

*Haus des Königs von Preussen
Febr. 1812
für den Gebrauch zu den
in hiesigen*

Heinrich

Grundriss der Algebra

für

Gymnasien.

*Tartu Ülikooli Kirjastus
Kasimatuks*

Von

O. Kölpin,

Oberlehrer der Mathematik am Gouvernements-Gymnasium
zu Mitau.



Grundriss der Algebra

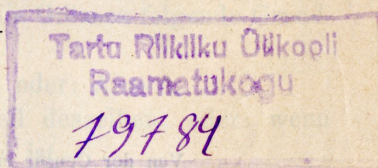
für

Gymnasien.

Von

O. Kölpin,

Oberlehrer der Mathematik am Gouvernements-Gymnasium zu Mitau.



M i t a u.

Druck von J. F. Steffenhagen und Sohn.

—
1881.

Von der Censur erlaubt. Riga, den 31. August 1881.

**TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU**

i 216695326

§ 1. Die Mathematik ist die Lehre von den Grössen.

Sie zerfällt in die Arithmetik und die Geometrie. Die Arithmetik ist die Lehre von den Zahlen und die Geometrie ist die Lehre von den Raumgrössen.

§ 2. Die Mathematik setzt über die Grössen folgende Grundsätze voraus:

I. Jede Grösse ist sich selbst gleich; oder: $A = A$.

II. Das Ganze ist grösser als ein Theil desselben; oder: wenn

$$A = B + C \text{ ist, so ist}$$

$$A > B, \text{ und ebenso } A > C.$$

III. Wenn zwei Grössen einer dritten Grösse gleich sind, so sind sie einander gleich; oder:

$$\text{Wenn } A = B \text{ und } A = C \text{ ist,}$$

$$\text{so ist auch } B = C.$$

VI. Gleiches zu Gleichem addirt, Gleiches von Gleichem subtrahirt, Gleiches mit Gleichem multiplicirt und Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches; oder: wenn

$$A = B \text{ und } C = D \text{ ist, so ist}$$

$$A + C = B + D$$

$$A - C = B - D$$

$$A \cdot C = B \cdot D$$

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}.$$

§ 3. Unter der natürlichen Zahlenreihe versteht man die Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, welche so weit man will fortgesetzt werden kann.

Das Intervall zwischen je zwei aufeinander folgenden Zahlen wird die Einheit genannt. Die natürliche Zahlenreihe stelle man sich vor unter dem Bilde einer Reihe von Punkten, welche sich auf einer geraden Linie in gleichen Zwischenräumen neben einander geordnet befinden.

Sie heissen absolute Zahlen im Gegensatze zu den algebraischen Zahlen und ganze Zahlen im Gegensatze zu den Brüchen, welche gleichfalls ihre Stelle in der natürlichen Zahlenreihe finden zwischen je zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen.

Zur sichtbaren Bezeichnung von Zahlen dienen die Ziffern oder in allgemeinen Untersuchungen die Buchstaben.

§ 4. Die durch Verlängerung der natürlichen Zahlenreihe rückwärts über Eins hinaus, entstehende Zahlenreihe wird bezeichnet
 $\dots - 5, - 3, - 2, - 1, 0, + 1, + 2, + 3, + 4, + 5, \dots$

Die Zahlen der dadurch erweiterten Zahlenreihe führen den Namen algebraische Zahlen.

Die ursprünglich vorhanden gewesenen heissen hier positive Zahlen.

Die Zahl, zu welcher man gelangt, wenn man von Eins um eine Einheit rückwärts schreitet, erhält den Namen Null. Oder

$$0 = 1 - 1.$$

Die Zahlen endlich, zu denen man gelangt, wenn man von Eins um mehrere Einheiten rückwärts schreitet, werden negative Zahlen genannt.

§ 5. Mit Ausnahme der Null besteht jede algebraische Zahl $\pm a$ aus einem Vorzeichen $\pm$ und einem Zahlwerthe a .

Das Vorzeichen $+$ für positive und $-$ für negative Zahlen zeigt an, auf welcher Seite der Zahlenreihe sich die Zahl befindet.

Der Zahlwerth zeigt an, welche Stelle die Zahl in der Reihe der positiven oder negativen Zahlen einnimmt.

§ 6. Rechnen heisst: Von einer gegebenen Zahl in der Zahlenreihe auf eine vorgeschriebene Weise zu einer neuen Zahl fortschreiten. Diese letzte erhaltene Zahl ist das Resultat der Rechnung.

Man unterscheidet drei Grundrechnungsarten: Addiren, Multipliciren und Potenziren und die Umkehrung dieser Rechnungsarten: Subtrahiren, Dividiren, Wurzelausziehen und Logarithmiren.

§ 7. Zu einer gegebenen Zahl eine zweite addiren heisst: von der gegebenen Zahl in der Zahlenreihe um so viel Einheiten oder Theile der Einheit fortschreiten, wie die zweite gegebene Zahl anzeigt.

Die beiden gegebenen Zahlen heissen Summanden, und die Zahl, zu der man gelangt, wird die Summe genannt.

Beisp. $(+ 2) + (- 5) = - 3$, $(- 7) + (+ 11) = + 4$ etc.

§ 8. Zwei Zahlen von gleichem Vorzeichen werden addirt, indem man ihre Zahlwerthe addirt und dieser Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen giebt. Zwei Zahlen von verschiedenem Vorzeichen werden addirt, indem man den kleineren Zahlwerth von dem grösseren subtrahirt und dieser Differenz das Vorzeichen des grösseren Zahlwerths giebt.

Beh. $(+ a) + (+ b) = + (a + b)$

$(- a) + (- b) = - (a + b)$

$(+ a) + (- b) = + (a - b)$ oder $- (b - a)$

$(- a) + (+ b) = - (a - b)$ oder $+ (b - a)$.

Bew. $(+ a) + (+ b)$ zeigt an, man soll von der Zahl $+ a$ aus in positiver Richtung um b Einheiten fortschreiten. Dies ist dasselbe, als ob man zu der Zahl a die Zahl b addirt. Folglich gelangt man zu der Zahl $a + b$ mit dem Vorzeichen $+$ versehen, das ist $+(a + b)$.

$(- a) + (- b)$ zeigt an, man soll von der Zahl $- a$ aus in negativer Richtung um b Einheiten fortschreiten. Dies ist dasselbe, als ob man zu der Zahl a die Zahl b addirt. Folglich gelangt man zu der Zahl $a + b$ mit dem Vorzeichen $-$ versehen, das ist $-(a + b)$.

$(+ a) + (- b)$ zeigt an, man soll von der Zahl $+ a$ aus in negativer Richtung um b Einheiten fortschreiten. Dies ist dasselbe, als ob man von der Zahl a die Zahl b subtrahirt. Folglich gelangt man, wenn $a > b$ ist, zu der Zahl $a - b$ mit dem Vorzeichen $+$ versehen, das ist $+(a - b)$. Oder man gelangt, wenn $a < b$ ist, zu der Zahl $b - a$, mit dem Vorzeichen $-$ versehen, das ist $-(b - a)$.

$(- a) + (+ b)$ zeigt an, man soll von der Zahl $- a$ aus in positiver Richtung um b Einheiten fortschreiten. Dies ist dasselbe, als ob man von der Zahl a die Zahl b subtrahirt. Folglich gelangt man, wenn $a > b$ ist, zu der Zahl $a - b$ mit dem Vorzeichen $-$ versehen, das ist $-(a - b)$. Oder man gelangt, wenn $a < b$ ist, zu der Zahl $b - a$ mit dem Vorzeichen $+$ versehen, das ist $+(b - a)$.

§ 9. Zwei Zahlen von gleichen Zahlenwerthen und verschiedenen Vorzeichen geben zur Summe Null.

$$(+ a) + (- a) = 0.$$

Wenn Null Theil einer Summe ist, so ist die Summe gleich dem anderen Theile.

$$0 + a = a.$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 16 u. 17.

§ 10. Subtrahiren heisst: zu einer gegebenen Summe und einem gegebenen Theile den zweiten Theil suchen.

Die gegebene Summe wird der Minuend, der gegebene Theil der Subtrahend und der gesuchte Theil die Differenz genannt.

Man bezeichnet eine Differenz, wenn a der Minuend und b der Subtrahend ist, mit

$$a - b.$$

§ 11. Werden Differenz und Subtrahend addirt, so ist die Summe beider gleich dem Minuenden.

$$(a - b) + b = a.$$

§ 12. Eine Zahl wird das Entgegengesetzte einer anderen genannt, wenn beide zur Summe Null geben. Z. B. $+ 7$ u. $- 7$, 0 u. 0 , $+ a$ u. $- a$ etc.

§ 13. Die Subtraction ist eine Addition, wenn man statt des Subtrahenden sein Entgegengesetztes setzt.

Beh. $a - b = a + \text{Entgs. von } b$.

Bew. Wenn man zur gegebenen Differenz $a + \text{Entgs. von } b$ den Subtrahenden b addirt, so ist $(a + \text{Entgs. von } b) + b = (\text{Entgs. von } b + b) + a$ folglich ist

$(\text{Entgs. von } b + b) + a = 0 + a$, mithin auch

$$(a + \text{Entgs. von } b) + b = a.$$

Die Subtraction algebraischer Zahlen wird demnach ausgeführt, indem man die Vorzeichen des Subtrahenden in die entgegengesetzten verwandelt und darauf addirt.

Beisp. Meier Hirsch pag. 17 u. 18.

§ 14. Eine Zahl mit einer Zahl multipliciren heisst: die erstere so viel mal als Theil setzen, wie die zweite Zahl anzeigt.

Die als Theil zu setzende Zahl heisst der Multiplicand, die Zahl, welche anzeigt, wie oft erstere als Theil gesetzt werden soll, der Multiplikator; beide zusammen werden Factoren genannt; und die gesuchte Zahl heisst das Product.

Man bezeichnet ein Product, wenn a der Multiplicand und b der Multiplikator ist, mit

$$a \cdot b \text{ oder } ab.$$

Besteht ein Product aus einem Ziffernfactor und einen Buchstabenfactor, so nennt man ersteren den Coefficienten des Buchstaben.

§ 15. Eine algebraische Zahl a mit einer algebraischen Zahl b multipliciren heisst: Wenn der Multiplikator b positiv ist, den Multiplicanden a so viel mal als Theil setzen, wie die Zahl b anzeigt; wenn dagegen der Multiplikator b negativ ist, das Entgegengesetzte des Multiplicanden a so viel mal als Theil setzen, wie die Zahl b anzeigt.

§ 16. Gleiche Vorzeichen geben ein positives Product, ungleiche Vorzeichen geben ein negatives Product.

Der Zahlwerth des Products ist gleich dem Producte der Zahlwerthe der Factoren.

$$\text{Beh. } (+a) \cdot (+b) = +ab$$

$$(-a) \cdot (-b) = +ab$$

$$(-a) \cdot (+b) = -ab$$

$$(+a) \cdot (-b) = -ab.$$

Bew. $(+a) \cdot (+b)$ zeigt an, man soll den Multiplicanden $+a$ b mal als Theil setzen; also

$$+a + a + a + a + \dots (b \text{ mal}), \text{ das ist } +ab$$

$(-a) \cdot (-b)$ zeigt an, man soll das Entgegengesetzte des Multiplicanden $-a$ b mal als Theil setzen; also

$$+a + a + a + a + \dots (b \text{ mal}), \text{ das ist } +ab.$$

$(-a) \cdot (+b)$ zeigt an, man soll den Multiplicanden $-a$ b mal als Theil setzen; also

$$-a - a - a - a - \dots (b \text{ mal}), \text{ das ist } -ab.$$

$(+a) \cdot (-b)$ zeigt an, man soll das Entgegengesetzte von Multiplicanden $+a$ b mal als Theil setzen; also

$$-a - a - a - a - \dots (b \text{ mal}), \text{ das ist } -ab.$$

Ein Product wird 0, wenn einer seiner Factoren 0 ist.

Beisp. Meier Hirsch pag. 19, 20, 21.

§ 17. Dividiren heisst: zu einem gegebenen Producte und einem gegebenen Factor den zweiten Factor suchen.

Das gegebene Product wird der Dividend, der gegebene Factor der Divisor, und der gesuchte Factor der Quotient genannt.

Man bezeichnet einen Quotienten, wenn a der Dividend und b der Divisor ist; durch

$$a : b \text{ oder } \frac{a}{b}$$

§ 18. Werden Quotient und Divisor multiplicirt, so ist das Product gleich dem Dividenten.

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

§ 19. Gleiche Vorzeichen im Dividenten und Divisor geben einen positiven Quotienten, ungleiche Vorzeichen geben einen negativen Quotienten.

Der Zahlwerth des Quotienten ist gleich dem Quotienten der Zahlwerthe vom Dividenten und Divisor.

$$\text{Beh. } (+ a) : (+ b) = + \frac{a}{b}$$

$$(- a) : (- b) = + \frac{a}{b}$$

$$(- a) : (+ b) = - \frac{a}{b}$$

$$(+ a) : (- b) = - \frac{a}{b}$$

Bew. Nach § 16 u. § 18 ist

$$\left(+ \frac{a}{b}\right) \cdot (+ b) = + a$$

$$\left(+ \frac{a}{b}\right) \cdot (- b) = - a$$

$$\left(- \frac{a}{b}\right) \cdot (+ b) = - a$$

$$\left(- \frac{a}{b}\right) \cdot (- b) = + a.$$

Null dividirt durch eine von Null verschiedene Zahl giebt als Quotienten Null.

$$\frac{0}{a} = 0.$$

Null dividirt durch Null giebt einen Quotienten, welcher jeder beliebigen Zahl gleich ist.

$$\frac{0}{0} = \text{jeder beliebigen Zahl.}$$

Eine Zahl dividirt durch Null giebt zum Quotienten eine unendlich grosse Zahl.

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

Mithin ist auch $\infty \cdot 0 = \text{jeder beliebigen Zahl.}$

Die Zahl Null kann überhaupt wie eine Grenze angesehen werden, welcher ein Bruch immer näher gebracht wird, wenn man den Nenner desselben ohne Aufhören wachsen lässt, so dass Null selbst als äusserste Grenze dieses abnehmenden Bruches erscheint.

Beisp. Meier Hirsch pag. 21, 22, 23.

§ 20. Unter einem arithmetischen Verhältniss versteht man die Verbindung zweier Zahlen durch das Subtractionszeichen. Die beiden Zahlen werden die Glieder des Verhältnisses genannt. Der Minuend heisst das Vorderglied, und der Subtrahend das Hinterglied.

$$a - b.$$

Ein arithmetisches Verhältniss bleibt seinem Werthe nach ungeändert, wenn man zu den beiden Gliedern desselben gleiche Zahlen addirt, oder von beiden Gliedern desselben gleiche Zahlen subtrahirt.

