G. NIESE

MATEMAATILISI PÄHKLEID

FÜÜSIKA JA KEEMIA KATSEID

TRIKKÜLESANDEID

OPTILISI ILLUSIOONE

100 KOLUMBUSE MUNA

G. NIESE

100 KOLUMBUSE MUNA

KIRJASTUS „VALGUS“ · TALLINN 1971

5
N 45

Originaali tiitel:
Dr. Gerhard Niese
100 Eier des Kolumbus
Illustrationen von Heinz-Karl Bogdanski
Der Kinderbuchverlag Berlin

Saksa keelest tõlkinud *Olev Kärner*

Kunstiliselt kujundanud ja illustreerinud *Edgar Valter*

Käesolevast raamatust leiate üllatavate tulemusteni viivaid matemaatika ülesandeid, füüsika, keemia ja bioloogia katseid koos lahenduste ja seletustega. Hulgaliselt on toodud trikkülesandeid, samuti optilisel illusioonil põhinevaid katseid.

Raamat on määratud keskmisele ja vanemale koolieale, huvipakkuvat võib leida aga iga lugeja.

Teose tõlkimisel on välja jäetud mõningad eesti lugejale ebaolulised lõigud; selguse huvides kasutatakse ülesannetes nõukogude rahaühikute nimetusi.

6—4—3

EESSÕNA.

Kui Ameerika avastaja *Christoph Kolumbus* jõudis tagasi oma julgelt merereisilt, korraldati tema auks pidusöök. Paljud lauasistujaist kadestasid Kolumbust tema kuulsuse pärast. Nad märkisid, et Kolumbuse avastusreis on küll kangelastegu, mille aga võinuks korda saata igaüks, kui oleks ainult varem selle peale tulnud. Kolumbus naeratas ja andis kadestajaile kohapeal lahendamiseks väikese, kuid pealtnäha lahendamatu ülesande.

Ta näitas muna, asetas selle lauale ja tegi laudkonnale ettepaneku panna muna teravamale otsale püsti seisma. Keegi ei julgenud aga proovida. Kõik vaikisid. Kolumbus võttis muna ja lõi selle teravikuga lauaplaadile. Muna seisis püsti. (See oli kõvaks keedetud, püstiasetamisel munakoor rõhuti veidi sissepoole.) Kolumbus sai sooja poolehoiu osaliseks.

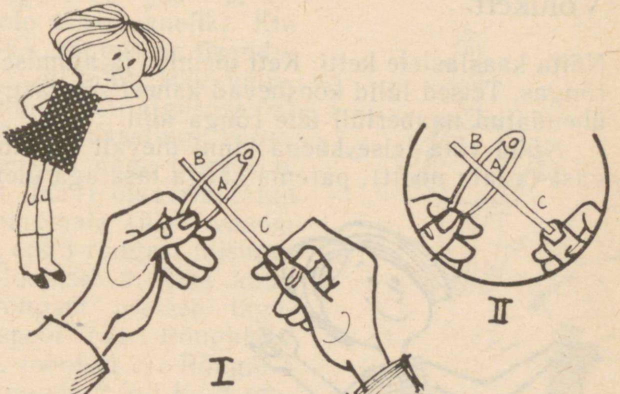
Alates sellest pidusöögist aastal 1493 nimetatakse esialgu raskena näiva ülesande rabavalt lihtsat lahendust «Kolumbuse munaks».

Niisuguseid Kolumbuse mune leiate ka sellest raamatust. Et saada üllatavaid tulemusi, tuleb otstarbekalt ja võimalikult lihtsal kujul kasutada loodusseadusi. Paljud sellised katsed sobivad esitamiseks sõprade ringis.

TRIKKÜLESANDEID.

Kas kõvad kehad on läbistatavad?

Väävlita tuletikust tuleb täpselt keskkohast läbi torgata keskmise suurusega haaknõel nii, et tikk jääks umbes nõela keskele. Kui pöörad tikku nõelal mõne korra edasi-tagasi, muutub tikk kergelt pööratavaks. Siis tuleb haaknõel sulgeda.



Tuletikk läbistab haaknõela.

Võta nõela suletavast osast kinni vasaku käe pöidla ja nimetissõrmega (I). Punktis *A* läbib nõel tikku. Punktis *B* on pool tikust haaknõela ühe haru taga. Nüüd vajuta parema käe pöidlaga jõuliselt punkti *C* juures tiku otsale ja lase siis pöial tikult ära libiseda. Imestuseks näed, et tiku teine pool on punkti *B* juures (II) tunginud läbi metallharu. Tikk ei asetse seal enam terasharu taga, vaid ees.

Kui tõukad nüüd tiku punkti *C* juures pöidlaga alt üles ja lased pöidla jälle kiiresti ära libiseda, siis läbistab tikk, nagu paistab, terasharu ülalt alla.

Tuletiku asemel sobib kasutada ka tugevamat puukepikest või väikest teritamata pliiatsit.

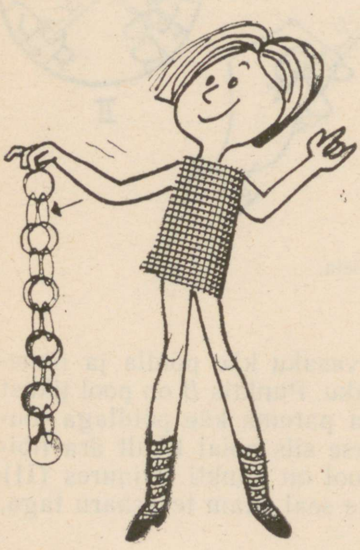
Selgitus.

Tikk paiskub poolringis terasharu elastsusjõu mõjul pöidlalt või vastavalt nimetissõrmelt libisemisel nii, et tiku see pool, mis just praegu veel asetses parema käe pöidla all, paikneb nüüd ülal, vastavalt punkti *B* juures haru ees. Terase suure elastsuse tõttu on likiumine nii välkkiire, et seda ei saa silmaga jälgida.

Võlukett.

Näita kaaslastele ketti. Keti ülemise ja alumise lüli moodustab üks rõngas. Teised lülid koosnevad kahest rõngast, mis on teineteisega ühendatud naaberlüli ühe rõnga abil.

Nüüd võta teise käega kinni ülevalt eelviimase lüli ühest rõngast (vaata noolt), parema käega lase aga ülemine rõngas kiiresti



See on võlukett. Allapaisatud rõngas läbib kogu keti.

allapoole kukkuda. Kaaslased näevad, kuidas rõngas liigub ketis lülilt lülile alla, kuni ta viimaks jõuab lõppu välja.

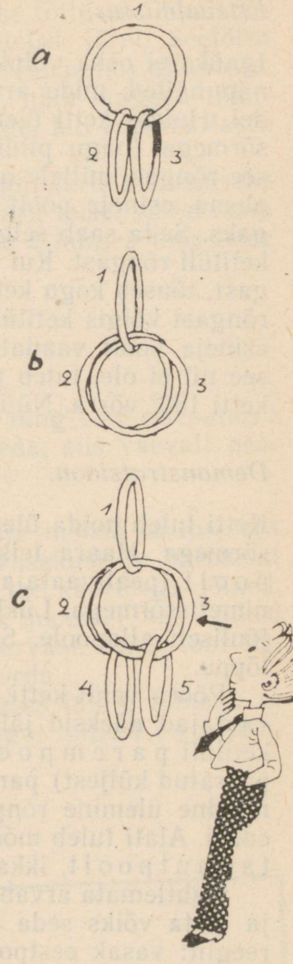
Siis lase jälle ülemine rõngas alla kukkuda ja nii edasi. Ülevalt kett aina lüheneb, allpool aga pikeneb allakukkunud rõngaste arvel. See nähtus on hämmastav.

Keti valmistamine.

Sellise umbes 80 cm pikkuse võluketi saad valmistada 50-st võtmerõngast. Võid aga võtta ka vähem rõngaid, kui soovid lühemat ketti.

Kõigepealt tuleb ühest võtmerõngast läbi panna kaks rõngast (vt. joonisel *a*). Keti «punumisel» ole tähelepanelik! Kui sul ainult kas või ü k s rõngas on ühendatud ettevaatamatult, ei tule trikk välja. Kõige parem on riputada keti algusosa *(a)* lühikese nööriga näiteks ukselingi külge. Sinu ees on kolm rõngast nagu joonisel *a*. Pööra nüüd ülemist, nööri otsa riputatud rõngast 90° võrra paremale (ülalt vaadates). Siis näed enda ees 3 rõngast niisuguses asendis nagu joonisel *b*. Üks kummastki rippuvast rõngast asetseb tagapool *(2)*, teine eespool *(3)*. Rõngale *2* riputa rõngas *4* (vt. joonisel *c*). Rõngas *5* tuleb riputada nii rõngale *2* kui ka *3* rõngast *4* paremale.

Nüüd pööra oma ketitükk *(c)* jälle 90° võrra paremale nii, et joonisel *c* näidatud rõngad *4* ja *5* oleksid samasuguses asendis nagu rõngad *2* ja *3* joonisel *b*. Siis tuleb, nagu varemgi, riputada tagumisele rõngale *4* uus rõngas ja sellest paremale järgmine, mis pandagu läbi nii tagumisest rõngast *4* kui ka eesmisest rõngast *5*. Iga kord, kui üks rõngapaar on juurde pandud, tuleb ketti pöörata 90° võrra. Keti lõpus riputatakse *50.* rõngas *48.* ja *49.* rõnga külge. Ja võlukett ongi valmis.



Võluketi valmistamine.

Ettevalmistus.

Igaüks ei oska võluketti kohe kasutada. Olgu antud veel mõned näpunäited, mida arvestades on kunsttüki õnnestumine alati kindel. Hoides ketti ülemisest rõngast parema käe pöidla ja nimetissõrmega (nagu pildil), tuleb tähele panna järgmist: *2.* lülipaari see rõngas, millele on riputatud ainult ü k s *3.* paari rõngas, peab olema, esineja poolt vaadates, *2.* ketilüli v a s a k p o o l s e k s rõngaks. Seda saab selgitada ka teisiti: tuleb veidi (1 cm) tõsta teise ketilüli rõngast. Kui sellele rõngale on riputatud *3.* lüli k a k s rõngast, tõuseb kogu kett. Teise rõnga tõstmisel saab tõsta ainult üht rõngast kõigis ketilülides. See on õige rõngas. Ja see peab olema, esineja poolt vaadates, teise ketilüli vasakpoolseks rõngaks. Kui see nii ei ole, tuleb pöörata ülemist rõngast ja koos sellega kogu ketti 180° võrra. Nüüd on kõik korras ja valmis etteasteks.

Demonstratsioon.

Ketti tuleb hoida ülemisest rõngast parema käe pöidla ja nimetissõrmega. Haara teise lülipaari v a s a k p o o l n e rõngas e e s t p o o l t (pealtvaataja poole pööratud küljest) vasaku käe pöidla ja nimetissõrmega. Lükka ülemine rõngas, mida parema käega hoiad, jõuliselt allapoole. See «kukerpallitab» alla, nagu näib, kuni keti lõppu.

Pööra veidi ketti, mida nüüd hoiad vasaku käega, nii et pealtvaatajad näeksid jälle ülemist rõngast täies laiuses. Haara teise ketilüli p a r e m p o o l n e rõngas t a g a n t p o o l t (esineja poole pööratud küljest) parema käe pöidla ja nimetissõrmega ning lükka nüüdne ülemine rõngas vasaku käega jõuliselt allapoole, ja nii edasi. Alati tuleb mõelda reeglile: v a s a k e e s t p o o l t, p a r e m t a g a n t p o o l t, ikka vaheldumisi.

Kahtlemata arvab nii mõnigi pealtvaataja, et seda oskab temagi ja et ta võiks seda kord proovida. Anna talle kett! Kui ei tunta reeglit: vasak eestpoolt, parem tagantpoolt, siis ka trikiga toime ei tulda.

Selgitus.

Trikk põhineb optilisel illusioonil. Allapaisatud rõngad ei kuku üldse läbi kõigi ketilülide alla. See ainult näib nii. Tõstes korraks rõngast *2* või langetades rõngast *1* ilmneb, et kummagi rõnga küljes ripub alati pool kõigist ketirõngastest. Rõngas *1* muutub allaviskumisel uue, teise lülipaari üheks lüliks. Seejuures langevad ühe ketilüli võrra allapoole ka kõik liikuva rõnga *1* küljes rippuvad kahekordse keti rõngad. Keti erilise ehituse tõttu ei nihku rõngad allapoole üheaegselt, vaid ajaliselt üksteise järel. Seetõttu tekib pettekujutlus, nagu libiseks ü k s rõngas (ülemine) allapoole. Kuna ketilülid on järjest 90° võrra pööratud, näib langeva liikumise tee spiraalsena. Seda võib selgesti jälgida, kui korraks lasta ülemist rõngast alla võimalikult aeglaselt.

Ettekande algul saab rõngas *2* (teisest lülipaarist) ülemiseks rõngaks ja rõngas *1* nihkub uude, teise lülipaari; teisel võttel saab rõngas *1* jälle ülemiseks rõngaks ning rõngas *2* langeb taas teise lülisse. See protseduur kordub pidevalt.

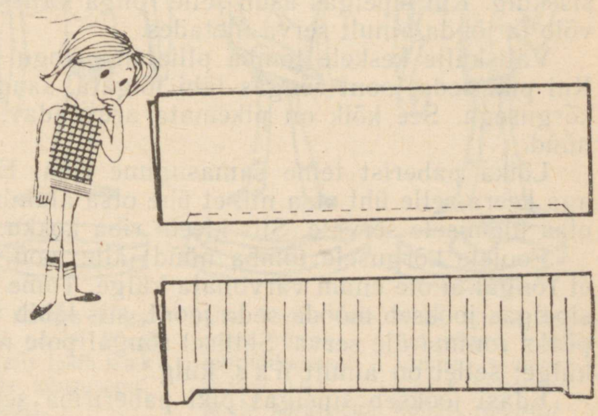
Poeme läbi postkaardi.

Kui annad kellegi kätte postkaardi ja käärid ning teed ettepaneku lõigata sellesse auk, millest saaks läbi pugeda, siis vaevalt peetakse seda võimalikuks.

Näita, kuidas on see siiski teostatav.

Murra kaart pikuti pooleks ja lõika välja mööda kriipsjoont kitsas riba (joonisel ülal). Voltimisjoone vasakust ja paremast otsast jääb terveks napilt sentimeeter. Siis tee kääridega lõiked, kord alt-, kord ülevaltpoolt, nagu näidatud joonisel all. Lõiked tuleb teha ligikaudu 4 mm kauguseni välisservast. Mitte läbi lõigata lõpuni! Sel viisil lõikad kaardisse 36 korda.

Siis laotad postkaardi uuesti täies suuruses laiali, tõmbad ta ettevaatlikult lahti ning saad siksakilise rõnga, millest on võimalik kõhklemata läbi pugeda.



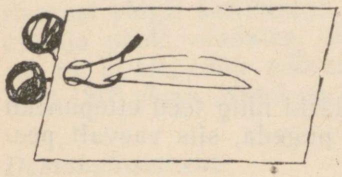
Nii lõigatakse postkaart.

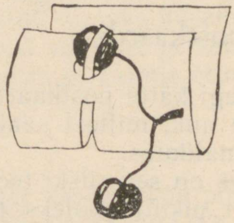
Kaks kirssi postkaardis.

Kuidas võetakse kirsid välja? Kaarti ei tohi seejuures rikkuda. Samuti peavad mõlemad varred kokku jääma ja kirsidki ei tohi küljest ära tulla.

Auk kaardis on väiksem kui kumbki kirssidest ja väljalõigatud riba on kitsam kui ringikujuline väljalõige.

Kaart tuleb kokku painutada ning riba koos mõlema varrega läbi augu tõmmata. Nii saab kirsipaari sisse ja välja.





Nii võetakse kirsid välja.

Mõistatuslikud rõngad.

Lõika umbes 60 cm pikkune ja 5 cm laiune riba ning kleebi see kokku rõngaks. Rõngal on ülemine ja alumine serv, välis- ning sisekülg. Kui sipelgas asub selle rõnga välisküljel, siis siseküljele võib ta jõuda ainult serva ületades.

Väliskülje keskele tõmba pliiatsiga kogu rõnga ulatuses joon. Kui piki seda joont rõngas läbi lõigata, saad kaks rõngast poole kõrgusega. See kõik on pikemata arusaadav. Olulisem tuleb aga nüüd.

Lõika paberist teine samasugune riba. Enne kokkukleepimist aga keera selle üht otsa nii, et ühe otsa alumine serv langeks teise otsa ülemisele servale. Siis kleebi riba kokku.

Poolele kõrgusele tõmba nüüd jälle joon. Üllatuseks märkad, et rõngal ei ole enam värvimata külge. Tume joon on kinnine. Kui sipelgas jookseb mööda seda joont, siis läbib ta terve riba, ilma et peaks ronima üle serva. Sellisel rõngal pole niisiis välis- ega sisekülge; sellel on ainult ü k s külg.

Edasi jookseb sipelgas piki pabeririba serva. Jälgi tema teed pliiatsiotsaga ja sa leiad, et sellel rõngal ei ole ülemist ega alumist serva, vaid tal on ainult ü k s kinnine servajoon.

See tähelepanuväärne rõngas erineb oluliselt esimesest rõngast. Matemaatikas nimetatakse sellist rõngast tema avastaja järgi Möbiuse lindiks, millel on veel üks kummaline omadus. Lõika rõngas lahti piki tõmmatud joont. Vastu ootusi ei saa sa seejuures kaht rõngast, vaid ainult ü h e kaks korda keeratud kahekordse pikkuse ja poole kõrgusega rõnga. Nüüd lõika veel kolmas pabeririba, mis on eelmisega ühesuurune. Enne kokkukleepimist keera selle üht otsa k a k s k o r d a.

Riba keskele tõmba jälle joon.

Kas sellelgi rõngal, samuti nagu ü k s k o r d keeratud rõngal, on ainult ü k s külg? On üllatav, et sel rõngal, nagu esimeselgi, on kaks külge: välimine ja sisemine. Mõttes lase taas sipelgal piki rõnga serva joosta ja jälgi tema teed. Seejuures leiad, et rõngal on kaks serva, ülemine ning alumine. Lõiganud lahti selle rõnga poolel kõrgusel, saad kaks teineteise küljes ketilülidena rippuvat rõngast.

Kes oleks võinud arvata, et lihtsate paberrõngastega võib esitada nii huvitavaid ülesandeid!

Kui rõngas lõigata lahti poolel kõrgusel, siis tekib k a k s poole kõrgusega rõngast.

Üks kord keeratud rõnga lahtilõikamisel saame ü h e poole kõrgusega rõnga.

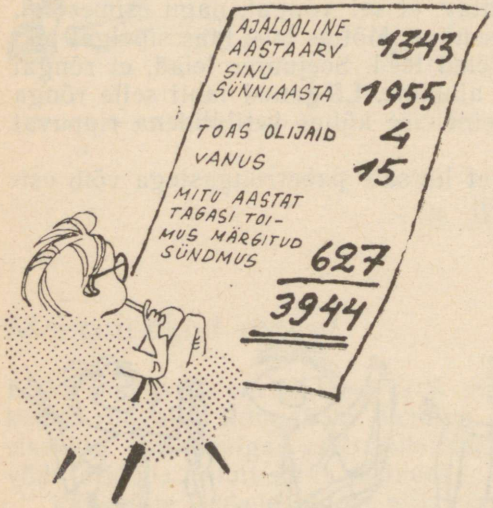
Kaks korda keeratud rõnga lahtilõikamisel saame k a k s teineteise küljes rippuvat rõngast.

Sina liidad arve ja ma tean, mis on summa.

Kirjuta üksteise alla.
1. Ajalooline aastaarv, mille võid valida täiesti vabalt.
2. Sinu sünniaasta.
3. Mitu isikut on toas.
4. Kui vana sa oled või kui vanaks sa sel aastal veel saad.
5. Mitu aastat tagasi toimus see ajalooline sündmus, mille sa algul üles märkisid.

Nüüd liida need viis arvu.

Saadav tulemus on alati ette kindlaks määratav.



Mängureegel.

Lasen eeltoodud arvud üles kirjutada ja liita. Seejuures ise tean vaid isikute arvu toas. Aga ikkagi võin alati avaldada õige tulemuse järgmise reegli abil.

Tulemus = isikute arv + kahekordne aastaarv (praegune).

Aastal 1971 arvutan: isikute arv + 2 · 1971 = 3942 + isikute arv.

Esitades triki aastal 1972, pean arvutama: isikute arv + 2 · 1972. Analoogiliselt tuleb toimida hilisematel aastatel.

Eriti hämmastavalt mõjub asjaolu, et ma tegelikult ju ei tea nelja üleskirjutatud arvu. Kõige parem on, kui esitan triki ainult üks kord, selleks et juuresolijad kohe ei avastaks, et sama isikute arvu puhul on tulemus alati ühesugune. Enamasti aga palutakse mind esitada mõistatuslikku liitmist veel kord. Siis on soovitatav lasta liita lisaks eeltoodud 5 arvule veel üks kaaslaste poolt öeldud mistahes arv, mille oma arvutuses pean aga tingimata lahutama.

Selgitus.

Juuresolijad viiakse eksiteele kahelt vaatekohalt. Ma ei tea nimelt nende isikute sünniaastaid ega ka vanuseid. Kuid nende tundmatute arvude summa on alati 1971, kui trikki esitatakse aastal 1971. Näiteks olgu keegi sündinud 1950. aastal ja on nüüd 21-aastane. Sünniaasta ja vanuse summa on: $1950 + 21 = 1971$. Enamikule pole see aga triki esitamisel kohe arusaadav.

Ma ei tea ka märgitud ajaloolist aastaarvu. Kui aga lasen lõpuks juurde kirjutada, mitu aastat on sellest ajaloolisest aastast möödunud, saavutan selle, et need mõlemad arvud koos annavad jälle 1971. Seega kõigi üleskirjutatud arvude summa on: isikute arv (mida ma ise tean) $+ 2 \cdot 1971$.

Mõtle üks arv.

Kirjuta üles mistahes täisarv. Esialgu vali aga väike arv, et järgnev arvutus ei kestaks liiga kaua.

Liida valitud arvule 5.

Tulemus korruta 18-ga.

Lahuta sellest algul valitud arvu kolmekordne.

Jaga viimane tulemus 15-ga. Jagamine tuleb välja jäägita.

Jagatisest lahuta algul valitud täisarv.

Kuigi valitud arv on tundmatu, võib öelda, mis arvutamisel välja tuleb. Nimelt 6.

Proovi samasugust arvutust mingi teise arvuga. Alati on tulemus 6.

Selgitus. Olgu valitud arv x

Siis liideti 5 $x+5$

Seejärel korrutati 18-ga $(x+5)18$

Sellest lahutati valitud arvu kolmekordne $(x+5)18-3x$

Viimane tulemus jagati 15-ga $\dfrac{(x+5)18-3x}{15}$

Ja lõpuks lahutati valitud arv $\dfrac{(x+5)18-3x}{15} - x = ?$

Mis siin välja tuleb?

Avame sulud $\frac{18x+90-3x}{15} - x = ?$

Lugeja tuleb lihtsustada $\frac{15x+90}{15} - x = ?$

Lugejas toome 15 sulgude ette $\frac{15(x+6)}{15} - x = ?$

15 taandub $\frac{\cancel{15}(x+6)}{\cancel{15}} - x = ?$

Jääb $x+6-x=?$

$+x$ ja $-x$ koonduvad $\cancel{x}+6-\cancel{x}=?$

Lõpptulemus on $\underline{\underline{6}}$

Valitud arv x koondub ja ei mõjuta seega tulemust.

Sa arvutad ja arvutad ning ei märkagi, et oma valitud arvu, mis minule oli tundmatu, arvutusest ise uuesti kõrvaldad.

Ma arvan ära, kui vana sa oled.

Korruta oma täiseluaastate arv 2-ga. Liida 5. Tulemus korruta 5-ga. Kirjutasid sa saadud arvu üles? Tõmba maha tulemuse viimane number. Vähenda nüüd saadud arvu 2 võrra. Ja ongi selge, kui vana sa oled.

Näiteks kolmeteistkümneaastane arvutab:

Kahekordne vanus aastates $13 \cdot 2 = 26$

Liita 5 $26+5=31$

Korrutada 5-ga $31 \cdot 5 = 155$

Lased nimetada saadud arvu	155
Tõmbad maha viimase numbri	15~~5~~
	15
Vähendad järelejäänud arvu 2 võrra	− 2
	13

Nüüd võid oma mängukaaslase imestuseks öelda, et ta on 13-aastane. Vanaisa nimetas arvutuse tulemusena 835. Tema on seega 81-aastane.

Selgitus.

Olgu mulle algul tundmatu vanus	x
Korrutada 2-ga	$x \cdot 2$
Liita 5	$x \cdot 2 + 5$
Tulemust korrutada 5-ga	$(x \cdot 2 + 5) \cdot 5$
Avada sulud	$10x + 25$

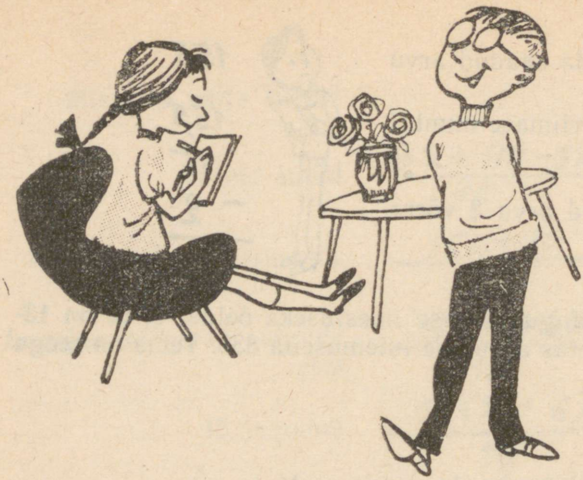
Kirjuta teisiti: x kümnelist + 2 kümnelist + 5 ühelist; tulemus kirjutada kastikesse ü h e arvuna:

KÜMNELISED	ÜHELISED
$x + 2$	5

Kui tahad leida nimetatud tulemusest vanuse x, pead kustutama viimase numbri (5) ja vähendama järelejäänud arvu 2 võrra. See on käesoleva arvutriki matemaatiliseks tõestuseks.

Ka sünnikuupäeva saab leida.

Tee mängukaaslasele ettepanek, et ta kahekordistaks oma sünnikuupäeva päevade arvu. Siis peab ta liitma 5. Tulemus on vaja korrutada 50-ga. Ja lõpuks tuleb tal liita veel kuude arv. Lased nimetada tulemuse ning lahutad sellest mõttes arvu 250. Kui saad see-



juures näiteks arvu 1110, siis see tähendab, et sünnipäev on 11. 10., järelikult 11. oktoober.

Näide.

Võib-olla on sinu mängukaaslane sündinud 27. märtsil. Ta arvutab siis järgmiselt:

Päevade arv korrutada 2-ga $27 \cdot 2 = 54$

Liita 5 $54 + 5 = 59$

Korrutada 50-ga $59 \cdot 50 = 2950$

Liita kuude arv $2950 + 3 = 2953$

Sulle nimetatakse see tulemus.

Lahutad mõttes 250

$$\begin{array}{r} 2953 \\ -\ 250 \\ \hline 2703 \end{array}$$

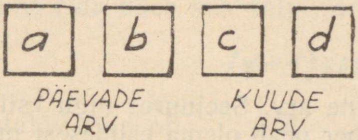
Esimesed kaks numbrit väljendavad päevade arvu 27.

Viimased kaks numbrit väljendavad kuude arvu 3.

Sünnikuupäev on 27. 3.

Selgitus.

Päevade ja kuude arv on alati tähistatavad kahe numbriga; päevade arv numbritega a ja b, kuude arv numbritega c ja d.



Päevade arvu korral vähem kui 10 on $a = 0$. Kuude arvu korral vähem kui 10 on $c = 0$. Päevade arvus $\overline{|a|b|}$ seisab number a kümneliste kohal, number b üheliste kohal. Päevade arv avaldub seega: $10a + b$.

Kuude arvus $\overline{|c|d|}$ seisab number c kümneliste kohal, number d üheliste kohal. Kuude arv avaldub seega: $10c + d$.

Sinu mängukaaslane korrutab esmalt päevade arvu 2-ga.

Järelikult $(10a+b)\cdot 2$

Siis liidab ta 5 $(10a+b)\cdot 2+5$

Selle kõik korrutab ta 50-ga $[(10a+b)\cdot 2+5]\cdot 50$

Ja liidab kuude arvu $[(10a+b)\cdot 2+5]\cdot 50+10c+d$

Ning korrutab, avades ümar- ja nurksulud $(20a+2b+5)\cdot 50+10c+d$

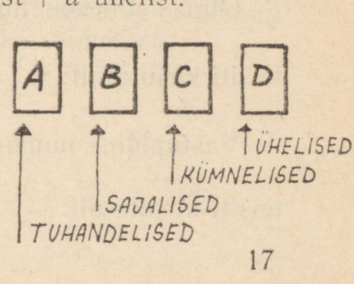
$1000a+100b+250+10c+d$

Selle tulemuse arvutab mängukaaslane.

Lahutad mõttes 250 $1000a+100b+10c+d$

Saad a tuhandelist $+\ b$ sajalist $+\ c$ kümnelist $+\ d$ ühelist.

Arvuna kirjutad



Neljakohalises arvus, mille mängukaaslane arvutas, seisavad seega mõlemal viimasel kohal kuude arvu numbrid, kahel esimesel kohal päevade arvu numbrid.

1089.

Kirjuta üles mistahes kolmekohaline arv. Seejuures olgu esitatud ainult üks tingimus: viimane number peab olema esimesest numbrist vähemalt 2 võrra väiksem. Sinna alla paiguta selle arvu numbrid vastupidises järjestuses: arvu kolmas number esimesele kohale ja nii edasi. Tõmba joon alla ning lahuta alumine arv ülemisest. Nii saad mulle tundmatu tulemuse. Tean ainult seda, et sa said jälle kolmekohalise arvu.

Siis kirjuta sinna alla veel saadud tulemuse vastupidine numbrite järjestus ja liida viimased kolmekohalised arvud. Ma tean, millise tulemuse said. See on 1089.

Näide.

Oletame, et valitakse arv	972
Kirjutada numbrid vastupidises järjekorras	− 279
Lahutada	693
Kirjutada numbrid vastupidises järjekorras	+ 396
Liita	1089

Iga kord saadakse 1089. Kuidas on see võimalik?

Selgitus.

Olgu kolmekohaline arv $\boxed{x}\ \boxed{y}\ \boxed{z}$

teisiti kirjutatult: x sajalist + y kümnelist + z ühelist

Vastupidine numbrite järjestus $\boxed{z}\ \boxed{y}\ \boxed{x}$

teisiti kirjutatult: z sajalist + y kümnelist + x ühelist

Kui parempoolses veerus arv x, mille peame z-st lahutama, on suurem kui z, siis «laename» ülemise rea x-st ühe sajalise. Seda sajalist käsitame paremal pool kujus 9 kümnelist ja 10 ühelist. Ülemine rida näeb siis välja järgmiselt:

$(x-1)$ SAJALIST $+ (9+y)$ KÜMNELIST $+ (10+z)$ ÜHELIST

Lahutatav rida oli z " $+ y$ " $+ x$ "

Nüüd võime lahutada ja saame $(x-1-z)$ SAJALIST $+ 9$ KÜMNELIST $+ (10+z-x)$ ÜHELIST

Taas pöörame ümber numbrite järjestuse $(10+z-x)$ " $+ 9$ " $+ (x-1-z)$ "

Liidame 9 SAJALIST $+ 18$ KÜMNELIST $+ 9$ ÜHELIST

3 mistahes arvu on arvutamisel välja langenud. Igal juhul saame

9 sajalist 900

18 kümnelist + 180

9 ühelist + 9

$$\begin{array}{r} 900 \\ +\ 180 \\ +\ 9 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Niisugust tulemust ei osanud keegi ette aimata ja seepärast on algul igaüks imestunud, kui seda arvutrikki esitatakse. Kes tahab tundma õppida arvuvalla erijuhtumeid ja seaduspärasusi, peab veidigi kodus olema x-i, y-i ning z-iga matemaatikas.

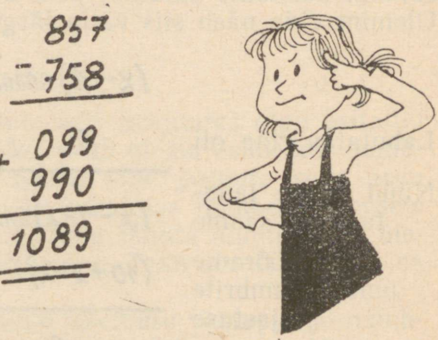
Võib juhtuda, et mängukaaslane ei saanud arvu 1089. Siis nimeta talle arv 198, mis ongi tema poolt saadud tulemus. Tõepoolest, nii see oligi. Ta nimelt eksis mängureeglí vastu ja ei võtnud viimast numbrit vähemalt 2 võrra väiksemaks esimesest.

Ta valis näiteks 857

ning arvutas edasi − 758

$$\begin{array}{r} 857 \\ -\ 758 \\ \hline 99 \\ +\ 99 \\ \hline 198 \end{array}$$

Seadsime eesmärgiks arvutada siin ainult kolmekohaliste arvudega. Kui arvutuses tuleb null, peab ka seda arvestama kui numbrit ja selle välja kirjutama. Niisiis



Eelnevalt kirjeldatud eksimus esineb aga harva. Enamasti valitakse arvud, mille viimane number on rohkem kui 1 võrra esimesest numbrist väiksem. Siis ei teki mingeid raskusi ja alati võime ütelda arvutuse tulemuseks 1089.

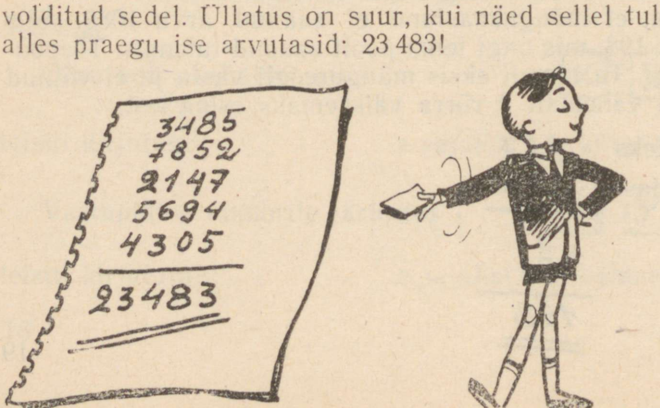
Neljakohalised arvud.

Kirjuta üles mistahes neljakohaline arv ja nimeta see mulle. Oletame, et sa valisid 3485.

Ka mina võtan väikese sedeli ja kirjutan sellele arvu. Sulle ma seda ei näita ja voldin sedeli kokku. Hiljem sa vaatad, mida ma kirjutasin.

Nüüd kirjuta oma esimese arvu alla veel teine neljakohaline arv. Olgu see 7852. Siis kirjutan m i n a selle alla ühe neljakohalise arvu, näiteks 2147. Uuesti kirjutad sina, näiteks 5694, ja selle alla mina 4305.

Liida need viis arvu! Tulemust ära veel näita. Ava minu kokkuvolditud sedel. Üllatus on suur, kui näed sellel tulemust, mille sa alles praegu ise arvutasid: 23 483!



Selgitus.
Sa kirjutasid esimese arvuna 3485. Mina märkisin oma sedelile esmalt numbri 2, selle järele aga sinu arvu 2 võrra vähendatult, seega 23 483, mis oli ühtlasi sinu arvutuse lõpptulemus. Sa kirjutasid oma arvud täiesti suvaliselt, mina aga vastupidi. Mina märkisin üles need numbrid, mis oleks vaja sinu arvu numbritele liita, et saada iga kord 9. Näiteks 7 alla kirjutasin 2, 8 alla 1, 5 alla 4, 2 alla 7. Samal põhimõttel kirjutasin ka arvu 4305.

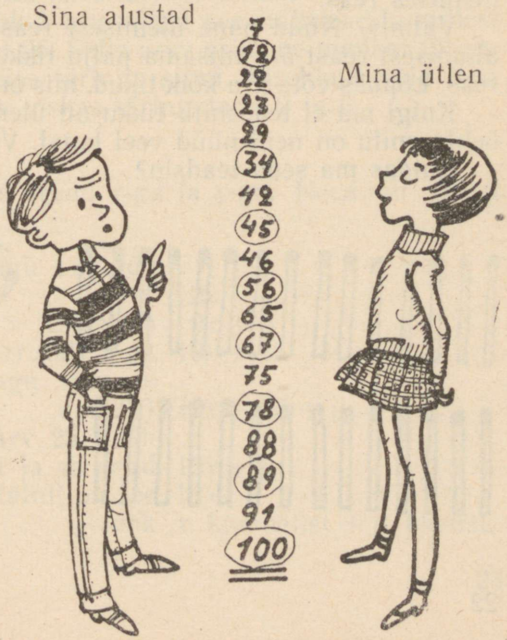
Esimene arv sedelil oli 3485. Teine ja kolmas kokku on 9999, neljas ja viies kokku samuti 9999. Arvule 3485 tuli liita 9999 kaks korda. 2 korda 9999 on 19 998 ehk 2 võrra vähem kui 20 000. Kui paigutasin oma sedelil neljakohalise arvu ette numbri 2, sai 3485-st arv 23 485, mis on 20 000-st suurem. Tohtisin liita aga ainult 19 998. Seepärast vähendasin esimest arvu 2 võrra.

