

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOI

ÜLEPIK

VÄLITUD KÜSIMUSI
TEOREETILISEST
MEHHAANIKAST
I

TARTU 1961

23. v 61



A-23770_m

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOI

TEOREETILISE MEHHAANIKA KATEEDER

Ü.LEPIK

VALITUD KÜSIMUSI
TEOREETILISEST
MEHHAANIKAST

I

Masspunktí mehhaanika

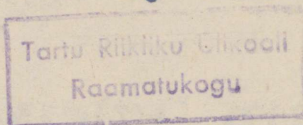
TARTU 1961

23. V 61

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Кликооли, 18
Ю. Лепик

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
На эстонском языке

2



79124

Vastutav toimetaja E. Jõgi
Korrektor E. Oja

=====

TRÜ rotaprint 1961. Trükiplaanid 2,3.
Tir. 300 eks. MB 02989. Tell. nr. 501.

Hind 7 kop.

S a a t e k s .

Eestikeelne õppekirjandus teoreetilise mehhaanika alalt on üsna kasin. Kui mitte arvestada 1940.a. ilmunud ja praegu juba bibliograafiliseks harulduseks muutunud prof. J. Nuudi raamatut "Kinemaatika ja dünaamika põhijooni", siis on ainsaks eestikeelseks õpikuks I. Voronkovi raamatu "Teoreetiline mehhaanika" tõlge (ilmunud 1958. aastal). Kuna aga Voronkovi raamat on kirjutatud kõrgematele tehnilistele õppeasutustele, siis puudub selles rida küsimusi, mille käsitletu on ette nähtud ülikoolide programmides. Selle lünga täitmiseks pidas TRÜ teoreetilise mehhaanika kateeder vajalikuks anda välja õppevahend, milles oleksid käsitletud eelkõige prof. Voronkovi õpikus puuduvad palad. Käesolevale vihikule, milles on toodud mõningaid valitud küsimusi punkti dünaamikast, järgneksid hiljem vastavad vihikud süsteemi dünaamika, kindla keha mehhaanika ja analüütilise mehhaanika kohta.

Õppevahendi kasutajatena tulevad arvesse peamiselt TRÜ Matemaatika-Loodusteaduskonna matemaatika- ja füüsikaosakonnade II ja III kursuse üliõpilased, samuti ka kaugõppe matemaatikaosakonna üliõpilased.

Autor.

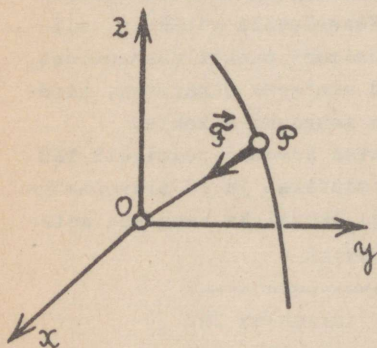
§ 1. MASSPUNKTI LIIKUMINE TSENTRAALSETE TUNGIDE VÄLJAS.

1. Tsentraalse tungivälja mõiste. Masspunkti trajektoor.

Olgu Cartesiuse teljestikus (x, y, z) antud punkt P massiga m . Mõjuga sellele masspunktile tung \vec{F} , mille mõjusirge kogu liikumise vältel läbib liikumatu punkti O (joon. 1). Niisugusel korral kõneldaksegi masspunkti liikumisest tsentraalsete tungide väljas. Tung \vec{F} võib üldiselt olla suunatud kas punkti O poole või sellest eemale. Konkreetse mõttes vaatleme edaspidi vaid juhtu, kus tung \vec{F}

on suunatud punkti O ; seda punkti nimetatakse niisugusel juhul tõmbekeskmeks.

Liikumisel tungide väljas kirjeldab masspunkt üldiselt mingi kõvera, mida nimetatakse trajektooriks ehk orbliidiks. Tõestame, et tsentraalsete tungide välja korral on trajektooriks alati tasapinnaline kõver. Selleks lähtume pöördimpulsslausest, mida võib



Joon. 1.

esitada valemiga

$$\vec{y}_0 = \vec{n} \times \vec{F}. \quad (1)$$

Sümboliga \vec{y}_0 on siin tähistatud punkti O suhtes võetud pöördimpulssvektor; $\vec{n} = \vec{OP}$; vektorkorrutis $\vec{n} \times \vec{F}$ annab tungi momendi punkti O suhtes.

Et tsentraalsete tungide korral vektorid \vec{n} ja \vec{F} on kollineaarsed, siis $\vec{n} \times \vec{F} = 0$ ning seega ka $\vec{y}_0 = 0$ ehk $\vec{y}_0 = C_0 \vec{n}$.

Projekteerides konstantse vektori \vec{y}_0 koordinaattelgedele, saame

$$y_x = C_1, \quad y_y = C_2, \quad y_z = C_3, \quad (2)$$

kus C_1, C_2, C_3 on meelevaldsed konstandid.

Pöördimpulsi definitsiooni põhjal

$$\vec{y}_0 = \vec{n} \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Arvutades välja valemis (3) esineva determinandi, saame pöördimpulssvektori komponentideks

$$\begin{aligned} y_x &= m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ y_y &= m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ y_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \quad (4)$$

Arvestades veel valemid (2), jõuame järgmistele pöördimpulsi integraalidele:

$$m(y\dot{z} - z\dot{y}) = C_1, \quad m(z\dot{x} - x\dot{z}) = C_2, \quad m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C_3. \quad (5)$$

Korrutame nüüd süsteemi (5) esimest võrrandit x -ga, teist aga y -ga, kolmandat z -ga ning liidame tulemused; seda tehes saame

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0. \quad (6)$$

See on aga koordinaatide algust läbiva tasapinna võrrand. Et seda võrrandit peavad rahuldama trajektoori mistahes punkti koordinaadid, siis peab trajektooriks olema tasapinnaline kõver. Seda aga oligi tarvis tõestada.

2. Sektorkiirus.

Vaatleme nüüd mingit masspunkti, mis liigub mööda tasapinnalist kõverat ja mingil hetkel t asub trajektoori punktis P (joon. 2). Masspunkti liikumisseadus olgu antud polaarkoordinaatides kujul

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Tähistame sümboliga

\mathcal{G} pindala, mida piiravad raadiusvektor

$r(t)$, trajektoori ja polaartelg. Kuna iga-
le raadiusvektori

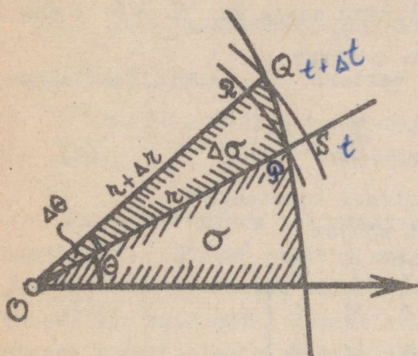
väärtusele $r = r(t)$

vastab üldiselt eri-

nev pindala \mathcal{G} , siis

võime seda pindala vaa-

delda aja funktsioonina; s.t. $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t)$.



Joon. 2.

Anneme nüüd ajale t väikese juurdekasvu Δt . Ajavahemiku Δt vältel nihkugu masspunkt trajektoori punktist P uude punkti Q , mille polaarkoordinaatideks on $(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta)$. Pindala \mathcal{G} muutus ajavahemikus Δt on määratud sektori OPQ pindalaga. Jooniselt 2 nähtub aga, et sektori OPQ pindala on suurem ringi sektori OPR ja väiksem ringi sektori OSQ pindalast. Seega saame

$$\frac{1}{2} r^2 \Delta \theta < \Delta \mathcal{G} < \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \Delta \theta.$$

Jagame võrratuse kõiki liikmeid veel suurusega Δt ,

siis

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} < \frac{\Delta \mathcal{G}}{\Delta t} < \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t}. \quad (7)$$

Läheme üle piirile, lastes $\Delta t \rightarrow 0$; siis $\Delta r \rightarrow 0$, $\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \rightarrow \dot{\theta}$ ja $\frac{\Delta \mathcal{G}}{\Delta t} \rightarrow \dot{\mathcal{G}}$. Kuna suurus $\dot{\mathcal{G}}$ on surutud kahe tõkke vahele, millel on piirväärtus $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$, siis saamegi

$$\dot{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}. \quad (8)$$

Suurst $\dot{\varphi}$ nimetame sektorkiiruseks (see on pindala $\dot{\varphi}$ muutumise kiirus antud hetkel t).

3. Pindalade teoreem.

Eespool nägime, et liikumisel tsentraalsete tungide väljas on trajektooriks tasapinnaline kõver. Valime nüüd koordinaadistiku nii, et trajektoor asuks xy tasapinnal; koordinaatide alguse paigutame endiselt tõmbetsentrisse. Nüüd on $z = \dot{z} = 0$ ning 2 esimest pöördimpulsi integraalidest (5) on identselt rahuldatud, kui võtta vaid $C_1 = C_2 = 0$. Kolmandale pöördimpulsi integraalile

$$xy - yx = \frac{C_3}{m} = C \quad (9)$$

anname aga uue kuju. Selleks läheme Cartesiuse koordinaatidest (x, y) üle polaarkoordinaatidele (r, θ) :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (10)$$

Diferentseerides seoseid (10) aja järgi, saame

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r \dot{\theta} \sin \theta + \dot{r} \cos \theta \\ \dot{y} &= r \dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \sin \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Asetades vahetulemused (10)-(11) pöördimpulsi avaldisse (9) ja viies läbi lihtsustused, saame

$$r^2 \dot{\theta} = C. \quad (12)$$

Tulemusele (12) võib anda lihtsa geomeetrilise interpretatsiooni. Selleks toome valemi (8) abil sisse sektorkiiruse

$$2 \dot{\varphi} = C. \quad (13)$$

Nagu siit näeme, jääb sektorkiirus kogu liikumise vältel konstantseks. Tulemusele võib anda veelgi teise kuju.

