TARTU ÜLIKOOL

LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND

MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Marilyn Kutti

Troopiline algebra ja maatriksid üle järjestatud Abeli rühmade

Matemaatika eriala

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: prof. Valdis Laan

TARTU 2024

TROOPILINE ALGEBRA JA MAATRIKSID ÜLE JÄRJESTATUD ABELI RÜHMADE

Magistritöö

Marilyn Kutti

Lühikokkuvõte

Töös vaadeldakse maatrikseid üle lineaarselt järjestatud Abeli rühma $\mathbf{A}$ ja üle kommutatiivse monoidi $\mathbf{A}^{\perp}$, mis on saadud rühmast $\mathbf{A}$ välise vähima elemendi $\perp$ lisamisel. Analüüsitakse teist järku ruutmaatriksite poolrühmade $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ ja $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$ struktuuri, kus maatriksite korrutamine on defineeritud sarnaselt troopiliste maatriksite korrutamisega. Antakse poolrühma $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ Greeni seoste $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ ja $\mathcal{H}$ kirjeldus ning poolrühma $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$ idempotentide kirjeldus. Näidatakse, et poolringis $M_2(\mathbf{A}^{\perp})$ on kõik nullist erinevad idempotendid täisidempotendid.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: algebra, maatriksid, kommutatiivsed rühmad, poolrühmad

TROPICAL ALGEBRA AND MATRICES OVER ORDERED ABELIAN GROUPS

Master's thesis

Marilyn Kutti

Abstract

The master's thesis explores matrices over a linearly ordered Abelian group $\mathbf{A}$ and over the commutative monoid $\mathbf{A}^{\perp}$, which is obtained by adding the external least element $\perp$ to the group $\mathbf{A}$. The study analyzes the structure of second-order square matrix semigroups, denoted by $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ and $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$, where matrix multiplication is similar to the multiplication of tropical matrices. A description of the Green's relations $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ and $\mathcal{H}$ on the semigroup $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ is provided, as well as a description of idempotents in the semigroup $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$. Additionally, it is demonstrated that in the semiring $M_2(\mathbf{A}^{\perp})$, all non-zero idempotents are full idempotents.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic theory, algebra, group theory.

Key Words: algebra, matrices, commutative groups, semigroups

Sisukord

Sissejuhatus

Troopiline algebra (tuntud ka kui max-pluss algebra) on lineaaralgebra, kus laiendatud reaalarvude hulga $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ kahe elemendi troopiline liitmine ($\oplus$) on defineeritud kui maksimumi võtmine neist kahest ja troopiline korrutamine ($\otimes$) on defineeritud kui nende kahe elemendi harilik liitmine. Hulk $\overline{\mathbb{R}}$ on selliste tehete suhtes poolring (täpsemalt isegi poolkorpus). Aastal 2011 ilmunud artiklis "Multiplicative structure of 2×2 tropical matrices", vaatlesid Briti matemaatikud Marianne Johnson ja Mark Kambites (2×2)-maatriksite multiplikatiivset poolrühma üle troopilise poolringi $\overline{\mathbb{R}}$ ning tõestasid mitmeid olulisi tulemusi selle struktuuri kohta. Antud töös keskendume suuresti selles artiklis tõestatud lemma 3.1 ja lause 4.1 üldistamisele. Kuna võrejärjestusega Abeli rühma saab vaadata poolringina, kus liitmise osas on ülemise raja võtmine ja korrutamise osas on rühma liitmistehe, siis on loomulik küsida, kas neid kahte tulemust on võimalik üle kanda järjestatud Abeli rühma juhule. Osutub, et see on tõepoolest võimalik, kui järjestusseos on lineaarne ning seda on antud töös kirjeldatud ja tõestatud. Tasub mainida, et kuigi selles töös saadud tulemused on sarnased Johnsoni ja Kambitese tulemustega, siis nende artiklis on tõestustes kasutatud olulisel määral troopilist geomeetriat, samas kui selle magistritöö tõestused on puhtalt algebralised.

Järgnevalt anname ülevaate magistritöö sisust ja struktuurist.

Töö esimeses peatükis on antud ülevaade troopilise poolringi ja troopilise maatriksalgebra kohta, sealhulgas on välja toodud töös vajaminevad mõisted ja tulemused. Antud peatükk põhineb peamiselt Johnsoni ja Kambitese artiklil [7] ning lisaks on kasutatud ingliskeelseid raamatuid [5] ja [6].

Teises peatükis on defineeritud võrejärjestusega ning lineaarse järjestusega Abeli rühma mõisted. Need mõisted on võetud raamatust [9]. Lisaks on antud peatükis kirjeldatud maatrikseid üle järjestatud Abeli rühmade. Võrejärjestusega Abeli rühma $\mathbf{A} = (A, +, \leq)$ korral tuuakse sisse väline vähim element $\perp$, mis käitub saranselt elemendile $-\infty \in \overline{\mathbb{R}}$. Tõestatakse sarnaselt artikliga [7], et (2×2)-maatriksite poolrühm üle lineaarse järjestusega Abeli rühma on regulaarne. Selles peatükis on lisaks kasutatud raamatuid [3] ja [9].

Kolmandas peatükis on vaadeldud Greeni seoseid, mille definitsioon on võetud raamatust [9]. Üldistades artikli [7] tulemusi on kirjeldatud ära maatrikspoolrühma $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$, kus $\mathbf{A}$ on lineaarselt järestatud Abeli rühm, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$- ja $\mathcal{H}$-klassid. Maatrikspoolrühma $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ $\mathcal{D}$- ja $\mathcal{J}$-klassid on kirjeldatud V. Laane ja M. Kutti käsikirjas "Green's relations for 2×2 matrices over linearly ordered abelian groups" [11].

