Виссарион Григорьевич Алексеев

Основы символической теории инвариантов (для химиков)

Юрьев : [б.и.]
1901

EOD – Millions of books just a mouse click away! In more than 10 European countries!

Thank you for choosing EOD!

European libraries are hosting millions of books from the 15th to the 20th century. All these books have now become available as eBooks – just a mouse click away. Search the online catalogue of a library from the eBooks on Demand (EOD) network and order the book as an eBook from all over the world – 24 hours a day, 7 days a week. The book will be digitised and made accessible to you as an eBook.

Enjoy your EOD eBook!

- Get the look and feel of the original book!
- Use your standard software to read the eBook on-screen, zoom in to the image or just simply navigate through the book
- *Search & Find*: Use the full-text search of individual terms
- *Copy & Paste Text and Images*: Copy images and parts of the text to other applications (e.g. word processor)

Terms and Conditions

With the usage of the EOD service, you accept the Terms and Conditions provided by the library owning the book. EOD provides access to digitized documents strictly for personal, non-commercial purposes. For any other purpose, please contact the library.

- Terms and Conditions in English: http://books2ebooks.eu/odm/html/utl/en/agb.html
- Terms and Conditions in Estonian: http://books2ebooks.eu/odm/html/utl/et/agb.html

More eBooks

Already a dozen libraries in more than 10 European countries offer this service.
More information is available at http://books2ebooks.eu

ОСНОВЫ

СИМВОЛИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ ИНВАРІАНТОВЪ

(ДЛЯ ХИМИКОВЪ)

съ приложеніемъ оттиска изъ Журн. Русс. Ф.-Хим. Общества статьи:

„О совпаденіи методовъ формальной химіи и символической теоріи инваріантовъ".

В. Г. АЛЕКСѢЕВА,

ординарнаго профессора ИМПЕРАТОРСКАГО Юрьевскаго университета.

ЮРЬЕВЪ.
ТИПОГРАФІЯ К. МАТТИСЕНА.
1901.

ОСНОВЫ
СИМВОЛИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ ИНВАРІАНТОВЪ

(ДЛЯ ХИМИКОВЪ).

В. Г. АЛЕКСѢЕВА,
ординарнаго профессора ИМПЕРАТОРСКАГО Юрьевскаго университета.

ЮРЬЕВЪ.
ТИПОГРАФІЯ К. МАТТИСЕНА.
1901.

Оттискъ изъ „Ученыхъ Записокъ Импер. Юрьевскаго Университета" 1901 г.

Необходимыя свѣдѣнія изъ высшей математики *).

Если мы имѣемъ цѣлый однородный многочленъ n-й степени съ двумя перемѣнными

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + \binom{n}{i} a_i x_1^{n-i} x_2^i +$$
$$\ldots + a_n x_2^n \left[\text{гдѣ } \binom{n}{i} \text{ обозначаетъ } \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}\right],$$

то частною производною его по x_1 называется многочленъ $n-1$-й степени

$$n a_0 x_1^{n-1} + \binom{n}{1}(n-1) a_1 x_1^{n-2} x_2 + \ldots + \binom{n}{i}(n-i) a_i x_1^{n-i-1} x_2^i + \ldots + \binom{n}{1} a_{n-1} x_2^{n-1}$$
$$= n\left[a_0 x_1^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_1 x_1^{n-2} x_2 + \ldots + \binom{n-1}{i} a_i x_1^{n-i-1} x_2^i + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1}\right],$$

а частною производною его по x_2 называется многочленъ тоже $n-1$-й степени

$$\binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} + \binom{n}{2} 2 a_2 x_1^{n-2} x_2 + \ldots + \binom{n}{i} i\, a_i x_1^{n-i} x_2^{i-1} + \ldots + n a_n x_2^{n-1}$$
$$= n\left[a_1 x_1^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_2 x_1^{n-2} x_2 + \ldots + \binom{n-1}{i} a_i x_1^{n-i} x_2^{i-1} + \ldots + a_n x_2^{n-1}\right].$$

Эти частныя производныя многочлена $f(x_1, x_2)$ обыкновенно обозначають сокращенно черезъ $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial f}{\partial x_2}$. Процесъ образованія производныхъ называется также диффе рен-

---

*) Кромѣ этихъ свѣдѣній для пониманія дальнѣйшаго текста отъ читателя требуется только знаніе элементарной алгебры; но для усвоенія новой научной дисциплины читатель долженъ тщательно продѣлать всѣ выкладки, приведенныя въ текстѣ, и доказать всѣ символическія соотношенія (въ §§ 8, 10, 13, 14, 16, 18), данныя авторомъ безъ доказательства.

цированіемъ соотвѣтственно по x_1 или по x_2. Самый процесъ имѣетъ обозначеніе $\frac{\partial}{\partial x_1}$ или $\frac{\partial}{\partial x_2}$.

Примѣръ. $f(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$;

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3\,a_0\,x_1^2 + 3\,.\,2\,a_1\,x_1\,x_2 + 3\,a_2\,x_2^2 = 3\left[a_0\,x_1^2 + 2\,a_1\,x_1\,x^2 + a_2\,x_2^2\right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3\,a_1\,x_1^2 + 3\,.\,2\,a_2\,x_1\,x_2 + 3\,a_3\,x_2^2 = 3\left[a_1\,x_1^2 + 2\,a_2\,x_1\,x_2 + a_3\,x_2^2\right].$$

Все вышесказанное можно формулировать такимъ образомъ: для того, чтобы продифференцировать многочленъ $f(x_1, x_2)$ по x_1 (или x_2), надо въ каждомъ членѣ его написать показатель степени x_1 (или x_2) множителемъ, а степень x_1 (или x_2) понизить на единицу.

Отъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ можно образовать вторыя частныя производныя, продифференцировавъ первыя по указанному правилу по x_1 или x_2. Ихъ обозначаютъ такъ: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ всегда равна $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$.

Примѣръ. Для многочлена предыдущаго примѣра

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 3\left[2a_0 x_1 + 2a_1 x_2\right] = 6\left[a_0 x_1 + a_1 x_2\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 3\left[2a_1 x_1 + 2a_2 x_2\right] = 6\left[a_1 x_1 + a_2 x_2\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 3\left[2a_1 x_1 + 2a_2 x_2\right] = 6\left[a_1 x_1 + a_2 x_2\right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 3\left[2a_2 x_1 + 2a_3 x_2\right] = 6\left[a_2 x_1 + a_3 x_2\right].$$

Если $f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n$, то легко получить:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = n\,(a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-1} a_1\,,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = n\,(a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-1} a_2\,.$$

Если f равно произведенію двухъ многочленовъ $\varphi\,.\,\psi$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \varphi\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,,$$

гдѣ i равно 1 или 2. (Провѣрить на частныхъ примѣрахъ.)

Введеніе.

Шестьдесятъ лѣтъ[1]) тому назадъ зародился новый отдѣлъ математики и въ этотъ сравнительно очень короткій промежутокъ времени разросся до громадныхъ размѣровъ, проникнувъ почти во всѣ многочисленныя отрасли современныхъ математическихъ знаній. Мало по малу за новымъ отдѣломъ математики установилось названіе **теоріи инваріантовъ**.

Въ началѣ своего развитія теорія инваріантовъ относилась исключительно къ области алгебраическихъ функцій и главнымъ образомъ къ области цѣлыхъ и однородныхъ функцій, т. е. такихъ функцій какъ напримѣръ:

$$a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2\,,\ a_0x_1^3+3a_1x_1^2x_2+3a_2x_1x_2^2+a_3x_2^3\,,\ \text{и т. д.}$$

Эти функціи — однородные многочлены называются обыкновенно **формами**. Если форма имѣетъ два перемѣнныхъ, называется **бинарной формой**; если три перемѣнныхъ — **троичной формой**, и т. д. Вышеприведенныя формы суть бинарныя формы второй и третьей степени.

Инваріантомъ бинарной формы называется такая функція коэффиціентовъ формы, которая при преобразованіи данной формы посредствомъ подстановки

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 \qquad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \qquad (S)$$

1) Bool. Cambrige Mathematical Journal, V. III, p. 1–20, 106—119. 1841.

не измѣняется, если не считать множителя $(\alpha\delta-\beta\gamma)^\lambda$ изъ коэффиціентовъ подстановки (S). Пояснимъ это примѣромъ. Для бинарной формы второй степени $a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2$ выраженіе $a_1^2-a_0a_2$ служитъ инваріантомъ, потому что подстановка (S) переведетъ данную форму въ другую

$$a_0y_1^2+2a_1y_1y_2+a_2y_2^2=(a_0\alpha^2+2a_1\alpha\gamma+a_2\gamma^2)y_1^2 \quad (1)$$
$$+2\left[a_0\alpha\beta+a_1(\alpha\delta+\beta\gamma)+a_2\gamma\delta\right]y_1y_2+(a_0\beta^2+2a_1\beta\delta+a_2\delta^2)y_2^2;$$

и можно показать непосредственнымъ вычисленіемъ, что для преобразованной формы разсматриваемое нами выраженіе $\alpha_1^2-\alpha_0\alpha_2$ равно $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2\ (a_1^2-a_0a_2)$, (2)
т. е. отличается отъ $a_1^2-a_0a_2$ только множителемъ $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$. Если бинарную форму n-ой степени приравнять нулю и раздѣлить ее на x_2^n, то мы получимъ уравненіе n-ой степени относительно $x=\frac{x_1}{x_2}$; напримѣръ, — форма второй степени даетъ:

$$a_0\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+2a_1\left(\frac{x_1}{x_2}\right)+a_2=0$$

или
$$a_0x^2+2a_1x+a_2=0\,. \quad (3)$$

Извѣстно, что это квадратное уравненіе имѣетъ равные корни, если $a_1^2-a_0a_2$ равно нулю. Въ этомъ мы видимъ примѣръ зависимости корней алгебраическаго уравненія и инваріанта соотвѣтственной бинарной формы. Такая тѣсная связь инваріантовъ съ корнями алгебраическихъ уравненій и обусловливаетъ главнымъ образомъ важность теоріи инваріантовъ: изучая свойства инваріантовъ, мы можемъ судить и о свойствахъ корней алгебраическихъ уравненій, не рѣшая послѣднихъ; это тѣмъ болѣе важно, что уравненія выше четвертой степени, какъ доказывается въ Высшей Алгебрѣ, нельзя рѣшить въ общемъ видѣ въ радикалахъ.

Въ теоріи инваріантовъ разсматриваются еще функціи не только коэффиціентовъ данной формы, но и перемѣнныхъ x_1, x_2, обладающія свойствомъ не мѣняться, если не считать множителя $(\alpha\delta-\beta\gamma)^\lambda$, когда форма преобразовывается посредствомъ подстановки (S); такія функціи называются **коваріантами**. Каждая форма есть коваріантъ для нея самой, потому что она при преобразованіи даже совсѣмъ не мѣняется; напримѣръ, — мы имѣли выше:

$$\alpha_0 y_1^2 + 2\alpha_1 y_1 y_2 + \alpha_2 y_2^2 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 .$$

Можно провѣрить, что для бинарной формы третьей степени $$a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 \tag{4}$$ выраженіе

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2 \tag{5}$$

есть коваріантъ, т. е.

$$(\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2) y_1^2 + (\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2) y_1 y_2 + (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2) y_2^2$$
$$=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2\left[(a_0a_2-a_1^2) x_1^2+(a_0a_3-a_1a_2)x_1x_2+(a_1a_3-a_2^2)x_2^2\right]. \tag{6}$$

Этотъ коваріантъ имѣетъ также тѣсную связь съ рѣшеніями уравненія третьей степени

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0 , \tag{7}$$

такъ какъ при тождественномъ равенствѣ коваріанта нулю:

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2 \equiv 0 ,$$

т. е. когда $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$, $a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0$, $a_1 a_3 - a_2^2 = 0$, вышеприведенное уравненіе третьей степени обращается въ уравненіе

$$(\sqrt[3]{a_0}\, x + \sqrt[3]{a_3})^3 = 0$$

и, слѣдовательно, имѣетъ три равныхъ корня.

Совмѣстнымъ инваріантомъ нѣсколькихъ формъ называется функція коэффиціентовъ этихъ формъ, не измѣняющаяся, если не считать множителя $(\alpha\delta - \beta\gamma)^\lambda$, при преобразованіи формъ посредствомъ подстановки (S). Если такая функція содержитъ еще перемѣнныя, то она называется **совмѣстнымъ коваріантомъ** данныхъ формъ.

Напримѣръ, для двухъ формъ

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 \quad \text{и} \quad b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2 \tag{8}$$

функція $$b_0 a_1^2 - 2b_1 a_1 a_0 + b_2 a_0^2 \tag{9}$$

служитъ совмѣстнымъ инваріантомъ, и функція

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1 + (a_0 b_2 - a_1 b_1) x_2 \tag{10}$$

совмѣстнымъ коваріантомъ. Не трудно провѣрить непосредственнымъ вычисленіемъ, что эти выраженія дѣйствительно не измѣняются, если не считать множителя $(\alpha\delta - \beta\gamma)^\lambda$, когда двѣ данныя формы преобразовываются посредствомъ подстановки (S).

Основною задачею теоріи инваріантовъ служитъ опредѣленіе всевозможныхъ инваріантовъ и коваріантовъ для данной формы или для данной системы формъ и изслѣдованіе ихъ свойствъ.

Для рѣшенія основной проблемы теоріи инваріантовъ въ послѣдней установились, почти съ самаго начала ея развитія, два метода, рѣзко отличающіеся другъ отъ друга.

Одинъ методъ функціональный или несимволическій, въ нѣкоторомъ родѣ аналогичный физіологическимъ методамъ естественныхъ наукъ; въ основѣ его лежитъ функціональное уравненіе $J(\alpha) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^\lambda\ J(a)$ опредѣляющее инваріантъ J, какъ функцію коэффиціентовъ данной формы или данной системы формъ, которая для преобразованныхъ формъ, посредствомъ подстановки S, будетъ $J(\alpha) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^\lambda\ J(a)$. Анализируя это функціональное уравненіе посредствомъ методовъ дифференціальнаго исчисленія, можно вывести различныя свойства инваріантовъ и коваріантовъ данной формы или данной системы формъ [1]). Это функціональное или несимволическое направленіе важно въ томъ отношеніи, что оно даетъ возможность непосредственно перейти къ общей теоріи инваріантовъ относительно группъ какихъ угодно подстановокъ, болѣе сложныхъ чѣмъ подстановка S; послѣдняя теорія, созданная геніемъ норвежскаго ученаго Софуса Ли, объединила многіе отдѣлы математики, неимѣвшіе до того, повидимому, ничего общаго, и имѣетъ несомнѣнно большое значеніе для точныхъ наукъ. Другой методъ теоріи инваріантовъ носитъ характеръ формальный или морѳологическій; онъ основанъ на

1) В. Г. Алексѣевъ. Теорія раціональныхъ инваріантовъ бинарныхъ формъ въ направленіи Софуса Ли, Кэли и Аронгольда. Юрьевъ, 1899.

особыхъ спеціальныхъ символическихъ обозначеніяхъ. Это символическое направленіе или, какъ обыкновенно его называютъ, направленіе Клебша - Гордана до сихъ поръ было господствующее въ теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ; благодаря ему въ теоріи инваріантовъ установились многія новыя понятія, нашедшія примѣненія и въ общей теоріи инваріантовъ Софуса Ли.

Одинъ изъ главнѣйшихъ представителей несимволическаго направленія въ теоріи инваріантовъ, англійскій математикъ Сильвестеръ[1]) еще въ 1878 году замѣтилъ аналогію между теоріей инваріантовъ и атомистическою теоріей химіи, но открытая имъ аналогія была слишкомъ поверхностна, сходство слишкомъ отдаленное. Это обстоятельство было сообщено Сильвестеромъ извѣстному англійскому химику Френкленду[2]), но и совмѣстныя изслѣдованія этихъ двухъ ученыхъ не привели ихъ ни къ какимъ опредѣленнымъ результатамъ.

Совсѣмъ другое получилось, когда я обратился къ символическому направленію въ теоріи инваріантовъ: здѣсь удалось мнѣ обнаружить полное совпаденіе пріемовъ, понятій и процесовъ съ таковыми въ теоріи атомистической, вся же разница заключается въ обозначеніи сцѣпленій разсматриваемыхъ элементовъ и, конечно, въ индивидуальностяхъ этихъ элементовъ. Фактъ совпаденія двухъ теорій, созданныхъ спеціалистами совершенно различныхъ въ то время наукъ, есть фактъ весьма поразительный; но слѣдуетъ только обратить вниманіе на общій морѳологическій характеръ двухъ разсматриваемыхъ теорій, и совпаденіе ихъ не будетъ уже фактомъ вполнѣ неожиданнымъ. Даже, наоборотъ, невольно напрашивается нѣсколько смѣлая мысль, что этотъ методъ изслѣдованія и еще не одинъ разъ повторится и будетъ примѣненъ въ другихъ наукахъ морѳологическаго

---

1) **American Journal of Mathematics. V. I, p. 64, 125. 1878 (Sylvester)**
2) **Ibidem, p. 126 (Frankland).**

характера. Во всякомъ случаѣ основной методъ символической теоріи инваріантовъ и формальной химіи можно назвать точнымъ морѳологическимъ методомъ. Будетъ ли этотъ методъ единственнымъ точнымъ методомъ въ морѳологическихъ изслѣдованіяхъ различныхъ наукъ или найдутся и другіе подобные методы, покажетъ будущее. Мы познакомимся въ этой статьѣ съ основаніями символической теоріи инваріантовъ и, затѣмъ, въ другой статьѣ [1]) изложимъ примѣненіе ея методовъ къ классификаціи химическихъ соединеній и химическихъ процесовъ, что и обнаружитъ совпаденіе ея съ атомистическою теоріей химіи. Такимъ образомъ будетъ доказано, что столь важная химическая теорія — атомистическая структурная, сдѣлавшая цѣлый переворотъ въ химіи и поставившая послѣднюю на высоту современнаго состоянія, хотя и была создана химиками самостоятельно, но еще нѣсколько раньше была разработана въ математикѣ въ болѣе строгой и болѣе совершенной формѣ. Это обстоятельство снова подтверждаетъ то, что для натуралистовъ весьма полезно изучать науки математическія и необходимо знакомиться съ главнѣйшими методами математики: рано или поздно многіе изъ нихъ найдутъ приложенія въ различныхъ естественныхъ наукахъ.