Integreerides seost (13) aja järgi, saame

$$\varphi = \frac{1}{2} C t + \text{const.} \quad (14)$$

Olgu t_1 ja t_2 kaks mingit ajamomenti, φ_1 ja φ_2 nendeks ajamomentideks raadiusvektori poolt kaetud sektorite pindalad. Valemist (14) järgneb nüüd

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{2} C (t_1 - t_2). \quad (15)$$

Tulemusele võib anda järgmise sõnastuse:

Liikumisel tsentraalsete tungide väljas kaetakse raadiusvektorite poolt võrdses ajavahemikkudes võrdsed pindalad.

Saadud tulemus kannabki pindalade teoreemi nimetust. Siisuliselt see ühtib Kepleri II seadusega. Valemeis (12) - (15) esinev suurus C , mis on jääv ükskõik millise konkreetse liikumise puhul, kannab nimetust pindalade konstant.

Vaatame veel tsentraalsete tungide väljas niisugust liikumist, mille puhul $r(t) \neq \text{const}$. Et sektorikiirus peab jääma konstantseks, siis raadiusvektori r kahanedes peab masspunkti joonkiirus kasvama ja vastupidi. Et see tõepoolest nii viisi on, on hästi teada taevamehhaanikast: planeedi liikumisel päikese ümber on tema liikumiskiirus kõige suurem periheelis (s.t. punktis, kus planeedi ja päikese vaheline kaugus on vähim) ning kõige väiksem afeelis (s.t. punktis, kus planeedi ja päikese vaheline kaugus on suurim).

4. Binet' valem.

Vaatleme jälle tsentraalsete tungide väljas liikuvat masspunkti; koordinaadistiku valime nii, nagu näidatud punktis 3. Selle masspunkti liikumise kiirus v on määratav valemist

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2. \quad (16)$$

Minnes üle polaarkoordinaatidele (r, θ) ja kasutades valemteid (11), näeme, et

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2. \quad (17)$$

Teisendame saadud tulemust veelgi. Eespool tuletatud seostest (8) ja (13) järeldub, et

$$r^2 \dot{\theta} = C \quad \text{ehk} \quad dt = \frac{1}{C} r^2 d\theta. \quad (18)$$

Asendades seosest (18) aja diferentsiaali dt valemisse (17), saame

$$v^2 = C^2 \left[\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]. \quad (19)$$

Tulemust võib lihtsustada, kui tuua sisse abisuurus u valemiga

$$u = \frac{1}{r}. \quad (20)$$

Valem (19) saab nüüd kuju

$$v^2 = c^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]. \quad (21)$$

Olgu T masspunkti kineetiline energia, A välistungide töö, m masspunkti mass. Energiaausest vaadeldava masspunkti kohta saame

$$dT = dA, \quad (22)$$

kus

$$dT = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right), \quad dA = + \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

(Sümbolite $d\vec{s}$ ja $d\vec{r}$ tähendus selgub jooniselt 3).

Energiaause saab seega kuju

$$\frac{1}{2} m \frac{d(v^2)}{d\theta} = - \vec{F} \frac{dr}{d\theta}.$$

Asendades sellesse tulemusse v^2 avaldise valemist (19) ja viies läbi muutujate vahetuse $u = \frac{1}{r}$, saame

$$F = m c^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right). \quad (23)$$

Tulemus (23) kannabki Bi-
net' valemi nimetust. Ta võimal-
dab lahendada kaht järgnevat põ-
hiülesannet:

- 1) antud on trajektoor, leida, missuguse tsentraalse tungi mõjul toimub liikumine;
- 2) antud on tsentraalne tung, tuleb leida trajektoori võrrand.

Näide 1: Vaatame, missuguse tsentraalse tungi mõjul on võimalik ringjooneline liikumine.

Lahendus: Kuna tõmbekese asub koordinaatide alguses, siis ringjoone võrrandil polaarkoordinaatides on kuju $r = a$,

kus a on ringjoone raadius. Et aga ringjoone korral $u = \frac{1}{r} = \text{const}$, siis Binet' valemist (23) näeme, et

$$F = \frac{mC^2}{a}. \quad (24)$$

Toimugu liikumine piki ringjoont nurkkiirusega ω . Pindalade konstandi C väärtuseks saame seega valemi (12) põhjal $C = a^2 \omega$. Asendades selle suuruse valemisse (24), saame lõpptulemuseks

$$F = m\omega^2 a. \quad (25)$$

See on aga meile juba tuttava kesktõmbetungi avaldis.

Näide 2: Missugune peab olema tsentraalne tung, et liikumine toimuks mööda logaritmilist spiraali $r = ae^{k\theta}$?

Lahendus: Nüüd on $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a} e^{-k\theta}$; asendades tulemuse Binet' valemisse ja viies läbi lihtsustused, saame

$$F = \frac{mC^2}{r^3} (1 + k^2). \quad (26)$$

Nagu neist näidetest selgub, on eriti mugav Binet' valemi abil esimese põhiülesande lahendamine; matemaatiliselt mõnevõrra komplitseeritum on teise põhiülesande lahendamine, sest siin - nagu nähtub valemist (23) - tuleb u suhtes lahendada teist järku mittelineaarne diferentsiaalvõrrand.

5. Newtoni ülesanne.

Newtoni ülesande all mõistetakse teoreetilise mehhaanika kursuses järgmist probleemiseadet.

Leida masspunkti trajektoori, kui selle masspunkti liikumine toimub tsentraalse tõmbetungi mõjul, mis muutub pöördvõrdeliselt kauguse ruuduga.

Püstitatud ülesande lahendamiseks on kaks teed: 1) võib kasutada Binet' valemit, 2) lähtuda otseselt energialausest. Me kasutame siinkohal teist viisi.

Lähtume energia jäävuse seadusest

$$F + U = E = \text{const}, \quad (27)$$

kus U on potentsiaalenergia ning E - mehhaaniline koguenergia.

Olgu masspunkti mass m ; temale mõjuv tung on seega

$$F = \frac{m\mu}{r^2}, \quad (28)$$

kus μ on mingi konstant.

Kineetilisel energial on kuju $F = \frac{1}{2} mv^2$, potentsiaalne energia arvutatakse valemist

$$U = - \int_r^{\infty} F dr = - \frac{m\mu}{r}. \quad (29)$$

Asendades F ja U avaldised energiavõrrandisse (27), saame

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{m\mu}{r} = E.$$

Jagades kõiki liikmeid m -ga ja tuues sisse abitähise $h = \frac{2E}{m}$, võime tulemuse esitada kujul

$$v^2 = 2\mu \frac{1}{r} + h. \quad (30)$$

Teostades veel muutujate vahetuse $u = \frac{1}{r}$ ja asendades kiiruse ruudu v^2 valemist (21), saame

$$c^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] = 2\mu u + h. \quad (31)$$

Võrrandi (31) integreerimiseks toome sisse abimuutuja z seosega

$$z = u - \frac{h}{c^2}. \quad (32)$$

Kui tähistada veel

$$A^2 = \frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2}, \quad (33)$$

siis võib võrrandi (31) viia kujule

$$\left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 = A^2 - z^2$$

ehk teisiti

$$d\theta = \pm \frac{dz}{\sqrt{A^2 - z^2}}. \quad (34)$$

Integreerides seost (34) ning tähistades integreerimis- konstandi väärtuse β -ga, saame

$$\theta - \beta = \mp \arccos \frac{z}{A}$$

ehk

$$z = A \cos(\theta - \beta). \quad (35)$$

Valemis (35) tuleb veel muutujalt z üle minna esialgsele muutujale r . Seejuures on otstarbekohane tuua sisse abisuurused p ja e valemitega

$$p = \frac{h}{C^2}, \quad e = \frac{AC^2}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu^2}}. \quad (36)$$

Valemi (35) saame nüüd esitada kujul

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \beta)}. \quad (37)$$

Määrame veel integreerimiskonstandi β ; selleks täpsustame eelkõige koordinaatteljestiku asendit. Olgu polaartelg valitud nii, et ta läheb läbi punkti, kus raadiusvektor r omab vähima väärtuse r_0 . Valemist (37) nähtub, et r on vähim, kui $\cos(\theta - \beta) = +1$ ja $\theta - \beta = 0$. Et aga polaarteljel $\theta = 0$, siis ka $\beta = 0$ ja valem (37) ühtib analüütilises geomeetrias tuntud koonuslõike võrrandiga; p on selle koonuslõike pool fokaallaiust, e - tema ekstsentrilisus.