Neljandas peatükis kirjeldame poolrühma $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$, kus $\mathbf{A} = (A, +, \leq)$ on lineaarselt järjestatud Abeli rühm, idempotente tuginedes artiklile [7, Teoreem 4.1], kus Johnson ja Kambites tõestasid, et idempotentsetel (2×2)-maatriksitel üle troopilise poolringi on täpselt neli võimalikku kuju. Toome sisse lokaalse alampoolrühma ([2]) mõiste ja kirjeldame millistest maatriksitest koosneb lokaalne alampoolrühm eSe, kus $e \in S = (M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$ on üks kindel fikseeritud idempotent. Sarnaselt ringide täisidempotendi definitsioonile ([14]) defineerime töös poolringi täisidempotendi (ingl. k. *full idempotent*) mõiste. Näitame, et poolringi $M_2(\mathbf{A}^{\perp})$ kõik idempotendid peale nullmaatriksi on täisidempotendid.

1 Troopiline algebra

Selles peatükis tutvustame troopilise algebra olulisemaid mõisteid ja tulemusi. Esimeses kahes paragrahvis defineerime töös vajaminevaid põhimõisteid, troopilise algebraga seotud mõisted ja kirjeldame liitmis- ja korrutamistehte käitumist troopilise algebra korral. Kolmandas paragrahvis tutvustame troopilise geomeetria olemust ja sellega seonduvat. Mõlemas alajaotuses tugineme peamiselt Johnsoni ja Kambitese 2011. aasta artiklile [7], lisaks ka raamatutele [5] ja [6].

1.1 Põhimõisted

Poolringi mõiste (nii nagu ka ringi mõiste) defineeritakse erinevates allikates erinevatel viisidel. Meie lähtume selles töös järgmisest definitsioonist.

Definitsioon. Poolringiks nimetatakse kolmikut $(R, \oplus, \otimes)$, kus $\oplus$ ja $\otimes$ on kahekohalised algebralised tehted hulgal R (poolringi liitmine ja korrutamine) ning

PR1. $(R, \oplus)$ on kommutatiivne monoid ühikelemendiga 0;

PR2. $(R, \otimes)$ on monoid ühikelemendiga 1;

PR3. $\forall a, b, c \in R, a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$ ja $(a \oplus b) \otimes c = a \otimes c \oplus b \otimes c$;

PR4. $\forall a \in R, 0 \otimes a = 0 = a \otimes 0$.

Nii nagu harilikult, me loeme, et korrutamistehe on kõrgema pioriteediga kui liitmistehe. Seega näiteks avaldises $a \otimes b \oplus a \otimes c$ tuleb enne leida korrutised $a \otimes b$ ja $a \otimes c$ ning seejärel need liita.

Definitsioon. Poolringi R nimetatakse **aditiivselt idempotentseks**, kui $a \oplus a = a$ iga $a \in R$ korral.

Kui $(R, \oplus)$ on kommutatiivne poolrühm ja kehtivad tingimused PR2 ja PR3 (aga mitte tingimata PR4), siis ütleme, et R on **nullita poolring**.

Nullita poolringe käsitletakse raamatus [6], kus nende kohta tarvitatakse terminit *semiring* (poolring). Meie definitsiooni järgi on iga poolring ka nullita poolring, kuid vastupidine ei kehti. Selles töös loeme, et $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Siis näiteks $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ on nullita poolring, mis ei ole poolring (sest liitmise suhtes ei leidu ühikelementi), ning $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot)$ on poolring.

Olgu R nullita poolring. Iga positiivse täisarvu n korral tähistame sümboliga $M_n(R)$ kõigi $(n \times n)$-maatrikiste hulk üle poolringi R. Maatriksi C elementi kohal (i, j) tähistame sümboliga C_{ij}. Kui $A, B \in M_n(R)$, siis defineerime tehted $\oplus$ ja $\otimes$ järgmiselt:

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj} = A_{i1} \otimes B_{1j} \oplus \ldots \oplus A_{in} \otimes B_{nj} \quad \text{ja}$$

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

iga $1 \leq i, j \leq n$ korral.

Lemma 1 ([6, Exercise 2.13])**.** *Kui R on nullita poolring, siis $(M_n(R), \oplus, \otimes)$ on nullita poolring. Kui R on poolring, siis $(M_n(R), \oplus, \otimes)$ on poolring, kus*

- *ühikelement on $(n \times n)$-maatriks mille peadigonaalil on 1-d ja ülejäänud elemendid on 0-d ning*
- *nullelement on $(n \times n)$-maatriks, kus kõik elemendid on 0-d.*

Definitsioon. Poolkorpuseks nimetatakse kolmikut $(K, \oplus, \otimes)$, kus $\oplus$ ja $\otimes$ on kahekohalised algebralised tehted hulgal K (poolkorpuse liitmine ja korrutamine) ning

PK1. $(K, \oplus)$ on kommutatiivne monoid ühikelemendiga 0;

PK2. $(K \setminus \{0\}, \otimes)$ on kommutatiivne rühm;

PK3. $\forall a, b, c \in K, a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$ ja $(a \oplus b) \otimes c = a \otimes c \oplus b \otimes c$;

PK4. $\forall a \in R, 0 \otimes a = 0 = a \otimes 0$.

1.2 Troopiline algebra

Olgu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, mida me vaatame lineaarselt järjestatud hulgana, kus $-\infty$ on vähim element. Defineerime troopilise korrutamise $\otimes$ ja troopilise liitmise $\oplus$ hulgal $\overline{\mathbb{R}}$ nii, et

$$a \otimes b = a + b$$

ja

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

iga $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ korral. (Siinjuures loeme, et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ ja $(-\infty) + a = -\infty = a + (-\infty)$ iga reaalarvu a korral.) Siis $\overline{\mathbb{R}}$ on poolring ühikelemendiga 0 ja nullelemendiga $-\infty$. Õieti on $\overline{\mathbb{R}}$ aditiivselt idempotentne poolkorpus, sest $a \oplus a = a$ iga $a \in \overline{\mathbb{R}}$ korral ja $a \otimes (-a) = 0$ iga $a \in \mathbb{R}$ korral.

Definitsioon. Poolringi $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes)$ nimetatakse **troopiliseks poolringiks**.

Definitsioon. **Troopiline maatriksalgebra** on lineaaralgebra, kus põhikorpus on asendatud troopilise poolringiga.

