ISSN 0494-7304 0132-053×

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

772

KONSTRUKTSIOONIDE DÜNAAMIKA JA OPTIMISEERIMINE

ДИНАМИКА И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИИ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

TARTU 1987

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 772 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

KONSTRUKTSIOONIDE DÜNAAMIKA JA OPTIMISEERIMINE

ДИНАМИКА И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИИ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

ТАРТУ 1987

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СТУПЕНЧАТЫХ БАЛОК

Т.Лепикулт
Тартуский государственный университет

В работе [2] было рассмотрено применение метода квазимодальных решений к классу задач динамически нагруженных балок и описан автоматизированный расчет этих задач. В данной работе излагается применение названного метода и пакета программ при решении одного типа оптимизационных задач.

I. Постановка задачи

Рассмотрим жестко-пластическую ступенчатую балку прямоугольного поперечного сечения, ширина которой постоянна. Закрепление балки не препятствует перемещению в осевом направлении. Если конец балки не свободен, прогиба там не возникает. Больше ограничений на краевые условия не предполагается.

Также задана совокупность произвольных поперечных нагрузок, интенсивность которых зависит от времени.

Поставим следующую задачу. При фиксированном объеме и числе ступеней балки требуется найти такие длины и высоты ступеней, чтобы максимальный остаточный прогиб балки после прекращения движения был бы минимален.

2. Описание хода решения задачи

Сначала определяем независимые параметры.

Пусть длина балки $- 2\ell$, объем $- V$, ширина $- B$ и число ступеней $- n$. Высота балки имеет скачки в сечениях $x = x_i$, $i = 1, \ldots, n - 1$.

Перейдем к безразмерным величинам

$$\alpha_i = \frac{x_i}{2\ell}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\gamma_i = \frac{h_i}{h_*}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где h_i - высота i-ой ступени балки, а h_*-средняя высота балки.

Поскольку $$V = 2B\ell h_* \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\alpha_i - \alpha_{i-1}) = const, \qquad (1)$$

где $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_n = 2$, то всего мы имеем $2n$ – I параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, из которых независимых $2n-2$. Один параметр может быть исключен из требования постоянства объема балки (I), которое равносильно требованию

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = c = const. \tag{2}$$

Если задача симметрична относительно середины балки, то число ступеней–нечетное число n_1, и, очевидно, что ввиду симметрии число независимых параметров равно n_1 – I.

Ограничения для параметров имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\alpha_{i-1} < \alpha_i < \alpha_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, n-1; \\ &\gamma_i > 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3}$$

Минимизации подлежит функционал

$$w_{max}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) = max\, w(\xi, \tau_f), \quad 0 \le \xi \le 2, \tag{4}$$

где τ_f – момент прекращения движения, а ξ – безразмерная координата вдоль оси балки.

Таким образом, сформулирована оптимизационная задача (2) – (4). Автором данной статьи сделана попытка реализовать решение названной задачи на ЭВМ. Для вычисления значения функционала (4) использован пакет программ, описанный в статье [2].

В ходе решения оптимизационной задачи возникли трудности в связи со спецификой зависимости функциона (4) от независимых параметров. Именно, выяснилось, что существуют куски гиперповерхности в пространстве допустимых значений параметров, где функционал (4) очень мало отличается от его оптимального значения, но вблизи этих кусков функционал очень резко возрастает. Большинство из методов определения минимума в таких условиях нестабильно. Но, с другой стороны, имея в виду требования практики, вместо определения точки минимума можно ограничиться выяснениям названных гиперповерхностей.

Автор статьи применил следующую стратегию для определения гиперповерхности оптимальности.

Обозначим независимые переменные через x_i (i = I, 2,... ..., n). Исходя из произвольно выбранной точки P_0 в области допустимых значений независимых параметров, производим однопараметрические оптимизации в k ортогональных направлениях (фиг. I) (автором статьи сделано это методом золотых сечений). В результате найдем точки $P_1, \ldots, P_k$. Эти точки определяют гиперплоскость в к-мерном пространстве. На фиг. I – прямая t_1. На этой гиперплоскости выбираем точки P'_{k+1}, P'_{k+2}, ... и производим однопараметрические оптимизации в направлении, ортогональном к ней. Получим точки P_{k+1}, P_{k+2}, ..., принадлежащие гиперповерхности оптимальности. Если расстояние между точками P'_n и P_n чрезмерно большое, можно исправить положение плоскости с помощью найденных точек P_{k+1}, P_{k+2}, ... (На фиг. I – прямые t_2 и t_3). Областью оптимальных значений параметров считаются те области гиперповерхности, на которых

$$\frac{|w(P_{k_i}) - w(P_{k_*})|}{w(P_{k_*})} \leq \varepsilon ,$$

где ε – заданное положительное число,

$$w(P_{k_*}) = \min_{k} w(P_k) ,$$

P_{k_i} – "оптимальные" точки.

3. Пример

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Требуется найти оптимальные параметры α и $\gamma = \gamma_2/\gamma_1$ симметричной трехступенчатой свободно опертой балки (фиг. 2), к которой приложено равномерное давление, изменяющееся во времени по закону (фиг. 3)

$$p(t) = \begin{cases} 20 \exp\left(\frac{\tau_* - \tau}{\tan(\pi\tau_*)}\right) \cdot \frac{\sin(\pi\tau)}{\sin(\pi\tau_*)} , & \tau \in [0,1] , \\ 0 , & \tau > 1 . \end{cases}$$

Число независимых параметров $k = 2$. Гиперповерхностью оптимальности является кривая, показанная на фиг. 4. Избранные два ортогональных направления – $\alpha = const$ и $\gamma = const$, начальная точка $P_0 = (1,5;\ 0,5)$. Максимальный прогиб, соответствующей оптимальным значениям параметров, составляет около 58 % от прогиба балки такого же объема, но постоянной высоты. Если принять $\varepsilon = 5\ \%$, то оптимальными можно считать те точки на кривой на фиг. 4, которые удовлетворяют условию $1{,}17 < \gamma < 2{,}28$.

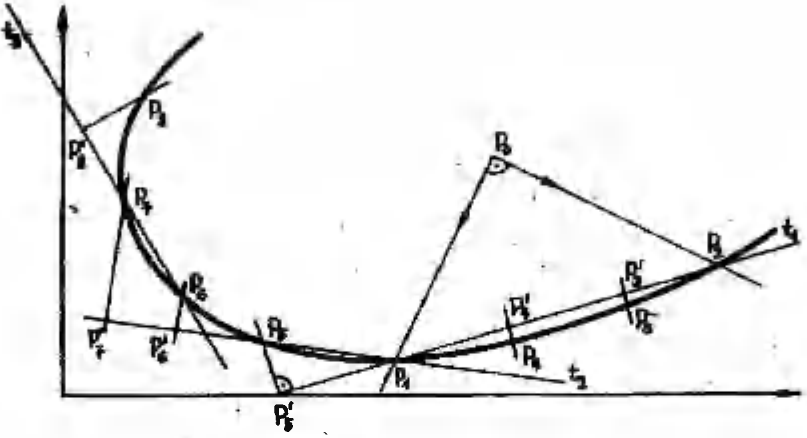
Некоторые значения максимальных прогибов балки при $\alpha = 0,5$ приведены в таблице I. Максимальный прогиб соответствующей балки постоянной высоты $w^* = 3,99$.

Таблица I

γ	w_{max}	γ	w_{max}
I,I0	3,64	I,35	3,I4
I,I5	2,66	I,40	3,29
I,20	2,78	I,45	3,4I
I,25	2,88	I,50	3,50
I,30	3,03		

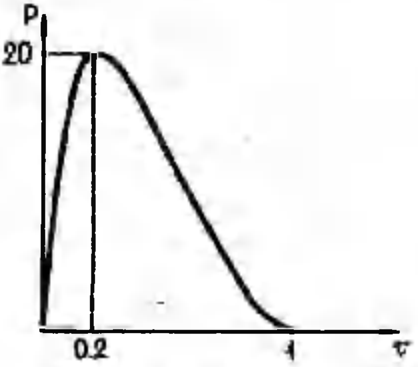
Для иллюстрации поведения минимизируемого функционала вблизи минимума на фиг. 5 приведены некоторые сечения поверхности $w = w(\alpha, \gamma)$ в направлениях $\alpha = const$.

При значениях параметров, соответствующих точкам выше кривой на фиг. 4, имеет место следующая картина движения (фиг. 6а). При достижении предельной нагрузки возникают пластические шарниры в точках скачков высоты $\xi = \alpha$ и $\xi = 2 - \alpha$. При увеличении давления они дестабилизируются и начинают двигаться в направлении концов балки. В фазе убывания нагрузки они вновь движутся в направлении середины балки, останавливаются в сечениях $\xi = \alpha$ и $\xi = 2 - \alpha$ и, наконец, исчезают. В области параметров ниже кривой на фиг.4 сначала возникает шарнир в середине балки. Через некоторое время он заменяется или двумя шарнирами в сечениях скачков, или, если $\gamma \approx I$, двумя шарнирами вблизи середины балки. Дальнейшее поведение балки выясняется на фиг. 6, б и в. На кривой оптимальности реализуется переход от режима деформирования а) к б) или в) соответственно (фиг. 6. г). При достижении предельной нагрузки возникает три шарнира, средний из которых сразу же исчезает. В фазе убывания нагрузки и инерционного движения замена механизмов движения всегда происходит в обратном порядке и с противоположными скоростями пластических шарниров по сравнению с фазой возрастания нагрузки.

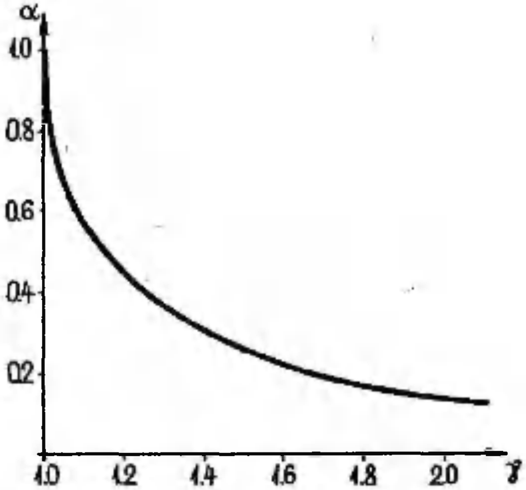


Фиг. I

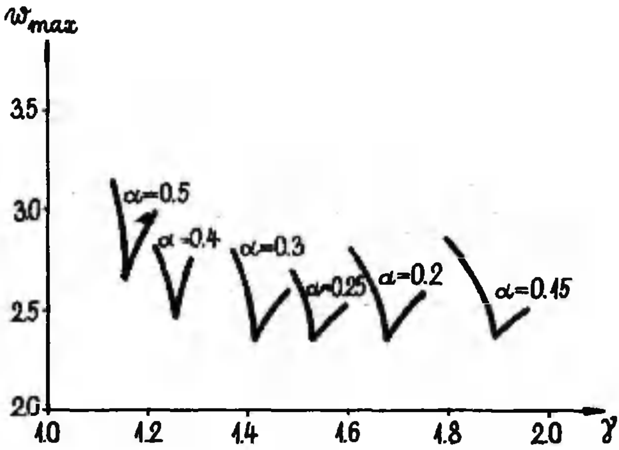
Фиг. 2



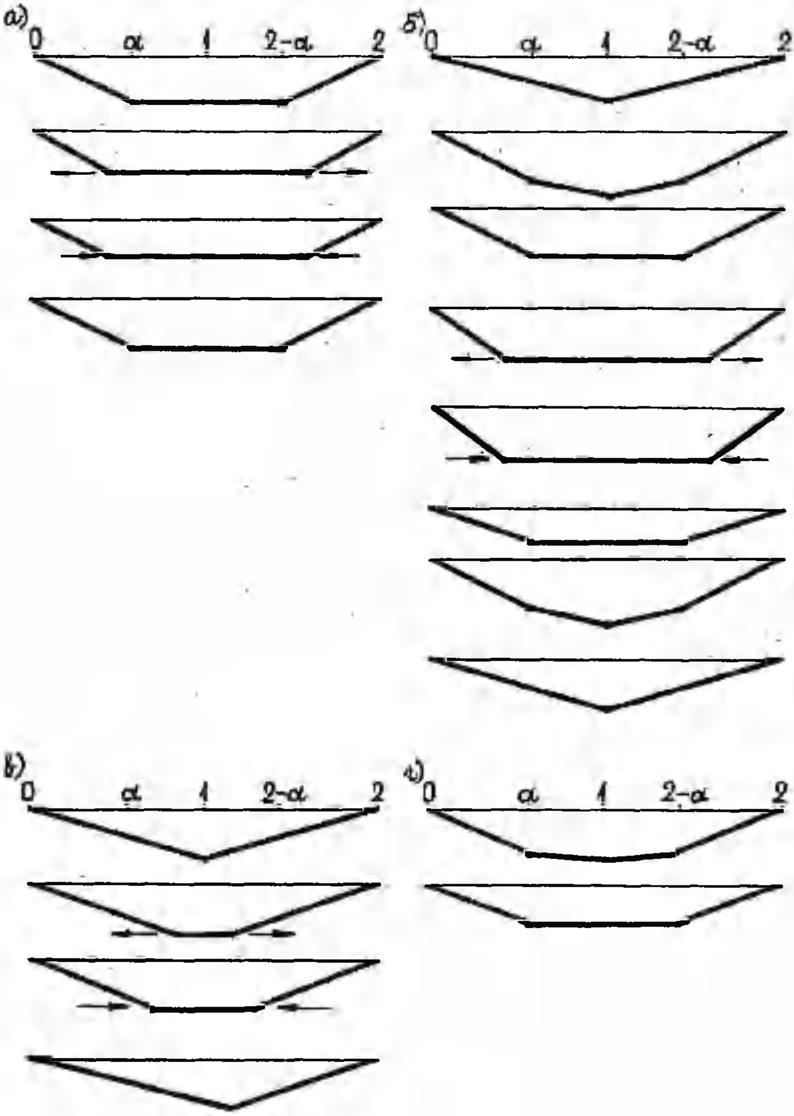
Фиг. 3


α
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
γ

Фиг. 4


w_{max}
3.5
3.0
2.5
2.0
α=0.5
α=0.4
α=0.3
α=0.25
α=0.2
α=0.15
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
γ

Фиг. 5



Фиг. 6

Литература

I. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин, "Валгус", I982.

2. Лепикулт Т., Автоматизированный расчет задач динамики жестко-пластических ступенчатых белок. Уч.зап.Тартуск. ун-та, I983, 659, I2 - 22.

Optimal design of rigid-plastic stepped beams

T. Lepikult

Summary

Problems of optimal design of rigid-plastic stepped beams are studied. The location of the beam parameters is sought for under the requirement that the maximal residual deflection attains the minimal value for a given volume. The strategy of searching regions of optimal parameters is presented. One example is given.

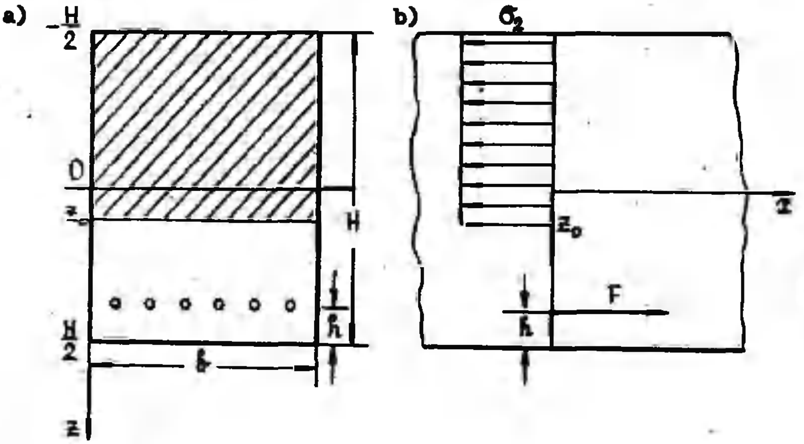
ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ АРМИРОВАННЫХ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК В СЛУЧАЕ УДАРНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Ю.Лепик
Тартуский государственный университет

В последнее время появился ряд работ, в которых исследуется задача оптимального проектирования жестко-пластических армированных балок под действием динамических нагрузок (перечень этих работ можно найти в [I]). По постановке задачи и методике решения наиболее близкой к данной работе является статья [I]. В отличие от [I] в данной работе считается, что растягивающие напряжения полностью принимаются арматурой (т.е. рассматриваются материалы типа железобетона). Различие имеется и в виде нагружения: в данной работе рассматривается случай, когда о балку ударяется сосредоточенная масса.

I. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим балку с прямоугольным поперечным сечением, в нижней части которой размещена арматура; пусть защитный слой связующего под арматурой имеет толщину h (фиг. Iа).



Фиг.I. а) Размеры поперечного сечения; б) распределение нормальных напряжений по высоте балки.

При изгибе в балке возникают зона сжатия $z \in (-H/2, z_0)$ и зона растяжения $z \in (z_0, H/2)$. Будем считать, что вследствие образования трещины связующий не может принимать растягивающих напряжений. В таком случае распределение нормальных напряжений по высоте балки имеет в предельном состоянии указанный на фиг. Iб вид. Обозначим пределы текучести арматуры и связующего символами σ_1, σ_2, поперечную площадь арматуры через $s(x)$. Тогда имеем $F = \sigma_1 s(x)$, и условие равновесия нормальных сил дает

$$\sigma_2 b(H/2 + z_0) = \sigma_1 s(x) . \qquad (I.I)$$

Предельный момент равняется

$$M_s^* = \sigma_1 s(x)(H/2 - h) + 1/2\, \sigma_2 b(H^2/4 - z_0^2) . \qquad (I.2)$$

В дальнейшем функцию $s(x)$ будем считать кусочно-постоянной. Для простоты ограничимся лишь случаем, когда $s(x) = s_1$ при $x \in (0, a)$ и $s(x) = s_2$ при $x \in (a, l)$.

Допустим, что некоторое сечение балки $x = x_m$ ударяется массой $\mathcal{G}$, которая имеет начальную скорость v_0^*. Будем считать, что длина балки l настолько превышает размеры поперечного сечения, что гипотезы Бернулли можно считать применимой. Уравнения движения имеют форму

$$\frac{\partial M^*}{\partial x} = Q^* , \qquad \frac{\partial Q^*}{\partial x} = m(x) \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} . \qquad (I.3)$$

Здесь M^*, Q^* – изгибающий момент и перерезывающая сила, w^* – прогиб, $m(x)$ – погонная масса, которая вычисляется по следующей формуле (ρ_1, ρ_2 – плотности арматуры и связующего):

$$m(x) = \rho_1 s(x) + bH\rho_2 . \qquad (I.4)$$

Для перерезывающей силы имеем еще в точке $x = x_m$ граничное условие

$$Q^*(x_m+, t) - Q^*(x_m-, t) = \mathcal{G} \left. \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} \right|_{x = x_m} \qquad (I.5)$$

Оптимизационную задачу поставим следующим образом. Среди проектов с постоянным объемом арматуры следует найти такой, при котором остаточный прогиб в некоторой заданной точке имеет минимальное значение. При этом зафиксированными считаются коэффициенты материалов σ_1 , σ_2 , ρ_1 , ρ_2 , размеры балки b , H , h : параметры нагрузки $\mathcal{G}$, v_0^* и объем арматуры V . Переменными параметрами, следовательно, являются лишь a , s_1 , s_2 . Но имея в виду, что объем арматуры вычисляется по формуле

$$V = a s_1 + (\ell - a) s_2 , \tag{I.6}$$

можем из этого выражения исключить одну из величин s_1 , s_2, и, таким образом, оптимизируемых параметров остается два.

Переходим к безразмерным величинам

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} , \qquad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} , \qquad \mu = \frac{V}{b\ell H} , \qquad \beta = \frac{\mathcal{G}}{b\ell H\rho_2} ,$$

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \xi_m = \frac{x_m}{\ell} , \quad \alpha = \frac{a}{\ell} , \quad \gamma = \frac{s_1}{\Delta_2} , \quad t_0 = \frac{v_0^* \rho_2 \ell^2}{\sigma_2 H} , \quad \tau = \frac{t}{t_0} , \tag{I.7}$$

$$\Delta = \frac{V}{\ell s_2} , \qquad M = \frac{M^*}{\sigma_2 b H^2} , \qquad Q = \frac{Q^* \ell}{\sigma_2 b H^2} , \qquad w = \frac{w^*}{v_0^* t_0} .$$

Выясним физический смысл некоторых параметров в формулах (I.7). Величина μ покажет, какую долю объема конструкции составляет арматура (т.е. процент армирования). **Параметр** β определяет отношение падающей массы к массе балки без арматуры.

Если перейти к обозначениям (I.7), то уравнения (I.3) – – (I.5) принимают форму (здесь и в дальнейшем штрихи обозначают дифференцирование по ξ , точки – по безразмерному времени τ) :

$$M' = Q , \qquad Q' = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta} \rho \mu\right) \ddot{w} ,$$

$$Q(\xi_m +, \tau) - Q(\xi_m -, \tau) = \beta \ddot{w}(\xi_m, \tau) . \tag{I.8}$$

Формула (I.6) имеет в безразмерных величинах вид

$$\Delta=\alpha\gamma+1-\alpha . \qquad (I.9)$$

Введем еще безразмерный предельный момент $M_\Delta=M_\Delta^*/(\sigma_\Delta b H^2)$. Исключая из (I.I) величину z_ξ, можем соотношение (I.2) представить в форме

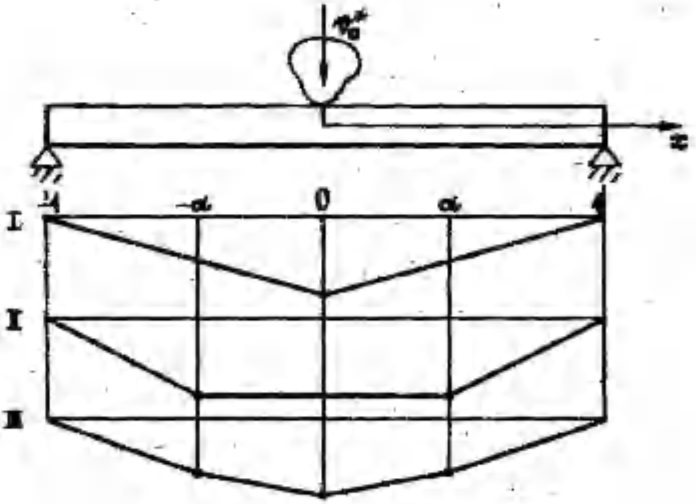
$$M_\Delta=\begin{cases} M_1=\frac{1}{\Delta}\sigma\gamma\mu\left(1-\frac{h}{H}-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\Delta}\sigma\mu\right) & \text{при } \xi<\alpha, \\ M_2=\frac{1}{\Delta}\sigma\mu\left(1-\frac{h}{H}-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta}\sigma\mu\right) & \text{при } \xi>\alpha . \end{cases} \qquad (I.10)$$

Теперь следует проинтегрировать систему уравнений (I.8) при соответствующих граничных условиях. Кроме того, должно быть выполнено неравенство $|M(\xi)|<M_\Delta$ при $\forall\xi\in(0,1)$. Точное интегрирование этих уравнений является весьма сложным, поэтому будем применять приближенный метод – метод модальных движений. Как показано в [I–3], в случае задач оптимизации этот метод дает результаты, практически совпадающие с точными. Детали решения на основе метода модальных движений даются в пп. 2–3 данной статьи.

2. Балка на двух опорах

Проведем вычисления для свободно опертой балки, считая, что груз $\mathcal{G}$ падает в центр балки (фиг. 2). Из-за симметрии можем теперь рассмотреть лишь одну половину балки (в дальнейшем под символом l будем понимать половину длины балки). В сечениях, где изгибающий момент достигает свое предельное значение, возникают пластические шарниры. Участки балки между шарнирами не деформируются и остаются прямолинейными. Естественно предполагать, что шарниры возникают в сечениях $\xi=0$ и $\xi=\alpha$. Опираясь на это, задаем поле скоростей в форме

$$\dot{w}(\xi,\tau)=\begin{cases} \dot{w}_\alpha+\frac{\dot{w}-\dot{w}_\alpha}{\alpha}(\alpha-\xi) & \text{при } \xi\in[0,\alpha] \\ \frac{\dot{w}_\alpha}{1-\alpha}(1-\xi) & \text{при } \xi\in[\alpha,1] \end{cases} \qquad (2.I)$$



Фиг.2. Балка на двух опорах, форма движения.

С целью получения выражения для ускорения $\ddot{w}(\xi,\tau)$ продифференцируем соотношения (2.I) по времени, учитывая при этом, что величины w_α, w зависят от τ. Эти результаты подставим в уравнения (I.8) и проинтегрируем эту систему дважды по ξ. Удовлетворяя еще условиям непрерывности для Q и M при $\xi=\alpha$ и граничному условию $Q(0,\tau)=\beta\ddot{w}(\tau)$, находим

$$M=\begin{cases} M(0,\tau)+\beta\ddot{w}\xi+\frac{\xi^2}{6\alpha}\eta_\gamma\left[3\alpha\ddot{w}_\alpha+(3\alpha-\xi)(\ddot{w}-\ddot{w}_\alpha)\right] & \text{при } \xi\in[0,\alpha], \\ M(\alpha,\tau)+Q(\alpha,\tau)-\frac{\eta_1}{6(1-\alpha)}(\xi-\alpha)^2(\xi+2\alpha-3)\ddot{w}_\alpha & \text{при } \xi\in[\alpha,1], \end{cases} \qquad (2.2)$$

где

$$\eta_\gamma=1+\frac{\gamma}{\Delta}\varphi\mu, \qquad \eta_1=1+\frac{1}{\Delta}\varphi\mu, \qquad Q(\alpha,\tau)=\beta\ddot{w}+\frac{\alpha}{2}(\ddot{w}+\ddot{w}_\alpha)\eta_1 . \qquad (2.3)$$

Удовлетворим теперь граничному условию $M(1,\tau)=0$; из (2.2) - (2.3) находим, что

$$M(0,\tau)=A_1E+B_1F\,,\qquad M(\alpha,\tau)=A_2E+B_2F\,. \tag{2.4}$$

Здесь обозначено $E=\dot{\vartheta}_\alpha$, $F=\dot{\vartheta}$; кроме того,

$$A_1=-\frac{\alpha^2}{6}\eta_\gamma-\frac{1}{6}(2-\alpha-\alpha^2)\eta_1\,,\qquad B_1=-\beta-\frac{\alpha^2}{3}\eta_\gamma-\frac{\alpha}{2}(1-\alpha)\eta_1\,,$$
$$A_2=-\frac{1}{6}(2-\alpha-\alpha^2)\eta_1\,,\qquad B_2=-\beta(1-\alpha)-\frac{\alpha}{2}(1-\alpha)\eta_1\,. \tag{2.5}$$

При методе модального движения возможны лишь три формы движения, указанные на фиг. 2. Рассмотрим их поближе.

В случае формы движения I должны быть выполнены требования

$$M(0,\tau)=M_1\,,\qquad M(\alpha,\tau)<M_2\,, \tag{2.6}$$

причем предельные моменты M_1 , M_2 определяются по формуле (I.10). Из прямолинейности отрезка $\dot{w}=\dot{w}(\xi)$ при $\xi\in(0,1)$ получим $E=F(1-\alpha)$. Учитывая соотношения (2.4)-(2.5), можем условия (2.6) написать в виде

$$[A_1(1-\alpha)+B_1]F=M_1\,,\qquad [A_2(1-\alpha)+B_2]F<M_2\,. \tag{2.7}$$

Во втором случае шарниры возникают в сечениях $\xi=\pm\alpha$, и мы имеем $E=F$, $M(0,\tau)<M_1$, $M(\alpha,\tau)=M_2$. Эти требования можно представить в форме

$$(A_2+B_2)F=M_2\,,\qquad (A_1+B_1)F<M_1\,. \tag{2.8}$$

Таким же образом в третьем случае имеем

$$E<F(1-\alpha)\,;\qquad A_1E+B_1F=M_1\,,\qquad A_2E+B_2F=M_2\,. \tag{2.9}$$

Проверяя выполнимость требований (2.7)-(2.9), увидим, какие из этих трех форм движения возможны в случае выбранных значений параметров, а также найдем величины E и F .

Теперь мы имеем два поля начальных скоростей. Действительное распределение начальных скоростей имеет форму $v^*(x) = v_0^*$ при $x=0$ и $v^*(x)\equiv 0$ при $x\neq 0$. Поле начальных скоростей для модального движения $v=v(x)$ определяется согласно формам движения из фиг. 2. Эти два поля можно связывать методом Мартина-Саймондса (см. [4], [2], стр. I2-I3, 49). Соответствующее уравнение имеет в данном случае вид

$$\int_0^a (BHq_2+\Delta_1 q_1)v^2(x)dx+\int_a^l (BHq_2+\Delta_2 q_1)v^2(x)dx+$$
$$+\frac{1}{2}Qv^2(0)=\frac{1}{2}Qv(0)v_0^* .$$

Переходя к безразмерным величинам (I.7), эта формула примет вид

$$\eta_\gamma\int_0^a \dot w^2(0,\xi)d\xi+\eta_1\int_a^1 \dot w^2(0,\xi)d\xi+\beta v^2(0)=\beta v(0) \qquad (2.10)$$

Имея в виду соотношения (2.I) и проведя интегрирование в (2.I0), находим

$$v(0)=3\beta\left[3\beta+a\eta_\gamma(1+\lambda+\lambda^2)+(1-a)\eta_1\lambda^2\right]^{-1} , \qquad (2.11)$$

где $\lambda=E/F=v_a(0)/v(0)$.

Остаточный прогиб в центре балки определим следующим образом. Из зависимостей (2.6)-(2.8) вытекает, что величина $F=\dot v$ не зависит от времени, следовательно,

$$v(\tau)=v(0)+F\tau , \qquad w(0,\tau)=v(0)\tau+0{,}5F\tau^2 . \qquad (2.12)$$

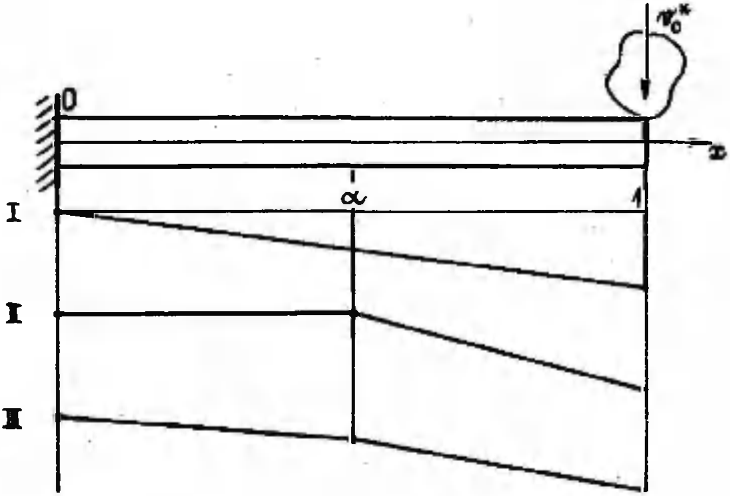
Движение заканчивается в некоторый момент времени τ_*, когда $v(\tau_*)=0$. Из (2.I2) находим, что

$$\tau_*=-\frac{v(0)}{F} , \qquad W=w(0,\tau_*)=-\frac{v^2(0)}{2F} . \qquad (2.13)$$

3. Консольная балка

Рассмотрим теперь балку, левый конец которой заделан, а на правый падает груз. Здесь возможны модальные формы движения, покананные на фиг. 3. В соответствии с этим задаем эпюры скоростей в виде

$$\dot{w}(\xi,\tau)=\begin{cases}\dfrac{v_\alpha \xi}{\alpha} & \text{при } \xi\in[0,\alpha],\\[2ex] v_\alpha+\dfrac{v-v_\alpha}{1-\alpha}(\xi-\alpha) & \text{при } \xi\in[\alpha,1]\end{cases}\qquad (3.I)$$



Фиг. 3. Консольная балка, формы движения.

Дальнейший ход решения по существу не отличается от проведенного в п. 2 ; вследствие этого ограничимся здесь лишь окончательными результатами.

В уравнениях (2.4) следует теперь под величинами A_1 , A_2 , B_1 , B_2 понимать следующие:

$$A_1=\frac{\alpha^2}{3}\eta_\gamma+\frac{1}{6}(1-\alpha)(1+2\alpha)\eta_1\,, \qquad B_1=\beta+\frac{1}{6}(1-\alpha)(2+\alpha)\eta_1\,,$$
$$A_2=\frac{1}{6}(1-\alpha)^2\eta_1-\frac{\alpha^2}{6}\eta_\gamma\,, \qquad B_2=(1-\alpha)\beta+\frac{1}{3}(1-\alpha)^2\eta_1\,. \tag{3.2}$$

В случае первой формы движения из фиг. 3 имеем

$$E=\alpha F\,, \qquad (A_1\alpha+B_1)F=-M_1\,, \qquad |(A_2\alpha+B_2)F|<M_2\,. \tag{3.3}$$

Если реализуется вторая форма движения, то $E=0$,и мы находим

$$B_2F=-M_2\,, \qquad |B_1F|<M_1\,. \tag{3.4}$$

Третья форма движения имеет место при условиях

$$E>\alpha F\,, \qquad A_1E+B_1F=-M_1\,, \qquad A_2E+B_2F=-M_2\,. \tag{3.5}$$

Величина $v(0)$ вычисляется по формуле

$$v(0)=3\beta\left[3\beta+\alpha\eta_\gamma\varkappa^2+(1-\alpha)\eta_1(1+\lambda+\varkappa^2)\right]^{-1}. \tag{3.6}$$

Остаточный прогиб на свободном конце определяется соотношением

$$W=w(1,\tau_*)=\frac{v^2(0)}{2F}\,. \tag{3.7}$$

4. Анализ численных результатов

Рассмотрим балку высотой H = 30 см, шириной b = 16 см. Балка изготовлена из бетона с плотностью ρ_2 = 1950 кг/м^3 . Арматура имеет плотность ρ_1 = 7800 кг/м^3. Защитный слой бетона под арматурой имеет толщину h = 2 см. Пусть пределы текучести арматуры и бетона равняются σ_1 = 250 MPa , σ_2 =12,5 MPa. В таком случае безразмерные параметры из (I.7) приобретают значения σ = 20, ρ = 4, h/H = 0,07. Для доли армирования примем μ = 0,0I. Будем решать задачу при разных значениях параметра нагрузки β, выбирая за оптимизируемых параметры α и γ.

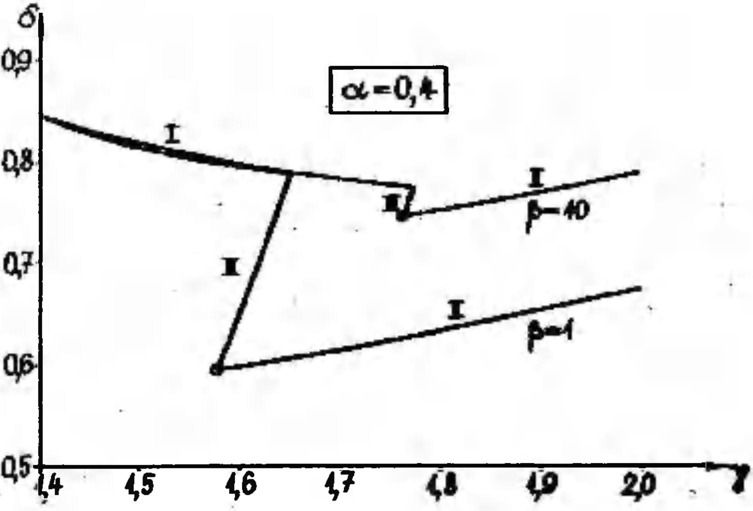
Начнем анализ со случая $\gamma = I$ (арматура распределена вдоль оси балки равномерно). Здесь всегда реализуется первая форма движения на фиг. 2-3, и мы получим для безразмерного прогиба W_* значения, указанные в табл. I (отметим, что эти цифры одинаковы как для консольной, так и для балки на двух опорах).

Таблица I

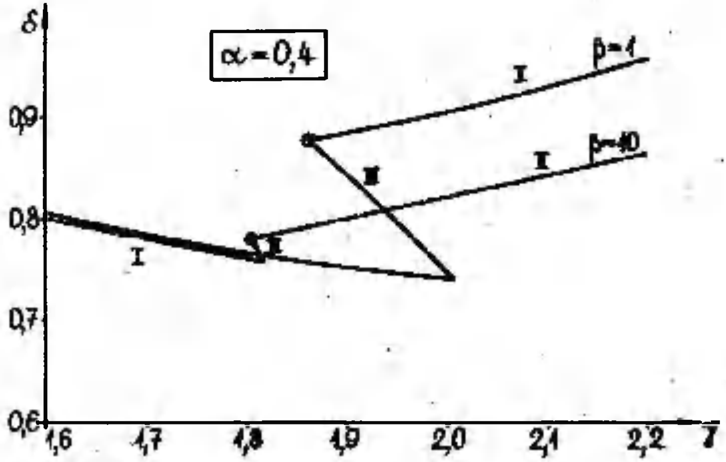
Безразмерные прогибы
в случае равномерного распределения арматуры

β	I	2	5	I0
W_*	2,24	5,I3	I4,08	29,II

С целью получения информации о поведении решения задачи зафиксируем параметр α и вычислим для разных значений γ остаточный прогиб W. Результаты при $\alpha = 0{,}4$ представлены на фиг. 4-5, где $\delta = W/W_*$ и римскими цифрами I - III отмечены формы движения на фиг. 2-3. Из фиг. 4-5 вытекает, что



Фиг.4. Безразмерные прогибы балки на двух опорах при $\alpha = 0{,}4$



Фиг.5. Безразмерные прогибы консольной балки при $\alpha = 0,4$.

существует некоторая область $\gamma_* < \gamma < \gamma^*$, в которой решение является не единственным,т.е. возможны все формы движения I – III. Это обстоятельство обусловлено тем, что – мы решали задачу приближенно методом модальных движений (точное решение является всегда единственным). В связи с этим возникает вопрос, какую точку на фиг.4–5 считать оптимальной. Ответ на этот вопрос может дать лишь сравнение с точными решениями. Это было и сделано в работах [I–3]. Выясняется, что минимальные прогибы имеют место в точках, где решение типа III переходит в решение типа II (эти точки на фиг.4–5 отмечены кружками). Этот факт мы учтем и в дальнейшем при составлении оптимальных проектов.

При решении оптимизационной задачи будем изменять величину γ в некотором диапазоне, а оптимальное значение для α определим из уравнений (2.7) или (3.4), заменяя там знаки неравенства знаками равенства (в этом случае мы попадем в точку разветвления форм II и III). Результаты вычислений для β = = I ; β = 2, β = 5 и β = I0 представлены в таблице 2.

Таблица 2

Оптимальные проекты балок

А. Балка на двух опорах

γ	β = I		β = 2		β = 5		β = I0	
	α	W	α	W	α	W	α	W
2,0			0,50I	3,200	0,476	9,84	0,467	2I,22
2,5	0,630	I,I33	0,602	3,094	0,579	9,72	0,569	2I,I7
3,0	0,695	I,I06	0,670	3,064	0,649	9,77	0,640	2I,42
3,5	0,74I	I,092	0,7I9	3,060	0,699	9,87	0,69I	2I,75
4,0	0,775	I,086	0,755	3,066	0,737	9,98	0,729	22,07
4,5	0,80I	I,082	0,783	3,076	0,766	I0,08		
5,0	0,822	I,08I	0,805	3,086	0,790	I0,I7		
5,5	0,838	I,080	0,823	3,097				
6,0	0,852	I,080	0,839	3,I07				
6,5	0,864	I,080	0,85I	3,II7				
7,0	0,874	I,080	0,862	3,I25				
Б. Консольная балка								
I,4	0,235	I,974	0,243	4,379	0,249	II,70	0,25I	23,94
I,6	0,3I5	I,947	0,324	4,272	0,33I	II,32	0,333	23,09
I,8	0,38I	I,95I	0,39I	4,240	0,397	II,I6	0,400	22,72
2,0	0,437	I,97I	0,446	4,25I	0,452	II,I3	0,454	22,6I
2,2	0,484	2,00I	0,492	4,285	0,498	II,I7	0,500	22,66
2,4	0,524	2,035	0,532	4,332	0,538	II,25	0,540	22,79
2,6			0,566	4,386	0,57I	II,35	0,573	22,97
2,8			0,596	4,442	0,60I	II,46	0,602	23,I7
3,0					0,627	II,58	0,628	23,39

В таблицу помещены лишь те значения W , которые отличаются от его минимального значения не больше чем на 5 %.

Возникает вопрос, почему мы не сразу нашли оптимальные значения для обоих параметров α и γ, а представили данные вычислений в виде таблицы 2. Главной причиной для этого является обстоятельство, что проектировщик не может плавно изменить параметр γ, определяющий объем арматуры (значения параметра γ определяются, например, числом и диаметром арматурных стержней). Кроме того, все проекты, представленные в таблицах, дают для прогиба W близкие значения, и поэтому их можно считать равноценными.

Интересно еще выяснить, на сколько уменьшается прогиб оптимальной конструкции по сравнению с конструкцией с равномерно распределенной арматурой. Это нетрудно вычислить по данным таблиц I–2. Выясняется, что в случае консольной балки уменьшение прогиба достигает от I3 % до 22 %, причем этот процент увеличивается с ростом величины β. В случае балки на двух опорах при β = I прогиб уменьшается на 52 %. С ростом нагрузки этот эффект уменьшается и при β = I0 равен 23 %. Таким образом, путем более рационального распределения арматуры можно жесткость балки значительно увеличить.

Если нас интересует граница между зонами растяжения и сжатия, то целесообразно в формуле (I.I) перейти к безразмерным величинам (I.7). Сделав это, получим

$$z_0 = \left(\frac{2\mu\sigma\gamma^0}{\Delta} - 1\right)\frac{H}{2} ,$$

причем $\gamma^0 = \gamma$ при $\xi \in (0,\alpha)$ и $\gamma^0 = 1$ при $\xi \in (\alpha,1)$. В качестве примера рассмотрим балку на двух опорах при γ = 2, β = I0. По данным таблицы 2 имеем $\alpha_{опт}$ = 0,467, и мы находим Δ = I,467, z_0 = – 6,8 см при $\xi \in (0,\alpha)$ и z_0 = – I0,9 см при $\xi \in (\alpha,1)$.

