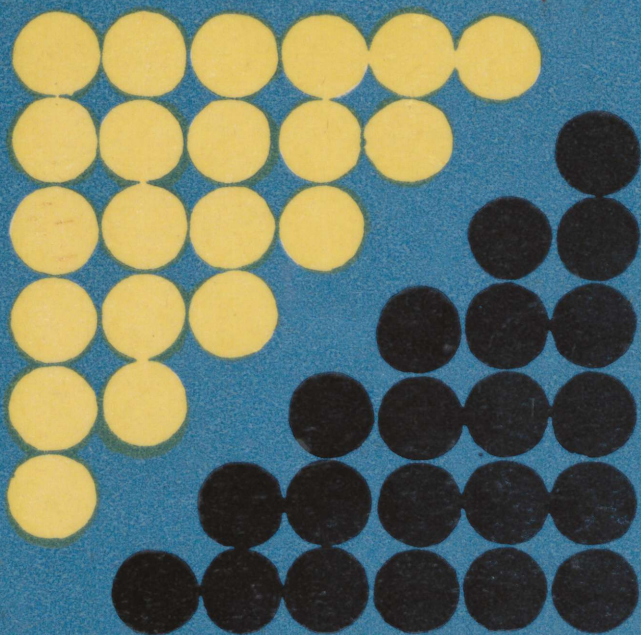


I. ROZENFELD

majandus. matemaatika abc



I. ROZENFELD

MAJANDUSMATEMAATIKA A B C

KIRJASTUS „VALGUS“

TALLINN 1969

Kunstiliselt kujundanud U. Lõivamägi

TARTU ÜLIRIIGI
RAAMATUKOGU

EESSÕNA

Kaasaegse teaduse arenemist iseloomustab järjest süvenev kübernetiseerumine ja matematiseerumine, millega ületatakse lõhed teadusharude vahel. Praegu on välja kujunemas rida uusi kompleksseid teadusharusid. Üheks niisuguseks uueks kompleksharuks on majandusküberneetika, mis on tekkinud majandusteaduse, sotsioloogia, küberneetika ja selliste matemaatika harude, nagu algebra, matemaatilise analüüsi, matemaatilise statistika, tõenäosusteooria, matemaatilise loogika, informatsiooniteooria ja algoritmide teooria piirialadel.

Majandusküberneetika sünd oli objektiivselt paratamatu nähtus. Majandussüsteemid kujutavad endast juhitavaid ülikeerulisi tõenäosuslikke dünaamilisi süsteeme, mis on jõudnud niisuguse arenguastmeni, et nende juhtimise edasine täiustamine nõuab põhimõtteliselt uusi meetodeid, viimased peavad aga rajanema küberneetika, matemaatika ja kaasaegse arvutustehnika uusimatel saavutustel.

Teaduse senine areng on veenvalt näidanud, et mida keerulisem on probleem, seda raskem on teda matemaatika abita lahendada. Niisugust seisukohta kinnitab ka majandusteaduse arengukäik.

Elu ise nõuab meilt majandusteaduse muutmist täppisteaduseks, majandusprotsesside kvalitatiivse kirjeldamise ühendamist kvantitatiivse analüüsiga, majandusmatemaatiliste mudelite loomist, mis kujuneksid juhtimise, planeerimise, teadusliku uurimise, katsetamise ja prognoosimise vahenditeks.

Materiaalsete väärtuste tootmine on ülikeeruline protsess, millel on ohtrasti kitsendusi ja mis oleneb paljudest välismõjudest. Näiteks tuleb arvestada majandussüsteemide võimaliku arendamise mitmevariandilisust, ressurs-

side defitsiitsust ning nende asendatavust tootmisel ja tarbimisel jne. Traditsioonilised juhtimis- ja planeerimis-meetodid ei võimalda rahuldavalt orienteeruda rohkearvulistes seostes ja anda kõige paremaid lahendusi.

Vanad juhtimis- ja planeerimismeetodid põhinevad paljuski intuiitiivsel ja kogemuslikul lähenemisel majandusprobleemidele. Nad annavad küll rahuldavaid ja kohati isegi häid lahendusi, ent mitte kõige paremaid, optimaalseid, kuigi just viimased võimaldavad märgatavalt tõsta tootmise efektiivsust. Seega vanade meetodite abil ei suuda me täita NLKP programmi nõuet saada minimaalsete kuludega maksimaalseid tulemusi, sest see nõue tähendab sisuliselt majanduse optimeerimist.

Majanduse optimeerimine majandusmatemaatiliste meetodite abil on niisugune planeerimismeetod, mis vastab tootlike jõudude antud arenguetapile, põhineb teaduslikel alustel ja paneb range piiri iga liiki subjektivistlikele püüdlustele.

Rahvamajanduse juhtimise ja planeerimise reorganiseerimine kaasaegse matemaatika meetodite ja arvutustehnika alusel on arusaadavalt pikaajaline mitmeetapiline protsess. Siin on veel palju vaieldavaid ja lahendamata probleeme. Praegu alustame alles esimest etappi, õppides tundma juhtimise ja planeerimise aktuaalseid osaülesandeid. Mitmetes rahvamajandusharudes on asutud informatsiooni töötlemise komplekssete automatiseeritud süsteemide loomisele. Lõppeesmärgiks on aga kogu sotsialistliku majanduse funktsioneerimise optimaalne süsteem, mis põhineks tsentraliseeritud planeerimise õigel ühendamisel üksikute majanduslülide kohaliku initsiatiiviga ning õigustega. See tähendaks kvalitatiivselt uut arenguetappi sotsialistlikus ökonoomikas.

Majanduslike stiimulite õige kasutamine loob olukorra, kus iga ettevõtte on otseselt huvitatud oma sisemiste reservide kõige efektiivsemast rakendamisest ja see soodustab ka majandusmatemaatika meetodite ulatuslikumat juurutamist praktikasse.

Ent võimalikkusest tegelikkuseni on veel pikk tee. Akadeemik N. Fedorenko formuleeris viis põhilist eeldust, millest oleneb majandusprobleemide optimeerimine.¹ Lühidalt on need järgmised:

¹ Н. П. Федоренко. *Управление производством и математические методы*. М. 1967, lk. 15.

1) optimaalsuse kriteeriumi majandusmatemaatiline mudel;

2) informatsioonisüsteem, mis kindlustab vajalike andmetega iga liiki plaaniülesannete lahendamiseks;

3) optimaalse planeerimise matemaatilised alused;

4) optimaalse planeerimise ja juhtimise tehniline baasriiklike arvutuskeskuste võrgu näol;

5) optimaalsete plaanide realiseerimise moraalsed ja materiaalsed stiimulid.

Mainitud eeltingimustele tuleks lisada majandusmatemaatika-alase ettevalmistuse andmine ökonomistidele. Seni kui ökonomistidel ei ole kas või elementaarseidki üldteadmisi majandusprotsesside matemaatilisest modelleerimisest, majandusmatemaatika probleemide põhiklassidest ning olemasolevatest lahendusmeetoditest, seni pole ka neid jõude, kes hakkaksid optimaalset planeerimist ellu viima. Oleks ilmselt ebareaalne lootma jääda ainuüksi nendele eriteadlastele, kes on koondunud teaduslikesse uurimisasutustesse, ametkondlikesse majandusmatemaatika laboratooriumidesse ja kõrgematesse õppeasutustesse. Sel kombel ei jõua me iialgi majandusmatemaatika meetodite massilise rakendamiseni.

Kahjuks toimub praegu vastavate eriteadmistega inimeste ettevalmistamine meie kõrgemates õppeasutustes aeglaselt. Väga vähe tehakse praktikute kvalifikatsiooni tõstmiseks, seepärast on praegusel ajal tähtsal kohal iseisev töö. Ülepea tuleks lugeda hädavajalikuks, et iga ökonomist omandaks vastava «miinimumi» majandusmatemaatika meetodite alal.

Et majandussüsteemid kuuluvad küberneetiliste süsteemide hulka, siis on loomulik eeldada, et iga ökonomist tunneb küberneetika põhimõisteid ja -meetodeid, mis võimaldavad näha vanu ja hästi tuntud nähtusi uues valguses ja avastada uusi fakte ning seaduspärasusi. Küberneetika loob aluse tootmise paremale organiseerimisele. Seega peaks ökonomistide majandusmatemaatika-alane «miinimum» sisaldama ka algteadmisi küberneetikast.

Käesoleva brošüüri on kirjutanud ökonomist ökonomistidele. Autor püüdis näidata, milliseid algteadmisi peaks omama ökonomist majandusmatemaatika meetoditest. Raamat ei pretendeeri mingil juhul ülalmainitud «miinimumi» projekti kohale. Ühelt poolt takistab seda brošüüri maht, teisest küljest tahtis autor anda mõndagi väljaspool «mii-

nimumi» raame, laiendada võimaluste piirides lugeja matemaatika- ja küberneetika-alast silmaringi, et kergendada tõsisema ja põhjalikuma erikirjanduse lugemist.

Autoril tuli kokku puutuda õige mitmesuguste arvamus- tega, selle kohta, milline peaks olema raamat ökonomistidele majandusmatemaatikast, missugune peaks olema selle matemaatiline osa.

On arvamus, et matemaatilise teooria küsimused on ülepea liigsed, iga kingsepp jäägu oma liistude juurde: matemaatika matemaatikutele, ökonoomika ökonomistidele. Ökonomistile jätkuvat oskusest formuleerida standardseid ülesandeid, kuigi ka see pole ilmtingimata vajalik — pöördutagu konsultatsiooni saamiseks matemaatiku poole. Kuulatakse ju raadiot ja vaadatakse televiisorit, tundmata nende elektrotehnilisi skeeme ja töötamise teoreetilisi aluseid.

Arusaadavalt on kõik põhimõtteliselt nõus sellega, et oleks hea, kui ökonomistid valdaksid majandusmatemaatika meetodeid nii praktikas kui ka teoreetiliselt. Viidatakse aga tõsiasjale, et valdav osa praktikuid on jõudnud matemaatika juba tublisti ära unustada ja pealegi pole nad enamasti õppinud «seda matemaatikat», mis moodustab matemaatilise planeerimise põhituuma. On õige, et paljud ökonomistid tunnevad otse kabuhirmu matemaatika ees, arvates, et selle mõistmine eeldab mingit erilist taipu. Kui niisugune ökonomist avab raamatu ja leiab sealt integraali või summeerimise sümboli, siis paneb ta selle raamatu kohe kiiresti kinni. Kas peame siis ka XX sajandil nõustuma Mikolaj Koperniku tuntud aforismiga, et «matemaatikast kirjutatakse ainult matemaatikutele»?

Tahaks väita vastupidist. Majandusmatemaatika meetodite juurutamisel töötavad seniste kogemuste põhjal kõige edukamalt ökonomistid loomungulises koostöös matemaatikutega. Koostöö on seda viljakam, mida paremini suudetakse leida ühist keelt. Ka konkreetsete majandusprotsesside matemaatiline kirjeldamine ei mahu alati väljakujunenud šablooni raamidesse ja nõuab ökonomistilt teatavat matemaatilist kultuuri ehk, nagu öeldakse, matemaatilist mõtlemisuskust. Selle omandamiseks on nõutavad üksnes püsivus, tahe ja töö. Mõnel kulub selleks rohkem, mõnel vähem vaeva, nagu näiteks ka võõrkeeles või muusika õppimisel. Tuleb mõista, et raamat matemaatikast pole kerge ajaviitejutt. Mõnda asja ei saa teha lihtsa-

maks, kui ta seda tegelikult on. Tahaksin ainult korrata tuntud nõukogude matemaatiku B. Delone sõnu: see, kes tegeleb abstraktsioonidega, kes on õppinud esile tooma iga nähtuse olemust sõltumata selle esemelisest koorikust, see orienteerub vabalt ka igas konkreetsetes probleemides.

Sellepärast alustamegi matemaatika ABC-st. Toodud materjali mõistmiseks pole lugejal vaja mingisuguseid erilisi eelteadmisi (välja arvatud tõenäosusteooriat käsitlev peatükk, mis eeldab kõrgema matemaatika elementide tundmist). Kõik vajalikud mõisted ja definitsioonid on toodud tekstis.

Piiratud ruum nõudis lakoonilist, peaaegu konspektiivset esituslaadi, mis võib mõnele lugejale esialgu raskusi teha. Loodame aga, et nende ületamine osutub heaks «ajude gümnaстикaks», mis arendabki matemaatilise mõtlemise võimet.

Võib arvata, et nii mõnelgi lugejal tekib matemaatilise osaga tutvumisel arvamus, et siin on kohati tegemist väga abstraktsete asjadega, mis on kaugel praktikast ja reaalsest elust; ta ei suuda alguses mõista, kuidas ja kus saaks ta neid tegelikkuses rakendada. Tuleb märkida, et matemaatilisse ossa on jäetud vaid see materjal, mida peaks tundma iga ökonomist, kes on otsustanud tõsiselt tegelda matemaatilise planeerimisega. Toodud küsimuste ring ei ammenda kaugeltki kogu probleemistikku, ent seda lünka peaks täitma juba eri raamat. Vajadus niisuguse eestikeelse käsiraamatu järele on suur.

Peatähelepanu on pühendatud majandusküberneetilis-tele, metodoloogilistele ja matemaatilise planeerimise organisatsioonilistele küsimustele. Seni on need jäänud matemaatiliste probleemide varju, kuigi majandusmatemaatika on majandusega metodoloogiliselt tihedalt seotud.

Majandusprotsesside modelleerimine on kõige olulisem etapp majandusmatemaatika meetodite rakendamisel. Siin avaldub täiel määral ökonomisti erialane kvalifikatsioon, tema oskus tungida uuritava majandusprotsessi olemusse — näha põhilisi mõjuvaid tegureid, eraldada olulist mitteolulisest, valida õige optimaalsuse kriteerium ja hinnata mudeli abstraktsiooni määra.

Kolmas osa käsitleb mõnede põhiliste matemaatilise planeerimise ülesannete lahendamise viise. Vaadeldakse peamiselt lineaarse planeerimise ülesandeid, mis on prak-

tikas seni kõige rohkem levinud tänu lahenduskäigu lihtsusele.

Seega koosneb brošüür kolmest suhteliselt iseseisvast osast. Olenevalt lugeja ettevalmistusest ja huvidest võib ta nendega tutvuda suvalises järjekorras.

Kasutan võimalust avaldada südamlikku tänu käsi- kirja läbivaatamise ning väärtuslike paranduste ja märkuste eest füüsika-matemaatikakandidaatidele dots. Ü. Kaasikule ja L. Võhandule, samuti retsensentidele dots. E. Tammele ja majandusteaduste kandidaadile H. Jalastole.

Tallinn, 1968

Autor

1. HULGAD

1.1. Üldmõisted. *Hulk* on matemaatika üks üldisemaid mõisteid, millel põhinevad kõik kaasaegse matemaatika harud. Hulka ei saa defineerida veelgi üldisemate mõistete abil, kuid ta on meile intuiitiivselt arusaadav ja teda saab kirjeldada konkreetsete näidete varal. Näiteks hulki moodustavad antud ettevõtte tooted, vabariigi linnad, teatud maja elanikud, päikesesüsteemi planeedid, naturaalarvud.

Niisiis kujutab hulk endast suvaliste *elementide* (objektide) ühendust tervikuks, kusjuures kõigil elementidel on ühine omadus. Seega on alati võimalik kindlaks teha, kas mingi element kuulub antud hulka või mitte. Hulk on antud tema elementide kaudu ja teda võib kindlaks määrata põhiliselt kahel viisil: elementide mingi omaduse kirjeldamisega või elementide *loetlemisega*. Hiljem näeme, et hulki saab moodustada ka mõningate tehete abil.

*Hulgateooria*¹ uurib abstraktsete hulkade üldisi omadusi, s. t. omadusi, mis ei olene elementide konkreetsest tähendusest. Hulgateooria ei defineeri lähemalt elemente, mille vahel kehtivad aksioomidega määratud suhted. Aksioomid on antud teooria raamides tõestamatud põhi- väited, mille põhjal tuletatakse kõik ülejäänud väited ja teoreemid ning defineeritakse ühte klassi kuuluvate matemaatiliste objektide ühised omadused.

Hulka märgime suurte, elemente — väikeste ladina tähtedega.

Hulgateooria põhiliseks mõisteks on *kuuluvuse suhe*, mida sõnastatakse järgmiselt: «element a kuulub hulka A », ja märgitakse $a \in A$. Kui element a ei kuulu hulka A , siis märgitakse seda nii: $a \notin A$.

¹ Hulgateooria looja on saksa matemaatik Georg Cantor (1845—1918).

Kaht hulka A ja B loetakse *võrdseteks*, kui hulga A iga element on hulga B elemendiks ja vastupidi. Võrdsed hulgad ei sisalda erinevaid elemente.

Hulka A , mis koosneb elementidest $a, b, c \dots$, märgitakse $\{a, b, c, \dots\}$. Kui tahetakse märkida, et hulk A koosneb muutujatest x , mis rahuldavad tingimust $F(x)$, siis kirjutatakse $A = \{x|F(x)\}$. Nii märgib tähistus $A = \{(x, y)|x + y = 1\}$ seda, et muutujate paaride hulk rahuldab võrrandit $x + y = 1$.

Hulka, mille elementide arvu võib väljendada positiivse täisarvuga, nimetatakse lõplikuks (näiteks antud raamatukogu raamatute hulk). Hulka, mille elementide arv on lõpmata suur, nimetatakse *lõpmatuks* (näiteks kõigi täisarvude hulk). Hulka, mis ei sisalda ühtki elementi, nimetatakse *tühjaks* (näiteks raha hulk tühjas kassas) ja märgitakse sümboliga $\emptyset$.

Kui kahe hulga A ja B elementide vahel on üksühene vastavus, siis nimetatakse neid hulki *ekvivalentseteks* ehk *võrdvõimsateks*. See tähendab, et kaks lõplikku hulka on ekvivalentsed ainult siis, kui neis on ühepalju elemente. Hulka, mis on ekvivalentne kõigi naturaalarvude hulgaga, nimetatakse *loenduvaks*.

Tavaliselt on teatud probleemi käsitlemisel tegemist ühe hulgaga, millesse kuuluvad kõik ülejäänud sama struktuuriga hulgad. Niisugust hulka nimetame *põhihulgaks* ja märgime sümboliga J . Ülejäänud hulgad, mis esinevad antud probleemi uurimisel, moodustavad põhihulga J *alamhulki*. Oletame, et uuritakse mingi tehase toodangut (põhihulk J), siis on põhihulga alamhulk näiteks antud tehase laiatarbesehhi toodang.

Kui hulk A on hulga B alamhulk, siis märgitakse seda järgmiselt:

$$A \subseteq B \text{ ehk } B \supseteq A$$

ja loetakse: «hulk B sisaldab hulka A ». Toodud suhe tähendab seda, et kui element a kuulub hulka B , siis kuulub ta ka hulka A . Kui hulk B sisaldab sealjuures kas või ühe elemendi, mis ei kuulu hulka A , siis märgitakse seda suhet

$$A \subset B \text{ ehk } B \supset A.$$

Sel juhul öeldakse, et hulk A kuulub rangelt hulka B .

Sageli nimetatakse põhihulka *uurimise ruumiks*, kusjuures ruumi mõistel pole siin üldjuhul mingit füüsikalist ega geomeetrilist sisu.

1.2. Tehted hulkadega. Hulga A ühendiks hulgaga B nimetatakse hulka $A \cup B$, mis koosneb kõikidest hulga A ja kõikidest hulga B elementidest (sealhulgas ka nendest, mis kuuluvad mõlemasse hulka). Olgu A antud ettevõtte kõigi nende tööliste hulk, kellel on keskharidus; B — ettevõtte kõigi nende tööliste hulk, kellel on viieaastane tööstaaž. Seega kuuluvad hulka $A \cup B$ kõik töölised viieaastase tööstaažiga ja keskharidusega ning need, kellel on kas viieaastane tööstaaž või keskharidus.

Hulga A ja hulga B ühisosaks nimetatakse siisugust hulka D , mille elemendid kuuluvad hulka A ja ühtlasi hulka B ; seda märgitakse $A \cap B = D$. Ülaltoodud näites kuuluvad hulka D ainult need töölised, kellel on 5-aastane tööstaaž ning ühtlasi keskharidus.

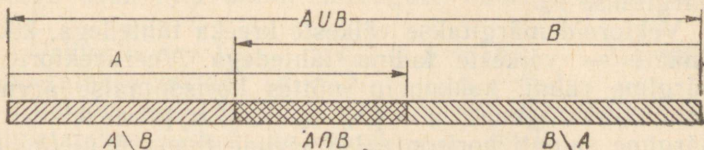
Kui hulkadel A ja B pole ühtki ühist elementi, siis $A \cap B = \emptyset$. Meie näites tähendaks see seda, et ettevõttes pole ühtki töolist, kel oleks 5-aastane tööstaaž ja ühtlasi keskharidus.

Hulkade A ja B vaheks nimetatakse siisugust hulka E , mis koosneb ainult hulga A elementidest ega sisalda ühtki hulga B elementi; seda märgitakse $A \setminus B = E$. Analoomiliselt märgib seos $B \setminus A = F$ siisugust hulka F , mis koosneb ainult hulga B kuuluvatest elementidest ega sisalda ühtki hulga A elementi.

Kui J on põhihulk, siis hulga A täiendiks nimetatakse siisugust hulga J suurimat alamhulka, mis ei sisalda hulga A elemente; seda märgitakse $\bar{A}$. Nii võib hulka $A \setminus B$ defineerida nüüd järgmiselt:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

Joonisel 1 on esitatud põhitehted hulkadega graafiliselt, et muuta nad näitlikumaks.



JOONIS 1.

Hulka G , mis koosneb ainult hulga A või ainult hulga B elementidest, nimetatakse *sümmeetriliseks vaheks* ehk *disjunktiivseks summaks* ja märgitakse $G = A \oplus B$. Joonisel 1 on

$$G = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Hulkade A ja B *geomeetriliseks korrutiseks* nimetatakse hulka, mille elementideks on niisugused elementide järjestatud paarid, mille esimene element kuulub hulka A , teine element hulka B ; seda märgitakse $A \times B$. Näiteks tasandi punktide hulga võib esitada järjestatud arvupaaride (koordinaatide) abil.

2. VEKTORID

2.1. Vektori ja vektorruumi mõiste. Iga rangelt järjestatud reaalarvude hulk moodustab süsteemi, mida nimetatakse *vektoriks*. Vektorit moodustavaid arve nimetatakse ka vektori *koordinaatideks*. Kui vektoril on n koordinaati, siis nimetatakse teda *n -dimensiooniliseks* vektoriks.¹

Igal ökonomistil on pidevalt tegemist vektoritega. Nii näiteks moodustavad vektoreid antud viisaastaku aastaarvude või üksikuteks aastateks ette nähtud toodangumahute väärtuste read (veerud) jne. Iga rangelt järjestatud arvude rida või veergu võime vaadelda vektorina.

Vektoreid võib kujutada ka geomeetriselt. Nii võib igale vektorile seada vastavusse mingi kindla punkti P või sirglõigu OP (geomeetriselises n -dimensioonilises ruumis), mis on suunatud Cartesiuse koordinaatide süsteemi nullpunktist antud punkti P . Näitlikult (geomeetriselt) saab vektorit kujutada ainult kolmedimensioonilises ruumis.

Kõik n -dimensioonilised vektorid moodustavad hulga, mida nimetatakse *n -dimensiooniliseks vektorruumiks* ja märgitakse V_n .

Vektoreid märgitakse väikeste kreeka tähtedega, koordinaate — väikeste ladina tähtedega. Veeurvektorit α märgime ruumi kokkuhoiu mõttes horisontaalse arvude reana nurksulgudes: $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$; reavektorit β märgime samuti horisontaalse arvude reana $\beta' = (b_1, b_2,$

¹ Vt. G. Kangro. *Kõrgem algebra*. Tallinn 1962, lk. 45.

$\dots, b_n)$, ent ümarsulgudes. Sümbol β' tähendab seda, et reavektor β' on saadud veeruvektori β transposeerimise teel, s. t. tema veeru muutmisel reaks.

Vaatleme mõningaid konkreetseid vektoreid, millel on erinimetused.

Vektorit, mille kõik koordinaadid on nullid, nimetatakse *nullvektoriks* ja märgitakse 0 .

Vektorit, mille i -ndaks koordinaadiks on 1, ülejäänud koordinaadid on aga nullid, nimetatakse i -ndaks *ühikvektoriks* ja märgitakse ξ_i . On ilmne, et n -dimensioonilises vektorruumis V_n on n ühikvektorit. Näiteks vektorruumis V_3 leiduvad järgmised ühikvektorid:

$$\xi_1 = [1, 0, 1], \quad \xi_2 = [0, 1, 0], \quad \xi_3 = [0, 0, 1]$$

Vektorit, mille kõik koordinaadid on ühed, nimetatakse *summeerivaks vektoriks* ja märgitakse

$$1' = (1, 1, \dots, 1).$$

2.2. Tehted vektoritega. Öeldakse, et vektorruum V on *kinnine* liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes. See tähendab, et kui vektorid α ja β kuuluvad antud vektorruumi V , siis kuuluvad sellesse vektorruumi ka summa $\alpha + \beta$ ning vektorite α ja β korrutised skalaariga a ($a\alpha$ ja $a\beta$). Järelikult, kui on tegemist vektorruumiga V_n , siis on n -dimensiooniliste vektorite summa ning korrutised skalaaridega samuti n -dimensioonilised vektorid.

Kahte vektorit $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ja $\beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ nimetatakse *võrdseteks* ($\alpha = \beta$), kui nende vastavad koordinaadid on võrdsed, s. o. kui $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. Analoogiliselt defineeritakse suhted $\alpha < \beta, \alpha > \beta, \alpha \leq \beta$ ja $\alpha \geq \beta$.

Näiteks $\alpha < \beta$ tähendab seda, et α kõik koordinaadid on väiksemad kui β vastavad koordinaadid.

Kahe vektori $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$ ja $\beta = [b_1, \dots, b_n]$ *summaks* nimetatakse vektorit $[a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n]$. Seega saab liita ainult ühesuguse dimensiooniga vektoreid.

Vektorite $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$ ja $\beta = [b_1, \dots, b_n]$ *vaheks* nimetatakse vektorit $[a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n]$.

Vektori $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$ *korrutiseks* skalaariga a nimetatakse vektorit $a\alpha = [aa_1, \dots, aa_n]$.

2.3. Lineaarne kombinatsioon. Lineaarse kombinatsiooni mõiste on üks tähtsamaid lineaarse planeerimise

teoorias ja seda rakendatakse ulatuslikult õige mitmesuguste probleemide lahendamisel.

Olgu antud m skalaari $a_1, \dots, a_m$ ja m n -dimensioonilist vektorit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Nende vektorite *lineaarseks kombinatsiooniks* nimetatakse vektorit

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_m\alpha_m = \sum_{i=1}^m a_i\alpha_i,^1 \quad (2.1)$$

kusjuures öeldakse, et vektor α avaldub või on esitatud vektorite $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ lineaarse kombinatsioonina.

Kui mittenegatiivsete skalaaride summa on võrdne ühega, s. o.

$$\sum_{i=1}^m a_i = 1 \quad (a_i \geq 0),$$

siis nimetatakse lineaarset kombinatsiooni *kumeraks*. Näiteks:

$$\alpha = 0,5\alpha_1 + 0,2\alpha_2 + 0,2\alpha_3 + 0,1\alpha_4.$$

2.4. Lineaarne sõltuvus ja baas. Vektoreid $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nimetatakse *lineaarselt sõltuvateks*, kui leidub n niisugust skalaari (mis pole kõik nulliga võrdsed), et kehtib seos:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = 0. \quad (2.2)$$

Vastasel korral nimetatakse vektoreid $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *lineaarselt sõltumatuteks*. Lineaarselt sõltumatute vektorite lineaarne kombinatsioon võrdub nullvektoriga ainult juhul, kui $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Näide. Olgu antud järgmised vektorid:

$$\alpha_1 = [1, 3, -2, 1], \quad \alpha_2 = [1, 2, 2, 1], \quad \alpha_3 = [3, 7, 2, 3].$$

¹ Σ on summeerimise märk. Nii tähendab sümbol $\sum_{i=1}^4 a_i$ seda, et tuleb liita skalaarid a_i alates indeksist 1 ja lõpetades indeksiga 4, s. o. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Sümbol $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 a_{ij}$ tähendab, et tuleb liita indeksite i ja j järgi, s. o. $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34}$. Sümbol $\sum_{i=1}^m a_{ij}$ tähendab, et tuleb liita skalaarid i indeksi järgi, kuna j jääb muutumatuks. Seejuures märgitakse tavaliselt alati juurde indeksite i ja j muutumise piirkonnad, näiteks ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Meid huvitab küsimus, kas need vektorid on lineaarselt sõltuvad või mitte. Võib kergesti veenduda selles, et neist saab moodustada lineaarse kombinatsiooni, mis kujutab endast nullvektorit:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

Seega on antud juhul lineaarset kombinatsiooni moodustavateks skalaarideks 1, 2 ja -1 . Niisiis on vektorid lineaarselt sõltuvad ja igaüht neist saab esitada ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina:

$$\alpha_1 = -2\alpha_2 + \alpha_3; \quad \alpha_2 = -0,5\alpha_1 + 0,5\alpha_3; \quad \alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Vektorruumis V_n eksisteerivad niisugused lineaarselt sõltumatud vektorid, mille abil võib esitada kõik ülejäänud antud vektorruumi vektorid. Tähendab, ruumi V_n iga vektori võib esitada mainitud sõltumatute vektorite lineaarse kombinatsioonina. Niisugust lineaarselt sõltumatute vektorite V_n alamhulka nimetatakse vektorruumi *baasiks*.

Võib näidata, et vektorruumis V_n on lõpmata palju baase. Seejuures on oluline märkida, et mingis konkreet-ses baasis on suvalise vektori esitamine baasivektorite lineaarse kombinatsioonina üheselt määratud.

Erilist osa etendavad kõigi muude baaside hulgas need baasid, mis koosnevad ühikvektoritest. Vektorruumis V_n moodustavad n ühikvektorit baasi, sest seos

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n = 0$$

kehtib ilmselt ainult siis, kui $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, mis tõestabki, et ühikvektorid $\xi_1, \dots, \xi_n$ on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks ruumis V_3 võib vektori $\alpha = [4, 2, -1]$ esitada ühikvektorite lineaarse kombinatsioonina järgmiselt:

$$\begin{aligned} \alpha &= 4[1, 0, 0] + 2[0, 1, 0] + (-1)[0, 0, 1] = \\ &= 4\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3. \end{aligned}$$

Vektorruumi V_n lõplikku arvu vektoreid nimetatakse *vektorsüsteemiks*. Igas vektorsüsteemis on olemas maksimaalne arv r lineaarselt sõltumatuid vektoreid, mida nimetatakse *vektorsüsteemi astakuks*. Järelikult on vektorsüsteemis, mis koosneb k vektorist ($k \geq r$), $k-r$ lineaarselt sõltuvat vektori.

Praktikas on sageli raske vahetult kindlaks määrata,

kas on tegemist lineaarselt sõltuva või lineaarselt sõltumatu vektorsüsteemiga. Tavaliselt nõuab see eelnevalt rea teisenduste sooritamist, kusjuures arvutused võivad osutuda küllaltki töömahukateks. Seepärast on kasulik tunda mõningaid juhte, mis lubavad meil lineaarset sõltuvust otseselt kindlaks määrata.

Vektorsüsteem on lineaarselt sõltuv, kui ta sisaldab:

a) nullvektorit, b) kaht võrdset vektorit, c) kaht proportsionaalset vektorit, d) vektorit, mis kujutab endast ülejäänud vektorite lineaarset kombinatsiooni, e) suurema arvu vektoreid, kui seda on tema dimensioon.

2.5. Eukleidiline ruum. Vektorruumi, milles on defineeritud vektorite skalaarkorrutis, nimetatakse *eukleidiliseks ruumiks*.

Vektorite $\alpha' = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ja $\beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ skalaarkorrutiseks nimetatakse arvu

$$\alpha'\beta = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i.$$

Skalaarkorrutis võimaldab defineerida eukleidilises ruumis meetrilisi suurusid.

Vektori α pikkuseks ehk *normiks* $|\alpha|$ nimetatakse arvu, mis saadakse järgmise valemi järgi:

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha'\alpha} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}. \quad (2.3)$$

Vektorit, mille pikkus on 1, nimetatakse *normeeritud* vektoriks.

Vektorite α ja β vahe pikkus määratakse valemiga

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \quad (2.4)$$

Vektorite α ja β vaheline nurk φ määratakse valemiga

$$\cos \varphi = \frac{\alpha'\beta}{|\alpha||\beta|}. \quad (2.5)$$

Kui nurk kahe vektori α ja β vahel on $\frac{\pi}{2}$, siis $\cos \varphi = 0$, s. o. $\alpha'\beta = 0$. Vektoreid, mille skalaarkorrutis on võrdne nulliga, nimetatakse *ortogonaalseteks*. Seega ortogonaalsuse mõiste on ristseisu mõiste üldistuseks n -dimensioonilises ruumis. Vektorsüsteemi (baasi), mille iga kaks erinevat vektorit on ortogonaalsed, nimetatakse

ortogonaalseks vektorsüsteemiks (baasiks). Ortogonaalset vektorsüsteemi, mis koosneb normeeritud vektoritest, nimetatakse *ortonormaalseks*.

Näide. Veendugu lugeja toodud valemite abil selles, et vektorid $\alpha' = (3, 2, -5, 2)$ ja $\beta = [4, 8, 2, -9]$ on ortogonaalsed.

3. MAATRIKSID

3.1. Maatriksi mõiste. Maatriks kujutab endast neli-nurkset järjestatud elementide tabelit.¹ Üldjuhul võivad maatriksi elementideks olla õige mitmesugused matemaatilised objektid (suurused): skalaarid, funktsioonid, determinandid, polünoomid jne. Majandusmatemaatikas kasutatakse põhiliselt maatrikseid, mille elementideks on reaalarvud ja maatriksid. Maatriksit, mille elementideks on omakorda maatriksid, nimetame *hüpermaatriksiks*.

Maatriksi tähistamiseks kasutatakse vertikaalseid nurk- või ümarsulge või kahekordseid vertikaalseid jooni $\| \|$. Maatrikseid märgime suurte, elemente — väikeste ladina tähtedega.

Nii märgime maatriksit A järgmiselt:

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Toodud maatriksit nimetatakse *mn-maatriksiks*, sest ta koosneb m reast ja n veerust. Igale elemendile omistatakse kaks indeksit. Esimene neist märgib rea numbrit, teine — veeru numbrit. Nii märgib sümbol a_{ij} elementi, mis asub i -nda rea ja j -nda veeru ristumiskohas. Indeksid (m, n) sümboli A all märgivad samuti maatriksi mõõtmeid. Juhul kui maatriksi mõõtmed on tekstist teada või pole olulised, jäetakse mainitud indeksid ära.

Maatriksite abil võib komplektselt ja ülevaatlikult esi-

¹ Maatriksi mõiste võttis esmakordselt tarvitusele inglise matemaatik Sylvester 1850. a. Suuri teeneid maatriksite teooria loomisel on saksa matemaatikul Frobeniusel (1849—1917).

tada keerulisi majandusseoseid ning lihtsustada mitmeid arvutusi. Maatriksite uurimine võimaldab sageli esile tuua keeruliste majandusprotsesside sisemisi seaduspärasusi.

3.2. Mõned maatriksite erikujud. Maatriksit, mille kõik elemendid on nullid, nimetatakse *nullmaatriksiks* ja märgitakse Θ . Maatriksit, mis koosneb n reast ja n veerust, nimetatakse *ruutmaatriksiks* ehk n^2 -*maatriksiks*, kusjuures arvu n nimetatakse ruutmaatriksi *järguks*. Ruutmaatriksi kõiki elemente $a_{ii}(i=j)$ nimetatakse *peadiagonaali elementideks*.

Maatriksit, mille kõik elemendid peale peadiagonaali elementide on nullid, nimetatakse *diagonaalmaatriksiks*. Näiteks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonaalmaatriksit, mille kõik peadiagonaali elemendid on võrdsed, nimetatakse *skalaarmaatriksiks*.

Erilist osa etendavad diagonaalmaatriksite hulgas *ühikmaatriksid*, mille peadiagonaali elemendid on ühed. Ühikmaatriksit märgime sümboliga E_n , kusjuures indeks n tähistab maatriksi järku. Kui tekstist on ühikmaatriksi ridade arv teada või see pole konkreetsel juhul oluline, jäetakse järgu indeks ära.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sageli avaldatakse ühikmaatriks nn. *Kroneckeri sümboli* δ_{ij} abil:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j; \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

Nii võib ühikmaatriksi E esitada kujul:

$$E = \|\delta_{ij}\|.$$

Ruutmaatriksit, mille elemendid paiknevad *sümmeetriliselt* peadiagonaali suhtes, s. o. kui $a_{ij} = a_{ji}$, nimetatakse *sümmeetriliseks*.

Ruutmaatriksit, mille elemendid rahuldavad tingimusi $a_{ij} = -a_{ji}$ ja $a_{ii} = 0$ (kui $i = j$), nimetatakse *kaldsümmeetriliseks*.

Maatriksit, mille nullist erinevad elemendid paiknevad peadiagonaalist ainult ühel pool, nimetatakse *kolmnurkseks*. Näiteks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kolmnurkseid maatrikseid kasutatakse ulatuslikult arvutusmatemaatikas, sest nad kergendavad oluliselt arvutusi.

3.3. Tehted maatriksitega. Maatriksi ridade ja veergude ümberpaigutamist, mille tulemusena maatriksist $\|a_{ij}\|$ saadakse maatriks $\|a_{ji}\|$, nimetatakse maatriksi *transponeerimiseks*. Kui transponeeritakse maatriks A , siis märgitakse transponeeritud maatriksit sümboliga A' . Sümmeetrilise maatriksi korral on $A = A'$. Samuti on ilmne, et $(A')' = A$.

Näide.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maatrikseid $\|a_{ij}\|$ ja $\|b_{ij}\|$ nimetatakse *võrdseteks* ja märgitakse $\|a_{ij}\| = \|b_{ij}\|$ siis, kui on võrdsed nende vastavad elemendid, s. o. kui $a_{ij} = b_{ij}$. Vastasel korral märgitakse $\|a_{ij}\| \neq \|b_{ij}\|$. Seega on võrdsed ainult identsed maatriksid.

Maatriksite $\|a_{ij}\|$ ja $\|b_{ij}\|$ *summaks* nimetatakse maatriksit $\|c_{ij}\|$, mille elemendid on $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Seega saab liita ainult samamõõtmelisi maatrikseid. Näiteks:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi $\|a_{ij}\|$ korrutiseks skalaariga a nimetatakse maatriksit $\|b_{ij}\|$, mille elemendid on $b_{ij} = aa_{ij}$. Näiteks:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Maatriksite lahutamine taandub juba vaadeldud liitmise ja skalaariga korrumtamise tehetele.

$$\|a_{ij}\| - \|b_{ij}\| = \|a_{ij}\| + (-1) \cdot \|b_{ij}\| = \|d_{ij}\|.$$

On kerge veenduda, et

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

ja seega

$$\|d_{ij}\| = \|a_{ij} - b_{ij}\|.$$

Esitame maatriksi A tema reavektorite $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m$ ja maatriksi B tema veervektorite $\beta_1, \dots, \beta_n$ kaudu. Seega võib kirjutada $A = [\alpha'_1, \dots, \alpha'_m]$ ja $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Maatriksite A ja B korrutiseks nimetatakse maatriksit

$$AB = \|\alpha'_i \beta_j\| \quad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Seega on maatriksi AB i -nda rea ja j -nda veeru elemendiks maatriksi A i -nda rea skalaarkorrutis maatriksi B j -nda veeruga.

Olgu maatriksi A reavektor $\alpha'_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$, maatriksi B veervektor $\beta_j = [b_{j1}, b_{j2}, b_{j3}]$. Mainitud vektorite skalaarkorrutis on arv $c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + a_{i3}b_{j3}$. Kui $AB = C$, siis on arvud c_{ij} maatriksi C elementideks, kusjuures $i, j = 1, \dots, n$.

Sellepärast võib maatriksit A korrumtada maatriksiga B ainult siis, kui maatriksi A ridade arv võrdub maatriksi B veergude arvuga. Niisiis

$$\begin{matrix} A & B & = & C \\ (m,n) & (n,s) & & (m,s) \end{matrix}.$$

Maatriksite korrumtamise eeskiri kehtib mõistagi ka maatriksi ja vektori korrumtamise arvutamisel.

Näide. Korrumtame maatriksi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

vektoriga

$$\alpha = [-1, 0, 2].$$

Korrutis on veeruvektor, mille esimene koordinaat on maatriksi A esimese reavektori ja vektori α skalaarkorrutis; teine koordinaat — maatriksi teise reavektori ja vektori α skalaarkorrutis ja kolmas koordinaat — maatriksi kolmanda reavektori ja vektori α skalaarkorrutis.

$$A\alpha = \beta = [b_1, b_2, b_3].$$

$$b_1 = [0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2] = 2;$$

$$b_2 = [2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2] = 0;$$

$$b_3 = [6 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2] = -2.$$

Toome nüüd näite maatriksite korrutamisest. Tuleb arvutada $C = AB$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Üldjuhul pole maatriksite korrutamine kommutatiivne, s. o.

$$AB \neq BA.$$

Seevastu kehtivad maatriksite korrutamisel *assotsiatiivsuse* ja *distributiivsuse* seadused, s. o.

$$(AB)C = A(BC) = ABC,$$

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Pole raske veenduda, et $EA = AE = A$. Järelikult on ühikmaatriks korrutamise suhtes neutraalne (analoogiliselt arvuga 1 reaalarvude hulgas).

Näide. Olgu meil kaks maatriksit A ja B . Maatriks A näitab viie toote (veerud) omahindu kuluartiklite (read) lõikes. Maatriks B näitab mainitud viie toote (read) väljalaset kuu dekaadide (veerud) jooksul. Maatriks AB näitab koondkulusid kuluartiklite (read) järgi dekaadide

(veerud) jooksul. Maatriks A on toodud tabelis 1, maatriks B tabelis 2. (Mõõtühikud pole antud näite puhul olulised.)

Tabel 1

Kuluartiklid	Tooted				
	1	2	3	4	5
Materjal	25	10	11	13	14
Töötasu	3	2	4	5	2
Amortisatsioon	1	1	1	1	1
Kaudsed kulud	6	5	7	8	5

Tabel 2

Tooted	Dekaadid		
	I	II	III
1	20	10	15
2	30	5	10
3	40	10	20
4	25	15	10
5	20	30	35

Tabelis 3 toome korrutise — maatriksi AB .

Tabel 3

Kuluartiklid	Dekaadid		
	I	II	III
Materjal	1845	1025	1315
Töötasu	445	215	265
Amortisatsioon	135	70	90
Kaudsed kulud	850	425	525

3.4. Maatriksite jaotamine blokkideks. Sageli on uurimuse huvides kasulik jaotada antud maatriks blokkideks ehk alammaatriksiteks. Olgu antud maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Horisontaalne ja vertikaalne punktiirjoon jaotab maatriksi A neljaks blokkiks:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Seega võib hüpermaatriksi A üles kirjutada järgmiselt:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Tehted hüpermaatriksitega on analoogilised eelmises alapeatükis vaadeldud tehetega (elementide asemel on siin blokid). Tuleb ainult jälgida, et tehted oleksid võimalikud (arvesse võttes elementide olemust ja dimensioone).

Oletame, et hüpermaatriksit A tuleb korrutada hüpermaatriksiga

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Sel juhul oleks korrutis

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Niisiis üldjuhul

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} \quad (n \text{ on } A \text{ veergude ja } B \text{ ridade arv}).$$

Näiteks on korrutis $A_{11}B_{11}$ võimalik ainult siis, kui A_{11} veergude arv on võrdne B_{11} ridade arvuga. Seepärast võiksid hüpermaatriksi B elemendid olla näiteks järgmised:

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B_{21} = (1 \ 0 \ 1), \quad B_{22} = (1).$$

Soovitame lugejale harjutamise mõttes arvutada korrutis $C = AB$.

4. BAASI TEISENDAMINE JA SELLE RAKENDUSI

4.1. Baasi teisendamise mõiste. Iga n -dimensioonilise vektorruumi vektorit võib esitada selle ruumi mingi n lineaarselt sõltumatu vektori (baasi) lineaarse kombinatsioonina. Moodustagu vektorid $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \dots, \beta_n$ baasi vektorruumis V_n . Seega võib antud vektorruumi V_n kuuluvat vektorit $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_s, \dots, a_n)$ esitada toodud baasi lineaarse kombinatsioonina

$$\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_s\beta_s + \dots + a_n\beta_n = \sum_{i=1}^n a_i\beta_i.$$

Olgu meil vaja üle minna vanalt baasilt uuele baasile, mille moodustavad vektorid $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s, \dots, \gamma_n$.

Tekib küsimus, kuidas leida vektori α uusi koordinaate üleminekul uuele baasile ehk *baasi teisendamise* puhul.

Lineaarse planeerimise teooria seisukohalt on oluline erijuhtum, kus tuleb leida vektori uued koordinaadid üleminekul niisugusele uuele baasile, mis erineb vanast baasist üheainsa vektori võrra. Sellist baasi teisendamise erijuhtumit nimetatakse *elementaarseks*.

4.2. Vektori uute koordinaatide leidmine. Olgu vanas baasis vektor β_s asendatud uue vektoriga α . Esitame vektori β_s vana baasi ülejäänud vektorite ja vektori α lineaarse kombinatsioonina:

$$\beta_s = -\frac{a_1}{a_s}\beta_1 - \frac{a_2}{a_s}\beta_2 - \dots + \frac{1}{a_s}\alpha - \dots - \frac{a_n}{a_s}\beta_n. \quad (4.1)$$

Olgu mõni vektor $\chi = (x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_n)$ esitatud vana baasi lineaarse kombinatsioonina

$$\chi = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_s\beta_s + \dots + x_n\beta_n. \quad (4.2)$$

Lihtsate teisenduste abil võib seostest (4.1) ja (4.2) tuletada seose

$$\chi = (x_1 - \delta a_1)\beta_1 + (x_2 - \delta a_2)\beta_2 + \dots + \delta\alpha + \dots + (x_n - \delta a_n)\beta_n, \quad (4.3)$$

kus

$$\delta = \frac{x_s}{a_s}.$$

Seos (4.3) määrabki vektori χ koordinaadid uues baasis, milles vektor β_s on asendatud vektoriga α .