Võidujooks 100-ni.

Üks meist nimetab mistahes ühekohalise arvu, teine ütleb suurema arvu, mis aga eelmisest arvust ei tohi erineda rohkem kui 10 võrra. Nii vaheldumisi. Nimetatavad arvud muutuvad üha suuremaks. Võidab see, kes mängureeglit järgides jõuab enne 100-ni.

Näide. Sina alustad

Mina ütlen



Kas märkad midagi?
On liiga hilja!

Nagu näed, võitsin mina ja tahan sulle ennustada, et ma võidan alati. Kuidas on see võimalik? Sina valisid oma arvud meie võidujooksu algusest alates suvaliselt. Mina aga valisin oma arvud just nimelt nii, et sa võita ei saaks.

Selgitus.

Kes saab nimetada 89, see võidab. Mängureegli järgi pole võimalik jõuda järgmisel sammul 100-ni, küll aga ülejärgmisel.

Arvu 89 saab kindlasti nimetada see, kes juba on esitanud 78. Ning 78 võib ta kindlasti nimetada siis, kui ta ise on mängu toonud arvu 67 ja nii edasi.

Kui tahetakse võita, tuleb hoolitseda selle eest, et ise saaks nimetada arvud 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Neid on kerge meeles pidada, kuna iga arv erineb eelmisest 11 võrra. Nende arvude üheliste number on alati 1 võrra suurem kümneliste numbrist.

Tikutrikk.

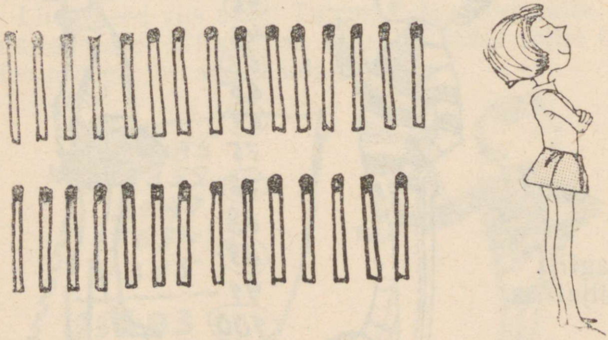
Pane, nii et mina seda ei näe, kuitahes palju tikke lauale kõrvuti ühte ritta. Kuid võta neid tingimata üle kümne.

Selle alla aseta teine rida, milles on aga üks tikk vähem kui ülemises reas.

Valmis? Nüüd pane ülemisest reast 8 tikku kõrvale. Siis võta alumisest reast ära niisama palju tikke, kui nüüd veel on ülemises reas. Lõpuks võta ära kõik tikud, mis on ülemisse ritta alles jäänud.

Kuigi ma ei tea, mitu tikku oli ülemises ja alumises reas, võin öelda, mitu on neid nüüd veel laual. Vastus on 7.

Kuidas ma seda teadsin?



Selgitus.

Ülemises reas oli	x tikku	Alumises reas oli $(x-1)$
Pärast 8 tiku kõrvalepanemist jäi ülemisse ritta	$(x-8)$ tikku	Alumisest reast tuli lahutada $(x-8)$ tikku, siis jäi $(x-1)-(x-8)$
Lõpuks tuli ülemisest reast ära võtta $(x-8)$ tikku. Jäi järele	0 tikku	$x-1-x+8$ $-1+8$ 7

Reegel nõuab tikkude sellist kõrvalepanemist, et arvutusest kaoks tundmatu arv.

Kaks täringut.

Anna oma mängukaaslasele kaks täringut. Ta peab tegema nendega viske nii, et sina tulemust ei näe.

Lase kahekordistada ühe täringu silmade arv ning siis liita 5, tulemus korrutada 5-ga ja liita teise täringu silmade arv.

Palu teda nimetada saadud arv. Olgu see näiteks 51, millest sina lahutad mõttes 25. Saad 26. Selle arvu esimene number tähendab ühe ja teine number teise täringu silmi. Järelikult võid oma sõbrale teatavaks teha, et ta viskas täringutega 2 ja 6.

Selgitus.

Tähistame täringute silmade arvud x-ga ja y-ga. Need on antud juhul 2 ja 6.

Kahekordistati ühe täringu silmade arv	$2x$
Liideti 5	$2x+5$
Korrutati 5-ga	$10x+25$
Lõpuks liideti teise täringu silmade arv (y)	$10x+25+y$
See tulemus öeldi sulle. Arv 25 tuleb lahutada ja sa saad	$10x+y$
Teisiti kirjutatult on see	$10 \cdot x + y \cdot 1$
ehk	x kümnelist $+\ y$ ühelist.

Nimetatud arv oli kahekohaline arv, milles esimesel kohal asetsevad kümnelised, teisel ühelised. Otsitav arv x seisab esimesel ja y teisel kohal.

Kolm täringut.

Aseta 3 mängutäringut üksteise peale. Millist arvu näitab kõige ülemise täringu pealmine tahk? Sa ütled mulle näiteks 5.

Nüüd vaata, nii et mina ei näe, täringute teisi tahke ja kirjuta üles silmade arvud:

ülemise täringu alumine tahk
keskmise täringu ülemine tahk
keskmise täringu alumine tahk
alumise täringu ülemine tahk
alumise täringu alumine tahk

Liida need viis mulle tundmatut arvu.
Mina ütlen, et see summa on 16.

Selgitus.

Ühe täringu vastastahkude silmade summa on alati 7. Nii on see iga täringu puhul.

Kolme üksteisele asetatud täringu ülemiste ja alumiste täringuarvude summa on järelikult 21. (Seda ei tea igaüks.) Mulle oli teada kõige ülemise täringu silmade arvuna 5; lahutasin 21-st 5 ja nii saingi 16.

Leiame pimesi kaarte.

Hoian selja taga kaardipakki, mida on seganud üks pealtvaataja. Väidan, et võin kompimise teel, kaarte nägemata, kindlaks teha, millist kaarti ma käes hoian, ja siis näitan seda.

Nimetan ärtu seitset ja näitan seda kaardipaki eesmise kaardina. Nüüd panen paki jälle selja taha. Padaemand! Tõepoolest on eesmine leht nüüd padaemand. Näitan järgnevaid kaarte, neile pilku heitmata. Nagu paistab, leian kaardid kobamisi.

Selgitus.

Segatud kaardipakki kätte võttes vaatan märkamatult kõige alumist kaarti. See on ärtu seitse. Niisiis on mulle selge, kus see asub ja teen kohe teatavaks, et nüüd näitan ärtu seitset. Enne, kui näitan pakki, kus ärtu seitse on eesmine (kõige alumine) kaart, pööran ümber (aga ikka veel selja taga) kõige ülemise lehe. Näidates siis ärtu seitset, vaatan, nii et pealtvaatajad seda ei märkaks, ülemise kaardi esikülge, padaemandat. Hoides taas pakki selja taga, panen valmis ülemise kaardi (padaemanda) alumisena ettenäitamiseks; samal ajal pööran ümber pakis nüüdse kõige ülemise kaardi ja nii läheb mäng kogu aeg edasi.

Tõmmata neli kindlat kaarti.

Lasen kaardipaki segada ja jaotan siis kaardid lauale tagakülgedega ülespoole.

«Palun näidake ärtu kümmet. Koputage ükskõik millisele kaardile. Kuid kaarti ärge üles võtke. Ma näitan seda teile hiljem!»

Tõstan näidatud kaardi üles nii, et kaardi esikülg ei ole nähtav, ja panen selle kõrvale.

«Nüüd palun, koputage ruutukuningale.»

Tõstan üles ka selle kaardi ja panen esimese juurde.

«Nüüd näidake mulle ristisõdurit.» Jälle panen kaardi kõrvale.

Lõpuks valin ise ühe kaardi, ja nimelt — pada kaheksa. Siis võtan need neli väljavalitud kaarti kätte ja tõmban nad lehvikuks — esiküljed enda poole. «Siin on ärtu kümme, ruutukuningas, ristisõdur ja pada kaheksa.» Annan üle kõik need neli kaarti, mis kaasmängijate soovi kohaselt välja võtsin. Nad on imestunud.

Selgitus.

Kui segatud kaardid kätte võtsin, vaatasin teistele märkamatult kõige alumist kaarti. See oli ärtu kümme. Kaartide laialijaotamisel panin ta kindlale kohale ja pidasin selle meeles. Siis palusin näidata ärtu kümmet. Kuid kaart, mida esmalt näidati, oli tegelikult ruutukuningas, mida kaardi ülestõstmisel tegin kindlaks ainult mina. Nüüd palusin kellelgi teisel kaasmängijal välja valida ruutukuninga. Tema aga koputas ristisõdurile. Järgmiseks palusin näidata ristisõdurit. Ta aga võttis pada kaheksa. Lõpuks võtsin ma ise oletatava pada kaheksa, ja nimelt sealt, kuhu ma varem olin pannud ärtu kümne.

Nüüd on mul käes ärtu kümme, ruutukuningas, ristisõdur ja pada kaheksa ning võin üle anda igaühele selle kaardi, mille ta ettepaneku kohaselt näiliselt õigesti oli välja valinud.

Mis üle jääb?

Seda trikki saab teha 32-kaardilise kaardipakiga.[1] Lase kaardid segada, tõsta, lase veel kord segada ja pane need siis taskusse. Alusta järgmist vestlust.

Sina: «Selles kaardipakis on k a l l i s m a s t i d — pada ja ärtu, ning o d a v m a s t i d — ruutu ja risti. Palun, vali oma soovi järgi ükskõik kumb rühm.»

Kaasmängija: «Odavmastid.»

Sina: «Millised mastid üle jäävad?»

Kaasmängija: «Kallismastid.»

Sina: «Kindlasti! Vali välja, palun, üks neist mastidest.»

Kaasmängija: «Pada.»

Sina: «Hästi. Jääme pada juurde. Seal on nii piltidega kaardid (äss, kuningas, emand, sõdur) kui ka väikesed kaardid (10, 9, 8, 7). Nimeta üks neist rühmadest.»

Kaasmängija: «Pildid.»

Sina: «Mis jäävad üle?»

Kaasmängija: «Väikesed kaardid.»

Sina: «Väikeste kaartide hulgas on jälle kõrgem rühm — kümme ja üheksa, ning madalam rühm — kaheksa ja seitse. Milline kummastki rühmast, kõrgem või madalam, meeldib sulle?»

Kaasmängija: «Madalam.»

Sina: «Madalamasse rühma kuuluvad kaheksa ja seitse. Vali emb-kumb.»

Kaasmängija: «Seitse.»

Sina: «Seitse. Sa tahad saada pada seitset. Mitmenda kaardina pean ta taskust tõmbama?»

Kaasmängija: «Kolmanda kaardina.»

Sina: «Palun väga. Kaart number üks, number kaks, ja number kolm on, nagu näed, pada seitse.»

Selgitus.

Enne kui pistsid kaardipaki taskusse, vaatasid märkamatult kõige alumist kaarti. See oli pada seitse. Oma küsimused esitad selliselt, et lõpuks jõudsite pada seitsmeni, mille asukohta taskus sa ju teadsid. Alati siis, kui vastus otse eesmärgile ei viinud, esitasid küsimuse: «Mis jääb üle?» ja tulid taas õigetele rööbastele ning lõpuks pada seitsme juurde.

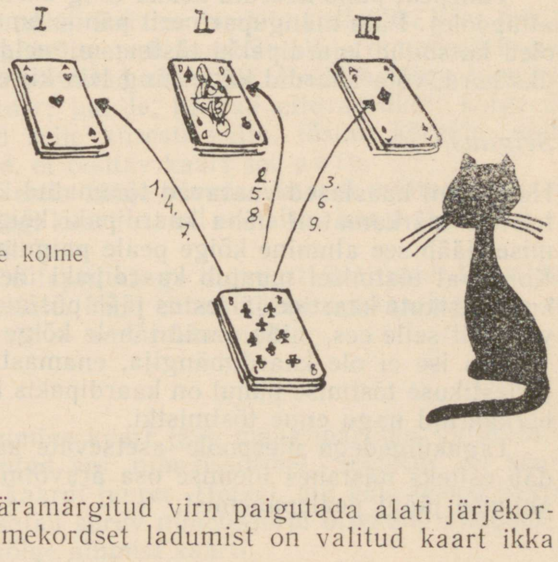
---

[1] Seda, samuti siin järgnevalt kirjeldatud kaarditrikke võib esitada ka teistsuguse arvu kaartidega, näiteks bridžikaartidega. — *Tõlk.*

Pea kaart meeles.

Sul on 21 kaarti. Lase neid mängukaaslasel segada. Võta nüüd see pakk kätte, kusjuures kaartide esiküljed olgu pööratud ülespoole.

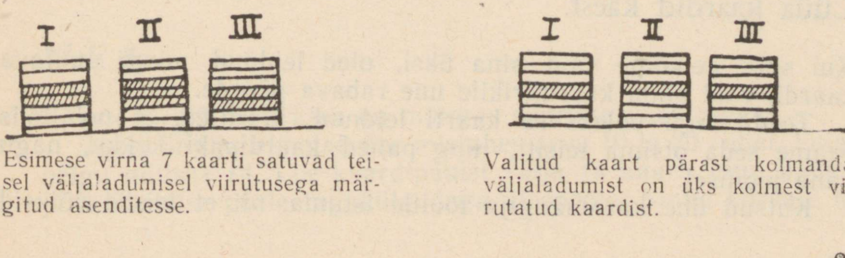
Lao kaardid avatult välja: esimene kaart vasakule, teine keskele, kolmas paremale; siis jälle vasakule, keskele, paremale ja nii edasi. Seejuures peab mängupartner meeles pidama ühe kaardi, kuid ilma, et ta ütleks, millise. Ta peab sulle ainult nimetama, kas see on esimeses, teises või kolmandas virnas. Kui oled kaardid uuesti kokku pannud, lao nad teist korda. Partner nimetab sulle jälle virna, milles asetseb tema kaart. Korda seda veel kord. Kaardid on sinu ees tagakülgedega ülespoole. Näita kiiresti tema valitud kaart.



Avatud kaardid laotakse kolme virna.

Selgitus.

Kokkupanemisel tuleb äramärgitud virn paigutada alati järjekorras teisena. Pärast kolmekordset ladumist on valitud kaart ikka üheteistkümnes.



Esimese virna 7 kaarti satuvad teisel väljaladumisel viirutusega märgitud asenditesse.

Valitud kaart pärast kolmandat väljaladumist on üks kolmest viirutatud kaardist.

Miks? Sa tead ainult, millises virnas kaart asetseb, et ta on seega üks seitsmest kaardist. Kuna nimetatud virn võeti keskele, asetsevad need 7 kaarti teisel väljaladumisel nii, nagu näidatud vasakpoolsel joonisel. Pärast teist väljaladumist paiknegu valitud kaart näiteks teises virnas.

Et kolmandalgi korral võetakse nimetatud virn keskele, peab valitud kaart olema ikka üheteistkümnes.

Leida tõmmatud kaart.

Lase mängukaaslasel kaardid segada. Võta need kätte ja tõmba lehvikusse, tagaküljed ülespoole. Palu kedagi kaasmängijaist tõmmata üks kaart ja näidata seda ka teistele, kuid mitte sulle.

Vahepeal pane kaardid kokku ning aseta need lauale (esiküljed allapoole). Palu mängupartnerit panna oma kaart virna peale. Kui oled kutsunud kaardipakki tõstma mitmeid kaasmängijaid, igaüht üks kord, võta kaardid kätte ning leia kiiresti otsitav.

Selgitus.

Hetke, mil kaaslased vaatavad tõmmatud kaarti, kasuta selleks, et teistele märkamatult näha kaardipaki kõige alumist kaarti. Tõstmisel jääb see alumine kõige peale paigutatud otsitavale kaardile. Korduval tõstmisel muutub kaardipaki ülemine ja alumine kaart, kuid üksikute kaartide järjestus jääb püsima. Tõmmatud kaart asub vahetult selle ees, mida panid tähele kõige alumise kaardina.

Kes ise ei ole kaardimängija, enamasti ei tea, et ka korduva järjestikuse tõstmise puhul on kaardipakis igal kaardil samad naaberkaardid nagu enne tõstmistki.

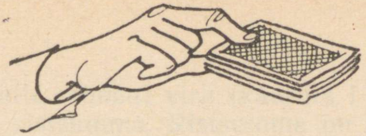
Tagakülgedega ülespoole asetsevate kaartide tõstmine tähendab esiteks mistahes ülemise osa äravõtmist ja teiseks — sellele alumise jäägi pealepanemist.

Lüüa kaardid käest.

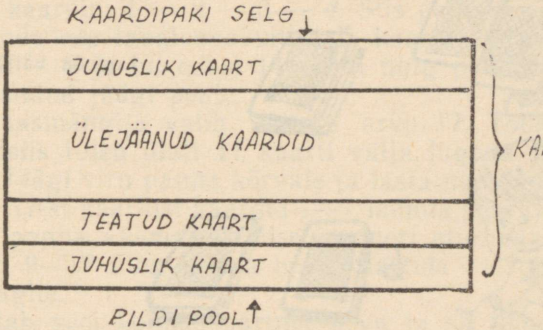
Kui sina, eelkõige vaid sina üksi, oled leidnud mingi otsitava kaardi, võid anda kaarditrikile uue rabava pöörde.

Teed, nagu poleks sa kaarti leidnud, ja ütled, et noh, siis peame seda otsima teisiti, ning paned kaardipaki kokku, nagu näha joonisel.

Kutsud ühe kaasmängija toolile istuma, nii et teised võiksid



Nii hoiab mängukaaslane kaarte.



kõike järgnevat hästi näha. Partner peab kaardipakki käes hoidma ühest nurgast nii, et pöial asetseb kaartide all ja nimetissõrm peal. Kaartide esiküljed on pööratud allapoole. Pakki hoitagu tugevasti.

Astud mängupartneri juurde, haarad ettevaatlikult kõige ülemise kaardi, tõmbad selle kiiresti välja, tõstad kõrgele, näitad seda kõigile ja teatad, et otsitav kaart see pole.

Samal viisil tood esile kõige alumise kaardi, näitad seda kõrgelt ning ütled, et seegi kaart ei ole otsitav kaart. Ja nüüd:

«Üks — kaks — kolm!»

«Kolm» juures lööd lapiti käega tugevasti ülaltpoolt kaartidele. Need lendavad põrandale. Kuid ehmunud mängukaaslasel on veel käes ainult üks kaart — see, mida otsiti.

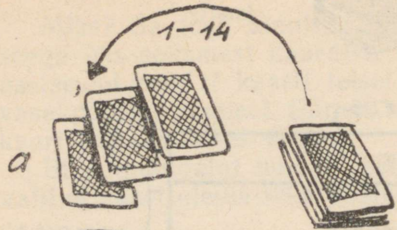
Selgitus.

Ainult paki kõige alumine kaart jääb mängupartneri kätte. Miks? Pöidlal on suurem pind kui nimetissõrmel. Seetõttu on suurim hõõrdumine alumise kaardi juures. Hetkel, mil kõik teised kaardid maha kukuvad, klõpsatab suruv nimetissõrm otsekohe allapoole ja hoiab kõvasti kinni kõige alumist kaarti.

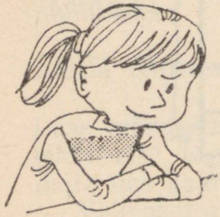
Neli ässa.

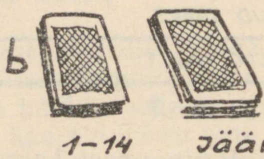
Kaarte on 32. Neli ässa on mängus suurima väärtusega.

Iga mängija nimetab ühe mistahes arvu 10 ja 20 vahel. Esimene öelgu näiteks 14. Loe kaardipakist välja 14 kaarti ning pane nad jälle üksteise peale tagakülgedega ülespoole. Sinna kõrvale aseta

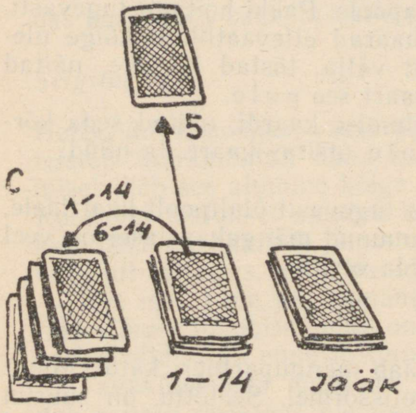


Lugeda välja 14 kaarti.

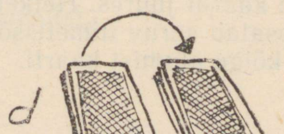




Nüüd on meie ees kaks kaardivirna.



Laduda kaardid välja 1-st kuni 4-ni. 5. kaart välja võtta. Ja laduda edasi kaardid 6—14.



Vasakpoolses virnas on kaardid 1-st kuni 4-ni ja 6-st kuni 14-ni. See virn tuleb asetada parempoolsele virnale.

jääk. Võta kätte esimene virn (kaardid 1 kuni 14) ja lase nimetada valitud arvu ristsumma. Ristsumma on 5. Nüüd lao kõrvale ülalt alates üksikud kaardid: 1 — 2 — 3 — 4. Siis palu, et algul säilitaks partner enda ees laual avamatult 5. kaardi. Järgnevalt lao kõrvale: 6 — 7 — 8 ja nii edasi 14-ndani ning paiguta see virn äsja kõrvale pandud jäägi peale.

Järgmine kaasmängija valib näiteks arvu 17. Toimi samuti nagu enne. Niisiis tuleb ülalt 17 kaarti välja lugeda ja asetada üksteise peale. Jäägi virn panna kõrvale ja lasta nimetada arvu 17 ristsumma (8). 17-st kaardist kaardid 1—7 laduda kõrvale üksteise peale. 8. kaart panna avamatult teise partneri ette, edasi laduda kõrvale kaardid 9—17 ning panna need kaartide 1—7 peale. See osa asetada jäägile.

Nüüd nimetab veel kolmas partner arvu ja sa toimid sellele vastavalt. Ning lõpuks saab neljaski mängukaaslane samal viisil ühe avamata kaardi.

Praegu on iga nelja kaasmängija ees üks avamata kaart. Järsku lase avada kõigil neljal neile välja antud kaardid. Nad on jahmunud. Laual on neli ässa. Valitud on need suvaliste arvude abil.

Selgitus.

Arvudel 11 kuni 19 on üks ühine matemaatiline omadus. Neist iga arv annab tema ristsumma võrra vähendamisel alati arvu 9.

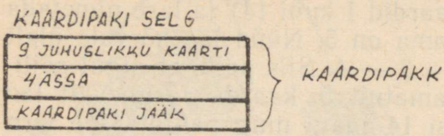
Arv	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Ristsumma	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Vahe	9	9	9	9	9	9	9	9	9

See matemaatika seadus on antud kaarditriki aluseks. Siiski peab kaardipakk olema ette valmistatud.

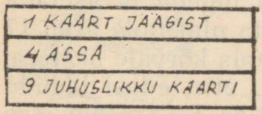
Kõige peal asetsevad 9 mistahes kaarti, seal all 4 ässa; nende all ülejäänud kaardid.

Kui üks mängija nimetab näiteks arvu 14, loe välja kaardipaki pealt ükshaaval 14 lehte ning lao nad avamatult üksteise peale. Seejuures allpool paiknevad 9 suvalist kaarti, mis varem olid ülal, nende peal 4 ässa ja kõige peal üks kaart jäägist.

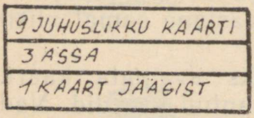
Siis nimetatakse ristsumma 5. Kui ülemised kaardid on välja laotud, säilitab esimene partner 5. kaardi. Nagu jooniselt nähtub,



Suvaliselt valitud arvude abil tuli esile tuua 4 ässa.



14 väljaloetud kaarti.



Kaartide asetus pärast esimese ässa eraldamist.

on see neljast ässast kõige alumine. Kui siis pärast 5. kaardi eraldamist tuleb edasi laduda, asetsevad siitpeale 13 kaarti üksteise peal, nagu näha alumisel joonisel.

Mis puutub pärast seda jäägisse, siis on kaardivirn järjestatud nagu ennegi. Kõige peal asetsevad 9 mistahes kaarti, nende all nüüd ainult 3 ässa ja siis kaartide jääk. Kui nimetatakse 17, korda mängu veel kord. Reeglid on sellised, et alati tuleb üle anda esialgsest virnast kümnes kaart. See on alati äss.

Keegi ei tule selle kaarditriki puhul kohe mõttele, et trikk põhineb arvude 11 kuni 19 matemaatilisel omadusel (arv miinus ristsumma = 9)!

Pettejäreldus raudteel.

Raudtee on nöörsirge. Rong sõidab kiirusega 100 km tunnis. Millise ajaga läbib ta vahemaa 200 km? On selge, et 2 tunniga.

Teine variant on selline, et rong peab teekonna esimesel poolel sõitma 90 km tunnis, teisel poolel aga kiirusega 110 km tunnis. Millise ajaga läbib ta siis vahemaa 200 km?

«Samuti kahe tunniga!» Enamik neist, kellele see ülesanne antakse, vastabki nõnda. Ja ometi on see vale.

Kuidas nii? Esimesel poolel teel läbib rong tunnis 90 km, niisiis 10 km $\frac{1}{9}$ tunniga. Esimese 100 km läbimiseks vajab ta järelikult $1\frac{1}{9}$ tundi. Teisel poolel teel läbib ta 1 tunniga 110 km, seega 10 km $\frac{1}{11}$ tunniga ning teise teepoole 100 km $\frac{10}{11}$ tunniga.

Kogu vahemaa (200 km) läbimiseks vajab rong järelikult $1\frac{1}{9} + \frac{10}{11} = 1\frac{11}{99} + \frac{90}{99} = 1\frac{101}{99} = 2\frac{2}{99}$ tundi, s. o. 2 tundi 1 minut ja umbes 13 sekundit.

Milles eksiti ning mis tuleb üle kontrollida, kuna algul saadi väär tulemus?

100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ anti arvatava keskmise kiirusena. See ei ole õige. Kui rong võrdsetes ajaühikutes (näiteks üks tund) sõidaks esmalt kiirusega 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja pärast 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis oleks õige rääkida keskmisest kiirusest 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Antud juhul aga sõitis rong kiirusega 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *kauem kui üks tund* ja kiirusega 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *mitte tervet tundi.*

Kiirused 90 ja 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ kuulusid võrdsetele teelõikudele 100 km, nad *ei vastanud* aga võrdseile ajavahemikele. 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *ei olnud* siin keskmiseks kiiruseks.

Kui tahetakse arvutada keskmist kiirust x, peab arvestama, et rong läbis kogu vahemaa ehk 200 km $2\frac{2}{99}$ tunniga. Seega saab tuletada võrrandi

$$200 = x \cdot 2\frac{2}{99}.$$

Selle võrrandi lahendamisel saame

$$200 = x \cdot \frac{200}{99}$$

$$99 = x.$$

Keskmine kiirus oli 99 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ristküliku kummaline tükeldamine.

13 ühiku laiune ja 5 ühiku kõrgune ristkülik, mille pindala on seega 65 ruutühikut, jaotatakse kolme joonega kaheks kolmnurgaks ja kaheks nelinurgaks (trapetsiks). Kui need kujundid välja lõigata, saab nad kokku panna ruuduks.

Seejuures on väga huvitav, et ristküliku 65-st ruutühikust tekib ruut pindalaga 64 ruutühikut. Ristkülik lõigati küll lahti, aga ega sealt ometi midagi ära lõigatud?

Kiirteteoreemi järgi saab esimese kujundi kohta koostada järgmise võrde:

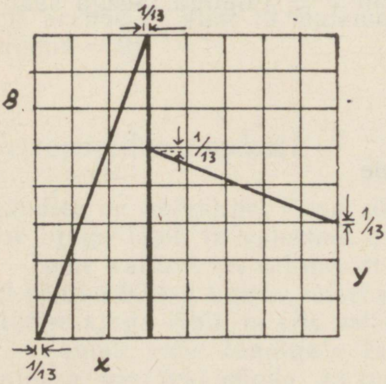
Arvutada x

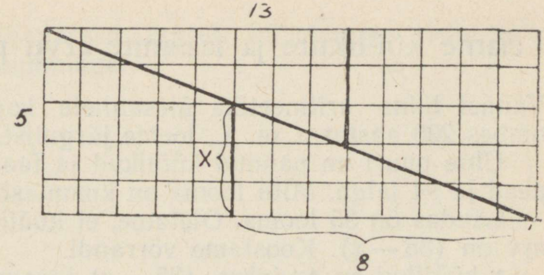
$$x : 8 = 5 : 13$$
$$13x = 40$$
$$x = 3\frac{1}{13}$$

Joonisel, mis kujutab ruutu, pole x niisiis 3, vaid $3\frac{1}{13}$ ühikut. Erinevus on nii väike, et seda me ei märkagi.

Lõik y sellel joonisel ei moodusta 3 ühikut, nagu esmalt valesti oletati, vaid samuti $3\frac{1}{13}$ ühikut.

Mõlema täisnurkse kolmnurga kokkupanemisel tekkinud ristküliku kõrgus on 8 ühikut, laius $3\frac{1}{13}$ ühikut. Ristküliku pindala on järelikult $8 \cdot 3\frac{1}{13} = \frac{320}{13}$ ruutühikut.





Kahest trapetsist kokku seatud ristküliku kõrgus on $(5+3\frac{1}{13})$ ja laius 5 pikkusühikut. Tema pindala moodustab seega $5(5+3\frac{1}{13}) = \frac{525}{13}$ ruutühikut.

Kui liita mõlemad ristkülikud, millest parempoolne on niisiis $\frac{1}{13}$ pikkusühiku võrra kõrgem kui vasakpoolne, siis:

$$\text{kogupindala} = \frac{320}{13}\,\text{ruutühikut} + \frac{525}{13}\,\text{ruutühikut},$$

$$\text{kogupindala} = \frac{845}{13}\,\text{ruutühikut} = 65\ \text{ruutühikut}.$$

Väljalõigatud pinnatükkide kokkuseadmisel saab seega kujundi, mis paistab küll ruuduna, tegelikult aga ei ole ruut.

Kork ja pudel.

Korgiga pudel puuviljasiirupit maksab 1 rbl. 10 kop. Täis pudel ilma korgita maksab 1 rubla rohkem kui kork. Kui palju maksab kork?

Kork 10 kop. ja pudel koos sisuga 1 rbl. Kokku on see 1 rbl. 10 kop. On see õige?

Ei, korgita pudel maksab ju 1 rubla rohkem kui kork! Midagi on siin korrast ära! Arvutame!

Kork maksab x rubla, pudel koos sisuga (ilma korgita) y rubla.

$x + y = 1{,}10$

Pudel koos sisuga ja kork maksab 1 rbl. 10 kop.

$y = x + 1$

Pudel koos sisuga maksab ühe kopika rohkem kui kork.

$x = 1{,}10 - x - 1$

Lahutame alumise võrrandi ülemisest, siis saame.

$2x = 0{,}10$

$x = 0{,}05$

Kork maksab 0,05 rubla, pudel koos sisuga 1,05 rubla. Kontroll: pudel koos sisuga ja kork maksavad kokku 1,10 rubla ehk 1 rbl. 10 kop.

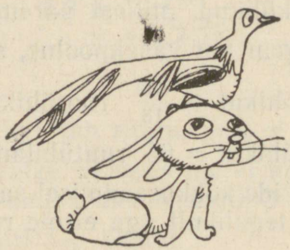
Leiame küülikute ja faasanite arvu puuris.

Vanast hiina aritmeetika ülesannete kogust, mis on koostatud umbes 200 aastat e. m. a., loeme järgmist.

Ühte puuri on pandud küülikud ja faasanid. Neil on kokku 35 pead ja 94 jalga. Mitu looma on kummastki liigist?

Laudas on 35 looma. Oletame, et küülikuid on x, siis faasanite arv on $(35-x)$. Koostame võrrandi.

x küülikul on $4x$ jalga. $(35-x)$ faasanil on $(35-x)\cdot 2$ jalga. Kokku on 94 jalga. Seega on võrrand:



$$4x+2(35-x)=94$$

$$4x+70-2x=94$$

$$2x=94-70=24$$

$$x=12$$

Laudas on 12 küülikut ja 23 faasanit. Kontroll: 48 küülikuning 46 faasanijalga on kokku 94 jalga.

Ruutvõrrand lootoslillest.

Aleksandria matemaatiku *Diophantose* (III saj.) raamatus «Aritmeetika» on ülesanne, mis veidi muudetuna kõlab järgmiselt.

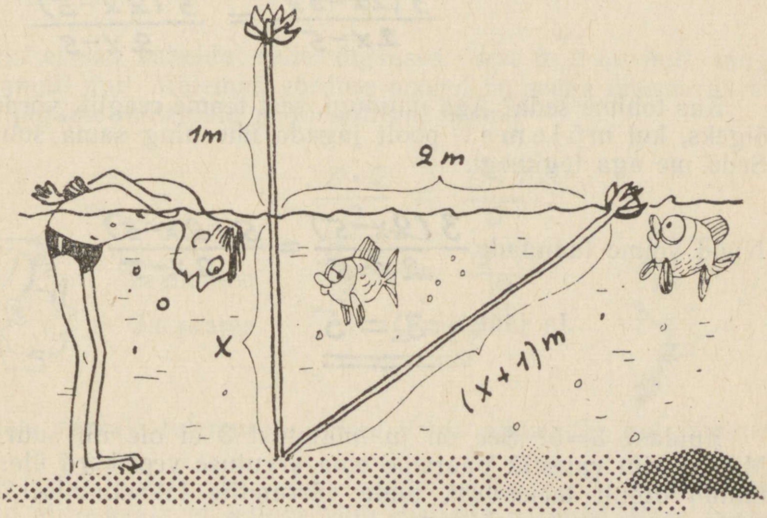
Lootoslill ulatub veest välja 1 m. Tuulest viltu vajununa ulatub tema õis veest välja 2 m kaugusel esialgsest asendist. Kui sügav on vesi?

Kui tähistada vee sügavus x-ga, siis lootoslille kõrgus on $(x+1)$ m. Kujund on täisnurkne kolmnurk, mille kaatetite pikkus on vastavalt x meetrit ja 2 meetrit. Hüpotenuusi pikkus on $(x+1)$ m.

Rakendada tuleb Pythagorase lauset: hüpotenuusi ruut on võrdne kaatetite ruutude summaga.

$$(x+1)^2 = x^2 + 2^2$$
$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4$$
$$2x = 3$$
$$\underline{\underline{x = 1{,}5}}$$

Vee sügavus on 1,5 m.



Matemaatiline pettejäreldus.

Olgu antud ühe tundmatuga *x* võrrand.

$$6x + 25 = 10x + 15$$

Teisendame seda võrrandit. Viime 15 võrrandi paremalt poolelt vasakule ja 25 vasakult poolelt paremale. Siis saame

$$6x - 15 = 10x - 25$$

See on kindlasti õige, sest oleme ju õppinud, et liidetavat võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele, kui muuta tema märk vastupidiseks.

Nüüd toome võrrandi vasakul poolel sulgude ette 3, paremal poolel 5. Tulemus:

$$3(2x-5)=5(2x-5)$$

Jagame võrrandi mõlemat poolt (2x — 5)-ga, saame:

$$\frac{3(2x-5)}{2x-5}=\frac{5(2x-5)}{2x-5}$$

Kas tohime seda? Aga muidugi, sest teame reeglit: võrdus jääb õigeks, kui m õ l e m a t poolt jagada ühe ning sama suurusega. Seda me aga tegimegi.

Nüüd võime taandada $\frac{3\cancel{(2x-5)}}{\cancel{2x-5}}=\frac{5\cancel{(2x-5)}}{\cancel{2x-5}}$

Ja jääb $\underline{\underline{3=5}}$

Kuidas? 3=5? See on ju mõttetus! 3 ei ole nii suur kui 5! Mis on siin valesti? Vaatame oma arvutuse veel kord üle. Oleme teinud ainult teisendusi, mida võrrandite lahendamisel kasutatakse. Kus peitub siiski viga?

Algul antud võrdus $6x - 15 = 10x - 25$ kehtib ainult ühe kindla x väärtuse korral. Arvutame selle:

$$6x+25=10x+15$$
$$6x-10x=15-25$$
$$-4x=-10$$
$$4x=10$$
$$\underline{\underline{x=2\tfrac{1}{2}}}$$

Arvutuses, mis äsja viis meid tulemusele 3=5, jagasime ühel sammul võrrandi mõlemat poolt $(2x-5)$-ga. Kuna x võrdub $2\frac{1}{2}$-ga, siis sulgavaldise väärtus on $2\cdot 2\frac{1}{2}-5=5-5=0$. Teadmatult oleme jaganud nulliga. Seda poleks tohtinud teha. Võrrand jääb küll õigeks, kui mõlemat poolt jagada ühe ja sama arvuga, kuid on siiski ü k s erand: nulliga võrrandit jagada ei tohi. Miks? Selgitame ühe näite varal, et jagamine nulliga viib väärale tulemusele.

