

**ПЛОСКАЯ**  
**ТРИГОНОМЕТРІЯ**

для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ.

Составилъ

**К. ГЕХЕЛЬ,**

Докторъ математики въ Дерптъ.

~~~~~  
2. изданіе.  
~~~~~

**Дерптъ и Рига.**

Изданіе типографіи Шнакенбурга.

1880.

# ПЛОСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ

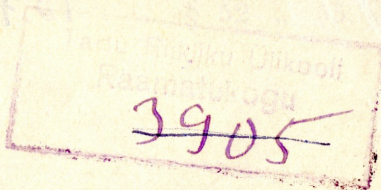
для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ.

Составилъ

**К. ГЕХЕЛЬ,**

Докторъ математики въ Дерптъ.

~~~~~  
2. изданіе.  
~~~~~



**Дерптъ и Рига.**

Изданіе типографіи Шнакенбурга.

1880.

РАБОТА

ТИПОГРАФИЯ

ВЪЗНЕСЕНА НА ПЕЧАТЪНЪ И ИЗДАВАНА ОТЪ

Дозволено цензурою Дерптъ, 12. Апрель 1880 г.  
Цензоръ П. ф. Руммельъ.

И. ЛЕХЕРЪ

Докторъ и профессоръ въ Дерптѣ

Est A

Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu

15701

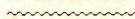
Дерптъ и Рига.

Издана въ типографіи Шварценбургъ.

1880

## Оглавление.

Введение . . . . .	§ 1.
I. Опредѣленіе тригон. величинъ . . . . .	§ 2 до 8.
II. Выводъ тригон. формуль . . . . .	§ 9 „ 13.
III. Вычисленіе тригон. величинъ . . . . .	§ 14 „ 17.
IV. Объ употребленіи тригон. таблицъ . . . . .	§ 18 „ 24.
V. Тригон. величины угловъ, большихъ 180° и отрицательныхъ . . . . .	§ 25 „ 28.
VI. Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольни- ковъ . . . . .	§ 29 „ 34.
VII. Рѣшеніе равнобедренныхъ треугольни- ковъ . . . . .	§ 35 „ 40.
VIII. Рѣшеніе косоугольныхъ треугольни- ковъ . . . . .	§ 41 „ 51.
IX. Задачи . . . . .	§ 52 „ 55.



## В в е д е н и е.

§ 1. Если дано столько частей треугольника, сколько нужно для его опредѣленія, то остальные части могутъ быть найдены двоякимъ способомъ: построениемъ или вычислениемъ. Если части, нужныя для опредѣленія тре—ка, даны на чертежѣ, то искомыя опредѣляются съ помощію построения. Способы такого рѣшенія задачи даетъ Геометрія. Если же данныя стороны выражены числомъ въ какихъ либо опредѣленныхъ единицахъ длины, а углы даны въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, то искомыя части могутъ быть вычислены, т. е. выражены въ соотвѣтствующихъ имъ единицахъ.

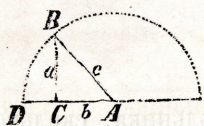
Наука, которая учитъ вычислять по достаточному количеству данныхъ частей тре—ка остальные его части, называется плоскою тригонометріею.

Такъ какъ въ число данныхъ и искомыхъ частей тре—ка входятъ стороны и углы, — величины разнородныя, то однѣ изъ нихъ не могутъ быть вычислены непосредственно изъ другихъ. Для устраненія этого неудобства въ Тригонометріи вмѣсто угловъ вводятъ въ вычисленіе линий, величина и направленіе которыхъ находятся въ тѣсной связи съ величиною соотвѣтствующаго имъ угла.

Посредствомъ этихъ то вспомогательныхъ линий легко выражается зависимость между сторонами и углами треугольника.

# I. Опредѣленіе тригонометрическихъ величинъ.

§ 2. Если будемъ описывать произвольнымъ радіусомъ AD полуокружность, то при движеніи радіусъ будетъ образовывать со своимъ первоначальнымъ положеніемъ всѣ возможные углы, какіе только могутъ встрѣчаться въ тре—кѣ. Разсмотримъ сначала какой нибудь острый уголъ BAD, который для краткости будемъ обозначать буквою A.



Опустимъ изъ конца (B) вращающагося радіуса на AD перпендикуляръ BC и обозначимъ черезъ a, b, c числовыя величины сторонъ тре—ка ABC, тогда отношеніе  $\frac{a}{c}$  называется синусомъ угла A и пишется

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Отношеніе  $\frac{b}{c}$  называется косинусомъ угла A и пишется

$$\cos A = \frac{b}{c}.$$

Отношеніе  $\frac{\sin A}{\cos A}$ , т. е.  $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$  называется тангенсомъ угла A и обозначается

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b}.$$

Отношеніе  $\frac{\cos A}{\sin A}$ , т. е.  $\frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a}$  называется котангенсомъ угла A и обозначается

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a}.$$

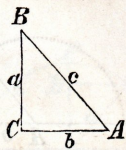
Эти четыре отношенія, которыя суть числа отвлеченныя, называются тригонометрическими величинами угла A или соответствующей ему дуги BD.

Въ частномъ случаѣ, когда радіусъ  $c = 1$ , числовая величина синуса A, равнаго  $\frac{a}{c}$ , совпадаетъ съ числовою величиною перпендикуляра BC, такъ что  $\sin A = a$ . Въ томъ же случаѣ  $\cos A = b$ .

§ 3. Изъ опредѣленія тригонометрическихъ величинъ слѣдуетъ, что въ прямоугольномъ тре—кѣ

1) синусъ острого угла равняется противолежащему катету, раздѣленному на гипотенузу,

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c};$$



2) косинусъ острого угла равняется прилежащему катету, раздѣленному на гипотенузу,

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c};$$

3) тангенсъ острого угла равняется противолежащему катету, раздѣленному на прилежащій катеть,

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a};$$

4) котангенсъ острого угла равняется прилежащему катету, раздѣленному на противолежащій катеть,

$$\operatorname{cotg} A = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{cotg} B = \frac{a}{b}.$$

§ 4. Такъ какъ въ прямоугольномъ тре—кѣ острые углы A и B служатъ взаимно дополненіемъ до прямого угла, то вмѣсто B можно взять  $90^\circ - A$ . По § 3 имѣемъ равенства

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \text{и} \quad \cos B = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c} \quad \text{и} \quad \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \operatorname{cotg} B = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a},$$

слѣдовательно

$$\sin A = \cos (90^\circ - A)$$

$$\cos A = \sin (90^\circ - A)$$

$$\operatorname{tang} A = \operatorname{cotg} (90^\circ - A)$$

$$\operatorname{cotg} A = \operatorname{tang} (90^\circ - A)$$

Такимъ образомъ синусъ, косинусъ, тангенсъ и котангенсъ острого угла соотвѣтственно равны косинусу, синусу, котангенсу и тангенсу угла дополняющаго этотъ острый до прямого.

§ 5. Разсмотримъ теперь тригонометрическія величины тупаго угла  $\text{BAD} = A$ .



Опустимъ изъ конца В вращающагося радіуса АВ перпендикуляръ ВС на первоначальное направленіе радіуса AD, тогда отръзокъ AC приметъ положеніе, противоположное тому, которое бы онъ имѣлъ, если бы уголъ BAD былъ острый. Такая противоположность направленія выражается въ Геометріи отрицательнымъ знакомъ, такъ что при числовой величинѣ  $b$  отръзка AC должно поставитьъ знакъ минусъ ( $-$ ). Соображаясь съ § 2 получимъ:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{-b}{c} = -\frac{b}{c}.$$

По предъидущему для остраго угла BAC

$$\sin \text{BAC} = \frac{a}{c}, \quad \cos \text{BAC} = \frac{b}{c}, \quad \text{слѣд.}$$

$$\sin A = \sin \text{BAC}, \quad \cos A = -\cos \text{BAC}.$$

Такъ какъ углы  $\text{BAD} = A$  и BAC служатъ взаимно дополненіемъ до  $180^\circ$ , то уголъ  $\text{BAC} = 180^\circ - A$ , слѣд.

$$\sin A = \sin (180^\circ - A)$$

$$\cos A = -\cos (180^\circ - A)$$

$$\text{tang } A = -\text{tang } (180^\circ - A)$$

$$\text{cotg } A = -\text{cotg } (180^\circ - A)$$

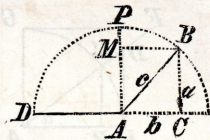
Два послѣднія уравненія слѣдуютъ непосредственно изъ двухъ первыхъ, такъ какъ тангенсъ всякаго угла равенъ частному отъ раздѣленія синуса этого угла на его косинусъ, а котангенсъ обратному частному.

Изъ предъидущихъ равенствъ слѣдуетъ, что тригон. величины смежныхъ угловъ, независимо отъ знака, равны между собою.

Косинусы, тангенсы и котангенсы двухъ смежныхъ угловъ отличаются знаками, а синусы совершенно равны, такъ что каждый синусъ можетъ принадлежать двумъ угламъ. По этой причинѣ опредѣленіе угла съ помощію одного только его синуса невозможно.

§ 6. Тригонометрическія величины тупаго угла могутъ быть выражены съ помощью тригонометрическихъ величинъ остраго еще и другимъ способомъ.

Проведемъ въ полуокружности, при центрѣ которой находится тупой уголъ  $\widehat{BAD} = A$ , линію  $BC \perp DC$ , радіусъ  $AP \perp AD$  и изъ точки  $B$  линію  $BM \perp AP$ . Тогда въ прямоугольникѣ  $ACBM$  линія  $AM = a$   $BM = b$ . Такъ какъ



$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos \widehat{BAM} = \frac{AM}{c} = \frac{a}{c},$$

$$\cos A = -\frac{b}{c}, \quad \sin \widehat{BAM} = \frac{BM}{c} = \frac{b}{c},$$

и уголъ  $\widehat{BAM} = A - 90$ , то

$$\begin{aligned} \sin A &= \cos (A - 90^\circ) \\ \cos A &= -\sin (A - 90^\circ) \\ \text{tang } A &= -\text{cotg } (A - 90^\circ) \\ \text{cotg } A &= -\text{tang } (A - 90^\circ) \end{aligned}$$

Такимъ образомъ синусъ тупаго угла равняется косинусу угла, который меньше его на  $90^\circ$ ; косинусъ тупаго угла равняется отрицательному синусу угла, на  $90^\circ$  меньшаго и т. д.

§ 7. Вообще синусъ и косинусъ можно опредѣлить такъ:

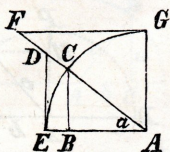
Синусъ угла или его дуги есть дробь, которой числитель есть перпендикуляръ, опущенный изъ одного конца дуги на диаметръ, проходящій черезъ другой конецъ, а знаменатель радіусъ дуги; косинусъ есть часть радіуса, заключающаяся между основаніемъ этого перпендикуляра и центромъ дуги, раздѣленная на весь радіусъ.

Между тригон. величинами употребляютъ иногда секансъ и косекансъ, величины обратныя косинусу и синусу, именно

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}, \quad \text{cosec } a = \frac{1}{\sin a};$$

но мы не будемъ разсматривать эти величины, какъ совершенно излишнія.

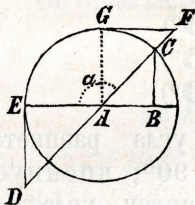
§ 8. Тригонометрическія величины могутъ быть представлѣны въ видѣ прямыхъ линій слѣдующимъ образомъ.



Опишемъ изъ вершины остраго угла  $\alpha$  произвольнымъ радіусомъ, который принимается за единицу мѣры, четверть окружности; проведемъ изъ оконечностей ея  $E$  и  $G$  касательныя до пересѣченія ихъ съ продолженной стороной  $AC$  угла  $\alpha$ , и опустимъ  $CB \perp AE$ , тогда  $\sin \alpha$  выразится линіею  $CB$ , а  $\cos \alpha$  линіею  $AB$ . Такъ какъ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{DE}{AE}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{AB}{CB} = \frac{FG}{AG}, \text{ и}$$

$$AE = AG = 1, \text{ то } \operatorname{tg} \alpha = DE, \quad \operatorname{cotg} \alpha = FG.$$



Если уголъ  $\angle CAE = \alpha$  тупой, то описавъ точно также изъ  $A$  радіусомъ, равнымъ единицѣ, окружность и возставивъ изъ  $A$  перпендикуляръ  $AG$  къ  $AE$ , проведемъ черезъ  $G$  и  $E$  касательныя до пересѣченія ихъ въ  $F$  и  $D$  съ продолженіемъ стороны  $AF$  и опустимъ  $CB \perp AB$ ; тогда  $\sin \alpha = CB$ ,  $\cos \alpha = AB$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = DE$ ,  $\operatorname{cotg} \alpha = FG$ . Что двѣ послѣднія линіи отрицательны, видно изъ ихъ направленія, противоположнаго тому, которое было бы въ остромъ углѣ.

## II. Выводъ

### тригонометрическихъ формулъ.

§ 9. Если одна изъ тригон. величинъ дана, то остальные три могутъ быть вычислены при помощи трехъ уравненій, которыя показываютъ взаимную связь тригон. величинъ. Два такія уравненія даны въ § 2

$$(1) \quad \mathbf{tang\ a = \frac{\sin\ a}{\cos\ a}}$$

$$(2) \quad \mathbf{cotg\ a = \frac{\cos\ a}{\sin\ a}}$$

Къ этимъ двумъ прибавимъ выраженіе

$$(3) \quad \mathbf{\sin^2 a + \cos^2 a = 1,}$$

которое можно вывести слѣдующимъ образомъ. Если изъ какой либо точки В стороны острого или тупаго угла ВАС (=а) опустимъ перпендикуляръ ВD на другую сторону или на ея продолженіе, то  $BD^2 + AD^2 = AB^2$ . Раздѣлимъ обѣ части этого уравненія на  $AB^2$ , тогда

$$\frac{BD^2}{AB^2} + \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} \text{ т. е. } \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Нужно замѣтить, что хотя косинусъ тупаго угла равенъ  $-\frac{AD}{AB}$ , но квадратъ его также какъ и въ остромъ углѣ будетъ величина положительная.

