$$(1-x)^8 S_7 = 1+x^6+120(x+x^5)+1191(x^2+x^4)+2416x^3.$$

$$(1-x)^9 S_8 = 1+x^7+247(x+x^6)+4293(x^2+x^5)+ 15619(x^3+x^4).$$

$$(1-x)^{10} S_9 = 1+x^8+502(x+x^7)+14608(x^2+x^6)+ 88234(x^3+x^5)+156190x^4.$$

$$(1-x)^{11} S_{10} = 1+x^9+1013(x+x^8)+47840(x^2+x^7)+ 455192(x^3+x^6)+1310354(x^4+x^5).$$

(Tiré du Bulletin, T. XXV pag. 225—229.)

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des Sciences.
Octobre 1878. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.
(Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉPIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME III.

$\frac{15}{27}$ Juin 1865.

Quelques remarques analytiques à l'occasion d'un ouvrage de Mr. le Prince S. S. Ouroussof, par Ferd. Minding.

Dans un ouvrage sur les équations différentielles, publié à Moscou en 1863, Mr. le Prince Ouroussof vient de prendre en considération quelques-uns de mes travaux et de les soumettre à un jugement détaillé. C'est sans doute à cette circonstance que je dois l'exemplaire du dit ouvrage, que Mr. l'auteur a bien voulu faire parvenir entre mes mains. Je saisis avec empressement l'occasion de m'expliquer sur différents points mis en question, espérant qu'une libre discussion de ces objets ne sera pas sans quelque utilité. Il s'agit surtout de mon mémoire sur l'intégration des équations différentielles, publié par l'Académie en 1862 parmi les mémoires des savans étrangers. C'est à l'occasion d'une équation très connue, dont je me suis servi dans le dit mémoire, comme point de départ, que Mr. l'auteur ajoute les remarques suivantes (p. 117).

1) La substitution appliquée dans le mémoire cité ne permet de résoudre le problème, que lorsque (dans l'équation $Mdx + Ndy = 0$) M et N sont

des fonctions rationelles et entières de x et y. Mais de telles équations peuvent aussi se résoudre par toutes les autres méthodes.

2) Des équations très simples, qu'on résout aisément par toutes les méthodes connues, ne se résolvent pas par le procédé du dit mémoire; comme p. e. $(x-y^2)dx+2xydy=0$. Ainsi la substitution ne donne aucune méthode nouvelle d'intégration, mais elle reste simplement un procédé pour trouver le facteur intégrant de quelques équations, qu'on sait déjà résoudre par d'autres substitutions ou d'autres méthodes.

3) Donc la partie instructive du dit mémoire ne consiste pas dans les calculs et les équations qu'on y traite, mais dans les questions qu'il soulève et les conséquences qui découlent de la substitution.

Le lecteur sera curieux de savoir, comment l'auteur est parvenu à conclure que la substitution $y=ax+\beta$ devait conduire à la solution? Et si cela n'est pas difficile à deviner, ne peut-on pas tirer de cette substitution quelque règle pour transformer des fonctions beaucoup plus compliquées?

J'espère avoir fidèlement rendu le sens des remarques de Mr. l'auteur, dont l'ouvrage, écrit en langue russe, ne m'est devenu accessible que par la traduction que je me suis procurée des endroits qui touchent mes travaux.

Quant à la première remarque, j'ai supposé dans mon mémoire que M et N étaient des polynomes entiers par rapport à l'une des deux variables, pour laquelle j'ai pris y, mais dont les coefficiens pouvaient

être des fonctions quelconques de l'autre variable x. Aussi les substitutions ou plutôt les solutions particulières qui servent à former le facteur intégrant, sont-elles en général des fonctions quelconques de x, désignées par $y_1, y_2, \ldots$ Il faut encore observer qu'on peut, si $y=y_1$ et $y=y_2$ satisfont à l'équation différentielle, introduire d'autres variables u et v par les équations $y=v+y_1$, $y_2-y_1=u$ (si seulement la différence y_1-y_2 n'est pas constante). Par ce moyen on aura pour $y=y_1$, $v=0$ et pour $y=y_2$, $v=u$; on aura ainsi une équation différentielle entre u et v, qui présente les intégrales particulières $v=0$ et $v=u$; le reste des intégrales particulières, c'est-à-dire y_3-y_1, y_4-y_1, etc. étant évidemment des fonctions de u. J'ai profité largement de ce moyen, savoir de réduire ou de supposer réduite une des solutions particulières y_1 à zéro, une autre y_2 à x, pour présenter les équations différentielles sous les formes les plus simples sans en diminuer la généralité.

