Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Annabel Kaasik

Optsioonide hindamine alusvaralt makstavate dividendide korral

Matemaatilise statistika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Toomas Raus

Tartu 2023

OPTSIOONIDE HINDAMINE ALUSVARALT MAKSTAVATE DIVIDENDIDE KORRAL

Bakalaureusetöö

Annabel Kaasik

Lühikokkuvõte

Optsioon on tuletisinstrument, mis annab omanikule õiguse, aga mitte kohustuse, osta või müüa tulevikus mingit kokkulepitud vara eelnevalt kokkulepitud hinnaga. Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on anda ülevaade, kuidas hinnata Euroopa ja Ameerika optsioone, kui alusvaraks olevalt aktsialt makstakse dividende. Töös tutvustatakse kirjanduses vaadeldud erinevaid dividendide maksmise viise ning müügi- ja ostuoptsioonide hindade pariteetsustingimuse, Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi ja binoommeetodi erinevaid modifikatsioone olenevalt alusvaralt makstavast dividenditüübist.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonianalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika.

Märksõnad: Optsioonid, dividendid, binoommeetod, müügi- ja ostuoptsiooni hindade pariteetsustingimus, Black-Scholes diferentsiaalvõrrand.

EVALUATING OPTIONS WHEN THE UNDERLYING ASSET PAYS DIVIDENDS

Bachelor thesis

Annabel Kaasik

Abstract

An option is a derivative financial instrument that gives the owner the right, but not the obligation, to purchase or sell a predetermined asset at a predetermined price in the future. The aim of this bachelor's thesis is to provide an overview of how to evaluate European and American options, taking into consideration dividend payments on the underlying stock. The thesis introduces various ways of paying dividends discussed in literature, as well as different modifications of put-call parity, the Black-Scholes differential equation, and the binomial method depending on the type of dividend paid by the underlying asset.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operations research, programming, financial and actuarial mathematics.

Key Words: Options, dividends, binomial method, put-call parity, Black-Scholes differential equation.

Sisukord

Sissejuhatus

Optsioon on tuletisinstrument, mida kasutatakse riskide maandamiseks ja/või spekuleerimiseks. Optsiooonileping seob kaks osapoolt lepinguga, milles lepitakse kokku tulevikus toimuv ostu- või müügitehing mingi varaga (edaspidi alusvara), mille tuleviku hind (edaspidi täitmishind) on lepingus määratud. Optsiooni(lepingu) ostja saab õiguse, aga mitte kohustuse, osaleda tehingus. Optsiooni väljaandjal ehk kirjutajal on vastavalt kohustus täita lepingut.

Käesolevas töös vaadeldakse, kuidas hinnata Euroopa ja Ameerika ostu- ja müügioptsioone, kui alusvaraks on aktsia, millelt makstakse dividende. Kirjanduses on vaadeldud kolme tüüpi dividende: pidevad, alusvara hinnaga proportsionaalsed ja fikseeritud. Töös vaadeldakse dividende suurusena, mille võrra pärast dividendi maksmist alusvara hind langeb.

Esimeses peatükis vaadeldakse ostu- ja müügioptsioonide ning Euroopa ja Ameerika optsioonide erinevusi ning tutvustatakse vajalikke tähistusi ja tuuakse optsioonidega seotud tulude ehk väljamaksete valemid. Samuti tutvustatakse kolme tüüpi dividende, tuuakse välja nende erinevused ja olukorrad, kus selliseid dividendi maksmise strateegiaid kasutatakse. Sõnastatakse ka müügi- ja ostuoptsioonide hindade pariteetsustingimus ja tuuakse selle modifikatsioonid, kui alusvaralt makstakse dividende. Samuti tõestatakse arbitraaživabaduse nõudest lähtudes pariteetsustingimus ühe fikseeritud dividendimakse korral.

Teises peatükis tutvustatakse, kuidas käitub alusvara hind erinevate dividenditüüpide korral ja tuuakse fikseeritud dividendide jaoks välja kaks enimkasutatud mudelit. Seejärel tutvustatakse Euroopa optsioonide hindamiseks kasutatavat Blach-Scholesi diferentsiaalvõrrandit ning Euroopa optsiooni hinna jaoks leitud ilmutatud valemit.

Kolmandas peatükis vaadeldakse binoommeetodit ja selle modifikatsioone erinevate dividendide jaoks. Töös tutvustatakse binoommeetodi alusel optsioonide hinna leidmiseks vajalikku algoritmi ja parameetrite valikut. Pidevate dividendide puhul tuuakse Euroopa optsioonide jaoks välja kaks erinevat meetodit ning Ameerika optsioonide jaoks tutvustatakse ühte meetodit. Alusvara hinnaga proportsionaalsete dividendide alapeatükis tutvustatakse ühte binoommeetodi modifikatsiooni ja fikseeritud dividendide korral vaadeldakse alusvara hinna korrigeerimist, mittekombineeruva puu meetodit ning interpoleerimisel baseeruvat binoommeetodit otsitava hinna leidmiseks. Iga alapeatüki juures viiakse läbi numbrilisi eksperimente ja võrreldakse erinevate meetodite täpsust ning nende kiirust.

1 Optsiooni mõiste ja alusvaralt makstavad dividendid

Optsioon on tuletisinstrument, mida kasutatakse riskide maandamiseks ja/või spekuleerimiseks. Optsiooonileping seob kaks osapoolt lepinguga, milles lepitakse kokku tulevikus toimuv ostu-/müügitehing mingi alusvaraga, mille tuleviku hind (optsiooni täitmishind X) on lepingus määratud. Optsiooni(lepingu) ostja (edaspidi optsiooni omanik) saab õiguse, aga mitte kohustuse, osaleda tehingus. Optsiooni väljaandjal on vastavalt kohustus täita lepingut.

On olemas kahte tüüpi optsioone: müügi- ja ostuoptsioonid. Ostuoptsiooni (*call option*) omanikul on õigus osta alusvara lepingus kindlaksmääratud hinnaga ning ostuoptsiooni väljaandjal on vastav kohustus müüa seda alusvara. Müügioptsiooni (*put option*) omanikul on õigus müüa alusvara, müügioptsiooni väljaandjal on kohustus osta alusvara, kui optsiooni omanik otsustab müüa.

Optsioone saab vastavalt optsiooni realiseerimisajale jaotada veel Ameerika ja Euroopa optsioonideks. Ameerika optsioone saab optsiooni omanik realiseerida lepingu sõlmimisest kuni lepingus kokkulepitud ajani (täitmisajani T), aga Euroopa optsioone saab realiseerida vaid täitmisajal T.

1.1 Optsioonidega seotud tulu

Peatüki kirjutamisel on kasutatud allikaid [1, peatükk 7; 2, peatükk 8.3].

Optsiooni omaniku poolt saadav tulu P sõltub optsiooni tüübist ja alaindeksid C (c) ja P (p) märgivad vastavalt ingliskeelsetele nimetustele kas ostu- või müügi optsioone. Suure tähega tähistatakse Euroopa optsioone ja väikese tähega Ameerika optsioone.