Съ помощію этихъ трехъ уравненій можетъ быть рѣшена слѣдующая задача.

§ 10. Дана одна изъ тригон. величинъ какого нибудь угла, выразить посредствомъ ея всѣ остальные тригон. величины того же угла.

### 1. Данъ $\sin a$ .

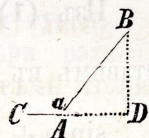
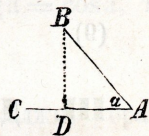
Изъ уравненія (3) слѣдуетъ

$$(4) \quad \mathbf{\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}}$$

Вставивъ это выраженіе въ урав. (1) и (2), получимъ

$$(5) \quad \mathbf{tang\ a = \frac{\sin\ a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}}$$

$$(6) \quad \mathbf{cotg\ a = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\sin a}}$$



## II. Данъ $\cos a$ .

Изъ уравненія (3) слѣдуетъ

$$(7) \quad \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

Вставивъ это выраженіе въ урав. (1) и (2), получимъ

$$(8) \quad \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a}$$

$$(9) \quad \operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}}$$

## III. Данъ $\operatorname{tg} a$ .

Изъ (1) слѣдуетъ  $\cos^2 a = \frac{\sin^2 a}{\operatorname{tg}^2 a}$ . Если это выраженіе

вставимъ въ (3), то получимъ

$$\sin^2 a + \frac{\sin^2 a}{\operatorname{tg}^2 a} = 1 \text{ или } \sin^2 a (1 + \operatorname{tg}^2 a) = \operatorname{tg}^2 a, \text{ слѣд.}$$

$$(10) \quad \sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

Изъ (10) слѣдуетъ  $\frac{\sin a}{\operatorname{tg} a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$ , а изъ (1)

$$\cos a = \frac{\sin a}{\operatorname{tg} a}, \text{ слѣд.}$$

$$(11) \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} \text{ или } \frac{1}{\cos a} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

Такъ какъ  $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cotg} a = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = 1$ , то,

$$(12) \quad \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

## IV. Данъ $\operatorname{cotg} a$ .

Изъ (12) слѣдуетъ, что

$$(13) \quad \operatorname{tg} a = \frac{1}{\operatorname{cotg} a}$$

Если обѣ части урав. (3) раздѣлимъ на  $\sin^2 a$ , то получимъ

$$1 + \cotg^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}, \quad \text{слѣд.}$$

$$(14) \quad \sin a = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 a}}$$

Умноживъ обѣ части этого уравненія на  $\cotg a$ , получимъ

$$\sin a \cdot \cotg a = \frac{\cotg a}{\sqrt{1 + \cotg^2 a}}$$

и такъ какъ изъ ур. (2) слѣдуетъ, что  $\sin a \cotg a = \cos a$ , то

$$(15) \quad \cos a = \frac{\cotg a}{\sqrt{1 + \cotg^2 a}}$$

Въ уравненіяхъ (4), (5), (6), (11) должно брать передъ радикаломъ положительный или отрицательный знакъ, смотря по тому, будетъ ли уголъ  $a$  острый или тупой.

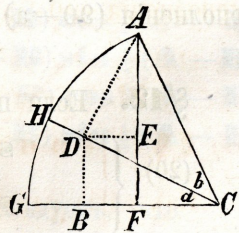
Въ уравненіяхъ (7) и (14) слѣдуетъ при радикалѣ всегда брать знакъ  $+$ , такъ какъ синусы всѣхъ угловъ, меньшихъ  $180^\circ$ , положительны.

Такъ какъ въ ур. (10)  $\tga$  положителенъ для  $a < 90^\circ$  и отрицателенъ для  $a > 90^\circ$ , а  $\sin a$  для всѣхъ угловъ меньшихъ  $180^\circ$  положителенъ, то для знаменателя слѣдуетъ выбирать такой знакъ, чтобы во всякомъ случаѣ выраженіе  $\sin a$  было положительно.

Въ ур. (8), (9), (15) имѣютъ значеніе только положительные знаки при радикалахъ, такъ какъ  $\tga$ ,  $\cotg a$ ,  $\cos a$  при одной и тойже величинѣ угла  $a$  имѣютъ одинакіе знаки.

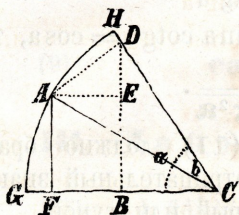
**§ 11.** По даннымъ Sinus и Cosinus двухъ угловъ  $a$  и  $b$  найти Sinus и Cosinus ихъ сумм ( $a+b$ ) или разности ( $a-b$ ).

Положимъ, что сумма угловъ  $a$  и  $b$ , приложенныхъ одинъ къ другому, будетъ менѣе  $90^\circ$ . Опишемъ изъ ихъ общей вершины  $C$  радиусомъ, принятымъ за единицу мѣры, дугу; проведемъ изъ  $A$  линію  $AD \perp CH$  и  $AF \perp CG$ , потомъ изъ  $D$  линію  $DB \perp CG$  и  $DE \perp AF$ , тогда  $\triangle AED \sim \triangle CBD$ , слѣд.  $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BCD = a$ . Изъ чертежа видно, что



$$\begin{aligned} AF &= DB + AE \quad \text{или} \\ \sin(a+b) &= CD \cdot \sin a + AD \cdot \cos a, \quad \text{т. е.} \\ (16) \quad \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Далѣе} \quad CF &= CB - DE \quad \text{или} \\ \cos(a+b) &= CD \cdot \cos a - AD \cdot \sin a, \quad \text{т. е.} \\ (17) \quad \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b. \end{aligned}$$



Положимъ, что уголь  $GCH = a$  меньше  $90^\circ$ , и часть его  $ACH = b$ , слѣд.  $ACG = a - b$ . Опишемъ изъ  $C$  радиусомъ, равнымъ единицѣ, дугу, проведемъ изъ  $A$  линію  $AF \perp CG$  и  $AD \perp CH$ ,  $DB \perp CG$  и  $AE \perp DB$ , тогда  $\triangle ADE \sim DCB$ , слѣд.  $\sphericalangle ADE = DCB = a$ . Изъ чертежа видно, что

$$\begin{aligned} AF &= DB - DE \quad \text{или} \\ \sin(a-b) &= CD \cdot \sin a - AD \cdot \cos a, \quad \text{т. е.} \\ (18) \quad \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Далѣе} \quad CF &= CB + AE \quad \text{или} \\ \cos(a-b) &= CD \cdot \cos a + AD \cdot \sin a, \quad \text{т. е.} \\ (19) \quad \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Хотя Формулы (16), (17), (18), (19) выведены подъ условіемъ, что  $a+b < 90^\circ$ , и  $a < 90^\circ$ , но онѣ приложимы и къ тому случаю, когда  $a+b$  и  $a$  тупые углы. Стоитъ только соответственно измѣнить фигуру и повторить прежнее построеніе, чтобы убѣдиться въ справедливости сказаннаго. Общность этихъ формулъ можетъ быть также доказана съ помощію уравненій § 4 и § 5, подставляя вмѣсто  $a$  и  $b$  дополненія  $(90-a)$  и  $(90-b)$ , или  $(180^\circ-a)$  и  $(180^\circ-b)$ .

§ 12. Если положимъ въ урав. (16)  $a = b$ , то

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \quad \text{или} \\ \sin a &= 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \end{aligned} \right.$$

Въ второй формулѣ углы  $a$  и  $\frac{1}{2}a$  находятся въ томъ же отношеніи, какъ углы  $2a$  и  $a$  въ первой формулѣ.

Положивъ въ урав. (17)  $a = b$ , получимъ

$$(21) \begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a & \text{или} \\ \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \end{cases}$$

Если последнее уравненіе прибавимъ къ урав. (3)  $1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}$  и отнимемъ отъ тогоже уравненія, то получимъ два слѣдующія:

$$(22) \quad 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$(23) \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

Изъ этихъ двухъ урав. выводятся формулы:

$$(24) \quad \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \quad \text{или} \quad \cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

$$(25) \quad \sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \quad \text{или} \quad \sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

Сложеніе и вычитаніе уравненій (16) и (18) даетъ:

$$(26) \quad \sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$$

$$(27) \quad \sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b$$

Черезъ сложеніе и вычитаніе урав. (17) и (19) получимъ:

$$(28) \quad \cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos a \cos b$$

$$(29) \quad \cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$$

Положивъ въ четырехъ послѣднихъ уравненіяхъ  $a + b = A$  и  $a - b = B$ , слѣд.  $a = \frac{1}{2}(A + B)$ ,  $b = \frac{1}{2}(A - B)$ , получимъ:

$$(30) \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$(31) \quad \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

$$(32) \quad \cos B + \cos A = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$(33) \quad \cos B - \cos A = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

§ 13. Изъ урав. (1), (16), (17) слѣдуетъ, что

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на  $\cos a \cos b$ , получимъ

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}}, \quad \text{т.е.}$$

$$(34) \quad \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Положивъ здѣсь  $a=b$ , получимъ

$$(35) \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a}$$

Точно такимъ же образомъ

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b},$$

и раздѣливъ числителя и знаменателя на  $\cos a \cos b$ , получимъ

$$(36) \quad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Такимъ же способомъ можно найти

$$(37) \quad \operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}$$

$$(38) \quad \operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2 \operatorname{cotg} a}$$

$$(39) \quad \operatorname{cotg}(a-b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a}$$

Въ § 16, 1 будетъ доказано, что  $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1$ . Если вставимъ въ урав. (34), (36), (37), (39)  $a=45^\circ$ , то получимъ

$$(40) \quad \operatorname{tg}(45^\circ + b) = \frac{1 + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} b}$$

$$(41) \quad \operatorname{tg}(45^\circ - b) = \frac{1 - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} b}$$

$$(42) \quad \operatorname{cotg}(45^\circ + b) = \frac{\operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} b + 1}$$

$$(43) \quad \operatorname{cotg}(45^\circ - b) = \frac{\operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{cotg} b - 1}$$

Черезъ дѣленіе урав. (16) и (18) на  $\cos a \cos b$  и на  $\sin a \sin b$  получаемъ формулы:

$$(44) \quad \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$(45) \quad \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

$$(46) \quad \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} a = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

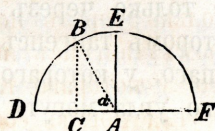
$$(47) \quad \operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}$$

### III. Вычисление

#### тригонометрическихъ величинъ.

§ 14. Прежде чѣмъ вычислять тригон. величины рассмотримъ измѣненія ихъ съ увеличеніемъ и уменьшеніемъ угла и предѣлы, въ которыхъ эти измѣненія происходятъ.

1) Опишемъ изъ вершины угла  $a$  радиусомъ, равнымъ единицѣ, полуокружность и положимъ, что сторона  $AD$  этого угла остается неподвигною, а другая сторона  $AB$  вращается около вершины  $A$ .



Если уголъ  $a = 0$ , то точки  $B$  и  $D$  совпадаютъ и перпендикуляръ  $BC = 0$ , т. е.  $\sin 0^\circ = 0$ . Съ увеличеніемъ угла  $a$  перпендикуляръ  $BC$  будетъ возрастать до тѣхъ поръ, пока точка  $B$  упадетъ въ точку  $E$ ; тогда  $\sin 90^\circ = 1$ . При дальнѣйшемъ увеличеніи угла  $a$  синусъ его будетъ уменьшаться и при  $a = 180^\circ$  обратится въ 0.

Такимъ образомъ всѣ возможныя величины синуса заключаются между предѣлами 0 и 1, и большій изъ двухъ острыхъ угловъ имѣетъ большій синусъ.

2) Если стороны  $AB$  и  $AD$  угла  $a$  совпадаютъ, то точка  $C$  сливается съ точкою  $D$  и линия  $AC$  перейдетъ въ линію  $AD$ , такъ что  $\cos 0^\circ = 1$ . Съ увеличеніемъ

угла  $a$  косинусъ его  $AC$  все уменьшается, пока не обратится въ 0 при  $a = 90^\circ$ . При дальнѣйшемъ увеличеніи угла  $a$  косинусъ его становится отрицательнымъ и абсолютная величина возрастаетъ, такъ что  $\cos 180^\circ = -1$ .

Величина косинуса заключается между 1 и  $-1$ , и большій изъ двухъ острыхъ угловъ имѣетъ меньшій косинусъ.

3) Такъ какъ съ увеличеніемъ угла отъ  $0^\circ$  до  $90^\circ$  синусъ его возрастаетъ отъ 0 до 1, и косинусъ уменьшается отъ 1 до 0, а всякая дробь увеличивается отъ увеличенія ея числителя или отъ уменьшенія ея знаменателя и остается положительною, если ея числитель и знаменатель положительны, то изъ выраженія  $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$  слѣдуетъ, что съ увеличеніемъ угла до  $90^\circ$  тангенсъ возрастаетъ и остается положительнымъ, такъ что

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

Знакъ  $\infty$  обозначаетъ, что  $\operatorname{tg} 90^\circ$  есть величина безконечно большая. Такъ какъ прямой уголъ ( $90^\circ$ ) можетъ произойти не только черезъ послѣдовательное увеличеніе острого, въ которомъ тангенсъ положителенъ, но и черезъ уменьшеніе тупаго, у котораго тангенсъ отрицателенъ, то тангенсу прямого угла могутъ соответствовать  $+\infty$  и  $-\infty$ , смотря потому, какъ мы будемъ смотрѣть на его происхожденіе. Такъ какъ дробь  $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$  уменьшается съ уменьшеніемъ числителя и увеличеніемъ знаменателя, то абсолютная величина тангенса будетъ все меньше по мѣрѣ того, какъ увеличивается уголъ отъ  $90^\circ$  до  $180^\circ$ , пока не обратится въ

$$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Тангенсъ можетъ имѣть всѣ возможныя положительныя и отрицательныя величины отъ 0 до  $\infty$ , и большему изъ двухъ острыхъ угловъ соответствовать большій тангенсъ.