Литература

I. Аунин У.Х., Леллеп Я.А., Сакков Э.Э. Оптимальное проектирование пластических армированных балок, подверженных импульсному нагружению. – Мех.комп.материалов,1986,№2.

2. Лепик Ю. Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. – Изд."Валгус", Таллин, 1982, 196.

3. Соонетс К. Оптимальное проектирование консольной балки при поперечном ударе о ее свободный конец. - Уч. зап. Тартуского ун-та, 1982, № 627, 24-34.

4. Martin J.B., Symonds P.S. Mode approximation for impulsively loaded rigid-plastic structures. - J.Eng.Mech. Div. Proc. ASCE, 1966, 92, pp. 43-66.

Optimal design of reinforced rigid-plastic beams under impact loading

Ü.Lepik.

Summary

A rigid-plastic beam of rectangular cross-section is considered. The lower part of the beam is reinforced; the cross-section of the armature is a step-wise continuous function. It is assumed that because of the crack building the beam can resist only to compressive stresses. The beam is struck by an attached mass with a subscribed velocity.Such designs, for which the residual defelctions for a given amount of armature turn to be minimal, are considered optimal.Numerical results for simply supported and console beams are given.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ СТУПЕНЧАТОЙ БАЛКИ

Ю.Лепик
Тартуский государственный университет

В инженерной технике часто применяются балки, высота которых меняется скачком. При изгибе таких балок обычно исходят из гипотез Бернулли, требуя непрерывности прогиба, наклона упругой линии, изгибающего момента и перерезывающей силы в сечениях, где высота балки имеет скачок. Расчетные формулы, найденные по такой методике, вошли уже в ряд справочников.

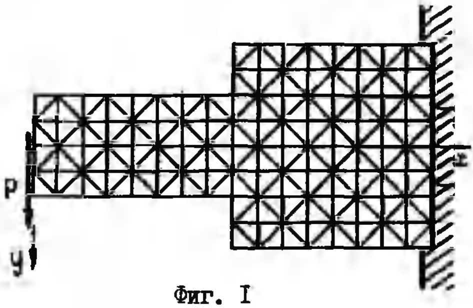
При таком подходе мы игнорируем эффект концентрации напряжений вблизи сечений, где высота меняется ступенчатым образом. Существуют интуитивные соображения, согласно которым концентрация напряжений мало влияет на зависимость нагрузка-прогиб. Так, например, в книге [3] на стр. 229-230 можно прочесть: "Если размеры поперечного сечения балки меняются скачком, то вблизи мест подобных изменений будут возникать концентрации напряжений, носящие локальный характер, однако эти локальные напряжения не могут оказывать существенного влияния на вычисление прогибов." Целью данной работы является проверка этого утверждения в случае одного конкретного примера. Кроме того, исследуется характер перераспределения напряжений вблизи сечения, где имеет место скачок.

I. Постановка задачи и метод решения

Для конкретности рассмотрим консольную балку длины l. Правый конец балки защемлен, на левом конце приложена поперечная сила P. Координатные оси выбираем согласно фиг. I. Допустим, что в сечении $x=a$ высота балки меняется скачком, причем $h=h_1$ при $0<x<a$ и $h=h_2$ при $a<x<l$ ширину балки возьмем равной единице. Модули упругости обозначим символами E и ν.

Рассмотрим данную задачу изгиба как задачу о плоском напряженном состоянии и решим её методом конечных элементов. Разделим балку на треугольные элементы в соответствии с фиг.I.

Для формирования матрицы жесткости для решения системы уравнений и для определения перемещений и напряжений были применены без существенных изменений программы из [2] .



Фиг. I

2. Результаты

С целью сравнения результатов, полученных нами методом конечных элементов с известными теоретическими решениями, рассмотрим вначале балку постоянной высоты. Как известно из теории упругости (см., например, [I], стр. 6I-65), точное решение дает

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), \quad I = \frac{h^3}{12} \qquad (I)$$

Уравнение упругой линии имеет вид

$$v(x,0) = \frac{P}{6EI}\left(2l^3 - 3l^2x + x^3\right). \qquad (2)$$

Наибольший прогиб равняется

$$f = v(0,0) = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI} \qquad (3)$$

Выберем следующие значения для размеров балки и для коэффициентов материала: l = 50 см, $h = h_1 = h_2$ = 8 см,

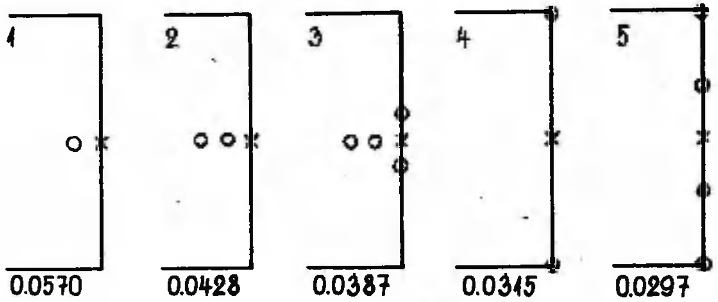
$E = 2{,}I \cdot I0^6$ кГ/см^2, v = 0,3.

Для нагрузки возьмем P = 2I = 85,33 кГ ; будем считать, что она распределена по торцу x = 0 согласно закону параболы.

Разделим балку по длине на 50 частей и по высоте на 8 частей. В таком случае имеем всего 459 узлов и 800 элементов.

Проводя вычисления по МКЭ, находим, что распределение напряжений близко к тем, которые получаются из формул (I). Существенные различия имеют место лишь в сечениях, близких к закреплению $x = l$ (там появляется краевой эффект).

Что касается прогибов, то здесь результаты зависят от вида закрепления конца x = l . Пять возможных видов закреплений указаны на фиг. 2, где символ Φ обозначает закрепление в направлении x, символ Θ – в направлении y и знак + обозначает закрепление в обоих направлениях. Цифрами обозначены прогибы при $x = 0$. В случае аналитического решения согласно формуле (3) имеем $f = 0{,}0397$ см. При построении аналитического решения (I) – (3) считается, что $u = v = 0$ и $\delta v/\delta x = 0$ при $x = l$. Это соответствует закреплению I



Фиг. 2

из фиг. 2. При применении МКЭ такой вид закрепления дает для прогибов слишком большие значения. Наилучшее совпадение с аналитическим решением получается в случае 3. Закрепление вида 5 было применено в работе [4]. Такое расхождение результатов, на наш взгляд, обусловлено тем, что при решении данной задачи мы применили треугольники с шестью степенями свободы. Если увеличить число степеней свободы элементов, то различие между разными видами закреплений, по-видимому, уменьшится, но этот вопрос не является предметом исследования в данной работе.

Перейдем теперь к балке кусочно-постоянной толщины, для которой $h = h_1$ при $x<a$ и $h = h_2$ при $a < x \leq l$. Решая эту задачу по обычной теории изгиба балок, получим для вычисления прогиба v формулы

$$v=-\kappa_1(x-a)^2(x+2a)-\kappa_2(l-a)[2(l^2+al+a^2)-3(l+a)x]$$

при $x<a$,

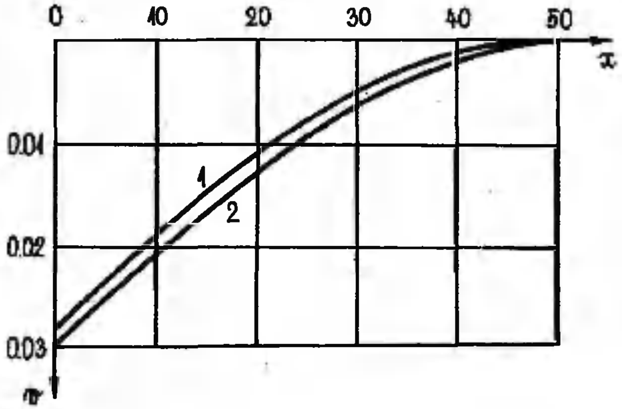
$$v=-\kappa_2[(x-a)^3+3a(x-a)^2-3(l^2-a^2)(x-a)+(l-a)^2(2l+a)]$$

при $x>a$. (4)

Здесь обозначено

$$\kappa_1 = \frac{2P}{Eh_1^3}\ , \qquad \kappa_2 = \frac{2P}{Eh_2^3} \qquad (5)$$

Проведем конкретные расчеты при $\ell = 50$ см, $h_1 = 8$ ом, $h_2 = 12$ см, $a = 42$ см, $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ кГ/см^2, $\nu = 0{,}3$, $P = 85{,}33$ кГ. Разделим балку на треугольные элементы в соответствии с фиг. I, так, что все треугольники являются равнобедренными и имеют длину сторон I см. В таком случае получается всего 495 узловых точек и 864 ячейки. Для граничных условий при $x = \ell$ выбираем вариации 3 из фиг. 2.



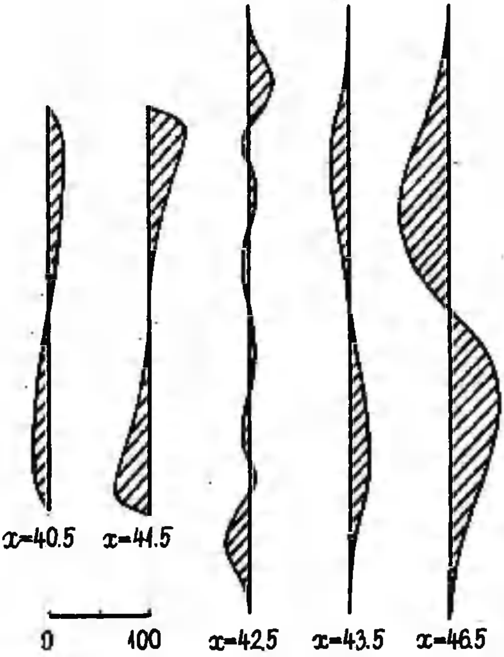
Фиг. 3

Зависимость $v = v(x)$, вычисленная по формулам (4) - (5) и при помощи МКЭ, представлена на фиг. 3; кривая I соответствует аналитическому решению, кривая 2 - решению по МКЭ. Наибольший прогиб равен в случае аналитического решения $f = 0{,}0283$ см, при численном решении находим $f = 0{,}0302$ см. На основании фиг. 3 можно сделать вывод, что концентрация напряжений вблизи сечения $x = a$ существенного влияния на прогибы балки не оказывает.

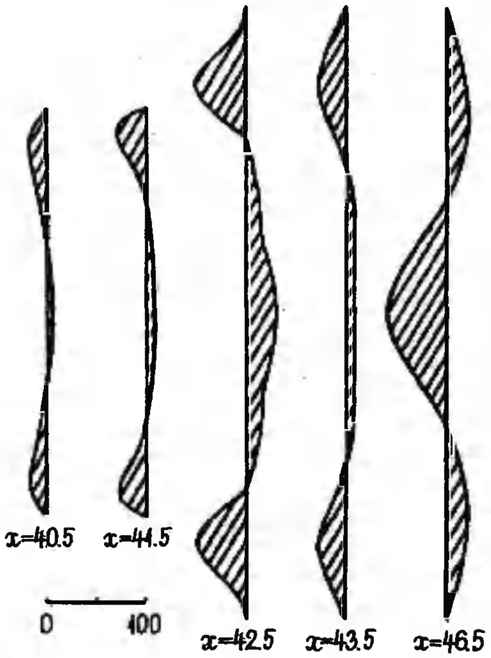
С целью выяснить характер перераспределения напряжений около сечения $x = a$ составлены эпюры вдоль высоты балки для компонент напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} (фиг. 4-6). На достаточном расстоянии от сечения $x = a$ эти напряжения определяются формулами типа (I), т.е. напряжение σ_x изменяется линейно, σ_y близко к нулю и τ_{xy} изменяется по параболическому закону.

Аналогичные результаты получены и для равномерно распределенной поперечной нагрузки, а также для некоторых других видов краевых условий при $x = 0$ и $x = \ell$.

Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Литература

I. Ван Изи-де, Прикладная теория упругости. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.

2. Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике. М., "Мир", 1976.

3. Тимошенко С.П., Гере Дж., Механика материалов. М.,"Мир", 1976.

4. Sugimoto, Kawashima, Watanabe, Some considerations on Prager-Hodge beam theory by FEM. J.Jap Soc.Technol.Plast., 1984, 25, № 278, 195-200 (на яп. языке).

Investigation of displacements and stresses of an elastic two-stepped beam

Ü. Lepik

Summary

In case of bending of elastic beams with segment-wise constant height concentration of stresses appears near the sections, where the height of the beam has a discontinuity. The main purpose of this paper is to clear out how this effect influences deflections of the beam.

Calculations are carried out for a two-stepped console beam under a concentrated load, which acts on the free end of the beam. The problem is solved 1) analytically with the aid of the elementary bending theory; 2) numerically with the aid of FEM. In the last case elements of triangular form are used (see Fig.1). All calculations were carried out with the aid of the programs of the text-book [2].

It turns out that the maximal deflection of the beam depends upon the fixation of the right end of the beam. Some forms of fixation are shown in the Fig.2. Comparing this with analytical results are seen that the fixation form 3 gives the best results. Deflection curves for analytic solution (curve 1) and the FEM solution (curve 2) are shown in Fig. 3. Resdistribution of the stress components σ_x, σ_y, τ_{xy} near the section, where the height has the continuity, is shown in Figs. 4-6.

From these results it can be concluded, that the effect of concentration of stresses upon the form of the deflection curve $v = v(x)$ is inessential.

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Я.Леллеп, Ю.Маяк
Тартуский государственный университет

Созданию методов расчета геометрически нелинейных жестко-пластических круглых и кольцевых пластин посвящено в научной литературе достаточно много внимания. В [3, 4] были сделаны попытки найти точные решения для круглых пластин, материал которых подчиняется условию текучести Треска. Однако, при решении этих задач в точной постановке возникают трудности, связанные с выбором различных режимов течения. Различные приближенные методы исследования умеренно больших прогибов осесимметричных пластин, подчиняющихся кусочно-линейным условиям текучести, представлены в работах [5, 9-I3, I5].

В связи с развитием вычислительной техники становится возможной разработка методов расчета пластин и оболочек, подчиняющихся условию пластичности Мизеса. Несущая способность круглых и кольцевых пластин была определена в [7, 8] на основании условия пластичности Мизеса. Ниже приводится метод расчета геометрически нелинейных пластических кольцевых пластин. Используется нелинейная аппроксимация точной поверхности текучести, которая соответствует удовлетворению условия Мизеса в среднем [6].

I. Основные уравнения и предположения

Рассмотрим кольцевую пластину толщины h, внешний и внутренний радиусы которой обозначены соответственно через R и a. Допустим, что пластина нагружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой интенсивности P и равномерно распределенными растягивающими силами, действующими на внешнем контуре. Интенсивность растяжения (силу, приходящуюся на единицу длины окружности) обозначим через N. Внутренний край пластины считаем свободным, внешний шарнирно закрепленный. Предположим, что закрепление внешнего края такое, что допускаются малые перемещения в горизонтальном направлении.

Предположим, что выполняются гипотезы Кирхгофа-Лява и деформации пластины малы, но прогибы могут достигать порядка толщины пластины. В этом случае (при умеренно больших перемещениях) уравнения равновесия имеют вид [3, 4]

$$\frac{d}{dr}(rN_1) = N_2 \qquad (I.1)$$

$$\frac{d}{dr}(rM_1) - M_2 + N_1 r\frac{dW}{dr} + \frac{P}{2}(r^2 - a^2) = 0 ,$$

где N_1 , N_2 – усилия и M_1 , M_2 – изгибающие моменты в радиальном и касательном направлениях соответственно. Уравнения (I.I) совместимы с компонентами деформации [3]

$$\varepsilon_1 = \frac{dU}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 ,$$

$$e_2 = \frac{U}{r} , \qquad (I.2)$$

$$\varkappa_1 = -\frac{d^2W}{dr^2} ,$$

$$\varkappa_2 = -\frac{1}{r}\frac{dW}{dr} ,$$

где U и W обозначают горизонтальное и поперечное перемещение соответственно.

Допустим, что поведение материала с достаточной точностью описывает модель жестко-пластического тела (без упрочнения) при условии пластичности Мизеса. В данной работе используется нелинейная аппроксимация поверхности текучести в пространстве обобщенных напряжений в виде

$$\frac{1}{N_0^2}(N_1^2 - N_1N_2 + N_2^2) + \frac{1}{M_0^2}(M_1^2 - M_1M_2 + M_2^2) - 1 \leq 0 , \qquad (I.3)$$

где $N_0 = \sigma_0 h$, $M_0 = \sigma_0 h^2/4$, а σ_0-предел текучести материала. Поверхность текучести, которая определена неравенством (I.3), соответствует удовлетворению условия пластичности Мизеса в интегральной форме [I4]. Аппроксимации поверхности текучести типа (I.3) были использованы в [8, 2] при исследовании несущей способности растянуто-изогнутых круглых пластин и геометрически нелинейных оболочек, где они привели к достаточно точным результатам.

В дальнейшем будем пользоваться соотношениями теории пластичности типа деформации. Согласно теории деформации вектор деформации с компонентами (I.2) перпендикулярен к поверхности текучести. Закон градиентальности запишем в виде

$$\varepsilon_1 = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial N_1}, \qquad \varepsilon_2 = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial N_2},$$
$$\varkappa_1 = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial M_1}, \qquad \varkappa_2 = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial M_2}, \tag{I.4}$$

где Φ обозначает левую часть неравенства (I.3), а λ -некоторый неотрицательный множитель. Следует отметить, что во внутренних точках поверхности текучести $\lambda = 0$. Для внутренних точек поверхности текучести неравенство в (I.3) превращается в строгое неравенство. Однако, оказывается, что напряженное состояние в каждой точке пластины соответствует точкам, лежащим на поверхности текучести. Поэтому в дальнейшем неравенство в (I.3) заменяем равенством.

Кроме соотношений (I.I)-(I.4), следует при решении данной задачи учитывать краевые условия. Так как внешний край шарнирно закреплен, а внутренний свободен, то имеем

$$M_1(a) = M_1(R) = W(R) = 0$$
$$N_1(R) = N, \quad N_1(a) = 0. \tag{I.5}$$

2. Формулировка краевой задачи

Исследование напряженно-деформационного состояния пластины сводится при сделанных допущениях к краевой задаче, которая решается численно на ЭВМ. Чтобы получить краевую задачу, придется из (I.I)-(I.5) исключить компоненты деформации ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, а также множитель λ.

Вычисляя частные производные в (I.4) с учетом (I.2), (I.3), находим

$$\frac{dU}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2=\frac{\lambda}{N_0^2}(2N_1-N_2)\,,$$

$$\frac{U}{r}=\frac{\lambda}{N_0^2}(2N_2-N_1)\,,$$

$$-\frac{d^2W}{dr^2}=\frac{\lambda}{M_0^2}(2M_1-M_2)\,, \qquad (2.I)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}=\frac{\lambda}{M_0^2}(2M_2-M_1)\,.$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (I.I) и (2.I) с учетом краевых условий (I.5) и ограничения (I.3).

В дальнейшем будет удобно использовать безразмерные величины

$$\rho=\frac{r}{R}\,,\quad \alpha=\frac{a}{R}\,,\quad n_{1,2}=\frac{N_{1,2}}{N_0}\,,\quad m_{1,2}=\frac{M_{1,2}}{M_0}\,,\quad n=\frac{N}{N_0}\,, \qquad (2.2)$$
$$w=\frac{N_0W}{M_0}\,,\quad u=\frac{RN_0^2U}{M_0^2}\,,\quad p=\frac{PR^2}{2M_0}\,,\quad \nu=\frac{\lambda R^2N_0}{M_0^2}\,.$$

С помощью (2.2) уравнения (I.I) и (2.I) можно записать соответственно в виде

$$(\rho n_1)'=n_2\,;$$
$$(\rho m_1)'-m_2+\rho n_1 w'+p(\rho^2-\alpha^2)=0 \qquad (2.3)$$

и

$$u'+\frac{1}{2}w'^2=\nu(2n_1-n_2)\,,$$

$$\frac{u}{\rho}=\nu(2n_2-n_1)\,,$$

$$w''=-\nu(2m_1-m_2)\,, \qquad (2.4)$$

$$w'=-\rho\nu(2m_2-m_1)\,,$$

где штрих обозначает дифференцирование по ρ, а (I.3) примет вид

$$n_1^2-n_1n_2+n_2^2+m_1^2-m_1m_2+m_2^2-1=0\,. \qquad (2.5)$$

Исключая из (2.4) величину v, из дифференциальных уравнений (2.3),(2.4) получим

$$\begin{aligned}
&n_1'=\frac{1}{\rho}(-n_1+n_2)\,,\\
&m_1'=\frac{1}{\rho}(-m_1+m_2)-n_1z-\frac{r}{\rho}(\rho^2-\alpha^2)\,,\\
&w'=z\,,\\
&z'=\frac{z}{\rho}\cdot\frac{2m_1-m_2}{2m_2-m_1}\,,\\
&u'=-\frac{1}{2}z^2-\frac{z}{\rho}\cdot\frac{2n_1-n_2}{2m_2-m_1}\,,
\end{aligned} \qquad (2.6)$$

где введена вспомогательная переменная $w'=z$. Правые части уравнений (2.6) зависят не только от n_1, m_1, w, z, u, но ещё от n_2 и m_2. Для определения последних имеем уравнение (2.5) и соотношение

$$m_2=\frac{m_1}{2}-\frac{z}{u}\,\frac{2n_2-n_1}{2}\,, \qquad (2.7)$$

которое следует также из формул (2.4).

Подставляя (2.7) в (2.5), имеем

$$m_2^2-m_1m_2+\frac{z^2}{u^2+z^2}\cdot\left[m_1^2\left(1+\frac{u^2}{4z^2}\right)+\frac{3}{4}n_1^2-1\right]=0\,. \qquad (2.8)$$

Поскольку согласно (2.4) $2m_2-m_1>0$, то из (2.8) получим единственний подходящий нам корень

$$m_2=\frac{m_1}{2}+\mu\,, \qquad (2.9)$$

где

$$\mu=\sqrt{\frac{m_1^2}{4}-\frac{1}{u^2+z^2}\left[m_1^2\left(z^2+\frac{u^2}{4}\right)+z^2\left(\frac{3}{4}n_1^2-1\right)\right]}\,. \qquad (2.10)$$

Наконец, из (2.7) и (2.9) находим

$$m_2 = \frac{m_1}{2} - \frac{z}{n_1}\mu . \qquad (2.11)$$

Подставляя величины m_2, n_2 из (2.9) и (2.11) в систему (2.6), получим уравнения, правые части которых зависят от n_1, m_1, w, z, u.

3. Решение краевой задачи

Уравнения (2.6) решены с учетом краевых условий (1.5) численно на ЭВМ ЕС 1060. При решении краевой задачи использовался метод сопряженных уравнений [16].

Алгоритм решения следующий. Задавая отсутствующие краевые условия для z и u при $\rho = 1$, система (2.6) решается методом Рунге-Кутта от $\rho = 1$ до $\rho = \alpha$. Поправки $\delta u(1)$ и $\delta z(1)$ на i-м шаге итерации вычисляются из системы алгебраических уравнений

$$-n_1^i(\alpha) = x_{51}(1)\delta u^i(1) + x_{41}(1)\delta z^i(1) , \qquad (3.1)$$
$$-m_1^i(\alpha) = x_{52}(1)\delta u^i(1) + x_{42}(1)\delta z^i(1) ,$$

где $n_1^i(\alpha)$ и $m_1^i(\alpha)$ – значения величин n_1 и m_1 при $\rho = \alpha$ на предыдущем шаге. Через x_{jk} (j = 1,...,5; к = 1,2) здесь обозначаются решения сопряженной системы, соответствующие разным вариантам начальных условий. При к = 1 удовлетворяются условия

$$x_1(\alpha) = 1 , \quad x_2(\alpha) = x_3(\alpha) = x_4(\alpha) = x_5(\alpha) = 0 , \qquad (3.2)$$

а при к = 2 – требования

$$x_1(\alpha) = 0 , \quad x_2(\alpha) = 1 , \quad x_3(\alpha) = x_4(\alpha) = x_5(\alpha) = 0 . \qquad (3.3)$$

Уравнениям (2.6) соответствует сопряженная система

$$x_1' = \frac{x_1}{\rho}\left(\frac{1}{2} + \frac{u}{z}\frac{\partial m_2}{\partial n_1}\right) + x_2\left(z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_2}{\partial n_1}\right) + \frac{3 m_1 z x_4}{\rho(2m_2 - m_1)^2}\frac{\partial m_2}{\partial m_1} +$$
$$+ \frac{z x_5}{\rho(2m_2 - m_1)^2}\left[\left(\frac{3}{2} + \frac{u}{z}\frac{\partial m_2}{\partial n_1}\right)(2m_2 - m_1) - 2(2m_1 - n_2)\frac{\partial m_2}{\partial n_1}\right] ,$$

$$x_2' = \frac{u x_1}{2qz}\left(2\frac{\partial m_2}{\partial m_1}-1\right)+\frac{x_2}{q}\left(1-\frac{\partial m_2}{\partial m_1}\right)-\frac{3zx_4}{q(2m_2-m_1)^2}\left(m_2-m_1\frac{\partial m_2}{\partial m_1}\right)-$$

$$-\frac{3m_1 z x_5}{q(2m_2-m_1)^2}\left(2\frac{\partial m_2}{\partial m_1}-1\right),$$

$$x_3' = 0,$$

$$x_4' = \frac{x_1 u}{z}\left[\frac{1}{q}\frac{\partial m_2}{\partial z}-\frac{1}{2z}(2m_2-m_1)\right]+x_2\left(m_2-\frac{1}{q}\frac{\partial m_2}{\partial z}\right)-x_3-$$

$$-\frac{x_4}{q(2m_2-m_1)^2}\left[(2m_2-m_1)(2m_2-m_1)-3m_1 z\frac{\partial m_2}{\partial z}\right]+x_5\left\{z\frac{2m_2-m_1}{q(2m_2-m_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{z}{q(2m_2-m_1)^2}\left[\left(\frac{u(m_1-2m_2)}{2z^2}+\frac{u}{z}\frac{\partial m_2}{\partial z}\right)(2m_2-m_1)-2(2m_2-m_1)\frac{\partial m_2}{\partial z}\right]\right\},$$

$$x_5' = \frac{x_1}{qz}\left[\frac{1}{2}(2m_2-m_1)+u\frac{\partial m_2}{\partial u}\right]-\frac{x_2}{q}\frac{\partial m_2}{\partial u}+\frac{3m_1 z x_4}{q(2m_2-m_1)^2}\frac{\partial m_2}{\partial u}+$$

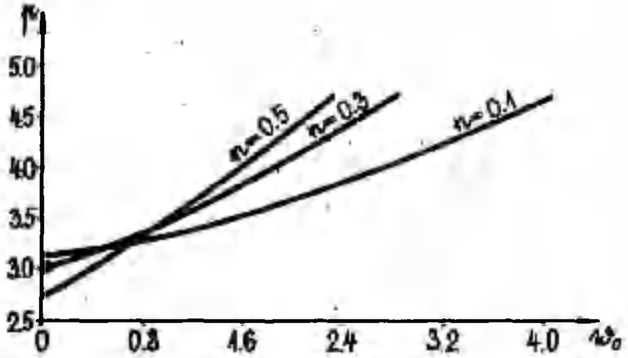
$$+\frac{z x_5}{q(2m_2-m_1)^2}\left[\left(\frac{2m_2-m_1}{2qz}+\frac{u}{z}\frac{\partial m_2}{\partial u}\right)(2m_2-m_1)-2(2m_2-m_1)\frac{\partial m_2}{\partial u}\right]. \qquad (3.4)$$

Вычисляя частные производные $\frac{\partial m_2}{\partial a_1}, \frac{\partial m_2}{\partial m_1}, \frac{\partial m_2}{\partial z}, \frac{\partial m_2}{\partial u}$ с помощью (2.10), (2.11) и подставляя в уравнения (3.4), систему (3.4) можно проинтегрировать при начальных условиях (3.2) и (3.3). При этом используются a_1, m_1, w, z и u, полученные на предыдущем шаге итерации. После определения сопряженных переменных решаются уравнения (3.1), и процедура повторяется до тех пор, пока краевые условия удовлетворяются с требуемой точностью.

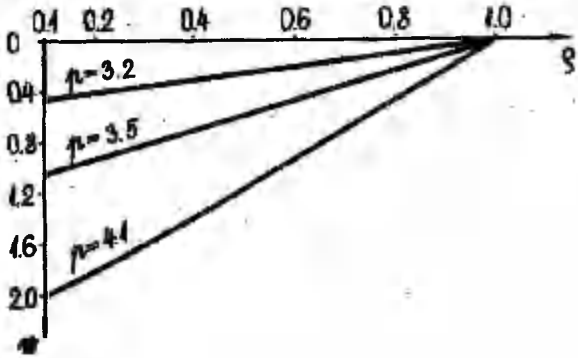
4. Обсуждение результатов

Результаты вычислений представлены на фиг. I – 4. Все графики соответствуют внутреннему радиусу пластины $a = 0,1$.

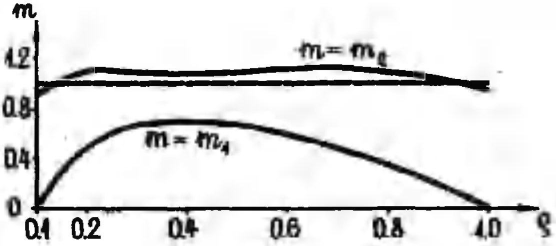
На фиг. I представлена зависимость максимального прогиба $w_0 = w(\alpha)$ от интенсивности поперечной нагрузки. Точки, где кривые пересекают вертикальную ось, соответствуют несущей



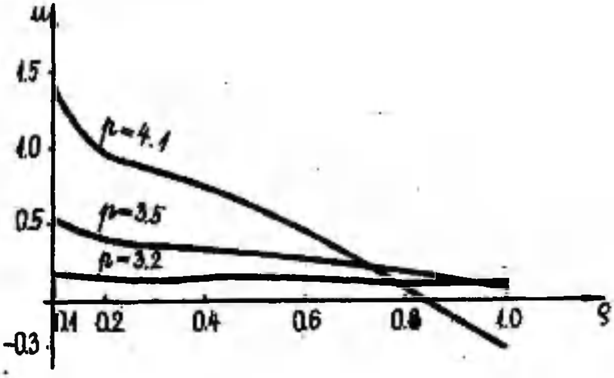
Фиг. I



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

способности пластины. Отсюда видно, что при увеличении растяжения на внешнем контуре несущая способность пластины уменьшается, но в диапазоне больших прогибов прогибы также уменьшаются при фиксированном значении интенсивности поперечной нагрузки.

На фиг. 2, 4 приведены графики распределения перемещений при трех значениях интенсивности распределенной нагрузки, когда $n = 0,3$.

На фиг. 3 показаны распределения изгибающих моментов m_1 и m_2 при $n = 0,3$; $p = 3,2$. На штриховой линии $m_2 = 1$. Интересно отметить, что изгибающий момент m_2, соответствующий нелинейному условию пластичности (I.3), сравнительно мало отличается от прямой $m_2 = 1$. Это обстоятельство говорит в пользу применения гипотезы $m_2 = 1$ при расчете пластин на основании кусочно-линейных условий пластичности.

Литература

I. Ерхов М.И., Кислова Л.В., Большие прогибы жестко-пластических круглых пластинок с шарнирным опиранием края. В сб.: "Исслед. по строит. мех. и методам расчета". М., 1981, 4-12.

2. Леллеп Я., Ханнус С., Большие прогибы жестко-пластических замкнутых цилиндрических оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 59-65.
3. Лепик Ю.Р., Пластическое течение гибких круглых пластинок из жестко-пластического материала. Изв. АН СССР. Мех. и машиностр., 1960, № 2, 78-87.
4. Лепик Ю.Р., К осесимметричному изгибу гибких круглых жестко-пластических пластин. Инж. ж. Мех. тверд. тела, 1966, № 4, 104-110.
5. Листрова Ю.П., Потапов В.Н., Качалов Ж.В., О несущей способности гибких кольцевых пластин, выполненных из материала с различными пределами текучести при растяжении и сжатии. Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та, 1972, № 6, 163-166.
6. Розенблюм В.И., Об условии пластичности для тонкостенных оболочек. Прикл. мат. и мех., 1960, 24, № 2,364-366.
7. Guerlement G., Lamblin D.O., Analyse limite de plaques circulaires avec la condition de plasticité de Von Mises. Bull. Techn. Suisse Rom.,1972, 98, № 1, 1-8.
8. Haydl H.M., Sherbourne A.N., Limit loads of circular plates under combined loadings. Trans.ASME.J.Appl.Mech., 1973, 40, № 3, 799-802.
9. Jones N., Combined distributed loads on rigid-plastic circular plates with large deflections. Int. J.Solids and Struct., 1969, 5, № 1, 51-64.
10. Kondo K., Pian T.H.H., Large deformations of rigid-plastic circular plates. Int. J. Solids and Struct.,1981, 17, № 11, 1043-1055.
11. Kulawinski B., Niepostyn D., Nośnośc graniczna plyty kolowej przy skończonycb ugieciach. Biul. WAT J. Dabrowskiego, 1972, 21, № 7, 71-86.
12. Neale K.W., Lind N.C., Limit analysis of plates under combined loads. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1970, 96, № 5, 711-728.
13. Onat E.T., Haytbornthwaite R.M., Load carrying capacity of circular plates at large deflection. Trans. ASME. J. Appl. Mecb., 1956, 23, № 1, 49-55.

14. Robinson M., A comparison of yield surfaces for thin shells. Int. J. Mech. Sci., 1971, 13, № 4, 345-354.

15. Sawczuk A., Large deflections of rigid-plastic plates. Proc. 11 th Int. Congr. Appl. Mech. (Munich, 1964). Berlin, Springer, 1965, 224-228.

16. Todd J., Survey of numerical analysis. New York, Mc Graw-Hill, 1962.

Large deflections of rigid-plastic annular plates

J.Lellep, J.Majak

Summary

An investigation into the influence of geometric changes on the load carrying capacity of annular plates is presented herein. The plates are subjected to the uniform lateral pressure and constant edge tension.

Material of the plates is assumed to be rigid-plastic obeying the von Mises criterion. A non-linear approximation of the exact yield surface is used and a numerical solution procedure is developed. Numerical results indicate that significant increase of the lateral pressure in comparison to the incipient collapse load is possible when geometric non-linearity is taken into account.

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЙ

К.Хейн, М.Хейнлоо
Тартуский государственный университет

Современная техника предъявляет повышенные требования к условиям работы конструкций, уменьшению их веса, размеров и повышению предельных нагрузок. Это обстоятельство усиливает внимание исследователей к конструкциям из неоднородных материалов. Отметим здесь библиографический указатель [I] и книгу [2]. Важной особенностью таких конструкций является возможность определения такого распределения неоднородности материала, при которой конструкция обладает определенными оптимальными свойствами среди всех конструкций рассматриваемого типа. В работе [3] поставлена и решена точно задача об определении оптимального непрерывного и кусочно-непрерывного распределений модуля Юнга в сферическом сосуде, гарантирующие при предельных значениях внутреннего и внешнего давлений выполнение условия пластичности Треска сразу во всех точках сосуда. В данной работе представлено полное решение аналогичной задачи для цилиндрических труб под давлением в случае непрерывного распределения модуля Юнга.

Далее удобно пользоваться следующими безразмерными величинами:

$$r=\frac{\rho}{b}; \quad a=\frac{a}{b}; \quad \sigma_\theta=\frac{\sigma_\theta^0}{\sigma^0}; \quad \sigma_r=\frac{\sigma_r^0}{\sigma^0}; \quad p_1=\frac{p_1^0}{\sigma^0}; \quad p_2=\frac{p_2^0}{\sigma^0};$$

$$E=\frac{E^0}{\sigma^0}; \quad u=\frac{u^0}{b}; \quad s=\frac{1}{1-2\nu}; \quad k=\nu s; \quad n=(1-\nu)s; \quad \varepsilon_r; \quad \varepsilon_\theta;$$

где E^0, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; σ_r^0, σ_θ^0, ε_r, ε_θ, u^0 – компоненты напряжений, деформаций и смещений; a, b – внутренний и внешний радиусы; p_1^0, p_2^0 – внутреннее и внешнее давления; $\rho\,(a<\rho<b)$ – текущий радиус; σ^0 – предел текучести. Предельные значения напряжений и давлений будут отмечены "звездочкой". Будем считать, что цилиндрические трубы находятся в условиях плоской деформации. Коэффициент Пуассона и предел текучести материала принимаются постоянными. Модуль Юнга считается функцией от текущего радиуса трубы.

I. Определение статически допустимых предельных давлений

Для цилиндрической трубы под давлением справедливо следующее уравнение равновесия [2] :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \qquad (I.1)$$

Предположим, что

$$\sigma_\theta - \sigma_r = C_1 = const \qquad (I.2)$$

Подставляя (I.2) в (I.1) и интегрируя, находим

$$\sigma_r = C_1 \ln r + C_2 \qquad (I.3)$$

Константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий

$$\sigma_r(a) = -p_1 ; \qquad \sigma_r(1) = -p_2 \qquad (I.4)$$

и имеют вид

$$C_1 = \frac{p_2 - p_1}{\ln a} ; \qquad C_2 = -p_2 . \qquad (I.5)$$

Для определения предельного напряженного состояния воспользуемся условиям пластичности Треска, которое в рассматриваемом случае дает систему из трех неравенств

$$|\sigma_\theta - \sigma_r| \le 1 ; \qquad |k\sigma_r - n\sigma_\theta| \le \Delta ; \qquad |k\sigma_\theta - n\sigma_r| \le \Delta . \qquad (I.6)$$

Предположим, что равенство $|\sigma_\theta^* - \sigma_r^*| = I$ выполняется при всех значениях параметра r . Тогда с помощью равенства (I.2) условия (I.6) представляются в форме $|C_1| = I$;

$$|\sigma_r^* + nC_1| \le \Delta ; \qquad |\sigma_r^* - kC_1| \le \Delta . \qquad (I.7)$$

Пусть C_1 = I. Раскрывая в (I.7) знаки абсолютной величины, находим, что (I.7) выполняется, если

$$-n \le \sigma_r^* \le k . \qquad (I.8)$$

Так как $d\sigma_r^*/dr \neq 0$ при $r \in [\alpha, 1]$, то (I.8) удовлетворяется, если $-n \leq \sigma_r^*(\alpha) \leq k$ и $-n \leq \sigma_r^*(1) \leq k$. Учитывая граничные условия (I.4), отсюда находим, что

$$n \geq p_1^* \; ; \qquad n \geq p_2^* \; , \tag{I.9}$$

так как $p_1^* > 0$ и $p_2^* > 0$. Пользуясь условием $C_1 = I$, из первого равенства в (I.5) получим, что в предельном состоянии имеем $p_1^* = p_{1в}^*$, где

$$p_{1в}^* = p_2^* - \ln\alpha \; . \tag{I.10}$$

Подставляя (I.10) в первое неравенство в (I.9), имеем

$$n + \ln\alpha \geq p_2^* \; . \tag{I.11}$$

Очевидно, при выполнении ограничения (I.11) второе неравенство в (I.9) удовлетворяется.