Järgmine võrdus on ju õige:

$$0\cdot 2 = 0\cdot 17$$

Keegi ei saa kahelda selle õigsuses, sest $0\cdot 2$ on null ning $0\cdot 17$ samuti null. Mõlemad võrduse pooled on seega ühesuurused.

Kui jagame mõlemaid pooli nulliga, saame

$$\frac{0\cdot 2}{0} = \frac{0\cdot 17}{0}$$

Taandame $$\frac{\cancel{0}\cdot 2}{\cancel{0}} = \frac{\cancel{0}\cdot 17}{\cancel{0}}$$

Ja saame $$2=17$$

Sellele väärale tulemusele võime jõuda ainut siis, kui jagame nulliga.

Meie näite puhul, mis andis tulemuse 3=5, oli arvutusviga peidetud nii osavalt, et sellega võib eksitada paljusid. Enne jagamist $(2x-5)$-ga oleksime pidanud eelkõige uurima, kas ehk $(2x-5)$ väärtus pole null. Ja kuna ilmnes, et $(2x-5)$ võrdub tõepoolest nulliga, oli ootuspärane ka vale tulemus.

Tuleb vahetada sajarublaline.

Aastaid tagasi juhtus erakordne lugu. Tekkisid olulised lahkarvamused selle üle, millist kahju sai petetu. Lugu ise oli järgmine.

Kauplusesse astus noormees. Ta tahtis osta endale raadiot. Pärast pikki kõhklusi otsustas ta 76-rublase vastuvõtja kasuks. Ostja pani lauale sajarublalise. Müüjal ei olnud aga kassas küllalt vahetusraha. Kiiresti läks ta kõrval asuvasse kauplusse ning vahetas sajarublalise ja andis siis ostjale 24 rubla tagasi. Noormees lahkus kauplusest, raadioaparaat kaenlas.

Poole tunni pärast tuli tormates raadiokauplusse kassapidaja kõrvalkauplusest, sajarublane rahatäht käes. «Sajarublaline on võltsitud. Makske kohe mulle minu raha tagasi!» Müüja veendus selles. Rahatäht ei olnud tõepoolest ehtne. Ta andis naabrile tagasi 100 rubla õiget raha.

Noormeest enam ei nähtud. Millist kahju oli saanud müüja?

Loe kõik veel kord täpselt läbi ja mõtle hoolega! Aparaat oli läinud, see on 76 rubla. 24 rubla sai tagasi antud ostjale. 100 rubla sai naaber. Seega 200 rubla kahju? Aga ei! 76 rubla oli ju veel vahetamisest raha kassas. Seega ainult 124 rubla kahju?

Jätame selle sinule otsustada. Kogemused on näidanud, et 100-st isikust, kellele see ülesanne esitatakse, satuvad 90 väärale lahendusele. Ainult üks väike märkus: kahju ei saa kunagi kasust suurem olla!

Laenatud kaamel

Kolm noort araablast pärisid oma isalt 23 kaamelit. Isa soovi kohaselt pidi saama esimene poeg poole karjast, teine poeg kolmandiku ja kolmas kaheksandiku. Kõik kolm olid algul nõutud, kuidas jaotamist teha. Lõpuks laenasid nad oma onu karjast ühe kaameli. Nüüd oli neil 24 kaamelit. Esimene poeg sai sellest karjast poole, s. o. 12 kaamelit, teine kolmandiku ehk 8 kaamelit ja kolmas kaheksandiku, seega 3 kaamelit. Laenatud, 24. loom anti onule tagasi.

Kuidas selgitada, et esialgu nii raskena näivat ülesannet oli võimalik laenatud kaameli tagasiandmisega hõlpsasti lahendada?

Kas testamendi tingimused tegelikult täideti?

Esimene poeg sai 12 kaamelit.

Isa tahte kohaselt oleks ta pidanud saama aga $11\frac{1}{2}$ kaamelit.

Teine poeg sai 8 kaamelit, tema oleks pidanud saama hoopis $7\frac{2}{3}$ kaamelit.

Kolmas poeg sai 3 kaamelit, ta oleks pidanud saama aga $2\frac{7}{8}$ kaamelit.

Seega jaotamine ei vastanud isa viimsele tahtele.

Nõutud jaotamiseks oleks tulnud kaamelid tappa. Siis oleks võinud tõesti üks poeg saada $11\frac{1}{2}$, teine $7\frac{2}{3}$ ja kolmas $2\frac{7}{8}$ kaamelit.

Liidame: $11\frac{1}{2} + 7\frac{2}{3} + 2\frac{7}{8} = ?$

$$11\frac{12}{24} + 7\frac{16}{24} + 2\frac{21}{24} = 20\frac{49}{24} = 22\frac{1}{24}.$$

Siis oleks järelikult veel $\frac{23}{24}$ kaamelit üle jäänud? Aga kuidas seda tõlgendada?

Vaatleme veel kord testamenti. Isa oli kindlaks määranud karja jaotamise osades $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$.

Liidame: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{12}{24} + \frac{8}{24} + \frac{3}{24} = \frac{23}{24}$.

Isa oli jaotamisele määranud ainult $\frac{23}{24}$ karjast. Seega pidi $\frac{1}{24}$ karjast üle jääma. Et kari koosnes 23-st kaamelist, pidi sellest üle jääma $\frac{1}{24}$, niisiis $\frac{23}{24}$ ühest kaamelist.

Seda oli isa vaevalt küll tahtnud. Tema arvates pidid kolm murdosa, mis ta jaotamiseks määras, andma kokku 1.

Achilleus ja kilpkonn.

Järgmine kummaline lugu pärineb kreeka filosoofilt *Zenonilt* Eleast (umbes 450 aastat e. m. a.).

Achilleus, kiireim ja vapraim kreeka kangelane Trooja sõjas, leppis kilpkonnaga kokku võidujooksuks. Kilpkonn sai 100-meetrise edumaa. Achilleus jooksis kilpkonnast 10 korda kiiremini. Kui Achilleus oli läbinud edumaast 100 m, oli kilpkonnal veel 10 m edumaad; kui

10 m, oli veel 1 m edumaad; kui

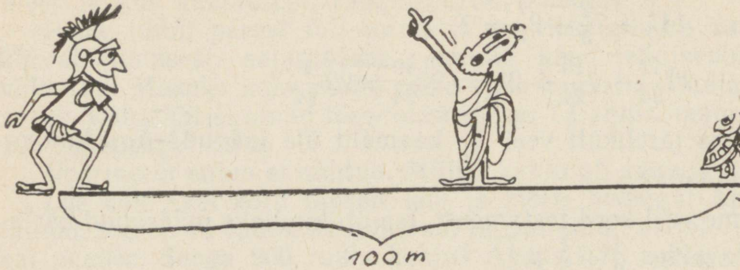
1 m, oli veel 1 dm edumaad; kui

10 cm, oli veel 1 cm edumaad; kui

1 cm, oli veel 1 mm edumaad ja kui

1 mm, oli veel 0,1 mm edumaad . . .

jne.



Ehkki Achilleus jõudis kilpkonnale kogu aeg lähemale, oli kilpkonnal ikkagi teatud, ehkki lõpuks kuitahes väike edumaa. Kas siis Achilleus ei suutnud kilpkonnale järele jõuda?

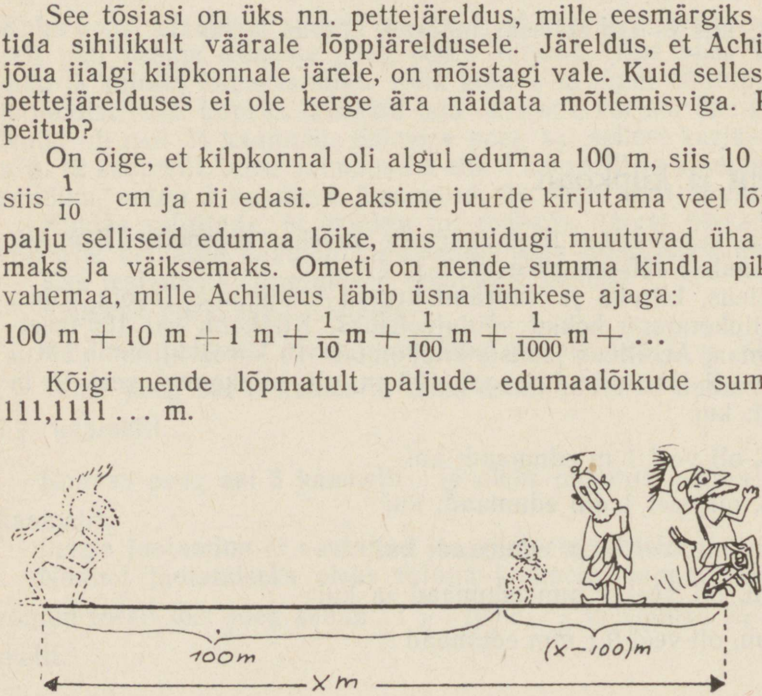
Sa arvad, et loomulikult säilib algul ikka kilpkonna edumaa, kuid Achilleus tuleb talle üha lähemale ja lõpuks peab Achilleus kilpkonnast ette jõudma. See on küll õige, aga kuigi sa oma eeltoodud lõpp-järeldust korduvalt kaalud, jääb alati ikka veel üks läbimata edumaa. Või on see mõttekäik väär?

See tõsiasi on üks nn. pettejäreldus, mille eesmärgiks on juhtida sihilikult väärale lõppjäreldusele. Järeldus, et Achilleus ei jõua iialgi kilpkonnale järele, on mõistagi vale. Kuid selles Zenoni pettejärelduses ei ole kerge ära näidata mõtlemisviga. Kus see peitub?

On õige, et kilpkonnal oli algul edumaa 100 m, siis 10 m, 1 m, siis $\frac{1}{10}$ cm ja nii edasi. Peaksime juurde kirjutama veel lõpmatult palju selliseid edumaa lõike, mis muidugi muutuvad üha väiksemaks ja väiksemaks. Ometi on nende summa kindla pikkusega vahemaa, mille Achilleus läbib üsna lühikese ajaga:

$$100\text{ m} + 10\text{ m} + 1\text{ m} + \frac{1}{10}\text{m} + \frac{1}{100}\text{ m} + \frac{1}{1000}\text{m} + \ldots$$

Kõigi nende lõpmatult paljude edumaalõikude summa on 111,1111 ... m.



Meetrite arv on puhtperioodiline kümnendmurd lõpmatult paljude ühtede järjendiga peale koma. Selle kümnendmurru võib kirjutada segaarvuna: $111\frac{1}{9}$ m.

Achilleus jõudis kilpkonnale järele, kui ta oli jooksnud $111\frac{1}{9}$ m. Vahemaa, mille Achilleus läbis kilpkonnale järelejõudmiseks, võime arvutada ka järgmiselt. Läbinud x meetrit, jõudis Achilleus kilpkonnale järele. Sama ajaga oli kilpkonn jooksnud $(x - 100)$ meetrit. Ärakäidud teepikkused suhtuvad nagu toodud kiirused, seega nii nagu 10 suhtub 1-sse.

$$x : (x - 100) = 10 : 1$$

Sellest järeldub (välisliikmete korrutis on võrdne siseliikmete korrutisega), et

$$x = 10(x - 100)$$
$$x = 10x - 1000$$
$$1000 = 9x$$
$$9x = 1000$$
$$x = \frac{1000}{9}$$
$$x = 111\frac{1}{9}$$

MATEMAATILISI PÄHKLEID.

Erakordne juhtum 9-ga.

Kirjutame üles mistahes mitmekohalise arvu.

Olgu see näiteks: 1957

Nüüd kirjutame valitud arvu alla ümberjärjestatud numbritega arvu: 7591

Lahutame väiksema suuremast, saame: 5634

Väidame, et nii saadud arv jagub igal juhul 9-ga.

$$\begin{array}{l} 5634 : 9 = 626 \\ \underline{23.} \\ \quad 54 \end{array}$$

Tõepoolest, jääki ei jää. Arv jagub 9-ga. Aga kas see on alati nii? Võib-olla oli see ainult juhus? Proovime seda ka mingite teiste arvudega. Näeme, et nii toimides saame alati 9-ga jaguva arvu. Miks?

Selgitus.

Olgu mingi suvalise kolmekohalise arvu numbrid a, b, c. Arv näeb välja järgmiselt: $a\ b\ c$. Esimesel kohal on sajalised, teisel kümnelised, kolmandal ühelised.

Arvul numbritega a, b, c on seega arvuline väärtus: $100a+10b+1c$.

Kirjutame nüüd ümberjärjestatud numbritega arvu $c\ b\ a$. Selle arvuline väärtus on $100c+10b+1a$. Mõlemad arvulised väärtused kirjutame teineteise alla ja lahutame:

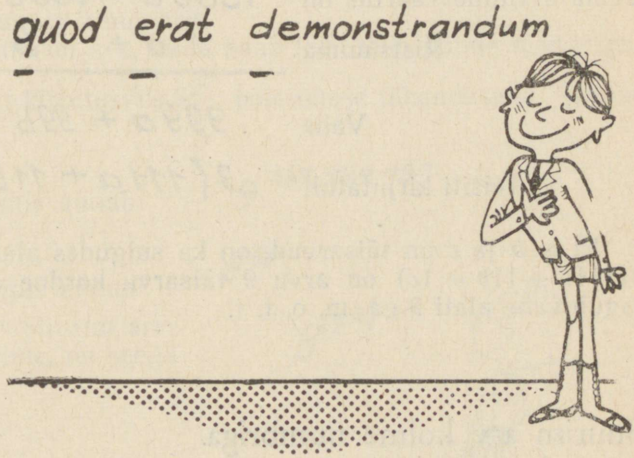
$$\begin{array}{l} 100a + 10b + 1c \\ \underline{1a + 10b + 100c} \end{array}$$

Lahutamisel saame, $99a \quad -99c$

mis teisiti kirjutatult on $99(a-c)$

$(a - c)$ on alati täisarv. Lahutamisel saadud arv $99(a - c)$ on järelikult igal juhul arvu 99 täisarvu **kordne ja sellisena jagub** alati 9-ga, q. e. d. Oleme veendunud ning tõestanud, et saadud arv jagub alati 9-ga.

Mida õieti tähendab «q. e. d.»? See on lühend ladinakeelsest väljendist «quod erat demonstrandum» (mida oli tarvis tõestada).



Veel midagi.

Seoses 9-ga on olemas veel üks eelmisega sarnane nähtus. Kui mitmekohalisest arvust lahutada tema ristsumma (arvu kõigi numbrite summa), siis jagub ka tulemus alati 9-ga.

Näide.

	2387
Ristsumma	20
Vahe	2367 : 9 = 263
	56
Kas jagub 9-ga?	27

Veendume selles, et nii saadud arv peab alati jaguma 9-ga. Valime neljakohalise arvu:

$$\boxed{a \mid b \mid c \mid d}$$

Tema arvuline väärtus on	$1000a + 100b + 10c + 1d$
Ristsumma	$a + b + c + d$
Vahe	$999a + 99b + 9c$
Teisiti kirjutatult	$9(111a + 11b + 1c)$

Et *a, b* ja *c* on täisarvud, on ka sulgudes alati täisarv. Seega $9(111a + 11b + 1c)$ on arvu 9 täisarvu kordne arv ja seepärast jagub vahe alati 9-ga, m. o. t. t.

Suurim arv kolme numbriga.

Kui on vaja nimetada suurim kolme numbriga kirjutatav arv, siis ütlevad paljud 999.

See on suurim kolmekohaline arv kümnendsüsteemis. Kuid 999 pole sugugi suurim arv, mida võib kolme numbriga kirjutada.

See on 9^{9^9}
Loetakse 9 astmes 9 astmes 9
Teisiti kirjutatult

Arv 9^9 tähendab ju $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

Kui see välja arvutada, saame: $387\,420\,489$

oleks seega $9^{387\,420\,489} = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots$

Üksteise kõrvale on kirjutatud 387 420 489 üheksat, mille vahel on korrutusmärgid. Oletame, et see pikk üheksate jada kirjutatakse nii, et iga 9 on eelmisest $\frac{1}{2}$ cm kaugusel. Selle jada üleskirjutamiseks läheks sel korral vaja enam kui 1937 km pikkust pabeririba. Nende üheksate korrutis on peaaegu kujutlematu, umbes 369 000 000 numbriga kirjutatav arv. Üksnes selle arvu üleskirjutamiseks on vaja ligikaudu 18 aastat, kui iga päev kirjutada 8 tundi, igas sekundis 2 numbrit.

Arv 9^{9^9} on suurim arv, mida saab kirjutada kolme numbriga. Olgu märgitud, et kirjutusviis 9^{9^9} pole ühese tähendusega. See on

kas $9^{(9^9)}$, mis annab $9^{387\,420\,489}$

või $(9^9)^9$, mis annab[2] 9^{81}

Suurim arv, millest rääkisime, on seega $9^{(9^9)}$

Kas olete juba kuulnud?

Liikvel on kuulujutt. Üks jutustab seda teisele ja varsti on sellest teadlik kogu linn. Sõnum saab alguse ühelt isikult. Veerandtunni jooksul jutustab ta selle kahele teisele isikule. Kumbki neist kahest annab lähemal veerandtunnil uudise jälle edasi kahele isikule. Ja nõnda see levib.

Poole tunni pärast on informeeritud seega 7 isikut, kolmveerand tunni pärast 15 jne.

---

[2] Erinevalt siintoodust omistame üliastme 9^{9^9} kirjutusviisile ühese tähenduse, s. t. $9^{9^9} = 9^{(9^9)}$, ent $(9^9)^9 = 9^{81} = 387\,420\,489^9$. Meil tavaliselt ei kasutata kirjutusviisi $(9^9)^9$, kuid selle kasutamise korral tuleb mõista, et $(9^9)^9 = (9^9)^9$.

Üliastmete kohta vt. näiteks:

Я. И. Перельман. Занимательная арифметика. М., 1959, стр. 177—182.

J. I. Perelman. Huvitav algebra. Tln., 1952, lk. 15—19.

В. Литцман. Веселое и занимательное о числах и фигурах. М., 1963, стр. 109—111. — *Tõlk.*

Leiame kuulujutu levitamisest haaratud isikuteringi kasvamisseaduse järgmise arutlusega.

1 veerandtunni järel on juttu kuulnud

$3=4-1=2^2-1$ isikut,

2 veerandtunni järel

$7=8-1=2\cdot2\cdot2-1=2^3-1$ isikut,

3 veerandtunni järel

$15=16-1=2\cdot2\cdot2\cdot2-1=2^4-1$ isikut,

21 veerandtunni ($5\frac{1}{4}$ tunni) järel $2^{22}-1$ isikut.

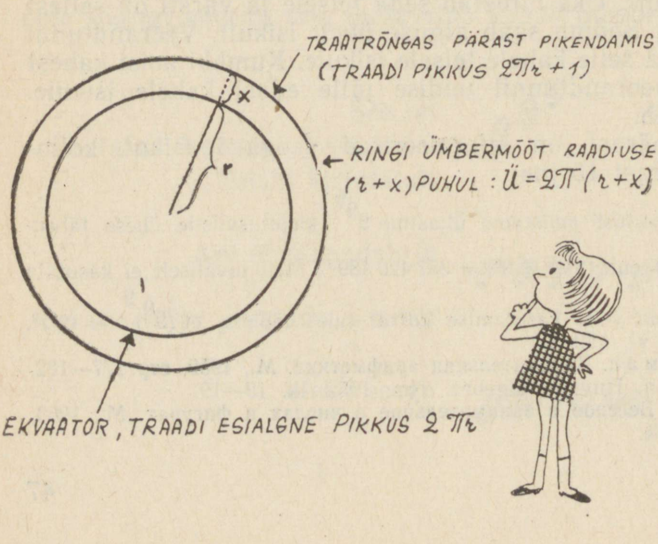
2^{22} on 4 194 304.

21 veerandtunni pärast võib olla informeeritud seega üle 4 miljoni inimese. Protsess kulgeb laviinitaoliselt, mis kasvab vastavalt arvu 2 astmetele.

Traat ekvaatoril

Maa on oma kujult lähedane kerale ja sooritab 23 tunni 56 minuti ning 4 sekundiga ühe pöörde ümber oma telje läänest itta. Maa ekvaator on kera suurring, mis asetseb oma kõigis punktides põhja- ja lõunapoolusest võrdsel kaugusel.

Ekvaatori pikkus on ligikaudu 40 000 km. Kujutleme, et mööda ekvaatorit on tõmmatud pingul traat pikkusega samuti 40 000 km. Pikendame traati mõttes ühe meetri võrra. Kindlasti on nüüd traat



veidi eemal, ehkki väga vähe? Mida tähendab pikenemine üksnes ühe meetri võrra pikkuse 40 000 km puhul? Või ehk jääb ekvaatori ja traadist ringi vahele siiski mingi vahe, kust saab kasvõi hiirgi läbi pugeda?

Siin aitab meid matemaatika. Tähistame Maa raadiuse r-ga (see on ligikaudu 6 350 000 m). Ekvaatori pikkus $\ddot{U}$ avaldub vastavalt ringi ümbermõõdu valemile: $\ddot{U}=2\pi r$. Traadi pikkus algul on samuti $2\pi r$, ühe meetri võrra pikendatuna aga $2\pi r+1$. Oletame siinkohal, et traat on ekvaatorist igal pool ühesugusel kaugusel x.

Teame, et pärast pikendamist on traadi pikkus $2\pi r+1$. Teiselt poolt näeme joonise järgi, et suurendatud traatringi ümbermõõt on $2\pi(r+x)$. Seega kehtib võrdus

$$2\pi(r+x)=2\pi r+1$$
$$2\pi r+2\pi x=2\pi r+1$$

$2\pi r$ vasakul ja $2\pi r$ paremal koonduvad

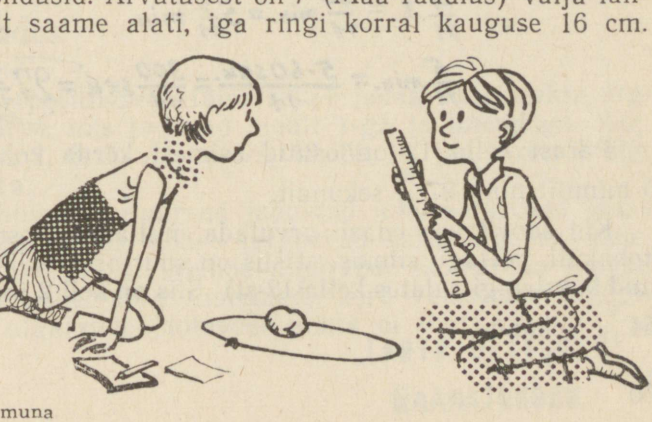
$$2\pi x=1$$
$$\underline{\underline{x=\frac{1}{2\pi}}}$$

Suurendatud traatrõnga kaugus ekvaatorist x on seega

$$\frac{1}{2\pi}\,m=\frac{1}{2\cdot 3{,}14}\,m=\frac{1}{6{,}28}\,m\approx 0{,}16\,m=16\,cm$$

Siit võib mitte ainult hiir, vaid ka kass vabalt läbi pugeda.

Vaatame veel kord arvutuse üle. Suurused $2\pi r$ vasakul ja $2\pi r$ paremal koondusid. Arvutusest on r (Maa raadius) välja langenud. Järelikult saame alati, iga ringi korral kauguse 16 cm.



Võtame ämbri või õuna ja proovime. Algul tõmmatakse niit pingule ja alles siis pikendatakse 1 m võrra. Pikendatud niit asetatakse ringikujuliselt ümber ämbri või õuna. Ikka on kaugus umbes 16 cm.

Millal on osutid kohakuti?

Kell on täpselt 12. Suur ja väike osuti on kohakuti ja suunatud numbrile 12. Millal veel on osutid kohakuti? Kell 1.05,5, kell 2.11, siis kell 3.16,5 jne.

Täpsus sellisel lugemisel ei ole suur. Küll võib aga välja arvutada sekundite murdosad, millal osutid asetsevad teineteise peal.

Numbrilaual on 60 jaotust. Suur osuti läbib ühes tunnis 60 jaotust, väike ainult 5. Pärast kella 12 peavad osutid asetsema kohakuti esimest korda kell x.

Kell x on suur osuti läbinud $x \cdot 60$ jaotust.

Kell x on väike osuti läbinud $x \cdot 5$ jaotust.

Kui kell x on osutid kohakuti, siis on suur osuti väikesest osutist ette jõudnud ühe ringi võrra. Suur osuti on seega läbinud 60 jaotust rohkem kui väike. Järelikult kehtib võrdus:

$$x \cdot 60 = x \cdot 5 + 60$$

$$60x = 5x + 60$$

$$60x - 5x = 60$$

$$55x = 60$$

$$x = \frac{60}{55} = 1\frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{11}\ t. = \frac{60}{11}\ min. = 5\frac{5}{11}\ min.$$

$$\frac{5}{11}\ min. = \frac{5 \cdot 60\ sek.}{11} = \frac{300}{11}\ sek. = 27\frac{3}{11}\ sek.$$

Pärast kella 12 on osutid esimest korda kohakuti kell 1 ja 5 minutit ning $27\frac{3}{11}$ sekundit.

Kui soovitakse edasi arvutada, millal on osutid teist korda kohakuti, peetagu silmas, et siis on suur osuti väikesest ette jõudnud kaks ringi (alates kella 12-st). Siis on kell 2 ja 10 minutit ning $54\frac{6}{11}$ sekundit.

Tornikell lööb.

Pimm-pomm-pimm-pomm-pimm-pomm. Kell näitab 6-ndat tundi. Need 6 kellalööki kestsid täpselt 6 sekundit. Mitu sekundit vältab löömine, kui kell on 12? Vast 12 sekundit? Niisugune järeldus on ennatlik.

Esimese ja kuuenda löögi vahel on 5 võrdset ajavahemikku, igaüks $\frac{6}{5}$ sekundit ($1\frac{1}{5}$ sekundit). 12 löögi vahel on 11 ajavahemikku, igaüks $1\frac{1}{5}$ sekundit.

$$11 \cdot 1\tfrac{1}{5} = 11 \cdot \tfrac{6}{5} = \tfrac{66}{5} = 13\tfrac{1}{5}$$

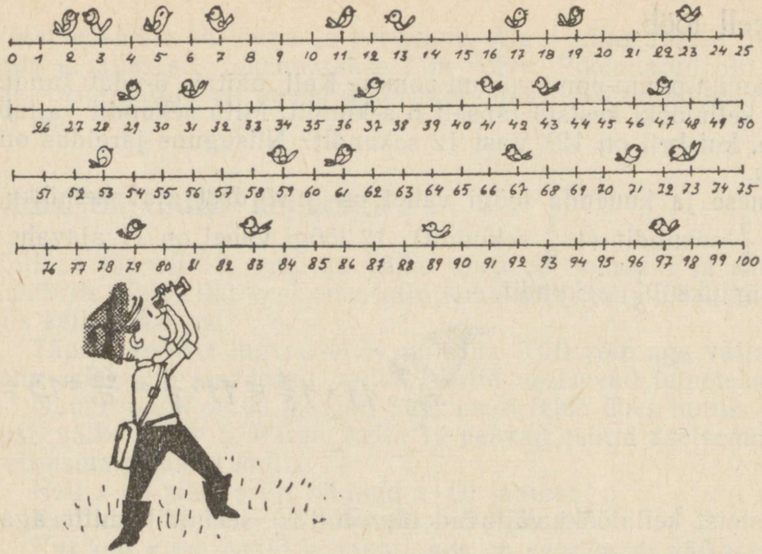
Kaksteist kellalööki vältavad täpselt $13\frac{1}{5}$ sekundit, mitte aga 12 sekundit, nagu algul arvatakse.

Maantee ääres on telefonipostid võrdsete vahedega. Esimesest viienda postini on täpselt 250 m. Kui kaugel on esimene post kümnendast? Enamasti vastatakse kõhklemata: 500 m. See on aga väär. Esimesest viienda postini on n e l i vahet, igaüks 62,5 m. Esimese ja kümnenda posti vahel on ü h e k s a vahet. 62,5 m • 9=562,5 m. Kaugus esimesest kümnenda postini on seega 562,5 m.

Algarvude saladus.

Naturaalarvude (positiivsete täisarvude) jadas nimetatakse algarvudeks neid arve, mis jaguvad ainult 1-ga ja iseendaga. Algarvud on näiteks 2, 3, 5, 7, ..., 79, 83, 89, 97 jne. Arvu 1 algarvuks e i l o e t a.

Jooniselt nähtub, et algarvud jaotuvad naturaalarvude jadas reeglipäratult. Vaid ühes kohas järgnevad kaks algarvu teineteisele vahetult (2 ja 3). Muude algarvude korral on lüngad naaberalgarvude vahel kord suuremad, kord väiksemad. Mingit seaduspärasust algarvude jaotuvuse kohta ei tunta.



Silma torkab asjaolu, et vahemikus 1 kuni 25 märkame peale ühe algarvude paari, milles arvud on vahetult teineteise kõrval (2 ja 3), veel kolme paari, mille arvud erinevad 2 võrra (5 ja 7; 11 ja 13; 17 ja 19). Mitu sellist paari on 25 ja 50, 50 ja 75, 75 ja 100 vahel? (Kaks, kaks, ei ühtki.) 1 ja 100 vahel on niisuguseid paare seitse.

Edasi teeme kindlaks, et 1 ja 25 vahel on üheksa algarvu, 75 ja 100 vahel seevastu ainult neli. Tegelikult ilmneb, et koos arvude väärtuste kasvamisega esinevad algarvud üha harvemini. Võib-olla lõpevad algarvud väga suurte arvude hulgas üldse? On aga tõestatud, et algarvud e i l õ p e. On olemas lõpmatult palju algarve. Juba aastatuhandeid otsivad matemaatikud algarvude jaotuvuse seadust naturaalarvude jadas. Kuidas arvutada, mitu algarvu on 2 ja 700 vahel, ning kuidas neid kiiresti leida? Tänini pole see veel õnnestunud.

Kuidas paiknevad algarvud suurte arvude piirkonnas, näiteks 100 000 ja 107 000 vahel? Siin ei jää üle muud kui proovida, arvutada ning arvutada. Vaevarikas töö oli algarvude tabelite koostamine. Need hõlmavad terveid köiteid.

Algarvude leidmiseks võib kasutada nn. «Eratosthenese sõela». See meetod pärineb kreeka õpetlaselt *Eratostheneselt* (elas 250. a. paiku e. m. a.). Arvutusmeetodi nimetus on valitud tabavalt.

Uuritavad arvud teatud mõttes nagu puistatakse sõelale. Mittealgarvud langevad läbi, nii et lõpuks jäävad üle üksnes algarvud. Proovime leida «Eratosthenese sõela» abil algarvud 2 ja 40 vahel. Kirjuta üles kõik täisarvud selles piirkonnas.

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ 21

~~22~~ 23 ~~24~~ $\boxed{25}$ ~~26~~ 27 ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ 33 ~~34~~ $\boxed{35}$ ~~36~~ 37 ~~38~~ 39 ~~40~~

Kõik arvu 2 kordsed kriipsuta läbi märgiga X, arvu 3 kordsed O-ga ja arvu 5 kordsed □-ga. «Sõelale» on jäänud üksnes algarvud 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

Kui teatud vahemikus, mis algab 2-ga, tahetakse leida kõik algarvud, peab maha kriipsutama kõik need arvud, mis on mingi eespool seisva algarvu kordsed. Nii jäävad järele ainult otsitavad algarvud.

Suurim seni leitud algarv on $2^{2281} - 1$.

Selle arvu saamiseks peab arvu 2 võtma teguriks 2281 korda ja siis vähendama tulemust 1 võrra. Selle arvu üleskirjutamisega on raskusi, sest tal on 687 numbrit! [3]

Kas on üldse mõtet üha suuremate algarvude ja lõpuks algarvude moodustamise seaduse leidmisega vaeva näha?

Jah, on küll! Kui VI sajandil e. m. a. avastas *Pythagoras* seaduse arvulisest sõltuvusest hüpotenuusi ruudu ja kaatetite ruutude vahel, aimas ta ise vaevalt, milliseid eesmärke tema avastatud lause kunagi teenib. Paljudel elualadel kasutavad mitmesuguste arvutuste puhul Pythagorase teoreemi iga päev tuhanded inimesed. Matemaatika on inseneride ja tehnikute töös tohutu tähtsusega. Palju on ajaloo jooksul uurimise tulemusena leitud uusi matemaatilisi seadusi ja arvutusmeetodeid, ilma et oleks mõeldud nende praktilisele kasutamisele. Tarbetult on seisnud nad laualaekas ja alles paljude aastate pärast on arenev tehnika nad enda jaoks avastanud. Matemaatika ruttab sageli tehnikast ette, varustades teda õigeaegselt arvutusvahenditega.

---

[3] 1957. a. tõestati, et arv $2^{3217}-1$ (969 numbrit) on algarv. 1962. a. leiti algarvud $2^{4253}-1$ ja $2^{4423}-1$, 1965. a. aga veel algarvud $2^{9689}-1$, $2^{9941}-1$ ning $2^{11\,213}-1$. Viimane sisaldab 3376 numbrit. Siin nimetatud suured algarvud on avastatud elektronarvutitega ja kuuluvad nn. Mersenne'i algarvude hulka. Lähemalt vt. nende kohta näiteks:

А. А. Бухштаб. Теория чисел. М., 1966, стр. 34—35.

И. Я. Депман. История арифметики. М., 1959, стр. 139—148.

Huvitavat materjali leiad veel: J. Gabovitš. Täiuslikud arvud. «Matemaatika ja kaasaeg», 1965, nr. 8, lk. 58—64. — *Tõlk.*

Fermat' probleem.

Täisruut tekib, kui täisarv korrutada tema endaga. Arvu 2 ruut on 4, sest $2 \cdot 2 = 4$; arvu 3 ruut on 9; arvu 4 ruut 16 jne. Seda kirjutatakse: $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$ jne.

Kahe täisruudu liitmisel saadud summa on mõnel juhul samuti täisruut. Selle kohta võiks tuua järgmised näited.

$$3^2+4^2=5^2 \quad (9+16=25)$$
$$5^2+12^2=13^2 \quad (25+144=169)$$
$$6^2+8^2=10^2 \quad (36+64=100)$$
$$7^2+24^2=25^2 \quad (49+576=625)$$

Leidub palju (isegi lõpmatult palju) selliseid täisarve x, y, z, mis rahuldavad võrrandit $x^2 + y^2 = z^2$. Neid nimetatakse ka Pythagorase arvudeks, sest vastavate küljepikkustega kolmnurgad on täisnurksed. Nende kohta kehtib Pythagorase teoreem.

Täiskuubid tekivad, kui täisarvud tõstetakse kolmandasse astmesse.

Näiteks on arvu 2 kuup võrdne 8-ga.

$$2^3=2\cdot 2\cdot 2=8$$

Vastavalt

$$3^3=27$$
$$4^3=64$$
$$5^3=125$$
$$6^3=216$$

Kas võib leida ka kolme täiskuupi, mille puhul kehtib:

(esimene arv)^3 + (teine arv)^3 = (kolmas arv)^3 $\quad x^3+y^3=z^3$?

Või koguni veel arve, mille puhul kehtib:

(esimene arv)^4 + (teine arv)^4 = (kolmas arv)^4 $\quad x^4+y^4=z^4$?

(esimene arv)^{17} + (teine arv)^{17} = (kolmas arv)^{17} $\quad x^{17}+y^{17}=z^{17}$?

ja nii edasi?

Küsimust sellistest arvudest nimetatakse Fermat' probleemiks. *Fermat* oli prantsuse matemaatik, kes elas XVII sajandil. Kõigist pingutustest ja proovimistest hoolimata pole selliseid arve suudetud leida. Arvatavasti pole neid olemaski. Pärast Fermat' surma leiti temast järele jäänud materjalide hulgas märkus, et ta on leidnud «tõeliselt imepärase tõestuse» selle kohta, et neid arve ei saa olemas olla. Paljud matemaatikud aga on tänini näinud asjatult vaeva, et selle kohta tõestust esitada.

Pärast 1908. a. sai Fermat' probleem asjast huvitunud avalikkuse huviobjektiks. Göttingeni Teaduse Ühing kuulutas välja 100 000 marga suuruse preemia sellele, kes annab üldkujulise tõestuse, et ei saa leiduda kolme täisarvu x, y, z, mille kohta kehtiks võrdus: (esimene arv)^n + (teine arv)^n = (kolmas arv)^n (kui n on 2-st suurem).

Paljud matemaatikud, tehnikud ja diletandid on püüdnudki tõestust leida ning sellega omandada lubatud autasu. Tänini pole aga seda suudetud. Määratud auhinna tähtaeg lõpeb selle väljapanija *Wolf Kehli* soovi kohaselt tema 100. surma-aastapäeval, 23. septembril 2007. aastal.

Lõpmatu ja ometi lõplik.

Matemaatiline rida on arvude seaduspärane järgnevus üksteisele. Üksikuid arve nimetatakse rea liikmeteks.

Näiteid lõplikest arvridadest.