Iga positiivse täisarvu n korral tähistame sümboliga $M_n(\overline{\mathbb{R}})$ kõigi $(n \times n)$-maatrikiste hulka üle troopilise poolringi $\overline{\mathbb{R}}$. Vastavalt eespool antud definitsioonidele, kui $A, B \in M_n(\overline{\mathbb{R}})$, siis maatriksite korrutise $A \otimes B$ ja summa $A \oplus B$ elemendid arvutatakse järgmiselt:

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj} = \max(A_{i1} + B_{1j}, \ldots, A_{in} + B_{nj}) \quad \text{ja}$$

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = \max(A_{ij}, B_{ij})$$

iga $1 \leq i, j \leq n$ korral.

Tänu lemmale 1 on $(M_n(\overline{\mathbb{R}}), \oplus, \otimes)$ aditiivselt idempotentne poolring, kus

- ühikelement on $(n \times n)$-maatriks, mille peadiagonaalil on 0-d ja ülejäänud elemendid on $-\infty$ ning

- nullelement on $(n \times n)$-maatriks, kus kõik elemendid on $-\infty$.

Näide. Olgu meil maatriksid $A, B \in M_3(\overline{\mathbb{R}})$, kus

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Siis nende maatriksite troopiline korrutis $\otimes$ ja troopiline summa $\oplus$ on vastavalt

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max\{3+2, 3+2, 2+3\} & \max(3+4, 3+5, 2+3) & \max(3+3, 3+3, 2+4) \\ \max(2+2, 4+2, 5+3) & \max(2+4, 4+5, 5+3) & \max(2+3, 4+3, 5+4) \\ \max(2+2, 3+2, 2+3) & \max(2+4, 3+5, 2+3) & \max(2+3, 3+3, 2+4) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 8 & 9 & 9 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

ja

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max(3,2) & \max(3,4) & \max(2,3) \\ \max(2,2) & \max(4,5) & \max(5,3) \\ \max(2,3) & \max(3,3) & \max(2,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.3 Troopiline geomeetria

Definitsioon. Olgu $(R, \oplus, \otimes)$ poolring nullelemendiga 0_R ja ühikelemandiga 1. Kommutatiivset monoidi $(M, +, 0_M)$ nimetatakse **vasakpoolseks poolmooduliks** üle R, kui on defineeritud kujutus

$$R \times M \to M, \quad (r, m) \mapsto rm$$

nii, et

PM1. $\forall m, m' \in M, \forall r \in R \quad r(m + m') = rm + rm'$;

PM2. $\forall m \in M, \forall r, r' \in R \quad (r \oplus r')m = rm + r'm$;

PM3. $\forall m \in M, \forall r, r' \in R \quad (r \otimes r')m = r(r'm)$;

PM4. $\forall m \in M \quad 1_R m = m$;

PM5. $\forall m \in M \quad 0_R m = 0_M$;

PM6. $\forall r \in R \quad r0_M = 0_M$.

Tähistame ${}_RM$.

Poolringi R elemente kutsume sel juhul **skalaarideks** ja kujutust $M \to M$, $m \mapsto rm$, nimetame **skalaariga** r **korrutamiseks**. Elementi 0_M nimetame poolmooduli ${}_RM$ **nullelemendiks**. Poolmooduli mõiste üldistab nii vektorruumi mõistet kui ka üle ringi vaadeldava mooduli mõistet.

Definitsioon. Olgu $n \in \mathbb{N}$. **Afiinseks troopiliseks** n**-ruumiks** nimetatakse hulka $\overline{\mathbb{R}}^n$, kus vektorite $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$ liitmine ja skaalariga $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ korrutamine on defineeritud järgmiselt:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (\max(x_1, y_1), \ldots, \max(x_n, y_n)),$$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda + x_1, \ldots, \lambda + x_n).$$

Näeme, et afiinne troopiline n-ruum on poolmoodul üle poolkorpuse $\overline{\mathbb{R}}$, mille nullelemendiks on järjend $(-\infty, \ldots, -\infty) \in \overline{\mathbb{R}}^n$.

Definitsioon. Projektiivse troopilise $(n-1)$**-ruumi** saame kui afiinsest troopilisest n-ruumist jätta välja nullvektor $(-\infty, \ldots, -\infty)$ ja samastada kaks nullist erinevat vektorit, kui üks on teisest saadav nullist erineva skalaariga korrutamisel.

Kirjeldame nüüd üle poolkorpuse vaadeldava poolmooduli projektiviseerimise protsessi üldjuhul. Olgu ${}_KM$ vasakpoolne poolmoodul üle poolkorpuse $(K, \oplus, \otimes)$. Defineerime hulgal $M \setminus \{0_M\}$ seose $\sim$ järgmiselt:

$$m \sim m' \Longleftrightarrow \exists k \in K \setminus \{0_K\} : m = km'.$$

Näitame, et seos $\sim$ on ekvivalentsiseos. Olgu $m \in M$. Siis tänu tingimusele PM4 kehtib $m = 1m$, kus $1 \in K \setminus \{0_K\}$, seega $m \sim m$. Järelikult on seos $\sim$ refleksiivne. Olgu $m, m' \in M$ ja kehtigu $m = km'$, kus $k \in K \setminus \{0_K\}$. Siis k on pööratav tehte $\otimes$ suhtes. Seega PM3 põhjal

$$m' = 1m' = (k^{-1} \otimes k)m' = k^{-1}(km') = k^{-1}m,$$

kusjuures $k^{-1} \in K \setminus \{0_K\}$. Järelikult $m' \sim m$ ning seos $\sim$ on sümmeetriline.

Olgu nüüd $m, m', m'' \in M$ ja kehtigu $m = k_1m'$ ja $m' = k_2m''$, kus $k_1, k_2 \in K \setminus \{0\}$. Asendame m' esimesse võrdusesse ja saame, et $m = k_1(k_2m'') = (k_1 \otimes k_2)m''$ (siin $k_1 \otimes k_2 \neq 0$, sest poolkorpuses ei ole nullitegureid). Järelikult $m \sim m''$ ning seos $\sim$ on transitiivne. Kokkuvõttes oleme näidanud, et seos $\sim$ on ekvivalentsiseos.