Praktilisteks arvutusteks on kohasem ja ülevaatlikum esitada seosega (4.3) avaldatud elementaarteisenduse tulemused tabeli kujul (vt. tabel 4):

Tabel 4

Vana baas	Vektorid			Uus baas	Vektorid		
	α	χ	ξ		α	χ	ξ
β_1	a_1	x_1	0	β_1	0	$x_1 - \delta a_1$	$-\frac{a_1}{a_s}$
β_2	a_2	x_2	0	β_2	0	$x_2 - \delta a_2$	$-\frac{a_2}{a_s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\leftarrow \beta_s$	$\overline{a_s}$	x_s	1	$\rightarrow \alpha$	1	δ	$\frac{1}{a_s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
β_n	a_n	x_n	0	β_n	0	$x_n - \delta a_n$	$-\frac{a_n}{a_s}$

Elementi a_s nimetatakse *juhtelemendiks*, s -rida — *juht-reaks*, juhtelementi sisaldavat veergu — *juhtveeruks*. On ilmne, et juhtelemendiks ei saa olla null. Selguse mõttes ümbritseme edaspidi juhtelementi kastikesega.

4.3. Maatriksi astaku leidmine. Maatriksi *astakuks* nime-tatakse maatriksi lineaarselt sõltumatute rea- või veeruvek-torite maksimaalarvu ja seda märgitakse tähega r . Võib näidata, et kui maatriksil on m rida ja n veergu, kusjuu-res $m \leq n$, siis on antud maatriksi astak $r \leq m$; kui aga $n \leq m$, siis $r \leq n$.

Sageli on oluline teada maatriksi astakut. Üldjuhul on astaku leidmine kaunis töömahukas ülesanne, mida saab lahendada baasi elementaarteisenduste abil.

Näide. Tuleb leida maatriksi A astak.

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} \overline{1} & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Elementaarteisenduse arvutusliku külje tundmaõppimiseks toome üksikasjaliselt kogu arvutuse.

Valime juhtelemendiks $a_{11} = 1$ ja asendame vektori α_1 ühikvektoriga ξ_1 . Vektorite α_1 , α_3 ja α_4 koordinaadid uues baasis pärast esimest elementaarteisendust on toodud järgnevas tabelis.

(Selles tabelis on ära jäetud algmaatriksi esimene veerg — juhtveerg, sest antud ülesande lahendamise seisukohalt ta meid ei huvita; samuti jätame ka edaspidi vastava veeru iga teisenduse järel ära.)

Tabel 5

α_2	α_3	α_4
—6	2	2
7	<u>1</u>	—3
17	1	—7
13	—1	—5
21	—2	—8

Uued koordinaadid on leitud tabelis 6 toodud arvutuste abil.

Tabel 6

α_2	α_3	α_4
$-\frac{6}{1} = -6$	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{2}{1} = 2$
$1 - \frac{1 \cdot (-6)}{1} = 7$	$3 - \frac{1 \cdot 2}{1} = 1$	$-1 - \frac{1 \cdot 2}{1} = -3$
$5 - \frac{2 \cdot (-6)}{1} = 17$	$5 - \frac{2 \cdot 2}{1} = 1$	$-3 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -7$
$1 - \frac{2 \cdot (-6)}{1} = 13$	$3 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -1$	$-1 - \frac{2 \cdot 2}{1} = -5$
$3 - \frac{3 \cdot (-6)}{1} = 21$	$4 - \frac{3 \cdot 2}{1} = -2$	$-2 - \frac{3 \cdot 2}{1} = -8$

Nüüd valime arvutuste lihtsustamiseks juhtelemendiks vektori α_3 teise koordinaadi 1.

Tabel 7

α_2	α_4
-20	8
7	-3
10	-4
20	-8
35	-14

Kolmanda teisenduse järel on ainsana välja vahetamata jäänud vektori α_2 koordinaadid: $\alpha_2 = [0; -0,5; -2,5; 0; 0]$. Näeme, et vektori α_2 neljas ja viies koordinaat on nullid ja seega edasine baasi elementaarteisendus on võimalu. Niisiis on maatriksi A astak 3.

Maatriksi A astaku kindlaksmääramine koosnes kolmest elementaarteisendusest ehk, nagu öeldakse, kolmest sammust. Neid kolme sammu on ülevaatlikkuse ning kompaktsuse mõttes soovitatav koondada järgmisse tabelisse.

Tabel 8

	α_1	α_2	α_3	α_4	1. samm			2. samm		3. samm
					α_2	α_3	α_4	α_2	α_4	α_2
α_1	1	-6	2	2	-6	2	2	-20	8	0
α_3	1	1	3	-1	7	1	-3	7	-3	-0,5
α_4	2	5	5	-3	17	1	-7	10	-4	-2,5
	2	1	3	-1	13	-1	-5	20	-8	0
	3	3	4	-2	21	-2	-8	35	-14	0

4.4. Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamine. Esi- teks vaatleme neid võrrandisüsteeme, kus võrrandite arv on võrdne tundmatute arvuga. Põhilise juhtnööri annab meile siin *Kronecker-Capelli teoreem*: lineaarne võrrandi- süsteem on lahenduv parajasti siis, kui võrrandisüsteemi maatriksi ja laiendatud maatriksi astakud on võrdsed. *Võrrandisüsteemi maatriksiks* ehk *kordajate maatriksiks* nimetatakse võrrandisüsteemi tundmatute kordajate maat- riksit. *Laiendatud maatriksi* saame siis, kui lisame vör- randisüsteemi maatriksile vabaliikmete veeru.

Toodud teoreemist võib teha olulise järelduse: kui võrrandid on lineaarselt sõltumatud, siis on süsteemil üksainus lahend parajasti siis, kui võrrandisüsteemi maatriksi astak on võrdne tundmatute arvuga.

Olgu meil järgmine võrrandisüsteem:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 5; \\ 8x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 9. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Toome tabelis 9 süsteemi (4.4) lahenduskäigu baasi elementaarteisenduse meetodil (ka siin jätame ära antud ülesande lahendamise seisukohalt mittevajalikud veerud).

Tabel 9

α_1	α_2	α_3	β	1. samm			2. samm		3. samm
				α_2	α_3	β	α_3	β	β
$\boxed{2}$	-1	-1	4	-0,5	-0,5	2	1	3	2
1	1	4	5	$\boxed{1,5}$	4,5	3	3	2	-1
8	2	-5	9	6,0	-1,0	-7	$\boxed{-19}$	-19	1

Seega $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

4.5. Pöördmaatriks. Ruutmaatriksit A^{-1} nimetatakse ruutmaatriksi A pöördmaatriksiks, kui kehtib seos

$$AA^{-1} = E = A^{-1}A. \quad (4.5)$$

Pöördmaatriks on ainult *regulaarsel* ehk *kõdumata* maatriksil, s. o. niisugusel maatriksil, mille veerud (read) moodustavad lineaarselt sõltumatute vektorite süsteemi. Maatriksit, millel pole pöördmaatriksit, nimetatakse *singulaarseks* ehk *kõdunud* maatriksiks. Kõdumata maatriksil võib olla ainult üks pöördmaatriks.

Kirjutame lineaarse võrrandisüsteemi maatriksvormis

$$A\chi = \beta, \quad (4.6)$$

kus A on kordajate maatriks, χ — tundmatute vektor ja β — vabaliikmete vektor. Süsteemi (4.6) võib lahendada

ka pöördmaatriksi abil. Korrutame (4.6) mõlemad pooled vasakult pöördmaatriksiga A^{-1} :

$$A^{-1}A\chi = A^{-1}\beta. \quad (4.7)$$

Seose (4.5) põhjal

$$\chi = A^{-1}\beta. \quad (4.8)$$

Järelikult, teades pöördmaatriksit, võib leida lineaarse võrrandisüsteemi lahendi. On teada palju meetodeid pöördmaatriksi arvutamiseks. Üks võimalusi põhineb seosel (4.5):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ülaltoodud võrrandis on b_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) maatriksi $\|a_{ij}\|$ pöördmaatriksi $\|a_{ij}\|^{-1} = \|b_{ij}\|$ elemendid.

Korrutame maatriksit $\|a_{ij}\|$ maatriksi $\|b_{ij}\|$ esimese veeruga.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} &= 1; \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} &= 0; \\ \vdots & \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Lahendades süsteemi (4.9) tundmatute b_{ij} suhtes, leiame pöördmaatriksi $\|a_{ij}\|^{-1}$ esimese veeru elemendid. Analoogiliselt leiame ka pöördmaatriksi ülejäänud veerude elemendid. Niisiis tuleb pöördmaatriksi leidmiseks esitatud meetodil lahendada n võrrandisüsteemi, mis nõuab küllalt palju tööd ja vaeva.

Et aga lineaarseid võrrandisüsteeme võib lahendada baasi teisendamise meetodil, siis on ilmne, et seda meetodit saab kasutada ka pöördmaatriksi arvutamiseks.

Näiteks arvutame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriksi A^{-1} . Selleks koostame algtabeli 10.

Tabel 10

	α_1	α_2	α_3
ξ_1	$\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$	2	3
ξ_2	1	-1	0
ξ_3	-1	2	1

Pöördmaatriksi arvutamiseks tuleb vektorid α_1 , α_2 ja α_3 välja vahetada baasi ühikvektoritega ξ_1 , ξ_2 ja ξ_3 . Kogu arvutus toimub samal baasi teisendamise meetodil, mida kasutasime juba eespool maatriksi astaku kindlaksmääramisel ja lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamisel (tabeli 4 abil).

Esitame kogu lahenduskäigu tabelis 11.

Tabel 11

1. samm				2. samm				3. samm			
ξ_1	α_2	α_3		ξ_1	ξ_2	α_3		ξ_1	ξ_2	ξ_3	
α_1	0,5	1	1,5	α_1	0,25	0,5	0,75	α_1	1	-4	-3
ξ_2	-0,5	-2	-1,5	α_2	0,25	-0,5	0,75	α_2	1	-5	-3
ξ_3	0,5	3	2,5	ξ_3	-0,25	1,5	0,25	α_3	-1	6	4

Kontrollime tulemust:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nüüd oleme niivõrd ettevalmistatud, et võime lahendada lineaarse võrrandisüsteemi ka üldjuhul, s. o. kui tundmatute arv n on suurem võrrandisüsteemi astakust r . Sel juhul avaldub süsteemi lahend sõltuvate tundmatute vektori $\chi_s = (x_1, \dots, x_r)'$ ja vabade tundmatute vektori $\chi_v = (x_{r+1}, \dots, x_n)'$ kaudu. Kirjutame võrrandisüsteemi (4.6) järgmisel kujul (eeldades seekord, et võrrandisüsteemi kordajate maatriks A on mn -maatriks):

$$B\chi_s + D\chi_v = \beta, \quad (4.10)$$

kus B on ruutmaatriks, mille järk on võrdne tema astakuga, D on $m(n - m)$ -maatriks, s. o. maatriks, mis koos-

neb võrrandisüsteemi (4.6) kordajate maatriksi A ülejäänud veergudest.

Korrutame (4.10) mõlemaid pooli vasakult pöördmaatriksiga B^{-1} ja teeme mõned lihtsad teisendused:

$$\begin{aligned} B^{-1}(B\chi_s + D\chi_v) &= B^{-1}\beta; \\ B^{-1}B\chi_s + B^{-1}D\chi_v &= B^{-1}\beta; \\ B^{-1}\beta - B^{-1}D\chi_v &= \chi_s. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Lahendit $\chi_v = 0$, $\chi_s = B^{-1}\beta$ nimetatakse *baasilahendiks*. Vektori χ_s koordinaate nimetatakse baasimuutujateks. Baasilahendit nimetatakse *kõdunuks*, kui vähemalt üks baasimuutuja võrdub nulliga.

Kui ülesande kordajate maatriks on regulaarne ruutmaatriks, siis ilmselt $B^{-1}D\chi_v = 0$ ja valem (4.11) taandub valemiks (4.8). Kui aga $m < n$, siis olenevad m sõltuvat muutujat alati veeruvektorist $B^{-1}D\chi_v$.

Näide. Olgu meil järgmine võrrandisüsteem:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 &= 4; \\ x_1 - x_2 - x_4 + 4x_5 &= 2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 1. \end{aligned} \right\}. \quad (4.12)$$

Valime sõltuvateks muutujateks x_1 , x_2 ja x_3 .

Sel juhul

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \chi_s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$\chi_v = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pöördmaatriks B^{-1} on juba eespool arvatatud (vt. lk. 30).

Järelikult võime (4.11) põhjal kirjutada:

$$\begin{aligned} \chi_s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; \\ \chi_s &= \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11x_4 & -23x_5 \\ 12x_4 & -27x_5 \\ -16x_4 & +33x_5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Seega on süsteemi üldlahend:

$$x_1 = -7 - 11x_4 + 23x_5;$$

$$x_2 = -9 - 12x_4 + 27x_5;$$

$$x_3 = 12 + 16x_4 - 33x_5.$$

4.6. Maatriksi kanooniline kuju. Maatriksi elementaarteisendusteks nimetatakse:

1) maatriksi rea (veeru) korrutamist skalaariga $a \neq 0$;

2) ühele reale (veerule) teise rea (veeru) liitmist.

Võib näidata, et elementaarteisendused ei muuda maatriksi astakut. Sel asjaolul on suur rakenduslik tähtsus.

Kui maatriks A saadakse maatriksist B lõpliku arvu elementaarteisenduste teel, siis öeldakse, et A on *ekvivalentne* B -ga. Elementaarteisendusi rakendatakse tavaliselt lihtsama kujuga maatriksi saamiseks. Ekvivalentsete maatriksite astakud on võrdsed.

Võib näidata, et lõpliku arvu elementaarteisenduste teel saab iga $m \times n$ -maatriksi A esitada järgmise, temaga ekvivalentse hüpermaatriksi

$$D = \left(\begin{array}{c|c} E_r & \Theta \\ \hline \Theta & \Theta \end{array} \right)$$

$n \times n$ kanoonilisel kujul, kus E_r on r -järku ühikmaatriks. Tähelepanelik lugeja märkab kindlasti, et maatriksi elementaarteisendusi saab muuhulgas kasutada ka maatriksi astaku kindlaksmääramiseks. Nii on näiteks ilmne, et maatriksi A astak on r , sest maatriksi A $n - r$ veergu ($m - r$ rida) on lineaarselt sõltuvad. Samuti on silmanähtav, et iga lineaarse võrrandisüsteemi kordajate maatriks, esitatuna kanoonilisel kujul, võimaldab vahetult leida süsteemi lahendi. See tähendab aga ühtlasi seda, et maatriksi elementaarteisendusi saab kasutada pöördmaatriksi leidmiseks.

5. LINEAARSED VÖRRATUSED

Majandusalases praktikas on sageli tegemist protsessidega, kus tuleb arvestada piiratud ressursse või muid piiravaid tingimusi. Sel juhul öeldakse, et tuleb arvestada kitsendusi. Kitsenduste matemaatilisel formuleerimisel

kasutatakse lineaarse te seoste korral sageli lineaarseid võrratusi.

5.1. Võrratuste omadusi. Võib näidata, et iga lineaarne võrratuste süsteem on esitatav kujul.

$$A\chi \leq \beta, \quad (5.1)$$

kus χ on muutujate vektor, A — kordajate maatriks ja β — vabaliikmete vektor (mis tavaliselt iseloomustab piiratud ressurside limiiti). Kui esineb võrratus $A\chi \geq \beta$, siis, korrutades selle mõlemaid pooli (-1) -ga, saame võrratuse $-A\chi \leq -\beta$.

Võrratuse *lubatavaks lahendiks* on iga vektor χ_0 , mis rahuldab toodud võrratust. Võrratuste süsteemil on üldjuhul lõpmata palju lubatavaid lahendeid, mis moodustavad *lubatavate lahendite hulga*. Näeme allpool, et see hulk võib olla *tõkestatud* ja *tõkestamata*, kusjuures erijuhul koosneb ta ühestainsast lahendist või on isegi tühi.

Iga võrratuse võib muuta võrrandiks ja vastupidi. Seda saavutatakse nn. *abimuutujate* (ehk *abitundmatute*) abil. Nii võib võrratuse (5.1) muuta võrrandiks järgmiselt:

$$A\chi + \gamma = \beta, \quad (5.2)$$

kus vektor γ on abimuutuja, mis rahuldab võrrandit

$$\gamma = \beta - A\chi. \quad (5.3)$$

Olgu meil lineaarne võrrandisüsteem

$$A\chi = \beta. \quad (5.4)$$

Süsteemi (5.4) võib asendada ekvivalentse võrratuste süsteemiga:

$$\left. \begin{array}{l} A\chi \geq \beta; \\ A\chi \leq \beta. \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

Teine võimalus (5.4) asendamiseks on

$$\left. \begin{array}{l} A\chi \geq \beta; \\ \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} \right) x_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^m a_{in} \right) x_n \leq \sum_{i=1}^m b_i, \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

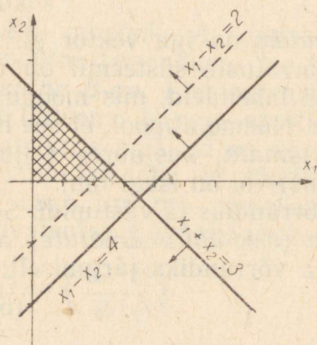
kus a_{ij} on maatriksi A element, b_i — vektori β i -s koordinaat, m — maatriksi A ridade ja n — veergude arv.

5.2. Võrratuste graafiline kujutamine. Analüüsime mõningaid lihtsaid võrratuste süsteeme graafiliselt, mis võimaldab meil paremini tutvuda nende iseärasustega.

Vaatleme süsteemi

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 \leq 3; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

Kõigepealt kujutame graafiliselt kaks sirget: $x_1 - x_2 = 4$ ja $x_1 + x_2 = 3$ (vt. joon. 2).



JOONIS 2.

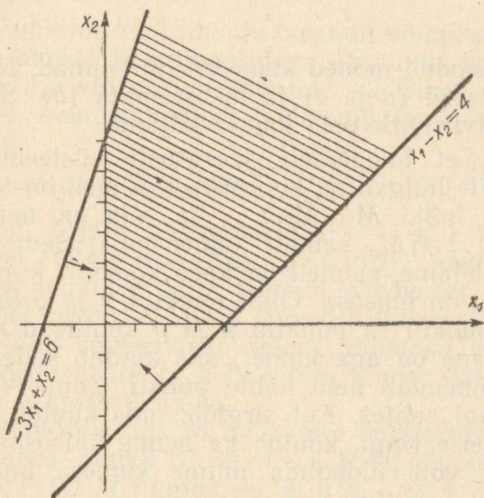
Millised punktid rahuldavad x_1, x_2 -tasandil võrratust $x_1 - x_2 \leq 4$? Ilmselt need, mis asuvad ülalpool sirget $x_1 - x_2 = 4$. Võrratust $x_1 + x_2 \leq 3$ rahuldavad aga need punktid, mis asuvad sirgest $x_1 + x_2 = 3$ allpool (vaata noolekesi joonisel 2!). Kui arvestada veel seda, et x_1 ja x_2 peavad olema mittenegatiivsed suurused, s. o. asuma koordinaatteljestiku I veerandis, siis kujutab viirutatud pind lubatavate lahendite hulka. Näeme, et antud olukorras on võrratus $x_1 - x_2 \leq 4$ üleliigne, sest ülejäänud kitsendused määravad lubatavate lahendite hulga üheselt. Võrratuse $x_1 - x_2 \leq 2$ korral oleks aga lahendite lubatav piirkond alt veidi kärbitud (vt. punktiirjoont joon. 2). Antud juhul on võrratuste süsteemi (5.7) lubatavate lahendite hulk tõkestatud.

Olgu meil võrratuste süsteem

$$\left. \begin{array}{l} -3x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

Kujutame süsteemi (5.8) lubatavate lahendite hulka graafiliselt (vt. joon. 3).

Joonisel 3 esitatud lubatavate lahendite hulk (viirutatud pind) on ülalt tõkestamata. Näeme, et iga lineaarne võrratus jagab tasandi x_1x_2 kaheks osaks, määrates mingi pooltasandi. Antud võrratuste süsteemi kõigi pooltasandite ühisosa kujutab endast lubatavate lahendite hulka (piirkonda). Kolmemõõtmelises ruumis jagab iga võrratus kogu ruumi kaheks poolruumiks. Poolruumi mõistet võib üldistada ja kasutada seda ka n -dimensioonilise eukleidilise ruumi E_n suhtes, kuigi mõistet «poolruum» ei saa siis enam näitlikult kujutada. Kõik vektorid, mis rahuldavad võrrandit $Ax = \beta$, kus A ja β on antud, määravad ruumis E_n $(n-1)$ -dimensioonilise hüper-tasandi. Nii näiteks on kolmemõõtmelises ruumis hüper-tasandiks kahemõõtmeline tasand, kahemõõtmelises ruumis — ühemõõtmeline sirge.



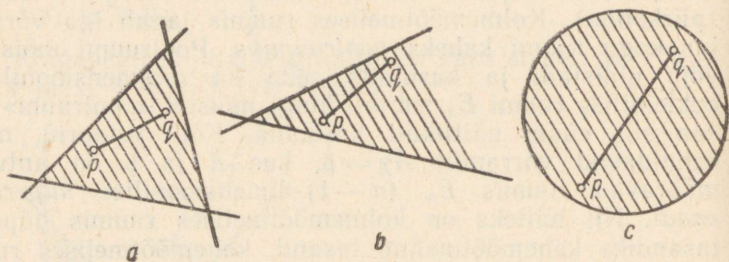
JOONIS 3.

5.3. Kumera hulga mõiste. Eelmises punktis tutvusime pooltasandi ja poolruumi mõistetega. Mainitud piirkonnad on näited kumerast piirkonnast ehk punktide kumerast hulgast.

Näiteks kahemõõtmelises ruumis on kolmnurkne kujund või ring kumeraks piirkonnaks ehk punktide kume-

raks hulgaks. Kolmemõõtmelises ruumis võib näiteks sama väita niisuguste kujundite kohta, nagu kera või hulktahukas.

Punktidest koosnevat piirkonda (tasandil, ruumis) nimetatakse *kumeraks*, kui sellesse kuulub tema mistahes kahte punkti ühendav sirglõik (vt. joon. 4).



JOONIS 4.

Joonisel 4 on toodud mõned kumerad piirkonnad. Nad võivad olla tõkestatud (a ja c) ja tõkestamata (b). Seevastu näiteks tähtviisnurk pole kumer kujund.

Võib tõestada, et lineaarsete võrratuste süsteemide lubatavate lahendite hulgad on kumerad. Kui meil on lõplik arv kumeraid hulki $M_1, M_2, \dots, M_n$, siis on nende ühisosa $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$ samuti kumer hulk. Seda on kerge tõestada. Oletame, et meil on kaks kumerat kujundit — ringi, millel on ühisosa. Olgu punktid p ja q kaks ühisosa suvalist punkti. Et punktid p ja q kuuluvad esimesse ringi, viimane on aga kumer, siis kuulub sellesse ka sirglõik, mis ühendab neid kahte punkti. Sama võib öelda ka teise ringi suhtes. Ent sirglõik, mis kuulub nii esimesse kui ka teise ringi, kuulub ka nende ühisosasse. Mainitud tõestust võib üldistada mitme kumera hulga ühisosa kohta.

Lineaarse planeerimise teoorias uuritakse lineaarseid võrratusi, millel on palju tundmatuid, ja seal etendab kumera hulga mõiste väga tähtsat osa. Et aga on võimalu näitlikult ette kujutada punkti n -dimensioonilises ruumis, siis tuleb anda kumera hulga algebraline definit-sioon üldjuhul.

Kõigepealt vaatleme lihtsaimat juhtu. Kui sirglõik

ühendab tasandil kahte punkti p ja q , mille koordinaadid on vastavalt (p_1, p_2) ja (q_1, q_2) , siis selle sirglõigu mistahes punktide koordinaatideks on

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \mu p_1 + (1 - \mu) q_1, \\ x_2 &= \mu p_2 + (1 - \mu) q_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

kus $0 \leq \mu \leq 1$. Järelikult sirglõik, mis ühendab punkte p ja q , on süsteemi (5.9) rahuldavate punktide hulk. Et sirglõigu punktid kujutavad endast punktide kumerat hulka, siis saimegi selle lihtsa kumera hulga algebralise väljenduse.

Näide. Olgu meil punkt $p(2,4)$ ja punkt $q(4,2)$. Tuleb leida koordinaadid punktile, mis asub punkti p ja punkti q ühendava sirglõigu keskkohas. Süsteemi (5.9) järgi on selle punkti koordinaatideks:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 4 = 3, \\ x_2 &= 0,5 \cdot 4 + 0,5 \cdot 2 = 3. \end{aligned} \right\}$$

Punktide koordinaate tasandil võime samastada vektori lõpp-punkti koordinaatidega tasandil, kui vektori alguspunktiks võtta koordinaatide süsteemi nullpunkt. Kasutades vektortähistust, võib süsteemi (5.9) väljendada kujul:

$$\gamma = \mu \alpha + (1 - \mu) \beta, \quad (5.10)$$

kus α , β ja γ on vektorid, $0 \leq \mu \leq 1$. Kasutame endist näidet. Olgu $\alpha = (2,4)$, $\beta = (4,2)$. Seega ühendab vektor γ punkte p ja q . Ühtlasi näeme, et vektor γ kujutab endast vektorite α ja β kumerat lineaarset kombinatsiooni.

Nüüd võime kõike öeldut üldistada n -dimensiooniliste vektorite kohta ja defineerida kumer hulk n -dimensioonilises vektorruumis V_n .

Punktide hulk M on kumer vektorruumis V_n , kui kahe mistahes punkti $P_i \in M$ ja $P_j \in M$ puhul $[\mu P_i + (1 - \mu) P_j] \in M$ tingimusel, et $0 \leq \mu \leq 1$ ja $i \neq j$.

Kumeras hulgas on kaht liiki punkte. Kõigepealt *sisepunktid*, mis on täielikult ümbritsetud teistest antud kumera hulga punktidest. Eri liigi moodustavad *raja-punktid*. Rajapunkt on siisugune punkt, millele lähenevad kuitahes lähedale nii kumera hulga sisepunktid kui ka kumerasse hulka mittekuuluvad punktid (välispunktid). Seega sisaldab mistahes väikese raadiusega ring tsentriga rajapunktis nii sise- kui ka välispunkte. Seevastu

küllalt väikese raadiusega ring tsentriga sisepunktis sisaldab ainult sisepunkte.

Kõigi rajapunktide hulk moodustab kumera hulga raja, mida nimetatakse ka kumera hulga *kumeraks katteks*. Nii on punktide $p_1, \dots, p_n$ kumeraks katteks nende punktide kõikide kumerate lineaarsete kombinatsioonide hulk P :

$$P = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_n p_n \\ (\mu_i \geq 0, i = 1, \dots, n; \mu_1 + \dots + \mu_n = 1). \quad (5.11)$$

Kumera hulga rajapunktide hulgas etendavad erilist osa tipud. Kumera hulga *tipuks* nimetatakse punkti p_0 parajasti siis, kui teda ei saa avaldada kahe teise samasse hulka kuuluva punkti kumera lineaarse kombinatsioonina, s. o. siis, kui ei leidu kaht antud hulga eri punkti p_1 ja p_2 , nii et kehtiks seos

$$p_0 = \mu p_1 + (1 - \mu) p_2, \quad (5.12)$$

kus $0 < \mu < 1$.

Olgu näiteks antud kolmnurkne kujund tasandil. Selle kujundi tipud kujutavadki endast (5.12) kohaselt punktide kumera hulga tippe. Seevastu ringi kõik rajapunktid on (5.12) kohaselt ühtlasi ka tippudeks.

Lineaarse planeerimise teoorias etendavad tähtsat osa kaks järgmist kumerat hulka: kumer hulktahukas ja kumer koonus.

Kumeraks hulktahukaks nimetatakse tõkestatud kumerat hulka, millel on lõplik arv tippe.

Kumeraks koonuseks nimetatakse niisugust kumerat hulka, mis pole tõkestatud ja millel on maksimaalselt üks tipp.

Kasutades ülaltoodud mõisteid, võib teha mõningaid olulisi järeldusi, mis kuuluvad lineaarse planeerimise teooria aluste hulka (toome need järeldused tõestusteta).

1) Võrrandisüsteemi iga lubatav baasilahend on lubatavate lahendite kumera hulga M tipuks;

2) kui kumeras hulktahukas on määratud mingi lineaarne funktsioon, siis omandab ta maksimaalse väärtuse selle hulktahuka teatud tipus;

3) et kumera hulktahuka tippude arv on lõplik, siis on ka lubatavate baasilahendite arv lõplik.

Et lineaarse planeerimise ülesanded kujutavad endast matemaatiliselt üldjuhul lineaarsete võrrandite süsteeme,

mille lubatavate lahendite hulk M on kumer ja milles on määratud mingi lineaarne funktsioon, siis põhineb ülesande lahendamine eeskirjal, kuidas kõige otstarbekamalt läbi vaadata hulga M tippe.

6. TÕENÄOSUSTEOORIA JA MATEMAATILISE STATISTIKA ALUSED

Majandussüsteemid on tõenäosuslikud süsteemid, nende käitumine pole rangelt *determineeritud*, s. t. pole tegelikkuses kunagi funktsionaalses sõltuvuses juhtimisest ja reguleerimisest, vaid on *stohhastiline*, s. o. juhuslikku laadi. Sellepärast etendavad niisugused matemaatilised distsipliinid, nagu tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika, erakordselt tähtsat osa majandussüsteemide uurimisel, informatsiooni töötlemisel ja prognoosimisel.

Majandussüsteemide stohhastilise iseloomu ignoreerimine on võimalik ainult abstraktsioonis, kui lihtsustatakse reaalseid suhteid nende uurimise kergendamiseks.

Sageli kujunevad majanduslikud näitajad niivõrd paljude massiliste mõjude tulemusena, et neid saab uurida ainult matemaatilise statistika meetodite abil. Matemaatiline statistika võimaldab avaldada sõltuvusi suuruste vahel, mille jaotusseadused on teada.

6.1. Juhusliku sündmuse mõiste. Sündmust, mis võib toimuda või mitte toimuda, nimetatakse *juhuslikuks*. Kui räägitakse mõne sündmuse toimumisest, siis peetakse seejuures alati silmas teatud *tingimuste hulka*. Näiteks rääkides mõne toote juhuslikust vastupidavusest, peetakse silmas konkreetset tehnoloogiat, töö organiseerimist jms. tingimusi, mille esinemisel uuritakse antud toote vastupidavust.

6.2. Tõenäosuse mõiste. Tõenäosus on juhusliku sündmuse arvuline hinnang.

Klassikaline tõenäosuse definitsioon lähtub formaalsest eeldusest, et uuritavad tõenäosuslikud sündmused on *võrdvõimalikud* ja *üksteist välistavad* (näiteks loosi langemine teatud loteriipiletile). Olgu n — võimalike juhuste arv (loteriipiletite arv), m — soodsate juhuste arv (võitude arv). Sel korral on sündmuse A (teatud piletile lan-

geva võidu) tõenäosus, mida märgitakse sümboliga $P(A)$, klassikalise definitsiooni kohaselt järgmine:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (6.1)$$

Sündmuse A vastandsündmuse (võit ei langenud piletile) tõenäosus, mida märgitakse sümboliga q , on järgmine:

$$q = 1 - P(A).$$

Klassikalise definitsiooni puuduseks on see, et ta on rakendatav ainult siis, kui sündmuste arv on lõplik ja sündmused ise on võrdvõimalikud.

Olgu meil mingi massiliselt esinev nähtus (näiteks mingi eseme massiline tootmine), mille juhuslikku sündmust (praaki) märgime sümboliga A . Korraldame n katset, kusjuures sündmus A esineb n_A korda. Sündmuse A relatiivseks sageduseks $S(A)$ nimetatakse suhet

$$S(A) = \frac{n_A}{n}. \quad (6.2)$$

Praktika näitab, et suure katsete arvu korral relatiivse sageduse stabiilsus suureneb, kusjuures $S(A)$ läheneb järjest rohkem teatud piirväärtusele, mingile kindlale konstandile. Mainitud konstanti nimetatakse sündmuse A statistiliseks tõenäosuseks. Näiteks K. Pearson sooritas 24 000 katset metallraha viskamisega. 12 012 korda langes raha vapiga ülespoole. Seega oli vapi esinemise relatiivne sagedus 0,5005, s. t. lähedane antud sündmuse tõenäosusele klassikalise definitsiooni järgi.

Võib kirjutada:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(A). \quad (6.3)$$

On ilmne, et

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Tõenäosuse statistiline teooria eitab põhjuslikke seoseid massiliselt esinevate nähtuste korral, sest statistilise tõenäosuse kindlaksmääramisel ei etenda mingit osa katsete (vaatluste) korraldamise tingimused.

Kaasaegne tõenäosusteooria rajaneb tõenäosuse aksiomaatilisel definitsioonil, mille lähem käsitus ei kuulu antud brošüüri raamidesse.

6.3. Keskväärtus ja dispersioon. Olgu mingil diskreet-
sel juhuslikul suurusel X väärtused $x_1, x_2, \dots, x_n$, mille
tõenäosused märgime vastavalt $p_1, p_2, \dots, p_n$. Kui sum-
meeritakse juhusliku suuruse kõikide võimalikkude väärt-
tuste tõenäosused, siis

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Diskreetset juhuslikku suurust iseloomustab arv, mida
nimetatakse *keskväärtuseks* ja tähistatakse sümboliga
 $M(X)$. Keskväärtust arvutatakse valemiga

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n. \quad (6.4)$$

Näide. Majapidamistarvete kaupluse juhataja korraldas
statistilise uurimise, mis andis järgmised tulemused:

Pesupulbri paki kaal, g x	Päevas müüdud pakke p	Müügi tõenäosus
400	300	0,50
600	150	0,25
800	150	0,25
Kokku	600	1,00

Keskväärtust võib vaadelda juhusliku suuruse kaalutud
keskmisena. Toodud näites on $M(X) = 400 \cdot 0,5 + 600 \cdot$
 $\cdot 0,25 + 800 \cdot 0,25 = 550$. Kui niisugust analüüsi korral-
dada suuremas ulatuses, annab see ettevõtetele, kauban-
dus- ja turustusorganitele väärtuslikku informatsiooni
selle kohta, kui palju ja missugustes pakendites pesu-
pulbrit oleks otstarbekas toota.

Diskreetse juhusliku suuruse $X = x_i (i = 1, 2, \dots, n)$
hajuvuse iseloomustamiseks keskväärtuse suhtes arvuta-
takse karakteristika, mida nimetatakse *dispersiooniks* ja
märgitakse sümboliga $D^2(X)$ või σ_x^2 .

$$D^2(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (6.5)$$

Arvutuste lihtsustamiseks kasutatakse sageli valemit

$$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X). \quad (6.6)$$

Arvutame eelneva näite puhul $D^2(X)$.

x_i^2	160 000	360 000	640 000
p_i	0,5	0,25	0,25

$$M(X^2) = 0,5 \cdot 160\,000 + 0,25 \cdot 360\,000 + 0,25 \cdot 640\,000 = 330\,000.$$

$$M^2(X) = 550^2 = 302\,500.$$

$$D^2(X) = 330\,000 - 302\,500 = 27\,500.$$

Ruutjuurt dispersioonist $\sqrt{D^2(X)}$ nimetatakse *standard-hälbeks* ja märgitakse sümboliga σ . See näitaja iseloomustab samuti juhusliku suuruse hajuvust.

6.4. Juhusliku suuruse jaotus. Öeldakse, et juhusliku suuruse *jaotusseadus* on antud, kui on teada, milline tõenäosus on juhusliku suuruse igal väärtusel. Jaotusseadus annab juhusliku suuruse kohta ammendavat informatsiooni.

Jaotusseaduse olemuse mõistmiseks ja õigeaks rakendamiseks on oluline tunda juhuslikkuse ja paratamatuse vahelist dialektilist seost. Nii on masstootmise üksikud nähtused juhuslikud, ent nende kaudu avalduvad antud protsessi sügavad sisemised seaduspärasused — avaldub paratamatus. Seega toimub objektiivse paratamatuse tunnetamine tavaliselt juhuslike nähtuste uurimise ja analüüsimise alusel.

Jaotusseadused näitavad meile, millise tõenäosusega realiseerub (toimub) teatav sündmus, olenevalt konkreetsetest tingimustest (näiteks hajuvusest). Seepärast nimetatakse tõenäosust võimalikkuse mõõduks. Üksikud sündmused esinevad erinevate sagedustega. Nende sageduste jaotus kujutabki endast teoreetilist jaotust, näidates erisuguste võimaluste struktuuri ja esinemise tõenäosust.

Seevastu empiiriline jaotus näitab, kuidas toimusid teatud massilised sündmused tegelikkuses. Mida väiksem on uuritavate sündmuste arv, seda suuremat mõju empiirilisele jaotusele avaldab juhuslikkus. Mida suurem on aga mainitud sündmuste arv, seda enam läheneb empiiriline jaotus teoreetilisele, tegelik keskvärtus oodatavale keskvärtusele.

Jaotusseadusi uuritakse olenevalt juhusliku sündmuse iseloomust. Nii tehakse vahet diskreetsete ja pidevate suuruste vahel. *Diskreetse juhusliku suuruse* väärtuste hulk on loenduv või lõplik (näiteks ettevõtte tööliste hulk, pra-

gitud toodete arv). *Pidev juhuslik suurus* võib omada lõpmata palju erinevaid väärtusi mingis vahemikus, s. t. tema väärtuste hulk pole loenduv (näiteks toote valmistamiseks kuluv aeg, hálbed ettenáhtud kaalust) ning iga väärtuse omandamise tõenäosus on 0.

6.5. Diskreetse juhusliku suuruse jaotus. Alustame lihtsast näitest. Ettevõttes uuriti praagi esinemist teatud toote valmistamisel. Selgus, et 85% toodetest vastas standardile, 8% kaldus normist kõrvale kümne, 5% — kahekümne ja 2% — kolmekümne tingühiku võrra. Uurimuse tulemusi võib esitada tabeli kujul järgmiselt (vt. tabel 12):

Tabel 12

Juhuslik suurus (X)	0	10	20	30
Tõenäosus (P)	0,85	0,08	0,05	0,02

Üldjuhul, kui juhuslik suurus omandab väärtused $x_1, x_2, \dots, x_n$, millele vastavad tõenäosused $p_1, p_2, \dots, p_n$, võib diskreetse suuruse jaotusseaduse esitada tabeli kujul järgmiselt:

Tabel 13

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Kui öeldakse, et on antud juhusliku suuruse X jaotus, siis tähendab see seda, et on määratud kõigi sündmuste ($a \leq X < b$) tõenäosused $P(a \leq X < b)$, kusjuures X muutumispiirkonnaks on vahemik (a, b) .

Tabelis 12 toodud jaotust võib esitada ka graafiliselt (vt. joon. 5).

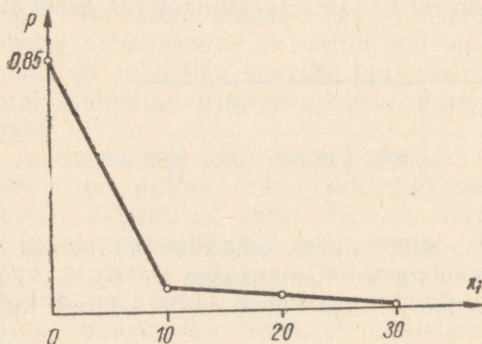
Juhusliku suuruse väärtust, millel on suurim tõenäosus, nimetatakse *kõige tõenäolisemaks väärtuseks*.

Juhusliku suuruse X jaotusseadusest tuletatakse selle *jaotusfunktsioon* $F(x)$, mis näitab kõigi nende juhuslike suuruste x_i ($i = 1, \dots, n$) tõenäosuste summat, mis on väiksemad mingist muutuvast juhuslikust suurusest x .

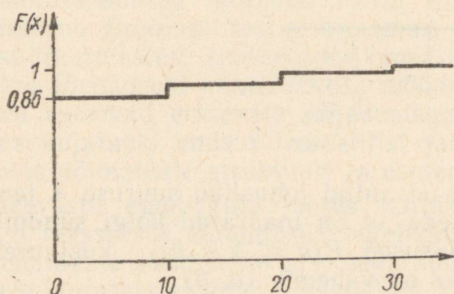
$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(X < x). \quad (6.7)$$

Näiteks tabeli 12 järgi on tõenäosus, et toodangu hulgas avastatakse niisuguseid tooteid, mis kalduvad normist kõrvale vähem kui 30 ühiku võrra, leitav järgmise valemi abil:

$$F(x) = \sum_{i=1}^3 p_i = 0,85 + 0,08 + 0,05 = 0,98.$$



JOONIS 5.



JOONIS 6.

Jaotusfunktsiooni graafik näitab, kuidas toimub tõenäosuste summade diskreetne suurenemine (vt. joon. 6).

Tutvume mõningate diskreetsete suuruste jaotustega. Kui uuritakse sündmusi, millel esineb ainult kaks alternatiivset tunnust, näiteks «korras toode — praak», siis kasu-

tatakse sageli *binomiaaljaotust* (nimetatakse ka *Bernoulli jaotuseks*). Binomiaaljaotuse valem on järgmine:

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, \dots, n), \quad (6.8)$$

kus C_n^m on kombinatsioonide arv n elemendist m kaupa,

p — juhusliku sündmuse tõenäosus,

q — vastandsündmuse tõenäosus,

n — katsete arv,

m — sündmuse esinemise sagedus.

Näide. Tsehhis on 10 tööpinki. Pingi rivist väljalangemise tõenäosus (päeva jooksul) on 0,1. Tuleb leida, millise tõenäosusega langeb rivist välja 4 pinki päevas.

Antud näites on $n = 10$, $m = 4$, $p = 0,1$ ja $q = 0,9$.

$$P(X = 4) = C_{10}^4 \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^6 = 210 \cdot 0,0001 \cdot 0,530541 = 0,0111.$$

Võib näidata, et binomiaaljaotuse korral on keskväär-tus väljendatav valemiga

$$M(X) = np, \quad (6.9)$$

dispersioon aga valemiga

$$D^2(X) = npq. \quad (6.10)$$

Toodud näites on dispersioon

$$D^2(X) = 10 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,9,$$

standardhälve

$$\sigma = 0,95.$$

Kui juhuslike sündmuste arv n on väga suur ja ühe alternatiivse tunnuse tõenäosus väga väike, siis kasutatakse *Poissoni jaotust*, mis väljendub valemiga

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (6.11)$$

kus parameeter $a = M(X) = D^2(X)$.

Arvutuste kergendamiseks on koostatud tabelid tõenäosuste leidmiseks Poissoni jaotusseaduse järgi erisuguste a ja m väärtuste kohta. Poissoni jaotust kasutatakse ulatuslikult toodangu kvaliteedi statistilisel uurimisel.

Pidevate juhuslike suuruste puhul võib nende esinemise tõenäosust määrata ainult teatava vahemiku kohta, selle-

pärast räägitakse tõenäosuse tihedusest. Tõenäosus, et pidev juhuslik suurus X esineb vahemikus $a \leq X \leq b$, on

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (6.12)$$

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse tihedusfunktsiooniks ehk *tõenäosuse tiheduseks*. Seejuures

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

mis tähendab seda, et funktsiooni graafilisel kujutamisel kogu pind $f(x)$ -kõvera ja x -telje vahel on võrdne 1-ga.

Üks tähtsamaid pideva juhusliku suuruse jaotusi on nn. *normaaljaotus*, mis tuletatakse binomiaaljaotusest, lähtudes sellest, et diskreetsel suurusel on lõpmata palju erinevaid väärtusi ja iga üksiku väärtuse tõenäosus on null. Tegelikult jagunevad väga paljude suuruste väärtused normaaljaotuse järgi.

Normaaljaotuse puhul väljendub pideva juhusliku suuruse tihedusfunktsioon valemiga

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \quad (6.13)$$

kus juhusliku suuruse muutumisvahemikuks on $-\infty$ kuni $+\infty$ ja $\bar{x} = M(X)$.

Normaaljaotuse valem muutub lihtsamaks, kui asendada muutuja

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}.$$

Sel juhul on juhusliku suuruse hajumine normeeritud, s. o. väljendatud standardhälbe ühikutes.

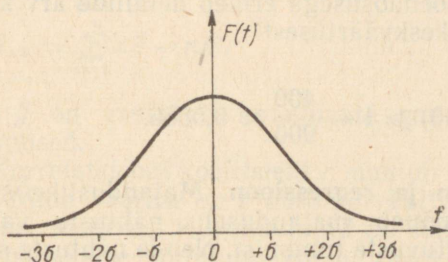
Suuruse z mingi väärtuse esinemise tõenäosus vahemikus $t_1 \leq z \leq t_2$ võrdub funktsiooni $F(t)$ väärtusega:

$$P(t_1 \leq z \leq t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (6.14)$$

Joonisel 7 on toodud normaaljaotuse tihedusfunktsioon $f(z)$.

Normaaljaotuse valemid on keerulised, ent otsitavad väärtused leiame vastavatest statistilistest tabelitest.

Tabelitest võib näiteks leida, et 68,27 protsenti kõigi juhuslike suuruste väärtustest asub vahemikus $\pm\sigma$, 95,72 protsenti vahemikus $\pm 2\sigma$ ja 99,73 protsenti vahemikus $\pm 3\sigma$. See tähendab, et praktiliselt võib olla kindel, et juhusliku suuruse hälbe absoluutväärtus ei ületa kolmekordset standardhälvet. Viimast väidet nimetatakse *kolme sigma reegliks*.



JOONIS 7.

Näide. Mõõdetakse detailide läbimõõtu. Keskmise läbimõõt on 210 mm. Standardhälve $\sigma = 10$ mm. Tuleb arvutada tõenäosus, et juhuslikult valitud detaili läbimõõt on vahemikus 220...240 mm. Eeldatakse, et jaotus on normaalne.

Kõigepealt väljendatakse juhusliku suuruse — detaili läbimõõdu hajumisvahemik standardhälbe ühikutes.

$$t_1 = \frac{220 - 210}{10} = 1, \quad t_2 = \frac{240 - 210}{10} = 3.$$

Järgnevalt arvutatakse $F_0(t_2) - F_0(t_1)$ ¹.

$$P(220 \leq x \leq 240) = F_0(3) - F_0(1) = 0,49865 - 0,34134 = 0,15731.$$

6.6. Tšebõšovi võrratus. Kui juhusliku suuruse jaotuseadus pole teada, siis kasutatakse sageli *Tšebõšovi võrratust*, mis näeb välja nii:

$$P(|x - M(X)| < \xi) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\xi^2}, \quad (6.15)$$

¹ $F_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. Funktsiooni $F_0(t)$ väärtused leitakse vastavatest tabelitest.

kus ξ on suvaline konstant, mis rahuldab tingimust $\xi \geq \sigma$.

Tšebōšovi võrratus näitab meile tõenäosuse *alampiiri*, et juhusliku suuruse väärtus ei erine tema keskväär- tusest rohkem, kui suvaliselt valitud suurus, kusjuures see piir oleneb ainult juhusliku suuruse dispersioonist.

Näide. Ettevõttes pakitakse pisidetaile karpidesse. De- tailide arv karbis (x) on juhuslik suurus, tema keskväär- tus on 5000, standardhälve 20. Jaotusseadus pole teada. Tuleb leida, millise tõenäosusega erineb detailide arv kar- bis 30 detaili võrra keskväär- tusest.

