TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

ÕPPEMETOODILISED JUHENDID KURSUSE „TÕENÄOSUSTEOORIA JA MATEMAATILINE STATISTIKA KEEMIKUTELE“ KOHTA

TARTU 1979

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Teoreetilise mehaanika kateeder

ÕPPEMETOODILISED JUHENDID KURSUSE „TÕENÄOSUSTEOORIA JA MATEMAATILINE STATISTIKA KEEMIKUTELE" KOHTA

TARTU 1979

Koostanud Ü. Lepik, K. Soonets

Kinnitatud matemaatikateaduskonna
nõukogus 19. jaanuaril 1979

S a a t e k s

Käesolev väljaanne on mõeldud kasutamiseks koos samade autorite konspektiga "Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika keemikutele".

Väljaanne sisaldab tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika tähtsamaid valemeid ning juhiseid nende kasutamiseks. See on abimaterjaliks ülesannete lahendamisel nii vastava kursuse õppimisel kui ka eriainetes katseandmete matemaatilisel töötlemisel.

Tabelitest on paljundatud need, mida keemikud sagedamini kasutavad või mis on olulised aine õppimisel.

Harjutusülesanded on mõeldud teoreetilise materjali kinnistamiseks ja arvutusvilumuste omandamiseks. Ülesanded on sisu alusel järjestatud vastavalt loengukonspekti materjali järjestusele. Loomulik on kõigi esitatud ülesannete lahendamine paralleelselt teoreetilise materjali õppimisega.

Vihiku alguses on toodud kontrollküsimused enesekontrollimiseks.

A u t o r i d

Kontrollküsimused

1. Mida mõistetakse sündmuse all? Millist sündmust nimetatakse kindlaks? võimatuks? juhuslikuks?
2. Milliseid sündmusi nimetatakse teineteist välistavateks?
3. Mida mõistetakse sündmuste võrdvõimalikkuse all?
4. Millistel tingimustel moodustavad sündmused täieliku sündmuste süsteemi?
5. Kuidas defineeritakse vastandsündmusi?
6. Defineerige sündmuste summa (ühend) ja korrutis (ühisosa).
7. Andke tõenäosuse klassikaline definitsioon.
8. Kirjeldage geomeetrilist ja statistilist tõenäosust.
9. Loetlege tõenäosuse omadusi. Kuidas tõlgendada sündmuse nulltõenäosust?
10. Mida tähendab sündmuse praktiline kindlus? võimatus?
11. Milliseid ühendeid nimetatakse variatsioonideks? permutatsioonideks? kombinatsioonideks?
12. Sõnastage tõenäosuste korrutamislause üldjuhul ja sõltumatute osasündmuste juhul.
13. Mis on tinglik tõenäosus?
14. Sõnastage tõenäosuste liitmislause üldjuhul ja üksteist välistavate osasündmuste juhul.
15. Miks on täieliku sündmuste süsteemi moodustavate sündmuste tõenäosuste summa üks?

16. Esitage täistõenäosuse valem.

17. Defineerige juhuslik suurus. Mille poolest erinevad üksteisest diskreetsed ja pidevad juhuslikud suurused?

18. Mis on juhusliku suuruse jaotus?

19. Defineerige juhusliku suuruse jaotusfunktsioon ja loetlege selle omadusi.

20. Mis on juhusliku suuruse tihedusfunktsioon? Loetlege selle omadusi. Kuidas leida tihedusfunktsioon jaotusfunktsiooni kaudu ja vastupidi?

21. Kuidas leida juhusliku suuruse antud vahemikku langemise tõenäosust jaotusfunktsiooni kaudu? tihedusfunktsiooni kaudu?

22. Mida mõistetakse kahe juhusliku suuruse ühisjaotuse all?

23. Defineerige juhusliku suuruse keskväärtus. Loetlege keskväärtuse omadusi.

24. Defineerige juhusliku suuruse dispersioon, loetlege selle omadusi. Mis on standardhälve? Kirjutage dispersiooni definitsioonist tulenev dispersiooni arvutuseeskiri.

25. Kuidas toimub dispersiooni leidmine teisendatud arvutuseeskirja järgi?

26. Mis on tsentraliseeritud ja normeeritud hälbed? Millega võrduvad nende keskväärtus ja dispersioon?

27. Mida nimetatakse kvantiilideks? Mis on mediaan?

28. Kirjutage Bernoulli valem sageduse tõenäosuse leidmiseks.

29. Mida nimetatakse binoomjaotuseks? Loetlege binoomjaotuse omadusi.

30. Millega võrduvad sündmuse sageduse ja suhtelise sageduse keskväärtus ning dispersioon n katsest koosneva katseseeria korral?

31. Kirjutage normaaljaotuse $X \sim N(m, \sigma)$ tihedusfunktsiooni avaldis, skitseerige selle graafik. Mis on Gaussi kõver?

32. Kuidas mõjutavad normaaljaotuse tihedusfunktsiooni graafiku asukohta ja kuju keskväärtuse ning dispersiooni muutumine?

33. Kuidas toimub üldise normaaljaotuse tihedus- ja jaotusfunktsiooni väärtuste leidmine normeeritud normaaljaotuse vastavate funktsioonide tabelite abil?

34. Sõnastage Laplace'i integraalvalem.

35. Kuidas leida Moivre - Laplace'i valemi põhjal sündmuse sageduse tõenäosust katseseeria korral?

36. Sõnastage Bernoulli ja Tšebõšovi suurte arvude seadused.

37. Selgitage Ljapunovi teoreemi põhjal, miks paljud juhuslikud suurused on normaaljaotusega?

38. Kirjeldage kvantitatiivseid ja kvalitatiivseid tunnuseid.

39. Mis on valim? variatsioonrida? statistiline jaotustabel?

40. Mida nimetatakse aritmeetiliseks keskmiseks? Milles seisneb ajutise keskmise võte aritmeetilise keskmise leidmisel?

41. Kuidas leitakse valimi dispersioon?

42. Kuidas leitakse aritmeetilist keskmist ja dispersiooni valimis, mis on saadud mitme katseseeria ühendamisel, kui vastavad näitajad üksikutes katseseeriates on teada?

43. Mis on tõenäone viga? vea ülemmäär?

44. Kirjutage katsevigade leviku seadus.

45. Millised on punkthinnangu põhinõuded?

46. Miks pole soovitatav statistikas kasutada nihutatud hinnanguid?

47. Miks peab hinnang olema efektiivne?

48. Mida tähendab koonduvus tõenäosuse järgi?

49. Milles seisneb hinnangu konsistentsuse nõue?

50. Missugune keskväärtuse hinnang täidab kõiki punkthinnangu põhinõudeid?

51. Missugused dispersiooni hinnangud täidavad kõiki punkthinnangute põhinõudeid?

52. Kuidas leida valimi keskmise standardhälvet, kui teada on katseseeria pikkus ja üksikmõõtmise dispersioon?

53. Mida tähendab väide: mõõtmistulemuste keskmine on tunduvalt püsivam kui üksikmõõtmine?

54. Kuidas leida vajalikku katseseeria pikkust n, kui tulemusi on tarvis saada veaga σ_I, aga üksikmõõtmise viga on σ ?

55. Mis on usaldusnivoo, olulisusenivoo, riskiprotsent?

56. Mida nimetatakse täiendkvantiiliks? Kuidas on seotud omavahel mingi jaotuse kvantiil ja täiendkvantiil?

57. Mis on usaldusvahemik? Kuidas see määratakse?

58. Kuidas leida usaldusvahemikku, kui jaotus on sümmeetriline ordinaattelje suhtes?

59. Kuidas leitakse keskväärtuse usalduspiirid a) kui üldkogumi dispersioon ja valimi maht on teada, b) kui teada on valimi dispersioon?