Euroopa ostuoptsiooni korral on tulu ehk väljamakse leitav valemiga

$$P_C = \begin{cases} S(T) - X, & \text{kui } S(T) - X > 0 \\ 0, & \text{kui } S(T) - X \leq 0 \end{cases}$$

ehk $P_C = max\{S(T) - X,\, 0\}$. Tulu on selline, sest ostuoptsiooni omanik saab osta alusvara hinnaga X ja selle kohe maha müüa hinnaga $S(t)$.

Euroopa müügioptsiooni korral on väljamakse suurus on

$$P_P = max\{X - S(T),\, 0\}.$$

Kuna Ameerika ostu- ja müügioptsioone saab realiseerida mistahes ajal $0 \leq t \leq T$, siis juhul, kui optsioon realiseeritakse hetkel t, on saadavad tulud P_c ja P_p leitavad valemitega

$$P_c = max\{S(t) - X,\, 0\},$$

$$P_p = max\{X - S(t),\, 0\}.$$

Et optsioonilepingu omaniku tulu on alati mittenegatiivne ja võib olla suurem nullist, siis on selge, et optsiooni ostja peab lepingu sõlmimise eest maksma teatavat hinda, mida nimetatakse optsiooni hinnaks.

Optsiooni hinda hetkel t tähistame ostuoptsioonide korral $V_C(t)$ ja müügioptsioonide korral $V_P(t)$. Optsiooni hind hetkel T on võrdne optsioonist saadava tuluga. Optsioonide hinda hetkel $t = 0$ tähistame lühidalt $V(0) = V$.

Ostuoptsioonide korral tõuseb optsiooni väärtus, kui täitmishind on väike ning alusvara hind kõrge. Müügioptsioonide korral on loogika vastupidine, kõrge täitmishinna ning madala alusvara hinna puhul tõuseb müügioptsiooni väärtus.

Ostuoptsiooni omanik panustab alusvara hinna tõusule ning müügioptsiooni omanik alusvara hinna langusele.

Optsiooni hinna leidmine tugineb arbitraaži puudumisel. See tähendab, et optsiooni hind peab olema selline, et arbitraažistrateegiat ei ole võimalik konstrueerida.

Arbitraažistrateegia on selline strateegia, kus ühelgi ajahetkel ei pea sellise strateegia omanik midagi maksma ja omanik saab positiivse tõenäosusega mingi positiivse summa. Arbitraažistrateegiat saab konstrueerida kahel moel: 1) portfelli moodustamisel saadakse raha (portfelli hind on negatiivne) ning portfelli omanik ei pea tulevikus midagi maksma; 2) portfelli moodustamiseks ei vajata raha ja mingi positiivse tõenäosusega saadakse tulevikus positiivne makse(te) voog.

1.2 Alusvaralt makstavad dividendid

Käesolevas töös vaatame optsioone, mille alusvaraks on aktsiad. Aktsiaturul dividendide maksmise korral langeb aktsia hind dividendikuupäeval (*ex-dividend date*) dividendide suuruse võrra, või natukene vähem, arvestades dividendide pealt makstavaid makse [2, peatükk 12]. Käesolevas töös, nagu ka kirjanduses, vaadatakse dividendi kui suurust, mille võrra aktsia hind pärast dividendimakset väheneb. Seega, kui mingil ajahetkel t makstakse alusvaralt hinnaga $S(t)$ dividendi summas D, siis peale dividendimakset on alusvara hind $S(t) - D$. Ostuoptsiooni väärtus langeb peale dividendide maksmist ning müügioptsiooni hind tõuseb peale dividendide maksmist alusvara hinna languse tõttu. Kirjanduses on vaadeldud kolme tüüpi dividende: pidevad, alusvara hinnaga proportsionaalsed ja fikseeritud dividendid.

1.2.1 Pidevad dividendid

Pidevate dividendide korral makstakse alusvaralt dividende pidevalt. See tähendab, et kui alusvara pealt makstakse määraga q dividende, siis alusvara hind kasvab e^{-qt} korda aeglasemalt. Kui alusvara hind ilma dividende maksmata oleks $S(t)$, siis dividendide maksmise korral oleks hind $S(t)e^{-qt}$. Et Euroopa optsiooni hind oleneb ainult alusvara hinnast hetkel T, siis Euroopa optsioon, mille alusvara hind on $S(0)$ ja millelt makstakse dividende määraga q, on väärt sama palju kui Euroopa optsioon, mille alusvara hind hetkel $t = 0$ on $S(0)e^{-qT}$, ning millelt dividende ei maksta [3, peatükk 9.6].

Ühe aktsia korral pidevaid dividende reeglina ei maksta. Kui alusvaraks on aga aktsiaindeks, kuhu kuulub piisavalt palju aktsiaid, milledelt makstakse dividende, siis lähendavad pidevad dividendid mitmete fikseeritud dividendide maksmist [4, peatükk 3.7].

1.2.2 Fikseeritud dividendid

Fikseeritud dividendide korral makstakse mingi fikseeritud summa dividendikuupäeva(de)l. Summa D_1 makstakse kuupäeval τ_1, summa D_2 kuupäeval τ_2 jne. Alusvara hind langeb hetkel τ_i peale dividendi maksmist D_i võrra.

Juhul, kui alusvaraks on üks aktsia, siis on fikseeritud dividendid praktikas kõige enam levinud dividendide maksmise viis. Tavaliselt ei ole fikseeritud dividendide suurused kindlaks määratud pika aja kohta tulevikus, vaid olenevad ettevõtte majandusaasta tulemustest.

1.2.3 Alusvaraga proportsionaalsed dividendid

Alusvara hinnaga proportsionaalsed dividendid on fikseeritud dividendide erijuht, mille korral makstakse dividendina välja konstante protsent δ alusvara hinnast dividendikuupäevadel $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m$ summadena $\delta S(\tau_1), ..., \delta S(\tau_m)$. Alusvara hind kohe peale dividendi maksmist ajahetkel τ on $(1 - \delta)S(\tau)$ [3, peatükk 9.6].

Kuigi optsioonidealases kirjanduses on proportsionaalsete dividendide juhtu vaadeldud, siis praktikas on selline dividendide maksmise viis vähelevinud.

1.3 Müügi- ja ostuoptsioonid hindade pariteetsus

Peatükk on kirjutatud kasutades allikaid [1, peatükk 7; 2; 5].

Müügi- ja ostuoptsioonide hindade pariteetsustingimus (*put-call parity*, edaspidi PCP) annab võimaluse arvutada Euroopa ostu- või müügioptsiooni hinna, kui on teada samade parameetritega kas müügi- või ostuoptsiooni hind. Kui alusvaralt ei maksta dividende, siis on Euroopa ostu- ja müügioptsiooni (sama täitmishind X ning täitmisaeg T) hinnad on leitavad võrdusest

$$V_C - V_P = S(0) - Xe^{-rT},$$

kus r on pidev aastane riskivaba intressimäär.

Järgnevalt vaadeldakse, kuidas näeb välja PCP, kui dividendide tüüp on teada.