Lahendus:

$$P(|x - M(X)| < 30) \geq 1 - \frac{400}{900} \approx 0,5556.$$

6.7. Korrelatsioon ja regressioon. Majanduslike süs- teemide juhtimine nõuab majanduselu nähtuste vahel eksisteerivate põhisõltuvuste tundmist. Nende nähtuste sta- tiline analüüs võimaldab avastada uusi sõltuvusi, iseloo- mustada nende konkreetset vormi, hinnata üksikute tegu- rite mõju intensiivsust, mis kokkuvõttes annab majan- dusjuhile väärtuslikku informatsiooni.

Korrelatsioonanalüüs uurib sõltuvuste rangust (tihe- dust) juhuslike suuruste vahel, regressioonanalüüs — nende sõltuvuste iseloomu.

Reaalsetes majandussüsteemides esinevad peamiselt mittelineaarsed sõltuvused, mille uurimine on suhteliselt töömahukas. Seepärast püütakse praktikas aproksimeerida mittelineaarseid sõltuvusi alati lineaarseteks, mis märgata- valt lihtsustab arvutusi. Siin vaatleme ainult lineaarseid sõltuvusi.

Tuleb rõhutada, et *korrelatiivsete sõltuvuste alusel võib põhjuslike seoste kohta teha mingisuguseid järeldusi ainult ülimalt ettevaatlikult*. Tavaliselt kasutame korrelat- sioonanalüüsi siis, kui põhjuslikud seosed tulenevad intui- tiivsetest, loogilistest või kogemuslikest kaalutlustest.

Tegurid, mis mõjutavad mingisugust majandusnähtust, võivad olla kas *tuntud* või *tundmatud*, *olulised* või *mitte- olulised*, *kvantitatiivselt* väljendatavad või mitte. Eduka statistilise analüüsi eelduseks on *oluliste tegurite välja- selgitamine ja nende arvuline määramine*.

Muutuvate suuruste x ja y korrelatiivse sõltuvuse näi-

tajaks on korrelatsiooni koefitsient r , mis arvutatakse valemiga

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{yy}S_{xx}}}, \quad (6.16)$$

kus

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y},$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2,$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

$\bar{x}$ ja $\bar{y}$ on vastavate muutuvate suuruste aritmeetilised keskmised.

Korrelatsiooni koefitsient r muutub vahemikus -1 kuni $+1$. Mida suurem on r absoluutväärtus, seda rangem on uuritav sõltuvus. Kui muutujad on sõltumatud, siis $r = 0$, funktsionaalse sõltuvuse korral $r = 1$. Rõhutame, et kui $r = 0$, siis ei tähenda see veel seda, et muutujad on sõltumatud.

Kui on teada, et sõltuv muutuja y oleneb muutujast x , siis näitab suurus r^2 , kuivõrd suurt osa muutuja y hajuvusest mõjutab muutuja x . Kui näiteks $r = 0,7$, siis tähendab see, et x mõjutab 49 protsenti y üldisest hajuvusest.

Näide. Tuleb leida, kuivõrd tihedalt sõltub toodangu omahind x (10^3 rbl.) tootmismahust y (10^3 t) (tabelis 14 toodud andmete põhjal).

Tabel 14

x	y	xy	x^2	y^2
1	10	10	1	100
3	12	36	9	144
5	16	80	25	256
6	17	102	36	289
8	20	160	64	400
9	21	189	81	441
32	96	577	216	1630

$$\bar{x} = 32 : 6 \approx 5,33.$$

$$\bar{y} = 96 : 6 = 16,00.$$

$$S_{xy} = 577 - 6 \cdot 5,33 \cdot 16 \approx 65,03.$$

$$S_{xx} = 216 - 6 \cdot 5,33 \cdot 5,33 \approx 45,35.$$

$$S_{yy} = 1630 - 1536 = 94.$$

$$r = \frac{65,03}{\sqrt{45,35 \cdot 94}} \approx 0,9957.$$

Seega on korrelatiivne sõltuvus muutujate x ja y vahel väga tihe.

Olenegu suuruse y muutused suuruse x muutustest. Lineaarse sõltuvuse korral

$$y_x = ax + b. \quad (6.17)$$

Võrrandit (6.17) nimetatakse *regressiooni võrrandiks*. Regressiooni võrrand annab kõigi x väärtuste jaoks nii-sugused y väärtused, mis on kõige lähemad antud suuruse katseliselt leitud väärtustele.

Suurust a regressiooni võrrandis nimetatakse *regressiooni kordajaks* ja märgitakse a_{yx} . Kordaja a_{yx} näitab, kuidas suureneb y , kui x kasvab ühiku võrra, ja arvutatakse valemiga

$$a = \frac{S_{yx}}{S_{xx}}.$$

Suurus b leitakse valemist

$$b = \bar{y} - a_{yx}\bar{x}.$$

2.

METODOLOOGILISED ALUSED

Majandusmatemaatika meetodite praktikasse rakendamisel on ökonomistile kõige tähtsam oskus kirjeldada majandusprotsesse matemaatiliselt, luua uuritava objekti majandusmatemaatiline mudel. Modelleerimine kuulub majandusküberneetika metodoloogiliste põhiprobleemide hulka, seepärast eeldab edukas ja teadlik majandusprotsesside modelleerimine küberneetika põhimõtete ja meetodite tundmist. V. Nemtšinov rõhutas, et ühiskondliku tootmise organiseerimise ja planeerimise teaduslikke aluseid saab õigesti mõista ainult siis, kui neid vaadelda küberneetilise aspektist, küberneetika seisukohtadest lähtudes.¹

7. MAJANDUSKÜBERNEETIKA PÕHIKÜSIMUSI

7.1. Küberneetika kui teadus. Küberneetika kuulub väga üldiste, universaalsete teadusharude hulka ja on võrreldav vahest ainult filosoofia, matemaatika ja loogikaga. Küberneetika uurib abstraktseid juhtimisprotsesse juhitavares ja isereguleeruvates dünaamilistes süsteemides. Uue teadusharu defineerimine pole sugugi lihtne. Kirjanduses esineb palju erisuguseid definitsioone. Üks defineerimise raskusi on selles, et uue mõiste definitsioon sisaldab omakorda uusi, selgitust nõudvaid mõisteid. Toodud küberneetika definitsioon nõuab näiteks täpset selgitust, mida tähendavad mõisted «dünaamiline», «juhtimine», «isereguleerumine» ja «süsteem».

Sõna «küberneetika» ise pärineb kreeka keelest. Kreeka filosoof Platon (427—347 e. m. a.) kasutas teda ühiskonna juhtimise kunsti märkimiseks; 1834. aastal kasutas seda mõistet uuesti prantsuse füüsik A. Ampère riigi juh-

¹ В. С. Немчинов. *Экономико-математические методы и модели*. М., 1965, lk. 46.

timise kunsti tähistamiseks. Kaasaegses tähenduses rakedas sõna «küberneetika» ameerika matemaatik Norbert Wiener 1948. aastal ilmunud kuulsas raamatus «Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine» («Küberneetika ehk juhtimine ja side loomas ning masinas»), mis 1961. a. ilmus ka eesti keeles.

Mitmed faktid bioloogia ja tehnika valdkonnast näitavad, et elusorganismis ja masinas on juhtimisprotsessidel palju ühist. Erisugused juhtimissüsteemid sarnanevad nii oma struktuuri kui ka funktsioonide poolest, neid saab kirjeldada samade matemaatiliste valemitega. See andis põhjust oletada, et eksisteerivad üldised seaduspärasused, mis kehtivad kõikides juhtimissüsteemides. Nii sündis uus teadus juhtimisest — küberneetika koos oma rohkearvuliste rakendusharudega, sealhulgas ka majandusküberneetika. Uus teadus ühtlustas kõik mõisted, mis on seotud juhtimisprotsessidega kõige erinevates valdkondades.

Küberneetika kasutab matemaatika keelt, püüdes koguliselt kirjeldada uuritavaid süsteeme ja protsesse, seejärel rajaneb ka majandusküberneetika majandusmatemaatika meetoditel.

7.2. Süsteemi mõiste. Süsteem on küberneetika põhimõiste. Käsitleda mõnda probleemi küberneetiliselt tähendab eelkõige käsitleda uuritavat objekti ja protsessi kui süsteemi. Saksa marksistlik filosoof G. Klaus märkis, et «filosoofia ja üksikud teadusharud on ainult siis tõelised teadused, kui nad esinevad süsteemidena».¹

«Süsteem» on kreekakeelne sõna, mis tähendab tervikut, seda kasutatakse väga paljude mõistete tähistamiseks. Näiteks tunneme niisuguseid mõisteid, nagu päikese-süsteem, majandussüsteem, närvisüsteem, vaadete süsteem, võrrandisüsteem, töösüsteem jne. Niisiis on süsteemi kui mingisuguste elementide (objektide) terviku mõiste äärmiselt üldine, niivõrd üldine, et võidakse küsida: mille poolest erineb süsteemi mõiste hulga mõistest?

Süsteem kujutab endast niisuguste elementide hulka, mis on omavahel teatud viisil *seotud*, s. o. nende vahel eksisteerivad kindlad suhted. Seega ei hõlma mõiste «süsteem» mitte lihtsalt elementide hulka, vaid ka nende vahelisi suhteid, mida määrab süsteemi *struktuur*. Hulgal pole struktuuri.

¹ G. Klaus. *Moderne Logik*. Berlin 1966, lk. 422.

Majandusobjektid muutuvad süsteemiks siis, kui nende elementide vahel luuakse kindlad organisatsioonilised suhted. Näiteks inimesed ja tootmisvahendid ühendatakse üheks tervikuks püstitatud eesmärgi saavutamiseks.

Niisiis, *süsteem on struktuurselt ja funktsionaalselt sarnaste elementide organiseeritud hulk.*

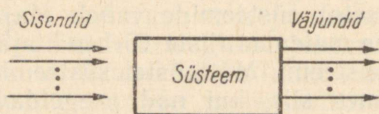
Tehakse vahet loomulike ja kunstlike, samuti materiaalsete ja mõtteliste (ideaalsete) süsteemide vahel. Majandusprotsesside kirjeldamine matemaatiliste võrrandite abil kujutab endast mõttelist süsteemi. Mõttelistel süsteemidel on teaduslik väärtus üksnes siis, kui nad peegeldavad õigesti materiaalseid süsteeme. Seda tuleb eriti silmas pida majandusprotsesside matemaatilisel kirjeldamisel (modelleerimisel).

Tahaks rõhutada, et ülalöeldu kehtib ainult nende süsteemide (mudelite) kohta, mis on loodud selleks, et imiteerida reaalseid süsteeme mingil konkreetsel eesmärgil. Ent seejuures luuakse küberneetikas ka niisuguseid süsteeme, mil pole reaalseid analooge tegelikkuses, nii nagu näiteks teoreetilises mehaanikas või matemaatilises füüsikas, kus uuritakse materiaalseid objekte, millel pole mahtu, ideaalseid gaase jne. Seejuures ei tähenda niisuguste süsteemide konstrueerimine sugugi elust irdumist, vaid sootuks vastupidi — sellised «idealiseeritud» süsteemid võimaldavad meil sügavamalt mõista reaalsete süsteemide käitumist, täiustada neid ja avastada nende käitumises uusi seaduspärasusi.

7.3. Küberneetilised süsteemid. Küberneetika ei uuri mitte suvalisi süsteeme, vaid erilist süsteemide klassi — küberneetilisi süsteeme. Millised on küberneetiliste süsteemide tunnused? Eelkõige on nad *dünaamilised*, s. o. liikuvad, aktiivsed, ajas ja ruumis muutuvad süsteemid. Süsteemi dünaamika põhjuseks on väliskeskkonna, s. t. antud süsteemi ümbritsevate süsteemide mõju. Samaaegselt mõjub antud süsteem ka teistele süsteemidele. Seega valitsevad dünaamiliste süsteemide vahel vastastikused funktsionaalsed suhted. Need võivad olla materiaalsed, energeetilised või informatsioonilised, kusjuures küberneetilisest seisukohast lähtudes on eriti olulised viimased, sest nad iseloomustavad teist küberneetika põhimõistet — juhtimist.

Väliskeskkonna mõju antud süsteemile nimetatakse

süsteemi *sisendiks*, kusjuures reaalses süsteemides on väga palju sisendeid, mis moodustavad süsteemi *sisendite vektori*. Seevastu antud süsteemi mõju väliskeskkonnale nimetatakse *väljundiks*, kusjuures siingi võib rääkida *väljundite vektorist*. Sisendid jaotatakse juhitavateks ja mittejuhitavateks (häiringud).



JOONIS 8.

Dünaamilise süsteemi graafilist kujutamist vt. joon. 8. Vaadeldes tööstusettevõtet dünaamilise süsteemina, võib tema sisenditeks lugeda mitmesuguseid tootmisressursse, väljunditeks — valmistooteid. Informatsioonilisest aspektist lähtudes võib sisenditeks pidada kõrgemalseisva organi poolt antud plaanilisi näitajaid, väljunditeks andmeid plaani täitmise kohta.

Süsteemi käitumise uurimine on küberneetika põhiülesanne. W. Ross Ashby rõhutas, et küberneetika vastab küsimusele, «mida antud süsteem teeb».¹ Rida autoreid iseloomustab küberneetikat nagu W. R. Ashbygi kui teadust, mis uurib esijoones süsteemide käitumist, mitte aga nende sisemist ehitust, struktuuri. Nii nimetas G. Klaus küberneetikat teooriaks «masinate võimalikest käitumisviisidest» (siin tähendab sõna «masin» süsteemi).² Ka H. Greniewski järgi etendavad küberneetikas põhilist osa «suhteliselt eraldatud süsteemid», s. o. dünaamilised süsteemid ja nende omavahelised funktsionaalsed seosed.³ Ent niisugune ühekülgne orientatsioon, mis absolutiseerib süsteemide käitumisega seotud probleeme, ei arvesta küllaldaselt käitumise ja struktuuri dialektikat ja võib kahjustada küberneetiliste uurimuste metodoloogilist külge. Eriti kehtib see majandussüsteemide uurimisel. Mitte alati ja kõikjal ei ole uurimise tulipunktis süsteemide käitumine. Konkreetsetel uurimisetappidel võib tulipunkti nihkuda

¹ У. Росс Эшби. *Введение в кибернетику*. М. 1959, lk. 13.

² Г. Клаус. *Кибернетика и философия*. М. 1963, lk. 15.

³ Г. Грениевский. *Кибернетика без математики*. М. 1964, lk. 22.

süsteemi struktuur. Kui mõnel juhul (nagu näeme hiljem nn. musta kasti meetodi rakendamisel) võib käitumise uurimine anda meile võtme struktuuri paremaks mõistmiseks, siis on juhtumeid, kus struktuuri uurimise kaudu jõuame käitumise sügavama mõistmiseni. Nii alustatakse ettevõtte funktsioneerimise täiustamisel sageli tema struktuuri uurimisest: koostatakse informatsiooni- ja materjali-voogude struktuuriskeeme, uuritakse nende otstarbekust ja mõju ettevõtte funktsioneerimisele, analüüsitakse ettevõtte üksikute tsehhide, jaoskondade, osakondade, ladude paigutust jne. Arusaadavalt on iga küberneetilise uurimuse *lõppeesmärgiks* süsteemi käitumise optimeerimine, ent teed selle saavutamiseks olenevad konkreetsest olukorrast, teaduse ja praktika saavutusest antud etapil.

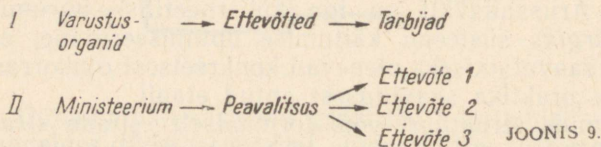
Süsteemide struktuuri võib formaalselt esitada *struktuurimaatriksi* abil, mis peegeldavad vastastikuseid seoseid antud süsteemi elementide vahel. Nii on süsteemi element a seotud süsteemi elemendiga b siis, kui vähemalt üks elemendi a väljund on samaaegselt elemendi b sisendiks. Struktuurimaatriks on näiteks rahvamajandusharude tootmise ja tarbimise bilansi maatriks. Selle read näitavad üksikute harude toodangu jaotamist teiste harude vahel, veerud — kui palju üksikud harud kasutavad teiste harude toodangut. Märkime, et süsteemi elemendi väljund võib olla ühtlasi ka sama elemendi sisendiks. Näiteks kasutatakse masinaehituse toodangut ära ka masinaehituses eneses. Analoogilisi maatrikseid võib koostada ka üksik-ettevõttele, elementideks on seejuures tsehhid ja tootmis-jaoskonnad. Teatavasti põhineb sellel meetodil ettevõtte tehnika-, tootmis- ja finantsplaani koostamine maatriksvormis.

Iga dünaamiline süsteem on pidevas vastastikusel seoses väliskeskkonnaga, s. o. teiste süsteemidega, nii et omavahel seotud süsteeme võib ühendada uueks, keerukamaks, kõrgemat järku süsteemiks. Nii moodustab kogu meie rahvamajandus ühe tervikliku süsteemi, millel on *hierarhiline struktuur*; kogu rahvamajandus $\rightarrow$ rahvamajandusharud $\rightarrow$ ettevõtted (majandid) $\rightarrow$ tsehhid (brigaadid) $\rightarrow$ töökohad (lülid).

Dünaamiliste süsteemide käitumise uurimisel on eriti tähtis välja selgitada, kuidas sisendid mõjuvad väljunditele, ning avaldada see mõju matemaatiliselt, funktsionaalse sõltuvusena. Süsteemi sisendid määravad olulises

osas tema käitumise, seega kujutavad sisendid süsteemi käitumise regulaatoreid.

Oleme jõudnud järgmise küberneetika põhimõiste — juhtimise mõiste juurde. Küberneetiliste süsteemide teiseks tunnuseks on see, et nad on *juhtimissüsteemid*. *Juhtimise* all mõistame protsessi, kus ühe süsteemi väljund, olles teise süsteemi sisendiks, mõjutab viimase väljundit. Juhtimisprotsesse võib seega kujutada teatavate juhtimisahelatena (vt. joon. 9).



JOONIS 9.

I juhtimisahel näitab skemaatiliselt, kuidas tarbija nõudmiste rahuldamine oleneb varustamisest.

II juhtimisahel näitab plaaniülesannete viimist ettevõtteni.

Tehakse vahet *juhtiva süsteemi* ja *juhitava süsteemi* vahel, mis kokku moodustavad *juhtimissüsteemi*.

Ülaltoodud juhtimisprotsessi definitsioonis pole midagi öeldud juhtimise iseloomu kohta. Mõned autorid seovad juhtimist küberneetilistes süsteemides nende käitumise optimeerimisega. Nii mõistab V. Moissejev juhtimise all küberneetikas juhtimise ja optimeerimise ühtsust.¹ Akadeemik A. Berg defineerib küberneetikat kui teadust keeruliste dünaamiliste süsteemide optimaalsest, sihipärasest juhtimisest.²

Optimaalne juhtimine on iseloomulik küberneetilistele süsteemidele, ent see ei tähenda veel, et küberneetilised süsteemid on ainult need, mille käitumine on optimeeritud. Majandussüsteemid on küberneetilised süsteemid, me püüame optimeerida nende käitumist, ent pole seda probleemi seni komplekselt veel kaugeltki lahendanud.

Sihipärane juhtimine küberneetilistes süsteemides on suunatud nende stabiilsuse säilitamisele. Kui küberneeti-

¹ В. Д. Монсеев. Центральные идеи и философские основы кибернетики. М. 1965.

² A. I. Berg. Küberneetika ja töökindlus. Tallinn 1966, lk. 11.

line süsteem viiakse tasakaaluolekust välja, siis püüab juhtimine mõjutada süsteemi käitumist, nii et ta taastaks oma püsiva tasakaalu. Kui küberneetiline süsteem ei suuda säilitada endist tasakaaluolekut, siis püüab ta leida oma võimalike käitumisviiside hulgast uue tasakaaluoleku, et jääda jällegi stabiilseks. Neid süsteeme, mis on suutelised säilitama oma stabiilsust erisugustele käitumisviisidele omaste tasakaaluolekute saavutamisel, nimetatakse *ultrastabiilseteks*. Kui küberneetiline süsteem koosneb mitmest ultrastabiilsest alamsüsteemist, kusjuures need on ajuti teineteisest sõltumatud, siis nimetatakse sellist süsteemi *multistabiilseks*. Majandussüsteemid on multistabiilsed süsteemid.

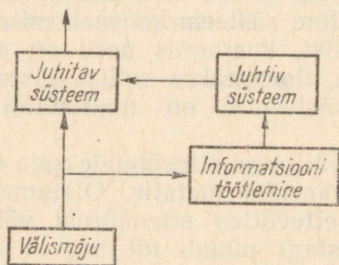
Näiteks olgu teatava peavalitsuse ettevõtetele vaja oma toodangu väljalaskmiseks värvilisi metalle. Oletame, et varustushäirete tõttu said ettevõtted ettenähtust vähem vaske ja alumiiniumi. Mõistagi püüab nii peavalitsuse juhtkond kui ka ettevõtte administratsioon leida tekkinud olukorrast väljapääsu: otsitakse värviliste metallide asendajaid, uusi varustusallikaid, vaetakse uusi konstruktiivseid lahendusi, äärmisel juhul muudetakse plaani.

Seega on juhtimise tähtsamaid ülesandeid kompenseerida ja neutraliseerida segavaid välismõjusid, mis püüavad rikkuda süsteemi tasakaaluolekut, ohustavad tema stabiilsust. Mõistagi pole maailmas absoluutselt stabiilseid süsteeme. Iga süsteem on suhteliselt stabiilne, olenevalt häiringute tugevusest. Niisiis on igal süsteemil kindel stabiilsuse piirkond, kus ta on suuteline taastama oma tasakaaluolekut.

Teisiti öeldes, süsteemi stabiilsus on seda suurem, mida suurem on tema näitajate lubatud kõikumine. Ja siit tuleb ka järgmine oluline järeldus: süsteemi stabiilsus on seda suurem, mida suuremad on antud süsteemi elementide näitajate lubatavad hälbed. Niisiis, mida elastsem on süsteem, seda suurem on tema võime kohaneda kahjulike välismõjudega, mida jäigem on süsteem, seda väiksem on tema kohanemisvõime.

Mainitud nähtus avaldub eriti ilmekalt majandussüsteemide funktsioneerimise praktikas ja seepärast näeb uus tootmise juhtimise ja planeerimise süsteem ette ettevõtete õiguste märgatavat laiendamist ning kohaliku initsiatiivi arendamist. Ettevõtete tegevuse liigne reglementeerimine ja administratiivsete juhtnõõridega piiramine

alandab ilmselt ettevõtte kohanemisvõimet mitmesugustele häiringutele. Arusaadavalt võib üksikettevõtete õigusi laiendada ainult teatava piirini, niikaua, kuni see ei satu vastuollu kogu meie rahvamajanduse süsteemi stabiilsuse nõudega. On selge, et elementide näitajate piiramatute kõikumise korral ei moodusta nad terviklikku ning stabiilset süsteemi.



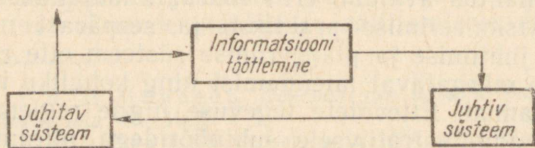
JOONIS 10.

Selleks et juhtimine saaks kompenseerida kahjulikke välismõjusid, peab ta saama informatsiooni nende mõjude kohta. Skemaatiliselt on niisugust juhtimissüsteemi kujutatud joonisel 10.

Kui juhtimine on aga häälestatud juhitava süsteemi optimeerimisele või tema käitumise reguleerimisele, siis saame niisuguse skeemi nagu joonisel 11.

Arusaadavalt võivad eksisteerida ka kombineeritud juhtimissüsteemid, mis kompenseerivad ja ühtlasi reguleerivad.

Oleme jõudnud küberneetiliste süsteemide juhtimise keskse probleemini. Ülaltoodud juhtimisskeemide lähem vaatlemine näitab, et välismõjude neutraliseerimine ja süsteemi käitumise mõjutamine nõuavad *reguleerimist* ja põhinevad *informatsioonil*. Reguleerimine töötab *tagasisidemehhanismi* abil, mis informeerib juhtivat süsteemi sellest, kuidas käsk täideti, s. t. millise väljundi kutsus



JOONIS 11.

esile vastav sisend. Ilmneb, et juhtimine ja reguleerimine küberneetilistes süsteemides põhinevad informatsioonilisel ahelal: informatsiooni hankimine, selle edasiandmine, töötlemine ja informatsiooni alusel vastuvõetud otsuse edasiandmine. Informatsioonilised seosed majandussüsteemides on eriti rohkearvulised ja olulised ning nende organiseerimise tasemest oleneb märgatavalt ka juhtimise efektiivsus. Juhitava süsteemi käitumist peegeldava informatsioonita on majandussüsteemide juhtimine ja reguleerimine ülepea võimatu.

Informatsiooniteooriata on võimatu otstarbekalt korraldada tohutu suure hulga majanduslike ja tehniliste andmete töötlemist ja salvestamist, mis on aga üheks tähtsamaks eelduseks majandusmatemaatika meetodite rakendamisel rahvamajanduse ulatuses.

Informatsiooni tähtsus küberneetikas on niivõrd suur, et akadeemik A. Kolmogorov defineeris küberneetikat kui teadust, mis uurib igasuguseid süsteeme, mis on suutelised informatsiooni vastu võtma, säilitama ja töötleva ning kasutama seda juhtimiseks ja reguleerimiseks.¹

Majandussüsteemid kuuluvad keeruliste tõenäosuslike küberneetiliste süsteemide hulka. Keerukuse mõiste on siin kaunis ebamäärane ja suhteline. Tavaliselt, rääkides keerulistest süsteemidest, mõeldakse nende all süsteeme, mis koosnevad paljudest alamsüsteemidest, mille käitumine on *stohhastiline*, s. t. väljendatav juhuslike suurustega. Nendel suurustel on teatud tõenäosus. Alamsüsteemide funktsioneerimine aga on kirjeldatav mittelineaarsete seostega. Küberneetilised meetodid on eriti efektiivsed just väga keeruliste süsteemide uurimisel.

Kokku võttes võib küberneetilisi majandussüsteeme lühidalt ja piisava täpsusega nimetada multistabiilseteks isereguleeruvateks süsteemideks. See nimetus on õigustatud, sest reguleerimine eeldab kõigepealt, et tegemist on dünaamiliste süsteemidega, teiseks, et süsteemid on juhitud; multistabiilsus aga eeldab omakorda, et tegemist on keerukate ja stohhastiliste süsteemidega.

Küberneetiliste süsteemide juhtimise ja reguleerimise praktiline realiseerimine põhineb elektronarvutite kasutamisel. Masina kasutamine eeldab aga kõigepealt majan-

¹ У. Росс Эшби. Введение в кибернетику. М. 1959. Eessõna venekeelsele väljaandele, lk. 8.

dusprotsesside matemaatilist kirjeldamist ja juhtimise ning reguleerimise *algoritmide* loomist. Algoritm kujutab endast eeskirja, mis teeb kindlaks nõutavad tehted ja nende järjekorra ülesande lahendamisel, arvestades vastavaid loogilisi tingimusi. On loodud rida formaliseeritud algoritmilisi keeli (ALGOL-60, FORTRAN, COBOL jne.), mis võimaldavad kirjeldada teatud probleeme ja tunduvalt lihtsustada nende lahenduskäigu programmeerimist. Tuleb aga rõhutada, et kaugeltki mitte kõik ülesanded pole algoritmeeritavad, on ka niisuguseid, millel pole ühtset, universaalset lahendusviisi. (Näiteks majanduses ei saa otsuse langetamist alati algoritmeerida.)

7.4. Informatsioonteooria alused. Me rääkisime juba informatsiooni töötlemise mõjust majandussüsteemide juhtimise efektiivsusele. Tahaks rõhutada, et informatsioonteooria probleemid on aktuaalsed ka majandusmatemaatika meetodite rakendamisel. Sageli takerdub nende praktikasse juurutamine nõutava informatsiooni puudumise taha.

Niisugused küsimused, nagu aruandluse ratsionaliseerimine, dubleerimise kaotamine, aruannete näitajate informatsioonimahu suurendamine, informatsiooni ühtlustamine, majanduslike ja tehniliste normatiivide korrastamine, informatsiooni otstarbekas edasiandmine, töötlemine ja säilitamine, informatsiooni vajaliku ülekülluse loomine jne., on juhtimise ja reguleerimise edasisel täiustamisel määrava tähtsusega.

Eriuurimised on näidanud, et tavaline inimene on suuteline vastu võtma ligilähedaselt optimaalseid otsuseid, kui ta töötleb informatsiooni, mille maht ei ületa 2—3 bitti (vt. lk. 61) sekundis. Tegeliku olukorra analüüs näitas, et juhtivad töötajad peavad sageli töötleva mainitust suuremat informatsioonikogust, mistõttu paratamatult üle 50 protsendi informatsioonist läheb kaotsi, tulemuseks on aga väheefektiivne juhtimine.¹

Informatsiooni all mõistame niisugust teadet, mis on oluline juhtimissüsteemi oleku mõjutamiseks juhtimise ja reguleerimise käigus. Veidi kitsamas mõttes, ent konkreetsemalt nimetab H. Greniewski informatsiooni «mistahes

¹ Э. А. Исаев. *Эффективность управления и электронные машины*. М. 1966, lk. 11.

teateks, mistahes loaks, mistahes käsuks ja mistahes keeluks»¹.

Küberneetilises mõttes informatsioonilised seosed esinevad ainult omavahel seotud süsteemide vahel, s. t. niisuguste süsteemide vahel, mis on ühendatud informatsioonivoogudega. Teated kehastuvad *signaalides*, mida kasutatakse informatsiooni edasiandmiseks. Signaalid kujutavad endast mingisuguseid füüsikalisi protsesse. Eriti ulatuslikult kasutatakse informatsiooni edasiandmiseks kaasajal elektrisignaale. Objekti, milles toimub signaali edasiandmine, nimetatakse *sidekanaliks*.

Informatsiooniteooria uurib informatsiooni salvestamise, töötlemise ja edasiandmise üldisi matemaatilisi seaduspärasusi. Informatsiooni matemaatiline arvutamine on üks matemaatilise mõtte suurimaid saavutusi. Raskust kaalume kilogrammides, kaugusi mõõdame meetrites, raha arvestame rublades. Ent millise ühikuga mõõta informatsioonihulka?

Kõigepealt peab niisugune ühik võimaldama võrrelda eri teadetes sisalduvat informatsioonihulka. Oletame, et oleme absoluutselt kindlad, et antud ettevõtte täidab aastaplaani. Millist informatsiooni annab meile teade, et antud ettevõtte tööpoolest täitis aastaplaani? Ilmselt mitte mingisugust. Olgu antud ettevõtte plaanitäitmine juhuslik sündmus, kusjuures mainitud sündmusel ja tema vastand-sündmusel on võrdsed tõenäosused. Nüüd piisab meile teate koostamiseks ettevõtte plaanitäitmisest ainult kahest mingisugusest sümbolist (leppemärgist). Niisiis tähistavad need kaks sümbolit elementaarset valikut kahe sündmuse vahel, millel on võrdne tõenäosus. Niisugusteks sümboliteks võivad olla kahendsüsteemi arvud (1,0) või näiteks vastused «jah» ja «ei». Teade, mis on väljendatav kahendsüsteemi ühe sümboliga, sisaldabki informatsioonihulka, mida mõõdetakse informatsiooniühikuga 1 bitt («bitt» on lühend ingliskeelsetest sõnadest «binary digit» — kahendühik). Järelikult, kui on tegemist mingisuguse katsega, millel võib olla neli erisugust ning võrdvõimalikku tulemust, siis annab teade resultaadi kohta kaks korda rohkem informatsiooni, võrreldes kahe võimalusega,

¹ Г. Грениевский. *Логика и кибернетика планирования*. Когитикус «Электронное моделирование и машинное управление в экономике». М. 1965, lk. 37.

ja sisaldab informatsioonihulka 2 bitti. Kuidas mõõta informatsioonihulka üldjuhul, kui võib esineda n erisugust võimalust? Kui suur on sel juhul kahendsüsteemi sümbolite arv m , mida vajatakse teate koostamiseks ühe võimaluse kohta? Ilmselt $n = 2^m$ ehk teisiti (Hartley valem):

$$m = \log_2 n. \quad (7.1)$$

Hartley valemist ilmneb, et kui sündmuste hulk koosneb kahest elemendist, siis $m = \log_2 2 = 1$ bitt.

Informatsiooniteooria edasine areng (R. Hartley formuleeris oma valemi 1928. a.) on lahutamatult seotud C. E. Shannoni nimega, kes tõlgendas informatsiooni kui valiku ebamäärasuse kõrvaldajat. C. E. Shannon vaatles üksikuid erineva tõenäosusega sündmusi ja defineeris teistsuguse informatsioonihulga mõõdu, mida nimetatakse *entroopiaks*, tähistatakse tähega H ja väljendatakse kujul (Shannoni valem):

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i, \quad (7.2)$$

kus p_i on i -nda sündmuse tõenäosus. Kui $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$, siis taandub Shannoni valem Hartley valemiks, kusjuures entroopia on siis maksimaalne, kuna valiku ebamäärasus on just siis kõige suurem. Sisuliselt on entroopia (H) Hartley informatsioonimahu m keskväärtus.

Näide. Olgu meil neli toodet, mille praagi tõenäosused on vastavalt 0,5; 0,25; 0,125; 0,125. Koostatakse teade praagi kohta. Milline on selle teate entroopia?

$$H = -(0,5 \log_2 0,5 + 0,25 \log_2 0,25 + 2 \cdot 0,125 \log_2 0,125) = 1,75 \text{ bitti.}^1$$

Entroopia arvutamine võimaldab võrrelda ka kasutatavate koodide ökonoomsust. *Koodiks* nimetame eeskirja, mille järgi igale sündmusele seatakse vastavusse teatud sümbolite kombinatsioon (järjestus).

Koodi ökonoomsus arvutatakse järgmise valemi põhjal:

$$h = H : H_{\max}, \quad (7.3)$$

kus h on koodi ökonoomsuskordaja, H — koodi entroopia ja $H_{\max}$ — koodi maksimaalne entroopia.

¹ K. Шеннон. Работы по теории информации. М. 1963, lk. 243.

Toome kodeerimise kohta ühe näite. Olgu meil näiteks kümme toodet. Nende kodeerimiseks kasutame allpool toodud koodi:

Tabel 15

Tooted	Kood	Tooted	Kood
1	0000	6	0101
2	0001	7	0110
3	0010	8	0111
4	0011	9	1000
5	0100	10	1001

Seega kasutatakse informatsiooni ülekandmisel toodud lihtsa näite puhul kaht tähestikku. Nii kasutati toodete kodeerimiseks tähestikku, mis koosneb kümnest sümbolist $A = A(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0)$. Selle tähestiku abil võib moodustada mitmesuguseid jadasid: 1, 23, 9108, 7835679, ..., mida nimetatakse *sõnadeks*. Sümbolite arvu sõnas nimetatakse *sõna pikkuseks*. Meie näites oli A -tähestiku üheksa sõna pikkuseks 1 (s. t. üks sümbol), ühe sõna pikkuseks aga 2. Kood oli antud teises tähestikus $B = B(0,1)$. Kodeerimine kujutab endast tähestiku A teisendamist tähestikuks B , kuna dekodeerimine on pöördtehe, kusjuures tähestik B teisendatakse tähestikuks A . Ühe tähestiku sõna seatakse vastavusse teise tähestiku sõnaga *tähestikulise operaatori* abil. Esimest tähestikku (A) nimetatakse sel juhul *sisendi tähestikuks*, teist (B) — *väljundi tähestikuks*.

Tähestikulised operaatorid on põhiliselt ühesed, s. o. eri tähestikes sõnad peavad kodeerimisel ja dekodeerimisel olema seatud üksteisega üksühesesse vastavusse. See tähendab, et *iga kood peab olema dekodeeritav*. Tõenäosuslike protsesside korral võib üheselt määratud tähestikulise operaatori asemel esineda nn. *tõenäosuslik tähestikuline operaator*, mis seab igale sisendi tähestiku sõnale vastavusse *juhusliku valiku* väljundi tähestiku teatud sõnade hulgast. Akadeemik V. Gluškov kasutab tähestikulise operaatori mõistet algoritmi mõiste defineerimiseks. Algoritmid kujutavad endast tähestikulisi operaatoreid,

mis on kindlaks määratud eeskirjade lõplike süsteemide abil.¹

Seega tähendab küberneetiline lähenemine informatsioonile selle optimeerimist, püüet anda minimaalsete algandmete (sümbolite) arvuga edasi maksimaalset informatsioonihulka. See võimaldab tehnilisest aspektist lähtudes informatsiooni kiiremini edasi anda ja töödelda. Ent kõige ökonoomsema koodi valikul varitseb meid teatud oht. Teatavasti mõjuvad informatsioonile tema edasiandmisel paratamatult mitmesugused välismõjud, mida nimetatakse *müraks*.

Müra moonutab informatsiooni ja kui ta muutub liiga tugevaks, siis tekib raskusi alginformatsiooni dekodeerimisega. Seepärast on sageli kasulik luua teatav *informatsiooni üleküllus*, mis kujutab endast informatsiooni garantiivaru. Koodi üleküllust (r) võib arvutada järgmiselt:

$$r = 1 - h = 1 - \frac{H}{H_{max}}.$$

Seega on r koodi ülemääraste sümbolite mõõt. Tavaline keel on informatsiooniteooria kohaselt väga ebaökonoomne, sest üksikud tähed esinevad väga erineva sagedusega. Näiteks saksa keele kohta on $r = 0,66$. Aga just see üleküllus teeb ta meile hästi arusaadavaks, võimaldades vahel mõista isegi sosistamist, kuigi ümberringi valitseb tugev müra.

Mürakindel kodeerimine on informatsiooniteooria aktuaalsemaid probleeme. Üheks võimaluseks on informatsiooni paralleelne üleandmine, mis vähendab dekodeerimatute moonutuste tõenäosust. John von Neumann näitas, et kui on teada müra mõju, siis võib alati valida niisuguse arvu paralleelseid sidekanaleid, et kindlustatakse signaali mistahes täpsusega dekodeerimine. On ka teisi võimalusi, näiteks kontrollsümbolite lisamine vajaliku informatsiooni ülekülluse loomiseks. Kõike seda tuleb silmas pidada ka lähteandmete kogumisel majandusmatemaatika ülesannete puhul ja jooksvate andmete saamisel operatiivse planeerimise ülesande lahendamisel elektronarvuti abil.

Majandussüsteemide puhul on väga oluline peale informatsioonihulga teada veel informatsiooni väärtust

¹ В. М. Глушков. Введение в кибернетику. Киев 1964, lk. 9—17.

mõne kindla majandusliku kriteeriumi suhtes. Näiteks oleks väga tähtis hinnata, kumb on maksimaalse kasumi saavutamisel väärtuslikum, kas fondimahukuse näitaja või käibevahendite ringluskiiruse näitaja. Informatsiooni väärtus oleneb tema semantilisest sisust, kusjuures selle arvuline hindamine on väga keeruline ja seni veel lahendamata probleem. Ent ka siin on juba esimesed sammud tehtud. Nii pakub huvi akadeemik A. Harkevitši idee hinnata informatsiooni väärtust selle põhjal, kui palju kasvas püstitatud eesmärgi saavutamise tõenäosus saadud informatsiooni mõjul. Sel juhul võiks *informatsiooni väärtust* (I) hinnata valemiga

$$I = \log_2 \frac{p_1}{p_2}, \quad (7.4)$$

kus p_1 on eesmärgi saavutamise tõenäosus enne informatsiooni saamist ja p_2 — see tõenäosus pärast informatsiooni saamist.

7.5. Tagasiside. Me tutvusime juba tagasisidega kui reguleerimismehhanismiga, mille ülesandeks on informeerida juhtivat süsteemi juhitava süsteemi käitumisest. Tagasisidemehhanism kujutab endast juhitava süsteemi väljundite ühendamist juhtiva süsteemiga (regulaatoriga). Niisiis on juhitava ja juhtiva süsteemi vahel olemas vastastikune seos. Tagasisidet, mis võimaldab regulaatoril likvideerida või vähendada kahjulikke välismõjusid, nimetatakse *kompanseerivaks* ehk *negatiivseks*, vastupidisel juhul — *kumulatiivseks* ehk *positiivseks* tagasisideks.

Mida keerulisem on süsteem, seda suurem tähtsus on tema juhtimises tagasisidel. Sellist ülikeerulist tõenäosuslikku süsteemi, nagu seda on majandussüsteem, on ülepea võimatu juhtida reguleerimiseta, s. o. tagasisidet kasutamata. N. Wiener iseloomustab tagasisidet kui omadust, mis võimaldab reguleerida tulevast käitumist endiste käskude täitmise järgi.

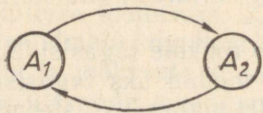
Majandussüsteeme iseloomustab rohkete tagasisidekontuuride olemasolu. Joonisel 12 on toodud üks tagasisidekontuur ja üks regulaator. Reaalsetel majandussüsteemidel on mitu regulaatorit oma eri tagasisidekontuuridega. Võtame näiteks tööstusettevõtte. Üheks regulaatoriks on siin kõrgemalseisev organ, mis on ühendatud ettevõttega jooksva aruandlussüsteemi abil; teiseks regulaatoriks on riigipank; kolmandaks statistikaorganid; neljandaks ühis-

kondlikud organisatsioonid; edasi — ajakirjandus, erialased ametkonnad (näit. tuletõrje ja tervishoiuorganid) jms.

Tagasisidemehhanismi efektiivsuse tõstmiseks on vaja regulaatoreid rangelt spetsialiseerida, nii et *juhtiva süsteemi iga sisendiga oleks ühendatud üks kindel regulaator*. Iga dubleerimine vähendab süsteemi organiseeritust ja korda ning raskendab efektiivset juhtimist ja reguleerimist. Nii näiteks ettevõtte töö planeerimine rohkem kui ühe organi poolt võib tekitada ainult segadust. Ometi on meil sel alal veel palju lahendamata probleeme. Nii peavad ettevõtteid varustama põhiliselt territoriaalsed varustusorganid, ent nende side ettevõtetega on seni veel puudulik, neil pole täielikke andmeid ettevõtete varude kohta ja pealegi peavad ettevõtted tegelikkuses lahendama paljusid materiaal-tehnilise varustuse küsimusi kõrgemalseisvates organites.

Tagasisidekontuure majandussüsteemides võib jaotada nende üldisuse järgi, sest viimastel on astmeline, hierarhiline struktuur. Nii võib siinkohal nimetada mõningaid kõige üldisemaid tagasisidemehhanisme, mille funktsioneerimine avaldub majandusseadustes. Siin võiks näitena tuua hinna kujundamise mehhanismi kapitalistlikes maades, kus tootmise maht kujundab vahetõrje pakumise ja nõudmise vahel, see omakorda mõjub hindadele, need aga reguleerivad tootmist. Kapitaalmahutuste jaotamine olenevalt nende efektiivsusest kujutab endast samuti tagasisidemehhanismi. Igal rahvamajanduse instantsil on omad juhtimisfunktsioonid, mis realiseeruvad jällegi eri tagasisidekontuuride kaudu.

Rea majandusmatemaatika ülesannete puhul tuleb uurida tagasiside mõju materiaalsete, energeetiliste ja väärtuseliste voogude skeemides (mudelites).



JOONIS 12.

Vaatleme lihtsat tagasisidekontuuri, mis on toodud joonisel 12. Siin on skemaatiliselt esitatud väävelhappe ja lämmastikhappe omahinna kujunemine olukorras, kus vää-

velhapet (H_2SO_4) tarbitakse lämmastikhappe (HNO_3) tootmisel ja vastupidi.¹ A_1 on 1 t H_2SO_4 omahind ja A_2 on 1 t HNO_3 omahind. Tähistagu:

- a — 1 t H_2SO_4 omahinda miinus kulud HNO_3 -le;
- b — 1 t HNO_3 omahinda miinus kulud H_2SO_4 -le;
- c — HNO_3 kogust, mis on kasutatud 1 t H_2SO_4 tootmiseks;
- d — H_2SO_4 kogust, mis on kasutatud 1 t HNO_3 tootmiseks.

Siit:

$$A_1 = a + cA_2,$$

$$A_2 = b + dA_1.$$

Seega

$$A_1 = \frac{a + bc}{1 - cd}, \quad A_2 = \frac{b + da}{1 - cd}. \quad (7.5; 7.6)$$

Vaatleme nüüd rahvamajanduse finantsvoogude bilanssi kõige üldisemal kujul. Rahvamajanduses raha ei teki ega kao ringlussfääris, sest raha valdajate vahel on vastastikused krediidisuhted. Tähistagu β rahavaldajate sissetuleku summa vektorit, K — maatriksit, mille korrutis vektoriga ($K\beta$) näitab, kui suure osa oma sissetulekust saavad rahavaldajad vastastikuste finantssuhete alusel, ja α — rahavaldajate laenusummade vektorit. Niisiis väljendab finantsvoogude bilanssi valem²:

$$\beta = \alpha + K\beta.$$

Seega

$$\beta = \alpha(E - K)^{-1},$$

kus E on ühikmaatriks.

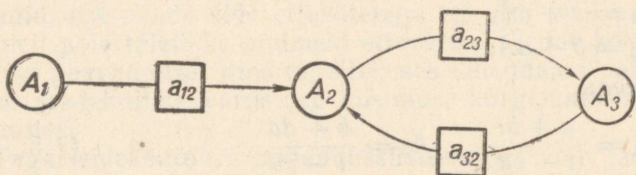
Toodud valem näitab, kuidas sissetuleku summa β mõjub operaatori $(E - K)^{-1}$ kaudu iseenele. Niisugust mõju nimetatakse *multiplikaatori efektiks*, kusjuures toodud valemit nimetatakse *staatiliseks multiplikaatoriks*, sest tagasiside funktsioneerib siin ideaalselt — hilinemisteta³.

¹ В. И. Стоцкий. Основы калькуляции и экономического анализа себестоимости. Л. 1936. lk. 180—181.

² М. Августович. Математическая модель межотраслевого баланса денежного обращения. Когумикс «Проблемы оптимального планирования». М. 1966, lk. 58—59.

³ Р. Аллен. Математическая экономия. М. 1963, lk. 224—225.

Ei tule arvata, et ülaltoodud skeemid ja valemid esinevad ainult väga abstraktsete makroökonomiliste suhete kirjeldamisel. Toome järgnevalt näite ühest konkreetsest majandusprotsessist. Põlevkivitöötlemise kombinadis kasutatakse tunnelahjude tsehhi küttegaasina segugaasi, mis koosneb generaatori- ja tunneligaasist. Ülesandeks on segugaasi omahinna arvutamine. Tagasiside avaldub siin selles, et segugaasi omahind mõjutab iseennast tunneligaasi omahinna kaudu. Esitame antud majandusprotsessi skemaatiliselt joonisel 13.