§ 1. Символическія обозначенія бинарныхъ формъ.

Пусть мы имѣемъ бинарную форму второй степени

$$\bar{a}_0 x_1^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_2 x_2^2 ;$$

ее можно представить въ видѣ квадрата линейной формы или формы первой степени, если положить

$$\bar{a}_0 = a_1^2 , \quad \bar{a}_1 = a_1 a_2 , \quad \bar{a}_2 = a_2^2 ;$$

въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть

$$\bar{a}_0 x_1^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_2 x_2^2 = a_1^2 x_1^2 + 2a_1 a_2 x_1 x_2 + a_2^2 x_2^2$$
$$= (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 .$$

1) В. Г. Алексѣевъ. О совпаденіи методовъ формальной химіи и символической теоріи инваріантовъ. Журн. рус. ф.-хим. Общества. Т. 33. СПБ. 1901 г.

Слѣдовательно, бинарную форму второй степени можно всегда **символически** представить въ видѣ квадрата линейной формы $a_1 x_1 + a_2 x_2$, которую мы будемъ для краткости обозначать черезъ a_x. Коэфиціенты a_1, a_2 линейной формы a_x называются **символами** коэффиціентовъ формы второй степени; но произведенія этихъ символовъ по два — a_1^2, $a_1 a_2$, a_2^2 суть уже дѣйствительные коэффиціенты $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ данной формы второй степени.

Иногда необходимо представить форму нѣсколькими группами символовъ a_1, a_2; a'_1, a'_2; a''_1, a''_2; a'''_1 a'''_2; и т. д.; то есть

$$\bar{a}_0 x_1^2 + 2\bar{a}_1 x_1 x_2 + \bar{a}_2 x_2^2 = a_x^2 = a_x'^2 = a_x''^2 = a_x'''^2 = \ldots\ldots$$

Теперь мы покажемъ, что выраженія

$$(a_1 a'_2 - a_2 a'_1) \quad \text{и} \quad a_x (\text{или } a'_x,\ a''_x,\ \ldots)$$

обладаютъ свойствами инваріантовъ и коваріантовъ. Если мы преобразуемъ $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2$ посредствомъ подстановки (S) $x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2$, $x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$, то получимъ

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = (a_1 \alpha + a_2 \gamma) y_1 + (a_1 \beta + a_2 \delta) y_2,$$

и не трудно показать, что $a_1 \alpha + a_2 \gamma$, $a_1 \beta + a_2 \delta$ суть α_1, α_2 — символы для формы преобразованной $\bar{\alpha}_0 y_1^2 + 2\bar{\alpha}_1 y_1 y_2 + \bar{\alpha}_2 y_2^2$; и въ самомъ дѣлѣ выше мы получили

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_0 &= \bar{a}_0 \alpha^2 + 2\bar{a}_1 \alpha\gamma + \bar{a}_2 \gamma^2, \\
\bar{\alpha}_1 &= \bar{a}_0 \alpha\beta + \bar{a}_1 (\alpha\delta + \beta\gamma) + \bar{a}_2 \gamma\delta, \\
\bar{\alpha}_2 &= \bar{a}_0 \beta^2 + 2\bar{a}_1 \beta\delta + \bar{a}_2 \delta^2,
\end{aligned}$$

слѣдовательно, $\bar{\alpha}_0 = (a_1 \alpha + a_2 \gamma)^2$, $\bar{\alpha}_1 = (a_1 \alpha + a_2 \gamma)(a_1 \beta + a_2 \delta)$, $\bar{\alpha}_2 = (a_1 \beta + a_2 \delta)^2$, что и требовалось доказать.

Такимъ образомъ $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2$ переходитъ въ $\alpha_y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, совсѣмъ не измѣняясь по величинѣ: $a_x = \alpha_y$, когда бинарная форма второй степени преобразуется посредствомъ подстановки (S); т. е. обладаетъ свойствомъ коваріантовъ.

Точно также мы покажемъ, что выраженіе $(a_1 a'_2 - a_2 a'_1)$, или другія выраженія, ему подобныя, пріобрѣтаетъ только множитель $(\alpha\delta-\beta\gamma)$. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\begin{aligned}(a_1a_2'-a_2a_1') &= (a_1\alpha+a_2\gamma)(a_1'\beta+a_2'\delta)-(a_1\beta+a_2\delta)(a_1'\alpha+a_2'\gamma)\\ &= a_1a_1'\alpha\beta+a_2a_1'\beta\gamma+a_1a_2'\alpha\delta+a_2a_2'\gamma\delta-a_1a_1'\alpha\beta-a_2a_1'\alpha\delta\\ &\quad -a_1a_2'\beta\gamma-a_2a_2'\gamma\delta=(\alpha\delta-\beta\gamma)(a_1a_2'-a_2a_1').\end{aligned}$$

Мы будемъ обозначать выраженіе $(a_1a_2'-a_2a_1')$ сокращенно черезъ $(a\,a')$. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что для бинарной формы второй степени символическія выраженія

$$(a\,a') \quad \text{и} \quad a_x$$

обладаютъ свойствами инваріантовъ и коваріантовъ; ихъ можно назвать элементарными инваріантами и коваріантами, но обыкновенно ихъ называютъ такъ: a_x — факторомъ перваго рода, а (aa') — скобочнымъ факторомъ (Klammerfaktor).

Процесъ обращенія двухъ факторовъ a_x, a_x' перваго рода въ скобочный факторъ (aa') называется процесомъ фальтованія (Faltungsprocess). Это есть такъ сказать процесъ сцѣпленія различныхъ символовъ одной бинарной формы второй степени, совпадающій съ процесомъ насыщенія единицъ сродства химическихъ элементовъ.

Все сказанное выше можно повторить и для формы третьей, четвертой, и вообще какой-нибудь n-ой степени. Такимъ образомъ бинарная форма f n-ой степени символически представляется черезъ

$$f=a_x^n=(a_1x_1+a_2x_2)^n, \text{ или } a_x'^n=(a_1'x_1+a_2'x_2)^n, \ldots .$$

и ея дѣйствительные коэффиціенты выражаются черезъ символы a_1, a_2 слѣдующимъ образомъ:

$$\bar{a}_0=a_1^n=a_1'^n=\ldots\ , \quad \bar{a}_1=a_1^{n-1}a_2=a_1'^{n-1}a_2'=\ldots\ ,$$
$$\bar{a}_2=a_1^{n-2}a_2^2=a_1'^{n-2}a_2'^2=\ldots\ , \quad \bar{a}_i=a_1^{n-i}a_2^i=a_1'^{n-i}a_2'^i=\ldots .$$

Какъ и въ случаѣ бинарной формы второй степени выраженія

$$(a\,a') \quad \text{и} \quad a_x$$

обладаютъ свойствами инваріантовъ и коваріантовъ; отсюда слѣдуетъ, что всевозможныя произведенія подобныхъ выраженій будутъ инваріантами или коваріантами бинарной формы

a_x^n, если только въ этихъ произведеніяхъ каждый символъ входитъ въ n-мъ измѣреніи, такъ какъ только въ этомъ случаѣ онъ представляетъ дѣйствительный коэффиціентъ бинарной формы.

Въ символической теоріи инваріантовъ доказывается и обратное предложеніе: каждый инваріантъ и коваріантъ бинарной формы a_x^n есть алгебраическая сумма произведеній факторовъ перваго рода и скобочныхъ. Мы докажемъ это предложеніе въ § 11. Такимъ образомъ для составленія инваріантовъ и коваріантовъ данной бинарной формы надо всѣми возможными способами связывать посредствомъ процеса фальтованія различныя символическія обозначенія данной формы.

§ 2. Примѣры полныхъ системъ инваріантовъ и коваріантовъ.

1. Если мы имѣемъ бинарную форму второй степени

$$f = a_x^2 = a_x'^2 = a_x''^2 = \dots,$$

то одно фальтованіе дастъ $(aa')\,a_x a_x'$; это выраженіе

$$(a_1 a_2' - a_2 a_1')(a_1 x_1 + a_2 x_2)(a_1' x_1 + a_2' x_2) = (a_1^2 a_1' a_2' - a_1 a_2 a_1'^2) x_1^2 + \dots\dots$$
$$= (\bar{a}_0 \bar{a}_1 - \bar{a}_1 \bar{a}_0) x_1^2 + \dots\dots$$

равно тождественно нулю, что нетрудно провѣрить и для послѣдующихъ членовъ.

Два фальтованія дадутъ $(aa')^2 = (a_1 a_2' - a_2 a_1')^2 = a_1^2 a_2'^2 - 2a_1 a_2 a_1' a_2' + a_2^2 a_1'^2$; это равно $a_0 a_2 - 2a_1^2 + a_2 a_0 = -2(a_1^2 - a_0 a_2)$; т. е. получается извѣстный намъ инваріантъ $a_1^2 - a_0 a_2$ бинарной формы второй степени, если не считать числоваго фактора -2. Нечетныя фальтованія будутъ всѣ нули, а четныя будутъ равны степени инваріанта $a_1^2 - a_0 a_2$ съ нѣкоторымъ числовымъ факторомъ:

$$(aa')^{2m} = N.\,(a_1^2 - a_0 a_2)^m.$$

Слѣдовательно, бинарная форма второй степени имѣетъ одинъ неприводимый инваріантъ $(aa')^2$, а остальные ея инваріанты приводятся къ степенямъ этого инваріанта. Кромѣ того, сама форма служитъ единственнымъ неприводимымъ коваріантомъ для нея самой, и всякій коваріантъ K бинарной формы a_x^2 имѣетъ видъ: $K = [a_x^2]^n\ [(aa')^2]^m$.

Система всѣхъ неприводимыхъ инваріантовъ и коваріантовъ для данной бинарной формы называется **полной системой Гордана**. Въ теоріи инваріантовъ доказывается такое предложеніе (Gordan's Endlichkeitsproblem): **всякая форма или система формъ имѣетъ конечное число неприводимыхъ инваріантовъ и коваріантовъ, черезъ которые остальные выражаются ариѳметическими дѣйствіями: сложеніемъ, вычитаніемъ и умноженіемъ.** Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы обнаружимъ справедливость этого предложенія для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

На этомъ важномъ предложеніи въ настоящее время возникъ цѣлый отдѣлъ математики: **ариѳмизація алгебраическихъ функцій**.

Для бинарной формы a_x^2 полную систему составляютъ

$$a_x^2 \quad \text{и} \quad (a\,a_1)^2,$$

или въ графо-химическихъ формулахъ $\leftarrow f \rightarrow$ и $f = f$; это предложеніе докажемъ мы вполнѣ строго въ § 5.

2. На основаніи одного общаго предложенія [1]) символической теоріи инваріантовъ для построенія совмѣстной системы неприводимыхъ ин- и коваріантовъ для двухъ формъ

$$f = a_x^2 \quad \text{и} \quad \phi = b_x^2$$

надо фальтовать степени и произведенія неприводимыхъ коваріантовъ одной со степенями и произведеніями неприводимыхъ коваріантовъ другой; слѣдовательно, въ данномъ случаѣ надо фальтовать f^m съ ϕ^n. Продукты этого фальтованія можно представить наглядно посредствомъ графохимическихъ формулъ, если первую и вторую форму написать такъ: $\quad \leftarrow f \rightarrow, \quad \leftarrow \phi \rightarrow$.

---

1) Gordan. Vorlesungen über Invariantentheorie. S. 225. Bd. II. 1887.

Мы получимъ фальтованіемъ первыхъ степеней два соединенія $\leftarrow f - \phi \rightarrow$ и $f = \phi$.

Фальтованія высшихъ степеней дадутъ распадающіяся соединенія; напримѣръ, — соединеніе $\leftleftarrows f^3 \equiv \phi^2 \rightarrow$ состоитъ изъ трехъ соединеній $\leftarrow f \rightarrow$, $\leftarrow f - \phi \rightarrow$ и $f = \phi$ (механическая смѣсь трехъ частицъ). Такимъ образомъ мы получаемъ полную совмѣстную систему для двухъ бинарныхъ формъ второй степени:

$$\leftarrow f \rightarrow, \quad f = f; \quad \leftarrow \phi \rightarrow, \quad \phi = \phi; \quad \leftarrow f - \phi \rightarrow, \quad f = \phi.$$

Въ символическихъ формулахъ эта система имѣетъ видъ a_x^2, $(aa_1)^2$; b_x^2, $(bb_1)^2$; $(ab)\, a_x b_x$, $(ab)^2$.

Далѣе, въ § 6 мы выведемъ это непосредственно.

§ 3. **Полярный процесъ.**

Разсмотримъ бинарную форму n-ой степени — a_x^n. Замѣнимъ въ этой формѣ перемѣнныя x_1, x_2 черезъ $x_1 + \lambda y_1$, $x_2 + \lambda y_2$, тогда мы получимъ выраженіе

$$[a_1(x_1 + \lambda y_1) + a_2(x_2 + \lambda y_2)]^n = [(a_1 x_1 + a_2 x_2) + \lambda(a_1 y_1 + a_2 y_2)]^n$$
$$= (a_x + \lambda a_y)^n.$$

Развернувъ послѣднее выраженіе по формулѣ бинома Ньютона, мы получимъ:

$$a_x^n + \lambda \binom{n}{1} a_y a_x^{n-1} + \lambda^2 \binom{n}{2} a_y^2 a_x^{n-2} + \lambda^3 \binom{n}{3} a_y^3 a_x^{n-3} + \ldots\ldots$$
$$+ \lambda^{n-1} \binom{n}{1} a_y^{n-1} a_x + \lambda^n a_y^n.$$

Символическія выраженія

$$a_y a_x^{n-1}, \quad a_y^2 a_x^{n-2}, \quad a_y^3 a_x^{n-3}, \quad \ldots\ldots \quad a_y^{n-1} a_x, \quad a_y^n$$

называются первою, второю, третьей, ... $n-1^{\text{ой}}$, $n^{\text{ой}}$ полярами съ перемѣн. y данной бинарной формы a_x^n.

Слѣдовательно, процесъ образованія поляръ или, какъ мы его будемъ называть дальше, полярный процесъ заключается въ томъ, что въ символическомъ произведеніи

$$a_x a_x a_x a_x \ldots\ldots$$

одинъ или нѣсколько факторовъ a_x замѣняются факторами a_y; это есть чисто символическое опредѣленіе полярнаго процеса. Помимо вышеприведеннаго опредѣленія поляръ какъ коэффиціентовъ въ извѣстномъ разложеніи по степенямъ λ, можно указать еще другое несимволическое: поляры формы a_x^n получаются (съ нѣкоторыми числовыми факторами) если къ a_x^n прилагать дифференціальный процесъ

$$\frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2 .$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ

$$\frac{\partial a_x^n}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial a_x^n}{\partial x_2} y_2 = n\, a_x^{n-1} a_1 y_1 + n\, a_x^{n-1} a_2 y_2 = n . a_y a_x^{n-1}$$

$$\frac{\partial a_y\, a_x^{n-1}}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial a_y\, a_x^{n-1}}{\partial x_1} y_2 = (n-1)\, a_y a_x^{n-2} a_1 y_1 + (n-1)\, a_y a_x^{n-2} a_2 y_2$$
$$= (n-1) . a_y^2 a_x^{n-1}$$

. . . .

Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ имѣть въ виду главнымъ образомъ символическое опредѣленіе полярнаго процеса.

Иногда разсматриваютъ поляры и со многими перемѣнными: $a_y a_z a_x^{n-2}$, $a_y^2 a_z a_x^{n-3}$, и т. д.

Замѣчаніе. Полярнымъ процесомъ можно воспользоваться для измѣненія числа единицъ сродства атомовъ нѣкоторыхъ элементовъ: напримѣръ, — шестиатомная сѣра можетъ быть представлена формою s_x^6, четырехатомная — второю полярою $s_y^2 s_x^4$ и двухатомная — четвертою полярою $s_y^4 s_x^2$; ея кислородныя соединенія будутъ: $(so)^2 (so')^2 (so'')^2$, $s_y^2 (so)^2 (so')^2$, $s_y^4 (so)^2$. Такимъ образомъ посредствомъ полярнаго процеса мы поляризуемъ одну или нѣсколько единицъ сродства или способностей къ фальтованію съ формами, содержащими перемѣнное x.

§ 4. Четыре основныхъ тождества.

Не трудно провѣрить непосредственнымъ вычисленіемъ справедливость такого тождественнаго равенства:

I) $$a_x (bc) = b_x (ac) - c_x (ab) .$$

Если въ этомъ тождественномъ равенствѣ замѣнить c_1 черезъ $-y_2$ и c_2 черезъ y_1, то получится новое тождественное равенство:

$$\text{II)} \qquad (ab)(xy) = a_x b_y - b_x a_y ,$$

потому что $c_x = c_1 x_1 + c_2 x_2$ обратится послѣ этой замѣны въ $-(x_1 y_2 - x_2 y_1) = -(xy)$, а скобочные факторы $(ac) = (a_1 c_2 - a_2 c_1)$, $(bc) = b_1 c_2 - b_2 c_1$ обратятся въ факторы перваго рода a_y, b_y.