Oleme seega tõestanud, et masspunkti trajektooriks on koonuslõige: kui $e < 1$, saame ellipsi; kui $e = 1$ parabooli ning kui $e > 1$ - hüperbooli.

Tähistame sümboliga v_0 kiiruse, millega masspunkt läbib polaartelje. Valemist (30) järeldub, et

$$v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} = h \quad (38)$$

Valemist (36) nähtub, et ekstsentrilisus e võib olla väiksem ühest vaid siis, kui $h < 0$; ekstsentrilisus on suurem ühest, kui $h > 0$ ning $e = 1$, kui $h = 0$.

Pidades silmas veel tingimust (38), jõuame järgmistele järeldustele:

Elliptilised trajektoorid on võimalikud vaid kiiruste korral, kus $v_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$; paraboolne trajektoor esineb kiirusel $v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ ning hüperboolsed trajektoorid kiirusel $v_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$. Kiirust $v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ nimetatakse paraboolseks kiiruseks.

Pole raske näha, et saadud tulemus sisaldab eneses ka

Kepleri I seaduse, mille kohaselt kõik planeedid liiguvad mööda ellipseid, mille ühes fookuses asetseb päike. Paraboolsed ja hüperboolsed liikumisteed võivad esineda näit. koometide ja kunstlikkude kaaslaste korral.

6. Ülemaailmse gravitatsiooni seadus.

Vaatleme päikest ning tema ümber tiirlevaid planeete. Päikese mass olgu M , mingi ühe planeedi mass m . Päikese ja vaadeldava planeedi vahel mõjuvad gravitatsioonitungid, mis on pöördvõrdelised nende taevakehade vahelise kauguse ruuduga. Kui päike tõmbab planeeti tungiga $F = \frac{m\mu}{R^2}$; siis planeet tõmbab päikest tungiga $F_1 = \frac{M\mu_1}{R^2}$. Neis valemeis on μ ja μ_1 konstandid, milledest μ_1 ei olene päikese massist M ja μ planeedi massist m . Newtoni III seaduse kohaselt on tungid F ja F_1 võrdvastupidised ning seega nende absoluutväärtused on võrdsed. Tingimusest $F = F_1$ järeldub aga, et $M\mu_1 = m\mu$ ehk $\frac{\mu_1}{m} = \frac{\mu}{M} = f$ (f on mingi uus konstant). Et suhe $\frac{\mu_1}{m}$ ei sõltu päikese massist M ja suhe $\frac{\mu}{M}$ planeedi massist m , siis konstant f ei saa sõltuda ei päikese ega ka planeedi massist. Viies läbi taolise arutluse kõigi planeetide jaoks, jõuame järeldusele, et f on kogu päikese-süsteemi jaoks ühine konstant. Kasutades seost $\mu = Mf$, võime päikese ja mistahes planeedi vahel mõjuva tõmbetungi üles kirjutada kujul

$$F = \frac{fMm}{R^2}. \quad (39)$$

Valemis (39) sisaldubki ülemaailmse gravitatsiooni seadus, mida võib formuleerida järgnevalt:

Kaks keha tõmbuvad tungiga, mis on võrdeline nende masside korrutisega ja pöördvõrdeline nendevahelise kauguse ruuduga.

Lähtudes ülemaailmse gravitatsiooni seadusest, on hõlpus tuletada ka Kepleri III seadust. Liikugu mingi planeet ümber päikese elliptilist teed mööda, kusjuures ellipsi poolteljed on a ja b . Planeedi mass olgu m , tiirlemisperiod T .

Et pindalade teoreemi kohaselt on sektorikiirus kogu liikumise vältel konstantne ning $\dot{\varphi} = \frac{1}{2} C$, siis süsteemi (36) esimese valemi kohaselt $\dot{\varphi} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu p}$. Et aga ellipsi poolfokaallaiust on $p = \frac{b^2}{a}$ ja $\mu = f M$, siis saame

$$\dot{\varphi} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{f M}{a}}$$

Sektorikiiruse $\dot{\varphi}$ võime arvutada ka teisel viisil. Tiirlemisperioodi T vältel kaetakse raadiusvektori poolt ellipsi pindala, s.t. pindala suurusega πab ; ajaühikus kaetakse seega pindala $\frac{\pi ab}{T}$, mis annabki sektorikiiruse. Võrdustades mõlemal viisil leitud sektorikiiruse avaldised, saame

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{f M}{a}}$$

ehk pärast lihtsustusi

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f M} \quad (40)$$

Et võrrandi (40) parem pool on kogu päikesesüsteemi suhtes universaalne konstant, siis võime tulemuse sõnastada järgmiselt:

Planeetide tiirlemisperioodide ruudud suhtuvad nagu vastavate ellipsite pikemate pooltelgede kuubid.

Tulemus kujutabki enesest Kepleri III seadust.

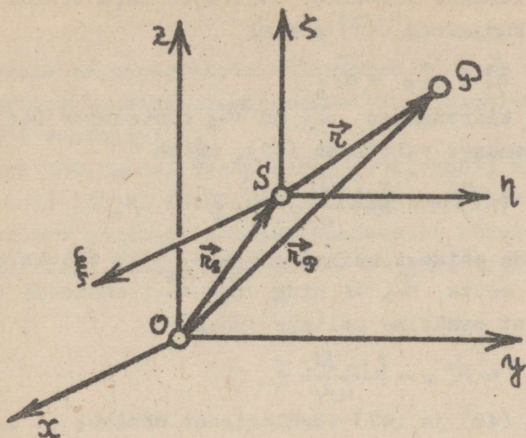
7. Kahe keha probleem.

Kepleri seaduste tuletamisel me lugesime päikese paigalseisvaks. Seda võib teha ainult esimeses lähenduses, sest tegelikult avaldab ka planeet külgetõmmet päikesele, mis tingib nn. päikese omaliikumise.

Järgnevalt kontrollime, kas Kepleri seadused jäävad kehtima ka siis, kui arvestada päikese omaliikumist.

Päikese asend mingis paigalseisvas teljestikus (x, y, z) olgu määratud raadiusvektoriga \vec{r}_S , planeedi asend samas teljestikus raadiusvektoriga \vec{r}_P . Planeedi asendi päikese suhtes määrab vektor \vec{r} , kusjuures, nagu selgub jooniselt

4,



Joon. 4.

$$\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_s. \quad (41)$$

Tähistame S^P -suunalise ühikvektori sümboliga \vec{e} , kusjuures $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$. Külgetõmbetus, mida avaldab planeet päikesele, on gravitatsiooniseaduse järgi

$$\vec{F} = \frac{f m M}{r^2} \vec{e}; \quad (42)$$

päike mõjub planeedile aga võrdvastupidise tungiga:

$$\vec{F}_1 = -\frac{f m M}{r^2} \vec{e}. \quad (43)$$

Kirjutame üles Newtoni III seaduse nii päikese kui ka planeedi jaoks:

$$\begin{aligned} M \ddot{\vec{r}}_s &= \vec{F} = \frac{f m M}{r^2} \vec{e} \\ m \ddot{\vec{r}}_p &= \vec{F}_1 = -\frac{f m M}{r^2} \vec{e}. \end{aligned} \quad (44)$$

Meid huvitab praktiliselt vaid päikese liikumine planeedi suhtes (relatiivne liikumine). Selle liikumise kirjel-

damiseks toome sisse abiteljestiku (ξ, η, ζ) , mille algus asub päikesel ja mis teljestiku (x, y, z) suhtes liigub translatoorselt. Planeedi liikumine abiteljestikus toimub kiirendusega $\vec{\kappa}$, kusjuures (41) põhjal

$$\vec{\kappa} = \vec{\kappa}_p - \vec{\kappa}_s. \quad (45)$$

Määrates kiirendused $\vec{\kappa}_p$ ja $\vec{\kappa}_s$ süsteemist (44) ja asendades tulemused valemisse (45), saame

$$m\vec{\kappa} = -\frac{\mu m (\mu + m)}{r^2} \vec{e}. \quad (46)$$

Kui lugeda päikest paigalseisvaks, siis tuleks eelnevate valemite võtta $\vec{\kappa}_s = 0$ ning $\vec{\kappa}_p = \vec{\kappa}$; süsteemi (46) teisest võrrandist saaksime selleks juhuks

$$m\vec{\kappa} = -\frac{\mu m \mu}{r^2} \vec{e}. \quad (47)$$

Valemite (46) ja (47) võrdlemisest nähtub, et eelnevate punktides tuletatud seosed jäävad kehtima, kui vaid päikese massi M asemele võtta päikese ja planeedi massi summa $M + m$; koefitsiendi $\mu = \mu M$ asemele tuleks võtta $\mu = \mu (M + m)$. Üeldust selgub, et kehtima jäävad ilmselt nii Kepleri I kui ka II seadus. Mõnevõrra erinev on olukord Kepleri III seaduse puhul. Valem (40) tuleks nüüd asendada tingimusega

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu M}{4\pi^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right), \quad (48)$$

mille parem pool pole enam kogu päikesesüsteemi jaoks konstantne, vaid sõltub ka vaadeldava planeedi massist m . Kuna aga planeedi mass on päikese massiga võrreldes väike, siis võib suurust $1 + \frac{m}{M}$ vaadata kui parandusliiget Kepleri III seaduse kohta. Kepleri III seadus osutub seega ligikaudseks; ta on kehtiv seda täpsemini, mida väiksem on suhe $\frac{m}{M}$.