§ 21. Unter einem geometrischen Verhältniss versteht man die Verbindung zweier Zahlen durch das Divisionszeichen. Die beiden Zahlen werden die Glieder des Verhältnisses genannt. Der Dividend heisst das Vorderglied, und der Divisor das Hinterglied.

$$a : b.$$

Ein geometrisches Verhältniss bleibt seinem Werthe nach ungeändert, wenn man beide Glieder desselben mit ein und derselben Zahl multiplicirt oder durch ein und dieselbe Zahl dividirt.

§ 22. Eine Proportion ist die Verbindung zweier gleichen Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen. Von den vier Gliedern dieser beiden Verhältnisse werden das erste und vierte Glied äussere Glieder, das zweite und dritte Glied innere Glieder der Proportion genannt. Das erste und dritte Glied heissen Vorderglieder, das zweite und vierte Glied Hinterglieder auch entsprechende oder homologe Glieder der Proportion. Das vierte Glied heisst insbesondere die vierte Proportionale zu den drei ersten Gliedern.

$$a - b = c - d$$

$$a : b = c : d.$$

§ 23. Eine stetige Proportion ist eine Proportion, deren innere Glieder gleich sind. Das mittlere Glied einer stetigen Proportion wird die mittlere Proportionale der beiden äusseren Glieder, und das vierte Glied einer stetigen Proportion die dritte Proportionale der beiden ersten Glieder genannt.

$$a - b = b - c$$

$$a : b = b : c.$$

§ 24. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äusseren Glieder gleich der Summe der inneren Glieder.

Vorauss. $a - b = c - d$ ist eine arithm. Prop.

$$\text{Beh. } a + d = b + c$$

$$\begin{array}{l} \text{Bew. } a - b = c - d \\ b + d = b + d \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a - b = c - d \\ b + d = b + d \end{array}} \right\} \text{addirt}$$

$$a + d = b + c.$$

Aus zwei gleichen Summen lässt sich stets eine arithmetische Proportion bilden, wenn man die Theile der einen Summe zu äusseren Gliedern, und die Theile der anderen Summe zu inneren Gliedern macht.

$$a + b = c + d \text{ folglich}$$

$$a - c = d - b$$

§ 25. Zu drei gegebenen Gliedern a, b, c einer arithmetischen Proportion findet man die vierte Proportionale, indem man

das zweite und dritte Glied addirt, und von dieser Summe das erste Glied subtrahirt.

Vorauss. $a - b = c - x$ ist eine arithm. Prop.

Beh. $x = b + c - a$

Bew. $\left. \begin{array}{l} a - b = c - x \\ c = c \end{array} \right\} \text{ subtrahirt}$

$a - b - c = -x$ oder mit -1 multipl.

giebt $x = b + c - a$.

Zu zwei gegebenen Gliedern a, b wird die dritte Proportionale gefunden, indem man von dem doppelten zweiten Gliede das erste subtrahirt.

aus $a - b = b - x$ folgt

$$x = 2b - a$$

Zu zwei gegebenen Gliedern a, b wird die mittlere Proportionale gefunden, indem man die Summe der beiden Glieder durch 2 dividirt.

aus $a - x = x - b$ folgt

$$x = \frac{a + b}{2}$$

§ 26. Unter dem arithmetischen Mittel zweier oder mehrerer Zahlen versteht man die Summe dieser Zahlen dividirt durch die Anzahl derselben.

Sind die Zahlen $a, b, c, d, \dots n$ gegeben, so ist das arithmetische Mittel:

$$\frac{a + b + c + d + \dots n}{n}$$

§ 27. In jeder geometrischen Proportion ist das Product der äusseren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Vorauss. $a : b = c : d$ ist eine geom. Prop.

Beh. $ad = bc$

Bew. $\left. \begin{array}{l} a : b = c : d \\ bd = bd \end{array} \right\} \text{ multipl.}$

giebt $ad = bc$.

Aus zwei gleichen Producten lässt sich stets eine geometrische Proportion bilden, wenn man die Factoren des einen Products zu äusseren Gliedern, und die Factoren des anderen Products zu inneren Gliedern macht.

§ 28. In jeder geometrischen Proportion lassen sich die inneren Glieder, die äusseren Glieder, und die inneren und äusseren vertauschen.

Aus $a : b = c : d$ folgt

$$a : c = b : d$$

$$d : b = c : a$$

$$b : a = d : c$$

§ 29. In jeder geometrischen Proportion kann man die Vorderglieder oder Hinterglieder mit ein und derselben Zahl multipliciren oder durch ein und dieselbe Zahl dividiren.

Aus $a : b = c : d$ folgt

$$an : b = cn : d$$

$$\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$$

$$a : bn = c : dn$$

$$a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n}$$

§ 30. Aus jeder geometrischen Proportion $a : b = c : d$ folgen durch Addition oder Subtraction der Vorderglieder und Hinterglieder die Proportionen:

$$(a + b) : b = (c + d) : d$$

$$(a - b) : b = (c - d) : d$$

$$a : (a + b) = c : (c + d)$$

$$a : (a - b) = c : (c - d)$$

§ 31. Aus zwei Proportionen $a : b = m : n$ u. $b : c = p : q$ folgt durch sogenannte Zusammensetzung der Verhältnisse

$$a : c = mp : nq$$

Durch Addition oder Subtraction zweier Proportionen

$$\left. \begin{array}{l} a : b = m : n \\ a : b = p : q \end{array} \right\} \text{folgt}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{da } an = bm \\ \text{und } aq = bp \end{array} \right\} \text{addirt u. subtrahirt}$$

$$a(n + q) = b(m + p)$$

$$a(n - q) = b(m - p)$$

$$a : b = (m + p) : (n + q)$$

$$a : b = (m - p) : (n - q)$$

§ 32. Zu drei gegebenen Zahlen einer geometrischen Proportion wird die vierte Proportionale gefunden, indem man das Product aus der zweiten und dritten Zahl durch die erste dividirt.

Aus $a : b = c : x$ folgt

$$x = \frac{bc}{a}$$

Zu zwei gegebenen Zahlen einer geometrischen Proportion wird die dritte Proportionale gefunden, indem man das Quadrat der zweiten durch die erste dividirt.

Aus $a : b = b : x$ folgt

$$x = \frac{b^2}{a}$$

Zu zwei gegebenen Zahlen einer geometrischen Proportion wird die mittlere Proportionale gefunden, indem man aus dem Product der beiden gegebenen Zahlen die Quadratwurzel zieht.

Aus $a : x = x : b$ folgt

$$x = \sqrt{ab}$$

§ 33. Unter dem geometrischen Mittel zweier Zahlen versteht man die Quadratwurzel aus dem Producte der beiden Zahlen.

Sind a und b zwei gegebene Zahlen, so ist das geometrische Mittel

$$\sqrt{ab}.$$

§ 34. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist grösser als das geometrische Mittel derselben Zahlen.

Wenn $a > b$, so ist

$$\text{Beh. } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

Bew. Ist $a > b$, so ist

$$a - b > 0 \text{ also auch}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - 2ab + b^2 > 0 \\ 4ab = 4ab \end{array} \right\} \text{ addirt, giebt}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$$

$$a + b > 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

§ 35. Vier Zahlen a, b, c, d bilden eine harmonische Proportion, wenn die Differenz der beiden ersten Zahlen zu der Differenz der beiden letzten Zahlen in demselben geometrischen Verhältnisse stehen wie die erste Zahl zur letzten Zahl. Das ist

$$(a - b) : (c - d) = a : d.$$

§ 36. Eine gegebene Zahl mit einer zweiten gegebenen Zahl potenziren heisst: die erste gegebene Zahl so viel mal als Factor setzen, wie die zweite gegebene Zahl anzeigt.

Die als Factor zu setzende Zahl heisst die Basis, die Zahl, welche anzeigt, wie oft erstere als Factor gesetzt werden soll, der Exponent, und die gesuchte Zahl die Potenz.

Man bezeichnet eine Potenz, wenn a die Basis und n der Exponent ist, durch

$$a^n.$$

Die zweite Potenz führt auch den Namen Quadrat, die dritte Potenz Cubus und die vierte Potenz Biquadrat.

§ 37. Die Potenz einer positiven Zahl ist immer positiv. Die Potenz einer negativen Zahl ist positiv, wenn der Exponent gerade, und negativ, wenn der Exponent ungerade ist.

$$\begin{aligned} (+a)^{2n} &= +a^{2n}; \quad (+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}; \quad (-a)^{2n} = +a^{2n}; \\ (-a)^{2n+1} &= -a^{2n+1}. \end{aligned}$$

Die Potenz eines Bruches ist gleich der Potenz des Zählers dividirt durch die Potenz des Nenners.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

§ 38. Potenzen von gleicher Basis werden multiplicirt, indem man ihre Exponenten addirt.

$$\text{Beh. } a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\text{Bew. } a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (n mal)}$$

$$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (m mal)}$$

Hieraus folgt durch Multiplication

$$a^n \cdot a^m = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots (n \text{ mal}) \cdot a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (m mal)}$$

$$\text{oder } a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 26—29.

§ 39. Potenzen von gleicher Basis werden dividirt, indem man vom Exponenten des Dividenden den Exponenten des Divisors subtrahirt.

$$\text{Beh. } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

$$\text{Bew. } a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (n mal)}$$

$$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (m mal)}$$

Hieraus folgt durch Division

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (n mal)}}{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (m mal)}}$$

$$\text{oder } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Oder auch nach § 18.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ mit } a^m \text{ multipl.}$$

$$\frac{a^n}{a^m} \cdot a^m = a^{n-m} \cdot a^m = a^{n-m+m} = a^n.$$

§ 40. Eine Potenz mit dem Exponenten Null hat immer den Werth Eins.

$$\text{Beh. } a^0 = 1.$$

$$\text{Bew. } \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

$$a^0 = 1.$$

§ 41. Eine Potenz mit negativen Exponenten ist gleich dem Umgekehrten derselben Potenz mit positiven Exponenten

$$\text{Beh. } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{Bew. } a^{-n} = a^{0-n}$$

$$a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} \text{ folglich}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Beispiele Meier Hirsch pag. 29—33.

§ 42. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert.

$$\text{Beh. } a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\text{Bew. } a^n = a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (nmal)}$$

$$b^n = b \cdot b \cdot b \dots b \text{ (nmal)}$$

Hieraus folgt durch Multiplication

$$a^n \cdot b^n = ab \cdot ab \cdot ab \dots ab \text{ (nmal) oder}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

§ 43. Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividirt, indem man die Basis des Dividenden durch die Basis des Divisors dividirt.

$$\text{Beh. } a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\text{Bew. } a^n = a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (nmal)}$$

$$b^n = b \cdot b \cdot b \dots b \text{ (nmal)}$$

Hieraus folgt durch Division

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots \frac{a}{b} \text{ (nmal)}$$

$$\text{oder } a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Bew. nach § 18.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot b^n = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^n = a^n$$

§ 44. Eine Potenz wird potenzirt, indem man die Exponenten multiplicirt.

$$\text{Beh. } (a^n)^m = a^{nm}$$

$$\text{Bew. } (a^n)^m = a^n \cdot a^n \cdot a^n \dots a^n \text{ (mmal)}$$

$$(a^n)^m = a^{n+n+n+\dots+n} \text{ (mmal)}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 33.

§ 45. Eine Summe von zwei Theilen wird ein Binomium und eine Summe von mehr als zwei Theilen wird ein Polynomium genannt, z. B.

$a + b$ ist ein Binomium; $a + b + c$, $a + b + c + d$; etc.
sind Polynomien.

§ 46. Das Quadrat der Summe zweier Theile ist gleich der Summe der Quadrate beider Theile und dem doppelten Producte aus beiden Theilen.

$$\text{Beh. } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Bew. } \left. \begin{array}{l} a+b \\ a+b \end{array} \right\} \text{ multipl.}$$

$$\begin{array}{r} a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

§ 47. Das Quadrat der Differenz zweier Theile ist gleich der Summe der Quadrate beider Theile weniger dem doppelten Producte aus beiden Theilen.

$$\text{Beh. } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{Bew. } \left. \begin{array}{l} a-b \\ a-b \end{array} \right\} \text{ multipl.}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

§ 48. Das Product aus einer Summe und einer Differenz derselben Theile ist gleich der Differenz der Quadrate der beiden Theile.

$$\text{Beh. } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\text{Bew. } \left. \begin{array}{l} a + b \\ a - b \end{array} \right\} \text{ multipl.}$$

$$\begin{array}{r} a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist immer gleich einem Product aus der Summe und Differenz derselben Zahlen.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

§ 49. Der Cubus der Summe zweier Theile ist gleich dem Cubus des ersten Theils, vermehrt um das dreifache Product aus dem Quadrate des ersten Theils mit dem zweiten Theile, und das dreifache Product aus dem ersten Theile mit dem Quadrate des zweiten Theils und dem Cubus des zweiten Theils.

$$\text{Beh. } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{Bew. } (a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \end{array} \right\} \text{ multipl.}$$

$$\begin{array}{r} a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{array}$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 34 u. 35.

§ 50. Die Wurzel aus einer Zahl ziehen (Radiciren) heisst: Eine gegebene Zahl in so viel gleiche Factoren zerlegen als eine zweite gegebene Zahl anzeigt.

Die Zahl unter dem Wurzelzeichen heisst der Radicand und diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viel gleiche Factoren der Radicand zerlegt werden soll, heisst Wurzelexponent, die gesuchte Zahl wird Wurzel genannt.

Man bezeichnet eine Wurzel, wenn a der Radicand und n der Wurzelexponent ist, durch

$$\sqrt[n]{a}.$$

Die zweite Wurzel wird auch Quadratwurzel und die dritte Wurzel Cubikwurzel genannt. Bei der Bezeichnung der Quadratwurzel pflegt man den Wurzelexponenten wegzulassen und schreibt

$$\sqrt{a} \text{ statt } \sqrt[2]{a}.$$

§ 51. Die Wurzel mit dem Wurzelexponenten potenziert ist gleich dem Radicanden.

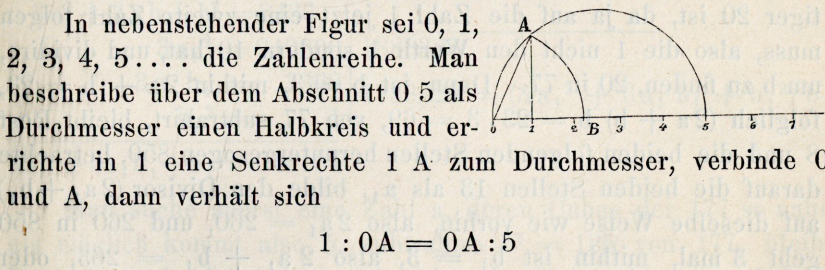
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

§ 52. Eine Zahl, aus welcher sich die Wurzel nicht genau ohne Rest ziehen lässt, der man jedoch so nahe kommen kann, wie man will, nennt man eine irrationale Zahl; die übrigen dagegen heissen rationale Zahlen.