Cependant j'ai traité avec quelque étendue le cas où, M et N étant des fonctions entières en x et y à la fois, il y a un nombre suffisant de solutions linéaires pour en déduire le diviseur intégrant. Je me permets de mettre sous les yeux du lecteur l'équation $Mdx+Ndy=0$, dans laquelle on a (p. 72 du mémoire)

$$M=a+a_1x+a_2y+(la+ma_1)x^2+(lb+ma_2+mb_1-b_3)xy-mb_2y^2+[l(a_2+mb_2)+m(ma_2+mb_1-b_3)]x^2y+lb_2xy^2,$$

$$N=b+b_1x+b_2y+b_3x^2+2mb_2xy-[l(a_2+mb_2)+m(ma_2+mb_1-b_3)]x^3-lb_2x^2y,$$

les constantes $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, b_3, lm$ étant entièrement arbitraires, et dont je trouve par mon procédé le facteur intégrant d'une manière simple et générale. J'avoue de ne pas connaître d'autres méthodes pour parvenir à cette intégrale. Mais je passe à la seconde remarque.

Je n'ai pas entendu donner dans mon écrit une méthode générale d'intégration, mais seulement des additions (Beiträge) aux méthodes connues. Ainsi je ne prétends pas que toutes les équations soient traitables suivant cette méthode; au contraire, c'est une classe bien définie d'équations, à laquelle s'applique le procédé de mon mémoire. Cependant, quant à l'exemple cité et jugé inaccessible à ce procédé, je dois dire d'abord qu'il ne vaut pas la peine de parler de l'équation $(x - y^2)dx + 2xydy = 0$; mais puisqu'ici il s'agit de méthode, je vais montrer que mon procédé s'y applique de deux manières différentes. En effet, en considérant y comme variable indépendante et x fonction de y, et écrivant dans ce sens y au lieu de x et x au lieu de y, on a

$$2xydx + (y - x^2)dy = 0,$$

équation dans laquelle on voit la solution particulière $y = 0$. Profitant de cette solution on tentera, si le facteur intégrant admet la forme $y^{-\varepsilon}$, ce qui conduit tout de suite à la valeur $\varepsilon = 2$ et avec cela au diviseur intégrant y^2. Autrement: mettons dans l'équation donnée $y^2 = z$, elle deviendra $(x - z)dx + xdz = 0$. Soit $z = z_1$ une solution particulière de la proposée; on aura $(x - z_1)dx + xdz_1 = 0$; soustrayant celle-ci de la précédente on obtient $(z_1 - z)dx + xd(z - z_1) = 0$

ou bien $\frac{d(z - z_1)}{z - z_1} = \frac{dx}{x}$, ce qui donne l'intégrale; on peut par exemple prendre $z_1 = -x \log x$. Mais tout cela n'est pas nécessaire pour une équation qui s'intègre à la première vue.

Quant au défaut de nouveauté de mes intégrations, je laisse au lecteur de mon mémoire le soin de juger, s'il est possible de résoudre l'ensemble de mes problèmes par une quelconque de ces méthodes connues, qui sont si restreintes et conduisent à tant de tâtonnements infructueux. Pourtant il me sera permis de citer le problème proposé par Euler dans le § 497 des institutions de calcul intégral, qui consiste à rendre intégrable l'expression $Py^n dx + (Q + y)y^{n-1}dy$ au moyen d'un diviseur $y^2 + My + N$, P, Q, M, N étant des fonctions de x qu'il s'agit de déterminer. Appliquant à la condition de l'intégrabilité sa méthode des coëfficiens indéterminés, Euler se trouve arrêté par un système compliqué d'équations différentielles; voici comment il continue: Verum si hinc vellemus V elidere, in aequationem differentio-differentialem delaberemur. Casus tamen quo $n = 2$ expediri potest. (Inst. calc. int. t. 1. p. 355 de l'édition de 1768.) Depuis ce temps rien n'a été ajouté à la solution d'Euler; ainsi le problème a subsisté à peu près pendant un siècle sans être résolu, excepté le cas $n = 2$. Ce fut donc un fait important et qui augmentait la confiance que je mettais dans mes procédés, que je réussis aisément à en parvenir à bout, quelque fût le nombre entier et positif n; ce qu'on trouve exposé dans le numéro 8 de mon mémoire (p. 24 et suiv.)

