

TARTU RIIGLIK ÜLIKOO

L.ROOTS

*Valitud küsimusi
teoreetilisest
mehhaanikast*

IV

TARTU 1967

A
25610

TARTU RIIKLIK ÜLIKOO

Teoreetilise mehhaanika kateeder

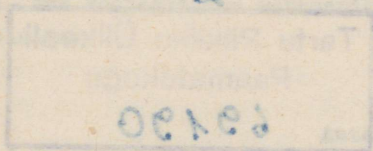
L. R o o t s

VALITUD KÜSIMUSI
TEOREETILISEST MEHHAANIKAST

IV

Analüütiline mehhaanika

Teine trükk



TARTU 1967

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

69190

E e s s õ n a.

Käesolev väljaanne kuulub järjekordse lülina Tartu Riikliku Ülikooli teoreetilise mehhaanika kateedri poolt koostatavasse õppevahendite sarja, millest varem on ilmunud juba Ü. Lepiku "Valitud küsimusi teoreetilisest mehhaanikast" I (Küsimusi punkti mehhaanikast) ja II (Kindla keha liikumine kinnispunkti ümber) ning K. Soonetsi "Valitud küsimusi teoreetilisest mehhaanikast" III (Võimalike nihutuste printsiip, d'Alembert'i printsiip ning dünaamika üldvõrrand). Siin käsitletakse analüütilise mehhaanika küsimusi - süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandeid üldistatud koordinaatides ning mehhaanika variatsioonprintsiipe.

Õppevahendi kirjutamisel on peetud silmas TRÜ nende osakondade vajadusi, kus teoreetiline mehhaanika on kavas iseiseisva distsipliinina.

Autor.

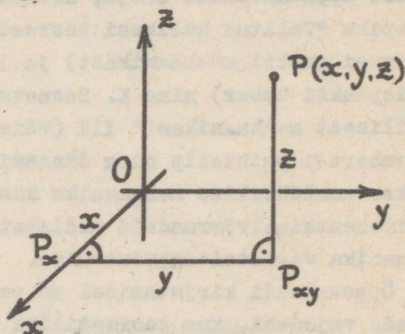
§ 1. ÜLDISTATUD KOORDINAADID MEHHAANIKAS.

1. Üldistatud koordinaatide mõiste.

Me nimetame koordinaatideks igasuguseid suurusi, mis võimaldavad määrata punktide ja kehade asendeid ruumis.

Kõige sagedamini kasutatakse sel otstarbel Cartesiuse ristkoordinaate (jeon.1), mille puhul punkti asukoht ruumis määratakse kolme lõiguga

$$\begin{cases} OP_x = x, \\ P_x P_{xy} = y, \\ P_{xy} P = z. \end{cases}$$



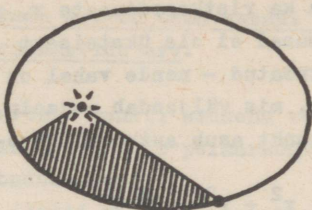
Joon. 1.

Koordinaatideks võivad aga olla ka teistsugused suurused. Sagedasti kasutatakse mitmesuguseid nurki - näiteks silindriliste ja sfääriliste koordinaatide puhul.

Kui punkt asub mingil antud pinnal, siis tema asukoha määramiseks piisab kahest koordinaadist - punkti asukoha tasapinnal saab määrata ristkoordinaatidega x ja y või polaarkoordinaatidega r ja θ ; laeva asukoha merel saab määrata, andes selle geograafilise pikkuse ja laiuse. Antud joonel asuva punkti asukoha võib määrata ühe koordinaadiga, näiteks selle joone kindlast punktist loetud kaare pikkusega. Planeedi asukoha orbiidil võib määrata pindalaga, mille on katnud Päikeselt planeedini viiv raadius alates teatud momendist. On selge, et on veel väga palju teisigi võimalusi suuruste valikuks,

mida koordinaatidena kasutada.

Translatoorselt liikuva keha asukoht on teada, kui teame tema ühe punkti, näiteks masskeskme Cartesiuse koordinaate. Ümber telje pöörleva keha asendi määrab üks koordinaat - nurk, mille võrra see keha on mingi algasendi suhtes pöördunud. Ühe kinnispunktiga keha puhul kasutatakse harilikult koordinaatidena kolme nn. Euleri nurka.



Joon. 2.

Ühe ja sama objekti puhul võib eri juhtudel kasutada erisuguseid koordinaate - planeedi asukoha orbiidil võib anda ka polaar- või ristkoordinaatide abil; viimasena mainitud juhul võib Euleri nurkade asemel näidata keha mingi kahe punkti ristkoordinaadid.

Oleks väga ebamugav, kui iga erineva koordinaatide süsteemi jaoks peaksime kõik mehhaanika laused uuesti tõestama. Õnneks pole see vajalik. Me võime kõik need laused tõestada ette kindlaks määrata, missuguseid koordinaate kasutame; tulemused on siis kehtivad kõigil konkreetseil erijuhtudel.

Nii tehes ütleme, et kasutame oma tõestustes nn. üldistatud koordinaate; üldistatud koordinaatide all mõistame selle juures igasuguseid parameetreid, mille abil saab määrata punktide, punktide süsteemide ja kehade asendeid.

Üldistatud koordinaate tähistame edaspidi, nagu seda tavaliselt tehakse, tähega q :

$$q_1, q_2, \dots$$

2. Punktide süsteemi vabadusastmete arv.

Punkti (või süsteemi) asendi määramiseks kasutatavad koordinaadid võivad olla üksteisest sõltumatud või mitte.

Me võime, näiteks, punkti asukoha joonisel 3 kujutatud ringjoonel määrata kaare pikkusega s või nurgaga φ ; võime

Tavaliselt püütakse üldistatud koordinaadid sisse tuua selliselt, et nad oleksid üksteisest sõltumatud.

Joon. 3.

$$x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n.$$

Oletame aga nüüd, et süsteem ei ole vaba, vaid tema punktide liikumise vabadust kitsendavad holonoomsed seosed, arvult k. Seoste võrrandid olgu

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \\ \text{--- --- ---}, \\ \varphi_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0. \end{cases}$$

- 6 -

Niisiis, süsteemi vabadusastmete arv on tema asendi määramiseks vajalike sõltumatute koordinaatide arv.

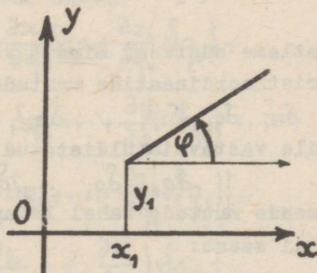
Vaatleme mõningaid näiteid.

1. Tasapinnal vabalt liikuda võiva punkti asukoha võib määrata kahe koordinaadiga, näiteks, rist- või polaarkoordinaatidega. Sel punktil on kaks vabadusastet.

2. Ümber telje pöörleva keha asendi määramiseks piisab nurga andmisest, mille võrra ta on pöördunud teatud kindla algasendi suhtes - seega sellel kehal on üks vabadusaste.

3. Ühe kinnispunktiga keha asendi saab määrata kolme Euleri nurgaga - kolm vabadusastet.

4. Tasapinnal vabalt liikuda võival jäigal vardal on kolm vabadusastet - tema asendi määravad näiteks ühe otspunkti koordinaadid x_1, y_1 ja nurk, mille ta moodustab mingi jääva suunaga (joonisel 4 x-telje positiivse suunaga).



Joon. 4.

Mitu vabadusastet on vaguni rattal? Ruumis täiesti vabalt liikuda võival kindlal kehal?

3. Üldistatud koordinaatide ja ristkoordinaatide vahelised seosed.

Olgu vaadeldavas süsteemis n punkti; nende liikumise vabadust kitsendagu k holonoomset seost. Siis süsteemi vabadusastmete arv

$$s = 3n - k;$$

tema asendi määramiseks on vaja s sõltumatut üldistatud koordinaati:

$$q_1, q_2, \dots, q_s.$$

Üleminekuvalemid ristkoordinaatidelt üldistatud koordinaatidele omavad üldjuhul kuju:

$$\begin{cases} x_1 = f_1 (q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ y_1 = g_1 (q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ z_1 = h_1 (q_1, q_2, \dots, q_s, t) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Edaspidi piirdume igal pool ainult juhuga, mil süsteemi liikumist kitsendavad seosed on statsionaarsed (s.o. ajas muutumatud). Niisugusel juhul koordinaatide teisendusvalemid aega ei sisalda ning nende üldkuju on järgmine:

$$\begin{cases} x_1 = f_1 (q_1, q_2, \dots, q_s), \\ y_1 = g_1 (q_1, q_2, \dots, q_s), \\ z_1 = h_1 (q_1, q_2, \dots, q_s) \end{cases} \quad (1.1) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Vaatleme süsteemi mingit võimalikku nihutust, mis väljendub ristkoordinaatide muutudes

$$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \dots; \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$$

ning neile vastavais üldistatud koordinaatide muutudes

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s.$$

Seosed nende muutude vahel leiame, diferentseerides vameleid (1.1); nii saame:

$$\begin{cases} \delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s, \\ \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s, \\ \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q_s \end{cases} \quad (1.2) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Näeme, et ristkoordinaatide muudud avalduvad üldistatud koordinaatide muutude lineaarsete kombinatsioonidena (ja vastupidi).

Valemid (1.2) kehtivad ka mittestatsionaarsete seoste korral, sest võimalike nihutuste all mõistetakse ju niisuguseid lõpmatu väikesi nihutusi, mis on kooskõlas antud hetkel

eksisteerivate seostega.

4. Töö avaldis üldistatud koordinaatides. Üldistatud tung.

Olgu vaadeldava süsteemi punktidele rakendatud tungid

$$\vec{F}_1 = (X_1, Y_1, Z_1) \quad (1 = 1, 2, \dots, n).$$

Vaatleme süsteemi võimalikku nihutust

$$\delta \vec{r}_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Süsteemile rakendatud tungide töö sellel nihutusel (võimalik töö) on

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i).$$

Asendame siia valemeist (1.2) suurused $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ üldistatud koordinaatide muutude kaudu. Saame

$$\begin{aligned} \delta A = & \sum_{i=1}^n \left[X_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial x_i}{\partial q_3} \delta q_3 \right) + \right. \\ & + Y_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s \right) + \\ & + Z_i \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q_s \right) \Big] = \\ = & \sum_{i=1}^n \left[\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \right. \\ & + \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right) \delta q_2 + \\ & + \dots + \left. \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \delta q_s \right]. \end{aligned}$$

Kordajaid, mis seisavad viimases avaldises $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ ees, nimetatakse üldistatud tungideks. Tähistame nad $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$; vastavalt esjaõeldule

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (1.3)$$

Võimaliku töö avaldis saab nüüd kuju

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n. \quad (1.4)$$

Sisuliselt on koordinaadile q_j vastav üldistatud tung Q_j suurus, mis korrutatuna selle koordinaadi muuduga δq_j annab töö, mille teevad kõik süsteemile rakendatud tungid nihutustel, mis vastavad koordinaadi q_j muudule δq_j .

Õeldust järeldub, et üldistatud tung ei tarvitse alati olla suurus, millel on tungi dimensioon; küll on aga korrutisel

$$Q_j \delta q_j$$

alati töö dimensioon:

$$[Q_j \delta q_j] = \mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-2}$$

Kui näiteks koordinaat q_1 on pikkuse dimensiooniga, siis

$$[Q_1] = \mathcal{M} \mathcal{L} \mathcal{T}^{-2}$$

- see on suurus tungi dimensiooniga; kui q_j on nurk (dimensioonita suurus), siis

$$[Q_j] = \mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-2}$$

- see on suurus tungi momendi dimensiooniga; kui q_j on pindala, siis

$$[Q_j] = \mathcal{M} \mathcal{T}^{-2}$$

jne.

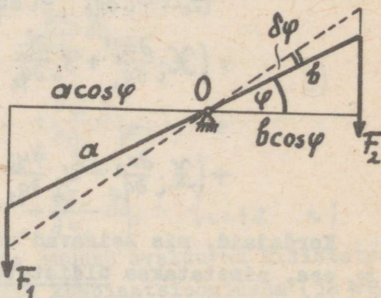
Vaatleme mõningaid konkreetseid näiteid.

1. Olgu tegemist kahepoolse kangiga, mille otstes on rakendatud vertikaalsed tungid F_1 ja F_2 (joon. 5).

Tema asendi võib määrata

ühe koordinaadiga - nurgaga

$q_1 = \varphi$, mida loeme kokkuleppeliselt horisontaalist. Nurga φ muudule $\delta \varphi$ võrra vastab töö



$$\begin{aligned} \delta A &= F_1 a \cos \varphi \delta \varphi - F_2 b \cos \varphi \delta \varphi = \\ &= (F_1 a \cos \varphi - F_2 b \cos \varphi) \delta \varphi = \\ &= [M_o(F_1) + M_o(F_2)] \delta \varphi. \end{aligned}$$

Joon. 5.

Näeme seega, et üldistatud tungiks, mis vastab nurgale φ , on kangile rakendatud tungide momentide summa toetuspunkti O suhtes:

$$Q_1 = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2).$$

2. Vaatleme täiesti vaba materiaalselt punkti, millele on rakendatud tung $\vec{F} = (X, Y, Z)$. Kasutame Cartesiuse ristkoordinaate $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$.

Koordinaat x muudule δx võrra vastab tungi $\vec{F}$ töö

$$X\delta x,$$

seega, sellele koordinaadile vastav üldistatud tung

$$Q_1 = X.$$

Olukord on täiesti analoogiline ülejäänud koordinaatide korral:

$$Q_2 = Y, Q_3 = Z.$$

Cartesiuse ristkoordinaadile vastavaks üldistatud tungiks on punktile rakendatud tungi projektsioon ristkoordinaadistiku vastaval teljel.

3. Kaksikpendli (vt. joon.6) asendi määravad nurgad φ_1

ja φ_2 (mis on sõltumatud koordinaadid). Pendli võimalikule nihutusele, mille puhul m_1 ja m_2 kõrgused muutuvad vastavalt δz_1 ja δz_2 võrra, vastab elementaarne töö

$$\delta A = m_1 g \delta z_1 + m_2 g \delta z_2$$

Et

$$z_1 = l_1 \cos \varphi_1, \quad z_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2,$$

siis

$$\delta z_1 = -l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1,$$

$$\delta z_2 = -l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_2$$

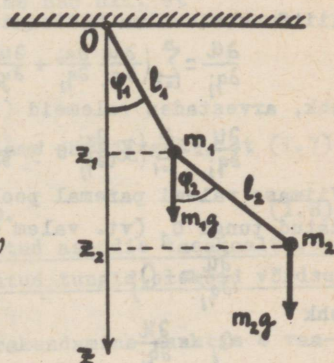
ning

$$\delta A = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - m_2 g l_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_2.$$

Järelikult nurkadele φ_1 ja φ_2 vastavad üldistatud tungid on:

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1,$$

$$Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2$$



Joon. 6.

Kokkuvõttes - tuleb meeles pidada, et analüütilises mehhaanikas kasutatakse sõna "tung" väga mitmesuguse dimensiooniga ning füüsikalise sisuga suuruste puhul. Tungi mõiste niisuguse üldistamise põhjuseks on soov saavutada käsitluse võimalikult suurt üldsust, valemite laia rakendatavust ja ühtlust tähiseis.

5. Üldistatud tungi ja potentsiaalse energia vaheline seos.

Kui kõik vaadeldava süsteemi punktidele rakendatud tungid on konservatiivsed, siis võime nad avaldada potentsiaalse energia U kaudu järgmiselt:

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (1.5)$$

($i = 1, 2, \dots, n$).

Läheme üle üldistatud koordinaatidele. Arvutame potentsiaalse energia osatuletise mingi üldistatud koordinaadi q_j järgi; selle juures tuleb vaadelda funktsiooni

$$U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

liitfunktsioonina üldistatud koordinaatidest. Saame

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

ehk, arvestades valemuid (1.5),

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right).$$

Viimase valemi paremal poolel seisev summa aga tähendab üldistatud tungi Q_j (vt. valem (1.3)). Seega on

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = -Q_j$$

ehk

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (1.6)$$

Valem (1.6) kehtib loomulikult sõltumatult indeksi j väärtusest ($j = 1, 2, \dots, s$).

Niisiis näeme, et üldistatud tung on seotud potentsiaalse energiaga täpselt samuti, nagu tungi projektsioon ristkoor-

dinaadistiku teljel .