Um irrationalen Zahlen vollkommen genau in unserer Zahlenreihe einen Platz anzuweisen, dient folgende geometrische Construction:

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= x \text{ dann ist} \\ 5 &= x^2 \text{ oder} \\ 5 : x &= x : 1.\end{aligned}$$

In nebenstehender Figur sei 0, 1, 2, 3, 4, 5.... die Zahlenreihe. Man beschreibe über dem Abschnitt 0 5 als Durchmesser einen Halbkreis und errichte in 1 eine Senkrechte 1 A zum Durchmesser, verbinde 0 und A, dann verhält sich



$$1 : OA = OA : 5$$

folglich ist B die Stelle in der Zahlenreihe, welche $\sqrt{5}$ einnimmt, wenn $OB = OA$ ist.

Die Aufgabe höhere Wurzeln als Quadratwurzeln geometrisch zu construiren kann vermittelst der geraden Linie und des Kreises nicht gelöst werden.

§ 53. Um die Quadratwurzel aus einer Zahl zu ziehen, zerlege man die gegebene Zahl von der Rechten nach der Linken

in Classen von je zwei Stellen und benutze dazu die Formel § 46, da man sich jede Zahl aus zwei Theile $a + b$ bestehend vorstellen kann.

$$a^2 + 2ab + b^2 \text{ oder auch}$$

$$a^2 + (2a + b)b.$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1\,77\,50\,43\,28} = 1\,3\,3\,2\,3, \dots & \begin{array}{l} a\,b \\ \hline a_1\,b_1 \\ \hline b_2\,b_2 \\ \hline a_3\,b_3 \end{array} \\ 1 & \\ \hline 2a + b & \\ 23 & \begin{array}{l} 77 \\ 69 = (2a + b) \end{array} \\ \hline 2a_1 + b_1 & \\ 26 \quad 3 & \begin{array}{l} 850 \\ 789 = (2a_1 + b_1)b \end{array} \\ \hline 2a_2 + b_2 & \\ 266 \quad 2 & \begin{array}{l} 6143 \\ 5324 = (2a_2 + b_2)b_2 \end{array} \\ \hline 2a_3 + b_3 & \\ 2664 \quad 3 & \begin{array}{l} 81928 \\ 79929 = (2a_3 + b_3)b_3 \end{array} \\ \hline & 1999 \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Man suche zuerst eine Zahl a , welche mit sich selbst multiplicirt 1 giebt, schreibe die 1^2 unter 1, subtrahire und ziehe die folgenden beiden Stellen 77 herunter. Hierauf bilde man den Divisor $(2a + b)$ zu 77, dieses giebt, da $2a = 2$ ist, oder richtiger 20 ist, da ja auf die Zahl 1 jetzt eine zweite Zahl folgen muss, also die 1 nicht den Werth 1 sondern 10 hat, und dividire, um b zu finden, 20 in 77. Dann ist $b = 3$, mithin $2a + b = 23$, folglich $(2a + b)b = 23 \cdot 3 = 69$, von 77 subtrahirt, bleibt Rest 8 und die beiden folgenden Stellen heruntergezogen 850, betrachte darauf die beiden Stellen 13 als a_1 , bilde den Divisor $(2a_1 + b_1)$ auf dieselbe Weise wie vorhin, also $2a_1 = 260$, und 260 in 850 geht 3 mal, mithin ist $b_1 = 3$, also $2a_1 + b_1 = 263$, oder $(2a_1 + b_1)b_1 = 263 \cdot 3 = 789$ von 850 subtrahirt, bleibt Rest 61 u. s. w.

In diesem Beispiel ist $\sqrt{177504328}$ eine irrationale Zahl, deren Werth man jedoch so genau berechnen kann, wie man will, wenn man nur für die in der Wurzel folgenden Decimalstellen die nachbleibenden Reste bei jeder folgenden Stelle um 2 Nullen ergänzt.

Beisp. Meier Hirsch pag. 35—37.

$$\sqrt{x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2} = \underbrace{x + y}_{a_1} + z_{b_1}$$

$$\begin{array}{r|l} 2a & \begin{array}{l} \overline{b} \quad 2xy \\ 2x + y \quad 2xy \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} 2a_1 \quad b_1 \quad 2xz \\ 2x + 2y + z \quad 2xz + 2yz \end{array} \end{array} \quad + y^2 = (2a + b) b$$

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{l} 2xz \\ 2xz + 2yz \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} 2x + 2y + z \quad 2xz + 2yz \end{array} \end{array} \quad + z^2 = (2a_1 + b_1) b_1$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 39—42.

§ 54. Um die Cubikwurzel aus einer Zahl zu ziehen, zerlege man die gegebene Zahl von der Rechten nach der Linken in Classen von je drei Stellen und benutze die Formel § 49, da man sich jede Zahl aus zwei Theile $a + b$ bestehend vorstellen kann.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ oder auch}$$

$$a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2) b$$

$$\sqrt[3]{177 | 504 | 328} = \underbrace{5 \ 6 \ 2}_{a_1 \ b_1}$$

$$\begin{array}{r|l} 3a^2 = 7500 & 52504 \\ 3ab = 900 & \\ b^2 = 36 & 50616 = (3a^2 + 3ab + b^2) b \end{array}$$

$$3a^2 + 3ab + b^2 = 8436$$

$$3a_1^2 = 940800 \quad 1888328$$

$$3a_1b_1 = 3360$$

$$b_1^2 = 4$$

$$1888328 = (3a_1^2 + 3a_1b_1 + b_1^2) b_1$$

$$3a_1^2 + 3a_1b_1 + b_1^2 = 944164$$

Man suche zuerst eine Zahl a , deren Cubus der 177 so nahe als möglich kommt also 5, subtrahire $5^3 = 125$ von 177, bleibt Rest 52 und ziehe die nächstfolgende Classe herunter 52504, bilde den Divisor $3a^2 + 3ab + b^2$ zu 52504, dann ist $3a^2 = 7500$ in 52504 geht 6 mal, folglich ist $b = 6$ und der vollständige Divisor $3a^2 + 3ab + b^2$ ist dann 8436, mal $b = 6$ giebt 50616, von 52504 subtrahirt, bleibt Rest 1888 und die nächstfolgende Classe heruntergezogen giebt 1888328; alsdann den Divisor zu dieser Zahl gebildet, wobei jetzt $a_1 = 560$, also $3a_1^2 = 940800$ geht in 1888328 $2 = b_1$ mal, mithin ist $3a_1^2 + 3a_1b_1 + b_1^2 = 944164$, mal 2 giebt ebensoviel als die Zahl 1888328 beträgt.

Mithin ist $\sqrt[3]{177504328} = 562$ rational; dasselbe Verfahren gilt natürlich auch für irrationale Zahlen, wenn man nur für die in der Wurzel folgenden Decimalstellen die nachbleibenden Reste um drei Nullen ergänzt.

Beisp. Meier Hirsch pag. 37.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3} = \sqrt[3]{x + y + z} \\ \begin{array}{r} \overline{3x^3} \\ 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \\ \underline{3x^3} \\ 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \\ \underline{3x^2y + 3x^2z} \\ 6xyz + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \\ \underline{6xyz + y^3 + 3y^2z + 3yz^2} \\ z^3 \\ \underline{z^3} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 42—44.

§ 55. Eine Zahl, welche weder positiv noch negativ sein kann, nennt man eine imaginäre Zahl. Hiernach zerfallen alle algebraischen Zahlen in reelle und imaginäre Zahlen.

Sowohl reelle als auch imaginäre Zahlen zerfallen überdies in: Ganze Zahlen, Brüche und Irrationalzahlen.

§ 56. Eine Wurzel mit ungeradem Wurzelexponenten aus einer positiven Zahl ist positiv, aus einer negativen Zahl negativ.

Eine Wurzel mit geradem Wurzelexponenten aus einer positiven Zahl ist sowohl positiv als negativ, aus einer negativen Zahl imaginär.

$$\begin{array}{l} \sqrt[2n+1]{+a} = + \sqrt[2n+1]{a} ; \quad \sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a} \\ \sqrt[2n+1]{-a} = - \sqrt[2n+1]{a} ; \quad \sqrt[2n]{-a} = \text{imaginär.} \end{array}$$

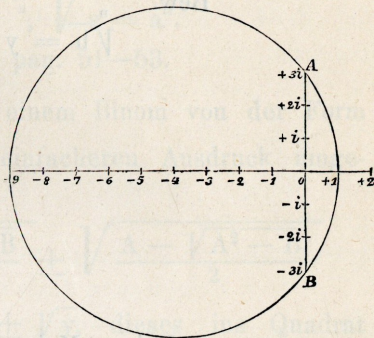
Unter imaginärer Einheit versteht man eine Zahl, deren Quadrat -1 ist. Man pflegt $\sqrt{-1}$ mit i zu bezeichnen unter der Bedingung, dass $i^2 = -1$ ist; dann lässt sich jede imaginäre Quadratwurzel leicht durch i ausdrücken z. B.

$$\sqrt{-9} = \pm 3 \sqrt{-1} = \pm 3i$$

Die imaginären Zahlen finden in unserer Zahlenlinie keinen Raum, da dieselbe bereits durch die reellen Zahlen vollständig

ausgefüllt wird. Legt man jedoch durch die Zahlenlinie eine Ebene, so lässt sich leicht durch eine einfache geometrische Construction auch die Stelle in der Ebene angeben, welche jede imaginäre Quadratwurzel einnehmen muss.

Man construirt über der Zahlenlinie — 9 + 1 als Durchmesser einen Kreis, errichte von Punkte 0 aus eine Senkrechte zur Zahlenlinie, welche den Kreis in den Punkten A und B trifft. Alsdann ist OA und auch OB



die mittlere Proportionale zwischen den beiden Linien 0—9 und 0+1, folglich sind die beiden Punkte A und B der Ebene die Darstellungen der beiden imaginären Zahlen + 3i

und — 3i. Es wäre demnach der imaginären Einheit i die Bedeutung unterzulegen, man soll vom Nullpunkte der Zahlenlinie aus sich rechtwinklig zur Zahlenlinie um einen Schritt seitwärts bewegen.

§ 57. Die Wurzel aus einem Product ist gleich einem Product aus denselben Wurzeln der einzelnen Factoren.

$$\text{Beh. } \sqrt[n]{a b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

$$\text{Bew. } \left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} = x \\ \sqrt[n]{b} = y \end{array} \right\} \text{ multipl. } \begin{array}{l} a = x^n \\ b = y^n \end{array}$$

$$a b = x^n \cdot y^n \text{ oder}$$

$$a b = (x y)^n$$

$$\sqrt[n]{a b} = x y \text{ daher auch}$$

$$\sqrt[n]{a b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 47—49.

§ 58. Die Wurzel aus einem Quotienten ist gleich der Wurzel des Dividenden dividirt durch die Wurzel des Divisors.

$$\text{Beh. } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\text{Bew. } \left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} = x \quad a = x^n \\ \sqrt[n]{b} = y \quad b = y^n \end{array} \right\} \text{div.}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y} \quad \text{daher auch}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 49—50.

§ 59. Eine Wurzel wird potenzirt indem man den Radicanden potenzirt.

$$\text{Beh. } (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\text{Bew. } (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a} \quad (m \text{ mal})$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \dots} \quad (m \text{ mal})$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

§ 60. Eine Wurzel wird radicirt, indem man die Wurzel-exponenten multiplicirt.

$$\text{Beh. } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\text{Bew. } \sqrt[nm]{a} = x$$

$$a = x^{nm}$$

$$a = (x^n)^m$$

$$\sqrt[m]{a} = x^n$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = x$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

§ 61. Die Wurzel aus einer Zahl ist gleich einer Potenz, welche zur Basis den Radicanden und zum Exponenten das umgekehrte des Wurzelexponenten hat.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[-n]{a} = a^{-\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[\frac{n}{r}]{a} = a^{\frac{r}{n}}.$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 51—53.

§ 62. Die Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ kann häufig in einen einfacheren Ausdruck umgewandelt werden durch die Formel:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Man setze $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, dieses ins Quadrat erhoben giebt $A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$

Beide Quadrate bestehen alsdann aus einem rationalen und einem radicalen Theile, mithin ist auch

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & A \\ 2\sqrt{xy} & = & \sqrt{B} \\ x^2 + 2xy + y^2 & = & A^2 \\ 4xy & = & B \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} x + y & = & A \\ 2\sqrt{xy} & = & \sqrt{B} \\ x^2 + 2xy + y^2 & = & A^2 \\ 4xy & = & B \end{array}} \right\} \text{subtrahirt}$$

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 2xy + y^2 & = & A^2 - B \\ x - y & = & \sqrt{A^2 - B} \\ x + y & = & A \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} x^2 - 2xy + y^2 & = & A^2 - B \\ x - y & = & \sqrt{A^2 - B} \\ x + y & = & A \end{array}} \right\} \text{addirt und subtrahirt}$$

$$2x = A + \sqrt{A^2 - B}$$

$$2y = A - \sqrt{A^2 - B}$$

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

$$y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 50.

§ 63. Logarithmiren heisst: zu einer gegebenen Potenz und einer gegebenen Basis den Exponenten suchen.

Die gegebene Potenz wird die gegebene Zahl (Numerus), die gegebene Basis die Basis des Logarithmus genannt.

Man bezeichnet einen Logarithmus, wenn a die Zahl und b die Basis des Systems ist, durch

$${}^b \log a.$$

§ 64. Wird die Basis des Systems mit dem Logarithmus potenziert, so ist die Potenz gleich der gegebenen Zahl.

$$b^{{}^b \log a} = a.$$

§ 65. Unter einem logarithmischen System versteht man den Inbegriff sämtlicher Logarithmen, welche zu einerlei Basis gehören, wie solche in einer logarithmischen Tafel niedergelegt sind.

Unter Briggischen Logarithmen versteht man die Logarithmen desjenigen Systems, welches zur Basis 10 hat.

Unter natürlichen Logarithmen versteht man die Logarithmen desjenigen Systems, welches zur Basis die Zahl 2,7182818.... hat.

Letztere werden zum Unterschiede mit ersteren durch $\log$. nat. oder auch durch l . bezeichnet, während erstere mit $\log$. bezeichnet werden.

Die Logarithmen werden in den logarithmischen Tafeln als ganze Zahlen (die meistens in den Tafeln nicht angegeben sind) mit angehängten Decimalbrüchen aufgeführt.

Die ganze Zahl des Logarithmus wird die Kennziffer (Charakteristik) und der angehängte Decimalbruch die Mantisse des Logarithmus genannt.