4) Съ помощію такихъ же разсужденій можно доказать, что измѣненія котангенса и соответствующаго ему угла на-

ходятся въ обратномъ отношеніи, т. е. при увеличеніи угла котангенсъ уменьшается, а при уменьшеніи угла увеличивается, такъ что

$$\cotg 0^\circ = \frac{\cos 0^\circ}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty, \quad \cotg 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\cotg 180^\circ = \frac{\cos 180^\circ}{\sin 180^\circ} = \frac{-1}{0} = -\infty.$$

Котангенсъ можетъ имѣть все числовыя величины между  $+\infty$  и  $-\infty$  и большому изъ двухъ острыхъ угловъ соответствуетъ меньшій котангенсъ.

Эти свойства тангенса и котангенса могутъ быть выведены изъ построения тригонометрическихъ величинъ. Такъ напр. изъ фигуры § 8 видно, что съ увеличеніемъ остраго угла а точка пересѣченія D все болѣе удаляется отъ точки E, т. е.  $\operatorname{tg} a = DE$  увеличивается. При  $a = 90^\circ$  точка D удаляется отъ E на безконечно большое разстояніе, т. е.  $\operatorname{tg} a$  становится безконечно большимъ. Точно также легко показать съ помощію геометрическихъ построеній и остальные свойства тангенса и котангенса, выведенныя нами аналитическимъ путемъ.

**§ 15.** Чтобы выразить въ числахъ тригон. величины всехъ угловъ отъ  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , достаточно вычислить эти величины только для угловъ отъ  $0^\circ$  до  $45^\circ$ .

Дѣйствительно изъ § 5 видно, что синусъ тупаго угла равенъ синусу его смежнаго (остраго) угла, а косинусъ, тангенсъ и котангенсъ тупаго угла равны тѣмъ же тригон. величинамъ смежнаго угла, взятымъ со знакомъ минусъ; напр.

$$\sin 107^\circ = \sin (180^\circ - 107^\circ) = \sin 73^\circ$$

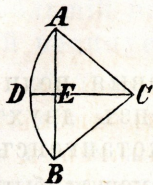
$$\cos 99^\circ = -\cos (180^\circ - 99^\circ) = -\cos 81^\circ;$$

и такъ какъ всякій уголь отъ  $45^\circ$  до  $90^\circ$  дополняется до прямого угломъ, меньшимъ  $45^\circ$ , а тригон. величины остраго угла равны обратнымъ тригон. величинамъ угла, дополняющаго его до  $90^\circ$  (§ 4), то тригон. величины всехъ угловъ будутъ опредѣлены, если онѣ извѣстны для угловъ отъ  $0^\circ$  до  $45^\circ$ . Напр.

$$\sin 75^\circ = \cos (90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \cotg (90^\circ - 60^\circ) = \cotg 30^\circ.$$

Кромѣ того нѣтъ надобности вычислять все тригон. величины этихъ угловъ; достаточно знать одну только, а съ помощію ея по § 10 могутъ быть вычислены и остальные.



§ 16. Опишемъ радіусомъ, равнымъ единицѣ, дугу и раздѣлимъ хорду ея АВ и соотвѣтствующій ей центральный уголъ АСВ линіеу СD пополамъ, тогда увидимъ, что синусъ угла АСD равняется половинѣ хорды двойнаго угла АСВ.

Съ помощію этой теоремы легко опредѣлить тригон. величины угловъ въ  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $18^\circ$ , т. е. такихъ, которые равны половинамъ центральныхъ угловъ правильныхъ 4, 6, 10 — угольниковъ.

1) Если линія АВ будетъ сторона прав. 4—угольника вписаннаго, то  $\angle ACB = 90^\circ$  и  $\angle ACD = 45^\circ$ , почему и  $\angle CAE = 45^\circ$ , слѣд.  $AE = CE$ . Такъ какъ  $AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , то  $AE = CE = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ , т. е.

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,7071067 = \cos 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{AE}{CE} = 1 = \operatorname{cotg} 45^\circ.$$

2) Если линію АВ примемъ за сторону прав. 6—угольника, то  $AB = AC = 1$  и  $\angle ACB = 60^\circ$ , слѣд.  $\angle ACD = 30^\circ$ . Такъ какъ  $AE = \frac{1}{2}$  и  $CE = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , то

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5 = \cos 60^\circ \quad (\S 4)$$

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,8660254 = \sin 60^\circ$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AE}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5773502 = \operatorname{cotg} 60^\circ$$

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{CE}{AE} = \sqrt{3} = 1,7320508 = \operatorname{tg} 60^\circ.$$

3) Если АВ будетъ сторона прав. 10—угольника, то  $\angle ACB = 36^\circ$  и  $\angle ACD = 18^\circ$ . Въ такомъ случаѣ АВ есть большій отрѣзокъ радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, т. е.

$1 : AB = AB : 1 - AB$  или  $AB^2 + AB = 1$ , слѣд.

$$AB = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ и } AE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$CE = \sqrt{1 - \frac{1}{16}(V5 - 1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + V5}{2}}, \text{ т. е.}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(V5 - 1) = 0,3090169 = \cos 72^\circ$$

$$\cos 18^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + V5}{2}} = 0,9510565 = \sin 72^\circ$$

$$\operatorname{tg} 18^\circ = \frac{AE}{CE} = \sqrt{\frac{5 - 2V5}{5}} = 0,3249196 = \operatorname{cotg} 72^\circ$$

$$\operatorname{cotg} 18^\circ = \frac{CE}{AE} = \sqrt{5 + 2V5} = 3,0776835 = \operatorname{tg} 72^\circ.$$

§ 17. Съ помощью найденныхъ тригон. величинъ могутъ быть вычислены тригон. величины всѣхъ угловъ. Посредствомъ формулъ (16), (17), (18) и (19) можно по даннымъ тригон. величинамъ двухъ угловъ вычислить тригон. величины ихъ суммы и разности, напр.

$$\begin{aligned} \sin 12^\circ = \sin (30^\circ - 18^\circ) &= \sin 30^\circ \cos 18^\circ - \cos 30^\circ \sin 18^\circ \\ &= 0,2079117 = \cos 78^\circ. \end{aligned}$$

По даннымъ синусамъ и косинусамъ какого либо угла съ помощью формулъ (20) и (21) можно вычислить синусы и косинусы угловъ, которые вдвое, втрое и т. д. болѣе, а пользуясь формулами (24) и (25) можно найти синусы и косинусы угловъ, вдвое меньшихъ, напр. изъ  $\cos 18^\circ$  можно найти:

$$\sin 9^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 18^\circ}{2}} = 0,1564345$$

$$\cos 9^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 18^\circ}{2}} = 0,9876883$$

$$\sin 4^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 9^\circ}{2}} = 0,0784591.$$

Продолжая такимъ образомъ мы дойдемъ до тригон. величинъ очень малыхъ угловъ,  $\sin 45'$ ,  $\sin \frac{45'}{2}$ ,  $\sin \frac{45'}{4}$ ,  $\sin \frac{45'}{8}$ ,  $\sin \frac{45'}{16}$ ,  $\sin \frac{45'}{32} = 0,00040905$ ,  $\sin \frac{45'}{64} = 0,00020452$  и т. д.

Разсматривая рядъ полученныхъ такимъ образомъ тригон. величинъ весьма малыхъ угловъ, мы замѣтимъ, что углы относятся какъ ихъ синусы, и это заключеніе тѣмъ

справедливѣе, чѣмъ меньше взяты углы. Такимъ образомъ  $\sin 1'$  опредѣлится изъ пропорціи:

$$\sin \frac{45'}{64} : \sin 1' = \frac{45'}{64} : 1', \text{ слѣд. } \sin 1' = 0,00029088.$$

Зная  $\sin 1'$  мы можемъ получить  $\cos 1'$  (§ 10, 4), потомъ  $\sin 2'$  (§ 12,20), далѣе (§ 11,16)  $\sin 3'$ ,  $\sin 4'$  и т. д., переходя отъ одного угла къ другому минутою большему. Такимъ образомъ можно вычислить всѣ тригон. величины.

## IV. Обь употребленіи тригонометрическихъ таблицъ.

§ 18. Въ тригон. таблицахъ для всѣхъ угловъ отъ  $0^\circ$  до  $90^\circ$  даются логариомы соответствующихъ имъ тригон. величинъ, такъ что для каждаго угла можно найти соответствующія тригон. величины и наоборотъ для какой либо тригон. величины — соответствующій ей уголъ. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ ссылаться на таблицы Вега, обработанныя Бремикеромъ; при этихъ таблицахъ есть описаніе ихъ устройства и употребленія.

1) Синусы и косинусы всѣхъ угловъ, тангенсы угловъ отъ  $0^\circ$  до  $45^\circ$  и котангенсы угловъ отъ  $45^\circ$  до  $90^\circ$  меньше единицы, потому логариомы ихъ имѣютъ отрицательныя характеристики; тангенсы же угловъ отъ  $45^\circ$  до  $90^\circ$  и котангенсы отъ  $0^\circ$  до  $45^\circ$  имѣютъ положительныя логариомы; по этому для установленія единообразія въ таблицахъ всѣ логариомы, имѣющіе отрицательную характеристику, увеличены  $10^{10}$ , напр.

$\sin 30^\circ = 0,5$ , слѣд.  $\log \sin 30^\circ = \log 0,5 = 0,6989700 - 1$ , между тѣмъ какъ въ таблицахъ написано

$$\log \sin 30^\circ = 9,6989700.$$

Такимъ образомъ для полученія истиннаго логариема какой либо тригон. величины, меньшей единицы, должно вычесть 10, т. е. прибавить — 10 къ логариему, найденному въ таблицахъ, напр.

$$\log \sin 12^{\circ} = 9,3178789 - 10 = 0,3178789 - 1.$$

Соответствующее логариему число,  $\sin 12^{\circ} = 0,2079117$ , находится съ помощію обыкновенныхъ логариемическихъ таблицъ.

Если нужно опредѣлить уголъ, соответствующій данной тригон. величинѣ, напр.  $\operatorname{tg} x = 0,3249196$ , то надобно найти логариемъ этой величины  $0,5117760 - 1$ , прибавить къ нему 10, потому что онъ имѣетъ отрицательную характеристику, такъ что получимъ  $9,5117760$ , и тогда найдемъ въ таблицахъ для  $\operatorname{tg} x = 9,5117760$  соответствующій уголъ  $18^{\circ}$ .

2) Хотя въ таблицахъ углы слѣдуютъ черезъ каждыя 10 секундъ, но можно вычислять тригон. величины и для промежуточныхъ угловъ, выраженныхъ въ секундахъ или доляхъ секунды, съ помощію графы, обозначенной въ триг. таблицахъ буквою  $d$  или  $dc$  (differentia communis), гдѣ дается измѣненіе логариема тригон. величинъ при измѣненіи угла на 10 секундъ. Это вычисленіе основывается на томъ, что разности мало различающихся угловъ относятся какъ разности логариемовъ соответствующихъ имъ тригон. величинъ.

При вычисленіи нужно всегда имѣть въ виду, что съ увеличеніемъ остраго угла его синусъ и тангенсъ увеличиваются, а косинусъ и котангенсъ уменьшаются (§ 14).

При употребленіи триг. таблицъ могутъ встрѣтиться задачи двухъ родовъ: къ данному углу прійскать соответствующую тригон. величину, или прійскать уголъ, соответствующій данной тригон. величинѣ.

### Найти тригон. величину, соответствующую данному углу.

§ 19. 1) Найти  $\log \sin 37^{\circ} 15' 26''$ , 3.

Въ тригон. таблицахъ мы находимъ, что  $\log \sin 37^{\circ} 15' 20'' = 9,7820217$ ; съ увеличеніемъ угла  $37^{\circ} 15' 20''$

на  $10''$ , послѣдніе десятичные знаки его  $\log \sin$  увеличатся  $277^{\text{бю}}$ , потому измѣняя этотъ уголъ на  $1''$ , измѣнимъ послѣдніе десятичные знаки его  $\log \sin$  на  $27,7$ , а при увеличеніи даннаго угла на  $6'',3$  послѣдніе десятичные знаки увеличатся на  $27,7 \times 6,3 = 174,51$ , такъ что

$$\begin{aligned} \log \sin 37^{\circ} 15' 20'' &= 9,7826217 \\ 27,5 \times 6,3 &= + 174,51 \\ \hline \log \sin 37^{\circ} 15' 26'',3 &= 0,7820392 - 1. \end{aligned}$$

Если требуется найти  $\sin 37^{\circ} 15,26'',3$ , а не его логарифмъ, то прійскиваютъ въ логарифмическихъ таблицахъ число, соответствующее логарифму  $0,7820392 - 1$ , и тогда получается  $\sin 37^{\circ} 15,26'',3 = 0,6054955$ .

2) Найти  $\log \cos 45^{\circ} 41' 44'',25$

$$\begin{aligned} \log \cos 45^{\circ} 41' 40'' &= 9,8441569 \\ 21,6 \times 4,25 &= - 91,8 \\ \hline \log \cos 45^{\circ} 41' 44'',25 &= 0,8441477 - 1. \end{aligned}$$

При увеличеніи угла  $45^{\circ} 41' 40''$  на  $10''$  послѣдніе десятичные знаки его  $\log \cos$  уменьшаются  $216^{\text{бю}}$ , слѣд. при увеличеніи угла на  $1''$  они уменьшаются на  $21,6$ , а при увеличеніи на  $4'',25$  уменьшаются на  $21,6 \times 4,25 = 91,8$ .

3) Найти  $\log \operatorname{tg} 56^{\circ} 22' 3'',89$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} 56^{\circ} 22' &= 0,1770234 \\ 45,7 \times 3,89 &= + 177,773 \\ \hline \log \operatorname{tg} 56^{\circ} 22' 3'',89 &= 0,1770412. \end{aligned}$$

4) Найти  $\log \operatorname{cotg} 14^{\circ} 55' 18'',02$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{cotg} 14^{\circ} 55' 10'' &= 0,5743959 \\ 84,6 \times 8,02 &= - 678,482 \\ \hline \log \operatorname{cotg} 14^{\circ} 55' 18'',02 &= 0,5743281. \end{aligned}$$

**§ 20.** Тригон. величины тупыхъ угловъ находятся по формуламъ § 5 и § 6 двумя способами: отнимаютъ данный уголъ отъ  $180^{\circ}$  и отыскиваютъ требуемую тригон. величину полученнаго въ остаткѣ остраго угла, или отнимаютъ отъ даннаго угла  $90^{\circ}$

и приписывают для полученнаго въ остаткѣ остраго угла тригон. величину, обратную требуемой.