При $C_1 = -I$ аналогично получим, что $p_1^* = p_{1н}^*$, где

$$p_{1н}^* = p_2^* + \ln\alpha \tag{I.12}$$

и неравенства (I.7) выполняются, если

$$k \geq p_2^* \geq -\ln\alpha \; . \tag{I.13}$$

Предположим теперь, что

$$k\sigma_r - n\sigma_\theta = C_1' \; . \tag{I.14}$$

Подставляя (I.14) в (I.I) и интегрируя, находим

$$\sigma_r = \frac{C_2'}{\sqrt[n]{r}} - C_1' \; . \tag{I.15}$$

Пользуясь решением (I.15) из граничных условий (I.4), находим

$$C_1' = \frac{p_2 - p_1\sqrt[n]{\alpha}}{1 - \sqrt[n]{\alpha}} \; ; \qquad C_2' = C_1' - p_2 \; . \tag{I.16}$$

Пусть теперь равенство $|k\sigma_r^* - n\sigma_\theta^*| = s$ выполняется при всех значениях параметра r. Тогда в силу (I.14) условия (I.6) примут вид $|C_1'| = s$;

$$|\sigma_r^* + C_1'| \leq n \; ; \qquad |s\sigma_r^* + kC_1'| \leq ns \; . \tag{I.17}$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае реализуется только равенство $C_1' = s$, причем $p_1^* = p_{1\text{н}}^*$, где теперь

$$p_{1\text{н}}^* = \frac{p_2^* - s}{\sqrt[n]{\alpha}} + s \qquad (I.18)$$

и неравенства (I.17) выполняются, если

$$s > p_2^* > s - n\sqrt[n]{\alpha} \ . \qquad (I.19)$$

Предположим наконец, что

$$k\sigma_\theta - n\sigma_r = C_1'' \ . \qquad (I.20)$$

Подставляя (I.20) в (I.1) и интегрируя, находим

$$\sigma_r = C_2''\sqrt[k]{r} - sC_1'' \ . \qquad (I.21)$$

Определив константы C_1'' и C_2'' из граничных условий (I.4), получим

$$C_1'' = \frac{p_1 - p_2\sqrt[k]{\alpha}}{1 - \sqrt[k]{\alpha}} \ ; \qquad C_2'' = C_1'' - p_2 \ . \qquad (I.22)$$

Пусть, наконец, равенство $|k\sigma_\theta^* - n\sigma_r^*| = s$ имеет место при всех значениях параметра r . Теперь с помощью равенства (I.20) представим условия (I.6) в следующем виде: $|C_1''| = s$;

$$|\sigma_r^* + C_1''| \leq k \ ; \qquad |s\sigma_r^* + nC_1''| \leq ks \ . \qquad (I.23)$$

Нетрудно проверить, что в этом случае реализуется только положение, когда $C_1'' = s$, причем $p_1^* = p_{1\text{в}}^*$, где теперь

$$p_{1\text{в}}^* = (p_2^* - s)\sqrt[k]{\alpha} + s \qquad (I.24)$$

и наравенства (I.23) выполняются, если

$$n \leq p_2^* \leq s \ . \qquad (I.25)$$

Заметим, что зависимости между $p_{1\text{н}}^*$ и p_2^* пока не хватает, когда

$$k < p_2^* < s - n\sqrt[n]{\alpha} \qquad (I.26)$$

и между $p_{1\text{в}}^*$ и p_2^*, когда

$$n + \ln\alpha < p_2^* < n \ . \qquad (I.27)$$

Находим сначала первую зависимость. Для этого отметим, во-первых, что при $-\ln\alpha \le p_2^* \le \kappa$ имеем $\sigma_\theta^* - \sigma_r^* = -1$ и при $s - n\sqrt[n]{\alpha} \le p_2^* \le s$ имеем $\kappa\sigma_\theta^* - n\sigma_r^* = s$. Во-вторых, при $p_2^* = \kappa$ получим, что $p_{1н}^* = \kappa + \ln\alpha$, и при $p_2^* = s - n\sqrt[n]{\alpha}$ получим, что $p_{1н}^* = \kappa$. Учитывая эти два значения, рассмотрим двухслойную цилиндрическую трубу, во внутреннем слое которой имеем $\sigma_\theta^* - \sigma_r^* = -1$ и во внешнем слое – $\kappa\sigma_r^* - n\sigma_\theta^* = s$. Радиус x поверхности раздела слоев определим из условия

$$p^* = \kappa, \tag{I.28}$$

где p^* – предельное значение контактного давления между слоями. Принимая в (I.18) $p_{1н}^* = p^*$ с учетом равенства (I.28), для внешнего слоя имеем $p_2^* = s - n\sqrt[n]{x}$, откуда находим, что радиус поверхности раздела x вычисляется по формуле

$$x = \left(\frac{s - p_2^*}{n}\right)^n . \tag{I.29}$$

Принимая в (I.12) $p_2^* = p^*$ с учетом условия (I.28) и определения безразмерной величины α, для внутреннего слоя получим

$$p_{1н}^* = \kappa - \ln\frac{x}{\alpha} . \tag{I.30}$$

Это есть искомая зависимость. Находим теперь зависимость между $p_{1в}^*$ и p_2^*, когда имеем (I.27). Сначала заметим, что при $0 \le p_2^* \le n + \ln\alpha$ имеем $\sigma_\theta^* - \sigma_r^* = 1$ и при $n \le p_2^* \le s$ имеем $\kappa\sigma_\theta^* - n\sigma_r^* = s$, а также $p_{1в}^* = n$, если $p_2^* = n + \ln\alpha$ и $p_{1в}^* = s - \kappa\sqrt[\kappa]{\alpha}$, если $p_2^* = n$. Исходя из этого, рассмотрим двухслойную цилиндрическую трубу, во внутреннем слое которой имеем $\kappa\sigma_\theta^* - n\sigma_r^* = s$, а во внешнем слое – $\sigma_\theta - \sigma_r = 1$. Радиус поверхности раздела слоев – x_1 определим теперь из условия

$$p^* = n. \tag{I.31}$$

Из равенств (I.31), $p_{1в}^* = p^*$ и (I.10) для внешнего слоя получим $p_2^* = n + \ln x_1$. Отсюда для определения радиуса x_1 поверхности раздела слоев получим формулу

$$x_1 = \exp(p_2^* - n) . \tag{I.32}$$

Принимая в (I.24) $p_2^* = p^*$ с учетом условия (I.31) и определения безразмерной величины α, для внутреннего слоя находим

$$p^*_{1в} = s - n\sqrt[n]{\alpha/x_1} \; . \tag{I.33}$$

Таким образом, на основании равенств (I.10), (I.12), (I.18), (I.24), (I.29) - (I.32) и неравенств (I.11), (I.13), (I.19), (I.25) - (I.27) установим, что при заданном значении величины p_2^* параметр p_1^* имеет два значения: $p^*_{1н}$ и $p^*_{1в}$, вычисляемые по формулам

$$p_{1н}^* = \begin{cases} p_2^* + \ln\alpha, & \text{если } -\ln\alpha < p_2^* < n, \\ n - \ln\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{s-p_2^*}{n}\right)^n\right], & \text{если } n < p_2^* < s - n\sqrt[n]{\alpha}, \\ \frac{p_2^*-s}{\sqrt[n]{\alpha}} + s, & \text{если } s - n\sqrt[n]{\alpha} < p_2^* < s \, ; \end{cases} \tag{I.34}$$

$$p_{1в}^* = \begin{cases} p_2^* - \ln\alpha, & \text{если } 0 < p_2^* < n + \ln\alpha, \\ s - n\sqrt[n]{\alpha\left[\exp(p_2^* - n)\right]^{-1}}, & \text{если } n + \ln\alpha < p_2^* < n, \\ (p_2^* - s)\sqrt[n]{\alpha} + s, & \text{если } n < p_2^* < s \, . \end{cases} \tag{I.35}$$

Известно, что в случае однородной цилиндрической трубы напряжения σ_r и σ_θ вычисляются по следующим формулам Ляме [4] :

$$\sigma_r = C_1 - C_2 r^{-2} \; ; \qquad \sigma_\theta = C_1 + C_2 r^{-2} \, , \tag{I.36}$$

где константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий (I.4) и имеют вид

$$C_1 = \frac{\alpha^2 p_1 - p_2}{1-\alpha^2} \; ; \qquad C_2 = C_1 + p_2 \; . \tag{I.37}$$

Подставляя (I.36) с учетом (I.37) в условия (I.6), получим

$$\begin{cases} |(p_1-p_2)(\alpha/r)^2| \le \frac{1}{2}(1-\alpha^2) \ ; \\ |\alpha^2 p_1 - p_2 + s(p_1-p_2)(\alpha/r)^2| \le s(1-\alpha^2) \ ; \\ |\alpha^2 p_1 - p_2 - s(p_1-p_2)(\alpha/r)^2| \le s(1-\alpha^2) \ . \end{cases}$$

Вследствие монотонности функций под знаками абсолютной величины эти неравенства удовлетворяются, если

$$\begin{cases} |p_1-p_2| \le \frac{1}{2}(1-\alpha^2) \ ; \\ |\alpha^2 p_1 - p_2 + s(p_1-p_2)| \le s(1-\alpha^2) \ ; \\ |\alpha^2 p_1 - p_2 + s(p_1-p_2)\alpha^2| \le s(1-\alpha^2) \ ; \\ |\alpha^2 p_1 - p_2 - s(p_1-p_2)| \le s(1-\alpha^2) \ ; \\ |\alpha^2 p_1 - p_2 - s(p_1-p_2)\alpha^2| \le s(1-\alpha^2) \ . \end{cases} \tag{I.38}$$

Разрешив систему (I.38) относительно p_1, находим

$$\begin{cases} 0 \le p_1 \le p_{1\text{в}}^{*0}, & \text{если } 0 \le p_2 \le \frac{1}{2}(1-\alpha^2) \ ; \\ p_{1\text{н}}^{*0} \le p_1 \le p_{1\text{в}}^{*0}, & \text{если } \frac{1}{2}(1-\alpha^2) \le p_2 \le s \ , \end{cases} \tag{I.39}$$

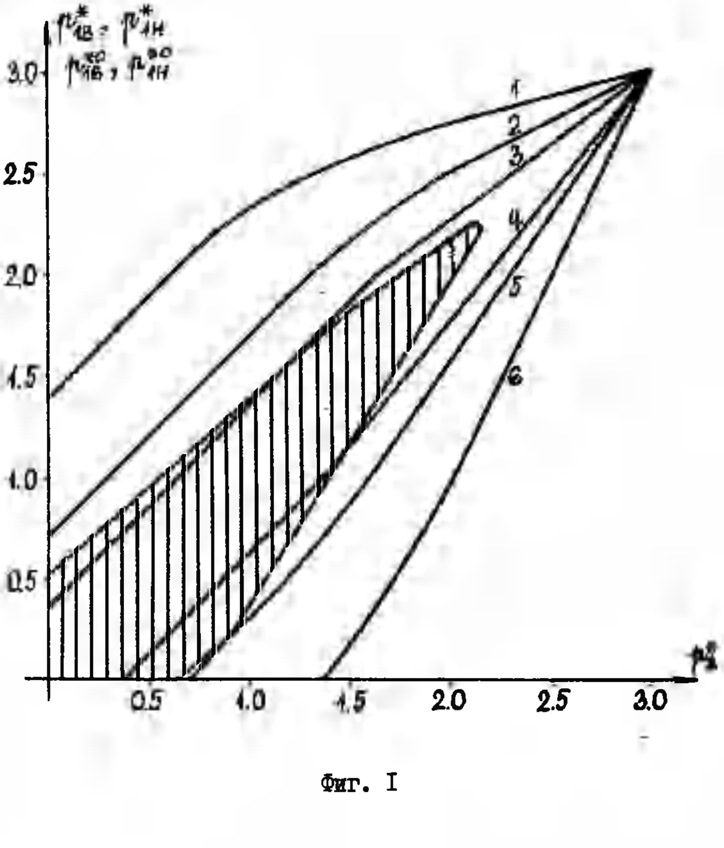
где величины $p_{1\text{н}}^{*0}$ и $p_{1\text{в}}^{*0}$ вычисляются здесь по следующим формулам:

$$p_{1\text{н}}^{*0} = \begin{cases} p_2^* - \frac{1}{2}(1-\alpha^2), & \text{если } \frac{1}{2}(1-\alpha^2) \le p_2^* \le \frac{1}{2}(s-\alpha^2) \ ; \\ \frac{2\kappa p_2^*}{s+\alpha^2} - \frac{s(1-\alpha^2)}{s+\alpha^2}, & \text{если } \frac{1}{2}(s-\alpha^2) \le p_2^* \le s \ ; \end{cases} \tag{I.40}$$

$$p_{1\text{в}}^{*0} = \begin{cases} p_2^* + \frac{1}{2}(1-\alpha^2), & \text{если } 0 \le p_2^* \le \frac{1}{2}(s+\alpha^2) \ ; \\ \frac{2\kappa p_2^*}{s-\alpha^2} + \frac{s(1-\alpha^2)}{s-\alpha^2}, & \text{если } \frac{1}{2}(s+\alpha^2) \le p_2^* \le s \ . \end{cases} \tag{I.41}$$

Неравенства (I.39) определяют область упругих деформаций однородной цилиндрической трубы. Предельное упругое напряженное состояние трубы достигается при $p_1^* = p_{1н}^{*0}$ или $p_1^* = p_{1в}^{*0}$. Тогда условие пластичности Треска выполняется только на внутреннем радиусе трубы.

На фиг. I приведены для иллюстрации графики зависимостей $p_{1в}^{*0}$, $p_{1в}^*$, $p_{1н}^{*0}$ и $p_{1н}^*$ от p_2^* ,подсчитанных по формулам (I.34) (кривые 5, 6), (I.35) кривые I, 2, (I.40) (ломаная 4) и (I.4I) (ломаная 3) при ν = 0,33. На кривых I, 6 имеем α = 0,25,



Фиг. I

7*

а на кривых 2, 5 и ломаных 3, 4 – $\alpha = 0{,}50$. Область, ограниченная ломаными 3, 4 и координатными осями, является областью упругой деформации однородной цилиндрической трубы (смысл заштрихованной области на фиг. I объясняется в п. 3). Эффективность проектирования цилиндрических труб с оптимальной неоднородностью вместо однородных следует непосредственно из фиг.I. Так, например,из фиг. I находим, что при $\alpha = 0.50$ и $p_2^* = 0$ предельное давление для трубы с оптимальной неоднородностью почти в два раза больше соответствующего предельного давления для однородной трубы в области упругих деформаций.

2. Оптимальные распределения модуля Юнга

Теперь находим оптимальные распределения модуля Юнга по радиусу.

Пусть статически допустимое решение определяется формулами (I.2) и (I.3). С помощью этих формул представим закон Гука в виде

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{sE(r)}\left[C_1(\ln r - n) + C_2\right]; \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1+\nu}{sE(r)}\left[C_1(\ln r + n) + C_2\right]. \tag{2.I}$$

Подставляя (2.I) в уравнение совместности деформаций

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0, \tag{2.2}$$

приходим к следующему дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{d\ln E(r)}{dr} = \frac{2nC_1}{r\left[C_1(\ln r + n) + C_2\right]}, \tag{2.3}$$

решение которого можно представить в виде

$$\frac{E(r)}{E(1)} = \left|\frac{C_1(\ln r + n) + C_2}{nC_1 + C_2}\right|^{2n}. \tag{2.4}$$

Принимая в (2.4) $C_1 = \mathrm{I}$ и согласно (I.5) $C_2 = -p_2^*$, получим

$$\frac{E(r)}{E(1)} = \left|\frac{\ln r + n - p_2^*}{n - p_2^*}\right|^{2n}. \tag{2.5}$$

Аналогично, принимая в (2.4) $C_1 = -I$ и $C_2 = -p_2^*$, находим

$$\frac{E(r)}{E(1)} = \left| \frac{\ln r + n + p_2^*}{n + p_2^*} \right|^{2n} . \qquad (2.6)$$

Оптимальное распределение модуля Юнга, определяемое формулой (2.5), имеет место при выполнении (I.I0) и (I.II), а формулой (2.6)-при выполнении (I.I2) и (I.I3). Для того, чтобы $E(\alpha)/E(1) \neq 0$, необходимо знак равенства в (I.II) опустить.

Пусть статически допустимое решение определяется формулами (I.I4) и (I.I5). Подставляя эти формулы в закон Гука, находим теперь

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E(r)} \left[\frac{C_2'}{n\sqrt[n]{r}} - C_1' \right] ; \qquad \varepsilon_\theta = -\frac{1+\nu}{E(r)} C_1' .$$

С помощью этих равенств из (2.2) получим

$$\frac{d\ln E(r)}{dr} = \frac{C_2'}{C_1' n r \sqrt[n]{r}} \qquad (2.7)$$

Решение этого дифференциального уравнения представляется в виде

$$\frac{E(r)}{E(1)} = \exp\left[\frac{sC_2'}{C_1'} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{r}} \right) \right] . \qquad (2.8)$$

При $C_1' = s$ с помощью (I.I6) из (2.8) получим окончательно

$$\frac{E(r)}{E(1)} = \exp\left[(s - p_2^*) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{r}} \right) \right] . \qquad (2.9)$$

Формула (2.9) определяет оптимальное распределение модуля Юнга, если удовлетворяются (I.I8) и (I.I9).

Пусть, наконец, статически допустимое решение определяется формулами (I.20) и (I.2I). Пользуясь этими формулами, из закона Гука получим

$$\varepsilon_r = -\frac{1+\nu}{sE(r)} C_1'' ; \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1+\nu}{\kappa E(r)} \left[C_2'' \sqrt[\kappa]{r} - \nu C_1'' \right] . \qquad (2.I0)$$

Подставляя (2.I0) в (2.2), находим

$$\frac{d\ln E(r)}{dr} = \frac{snC_2'' \sqrt[\kappa]{r}}{r\kappa (sC_2'' \sqrt[\kappa]{r} - \kappa C_1'')} . \qquad (2.II)$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение

$$\frac{E(r)}{E(1)} = \left|\frac{sC_2^{II}\sqrt[n]{r} - \kappa C_1^{II}}{sC_2^{I} - \kappa C_1^{I}}\right|^{n} . \tag{2.I2}$$

Принимая в (2.I2) $C_1^{II} = s$ и согласно (I.22) $C_2^{II} = C_1^{II} - p_2^*$, имеем окончательно

$$\frac{E(r)}{E(1)} = \left|\frac{(s-p_2^*)\sqrt[n]{r} - \kappa}{n - p_2^*}\right|^{n} . \tag{2.I3}$$

Оптимальное распределение модуля Юнга дается формулой (2.I3), если выполняются (I.24) и (I.25). Для того, чтобы $E(r)/E(1) < \infty$, необходимо в (I.25) принять $p_2^* > n$.

Рассмотрим теперь случай, когда выполняются неравенства (I.26) и связь между $p_{1\text{н}}^*$ и p_2^* дается формулой (I.30) . В пункте I было показано, что в этом случае статически допустимое предельное напряженное состояние реализуется в двухслойной цилиндрической трубе, во внутреннем слое которой имеем $\sigma_\theta - \sigma_r$ = I и во внешнем слое $\kappa\sigma_r^* - n\sigma_\theta^* = s$. Для внутреннего слоя представим решение дифференциального уравнения (2.3) в виде

$$\frac{E(r)}{E(x)} = \left|\frac{C_1[\ln(r/x) + n] + C_2}{C_1 n + C_2}\right|^{2n} , \tag{2.I4}$$

где $\alpha < r < x$. Здесь x определяется равенством (I.29). В случае внешнего слоя при $x < r < 1$ следует воспользоваться формулой (2.9). Из этой формулы при $r = x$ с помощью равенства (I.29) получим

$$E(x) = E(1)\exp(\kappa - p_2^*) . \tag{2.I5}$$

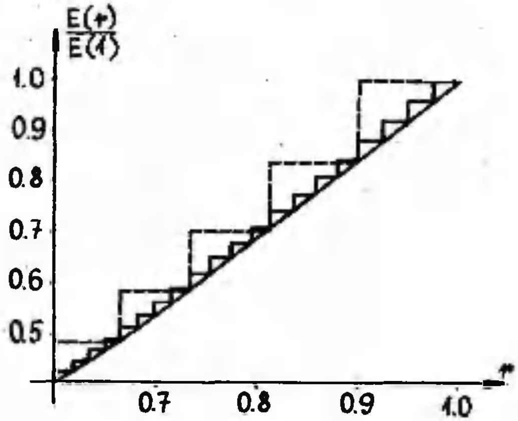
Подставляя (2.I5) в (2.I4), принимая C_1 = -I и согласно формулам (I.5) и (I.28) $C_2 = -\kappa$, получим окончательно

$$\frac{E(r)}{E(1)} = \left|1 + \frac{1}{s}\ln\frac{r}{x}\right|^{2n}\exp(\kappa - p_2^*) ; \qquad (\alpha < r < x) . \tag{2.I6}$$

Нетрудно проверить, что на поверхности раздела слоев с радиусом x выполняются условия непрерывности модуля Юнга и смещений.

Оказывается, что случай выполнения неравенства (I.27) следует исключить из рассмотрения, так как в этом случае имеем $E(x) = 0$.

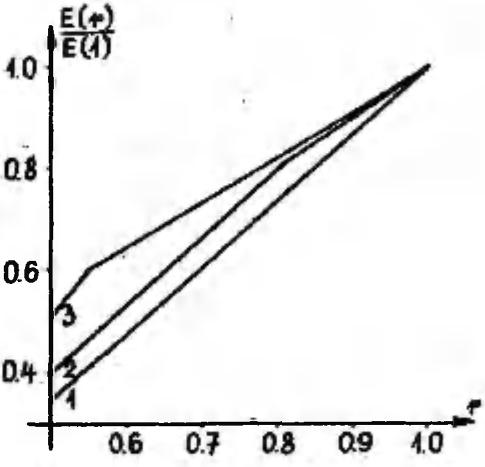
В пользу практического использования результатов данной работы заметим, что любое непрерывное распределение модуля Юнга в цилиндрической трубе с произвольной точностью можно аппроксимировать в многослойной цилиндрической трубе, которая представляет собой набор из большого числа связанных между собой одноосных однородных цилиндрических труб, имеющих различные модули Юнга, одинаковые коэффициенты Пуассона и пределы текучести. Для иллюстрации этого высказывания на фиг. 2 приведены оптимальные непрерывное и кусочно-постоянные распределения величины $E(r)/E(1)$ по радиусу цилиндрической трубы, когда $\alpha = 0.6$; $p_1^* = 0$; $\nu = 0.33$. На фиг. 2 непрерывное распределение величины $E(r)/E(1)$ рассчитано по формуле (2.6),



Фиг. 2

а кусочно-постоянные распределения - по формулам (2.3) и (4.I) работы [5] , выведенные в предположении , что условие пластичности Треска выполняется только на внутренних радиусах всех слоев и внешнее давление принимает максимальное значение.

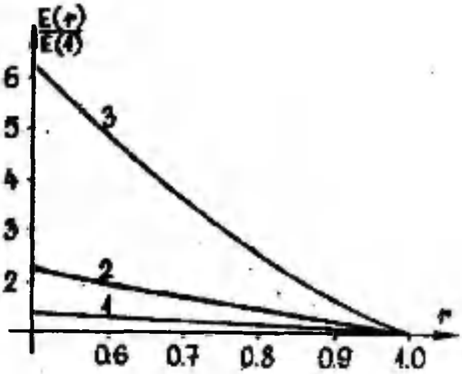
На фиг. 3 приведены оптимальные распределения величины $E(r)/E(1)$, подсчитанные по формулам (2.9) и (2.16). На всех кривых имеем $\alpha = 0.5$; $\nu = 0.33$. Параметры μ_1^* и μ_2^* имеют



Фиг. 3

значения 0.3I и I.00 на кривой I, 0.52 и I.20 на кривой 2, 0.88 и I.50 на кривой 3 соответственно. Кривые 2 и 3 определяют распределения величины $E(r)/E(1)$ в двухслойной цилиндрической трубе, во внутреннем слое которой имеем $\sigma_\theta^* - \sigma_r^* = -I$ и во внешнем слое - $\varkappa\sigma_r^* - n\sigma_\theta^* = \Delta$.

На фиг. 4 оптимальные распределения величины $E(r)/E(1)$ подсчитаны по формуле (2.I3) при $\nu = 0.33$, $\mu_2^* = 2.75$ (кривая I), $\mu_2^* = 2.50$ (кривая 2) и $\mu_2^* = 2.25$ (кривая 3). Интересно заметить, что в отличие от фиг. 2 и 3 на фиг. 4 величина $E(r)/E(1)$ убывает с ростом параметра r.



Фиг. 4

3. Об упругих деформациях цилиндрической трубы с оптимальной неоднородностью

Предположим, что $p_1^* \neq p_1$ или и $p_2 \neq p_2^*$, и ищем формулу для определения напряжений σ_r и σ_θ в следующем виде:

$$\sigma_r = \varkappa\sigma_r^* ; \qquad \sigma_\theta = \varkappa\sigma_\theta^* , \qquad (3.1)$$

где $\varkappa$ – некоторая константа. Упругость деформаций в соответствии с неравенствами (I.6) обеспечим требованием $\varkappa < 1$. Напряжения σ_r , σ_θ удовлетворяют уравнению равновесия (I.I) и через закон Гука-уравнению совместности деформаций (2.2). Из граничных условий (I.4) находим

$$p_1 = \varkappa p_1^* ; \quad p_2 = \varkappa p_2^* . \qquad (3.2)$$

Пусть $p_1^* \neq 0$; $p_2^* \neq 0$. Тогда с учетом неравенства $\varkappa < 1$ из (3.2) получим

$$\frac{p_1}{p_1^*} = \frac{p_2}{p_2^*} < 1 . \qquad (3.3)$$

Условие (3.3) гарантирует упругие деформации цилиндрической трубы с оптимальной неоднородностью до предельного состояния при квазистатическом изменении давлений p_1 и p_2 . Если $p_1 = p_1^* = 0$ или $p_2 = p_2^* = 0$, то из (3.2) следует, что упругие деформации рассматриваемой трубы до предельного состояния обеспечивают условия $p_2 < p_2^*$ и $p_1 < p_1^*$ соответственно. Для определения области квазистатического изменения давлений p_1 и p_2 , в которой деформации цилиндрической трубы с оптимальной неоднородностью являются упругими, с помощью закона Гука и уравнения равновесия (I.I) представим уравнение совместности деформаций (2.2) в виде

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+\left(\frac{3}{r}-\frac{d\ln E}{dr}\right)\frac{d\sigma_r}{dr}-\frac{\sigma_r}{nr}\frac{d\ln E}{dr}=0, \qquad (3.4)$$

где функция $E(r)$ считается заданной по формулам (2.5),(2.6), (2.9),(2.I3) или (2.I6). Определив σ_r решением краевой задачи (3.4),(I.4) и затем σ_θ из уравнения (I.I) при изменении параметров p_1 и p_2 в некоторой сетке, находим искомую область, в которой напряжения σ_r и σ_θ удовлетворяют условиям (I.6).

Для численного счета краевая задача (3.4),(I.4) была сведена к двум задачам Коши, которые решались методом Рунге-Кутта четвертого порядка. При этом напряжения σ_r и σ_θ определялись в точках, где $r = 0.5 + (i - I)\, 0.0I$; $i = I, 2, 3, \ldots, 5I$. Для вычисления $d\sigma_r/dr$ в уравнении (I.I) использовались формулы численного дифференцирования четвертого порядка. Величины p_1 и p_2 изменялись в сетке шагом 0.02. На основании расчетов установлено, что при $\nu = 0.33$; $\alpha = 0.5$; $p_1^* = -0.2I$; $p_2^* = 0.90$ цилиндрическая труба, оптимальная неоднородность которой вычисляется по формуле (2.6), остается упругой при изменении давлений p_1 и p_2 в заштрихованной области на фиг. I и согласно условию пластичности Треска переходит в пластическое состояние сразу во всех точках, если $p_1 = 0.2I$ и $p_2 = 0.90$.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. Ю.В.Немировскому и к.ф.-м.н. Б.С.Резникову за подробное обсуждение результатов данной статьи.

Литература

I. Колчин Г.В., Теория упругости неоднородных тел. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы, Кишинев, изд. "Штиинца", 1972.

2. Ломакин В.А., Теория упругости неоднородных тел, М., Изд., МГУ, 1976.

3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж., Теория упругости, М., "Наука", 1975.

4. Хейн К., Хейнлоо М., Оптимальная неоднородность сферического сосуда под давлением, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 72I, 43-5I.

5. Хейнлоо М., Оптимальная кусочно-однородность многослойной цилиндрической трубы под давлением, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 72I, 62-7I.

Optimization of the continuous nonhomogeneity of a cylindrical tube under pressure

K. Hein, M. Heinloo

Summary

The problem of optimal continuous nonhomogeneity, that quarantees satisfaction of the Tresca yield condition at once in all points of a cylindrical tube, is stated in this work. The exact solution of this problem has been got. For the illustration of the results, the optimal distribution of Young modulus has been brought out. The effectiveness of the projection of such constructions has been discussed in this work.

ОПТИМАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА В СТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

К.Хейн, М.Хейн, М.Хейнлоо
Тартуский государственный университет

За последние годы заметно усилилось внимание исследователей к задачам теории упругости неоднородных тел. По этому направлению отметим библиографический указатель [I] и книгу [2]. Важной особенностью неоднородных тел является возможность управления их напряженно-деформированным состоянием за счет распределения упругих свойств, что открывает дополнительные резервы прочности и оптимального проектирования конструкций. По-видимому, впервые задача об определении оптимальной непрерывной неоднородности была поставлена в работе [5]. Здесь для сферического сосуда под заданным внутренним давлением найдено такое распределение модуля Юнга, которое обеспечивает минимальное значение перемещения на внешней плоскости сферы. В работе [6] выводятся зависимости, необходимые для проектирования оптимального распределения модуля сдвига, обеспечивающего максимальную (минимальную) жесткость для скручиваемого призматического стержня. В работе [7] решается задача об оптимальном выборе упругих свойств неоднородного линейного тела при условии экстремальности его упругого потенциала, рассматриваемого в качестве функционала от пространственных распределений коэффициентов Ламе. В работе [4] найдено непрерывное распределение модуля Юнга по радиусу сферического сосуда, которое гарантирует при предельных значениях внутреннего и внешнего давлений выполнение условий пластичности Треска или Мизеса сразу во всех точках сосуда.

В данной работе решается задача об определении оптимального непрерывного распределения модуля Юнга по радиусу вращающегося диска, гарантирующего при предельном значении угловой скорости вращения выполнение условия пластичности Треска сразу во всех точка диска. Получено точное аналитическое решение. Представлены графики, определяющие оптимальные распределения модуля Юнга при различных значениях коэффициента Пуассона, и графики, иллюстрирующие эффективность проектирования вращающихся дисков с оптимальной неоднородностью вместо однородных.

Будем считать, что вращающиеся диски находятся в условиях плоского напряженного состояния и стационарного нагрева. Модуль Юнга является функцией от текущего радиуса диска и температуры. Остальные механические и тепловые характеристики материала принимаются постоянными. Введем безразмерные величины:

$$r=\frac{\rho}{l},\quad \sigma_r=\frac{\sigma_r^0}{p},\quad \sigma_\theta=\frac{\sigma_\theta^0}{p},\quad \sigma=\frac{\sigma^0}{p},\quad \alpha=\frac{a}{l},\quad \beta=\frac{b}{l},$$

$$E=\frac{E^0}{p},\quad \omega^*=\frac{\gamma\omega^2 l^2}{3p},\quad T_1=\frac{T_1^0}{T_*},\quad T_2=\frac{T_2^0}{T_*},\quad \eta=\eta^0 T_*,\quad h=h^0 T_*,\quad \nu,$$

где p, l, T_* – харектерные давление, линейный размер и температура; E^0, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; σ_r^0, σ_θ^0 – компоненты напряжений; a, b – внутренний и внешний радиусы; T_1^0, T_2^0 – внутренняя и внешняя температуры; $\rho\ (a \le \rho \le b)$ – текущий радиус; γ, σ^0 – плотность и предел текучести материала; ω – угловая скорость вращения диска; η, h – коэффициенты линейного расширения и зависимости модуля Юнга от температуры.

Для вращающихся дисков справедливо уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)+3\omega^* r=0 . \qquad (1)$$

Потребуем сначала, чтобы напряжение σ_θ оказалось постоянным на всех радиусах диска, т.е.

$$\sigma_\theta=C_1 . \qquad (2)$$

Подставляя (2) в дифференциальное уравнение (1) и интегрируя последнее, получим для σ_r следующее выражение:

$$\sigma_r=C_1-\omega^* r^2+C_2 r^{-1} . \qquad (3)$$

Рассмотрим вращающийся диск с отверстием. Пользуясь граничными условиями $\sigma_r(\alpha)=\sigma_r(\beta)=0$, находим, что константы C_1 и C_2 вычисляются по формулам

$$C_1 = \omega^*(\alpha^2+d)\,; \qquad C_2 = -\,\omega^* d\alpha\ , \tag{4}$$

е $d=(\alpha+\beta)\beta$. Для определения предельного напряженного остояния воспользуемся условием пластичности Треска, которое рассматриваемом случае дает следующие ограничения:

$$|\sigma_\theta - \sigma_r| \le \sigma\ ; \qquad |\sigma_\theta| \le \sigma\ ; \qquad |\sigma_r| \le \sigma\ . \tag{5}$$

редположим, что условие $|\sigma_\theta| = \sigma$ выполняется при всех значениях параметра r, и проверим выполнение остальных условий з (5). Так как $C_1 > 0$, то из равенств $|\sigma_\theta| = \sigma$ и (I.2) олучим, что в (2)-(4) следует далее принять $C_1 = \sigma$. Теперь з (4) находим следующую формулу для вычисления предельного начения параметра ω^* :

$$\omega^* = \sigma(\alpha^2+d)^{-1}\ . \tag{6}$$

частном случае сплошного диска, когда $\alpha = 0$, из (6) получим

$$\omega^* = \sigma\beta^{-2}\ .$$

одставляя (4) и (6) в (3), имеем

$$\sigma_r = \sigma\left[1-\frac{1}{r}\left(\frac{r^3+d\alpha}{\alpha^2+d}\right)\right]\ . \tag{7}$$

ользуясь формулой (7) и равенством $\sigma_\theta = \sigma$, нетрудно установить, что первое и последнее условия из (5) будут выполнены ри $\alpha \le r \le \beta$, если

$$0 \le \frac{1}{r}\left(\frac{r^3+d\alpha}{\alpha^2+d}\right) \le 1\ . \tag{8}$$

Выполнение левого неравенства в (8) очевидно. Чтобы убедиться в справедливости правого неравенства, заметим, что оно представляется в виде

$$\frac{(r-\alpha)(r-\beta)(r+\alpha+\beta)}{r(\alpha^2+d)} \le 0\ .$$

Таким образом, рассматриваемое статически допустимое напряженное состояние удовлетворяет условиям пластичности Треска при всех значениях параметра r. Остается найти оптимальное распределение модуля Юнга по радиусу диска, которое гарантирует при предельном значении параметра ω^* такое напряженное состояние.

С помощью формулы (7) и равенства $\sigma_\theta = \sigma$ представим закон Гука в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma}{E}\left[1-\nu+\frac{\nu}{r}\left(\frac{r^3+da}{a^2+d}\right)\right]+\eta T(r)\,; \\ \varepsilon_r &= \frac{\sigma}{E}\left[1-\nu-\frac{1}{r}\left(\frac{r^3+da}{a^2+d}\right)\right]+\eta T(r)\,. \end{aligned} \qquad (9)$$

Подставляя (9), с учетом зависимости распределения модуля Юнга от температуры T в виде

$$E(r,T)=E(r)e^{-kT}\,,$$

в уравнение совместимости деформаций

$$\varepsilon_\theta-\varepsilon_r+r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}=0\,,$$

приходим к следующему дифференциальному уравнению первого порядка:

$$m'(r)+g(r)m(r)=J(r)\,, \qquad (10)$$

где штрих обозначает производную по r и

$$m(r)=\frac{1}{E(r)}\,; \qquad g(r)=\frac{(1+3\nu)r^3+da}{rf(r)}-h\frac{dT(r)}{dr}\,;$$

$$J(r)=-\frac{r(a^2+d)\eta}{\sigma f(r)}\,\frac{dT(r)}{dr}e^{-kT(r)}\,;$$

$$f(r)=\nu r^3+(1-\nu)(a^2+d)r+\nu da\,. \qquad (11)$$

Функция температуры $T(r)$ определяется из уравнения теплопроводности и в случае стационарного температурного поля представляется в виде

$$T(r) = \frac{T_1 \ln\beta - T_2 \ln\alpha}{\ln\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{T_2 - T_1}{\ln\frac{\beta}{\alpha}} \ln r .$$

При $T(r) = 0$ уравнение (I0) запишется в виде

$$\frac{d\ln E(r)}{dr} = \frac{(1+3\nu)r^3 + d\alpha}{r f(r)} . \qquad (I2)$$

Для его интегрирования заметим, что многочлен (II) имеет единственный действительный корень $-\alpha < r_1 < 0$. Последнее утверждение вытекает из следующей системы неравенств: $0 < \nu < 0.5$, $df(r)/dr > 0$, $f(-\alpha) < 0$, $f(0) > 0$. Таким образом, многочлен (II) может быть разложен на множители:

$$f(r) = \nu(r - r_1)(r^2 + r_1 r + q) ,$$

где $q = r_1^2 + (\alpha^2 + d)(\nu^{-1} - 1)$.

Решение дифференциального уравнения (I2) представляется в виде

$$\frac{E(r)}{E(\beta)} = F(r) \left[\left(\frac{r - r_1}{\beta - r_1} \right)^{n} \left(\frac{r^2 + r_1 r + q}{\beta^2 + r_1 \beta + q} \right)^{m} \left(\frac{r}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\nu}} , \qquad (I3)$$

где

$$F(r) = \exp\left[\frac{3r_1(\nu - n)}{\nu\sqrt{4q - r_1^2}} \left(\arctan\frac{2r + r_1}{\sqrt{4q - r_1^2}} - \arctan\frac{2\beta + r_1}{\sqrt{4q - r_1^2}} \right) \right] ;$$

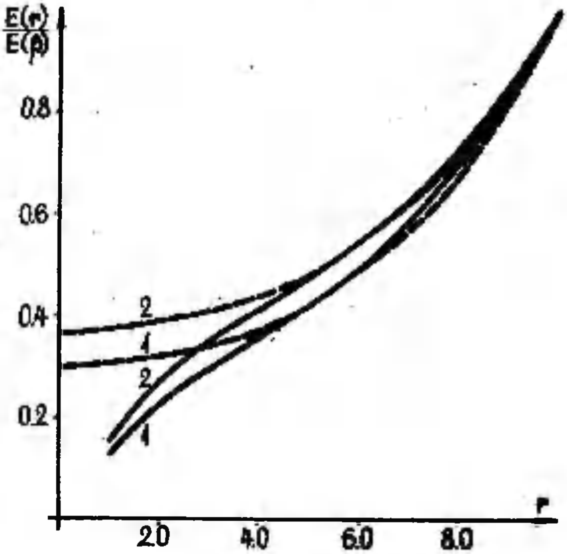
$$n = \frac{(1+3\nu)r_1^3 + d\alpha}{2r_1^3 - d\alpha} ; \qquad m = \frac{1}{2}(3\nu - n) .$$

В частном случае сплошного диска, когда $\alpha = 0$, из формулы (I3) получим

$$\frac{E(r)}{E(\beta)} = \left(\frac{\nu r^2 + (1-\nu)\beta^2}{\beta^2} \right)^{\frac{1+3\nu}{2\nu}} .$$

В пользу практического использования формулы (I3) заметим, что любое непрерывное распределение модуля Юнга в круглом диске с произвольной точностью можно аппроксимировать в круглом многослойном диске, который представляет собой набор из большого числа связанных между собой концентрических колец, имеющих различные модули Юнга.

На фиг. I, для иллюстрации, приведены оптимальные распределения величины $E(r)/E(\beta)$ по радиусу вращающегося диска, когда $\alpha = 1$ (сплошные линии) и $\alpha = 0$ (пунктирные линии).



Фиг. I

Кривые с номером I подсчитаны при $\beta = 10$, $\nu = 0.33$, а кривые с номером 2 - при $\beta = 10$, $\nu = 0.25$.

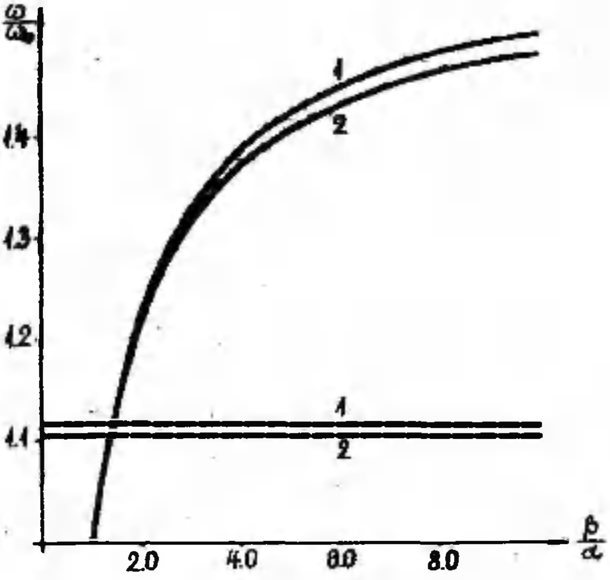
Предельное значение параметра ω_0^* для однородного диска с отверстием, когда условие пластичности Треска выполняется только на внутреннем радиусе диска, вычисляется по формуле

$$\omega_0^* = \frac{4\sigma}{3[(3+\nu)\beta^2+(1-\nu)\alpha^2]} . \qquad (14)$$

Аналогичная формула для сплошного однородного диска, в которой условие пластичности Треска выполняется только в центре диска, имеет вид

$$\omega_0^2 = \frac{16}{3(3+\nu)\beta^2} \qquad (I5)$$

Формулы (I4) и (I5) легко получаются на основании [3]. Эффективность проектирования вращающихся дисков с оптимальной непрерывной неоднородностью можно оценить отношением $\sqrt{\omega^2/\omega_0^2} = \omega/\omega_0$. На фиг. 2 приведены графики зависимости ω/ω_0 от β в случае, когда $\alpha = 1$ (сплошные линии) и $\alpha = 0$ (пунктирные линии), причем цифра I соответствует значению $\nu = 0.33$ и цифра 2 - значению $\nu = 0.25$. Из фиг. 2 следует высокая эффективность проектирования вращающихся дисков с оптимальной неоднородностью.



Фиг. 2

Убедимся теперь в том, что других решений не существует. Так как предположение $|\sigma_r| = \sigma \neq 0$ не согласуется с граничными условиями $\sigma_r(\alpha) = \sigma_r(\beta) = 0$, то примем теперь, что

$$\sigma_\theta - \sigma_r = C_1 . \qquad (I6)$$

Подставляя (I6) в уравнение равновесия (I) и интегрируя, получим

$$\sigma_r = C_1 \ln r - \frac{3}{2}\omega^* r^2 + C_2 \ . \tag{I7}$$

Пользуясь граничными условиями $\sigma_r(\alpha) = \sigma_r(\beta) = 0$, находим теперь следующие выражения для констант C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{3\omega^*(\beta^2 - \alpha^2)}{2(\ln\beta - \ln\alpha)} \ ; \quad C_2 = \frac{3}{2}\omega^*\alpha^2 - C_1 \ln\alpha \ . \tag{I8}$$

Так как здесь также $C_1 > 0$, то из условия $|\sigma_\theta - \sigma_r| = \sigma$ и равенства (I6) получим, что в (I6)-(I8) следует принять $C_1 = \sigma$. Из (I8) находим теперь следующее предельное значение параметра ω^* :

$$\omega^* = \frac{2\sigma(\ln\beta - \ln\alpha)}{3(\beta^2 - \alpha^2)} \ . \tag{I9}$$

Подставляя (I8) и (I9) в (I6), получим

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma\left[\ln x - \frac{(x-1)\ln s}{s-1}\right] , \tag{20}$$

где обозначено $x = r^2/\alpha^2$; $s = \beta^2/\alpha^2$.

Исследуя σ_r на экстремум по формуле (20), находим, что σ_r имеет максимальное значение при

$$x = \frac{s-1}{\ln s} \ . \tag{2I}$$

Так как величина x удовлетворяет неравенству

$$1 < x < s \ , \tag{22}$$

где $s > 1$, то

$$(\sigma_r)_{max} = \frac{\sigma \ln x}{2x}\left(x - \frac{x-1}{\ln x}\right) ,$$

где $\alpha < r < \beta$.
На основании (2I) и (22) нетрудно убедиться, что

$$x > \frac{x-1}{\ln x}$$

и, следовательно, $(\sigma_r)_{max} > 0$. Но тогда имеем $(\sigma_\theta)_{max} = -\sigma + (\sigma_r)_{max}$, откуда следует, что $(\sigma_\theta)_{max} > \sigma$ и условие $|\sigma_\theta| \le \sigma$ в (5) не может быть выполнено. Таким образом, предположение о выполнении неравенства $|\sigma_\theta - \sigma_r| = \sigma$ неверное, и решение, полученное в предположении $|\sigma_\theta| = \sigma$, единственное.

В заключение авторы благодарят проф. Ю.В.Немировского и к.ф.-м.н. Б.С.Резникова за подробное обсуждение результатов данной статьи.

Литература

I. Колчин Г.Б., Теория упругости неоднородных тел. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы. Кишинев, "Штиинца", I972.

2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М., Изд. МГУ, I976.

3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж., Теория упругости. М., "Наука", I975.

4. Хейн К., Хейниоо М., Оптимальная неоднородность сферического сосуда под давлением. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I985, 72I, 43-5I.

5. Klosowicz B., The nonhomogeneous spherical pressure vessel of maximum rigidity. Bull. Acad. Polon. Sci. ser. sci. techn., 1968, 16, № 7, 557-568.