60. Kuidas defineeritakse t-jaotus? Miks on t-jaotuse korral vabadusastmete arv $n - 1$?

61. Mis on χ^2-jaotus? Miks selle jaotuse korral vabadusastmete arv on $n - 1$?

62. Kuidas leitakse ülddispersiooni usalduspiirid? Mida annab meile nende piiride teadmine?

63. Milles seisneb statistiliste hüpoteeside kontrollimine? Tooge näiteid selle kohta!

64. Mis on I ja II liiki vead statistiliste hüpoteeside kontrollimisel? Tooge näiteid selle kohta!

65. Mis on r-jaotus? Miks vabadusastmete arvuks siin on $n - 2$?

66. Mida tähendab lähteandmete homogeensuse nõue? Kuidas kontrollida selle nõude täidetust?

67. Kuidas defineeritakse F-jaotust?
Kuidas arvutada kvantiili $F_{\alpha}(f_1, f_2)$, kui $\alpha \geq 0,8$?

68. Milleks on tarvilik kahe katseseeria dispersioonide võrdlemine? Kuidas seda ülesannet lahendada?

69. Kuidas hinnata kahe keskmise erinevuse olulisust a) teada olevate ülddispersioonide korral, b) teada olevate valimi dispersioonide korral?

70. Tooge näiteid statistiliste suuruste kohta, mille jaotusseadused ei ole normaalsed!

71. Kuidas kontrollida jaotuse normaalsust χ^2-kriteeriumi abil?

72. Kuidas toimub tõenäosuspaberi joonestamine? Kuidas kontrollida jaotuse normaalsust tõenäosuspaberi abil? Kuidas leida tõenäosuspaberi abil keskväärtust ja standardhälvet?

73. Mis on regressioon? Missugust regressiooni nimetatakse lineaarseks?

74. Milles seisneb vähimruutude meetod?

75. Missuguse arvutusskeemi alusel on otstarbekas leida regressioonikordajaid? Kuidas kontrollida tulemusi?

76. Mida näitab regressioonikordajate täpsuse määramisel esinev suurus s_o^2 ? Miks on siin vabadusastmete arvuks $n - 2$?

77. Missuguse kriteeriumi abil saab kontrollida, kas regressioonisirge koostamiseks kasutatavate lähteandmete hulgas ei leidu jämedaid vigu?

78. Millises regressioonisirge punktis on sellelt sirgelt võetud andmete täpsus suurem?

79. Milliste praktikas esinevate ülesannete korral osutub tarvilikuks kahte regressioonisirget võrrelda?

80. Milline erinevus on funktsionaalse ja stohhastilise sõltuvuse vahel?

81. Millal nimetatakse kaht juhuslikku suurust mittekorreleeruvaiks?

82. Kuidas defineeritakse korrelatsioonikordaja?

83. Miks me saame korrelatsiooniarvutustes kaks regressioonisirget? Millisel juhul need sirged ühtivad? Millal need on risti?

84. Kuidas on korrelatsioonikordaja seotud regressioonisirgete tõusudega?

85. Millal on korrelatsioonikordaja negatiivne?

86. Kuidas kontrollida korrelatiivse seose olemasolu?

87. Mis on regressioonitasapind? Kirjeldage, kuidas toimub regressioonikordajate määramine mitmese regressiooni korral.

88. Mis on paraboolne regressioon?

89. Mis on osakorrelatsioonikordajad? Mida need iseloomustavad?

90. Mida näitab täiskorrelatsioonikordaja? Kuidas seda arvutada?

Ülesanded

1. Kastis on 3 defektiga ja 7 defektita detaili. Leida tõenäosus, et kastist valikuta võetud detail on defektita.

2. Asutuse töötajatele eraldati tuusikuid puhkekodudesse L, P ja V vastavalt 5, 4 ja 3. Leida tõenäosus, et tuusikute loosimisel saavad töötajad A ja B tuusiku samasse puhkekodusse.

3. Kastis on 15 ühesugust ampulli, millest 10 on valmistatud tehases A ja 5 tehases B. Kastist võetakse huupi 6 ampulli. Leida tõenäosus, et nende hulgas on 4 tehasest A ja 2 tehasest B pärinevat ampulli.

4. Ketta diameetrite AB ja CD vaheline osa on viirutatud ning diameetritevaheline nurk on $\pi/10$. Ketas pannakse kiiresti pöörlema. Kui tõenäone on õhupüssist tulistamisel viirutatud osa tabamine?

5. Kastis on 50 % valgeid, 20 % punaseid, 20 % rohelisi ja 10 % siniseid kuule. Kui tõenäone on, et juhuslikult võetud kuul on kas roheline või sinine?

6. Jääpangal triivivale meeskonnale visatakse kahelt lennukilt langevarjude abil varustust. Tõenäosus ühelt lennukilt visatud varustuse sattumiseks jääpangale on 0,8 ja teiselt 0,7. Kui tõenäone on, et meeskond saab varustust?

7. Loosirattas olevast 100 piletist võidavad 10. Kui tõe-

näone on kolme pileti järjestikusel võtmisel ainult võitude saamine?

8. Lastakse kolm lasku. Märgi tabamise tõenäosus on esimese lasu korral 0,4; teisel 0,5 ja kolmandal 0,7. Leida tõenäosus, et märki tabab 1) üks laskudest; 2) vähemalt üks laskudest.

9. Teatud aparaadid valmistatakse kolmes variandis, mis erinevad ühe elemendi konstruktsiooni poolest (elemendid A_1, A_2, A_3). Tõenäosus selleks, et need elemendid (seega ka aparaadid) on töökindlad aasta jooksul, on vastavalt 0,98; 0,96 ja 0,92. Kõigist aparaatidest varustatakse 20 % elemendiga A_1, 30 % elemendiga A_2 ja 50 % elemendiga A_3. Leida tõenäosus, et juhuslikult võetud aparaat säilitab töökindluse aasta jooksul.

10. Vastaku mündi viskamisel vapi esiletulekule väärtus 1 ja kirjale väärtus 0 . Juhuslikuks suuruseks on kolme mündi viskamisel saadav väärtuste summa. Koostada selle juhusliku suuruse jaotustabel ning jaotusfunktsioon. Kui tõenäone on ükskõik kumma: kas 0 või 3 saamine?

11. Juhusliku suuruse X tihedusfunktsioon on

$$p(x) = \begin{cases} 0 \text{ kui } & -\infty < x < 1 \\ a/x^4 \text{ kui } & 1 \leqslant x \leqslant +\infty \end{cases}$$

Määrata suuruse a väärtus. Koostada jaotusfunktsiooni avaldis. Leida tõenäosus selleks, et juhusliku suuruse väärtused 1) ei ületa väärtust x = 2; 2) satuvad vahemikku (2, 4); 3) ei satu vahemikku (1, 2).

12. Juhusliku suuruse X jaotustabel on järgmine:

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Leida keskväärtus, keskmine lineaarhälve, dispersioon ja standardhälve.

13. Leida keskväärtus ja dispersioon 10. ülesande jaotustabeli andmetel.

14. Leida keskväärtus ja dispersioon 11. ülesandes kirjeldatud juhusliku suuruse jaoks. Esitada selle juhusliku suuruse normeeritud hälbe avaldis.

15. Leida 11. ülesandes kirjeldatud juhusliku suuruse 10%-ne kvantiil.

16. Loteriil ühe piletiga võitmise tõenäosus on 1/7. Kui tõenäone on võita 2 piletiga kuuest?

17. Sündmuse A tõenäosus ühel katsel on 0,4. Koostada sündmuse esinemise sageduse jaotustabel kuuel katsel ja vastav binoompolügoon. Leida sündmuse sageduse keskväärtus, dispersioon ja tõenäoseim sagedus.

18. Tõenäosus detaili välispinna mehaaniliseks vigastamiseks transpordil on 0,1. Leida mehaaniliste vigastustega detailide arvu keskväärtus (tõenäoseim sagedus) 100 detailist koosnevas partiis ja selle sageduse tõenäosus.

19. Juhuslik suurus X on normaaljaotusega $X \sim N(6, 2)$. Leida tõenäosus juhusliku suuruse langemiseks vahemikku (4, 8). Leida suuruse X tihedusfunktsiooni väärtus kohal $X = 5$. Kui tõenäone on, et suuruse X hälbed keskväärtusest ei ületa ühte?