1) $s = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

Selle rea koostamise põhimõte on lihtsalt märgatav. Rea iga liige on eelmisest 2 võrra suurem. Rea summa on s.

$$s = 25$$

2) $s = 5 + 25 + 125 + 625$

või $s = 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4$

See rida moodustatakse nii, et iga liige on eelmisest 5 korda suurem.

$$s = 780$$

3) $$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Siin on rea üksikuteks liikmeteks murrud. Iga murru lugeja on 1. Üksikute liikmete nimetajad on naturaalarvude jada arvud. Märgid vahelduvad.

$$s = \frac{47}{60}$$

4) $$s = 2 + 5 + 17 - 3 + \frac{2}{3}$$

See ei ole rida, sest arvude järgnevuses puudub seaduspärasus. Siin on arvud järjestatud meelevaldselt.

$$s = 21\frac{2}{3}$$

Kõiki seni mainitud ridu (numbrid 1 kuni 3) nimetatakse lõplikeks ridadeks. Nende liikmete arv on piiratud.

On olemas ka lõpmatuid arvridu.

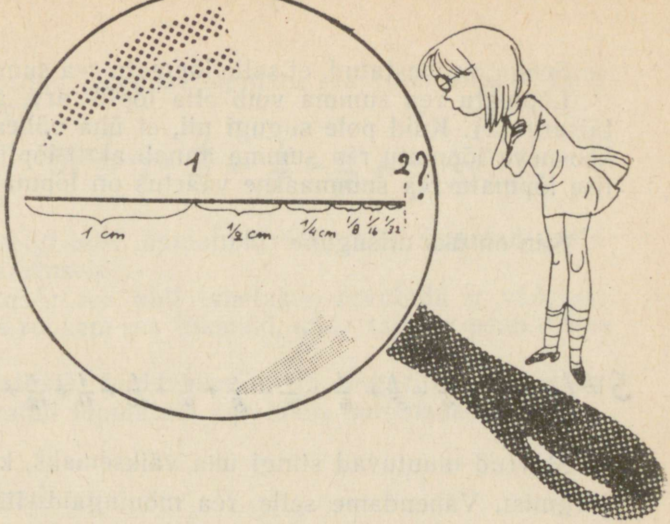
Näiteid lõpmatutest arvridadest.

1) $$s = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \ldots$$

Punktid rea lõpus väljendavad rea lõputut jätkumist. Siin on *s* kõigi paarisarvude summa. Sellel summal pole lõplikku väärtust, ta on lõpmatult suur.

2) $$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Selle lõpmatu rea liikmed on murrud, mille väärtused liikmelt liikmele reeglipäraselt pidevalt vähenevad. Mistahes liikme nimetaja on alati kaks korda suurem eelmise liikme nimetajast. Kui tahame määrata rea summat *s*, peame liitma lõpmatult palju murde, mis üha vähenevad. Kas siin summa *s* muutub lõpmatult suureks? Silmitsege järgmist joonist.



Vaatleme luubiga lõiku 1 cm. See on pikendatud $\frac{1}{2}$ cm, siis $\frac{1}{4}$ cm, siis $\frac{1}{8}$ cm, $\frac{1}{16}$ cm võrra ja nii edasi. Järgnevad murdosad on vaevalt märgatavad. Peaaegu näib, nagu edasisel pikendamisel üha väiksemate murdosade võrra tekiks vaid 2 cm pikkune lõik.

Jah, lõpmatu rea summa

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

tuleb täpselt 2, mitte rohkem ega vähem.

Seda võib näidata lihtsa matemaatilise võttega.

Rida on $$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Korrutame kogu võrdust 2-ga $$2s = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Lahutame alumisest võrdusest ülemise ja saame $$s = 2 + 1 - 1 = 2$$ $$\underline{\underline{s = 2}}$$ (Murrud lahutamisel kaovad.)

Seega on tõestatud, et selle lõpmatu rea summa võrdub 2-ga.

Lõpmatu rea summa võib olla lõplik arv, antud juhul koguni täisarv (2). Kuid pole sugugi nii, et üha vähenevatest murdudest koosneva lõpmatu rea summa annab alati lõpliku arvu. Mõne sellise lõpmatu rea summaarne väärtus on lõpmatult suur.

Siin on üks niisugune rida:

1)

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Murrud muutuvad siingi üha väiksemaks, kuid saab järeldada järgmist. Vähendame selle rea mõningaid liikmeid. $\frac{1}{3}$ asemele kirjutame $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ asemele $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{15}$ asemele kirjutame vastavalt ainult $\frac{1}{16}$. Muudetud rida näeb siis välja nii:

2)

$$S=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}}+\ldots$$

Saaksime vastavalt muuta ka rea järgnevaid liikmeid. 2. rea summeerimisel peaksime siis 1-le liitma lõpmatult $\frac{1}{2}$. Seejuures saame üle kõigi piiride kasvava arvu. 2. rea summa on niisiis lõpmatu. Ja seda enam on 1. rea summaarne väärtus samuti lõpmatu, kuna enamik tema liikmeist on suuremad 2. rea vastavaist liikmeist.

Tuletame meelde, et praktikas kasutatakse sageli π lähisväärtusena arvu 3,14 või ka $\frac{22}{7}$. Täpsem väärtus on juba 3,1415926 . . . . π on lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd. π kasutamisel tuleb kaaluda, kas tema lähisväärtusest 3,14 piisab vajaliku täpsuse saamiseks või peab rakendama π täpsemat arvulist väärtust.

Saksa matemaatik *Wilhelm Leibniz* (1646—1716) leidis, et π

arvuline väärtus võrdub järgmise lõpmatu rea (nimetatakse Leibnizi reaks) summaga:

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \pm \ldots\ldots$$

On koostatud veelgi teisi lõpmatuid ridu, mille summad vastavad π arvulisele väärtusele.

Kui sellise lõpmatu rea abil tahetakse arvutada π väärtust, tuleb arvutada seda rohkem rea liikmeid, mida täpsem peab olema π otsitav väärtus.

Ka trigonomeetriliste funktsioonide ja logaritmide arvulisi väärtusi leitakse teatud lõpmatute arvridade summadena.

Nisuterad malelaual

Legend jutustab, et India kuningas *Sheran* tegi leiutajale *Sessale* ettepaneku nimetada mingi soov, mille ta tahaks Sessa autasustamiseks male leiutamise eest täita.

Kaval Sessa esitas järgmise soovi: «Üks nisutera tuleb panna malelaua esimesele ruudule, 2 nisutera teisele, 4 kolmandale ja nii edasi kuni viimase ruuduni.» Kuningas arvas, et see soov on liiga tagasihoidlik. Kui aga Sessa talle ette näitas, siis leidis ka kuningas, et seda soovi on küll vaevalt võimalik täita.

1. ruudule tuleb 1, 2. ruudule 2, 3. ruudule $2 \cdot 2 = 2^2$, 4. ruudule 2^3 nisutera ja nii edasi; 64. ruudule tuleb 2^{63} nisutera.

Nüüd peaksime arvutama, mitu nisutera tuleb panna malelaua igale ruudule ja siis saadud 64 tulemust liitma. See oleks aga aeganõudev, kui arvutuse oluliseks lihtsustamiseks poleks olemas üht matemaatilist võtet. Tähistame nisuterade kogusumma 64-l ruudul s-ga. Siis

$$s = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^{63}$$

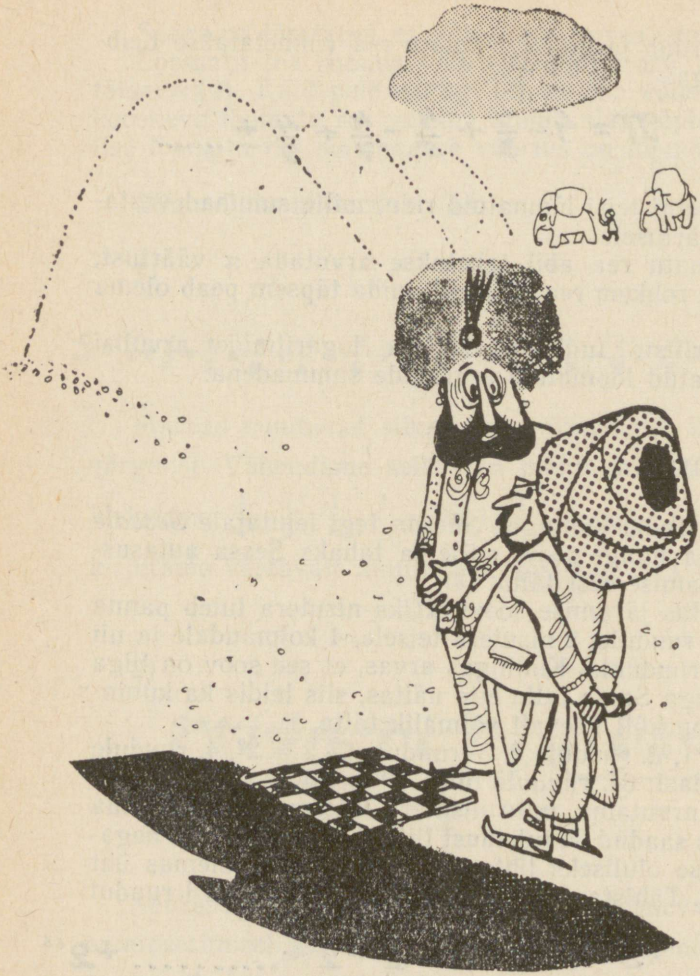
Korrutame selle võrduse vasakut ja paremat poolt 2-ga ning kirjutame siis teineteise alla.

$$2s = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\ldots\ldots + 2^{63} + 2^{64}$$

$$s = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\ldots\ldots + 2^{63}$$

(Kõik teised liikmed langevad välja.)

$$s = 2^{64} - 1$$



Edasi lahutame alumise võrduse ülemisest. Nisuterade üldsumma s on täpselt $2^{64} - 1$. Järgnevalt arvutame 2^{64} (selleks tuleb arv **2** korrutada 63 korda iseendaga) ja siis sellest lahutada 1.

Nisuterade üldsumma on täpselt

18 446 744 073 709 551 615

Seda loetakse 18 kvintiljonit 446 kvadriljonit 744 triljonit 73 miljardit 709 miljonit 551 tuhat 615.[4] Sellist tohutut nisuterade hulka ei suuda me endale ette kujutada. See vastab nisu mitme tuhande kordsele maailma aastatoodangule.

Mitu skatimängu[5] on olemas?

Skatimängu 32 kaardi jaotus kolmele mängijale ja kaartide jaotus skatti on iga mängu juures erinev. Matemaatik võib välja arvutada, mitu erinevat jaotamisvõimalust on 32 kaardi puhul. Neid on 2 753 264 408 204 640 (2 kvadriljonit 753 triljonit 264 miljardit 408 miljonit 204 tuhat 640).

See on tohutu arv! Kas kolm skatimängijat võivad kogu oma elu jooksul kõik need võimalused läbi mängida? Juhtub vaevalt, et skatimängija eluajal partii kordub. Leidub nii palju võimalusi, et ta ikka ja jälle saab kätte teised kaardid. Võib-olla põhineb skatimängu populaarsus peaaegu ammendamatul võimalusrikkusel.

Järgnevalt antakse veel eeskiri, mille järgi saab arvutada eeltoodud võimaluste hiigelarvu:

$$\frac{32!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 2!}.$$

Hüüumärgil on matemaatikas oma tähendus. 2! tähendab $1 \cdot 2$; $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$; 32! tähendab kõigi täisarvude korrutist 1-st 32-ni. Matemaatilist tähist «!» nimetatakse «faktoriaaliks». 10! ehk 10 faktoriaal vastab arvule 3 628 800.

---

[4] Siin on kasutatud NSV Liidus, Prantsusmaal ja USA-s käibelolevaid suurte arvude nimetusi. Saksa DV-s, Saksa FV-s ja Inglismaal nimetatakse suuri arve järgmiselt: 10^6 — miljon; 10^9 — miljard; 10^{12} — biljon; 10^{15} — biljard; 10^{18} — triljon, 10^{21} — triljard jne. Nende nimetuste abil tuleks seda arvu lugeda järgmiselt: 18 triljonit 446 biljardit 744 biljonit 73 miljardit 709 miljonit 551 tuhat 615. — *Tõlk.*

[5] Skatt on Saksamaal laialdaselt levinud kaardimäng, mida mängitakse 32 kaardiga. Skatimängus jaotatakse igaühele kolmest mängijast 10 kaarti ja 2 kaarti pannakse avamatult kõrvale, nn. skatti. See, kes hakkab mängima ülejäänud kahe partneri vastu, võtab need üles ja paneb oma käest asemele 2 kaarti, mis jäävad hiljem mängust välja.

Kaartide erinevate jaotamisvõimaluste arvu saab siin leida permutatsioonide arvu valemi abil korduvate elementide korral:

$$P_n(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda) = \frac{n!}{\alpha! . \beta! . \gamma! . \ldots . \lambda!},$$

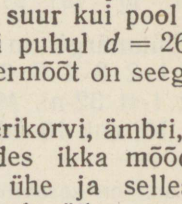
kus $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = n$. — *Tõlk.*

Arv π.

Esimese tutvuse arvuga π võime teha mingi ümara keha, näiteks keedupoti juures. Mõõdame paelaga võimalikult täpselt poti ümbermõõdu *(Ü)*. Olgu *Ü* näiteks 80,6 cm. Siis mõõdame joonlauaga poti välise läbimõõdu *d*, mis on kaks korda nii suur kui pool läbimõõtu ehk raadius *r*; seega $d = 2r$. Olgu poti puhul $d = 26$ cm. *Ü* jagatud *d*-ga annab $80{,}6 : 26 = 3{,}1$. Poti ümbermõõt on seega 3,1 korda läbimõõdust suurem.

Korraldame samasugused arvutused ka paberikorvi, ämbri, konservikarbi, kohvitassi ja täitesulepeaga, jagades ikka mõõdetud ümbermõõdu vastava läbimõõduga. Saame ühe ja sellesama arvu — ligikaudu 3,1, kord veidi suurema, kord väiksema. Seda arvu nimetatakse «pii»-ks (π).

$$\boxed{\frac{Ü}{d} = \pi}$$



Et $d = 2r$, siis ka

$$\boxed{\frac{Ü}{2r} = \pi}$$

π on kõikidele ringidele iseloomulik arv ja tema tähistus on rahvusvaheline. Tegelikult on π kreeka tähestiku häälik *p*. Juba antiikaja suur matemaatik ja füüsik *Archimedes* leidis umbes 300 a. e. m. a. arvule π väärtuse 3,14.

Veel nüüdisajal, üle kahe aastatuhande hiljem, arvutatakse kogu maailmas selle, Archimedese poolt leitud arvulise väärtusega. See rahuldab küllaldaselt igapäevaseid praktilisi vajadusi, ehkki ta pole kaugeltki täpne.

1600. aasta paiku arvutas hollandi matemaatik *Ludolf van Ceulen* arvu π 35 kohta peale koma. Tema auks nimetatakse arvu π ka Ludolfi arvuks. Esitame veel vähemalt mõned kohad peale koma:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots.$$

Kuid see arv ei lõpe ka 35 kohaga. Inglise matemaatik *Shanks* arvutas π 707 kohta ning ei jõudnud veel lõpuni. π on lõpmatu kümnendmurd. Isegi kilomeetrite kaugusel peale koma pole näha kusagil reeglipärast arvude kordumist, perioodi. Seepärast ei saa arvu π esitada murrujoone abil ja sel põhjusel loetakse teda irratsionaalarvuks.

Leibniz, XVII sajandi matemaatik ja filosoof, leidis meetodi π täpseks arvutamiseks.

π on võrdne järgmise lõpmatu rea summaga:

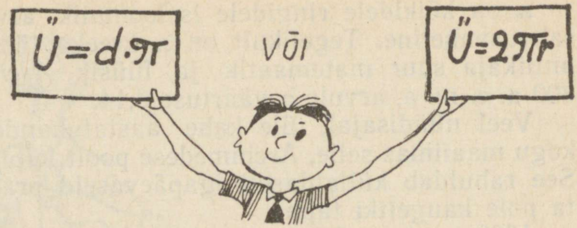
$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \mp \ldots.$$

Mida rohkem liikmeid selle süsteemi järgi liidetakse või lahutatakse, seda täpsem on tulemus. Selleks et π üksikuid kohti peale koma täpselt teada saada, peab selles reas küllalt kaugele minema. Seepärast matemaatikud seda rida ei kasuta. See rida koondub nimelt väga aeglaselt, mis tähendab, et ta läheneb liiga aeglaselt tegelikule väärtusele. Kiiremini saab arvutada järgmise rea abil:

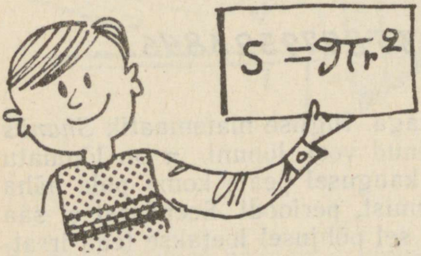
$$\pi = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) \pm \ldots$$

Elektronarvutiga on määratud π kuni mõnikümmend tuhat kohta peale koma.

Valemist $\frac{Ü}{d} = \pi$ järeldub, et



See on valem, mida tunneb iga tehnik ja oskustööline.
Kui on teada raadius, võib arvutada ka ringi pindala S.



Olgu raadius näiteks 10 cm, siis pindala $S = 3{,}14 \cdot 10 \cdot 10 = 314$ (cm^2) ja
ümbermõõt $Ü = 20 \cdot 3{,}14 = 62{,}80$ (cm).

Kõigis arvutustes, mis on seotud ringiga, esineb arv π. Et silinder, koonus ja kera on ümarkehad, siis kohtame ka nende kehade arvutusvalemites arvu π. Arvu π kohtame ka füüsika seadustes, mis puudutavad ringliikumist.

π on seega erakordselt tähtis arv, mis on vajalik mitte ainult ümarkehadega seotud arvutustes, vaid ka paljude tehnilist laadi ülesannete lahendamisel.

π määramine nõelaviskamisega.

Järgnevalt veendume, et arvu π võib määrata ka ilma ringita.

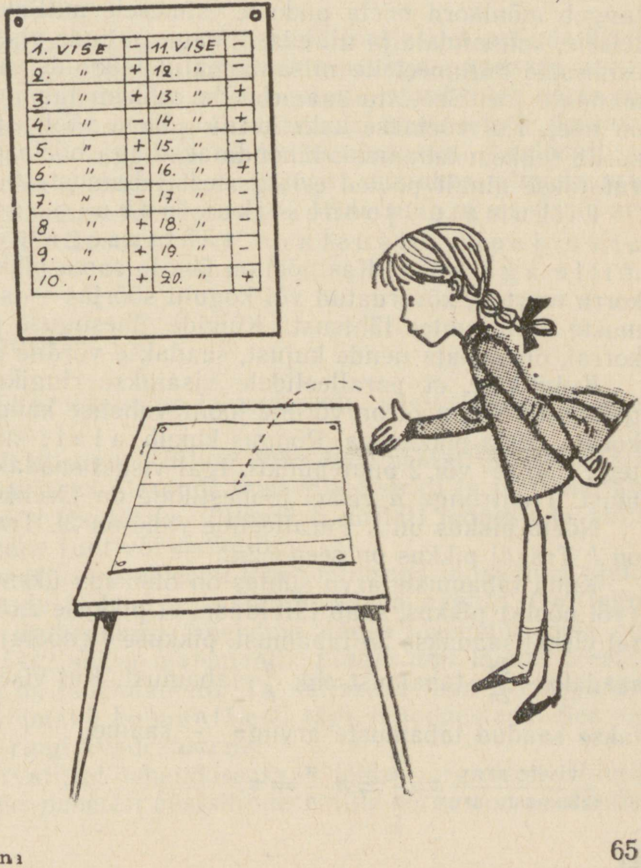
Selleks kasutatakse nööpnõela, ehk parem õmblusnõela, millel on teravik lõiketangidega ära võetud, sest siis on nõel ühesuguse jämedusega. Lauale on kinnitatud suur leht paberit, millele on tõmmatud paralleelsed jooned. Naaberjooned on teineteisest nõela kahekordse pikkuse kaugusel. Kui nõel on näiteks 2,6 cm pikkune, joonestatakse paralleelid vahedega 5,2 cm.

Nõel visatakse suvaliselt paberile. Et ta ei põrkuks ja võimalikult vähe veereks, pannakse paberi alla pehmeid kuivatuslehti või pehme rätik. Vise loetakse tabamuseks, kui nõel kukub joonele või ainult puudutab seda üht otsa pidi. Kukub nõel kahe paralleeli vahele, ei saa viset tabamuseks pidada. Kuna nõel on kaks korda lühem kui paralleelsete sirgete vahe, ei saa kunagi juhtuda nii, et nõelal oleks paralleelidega kaks lõikepunkti.

Iga viske puhul märgitakse üles, kas vise läheb kirja tabamusena või mitte.

100 viset andsid näiteks 39 tabamust,
200 viset 76 tabamust,
300 viset 105 tabamust.

Visete arv jagatud tabamuste arvuga annab vastavalt 2,56
2,63
2,86.



Idee selliseks nõelaviskamiseks pärineb prantsuse looduseuurijalt *Buffonilt*, kes elas umbes 200 aastat tagasi. Ta tõestas, et paljude visete puhul, kui visete arv jagatakse tabamuste arvuga, saadakse π. Mida suurem on visete arv, seda täpsem on tulemus. Üks šveitsi astronoom sai 5000 viske korral arvulise väärtuse 3,159, keegi saksa matemaatik aga 10 000 viske puhul 3,150. Need tulemused ei vasta küll veel päris täpselt arvule π, kuid viimane tulemus erineb π õigest väärtusest ainult umbes $\frac{1}{3}$ % võrra. Selleks et veel täpsemaid π väärtusi saada, peab visete arv ületama nähtavasti 10 000.

See on arvu π määramiseks kõige üllatavam meetod. Et arvutuse «visete arv jagatud tabamuste arvuga» tulemusena saab arvu π, ilma et oleks tegemist ringiga, näib esialgu põhjendamatuna. Buffon arutles järgmiselt. Nõela lõikumine ühe paralleeliga langeb mõnikord nõela pikkuse esimesele millimeetrile, mõnikord teisele, kolmandale ja nii edasi. Väga paljude visete korral langeb esimesele millimeetrile niisama palju lõikumisi nagu teisele, kolmandale jne. Seetõttu saame seda rohkem tabamusi, mida pikem on nõel. Kui võetakse kaks korda pikem nõel, saadakse ka kaks korda rohkem tabamusi; lühendatakse aga nõela poole võrra, saavutatakse ainult pooled esialgsetest tabamustest.

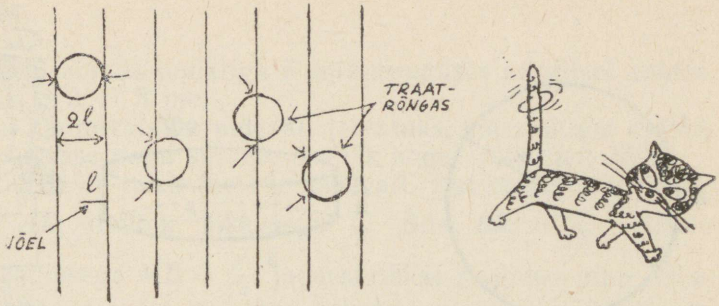
Liikumatu joonestiku puhul on tabamuste arvu jaoks otsustava tähtsusega nõela pikkus, mitte aga kuju. Kas nõel on ühe ja sama pikkuse juures kahekorra murtud, kõverdatud või koguni sõõrjas — sellel ei ole tabamuste arvu suhtes tähtsust. Kõikide ühesuguse pikkusega nõelte korral, olenemata nende kujust, saadakse võrdne arv tabamusi.

Kujutleme, et paralleelidele visatakse ringikujuline traatrõngas, mille läbimõõt on võrdne joontevahelise kaugusega ehk kahekordse nõela pikkusega. Rõngas kukub alati nii, et tal on joontega 2 lõike- või 2 puutepunkti. Igal viskel saadakse seega 2 tabamust. Traatrõnga n viskel joonestikule on järelikult $2n$ tabamust.

Nõela pikkus on l. Paralleelide vahe on $2l$. Traatrõnga raadius on l. Traadi pikkus on seega $2\pi l$.

Kuna tabamuste arvu suhtes on otsustav üksnes visatud rõnga (või nõela) pikkus, saab järeldada, et pikkuse $2\pi l$ (rõnga) n-kordsel viskel saadakse $2n$ tabamust, pikkuse l (nõela) n-kordsel viskel saadakse $\frac{2n}{2\pi}$ tabamust ehk $\frac{n}{\pi}$ tabamust. Kui visete arv (n) jagatakse saadud tabamuste arvuga $\frac{n}{\pi}$, saame

$$\frac{\text{visete arv}}{\text{tabamuste arv}} = \frac{n}{\frac{n}{\pi}} = n \cdot \frac{\pi}{n} = \pi .$$



Iga viske puhul traatrõngaga, mille läbimõõt võrdub paralleelide vahega, tekib alati 2 lõikepunkti.

Selline oli Buffoni arutlus, millega ta tõestas, et paljude visete korral, kui visete arv jagada tabamuste arvuga, saadakse arv π. Buffoni põhiline oletus, et paljude visete puhul tuleb nõela esimesele millimeetrile niisama palju tabamusi nagu teisele, kolmandale ja nii edasi, on tüüpiline näide tõenäosusest. Analoogiliselt on ka paljukordsel viskamisel täringuga: mistahes silmade arvu viskamine on ühesuguse tõenäosusega. Mida suurem on visete arv, seda suurem on tõenäosus.

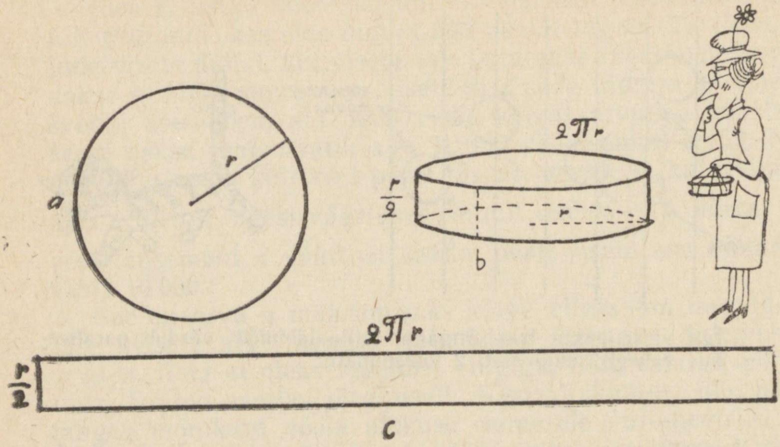
Ringi kvadratuur.

Kui ülesanne või probleem on lahendamatu, siis öeldakse: «See on ringi kvadratuur».

Kust on pärit niisugune ütlus? Juba 4000 aastat tagasi esitasid egiptuse matemaatikud ülesande teisendada sirkli ja joonlaua abil ring ruuduks või ristkülikuks. Tähendab, üritati joonestada antud ringiga pindvõrdne ruut või ristkülik.

Selle matemaatilise probleemi lahendamisega inimkonna ajaloo nelja aastatuhande jooksul on asjatult vaeva nähtud. On leitud küll terve rida ligikaudseid lahendusi, täpse meetodini pole aga jõutud. Aastal 1882 saksa matemaatik *Lindemann* lõpuks tõestas, et see ülesanne on lahendamatu. Ta näitas, et juba π cm pikkust sirglõiku pole võimalik kunagi täiesti täpselt joonestada. See aga oleks eelduseks ringi kvadratuurile.

Kord aga arvati, et lahenduse saab leida järgmiselt. Ringile ehitatakse näiteks paberist püstsilinder, mille kõrgus on pool antud



Siin on antud ring raadiusega r. Ringile ehitame silindri. See ristkülik on pindvõrdne antud ringiga.

ringi raadiusest. Kui silindri külgpind lõigatakse lahti piki moodustajat, tekib ristkülik. Pikem külg on võrdne antud ringi ümbermõõduga ($2\pi r$), lühem külg aga võrdub poolega ringi raadiusest ($\frac{r}{2}$).

Selle ristküliku pindala on

$$2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2.$$

Siin on meil ristkülik, millel on ringiga võrdne pindala! On aga seega saadud ringi kvadratuur? Kus on viga?

Seejuures jäi tähele panemata asjaolu, et ringi kvadratuuri all mõistetakse ülesannet teisendada ringi ruuduks või ristkülikuks üksnes s i r k l i j a j o o n l a u a abil. Ülesanne tuleb lahendada tasapinnal. Selle vastu aga eksiti. Lahendamine viidi üle tasapinnalt (2 dimensiooni: pikkus ja laius) ruumi (3 dimensiooni: pikkus, laius ja kõrgus). Seal saadakse tegelikult kõverpind pindalaga πr^2. Selle pinna võib siis laotada ristkülikuna tasapinnale. Kirjeldatud lahendus räägib aga esitatud nõudele vastu ja on ringi kvadratuurile ainult üheks ligikaudseks lahenduseks.

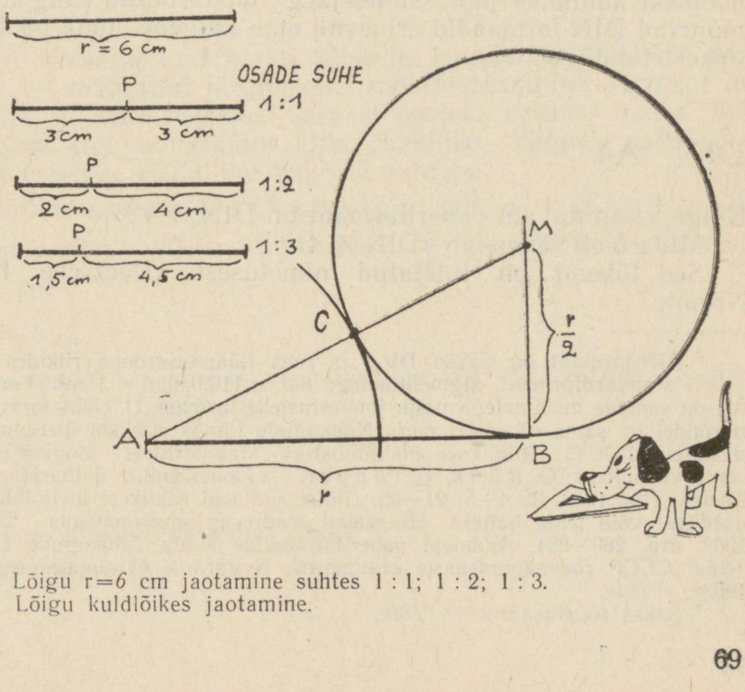
Kuldlõikest.

Sirglõiku võib jaotada punktiga *P* mitmesuguses arvulises suhtes, näiteks 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3 jne.

Sirglõiku *r* nimetatakse pidevalt jaotatuks, kui väiksem osalõik suhtub suuremasse nagu suurem osalõik kogu (jaotatud) lõiku.

Sirglõik $AB = r$ tuleb jaotada pidevalt. Punktist *B* ehitatakse sirglõigule *AB* ristlõik pikkusega $\frac{r}{2}$. Siis $BM = \frac{r}{2}$. Ümber punkti *M* raadiusega $MB = \frac{r}{2}$ joonestatakse ringjoon ning ühendatakse punktid *A* ja *M*. Sirglõik *AM* lõikab ringjoont punktis *C*. Sirglõik *AC* tuleb kanda ringjoone kaarega ümber punkti *A* sirglõigule *AB*. Seega saadakse punkt, mis jaotab sirglõigu *AB* pidevalt.

Nimetus «pidev jaotamine» on võetud kasutusele järgmiste asjaolude põhjal. Kui pidevalt jaotatud sirglõigu suuremale osale kantakse väiksem, siis jaotub suurem osa jälle pidevalt. Kui selle suuremale osale kantakse taas väiksem, siis tekib uuesti pidev jaotus. Sellist jaotamist võib pidevalt jätkata. Ikka ja jälle jaotab



Lõigu r=6 cm jaotamine suhtes 1 : 1; 1 : 2; 1 : 3.
Lõigu kuldlõikes jaotamine.

väiksem lõik suurema samas suhtes. Sellest siis ka nimetus «pidev jaotamine».

Kui ringi tuleb joonestada korrapärane kümmenurk, siis kümmenurga külje leidmiseks jaotatakse ringi raadius pidevalt. Jaotamisel tekkinud osadest suurem on kümmenurga külg, mida saab paigutada täpselt kümme korda ringjoonele kõõluna.

Sirglõigu pidevat jaotamist nimetatakse ka kuldlõikeks. Varem arvati, et ristkülik, näiteks pilt või raamat, mõjub eriti meeldivalt siis, kui tema küljed suhtuvad nagu pidevalt jaotatud sirglõigu osad. Sellist jaotussuhet peeti kõige sobivamaks ka inimese keha juures. Paljudel skulptuuridel ja maalidel on inimest kujutatud nii, et keha pikkus ja puusade laius on pidevas jaotussuhtes.

Öeldi, et pidev jaotamine peab eksisteerima looduses kõikjal. Näiteks viljakõrre juures pidid kolm järjestikust sõlme kujutama tüüpilist pilti pidevast jaotamisest. Pideva jaotamise lõikesuhtega arvati olevat leitud tähtis looduse ja kunsti tunnetamise seadus ning seepärast räägiti kuldlõikest.

Kui see jaotussuhe juhuslikult looduses ja kunstis ligikaudu leidubki, siis ei saa ometi seda üldiselt kehtivat seadust veel tõestatuks pidada.

Tänapäeval näiteks ei kujundata raamatu- ja paberiformaate hoopiski kuldlõike jaotussuhte järgi. Otstarbekad ning meeldivalt mõjuvad DIN-formaadid erinevad oma külgede suhte poolest kuldlõikest tunduvalt.

DIN[6] A4.

Kõige kasutatavam paberiformaat on DIN *A* 4.

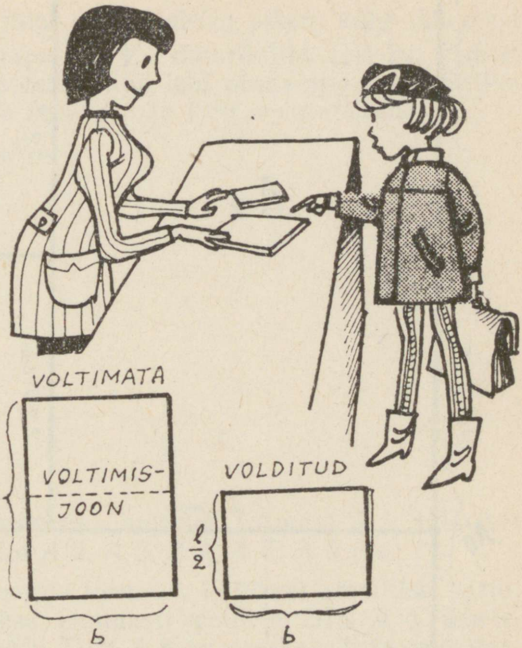
Mida õieti tähendab «DIN *A* 4»?

See lühend on tuletatud nimetusest «Deutsche Industrie-Norm».[7]

---

[6] DIN-formaat on Saksa DV-s ja reas Lääne-Euroopa riikides kasutatav paberi standardformaat, algmõõtmetega 841 × 1189 mm = 1 m². Formaat DIN A 4 on samade mõõtmetega nagu joonestuslehe formaat 11 (lähteformaat). DIN-normidel on sama tähendus nagu Nõukogude Liidus riiklikel üleliidulistel standarditel (ГОСТ). Riiklikest üleliidulistest standarditest jooniste formaatide kohta vt. näiteks: O. Rünk, V. Tapper. «Joonestamine üldhariduslikele koolidele». Tln., 1969, lk. 4—5; 21—22. Üldisi andmeid riiklikest üleliidulistest standarditest võib leida näiteks: «Большая советская энциклопедия». Том 12, М., 1952, стр. 280—281. Andmeid paberiformaatide kohta Nõukogude Liidus võib leida: СССР государственные стандарты. Бумага и бумажные изделия. М., 1963. — *Tõlk.*

[7] Saksa tööstusnorm. — *Tõlk.*



Paberiformaadid määratakse lähtudes standardist DIN 476. See standard on määratud järgmiselt: ristkülikukujuline formaat on valitud nii, et lehte pikemast servast pooleks voltides tekiks jälle samasuguse kujuga ristkülik. Uue ristküliku külgede suhe peab võrduma esialgse ristküliku külgede suhtega.