6. Klosowicz B., Sur la nonhomogénéité optimale d'une barre tordue, Bull. Acad. Polon. Sci. ser. sci. techn., 1970, 18, № 8, 539-543.

7. Klosowicz B., Lurie K.A., On the optimal distribution of elastic moduli of a nonhomogeneous body, J. Optimis-

Theory Appl., 1973, 12, № 1, 32-42.

The optical nonhomogeneity of a rotating disk in the stationary temperature field

K. Hein, M. Hein, M. Heinloo

Summary

The problem of optimal nonhomogeneity, that guarentees satisfaction of the Treeca yield condition at once in all points of a rotating disk in the stationary temperature field, is stated in this work. The exact solution of this problem has been got. For the illustration of the results, the optimal distribution of Young modulus has been brought out. The effectiveness of the projection of such constructions has been discussed in this work.

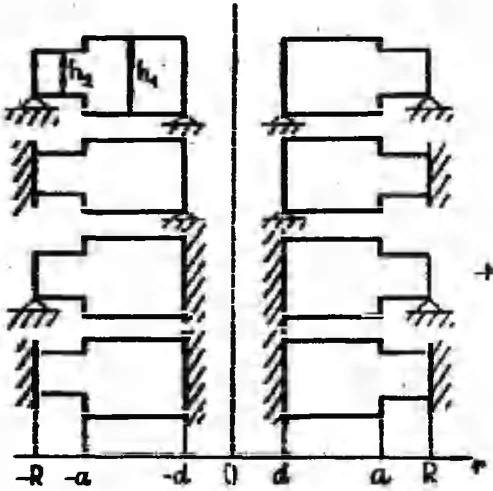
НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СТУПЕНЧАТЫХ ПЛАСТИНОК

А.Салупере
Тартуский государственный университет

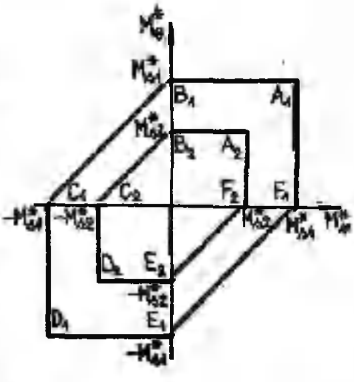
Задача несущей способности двухступенчатых круглых пластинок решена Лепиком [4], Кенигам и Рыхлевским [5]. Валлнер нашел несущую способность кольцевых однородных пластинок при различных краевых условиях [1-3]. В данной работе ищется несущая способность ступенчатых кольцевых пластинок.

I. Основные уравнения и метод решения

Рассмотрим двухступенчатые кольцевые пластинки с утолщенной внутренней частью. Изучим четыре вида опирания (фиг. I). Материал пластинки считаем жестко-пластическим и подчиняющимся



Фиг. I.



Фиг. 2.

условию текучести Треска (фиг. 2). На фиг. 2 M_r^* – радиальный изгибающий момент, M_θ^* – тангенциальный изгибающий момент, а предельные моменты – $M_{01}^* = \sigma_0 h_1^2/4$ и $M_{02}^* = \sigma_0 h_2^2/4$, где σ_0 – предел текучести материала.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_2}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad \delta = \frac{d}{R}, \quad \alpha = \frac{a}{R},$$

$$M = \frac{4M^*}{\sigma_0 h_2^2}, \quad Q = \frac{4RQ^*}{\sigma_0 h_2^2}. \qquad (I.I)$$

Здесь Q – перерезывающая сила, а смысл величин h_1, h_2, r, d и a виден из фиг. I. Объем пластинки можно выразить в виде

$$V = \pi R^2 h_2 \Delta, \qquad (I.2)$$

где

$$\Delta = 1 + \alpha^2(\gamma - 1) - \delta^2\gamma \qquad (I.3)$$

характеризует форму пластинки. Безразмерная нагрузка выражается следующим образом:

$$p = \frac{2\pi^2 R^6}{3\sigma_0 V^2} p^*. \qquad (I.4)$$

Учитывая выражения (I.I) – (I.4), уравнения равновесия представляются в виде

$$(xQ)' = -6x\Delta^2 p,$$
$$(xM_1)' = M_2 + xQ, \qquad (I.5)$$

причем M_1 и M_2 – соответственно радиальный и тангенциальный безразмерные изгибающие моменты, и штрих означает интегрирование по координате x. Предельные моменты имеют теперь значение

$$M_0 = \begin{cases} \gamma^2, & \text{если } x < \alpha \\ 1, & \text{если } x \geq \alpha. \end{cases} \qquad (I.6)$$

Поперечную нагрузку считаем равномерно распределенной. Как хорошо известно, до предельной нагрузки пластинка остается жесткой, а при предельной нагрузке возникают кольцевые области, каждая из которых характеризуется различным пластическим состоянием. В свою очередь, эти состояния соответствуют различным ребрам и вершинам шестиугольника Треска. Назовём возможную комбинацию из различных пластических состояний возможным режимом. Если удовлетворять краевым условиям на границах различных пластических состояний, мы получим нелинейную систему уравнений для нахождения предельной нагрузки и радиусов кольцевых областей. Так как система уравнений является нелинейной, ее надо решить численно на ЭВМ. Пакет программ составлен таким образом, что он сам интегрирует уравнения равновесия, составляет систему уравнений, решает ее и, проверяя удовлетворенность неравенств для моментов, выбирает реализуемый режим.

2. Анализ результатов

Как известно, при свободно опертом крае $M_1 = 0$, а при жестко заделанном крае $M_1 = -M_\delta$. Таким образом, получается:

I) для кольцевой пластинки, внутренний и внешний края которой свободно оперты, при предельной нагрузке p_{cc} возможны 4 разных режима (фиг. 3);

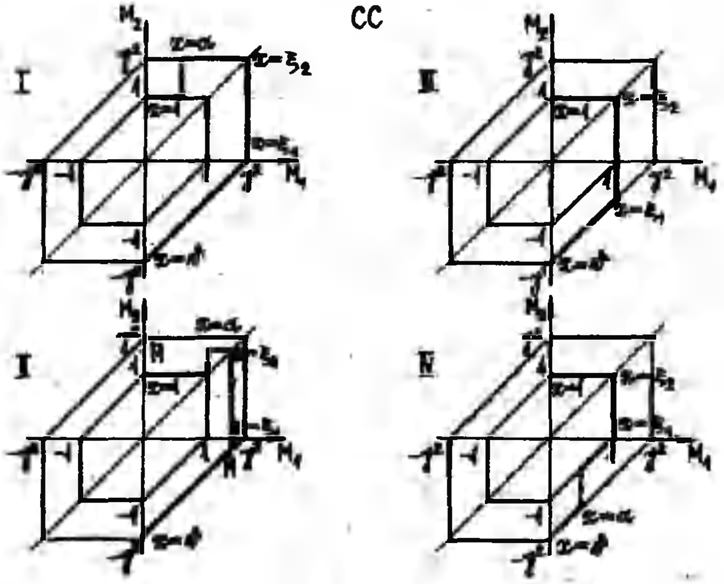
2) для кольцевой пластинки, внутренний край которой свободно оперт и внешний жестко заделан, при предельной нагрузке $p_{сж}$ возможны 5 разных режимов (фиг. 5);

3) для кольцевой пластинки, внутренний край которой жестко заделан и внешний свободно опрет, при предельной нагрузке $p_{жс}$ возможны 6 разных режимов (фиг. 7);

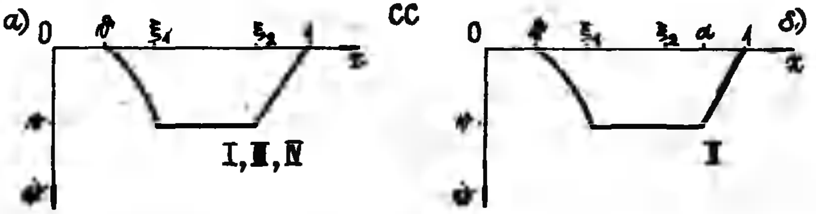
4) для кольцевой пластинки, внутренний и внешний края которой жестко заделаны, при предельной нагрузке $p_{жж}$ возможны 7 разных режимов (фиг. 9).

На фиг. 3-I0 символами ξ_i обозначены радиусы кольцевых областей, и с такими же комбинациями букв "с" и "ж", как в индексах предельной нагрузки, указаны виды опирания.

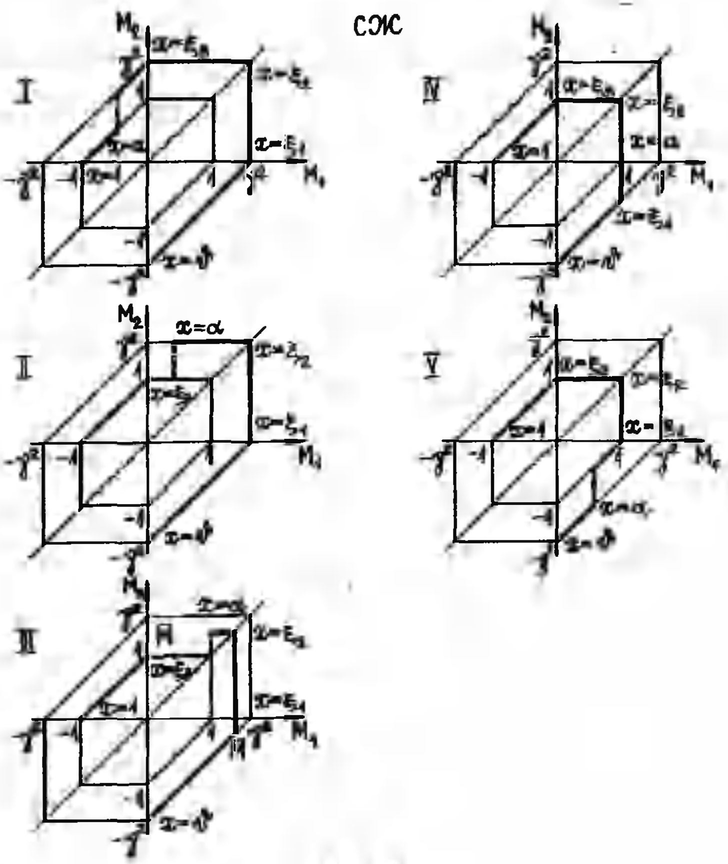
Так как при предельном состоянии в некоторых кольцевых областях распределение изгибающих моментов M_1 и M_2 находится между внешним и внутренним шестиугольниками Треска, то на фиг. 3, 5, 7 и 9 $\bar{M}$ означает максимальное значение изгибающих моментов в таких областях. Если нагрузка превышает


CC
I
II
III
IV
M2
M1
γ²
1
-1
-γ²
x=α
x=ξ2
x=ξ1
x=1
x=ϑ

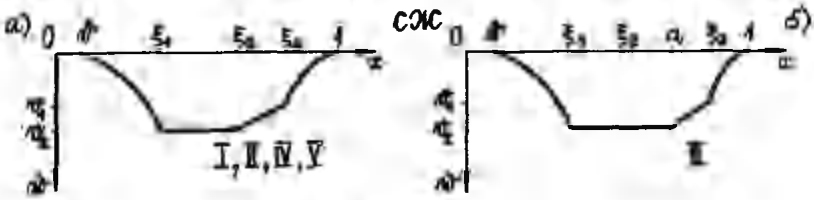
Фиг. 3


а)
б)
CC
0
ϑ
ξ1
ξ2
α
1
x
ψ
I,III,IV
II

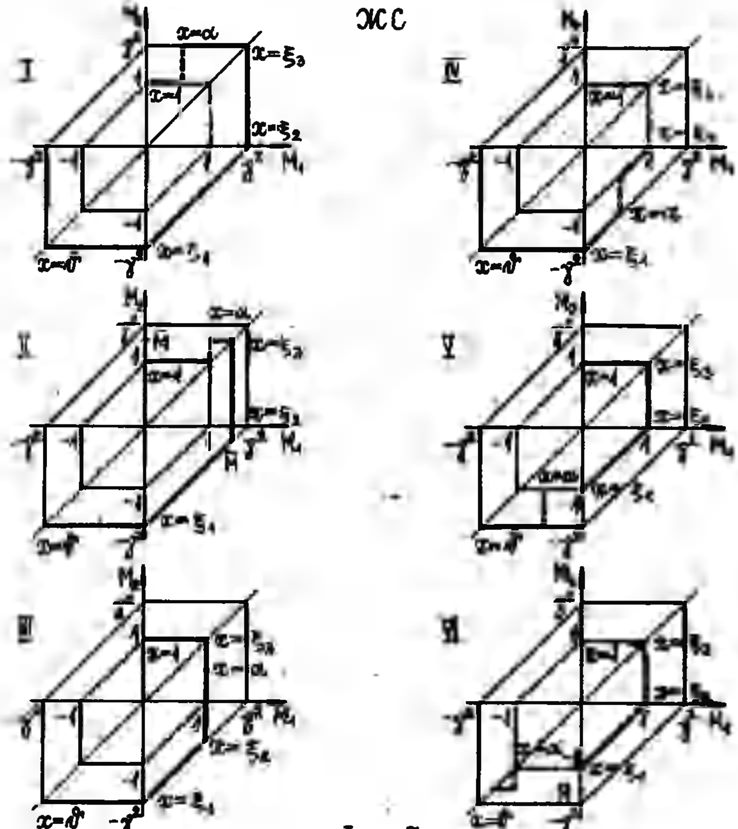
Фиг. 4


СЖС
I
II
III
IV
V
M₂
M₁
γ²
-γ²
1
-1
x=ξ₁₂
x=ξ₁
x=ξ₁₁
x=α
x=1
x=ϑ

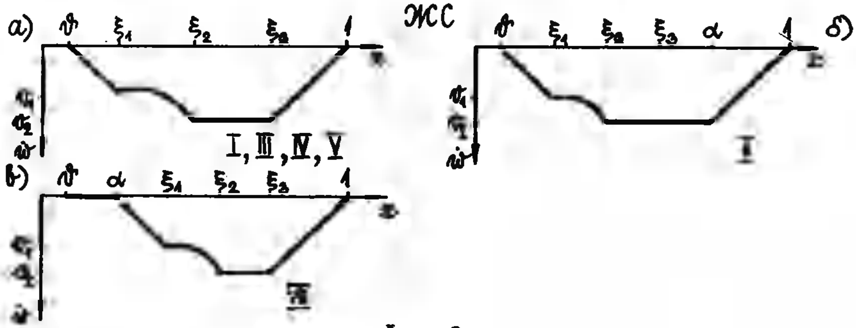
Фиг. 5


а)
б)
СЖС
0
ϑ
ξ₁
ξ₂
ξ₁₂
α
1
x
I, II, IV, V
III

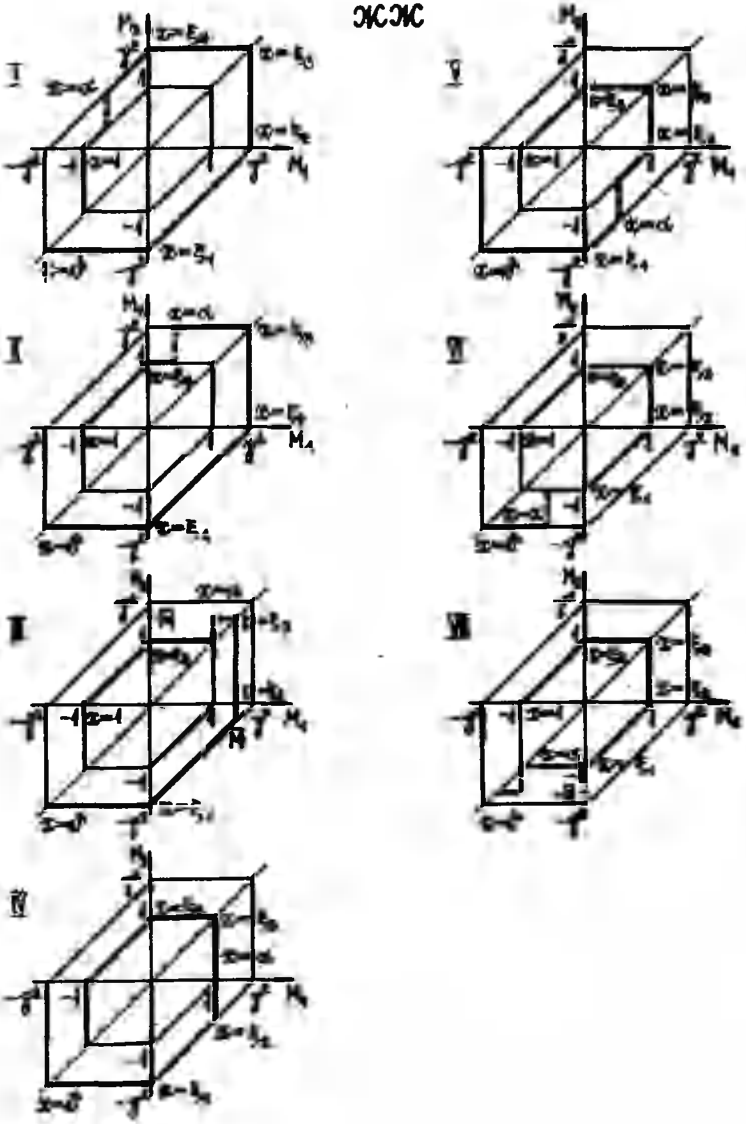
Фиг. 6


ЖСС
I
II
III
IV
V
VI
M₁
M₂
x=α
x=ξ₃
x=ξ₂
x=ξ₁
x=1
x=ϑ
-1
1
γ
-γ

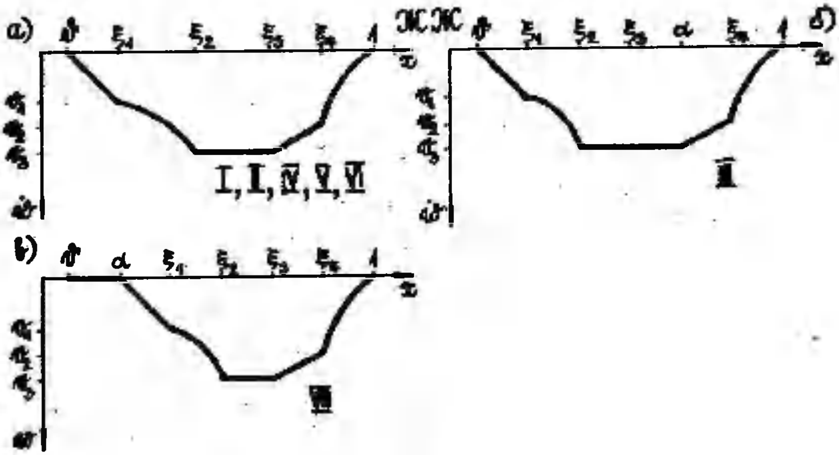
Фиг. 7


ЖСС
а)
б)
в)
ϑ
ξ₁
ξ₂
ξ₃
α
1
x
I, III, IV, V
II
VI

Фиг. 8


ЖЖ
I
II
III
IV
V
VI
VII
M_2
M_1
$x=\alpha$
$x=1$
$x=0$
$x=E_1$
$x=E_2$
-1
1
γ
$-\gamma$
R
M

Фиг. 9



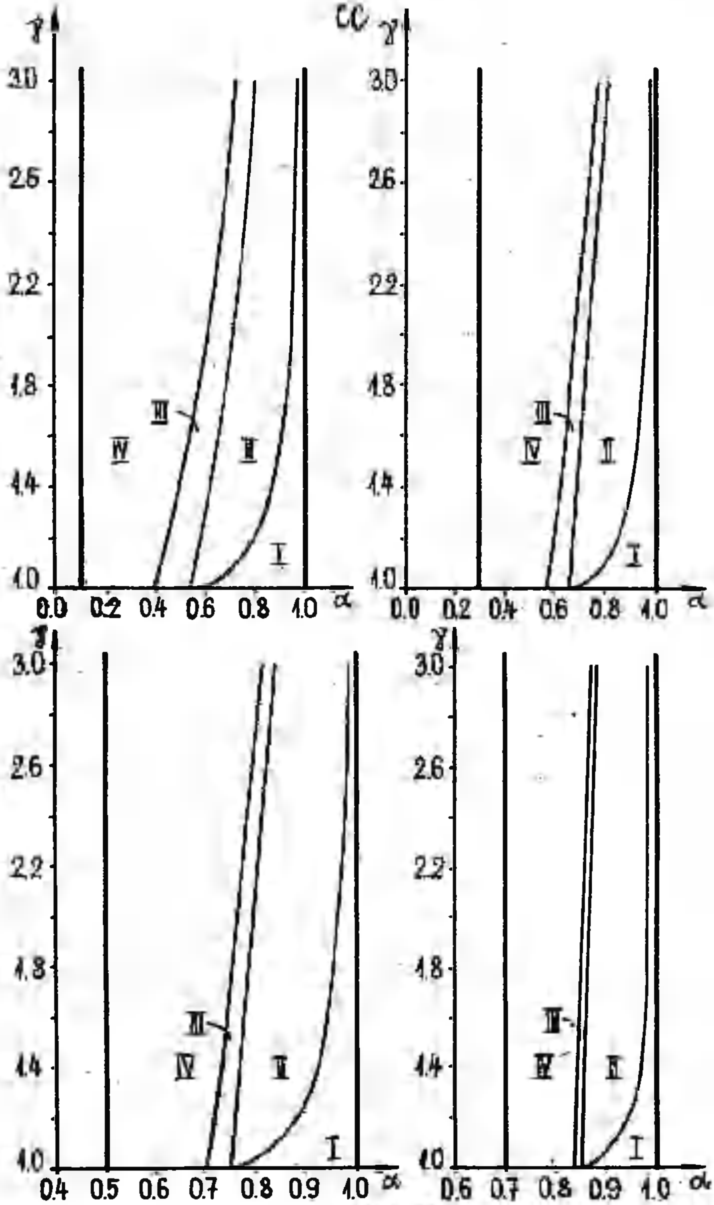
Фиг. I0

предельную нагрузку и начинается пластическая деформация, то такие области остаются жесткими. На фиг. 4, 6, 8 и I0 изображены поля скоростей в начале движения пластинки. Там же указаны римскими цифрами номера режимов из предшествующей фигуры, при которых данное поле скоростей реализуется.

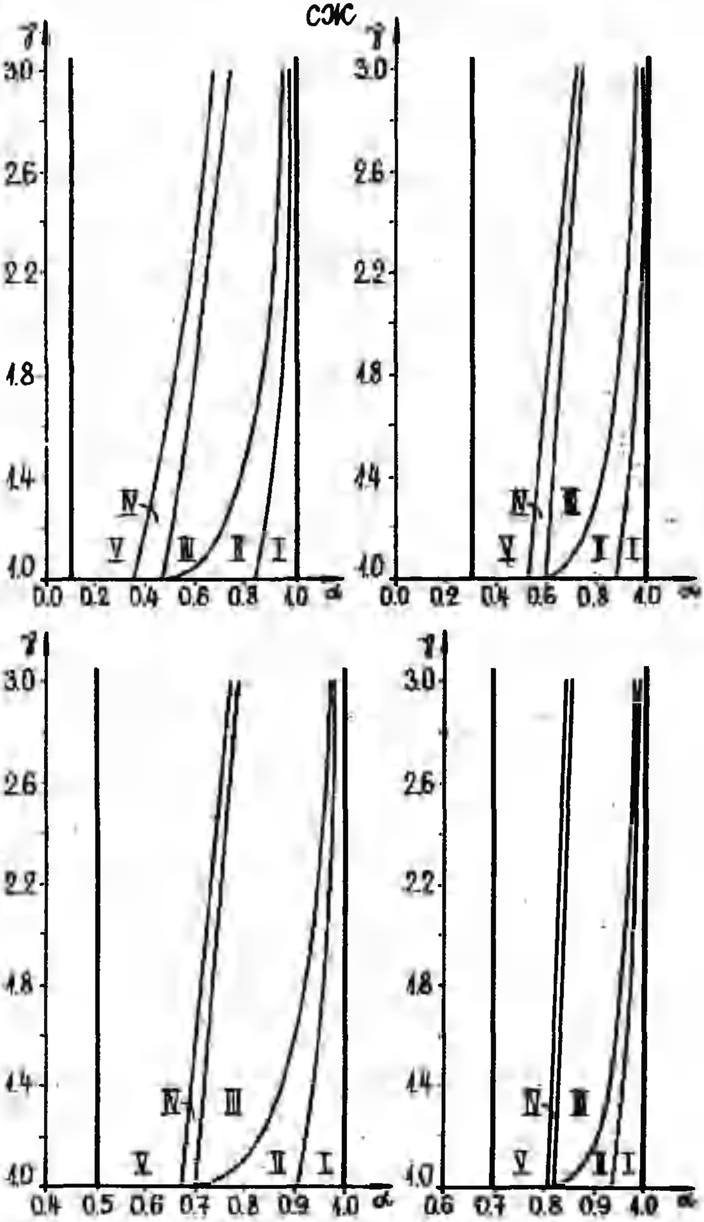
На фиг. II – I4 изображены области реализации возможных режимов на плоскости (α, γ) при следующих значениях относительных внутренних радиусов пластинки: $\vartheta = 0{,}I$; 0,3; 0,5; 0,7.

С помощью пакета программ можно найти предельную нагрузку для любых значений параметров α, γ и ϑ. В таблицах I-4 приведены значения предельной нагрузки при всех четырех видах опирания для некоторых значений параметров α, γ и ϑ. Эти значения в таблицах расположены по следующей схеме:

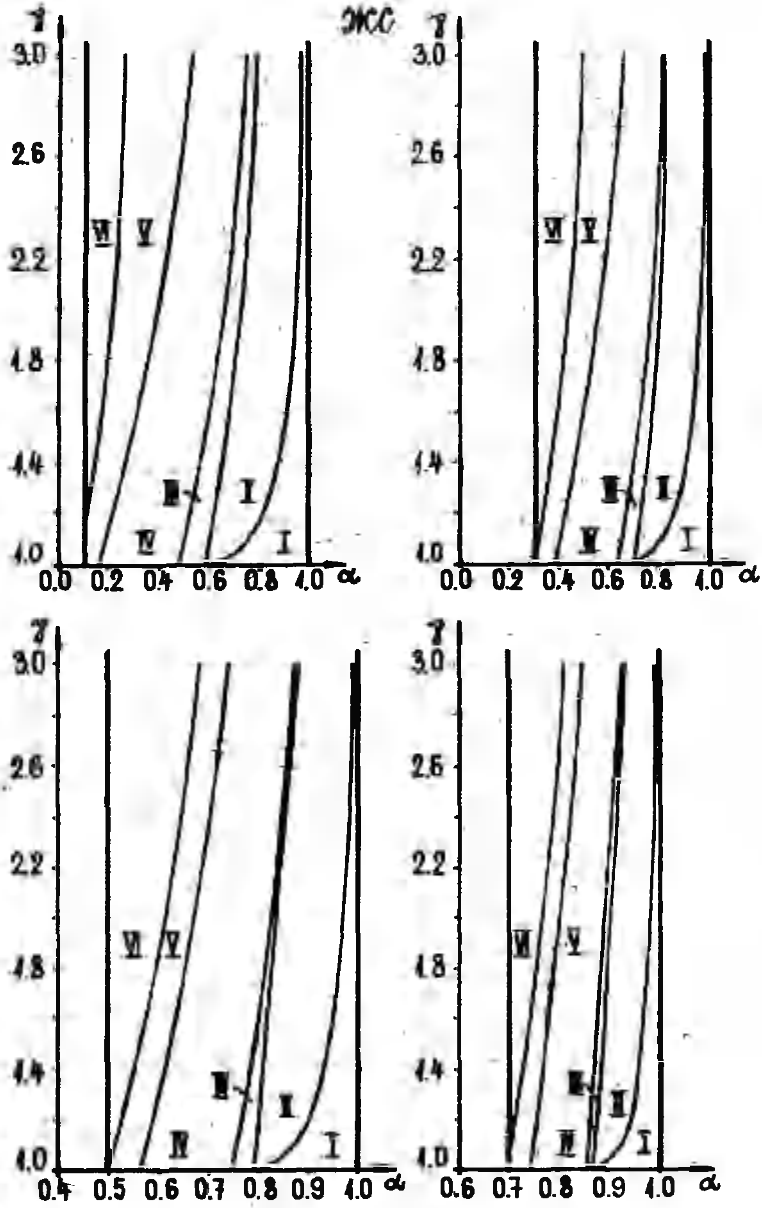
$P_{сс}$
$P_{жс}$
$P_{сж}$
$P_{жж}$



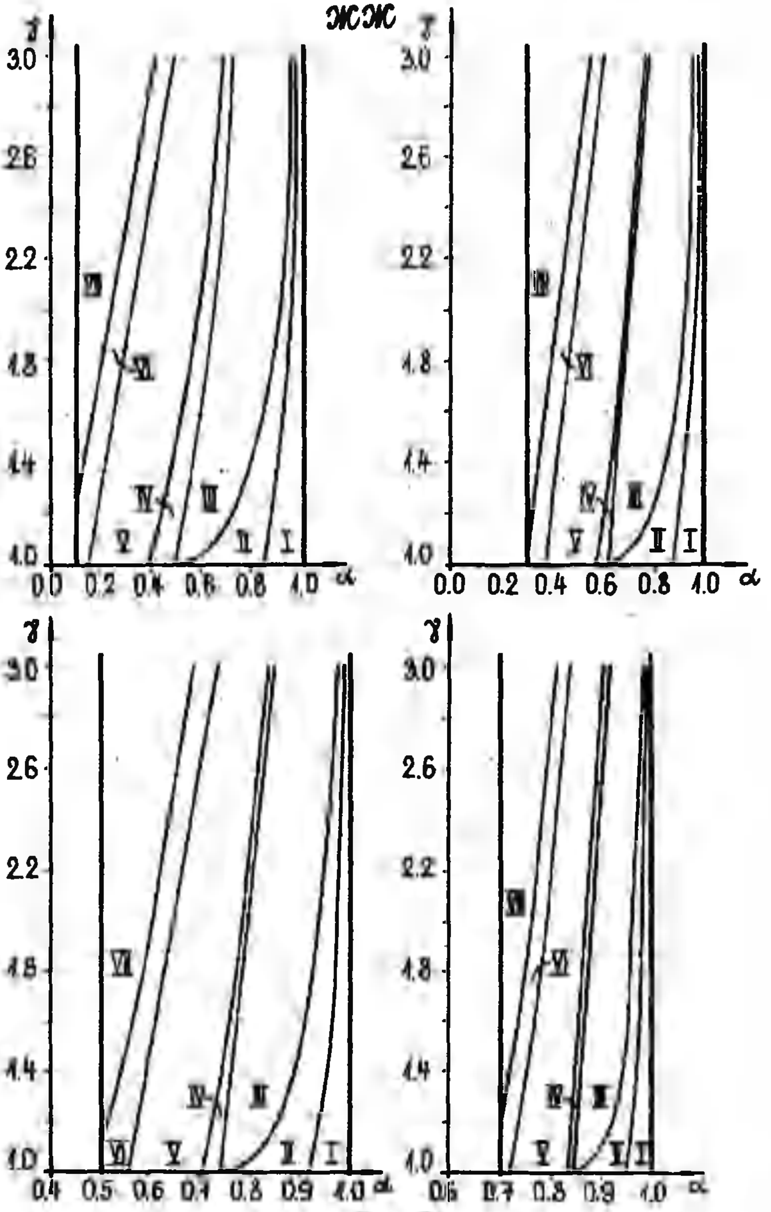
Фиг. II

СЖ
γ
3.0
2.6
2.2
1.8
1.4
1.0
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 α
0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 α
0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 α
I
II
III
IV
V

Фиг. 12


ЖС
γ
3.0
2.6
2.2
1.8
1.4
1.0
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 α
VI V
III
II
IV
I
γ
3.0
2.6
2.2
1.8
1.4
1.0
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 α
VI V
III
II
IV
I
γ
3.0
2.6
2.2
1.8
1.4
1.0
0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 α
VI V
III
II
IV
I
γ
3.0
2.6
2.2
1.8
1.4
1.0
0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 α
VI V
III
II
IV
I

Фиг. I3



Фиг. I4

$\vartheta = 0.1$ Таблица I.

α \ γ	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
0.2	2,480	2,592	2,715	2,848	2,990	3,141
	2,866	3,032	3,199	3,604	4,205	4,563
	3,671	3,798	3,938	4,089	4,249	4,418
	4,151	4,349	4,547	5,369	5,655	6,030
0.3	2,502	2,632	2,771	2,916	3,067	3,224
	2,881	3,064	3,242	3,406	3,568	3,736
	3,684	3,820	3,964	4,116	4,273	4,434
	4,153	4,357	4,557	4,744	4,920	5,094
0.4	2,481	2,585	2,692	2,801	2,911	3,023
	2,851	3,002	3,149	3,291	3,424	3,539
	3,646	3,728	3,819	3,912	4,007	4,104
	4,096	4,241	4,382	4,519	4,650	4,771
0.5	2,424	2,481	2,532	2,584	2,636	2,688
	2,788	2,874	2,957	3,036	3,111	3,182
	3,527	3,579	3,725	3,583	3,600	3,619
	3,982	4,059	4,089	4,134	4,177	4,219
0.6	2,328	2,355	2,453	2,575	2,313	2,311
	2,681	2,706	2,763	2,719	2,728	2,737
	3,498	3,351	3,334	3,392	3,467	3,544
	3,879	3,766	3,728	3,740	3,773	3,600
0.7	2,341	2,203	2,177	2,202	2,242	2,282
	2,634	2,504	2,443	2,428	2,436	2,452
	3,717	3,337	3,086	2,965	2,912	2,886
	4,054	3,683	3,431	3,268	3,167	3,106
0.8	2,605	2,282	2,064	1,956	1,901	1,867
	2,891	2,543	2,311	2,162	2,066	2,004
	3,565	3,596	3,246	2,870	2,627	2,477
	3,982	4,034	3,540	3,164	2,893	2,699
0.9	2,497	2,591	2,606	2,218	1,953	1,783
	2,832	2,941	2,827	2,439	2,161	1,961
	3,399	3,303	3,244	3,208	3,186	2,843
	3,794	3,701	3,645	3,612	3,519	3,082

$\vartheta = 0.3$ Таблица 2.

$\alpha \backslash \gamma$	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
0.4	4,311	4,348	4,400	4,464	4,538	4,621
	5,598	5,922	6,259	6,986	7,087	7,256
	6,295	6,309	6,343	6,391	6,452	6,523
	7,874	8,234	8,606	9,544	9,625	9,722
0.5	4,256	4,244	4,250	4,269	4,298	4,335
	5,484	5,685	5,885	6,080	6,270	6,457
	6,188	6,108	6,054	6,019	5,998	5,989
	7,690	7,862	8,037	8,209	8,374	8,533
0.6	4,147	4,038	3,956	3,894	3,847	3,811
	5,312	5,347	5,390	5,436	5,482	5,526
	5,962	5,739	5,615	5,432	5,302	5,192
	7,431	7,362	7,313	7,277	7,250	7,228
0.7	3,962	3,705	3,563	3,495	3,473	3,232
	5,076	4,942	4,830	4,737	4,660	4,596
	6,023	5,427	5,007	4,726	4,549	4,444
	7,180	6,757	6,475	6,289	6,118	5,961
0.8	4,248	3,675	3,286	3,029	2,864	2,758
	5,103	4,609	4,271	4,036	3,872	3,756
	6,419	5,918	5,105	4,511	4,080	3,769
	7,740	6,887	6,145	5,601	5,196	4,890
0.9	4,532	4,727	4,026	3,423	2,991	2,678
	5,596	5,590	4,759	4,169	3,738	3,416
	6,081	5,955	5,883	5,844	5,008	4,342
	7,326	7,215	7,158	6,662	5,796	5,139

$\vartheta = 0,5$

Таблица 3.

$\alpha \backslash \gamma$	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
0.6	11,05	10,79	10,57	10,40	10,26	10,16
	15,56	16,28	17,03	17,80	18,85	18,39
	16,05	15,58	15,18	14,85	14,57	14,33
	21,49	22,19	22,92	23,68	25,53	24,91
0.7	10,58	9,949	9,440	9,026	8,685	8,401
	14,76	14,73	14,73	14,78	14,84	14,91
	15,27	14,25	13,42	12,71	12,12	11,62
	20,36	19,99	19,73	19,53	19,37	19,25
0.8	10,14	8,952	8,098	7,488	7,053	6,752
	13,90	13,11	12,55	12,09	11,72	11,42
	15,81	13,62	11,98	10,74	9,793	9,078
	19,57	17,89	16,68	15,82	15,18	14,64
0.9	12,22	10,65	8,852	7,560	6,611	5,903
	15,80	13,39	11,72	10,53	9,647	8,98
	16,29	16,16	15,15	12,69	10,85	9,442
	20,69	20,68	18,06	15,71	13,96	12,63

$\vartheta = 0.7$

Таблица 4.

$\alpha \backslash \gamma$	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
0.8	57,85	53,36	49,64	46,52	43,88	41,63
	86,79	87,29	88,12	89,14	90,28	91,47
	83,81	76,97	71,26	66,43	62,33	58,81
	118,4	117,3	116,8	116,6	116,6	116,8
0.9	57,1	47,46	40,44	35,21	31,22	28,14
	78,84	71,41	66,25	62,57	59,71	57,33
	93,65	76,88	64,56	55,27	48,11	42,50
	115,6	101,0	90,60	82,94	77,19	72,79

Таблица 5.

ϑ	0.1	0.3	0.5	0.7
P_{cc}	2,381	4,292	11,39	63,30
$P_{жс}$	2,698	5,291	14,89	86,83
$P_{сж}$	3,557	6,302	16,60	92,07
$P_{жж}$	3,950	7,531	20,86	120,4

Тот факт, что при сравнительно больших значениях α с возрастанием параметра γ предельная нагрузка не возрастает, объясняется тем, что объем пластинки считается постоянным.

Литература

1. Валлнер Х., О несущей способности кольцевых пластин (на эстонском языке). Сб. научных трудов Эст. сельхоз. академии, № 17, 1960.
2. Валлнер Х., Определение несущей способности кольцевых жестко-пластических пластин. Информационный бюллетень № 2, ВИНИТИ АН СССР, 1961.
3. Валлнер Х., О несущей способности и вязко-пластическом течении кольцевых пластин. Канд.диссертация, Тарту, 1965.
4. Лепик Ю.Р., К несущей способности неоднородных пластин и оболочек. Изв. АН СССР,ОТН., Механика и машиностроение, 1963, 4, 167-171.
5. König J.A., Rychlevski J. Limit analysis of circular plates with jump non-homogeneity. Int.J. Solids Structures, 1966, <u>2</u>, 493-513.

Load carrying capacity of rigid-plastic annular plates

A.Salupere

Summary

The load carrying capacity of rigid-plastic stepped annular plates subjected to the uniform pressure is found for Tresca material. Four cases of support conditions are considered (Fig. 1). The regimes of motion and velocity fields are found (Fig. 3-10) and the regions of validity of these are stated (Fig. 11-14). The load carrying capacity of stepped plates is presented for some values of the parameters α, γ and ϑ in tables 1-4 and the values of load carrying capacity of uniform plates are accommodated in table 5.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Я.Леллеп, М.Мандри
Тартуский государственный университет

Оптимальному проектированию жесткопластических цилиндрических оболочек с учетом умеренно больших прогибов посвящены работы [I,2,5], где найдены проекты минимального веса для заданной формы деформирования. Поставленные задачи решены для кусочно-линейных условий текучести. В [5] найден оптимальный проект в классе непрерывно дифференцируемых функций (на толщину никаких ограничений не наложено), а в [2] толщина ограничена снизу,и решение получено в классе непрерывных функций. В данной работе этот метод обобщается для случая, когда толщина оптимального проекта ограничена сверху (верхний предел равен постоянной толщине сравниваемой оболочки). Рассматриваются оболочки с однородной стенкой и предполагается, что их материал подчиняется условию текучести Треска. Оптимальный проект ищется в классе кусочно-непрерывных функций.

I. Постановка задачи

Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, подверженную действию внутреннего давления. Края оболочки считаем шарнирно закрепленными. Требуется найти проект минимального веса при условии, что прогиб оболочки оптимальной толщины совпадает с прогибом оболочки постоянной толщины.

Эта же задача рассматривалась в [I,2,5] при различных предположениях на материал , поверхность текучести и геометрию оболочки. В данной работе учитываются два новых аспекта. Во-первых, стенка оболочки считается однородной (в предыдущих исследованиях была использована модель типа "сэндвич"). Во-вторых, требуется, чтобы толщина стенки оптимального проекта не превышала заданного значения. В качестве верхнего предела для толщины естественно выбрать толщину сравниваемой оболочки.

В настоящей работе используются обозначения, введенные в статьях [I,2]. Предельный момент и предельная сила выражаются в данном случае в виде $M_* = \sigma_0 h_*^2/4$, $N_* = \sigma_0 h_*$. Для сечения с толщиной h имеем $M_0 = \sigma_0 h^2/4$, $N_0 = \sigma_0 h$.

Точная поверхность текучести для цилиндрических оболочек, материал которых подчиняется условию пластичности Треска, имеет довольно сложную форму. Ниже применяется аппроксимация, которая была представлена в [3]. Предполагая, как и в работах [I,2,3], что напряженное состояние оболочки соответствует всюду грани поверхности текучести $N_\varphi = N_0$, приходим к неравенству

$$|m(x)| + n^2(x) - v^2(x) \leq 0, \quad x \in [0,1]. \qquad (I.I)$$

Здесь и в дальнейшем v – безразмерная толщина, m – безразмерный изгибающий момент, а

$$n = \frac{p}{2}, \qquad (I.2)$$

поскольку осевая сила возникает из-за действия внутреннего давления [5].

Ограничение на толщину можно записать в виде

$$v(x) - 1 \leq 0, \quad x \in [0,1]. \qquad (I.3)$$

Оказывается, что при наличии требования (I.3) нельзя найти оптимального решения для поставленной задачи ни в классе функции $C^1[0,I]$, ни в $C^0[0,I]$. Поэтому естественно искать решение среди кусочно-непрерывных функций. Интересно отметить, что в случае пластических балок решение, удовлетворяющее ограничению (I.3), существует в классе функций $C^1[0,I]$, как показано в [4].