Если возвести въ квадратъ обѣ части тождества I, то получится тождество:

$$a_x^2 (bc)^2 = b_x^2 (ac)^2 + c_x^2 (ab)^2 - 2b_x c_x (ab)(ac) ,$$

которое можно представить въ такомъ видѣ:

$$\text{III)} \qquad 2b_x c_x (ab)(ac) = b_x^2 (ac)^2 + c_x^2 (ab)^2 - a_x^2 (bc)^2 .$$

Точно также изъ тождества II получается тождество

$$\text{IV)} \qquad 2a_x b_x a_y b_y = a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - (ab)^2 (xy)^2 .$$

Эти тождества лежатъ въ основаніи всего символическаго исчисленія въ теоріи инваріантовъ, но они касаются количественныхъ соотношеній различныхъ символическихъ произведеній, т. е. характеризуютъ чисто алгебраическую индивидуальность символическихъ произведеній и посему не могутъ имѣть значенія для изслѣдованія химическихъ структуръ. Хотя эти тождества не пригодны для чисто химическихъ изслѣдованій, но мы не преминули ихъ привести и, даже больше, мы покажемъ ихъ нѣкоторыя примѣненія, дабы точнѣе установить границы между алгебраическою и структурною частью символической теоріи инваріантовъ.

§ 5. **Построеніе полной системы для бинарной формы второй степени.**

Всякій инваріантъ формы

$$a_x^2 = a_{1x}^2 = a_{2x}^2 = \ldots\ldots$$

есть произведенiе P факторовъ перваго рода a_x, a_{1x}, a_{2x}, ... и скобочныхъ (aa_1), (aa_2), (a_1a_2), ..., причемъ каждый изъ символовъ a, a_1, a_2, ... долженъ встрѣчаться не больше и не меньше какъ у двухъ факторовъ. Возможны слѣдующiе случаи:

1) Символъ a встрѣчается у двухъ факторовъ перваго рода, тогда P имѣетъ факторомъ a_x^2.

2) Символъ a встрѣчается у двухъ одинаковыхъ скобочныхъ факторовъ, тогда P имѣетъ факторомъ $(aa_1)^2$.

3) Символъ a встрѣчается въ одномъ скобочномъ факторѣ (aa_1) и затѣмъ или въ a_x, или въ (aa_2), т. е. вообще въ факторѣ a_y (гдѣ $y = x$ или $y_1 = a_{22}$, $y_2 = -a_{21}$), тогда P имѣетъ факторомъ $q = (aa_1)\, a_y\, a_{1z}$. Въ этомъ случаѣ

$$q = (aa_1)\, a_y\, a_{1z}\,, \text{ или переставивъ } a \text{ и } a_1 -$$
$$q = (a_1a)\, a_{1y}\, a_z = -(aa_1)\, a_{1y}\, a_z\,;$$

отсюда $2q = (aa_1)\,(a_y\, a_{1z} - a_{1y}\, a_z)$; но на основанiи тождества II мы имѣемъ $2q = (aa_1)^2\,(yz)$ или $q = \frac{1}{2}\,(aa_1)^2\,(yz)$. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ P имѣетъ факторомъ $(aa_1)^2$. Такимъ образомъ мы показали, что P равно или $a_x^2 \,.\, P_1$, или $(aa_1)^2 \,.\, P_1$. Относительно P_1 можно доказать аналогичное. Слѣдовательно, всякiй коварiантъ бинарной формы a_x^2 есть произведенiе степеней a_x^2 и $(aa_1)^2$; это и есть полная система формы a_x^2.

§ 6. Построенiе полной совмѣстной системы двухъ бинарныхъ формъ второй степени.

Пусть одна форма будетъ

$$a_x^2 = a_{1x}^2 = a_{2x}^2 = \ldots\ldots$$

и другая
$$b_x^2 = b_{1x}^2 = b_{2x}^2 = \ldots\ldots$$

Совмѣстный коварiантъ этихъ двухъ формъ есть произведенiе P слѣдующихъ факторовъ:

1) a_x, a_{1x}, a_{2x}, ...
2) (aa_1), (aa_2), (a_1a_2), ...
3) b_x, b_{1x}, b_{2x}, ...

4) (bb_1), (bb_2), (b_1b_2), ...

5) (ab), (ab_1), (a_1b), ... ;

при чемъ каждый символъ долженъ встрѣчаться въ P ни больше, ни меньше какъ въ двухъ факторахъ.

Возможны слѣдующіе случаи:

1), 2) и 3) случаи предыдущаго параграфа обнаруживаютъ возможность факторовъ вида a_x^2, $(aa_1)^2$, b_x^2, $(bb_1)^2$ въ совмѣстномъ коваріантѣ P.

4) Символъ a встрѣчается въ соединеніи съ символомъ b два раза, тогда P имѣетъ факторомъ $(ab)^2$.

5) Символъ a встрѣчается въ соединеніи съ символомъ b одинъ разъ и съ символомъ b_1 одинъ разъ, тогда P имѣетъ факторомъ $(ab)(ab_1)\,b_y\,b_{1z}$; но на основаніи тождества III, мы имѣемъ

$$2\,(ab)\,(ab_1)\,b_x b_{1x} = (ab)^2\,b_{1x}^2 + (ab_1)^2\,b_x^2 - (bb_1)^2\,a_x^2\,;$$

или съ перемѣннымъ y:

$$2\,(ab)\,(ab_1)\,b_y b_{1y} = (ab)^2\,b_{1y}^2 + (ab_1)^2\,b_y^2 - (bb_1)^2\,a_y^2\,;$$

поляризуя обѣ части этого соотношенія, мы получаемъ

$$(ab)\,(ab_1)\,[b_y\,b_{1z} + b_z\,b_{1y}] = (ab)^2\,b_{1y}\,b_{1z} + (ab_1)^2\,b_y b_z - (bb_1)^2\,a_y a_z\,,$$

и такъ какъ b и b_1 тождественны, то $b_y\,b_{1z}$ и $b_z\,b_{1y}$ одно и тоже:

$$2\,(ab)\,(ab_1)\,b_y\,b_{1z} = (ab)^2\,b_{1y}\,b_{1z} + (ab_1)^2\,b_y\,b_z - (bb_1)^2\,a_y\,a_z\,.$$

Слѣдовательно, P можетъ быть представлено въ видѣ суммы трехъ членовъ, изъ которыхъ первый имѣетъ факторъ $(ab)^2$, второй — факторъ $(ab_1)^2$ и третій — факторъ $(bb_1)^2$.

6) Символъ a встрѣчается въ соединеніи съ символомъ b одинъ разъ и съ этимъ же символомъ b связанъ еще символъ a_1, тогда P имѣетъ факторомъ $(ab)\,(a_1b)\,a_y a_{1z}$; слѣдовательно, этотъ случай аналогиченъ предыдущему.

7) Символъ a встрѣчается въ соединеніи съ символомъ b одинъ разъ и эти символы совсѣмъ не входятъ въ другіе скобочные факторы; P имѣетъ факторомъ $(ab)\,a_x b_x$.

Сопоставляя все, разсмотрѣнное нами въ этихъ семи случаяхъ, мы заключаемъ, что всякій совмѣстный коваріантъ двухъ бинарныхъ формъ второй степени есть цѣлая алгебраическая функція выраженій:

$$a_x^2, \ (aa_1)^2; \ b_x^2, \ (bb_1)^2; \ (ab)\,a_x b_x, \ (ab)^2;$$

это и есть полная совмѣстная система двухъ разсматриваемыхъ формъ, которую мы получили въ § 2 при помощи графо-химическаго метода.

§ 7. Сопоставленіе двухъ формъ (Ueberschiebung).

Сопоставленіемъ двухъ формъ называется сумма результатовъ всевозможныхъ однократныхъ или многократныхъ фальтованій двухъ данныхъ формъ, дѣленная на число фальтованій.

Результатъ одного фальтованія всевозможныхъ паръ факторовъ двухъ данныхъ формъ f и φ называется первымъ сопоставленіемъ этихъ формъ и обозначается такъ: $(f, \varphi)_1$. Результатъ двухъ фальтованій — вторымъ сопоставленіемъ и обозначается такъ: $(f, \varphi)_2$. Вообще, результатъ k фальтованій называется k-тымъ сопоставленіемъ и обозначается символомъ $(f, \varphi)_k$.

Если формы f и φ суть формы въ собственномъ смыслѣ, т. е. $f = a_x^n$ и $\varphi = b_x^m$, то процесъ сопоставленія и процесъ фальтованія тождественны: $(f, \varphi)_k = (ab)^k a_x^{n-k} b_x^{m-k}$.

Если же формы f и φ суть коваріанты или произведенія нѣкоторыхъ формъ, т. е. f и φ имѣютъ нѣсколько различныхъ факторовъ перваго рода, то сопоставленіе будетъ болѣе сложный символическій процесъ, чѣмъ процесъ фальтованія.

Въ началѣ развитія символической теоріи инваріантовъ изслѣдованія въ этой области основывались главнымъ образомъ на процесѣ сопоставленія. Горданъ первый предложилъ болѣе элементарный процесъ фальтованія; благодаря этому, многія изслѣдованія въ символической теоріи инваріантовъ значительно упростились и явилась возможность ихъ дальнѣйшихъ обобщеній. Такимъ образомъ, при помощи процеса фальтованія, явилась, напримѣръ, возможность доказать теорему Гордана о конечности числа неприводимыхъ коваріантовъ для всякой системы бинарныхъ формъ, на которую мы ссылались въ § 2.

Примѣры сопоставленій двухъ формъ.

1) Пусть $f = a_x a_{1x}$ и $\varphi = b_x b_{1x}$, тогда

$$(f, \varphi)_1 = \tfrac{1}{4}\left[(ab)\, a_{1x} b_{1x} + (ab_1)\, a_{1x} b_x + (a_1 b)\, a_x b_{1x} + (a_1 b_1)\, a_x b_x\right]$$

$$(f, \varphi)_2 = \tfrac{1}{2}\left[(ab)(a_1 b_1) + (ab_1)(a_1 b)\right]$$

2) Пусть $f = a_x^2 a_{1x}$ и $\varphi = b_x^2 b_{1x}$, тогда

$$(f, \varphi)_1 = [a_x a_x a_{1x},\ b_x b_x b_{1x}]_1$$

$$= \tfrac{1}{9}\big[(ab) a_x a_{1x} b_x b_{1x} + (ab) a_x a_{1x} b_x b_{1x} + (ab_1) a_x a_{1x} b_x b_x + \text{(тѣ же сам.ч.)}$$
$$+ (a_1 b) a_x a_x b_x b_{1x} + (a_1 b) a_x a_x b_x b_{1x} + (a_1 b_1) a_x a_x b_x b_x\big]$$

$$= \tfrac{1}{9}\left[4(ab)\, a_x a_{1x} b_x b_{1x} + 2(ab_1) a_x a_{1x} b_x^2 + 2(a_1 b) a_x^2 b_x b_{1x} + (a_1 b_1) a_x^2 b_x^2\right].$$

$$(f, \varphi)_2 = [a_x a_x a_{1x},\ b_x b_x b_{1x}]_2 = \tfrac{1}{9}\big[(ab)^2 a_{1x} b_{1x} + 2\,(ab)(ab_1) a_{1x} b_x$$
$$+ 2\,(ab)(a_1 b)\, a_x b_{1x} + 4\,(ab)\,(a_1 b_1)\, a_x b_x\big]$$

$$(f, \varphi)_3 = [a_x a_x a_{1x},\ b_x b_x b_{1x}]_3 = \tfrac{1}{3}\left[(ab)^2 (a_1 b_1) + 2(ab)(ab_1)(a_1 b)\right].$$

§ 8. **Поляры произведеній нѣсколькихъ факторовъ перваго рода. Отдѣльные члены поляръ.**

Если мы имѣемъ произведеніе $F = a_x^2 b_x^3$, то его можно разсматривать какъ форму пятой степени z_x^5, т. е.

$$F = z_x^5 = a_x^2 b_x^3.$$

Примѣняя несимвол. полярный процесъ $\frac{1}{5}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2\right)$ къ обѣимъ частямъ этого неравенства, мы получаемъ:

$$F_y = z_x^4 z_y = \frac{1}{5}(2 a_x a_y b_x^3 + 3 a_x^2 b_x^2 b_y);$$

точно также дальнѣйшія примѣненія этихъ процесовъ дадутъ:

$$F_{y^2} = z_x^3 z_y^2 = \frac{1}{5.4}(2 a_y^2 b_x^3 + 12 a_x a_y b_x^2 b_y + 6 a_x^2 b_x b_y^2),$$

$$F_{y^3} = z_x^2 z_y^3 = \frac{1}{5.4.3}(18 a_y^2 b_x^2 b_y + 36 a_x a_y b_x b_y^2 + 6 a_x^2 b_y^3),$$

$$F_{y^4} = z_x z_y^4 = \frac{1}{5.4.3.2}(72 a_y^2 b_x b_y^2 + 48 a_x a_y b_y^3),$$

$$F_{y^5} = z_y^5 = \frac{1}{5.4.3.2.1}(120 a_y^2 b_y^3) = a_y^2 b_y^3.$$

Мы имѣемъ изъ этихъ равенствъ $F_y = c_1 G_1 + c_2 G_2$, гдѣ $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{3}{5}$ и $c_1 + c_2 = 1$; $G_1 = a_x a_y b_x^3$, $G_2 = a_x^2 b_x^2 b_y$ суть члены поляры F_y. Выраженія G_1 и G_2 отличаются другъ отъ друга тѣмъ, что $a_x b_y$ замѣняется черезъ $a_y b_x$, или наоборотъ; такія произведенія называются смежными.

Разность $G_1 - G_2 = - a_x b_x^2 (a_x b_y - a_y b_x)$ можно представить проще при помощи тождества II (§ 4):

$$G_1 - G_2 = -(xy)(ab) a_x b_x^2 .$$

Изъ равенствъ
$$\begin{array}{l|l} F_y = c_1 G_1 + c_2 G_2 & 1 \\ 1 = c_1 \quad + c_2 & G_1 \end{array}$$
мы получаемъ $F_y - G_1 = c_2 (G_2 - G_1)$, или

$$\begin{aligned} a_x a_y b_x^3 = G_1 &= F_y - c_2 (xy)(ab) a_x b_x^2 \\ &= [a_x^2 b_x^3]_y - \tfrac{3}{5} (a_x^2, b_x^3)_1 (xy); \end{aligned}$$

точно также $a_x^2 b_x^2 b_y = G_2 = [a_x^2 b_x^3]_y + \frac{2}{5} (a_x^2, b_x^3)_1 (xy)$.

Слѣдовательно, члены первой поляры можно выразить черезъ самую поляру и черезъ первое сопоставленіе ея факторовъ.

Для второй поляры мы имѣемъ $F_{y^2} = c_1 G_1 + c_2 G_2 + c_3 G_3$, гдѣ $c_1 = \frac{1}{10}$, $c_2 = \frac{6}{10}$, $c_3 = \frac{3}{10}$ и $c_1 + c_2 + c_3 = 1$; $G_1 = a_y^2 b_x^3$, $G_2 = a_x a_y b_x^2 b_y$, $G_3 = a_x^2 b_x b_y^2$ суть члены поляры, попарно смежные.

Мы имѣемъ

$$\begin{aligned} G_1 - G_2 &= - a_y b_x^2 (a_x b_y - a_y b_x) = -(xy)(ab) a_y b_x^2 = -(xy) H_1, \\ G_2 - G_3 &= - a_x b_x b_y (a_x b_y - a_y b_x) = -(xy)(ab) a_x b_x b_y = -(xy) H_2. \end{aligned}$$

Изъ соотношеній
$$\begin{array}{l|l} F_{y^2} = c_1 G_1 + c_2 G_2 + c_3 G_3 & 1 \\ 1 \quad = c_1 \quad + c_2 \quad + c_3 & G_1 \end{array}$$
получаемъ

$$\begin{aligned} G_1 &= F_{y^2} - c_2 (G_2 - G_1) - c_3 (G_3 - G_1) \\ &= [a_x^2 b_x^3]_{y^2} - c_2 H_1 (xy) - c_3 (H_1 + H_2)(xy); \end{aligned}$$

точно также

$$\begin{aligned} G_2 &= F_{y^2} - c_1 (G_1 - G_2) - c_3 (G_3 - G_2) \\ &= [a_x^2 b_x^3]_{y^2} + c_1 H_1 (xy) - c_3 H_2 (xy), \\ G_3 &= F_{y^2} - c_1 (G_1 - G_3) - c_2 (G_2 - G_3) \\ &= [a_x^2 b_x^3]_{y^2} + c_1 (H_1 + H_2) + c_2 H_2 (xy). \end{aligned}$$

Взявъ первую поляру отъ $(ab) a_x b_x^2 = (a_x^2, b_x^3)_1$, мы получимъ

$$(a_x^2, b_x^3)_{1y} = \tfrac{1}{3} (ab) a_y b_x^2 + \tfrac{2}{3} (ab) a_x b_x b_y = \tfrac{1}{3} H_1 + \tfrac{2}{3} H_2$$

отсюда мы имѣемъ $H_1 = (a_x^2, b_x^3)_{1y} - \frac{2}{3}(H_2 - H_1)$,

$$H_2 = (a_x^2, b_x^3)_{1y} - \frac{1}{3}(H_1 - H_2);$$

принявъ же во вниманіе, что $H_1 - H_2 = -(ab)\,b_x(a_x b_y - a_y b_x)$ на основаніи тождества II, получимъ $H_1 - H_2 = -(ab)^2 b_x (xy)$, или $H_1 - H_2 = -(a_x^2, b_x^3)_2 (xy)$. Слѣдовательно, можно написать:

$$H_1 = (a_x^2, b_x^3)_{1y} - \frac{2}{3}(a_x^2, b_x^3)_2 (xy),$$
$$H_2 = (a_x^2, b_x^3)_{1y} + \frac{1}{3}(a_x^2, b_x^3)_2 (xy).$$

Подставивъ эти значенія H_1 и H_2 въ вышеприведенныя выраженія для G_1, G_2, G_3, мы получимъ:

$$\begin{aligned}
a_y^2 b_x^3 &= G_1 = [a_x^2 b_x^3]_{y^2} - (c_2 + 2c_3)\,[a_x^2, b_x^3]_{1y}(xy) \\
&\qquad + (\tfrac{2}{3}c_2 - \tfrac{1}{3}c_3)\,[a_x^2, b_x^3]_2 (xy)^2, \\
a_x a_y b_x^2 b_y &= G_2 = [a_x^2 b_x^3]_{y^2} + (c_1 - c_3)\,[a_x^2, b_x^3]_{1y}(xy) \\
&\qquad - (\tfrac{2}{3}c_1 + \tfrac{1}{3}c_3)\,[a_x^2, b_x^3]_2 (xy)^2, \\
a_x^2 b_x b_x^2 &= G_3 = [a_x^2 b_x^3]_{y^2} + (2c_1 + c_2)\,[a_x^2, b_x^3]_{1y}(xy) \\
&\qquad + (\tfrac{1}{3}c_2 - \tfrac{1}{3}c_1)\,[a_x^2, b_x^3]_2 (xy)^2.
\end{aligned}$$

Такимъ же образомъ можно получить **разложенія** для членовъ другихъ поляръ даннаго произведенія $a_x^2 b_x^3$ **по полярамъ сопоставленій двухъ факторовъ этого произведенія и по возрастающимъ степенямъ** (xy).