JOONIS 20.

A_1 tähistab 1 t generaatorigaasi omahinda, A_2 — 1 t segugaasi omahinda, A_3 — 1 t tunneligaasi omahinda, a_{12} — generaatorigaasi kogust 1 tonnis segugaasis; a_{23} — segugaasi kogust 1 tonni tunneligaasi saamiseks, a_{32} — tunneligaasi kogust 1 tonnis segugaasis, K — muud kulud 1 t tunneligaasi saamiseks. Antud süsteemi võib kirjeldada järgmiselt:

$$A_2 = a_{12}A_1 + a_{32}A_3$$

ja

$$A_3 = a_{23}A_2 + K.$$

Seega

$$A_2 = \frac{a_{12}A_1 + a_{32}K}{1 - a_{23}a_{32}}. \quad (7.7)$$

Näeme, et valem (7.7) on struktuurilt analoogiline valemitega (7.5; 7.6) ja näitab, kuidas kujuneb segugaasi omahind A_3 ja A_1 mõjul (kusjuures A_3 omakorda oleneb A_2 mõjust).

On arusaadav, et analoogilisi skeeme ja arvutusi võib kasutada ka keerulisemate protsesside ja suurema arvu tagasisidekontuuride korral.

Keerulisemaid reguleerimisprotsesse, mis on kirjeldatavad diferentsiaalvõrrandite abil, me siin ei vaatle. Tuleks ainult rõhutada, et reaalsete majandusprotsesside tagasiside funktsioneerib teatud hilineemisega ja mõnel juhul ei saa seda hilinemist jätta arvestamata (näiteks kapitaalmahutuste efekti hindamisel või suurte informatsioonihulkade töötlemisel).

Ei tule arvata, et tagasiside uurimine majandussüsteemides tähendab ainult olemasolevate tagasisidekontuuride analüüsimist. Sageli selgub juhtimisprobleemide uurimisel vajadus uute tagasisidekontuuride loomise või mõnede üleliigsete likvideerimise järele.

Tihti peale on majandussüsteemi rohkete tagasisidekontuuride hulgas niisuguseid, mis «töötavad» teineteisele vastu, määrates oma mõjuga süsteemi käitumiskiirgust. Nii võib kondiitribrikut ühelt poolt stimuleerida suurem kasum, teiselt poolt aga võib mõjuda niisugune tootmise regulaator, nagu seda on turustusorganid, mis piirab nende kõrge rentablusega toodete hulka, mille järele on madal nõudmine. Üldse on rahvamajanduses funktsioneerivaid tagasisidemehhanisme ja nende klassifikatsiooni seni veel väga puudulikult uuritud. Nende üksikasjalisem uurimine võimaldab avastada mitmeid uusi tootmise juhtimise täiustamise reserve.

7.6. «Musta kasti» meetod. «Musta kasti» meetod kuulub keeruliste küberneetiliste süsteemide põhiliste uurimismeetodite hulka. Nimetus «must kast» on tuletatud ingliskeelsest nimetusest «black box», millega tähistatakse tundmatu struktuuriga süsteemi, mis asub justkui suletud mustas kastis, mida ei saa avada. «Mustast kastist» on teada ainult tema sisendid ja väljundid. Valides konkreetseid sisendeid ja uurides, kuidas reageerib neile «must kast» oma väljundite kaudu, teeme järel-dusi kasti käitumise suhtes.

Näiteks tutvumisel tundmatu inimesega kohtume tema isikus «musta kastiga». Meil pole teada, milline on selle inimese iseloom, tema teadmised, erialased oskused, poliitilised vaated jne. Esitades talle aga küsimusi, võime vastuste najal luua endale temast teatava pildi.

Eri teadusharudes esinevad erisugused «musta kasti» meetodi realiseerimise viisid. Nii võime näiteks füüsikas,

keemias ja bioloogias kohtuda niisuguste uurimisobjektidega, mille struktuur on täiesti tundmata, kujutades endast «musta kasti» puhtal kujul. Sellistel juhtudel pole uurijal esialgu mingisuguseid tugipunkte, mingit alust «musta kasti» sihipäraseks mõjutamiseks ning alustatakse pimesi kompamisest, juhuslike sisendite valikust, püüdes avastada objekti reaktsioonides mingit seaduspärasust. Niisugust kompamismeetodit nimetatakse «trial and error»- (katsete ja vigade) meetodiks. Mõistet «trial and error»-meetod kasutasid esmakordselt O. W. Holmes (1905) ja H. S. Jennings (1906) loomade käitumist uurides. Majanduses toimub selle meetodi abil plaanide lõplik kindlaksmääramine rohkearvuliste kooskõlastamiste ning täpsustuste tulemusena.

Majandussüsteemide uurimisel ei kohta me kunagi «musta kasti» puhtal kujul. Iga uue uurimisobjekti suhtes on meil ikka midagi teada, vähemalt on meil mingi hüpotees tema võimaliku struktuuri ning käitumise kohta. Puuduvad vaid üksikasjalised andmed toimuvate protsesside olemusest. Niisuguste süsteemide uurimisel võime juba sihipäraselt valida sisendeid, mis oleksid kooskõlas meie hüpoteesiga ja olemasolevate andmetega.

«Musta kasti» meetodi rakendamise eesmärgiks on avastada funktsionaalsed ja stohhastilised seosed süsteemi sisendite ja väljundite vahel, s. o. tundma õppida süsteemi käitumist. Seejärel kirjeldatakse neid seoseid matemaatiliselt ja saadakse uuritava objekti formaliseeritud mudel, mis reageerib välismõjudele nii nagu reaalne objekt. Järgmiseks sammuks on objekti struktuuri järkjärguline selgitamine.

Albert Einstein kirjeldas füüsikaliste nähtuste tunnetamist järgmiselt. Kujutagem endale ette kella hermeeiliselt suletud korpusega. Me näeme ainult osutite liikumist. Ülesanne seisab selles, et korpust avamata mõelda välja niisugune mehhanism, mis paneb osutid liikuma selliselt, nagu nad liiguvad. On ilmne, et saab välja mõelda mitu sellist mehhanismi, sest üks kindel käitumine võib esineda mitme erineva struktuuri korral.¹

Reaalse objekti formaliseeritud mudel on abstraktsioonina mõõtmata vaesem reaalsest objektist endast, pee-

¹ Б. В. Ахлибинский, Н. И. Храленко. *Чудо нашего времени*. Л. 1963, lk. 96.

geldades tema käitumist ainult mõningate kindlate tingimuste korral või mõningates üksikutes olukordades.

Matemaatika seisukohast tähendab niisuguse formaliseeritud mudeli loomine vastava *operaatori* arvutamist, mis seab teatud sisendi suuruse vastavusse kindla väljundi suurusega. Operaatori mõiste on kaasajal muutunud väga üldiseks. Nii tutvusime juba kodeerimise ja mõningate loogiliste operaatoritega. «Musta kasti» meetodi rakendamisel otsitakse aga niisuguseid operaatoreid, mis kirjeldaksid matemaatiliselt süsteemi üleminekut ühest olekust teise, s. t. tema käitumist.

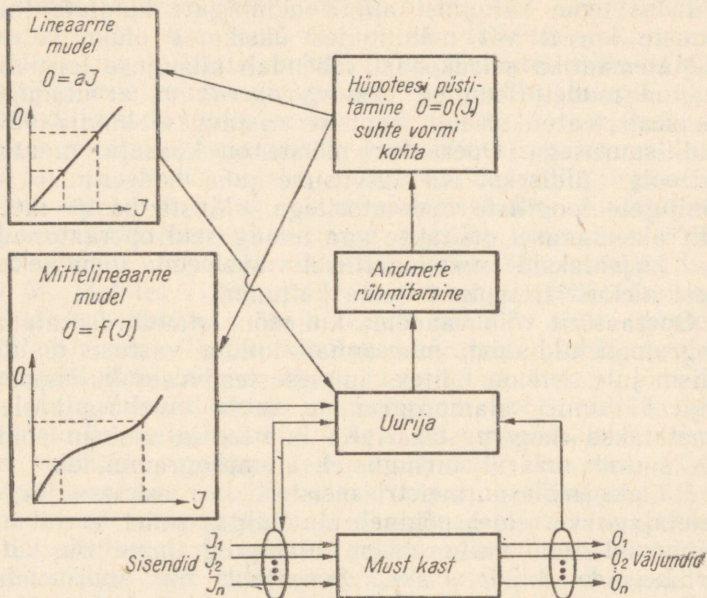
Operaatorit võib vaadelda kui mõne standardse alamprogrammi üldistust, mis annab kindla vastuse teatud välismõjule. Nii on näiteks inimese teadvuses kujunenud palju käitumise alamprogramme, mida tavalises keeles nimetatakse «kogemusteks». Ka inimese intuitsioon põhineb suurel määral niisugustel alamprogrammidel.

Näiteks malesuurmeistri meisterlikkus esimese järgu maletajaga võrreldes põhineb muuhulgas sellel, et tal on kujunenud tunduvalt rohkem alamprogramme üksikute partiiseisude hindamiseks. Seepärast on suurmeistri mõtlemisprotsess järjekordse käigu valikul hulga ökonoomsem, kiirem ja õigem.

Vaadeldud aspektist lähtudes võib uudselt hinnata näiteks niisugust ühiskondlikku nähtust nagu kollektiivne töö. Praktika näitab veenvalt, et kollektiivne teaduslik töö on väga efektiivne. Spetsiaalne uurimus keemiateaduste valdkonnas näitas, et aastatel 1910—1960 on individuaalsete teaduslike väljaannete protsent langenud 82-lt 33-le, kuna kahe autori kollektiivsete tööde protsent suurenes 16-lt kuni 43-ni. Kaasautorluse osatähtsus on kasvanud ka avaldatud bioloogiaalastes töödes.¹ Nähtavasti toimub kollektiivtöö käigus alamprogrammide koostöö. Selle tulemusena juhib kollektiivtööd rikkam ja efektiivsem koondprogramm. Järeldus: organiseeritud kollektiivtöö kindlustab edu.

Allpool esitame skemaatilise näite (joon. 14) «musta kasti» meetodi rakendamisest. Skeem näitab, kuidas uurija püüab matemaatiliste mudelite abil leida funktsionaalseid sõltuvusi «musta kasti» sisendite ja väljun-

¹ Г. М. Добров. *Наука о науке*. Киев 1966, lk. 163—164.



JOONIS 14.

dite vahel antud protsessi kulgemise seaduspärasuste avastamiseks.

«Musta kasti» meetodi rakendamisel tuleb arvestada seda, et reaalsele objektile mõjuvad peale teadlikult valitud suuruste veel juhuslikud mõjud (müra). Eialgu eeldame, et müra on suhteliselt nõrk ega mõjuta oluliselt süsteemi käitumist. Igatahes peab seda eeldust kinnitama praktika. Võivad esineda olukorrad, kus häiringud (müra) kasvavad sedavõrd suureks, et süsteem muutub mittejuhitavaks.

«Musta kasti» mõiste on suhteline. Süsteemi struktuur võib mõnes suhtes olla meile detailselt teada, kuna teatavas osas võib ta esineda samaaegselt «musta kastina». Selles väljendub objektiivse reaalsuse ammendamatu mitmekülgsus ja rikkus ning meie tunnetuse suhteline piiratus. Näiteks on tööstusettevõtte struktuur paljuski hästi teada; nii teame, millistest tsehhidest ta koosneb, kuidas need tsehhid on territoriaalselt paigutatud

ja tootmisprotsessis omavahel funktsionaalselt seotud, tunneme tootmise tehnoloogiat, tehnikat, töö organiseerimist ja veel palju muudki. Esimesel pilgul pole tootmisprotsessis olev ettevõtte mitte mingisugune «must kast» ja näib, et tema käitumine on meile hästi teada. Tegelikult tunneme aga ettevõtte käitumist väga vähe ja kitsapiirilisel. Esitame näiteks küsimuse: kuidas käituks ettevõtte uue materiaalse stimuleerimise süsteemi ja uute plaaninäitajate rakendamise korral; millised oleksid tema töö näitajad? Ja selgubki, et meil pole nendele küsimustele vastust. Ettevõtte on uues olukorras muutunud korraga «mustaks kastiks». Uued töötingimused panevad süsteemis liikuma niisuguse sisemise mehhanismi, mis on meie eest varjatud ja nõuab spetsiaalset uurimist.

Me rääkisime juba majandussüsteemide hierarhilisest struktuurist. Vastavalt sellele esineb ka majandussüsteemide «mustade kastide» hierarhia — madalamat ja kõrgemat järku «mustad kastid». Kõrgemat järku «mustade kastide» uurimine eituse eitamise seaduse järgi tähendab taas pöördumist madalamat järku «mustade kastide» poole, selleks et edaspidi paremini mõista kõrgemat järku «mustade kastide» käitumist.

Toodud asjaolul on suur metodoloogiline tähtsus. Nii püütakse meil praegu välja töötada kogu rahvamajanduse optimaalse funktsioneerimise süsteemi. Selle süsteemi käitumise sügavamaks mõistmiseks tuleb aga esialgu uurida alamsüsteemide optimaalse käitumise tingimusi. Enne juhtimise ja planeerimise uue süsteemi laiaulatuslikumat juurutamist tehti eksperimente üksikutes ettevõtetes. Kõrgemat järku majandussüsteemide edukas funktsioneerimine oleneb alamate ja kõrgemate majanduslülide huvide (juhtimiskriteeriumide) kooskõlastatusest. Akadeemik L. Kantorovitš märgib, et rahvamajanduse planeerimise raskus oleks ületatud, kui loodaks niisugune meetodika, mis võimaldaks lahendada üksikute harude ja ettevõtete planeerimise küsimusi eraldi ja ühtlasi kooskõlastatult, s. t. planeerida optimaalselt (või ligilähedaselt optimaalselt).¹ Järelikult peab rahvamajanduse optimaalse funktsioneerimise koondmudel

¹ Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М. 1960, lk. 19.

koosnema üksikute alamsüsteemide kooskõlastatud mudelitest, kusjuures sel mudelite süsteemil peab olema hierarhiline struktuur. Praktiliselt tähendab see seda, et uute meetodite ja süsteemide juurutamine peab toimuma järk-järgult, etappide kaupa. Arusaadavalt kehtivad kõik need meetodilised seisukohad ka ettevõtte kohta, millel on samuti hierarhiline struktuur.

Üldistatult võiks öeldut demonstreerida G. Klaus'i järgi niisuguse skeemiga:¹

kõrgemat järku «must kast» (1)	W_1 ;
alamat järku «must kast»	W_2 ;
kõrgemat järku «must kast» (2)	W_3 .
(W _i — suhtelise tõe aste; 1, 2 — tunnetuse astmed.)	

Toodud tunnetuse skeem näitab eituse eitamise seaduse toimet kõrgemat järku «musta kasti» käitumise uurimisel.

8. MODELLEERIMISE ÜLDISED ALUSED

8.1. Mudelite mõiste. Igapäevases elus kasutame sageli mudeli mõistet, rääkides näiteks moemudelitest, reaalseste objektide makettidest (gloobus, mänguauto), koopiatest (foto, skulptuur) jne. Teaduses ja eriti küberneetikas on aga mudeli mõistel palju laiem tähendus: siin on mudeliteks matemaatilised võrrandid ja loogiliste aksioomide süsteemid, teooriad ja skeemid, struktuurid ja kirjeldused. Huvitav on märkida, et California ülikooli keeleteadlane Yuen Ren Chao tegi kindlaks, et mõistet «mudel» kasutatakse kolmekümnes tähenduses, mis on tema arvates teineteisele lähedased, ja veel üheksas erinevas mõttes.²

Kõige üldisemas mõttes võib öelda, et mudel on tunnetamisvahend. Seda võib aga mudel olla ainult siis, kui tema kasutamine annab meile uuritava objekti kohta täiendavat informatsiooni. Seda informatsiooni kasutame põhiliselt kolmes suunas: otsuste langetamiseks praktikas, teooria täiustamiseks ja tema üksikute seisukohtade

¹ G. Klaus. *Kybernetik und Erkenntnistheorie*. Berlin 1966, lk. 379.

² B. A. Штoфф. *Моделирование и философия*. М.—Л. 1966, lk. 6.

täpsustamiseks ning uuritava süsteemi käitumise prognoosimiseks.

Mis annab aga meile põhjust arvata, et mudel varustab meid usaldusväärse informatsiooniga uuritava objekti kohta, et ta on suuteline teatavas mõttes õigesti peegeldama objektiivset tegelikkust? Kõigepealt marksistliku filosoofia põhitees objektiivse tegelikkuse tunnetamisest, teiseks praktika, kolmandaks eeldus, et objekti ja mudeli vahel on teatav sarnasus, analoogia. Olles mõnes suhtes sarnane objektiga, on mudelil võime tema käitumist imiteerida. Seda asjaolu kasutataksegi modelleerimisel.

Arusaadavalt ei peegelda mudel kõiki objekti omadusi, külgi, käitumisviise, struktuuri detaile. Kõigepealt on see võimatu, teiseks muudab liigne konkretiseerimine mudeli ülearu keerukaks, mis raskendab tema praktilist kasutamist.

Järelikult peab mudel peegeldama ainult olulist, jätma teatud probleemi käsitlemisel kõrvale mitteolulise. Selles seisabki modelleerimise raskuspunkt: *mudeli koostaja peab eelkõige hästi tundma uuritava objekti spetsiifikat*. Niisiis on mudel abstraktsioon, «vahelüli teoreetilise abstraktse mõtlemise ja objektiivse tegelikkuse vahel», nagu märkis V. Nemtšinov.¹ Seepärast võiks mudelit lühidalt nimetada uuritava objekti lihtsustatud analoogiks.

Ülalöeldu filosoofiline üldistus viib meid järeldusele, et mudeli dialektika seisab abstraktse ja konkreetse vahelises vastuolus. Ühelt poolt esineb mudel täiesti konkreet-sel kujul, ent samas on ta uuritava objekti abstraktsioon. Seda asjaolu ei tule mudeli praktilisel rakendamisel kunagi unustada. Saadava informatsiooni alusel ei tohi teha liiga kaugeleminevaid üldistusi ning järeldusi, mis ei vasta antud mudeli abstraktsiooniastmele ja kasutatud lähteandmete hulgale. Samuti tuleb alati mees pidada, et näiteks majandusmudelid on ainult majandusobjektide omaduste abstraktsioon, mis on väljendatud matemaatilises vormis; kuna aga majandusobjekti iseloomustab ka rida kvalitatiivseid suhteid ja omadusi, mis ei kajastu mudelis, siis tuleb seda arvestada mudelilt saadava informatsiooni tõlgendamisel.

Paraku on majandusteaduses loodud palju mudeleid,

¹ В. С. Немчинов. *Экономико-математические методы и модели*. М. 1965, lk. 32.

mis, nagu öeldakse, «ei tööta», s. t. ei leia rakendamist praktikas ega teaduses. Niisugused «mittetöötavad» mudelid tekivad neljal põhjusel.

1) Mudeli imiteerimisvõime on liialt väike, saadav täiendav informatsioon seetõttu puudulik ja rakendamise seisukohast mitte küllalt usaldusväärne. Tavaliselt kuuluvad siia ülelihtsustatud mudelid.

2) Mudeli struktuur on niivõrd keeruline, et selle rakendamiseks puudub vastav matemaatiline aparatuur. Tavaliselt kuuluvad siia liigselt konkretiseeritud mudelid.

3) Mudel imiteerib objekti põhimõtteliselt valesti, s. o. mudel põhineb ekslikel eeldustel ja lähteandmetel.

4) Mudeli kasutamine on majanduslikult ebaotstarbekas.

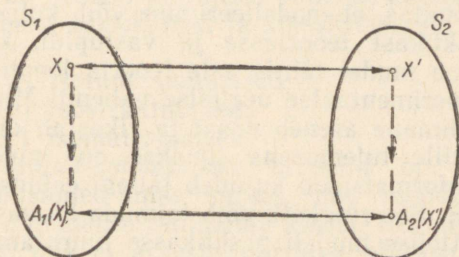
Arusaadavalt on praktiline väärtus ainult töötavatel mudelitel, mida saab rakendada konkreetse probleemi lahendamiseks. Teaduslikust küljest on aga sageli õpetlik ka mudeli «läbikukkumine». Esiteks suunab see matemaatikute tähelepanu vajadusele täiustada olemasolevaid matemaatilisi meetodeid või võimalusele kohandada antud mudelit nii, et seda saaks töödelda tuntud meetoditega. Teiseks annab niisugune mudel meile aluse uute hüpoteeside püstitamiseks, mis peegeldaksid tegelikkust täpsemini kui endised. Näiteks luuakse praegu hulgaliselt rahvamajanduse mudeleid, mis ei leia veel praktilist kasutamist, kuid see ei anna põhjust väita, et tulevikus oleks põhimõtteliselt võimatu luua töötavaid globaalseid mudeleid.

Me rääkisime juba analoogiast, sellest, et sarnasus objektiga on üks mudeli põhiomadusi, samuti mudeli lihtsustamisest. Konkretiseerime neid mõisteid.

Kõigepealt konkretiseerime matemaatiliselt analoogia mõistet. Mudeli analoogia uuritava objektiga põhineb nendevahelisel *isomorfismil*. Üldiselt mõistetakse isomorfismi all mudeli ja objekti struktuuride vastastikust ühest vastavust. Vaatleme mudelit ja objekti süsteemidena, tähistades neid vastavalt S_1 ja S_2 . Imiteerigu süsteemi S_1 olek X süsteemi S_2 olekut X' . Olgu A_1 ja A_2 vastavalt süsteemide S_1 ja S_2 olekute muutumiste operaatorid. Süsteemid S_1 ja S_2 on isomorfsed oma oleku muutuste suhtes siis, kui igale süsteemi S_1 oleku muutusele ($X \rightarrow A_1(X)$) vastab üheselt süsteemi S_2 vastava oleku muutus ($X' \rightarrow$

$\rightarrow A_2(X')$) ja vastupidi. Öeldu näitlik selgitus on toodud joonisel 15.

Kui süsteemi S_2 teatud oleku muutusele ei vasta üheselt süsteemi S_1 vastava oleku muutus, s. t. kui esineb ainult ühepoolne vastavus, siis nimetatakse niisugust suhet *homomorfseks*. Niisiis on homomorfism üldisem mõiste võrreldes isomorfismiga, kusjuures viimane on tema erandjuhtumiks. Näiteks on üldjuhul suhe süsteemi sisendite ja tema väljundite vahel homomorfne.



JOONIS 15.

Isomorfismi rakendamine praktikas põhineb tema transitiivsusel: kui süsteem S_1 on isomorfne süsteemiga S_2 ja viimane omakorda isomorfne süsteemiga S_3 , siis on süsteem S_1 isomorfne süsteemiga S_3 . Võib liialdamata öelda, et modelleerimise olemus seisab püüdes kasutada isomorfismi ja homomorfismi objekti sügavamaks tunnetamiseks.

Öeldust võime teha kaks tähtsat järeldust.

1) Mudelit saab lihtsustada ainult niikaua, kuni ta jääb objektiga isomorfseks teatud omaduste suhtes.

2) Mudelit võib kasutada katsete korraldamiseks, üldistades saadud tulemusi kõigile isomorfsetele süsteemidele.

Eriti oluline on katsete korraldamine majanduses. Siin ei muuda katsetamine mudelite najal tegelikke majandusprotsesse, sest nende aktiivne mõjutamine on alati seotud riskiga ja võib kalliks maksma minna.

Ranget vahet tuleb teha analoogia ja identsuse vahel, sest nende samastamine võib järeldustes ning üldistustes põhjustada tõsiseid eksimusi. G. Klaus järgi on kaks süsteemi *identsed* ainult siis, kui nad on võrdsed oma

tulemuste poolest, funktsionaalselt, struktuurilt ja loodud samast materjalist.

Nüüd võime anda mudeli üldise definitsiooni. *Mudel on süsteem, mis peegeldab uuritava reaalse objekti teatavaid külgi, imiteerib teda ja annab tema kohta informatsiooni teaduse ning praktika jaoks.*

Mudelit, mis peegeldab küberneetilist süsteemi, nimetatakse *küberneetiliseks mudeliks*. Küberneetiline mudel on niisugune mudel, mille funktsioneerimine rajaneb tagasisidel.

V. Nemtšinov rõhutas, et modelleerimine võib kulgeda kahes suunas: praktikast teooriasse ja vastupidi, kusjuures ühelt poolt on mudel tähtis aste teooria loomisel, teiselt poolt — eksperimentaalse uurimise vahend. Mudel rikastab teooriat, viimane areneb edasi ja rikastab omakorda praktikat, mille tulemusena luuakse uus mudel, mille abil saadav informatsioon kujuneb jällegi eelduseks teooria rikastamisele. See ringkäik võib toimuda ka vastupidises suunas: mõttelise mudeli praktikasse juurutamine rikastab praktikat, kuna uute praktiliste tulemuste üldistamine rikastab omakorda teooriat. Nii esineb mudel teooriat ja praktikat ühendava lülina. Tema kaudu muundub teooria praktiliseks tulemuseks. Majandusteadus pakub selleks hulgaliselt näiteid. Tuletame meelde kas või Quesnay majandusvoogude tabelleid («Tableau économique», 1758 ja 1766) või K. Marxi lihtsa taastootmise mudelit, mis etendasid tähtsat osa majandusteaduse arengus.

8.2. Mudelite klassifitseerimine ja üldomadused. Kirjanduses võib leida erinevaid teaduslike mudelite klassifikatsioone. Siin oleneb kõik klassifitseerimisaluse valikust.

Näib otstarbekas valida klassifitseerimisaluseks kas:

- 1) mudel ise;
- 2) mudeli ja objekti analoogia või
- 3) uuritav objekt.

Vaatleme toodud aluseid üksikult.

1. Olenevalt modelleerimisviisist jaotatakse kõik mudelid *reaalseteks* (maketid) ja *mõttelisteks* (võrrandisüsteemid, skeemid, graafikud). Seega võib mudel olla konstrueeritud mingisugusest materjalist või iseloomustada mingit mõttelist konstruktsiooni, mille kõik teisen-

dused toimuvad samuti mõtteliselt. Tavaliselt on reaalsed mudelid konkreetsemad, võrreldes mõttelistega, mis väljendavad abstraherimise kõrgemat astet. Majandusküberneetilised mudelid on valdavas enamikus mõttelised.

Olenevalt mudeli funktsioneerimisest eraldatakse *üheetapilisi* ja *mitmeetapilisi* mudeleid. Üheetapiliste mudelite puhul saadakse otsitav vastus ühe lahendustsükli järel, kuna mitmeetapilised mudelid on keerukamad ja nõuavad mitut lahendustsükli (näiteks dunaamilised mudelid).

2. Mudeli ja objekti vahelist analoogiat võib vaadelda kolmest seisukohast ja klassifitseerida vastavalt ka mudeleid:

- a) isofunktsionaalsed;
- b) isostruktuursed;
- c) isomateriaalsed.

Isofunktsionaalsed mudelid on isomorfsed objekti funktsioneerimise suhtes, nad moodustavad küberneetiliste mudelite tähtsaima klassi. Isofunktsionaalseid mudeleid, mis ei arvesta uuritava objekti muutumist ajas ja ruumis, nimetatakse staatilisteks, kui nad seda aga arvestavad, siis dunaamilisteks.

Majandus areneb ajas ja ruumis, kusjuures eriti huvitab meid tema arenemine ajas. Ainult siis, kui mudel arvestab arenemist ajas, võib tema abil enam-vähem usaldusväärselt prognoosida. Ka staatilisel mudelil on prognoosimisvõime eeldusel, et olukord (süsteemi olek) ei muutu. Sellegipoolest saab staatilisi mudeleid lugeda prognoosivateks ainult esimeses lähenduses, kuna nende abil saadud andmete ekstrapoleerimine on kaunis ohtlik ja ebakindel ekskursioon tulevikku.

Isostruktuursed mudelid imiteerivad objekti struktuuri (skeemid, graafikud). Neid mudeleid on otstarbekas omakorda jaotada kaheks alamklassiks — isomeetrilisteks ja isotopoloogilisteks. Isomeetrilised mudelid säilitavad kas täpselt või ligilähedaselt objekti struktuuri geomeetrilised proportsioonid, kuna isotopoloogilised mudelid kirjeldavad objekti sügavamaid struktureid omadusi, mis ei olene objekti mõõtmetest (näiteks ettevõtte struktuuri põhimõtteline skeem, rahvamajanduse bilansside struktuuri skeemid jne.).

Isomateriaalseid mudeleid ei tule segi ajada reaalsete mudelitega, kuigi nad moodustavad reaalsete mudelite hulga alamhulga. Siin on pearõhk sellel, et mudeli ana-

loogia objektiga põhineb sama materjali kasutamisel mudeli konstrueerimisel. Selliseks mudeliks võib olla ettevõtte, mida otsustati kasutada mudelina eksperimendi korraldamisel reaalses tingimustes.

3. Olenevalt modelleeritavate protsesside iseloomust võib mudeleid jagada determineeritud ja stohhastilisteks ning pidevateks ja diskreetseteks mudeliteks. *Determineeritud* mudelid on niisugused, mille lahendid on lähteandmetega üheselt määratud. *Stohhastilise* mudeli juures pole lahendid üheselt määratavad, ent esinevad jääva tõenäosusega. Mudelil võib olla stohhastiline iseloom ka sel juhul, kui lähteinformatsioon on juhuslikku laadi. *Diskreetsed* mudelid kirjeldavad niisuguseid protsesse, mille näitajad on ajas ja ruumis konstantsed. *Pidevate* mudelite näitajad muutuvad ajas ja ruumis pidevalt. Olenevalt objekti käitumist kirjeldavate matemaatiliste seoste iseloomust eristatakse *lineaarseid* ja *mittelineaarseid* mudeleid. Kõige enam on uuritud lineaarseid mudeleid ja nende lahendamise algoritmid on praktiliselt hõlpsasti realiseeritavad eeldusel, et mudeli dimensioonid vastavad elektronarvuti võimsusele (peamiselt mälu mahule). Mittelineaarsete mudelite lahendamise algoritme on praktikas raske kasutada, seepärast püütakse võimaluse korral muuta mittelineaarne model lineaarseks.

Olenevalt sellest, millist süsteemide hierarhia astet imiteerib model, eristatakse *mikro-* ja *makromudeleid* (makromudeleid nimetatakse ka globaalseteks). Mida kõrgem on imiteeritava objekti hierarhia aste, seda keerulisem on vastava mudeli loomine. Praegu ei osata veel modelleerida ülikeerulise struktuuriga kompleksseid dünaamilisi makrosüsteeme (rahvamajandus). Me õpime seda praegu alamsüsteemide modelleerimise ja mikromudelite loomise ning nende koondamise (agregeerimise) teel (rahvamajanduse ulatuses võib ettevõtte mudelit lugeda mikromudeliks, kuigi tema struktuur on küllalt keerukas).

Et makrosüsteemid kujutavad endast tavaliselt blokk-süsteeme, s. t. nad koosnevad üksikute alamsüsteemidest, siis peaks makrosüsteemi modelleerimist lihtsustama tema blokkmudelite unifitseerimine. Sisuliselt tähendab see *modelleerimise standardiseerimist*. Praegu sellesuunalised tööd alles käivad ja tulemustest on veel vara rääkida. Siin on palju raskusi. Kuigi näib, et mudelite standardi-

seerimine on otstarbekas ja vajalik, ei tähenda see veel seda, et standardseid mudeleid saab pikemalt mõtlemata rakendada samatüübiliste objektide suhtes. Praktika näitab, et ka samatüübilised majandussüsteemid käituvad erisuguselt, olenevalt konkreetsetest välismõjudest, kaadri kvalifikatsioonist, tootmisbaasi tehnilisest tasemest ja seisukorrast jne. Seega on mikroobjektide iseärasuste tähelepanelik arvestamine eduka makromodelleerimise tähtsamaid eeldusi.

Teine raskus seisab selles, et kuigi makromudel koosneb üksikutest alammodellitest, ei saa teda käsitada viimaste mehaanilise summana. Agregeerimise käigus sünnib uus kvaliteet, tekivad uued omadused, uued suhted, mis pole iseloomulikud alammodellitele. Näiteks juba üleminekul ettevõtte modelilt tööstusharu modelile tekivad uued probleemid, mis on seotud territoriaalse paigutamisega, kohalike tööjõuressursside arvestamisega, majandusrajoonide kompleksse ja harmoonilise väljaarendamisega, riigikaitse huvidega jne. jne. Kui neid uusi tingimusi üldse mitte arvestada või arvestada puudulikult, siis on tulemuseks «mittetöötav» mudel.

Majanduslike makromodelite loojad seavad endale küllalt suuri eesmärgi. Nende mõtte kohaselt võimaldavad makromodelid muuhulgas konkretiseerida ja rikastada ka sotsialismi poliitökonoomiat, luua rahvamajanduse optimaalse funktsioneerimise süsteem. Ent kuni viimase ajani suhtub osa majandusteadlasi teatava skeptitsismiga niisuguste modelite realiseerimisse. Üheks põhjuseks on see, et just makromodelleerimise alal on praktilised tulemused seni kõige väiksemad. Enamik makromudeleid pakub ainult akadeemilist huvi. Ent imestada pole siin midagi, sest rahvamajandusliku makromodeli koostamine on väga raske ülesanne. Skeptitsism uue suhtes pole aga kunagi edasiviiv jõud. Eitada makromodeli saamise võimalust tähendab eitada ühiskonna teadusliku uurimise võimalust.¹

8.3. Optimeerimine, optimaalsuse kriteerium ja kitsendused. *Optimeerimine* tähendab paljude võimalike lahenduste hulgast kõige soodsama leidmist, mis vastaks

¹ Я. Тинбэрхэн, Х. Бос. *Математические модели экономического роста*. М. 1967, lk. 21.

kehtivatele tingimustele ja püstitatud efektiivsuse kriteeriumile.

Teiste sõnadega tähendab optimiseerimine defitsiitsete ressursside kõige otstarbekamat, majanduslikult kõige paremat ärakasutamist. Optimiseerimine eeldab alternatiivsete lahendite olemasolu, sest seal, kus kõik on jäigalt reglementeeritud, pole midagi optimiseerida.

Tuleb aga rõhutada, et arvutatavat matemaatilist *optimumi* (parimat lahendit, tulemust) tuleb majandusmatemaatika ülesannete lahendamisel lugeda alati *tinglikuks*, sest tavaliselt on majandusobjektid liiga keerulised ja nende matemaatiline modelleerimine liiga abstraheeritud, et saaksime rääkida range matemaatilise optimumi leidmisest. Niisiis praktiliselt on meil alati tegemist ligilähedase optimumiga.

Optimiseerimine on sotsialistlikus majandussüsteemis objektiivselt vajalik ja paratamatu, ta on sotsialistliku majandamise orgaaniline iseloomujoon. On seaduspärane, et ühiskonna vajadused ületavad alati ressursse. Seega on ressursid alati piiratud. Iga rahuldatud vajadusega sünnib uus rahuldamata vajadus. Seepärast oleks eba-reaalne arvata, et ressursside defitsiitsus on ajutine nähtus. Tähendab, tuleb arvestada ressursside defitsiitsust, otsida nende kõige parem ärakasutamise viis.

Optimiseerimine eeldab optimaalsuse kriteeriumi olemasolu. *Optimaalsuse kriteerium* on majanduslik kategooria, mis iseloomustab uuritava süsteemi oodatavat majanduslikku efekti. Seega võimaldab optimaalsuse kriteerium hinnata üksikuid võrreldavaid variante, otsuseid, plaane. Optimaalsuse kriteerium võimaldab koguseliselt määrata arvutustulemuste vastavust püstitatud eesmärgile. Siin tuleks märkida, et kriteerium pole vajalik ainuüksi optimiseerimiseks: ta võimaldab üldse hinnata suvalise variandi eeliseid teiste variantide ees või kehtiva olukorraga võrreldes. Progress on alati teretulnud. Vahel tuleb piirduda miinimumprogrammiga — peaasi, et oleks kindlustatud edasimineku. Pealegi on kriteerium rakendatav ka neil juhtudel, kus polegi tähtis jõuda kohe efekti väärtusteni, vaid esialgu lihtsalt teada, millist varianti tuleks eelistada. Seepärast nimetavad mõned autorid niisugust kriteeriumi *võrdluskriteeriumiks*. Seda kasutatakse hädaabinõuna ka seal, kus efekti ei saa täpsete arvudega väljendada. Nii näiteks elanikkonna nõudmiste

statistilisel uurimisel otsitakse üksikute laiatarbekaupade eeliskordajaid, mis näitavad, milliseid kaupu eelistatakse.

Konkreetselt optimaalsuse kriteeriumi valik on äärmiselt keeruline ja väga vaieldav metodoloogiline probleem, kus pole veel kujunenud ühtset seisukohta.

Ainult lokaalselt väga piiratud ülesannetes (jäätmete minimiseerimine juurdelõikuses, tsehhi tööpinkide koormuse maksimiseerimine) ja mõnedes erilistes ülesannetes, kus kriteerium on juba ette antud, ei valmista mainitud probleem erilisi raskusi.

Üldjuhul valitakse vastav kriteerium intuiitiivselt, kusjuures ettevõtte tasandil rakendatakse tavaliselt kasumi kriteeriumi, arvestades selle näitaja tähtsust uues juhtimise ja planeerimise süsteemis.

Tuleb aga silmas pidada, et puudused hinnakujundamises ei võimalda lugeda kasumi kriteeriumi kõikjal ühtelangevaks rahvamajandusliku kriteeriumiga. Sageli kasutatakse kriteeriumina ajalisi näitajaid, sest aja kokkuvõtte tähendab samaaegselt tööviljakuse tõusu ja paljude muude majanduslike näitajate paranemist. Tähendab, variantide hulgast valitakse see, mille sooritamiseks kulub kõige vähem aega (näiteks ajaliselt optimaalne veoplaan). Üldises mõttes tähendab aga ajalise kriteeriumi kasutamine niisuguse protsessi valimist, mis viib uuritava süsteemi ühest olekust teise minimaalse ajaga.¹

Rahvamajandusharu tasemel on majanduslikult põhjendatud kriteeriumi valik juba raskem ülesanne. Veelgi keerulisem on kogu rahvamajanduse optimaalse funktsioneerimise kriteeriumi põhjendamine. Viimasel juhul on meil tegemist äärmiselt keeruliste poliitökonoomiliste probleemidega, mille ümber käivad ägedad vaidlused.

Globaalne, kogu rahvamajanduslik optimaalsuse kriteerium peaks olema niisugune majanduslik näitaja, mis suunaks ühtse eesmärgi saavutamiseks kogu meie majandussüsteemi, s. o. looks olukorra, kus see, mis on kasulik kogu rahvamajandusele, on ühtlasi kasulik ka kõigile tema lülidele. Niisugust kriteeriumi nimetatakse *ühiskondliku kasulikkuse kriteeriumiks*.

Üldiseks metodoloogiliseks probleemiks on niisuguste

¹ В. Г. Болтянский. Математические методы оптимального управления. М. 1966, lk. 13, 19.

lokaalsete kriteeriumide valik, mis ei satu vastuollu rahvamajanduse globaalse kriteeriumiga. *Globaalseks kriteeriumiks* peavad mitmed autorid minimaalseid rahvamajanduslikke kulutusi (tootmiskulud, transpordikulud, kapitaalmahutused, likvideerimiskulud).

Kirjanduses rõhutatakse, et mingi kitsama, kohaliku tähtsusega ülesande lahendamisel on vähe sellest, kui püütakse rakendada niisugust kriteeriumi, mis ei satu vastuollu globaalse kriteeriumiga, vaid tuleb võimaluste piires arvestada kas või ligilähedaseltki globaalseid piiravaid tingimusi, mis võetakse arvesse kompleksse rahvamajandusliku mudeli formuleerimisel.¹ Et aga globaalsed rahvamajanduse mudelid on alles loomisjärgus, siis on mainitud metodoloogilistel seisukohtadel suuremalt jaolt vaid akadeemiline tähtsus. Sellepärast kasutatakse meil senises praktikas kriteeriumidena põhiliselt plaanilisi näitajaid, nagu kasum, omahind, erikapitaalmahutused jms.

Vaatleme mõningaid seni kasutatud harumodelite kriteeriume. Eesti NSV-s on koostatud ja lahendatud põllumajanduslikku toorainet ja puitu töötlevate tööstusharude optimaalse kontsentreerimise ja paigutamise mudeleid, kusjuures optimaalsuse kriteeriumiks olid summaarsed transpordikulud tootjalt tarbijani ja tootmiskulud toodanguühiku kohta ettevõtte tootmisvõimsuse funktsioonina.

Mitmete harude tootmisplaani optimeerimisel valitakse kriteeriumiks ekspluatatsioonikulude ja kapitaalmahutuste summa miinimum.

Nendes harudes, kus kasutatakse defitsiitseid tootmisressursse, valitakse optimaalsuse kriteeriumiks maksimaalne toodangumaht (sageli on seejuures ette antud üksikute toodanguliikide mahulised proportsioonid). Väga laialt kasutatakse ka minimaalsete tootmiskulude kriteeriumi.

Optimeerimisülesande formuleerimisel võib püstitada ainult üheainsa optimaalsuse kriteeriumi. Et aga universaalne kriteerium on seni veel formuleerimata, siis praktikas lahendatakse majandusmatemaatika ülesandeid

¹ Методические положения по оптимальному отраслевому планированию народного хозяйства. Новосибирск 1967.

sageli erinevate kriteeriumide järgi, mis annab ulatuslikumat informatsiooni otsuse langetamiseks.

Väga levinud võtteks on ühe kriteeriumi formuleerimine ülesande kitsendusena (mis piiratakse sedapuhku intuiitiivselt).

Kitsendused väljendavad ressursside defitsiitsust või muid valikut piiravaid tingimusi. Nii on sageli väga huvitav saada vastus küsimustele, milline peaks olema tootmisplaan, esiteks, maksimaalse toodangumahu kindlustamiseks ja, teiseks, minimaalsete tootmiskulude korral. Niisugusel juhul lahendatakse kaks erinevate kriteeriumidega ülesannet. Sageli lahendatakse mitu varianti erinevate kitsendustega, mis samuti pakub väga väärtuslikku informatsiooni majanduslikuks analüüsimiseks ja otsuste tegemiseks.

Kasutatakse ka niinimetatud *järkjärguliste järeleandmistete meetodit*. Selle meetodi põhjal järjestatakse kõik kriteeriumid nende tähtsuse järgi (mis sünnib intuiitiivselt, tuginedes loogikale ja kogemustele). Algul lahendatakse ülesanne kõige tähtsama kriteeriumi c_1 järgi. Pärast lahenduse saamist määratakse heuristilisel meetodil (s. o. tuginedes intuitsioonile, oletustele, analoogiatele, hüpoteesidele) järeleandmine Δc_1 ja suurust $c_1 \pm \Delta c_1$ kasutatakse ülesande uuel formuleerimisel antud näitaja ülem- või alampiirina, s. o. endist optimaalsuse kriteeriumi vaadeldakse nüüd kui täiendavat piiravat tingimust (kitsendust). Seejärel lahendatakse ülesanne teistkordselt tähtsuselt järgmise kriteeriumi järgi, määratakse kindlaks uus järeleandmine $c_2 \pm \Delta c_2$ jne.

Niisiis on majandusmatemaatika ülesannete mitmevariandiline lahendamine (mitmevariandilisus) üks tähtsamaid metodoloogilisi põhimõtteid. See on igati loogiline ja mõistetav. Majandussüsteemid on ülikeerulised ja stohhastilised, informatsiooni usaldusväärsus on määramata ja seepärast harumudeli tasandil on mõttetu kõnelda üheselt määratud lahendist. Seega oleks antud etapil õigem kõnelda mitte optimaalsest lahendist, vaid lahendite optimaalsest tsoonist, mitte üheselt määratud kitsendustest, vaid kitsenduste määramispiirkondadest. Akadeemik L. Melentjev rõhutab vajadust määrata kindlaks majandusmatemaatiliste mudelite abil saadava informatsiooni vigu, sest vastasel korral ei saa tõestada lahen-

dite objektiivset efektiivsust Seda me seni veel teha ei oska.¹

Et eriti sageli esinevad optimaalsuse kriteeriumina rahvamajanduslikud kulud, siis peatume nende arvutamise mõningatel metodoloogilistel küsimustel.

Siberi majandusteadlaste (A. Aganbegjan, L. Kozlov, Z. Tsimdina) arvates on rahvamajanduslikust aspektist lähtudes õigem kasutada kulude diferentsiaalnäitajaid, mis koosnevad otsekuludest ja nn. tagasisidekuludest:²

$$d_j = c_j + \sum a_{kj} U_k, \quad (8.1)$$

kus d_j on diferentsiaalkulud j -nda toodanguühiku kohta;

c_j on otsekulud;

a_{kj} on k -nda ressursi kulu j -nda toodanguühiku tootmiseks;

U_k on k -nda ressursi hinnang majandusliku efektiivsuse optimaalses plaanis.

Ent toodud soovitusel on praegu veel põhiliselt teoreetiline tähtsus, sest see eeldab majandusliku efektiivsuse optimaalsete plaanide olemasolu, mille koostamine on seni alles tulevikuküsimus. Siiski võime toodud soovituse alusel juba praegu teha kaks olulist järeldust:

1) tuleb silmas pidada, et tavaliselt on arvutatavad otsekulud diferentsiaalkuludega võrreldes väiksemad;

2) mida suurem on antud toodangu materjali- ja energiamahukus, seda suurem vahe on otsekulude ja diferentsiaalkulude vahel.

Aktuaalseks metodoloogiliseks probleemiks on «ühise nimetaja» leidmine, mille alusel saaks võrrelda jooksvaid kulusid ja kapitaalmahutusi. (See probleem kuulub küll rohkem kapitaalmahutuste efektiivsuse kindlaksmääramisega seotud probleemistiku hulka.) Siin on kaks võimalust.

1) Mainitud võrreldavus saavutatakse tavalisel teel, s. o. normatiivse efektiivsuse koefitsiendi abil. Taandatud kulud = jooksvad kulud + normatiivne efektiivsuse koefitsient $\times$ kapitaalmahutused.

2) Optimaalsuse kriteeriumiks on ainult jooksvad

¹ А. А. Мелентьев. К проблеме оптимизации сложных экономических систем. «Экономика и математические методы» № 4, 1967.

² Методические положения по оптимальному отраслевому планированию в промышленности. Новосибирск 1967, lk. 34—35.

kulud, kuna kapitaalmahutused formuleeritakse kitsendusena, s. t. määratakse eelnevalt kindlaks nende lubatav ülempiir. Siberi majandusteadlaste arvamuse järgi võib kasutada mõlemaid võimalusi kombineeritult.