La troisème remarque de Mr. l'auteur m'engage à m'expliquer un peu sur l'origine de mes idées, ce qui peut être utile pour gagner quelque lecteur à les suivre. Ce fut surtout l'étude du second chapitre de la 2^{me} section des institutions d'Euler, inscrit: de integratione aequationum ope multiplicatorum, dans lequel je cherchais quelque chose de plus que ne donnent les traités sur cette matière évidemment peu cultivée. J'y trouvais nombre d'exemples curieux, obtenus par un calcul habilement conduit; mais je n'y trouvais nulle part expliqué la cause du succès que je désirais surtout à connaître. Je parvins enfin à la découvrir dans certaines solutions particulières des équations proposées, dont évidemment se composait le facteur intégrant. Après avoir donné une courte note sur cet objet dans le Bulletin de 1845, je le quittais pour n'y revenir qu'en 1858, où voyant par occasion combien cette matière était généralement négligée, je me décidai à en faire l'objet d'un travail systématique, qui a paru en 1860.

Ce travail a abouti à fixer une certaine classe d'équations différentielles, dont on peut former le facteur intégrant à l'aide de certaines solutions particulières qu'il faut d'abord découvrir. Mais je ne peux que renvoyer le lecteur au numéro 9 de mon mémoire, p. 29, où l'on trouve expliquée la forme la plus générale du facteur intégrant qui appartient à la classe d'équations dont il s'agit et le théorème qui sert de base à mon procédé d'intégration. L'avantage du théorème consiste à décéler certains élémens du facteur intégrant, si d'ailleurs ce facteur admet réellement la forme supposée. Ainsi le procédé est très restreint vis-à-vis du problème général d'intégration, mais comparé aux moyens connus jusqu'ici il me paraît être d'une étendue bien grande.

Quant à l'arrangement de mon mémoire, j'avais d'abord conçu le plan de commencer par le théorème général, pour en descendre ensuite aux applications particulières. Cependant ce plan semblait faire dépendre les cas les plus simples et qui offraient des facilités particulières, d'une théorie qui n'était nécessaire que pour des cas plus compliqués. Ce motif m'a determiné à préférer une marche ascendante du simple au composé. En renversant l'ordre j'aurais certainement prévénu une critique qui revient à peu près à dire que tout mon travail ne roule que sur la substitution $y = \alpha x + \beta$, puisque dans le premier numéro j'ai montré le parti qu'on peut tirer des intégrales particulières de cette forme pour l'intégration d'une équation très simple et très connue, mais qu'on a toujours traité d'une manière à mon avis moins directe. Je ne peux passer sous silence une observation toute spéciale concernant la manière d'après laquelle Mr. l'auteur présente dans le numéro 48 de son ouvrage, p. 117, mon procédé d'intégration de la dite équation differentielle, dans laquelle on a

$$M = ax + by + c,\ N = a'x + b'y + c',\ Mdx + Ndy = 0.$$

Dans le cours de l'exposition on trouve dit sans aucune démonstration, que le quotient $\frac{M_1}{\psi' y_1}$ est constant; mais comme cela n'est nullement évident en soi-même, il paraît qu'on l'a regardé comme résultant d'un calcul simple, qu'on a laissé au lecteur. Cependant il est très essentiel, sinon dans le cas particulier, au moins pour la méthode, de familiariser le lecteur avec une manière expeditive de parvenir à la dite conclusion sans aucun calcul, par la seule considération de la valeur x' de x qui rend $y_1 = y_2$, comme on le trouve expliqué p. 5 de mon mémoire. Ainsi j'ai vu, avec regret, dans l'exposition de mon procédé tronqué ce qui en fait véritablement la pointe.

Mais j'abandonne toutes ces réflexions pour m'adresser aux lecteurs qui n'ont aucune connaissance de mon mémoire et leur proposer quelques exemples simples, tirés (à l'exception du premier) des formules générales de mon mémoire, et qui donnent lieu à comparer entre elles les différentes méthodes qu'on pourrait y appliquer.