Elemendi $m \in M$ ekvivalentsiklassi seose $\sim$ järgi tähistame $[m]$. Seega

$$[m] = [m'] \Longleftrightarrow \exists k \in K \setminus \{0_K\} : m = km'.$$

Faktorhulka

$$P(M) := (M \setminus \{0_M\})/\sim \; = \{[m] \mid m \in M, m \neq 0_M\}$$

nimetame poolmooduli ${}_KM$ **projektiivseks ruumiks**.

Definitsioon. Olgu M poolmoodul üle poolringi R ja olgu N mittetühi poolmooduli M alamhulk. Ütleme, et N on poolmooduli M **alampoolmoodul**, kui N on kinnine liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes ning sisaldab M nullelementi.

Lemma 2. *Olgu ${}_K M$ vasakpoolne poolmoodul üle poolkorpuse K ja olgu X, Y selle alampoolmoodulid. Siis*

$$X \subseteq Y \Longleftrightarrow P(X) \subseteq P(Y).$$

Tõestus. Vastavalt definitsioonile

$$P(X) = (X \setminus \{0\})/{\sim_X} = \{[x]_X \mid x \in X, x \neq 0\},$$
$$P(Y) = (Y \setminus \{0\})/{\sim_Y} = \{[y]_Y \mid y \in Y, y \neq 0\}.$$

($\Rightarrow$) Eeldame, et kehtib $X \subseteq Y$. Olgu $[x]_X \in P(X)$, kus $x \in X \setminus \{0\}$. Siis ka $x \in Y \setminus \{0\}$. Näitame, et $[x]_X = [x]_Y \in P(Y)$. Selleks tõestame, et $[x]_X \subseteq [x]_Y$ ja $[x]_Y \subseteq [x]_X$. Olgu $a \in [x]_X$, siis $a \sim_X x$. Ekvivalentsiseose definitsiooni põhjal leidub $k \in K \setminus \{0\}$ nii, et $a = kx$. Eelduse põhjal $a \in X \setminus \{0\} \subseteq Y \setminus \{0\}$. Seega $a \sim_Y x$, mistõttu $a \in [x]_Y$ ning $[x]_X \subseteq [x]_Y$.

Olgu nüüd $b \in [x]_Y$, siis $b \in Y \setminus \{0\}$ ja $b \sim_Y x$. Ekvivalentsiseose $\sim$ definitsiooni põhjal leidub $k \in K \setminus \{0\}$ nii, et $b = kx$. Kuna X on alampoolmoodul, siis $b \in X$. Seega $b \sim_X x$, mistõttu $b \in [x]_X$ ning $[x]_Y \subseteq [x]_X$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $[x]_X = [x]_Y$. Järelikult $[x]_X \in P(Y)$ ning $P(X) \subseteq P(Y)$.

($\Leftarrow$) Eeldame, et kehtib $P(X) \subseteq P(Y)$. Kuna X ja Y on alampoolmoodulid, siis M nullelement 0_M kuulub nii hulka X kui ka hulka Y. Olgu $x \in X \setminus \{0\}$. Siis $[x]_X \in P(X)$. Näitame, et $x \in Y$. Kuna $[x]_X \in P(X) \subseteq P(Y)$, siis $[x]_X \in P(Y)$. Seega $P(Y)$ definitsiooni põhjal leidub $y \in Y \setminus \{0\}$ nii, et $[x]_X = [y]_Y$. Kuna $x \in [x]_X$, siis ka $x \in [y]_Y$, muuhulgas $x \in Y$. Järelikult $X \subseteq Y$. $\square$

Sarnaselt vektorruumide juhuga (vt [10, Lause 3.14]) saab tõestada järgmise lemma.

Lemma 3. *Olgu ${}_RM$ vasakpoolne poolmoodul üle poolringi R ja olgu $m_1, \ldots, m_n \in M$ $(n \in \mathbb{N})$. Siis hulk*

$$L(m_1, \ldots, m_n) = \{r_1 m_1 + \ldots + r_n m_n \mid r_1, \ldots r_n \in R\}$$

on alampoolmoodul poolmoodulis ${}_RM$.

Hulga $L(m_1, \ldots, m_n)$ elemente kutsume elementide $m_1, \ldots, m_n$ **lineaarkombinatsioonideks** ja seda hulka ennast elementide $m_1, \ldots, m_n$ **lineaarseks katteks**.

Vaatleme nüüd konstruktsiooni, mida läheb vaja peatükis 3 Greeni seoste kirjeldamisel. Kui $(R, \oplus, \otimes)$ on poolring, siis üheveeruliste maatriksite hulka $M_{n,1}(R)$ saab vaadelda vasakpoolse poolmoodulina üle R, kui defineerida tehted võrdustega

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \ldots \\ r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r'_1 \\ \ldots \\ r'_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r_1 \oplus r'_1 \\ \ldots \\ r_n \oplus r'_n \end{pmatrix}, \quad r \begin{pmatrix} r_1 \\ \ldots \\ r_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \otimes r_1 \\ \ldots \\ r \otimes r_n \end{pmatrix},$$

kus $r, r_i, r'_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$. Olgu $A \in M_n(R)$ mingi fikseeritud ruutmaatriks. Defineerime maatriksi A veeruruumi $C(A)$ kui A veergudele vastavate veerumaatriksite $A_1, \ldots, A_n \in M_{n,1}(R)$ lineaarse katte poolmoodulis $M_{n,1}(R)$, s.t.

$$\begin{aligned} C(A) &= L(A_1, \ldots, A_n) = \{r_1 A_1 + \ldots + r_n A_n \mid r_1, \ldots, r_n \in R\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \otimes A_{11} \\ \ldots \\ r_1 \otimes A_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} r_n \otimes A_{1n} \\ \ldots \\ r_n \otimes A_{nn} \end{pmatrix} \mid r_1, \ldots, r_n \in R \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \otimes A_{11} \oplus \ldots \oplus r_n \otimes A_{1n} \\ \ldots \\ r_1 \otimes A_{n1} \oplus \ldots \oplus r_n \otimes A_{nn} \end{pmatrix} \mid r_1, \ldots, r_n \in R \right\} \subseteq M_{n,1}(R). \end{aligned}$$

Seega $C(A)$ on tänu lemmale 3 poolmooduli $M_{n,1}(R)$ alampoolmoodul. Märgime veel, et poolmooduli $C(A)$ nullelement on maatriks $\begin{pmatrix} 0_R \\ \dots \\ 0_R \end{pmatrix}$.