1) Найти  $\log \sin 98^\circ 3' 2''$ .

Если обозначимъ для краткости  $98^\circ 3' 2''$  черезъ  $a$ , то отыскивая по первому способу получимъ:

$$\begin{aligned} \sin a &= \sin (180^\circ - a) = \sin 81^\circ 56' 58'' \\ \log \sin 81^\circ 56' 50'' &= 9,9956964 \\ 2,9 \times 8 &= + 23,2 \\ \hline \log \sin 98^\circ 3' 2'' &= 0,9956987 - 1. \end{aligned}$$

По второму способу:

$$\begin{aligned} \sin a &= \cos (a - 90^\circ) = \cos 8^\circ 3' 2'' \\ \log \cos 8^\circ 3' &= 9,9956993 \\ 2,9 \times 2 &= - 5,3 \\ \hline \log \sin 98^\circ 3' 2'' &= 0,9956987 - 1. \end{aligned}$$

2) Косинусъ, тангенсъ и котангенсъ тупаго угла, какъ величины отрицательныя, не имѣютъ логариѣмовъ; но въ такомъ случаѣ отыскиваютъ логариѣмы ихъ абсолютныхъ величинъ и приписываютъ къ нимъ букву (n), чтобы показать, что соотвѣтствующія этимъ логариѣмамъ числа должны быть взяты со знакомъ минусъ. Напр.

Найти  $\log \cos 144^\circ 4' 51'', 3$ .

Если обозначимъ уголь  $144^\circ 4' 51'', 3$  черезъ  $a$ , то

$$\begin{aligned} \cos a &= -\cos (180^\circ - a) = -\cos 35^\circ 55' 8'', 7 \\ \log \cos 35^\circ 55' &= 9,9084159 \\ 15,3 \times 8,7 &= - 133,11 \\ \hline \log \cos 144^\circ 4' 51'', 3 &= 0,9084026 - 1 (n). \end{aligned}$$

По второму способу:

$$\begin{aligned} \cos a &= -\sin (a - 90^\circ) = -\sin 54^\circ 4' 51'', 3 \\ \log \sin 54^\circ 4' 50'' &= 9,9084006 \\ 15,3 \times 1,3 &= + 19,89 \\ \hline \log \cos 144^\circ 4' 51'', 3 &= 0,9084026 - 1 (n). \end{aligned}$$

Чтобы найти самый косинусъ, должно прискать число, соответствующее логариому 0,9084026 — 1 и написать передъ нимъ знакъ минусъ, такъ что

$$\cos 144^{\circ}4'51'',3 = -0,8098463.$$

3) Такимъ же образомъ находимъ

$$\log \operatorname{tg} 125^{\circ}24'31'' = 0,1481980 \text{ (n)}$$

$$\operatorname{tg} 125^{\circ}24'31'' = -1,4066886$$

$$\log \operatorname{cotg} 109^{\circ}2'28'' = 0,5379852 - 1 \text{ (n)}$$

$$\operatorname{cotg} 109^{\circ}2'28'' = -0,3451304.$$

### Найти уголь, соответствующій данной тригон. величинѣ.

§ 21. Если дано будетъ

$$\log \sin x = 0,6389576 - 1,$$

то прибавивъ къ логариому 10 получимъ 9,6389576. Въ таблицахъ отыскиваемъ между логариомами синуса, меньшими 9,6389576, такой, который болѣе всѣхъ подходит къ 9,6389576. Такой логариомъ будетъ 9,6389376, менѣе даннаго на 0,0000200, и ему соответствуетъ уголь  $25^{\circ}48'50''$ . Въ таблицахъ же находимъ, что съ увеличеніемъ 436<sup>ью</sup> послѣднихъ десятичныхъ знаковъ логариома 9,6389576 уголь  $25^{\circ}48'50''$  увеличится на  $10''$ , слѣд. увеличивая логариомъ 43,6<sup>ью</sup>, мы увеличимъ уголь на  $1''$ , а потому, если прибавимъ къ  $25^{\circ}48'50''$  столько секундъ, сколько разъ 43,6 заключается въ 200, то получимъ искомый уголь x. Такимъ образомъ

$$\log \sin x = 9,6389576$$

$$\log \sin 25^{\circ}48'50'' = 9,6389376$$

$$\begin{array}{r} + 4,59 = \frac{200}{43,6} \end{array}$$

$$x = 25^{\circ}48'54'',59.$$

Такъ какъ (по § 5) синусъ остраго угла есть въ тоже время синусъ смежнаго съ нимъ тупаго, то и

$$x = 180^{\circ} - 25^{\circ}48'54'',59 = 154^{\circ}11'5'',41.$$

2) Такимъ образомъ данному синусу могутъ соответствовать два различные угла, между тѣмъ какъ коси-

нужь, тангенсь и котангенсь могут принадлежать только одному определенному углу, потому что по знаку (+ или —) этих тригон. величинъ можно судить, соответствуют ли онѣ острому или тупому углу. Такъ напр.  $\cos x = 0,5$  соответствуетъ  $x = 60^\circ$ , а  $\cos x = -0,5$  соответствуетъ  $x = 180 - 60^\circ = 120^\circ$ . Если бы  $\cos x$  былъ данъ въ видѣ логарифма, то въ первомъ случаѣ онѣ выразился бы черезъ  $\log \cos x = 0,6989700 - 1$ , а въ второмъ черезъ  $\log \cos x = 0,6989700 - 1$  (n) или  $\log (-\cos x) = 0,6989700 - 1$ .

3) Если данъ  $\log \cos x = 0,7390193 - 1$ , то имѣемъ

$$\begin{array}{r} \log \cos x = 9,7390193 \\ \log \cos 56^\circ 45' = 9,7390129 \\ \hline - 1'',99 = \frac{64}{32,1} \\ x = 56^\circ 44' 58'',01. \end{array}$$

Точно также найдемъ, что

$$\text{для } \log \operatorname{tg} x = 0,0328564 \quad x = 47^\circ 9' 55'',01$$

$$\text{для } \log \operatorname{cotg} x = 0,4771213 \quad x = 18^\circ 265'',82.$$

**§ 22.** Тупые углы могутъ быть определены по даннымъ тригон. величинамъ (§ 5 и § 6) двоякимъ способомъ: определяють острый уголъ, соответствующій данной тригон. величинѣ и вычитаютъ его изъ  $180^\circ$ , — или принимая данную тригон. величину за ея обратную, ( $\sin$  за  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$  за  $\operatorname{cotg}$ ) отыскиваютъ уголъ, соответствующій этой послѣдней и прибавляютъ къ нему  $90^\circ$ .

1) Если дано  $\log \cos x = 0,9084026 - 1$  (n), то имѣемъ

$$\begin{array}{r} \log \cos (180^\circ - x) = 9,9084026 \\ \log \cos 35^\circ 55' 10'' = 9,9084006 \\ \hline - 1'',3 = \frac{20}{15,3} \end{array}$$

$$180^\circ - x = 35^\circ 55' 8'',7, \quad x = 180^\circ - 35^\circ 55' 8'',7$$

$$= 144^\circ 4' 51'',3.$$

По второму способу имѣемъ

$$\log \sin (x - 90^\circ) = 9,9084026$$

$$\log \sin 54^\circ 4' 50'' = 9,9084006$$

$$+ 1'',3 = \frac{20}{15,3}$$

$$x - 90^\circ = 54^\circ 4' 51'',3, \quad x = 54^\circ 4' 51'',3 + 90^\circ \\ = 144^\circ 4' 51'',3.$$

2) Если данъ будетъ  $\operatorname{tg} x = -2$ , то отыскиваютъ сначала  $\log 2$ . Изъ  $\log \operatorname{tg} x = 0,3010300$  (п) слѣдуетъ, что  $x = 116^\circ 33' 54'',19$ .

3) Изъ  $\log (-\operatorname{cotg} x) = 0,5346294$  слѣдуетъ, что  $x = 163^\circ 43' 21'',46$ .

**§ 23.** При опредѣленіи угловъ, близко подходящихъ къ  $0^\circ$  или къ  $90^\circ$  по данной тригон. величинѣ или при опредѣленіи тригон. величины по данному углу такого рода нужно принять къ свѣденію слѣдующее.

Если синусъ и косинусъ близко подходят къ единицѣ, то величина ихъ измѣняется очень мало съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ угла т. е. измѣненіе синуса около  $90^\circ$  и косинуса около  $0^\circ$  очень незначительно. Если же синусъ и косинусъ приближаются ко своимъ наименьшимъ значеніямъ (т. е. синусъ около  $0^\circ$  и косинусъ около  $90^\circ$ ), то они измѣняются быстро. Такимъ образомъ различіе между  $\log \cos 3'$  и  $\log \cos 4'$  или что тоже, между  $\log \sin 89^\circ 57'$ , и  $\log \sin 89^\circ 56'$ , начинается только съ 7<sup>го</sup> десятичнаго мѣста, между тѣмъ какъ  $\log \sin 3'$  и  $\log \sin 4'$ , или что тоже,  $\log \cos 89^\circ 57'$  и  $\log \cos 89^\circ 56'$ , отличаются уже своими характеристиками. Чѣмъ быстрѣе измѣняется какая либо тригон. величина съ измѣненіемъ угла, тѣмъ съ меньшею погрѣшностью опредѣляется изъ нея уголь. Потому для опредѣленія очень малыхъ угловъ должно предпочтительно употреблять ихъ синусы, для угловъ близкихъ къ прямому — косинусы или же въ первомъ случаѣ тангенсы, а во второмъ котангенсы.

**§ 24.** Разность между десятью и логарифмомъ называется дополненіемъ логарифма, напр.

$$\text{доп. } \log 4 = 10 - 0,6020600 = 9,3979400.$$

Чтобы получить дополнение логариома, имѣющаго отрицательную характеристику, должно вычесть его мантиссу изъ 10 и къ остатку прибавить характеристику, взятую съ положительнымъ знакомъ, напр.

$$\begin{aligned} \text{доп. } \log 0,03 &= 10 - (0,4771213 - 2) = 10 - 0,4771213 + 2 \\ &= 11,5228787. \end{aligned}$$

Такъ какъ  $a - b = a + (10 - b) - 10$ , то для вычитанія одного логариома изъ другаго достаточно къ уменьшаемому прибавить дополнение вычитаемаго логариома и изъ найденной суммы вычесть 10.

Такая замѣна вычитанія сложениемъ преимущественно употребляется въ такомъ случаѣ, когда отъ логариома или отъ суммы нѣсколькихъ логариомовъ вычитается нѣсколько другихъ логариомовъ, напр.

$$x = \frac{\sin 39^{\circ}15' \times \operatorname{tg} 117^{\circ}14'}{\operatorname{tg} 95^{\circ} \times \operatorname{cotg} 93^{\circ}30'}.$$

Знакъ этого выраженія зависитъ отъ того, будетъ ли число отрицательныхъ производителей четное или нечетное, и такъ какъ при логариомахъ отрицательныхъ производителей ставится буква (n), то если буква (n) повторяется четное число разъ, искомое число x будетъ положительно, если же нечетное, — то отрицательно. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\log \sin 39^{\circ}15' = 0,8012015 - 1$$

$$\log \operatorname{tg} 117^{\circ}14' = 0,2884746 \quad (n)$$

$$\text{CD} . \log \operatorname{tg} 95^{\circ} = 8,9419518 - 10 \quad (n)$$

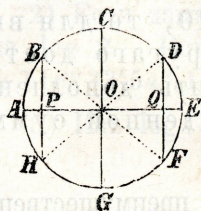
$$\text{CD} . \log \operatorname{tg} 93^{\circ}30' = 11,2135139 - 10 \quad (n)$$

---


$$\log x = - 0,2451418 \quad (n)$$

$$x = - 1,7584976.$$

## V. Тригонометрическія величины угловъ, большихъ $180^\circ$ и отрицательныхъ.



§ 25. Чтобы примѣнить тригон. величины къ угламъ, большимъ  $180^\circ$ , опишемъ радиусомъ, принятымъ за единицу, окружность и раздѣлимъ ее двумя діаметрами на четыре равныя части AC, CE, EG, GA. Примемъ AO за неподвижный радиусъ, а точками B, D, F, H обозначимъ положеніе подвижнаго радиуса въ различныхъ четвертяхъ окружности, изъ которыхъ AC будемъ считать за первую, EC за вторую и т. д. Тогда  $\sin AB = BP$ ,  $\cos AB = OP$ ,  $\sin ACD = DQ$ ,  $\cos ACD = OQ$ ; далѣе  $\sin ACF = FQ$  и  $\cos ACF = OQ$ , наконецъ  $\sin ACEH = HP$  и  $\cos ACEH = OP$ .

Такъ какъ мы приняли, что синусы 1<sup>ой</sup> и 2<sup>ой</sup> четверти положительны, а линіи FQ и HP имѣютъ направленіе, противоположное линіямъ DQ и BP, то синусы 3<sup>ей</sup> и 4<sup>ой</sup> четверти должны считаться отрицательными. Далѣе линіи OP и OQ имѣютъ противоположное направленіе, и такъ какъ косинусы 1<sup>ой</sup> четверти положительны, то косинусы 4<sup>ой</sup> четверти будутъ также положительны, а 2<sup>ой</sup> и 3<sup>ей</sup> четверти отрицательны. Изъ знаковъ синусовъ и косинусовъ слѣдуетъ, что тангенсы и котангенсы 1<sup>ой</sup> и 3<sup>ей</sup> четверти положительны, а 2<sup>ой</sup> и 4<sup>ой</sup> отрицательны.

Подобными разсужденіями какъ въ § 14 можно вывести слѣдующіе предѣлы для тригон. величинъ всѣхъ угловъ отъ  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .

	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
Синусъ	0	1	0	-1	0
Косинусъ	1	0	-1	0	1
Тангенсъ	0	$+\infty -$	0	$+\infty -$	0
Котангенсъ	$+\infty$	0	$-\infty +$	0	$-\infty$ .

§ 26. Опредѣленіе тригон. величинъ угловъ, большіхъ  $180^\circ$ , можетъ быть приведено къ опредѣленію тригон. величинъ острыхъ угловъ, при чемъ достаточно только разсмотрѣть синусы и косинусы, потому что тангенсы и котангенсы получатся изъ нихъ черезъ простое дѣленіе.