20. Tõenäosus selleks, et üliõpilane määrab õigesti lahuse koostise esimesel katsel, on 0,6. Kui tõenäone on, et 100 üliõpilasest esimesel katsel lahuse koostise õigesti määrajate arv asub 50 ja 75 vahel? Lahuse koostise õigesti määrajate arv ei ületa 55?

21. Kui palju tuleks teha katseid, et sündmuse suhtelise sageduse ja selle keskväärtuse erinevus ei ületaks 0,04 tõenäosusega 0,90? 0,95? Sündmuse tõenäosus üksikkatsel on 0,4.

22. Vertikaalse silindri reservuaari põhjas on ümmargune ava. Reservuaari tühjenemise aeg t leitakse valemist

$$t = \frac{2D^2\sqrt{H}}{d^2\alpha\sqrt{2g}} \text{ s} .$$

Leida reservuaari tühjenemise aeg ja selle tõenäone viga, kui mõõtmise teel saadi reservuaari diameetri väärtuseks $D = 1$ m tõenäose veaga $\sigma_D = 0{,}01$ m, vedeliku algnivoo kõrguseks $H = 2 \pm 0{,}02$ m, ava diameetriks $d = 0{,}03 \pm 0{,}001$ m ja ava kujutegur $\alpha = 0{,}61$.

23. Leida tahke keha soojusmahtuvus x ning hinnata tulemuse tõenäost ja suhtelist viga valemist

$$x = \frac{(M_1 + cM_2)(t - t_0)}{M(T - t)} ,$$

kus M on keha mass, M_1 - vee mass, M_2 - kalorimeetri mass, c - kalorimeetri soojusmahtuvus, T - keha temperatuur, t_0 ja t vastavalt vee alg- ja lõpptemperatuurid.

Katseliselt määrati vastavad parameetrid ja tõenäosed vead:

$M = 165{,}4 \pm 0{,}1$ g; $M_1 = 440{,}3 \pm 0{,}2$ g; $M_2 = 187{,}5 \pm 0{,}1$ g; $c = 0{,}094 \pm 0{,}001$; $T = 99{,}93 \pm 0{,}004^\circ$; $t_0 = 11{,}6 \pm 0{,}05^\circ$; $t = 14{,}6 \pm 0{,}05^\circ$.

24. Gaasi ruumala V temperatuuril 100° C määratakse valemist $V = V_0(1 + \alpha t)$, kus V_0 on gaasi ruumala 0°C juures ja $\alpha = 1/273$. Leida ruumala V tõenäone viga, kui suuruste V_0 ja t mõõtmise tõenäone viga ei ületa 1 %.

25. Orgaanilises aines määrati süsinikusisaldust. Saadi järgmised tulemused: 80,38 %; 80,25 %; 80,44 %; 80,17%;

80,30 %. Kontrollida olulisusenivooga 0,05 katseandmete homogeensust. Leida keskmine süsinikusisaldus selles aines ja keskmise usalduspiirid.

26. Sünteesitud aine murdumisnäitajat n määrasid 3 laboranti ühe ja sama refraktromeetriga. Saadi järgmised tulemused:

Laborant	$\bar{n}$	$S_{\bar{n}} \cdot 10^{+5}$	Lugemite arv
R	1,38903	4,1	12
S	1,38872	9,0	5
T	1,38891	6,7	8

Refraktromeetri täpsus passi järgi on $s_r = 3 \cdot 10^{-5}$. Leida kõigi 3 laborandi tulemuste keskmine ja selle usalduspiirid.

27. Laborant valmistas ligikaudselt 0,1 N HCl-lahuse. Selle lahuse täpse normaalsuse määramiseks võeti 4,8024 g booraksit ($Na_2B_4O_7 \cdot 10\,H_2O$) ja lahustati see 250 ml vees. Saadud lahusest võeti igaks tiitrimiseks 25,00 ml ja saadi V_{HCl} jaoks järgmised tulemused: 25,95; 25,68; 25,72; 25,59; 25,81. Leida HCl keskmine normaalsus ja selle usalduspiirid.

28. Fosfori määramisel terases saadi tulemused (protsentides): 0,025; 0,029; 0,015; 0,012; 0,010; 0,013; 0,023; 0,030; 0,021; 0,022; 0,020; 0,023; 0,027. Kontrollida, kas nende andmete hulgas pole tugevasti kõrvale kalduvaid elemente. Arvutada keskmine fosforisisaldus ja selle usalduspiirid.

29. Kaks üliõpilast said analüütilises keemias ühesuguse kontrolltöö, milleks oli raua hulga määramine antud lahuses. Üliõpilane A tiitris proovi 5 korda ja sai tulemuseks $\bar{x}_A = 0,9431$ g Fe, $s_A = 0,0093$. Üliõpilane B

tiitris 8 korda ja sai $\bar{x}_B = 0,9467$ g Fe, $s_B = 0,0211$. Kas võib väita, et mõlemad üliõpilased töötasid ühesuguse täpsusega?

30. Kahe erineva meetodiga määrati korduvalt Fe_2O_3 sisaldust klaasiliivas. Saadi järgmised tulemused (protsentides):

Meetod A	Meetod B
0,072	0,066
0,088	0,100
0,064	0,082
0,091	0,073
0,097	
0,080	

Analüüsides kasutati ühte ja sama liivaproovi. Kontrollida keskmiste erinevust.

31. Orgaanilise aine tihedus määrati kahe keemiku poolt. Tulemusteks saadi

Keemik K	Keemik L
1.10123	1.10127
1.10131	1.10123
1.10128	1.10120
	1.10118

Võrrelge dispersioone ja keskmisi. Tehke järeldused.

32. Uuriti niklisisaldust teatud sulamis kahe erineva meetodi abil. Meetod A andis tulemuseks 3,28 %; 3,28 %; 3,29 %; 3,29 %, meetod B aga 3,25 %; 3,27 %; 3,26 %; 3,25 %. Kontrollida usaldusnivooga 0,05, kas nende tulemuste põhjal leitud keskmised erinevad teineteisest oluliselt.

33. Olgu mingi instrumendi abil saadud mõõtmistulemused

0,725; 0,731; 0,717; 0,742; 0,710. On teada, et instrumendi korrasoleku korral $\sigma = 0,005$. Kontrollida hüpoteesi, et mõõtmisviga antud seeria korral kaldub lubamatult palju kõrvale (s. t. et instrument ei ole korras.

34. Usaldusväärsete katseandmete saamiseks peab vaadeldavat keemilist protsessi läbi viima lahuses, mille pH on piirides $5,43 \geqslant pH \geqslant 5,37$. Lahuse pH väärtust kontrollitakse pH-meetriga, mille täpsus on $\pm 0,02$ pH (see määratakse eelnevalt paljude üksikmõõtmiste tulemusena). Vähemalt mitu korda tuleb selle riistaga mõõta lahuse pH-d väitmaks nullhüpoteesi tõenäosusega 0,95, et lahuse pH on tõepoolest etteantud piirides.

35. Laboratooriumis uuriti fosforisisaldust terases. Katseandmete põhjal arvutati valimi keskmine $\bar{x}$ ja standardhälve s. Tulemused jagati klassidesse normaliseeritud hälbe $t = \frac{x - \bar{x}}{s}$ järgi:

t	Sagedus
0,00 - 0,67	64
0,67 - 1,00	26
1,00 - 1,40	25
1,40 - 2,00	22

χ^2-kriteeriumi kasutades kontrollida, kas antud jaotust võib lugeda normaalseks.

36. Määrati 756 raadiolambi tööiga ning saadi järgmised tulemused:

Tööaeg tundides	100 - 200	200 - 300	300 - 400	400 - 500
Lampide arv	6	30	150	205
Tööaeg tundides	500 - 600	600 - 700	700 - 800	800 - 900
Lampide arv	200	120	40	5

5

Kontrollida antud jaotuse normaalsust!

37. Mõõdeti 10 õpilase pikkust (x) meetrites ja kaalu (y) kilogrammides. Tulemused on toodud tabelis.

x	135	145	139	142	137	137	134	144	135	146
y	29,30	35,20	34,50	32,10	33,60	32,30	27,20	36,70	26,90	38,30

Koostada regressioonisirgete võrrandid ja arvutada korrelatsioonikordaja.