Olgu nüüd $(K, \oplus, \otimes)$ poolkorpus. Rakendame projektiviseerimise protsessi poolmoodulile $C(A)$ üle poolkorpuse K. Defineerime maatriksi A projektiivse veeruruumi kui

$$PC(A) := P(C(A)) = \left\{[u] \mid u \in C(A), u \neq \begin{pmatrix} 0_K \\ \dots \\ 0_K \end{pmatrix}\right\}.$$

Arvestades seda, kuidas on tehted defineeritud poolmoodulis $C(A)$, võime öelda, et kui $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$ ja $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$, siis

$$\begin{aligned} [u] = [v] &\iff \exists k \in K \setminus \{0_K\} : u = kv \\ &\iff \exists k \in K \setminus \{0_K\} : u_1 = k \otimes v_1, \dots, u_n = k \otimes v_n. \end{aligned}$$

Analoogselt defineerime maatriksi A rearuumi $R(A)$ kui A ridadede vastavate ühereaaliste maatriksite troopiliste lineaarkombinatsioonide hulga. Projektiviseerides poolmoodulit $R(A)$ saame projektiivse rearuumi $PR(A)$.

2 Maatriksid üle järjestatud Abeli rühmade

Selles peatükis defineerime järjestatud Abeli rühma mõiste. Vaatleme maatrikseid üle järjestatud Abeli rühmade $\mathbf{A}$ ning tõestame mõned nendega seotud tulemused. Näitame, et maatrikspoolrühm $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$, kus $\cdot$ on niinimetatud troopiline korrutamine, on regulaarne ning uurime millal see on inversne või ortodoksne. Defineerime laiendatud Abeli rühma $\mathbf{A}^\perp := A \cup \{\perp\}$ ning näitame, et kui $\mathbf{A}$ on lineaarselt järjestatud Abeli rühm, siis maatrikspoolrühm $(M_2(\mathbf{A}^\perp), \cdot)$ on regulaarne. Antud peatükis olevad mõisted on raamatutest [8], [9] ja loengukonspektist [13].

2.1 Järjestatud Abeli rühm

Definitsioon. Järjestatud Abeli rühm on kolmik $(A, +, \leq)$, kus

1. $(A, +)$ on Abeli rühm,
2. $\leq$ on järjestusseos ehk seos $\leq$ on refleksiivne, antisümmeetriline ja trantsitiivne,
3. iga $a, b, c \in A$ korral
$$a \leq b \implies a + c \leq b + c.$$

Nii nagu igas järjestatud hulgas, saab ka hulgal A vaadelda seost $<$, mis on defineeritud järgmiselt:

$$a < b \iff a \leq b \text{ ja } a \neq b.$$

Järjestatud Abeli rühma $(A, +, \leq)$ elementi a nimetatakse **positiivseks** (**negatiivseks**), kui $0 \leq a$ $(a \leq 0)$.

Definitsioon. Öeldakse, et järjestatud Abeli rühm $(A, +, \leq)$ on

- **võrejärjestusega**, kui $(A, \leq)$ on võre, s.t. mistahes kahel elemendil $a, b \in A$ leidub alumine raja $a \wedge b$ ja ülemine raja $a \vee b$,

- **lineaarselt järjestatud**, kui $(A, \leq)$ on lineaarselt järjestatud hulk.

Lineaarselt järjestatud hulgas $(A, \leq)$

$$(\forall a, b \in A)(a \leq b \;\text{ või }\; b \leq a).$$

Sellisel juhul defineeritakse

$$\max(a, b) := \begin{cases} a, & \text{kui } b \leq a, \\ b, & \text{kui } a \leq b \end{cases}$$

ja analoogiliselt $\min(a, b)$. Lihtne on näha, et siis $(A, \leq)$ on võre, kus

$$a \vee b = \max(a, b) \;\text{ ja }\; a \wedge b = \min(a, b).$$

Seega iga lineaarselt järjestatud Abeli rühm on võrejärjestusega Abeli rühm. Muuhulgas kolmikud $(\mathbb{R}, +, \leq)$, $(\mathbb{Q}, +, \leq)$ ja $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ on lineaarselt järjestatud Abeli rühmad.

Kuigi iga lineaarselt järjestatud Abeli rühm on võrejärjestusega, siis vastupidine alati ei kehti. Toome näite järjestatud rühmast, mis on võrejärjestusega rühm aga ei ole lineaarselt järjestatud rühm. Vaatame näiteks lineaarselt järjestatud hulga $\mathbb{R}$ otseruutu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Siis kolmik $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \leq)$, kus järjestus on defineeritud komponenthaaval, on võrejärjestusega aga pole lineaarselt järjestatud rühm (sest nt $(1, 2) \nleq (2, 1)$ ja $(2, 1) \nleq (1, 2)$).

Lemma 4 ([3])**.** *Kui $(A, +, \leq)$ on võrejärjestusega Abeli rühm, siis*

$$(\forall a, b, c \in A)\ (a \vee b) + c = (a + c) \vee (b + c).$$

Sellest lemmast järeldub, et kui $\mathbf{A} = (A, +, \leq)$ on võrejärjestusega Abeli rühm, siis $(A, \vee, +)$ on nullita poolring. Tänu lemmale 1 on teist järku ruutmaatriksite hulk $M_2(\mathbf{A})$ nullita poolring, kui korrutamine defineerida võrdusega

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+e) \vee (b+g) & (a+f) \vee (b+h) \\ (c+e) \vee (d+g) & (c+f) \vee (d+h) \end{pmatrix}$$

ja liitmise osas vaadelda ülemise raja võtmist, mis on defineeritud võrdusega

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bigvee \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \vee e & b \vee f \\ c \vee g & d \vee h \end{pmatrix}.$$

Muuhulgas $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ on poolrühm. See poolrühm ongi käesoleva magistritöö põhiline uurimisobjekt. Osutub, et kui järjestus on lineaarne, siis see poolrühm on regulaarne.