6. Tasakaalutingimus üldistatud koordinaatides.

Võimalike nihutuste printsiibis väljenduv materiaalsete punktide süsteemi tasakaalu tarvilik ja piisav tingimus on teatavasti järgmine:

Süsteem on antud asendis tasakaalus siis ja ainult siis, kui kõigi tema punktidele rakendatud tungide tööde summa süsteemi mis tahes võimalikul nihutusel on võrdne nulliga.

Kui süsteemile on rakendatud tungid $\vec{F}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ ja nende rakenduspunktide võimalikud nihutused on $\delta\vec{r}_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$, siis, vastavalt öeldule, tasakaalu tarvilik ja piisav tingimus väljendub võrrandiga

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

ehk

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0.$$

Minnes üle üldistatud koordinaatidele, võime sellele tingimusele anda kuju (vt. p.4):

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = 0. \quad (1.7)$$

Et üldistatud koordinaadid üksteisest ei sõltu, siis võib nende muudud vabalt ette anda. Valime nad nii, et

$$\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0.$$

Valemist (1.7) järgneb siis, et

$$Q_1 \delta q_1 = 0,$$

millest

$$Q_1 = 0.$$

Talitades edasi analoogiliselt, leiame järkjärgult, et (1.7) on samaväärne tingimusega

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_s = 0. \quad (1.8)$$

Seega: selleks, et süsteem oleks antud asendis tasakaalus, on tarvilik ja piisav, et kõik üldistatud tungid oleksid võrdsed nulliga.

Veenduge, et selle tingimuse rakendamine punktis 4 vaadeldud kangile annab õige tasakaalutingimuse!

Kui süsteemile mõjuvad ainult konservatiivsed tungid, siis tingimusele (1.8) võib anda kuju

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_2} = \dots = \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0. \quad (1.9)$$

Niisiis: konservatiivsete tungide mõju all oleva süsteemi tasakaaluks (antud asendis) on tarvilik ja piisav tema potentsiaalse energia statsionaarsus (selles asendis).

7. Kineetilise energia avaldis üldistatud koordinaatides.

Ristkoordinaatides avaldub süsteemi kineetiline energia valemiga

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Läheme üle üldistatud koordinaatidele, piirdudes statsionaarsete seoste juhuga, mil koordinaatide teisendusvalemid omavad kuju (1.1). Diferentseerides leiame neist valemeist tule-
tised:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s, \\ \dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \dot{q}_s, \\ \dot{z}_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ja asendame need T avaldisse. Saame

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right]. \end{aligned}$$

Tähistame siin kordajad, mis ei sisalda üldistatud koordinaatide tulelisi (nn. üldistatud kiirusi), järgmiselt:

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = A_{jk};$$

siis saame kineetilise energia avaldada kujul

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (1.10)$$

Valemist (1.10) näeme, et kineetiline energia on homogeenne ruutfunktsioon üldistatud kiiruste suhtes.

Juhime aga siinjuures veel kord tähelepanu ühele eeldusele, mis valemi (1.10) kehtivuseks oluline on – seosed peavad olema statsionaarsed. Mittestatsionaarsete seoste korral valem (1.10) ei kehti; sel juhul

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

kus T_2 on homogeenne ruutfunktsioon üldistatud kiiruste suhtes, T_1 esimese astme homogeenne funktsioon $\dot{q}$ suhtes ja T_0 liige, mis üldistatud kiirusi ei sisalda.¹

§ 2. HAMILTONI PRINTSIIP.

1. Mehhaaniliste suuruste variatsioonidest.

Vaatleme algul ühe materiaalse punkti liikumist, millel on ainult üks vabadusaste. Olgu selle punkti liikumise seadus

$$x = f(t) \quad (2.1)$$

(x asemel võib muidugi kasutada ka mõnd muud koordinaati, see ei muuda järgnevas midagi).

Diferentseerides liikumise seadust, saame

$$dx = f'(t)dt.$$

Koordinaadi muut dx vastab aja muudule dt ja näitab, kui palju liikuva punkti koordinaat muutub aja dt jooksul.

Kujutleme nüüd, et mitte argument t valemis (2.1) ei muutu, vaid muutub lõpmatu vähe liikumise seadus (2.1) ise. S.t., et (2.1) asemel on meil uus liikumise seadus

$$x = f(t) + \alpha g(t), \quad (2.2)$$

¹ Vt. näiteks Н. Н. Бухарин, Основной курс теоретической механики, часть вторая, Москва-Ленинград 1945, гл. 44.

kus α on lõpmatu väike konstantne kordaja ning $g(t)$ suvaline aja funktsioon. Sellisel juhul muutub punkti koordinaat fikseeritud ajal t

$$x^* - x$$

võrra. Niisugust koordinaadi muutust (selle tõttu, et muutus liikumise seaduse kuju) nimetame koordinaadi variatsiooniks ja tähistame δx :

$$\delta x = x^* - x. \quad (2.3)$$

Õieti tuleb δx nimetada koordinaadi isokroonseks variatsiooniks. Niisugust nimetust kasutatakse sellepärast, et tema defineerimisel oletatakse, nagu eespool tegimegi, et argumentiks olev aeg t ei muutu.

Kui liikumise seaduse muutus on selline, et seda lubavad punkti liikumist kitsendavad seosed, siis võib koordinaadi isokroonset variatsiooni mõista punkti võimaliku nihutusena ja vastupidi. Võimalik nihutus oli ju punkti niisugune lõpmatu väike nihutus, mis oli kooskõlas antud hetkel eksisteerivate seostega. Niisuguse tõlgenduse võimalikkus on meile edaspidi tähtis.

Kui liikuva punkti koordinaat x saab variatsiooni δx , siis peab üldiselt muutuma ka ta kiirus: $\dot{x}$ asemel on ta nüüd $\dot{x} + \delta \dot{x}$, kus $\delta \dot{x}$ on kiiruse variatsioon. Et kiirus alati võrdub koordinaadi tuletisega aja järgi, siis

$$\dot{x} + \delta \dot{x} = \frac{d}{dt}(x + \delta x) = \dot{x} + \frac{d}{dt} \delta x ;$$

järelikult on

$$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt} \delta x. \quad (2.4)$$

Saadud valem näitab, et diferentseerimine aja järgi ja isokroonne varieerimine on kommuteeruvad tehted. Analooiliselt eelnevaga saab näidata ka, et

$$\int \delta x \, dt = \delta \int x \, dt. \quad (2.5)$$

Sageli huvitavad meid mitmesugused punkti asukohast sõltuvad funktsioonid - näiteks potentsiaalne energia $U(x)$. Kui x muutub δx võrra, siis ilmselt ka iga temast sõltuv funktsioon $F(x)$ saab muuda. Funktsiooni niisugust muutu nimetame funktsiooni variatsiooniks, mis vastab koordinaadi variatsioonile δx (näiteks - δU on potentsiaalse energia variatsioon,

mis vastab koordinaadi variatsioonile δx). Kuna δx on lõpmatu väike, siis võib temast põhjustatud funktsiooni $F(x)$ muudu leidmiseks kasutada diferentsiaalrvtusest tuntud valemit funktsiooni diferentsiaali jaoks, s.t.

$$\delta F = F'(x) \delta x. \quad (2.6)$$

Konkreetsel juhudel: $\delta U = U'(x) \delta x$; $\delta(x^2) = 2x \delta x$ jne.

Juhul, kui vaadeldaval punktil on rohkem vabadusastmeid või kui on tegemist punktide süsteemiga, ei muutu isokroonse variatsiooni mõiste sisus midagi. Tuleb vaid tegemist rohkem kui ühe koordinaadi variatsioonidega. Valemid (2.4) ja (2.5) jäävad kehtima; valem (2.6) asendub funktsiooni

$$F(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

puhul järgmisega:

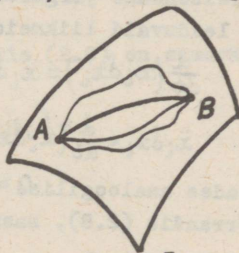
$$\delta F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial z_i} \delta z_i \right) \quad (2.7)$$

($\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ on koordinaatide variatsioonid).

2. Hamiltoni printsiip.

Olgu nüüd vaatluse all mingi punktide süsteemi liikumine. Olgu teada süsteemi kõigi punktide asukohad mingil hetkel t_0 , samuti mingil järgneval hetkel t_1 . Ülesanne seisneb selles, et tuleb määrata, kuidas süsteem liigub esimesest asendist teise.

Üldiselt võiks see liikumine toimuda väga mitmesuguseid teid mööda ja mitmesuguste seaduste järgi. Vaatleme üht lihtsat näidet – punkti liikumist antud pinda mööda. Kui on teada kaks selle punkti asendit pinnal, A ja B, siis on ikkagi, nagu näeme ka jooniselt 7, väga palju erinevaid teid, mida mööda punkt nende asendite vahel liikuda võiks. Samuti võiks ühe ja sama tee puhul liikumise seadus olla mitmesugune.



Joon. 7.

Me nimetame kõiki nii-

suguseid liikumisi, mida lubavad seosed, kinemaatiliselt võimalikeks.

Tegelikult leiab muidugi aset liikumine mööda üht kindlat teed kindla seaduse järgi; missugune see liikumine on, see sõltub süsteemile rakendatud tungidest ja liikumise algandmetest. Kõik kinemaatiliselt võimalikud liikumised ei ole dünaamiliselt võimalikud; seda on ainult tegelik liikumine.

Tegeliku liikumise leidmiseks annab meile kriteeriumi pealkirjas nimetatud Hamiltoni printsiip. Ta näitab tingimuse, mis eristab tegeliku liikumise kõigist ülejäänud kinemaatiliselt võimalikest. Järgnevalt leiame, missugune see tingimus on.

Rõhutame siinkohal veel kord eeldusi, millest lähtume:

- 1) liikumise aeg on antud (see on $t_1 - t_0$), s.t. võrreldakse vaid niisuguseid liikumisi, mis võivad toimuda sama ajaga;
- 2) liikumise alg- ja lõppasend on antud, s.t. võrreldakse ainult niisuguseid teid, mis läbivad neid asendeid.

Lähtume dünaamika üldvõrrandist

$$\sum_{i=1}^n [(\ddot{x}_i - m_i \ddot{y}_i) \delta x_i + (\ddot{y}_i - m_i \ddot{z}_i) \delta y_i + (\ddot{z}_i - m_i \ddot{x}_i) \delta z_i] = 0. \quad (2.8)$$

See kehtib tegelikul liikumisel. Tegeliku liikumise kõrval vaatleme veel teisi kinemaatiliselt võimalikke liikumisi. Kuna liikumise aeg on kõigi nende puhul sama, võime $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ viimases võrrandis lugeda koordinaatide isokroonseteks variatsioonideks, s.o. nihutusteks, mis viivad meid tegelikult trajektoorilt mingi võrreldava trajektoori samale hetkele vastavasse punkti (vt. joon.8).

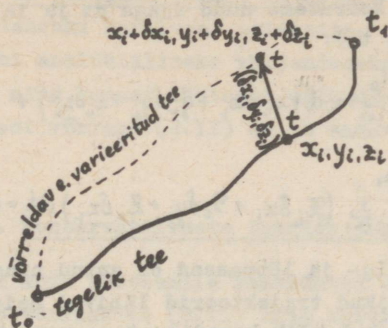
Teisendame järgnevalt võrrandit (2.8), esmajärjekorras temas leiduvaid liikmeid tüüpi $\ddot{x}_i \delta x_i$. Et

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_i \delta x_i) = \ddot{x}_i \delta x_i + \dot{x}_i \delta \dot{x}_i,$$

siis

$$\ddot{x}_i \delta x_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i \delta x_i) - \dot{x}_i \delta \dot{x}_i;$$

teostades analoogilise teisenduse kõigi seda tüüpi liikmetega võrrandis (2.8), saame



Joon. 8.

Võrreldav e. varieeritud trajektoer Hamiltoni printsiibi kerral. Nihutus $(\delta x, \delta y, \delta z)$ viib tegeliku trajektoori punktist võrreldava trajektoori samale hetkele vastavasse punkti.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (\mathcal{H}_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) - \\ & - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) + \\ & + \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \dot{y}_i \delta \dot{y}_i + \dot{z}_i \delta \dot{z}_i) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Kuna

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \dot{y}_i \delta \dot{y}_i + \dot{z}_i \delta \dot{z}_i) = \\ & = \sum_{i=1}^n m_i \delta \left[\frac{1}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] = \\ & = \delta \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] = \delta \mathcal{T} \end{aligned}$$

(kineetilise energia variatsioon), siis (2.9) on samaväärne võrrandiga

$$\begin{aligned} & \delta \mathcal{T} - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) + \\ & + \sum_{i=1}^n (\mathcal{H}_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0. \end{aligned}$$

Saadud võrrandi korrutame nüüd ajaga dt ja integreerime aja järgi rajades (t_0, t_1) :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n m_i d(\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) dt = 0. \quad (2.10)$$

Et süsteemi alg- ja lõppasend on antud ning kõik kinemaatiliselt võimalikud trajektoorid läbivad neid, siis on $t = t_0$ ja $t = t_1$ puhul kõik koordinaatide variatsioonid nullid:

kui $t = t_0$ ja $t = t_1$,

siis $\delta x_i = \delta y_i = \delta z_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$.

Siis aga on

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n m_i d(\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) = \\ = \left[\sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) \right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

ning võrrand (2.10) lihtsustub kujule

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta T + \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \right] dt = 0.$$

Minnes üle üldistatud koordinaatidele

$q_1, q_2, \dots, q_s,$

saame vastavalt valemile (1.4) lõplikult:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta T + \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \right] dt = 0. \quad (2.11)$$

Võrrand (2.11) kujutabki endast tingimust, mis tegelikul liikumisel alati on täidetud.

Vastupidises suunas minnes saab näidata ka, et tingimuse (2.11) kehtivusest järeldub dünaamika üldvõrrandi (2.8) kehtivus. Seega tingimus (2.11) on tarvilik ja piisav selleks, et vaadeldav liikumine oleks tegelik.

Niisiis: Tingimus, mis eristab süsteemi tegeliku liikumise kõigist teistest kinemaatiliselt võimalikest liikumistest, mis viiks id süsteemi sama ajaga antud algasendist antud

lõppasendisse, on võrrandi (2.11) täidetud.

Selles seisnebki Hamiltoni printsiip. Võrrand (2.11) on selle printsiibi analüütiliseks väljenduseks. Printsiip on täiesti üldine ning temast lähtudes võib üles ehitada kogu mehhaanika – sest võrrand (2.11) on ju samaväärne dünaamika üldvõrrandiga.

3. Konservatiivsete tungide juht.

Juhul, kui kõik süsteemile rakendatud tungid on konservatiivsed, saab võrrandile (2.11) anda eriti lihtsa kuju.

Nimelt on sel juhul

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = -\delta U ;$$

seega, võrrandist (2.11) saame

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta U) dt = 0$$

ehk

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T - U) dt = 0.$$

Suurust

$$T - U = \mathcal{L}$$

(2.12)

nimetatakse Lagrange'i funktsiooniks e. kineetiliseks potentsiaaliks. Seega,

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt = 0$$

ehk, valem (2.5) põhjal,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = 0.$$

(2.13)

Suurus

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \mathcal{I}$$

(2.14)

kannab mõju funktsiooni nimetust. Niisiis saab tingimusele

(2.13) anda kuju

$$\delta \mathcal{I} = 0.$$

(2.15)

Niisugune on valem (2.11) teisendamise lõpptulemus juhul, kui mõjuvad ainult konservatiivsed tungid. Sõnastatult kõlab valem (2.15) järgmiselt: Kõigist kinemaatiliselt võimalikest liikumistest, mis viiksid süsteemi sama ajaga antud algasen-

dist antud lõppasendisse, toimub tegelikult see, mille puhul mõjufunktsiooni variatsioon võrdub nulliga.

Variatsioonarvutuses näidatakse, et niisugusel juhul mõjufunktsioon ise omab statsionaarse väärtuse. Seega: tegelikuks liikumiseks on see, mille puhul mõjufunktsiooni väärtus on statsionaarne.

$$S = \text{stats.} \quad (2.16)$$

Märgime, et sagedasti mõistetaksegi, rääkides Hamiltoni printsibist, käesolevas punktis saadud tingimust (2.15); eelmises punktis sisaldub "Hamiltoni printsip, mis on üldistatud mittekonserveerivate süsteemide juhule".

4. Näiteid Hamiltoni printsibi rakendamise kohta.

Vaatleme materiaalse punkti vaba langemist ning leiame tema jaoks liikumise seaduse Hamiltoni printsibist lähtudes.

Võtame koordinaatide alguse

Maa pinnale, z-telje suunale vertikaalselt üles (liikumise sihis).