38. Katseliselt määrati järgmised suuruste x ja y väärtuste paarid:

x	0,032	0,045	0,060	0,051	0,063	0,077
y	0,106	0,114	0,122	0,102	0,108	0,111

On põhjust oletada, et leitud suuruste vahel on lineaarne sõltuvus. Koostada regressioonisirge võrrand. Arvutada selle sirge abil väärtusele y = 0,10 vastav x-i väärtus. Millise täpsusega on see väärtus määratud?

39. Määrati räni sisaldust antud terasesordis ja saadi järgmised andmed ($y = \Delta S/\gamma$, $x = \ln c$, kus ΔS on joone ja fooni tumeduste erinevus, γ - fotoplaadi kontrastsustegur ja c on määratava aine kontsentratsioon):

y	x
0,235	-0,639
-0,063	-1,018
-0,017	-0,924
0,363	-0,468

Koostada regressioonisirge võrrand ja määrata regressioonikordajate usalduspiirid. Leida korrelatsioonikordaja.

40. Eelmise ülesande andmete kohaselt koostati kalibreerimisgraafik. Tundmatu proovi analüüsimise tulemusena saadi $y = 0,101$. Leida sellele vastav räni kontsentratsioon koos usalduspiiridega.

41. Keemilise reaktsiooni kiiruse konstant k sõltub temperatuurist järgmiselt

$$k = A \cdot e^{-\frac{E}{RT}},$$

kus $T = 273,15 + t$; $R = 1,987$ ning E on aktivatsioonienergia. Mõõtmisel saadi tulemusteks

t^o C	$k(\pm s_k)$
10	$3,67(\pm 0,04) \cdot 10^{-5}$
20	$1,32(\pm 0,01) \cdot 10^{-4}$
30	$4,32(\pm 0,01) \cdot 10^{-4}$
40	$1,19(\pm 0,02) \cdot 10^{-3}$

Leida A ja E ning nende tõenäosed vead. Arvutada korrelatsioonikordaja.

N ä p u n ä i d e . Antud seose lineaarseks muutumiseks logaritmime seda ja teostame muutujate vahetuse $x = \frac{1}{T}$, $y = \ln k$.

42. Teatavate orgaaniliste ainete reaktsioonivõime sõltub nende struktuuri parameetritest x_1 (asendaja induktiivne mõju) ja x_2 (steriilne takistus reaktsiooni tsentri juures). On teada, et kiirusekonstandi logaritm $y = \log k$ on seotud nende parameetritega lineaarselt, s. t. $y = a_o + a_1x_1 + a_2x_2$.

Katseandmed on järgmised:

y	x_1	x_2
-5,57	-0,172	-1,430
-2,84	+0,664	-0,761
-4,63	+1,021	-0,920
+1,39	+1,640	+0,175
+3,88	+1,922	+0,643
-0,15	-2,110	-1,235

Leida a_0, a_1, a_2.

43. Keemilise reaktsiooni kiirusekonstandi logaritm log K sõltub lineaarselt happelisuse funktsioonist H_o. Mõõdeti log K sõltuvuses H_o-st keemiliste reaktsioonide B ja J puhul. Saadi järgmised andmed:

Reaktsioon B

log K	-5,974	-5,533	-5,382	-5,122	-4,732
H_o	1,50	1,14	0,83	0,64	0,29

Reaktsioon J

log K	-5,828	-5,554	-5,162
H_o	1,34	1,12	0,72

Nende andmete põhjal koostati regressioonisirged. Kas võib neid sirgeid lugeda ühtelangevateks (s. t. kas võib oletada, et reaktsioonide B ja J mehhanismid on identsed).

44. Kolorimeetrilisel titaani määramisel valmistati kaliibrimisgraafik, mis sidus Ti-sisalduse uuritavas lahuses (mg Ti/l) ja optilise tiheduse D. Möödus mõni kuu. Saabus uus partii toorainet, milles tuli määrata Ti-sisaldus sama meetodiga. Kerkib küsimus, kas võib kasutada vana kaliibrimisgraafikut (võis ju aja jooksul muutuda aparaadi tundlikkus, proovi töötlemisel kasutatavad reaktiivid on võetud juba teistest purkidest jne.)? Küsimuse lahendamiseks teostati rida mõõtmisi uue graafiku jaoks. Vastavad tulemused on antud tabelis.

Vana graafik		Uus graafik	
mg Ti/l	D	mg Ti/l	D
2,1	0,110; 0,117; 0,108	3,6	0,190; 0,185; 0,201
4,0	0,206; 0,190; 0,192	7,0	0,324; 0,310; 0,308
5,6	0,250; 0,236; 0,260	9,8	0,488; 0,496; 0,506
8,1	0,396; 0,405; 0,410	12,0	0,585; 0,611; 0,571
9,5	0,481; 0,490; 0,505		
11,3	0,570; 0,550; 0,528		
14,0	0,705; 0,680; 0,720		

Kas võib väita, et mõlemad graafikud langevad kokku?

T ä h t s a m a d v a l e m i d j a j u h i s e d

Valemites üldkasutatavate tähistuste sisu selgitatakse eelnevalt. Mõnede vähe kasutatavate tähistuste sisu antakse nende esinemiskohas. Valemite numeratsioonis tähistab 1. number konspekti paragrahvi, kust valem on pärit.

Tähistusi

$P(A)$	-	sündmuse A tõenäosus;
$F(x)$	-	juhusliku suuruse jaotusfunktsioon;
$p(x)$	-	juhusliku suuruse tihedusfunktsioon;
X	-	juhusliku suuruse sümbol;
x_i, x	-	juhusliku suuruse X võimalik väärtus;
$E(X)$, m	-	juhusliku suuruse keskväärtus;
$\bar{x}$	-	tunnuse aritmeetiline keskmine;
$D(X)$, σ^2	-	juhusliku suuruse dispersioon, ka tunnuse dispersioon üldkogumis;
σ	-	tunnuse standardhälve üldkogumis;
s^2	-	tunnuse dispersioon valimis;
s	-	tunnuse standardhälve valimis;
k_i	-	tunnuse väärtuse x_i sagedus;
w_i	-	tunnuse väärtuse x_i suhteline sagedus;
n	-	valimi maht;

N – tunnuse erinevate väärtuste arv;
f – vabadusastmete arv;
$1-\gamma$ – usaldusnivoo;
γ – olulisusenivoo (riskiprotsent);
u – normeeritud hälve;
u_α – normeeritud normaaljaotuse täiendkvantiil;
t_α – Studenti jaotuse täiendkvantiil;
χ^2_α – "hii-ruut"-jaotuse täiendkvantiil;
F_α – F-jaotuse täiendkvantiil;
R – empiiriline korrelatsioonikordaja.

Valem

variatsioonide arvu A_n^k leidmiseks n elemendist k-kaupa

$$A_n^k = n(n-1)\dots\left[n-(k-1)\right] ; \qquad (1.1)$$

kombinatsioonide arvu C_n^k leidmiseks n elemendist k-kaupa

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} ; \qquad (1.2)$$

permutatsioonide arvu P_n leidmiseks n elemendist

$$P_n = n! \qquad (1.3)$$

Tõenäosuste korrutamislause sündmuste A ja B korrutise (ühisosa) tõenäosuse AB leidmiseks

$$P(AB) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B) . \qquad (1.4)$$

Tõenäosuste korrutamislause sõltumatute osasündmuste juhul

$$P(AB) = P(A).P(B) . \qquad (1.5)$$

Tõenäosuste liitmislause sündmuste A ja B summa (ühendi) tõenäosuse $A \cup B$ leidmiseks

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) . \qquad (1.6)$$

Tõenäosuste liitmislause teineteist välistavate osasündmuste A ja B juhul

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) . \tag{1.7}$$

<u>Täistõenäosuse valem</u>

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) . P(A/B_i) , \tag{1.8}$$

kus sündmused $B_i (i = 1, ..., n)$ moodustavad täieliku sündmuste süsteemi.