2.2 Poolrühma $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ regulaarsus

Regulaarsus on üks enim uuritud poolrümateoreetiline omadus.

Definitsioon. Poolrühma S nimetakse **regulaarseks**, kui iga elemendi $X \in S$ korral leidub element $Y \in S$ nii, et $XYX = X$. Elementi Y nimetatakse elemendi X **pseudoinversseks** elemendiks.

Järgneva teoreemi tõestuse saab järeldada artikli [4] märkusest 5.6, kui seda põhjalikumalt analüüsida, kuid eelistame anda siinkohal otsesema tõestuse.

Teoreem 5 ([12], lause 5.2)**.** *Kui* $\mathbf{A} = (A, +, \leq)$ *on lineaarse järjestusega Abeli rühm, siis* $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ *on regulaarne poolrühm.*

Tõestus. Olgu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

suvaline maatriks hulgast $M_2(\mathbf{A})$. Kuna järjestus on lineaarne, siis on kaks võimalust: kas $c-a \leq d-b$ või $d-b < c-a$. Näitame, et kummalgi juhul leidub antud maatriksi jaoks maatriks Y, nii, et $XYX = X$.

1. $c-a \leq d-b$. Siis

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a & -a+b-d \\ -a+c-d & -d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \vee (b-a+c-d) & (b-d) \vee (b-d) \\ (c-a) \vee (c-a) & (c-a+b-d) \vee 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & b-d \\ c-a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. $d-b < c-a$. Siis

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b-c+d & -c \\ -b & a-b-c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a-b-c+d) \vee 0 & (a-c) \vee (a-c) \\ (d-b) \vee (d-b) & 0 \vee (a-b-c+d) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & a-c \\ d-b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

2.3 Poolrühma $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ inverssus

Inverssete poolrühmade klass on regulaarsete poolrühmade klassi üks oluline alamklass.

Definitsioon. Poolrühma S elementi e nimetatakse **idempotendiks**, kui $e^2 = e$. Poolrühma S kõigi idempotentide hulka tähistatakse $E(S)$.

Definitsioon. Poolrühm S on **inversne**, kui ta on regulaarne ja tema idempotendid kommuteeruvad s.t. $ef = fe$ iga $e, f \in E(S)$ korral.

Lause 6 ([12], lause 5.3)**.** *Olgu* $\mathbf{A} = (A, +, \leq)$ *võrejärjestusega Abeli rühm. Siis maatrikspoolrühm* $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ *on inversne parajasti siis kui* $|A| = 1$.

Tõestus. Piisavus on ilmne, tõestame tarvilikkuse.

Oletame, et $|A| > 1$. Siis leidub meil mingi element $a \in A$ nii, et $a \neq 0$. Tähistame $b := a \vee 0$. Siis $a \leq b$ ehk $a - b \leq 0$. Kui $a - b < 0$, siis oleme saanud, et Abeli rühmas A leidub negatiivne element. Kui aga $a - b = 0$, siis $a = b = a \vee 0$, millest $0 \leq a$. Järelikult $-a \leq 0$. Kuna $a \neq 0$, siis $-a < 0$. Seega oleme saanud, et Abeli rühmas leidub negatiivne element, s.t. selline element $x \in A$, et $x < 0$.

Sellisel juhul ka $2x = x + x < 0$, sest $x + x < 0 + x = x < 0$. Saab näidata, et maatriksid

$$e = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 2x \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad f = \begin{pmatrix} 2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

on idempotendid. Kui nad kommuteeruksid, siis

$$\begin{pmatrix} 2x & x \\ 3x & 2x \end{pmatrix} = ef = fe = \begin{pmatrix} 2x & 3x \\ x & 2x \end{pmatrix}.$$

Maatriksid on omavahel võrdsed, kui neil on samad mõõtmed ja vastavad elemendid on võrdsed. Seega peab $x = 3x$ ning seega $2x = 3x - x = 0$. See aga on vastuolus võrratusega $2x < 0$. $\square$

Järelikult ka poolrühm $M_2(\mathbb{R})$ ei ole inversne, sest näiteks

$$e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad f = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

on idempotendid, kuid

$$ef = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = fe.$$

2.4 Poolrühma $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ ortodokssus

Definitsioon. Poolrühm S on **ortodoksne**, kui ta on regulaarne ja mistahes kahe idempotendi korrutis on idempotent.

Lause 7 ([12], lause 5.3)**.** *Olgu* $\mathbf{A} = (A, +, \leq)$ *võrejärjestusega Abeli rühm. Siis maatrikspoolrühm* $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ *on ortodoksne parajasti siis, kui* $|A| = 1$.

Tõestus. Piisavus on ilmne, tõestame tarvilikkuse.

Oletame, et $|A| > 1$, s.t. leidub mingi nullist erinev element $a \in A$. Näitame, et siis maatrikspoolrühm ei ole ortodoksne. Selleks piisab leida kaks idempotentset maatriksit, mille korrutis ei ole idempotentne. Nii nagu lause 6 tõestuses olgu $x \in A$ selline, et $x < 0$. Siis lause 6 tõestuse põhjal on maatriksid

$$e = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 2x \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad f = \begin{pmatrix} 2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

idempotentsed. Nende korrutis fe on

$$fe = \begin{pmatrix} 2x & 3x \\ x & 2x \end{pmatrix}, \quad \text{aga} \quad \begin{pmatrix} 2x & 3x \\ x & 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 3x \\ x & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 5x \\ 3x & 4x \end{pmatrix}, \text{ kus } x \neq 3x.$$

Seega oleme saanud, et see maatrikspoolrühm ei ole ortodoksne. □

2.5 Laiendatud Abeli rühm $\mathbf{A}^{\perp}$

Olgu $\mathbf{A} = (A, +, \leq)$ võrejärjestusega Abeli rühm. Võtame elemendi $\perp$, mis ei sisaldu hulgas A, ja laiendame järjestusseose $\leq$ hulgale $A^{\perp} := A \cup \{\perp\}$ lugedes, et $\perp \le a$ iga $a \in A$ korral. Samuti laiendame tehte $+$ hulgale $A^{\perp}$ lugedes, et $\perp + \perp = \perp$ ja $\perp + a = \perp = a + \perp$ iga $a \in A$ korral.