Kuna pidevate dividendide korral optsiooni hind on võrdne dividende mittemaksva optsiooni hinnaga, mille alusvara hind hetkel $t = 0$ on $S(0)e^{-qT}$ (vaata peatükk 1.2.1), siis pidevate dividendide korral on PCP tingimus järgmine:

$$V_C - V_P = S(0)e^{-qT} - Xe^{-rT}.$$

Fikseeritud dividendide korral, eeldusel, et optsiooni eluea jooksul makstakse ainult üks dividend summas D ajahetkel τ, on PCP võrdus järgmine:

$$V_C - V_P = S(0) - Xe^{-rT} - De^{-r\tau}, \tag{1}$$

kus $De^{-r\tau}$ on dividendide nüüdisväärtus hetkel $t = 0$.

Tõestame arbitraaživabaduse nõudest lähtudes tingimuse (1).

Tõestus. 1) Oletame vastuväiteliselt, et $V_C - V_P > S(0) - Xe^{-rT} - De^{-r\tau}$ ning näitame, et sellisel juhul eksisteerib arbitraažistrateegia.

Konstrueerime arbitraažistrateegia järgmiselt:

Hetkel $t = 0$:

- Ostame ühe alusvara aktsia hinnaga $S(0)$;
- Ostame ühe müügioptsiooni hinnaga V_P;
- Kirjutame välja ja müüme ühe ostuoptsiooni hinnaga V_C;
- Tegevustest saadav saadav rahahulk on $V_C - V_P - S(0)$. Kui see summa on positiivne, siis paigutame raha rahaturule pideva intressimääraga r; kui negatiivne, siis laename selle rahaturult.

Ajahetkel $t = \tau$ saame dividende summas D ning hoiustame summa panka ajani T.

Hetkel $t = T$:

- Lõpetame rahaturul positsiooni, mille hind on $(V_C - V_P - S(0))e^{rT}$. Kui see on positiivne, saame selle summa; kui negatiivne, siis peame sellise summa maksma.
- Saame dividendide eest summa $De^{r(T-\tau)}$
- Kui $S(T) - X \geq 0$, siis jätame müügioptsiooni realiseerimata, müüme alusvara hinnaga $S(T)$ ning maksame välja ostuoptsiooniga seotud väljamakse $S(T) - X$.
- Kõigi nende tegevuste maksumus on

$$(V_C - V_P - S(0))e^{rT} + De^{r(T-\tau)} + S(T) - (S(T) - X) =$$

$$= (V_C - V_P - S(0) + De^{-r\tau})e^{rT} + X =$$

$$= e^{rT}(V_C - V_P - S(0) + Xe^{-rT} + De^{-r\tau}) > 0,$$

mis näitab, et tegemist on arbitraažistrateegiaga, kuna portfelli moodustamine hetkel $t = 0$ ei makstud midagi.

- Kui $S(T) - X < 0$, siis realiseerime müügioptsiooni ning saame summa $X - S(T)$, müüme alusvara aktsia hinnaga $S(T)$; ostuoptsiooniga seotud kulud on 0.

- Nende tegevuste maksumus on

$$(V_C - V_P - S(0))e^{rT} + De^{r(T-\tau)} + S(T) + (X - S(T)) =$$

$$= (V_C - V_P - S(0) + De^{-r\tau)})e^{rT} + X =$$

$$= e^{rT}(V_C - V_P - S(0) + Xe^{-rT} + De^{-r\tau}) > 0,$$

  mis näitab, et ka sel juhul on tegemist arbitraažistrateegiaga.

2) Oletame nüüd, et $V_C - V_P < S(0) - Xe^{-rT} - De^{-r\tau}$ ning näitame, et ka sel juhul saame konstrueerida arbitraažistrateegia.

Hetkel $t = 0$ võtame lühikese positsiooni ühe alusvara aktsiaga hinnaga $S(0)$, ostame ühe ostuoptsiooni hinnaga V_C ja kirjutame välja ja müüme ühe müügioptsiooni hinnaga V_P. Hetkel τ paigutame saadud dividendisumma taas riskivabalt panka. Siis hetkel $t = T$ oleme saanud summa

$$(V_P + S(0) - V_C)e^{rT} + De^{r(T-\tau)} - S(T) - (X - S(T)) =$$

$$= (V_P + S(0) - V_C + De^{-r\tau)})e^{rT} - X =$$

$$= e^{rT}(V_P + S(0) - V_C - Xe^{-rT} + De^{-r\tau)}) > 0,$$

mis näitab, et tegemist on arbitraažistrateegiaga. □

Analoogiliselt saab tõestada, et kui optsiooni eluea jooksul makstakse dividende summades $D_1, D_2, ..., D_n$ hetkedel $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$, siis on PCP järgmisel kujul:

$$V_C - V_P = S(0) - Xe^{-rT} - \sum_{i=1}^{n} D_i e^{-r\tau_i}$$

2 Black-Scholesi diferentsiaalvõrrand optsiooni hinna leidmiseks

2.1 Alusvara hinna käitumine erinevate dividendide tüüpide korral

Peatüki kirjutamisel on kasutatud allikaid [2, peatükk 11.3 ja 11.4; 5; 6, peatükk 9; 7].

Optsiooni hinna leidmiseks tuleb teha eeldus alusvara hinna käitumise kohta. Dividendide mittemaksmise korral on standardseks eelduseks, et logaritmitud alusvara hind $log(S)$ käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile kujul

$$d(log(S)) = \frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dW, \tag{2}$$

millest Ito lemmat [2, peatükk 11.6] kasutades saadakse hinna jaoks stohhastiline diferentsiaalvõrrand kujul

$$dS = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S\, dt + \sigma S\, dW,$$

kus μ on alusvara oodatav tulusus, σ on alusvara hinna volatiilsus ehk logaritmitud alusvara hinna standardhälve ja W tähistab Wieneri protsessi.

Wieneri protsess on juhuslik protsess, mille puhul

- $W(0) = 0$,
- protsessi $W(t)$ juurdekasvud mittelõikuvates ajavahemikes on sõltumatud, st $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ korral $W(t) - W(s)$ ja $W(v) - W(u)$ on sõltumatud juhuslikud suurused (kehtib ka n intervalli korral),
- protsessi $W(t)$ juurdekasvud on statsionaarsed, st $W(t+a) - W(s+a)$ jaotus ei sõltu a väärtusest,

- iga $t > 0$ korral on $W(t)$ normaaljaotusega juhuslik suurus keskväärtusega 0 ja dispersiooniga t: $W(t) \sim N(0, t)$.

Optsiooni hinna leidmiseks on vaja teada alusvara hinna käitumist ka riskineutraalse tõenäosusmõõdu korral.

Riskineutraalse tõenäosusmõõdu korral on alusvara oodatav hind $E(S(t))$ igal ajahetkel $0 \leq t \leq T$ võrdne sellega, kui investeeritakse riskivabalt summa $S(0)$ ajani $t = T$ ehk

$$E(S(t)) = S(0)e^{rt}.$$

Riskineutraalse tõenäosusmõõdu korral on logaritmitud hinna jaoks stohhastiline diferentsiaalvõrrand kujul

$$\frac{dS}{S} = r\ dt + \sigma\ dW.$$

Vaatleme nüüd alusvara hinna käitumisvõrrandeid erinevate dividendi tüüpide korral.