On trouve dans l'ouvrage de Mr. le Prince Ouroussof, p. 108, le facteur intégrant de l'équation suivante:

$$Mdx + Ndy = 0\,,\ M = y^4 + y^3 + 2y^2x + 4yx + 2x,$$
$$N = (2y^3 + y^2 + 2xy + 2x)x.$$

Pour traiter cette équation d'après mon procédé, il faut d'abord observer qu'elle est satisfaite par $y = -1$, M étant divisible par y_1. Soit $M = G(y+1)$, on aura $G = y^3 + 2yx + 2x$. On peut encore remarquer qu'une autre solution est donnée par $x = 0$; mais je n'ai pas besoin de connaître à priori les solutions indépendantes de y. Tâchons de former le facteur intégrant e^{-W} de la manière la plus simple avec la solution obtenue $y_1 = -1$; ce qui se fait en supposant

$$W = V + \varepsilon \log(y+1);$$

V sera en général un polynome entier en y, mais on voit aisément qu'il suffit de supposer V indépendant

de y. L'équation de condition à laquelle il faut satisfaire devient dans ce cas:

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = -N\frac{dV}{dx} + \varepsilon G,$$

ce qui revient à

$$2y^3 + 2y^2 = -(2y^3 + y^2 + 2xy + 2x)x\frac{dV}{dx}$$
$$+ \varepsilon(y^3 + 2xy + 2).$$

Comparant des deux côtés les termes affectés d'égales puissances de y, on n'obtient que les trois conditions: $2 = -2x\frac{dV}{dx} + \varepsilon$, $2 = -x\frac{dV}{dx}$, $0 = -x\frac{dV}{dx} + \varepsilon$, qui s'accordent à donner $x\frac{dV}{dx} = -2$, $\varepsilon = -2$; donc on a $V = -2\log x$ et le facteur intégrant

$$e^{-W} = x^2(y+1)^2.$$

L'intégrale est: $(2y^3 + 3yx + 3x)x^3(y+1)^3 = \text{Const.}$

Soit proposé $(y+x)(y-1)\,dx - 2\,(x-1)ydy = 0$; on remarquera tout de suite les solutions particulières $y = 1$ et $y = x$; profitant de ces solutions, on trouve par un calcul très simple le facteur intégrant $\frac{y-x}{(x-1)^2(y-1)}$; ainsi on a

$$\frac{y-x}{(x-1)^2(y-1)}\Big\{(y+x)(x-1)\,dx - 2\,(x-1)ydy\Big\} = d\Omega$$

d'où l'on tire $\Omega = 2y - x + \frac{1-y^2}{x-1} + 2\log\frac{y-1}{x-1}$.

L'équation

$$[1 - (1+h)\,y\cos x + (h + (1-h)\sin x^2)\,y^2]\,dx +$$
$$(1-h)\sin x\cos x\,.\,ydy = 0$$

offre les solutions $y = e^{xi}$ et $y = e^{-xi}$, i étant $\sqrt{-1}$, dont on tire le diviseur intégrant:

$$(\sin x)^{1-h}\,.\,(\cos x)^2\,.\,(1 - 2y\cos x + y^2)^{\frac{1+h}{2}}\,.$$

Pour abréger je désignerai par R le radical

$$\sqrt{1 - 2y \cos x + y^2};$$

on aura donc

$$\frac{[1 - (1+h) y \cos x + (h + (1-h) \sin x^2) y^2]\, dx + (1-h) \sin x \cos x . y dy}{\sin^{1-h} . \cos x^2 . R^{1+h}} = d\Omega;$$

l'intégrale peut être mise sous la forme:

$$\Omega = \sin x^h \left(\frac{R^{1-h}}{(1-h)\cos x} + \int_0^y \frac{dy}{R^{1+h}} \right) + \int \sin x^{h-1} dx.$$