Lemma 8. *Kui* $\mathbf{A} = (A, +, \le)$ *on võrejärjestusega Abeli rühm, siis*

1. $(A^{\perp}, +)$ *on kommutatiivne monoid ühikelemendiga* 0*,*

2. $(A^{\perp}, \le)$ *on võre vähima elemendiga* $\perp$*,*

3. *iga* $a, b, c \in A^{\perp}$ *korral*

$$a \le b \implies a + c \le b + c.$$

Teiste sõnadega: $\mathbf{A}^{\perp} := (A^{\perp}, +, \le)$ *on võrejärjestusega kommutatiivne monoid. Lisaks sellele,* $(A^{\perp}, \vee, +)$ *on poolring.*

Tõestus. Olgu $\mathbf{A} = (A, +, \le)$ võrejärjestusega Abeli rühm. Näitame, et $\mathbf{A}^{\perp} = (A^{\perp}, +, \le)$ on võrejärjestusega kommutatiivne monoid.

1. Kuna $(A, +)$ on Abeli rühm, siis leidub $0 \in A$ nii, et $a + 0 = a = a + 0$ iga $a \in A$ korral ning $0 + \perp = \perp = \perp + 0$. Seega 0 on liitmise suhtes ühikelement. Kuna $(A, +)$ on Abeli rühm, siis hulga A elementide liitmine on assotsiatiivne ning elemendiga $\perp \in A^{\perp}$ liitmise definitsiooni põhjal on hulga $A^{\perp}$ elementide liitmine samuti assotsiatiivne. Oleme saanud, et $(A^{\perp}, +)$ on monoid ühikelemendiga 0. Märkame, et $(A^{\perp}, +)$ on kommutatiivne monoid, sest $(A, +)$ on kommutatiivne rühm ning $\perp + \perp = \perp$ ja $\perp + a = \perp = a + \perp$ iga $a \in A$ korral.

2. Definitsiooni järgi on $\perp$ järjestatud hulga $(A^{\perp}, \le)$ vähim element. On lihtne näha, et $a \vee \perp = a$ ja $a \wedge \perp = \perp$ iga $a \in A$ korral. Lisaks veel $\perp \vee \perp = \perp$ ja $\perp \wedge \perp = \perp$. Seega järjestatud hulk $(A^{\perp}, \le)$ on võre.

3. Teame, et iga $a, b, c \in A$ korral kui $a \leq b$, siis sellest järeldub $a + c \leq b + c$. Lisaks teame, et $\perp \leq a$ iga $a \in A$ korral. Kui liita viimase võrratuse mõlemale poolele element $b \in A$ saame, et $\perp = \perp + b \leq a + b$, mis kindlasti kehtib iga $a, b \in A$ korral. Kui liita võrratuse mõlemale poolele element $\perp \in A^{\perp}$ saame, et $\perp = \perp + \perp \leq a + \perp = \perp$, mis kindlasti kehtib iga $a \in A$ korral. Seega oleme saanud, et iga $a, b, c \in A^{\perp}$ korral

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c.$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\mathbf{A}^{\perp}$ on võrejärjestusega kommutatiivne monoid.

Veendume nüüd, et $(A^{\perp}, \vee, +)$ on poolring. Tingimuse 1. põhjal teame, et $(A^{\perp}, +)$ on kommutatiivne monoid ühikelemendiga 0 ning kuna element $\perp \in A^{\perp}$ on vähim element järjestatud hulgas $(A^{\perp}, \leq)$, siis $(A^{\perp}, \vee)$ on kommutatiivne monoid ühikelemendiga $\perp$. Kuna $(A, +, \leq)$ on võrejärjestusega Abeli rühm, siis lemma 4 põhjal kehtib

$$(\forall a, b, c \in A)\ (a \vee b) + c = (a + c) \vee (b + c).$$

Elemendi $\perp \in A^{\perp}$ definitsiooni põhjal kehtib viimane võrdus ka hulga $A^{\perp}$ mistahes elementide a, b, c korral. Lisaks kehtib iga $a \in A$ korral $\perp + a = \perp = a + \perp$. Seega oleme näidanud, et $(A^{\perp}, \vee, +)$ on poolring. $\square$

Olgu nüüd $M_2(\mathbf{A}^{\perp})$ teist järku ruutmaatriksite hulk üle $\mathbf{A}^{\perp}$. Defineerides maatriksite korrutamise ja ülemise raja sarnaselt hulgaga $M_2(\mathbf{A})$ saame lemma 1 abil, et $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}, \vee, \cdot)$ on poolring. Muuhulgas $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$ on monoid ühikelemendiga

$$\begin{pmatrix} 0 & \perp \\ \perp & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6 Poolrühma $(M_2(\mathbf{A}^\perp), \cdot)$ regulaarsus

Teoreem 9. *Kui* $\mathbf{A} = (A, +, \leq)$ *on lineaarselt järjestatud Abeli rühm, siis poolrühm* $(M_2(\mathbf{A}^\perp), \cdot)$ *on regulaarne.*

Tõestus. Olgu meil suvaline maatriks

$$X := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{A}^\perp).$$

Teoreemi 5 tõestuses nägime, et igal sellisel maatriksil X, mis ei sisalda elementi $\perp$ leidub pseudoinversne element. Jääb veel näidata, et maatriksitel X, milles vähemalt ühel kohal asub $\perp$, on olemas pseudoinversne element Y.

- Kui maatriksi X kõik elemendid on $\perp$-d, siis on ilmne, et mistahes $Y \in M_2(\mathbf{A}^\perp)$ korral $XYX = X$.