Kui alusvaralt makstakse pidevaid dividende määraga q , siis käitub alusvara hind vastavalt võrrandile

$$\frac{dS}{S} = (\mu - q)\ dt + \sigma\ dW$$

ning riskineutraalse tõenäosusmõõdu korral [3, peatükk 15.3]

$$\frac{dS}{S} = (r - q)\ dt + \sigma\ dW. \tag{3}$$

Fikseeritud dividendide korral on kirjanduses vaadeldud kahte mudelit alusvara hinna käitumise kohta: tükiti lognormaalne (*piecewise lognormal model*) ja tinglikult deponeeritud (*escrowed dividend model*, edaspidi deponeeritud) mudel.

Tükiti lognormaalse mudeli korral lahutatakse dividendikuupäeval dividendi suurus alusvara hinnast ning mudeli käitumist kirjeldavad võrrandid

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dW, \quad \text{kui } t \neq \tau$$

ja

$$S^{+}(\tau) = S^{-}(\tau) - D, \quad \text{kui } t = \tau,$$

kus $S^{-}(\tau)$ on alusvara hind täpselt enne ja $S^{+}(\tau)$ peale dividendi maksmist [7]. Tükiti lognormaalne mudel kirjeldab kõige täpsemalt alusvara hinna käitumist fikseeritud dividendide maksmise korral, kuid optsiooni hindade arvutamine selle mudeli põhjal numbriliste meetodite kaudu on väga aeglane [8]. Sellise hinnakäitumise mudeli korral ei õnnestu leida ka analüütilisi valemeid Euroopa optsioonide hindamiseks ja seetõttu püütakse hinnaprotsessi lähendada mingi pideva lognormaalse protsessiga, kus muudetakse alusvara hinda ja/või dispersiooni. Sellepärast kasutatakse alusvara hinna käitumise kirjeldamiseks ka tinglikku deponeeritud mudelit.

Deponeeritud mudeli korral eeldatakse, et alusvara hind, millest on lahutatud dividendide nüüdisväärtused

$$\tilde{S}(t) = S(t) - D_1 e^{-r\tau_1} - D_2 e^{-r\tau_2} ... - D_n e^{-r\tau_n}, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

kus D_i on dividendi väljamakse hetkel τ_i, rahuldab stohhastilist diferentsiaalvõrrandit (2). Sellise hinnamudeli kasutamine optsioonide hindamisel alahindab aga optsiooni hinda eriti juhul, kui dividende makstakse optsiooni eluea lõpu poole. Seetõttu on kirjanduses välja pakutud erinevaid võimalusi lisaks hinna korrigeermisele korrigeerida ka alusvara hinna volatiilsust σ.

Kõige lihtsam ja enimkasutatud viis volatiilsuse muutmiseks on kasutada esialgse volatiilsuse σ asemel suurust σ_* [7]

$$\sigma_* = \frac{\sigma S(0)}{\tilde{S}(0)}. \tag{5}$$

Kui dividend makstakse välja optsiooni eluea alguses, siis ostutub aga pakutud volatiilsus võrreldes tegeliku volatiilsusega liiga suureks ning ülehindab ostuoptsiooni hinda.

Teiseks võimaluseks [6, peatükk 9.1.3] volatiilsuse muutmisel on asendada σ^2 suurusega σ_*^2

$$\sigma_*^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{S(0)\sigma}{S(0) - \sum_{i=j}^{n} D_i e^{r\tau_i}} \right)^2 (\tau_j - \tau_{j-1}) + \sigma^2 (T - \tau_n). \tag{6}$$

Kirjanduses [6, peatükk 9.1; 7; 9] on välja pakutud ka teisi võimalusi volatiilsuse σ korrigeerimiseks.

2.2 Black-Scholesi differentsiaalvõrrand erinevate dividendide tüüpide korral

Peatüki kirjutamisel on kasutatud allikaid [1, peatükk 8; 2, peatükk 12; 5, peatükk 4.3].

Black-Scholesi diferentsiaalvõrrand optsiooni hinna leidmiseks, kui alusvaralt dividende ei maksta, kehtib, kui on täidetud järgmised eeldused:

- alusvara hind käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile (2);
- lühikese positsiooni (müüakse maha laenatud aktsia, mis ostetakse hiljem tagasi ning tagastatakse omanikule) võtmine turul on lubatud;
- puuduvad tehingukulud;
- optsiooni eluajal ei maksta alusvaralt dividende;
- arbitraaživõimalus turul puudub;
- alusvaraga kauplemine toimub pidevalt;
- riskivaba intressimäär $r = r(t)$ ja alusvara volatiilsus $\sigma = \sigma(t)$ on konstandid või ajast sõltuvad funktsioonid.

Kui need eeldused on täidetud, siis optsiooni hind $V = V(S(t), t)$ rahuldab teist järku osatuletisega diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial^2 S} + rS(t)\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Diferentsiaalvõrrandi ühese lahendi leidmiseks on vaja ette anda ka lõpptingimused. Euroopa ostuoptsiooni korral on lõpptingimuseks

$$V_C(S(T), T) = max\{S(T) - X,\ 0\}$$

ja müügioptsiooni lõpptingimus on

$$V_P(S(T),T) = max\{X - S(T),\, 0\}.$$

Pidevate dividendide korral on Black-Scholesi võrrandis pidev aastane riskivaba intressimäär r asendatud suurusega $r - q$ [3, peatükk 15.3]. Saadav diferentsiaalvõrrand on kujul

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial^2 S} + (r-q)S(t)\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Kui Euroopa optsioonide korral makstakse fikseeritud dividende, siis kasutatakse Black-Scholesi võrrandi korral alusvara hinna deponeeritud mudelit ehk asendatakse alusvara hind $S(t)$ suurusega $\tilde{S}(t)$ ja samuti on pakutud kirjanduses võimalusi asendada σ suurusega σ^* .

2.3 Euroopa optsiooni hinna ilmutatud valem

Peatüki kirjutamisel on kasutatud allikaid [2, peatükk 12; 3, peatükk 15.2.2; 4, peatükk 3].

Kui r ja σ on konstandid või ajast sõltuvad funktsioonid, siis Euroopa optsioonide korral õnnestub Black-Scholesi differentsiaalvõrrand analüütiliselt lahendada. Kui r ja σ on konstandid ja alusvaralt ei maksta dividende, siis hetkel $t = 0$ on Euroopa ostuoptsiooni hind leitav valemiga

$$V_C = S(0)N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

ja Euroopa müügioptsiooni hind

$$V_P = Xe^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1),$$

kus

$$d_1 = \frac{ln(S(0)/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{ln(S(0)/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

ja N on normaaljaotuse jaotusfunktsioon.