Eespool me lahendasime nn. kahe keha probleemi, s.t. uurisime kahest graviteeruvast kehast (päikesest ja planeedist) koosneva süsteemi liikumist. Taevamehhaanikas esinevad ülesanded on tegelikult tunduvalt komplitseeritumad, sest päikese ümber tiirleb mitu planeeti ja on tarvis arvestada nende kõigi omavahelisi mõjutusi. See viibki nn. "n" keha

probleemi" juurde. Selle probleemi täpne lahendamine pole senini õnnestunud isegi erijuhul, kus $n=3$ (kolme keha probleem).

8. Ajaloolisi märkmeid.

Käesolevas paragrahvis tuletasime Kepleri seadused, lähtudes Newtoni gravitatsiooniseadusest. Ajalooline tee oli aga tegelikult vastupidine.

Taani astronoomi Tycho Brahe (1546-1601) rikkaliku vaatlusmaterjali põhjal formuleeris Johannes Kepler (1571-1630) oma 3 kuulsat seadust. Nendest seadustest tuletas Isaac Newton (1643-1727) ülemaailmse gravitatsiooni seaduse.

§ 2. RELATIIVNE LIIKUMINE.

1. Relatiivse liikumise mõiste.

Senini oleme vaadelnud masspunkti liikumist teljestikus, mida lugesime paigalseisvaks. On aga mõeldav ka olukord, kus masspunkt (või kindel keha) liigub mingis teljestikus, mis omakorda on liikumises mingi teise, paigalseisva teljestiku suhtes. Niisugusel juhul me kõneleme masspunkti liitliikumisest. Masspunkti liikumist liikuva teljestiku suhtes nimetame suhteliseks ehk relatiivseks liikumiseks, tema liikumist paigalseisva teljestiku suhtes aga absoluutseks liikumiseks. Liikuva teljestiku liikumist liikumatu teljestiku suhtes nimetame ülekandeliikumiseks.

Näitena vaatame reisijat, kes jalutab liikuva laeva lael. Me võime enesele mõttes ette kujutada kahte teljestikku: üks teljestik on ühendatud liikumatult laevaga ja võtab selle liikumisest osa; teine - "liikumatu" - teljestik on ühendatud maakeraga. Absoluutseks liikumiseks antud näite korral on

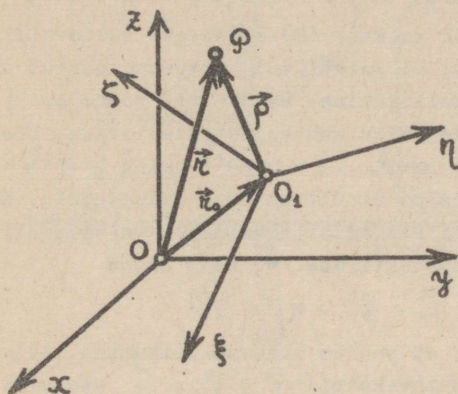
reisija liikumine maakera suhtes, relatiivseks liikumiseks reisija liikumine laeva suhtes, ülekanделиikumiseks aga laeva liikumine maakera pinna suhtes.

Nimetustesse "absoluutne liikumine" ja "absoluutne teljestik" tuleb suhtuda teatud ettevaatusega. Need nimetused on kasutusele võetud I. Newtoni poolt, kes defineeris absoluutset ruumi ruumina, "mis on oma olemuselt ja sõltumatult mistahes esemetest alati sama ja liikumatu". Selle Newtoni poolt antud definitsiooni ekslikkust näitas alles A. Einstein 1905.a.; Einsteini loodud relatiivsusteooria järgi ei eksisteeri absoluutset ruumi ja absoluutset liikumist üldse; me võime kõnelda vaid ühe keha liikumisest teise suhtes, s.o. relatiivsest liikumisest. Sellele vaatamata osutub aga mõningates mehhaanika-probleemides otstarbekohaseks kokkuleppeliselt lugeda mingit ühte teljestikku paigalseisvaks; sellist teljestikku nimetamegi edaspidi absoluutseks. Kuna see-ega absoluutne liikumine on määratud vaid kokkuleppeliselt, siis on väga hästi ka mõeldav juht, kus mingi teljestik on ühes probleemis paigal, teises aga liikuv. Nii näiteks loeme tavaliselt maakera ühendatud teljestiku paigalseisvaks. Kui aga osutub tarvilikuks arvestada ka maakera pöörlemise mõju liikuvale kehale, siis loeme maakera ühendatud teljestiku liikuvaks ning paigalseisev teljestik tuleks paigutada näiteks päikesele.

2. Kiiruste liitmislause.

Olgu meil antud kaks mingit teljestikku (x, y, z) ja (ξ, η, ζ) . Esimest neist teljestikkudest loeme paigalseisvaks, teist aga esimese suhtes liikuvaks. Olgu antud veel masspunkt P , mis võib liikuda mõlema teljestiku suhtes. Selle masspunkti kiirust paigalseisva teljestiku suhtes nimetame absoluutseks kiiruseks; kiirust liikuvate telgede (ξ, η, ζ) suhtes aga relatiivseks kiiruseks. Teljestikuga (ξ, η, ζ) liikumatult ühendatud punkti liikumiskiirus paigalseisva (x, y, z) teljestiku suhtes kannab nimetust ülekandekiirus.

Vaatleme nüüd, kuidas on absoluutne kiirus seotud relatiivse kiirusega ja ülekandekiirusega. Selleks lähtume joonisest 5.



Joon. 5

Olgu punkti P asend paigalseisvas teljestikus määratud raadiusvektoriga $\vec{OP} = \vec{r}$, liikuvasteljestikus raadiusvektoriga $\vec{O_1P} = \vec{r}'$; liikumatu teljestiku algusest liikuva teljestiku algusesse viiv raadiusvektor olgu tähistatud $\vec{OO_1} = \vec{r}_0$. Nagu jooniselt 5 nähtub, on

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \quad (1)$$

Olgu liikuva teljestiku koordinaattelgede ühikvektorid tähistatud sümbolitega \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ning olgu (ξ, η, ζ) punkti koordinaadid liikuvasteljestikus; siis on

$$\vec{r}' = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}$$

ning valem (1) saab kuju

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k} \quad (2)$$

Diferentseerime seost (2) aja järgi, võttes arvesse, et aja funktsioonideks osutuvad kohavektorid \vec{r} , \vec{r}_0 , koordi-

naadid ξ, η, ζ ja ka koordinaattelgede ühikvektorid $\vec{e}, \vec{j}, \vec{k}$ (nende koordinaattelgede suund võib muutuda liikumise vältel!). Kuna raadiusvektori tuletis aja järgi annab kiirusvektori, siis $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ ja me saame

$$\vec{v} = (\dot{r}_0 + \xi \dot{e} + \eta \dot{j} + \zeta \dot{k}) + (\xi \vec{e} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}). \quad (3)$$

Selgitame nüüd valemis (3) esinevate suluavaldiste mõtte. Oletame esmalt, et relatiivne liikumine puudub ning esineb ainult ülekandeliikumine. Sel korral võime punkti \mathcal{P} lugeda (ξ, η, ζ) teljestiku suhtes paigalseisvaks; seega $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$ ning $\dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$. Valemist (3) jääb püsima ainult esimene suluavaldis. Kuna antud juhul esines ainult ülekandeliikumine, siis võime kiiruse \vec{v} asemele võtta ülekandekiiruse \vec{v}_0 ning saame

$$\vec{v}_0 = \dot{r}_0 + \xi \vec{e} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}. \quad (4)$$

Oletame nüüd, et puudub ülekandeliikumine. Sel korral on $\dot{r}_0 = \text{const}$ ning ühikvektorid $\vec{e}, \vec{j}, \vec{k}$ osutuvad konstantseteks vektoriteks (s.t. nad on muutumatud nii suuruselt kui ka suunalt); järelikult ka $\dot{e} = \dot{j} = \dot{k} = 0$. Valem (3), kui kiiruse \vec{v} asemele kirjutada relatiivse kiiruse sümbol \vec{v}_n , saab nüüd kuju

$$\vec{v}_n = \xi \vec{e} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}. \quad (5)$$

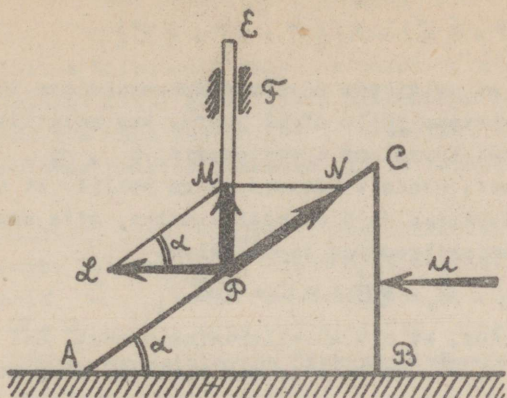
Valemitest (3) - (5) nähtub, et

$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_0 \quad (6).$$

Tulemus kujutabki enesest kiiruste liitmislauset; seda võib sõnastada järgnevalt:

Absoluutne kiirus (ehk kogukiirus) võrdub ülekandekiiruse ja relatiivse kiiruse geomeetrilise summaga.