§ 66. Der Logarithmus von Eins ist in jedem logarithmischen System gleich Null.

$${}^a \log 1 = 0, \text{ weil } a^0 = 1.$$

Der Logarithmus der Basis des Systems ist in jedem Systeme gleich Eins.

$${}^a \log a = 1, \text{ weil } a^1 = a.$$

Der Logarithmus einer jeden Potenz der Basis des Systems ist gleich dem Exponenten dieser Potenz.

$${}^a \log(a^2) = 2, {}^a \log(a^3) = 3, {}^a \log\left(\frac{1}{a}\right) = -1,$$

$${}^a \log\left(\frac{1}{a^3}\right) = -3, {}^a \log(a^n) = n.$$

§ 67. Die Kennziffer des Briggischen Logarithmus einer ganzen Zahl ist positiv und enthält so viel Einheiten als die Zahl Ziffern hat weniger Eins.

Die Kennziffer des Briggischen Logarithmus eines Decimalbruches ist negativ und enthält so viel Einheiten als den geltenden Decimalstellen Nullen vorausgehen, die Null vor dem Komma mitgerechnet, wobei jedoch die Mantisse positiv bleibt und die negative Kennziffer ans Ende der Mantisse gesetzt wird.

Die Briggischen Logarithmen der Zahlen, welche mit denselben Ziffern geschrieben werden, unterscheiden sich von einander nur durch ihre Kennziffern, ihre Mantissen sind dieselben.

§ 68. Den Briggischen Logarithmus der Zahl 389 zu berechnen.

Man berechne sich vorher eine Tabelle von Logarithmen für Zahlen, die mehr und mehr sich der Eins nähern, etwa durch Quadratwurzelauziehung, z. B. $10^3 = 1000$, $10^2 = 100$, $10^1 = 10$

$$\begin{aligned} \sqrt{10} &= 10^{\frac{1}{2}} &= 10^{0,5} &= 3,162278 \\ \sqrt{3,162278} &= \sqrt{\sqrt{10}} &= 10^{0,25} &= 1,778279 \\ \sqrt{1,778279} &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} &= 10^{0,125} &= 1,333522 \\ & &10^{0,0625} &= 1,154782 \\ & &10^{0,03125} &= 1,074608 \\ & &10^{0,015625} &= 1,036633 \\ & &10^{0,0078125} &= 1,018152 \\ & &10^{0,0039063} &= 1,009035 \\ & &10^{0,0019531} &= 1,004507 \\ & &10^{0,0009765} &= 1,002252 \\ & &10^{0,0004882} &= 1,001126 \\ & &10^{0,0002441} &= 1,000563 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

$$x = {}^{10}\log 389$$

$$10^x = 389 \quad x = 2 + x_1$$

$$10^{2+x_1} = 389 \text{ oder } 10^2 \cdot 10^{x_1} = 389$$

$$10^{x_1} = \frac{389}{100} = 3,89 \text{ u. da } 10^{0,5} = 3,162278$$

$$\text{ist } x_1 = 0,5 + x_2$$

$$10^{0,5+x_2} = 3,89 \text{ folg. } 10^{0,5} \cdot 10^{x_2} = 3,89$$

$$10^{x_2} = \frac{3,89}{10^{0,5}} = \frac{3,89}{3,162278} = 1,2 \dots \text{ und da}$$

$$10^{0,0625} = 1,154782, \text{ so ist } x_2 = 0,0625 + x_3$$

$$10^{0,0625 + x_3} = \frac{3,89}{3,162278}$$

$$10^{x_3} = \frac{3,89}{3,162278 \cdot 1,154782} = \frac{3,89}{3,651740} = 1,06 \dots$$

$$10^{0,015625} = 1,036633$$

$$x_3 = 0,015625 + x_4$$

$$10^{0,015625 + x_4} = \frac{3,89}{3,651740}$$

$$10^{x_4} = \frac{3,89}{3,651740 \cdot 1,036633} = \frac{3,89}{3,785513} = 1,02 \dots$$

$$10^{0,0078125} = 1,018152$$

$$x_4 = 0,0078125 + x_5$$

$$10^{0,0078125 + x_5} = \frac{3,89}{3,785513}$$

$$10^{x_5} = \frac{3,89}{3,785513 \cdot 1,018152} = \frac{3,89}{3,854226} = 1,0092 \dots$$

$$10^{0,0039063} = 1,009035$$

$$x_5 = 0,0039063 + x_6$$

$$10^{0,0039063 + x_6} = \frac{3,89}{3,854226}$$

$$10^{x_6} = \frac{3,89}{3,854226 \cdot 1,009035} = \frac{3,98}{3,889048} = 1,00024 \dots$$

$$10^{0,0000610} = 1,000140$$

$$x_6 = 0,0000610 + x_7$$

folgl. ist

$$10^{2+0,5+0,0625+0,015625+0,0078125+0,0039063+0,0000610+x_7} = 389$$

$${}^{10} \log 389 = 2,5899048 + x_7 \text{ u. s. w.}$$

welcher log bereits auf 4 Decimalstellen richtig ist.

Auf diese Weise kann man die Logarithmen von allen ganzen Zahlen berechnen. Jeder Decimalbruch muss alsdann mit irgend einer der berechneten ganzen Zahlen gleiche Ziffern in gleicher Reihenfolge enthalten, und die Mantisse seines Logarithmus ist mithin bekannt.

In der Regel sind die Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 10,000,000 berechnet, und mithin der Logarithmus jeder 7ziffrigen Zahl bekannt.

§ 31. Der Logarithmus eines Products ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren.

$$\text{Beh. } {}^c\log (ab) = {}^c\log a + {}^c\log b$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Bew. } {}^c\log a = x & c^x = a & \\ {}^c\log b = y & c^y = b & \left. \vphantom{\begin{array}{l} c^x = a \\ c^y = b \end{array}} \right\} \text{multipl.} \\ \hline & c^x \cdot c^y = ab & \\ & c^{x+y} = ab & \end{array}$$

$${}^c\log (ab) = x + y$$

$${}^c\log (ab) = {}^c\log a + {}^c\log b.$$

§ 70. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multiplicirt mit dem Potenzexponenten.

$$\text{Beh. } {}^c\log (a^n) = n {}^c\log a$$

$$\text{Bew. } {}^c\log (a^n) = {}^c\log (a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (nmal)})$$

$${}^c\log (a^n) = {}^c\log a + {}^c\log a + {}^c\log a + \dots {}^c\log a \text{ (nmal.)}$$

$${}^c\log (a^n) = n {}^c\log a.$$

§ 71. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radicanden dividirt durch den Wurzelexponenten.

$$\text{Beh. } {}^c\log (\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} {}^c\log a.$$

$$\text{Bew. } {}^c\log (\sqrt[n]{a}) = {}^c\log \left(a^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} {}^c\log a.$$

§ 72. Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Logarithmus des Dividenden weniger dem Logarithmus des Divisors.

$$\text{Beh. } {}^c\log \left(\frac{a}{b} \right) = {}^c\log a - {}^c\log b.$$

$$\text{Bew. } \begin{array}{lcl} {}^c\log a = x & c^x = a & \\ {}^c\log b = y & c^y = b & \left. \vphantom{\begin{array}{l} c^x = a \\ c^y = b \end{array}} \right\} \text{div.} \end{array}$$

$$\frac{c^x}{c^y} = \frac{a}{b}$$

$$c^{x-y} = \frac{a}{b}$$

$${}^c\log \left(\frac{a}{b} \right) = x - y$$

$${}^c\log \left(\frac{a}{b} \right) = {}^c\log a - {}^c\log b.$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 64—67.

§ 73. Der Logarithmus einer Zahl für eine neue Basis ist gleich dem Logarithmus dieser Zahl für die anfängliche Basis dividirt durch den Logarithmus der neuen Basis für die anfängliche Basis.

$$\text{Beh. } {}^b\log a = \frac{{}^n\log a}{{}^n\log b}$$

$$\text{Bew. } {}^b\log a = x$$

$$b^x = a$$

$$x \cdot {}^n\log b = {}^n\log a$$

$$x = \frac{{}^n\log a}{{}^n\log b}$$

$${}^b\log a = \frac{{}^n\log a}{{}^n\log b}$$

§ 74. Die Lehre von der Auflösung der Gleichungen heisst Algebra.

Werden zwei Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen verbunden, so nennt man eine solche Verbindung Gleichung.

Man unterscheidet analytische oder identische, und algebraische Gleichungen.

Eine analytische oder identische Gleichung ist eine solche, deren beide Seiten sich blos formell unterscheiden, und die deshalb richtig bleibt für jeden Werth, den man jeder in ihr vorkommenden Buchstabengrösse beilegt; z. B.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ u. s. w.}$$

Eine algebraische Gleichung ist eine solche, die nur für einen oder einige Werthe, welche man den in ihr vorkommenden unbestimmten Grössen beilegt, richtig wird.

Die unbestimmten oder unbekannten Grössen werden in der algebraischen Gleichung gewöhnlich mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet x, y, z, u, v, w etc. im Gegensatze zu den anderen bestimmten Grössen, deren Bezeichnung durch die Anfangsbuchstaben des Alphabets geschieht.

§ 75. Man theilt die algebraischen Gleichungen in Gleichungen vom ersten Grade (einfache Gleichung), in denen jede Unbekannte nur mit dem Exponenten Eins behaftet ist, ferner in Gleichungen vom zweiten Grade (quadratische Gleichungen), in denen die Unbekannte ausser dem Exponenten Eins auch noch den Exponenten 2

enthält, und in Gleichungen von höherem Grade (höhere Gleichungen), welche die Unbekannten auch mit höherem Exponenten als 2 enthalten.

Man unterscheidet ferner nach der Anzahl der Unbekannten, Gleichungen mit einer Unbekannten und Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§ 76. Eine Gleichung mit einer Unbekannten auflösen heisst, die Gleichung so umformen, dass auf der einen Seite der Gleichung nur die Unbekannte, und auf der anderen Seite nur bekannte Zahlen vorkommen, z. B.

$$\begin{array}{rcl} 1. & x + a = b & \\ & - a = - a & \left. \vphantom{\begin{array}{l} x + a = b \\ - a = - a \end{array}} \right\} \text{addirt.} \\ \hline & x = b - a. & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2. & x - a = b & \\ & a = a & \left. \vphantom{\begin{array}{l} x - a = b \\ a = a \end{array}} \right\} \text{addirt} \\ \hline & x = a + b. & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3. & a - x = b & \\ & a = a & \left. \vphantom{\begin{array}{l} a - x = b \\ a = a \end{array}} \right\} 1 \text{ von } 2 \text{ subtrahirt.} \\ \hline & x = a - b. & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4. & ax = b & \\ & a = a & \left. \vphantom{\begin{array}{l} ax = b \\ a = a \end{array}} \right\} 1 \text{ durch } 2 \text{ dividirt} \\ \hline & x = \frac{b}{a} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 5. & \frac{x}{a} = b & \\ & a = a & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{x}{a} = b \\ a = a \end{array}} \right\} \text{multiplicirt} \\ \hline & x = ab & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 6. & \frac{a}{x} = b & \\ & a = a & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{a}{x} = b \\ a = a \end{array}} \right\} 2 \text{ durch } 1 \text{ dividirt} \\ \hline & x = \frac{a}{b} & \end{array}$$

§ 77. Jede Gleichung vom ersten Grade mit einer Unbekannten wird in der Regel am zweckmässigsten in folgender Ordnung aufgelöst:

1. Man multiplicire die Gleichung, wenn sie Brüche enthält mit dem Generalnenner.

2. Man schaffe durch Transposition alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf eine Seite der Gleichung, und alle Glieder, welche die Unbekannte nicht enthalten, auf die andere Seite.
3. Man vereinige sodann, so viel dies möglich ist, die Glieder der einen sowie der anderen Seite in je ein einziges Glied.
4. Man dividire endlich die Gleichung durch den Coefficienten der unbekannten Grösse.

Beisp. Meier Hirsch pag. 98—101 und pag. 144—164.

§ 78. Von den Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten unterscheidet man rein quadratische und unrein quadratische Gleichungen.

Eine rein quadratische Gleichung ist eine solche, in welcher die Unbekannte nur in der zweiten Potenz vorkommt.

Die rein quadratische Gleichung wird ebenso aufgelöst wie die Gleichung ersten Grades und hat man nur noch zum Schluss aus beiden Seiten die Quadratwurzel zu ziehen.

Beisp. Meier Hirsch pag. 105 und pag. 174.

§ 79. Die unrein quadratische oder gemischt quadratische Gleichung ist eine solche, in welcher die Unbekannte nicht allein in der zweiten Potenz sondern auch in der ersten Potenz vorkommt.

Die unrein quadratische Gleichung wird aufgelöst, indem man sie ordnet, d. h. auf die eine Seite zuerst die zweite Potenz der Unbekannten und darauf die erste Potenz setzt, während die bekannten Grössen auf die andere Seite gebracht werden. Man dividire dann die Gleichung durch den Coefficienten von x^2 und addire zu beiden Seiten den halben Coefficienten von x ins Quadrat (quadratische Ergänzung) und ziehe schliesslich aus beiden Seiten die Quadratwurzel aus. Beisp.

$$2x = 35 - x^2$$

$$x^2 + 2x = 35$$

$$x^2 + 2x + (1)^2 = 1^2 + 35$$

$$x^2 + 2x + 1 = 36$$

$$(x + 1)^2 = 36$$

$$x + 1 = \pm 6$$

$$x = 5$$

$$x, = -7.$$

§ 80. Jede quadratische Gleichung hat für die Unbekannte zwei Werthe, deren Summe gleich ist dem Coefficienten von x mit umgekehrten Vorzeichen, und deren Product gleich ist derjenigen Grösse, in welcher die Unbekannte nicht vorkommt.

$$x^2 + ax = b$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 4b}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b}$$

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b}$$

$$x_{,,} = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b}$$

$$x_1 + x_{,,} = -a$$

$$x_1 x_{,,} = b$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 106—111 und pag. 176.

§ 81. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten sind solche, in denen nicht eine Unbekannte sondern mehrere vorkommen.

Sie werden bestimmte genannt, wenn eben so viel von einander unabhängige Gleichungen gegeben sind als unbekannte Grössen vorkommen.

Sie heissen geordnet, wenn alle Unbekannten mit ihren Coefficienten auf der einen Seite und alle Bekannten auf der anderen Seite der Gleichung stehen, wobei noch vorausgesetzt wird, dass alle Coefficienten in ganzen Zahlen ausgedrückt sind.

§ 82. Unter Eliminiren versteht man: Aus zwei oder mehr gegebenen Gleichungen eine Unbekannte wegschaffen, was entweder 1) nach der Substitutions-Methode, 2) nach der Gleichsetzungs-Methode, oder 3) nach der Additions- und Subtractions-Methode geschehen kann.