Назовемъ черезъ  $a$  въ фигурѣ § 25 уголъ  $\text{AOB} = \text{DOE} = \text{EOF} = \text{AON}$ ; тогда  $\text{BP} = \text{DQ} = \text{FQ} = \text{HP}$ ,  $\text{OP} = \text{OQ}$  и уголъ 3<sup>ей</sup> четверти, измѣряемый дугою  $\text{ACF}$ , будетъ  $a + 180^\circ$ . Принимая въ соображеніе знакъ тригон. величины мы получимъ непосредственно изъ чертежа слѣдующія формулы:

$$1) \quad \begin{cases} \sin(a + 180^\circ) = -\sin a \\ \cos(a + 180^\circ) = -\cos a. \end{cases}$$

Если обозначимъ уголъ  $a + 180^\circ$  черезъ  $\text{A}^{\text{III}}$ , тогда  $a = \text{A}^{\text{III}} - 180^\circ$ , слѣд.

$$2) \quad \begin{cases} \sin \text{A}^{\text{III}} = -\sin(\text{A}^{\text{III}} - 180^\circ) \\ \cos \text{A}^{\text{III}} = -\cos(\text{A}^{\text{III}} - 180^\circ). \end{cases}$$

Напр.  $\sin 196^\circ = -\sin(196^\circ - 180^\circ) = -\sin 16^\circ$ . Такъ какъ  $\log \sin 16^\circ = 0,4403381 - 1$ , то  $\log \sin 196^\circ = 0,4403381 - 1$  (n), слѣд.  $\sin 196^\circ = -0,2756374$ . Точно также  $\cos 228^\circ = -\cos 48^\circ$ ,  $\text{tg } 234^\circ = \text{tg } 54^\circ$ ,  $\text{cotg } 216^\circ = \text{cotg } 36^\circ$ .

Если сравнимъ тригон. величины дуги  $\text{АСЕН}$ , соответствующей углу  $360^\circ - a$ , съ тригон. величинами угла  $\text{AOB} = a$ , то найдемъ, что

$$3) \quad \begin{cases} \sin(360^\circ - a) = -\sin a \\ \cos(360^\circ - a) = \cos a. \end{cases}$$

Этимъ формуламъ можно придать другой видъ, подставивъ вмѣсто  $a$  его дополненіе  $90^\circ - a$ , тогда

$$\sin[360^\circ - (90^\circ - a)] = -\sin(90^\circ - a)$$

т. е.

$$\sin(270^\circ + a) = -\cos a,$$

и точно также

$$\cos(270^\circ + a) = \sin a.$$

Обозначимъ уголъ  $270^\circ + a$  черезъ  $\text{A}^{\text{IV}}$ , тогда  $a = \text{A}^{\text{IV}} - 270^\circ$ , слѣд.

$$4) \quad \begin{cases} \sin \text{A}^{\text{IV}} = -\cos(\text{A}^{\text{IV}} - 270^\circ) \\ \cos \text{A}^{\text{IV}} = \sin(\text{A}^{\text{IV}} - 270^\circ). \end{cases}$$

Напр.  $\sin 340^\circ = -\cos(340^\circ - 270^\circ) = -\cos 70^\circ$ ;  $\cos 293^\circ = \sin 23^\circ$ ,  $\text{tg } 308^\circ = -\text{cotg } 38^\circ$ ,  $\text{cotg } 301^\circ = -\text{tg } 31^\circ$ .

§ 27. Отрицательный уголъ получится, если мы будемъ вращать подвижный радиусъ отъ его начальнаго положенія въ сторону, противоположную той, въ которую мы вращали этотъ радиусъ для полученія положительныхъ угловъ. Опишемъ по обѣимъ сторонамъ неподвижнаго радиуса АО равные углы  $\text{AOB} = +a$  и  $\text{AON} = -a$  (фиг. § 25), тогда изъ чертежа увидимъ, что

$$\begin{aligned} \sin(-a) &= -\sin a, & \cos(-a) &= \cos a, & \text{слѣд.} \\ \text{tg}(-a) &= -\text{tg} a, & \text{cotg}(-a) &= -\text{cotg} a. \end{aligned}$$

§ 28. Если мы, описывая положительные углы, будемъ продолжать вращеніе радиуса и за  $360^\circ$ , то онъ будетъ принимать всѣ положенія, которыя онъ имѣлъ при первомъ вращеніи отъ  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , и оттого для угловъ  $a + 360^\circ$ ,  $a + 2 \cdot 360^\circ$  и т. д. получатся тѣже тригон. величины, какія мы получали для угла  $a$ , меньшаго  $360^\circ$ . Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ  $n$  какое либо цѣлое число, будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \sin(a + n \cdot 360^\circ) &= \sin a, & \cos(a + n \cdot 360^\circ) &= \cos a \\ \text{tg}(a + n \cdot 360^\circ) &= \text{tg} a, & \text{cotg}(a + n \cdot 360^\circ) &= \text{cotg} a. \end{aligned}$$

Такъ какъ во всѣхъ углахъ, большихъ  $180^\circ$ , Синусъ и Косинусъ образуютъ, точно также какъ въ углахъ меньшихъ  $180^\circ$ , катеты прямоугольнаго тре—ка, то всѣ формулы § 10, выведенныя изъ уравненій  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ ,  $\text{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$  и  $\text{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$ , имѣютъ мѣсто и для всѣхъ угловъ, большихъ  $180^\circ$ .—Годность формулъ § 11 и выведенныхъ изъ нихъ въ § 12 и § 13 слѣдствій для всѣхъ возможныхъ угловъ легко доказать такимъ же образомъ, какъ можетъ быть доказано годность формулъ § 11 для тупыхъ угловъ.

## VI. Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ.

§ 29. Если въ прямоугольномъ тре—кѣ кромѣ прямого угла, который всегда уже извѣстенъ, даны еще двѣ какія либо части, а именно: острый уголъ и одна сторона, или двѣ стороны, то можно вычислить всѣ остальные части тре—ка. При этомъ могутъ быть даны 1) гипотенуза и острый уголъ, 2) катетъ и острый уголъ, 3) гипотенуза и катетъ, 4) оба катета.

Будемъ постоянно обозначать прямой уголъ буквою А, гипотенузу буквою а, острые углы черезъ В и С, а противолежащія имъ катеты черезъ b и с, площадь тре—ка буквою F.

### Первый случай.

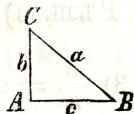
§ 30. Даны гипотенуза а и острый уголъ В; найти С, b, с, F.

Рѣш. 1)  $C = 90^\circ - B$     2)  $b = a \sin B$

3)  $c = a \cos B$     4)  $F = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B$ .

По § 12, 20  $\sin B \cos B = \frac{1}{2} \sin 2B$ , слѣд.

$$F = \frac{1}{4} a^2 \sin 2B.$$



Примѣр. Если  $a = 987,31$  футъ,  $B = 46^\circ 28' 35'', 2$ , тогда

$$1) C = 43^\circ 31' 24'', 8$$

$$2) \log a = 2,9944535 \qquad 3) \log a = 2,9944535$$

$$\log \sin B = 9,8603927 - 10 \qquad \log \cos B = 9,8380003 - 10$$

$$\log b = 2,8548462 \qquad \log c = 2,8324538$$

$$b = 715,8898 \text{ футъ} \qquad c = 679,9137 \text{ футъ}$$

$$4) \log b = 2,8548462$$

$$\log c = 2,8324538$$

$$\log 2 F = 5,6873000$$

$$2 F = 486743,33$$

$$F = 243371,665 \quad \square \text{ футъ.}$$

Если  $V$  близко къ  $90^\circ$  и посему  $b = a \sin V$  не можетъ быть точно вычислено (§ 23), то опредѣляютъ сначала  $c = a \cos V$  и потомъ уже вычисляютъ  $b$  по формулѣ  $b = \sqrt{(a+c)(a-c)}$ . Если же  $V$  близко къ  $0^\circ$ , то сначала вычисляютъ  $b = a \sin V$  и потомъ  $c$  по формулѣ  $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ .

### Второй случай.

§ 31. 1) Даны катетъ  $c$  и прилежащій къ нему уголъ  $V$ ; найти  $C, b, a, F$ .

Рѣш. 1)  $C = 90^\circ - V$  2)  $b = c \operatorname{tg} V$

$$3) \frac{c}{a} = \cos V, \text{ слѣд. } a = \frac{c}{\cos V} \quad 4) F = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}c^2 \operatorname{tg} V.$$

Если  $c = 1378,14$  футь,  $V = 3^\circ 37' 49''$ , то  $C = 86^\circ 22' 11''$ ,

$$b = 87,4364 \text{ ф.}, \quad a = 1380,911 \text{ ф.}, \quad F = 60249,805 \square \text{ ф.}$$

2) Даны катетъ  $c$  и противолежащій ему уголъ  $C$ ; найти  $V, b, a, F$ .

Рѣш. 1)  $V = 90^\circ - C$  2)  $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} C$ , слѣд.  $b = \frac{c}{\operatorname{tg} C}$

$$3) \frac{c}{a} = \sin C, \text{ слѣд. } a = \frac{c}{\sin C} \quad 4) F = \frac{1}{2}bc = \frac{c^2}{2 \operatorname{tg} C}.$$

Вторая задача въ сущности совершенно сходна съ первой, если мы будемъ разсматривать уголъ  $V$  какъ данную величину.

Если  $V$  близко къ  $0^\circ$ , слѣд.  $C$  близко къ  $90^\circ$ , то гипотенуза  $a$  не будетъ точно опредѣляться ни изъ  $\frac{c}{\cos V}$ , ни изъ

$\frac{c}{\sin C}$ . Въ такомъ случаѣ вычисляютъ  $a$  изъ выраженія

$$a = \frac{b}{\sin V}.$$

### Третій случай.

§ 32. Даны гипотенуза  $a$  и катетъ  $b$ ; найти  $V, C, c, F$ .

Рѣш. 1)  $\sin B = \frac{a}{b}$  2)  $\cos C = \frac{b}{a}$  или  $C = 90^\circ - B$

3)  $c = a \cos B$  или  $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$

4)  $F = \frac{1}{2} bc = \frac{b}{2} \sqrt{(a+b)(a-b)}$

Если  $a = 246,7$  ф.,  $b = 135,9$  ф., тогда  $B = 33^\circ 25' 36''$ ,  $6$ ,  
 $C = 56^\circ 34' 23''$ ,  $4$ ,  $c = 205,893$  ф.,  $F = 13990,45$  □ ф.

Если  $\frac{b}{a}$  приближается къ 1, то вычисляють сначала  
 $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$  и потомъ  $B$  и  $C$  изъ уравненія  
 $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \operatorname{cotg} C$ . Если же  $\frac{b}{a}$  приближается къ 0, то опре-  
 дѣляютъ  $c$  изъ  $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$  или изъ  $c = b \operatorname{cotg} B$   
 $= b \operatorname{tg} C$ .

### Четвертый случай.

§ 33. Даны оба катета  $b, c$ ; найти  $B, C, a, F$ .

Рѣш. 1)  $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$  2)  $\operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}$  или  $C = 90^\circ - B$

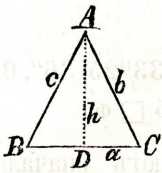
3)  $\frac{b}{a} = \sin B$ , слѣд.  $a = \frac{b}{\sin B}$  или  $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

4)  $F = \frac{1}{2} bc$ .

Если  $b = 563,3$  ф.,  $c = 378,2$  ф., то  $B = 56^\circ 7' 21''$ ,  $23$ ,  
 $C = 33^\circ 52' 38''$ ,  $77$ ,  $a = 678,4856$  ф.,  $F = 106520,03$  □ ф.

§ 34. Треугольникъ можетъ быть вычисленъ не только по даннымъ сторонамъ и угламъ, но также, если будутъ извѣстны такія условія, которыя выражаютъ связь между частями тре—ка, такъ напр. если даны площадь и острый уголъ, площадь и одна сторона, гипотенуза и опущенный на нее изъ противоположащей вершины перпендикуляръ, сумма двухъ сторонъ и третья сторона и т. д. Рѣшеніе задачъ такого рода всегда можно привести къ одному изъ рассмотренныхъ нами случаевъ, если число данныхъ условий равняется числу искомыхъ частей тре—ка.

## VII. Рѣшеніе равнобедренныхъ тре—ковъ.



§ 35. Будемъ обозначать основаніе равнобедреннаго тре—ка буквою  $a$  и противолежащій ему уголъ буквою  $A$ . По причинѣ равенства сторонъ  $b = c$  и угловъ  $B = C$  для рѣшенія тре—ка достаточно знать только двѣ части, а именно 1) или основаніе и одинъ уголъ, 2) или боковую сторону и одинъ уголъ, 3) или основаніе и боковую сторону.

Если проведемъ высоту  $AD = h$ , то уголъ  $BAD = \frac{1}{2}A$ , линія  $BD = \frac{1}{2}a$  и площадь  $F = \frac{1}{2}ah$ . Такъ какъ  $B = C$ , то  $A + 2B = 180^\circ$ .

§ 36. Даны основаніе  $a$  и уголъ  $B$  или  $A$ .

Рѣш. 1)  $A = 180^\circ - 2B$  или  $B = 90^\circ - \frac{1}{2}A$

2) Изъ  $\frac{1}{2}a = c \cos B$  слѣд.  $c = \frac{a}{2 \cos B} = \frac{a}{2 \sin \frac{1}{2}A}$

3) По  $h = \frac{1}{2}a \operatorname{tg} B = \frac{1}{2}a \cotg \frac{1}{2}A$  слѣдуетъ.

$$F = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{tg} B = \frac{1}{4}a^2 \cotg \frac{1}{2}A.$$

§ 37. Даны боковая сторона  $c$  и уголъ  $B$  или  $A$ .

Рѣш. 1)  $A = 180^\circ - 2B$  или  $B = 90^\circ - \frac{1}{2}A$

2)  $a = 2c \cos B = 2c \sin \frac{1}{2}A$

3)  $F = \frac{1}{2}ah$ , но  $a = 2c \cos B$ ,  $h = c \sin B$ , слѣд.

$$F = c^2 \cos B \sin B = c^2 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}c^2 \sin A \quad (\S 12, 20).$$

§ 38. Даны основаніе  $a$  и боковая сторона  $c$ .