Näide 1: Kiil ABC , mille kaldenurk on α , liigub horisontaalpinnal translatoorselt kiirusega u ja tõukab vertikaalset varraat PE , mis läbib muhvi F ja võib nihkuda vaid vertikaalsuunas (joon. 6). Leida varra liikumiskiirust.



Joon. 6.

Lahendus. Vaatleme varda otspunkti P liikumist liitliikumisena, mis koosneb kahest liikumisest: 1) varda liikumisest kiilu suhtes (relatiivne liikumine), 2) kiiluga kaasa liikumisest (ülekandeliikumine). Kuna kiil liikus translatoorselt, on kõikide tema punktide kiirused võrdsed, seega ka punkti P ülekandekiiruseks on $v_{\bar{u}} = u$. Et relatiivne liikumine toimub piki kiilu kaldpinda, siis on ka relatiivne kiirus v_r suunatud piki sirget AB . Absoluutne kiirus v peab ülesande tingimuste kohaselt olema suunatud vertikaalselt üles; teiselt poolt aga kiiruste liitmislause kohaselt peab v olema parallelogrammi LMP diagonaaliks.

Täisnurksest kolmnurgast LMP leiamegi nüüd, et

$$v = v_{\bar{u}} \tan \alpha = u \tan \alpha.$$

3. Kiirenduste liitmislause.

Lähtume eelmises punktis tuletatud valemist (3) ja diferentseerime seda veel kord aja järgi. Seda tehes saame

$$\vec{w} = \dot{\vec{r}} = (\vec{n}_0 + \xi \vec{e} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}) + (\xi \dot{\vec{e}} + \eta \dot{\vec{j}} + \zeta \dot{\vec{k}}) + 2(\xi \dot{\vec{e}} + \eta \dot{\vec{j}} + \zeta \dot{\vec{k}}). \quad (7)$$

Selleks, et selgitada üksikute suluavaldiste tähendust valemis (7), vaatame jälle algul juhtu, kus relatiivne liikumine puudub. Sel korral on koordinaadid ξ , η , ζ konstantsed suurused, nende tuletised seega nullid. Et ainsaks esinevaks liikumiseks on ülekandeliikumine, siis saame valemist (7) ülekandekiirenduse jaoks valemi

$$\vec{w}_0 = \vec{n}_0 + \xi \dot{\vec{e}} + \eta \dot{\vec{j}} + \zeta \dot{\vec{k}}. \quad (8)$$

Oletame nüüd, et ülekandeliikumine puudub. Sel juhul \vec{n}_0 , $\dot{\vec{e}}$, $\dot{\vec{j}}$, $\dot{\vec{k}}$ on konstantsed vektorid ning nende tuletised on nullid. Valemist (7) saame nüüd relatiivse kiirenduse arvutamiseks valemi

$$\vec{w}_n = \xi \dot{\vec{e}} + \eta \dot{\vec{j}} + \zeta \dot{\vec{k}}. \quad (9)$$

Seoste (7) - (9) võrdlemisest nähtub, et valemi (7) paremal poolel esineb ülekande ja relatiivse kiirenduse kõrval veel üks lisaliige, mida tähistame sümboliga \vec{w}_c ; seega

$$\vec{w}_c = 2(\xi \dot{\vec{e}} + \eta \dot{\vec{j}} + \zeta \dot{\vec{k}}). \quad (10)$$

Sellele lisaliikmele juhtis kõige enne tähelepanu prantsuse insener ja kahurväe ohvitser Coriolis (1792-1843); tänapäeval tuntaksegi seda osa kiirendusest Coriolise ehk lisakiirenduse nime all.

Valem (7) absoluutse kiirenduse arvutamiseks saab nüüd kuju

$$\vec{w} = \vec{w}_n + \vec{w}_0 + \vec{w}_c \quad (11)$$

Tulemus ongi kiirenduste liitmislause, mida võib sõnastada järgnevalt:

Absoluutne kiirendus on geomeetriline summa relatiivsest kiirendusest, ülekandekiirendusest ja Coriolise kiirendusest.

torkorrutise absoluutväärtuseks

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \cdot \sin \omega r.$$

Jooniselt 7 aga nähtub, et $r \cdot \sin \omega r = \rho$; kuna aga mingi punkti lineaarkiirus saadakse nurkkiiruse korrutamisel selle punkti kaugusega pöörlemisteljest, siis

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \rho = v,$$

nagu peabki olema.

Edasi teame, et vektorkorrutiseks on uus vektor, mis on risti korrutatavate vektorite poolt moodustatud tasapinnaga ja mille suund määratakse parema käe kruvi reegli kohaselt. Pole raske näha, et ka need tingimused on valemi (12) korral täidetud. Seega olemegi tõestanud valemi (12) õigsuse.

Valem (12) on kehtiv mistahes punktist O lähtuva ning (ξ, η, ζ) teljestikus liikumatu kohavektori jaoks. Seega peab see valem olema rakendatav koordinaattelgede ühikvektorite \vec{e}_1 , \vec{e}_2 ja \vec{e}_3 kohta ehk, teiste sõnadega, peavad kehtima järgmised võrdused

$$\vec{e}_1 = \vec{\omega} \times \vec{e}_2, \quad \vec{e}_2 = \vec{\omega} \times \vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 = \vec{\omega} \times \vec{e}_1. \quad (13)$$

Asendades tulemused valemisse (10) ja rakendades vektorkorrutise distributiivsuse omadust, saame

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_c &= 2 [\xi (\vec{\omega} \times \vec{e}_1) + \eta (\vec{\omega} \times \vec{e}_2) + \zeta (\vec{\omega} \times \vec{e}_3)] = \\ &= 2 [\vec{\omega} \times \xi \vec{e}_1 + \vec{\omega} \times \eta \vec{e}_2 + \vec{\omega} \times \zeta \vec{e}_3] = \\ &= 2 [\vec{\omega} \times (\xi \vec{e}_1 + \eta \vec{e}_2 + \zeta \vec{e}_3)]. \end{aligned}$$

Pidades silmas valemit (5), saame tulemuse esitada järgneval kujul

$$\vec{\omega}_c = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_c. \quad (14)$$

3. Pole raske tõestada, et valem (14) jääb kehtima ka üldjuhul, kus ülekandeliikumiseks ei ole puhtal kujul translatoorne või rotatoorne liikumine.

Kindla keha kinemaatikas näidatakse, et igasugust liikumist võib lahutada üheks translatoorseks liikumiseks ning üheks rotatsiooniks sobivalt valitud telje ümber. Keha mingi

punkti kiirus arvutatakse valemist

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (15)$$

kus \vec{v}_0 on meie poolt valitud punkti (pooluse) liikumise kiirus, $\vec{\omega}$ - hetkeline pöörlemiskiirus, \vec{r} - poolusest lähtuv raadiusvektor.

Valime nüüd pooluseks (ξ, η, ζ) teljestiku alguse. Et aga joonise 5 ja valemi (1) põhjal

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}' \quad , \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}'$$

ning et $\dot{\vec{r}}_0 = \vec{v}_0$, siis saame valemi (15) kirjutada kujul

$$\vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

mis sisuliselt ühtib meie poolt varem saadud tulemusega (12). Edasine lahendus käik kujuneb alajaotuses, punktis 2 toodud artluse kordamiseks ning lõpptulemusena viib uuesti valemile (14).

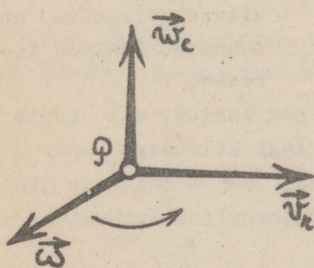
Asume nüüd saadud tulemuse (14) uurimisele. Märgime esmalt, et Coriolise kiirendus on vektor, mis on risti vektorite $\vec{\omega}$ ja \vec{v}_n poolt määratud tasapinnaga ja mille positiivne suund määratakse parema käe kruvi reegli järgi, pöörates vektorit $\vec{\omega}$ väiksemat nurka mööda vektori \vec{v}_n poole (vörd. joon. 8). Coriolise kiirenduse absoluutväärtuse arvu-

tamiseks saame (14) põhjal valemi

$$|\vec{w}_c| = |\vec{\omega} \times \vec{v}_n| = 2\omega v_n \sin \hat{\omega} v_n. \quad (16)$$

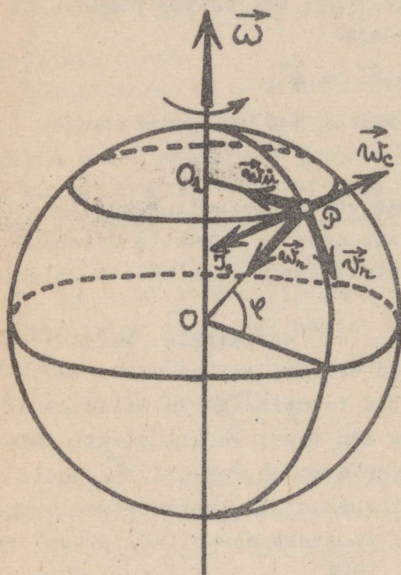
Tulemusest nähtub, et Coriolise kiirendus on null, kui

- 1) $\omega = 0$, s.t. puudub pöörlev liikumine;
- 2) $v_n = 0$, s.t. puudub relatiivne liikumine;
- 3) $\vec{\omega} \parallel \vec{v}_n$, s.t. relatiivne liikumine toimub rööbiti pöörlemisteljega.