Ristküliku suurema ja väiksema külje suhe on $l : b$. Vastav külgede suhe pärast pooleksvoltimist on $b : \frac{l}{2}$. Et mõlemad suhted on võrdsed, siis

$$l : b = b : \frac{l}{2}.$$

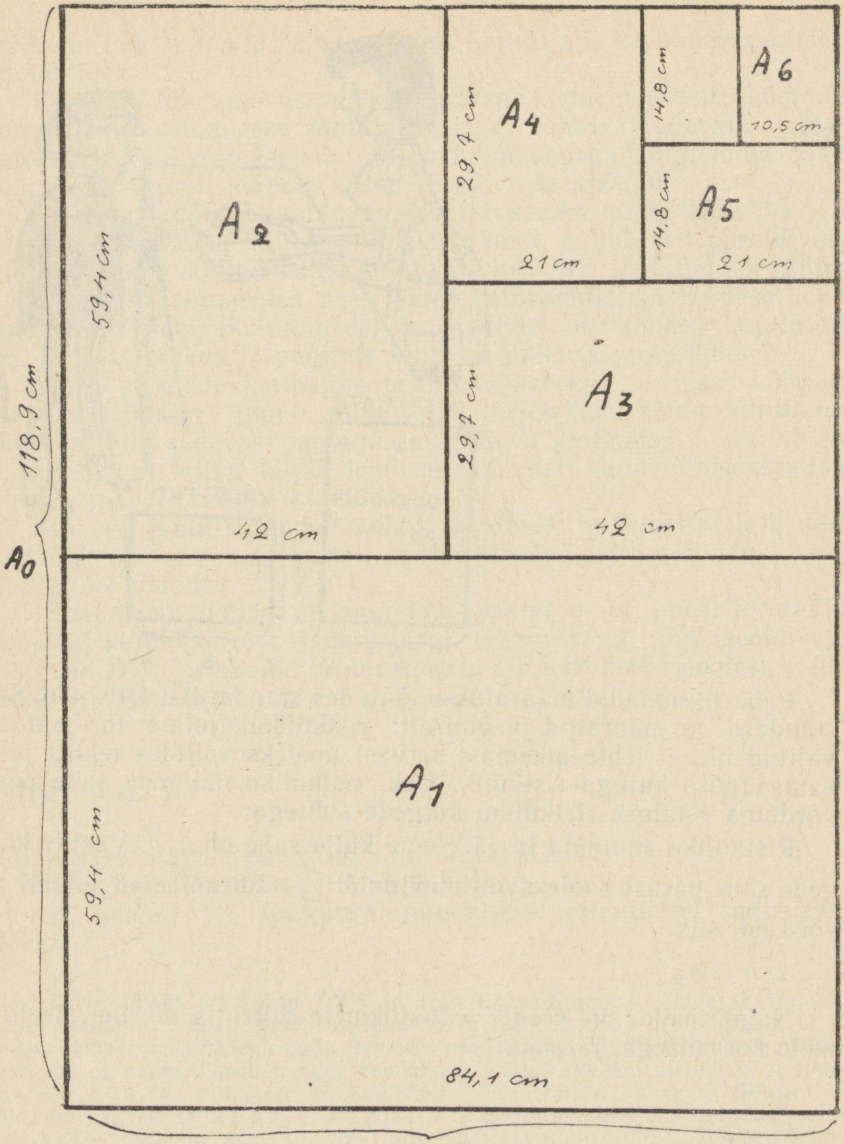
Nagu teada, on võrdes välisliikmete korrutis võrdne siseliikmete korrutisega, järelikult

$$\frac{l}{2} = b^2$$

$$l^2 = 2b^2.$$

Juurime võrduse mõlemat poolt:

$$l = b\sqrt{2}.$$



DIN-paberiformaadid A0 kuni A6.

Kõigil paberi DIN-formaatidel on ristküliku pikem külg lühemast $\sqrt{2}$ korda suurem. Seejuures on $\sqrt{2}$ ümardatud 1,41-ks. Paberi suurimaks DIN-formaadiks on valitud leht pindalaga 1 m^2. Sellist lehte tähistatakse $A0$, mille servad b ja l on arvutatavad.

$$b \cdot l = 1\ \text{m}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$$

$$b \cdot b\sqrt{2} = 10\,000$$

$$b^2 \cdot \sqrt{2} = 10\,000$$

$$b^2 = \frac{10\,000}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{100}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

$$b = 84{,}1\ \text{cm}$$

$$l = b\sqrt{2} = 118{,}9\ \text{cm}.$$

Formaadi $A0$ pooleksvoltimisel kujuneb formaat A 1. Edasisel voltimisel tekivad formaadid A 2, A 3, A 4, A 5, A 6 jne.

DIN A 4 on ühikkirjapoogna formaat. Lühikesi ametlikke kirju, teateid, arvutusi kirjutatakse enamasti poolele DIN A 4 lehele, järelikult formaadile DIN A 5. DIN A 6 on postkaardi ja taskuformaat. Formaati DIN A 2 nimetatakse ka poognaks. DIN A 4 on seega veerand poognat.

Paberi DIN-formaatide A-rea kõrval on täiendavalt kindlaks määratud ka B- ja C-read. Need kehtivad näiteks kirjaümbrike, vihikute, mappide jne. jaoks, mis peavad alati olema pisut suuremad kui sissepaigutatav A-formaat.

Korrapärased hulknurgad.

Korrapärasel hulknurgal on võrdse pikkusega küljed, mis tippude juures moodustavad võrdsed nurgad. Igal korrapärasel hulknurgal on keskpunkt, mis asetseb kõigist tippudest võrdsel kaugusel. Seega paiknevad korrapärase hulknurga kõik tipud ringjoonel, millest korrapäraste hulknurkade konstrueerimisel lähtutakse.

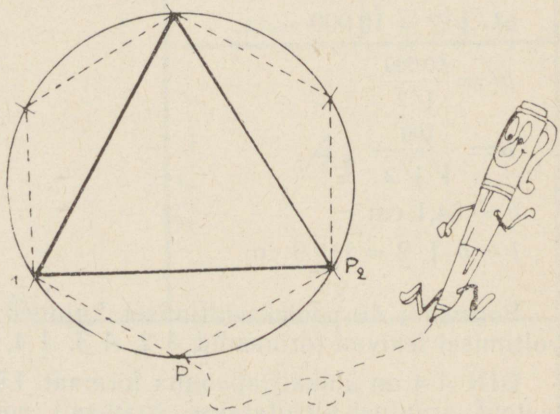
Joonestame nüüd mõned korrapärased hulknurgad, kasutades ainult joonlauda ja sirklit.

Kui kanname suvalise keskpunktiga ringjoonele kõõluna järjest 6 korda ringjoone raadiust, saame korrapärase kuusnurga.

Punkti P ümber tõmbame vastavalt vasakule ja paremale ringjoone raadiusega kaare. Lõikumine ringjoonega määrab punktid P_1 ja P_2, mille ümber tõmbame taas raadiuse abil kaare jne. Kui ühendame naaberpunktid üksteisega, tekib kuusnurk (kujutatud kriipsjoonega).

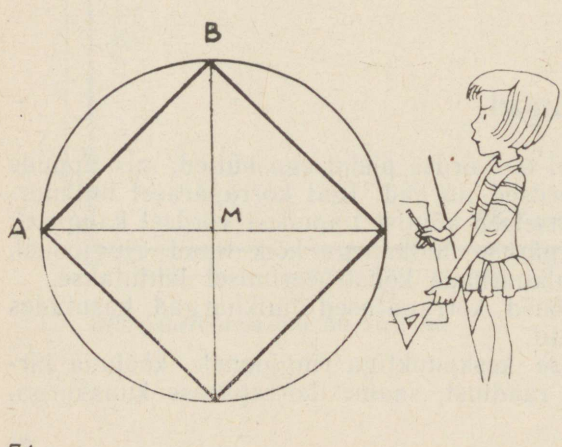
1., 3. ja 5. tipu ühendamisel saame korrapärase kolmnurga.

Korrapärane kolmnurk ja kuusnurk.

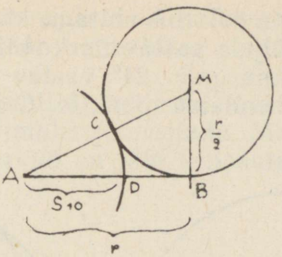


Joonestades ringi sisse kaks teineteisega ristuvat läbimõõtu, saame korrapärase nelinurga (ruudu) tipud.

Hoopis raskem on korrapärase viisnurga konstrueerimine. Selleks leitakse kõigepealt korrapärase kümmenurga külg, jaotades ringi raadiuse kuldlõikes, ning sellest lähtudes konstrueeritakse

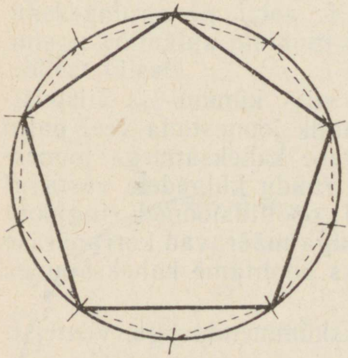


Ruut.



korrapärane viisnurk. Olgu ringi raadius AB. Punktist B tuleb tõmmata lõigule AB ristsirge ning kanda sellele pool ringi raadiusest (kuni punktini M). Punktist M tõmbame raadiusega MB ringjoone ning ühendame punktid A ja M. Lõigu AM lõikepunkt ringjoonega on C. Tõmbame raadiusega AC punktist A kaare, see lõikab lõiku AB punktis D. AD on kümmenurga külg s_{10}.

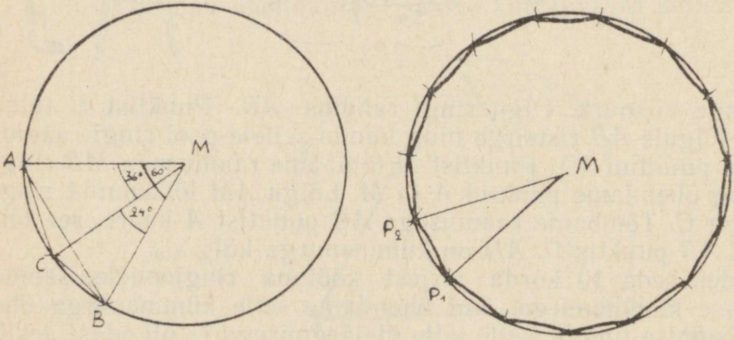
Asetades seda 10 korda järjest kõõluna ringjoonele, saame korrapärase kümmenurga. Kui ühendame selle kümmenurga ühe tipu ülejärgmise tipuga, selle jälle ülejärgmisega ja nii edasi, tekib korrapärane viisnurk.



Korrapärane viisnurk ja kümmenurk.

Ka võib joonestada korrapärase viisteistnurga. Esmalt arvutame korrapärase viisteistnurga küljele vastava kesknurga. Ühe sellise nurga suurus on 24 kraadi ($360° : 15$). Otsitav viisteistnurga külg P_1P_2 vastab kõõluna kesknurgale 24°.

Nüüd vajame kesknurgale 24° vastavat kõõlu. Joonise vasakpoolses osas on joonestatud esmalt raadius kõõluna AB ringi sisse. AB on korrapärase kuusnurga külg. Kuusnurga küljele AB vastav kesknurk AMB on 60°. Siis ehitame kümmenurga külje kööluna AC. Kümmenurga küljele vastav nurk AMC on 36°. Nurk CMB võrdub seega 24°. Kesknurgale 24° vastav kõõl ongi otsitav viisteistnurga külg. Ühendame punktid C ja B. CB on viisteistnurga külg.



Korrapärane viisteistnurk.

Need olid korrapäraste kolm-, neli-, viis-, kümme- ja viisteistnurkade konstruktsioonid. On aga võimalik joonestada veel palju teisi korrapäraseid hulknurki. Korrapärase kaheksanurga joonestamiseks poolitame sirkli abil kõik neli ruudu külgedele vastavat 90°-list kesknurka. Seejuures lõikavad poolitusjooned ringjoont veel neljas punktis, mis koos ruudu 4 tipuga määravad korrapärase kaheksanurga. Kuusteistnurga saamiseks poolitame kaheksanurga kesknurgad.

Kümmenurga põhjal võib saada kakskümmendnurga, viisteistnurga põhjal kolmkümmendnurga jne.

Nüüd teame, kuidas joonestada

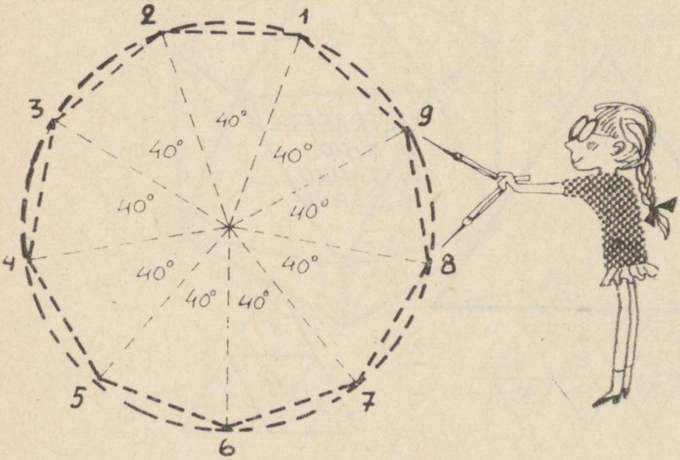
korrapärast 3-, 6-, 12-, 24-, 48-, ... nurka;
korrapärast 4-, 8-, 16-, 32-, 64-, ... nurka;
korrapärast 5-, 10-, 20-, 40-, 80-, ... nurka;
korrapärast 15-, 30-, 60-, 120-, 240-, ... nurka.

Matemaatik *Friedrich Gauss* (1777—1855) näitas, et saab joonestada ka korrapärast 17-nurka (samuti kõiki neid hulknurki, mille külgede arv on algarv kujul $n = 2^m + 1$, kusjuures m on arvu 2 mingi aste). Muid korrapäraseid hulknurki sirkli ja joonlauaga joonestada ei saa, on võimalikud ainult lähiskonstruktsioonid.

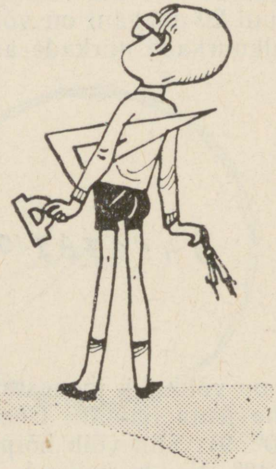
Järgnevalt on üles kirjutatud, milliseid korrapäraseid hulknurki kuni 20-nurgani on võimalik joonestada. Mittekonstrueeritavate hulknurkade nurkade arvud on läbi kriipsutatud.

3 4 5 6 ~~7~~ 8 ~~9~~ 10 ~~11~~ 12 ~~13~~ ~~14~~ 15 16 17 ~~18~~ ~~19~~ 20

Kas on võimalik joonestada ka korrapärast üheksanurka? Seda võib teha üsna lihtsalt. Üheksanurga küljele vastav kesknurk on 40° (360° : 9). Siin võib hõlpsasti ehitada ringi sisse 9 kesknurka, igaüks 40°. Nende haarad lõikavad siis ringjoont korrapärase üheksanurga tippudes. Konstruktsiooniks tuleb kasutada malli, mis ei võimalda muidugi eriti suurt täpsust, kuid praktikas piisab sellest täiesti.



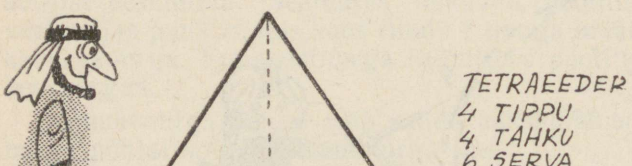
Täpne on korrapärase hulknurga ehitamine üksnes siis, kui kasutatakse sirklit ja joonlauda. Üheksanurka a i n u l t sirkli ja joonlauaga joonestada e i s a a.

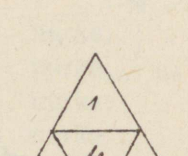


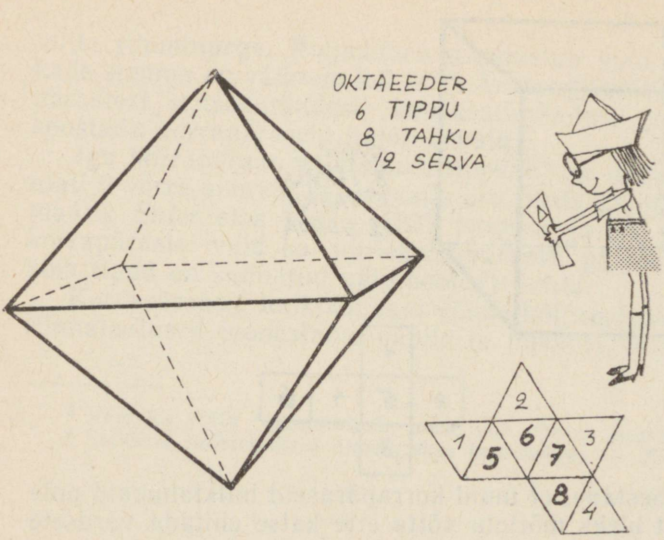
Korrapärased hulktahukad.

Korrapärased hulktahukad ehk polüeedrid on kehad, mis on piiratud võrdsete (kongruentsete) korrapäraste hulknurkadega.

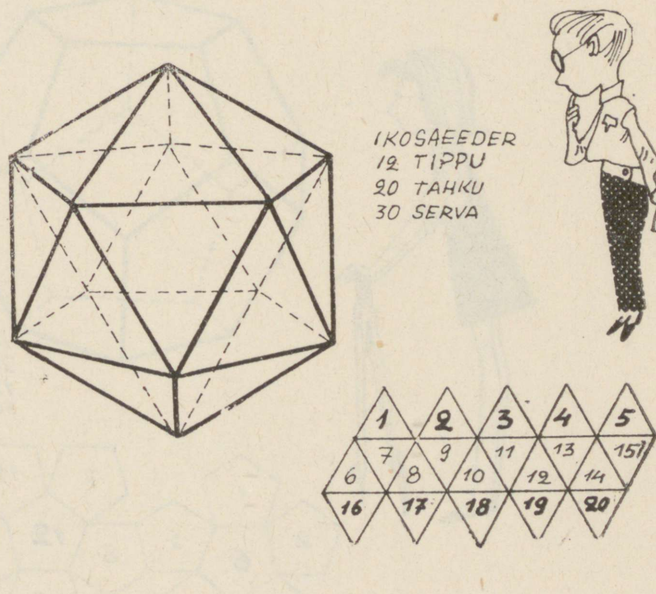
On olemas ainult viis niisugust keha: nelitahukas (tetraeeder), kaheksatahukas (oktaeeder), kakskümmendtahukas (ikosaeeder), kuustahukas (kuup ehk heksaeeder) ja kaksteisttahukas (dodekaeeder).

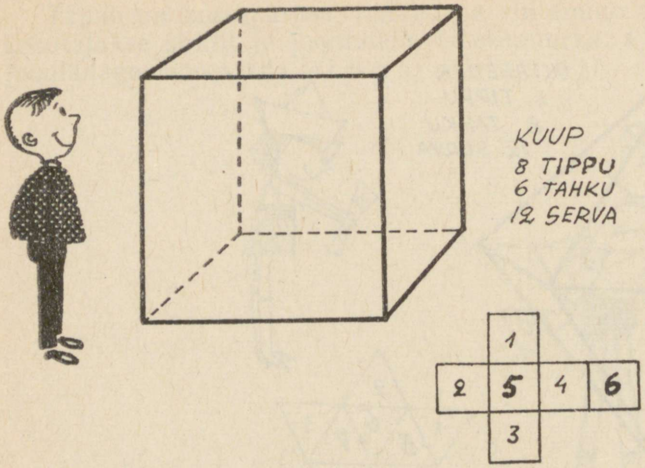




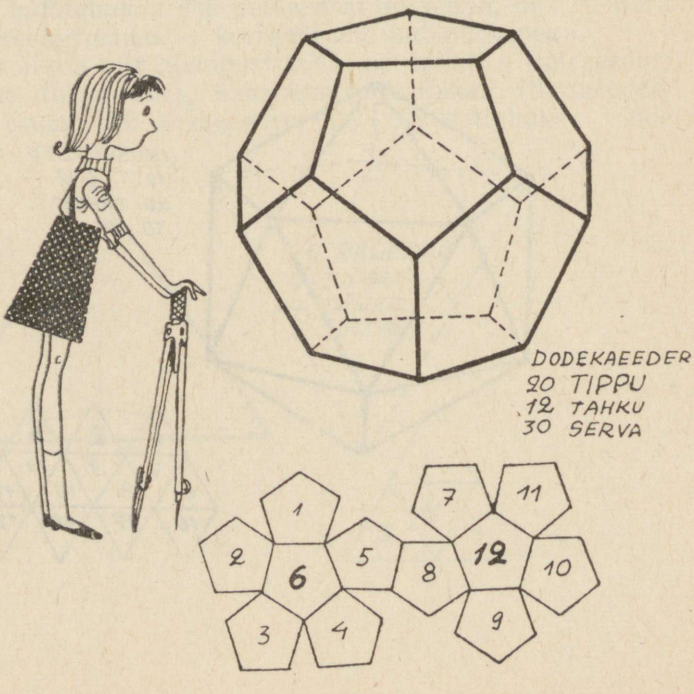


Tetraeeder, oktaeeder ja ikosaeeder on piiratud korrapäraste kolmnurkadega. Kuubi tahud on ruudud; dodekaeedril korrapärased viisnurgad.





On võimalik tõestada, et muid korrapäraseid hulktahukaid pole olemas. Seepärast oleks mõttetu võtta ette katse ehitada võrdsete kuusnurkadega piiratud korrapärane keha. Korrapärase kuusnurga nurgad on igaüks 120 kraadi. Kui tahetakse kolme erineva kuusnurga (näiteks papist) 3 nurka kokku seada ruuminurgaks, saadakse 360-kraadine ühendnurk. See aga annab tasase pinna ja



mitte ruuminurga. Ruuminurk moodustub vaid siis, kui tasanurkade summa on väiksem kui 360°. Analoogiliselt järeldub, et korrapärastest seitsenurkadest, kaheksanurkadest jne. pole võimalik koostada korrapäraseid hulktahukaid.

Iga korrapärase hulktahuka tippude[8] ja tahkude arv kokku on alati 2 võrra suurem kui servade arv. Seda kajastab Euleri (matemaatik *Euler* elas 1707—1783) teoreem ja see käib mitte ainult korrapäraste, vaid ka mittekorrapäraste polüeedrite (juhul, kui kõik tipud on suunatud väljapoole[9]) kohta.

Korrapäraseid hulktahukaid võime hõlpsasti valmistada papist. Pinnalaotused joonestame papile ja lõikame välja.

---

[8] Võib ka võtta ruuminurkade arvu, mis võrdub tippude arvuga. — *Tõlk.*
[9] Selliseid hulktahukaid nimetatakse kumerateks. — *Tõlk.*

FÜÜSIKA KATSEID.

Mündi läbitorkamine nõelaga.

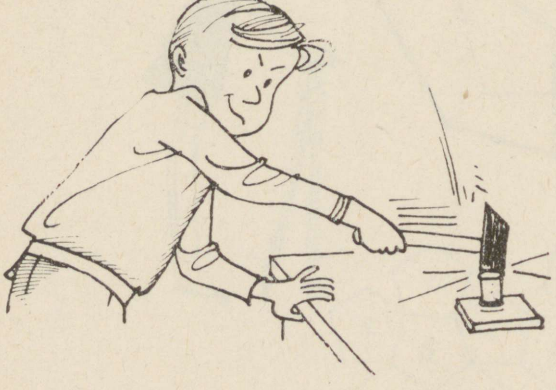
Terasnõel on alati kõvem kui mistahes mündi metall. Seega peaks olema võimalik nõela mündist läbi torgata. Kui nõelale haamriga peale lüüa, siis see paindub või murdub. Kui aga katset sooritada nii, et nõel haamrilöögil ei saaks painduda, siis on eesmärk lihtsalt saavutatav.

Selleks kasutame pudelikorki, mis on peaaegu niisama pikk kui õmblusnõel. Torkame nõela korgist läbi nii, et nõela teravik alt veidi paistab. Nõela selle osa, mis korgi pealt välja jääb, lõikame tangidega korgi lähedalt ära.

Mündi paneme pehmest puust lauale ning asetame sellele korgi (nõelateravikuga allapoole). Tugev löök haamriga korgile! Ja juba ongi nõel mündist läbi tunginud.

Kas pole see kummaline, et korgi abil saab ära hoida nõela paindumist? Kork on ju võrdlemisi pehme ja kergesti deformeeruv!

Siin on tegemist füüsika seadusega. Kui me haamriga ei löö, vaid ainult asetame selle korgile ning vajutame aeglaselt üha tugevamini, siis nõel paindub, hoolimata tema asendist korgi sees.



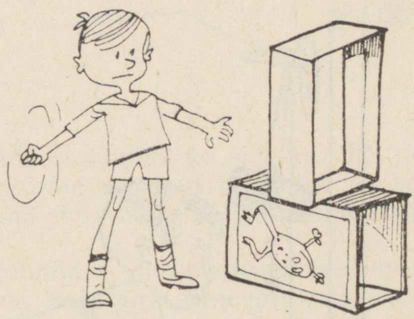
Katse õnnestumiseks on vaja, et löök oleks kiire. Nõela tungimisel münti mõjub talle takistusjõud ja aeglasel vajutamisel nõel paindub. Ka haamrilöögi puhul on see takistusjõud olemas, kuid nüüd ei põhjusta see deformatsiooni, sest löök on väga kiire.

Ükski keha ei allu jõu mõjule silmapilkselt, vaid teatud hilinemisega, jäädes sekundi murdosa vältel esialgsesse asendisse. Jõu mõjumiseks on alati hädavajalik teatav ajavahemik, ehkki väga lühike. Seepärast peab näiteks raudteerong alustama liikumist aeglaselt, vastasel korral võib juhtuda, et sidurid purunevad ja vagunid, järgides inertsiseadust, jäävad paigale.

Nõel ei saa oma asendi tõttu korgis painutavatele jõududele kohe alluda. Enne, kui need jõuavad mõju avaldada, on nõel juba mündist läbi tunginud.

Erakordne rusikahoop.

Asetame tikutoosi ümbrise serviti lauale. Tühi toos tuleb paigutada lühema küljega risti selle peale. Niisugusele sulgkergele «ehitisele» peab lööma jõuliselt rusikaga. Olgu antud ainult üks tingimus: löök peatatagu veidi enne, kui rusikas puudutab lauaplaati. Tahame ju tabada umbes 9 cm kõrgust karpehitist, mitte aga lauaplaati.



Mis juhtub, kui lööme siia peale rusikaga?

Pärast lööki lendavad mõlemad karbipooled suures kaares eemale. Neid vaadeldes imestate, et mõlemad on terved. Teistkordsel katsetamisel saame ikka samasuguse tulemuse.

Õhukesed laastpinnad, millest karp koosneb, on erakordselt elastsed. Enne kui löök jõuab mõjuda purustavalt, on karbi mõlemad osad tekkinud elastsusjõudude toimel juba eemale hüpanud.

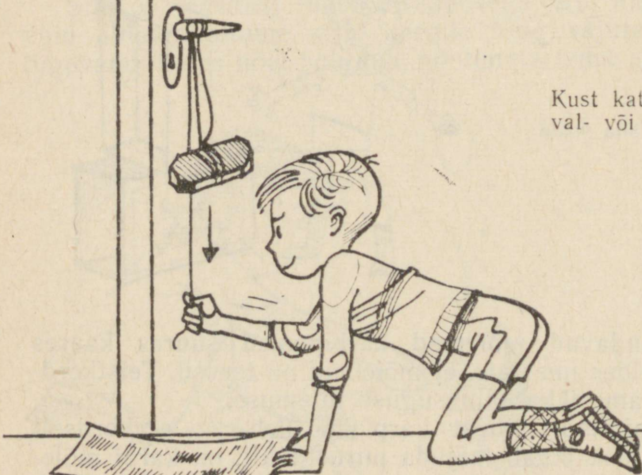
Kust niit katkeb?

Mingi koormus on riputatud niidi abil ukselingi külge. Kui niiti allapoole tõmmata, siis, kus ta katkeb — kas koormusest ülevalvõi allpool? Või on mõlemad võimalikud?

Katse juures peame vältima koormuse kukkumist käele. Seepärast tuleb koormus kinni siduda tugevama nööriga, mis ripub lõdvalt alla, samal ajal kui koormatud niit on pingul. Alumisele niidijupile mõjub ainult tõmbejõud, mida avaldame käe kaudu, ülemisele aga lisaks veel selle eseme kaal. Seega peaks niit ootuspäraselt katkema alati ülevalpool koormust.

Tõmbame järsku niidist. Kust ta katkeb? Kordame katset. Tõmbame üsna aeglaselt. Kust katkeb niit nüüd? Oleneb niisiis sellest, kas tõmmatakse aeglaselt (ühtlaselt tõmmet tugevdades) või järsult.

Aeglasel tõmbamisel mõjub alumisele niidile ainult käe kaudu avaldatav jõud, ülemisele täiendavalt veel koormuse kaal. Järelikult sel juhul katkeb ülemine niit. Seevastu järsul tõmbel katkeb alumine niit. Miks? Vastavalt inertsiseadusele, millele alluvad kõik kehad, püüab koormus jääda paigale. Enne kui tõmbejõud ülemisele niidile mõjuda jõuab, on alumine juba katkenud.



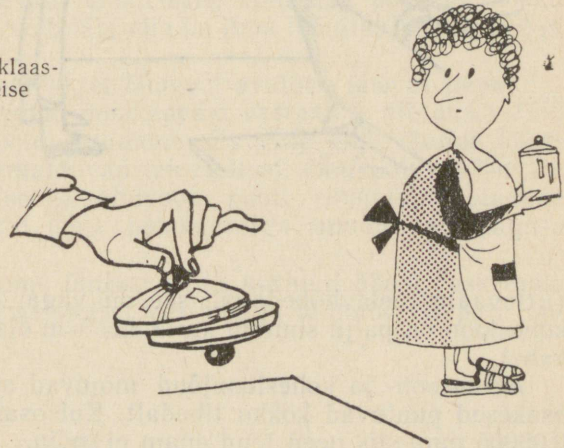
Kust katkeb niit? Briketist ülevalvõi allpool?

Imepärane kleepejõud.

Kui kaks siledaks lihvitud klaasplaati vastamisi vajutada, siis jäävad nad teineteise külge. Seda kahe keha vahel esinevat tõmbejõudu, mida nimetatakse adhesiooniks, kohtame kõigi poleeritud pindade juures.

Kui lõikame õuna pooleks ja vajutame mõlemad pooled kokku, siis jäävad need teineteise külge. Tänu adhesioonile jääb kriidikiri seinatahvlile ning pliiatsijäljed kirjutuspaberile.

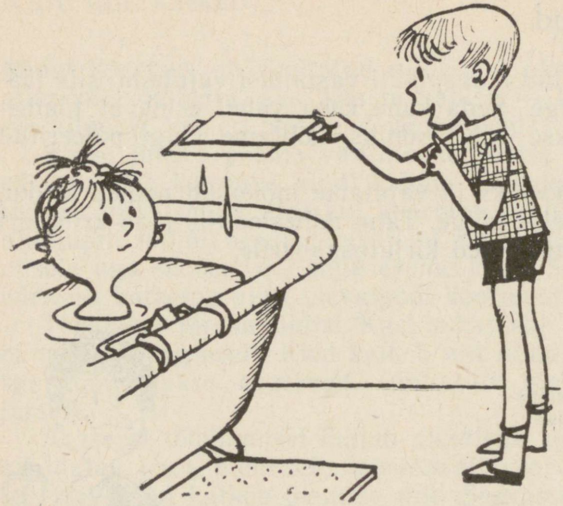
Kaks siledaks lihvitud klaaskaant «kleepuvad» teineteise külge.



Kahe keha vahel ilmnevad adhesioonjõud ka siis, kui üks neist on vedel või gaasiline. Pärast sõrme veest väljavõtmist on sõrm märg. Ka vihmapiiskade püsimine aknaraami küljes põhineb adhesioonil.

Kui asetame kaks klaasist fotoplaati pildipooltega teineteisele, jäävad nad ainult nõrgalt kokku. Neid aga eelnevalt vette kastes kleepub alumine kõvasti ülemisele. Ühelt poolt esineb siin adhesioon õhukese veekihi ning ülemise ja alumise plaadi vahel, teiselt poolt üksikute veeosakeste vastastikune tõmbejõud. Viimast nimetatakse ka kohesiooniks. Vihmapiisa üksikud osakesed püsivad koos kohesioonjõu toimel. Kukub aga piisake tänavasillutisele, siis pole vee kohesioon küllaldane piisa kooshoidmiseks.

Eriti suur on elavhõbeda kohesioon. Kukkudes puruneb tilgake elavhõbedat paljudeks kuulikesteks, mis veerevad kiiresti laiali.



Kaks vette kastetud klaasplaati jäävad tugevasti kokku.

(Ettevaatust elavhõbedaga, see on väga mürgine!) Elavhõbeda kohesioon on palju suurem kui adhesioon elavhõbeda ja lauaplaadi vahel.

Adhesioon- ja kohesioonjõud mõjuvad ainult siis, kui üksikud osakesed puutuvad kokku tihedalt. Kui osakeste kaugused on üle 0,00005 mm, siis need jõud enam ei mõju.

Föön, lauatennisepall ja postkaardid.

Föön on elektriga käivitatav õhudušš, mida võib lülitada «soojale» ja «külmale» ning kasutada näiteks juuste kuivatamiseks. Föön tähendab ka sooja ja kuiva piki orgu alla puhuvat tuult.

Lülitame fööni «külmale». Sellest hoovab välja tugev õhuvool. Suuname fööni ülespoole ja asetame toru avause kohale lauatennisepalli. Pall hõljub umbes 2 cm kõrgusel vabalt õhuvoolus seni, kuni föön ei ole välja lülitatud.

Siin mõjub jõud, mis hoiab palli õhuvoolus. Sama katset võib teha ka täispuhutud õhupalliga. Kui juhime õhuvoolu üles mitte vertikaalselt, vaid kaldu, siis tuleb õhupall kaasa ja hõljub jälle õhuvoolu sees. Fööni abil võime toas vabalt hõljuvat õhupalli juhtida. Ta nagu kleepub õhuvoolusse.

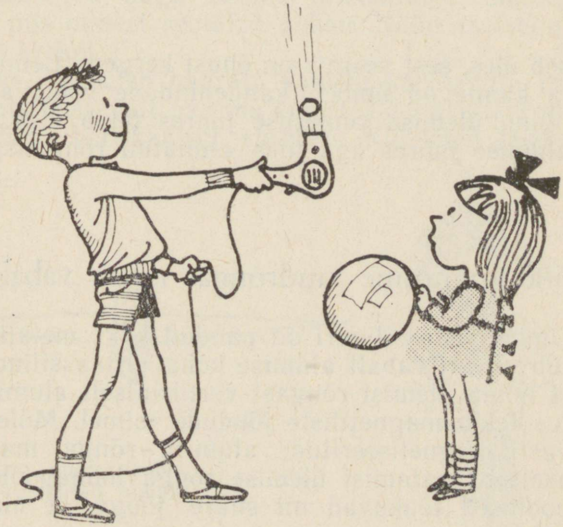
Asetame mõned paksud raamatud üksteise peale ning pistame kahe ülemise raamatu vahele paari vardaid nii, et need jääksid sealt välja paistma. Vardad asetsegu teineteisega paralleelselt, 5 cm kaugusel. Kummalegi vardale riputame kumeraks painutatud postkaardi, nagu on näidatud joonisel.

Juhtides õhujoa ülalt postkaartide vahele, toimub jälle ootamatu nähtus. Sel hetkel, kui kumerdatud kaardid peaksid ootuspäraselt õhuvoolu poolt laiali surutama, juhtub hoopis vastupidine nähtus. Kaardid lähenevad teineteisele, kuni nad peaaegu kokku puutuvad. (Seda katset võib läbi viia ka ilma föönita, lihtsalt suuga puhumise teel).

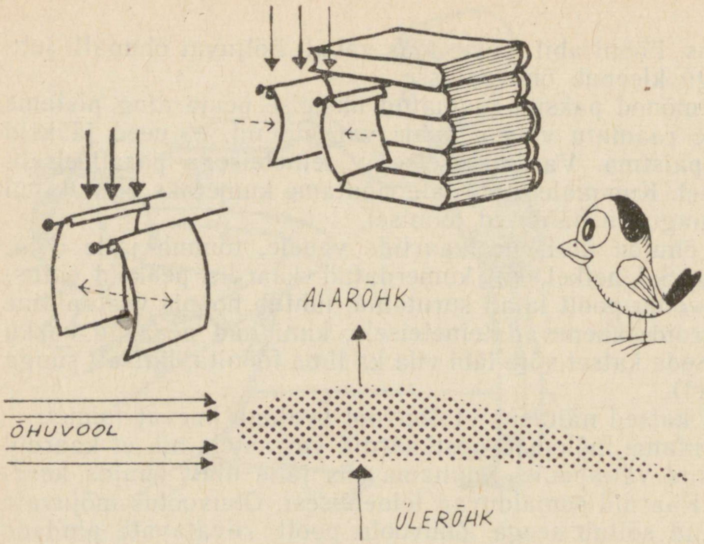
Eelnevad katsed näitasid, et õhuvool avaldab imevat toimet.

Nüüd riputame mõlemad postkaardid varrastele nii, et kaardid on kumerdatud väljapoole. Suuname siis jälle ülalt õhujoa kaartide vahele. Kaardid eemalduvad teineteisest. Õhuvoolus mõjuvate jõudude suund sõltub seega õhuvoolu poolt riivatavate pindade kumerusest. Katse ainult ühe postkaardiga annab samasuguse tulemuse.

Nende katsetega oleme ühtlasi välja uurinud õhust raskemate õhusõidukite lendamise saladuse. Vesinikuga täidetud õhupall tõu-



Lauatennisepall hõljub fööni poolt tekitatud õhuvoolus.