Punkti m potentsiaalne energia rakustungi väljas

$$U = mgz,$$

punkti kineetiline energia

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2,$$

seega, Lagrange'i funktsioon

$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz.$$

Hamiltoni printsibi kohaselt

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} m \left(\frac{1}{2} \dot{z}^2 - gz \right) dt = 0$$

ehk

$$\int_{t_0}^{t_1} m \delta \left(\frac{1}{2} \dot{z}^2 - gz \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} m (\dot{z} \delta \dot{z} - g \delta z) dt = 0.$$

Et

$$\dot{z} \delta \dot{z} = \frac{d}{dt} (\dot{z} \delta z) - \dot{z}^2 \delta z$$

ja et $t = t_0$ ning $t = t_1$ puhul $\delta z = 0$, saame võrrandi



Joon. 9.

$$\int_{t_0}^{t_1} m(\ddot{z} + g) \delta z dt = 0.$$

Kuna δz on suvaline, siis järeldub sellest võrrandist, et peab olema

$$\ddot{z} + g = 0$$

ehk

$$\ddot{z} = -g,$$

millest

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0.$$

Vaba langemise korral $v_0 = 0$, seega liikumise seaduseks on

$$z - z_0 = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Teame juba varasemast, et see on õige.

Teise näitena vaatleme materiaalse punkti inertsiaalset liikumist mööda siledat pinda.

Liikugu punkt mööda täiesti siledat pinda, sellele punktile ärgu olgu rakendatud mingisuguseid tunge (peale pinna reaktsioontungi, mis on viimasega risti).

Missugust teed mööda see materiaalne punkt liigub pinnal punktist A punkti B?

Kuna punkti liikumisel ainus temale rakendatud tung - pinna normaalreaktsioon - tööd ei tee, siis on käesoleval juhul potentsiaalne energia

$$U = \text{const} = U_0.$$

Seega

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \left(\frac{1}{2} m v^2 - U_0 \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} m v \delta v dt = 0.$$

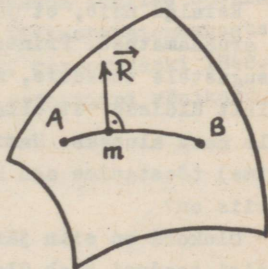
Energia jäävuse seadusest

$$T + U = \text{const}$$

järeldub vaadeldava juhu jaoks, et

$$v = \text{const}$$

(aja t , s.o. integreerimismuutuja suhtes, mitte aga varieerimise suhtes). Et ka $m = \text{const}$, siis saame tingimuse



Joon. 10

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta v dt = 0,$$
 millest

$$\delta v = 0.$$

Järelikult, kiirus peab olema statsionaarne.

Käidud tee pikkus

$$s_{AB} = v(t_1 - t_0)$$

on võrdeline kiirusega; seega, ka tee pikkus peab olema statsionaarne. Kuna pole loomulik oletada, et punkt liiguks punktist A punkti B maksimaalse pikkusega teed mööda, siis peab ilmselt olema

$$s_{AB} = \min.$$

S.t., et punkt liigub punktist A punkti B minimaalse pikkusega teed mööda - pinna geodeetilise joone kaart mööda.

5. Mõningaid märkusi Hamiltoni printsiibi kohta.

Käesoleva paragrahvi eelnevas osas tutvusime Hamiltoni printsiibiga.

Esiialgu näib, et juba nimetus "printsiip" tekitab mõningat arusaamatust. Printsiibi nimetuse omistame tavaliselt niisugustele tõdedele, mis võetakse omaks tõestuseta ja on küllalt üldised, et olla mõne teadusliku distsipliini või selle haru aluseks. Hamiltoni printsiibi (nagu me teda nime-tasime) tõestasime aga kõigi reeglite järgi. Mis printsiip ta siis on?

Olukord on siin järgmine. Teoreetilist mehhaanikat nagu teisigi teadusi saab üles ehitada mitmel viisil. Võib võtta aluseks kord ühe, kord teise põhitõe. Harilikult lähtutakse selle juures Newtoni liikumise seadustest, mis kujutavad endast samuti printsiipe või, mis on veel täpsem, aksioome. Dünaamika ehitatakse sageli üles Lagrange'i võimalikkude nihutuste printsiibile ja d'Alembert'i printsiibile. On aga veel teisi võimalusi.

Üheks võimaluseks on võtta kogu mehhaanika aluseks Hamiltoni printsiip. See printsiip osutub tõesti nii üldiseks,

et selline tee võimalik on (Hamiltoni printsiipi saab üldistada ka mittestatsionaarsete seoste juhule, mida me ei käsitlenud).

Teine küsimus on, kas niisugune tee on otstarbekohane. Nii tehes satume algusest peale kõige keerulisemasse mehhaanika ossa, millest lähtudes peaksime tuletama lihtsamad, igapäevase elu kogemustega kinnitatavad tulemused mehhaanika teistest osadest. Tuleks minna teed mööda, mis on vastupidine mehhaanika ajaloolisele arengule. Seepärast enamikul juhtudel mehhaanika kursuse ülesehitamisel Hamiltoni printsiipi lähtekohaks ei võeta.

Hamiltoni printsiip ise on aga tõepoolest tähelepanuväärne. Igauks lõpmatust hulgast kehadest ja nende süsteemidest liigub oma erineval viisil; kõigi nende liikumised toimuvad aga kooskõlas selle printsiibiga. Muidugi ei tõesta aga niisugune olukord üleloomulike jõudude eksisteerimist maailmas - Hamiltoni printsiip väljendab vaid üht looduses kehtivatest seaduspärasustest, mille kehtivuse piirkond on üsna lai.

Printsiibi tõestuse avaldas esimesena inglise õpetlane W.R. Hamilton oma töödes 1834.-35.a. Mittestatsionaarsete seoste juhule laiendas printsiibi M.V. Ostrogradski 1848.a. Seoses sellega nimetatakse Hamiltoni printsiipi mõnikord ka Hamilton-Ostrogradski printsiibiks.

§ 3. LAGRANGE'I II TÜÜPI VÕRRANDID.

1. Lagrange'i II tüüpi võrrandite tuletamine.

Lagrange'i II tüüpi võrrandite all mõistetakse teatud-kujulisi süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandeid üldistatud koordinaatides. Nende võrrandite tuletamiseks võib lähtuda Hamiltoni printsibist, võib aga naq tuletada ka otseselt dünaamika üldvõrrandist. Meie valime järgnevas esimese tee.

Hamiltoni printsibi kohaselt süsteemi liikumine toimub nii, et on täidetud tingimus (2.11)

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta \mathcal{T} + \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j) dt = 0.$$

Arvutame $\delta \mathcal{T}$. Et

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s),$$

siis

$$\delta \mathcal{T} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right);$$

asetades tulemuse valemisse (2.11), saame

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + Q_j \delta q_j \right) dt = 0. \quad (3.1)$$

Teisendame saadud võrrandis liikmeid tüüpi

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt,$$

integreerides neid ositi. Kuna $t = t_0$ ja $t = t_1$ puhul

$$\delta q_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s)$$

(sest nii oli eeldatud Hamiltoni printsibi tuletamise juures), siis

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt$$

ning järelikult (3.1) saab kuju

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j dt = 0$$

ehk

$$\sum_{j=1}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j dt = 0. \quad (3.2)$$

Et üldistatud koordinaadid q_j , millega määrame süsteemi asendi, oletame ikka olevat üksteisest sõltumatud, siis nende muudud δq_j on täiesti vabalt ette antavad. Võrrandi (3.2) vasakul poolel seisev summa peab aga igasuguste δq_j puhul olema võrdne nulliga. See saab olla nii ainult siis, kui iga liige selles summas on eraldi null. Seega võime võrrandi (3.2) asendada võrrandisüsteemiga

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j dt = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (3.3)$$

Süsteemi (3.3) igas üksikus võrrandis on koordinaadi variatsioon δq_j ; samuti meeleväldne (kitsenduste piires, mis tulenevad Hamiltoni printsiibi tõestamise puhul kasutatud eeldustest). Igas võrrandis esinev integraal aga peab igasuguse δq_j puhul olema võrdne nulliga. On ilmne, et see saab olla nii ainult siis, kui integraali all variatsiooni ees asuv kordaja on võrdne nulliga.¹ Järelikult võrrandisüsteem (3.3) on samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (3.4)$$

Võrrandeid (3.4) nimetaksegi Lagrange'i II tüüpi võrranditeks. Neid võrrandeid on s tükki - samapalju kui tundmatuidki, üldistatud koordinaate q_j . Seega võimaldavad nad süsteemi liikumise määramise ülesande lahendada.

Lagrange'i II tüüpi võrrandid on tundmatute üldistatud koordinaatide suhtes II järku harilikud diferentsiaalvõrrandid. Nende arv

$$s = 3n - k,$$

kus n on süsteemi punktide arv, k - holonoomsete seoste arv, mis kitsendavad süsteemi liikumist. Sama süsteemi liikumise määramise ülesannet võib lahendada ka lähtudes Lagrange'i I

¹ Täpsema põhjenduse sellele väitele võib leida näiteks raamatust А. Зоммерфельд, *Механика*, Москва 1947, лк. 262.

tüüpi võrranditest. Neid on aga sama probleemi korral

$$3n + k$$

tükki. Seega II tüüpi võrrandite arv on väiksem kui I tüüpi võrrandite arv, mis on kindlasti esimesena mainitute eeliseks.

Materiaalsete punktide süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid sõltumatutes üldistatud koordinaatides tuletas esimesena tuntud prantsuse matemaatik ja mehhaanik J.L. Lagrange; ta avaldas nad oma kuulsas töös "Analüütiline mehhaanika" a. 1788.

2. Konservatiivsete tungide juht.

Kui kõik süsteemi punktidele rakendatud tungid on konservatiivsed, siis

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s),$$

kus U on potentsiaalne energia, ning Lagrange'i II tüüpi võrrandid saavad kuju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

Et potentsiaalne energia U ei sõltu kiirustest, vaid ainult süsteemi moodustavate punktide asukohtadest, siis on

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s)$$

ja neid võrrandeid võib kirjutada üles ka järgmisel kujul

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

Me teame juba eestpoolt, et

$$T - U = L$$

(Lagrange'i funktsioon). Seega juhul, kui kõik süsteemile mõjuvad tungid on konservatiivsed, omavad Lagrange'i II tüüpi võrrandid kuju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (3.5)$$

3. Lagrange'i võrrandite esimesed integraalid.

Lähtume Lagrange'i võrranditest kujul (3.5).

Et

$$L = T - U,$$

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s),$$

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_s),$$

siis

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s).$$

Teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi (3.5) integreerimine võib olla küllaltki keeruline ülesanne, eriti juhul, kui võrrandeid on palju.

See ülesanne lihtsustub, kui mingi üldistatud koordinaat ei sisaldu L avaldises.

Oletame, et L avaldises ei sisaldu näiteks üldistatud koordinaat q_n . Siis

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$$

ning järelikult sellele koordinaadile vastav võrrand süsteemis (3.5) saab kuju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0.$$

Integreerides t järgi leiame:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \text{const}$$

(3.6)

Kuna L tuletis üldistatud kiiruse $\dot{q}_n$ järgi sisaldab ainult üldistatud koordinaatide esimest järku tuletisi, siis (3.6) kujutab endast esimest järku diferentsiaalvõrrandit üldistatud koordinaatide q_j suhtes. Seega oleme saanud ühe süsteemi moodustavatest teist järku diferentsiaalvõrranditest asendada esimest järku diferentsiaalvõrrandiga. Me nimetame (3.6) Lagrange'i II tüüpi diferentsiaalvõrrandite süsteemi esimeseks ehk vahepealseks integraaliks.

Niisugust üldistatud koordinaati, mis ei sisaldu Lagrange'i funktsiooni avaldises, nimetatakse tsüklikliliseks. Tsükliklilisele koordinaadile vastava Lagrange'i võrrandi saab otsekohe taandada esimest järku diferentsiaalvõrrandiks, mis

kindlasti kergendab kogu süsteemi integreerimist.

Veel on alati (välja arvatud mittestatsionaarsete seoste juht, mille käsitlemisest algusest peale loobusime) võimalik süsteemile (3.5) leida üks esimene integraal, mida nimetatakse energia integraaliks.

Esimeses paragrahvis leidsime, et statsionaarsete seoste korral kineetiline energia osutub homogeenseks ruutfunktsiooniks üldistatud kiirustest. Tuntud Euleri lause põhjal homogeensete funktsioonide kohta on siis õige võrdus

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Arvutame selle võrduse mõlemast poolst tuletise aja järgi:

$$2 \frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i \right).$$

Et

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

siis

$$\begin{aligned} 2 \frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

sest Lagrange'i võrrandite põhjal on

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Nüüd aga näeme, et valemis (3.7) teises reas seisev summa pole midagi muud kui L tuletis aja järgi; tõepoolest, et

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s),$$

siis

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right).$$

Seega on

$$2 \frac{dT}{dt} = \frac{dL}{dt};$$

$$\frac{d}{dt} (2T - L) = 0$$

ehk

$$2T - L = \text{const.}$$

Arvesse võttes L tähendust, saame

$$2T - (T - U) = \text{const.}$$

ehk

$$T + U = \text{const.}$$

(3.8)

Tulemus näitab, et konservatiivsete tungide mõju all oleva süsteemi mehhaaniline energia on jääv. Nii oleme tõestanud energia jäävuse seaduse lähtudes Lagrange'i II tüüpi diferentsiaalvõrranditest.

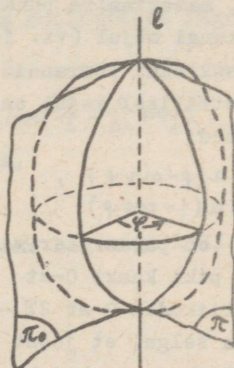
On kerge kontrollida, et mittestatsionaarsete seoste korral süsteemi mehhaanilise energia jäävust tõestada ei saa. Seega mehhaanilise energia jäävuse seadus ei kehti igasuguste seoste korral.

4. Keha pöörlemise võrrand.

Esimese näitena Lagrange'i II tüüpi võrrandite rakendamise kohta vaatleme, kuidas nendest lähtudes saab leida keha pöörlemise võrrandi.

Olgu tegemist kindla kehaga, mis pöörleb muutumatu telje l ümber.

Niisugusel kehal on üks vabadusaste; tema asendi määramiseks piisab nurga andmisest, mille võrra pöörlemistelge läbib ja kehaga kaasa liikuv tasapind π on pöördunud sama telge läbiva liikumatu tasapinna π_0 suhtes. Võtamegi selle nurga φ üldistatud koordinaadiks, mida võrrandi koostamisel kasutame.



Joon. 11.

Pöörleva keha kineetiline energia on

$$T = \frac{1}{2} J_c \dot{\varphi}^2,$$

kus J_c on keha inertsmoment pöörlemistelje 1 suhtes.

Olgu kõigi kehale rakendatud välistungide momentide summa telje 1 suhtes M_1 . Et nurga φ muutumisel $\delta\varphi$ võrra see moment teeb töö

$$M_1 \cdot \delta\varphi,$$

siis M_1 ongi koordinaadile φ vastavaks üldistatud tungiks:

$$Q_\varphi = M_1.$$

Ühe vabadusastmega süsteemi korral saame Lagrange'i II tüüpi võrrandeid ka ainult ühe:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Kuna käesoleval juhul

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = J_c \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0,$$

siis muutumatu telje ümber pöörleva keha liikumise diferentsiaalvõrrand on järgmine:

$$J_c \ddot{\varphi} = M_c. \quad (3.9)$$

Võrrand (3.9) kannabki keha pöörlemise võrrandi nime.

5. Tsükloidaalne pendel.

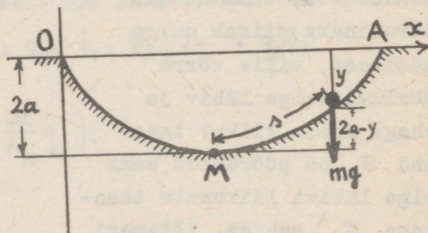
Järgnevalt uurime, lähtudes Lagrange'i II tüüpi võrranditest, materiaalse punkti liikumist tsükloidi kaart mööda raskustungi mõjul (vt. joon. 12).

Tsükloidi võrrandid parameetrilisel kujul on järgmised:

$$\begin{cases} x = a(\varphi - \sin \varphi), \\ y = a(1 - \cos \varphi); \end{cases}$$

neis φ on parameeter, mis muutub piki kaart 0-st A -sse liikudes 0-st 2π -ni.

On selge, et joont mööda liikuva punkti koor-



Joon. 12.

dinaadid x ja y pole teineteisest sõltumatud. Sellel punktil on ainult üks vabadusaste. Järelikult vajame tema liikumise kirjeldamiseks vaid ühtainust koordinaati; valime selleks tsükloidi kaare pikkuse.