Joon. 8.

Näide: Rong liigub piki maakera meridiaani suunaga põhjast lõunasse. Rongi kiirus on $v = \omega R \sin \varphi$, maakera raadius R , koha geograafiline laius φ , maakera pöörlemise nurkkiirus ω . Leida rongi liikumise relatiivne, ülekande- ja Coriolise kiirendus.



Joon. 9.

Ülekandeliikumiseks on maakera pöörlemine, mis tingib punkti P liikumise piki paralleelringi kiirusega ωa (a - paralleelringi raadius). Et aga $a = R \cdot \cos \varphi$ ja ülekande liikumine on samuti ühtlane ringjooneline liikumine, siis selle liikumise kiirenduseks on

$$a \omega_u = \omega^2 a = \omega^2 R \cos \varphi.$$

See kiirendus on suunatud paralleelringi keskpunkti O_1 .

Et antud juhul $\omega \omega_n = 180^\circ - \varphi$ ja $\sin \omega \omega_n = \sin \varphi$,

Lahendus: Olgu maakera keskpunkt punktis O , paralleelringi keskpunkt punktis O_1 . Rong asugu vaadeldaval hetkel maakera punktis P (joon. 9). Relatiivseks liikumiseks on antud juhul ühtlane ringjooneline liikumine (rongi liikumine piki meridiaani). Et see liikumine saaks toimuda, on tarvis tsentripetaalkiirendust suurusega

$$a \omega_n = \frac{v^2}{R}.$$

See kiirendus (relatiivne kiirendus) on suunatud maakera tsentrisse.

siis Coriolise kiirenduse suuruseks on

$$a_{w_c} = 2 \omega v_n \sin \varphi.$$

Kasutades eespool antud suuna reeglit, näeme, et Coriolise kiirendus on sihitud piki paralleelringi puutujat suunaga läänest itta.

5. Relatiivse liikumise dünaamika põhivõrrand.

Vaatleme masspunkti P massiga m , mis liigub paigalseisvas teljestikus (x, y, z) ja millele mõjuvate välistungide resultant olgu \vec{F} . Selle masspunkti liikumine allub teatavasti Newtoni II seadusele

$$m\vec{w} = \vec{F}, \quad (17)$$

kus sümboliga \vec{w} on tähistatud masspunkti kiirendus antud teljestikus.

Vaatame nüüd paigalseisva (x, y, z) teljestiku kõrval veel teljestikku (ξ, η, ζ) , mis on antud teljestiku suhtes liikumises. Seame enesele ülesandeks määrata kiirendus liikuva teljestiku suhtes (s.o. relatiivne kiirendus).¹

Lähtume absoluutse kiirenduse avaldisest (11); valemile (17) saame anda kuju

$$m(\vec{w}_r + \vec{w}_ü + \vec{w}_c) = \vec{F}$$

Viime saadud tulemuses liikmed $\vec{w}_ü$ ja \vec{w}_c teisele poole võrdusmärgi ning toome sisse abitähistused:

$$\vec{J}_ü = -m\vec{w}_ü, \quad \vec{J}_c = -m\vec{w}_c, \quad (18)$$

saame

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{J}_ü + \vec{J}_c. \quad (19)$$

¹ Paljudes mehhaanikaprobleemides on oluline just relatiivne kiirendus. Nii näiteks maapinna lähedaste objektide liikumise uurimisel huvitab meid tavaliselt ikkagi vaid nende kehade kiirendus maapinna suhtes, mitte aga kiirendus mingis "paigalseisvas" (näiteks päikesega ühendatud) teljestikus.

Tulemus (19) kannab relatiivse liikumise dünaamika põhivõrrandi nimetust. Suurusi \vec{T}_0 ja \vec{T}_C nimetatakse ülekande- ja Coriolise inertstungideks.

Valemite (17) ja (19) võrdlemine viib järgmisele järeldusele:

Tuues sisse ülekande ja Coriolise inertstungid, võime anda relatiivse liikumise dünaamika põhivõrrandile formaalselt sama kuju, mis on Newtoni II seadust esitaval valemil paigalseisvas teljestikus.

Inertstungid \vec{T}_0 ja \vec{T}_C tõime valemisse (19) sisse formaalselt. Seoses sellega kerkib küsimus inertstungide olemusest: kas need tungid on ainuüksi kujuteldavad (fiktiivsed) või esinevad nad ka tõepoolest tegelikkuses. Asudes selle probleemi lahendamisele, kitsendame esialgu ülesandeseadet ja vaatleme vaid maakera pöörlemisest tingitud Coriolise inertstungi mõju maapealsete objektide liikumisele.

Lähtume eelmises punktis toodud ülesandest ning joonisest 9. Kanname sellele joonisele Coriolise inertstungi \vec{T}_C , võttes arvesse, et ta on vastassuunaline Coriolise kiirendusele \vec{w}_C . Et niisugune tung \vec{T}_C tegelikkuses tõepoolest eksisteerib, selle poolt kõnelevad mitmesugused tähelepanekud. Eelkõige on märgatud, et põhjapoolkeral on meridiaani sihis voolavate jõgede (näit. Volga) parempoolsed kaldad enam uuristatud kui vasakpoolsed; see nn. Baeri seadus¹ on seletatav ainuüksi Coriolise inertstungi mõjuga. Samal põhjusel avaldavad meridiaani sihis liikuva veduri rattad horisontaalsurvet parempoolsele rööpale. Ka see tõsiasi on kooskõlas kogemustega: on märgatud, et põhjapoolkeral kulub rongide ühesuunalisel liikumisel parempoolne rööbas kiiremini kui vasakpoolne. Coriolise inertstungi mõjuga on seletatavad veel mitmed teisedki nähtused (meridiaani suunas põhjapoolkeral väljalastud kahu-

¹ Akadeemik K.E. Baer sündis 1792.a. Eestimaal end. Piibe mõisas, suri 1876.a. Tartus. Alates a. 1869 oli Tartus Looduseuurijate Seltsi esimeheks.

rimürsk kaldub kõrvale paremale; passaattuuled ei puhu mitte põhja-lõuna suunas, vaid kalduvad kõrvale läänesuunas jne.). Kõik need tähelepanekud viivad maa peal asuva vaatleja arvamusele, et Coriolise inertstung võib teha tööd ja on seega reaalne. Sama võiks ta väita ka ülekandeinertstungi kohta.

Hoopis teistsugusele järeldusele tuleks vaatleja, kes asub väljaspool maakera. Selle vaatleja arvates oleksid inertstungid \vec{J}_C ja $\vec{J}_Ü$ fiktiivsed; niisugused nähtused, nagu jõgede parema kalda uuristamine, kahurimürsu kõrvalekaldumine jne. oleksid tema arvates tingitud ainuüksi maakera pöörlemise mõjust (s.t. on taandatavad kinemaatilistele efektidele).

Kõike eeltoodut kokku võttes võime väita, et Coriolise ja ülekandeinertstung on absoluutses teljestikus fiktiivsed; liikuvast teljestikus (täpsemini öeldes - antud teljestiku suhtes mitteinertsiaalselt liikuvast teljestikus) aga reaalsed.

Vaatleme lõpuks veel erijuhtu, kus relatiivne liikumine puudub; siis $\vec{v}_R = \vec{w}_R = \vec{w}_C = 0$ ning valem (19) saab kuju

$$0 = \vec{F} + \vec{J}_Ü. \quad (20)$$

See on aga meile juba tuttav d'Alembert'i printsiip. See- ga näeme, et d'Alembert'i printsiip sisaldub erijuhuna relatiivse liikumise dünaamika põhivõrrandis.

6. Masspunkti relatiivse liikumise võrrandid maakeraga ühendatud teljestikus.

Vaatleme nüüd mingit masspunkti P , mis liigub maakeraga pinna läheduses. Maakeraga kaasaliikuv teljestik (ξ, η, ζ) olgu valitud järgmiselt: ξ - telg olgu suunatud piki meridiaani põhjast lõunasse, η - telg piki paralleelringi puutumat itta, ζ - telg piki maakera raadiust suunaga tsentrist eemale. Koha geograafiline laius olgu φ .