Ühtse optimaalsuse kriteeriumi kindlaksmääramine nõuab aga veel ühe metodoloogilise küsimuse lahendamist: tuleb tagada eri aastatel tehtavate kapitaalmahutuste võrreldavus. Majandusteaduses tuntakse seda *ajateguri arvestamisena* kapitaalmahutuste efektiivsuse arvutamisel. Kasutatakse nn. liitprotsentide valemit. Kui üksikud variandid erinevad omavahel kapitaalmahutuste poolest erinevatel aastatel või ehitustähtaegade poolest, siis arvutatakse kapitaalmahutused järgmise valemi põhjal:¹

$$K = \sum_{t=1}^T K_t (1 + E_n)^{T-t}, \quad (8.2)$$

kus K on kapitaalmahutused (arvesse võttes ajategurit), taandatuna objekti ekspluatatsiooni andmise ajale;

$t = 1, 2, \dots, T$ ehitamise aasta;

T on ehitusperiood aastates;

K_t on kapitaalmahutused t -ndal ehitamise aastal;

E_n on normatiivne efektiivsuse koefitsient.

Rahvamajandusliku planeerimise optimaalsuse kriteeriumide hulgas on suure teoreetilise tähtsusega akadeemik L. Kantorovitši formuleeritud nn. *lahendavad kordajad* ehk *objektiivselt tingitud hinnangud*. Need kordajad kujutavad endast lineaarse planeerimise duaalülesande (vt. allpool) lahendeid ja neid võib tõlgendada kui ressursside defitsiitsuse hinnanguid. L. Kantorovitš vaatleb neid kui ressursside asendatavuse üldisi ekvivalente ja püstitab nõude, et kõik kulud optimeerimisülesannete formuleerimisel oleksid väljendatud objektiivselt tingitud hinnangutes, mis tagaks lokaalsete ja globaalsete optimumide kooskõla. Niisugusele seisukohale vaieldakse vastu ja väidetakse, et objektiivselt tingitud hinnangud võivad defitsiitsete ja limiteeritud ressursside hindamisel etendada ainult abinäitajate osa.²

¹ Экономика социалистической промышленности. Учебник. М. 1966, lk. 55.

² Vt. akadeemik V. Nemtšinovi eessõna L. Kantorovitši raamatule «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов». М. 1960.

Duaalsuse põhimõte tähendab majanduslikus interpretatsioonis kõige üldisemal kujul järgmist (matemaatiliselt vaatleme duaalsuse põhimõtet hiljem). Kui õnnestub näiteks tootmisplaani optimeerimisel leida niisuguseid defitsiitsete ressursside «hindu», et kulutused ressurssidele võrduvad saavutatud efektiga, siis on plaan optimaalne. Olgu optimaalsuse kriteeriumiks kasum. Kui näiteks defitsiitsetele ressurssidele tuli kulutada 5000 rbl. (uue «hinnakirja» järgi, s. o. objektiivselt tingitud hinnangute järgi) ja kasum on samuti võrdne 5000 rublaga, siis tähendab see seda, et optimum on leitud. Matemaatiliselt avaldub optimum lühidalt järgmiselt:

$$\sum_{i=1}^{n+m} a_i c_i = 0, \quad (8.3)$$

kus m on ressursside arv;

n on toodete arv;

a_i on i -nda ingrediendi (ressursside ja toodete) hulk;

c_i on i -nda ingrediendi objektiivselt tingitud hinnangud (kui ressursid on plussmargiga, siis tooted on miinusmargiga).

Objektiivselt tingitud hinnangud annavad meile informatsiooni selle kohta, millistes vahekordades võib asendada omavahel defitsiitseid ressursse optimumi säilitamiseks. L. Kantorovitši idee edasiarendajad (V. Volkonski, A. Lurje jt.) arvavad, et mainitud meetodil võib lahendada seni vaieldava hinnakujundamise probleemi.

Kõrvuti optimaalsuse kriteeriumiga on metodoloogiliselt niisama oluline optimeerimisülesande kitsenduste õige valik ja formuleerimine. See nõuab majandusobjekti modelleerijalt objekti ja vastava rahvamajandusharu ning majandusrajooni ökonoomika ja tootmisalase spetsiifika põhjalikumat tundmist. Real juhtudel on kitsenduste formuleerimisel vaja arvestada ka kõrvalharude, teiste majandusrajoonide ning tarbijate huvisid ja nõudeid.

Olenevalt kitsenduste iseloomust formuleeritakse neid alam- ja ülempiiriga. Alampiiri kasutatakse enamasti siis, kui vajaduste rahuldamise maht ei tohi olla väiksem etteantud näitajast. Tavaliselt piiratakse niimoodi väljalastava toodangu mahtu. Ülempiiri kasutatakse kitsenduste formuleerimisel siis, kui mõni ressurss on defitsiitne ja seetõttu limiteeritud. Sageli on ülesande tund-

matud piiratud nii alt kui ka ülevalt, s. t. on ette antud nende varieerumise intervall (ülesande *tundmatud* väljendavad neid suurusi, mida tuleb optimeerida). Näiteks laiatarbekaupu tootva ettevõtte tootmisplaani sortimendi optimeerimisel tuleb arvesse võtta tarbijate nõudmisi, millel on oma alam- ja ülempiir. Real juhtudel võivad kitsendused olla formuleeritud ka võrdustena. Seda siis, kui piiravad tingimused on üheselt määratud.

Kitsendused peavad olema majanduslikult ja tehniliselt põhjendatud. See tähendab seda, et majandusmatemaatika ülesande formuleerimisele peab eelnema objekti põhjalik analüüs ja peavad olema arvutatud kõigi ressursside põhjendatud normatiivid, mis näitavad, kui palju kulub neid optimeeritava suuruse ühiku kohta. Seejuures on tavaliselt kõige raskemaks ja tähtsamaks eeltöoks objekti tootmisvõimsuse kindlaksmääramine ja kõigi põhitegurite esiletoomine, mis seda mõjutavad.

Märgime mõningaid matemaatilise planeerimise tüüpkitsendusi. Tuleb arvestada järgmisi defitsiitseid ressursse ja piiravaid tingimusi: toodangu maht, materjalid, energia, kütus, tööjõud, tootmisvõimsused, looduslikud ressursid, kapitaalmahutused, transporditingimused, tarbijate nõudmised, jooksvad kulud, toodangu komplekssus, tüüpprojektide näitajad, kvaliteedinäitajad, riiklikud standardid ja tehnilised tingimused jne.

8.4. Optimeerimisülesande üldine matemaatiline formuleerimine. Optimeeritavad planeerimisülesanded kujutavad endast matemaatiliselt teatava funktsiooni miinimumi või maksimumi leidmist, kusjuures peavad olema rahuldatud antud kitsendused (lisatingimused).

Seega üldjuhul koosneb optimeerimisülesanne järgmisest kahest osast.

I Sihifunktsioon

$$z = \max f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (8.4)$$

väljendab seda, et tuleb leida siisugused tundmatute väärtused $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, mis maksimeerivad z väärtuse, kusjuures on rahuldatud teatud kitsendused.

Minimiseerimisülesannet saab alati taandada maksimeerimisülesandeks, muutes sihifunktsiooni märgi vastupidiseks.

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (8.5)$$

mis väljendavad optimeerimise tingimusi (defitsiitsete ressursside kasutamise piire). Siin x_j ($j=1, 2, \dots, n$) on otsitavad tundmatud, b_i — antud konstandid (defitsiitsete ressursside limiit), g_i — tundmatute funktsioonid ($i=1, 2, \dots, m$).

Planeerimisülesannete lahendamisel peab olema rahuldatud ka nõue, et tundmatute väärtused ei tohi olla negatiivsed. Matemaatiliselt väljendatakse seda nõuet järgmiselt:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0. \quad (8.6)$$

Tundmatute $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ väärtuste erisugused kombinatsioonid, mis rahuldavad kitsendusi (8.5) ja (8.6), kujutavad endast *optimeerimisülesande määramispiirkonda*. Iga selliste tundmatute väärtuste kombinatsiooni $\chi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nimetatakse *lahendiks*, *plaaniks*, sageli ka *lubatavaks lahendiks*.

Igale plaanile vastab sihifunktsiooni teatud väärtus. Niisugust plaani, millele vastab sihifunktsiooni maksimaalne (minimaalne) väärtus, nimetatakse *optimaalseks plaaniks* ehk *optimaalseks lahendiks*. Järelikult, kui $\chi^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ on optimaalne lahend, siis on sihifunktsiooni $z(\chi^*)$ väärtus suurem mistahes muust sihifunktsiooni väärtusest $z(\chi)$:

$$z(\chi^*) \geq z(\chi). \quad (8.7)$$

Lineaarse planeerimise erijuhul püstitatakse optimeerimisülesanne järgmiselt.

Leida võrrandisüsteemi

[illegible]

mittenegatiivsete lahendite hulgast see, mis maksimiseerib sihifunktsiooni

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (8.9)$$

väärtuse. Koefitsiendid $c_1, \dots, c_n$ väljendavad lahendi

üksikute komponentide «hinnanguid» valitud optimaalsuse kriteeriumi järgi.

Tavaliselt formuleeritakse planeerimisülesannete kitsendused esialgu võrratustena, ent lahendusalgorithmid nõuavad nende esitamist võrranditena. Me näitasime juba (lk. 33), et iga võrratust võib tundmatute arvu suurendamisega esitada võrrandina.

Optimiseerimisülesande kitsenduste analüüsimisel võib selguda kolm erijuhtu:

1) kitsenduste süsteem on vastuoluline, s. t. pole võimalik leida lubatavat lahendit;

2) lubatavad lahendid esinevad, kuid nende määramispiirkond on tõkestamata; see juhtub siis, kui sihifunktsioon võib omada kuitahes suuri väärtusi;

3) määramispiirkond on tõkestatud ja esinevad lubatavad lahendid; sel juhul on ülesandel vähemalt üks optimaalne lahend.

8.5. Duaalsed planeerimisülesanded. Igale lineaarse planeerimise ülesandele vastab konkreetne *duaalülesanne*, mis on lähteülesandega orgaaniliselt seotud ja temaga teataval määral sümmeetriline.

Vaatleme lähteülesande ja duaalülesande ranget matemaatilist formuleerimist üldjuhul. Selleks on otstarbekas sisse tuua järgmised tähistused. Tähistagu M ja N indekse hulkasid:

$$M = \{1, 2, \dots, m\}$$

ja

$$N = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Olgu S hulga M alamhulk ($S \subset M$) ja $\bar{S}$ — tema täiend.

Olgu T hulga N alamhulk ($T \subset N$) ja $\bar{T}$ — tema täiend.

$\chi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_m)$.

Lähteülesanne

Duaalülesanne

Maksimiseerida

Minimiseerida

$$z(\chi) = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$f(\mu) = \sum_{i=1}^m b_i u_i,$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i & (i \in S); \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= b_i & (i \in \bar{S}); \\ x_j &\geq 0 & (j \in T). \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij}u_i &\geq c_j & (j \in T); \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}u_i &= c_j & (j \in \bar{T}); \\ u_i &\geq 0 & (i \in S). \end{aligned} \right\}$$

Seega tuleb duaalülesande formuleerimisel juhinduda järgmistest eeskirjadest:

1) duaalülesande kitsenduste maatriks $A' = \|a_{ij}\|'$ saadakse lähteülesande kitsenduste maatriksi $A = \|a_{ij}\|$ transponeerimisel;

2) lähteülesande sihifunktsiooni koefitsiendid muutuvad duaalülesande kitsenduste vabaliikmeteks;

3) lähteülesande kitsenduste vabaliikmed muutuvad duaalülesande sihifunktsiooni koefitsientideks;

4) võrratuste märgid muutuvad vastupidisteks; seega võrdub duaalülesande muutujate arv lähteülesande kitsenduste arvuga ja duaalülesande kitsenduste arv lähteülesande muutujate arvuga;

5) lähteülesande mittenegatiivsetele muutujatele x_j ($j \in T$) vastavad duaalülesande kitsenduste süsteemi j võrratust ($j \in T$);

6) lähteülesande tõkestamata muutujatele $x_j \geq 0$ ($j \in \bar{T}$) vastavad duaalülesande kitsenduste süsteemi j võrdust ($j \in \bar{T}$);

7) kui lähteülesande i kitsendust on võrratused ($i \in S$), siis vastavad neile duaalülesande lahendid $u_i \geq 0$ ($i \in S$); kui lähteülesande i kitsendust ($i \in \bar{S}$) on võrdused, siis võib duaalülesande vastav muutuja u_i ($i \in \bar{S}$) omada nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi.

Lineaarse planeerimise teooria kesksmaks tulemuseks on nn. duaalsete põhiteoreemide tõestus. Toome siin ainult kahe mainitud teoreemi definitsioonid, kuna nende võrdlemisi raske tõestuse võib leida põhjalikumast erikirjandusest¹.

¹ Vt. Ü. Kaasik. *Matemaatiline planeerimine*. Tallinn 1967, lk. 79–87.

1. *teoreem*. Kui lähteülesandel on olemas optimaalne lahend, siis on see olemas ka duaalülesandel. Seejuures kehtib optimaalsete lahendite $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)'$ ja $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)'$ korral võrdus

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i u_i^*.$$

2. *teoreem*. Selleks et duaalülesannetel oleks optimaalseid lahendeid, on tarvilik ja piisav, et neil oleks vähemalt üks lubatav lahend.

Neid teoreeme on kasulik teada.

Näide. Tsehhis valmistatakse kaht detaili, kusjuures iga detaili töödeldakse treipinkidel ja freespinkidel. Masinate kasutamise aeg, nn. masinaaeg on piiratud. Treipinke võib nädala jooksul kasutada ainult 8000 ajaühikut, freespinke — 10 000 ajaühikut. Esimese detaili töötlemiseks treipingil kulub 2 ajaühikut, teise detaili töötlemiseks — 1 ajaühik. Esimese detaili töötlemiseks freespingil kulub 1 ajaühik, teise detaili töötlemiseks — 5 ajaühikut. Detailid kujutavad endast realiseeritavat valmistoodangut, kusjuures esimese detaili realiseerimine annab ettevõttele 6 kopikat, teise detaili realiseerimine — 8 kopikat kasumit. Ülesandeks on kasumi maksimiseerimine. Selleks tuleb leida esimese ja teise detaili väljalaske optimaalne plaan.

Lähteülesande matemaatiline formulatsioon on järgmine: leida tundmatud x_1 ja x_2 , mis maksimiseerivad sihifunktsiooni

$$6x_1 + 8x_2$$

ja rahuldavad kitsendusi

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 8000; \\ x_1 + 5x_2 \leq 10\,000; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

Duaalülesanne kõlab järgmiselt: leida mittenegatiivsed suurused u_1 ja u_2 , mis minimiseerivad sihifunktsiooni

$$8000u_1 + 10\,000u_2$$

ja rahuldavad kitsendusi

$$\left. \begin{array}{l} 2u_1 + u_2 \geq 6; \\ u_1 + 5u_2 \geq 8. \end{array} \right\}$$

Toodud duaalülesande ahend $\mu = (u_1, u_2)$ kujutab enesest defitsiitse ressursi — masinaaja — «hindu». Seejuures on u_1 treipingi ja u_2 freespingi masinaaja ühikute «hind». Seega näitavad need «hinnad» suurust, mille võrra võiks kasvada ettevõtte kasum masinaaegade limiidi suurenemisel ühe ajaühiku võrra. Teisiti võiks duaalülesande lahendit tõlgendada kui saamata kasumit masinaaegade täiendava ajaühiku puudumise tõttu. Nii näeme, kuidas *kasumi maksimiseerimise (lähte-) ülesannet* võib teisendada *saamata kasumi minimeerimise (duaal-) ülesandeks*.

Sageli on arvutuste lihtsustamiseks kasulik lahendada lähteülesande asemel duaalülesanne. Ent veelgi olulisem on duaalülesande majanduslik tõlgendus, mis võimaldab hinnata defitsiitseid ressursse. Nii näiteks uurivad majandusteadlased praegu teoreetilisi seoseid kehtivate hindade ja nende «hindade» vahel, mis leitakse globaalse duaalülesande lahendamisel, kusjuures arvatakse, et see annab objektiivse aluse hinnakujundamise probleemi lahendamiseks.

8.6. Mõningate matemaatilise planeerimise tüüpülesannete formuleerimine.

a) *Tootmisplaani optimeerimine*. Ettevõtte toodab viit toodet T_1, T_2, T_3, T_4 ja T_5 . Tootmist piirab rida kitsendusi: tsehi tootmisvõimsus, defitsiitsed materjalid A ja B , tarbijate nõudmised (alam- ja ülempiirid). Need kitsen-

Tabel 16

Tooted	Defitsiitsed materjalid, kilogrammides tonni kohta		Tootmisvõimsus, tonnides päeva kohta	Tarbijate nõudmised, tonnides aasta kohta		Kasum, rublades tonni kohta
	A	B		Alampiir	Ülempiir	
T_1	2	5	3	200	300	50
T_2	1	3	10	400		40
T_3	8	6	9	100	200	55
T_4	2	1	10	350		35
T_5	3	2	15	300		30
Kokku aastas	3500	4000	15 000			

dused on koondatud tabelisse 16. Ülesanne on järgmine: tuleb leida optimaalne aastaplaan, mis kindlustab maksimaalse kasumi.

Üksikute toodete kogust aastaplaanis tähistavad vastavalt tundmatud x_1, x_2, x_3, x_4 ja x_5 .

Seega on kitsenduste süsteem:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 3x_5 & \leq & 3\,500; \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 & \leq & 4\,000; \\ 3x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 10x_4 + 15x_5 & \leq & 15\,000; \\ x_1 & \geq & 200; \\ x_1 & \leq & 300; \\ & x_2 & \geq 400; \\ & & x_3 \geq 100; \\ & & x_3 \leq 200; \\ & & & x_4 \geq 350; \\ & & & & x_5 \geq 300; \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0. \end{array} \right\} \quad (8.10)$$

Maksimiseeritav sihifunktsioon:

$$50x_1 + 40x_2 + 55x_3 + 35x_4 + 30x_5. \quad (8.11)$$

On ilmne, et analoogiliselt võib püstitada ka sama struktuuriga, ent teistsuguse sisuga lineaarse planeerimise ülesandeid.

b) *Transpordiülesanne*. Transpordiülesanded kuuluvad erikujuliste planeerimisülesannete hulka, mille lahendamiseks on välja töötatud suhteliselt lihtsad lahendusmeetodid. Transpordiülesande matemaatiline mudel kirjeldab mingisuguste objektide (tooted, raudteevagunid, kaubad, inimesed jne.) territoriaalset ümberpaigutamist.

Olgu m lähtepunkti A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ja neis mingisugused samaliigilised objektid, mille kogused on a_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Need objektid transporditakse n sihtpunkti B_j ($j = 1, 2, \dots, n$) kogustes b_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Objekti ühiku veokulud lähtepunktist A_i sihtpunkti B_j on teada ja moodustavad c_{ij} . Seega on antud veokulude maatriks:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Tuleb koostada niisugune veoplaan, et transpordikulud (summaarsed veokulud) oleksid minimaalsed. Tundmatu-

teks x_{ij} on objektide kogused lähtepunktist A_i sihtpunkti B_j . Kauba pakkumine rahuldab täielikult vajaduse, s. t.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (8.13)$$

Seega on ülesande kitsendused järgmised:

$$\left. \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); \right\} \quad (8.14)$$

$$\left. \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n); \right\} \quad (8.15)$$

$$x_{ij} \geq 0. \quad (8.16)$$

Minimiseeritavaks sihifunktsiooniks on

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}. \quad (8.17)$$

Metodoloogiliselt on kõige keerukam probleem transpordiülesande formuleerimisel veokulude c_{ij} kindlaksmääramine. Veokulude kindlaksmääramine on raske sellepärast, et see oleneb transporditava objekti kogusest, kusjuures sõltuvus pole lineaarne. Nii on objekti ühiku veokulud

$$c = f(x) = \frac{a}{x} + b, \quad (8.18)$$

kus a on tinglikult püsivad ja b — proportsionaalselt muutuvad veokulud. Praktikas lineariseeritakse toodud mitte-lineaarne sõltuvus sageli, määrates kindlaks need objekti koguste intervallid, millele vastavad keskmised, konstant-sed veokulud.

Seepärast valitakse transpordiülesande optimaalsuse kriteeriumiks sageli kaugused lähte- ja sihtpunktide vahel, et minimiseerida veomarsruutide pikkust. Suhteliselt harva kasutatakse kriteeriumina transportimiseks kuluvat aega, mida on raskem määrata ja mis pole kaugeltki stabiilne suurus.

Seni vaatlesime juhtu, kus pakkumine lähtepunktides on võrdne sihtpunktide vajadusega, s. o.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (8.19)$$

Niisuguseid transpordiülesandeid nimetatakse *kinnisteks*. Kuid praktikas võivad esineda ka järgmised juhud:

1) pakkumine ületab vajaduse, s. o.

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j; \quad (8.20)$$

2) vajadus ületab pakkumise, s. o.

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j. \quad (8.21)$$

Esimesel juhul tuuakse ülesandesse *fiktiivne sihtpunkt* B_0 , mille vajadus näitab transportimata toodangu mahtu. Tähistame selle mahu b_0 .

$$b_0 = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (8.22)$$

ja ülesanne taandub juba eespool vaadeldud põhikujule. Jääkide mahtu punktides A_i (x_{i0}) võib reguleerida valitud trahviga c_{i0} või määrata kindlaks, et $c_{i0} = 0$.

Analoogiliselt toimitakse ka siis, kui vajadus ületab pakkumise, ainult et veomaksumus c_{0j} valitakse küllalt suur, mis tagab selle, et fiktiivne lähtepunkt A_0 jääb optimaalsest plaanist välja.

Mõnes transpordiülesandes esinevad kitsendused üksikute marsruutide suhtes, üldjuhul $a \leq x_{ij} \leq b$, kus a ja b on teatavad konstandid.

Esineb juhte, kus tuleb arvestada lähtepunktides oleva samaliigilise toodangu erinevat efektiivsust tarbija seisukohalt (näiteks erineva kütteväärtusega põlevkivi või söe transportimisel). Niisugusel juhul määratakse koefitsiendid d_{ij} , mis väljendavad toodangu efektiivsust tarbija seisukohalt. Kitsendusteks on siis:

$$\left. \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m d_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i; \right\} \quad (8.23)$$

$$\left. \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j. \right\} \quad (8.24)$$

Sihifunktsiooniks on minimiseerida

$$c_{11}(d_{11}x_{11}) + c_{12}(d_{12}x_{12}) + \dots + c_{mn}(d_{mn}x_{mn}). \quad (8.25)$$

Mainitud erijuhte ei saa lahendada transpordiülesannete spetsiifiliste lahendusmeetoditega, seepärast tuleb neid kirjeldada nagu lineaarseid planeerimisülesandeid üldjuhul.

Omaette probleemi moodustab niisugune transpordiülesanne, mille optimaalsuse kriteeriumiks on minimaalne aeg kogu toodangu transportimiseks sihtpunktidesse. Niisugune ülesanne võib tekkida näiteks kergesti riknevate kaupade veoplaanide koostamisel, samuti ka muudel juhtudel, kus transportimisaja minimiseerimine etendab peamist osa.

Vaatleme niisuguse ülesande formuleerimist juhul, kui

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$
 Veokulude matriksi asemel on siin antud

matriks $T = \|t_{ij}\|$, kus t_{ij} on kauba transportimiseks punktist i punkti j kuluv koguaeg. Tuleb valida optimaalne plaan $X = \|x_{ij}\|$, mis võimaldab transportida kogu kauba sihtpunktidesse minimaalse ajaga. Igale plaani X komponendile x_{ij} vastab matriksi T teatav element t_{ij} . Järelikult kulub plaani X korral kogu kauba transportimiseks aeg, mis vastab maksimaalsele t_{ij} väärtusele. Tähendab, optimaalse lahendi leidmiseks tuleb eri plaanidele vastavate t_{ij} kombinatsioonide hulgast valida see, mille maksimaalne t_{ij} on teiste kombinatsioonidega võrreldes minimaalne.

Igapäevases elus tuleb sageli tegemist teha niinimetatud *mitmeastmelise* transpordiülesandega, kusjuures transporditavad objektid läbivad enne sihtpunkti jõudmist mitmed vaheastmed. Näiteks lihakombinaatide optimaalse paigutamise ülesande lahendamisel tuleb vaadelda transporditava objekti liikumist elusloomade vastuvõtupunktidest lihakombinaatideni ja sealt edasi lihakombinaatide toodanguna tarbijateni.

Kui vahepunktide võimsused on piiramata, siis taandub kaheastmeline ülesanne tavaliseks üheastmeliseks, kusjuures valitakse minimaalsed $c_{ij} = c_{il} + c_{li}$. Siin on c_{ij} transpordikulud lähtepunktist i sihtpunkti j ; l on valitud vahepunkti indeks.

Kui vahepunktide võimsused on ette antud, siis lahendatakse ülesanne nn. *fiktiivse diagonaali meetodil*¹, mida me siin ei vaatle.

¹ Vt. näiteks kogumikku «Tootmise kontsentreerimine ja paigutamine mõnedes Eesti NSV tööstusharudes». Tallinn 1967, lk. 12—19.

c) *Juurdelõikusülesanne*¹. Olgu meie käsutuses tahv-
lid, mille mõõtmed on 2×1 m. Nendest tahvlitest tuleb
välja lõigata

100 tahvlit *A* mõõtmetega $0,5 \times 0,6$ m²,

50 tahvlit *B* mõõtmetega $0,8 \times 0,4$ m²,

100 tahvlit *C* mõõtmetega $0,3 \times 1,0$ m².

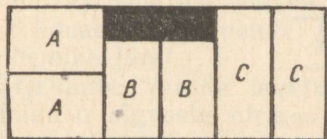
Tuleb leida optimaalne juurdelõikuse plaan, selleks et
minimiseerida jäätmeid.

Selle ja analoogiliste ülesannete lahendamisel on esi-
meseks ja kõige töömahukamaks sammuks kõikvõimalike
juurdelõikusvariantide selgitamine. Antud näites on vaa-
deldud kuut võimalikku varianti, mis on toodud tabelis 17.

Tabel 17

Variant	Tahvel	Tahvlite arv	Jäätmed, m ²
I	<i>A</i>	6	0,20
II	<i>B</i> <i>C</i>	2 4	0,16
III	<i>A</i> <i>B</i> <i>C</i>	2 2 2	0,16
IV	<i>B</i>	6	0,40
V	<i>A</i> <i>B</i>	4 2	0,16
VI	<i>C</i>	6	0,20

Nii näiteks varianti III võib graafiliselt kujutada järg-
miselt (vt. joon. 16):



JOONIS 16.

¹ Toodud näide on võetud raamatust Klaus-Jürgen
Richter. *Methoden der linearen Optimierung*. Leipzig 1966, lk. 132.

Järgnevalt koondame kõik variandid tabelisse 18.

Tabel 18

Tahvlid	Variandid						Vajalik tahvlite arv
	I	II	III	IV	V	VI	
A	6	0	2	0	4	0	100
B	0	2	2	5	2	0	50
C	0	4	2	0	0	6	100
Jäätmed	0,2	0,16	0,16	0,4	0,16	0,2	

Nüüd on kõik lähteandmed nii rühmitatud, et võib asuda ülesande matemaatilisele formuleerimisele. Tundmatuteks on suurused, mis näitavad, mitu tahvlit tuleb lõigata vastavate variantide järgi (tundmatute indeksid tähistavad eri variante).

Kitsenduste süsteem:

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 4x_5 + 0x_6 &\geq 100; \\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 0x_6 &\geq 50; \\ 0x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 6x_6 &\geq 100; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

Sihifunktsioon: minimiseerida

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6. \quad (8.27)$$

Toodud ülesanne kuulub täisarvulise planeerimise ülesannete hulka, s. o. niisuguste ülesannete hulka, mille lahend võib olla ainult täisarvuline. Selliseid ülesandeid lahendatakse eriliste meetoditega, mis on aga tavalistest tunduvalt tömahukamad. Mõnel juhul võib saadud mitte-täisarvulist lahendit piisava täpsusega ümardada.

d) *Tööliste arvu optimeerimine.* Jaoskonnas läheb töölisi vaja järgmiselt:

Ajavahemik	Tööliste arv
0.00— 4.00	4
4.00— 8.00	8
8.00—12.00	12
12.00—16.00	10
16.00—20.00	8
20.00—24.00	6

Iga tööline töötab 8 tundi järjest.

Tuleb leida, kui palju töölisi peab töötama üksikutel ajavahemikel, et tööliste üldarv oleks minimaalne. Tundmatud x_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) tähistavad tööliste arvu üksikutel ajavahemikel.

Järelikult tuleb leida niisugused tundmatud x_j ($j = 1, \dots, 6$), mis rahuldavad kitsenduste süsteemi

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \geq & 8; \\ x_2 + x_3 & \geq & 12; \\ x_3 + x_4 & \geq & 10; \\ x_4 + x_5 & \geq & 8; \\ x_5 + x_6 & \geq & 6; \\ x_1 & + & x_6 \geq 4; \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (8.28)$$

ja minimiseerivad sihifunktsiooni

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6. \quad (8.29)$$

Ka antud ülesanne on oma olemuselt täisarvulise planeerimise ülesanne.

e) *Varude optimeerimine.* Varude optimaalse taseme määramise ülesanded kuuluvad üldiselt võrdlemisi keerukate dünaamilise planeerimise ülesannete hulka.¹ Tegelikuses toimub varude muutumine mittelineaarselt, nende taastamine ja kulutamine on aga juhuslikud suurused. Varude optimeerimise ülesannete puhul on kõige raske- maks *metodoloogiliseks* probleemiks nende kulude majanduslikult õige määramine. Kulud sõltuvad ühelt poolt üleliigsetest varudest, teiselt poolt varude vähesusest ning nõudmiste mitterahuldamisest. Seda probleemi on seni vähe uuritud, mis omakorda takistab majanduslikult põhjendatud varude juhtimise ülesannete püstitamist.

Siin vaatleme üht lihtsustatud juhtu, kus varud vähe- nevad lineaarselt ja nende taastamine toimub võrdsete ajavahemike järel.

Kirjeldame varude muutumise protsessi. Olgu aja- vahemiku t_1 alguseks olemas varu kogus q . Ajavahemiku t_1 lõpuks kulutatakse kogu varu ära, mille järel see uuen- datakse, uus varu kulutatakse ära ajavahemiku t_2 jooksul

¹ Vt. U. Kaasik. *Matemaatiline planeerimine*. Tallinn 1967, lk. 250.

jne. Ajavahemikud $t_1, t_2, \dots, t_n$ on omavahel võrdsed ja moodustavad plaaniperioodi $T = t_1 + t_2 + \dots + t_n$. Varu üldsuurus, mis peab rahuldama vajadusi plaaniperioodi jooksul, on R . Järelikult, kui iga üksiku ajavahemiku t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) lõpuks taastatakse varu kogus q , siis tuleb see varu plaaniperioodi jooksul taastada $R : q = n$ korda. Seega iga ajavahemik $t_i = Tq : R$. Olgu keskmine varu t_i jooksul $q/2$ ja laokulud c rubla varu ühiku kohta. Niisiis moodustavad laokulud t_i jooksul $0,5 qct_i$. Olgu ühekordsed ettevalmistuskulud c' . Seega üldkulud ühes ajavahemikus t_i on $0,5 qct_i + c'$. Kogu plaaniperioodi üldkulud moodustavad $c_k = (0,5qct + c') \frac{R}{q}$. Arvestades, et $t_i = Tq : R$, saame pärast lihtsaid teisendusi

$$c_k = \frac{cTq}{2} + \frac{c'R}{q}. \quad (8.30)$$

Näeme, et üldlaokulud jagunevad kuludeks, mis suurenevad proportsionaalselt q suurusega, ja ühekordseteks kuludeks, mis on seda väiksemad, mida suurem on q . Tekib küsimus, millise sagedusega tuleb varusid uuendada ja kui suur peab olema q , selleks et minimeerida üldkulud c_k . Ülesande lahendamiseks peab tundma diferentsiaalarvutuse elemente. Oletame, et andsite selle ülesande matemaatikule, kes ütleb teile, et optimaalne q väärtus on

$$q^* = \sqrt[3]{2 \frac{Rc'}{Tc}}, \quad (8.31)$$

optimaalne t_i kestus on

$$t_i^* = \sqrt[3]{2 \frac{Tc'}{Rc}} \quad (8.32)$$

ja minimaalsed üldkulud

$$c_k^* = \sqrt[3]{2RTcc'}. \quad (8.33)$$

f) *Massilise teenindamise ülesanded*. Nende ülesannete aluseks on massiliste protsesside uurimine tõenäosuslikult seisukohalt ja need protsessid on samuti küllaltki keerukad.¹ Tootmisprotsessis tekivad sageli mitmesugused kit-

¹ Vt. U. Kaasik. *Matemaatiline planeerimine*, Tallinn 1967, lk. 277.

saskohad, mis kutsuvad esile järjekordi. Järjekorra teenindamist saab uurida matemaatiliselt. Küsimus püstitatakse tavaliselt nii: järjekord toob teatavat kahju, järjekorra likvideerimine nõuab aga omakorda kulusid; milline peaks olema järjekorra teenindamise optimaalne intensiivsus?

Massilise teenindamise protsessi matemaatiliselt kirjeldada on üldjuhul väga raske. Sellegipoolest on mõningate lihtsate juhtude kohta olemas standardsed valemid.

Toome ühe näite USA praktikast.¹ Kompaniil «Boeing Aircraft» oli 60 eri kohtades asuvat instrumentide väljas-tamise punkti, kus tekkisid järjekorrad. Tuli leida väljas-tamispunktide teenindajate optimaalne arv. Tehti kindlaks, et töölised tulevad instrumendi järele keskmiselt iga 35 sekundi möödumisel, kusjuures ühe töölise teenindamine võttis aega keskmiselt 50 sekundit. Seega saabub teenindamisaja jooksul keskmiselt 1,43 töölist ($50 : 35 = 1,43$). Nende andmete alusel arvestati välja keskmine ooteaeg, kui järjekorda teenindab kaks, kolm ja neli inimest.

Arvutustulemused koondati järgmisse tabelisse.

Tabel 19

Tööliste arv	Tõenäosus, et kõik teenindajad on vabad	Keskmine ooteaeg	
		Teenindamisaja ühikutes	Sekundites
2	0,166	1,040	52,0
3	0,228	0,135	6,8
4	0,237	0,025	1,3

Et keskmiselt iga 35 sekundi järel tuleb üks tööline instrumendi järele, siis 7,5-tunnilise tööpäeva jooksul käib instrumentide järel keskmiselt

$$\frac{7,5 \cdot 3600}{35} = 770 \text{ töölist.}$$

Kui iga töölist teenindatakse 50 sekundit, siis kokku kulub 770 töölise teenindamiseks

$$\frac{770 \cdot 50}{3600} = 10,7 \text{ tundi.}$$

¹ Näide on võetud raamatust C. W. Churchman, R. L. Ackoff, E. L. Arnoff. *Operation Research*. Berlin 1966, lk. 375—377.

Et ühe teenindaja tööpäeva pikkus on 7,5 tundi, siis ei tule ta üksi tööga toime ja tekib järjekord. Kaks teenindajat teevad päevas kokku 15 töötundi ja neil on $15 - 10,7 = 4,3$ tundi tööst vaba aega. Arvestuste järgi on keskmine tööliste ooteaeg 52 sekundit ühe töölise kohta. Seega 770 töölise kohta moodustab see $770 \cdot 52$ sekundit ehk 11,1 tundi.

Kui teenindajate tunnitasu on 2 dollarit ja tööliste tunnitasu 5 dollarit, siis selgub, et vaba aja eest saavad teenindajad $4,3 \cdot 2 = 8,6$ dollarit, kuna tööliste järjekorras seismise aja eest tuleb maksta $11,1 \cdot 5 = 55,5$ dollarit. Kokku võttes läheb järjekord maksma $8,6 + 55,5 = 64,10$ dollarit.

Analoogiliselt tehti järjekorra «maksumus» kindlaks kolme teenindaja puhul. Selgus, et see moodustab 31 dollarit, nelja teenindaja puhul aga juba 40 dollarit. Seega on optimaalne teenindajate arv kolm.

g) *Tootmissised seosed.* Mõnedes majandussüsteemides (keemiakombinaadid, naftatöötlemistehased ja muud keerulise tootmistehnoloogiaga ja rohkearvuliste tagasisidedega ettevõtted), samuti kogu rahvamajanduses esinevad niivõrd keerulised tootmissised seosed, et nende arvestamine planeerimisel on kas väga raske või isegi võimatu.

Matemaatiline planeerimine näitab ka siin tee mainitud raskuste ületamiseks. Selleks koostatakse uuritava majandussüsteemi niinimetatud *majandusliku tasakaalu mudelid*, mis on tuntud ka *Leontjevi mudelite* nime all. Sisuliselt kirjeldavad niisugused mudelid süsteemi tootmise ja tarbimise tasakaalu.

Kirjeldame Leontjevi mudelit järgmise lihtsa näite varal. Koosnegu uuritav majandussüsteem kolmest alamsüsteemist, kusjuures igaüks neist valmistab ainult üht liiki toodangut. Mainitud süsteemi toodangu jaotumist iseloomustab järgmine mudel:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i = X_i \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

kus X_i on süsteemi i -nda alamsüsteemi kogutoodang;
 x_{ij} on i -nda alamsüsteemi toodangu hulk, mis kulub j -nda alamsüsteemi tootmisvajadusteks;

y_i on see osa i -nda alamsüsteemi toodangust, mis jääb üle süsteemisisestest vajadustest (kaubatoodang);

$$(y_1, y_2, y_3)' = \gamma.$$

Olgu antud tootmissiseste seoste maatriks:

$$\|x_{ij}\| = \begin{bmatrix} 100 & 400 & 700 \\ 500 & 200 & 400 \\ 400 & 900 & 300 \end{bmatrix},$$

kaubatoodangu vektor

$$\gamma = \begin{bmatrix} 4000 \\ 5000 \\ 7000 \end{bmatrix}$$

ja kogutoodangu vektor

$$\chi = \begin{bmatrix} 5200 \\ 6100 \\ 8600 \end{bmatrix}.$$

Olgu süsteemile antud uus plaan, mille kohaselt tuleb turustada 4500 ühikut esimese alamsüsteemi toodangut, 5700 ühikut teise alamsüsteemi toodangut ja 6800 ühikut kolmanda alamsüsteemi toodangut. Milline peab olema üksikute alamsüsteemide kogutoodang, et kindlustada uue plaani täitmine?

Ülesande lahendamiseks defineerime uue suuruse

$$a_{ij} = x_{ij} : X_j.$$

See kujutab endast i -nda alamsüsteemi toodangu hulka, mis kulub j -nda alamsüsteemi ühe toote valmistamiseks. Seda suurust nimetatakse *otsekuluks*.

Seega võib Leontjevi mudelit kirjeldada järgmiselt:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + y_i = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ehk maatriksvormis

$$(E - A)\chi = \gamma,$$

kus E on ühikmaatriks, $A = \|a_{ij}\|$ on otsekulude maatriks, χ on kogutoodangu vektor ja γ kaubatoodangu vektor. Järelikult tuleb lahendada järgmine maatriksvõrrand:

$$\chi = (E - A)^{-1}\gamma.$$

Meie näites on otsekulude maatriks:

$$A = \begin{bmatrix} 0,01923 & 0,06557 & 0,08139 \\ 0,09615 & 0,03279 & 0,04651 \\ 0,07692 & 0,14754 & 0,03488 \end{bmatrix};$$

$$(E - A) = \begin{bmatrix} 0,98077 & -0,06557 & -0,08139 \\ -0,09615 & 0,96721 & -0,04651 \\ -0,07692 & -0,14754 & 0,95349 \end{bmatrix};$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,03512 & 0,08428 & 0,09245 \\ 0,10771 & 1,05042 & 0,06043 \\ 0,10016 & 0,16933 & 1,06559 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$x = \begin{bmatrix} 1,03512 & 0,08428 & 0,09245 \\ 0,10771 & 1,05042 & 0,06043 \\ 0,10016 & 0,16933 & 1,06559 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4500 \\ 5700 \\ 6800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6267,096 \\ 6883,013 \\ 8661,913 \end{bmatrix}.$$

Maatriksi $(E - A)^{-1}$ elemente nimetatakse *täiskuludeks*. Nad kujutavad endast i -nda alamsüsteemi täiskulu j -nda alamsüsteemi toodangu valmistamisel, s. t. näitavad, kui palju tuleb suurendada i -nda alamsüsteemi toodangut, selleks et saaks täiendavalt valmistada ühe j -nda alamsüsteemi toote.

Leontjevi mudeleid rakendatakse põhiliselt tootmise ja tarbimise harudevaheliste bilansside koostamisel. Seni on koostatud peaasjalikult eksperimentaalbilansse. Nende bilansside praktikasse juurutamiseks tuleb lahendada veel rida probleeme. Peamised neist on bilansi maatriksi mõõtmete suurendamine (desagregeerimine) ja mittelineaarsete seoste ning lähteinformatsiooni stohhastilise iseloomu arvestamine.¹

8.7. Ülesande püstitamisest lahendi juurutamiseni. Majandusmatemaatika meetodite juurutamine praktikasse on keeruline mitmeetapiline protsess, mis nõuab eri planeerimist ja organiseerimist. Allpool peatume lühidalt üksikutel etappidel.

1. Ülesande püstitamine ja põhjendamine. Enne majandusmatemaatilise mudeli formuleerimist tehakse selgeks taotletav eesmärk ja seatakse üles vastav hüpotees uuritava objekti kohta. Üldjoontes tuleb hinnata ka loodetavat efekti ja orienteeruvaid kulusi.

¹ В. В. Коссов. *Межотраслевый баланс*. М. 1966, lk. 217.

Ülesannete valik ja formuleering peavad rajanema majandusmatemaatiliste probleemide sisulisel analüüsil, kirjutas akadeemik L. Kantorovitš.¹

Eriti tuleb rõhutada seda, et *ainult objekti põhjalik tundmine lubab õigesti ja kvalifitseeritult sõnastada majandusmatemaatilist ülesannet.*

Ülesandeid tuleb pidevalt otsida, tuleb osata näha aktuaalseid probleeme, sest, nagu õigesti märgivad K. Endler ja M. Wenzel, tekivad igas sotsialistlikus ettevõttes alatasa objektiivselt uued juhtimisprobleemid, olenemata sellest, kas oleme neist teadlikud või mitte.² Nii-suguste probleemide märkamine on väga oluline, sest see võimaldab operatiivselt reageerida tootmises tekkivatele kitsaskohtadele ja vastuoludele. Siin avaldub tootmisjuhi initsiatiiv, tema võimed olla kaasaja nõuete kõrgusel. Mainitud probleemide nägemine ja püstitamine pole sugugi ainuüksi direktori eelisõigus ja kohus, kuid direktor peaks olema see, kes annab niisuguste otsingute peasuuna.

Suureks abiks uute probleemide leidmisel on kodumaa ja välismaa kogemustega tutvumine. Igas ettevõttes peaks olema hästi organiseeritud tehnilise informatsiooni talitus (koosseisuline või ühiskondlik). Informatsiooni on tohutul palju, kasutatakse seda aga äärmiselt piiratud hulgal. On välja arvatud, et spetsialist, kes püüab olla kursis kaasaegse teaduslik-tehnilise progressiga, peab süstemaatiliselt kulutama vähemalt 25 protsenti oma ajast vastava informatsiooniga tutvumiseks.³ Aga kui palju kulub tal aega informatsiooni otsimiseks!

Ei saa rõhutamata jätta ka võõrkeelte õppimise vajadust. UNESCO andmetel oli teaduslik informatsioon 1957. a. jaotatud keelte järgi järgmiselt: inglise keeles 60%, vene keeles 11%, saksa keeles 11%, prantsuse keeles 9%, jaapani keeles 3%, hispaania keeles 2%, ülejäänud keeltes 4% (viimase kümne aasta jooksul on vene keele erikaal — mõne allika järgi — tunduvalt tõusnud).

2. *Lähteandmete hulga kindlaksmääramine.* Selleks

¹ Л. В. Канторович. Математические проблемы оптимального планирования. Когumikus «Математические модели и методы оптимального планирования», Новосибирск 1966, lk. 116.

² K. Endler, M. Wenzel. Führungsentscheidungen in sozialistischen Betrieb. Berlin 1967, lk. 42.

³ Г. М. Добров. Наука о науке. Киев 1966, lk. 167.

tuleb eelnevalt välja selgitada kõik tegurid ja tingimused, mis etendavad olulist osa antud probleemi lahendamisel, samuti määrata kindlaks lähteandmete saamise viisid.

Juba antud etapil on soovitav määrata ka probleemi lahendamises vahetult osalev spetsialistide rühm. Praktika näitab, et niisugusesse rühma (mille arvuline koosseis oleneb probleemi ulatusest, keerukusest ja olemasolevatest võimalustest) peavad kuuluma ökonomistid, insenerid ja matemaatikud, erijuhtudel ka programmeerijad (kui ülesande lahendamiseks elektronarvuti abil puuduvad vastavad standardprogrammid). Mõistagi on siin juttu niisugustest ökonomistidest ja matemaikutest, kes tunnevad majandusmatemaatika meetodeid. Kasulik on rühma koosseisu lülitada ka objekti administratsiooni esindajad. Ameerika ökonomist A. S. Manne kirjutas, et mudelite koostajate, andmete kogujate ja arvutusspetsialisti vahelise tiheda koostööta on vähe šansse edule. Juba algusest peale peavad mudelite koostajad ja informatsiooni kogujad teadma veidi ka oma materjali arvulise analüüsi probleemidest. Mainitud teadmiste puudumisel on kaunis tõenäoline, et nad hindavad olemasolevaid lahendamismetodeid alla või üle. Side mudelite koostajate ja matemaatikute vahel peab loomulikult olema kahepoolne, sest siis muutuvad selgemaks nii mudeli koostaja eesmärgid kui ka see, missuguseid arvulisi meetodeid tuleb kasutada mudeli omaduste esiletoomiseks.¹

3. *Lähteandmete kogumine.* See on üks töömahukamaid ja vastutusrikkamaid tööloike, sellepärast tuleb juba varakult hoolikalt läbi mõtelda kogumise kord, ette näha informatsiooniallikad ja vajalikud konsultatsioonid. Sageli nõuab uue informatsiooni hankimine suuri kulutusi, seepärast tuleb alati vaagida, kas loodetav efekt õigustab neid. Väga valusaks probleemiks on lähteandmete usaldusväärsuse kindlakstegemine ja selle suurendamine.

4. *Lähteandmete kokkuvõtt ja rühmitamine.* Kogutud andmed on toormaterjal, mida tuleb eelnevalt töödelda. Tavaliselt koondatakse kõik andmed ülevaatlikesse tabelitesse.

5. *Matemaatilise mudeli koostamine.* Oluline on koos-

¹ А. С. Манн. Модель линейного программирования нефтяной промышленности США. Когумикус «Отраслевые экономико-математические модели». М. 1967, lk. 59.

tada niisugune mudel, mis miteeriks piisava täpsusega uuritavat objekti ja lahenduks teadaolevate meetoditega ning olemasoleva arvutustehnika abil. Antud etapil valitakse ka (kui seda pole varem tehtud) optimaalsuse kriteerium. Sageli selgub mudeli koostamisel, et kogutud lähteandmetest ei piisa ja tekib vajadus uute uurimiste järele.

