria*. 4. väljaanne. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 2006. ISBN: 9949-11-406-3.
- [PP04] Reimo Palm ja Rein Prank. *Sissejuhatus matemaatilisse loogikasse*. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 2004. ISBN: 9985-56-867-2.
- [Pra04] Rein Prank. *Matemaatiline loogika ja algoritmiteooria*. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 2004. ISBN: 9985-56-868-0.
- [Van16] Alvar Bjerkeng Van Keppel. „The Unprovability of the Continuum Hypothesis Using the Method of Forcing“. Bakalaureusetöö. Juhendaja Vera Koponen. Rootsi Kuningriik, Uppsala: Uppsala Ülikool, 2016. URL: <https://uu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A944342&dswid=-2835> (vaadatud 13.02.2023).

- [Vso22] Vsotvep. *How to more rigorously formalise “value of (Weaver’s) P -name” in set theory forcing (recursion)?* Mathematics Stack Exchange. 2022. URL: <https://math.stackexchange.com/a/4410323> (vaadatud 05.01.2023).
- [Wea14] Nik Weaver. *Forcing for Mathematicians*. Singapuri Vabariik: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2014. ISBN: 978-981-4566-00-1.

Kaitsmisjärgsetest muudatustest

Tööd on pärast kaitsmist parandatud ja täiendatud. Retsenseeris emeriitprofessor Kalle Kaarli. Uuendatud versioonis 1) parandati trüki- ning näpuvigu, 2) lisati klõpsatavad siseviited ehk eemaldati ättmärgid, 3) korrigeeriti küljendamist, 4) toodi välja paar uut kirjandusviidet, näiteks [Emmy Noetheri seos potentselt regulaarse induktsiooniga](#), 5) [kasvava funktsiooni definitsioonile](#) lisati hoiatus selle üldisuse kohta, 6) paari viidet täpsustati, näiteks [\[Hal14\]](#) ja [\[Van16\]](#). Autori algatusel tehti veel neli muudatust: a) lemmaskeemi [I.30](#) põhjendust laiendati, b) parandati viga metalauseskeemi [II.10](#) jaotise [\(3\) osa \(iv\)](#) tõestuses, c) kolmanda peatüki metatulemuste terminoloogia ühildati varasema tekstiga, d) lisa [B](#) tõestuses kirjutati ümber lause algusega „[Märgime, et valemi Recun\[n, y, u, p₁\] definitsiooni sisse ...](#)“, sealhulgas vahetati vigane muutuja n korrektse muutuja $n - 1$ vastu. Uueks lauseks sai „[Valemi Recun\[n, y, u, p₁\] definitsiooni sisse ...](#)“.

Matemaatilise, keelelise või vormistusliku vea leidmisel kirjutage meiliaadressil rasmus.born@ut.ee.

Viimati muudetud: 17.02.2023 kl 13.46.35

Note on Modifications Issued After Defence of Thesis

This document has been corrected and modified after the defence of the original thesis. The opposing examiner was professor *emeritus* Kalle Kaarli. In the updated version, 1) some typos and misprints were corrected, 2) clickable internal hyperlinks were added throughout the document, thereby removing superfluous at signs, 3) horisontal layout was improved, 4) a few extra notes were introduced, for instance [Emmy Noether's connection with well-founded induction](#), 5) a caveat was issued about the generality of [the definition of an increasing function](#), 6) a couple of external literary references were fixed or supplemented with additional information, among them [\[Hal14\]](#) and [\[Van16\]](#). On the author's own initiative, four more changes were made: b) the proof of lemma scheme [I.30](#) was expanded, b) a mistake in the proof of metalemma scheme [II.10](#) section [\(3\) part \(iv\)](#) was corrected, b) the terminology of metaresults in chapter three was unified with the preceeding text, b) in appendix [B](#), the sentence beginning ‘[Märgime, et valemi Recun\[n, y, u, p₁\] definitsiooni sisse ...](#)’ was supplanted, thereby replacing the incorrect variable n with the correct $n - 1$. The start of the new sentence reads ‘[Valemi Recun\[n, y, u, p₁\] definitsiooni sisse. ...](#)’

In case of mathematical, linguistic or formatting corrections, write to rasmus.born@ut.ee.

Latest changes: 2023-02-17T13:46:35UTC+02:00

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Rasmus Born,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Jõustamismeetod: kontiinumihüpoteesi sõltumatus ZFC-hulgateooriast“, mille juhendaja on Tõnu Tamme, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY-NC-ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Rasmus Born
05.01, 06.01, 17.02.2023