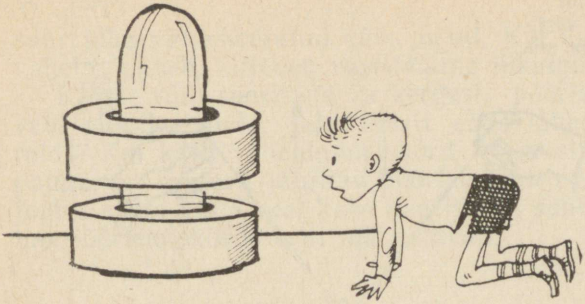


Kahele vardale riputatud sissepoole kumerdatud postkaarte ei suruta fööni õhuvoolu poolt laiali, vaid kokku.
Väljapoole kumerdatud kaardid surutakse õhuvoolu poolt laiali.
Jõud, mis lennukit tõstavad ja kannavad.

seb üles, sest vesinik on õhust kergem. Lennukit seevastu tõstavad ja kannavad ümber kandepindade voolavad õhumassid. Kandepinna ülemise kumeruse juures tekib üles suunatud imemisjõud, alumise juures aga üles suunatud rõhumisjõud.

500-grammine raudrõngas ripub vabalt õhus.

Ümber klaassilindri on pandud kaks metallrõngast. Ülemine hõljub täiesti vabalt alumise kohal. Klaassilinder on üksnes selleks, et hoida ülemist rõngast vertikaalselt alumise kohal. Selline nähtus tekib magnetiliste jõudude toimel. Mõlemad rõngad on tugevasti magnetiseeritud; alumise rõnga magnetiline lõunapoolus asetseb vastamisi ülemise rõnga lõunapoolusega. Samanimelised poolused tõukuvad nii suure jõuga, et ülemine rõngas hõljub vabalt.



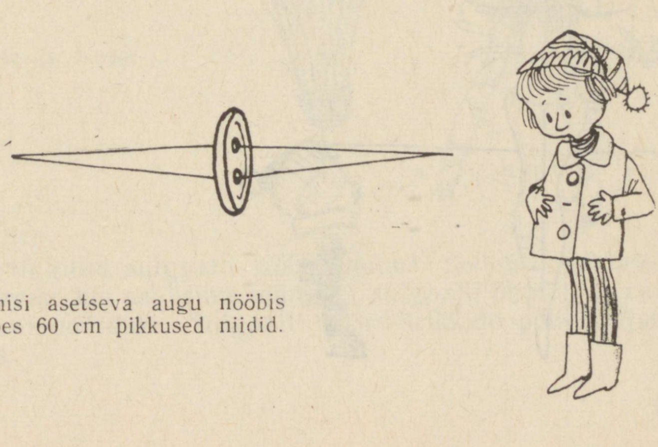
Kaks magnetiseeritud metallrõngast, millest ülemine hõljub vabalt õhus. Klaastoru on vajalik rõngaste kohakuti hoidmiseks.

Püsivmagnetid koosnevad enamasti rauasulamitest (näiteks kroomiga, alumiiniumiga, nikliga) või koobalt-nikkel-alumiiniumisulamist.

Nööp vurrina.

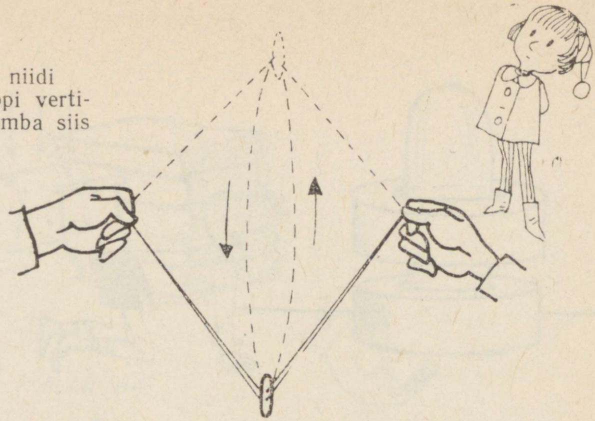
Läbi kahe vastamisi asetseva augu nööbis tõmmatakse umbes 60 cm pikkused niidid, mis otstest seotakse kokku. Nööp asetsegu ligikaudu mõlema niidi keskel.

Kahekordse niidi üks ots tuleb haarata vasaku käe pöidla ja nimetissõrmega, teine ots vastavalt parema käega. Lõdvaks lastud niidiga keerutatakse nööpi vertikaalsel ringteel. Kui käed laiali



Läbi kahe vastamisi asetseva augu nööbis on tõmmatud umbes 60 cm pikkused niidid.

Keeruta lõdvaks lastud niidi keskkohas rippuvat nööpi vertikaalsel ringteel ning tõmba siis niit pingule.

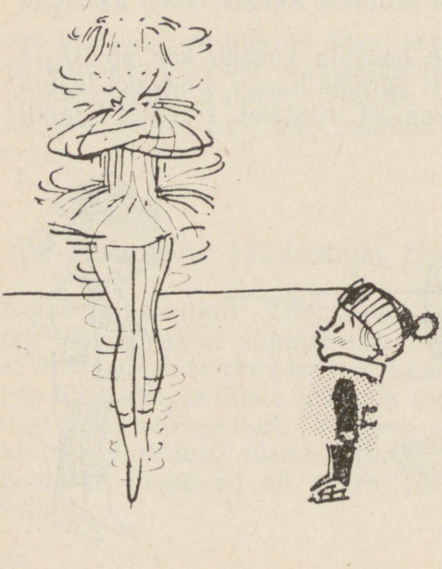


tõmmata ja seega niiti pingutada, saavutab nööp väga suure pöörete arvu (50 pööret sekundis). Niidi kiirel pöörlemisel on näha kaksikkoonust, mis tugevamal pingutamisel muutub üha teravamaks.

Niidid kerivad end lahti ja mähkuvad siis jälle teineteise peale, kusjuures nööp pöörleb ülikiiresti. Nii kordub see igal tõmbel.

Kuidas seletada, et nööp saavutab nii suure pöörete arvu? Nööbi lingutamisel oleme andnud talle teatud kiiruse, mis säilib ka ringtee lühenemisel. Et ringtee raadius muutub väiksemaks, peab pöörete arv sekundis vastavalt suurenema.

Ikka kiiremini ja kiiremini kihutab uisutaja suuri ringe tehes üle sätendava jää. Äkki kasutab ta osavalt ära kiire ringliikumise hoo ja teeb paigalpöördeid — piruette. Pöörlemiskiirus on väga



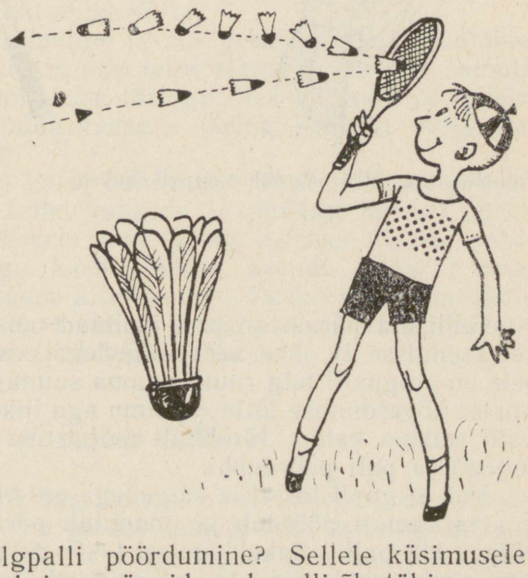
suur juba väljasirutatud käte puhul. Kui aga uisutaja käsivarred vaheliti paneb, kiireneb vurritaoline liikumine veelgi.

Katset võib sooritada ka kergesti pöörleva pingiga. Tarvitseb vaid pingile istuda, jalad hästi enda lähedale tõmmata ja pöörelda. Kui käed vaheldumisi kord välja sirutada, kord ristamisi panna, on selgesti jälgitav pöörlemiskiiruse muutumine. Kui seejuures võtta kätte veel kaks hantlit või suuremat kaaluvihti, muutub pöörlemiskiirus eriti märgatavalt.

Sulgpall teeb trikke.

Löögil puudutab sulgpall reketit poolkerakujulise otsikuga. Pärast tagasilööki lendab algul ees sulgpalli sulestik. Ligi poolemeetrise lennutee järel pall aga äkki pöördub.

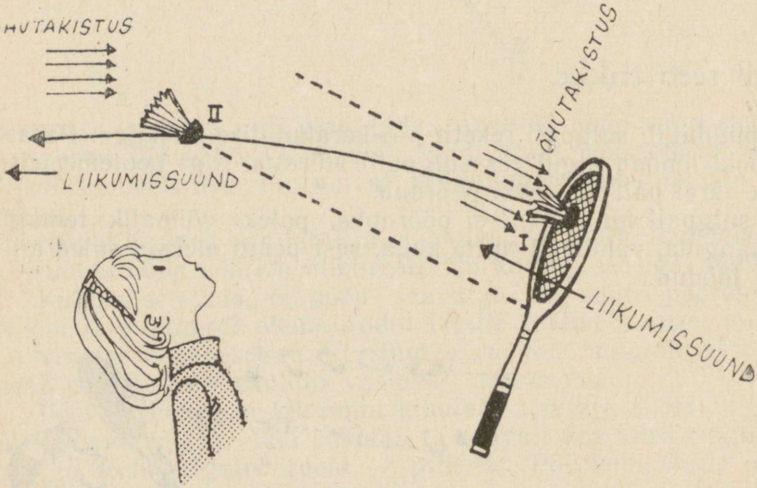
Kui sulgpall igal löögil ei pöörduks, poleks võimalik temaga üldse mängida, vähemalt mitte kaua, sest peagi oleksid suled küljest ära löödud.



Sulgpalli lennutee ja ümberpöördumine.

Millest on tingitud sulgpalli pöördumine? Sellele küsimusele vastaksime kiiresti, kui saaksime mängida sulgpalli õhutühjas ruumis, kus pall ei pöörduks. Sulgpalli pöördetrikkide põhjustajaks on õhutakistus.

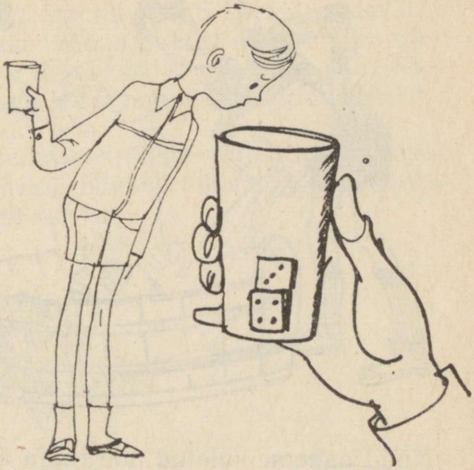
Joonisel on näha osa õhuteest pärast tagasilööki. I on sulgpalli asend, kui ta langeb reketi keelestule risti ja kohe tagasi paisatakse. Pärast lööki asetsevad suled algul liikumissuunas, eespool. Õhutakistus mõjub liikumissuunale vastu. Veidi aega pärast äralööki on õhutakistus suunatud sulgpalli peaaegu koonusekujulise üldkorpuse teljega paralleelselt ja pidurdab palli liikumist. Esialgu pole pöördeks mingit põhjust.



Õhutakistuse tõttu pöördub sulgpall ümber.

Veidi aja pärast on pall jõudnud oma kõverjoonelisel liikumisel asendisse II, ikka veel sulgedega ees. Vastavalt inertsiseadusele on sulgpalli telg ruumis sama suunaga nagu asendis I. Liikumistee kõverdumise tõttu ei toimu aga liikumine enam telje suunas, vaid sellega kaldu. Järelikult mõjub ka õhutakistus nüüd kaldu teljega ja pall pöördubki.

Kui sulgpall lastakse sulgedega ees vertikaalselt alla kukkuda, siis ta samuti pöördub ja puudutab põrandat kummist otsikuga. Niipea kui palli allakukkumisel tekib palli ja langemissuuna vahel tühiseimgi kaldenurk, ja selliseid väikesi kõikumisi esineb ikka, segab vahele õhutakistus ning pöörab sulgedega varustatud palli nagu tuulelipu tuule suunas.



Kaks täringut, üks peeker.

Võtame kätte täringupeekri ja kaks täringut, nagu on näha joonisel. Esmalt peab viskama peekrisse ülemise täringu, alles seejärel alumise. Vasakut kätt ei tohi abiks võtta.

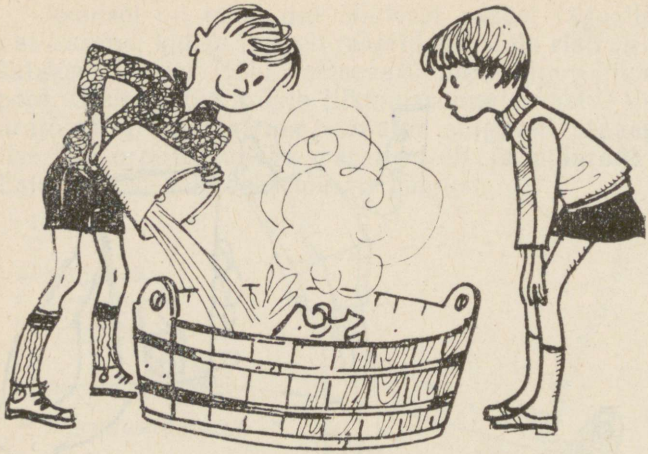
Ülemise täringu ülesviskamine ja siis peekriga kinnipüüdmine ei tee raskusi. Kui nüüd visata üles teine täring, võib selle samuti kinni püüda. Momendil, mil teise täringu üles viskame ja sellele tähelepanu koondame, lendab esimene täring peekrist välja. Ja mäng ongi ebaõnnestunud.

Kuidas aga toimida, et katse õnnestuks? Teist täringut ei tohi üles visata, vaid laseme sellel kukkuda ja püüame kiiresti peekriga kinni. Samal ajal peekris olev täring hetkeks tõuseb, vaba langemise tõttu võtab aga k o h e endise asendi, kuna ta oma massi inertsi tõttu ei tee kaasa allaliikumist. Peekri allapoole liikumine peab olema hetkeline, et täring ei tõuseks üle ääre. Pärast mõningat harjutamist tuleb trikk hästi välja.

Plekk-kanister[10], mille purustab õhk.

Valame plekknõusse 1—2 klaasi vett ja paneme selle i l m a sulgurita gaasipliidile. Veidi aja pärast hakkab vesi kanistris keema. Kui vesi on keenud umbes ühe minuti, sulgeme gaasipliidi, võtame nõu ning sulgeme selle kiiresti. Sulgur tuleb kõvasti kinni keerata!

[10] Kanister — tihedasti suletav plekknõu. — *Tõlk.*



Nüüd paneme suletud nõu tühja ämbrisse või vanni, mille täidame külma veega.

Silmapilkselt ragiseb nõu kõigist liitekohtadest ja ta surutakse nähtamatute jõudude poolt kokku. Kuidas oli see võimalik? Kui vesi kees, tekkis veeaur, mis tõrjus nõust õhu välja. Seega leidus suletud kanistris ainult vett ja veeauru. Külma veega ülevalamisel tihenes suur osa veeaurust uuesti veeks. Seetõttu tekkis kanistris õhutühi ruum, samal ajal kui väljastpoolt surus õhurõhk plekkseintele endise tugevusega. Kanistri näiteks 2000 cm^2 suurusele välispinnale mõjub siin õhurõhk välkkiirelt jõuga, mis on võrdne raskusjõuga 2000 kG.

Magdeburgi poolkerad,

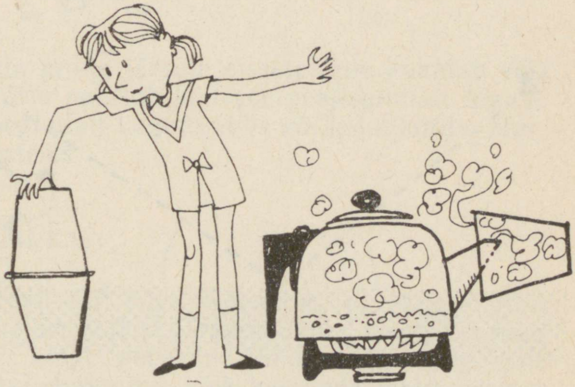
Magdeburgi linnapea *Otto von Guericke* demonstreeris aastal 1654 Regensburgi riigipäeval oma kuulsat katset poolkeradega [11]. Nendest õhukindlalt suletavatest vasest poolkeradest pumbati õhupumbaga õhk välja. Kaheksa hobust pidid kummaltki poolt tugevasti pingutama, et poolkerasid lahti rebida. Selle ilmeka katsega näidati, et õhk võib avaldada tohutut rõhku.

Niisugust õhurõhu mõju saab demonstreerida ka kahe võimalikult sileda äärega teeklaasi abil. Ühele klaasidest tuleb asetada

[11] Hiljem hakati nimetama neid poolkerasid Magdeburgi linna järgi Magdeburgi poolkeradeks. — *Tõlk.*

paksemast kuivatuspaberist väljalõigatud ning veega niisutatud tihendusrõngas. Sobib ka kummirõngas. Mõlemasse klaasi lastakse kiiresti teekannu torust auru (vesi kannus peab keema). Seejärel surutakse klaasid avaustpidi kokku. Mõne minuti pärast jääb ülemine klaas alumise külge kinni nii tugevasti, et neid võib koos üles tõsta. Hästi suletava tihendusrõnga korral on esialgu klaase teineteisest raske lahutada.

Veeaur tõrjus klaasidest suurema osa õhust välja. Jahenemisel veeaur kondenseerub, klaasides tekib õhuhõrendus ning välisrõhk surub klaasid tugevasti teineteise vastu.



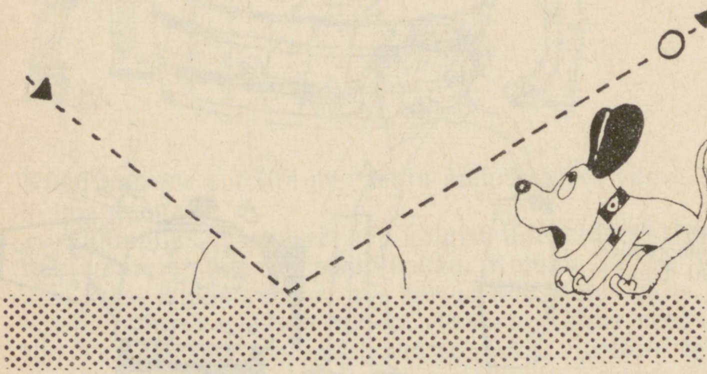
Kaks tühja klaasi, milles on tekkinud õhuhõrendus, jäävad tugevasti teineteise külge.

Ettevaatust katsetamisel veeauruga, sest hooletu käsitsemise puhul võib end põletada!

Näiteks puu- ja aedvilja konserveerimisel peavad keetmisel hävima käärimist ja hallitust tekitavad mikroorganismid. Kuna atmosfääris leidub selliseid mikroorganisme alati, siis hoolitsetagu, et hoidised pärast keetmist ei puutuks õhuga kokku. Keetmisel tekkiv veeaur tõrjub õhu purgist välja, nii et keedise kohal leidub ainult veeauru. Kummirõnga ja kaanega suletud purgis veeaur jahenemisel enamikus kondenseerub ning purgis tekib õhutühi ruum, milles leidub ainult veidi veeauru. Täpselt nii nagu meie katse juures! Purgi kaas ja purk ise on siis teataval määral nagu kaheks Magdeburgi poolkeraks. Seepärast nõuab kaane avamine küllalt suurt jõupingutust. Kui see aga õnnestub hõlpsasti, teadku perenaine, et tihend ei täida oma ülesannet, õhk on purki sisse tunginud ning hoidis pole riknemise eest kaitstud.

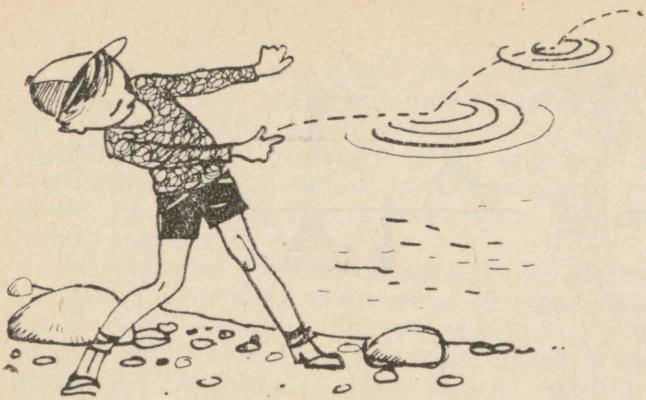
Lutsukivi.

Lüües kivi vastu kõnnitee serva, põrkab ta sealt tagasi. See liikumine toimub geomeetrilise reeglipärasusega. Isegi selle mängu juures kehtivad loodusseadused. On selgesti näha, et nurk, mille all kivi teeservalt tagasi paiskub, on võrdne nurgaga, mille all ta sinna lööd. See seadus kehtib põrke kohta paigalseisvalt seinalt. Siin on kerge näha analoogiat valguskiire peegeldumisseadusega.



Kui kivi visatakse vastu kõnnitee serva, siis põrkab ta sellelt tagasi ja liigub edasi reflektsiooniseaduse järgi.

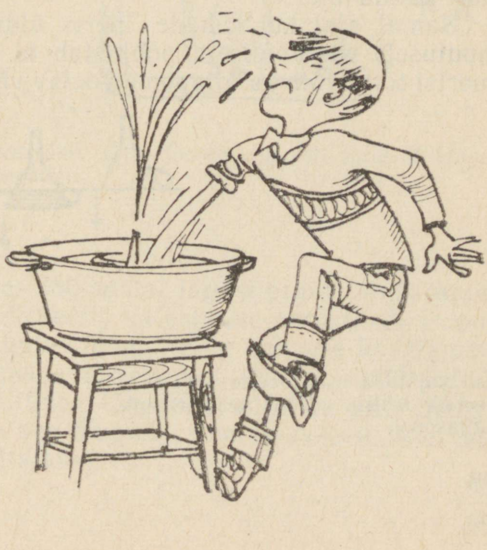
Kui visata kivi kaldu vastu tiigi veepinda, ei põrka ta sealt tagasi, vaid tungib vette. Teatud tingimustel aga põrkab kivi tagasi ka veepinnalt. Kui lapik kivi tabab veepinda kitsa äärega, siis tungib ta kohe vette nagu iga teinegi ümar kivi. «Lutsu visates» peab aga silmas pidama, et lapik kivi tabaks vett kogu oma laia tahuga. Selleks tuleb visata kivi küllalt madalalt ning veepinnaga peaaegu horisontaalselt. Peamine on panna ta võimalikult jõuliselt ümber vertikaaltelje pöörlema. Selleks haaratakse rõhtsalt hoitav kivi parema käe pöidla ning nimetissõrmega äärelt, mis on võimalikult kaugel kivi raskuskeskmest, ja visatakse ta jõuliselt horisontaalsuunas kaldalt eemale. Pöörleva liikumise tõttu käitub kivi nagu vurr ja säilitab visketeekonnal oma pöörlemistelje suuna ning seega ka horisontaalasendi. Kivi tabab veepinda



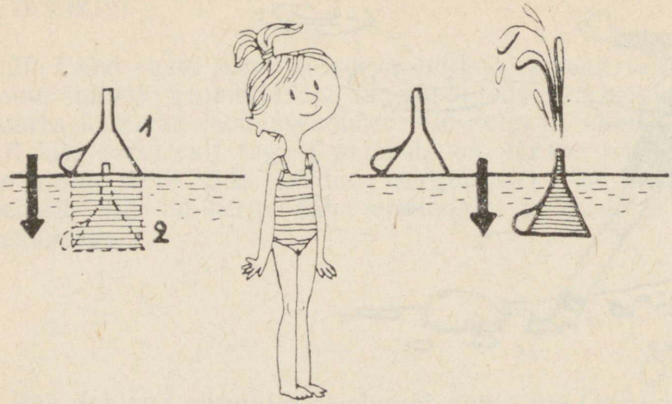
laia alumise tahuga. Laia pinna järsule sissetungile avaldab vesi tugevat vastumõju. Seetõttu paiskub kivi vee pealispinnalt tagasi. Mõnikord kivi põrkab veepinnalt koguni kaks või kolm korda. Harjutamine teeb siingi meistriks.

Tähelepanuväärne purskkaev.

Kui vajutada lehter kiiresti nii sügavale vette, et välja ulatub ainult toru suue, siis purskub sellest järsult umbes meetrikõrgune veejuga. Katse õnnestub kõige paremini lühikese ja mitte eriti kitsa väljavoolutoru korral. Basseinis võib kasutada lehtri asemel sellise ootamatu veejoa tekitamiseks ka poolsuletud rusikat.



Kui lehter kiiresti vee alla vajutada, purskub väljavoolutorust vett umbes 1 m kõrgusele.

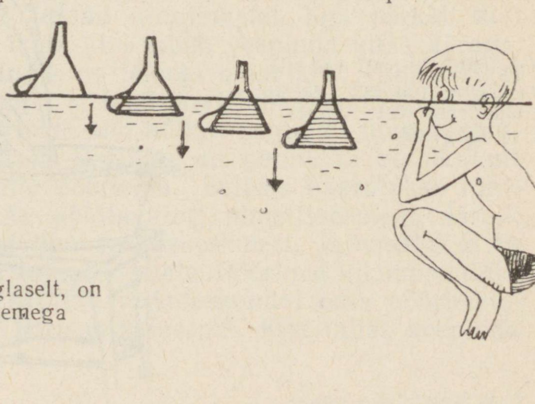


Lehtri kiirel sissevajutamisel tungib inertsiseaduse tõttu suurem osa veehulgast (tumedalt viirutatud) lehtrisse ja purskub sealt välja.

Kuidas seda nähtust seletada? Kui lehter lasta vette aeglaselt, saavutab veetase lehtris samasuguse kõrguse nagu väljaspool lehtrit.

Kui aga lehter vajutada vette kiiresti, annab end tunda vee inertsus. Joonisel tumedalt viirutatud veesammas jääb inertsi tõttu suuremas osas paigale. Seetõttu tunduv osa sellest veesambast tungib kiiresti allaliikuvasse lehtrisse ja vett tuleb isegi rohkem kui lehter suudab mahutada. Ülemäärane vesi purskub väljavoolutoru kaudu üles.

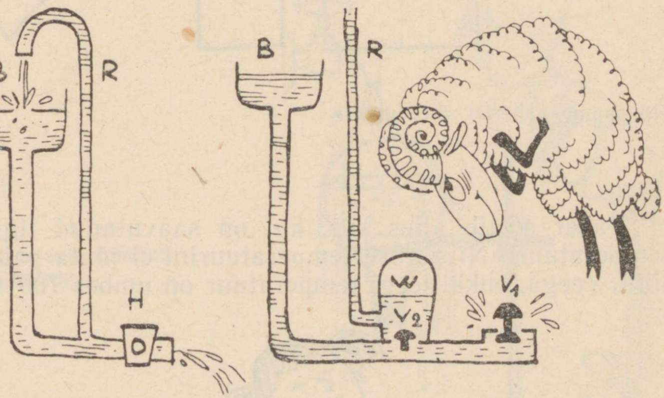
Samal ajal kui kehade inerts üldiselt mõjub igale liikumise muutusele vastupidiselt, põhjustab ta siin veejoa ülespurskumise. Inertsi tõttu võib ka allapoole voolav vesi osaliselt ülespoole tõusta.



Kui vajutada lehter vette aeglaselt, on veetase lehtris võrdne veetasemega väljaspool.

Vesi voolab paagist *B* alla. Kui suletakse järsku kraan *H*, tõuseb osa veest toru *R* kaudu tunduvalt kõrgemale kui veepind paagis *B*, kuna allapoole voolav vesi avatud kraani *H* juures omab kineetilist energiat. Kraani *H* järsul sulgemisel mõjub liikuva vee inerts vastu selle liikumise pidurdamisele. Liikuva vee energia sunnib tõusma väikese osa veest torus *R* palju kõrgemale vee nivoost mahutis *B*.

Parempoolsel joonisel on automaatne seadis, mille abil võib tõsta osa allavoolavast veest veelgi kõrgemale (kuni 100 m). Mahutist *B* voolab vesi välja läbi avatud ventiili V_1. Niipea kui see vesi on saavutanud teatud kindla kiiruse, tõstab ta üles ventiili V_1 sulgemisseibi (alumise) ja suleb sellega ventiili. Pidurdatud vee tõuke tõttu avaneb ventiil V_2 ja vesi tungib õhureservuaari *W*. Siin leiduv õhk surutakse kokku ning vesi torus *R* tõstetakse ülespoole. Kui tõuge on toimunud, sulgub automaatselt ventiil V_2 ning avaneb ventiil V_1. Taas voolab vesi allapoole, järgneb uus tõuge jne.

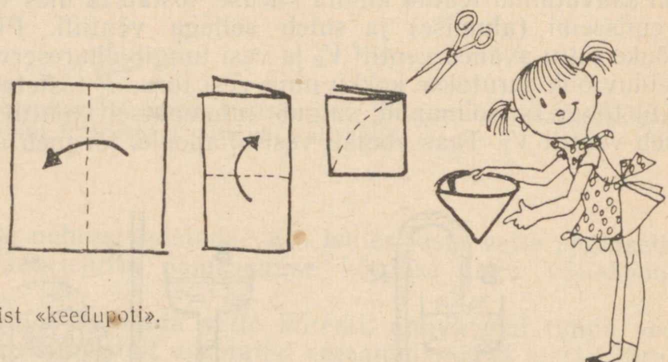


Kraani *H* järsul sulgemisel tekkiva tõuke tõttu tõuseb osa vett torus *R* kõrgemale veetasemest, mis on äravoolupaagis.

Selle seadise leiutas umbes 180 aastat tagasi prantslane *Joseph Michel Montgolfier*, kes konstrueeris ka esimese aerostaadi (mongolfjäär), mis oli täidetud kuuma õhuga, ning esimese kasutamiskõlbliku langevarju. Ta nimetas kirjeldatud seadise «hüdrauliliseks oinaks». Sõna «hüdrauliline» tähendab vedeliku abil liikuv. Et aparatuur põhineb liikuva vee tõugetel, nimetatakse seda «vesioinaks» (varem ka tõuketekitajaks).

Vesi keeb pabertorbikus.

Väikese torbiku saab valmistada hõlpsasti umbes 14-sentimeetrise küljepikkusega ruudukujulisest paberist. Voldime selle paremalt vasakule, alt üles, ümardame kaarekujuliselt ning lõpuks kumerdame lahti. Siis asetame veega täidetud torbiku traatrõngasse ja paneme küünlaleegi kohale. Peagi hakkab vesi keema. Paber muutub küll tahmaseks ja isegi kõrbenuks, kuid ei hakka põletama, sest teda jahutab vesi. Isegi vee keemisel (100° C) ei saavuta paber süttimistemperatuuri, sest ta on niiskunud.



Nii saame paberist «keedupoti».

Paber süttib alles siis, kui on saavutanud ligikaudu 300°-se temperatuuri. Niisuguse temperatuurini ei jõuta paberi jahutamise tõttu veega, ehkki leegi temperatuur on umbes 700° C.

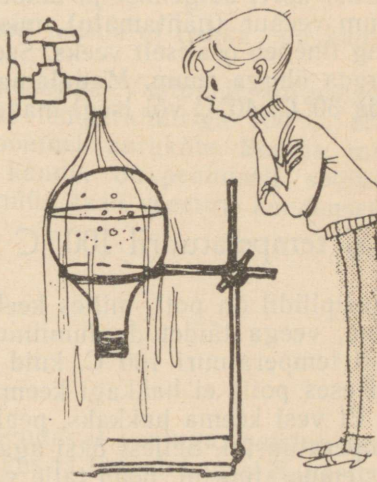
Vesi pabertorbikus keeb.

Sellel katsel määrib paberi alati tahmaseks küünlaleek, milles on väikesi hõõguvaid tahmaosakesi. Sattudes jahutatud paberile nad kustuvad ja sadestuvad seal.

Osaliselt paber ka kõrbeb. Seejuures märkame, et paberi üksikute osade temperatuur võib olla umbes 200° C, mil algab ka paberi söestumine. Ühtlasi toimuvad keerulised keemilised muutused.

Keedame veekraani all.

Selle katse puhul väidetagu, et keeta võib ka ilma kuumuseta. Statiiviga klaaskolb, mis on altpoolt suletud korgiga ja täidetud umbes poolestsaadik veega, paigutatakse veekraani alla. Niipea kui kraan lahti keerata, hakkab vesi klaasnõus keema. Kui kraan sulgeda, lakkab ka keemine. Ja kui see taas avada, keeb vesi edasi.



Niipea kui kraan avada, hakkab vesi klaaskolvis keema.

Vee keemistemperatuuriks loetakse üldiselt 100° C. Kuid siin on ka teatud kitsendused. Keemistemperatuur sõltub nimelt õhurõhust. Mida kõrgemal paikneb maakoht meretasemest, seda väiksem on õhurõhk ja seda madalamal temperatuuril vesi keeb. Zugspitzel (2964 m) näiteks keeb vesi 90° C, Mont Blanc'il (4807 m) 84° C ja Mount Everestil (8848 m) 70° C juures.

Kui vesi on kõrgema rõhu all, näiteks aurukatlas, siis on keemistemperatuur kõrgem kui 100° C.

Rõhk atmosfäärides (at)	Vee keemistemperatuur
1 at	100° C
2 at	121° C
5 at	152° C
15 at	194° C
168 at	350° C

Käesolev katse valmistatakse ette järgmiselt: õhukesest kuumakindlast klaasist keedukolb tuleb täita umbes poolestsaadik veega, kaitsta see asbesti sisaldava traatvõrega ning kuumutada. Kui vesi ägedalt keeb, võta kolb tulelt (kasuta pajalappe!), sule tihedasti korgiga ning pööra kummuli. Keemine lakkab kohe. Sellega on kolb ette valmistatud eksperimendiks kraani all.

Eelnenud keemisel tõrjus tekkinud veeaur õhu kolvist välja. Pärast kolvi sulgemist ja ümberpööramist on vedeliku kohal vaid kuum veeaur (nähtamatu), mis pärast veekraani avamist jahtub ning tiheneb osaliselt veeks. Seetõttu tekib vedeliku kohal alarõhk, hõreda õhuga ruum. Madalama rõhu tõttu keeb vesi kolvis nüüd juba 60° C, 40° C või isegi madalama temperatuuri puhul.

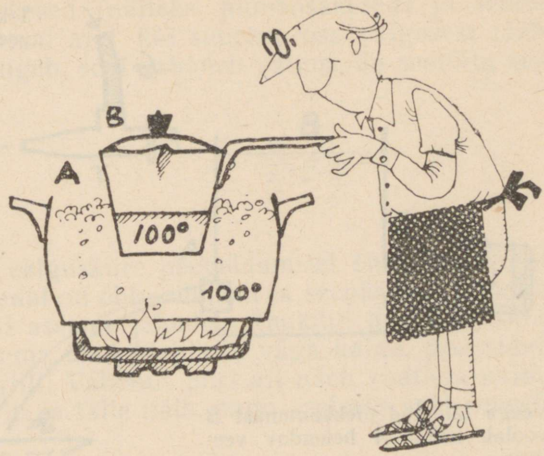
Vesi temperatuuril 100° C ei kee.

Gaasipliidil on pott, milles keeb vesi. Riputame sinna sisse väiksema, veega täidetud alumiiniumpoti. Ka see vesi saavutab kiiresti temperatuuri 100° C, kuid vee keemist ootame asjatult. Vesi väikeses potis ei hakkagi keema, kuigi ta temperatuur on 100° C.

Et vesi keema hakkaks, peab seda esmalt kuumutama keemistemperatuurini. Sellest üksi aga ei piisa. Kui vesi on jõudnud keemistemperatuurini, peab talle veel pidevalt soojust juurde andma. Seeläbi aga vee temperatuur enam ei tõuse, vaid vesi hakkab aurustuma. 1 kg vee aurustamiseks 100° C juures on vaja 540 kilokalorit soojust. Veele kastrulis *A* tuleb pärast kuumutamist 100°-ni täiendavalt soojust juurde anda. Seetõttu ta keebki. Väikesele potile *B* mõjub aga ainult teda väljastpoolt ümbritsev vesi temperatuuriga 100° C ja seepärast ei saa ka vesi potis *B* keeda.

Kui kohvi soojendatakse vahetult gaasileegil, keeduplaadil, ahjus või keedupulgaga, kaotab ta oma aroomi. See on aga välditav, kui riputada kohvikann soojendamiseks keeva veega potti, kus

Vesi kastrulis *A* keeb temperatuuril 100° C; veel potis *B* on samuti temperatuur 100° C, kuid ta ei kee.



kohv kuumeneb hästi kuni 100° C, ent keema ei hakka ega kaota seepärast ka aroomi.

Vee aurustamiseks on seega vaja soojust. Vastupidi, kui veeaur temperatuuriga 100° C tiheneb veeks temperatuuriga 100° C, siis vabaneb soojust. Sellel printsiibil põhineb auruküte. Soojus, mis juhitakse tuppa auruküttesüsteemi kaudu, on peamiselt soojus, mis kulutati vee aurustamiseks ja nüüd taas veeauru kondenseerumisel vabaneb.