Mudeli koostamisel võime kokku pörgata mitmesuguste raskustega. Mainime siin vaid põhilisi:

- a) oluliste kvalitatiivsete tegurite olemasolu;
- b) kvantitatiivsete, ent ainult intuiitiivselt määratavate näitajate olemasolu;
- c) andmete agregeerimise vajalikkus;
- d) mittelineaarsete sõltuvuste olemasolu;
- e) lähteinformatsiooni puudulikkus ja vähene usaldusväärsus;
- f) lähteandmete stohhastiline iseloom;
- g) hinnakujundamise puudused (väärtuseliste näitajate kasutamisel);
- h) olulise ja mitteolulise subjektiivne lahutamine, mis on tingitud majandusprotsessi keerukusest;
- i) arvutustehnika piiratud võimsus.

6. *Lahendusmeetodi kindlaksmääramine.* Siin on juhtiv osa matemaatikul. Sageli nõuab ülesande lahendamine mudeli osalist muutmist. Tuleb ette ka raskusi, mis on seotud mudeli suurte mõõtmetega ja arvutite piiratud võimsusega. Äärmisel juhul tuleb luua isegi uusi meetodeid, kuigi enamasti püütakse ülesandeid nii kohandada, et nad muutuksid lahendatavateks tuntud võtete abil.

Alati pole vajadust lahendada ülesanne täpsete arvuliste meetoditega. Aja kokkuhoiu mõttes on sageli küllaldane kasutada ligikaudseid meetodeid.

7. *Lahendusalgoritmi loogilise blokkskeemi koostamine.*

8. *Programmi koostamine.* Andmete kogumise järel on see kõige tömahukam etapp.

9. *Ülesande lahendamine* (käsitsi või elektronarvutil, olenevalt ülesande liigist ja suuruselt).

10. *Tulemuste analüüsimine ja hindamine.* Sellel etapil võib tekkida vajadus algoritmi ja programmi silumiseks või uute lahendusvariantide formuleerimiseks. Analüüsimisel tuleb arvesse võtta, et ulatuslikumate ülesannete puhul võivad esineda märgatavad ümardamisvead. Tuleb

harjuda mõttega, et matemaatiliste meetodite rakendamisel võib saada täiesti ootamatuid lahendusi.

11. *Lahendi praktilise kasutamise organiseerimine.* Selleks määratakse vajaliku informatsiooni pideva ülekandmise ning kokkuvõtmise viisid, informatsioonikandjad, informatsioonivood ja ülepea kogu informatsioonitalituse töökord. Kõik see fikseeritakse vastavas instruksioonis.

12. *Tegeliku majandusliku efektiivsuse arvutamine.*

13. *Omandatud kogemuste üldistamine ja levitamine.*

9. SIMPLEKSMEETOD

9.1. Meetodi idee ja arvutuskäigu kirjeldus. Simpleksmeetod on lineaarsete planeerimisülesannete universaalne lahendusmeetod. Meetodi autoriks on ameerika matemaatik G. B. Dantzig (1947). Nimetus tekkis esimeste selle meetodi abil lahendatud ülesannete geomeetrilisest tõlgendamise

gandamisest, sest nendes esinesid kitsendused $\sum_{j=1}^n x_j = 1$, $x_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), mis määravad n -dimensioonilises ruumis *simpleksi*. Simpleksiks nimetatakse n -dimensioonilist kumerat hulktahukat, millel on täpselt $n + 1$ tippu. Tegelikult ei vasta niisugune nimetus meetodi olemusele ja seepärast nimetatakse seda sageli ka *plaani järkjärgulise parandamise meetodiks*.

Anname üldjoontes simpleksmeetodi geomeetrilise tõlgenduse, mis kergendab meetodi algebralise külje mõistmist. Me näitasime (vt. punkt 8.4), et lineaarsete planeerimisülesannete kitsendusi võib väljendada võrratuste ja võrrandite abil. Iga võrrand n tundmatuga kujutab $(n - 1)$ -dimensioonilist hüpertasandit, mis asub n -dimensioonilises ruumis (vt. punkt 5.2). Seega m kitsendusest koosnev kitsenduste süsteem kujutab m hüpertasandit (võrrandite korral). Need hüpertasandid moodustavad n -dimensioonilises koordinaatide süsteemis geomeetrilise keha, mida nimetatakse kumeraks hulktahukaks (vt. punkt 5.3). Kuna lineaarsete planeerimisülesannete matemaatilisel formuleerimisel kehtib nõue, et tundmatud ei tohi olla negatiivsed, siis pole ka mainitud hulktahuka punktide koordinaadid negatiivsed.

On kerge näidata, et hulktahukas kujutab endast n -dimensioonilises ruumis $(n - m)$ -dimensioonilist keha. Vaatleme m võrrandit n tundmatuga. Öeldakse, et niisugusel süsteemil on $n - m$ vabadusastet, sest m tundmatut võib alati väljendada ülejäänud $n - m$ tundmatu abil.

Iga täiendav võrrand vähendab võrrandisüsteemi vabadusastmete arvu ühe võrra. Analoogiliselt võib ütelda, et iga täiendav hüpertasand vähendab nende ühisosa kujutava keha dimensiooni ühe võrra.

Kitsenduste süsteemiga moodustatud $(n - m)$ -dimensioonilise hulktahuka pind (kumer kate, vt. punkt 5.3) ehk tema rajapunktide hulk moodustab ülesande lubatavate lahendite piirkonna. Kui kitsendused on antud võrratusena, siis moodustavad viimased samuti kumera hulktahuka (erandjuhtudel kumera koonuse), ainult seejuures kuuluvad lubatavate lahendite piirkonda ka sisepunktid.

Sihifunktsioon $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ kujutab endast mingi fikseeritud z väärtuse korral ($z = z_0$) hüpertasandit n -dimensioonilises ruumis. Andes sihifunktsioonile kindlaid väärtusi, saame hüpertasandeid, mis asuvad koordinaatide süsteemi nullpunktist erinevatel kaugustel. Piltlikult öeldes, me «nihutame» hüpertasandit z n -dimensioonilises ruumis. Kui hüpertasand puudutab hulktahuka — s. t. lubatavate lahendite piirkonna — koordinaatide süsteemi nullpunktist kõige kaugemal olevat punkti, siis määrab antud punkt sihifunktsiooni maksimaalse väärtuse. Kui aga hüpertasand z puudutab hulktahuka koordinaatide süsteemi nullpunktile kõige lähemal asuvat punkti, siis määrab see punkt sihifunktsiooni minimaalse väärtuse.

Tavaliselt kujutab niisugune puutepunkt endast kumera hulktahuka ühte tippu. Sel juhul eksisteerib ülesandel üheselt määratud lahend. Kui aga hüpertasand z puudutab korraga kaht ja enam tippu, siis on ülesandel lõpmata palju alternatiivseid optimume.

Oletame, et meil on n tundmatuga ja m kitsendusega lineaarse planeerimise ülesanne, kusjuures optimaalse lahendivektori koordinaadid on märgitud tärnikesega. Sel juhul võib optimaalse lahendi kirja panna järgmiselt:

$$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*, 0, 0, \dots, 0), x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

kusjuures esitatud lahendivektoris on $n - m$ koordinaati, mis on võrdsed nulliga.

Ülalöeldust teame, et niisugune lahend määrab kumera hulktahuka ja sihifunktsiooni kujutava hüpertasandi puutepunkti (tipu) koordinaadid n -dimensioonilises koordinaatide süsteemis, kusjuures algebraliselt antud tipule vastab ülesande kitsenduste süsteemi lubatav baasilahend.

Järelikult tuleks sihifunktsiooni ekstreemumväärtuse leidmiseks kontrollida lubatavate lahendite piirkonna tippe ehk kitsenduste süsteemi baasilahendeid, mis osutub aga praktiliselt teostamatuks. Võib kergesti veenduda, et n tundmatu ja m kitsenduse korral ($n > m$) tuleb kontrollida kombinatsioonide arvu n elemendist m kaupa (C_n^m). Näiteks 15 tundmatu ja 10 kitsenduse korral tuleks sihifunktsiooni ekstreemumväärtuse leidmiseks arvutada ja kontrollida $C_{15}^{10} = 3003$ baasilahendit.

Simpleksmeetodi idee seisab niisuguse baasilahendite valimise järjekorra leidmises, mis võimaldab jõuda kõige kiiremini sihini teatud lubatavast baasi alglahendist alates.

Me tunneme juba matemaatilist vahendit, mis võimaldab leida uut baasilahendit — see on baasi elementarteisendus (vt. punkt 4.2). Sobivad ainult niisugused baasi elementarteisendused, mis annavad lubatava baasilahendi.

Niisiis on simpleksmeetodi idee realiseerimiseks vaja:

1) leida lubatav baasilahend, mis kujuneks edasiste arvutuste aluseks;

2) määrata baasilahendi optimaalsuse kriteerium;

3) leida sobiv meetod uue baasilahendi saamiseks, s. t. niisuguse baasilahendi saamiseks, mis oleks endisega võrreldes optimumile lähemal.

Simpleksmeetodi algoritm võimaldab arvutamise ajal kindlaks määrata ka ülesande lahendatavust, s. o. näidata, kas kitsenduste süsteem on vastuoluline ning kas ta kindlustab sihifunktsiooni tõkestatuse.

Enne simpleksalgoritmi kirjeldamist peame silmas pidama järgmisi nõudeid.

1) *Kõik ülesande kitsendused (välja arvatud tundmatute mittenegatiivsuse nõue) peavad olema esitatud võrranditena.* Juhul kui ülesande esialgsel matemaatilisel formuleerimisel esinevad kitsenduste hulgas võrratused, siis tuleb need abitundmatute abil muuta võrranditeks (vt. punkt 5.1).

2) *Simpleksalgoritm on rakendatav ainult sel juhul, kui ülesande kitsenduste süsteem on esitatud kanoonilisel kujul.* Sageli juhtub nii, et võrratuste muutmisel võrranditeks saadakse ühtlasi ka kitsenduste süsteem kanoonilisel kujul, mis võimaldab leida vahetult baasilahendi.

3) *Kõik kitsenduste süsteemi vabaliikmed peavad*

olema mittenegatiivsed. Kui mõni vabaliige on negatiivne, siis muudetakse ta positiivseks, korrutades vastava võrrandi mõlemaid pooli arvuga —1.

4) *Abitundmatute kordajad sihifunktsioonis* (maksimeerimise korral) *on võrdsed nulliga*. Sel juhul ei mõjuta nad sihifunktsiooni väärtust.

Kui ülesande kitsenduste süsteem on esitatud võrrandi-süsteemina, siis öeldakse, et lineaarne planeerimisülesanne on esitatud *põhikujul*. Ülesande esialgses sõnastuses esinevaid tundmatuid nimetatakse *põhitundmatuteks*, et eraldada neid *abitundmatutest*. Peale selle tehakse vahet *baasitundmatute* ja *baasiväliste tundmatute* vahel.

Simpleksalgoritmi paremaks rakendamiseks on otstarbekas esitada võrrandina ka sihifunktsioon:

$$z = z_0 + c_{m+1}x_{m+1} + \dots + c_n x_n,$$

kus z on tundmatu (ainus tundmatu, mille kohta ei esitata mittenegatiivsuse nõuet), z_0 — sihifunktsiooni väärtus antud lubatava baasilahendi korral, $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ — baasivälised tundmatud ja $c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_n$ — vastavate baasiväliste tundmatute sihifunktsiooni kordajad.

Seega

$$z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m,$$

kus $x_1, x_2, \dots, x_m$ on baasitundmatud, $c_1, c_2, \dots, c_m$ — baasitundmatute sihifunktsiooni kordajad. Kui baasitundmatuteks on abitundmatud, siis on nende kordajad võrdsed nulliga ja $z_0 = 0$.

Esitame sihifunktsiooni kujul

$$Z_0 = Z - C_{m+1}x_{m+1} - C_{m+2}x_{m+2} - \dots - C_n x_n.$$

Kanoonilisel kujul esitatud kitsenduste süsteemile lisame sihifunktsiooni võrrandi ja sõnastame ülesande järgmiselt:

leida võrrandisüsteemi

$$\begin{array}{rcll} x_1 & + a_{1,m+1} x_{m+1} + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n & = & b_1; \\ x_2 & + a_{2,m+1} x_{m+1} + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n & = & b_2; \\ & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \\ x_m & + a_{m,m+1} x_{m+1} + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n & = & b_m; \\ z & - c_{m+1} x_{m+1} - \dots - c_j x_j - \dots - c_n x_n & = & z_0 \end{array}$$

mittenegatiivne lahend, mille korral z omandab maksimaalse võimaliku väärtuse.

Alustasime simpleksalgoritmi esitamist, eeldades, et ülesanne on juba formuleeritud kanoonilisel kujul. Juhtu, mil ülesanne pole formuleeritud kanoonilisel kujul ja tuleb leida lubatav baasilahend, kusjuures pole ka teada, kas kitsenduste süsteemi võrrandid on lineaarselt sõltumatud, vastuolulised või mitte, vaatleme antud punkti lõpus.

Arvutuste lihtsustamiseks on otstarbekas koondada kõik lähteandmed — laiendatud kanoonilise võrrandisüsteemi kordajad — nn. *algsimplekstabelisse* ehk *null-iteratsioonitabelisse*.

Tabel 20

Baasitundmatud	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_r	...	x_n	z	Vabaliikmed
x_1	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	a_{1r}	...	a_{1n}	0	b_1
x_2	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2r}	...	a_{2n}	0	b_2
...	...	...	...	...		...		...		...	...
x_m	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mr}	...	a_{mn}	0	b_m
z	0	0	...	0	$-c_{m+1}$	...	$-c_r$	...	$-c_n$	1	z_0

Toodud tabelist võime kohe leida lubatava baasilahendi:

$$x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m$$

ja

$$z = z_0; x_{m+1} = \dots = x_r = \dots = x_n = 0.$$

Järgnevalt tuleb moodustada uus baasilahend nii, et baasitundmatud oleksid mittenegatiivsed ja z omandaks suurema väärtuse. See tähendab, et ühe baasivälise tundmatu peame muutma positiivseks. Kui selle baasivälise tundmatu sihifunktsiooni kordaja on positiivne, siis suureneb selle tulemusena ka z väärtus. Ei tohi unustada, et simplekstabelis on sihifunktsiooni kordajad vastandmärkidega! Tavaliselt suurendatakse seda baasivälise tundmatu, millel on kõige suurem sihifunktsiooni kordaja, sest praktika on näidanud, et nii võib kiiremini jõuda optimumini. Oletame, et kõige suurem sihifunktsiooni kordaja asub r -ndas veerus. Seega on r -s veerg meil juhtveeruks

baasi elementaarteisendusel, mille abil saame uue baasilahendi.

Kõigepealt sõnastame baasi elementaarteisenduse eeskirjad veidi teisiti kui varem (vt. punkt 4.2), selleks et lihtsustada arvutusi.

1) Juhtrea elemendid jagatakse juhtelemendiga:

$$a'_{sj} = \frac{a_{sj}}{a_{sr}} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (9.1)$$

kus s on juhtrea indeks, r — juhtveeru indeks, n — tundmatute arv, a'_{sj} — uue simplekstabeli s -nda rea elemendid.

2) Ülejäänud ridadest lahutatakse eelmises punktis arvutatud rida (s -rida), mis on korrutatud kordajaga a_{ir} . Nii saavutatakse, et *kõik juhtveeru elemendid (peale juhtelemendi) on uues tabelis võrdsed nulliga*. Tähistame uue tabeli elemendi a'_{ij} ($i \neq s$). Seega võib toodud eeskirja väljendada järgmise valemiga:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{sj}}{a_{sr}} a_{ir} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (9.2)$$

Niisiis saame pärast baasi elementaarteisendust uue baasilahendi (oleme suurendanud tundmatut x_r):

$$x_1 = b_1 - \frac{b_s}{a_{sr}} a_{1r},$$

·

·

·

$$x_r = \frac{b_s}{a_{sr}},$$

·

·

$$x_m = b_m - \frac{b_s}{a_{sr}} a_{mr}.$$

Endine baasiväline tundmatu x_r asendas baasis endise tundmatu x_s , mis muutus nüüd uues baasilahendis nulliks.

Baasi elementaarteisenduse eeskirjadest võime teha olulise järelduse: *lubatava baasilahendi saamiseks tuleb baasi elementaarteisendamiseks valida ainult positiivne juhtelement* ($a_{sr} > 0$), sest vastasel korral osutub uus baasilahend mittelubatavaks.

Toodud järelduse põhjal saame formuleerida eeskirja,

mis võimaldab valida niisuguse juhtrea ja juhtelemendi, et uus baasilahend osutub lubatavaks.

Lubatava lahendi saamiseks tuleb seega leida niisugune positiivne jagatis $\frac{b_s}{a_{sr}}$, et

$$b_i - \frac{b_s}{a_{sr}} a_{ir} \geq 0.$$

See võrratus kehtib ainult siis, kui

$$\frac{b_i}{a_{ir}} \geq \frac{b_s}{a_{sr}}.$$

Niisiis, selleks et saaksime lubatava baasilahendi, tuleb juhtrea kindlaksmääramiseks leida selline jagatis $\frac{b_s}{a_{sr}}$, mis rahuldab tingimust

$$0 < \frac{b_s}{a_{sr}} \leq \min_i \frac{b_i}{a_{ir}} \quad (a_{ir} > 0). \quad (9.3)$$

Teiste sõnadega, see rida, millele vastab kõige väiksem jagatis $\frac{b_i}{a_{ir}}$, tulebki valida juhtreaks, kusjuures arvesse tulevad ainult positiivsed a_{ir} -d.

Juhul aga, kui mõne positiivse c_r esinemise korral kõik r -nda veeru elemendid a_{ir} on negatiivsed või nullid, ei saa moodustada uut lubatavat baasilahendit. On tõestatud, et niisugusel juhul on sihifunktsiooni väärtus tõkestamata.

Järgnevalt peame sõnastama *optimaalsuse kriteeriumi*, mis võimaldaks hinnata uut baasilahendit, ja kindlaks määrama, kas optimum on saavutatud või mitte.

Kõige lihtsamaks optimaalsuse kriteeriumiks on simplekstabeli z -nda rea kordajate märgid (välja arvatud z_0). Seni, kuni mõni z -nda rea kordaja c_r on negatiivne ja vähemalt üks kordaja a_{ir} on positiivne, võib saada uue lubatava lahendi, millele vastab sihifunktsiooni suurem väärtus. Kui kõik simplekstabeli z -nda rea kordajad on mittenegatiivsed, siis on optimum saavutatud.

Vaatame, kuidas muutub z_0 väärtus baasi elementaarteisenduse korral. Elementaarteisenduse valemi järgi

$$z'_0 = z_0 - \frac{b_s}{a_{sr}} c_r. \quad (9.4)$$

Niisiis sooritatakse baasi elementaarteisendusi niikaua, kuni tabelis on kõik z -nda rea kordajad muutunud mittenegatiivseteks või selgub, et sihifunktsiooni väärtus on tõkestamata.

$$w = -y_1 - y_2 - \dots - y_m$$
[illegible]
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & b_m \\ -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & z_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & w_0 \end{pmatrix}.$$

118

Tabel 21

Baasi- tund- matud	x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_2	...	y_m	z	w	Vaba- liik- med
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	0	0	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	0	0	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	0	0	b_m
z	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	1	0	z_0
w	$-\sum_{i=1}^m a_{i1}$	$-\sum_{i=1}^m a_{i2}$	...	$-\sum_{i=1}^m a_{in}$	0	0	...	0	0	1	$-\sum_{i=1}^m b_i$

Kunstlike tundmatute mittenegatiivsusest järeldub, et w maksimaalne võimalik väärtus (lubatava lahendi olemasolu korral) on null. Sel juhul on kõik $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Nüüd jaguneb ülesande lahendamine kaheks etapiks. *I etapil* asendame baasi elementaarteisenduste abil baasitundmatuid y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) niikaua, kuni $w = 0$ ja tabel näitab meile lubatava lahendi. *Kui aga maksimaalne w väärtus on negatiivne, siis lubatavat lahendit ei ole.*

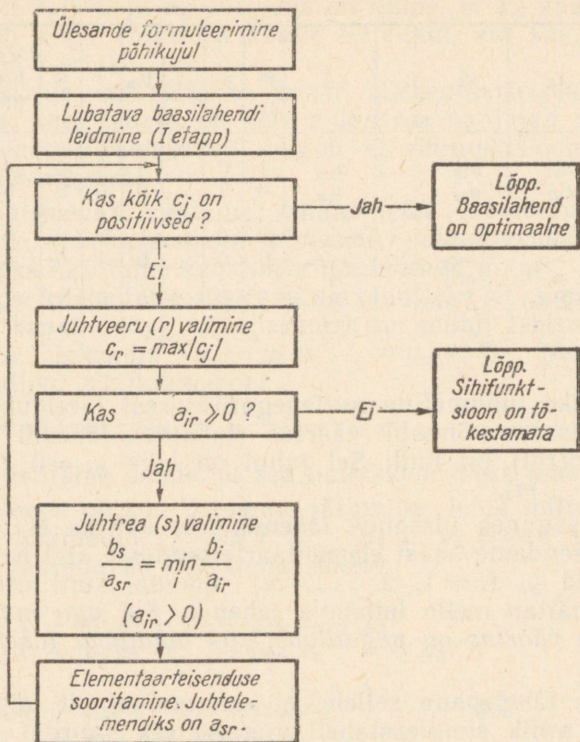
Juhime tähelepanu sellele, et esimesel etapil toimub juhtveeru valik simplekstabeli viimase rea (w -rea) elementide järgi. Juhtveeruks valitakse see veerg, kus asub w -rea väikseima väärtusega element.

Pärast lubatava lahendi saamist algab lahendamise *II etapp*, kus lineaarse planeerimisülesande kanooniline kuju lahendatakse simpleksalgoritmi järgi nii, nagu seda eespool kirjeldati.

Järgnevalt toome simpleksalgoritmi loogilise blokk-skeemi, mis võimaldab paremini orienteeruda arvutuste käigus.

9.2. Arvuline näide. Kasutame siin G. B. Dantzigi näidet ja sooritame simpleksmeetodi kõik iteratiivsed samud.¹

¹ Дж. Данциг. Линейное программирование, его обобщения и применения. М. 1966, lk. 110.



JOONIS 17.

Simpleksmeetodi algoritmi lihtsustatud loogiline blokk-skeem minimiseerimisülesande korral.

Leida niisugused tundmatud $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, 5$), mis rahuldavad kitsendusi:

$$5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20, \quad (9.5)$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8 \quad (9.6)$$

ja minimiseerivad sihifunktsiooni

$$z = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5. \quad (9.7)$$

Lahenduskäiku alustame I etapist, formuleerides järgmise kunstliku ülesande lubatava lahendi leidmiseks: leida võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}
5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 + y_1 &= 20; \\
x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 + y_2 &= 8; \\
x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5 + z' &= 0; \\
y_1 + y_2 + w &= 0
\end{aligned}$$

lahend, mis maksimiseerib w väärtuse.

Juhime tähelepanu sellele, et lahendame *maksimiseerimise* ülesannet, kusjuures $z' = -z$.

Koostame simplekstabeli, jättes ära veerud z' ja w , sest neid ei lähe meil edaspidi vaja.

Tabel 22

Baasi- tund- matud	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	Vaba- liikmed
y_1	5	-4	13	-2	1	1	0	20
y_2	1	-1	5	-1	1	0	1	8
z'	1	6	-7	1	5	0	0	0
w	-6	5	-18	3	-2	0	0	-28

Juhtveeru leidmiseks kontrollime w -nda rea elemente ja valime neist kõige väiksema negatiivse elemendi. Nii-
suguseks elemendiks on -18 . Järelikult valime juhtvee-
ruks kolmanda veeru (veeru x_3). See veerg tuleb meil
järgneva baasi elementaarteisenduse sooritamisel baasi
lülitada, s. t. tuleb suurendada tundmatu x_3 väärtust.
Juhtrea määramiseks kasutame valemit (9.3):

$$\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ir}} \mid a_{ir} > 0 \right\} = \frac{b_1}{a_{13}} = \frac{20}{13}.$$

Seega valime juhtreaks esimese rea ja juhtelemendiks
 $a_{13} = 13$. Pärast baasi elementaarteisenduse sooritamist
valemite (9.1) ja (9.2) järgi saame uue simplekstabeli
(vt. tabel 23).

Toome mõned näited arvutustest valemite (9.1) ja
(9.2) järgi.

$$a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{13}} a_{23}.$$

Seega

$$a'_{22} = -1 - \frac{(-4) \cdot 5}{13} = \frac{7}{13};$$

$$z'_0 = (-z_0) - \frac{c_3 b_1}{a_{13}}.$$

Seega

$$z'_0 = 0 - \frac{(-7) \cdot 20}{13} = \frac{140}{13};$$

$$a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{13}} = -\frac{4}{13}.$$

Tabel 23.

Baasi- tund- matud	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	Vaba- liikmed
x_3	$\frac{5}{13}$	$-\frac{4}{13}$	1	$-\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{20}{13}$
y_2	$-\frac{12}{13}$	$\frac{7}{13}$	0	$-\frac{3}{13}$	$\frac{8}{13}$	$-\frac{5}{13}$	1	$\frac{4}{13}$
z'	$\frac{48}{13}$	$\frac{50}{13}$	0	$-\frac{1}{13}$	$\frac{72}{13}$	$\frac{7}{13}$	0	$\frac{140}{13}$
w	$\frac{12}{13}$	$-\frac{7}{13}$	0	$\frac{3}{13}$	$-\frac{18}{13}$	$\frac{18}{13}$	0	$-\frac{4}{13}$

Järgnevalt vaatame baasi elementaarteisendusi. Tabelis 23 on w -rea väiksemaks negatiivseks elemendiks — $\frac{18}{13}$, mis asub veerus x_5 . Järelikult on juhtveeruks veerg x_5 . Juhtrea määrab jagatis $\frac{b_2}{a_{25}}$. Seega on juhtelemendiks $a_{25} = \frac{8}{13}$. Pärast teisendust saame tabeli 24:

Tabel 24

Baasi- tund- matud	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	Vaba- liikmed
x_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$
x_5	$-\frac{12}{8}$	$\frac{7}{8}$	0	$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{2}$
z'	12	-1	0	2	0	4	-9	8
w	0	0	0	0	0	1	1	0

Pärast teist teisendust on $w = 0$. Seega I etapp on lõppenud. Lubatavaks lahendiks on

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = \frac{3}{2}; x_4 = 0; x_5 = \frac{1}{2}.$$

Kustutame tabelist 24 w -rea ja alustame II etappi. Et tabelis on $c_2 = -1$, s. t. negatiivne, siis on võimalik saadud lahendit parandada. Et veerus x_2 on üksainus positiivne element $a_{22} = \frac{7}{8}$, siis valime selle juhtelemendiks. Arvutame uue simplekstabeli.

Tabel 25

Baasitundmatud	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	Vaba-liikmed
x_3	$-\frac{1}{7}$	0	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$
x_2	$-\frac{12}{7}$	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{4}{7}$
z'	$\frac{72}{7}$	0	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{23}{7}$	$-\frac{50}{7}$	$\frac{60}{7}$

Tabelis 25 on z' -reas kõik kordajad positiivsed (veerud y_1 ja y_2 ei loe). Seega on optimaalne lahend leitud:

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{4}{7}; x_3 = \frac{12}{7}; x_4 = 0; x_5 = 0.$$

$$\text{Niisiis, } \max z' = \frac{60}{7}; \min z = -\frac{60}{7}.$$

Kontrollime saadud lahendit duaalülesande sihifunktsiooni arvutamise teel. Duaalülesannet pole vaja uuesti algusest peale formuleerida ja lahendada. *Koos lähteülesande optimaalse lahendi leidmisega saame samaaegselt ka duaalülesande lahendi. Duaalülesande optimaalse lahendi komponendid asuvad viimase simplekstabeli z -rea ja kunstlike tundmatute veergude ristumiskohtadel.*

Märkus: nüüd selgub, miks me ei kustutanud pärast I etappi veerge y_1 ja y_2 , kuigi neid ei läinud vaja lähteülesande optimaalse lahendi leidmiseks.

Duaalülesandes tuleb minimiseerida funktsioon

$$u = 20y_1 + 8y_2.$$

Tabelist 25 leiame, et $y_1 = \frac{23}{7}$ ja $y_2 = -\frac{50}{7}$.

Seega

$$\frac{20 \cdot 23}{7} - \frac{8 \cdot 50}{7} = \frac{60}{7}.$$

Niisiis $\max z' = \min u$, mis tõestab leitud lahendi optimaalsust.

9.3. Täiendavad kitsendused. Sageli selgub pärast optimaalse lahendi leidmist, et lahend peab sisaldama tingimata mõnd tundmatut, mille väärtus optimaalses lahendis on null. Selleks pole alati tarvis ülesannet uuesti algusest peale formuleerida ja lahendada.

Oletame, et lahend peab sisaldama baasivälist tundmatut x_j intensiivsusega f_j . Endised lahendi komponendid muutuvad sellisel korral järgmise valemi järgi:

$$b'_i = b_i - f_j a_{ij}, \quad (9.8)$$

kus b'_i on esialgse optimaalse lahendi i -nda komponendi korrigeeritud suurus, b_i — esialgse optimaalse lahendi vastav komponent, a_{ij} — antud tundmatu (x_j) kordajad viimases simplekstabelis.

Olgu ülaltoodud näites lisatud uus tingimus: lahend peab sisaldama tundmatu x_4 intensiivsusega 2 (s. t. $x_4 = 2$). Milliseks kujuneb sel juhul uus lahend? Leiame, kuidas muutuvad esialgse lahendi komponendid valemi (9.8) järgi:

$$b'_2 = \frac{4}{7} - 2 \left(-\frac{3}{7} \right) = \frac{10}{7},$$

$$b'_3 = \frac{12}{7} - 2 \left(-\frac{2}{7} \right) = \frac{16}{7}.$$

Niisiis, uueks lahendiks on:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{10}{7}; \quad x_3 = \frac{16}{7}; \quad x_4 = 2; \quad x_5 = 0.$$

Kontrollime kitsendusi:

$$-4 \cdot \frac{10}{7} + 13 \cdot \frac{16}{7} - 2 \cdot 2 = 20,$$

$$-1 \cdot \frac{10}{7} + 5 \cdot \frac{16}{7} - 1 \cdot 2 = 8;$$

$$z' = -6 \cdot \frac{10}{7} + 7 \cdot \frac{16}{7} - 1 \cdot 2 = \frac{38}{7}.$$

Seega vähenes sihifunktsiooni esialgne optimaalne väärtus uue tundmatu $x_4 = 2$ lahendisse lülitamise järel $\frac{22}{7}$ võrra.

Arusaadavalt tuleb jälgida, et uute kitsenduste puhul b'_i ei muutuks negatiivseks. Näiteks soovime toodud näites lülitada lahendisse tundmatu x_5 . Leiame, et

$$\frac{4}{7} - f_5 \cdot \frac{8}{7} \geq 0, \text{ s. t. } f_5 \leq 0,5,$$

ja

$$\frac{12}{7} - f_5 \cdot \frac{3}{7} \geq 0, \text{ s. t. } f_5 \leq 4.$$

Seega võib tundmatust x_5 lahendisse lülitada maksimaalse intensiivsusega 0,5 (tingimusel, et ülesanne pole täisarvuline).

9.4. Kõdumine. Võib esineda niisugune juht, kus mõned vabaliikmed simplekstabelis võrduvad pärast teatud iteratsiooni nulliga. Sel juhul saadakse nn. *kõdunud lahendid*, milles nullist erinevate tundmatute arv on kitsenduste arvust väiksem.

Et praktikas esineb kõdumist harva, siis peatume sellel küsimusel võrdlemisi lühidalt. Esitame eeskirja, mis võimaldab üheselt määrata juhtrea ja vältida nn. tsükli tekkimist, s. o. tagasipöördumist esinenud lahendite juurde juhul, kui juhtrida valitakse juhuslikult.

Oletame, et $\frac{b_1}{a_{1r}} = \frac{b_2}{a_{2r}}$ (r on juhtveeru indeks). Sellisel juhul valitakse järjekorras baasivektorid x_j ning kontrollitakse suhteid $\frac{b_{1j}}{a_{1r}}$ ja $\frac{b_{2j}}{a_{2r}}$. Kui need suhted on erinevad, siis valitakse juhtreaks see rida, millele vastab väikseim suhe. Juhul kui suhted osutuvad võrdseteks, siis valitakse uus baasivektor ja kontrollitakse analoogilisi suhteid. Nii toimitakse seni, kuni saadakse erinevad suhted. On kindlaks tehtud, et teatud baasivektori korral on mainitud suhted tingimata erinevad (b_{ij} on j -nda baasivektori komponendid).

Toome näite (E. M. L. Beale).¹

¹ С. Г а с с. *Линейное программирование*. М. 1961, lk. 146—151.

Baasi- tund- matud	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Vaba- liikmed
x_1	1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
z	0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0	0

Soovitame lugejal veenduda selles, et kui ta valib juhuslikult juhtelemendiks $\frac{8}{25}$, siis tekib tsükel. Raken-
dades aga ülaltoodud eeskirja ja valides kontrollimiseks
 x_1 -veeru, leiame, et juhtreaks ei tule valida mitte esimene,
vaid teine rida. Seega peab juhtelemendiks valima $\frac{1}{500}$.

Nii võib jõuda optimaalse lahendini $x_1 = \frac{1}{25}$; $x_2 = 0$;

$x_3 = 1$; $x_4 = 0$; $x_5 = \frac{3}{100}$; $x_6 = 0$ ja $x_7 = 0$.

10. TRANSPORDIÜLESANNE

10.1. Potentsiaalide meetod. Vaatleme transpordiüles-
ande põhikuju. On olemas m lähtepunkti ja n sihtpunkti.
Antud on samaliigilise kauba mahud lähtepunktides a_i
($i = 1, 2, \dots, m$) ja tarbimise mahud sihtpunktides b_j
($j = 1, 2, \dots, n$). Kauba maht lähtepunktides on võrdne
tarbimise mahuga, s. o.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

On teada veotariifide maatriks $\|c_{ij}\|$, kusjuures element
 c_{ij} tähistab kauba veotariifi i -ndast lähtepunktist j -ndasse
sihtpunkti.

Otsitakse tundmatuid x_{ij} , mis tähistavad i -ndast lähte-

punktist j -ndasse sihtpunkti transporditava kauba mahtu ja minimiseerivad summaarse veomaksumuse

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}. \quad (10.1)$$

Seega otsitakse tundmatuid x_{ij} , mis rahuldavad tingimusi

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (10.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (10.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, n \quad (10.4)$$

ja minimiseerivad sihifunktsiooni (10.1).

Võib tõestada, et transpordiülesandel on $m + n - 1$ lubatavat baasimuutujat x_{ij} , kuna kõik ülejäänud tundmatud võrduvad nulliga.

Kitsenduste süsteem koosneb $m + n$ võrrandist. Seega on antud transpordiülesande duaalülesandel $m + n$ tundmatut. Tähistame duaalülesande m tundmatut $u_1, u_2, \dots, u_m$ ja n tundmatut $v_1, v_2, \dots, v_n$ (neid nimetatakse sageli potentsiaalideks). Et lubatavaid baasitundmatuid on $m + n - 1$, potentsiaale aga $m + n$, ja kõik kitsenduste võrrandid on lineaarselt sõltumatud, siis selgub, et üks kitsenduste süsteemi võrrand on üleliigne ja seega võib ühe potentsiaali valida suvaliselt, näiteks $v_n = 0$.

Korrutame võrrandit (10.2) u_i -ga:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} u_i = a_i u_i \quad (10.5)$$

ja võrrandit (10.3) v_j -ga:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} v_j = b_j v_j. \quad (10.6)$$

Lahutame (10.5) ja (10.6) sihifunktsioonist:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i + v_j) x_{ij} = \\ & = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Baasitundmatute x_{ij} jaoks valitakse u_i ja v_j suurused nii, et $c_{ij} = u_i + v_j$. See tagab optimaalse lahendi (on optimaalsuse kriteerium).

Seega optimaalse lahendi puhul peab kõikide ülejäänud indeksipaaride (k, l) korral kehtima võrratus $c_{kl} \geq u_k + v_l$. Kui aga osutub, et mingi indeksipaari (k, l) korral $c_{kl} < u_k + v_l$, siis pole lahend optimaalne ja teda saab parandada. Selleks tuleb muutuja x_{kl} muuta baasitundmatuks. Vastav arvutuseeskiri on toodud allpool.

Tõestus. Duaalülesande sihifunktsioon on

$$\mu = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j. \quad (10.8)$$

Võrrandite (10.2) ja (10.3) põhjal võib kirjutada:

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{i=1}^m u_i \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m u_i x_{ij} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m v_j x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i + v_j) x_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = z. \end{aligned}$$

Seega võrrandi $c_{ij} = u_i + v_j$ puhul võrdub lähteülesande sihifunktsioon duaalülesande sihifunktsiooniga, millega duaalsuse põhiteoreemi põhjal ongi tõestatud lahendi $X = \{x_{ij}\}$ optimaalsus.

Optimaalse lahendi olemasolu korral on potentsiaalid alati leitavad, see tuleneb juba duaalsuse põhiteoreemist.

Transpordiülesandel on veel mõningad tähelepanuväärsed omadused:

1) kui a_i ja b_j väärtused on täisarvulised, siis on kõik baasitundmatud samuti täisarvulised;

2) kui c_{ij} väärtused on täisarvulised ja ühele potentsiaalile omistatakse täisarvuline väärtus, siis on kõik ülejäänud potentsiaalid samuti täisarvulised.

10.2. Lahendusmeetodi kirjeldus. Kõige parem on kirjeldada lahenduskäiku konkreetse näite varal. Olgu vajalikud andmed koondatud järgmisse tabelisse, mis sisaldab veotariifide matriksi, lähtepunktides oleva kauba koguse (pakkumise) ja sihtpunktide nõudmise.

Tabel 27

Sihtpunktid Lähtepunktid	I	II	III	IV	V	Pakkumine a_i
1	7	3	5	8	4	50
2	5	4	6	3	9	80
3	2	1	3	6	5	10
4	6	7	4	7	3	60
Nõudmine b_j	30	40	50	35	45	200

Ruumi kokkuhoiu mõttes ei defineeri me ülesannet matemaatiliselt, sest see samm peaks lugejale ülaltoodu põhjal arusaadav olema.

Kõigepealt lihtsustame veotariifide maatriksit. Selleks:

a) valime igas reas minimaalse elemendi ja lahutame selle antud rea kõikidest ülejäänud elementidest;

b) valime uues veomaksumuse maatriksis igas veerus minimaalse elemendi ja lahutame selle antud rea ülejäänud elementidest.

Võib tõestada, et uus veomaksumuse maatriks on optimumi suhtes esialgsega ekvivalentne. Uue veomaksumuse maatriksi koos kitsendustega toome järgmises tabelis:

Tabel 28

3	0	1	5	1	50
1	1	2	0	6	80
0	0	1	5	4	10
2	4	0	4	0	60
30	40	50	35	45	200

Niisiis annab see tabel sama optimaalse lahendi $X = \{x_{ij}\}$ mis esialgne; leitud veomaksumusele tuleb liita suurus D , mis arvutatakse sel teel, et summeeritakse veomaksumuse maatriksi lihtsustamisel saadud ridade ja veergude mini-

maalsete elementide ja vastavate transporditavate koguste korrutised. Toodud näites

$$D = (3 \cdot 50 + 3 \cdot 80 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 60 + 1 \cdot 30) = 610.$$

Järgmiseks sammuks on lubatava baasilahendi leidmine. Mõistagi tuleb püüda moodustada võimalikult parem baasilahend, sest see kiirendab edasist lahenduskäiku. Selleks püüame (arvestades kitsendusi) koormata maksimaalselt neid marsruute, millele vastavad veotariifide matriksi minimaalsed elemendid.

Kirjeldame W. R. Vogeli ligikaudset meetodit hea lubatava baasilahendi saamiseks. Seda meetodit võib rakendada ka siis, kui pole küllalt aega optimaalse lahendi arvutamiseks. Omistame igale reale ja veerule koefitsiendi, mis võrdub vastava rea (veeru) kõige väiksemate elementide vahega.

Meie näites on need vahed:

read	veerud
1. $1 - 0 = 1;$	I. $1 - 0 = 1;$
2. $1 - 0 = 1;$	II. $0 - 0 = 0;$
3. $0 - 0 = 0;$	III. $1 - 0 = 1;$
4. $0 - 0 = 0;$	IV. $1 - 0 = 1;$
	V. $1 - 0 = 1.$

Lubatava baasilahendi moodustamisel eelistatakse neid ridu (veerge), millel on suuremad koefitsiendid. Antud näites tulevad arvesse kaks rida ja neli veergu. Valime neist suvaliselt neljanda veeru ja «koormame» neljandas veerus maksimaalselt seda elementi, millel on minimaalne väärtus ($x_{24} = 35$), ning seejärel jääb meil üle jaotada järgmised kogused:

Tabel 29

	I	II	III	V	
1	3	0	1	1	50
2	1	1	2	6	45
3	0	0	1	4	10
4	2	4	0	0	60
	30	40	50	45	165

Arvutame uued vahed:

read

1. $1 - 0 = 1$;
2. $1 - 1 = 0$;
3. $0 - 0 = 0$;
4. $0 - 0 = 0$;

veerud

- I. $1 - 0 = 1$;
- II. $0 - 0 = 0$;
- III. $1 - 0 = 1$;
- V. $1 - 0 = 1$.

Siin on 4 võrdset arvesse tulevat koefitsienti. Valime suvaliselt näiteks III veeru ja määrame muutuja x_{43} maksimaalse intensiivsuse: $x_{43} = 50$. Järgmine tabel näitab jaotamata koguseid:

	I	II	V	
1	3	0	1	50
2	1	1	6	45
3	0	0	4	10
4	2	4	0	10
	30	40	45	115

read

1. $1 - 0 = 1$;
2. $1 - 1 = 0$;
3. $0 - 0 = 0$;
4. $2 - 0 = 2$;

veerud

- I. $1 - 0 = 1$;
- II. $0 - 0 = 0$;
- V. $1 - 0 = 0$.

Määrame $x_{45} = 10$. Jätkame analoogiliselt:

	I	II	V	
1	3	0	1	50
2	1	1	6	45
3	0	0	4	10
	30	40	35	105

read

1. $1 - 0 = 1$;
2. $1 - 1 = 1$;
3. $0 - 0 = 0$;

veerud

- I. $1 - 0 = 1$;
- II. $0 - 0 = 0$;
- V. $4 - 1 = 3$.

Määrame $x_{15} = 35$.

	I	II	
1	3	0	15
2	1	1	45
3	0	0	10
	30	40	70

read	veerud
1. $3 - 0 = 3$;	I. $1 - 0 = 1$;
2. $1 - 1 = 0$;	II. $0 - 0 = 0$.
3. $0 - 0 = 0$;	

Määrame $x_{12} = 15$.

	I	II	
2	1	1	45
3	0	0	10
	30	25	55

read	veerud
2. $1 - 1 = 0$;	I. $1 - 0 = 0$;
3. $0 - 0 = 0$;	II. $1 - 0 = 0$.

Määrame $x_{21} = 30$.

	II	
2	1	15
3	0	10
	25	25

Järele jääb määrata $x_{22} = 15$ ja $x_{32} = 10$.

Toome leitud baasilahendi tabelis 30, kus baasilahendi muutuja x_{ij} intensiivsused on toodud vastavate lahtrite ülemises parempoolses nurgas, kuna vasakpoolses alumises nurgas on märgitud veomaksumuse maatriksi elemendid. Ülevaatlikkuse mõttes ümbritseme paksu raamiga need lahtrid, mis sisaldavad baasilahendi muutujate intensiivsust.

Järgnevalt tuleb meil kontrollida, kas leitud baasilahend on optimaalne või mitte. Selleks leiame ülesande potentsiaalid. Teatavasti võime ühe neist valida suvaliselt.

Tabel 30

3	0 15	1	5	1 35	50
1 30	1 15	2	0 35	6	80
0	0 10	1	5	4	10
2	4	0 50	4	0 10	60
30	40	50	35	45	200

Valime $u_3 = 0$. Kõik ülejäänud arvutame valemi $c_{ij} = u_i + v_j$ abil (vaadeldakse ainult koormatud lahtreid).

$$v_2 = 0 - 0 = 0;$$

$$v_4 = 0 - 1 = -1;$$

$$u_2 = 1 - 0 = 1;$$

$$u_4 = 0 - 1 = -1;$$

$$v_1 = 1 - 1 = 0;$$

$$v_3 = 0 - (-1) = 1.$$

$$u_1 = 0 - 0 = 0;$$

$$v_5 = 1 - 0 = 1;$$

Arvutame kõikide koormamata lahtrite kohta vahed $c_{ij} - (u_i + v_j) = d_{ij}$.

$$d_{11} = 3 - 0 = 3;$$

$$d_{13} = 1 - 1 = 0;$$

$$d_{14} = 5 - 0 = 5;$$

$$d_{23} = 2 - 2 = 0;$$

$$d_{25} = 6 - 2 = 4;$$

$$d_{31} = 0 - 0 = 0;$$

$$d_{33} = 1 - 1 = 0;$$

$$d_{34} = 5 + 1 = 6;$$

$$d_{35} = 4 - 1 = 3;$$

$$d_{41} = 2 + 1 = 3;$$

$$d_{42} = 4 + 1 = 5;$$

$$d_{44} = 4 + 2 = 6.$$

Märkus: kui optimumi leidmisel mõned $d_{ij} = 0$, siis eksisteerivad ülesandel alternatiivsed optimaalsed lahendid.

Niisiis oleme saanud optimaalse lubatava lahendi, sest koormamata lahtrite kohta kehtib võrratus $c_{ij} \geq u_i + v_j$. Oleks aga mingi d_{ij} negatiivne, siis võib baasilahendit parandada.

Antud juhul piisas optimumi leidmiseks Vogeli meetodist. Suuremate ülesannete puhul pole aga Vogeli meetod alati küllaldane optimumi saavutamiseks.

Järgnevalt õpime parandama mitteoptimaalseid lubatavaid baasilahendeid.

Vaatleme järgmist näidet (F. L. Hitchcock).