Kui alusvaralt makstakse pidevaid dividende, siis asendatakse ülaltoodud hinna valemites (V_C ja V_P) alusvara hind suurusega $S(0)e^{-qT}$. Muutujate d_1 ja d_2 valemites lahutatakse riskivabast intressimäärast r maha dividendide määr q. [6, peatükk 1]

3 Binoommeetod optsioonide hinna leidmiseks

3.1 Binoommeetod, kui alusvaralt ei maksta dividende

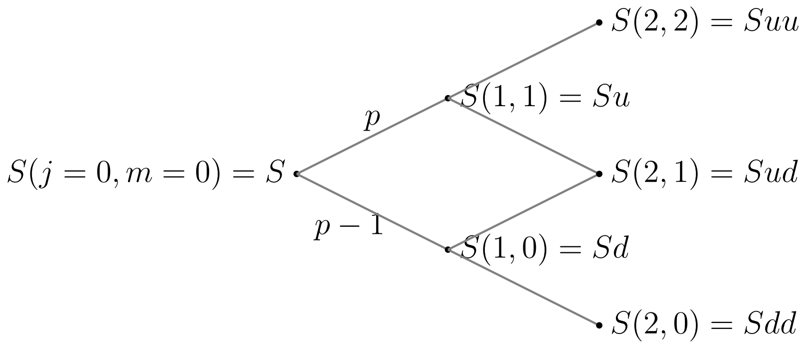
Peatüki kirjutamisel on kasutatud allikaid [2, peatükk 10, 18; 6, peatükk 7.1; 4, lisa C].

Olgu optsiooni eluiga $[0, T]$, mis jagatakse N võrdseks perioodiks pikkusega $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Alusvara hinna liikumisel binoommeetodis eeldatakse, et kui alusvara hind hetkel t on S, siis hetkel $t = t + \Delta t$ saab hind omada vaid kahte väärtust: uS tõenäosusega p või dS tõenäosusega $1 - p$, kusjuures edaspidi eeldame, et $u > d$.

Binoommudel N perioodi korral koosneb identsetest üheperioodilistest mudelitest.

Kui hetkel $t = 0$ on alusvara hind $S = S(0)$, siis hetkel $t = \Delta t$ saab hind omada väärtusi uS või dS. Hetkel $t = 2\Delta t$ saab alusvaral olla kolm võimalikku hinda: Su^2, Sud või Sd^2. Kokkuvõttes saab alusvaral hetkel $t = j\Delta t$ olla $j + 1$ erinevat hinda: $S(j, m) = S(0)u^m d^{j-m}$, kus $0 \leq m \leq j$ näitab, mitmenda hargnevusega on tegu (vaata joonis 1).



Joonis 1: Binoommudel

Parameetrite u, d ja p määramisel lähtutakse kahest tingimisest. Esiteks, alusvara keskmine hind peab võrduma juhuga, kui vastav summa paigutatakse riskivabalt ehk

$$E(S(t+\Delta t)|S(t)) = pu + (1-p)d = e^{r\Delta t}, \tag{7}$$

kus $E(S(t+\Delta t)|S(t))$ on suuruse $S(t+\Delta t)$ tinglik keskväärtus, kui hetkel t on alusvara hind $S(t)$.

Teiseks, alusvara tulususe dispersioon binoompuus peab vastama alusvara tulususe tegelikule (ajaloolistel andmetel määratud) dispersioonile σ^2 ehk

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)}\,|S(t)\right) = \sigma^2 + \mathrm{o}(\Delta t), \tag{8}$$

kus $o(\Delta t) \to 0$, kui $\Delta t \to 0$.

Tingimused (7) ja (8) ei määra parameetreid u, d ja p üheselt. Üheks võimalikuks parameetrite komplektiks on Cox-Ross-Rubinsteini parameetrid kujul

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Optsiooni hind hetkel $T = N\Delta t$ on võrdne optsiooni väljamaksega ehk ostuoptsioonide korral

$$V(N,m) = P(N,m) = max\{S(0)u^m d^{N-m} - X,\ 0\}$$

ja müügioptsioonide puhul

$$V(N,m) = P(N,m) = max\{X - S(0)u^m d^{N-m},\ 0\}.$$

Kui on teada optsiooni hind hetkel T, siis saab ajas rekursiivselt tahapoole liikudes leida Euroopa optsiooni hinna valemiga

$$V(j,m) = e^{-r\Delta t}(pV(j+1,m+1) + (1-p)V(j+1,m)), \tag{9}$$

$$m = 0, 1, ..., j, \qquad j = N-1, N-2, ..., 0.$$

Ameerika optsiooni korral leitakse igal sammul esmalt optsiooni hind W, kui optsiooni hoitakse veel vähemalt ühe perioodi ning optsiooni lõplik hind on maksimum suurustest W ja väljamaksest $P(j,m)$ juhul, kui optsioon realiseeritakse.

$$V(j,m) = max(W(j,m), P(j,m)), \tag{10}$$

$$m = 0, 1, ..., j, \qquad j = N-1, N-2, ..., 0,$$

kus

$$W(j,m) = e^{-r\Delta t}(pV(j+1,m+1) + (1-p)V(j+1,m)), \tag{11}$$

$$m = 0, 1, ..., j, \qquad j = N-1, N-2, ..., 0.$$

3.2 Binoommeetod pidevate dividendide korral

Peatüki kirjutamisel on kasutatud allikaid [3, peatükk 9.6.4; 4, lisa C.2.3; 9].

Numbrilistes eksperimentides kasutatakse parameetrite u ja d korral Cox-Ross-Rubinsteini väärtusi.

Euroopa optsioonide jaoks on välja pakutud kaks binoommeetodi modifikatsiooni: alusvara hinna asendamine hetkel $t = 0$ või riskineutraalse tõenäosuse p muutmine, Ameerika optsioonide jaoks kasutatakse ainult riskineutraalse tõenäosuse p muutmist.

Meetod 1. Esimese meetodi korral võetakse hinnapuu konstrueerimisel $S(0)$ asemel $S(0)e^{-qT}$, sest kui alusvara hind ilma dividende maksmata oleks $S(t)$, siis dividendide maksmise korral oleks hind $S(t)e^{-qt}$ (vaata peatükk 1.2.1).

Meetod 2. Teise meetodi korral muudetakse riskineutraalset tõenäosust p. Pidevate dividendide ja riskineutraalse tõenäosusmõõdu korral käitub alusvara vastavalt valemile (3). Seega on vaja võrduses (7) pidevast riskivabast intressimäärast r lahutada dividendidena makstav määr q. Tulemusena saadakse võrdus

$$e^{(r-q)\Delta t} = pu + (1-p)d,$$

mida riskineutraalse tõenäosuse p järgi lahendades saame, et

$$p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}.$$

Tuleb tähele panna, et optsiooni hinna V arvutamisel tuleb kasutada endiselt riskivaba intressimäära r, mitte suurust $r - q$, ehk $V(m, j) = e^{-r\Delta t}(pV(m+1, j+1) + (1-p)V(m+1, j))$.

Ameerika optsioonide puhul töötab ainult teine meetod, kuna esimese meetodi korral alusvara hinna käitumine hetkel $t < T$ ei vasta alusvara hinna tegelikule käitumisele.

Vaatame nüüd numbriliste eksperimentide tulemusi.