§ 83. Die Substitutions-Methode. Man bestimme aus irgend einer Gleichung den Werth irgend einer Unbekannten und setze diesen in sämmtliche andere Gleichungen; dann erhält man eine

Gleichung weniger als ursprünglich vorhanden waren. Aus diesen berechne man von Neuem eine Unbekannte und setze ihren Werth in die noch vorhandenen Gleichungen, so erhält man wiederum eine Gleichung weniger als vorhin vorhanden waren und fahre so fort, bis man eine Gleichung mit einer Unbekannten erhalten hat, aus welcher der Werth der Unbekannten berechnet werden kann. Diesen berechneten Werth der Unbekannten in eine der vorhergehenden Gleichungen gesetzt giebt die zweite Unbekannte u. s. w. Beispiel.

$$2x + 5y - 7z = -288$$

$$5x - y + 3z = 227$$

$$7x + 6y + z = 297.$$

aus der ersten ist $x = \frac{7z - 5y - 288}{2}$

in die zweite gesetzt giebt:

$$\frac{5(7z - 5y - 288)}{2} - y + 3z = 227$$

in die dritte gesetzt giebt:

$$\frac{7(7z - 5y - 288)}{2} + 6y + z = 297$$

Die beiden letzten geordnet giebt:

$$41z - 27y = 1894$$

$$51z - 23y = 2610$$

Aus der ersteren ist alsdann:

$$z = \frac{1894 + 27y}{41}$$

in die letztere gesetzt, giebt:

$$\frac{51(1894 + 27y)}{41} - 23y = 2610$$

oder geordnet:

$$434y = 10416$$

$$y = 24.$$

$$z = \frac{1894 + 27 \cdot 24}{41} = 62.$$

$$x = \frac{62 \cdot 7 - 5 \cdot 24 - 288}{2} = 13$$

§ 84. Gleichungs-Methode. Man bestimme aus allen Gleichungen den Werth einer Unbekannten, setze die Werthe dieser

Unbekannten einander gleich; dann erhält man eine Gleichung weniger als vorhin gegeben waren; bestimme aus diesen wiederum die Werthe einer Unbekannten, setze sie einander gleich und fahre so fort, bis man zu einer Gleichung mit einer Unbekannten gelangt, aus welcher diese Unbekannte berechnet werden kann. Die anderen Unbekannten findet man wie vorhin.

Beispiel.

$$2x + 5y - 7z = -288$$

$$5x - y + 3z = 227$$

$$7x + 6y + z = 297$$

$$\text{aus 1) ist } x = \frac{7z - 5y - 288}{2}$$

$$\text{aus 2) ist } x = \frac{y - 3z + 227}{5}$$

$$\text{aus 3) ist } x = \frac{297 - 6y - z}{7}$$

$$\text{mithin ist auch: } \frac{7z - 5y - 288}{2} = \frac{y - 3z + 227}{5}$$

$$\frac{7z - 5y - 288}{2} = \frac{297 - 6y - z}{7}$$

Beide geordnet giebt:

$$41z - 27y = 1894$$

$$51z - 23y = 2610$$

$$\text{mithin ist aus 1) } z = \frac{1894 + 27y}{41}$$

$$\text{und aus 2) } z = \frac{2610 + 23y}{51}$$

$$\text{also auch } \frac{1894 + 27y}{41} = \frac{2610 + 23y}{51}$$

$$\text{geordnet } 434y = 10416$$

$$y = 24 \text{ u. s. w.}$$

§ 85. Die Additions- und Subtractions-Methode. Man mache in irgend zwei geordneten Gleichungen durch Multiplication oder Division der ganzen Gleichung mit geeigneten Grössen die Coefficienten einer Unbekannten einander gleich, subtrahire oder addire alsdann diese beiden Gleichungen, je nachdem die Vorzeichen der Coefficienten der wegzuschaffenden Unbekannten gleich oder entgegengesetzt sind, so erhält man eine neue Gleichung, welche

diese Unbekannte nicht enthält, nehme darauf eine der vorigen Gleichungen und eine neue oder zwei neue Gleichungen und schaffe in ihnen dieselbe Unbekannte fort u. s. w., so erhält man zuletzt eine Gleichung weniger als ursprünglich Gleichungen vorhanden waren; aus diesen wiederum auf dieselbe Weise eine weniger als zuletzt vorhanden waren u. s. w., bis man eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, aus welcher der Werth dieser Unbekannten berechnet werden kann, der schliesslich auch die übrigen Unbekannten wie bei den vorigen Methoden ergibt.

Die letztere Methode pflegt nicht nur für praktische Rechnungen die bequemste, sondern auch zu gleicher Zeit die eleganteste zu sein.

Beispiel.

$$2x + 5y - 7z = -288$$

$$5x - y + 3z = 227$$

$$7x + 6y + z = 297.$$

Die erste mal 3 gibt: $6x + 15y - 21z = -864$
 die zweite mal 7 gibt: $35x - 7y + 21z = 1580$ } addirt

$$a) \quad 41x + 8y = 725$$

Die zweite lautet: $5x - y + 3z = 227$
 die dritte mit 3 multipl. $21x + 18y + 3z = 891$ } subtrahirt.

$$b) \quad 16x + 19y = 664$$

Gleich. a) mit 19 multipl. $779x + 152y = 13775$
 Gleich. b) mit 8 multipl. $128x + 152y = 5312$ } subtrahirt

$$651x = 8463$$

$$x = 13 \text{ u. s. w.}$$

Beispiele. Meier Hirsch pag. 101—105 u. pag. 164—174.

§ 86. Werden mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten geordnet und enthält eine derselben irgend eine Unbekannte zur 2ten Potenz oder ein Product von zwei Unbekannten, so nennt man diese Gleichungen: Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten. Für solche Gleichungen gilt Alles das, was über Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten gesagt wurde; sie unterscheiden sich von den denselben nur dadurch, dass ihre Endgleichung eine Gleichung 2ten Grades ist. Während zur Lösung der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten häufiger die Additions- und Subtractions-

Methode angewandt wurde, wird zur Lösung der Gleichungen vom zweiten Grade meistens die Substitutions-Methode gebraucht. Oft erhält man durch regelrechte Elimination der Unbekannten aus mehreren Gleichungen eine Endgleichung höheren Grades, während durch zweckmässige Umformungen und Eliminationen solche Gleichungen eine Endgleichung 1sten oder 2ten Grades geben. Welche Umformungen und Eliminationen vorzunehmen sind, dafür lassen sich keine Regeln angeben; nur aus der Art, wie diese Gleichungen entstehen, wird man Winke zu ihrer Auflösung entnehmen. Man kann aus je zwei Gleichungen niederen Grades eine Gleichung höheren Grades bilden, indem man diese Gleichungen mit irgend einem Ausdrucke, der die Unbekannten enthält, multiplicirt, sie oder eine Folgerung aus ihr potenzirt, statt einer bekannten Zahl den Werth derselben in Unbekannten ausgedrückt setzt u. s. w., oder indem man beide Gleichungen addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt, die Werthe aus einer Gleichung in die andere substituirt, u. s. w. Will man nun von den complicirten Gleichungen zu den einfachen übergehen, so ist in jedem Falle zunächst die Operation zu finden, wodurch dieselben zu höheren wurden, und alsdann die umgekehrte Operation mit dem entsprechenden Werthe vorzunehmen.

Beisp. Meier Hirsch pag. 111—119 und pag. 178.

§ 87. Sind weniger Gleichungen gegeben als unbekannte Grössen, so werden solche diophantische oder unbestimmte Gleichungen genannt.

Man hat hier für die Auflösungen die Bedingung, dass sie in positiven ganzen Zahlen gelöst werden sollen, eingeführt.

Ist alsdann eine Gleichung mit zwei Unbekannten gegeben, so lässt sich dieselbe immer auf die Form bringen $ay + by = c$, wo a , b , c relative Primzahlen sind. Denn haben a und b einen gemeinsamen Divisor n und setzt man $a = dn$ und $b = en$, so ist

$$dny + eny = c \text{ oder}$$

$$n(dx + ey) = c.$$

Da nun $dx + ey$ eine ganze Zahl ist, so muss c auch den Factor n haben und die Gleichung kann also durch n dividirt werden; enthält aber c nicht den Factor n , so kann eine solche Gleichung in ganzen Zahlen nicht gelöst werden.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung aus einer Gleichung mit zwei Unbekannten die Unbekannten zu finden, wenn einer der Coefficienten der Unbekannten Eins ist. Man löse alsdann die Gleichung nach der Unbekannten, welche den Coefficienten Eins hat, auf

$$x + 7y = 40$$

$$x = 40 - 7y$$

und setze alsdann für y der Reihe nach positive ganze Zahlen mit der Beschränkung, dass $40 - 7y > 0$ bleibt, so erhält man alle möglichen Auflösungen.

$$y = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$x = 33, 26, 19, 12, 5.$$

Wenn die beiden Coefficienten der beiden Unbekannten verschieden von Eins sind, so bestimme man zunächst die Unbekannte, welche den kleineren Coefficienten hat

$$7x - 16y = 31$$

$$x = \frac{31 + 16y}{7} = 4 + 2y + \frac{3 + 2y}{7}$$

und setze für den Bruch $\frac{3 + 2y}{7}$, der jedoch der Bedingung gemäss eine ganze Zahl ist, etwa

$$\frac{3 + 2y}{7} = z \text{ und bestimme}$$

$$y = \frac{7z - 3}{2} = 3z - 1 + \frac{z - 1}{2} \text{ setze wiederum}$$

für $\frac{z - 1}{2}$, welcher Ausdruck gleichfalls eine ganze Zahl ist, einen neuen Werth, etwa

$$\frac{z - 1}{2} = n, \text{ dann ist}$$

$$z = 2n + 1$$

$$y = 3z - 1 + n = 7n + 2$$

$$x = 4 + 2y + z = 16n + 9$$

$$\text{Da nun } 7n + 2 > 0 \text{ so ist } n > -\frac{2}{7}$$

$$16n + 9 > 0 \quad n > -\frac{1}{8}$$

folglich ist $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

$$y = 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, \dots$$

$$x = 9, 25, 41, 57, 73, 89, 105, \dots$$

§ 88. Wenn in einer geordneten Gleichung mit zwei Unbekannten die Coefficienten dieser Unbekannten gleiche Vorzeichen besitzen, so ist in ganzen positiven Zahlen nur eine begrenzte Anzahl von Auflösungen möglich.

Wenn aber die Coefficienten der beiden Unbekannten verschiedene Vorzeichen besitzen, so ist die Anzahl der Auflösungen in ganzen positiven Zahlen unbegrenzt.

§ 89. Werden drei Unbekannte durch eine einzige Gleichung gegeben, so sind zwei dieser Grössen unbestimmt. Es muss dann zuerst eine bestimmt werden, wobei jedoch, wenn der Gleichung nur eine begrenzte Anzahl von Auflösungen zukommen, diese Grenze bei Bestimmung dieser Grösse beachtet werden muss. Nach dieser Bestimmung hat die Gleichung nur noch zwei Unbekannte und wird alsdann ebenso behandelt wie vorhin.

$$3x + 4y + 5z = 31.$$

der grösste Werth von z kann hier 6 sein und sämmtliche Werthe von z sind demnach 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Nun wird aber für

$$\begin{array}{lll} z = 0 & 3x + 4y = 31 & \begin{cases} x = 1, 5, 9. \\ y = 7, 4, 1. \end{cases} \\ z = 1 & 3x + 4y = 26 & \begin{cases} x = 2, 6. \\ y = 5, 2. \end{cases} \\ z = 2 & 3x + 4y = 21 & \begin{cases} x = 3, 7. \\ y = 3, 0. \end{cases} \\ z = 3 & 3x + 4y = 16 & \begin{cases} x = 0, 4. \\ y = 4, 1. \end{cases} \\ z = 4 & 3x + 4y = 11 & \begin{cases} x = 1. \\ y = 2. \end{cases} \\ z = 5 & 3x + 4y = 6 & \begin{cases} x = 2. \\ y = 0. \end{cases} \\ z = 6 & 3x + 4y = 1 & \text{keine Auflösung.} \end{array}$$

Die Gleichung erlaubt demnach 11 Auflösungen, wenn die Werthe 0 für eine der Unbekannten zugelassen werden und nur 5 Auflösungen, wenn man diese Werthe ausschliesst.

Wenn eins der Glieder im ersten Theile der gegebenen Gleichung negativ gewesen wäre, so würde die Anzahl der Auflösungen unbegrenzt sein.

§ 90. Sind 3, 4 u. s. w. n Gleichungen mit 4, 5 u. s. w. $(n + 1)$ Unbekannten gegeben und man hat daraus die Unbekannten zu bestimmen, so eliminire man aus diesen n Gleichungen die Unbekannten, bis man eine Gleichung mit 2 Unbekannten, z. B. x und y erhält, eliminire von Neuem aus denselben Gleichungen andere Unbekannte, bis man eine neue Gleichung zwischen x und z erhält, u. s. w. Auf diese Weise erhält man n Gleichungen zwischen x und y, x und z, x und u, u. s. w. Löse alsdann die Gleichung zwischen x und y auf und setze den erhaltenen allgemeinen Werth von x in die zweite, dritte, vierte u. s. w. bis zuletzt alle Unbekannten durch dieselbe Grösse ausgedrückt worden sind, und die Aufgabe also als gelöst zu betrachten ist.

Beisp. Meier Hirsch pag. 190—195.

§ 91. Unter einer Exponentialgleichung versteht man eine Gleichung, in welcher die Unbekannten im Exponenten einer Potenz enthalten ist.

Sie werden aufgelöst, indem man auf beiden Seiten der Gleichung den Logarithmus nimmt und dann nach gewöhnlicher Art verfährt.

$$\begin{aligned} a^x b^{2x} c^{3x} &= d \\ x \log a + 2x \log b + 3x \log c &= \log d \\ x (\log a + 2 \log b + 3 \log c) &= \log d \\ x &= \frac{\log d}{\log a + 2 \log b + 3 \log c} \end{aligned}$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 100. Aufg. 48—58.

§ 92. Progression nennt man jede Reihe von allgemein oder durch Zahlen ausgedrückten Grössen, die nach einem gewissen Gesetze fortschreitet. Diese Fortschreitung kann zunehmend oder auch abnehmend sein. Ferner kann sie durch Addition oder Subtraction und auch durch Multiplication oder Division geschehen. Im erstern Falle entsteht eine arithmetische, im letzteren Falle eine geometrische Progression.

Die Reihe 1, 2, 3, 4, 5 ist eine zunehmende und die Reihe 22, 20, 18, 16, 14 eine abnehmende arithmetische Progression, weil erstere durch Addition von 1, und letztere durch Subtraction von 2 fortschreitet.

Die Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32 ist eine zunehmende und die Reihe 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ ist eine abnehmende geometrische Progression, weil erstere durch Multiplication mit 2,

und letztere durch Division mit 3 fortschreitet. Die einzelnen Zahlen der Reihe werden Glieder genannt. Die Zahl, welche der Fortschreitung zu Grunde liegt, heisst bei der arithmetischen Progression Differenz und bei der geometrischen Exponent.