Tabel 31

$\begin{array}{c} v_j \\ \backslash \\ u_i \end{array}$	9	4	4	8	
-1	10	5	6	7	25
-2	8	2	7	6	25
-0	9	3	4	8	50
	15	20	30	35	100

Toodud näites on esitatud mitteoptimaalne lubatav baasilahend:

$$\begin{aligned} d_{11} &= 10 - 9 + 1 = 2; & d_{21} &= 8 - 9 + 2 = 1; \\ d_{12} &= 5 - 4 + 1 = 2; & d_{23} &= 7 - 4 + 2 = 5; \\ d_{13} &= 6 - 4 + 1 = 3; & d_{32} &= 3 - 4 - 0 = -1. \end{aligned}$$

Selgus, et baasilahendit võib parandada, lülitades baasilahendisse muutuja x_{32} . Oletame, et suurendame tundmatu x_{32} intensiivsust Θ võrra. Siis peaks bilansi säilitamiseks vähendama teises veerus asuva baasimuutuja intensiivsust samuti Θ võrra, suurendama teise rea baasimuutuja x_{24} intensiivsust Θ võrra ja lõpuks vähendama baasimuutuja x_{34} intensiivsust Θ võrra. Nii saame ahela (tsükli):

$$\boxed{x_{32} + \Theta} \rightarrow \boxed{x_{22} - \Theta} \rightarrow \boxed{x_{24} + \Theta} \rightarrow \boxed{x_{34} - \Theta}.$$

Arusaadavalt peab Θ väärtus olema valitud nii, et kõik baasimuutujad jääksid mittenegatiivseks. Kõigile baasimuutujaid sisaldavatele lahtritele omistatakse sümboolid $(+\Theta)$ ja $(-\Theta)$. Θ väärtuseks valitakse sümbooliga $(-\Theta)$ tähistatud lahtrites olevate baasimuutujate minimaalne intensiivsus. Ülaltoodud näites on sümbooliga $(-\Theta)$ tähistatud lahtrid, millele vastavad baasimuutujad $x_{22} = 20$ ja $x_{34} = 5$. Järelikult $\Theta = 5$. Seega muudetavate tundmatute uued intensiivsused on

$$\begin{aligned}x_{32} &= 0 + 5 = 5; \\x_{22} &= 20 - 5 = 15; \\x_{24} &= 5 + 5 = 10; \\x_{34} &= 5 - 5 = 0.\end{aligned}$$

Lugeja veendugu, et uus baasilahend on optimaalne.

10.3. Suunamisülesanded. Suunamisülesanded on erikujulised transpordiülesanded. Nende omapära seisab selles, et

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1.$$

Olgu meil vaja jaotada 7 spetsialisti 7 töökoha vahel, kusjuures nende töö efektiivsus on töökohtadel erinev ja mingil viisil «hinnatud», näiteks kümnepallilise süsteemi alusel. Ülesanne seisab nende spetsialistide kõige otstarbekamas töölesuunamises. Seega on meil siin tegemist optimaalse valiku probleemiga. Toodud näites on ilmselt võimalik $7! = 5040$ erisugust töölesuunamise varianti. Võimalike valikute arv kasvab väga kiiresti. Nii oleks kümne inimese töölesuunamisel võimalike variantide arv $10! = 3\,628\,800$. Seevastu lubab spetsiaalne lahendusmeetod leida niisuguse suunamisülesande optimumi käsitsi mõnekümne minuti jooksul.

Vaatleme nüüd suunamisülesande lahendusviisi, mida nimetatakse *ungari meetodiks*.

Olgu meil kuut toodet vaja töödelda kuuel tööpingil. Igale tööpingile võib töödelda korraga ainult üht toodet, kusjuures töötlemisajad on erinevad. Tähistagu järgmine maatriks töötlemisaegu:

Tabel 32

Töö- pingid \ Toodet	I	II	III	IV	V	VI
1	5	4	2	5	7	8
2	8	2	9	5	8	5
3	6	5	2	7	9	9
4	3	1	4	2	5	8
5	7	3	1	9	4	6
6	9	6	5	1	3	7

Ülesanne seisab toodete kinnistamises üksikute tööpinkide juurde nii, et summaarne töötlemisaeg oleks minimaalne.

Kirjeldame lahenduskäiku (teoorial me siin ei peatu).

1. samm: igas reas valitakse minimaalne element ja lahutatakse see ülejäänutest. Lahutamise järel saame järgmise maatrikstabeli:

3	2	0	3	5	6
6	0	7	3	6	3
4	3	0	5	7	7
2	0	3	1	4	7
6	2	0	8	3	5
8	5	4	0	2	6

2. samm: uue maatriksi igas veerus valitakse minimaalne element ja lahutatakse see ülejäänutest. Lahutamise järel saame järgmise maatrikstabeli:

	↓	↓	↓			
→	1	2	0	3	3	3
→	4	0	7	3	4	0
	2	3	0	5	5	4
	0	0	3	1	2	4
→	4	2	0	8	1	2
→	6	5	4	0	0	3

Optimaalsuse kontrollimine. Leiame minimaalse arvu sirgeid, millega saab katta kõik viimase maatriksi nullid. Kui sirgete arv on võrdne maatriksi järguga, siis on optimum saavutatud. Antud juhul võib kergesti veenduda, et nullide katmiseks piisab viiest sirgest (seda näitavad noolekesed maatriksi juures). Seega pole optimum veel saavutatud.

3. samm: sirgetega katmata elementide hulgast valitakse minimaalne element ε . Seejärel:

- vähendatakse katmata elemente ε võrra;
- sirgete ristumiskohal asuvaid elemente suurendatakse ε võrra.

Pärast 3. sammu saame järgmise maatrikstabeli:

			↓			↓
	1	2	0	2	2	2
	5	1	8	3	4	0
	2	3	0	4	4	3
→	0	0	3	0	1	3
→	4	2	0	7	0	1
→	7	6	5	0	0	3

Optimum pole ikkagi veel saavutatud. Sellistel juhtudel korratakse 3. sammu. On tõestatud, et nii jõutakse lõpliku arvu sammude järel optimumini.

Kordame 3. sammu. Saame järgmise maatrikstabeli:

0	1	0	1	1	2
4	0	8	2	3	0
1	2	0	3	3	3
0	0	4	0	1	4
4	2	1	7	0	2
7	6	6	0	0	4

Optimum on saavutatud, sest nullide katmiseks on vaja vähemalt kuus sirget. Lahendi leidmiseks tuleb maatriksi nullide hulgast leida kuus nn. sõltumatut nulli, s. t. saavutada see, et igas reas (veerus) oleks üksainus sõltumatu null. Nendele sõltumatutele nullidele vastavad lahendi baasimuutujad. Märgime sõltumatud nullid meie näites tärnikesega.

Saame järgmise lahendi:

0*					
					0*
		0*			
	0*				
				0*	
			0*		

Seega kinnitatakse tooted tööpinkide juurde järgmiselt:

Toode	1	2	3	4	5	6
Tööpink	I	VI	III	II	V	IV

Ülaltoodud näide oli minimiseerimise ülesanne. Kui on tegemist analoogilise maksimiseerimise ülesandega, siis sooritatakse üks *eelsamm*: olgu $\|c_{ij}\|$ ülesande maatriks; moodustame maatriksi $\|a_{ij}\|$ eeskirja järgi $a_{ij} = \max c_{ij} - c_{ij}$. Edasi toimitakse nii, nagu näeb ette minimiseerimisülesande lahendamine. Suunamisülesandeid saab lahendada ka siis, kui on tegemist *mn*-maatriksiga. Oletame, et ülaltoodud näide oli formuleeritud järgmiselt: jaotada neli toodet kuue tööpingi vahel, kusjuures iga tööpink võib samaaegselt töödelda ühtainsat eset. Töötlemisajad on antud. Sellisel juhul saab arusadavalt koormata ainult nelja tööpinki.

Ülesande lahendamiseks lisame kaks fiktiivset toodet, mille töötlemisajad võrduvad nulliga. Saame ruutmaatriksi. Edasi lahendame ülesande juba ülalkirjeldatud viisil. Lahendi leidmisel ei arvestata muidugi neid sõltumata nulle, mis vastavad fiktiivsetele baasimuutujatele.

10.4. Proovireisijaülesanne. Vaadeldav ülesanne on välismaises kirjanduses tuntud «travelling salesman»-ülesande nime all. Oma olemuselt on proovireisijaülesanne üks transpordiülesande eriliike. Ülesannet võib kirjeldada järgmiselt: leida kõige lühem (kiirem) tee, mis ühendab n punkti ja moodustab suletud ahela, kusjuures iga punkti läbitakse üksainus kord.

Toodud ülesannet võib kirjeldada ka teisiti. Oletame, et mingil masinal võib töödelda n erisugust toodet teatavas järjekorras. Järjekordse toote töötlemine nõuab teatud ajakulusid masina seadistamiseks, kusjuures need kulud olenevad eelmisest tootest ja on seega erinevad. Tuleb leida niisugune toodete töötlemise järjekord, et summaarne ajakulu masina seadistamiseks oleks minimaalne.

Üldistame nüüd öeldut, andes proovireisijaülesande matemaatilise formuleeringu. Üldjuhul eksisteerib elementide hulk $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, kusjuures igale hulga A alam-

hulgale, mis koosneb mistahes kahest A elemendist $\{a_i, a_j\}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$), on seatud vastavusse teatud reaalarv c_{ij} . Tuleb leida hulga A elementide niisugune järjekord $a_{pq}, a_{qr}, \dots, a_{uv}, a_{vp}$ (kus $p, q, r, \dots, u, v$ on mingi permutatsioon arvudest $1, 2, \dots, n$), et $\sum c_{ij}$ oleks minimaalne. Seega tuleb lahendada optimeerimisülesanne, millel on $(n-1)!$ erisugust varianti.

Igale proovireisijaülesandele vastab maatriks

$$\|c_{ij}\| = \begin{bmatrix} \infty & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \infty & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & \infty \end{bmatrix}.$$

Toodud maatriks ongi põhiline lähteinformatsioon proovireisijaülesande lahendamisel.

Seniloodud proovireisijaülesande lõplikud lahendusalgoritmid on väga töomahukad ja vähe efektiivsed käsitsi arvutamiseks; nad on mõeldud peamiselt elektronarvuti jaoks.

Vaatleme allpool kaht ligikaudset lahendusmeetodit, mis on väga lihtsad ja hõlpsasti kasutatavad käsitsi arvutamiseks.

Kõige lihtsam meetod, mis annab päris häid tulemusi, on nn. reamiinimumi meetod. Meetodi olemus selgub kõige paremini konkreetse näite varal. Olgu proovireisijaülesande maatriks

$$\|c_{ij}\| = \begin{bmatrix} \infty & 67 & 71 & \boxed{85} & 87 & 79 & 70 & 75 \\ 89 & \infty & \boxed{70} & 102 & 100 & 97 & 90 & 94 \\ 77 & 69 & \infty & 92 & 89 & 81 & \boxed{73} & 79 \\ 66 & 54 & 58 & \infty & \boxed{49} & 57 & 53 & 55 \\ 63 & 52 & 60 & 54 & \infty & \boxed{44} & 51 & 54 \\ 73 & \boxed{66} & 71 & 73 & 67 & \infty & 69 & 72 \\ 92 & 86 & 85 & 96 & 102 & 94 & \infty & \boxed{87} \\ \boxed{80} & 74 & 82 & 84 & 86 & 81 & 73 & \infty \end{bmatrix}$$

Alustame mingisugusest, näiteks kuuendast reast. Valitud reast leiame minimaalse elemendi (peadiagonaali elemente arvesse ei võeta). Antud juhul on selleks elemendiks $c_{62} = 66$. Kustutame maatriksi kuuenda rea ja teise veeru. Valime järgnevalt teisest reast minimaalse elemendi. Selleks osutub $c_{23} = 70$. Kustutame nüüd maatriksi teise rea ja kolmanda veeru. Kontrollime kolmandat rida. Minimaalne element on siin $c_{37} = 73$. Nii toimime seni, kuni maatriksi kõik read on kontrollitud. Üksikute ridade minimaalsed elemendid ongi lahenduselemendid. Lahenduselementide alumised indeksid moodustavad otsitava marsruudi: 6 — 2 — 3 — 7 — 8 — 1 — 4 — 5 — 6.

Minimaalsete elementide (lahenduselementide) summa moodustab antud näites

$$66 + 70 + 73 + 87 + 80 + 85 + 49 + 44 = 554.$$

Hindame saadud tulemust. Leitud marsruudi üksikud lülid (6,2), (2,3), (4,5) ja (5,6) on kõige lühemad (optimaalsed). Ülejäänud lülid on (veergude kustutamise tõttu) oma alampiirist pikemad. Kogu marsruudi alampiir on 525. Seega leitud lahendi absoluutvea ülempiir on 29 marsruudi pikkuse ühikut.

Järgmiseks sammuks olgu katse heuristilisel teel parandada saadud lahendit. Näeme, et marsruudi mitte-optimaalne lõik on 3 — 7 — 8 — 1 — 4. Leiame, et mõned ümberpaigutamised (inversioonid) võimaldavad seda lõiku lühendada. Nii on lühemaks lõiguks 3 — 1 — 7 — 8 — 4. Tehtud ümberpaigutuse tulemusena lühenes marsruudi kogupikkus 547 ühikuni; seega absoluutvea ülempiir vähenes 22 ühikuni.

Antud juhul alustasime lahendi leidmist kuuendast reast. Kui oleksime alustanud mingist muust reast, siis võinuksime saada erineva ja võib-olla isegi halvema tulemuse. Kui oleksime alustanud esimesest reast, siis saaksime marsruudi 1 — 2 — 3 — 7 — 8 — 6 — 5 — 4 — 1, mille kogupikkus on 565 ühikut. Seepärast on soovitav võtta järjekorras lähtereaks kõik n rida ja valida siis n lahendist kõige parem.

Veerusummade meetod. Näitena kasutame jällegi ülaltoodud maatriksit. Meetodi põhiidee selgub ka siin lahenduse käigus. Arvutame maatriksi $\|c_{ij}\|$ veergude summad

$$S_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}.$$

Veerud	1	2	3	4	5	6	7	8
S_j	540	468	497	586	580	533	479	516

Edasi järjestame veerud S_j väärtuste järgi:

Veerud	4	5	1	6	8	3	7	2
S_j	586	580	540	533	516	497	479	468

Valime marsruudi arvutamise lähteveergudeks (punkti-deks) kolm veergu S_j suurimate väärtuste järgi. Nendeks on veerud 4, 5 ja 1, mis moodustavad lähtemarsruudi 4—5—1—4. Järgmiseks veeruks on 6. veerg. Meie üles-andeks on paigutada see leitud lähtemarsruuti nii, et uue marsruudi pikkuse suurenemine oleks minimaalne.

Siin tuleb arvutada järgmiste marsruutide pikkused:

Marsruut	Pikkus
4—6—5—1—4	272
4—5—6—1—4	244
4—5—1—6—4	264

Järelikult on uueks lähtemarsruudiks 4—5—6—1—4, kuna tema pikkus on minimaalne.

Järgmiseks sammuks on 8. veeru paigutamine leitud marsruuti. Selleks tuleb arvutada allpool toodud marsruutide pikkused:

Marsruut	Pikkus
4—8—5—6—1—4	343
4—5—8—6—1—4	342
4—5—6—8—1—4	330
4—5—6—1—8—4	325

Nüüd paigutame marsruuti 3. veeru.

Marsruut	Pikkus
4—3—5—6—1—8—4	423
4—5—3—6—1—8—4	422
4—5—6—3—1—8—4	400
4—5—6—1—3—8—4	400
4—5—6—1—8—3—4	415

Saime kaks minimaalset lähtemarsruuti pikkusega 400. Valime neist meelevaldselt esimese, s. o. 4—5—6—3—1—8—4. Järgnevalt peame marsruuti sisse viima 7. veeru. Arvutuste lihtsustamiseks on soovitatav teha neid skeemi järgi, mis on toodud tabelis 33.

Tabel 33

Viime sisse k -nda veeru	Lähte- marsruudi punktid (i, j)	c_{ij}	$c_{ik} + c_{kj} =$ $= d_{ij}$	$d_{ij} - c_{ij}$
$k = 7$	(4,5)	49	$53 + 102 = 155$	$155 - 49 = 106$
	(5,6)	44	$51 + 94 = 145$	$145 - 44 = 101$
	(6,3)	71	$69 + 85 = 154$	$154 - 71 = 83$
	(3,1)	77	$73 + 92 = 165$	$165 - 77 = 88$
	→ (1,8)	75	$70 + 87 = 157$	$157 - 75 = \underline{82}$
	(8,4)	84	$73 + 96 = 169$	$169 - 84 = 85$

Valime minimaalseima vahe $d_{ij} - c_{ij}$. Meie näites on see vahe 82. Järelikult tuleb uude lähtemarsruuti paigutada 7. punkt punktide 1 ja 8 vahele. Niisiis on uueks lähtemarsruudiks 4—5—6—3—1—7—8—4. Kui teha analoogiline arvutus viimase, 2. veeru jaoks, siis selgub lõplik marsruut: 4—5—6—2—3—1—7—8—4. Seega oleme saavutanud sama tulemuse kui heuristilisel teel parandatud reamiinimumi meetodiga.

Kokku võttes võib öelda, et kuigi veerusummade meetod on veidi töömahukam reamiinimumi meetodiga võrreldes, annab ta seevastu lootusi paremate tulemuste saamiseks.

11. LINEAARSE PLANEERIMISE ÜLESANNETE LIGIKAUDSED LAHENDUSMEETODID

11.1. R. Frischi meetod. Tutvume meetodiga, mille töötas välja R. Frisch ja mis võimaldab ligikaudselt lahendada üldkujul esitatud lineaarse planeerimise ülesandeid: leida muutujate vektor $x \geq 0$, mis rahuldab kitsenduste süsteemi $Ax \leq \beta$ ja maksimiseerib sihifunktsiooni $\gamma'x$.

Frischi meetod põhineb nn. *gradientmeetodil*, mis kasutab diferentseeruva ja rangelt kumera funktsiooni f osatuletiste vektorit, nn. funktsiooni f *gradienti*. Kui need

osatuletised on arvutatud n -dimensioonilise ruumi mingis punktis, siis kasvab funktsiooni väärtus gradiendi suunas kõige kiiremini. Lineaarsete ülesannete lahendamisel on gradiendi kasutamine eriti lihtne ega eelda diferentseerimise tundmist.

Frischi meetod ei nõua, et lähtelahend oleks baasilahend ning seejuures pole vaja kasutada abimuutujaid.

Kirjeldame Frischi meetodit üldkuulul B. Kreko järgi¹. Kõigepealt valitakse lähtepunkt q_0 , mis kuulub lubatavate lahendite hulka M . Järelikult kujutavad punkti q_0 koordinaadid ülesande lubatavat lahendit. Punktist q_0 konstrueeritakse vektor, mille suuna määravad ülesande sihi-funktsiooni $z_0 = \gamma' q_0$ kordajad y_i ($i = 1, \dots, n$). Selles suunas suureneb lubatava lahendi väärtus kõige kiiremini. Liikumine gradiendi suunas peatub punktis p_1 , mis kujutab endast lubatavate lahendite hulga M rajapunkti. Edasi liigutakse punktist p_1 risti gradiendi suunaga jällegi kuni hulga M rajapunktini p_2 . Sirglõigu $p_1 p_2$ keskpunkt kujutab endast uut lähtepunkti q_1 ja siit algab iteratsiooni järgmine samm.

Nüüd kirjeldame lahenduskäiku matemaatiliselt üksikasjalisemalt. Liikudes gradiendi suunas, muutub lahend:

$$\chi = q_0 + t_0 \gamma,$$

kus kordaja t_0 on positiivne arv.

On ilmne, et gradiendi suunas võib liikuda seni, kuni χ rahuldab ülesande kitsendusi

$$\left. \begin{array}{l} q_0 + t_0 \gamma \geq 0; \\ A(q_0 + t_0 \gamma) \leq \beta. \end{array} \right\}$$

Kitsenduste süsteemi võib väljendada ka järgmiselt:

$$\left. \begin{array}{l} -q_0 - t_0 \gamma \leq 0; \\ A q_0 + t_0 (A \gamma) \leq \beta \end{array} \right\}$$

ehk üldvalemiga

$$A^* q_0 + t_0 A^* \gamma \leq \beta^*, \quad (11.1)$$

kus

$$A^* = \begin{bmatrix} -E \\ A \end{bmatrix}, \quad \beta^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

¹ B. Kreko. *Lehrbuch der linearen Optimierung*. Berlin 1965, lk. 250.

Seega A^* on $(n+m) \cdot n$ -maatriks, β^* on $(n+m)$ -dimensiooniline vektor, E on n -järku ühikmaatriks ja A on kitsenduste süsteemi kordajate mn -maatriks.

Võib näidata, et

$$t_0 = \min_i \frac{\xi'_i(\beta^* - A^*q_0)}{\xi'_i(A^*\gamma)}, \quad (11.2)$$

kusjuures miinimumi leidmisel lähtutakse ainult mitte-negatiivsetest jagatistest (ξ_i on ühikvektor).

Nii saadakse punkt

$$p_1 = q_0 + t_0\gamma,$$

millele vastab järgmine sihifunktsiooni väärtus:

$$z_1 = \gamma'p_1 = z_0 + t_0(\gamma'\gamma).$$

R. Frisch soovib liikuda punktist p_1 edasi suunas

$$\mu_1 = \left(\frac{\gamma'A^*\xi_i}{\gamma'\gamma} \right) \gamma - A^*\xi_i, \quad (11.3)$$

kusjuures antud suunas liikudes sihifunktsiooni väärtus ei suurene. Liikuda võib jällegi ainult hulga M rajapunktini

$$p_2 = p_1 + t_1\mu_1,$$

kus t_1 leitakse valemiga

$$t_1 = \min_i \frac{\xi'_i(\beta^* - A^*p_1)}{\xi'_i(A^*\mu_1)}.$$

Järgnevalt leitakse sirglõigu p_1p_2 keskpunkt:

$$q_1 = p_1 + \frac{t_1}{2} \mu_1,$$

millega lõpebki iteratsiooni esimene samm ning alustatakse uuesti liikumist gradiendi suunas uuest lähtepunktist q_1 .

Selgitame lahenduskäiku konkreetse näite varal.

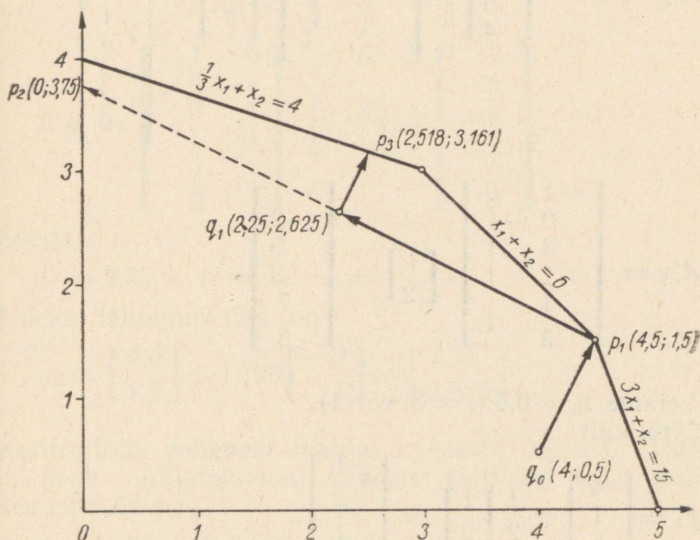
Leida muutujad x_1 ja x_2 , mis rahuldavad kitsendusi

$$\left. \begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0; \\ 3x_1 + x_2 &\leq 15; \\ x_1 + x_2 &\leq 6; \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 &\leq 4 \end{aligned} \right\}$$

ja maksimiseerivad sihifunktsiooni

$$z = x_1 + 2x_2.$$

Alustame lahendamist võimalikust lähtepunktist $q_0(4; 0,5)$ (vt. joonis 18).



JOONIS 18.

Sihifunktsiooni väärtus punktis q_0 on:

$$z_0 = \gamma' q_0 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0,5 = 5.$$

Leiame punkti p_1 :

$$A^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}; \quad \beta^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \gamma' = (1, 2).$$

Kordaja t_0 leidmiseks arvutame:

$$p^* - A^* q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$A^* \gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Leiame $t_0 = 0,5$ ($i = 3$ või 4).
Järelikult

$$p_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sihifunktsiooni väärtus punktis p_1 on:

$$z_1 = \gamma' p_1 = 4,5 + 2 \cdot 1,5 = 7,5.$$

Järgnevalt arvutame vektori μ_1 , kordaja t_1 ja punkti q_1 .

Valemi (11.3) põhjal arvutame kõigepealt μ_1 :

$$A^* \xi_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\gamma' A^* \xi_3 = (1, 2) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 5;$$

$$\gamma' \gamma = (1, 2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5;$$

$$\mu_1 = \frac{5}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\beta^* - A^* p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 1,5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^* \mu_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Seega

$$t_1 = 2,25 \quad (i = 1).$$

Uueks lähtepunktiks on

$$q_1 = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} + 1,125 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,25 \\ 2,625 \end{bmatrix}.$$

Kontrollime vahepeal tehtud arvutuste õigsust. Punktis q_1 peab sihifunktsiooni väärtus võrduma tema väärtusega punktis p_1 .

$$z_2 = 2,25 + 2 \cdot 2,625 = 7,5.$$

Seega

$$z_1 = z_2.$$

Arvutame joonisel 18 saadud tulemuse kontrollimiseks ka punkti p_2 :

$$p_2 = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} + 2,25 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,75 \end{bmatrix}.$$

Sooritame teise iteratsioonisammu:

$$\beta^* - A^* q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,25 \\ 2,625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,25 \\ 2,625 \\ 5,625 \\ 1,125 \\ 0,625 \end{bmatrix};$$

$$A^* \gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$t_2 = \frac{0,625}{2,333} \approx 0,268 \quad (i = 5);$$

$$p_3 = \begin{bmatrix} 2,25 \\ 2,625 \end{bmatrix} + 0,268 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,518 \\ 3,161 \end{bmatrix};$$

$$z_3 = 2,518 + 2 \cdot 3,161 = 8,84.$$

Täpse meetodiga leitud optimum on $z = 9$ ($x_1 = 3$; $x_2 = 3$). Niisiis oleme kahe iteratsioonisammuga jõudnud optimumile kaunis lähedale.

11.2. L. Kantorovitši lahendavate kordajate meetod.¹

Kuigi antud meetod on lõplik, võib seda rakendada ka ligikaudseteks arvutusteks. Selgitame meetodi põhiideed järgmise ülesande varal.

Olgu meil n erisugust masinat (tootmisviisi), millega saab töödelda m erisugust detaili. Kui töödelda j -nda ($j = 1, 2, \dots, n$) masinaga i -ndat ($i = 1, 2, \dots, m$) detaili, siis saab ajaühikus toota a_{ij} detaili. Lähteinformatsioon kujutab endast seega mn -maatriksit $A = \|a_{ij}\|$.

Detailid tuleb jaotada masinate vahel nii, et saaks valmistada maksimaalse arvu y detailide komplekte, kusjuures iga komplekt koosneb m erisugusest detailist. Otsitavad tundmatud on suurused h_{ij} , mis tähistavad seda osa valitud ajaühikust, mille vältel j -ndal masinal töödeldakse i -ndat detaili. Niisiis on ülesandel järgmised kitsendused:

$$\left. \begin{array}{l} H \geq \Theta, \\ H'1 \leq 1. \end{array} \right\}$$

Viimane kitsendus ($H = \|h_{ij}\|$) tähendab seda, et elementide summa maatriksi H üksikutes veergudes pole suu-

¹ Л. В. Канторович. Математические методы организации и планирования производства. Когумикус «Применение математики в экономических исследованиях». М. 1959, lk. 251.

rem kui üks. See aga omakorda väljendab tõsiasja, et ükski masin pole koormatud üle ühe ajaühiku ($\sum_{i=1}^m h_{ij} \leq 1$).

Eri liiki detailide üldväljalaset näitab veeruvektor

$$\|a_{ij}h_{ij}\| \mathbf{1} = P\mathbf{1},$$

mille koordinaadid kujutavad endast maatriksi P reaelementide summasid.

Et iga detailide komplekt koosneb m erisugusest detailist, siis võib ilmselt toota

$$\mathbf{1}y \leq P\mathbf{1}$$

komplekti. See tähendab, et kompleksuse kindlustamiseks peab olema täidetud tingimus $y = y_1 = y_2 = \dots = y_i = \dots = y_m$, kus $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}h_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m$). Kui näiteks mõnes lahendis $y_1 > y_2$, siis ilmselt ei saa lasta välja rohkem komplekte kui y_2 .

Niisiis võib ülesannet formuleerida järgmiselt: maksimiseerida y , mis rahuldab kitsendusi

$$\left. \begin{aligned} H &\geq \Theta, y \geq 0; \\ H'\mathbf{1} &\leq \mathbf{1}; \\ \mathbf{1}y - P\mathbf{1} &\leq 0. \end{aligned} \right\}$$

Ülesande lahendamiseks formuleeris L. Kantorovitš mittenegatiivse vektori (millel on vähemalt üks positiivne koordinaat) $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)'$, mille koordinaate nimetas ta *lahendavateks kordajateks*. Igale detailile peab vastama eri kordaja. Järgnevalt moodustatakse maatriks $[a_{ij}\lambda_i] = [c_{ij}]$. Maatriks c_{ij} saadakse sel teel, et korrutatakse maatriksi A esimese rea kordajaga λ_1 , teise rea kordajaga λ_2 jne. Maatriksi $[c_{ij}]$ igast veerust valitakse välja kõige suurem arv, mille märgime t_j . Seega

$$t_j = \max_i c_{ij}. \quad (11.4)$$

Sellest järeldub, et

$$\lambda'A \leq mt',$$

kus $t' = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Seejärel moodustatakse maatriks H_0 , mis kujutab endast maatriksit $[c_{ij}]$, mille kõik elemendid $c_{ij} < t_j$ on asendatud nulliga.

Võib tõestada, et kui saab moodustada niisuguse maatriksi $H_0^* \geq \Theta$, kusjuures oleksid rahuldatud kitsendused

$$\left. \begin{aligned} H_0^* \mathbf{1} &= \mathbf{1}, \\ P^* \mathbf{1} &= y^* \mathbf{1}, \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

siis on y^* suuruse y maksimaalväärtus.

Lahendame konkreetse ülesande (L. Kantorovitši näide). Olgu meil kolm ekskavaatorit, mis on ette nähtud kolme eri töö tegemiseks. Need tööd moodustavad ühtse tööde kompleksi. Allpool toodud maatriksi A veerud näitavad iga ekskavaatori tööjõudlust (m^3/h) üksikute tööde sooritamisel.

$$A = \begin{bmatrix} 105 & 107 & 64 \\ 56 & 66 & 38 \\ 56 & 83 & 53 \end{bmatrix}.$$

Iga tööliigi maht on $20\,000 \text{ m}^3$. Iga ekskavaatori kohta tuleb 322 töötundi. On vaja kõige otstarbekamalt jaotada üksikud tööliigid ekskavaatorite vahel.

Maatriksile A vastab maatriks P :

$$P = \begin{bmatrix} 105h_{11} & 107h_{12} & 64h_{13} \\ 56h_{21} & 66h_{22} & 38h_{23} \\ 56h_{31} & 83h_{32} & 53h_{33} \end{bmatrix}.$$

Kõigepealt peame leidma kolme lahendava kordaja lähtesuurused ja neid edaspidi lahendamise käigus täpsustama kuni optimumi saavutamiseni.

Lahendavate kordajate lähtesuurused on soovitatav valida järgmiselt. Summeerime maatriksi A reaelemendid:

$$A\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 276 \\ 160 \\ 192 \end{bmatrix}.$$

Lahendavate kordajate vektori leiame järgmiselt:

$$\lambda^0 = \left(\frac{p}{276}, \frac{p}{160}, \frac{p}{192} \right),$$

kus p on suvaline arv. Olgu $p = 1000$. Sel juhul

$$\lambda_1^0 = 3,62; \quad \lambda_2^0 = 6,25; \quad \lambda_3^0 = 5,21.$$

Moodustame maatriksi:

$$[c_{ij}]^0 = \begin{bmatrix} 380 & 387 & 232 \\ 350 & 412 & 238 \\ 282 & 432 & 276 \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

ja kriipsutame alla iga veeru suurimad elemendid.

Järelikult (11.4) põhjal

$$t^{0'} = (380, 432, 276).$$

Sellele vastab muutujate h_{ij} maatriks:

$$H_0^0 = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}.$$

Kitsenduste (11.5) põhjal:

$$H_0^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Maatriksile H_0^0 vastab järgmine null-lähenduse plaan:

$$P^0 = \begin{bmatrix} 105 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 83 & 53 \end{bmatrix}.$$

Vektor

$$P^0 \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 105 \\ 0 \\ 136 \end{bmatrix}$$

näitab, et niisugune plaan on täiesti ebarahuldav, sest see ei näe üldse ette üht tööliiki. Selleks et suurendada y_2 , vaatleme maatriksit (11.6). Valime selle maatriksi teise rea arvude hulgast niisuguse, mis oleks suhteliselt kõige lähem mõnele allakriipsutatud arvule. Niisuguseks arvuks on 412. Selleks et suurendada y_2 nii, et tulemusena saaksime $y_2^1 = y_3^1$, valime paranduskordaja q^1 , mis võrduks $\lambda_2^1 : \lambda_2^0 = 432 : 412 = 1,05$.

Märkus: suurused, mis kuuluvad null-lähenduse juurde, on tähistatud ülaindeksiga 0, esimese lähenduse juurde — ülaindeksiga 1 jne.

Korrutame maatriksi $\|c_{ij}\|^0$ teise rea arvuga 1,05. Saame maatriksi

$$[c_{ij}]^1 = \begin{bmatrix} 380 & 387 & 232 \\ 368 & 432 & 250 \\ 282 & 432 & 276 \end{bmatrix},$$

millele vastab maatriks

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}.$$

Kuna (11.5) põhjal on maatriksi iga veeru kordajate summa 1, siis

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 1 - h_{22} & h_{33} \end{bmatrix}.$$

Püüame nüüd h_{22} nii määrata, et $y_2 = y_3$. Selleks võime koostada järgmise võrrandi:

$$66h_{22} = 83(1 - h_{22}) + 53,$$

kust leiame

$$h_{22} = 0,913, \quad h_{32} = 0,087.$$

Seega saame

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} 105 & 0 & 0 \\ 0 & 0,913 & 0 \\ 0 & 0,087 & 53 \end{bmatrix}$$

ja

$$P^1 = \begin{pmatrix} 105 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 7 & 53 \end{pmatrix};$$

$$P^1 \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 105 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Nüüd tuleb viia $y_1 = y_2 = y_3$, millega olekski saavutatud optimum. Valime paranduskordajaks $q^2 = \lambda_1^2 : \lambda_1^1 =$

$\approx 368 : 380 \approx 0,97$. Korrutame selle kordajaga maatriksi $\|c_{ij}\|$ ¹ esimese rea elemendid. Saame maatriksi

$$\|c_{ij}\|^2 = \begin{bmatrix} 368 & 375 & 225 \\ 368 & 432 & 250 \\ 282 & 432 & 276 \end{bmatrix}.$$

Seega peame analoogiliselt juba varem sooritatud arvutustele leidma maatriksi H_0^2 elemendid h_{11}^2 , h_{12}^2 , h_{22}^2 ja h_{32}^2 , kuna $h_{33}^2 = 1$ ja ülejäänud $h_{ij} = 0$.

Tähistame $h_{11}^2 = x$; $h_{21}^2 = 1 - x$; $h_{22}^2 = y$ ja $h_{32}^2 = 1 - y$.

Selleks et saavutada $y_1 = y_2 = y_3$, võime kirjutada:

$$\begin{aligned} y_1 = 105x &= y_2 = 56(1 - x) + 66y = y_3 = \\ &= 83(1 - y) + 53, \end{aligned}$$

kust leiame

$$y_1 = y_2 = y_3 = 70,5; \quad x = 0,67; \quad y = 0,79.$$

Seega saab iga liiki tööd optimaalse plaani järgi sooritada 70,5 kuupmeetrit tunnis. Minimaalne aeg on $20\,000 : 70,5 = 282$ tundi.

Leitud maatriks

$$H_0^2 = \begin{pmatrix} 0,67 & 0 & 0 \\ 0,33 & 0,79 & 0 \\ 0 & 0,21 & 1 \end{pmatrix}$$

näitab, kui suure osa tööajast tuleb igal ekskavaatoril kulutada vastava töö tegemiseks. Tulemuse saame järgmisest tabelist (selleks korrutame h_{ij}^2 arvuga 282).

Tööd \ Ekskavaatorid	1	2	3
I	188,94	0	0
II	93,06	222,78	0
III	0	59,22	282
Kokku	282	282	282

11.3. Transpordiülesande lahendamise Δ -meetod. Antud meetod võimaldab saada käsitsi optimumile väga lähedasi lahendeid. Meetodi põhiideed kirjeldasime üldjoontes eespool toodud näite varal (vt. punkt 10.2).

Kõigepealt koostatakse pseudooptimaalne plaan, lähtudes eeldusest, et pakkumine pole millegagi piiratud. See tähendab, et sihtpunktide vajadused rahuldatakse minimaalsete kuludega. Seejärel asendatakse veotariifide maatriks $\|c_{ij}\|$ maatriksiga $\|\Delta c_{ij}\| \cdot \Delta c_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$, kus c'_{ij} on minimaalne veotariif igas veerus. Järgnevalt arvutatakse iga rea kohta arv $d_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} - a_i$. Nii saame tabeli 34:

tabeli 34:

Tabel 34

	I	II	III	IV	V	Pakkumine a_i	d_i
1.	5	2	2	5	1	50	-50
2.	3	3	3	0 ³⁵	6	80	-45
3.	0 ³⁰	0 ⁴⁰	0 ⁵⁰	3	2	10	+110
4.	4	6	1	4	0 ⁴⁵	60	-15
Nõudmine b_j	30	40	50	35	45	200	

Negatiivsed d_i väärtused tähistavad alakoormatud ridu (kasutamata ressursse), positiivsed d_i väärtused — ülekoormatud ridu (ressursside limiidi ületamist). Ülesanne seisab selles, et vabaneda ülekoormatud ridadest (seada pakkumine limiidiga vastavusse) nii, et nõudmine oleks rahuldatud ja sihifunktsiooni väärtus kasvaks seejuures minimaalselt.

Järgnevalt märgitakse ära need veerud, kus asuvad ülekoormatud ridade lahtrid. Meie näites on niisugusteks kolm esimest veergu. Nendes veergudes valitakse välja

lahter, mis asub alakoormatud reas ja kus Δc_{ij} on minimaalne. Meie näites on niisuguseks minimaalseks Δc_{ij} väärtuseks $\Delta c_{43} = 1$. Järelikult kui koormata lahtrit 4.3, siis kindlustab see sihifunktsiooni väärtuse minimaalse kasvu.

Tekib küsimus: millises ulatuses koormata lahtrit minimaalse Δc_{ij} väärtusega? Selleks võrreldakse kolme arvu: x_{ij} , ülekoormatud rea $|d_i|$ ja alakoormatud rea $|d_i|$, ning valitakse nende hulgast minimaalne. Meie näites on $x_{ij} = 50$, ülekoormatud rea $|d_i| = 110$ ja alakoormatud rea $|d_i| = 15$. Seega vähendame x_{33} 15 ühiku võrra ja koormame lahtrit 4.3 15 ühikuga. Koostame uue tabeli ja arvutame uued d_i väärtused:

Tabel 35

Lähte- punktid \ Siht- punktid	I	II	III	IV	V	Pakku- mine	d_i
1.	5	2	2	5	1 ↑	50	-50
2.	3	3	3	0 ³⁵	6	80	-45
3.	0 ³⁰	0 ⁴⁰	0 ³⁵	3	2	10	+95
4.	4	6	1 ₁₅	4	0 →	60	0
Nõudmine	30	40	50	35	45	200	

Jätkame pseudoplaani korrigeerimist. Ainult nüüd (pärast seda, kui üks d_i on muutunud nulliks) võetakse arvesse kõik alakoormatud ridade lahtrid. Selgub, et järgnevalt tuleb koormata lahtrit 1.5. Nüüd toimub aga mainitud lahtri koormamine ahelat mööda, mis läbib nullrida (d_i järgi 4. rida). See ahel on järgmine: $3.3 \rightarrow 4.3 \rightarrow 4.5 \rightarrow 1.5$.

Seega teeme järgmise ümberjaotuse: vähendame x_{33} 35 ühiku võrra, suurendame x_{43} 35 ühiku võrra, vähendame

x_{45} 35 ühiku võrra ja koormame vastavalt lahtrit 1.5 35 ühikuga. Seejärel saame uue tabeli ja arvutame uued d_i väärtused.

Tabel 36

Lähte- punktid \ Siht- punktid	I	II	III	IV	V	Pakku- mine	d_i
1.	5	2	2	5	1 35	50	-15
2.	3	3	3	0 35	6	80	-45
3.	0 30	0 40	0	3	2	10	+60
4.	4	6	1 50	4	0 10	60	0
Nõudmine	30	40	50	35	45	200	

Järgnevalt tuleb koormata lahter 1.2 ja seejärel lahtrid 2.1 ja 2.2. Nii jõuamegi optimaalse lahendini (vt. lk. 133).

11.4. J. Habri meetod.¹ Meetod põhineb lineaarse planeerimise ülesande muutujate eelisjärjekorra kindlaksmääramisel. Selleks on kaks võimalust.

1. Kõik muutujad järjestatakse sihifunktsiooni kordajate suuruse järgi. See on kõige lihtsam järjestamise viis, ent mõningad praktilised kogemused näitavad, et suhteliselt paremaid tulemusi saavutatakse teise, veidi keerulisema võimaluse kasutamisel.

2. Kõik muutujad järjestatakse sihifunktsiooni väärtuse potentsiaalse juurdekasvu järgi. Olgu meil kaks muutujat x_j ja x_{j+1} . Me asetame x_j eelisjärjekorras x_{j+1} ette siis, kui

¹ H. Tischer. *Zwei Näherungsmethoden ökonomischer Natur zur Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung*. «Rechentechnik, Datenverarbeitung», № 12 1967, lk. 35.

$$c_j \cdot \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \mid a_{ij} > 0 \right\} \geq \\ \geq c_{j+1} \cdot \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{i,j+1}} \mid a_{i,j+1} > 0 \right\},$$

kus c_j on sihifunktsiooni kordaja, a_{ij} — muutujate vektori komponent, b_i on kitsenduste süsteemi vabaliige.

Antud teel võib eelisjärjekorra määrata kas ainult üks kord või uuesti iga järgneva iteratiivse sammu eel.

Olgu meil lineaarse planeerimise maksimiseerimisülesanne. Arvutusi alustatakse võimalikust lahendist, kus sihifunktsiooni väärtus on null (kõik $x_j = 0$). Iga iteratiivse sammuga viiakse lahendisse üks muutuja, kusjuures tuleb alati jälgida, et leitav uus lahend oleks lubatav, et kitsendussüsteemi vabaliikmed b_i oleksid mittenegatiivsed. Samuti ei asetata eelisjärjekorda neid muutujaid x_j , mille komponendid a_{ij} on positiivsed, ent $b_i = 0$. Lahendisse viidud muutujat edasiste iteratiivsete sammude juures enam ei muudeta.

Olgu lahendisse viidud muutuja intensiivsusega x_j . Seejärel leitakse kitsenduste süsteemi uued vabaliikmed b'_i ja sihifunktsiooni z uus väärtus z^1 järgmiste valemite järgi:

$$b_i - a_{ij}x_j = b'_i,$$

$$z + c_jx_j = z_1.$$

Muutujaid viiakse lahendisse eelisjärjekorras nii kaua, kuni enam ei saa moodustada uut lubatavat lahendit. Saadud sihifunktsiooni väärtuse kohta pole aga esialgu võimalik midagi öelda — me ei tea, kuivõrd lähedal on ta matemaatilisele optimumile. Selle olulise küsimuse selgitamiseks lahendatakse duaalülesanne. Kui duaalülesande sihifunktsiooni väärtus on võrdne lähteülesande sihifunktsiooniga, siis on leitud lahend ilmselt optimaalne. Kui aga mitte, siis annab duaalülesande sihifunktsiooni väärtus meile võimaluse hinnata leitud lahendi täpsust. Seejuures leitakse duaalülesande sihifunktsiooni väärtus analoogilisel teel.

Kui lähteülesanne oli maksimiseerimisülesanne, siis duaalülesanne on teatavasti minimeerimisülesanne. Olgu u_i ja u_{i+1} kaks duaalülesande muutujat. Me asetame u_i eelisjärjekorras u_{i+1} ette siis, kui

$$b_i \cdot \max_j \left\{ \frac{c_j}{a_{ij}} \mid c_j > 0, a_{ij} > 0 \right\} \leq \\ \leq b_{i+1} \cdot \max_j \left\{ \frac{c_j}{a_{i+1,j}} \mid c_j > 0, a_{i+1,j} > 0 \right\}.$$

Olgu lähteülesande suhteline optimum z_l , kuna duaal-
ülesande suhteline optimum olgu z_d , siis on need opti-
mumid matemaatilise optimumi z_m alumine ja ülemine
piir:

$$z_l \leq z_m \leq z_d.$$

Näide. Tuleb maksimiseerida sihifunktsioon

$$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5,$$

kusjuures peavad olema rahuldatud kitsendused

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 &\leq 100; \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 80; \\ x_1 + x_3 + x_4 &\leq 50. \end{aligned}$$

Kõigepealt määrame kindlaks eelisjärjekorra:

$$x_1 \quad 2 \cdot \min \left\{ \frac{100}{1}, *, \frac{50}{1} \right\} = 2 \cdot 50 = 100;$$

$$x_2 \quad 1 \cdot \min \left\{ \frac{100}{2}, \frac{80}{1}, * \right\} = 1 \cdot 50 = 50;$$

$$x_3 \quad 3 \cdot \min \left\{ \frac{100}{1}, \frac{80}{1}, \frac{50}{1} \right\} = 3 \cdot 50 = 150;$$

$$x_4 \quad 1 \cdot \min \left\{ *, \frac{80}{1}, \frac{50}{1} \right\} = 1 \cdot 50 = 50;$$

$$x_5 \quad 2 \cdot \min \left\{ \frac{100}{1}, \frac{80}{1}, * \right\} = 2 \cdot 80 = 160.$$

Seega eelisjärjekord on järgmine: x_5, x_3, x_1, x_2, x_4 .