Рѣш. 1)  $\cos B = \frac{a}{2c}$ . 2)  $A = 180^\circ - 2B$

$$3) F = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \sqrt{\left(c + \frac{a}{2}\right)\left(c - \frac{a}{2}\right)}$$

Примѣръ.  $a = 6 \text{ ф.}$ ,  $b = c = 5 \text{ ф.}$ ,  $A = 73^\circ 44' 23''$ ,  $24$ ,  
 $B = C = 53^\circ 07' 48''$ ,  $38$ ,  $F = 12 \square \text{ ф.}$

§ 39. Рѣшеніе равнобедренныхъ тре—ковъ примѣняется при вычисленіи правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ и описанныхъ около него.

По данной сторонѣ  $s$  правильного  $n$ —угольника опредѣлить радіусы  $r$  и  $R$  круговъ вписаннаго и описаннаго и площадь  $F$  мно—ка.

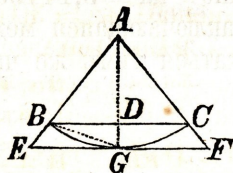
Рѣш. Пусть  $BAC$  будетъ одинъ изъ равнобедренныхъ тре—ковъ, на которые раздѣляется  $n$ —угольникъ линиями, проведенными изъ центра  $A$  къ вершинамъ угловъ, тогда перпендикуляръ  $AD = r$ ,  $AB = R$ ,  $BC = s$ ,  $BD = \frac{1}{2}s$ ,  $\sphericalangle BAC = \frac{360^\circ}{n}$  и  $\sphericalangle BAD = \frac{180^\circ}{n}$ .

Такъ какъ  $AD = r = BD \cotg BAD$ ,  
 $\frac{BD}{AB} = \sin BAD$ , слѣд.  $AB = R = \frac{BD}{\sin BAD}$ , то

$$1) r = \frac{1}{2}s \cdot \cotg \frac{180^\circ}{n}$$

$$2) R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$3) F = \frac{sr}{2} \cdot n = \frac{1}{4}s^2 n \cdot \cotg \frac{180^\circ}{n}$$



Примѣръ. Если  $s = 64$  ф.,  $n = 9$ , то  $r = 87,91928$  ф.,  
 $R = 93,56174$  ф.,  $F = 25320,75$  □ ф.

§ 40. По данному радіусу  $r$  круга опредѣлить сторону, периметръ и площадь вписаннаго и описаннаго прав.  $n$ —угольника.

Рѣш. Пусть въ фигурѣ § 39  $BC$  и  $EF$  будутъ стороны впис. и опис.  $n$ —угольника, тогда  $AB = AG = r$ ,  $\sphericalangle BAG = \frac{180^\circ}{n}$ ,  $BC = 2BD$ ,  $BD = r \sin \frac{180^\circ}{n}$ ,  $AD = r \cos \frac{180^\circ}{n}$ ,  
 слѣд. во вписанномъ  $n$ —угольникѣ:

$$1) \text{ сторона } BC = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \quad 2) \text{ периметръ } = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$3) \text{ площадь} = \frac{1}{2} \text{ пер.} \times AD = nr^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \cos \frac{180^\circ}{n} = \\ \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{360^\circ}{n} (\S 12, 20)$$

Такъ какъ  $EF = 2EG$ ,  $EG = AG \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ ,  
то въ описанномъ  $n$ -угольникѣ:

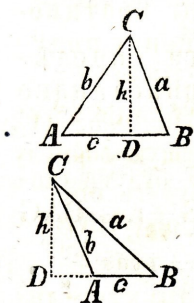
$$4) \text{ сторона } EF = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \quad 5) \text{ периметръ} = 2nr \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$6) \text{ Площадь} = \frac{r}{2} \times \text{перим.} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Примѣръ. Если  $r = \frac{1}{2}$ ,  $n = 21600$ , слѣд.  $\frac{180^\circ}{n} = 30''$ ,  
тогда находимъ, что периметръ вписаннаго и описаннаго мно—ка = 3,1415926, изъ чего слѣдуетъ, что и окружность, заключающаяся между обоими периметрами, должна выражаться тѣмъ же числомъ.

## VIII. Рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ.

§ 41. Разсмотримъ сперва нѣкоторыя предложенія, на которыхъ основано рѣшеніе косоугольныхъ тре—ковъ.



Если изъ вершины  $C$  остроугольнаго или тупоугольнаго тре—ка  $ABC$  опустимъ на противоположную сторону  $AB$  или ея продолженіе перпендикуляръ  $h$ , то въ обоихъ случаяхъ  $h = b \sin A$  и  $h = a \sin B$ , слѣд.  $b \sin A = a \sin B$  или

$$a : b = \sin A : \sin B, \quad \text{и точно также}$$

$$a : c = \sin A : \sin C$$

$$b : c = \sin B : \sin C.$$

Т. е. Стороны тре—ковъ относятся какъ синусы противоположныхъ имъ угловъ.

§ 42. (Фиг. § 41). По известному предложению планиметрии-

$$\text{въ первой фигурѣ } a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD$$

$$\text{во второй фигурѣ } a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD$$

Такъ какъ въ первомъ случаѣ  $AD = b \cos A$ , во второмъ  $AD = -b \cos A$ , то подставивъ въ предыдущія выраженія вмѣсто линіи  $AD$  равныя ей величины, получимъ для обоихъ случаевъ:

$$1) \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ слѣд. } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2) \ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \text{ слѣд. } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$3) \ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \text{ слѣд. } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Во всякомъ тре—къ квадратъ одной стороны равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія этихъ же сторонъ на косинусъ заключающагося между ними угла.

§ 43. Такъ какъ  $a : b = \sin A : \sin B$ , то и

$$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B \text{ ИЛИ } (\S 12, 30, 31, \S 10, 12)$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)}{2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)} \text{ ИЛИ}$$

$$\mathbf{a + b : a - b = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B).}$$

Сумма двухъ сторонъ тре—ка относится къ ихъ разности какъ тангенсъ полусуммы противолежащихъ имъ угловъ относится къ тангенсу полуразности тѣхъ же угловъ.

Такъ какъ  $A + B = 180^\circ - C$  и  $\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$ , слѣд.  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C$  (§ 4), то предыдущую формулу можно представить и въ такомъ видѣ:

$$\mathbf{a + b : a - b = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B).}$$

§ 44. Если даны сумма и разность двухъ величинъ, то большая изъ нихъ опредѣлится, если къ полусуммѣ прибавить полуразность, а меньшая, если отъ полусуммы отнять полуразность.

Пусть  $x$  будет большая,  $y$  меньшая величина, сумма ихъ  $s$ , а разность  $d$ , тогда  $x + y = s$ ,  $x - y = d$ . Складывая и вычитая эти уравнения получимъ:

$$x = \frac{1}{2}(s + d), \quad y = \frac{1}{2}(s - d).$$

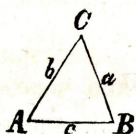
§ 45. Площадь ( $F$ ) тре—ка равна половинѣ произведения двухъ его сторонъ, умноженной на синусъ угла, заключающагося между ними.

Изъ фигуры § 41 видно, что  $h = a \sin B$ , и  $F = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ac \sin B$ . Точно также  $F = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ab \sin C$ .

### Первый случай.

§ 46. Даны сторона  $a$  и два угла; найти  $b, c, F$ .

Рѣш. Если даны два угла тре—ка, то и третій тоже известенъ. По § 41 и § 45 имѣемъ



$$\begin{aligned} 1) \quad b &= \frac{a \sin B}{\sin A} & 2) \quad c &= \frac{a \sin C}{\sin A} \\ 3) \quad F &= \frac{ab \sin C}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}. \end{aligned}$$

Изъ  $a = 487,5$  фут.,  $A = 103^\circ 48'$ ,  $B = 42^\circ 25'$  слѣдуетъ  $C = 33^\circ 47'$ ,  $b = 338,601$  фут.,  $c = 279,13367$  фут.,  $F = 45893,35$  □ ф.

### Второй случай.

§ 47. Даны стороны  $a, b$ , и лежащій между ними уголъ  $C$ ; найти  $A, B, c, F$ .

Рѣш. Если вычислимъ полусумму угловъ  $A$  и  $B$ , то найдемъ  $\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$ . Полуразность этихъ угловъ можно получить съ помощію пропорціи въ § 43, по которой  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C$ . По § 44 находимъ

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(A - B) & 2) \quad B &= \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}(A - B) \\ 3) \quad c &= \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B} & 4) \quad F &= \frac{1}{2}ab \sin C. \end{aligned}$$

Чтобы избѣжать отрицательныхъ количествъ, вставляютъ въ формулу  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C$  вмѣсто  $a$  большую, и вмѣсто  $b$  меньшую сторону тре—ка.

Примѣр. Изъ  $a = 1295,4$  ф.,  $b = 835,7$  ф.,  
 $C = 74^{\circ}25'30''$ , 4 слѣдуетъ

$\frac{1}{2}C = 37^{\circ}12'45'',2$	$\log(a-b) = 2,6624745$
$\frac{(A+b)}{2} = 52^{\circ}47'14'',8$	$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C = 0,1195370$
$a+b = 2131,1$	$CD \log(a+b) = 6,6713962 - 10$
$a-b = 459,7$	$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = 9,4534077$
	$\frac{1}{2}(A-B) = 15^{\circ}51'27'',51$
1) $A = 68^{\circ}38'42''31$	2) $B = 36^{\circ}55'47'',29$
3) $\log a = 3,1124939$	4) $\log a = 3,1124039$
$\log \sin C = 9,9837526 - 10$	$\log b = 2,9220504$
$CD \log \sin A = 0,0308905$	$\log \sin C = 9,9837527 - 10$
$\log c = 3,1270471$	$\log 2F = 6,0182070$
$c = 1339,822$ ф.	$F = 521407,2$ □ ф.

§ 48. Сторону  $c$  можно опредѣлить безъ предварительнаго вычисленія угловъ  $A$  и  $B$  непосредственно черезъ  $a, b, C$  (§ 42,3),

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Тогда (§ 41) найдемъ  $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$ ,  $\sin B = \frac{b \sin C}{c}$ .

### Третій случай.

§ 49. Даны три стороны  $a, b, c$ ; найти углы  $A, B, C$  и площадь  $F$ .

Рѣш. Изъ § 42 имѣемъ

$$1) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad 2) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$3) \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Чтобы получить формулы, удобныя для вычисленія съ помощію логарифмовъ, подставимъ  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  въ уравненія § 12, 24 и 25,

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \quad \text{и} \quad \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \text{тогда}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{4bc}} \quad \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} \quad \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}, \quad \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

Обозначимъ  $\mathbf{a + b + c}$  черезъ  $\mathbf{2s}$ , тогда  $b + c - a = 2(s - a)$ ,  $a + b - c = 2(s - c)$ ,  $a - b + c = 2(s - b)$ . Вставивъ эти величины въ предыдущія формулы, получимъ

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \text{и} \quad \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Раздѣливъ 1<sup>ое</sup> уравненіе на 2<sup>ое</sup> получимъ

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Если умножимъ числителя и знаменателя подкоренной дроби на  $s - a$ , предыдущее выраженіе будетъ имѣть видъ

$$4) \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{1}{s-a} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \quad \text{и точно}$$

$$\text{также } 5) \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \frac{1}{s-b} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$6) \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{1}{s-c} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Корень въ этихъ формулахъ должно всегда брать съ положительнымъ знакомъ, потому что половина всякаго угла въ тре—кѣ всегда острый уголъ. Для проверки счисления служить уравненіе  $A + B + C = 180^\circ$ .

Для вычисленія площади имѣемъ (§ 45 и § 12, 20)

$$F = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{bc \cdot 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A}{2} = bc \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\text{т. е. } 7) F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Изъ  $\frac{1}{2} bc \sin A = F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  слѣдуетъ

$$8) \quad \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Далѣ изъ фиг. § 41 и изъ урав. 8 слѣдуетъ

$$9) \quad h = b \sin A = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Съ помощію послѣдней формулы, въ которой  $h$  есть перпендикуляръ, опущенный на сторону  $c$  изъ противоположной вершины, опредѣляется высота тре—ка по даннымъ тремъ его сторонамъ.

Примѣръ. Если  $a = 97,5$ ,  $b = 84,5$  и  $c = 91$  ф., тогда

$$\begin{aligned} \log s &= 2,1351327 & \log (s-b) &= 1,7160033 \\ \log (s-a) &= 1,5910646 & \log (s-c) &= 1,6580114 \end{aligned}$$

$$\log \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = 1,4149733$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = 9,8239087 \quad A = 67^{\circ} 22' 48'', 46$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = 9,6989700 \quad B = 53^{\circ} 7' 48'', 36$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = 9,7569619 \quad C = 59^{\circ} 29' 23'', 12$$

$$\log F = 3,5501060 \quad F = 3549 \square \text{ ф.}$$

### Четвертый случай.

§ 50. Даны стороны  $a$ ,  $b$ , и уголъ  $A$ , противолежащій одной изъ данныхъ сторонъ; найти  $B, C, c, F$ .

$$\text{Рѣш. } 1) \quad \sin B = \frac{b \sin A}{a} \quad 2) \quad C = 180^{\circ} - (A + B)$$

$$3) \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B} \quad 4) \quad F = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Выраженія, найденныя для  $C$ ,  $c$ ,  $F$ , зависятъ отъ угла  $B$ , который можетъ быть острымъ и тупымъ.

Если  $a \geq b$ , слѣд. и  $A \geq B$ , то  $B$  можетъ быть только острымъ угломъ. Изъ  $a = 154,31$  ф.,  $b = 123,84$  ф.  $A = 43^{\circ} 17' 12'', 3$  слѣд.  $B = 33^{\circ} 23' 5'', 89$ ,  $C = 103^{\circ} 19' 41'', 81$ ,  $c = 218,9947$  ф.,  $F = 9297,517 \square$  ф.