Si l'on a $h = 0$, l'équation devient

$$(1 - y \cos x + y^2 \sin x^2)\, dx + \sin x \cos x . y dy = 0,$$

dont on aura avec le diviseur intégrant $\sin x . \cos x^2 . \mathrm{R}$ l'intégrale

$$\Omega = \frac{R}{\cos x} + \log \frac{y - \cos x + R}{\sin x}.$$

Soit proposé en dernier lieu $Mdx + Ndy = 0$,

$$M = 2\,[x^3 + 2x^2 + 2x - (x^2 + x + 1) y] y$$
$$N = (xy - x^2 - 2x - 2)\, x^2;$$

on remarquera d'abord les solution $y = 0$ et $y = x$, dont on tire le facteur intégrant $\frac{y}{e^{\frac{x^2}{y}} (y-x)^3 x^3}$; on aura donc

$$\frac{2[x^3 + 2x^2 + 2x - (x^2 + x + 1) y] y^2 dx + (xy - x^2 - 2x - 2) x^2 y dy}{e^{\frac{x^2}{y}} (y-x)^3 x^3} = d\Omega;$$

l'intégrale est transcendante.

Dans tous ces exemples, dont il serait aisé d'augmenter le nombre, après avoir démêlé les solutions

préalables, on obtient le facteur intégrant par un calcul bien régulier, sans des tâtonnemens vagues.

Cependant la méthode n'est, évidemment, applicable que si l'équation différentielle appartient réellement à la classe indiquée, c'est à dire si son facteur intégrant est en effet capable de la forme proposée dans mon mémoire. Mais, dans tous les cas, on peut au moins s'assurer, si les solutions particulières qu'on aura pu trouver, sont ou ne sont pas suffisantes pour en former le facteur intégrant.

Je ne peux m'empêcher de citer encore quelques mots de Jacobi, qui me semblent énoncer l'opinion généralement admise sur le présent sujet. Voici ses mots: quid? quod casu simplicissimo, quo una tantum adest variabilis independens, si proponitur aequatis differentialis vulgaris inter duas variabiles, (telle que $Mdx + Ndy = 0$), innumerae datae esse possunt ipsius x functiones y, quae aequationem praecedentem identicum reddant, neque tamen ex iis erui potest solutio generalis vel integrale completum. (Journal de Crelle, t. 23, p. 21). En thèse générale la proposition est très juste, mais, à mon avis, elle méconnait l'importance des exceptions qui en existent.

—

Dans une seconde partie de son ouvrage Mr. le Prince Ouroussof revient, entre autres questions, à un problème dont je m'étais occupé en 1846, et qui consiste à soumettre au calcul les circuits du cavalier sur l'échiquier. Je ne peux que me féliciter de la manière avec laquelle Mr. l'auteur vient de ré-susciter mon ancien travail du profond oubli, dans lequel il a été enseveli jusqu'à présent; mais je n'ai rien de nouveau à y ajouter. J'ai cherché une méthode générale pour résoudre ce problème, ou plutôt ce genre de problèmes, et en pure théorie j'y ai réussi; mais en pratique ma tentative a échoué devant l'obstacle d'un calcul excessivement long, quoique à la vérité fini. Peut-être un jour parviendra-t-on à rendre le calcul plus expéditif par des méthodes convenables d'approxoximation; à présent je ne peux qu'attendre avec le plus grand interêt ce qu'on pourra obtenir par des considérations basées sur des figures géométriques.

(Tiré du Bulletin, T. IX, pag. 39 — 55.)

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9me ligne, № 12).

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME IV.

$\frac{3}{15}$ October 1867.

Démonstration d'un théorème de Statique, par Ferd. Minding, professeur à Dorpat.

L'idée du centre de gravité ou du centre des forces parallèles est si ancienne et tant de fois discutée, qu'on aurait peine à croire qu'elle pourrait encore devenir l'objet de nouvelles recherches. Cependant, en l'analysant, on reconnaît qu'elle n'est pas fondée uniquement sur le parallélisme des forces, mais qu'encore elle suppose des forces qu'on pourrait regarder comme inhérantes à leurs points d'application, c'est-à-dire qui restent invariables en grandeur et en direction, de quelque manière qu'on fasse tourner le corps auquel elles sont appliquées. Sans changer la position du corps par rapport aux forces, tous les points de la ligne dans laquelle agit la résultante, sont indifférens; ce n'est que par le changement de cette position relative, qu'on rencontre ce point particulier du corps, par lequel passe toujours la résultante et qui a reçu par cette raison le nom usité.

Cette réflexion m'a porté, il y a plus de trente ans, à supprimer la condition du parallélisme des forces et à considérer un corps solide soumis à des forces quelconques, dont chacune soit donnée en intensité