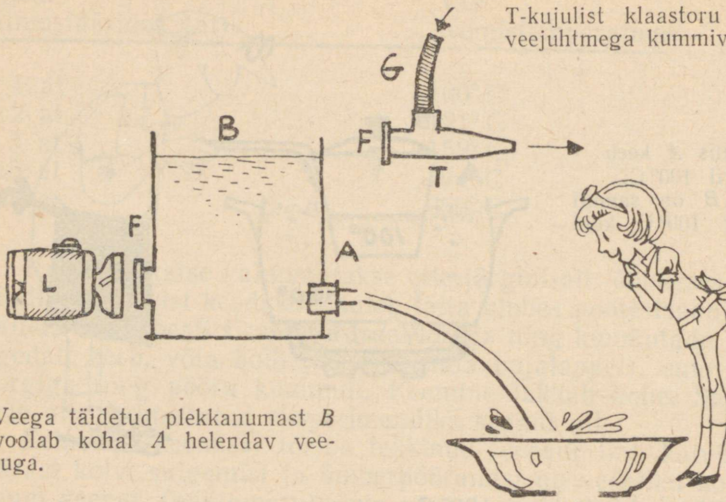
Helendav veejuga.

Kui pimendatud toas näidatakse helendavat veejuga, paistab see valgelt hõõguva sulametallina. Seal, kus ta langeb kaussi *S*, näeme valguslaiku. Kui laseme joa purskuda käele, siis joaga kokkupuutunud koht käel helendab intensiivselt. Juga ja valgus on külmad. Helendav vulisev veejuga pimedas toas pakub meeldivat vaatepilti.

Plekkanum *B* on täidetud veega. Kohal *A* asub kork, millesse on kinnitatud klaasist väljavoolutoru. Kohal *F* anuma seinas on väike kettakujuline klaasiga kaetud aken. Taskulambi *L* valgus on kinni kaetud musta riidega.

Kellel on osavad käed ja püsivust, võib demonstratsiooniks vajaliku plekknõu näiteks suurest konservipurgist ise valmistada. Veele võib lisada mõne tilga piima, mis tõstab joa heledust veelgi.

T-kujulist klaastoru ühendab veejuhtmega kummivoolik — *G*.

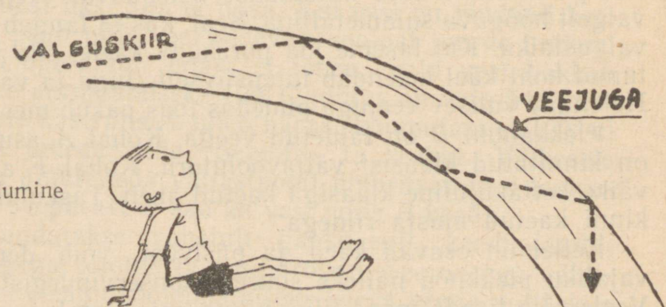


Veega täidetud plekkanumast *B* voolab kohal *A* helendav veejuga.

Kui panna akna *F* ette värviline klaas, hakkab juga vastavas värvis helendama.

Kui tahetakse näha «helendavat purskkaevu» pikemat aega töötamas, peab säilitama anuma veetaseme. Anuma asemel võib kasutada ka *T*-kujulist klaasi, mille ühte otsa on kinnitatud klaasaken *F*. *T*-kujuline klaas ühendatakse veejuhtmega kummivooliku abil. Vee sisse- ja väljavool on näidatud joonisel nooltega.

Nähtus põhineb asjaolul, et valguskiired langevad siin veejoa seinale nii kaldu, et nad ei saa väljuda veest õhku, vaid pidevalt peegelduvad joa sees.

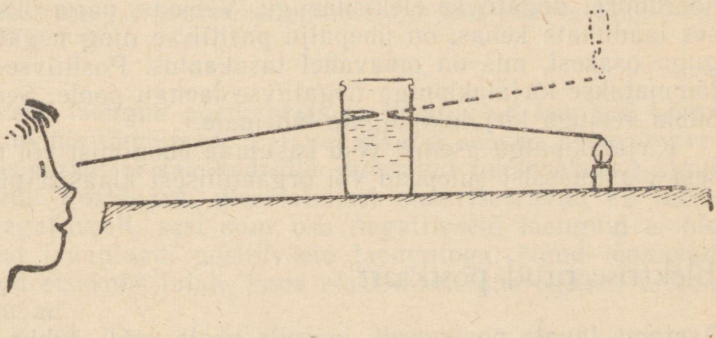


Valguskiire peegeldumine veejoa seinalt.

Ainult hõljuvad osakesed (näiteks piimaosakesed) ja seinte osakesed helendavad, samal ajal kui suurem osa valgusest jääb joasse. Kuhu veejuga langeb, seal vabaneb valgus. Ja seetõttu see koht helendabki.

Fatamorgaana.

Fatamorgaana põhineb valguskiire peegeldumisel õhus. Päikesest kiiritatud kõrbeliiva lähedal on õhk kuumem ja seepärast väiksema tihedusega kui kõrgemal asetsev jahedam õhukiht. Kui valguskiir langeb kuuma ja jahedama õhukihi piirile väga kaldu, peegeldub ta siit tagasi nagu peeglilt. Vahetult piiri all näeb vaatleja palmi ümberpööratud peegelpilti ja talle näib, nagu asetseks seal peegeldav veepind.

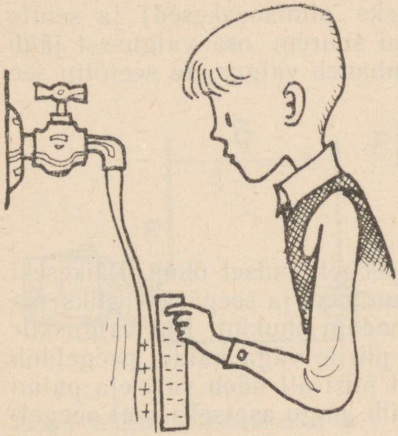


Fatamorgaanat võib näidata ka laboratooriumis. Teatud kaugusele veega täidetud klaaspurgist paigutatakse põlev küünal. Vaadates vee pealispinnale kaldu altpoolt, on küünla kohal näha tema ümberpööratud peegelpilt.

Veejuga elektroskoobina.

Laengu olemasolu saab kindlaks teha elektroskoobiga, millele mõjuvad elektrilised jõud (näiteks panevad need liikuma alumiiniumlehekesed).

Üsna lihtsaks ja hästi tundlikuks elektroskoobiks osutub peenike veejuga. Kui hoiame villase riidega hõõrutud kirjalakipulka joa lähedal, siis kaldub see oma seniselt teelt kõrvale. Pulk saab



Hõõrutud kirjalakipulk tõmbab enda poole peene veejoa.

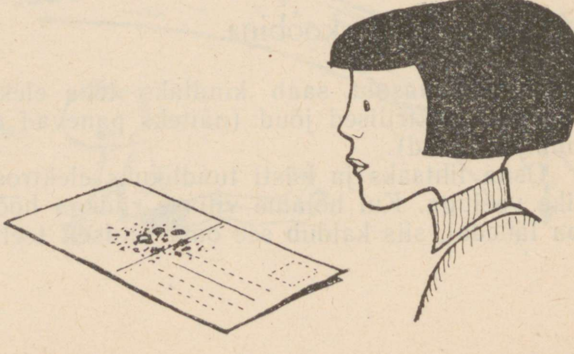
hõõrumisel negatiivse elektrilaengu. Veejoas, nagu ükskõik millises laadimata kehas, on ühepalju positiivse ning negatiivse laenguga osakesi, mis on omavahel tasakaalus. Positiivsed osakesed tõmmatakse kirjalakipulga negatiivse laengu poole. Seetõttu tõmbubki veejuga kirjalakipulgale lähemale.

Kirjalakipulga asemel võib kasutada eboniidist või mõnest teisest plastmassist sulepead või orgaanilisest klaasist pulka.

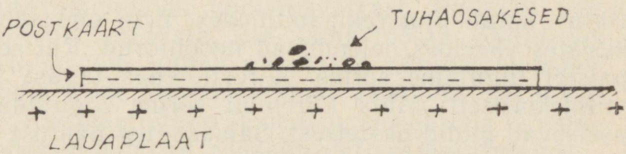
Elektriseeritud postkaart.

Asetame lauale postkaardi ja selle peale veidi tuhka. Kui tõsta kaart ettevaatlikult üles, hakkavad tuhaosakesed välkkiirelt igas suunas laiali lendama.

Postkaarti, mis alati sisaldab pisut niiskust, tuleb enne katset mõne minuti jooksul kuivatada. Siis paneme ta lauale ja tõmbame harjaga paar-kolm korda tugevasti üle kaardi. Kohe pärast seda puistamegi kaardile tuhka.



Harjamisel omandab kuivatatud postkaart negatiivse laengu. Postkaardi negatiivselt laetud osakesed tõmbavad lähemale laua, s. o. puu ülakihtide positiivselt laetud osakesi. Teame, et iga aine, iga aatom koosneb elektriliselt laetud osakestest, mida me ainult ei märka, kuna elektriliselt laadimata aines on positiivseid ja negatiivseid osakesi võrdselt. Pannes negatiivselt laetud postkaardi lauale, tõmbab see külge puu ülemiste kihtide positiivseid osakesi. Nii kogunevad positiivsed laengud, tänu erinimeliste laengute külgetõmbejõududele, kõige ülemisse puukihti, samal ajal surutakse negatiivsed laengud eemale alumistesse kihtidesse.



Negatiivsed elektrilaengud postkaardis, positiivsed — laua ülemises kihis. Tuhaosakesed on laadimata.

Negatiivsed laengud postkaardis ja positiivsed laengud kõige ülemises puukihis tõmbuvad, teataval määral seovad üksteist vastastikku. Seepärast ei saa kaardile puistatud tuhaosakesed algul elektrilaengut. Postkaardi ülestõstmisel elektriseeruvad ka tuhaosakesed negatiivselt, sest suur osa negatiivseid laenguid ei ole enam seotud lauaplaadi positiivsete laengutega. Nüüd lendavad tuhaosakesed otsekohe laiali, kuna elektriliselt ühesuguselt laetud kehad tõukuvad.

Enne selle triki kordamist kuivatame kaardi uuesti. Juba üksi niiskuse jälgede tõttu tekib juhtivus, mis teeb võimatuks kehade elektriseerimise.

Teine eksperiment elektriliselt laetud postkaardiga.

Asetame toolikorjule jalutuskepi ja paneme selle tasakaalu. Kui lähendame kepile elektriseeritud postkaardi, hakkab kepp elektriliste külgetõmbejõudude mõjul pöörduma.

Valguse järgi tunneme ära elektrilambi vooluliigi.

Õhtuti särab linn reklaamtuledes. Eriti efektselt mõjuvad mitmekesistes värvides helenduvad neoontorud. Kui sellise helendustoru paistel liigutame sõrme kiiresti edasi-tagasi, siis näeme seda mitmekordselt. Mida kiiremini sõrme liigutada, seda kaugemal asetsevad pildid üksteisest. Samasugust nähtust võib tähele panna ka päevavalguslampide juures.

Kõik torud, milles annavad valgust hõõguvad gaasid, töötavad vahelduvvooluga. Kui alalisvoolu puhul elekter voolab alati ühesuguse suuna ning tugevusega, siis vahelduvvool voolab tõugete kaupa ning vahelduvalt kord ühele, kord teisele seinakontakti klemmile. Kumbki klemm on vaheldumisi plusspooluseks ja miinuspooluseks 50 korda sekundis. Seejuures ei muutu mitte ainult voolu suund, vaid ka tugevus, mis iga voolutõuke juures esmalt suureneb ja siis taas väheneb. Pooluste vahetuse momendil on

Helendustoru paistel näeme üksteise kõrval palju liikuva sõrme kujutisi.

voolutugevus võrdne nulliga. Sel silmapilgul, niisiis 100 korda sekundis, reklaamtoru või päevavalguslamp ei helendu. Liikuva käe väljasirutatud sõrm on seega ainult iga $\frac{1}{100}$ sekundi jooksul heledasti valgustatud. Neil silmapilkudel näeme sõrme samaaegselt mitmetes asendites, sest silma võrkkesta valgustajud säilivad pärast valgusallika igakordset kustumist umbes $\frac{1}{20}$ sekundi jooksul.

Seda nähtust saab vaadelda ka vahelduvvooluga töötava kaarlambi valguses.

Vastavate katsete puhul hõõglambi paistel on kõige parem edasi-tagasi liigutada sätendavat kudumisvarrast. Paljudel juhtudel on võimalik niiviisi määrata, kas lamp töötab alalis- või vahelduvvooluga. Alalisvoolu juures nimetatud nähtust ei esine. See katse sobib hõõglampide korral muidugi vaid siis, kui hõõgniit on väga peenike. Kui hõõgniit on jämedam, siis ei jõua ta vahepeal jahtuda, vaid hõõgub pidevalt peaaegu ühtlase heledusega.

1 kilogramm Kuul.[12]

Iga ese, iga inimene on Kuul palju kergem kui Maal. Kes Maal kaalub 30 kG, kaalub Kuul umbes 5 kG. Marsil kaalub seesama inimene 12 kG, Jupiteril seevastu 75 kG ja Päikesel 825 kG.

Muutumatuks jääval ainehulgal on niisiis erinevates kohtades maailmaruumis erinev kaal. Kas rännakul mööda Maa pinda keha kaal muutub? Aga muidugi! Kui ekvaatoril kaalub inimene 100 kG, siis põhjapoolusel kaalub ta 100,6 kG.

Keha muutumatuks jäävat ainehulka nimetatakse massiks ning mõõdetakse kilogrammides (kg). Keha kaalu all seevastu mõistetakse jõudu, millega keha rõhub alusele. Seda jõudu väljendatakse kilopondides (kp). Üks kilopond on ühe kilogrammise kaaluvihi kaal merepinnal geograafilisel laiusel 45°.[13] Vedrukaaluga saab määrata kaalu, mitte aga massi.

---

[12] Kuu intensiivne uurimine kosmoseaparaatide abil algas 1959. a. 14. septembril 1959 viis teine Nõukogude kosmoserakett Kuu pinnale vimplid; 7. oktoobril 1959 pildistas kolmas Nõukogude kosmoserakett Kuu nähtamatut külge. Esimestena astusid Kuu pinnale 21. juulil 1969 Neil Armstrong ja Edwin Aldrin, USA-st startinud kosmoselaeva «Apollo 11» meeskonna liikmed. — *Tõlk.*

[13] Kaalu- või jõuühik kilopond (kp) loetakse võrdseks jõukilogrammiga (kG). Massi ja kaalu mõistete paremaks eristamiseks on tehtud ettepanekuid võtta kasutusele nimetused «pond», «kilopond», «millipond» jne.

SI-süsteemi abil. kus jõu- ja kaaluühikuks on njuuton (N), saame seose: 1 kp = 1 kG = 9,80665 N. — *Tõlk.*

Keha kaalu maakeral põhjustab Maa külgetõmbejõud. Maa mass mõjutab iga keha jõuga, mis on suunatud Maa keskpunktisse. Kui seesama keha asetseb Kuu pinnal, siis tõmbab teda külge Kuu mass. See külgetõmbejõud on Maa külgetõmbejõust väiksem, kuna Kuu mass on väiksem Maa massist. Külgetõmbejõud, millega Päike mõjutab sama keha, on palju suurem kui Maa külgetõmbejõud (raskusjõud), sest Päikese mass on Maa massist 331 994 korda suurem.

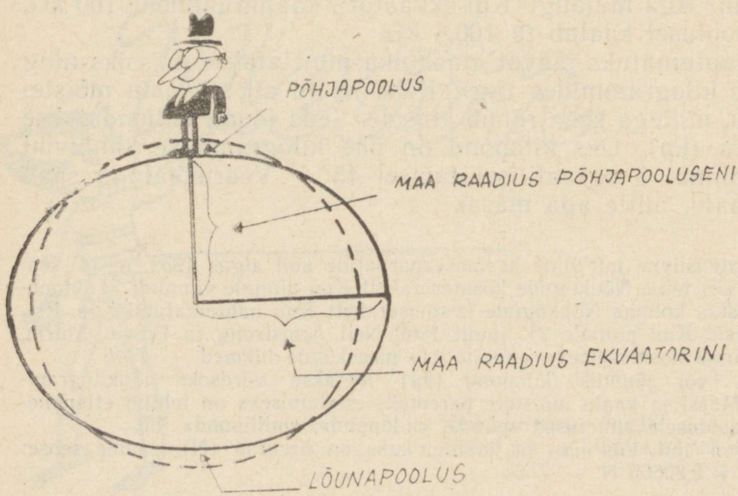
See ongi põhjuseks, miks ühe ja sellesama keha kaal erinevate taevakehade pinnal on erinev.

Aga miks kaalub inimene põhjapoolusel rohkem kui ekvaatoril? Vaatleme kord Maa kuju.

Ütleme sageli: Maa on kera. Seda on ta tõepoolest, kuid ainult ligikaudselt. Maal on pooluste juurest lapiku kera kuju.

Joonisel on näha, et põhjapooluse kaugus Maa keskpunktist on veidi väiksem kui ekvaatori kaugus. Mida lähemal on keha Maa keskpunktile, seda suurem on temale mõjuv külgetõmbejõud. Seepärast on Maa külgetõmbejõud ning järelikult ka keha kaal põhjapoolusel suurem kui ekvaatoril.

Kui rännatakse kilogrammise kaaluvihiga ekvaatorile, põhjapoolusele, kõrgele mäele, Marsile jne., siis muutub vastavalt olukorrale ka kilogrammise vihi kaal. Mass 1 kg kaalub geograafilisel laiusel 45°, merepinnal 1 kp, põhjapoolusel kaalub ta 1,003 kp, ekvaatoril 0,997 kp, Kuu pinnal kaalub ta 0,168 kp, Marsil kaalub



ta 0,400 kp, Jupiteril kaalub ta 2,560 kp, Päikesel kaalub ta 27,500 kp.

Kuna paljud massi ja kaalu erinevust ei tea, siis igapäevases keelepruugis neid mõisteid teravalt ei eristata. Sageli räägitakse kaaluühikust, mõeldakse aga massiühikut. Mõõdetud massi, näiteks leiva kilogrammi, nimetatakse alati valesti tema kaaluks. See kõik ei tekita igapäevases elus raskusi, kuna mistahes massi kaaluerinevused Maa pinnal ulatuvad kõige rohkem umbes $\frac{1}{2}$ %-ni.

Füüsikud ja tehnikud seevastu peavad massi ning kaalu, kilogrammi ja kilopondi vahel oluliselt vahet tegema. Mass kilogrammides määratakse kangkaaluga, kaal kilopondides vedrukaaluga.

Õun ja Maa.

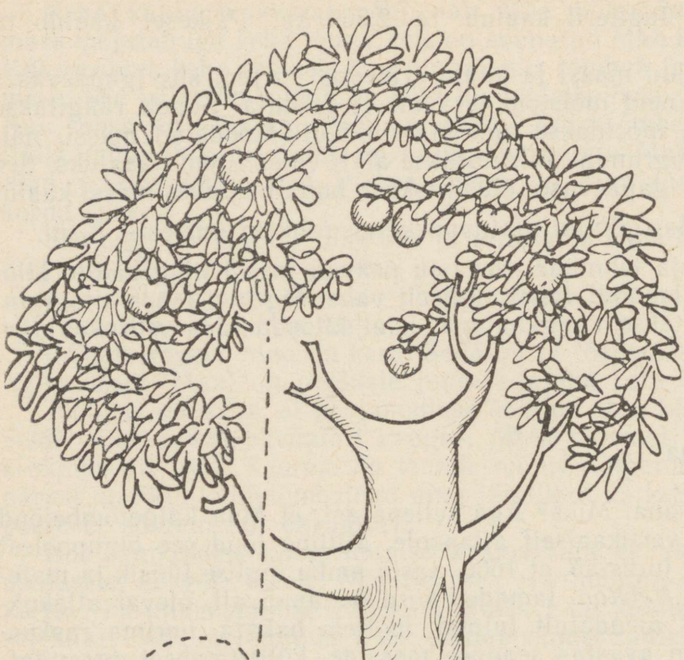
Õun kukub maha. Miks? Aga sellepärast, et Maa külgetõmbejõud tõmbab teda vertikaalselt allapoole. Milline jõud see õigupoolest on? Anekdoot jutustab, et 1666. aasta paiku inglise füüsik ja matemaatik *Isaac Newton*, lamades kord õunapuu all, olevat allakukkunud õunast ajendatult tulnud mõttele hakata uurima raskusjõudu. Newton avastas seaduse masside külgetõmbest (gravitatsiooniseaduse), mis kõlab nii: kaks massi tõmbuvad alati teineteise poole vastastikku. Külgetõmbejõud on seda suurem, mida suuremad on massid ja mida väiksem on massidevaheline kaugus. Ta leidis selle põhilise loodusseaduse jaoks ka matemaatilise valemi.

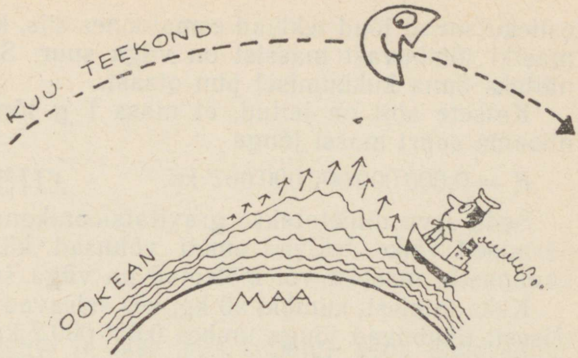
Seega on kindel, et mitte ainult Maa ei tõmba õuna enda poole, vaid ka õun maakera. Kaks massi mõjutavad alati teineteist vastastikku võrdse külgetõmbejõuga.

Maa külgetõmbejõud sunnib õuna kukkuma. Niisama suur külgetõmbejõud, millega õun mõjutab Maad, ei suuda aga silmanähtavalt panna liikuma Maad.

Maa ja Kuu vastastikuse külgetõmbe juures on see juba teisiti. Maa tõmbab Kuud enda poole. See külgetõmbejõud hoiab Kuud orbiidil ümber Maa. Kui saaks selle hiiglasliku jõu «välja lülitada», lahkuks Kuu Maa mõjupiirkonnast kiiresti, liikudes sirgjooneliselt. Newtoni masside gravitatsiooniseaduse abil võib arvutada jõu, millega Maa Kuud kinni hoiab. See on umbes 20 kvintiljonit kilopondi. Selle jõu tohutut suurust saab vaevalt ette kujutada!

Niisama suure jõuga tõmbab ka Kuu Maad enda poole. See külgetõmbejõud tuleb selgesti esile, kui Kuu asetseb mere kohal.





Kui Kuu asetseb mere kohal, tõstab ta veepinda. Siis on merel tõus.

Kuu tõmbejõud tõstab veemasse kõrgele, isegi kuni 20 m! Siis esineb merel tõus, mis «rändab» koos Kuuga.

Seda Kuu jõudu püütakse kasutada tõusu-mõõna energial töötavate elektrijaamade töölepanemiseks. Kuu tõstab meretõusu ajal veemasse, mida vee alanemisel rakendatakse turbiinide liikumapanemiseks. Sel viisil saab toota tohutult suuri energiaid. Prantsusmaal hakatakse juba ehitama esimesi sedalaadi jõujaamu.[14] Kuu külgetõmbejõud, mis suudab tõsta kuni 20 miljonit kuupkilomeetrit vett, ei tõsta mitte ainult veemasse, ta kumerdab üles ka Maa koort. Terved linnad ja maakohad tõusevad aeg-ajalt Kuu külgetõmbejõu mõjul 20 kuni 40 cm võrra, ehkki me ei märka seda, sest 40 cm on Maa mõõtmetega võrreldes üliväike.

Mitte ainult õun ja Maa, Kuu ja Maa, vaid ka Päike ja Maa tõmbuvad vastastikku. Maad hoiab tema elliptilisel trajektooril ümber Päikese selle külgetõmbejõud. On mõeldav, et Maa tekitab Päikesel loodetega sarnaseid nähtusi.

Newtoni gravitatsiooniseadus kehtib ka igapäevases elus. Näiteks tõmbuvad teineteise poole kaks telliskivi või kaks pooletsentnerist kapsakotti ka siis, kui nad asetsevad teineteisest meetrikaugusel. Kui sa praegu laua juures istud ja loed, siis sinu keha mass avaldab lauale külgetõmbejõudu, ja vastupidi — laua mass mõjutab sind külgetõmbejõuga. Need jõud on ainult nii väikesed, et nad ei suuda tekitada mingit liikumist, ent nad on olemas. Liikumist

[14] 1966. a. lasti käiku esimene tõusu ja mõõna energial töötav elektrijaam, mis asub La Manche'i rannikul. NSV Liidus ehitatakse mereloodete energial töötavat elektrijaama Koola poolsaarel. — *Tõlk.*

esilekutsuvad jõud tekivad esmajoones siis, kui vähemalt üks kummastki tõmbuvast massist on väga suur. Sellist liikumist näeme näiteks õuna kukkumisel puu otsast.

Katsete abil on leitud, et mass 1 g tõmbab enda poole teist niisama suurt massi jõuga

$$K = 0{,}000\,000\,000\,000\,067 \text{ kp}.$$

Seda arvu nimetatakse gravitatsioonikonstandiks. Kuigi see on äärmiselt väike, tekivad ometi võimsad külgetõmbejõud, kui üks kummastki massist või mõlemad on väga suured.

Kaks inimest, kumbki 50 kg, kes seisavad 10 cm kaugusel teineteisest, tõmbuvad jõuga umbes 0,000 000 2 kp.

Külgetõmbejõud kahe hiiglasliku ookeaniauriku vahel, mille veeväljasurve on 60 000 m^3 ja mis asetsevad teineteisest 1 m kaugusel, moodustab 300 kp. Kuid seegi jõud on liiga väike selleks, et panna liikuma kumbagi ookeanihiiglast.

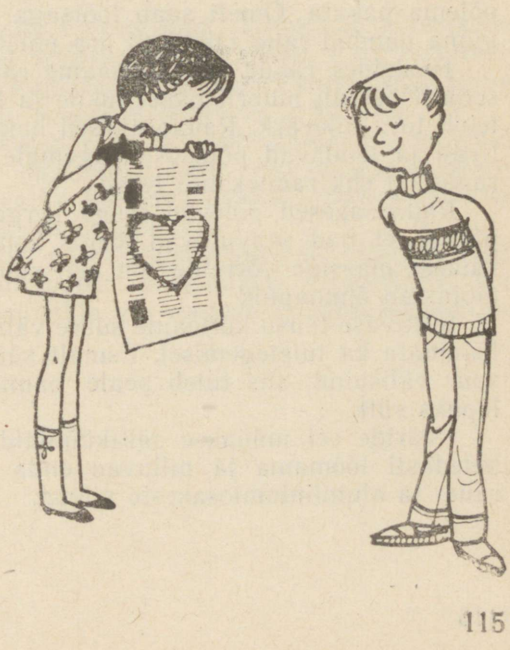
KEEMIA KATSEID.

Saladuslik tulejälg.

Näita kaaslastele ajalehte ja lase siis kellelgi seda kahe käega kinni hoida.

Süüta tikk, eemalda söestunud pea ning puhu ettevaatlikult ära, nii et tipu juures puu veel hõõguks. Selle hõõguva tikuteravikuga puuduta üht, teiste arvates suvalist kohta ajalehepaberil. Paber hakkab heledasti hõõguma. Võta kohe tikk ära. Säde paberil hõõgub edasi ja hakkab kõikide üllatuseks rändama. Hõõgudes roomab ta aeglaselt, endale teed otsides ja ajalehepaberit kõrvetades. Lõpuks lõikab ta ajalehepaberist välja kujundi.

Mäng kutsub esile pealtvaatajate hämmastuse. Tulikirjas võib lasta ilmuda mistahes kujundi või nime, kasutades hõõguvat, mitte põlevat tikku. Tikk peab olema ainult vastavalt ette valmistatud.



Hõõguv säde roomab aeglaselt ajalehepaberil ja lõikab sealt välja kujundi.

Osta apteegist pisut salpeetrit. Puista seda noaotsatäis veeklaasi või tassi ning vala veidi vett peale. Pulber lahustub; tekib läbipaistev lahus. Kasta sellesse peen pintsel ja joonista siis ajalehepaberile kinnine kujund, mis hiljem peab tekkima tulikirjas. Mõne minuti pärast on ajalehepaber jälle kuiv. See on ettevalmistuseks kõik. Tuleb meeles pidada, kus algab joonetõmme, sest demonstreerimisel pead puudutama hõõguva tikuga nimelt seda kohta. Igaks juhuks märgi see punkt pliiatsiga.

Salpeeter sisaldab palju keemiliselt seotud hapnikku. Väikesest kogusest salpeetrist, mis kuivanud lahusest paberile jääb, piisab, et tema hapnikusisalduse abil paber hõõgumisvõimeliseks teha. Hapnik soodustab põlemist, mis siin toimub vaid aeglaselt hõõgudes. Heledalt hiilgav säde rändab mööda salpeetrijälge.

Kemikaalide kasutamisel peab alati tegutsema ettevaatlikult! Enamasti on need ained inimesele kahjulikud, sageli ka tuleohtlikud. Katsetel pea kinni ettekirjutatud ainehulkadest!

Raud põleb.

Kui keegi kohendab tuld ahjus rauast roobiga või lisab briketti söekühvliga, siis tuleb ta vaevalt mõttele, et raud võiks seejuures põlema hakata. Ometi saab lõõtsaga õhutatavasse ääsitulle hõõguma pandud raua täielikult ära põletada.

Töödeldes rauda viiliga, saame rauapuru. Kui puistame veidi seda hõbehalli pulbrit paberitükile ja puhume gaasipliidi leegisse, tekib tore tulevärk. Rauaosakesed hakkavad leegis hõõguma, süttivad ja lendavad põledes kaugemale. Tekivad pisikesed mustad rauatuha ehk raudoksiidi terad.

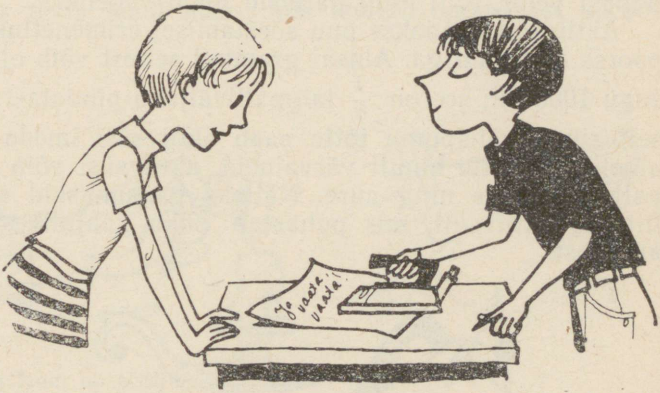
Rauaosakesed põlevad seega kergesti ära. Miks? Aga sellepärast, et nad saavutavad leegis kohe kõrge temperatuuri ja et väikese massiga võrreldes on neil suur välispind, mida põlemisel mõjustab õhuhapnik.

Süttivuse tõusu kütteaine suure välispinna tõttu kasutame enda teadmata ka tuletegemisel. Esmalt süütame paberi, sellel on eriti suur välispind; siis tuleb peale panna lõhutud puid ning alles lõpuks sütt.

Nääride eel müüakse säraküünlaid, mis süütamisel hakkavad heledasti lõõmama ja pilluvad enda ümber aeglaselt kustuvate raua- ja alumiiniumiosakeste vihma.

Sidrunimahl „tindina".

Näita publikule valget paberilehte. Siis lükka kuuma triikrauaga paar korda üle paberi. Pealtvaatajad on imestuses, kui paberile ilmub nagu nähtamatu käega kirjutatud, aeglaselt loetavaks muutudes, tumepruun kiri.



Loomulikult on paber ette valmistatud. Tilgutasid klaasikesse veidi sidrunimahla, kastsid sellesse uue terassule ning kirjutasid sidrunimahlaga nagu tindigagi read paberile. Pärast kirja kuivamist ei paista enam midagi, sest sinu «tint» on ju värvitu.

Kui kasutada «tindina» soolvett, siis ei ole pärast paberi triikimistki midagi näha. Kui aga hoiad lehte ettevaatlikult põleva küünla kohal, nii et ta parajalt kõrbema hakkab, saab kõrvetatud paberil selgesti nähtavaks tumepruun kiri.

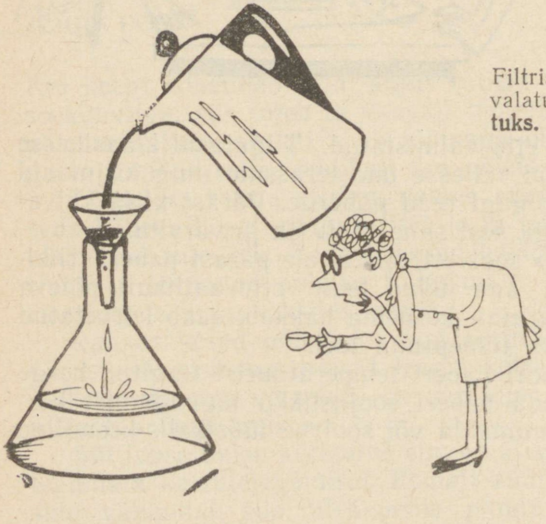
Mõlemal juhul ilmub kiri paberi temperatuurist tingitud kerge söestumise tagajärjel. Seda paberi soojuslikku lagundamist kergendab ja tugevdab sidrunimahla või soolvee füüsikalis-keemiline toime.

Muudame musta kohvi värvituks.

Apteegist saab osta aktiivsöe nime all teralist või peenepulbrilist massi, mis koosneb puhtast süsinikust. Kui seda pisut filtrisse puistata ning selle peale musta kohvi valada, tilgub see filtreerimislehtrist välja vesiselge vedelikuna. Ta muutub aktiivsöe toimel värvituks ja kaotab seejuures ka oma maitse.

Aktiivsöe abil saab muuta värvituks ka punase kapsa vett, punast veini, tinti ning paljusid muid vedelikke.

Aktiivsütt saadakse puu söestamisel erimenetluse abil ja ta on poorse struktuuriga. Ainsal grammil sellest võib olla pindala peaaegu 1000 m^2; see on $\frac{1}{6}$ jalgpalliväljaku pindalast. Selle erakordselt suure välispinna tõttu saab aktiivsüsi imeda endasse värvaineid. Ja mitte ainult värvaineid, aktiivsüsi võib vastu võtta ka paljusid gaase ning aure. Näiteks gaasimaskid sisaldavad oma filtrites aktiivsütt, mis puhastab õhku kahjulikest gaasidest ja aurudest.



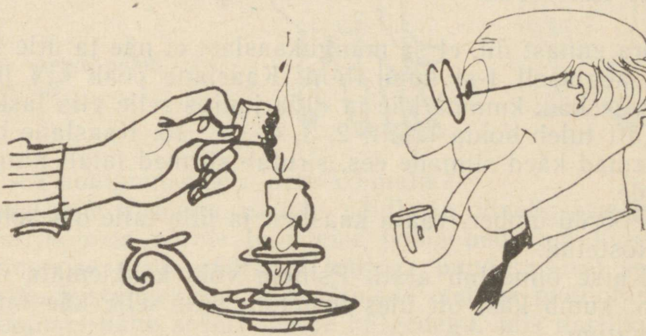
Filtris on must pulber, millest läbi valatud must kohv muutub värvituks.

Tehnikas kasutatakse aktiivsütt näiteks kollaka toorsuhkrulahuse värvituks muutmisel ja joogivee puhastamisel kloorist. Arst kirjutab välja aktiivsütt teatud mao- ja sooltehaiguste korral ning mürgistuste vastase vahendina, kusjuures süsi adsorbeerib mürkained.

Suhkur põleb.

Kui hoida suhkrutükki küünlaleegis, siis esmalt kattub see tahmaga, edasi aga sulab suhkur välispinnal üksikuteks kollakaspruunideks tilkadeks, mis osaliselt põlevad sinaka leegiga. Kui suhkur leegist välja võtta, siis ta edasi ei põle.

Suhkrutükki enne tubakatuhas veeretanud, põleb ta palju jõulisemalt. Kui suhkrutükk küünlaleegist välja võtta, põleb ta ikka edasi. Seejuures tekib must mass, mis levitab omapärast kõrbelõhna.



Pärast tuhas veeretamist põleb suhkrutükk heleda leegiga.

Tuha juuresolek soodustab tunduvalt suhkru põlemist. Tuhk on siin, nagu keemikud ütlevad, katalüsaatoriks. Katalüsaatorite abil võib kiirendada paljusid keemilisi protsesse.

Tekkiv must mass koosneb eelkõige süsinikust. See eraldub suhkrust, kuna samal ajal osa temast põleb ära. Ei osata arvatagi, et lumivalge suhkur sisaldab pigimusta süsinikku. Suhkur koosneb süsinikust, vesinikust ja hapnikust; seejuures vesiniku ja hapniku hulgad on samas vahekorras nagu vees (H_2O). Seepärast võib oletada, et kunagi õnnestub keemikutel süsinikust ja veest toota suhkrut. Leidub palju aineid, mis on samasuguse koostisega, näiteks tärklis. Need on süsivesikud, mis toitainetena on inimesele väga tähtsad.

BIOLOOGIA KATSEID.

Käsi kahvatub.