<u>Tõenäosus pideva juhusliku suuruse X sattumiseks vahemikku (x_1, x_2)</u>

jaotusfunktsiooni $F(x)$ kaudu

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) ; \tag{2.1}$$

tihedusfunktsiooni $p(x)$ kaudu

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx . \tag{2.2}$$

<u>Pideva juhusliku suuruse tihedusfunktsiooni ja jaotusfunktsiooni vahelised seosed</u>

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx ; \tag{2.3}$$

$$p(x) = \frac{dF}{dx} . \tag{2.4}$$

<u>Juhusliku suuruse X keskväärtuse $E(X) \equiv m$ valem</u>

diskreetse suuruse juhul

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i ; \tag{3.1}$$

pideva suuruse juhul

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx . \tag{3.2}$$

<u>Diskreetse juhusliku suuruse keskmise lineaarhälbe d valem</u>

$$d = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - E(X) \right| p_i . \tag{3.3}$$

Juhusliku suuruse dispersiooni $D(X)$ valem diskreetse suuruse juhul

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i \; ; \tag{3.4}$$

pideva suuruse juhul

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \, p(x)dx \; ; \tag{3.5}$$

Teisendatud arvutuseeskiri dispersiooni leidmiseks diskreetse juhusliku suuruse juhul

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 \; ; \tag{3.6}$$

pideva juhusliku suuruse juhul

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx\right]^2 . \tag{3.7}$$

Bernoulli valem sündmuse A sageduse k tõenäosuse $P_{n,k}$ leidmiseks n katsel

$$P_{n,k} = \frac{n!}{k! \, (n-k)!} p^k q^{n-k} . \tag{4.1}$$

Sündmuse sageduse k ja suhtelise sageduse w arvkarakteristikuid:

$$E(k) = np, \qquad D(k) = npq \; ; \tag{4.2}$$

$$E(w) = p, \qquad D(w) = \frac{pq}{n} . \tag{4.3}$$

Sündmuse sageduse k tõenäosuse asümptootiline valem (Moivre-Laplace'i lokaalvalem)

$$P_{n,k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(u) , \tag{4.4}$$

kus u on sageduse k normeeritud hälve

$$u = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \tag{4.5}$$

ja normaaljaotuse tihedusfunktsioon $\varphi(u)$ on määratud valemiga (4.9).

Sündmuse sageduse k antud vahemikku (a, b) sattumise tõenäosus (Moivre-Laplace'i integraalvalem)

$$P(a < k < b) = F(u_b) - F(u_a) , \qquad (4.6)$$

kus u_a ja u_b ona vahemiku otspunktidele vastavad normeeritud hälbe (4.5) väärtused ning $F(u)$ valemiga (4.10) määratud normaalne jaotusfunktsioon.

<u>Normaaljaotusega juhusliku suuruse X tihedusfunktsiooni ja jaotusfunktsiooni valemid</u>

$X \sim N(m, \sigma)$ juhul

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} ; \qquad (4.7)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx ; \qquad (4.8)$$

$X \sim N(0,1)$ juhul

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} ; \qquad (4.9)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx . \qquad (4.10)$$

<u>Tunnuse X aritmeetilise keskmise $\bar{x}$ valem</u> rühmitamata valimi juhul

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (5.1)$$

rühmitatud valimi juhul

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} k_i x_i = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i . \qquad (5.2)$$

Aritmeetilise keskmise leidmise valemeid "ajutise keskmise" a kasutamisel:

$$\bar{x} = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i' + a , \qquad (5.3)$$

$$\bar{x} = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^{N} k_i x_i' + a , \qquad (5.4)$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i' + a , \qquad (5.5)$$

kus

$$x_i' = \frac{x_i - a}{k} \qquad (5.6)$$

ja k on sobivalt valitud arv; erijuhtudel võib olla kas $a = 0$ või $k = 1$.

Tunnuse X dispersiooni s^2 valemid

rühmitamata valimi juhul

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 ; \qquad (5.7)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right] ; \qquad (5.8)$$

rühmitatud valimi juhul

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{N} k_i (x_i - \bar{x})^2 ; \qquad (5.9)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{N} k_i x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{N} k_i x_i \right)^2 \right] ; \qquad (5.10)$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i \right)^2 \right] . \qquad (5.11)$$

Dispersiooni leidmise valemeid "ajutise keskmise" võtte kasutamisel

$$s^2 = \frac{k^2}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x'^2_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x'_i\right)^2\right] ; \qquad (5.12)$$

$$s^2 = \frac{k^2}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{N} k_i x'^2_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} k_i x'_i\right)^2\right], \qquad (5.13)$$

kus x'_i leitakse valemist (5.6).

Katseseeriate (k tükki) ühendamisel saadud valimi keskmise ja dispersiooni leidmise valemid katseseeriate keskmiste $\bar{x}_j$ ja dispersioonide s_j^2 kaudu ($j = 1, 2, \ldots, k$)

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} n_j} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i ; \qquad (5.14)$$

$$s^2 \approx \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} n_j - k} \cdot \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2 . \qquad (5.15)$$

Aritmeetilise keskmise standardhälbe valem

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} . \qquad (7.1)$$

Kvantiili ja täiendkvantiili vaheline seos

$$\tilde{a}_{1-\beta} = a_\beta , \qquad (8.1)$$

kus $\tilde{a}_{1-\beta}$ on kvantiil, a_β - täiendkvantiil.

Usalduspiirid

Sümmeetrilise jaotuse korral

$$P(\,|a| < a_{\gamma/2}\,) = 1 - \gamma ; \qquad (8.2)$$

mittesümmeetrilise jaotuse korral

$$P(a_{1-\gamma/2} \leqslant a < a_{\gamma/2}) = 1-\gamma . \qquad (8.3)$$

Siin $1-\gamma$ on usaldusnivoo, $a_{\gamma/2}$, $a_{1-\gamma/2}$ - täiendkvantiilid, $P(\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$ - lõiku $[\alpha, \beta]$ sattumise tõenäosus.

Normaaljaotusega suuruse usaldusvahemiku leidmise valem

$$np - u_{\gamma/2}\sqrt{npq} \leqslant a \leqslant np + u_{\gamma/2}\sqrt{npq} , \qquad (8.4)$$

kus p on vaadeldava nähtuse esinemise tõenäosus, a - selle nähtuse sagedus, $q = 1-p$.

Studenti jaotus

$$t = \frac{x - m}{s} , \quad f = n-1 \qquad (8.5)$$

Keskväärtuse usalduspiiride leidmise valemid

a) kui üldkogumi standardhälve σ on teada:

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\gamma/2} < m < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\gamma/2} ; \qquad (8.6)$$

b) kui üldkogumi standardhälve ei ole teada

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\gamma/2} < m < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\gamma/2} . \qquad (8.7)$$

χ^2-jaotus

$$\chi^2(f) = f\,\frac{s^2}{\sigma^2} , \quad f = n-1 . \qquad (8.8)$$

Üldidispersiooni usaldusvahemiku leidmise valem

$$s\,\nu_{\gamma/2} \leqslant \sigma \leqslant s\,\nu_{1-\gamma/2} , \qquad (8.9)$$

kus

$$\nu_{\gamma/2} = \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{1-\gamma/2}}} , \quad \nu_{1-\gamma/2} = \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{\gamma/2}}} , \quad f = n-1.$$

r-jaotus

$$r = \frac{x - \bar{x}}{s}\sqrt{\frac{n}{n-1}} , \quad f = n-2 . \qquad (9.1)$$

Lähteandmete homogeensuse kontroll

Katseandmed on homogeensed, kui

$$|r_{max}| \leqslant r_{\gamma/2} \quad \text{ja} \quad |r_{min}| < r_{\gamma/2} \,. \qquad (9.2)$$

Siin r_{min} ja r_{max} on **katserea vähimale ja suurimale** elemendile vastavad r-i väärtused.

F-jaotus

$$F(f_1, f_2) = \frac{\chi^2(f_1)}{f_1} : \frac{\chi^2(f_2)}{f_2} \,. \qquad (9.3)$$

Siin f_1, f_2 on kahe katseseeria vabadusastmete arvud, s. t. $f_1 = n_1 - 1$, $f_2 = n_2 - 1$.