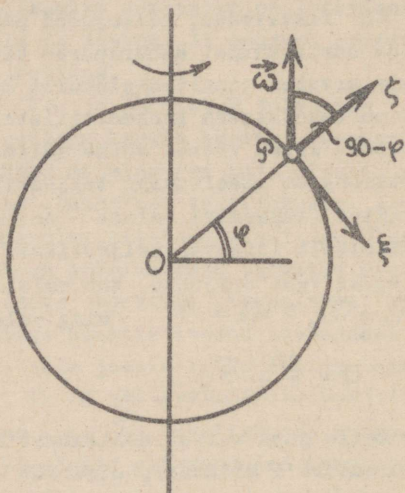
Arvutame esmalt Coriolise kiirenduse komponendid (ξ, η, ζ) teljestikus. Selleks lähtume valemist (14). Kuna vektorite $\vec{\omega}$ ja \vec{v}_R komponendid on $\vec{\omega} = (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ ja $\vec{v}_R = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$,

siis saame

$$\vec{w}_c = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_n = 2 \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{e}_\xi & \vec{e}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Jooniselt 10 näeme, et nurkkiirusvektori $\vec{\omega}$ projektsioonideks on

$$\omega_\xi = -\omega \cos \varphi, \quad \omega_\eta = 0, \quad \omega_\zeta = \omega \sin \varphi. \quad (22)$$



Joon. 10.

Asendades tulemused valemisse (21) ja arvutades välja determinandi, leiame Coriolise kiirenduse komponendid:

$$\begin{aligned} w_{c\xi} &= -2 \omega \eta \sin \varphi \\ w_{c\eta} &= 2 \omega (\xi \sin \varphi + \zeta \cos \varphi) \\ w_{c\zeta} &= -2 \omega \eta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (23)$$

Ülekandekiirenduse suuruseks on $w_{\ddot{u}} = R\omega^2$, kus R on paralleelringi raadius. Hindame selle kiirenduse suurusjärku. Et

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164} \frac{1}{\text{sek}} = 0,000073 \frac{1}{\text{sek}}$$

ja

$$r = R \cos \varphi < R = 6378000 \text{ m,}$$

siis on

$$\omega r = \omega^2 r \sim 0,034 \frac{\text{m}}{\text{sek}^2};$$

see on aga niivõrd väike suurus, et teda praktiliselt ei pruugi arvestada (võrdluseks olgu märgitud, et näit. raskuskiirendus $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{sek}^2}$ on ülekandekiirendusest umbes 300 korda suurem!)

Eespool öeldust järgneb, et masspunkti relatiivsel liikumisel maakera suhtes võib arvestamata jätta ülekandeinertsiooni. Relatiivse liikumise dünaamika põhivõrrand (19), projekteerituna (ξ, η, ζ) teljestiku telgedele, saab seega kuju

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \frac{1}{m} F_{\xi} + 2\omega \dot{\eta} \sin \varphi \\ \ddot{\eta} &= \frac{1}{m} F_{\eta} - 2\omega (\dot{\xi} \sin \varphi + \dot{\zeta} \cos \varphi) \\ \ddot{\zeta} &= \frac{1}{m} F_{\zeta} + 2\omega \dot{\eta} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (24)$$

Integreerides diferentsiaalvõrrandite süsteemi (24), saame masspunkti relatiivse liikumise seaduse kujul

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \zeta = \zeta(t),$$

millega püstitatud ülesanne ongi lahendatud.

Võrrandsüsteemi (24) integreerimise viime läbi allpool (p. 7-8) kahe konkreetse ülesande ju hul.

7. Langevate kehade kõrvalekaldumine vertikaalsuunast.

Vaatleme masspunkti, mida lastakse langeda ilma algkiiruseeta maapinnale kõrguselt R . Lihtsuse mõttes jätame õhutakistuse arvestamata.

Nüüd on valemis (24) $F_{\xi} = F_{\eta} = 0$, $F_{\zeta} = -mg$ (g - raskuskiirendus). Et ω ja φ on konstandid, siis võime süsteemi (24) kõiki võrrandeid integreerida aja järgi; seda tehes saame

$$\begin{aligned}\xi &= 2\omega\eta\sin\varphi + C_1 \\ \eta &= -2\omega(\xi\sin\varphi + \zeta\cos\varphi) + C_2 \\ \zeta &= -gt + 2\omega\eta\cos\varphi + C_3.\end{aligned}\quad (25)$$

Integreerimiskonstandid C_1, C_2, C_3 määrame algandmetest. Valime koordinaatide alguse punkti, millest algas langemine, siis on $\xi(0) = \eta(0) = \zeta(0) = 0, \dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = \dot{\zeta}(0) = 0$ ja seega ka

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Kuna süsteemi (25) edasine täpne integreerimine on üsna keerukas, siis kasutame ligikaudset meetodit.

Et suurus ω on väga väike, siis arendame lahendi ritta ω astmete järgi:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \xi_1\omega + \xi_2\omega^2 + \dots \\ \eta &= \eta_0 + \eta_1\omega + \eta_2\omega^2 + \dots \\ \zeta &= \zeta_0 + \zeta_1\omega + \zeta_2\omega^2 + \dots\end{aligned}\quad (26)$$

Reaksarenduste kordajad $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots$ on mingid aja funktsioonid, mis määratakse nii, et süsteem (25) oleks rahuldatud mistahes parameetri ω väärtuse korral. Asendades reaksarendused (26) võrranditesse (25) ja võrrutades koefitsiendid samade ω astmete juures, saame

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 &= \dot{\eta}_0 = 0, & \dot{\zeta} &= -gt \\ \dot{\xi}_1 &= 0, & \dot{\eta}_1 &= -2(\xi_0\sin\varphi + \zeta_0\cos\varphi) \\ \dot{\zeta}_1 &= -2\eta_0\cos\varphi.\end{aligned}\quad (27)$$

Integreerides süsteemi (27) ning määrates integreerimiskonstandi algandmetest $\xi_0(0) = \eta_0(0) = \zeta_0(0) = 0, \xi_1(0) = \eta_1(0) = \zeta_1(0) = 0$, leiame, et

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \eta_0 = 0, & \xi_1 &= -\frac{1}{2}gt^2 \\ \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= \frac{1}{3}gt^3\cos\varphi, & \zeta_1 &= 0.\end{aligned}\quad (28)$$

Samal viisil võiks määrata ka funktsioonid ξ_2, η_2, ζ_2 valemist (26); seda aga pole tarvis teha, sest kuna $\omega^2 \sim 10^{-8} \frac{1}{\text{sec}}$, siis liikmed $\xi_2\omega^2, \eta_2\omega^2, \zeta_2\omega^2$ on väga väikesed ja eelmisi liikmeid oluliselt ei mõjuta.

Seega oleme praktikas vajaliku täpsuse piirides jõudnud järgmistele tulemustele:

$$\begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos \epsilon \\ \zeta = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (29)$$

Elimineerides kahest viimasest võrrandist aja t ja asetades koordinaadi ζ asemele tema väärtuse langemise lõpus $\zeta = -h$, saame

$$\eta = \frac{2}{3} h \omega \cos \epsilon \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (30)$$

Kuna $\eta > 0$, siis peavad kõik langevad kehad kalduma vertikaalsuunast kõrvale ida poole; selle kõrvalekaldumise suurus on määratav valemiga (30).

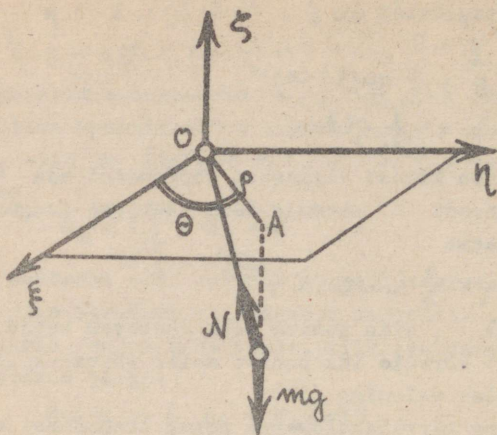
Et niisugune kõrvalekaldumine peaks tõepoolest esinema, oletas juba Newton.

Newtoni väidet on korduvalt kontrollitud katseliselt. Nii näiteks 1831.a. teostas Freibergi kaevanduse äähtis katseid sakslane Reich. Langemiskõrguseks oli 158 m, koha geograafiline laius $\epsilon = 42^\circ$. Asendades need andmed valemisse (30), saaksime kõrvalekalde suuruseks 27,5 cm; Reichi poolt läbiviidud 106 katse keskmine andis aga 28,3(± 4) cm.

8. Foucault' pendel.

Vaatleme pendlit, mis võngub maakera pinna läheduses. Pendli pikkus olgu ℓ , pendli kaal mg . Koordinaadistiku valime nii, nagu näidatud joonisel 10; koordinaatide alguse paigutame pendli kinnituspunkti. Pendlikuulikesele mõjub 2 tungi: raskustung mg ja niidi pingeline N . Kuna niidi sihi-koosinused on $\frac{\xi}{\ell}$, $\frac{\eta}{\ell}$, $\frac{\zeta}{\ell}$, siis välistungide projektsioonid koordinaattelgedele (ξ, η, ζ) võrduvad (joon. 11):

$$\begin{aligned} F_\xi &= -N \frac{\xi}{\ell} \\ F_\eta &= -N \frac{\eta}{\ell} \\ F_\zeta &= -N \frac{\zeta}{\ell} - mg. \end{aligned} \quad (31)$$



Joon. 11.