Сопоставленія $(a_x^2, b_x^3)_1 = (ab)\,a_x b_x^2$, $(a_x^2, b_x^3)_2 = (ab)^2 b_x$ называются **элементарными коваріантами** даннаго произведенія $a_x^2 . b_x^3$.

Указанное разложеніе можно получить для всякаго произведенія вида $a_x^m a_y^n b_x^p b_y^q$, такъ какъ это произведеніе, очевидно, служитъ членомъ $n + q^{\text{ой}}$ поляры произведенія $a_x^{m+n} b_x^{p+q}$. По аналогіи мы можемъ написать разложеніе и для этого общаго случая:

$$a_x^m a_y^n b_x^p b_y^q = [a_x^{m+n} b_x^{p+q}]_{y^{n+q}} + \alpha_1 [a_x^{m+n}, b_x^{p+q}]_{1y^{n+q-1}}(xy) +$$
$$+ \alpha_2 [a_x^{m+n}, b_x^{p+q}]_{2y^{n+q-2}}(xy)^2 + \ldots + \alpha_\nu [a_x^{m+n}, b_x^{p+q}]_{\nu y^{n+q-\nu}}(xy)^\nu +$$
$$+ \ldots + \alpha_{n+q} [a_x^{m+n}, b_x^{p+q}]_{n+q}(xy)^{n+q}.$$

Мы докажемъ возможность этого разложенія, найдя способъ опредѣлять его числовые коэффиціенты α. Но прежде, чѣмъ перейти къ этому способу, мы познакомимся со свойствами такъ называемаго процеса Ω, при помощи котораго мы будемъ имѣть возможность вычислить коэффиціенты α.

§ 9. Процесъ Ω и его свойства.

Разсмотримъ дифференціальный процесъ

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1}$$

и изучимъ его нѣкоторыя свойства по отношенію къ произведеніямъ символическихъ факторовъ съ перемѣнными x и y.

1) Пусть мы имѣемъ произведеніе $u = z_x^m s_y^n$.

Дифференцированія даютъ

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = m z_x^{m-1} s_y^n z_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = m z_x^{m-1} s_y^n z_2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} = mn\, z_x^{m-1} s_y^{n-1} z_1 s_2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = mn\, z_x^{m-1} s_y^{n-1} z_2 s_1;$$

слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\Omega(u) = mn\,(zs)\, z_x^{m-1} s_y^{n-1},$$

т. е. результатъ процеса Ω, примѣненнаго къ произведенію $z_x^m s_y^n$, получается фальтованіемъ факторовъ z_x^m и s_y^n и умноженіемъ на mn — произведеніе ихъ степеней; это фальтованіе можно назвать смѣшаннымъ.

2) Возьмемъ, далѣе, произведеніе $u = a_x^m a_y^n b_x^p b_y^q$.

Непосредственныя вычисленія могутъ дать:

$$\Omega(u) = mq\,(ab)\, a_x^{m-1} a_y^n b_x^p b_y^{q-1} - np\,(ab)\, a_x^m a_y^{n-1} b_x^{p-1} b_y^q,$$

$$\Omega^2(u) = mq.(m-1)(q-1)(ab)^2 a_x^{m-2} a_y^n b_x^p b_y^{q-2} - 2mq.np.(ab)^2 a_x^{m-1} a_y^{n-1} b_x^{p-1} b_y^{q-1}$$
$$+ np.(n-1)(p-1)(ab)^2 a_x^m a_y^{n-2} b_x^{p-2} b_y^q, \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что результатъ ν-кратнаго примѣненія процеса Ω къ произведенію $u = a_x^m a_y^n b_x^p b_y^q$ состоитъ изъ суммы членовъ, которые получаются изъ u ν-кратными смѣшанными фальтованіями; при этомъ надо фальтовать первый факторъ a_x^m съ послѣднимъ b_y^q и приписать числовой множитель

$$mq.(m-1)(q-1)\ldots\ldots(m-i+1)(q-i+1),$$

если i фальтованій, или второй факторъ a_y^n — съ третьимъ b_x^p и приписать числовой множитель

$$(-1)^j np\,.\,(n-1)(p-1)\,\ldots\ldots\,(n-j+1)(p-j+1)\,,$$

если число фальтованій втораго рода j; число всѣхъ членовъ, получаемыхъ i фальтованіями перваго рода и j фальтованіями втораго рода, конечно, равно числу сочетаній изъ ν элементовъ по i, т. е. биноміальному коэффиціенту $\binom{\nu}{i}$.

Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\Omega^\nu (a_x^m a_y^n b_x^p b_y^q)$$

$$= f_1^{\nu} (ab)^\nu a_x^{m-\nu} a_y^n b_x^p b_y^{q-\nu} - \binom{\nu}{1} f_1^{\nu-1} f_2^1 (ab)^\nu a_x^{m-\nu+1} a_y^{n-1} b_x^{p-1} b_y^{q-\nu+1}$$

$$+ \ldots\ldots + (-1)^i \binom{\nu}{i} f_1^{\nu-i} f_2^i (ab)^\nu a_x^{m-\nu+i} a_y^{n-i} b_x^{p-i} b_y^{q-\nu+i} + \ldots\ldots$$

гдѣ $f_1^i = mq\,.\,(m-1)(q-1)\,\ldots\ldots\,(m-i+1)(q-i+1)\,,$

$f_2^j = np\,.\,(n-1)(p-1)\,\ldots\ldots\,(n-j+1)(p-j+1)\,.$

3) Разсмотримъ, далѣе, выраженіе $u=(xy)^k=(x_1y_2-x_2y_1)^k$. Дифференцированіе даетъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = k\,(xy)^{k-1}\,y_2\,,\quad \frac{\partial u}{\partial x} = -k(xy)^{k-1}\,y_1\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} = k\,(k-1)(xy)^{k-2}\,x_1y_2 + k(xy)^{k-1},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = k(k-1)x_2y_1(xy)^{k-2} - k(xy)^{k-1}.$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\Omega\,(xy)^k = k\,(k+1)\,.\,(xy)^{k-1}.$$

Точно также получимъ:

$$\Omega^2\,(xy)^k = k\,(k+1)\,.\,(k-1)\,k\,.\,(xy)^{k-2}$$

$$\Omega^3\,(xy)^k = k\,(k+1)\,.\,(k-1)\,k\,.\,(k-2)\,(k-1)\,.\,(xy)^{k-3}$$

. . . .

$$\Omega^\nu\,(xy)^k = k\,(k+1)\,.\,(k-1)\,k\,\ldots\,(k-i+1)\,(k-i+2)\,.\,(xy)^{k-\nu}$$

4) Разсмотримъ, наконецъ, выраженіе $u = a_x^{m-n} a_y^n (xy)^k$. Непосредственныя вычисленія дадутъ намъ:

$$\Omega\,[a_x^{m-n}\,a_y^n\,(xy)^k] = k\,(m+k+1)\,.\,a_x^{m-n}\,a_y^n\,(xy)^{k-1}.$$

Точно также мы получимъ:

$$\Omega^2\,[a_x^{m-n}\,a_y^n\,(xy)^k] = k\,(m+k+1)\,.\,(k-1)\,(m+k)\,.\,a_x^{m-n}\,a_y^n(xy)^{k-2},$$

. . . .

$$\Omega^i\,[a_x^{m-n}\,a_y^n\,(xy)^k] =$$

$$= k(m+k+1)\,.\,(k-1)\,(m+k)\,\ldots\ldots\,(k-i+1)(m+k-i+2)\,.\,a_x^{m-n}\,a_y^n\,(xy)^{k-i}.$$

Такъ какъ $a_x^{m-n} a_y^n$ есть n-ная поляра формы $f = a_x^m$, то послѣднюю формулу мы можемъ написать еще въ такомъ видѣ:

$$\Omega^i [f_{y^n} (xy)^k] = k (m + k + 1) . (k - 1) (m + k) \ldots\ldots (k - i + 1) (m + k - i + 2) . f_{y^n} (xy)^{k-i}.$$

§ 10. Вычисленіе коэффиціентовъ α въ разложеніи § 8.

Для вычисленія коэффиціента α_ν въ разложеніи произведенія $u = a_x^m a_y^n b_x^p b_y^q$ по полярамъ элементарныхъ коваріантовъ и по возрастающимъ степенямъ (xy), которое приведено въ концѣ § 8, примѣнимъ ν-кратный процесъ Ω^ν къ обѣимъ частямъ равенства въ концѣ § 8 и затѣмъ положимъ $y = x$.

Въ лѣвой части получимъ на основаніи выведенной въ § 9 (случай 2) формулы:

$$[\Omega^\nu (a_x^m a_y^n b_x^p b_y^q)]_{y=x} = (f_1 - f_2)^\nu (ab)^\nu a_x^{m+n-\nu} b_x^{p+q-\nu}.$$

Въ правой части всѣ члены, кромѣ члена съ $(xy)^\nu$, исчезнутъ — или отъ примѣненія процеса Ω^ν (это — члены, для которыхъ показатель степени (xy) меньше ν), или вслѣдствіе предположенія $y = x$ (это — члены, для которыхъ показатель степени (xy) больше ν, потому что они будутъ имѣть факторъ $(xy) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)$, обращающійся въ нуль при $y = x$, и послѣ примѣненія процеса Ω^ν). Слѣдовательно, въ правой части мы получимъ выраженіе:

$$\alpha_\nu \Big[\Omega^\nu \{ [a_x^{m+n} , b_x^{p+q}]_{\nu y^{n+q-\nu}} (xy)^\nu \}\Big]_{y=x}.$$

Это выраженіе на основаніи послѣдней формулы § 9 (случай 4) равно $(ab)^\nu a_x^{m+n-\nu} b_x^{p+q-\nu}$, умноженному на числ. факторъ

$$\alpha_\nu . \nu (m + n + p + q - \nu + 1) . (\nu - 1) (m + n + p + q - \nu) . (\nu - 2)(m + n + p + q - \nu - 1) \ldots . 1 . (m + n + p + q - 2\nu + 2)$$

$$= \alpha_\nu \prod_0^{\nu-1} (\nu - i) (m + n + p + q - \nu + 1 - i) .$$

Сравнивая окончательные результаты въ правой и лѣвой части нашего равенства, мы опредѣлимъ коэффиціентъ α_ν:

$$\alpha_\nu = \frac{(f_1 - f_2)^\nu}{\prod\limits_0^{\nu-1} (\nu - i)(m + n + p + q - \nu + 1 - i)};$$

въ этой формулѣ

$$f_1^i = mq\,.(m-1)(q-1)\,\ldots\ldots(m-i+1)(q-i+1)\,,$$
$$f_2^j = np\,.(n-1)(p-1)\,\ldots\ldots(n-j+1)(p-j+1)\,.$$

Изложенный въ этомъ параграфѣ способъ опредѣленія числовыхъ коэффиціентовъ въ разложеніи символическаго произведенія впервые предлагается мною. Онъ даетъ возможность не только получить вышеприведенную формулу для коэффиціентовъ α_ν въ разложеніи произведенія $a_x^m a_y^n b_x^p b_y^q$, но также вычислить коэффиціенты въ разложеніяхъ болѣе сложныхъ символическихъ произведеній. Подробное изложеніе этого способа помѣщено въ 22 томѣ „Математическаго Сборника", издаваемаго московскимъ математическимъ обществомъ.

Изъ моей формулы для α_ν непосредственно вытекаютъ извѣстныя формулы [1]) Клебша-Гордана для коэффиціентовъ α_ν', α_ν'' въ разложеніяхъ символическихъ произведеній $a_x^m a_y^n b_y^q$, $a_x^m b_y^q$, если въ ней положить послѣдовательно $p = 0$ и $n = p = 0$:

$$\alpha_\nu' = \frac{\binom{m}{\nu}\binom{q}{\nu}}{\binom{m+n+q+1-\nu}{\nu}}\,, \quad \alpha_\nu'' = \frac{\binom{m}{\nu}\binom{q}{\nu}}{\binom{m+q+1-\nu}{\nu}}\,.$$

Примѣръ. Воспользуемся формулой для α_ν при разложеніи символическаго произведенія $u = a_x a_y b_x^2 b_y$.

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ $m = 1$, $n = 1$, $p = 2$, $q = 1$. Слѣдовательно, по формулѣ для α_ν мы опредѣлимъ:

$$\alpha_1 = \frac{f_1 - f_2}{1.(1+1+2+1-1+1)} = \frac{1.1 - 1.2}{1.5} = -\frac{1}{5}\,,$$

$$\alpha_2 = \frac{f_1^2 - 2f_1 f_2 + f_2^2}{2.(5-2+1).1.(5-2+1-1)} = \frac{1.1.0.0 - 2.1.1.1.2 + 1.2.0.1}{2.4.1.3} = -\frac{1}{6}\,.$$

1) Gordan. Vorlesungen über Invariantentheorie, S. 86, 88. Bd. II. 1887.

Такимъ образомъ искомое разложеніе будетъ имѣть видъ:

$$a_x a_y b_x^2 b_y = [a_x^2 b_x^3]_{y^2} - \frac{1}{5}[a_x^2, b_x^3]_{1y}(xy) - \frac{1}{6}[a_x^2, b_x^3]_2 (xy)^2 .$$

Въ § 8 мы имѣли разложеніе этого произведенія, опредѣленное другимъ путемъ, которое вполнѣ совпадаетъ съ этимъ разложеніемъ, если принять во вниманіе, что въ прежнемъ $c_1 - c_3 = -\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_3 = \frac{1}{6}$.

Подобно этому можно провѣрить справедливость нашихъ общихъ формулъ для α_ν, α_ν', α_ν'' на другихъ примѣрахъ въ § 8.

Разложеніе въ ряды символическихъ произведеній играетъ важную роль въ символической теоріи инваріантовъ, потому что оно даетъ возможность представлять формы съ двумя, а въ общемъ случаѣ и со многими, перемѣнными черезъ поляры формъ съ однимъ перемѣннымъ.

§ 11. **Каждый инваріантъ или коваріантъ есть алгебраическая сумма символическихъ произведеній.**

Докажемъ это предложеніе сначала для инваріантовъ одной формы

$$f = \bar{a}_0 x_1^n + \binom{n}{1}\bar{a}_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2}\bar{a}_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots\ldots + \bar{a}_n x_2^n$$
$$= a_x^n = a_{1x}^n = a_{2x}^n = \ldots$$

Если эту форму преобразовать посредствомъ линейной подстановки S:

$$x_1 = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 , \quad x_2 = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 ,$$

то она перейдетъ въ форму

$$F = \bar{A}_0 y_1^n + \binom{n}{1}\bar{A}_1 y_1^{n-1} y_2 + \binom{n}{2}\bar{A}_2 y_1^{n-2} y_2 + \ldots + \bar{A}_n y_2^n = A_y^n ,$$

у которой коэффиціентами, очевидно, будутъ различныя поляры формы a_ξ^n съ перемѣннымъ η: $\bar{A}_\rho = a_\xi^{n-\rho} a_\eta^\rho$.

Инваріантомъ формы f называется цѣлая раціональная функція i коэффиціентовъ $\bar{a}$, которая для преобразованной формы F имѣетъ значеніе $J = i \,.\, (\xi\eta)^\lambda$. Отсюда слѣдуетъ, что J должна быть функціей перемѣнныхъ ξ, η степени λ относительно того и другаго, т. е. $J = r_\xi^\lambda s_\eta^\lambda$; здѣсь r_ξ^λ есть сумма символическихъ произведеній вида $a_\xi^k a_{1\xi}^{k_1} a_{2\xi}^{k_2} \ldots$, и s_η^λ — сумма символическихъ произведеній вида $a_\eta^l a_{1\eta}^{l_1} a_{2\eta}^{l_2} \ldots$.