Следуя [I], запишем уравнения равновесия в виде (штрих обозначает дифференцирование по x)

$$m'' = \begin{cases} \omega(1-v), & x \in (0, x_1), \\ \omega(p-v), & x \in (x_1, 1), \end{cases} \qquad (I.4)$$

где ω – параметр оболочки [I,5] и

$$x_1 = 1 - \sqrt{\frac{2(1-n^2)}{\omega(p-1)}}. \qquad (I.5)$$

Вследствие условий закрепления оболочки к уравнению (I.4) принадлежат краевые условия

$$m(1)-m'(0)=0 \ . \qquad (I.6)$$

Таким образом, задача заключается в минимизации объема стенки оболочки

$$V=\int_0^1 v(x)dx \qquad (I.7)$$

с учетом требований (I.I) - (I.6). Кроме отмеченных ограничений, следует учитывать и неравенство $n \leq v$, которое связано со статической допустимостью решения. Однако, как показывается ниже, это неравенство удовлетворяется автоматически и поэтому может быть опущено при формулировке задачи.

2. Условия оптимальности

Поставленную задачу рассмотрим как задачу оптимального управления [2,5]. Введем новые управления θ_1 и θ_2 и запишем неравенства (I.I) и (I.3) в виде

$$|m|+n^2-v^2+\theta_1^2=0 \qquad (2.I)$$

и

$$v-1+\theta_2^2=0 \ . \qquad (2.2)$$

С учетом (I.4),(I.7),(2.I),(2.2) составим функцию Гамильтона

$$H=-v+\psi_1 q-\psi_2\omega(v-\kappa)+\varphi_1(|m|+n^2-v^2+\theta_1^2)+$$
$$+\varphi_2(v-1+\theta_2^2) \ , \qquad (2.3)$$

где величина $q=m'$ и

$$\kappa=\begin{cases} 1, & x\in(0,x_1) \ , \\ p, & x\in(x_1,1) \ . \end{cases} \qquad (2.4)$$

Условия стационарности функции Гамильтона приводят к уравнениям

$$\varphi_1\theta_1=0 \ , \qquad \varphi_2\theta_2=0 \qquad (2.5)$$

и

$$1+\psi_2\omega+2\varphi_1 v-\varphi_2=0 \ . \qquad (2.6)$$

Условия (2. 5) означают, что существуют некоторые области, где (I.I) или (I.3) превращаются в равенства. Эти равенства могут реализоваться и одновременно. Какая комбинация разных участков с разными режимами управления является наилучшей, это может показать лишь синтез задачи.

Оказывается, что оптимальными являются два типа решений. В случае обоих типов имеем

$$\vartheta = 1, \quad x \in (0, x_2) \tag{2.7}$$

и

$$\theta_1 = 0, \quad x \in (x_2, 1), \tag{2.8}$$

где x_2 - некоторая точка на отрезке [0,I], которая определяется при численном решении уравнения равновесия (I.4) с учетом краевых условий (I.6), условий непрерывности величин m и q, а также соотношений (2.7), (2.8).

Сопряженные переменные удовлетворяют сопряженной системе

$$\begin{aligned} \psi_1' &= -\psi_1 \frac{|m|}{m}, \\ \psi_2' &= -\psi_1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

и условиям трансверсальности. При решении системы (2.9) следует учитывать соотношения (2.5) и (2.6). Решение сопряженной системы осуществляется аналогично работам [2,5] и поэтому здесь не приводится.

3. Оптимальный проект

Оптимальное решение поставленной задачи имеет различную структуру в диапазонах нагрузки $p_0 \le p \le p_1$ и $p_1 \le p \le 2$ соответственно. Здесь p_0 - несущая способность оболочки, которая выражается в виде [I]

$$p_0 = -\omega + \sqrt{\omega^2 + 2\omega + 4}. \tag{3.I}$$

В случае первого типа решения имеем $x_1 < x_2$, а в случае второго - $x_2 < x_1$. Величина p_1 определяется из условия $x_1(p_1) = x_2(p_1)$.

Первый тип. Точки x_1, x_2 разделяют промежуток (0,I) на три части. В данном случае имеем при

$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \tag{3.2}$$

при $x \in (x_1, x_2)$

$$\theta_2 = 0 \tag{3.3}$$

и при $x \in (x_2, 1)$

$$\theta_1 = 0\,. \tag{3.4}$$

Рассмотрим каждый из этих промежутков отдельно. Для области $x \in [0, x_1]$ получим с помощью (I.4), (I.6), (2.I), (2.2) и (3.2) оптимальное решение в виде предполагается, что $m<0$)

$$m = n^2 - 1\,, \quad q = 0\,, \quad v = 1\,. \tag{3.5}$$

В средней области согласно (3.3) и (2.2) v = I. Поэтому уравнение (I.4) примет вид

$$m'' = \omega(p-1)\,. \tag{3.6}$$

Интегрируя уравнение (3.6) и учитывая то, что при $x = x_1$ имеют место равенства (3.5), приходим к решению

$$\begin{aligned} m &= \frac{\omega}{2}(p-1)(x-x_1)^2 + n^2 - 1\,, \\ q &= \omega(p-1)(x-x_1)\,, \\ v &= 1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

для отрезка $x \in [x_1, x_2]$.

В промежутке $x \in (x_2, 1)$ согласно (3.4) и (2.I)

$$v = \sqrt{n^2 - m}\,. \tag{3.8}$$

С помощью (3.8) и (I.4) получим нелинейное уравнение

$$m'' = \omega\left(p - \sqrt{n^2 - m}\right) \tag{3.9}$$

для определения изгибающего момента. Уравнение (3.9) интегрируется численно на ЭВМ методом Рунге-Кутта. Начальные значения $m(x_2)$ и $q(x_2)$ находим с помощью формул (3.7). Третье краевое условие m(I) = 0 удовлетворяется путем выбора подходящего значения для координаты x_2. В вычислениях был использован метод Рунге-Кутта четвертого порядка, а величина x_2 определена с точностью 10^{-4}.

Второй тип. При $p > p_1$ имеем $x_2 < x_1$. Поэтому предыдущий вариант решения не может иметь места. Оказывается, что теперь

$$\theta_1 = 0 \tag{3.10}$$

при $x \in (0,1)$ и

$$\theta_2 = 0 \tag{3.11}$$

при $x \in (0, x_2)$. Из (3.10), (3.11) и (1.4) следует, что

$$m = n^2 - 1, \quad q = 0, \quad v = 1 \tag{3.12}$$

при $x \in [0, x_2]$. Аналогично предыдущему случаю получим для отрезка $[x_2, 1]$ соотношение (3.8), но вместо (3.9) имеем в данном случае

$$m'' = \begin{cases} \omega(1 - \sqrt{n^2 - m}), & x \in (x_2, x_1), \\ \omega(p - \sqrt{n^2 - m}), & x \in (x_1, 1). \end{cases} \tag{3.13}$$

К уравнению (3.13) принадлежат согласно (3.12) и (1.6) краевые условия $m(x_2) = n^2 - 1$, $q(x_2) = 0$, $m(1) = 0$, которые позволяют проинтегрировать уравнение (3.13) и одновременно найти величину x_2. После определения изгибающего момента можно оптимальную толщину вычислить с помощью формулы (3.8)

Чтобы оценить эффективность найденного проекта, введем коэффициент

$$e = \int_0^1 v(x)\,dx, \tag{3.14}$$

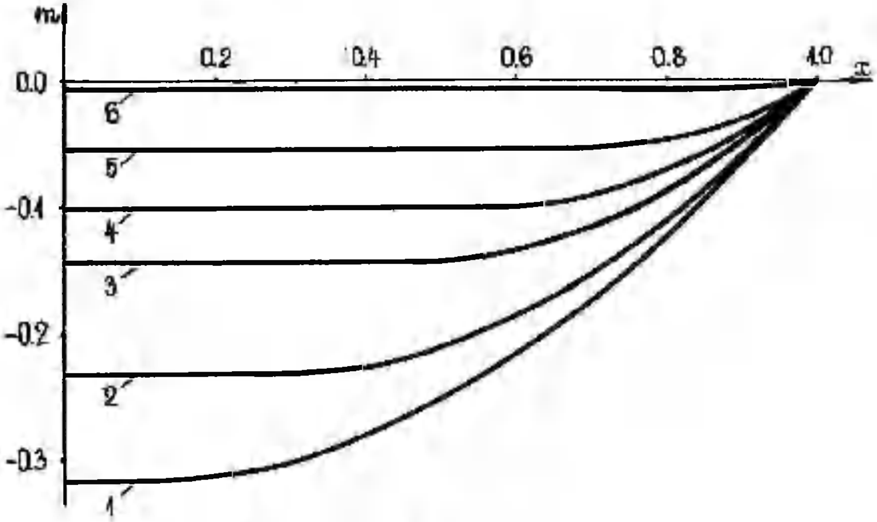
который равен отношению масс оптимального проекта и сравниваемой оболочки постоянной толщины. С помощью (3.5), (3.7), (3.8) и (3.12) видим, что при обоих типах решения формуле (3.14) можно придать вид

$$e = x_2 + \int_{x_2}^{1} \sqrt{n^2 - m}\,dx. \tag{3.15}$$

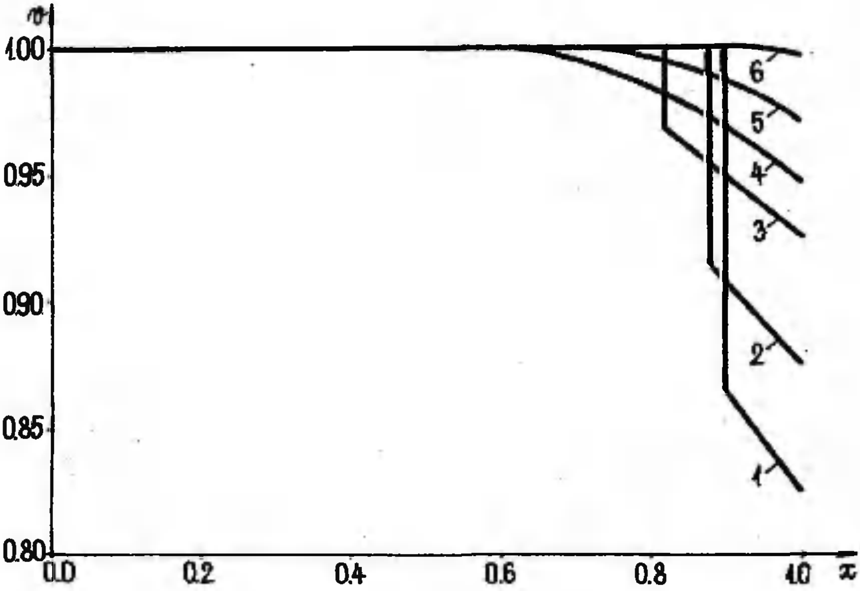
Результаты вычислений представлены на фиг. I, 2 и в таблицах I, 2. На фиг.I приведены решения уравнений (3.9) и (3.13) при некоторых значениях интенсивности поперечной нагрузки.

Здесь, как и на фиг. 2, $\omega = I,2$ и кривые I - 6 соответствуют следующим значениям давления

№	I	2	3	4	5	6
p	I,6500	I,7500	I,8500	I,8945	I,9445	I,9945



Фиг. I



Фиг. 2

На фиг. 2 указана зависимость оптимального проекта от поперечной нагрузки. Отсюда видно, что при $\mu \geq \mu_1$, где $\mu_1 =$ =I,8945,существуют оптимальные проекты и в классе непрерывных функций, а при $\mu < \mu_1$ лишь в классе кусочно-непрерывных функций. Это утверждение относится, конечно, только к случаю, когда толщина оболочки ограничена сверху. Если на толщину ограничений не наложено, то оптимальные проекты можно найти среди гладких функций [5].

Таблица I

p	I,650	I,750	I,850	I,895	I,955	I,995
x_I	0,095	0,278	0,468	0,563	0,720	0,904
x_2	0,895	0,878	0,8I8	0,563	0,7I8	0,896
e	0,984	0,987	0,99I	0,992	0,998	0,999

Таблица 2

p	I,5I5	I,6I5	I,7I5	I,8I5	I,895	I,995
x_I	0,089	0,246	0,390	0,533	0,66I	0,926
x_2	0,939	0,946	0,940	0,833	0,66I	0,920
e	0,986	0,99I	0,992	0,992	0,994	0,999

Некоторые значения величин x_I, x_2, e приведены в табл. I и 2. Табл. I соответствует случаю ω = I,2, табл.2 - случаю $\omega = 2$. Из вычислений следует, что при наличии ограничения на толщину экономия оптимального проекта невелика. Значение коэффициента экономии существенно зависит от интенсивности поперечной нагрузки. При увеличении величины p ($p \to 2,0$) оптимальная толщина стремится к заданной толщине сравниваемой оболочки (фиг. 2). В то же время изгибающий момент во всех поперечных сечениях стремится к нулю (фиг. I). При $p > 2$ оптимальный проект совпадает с проектом заданной постоянной толщины.

Литература

I. Лellеп Я., К оптимальному проектированию жестко-пластических цилиндрических оболочек с учетом больших прогибов. Уч. зап. Тартуск.ун-та, 1983, 659, 52-58.

2. Леллеп Я., Хейн Х., Оптимальное проектирование армированных пластических цилиндрических оболочек. - Настоящий сборник, 96-I09.

3. Drucker D.C., Shield R.T., Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution. J.Appl.Mech., 1959, 26, № 1, 61-68.

4. Lellep J., Application of the optimal control theory to optimal design of plastic beams in post-yield range. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn., 1981, 29, № 3-4, 159-168.

5. Lellep J., Sawczuk A., Optimal project of a cylindrical shell for moderately large deflections. Struct.Contr. Proc. Int. IUTAM Symp. Ontario, 1979. Amsterdam, North-Holland, 1980, 431-446.

An optimal design for a closed plastic cylindrical shell

J.Lellep, M.Mandri

Summary

A minimum weight design technique is developed for rigid-plastic cylindrical shells of Tresca material. The novelty of the present study consists in the following:
(i) the shell wall is assumed to be homogeneous and (ii) its thickness is limited. The first assumption involves the necessity for numerical integration of the equilibrium equation in spite the original Tresca condition is linear. Due to the constraint imposed on the shell wall thickness the lack of the optimal solution in the classes of functions C^0 and C^1 is observed. The optimal design is found in the class of piece-wise continuous functions.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Я.Леллеп, Х.Хейн
Тартуский государственный университет

Оптимальному проектированию цилиндрических оболочек, изготовленных из однородного жесткопластического материала, посвящено в литературе много внимания [7]. В [I, 8] разработан метод оптимизации пластических оболочек с учетом умеренно больших прогибов и заданной формы деформирования. Однако проблемы оптимального проектирования оболочек и пластин,выполненных из пластических композитных материалов, пока мало изучены. Ниже обобщается методика оптимизации, приведенная в [I, 8] , для случая армированного волокнами пластического материала. Рассматриваются короткие шарнирно закрепленные цилиндрические оболочки, при которых армирующие волокна расположены либо в окружном, либо в осевом направлении. Оболочки нагружены внутренним давлением и осевым растяжением. Точная поверхность текучести заменяется кусочно-линейной аппроксимацией [5, 6] .

I. Формулировка задачи и основные уравнения

Рассмотрим двухслойную круговую цилиндрическую оболочку радиуса A и длины 2ℓ. Оболочка подвержена действию равномерно распределенной внутренней нагрузки интенсивности P и осевому растяжению N_1 на единицу длины контура. Пусть концы цилиндра шарнирно закреплены таким образом, что они допускают малые перемещения в осевом направлении. Из-за симметрии в дальнейшем рассмотрим лишь правую половину оболочки (начало координатной оси OX находится в центре оболочки).

Рассмотрим задачу минимального веса для заданной формы деформирования [I, 8]. Требуется найти такое распределение толщины несущих слоев h , при которых прогиб W не превышает прогиба W_* для оболочки постоянной толщины h_*, но масса достигает минимального значения.

Уравнение равновесия имеет в безразмерных переменных вид

$$m' - 2nw' + \omega(n_* - p) = 0, \qquad (I.I)$$

где штрих обозначает дифференцирование по x и

$$x=\frac{X}{l},\quad n=\frac{N_x}{N_*},\quad n_*=\frac{N_\varphi}{N_*},\quad m=\frac{M}{M_*},\quad \gamma=\frac{h}{h_*},$$
$$p=\frac{PA}{N_*},\quad \omega=\frac{N_*l^2}{AM_*},\quad w=\frac{N_*W}{2M_*},\quad u=\frac{UlN_*^2}{4M_*^2}. \tag{I.2}$$

Здесь M – изгибающий момент, N_φ – окружное усилие, U – осевое перемещение, $N_* = 2\sigma_0 h_*$, $M_* = \sigma_0 h_* H$, H – общая толщина оболочки, а σ_0 обозначает предел текучести материала (матрицы). С учетом (I.2) можно компоненты деформации записать в виде

$$\varepsilon_x=\frac{4M_*^2}{N_*^2l^2}\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right);\quad \varepsilon_\varphi=\frac{2M_*}{AN_*}w;\quad \varkappa_x=\frac{2M_*}{N_*l^2}w''. \tag{I.3}$$

Допустим, что оболочка изготовлена из армированного волокнами композитного материала. В дальнейшем будем различать осевое и окружное армирование. В первом случае волокна расположены вдоль образующих, а во втором – в окружном направлении. В работах [5, 6] были предложены аппроксимации поверхностей текучести в виде многогранников. При окружном армировании имеем многогранник с уравнениями граней [5, 6]

$$\begin{aligned}&\pm n\mp n_*-\alpha w=0,\\&\pm n-w=0,\\&\pm n_*-\alpha w=0,\\&\pm m-w=0,\end{aligned} \tag{I.4}$$

а в случае осевого армирования –

$$\begin{aligned}&\pm n_*+w=0,\\&\pm n\mp n_*-\alpha w=0,\\&\pm n-\alpha w=0,\\&\pm m-\alpha w=0,\end{aligned} \tag{I.5}$$

где $\alpha>1$ некоторый параметр армирования.

Предположим, что материал оболочки можно считать жесткопластическим подчиняющимся условиям (I.4) или (I.5) соответственно. Кроме того, требуем, что вектор с компонентами деформации (I.3) перпендикулярен к поверхности текучести.

2. Оболочка постоянной толщины

В случае неизменной толщины можно согласно (I.2) выбирать $v = 1$. В [I] представлена методика решения поставленной задачи в случае кусочно-линейных условий пластичности. Опираясь на результаты работы [I], допустим, что в случае окружного армирования реализуется режим $n_* = \alpha$ (при этом $-1 \leq m \leq 1$) во всей оболочке. Аналогично при осевом армировании имеем

$$n_* = 1 \quad (-\alpha \leq m \leq \alpha) .$$

Интегрируя уравнение равновесия (I.I) с учетом требуемых условий, находим (при окружном армировании $\gamma = \alpha$, при осевом $\gamma = 1$)

$$w = \begin{cases} w_0 + \frac{\omega}{4n}(\gamma - p)x^2, & x \in (0, x_1), \\ \frac{\omega}{2n}(\gamma - p)x_1(x - 1), & x \in (x_1, 1), \end{cases} \tag{2.I}$$

где

$$x_1 = 1 - \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega\gamma(p - \gamma)}} ,$$
$$w_0 = \frac{1}{4n}\left[\omega(p - \gamma) - 2\frac{\alpha}{\gamma}\right] . \tag{2.2}$$

С помощью (2.2) находим предельную нагрузку (при $w_0 = 0$)

$$p_0 = \frac{2\alpha}{\omega\gamma} + \gamma . \tag{2.3}$$

При $\alpha = \gamma = 1$ рассматриваемый материал можно считать изотропным. Однако, формулы (2.I) - (2.3) соответствуют аппроксимированному условию пластичности (I.4) или (I.5) и поэтому не совпадают с известными решениями для изотропного жесткопластического материала [2, 4].

3. Оптимальный проект

Задачи минимального веса цилиндрических оболочек для заданной формы деформирования были рассмотрены в [I, 8]. В этих работах выяснилось, что существуют оптимальные проекты, при которых прогибы совпадают с соответствующими прогибами для оболочек постоянной толщины. Поэтому в данной работе будем искать проекты минимального веса и прогиб задаем в виде (2.I), (2.2).

Допустим, что в оболочке реализуется режим $n_* = \gamma v$ (это означает, что в зависимости от вида армирования имеем согласно (I.4) $n_* = \alpha v$ или согласно (I.5) $n_* = v$) . Подставляя с помощью (2.I) прогиб w в уравнение равновесия (I.I), получим

$$m' = \begin{cases} \omega\gamma(1-v), & x \in (0, x_1), \\ \omega(p-\gamma v), & x \in (x_1, 1). \end{cases} \tag{3.I}$$

Так как концы оболочки шарнирно закреплены, то к уравнению (3.I) принадлежат краевые условия

$$q(0) = m(1) = 0, \tag{3.2}$$

где $q = m'$.

Выбранный режим пластического деформирования налагает на изгибающий момент ограничение

$$|m| \le \frac{\alpha}{\gamma} v. \tag{3.3}$$

Неравенство (3.3) означает то, что изображающая точка напряженного состояния находится на грани $n_* = \gamma v$ многогранника (I.4) или (I.5).

Кроме (3.3), в каждой точке $x \in (0, I)$ должно быть выполнено неравенство

$$n \le v, \tag{3.4}$$

которое гарантирует то, что осевое усилие не превышает предельного значения. Следует отметить, что ограничение типа (3.4) в [I, 8] не рассматривалось. Оно выполнялось автоматически.

Математически поставленная задача заключается в минимизации объема несущих слоев

$$V = \int_0^1 v(x)dx \,, \tag{3.5}$$

удовлетворяя при этом требованиям (3.I) - (3.4).

Уравнение (3.I) запишем в виде системы

$$m' = q \,; \qquad q' = \begin{cases} \omega\gamma(1-v), & x \in (0, x_1)\,, \\ \omega(p-\gamma v), & x \in (x_1, 1)\,, \end{cases} \tag{3.6}$$

а неравенства (3.3) и (3.4)-в виде равенств

$$|m| - \frac{\alpha}{\gamma} v + \theta_1^2 = 0 \tag{3.7}$$

и

$$n - v + \theta_2^2 = 0 \,, \tag{3.8}$$

где θ_1 и θ_2 интерпретируем как управления.

Необходимые условия оптимальности для данной задачи представим с помощью принципа максимума Л.С.Понтрягина [3]. Функционалу (3.5) и уравнениям (3.6) - (3.8) соответствует функция Гамильтона Лагранжа

$$L = -v + \psi_1 q - \psi_2 \omega(\gamma v - \kappa) + \varphi_1\left(|m| - \frac{\alpha}{\gamma} v + \theta_1^2\right) + \\ + \varphi_2(n - v + \theta_2^2) \,, \tag{3.9}$$

где κ-постоянная, которая равна γ при $x \in (0, x_1)$ и p при $x \in (x_1, 1)$.

В формуле (3.9) φ_1 и φ_2-некоторые неопределенные множители Лагранжа, а ψ_1 , ψ_2-т.н. сопряженные переменные, удовлетворяющие сопряжённой системе

$$\psi_1' = \pm \varphi_1 \quad , \quad \psi_2' = -\psi_1 \tag{3.10}$$

и условиям трансверсальности

$$\psi_1(0) = \psi_2(1) = 0 \,. \tag{3.11}$$

Сопряженные переменные, как и фазовые координаты m и q, должны быть непрерывны в каждой точке интервала (0,I).

Условия стационарности функции Гамильтона можно записать в виде

$$\varphi_1\theta_1 = 0 \,, \quad \varphi_2\theta_2 = 0 \tag{3.12}$$

и
$$-1-\psi_2\omega\gamma-\varphi_1\frac{\alpha}{\gamma}-\varphi_2=0\,. \qquad (3.13)$$

Согласно (3.12) и (3.7), (3.8) имеем ряд разных вариантов, подозреваемых оптимальность. Оказывается, что оптимальный проект соответствует случаю, когда
$$\theta_1=0, \quad \varphi_1\neq 0, \quad \theta_2\neq 0, \quad \varphi_2=0 \qquad (3.14)$$
при $x\in(0,x_2)$ и
$$\theta_1\neq 0, \quad \varphi_1=0, \quad \theta_2=0, \quad \varphi_2\neq 0 \qquad (3.15)$$
при $x\in(x_2,1)$.

С помощью (3.7), (3.8) и (3.13) - (3.15) получим соотношения
$$|m|=\frac{\alpha}{\gamma}v\,, \qquad \varphi_1=-\frac{\gamma}{\alpha}(1+\psi_2\omega\gamma) \qquad (3.16)$$
при $x\in(0,x_2)$, где x_2 определяется из условия $v(x_2-)=n$, и
$$v=n\,, \qquad \varphi_2=-1-\psi_2\omega\gamma \qquad (3.17)$$
при $x\in(x_2,1)$. Учитывая то, что $m\leq 0$, сопряженную систему (3.10) с помощью (3.15), (3.16) можно записать в виде
$$\psi_1'=\begin{cases}-\frac{\gamma}{\alpha}(1+\psi_2\omega\gamma)\,, & x\in(0,x_2)\,,\\ 0\,, & x\in(x_2,1)\,,\end{cases} \qquad (3.18)$$
$$\psi_2'=-\psi_1\,.$$

Системе (3.18) и условиям трансверсальности (3.11) удовлетворяют при $x\in(0,x_2)$
$$\psi_1=-\beta K\,\mathrm{sh}\,\beta x\,, \qquad \psi_2=-\frac{1}{\omega\gamma}+K\,\mathrm{ch}\,\beta x\,, \qquad (3.19)$$
и при $x\in(x_2,1)$
$$\psi_1=-\beta K\,\mathrm{sh}\,\beta x_2\,, \qquad \psi_2=\beta K\,\mathrm{sh}\,\beta x_2(x-1)\,, \qquad (3.20)$$
где
$$K=\frac{1}{\omega\gamma}\left[\mathrm{ch}\,\beta x_2-\beta(1-x_2)\,\mathrm{sh}\,\beta x_2\right]^{-1}, \qquad \beta=\gamma\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \qquad (3.21)$$

Существование нетривиального решения сопряженной системы

(3.I9) - (3.2I) подтверждает непротиворечивость программы управления (3.I4) и (3.I5). Подставляя из (3.I6) и (3.I7) величину v в (3.6), получим уравнение для определения изгибающего момента

$$m' = \begin{cases} \omega\gamma\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}m\right), & x\in(0,x_1), \\ \omega\left(p+\frac{\gamma^2}{\alpha}m\right), & x\in(x_1,x_2), \\ \omega(p-\gamma n), & x\in(x_2,1). \end{cases} \tag{3.22}$$

Решение уравнения (3.22), удовлетворяющее краевым условиям (3.2), имеет вид

$$m = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{ch\beta x}{sh\beta x_1}\left[\frac{\alpha}{\gamma^2}(p-\gamma n)sh\beta(x_1-x_2)+\frac{q_*}{\beta}ch\beta(x_1-x_2)\right], & x\in[0,x_1], \\ -\frac{\alpha p}{\gamma^2}+\frac{\alpha}{\gamma^2}(p-\gamma n)ch\beta(x-x_2)+\frac{q_*}{\beta}sh\beta(x-x_2), & x\in[x_1,x_2], \\ \left[\frac{\omega}{2}(p-\gamma n)(x-x_2)-\frac{\alpha n}{\gamma(x_2-1)}\right](x-1), & x\in[x_2,1], \end{cases} \tag{3.23}$$

где учитывается условие $m(x_2)=-\alpha n/\gamma$, а

$$q_* = \frac{\omega(p-\gamma n)}{2}(x_2-1)-\frac{\alpha n}{\gamma(x_2-1)}. \tag{3.24}$$

Оптимальное распределение толщины определяется с помощью соотношений (3.I6), (3.I7) и (3.23), (3.24). Из (3.I6) и (3.I7) следует

$$v = \begin{cases} -\frac{\gamma}{\alpha}m, & x\in[0,x_2], \\ n, & x\in[x_2,1], \end{cases} \tag{3.25}$$

где изгибающий момент m задан формулой (3.23).

Из условия $v(x_2-)=n$ получим уравнение

$$-\frac{1}{sh\beta x_1}\left[\frac{\alpha n\, ch\beta x_2}{\beta\gamma(1-x_2)}-\frac{\omega}{2\beta}(p-\gamma n)(1-x_2)ch\beta x_2-\right.$$

$$-\frac{\alpha}{\gamma^2}(p-\gamma n)\,\mathrm{sh}\,\beta x_2] + \frac{\alpha}{\gamma^2}(p-\gamma) = 0\,, \qquad (3.26)$$

которое служит для определения величины x_2 .

4. Результаты и выводы

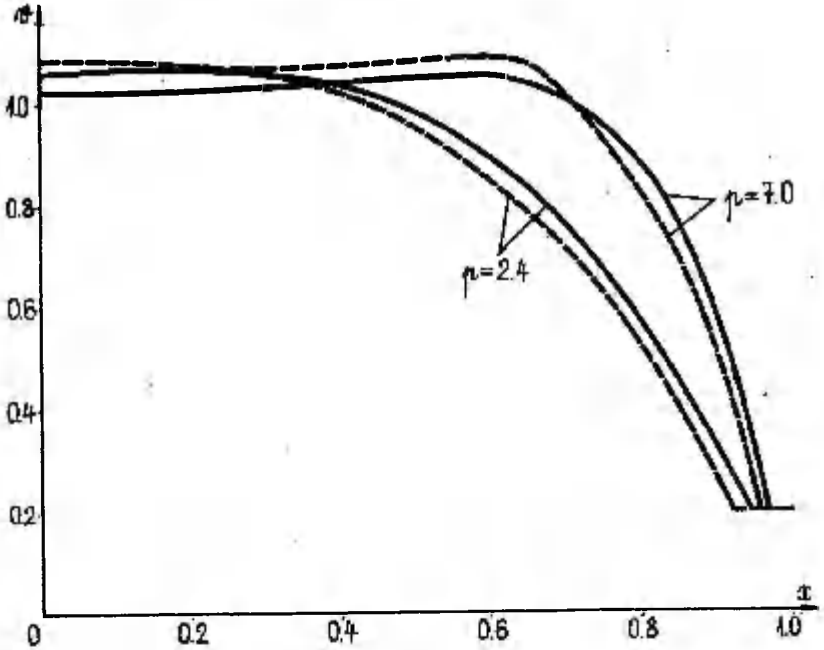
Результаты вычислений представлены на фиг. I - 3 и в табл. I, 2. На фиг. I и 2 изображена оптимальная толщина оболочки при обоих видах армирования. Здесь, как и на фиг. 3 , сплошные линии соответствуют окружному армированию, штриховые - осевому армированию, а $\omega = 4$; $\alpha = 1{,}5$. Оптимальные проекты, представленные на фиг. I, получены для осевого растяжения $n = 0{,}2$, а те, которые указаны на фиг. 2, найдены при $n = 0{,}5$. Фиг. I и 2 показывают, что при разных значениях интенсивности поперечной нагрузки и осевого растяжения оптимальная толщина оболочки сравнительно мало зависит от вида армирования. Это несколько неожиданный результат, так как форма условия текучести существенно зависит от ориентации армирующих волокон [5]. Последнее обстоятельство подтверждает и фиг. 3 (здесь $\omega = 8$; $\alpha = 1{,}5$; $n = 0{,}2$), где представлен изгибающий момент при некоторых значениях поперечной нагрузки. Вычисления показывают, что распределения момента являются существенно различными при окружном и осевом армировании.

Сравнительно малое расхождение оптимальной толщины при окружном и осевом армировании объясняется, по-видимому, самой постановкой задачи - минимизируется объем материала при заданных прогибах. Однако распределения перемещений являются разными (как и распределения напряжений) при разных видах армирования. Поэтому проекты, изображенные штриховыми и сплошными линиями на фиг. I и 2, имеют различные прогибы при одинаковых внешних нагрузках.

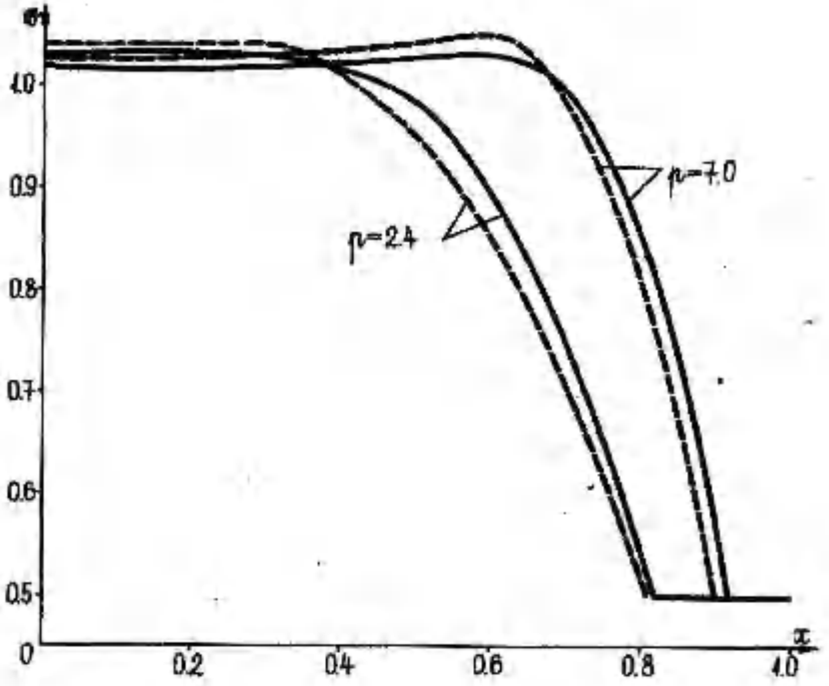
Экономию найденных проектов можно оценивать коэффициентом

$$e = \frac{V}{V_*}\,, \qquad (4.I)$$

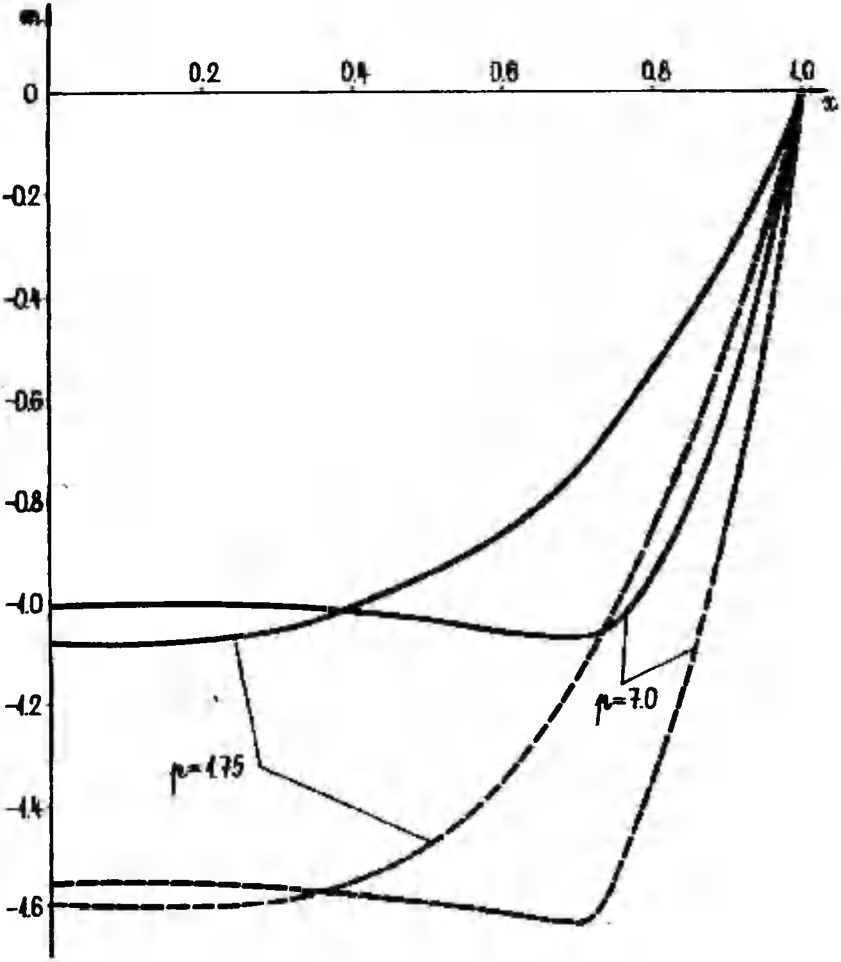
где V обозначает объем материала оптимального проекта, а V_* - объем при постоянной толщине. С помощью (3.23) - (3.25) можно (4.I) привести к виду



Фиг. I



Фиг. 2



Фиг. 3

Таблица I.

p	$\gamma = \alpha$			$\gamma = I$		
	x_I	x_2	e	x_I	x_2	e
I,75	-	-	-	0	0,9I8	0,768
2,0	0	0,932	0,804	0,I34	0,925	0,793
2,4	0,255	0,94I	0,838	0,268	0,934	0,82I
2,6	0,326	0,945	0,850	0,3I5	0,937	0,832
3,0	0,423	0,950	0,867	0,388	0,942	0,849
3,5	0,500	0,955	0,882	0,452	0,947	0,866
3,8	0,534	0,957	0,889	0,482	0,949	0,875
4,5	0,592	0,96I	0,903	0,537	0,954	0,892
5,0	0,622	0,964	0,9II	0,567	0,957	0,902
7,0	0,698	0,970	0,936	0,646	0,964	0,936

Таблица 2.

p	$\gamma = \alpha$			$\gamma = I$		
	x_I	x_2	e	x_I	x_2	e
I,75	-	-	-	0	0,763	0,8I0
2,0	0	0,797	0,838	0,I34	0,785	0,832
2,4	0,255	0,828	0,868	0,268	0,8II	0,855
2,6	0,326	0,839	0,878	0,3I5	0,820	0,864
3,0	0,423	0,856	0,892	0,388	0,836	0,879
3,5	0,500	0,870	0,905	0,452	0,850	0,894
3,8	0,534	0,877	0,9II	0,482	0,857	0,90I
4,5	0,592	0,890	0,923	0,537	0,870	0,9I6
5,0	0,622	0,897	0,930	0,567	0,876	0,925
7,0	0,698	0,9I5	0,952	0,646	0,897	0,956

$$e = x_1 + n(1-x_2) + \frac{r}{\gamma}(x_2 - x_1) - \frac{q_*}{\gamma\omega} , \qquad (4.2)$$

где x_2 – корень уравнения (3.26).

Некоторые значения коэффициента экономии представлены в табл. I и 2 вместе с соответствующими значениями величин x_1 и x_2. В вычислениях принималось $\omega = 4$; $\alpha = 1,5$. Табл. I соответствует случаю $n = 0,2$, табл. 2-случаю $n = 0,5$. Несущая способность оболочки при окружном армировании равна 2,0, а при осевом армировании – I,75. Таким образом, с точки зрения повышения несущей способности оболочки более эффективным является окружное армирование. Если, однако, допускаются конечные перемещения, не превышающие порядок толщины оболочки, то больше экономии достигается при осевом армировании.

Литература

I. Леллеп Я., К оптимальному проектированию жестко-пластических цилиндрических оболочек с учетом больших прогибов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I983, 659, 52-58.

2. Лепик Ю., Большие прогибы жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии осевого растяжения и внешнего давления. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I967, 206, I46-I59.

3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, I969.

4. Duszek M., Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections. Arch. Mech.Stosow.,1966, 18, № 5, 599-614.

5. Lance R.H., Robinson D.N., A maximum shear stress theory of plastic failure of fiber-reinforced materials. J. Mech. and Phys. Solids, 1971, 19, № 2, 49-60.

6. Lance R.N., Robinson D.N., Plastic analysis of filled reinforced, circular cylindrical shells. Int.J.Mech. Sci., 1973, 15, № 1, 65-79.

7. Lellep J., Lepik Ü., Analytical methods in plastic structural design. Eng.Optimiz., 1984,7,№ 3, 209-239.

8. Lellep J., Sawczuk A., Optimal project of a cylindrical shell for moderately large deflections. Struct.Contr. Proc. Int. IUTAM Symp., Ontario, 1979, Amsterdam,1980, 431-446.

Optimal design of fiber-reinforced plastic cylindrical shells

J.Lellep, H.Hein

Summary

The optimal design technique developed earlier for plastic shells beyond the incipient collapse load is accommodated to cylindrical shells made of a fiber-reinforced composite material which behaviour may be depicted by the ductile failure theory. The solution procedure consists in the weight minimization under the requirement that the deflections of the shell do not exceed those of the reference shell of constant thickness. Two types of unidirectionally reinforced circular tubes associated with (i) circumferential and (ii) axial arrangement of fibers in the matrix material are studied. It appears that the optimal thickness distributions are quite close to each other in these cases of reinforcement.

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОПОРЫ К ИМПУЛЬСНО НАГРУЖЕННОЙ ЖЁСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Г.Оленев
Тартуский государственный университет

Одной из простейших возможностей увеличения жесткости конструкции является установка к ней дополнительных опор, конечно, если это допускается условиями эксплуатации. Причем расположение этих опор разумно выбрать так, чтобы достигал минимума некоторый критерий качества, например, средний или максимальный прогиб. Подобные вопросы стали рассматриваться более I0-ти лет назад [6, 7], когда были получены условия оптимальности расположения дополнительных опор в случае статического нагружения, обобщенные затем на случай динамически нагруженных балок [I, 2].

В данной работе, следуя методике, выработанной Леллепом в работе [I], с помощью вариационных методов теории оптимального управления с распределенными параметрами исследована задача оптимального расположения дополнительной опоры к короткой жестко-пластической цилиндрической оболочке, подверженной равномерному импульсному нагружению.

I. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим жестко-пластическую цилиндрическую оболочку длины l, радиуса R и толщины h, левый конец которой жестко заделан, а правый – свободно опёрт. Установим к оболочке жёсткую круговую дополнительную опору, препятствующую прогибанию оболочки в месте её установки и расположенную на расстоянии S от левого конца оболочки, в котором поместим начало координатной оси Ox, направленной вдоль оболочки.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ оболочка не деформирована, но все её точки, кроме опорных, имеют одинаковую скорость v_0 по направлению внутренней нормали к срединной поверхности оболочки, т.е. оболочка нагружена импульсно. Отметим, что в силу симметрии предельной кривой, которая используется в дальнейшем, полученные здесь решения справедливы не только для внешней, но и для внутренней импульсной нагрузки (в этом случае по сравнению с решением при внешней нагрузке меняются знаки у всех трех функций, входящих в уравнение движения оболочки).