Kaare diferentsiaal

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

et

$$dx = a(1 - \cos \varphi) d\varphi,$$

$$dy = a \sin \varphi d\varphi,$$

siis

$$ds = a \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = 2a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Integreerides leiame, et

$$s = -4a \cos \frac{\varphi}{2} + C,$$

kus C on integreerimiskonstant.

C määramiseks on vaja kindlaks määrata punkt, millest kaare pikkust hakkame arvestama. Olgu selleks punktiks kaare madalaim punkt M . Sellele punktile vastab parameetri väärtus $\varphi = \pi$, seega, meie kokkuleppe kohaselt,

$$\text{kui } \varphi = \pi, \text{ siis } s = 0.$$

Sellest tingimusest järeldub, et $C = 0$, seega,

$$s = -4a \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Avaldame nüüd punkti kineetilise ja potentsiaalse energia s kaudu. Kuna $v = \dot{s}$, siis kineetiline energia

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2;$$

potentsiaalne energia on juhul, kui ta nullnivooks lugeda punkt M , järgmine:

$$U = mg(2a - y) =$$

$$= mga(1 + \cos \varphi) = 2mga \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{8a} mgs^2.$$

Lagrange'i funktsioon $L = T - U$, seega,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{8a} mgs^2.$$

Nüüd võime koostada probleemi jaoks Lagrange'i II tüüpi diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = 0;$$

et käesoleval juhul

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -\frac{mg}{4a} s,$$

siis saame

$$m\ddot{s} + \frac{mg}{4a} s = 0$$

ehk

$$\ddot{s} + \kappa^2 s = 0, \quad (3.10)$$

kus

$$\kappa^2 = \frac{g}{4a}.$$

Võrrandi (3.10) üldlahend avaldub trigonomeetriliste funktsioonide kaudu kujul

$$s = \mathcal{K}_1 \cos \kappa t + \mathcal{K}_2 \sin \kappa t.$$

Sellest näeme, et tegemist on perioodilise liikumise-võnkumisega. Materiaalne punkt võngub tsükliidi kaarel punkti M kui keskkoha ümber edasi-tagasi. Niisugusel viisil liikuvat punkti nimetataksegi tsükloidaalseks pendliks.

Võnkumise periood

$$\tau = \frac{2\pi}{\kappa} = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}} = \text{const},$$

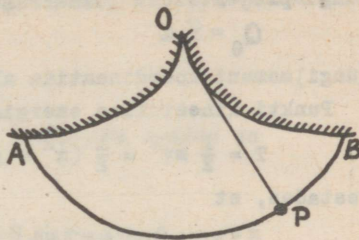
s. t., et võnkumine toimub muutumatu perioodiga. Analoogilise tulemuse saime ka matemaatilise pendli võnkumist vaadeldes. Kuid matemaatilise pendli puhul oli juba liikumise diferentsiaalvõrrandi tuletamise käik ligikaudne ning saadud tulemused ligikaudselt õiged vaid väikeste võngete korral. Tsükloidaalse pendli võnkumine toimub aga rangelt konstantse perioodiga ning seda alati, sõltumatult võnkeamplituudist. (On muidugi selge, et kõik eelnev on õige ainult siis, kui hõõrdumist võib mitte arvestada, s. t., kui punkti liikumise tee on absoluutselt sile).

Tsükloidaalse pendli põhimõttele toetuv kell oleks oma käigu ühtluse poolest ideaalne. Kas aga niisugust pendlit on üldse võimalik ehitada (silmas pidades veel asjaolu, et hõõrdumine tsükloidi kaarel peab puuduma)?

Osutub, et on; niisuguse pendli ehitamise võimalus põhineb lausele: "Tsükloidi evoluuks on samuti tsükloid, mis on kujult ja suuruselt täpselt samasugune, nagu ta ise". Konstruktiooni põhimõtet näitab joonis 13. Ülemise tsükloidi punktis O on kinnitatud niit pikkusega $4a$; selle tsükloidi kaared O naabruses on tõkkeiks niidile võnkumise ajal. Nii kirjeldab niidi otsa kinnitatud mass P liikudes alumise tsük-

loidi kaare AB. Niisuguse konstruktsiooni idee kuulub Chr. Huygens'ile, kes, muuseas, oli saksa füüsiku, tuntud mehhaanikaõpiku autori A. Sommerfeld'i ütluse järgi "kõigi aegade geniaalseim kellassepp".

Praktikas tsükloidaalse pendliga kelli ei ehitata - on leitud teisi, lihtsamaid vahendeid võnkumise isokroonsuse tagamiseks.



Joon. 13.

6. Materiaalse punkti liikumise diferentsiaalvõrrandid polaarkoordinaatides.

Olgu tegemist mingi materiaalse punktiga, mille mass on m . Vaatleme selle punkti tasapinnalist liikumist ning leiame tema liikumise diferentsiaalvõrrandid juhu jaoks, kus punkti asukoha määramiseks kasutatakse polaarkoordinaate.

Tähistame punktile

mõjuva tungi projektsioonid radiaal- ja transversaal-sihil (s.o. polaarraadiuse ning sellega ristuvastavalt F_r ja F_θ . On ilmne, et kui materiaalse punkti polaarraadius muutub δr võrra polaarnurga muutumatuks jäädes, siis tungi F töö on

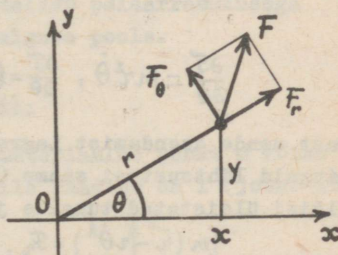
$$F_r \delta r;$$

kui aga muutub ainult polaarnurk $\delta \theta$ võrra polaarraadiuse endiseks jäädes, siis tung F sooritab töö

$$F_\theta r \delta \theta.$$

Järelikult (vt. §1, punkt 4) on käesoleval juhul koordinaatidele r ja θ vastavateks üldistatud tungideks järgmised suurused:

$$Q_r = F_r$$



Joon. 14.

- tungi projektsioon pelaarraadiuse sihil ja

$$Q_{\theta} = \mathcal{F}_{\theta} r$$

- tungi moment koordinaatide alguse suhtes.

Punkti kineetiline energia

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2);$$

arvestades, et

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

saame

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2).$$

Koostame järgnevalt Lagrange'i II tüüpi võrrandid käesoleva juhu jaoks. Neid on kaks:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta}. \end{cases}$$

Arvutame vajalikud tuletised:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

Pärast nende asendamist Lagrange'i II tüüpi võrranditesse ning mõningaid lihtsustusi saame (võttes arvesse ka eespool leitud avaldisi üldistatud tungide jaoks) võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \mathcal{F}_r, \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \mathcal{F}_{\theta}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Süsteem (3.11) ongi materiaalse punkti liikumise diferentsiaalvõrrandite süsteem polaarkoordinaatides.

Püstitatud ülesannet lahendades oleme saanud ka ühe kõrvaltulemuse. Kuna Newtoni II seaduse järgi

$$m\vec{w} = \vec{F},$$

siis kujutavad süsteemi (3.11) võrrandite vasakuil pooltel sulgudes seisvad suurused endast ilmselt punkti kiirenduse

projektsioone radiaal- ja transversaalsihil, nn. radiaalset ja transversaalset kiirendust:

$$\begin{cases} w_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2, \\ w_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Näide. Materiaalse punkti m liikumise seadus on

$$\begin{cases} r = at, \\ \theta = bt. \end{cases}$$

Missugune tung põhjustab niisuguse liikumise?

Punkti trajektooriks on kõver võrrandiga

$$r = \frac{a}{b} \theta,$$

s.o. Archimedese spiraal. Et

$$\dot{r} = a, \quad \ddot{r} = 0,$$

$$\dot{\theta} = b, \quad \ddot{\theta} = 0,$$

siis võrrandite (3.11) järgi on

$$\begin{cases} F_r = -mb^2 r, \\ F_\theta = 2mab. \end{cases}$$

Järelikult: liikumist mõõda Archimedese spiraali põhjustab tung, mille projektsioon transversaalsihil on konstantne, projektsioon radiaalsihil aga võrdeline polaarraadiusega ning suunatud alati koordinaatide alguse poole.

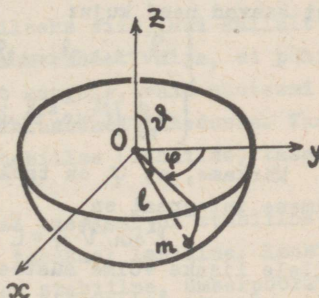
7. Sfääriline pendel.

Riputame pendli üles nii, et materiaalne punkt m võiks vabalt liikuda kerapinda mööda, mille raadius on l (joon. 15).

Punkti m ristkoordinaadid x, y, z pole sõltumatud, nende vahel on seos, mis väljendab asjaolu, et see punkt peab kogu liikumise ajal jääma kerapinnale, ja omab kuju

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

Sellel punktil on kaks vabadusastet; meil läheb



Joon. 15.

tema liikumise kirjeldamiseks vaja kaht sõltumatut koordinaati, milleks valime nurgad ϑ ja φ (vt. joonis 15).

Punkti m kineetiline energia

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2;$$

et sfääril asuv kaareelement (vt. joon.16)

$$ds = l \sqrt{d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2},$$

siis

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2).$$

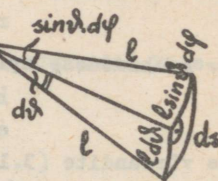
Potentsiaalne energia

$$U = mgl \cos \vartheta$$

(kui nullnivooks on O-d läbiv

horisontaal-tasapind - xy-

tasapind), seega



Joon. 16.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \vartheta.$$

Edasi pole vaja muud teha, kui arvutada vajalikud tule-
tised

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = m l^2 \dot{\vartheta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \dot{\varphi} + mgl \sin \vartheta,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = m l^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0$$

ja koostada diferentsiaalvõrrandid; peale mõningat lihtsusta-
mist saavad need kuju:

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0, \\ \frac{d}{dt} (l^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Märkame, et φ on tsükliline koordinaat; temale vastav
esimene integraal on

$$l^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi} = C. \quad (3.14)$$

Sellele lisaks võime süsteemi (3.13) esimese võrrandi asemele
võtta energia integraali (3.8), mis käesoleva ülesande korral
on järgmine:

$$\frac{1}{2} m l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \vartheta = \mathcal{E}. \quad (3.15)$$

Ülesande lõplikuks lahendamiseks tuleb veel lahendada süsteem kahest esimest järku diferentsiaalvõrrandist (3.14) ja (3.15). Jätame selle siinkohal tegemata, kuna lahenduskaik on küllaltki keeruline (nõuab elliptiliste funktsioonide sissetoomist), ning sisu poolest mitte midagi erilist pakkuv.

Märgime lõpuks, et kasutatud formaalne lahendusmeetod lubas näivalt jätta tähele panemata niisuguse väga olulise füüsikalise suuruse, nagu niidi tõmme pendlile. Varjatud kujul on see tõmme muidugi arvesse võetud. Kuidas?

§ 4. MATERIAALSETE PUNKTIDE SÜSTEEMI VÄIKESED VÕNKUMISED.

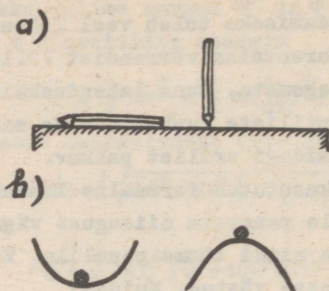
1. Lejeune-Dirichlet' lause.

Pealkirjas nimetatud lause käib tasakaalus olevate punktide süsteemide kohta. Ta käsitleb süsteemi tasakaalu stabiilsuse küsimust.

Millal me üldse nimetame punktide süsteemi tasakaalu stabiilseks?

Tasakaalu nimetatakse stabiilseks siis, kui küllalt väike tõuge, mis viib süsteemi tasakaaluasendist välja, ei põhjusta tema eemaldumist sellest asendist kaugemale, vaid süsteemi liikumist väikeses piirkonnas tasakaaluasendi läheduses. Vastupidisel juhul on tegemist mittestabiilse (labiilse) tasakaaluga.

Näiteks laual lamava pliiatsi tasakaal on stabiilne, te ravikule püsti asetatud pliiatsi tasakaal labiilne. Kausi põhjas asuva kuulikese tasakaal on stabiilne, ümberpööratud kausi põhjal asuva kuulikese tasakaal mitte, jne.



Joon. 17.

Vaatleme nüüd süsteemi, millele mõjuvad ainult konserveeritavad jõud; süsteemi punktide liikumise vabadust kitsendavad seosed olgu holonoomsed ja statsionaarsed. Niisuguse süsteemi tasakaalu tarviliku ja piisava tingimuse leiame esimese paragrahvi kuuendas punktis; see on järgmine:

Süsteem on antud asendis tasakaalus siis ja ainult siis, kui tema potentsiaalne energia omab selles asendis statsionaarse väärtuse.

Lisaks sellele ütleb Lejeune-Dirichlet' lause:

Kui süsteemi potentsiaalne energia tasakaaluasendis on minimaalne, siis süsteemi tasakaal on stabiilne.

Näitame seda.

Võtame tasakaaluasendi üldistatud koordinaatide alguseks, s.t. loeme, et tasakaaluasendis

$$q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0.$$

Samuti loeme tasakaaluasendi potentsiaalse energia nullnivooks:

$$U(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Minimumi asumisest koordinaatide alguses järeldub, et tema ümber saab ikka moodustada piirkonna, milles kõik

$$|q_j| \leq \delta \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

ning milles potentsiaalne energia

$$U \geq 0.$$

Olgu potentsiaalse energia vähim väärtus seda piirkonda ümbritseval pinnal $\mathcal{E}$. Siis väljaspool vaadeldavat piirkonda kehtib võrratus

$$U \geq \mathcal{E}.$$

Viime nüüd süsteemi väikese tõukega tasakaaluasendist välja. Tõuge olgu selline, et süsteemi potentsiaalne energia tasakaalust välja viidud asendis

$$U_0 < \frac{1}{2} \mathcal{E};$$

ta andku süsteemi punktidele nii väikesed kiirused, et ka kineetiline energia

$$T_0 < \frac{1}{2} \mathcal{E}$$

Mehhaanilise energia jäävuse seaduse põhjal on süsteemi edaspidise liikumise ajal alati

$$T + U = T_0 + U_0.$$

Kuna kineetiline energia

$$T > 0,$$

siis

$$U < T_0 + U_0 < \frac{1}{2} \mathcal{E} + \frac{1}{2} \mathcal{E} = \mathcal{E}$$

Seega kogu liikumise ajal

$$U < \mathcal{E},$$

millest järeldub, et süsteem jääb kogu aeg tasakaaluasendile nii lähedale, et

$$|q_j| \leq \delta \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

Kuna δ valik on vaba, järeldub sellest, et lõpmatu väikese tõuke korral jääb süsteem tasakaaluasendile lõpmatu lähedale. Järelikult tasakaaluasend on stabiilne, m.o.t.t.

Kui süsteem asub stabiilses tasakaaluasendis, võib ta hakata sooritama väikesi võnkumisi selle ümber. Küsimus nüüsgustest võnkumistest on suure praktilise tähtsusega. Puudutame järgnevas seda lühidalt.

2. Kineetilise ja potentsiaalse energia avaldised süsteemi liikumisel tasakaaluasendi läheduses.

Lihtsuse mõttes vaatleme üldjuhu esindajana kahe vabadusastmega süsteemi. Siis piisab tema asendi määramiseks kahest üldistatud koordinaadist:

$$q_1, q_2.$$

Nende arvestamise alguseks olgu tasakaaluasend.