Tabelis 1 on toodud Euroopa ja Ameerika ostu- ja müügioptsioonide hinnad, kui alusvara hind on $S(0) = 100$, optsiooni täitmishind on $X = 110$, täitmisaeg on $T = 1$, riskivaba intressimäär on $r = 0,05$, alusvara hinna volatiilus on $\sigma = 0,2$ ja pidev dividendimäär on $q = 0,02$. Euroopa ostuoptsioonide täpne väärtus Black-Scholesi ilmutatud valemi järgi on $5,1886$ ning müügioptsiooni hind on $11,8040$. On näha, et Euroopa ostu- ja müügioptsiooni hinnad lähenevad N kasvades Black-Scholesi valemi järgi leitud hindadele. Samuti on näha, et nii nagu dividendide mittemaksmise korral on Ameerika ostuoptsiooni hind võrdne Euroopa ostuoptsiooni hinnaga (meetod 2) ja Ameerika müügioptsiooni hind on suurem kui Euroopa müügioptsiooni oma.

Tabel 1: Euroopa ja Ameerika ostu-ja müügioptsiooni hind, kui alusvaralt makstakse pidevaid dividende määraga $q = 0,02$ ($S(0) = 100, X = 110, T = 1, \delta = 0,2, r = 0,05, q = 0,02$).

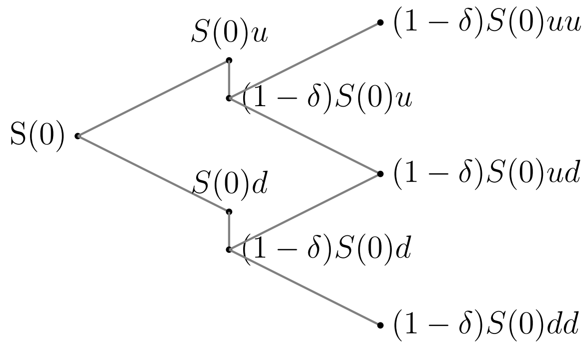
	Euroopa optsioon				Ameerika optsioon	
	Ostuoptsiooni hind		Müügioptsiooni hind		Ostu-optsiooni hind	Müügi-optsiooni hind
N	Meetod 1	Meetod 2	Meetod 1	Meetod 2	Meetod 2	Meetod 2
50	5,1510	5,2114	11,7663	11,8268	5,2114	12,6294
100	5,1804	5,2025	11,7957	11,8179	5,2025	12,6249
250	5,1939	5,1908	11,8093	11,8062	5,1908	12,6143
500	5,1913	5,1909	11,8066	11,8063	5,1909	12,6143
1000	5,1877	5,1902	11,8031	11,8056	5,1902	12,6134
2500	5,1891	5,1882	11,8045	11,8036	5,1882	12,6120

Kui aga dividendide maksmise määr q on suur võrreldes pideva riskivaba intressimääraga r, siis võib dividendide maksmise korral Ameerika ostuoptsiooni hind olla suurem kui Euroopa ostuoptsiooni hind. Näiteks $N = 2500$ ning $q = 0.07$ korral on Euroopa ostuoptsiooni hind 3,4515 ja Ameerika ostuoptsiooni hind 3,5655.

3.3 Binoommeetod proportsionaalsete dividendide korral

Peatüki kirjutamisel on kasutatud allikaid [2, peatükk 18.3; 3, peatükk 9.6; 7].

Alusvaralt makstakse dividende protsendina δ alusvara hinnast $S(\tau)$ perioodidel $\tau_1, ..., \tau_k \in [0,\ T]$. Binoommudelis korrutatakse hetkel τ alusvara hinda konstandiga $1 - \delta$. See põhjustab binoompuus hüppe, kuid kuna tegemist on alusvara hinnaga proportsionaalsete dividendidega, siis ühildub hinnapuu peale hüpet (vaata joonis 2) ning arvutuste maht jääb samaks võrreldes tavalise binoommeetodiga.



Joonis 2: Binoommudel konstantsete dividendide korral

Euroopa optsioonide puhul on vaja teada alusvara hinda hetkel $t = T$ (perioodil N), milleks on

$$S(N, m) = (1 - \delta)^k S(0) u^m d^{(N-m)}. \tag{12}$$

Kui on teada alusvara hind hetkel T, siis saame vastavalt valemile (9) arvutada optsiooni hinna.

Ameerika optsioonide korral on lisaks lõpphinnale vaja teada ka väljamakse suurust P igal sammul. Kõigepealt on vaja, nagu ka Euroopa optsioonide puhul, arvutada vastav alusvara hind hetkel $t = T$ kasutades valemit (12) ning ostuoptsiooni väljamakse (müügioptsiooni väljamakse suurus leitakse analoogiliselt) suurus ajahetkel $j\Delta t$ leitakse vastavalt valemile

$$P_c = max\{(1-\delta)^l S(0)u^m d^{(N-m)} - X,\ 0\},$$

kus

$$l = \begin{cases} 0, & \text{kui } j\Delta t < \tau_1 \\ 1, & \text{kui } j\Delta t \in [\tau_1, \tau_2) \\ ... & \\ k, & \text{kui } j\Delta t \geq \tau_k \end{cases}.$$

Tabelis 2 on toodud Euroopa ja Ameerika ostuoptsiooni hind, kui alusvara hind on $S(0) = 100$, optsiooni täitmishind on $X = 110$, täitmisaeg on $T = 1$, riskivaba intressimäär on $r = 0,05$, alusvara hinna volatiilus on $\sigma = 0,2$ ja dividende makstakse protsendina $\delta = 0,02$. Tabelis 2 on näha, et dividendi maksmise kordade arvu suurenedes väheneb ostuoptsiooni hind, kusjuures Euroopa optsiooni hind jääb dividendide maksmise kuupäeva muutes (dividendide arv ei muutu) samaks, Ameerika ostuoptsiooni hind aga muutub. Selline käitumine on loogiline, kuna Euroopa optsioonide hinnad sõltuvad vaid lõpphinnast. Ameerika ostuoptsiooni hind on ka selle näite korral suurem Euroopa ostuoptsiooni hinnast.

Tabel 2: Euroopa ja Ameerika ostuoptsiooni hind, kui makstakse alusvara hinnaga proportsionaalsed dividende ($S(0) = 100, X = 110, T = 1, r = 0,05, \sigma = 0,2, \delta = 0,02$).

Euroopa ostuoptsioon

Ajad N	[0,25; 0,75] Hind	[0,4; 0,9] Hind	[0,1; 0,25; 0,75; 0,9] Hind
50	4,4357	4,4357	3,1211
100	4,4251	4,4251	3,1507
250	4,4186	4,4186	3,1361
500	4,4171	4,4171	3,1423
1000	4,4153	4,4153	3,1422
2500	4,4141	4,4141	3,1428

Ameerika ostuoptsioon

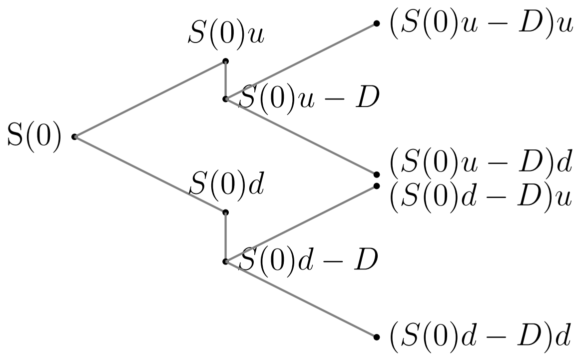
Ajad N	[0,25; 0,75] Hind	[0,4; 0,9] Hind	[0,1; 0,25; 0,75; 0,9] Hind
50	4,5437	4,8319	3,5763
100	4,5406	4,8224	3,6204
250	4,5339	4,8212	3,6074
500	4,5358	4,8194	3,6138
1000	4,5337	4,8168	3,6146
2500	4,5328	4,8162	3,6148

3.4 Binoommeetod fikseeritud dividendide korral

Peatüki kirjutamisel on kasutatud allikaid [2, peatükk 18.3; 3, peatükk 9.6.3; 4, lisa C.2.3; 9].