Если  $a < b$ , слѣд. и  $A < B$ , то  $B$  можетъ быть какъ острымъ такъ и тупымъ. Въ такомъ случаѣ  $C$ ,  $c$ ,  $F$  будутъ имѣть по два различныя значенія и мы получимъ

два треугольника, заключающие данные части. Изъ  $a = 308 \text{ ф.}$ ,  $b = 375 \text{ ф.}$ ,  $A = 37^{\circ}45'$  слѣдуетъ

$$\log b = 2,5740313$$

$$\log \sin A = 9,7869056 - 10$$

$$\text{CD } \log a = 7,5114493 - 10$$

$$\log \sin B = 9,8723862 - 10, \text{ слѣд.}$$

$$1) B = 48^{\circ}11'34'',78 \quad \text{или}$$

$$1) B = 131^{\circ}48'25'',22$$

$$2) C = 94^{\circ}3'25'',22$$

$$2) C = 10^{\circ}26'34'',78$$

$$3) \log \sin C = 9,9989103 - 10$$

$$3) \log \sin C = 9,2582952 - 10$$

$$\log a = 2,4885507$$

$$\log a = 2,4885507$$

$$\text{CD } \log \sin A = 0,2130944$$

$$\text{CD } \log \sin A = 0,2130944$$

$$\log c = 2,7005554$$

$$\log c = 1,9599403$$

$$c = 501,8286 \text{ ф.}$$

$$c = 91,18859 \text{ ф.}$$

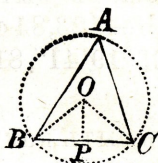
$$4) F = 57605,28 \square \text{ ф.}$$

$$4) F = 10467,6 \square \text{ ф.}$$

Въ частномъ случаѣ, если  $a < b$  и въ то же время  $a = b \sin A$ , то  $\sin B = 1$ , слѣд.  $B = 90^{\circ}$ ; тогда получится только одинъ тре—къ, который будетъ имѣть прямой уголъ. Если же  $a < b$  и въ то же время  $a < b \sin A$ , слѣд.  $\sin B > 1$ , тогда нельзя будетъ найти тре—ка, который бы имѣлъ данные въ задачѣ части.

§ 51. Съ помощью формуль въ § 49 можно рѣшить слѣдующую задачу:

По даннымъ сторонамъ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  тре—ка  $ABC$  опредѣлить радиусы  $R$  и  $r$  круговъ описаннаго и вписаннаго.



Рѣш. 1) Опишемъ около тре—ка  $ABC$  кругъ и проведемъ изъ центра  $O$  прямую  $OP \perp BC$  и линіи  $OB$  и  $OC$ , тогда

$$BC = 2BO \sin \frac{1}{2} \angle BOC = 2R \sin A, \text{ слѣд.}$$

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin A}.$$

Такъ какъ (§ 49,8)  $\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ,

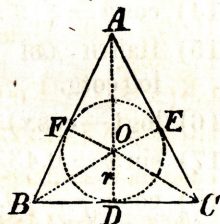
гдѣ  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ , то (§ 49,7)

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{abc}{4F}.$$

2) Проведемъ изъ центра къ вершинамъ тре—ка прямая и опустимъ изъ центра на стороны  $a, b, c$  тре—ка перпендикуляры  $OD, OE, OF$ , тогда

$$F = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{r}{2}(a+b+c), \text{ слѣд.}$$

$$r = \frac{2F}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a+b+c}.$$



## IX. Задачи.

§ 52. Углы и ихъ тригон. величины (§ 2—28).

- 1) Выразить посредствомъ тригон. величинъ угла меньшаго  $45^\circ$  тригонометрическія величины слѣдующихъ угловъ: а)  $\sin 74^\circ 41' 50''$  б)  $\sin 124^\circ 40'$  в)  $\sin 156^\circ 30'$  д)  $\cos 75^\circ 5''$  е)  $\cos 125^\circ$  ф)  $\cos 170^\circ 3' 35''$  г)  $\operatorname{tg} 57^\circ 46'$  h)  $\operatorname{tg} 95^\circ 55' 6''$  i)  $178^\circ 33''$  k)  $\operatorname{cotg} 52^\circ 48'$  l)  $\operatorname{cotg} 134^\circ$  m)  $\operatorname{cotg} 136^\circ 5'$ .
- 2) Данъ  $\sin a = 0,6$ ; найти  $\cos a, \operatorname{tg} a, \operatorname{cotg} a$ .
- 3) По  $\cos a = -0,7071$  вычислить  $\sin a, \operatorname{tg} a, \operatorname{cotg} a$ .
- 4)  $\operatorname{tg} a = 0,0174551$ ; найти  $\sin a, \cos a, \operatorname{cotg} a$ .
- 5)  $\operatorname{cotg} a = -0,602$ ; найти  $\sin a, \cos a, \operatorname{tg} a$ .
- 6)  $\operatorname{tg} a = 3,1246$ ; найти  $\operatorname{tg}(a + 45^\circ)$ .
- 7)  $\sin a = 0,2$ ; найти  $\sin \frac{a}{2}$  и  $\cos \frac{a}{2}$ .
- 8) Данъ  $\cos a = 25:144$ ; найти  $\cos \frac{a}{2}$ .

- 9) Выразить  $\cos 75^\circ$  через  $\sin 30$ ,  $\sin 45^\circ$ ,  $\cos 30^\circ$ ,  $\cos 45^\circ$ .
- 10) Вычислить  $\sin 60^\circ$  по формулѣ § 12, 20.
- 11) Съ помощію  $\sin 45^\circ$  и  $\cos 45^\circ$  вычислить  $\sin 90^\circ$  и  $\cos 90$ .
- 12) Вычислить  $\cos 15^\circ$  (§ 11, 19 и § 12, 24)
- 13)  $\cos a = \frac{1}{2}$ ; найти  $\cos 2a$  и  $\operatorname{tg} 2a$ .
- 14)  $\cos a = \frac{1}{3}$  и  $\cos b = \frac{1}{3}$  найти  $\sin(a + b)$  и  $\cos(a - b)$ .
- 15) Найти для угла  $102^\circ 22' 56''$ ,  $\log \sin$ ,  $\log \cos$ ,  $\log \operatorname{tg}$ ,  $\log \operatorname{cotg}$ .
- 16)  $\log(-\cos x) = 0,9201496 - 1$ ;  $\log(-\operatorname{tg} y) = 0,3176782$ .
- 17)  $\sin a = 0,433397$ ; найти  $\cos a$ ,  $\operatorname{tg} a$ ,  $\operatorname{cotg} a$ .
- 18)  $\cos a = -0,9781475$ ; найти  $\sin a$ ,  $\operatorname{tg} a$ ,  $\operatorname{cotg} a$ .
- 19)  $\operatorname{tg} a = \pm 0,371571$ ; найти  $\sin a$ ,  $\cos a$ ,  $\operatorname{cotg} a$ .
- 20)  $\operatorname{cotg}(45^\circ - a) = \sqrt{3}$ ; найти  $\log \operatorname{tg}(45^\circ + a)$ .
- 21) Углы тре—ка  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b + c) = 1,3168521$ ; опредѣлить  $a$ .
- 22) Данъ  $\log \operatorname{cotg} x = 1,0031187$  ( $n$ ); найти  $x$  и  $\log \cos x$ .
- 23)  $\operatorname{tg} a = x$  и  $x^2 + 3x = -2$ ; найти  $a$ .
- 24)  $\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ , гдѣ  $a = \pm 10$ ,  $b = -7$ ,  $c = 13$ .
- 25)  $\log \sin(a + 90^\circ) = 0,9904044 - 1$ ; найти  $\cos a$ .
- 26)  $\sin^2 x = 0,5$  и  $\operatorname{tg}^2 y = 0,2955551$ .
- 27)  $\log \operatorname{tg} x = -3$ .
- 28)  $\cos x = \frac{\cos 143^\circ 28' 59''}{\sin 109^\circ 2' 28''}$ .
- 29)  $\log \operatorname{tg} 2a = 0,4771213$ ; найти  $\operatorname{tg} a$ .
- 30)  $\operatorname{tg} x = 3$ ; найти  $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ .
- 31)  $x = \frac{\sin 35^\circ 13' \cos 145^\circ 50'}{3 \operatorname{tg} 140^\circ \operatorname{cotg} 92^\circ 22' \cos 125^\circ}$ .
- 32)  $\cos x = \frac{0,5 \cos 34^\circ 10'}{\operatorname{tg} 73 \sin 150^\circ}$ ;  $y = \frac{345 \operatorname{tg} 13^\circ 15' 50''}{\sin^2 15^\circ}$ .
- 33) Выразить длину дуги въ  $20^\circ$  въ частяхъ радіуса.
- 34) Найти уголъ, котораго дуга равна  $3^{\text{мь}}$  радіусамъ.
- 35) Выразить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ дугу, которой длина равна радіусу.
- 36) Найти  $\log \sin 302^\circ 54'$ ,  $\log \cos 254^\circ 47'$ ,  $\operatorname{tg} 206^\circ 34'$ ,  $\operatorname{cotg} 323^\circ 53'$ ,  $\cos 346^\circ$ ,  $\sin 400^\circ$ ,  $\log \cos 785^\circ$ ,  $\log \sin 1029^\circ$ ,  $\sin(-1029^\circ)$ ,  $\cos(-300^\circ)$ ,

### § 53. Прямоугольные тре — ки (§ 29—33).

Въ слѣдующихъ задачахъ буквы А, В, С, а, b, с, F всегда будутъ имѣть значеніе, определенное нами въ § 29.

- 37) Определить стороны прямоугольника, котораго діагональ = 325 ф. и составляетъ уголъ  $25^{\circ}42'$  съ одной стороною.
- 38) Дана пропорція  $a : b : c = 5 : 4 : 3$ ; найти В и С.
- 39) Въ кругѣ, котораго радіусъ равенъ 3 ф., определить разстояніе центра отъ хорды, стягивающей дугу въ  $17^{\circ}20'$ .
- 40) Определить меньшій уголъ прямоугольнаго тре — ка, въ которомъ катеты относятся какъ 5 : 12.
- 41) По даннымъ сторонамъ 4937 ф. и 3874 ф. прямоугольника определить углы этихъ сторонъ съ діагональю.
- 42) Тѣнь, бросаемая вертикальнымъ столбомъ въ 21,2 футовъ, равна 34,8 футамъ; найти угловое разстояніе солнца отъ горизонта.
- 43) Тѣнь, бросаемая вертикально поставленною палкою, короче самой палки на  $\frac{1}{4}$  ея величины; определить высоту солнца.
- 44) Діаметрально противоположныя образующія прямого конуса, котораго высота равна 4 фута, составляютъ уголъ въ  $73^{\circ}44'23'',28$ ; найти діаметръ основанія.
- 45) Въ прямомъ усѣченномъ конусѣ радіусы верхняго и нижняго оснований равны 4 ф. и 11,5 ф., и діаметрально противоположныя образующія составляютъ уголъ въ  $73^{\circ}44'23'',28$ ; вычислить боковую поверхность.
- 46) Діагональ сѣченія прямого цилиндра плоскостью, проходящею черезъ ось, равна 17 ф. и составляетъ съ плоскостью основанія уголъ въ  $61^{\circ}55'39'',04$ ; найти объемъ цилиндра.
- 47) Чтобы измѣрять ширину рѣки, отложили вдоль берега линію  $AB = 159$  ф., изъ точки А возставили перпендикуляръ, который пересѣкъ противоположный берегъ въ точкѣ С, а уголъ  $ABC = 53^{\circ}7'48'',4$ ; найти ширину рѣки.
- 48) Определить уголъ, подъ которымъ виденъ вертикально поставленный шестъ, котораго длина въ 500 разъ меньше разстоянія шеста отъ наблюдателя.
- 49) Какой величины кажется человекъ въ  $5\frac{1}{2}$  футовъ ростомъ другому такого же роста, который находится отъ него на разстояніи 138 футовъ?

- 50) На одной и той же горизонтальной плоскости стоит башня АВ, которой высота = 200 ф., и столбъ CD, меньше башни. Найти высоту столба, если даны будутъ углы при вершинѣ столба,  $\text{BAC} = 60^\circ$  и  $\text{BAD} = 30^\circ$ .
- 51) Подъ какимъ угломъ видна башня въ 372 фута высотой, если наблюдатель удаленъ отъ ней на 1712 фута и находится на высотѣ 11 футовъ надъ горизонтальною поверхностью?
- 52) Воздушный шаръ, котораго діаметръ = 40 футамъ, поднимается на мѣстѣ А по вертикальному направленію, и черезъ нѣсколько времени замѣченъ наблюдателемъ, находящимся на разстояніи 4000 футовъ отъ мѣста А, подъ угломъ въ  $30'$ . Какъ высоко находится шаръ въ этотъ моментъ?
- 53) Вычислить радіусъ круга, вписаннаго въ прямоугольный тре—къ, котораго катетъ  $c = 77$  футамъ, а уголъ  $B = 25^\circ 3' 27'', 42$ .

Въ слѣдующихъ задачахъ требуется, по даннымъ частямъ прямоугольнаго тре—ка вычислить остальные его части.

- 54) Площадь  $F = 1014 \square$  ф. и уголъ  $B = 53^\circ 7' 48'', 39$ .
- 55) Площадь  $F = 139,9045 \square$  ф. и катетъ  $c = 20,5893$  ф.
- 56) Площадь  $F = 275 \square$  ф. и гипотенуза  $a = 62$  ф.
- 57) Гипотенуза  $a = 5$  ф. и опущенный на нее изъ противоположащей вершины перпендикуляръ  $h = 2,4$  ф.
- 58) Сумма гипотенузы и одного катета  $a + c = s = 8$  ф., другой катетъ  $b = 4$  ф.
- 59) Сумма катетовъ  $b + c = s = 14$  футамъ и уголъ  $B = 36^\circ 52' 11'', 62$ .
- 60) Сумма гипотенузы и одного катета = 18 ф. сумма гипотенузы и другого катета = 16 ф.
- 61) Площадь  $F = 60 \square$  ф., сумма катетовъ = 32 ф.
- 62) Площадь  $F = 4 \square$  ф. и периметръ  $a + b + c = s = 20$  ф.
- 63) Гипотенуза  $a = 56$  ф., сумма катетовъ  $b + c = s = 64$  ф.
- 64) Периметръ  $a + b + c = 90$  ф. и опущенная на гипотенузу высота тре—ка  $h = 8,7804878$  ф.