§ 93. Das letzte Glied (u) einer arithmetischen Progression wird gefunden, indem man zum ersten Gliede (a) das Product aus der Differenz (d) und der um Eins verminderten Anzahl (n) addirt. Denn ist das

$$1 \text{ Glied} = a$$

$$2 \text{ Glied} = a + d$$

$$3 \text{ Glied} = a + 2d$$

$$4 \text{ Glied} = a + 3d \text{ u. s. w.}$$

Dann ist der Coefficient von d in jedem Gliede um Eins kleiner als die Stellenzahl des Gliedes, mithin muss auch, wenn n die Anzahl der Glieder der Reihe ist, das letzte Glied (u) sein:

$$u = a + (n - 1) d.$$

§ 94. Die Summe (s) einer arithmetischen Progression wird gefunden, indem man die Summe aus dem ersten und letzten Gliede der Progression mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt.

$$s = a + a + d + a + 2d + a + 3d + \dots + a + (n-1)d \text{ oder}$$

$$s = a + (n-1)d + a + (n-2)d + a + (n-3)d + a + (n-4)d + \dots + a$$

$$2s = 2a + (n-1)d + 2a + (n-1)d + 2a + (n-1)d + 2a + (n-1)d + \dots + 2a + (n-1)d$$

$$2s = n [2a + (n-1)d]$$

$$s = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \text{ und da } u = a + (n-1)d \text{ ist auch}$$

$$s = \frac{n}{2} (a + u)$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 76—81 und pag. 206—209.

§ 95. Das letzte Glied (u) einer geometrischen Progression wird gefunden, indem man den Exponenten (e) mit der um Eins verminderten Anzahl (n) der Glieder potenzirt, und diese Potenz mit dem ersten Gliede (a) multiplicirt. Denn es ist

$$1 \text{ Glied} = a$$

$$2 \text{ Glied} = a e$$

$$3 \text{ Glied} = a e^2$$

$$4 \text{ Glied} = a e^3 \text{ u. s. w.}$$

mithin ist der Potenzexponent von e in jedem Gliede um Eins kleiner als die Stellenzahl des Gliedes, folglich muss auch, wenn n die Anzahl der Glieder der Reihe ist, das letzte Glied sein

$$u = ae^{n-1}.$$

§ 96. Die Summe (s) einer geometrischen Proportion wird gefunden, indem man den Exponenten mit dem letzten Gliede multiplicirt, von diesem Producte das erste Glied subtrahirt und diese Differenz durch den um Eins verminderten Exponenten der Reihe dividirt

$$\left. \begin{array}{l} s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots + ae^{n-1} \\ es = ae + ae^2 + ae^3 + \dots + ae^{n-1} + ae^n \end{array} \right\} \text{subtrahirt}$$

$$\frac{s(e-1) = ae^n - a}{s(e-1) = ae^n - a}$$

$$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}, \text{ oder da } u = ae^{n-1}, \text{ so ist auch}$$

$$s = \frac{ue - a}{e - 1}.$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 88—91 und pag. 211—214.

§ 97. Unter dem Zinsfuss (z) versteht man denjenigen Factor, mit welchem man ein gegebenes Capital (a) zu multipliciren hat, um den Werth dieses Capitals nebst den Zinsen nach Ablauf eines Jahres zu erhalten.

Hiernach wird dann aus dem Capital a zum Zinsfuss z am Ende des Jahres az .

Die Verzinsung eines Capitals pflegt man in Procent auszudrücken d. h. ein Capital 100 bringe in einem Jahre p Zinsen, dann sind die Zinsen vom Capital 1 gleich $\frac{p}{100}$, demnach die Zinsen vom Capital a gleich $\frac{a \cdot p}{100}$, mithin der Werth des Capitals a nach einem Jahre gleich

$$a + \frac{ap}{100} = a \left(1 + \frac{p}{100} \right) = az.$$

Es besteht demnach der Zinsfuss aus Eins vermehrt um die Zinsen von Eins

$$z = 1 + \frac{p}{100}.$$

§ 98. Wenn ein gegebenes Capital a zum gegebenen Zinsfuss z wächst, so wird der Betrag des angewachsenen Capitals w nach n Jahren

$$w = az^n$$

denn am Ende des ersten Jahres wird aus a az
 " " " zweiten " " " az^2
 " " " dritten " " " az^3
 ⋮

mithin " " " nten " " " az^{n-1} az^n

folglich ist I. $w = az^n$

$$\text{II. } a = \frac{w}{z^n}$$

$$\text{III. } z = \sqrt[n]{\frac{w}{a}}$$

$$\text{IV. } n = \frac{\log w - \log a}{\log z}.$$

§ 99. Unter dem Discontfuss versteht man denjenigen Factor, mit welchem man ein nach einem Jahre fälliges Capital multipliciren muss, um den gegenwärtigen Werth desselben zu erhalten. Hat man nach n Jahren ein Capital w zu zahlen zum Zinsfuss z , so muss das gleich zu zahlende Capital a nach dem vorigen § 98 betragen

$$az^n = w$$

$$a = \frac{w}{z^n}$$

woraus denn hervorgeht, dass der Discontfuss nichts anders ist als der umgekehrte Zinsfuss, nemlich

$$\frac{1}{z}.$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 215—218.

§ 100. Soll ein Capital a ausser um seine jährlichen Zinsen auch noch jährlich um die Summe b vermehrt oder vermindert werden, so ergiebt sich dafür nach n Jahren folgende Formel:

$$w = az^n \pm \frac{b(z^n - 1)}{z - 1} \text{ denn es wird}$$

aus a im ersten Jahre $az \pm b$

aus $az \pm b$ im zweiten Jahre $az^2 \pm bz \pm b$

aus $az^2 \pm bz \pm b$ im dritten Jahre $az^3 \pm bz^2 \pm bz \pm b$

⋮

demnach im n^{ten} Jahre $az^n \pm b(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^3 + z^2 + 1)$

folglich ist, da $s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$ nach § 96,

$$w = az^n \pm \frac{b(z^n - 1)}{z - 1}$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 218—219.

§ 101. Unter einer Rente (r) versteht man eine von Jahr zu Jahr wiederkehrende sich gleich bleibende Zahlung.

Die Zahlungen eines jeden Jahres können entweder am Anfange oder am Schlusse des Jahres stattfinden; sie können aber auch halbjährlich, vierteljährlich u. s. w. geleistet werden.

Die Rente kann entweder sofort oder nach einer gegebenen Anzahl von Jahren anfangen; sie kann entweder nach einer gegebenen Anzahl von Jahren aufhören oder ins Unendliche fortlaufen.

Zeitrente wird eine Rente genannt, welche eine bestimmte Anzahl von Jahren gezahlt wird, im Gegensatze zu Leibrente, welche von der Lebensdauer einer oder mehrerer Personen abhängig ist.

§ 102. Der gegenwärtige Werth R einer durch n Jahre mit dem Schlusse eines jeden Jahres fälligen Rente r beträgt zum Zinsfusse z

$$R = \frac{r(z^n - 1)}{z(z - 1)}$$

Denn der Rente r am Ende des Jahres entspricht der gegenwärtige Werth $\frac{r}{z}$ am Anfange des Jahres; ferner der Rente r am

Ende des zweiten Jahres entspricht der gegenwärtige Werth $\frac{r}{z^2}$ am Anfange des ersten Jahres; und der Rente r am Ende des

dritten Jahres entspricht der gegenwärtige Werth $\frac{r}{z^3}$ am Anfange des ersten Jahres u. s. w., so dass

$$R = \frac{r}{z} + \frac{r}{z^2} + \frac{r}{z^3} + \dots + \frac{r}{z^n}$$

$$R = \frac{r}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^{n-1}} \right)$$

folglich ist mit Zuhilfenahme des § 96.

$$R = \frac{r}{z} \cdot \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n - 1}{\frac{1}{z} - 1}$$

$$\text{I. } R = \frac{r(z^n - 1)}{z^n(z - 1)}$$

$$\text{II. } r = \frac{R z^n (z - 1)}{z^n - 1}$$

$$\text{III. } n = \frac{\log r - \log[r - R(z - 1)]}{\log z}$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 219—221.

§ 103. Unter Amortisation einer Capitalschuld versteht man die Tilgung dieser Schuld sammt deren fälligen Zinsen durch eine jährlich sich gleich bleibende Rente, welche mit dem Schlusse eines jeden Jahres gezahlt wird und nach einer gewissen Reihe von Jahren abläuft.

Der Amortisationsfuss ist derjenige Zinsfuss, durch welchen man aus dem gegebenen Capitale den jährlichen Betrag der Tilgungsrente ableitet.

Ist a = Capital, z = Zinsfuss, z_1 = Amortisationsfuss,

Dann ist $a(z - 1)$ = Betrag der einjährigen Zinsen

und $a(z_1 - 1)$ = jährlicher Betrag der Tilgungsrente

Nun war nach der Rentenrechnung

$$R = \frac{r(z^n - 1)}{z^n(z - 1)} \text{ und da hier } R = a \text{ und } r = a(z_1 - 1)$$

so ist
$$1 = \frac{(z^n - 1)(z_1 - 1)}{z^n(z - 1)}$$

$$z^n(z - 1) = z^n(z_1 - 1) - (z_1 - 1)$$

$$z^n(z - 1 - z_1 + 1) = - (z_1 - 1)$$

$$z^n(z - z_1) = - (z_1 - 1)$$

$$z^n = \frac{z_1 - 1}{z_1 - z}$$

$$n = \frac{\log(z_1 - 1) - \log(z_1 - z)}{\log z}$$

z_1 ist stets grösser als z und $z_1 - z$ ist der sogenannte Zuschlag für Amortisation, und da auch

$$z_1 - 1 = \frac{z^n (z - 1)}{z^n - 1}$$

$$z_1 = \frac{z^n (z - 1) + z^n - 1}{z^n - 1} = \frac{z^{n+1} - 1}{z^n - 1}.$$

§ 104. Die Combinationslehre hat zur Aufgabe aus gegebenen Dingen, welche Elemente genannt werden, in einer vorgeschriebenen Weise Zusammenstellungen zu bilden und die dabei eintretenden Gesetze nachzuweisen.

Jede Zusammenstellung von Elementen wird eine Complexion genannt.

Die Elemente werden entweder der Reihe nach durch a, b, c, d u. s. w. oder durch 1, 2, 3, 4 u. s. w. bezeichnet. Die letztere Bezeichnung hat den Vorzug, da aus derselben unmittelbar ersichtlich ist, ob die Elemente steigend (1, 2, 3) oder fallend (3, 2, 1) geordnet sind.

Man unterscheidet in der Combinationslehre drei Hauptoperationen: Permutiren, Combiniren und Variiren.

§ 105. Unter Permutiren versteht man diejenige combinatorische Operation, durch welche man aus gegebenen Elementen Complexionen bildet, welche alle gegebenen Elemente in sich enthalten und sich von jeder anderen durch die Ordnung der darin vorkommenden Elemente unterscheiden.

Sollen 2 Elemente 1 2 permutirt werden, so erhält man

$$\begin{cases} 1\ 2 \\ 2\ 1 \end{cases} \text{ zwei Permutationen}$$

oder $P_2 = 1. 2.$

Sollen drei Elemente 1 2 3 permutirt werden, so schreibe man die drei Elemente hin und stelle neben jedes Element die Permutationen der übrigen 2 Elemente

$$\begin{array}{ccc} 1\ 2\ 3 & 2\ 1\ 3 & 3\ 1\ 2 \\ 1\ 3\ 2 & 2\ 3\ 1 & 3\ 2\ 1 \end{array}$$

Die Anzahl der Permutationen von drei Elementen ist dann

$$P_3 = 1. 2. 3.$$

Kommt ein 4tes Element hinzu, so kann dieses 4te Element erstens am Ende der vorigen 6 seine Stelle einnehmen, ferner 6 mal zwischen dem 2ten und 3ten Element, darauf 6 mal zwischen

dem 1sten und 2ten Element und endlich 6mal am Anfange, folglich ist $P_4 = 1. 2. 3. 4.$ u. s. w. man erhält dann allgemein

$$P_n = 1. 2. 3. 4. 5 \dots n = n!$$

§ 106. Die Anzahl aller Permutationen aus n Elementen, unter denen r gleiche Elemente vorkommen, beträgt

$$P_{nr} = \frac{n!}{r!}$$

Denn sind sämtliche Permutationen gebildet und wäre ihre Anzahl $= x$, dann lassen sich aus r gleichen Elementen, wenn diese ungleich wären, aus jeder vorhandenen Complexion P_r neue herleiten, mithin also $x P_r$ neue Complexionen,

folglich ist $x P_r = P_n$, demnach

$$x = \frac{P_n}{P_r} = \frac{n!}{r!}$$

Ueberhaupt ist die Anzahl aller Permutationen aus n Elementen, unter denen r gleiche einer Art und s gleiche einer anderen Art vorkommen

$$P_{nr,s} = \frac{P_n}{P_r \cdot P_s} = \frac{n!}{r! s!}$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 222.

§ 107. Unter Combiniren versteht man diejenige combinatorische Operation, durch welche man aus gegebenen Elementen Complexionen bildet, deren jede ein und dieselbe vorgeschriebene Anzahl Elemente enthält und sich von jeder anderen durch die darin enthaltenen Elemente unterscheidet.

Die Classe der Combinationen bezeichnet die Anzahl der Elemente, welche jede Complexion enthalten soll.

Bei den Combinationen wird nur steigende Ordnung der Elemente in den Complexionen zugelassen.

Classe 1, Classe 2, Classe 3, Classe 4, Classe 5 u. s. w. führen auch die Namen: Unionen, Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen u. s. w.

Man unterscheidet Combinationen mit Wiederholung, je nachdem jedes Element in jeder Complexion nur einmal, oder beliebig oft wiederholt, vorkommen darf, von denen wir jedoch nur die ersteren näher betrachten wollen und deren Anzahl für die r te Classe identisch ist mit der Anzahl aller Permutationen aus

n Elementen, unter denen r gleiche Elemente einer Art und $n-r$ gleiche Elemente einer anderen Art vorkommen, d. h.

$$C_{nr} = \frac{P_n}{P_r \cdot P_{n-r}} = \frac{1. 2. 3. 4. \dots n}{1. 2. 3. 4. r. 1. 2. 3. \dots (n-r)}$$

$$C_{nr} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{1. 2. 3. \dots r}$$

$$C_{n1} = n$$

$$C_{n4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$C_{n2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

⋮
⋮
⋮

$$C_{n3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad C_{nn} = 1.$$

Beisp. Die Combinationen von 1 2 3 4 5 sind

Classe 1.	Classe 2.	Classe 3.	Classe 4.	Classe 5.
$C_{5,1}$	$C_{5,2}$	$C_{5,3}$	$C_{5,4}$	$C_{5,5}$
1	1 2	1 2 3	1 2 3 4	1 2 3 4 5
2	1 3	1 2 4	1 2 3 5	
3	1 4	1 2 5	1 2 4 5	
4	1 5	1 3 4	1 3 4 5	
5	2 3	1 3 5	2 3 4 5	
	2 4	1 4 5		
	2 5	2 3 4		
	3 4	2 3 5		
	3 5	2 4 5		
	4 5	3 4 5		

Beisp. Meier Hirsch pag. 223.