Fikseeritud dividendide korral vaadeldakse kolme erinevat meetodit: mittekombineeruva hinnapuu meetodit, alusvara hinna muutmist ning interpoleerimisel baseeruvat meetodit (edaspidi interpoleerimismeetod).

Meetod 1 (Mittekombineeruv hinnapuu). Kui alusvaralt makstakse fikseeritud dividende, siis saab nii Euroopa kui ka Ameerika optsioonide puhul kasutada tükiti lognormaalset mudelit. Alusvara hinnast lahutatakse dividendi väärtus D ajahetkel $\tau\Delta t$, millal dividend välja makstakse. Sellisel juhul ei rekombineeru hinnapuu peale dividendide maksmist (joonis 3) ning igast hargnevusest tekib omakorda uus hinnapuu. Hargnevus tekib, kuna peale dividendimakset üldjuhul ei ole hinnad $(S(t)-D)u$ ja $(S(t)-D)d$ võrdsed. See viib arvutustehete arvu kiiresti väga suureks: peale dividendi maksmist kasvab hargnevuste arv dividendimakse järgsel perioodil j algse $j+1$ asemel $2j$-ni. Ühe dividendimakse, mis toimub perioodil n, korral on hetkel T (perioodil N) mittekombineeruval puul ülimalt $(n+1)*(N-n+1)$ võimalikku hinda.



Joonis 3: Mittekombineeruv binoommudel fikseeritud dividendide korral

Vaatleme ostuoptsiooni hinna leidmist. Toimugu dividendimakse ajahetkel $\tau\Delta t$.

Siis iga $m = 0, 1, ..., \tau$ jaoks leitakse esmalt ostuoptsiooni võimalikud hinnad hetkel $N\Delta t$ kasutades valemit

$$V(N, m, l) = max\{(S(0)u^m d^{\tau-m} - D)u^l d^{N-\tau-l} - X,\ 0\},$$

kus $l = 0, 1, ..., N - \tau$ näitab hargnevusi peale dividendimakset. Kasutades leitud ostuoptsiooni hindu leitakse edasised Euroopa optsiooni hinnad iga indeksi k korral perioodidel $N - 1, N - 2, ..., \tau$ rekursiivselt ajas tagurpidi liikudes valemiga

$$V(k, m, l) = e^{-r\Delta t}(pV(k + 1, m, l + 1) + (1 - p)V(k + 1, m, l)).$$

Ameerika optsioonide hinnad leitakse valemiga

$$V(k, m, l) = max\{W(k, m, l), P(k, m, l)\},$$

kus

$$W(k, m, l) = e^{-r\Delta t}(pV(k + 1, m, l + 1) + (1 - p)V(k + 1, m, l))$$

ja

$$P(k, m, l) = max\{(S(0)u^m d^{\tau-m} - D)u^l d^{N-\tau-l} - X,\ 0\}.$$

Kasutades hindu $V(\tau, m) = V(\tau, m, 0)$ leitakse optsioonide hinnad perioodidel $\tau - 1, \tau - 2, ..., 0$ standardsete valemitega: Euroopa optsioonide hind valemiga (9) ning Ameerika optsioonide hind valemitega (10) ja (11).

Meetod 2 (Deponeeritud mudel). Euroopa optsioonide puhul saab kasutada ka deponeeritud mudelit ja alusvara hind $S(0)$ asendatakse hinnaga $\tilde{S}(0)$, mille korral hinnast $S(0)$ on lahutatud dividendide nüüdisväärtus. Hinnapuu konstrueeritakse kasutades alusvara hindu $\tilde{S}(j, m) = \tilde{S}(0)u^m d^{j-m}$. Selline meetod tagab, et binoommeetodil saadud hinnapuu rekombineeruks.

Ameerika optsioonide korral deponeeritud mudeli kasutamise korral leitakse (ostuoptsiooni) väljamakse suurused perioodidel $N, N - 1, ..., \tau$ valemiga

$P(j,m) = max\{\tilde{S}(0)u^m d^{j-m} - X, 0\}$ ja perioodidel $j = \tau-1, \tau-2, ..., 0$ asendatakse valemis $P(j,m)$ suurus $\tilde{S}(0)$ ühe dividendimakse korral suurusega $\tilde{S}(0)+De^{-r(\tau-j)}$.

Meetod 3 (Interpoleerimismeetod). Esmalt ehitatakse hinnapuu, kus ei ole arvestatud dividendidega ehk $S(j,m) = S(0)u^m d^{j-m}$. Optsiooni hinnad perioodidel $N-1, N-2, ..., \tau$ leitakse standardsete valemite (9) või (10) ja (11) põhjal. Perioodil τ kasutatakse lineaarset interpolatsiooni [7] optsiooni hindade leidmiseks, mis arvestaks dividendide maksmisega. Iga $k = 0, 1, ..., \tau$ korral leitakse selline indeks m, mille korral $S(\tau, m) \leq S(\tau, k) - D < S(\tau, m+1)$ ning optsiooni hinnad leitakse valemiga

$$V(S(\tau,k)) = \frac{V(S(\tau,m+1)) - V(S(\tau,m))}{S(\tau,m+1) - S(\tau,m)}(S(\tau,k) - S(\tau,m))) + V(S(\tau,m)). \quad (13)$$

Kui indeks k on liiga väike, siis sellist indeksit m ei pruugi leiduda ning sel juhul kasutatakse ekstrapoleerimist:

$$V(S(\tau,k)) = \frac{V(S(\tau,1)) - V(S(\tau,0))}{S(\tau,1) - S(\tau,0)}(S(\tau,k) - S(\tau,0))) + V(S(\tau,0)).$$

Kasutades uusi hindu $V(S(\tau,k))$ leitakse optsiooni hind perioodidel $\tau-1, \tau-2, ..., 0$. Meetod on lihtsasti üldistatav ka mitme dividendimakse juhule.

Vaatame nüüd numbriliste eksperimentide tulemusi.

Tablites 3 ja 4 on toodud Euroopa ostuoptsiooni hind ja tabelis 5 on toodud Ameerika müügioptsiooni hind, kui alusvara hind on $S(0) = 100$, optsiooni täitmishind $X = 110$, täitmisaeg $T = 1$, riskivaba intressimäär $r = 0,05$, alusvara hinna volatiilus $\sigma = 0,2$, ja dividendide suurus on $D = 2$.