Уравнение движения цилиндрической оболочки и начальные условия запишем в безразмерном виде следующим образом:

$$m''(\xi,\tau)=\ddot{w}(\xi,\tau)-c^2 n(\xi,\tau)\ , \tag{I}$$

$$w(\xi,0)=0\ , \quad v(\xi,0)=1\ , \tag{2}$$

$$\xi=\frac{x}{l}\ , \qquad s=\frac{S}{l}\ , \qquad m=\frac{M}{M_0}\ , \qquad n=\frac{N}{N_0}\ ,$$

$$\tau=\frac{M_0}{\mu l^2 \sigma_0}t\ , \qquad w=\frac{M_0}{\mu l^2 \sigma_0^2}W\ , \qquad v=\dot{w}\ , \qquad c^2=\frac{N_0 l^2}{M_0 R}\ .$$

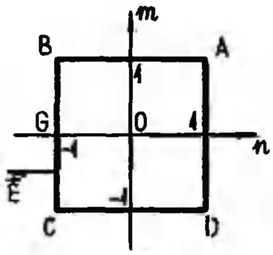
Здесь x – координата по образующей оболочки, t – время, μ – поверхностная плотность оболочки, $M=M(x,t)$, M_0, $N=N(x,t)$ и N_0 – осевой и предельный осевой изгибающие моменты, окружная сила и предельная окружная сила на единицу длины соответственно, $W=W(x,t)$ – прогиб по направлению внутренней нормали к срединной поверхности оболочки. Штрихи и точки здесь и в дальнейшем обозначают дифференцирование по ξ и τ соответственно.

Добавим также следующие краевые условия:

$$\begin{gathered} m(s_{i-1},\tau)=-1\ , \qquad m(1,\tau)=0\ , \\ w(s_{i-1},\tau)=w(1,\tau)=v(s_{i-1},\tau)=v(1,\tau)=0\ . \end{gathered} \tag{3}$$

На протяжении всей статьи будем считать, что индекс i пробегает значения I и 2, а индекс j – значения I, 2, 3 и 4, при этом введем обозначения $s_0=0$, $s_1=s$ и $s_2=$ I.

Будем пользоваться предложенным Ходжем [5] условием текучести, при котором предельная кривая представляется в виде квадрата ABCD (фиг. I).



Фиг. I

Для цилиндрической оболочки, динамическое поведение которой описывается уравнением (I), вектор скоростей деформации, который по ассоциированному закону течения ортогонален к предельной кривой, имеет вид

$$\bar{E}=(-v, -\frac{1}{c^2}v'') .$$

2. О механизме движения оболочки

Движение левой $(0 \leq \xi \leq s)$ и правой $(s \leq \xi \leq 1)$ частей оболочки происходит в двух фазах [4]. В течение первой фазы движения для каждой части оболочки шарнирные окружности с координатами η_i движутся от опор навстречу друг к другу до встречи между собой, при этом части оболочки между шарнирами имеют зависящую от времени, но не зависящую от координаты скорость $v_i(\tau)$. Во время второй фазы движения имеют место стационарные шарниры с координатами α_i. Скорость точек оболочки с координатой α_i обозначим через $v_i(\tau)$. При этом должны выполняться начальные условия $\eta_{2i-1}(0)=s_{i-1}$, $\eta_{2i}(0) = s_i$, $v_i(0) = I$.

В данном случае мы имеем следующие пластические режимы (фиг. I) :

$$0 \leq \xi \leq \eta_1 \rightarrow C-B, \quad \eta_1 \leq \xi \leq \eta_2 \rightarrow B, \quad \eta_2 \leq \xi \leq s \rightarrow B-C,$$

$$s < \xi < \eta_3 \rightarrow C-B, \quad \eta_3 < \xi < \eta_4 \rightarrow B, \quad \eta_4 < \xi < 1 \rightarrow B-G.$$

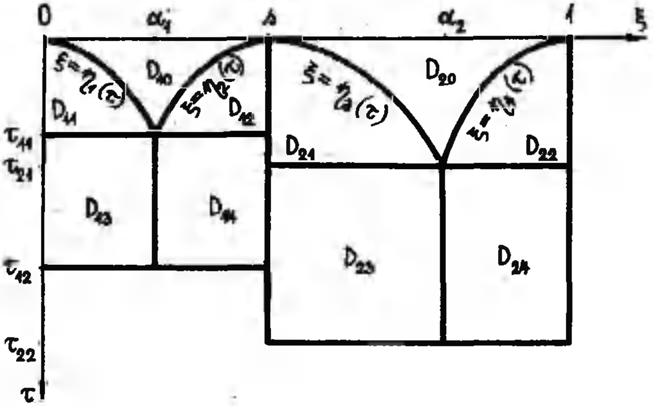
Поэтому в уравнении (I) мы должны взять $n(\xi,\tau) = -I$. С учетом (3), а также получаемых из ассоциированного закона течения при имеющих место пластических режимах условий $v > 0$ и $v'' = 0$ скорость прогиба для первой фазы принимает вид

$$\vartheta(\xi,\tau)=\begin{cases}\vartheta_i(\tau)\cdot(\xi-s_{i-1})/[\eta_{2i-1}(\tau)-s_{i-1}], & s_{i-1}\le\xi\le\eta_{2i-1},\\ \vartheta_i(\tau), & \eta_{2i-1}\le\xi\le\eta_{2i},\\ \vartheta_i(\tau)\cdot(\xi-s_i)/[\eta_{2i}(\tau)-s_i], & \eta_{2i}\le\xi\le s_i,\end{cases}\qquad(4)$$

а для второй фазы -

$$\vartheta(\xi,\tau)=\begin{cases}\vartheta_i(\tau)\cdot(\xi-s_{i-1})/(\alpha_i-s_{i-1}), & s_{i-1}\le\xi\le\alpha_i,\\ \vartheta_i(\tau)\cdot(\xi-s_i)/(\alpha_i-s_i), & \alpha_i\le\xi\le s_i\;.\end{cases}\qquad(5)$$

Последние два соотношения запишем в сокращенном виде $\vartheta=\vartheta_{ij}[\xi,\eta_j(\tau),\vartheta_i(\tau),\alpha_i,s]$ при $(\xi,\tau)\in D_{ij}$, где области D_{ij} изображены на фиг. 2.



Фиг. 2

Моменты времени τ_{i1} и τ_{i2} характеризуются условиями

$$\eta_{2i-1}(\tau_{i1})=\eta_{2i}(\tau_{i1})=\alpha_i,\qquad\vartheta_i(\tau_{i2})=0\;.\qquad(6)$$

В областях D_{10} и D_{20} (фиг. 2) уравнение движения (I) имеет следующее тривиальное решение, удовлетворяющее (2), (3) и (4) :

$$m=1, \quad q=0, \quad v=-c^2\tau+1, \quad w=-\frac{c^2\tau^2}{2}+\tau . \qquad (7)$$

Здесь и далее $q=m'$.

Необходимо также выполнение условий

$$m(\alpha_i,\tau)=1, \quad q(\alpha_i,\tau)=0, \quad \tau_{i1}\le\tau\le\tau_{i2} . \qquad (8)$$

Запишем теперь (I), (4) и (5) эквивалентным образом в виде системы (как было замечено, в нашем случае $n(\xi,\tau)=-1$)

$$\begin{aligned} &m'=q, \quad q'=\dot v+c^2, \quad \dot w=v, \\ &v=v_{ij}(\xi,\eta_j,t_i,\alpha_i,s), \quad (\xi,\tau)\in D_{ij} . \end{aligned} \qquad (9)$$

Заметим, наконец, что в данном случае мы имеем дело с короткой оболочкой, точнее, как было отмечено в [4], при выбранных механизмах движения (4) и (5) необходимое неравенство $|m(\xi,\tau)|\le 1$ при $s_{i-1}\le\xi\le s_i$ и $0\le\tau\le\tau_{i2}$ равносильно одновременному выполнению условий

$$c^2s^2\le 48 \quad \text{и} \quad c^2(1-s)^2\le 6(3+2\sqrt{2}) . \qquad (10)$$

3. Необходимые условия оптимальности и нахождение оптимального расположения дополнительной опоры

Для того, чтобы вывести необходимые условия оптимальности, составим расширенный функционал [3]

$$J^*=J+\sum_{i,j}\iint\limits_{D_{ij}}\left[\psi^1_{ij}(m'-q)+\psi^2_{ij}(q'-\dot v-c^2)+\right.$$
$$\left.+\psi^3_{ij}(\dot w-v)+\psi^4_{ij}(v-v_{ij})\right]d\xi d\tau , \qquad (II)$$

где через J обозначен минимизируемый функционал, равный среднему остаточному прогибу

$$J=\int_0^{\Delta} w(\xi,\tau_{12})d\xi+\int_{\Delta}^{1} w(\xi,\tau_{22})d\xi .$$

Здесь ψ^1_{ij} , ψ^2_{ij} , ψ^3_{ij} и ψ^4_{ij} являются сопряженными переменными в области D_{ij} . Заметим, что при удовлетворении соотношений (9) расширенный функционал J^* равен минимизируемому функционалу J .

Далее вычислим полную вариацию функционала (II) и преобразуем её, учитывая условия (3)-(9) и то, что полная вариация Δf некоторой функции f на границе области складывается из вариации δf собственно функции f и вариации, связанной с перемещением границы [3]. Затем, приравнивая к нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим необходимые условия для определения сопряженных переменных и оптимального расположения дополнительной опоры.

Эта процедура в случае цилиндрической оболочки в целом совпадает со случаем балки, рассмотренным в статье [I], и приводиться здесь поэтому не будет. Отметим только, что различие математических постановок этих двух задач проявляется в том, что в случае цилиндрической оболочки по сравнению с балкой в системе уравнений (9) и в функционале (II) появляется параметр c^2 , а в первой фазе движения скорость $w_i(\tau)$ точек оболочки между шарнирными окружностями зависит от времени, а не постоянна, как в случае балки. Однако, появляющееся в случае оболочки из приравнивания к нулю коэффициента при вариации величины $w_i(\tau)$ на отрезке $0\leq\tau\leq\tau_{i1}$ условие вида

$$\int_{\Delta_{i-1}}^{\eta_{2i-1}}\psi^1_{i1}\frac{\partial w_{i1}}{\partial w_i}d\xi+\int_{\eta_{2i}}^{\Delta_i}\psi^3_{i2}\frac{\partial w_{i2}}{\partial w_i}d\xi=0 ,$$

которого не было в случае балки, удовлетворяется тождественно. Кроме этого, в силу указанных различий этих двух задач несколько меняется вид некоторых промежуточных необходимых условий. Часть из этих условий, ввиду имеющих место согласно работе [4] соотношений

$$\eta_1(\tau)=2\sqrt{\frac{3\tau}{1-c^2\tau}}\,, \qquad \eta_2(\tau)=s-2\sqrt{\frac{3\tau}{1-c^2\tau}}\,, \tag{I2}$$

$$\eta_3(\tau)=s+2\sqrt{\frac{3\tau}{1-c^2\tau}}\,, \qquad \eta_4(\tau)=1-\sqrt{\frac{6\tau}{1-c^2\tau}}\,,$$

$$v_i(\tau)=\begin{cases} 1-c^2\tau\,, & 0\leq\tau\leq\tau_{i1}\,,\\ \frac{3}{2}\left[1-\frac{4+c^2(\alpha_i-s_{i-1})^2}{(\alpha_i-s_{i-1})^2}\tau\right], & \tau_{i1}\leq\tau\leq\tau_{i2}\,, \end{cases} \tag{I3}$$

$$\alpha_1=\frac{s}{2}\,, \qquad \alpha_2=\frac{s+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,, \tag{I4}$$

$$\tau_{i1}=\frac{(\alpha_i-s_{i-1})^2}{12+c^2(\alpha_i-s_{i-1})^2}\,, \tag{I5}$$

удовлетворяется тождественно. Следствием же остальных необходимых условий является следующее условие, которое совпадает по виду с соответствующим необходимым условием, полученным в работе [I] в случае балки:

$$\frac{1}{4}\left[w(\alpha_1,\tau_{12})-w(\alpha_2,\tau_{22})\right]-\int_0^{\tau_{11}}\varphi_{11}q(s-,\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^{\tau_{21}}\varphi_{21}q(s+,\tau)d\tau-\int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}}\varphi_{12}q(s-,\tau)d\tau+\int_{\tau_{21}}^{\tau_{22}}\varphi_{22}q(s+,\tau)d\tau=0\,, \tag{I6}$$

где, как и в статье [I] ,

$$\dot{\varphi}_{12}=\frac{3}{2(\eta_2-s)}, \qquad \dot{\varphi}_{21}=\frac{3}{2(\eta_3-s)},$$

$$\varphi_{11}=\frac{3(\tau-\tau_{12})}{2(\alpha_1-s)}, \qquad \varphi_{23}=\frac{3(\tau-\tau_{22})}{2(\alpha_2-s)},$$

$$\varphi_{12}(\tau_{11})=\varphi_{11}(\tau_{11}), \qquad \varphi_{21}(\tau_{21})=\varphi_{23}(\tau_{21}).$$

Упростим условие (I6), используя эти последние равенства, начальные условия $\eta_2(0)=\eta_3(0)=s$ и имеющие место согласно работе [4] соотношения

$$q(s-,\tau)=\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left[\alpha_1(\eta_2-s)\right], \quad 0\le\tau\le\tau_{11}, \tag{I7}$$

$$q(s+,\tau)=\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left[\alpha_2(\eta_3-s)\right], \quad 0\le\tau\le\tau_{21},$$

$$q(s-,\tau)=-\frac{3}{s-\alpha_1}+\frac{c^2(s-\alpha_1)}{4}, \quad \tau_{11}\le\tau\le\tau_{12}, \tag{I8}$$

$$q(s+,\tau)=\frac{3}{\alpha_2-s}-\frac{c^2(\alpha_2-s)}{4}, \quad \tau_{21}\le\tau\le\tau_{22},$$

$$w(\alpha_i,\tau_{i2})=\frac{1}{2}c^2\tau_{i1}^2-c^2\tau_{i1}\tau_{i2}-\frac{3}{4}\frac{\tau_{i1}^3}{\tau_{i2}}+\frac{3}{2}\tau_{i1}+\frac{1}{4}\tau_{i2}, \tag{I9}$$

где τ_{i1} вычисляется по формуле (I5), а

$$\tau_{i2}=\frac{3\tau_{i1}}{1+2c^2\tau_{i1}}. \tag{20}$$

Теперь условие (I6) можно записать в эквивалентном виде

$$f(\tau_{11})=f(\tau_{21}), \tag{2I}$$

где

$$f(\tau)=\tau+\frac{27\tau}{(1+2c^2\tau)^2} .$$

Учитывая имеющие место в данном случае условия (I0) и формулы (I5), имеем

$$0<\tau_{i1}<\frac{1}{2c^2} ,$$

поэтому из условия (2I) с учетом монотонности функции $f(\tau)$ на отрезке $[0,\ 1/(2c^2)]$ следует, что

$$\tau_{11}=\tau_{21} ,$$

что, учитывая (20), равносильно условию

$$\tau_{12}=\tau_{22} , \qquad (22)$$

т.е. при оптимальном расположении опоры время движения левой части оболочки равно времени движения её правой части.

При этом из (22) , ввиду (I5) и (20), следует, что оптимальное расположение опоры

$$s_{opt}=\frac{2\sqrt{2}}{1+3\sqrt{2}} .$$

В случае оптимального значения s вследствие (I9),(20) и (22) имеем

$$w(\alpha_1,\tau_{12})=w(\alpha_2,\tau_{22}) ,$$

т.е. при оптимальном s максимальные остаточные прогибы обеих частей оболочки совпадают.

В работах [I] и [2] было получено интегральное условие оптимальности Прагера-Розвани

$$\int_0^{\tau_f} w'(s-,\tau)q(s-,\tau)d\tau=\int_0^{\tau_f} w'(s+,\tau)q(s+,\tau)d\tau ,$$

где τ_f обозначает время движения балки.

В рассматриваемом нами случае цилиндрической оболочки условие Прагера-Розвани также справедливо, будучи следствием имеющих место в случае оптимального s более сильных условий

$$w'(s-,\tau) = -w'(s+,\tau), \quad 0 \le \tau \le \tau_f, \qquad (23)$$

$$q(s-,\tau) = -q(s+,\tau), \quad 0 \le \tau \le \tau_f. \qquad (24)$$

Действительно, эти соотношения верны, поскольку при $s = s_{opt}$ ввиду (I4) $\alpha_2 - s_1 = \alpha_1 - s_0 = s_1 - \alpha_1$, поэтому из (I3) следует, что при $0 < \tau < \tau_f$ $\vartheta_1(\tau) = \vartheta_2(\tau)$, т.е., учитывая (4), (5) и (I2) находим, что

$$w'(s-,\tau) + w'(s+,\tau) = \frac{\vartheta_1}{\eta_2 - s} + \frac{\vartheta_2}{\eta_3 - s} = 0,$$

откуда, принимая во внимание, что $w'(s-,0) = w'(s+,0) = 0$, получим (23).

Из имеющих место при $s = s_{opt}$ равенств $\alpha_2 - s = s - \alpha_1$ и $\vartheta_1(\tau) = \vartheta_2(\tau)$ при $0 \le \tau \le \tau_f$ и соотношений (I2), (I7) и (I8) следует также условие (24).

Литература

I. Леллеп Я., Об условиях оптимальности расположения дополнительной опоры. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I98I, 564, 4I-50.

2. Лепик Ю., Об условии оптимальности балок с дополнительными опорами при динамических нагрузках. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I984, 675, 45-6I.

3. Лурье К.А., Оптимальное управление в задачах математической физики. М., "Наука", I975.

4. Оленев Г., Оптимальное расположение дополнительной опоры к жестко-пластической короткой цилиндрической оболочке при импульсном нагружении. В кн.: 350 лет математики в Тартуск. ун-те, Тарту, I982, I0I-I06.

5. Hodge P.G., Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells. J. Mech. and Phys. Solids, 1955, 3, № 3, 376-388.

6. Mróz Z., Rozvany G.I.N., Optimal design of structures with variable support conditions. J. Optimiz. Theory

and Appl., 1975, 15, № 1, 85-101.

7. Prager W., Rozvany G.I.N., Plastic design of beams: Optimal locations of supports and steps in yield moment. Int. J. Mech. Sci., 1975, 17, № 10, 627-631.

On the optimal location of the additional support for a impulsively loaded rigid-plastic cylindrical shell

G. Olenev

Summary

A rigid-plastic cylindrical shell on three supports is considered. Two supports fix the edges of the shell. The location of an additional support is unfixed. The shell is subjected to the action of a uniform initial transverse impulse. Necessary optimality conditions are derived with the aid of the variational methods of the optimal control theory. Optimal location of the additional support is found on the condition that the residual mean deflection has the minimal value. The given solution is valid for shells with "short" distances between the supports. It appears that the optimality criteria of Prager-Rozvany derived in integral form for beams by Lepik and in a different way by Lellep also hold.good for short cylindrical shells.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В СЛУЧАЕ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

И.Вайникко, Ю.Лепик
Тартуский государственный университет

Рассматриваются упругие цилиндрические оболочки переменной толщины под действием равномерного внутреннего давления. Считается, что давление изменяется по закону прямоугольного импульса. Оболочка настолько тонкая, что применимы гипотезы Кирхгофа-Лява. Рассматривается только случай осесимметричного деформирования. Разыскивается такая форма оболочки, при которой она была бы по возможности более жесткой.

В качестве примера решается задача о цилиндрической оболочке ступенчато-постоянной толщины и заданного объема. Для решения дифференциального уравнения движения прогибы и нагрузка разлагаются в ряд Фурье по собственным функциям. Составлена программа на языке ФОРТРАН, при помощи которой найдены оптимальные проекты для коротких и длинных оболочек при различных краевых условиях.

I. Уравнения движения оболочки переменной толщины

Рассмотрим цилиндрическую оболочку радиуса R. Допустим, что толщина оболочки h^* является функцией координаты x^* вдоль оси оболочки.

Уравнение движения оболочки имеет вид

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{R} N_\varphi = P + \rho h^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2}, \qquad (I)$$

где M_x - изгибающий момент, N_φ - результирующая сила, P равномерно распределенное внутреннее давление, w^* - прогиб оболочки, ρ - плотность материала оболочки.

Учитывая гипотезы Кирхгофа-Лява, закон Гука в данном случае имеет вид

$$N_\varphi = -\frac{E}{R} h^* w^*, \qquad M_x = -D \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}. \qquad (2)$$

Здесь D зависит от координаты x^*, то есть

$$D=\frac{E}{12(1-\nu^2)}h^{*3}, \tag{3}$$

так как толщина h^* меняется.

Подставляя формулы (2) в уравнение (I), получим

$$\frac{h_0^{*2}R^2}{12(1-\nu^2)\ell^4}\left\{h^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+6h\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left[3h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+6\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}+w=$$

$$=-\frac{PR}{Ehh_0^*}-a\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\ , \tag{4}$$

где введены следующие обозначения:

$$\tau=\frac{t}{t_1},\quad x=\frac{x^*}{\ell},\quad h=\frac{h^*}{h_0^*},\quad w=\frac{w^*}{R},\quad a=\frac{\rho R^2}{Et_1^2}. \tag{5}$$

В этих формулах ℓ - длина оболочки, (но если оболочка состоит из двух симметричных частей, то под символом ℓ будем понимать половину оболочки), t_1 - момент снятия нагрузки, h_0^* - толщина на кромке оболочки, то есть $h_0^*=h^*(0)$.

Полученное уравнение (4) есть уравнение движения цилиндрической оболочки переменной толщины.

2. Решение уравнения движения оболочки ступенчато-постоянной толщины

Допустим, что толщина оболочки h является ступенчато-постоянной функцией координаты x. При составлении оптимальных проектов оболочек будем сравнивать оболочки одного и того же объема V, поэтому в дальнейшем будем считать эту величину заданной. Введем безразмерный объем по формуле

$$\Delta=\sum_{j=1}^{s}h_j(x_{j+1}-x_j)\ . \tag{6}$$

Здесь s - число участков постоянной толщины, h_j - безразмерная толщина стенки оболочки на участке j, x_j координата ступени, причем $x_1 = 0$, $x_{n+1} = 1$. Исключим из уравнений (4) и (5) величину h_*^*, учитывая, что $V = const$. Тогда

$$h_*^* = \frac{V}{2\pi R\ell\Delta}, \tag{7}$$

и уравнение движения (4) приобретает вид (точками обозначены производные по τ, штрихами – производные по x)

$$a\ddot{w} + \frac{1}{4c^4}\left(\frac{h}{\Delta}\right)^2 w^{IV} + w = -p(\tau)\frac{q}{q_0}\frac{\Delta}{h}, \tag{8}$$

где $c = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{2\pi}{V}}\,\ell^{3/2}$,

$$p(\tau)\frac{q(\tau)}{q_0} = \frac{2\pi\ell R^2 P}{EV}, \qquad q_0 = q(0).$$

Найдем из уравнения (8) прогиб $w(x,\tau)$ при различных граничных условиях:

а) для свободно опертой на торцах оболочки

$$w(0,\tau) = w''(0,\tau) = w'(1,\tau) = w''(1,\tau) = 0,$$

б) для жестко закрепленной на торцах оболочки

$$w(0,\tau) = w'(0,\tau) = w'(1,\tau) = w''(1,\tau) = 0,$$

в) для жестко закрепленной на одном торце и свободной на другом торце оболочки

$$w(0,\tau) = w'(0,\tau) = w''(1,\tau) = w'''(1,\tau) = 0,$$

г) для жестко закрепленной на одном торце и свободно опертой на другом торце оболочки

$$w(0,\tau) = w'(0,\tau) = w(1,\tau) = w''(1,\tau) = 0\ ;$$

и при начальных условиях

$$w(x,0) = \dot{w}(x,0) = 0.$$

Уравнение (8) интегрируем методом Фурье, предполагая, что

$$w(x,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\tau)W_i(x). \tag{9}$$

Здесь W_i – собственные функции, T_i – амплитудные множители. Переменные x и τ можно разделить лишь тогда, когда и нагрузка разлагается в ряд по собственным функциям. Это дает

$$\frac{q(x)}{h(x)q(0)}=\sum_{i=1}^{n} q_i W_i(x) . \qquad (10)$$

Можно показать, что собственные функции ортогональны с весовым коэффициентом $h(x)$:

$$\int_0^1 h W_i W_j dx = 0 \quad (i \neq j) . \qquad (11)$$

Следовательно, коэффициенты q_i можно вычислить по формуле

$$q_i = \left(\int_0^1 \frac{q W_i}{q_0} dx\right) \Big/ \left(\int_0^1 h W_i^2 dx\right) . \qquad (12)$$

Разделяя переменные в уравнении (8) , находим

$$a\ddot{T}_i - \lambda_i^2 T_i = - p(\tau) q_i \Delta , \qquad (13)$$

$$W_i^{IV} - 4c^4 \left(\frac{\Delta}{h}\right)^2 (\lambda_i^2 - 1) W_i = 0 , \qquad (14)$$

где λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ – собственные значения.

Интегрируя уравнение (13) с учетом начальных условий

$T_i(0) = \dot{T}_i(0) = 0$, получим

$$T_i(\tau) = -\frac{q_i \Delta}{\lambda_i} \int_0^{\tau} p(\tau_*) \sin\left[\frac{\lambda_i}{\sqrt{a}}(\tau - \tau_*)\right] d\tau_* . \qquad (15)$$

Предположим, что внутренняя нагрузка имеет вид прямоугольного импульса

$$p(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{для } \tau < 1 , \\ 0 & \text{для } \tau > 1 . \end{cases}$$

Решение (I5) приобретает вид

$$T_i(\tau)=\begin{cases} -\frac{q_i\Delta}{\lambda_i^2}\left(1-\cos\frac{\lambda_i}{\sqrt{a}}\tau\right) & \text{для } \tau\leq 1, \\ -\frac{2q_i\Delta}{\lambda_i^2}\sin\frac{\lambda_i}{2\sqrt{a}}\sin\frac{\lambda_i(\tau-0,5)}{\sqrt{a}} & \text{для } \tau>1. \end{cases} \qquad (I6)$$

3. Определение собственных функций

Проинтегрируем уравнение (I4). Рассмотрим промежуток $x\in(x_j, x_{j+1})$, в котором относительная толщина $h=h_j=const$. Введем также обозначения

$$k_{ij}=c\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Delta}{h_j}}\sqrt[4]{\lambda_i^2-1},$$

$$M_i=-h_j^3W_i'', \qquad Q_i=-h_j^3W_i'''. \qquad (I7)$$

Общее решение уравнения (I4) имеет вид

$$W_i(x)=C_1S(y)+C_2T(y)+C_3U(y)+C_4V(y), \qquad (I8)$$

$$y=k_{ij}(x-x_j).$$

Символами S , T , U , V обозначены функции Крылова:

$$S(y)=0,5(ch\,y+\cos y);$$

$$T(y)=0,5(sh\,y+\sin y);$$

$$U(y)=0,5(ch\,y-\cos y);$$

$$V(y)=0,5(sh\,y-\sin y).$$

В сечении $x=x_j$ имеем $y=0$, $S(0)=1$, $T(0)=U(0)=V(0)=0$. Из-за непрерывности величин W_i, W_i', M_i, Q_i при $x=x_j$ находим

$$C_1=W_i(x_j), \qquad C_2=\frac{1}{\kappa_{ij}}W_i'(x_j), \tag{19}$$

$$C_3=-\frac{1}{\kappa_{ij}^2 h_j^3}M_i(x_j), \qquad C_4=-\frac{1}{\kappa_{ij}^3 h_j^3}Q_i(x_j).$$

Введем вектор

$$\bar{Z}_j=(W, W', -M, -Q)_j^T \tag{20}$$

и матрицу

$$(A)_j=\begin{pmatrix} S & \frac{T}{\kappa_i} & \frac{U}{\kappa_i^2 h^3} & \frac{V}{\kappa_i^3 h^3} \\ \kappa_i V & S & \frac{T}{\kappa_i h^3} & \frac{U}{\kappa_i^2 h^3} \\ \kappa_i^2 h^3 U & \kappa_i h^3 V & S & \frac{T}{\kappa_i} \\ \kappa_i^3 h^3 T & \kappa_i^2 h^3 U & \kappa_i V & S \end{pmatrix}_j . \tag{21}$$

Символ j за скобками показывает, что все величины надо вычислить при $x=x_{j+1}$: кроме того, надо заменить $\kappa_i \to \kappa_{ij}$, $h \to h_j$.

При $x=x_{j+1}$ имеет место матричное уравнение

$$\bar{Z}_{j+1}=(A)_j\bar{Z}_j . \tag{22}$$

Применяя соотношение (22) несколько раз, находим

$$\bar{Z}_{s+1}=(B)\bar{Z}_1 , \tag{23}$$

где

$$(B)=(A)_s(A)_{s-1}\dots(A)_2(A)_1 .$$

Вектор $\bar{z}_1$ соответствует начальному сечению $x_1=0$, вектор $\bar{z}_{s+1}$-конечному сечению $x_{s+1}=1$. В силу краевых условий из этих векторов известны 4 компоненты, остальные надо определить из системы (23). Так как эта система однородна, то нетривиальное решение получим лишь тогда, когда определитель этой системы равняется нулю. Последнее требование дает возможность вычислить собственные числа λ_i $(i=1,2,\dots,n)$. Собственные функции вычисляем по формулам (I8) - (I9).

4. Оптимизационная задача

Поставим целью выбрать размеры оболочки так, чтобы она была бы по возможности более жесткой. Это требование выполняется при условии

$$F=\max_{\tau}\int_0^1 |w(x,\tau)|dx=\min . \qquad (24)$$

Максимум в функционале F по τ будем искать в некотором заданном промежутке $\tau\in(0,\tau_1)$.

Размеры оболочки определяют величины x_j и h_j $(j=2,3,\dots,s)$, причем $x_1=0$, $x_{s+1}=1$, $h_1=1$. Константы c и a являются параметрами оболочки, характеризующими размеры и материал оболочки. Согласно([I], стр. 253) будем называть оболочки, для которых $c<$ I,5, короткими, а для которых $c>$ I,5 - длинными. Как показывают расчеты, оптимальные проекты для коротких и для длинных оболочек существенно отличаются.

Численные результаты получены для четырех видов закрепления на торцах оболочки. Найденн оптимальные проекты с двумя и с тремя ступенями. Через F_0 обозначена величина минимизируемого интеграла (24) в случае оболочки постоянной толщины. Время полной остановки ступенчатой конструкции обозначается через T .

Минимум функционала можно найти при помощи любого метода нелинейного программирования,в данном случае был применен градиентный метод. Из результатов вычислений выяснилось, что качественные результаты мало зависят от значения параметра a, поэтому в данной работе было взято a = I0. Предложенная методика расчета удобна, так как для получения необходимой точности можно ограничиться небольшим числом собственных функций: результаты вычислений при значениях n = 3 и n = 5 мало отличались друг от друга.

Таблица I.

Короткая (c = I) и длинная (c = 3) оболочка с двумя ступенями

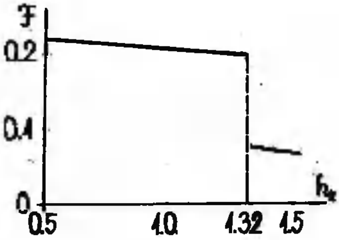
№	Краевые условия	c	x_2	h_2	T	F	F_0	ε
I	а)	I	0,6I	I,47	3,30	0,I43	0,I58	0,09
2		3	0,39	0,3I	2,23	0,0I04	0,0536	0,80
3	б)	I	0,28	0,56	I,9I	0,0607	0,07I6	0,I5
4		3	0,54	I,80	4,66	0,200	0,2I4	0,06
5	в)	I	0,48	0,43	2,34	0,0756	0,0970	0,22
6		3	0,I3	0,69	4,85	0,206I	0,2I36	0,04
7		3	0,I9	I,42	3,84	0,0706	0,2I36	0,67
8	г)	I	0,20	0,55	2,I8	0,0I94	0,023I	0,I6
9		3	0,II	0,65	4,28	0,I740	0,I80	0,03

Таблица 2.

Короткая (c = I) и длинная (c = 3) оболочка с тремя ступенями

№	Краевые условия	c	x_2	x_3	h_2	h_3	T	F	F_0	ε
I0	а)	I	0,4I	0,60	I,20	I,4I	3,24	0,I4I	0,I58	0,II
II		3	0,26	0,55	0,94	0,43	I,39	0,008I	0,0536	0,85
I2	б)	I	0,29	0,64	0,46	0,74	I,97	0,0557	0,07I6	0,22
I3		3	0,23	0,46	0,38	I,0I	4,54	0,I85	0,2I4	0,I4
I4	в)	I	0,39	0,56	0,62	0,34	2,I3	0,07II	0,0970	0,27
I5		3	0,I5	0,58	0,57	0,86	4,73	0,I9I	0,2I4	0,II
I6		3	0,05	0,I6	0,87	I,48	3,86	0,069I	0,2I26	0,67
I7	г)	I	0,20	0,60	0,56	0,6I	2,I8	0,0I92	0,023I	0,I7
I8		3	0,I8	0,30	0,42	0,89	4,45	0,I65	0,I80	0,08

Оптимальные проекты, составленные на основании таблиц I–2, представлены на фиг. I, 2 ; кроме того, там указаны и соответствующие прогибы $w = w(x)$. Заслуживает комментария случай длинной оболочки – случай в) при с = 3. Как видно из таблиц I–2, здесь возможны два проекта, причем функционал во втором случае № 7 и I6 почти в три раза меньше, чем в случае первого № 6 и I5 проекта. Из фигуры 4 вытекает, что уменьшение функционала F обусловлено тем обстоятельством, что у второго проекта прогибы меняют знак (т.е. около свободной кромки радиальное перемещение направлено внутрь оболочки) ; другими словами, доминирует вторая собственная форма оболочки. Если такая форма деформирования по некоторым конструкторским соображениям является нежелательной, то следует предпочесть первый проект № 6 или № I5, хотя здесь значение функционала F значительно больше. Взаимосвязь этих оптимальных проектов вытекает и из фиг. 5. Эта фигура составлена следующим образом: ограничимся случаем двухступенчатых оболочек, зафиксируем параметр h_2, определим минимальные значения для F путем минимизации по переменной x_2 . Из этой фигуры вытекает, что переход от одной формы к другой происходит практически скачком при значении $h_2 = 1{,}32$. На наш взгляд, это интересное явление заслуживает еще более обстоятельного анализа.



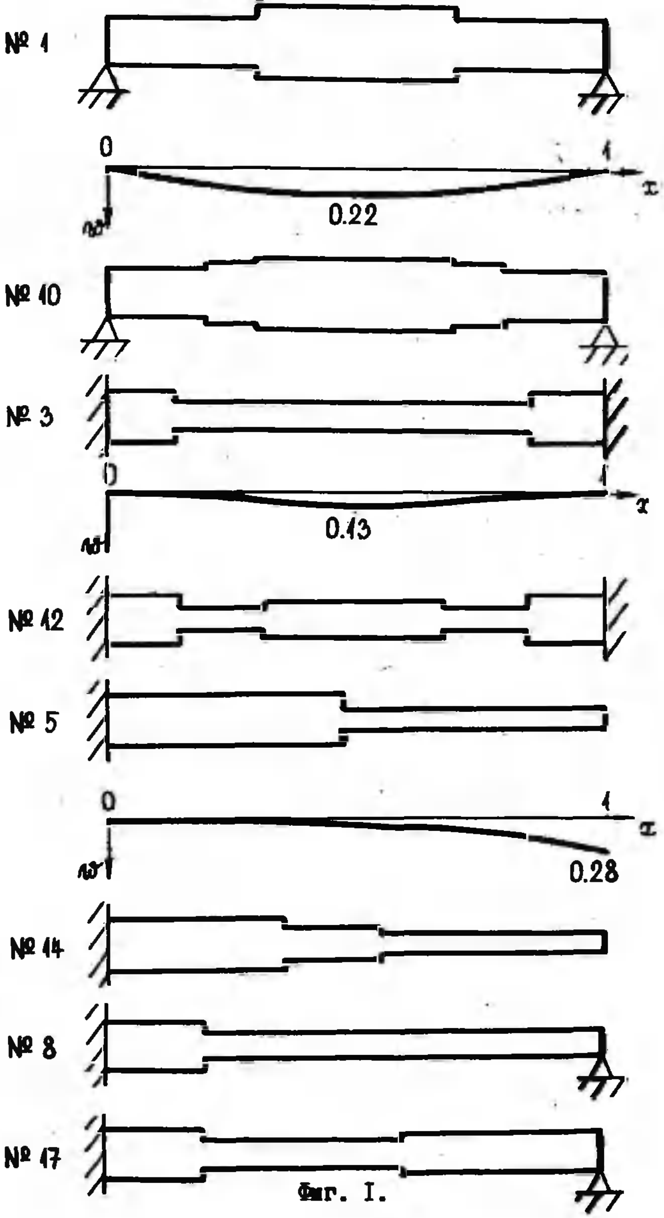
Фиг. 5

Относительное уменьшение прогибов по сравнению с однородной оболочкой того же объема можно определить по формуле

$$\varepsilon = \frac{F_0 - F}{F_0} .$$

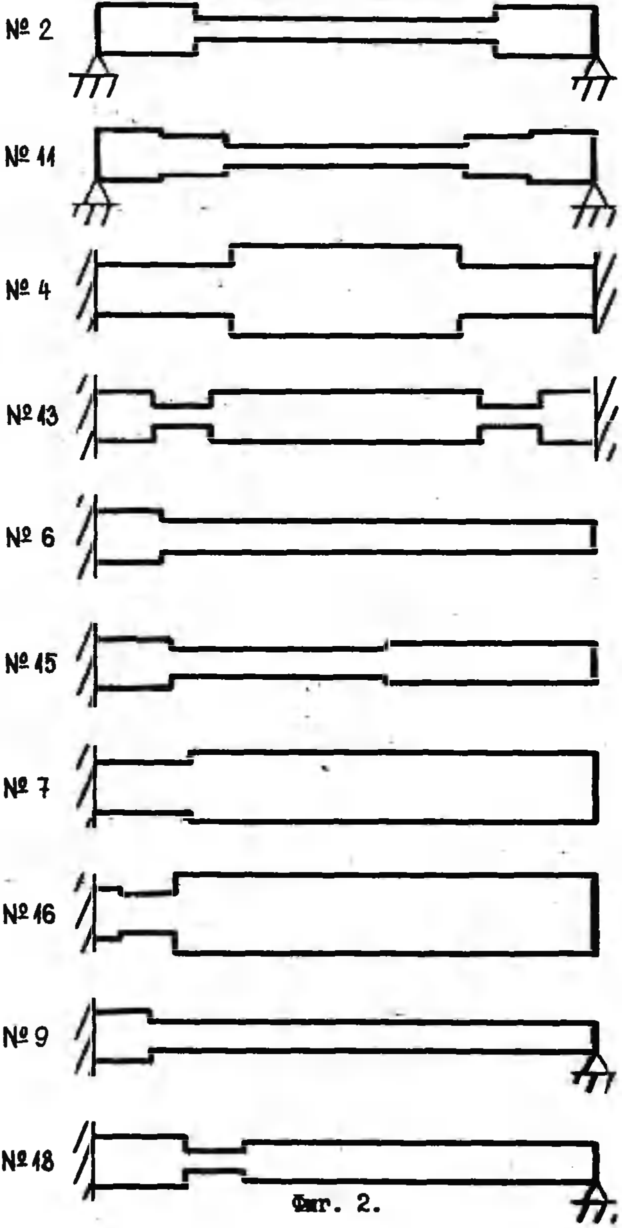
Величину ε можно назвать "коэффициентом экономии". Значения ε указаны в последнем столбце таблиц I–2. Из этих данных вытекает, что в случае коротких двухступенчатых оболочек коэффициент экономии достигает 22 % , при длинных – 85 %. Переход от двухступенчатых оболочек к трехступенчатым изменяет величину ε уже сравнительно мало. Отсюда можно сделать вывод, что для практических целей при не очень длинных оболочках ($c < 3$) можно вполне ограничиться случаем двухступенчатых оболочек.

Оптимальные проекты коротких оболочек



Фиг. I.

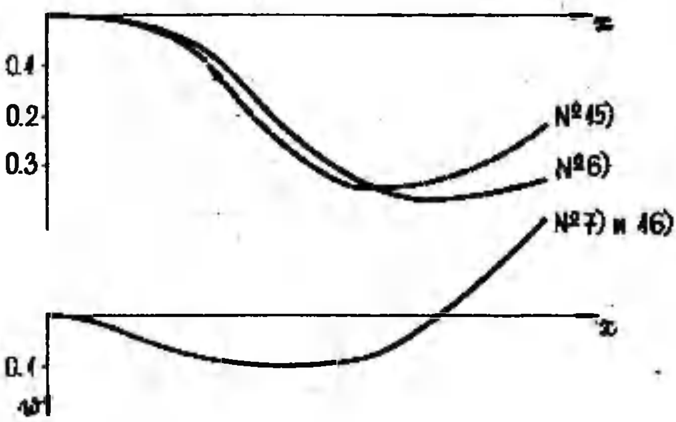
Оптимальные проекты длинных оболочек



Фиг. 2.

Прогибы короткой оболочки, таблица I № 5
с двумя ступенями, таблица 2 № I4 с тремя ступенями.

Фиг. 3



Прогибы длинной оболочки, I проект № 6 или № I5,
II проект № 7 или № I6; прогибы практически совпадают.

Фиг. 4

Литература

1. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем, М., "Наука", 1981.

Optimal design of elastic cylindrical shells in case of dynamic loading

I.Vainikko and Ü.Lepik

Summary

A shape optimization method for elastic cylindrical shells with segmentwise constant height is proposed. The shell is loaded by an interior dynamic pressure. The thickness of the shell is regarded so thin that the hypotheses of Kirchhoff and Love may be applied. Only axisymmetric deformations are considered. Loads and the volume of the shell are prescribed. Such shape parameters, for which the shell of constant volume attains a minimum of mean deflection, are sought. The problem in question is solved expanding the deflection into a Fourier series by eigenfunctions. Numerical results for two and three-stepped short and long shells are given.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОПОРЫ К ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОБОЛОЧКАМ С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ

С. Ханнус
Тартуский государственный университет

Методика расчета напряженно-деформированного состояния геометрически нелинейных оболочек изложена и применена в работах [2] и [3]. В данной работе этот метод применяется при определении оптимального расположения дополнительной опоры к оболочкам, левый конец которых жестко заделан, а правый - шарнирно закреплен. В качестве критерия оптимальности выбран максимальный прогиб.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим однородную круговую цилиндрическую оболочку конечной длины $2l$, радиуса A и постоянной толщины h. Материал оболочки - жесткопластический, без упрочнения. Начало координатной оси 0x, направленной вдоль образующей оболочки, поместим в левом конце оболочки.