§ 108. Unter Variiren versteht man diejenige combinatorische Operation, durch welche man aus gegebenen Elementen Complexionen bildet, deren jede ein und dieselbe vorgeschriebene Anzahl Elemente enthält und sich von jeder anderen nicht nur durch die darin enthaltenen Elemente, sondern auch durch die Ordnung derselben unterscheidet.

Die Classe der Variationen bezeichnet die Anzahl der Elemente, welche jede Complexion enthalten soll.

Man unterscheidet Variationen mit Wiederholung, je nachdem jedes Element in jeder Complexion nur einmal, oder beliebig oft wiederholt, vorkommen darf, von denen wir jedoch nur die ersteren näher betrachten wollen und deren Anzahl für eine beliebige Classe

identisch ist mit der Anzahl aller Permutationen aus so viel Elementen wie die Classe anzeigt multiplicirt mit der Summe der Combinationen derselben Classe von n Elementen.

$$V_{nr} = P_r \cdot C_{nr} = \frac{1.2.3.4\dots r.n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r}$$

$$V_{nr} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1).$$

Um die Variationen einer gegebenen Classe von einer gegebenen Anzahl Elemente zu bilden, bilde man zuerst die Combinationen dieser Classe und permutire alsdann jede Complexion.

Die Variationen der 3ten Classe von 1 2 3 4 5 sind:

1 2 3	1 2 4	1 2 5	1 3 4	1 3 5	1 4 5	2 3 4	2 3 5	2 4 5	3 4 5
1 3 2	1 4 2	1 5 2	1 4 3	1 5 3	1 5 4	2 4 3	2 5 3	2 5 4	3 5 4
2 1 3	2 1 4	2 1 5	3 1 4	3 1 5	4 1 5	3 2 4	3 2 5	4 2 5	4 3 5
2 3 1	2 4 1	2 5 1	3 4 1	3 5 1	4 5 1	3 4 2	3 5 2	4 5 2	4 5 3
3 1 2	4 1 2	5 1 2	4 1 3	5 1 3	5 1 4	4 2 3	5 2 3	5 2 4	5 3 4
3 2 1	4 2 1	5 2 1	4 3 1	5 3 1	5 4 1	4 3 2	5 3 2	5 4 2	5 4 3

mithin giebt es 60 Variationen von 5 Elementen zur 3ten Classe, oder

$$V_{5_3} = 60.$$

§ 109. Unter der Wahrscheinlichkeit eines bevorstehenden, vom Zufall abhängigen Ereignisses versteht man einen Bruch, dessen Zähler die Anzahl aller günstigen Fälle, welche dieses Ereigniss herbeiführen und dessen Nenner die Anzahl aller möglichen Fälle derselben Gattung ist.

Sind z. B. unter n möglichen Fällen irgend einer Gattung m günstige Fälle, welche das betreffende Ereigniss herbeiführen und ist w die Wahrzcheinlichkeit, so ist hiernach

$$w = \frac{m}{n} \text{ für den günstigen Fall, und}$$

$$w = \frac{n-m}{n} \text{ für den ungünstigen Fall;}$$

hieraus ergibt sich zu gleicher Zeit, dass

$$\frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} = 1 \text{ d. h. einer von diesen beiden Fällen muss eintreten.}$$

Die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne, die 8 weisse und 2 schwarze Kugeln enthält, auf einmal drei weisse Kugeln zu ziehen ist

$$w = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

weil alle möglichen Fälle gleich sind der Summe der Combinationen der 3ten Classe aus 10 Elementen, mithin $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$,

dagegen aus 8 weissen Kugeln $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$, folglich ist

$$w = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}.$$

§ 110. Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer von einander unabhängiger Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten einzeln gegeben sind; ist gleich dem Producte aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne, die 8 weisse und 2 schwarze Kugeln enthält zuerst eine weisse, und nachdem man diese zurückgelegt hat, eine schwarze Kugel zu ziehen ist

$$\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{25}.$$

Ist dagegen das Eintreten des zweiten Ereignisses vom ersteren abhängig, d. h. wird die einmal gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt, so wird dadurch die Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses modificirt, da ja dann nicht mehr 10 sondern nur 9 Kugeln in der Urne vorhanden sind, alsdann ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall

$$\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

§ 111. Ist auf das Eintreffen eines bevorstehenden vom Zufall abhängigen Ereignisses ein Preis gesetzt, so versteht man unter der mathematischen Hoffnung des Preises das Product aus diesem Preise mit der Wahrscheinlichkeit, dass das ihn herbeiführende Ereigniss eintreten werde.

Ist z. B. beim Werfen mit einem Würfel ein Preis gesetzt für einen bestimmten Wurf, etwa 5 Mark, so hat man für diesen vorherbestimmten Wurf zu setzen $\frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6}$ Mark.

Oder soll derjenige, welcher aus einer Urne, die 8 weisse und 2 schwarze Kugeln enthält, eine weisse Kugel zieht 1 Mark erhalten, dagegen wer eine schwarze Kugel zieht 1 Mark zahlen; dann muss der Einsatz betragen

$$\frac{8}{10} \cdot 1 - \frac{2}{10} \cdot 1 = \frac{3}{5} \text{ Mark}$$

Beisp. Meier Hirsch pag. 225—230.

§ 112. Die analytische Formel, welche die Entstehung für einen gegebenen Exponenten von dem Binomium $(a \pm b)$ darstellt, heisst der binomische Lehrsatz.

Um zu einer Formel für $(a \pm b)^n$ zu gelangen, gehe man aus von dem Producte:

$$(a + b) (a + c) (a + d) (a + e) \dots (a + n)$$

und ordne das ganze nach Potenzen von a , dann ist

$$(a + b) (a + c) = a^2 + (b + c) a + bc$$

$$(a + b) (a + c) (a + d) = a^3 + (b + c + d) a^2 + (bc + bd + cd) a + bcd$$

$$(a + b) (a + c) (a + d) (a + e) = a^4 + (b + c + d + e) a^3 + (bc + bd + cd + be + ce + de) a^2 + (bcd + bce + bde + cde) a + bcde \text{ u. s. w.}$$

$$(a + b) (a + c) (a + d) (a + e) \dots (a + n) = a_n + (b + c + d + e + \dots n) a^{n-1} +$$

$$(bc + bd + \dots bn + cd + ce + \dots en + de + \dots) a^{n-2}$$

$$+ (bcd + bce + \dots) a^{n-3} + \dots bcde \dots n$$

woraus hervorgeht, dass die Clammern nichts anderes enthalten als die Summe der Combinationen der verschiedenen Classen von den Elementen $b, c, d, e \dots n$.

Mithin ist allgemein

$$(a + b) (a + c) (a + d) (a + e) \dots (a + n) = a^n + C_{n_1} a^{n-1} + C_{n_2} a^{n-2} + C_{n_3} a^{n-3} + C_{n_4} a^{n-4} + \dots C_{n_{r-1}} a^{n-r+1} + \dots C_{n_n}$$

worin $C_{n_{r-1}} a^{n-r+1}$ das r te Glied der Reihe bedeutet, setzt man alsdann

$$b = c = d = e \dots = n, \text{ so ist, da nach § 107.}$$

$$C_{n_1} = n$$

$$C_{n_2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$C_{n_3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$C_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (r-1)}$$

$$\vdots$$

$$C_{n_n} = 1.$$

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (r-1)} a^{n-r+1} b^{r-1} + \dots + b^n$$

Ist dagegen $(a - b)^n$ zu bilden, so bleibt der Gang der Entwicklung ganz derselbe, nur dass man von dem Producte $(a-b)(a-c)(a-d) \dots (a-n)$ ausgeht, woraus dann hervorgeht, dass sämtliche geraden Glieder das Vorzeichen — erhalten, das allgemeine Glied (r) und letzte Glied $(n+1)$ jedoch dem Vorzeichen nach so lange unbestimmt bleibt als r und n nicht in absoluten Zahlen gegeben sind.

$$(a \pm b)^n = a^n \pm n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots$$

$$\pm \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (r-1)} a^{n-r+1} b^{r-1} \pm \dots \pm b^n$$

Wenn n eine ganze Zahl ist, so kommen im binomischen Lehrsatz 1 Glied mehr vor als n Einheiten hat. Die Coefficienten der Entwicklung der Potenz $(a \pm b)^n$

$$1, n, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$$

werden die Binomialcoefficienten genannt und ihre Summe beträgt 2^n , da ja

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + 1$$

ferner ist

$$(1-1)^n = 0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \pm 1,$$

woraus hervorgeht, dass die Summe der Coefficienten der ungeraden Glieder gleich ist der Summe der Coefficienten der geraden Glieder.

Ist demnach n eine gerade Zahl, so ist die Anzahl der Glieder der Reihe ungerade, es existirt dann in der Reihe ein mittleres Glied mit dem höchsten Coefficienten; wenn dagegen n eine ungerade Zahl ist, so ist die Anzahl der Glieder der Reihe gerade, es existiren dann in der Reihe zwei mittlere Glieder mit demselben höchsten Coefficienten.

Handelt es sich also darum $(a+b)^{20}$ zu entwickeln, so braucht man nicht sämtliche 21 Glieder der Reihe nach der Formel zu

berechnen, sondern nur die ersten 11 Glieder, da ja die Coefficienten in derselben Reihenfolge wieder abnehmen, in welcher sie bis zum 11ten Gliede zugenommen haben.

§ 113. Der binomische Lehrsatz $(a \pm b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots$ kann auch durch folgende Form ausgedrückt werden

$$(a \pm b)^n = A \pm n Aq + \frac{n-1}{2} Bq \pm \frac{n-2}{3} Cq + \frac{n-3}{4} Dq \pm \dots$$

in welcher A das erste Glied a^n und q den Quotienten $\frac{b}{a}$ bedeutet,

B ist alsdann $n Aq$

C " " $\frac{n-1}{2} Bq$

D " " $\frac{n-2}{3} Cq$ u. s. w.

Die letztere Formel kann mit Vorthail da angewandt werden, wo sämmtliche Glieder der Potenz $(a \pm b)^n$ entwickelt werden sollen, wobei dann noch das letzte Glied b^n nach der ersten Formel controlirt werden kann, da ja, wenn dieses richtig ist, auch die vorigen richtig sein müssen, weil in der letzten Formel jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden berechnet wird.

Der binomische Lehrsatz gilt für jeden beliebigen Exponenten n, ist jedoch eine geschlossene Reihe nur dann, wenn n eine absolute ganze Zahl ist, in allen anderen Fällen ist derselbe eine unendliche Reihe.

Beisp. Meier Hirsch pag. 73.

§ 114. Unter einem Kettenbruche versteht man einen Bruch, dessen Zähler 1 ist und dessen Nenner eine positive ganze Zahl mit einem angehängten Bruche, welcher wieder den Zähler 1 und einen Nenner von derselben Beschaffenheit wie vorhin hat u. s. w.

Die allgemeine Form des Kettenbruchs ist demnach

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ werden die Theilnehmer des Kettenbruchs genannt.

Ein ächter Bruch wird in einen Kettenbruch verwandelt, indem man den Nenner desselben in den Zähler hineindividirt, den nachbleibenden Rest in den vorhergehenden Divisor u. s. w. bis kein Rest mehr nachbleibt. Die einzelnen dabei erhaltenen Quotienten sind alsdann die Theilnenner des Kettenbruchs z. B.

$$\begin{array}{r} \frac{135}{177} \quad 135 \overline{) 177} = 1 \quad \text{mithin ist} \quad \frac{135}{177} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}. \\ \quad \quad \quad 42 \overline{) 135} = 3 \\ \quad \quad \quad \quad 9 \overline{) 42} = 4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 6 \overline{) 36} = 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3 \overline{) 6} = 2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Soll dagegen ein unächtcr Bruch in einen Kettenbruch verwandelt werden, so ist die erste Zahl des Kettenbruchs die ganze Zahl, welche in dem Bruche steckt, während der ächte Bruch wie vorhin in einen Kettenbruch verwandelt wird.

$$\frac{159}{38} = 4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

§ 115. Ein Kettenbruch wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, indem man die einzelnen Näherungswerthe desselben bildet; der letzte Näherungswerth ist dann der Werth des Kettenbruchs.

Unter einem Näherungswerth des Kettenbruchs versteht man den Werth des Kettenbruchs bis zu einer bestimmten Stelle, von welcher an man alle übrigen Partialbrüche desselben vernachlässigt.

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Der erste Näherungswerth ist a_0 oder $\frac{a_0}{1}$

der zweite Näherungswerth ist $a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$

der dritte Näherungswerth ist $a_0 + \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} =$

$$a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 (a_1 a_2 + 1) + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1}$$

der vierte Näherungswerth ist $= a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 + 1}{a_2 + 1} + \frac{1}{a_3}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2 + 1} + \frac{1}{a_3}} =$

$$a_0 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2 + 1} + \frac{1}{a_3}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 (a_2 a_3 + 1) + a_3}{a_2 a_3 + 1}} =$$

$$a_0 + \frac{a_2 a_3 + 1}{a_1 (a_2 a_3 + 1) + a_3} = \frac{a_0 \{a_1 (a_2 a_3 + 1) + a_3\} + a_2 a_3 + 1}{a_1 (a_2 a_3 + 1) + a_3} =$$

$$\frac{a_3 \{a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0\} + a_0 a_1 + 1}{a_3 (a_1 a_2 + 1) + a_1} \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet man nun den ersten Näherungswerth $\frac{a_0}{1}$ mit $\frac{Z_0}{N_0}$ u. s. w. Dann ist

$$\frac{Z_0}{N_0} = \frac{a_0}{1}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_2 Z_1 + Z_0}{a_2 N_1 + N_0}$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{a_3 \{a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0\} + a_0 a_1 + 1}{a_3 (a_1 a_2 + 1) + a_1} = \frac{a_3 Z_2 + Z_1}{a_3 N_2 + N_1} \text{ u. s. w.}$$

woraus man schliessen wird, dass auch die folgenden Näherungswerthe auf dieselbe Weise aus den beiden vorhergehenden Näherungswerthen gebildet werden; mithin auch

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{a_n Z_{n-1} + Z_{n-2}}{a_n N_{n-1} + N_{n-2}}.$$

$$\text{Beisp. 1) } x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{121}{62}.$$

Theilnenner:	2	5	2	1	2
Z	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{39}{16}$	$\frac{46}{23}$
N	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{39}{16}$	$\frac{46}{23}$

$$\text{Beisp. 2) } x = \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}} = \frac{63}{218}.$$

Theilnenner	3	2	5	1	4
Z	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{11}{38}$	$\frac{13}{45}$
N	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{11}{38}$	$\frac{13}{45}$

Zu gleicher Zeit wäre hier zu bemerken, dass die einzelnen Näherungswerthe eines Kettenbruchs stets reducirte Brüche sind, d. h. Zähler und Nenner desselben sind relative Primzahlen.