Развернувъ символическое произведеніе $J = r_\xi^\lambda s_\eta^\lambda$ въ рядъ по полярамъ его элементарныхъ коваріантовъ и по возрастающимъ степенямъ $(\xi\eta)$, мы получимъ на основаніи предыдущаго параграфа:

$$J = r_\xi^\lambda s_\eta^\lambda = \left[r_\xi^\lambda s_\xi^\lambda\right]_{\eta^\lambda} + \alpha_1'' \left[r_\xi^\lambda, s_\xi^\lambda\right]_{1\eta^{\lambda-1}} (\xi\eta) + \alpha_2'' \left[r_\xi^\lambda, s_\xi^\lambda\right]_{2\eta^{\lambda-2}} (\xi\eta)^2$$
$$+ \ldots + \alpha_\lambda'' \left[r_\xi^\lambda, s_\xi^\lambda\right]_\lambda (\xi\eta)^\lambda .$$

Но такъ какъ J должно выдѣлить факторъ $(\xi\eta)^\lambda$, то въ этомъ разложеніи всѣ члены кромѣ послѣдняго должны обратиться въ нуль. Слѣдовательно, мы получаемъ тождественное равенство

$$i \, . \, (\xi\eta)^\lambda \equiv \alpha_\lambda'' \left[r_\xi^\lambda, s_\xi^\lambda\right]_\lambda . \, (\xi\eta)^\lambda ,$$

откуда имѣемъ $$i = \alpha_\lambda'' \left[r_\xi^\lambda, s_\xi^\lambda\right]_\lambda .$$

Такимъ образомъ мы показали, что инваріантъ i можетъ быть представленъ какъ алгебраическая сумма λ-кратныхъ фальтованій произведеній вида $a_\xi^k a_{1\xi}^{k_1} a_{2\xi}^{k_2} \ldots$, гдѣ $k + k_1 + k_2 + \ldots = \lambda$, съ произведеніями того же вида $a_\xi^l a_{1\xi}^{l_1} a_{2\xi}^{l_2} \ldots$, гдѣ $l + l_1 + l_2 + \ldots = \lambda$. Это и требовалось доказать.

Очевидно, что предложеніе справедливо и для совмѣстныхъ инваріантовъ какой угодно системы бинарныхъ формъ $f, \varphi, \psi, \chi, \ldots$, такъ какъ и въ этомъ случаѣ можно повторить предыдущія разсужденія; придется только ввести новые символическіе факторы $b_\xi^{k'} b_{1\xi}^{k_1'} b_{2\xi}^{k_2'} \ldots c_\xi^{k''} c_{1\xi}^{k_1''} c_{2\xi}^{k_2''} \ldots$ и соотвѣтственные съ η, принадлежащіе еще другимъ формамъ данной системы $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.

Наконецъ, предложеніе справедливо и для коваріантовъ, потому что каждый совмѣстный коваріантъ $i(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots; x_1, x_2)$ системы формъ $f, \varphi, \psi, \chi, \ldots$ можно обратить въ инваріантъ $i(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots\ldots; -g_2, g_1)$ для системы формъ

$f, \varphi, \psi, \chi, \ldots, g_1 x_1 + g_2 x_2$, замѣняя x_1, x_2 черезъ $-g_2, g_1$. Послѣднюю замѣну мы въ правѣ сдѣлать, потому что при преобразованіи x посредствомъ подстановки $S_{\xi\eta}$

$$x_1 = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2\,,\ x_2 = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2$$

форма $g_1 x_1 + g_2 x_2$ переходитъ въ форму

$$G_1 y_1 + G_2 y_2 = (\xi_1 g_1 + \eta_1 g_2)\, y_1 + (\xi_2 g_1 + \eta_2 g_2)\, y_2\,,$$

т. е. $$G_1 = \xi_1 g_1 + \eta_1 g_2\,,\ \ G_2 = \xi_2 g_1 + \eta_2 g_2$$

или $$-g_2 = \frac{\xi_1}{(\xi\eta)}(-G_2) + \frac{\xi_2}{(\xi\eta)} G_1\,,\ \ g_1 = \frac{\eta_1}{(\xi\eta)}(-G_2) + \frac{\eta_2}{(\xi\eta)} G_1\,;$$

это же показываетъ, что $-g_2$, g_1 преобразуются посредствомъ подстановки, отличающейся отъ подстановки S только на факторъ $(\xi\eta)$, который въ однородныхъ функціяхъ выдѣляется, не нарушая инваріантнаго свойства. Такія перемѣнныя величины какъ x_1, x_2 и $-g_2$, g_1, преобразующіяся посредствомъ одной и той же подстановки $S_{\xi\eta}$ или посредствомъ подстановокъ, отличающихся въ коэффиціентахъ на факторъ $(\xi\eta)$, называются когредіентными перемѣнными. Если мы имѣемъ нѣкоторый инваріантъ i, то для него существуетъ функціональное уравненіе $J = i\,.\,(\xi\eta)^\lambda$. Очевидно, что замѣна одной пары перемѣнныхъ x_1, x_2 когредіентными съ ними перемѣнными $-g_2$, g_1 измѣнитъ только показатель λ.

§ 12. Эквивалентность символическихъ произведеній.

Если два символическихъ произведенія P и Q 1) имѣютъ одни и тѣже символы и въ одинаковыхъ степеняхъ, 2) одно и тоже число скобочныхъ факторовъ, но самые скобочные факторы могутъ быть различны, 3) тѣже самыя степени относительно перемѣнныхъ, то символическія произведенія называются эквивалентными; ихъ можно назвать также изомерными по аналогіи съ извѣстнымъ химическимъ понятіемъ; объ этой аналогіи мы будемъ говорить въ статьѣ: „О совпад. метод.“ (См. выше стр. 10, прим.)

Примѣръ. Произведенія

$$P = (ab)^3 (cd)^2 (ac)^3 (bc)^4 (ad)^2 a_x b_x^2 e_x^2 c_y^3 d_y^2$$
$$Q = (ab)^3 (cd)^2 (ac)^2 (bc)^3 (ad)^4 b_x^3 c_x^2 c_y^3 e_y^2$$

суть эквивалентныя произведенія: [1]) они содержатъ одни и тѣже символы a, b, c, d, e въ одинаковыхъ степеняхъ — 9, 9, 12, 6, 2; [2]) они имѣютъ одни и тѣже скобочные факторы $(ab)^3 (cd)^2$, а остальные скобочные факторы хотя и различны, но ихъ число 9 одинаково для обоихъ произведеній; [3]) оба произведенія содержатъ перемѣнныя x и y въ степеняхъ 5 и 5. Такъ какъ эти произведенія имѣютъ одинаковые скобочные факторы $(ab)^3 (cd)^2$, то можно сказать, что они эквивалентны или изомерны внутри класса $K = (ab)^3 (cd)^2$.

Не трудно усмотрѣть, что эквивалентныя произведенія суть члены поляръ нѣкотораго сопоставленія.

Разсмотримъ нашъ примѣръ. Произведенія P и Q очевидно служатъ членами поляры — 5я по перемѣнному y отъ сопоставленія

$$(ab)^3 (cd)^2 . \left[a_x^6 b_x^6 , \; c_x^{10} d_x^5\right]_9 . e_x^2 .$$

Въ частномъ случаѣ, когда эквивалентныя произведенія содержатъ только одно перемѣнное x, они суть члены сопоставленія. Когда же эквивалентныя произведенія содержатъ только равные скобочные факторы и факторы перваго рода съ нѣсколькими перемѣнными, то они суть члены поляры.

Примѣромъ для перваго частнаго случая могутъ служить произведенія

$$P' = (ab)^2 (cd) (ac)^2 (bd)^3 b_x d_x ,$$
$$Q' = (ab)^2 (cd) (ac) (bd)^4 a_x c_x ;$$

они суть члены сопоставленія

$$(ab)^2 (cd) . \left[a_x^3 b_x^4 , \; c_x^3 d_x^4\right]_5 .$$

Примѣромъ для втораго частнаго случая могутъ служить произведенія

$$P'' = (ab)^3 (cd)^4 a_x^3 a_y^2 b_x^4 b_y c_y ,$$
$$Q'' = (ab)^3 (cd)^4 a_x^2 a_y^3 b_x^4 b_y c_x ,$$

они суть члены поляры

$$\left[(ab)^3 (cd)^4 a_x^5 b_x^5 c_x\right]_{y^4}.$$

Между всей совокупностью произведеній Q, эквивалентныхъ съ произведеніемъ даннымъ — P, т. е. между всѣми членами поляры сопоставленія, содержащей данное произведеніе P, различаютъ смежныя эквивалентныя произведенія или смежные члены поляры сопоставленія; это — такія эквивалентныя произведенія Q_1 и Q_2, которыя разнятся между собою только одною перестановкою двухъ символовъ (или двухъ перемѣнныхъ) въ двухъ факторахъ. Напримѣръ,

$$Q_1 = (ab)^3 (cd)^2 (ac)^2 (bc)^3 (ad)^4 b_x^3 c_x^2 c_y^3 e_y^2 \quad \text{и}$$
$$Q_2 = (ab)^3 (cd)^2 (ac)^3 (bc)^3 (ad)^3 b_x^3 c_x^2 c_y^3 e_y^2 .$$

Для большей простоты мы разсмотримъ произведенія P' и Q' съ однимъ перемѣннымъ, приведенныя выше. Представимъ ихъ въ такомъ видѣ:

$$P' = (ab)^2 (cd) (ac) (bd)^3 (ac) b_x d_x ,$$
$$Q' = (ab)^2 (cd) (ac) (bd)^3 (bd) a_x c_x .$$

Теперь очевидно, что они отличаются другъ отъ друга факторами $p' = (ac) b_x d_x$ и $q' = (bd) a_x c_x$. Переходъ отъ p' къ q' можно совершить послѣдовательно черезъ пары смежныхъ членовъ, отличающихся другъ отъ друга только одною перестановкою символовъ:

$$(ac) b_x d_x , \quad (bc) a_x d_x , \quad (bd) a_x c_x .$$
$$(\text{или } (ad) b_x c_x)$$

Слѣдовательно, между P' и Q' можно вставить одно произведеніе

$Q_1' = (ab)^2 (cd) (ac) (bc) (bd)^3 a_x d_x$ (или $(ab)^2 (cd) (ac) (ad) (bd)^3 b_x c_x$) такое, чтобы переходъ отъ P' къ Q' былъ черезъ пары смежныхъ членовъ.

Такимъ же образомъ можно всегда между двумя эквивалентными произведеніями P и Q вставить такія промежуточныя произведенія, чтобы переходъ отъ P къ Q совершался черезъ пары смежныхъ членовъ, отличающихся другъ отъ друга только одною перестановкою двухъ символовъ.

Мы замѣтили выше, что эквивалентныя произведенія

$$P' = (ab)^2 (cd) (ac)^2 (bd)^3 b_x d_x ,$$
$$Q' = (ab)^2 (cd) (ac) (bd)^4 a_x c_x$$

суть члены сопоставленія:

$$(ab)^2 (cd) \left[a_x^2 b_x^4 , \quad c_x^2 d_x^4\right]_5 .$$

Въ этомъ выраженіи надо различать два вида фальтованій: внутреннія или старыя фальтованія, давшія произведеніе $(ab)^2 (cd)$, и внѣшнія или новыя фальтованія, содержащіяся въ операціи сопоставленія; послѣднія даютъ скобочныя факторы (ac), (ad), (bc), (bd).

Вообще при различныхъ преобразованіяхъ символическихъ произведеній всегда необходимо различать эти два типа фальтованій: внутреннія и внѣшнія. Вся цѣль символическихъ преобразованій сводится къ тому, чтобы уменьшить число продуктовъ внѣшнихъ фальтованій и увеличить число продуктовъ внутреннихъ фальтованій, пользуясь тождествами въ § 4. Отсюда слѣдуетъ, что эквивалентныя произведенія при ихъ вычисленіяхъ представляютъ затрудненія, такъ сказать, одного порядка.

Мы уже имѣли примѣры подобныхъ символическихъ вычисленій: такъ въ § 5 мы стремились въ выраженіи $q = (aa_1)\, a_y\, a_{1z}$ увеличить число старыхъ фальтованій и получили выраженіе $q = \frac{1}{2} (aa_1)^2 (yz)$, которое и рѣшило поставленный вопросъ; точно также въ § 6 мы оперировали съ произведеніемъ $(ab)\,(ab_1)\, b_y\, b_{1z}$, стараясь увеличить число старыхъ фальтованій. Дальше намъ придется часто прибѣгать къ этому принципу символическихъ вычисленій.

Если взять разность двухъ смежныхъ эквивалентныхъ произведеній, то при помощи тождествъ въ § 4 можно уменьшить число внѣшнихъ фальтованій и увеличить число внутреннихъ фальтованій. Напримѣръ, произведенія P' и Q'_1, приведенныя выше, даютъ разность

$$P' - Q'_1 = (ab)^2 (cd) (ac) (bd)^3 \left[(ac) b_x - (bc) a_x\right] d_x,$$

но на основаніи тождества I въ § 4

$$b_x (ac) - a_x (bc) = c_x (ab),$$

слѣдовательно мы получаемъ выраженіе

$$P' - Q'_1 = (ab)^3 (cd) (ac) (bd)^3 c_x d_x,$$

въ которомъ число старыхъ или внутреннихъ фальтованій увеличилось.

§ 13. Примѣры символическихъ вычисленій.

Въ §§ 2, 6 мы построили полную систему неприводимыхъ инваріантовъ и коваріантовъ двухъ бинарныхъ формъ второй степени:

$$a_x^2, \ (aa_1)^2; \ b_x^2, \ (bb_1)^2; \ (ab) a_x b_x, \ (ab)^2.$$

Обозначимъ эти формы сокращенно значками

$$f, \ \Delta_f; \quad \varphi, \ \Delta_\varphi; \quad \vartheta = \vartheta_x^2, \ R_{f,\varphi};$$

очевидно, что $\Delta_f = (f,f)_2$, $\Delta_\varphi = (\varphi,\varphi)_2$, $\vartheta = (f,\varphi)_1$, $R_{f,\varphi} = (f,\varphi)_2$.

Не трудно показать, что квадратъ формы ϑ выражается цѣлою раціональною функціей черезъ остальныя формы этой полной системы.

Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ написать

$$\vartheta^2 = (ab) a_x b_x . (a_1 b_1) a_{1x} b_{1x}.$$

На основаніи тождества IV въ § 4 мы имѣемъ

$$2 a_x a_{1x} a_y a_{1y} = a_x^2 a_{1y}^2 + a_{1x}^2 a_y^2 - (aa_1)^2 (xy)^2;$$

поляризуя обѣ части равенства по перемѣнному y, получимъ

$$2 a_x a_{1x} a_y a_{1z} = a_x^2 a_{1y} a_{1z} + a_{1x}^2 a_y a_z - (aa_1)^2 (xy)(xz);$$

замѣняя y_1 черезъ b_2 и y_1 черезъ $-b_1$, z_1 черезъ b_{12} и z_2 черезъ $-b_{11}$, получимъ

$$2 a_x a_{1x} (ab)(a_1 b_1) = a_x^2 (a_1 b)(a_1 b_1) + a_{1x}^2 (ab)(ab_1) - (aa_1)^2 b_x b_{1x};$$

слѣдовательно, принимая во вниманіе, что $a_x^2(a_1 b)(a_1 b_1) \equiv a_{1x}^2(ab)(ab_1)$: $\quad 2\vartheta^2 = 2f\,.\,(a_1 b)(a_1 b_1)\, b_x b_{1x} - \Delta_f\,.\,\varphi^2$;
но на основаніи тождества III въ § 4 мы имѣемъ

$$2(a_1 b)(a_1 b_1)\, b_x b_{1x} = (a_1 b)^2 b_{1x}^2 + (a_1 b_1)^2 b_x^2 - (bb_1)^2 a_{1x}^2,$$

слѣдовательно, принимая во вниманіе, что $(a_1 b)^2 b_{1x}^2 \equiv (a_1 b_1)^2 b_x^2$,
получимъ: $\quad 2\vartheta^2 = 2R_{f,\varphi}\,.\,f\varphi - \Delta_\varphi f^2 - \Delta_f\,.\,\varphi^2$,
т. е. $\quad 2\vartheta^2 = -\left[\Delta_f\,.\,\varphi^2 - 2R_{f,\varphi}\,.\,f\varphi + \Delta_\varphi\,.\,f^2\right]$.

Найдемъ, далѣе, выраженія сопоставленій (ϑ, f) и (ϑ, φ) черезъ формы полной системы.

Мы имѣемъ

$$(\vartheta, f) = (\vartheta_x^2, a_x^2) = (\vartheta a)\,\vartheta_x a_x, \quad (\vartheta, \varphi) = (\vartheta_x^2, b_x^2) = (\vartheta, b)\,\vartheta_x b_x.$$

Такъ какъ $\quad \vartheta = \vartheta_x^2 = (ab)\, a_x b_x$,
то полярный процесъ дастъ

$$\vartheta_x \vartheta_y = \tfrac{1}{2}(ab)\left[a_x b_y + a_y b_x\right]$$

или $\quad \vartheta_x \vartheta_y (xy) = \tfrac{1}{2}(ab)(xy)\left[a_x b_y + a_y b_x\right]$;
на основаніи тождества II въ § 4 $(ab)(xy) = a_x b_y - a_y b_x$,
поэтому $\quad 2\vartheta_x \vartheta_y (xy) = a_x^2 b_y^2 - a_y^2 b_x^2$.

Если въ послѣднее равенство подставить $y_1 = a_2$, $y_2 = -a_1$, то получится

$$-2\vartheta_x(\vartheta a)\, a_x = f\,.\,R_{f,\varphi} - \Delta_f\,.\,\varphi,$$

т. е. $\quad -2(\vartheta, f) = R_{f,\varphi}\,.\,f - \Delta_f\,.\,\varphi$.