Пусть оболочка нагружена равномерно распределенным внутренним давлением интенсивности P и подвержена постоянному осевому растяжению интенсивности N_1. Учитываем умеренно большие прогибы, т.е. прогибы до порядка толщины оболочки.

Основные уравнения могут быть представлены в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений [2], [3]

$$\begin{aligned}
&m' = q\,,\\
&q' = \frac{4n_1\alpha\vartheta m}{\sqrt{1-m^2-\frac{3}{4}n_1^2}} + \alpha\left(p-\frac{n_1}{2}-\sqrt{1-m^2-\frac{3}{4}n_1^2}\right),\\
&w' = \vartheta\,,\\
&\vartheta' = \frac{\alpha\vartheta m}{\sqrt{1-m^2-\frac{3}{4}n_1^2}}\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$w' = -\frac{1}{2} z^2 + \frac{\alpha p \left(\frac{3}{2} n_1 - \sqrt{1 - m^2 - \frac{3}{4} n_1^2}\right)}{8\sqrt{1 - m^2 - \frac{3}{4} n_1^2}}$$

Здесь m - изгибающий момент, q - перерезывающая сила, w, u - перемещения перпендикулярно к образующей цилиндра и вдоль оболочки, n_1 - растяжение, p - давление, $\alpha = 4\ell^2/Ah$ - геометрический параметр оболочки в безразмерном виде [3], а штрих обозначает дифференцирование по безразмерной координате $\xi = x/\ell$. При этом использовано условие текучести [4]

$$n_1^2 + n_2^2 - n_1 n_2 + m^2 = 1 .$$

Рассмотрим оболочку, левый конец которой жестко заделан, а правый - шарнирно закреплен. Пусть в некотором сечении находится дополнительная жесткая круговая опора. Требуется найти оптимальное расположение дополнительной опоры так, чтобы максимальный прогиб оболочки был минимален.

2. Задача с фиксированным расположением опоры

Для определения оптимального расположения опоры надо решить задачу с фиксированным расположением опоры, представляющую объединение двух краевых задач с одинаковыми системами дифференциальных уравнений (I). Поскольку не одна из правых частей уравнений системы (I) не содержит горизонтального перемещения u, то последнее уравнение из (I) можно проинтегрировать отдельно (после того, когда необходимые распределения величин m, w, z найдены), предполагая, что $u(0) = 0$. Четыре остальных уравнения интегрируем на двух отрезках. Слева от опоры на отрезке $[0, s]$ мы имеем симметричную краевую задачу относительно точки $\xi = s/2$. Поэтому интегрирование разумно производить только на отрезке $[s/2, s]$ слева направо, используя граничные условия

$$q\left(\frac{s}{2}\right) = 0, \quad z\left(\frac{s}{2}\right) = 0, \quad m(s) = \sqrt{1 - \frac{3}{4} n_1^2}, \quad w(s) = 0 .$$

Справа от опоры на отрезке $[s, 2]$ краевая задача несимметрична. Поскольку выражения в (I) со знаменателем

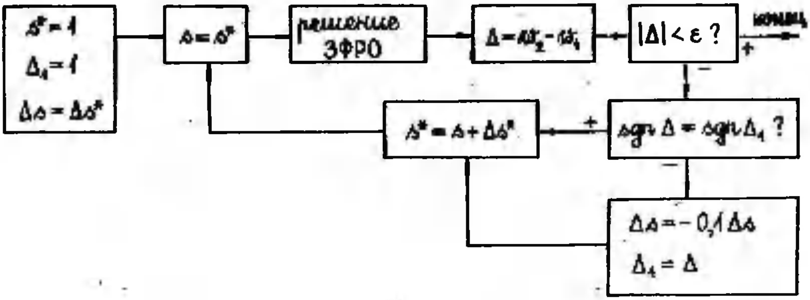
$\sqrt{1-m^2-0{,}75n_1^2}$ в точке $\xi=s$ не определены, то на этом отрезке интегрировать придется справа налево, учитывая краевые условия

$$m(2)=0, \quad w(2)=0, \quad m(s)=\sqrt{1-\frac{3}{4}n_1^2}, \quad w(s)=0 .$$

Краевые задачи на обоих участках решаются численно с помощью метода Рунге–Кутта четвертого порядка. При этом а) задаются отсутствующие граничные условия в начальной точке, б) решается соответствующая задача Коши и в) выбираются новые начальные значения фазовых координат. Эта процедура повторяется до тех пор, пока граничные условия в конечной точке отрезка интегрирования не удовлетворены.

3. Алгоритм оптимизации и обсуждение результатов

Алгоритм, использованный при определении оптимального расположения дополнительной опоры, представляется в виде следующей блок-схемы (фиг. I):



Фиг. I

Здесь w_1, w_2 – максимальные прогибы левой и правой частей оболочки соответственно, ε – максимальная допустимая разница между w_2 и w_1, Δs – приращение координаты опоры, s^*, Δs^* – исходные величины для s и Δs, а ЭФРО обозначает задачу с фиксированным расположением опоры.

Пакет программ, осуществляющий данный алгоритм, написан на языке ФОРТРАН, вычисления проводились на ЭВМ ЕС-1060. Численные результаты, приведенные в таблице I, соответствуют случаю $\alpha = 8$, $n_1 = 0,2$. Точность удовлетворения краевых условий, а также максимальная допустимая разница между w_2 и w_1 равна 0,0005. Символ s_{opt} обозначает оптимальную координату для опоры, w_* - максимальный прогиб при $s = s_{opt}$, а коэффициент эффективности e вычисляется по формуле $e = w_*/w_0$, где $w_0 = w_2\big|_{s=1}$.

Таблица I

s	p = 2,7		p = 2,8		p = 2,9	
	w_1	w_2	w_1	w_2	w_1	w_2
I,0	0,047	0,77I	0,I77	0,899	0,307	I,027
I,05	0,30I	0,529	0,444	0,644	0,587	0,760
I,I	0,563	0,296	0,720	0,400	0,877	0,504
s_{opt}	I,0730		I,0692		I,0659	
w_*	0,420		0,549		0,678	
e	0,545		0,6II		0,660	

Из таблицы видно, что при увеличении давления расстояние оптимального расположения опоры от середины оболочки, а также эффективность оптимизации уменьшается.

Отыскание подходящих начальных условий производилось двумя способами: а) общеизвестным методом "спуск по координатам" и б) методом Тиффорда [I], при котором используется система, двойственная системе уравнений (I). Оба метода имеют свои преимущества и недостатки. Метод а) прост и надежен при вычислении прогибов меньше толщины оболочки, но при более больших прогибах сходимость к решению исчезает. Недостатком его является также сравнительно медленная сходимость. У метода б), позволяющего вычислять прогибы в несколько раз больше толщины оболочки, сходимость хорошая, но он капризен: иногда вычисления прерываются, поскольку в ЭВМ появляется исчезание или переполнение.

Литература

1. Ланс Н.Дж., Численные методы для быстродействующих машин. М., 1962, 91–93.
2. Леллеп Я., Ханнус С., Большие прогибы жесткопластических замкнутых цилиндрических оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 59–65.
3. Ханнус С. Расчет пластических цилиндрических оболочек при больших прогибах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 721, 39–42.
4. Розенблюм В.И., Приближенная теория равновесия пластических оболочек. Прикл. мат. и мех., 1954, 18, № 3, 289–302.

Optimal location of an additional support for rigid-plastic cylindrical shells in the case of large deflections

S.Hannus

Summary

The rigid-plastic cylindrical shells subjected to the uniformly distributed internal pressure and axial dead load are considered by taking account of the post yield behaviour. Optimal location of the rigid circular additional support is found for a homogeneous shells which material obeys a nonlinear approximation of the Von Mises criterion. Numerical results are given.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

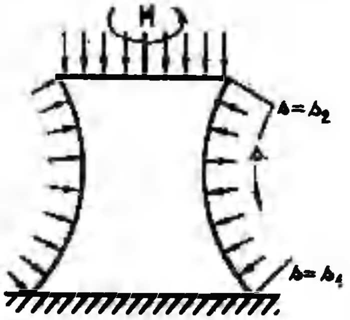
Т.Лийва
Таллинский политехнический институт

Поведение оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны как при колебаниях, так и при потере устойчивости существенно отличается от поведения оболочек нулевой и положительной гауссовой кривизны. Решение задач о поведении таких оболочек сталкивается с несколькими трудностями математического характера. Во-первых, характеристическое уравнение исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных 8-го порядка имеет попарно тождественные корни, и, во-вторых, после асимптотического интегрирования этой системы рассматриваемая задача сведется к решению дифференциального уравнения второго порядка, не интегрируемого в квадратурах. При численном решении этого уравнения возникают трудности именно в случае равномерного внутреннего давления части тора, имеющего отрицательную гауссову кривизну, ибо тогда указанное выше уравнение имеет две точки перевала.

В рассматриваемой статье исследуется задача статической устойчивости симметрично нагруженных оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. При построении решений в линейном приближении, характеризующих неосесимметричные формы потери устойчивости, используется метод асимптотического интегрирования, развитый в статьях [I, 2] . При одновременном сжатии, кручении и равномерном давлении оболочки строятся приближенные формы потери устойчивости для верхней критической нагрузки. Такой подход, где разные способы нагружения оболочки рассматриваются одновременно, соответствует больше истинным явлениям в технике и природе.

I. Результаты асимптотического интегрирования исходной системы уравнений

Пусть оболочка замкнута в окружном направлении и ограничена двумя параллелями $s = s_1$ и $s = s_2$ (фиг.I). Учитывая, что



Фиг. I

начальные напряжения и радиусы кривизны оболочки являются переменными функциями длины дуги образующей, ищем формы потери устойчивости и верхние критические нагрузки при m волн в окружном направлении.

Положим

$$T_1(s,\varphi)=Ehp(s)e^{im\varphi}, \qquad u(s,\varphi)=u(s)e^{im\varphi},$$
$$T_2(s,\varphi)=Ehq(s)e^{im\varphi}, \qquad v(s,\varphi)=v(s)e^{im\varphi}, \qquad (I.I)$$
$$S(s,\varphi)=Ehr(s)e^{im\varphi}, \qquad w(s,\varphi)=mw(s)e^{im\varphi},$$

где T_1 , T_2 – дополнительные внутренние усилия в оболочке; u , v , w – проекции смещения на направления меридиана, параллели и нормали, E – модуль Юнга, h – толщина оболочки, φ – долготный угол.

Пусть начальное напряженное состояние является безмоментным, осесимметричным и определяется усилиями $T_1^{(0)}$, $T_2^{(0)}$ и $S^{(0)}$.

Возьмем уравнения равновесия элемента оболочки и подставим в них соотношения (I.I). Получим систему уравнений для определения p , q , r , u , v , w :

$$\begin{cases} \frac{du}{ds}-\frac{m}{R_1}w=p-\nu q, \\ i\frac{m}{B}v+\frac{dB}{ds}\frac{1}{B}u-\frac{m}{R_2}w=q-\nu p, \\ \frac{dv}{ds}-\frac{dB}{ds}\frac{1}{B}v+i\frac{m}{B}u=2(1+\nu)r, \\ \frac{dB}{ds}p+B\frac{dp}{ds}+imr-\frac{dB}{ds}q=0, \\ 2\frac{dB}{ds}r+B\frac{dr}{ds}+imq=0, \\ \frac{1}{R_1}Ehp+\frac{1}{R_2}Ehq=\frac{h^2m}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{B}\frac{d}{ds}B\frac{d}{ds}-\frac{m^2}{B^2}\right)^2w+ \end{cases} \qquad (I.2)$$

$$+\frac{m}{B}\left[\frac{m^2}{B}T_2^{(0)}w-\frac{d}{ds}\left(T_1^{(0)}B\frac{dw}{ds}\right)\right]-$$

$$-2i\frac{m^2}{B}\left(S^{(0)}\frac{dw}{ds}+\frac{1}{2}\frac{dS^{(0)}}{ds}\cdot w\right)-.$$

Здесь B – расстояние от точек срединной поверхности до оси вращения, ν – коэффициент Пуассона.

Пусть в качестве единицы длины принят характерный размер срединной поверхности. Тогда h будет малым числом. Введём малый параметр ε по формуле

$$\varepsilon^6=\frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \qquad (I.3)$$

При решении аналогичных задач в [I, 2] установлено, что при потере устойчивости $m=O(\varepsilon^{-1})$. Поэтому положим

$$m=q\varepsilon^{-1} . \qquad (I.4)$$

Система (I.2) имеет восьмой порядок. Четыре её интеграла с показателями изменяемости $\frac{1}{3}$ оказывается удобным искать в виде рядов

$$p_k(s,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{nk}(s)\varepsilon^n\exp\left\{\frac{q}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha_k(t)dt\right\}, \quad (k=1,2,3,4) \qquad (I.5)$$

$$[p,\ r,\ q,\ u,\ v,\ w] ,$$

где символ в квадратных скобках указывает на то, что аналогичные формулы имеют место и для q , r , u , v , w .

Здесь

$$\alpha_1=\alpha_2=i\gamma , \qquad \alpha_3=\alpha_4=-i\gamma , \qquad \gamma=\left|\frac{R_2}{R_1B^2}\right|^{\frac{1}{2}} .$$

Четыре оставшихся интеграла системы (I.2) являются обычными интегралами типа краевого эффекта, имеющими показатель изменяемости $\frac{1}{2}$. В дальнейшем основное внимание уделено построению интегралов (I.5) (переходящих при небольших m в безмоментные), так как их влияние является здесь определяющим. В [I, 2] рассматривались аналогичные задачи и было показано, что в I и II приближениях параметр критической нагрузки определяется лишь с помощью интегралов (I.5) и тангенциальных граничных условий.

Следует отметить, что интегралы (I.5) не являются в строгом смысле слова безмоментными, ибо при их построении использован и главный моментный член в исходной системе уравнений. Иногда в литературе эти интегралы называются полубезмоментными, но для удобства изложения мы в дальнейшем будем назызать их безмоментными, чтобы отличать от интегралов типа краевого эффекта.

Ниже ограничиваемся построением только главных членов в (I.5). Линейная комбинация решений (I.5) в первом приближении будет в виде

$$p=(C_1 p_{01}+C_2 p_{02})e^{i\psi}+(C_3 p_{03}+C_4 p_{04})e^{-i\psi}, \qquad [p, q, r, u, v, w], \tag{I.6}$$

где C_k – произвольные постоянные,

$$\psi(s)=m\int_{s_1}^{s}\gamma(t)dt,$$

$$p_{0k}=\frac{2i\alpha_k R_1^2 B}{(R_1-R_2)^2}\left|\frac{B}{\gamma R_2}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{dx_k}{ds}, \quad q_{0k}=-\frac{R_2}{R_1}p_{0k}, \quad r_{0k}=iB\alpha_k p_{0k}, \tag{I.7}$$

$$u_{0k}=iB\alpha_k v_{0k}, \qquad v_{0k}=\left|\frac{B}{\gamma R_2}\right|^{\frac{1}{2}}x_k, \qquad w_{0k}=i\frac{R_2}{B}v_{0k} \quad (k=1,2,3,4).$$

Здесь R_1, R_2 – главные радиусы кривизны (считаем $R_1<0$, $R_2>0$) и x_k – неизвестные функции, подлежащие определению.

Обозначим параметры нагрузки при сжатии, кручении и равномерном давлении оболочки соответственно через β_1, β_2, β_3. При разложении параметров нагрузки по степеням малого параметра ε в виде

$$\beta_n(\varepsilon)=\varepsilon^4(\beta_{n0}+\varepsilon\beta_{n1}+\ldots), \qquad (n=1,2,3) \tag{I.8}$$

получим для определения функции x_k следующее уравнение:

$$\frac{d}{ds}\left[g(s)\frac{dx_k}{ds}\right]+\frac{\beta_1}{Eh}m^4\frac{R_2^3}{\gamma R_1 B^4}x_k\mp\frac{\beta_2}{Eh}m^3\frac{R_2}{B^3}x_k+$$

$$+\frac{\beta_3}{Eh}\frac{m^4R_2^2}{2\gamma B^2}\left\{\frac{R_2}{R_1}\left[1-\frac{B^2(s_1)}{B^2}\right]-1\right\}x_k-\frac{h^2m^8}{12(1-\nu^2)}\frac{x_k}{g(s)}=0, \quad (k=1,2,3,4) \qquad (I.9)$$

где

$$g(s)=\frac{2R_1^2B^4\gamma}{R_2(R_1-R_2)^2} .$$

Через x_1 , x_2 , x_3 , x_4 обозначены решения уравнения (I.9) , удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{aligned} &x_1(s_1)=x_3(s_1)=x_2'(s_1)=x_4'(s_1)=0 , \\ &x_2(s_1)=x_4(s_1)=x_1'(s_1)=x_3'(s_1)=1 . \end{aligned} \qquad (I.10)$$

Знак "минус" перед третьим членом уравнения (I.9) соответствует функциям $x_1(s)$ и $x_2(s)$, а знак "плюс" - функциям $x_3(s)$ и $x_4(s)$.

При абсолютно жёсткой заделке оболочки её края не имеют никаких возможностей двигаться в осевом направлении (в данной работе рассмотрим все случаи нагружения, где сжатие отсутствует). Тогда даже в линейной постановке задачи в выражениях нагрузочных усилий появляются дополнительные члены. Выражаем такие усилия в виде

$$\begin{aligned} &T_1^{(0)}=\beta_3\kappa\frac{R_2}{B^2}+\beta_3\frac{R_2}{B^2}\int_{s_1}^{s}BB'ds , \\ &T_2^{(0)}=-\beta_3\kappa\frac{R_2^2}{B^2R_1}+\beta_3\left(R_2-\frac{R_2^2}{R_1B^2}\int_{s_1}^{s}BB'ds\right) , \\ &S^{(0)}=\frac{\beta_2}{B^2} . \end{aligned} \qquad (I.11)$$

Здесь параметр $\kappa_0\leq\kappa\leq\kappa_1$ характеризует внутренние усилия оболочки, возникающие при препятствии движения её краёв в осевом направлении. Если $\kappa=\kappa_0=0$, то эти края могут в осевом направлении свободно двигаться. При неподвижных краях $s=s_1$ и $s=s_2$

$$\kappa=\kappa_1=\frac{\int_{s_1}^{s_2}\frac{R_2^2}{B}\left(\nu+\frac{R_2}{R_1}\right)ds-\frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\frac{R_2^2}{B}\left(1+2\nu\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\left[1-\frac{B^2(s_1)}{B^2}\right]ds}{\int_{s_1}^{s_2}\frac{R_2^2}{B^3}\left(1+2\nu\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)ds} . \qquad (I.12)$$

В случае комбинированного нагружения "кручение - равномерное давление" уравнение (I.9) приобретает при абсолютно жёсткой заделке краёв оболочки следующий вид:

$$\cdot\frac{d}{ds}\left[g(s)\frac{dx_w}{ds}\right] \mp \frac{\beta_2}{Eh} m^4 \frac{R_2}{B^3} x_w + \frac{\beta_3}{Eh}\frac{m^4 R_2^2}{2\gamma B^2}\left\{2\kappa\frac{R_2}{B^2 R_1} - 1 + \frac{R_2}{R_1}\left[1-\frac{B^2(s_0)}{B^2}\right]\right\} x_w - \frac{h^2 m^4}{12(1-\nu^2)}\frac{x_w}{g(s)} = 0 . \tag{I.13}$$

2. Потеря устойчивости абсолютно жёстко заделанной оболочки

Для определения наименьшего значения параметров нагрузки β_n $(n=1,2,3)$ при абсолютно жёсткой заделке краёв оболочки зададим граничные условия в следующем виде:

$$u(s_i) = v(s_i) = w(s_i) = \frac{dw}{ds}(s_i) = 0 \qquad (i=1,2) . \tag{2.I}$$

Интересно определить также то значение m, которое соответствует наименьшему β_n. Известно [3] , что собственое значение β_n сильно зависит от вида тангенциальных граничных условий, а учёт нетангенциальных граничных условий во всех рассматриваемых примерах даёт поправку порядка $h^{\frac{1}{2}} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$. Итак, в первом приближении наши результаты являются решениями задач безмоментной теории при тангенциальных граничных условиях, что находится в полном соответствии с классической теорией.

Имея в виду линейные комбинации безмоментных интегралов (I.6), можем выписать в первом приближении вещественное решение системы (I.2) в виде

$$\begin{aligned} u(s) &= -(C_1 u_{01} + C_2 u_{02})\sin\psi + (C_3 u_{03} + C_4 u_{04})\cos\psi , \\ v(s) &= (C_1 v_{01} + C_2 v_{02})\cos\psi + (C_3 v_{03} + C_4 v_{04})\sin\psi \end{aligned} \tag{2.2}$$

$[v, w]$.

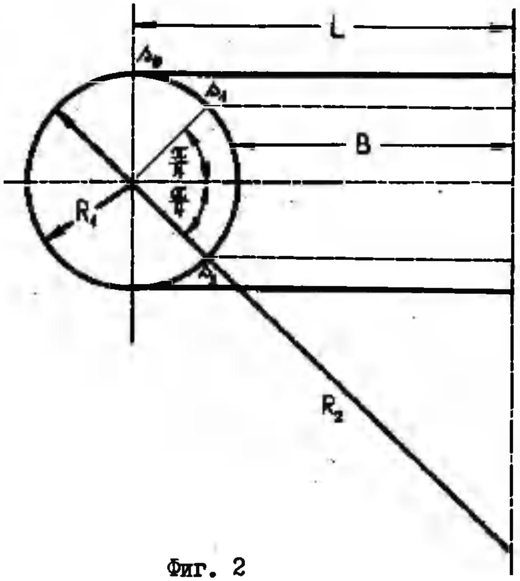
Параметры нагрузки β_n $(n=1,2,3)$ входят в выражения перемещений первого приближения (2.2) лишь в неявном виде. Подставляя выражения (2.2) в граничные условия (2.I), приходим к искомому уравнению

$$x_3(s_2, \beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30}) = 0 \qquad (2.3)$$

Принимая во внимание (I.9), (I,IO) и (2.3), видим, что задача о приближенном определении собственных значений свелась к классической задаче Штурма-Лиувилля: найти решения уравнения (I.9), удовлетворяющие однородным уравнениям

$$x_3(s_1) = x_3(s_2, \beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30}) = 0 .$$

В качестве численного примера находим параметры верхних критических нагрузок при комбинированном нагружении той части тора (фиг. 2), где гауссовая кривизна отрицательна.



Фиг. 2

Пусть началом точки отсчёта криволинейной координаты будет точка $s = s_0$. Рассматриваем задачу на отрезке $[s_1, s_2]$. Тогда для рассматриваемой части тора имеем

$$R_2 = \frac{B}{\sin s} ; \qquad R_1 = -1 ; \qquad B = L + R_1 \sin s .$$

За начальные данные примем следующие значения:

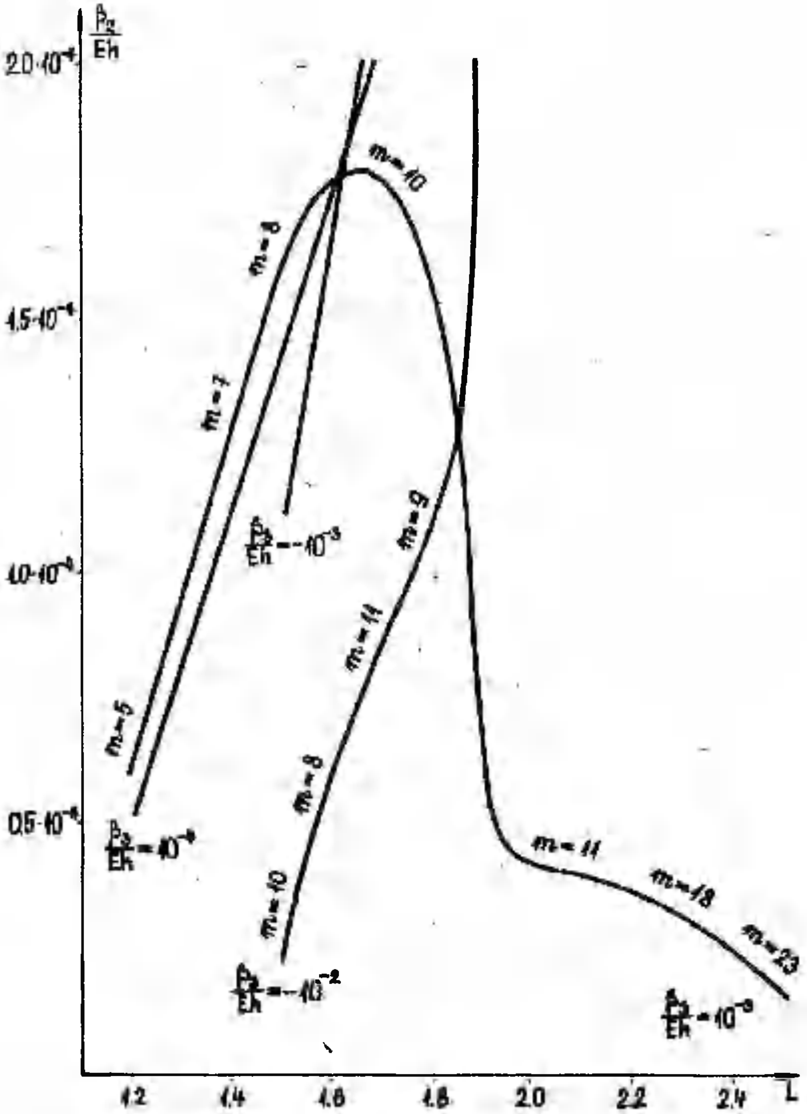
$$s_1 = \frac{\pi}{4}\ ; \qquad s_2 = \frac{3}{4}\pi\ ; \qquad \nu = 0.3\ ; \qquad h = 0.003\ .$$

Из проведенных вычислений выясняется, что в случае комбинированного нагружения оболочек отрицательной гауссовой кривизны доминирует следующая общая тенденция: при увеличении внешнего равномерного давления параметры верхней критической нагрузки кручения и сжатия уменьшаются. Исключением являются в данном примере оболочки с относительно маленьким радиусом кривизны R_2 (т.е. при $L \leqslant 1{,}6$); тогда указанная тенденция имеет противоположный характер.

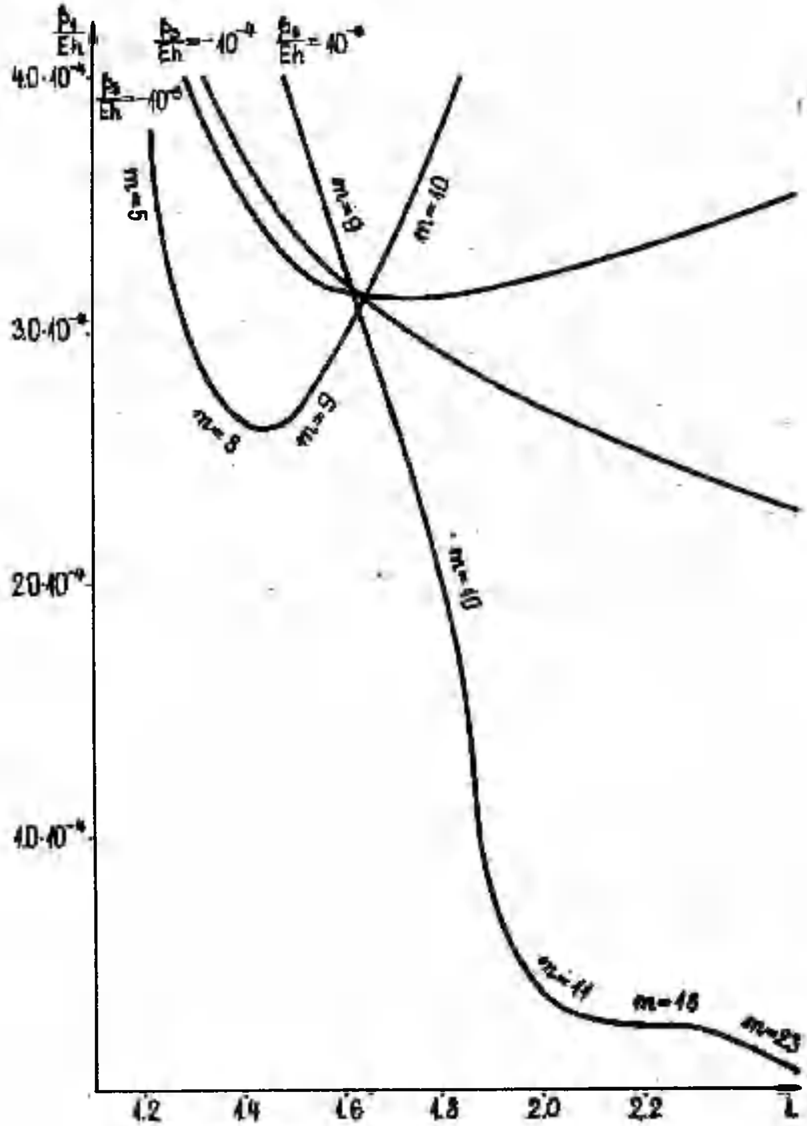
Когда нагрузка внешнего давления достигает величины порядка 10^{-3}, то, начиная от некоторого значения параметра L ($L \simeq 2{,}5$), вычисление параметров верхней критической нагрузки при сжатии и кручении $\frac{p_1}{Eh}$, $\frac{p_2}{Eh}$ значительно затрудняется, и в случае $L > 3$ их найти не удалось. Дело в том, что в таких случаях функция $m = h(x)$ как функциональная зависимость числа волн по параллели m от функции $x(s)$ имеет несколько минимумов и параметры $\frac{p_1}{Eh}$ и $\frac{p_2}{Eh}$ сами теряют свою устойчивость в отношении функции $x(s)$. Физически это означает, что внешнее давление становилось слишком большим для того, чтобы оболочка сама могла бы выдержать эту нагрузку. Такое же явление появляется и при нагружении оболочек с внутренним равновесным давлением, если параметр этого давления достигает порядка 10^{-2} и оболочки сами имеют относительно маленький радиус кривизны (в данном примере $L \leqslant 1{,}6$).

С увеличением параметра внутреннего равномерного давления $\frac{p_3}{Eh}$ от нуля до порядка 10^{-3} оболочка отрицательной гауссовой кривизны в общем улучшает своё противодействие к потере устойчивости при сжатии и кручении. Исключением являются (как показывают проведенные вычисления) лишь оболочки, геометрия которых принадлежит к диапазону $1{,}2 \leqslant L \leqslant 1{,}6$.

Выясняется также, что потеря устойчивости оболочки при её комбинированном нагружении значительно зависит от геометрии оболочки. Характер качественных изменений поведения оболочки при её сжатии-равномерном давлении выявляется особенно сильно в том случае, когда параметр равномерного внешнего

$\frac{p_2}{Eh}$
2.0·10⁻⁴
1.5·10⁻⁴
1.0·10⁻⁴
0.5·10⁻⁴
m=8
m=10
m=7
m=5
$\frac{p_3}{Eh}=-10^{-3}$
m=9
m=11
m=8
m=10
$\frac{p_3}{Eh}=10^{-4}$
$\frac{p_3}{Eh}=-10^{-2}$
m=11
m=18
m=23
$\frac{p_3}{Eh}=10^{-3}$
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.4
L

Фиг. 3


$\frac{p_1}{Eh}$
$\frac{p_2}{Eh} = -10^{-4}$
$\frac{p_2}{Eh} = 10^{-4}$
$\frac{p_2}{Eh} = -10^{-3}$
$4.0 \cdot 10^{-4}$
$3.0 \cdot 10^{-4}$
$2.0 \cdot 10^{-4}$
$1.0 \cdot 10^{-4}$
m=5
m=9
m=10
m=8
m=9
m=10
m=11
m=15
m=23
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
l

Фиг. 4

давления $\frac{p_2}{Eh}$ дистигает порядка 10^{-3} (фиг. 3). Тогда функциональная зависимость $\frac{p_2}{Eh}(L)$ перестает быть монотонно нарастающей функцией и имеет в точке $L \simeq 6{,}5$ свой минимум.

В случае комбинированного нагружения "сжатие-равномерное давление" поведение рассматриваемой оболочки приобретает совсем иной вид (фиг. 4). Теперь функция $\frac{p_1}{Eh}(L)$ имеет в диапазоне $-10^{-3} < \frac{p_2}{Eh} < 10^{-3}$ точки минимума и становится при $\frac{p_2}{Eh} \sim 10^{-3}$ и $\frac{p_2}{Eh} \sim 10^{-4}$ монотонно убывающей.

Литература

I. Лийва Т.В., Товстик П.Е. О потере устойчивости оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны при кручении. Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела,1973, № 6, 92-98.

2. Лийва Т.В., Товстик П.Е. Об устойчивости в линейном приближении оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. Пробл. мех. тв.деф.тела. Л., "Судостроение",1970.

3. Лийва Т.В., О собственных неосесимметричных колебаниях оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. Тр. ТПИ, 1970, серия А, № 293.

Über die Knickung der Umdrehungsschale der negativen GauBschiefe beim symmetrischen Druck

T. Liiva

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wird die Knickung der Umdrehungsschale der negativen GauBschiefe beim symmetrischen Druck mittels der Methode des asymptotischen Integrierens behandet. Die Aufgabe über die annähernde. Bestimmung von Parametern der oberen kritischen Belastung wird an die klassische Sturm-Liouville-Aufgabe zurückgeführt. Es wird dabei in Betracht gezogen, daB die Anfangsspannungen und die GauBschiefe Wechselfunktionen des Koordinaten krummlinige sind. Als Beispiel wird die Knickung jenes Teils der Ringfläche angeführt, wo die GauBschiefe negativ ist.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Т.Пейпман

Таллинский политехнический институт

Рассмотрим распространение двумерных нелинейных волн деформации в неоднородной среде с дисперсией. Для описания волнового процесса используем аппарат эволюционных уравнений [I], который позволяет из совокупности волн выделить интересующую нас продольную волну. Детали построения эволюционного уравнения для описания нелинейной волны деформации в однородной среде с дисперсией приведены в [I] , а результаты численного анализа в случае двумерных волн-в [2 , 3, 4]. В настоящей работе рассмотрим влияние неоднородности среды на искажение профиля двумерной волны.

Предполагаем, что изменение основных параметров среды описывается через соотношения

$$\lambda + 2\mu = (\lambda_0 + 2\mu_0) f(x^1) , \tag{I}$$

$$\rho = \rho_0 h(x^1) , \tag{2}$$

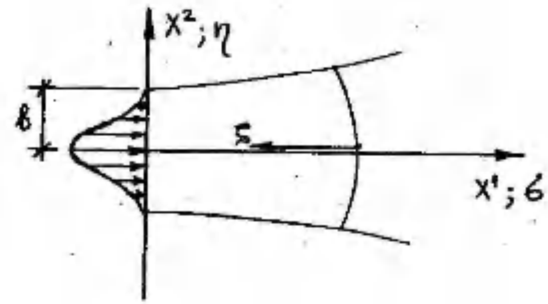
$$c^2 = c_0^2 g(x^1) , \qquad g(x^1) = f(x^1) \cdot h^{-1}(x^1) , \tag{3}$$

где гладкие функции $f(x^1)$, $h(x^1)$, $g(x^1)$ допускают необходимое дифференцирование. Здесь ось x^1 расположена в направлении распространения волны, λ и μ - параметры Ляме, ρ - плотность среды, c - скорость продольной волны, λ_0 , μ_0 , ρ_0 , c_0 - начальные значения параметров при $x^1 = 0$.

В дальнейшем примем предположение о слабой изменяемости свойств среды

$$\begin{gathered} f(x^1) = 1 + \varepsilon f_1(x^1) , \\ h(x^1) = 1 + \varepsilon h_1(x^1) , \\ g(x^1) = 1 + \varepsilon g_1(x^1) = 1 + \varepsilon f_1(x^1) - \varepsilon h_1(x^1) , \end{gathered} \tag{4}$$

где ε - малый параметр.



Фиг. I

После введения безразмерных лучевых координат (фиг. I) σ , ζ , η получим эволюционное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[R_1(\beta)+R_2(\beta)\right]=H\frac{\partial^2\beta}{\partial\eta^2} . \tag{5}$$

Оператор $R_1(\beta)$ описывает нелинейность процесса и дисперсию среды

$$R_1(\beta)=\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}+sign(1+m_0)\beta\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}+\nu\frac{\partial^3\beta}{\partial\zeta^3} . \tag{6}$$

Здесь β – безразмерный амплитудный фактор, $sign(1+m_0)$ зависит от соотношения модулей упругости третьего и второго порядков, ν – параметр дисперсии

$$\nu=-\frac{l_0^2 c_0}{3|1+m_0|\tau_c^2\alpha_0} , \tag{7}$$

где l_0 – масштабный параметр, характеризующий дисперсионные свойства среды, τ_c – длина волны, α_0 – амплитуда начального воздействия.

Оператор $R_2(\beta)$ описывает влияние неоднородности среды

$$R_2(\beta)=-\Phi\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}+\Lambda\beta+\Pi\frac{\partial^2\beta}{\partial\zeta^2} . \tag{8}$$

Здесь первые два члена характеризуют влияние неоднородности, а третий член-совместное влияние неоднородности и дисперсии. Коэффициенты Φ , Λ и Π зависят от свойств среды и от характеристик импульса

$$\Phi = \frac{1}{2} g_1 \left(\frac{2\tau_c c_0 \sigma}{3|1+m_0|\alpha_0} \right) ,$$

$$\Pi = \frac{2 l_0^2 c_0}{3|1+m_0|\alpha_0 \tau_c} \frac{\partial f}{\partial x^1} , \qquad (9)$$

$$\Lambda = \frac{2\tau_c c_0}{3|1+m_0|\alpha_0} \frac{\partial f}{\partial x^1} .$$

Параметр дифракционной расходимости H в (5) зависит от соотношения скоростей c_0 и c_2 , а также от соотношения длины волны τ_c и полуширины (по координате x^2) пучка b

$$H = \frac{c_2^2}{c_0^2} \frac{\tau_c^2}{b^2} . \qquad (I0)$$

Рассмотрим искажение профиля двумерной нелинейной волны при начальном воздействии

$$p|_{\sigma=0} = \sin\zeta \cdot \exp(-\eta^2) . \qquad (II)$$

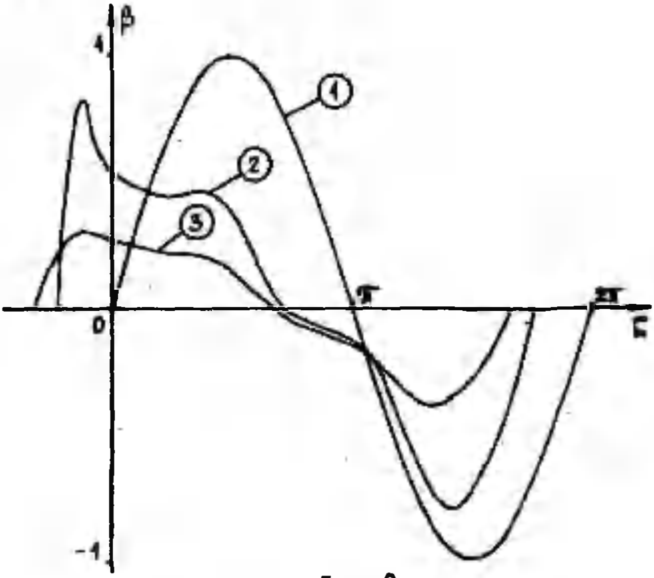
Для численного интегрирования эволюционного уравнения (5) используем метод быстрого преобразования Фурье [3 , 5, 6].

Предполагаем, что функции $f(x^1)$ и $g_1(x^1)$ (9), которые описывают изменение параметров среды и сдвиг фронта волны соответственно, линейны и определены согласно соотношениям

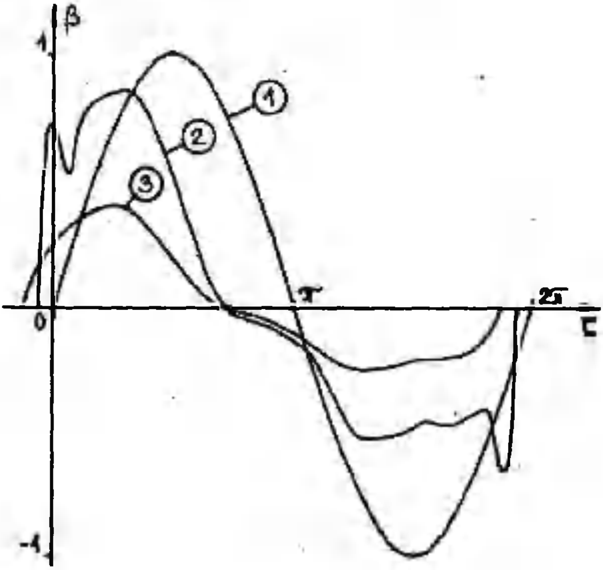
$$g_1(x^1) = \varkappa x^1 ; \quad \varkappa = 0{,}00I ,$$

$$\partial f(x^1)/\partial x^1 = const = 0{,}0I.$$

Рассмотрим искажение профиля волны при параметре дифракций $H = 0{,}5$ в случае параметра дисперсии $\nu = \pm 0{,}I5$. Профили волн на оси σ показаны на фиг. 2 ($\nu = 0{,}I5$) и на фиг. 3 ($\nu = -0{,}I5$), где кривые I обозначают начальный импульс при



Фиг. 2



Фиг. 3

$\sigma = 0$, кривые 2 - искажение импульса в нелинейной однородной среде с дисперсией при $\sigma = 1{,}2$ и кривые 3 - искажение импульса в нелинейной неоднородной среде с дисперсией при $\sigma = 1{,}2$. Неоднородность среды обусловливает уменьшение амплитуды и дополнительный сдвиг нулевой точки. Это является также причиной, почему ударный профиль в данном случае не образуется. По сравнению с волной в однородной среде высокочастотная осцилляция выражается слабее. Дополнительный сдвиг нулевой точки при обоих параметрах дисперсии имеет одинаковый характер. Пространственные профили волны при $H = 0{,}5$ и $\nu = 0{,}15$ показаны на фиг. 4.