Esimese iteratiivse sammuna viime lahendisse muutuja
 x_5 intensiivsusega 80. Arvutame uue vektori:

$$\beta^1 = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 80 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Vektori β^1 ülemine indeks tähistab arvutuste sammu
järjenumbrit. Püüame intuiitiivselt hinnata esimese sammu
tulemusi. Sihifunktsiooni väärtuseks on nüüd $z^1 = 2 \cdot 80 =$
 $= 160$. Ent uue vektori β^1 teine komponent $b_2^1 = 0$ ja see

ei võimalda meil järgmise iteratiivse sammuga viia lahendisse eelisjärjekorras teisel kohal asuvat muutujat x_3 , sest a_{23} on positiivne. Intuiitiivselt võib eeldada, et eelisjärjekorras teisel kohal asuva muutuja lahendist väljajätmine halvendab meie lahendit, seda enam, et muutuja x_3 eelisjärjekorra näitaja (150) on väga lähedane muutuja x_5 eelisjärjekorra näitajale (160). Seepärast näib olevat otsustarbikas vähendada muutuja x_5 intensiivsust, viies lahendisse muutujad x_5 ja x_3 vahekorras $x_5 : x_3 = 160 : 150$. Selleks koostame võrrandi:

$$\frac{80 - x_3}{x_3} = \frac{16}{15}.$$

Leiame, et $x_3 = 38$ ja viime lahendisse $x_5 = 80 - 38 = 42$. Arvutame uuesti vektori β^1 :

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 42 = \begin{pmatrix} 58 \\ 38 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Järgnevalt arvutame uue eelisjärjekorra:

$$x_1 \quad 2 \cdot \min \left\{ \frac{58}{1}, *, \frac{50}{1} \right\} = 2 \cdot 50 = 100;$$

$$x_2 \quad 1 \cdot \min \left\{ \frac{58}{2}, \frac{38}{1}, * \right\} = 1 \cdot \frac{58}{2} = 29;$$

$$x_3 \quad 3 \cdot \min \left\{ \frac{58}{1}, \frac{38}{1}, \frac{50}{1} \right\} = 3 \cdot 38 = 114;$$

$$x_4 \quad 1 \cdot \min \left\{ *, \frac{38}{1}, \frac{50}{1} \right\} = 1 \cdot 38 = 38.$$

Uus eelisjärjekord: x_3, x_1, x_4, x_2 .

Järgnevalt viime lahendisse muutuja x_3 intensiivsusega 38. Arvutame vektori β^2 :

$$\begin{pmatrix} 58 \\ 38 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 38 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Seejärel määratakse uus eelisjärjekord, mis jääb aga endiseks. Viime lahendisse muutuja x_1 intensiivsusega 12. Arvutame vektori β^3 :

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 12 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Edasi pole sihifunktsiooni võimalik suurendada, sest lahendisse ei saa enam viia muutujaid x_2 ja x_4 . Seega on leitud lahend $\{12, 0, 38, 0, 42\}$. Sihifunktsiooni väärtus on

$$z_l = 12 \cdot 2 + 38 \cdot 3 + 42 \cdot 2 = 222.$$

Saadud lahendi hindamiseks lahendame duaalülesande: minimiseerida sihifunktsioon

$$z' = 100u_1 + 80u_2 + 50u_3,$$

mis rahuldab kitsendusi

$$u_1 + u_3 \geq 2;$$

$$2u_1 + u_2 \geq 1;$$

$$u_1 + u_2 + u_3 \geq 3;$$

$$u_2 + u_3 \geq 1;$$

$$u_1 + u_2 \geq 2.$$

Leiame eelisjärjekorra:

$$u_1 \quad 100 \cdot \max \left\{ \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, *, \frac{2}{1} \right\} = 100 \cdot 3 = 300;$$

$$u_2 \quad 80 \cdot \max \left\{ *, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1} \right\} = 80 \cdot 3 = 240;$$

$$u_3 \quad 50 \cdot \max \left\{ \frac{2}{1}, *, \frac{3}{1}, \frac{1}{1}, * \right\} = 50 \cdot 3 = 150.$$

Seega on eelisjärjekord u_3, u_2, u_1 .

Viime lahendisse u_3 intensiivsusega 3:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Järgnevalt viime lahendisse u_2 intensiivsusega 2:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iteratsioonid on lõppenud, sest kõik $c_j \leq 0$.

Seega

$$z_d = 80 \cdot 2 + 50 \cdot 3 = 310.$$

Niisiis asub matemaatiline optimum z_m 220 ja 310 vahel. Täpsete meetoditega leitud $z_m = 230$, mis on küllaltki lähedal z_l leitud väärtusele (220).

Senised kogemused on näidanud, et Habri meetod annab kõige paremaid tulemusi, kui kitsenduste süsteemi maatriks on hõre, s. o. sisaldab palju nulle.

12. TÄISARVULINE LINEAARNE PLANEERIMINE

Sageli nõuab konkreetne majandusülesanne täisarvulist lahendit. Esimesel pilgul on siin kõige lihtsamaks viisiks mittetäisarvulise optimaalse lahendi üksikute komponentide ümardamine täisarvudeks nii, et see rahuldaks antud kitsendusi. Esineb aga juhtumeid, kus niisugune ümardamine pole sugugi lihtne, eriti siis, kui on tegemist väikeste täisarvudega. Pole ka teada, kas ümardamise teel saadud täisarvuline lahend on optimaalne või mitte.

Allpool kirjeldame üldjoontes üht täisarvulise lineaarse planeerimise algoritmi, mille autoriks on R. Gomory. Mainitud algoritmi aluseks on uute kitsenduste formuleerimine ülesandele. Geomeetriliselt tähendavad need uued kitsendused uute hüpertasandite moodustamist, mis eraldavad lubatavate lahendite hulka kujutava kumera hulktahuka tipu tema täisarvulistest punktidest.

Oletame, et mingi lineaarse planeerimise ülesande optimaalne lahend sisaldab mittetäisarvulist komponenti b_i . Märgime sümboliga $[b_i]$ täisarvu, mis rahuldab võrratust $b_i - 1 < [b_i] \leq b_i$.

Sisuliselt tähendab see seda, et arvule b_i tuleb leida kõige lähem täisarv, mis oleks temast väiksem. Näiteks kui $b_i = 0,25$, siis $[b_i] = 0$; kui $b_i = -1,75$, siis $[b_i] = -2$; kui $b_i = 2,3$, siis $[b_i] = 2$.

Analoogiliselt märgime sümboliga $[a_{ij}]$ täisarvu, mis rahuldab võrratust

$$a_{ij} - 1 < [a_{ij}] \leq a_{ij},$$

kus a_{ij} on simplekstabeli baasiväliste tundmatute koordinaadid. Siin $i = 1, 2, \dots, m$; $j = m + 1, m + 2, \dots, n$, kusjuures m on baasitundmatute arv, n — kõigi tundmatute arv.

Võtame punktis 9.2 lahendatud ülesande. Täisarvulise

lahendi leidmiseks alustame ülesande mittetäisarvulisest optimaalsest lahendist (vt. tabel 25).

Leiame simplekstabeli vabaliikmete veerus arvu, millel on suurim murdosa. Meie näites asub selline arv reas x_3 ($b_2 \approx 0,57$, $b_3 \approx 1,71$). Lisame simplekstabelile uue rea, mille elemendid olenevad rea x_3 elementidest. Selleks leiame arvud $[a_{1j}]$ ja $[b_1]$ ja lahutame nendest rea x_3 elemendid. Nii leiamegi uue rea elemendid. Märgime uue rea u_{m+1} -reaks. Tema elementideks on $a_{m+1, 1}$, $a_{m+1, 2}$, $\dots$, $a_{m+1, n}$, b_{m+1} . Arvutame need elemendid eespool kirjeldatud viisil:

$$a_{31} = -1 - \left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{6}{7};$$

$$a_{32} = 0 - 0 = 0;$$

$$a_{33} = 1 - 1 = 0;$$

$$a_{34} = -1 - \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{5}{7};$$

$$a_{35} = 0 - \frac{3}{7} = -\frac{3}{7};$$

$$b_3 = 1 - 1 \frac{5}{7} = -\frac{5}{7}.$$

Märkus: kui reas x_i on täisarvulised elemendid, siis rea u_{i+1} vastavad elemendid on nullid (näiteks kui $a_{ij} = 5$, siis $a_{i+1, j} = 0$).

Lisame simplekstabelile ka uue v_{n+1} -veeru, mis kujutab endast ühikvektorit ξ_{i+1} .

Nii saame uue simplekstabeli:

Tabel 37

Baasi- tund- matud	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	v_6	Vaba- liikmed
x_3	$-\frac{1}{7}$	0	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{12}{7}$
x_2	$-\frac{12}{7}$	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	0	$\frac{4}{7}$
u_3	$-\frac{6}{7}$	0	0	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	1	$-\frac{5}{7}$
z'	$\frac{72}{7}$	0	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{8}{7}$	0	$\frac{60}{7}$

Uue rea u_3 valime juhtreaks. Juhtveeru valikuks rakedame aga siin teistsugust reeglit. Rea z' elemendid jagatakse rea u_3 vastavate (sama veeru) negatiivsete elementidega. Juhtveeruks valitakse see veerg, kus asub absoluutväärtuse poolest kõige väiksem jagatis. Meie näites asub kõige väiksem jagatis 4. veerus. Seega on juhtelemendiks

$$a_{34} = -\frac{5}{7}.$$

Sooritame baasi elementaarteisenduse: asendame vektori u_3 vektoriga x_4 . Seejuures arvutame kõigepealt uue simplekstabeli vabaliikmete veeru elemendid.

Leiame, et uues baasis $x_3 = 2$, $x_2 = 1$ ja $x_4 = 1$.

Niisiis on täisarvuline optimaalne lahend leitud. Alati pole täisarvuline lahend nii kiiresti saavutatav. Näiteks kui me poleks pärast esimest iteratsiooni saanud täisarvulist lahendit (lubatavat!), siis tuleks formuleerida uus tundmatu u_4 ja täiendada simplekstabelit eespool kirjeldatud viisil uue reaga u_4 ning veeruga v_7 . Seejuures on oluline märkida, et lisatingimuste arv ei ületa kunagi ülesande algbaasi kuuluvate muutujate arvu, sest kui mõni lisamuutuja satub teisenduste tulemusena teistkordselt baasi, siis võib teda sealt lihtsalt kustutada.

Täisarvulise lahendi puudumise tunnuseks on olukord, kus simplekstabeli vabaliikmete veerus esineb kas või üks murd b_i , kusjuures kõik sama rea elemendid a_{ij} on täisarvud.

13. STOHHASTILINE PLANEERIMINE

13.1. Stohhastilise planeerimise mõiste. Seni vaatlesime niisuguste lineaarse planeerimise ülesannete lahendamise meetodeid, mille lähteandmed olid determineeritud suurused. Reaalses elus tuleb aga sageli arvestada juhuslike suurustega. *Stohhastiline planeerimine* käsitleb niisuguste ülesannete lahendamise meetodeid, mille lähteandmed on juhuslikud ja määramatud suurused.

Seega võib kõik stohhastilise planeerimise ülesanded jaotada kahte klassi:

- 1) ülesanded, mille lähteandmed on juhuslikud suurused;
- 2) ülesanded, mille lähteandmed on määramatud suurused.

Lineaarsete stohhastilise planeerimise ülesannete formuleerimisel võib esineda kolm põhijuhtu: juhuslikeks suurusteks on sihifunktsiooni koefitsiendid, kitsenduste süsteemi vabaliikmed ja kitsenduste maatriksi koefitsiendid. Arusaadavalt ei välista see juhtu, kus kõik mainitud suurused on juhuslikud suurused. Peale selle kuuluvad stohhastilise planeerimise ülesannete hulka veel niisugused suured ülesannete klassid, nagu massilise teenindamise, varude optimeerimise ja tõenäosuslikud dünaamilised ülesanded.

Stohhastiline planeerimine on keeruline ja seni suhteliselt vähe uuritud ala. Piirdume siin lihtsamate näidetega, et anda lugejale põgus ülevaade antud probleemist.

Kõige lihtsam lähenemisviis stohhastilistele ülesannetele on juhuslike suuruste eelnev statistiline hindamine (võimaluse korral) ja nende oodatavate väärtuste kindlaksmääramine, mispeale lahendatakse tavaline planeerimisülesanne, kus oodatavad suurused esinevad determineeritud suurustena. Seepärast on lihtsamad need ülesanded, mille juhuslikke lähteandmeid on võimalik eelnevalt statistiliselt töödelda, leida nende jaotus, dispersioon, keskvärtus.

Juhuslike suuruste väärtuste asendamine nende keskvärtustega on arvutuslikust küljest väga efektiivne, sest stohhastiliste ülesannete lahendamine on üldjuhul kaunis töömahukas.

Kui ülesande juhuslikke suurusid ei saa eelnevalt statistiliselt uurida, siis võib mõnedel juhtudel kasutada eksperthinnanguid, näiteks nii, nagu seda tehakse võrkplaneerimisel¹.

Stohhastilise planeerimise ülesannetes optimeeritakse tavaliselt tulemuse keskvärtust. Sageli minimiseeritakse sihifunktsiooni dispersiooni, seda eriti juhtudel, kus püütakse saavutada mingi tulemus minimaalse riskiga.

Vaatleme näiteks järgmist ülesannet. Toodete omahind on juhuslik suurus dispersiooniga σ_j^2 ($j=1, \dots, n$). Tuleb leida niisugune toodangu nomenklatuur, et saada plaaniline omahind o_p minimaalse riskiga, s. o. minimiseerida $(o_p - o_o)$ keskvärtus, kus o_o on oodatav oma-

¹ Vt. U. Mereste. *Võrkanalüüs majandusettevõtete juhtimises*. Tallinn 1967, lk. 122—127.

hind. Kui x_j on j -nda toote kogus, siis võib sihifunktsiooni formuleerida ka järgmiselt: minimiseerida

$$x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + \dots + x_n^2 \sigma_n^2.$$

Toodud sihifunktsioon on kumer. Selliseid funktsioone võib aproksimeerida lineaarseteks ja seejärel lahendada ülesanne tavalise lineaarse planeerimisülesandena^{1, 2}.

Nüüd vaatleme näidet, kus juhuslikuks suuruseks on kitsenduse vabaliige. Olgu nõue, et mingi kitsenduse tõenäosus oleks suurem kui etteantud tõenäosus 0,95, s. o.

$$P\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right) \geq 0,95, \quad (12.1)$$

kus b_i on juhuslik suurus. Olgu lihtsuse mõttes juhuslik suurus b_i normaalselt jaotatud standardhälbega 1 ja keskväärtusega $M(b_i) = 72$.

Tähistame juhusliku suuruse b_i tihedusfunktsiooni $f(b_i)$. Järgnevalt arvutame $\tilde{b}_i$ võrrandist

$$\int_{\tilde{b}_i}^{\infty} f(b_i) db_i = 0,95.$$

kus $\tilde{b}_i$ on muutuva suuruse b_i väärtus, mis rahuldab kitsendust (12.1). Toome sisse muutuja t . Olgu

$$t = \tilde{b}_i - 72.$$

Jaotusfunktsiooniks on nüüd

$$F(b_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\tilde{b}_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,95.$$

Jaotusfunktsioonide tabelitest³ leiame, et $t = 1,65$. Kuna integraali rajad on muutunud, siis $\tilde{b}_i = 72 - 1,65 = 70,35$.

Nüüd võime kitsenduse (12.1) asemel kirjutada ekvivalentse kitsenduse

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq \tilde{b}_i = 70,35.$$

¹ Д. Ж. Данциг. *Линейное программирование, его обобщения и применения*. М. 1966, lk. 459—460.

² Д. В. Жоньин. *Научное программирование в промышленности и торговле*. М. 1963, lk. 164—175.

³ E. Tiit. *Tõenäosusteooria I*. Tartu 1968, lk. 302—303.

Stohhastilised ülesanded, mille kitsenduste koefitsiendid on juhuslikud suurused, on keerulisemad ning siin me neid ei vaatle.

13.2. Monte Carlo meetod. Omaette probleemid kerki-
vad siis, kui nõutavad lähteandmed stohhastilise ülesande
lahendamiseks on määratud suurused. Sellistel puhkudel
kasutatakse statistilist modelleerimist, mis on laialdaselt
tuntud Monte Carlo meetodi nime all. Monte Carlo mee-
tod võimaldab paljudel juhtudel määramatuse puhul ja
reaalsete statistiliste andmete puudumisel luua kunstlikud
statistilised andmed, mis on vajalikud stohhastilise üles-
ande lahendamiseks. Sageli rakendatakse Monte Carlo
meetodit siis, kui katsete korraldamine on seotud suurte
raskustega ja on liiga kulukas. Niisiis püütakse Monte
Carlo meetodiga modelleerida uuritavat süsteemi selle tõe-
näosuslike omaduste selgitamiseks.

Nimetus Monte Carlo tuleneb arvatavasti sellest, et
meetodi rakendamisel kasutatakse nn. juhuslikke arve,
mille üheks võimalikuks anduriks võib olla ka rulett.

Monte Carlo meetod võib esimesel tutvumisel tunduda
raskete probleemide lahendamisel väga efektiivsena. Teda
tuleb aga kasutada ülimalt ettevaatlikult. Meil peavad
olema mõningad enam-vähem põhjendatud (kogemusli-
kult, loogiliselt või intuiitiivselt) oletused määramata suu-
ruste jaotuse kohta, kuna vastasel korral pole tulemused
kuigi usaldusväärsed. Monte Carlo meetod nõuab väga
suure arvudekogumi statistilist töötlemist ja seepärast
on ta efektiivne põhiliselt elektronarvuti rakendamisel.

Monte Carlo meetodi rakendamine põhineb oletusel, et
otsitava juhusliku suuruse X keskväärtnus võib olla võrdne
mõne kunstlikult saadud juhusliku suuruse Y keskväärtnu-
suga $M(Y)$. Tehakse n katset (n on tavaliselt suur arv)
ja määratakse keskmine Y ning suurte arvude seaduse
järgi väidetakse, et

$$\bar{Y} \approx M(Y) = X.$$

Esitame näitena ülesande, mida tavaliste meetodi-
tega ei saa lahendada.¹ Olgu meil 2 detaili, mille keskmine
tööiga on vastavalt 90 ja 100 tundi ning standardhälve

¹ C. Churchman, R. Ackoff, E. Arnoff. *Operations Research*. Berlin 1966, lk. 171—175.

vastavalt 20 ja 10 tundi. Tuleb leida nendest detailidest valmistatud sõlme tööea jaotus.

Ülesande lahendamiseks tuleb modelleerida hälbeid, milleks kasutame normaalselt jaotatud juhuslikke arve, mis on toodud vastavates tabelites standardhälbe ühikutest¹. Seepärast tuleb neid tundideks ümberarvutamiseks korrutada vastava standardhälbega. Koondame arvutused järgmisse tabelisse.

Tabel 38

I detail		II detail		Sõlme tööiga
Normaalselt jaotatud juhuslikud arvud	Tööiga $100 + 20(1)$	Normaalselt jaotatud juhuslikud arvud	Tööiga $90 + 10(3)$	Min {(2), (4)}
0,881	117,62	1,221	102,21	102,21
0,971	119,42	—0,439	85,61	85,61
1,033	120,66	1,291	102,91	102,91
—0,511	89,78	0,541	95,41	89,78
0,181	103,62	—2,661	66,69	66,69
—0,486	90,28	0,665	96,65	90,28
—0,256	94,88	0,340	93,40	93,40
0,065	101,30	0,008	90,08	90,08
1,147	122,94	0,110	91,10	91,10
—0,199	97,02	1,297	102,97	97,02

Viiendas veerus toodud arvud võimaldavad moodustada uue jaotuse. Antud juhul on tegelikult vaja koguda palju rohkem andmeid, kui seda on tehtud esitatud illustreeritvses näites.

Lõpetuseks vaatleme veel üht näidet. Oletame, et mingile kauplusele saadetakse 8 kiiresti riknevat uut toodet, mille säilivusaeg on üks päev. Tuleb leida päeva jooksul realiseerimata toodete arv ning kui palju (keskmiselt) peaks kauplus saama päeva jooksul uusi tooteid, et oodatav sissetulek oleks võimalikult suur. Olgu teada, et iga müümata toode toob kauplusele kahju 1,8 rubla, kuna iga müüdud toode suurendab sissetulekut 2 rubla võrra. Olgu samuti teada ostjate jaotus seitsme päeva kohta:

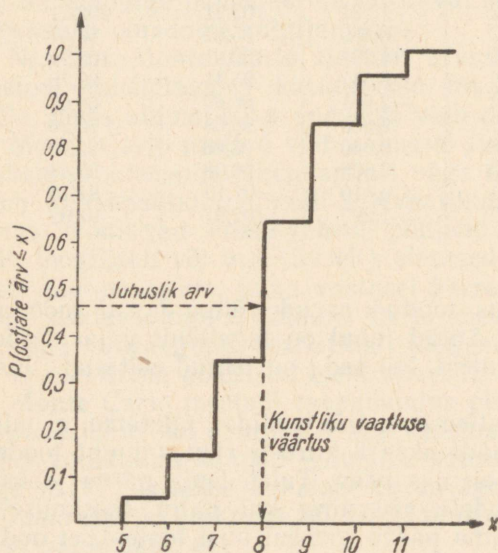
¹ Juhuslike arvude tabelid vt. H. Бусленко ja teised. *Метод статистических испытаний (метод Монте Карло)*. М., 1962. lk. 303—311.

Ostjate arv päevas	5	6	7	8	9	10	11
Tõenäosus	0,05	0,10	0,20	0,30	0,20	0,10	0,05

Peale selle oletatakse järgmist:

Toodete arv ühe ostja kohta päevas	1	2	3
Tõenäosus	0,7	0,2	0,1

Lahendus. Koostame ostjate jaotuse järgsummade graafiku (vt. joon. 19).

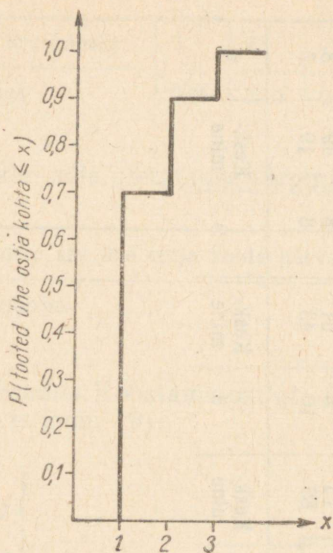


JOONIS 19.

Järgnevalt alustame ostjate arvu imiteerimist, s. o. loome kunstlikud statistilised andmed, mis võimaldavad kindlaks määrata ostjate keskmise arvu kõigi seitsme päeva kohta. Selleks valime iga päeva kohta kümme kahekohalist juhuslikku arvu, kusjuures iga arv vastab sajan-dikes väljendatud tõenäosusele. Ostjate arvu, mis vastab

Tabel 39

1. päev		2. päev		3. päev		4. päev		5. päev		6. päev		7. päev	
Juhuslik arv	Ostjate arv	Juhuslik arv	Ostjate arv	Juhuslik arv	Ostjate arv	Juhuslik arv	Ostjate arv	Juhuslik arv	Ostjate arv	Juhuslik arv	Ostjate arv	Juhuslik arv	Ostjate arv
39	8	29	7	27	7	49	8	49	8	35	7	24	7
00	5	82	9	29	7	16	7	54	8	99	11	76	9
35	8	08	5	03	5	36	8	96	11	31	7	53	8
04	5	43	8	62	8	76	9	80	9	80	9	83	9
12	6	17	7	17	7	68	9	05	5	88	10	52	8
11	6	19	7	92	10	91	10	17	7	90	10	02	5
23	7	40	8	30	7	97	11	23	7	46	8	14	6
18	7	62	8	38	8	85	9	56	8	54	8	14	6
82	9	49	8	12	6	56	8	15	6	51	8	49	8
35	7	27	7	38	8	84	9	86	10	43	8	19	7
Keskmine	7	Keskmine	7	Keskmine	7	Keskmine	9	Keskmine	8	Keskmine	9	Keskmine	7



JOONIS 20.

nii leitud tõenäosustele, leiame ostjate kumulatiivse jaotuse graafiku järgi (joon. 20). Arvutused koondame tabelisse 39.

Koostame graafiku, mis näitab ühele ostjale müüdud toodete kumulatiivset jaotust (vt. joon. 20).

Tabel 40

Müüdud toodete arv päevas	Ostjad päevade kaupa						
	1	2	3	4	5	6	7
1	5	7	6	8	5	6	5
2	1	0	1	1	2	2	1
3	1	0	0	0	1	1	1
Nõudmine, tk.	10	7	8	10	12	13	10
Pakkumine, tk.	8	8	8	8	8	8	8
Ülejääk, tk.	—	1	—	—	—	—	—
Rahuldamata nõudmine, tk.	2	—	—	2	4	2	2

Nüüd peame analoogiliselt imiteerima müüdnud toodete arvu igale ostjale kõigi seitsme päeva kohta. Selleks kasutame jällegi juhuslike arvude tabelit, tabelit 39 ja joonist 20. Tulemused koondame tabelisse 40.

Majanduslikult on kõige soodsam niisugune olukord, kus realiseerimata toodete ja rahuldamata nõudmiste maksumus on minimaalne. Selle selgitamiseks koostame järgmise tabeli.

Tabel 41

Realiseerimata toodete ja rahuldamata nõudmise arvutuslik maksumus (rbl.)

Pakkumine päevas, tk.	Päevad							Kokku
	1	2	3	4	5	6	7	
8	4	1,8	—	4	8	10	4	31,8
9	2	3,6	1,8	2	6	8	2	25,4
10	—	5,4	3,6	—	4	6	—	19,0
11	1,8	7,2	5,6	1,8	2	4	1,8	24,2

Niisiis tehtud uurimus näitas, et kauplusele on seitsme päeva jaoks kõige otstarbekam tellida 70 toodet, s. o. keskmiselt 10 toodet päeva kohta. Kui kauplus saab aga keskmiselt 8 toodet päevas, siis on tõenäone, et seitsme päeva jooksul jääb nõudmine rahuldamata 12 toote ulatuses.

KIRJANDUST

1. Berg, A. *Küberneetika ja töökindlus*. Kirjastus «Valgus», Tallinn 1966.
2. Gabovitš, J. *Arvudeta matemaatika*. Kirjastus «Valgus», Tallinn 1968.
3. Hanko, P., Karu, O., Reimand, J., Velsker, K. *Täiendavaid teemasid koolimatemaatikale*. Kirjastus «Valgus», Tallinn 1967.
4. Kaasik, U. *Matemaatiline planeerimine*. Kirjastus «Valgus», Tallinn 1967.
5. Kangro, A. *Kõrgem algebra*. Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn, 1962.
6. Krusberg, H. *Matemaatiline planeerimine*. TPI rotaprint, Tallinn 1967.
7. Lepamaa, A. *Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika põhijooni*. TPI rotaprint, Tallinn 1967.
8. Попов, I. *Matemaatilised meetodid põllumajanduses*. Kirjastus «Valgus», Tallinn 1966.
9. Renter, R. *Majandusküberneetika rakendamisest tööstuse juhtimisel*. Kirjastus «Eesti Raamat», Tallinn 1968.
10. Tamm, M. *Lineaaralgebra ja lineaarprogrammeerimine*. TPI rotaprint, Tallinn 1962.
11. Vilenkin, N. *Jutustusi hulkadest*. Kirjastus «Valgus», Tallinn 1968.
12. Аллен Р. *Математическая экономия*. Изд. иностранной литературы, Москва 1959.
13. Бакаев А. А. *Математические методы в планировании и экономических расчетах*. Изд. «Наукова Думка», Киев 1968.
14. Баканов М. И. и др. *Математические методы анализа в торговле*. Изд. «Экономика», Москва 1967.
15. Барсов А. С. *Линейное программирование в технико-экономических задачах*. Изд. «Наука», Москва 1964.
16. Баумоль У. *Экономическая теория и исследование операций*. Изд. «Прогресс», Москва 1965.
17. Бездудный Ф.-Ф., Осипова Э. Н. *Линейное программирование в текстильной промышленности*. Изд. «Легкая индустрия», Москва 1968.
18. Бир Ст. *Кибернетика и управление производством*. Изд. «Наука», Москва 1965.

19. Бирман И. Я. *Оптимальное программирование*. Изд. «Экономика», Москва 1968.
20. Бирман И. Я. *Транспортная задача линейного программирования*. Экономиздат, Москва 1962.
21. Букан Дж., Кенигсберг Э. *Научное управление запасами*. Изд. «Наука», Москва 1967.
22. Важонь А. *Научное программирование в промышленности и торговле*. Изд. иностранной литературы, Москва 1963.
23. Винер Н. *Кибернетика или управление и связь в животном и машине*. 2-е издание. Изд. «Советское радио», Москва 1968.
24. Винер Н. *Кибернетика и общество*. Изд. иностранной литературы, Москва 1958.
25. Венецкий И. Г., Кильдишев Г. С. *Основы теории вероятностей и математической статистики*. Изд. «Статистика», Москва 1968.
26. Вентцель Е. С. *Введение в исследование операций*. Изд. «Советское радио», Москва 1964.
27. Вентцель Е. С. *Теория вероятностей*. Изд. «Наука», Москва 1964.
28. Габр Я. *Линейное программирование*. Госстатиздат, Москва 1960.
29. Гасс С. *Линейное программирование, методы и применение*. Гос. изд. физ.-мат. литературы, Москва 1961.
30. Гейл Д. *Теория линейных экономических моделей*. Физматгиз, Москва 1963.
31. Герчук Я. П. *Проблемы оптимального планирования*. Экономиздат, Москва 1961.
32. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. *Линейное программирование, теория, методы и приложения*. Изд. «Наука», Москва 1969.
33. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. *Новые направления в линейном программировании*. Изд. «Советское радио», Москва 1966.
34. Греневский Г. *Кибернетика без математики*. Изд. «Советское радио», Москва 1964.
35. Дадаян В. *Экономико-математическое моделирование социалистического воспроизводства*. Изд. экономической литературы, Москва 1963.
36. Данциг Дж. *Линейное программирование, его обобщения и применения*. Изд. «Прогресс», Москва 1966.
37. *Дискуссия об оптимальном планировании*. Изд. «Экономика», Москва 1968.
38. Завельский М. Г. *Оптимизация отраслевого планирования*. Изд. «Экономика», Москва 1967.
39. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. *Линейное и выпуклое программирование*. 2-е издание. Изд. «Наука», Москва 1967.
40. Истомин Л. И., Новиков Д. Т. *Математические методы в практике материально-техническим снабжением и сбытом*. Изд. «Экономика», Москва 1966.
41. Канторович Л. В., Горетко А. Б. *Математическое оптимальное программирование в экономике*. Изд. «Знание», Москва 1968.

42. Канторович Л. В. *Математические методы организации и планирования производства. «Применение математических методов в экономических исследованиях»*. Соцэкгиз, Москва 1959
43. Канторович Л. В. *Экономический расчет наилучшего использования ресурсов*. Изд. АН СССР, Москва 1959.
44. Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е. *Элементы линейной алгебры и линейного программирования*. 3-е издание. Изд. «Наука», Москва 1967.
45. Карр Ч., Хоув Ч. *Количественные методы принятия решений в управлении и экономике*. Изд. «Мир», Москва 1966.
46. Клаус Г. *Кибернетика и общество*. Изд. «Прогресс», Москва 1967.
47. Кобринский Н. Е. *Основы экономической кибернетики*. Изд. «Экономика», Москва 1969.
48. Ковалев Н. И. *Вычислительная техника в планировании*. Изд. «Экономика», Москва 1964.
49. Коссов В. В. *Межотраслевой баланс*. Изд. «Экономика», Москва 1966.
50. Кофман А., Фор Р. *Займемся исследованием операций*. Изд. «Мир», Москва 1966.
51. Ланге О. *Введение в экономическую кибернетику*. Изд. «Прогресс», Москва 1968.
52. Ланге О. *Оптимальные решения*. Изд. «Прогресс», Москва 1967.
53. Лернер А. Я. *Начала кибернетики*. Изд. «Наука», Москва 1967.
54. *Линейная алгебра и геометрия*. Изд. «Просвещение», Москва 1967.
55. Лурье А. А. *Методы линейного программирования и их применение в экономике*. Госстатиздат, Москва 1964.
56. Лурье А. А. *О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства*. Изд. «Наука», Москва 1964.
57. *Методические положения по оптимальному отраслевому планированию в промышленности*. Изд. «Наука», Новосибирск 1967.
58. Мот Ж. *Статистические предвидения и решения на предприятии*. Изд. «Прогресс», Москва 1966.
59. Нелидов И. Е., Никонова Л. Г. *Кибернетика и экономическая работа в промышленности*. Изд. «Экономика», Москва 1967.
60. Немчинов В. С. *Экономико-математические методы и модели*. 2-е издание. Изд. «Мысль», Москва 1965.
61. Николау Э. *Введение в кибернетику*. Изд. «Мир», Москва 1967.
62. Новожилов В. В. *Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании*. Изд. «Экономика», Москва 1968.
63. *Организация производства на промышленных предприятиях США*. Изд. «Прогресс», Москва 1969.
64. Павловский З. *Введение в математическую статистику*. Изд. «Статистика», Москва 1967.

65. Петрушенко Л. А. *Принцип обратной связи*. Изд. «Мысль», Москва 1967.
66. Пугачев В. Ф. *Оптимизация планирования*. Изд. «Экономика», Москва 1968.
67. Пустыльник Е. И. *Статистические методы анализа и обработки наблюдений*. Изд. «Наука», Москва 1968.
68. Рейнфельд Н., Фогель У. *Математическое программирование*. Изд. иностранной литературы, Москва 1960.
69. Рейхман У. Дж. *Применение статистики*. Изд. «Статистика», Москва 1969.
70. Ромакин М. И. *Элементы линейной алгебры и линейного программирования*. Изд. «Высшая школа», Москва 1963.
71. Рублев А. Н. *Линейная алгебра*. Изд. «Высшая школа», Москва 1968.
72. Саати Т. Л. *Математические методы исследования операций*. Воениздат, Москва 1963.
73. Серпинский В. *О теории множеств*. Изд. «Просвещение», Москва 1966.
74. Соболев И. М. *Метод Монте-Карло*. Изд. «Наука», Москва 1968.
75. Солодовников А. С. *Введение в линейную алгебру и линейное программирование*. Изд. «Просвещение», Москва 1966.
76. Старр М. *Управление производством*. Изд. «Прогресс», Москва 1968.
77. Терехов Л. Л. *Применение математических методов в экономике*. Госстатиздат, Москва 1962.
78. Терехов Л. Л. *Экономико-математические методы*. Изд. «Статистика», Москва 1968.
79. Тинтнер Г. *Введение в эконометрию*. Изд. «Статистика», Москва 1965.
80. Федоренко Н. П. *Экономика и математика*. Изд. «Знание», Москва 1967.
81. Федорович М. М. *Математическая модель техпромфинплана*. Изд. «Знание», Москва 1962.
82. Фергюсон Р. О., Сарджмент Л. Ф. *Линейное программирование, методы и приложения*. Госстатиздат, Москва 1962.
83. Хедли Дж. *Линейная алгебра*. Изд. «Высшая школа», Москва 1966.
84. Хорафас Д. Н. *Системы и моделирование*. Изд. «Мир», Москва 1967.
85. *Экономико-математические модели народного хозяйства*. Выпуск III. Изд. «Наука», Москва 1966.
86. Autorenkollektiv. *Allgemeine Statistik*. Berlin 1967.
87. Bader H., Fröhlich S. *Mathematik für Ökonomen*. Berlin 1968.
88. Churchman C. W., Ackoff R. L., Arnoff E. L. *Operations Research*. Berlin 1966.
89. *Die Anwendung mathematischer Methoden in der Landwirtschaft*. Berlin 1967.
90. Dietrich G., Stahl H. *Matrizen und Determinanten und ihre Anwendung in Technik und Ökonomie*. Leipzig 1966.

91. Endler K., Wenzel M. *Führungs-entscheidungen im sozialistischen Betrieb*. Berlin 1967.
92. Jándy G. *Optimale Transport- und Verkehrsplanung*. Berlin 1968.
93. Kadlec V., Vodaček L. *Lineare Optimierung im Transportwesen*. Berlin 1967.
94. Kreko B. *Lehrbuch der linearen Optimierung*. Berlin 1968.
95. Piehler J. *Einführung in die lineare Optimierung*. Leipzig 1966.
96. Richter K.-J. *Transportökonomie*. Berlin 1966.
97. Richter K.-J. *Methoden der linearen Optimierung*. Leipzig 1966.
98. Runge W., Forbig G. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung für Ökonomen*. Berlin 1965.
99. Sasieni M., Yaspan A., Friedman L. *Methoden und Probleme der Unternehmensforschung*. Berlin 1967.
100. Weihrauch H. *Kybernetik in der Organisations- und Leitungspraxis*. Berlin 1967.
101. *Wörterbuch der Kybernetik*. Berlin 1967.

AINEREGISTER

- Abimuutujad 33
- Alamhulk 10
- Algoritm 60
- Algsimplekstabel 115
- Baasilahend 31
- Baasi teisendamine 24
- Baasitundmatud 114
- Baasivälised tundmatud 44
- Binomiaaljaotus 45
- Bitt 61
- Δ -meetod 154—156
- Determineeritud modelid 80
- Determineeritud süsteemid 39
- Diagonaalmaatriks 18
- Diskreetne juhuslik suurus 42
- Dispersioon 41
- Duaalülesanne 91—92
- Dünaamilised süsteemid 53
- Ekvivalentsete hulga 10
- Entroopia 62
- Eukleidiline ruum 16—17
- Fiktiivne lähtepunkt 97
- Fiktiivne sihtpunkt 97
- Fiktiivse diagonaali meetod 98
- Frischi meetod 142—148
- Globaalne kriteerium 84
- Gomory algoritm 161
- Gradient 142—143
- Gradientmeetod 142
- Habri meetod 156—160
- Hierarhiline struktuur 55
- Homomorfism 77
- Hulgateooria 9
- Hulga elemendid 9
- Hulga ühend 10
- Hulk 9
- Hulkade disjunktiivne summa 12
- Hulkade sümmeetriline vahe 12
- Hulkade vahe 11
- Hulkade võrdsus 10
- Hulkade ühisosa 11
- Hüpermaatriks 17
- Hüpertasand 35, 111
- Identsete modelid 77—78
- Informatsioon 58, 60—65
- Informatsiooniteooria 61
- Informatsiooni väärtus 65
- Informatsiooni üleküllus 64
- Isofunktsionaalsed modelid 79
- Isomateriaalsed modelid 79—80
- Isomorfism 76—77
- Isostruktuursed modelid 79
- Jaotusfunktsioon 43—47
- Jaotusseadus 42—48
- Juhitav süsteem 56
- Juhtelement 25
- Juhtimissüsteemid 56
- Juhtiv süsteem 56
- Juhtrida 25
- Juhtveerg 25
- Juhuslik sündmus 31
- Kaldsümmeetriline maatriks 19
- Keskvärtus 41
- Kitsendused 32, 85
- Kodeerimine 63
- Kolme sigma reegel 47
- Kolmnurkne maatriks 19
- Kompenseeriv tagasiside 65
- Kood 62—63
- Korrelatsioon 48—49
- Korrelatsiooni koefitsient 49

- Kronecker-Capelli teoreem 27
 Kroneckeri sümbol 18
 Kumulatiivne tagasiside 65
 Kunstlikud tundmatud 118
 Kumera hulga rajapunktid 37
 Kumera hulga sisepunktid 37
 Kumera hulga tipp 38
 Kumer hulk 36—37
 Kumer hulktahtukas 38, 111—112
 Kumer kate 38
 Kumer koonus 38
 Kuuluvuse suhe 9
 Kõdumine 125
 Kõdunud maatriks 38
 Küberneetika 51—52
 Küberneetiline mudel 78
- Lahendavad kordajad 78, 149
 Lahendavate kordajate meetod 148—153
 Leontjevi mudel 104—106
 Lineaarsed mudelid 80
 Lineaarselt sõltumatud vektorid 14
 Lineaarselt sõltuvad vektorid 14
 Loenduvad hulgad 10
 Lubatav lahend 33
 Lõpmatud hulgad 10
- Maatriks 17
 Maatriksi astak 25
 Maatriksi elementaarteisendus 32
 Maatriksi kanooniline kuju 32
 Maatriksite ekvivalentsus 32
 Maatriksite jaotamine blokkideks 22
 Maatriksite korrutis 20—22
 Maatriksite lahutamine 20
 Maatriksite summa 19
 Maatriksite võrdsus 19
 Majandusliku tasakaalu mudel 104
 Makromudel 80
 Mikromudel 80
 Mitmeastmeline transpordiülesanne 98
 Mitmeetapiline mudel 79
 Mittelineaarsed mudelid 80
 Modelleerimine 74—81
 Monte Carlo meetod 166—171
 Mudel 74, 78
 Multiplikaatori efekt 67
 Multistabiilne süsteem 57
 «Musta kasti» meetod 69—74
- Mõtteline mudel 78
 Müra 64
- Negatiivne tagasiside 65
 Normaaljaotus 46—47
 Nullmaatriks 18
 Nullvektor 13
- Objektiivselt tingitud hinnangud 87—88
 Operaator 71
 Optimaalsuse kriteerium 82, 117
 Optimeerimine 81—89
 Optimeerimisülesande määramispiirkond 90
 Ortogonaalne vektorsüsteem 17
 Ortogonaalsed vektorid 16
 Ortonormaalne vektorsüsteem 17
 Otsekulu 105
- Pidev juhuslik suurus 43
 Planeerimisülesande põhikuju
 Poissoni jaotus 45
 Poolruum 35
 Positiivne tagasiside 65
 Potentsiaalide meetod 126—130, 133—135
 Proovireisijaülesanne 138—142
 Põrdmaatriks 28—30
 Põhihulk 10
 Põhitundmatud 44
- Reaalsed mudelid 78
 Reamiinimumimeetod 139—140
 Regressioon 48
 Regressiooni kordaja 50
 Regressiooni võrrand 50
 Regulaarne maatriks 28
 Reguleerimine 58
- Sidekanal 61
 Signaal 61
 Sihifunktsioon 89
 Simpleks 111
 Simpleksmeetod 111—126
 Skalaarmaatriks 18
 Staatiline multiplikaator 67
 Standardhälve 42
 Stohhastiline planeerimine 163—166
 Stohhastilised mudelid 83
 Stohhastilised süsteemid 39, 59
 Struktuur 52
 Struktuurimaatriks 5

- Summeeriv vektor 13
- Suunamisülesanne 135—138
- Sümmeetriline maatriks 19
- Süsteem 52
- Süsteemi sisend 54
- Süsteemi väljund 54
- Tagasiside 58, 65—69
- Transponeeritud maatriks 19
- Tšebõšovi võrratus 47—48
- Tõenäosus 39—46
- Tähestikuline operaator 63
- Täisarvuline lineaarne planeerimine 161—163
- Täiskulu 105
- Tühi hulk 10
- Ultrastabiilne süsteem 57
- Ungari meetod 135
- Uurimise ruum 11
- Vastandsündmus 40
- Veerusummade meetod 140—142
- Vektor 12—13
- Vektori dimensioon 12
- Vektori koordinaadid 12
- Vektori pikkus 16
- Vektorite korrutis skalaariga 1
- Vektorite kumer lineaarne kombinatsioon 14
- Vektorite lineaarne kombinatsioon 13—14
- Vektorite skalaarkorrutis 16
- Vektorite summa 13
- Vektorite vahe 13
- Vektorite võrdsus 13
- Vektorruum 12
- Vektorsüsteemi astak 15
- Vogeli meetod 130—133
- Võrdluskriteerium 82
- Võrdvõimsad hulgad 10
- Võrrandisüsteemi laiendatud maatriks 27
- Võrrandisüsteemi maatriks 27
- Üheetapiline mudel 79
- Ühikmaatriks 18
- Ühikvektor 13
- Ühiskondliku kasulikkuse kriteerium 83

SISUKORD

Essõna	3
1. Matemaatilised alused	
Hulgad	9
1.1. Üldmõisted	9
1.2. Tehted hulkadega	11
2. Vektorid	12
2.1. Vektori ja vektorruumi mõiste	12
2.2. Tehted vektoritega	13
2.3. Lineaarne kombinatsioon	13
2.4. Lineaarne sõltuvus ja baas	14
2.5. Eukleidiline ruum	16
3. Maatriksid	17
3.1. Maatriksi mõiste	17
3.2. Mõned maatriksite erikujud	18
3.3. Tehted maatriksitega	19
3.4. Maatriksite jaotamine blokkidesse	22
4. Baasi teisendamine ja selle rakendusi	24
4.1. Baasi teisendamise mõiste	24
4.2. Vektori uute koordinaatide leidmine	25
4.3. Maatriksi astaku leidmine	27
4.4. Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamine	28
4.5. Pöördmaatriks	32
4.6. Maatriksi kanooniline kuju	32
5. Lineaarsed võrratused	33
5.1. Võrratuste omadusi	34
5.2. Võrratuste graafiline kujutamine	35
5.3. Kumera hulga mõiste	39
6. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika alused	39
6.1. Juhusliku sündmuse mõiste	39
6.2. Tõenäosuse mõiste	41
6.3. Keskväärtus ja dispersioon	42
6.4. Juhusliku suuruse jaotus	43
6.5. Diskreetse juhusliku suuruse jaotus	47
6.6. Tšebõšovi võrratus	48
6.7. Korrelatsioon ja regressioon	
2. Metodoloogilised alused	
7. Majandusküberneetika põhiküsimusi	51

7.1.	Küberneetika kui uus teadus	51
7.2.	Süsteemi mõiste	52
7.3.	Küberneetilised süsteemid	53
7.4.	Informatsiooniteooria alused	60
7.5.	Tagasiside	65
7.6.	«Musta kasti» meetod	69
8.	Modelleerimise üldised alused	74
8.1.	Mudelite mõiste	74
8.2.	Mudelite klassifitseerimine ja üldomadused	78
8.3.	Optimiseerimine, optimaalsuse kriteerium ja kitsendused	81
8.4.	Optimiseerimisülesande üldine matemaatiline formuleerimine	89
8.5.	Duaalsed planeerimisülesanded	91
8.6.	Mõningate matemaatilise planeerimise tüüpülesannete formuleerimine	94
8.7.	Ülesande püstitamisest lahendi juurutamiseni	106
3.	Arvutusmeetodid	
9.	Simpleksmeetod	111
9.1.	Meetodi idee ja arvutuskäigu kirjeldus	111
9.2.	Arvuline näide	119
9.3.	Täiendavad kitsendused	124
9.4.	Kõdumine	125
10.	Transpordiülesanne	126
10.1.	Potentsiaalide meetod	126
10.2.	Lahendusmeetodi kirjeldus	128
10.3.	Suunamisülesanded	135
10.4.	Proovireisijaülesanne	138
11.	Lineaarse planeerimise ülesannete ligikaudsed lahendusmeetodid	142
11.1.	R. Frischi meetod	142
11.2.	L. Kantorovitši lahendavate kordajate meetod	148
11.3.	Transpordiülesande lahendamise Δ -meetod	154
11.4.	J. Habri meetod	156
12.	Täisarvuline lineaarne planeerimine	161
13.	Stohhastiline planeerimine	163
13.1.	Stohhastilise planeerimise mõiste	163
13.2.	Monte Carlo meetod	166
	Kirjandust	173
	Aineregister	178

Исай Розенфельд. ВВЕДЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКУЮ МАТЕМАТИКУ.
На эстонском языке. Художественное оформление У. Лийвамяги. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja H. Heinoja. Kunstiline toimetaja A. Säde. Tehniline toimetaja S. Kohu. Korrektorid H. Kull ja M. Pall. Laduda antud 20. I 1969. Trükkida antud 16. VII 1969. Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2, $54 \times 84/16$. Trükipoognaid 11,5. Tingtrükipoognaid 9,66. Arvestuspoognaid 9,5. Trükiarv 3000. MB-06575. Tellimuse nr. 552. H. Heidemanni nim. Trükikoda. Tartu, Olikooli 17/19. II.

Hind 48 kop.

48 kop.

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00327171 7