Если же въ тоже самое равенство подставить $y_1 = b_2$, $y_2 = -b_1$, то получится

$$-2\vartheta_x(\vartheta b)\, b_x = f\,.\,\Delta_\varphi - R_{f,\varphi}\,\varphi,$$

т. е. $\quad -2(\vartheta, \varphi) = \Delta_\varphi\,.\,f - R_{f,\varphi}\,.\,\varphi$.

Зная выраженія для (ϑ, f) и (ϑ, φ) можно весьма просто получить выраженіе для ϑ^2.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\vartheta^2 = (ab)\, a_x b_x\,.\,\vartheta_x^2,$$

но на основаніи тождества I въ § 4 $\vartheta_x(ab) = a_x(\vartheta b) - b_x(\vartheta a)$

$$\vartheta^2 = a_x^2(\vartheta b)\, b_x \vartheta_x - b_x^2(\vartheta a)\, a_x \vartheta_x = f\,.\,(\vartheta, \varphi) - \varphi\,.\,(\vartheta, f),$$

или снова получаемъ уже выведенное выраженіе для ϑ^2

$$2\vartheta^2 = -\left[\Delta_f \,.\, \varphi^2 - 2R_{f,\varphi} \,.\, f\varphi + \Delta_\varphi \,.\, f^2\right].$$

Не трудно также получить выраженіе $(\vartheta\,,\,\vartheta)_2$, если принять во вниманіе: $(\vartheta\,,\,\vartheta)_2 = \left[\vartheta_x^2,\,(ab)\,a_x\,b_x\right]_2 = (ab)\,(\vartheta a)\,(\vartheta b)$. Выше мы имѣли равенство

$$-2\vartheta_x\,(\vartheta a)\,a_x = f\,.\,R_{f,\varphi} - \Delta_f\,.\,\varphi = a_x^2\,.\,R_{f,\varphi} - \Delta_f\,.\,b_x^2\,;$$

если замѣнить x_1 черезъ b_2 и x_2 черезъ $-b_1$, то получится равенство

$$-2\,(\vartheta b)\,(\vartheta a)\,(ab) = (ab)^2\,.\,R_{f,\varphi} - \Delta_f\,.\,(bb_1)^2$$

или

$$2\,(\vartheta\,,\,\vartheta)_2 = \Delta_f\,.\,\Delta_\varphi - R^2_{f,\varphi}\,.$$

Наконецъ, легко показать, что выраженія $(\vartheta,\,f)_2$ и $(\vartheta,\,\varphi)_2$ тождественно равны нулю. Докажемъ это для перваго.

Мы имѣемъ

$$(\vartheta\,,\,f)_2 = (\vartheta_x^2\,,\,a_{1x}^2)_2 = (\vartheta a_1)^2\,.$$

Если же въ равенствѣ

$$\vartheta_x^2 = (ab)\,a_x\,b_x$$

замѣнить x_1 черезъ a_{12} и x_2 черезъ $-a_{11}$, то получится равенство

$$(\vartheta a_1)^2 = (ab)\,(aa_1)\,(ba_1)\,;$$

но выраженіе $q = (ab)\,(aa_1)\,(ba_1)$ при перестановкѣ символовъ a и a_1 обращается въ выраженіе $(a_1b)\,(a_1a)\,(ba) = (ba_1)\,(a_1a)\,(ab)$, имѣющее прежніе скобочные факторы, только вмѣсто (aa_1) здѣсь стоитъ $(a_1a) = -(aa_1)$; слѣдовательно, разсматриваемое выраженіе мѣняетъ знакъ при перестановкѣ тождественныхъ символовъ a и a_1, но вслѣдствіе тождественности символовъ a и a_1 должно получиться опять прежнее выраженіе q, т. е. $q = -q$, или $q + q = 0$, откуда $q \equiv 0$. Такимъ образомъ мы доказали, что $(\vartheta, f)_2 \equiv 0$.

§ 14. **Функціональный детерминантъ и детерминантъ Гессе.**

Если мы имѣемъ двѣ бинарныхъ формы

$$f = a_x^n\,, \quad \varphi = b_x^m\,,$$

то выраженіе изъ ихъ первыхъ производныхъ

$$J = \frac{1}{n\,.\,m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)$$

называется функціональнымъ детерминантомъ этихъ формъ, или детерминантомъ Якоби.

Взявъ первыя производныя формъ f и φ, мы получимъ
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = na_x^{n-1} a_1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = na_x^{n-1} a_2$; $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = mb_x^{m-1} b_1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = mb_x^{m-1} b_2$;
слѣдовательно функціональный детерминантъ формъ f и φ равенъ $\frac{nm}{nm}(ab)\, a_x^{n-1} b_x^{m-1}$, т. е. первому сопоставленію этихъ формъ (f, φ).

Не трудно показать, что квадратъ функціональнаго детерминанта можно привести къ виду цѣлой раціональной функціи формъ f, φ и ихъ вторыхъ сопоставленій:

$$2(f, \varphi)^2 = -\left[(f, f)_2 \varphi^2 - 2(f, \varphi)_2 f\varphi + (\varphi, \varphi)_2 f^2\right];$$

это мы доказали для случая двухъ формъ второй степени въ предыдущемъ параграфѣ, и въ общемъ случаѣ ходъ доказательства остается прежній.

Докажемъ, далѣе, что функціональный детерминантъ отъ функціональнаго детерминанта (f, φ) и новой формы $\psi = c_x^p$ всегда есть форма приводимая, т. е. выражается цѣлой раціональной функціей черезъ формы низшихъ степеней. Поступая аналогично тому какъ въ предыдущемъ параграфѣ, замѣтимъ, что искомое выраженіе $U = [(f, \varphi), \psi]$ равно

$$(J_x^{m+n-2}, c_x^p) = (Jc)\, J_x^{m+n-3}\, c_x^{p-1},$$

гдѣ
$$J_x^{m+n-2} = (f, \varphi) = (ab)\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1}.$$

Возьмемъ поляру отъ J; получимъ

$$J_x^{m+n-3}\, J_y = \frac{1}{n+m-2}\left[(n-1)(ab)\, a_x^{n-2} a_y b_x^{m-1} + \right.$$
$$\left. + (m-1)(ab)\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-2}\, b_y\right]$$

подставивъ вмѣсто y_1, y_2 соотвѣтственно c_2, $-c_1$ и умноживъ обѣ части равенства на c_x^{p-1}, мы получимъ

$$(Jc)\, J_x^{m+n-3}\, c_x^{p-1} = U = \frac{n-1}{m+n-2}(ab)(ac)\, a_x^{n-2}\, b_x^{m-1}\, c_x^{p-1} +$$
$$+ \frac{m-1}{m+n-2}(ab)(bc)\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-2}\, c_x^{p-1}.$$

На основаніи тождества III въ § 4 мы имѣемъ

$$(ab)(ac)\,b_x c_x = \tfrac{1}{2}(ac)^2 b_x^2 + \tfrac{1}{2}(ab)^2 c_x^2 - \tfrac{1}{2}(bc)^2 a_x^2\,,$$
$$(ba)(bc)\,a_x c_x = \tfrac{1}{2}(bc)^2 a_x^2 + \tfrac{1}{2}(ba)^2 c_x^2 - \tfrac{1}{2}(ac)^2 b_x^2\,.$$

Слѣдовательно,

$$U=\frac{n-1}{2(n+m-2)}\left[(ac)^2 a_x^{n-2} c_x^{p-2} b_x^m+(ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{m-2} c_x^p-(bc)^2 b_x^{m-2} c_x^{p-2}. a_x^n\right]$$
$$-\frac{m-1}{2(n+m-2)}\left[(bc)^2 b_x^{m-2} c_x^{p-2} a_x^n+(ba)^2 b_x^{m-2} a_x^{n-2} c_x^p-(ac)^2 a_x^{n-2} c_x^{p-2} b_x^m\right],$$

и отсюда получаемъ окончательное выраженіе

$$[(f,\varphi),\psi]=\frac{n-m}{2(n+m-2)}(f,\varphi)_2\cdot\psi+\tfrac{1}{2}\left[(f,\psi)_2\cdot\varphi-(\varphi,\psi)_2\cdot f\right].$$

Изъ этого соотношенія легко получить соотвѣтственныя соотношенія предыдущаго параграфа.

Функціональный детерминантъ первыхъ производныхъ

$$f_1=\frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\quad f_2=\frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

данной формы $f=a_x^n$, т. е. выраженіе

$$H=\frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)=\frac{1}{n^2(n-1)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right]^2\right)$$

называется детерминантомъ Гессе для данной бинарной формы $f=a_x^n$.

Не трудно усмотрѣть, что детерминантъ Гессе есть второе сопоставленіе формы f съ самой собою, т. е. $H=(f,f)_2=(aa_1)^2 a_x^{n-2} a_{1x}^{n-2}$.

§ 15. **Построеніе полной системы бинарной формы третьей степени.**

Разсмотримъ бинарную форму

$$f=a_x^3=a_{1x}^3=a_{2x}^3=\ldots.$$

третьей степени.

Детерминантъ Гессе для этой формы

$$(f,f)_2=(aa_1)^2 a_x a_{1x}=\Delta_x^2=\Delta$$

есть неприводимый коваріантъ второй степени относительно перемѣнныхъ и втораго порядка относительно коэффиціентовъ данной формы.

Детерминантъ Гессе отъ Δ имѣетъ видъ

$$R=(\Delta,\Delta)_2=(\Delta\Delta_1)^2=\tfrac{1}{2}\left[(aa_1)^2a_xa_{1x},\ (a_2a_3)^2a_{2x}a_{3x}\right]_2$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[(aa_1)^2(a_2a_3)^2(aa_2)(a_1a_3)+(aa_1)^2(a_2a_3)^2(aa_3)(a_1a_2)\right];$$

но произведенія въ скобкѣ [ ] тождественны, потому что отличаются другъ отъ друга перестановкою тождественныхъ символовъ a и a_1; слѣдовательно,

$$R=(aa_1)^2(a_2a_3)^2(aa_2)(a_1a_3);$$

это есть неприводимый инваріантъ формы f.

Наконецъ, функціональный детерминантъ f и Δ

$$(f,\Delta)=(a\Delta)\,a_x^2\Delta_x=(aa_1)^2(a_2a)\,a_{1x}\,a_{2x}^2=Q_x^3=Q$$

есть неприводимый коваріантъ формы f третьей степени относительно перемѣнныхъ и третьяго порядка относительно коэффиціентовъ.

Четыре формы f, Δ, R, Q составляютъ полную систему неприводимыхъ инваріантовъ и коваріантовъ бинарной формы третьей степени f.

Для того, чтобы доказать это предложеніе, надо показать, что всѣ остальныя формы, происшедшія черезъ сопоставленія f, Δ и Q, приводятся къ произведеніямъ этихъ формъ и инваріанта R или тождественно равны нулямъ.

Слѣдовательно, надо показать, что скобочные факторы

$$(aa_1),\ (a\Delta),\ (\Delta\Delta_1),\ (aQ),\ (\Delta Q),\ (QQ_1)$$

суть редуценты, т. е. всякое символическое произведеніе, содержащее одинъ изъ этихъ скобочныхъ факторовъ, приводимо; подъ этимъ терминомъ мы будемъ подразумѣвать приводимость къ произведеніямъ формъ f, Δ, R, Q или къ нулю.

1) Факторъ (aa_1) есть редуцентъ. Если символическое произведеніе P имѣетъ факторъ (aa_1), то въ немъ символы a и a_1 должны встрѣчаться еще по два раза; слѣдовательно, P должно содержать факторы

$$\pi=(aa_1)\,a_\xi\,a_x\,a_{1\eta}\,a_{1y},$$

гдѣ ξ, x, η, y обозначаютъ какіе угодно символы. Это

выраженіе π очевидно служитъ смѣшанною полярою отъ выраженія
$$\Pi = (aa_1)\, a_x^2\, a_{1y}^2$$
и, конечно, одновременно съ послѣднимъ приводимо. Символическое произведеніе Π разлагается, какъ мы знаемъ, въ рядъ
$$\Pi = (aa_1)\,(a_x^2\, a_{1x}^2)_{y^2} + \alpha_1''\,(aa_1)^2\,(a_x\, a_{1x})_y\,(xy) + \alpha_2''\,(aa_1)^3\,(xy)^2\,,$$
въ которомъ первый и послѣдній члены равны тождественно нулю, такъ какъ при перестановкѣ тождественныхъ символовъ a и a_1 они мѣняютъ знакъ (см. конецъ § 13). Слѣдовательно
$$\Pi = \alpha_1''\,(aa_1)^2\,(a_x\, a_{1x})_y\,(xy) = \Delta_x\,\Delta_y\,(xy) \qquad \left(\alpha_1'' = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{2+2}{1}} = 1\right)$$
сводится къ полярѣ Δ, умноженной на (xy).

2) Факторы $(a\Delta)$ и $(\Delta\Delta_1)$ суть редуценты. Если символическое произведеніе P содержитъ факторъ $(a\Delta)$, то оно имѣетъ факторы
$$\pi = (a\Delta)\, a_\xi\, a_x\, \Delta_y\;;$$
это же есть поляра отъ выраженія
$$\Pi = (a\Delta)\, a_x^2\, \Delta_y\;,$$
которое разлагается въ рядъ
$$\begin{aligned}\Pi &= (a\Delta)\,(a_x^2\,\Delta_x)_y + \alpha_1''\,(a\Delta)^2\, a_x\,(xy)\\ &= (f,\Delta)_y + \alpha_1''\,(f,\Delta)_2\,(xy)\,.\end{aligned}$$

Приводимость Π зависитъ отъ приводимости (f,Δ) и $(f,\Delta)_2$; но $(f,\Delta) = Q$, а приводимость $(f,\Delta)_2$ не трудно доказать:
$$\begin{aligned}(f,\Delta)_2 = (a_2\Delta)^2 a_{2x} &= (aa_1)^2\,(a_2a)\,(a_2a_1)\,a_{2x}\\ &= \tfrac{1}{3}(aa_1)(aa_2)(a_1a_2)\left[(aa_1)a_{2x} - (aa_2)a_{1x} + (a_1a_2)a_x\right]\\ &\equiv 0;\ \text{(по § 4 тожд. I)}\end{aligned}$$
здѣсь три отдѣльныхъ члена получаются перестановками a_2 съ a_1 и a_2 съ a въ произведеніи $(aa_1)^2\,(a_2a)\,(a_2a_1)\,a_{2x}$.

Аналогично этому можно показать, что $(\Delta\Delta_1)$ есть редуцентъ, потому что $(\Delta,\Delta) = (\Delta\Delta_1)\,\Delta_x\,\Delta_{1x} \equiv 0$, а $(\Delta,\Delta)_2 = R$.

3) Факторъ (aQ) есть редуцентъ. Символическое произведеніе, P содержащее факторъ (aQ) должно содержать и факторы

$$\pi = (aQ)\, a_\xi\, a_x\, Q_\eta\, Q_y\ ;$$

это же выраженіе π есть смѣшанная поляра отъ выраженія

$$\Pi = (aQ)\, a_x^2\, Q_y^2$$

которое разлагается въ рядъ по полярамъ трехъ сопоставленій

$$(f,\, Q)\,,\quad (f,\, Q)_2\,,\quad (f,\, Q)_3\,.$$

Приводимость этихъ сопоставленій мы должны доказать. Мы имѣемъ
$$Q_x^3 = (a_2\Delta)\, a_{2x}^2\, \Delta_x\ ;$$

примѣняя полярный процесъ, получимъ

$$3Q_x^2\, Q_y = (a_2\Delta)\left[a_{2x}^2\, \Delta_y + 2a_{2x}\, a_{2y}\, \Delta_x\right] = G_1 + 2G_2\,.$$

Такъ какъ разность поляры съ однимъ изъ ея членовъ содержитъ множитель $(a_2\Delta)^2\, a_{2x}$:

$$\begin{aligned} 3Q_x^2\, Q_y - 3G_2 &= (a_2\Delta)\left[a_{2x}^2\, \Delta_y - a_{2x}\, a_{2y}\, \Delta_x\right] \\ &= (a_2\Delta)^2\, a_{2x}\,(xy)\,, \end{aligned}$$

то она должна равняться тождественно нулю, ибо $(f,\, \Delta)_2 = 0$; слѣдовательно, мы имѣемъ

$$Q_x^2\, Q_y = (a_2\Delta)^2\, a_{2x}\, a_{2y}\, \Delta_x = (a_2\Delta)\, a_{2x}^2\, \Delta_y\,.$$

Подставивъ въ послѣднее равенство $-a_{12}$ вмѣсто y_1 и a_{11} вмѣсто y_2, мы получимъ по умноженіи обѣихъ частей равенства на a_{2x}^2

$$(a_1 Q)\, Q_x^2\, a_{1x}^2 = (a_2\Delta)\,(a_1\, a_2)\, a_{2x}\, \Delta_x\, a_{1x}^2\ ;$$

переставивъ a_1 съ a_2 мы получимъ

$$\begin{aligned} (a_2Q)\, a_{1x}^2\, Q_x^2 &= \tfrac{1}{2}(a_1a_2)\, a_{2x} a_{1x} \Delta_x \left[(a_2\Delta)\, a_{1x} - (a_1\Delta)\, a_{2x}\right] \quad (\text{по § 4 тожд. I}) \\ &= -\tfrac{1}{2}\,(a_1a_2)^2\, a_{1x}\, a_{2x}\,.\, \Delta_x^2 \end{aligned}$$

т. е.
$$(f,\, Q) = -\tfrac{1}{2}\,\Delta^2\,.$$

Подставивъ въ равенство $Q_x^2\, Q_y = (a_2\Delta)^2\, a_{2x}^2\, \Delta_y$ вмѣсто x символъ a_1, мы получимъ по умноженіи обѣихъ частей равенства на a_{1y}

$$(Qa_1)^2\, Q_y\, a_{1y} = (a_2\,\Delta)^2\,(a_2\, a_1)^2\, a_{1y}\, \Delta_y\ ;$$

но
$$(a_2\,\Delta)^2\,(a_2\, a_1)^2\, a_{1y}\, \Delta_y = \left[(a_1\, a_2)^2\, a_{1y}\, a_{2y}\,,\ \Delta_y^2\right] = (\Delta,\, \Delta)\,,$$

слѣдовательно

$$(f, Q)_2 = (\Delta, \Delta) = (\Delta\Delta_1)\,\Delta_y\,\Delta_{1y} \equiv 0\,.$$

Наконецъ, подставивъ въ равенствѣ $Q_x^3 = (a_2\Delta)\,a_{2x}^2\,\Delta_x$ вмѣсто x символъ a_1, мы получимъ

$$(Qa_1)^3 = (a_2\Delta)\,(a_2\,a_1)^2\,(\Delta a_1) = -\left[(a_1\,a_2)\,a_{1x}\,a_{2x}\,,\,\Delta_x^2\right],$$

слѣдовательно $\quad (f, Q)_3 = (\Delta, \Delta)_2 = R\,.$

Такимъ образомъ мы доказали, что факторъ (aQ) есть редуцентъ.