Нелинейные эффекты при периодическом изменении свойств среды зависят от характера функции $f(x^1)$. Расчеты проведены при $H = 0{,}77$; $\nu = \pm 1{,}012$ для двух функций

$$f(x^1) = \sin \kappa x^1 \; ; \qquad \partial f / \partial x^1 = \kappa \cos \kappa x^1 \; , \qquad (12)$$

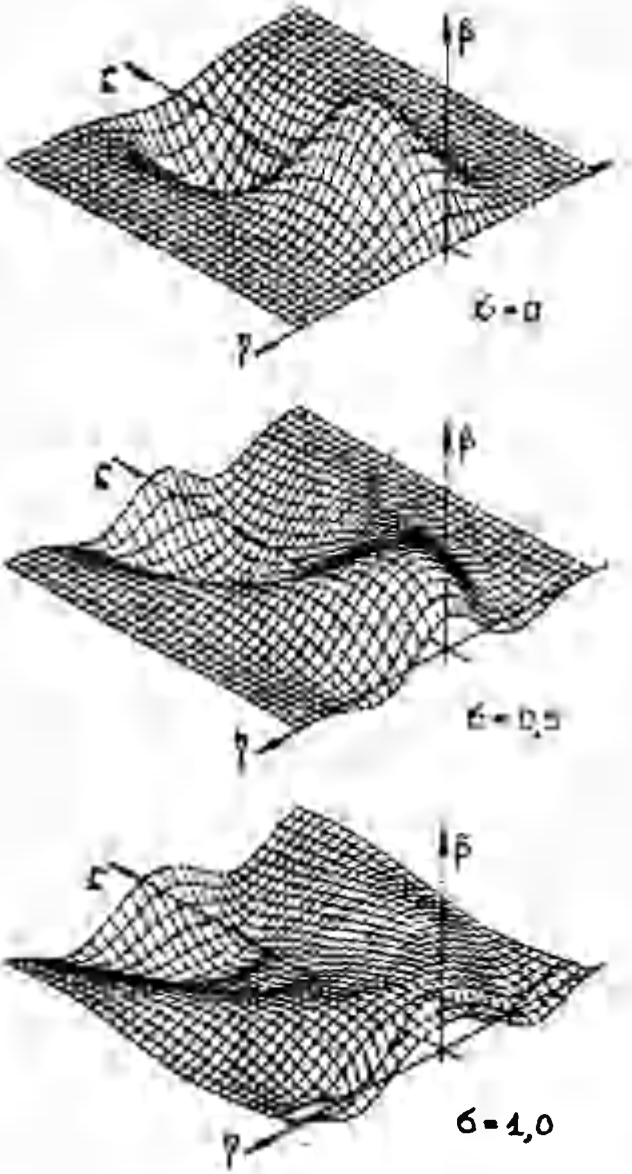
$$f(x^1) = -\cos \kappa x^1 \; ; \qquad \partial f / \partial x^1 = \kappa \sin \kappa x^1 \; . \qquad (13)$$

По условиям, приведенным в табл. I, можно судить о том, как неоднородность среды сказывается на изменении амплитуды в зависимости от значения координаты σ.

Таблица I

Функция $f(x^1)$	$\sin \kappa x^1$	$-\cos \kappa x^1$
уменьшение аплитуды	$0 < \sigma < 0{,}25$ $0{,}75 < \sigma < 1{,}0$	$0 < \sigma < 0{,}5$
увеличение амплитуды	$0{,}25 < \sigma < 0{,}75$	$0{,}5 < \sigma < 1{,}0$

Отметим, что высокочастотной осцилляции при выбранном параметре дисперсии не возникает. Существенная дифракция (большое значение H) обусловливает сильное уменьшение амплитуды, что ослабляет вклад нелинейных эффектов, и стремления к



Фиг. 4

разрыву не наблюдается. Влияние нелинейности в этом случае выражается только в асимметрии профиля волны. Максимальные и минимальные амплитуды в разных случаях указаны в таблице 2.

Таблица 2

	$\nu =$ - I,0I2		$\nu =$ I,0I2	
	β_{max}	β_{min}	β_{max}	β_{min}
линейная волна	0,5548	-0,5548	0,5548	-0,5548
нелинейная волна в неоднородной среде с дисперсией				
$f(x^1) = \sin \kappa x^1$	0,6970	-0,462I	0,4556	-0,6992
$f(x^1) = -\cos \kappa x^1$	0,5757	-0,56I7	0,5896	-0,5465

Из сравнения результатов (табл. I и табл. 2) следует, что для учета нелинейности особенно важным оказывается первый этап распространения волны, когда амплитуды имеют наибольшее значение. В дальнейшем уменьшение амплитуды, обусловленное дифракцией, ослабляет нелинейные эффекты. Тем самым объясняется и различное искажение профиля волны при функциях (I2) и (I3). В случае функции (I2) уменьшение, обусловленное неоднородностью, происходит в течение четверти периода функции $f(x^1)$, и амплитуды остаются достаточно большими в дальнейшем процессе, поэтому вклад нелинейности остается существенным. В случае функции (I3) уменьшение амплитуды в течение половины периода функции $f(x^1)$ приводит к существенному уменьшению амплитуд, и поэтому на следующем этапе, когда неоднородность обусловливает увеличение амплитуды, вклад нелинейности остается несущественным.

Литература

I. Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К., Нелинейные волны деформации. М., "Наука", I98I.

2. Пейпман Т.А., Об искажении двумерных волн деформации. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 659, 76-82.
3. Пейпман Т.А., Псевдоспектральный метод численного интегрирования эволюционных уравнений, описывающих распространение волн деформации. В сб.: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: СО АН СССР, 1984, 235-240.
4. Пейпман Т.А., Искажение двумерных волн деформации в нелинейных средах. В сб.: Актуальные проблемы геофизики. М., "Наука", 1985, 41-47.
5. Fornberg B., On high order approximations of hyperbolic partial differential equations by a Fourier method. Rep. № 39, Dept. of Computer Science, Uppsala University. Uppsala, 1972.
6. Brigham E.O., The fast Fourier transform. Prentice-Hall, 1974.

The propagation of twodimensional deformation waves in a nonhomogeneous medium

T.Peipman

Summary

The nonlinear twodimensional evolution equation (5) with the wave operators (6) and (8), describing the propagation in a nonlinear dispersive and nonhomogeneous medium, is solved numerically. The pseudospectral method in space and the leap-frog scheme of finite differences in time are used [3,5,6]. The influence of the dispersion and the nonhomogeneity upon the phase shift is investigated. The amplitude distortion, influenced by the diffractional expansion and the nonhomogeneity, is analysed in detail.

РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Г.Арясов, А.Снитко, Е.Соколов
Таллинский политехнический институт

К составным конструкциям относятся балки, пластины и оболочки со ступенчато меняющейся жесткостью, а также оболочки, состоящие из элементов различной формы. Расчет составной конструкции обычно производится с помощью расчленения ее на отдельные элементы, в пределах каждого из которых жесткостные и геометрические характеристики меняются монотонно. Для каждого из получающихся таким образом элементов решение должно быть заранее известно. Чтобы обеспечить сопряжение соседних участков по перемещениям и усилиям, необходимо составить систему алгебраических уравнений, содержащих "$N \cdot n$" неизвестных, где n – порядок дифференциального уравнения, а N – число элементов.

Однако, если воспользоваться некоторыми свойствами обобщенных функций, при решении этой задачи необходимо будет составить систему алгебраических уравнений, содержащих лишь "n" неизвестных. Покажем это на примере дифференциального уравнения

$$y^{IV} + 4\varkappa_i^4 y = \frac{q}{D_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad (I)$$

описывающего изгиб цилиндрической оболочки или балки на упругом основании.

Здесь $\varkappa_i$ – коэффициент, характеризующий жесткостные свойства i-го участка балки или оболочки, содержащих несколько различных элементов $\left(\varkappa_i = \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h_i^2}\right)$;

q – нормальное давление,
D_i – цилиндрическая жесткость.

Вначале будем предполагать, что конструкция содержит лишь два участка. Вместо уравнения (I) рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$y^{IV} + 4\varkappa_i^4 y = \frac{q}{D_i} + B_0(a) \cdot \delta(x-a) + B_1(a) \cdot \delta'(x-a) +$$

$$+ B_2(a)\cdot\delta''(x-a) + B_3(a)\cdot\delta'''(x-a), \qquad (i=1,2), \tag{2}$$

где $\delta(x-a)$ – дельта-функция;

$B_0(a)$, $B_1(a)$, $B_2(a)$ и $B_3(a)$ – неизвестные коэффициенты;

a – координата точки, в которой скачком меняется жесткостная характеристика конструкции.

Будем искать частное решение уравнения (2) в таком виде:

$$\bar{y}_{ч}(x)=\left\{[1-\eta(x-a)][Z_0(x)+Z_q(x)]+\eta(x-a)[V_0(x)+V_q(x)]\right\}, \tag{3}$$

где $\eta(x-a)$ – единичная функция;

$Z_0(x)$ и $V_0(x)$ – частные решения соответствующего однородного дифференциального уравнения для первого и второго участков соответственно:

$Z_q(x)$ и $V_q(x)$ – частные решения для первого и второго участков, соответствующие действию на конструкцию нормального давления.

Последовательно дифференцируя выражение (3) четыре раза и учитывая при этом фильтрующее свойство дельта-функции, получим

$$\begin{aligned}\bar{y}_{ч}^{IV}(x) = {} & \left\{[1-\eta(x-a)][Z_0^{IV}(x)+Z_q^{IV}(x)]+\eta(x-a)[V_0^{IV}(x)+V_q^{IV}(x)]\right\}+\\ & +\delta(x-a)\left\{[V_0'''(a)+V_q'''(a)]-[Z_0'''(a)-Z_q'''(a)]\right\}+\\ & +\delta'(x-a)\left\{[V_0''(a)+V_q''(a)]-[Z_0''(a)+Z_q''(a)]\right\}+\delta''(x-a)\left\{[V_0'(a)+V_q'(a)]-\right.\\ & \left.-[Z_0'(a)+Z_q'(a)]\right\}+\delta'''(x-a)\left\{[V_0(a)+V_q(a)]-[Z_0(a)+Z_q(a)]\right\}.\end{aligned}$$

Подставляя значения $\bar{y}_{ч}^{IV}(x)$ и $\bar{y}_{ч}(x)$ в уравнение (2) и сравнивая коэффициенты при дельта-функции и ее производных в левой и правой частях уравнения (2), будем иметь

$$B_3(a)=[V_0(x)+V_q(x)]-[Z_0(x)+Z_q(x)]\Big|_{x=a},$$

$$B_2(a)=B_3'(x)\Big|_{x=a}, \qquad B_1(a)=B_3(x)\Big|_{x=a}, \qquad B_0(a)=B_3''(x)\Big|_{x=a}.$$

Таким образом, если коэффициенты $B_0(a)$, $B_1(a)$, $B_2(a)$ и $B_3(a)$ уравнения (2) будут удовлетворять соотношениям

$$B_3(a)=\sum_{j=1}^{4} C_j\left[V_{0j}(x)-Z_{0j}(x)\right]+\left[V_q(x)-Z_q(x)\right]\Big|_{x=a},$$

$$B_2(a)=B_3'(x)\Big|_{x=a}, \qquad B_1(a)=B_2''(x)\Big|_{x=a}, \qquad B_0(a)=B_2''(x)\Big|_{x=a}, \tag{4}$$

где $Z_{0j}(x)$ и $V_{0j}(x)$ – частные линейно независимые решения однородного дифференциального уравнения

$$y^{IV}(x)+4\kappa_i^4 y=0 \qquad (i=1,2) \tag{5}$$

на первом и втором участках соответственно, то функция

$$\bar{y}(x)=\sum_{j=1}^{4} C_j\left\{\left[1-\eta(x-a)\right]Z_{0j}(x)+\eta(x-a)\cdot V_{0j}(x)\right\}+\left\{\left[1-\eta(x-a)\right]Z_1(x)+\eta(x-a)\cdot V_2(x)\right\}$$

будет общим решением дифференциального уравнения (2). В данном случае C_j – произвольные постоянные .

Отсюда следует, что общее решение исходного дифференциального уравнения (I) определится по формуле

$$y(x)=\bar{y}(x)-\tilde{y}_{ч}(x),$$

где $\tilde{y}_{ч}(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (2) при условии, что коэффициенты $B_0(a)$, $B_1(a)$, $B_2(a)$ и $B_3(a)$ удовлетворяют соотношениям (4).

Частное решение $\tilde{y}_{ч}(x)$ может быть найдено по методу вариации произвольных постоянных [I]. В данном случае оно имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{ч}(x)=\frac{\eta(x-a)}{2}\Big\{&-\theta_1(\kappa_2 x)\Big[\frac{B_0(a)}{4\kappa_2^3}\varphi_2(\kappa_2 a)+\frac{B_1(a)}{2\kappa_2^2}\cdot\zeta_2(\kappa_2 a)-\\&-\frac{B_2(a)}{2\kappa_2}\varphi_2(\kappa_2 a)-B_3(a)\cdot\theta_2(\kappa_2 a)\Big]+\\&+\zeta_1(\kappa_2 x)\Big[\frac{B_0(a)}{4\kappa_2^3}\varphi_2(\kappa_2 a)+\frac{B_1(a)}{2\kappa_2^2}\theta_2(\kappa_2 a)+\frac{B_2(a)}{2\kappa_2}\cdot\varphi_2(\kappa_2 a)+B_3(a)\,\zeta_2(\kappa_2 a)\Big]-\\&-\theta_2(\kappa_2 x)\Big[\frac{B_0(a)}{4\kappa_2^3}\cdot\varphi_1(\kappa_2 a)\ \frac{B_1(a)}{2\kappa_2^2}\zeta_1(\kappa_2 a)-\frac{B_2(a)}{2\kappa_2}\cdot\varphi_1(\kappa_2 a)+B_3(a)\cdot\theta_1(\kappa_2 a)\Big]+\end{aligned}$$

$$+\zeta_2(\kappa_2 x)\left[\frac{B_0(a)}{4\kappa_2^5}\psi_1(\kappa_2 a)-\frac{B_1(a)}{2\kappa_2^2}\theta_1(\kappa_2 a)+\frac{B_2(a)}{2\kappa_2}\psi_1(\kappa_2 a)+B_3(a)\cdot\zeta_1(\kappa_2 a)\right]\Bigg\},\quad(6)$$

где

$$\theta_1(\kappa_i x)=e^{\kappa_i x}\cos\kappa_i x;\quad \zeta_1(\kappa_i x)=e^{\kappa_i x}\sin\kappa_i x;\quad \theta_2(\kappa_i x)=e^{-\kappa_i a}\cos\kappa_i x;$$

$$\zeta_2(\kappa_i x)=e^{-\kappa_i x}\sin\kappa_i x;$$

$$\psi_{1,2}(\kappa_i x)=e^{\pm\kappa_i x}\cdot(\cos\kappa_i x-\sin\kappa_i x);\qquad \varphi_{1,2}(\kappa_i x)=e^{\pm\kappa_i x}(\cos\kappa_i x+\sin\kappa_i x)-$$

- частные решения уравнения (5);

$$B_0(a)=2\kappa_2^3\left[C_2\psi_1(\kappa_2 a)-C_1\varphi_1(\kappa_2 a)+C_3\varphi_2(\kappa_2 a)+C_4\varphi_2(\kappa_2 a)\right]-$$

$$-2\kappa_1^3\left[C_2\psi_1(\kappa_1 a)-C_1\varphi_1(\kappa_1 a)+C_3\psi_2(\kappa_1 a)+C_4\varphi_2(\kappa_1 a)\right];$$

$$B_1(a)=2\kappa_2^2\left[C_2\theta_1(\kappa_2 a)-C_1\zeta_1(\kappa_2 a)+C_3\zeta_2(\kappa_2 a)-C_4\theta_2(\kappa_2 a)\right]-$$

$$-2\kappa_1^2\left[C_2\theta_1(\kappa_1 a)-C_1\zeta_1(\kappa_1 a)+C_3\zeta_2(\kappa_1 a)-C_4\theta_2(\kappa_1 a)\right];$$

$$B_2(a)=\kappa_2\left[C_1\psi_1(\kappa_2 a)+C_2\varphi_1(\kappa_2 a)+C_3\varphi_2(\kappa_2 a)-C_4\psi_2(\kappa_2 a)\right]-$$

$$-2\kappa_1\left[C_1\varphi_1(\kappa_1 a)+C_2\varphi_1(\kappa_1 a)+C_3\varphi_2(\kappa_1 a)-C_4\psi_2(\kappa_1 a)\right];$$

$$B_3(a)=C_1\left[\theta_1(\kappa_2 a)-\theta_1(\kappa_1 a)\right]+C_2\left[\zeta_1(\kappa_2 a)-\zeta_1(\kappa_1 a)\right]+$$

$$+C_3\left[\theta_2(\kappa_2 a)-\theta_2(\kappa_1 a)\right]+C_4\left[\zeta_2(\kappa_2 a)-\zeta_2(\kappa_1 a)\right]+\left(\frac{1}{\kappa_2^4 D_2}\ \frac{1}{\kappa_1^4 D_1}\right)\frac{q}{4}\ .$$

Таким образом , общее решение дифференциального уравнения (I) может быть найдено по такой формуле:

$$y(x)=C_1\left\{\left[1-\eta(x-a)\right]\cdot\theta_1(\kappa_1 x)+\eta(x-a)\cdot\theta_1(\kappa_2 x)\right\}+C_2\left\{\left[1-\eta(x-a)\right]\cdot\zeta_1(\kappa_1 x)+\right.$$

$$\left.+\eta(x-a)\cdot\zeta_1(\kappa_2 x)\right\}+C_3\left\{\left[1-\eta(x-a)\right]\cdot\theta_2(\kappa_1 x)+\eta(x-a)\cdot\theta_2(\kappa_2 x)\right\}+$$

$$+C_4\left\{\left[1-\eta(x-a)\right]\zeta_2(\kappa_1 x)+\eta(x-a)\cdot\zeta_2(\kappa_2 x)\right\}+\left\{\left[1-\eta(x-a)\right.\frac{1}{\kappa_1^4 D_1}+\right.$$

$$\left.+\eta(x-a)\frac{1}{\kappa_2^4 D_2}\right\}\frac{q}{4}-\tilde{y}_{\text{ч}}(x)\ .\qquad(7)$$

Если конструкция содержит несколько участков с различными жесткостными характеристиками, то его общее решение запишется следующим образом:

$$y(x)=\sum_{\ell=1}^{\alpha}\Big\{C_1[\eta(x-a_{\ell-1})-\eta(x-a_\ell)]\theta_1(\kappa_\ell a)+C_2[\eta(x-a_{\ell-1})-$$

$$-\eta(x-a_\ell)]C_4(\kappa_2 a)+C_3[\eta(x-a_{\ell-1})-\eta(x-a_\ell)]+$$

$$+C_4[\eta(x-a_{\ell-1})-\eta(x-a_\ell)]+[\eta(x-a_{\ell-1})-$$

$$-\eta(x-a_\ell)]\frac{q}{4\kappa_\ell^4 D_\ell}\Big\}-\tilde{y}_ч(x), \qquad (8)$$

где $\eta(x-a_0)=1, \quad \eta(x-a_\ell)=0;$

a_ℓ – координаты точек, в которых меняются жесткостные характеристики конструкции $(\ell=1,2,\dots,\alpha)$.

Частное решение $\tilde{y}_ч(x)$, входящее в формулу (8), примет вид

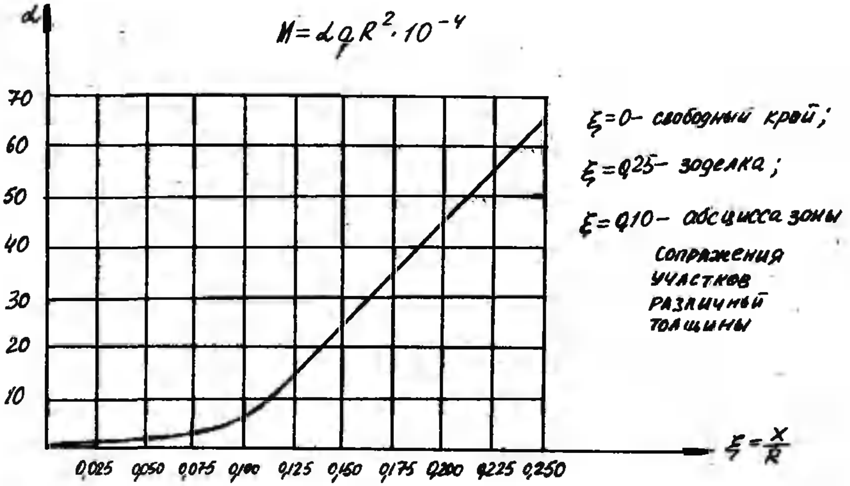
$$\tilde{y}_ч(x)=\sum_{\ell=1}^{\alpha-1}\tilde{y}_{ч\ell}(x), \qquad (9)$$

где $\tilde{y}_{ч\ell}(x)$ – частное решение, которое может быть вычислено по формуле (6) с заменой a на a_ℓ, κ_1 – на $\kappa_{\ell-1}$, κ_2 – на κ_ℓ.

Из формулы (8) видно, что неизвестными, входящими в эту формулу, являются произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4, которые могут быть определены из граничных условий задачи.

Полученные результаты обобщаются на любые составные конструкции типа стержней, пластин и оболочек. При этом количество произвольных постоянных интегрирования будет равняться порядку дифференциальных уравнений, соответствующих рассматриваемому типу конструкций, и они также определятся из граничных условий задачи.

На фиг. I приведены результаты расчета изгибающего момента M для составной цилиндрической оболочки, левый край которой свободен, а правый – защемлен. Оболочка состоит из двух участков с различной толщиной h_1 и h_2 и имеет одинаковые радиусы кривизны R и цилиндрические жесткости D. При этом длины участков оболочки – $\ell_1 = 0{,}IR$ и $\ell_2 = 0{,}I5R$. Величины – $\frac{R}{h_1} = 87$ и $\frac{R}{h_2} = 60{,}5$, а длины зон краевого эффекта – $\ell_{1эф} = 0{,}27R$ и $\ell_{2эф} = 0{,}32R$.



Фиг. I

Расчеты производились в безразмерной системе координат $\xi=\frac{x}{R}$. В этом случае дифференциальное уравнение (I) преобразуется к виду

$$\frac{d^4y}{d\xi^4}+4\kappa_i^{04}y=\frac{qR^4}{D_i} ,$$

где

$$4\kappa_i^{04}=12(1-\mu^2)\frac{R^2}{h^2} .$$

Поэтому κ_1^0 = I2 и κ_2^0 = I0, а частные решения

$$Z_q(\xi)=\frac{qR^4}{4\kappa_1^{04}\cdot D} , \qquad V_q(\xi)=\frac{qR^4}{4\kappa_2^{04}\cdot D} .$$

Величины произвольных постоянных: $C_1 = 0{,}03746 \cdot 10^{-4}\frac{qR^4}{4D}$, $C_2 = C_4 = 0{,}0400 \cdot 10^{-4}\frac{qR^4}{4D}$, $C_3 = -0{,}0425 \cdot 10^{-4}\frac{qR^4}{4D}$.

Из фиг. I видно, что рассматриваемая оболочка является короткой и в ней не проявляется волнообразный характер краевого эффекта.

Литература

I. Снитко А.Н., Соколов Е.В. Методы нахождения фундаментальных решений для дифференциальных уравнений теории оболочек вращения. В сб. "Сопротивление материалов и теория сооружений", вып. 44, Киев, "Будивельник", 1984, с. 47-5I.

The calculation of composite structures by the generalised functions

G.Aryesov, A.Snitko, E.Sokolov

Summary

This paper presents a new method of building up the solution for composite structures. The general solution, which has been obtained by the given method, contains in itself general solutions for all sections of the composite structure. The solutions in question are connected among themselves by the unitary functions. Herewith the general solution for each section contains one and the same integration constants. The conditions of correlations of adjacent sections are provided due to the introdustion of the special particular solution of the unhomogeneous differential equation, the right part of which contains delta-function and its derivatives of (n-1) order including, where n is the order of the differential equation. The coefficients of delta-functions and its derivatives have been chosen according to the definite rule. Such an approach enables considerable reduction of calculations, since it the integration constants n that should be defined, whereas in case of ordinary methods the common number of constants equals n.N. where N is the numberof sections of the composite structure. The numerical example is given.

О РАСШИРЕНИИ МЕТОДА УРАВНЕНИЯ ВИРТУАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ

Г.Гольст, О.Сильде
Таллинский политехнический институт

При решении задач механики по методу уравнения виртуальной мощности (УВМ) в первую очередь определяются независимые параметры скорости v^q , где $q = 1, 2, \ldots, s$, а s - число степеней свободы механической системы.

С помощью их выражается вектор скорости i-той точки системы

$$\bar{v}_i = v^0 \bar{u}_{i0} + v^q \bar{u}_{iq} = v^j \bar{u}_{ij} \quad (j=0,1,\ldots,s) \; ; \qquad (1)$$

здесь v^0 - заданная функция времени для нестационарных систем.

Затем составляется уравнение мощности

$$\Sigma m_i \bar{a}_i \cdot \bar{v}_i = \Sigma \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i \quad , \qquad (2)$$

где m_i - масса, $\bar{F}_i$ - равнодействующая всех сил i-той точки. Производится замена вектора скорости $\bar{v}_i$ в (2) на возможную скорость

$$\{\bar{v}_i\} = v^0 \bar{u}_{i0} + \{v^q\} \bar{u}_{iq} = \{v^j\} \bar{u}_{iq}$$

или на виртуальную скорость

$$\{\bar{v}_i\}^* = \{\bar{v}_i\} - \bar{v}_i = \{v^q\}^* \bar{u}_{iq} \; ,$$

где $\{v^q\}$ и $\{v^q\}^*$ являются произвольными числами, а $\{v^0\} = v^0$, $\{v^0\}^* = 0$.

Полученные уравнения позволяют найти s уравнений для неизвестных параметров скорости v^q . Подробнее см. [1] и [2] .

В таком виде УВМ имеет законченный вид и может быть использовано для решения большого числа задач механики.

1. Будем рассматривать параметры скорости $\{v^q\}$ и $\{v^q\}^*$ как функции времени, тогда

$$\{\vec{v}_i\} = \{\vec{v}_i\}(t) \quad \text{и} \quad \{\vec{v}_i\}^* = \{\vec{v}_i\}^*(t) \ .$$

Тем самым каждому моменту времени приписывается одна возможная или виртуальная скорость. Отметим, что здесь не возникает сужение общности, так как сами функции сохраняются совершенно произвольными. К ним предъявляется только требование дифференцируемости до определенного порядка.

Для каждого момента времени действительной скорости $\vec{v}_i$ соответствует некоторая возможная $\{\vec{v}_i\}$ и виртуальная $\{\vec{v}_i\}^*$, связанные между собой выражением

$$\{\vec{v}_i\}(t) = \{\vec{v}_i\}^*(t) + \vec{v}_i(t) \ . \qquad (3)$$

В дальнейшем изложении будем отдавать предпочтение виртуальной скорости $\{\vec{v}_i\}^*$, так как в механике играют важную роль системы с идеальными связями, в которых виртуальная мощность реакций связей равна нулю. Кроме того, виртуальным скоростям можно предписывать более четкие условия, как будет видно в дальнейшем.

2. Рассмотрим некоторые частные случаи возможной и виртуальной скорости как функций времени.

I) Пусть $\{v^q\}^* = u^q = const$, тогда

$$\{\vec{v}_i\}^*_u = u^q \vec{u}_{iq} \ ; \ \{\vec{v}_i\}^{*\cdot}_u = u^q \dot{\vec{u}}_{iq} \ ; \dots ; \ \{\vec{v}_i\}^{*(n)}_u = u^q \overset{(n)}{\vec{u}}_{iq} \ ,$$

где (n) означает n-кратное дифференцирование. Аналогичные выражения для возможной скорости $\{\vec{v}_i\}$ можно получить из равенства (3).

2) Пусть $\{\vec{v}\}^*_p$ обладает таким свойством, что для двух моментов времени $t = t_1$ и $t = t_2$ виртуальная скорость равна нулю

$$\{\vec{v}_i\}^*_p(t_1) = \{\vec{v}_i\}^*_p(t_2) = 0$$

и

$$\{\vec{v}_i\}^{*\cdot}_p(t_1) = \{\vec{v}_i\}^{*\cdot}_p(t_2) = 0, \dots , \{\vec{v}_i\}^{*(p-1)}(t_1) = \{\vec{v}_i\}^{*(p-1)}(t_2) = 0 \ ,$$

но $\{\vec{v}_i\}^{*(p)} \neq 0$.

Примером такой функции может служить

$$\{\vec{\vartheta}_i\}^*_p = [(t-t_1)(t-t_2)]^p\{\vec{\vartheta}_i\}^*_w \ . \qquad (4)$$

3) Пусть $\{\vec{\vartheta}_i\}^* = \{\vartheta^q\}^*\vec{u}_{iq}$ такого свойства, что при $t = \tau$, где τ – любой момент времени и $p = 0, I, \ldots, n - I$, $\{\vartheta^q\}^{*(p)}(\tau) = 0$; тогда

$$\{\vec{\vartheta}_i\}^{*(n)}(\tau) = \{\vartheta^q\}^{*(n)}(\tau)\vec{u}_{iq} \ . \qquad (5)$$

Пример такой функции:

$$\{\vec{\vartheta}_i\}^* = (t-\tau)^n\{\vec{\vartheta}_i\}^*_w \ .$$

Коэффициенты $\{\vartheta^q\}^{*(n)}$ в равенстве (5) можно считать произвольными числами, и поэтому для момента $t = \tau$ в выражении УВМ можно заменить $\{\vec{\vartheta}_i\}^*$ на вектор $\{\vec{\vartheta}_i\}^{*(n)}$.

Уравнения, полученные для $t = \tau$, остаются верными и для других значений t, так как τ является произвольным моментом времени. Отметим, что условия, принятые в пунктах I), 2) и 3) для виртуальной скорости нельзя перенести на возможную скорость вследствие присутствия члена $\vartheta^0\vec{u}_{i0}$. Это возможно только в случае стационарной системы, где $\vartheta^0 = 0$.

3. Аналогично возможной и виртуальной скоростям $\{\vec{\vartheta}_i\}$ и $\{\vec{\vartheta}_i\}^*$ можно выразить возможное и виртуальное ускорение и т.д., которые будем обозначать:

$$\{\dot{\vec{\vartheta}}_i\}^* = \{\vec{a}_i\}^* \ ; \ \{\ddot{\vec{\vartheta}}_i\}^* \ ; \ldots ; \ \{\overset{(n)}{\vec{\vartheta}}_i\}^* \ .$$

Они естественно определяются так:

$$\{\dot{\vec{\vartheta}}_i\}^* = \{\vec{\vartheta}_i\}^{*\cdot} \ ; \quad \{\ddot{\vec{\vartheta}}_i\}^* = \{\vec{\vartheta}_i\}^{*\cdot\cdot} \ ; \ldots ; \ \{\overset{(p)}{\vec{\vartheta}}_i\}^* = \{\vec{\vartheta}_i\}^{*(p)} \ .$$

Определим возможную и виртуальную производные от заданной функции

$$f = f(q^k, \vartheta^q, \ldots, \overset{(n)}{\vartheta}{}^q, t) \ ,$$

где q^k есть обобщенные координаты:

$$\{\dot{f}\} = \frac{\partial f}{\partial q^k}\{\dot{q}^k\} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta^q}\{\dot{\vartheta}^q\} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \overset{(n)}{\vartheta}{}^q}\{\overset{(n+1)}{\vartheta}{}^q\} + \frac{\partial f}{\partial t} \ ,$$

$$\{\dot f\}^* = \{\dot f\} - \dot f = \frac{\partial f}{\partial q^k}\{\dot q^k\}^* + \frac{\partial f}{\partial v^q}\{\dot v^q\}^* + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \overset{(n)}{v}{}^q}\{\overset{(n+1)}{v}{}^q\}^* . \qquad (6)$$

Вычислим согласно выражению (6) виртуальную производную от скорости (см. (I))

$$\{\dot{\vec v}_i\}^* = \frac{\partial \dot{\vec v}_i}{\partial \dot v^q}\{\dot v^q\}^* + v^j \frac{\partial \vec u_{ij}}{\partial x^q}\{v^q\}^* = \{\dot v^q\}^* \vec u_{iq} + \frac{\partial \vec u_{ij}}{\partial x^q} v^j \{v^q\}^* . \qquad (7)$$

С другой стороны,

$$\{\vec v_i\}^{*\cdot} = \{v^q\}^{*\cdot} \vec u_{iq} + v^j \{v^q\}^* \frac{\partial \vec u_{iq}}{\partial x^j} , \qquad (8)$$

где x^j есть обобщенная координата или квазикоордината

$$\dot x^j = v^j ; \qquad \frac{\partial}{\partial x^0} v^0 = \frac{\partial}{\partial t} .$$

Из сравнения выражений (7) и (8) следует, что если все v^j являются обобщенными скоростями, т.е. $v^j = \dot q^j$, то

$$\frac{\partial \vec u_{ij}}{\partial q^q} = \frac{\partial \vec u_{iq}}{\partial q^j} \qquad \text{и} \qquad \{\dot v^q\}^* = \{v^q\}^{*\cdot} .$$

Для нахождения общей связи между $\{\dot v^q\}^*$ и $\{v^q\}^{*\cdot}$ умножим (7) и (8) скалярно на $m_i \vec u_{i\varkappa}$, где $\varkappa$ = 0,I,...,s, и суммируем по индексу i :

$$\sum \{\dot v^q\}^* \vec u_{iq} \cdot m_i \vec u_{i\varkappa} + \sum v^j \{v^q\}^* \frac{\partial \vec u_{ij}}{\partial x^q} m_i \vec u_{i\varkappa} =$$

$$= \sum \{v^q\}^{*\cdot} \vec u_{iq} \cdot m_i \vec u_{i\varkappa} + \sum v^j \{v^q\}^* \frac{\partial \vec u_{iq}}{\partial x^j} \cdot m_i \vec u_{i\varkappa} .$$

Тогда получим

$$\{\dot v^q\}^* g_{q\varkappa} + v^j \{v^q\}^* \Gamma_{qj\cdot\varkappa} = \{v^q\}^{*\cdot} g_{q\varkappa} + v^j \{v^q\}^* \Gamma_{jq\cdot\varkappa} . \qquad (9)$$

Умножая обе стороны (9) на $g^{l\varkappa}$ и суммируя, имеем

$$\{\dot v^l\}^* + v^j \{v^q\}^* \Gamma^l_{qj} = \{v^l\}^{*\cdot} + v^j \{v^q\}^* \Gamma^l_{jq} .$$

Отсюда получим

$$\{\dot{v}^l\}^* = \{v^l\}^{*\cdot} + v^j\{v^g\}^*\gamma^l_{jg} ,$$

где
$$\gamma^l_{jg} = \Gamma^l_{jg} - \Gamma^l_{gj} , \quad l = 1, 2, \ldots, s .$$

Если все скорости v^g обобщенные, то $\gamma^{\dot{v}}_{jg} = 0$
и
$$\{\overset{(n)}{v}{}^g\}^* = \{v^g\}^{*(n)} .$$

4. Применим УВМ для вывода интегральных принципов механики. Пусть дана функция

$$f_1 = \Sigma m_i \vec{v}_i \cdot \{\vec{v}_i\}^* , \quad \text{где} \quad \{\vec{v}_i\}^*(t_1) = \{\vec{v}_i\}^*(t_2) = 0 \qquad (\text{см. } (4)). \quad (10)$$

Тогда
$$\dot{f}_1 = \Sigma m_i \cdot \vec{v}_i \cdot \{\dot{\vec{v}}_i\}^* + \Sigma m_i \vec{a}_i \cdot \{\vec{v}_i\}^* .$$

Учтя (7) , получим

$$\Sigma m_i \vec{v}_i \cdot \{\dot{\vec{v}}_i\}^* = \{\dot{T}\}^* ,$$

где кинетическая энергия системы

$$T = \Sigma m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} g_{kl} v^k v^l ; \qquad g_{kl} = \sum_i m_i \vec{u}_{ik} \cdot \vec{u}_{il} .$$

Учтем, что

$$\Sigma m_i \vec{a}_i \cdot \{\vec{v}_i\}^* = \Sigma \vec{F}_i \cdot \{\vec{v}_i\}^* = \{N\}^*$$

есть виртуальная мощность системы.
Тогда имеем

$$\dot{f}_1 = \{\dot{T}\}^* + \{N\}^* . \qquad (11)$$

Интегрируя (11) в пределах от t_1 до t_2 , получим

$$\int_{t_1}^{t_2} [\{\dot{T}\}^* + \{N\}^*] dt = 0 . \qquad (12)$$

Выражение (12) является соответствующим интегральным принципом.

Первое слагаемое в (12) можно преобразовать путем интегрирования по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2}\{\dot{T}\}^* dt = \int_{t_1}^{t_2}\Sigma m_i\vec{v}_i\cdot\{\dot{\vec{v}}_i\}^* dt = f_1\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\Sigma m_i\vec{a}_i\cdot\{\vec{v}_i\}^* dt .$$

Учтя, что $\{\vec{v}_i\}^* = \{v^q\}^*\vec{u}_{iq}$, получим из (I2)

$$\int_{t_1}^{t_2}[-\Sigma m_i\vec{a}_i\cdot\vec{u}_{iq} + \Sigma\vec{F}^i\cdot\vec{u}_{iq}]\{v^q\}^* dt = 0 . \qquad (I3)$$

Вследствие произвольности $\{v^q\}^*$ при условии $\{v^q\}^*(t_1) = \{v^q\}^*(t_2) = 0$ и произвольности моментов времени t_1 и t_2 следует из (I3) , что

$$\Sigma(m_i\vec{a}_i - \vec{F}_i)\cdot\vec{u}_{iq} = 0 .$$

Это равенство может быть записано в виде

$$\Sigma(m_i\vec{a}_i - \vec{F}_i)\cdot\vec{u}_{iq}\{v^q\}^* = 0 .$$

Если в (I0) вместо $\{\vec{v}_i\}^*$ ввести возможную скорость $\{\vec{v}_i\}$, то нельзя всегда положить в основу условие

$$\{\vec{v}_i\}(t_1) = \{\vec{v}_i\}(t_2) = 0 \qquad (I4)$$

вследствие наличия члена $v^0\vec{u}_{i0}$.

Для систем со стационарными связями при $v^0 = 0$ имеем

$$\int_{t_1}^{t_2}[\{\dot{T}\} + \{N\}]dt = 0 .$$

В общем случае равенства (I4) следует заменить условиями

$$\{\vec{v}_i\}(t_1) = \vec{v}_i(t_1) \qquad \text{и} \qquad \{\vec{v}_i\}(t_2) = \vec{v}_i(t_2) ,$$

тогда

$$\int_{t_1}^{t_2}[\{\dot{T}\} + \{N\}]dt = 2T\Big|_{t_1}^{t_2} . \qquad (I5)$$

Интегрируя первое слагаемое в выражении (I5), получим

$$\int_{t_1}^{t_2}[\Sigma(m_i\vec{a}_i - \vec{F}_i)\cdot\vec{u}_{ij}\{v^j\}]dt = 0 .$$

5. Расширение метода УВМ можно применить к учету связей общего вида.

Рассмотрим механическую систему, для которой введены независимые параметры v^g и учтено уравнение виртуальной мощности

$$\Sigma(m_i\bar{a}_i - \bar{F}_i)\cdot\{\bar{v}_i\}^* = 0 \ . \qquad (I6)$$

Пусть на систему наложены связи общего вида

$$f^\alpha(q^\nu, v^g, \dot{v}^g, \ldots, \overset{(n_\alpha)}{v}{}^g) = 0 \ , \qquad (I7)$$

где $\alpha = 1,2,\ldots,l$; $l < s$.

Найдем виртуальную производную каждой связи

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^\nu}\{\dot{q}^\nu\}^* + \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^g}\{\dot{v}^g\} + \ldots + \frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(n_\alpha)}{v}{}^g}\{\overset{(n_\alpha+1)}{v}{}^g\}^* = 0 \ . \qquad (I8)$$

Допустим, что для некоторого момента времени $t = \tau$

$$\{\dot{q}^\nu\}^* = \{\dot{v}^g\} = \ldots = \{\overset{(n_\alpha)}{v}{}^g\}^* = 0 \ ,$$

а среди $(n_\alpha + 1)$ пусть самый большой будет n , $\{\overset{(n)}{v}{}^g\}^* \neq 0$. Тогда в уравнении (I6) можно заменить $\{\bar{v}_i\}^*$ на

$$\{\overset{(n)}{\bar{v}}_i\}^* = \{\overset{(n)}{v}{}^g\}^* \bar{u}_{ig} \ ,$$

а в (I8) все $\{\overset{(n_\alpha+1)}{v}{}^g\}^*$ на $\{\overset{(n)}{v}{}^g\}^*$, так как дифференцированием можно довести все уравнения (I7) до порядка $(n - 1)$.

Тогда получим систему уравнений

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(n_\alpha)}{v}{}^g}\{\overset{(n)}{v}{}^g\}^* = 0 \ .$$

В дальнейшем можно пользоваться уже известными методами.

6. Метод УВМ в первоначальном виде, как он дан в [I] и [2], оказался полезным при решении задач механики.

Расширение в этой статье метода УВМ, сущность которого заключается в рассматривании $\{\bar{v}_i{}^g\}$ и $\{\bar{v}_i{}^g\}^*$ как функций времени, приводит к новым возможностям метода.

Авторы до сих пор не считали нужным исследовать это расширение, так как в своей существенной части оно заменяется уже хорошо разработанными методами вариационного исчисления.

Соответствие достигается заменой символа $\{\cdot\}^*$ символом вариации δ

$$\{\cdot\}^* \to \delta \ ; \qquad \{v^g\}^* = \{\dot{x}^g\}^* \to \delta x^g \ .$$

Литература

I. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О. Основные вопросы аналитической механики. Таллин, "Валгус", 1979.

2. Сильде О., Рельвик Х. Известия Академии наук Эстонской ССР. Том. 32. Физика, математика № 4, 398-409, 1983.

Über die Erweiterung der Methode der Gleichung der möglichen (virtuellen) Leistung

G.Golst, O.Silde

Zusammenfassung

Bei dieser Erweiterung werden die Parameter der möglichen (virtuellen) Geechwindigreit als Funktionen der Zeit betrachtet. Als Beispiele werden ein Integralprinzip und die Lösung allgemeiner Aufgabe mit beliebigen Bedingungsgleichungen gegeben. Zum Abschluss wird die Behandlung auf die Variationsrechnung zurückgeführt.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 772.
ДИНАМИКА И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИИ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском и немецком языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор И. Вайникко.
Корректоры Г. Оленев, И. Андерсон.
Подписано к печати 20.01.1987.
МВ 01509.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 10,11. Печатных листов 11,0.
Тираж 500.
Заказ № 1160.
Цена 1 руб. 50 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.
2 - 2