Süsteemi kineetiline energia

$$T = \frac{1}{2} (A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_{22}\dot{q}_2^2),$$

kus A_{11} , A_{12} , A_{22} on kordajad, mis sõltuvad süsteemi punktide massidest ja koordinaatidest, mitte aga kiirustest. Arendame nad Taylor'i ritta tasakaaluasendis $q_1 = q_2 = 0$. Saame

$$A_{ii} = A_{ii}(0,0) + \left(\frac{\partial A_{ii}}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial A_{ii}}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \dots$$

Kuna vaatleme liikumisi tasakaaluasendi läheduses, siis on q_1 ja q_2 väikesed ja võib ligikaudu lugeda

$$A_{11} \approx A_{11}(0,0) = a_{11} = \text{const},$$

samuti

$$A_{12} \approx A_{12}(0,0) = a_{12} = \text{const},$$

$$A_{22} \approx A_{22}(0,0) = a_{22} = \text{const}.$$

Kasutatud täpsuse piires avaldub kineetiline energia T homogeense konstantsete kordajatega ruutfunktsioonina üldistatud kiirustest:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2). \quad (4.1)$$

Potentsiaalse energia $U(q_1, q_2)$ arendame samuti Taylor'i ritta tasakaaluasendis:

$$U = U(0,0) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \\ + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2 \right] + \dots$$

Kuna tasakaaluasendis

$$U = \text{stats.},$$

on

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_1} \right)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial q_2} \right)_0 = 0.$$

Olgu ka nullnivoo tasakaaluasendis; siis on

$$U(0,0) = 0.$$

Esimesed nullist erinevad liikmed U avaldises on teiseastmelised koordinaatide suhtes. Tähistame

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 = c_{11},$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 = c_{12},$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \right)_0 = c_{22}.$$

Kõrgemat järku liikmeid mitte arvestades saame siis

$$U = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \quad (4.2)$$

Seega potentsiaalne energia avaldub homogeense ruutfunktsioonina üldistatud koordinaatidest (konstantsete kordajatega).

3. Süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid stabiilse tasakaaluasendi läheduses.

Need diferentsiaalvõrrandid saame Lagrange'i II tüüpi võrrandite rakendamisel käesolevale ülesandele.

Kahe vabadusastmega konservatiivse süsteemi puhul on need võrrandid järgmise kujuga:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0.$$

Arvesse võttes, et praegusel juhul kineetiline energia ei sõltu koordinaatidest, potentsiaalne energia aga kiirustest, saame Lagrange'i võrrandeid lihtsustada, nii et nad näevad välja järgmiselt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} = 0, \quad (4.3)$$

Valemist (4.1) arvutame:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_1} = \alpha_{11} \dot{q}_1 + \alpha_{12} \dot{q}_2,$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_2} = \alpha_{12} \dot{q}_1 + \alpha_{22} \dot{q}_2;$$

valemist (4.2) arvutame:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_1} = c_{11} q_1 + c_{12} q_2,$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_2} = c_{12} q_1 + c_{22} q_2.$$

Leitud tuletiste avaldised asetame võrrandisüsteemi (4.3). Nii saame probleemi diferentsiaalvõrrandid – järgmise kahest harilikust kahe tundmatuga teist järku lineaarsest homogeen-sest konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandist koos-neva võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Tuleb meeles pidada, et võrrandisüsteem (4.4) kirjeldab süs-teemi liikumist õigesti ainult tasakaaluasendi läheduses – vastasel korral ei kehti juba energia avaldised (4.1) ning (4.2), järelikult mitte ka kogu järgnev tuletuskäik.

4. Liikumise diferentsiaalvõrrandite integreerimine.

Otsime võrranditele (4.4) lahendeid kujul

$$\begin{cases} q_1 = K_1 e^{\lambda t}, \\ q_2 = K_2 e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Arvutades vajalikud tuletised ning asendades nad süs-teemi (4.4), saame

$$\begin{cases} (\alpha_{11}\lambda^2 + c_{11})K_1 e^{\lambda t} + (\alpha_{12}\lambda^2 + c_{12})K_2 e^{\lambda t} = 0, \\ (\alpha_{12}\lambda^2 + c_{12})K_1 e^{\lambda t} + (\alpha_{22}\lambda^2 + c_{22})K_2 e^{\lambda t} = 0. \end{cases}$$

Jagame need võrrandid $e^{\lambda t}$ -ga, siis saame kordajate K_1 ja K_2 jaoks valemeis (4.5) järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} (a_{11}\lambda^2 + c_{11})K_1 + (a_{12}\lambda^2 + c_{12})K_2 = 0, \\ (a_{12}\lambda^2 + c_{12})K_1 + (a_{22}\lambda^2 + c_{22})K_2 = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Võrrandisüsteem (4.6) on K_1 ja K_2 suhtes lineaarne ja homogeenne. Niisugusel võrrandisüsteemil on alati olemas triviaalne lahend

$$K_1 = K_2 = 0,$$

kuid see meid ei huvita, sest ta vastab materiaalsete punktide süsteemi paigalseisule tasakaaluasendis. Mittetriviaalse lahendi omab süsteem (4.5) ainult siis, kui tema determinant on võrdne nulliga. Oletame seda; nii saame võrrandi

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + c_{12} \\ a_{12}\lambda^2 + c_{12} & a_{22}\lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (4.7)$$

millest saab kätte need λ väärtused, milliste puhul võrrandisüsteemil (4.4) on olemas mittetriviaalne lahend. Võrrandit (4.7) nimetatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemile (4.4) vastavaks karakteristlikuks võrrandiks.

Põhjalikum uurimine (mille üksikasjade juures me käesoleva brošüüri raames ei peatu) lubab näidata, et vaadeldava ülesande korral on karakteristliku võrrandi (4.7) lahendid λ_1^2 ja λ_2^2 reaalsed ja negatiivsed:¹

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= -n_1^2, \\ \lambda_2^2 &= -n_2^2, \end{aligned}$$

kus n_1 ja n_2 on reaalarvud. Diferentsiaalvõrrandite teoorias näidatakse, et niisugusel juhul saab lahendite asemel kujul (4.5), mis sisaldavad eksponentfunksioone imaginaarsete astendajatega, leida süsteemile (4.4) lahendid kujul

$$\begin{cases} q_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} \cos(n_1 t + \beta_1), \\ q_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} \cos(n_1 t + \beta_1), \end{cases}$$

¹ Vt. näiteks B. T. Kuznetsov, *Механика*, Москва 1959, lk. 345-346.

ja

$$\begin{cases} q_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} \cos(n_2 t + \beta_2), \\ q_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} \cos(n_2 t + \beta_2) \end{cases}$$

(neis $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ on suvalised konstandid). Süsteemi üldlahend aga avaldub leitud kahe erilahendi lineaarse kombinatsioonina

$$\begin{cases} q_1 = C_1 q_1^{(1)} + C_2 q_1^{(2)}, \\ q_2 = C_1 q_2^{(1)} + C_2 q_2^{(2)}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Kuna üldlahendis esinevad ainult perioodilised funktsioonid, on tegemist perioodilise liikumise-võnkumisega. Järelikult sooritab konservatiivsete tungide mõju all olev süsteem väikesi võnkumisi oma stabiilse tasakaaluasendi ümber.

Vaadeldud kahe vabadusastmega juhu ning üldjuhu vahel põhimõttelist erinevust pole; oma lühikeses ülevaates me viimast ei käsitle.

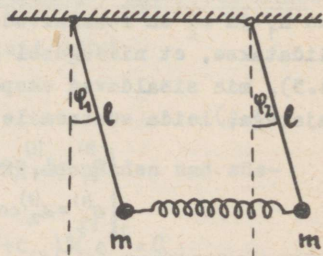
5. Sümpaatilised pendlid.

Vaatleme kahe võrdse massi ja pikkusega matemaatilise pendli liikumist, mis on omavahel ühendatud vedruga (vt. joon. 18). Vedru jäikustegur o olgu väike; tema pikkus on valitud niisugune, et kui mõlemad pendlid on vertikaalsed, siis vedru on venitamata olekus.

Süsteemil on ilmselt kaks vabadusastet; määrame ta asendi nurkadega φ_1 ja φ_2 ning uurime väikesi võnkumisi stabiilse tasakaaluasendi (milles mõlemad pendlid on vertikaalsed) läheduses.

Süsteemi kineetiline energia

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2). \end{aligned}$$



Joon. 18.

Potentsiaalne energia koosneb kahest osast: energiast, mille süsteem omab oma asendi tõttu raskustungi väljas ning mis juhul, kui nullnivoo läbib tasakaaluasendi, on võrdne

$$\begin{aligned} mgh_1 + mgh_2 &= \\ &= mgl(1 - \cos \varphi_1) + \\ &+ mgl(1 - \cos \varphi_2) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} mgl (\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \end{aligned}$$

ja vedru deformatsiooni potentsiaalsest energiast, mis vedru pikenemise

$$l \sin \varphi_2 - l \sin \varphi_1 \approx l(\varphi_2 - \varphi_1)$$

korral on

$$\frac{1}{2} cl^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

Seega

$$U = \frac{1}{2} mgl (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2} cl^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

ning Lagrange'i funktsioon

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{1}{2} mgl (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \\ &- \frac{1}{2} cl^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2. \end{aligned}$$

Koostades juba tuntud skeemi kohaselt Lagrange'i II tüüpi diferentsiaalvõrrandid, saame pärast mõningat lihtsustamist, järgmise diferentsiaalvõrrandite süsteemi:

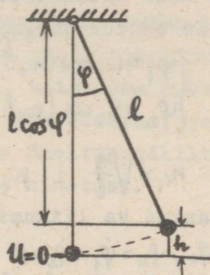
$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{c}{m}\right) \varphi_1 - \frac{c}{m} \varphi_2 = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 - \frac{c}{m} \varphi_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{c}{m}\right) \varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Sellele süsteemile vastav karakteristlik võrrand on

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \frac{g}{l} + \frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \\ -\frac{c}{m} & \lambda^2 + \frac{g}{l} + \frac{c}{m} \end{vmatrix} = 0;$$

lahendades ta, leiame

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= -\frac{g}{l}, \\ \lambda_2^2 &= -\left(\frac{g}{l} + 2\frac{c}{m}\right). \end{aligned}$$



Joon 19.

Edasi leiame kummalegi lahendile vastava diferentsiaalvõrrandite süsteemi erilahendi

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 &\rightarrow \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \\ \lambda_2^2 &\rightarrow \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}\end{aligned}$$

ning nende kahe erilahendi lineaarse kombinatsioonina üldlahendi. See osutub järgmiseks:

$$\begin{cases} \varphi_1 = C_1 \cos(n_1 t + \beta_1) + C_2 \cos(n_2 t + \beta_2), \\ \varphi_2 = C_1 \cos(n_1 t + \beta_1) - C_2 \cos(n_2 t + \beta_2), \end{cases}$$

kus

$$n_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{c}{m}}.$$

Olgu antud ka liikumise algandmed, nimelt: kui $t = t_0$, siis $\varphi_1 = \varphi_0$, $\varphi_2 = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$. Määrates nende abil integreerimiskonstandid C_1 , C_2 , β_1 , β_2 , saame vaadeldava ülesande lahendi

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2} \varphi_0 (\cos n_1 t + \cos n_2 t), \\ \varphi_2 = \frac{1}{2} \varphi_0 (\cos n_1 t - \cos n_2 t). \end{cases}$$

Teisendame tulemust veidi, rakendades valemeid koosinuste summa ja vahe teisendamiseks korrutiseks. Et ϵ on väike, siis

$$n_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 + \frac{2cl}{gm}} \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{cl}{gm}\right)$$

ning

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (n_1 + n_2) &\approx \frac{1}{2} \left(2 + \frac{cl}{mg}\right) \sqrt{\frac{g}{l}} \approx \sqrt{\frac{g}{l}}, \\ \frac{1}{2} (n_2 - n_1) &\approx \frac{cl}{2mg} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{c}{2m} \sqrt{\frac{l}{g}};\end{aligned}$$

seega saame lõplikult

$$\begin{cases} \varphi_1 = [\varphi_0 \cos \frac{c}{2m} \sqrt{\frac{l}{g}} t] \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t, \\ \varphi_2 = [\varphi_0 \sin \frac{c}{2m} \sqrt{\frac{l}{g}} t] \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t. \end{cases} \quad (4.9)$$

Urime tulemust veidi. Kuna mürd $\frac{c}{2m} \sqrt{\frac{l}{g}}$ on väike, siis on nurksulgudesse paigutatud tegurid valemeis (4.9) aeglaselt muutuvad funktsoonid. Järelikult esitab kumbki valemeist (4.9) harmoonilise võnkumise perioodiga

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

mille amplituud aeglaselt muutub (samuti perioodiliselt, perioodiga $\tau_1 = \frac{4\pi m}{c} \sqrt{\frac{g}{l}}$). Alguses on esimese pendli amplituud φ_0 , teisel 0. Edasi esimese pendli amplituud kahaneb, teise oma kasvab; hetkel $t = \frac{1}{4} \tau_1$ on esimese pendli amplituud 0 (s.t. see pendel jääb hetkeks seisma), teise oma maksimaalne (φ_0). Edasi kordub kõik ümberpöörduv järjekorras, jne. Võnkumise energia kandub perioodiliselt üle ühelt pendlilt teisele. Niisugune nähtus kannab tuiklemise nimetust.

§ 5. HAMILTONI KANOONILISED VÕRRANDID.

1. Üldistatud impulsi mõiste.

Punkti mehhaanikas nimetatakse suurust

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

materiaalse punkti impulsiks e. liikumishulgaks (m - punkti mass, $\vec{v}$ - kiirus). Impulsi projektsioonid koordinaattelgedel on:

$$\begin{cases} Q_x = m\dot{x}, \\ Q_y = m\dot{y}, \\ Q_z = m\dot{z}. \end{cases}$$

Sama punkti kineetiline energia

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

On kerge tähele panna, et impulsi ja kineetilise energia vahel kehtivad järgmised seosed:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = Q_x, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = Q_y, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = Q_z. \end{cases}$$

S.t., et impulsi projektsioon mingil teljel on võrdne kiineetilise energia osatuletisega vastava kiiruse projektsiooni järgi.

Võtame nüüd vaatluse alla punktide süsteemi, mille vabadusastmete arv on s .

Niisuguse süsteemi asendi võib määrata s sõltumatu üldistatud koordinaadiga

$$q_1, q_2, \dots, q_s.$$

Süsteemi kineetiline energia sõltub nende üldistatud koordinaatide tuletistest (üldistatud kiirustest)

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s;$$

statsionaarsete seoste korral on T üldistatud kiiruste suhtes homogeenne ruutfunktsioon.

Me võiksime arvutada osatuletisi

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$$

ja nimetada neid, analoogiliselt ühe materiaalse punkti juhuga, üldistatud impulssideks. Tegelikult seda täpselt nii ei tehta; üldistatud impulssideks nimetatakse Lagrange'i funktsiooni osatuletisi üldistatud kiiruste järgi:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}.$$

Kuna aga potentsiaalne energia U kiirustest ei sõltu, siis on

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

ja kooskõla kineetilise energia ning impulsi mõistete vahel

on täpselt samasugune nagu lihtsaimal, ühe punkti juhulgi.

Me tähistame edaspidi, nagu seda ka üldiselt tehakse, üldistatud impulsse tähega p :

$$p_1, p_2, \dots, p_s.$$

Seega,

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (5.1)$$

2. Kanoonilised muutujad.

Lagrange'i II tüüpi võrrandite tuletamisel kasutasime süsteemi liikumise olekut iseloomustavate suurustena üldistatud koordinaate

$$q_1, q_2, \dots, q_s$$

ja üldistatud kiirusi

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s.$$

Nende suuruste kasutamine ei ole kohustuslik. Võib kasutada ka teisi muutujate süsteeme, mis küllaldaselt võimaldavad iseloomustada materiaalseste punktide süsteemi liikumist.

Hamiltoni kanooniliste võrrandite tuletamisel, mille juurde käesoleva paragrahvi järgnevas osas peatselt asume, kasutatakse sel otstarbel üldistatud koordinaate

$$q_1, q_2, \dots, q_s$$

ja üldistatud impulsse

$$p_1, p_2, \dots, p_s.$$

Selleks, et üle minna nendele muutujatele, on vaja avaldada kineetilise energia avaldises esinevad üldistatud kiirused üldistatud impulsside kaudu. Me leidsime esimeses paragrahvis, et statsionaarsete seoste korral

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

kus kordajad A_{jk} kiirustest ei sõltu. Kuna

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j},$$

same

$$\begin{cases} A_{11}\dot{q}_1 + A_{12}\dot{q}_2 + \dots + A_{1n}\dot{q}_n = p_1, \\ A_{21}\dot{q}_1 + A_{22}\dot{q}_2 + \dots + A_{2n}\dot{q}_n = p_2, \\ \vdots \\ A_{s1}\dot{q}_1 + A_{s2}\dot{q}_2 + \dots + A_{sn}\dot{q}_n = p_s. \end{cases} \quad (5.2)$$

Üldistatud kiiruste suhtes kujutab (5.2) endast lineaarset mittehomoogeenset võrrandisüsteemi. Juhul, kui selle süsteemi determinant erineb nullist, on temast võimalik $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ leida. Võib aga tõestada, et see determinant ei saa kunagi nulliga võrdne olla;¹ seega on üleminek uutele muutujatele alati teostatav.