4) Факторы (ΔQ) и (QQ_1) суть редуценты. Подобно предыдущему надо доказать, что (Δ, Q), $(\Delta, Q)_2$; $(Q, Q)_2$ суть выраженія приводимыя.

Подставивъ въ равенствѣ $Q_x^2\,Q_y = (a_2\Delta)\,a_{2x}^2\,\Delta$ вмѣсто y_1 символъ $-\Delta_2$ и вмѣсто y_2 символъ Δ_1, мы получимъ по умноженіи на Δ_x

$$\begin{aligned}(\Delta Q)\,Q_x^2\,\Delta_x &= (a_2\Delta)\,(\Delta_1\Delta)\,a_{2x}^2\,\Delta_{1x}\\ &= \tfrac{1}{2}\,(\Delta_1\Delta)\,a_{2x}^2\left[(a_2\Delta)\,\Delta_{1x}-(a_2\Delta_1)\,\Delta_x\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\,(\Delta_1\Delta)^2.\,a_{2x}^3\,,\end{aligned}$$

т. е. $\qquad (\Delta, Q) = \frac{1}{2}\,R\,.\,f\,.$

Если въ томъ же равенствѣ замѣнить x символомъ Δ, то получится

$$(Q\Delta)^2\,Q_y = (a_2\Delta)\,(a_2\Delta_1)^2\,\Delta_y = \left[(f, \Delta_1)_2\,,\,\Delta_x\,\Delta_y\right]$$

и такъ какъ $(f, \Delta_1)_2 \equiv 0$, то мы имѣемъ

$$(\Delta, Q)_2 \equiv 0\,.$$

Наконецъ, докажемъ приводимость $(Q, Q)_2$. Для этого подставимъ въ прежнее исходное равенство вмѣсто x символъ Q_1 и умножимъ обѣ части его на Q_{1y}, тогда получимъ

$$(QQ_1)^2\,Q_y\,Q_{1y} = (a_2\,\Delta)\,(a_2\,Q)^2\,\Delta_y\,Q_y\,;$$

$(f, Q)_2 = (aQ)^2\,a_x\,Q_x$ тождественный нуль и поэтому

$$(f, Q)_{2y} = \tfrac{1}{2}(aQ)^2(a_x\,Q_y + a_y\,Q_x) = 0\,,$$

кромѣ того $\quad (aQ)^2\,(a_x\,Q_y - a_y\,Q_x) = (aQ)^3(xy)$ (по § 4 тожд. II); складывая почленно эти два равенства, мы получимъ

$$(aQ)^2\,a_x\,Q_y = \tfrac{1}{2}\,(aQ)^3\,(xy)\,;$$

полагая $x = \Delta$ мы получимъ по умноженіи на Δ_y

$$(aQ)^2 (a\Delta)\, Q_y\, \Delta_y = \tfrac{1}{2} (aQ)^3 . \Delta_y^{\,2} = \tfrac{1}{2} R . \Delta_y^{\,3} .$$

Такимъ образомъ мы получаемъ

$$(Q, Q)_2 = \tfrac{1}{2} R . \Delta .$$

Такъ какъ Q есть функціональный детерминантъ f и Δ, то его квадратъ приводимъ и имѣетъ такое выраженіе черезъ f и Δ по § 14:

$$2\, Q^2 = -[\Delta^3 + R . f^2]$$

или, иначе говоря, между Q, Δ, R и f существуетъ цѣлое раціональное соотношеніе

$$2\, Q^2 + \Delta^3 + R . f^2 = 0 .$$

Подобныя цѣлыя раціональныя соотношенія между неприводимыми коваріантами формъ называются **сидзигіями**. Эта сидзигія для неприводимыхъ коваріантовъ формы третьей степени впервые была получена англійскимъ математикомъ Кэли. Въ § 13 мы имѣли также примѣръ сидзигій — соотношеніе между неприводимыми коваріантами совмѣстной системы двухъ формъ второй степени.

§ 16. Построеніе полной системы бинарной формы четвертой степени.

Разсмотримъ бинарную форму четвертой степени

$$f = a_x^4 = a_{1x}^4 = a_{2x}^4 = \ldots\ldots$$

Возьмемъ неприводимые коваріанты этой формы

$$\begin{aligned}
(f, f)_2 &= (aa_1)^2\, a_x^2\, a_{1x}^2 = \Delta_x^4 = \Delta , \\
(f, f)_4 &= (aa_1)^4 \qquad\qquad = \mathfrak{J} , \\
(f, \Delta) &= (a\Delta)\, a_x^3\, \Delta_x^3 \quad = (aa_1)^2 (a_2 a_1)\, a_{2x}^3\, a_x^2\, a_{1x} = T_x^6 = T , \\
(f, \Delta)_4 &= (a\Delta)^4 \qquad\quad = (aa_1)^2 (a_1 a_2)^2 (a_2 a)^2 \qquad = J .
\end{aligned}$$

Для доказательства того, что эти неприводимые коваріанты образуютъ полную систему надо поступать аналогично предыдущему параграфу, т. е. надо показать, что факторы

$$(aa_1) ,\ (a\Delta) ,\ (\Delta\Delta_1) ,\ (aT) ,\ (\Delta T) ,\ (TT_1)$$

суть редуценты, для этого же достаточно показать, что сопоставленія формъ f, Δ и T, попарно взятыхъ, приводимы.

Обычныя символическія вычисленія дадутъ слѣдующія выраженія для сопоставленій формъ f, Δ и T:

$$(f, \Delta) = T,\ (f, \Delta)_2 = \tfrac{1}{6}\mathcal{J}.f,\ (f, \Delta)_3 = 0,\ (f, \Delta)_4 = J;$$

$$(\Delta, \Delta) = 0,\ (\Delta, \Delta)_2 = \tfrac{1}{3}J.f - \tfrac{1}{6}\mathcal{J}.\Delta,\ (\Delta, \Delta)_3 = 0,\ (\Delta, \Delta)_4 = \tfrac{1}{6}\mathcal{J}^2;$$

$$2(T,f) = \Delta^2 - \tfrac{1}{6}\mathcal{J}.f^2,\ (T,f)_2 = 0,\ 4(T,f)_3 = \mathcal{J}.\Delta - J.f,\ (T,f)_4 = 0;$$

$$2(T,\Delta) = \tfrac{1}{3}f.(\mathcal{J}.\Delta - J.f),\ (T,\Delta)_2 = 0,\ 4(T,\Delta)_3 = J.\Delta - \tfrac{1}{6}\mathcal{J}^2 f,\ (T,\Delta)_4 = 0;$$

$$(T,T) = 0,\ 12(T,T)_2 = -[\mathcal{J}.\Delta^2 - 2J.\Delta.f + \tfrac{1}{6}\mathcal{J}^2 f^2],\ (T,T)_3 = 0,$$

$$(T,T)_4 = 0,\ (T,T)_5 = 0,\ 4(T,T)_6 = J^2 - \tfrac{1}{6}\mathcal{J}^3.$$

На основаніи § 14 мы можемъ написать для квадрата функціональнаго детерминанта $T = (f, \Delta)$ такую формулу:

$$2T^2 = -[\Delta^3 - \tfrac{1}{2}\mathcal{J}.f^2.\Delta + \tfrac{1}{3}J.f^3]$$

или, иначе говоря, между неприводимыми коваріантами бинарной формы четвертой степени существуетъ сидзигія:

$$12T^2 + 6\Delta^3 - 3\mathcal{J}.f^2.\Delta + 2J.f^3 = 0.$$

§ 17. Графо-химическое построеніе полныхъ совмѣстныхъ системъ.

Въ § 2 мы построили при помощи графо-химическаго способа полную совмѣстную систему двухъ бинарныхъ формъ второй степени.

Разсмотримъ теперь двѣ бинарныхъ формы второй и третьей степени

$$f = a_x^2 = a_{1x}^2 = a_{2x}^2 = \dots,\quad D = (aa_1)^2;$$

$$\varphi = \alpha_x^3 = \alpha_{1x}^3 = \alpha_{2x}^3 = \dots,\quad \tau = (\alpha\alpha_1)^2 \alpha_x \alpha_{1x},$$

$$\rho = (\alpha\alpha_1)^2 (\alpha_2\alpha)\, \alpha_{1x}\, \alpha_{2x}^2,\quad \Delta = (\alpha\alpha_1)^2 (\alpha_2\alpha_3)^2 (\alpha\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3);$$

пусть для первой формы полная система будетъ представлена такъ: $\leftarrow f \rightarrow,\ D;$

а для второй —

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & & & & \uparrow & & \\ \leftarrow \varphi \rightarrow & , & \leftarrow \tau \rightarrow & , & \leftarrow \rho \rightarrow & , & \Delta. \end{array}$$

На основаніи того же предложенія, на которое мы ссылались въ § 2, полная совмѣстная система двухъ данныхъ формъ получится, если совершить всевозможныя фальтованія степеней f съ произведеніями степеней φ, τ, ρ и взять изъ нихъ неприводимыя. Эти формы можно представить наглядно графо-химически.

Соединенія

$$\leftarrow f - \overset{\uparrow}{\varphi} \rightarrow\,, \quad f = \varphi \rightarrow\,, \quad \leftarrow f^2 \equiv \varphi\,, \quad f^3 \equiv \varphi^2$$

даютъ четыре формы неприводимыя. Соединенія же пропущенныя $\quad f^2 \equiv \varphi^2 \rightrightarrows\,, \quad \leftarrow f^3 \equiv \varphi^2 \rightarrow$

даютъ распадающіяся формы: $f = \varphi \rightarrow$ и $f = \varphi \rightarrow$, $f = \varphi \rightarrow$ и $\leftarrow f^2 \equiv \varphi$.

Соединенія $\leftarrow f - \tau \rightarrow$, $f = \tau$ даютъ двѣ неприводимыхъ формы.

Соединенія f съ ρ будутъ того же типа какъ для f съ φ, но изъ нихъ надо исключить первое, потому что функціональный детерминантъ отъ функціональнаго детерминанта $[f, (\varphi\tau)]$ по § 14 есть форма приводимая, и послѣднее, потому что квадратъ функціональнаго детерминанта есть форма приводимая. Остальныя соединенія

$$f = \rho \rightarrow\,, \quad \leftarrow f^2 \equiv \rho$$

даютъ двѣ неприводимыхъ формы.

Наконецъ, изъ соединеній степеней f съ произведеніями φ, τ, ρ только одно не есть распадающееся — это соединеніе

$$f^3 \equiv \varphi\rho$$

даетъ одинъ неприводимый инваріантъ.

Такимъ образомъ мы показали, что полная совмѣстная система двухъ бинарныхъ формъ второй и третьей степени содержитъ 15 неприводимыхъ инваріантовъ и коваріантовъ:

$$\begin{gathered} f,\ D;\ \varphi,\ \tau,\ \rho,\ \Delta; \\ (f, \varphi),\ (f, \varphi)_2,\ (f^2, \varphi)_3,\ (f^3, \varphi^2)_6; \\ (f, \tau),\ (f, \tau)_2; \\ (f, \rho)_2,\ (f^2, \rho)_3;\ (f^3, \varphi\rho)_6. \end{gathered}$$

Подобно предыдущему можно построить при помощи графо-химическаго метода полную совмѣстную систему двухъ бинарныхъ формъ третьей степени; получится 26 неприводимыхъ инваріантовъ и коваріантовъ:

$$f,\ t,\ \imath,\ D;\ \varphi,\ \tau,\ \rho,\ \Delta;$$
$$(f,\varphi),\ (f,\varphi)_2\ (f,\varphi)_3;\ (f,\tau),\ (f,\tau)_2,\ (f,\tau^2)_3$$
$$(f,\rho)_2,\ (f,\rho)_3;\ (t,\varphi),\ (t,\varphi)_2,\ (t^2,\varphi)_3;$$
$$(t,\tau),\ (t,\tau)_2;\ (t,\rho)_2;\ (\imath,\varphi)_2,\ (\imath,\varphi)_3;$$
$$(\imath,\tau)_2;\ (\imath,\rho)_3.$$

Построеніе полной совмѣстной системы двухъ бинарныхъ формъ третьей и четвертой степени при помощи этого же графо-химическаго метода изложено въ моей статьѣ [1]): „Grafische Aufstellung des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen Form, wodurch die Uebereinstimmung der atomistischen Theorie und der symbolischen Invariantentheorie hergestellt ist“. Эта система содержитъ 61 форму.

§ 18. Аронгольдовъ процесъ.

Процесъ, который мы имѣемъ въ виду изучить въ этомъ параграфѣ, аналогиченъ полярному процесу, но относится не къ перемѣннымъ, а къ коэффиціентамъ формъ; этотъ процесъ называется обыкновенно Аронгольдовымъ процесомъ.

Разсмотримъ двѣ формы одинаковыхъ степеней

$$f = \bar{a}_0 x_1^n + \binom{n}{1} \bar{a}_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots\ldots + \bar{a}_n x_2^n = a_x^n,$$
$$\varphi = \bar{\alpha}_0 x_1^n + \binom{n}{1} \bar{\alpha}_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots\ldots + \bar{\alpha}_n x_2^n = \alpha_x^n.$$

Аронгольдовъ процесъ есть дифференціальный процесъ вида

$$\delta = \frac{\partial}{\partial \bar{a}_0} \bar{\alpha}_0 + \frac{\partial}{\partial \bar{a}_1} \bar{\alpha}_1 + \frac{\partial}{\partial \bar{a}_2} \bar{\alpha}_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial}{\partial \bar{a}_n} \bar{\alpha}_n;$$

его называютъ также процесомъ δ. Мы покажемъ, что этотъ процесъ есть инваріантный процесъ, т. е. примѣненіе его къ инваріанту $i\ (\bar{a}_0,\ \bar{a}_1,\ \ldots\ \bar{a}_n)$ даетъ въ

1) Ученыя Записки Импер. Юрьев. Универс. № 4, 1900 г.

результатѣ совмѣстный инваріантъ $i_1(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n; \bar{\alpha}_0 \ldots \bar{\alpha}^n)$ двухъ формъ f и φ. Для этого мы перейдемъ къ символическому опредѣленію процеса δ.

Разсмотримъ для примѣра двѣ формы второй степени f и φ. Для первой изъ нихъ мы имѣемъ инваріантъ $i = 2(\bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2) = (aa_1)^2$. Примѣненіе процеса δ дастъ въ результатѣ:

$$\begin{aligned}\delta i &= 2(\bar{a}_2\bar{\alpha}_0 - 2\bar{a}_1\bar{\alpha}_1 + \bar{a}_0\bar{\alpha}_2)\\ &= 2(a_2^2\alpha_1^2 - 2a_1a_2\alpha_1\alpha_2 + a_1^2\alpha_2^2) = 2(a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)^2 = 2(a\alpha)^2;\end{aligned}$$

но тотъ же самый результатъ мы получимъ, если въ символическомъ выраженіи инваріанта $i = (aa_1)^2$ замѣнимъ последовательно символы a и a_1 черезъ α и возьмемъ сумму результатовъ $\quad \delta i = (\alpha a_1)^2 + (a\alpha)^2 = 2(a\alpha)^2;$

новое дельтаированіе инваріанта $i_1 = (a\alpha)^2$ дастъ $(\alpha_1\alpha)^2$ — инваріантъ i для формы φ.

Разсмотримъ другой примѣръ. Пусть даны двѣ формы четвертой степени f и φ. Для первой изъ нихъ мы имѣемъ инваріантъ

$$J = (aa_1)^2(a_1a_2)^2(aa_1)^2 = 6(\bar{a}_0\bar{a}_2\bar{a}_4 + 2\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 - \bar{a}_2^3 - \bar{a}_0\bar{a}_3^2 - \bar{a}_1^2\bar{a}_4)$$

третьяго порядка относительно коэффиціентовъ $\bar{a}$.