Asendades need suurused võrrandisüsteemi (24), saame

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -\frac{N\xi}{ml} + 2\omega\eta\sin\varphi \\ \ddot{\eta} &= -\frac{N\eta}{ml} - 2\omega(\dot{\xi}\sin\varphi + \dot{\zeta}\cos\varphi) \\ \ddot{\zeta} &= -\frac{N\zeta}{ml} - g + 2\omega\eta\cos\varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

Et süsteemi (32) integreerimine on komplitseeritud, siis piirdume ainult pendli väikeste võnkumiste juhuga; sel korral on koordinaadid ξ ja η väikesed, võrreldes koordinaadiga ζ .

Kuna pendli pikkus on konstantne, siis

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2.$$

Jättes ära väikesed liikmed ξ^2 , η^2 ja arvestades, et joonise 10 kohaselt $\dot{\zeta} < 0$, näeme, et $\dot{\zeta} \approx -l = \text{const}$. Et aga nüüd $\dot{\zeta} = \ddot{\zeta} = 0$, siis süsteemi (32) kolmandast võrrandist nähtub, et $N = mg$. Asendades selle tulemuse süsteemi (32) kahte esimesse võrrandisse, saame

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\frac{g}{l}\xi + 2\omega\eta\sin\varphi \\ \ddot{\eta} &= -\frac{g}{l}\eta - 2\omega\xi\sin\varphi.\end{aligned}\quad (33)$$

Korrutame nüüd süsteemi (33) esimest võrrandit $-\eta$ -ga, teist ξ -ga ja liidame tulemused:

$$\xi\ddot{\eta} - \eta\ddot{\xi} = -2\omega(\xi\xi + \eta\eta)\sin\varphi.\quad (34)$$

Läheme üle polaarkoordinaatidele ϱ ja θ , kusjuures ϱ olgu niidi OP projektsioon $\xi\eta$ -tasapinnale, θ olgu nurk ξ -telje ja raadiusvektori ϱ vahel. Nagu nähtub jooniselt 10, on üleminekuvalemiteks

$$\xi = \varrho\cos\theta, \quad \eta = \varrho\sin\theta.\quad (35)$$

Et nüüd

$$\begin{aligned}2(\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta}) &= \frac{d}{dt}(\xi^2 + \eta^2) = \frac{d\varrho^2}{dt} \\ \xi\ddot{\eta} - \eta\ddot{\xi} &= \frac{d}{dt}(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) = \frac{d}{dt}(\varrho^2\dot{\theta}),\end{aligned}$$

siis valem (34) saab polaarkoordinaatides kuju

$$\frac{d}{dt}(\varrho^2\dot{\theta}) = -\omega\sin\varphi \frac{d\varrho^2}{dt}$$

ehk pärast integreerimist

$$\varrho^2\dot{\theta} = -\omega\varrho^2\sin\varphi + C.\quad (36)$$

Oletame, et pendel alustas võnkumisi tasakaaluseisundist algmomendil $t=0$ saadud tõuke tõttu; sel korral $\varrho(0) = 0$ ning valemist (36) nähtub, et ka $C = 0$. Et aga $\dot{\varrho}(t) \neq 0$, siis võime võrrandi (36) mõlemaid pooli ϱ^2 -ga jagada ja saame

$$\dot{\theta} = -\omega\sin\varphi.\quad (37)$$

Integreerides veel kord tulemust (37) näeme, et

$$\theta = \theta_0 - \omega t\sin\varphi.\quad (38)$$

Sümboliga θ_0 on siin tähistatud integreerimiskonstandi väärtus.

Valemitest (37) - (38) nähtub, et pendli võnketasapind ei jää ruumis püsima, vaid pöörduv konstantse nurkkiirusega

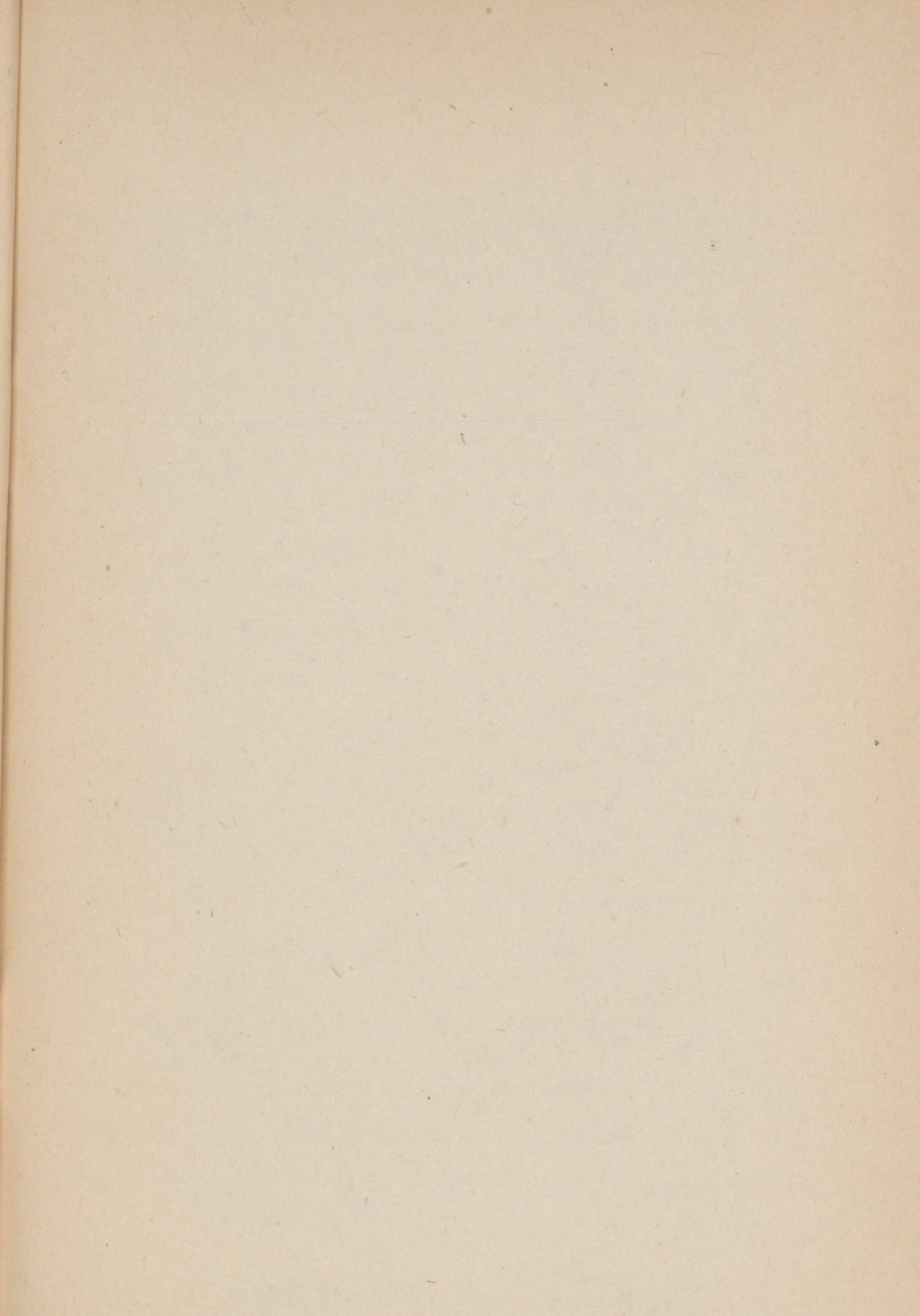
θ ümber ξ -telje. Pöördumine toimub suunas idast üle lõuna
 läände: s.o. vastupidiselt maakera pöörlemise suunale. Vönke-
 tasapinna ühe täispöörde tegemiseks kuluv aeg on

$$T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|} = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} \quad (39)$$

Pendli vönketasapinna pöördumise avastas prantsuse füü-
 sik L. Foucault (fukoo), kes 1851.a. korraldas Pariisis Pant-
 heonis oma kuulsa pendli katse. Katset on hiljem mitmel kor-
 ral korratud, kusjuures kõigi katsete tulemused on olnud koos-
 kõlas valemiga (39).

SISUKORD.

§ 1. MASSPUNKTI LIIKUMINE TSENTRAALSETE TUNGIDE VÄLJAS.	4
1. Tsentraalse tungivälja mõiste. Masspunkti trajektoor	4
2. Sektorkiirus	6
3. Pindalade teoreem	7
4. Binet' valem	8
5. Newtoni ülesanne	10
6. Ülemaailmse gravitatsiooni seadus	13
7. Kahe keha probleem	14
8. Ajaloolisi märkmeid	17
§ 2. RELATIIVNE LIIKUMINE	17
1. Relatiivse liikumise mõiste	17
2. Kiiruste liitmislause	18
3. Kiirenduste liitmislause	21
4. Coriolise kiirendus	23
5. Relatiivse liikumise dünaamika põhivõrrand	27
6. Masspunkti relatiivse liikumise võrrandid maake- raga ühendatud teljestikus	29
7. Langevate kehade kõrvalekaldumine vertikaal- suunast	31
8. Foucault' pendel	33



Hind 7 kop.

A23770

79124

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00366164 4