- 65) Площадь  $F = 11$  □ ф. и радиусъ описаннаго круга  $R = 6,2$  ф.

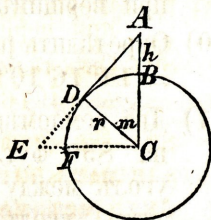
Въ слѣдующихъ задачахъ принято, что земля есть шаръ, котораго діаметръ равенъ 1719 географ. милямъ, окружность большаго круга ея = 5400 геог. мил., градусъ большаго круга = 15 геог. мил., геог. миля = 24303 русск. футамаъ.

- 66) Зная экваторъ земли, вычислить окружность параллели, проходящей черезъ  $50^{\circ}57'$  широты.  
67) Подъ какою широтою проходитъ параллеля, которой окружность равна 3208,49 милямъ?

- 68) Съ какою скоростью въ секунду движетъя С. Петербургъ на  $60^{\circ}$  широты, въ слѣдствіе вращенія земли около оси?

- 69) Какъ высока должна быть гора, чтобы ея вершина была видна за 20 миль?

- 70) На какое разстояніе кругомъ можетъ человѣкъ въ 5 фут. ростомъ обозрѣть ровную мѣстность?



- 71) Вершина Teneriffскаго Пика видна за 33,3 мили съ корабля, если наблюдатель поднимется на немъ такъ, что глазъ его будетъ на 30 фут. выше поверхности моря. Определить высоту горы.

- 72) На какомъ разстояніи кривизна земли еще позволить видѣть другъ друга двумъ наблюдателямъ въ 6 футовъ ростомъ?

- 73) Какъ высоко надъ поверхностью моря должно лежать мѣсто, что бы изъ него видна еще была на горизонтѣ вершина Давалагири 27343 фут. высотой, если это мѣсто отстоитъ на 50,35 миль отъ горы?

- 74) На вершинѣ Чимборозо уголь, образуемый горизонтальною линією съ линією, проведенною въ той же вертикальной плоскости отъ вершины къ горизонту, равенъ  $2^{\circ}49'50'',39$ ; найти высоту горы.

- 75) Какъ высоко нужно подняться надъ поверхностью земли, чтобы обозрѣть поверхность, равную холодному поясу, т. е. 384977 □ миль?

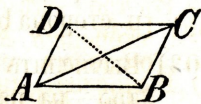
§ 54. Равнобедренные тре—ки и правильные многоугольники (§ 35—40).

- 76) Въ правильной четырехсторонней пирамидѣ плоскіе углы при вершинѣ равны каждый  $45^{\circ}35'$ , а площадь основанія  $120 \square$  фут., какъ велика вся поверхность пирамиды?
- 77) Образующая прямого конуса равна 35 футамъ и составляетъ съ плоскостью основанія уголъ  $27^{\circ}19'$ ; найти высоту конуса.
- 78) Квадратъ длины прямоугольника равенъ двойному квадрату его ширины; подъ какимъ угломъ пересѣкутся діагонали прямоугольника?
- 79) Въ равнобедренномъ тре—кѣ квадратъ стороны относится къ квадрату основанія какъ 3:4; опредѣлить уголъ при вершинѣ.
- 80) Опредѣлить радіусъ круга, въ которомъ вписанный уголъ  $= 14^{\circ}16'10''$  и опирается на хорду, равную 367,375 ф.
- 81) Два землемѣра находятся въ двухъ точкахъ, отстоящихъ на 850 фут. отъ вѣхи; одинъ изъ нихъ измѣрялъ уголъ между вѣхою и его товарищемъ и нашель, что этотъ уголъ  $= 36^{\circ}52'11'',62$ ; на какомъ разстояніи другъ отъ друга находились землемѣры?
- 82) Радіусъ круга, описаннаго около правильного  $15_{\text{н}}$  угольника равенъ 9,201 фут., найти радіусъ  $r$  круга, вписаннаго въ этотъ мн—къ, сторону его  $s$  и площадь  $g$ .
- 83) Площадь правильного  $37_{\text{н}}$  угольн. вписаннаго  $= 24127,94 \square$  фут., найти его сторону  $s$  и радіусъ  $r$  вписаннаго въ него круга.
- 84) Опредѣлить длину круга, котораго радіусъ  $= 187$  фут., если стягивающая дугу хорда  $= 36$  фут.
- 85) Если изъ какой либо точки круга, какъ изъ центра, опишемъ его же радіусомъ другой кругъ, то половина хорды общей обоимъ кругамъ приблизительно равна сторонѣ правильного  $7_{\text{н}}$  угольника, вписаннаго въ этотъ же кругъ. Какъ велика разность между центральнымъ угломъ, соотвѣтствующимъ сторонѣ  $7_{\text{н}}$  угольника и центральнымъ угломъ, соотвѣтствующимъ половинѣ общей обоимъ кругамъ хорды?

- 86) Объемъ призмы = 50 куб. футъ; высота равна двойному диаметру круга, описаннаго около основанія призмы, которое представляетъ правилн. осмиугольникъ; вичислить сторону основанія.
- 87) Рѣшить тре—къ по данной площади  $F = 79,45 \square$  фут. и сторонѣ  $b = 30,4$  фут.
- 88) Рѣшить тре—къ, котораго высота  $h = 72$  фут. и сумма основанія и стороны  $a + b = 210$  футамъ.
- 89) Рѣшить равнобедренный тре—къ, котораго периметръ = 4 фут., а высота = 1 фут.
- 90) Вычислить  $\pi$  изъ периметровъ 24000 — угольниковъ вписаннаго и описаннаго.
- 91) Вычислить хорду, соотвѣтствующую  $17^{\circ}13'24''$  въ кругѣ, радиусъ котораго = 23,4 ф.

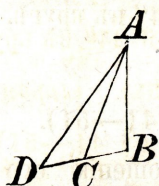
### § 55. Косоугольные треугольники (§ 41—51).

- 92) Вычислить углы тре—ка по данному отношенію его сторонъ  $a:b:c = 8:15:17$ .
- 93) Даны стороны тре—ка  $a = 56$ ,  $b = 52$ ,  $C = 60$  фут., вычислить длину линіи, соединяющей вершину угла  $A$  со серединою стороны  $a$ .
- 94) Даны стороны тре—ка  $a = 106,4177$ ,  $b = 115,47$ ,  $C = 94,1321$  фут.; вычислить перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ тре—ка на противолежащія стороны.
- 95) Изъ точки движутся 2 тѣло, одно со скоростію 83,4 фут., другое со скоростію 70,5 фут. въ секунду, по направленіямъ, которыя составляютъ уголъ  $98^{\circ}43'$ ; на какомъ разстояніи другъ отъ друга будутъ находиться эти тѣла черезъ 5 секундъ?
- 96) Если двѣ силы, которыхъ величина и направленіе выражаются прямыми  $AB$  и  $AD$ , дѣйствуютъ на точку  $A$  подъ какимъ нибудь угломъ, то равнодѣйствующая этихъ силъ (которыя въ такомъ случаѣ называются составляющими) совпадаетъ по величинѣ и по направленію съ діагональю  $AC$  параллелограма, построеннаго на силахъ  $AB$  и  $AD$ . Одна изъ составляющихъ выражается прямою, равною



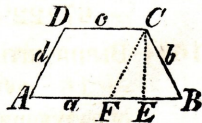
684,56756 футамъ и образуетъ съ равнодѣйствующею и съ другою составляющею углы  $44^{\circ}44'44''$  и  $90^{\circ}50'40''$ , какъ велика должна быть другая составляющая.

- 97) Двѣ силы въ 200 и въ 500 фунтовъ дѣйствуютъ на точку подъ угломъ  $70^{\circ}$ , опредѣлить величину равнодѣйствующей и уголь, который она образуетъ съ меньшею составляющею.
- 98) Даны двѣ стороны тре—ка,  $a = 93$  фут.,  $b = 181$  фут., и заключающійся между ними уголь  $C = 42^{\circ}34'10''$ ; черезъ вершину  $A$  проведена линія, отрѣзывающая  $\frac{1}{3}$  площади тре—ка; опредѣлить величины угловъ, на которые раздѣлится эту линією уголь  $A$ .

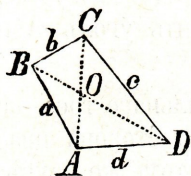


- 99) Чтобы измѣрять высоту башни  $AB$ , которая стоитъ на склонѣ горы, отъ основанія башни проложена линія  $BD = 428$  ф. и измѣряны углы, подъ которыми видна башня съ конца  $D$  линіи  $BD$  и изъ середины  $C$ , первый уголь  $= 35^{\circ}24'42''$ ,  $97$ , а  $2^{\text{ой}} = 53^{\circ}33'52''$ ,  $07$ . Какъ высока башня?
- 100) Чтобы измѣрять ширину  $CD$  рѣки (фиг. 99) продолжена линія  $CD$  до точки  $B$ : отъ этой точки проложена прямая  $BA = 200$ , которая образуетъ съ  $CD$  уголь  $B = 116^{\circ}11'$ ; измѣряны углы линіи  $AB$  съ линіями, направленными въ точки  $C$  и  $D$ , и найдено, что  $\sphericalangle BAC = 37^{\circ}20'$  и  $\sphericalangle BAD = 45^{\circ}5'$ . По этимъ даннымъ вычислить ширину рѣки.
- 101) Рѣшить тре—къ  $ABD$  (фиг. 99), въ которомъ  $\sphericalangle D = 53^{\circ}07'48''$ ,  $2$ , сторона  $BD = 56$  ф. и линія  $AC$ , дѣлящая тре—къ, пополамъ, равна  $48,66209$  ф.
- 102) Въ тре—кѣ основаніе  $a = 702$  фут., высота  $h = 537$  ф. и сторона  $b = 638$  фут.; опредѣлить сторону  $c$  и уголь  $A$ .
- 103) Вычислить перпендикуляры, опущенные изъ вершины тре—ка на противоположныя стороны, если даны сторона  $a = 975$  фут., стор.  $b = 845$  фут. и уголь  $A = 67^{\circ}22'48''$ ,  $48$ .
- 104) Вычислить объемъ конуса, если діаметръ его основанія  $= 16$  фут., большая образующая  $= 192$ , а меньшая образующая  $= 180$  фут.

- 105) Вычислить объемъ прямой пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ, если ребро при основаніи  $= 4,2426907$  ф., а боковое ребро  $= 5$  фут.
- 106) Въ параллелограммѣ  $ABCD$  (фиг. 96)  $AB = 380$  ф.,  $AD = 244$  ф.,  $AC = 527$  фут.; опредѣлить уголъ  $A$  и диагональ  $BD$ .
- 107) Если раздѣлить пополамъ сторону правильного тре—ка вписаннаго, то получится приблизительно сторона правильного семиугольника, вписаннаго въ тотъ же кругъ; найти разность между центральнымъ угломъ, соотвѣтствующимъ приближенной сторонѣ правильного семиугольника, и центральнымъ угломъ, соотвѣтствующимъ дѣйствительной сторонѣ прав. семиугольника.
- 108) Рѣшить тре—къ, въ которомъ сторона  $c = 2346$  фут., уголъ  $C = 92^{\circ}18'$  и отношеніе другихъ сторонъ будетъ  $a : b = 11 : 8$ .
- 109) Рѣшить тре—къ, въ которомъ площадь  $F = 120 \square$  ф.,  $\sphericalangle A = 14^{\circ}15'00''$ ,  $116$  и  $\sphericalangle B = 22^{\circ}37'11''$ ,  $5$ .
- 110) Рѣшить тре—къ, въ которомъ площадь  $F = 341,06 \square$  ф., сторона  $a = 139,3$  и сторона  $b = 27,2$  фут.
- 111) Рѣшить тре—къ, въ которомъ основаніе  $a = 98,57041$  ф., высота  $h = 43,8$  ф. и уголъ при вершинѣ  $A = 95^{\circ}39'20''$ .
- 112) Въ тре—кѣ даны уголъ  $A = 95^{\circ}27'9''$ ,  $457$  и противолежащая ему сторона, раздѣленная на 2 отрѣзка въ 36 и 8 футовъ перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ  $A$ ; рѣшить тре—къ.
- 113) Вычислить радиусы  $R$  и  $r$  круговъ вписаннаго въ тре—къ и описаннаго около него, если одна сторона  $b$  тре—ка  $b = 445,81$  фут., другая  $c = 443,6$  фут. и уголъ  $B = 33^{\circ}21'16''$ .
- 114) Даны три перпендикуляра, опущенные изъ вершинъ тре—ка на противолежащія стороны:  $1^{йй} = 840$  ф.,  $2^{йй} = 780$  ф.,  $3^{йй} = 728$ .
- 115) Въ трапеціи  $ABCD$  даны параллельныя стороны  $a = 13$  ф.,  $c = 5$  ф., непараллельныя стороны  $d = 15$  ф. и  $b = 17$  ф.; вычислить углы и площадь.



- 116) Въ трапеціи извѣстны высота  $CE = 7,56$  ф., основаніе  $a = 33$  фут. и прилежащіе къ основанію углы  $A = 30^{\circ}14'16''$  и  $B = 40^{\circ}40'38''$ ; вычислить сторону  $c$ , противолежащую основанію.



- 117) Пусть въ четырехугольникѣ ABCD діагонали  $AC = BD = 28,745788$  ф. и образованный діагоналями уголъ  $\angle AOD = 75^{\circ}30'$ ; вычислить площадь четырехугольника.

- 118) Чтобы измѣрять длину непреступной прямой BC, (ф. 117) провѣсили линію  $AD = 45501,62$  фут., опредѣлили при концахъ этой прямой углы  $\angle BAD = 106^{\circ}22'45,5$ ,  $\angle CAD = 67^{\circ}13'57,4$ ,  $\angle ADC = 62^{\circ}42'48,8$  и  $\angle ADB = 44^{\circ}12'39,6$ .

- 119) Въ четырехугольникѣ ABCD даны: сторона  $a = 24$  ф.,  $b = 20$  фут.,  $c = 18$  фут.,  $d = 16$  фут. и уголъ  $A = 85^{\circ}30'$ ; найти углы B, C, D, діагональ AC и площадь F четырехугольника.