Die Näherungswerthe eines Kettenbruchs sind abwechselnd grösser und kleiner als der wahre Werth des Kettenbruchs, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerthen liegt der wahre Werth desselben. Je weiter der Näherungswerth dem Ende zu liegt, desto näher kommt derselbe dem wahren Werthe des Kettenbruchs. Der Unterschied je zweier auf einanderfolgender Näherungswerthe ist ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Product der beiden Nenner der Näherungswerthe ist.

Die Kettenbrüche werden angewandt, um ein Verhältniss zweier grossen Zahlen angenähert durch kleinere Zahlen auszudrücken.

Beisp. Meier Hirsch pag. 93.

§ 116. Jede irrationale Quadratwurzel lässt sich in einen unendlichen Kettenbruch verwandeln, z. B.

$$\begin{aligned} x^2 + ax &= 1 \\ x(a + x) &= 1 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+\frac{1}{a} + \frac{1}{a+\frac{1}{a} + \dots}}$$

$$\sqrt{53} = 7 + \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{53}-7} = \frac{\sqrt{53}+7}{4} = 3 + \frac{1}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{53}-5} = \frac{4(\sqrt{53}+5)}{28} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{7}{\sqrt{53}-2} = \frac{7(\sqrt{53}+2)}{49} = 1 + \frac{1}{x_3}$$

$$x_3 = \frac{7}{\sqrt{53}-5} = \frac{7(\sqrt{53}+5)}{28} = 3 + \frac{1}{x_4}$$

$$x_4 = \frac{4}{\sqrt{53}-7} = \frac{4(\sqrt{53}+7)}{4} = 14 + \frac{1}{x_5} \text{ u. s. w.}$$

$$\sqrt{53} = 7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{14 + \dots}}}}}$$

Theilnenner 3 1 1 3 14 3 1 1 3

Z 7 22 29 51 182 2599

N 1 3 4 7 25 275

Beisp. Meier Hirsch pag. 97.

§ 117. Unter Binomialreihe versteht man die Entwicklung der Potenz $(1+x)^n$, wo n eine beliebige reelle Zahl bedeutet.

$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$ in inf.
setzt man in letzterer $n = -m$, so geht die vorige über in
 $(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$ in inf.

Sie gilt jedoch auch noch für gebrochene Exponenten und man erhält, wenn man für $n = \frac{p}{q}$ oder für $n = -\frac{p}{q}$ setzt beziehungsweise:

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{p(p-q)(p-2q)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

$$(1+x)^{-\frac{p}{q}} = 1 - \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{p(p-q)(p-2q)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

welche bequem zur Berechnung einer Potenz $(a+b)^m$ wenn der Werth a^m als bekannt vorausgesetzt wird und b eine kleine Zahl bedeutet, so dass $a > b$, gebraucht werden kann, da

$$(a+b)^m = a^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m$$

$$(a+b)^m = a^m \left(\frac{a+b}{a}\right)^m = a^m \left(\frac{a}{a+b}\right)^{-m} = a^m \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)^{-m}$$

Beisp.

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = 2 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{5} = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \dots \right\}$$

oder

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2 \sqrt{\frac{4+1}{4}} = 2 \left(\frac{4}{4+1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{5} = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots \right\}$$

aber auch

$$\sqrt{5} = \sqrt{\frac{80}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{81-1} = \frac{9}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{81}} = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{5} = \frac{9}{4} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{81} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^2 - \dots \right\}$$

oder

$$\sqrt{5} = \sqrt{\frac{80}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{81-1} = \frac{9}{4} \left(1 + \frac{1}{80}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{5} = \frac{9}{4} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{80} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{80}\right)^2 + \dots \right\}$$

Fälle, in denen man eine gesuchte Potenz auf eine grosse Anzahl von Decimalstellen zu berechnen verlangt, werden durch vorstehende Reihen gelöst.

§ 118. Unter Exponentialreihe versteht man diejenige unendliche Reihe, welche durch Entwicklung der Potenz a^x nach

Potenzen von x geordnet entsteht, wo a jede beliebige Zahl bedeutet.

Für unendlich wachsende Werthe von n ist für $n = x$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots \text{ in inf.}$$

Unter e der Basis des natürlichen Logarithmen-Systems versteht man die Summe der unendlichen Reihe $1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$, deren Werth zwischen 2 und 3 liegen muss, da

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots < 2$$

mithin liegt e zwischen 2 und 3, die wirkliche Berechnung giebt
 $e = 2,71821828459 \dots$

Setzt man in der Binomialreihe $(1 + x)^n$ an Stelle von x den Werth $\frac{x}{n}$, so erhält man falls $x < n$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \left(\frac{x}{n}\right)^3 + \dots$$

oder

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1.2} x^2 + \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1.2.3} x^3 + \dots$$

Dann ist für $n = \infty$:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \text{ oder auch}$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \text{ mithin}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \text{ in inf.}$$

setzt man alsdann $a^x = e^y$, so ist auch

$$x \log a = y \log e$$

$$y = x \frac{\log a}{\log e}$$

$$a^x = e^{x \frac{\log a}{\log e}} \text{ folglich}$$

$$a^x = 1 + x \frac{\log a}{\log e} + \frac{x^2}{1.2} \left(\frac{\log a}{\log e} \right)^2 + \frac{x^3}{1.2.3} \left(\frac{\log a}{\log e} \right)^3 + \dots$$

Nimmt man hierin die Logarithmen für die Basis a , so ist $\log a = 1$, nimmt man sie dagegen für die Basis e , so ist $\log e = 1$ zu setzen.

§ 119. Es ist $(1 + x)^n = 1$ für $n = 0$, dann kann man auch setzen $(1 + x)^n = 1 + \varepsilon$, in welchem Ausdruck sowohl n als auch ε eine unendlich abnehmende Zahl bedeutet, dann ist

$$n \log (1 + x) = \log (1 + \varepsilon)$$

$$n = \frac{\log (1 + \varepsilon)}{\log (1 + x)} \text{ mithin ist}$$

$$\frac{(1 + x)^n - 1}{n} = \frac{\varepsilon}{\log (1 + \varepsilon)} = \frac{\varepsilon \log (1 + x)}{\log (1 + \varepsilon)} = \frac{\log (1 + x)}{\log (1 + \varepsilon)} \frac{\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\frac{(1 + x)^n - 1}{n} = \frac{\log (1 + x)}{\log (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \text{ und da für unendlich abnehmende}$$

Werthe von ε $(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$ ist, so ist auch

$$\frac{(1 + x)^n - 1}{n} = \frac{\log (1 + x)}{\log e} \text{ nun war}$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3 + \dots$$

folglich ist

$$\frac{(1 + x)^n - 1}{n} = x + \frac{n-1}{2} x^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3} x^3 + \dots$$

oder lässt man n unendlich abnehmen, dann ist

$$\frac{\log (1 + x)}{\log e} = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

welche Reihe jedoch nur zu gebrauchen ist für kleine Werthe von x , die zwischen $+1$ und -1 liegen. Für kleine Werthe von x kann man schon setzen.

$${}^a\log (1 + x) = x {}^a\log e.$$

Setzt man dagegen

$${}^a\log \left(\frac{1}{1 + x} \right) = - {}^a\log (1 + x) \text{ und liegt } 1 + x \text{ zwischen } 0 \text{ und}$$

$$2, \text{ so liegt } \frac{1}{1 + x} \text{ zwischen } \infty \text{ und } \frac{1}{2}.$$

Es ist ferner

$$\left. \begin{aligned} {}^a\log (1+x) &= {}^a\log e \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) \\ {}^a\log (1-x) &= {}^a\log e \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \right) \end{aligned} \right\} \text{subtr.}$$

$${}^a\log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 {}^a\log e \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

liegt hier $1+x$ zwischen 0 und 2; so liegt $\frac{1+x}{1-x}$ zwischen 0 u. ∞ .

Für die natürlichen Logarithmen ist

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Für ein anderes System ist dann

$${}^a\log (1+x) = {}^a\log e \cdot l(1+x).$$

§ 120. Unter dem Modulus eines logarithmischen Systems versteht man denjenigen Factor, mit welchem man den natürlichen Logarithmus einer Zahl multipliciren muss, um den Logarithmus derselben Zahl in dem betreffenden logarithmischen System zu erhalten.

$${}^a\log (1+a) = M \cdot l(1+x) \text{ oder}$$

$${}^a\log (1+x) = M \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

$$\text{und da } {}^a\log (1+x) = {}^a\log e \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

$$\text{so ist } M = {}^a\log e$$

$$\text{oder nach § 73 } M = \frac{\log e}{\log a}$$

sind die natürlichen Logarithmen bekannt, so ist

$$M = \frac{1}{l a}$$

Für Briggische Logarithmen ist $M = 0,4342944819 \dots$

$$\text{und } \frac{1}{M} = 2,3025850930 \dots$$

§ 121. Ist der $\log a$ bekannt und b eine kleine Zahl, so ist

$$1) \log (a+b) = \log a + \log \left(1 + \frac{b}{a} \right)$$

$$\log (a+b) = \log a + \log e \left[\frac{b}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} \right)^4 - \dots \right]$$

$$2) \log(a+b) = \log a + \log\left(\frac{a+b}{a}\right) = \log a - \log\left(\frac{a}{a+b}\right) = \log a - \log\left(1 - \frac{b}{a+b}\right)$$

$$3) \log(a+b) = \log a + \log\left(\frac{a+b}{a}\right) = \log a + \log\left(\frac{2a+b+b}{2a+b-b}\right) = \log a + \log\left(\frac{1 + \frac{b}{2a+b}}{1 - \frac{b}{2a+b}}\right)$$

Ist der 1 14 gegeben, so ist

$$\text{nach 1) } 1\ 15 = 1\ 14 + \frac{1}{14} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{14}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{14}\right)^3 \dots\dots$$

$$\text{nach 2) } 1\ 15 = 1\ 14 + \frac{1}{15} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{15}\right)^3 \dots\dots$$

$$\text{nach 3) } 1\ 15 = 1\ 14 + 2 \left[\frac{1}{29} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{29}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{29}\right)^5 \dots\dots \right]$$

§ 122. Setzt man

$$\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots\dots \\ \cos y + i \sin y &= a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots\dots\dots \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots\dots \\ \cos y + i \sin y &= a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots\dots\dots \end{aligned}} \right\} \text{subtr.}$$

$$\cos y - \cos x + i(\sin y - \sin x) = a_1(y-x) + a_2(y^2-x^2) + a_3(y^3-x^3) + \dots$$

$$-2 \sin \frac{y+x}{2} \sin \frac{y-x}{2} + 2i \cos \frac{y+x}{2} \sin \frac{y-x}{2} = a_1(y-x) +$$

$$a_2(y^2-x^2) + a_3(y^3-x^3) + \dots\dots\dots$$

durch $y-x$ die ganze Gleichung dividirt, giebt

$$\begin{aligned} -\sin \frac{y+x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{y-x}{2}}{\frac{y-x}{2}} + i \cos \frac{y+x}{2} \frac{\sin \frac{y-x}{2}}{\frac{y-x}{2}} &= a_1 + a_2 \frac{y^2-x^2}{y-x} \\ &+ a_3 \frac{y^2-x^3}{y-x} + \dots \end{aligned}$$

lässt man hierin die Differenz $y-x$ unendlich abnehmen, so ist

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \text{ für } \alpha = 0, \text{ denn es ist für } \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha \text{ oder}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ mithin}$$

$$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} < \cos \alpha \text{ d. h.}$$

$\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ist seinem Werthe nach immer zwischen 1 und $\cos \alpha$ enthalten. Nimmt nun α ohne Aufhören ab, so ist $\cos \alpha = 1$ für $\alpha = 0$, mithin auch $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ für $\alpha = 0$.

Setzt man $y = x (1 + \delta)$, wo δ eine unendlich abnehmende Zahl bedeutet, dann ist

$$y^n = x^n (1 + \delta)^n \text{ oder}$$

$$\frac{y^n - x^n}{x^n} = (1 + \delta)^n - 1 \text{ es ist aber auch}$$

$$\frac{y}{x} - 1 = \delta$$

$$\frac{y - x}{x} = \delta \text{ folglich ist}$$

$$\frac{y^n - x^n}{x^n} \cdot \frac{x}{y - x} = \frac{(1 + \delta)^n - 1}{\delta} \text{ also}$$

$$\frac{y^n - x^n}{x^n} \cdot \frac{x}{y - x} = n, \text{ da ja}$$

$$(1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \delta^2 + \dots$$

$$\frac{(1 + \delta)^n - 1}{\delta} = n \text{ für } \delta = 0, \text{ folglich ist auch}$$

$$\frac{y^n - x^n}{y - x} = nx^{n-1} \text{ mithin}$$

$$-\sin \frac{y+x}{2} + i \cos \frac{y+x}{2} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

$$-\sin x + i \cos x = a_0 i + a_1 i x + a_2 i x^2 + a_3 i x^3 + \dots$$

welche letztere Gleichung aus der ersten in diesem § hervorgeht, wenn man dieselbe mit i multiplicirt.

Aus beiden folgt dann durch Vergleichung, da man ja wiederum für $y = x$ setzen kann

$$a_1 = a_0 i \quad a_2 = \frac{a_1 i}{2} = -\frac{a_0}{1 \cdot 2}$$

$$2a_2 = a_1 i \quad a_3 = \frac{a_2 i}{3} = -\frac{a_0 i}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$3a_3 = a_2 i \quad a_4 = \frac{a_3 i}{4} = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ u. s. w.}$$

$$4a_4 = a_3 i$$

um a_0 zu bestimmen, setze man $x=0$, dann ist $a_0=1$; folglich ist

$$\cos x + i \sin x = 1 + ix - \frac{x^2}{1.2} - \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{ix^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

genau dieselbe Reihe erhält man, wenn man in § 118 den Werth ix an Stelle von x setzt, mithin ist auch

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ oder auch } -x \text{ statt } x \text{ gesetzt:}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\text{dann ist } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots$$

Inhalt.

Einleitung § 1—2.	Logarithmen § 63—73.
Absolute Zahlen § 3.	Gleichungen § 74—91.
Algebraische Zahlen § 4—5.	Progressionen § 92—96.
Grundrechnungsarten § 6.	Zinsrechnung § 97—100.
Addition § 7—9.	Rentenrechnung § 101—103.
Subtraction § 10—13.	Combinationslehre § 104—108.
Multiplication § 14—16.	Wahrscheinlichkeitsrechnung § 109—111.
Division § 17—19.	Binomischer Lehrsatz § 112—113.
Verhältnisse § 20—21.	Kettenbrüche § 114—116.
Proportionen § 22—35.	Binomialreihe § 117.
Potenzen § 36—49.	Exponentialreihe § 118—121.
Wurzeln § 50—62.	Sinus- und Cosinusreihe § 122.

21-
64

Mitau.

Gedruckt bei J. F. Steffenhagen und Sohn.

—
1882.