Nagu teame, avalduvad lineaarvõrrandisüsteemi lahendis $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ vabaliikmete lineaarsete kombinatsioonidena:

[illegible]

Järelikult on kineetiline energia ka üldistatud impulsside suhtes homogeenne ruutfunktsioon:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\hat{n}} \sum_{k=1}^{\hat{n}} \beta_{jk} \nu_j \nu_k. \quad (5.4)$$

Muutujaid q_j ja p_j nimetatakse analüütilises mehhaanikas kanoonilisteks muutujateks.

3. Näide ülemineku kohta kanoonilistele muutujatele.

Vaatleme näitena mingit kolme vabadusastmega süsteemi. Siis on vajalikud kolm üldistatud koordinaati

 $q_1, q_2, q_3;$

¹ Vt.näiteks В. Г. Извлязов, Тюртмилская механика, Москва 1959, к. 125-136.

kineetiline energia

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k .$$

Oletame lihtsuse mõttes, et koordinaadid q_1, q_2, q_3 on niisugused, et T avaldises ei esine liikmeid erinevate üldistatud kiiruste korrutistega. Selliseid koordinaate nimetatakse ortogonaalseteks. (Mitmed kõige enam tuntud koordinaatide süsteemidest, nagu Cartesiuse ristkoordinaadid tasapinnal ja ruumis, polaarkoordinaadid, silindrilised ja sfäärilised koordinaadid, on ortogonaalsed.) Niisiis, olgu

$$T = \frac{1}{2} (A_{11} \dot{q}_1^2 + A_{22} \dot{q}_2^2 + A_{33} \dot{q}_3^2) .$$

Siis

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = A_{11} \dot{q}_1 , \\ p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = A_{22} \dot{q}_2 , \\ p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = A_{33} \dot{q}_3 \end{cases}$$

ning

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{A_{11}} , \quad \dot{q}_2 = \frac{p_2}{A_{22}} , \quad \dot{q}_3 = \frac{p_3}{A_{33}} .$$

Seega avaldub kineetiline energia üldistatud impulsside kaudu kujul:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{A_{11}} + \frac{p_2^2}{A_{22}} + \frac{p_3^2}{A_{33}} \right) .$$

Konkreetsena vaatleme materiaalse punkti kineetilise energia teisendamist silindriliste koordinaatide kasutamise korral. Silindrilistes koordinaatides

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) . \end{aligned}$$

Üldistatud impulsid

$$\begin{cases} p_r = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ p_\theta = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \\ p_z = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} ; \end{cases}$$

avaldades saadud valemeist $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, $\dot{z}$ ning asendades nad T avaldisse, saame

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2 \right).$$

4. Hamiltoni kanoonilised võrrandid.

Asume järgnevalt materiaalse punkti süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandite tuletamisele kanoonilistes muutujates.

Lähtume Lagrange'i II tüüpi võrranditest (3.5), millised üldistatud impulsi mõistet kasutades võib üles kirjutada järgmiselt:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (5.5)$$

Nagu iga teist järku harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi, nii ka seda süsteemi saab uute muutujate sissetoomisega taandada esimest järku võrrandite süsteemiks, milles võrrandite arv on kaks korda suurem. Me teisendame edasiseks (5.5) esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemiks kanooniliste muutujate q_j ja p_j suhtes.

Toome sellel otstarbel sisse ühe uue funktsiooni - Hamiltoni funktsiooni H , mis on defineeritud valemiga

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}. \quad (5.6)$$

Me mõistame H all kanooniliste muutujate funktsiooni; kui valemis ka esinevad üldistatud kiirused, siis neid mõistame

avaldatauna üldistatud impulsside kaudu, s.t. nii nagu valemeis (5.3). Selle funktsiooni füüsikalise tähendusest tuleb juttu hiljem.

Arvutame H osatuletise mingi üldistatud impulsi p_k järgi. Valem (5.6) põhjal

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k};$$

et

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j},$$

siis kaks viimast summat arvutatava tuletise avaldises koonduvad ning jääb

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad (k=1, 2, \dots, s). \quad (5.7)$$

Arvutame veel ka H osatuletise üldistatud koordinaadi q_k järgi

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^s p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}.$$

Lagrange'i II tüüpi võrrandite (5.5) põhjal on seega

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = - \dot{p}_k, \quad (5.8)$$

seda muidugi samuti iga $k = 1, 2, \dots, s$ korral.

Kokku võttes võrrandid (5.7) ja (5.8) saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}, \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, s), \quad (5.9)$$

mis kannab Hamiltoni kanooniliste võrrandite nime.

Kanoonilised võrrandid kujutavad endast esimest järku harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi, milles võrrandite arv $2s$ on niisama suur kui tundmatute p_j ja q_j arv. Seega võimaldab võrrandisüsteem (5.9) materiaalsete punktide süsteemi liikumise määramise ülesande lahendada. Meil on täielik õigus seda väita, sest see süsteem on ju Lagrange'i II tüüpi võrrandite teisendamise saadus: teine osa süsteemist (5.9) kuju-

tab endast õigupoolest vaid Lagrange'i võrrandite teist kirjutusviisi, esimene osa täiendavaid võrrandeid, mis lisandusid seoses teisendatava süsteemi järgu alandamisega.

Esimesena tuletas need võrrandid W.R. Hamilton 1834.a. Meie poolt toodud kujul kehtivad nad ainult konservatiivsete tungide korral; kuid on võimalik ja mitte eriti keeruline, üldistada kanoonilisi võrrandeid ka juhule, kus punktide süsteemile mõjuvad mittekonserveeritavad tungid.

5. Hamiltoni funktsiooni füüsikaline tähendus.

Definitsiooni põhjal (vt. valem(5.6))

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}.$$

Et

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_j},$$

siis

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}.$$

Statsionaarsete seoste korral (mida eeldame) on T homogeenne ruutfunktsioon üldistatud kiirustest; seega, Euleri lause põhjal homogeensete funktsioonide kohta

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2\mathcal{H}.$$

Järelikult,

$$\mathcal{H} = 2T - \mathcal{L} = 2T - (T - U),$$

s.t.,

$$\mathcal{H} = T + U.$$

(5.10)

Seega, Hamiltoni funktsiooni füüsikaliseks tähenduseks on vaadeldava materiaalse punkti süsteemi mehhaaniline energia. H leidmiseks tuleb lihtsalt koostada avaldis süsteemi mehhaanilise energia jaoks ning esitada see üldistatud koordinaatide ja üldistatud impulsside kaudu.

Koostame näitena Hamiltoni funktsiooni materiaalse punkti jaoks massiga m , mis liigub raskustungi väljas. Siin

$$T = \frac{1}{2}mv^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

potentsiaalne energia

$$U = mgz,$$

kui nullnivoo on võetud
xy-tasapinnaks.

Hamiltoni funktsioon

$$H = T + U;$$

ainult T avaldises tulevad

veel $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ asendada

impulsside kaudu. Arvutame:

$$p_x = m\dot{x}, p_y = m\dot{y}, p_z = m\dot{z};$$

seega,

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m},$$

$$T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

ning

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz. \quad (5.11)$$

Juhul, kui seosed on mittestatsionaarsed, pole Hamiltoni funktsiooni füüsikaliseks tähenduseks enam süsteemi mehhaaniline energia ($H \neq T + U$).¹

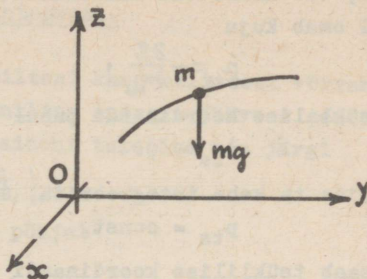
6. Tsüklilised koordinaadid.

Mõnikord võib osutada, et mõni üldistatud koordinaatidest ei esine Hamiltoni funktsiooni avaldises. Niisugust koordinaati nimetame siis tsükliliseks.

Tsüklilise koordinaadi järgi võetud osatuletis Hamiltoni funktsioonist on null:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_t} = 0.$$

¹ Vt. näiteks *И. Н. Бухаров, Основный курс теоретической механики, часть вторая, Москва-Ленинград 1945, в. 161-162.*



Joon. 20.

Seega, see Hamiltoni kanoonilistest võrranditest, mis üldjuhul omab kuju

$$\dot{p}_t = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_t},$$

on tsüklilise koordinaadi puhul lihtsam, nimelt,

$$\dot{p}_{ts} = 0.$$

Me võime ta kehe integreerida, saades

$$p_{ts} = \text{const.} \quad (5.12)$$

Nii saab tsüklilise koordinaadi puhul kanoonilistele võrranditele väga lihtsalt leida ühe integraali. Integraali (5.12) nimetatakse tsükliliseks integraaliks.

Mida rohkem on tsüklilisi integraale, seda lihtsam on, üldiselt, diferentsiaalvõrrandite süsteemi (5.9) integreerimine. Olgu, näiteks, kõik koordinaadid tsüklilised, s.t.,

$$H = H(p_1, p_2, \dots, p_s).$$

Siis

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = \dots = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_s} = 0$$

ning, järelikult,

$$p_1 = C_1, p_2 = C_2, \dots, p_s = C_s$$

($C_1, C_2, \dots, C_s$ on integreerimiskonstandid). Saime s tsüklilist integraali. Neist järeldub, et

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \text{const} = \kappa_j \quad (j=1,2,\dots,s)$$

- sest H tuletist võttes saame mingi avaldise, mis sisaldab ainult impulsse p_j , kõik p_j aga on konstantsed. Kanooniliste võrrandite põhjal

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j},$$

seega,

$$\dot{q}_j = \kappa_j,$$

$$q_j = \kappa_j t + l_j \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Nii on sellisel juhul kanooniliste võrrandite integreerimine kergesti läbiviidav.

7. Energia integraal.

Näitame, kuidas võib Hamiltoni kanoonilistest võrranditest lähtudes tõestada mehhaanilise energia jäävuse seaduse.

Arvutame Hamiltoni funktsiooni tuletise aja järgi

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j \right).$$

Kanooniliste võrrandite (5.9) põhjal

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j,$$

seega,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{j=1}^s (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j) = 0.$$

Integreerimine annab tulemuseks, et

$$H = \text{const}$$

Bespool (p.5) selgitasime välja, et Hamiltoni funktsiooni füüsikaliseks tähenduseks on süsteemi mehhaaniline energia:

$$H = T + U,$$

mis on väljendatud kanoonilistes muutujates. Järelikult oleme lähtudes kanoonilistest võrranditest näidanud, et

$$T + U = \text{const}$$

Seega oleme tõestanud mehhaanilise energia jäävuse seaduse ning saanud ühtlasi süsteemi liikumise diferentsiaalvõrranditele ühe integraali - energia integraali.

On selge, et esitatud tuletuskäik ning ka saadud tulemus kehtivad ainult järgmiste eelduste täidetud olles: 1) kõik süsteemi punktidele mõjuvad tungid peavad olema konservatiivsed ning 2) seosed peavad olema statsionaarsed.

8. Näide kanooniliste võrrandite rakendamise kohta.

Punktis 5 leidsime Hamiltoni funktsiooni materiaalse punkti jaoks, mis liigub raskustungi väljas; see oli järgmine:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz.$$

Arvutame osatuletised

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = mg,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

ja koostame kanoonilised võrrandid:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{m}, & \dot{p}_x = 0, \\ \dot{y} = \frac{p_y}{m}, & \dot{p}_y = 0, \\ \dot{z} = \frac{p_z}{m}, & \dot{p}_z = -mg. \end{cases}$$

Nende integreerimine on lihtne:

$$p_x = C_1, \quad p_y = C_2, \quad p_z = -mgt + C_3$$

(x ja y on, nagu näeme, tsüklilised koordinaadid),

$$\begin{cases} x = \frac{C_1}{m}t + D_1, \\ y = \frac{C_2}{m}t + D_2, \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{C_3}{m}t + D_3. \end{cases}$$

Pärast integreerimiskonstantide $C_1, \dots, D_3$ määramist algandmetest on punkti liikumise seadus leitud.

9. Planeedi liikumine Päikese ümber.

Järgmise näitena vaatleme ülesannet planeedi liikumisest Päikese gravitatsiooniväljas. Päikese loeme paigalseisvaks – see eeldus pole kindlasti täpne, nagu järeldub juba süsteemi massikeskme liikumise seadusest, kuid ei põhjusta ka suurt viga, sest Päikese mass on planeedi omast väga palju suurem.

Tähistame planeedi massi tähega m , Päikese massi tähega M . Punkti dünaamikas näidatakse, et tsentraalses tungiväljas liikuva materiaalse punkti trajektooriks on alati tasapinnaline joon. Seega piisab planeedi asendi määramiseks kahest koordinaadist; me kasutame polaarkoordinaate r ja θ ,

mille alguspunkt on Päikese tsentris (vt. joon. 21).

Planeedi kineetiline energia avaldub polaarkoordinaatides kujul

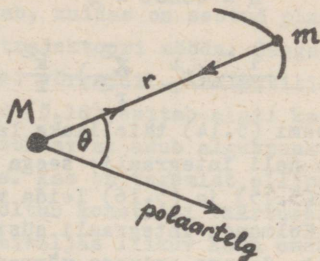
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2);$$

see tuleb meil teisendada kanoonilistesse muutujatesse. Et

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta},$$

siis

$$T = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2).$$



Joon. 21.

Potentsiaalne energia, mille planeet omab oma asendi tõttu Päikese gravitatsiooniväljas, on

$$U = -\frac{\gamma Mm}{r},$$

kus γ on gravitatsioonikonstant. Seega Hamiltoni funktsioon selle planeedi jaoks on järgmine:

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2) - \frac{\gamma Mm}{r}.$$

Koostame nüüd probleemi jaoks Hamiltoni kanoonilised võrrandid. Need on:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{m}p_r, \\ \dot{\theta} = \frac{1}{mr^2}p_\theta, \\ \dot{p}_r = -\frac{1}{mr^3}p_\theta^2 - \frac{k^2}{r^2}, \\ \dot{p}_\theta = 0, \end{cases} \quad (5.14)$$

kus on tähistatud

$$\gamma Mm = k^2.$$

Kuna θ osutus tsükliliseks koordinaadiks, siis ühe esimese integraali süsteemile (5.14) saame leida kergesti; see on

$$p_{\theta} = \text{const} = \mathcal{K}. \quad (5.15)$$

Võtame abiks veel energia integraali

$$H = \text{const} = E$$

ehk

$$\frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{\mathcal{K}^2}{r^2}) - \frac{k^2}{r} = E \quad (5.16)$$

Süsteemi (5.14) täielikuks lahendamiseks läheb vaja leida talle neli integraali; seega tuleks neid lisaks integraalidele (5.15) ja (5.16) leida veel kaks.

Kolmanda integraali süsteemile (5.14) võib leida järgmiselt. Jagame esimese võrrandi süsteemis teisega (s.o. jagame esimese võrrandi vasaku poole teise vasaku poolega, parema poole - teise parema poolega), siis saame

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{r^2 p_r}{p_{\theta}}$$

ehk

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 p_r}{p_{\theta}}$$

Saadud võrrandist elimineerime juba leitud integraalide abil p_r ja p_{θ} . See annab võrrandi

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\mathcal{K}} \sqrt{2mE + \frac{2mk^2}{r} - \frac{\mathcal{K}^2}{r^2}},$$

milles saab muutujad eraldada:

$$\frac{\mathcal{K} dr}{r^2 \sqrt{2mE + \frac{2mk^2}{r} - \frac{\mathcal{K}^2}{r^2}}} = d\theta. \quad (5.17)$$

Võrrandit (5.17) ei ole raske integreerida, eriti kui teostada muutuja vahetus

$$\frac{1}{r} = u.$$

Kui me seda teeme ning tulemuse esitame ilmutatud kujul r suhtes, siis saame

$$r = \frac{\mathcal{K}}{1 - \epsilon \sin \theta}, \quad (5.18)$$

kus

$$p = \frac{\alpha^2}{mk^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha E}{mk^2}}.$$

(Integreerimisel on kasutatud algandmeid: kui $\theta = 0$, siis $r = p$).

Leitud integraal (5.18) näitab, kuidas on seotud planeedi polaarkoordinaadid liikumisel trajektoori mööda. Seega ta kujutab endast planeedi trajektoori võrrandit. Analüütilises geomeetrias näidatakse, et võrrand (5.18) esitab alati koonuslõike; üks selle koonuslõike fookustest asub alguspunktis, parameeter on p , ekstsentrilisus e . Kas on tegemist ellipsi, parabooli või hüperbooliga, see sõltub konstandi väärtusest, s.t. energiast, mida gravitatsiooniväljas liikuv keha omab. Kõigil planeetidel osutub E negatiivseks, seega neil $e < 1$ ning trajektooriks on ellips.