F-jaotuse täiendkvantiilide arvutamisel kasutatakse valemit

$$F_{1-\gamma}(f_1, f_2) = \frac{1}{F_{\gamma}(f_2, f_1)} \,. \qquad (9.4)$$

Dispersioonide võrdlemine

Kahe katseseeria täpsus on samasugune, kui nende dispersioonid s_1^2 ja s_2^2 täidavad võrratust

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{\gamma/2}(f_1, f_2) \,. \qquad (9.5)$$

Kahe keskmise võrdlemine teada olevate üldidispersioonide korral

Keskmised $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ei erine oluliselt, kui

$$\left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right| < u_{\gamma/2} \,. \qquad (9.6)$$

Kahe keskmise võrdlemine teada olevate valimite dispersioonide korral

Esmalt kontrollime F-testi abil, kas dispersioonide s_1^2 ja s_2^2 erinevus on mitteoluline.

Keskmised $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ei erine oluliselt, kui

$$\frac{(\bar{x} - \bar{y})\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}}{\sqrt{(n_1+n_2)\left[(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2\right]}} < t_{\gamma/2} \, . \tag{9.7}$$

Vabadusastmete arv on $f = n_1 + n_2 - 2$.

Kui dispersioonide s_1^2 ja s_2^2 erinevus on oluline, siis valem (9.7) ei kehti.

Jaotuse normaalsuse kontroll χ^2-kriteeriumiga

Jaotus on normaalne, kui

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{n_j^2}{\tilde{n}_j} - n < \chi^2_{\gamma/2}(k-3) \, . \tag{9.8}$$

Siin k on klasside arv, n_j - elementide arv vastavas klassis, $\tilde{n}_j$ - elementide oodatav arv vastavas klassis (määratakse Moivre-Laplace'i integraalteoreemi põhjal).

Regressioonisirge võrrand

$$y = a + bx \, , \tag{10.1}$$

kus

$$a = \frac{\bar{y}\sum_i \bar{x}_i^2 - \bar{x}\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} \, ;$$

$$b = \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} \, . \tag{10.2}$$

Regressioonikordajate tõenäosed vead

$$s(a) = s_0 \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n\left(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2\right)}}$$

$$s(b) = \frac{s_0}{\sqrt{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}} \, . \tag{10.3}$$

Neis valemeis on tähistatud

$$s_o^2 = \frac{\sum\limits_i y_i^2 - n\bar{y}^2 + b(n\bar{x}\bar{y} - \sum\limits_i x_i y_i)}{n-2} . \qquad (10.4)$$

Punkti väljajätmine regressioonisirge koostamisel

Punkt jäetakse välja, kui

$$\frac{\Delta_j}{s(\Delta_j)} > t_{\gamma/2} , \qquad f = n-2 . \qquad (10.5)$$

Selles valemis (x_j, y_j) on vaadeldava punkti koordinaadid; a, b - regressioonisirge parameetrid.

$$\Delta_j = y_j - a - bx_j ;$$

$$s^2(\Delta_j) = s_o^2 \, \frac{(1 + \frac{1}{n})\sum\limits_i x_i^2 - n\bar{x}^2 + x_j^2}{\sum\limits_i x_i^2 - n\bar{x}^2} . \qquad (10.6)$$

Suurus s_o^2 määratakse valemist (10.4).

Regressioonisirgelt võetud andmete täpsus

Mingile väärtusele y_{n+1} saame leida regressioonisirgelt väärtuse

$$x_{n+1} = \frac{1}{b}(x_{n+1} - \bar{y}) + \bar{x} . \qquad (10.7)$$

Selle dispersioon on

$$s^2(x_{n+1}) = \frac{s_o^2}{b^2}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(y_{n+1} - \bar{y})^2}{b^2(\sum\limits_i x_i^2 - n\bar{x}^2)}\right] . \qquad (10.8)$$

Siin b on regressioonisirge tõus, s_o^2 leitakse valemist (10.4). Arvutatud suuruse (10.7) usaldusvahemikuks on

$$x_{n+1} - t_{\gamma/2}\, s(x_{n+1}) < m < x_{n+1} + t_{\gamma/2}\, s(x_{n+1}); \qquad (10.9)$$

t-jaotuse vabadusastmete arvuks on $f = n-2$.

Kahe regressioonisirge võrdlemine

Sirgete $y^{(1)} = a_1 + b_1 x$ ja $y^{(2)} = a_2 + b_2 x$ võrdlemist teostame kahes etapis:

1) Sirgete suunategurid ei erine oluliselt, kui

$$\frac{b_1 - b_2}{s(b_1 - b_2)} < t_{\gamma/2}, \quad f = n_1 + n_2 - 4 \qquad (10.10)$$

(n_1 ja n_2 on katseseeriate pikkused).

Suuruse $s(b_1 - b_2)$ leiame valemist

$$s^2 (b_1 - b_2) = \bar{s}_o^2 \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\right), \qquad (10.11)$$

kus

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}^2 - n_1 \bar{x}_1^2 ;$$
$$D_2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}^2 - n_2 \bar{x}_2^2 ; \qquad (10.12)$$

$$\bar{s}_o^2 = \frac{(n_1 - 2)\, s_{01}^2 + (n_2 - 2) s_{02}^2}{n_1 + n_2 - 4}. \qquad (10.13)$$

Katseseeriate dispersioonid s_{01}^2 ja s_{02}^2 leiame valemi (10.4) põhjal. Tulemused kehtivad üksnes juhul, kus s_{01}^2 ja s_{02}^2 ei erine teineteisest oluliselt (kontrollida F-testiga).

2) Kui suunategurite b_1 ja b_2 erinevus osutus mitteoluliseks, siis kontrollime sirgete ühtelangevust; selleks peab olema

$$\frac{\hat{b} - \bar{b}}{s(\hat{b} - \bar{b})} < t_{\gamma/2}, \quad f = n_1 + n_2 - 4, \qquad (10.14)$$

kusjuures

$$\hat{b} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}, \quad \bar{b} = \frac{\dfrac{b_1}{1/s^2(b_1)} + \dfrac{b_2}{1/s^2(b_2)}}{1/s^2(b_1) + 1/s^2(b_2)}, \qquad (10.15)$$

$$s^2(\hat{b} - \bar{b}) = \frac{1}{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2} \left(\frac{s_{01}^2}{n_1} + \frac{s_{02}^2}{n_2} \right) + \frac{\bar{s}_0^2}{D_1 + D_2} . \qquad (10.16)$$

Suurused $\bar{s}_o^2$, D_1, D_2 **määratakse valemeist (10.12) - - (10.13).**

Empiiriline korrelatsioonikordaja

$$R = \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_i y_i^2 - n\bar{y}^2)}} . \qquad (11.1)$$

Korrelatsioonikordaja seos regressioonisirgete tõusudega

Regressioonisirgete võrrandid

$$y - \bar{y} = R \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}) ;$$

$$x - \bar{x} = R \frac{s_x}{s_y}(y - \bar{y}) . \qquad (11.2)$$

Nendevaheline nurk φ leitakse valemist

$$\tan \varphi = \left(\frac{1}{R} - R\right) \frac{s_x s_y}{s_x^2 + s_y^2} \qquad (11.3)$$

Korrelatiivse seose olulisus

Mittekorreleeruvate suuruste korral

$$|R| < R_{\gamma/2} , \quad f = n-2 . \qquad (11.4)$$

Suurus R arvutatakse valemist (11.1).