Pööra ennast nii, et sa mängukaaslast ei näe ja ütle talle, et loendad aeglaselt 1-st kuni 15-ni. Kaaslane peab «1» juures tõstma üles ükskõik kumma käe ja «15» juures selle alla laskma.

Kätt tuleb hoida lapiti! 2, 3, 4, . . ., 15. Kaaslane hoiab hetkeks mõlemad käed silmade ees, sirutab sõrmed laiali ning vaatab läbi nende.

Pöördu ümber, vaata kaaslast ja ütle talle otsekohe, kumb käsi oli tõstetud.

Katse õnnestub alati. Esineja võib kõhklemata õigesti otsustada, kumb käsi oli üles tõstetud, sest selle käe laba on teisest kahvatum.

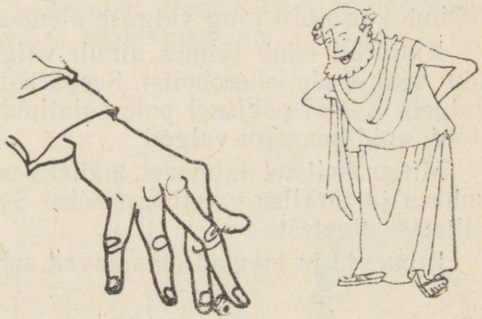
Inimese süda pumpab pidevalt verd läbi soonte, kus on kindel rõhk. Peas on see väiksem kui näiteks varvastes. Veetorustikus on rõhuga sama lugu. Neljandal majakorrusel on veerõhk väiksem kui alumisel korrusel.

Vererõhk ülestõstetud käes sõltub ainult südame poolt avaldatavast survest ja veresoonestiku anatoomilisest seisundist. Käes, mis oli all, on soonestiku vererõhk suurem tema kohal asetseva veresamba kaalu tõttu. Kõrgema vererõhu tõttu on sooned alumises käes avardunud ning juhivad läbi rohkem verd. Käsi punetab. Ülestõstetud käsi näib aga kahvatumana, kuna temast voolab läbi vähem verd.

Aristotelese hernes.

Aristoteles (IV saj. e. m. a.) oli tuntumaid kreeka õpetlasi. Ta tegeles omapärase katsega. Kui asetada nimetissõrm keskmise sõrme alla ning puudutada mõlema ristamisi pandud sõrme otsaga hernetera, tundub, nagu oleks olemas kaks hernest.

Esialgu ära ütle oma sõbrale, milles on asi, vaid seo tal silmad kinni, võta tema parem käsi ja aseta nimetissõrm keskmise sõrme alla. Pane lauale üks hernes ja juhi kaaslase käsi selle juurde, nii et ta puudutaks hernest ristamisi pandud sõrmede otstega. Küsi, mitut tera ta sõrmedega katsus. Kindlasti vastab ta: «Kaht.»



Sõrmede niisuguse asendi puhul tunneme kahte hernest.

Kuidas on see kompimismeele pete võimalik?

Kui kompame kahe sõrmega, näiteks pöidla ja nimetissõrmega, siis toimub see mõlema sõrme teineteise poole pööratud külgedega. Kahe teineteise poole pööratud küljega puudutamisel saadakse õige mulje. Ristamisi asetatud sõrmede otstega puudutame hernest aga hoopiski kahe sõrme nende külgedega, mis harilikult ei paikne teineteise vastas. Seepärast tundub, nagu oleks tegemist kahe hernega.

Rohelised lehed muutuvad valgeks.

Pane katseklaasi või väikesesse pudelisse mõned rohelised lehed ja täida see piiritusega. Klaas tuleb korgiga sulgeda ja ööseks seisma jätta.

Kui järgmisel hommikul lehed pudelist välja tõmbad, näed, et nad on muutunud valgeks, piiritus on omandanud aga rohelise värvuse.

Rohelised lehed sisaldavad seega värvainet, mis piirituses lahustub. Seda nimetatakse klorofülliks ehk leheroheliseks.

Vala roheliseks värvunud piiritusele juurde veidi bensiini, sule klaas pöidlaga ning loksuta. Pärast seda kerkib bensiin taas ülespoole, sest ta on piiritusest kergem. Bensiinikiht asetseb piirituse peal. Nüüd on bensiin muutunud roheliseks, piiritus aga kollakaks. Sellest nähtub, et klorofüll koosneb erinevatest värvainetest, mis eralduvad nende erineva lahustuvuse tõttu bensiinis ja piirituses.

Bensiini ning piiritusega tuleb olla ettevaatlik! Nad on väga tuleohtlikud.

Klorofüll on taime elutegevuseks tähtis. Taim võtab juurtega pinnasest vett, lehtede abil aga õhust süsihappegaasi. Veest ja süsihappegaasist valmistab ta suhkrut ning tärklist. See protsess toimub klorofülli ning valguse olemasolul.

Klorofüll tekib taimes ainult valguse mõjul. Kus puudub valgus, seal ei ole leherohelist. Seepärast on ka keldris kartulitel idud valged. Samal põhjusel pole salatipuhmaste sisemised lehed rohelised, vaid peaaegu valged.

Mitterohelistel taimedel, näiteks seentel, puuduvad tingimused suhkru ja tärklise valmistamiseks. Seened toituvad valmis orgaanilistest ainetest.

Inimesed ja loomad omastavad suhkru ja tärklise koos toiduga.

Taim toodab hapnikku.

Katse jaoks on vajalikud mõned vesikatku oksad. See on paljudes tiikides ja jõgedes kasvav veetaim, mis on olemas ka igal akvaariumiomanikul.

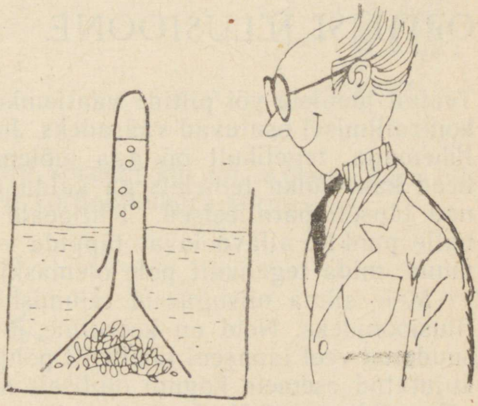
Taimed pannakse klaaspurki ning valatakse üle värske veega. Siis asetatakse purki lehter, mille väljavoolutoru peab jääma mõne sentimeetri võrra veepinnast allapoole. Katseklaas või pudel täidetakse ääreni veega ja suletakse pöidlaga. Klaasi avaust hoitakse vee all, siis võetakse pöial avause eest ära ja pannakse klaas lehtri väljavoolutoru peale.

Kui paigutada purk päikese kätte, siis eralduvad taime juurest gaasimullikesed. Need kerkivad mööda lehtri seinu ülespoole ja kogunevad katseklaasi, nii et vesi selles surutakse üha allapoole. Mõne tunni pärast on kogunenud mõni kuupsentimeeter gaasi.

Vee all suletakse ava pöidlaga ja klaas võetakse välja. Nüüd vabastatakse avaus ja viiakse sinna kiiresti hõõguv puupird. Samal silmapilgul hakkab pird heledalt leegitsema ning põleb ereda särava leegiga. Katseklaasis olev gaas on järelikult hapnik.

Vees on enamasti alati lahustunud veidi süsihappegaasi (süsinikdioksiidi), mis annab veele värske maitse. Päikesekiirguses võtab vesikatk õhust süsihappegaasi, mille muundab vee toimel suhkruks ning tärkliseks. Selle keemilise reaktsiooni juures vabaneb hapnikku.

Päikesevalguses võtavad kõik rohelised taimed vastu õhust või veest süsihappegaasi ja annavad ära hapnikku. Haljasalad, metsad ning aasad toodavad päikesepaistel väga palju hapnikku, mida vajavad eluks inimesed ja loomad. Nemad kasutavad hingamisel hapnikku ning annavad ära süsihappegaasi.



OPTILISI ILLUSIOONE.

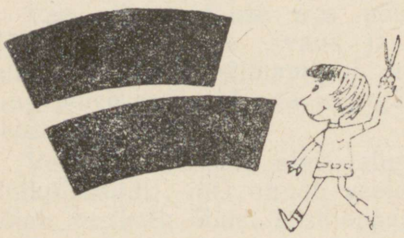
Teatud jooniste või piltide vaatlemisel teeme otsustusi, mis järelkontrollimisel osutuvad vääradeks. Joonisel paistab üks lõik teisest lühemana, tegelikult on aga mõlemad ühepikkused. Või näivad need kaks lõiku teineteisega kaldu asetsevat, kuigi tegelikult on nad täpselt paralleelsed. Tihtipeale võime näha teatud piltidel halle punkte, allavoolavat täppide vihma või värve ja veel palju muud, mida tegelikult pole olemaski.

Meie silma niisuguseid tajumishäireid nimetatakse optilisteks illusioonideks. Neid on keeruline ja raske seletada; mõnda pole suudetud veel tänaseni täielikult põhjendada. Sageli mõjutab pildil kujutatud esemete kogum oluliselt muljet, mida tekitab vaatlejas selle pildi mingi üksikasi.

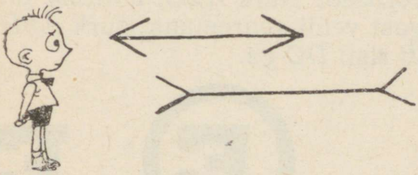
Näidates optilisi illusioone, on soovitatav nende tähelepanuväärsusi tundma õppida ja sellest rõõmu tunda.

Suuruse illusioone.

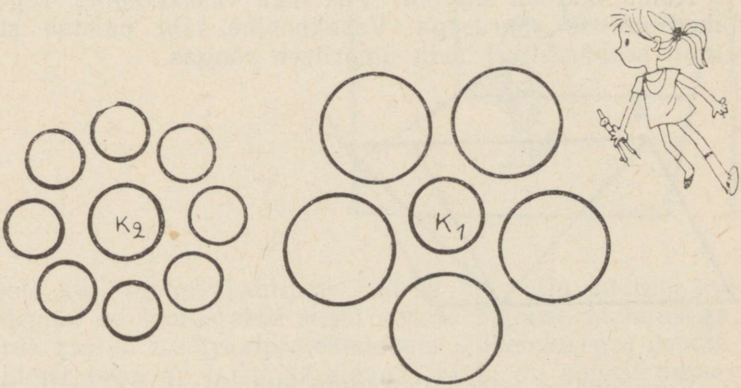
Kumb kujunditest on suurem? Kas alumine? Mõõtmise teel ning eelkõige kopeeritud kujundite väljalõikamise ja teineteisele asetamisega võib kergesti veenduda, et mõlemad on võrdsed.



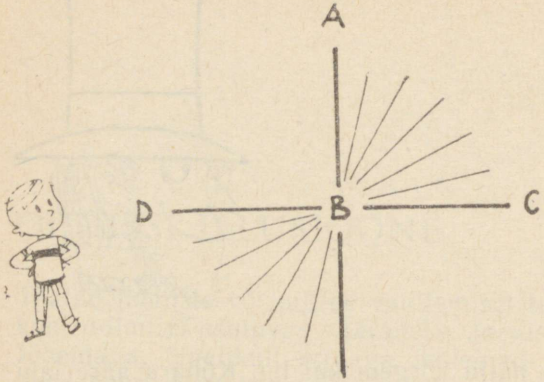
Silinderkübar paistab palju kõrgem kui lai. Kübara ääre läbimõõt on tegelikult aga täpselt võrdne kübara kõrgusega.



Võrdse pikkusega sirglõikude otstes on nooled erineva kujuga, mistõttu ülemine lõik paistab alumisest lühemana.

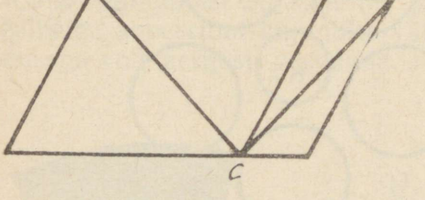


Vaatle ringe K_1 ja K_2. Kumb neist on suurem? 8 väiksema sõõriga ümbritsetud ring näib 5 suurema sõõriga ümbritsetud ringist suuremana. Tegelikult on ringid K_1 ja K_2 ühesuurused. Siin on ilmne mõju ümbrusel.

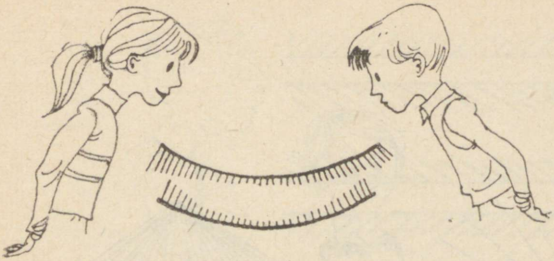


Kas nurgad *ABC* ja *ABD* on võrdsed? Nurk *ABC*, millesse on tõmmatud jooned, paistab täisnurgast veidi suuremana, nurk *ABD* vastavalt väiksemana. Ometi on *AB* risti *DC*-ga.

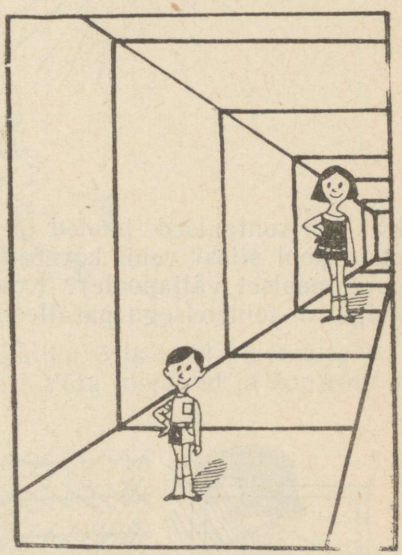
Kumb täht on suurem? Vist ikka vasakpoolne? Tegelikult on tähed võrdse suurusega. Vasakpoolne täht paistab suuremana ainult seepärast, et teda ümbritseb rõngas.



Vasakpoolse parallelogrammi diagonaal *AC* näib pikem kui parempoolse parallelogrammi diagonaal *CD*. Mõlemad on siiski ühesuurused. See hindamisviga tekib tõenäoliselt sellest, et me vasakpoolse rööpküliku suuremast laiusest järeldame, nagu oleks diagonaal *AC* pikem.

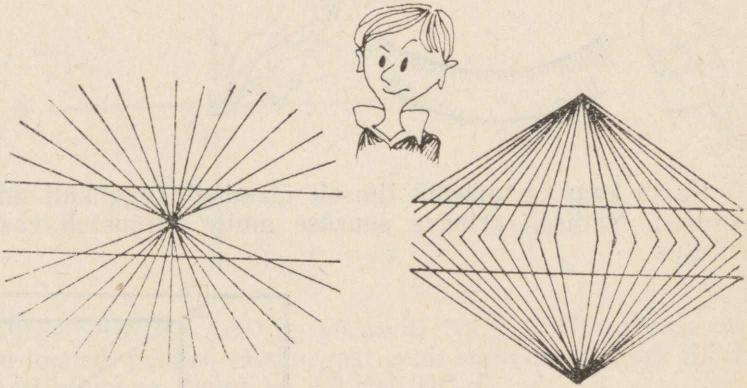


Kumb kaar on pikem? Ilmselt ülemine! Tegelikult on kaared võrdsed. Näiliselt erineva suuruse mulje põhjustab vastupidine viirutus.

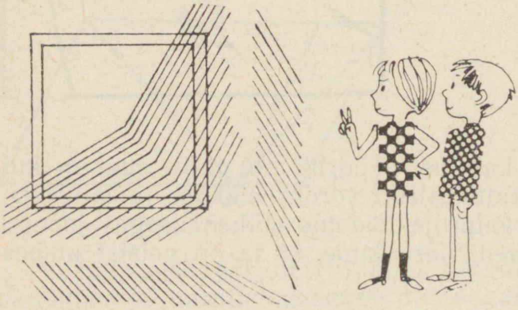


Siin pole küll mingit kahtlust. Tüdruk on palju suurem kui poiss! Mõlemad on joonistatud siiski võrdse pikkuse ja laiusega. Kuna tüdruk ulatub tsentraalprojektsioonis (lühendusega) joonistatud koridoris peaaegu laeni, järeldame, et ta on poisist umbes kaks korda pikem.

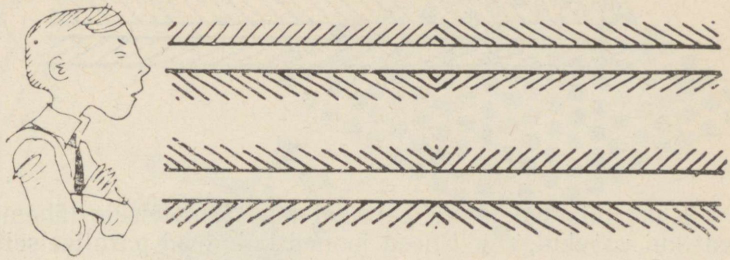
Suuna illusioone.



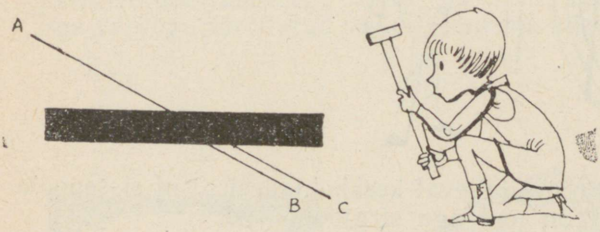
Kas horisontaalsed jooned on paralleelsed? Või paistavad nad otste pool siiski veidi kõverad (vasakpoolsel joonisel sissepoole, parempoolsel väljapoole)? Kontrollige ja te veendute, et jooned kulgevad teineteisega paralleelselt.



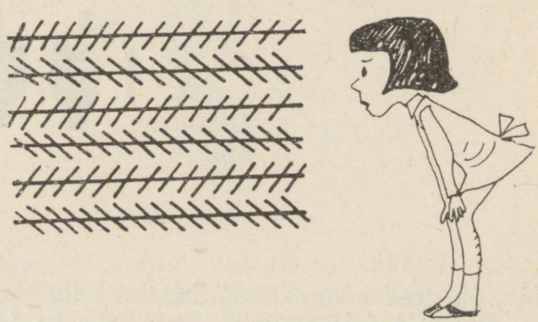
Sellel joonisel on ruut küll pisut vildak? Siiski mitte, ruut on joonestatud täpselt. Väär mulje tekib kaldjoonte tõttu.



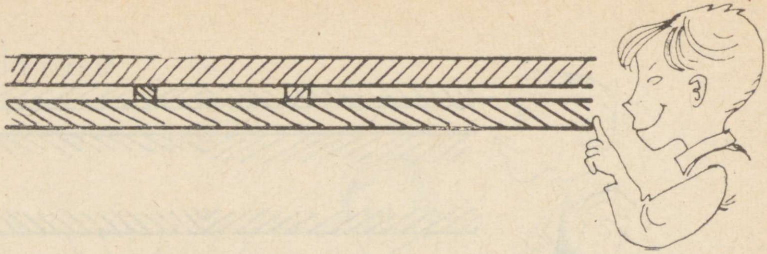
Selle joonise puhul tekib mulje, nagu oleks iga joont (1, 2, 3, 4) keskelt veidi murtud. Tegelikult on nad paralleelsed. Selle võib hõlpsasti kindlaks teha.



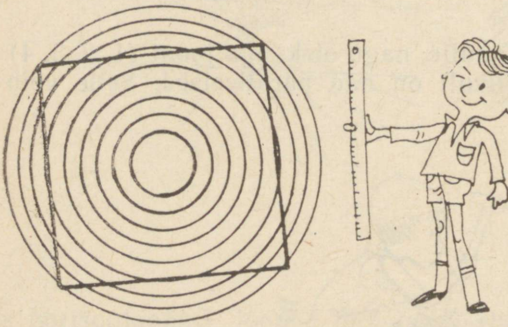
Nõel *A* on pandud läbi musta ristküliku. Mis on *A* pikenduseks, kas *B* või *C*? Oled sa *B* suhtes kindel? Võta joonlaud ja kontrolli.



Vaata joonist! On vaevalt usutav, et viirutatud sirglõigud asetsevad üksteisega paralleelselt.



Kaks tala paistavad paremal pool teineteisele lähemal asetsevat kui vasakul, ehkki need jooned kulgevad paralleelselt.

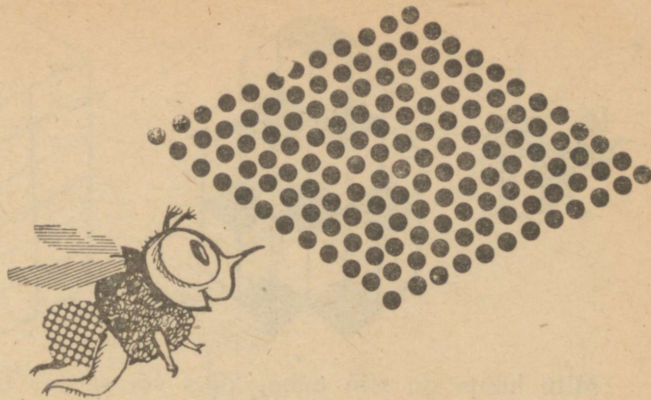


Selle ruudu küljed näivad olevat keskkohtadest pisut sissepoole painutatud. Tegelikult on nad aga sirgjoonelised.

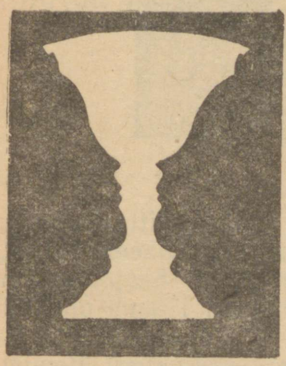
Vahelduv mulje pildist.

Mis on need kummalised mustad kujundid?

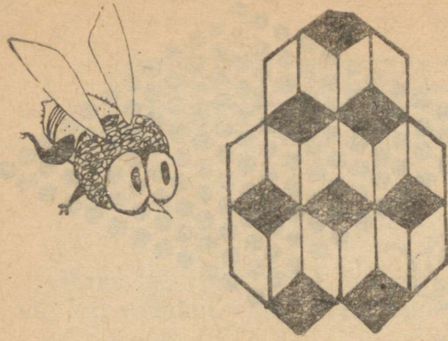
Kui silmitsed valgeid lünki, siis loed äkki tähed ITA (valged tähed mustal taustal). Heidad aga taas pilgu ühele mustadest kujunditest, kaovad tähed. Vastavalt sellele, kas vaatame valgele või mustale pinnale, saame pildist erineva mulje.



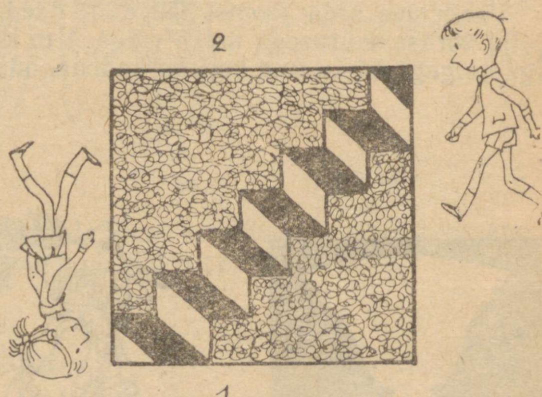
Vaadeldes seda joonist lähedalt, näed, et siin on joonistatud palju võrdse suurusega musti ringe. 1 m kauguselt paistavad need aga valgega ääristatud kuusnurkadena, mis on liidetud meekärjeks.



Siin on valge värviga joonistatud mustale tagapõhjale pokaal. Kui vaadata tähelepanelikult mustale pinnale, on näha kaks ühesugust pea siluetti. Mulje pildist muutub vastavalt sellele, kas suunata pilk valgelt mustale või vastupidi.



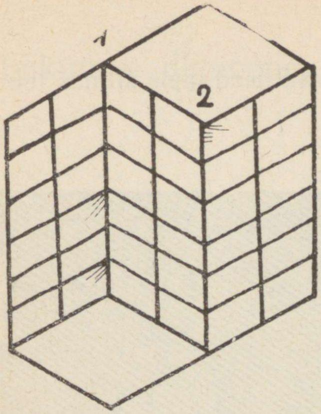
Mitu kuupi on siin näha, kuus või seitse? Olenevalt sellest, kas enamikku mustadest rombidest vaadeldakse pealmiste või alumiste tahkudena, nähakse kuut või vastavalt seitset kuupi.



Mis on kujutatud sellel joonisel? Mida kauem pilti vaatame, seda ebakindlamaks oma otsustuses muutume. Kord näeme treppi, mille astmed tõusevad alt vasakult paremale üles. Seejuures on mustad pinnad astmete pealispindadeks: hall pind 1 asub pinnast 2 eespool.

Vahetult pärast seda, kui vaatame joonise vasakpoolset ülemist nurka, paistab pind 1 eespool seisvana. Mulje pildist muutub, kui silmitseme pildi parempoolset alumist nurka ja pärast seda vasakpoolset ülemist nurka.

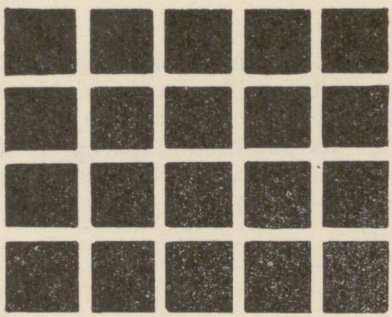
Pildist tekib veel kolmaski mulje: pinnad 1 ja 2 moodustavad ühise tausta, millel asetseb siksakjoones täisnurkselt volditud lint.



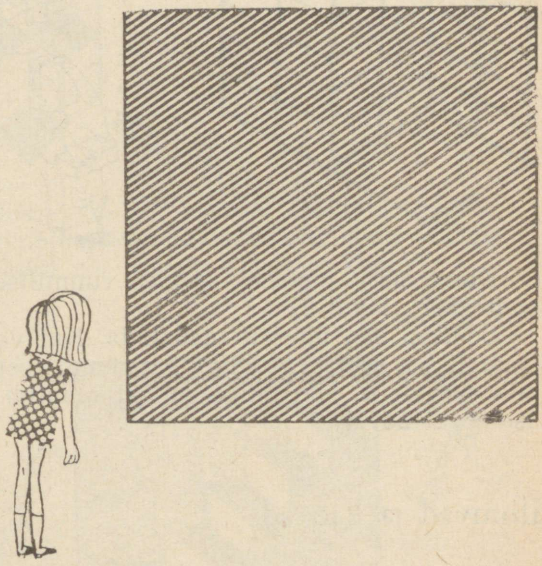
Kumb serv joonisel asetseb ruumiliselt kõige kaugemal eespool? Serv 1 või 2?

Seda ei saa üheselt otsustada. Kui vaadatakse servale 2, siis paistab see asetsevat kõige kaugemal eespool. Ent kui suunatakse pilk servale 1, siis mulje pildist muutub ja kohe näib esiplaanil asetsevat äär 1.

Ilmuvad ja kaovad.

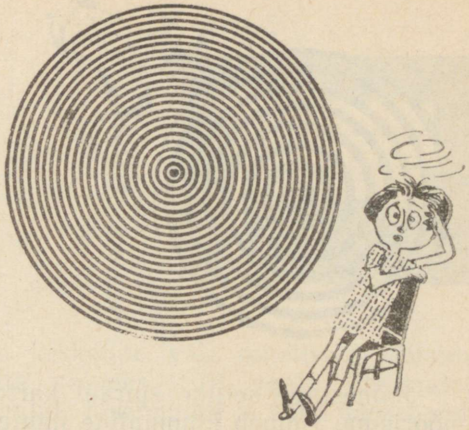


Sellel joonisel näeme valgete joonte ristumiskohtades halle punkte. Kui tahame üht neist punktidest täpsemalt vaadelda, kaob see kohe, niipea kui suuname pilgu punktile. Näeme alati ainult neid halle punkte, mis asetsevad meie vaatesuunast veidi kõrval ja mida pole pildile märgitud, küll aga ilmuvad need meie silmas tekkiva kujutise veana illusoorselt.

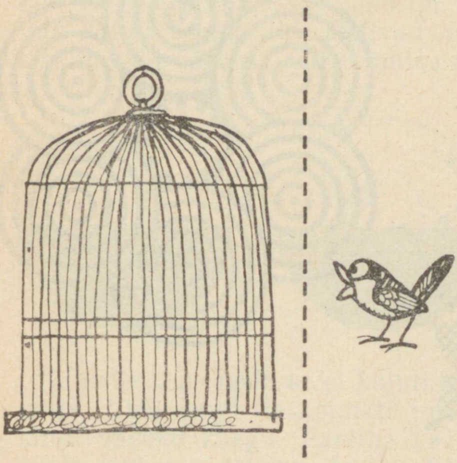


Vaata sellele joonisele. Juba mõne sekundi pärast hakkab seal «sadama lund». Hulk väikesi valgeid täppe liigub aeglaselt vasakult ülalt paremale alla, meenutades lumetuisku. Kui pöörata joonist 90° võrra, siis sajab lund paremalt ülalt vasakule alla. See optiline illusioon põhineb samuti meie silmas tekkiva kujutise veal. «Lumetuisku» ei või vaadelda liiga kaua, kuna see mõjub silmadele väsitavalt.

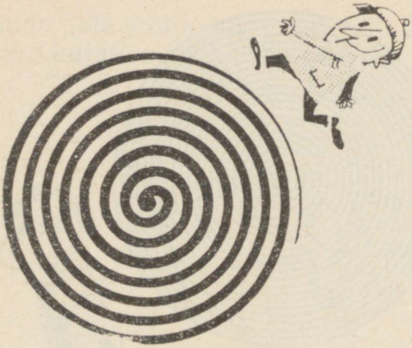
Liikumise illusioone.



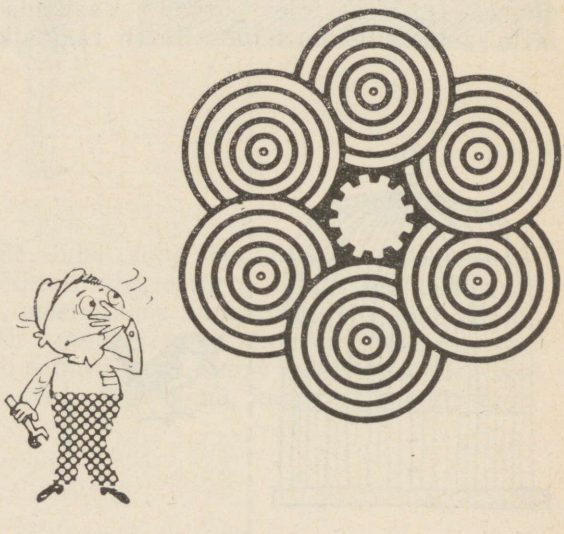
Kui selle joonise vaatlemisel teed raamatuga aeglaselt väikesi ringe, siis miski nagu pöörleks pildil. Näiliselt pöörleb kogu ringi diameetri ulatuses olev piirkond. Vaadeldav pöörlemine pildil toimub samas suunas, milles tiirleb raamatki.



Aseta joonisele piki kriipsjoont serviti postkaart või paberileht ja puuduta ninaotsaga seda «vaheseina». Siis näed vasaku silmaga ainult puuri, paremaga lindu. Kui avad üheaegselt mõlemad silmad, paistavad pildid ühte sulavat. Seejuures lind nagu hõljuks aeglaselt puuri.

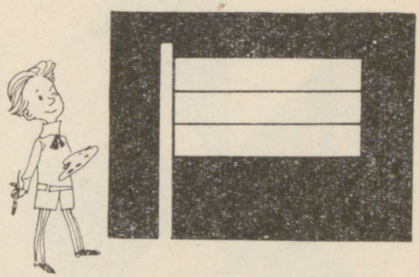


Joonestage selline spiraal kartongile ja pange ta nööpnõelal pöörlema. Ilmneb kummaline nähtus: vasakule pöörlemisel mähib spiraal end näiliselt sissepoole kokku, paremale pööreldes mähkub ta lahti väljapoole.



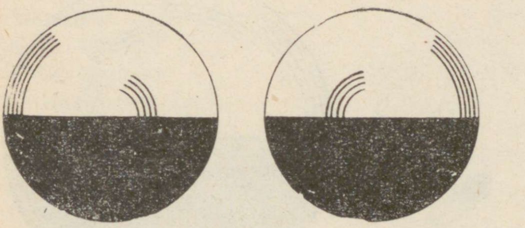
Ka selle pildi vaatlemisel teeme raamatuga väikesi ringe. Igas sõõride grupis täheldame samasugust liikumist nagu eelmise lehekülje joonise puhul. Peale selle pöörleb keskel olev hammasratas, ja nimelt alati raamatu tiirlemissuunale vastupidiselt. Mida kiiremini liigutame raamatut, seda selgemaks muutub näiv liikumine joonisel.

Illusoorsed värvid.



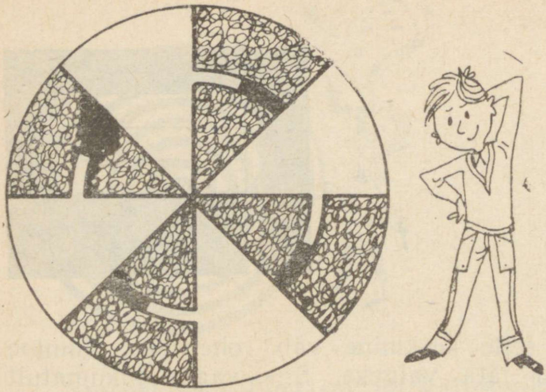
Joonista lipp ja värvi selle keskmine väli roheliseks, alumine violetseks. Ülemine väli jäta valgeks. Siis vaata liikumatult 10 sekundi vältel lipu diagonaalide lõikepunkti ja kohe pärast seda raamatulehe valget pinda. Umbes kahe sekundi pärast ilmub lipp värvidega must-punane-kollane. Alles ligikaudu 10 sekundit hiljem värviline pilt kaob.

See nähtus põhineb nägemisnärvide värviväsimusel, mis annab end tunda värvilise pildi pikemaajalisel vaatlemisel. Kui pilk siirdub valgele pinnale, on näha nn. komplementaarvärvusi. Pingutunud kohad võrkkestal aistivad eeskätt vaid neid valges värvis sisalduvaid värvusi, mille suhtes nad pole väsinud.

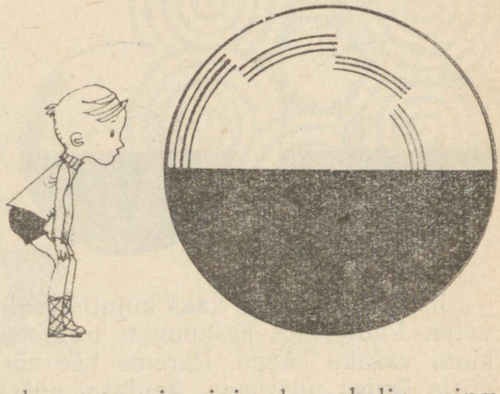


Joonestame need kaks kujutist valgele kartongile ning lõikame välja. Läbi ringi keskpunkti torkame nööpnõela, millest hoiame kinni vasaku käega. Parema käe sõrme löögiga pannakse ketas nõela ümber pöörlema. Aeglasel pöörlemisel elektrivalguses ilmuvad hämmastavad värvid. Vasakpoolse mudeli pöörlemisel paremale näeme väljaspool siniseid, seespool punaseid rõngaid. Kui muudame pöörlemissuunda, pöörduvad ka värvid. Pöörlemisel vasakule paistavad väljaspool punased ja seespool sinised rõngad.

Parempoolne mudel näitab pöörlemisel paremale väljaspool punaseid, seespool siniseid rõngaid.



Joonestame näidatud kujundi valgele kartongile neli korda, lõikame välja ning värvime joonisel näidatud hallid pinnad esimesel rõngal siniseks, teisel kollaseks, kolmandal roheliseks ja neljandal punaseks. Läbi ringi keskpunkti tuleb torgata nööpnõel. Kui paneme kettad pöörlema, siis paistab esimesel kettal peale sinise ka kollane rõngas, teisel peale kollase violetne, kolmandal peale rohelise punane ja neljandal peale punase roheline rõngas.



Sellel kettal saadakse peale punase ja sinise ka roheline ning kollane värvus.

Värvused muutuvad samuti pöörlemissuuna muutumisel.

Selle nähtuse avastaja järgi nimetatakse neid kolme mustvalget ketast Benhami ketasteks.

Sellele värvuste ilmumisele täiesti must-valgetel joonistel pole veel antud päris rahuldavat teaduslikku seletust.

Sisukord.

KEEMIA KATSEID

BIOLOOGIA KATSEID

OPTILISI ILLUSIOONE

Герхардт Нийзе. 100 ЯИЦ КОЛУМБА. На эстонском языке. Перевел с немецкого О. Кярнер. Художественное оформление и иллюстрации Э. Вальтера. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja M. Soosaar. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja M. Kukerman. Korrektor M. Maide.

Laduda antud 31. VIII 1970. Trükkida antud 25. XI 1970. Kohila Paberivabriku trükipaberi nr. 2. 60×84/16. Trükipoognaid 8,75. Tingtrükipoognaid 8,14. Arvestuspoognaid 6,91. Trükiarv 15 000. Tellimuse nr. 3291. Trükikoda «Ühiselu», Tallinn, Pikk t. 40/42.

Hind 45 kop.

45 kop.