Niisiis:

Planeet liigub ümber Päikese ellipsit mööda, mille ühes fookuses asub Päike. Saime seega Hamiltoni kanoonilistest võrranditest lähtudes Kepleri I seaduse.

Märgime, et teised võimalikud trajektooriujud, parabool ja hüperbool, esinevad vaid väiksemate kehade - komeetide ja meteoride puhul.

Ülesande lõplikuks lahendamiseks oleks vaja leida süsteemile (5.14) veel üks integraal. Siis saab kätte ka planeedi liikumise seaduse

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t). \end{cases}$$

10. Kahe keha probleem.

Katsume selgitada, kuidas muutub eelmises punktis käsitletud ülesande lahendus, kui loobuda eeldusest Päikese liikumise kohta.

Nimetatud eelduse ärajätmine muudab materiaalse punkti (planeedi) liikumise ülesande kahest punktist (Päike ja planeet) koosneva süsteemi liikumise ülesandeks. Päike ja planeet mõjuvad teineteisele gravitatsioonitõugidega; oletame,

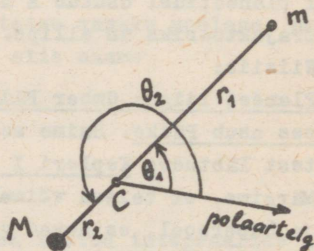
et väljastpoolt süsteemi nendele mingisuguseid tunge ei mõju. Niisuguse süsteemi liikumise määramise ülesanne kannab mehhaanikas "kahe keha probleemi" nimetust.

Välisrõhke puudumise tõttu järeldub süsteemi masskeske liikumise seadusest, et süsteemi Päike-planeet masskese or kas paigal või liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Oletame, et ta on paigal (see oletus pole kitsendav; tuletame meelde klassikalise mehhaanika relatiivsuse printsiipi), ning võtame ta koordinaatide alguseks. Kasutame polaarkoordinaate; olgu planeedi koordinaadid r_1 ja θ_1 , Päikese omad r_2 ja θ_2

(vt. joonis 22).

Need koordinaadid pole sõltumatud: et m ja M asuvad alati ühel ja samal C-d läbival sirgel, on polaar-
nurkade vahe alati 180° ning asjaolu, et C on süsteemi masskese, tingib polaarraadiuste vahel seose

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M}{m}.$$



Joon. 22.

Seega sõltumatuid koordinaate jääb ainult kaks. Me valime nendeks nurga

$$\theta = \theta_1$$

ja kauguse kehade vahel

$$r = r_1 + r_2.$$

Seosed üleminekuks endistelt koordinaatidelt uutele on järgmised:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{M}{M+m} r, \\ r_2 = \frac{m}{M+m} r, \\ \theta_1 = \theta, \\ \theta_2 = \theta + \pi. \end{cases} \quad (5.19)$$

Süsteemi kineetiline energia

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}M(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}_2^2)$$

ehk sõltumatutes koordinaatides

$$T = \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Üldistatud impulsid

$$p_r = \frac{Mm}{M+m} \dot{r}, \quad p_\theta = \frac{Mm}{M+m} r^2 \dot{\theta},$$

seega, kanoonilistes muutujates

$$T = \frac{1}{2} \frac{M+m}{Mm} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2).$$

Süsteemi potentsiaalne energia gravitatsiooniväljas

$$U = - \frac{\gamma Mm}{r},$$

seega, Hamiltoni funktsioon süsteemi Päike-planeet jaoks on järgmine:

$$H = \frac{1}{2} \frac{M+m}{Mm} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2) - \frac{\gamma Mm}{r}. \quad (5.20)$$

Koostame Hamiltoni kanooniliste võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{M+m}{Mm} p_r, \\ \dot{\theta} = \frac{M+m}{Mmr^2} p_\theta, \\ \dot{p}_r = \frac{M+m}{Mmr^3} p_\theta^2 - \frac{\gamma Mm}{r^2}, \\ \dot{p}_\theta = 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Impulsside p_r ja p_θ elimineerimine süsteemist (5.21) annab järgmise süsteemi kahest teist järku diferentsiaalvõrrandist:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\gamma(M+m)}{r^2} = 0, \\ \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Kui me samasuguse elimineerimise teostame eelmises punktis sisalduvas võrrandisüsteemis (5.14), siis saame tulemuseks

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\gamma M}{r^2} = 0, \\ \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

Võrrandisüsteemid (5.22) ja (5.23) erinevad ainult esimeste võrrandite viimaste liikmete poolest – esimeses neist asub tegur $(M+m)$ seal, kus teises on M . Süsteem (5.22) kirjeldab planeedi relatiivset liikumist liikuva Päikese suhtes; süsteem (5.23) – planeedi liikumist liikumatu Päikese suhtes. Märgitud erinevus võrrandis annab õiguse järelduseks:

Planeet liigub liikuva Päikese suhtes nii, nagu ta liiguks liikumatu Päikese suhtes, kui selle mass oleks suurendatud planeedi massi võrra. Muide, viga, mille teeme, lugedes Päikese paigalseisvaks, on väike, sest võrreldes planeediga on Päikese mass väga suur (suurima planeedi Jupiteri mass moodustab kõigest $\approx 0,1\%$ Päikese massist).

Kuna planeedi ja Päikese koordinaadid masskeskme suhtes, r_1 ja r_2 , on võrdelised r -ga, siis võib järeldada, et ka planeedi ja Päikese trajektoorid masskeskme suhtes on ellipsid. Planeedi trajektooriks on ellips, mis peaaegu ei erine sellest, mille ta kirjeldaks juhul, kui Päike oleks liikumatu; Päikese poolt kirjeldatav ellips on planeedi omaga võrreldes väga väike. (Muide, näiteks süsteemi Maa-Päike masskeske asub Päikese sees, vähem kui 500 km Päikese masskeskmest Maa suunas).

11. Poisson'i sulud.

Olgu φ ja ψ mingisugused funktsioonid kanoonilistest muutujatest ja ajast, s.t.,

$$\varphi = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t),$$

$$\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t).$$

Analüütilises mehhaanikas tarvitatakse nimetust "Poisson'i sulud" avaldise puhul, mis on neist funktsioonidest järgmisel viisil koostatud:

$$(\varphi, \psi) \equiv \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial \psi}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right). \quad (5.24)$$

Märgime mõningaid omadusi, mis Poisson'i sulgudel on:

1) kehtivad võrdused:

$$(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi),$$

$$(\varphi, -\psi) = -(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi) ;$$

2) kui c on konstant, siis

$$(\varphi, c) = 0 ;$$

3) tuletis aja järgi

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right). \quad (5.25)$$

Samuti, kui meil on veel kolmas funktsioon

$$f = f(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t),$$

siis kolmest funktsioonist φ, ψ, f koostatud Poisson'i sulgude vahel kehtib järgmine samasus:

$$(f, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, f)) + (\psi, (f, \varphi)) \equiv 0. \quad (5.26)$$

Seda samasust nimetatakse Poisson'i samasuseks.

Kõigi eespool toodud omaduste kehtivust saab kontrollida, lähtudes Poisson'i sulgude definitsioonist (5.24).

12. Poisson'i lause.

Enne, kui asume tõestama pealkirjas mainitud lauset, püüame leida vastuse küsimusele: missugust tingimust peab täitma funktsioon

$$f(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t),$$

et

$$f(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) = c \quad (5.27)$$

oleks Hamiltoni kanooniliste võrrandite süsteemi (5.9) integraaliks.

Oletame, et (5.27) on süsteemi (5.9) integraal. Kuna funktsioon f on konstantne (võrdne c -ga), siis ta tuletis aja järgi

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) \equiv 0.$$

Asendades siia süsteemist (5.9) q_j ja p_j Hamiltoni funktsiooni tuletiste kaudu, saame

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \equiv 0$$

ehk, kasutades Poisson'i sulge,

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\varphi, \mathcal{H}) \equiv 0. \quad (5.28)$$

Tingimus (5.28) on tarvilik selleks, et (5.27) oleks kanooniliste võrrandite süsteemi integraal. Minnes kirjeldatule vastupidist teed, saab näidata, et ta on selleks ka piisav. Tõestada see iseseisvalt!

Tõestame järgnevalt Poisson'i lause, mis väidab: kui

$$\varphi(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) = a$$

ja

$$\psi(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) = b,$$

on kanooniliste võrrandite süsteemi (5.9) integraalideks, siis ka

$$(\varphi, \psi) = c$$

on selle süsteemi integraal.

Tõepoolest, kuna $\varphi = a$ ja $\psi = b$ on süsteemi (5.9) integraalid, siis on

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, \mathcal{H}) \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, \mathcal{H}) \equiv 0.$$

Poisson'i samasuse (5.26) järgi

$$(\mathcal{H}, (\varphi, \psi)) + (\varphi, (\psi, \mathcal{H})) + (\psi, (\mathcal{H}, \varphi)) \equiv 0;$$

et

$$(\varphi, \mathcal{H}) = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (\mathcal{H}, \varphi) = -(\varphi, \mathcal{H}) = +\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

siis saame

$$(\mathcal{H}, (\varphi, \psi)) + (\varphi, -\frac{\partial \psi}{\partial t}) + (\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \equiv 0$$

ehk

$$((\varphi, \psi), \mathcal{H}) + (\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}) + (\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi) \equiv 0.$$

Et valem (5.25) põhjal

$$(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}) + (\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi) = \frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t},$$

saame lõplikult

$$\frac{\partial (\varphi, \psi)}{\partial t} + ((\varphi, \psi), \mathcal{H}) \equiv 0.$$

See aga tähendab (vt. (5.28)), et $(\varphi, \psi) = c$ on süsteemi (5.9) integraaliks, m.o.t.t.

Poisson'i lause võimaldab juhul, kui on leitud kaks

integraali Hamiltoni kanoonilistele võrranditele, leida nende põhjal kolmanda integraali jne. Nii võiks süsteemi integreerimise lõpuni viia üsna kergesti. Kahjuks aga alati kirjeldatud viisil uut integraali ei saa leida - võib juhtuda et Poisson'i sulud

$$(\varphi, \psi) \equiv 0$$

ja järelikult uut integraali ei anna. (Niisugune olukord tekib, muide, käesoleva paragrahvi kaheksandas ja üheksandas punktis toodud näiteis). Mõnikord võib ka juhtuda, et leitud "uus" integraal langeb ühte mõnega endistest.

Vaatleme näitena materiaalse punkti liikumist tsentraalses tungiväljas, milles punktile mõjuv tung on suuruselt võrdeline kaugusega koordinaatide algusest ning suunatud selle poole.

Siis

$$\vec{F} = -c\vec{r} =$$

$$= c(x, y, z),$$

kus

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

on punkti kohavektor

ja c - positiivne võrdetegur. Et

$$\vec{F} = -\nabla U,$$

siis

$$U = \frac{c}{2} (x^2 + y^2 + z^2).$$

Lihtsuse mõttes oletame, et vaadeldava punkti mass $m = 1$. Siis tema kineetiline energia

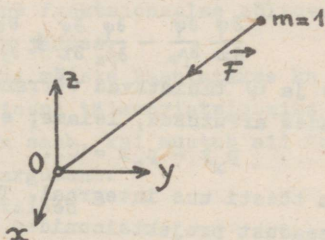
$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Minnes kiirustelt üle üldistatud impulssidele

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \dot{z},$$

saame

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$



Joon. 23.

Koostame Hamiltoni kanoonilised võrrandid:

$$\dot{x} = p_x, \quad \dot{y} = p_y, \quad \dot{z} = p_z,$$

$$\dot{p}_x = -cx, \quad \dot{p}_y = -cy, \quad \dot{p}_z = -cz.$$

On kerge näha, et neil võrranditel on kaks järgmist integraali:

$$p_y z - p_z y = C_1, \quad p_z x - p_x z = C_2. \quad (5.29)$$

(Sisuliselt on need pöördimpulsiintegraalid - nad väljendavad pöördimpulsi jäävuse seadust projektsioonides x- ja y-teljel).

Vastavalt Poisson'i lausele saab veel ühe integraali kanoonilistele võrranditele leida kujul

$$(\varphi, \psi) = c_3$$

ehk

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial p_x} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial p_y} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial p_z} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_z} \frac{\partial \psi}{\partial z} = c_3,$$

kus φ ja ψ tähistavad võrrandite (5.29) vasakuid pooli.

Teostades arvutused, leiame, et see integraal on järgmine:

$$p_x y - p_y x = C_3.$$

See on tõesti uus integraal. Ta väljendab pöördimpulsi jäävuse seadust projektsioonides z-teljele.

Kui püüaksime leida kanoonilistele võrranditele veel üht integraali, kombineerides äsja leitud ühega endistest, siis see enam tagajärgi ei annaks - saaksime tulemuseks teise integraalidest (5.29).

§ 6. MAUPERTUIS'-LAGRANGE'I VÄHIMA
MÕJU PRINTSIIP.

1. Variatsiooni mõistest.

Käsitledes eespool, teises paragrahvis, Hamiltoni printsiipi, puutusime kokku mõistega "funktsiooni isokroonne variatsioon". Funktsiooni isokroonne variatsioon - see on funktsiooni muut selle tõttu, et muutub funktsionaalse sõltuvuse kuju, argumendi väärtuse endiseks jäädes.

Peale isokroonne variatsiooni mõiste kasutatakse ka nn. täisvariatsiooni mõistet. Funktsiooni täisvariatsiooniks nimetatakse muutu, mille funktsioon saab, kui muutub nii funktsionaalse sõltuvuse kuju kui ka argument.

Olgu antud mingisugune funktsioon

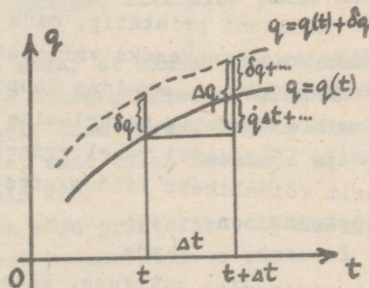
$$q = q(t).$$

Tema täisvariatsioon, mida tähistame Δq , koosneb järelikult kahest osast: esiteks, funktsiooni muudust, mida põhjustab tema kuju muut ilma argumendi muutmiseta, s.o.

isokroonsest variatsioonist δq , ja teiseks, funktsiooni muudust argumendi muutmise tõttu, mis on võrdne $\dot{q} \Delta t$, s.t., et

$$\Delta q = \delta q + \dot{q} \Delta t. \quad (6.1)$$

Selle valemi geomeetrilist illustatsiooni vt. jooniselt 24.



Joon. 24.

Täisvariatsiooni korral ei ole varieerimine ja argumendi järgi diferentseerimine enam kommuteeruvad tehted. Tõepoolest,

$$\frac{d}{dt} \Delta q = \delta \dot{q} + \ddot{q} \Delta t + \dot{q} \frac{d}{dt} \Delta t.$$

Et $\dot{q}$ täisvariatsioon on valemi (6.1) kohaselt

$$\Delta \dot{q} = \delta \dot{q} + \ddot{q} \Delta t,$$

siis

$$\frac{d}{dt} \Delta q = \Delta \dot{q} + \dot{q} \frac{d}{dt} \Delta t. \quad (6.2)$$

Samuti ei või täisvariatsiooni korral integreerimise ja varieerimise tehete omavahelist järjekorda vahetada. Vastavalt valemile (6.1) on

$$\Delta \int q dt = \delta \int q dt + q \Delta t;$$

samal ajal

$$\int \Delta q dt = \int \delta q dt + \int \dot{q} \Delta t dt = \dots$$

(pärast ositi integreerimist)

$$\dots = \delta \int q dt + q \Delta t - \int q d\Delta t,$$

seega

$$\Delta \int q dt = \int \delta q dt + \int q d\Delta t. \quad (6.3)$$

2. Maupertuis'-Lagrange'i vähima mõju printsiip.

Hamiltoni printsiip, mida käsitlesime eespool, ei ole mehhaanikas ainukeseks variatsioonprintsibiiks.

Juba 1744.a. avaldas Maupertuis ühes oma töös printsiibi, mille kohaselt materiaalse punkti tegelik liikumine antud alg- ja lõppasendi vahel erineb kõigist teistest kinemaatilistelt võimalikest liikumistest selle poolest, et tema puhul mõjufunktsioon

$$\int v ds$$

omab minimaalse väärtuse. Maupertuis ei tõestanud oma printsiipi; korrektse tõestuse andmine sellele printsiibile (laiendatuna juba punktide süsteemi liikumisele) õnnestus alles

Lagrange'11.