Tabelist 3 on näha, et Euroopa ostuoptsioonide puhul on kõige kiirem, kuid ka kõige ebatäpsem meetod võrreldes meetodiga 1, deponeeritud mudel, kus alusvara hind on muudetud. Mittekombineeruva puu meetod ja interpoleerimismeetod annavad väga sarnased tulemused, aga mittekombineeruva puu kasutamine võtab N suurenedes väga palju rohkem aega. Mittekombineeruva puu meetod on eriti aeg-

Tabel 3: Euroopa ostuoptsiooni hind, kui alusvaralt makstakse fikseeritud dividendide suuruses $D = 2$ ($S(0) = 100, X = 110, T = 1, \sigma = 0,2, r = 0,05$, dividendi suurus = 2, dividendi maksmise aeg = Aeg).

Mittekombineeruv puu

Aeg N	0,25 Hind	0,5 Hind	0,75 Hind	Kulunud aeg
50	5,1888	5,2364	5,2777	$<$ 0,006
100	5,2215	5,2698	5,3166	$<$ 0,044
250	5,2339	5,2812	5,3262	$<$ 0,641
500	5,2314	5,2781	5,3232	$<$ 4,910
1000	5,2282	5,2751	5,3200	$<$ 39,98
2500	5,2293	5,2761	5,3211	$<$ 700,0

Deponeeritud mudel 2a

Aeg N	0,25 Hind	0,5 Hind	0,75 Hind	Kulunud aeg
50	5,1528	5,1616	5,1704	$<$ 0,001
100	5,1825	5,1934	5,2040	$<$ 0,001
250	5,1960	5,2062	5,2162	$<$ 0,001
500	5,1933	5,2033	5,2132	$<$ 0,001
1000	5,1897	5,1995	5,2093	$<$ 0,001
2500	5,1911	5,2012	5,2111	$<$ 0,001

Interpoleerimismeetod

Aeg N	0,25 Hind	0,5 Hind	0,75 Hind	Kulunud aeg
50	5,3131	5,3608	5,4032	$<$ 0,001
100	5,2784	5,3251	5,3702	$<$ 0,005
250	5,2402	5,2881	5,3337	$<$ 0,032
500	5,2337	5,2803	5,3249	$<$ 0,129
1000	5,2339	5,2808	5,3260	$<$ 0,575
2500	5,2298	5,2767	5,3218	$<$ 3,302

lane, kui dividendimakse toimub varakult optsiooni eluea jooksul. Kõigi meetodite korral on ostuoptsiooni hind seda väiksem, mida varem toimub dividendimakse.

Tabelis 4 on toodud Euroopa ostuoptsiooni hind, mis on leitud deponeeritud mudeli ja interpoleerimismeetodiga, kui dividende makstakse optsiooni eluea jooksul neli korda hetkedel $[0,1; 0,25; 0,75; 0,9]$. Deponeeritud mudeli juures on vaadeldud lisaks alusvara hinna korrigeerimisele ka volatiilsuse korrigeerimist, kus meetod $2a$ on juht, kui volatiilsust ei muudeta, meetod $2b$ volatiilsus vastab valemile (5) ja meetodi $2c$ volatiilsus on leitud valemiga (6).

Tabelis 4 on näha, et meetodid $2b$ ja $2c$, kus korrigeeritakse alusvara volatiilsust, ülehindavad ostuoptsiooni hinda, kui N kasvab, ja meetod $2a$, kus kasutatakse deponeeritud mudelit ilma volatiilsuse korrektsioonita, alahindab ostuoptsiooni hinda kui N kasvab. Antud näite korral näeme, et N kasvades saame interpoleerimismeetodile lähedase hinna, kui võtame deponeeritud mudelite meetodi $2a$ ja $2b$ hindade keskmised.

Tabel 4: Euroopa ostuoptsiooni hinnad fikseeritud dividendide korral ($S(0) = 100, X = 110, T = 1, \sigma = 0,2, r = 0,05$, dividendi suurus $= 2$, ajad $= [0,1; 0,25; 0,75; 0,9]$)

	Deponeeritud mudel			Interpoleerimis-
Volatiilsus	Meetod $2a$	Meetod $2b$	Meetod $2c$	meetod
N	Hind	Hind	Hind	Hind
50	3,1105	3,6620	3,6034	3,6252
100	3,1389	3,6640	3,6140	3,5285
250	3,1233	3,6841	3,6307	3,4288
500	3,1298	3,6777	3,6255	3,3999
1000	3,1298	3,6793	3,6245	3,4043
2500	3,1310	3,6804	3,6270	3,3948

Tablis 5 on näha, et ka Ameerika optsioonide korral annavad mittekombineeruva puu meetod ja interpoleerimismeetod sarnased tulemused ja deponeeritud mudel alahindab müügioptsiooni hinda.

Tabel 5: Ameerika müügioptsioonid ($S(0) = 100, X = 110, T = 1, \sigma = 0,2, r = 0,05$, dividendi suurus $= 2$, aeg $= 0,75$)

	Deponeeritud mudel $2a$		Mittekombineeruv puu		Interpoleerimismeetod	
N	Hind	Kulunud aeg	Hind	Kulunud aeg	Hind	Kulunud aeg
50	12,3879	0,009	12,5633	0,006	12,6533	0,002
100	12,3777	0,036	12,5673	0,039	12,6152	0,007
250	12,3903	0,214	12,5761	0,557	12,5838	0,040
500	12,3836	0,866	12,5708	4,283	12,5724	0,172
1000	12,3806	3,368	12,5687	34,299	12,5736	0,638
2500	12,3814	19,297	12,5692	523,248	12,5700	3,848

Kasutatud allikad

[1] Marek Capinski ja Tomasz Zastawniak. *Mathematics for finance*. Springer, 2003.

[2] John C Hull. *Options, futures and Other Derivatives*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs New Jersey, 1997.

[3] Yuh-Dauh Lyuu. *Financial engineering and computation: principles, mathematics, algorithms*. Cambridge University Press, 2002.

[4] Paul Wilmott, Jeff Dewynne ja Sam Howison. *Option Pricing: Mathematical models and computation*. Oxford Financial Press, 1995.

[5] Toomas Raus. *Sissejuhatus finantsmatemaatikasse kursuse loengumaterjalid*. 2022. URL: https://courses.ms.ut.ee/LTMS.00.017/2022_fall/uploads/Main/SFM_konspekt_05_12.pdf (vaadatud 03.05.2023).

[6] Espen Gaarder Haug. *The complete guide to option pricing formulas*. 2. väljaanne. 2007.

[7] Martina Nardon, Paolo Pianca ja teised. *An efficient binomial approach to the pricing of options on stocks with cash dividends*. Tehniline raport. 2008.

[8] Michel H Vellekoop ja Johannes W Nieuwenhuis. "Efficient pricing of derivatives on assets with discrete dividends". *Applied Mathematical Finance* 13.3 (2006), lk. 265–284.

[9] Jr-Yan Wang. *Ch 4. Binomial Tree Model. Kursuse Financial Computation or Financial Engineering loengumaterjalid.* URL: https://homepage.ntu.edu.tw/~jryanwang/courses/Financial%20Computation%20or%20Financial%20Engineering%20(graduate%20level)/FE_Ch04%20Binomial%20Tree%20Model.pdf (vaadatud 28.04.2023).

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Annabel Kaasik,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Optsioonide hindamine alusvaralt makstavate dividendide korral", mille juhendaja on Toomas Raus, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaaloman-di ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Annabel Kaasik

03.05.2023