Вообразимъ, что мы отъ символическаго выраженія $J = (aa_1)^2(a_1a_2)^2(aa_2)^2$ переходимъ къ его развернутому виду, но предварительно замѣнимъ произведенія изъ символовъ a черезъ дѣйствительные коэффиціенты $\bar{a}$, произведенія изъ символовъ a_1 черезъ $\bar{a}'$ и произведенія изъ символовъ a_2 черезъ $\bar{a}''$; такимъ образомъ мы получимъ выраженіе J_1 первой степени относительно каждой группы величинъ $\bar{a}, \bar{a}', \bar{a}''$, которое дастъ развернутое выраженіе J, если въ немъ положить $\bar{a} = \bar{a}' = \bar{a}''$; но чтобы получить δJ, мы можемъ сначала продельтаировать J_1 по $\bar{a}$, $\bar{a}'$, $\bar{a}''$ въ отдѣльности сложить полученные результаты и затѣмъ уже положить $\bar{a} = \bar{a}' = \bar{a}''$, при этомъ дельтаированіе по $\bar{a}$, замѣнитъ $\bar{a}$ черезъ $\bar{\alpha}$, дельтаированія по $\bar{a}'$, $\bar{a}''$ точно также замѣнятъ

$\bar{a}'$, $\bar{a}''$ соотвѣтственно черезъ $\bar{\alpha}'$, $\bar{\alpha}''$, т. е. въ символической формѣ дадутъ результаты

$$(\alpha a_1)^2 (a_1 a_2)^2 (\alpha a_2)^2, \quad (a\alpha_1)^2 (\alpha_1 a_2)^2 (a a_2)^2, \quad (a a_1)^2 (a_1 \alpha_2)^2 (a \alpha_2)^2;$$

слѣдовательно, мы получаемъ

$$\delta J = \delta (a a_1)^2 (a_1 a_2)^2 (a a_2)^2 = 3 (\alpha a_1)^2 (a_1 a_2)^2 (\alpha a_2)^2.$$

Изложенное разсужденіе можно примѣнить къ дельтированію какого угодно символическаго произведенія.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что результатъ примѣненія Аронгольдова процеса къ символическому произведенію равенъ суммѣ результатовъ послѣдовательныхъ замѣнъ въ немъ символовъ a, a_1, a_2, . . . символомъ α; откуда слѣдуетъ, что Аронгольдовъ процесъ есть инваріантный процесъ.

Аронгольдовъ процесъ даетъ возможность по извѣстнымъ инваріантамъ и коваріантамъ строить новые и, слѣдовательно, имѣетъ большое значеніе для теоріи инваріантовъ. Кромѣ того, этимъ процесомъ можно пользоваться для вывода новыхъ соотношеній между инваріантами и коваріантами изъ извѣстныхъ уже соотношеній.

Примѣры.

Возьмемъ бинарную форму четвертой степени

$$f = a_x^4 = a_{1x}^4 = a_{2x}^4 = \ldots\ldots;$$

ея полная система по § 16 состоитъ изъ формъ

$$f,\ \Delta = (a a_1)^2 a_x^2 a_{1x},\quad \mathcal{J} = (a a_1)^4,$$
$$T = (a\Delta)\, a_x^3 \Delta_x^3,\quad J = (a\Delta)^4.$$

Пусть формою φ для Аронгольдова процеса служитъ детерминантъ Гессе Δ данной формы f; т. е. процесъ δ опредѣляется равенствомъ

$$\delta f = \Delta;$$

иначе говоря, процесъ δ переводитъ форму f въ ея Гессевскій детерминантъ.

Мы получаемъ при помощи процеса δ изъ формъ полной системы слѣдующія формы:

$$\delta\Delta = \delta(a a_1)^2 a_x^2 a_{1x}^2 = 2(\Delta a_1)^2 \Delta_x^2 a_{1x}^2 = 2(\Delta, f)_2,$$

или по § 16

$$\delta\Delta = \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{J}\,.\,f;$$

$$\delta\mathfrak{J} = \delta(aa_1)^4 = 2(\Delta a_1)^4 = 2J;$$

$$\delta T = \delta(f, \Delta) = (\delta f, \Delta) + (f, \delta\Delta)$$

$$= (\Delta, \Delta) + (f, \tfrac{1}{3}\mathfrak{J}\,.\,f.) \equiv 0.$$

$$\delta J = \delta(f, \Delta)_4 = (\delta f, \Delta)_4 + (f, \delta\Delta)_4$$

$$= (\Delta, \Delta)_4 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{J}\,.\,(f, f)_4$$

$$= \tfrac{1}{6}\mathfrak{J}^2 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{J}^2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{J}^2 \text{ (по § 16).}$$

Примѣняя Аронгольдовъ процесъ къ нѣкоторымъ изъ соотношенiй въ § 16, мы можемъ получить остальныя:

изъ соотношенiя $(f, \Delta)_2 = \frac{1}{6}\mathfrak{J}\,.\,f$

получаемъ дельтаированiемъ такое соотношенiе:

$$(\delta f, \Delta)_2 + (f, \delta\Delta)_2 = \tfrac{1}{6}(\delta\mathfrak{J}\,.\,f + \mathfrak{J}\,.\,\delta f),$$

или $(\Delta, \Delta)_2 + \frac{1}{3}\mathfrak{J}\,.\,(f, f)_2 = \frac{1}{6}(2J\,.\,f + \mathfrak{J}\,.\,\Delta)$,

и отсюда $(\Delta, \Delta)_2 = \frac{1}{3}J\,.\,f - \frac{1}{6}\mathfrak{J}\,.\,\Delta$;

изъ соотношенiя $(f, \Delta)_4 = J$

получаемъ дельтаированiемъ такое соотношенiе:

$$(\delta f, \Delta)_4 + (f, \delta\Delta)_4 = \delta J,$$

или $(\Delta, \Delta)_4 + \frac{1}{3}\mathfrak{J}\,.\,(f, f)_4 = \frac{1}{2}\mathfrak{J}^2$,

и отсюда $(\Delta, \Delta)_4 = \frac{1}{6}\mathfrak{J}^2$;

изъ соотношенiя $2(T, f) = \Delta^2 - \frac{1}{6}\mathfrak{J}\,.\,f^2$

получаемъ дельтаированiемъ такое соотношенiе:

$$2(\delta T, f) + 2(T, \delta f) = 2\Delta\delta\Delta - \tfrac{1}{6}\delta\mathfrak{J}.f^2 - \tfrac{1}{6}\mathfrak{J}.2f\delta f,$$

или $2(T, \Delta) = \frac{1}{3}f\,.\,(\mathfrak{J}\,.\,\Delta - J\,.\,f)$;

изъ соотношенiя $4(T, f)_3 = \mathfrak{J}\,.\,\Delta - J\,.\,f$

получаемъ дельтаированiемъ такое соотношенiе:

$$4(\delta T, f)_3 + 4(T, \delta f)_3 = \delta\mathfrak{J}.\Delta + \mathfrak{J}.\delta\Delta - \delta J.f - J.\delta f$$

или $4(T, \Delta)_3 = J\,.\,\Delta - \frac{1}{6}\mathfrak{J}^2.f$.

§ 19. Эвектантный процесъ.

Если мы имѣемъ форму n-й степени

$$f = \bar{a}_0 x_1^n + \binom{n}{1} \bar{a}_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots\ldots + \bar{a}_n x_2^n$$

и въ Аронгольдовомъ процесѣ

$$\delta = \frac{\partial}{\partial \bar{a}_0} \bar{a}_0 + \frac{\partial}{\partial \bar{a}_1} \bar{a}_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial}{\partial \bar{a}_n} \bar{a}_n$$

замѣнить коэффиціенты $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots\ldots \bar{a}_n$ ихъ символическими выраженіями $a_1^n, a_1^{n-1} a_2, \ldots . a_2^n$ черезъ символы a_1, a_2, и затѣмъ символы a_1, a_2 замѣнить черезъ x_2 и $-x_1$, то получится такъ называемый **эвектантный процесъ** для формы f:

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \bar{a}_0} x_2^n - \frac{\partial}{\partial \bar{a}_1} x_2^{n-1} x_1 + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{\partial}{\partial \bar{a}_n} x_1^n .$$

Изъ извѣстныхъ намъ свойствъ Аронгольдова процеса можно вывести соотвѣтственныя свойства эвектантнаго процеса.

Если мы имѣемъ нѣкоторый инваріантъ формы f въ видѣ произведенія скобочныхъ факторовъ, то результатъ примѣненія къ нему эвектантнаго процеса равенъ суммѣ результатовъ послѣдовательныхъ замѣнъ въ немъ символовъ a_1, a_2 черезъ $x_2, -x_1$ или для большаго удобства черезъ $-x_2, x_1$. Напримѣръ, для формы второй степени $f = a_x^2$ инваріантомъ служитъ $i = (aa_1)^2$. Примѣняя къ нему эвектантный процесъ, получимъ

$$\varepsilon i = a_{1x}^2 + a_x^2 = 2a_x^2 ,$$

т. е. самую форму f, умноженную на числовой факторъ 2. Точно также для формы третьей степени $f = a_x^3$ инваріантомъ служитъ $i = (aa_1)^2 (a_2 a_3)^2 (aa_2)(a_1 a_3)$. Примѣняя къ нему эвектантный процесъ, получимъ коваріантъ

$$\begin{aligned} \varepsilon i = {} & (a_2 a_3)^2 (a_1 a_3) a_{1x}^2 a_{2x} + (a_2 a_3)^2 (aa_2) a_x^2 a_{3x} + (aa_1)^2 (a_1 a_3) a_{3x}^2 a_x + \\ & + (aa_1)^2 (aa_2) a_{2x}^2 a_{1x} \\ = {} & 4 (a_2 a_3)^2 (a_1 a_3) a_{1x}^2 a_{2x} = 4 \left[a_{1x}^3 , (a_2 a_3)^2 a_{2x} a_{3x} \right]; \end{aligned}$$

это есть неприводимый коваріантъ третьяго порядка: функціональный детерминантъ отъ формы f и ея Гессевскаго детерминанта $(f,f)_2 = (a_2 a_3)^2 a_{2x} a_{3x}$.

Изъ всего этого ясно, что эвектантный процесъ есть инваріантный процесъ: онъ возстановляетъ изъ инваріантовъ данной формы ея коваріанты.

§ 20. Рѣшеніе кубическаго уравненія и изслѣдованіе его корней.

Въ заключеніе нашего изложенія основъ символической теоріи инваріантовъ мы покажемъ примѣръ приложеній этой теоріи къ рѣшенію вопросовъ алгебры, — именно къ рѣшенію вопроса о корняхъ кубическаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Разсмотримъ кубическое уравненіе

$$\bar{a}_0 x^3 + 3\bar{a}_1 x^2 + \bar{a}_2 x + \bar{a}_3 = 0$$

ему соотвѣтствуетъ форма третьей степени

$$f = \bar{a}_0 x_1^3 + 3\bar{a}_1 x_1^2 x_2 + 3\bar{a}_2 x_1 x_2^2 + \bar{a}_3 x_2^3.$$

Рѣшить данное кубическое уравненіе, это значитъ найти три линейныхъ множителя, на которые распадается кубическій многочленъ, стоящій въ первой части уравненія. Мы же найдемъ соотвѣтственные линейные факторы, на которые распадается форма f, пользуясь сидзигіей Кэли для неприводимыхъ инваріантовъ и коваріантовъ формы f (§ 15):

$$2Q^2 + \Delta^3 + R \cdot f^2 = 0.$$

Изъ этого соотношенія мы имѣемъ

$$\begin{aligned} \Delta^3 &= -(2Q^2 + R \cdot f^2) \\ &= -2\left(Q + f\sqrt{-\tfrac{R}{2}}\right)\left(Q - f\sqrt{-\tfrac{R}{2}}\right). \end{aligned}$$

Такъ какъ въ лѣвой части этого соотношенія стоитъ точный кубъ, а въ правой части два множителя

$Q+f\sqrt{-\frac{R}{2}}$ и $Q-f\sqrt{-\frac{R}{2}}$ вообще не имѣютъ общаго множителя, то необходимо, чтобы оба этихъ множителя были точными кубами, т. е.

$$Q+f\sqrt{-\frac{R}{2}}=2\alpha_x^3\,,\quad Q-f\sqrt{-\frac{R}{2}}=2\beta_x^3\,;$$

слѣдовательно, $\qquad \Delta_x=-2\,\alpha_x\,.\,\beta_x\,.$

Теперь не трудно видѣть, что данную форму f можно представить въ такомъ видѣ:

$$f=c\,.\,(\alpha_x^3-\beta_x^3)=c\,.\,(\alpha_x-\beta_x)\,(\alpha_x-\varepsilon\beta_x)\,(\alpha_x-\varepsilon^2\beta_x)\,,$$

гдѣ c нѣкоторое постоянное количество, ε одно изъ мнимыхъ значеній $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$ кубическаго корня изъ -1, а α_x, β_x суть линейные факторы, на которые распадается Гессевскій детерминантъ Δ для формы f.

Такъ какъ α_x и β_x суть выраженія

$$\sqrt[3]{Q+f\sqrt{-\frac{R}{2}}}\,,\quad \sqrt[3]{Q-f\sqrt{-\frac{R}{2}}}\,,$$

то форму f можно представить еще въ такомъ видѣ

$$f=c\,.\left\{\sqrt[3]{Q+f\sqrt{-\frac{R}{2}}}-\sqrt[3]{Q-f\sqrt{-\frac{R}{2}}}\right\}\times\left\{\sqrt[3]{Q+f\sqrt{-\frac{R}{2}}}-\varepsilon\sqrt[3]{Q-f\sqrt{-\frac{R}{2}}}\right\}\times$$
$$\times\left\{\sqrt[3]{Q+f\sqrt{-\frac{R}{2}}}-\varepsilon^2\sqrt[3]{Q-f\sqrt{-\frac{R}{2}}}\right\}.$$

Такимъ образомъ можно двоякимъ способомъ найти линейные факторы, на которые разлагается форма f: по первому способу требуется опредѣленіе линейныхъ факторовъ α_x, β_x Гессевскаго детерминанта данной формы, по второму способу требуется извлеченіе корня третьей степени изъ выраженій $Q+f\sqrt{-\frac{R}{2}}$, $Q-f\sqrt{-\frac{R}{2}}$.

Изъ послѣдняго разложенія формы f на линейные факторы слѣдуетъ, что при дѣйствительныхъ коэффиціентахъ формы f, если $R=(\Delta,\Delta)_2=(aa_1)^2\,(a_2a_3)^2\,(aa_2)\,(a_1a_3)$ есть отрицательная величина, то одинъ линейный факторъ будетъ дѣйствительный, а остальные два — мнимы; слѣдовательно, у соотвѣтственнаго кубическаго уравненія съ дѣйствительными коэффиціентами при условіи $R < 0$ одинъ корень будетъ дѣйствительный, а два — мнимы.

Если инваріантъ $R = 0$, то мы получаемъ изъ предыдущихъ соотношеній
$$Q = 2\,\alpha_x^3 = 2\,\beta_x^3$$
и кромѣ того
$$\Delta = 2\,\alpha_x^2\,;$$
но мы имѣемъ $(f, \Delta) = Q$, слѣдовательно можемъ написать
$$2\,(a\alpha)\,a_x^2\,\alpha_x = 2\,\alpha_x^3\,;$$
или сокращая обѣ части равенства на α_x, получимъ тождественное равенство
$$(a\alpha)\,a_x^2 \equiv \alpha_x^2\,,$$
которое показываетъ, что α_x^2 есть квадратный факторъ формы f.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ
$$\begin{aligned}(a\alpha)^2\,a_x &= \left[(a\alpha)\,a_x^2\,,\,\alpha_x\right] = \left[\alpha_x^2\,,\,\alpha_x\right] \equiv 0\,,\\ (a\alpha)^3 \quad &= \left[(a\alpha)\,a_x^2\,,\,\alpha_x^2\right]_2 = \left[\alpha_x^2\,,\,\alpha_x^2\right]_2 \equiv 0\,;\end{aligned}$$
послѣднее тождество показываетъ, что $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$ удовлетворяютъ уравненію $a_x^3 = 0$; предпослѣднее же показываетъ, что
$$a_1\,(a\alpha)^2 = 0\,, \quad a_2\,(a\alpha)^2 = 0\,,$$
т. е. и первыя производныя отъ формы $f = a_x^3$
$$a_1\,a_x^2\,, \quad a_2\,a_x^2$$
тоже обращаются тождественно въ нуль при $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$, т. е. первыя производныя содержатъ факторъ α_x; слѣдовательно, форма $f = a_x^3$ содержитъ въ себѣ факторъ α_x^2, потому что степень каждаго фактора f понижается дифференцированіемъ на единицу.

Если при равенствѣ нулю R нѣкоторая форма имѣетъ квадратный факторъ, или, что тоже самое, соотвѣтственное цѣлое алгебраическое уравненіе имѣетъ два равныхъ корня, то выраженіе R называется **дискриминантомъ** данной формы или даннаго уравненія. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что для кубическаго уравненія или для формы f третьей степени инваріантъ

$$R = 4(6\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 - 4\bar{a}_0\bar{a}_2^3 - 4\bar{a}_1^3\bar{a}_3 + 3\bar{a}_1^2\bar{a}_2^2 - \bar{a}_0^2\bar{a}_3^2)$$

служитъ дискриминантомъ.

Если Гессевскій детерминантъ формы f

$$\tfrac{1}{2}\Delta = (\bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2)\,x_1^2 + (\bar{a}_0\bar{a}_3 - \bar{a}_1\bar{a}_2)\,x_1x_2 + (\bar{a}_1\bar{a}_3 - \bar{a}_2^2)\,x_2^2$$

тождественно равенъ нулю, т. е.

$$\bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2 = 0\,,\quad \bar{a}_0\bar{a}_3 - \bar{a}_1\bar{a}_2 = 0\,,\quad \bar{a}_1\bar{a}_3 - \bar{a}_2^2 = 0\,,$$

то, какъ мы уже показали во введеніи (стр. 7), форма f третьей степени есть полный кубъ, и соотвѣтственное уравненіе имѣетъ три равныхъ корня.

Оглавленіе.