Regressioonitasapind

Tasapinna võrrandi $z = a + bx + cy$ kordajad a, b, c arvutatakse võrrandisüsteemist

$$
\begin{cases}
na + b\sum_i x_i + c\sum_i y_i = \sum_i z_i \ ; \\
a\sum_i x_i + b\sum_i x_i^2 + c\sum_i x_i y_i = \sum_i x_i z_i \ ; \\
a\sum_i y_i + b\sum_i x_i y_i + c\sum_i y_i^2 = \sum_i y_i z_i \ .
\end{cases}
\tag{12.1}
$$

Paraboolne regressioon

Võrrandi $z = a + bx + cx^2$ kordajad a, b, c määratakse võrrandisüsteemist

$$
\begin{aligned}
&na + b\sum_i x_i + c\sum_i x_i^2 = \sum_i z_i \ ; \\
&a\sum_i x_i + b\sum_i x_i^2 + c\sum_i x_i^3 = \sum_i x_i z_i \ ; \\
&a\sum_i x_i^2 + b\sum_i x_i^3 + c\sum_i x_i^4 = \sum_i x_i^2 z_i \ .
\end{aligned}
\tag{12.2}
$$

Korrelatsioon kolme muutuja korral

Kahe muutuja vahelised korrelatsioonikordajad

$$
\begin{aligned}
R_{xy} &= \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{(n-1)\, s_x s_y} \ ; \\
R_{xz} &= \frac{\sum_i x_i z_i - n\bar{x}\bar{z}}{(n-1)\, s_x s_z} \ ; \\
R_{yz} &= \frac{\sum_i y_i z_i - n\bar{y}\bar{z}}{(n-1)\, s_y s_z} \ .
\end{aligned}
\tag{12.3}
$$

Osakorrelatsioonikordajad

$$R_{xy(z)} = \frac{R_{xy} - R_{xz} R_{yz}}{\sqrt{(1-R^2_{xz})(1-R^2_{yz})}} ;$$

$$R_{xz(y)} = \frac{R_{xz} - R_{xy} R_{zy}}{\sqrt{(1-R^2_{xy})(1-R^2_{yz})}} ; \qquad (12.4)$$

$$R_{yz(x)} = \frac{R_{yz} - R_{xy} R_{xz}}{\sqrt{(1-R^2_{xy})(1-R^2_{xz})}} .$$

Täiskorrelatsioonikordaja

$$R = \sqrt{\frac{R^2_{xz} + R^2_{yz} - 2R_{xy} R_{xz} R_{yz}}{1 - R^2_{xy}}} . \qquad (12.5)$$

Korrelatsioon nelja muutuja puhul

Osakorrelatsioonikordajad

$$R_{ij(k)} = \frac{R_{ij} - R_{ik} R_{jk}}{\sqrt{(1-R^2_{ik})(1-R^2_{jk})}} . \qquad (12.6)$$

Elimineerides suuruste x_k ja x_l mõju, saame

$$R_{ij(kl)} = \frac{R_{ij(k)} - R_{il(k)} R_{jl(k)}}{\sqrt{(1- R^2_{il(k)})(1- R^2_{jl(k)})}} = R_{ij(lk)} . \qquad (12.7)$$

Tabel 1

Normaalne tihedusfunktsioon

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	0,0
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918	0,1
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0,2
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0,3
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0,4
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352	0,5
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0,6
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0,7
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0,8
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0,9
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203	1,0
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1,1
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1,2
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1,3
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1,4
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	1,5
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1,6
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1,7
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1,8
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1,9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449	2,0
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363	2,1
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2,2
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2,3
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2,4
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139	2,5
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2,6
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2,7
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2,8
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2,9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	3,0
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3,1
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3,2
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	3,3
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3,4
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006	3,5
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3,6
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3,7
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3,8
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	3,9
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x

Normaalne jaotusfunktsioon

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
—0,0	,5000	,4960	,4920	,4880	,4840	,4801	,4761	,4721	,4681	,4641
—0,1	,4602	,4562	,4522	,4483	,4443	,4404	,4364	,4325	,4286	,4247
—0,2	,4207	,4168	,4129	,4090	,4052	,4013	,3974	,3936	,3897	,3859
—0,3	,3821	,3783	,3745	,3707	,3669	,3632	,3594	,3557	,3520	,3483
—0,4	,3446	,3409	,3372	,3336	,3300	,3264	,3228	,3192	,3156	,3121
—0,5	,3085	,3050	,3015	,2981	,2946	,2912	,2877	,2843	,2810	,2776
—0,6	,2743	,2709	,2676	,2643	,2611	,2578	,2546	,2514	,2483	,2451
—0,7	,2420	,2389	,2358	,2327	,2297	,2266	,2236	,2206	,2177	,2148
—0,8	,2119	,2090	,2061	,2033	,2005	,1977	,1949	,1922	,1894	,1867
—0,9	,1841	,1814	,1788	,1762	,1736	,1711	,1685	,1660	,1635	,1611
—1,0	,1587	,1562	,1539	,1515	,1492	,1469	,1446	,1423	,1401	,1379
—1,1	,1357	,1335	,1314	,1292	,1271	,1251	,1230	,1210	,1190	,1170
—1,2	,1151	,1131	,1112	,1093	,1075	,1056	,1038	,1020	,1003	,0985
—1,3	,0968	,0951	,0934	,0918	,0901	,0885	,0869	,0853	,0838	,0823
—1,4	,0808	,0793	,0778	,0764	,0749	,0735	,0721	,0708	,0694	,0681
—1,5	,0668	,0655	,0643	,0630	,0618	,0606	,0594	,0582	,0571	,0559
—1,6	,0548	,0537	,0526	,0516	,0505	,0495	,0485	,0475	,0465	,0455
—1,7	,0446	,0436	,0427	,0418	,0409	,0401	,0392	,0384	,0375	,0367
—1,8	,0359	,0351	,0344	,0336	,0329	,0322	,0314	,0307	,0301	,0294
—1,9	,0288	,0281	,0274	,0268	,0262	,0256	,0250	,0244	,0239	,0233
—2,0	,0228	,0222	,0217	,0212	,0207	,0202	,0197	,0192	,0188	,0183
—2,1	,0179	,0174	,0170	,0166	,0162	,0158	,0154	,0150	,0146	,0143
—2,2	,0139	,0136	,0132	,0129	,0125	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110
—2,3	,0107	,0104	,0102	,0099	,0096	,0094	,0091	,0089	,0087	,0084
—2,4	,0082	,0080	,0078	,0075	,0073	,0071	,0069	,0068	,0066	,0064
—2,5	,0062	,0060	,0059	,0057	,0055	,0054	,0052	,0051	,0049	,0048
—2,6	,0047	,0045	,0044	,0043	,0041	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036
—2,7	,0035	,0034	,0033	,0032	,0031	,0030	,0029	,0028	,0027	,0026
—2,8	,0026	,0025	,0024	,0023	,0023	,0022	,0021	,0021	,0020	,0019
—2,9	,0019	,0018	,0018	,0017	,0016	,0016	,0015	,0015	,0014	,0014

t = —3,0	—3,1	—3,2	—3,3	—3,4	—3,5	—3,6	—3,7	—3,8	—3,9
F(t) = ,0013	,0010	,0007	,0005	,0003	,0002	,0002	,0001	,0001	,0000

T a b e l 2 (järg)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,1	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,6	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7703	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,4	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,9	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986

t = 3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$F(t)$ = ,9987	,9990	,9993	,9995	,9997	,9998	,9998	,9999	,9999	1,0000

Tabel 3

Normaaljaotuse normeeritud hälvete täiendkvantiilid u_α

α	u_α	α	u_α	α	u_α
0,40	0,25	0,05	1,64	0,005	2,58
0,25	0,67	0,025	1,96	0,0025	2,81
0,15	1,04	0,02	2,05	0,001	3,09
0,10	1,28	0,01	2,33	0,0005	3,29

Tabel 4

Studenti jaotuse täiendkvantiilid t_α

f \ α	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32
7	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50	4,03
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06	3,43
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37
14	1,34	1,76	2,15	2,62	2,98	3,33
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81