Printsiibi täpsem formulatsioon on järgmine:

Konservatiivsete tungide mõju all oleva materiaaalsete punktide süsteemi tegelik liikumine antud alg- ja lõppasendi vahel erineb kõigist teistest kinemaatiliselst võimalikest liikumistest, mis toimuvad sama energiaga, selle poolest, et tema puhul mõjufunktsioon

$$W = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt \quad (6.4)$$

omad statsionaarse väärtuse.

Maupertuis'-Lagrange'i printsiip on mõneski suhtes sarnane Hamiltoni printsiibiga. Ka siin võrreldakse mitmesuguseid kinemaatiliselst võimalikke liikumisi; tegeliku liikumise eristab teiste hulgast omadus, et tema puhul on teatud funktsiooni väärtus statsionaarne. On aga ka olulisi erinevusi. Kõigepealt on siin mõjufunktsioon teistsugune (et teha vahet, nimetatakse W Lagrange'i mõjufunktsiooniks). Printsiibi kehtivuse piirkond on väiksem - ta kehtib ainult konservatiivsete tungide korral. Hamiltoni printsiibi korral võrreldakse omavahel liikumisi, mis võiksid toimuda sama ajaga; siin aga niisuguseid, mis võiksid toimuda sama mehhaanilise energiaga. Et energia lause kohaselt

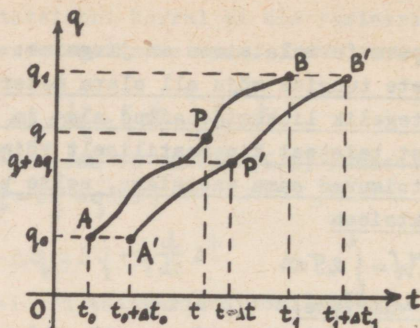
$$T + U = E = \text{const},$$

siis kineetiline energia T ja järelikult ka süsteemi punktide kiirused sõltuvad nende asendist. Seega ka liikumise aeg ei tarvitse siin olla iga võrdlusaluse liikumise puhul ühesugune (aeg sõltub teest).

Viimane asjaolu põhjustab seda, et minnes üle tegeliku liikumise teelt mingile teisele kinemaatiliselst võimalikule e.nn.varieeritud teele, meil pole enam õigust lugeda koordinaadi variatsiooni isokroonseks, vaid tuleb kasutada täisvariatsiooni mõistet (vt. joonis 25).

Tõestame järgnevalt vähima mõju printsiibi, lähtudes Lagrange'i II tüüpi võrranditest konservatiivse süsteemi jaoks

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s).$$



Joon. 25.

Näide varieeritud liikumise kohta Maupertuis'-Lagrange'i printsiibi korral (täisvariatsioon). Ühemõõtmeline liikumine. AB-tegeliku liikumise, A'B'-varieeritud liikumise graafik. Et aeg võib olla erinev, siis alg- ja lõppasend läbitakse üldiselt erineval ajal. Siis aga ei saa vastavateks lugeda samal hetkel läbitavaid punkte ka vahepeal.

Korrutame iga võrrandi selles süsteemis vastava koordinaadi variatsiooniga Δq_j ja liidame:

$$\sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \Delta q_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \Delta q_j = 0. \quad (6.5)$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \Delta q_j &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Delta q_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d \Delta q_j}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Delta q_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Delta \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \frac{d \Delta t}{dt}, \end{aligned}$$

siis saame võrrandi (6.5) teisendada kujule:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Delta q_j &= \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Delta \dot{q}_j \right) + \\ &+ \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \frac{d \Delta t}{dt}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Esimene summa võrrandi (6.6) paremal poolel pole midagi muud, kui Lagrange'i funktsiooni variatsioon

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \Delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Delta \dot{q}_j \right) = \Delta \mathcal{L}.$$

Et

$$L = T - U = 2T - (T+U) = 2T - E$$

ning võrreldakse ainult sama energiaga E toimuvaid liikumisi

($E = \text{const}$), siis

$$\Delta \mathcal{L} = \Delta(2T).$$

Teine liige (6.6) paremal poolel

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T,$$

sest potentsiaalne energia üldistatud kiirusi ei sisalda ja kineetiline energia T on $\dot{q}_j$ suhtes homogeenne ruutfunktsioon.

Järelikult võrrandi (6.6) saab teisendada järgmiseks:

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Delta q_j = \Delta(2T) + 2T \frac{d\Delta t}{dt}.$$

Korrutame tulemuse dt -ga ja integreerime rajades (t_0, t_1), mis vastavad liikumise alg- ja lõppasendile. Saame

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta(2T) dt + \int_{t_0}^{t_1} 2T d\Delta t = \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Delta q_j \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Et liikumise alg- ja lõppasend on antud, siis $t = t_0$ ja

$t = t_1$ puhul kõik $\Delta q_j = 0$ ning saame

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta(2T) dt + \int_{t_0}^{t_1} 2T d\Delta t = 0$$

ehk, vastavalt valemile (6.3),

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0$$

ehk

$$\Delta W = 0.$$

(6.7)

S.t., tegelikul liikumisel W omab statsionaarse väärtuse,

m.o.t.t.

Nimetus "vähima mõju printsiip" vihjab sellele, et tingimusest (6.7) peaks järelduma W minimaalsus. Ilmselt see enamikel juhtudel nii ka on; kuid üldjuhul ei saa väita, et

W statsionaarne väärtus peaks olema just miinimum. Sellepärast nimetatakse Maupertuis'-Lagrange'i printsiipi mõnede autorite poolt ka "statsionaarse mõju printsiibiks".

3. Vähima mõju printsiibi erikujusid.

Maupertuis' kuju. Ühe materiaalse punkti korral

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m v^2 dt$$

ehk, kuna $v dt = ds$,

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m v ds.$$

Et $m = \text{const}$, siis punkti liikumine toimub tšepoollest vastavalt Maupertuis' poolt püstitatud printsiibile

$$\Delta \int_A^B v ds = 0 \quad (6.8)$$

(A,B-liikuva punkti alg- ja lõppasend).

Süsteemi korral

$$W = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n m_i v_i ds_i,$$

seega, vähima mõju printsiibi kohaselt

$$\Delta \int_A^B \sum_{i=1}^n m_i v_i ds_i = 0 \quad (6.9)$$

(siin tähendavad A,B integreerimist süsteemi algasendist lõppasendisse mõõda tema punktide trajektoorie kaari).

Jacobi kuju. See esineb eespool vaadelduist selle poolest, et tema puhul elimineeritakse mõjufunktsiooni avaldisest aeg t . Niisugune elimineerimine on võimalik, sest energia lause põhjal

$$2T = 2(E - U),$$

seega

$$2(E - U) = \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i ds_i^2}{dt^2},$$

millest

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n m_i ds_i^2}{2(E - U)}}.$$

Järelikult mõjufunktsioon

$$W = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \int_A^B \sqrt{2(\varepsilon - U)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n m_i ds_i^2}, \quad (6.10)$$

kus A ja B tähistavad integreerimist süsteemi punktide trajektooride kaari mööda alg- ja lõppasendi vahel nagu (6.9) puhulgi. Tegeliku liikumise eristab teiste võrreldavate hulgast tingimus

$$\Delta W = 0,$$

s. t.,

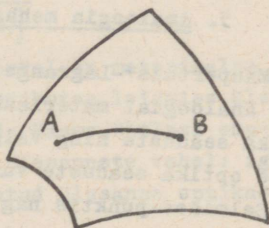
$$\Delta \int_A^B \sqrt{2(\varepsilon - U)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n m_i ds_i^2} = 0. \quad (6.11)$$

On huvitav, et niisugusel viisil on võimalik süsteemi tegeliku liikumise leidmiseks anda tunnust, milles aeg ilmsi üldse ei esine.

4. Materiaalse punkti inertsiaalne liikumine mööda siledat pinda.

Sama näidet vaatlesime ka juba Hamiltoni printsiipi käsitlevas paragrahvis. Pöördume siinkohal veel kord tema juurde tagasi - peale muu ka selleks, et näidata põhimõtte- list erinevust Hamiltoni printsiibi ja vähima mõju printsiibi vahel.

Vähima mõju printsiibi kohaselt punkt liigub antud algasendist A lõppasendisse B teed mööda, mis erineb teistest kinemaatiliselt võimalikest teedest, mille katmine oleks võimalik sama energiaga, tunnuse poolest, et tema puhul



Joon. 26.

$\Delta W = \Delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0.$
Praegusel juhul, kus liigub ainult üks punkt, on

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m v^2 dt.$$

Inertsiaalsel liikumisel $U = \text{const}$, seega koguenergia konstantsuse nõudest järeldub, et $v = \text{const}$ ning

$$W = m v^2 \int_{t_0}^{t_1} dt = m v^2 (t_1 - t_0).$$

Tegelikul liikumisel

$$\Delta W = m v^2 \Delta(t_1 - t_0) = 0,$$

s.t.,

$$\Delta(t_1 - t_0) = 0.$$

Seega: kõigist võimalikest liikumistest A ja B vahel, mis toimuvad sama kiirusega, on tegelik see, mille puhul liikumise aeg on statsionaarne. Ilmselt peab siin W statsionaarne väärtus olema miinimum; seega toimub see liikumine, mille puhul AB katmiseks kuluv aeg on minimaalne

$$t_1 - t_0 = \min.$$

Et $v = \text{const}$, siis sellest järeldub, et tegelikul liikumisel ka tee pikkus

$$s_{AB} = v(t_1 - t_0) = \min,$$

s.t., et materiaalne punkt liigub A B vahel mööda pinna geodeetilise joone kaart. Saine sama tulemuse, mis Hamiltoni printsiibist lähtudes, kuid selle tulemuse saamise käik oli täiesti erinev.

5. Analoogia mehhaanika ja optika vahel.

Maupertuis'-Lagrange'i printsiip võimaldab märgata huvitavat analoogiat materiaalse punkti liikumist juhtivate mehhaanika seaduste ning valguskiire levikut juhtivate geomeetrilise optika seaduste vahel.

Belmises punktis nägime, et materiaalse punkti tungivaba liikumine toimub nii, et selleks kuluv aeg on minimaalne. Geomeetriline optika tunneb Fermat' printsiipi, mis fikseerib samalaadse olukorra valguse puhul - nimelt levib monokromaatiline valguskiir optiliselt mittehomoogeenses keskkonnas ühest antud punktist teise niisugust teed mööda, mille katmiseks

kulub tal kõige vähem aega.

Matemaatiliselt formuleeritakse Fermat' printsiip järgmiselt: valguskiir levib punktist A punktini B niisugust teed mööda, mille puhul suurus

$$T = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad (6.12)$$

omab minimaalse väärtuse. [Siin $v(x, y, z)$ on valguse kiirus vaadeldavas keskkonnas, ds - valguskiire kaareelement.] Et

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} \cdot \frac{c}{v} = \frac{n}{c},$$

kus c on valguse kiirus vaakumis ja $n(x, y, z)$ keskkonna murdumisnäitaja, siis näeme valemist (6.12), et valguse levikuteed iseloomustab integraali

$$T = \frac{1}{c} \int_A^B n ds \quad (6.13)$$

väärtuse minimaalsus.

Materiaalse punkti liikumise üldjuhu kohta ütleb Maupertuis-Lagrange'i printsiip: punkti liikumine toimub alati nii, et mõjufunktsioon

$$W = \int_A^B \sqrt{2m(\epsilon - U)} ds \quad (6.14)$$

omab minimaalse väärtuse [täpsemini küll - statsionaarse väärtuse; vt. valem (6.10) jj.] .

Võrreldes valemide (6.13) ja (6.14) selgub huvitav asjaolu - nimelt need valemid langevad ühte, kui murdumisnäitaja n ja punkti potentsiaalse energia U vahel on järgmine seos:

$$n(x, y, z) = c \sqrt{2m [E - U(x, y, z)]}.$$

Täheleb, niisuguse seose olemasolu korral on materiaalse punkti trajektoori ning valguskiire levikutee leidmise ülesanded vormiliselt täiesti ühtelanged. Näeme ühtlasi omapärast vastavust mehhaanika ja optika ülesannete vahel: igale punkti liikumise ülesandele vastab teatud ülesanne optikast ja vastupidi.

S i s u k o r d.

E e s s õ n a	3
§ 1. ÜLDISTATUD KOORDINAADID	4
1. Üldistatud koordinaatide mõiste	4
2. Punktide süsteemi vabadusastmete arv	5
3. Üldistatud koordinaatide ja ristkoordinaatide vahelised seosed	7
4. Töö avaldis üldistatud koordinaatides. Üldistatud tung	9
5. Üldistatud tungi ja potentsiaalse energia vaheline seos	12
6. Tasakaalutingimus üldistatud koordinaatides	13
7. Kineetilise energia avaldis üldistatud koordinaatides	14
§ 2. HAMILTONI PRINTSIIP	15
1. Mehhaaniliste suuruste variatsioonidest	15
2. Hamiltoni printsiip	17
3. Konservatiivsete tungide juht	21
4. Näiteid Hamiltoni printsiibi rakendamise kohta	22
5. Mõningaid märkusi Hamiltoni printsiibi kohta	24
§ 3. LAGRANGE'I II TÜÜPI VÖRRANDID	26
1. Lagrange'i II tüüpi võrrandite tuletamine	26
2. Konservatiivsete tungide juht	28
3. Lagrange'i võrrandite esimesed integraalid	29
4. Keha pöörlemise võrrand	31
5. Tsükloidaalne pendel	32
6. Materiaalse punkti liikumise diferentsiaalvõrrandid polaarkoordinaatides	35
7. Sfääriline pendel	37
§ 4. MATERIAALSETE PUNKTIDE SÜSTEEMI VÄIKESED VÖNKUMISED	39

• 1. Lejeune-Dirichlet' lause	39
• 2. Kineetilise ja potentsiaalse energia avaldised süsteemi liikumisel tasakaaluasendi läheduses	42
• 3. Süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid stabiilse tasakaaluasendi läheduses	43
• 4. Liikumise diferentsiaalvõrrandite integreerimine	44
• 5. Sümpaatilised pendlid	46
§ 5. HAMILTONI KANOO NILISED VÕRRANDID	49
• 1. Üldistatud impulsi mõiste	49
• 2. Kanoonilised muutujad	51
3. Näide ülemineku kohta kanoonilistele muutujatele	52
• 4. Hamiltoni kanoonilised võrrandid	54
• 5. Hamiltoni funktsiooni füüsikaline tähendus	56
• 6. Tsüklilised koordinaadid	57
• 7. Energia integraal	59
8. Näide kanooniliste võrrandite rakendamise kohta	59
• 9. Planeedi liikumine Päikese ümber	60
• 10. Kahe keha probleem	63
• 11. Poisson'i sulud	66
• 12. Poisson'i lause	67
§ 6. MAUPERTUIS'-LAGRANGE'I VÄHIMA MÕJU PRINTSIIP	71
1. Variatsioonide mõistest	71
• 2. Maupertuis'-Lagrange'i vähima mõju printsiip	72
• 3. Vähima mõju printsiibi erikujusid	76
• 4. Materiaalse punkti inertsiaalne liikumine mööda siledat pinda	77
• 5. Analoogia mehhaanika ja optika vahel	78
S i s u k o r d	80

Тартуский государственный университет
СССР, г. Тарту, ул. Лийкооли, 18

И. Роото

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

IV

Аналитическая механика

Издание второе

На эстонском языке

Vastutav toimetaja Ü. Lepik

Korrektor A. Norberg

=====

TRÜ rotaprint 1967. Trükipoognaid 5. Arves-
tuspoognaid 4,4. Trükiarv 300. MB 09973.

Tell. nr. 42.

Hind 13 kop.

1. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	30
2. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	31
3. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	32
4. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	33
5. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	34
6. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	35
7. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	36
8. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	37
9. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	38
10. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	39
11. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	40
12. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	41
13. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	42
14. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	43
15. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	44
16. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	45
17. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	46
18. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	47
19. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	48
20. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	49
21. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	50
22. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	51
23. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	52
24. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	53
25. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	54
26. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	55
27. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	56
28. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	57
29. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	58
30. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	59
31. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	60
32. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	61
33. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	62
34. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	63
35. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	64
36. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	65
37. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	66
38. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	67
39. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	68
40. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	69
41. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	70
42. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	71
43. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	72
44. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	73
45. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	74
46. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	75
47. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	76
48. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	77
49. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	78
50. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	79
51. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	80
52. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	81
53. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	82
54. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	83
55. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	84
56. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	85
57. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	86
58. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	87
59. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	88
60. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	89
61. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	90
62. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	91
63. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	92
64. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	93
65. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	94
66. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	95
67. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	96
68. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	97
69. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	98
70. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	99
71. <i>Staphylinidae</i> (Insects)	100

Hind 13 kop.

4.
A-25610

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00236860 5