T a b e l 5

χ^2-jaotuse täiendkvantiilid χ^2_α

f \ α	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,8
2	6,0	7,8	9,2	10,6	12,4	13,8
3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	21,0	24,1	26,2	28,3	31	32,9
13	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	23,7	26,9	29,1	31,3	34	36,1
15	25,0	28,3	30,6	32,8	35,5	37,7
16	26,3	29,6	32,0	34,3	37	39,2
17	27,6	31,0	33,4	35,7	38,5	40,8
18	28,9	32,3	34,8	37,2	40	42,3
19	30,1	33,7	36,2	38,6	41,5	43,8
20	31,4	35,0	37,6	40,0	43	45,3
21	32,7	36,3	38,9	41,4	44,5	46,8
22	33,9	37,7	40,3	42,8	46	48,3
23	35,2	39,0	41,6	44,2	47,5	49,7
24	36,4	40,3	43,0	45,6	48,5	51,2
25	37,7	41,6	44,3	46,9	50	52,6
26	38,9	42,9	45,6	48,3	51,5	54,1
27	40,1	44,1	47,0	49,6	53	55,5
28	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	42,6	46,7	49,6	52,3	56	58,3
30	43,8	48,0	50,9	53,7	57,5	59,7

Suuruse $\gamma = \sqrt{\frac{f}{\chi^2}}$ täiendkvantiilid γ_α

f \ α	0,005	0,02	0,05	0,95	0,98	0,995
1	160	41	16	0,51	0,43	0,36
2	14	7,1	4,4	0,58	0,51	0,43
3	6,5	4,0	2,9	0,62	0,55	0,48
4	4,4	3,1	2,4	0,64	0,59	0,52
5	3,5	2,6	2,1	0,67	0,61	0,55
6	3,0	2,3	1,9	0,69	0,63	0,57
7	2,7	2,1	1,8	0,71	0,65	0,59
8	2,4	2,0	1,7	0,72	0,66	0,60
9	2,3	1,9	1,6	0,73	0,68	0,62
10	2,2	1,8	1,6	0,74	0,69	0,63
11	2,1	1,7	1,5	0,75	0,70	0,64
12	2,0	1,7	1,5	0,76	0,71	0,65
13	1,9	1,6	1,5	0,76	0,71	0,66
14	1,9	1,6	1,5	0,77	0,72	0,67
15	1,8	1,6	1,4	0,77	0,73	0,68
16	1,8	1,6	1,4	0,78	0,74	0,68
17	1,7	1,5	1,4	0,79	0,74	0,69
18	1,7	1,5	1,4	0,79	0,75	0,69
19	1,7	1,5	1,4	0,80	0,75	0,70
20	1,6	1,5	1,4	0,80	0,76	0,71
21	1,6	1,5	1,3	0,80	0,76	0,71
22	1,6	1,4	1,3	0,81	0,76	0,72
23	1,6	1,4	1,3	0,81	0,77	0,72
24	1,6	1,4	1,3	0,81	0,77	0,73
25	1,5	1,4	1,3	0,81	0,78	0,73
26	1,5	1,4	1,3	0,82	0,78	0,73
27	1,5	1,4	1,3	0,82	0,78	0,74
28	1,5	1,4	1,3	0,82	0,79	0,74
29	1,5	1,4	1,3	0,82	0,79	0,75
30	1,5	1,4	1,3	0,83	0,79	0,75

T a b e l 7

Fisheri jaotuse täiendkvantiilid F_{α}

f_2 \ f_1	$\alpha = 0,05$								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Tabel 7 (järg)

f_2 \ f_1	$\alpha = 0{,}01$								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	9,9	9,5	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	3,7	3,3	2,9
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,3	2,9	2,4
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,0	2,7	2,2
26	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,5	2,1	1,6
120	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,2	1,8	1,0

T a b e l 8

r-jaotuse täiendkvantiilid

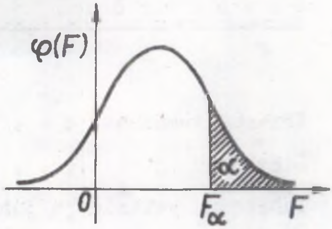
f \ α	0,05	0,025	0,005	0,0005
1	1,397	1,409	1,414	1,414
2	1,559	1,645	1,715	1,730
3	1,611	1,757	1,918	1,982
4	1,631	1,814	2,051	2,178
5	1,640	1,848	2,142	2,329
6	1,644	1,870	2,208	2,447
7	1,647	1,885	2,256	2,540
8	1,648	1,895	2,294	2,616
9	1,649	1,903	2,324	2,678
10	1,649	1,910	2,348	2,730
11	1,649	1,916	2,368	2,774
12	1,649	1,920	2,385	2,812
13	1,649	1,923	2,399	2,845
14	1,649	1,926	2,412	2,874
15	1,649	1,928	2,423	2,899
16	1,649	1,931	2,432	2,921
17	1,649	1,933	2,440	2,941
18	1,649	1,935	2,447	2,959
19	1,649	1,936	2,454	2,975
20	1,649	1,937	2,460	2,990
21	1,649	1,938	2,465	3,003
22	1,648	1,940	2,470	3,015
23	1,648	1,941	2,475	3,026
24	1,648	1,941	2,479	3,037
25	1,648	1,942	2,483	3,047
26	1,648	1,943	2,487	3,056
27	1,648	1,943	2,490	3,064
28	1,648	1,944	2,492	3,071
29	1,648	1,945	2,495	3,078
30	1,648	1,945	2,498	3,085

Tabel 9

R-jaotuse täiendkvantiilid

f \ α	0,025	0,01	0,005	0,0005
1	0,997	0,999	1,000	1,000
2	0,950	0,980	0,990	0,999
3	0,878	0,934	0,959	0,992
4	0,811	0,882	0,917	0,974
5	0,754	0,833	0,874	0,951
6	0,707	0,789	0,834	0,925
7	0,666	0,750	0,798	0,898
8	0,632	0,716	0,765	0,872
9	0,602	0,685	0,735	0,847
10	0,576	0,658	0,708	0,823
11	0,553	0,634	0,684	0,801
12	0,532	0,612	0,661	0,780
13	0,514	0,592	0,641	0,760
14	0,497	0,574	0,623	0,742
15	0,482	0,558	0,606	0,725
16	0,468	0,543	0,590	0,708
17	0,456	0,528	0,575	0,693
18	0,444	0,516	0,561	0,679
19	0,433	0,503	0,549	0,665
20	0,423	0,492	0,537	0,652
25	0,381	0,445	0,487	0,597
30	0,349	0,409	0,449	0,554
35	0,325	0,381	0,418	0,519
40	0,304	0,358	0,393	0,490
45	0,287	0,338	0,372	0,465
50	0,273	0,322	0,354	0,443
60	0,250	0,295	0,325	0,408
70	0,232	0,274	0,302	0,380
80	0,217	0,256	0,283	0,357
90	0,205	0,242	0,267	0,337
100	0,195	0,230	0,254	0,321

Statistilistesse tabelitesse nr. 3 - 9 on kantud täiendkvantiilid, mille tähendus selgub kõrvalolevast joonisest. Kui on antud olulisusenivoo γ ja on tarvis leida täiendkvantiile $F_{\gamma/2}$ ja $F_{1-\gamma/2}$, siis tuleb arvutada esmalt suurused $\gamma/2$, $1-\gamma/2$ ja vastavatest veergudest leida otsitavad kvantiilid. Kui näiteks olulisusenivoo on 0,1 ja on tarvis leida vabadusastmele 5 vastav Studenti jaotuse kvantiil $t_{\gamma/2}$, siis $\gamma/2 = 0,05$ ja vastav arv tuleb võtta tabeli 4 kolmandast veerust; saame $t_{0,05}(5) = 2,02$.



F-jaotuse täiendkvantiilid on antud vaid juhtude $\alpha = 0,05$ ja $\alpha = 0,01$ jaoks; sümboliga f_1 on tähistatud suurema dispersiooniga katseseeria vabadusastmete arv.

S i s u k o r d

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО КУРСУ "ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА ДЛЯ ХИМИКОВ". Составители Юло Л е п и к, Калью С о о н е т с. На эстонском языке. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул.Юликооли, 18. Paljundamisele antud 05.02.1979. Kirjutuspaber 30x42 1/4. Trükipoognaid 3,0. Tingtrükipoognaid 2,79. Arvestuspoognaid 2,48.Trükiarv 300. TRÜ trükikoda, ENSV, Tartu, Pälsoni t.14.Tell.nr. 154. Hind 10 kop.

10 kop.