- Kui $a \neq \perp$ ja $d = \perp$ ning kõrvaldiagonaali elementidest on vähemalt üks $\perp$, siis maatriks $Y = \begin{pmatrix} -a & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix}$. Vaatame näiteks maatriksit $\begin{pmatrix} a & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix}$, siis

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \vee \perp & \perp \vee \perp \\ \perp \vee \perp & \perp \vee \perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- Kui $a = \perp$ ja $d \neq \perp$ ning kõrvaldiagonaali elementidest on vähemalt üks $\perp$, siis maatriks $Y = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & -d \end{pmatrix}$. Analoogselt eelmisele punktile saame, et näiteks

$$\begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & -d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- Kui $a \neq \perp$ ja $d \neq \perp$ ning kõrvaldiagonaali elementidest on vähemalt üks $\perp$, siis maatriks $Y = \begin{pmatrix} -a & \perp \\ \perp & -d \end{pmatrix}$. Vaatame näiteks maatriksit $\begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix}$, siis

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a & \perp \\ \perp & -d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \vee \perp & \perp \vee (b-d) \\ \perp \vee \perp & \perp \vee 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & b-d \\ \perp & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Kui $b \neq \perp$ ja $c \neq \perp$ ning peadiagonaali elementidest on vähemalt üks $\perp$, siis maatriks $Y = \begin{pmatrix} \perp & -c \\ -b & \perp \end{pmatrix}$. Kui $a = b = d = \perp$ ja $c \neq \perp$, siis maatriksis Y element $-b$ on $\perp$ ning ülejäänud elemendid jäävad samaks. Analoogselt kui $b \neq \perp$ ja $a = c = d = \perp$, siis maatrksis Y element $-c$ on $\perp$ ja ülejäänud elemendid jäävad samaks. Sarnaselt eelmisele punktile saame vastavalt, et näiteks

$$a) \quad \begin{pmatrix} \perp & b \\ c & \perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \perp & -c \\ -b & \perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \perp & b \\ c & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & b \\ c & \perp \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ -c & \perp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix}.$$

$\square$

3 Maatrikspoolrühma $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$- ja $\mathcal{H}$-klassid

Selles peatükis kirjeldame maatrikspoolrühma $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$- ja $\mathcal{H}$-klasse. Johnson ja Kambites näitasid artiklis [7, Section 3] (kasutades troopilist geomeetriat), et (2×2)-maatriksite multiplikatiivse poolrühma üle troopilise poolringi $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ $\mathcal{R}$-klassidel on kaheksa erinevat kuju. Antud töös me ei vaata väliselt lisatud elementi $-\infty$, mis muudab olukorra mõnevõrra lihtsamaks. Maatrikspoolrühma $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ $\mathcal{D}$- ja $\mathcal{J}$-klassid on kirjeldatud V. Laane ja M. Kutti käsikirjas "Green's relations for 2×2 matrices over linearly ordered abelian groups". Greeni seoste mõiste on võetud raamatust [9].

Definitsioon. Olgu $\leq_{\mathcal{R}}, \leq_{\mathcal{L}}$ seosed monoidil M, mis on defineeritud järgmiselt:

$$a \leq_{\mathcal{R}} b \Longleftrightarrow aM \subseteq bM \Longleftrightarrow \exists m \in M : a = bm,$$

$$a \leq_{\mathcal{L}} b \Longleftrightarrow Ma \subseteq Mb \Longleftrightarrow \exists m \in M : a = mb$$

mistahes $a, b \in M$ korral.

Paneme tähele, et seosed $\leq_{\mathcal{R}}$, $\leq_{\mathcal{L}}$ on kvaasijärjestused hulgal M. Tõepoolest, iga $a \in M$ korral $a \leq_{\mathcal{R}} a$, sest $aM \subseteq aM$, seega on seos $\leq_{\mathcal{R}}$ refleksiivne ja iga $a, b, c \in M$ korral

$$a \leq_{\mathcal{R}} b \wedge b \leq_{\mathcal{R}} c \Longleftrightarrow aM \subseteq bM \wedge bM \subseteq cM \implies aM \subseteq cM \Longleftrightarrow a \leq_{\mathcal{R}} c,$$

seega on seos $\leq_{\mathcal{R}}$ transitiivne ning seega ka kvaasijärjestus. Analoogselt saame tõestada, et $\leq_{\mathcal{L}}$ on kvaasijärjestus.

Analoogselt artiklis [7] tõestatud lemmale 3.1, kus vaadeldakse maatrikseid üle $\overline{\mathbb{R}}$, saame tõestada järgneva lemma $(n \times n)$-maatriksite kohta üle poolkorpuse.

Lemma 10. *Olgu $A, B \in M_n(K)$, kus $(K, \oplus, \otimes)$ on suvaline poolkorpus. Siis poolrühmas $M_n(K)$ on järgnevad väited samaväärsed:*

(i) $A \leq_{\mathcal{R}} B$ *(vastavalt $A \leq_{\mathcal{L}} B$);*

(ii) $C(A) \subseteq C(B)$ *(vastavalt $R(A) \subseteq R(B)$);*

(iii) $PC(A) \subseteq PC(B)$ *(vastavalt $PR(A) \subseteq PR(B)$).*

Tõestus. Tõestame samaväärsuse ainult väidete vahel, mis on seotud seosega $\leq_{\mathcal{R}}$ ja veeruruumidega, sest samaväärsus seose $\leq_{\mathcal{L}}$ ja rearuumide korral on duaalne. Kuna $C(A)$ ja $C(B)$ on poolmooduli $M_{n,1}(K)$ alampoolmoodulid, siis väidete (ii) ja (iii) samaväärsus tuleb lemmast 2. Seega piisab näidata, et (i) ja (ii) on samaväärsed.

Eeldame, et kehtib $A \leq_{\mathcal{R}} B$. Siis definitsiooni kohaselt leidub maatriks $X \in M_n(K)$ nii, et $BX = A$. Vaatame maatriksit BX. Ruumi kokkuhoiu mõttes tähistame siin maatriksi $C \in M_n(K)$ elementi kohal (i, j) sümboliga c_{ij}. Siis

$$BX = \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots \\ b_{n1} \dots b_{nn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1n} \\ \dots \\ x_{n1} \dots x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} \otimes x_{11} \oplus \dots \oplus b_{1n} \otimes x_{n1} \dots b_{11} \otimes x_{1n} \oplus \dots \oplus b_{1n} \otimes x_{nn} \\ \dots \\ b_{n1} \otimes x_{11} \oplus \dots \oplus b_{nn} \otimes x_{n1} \dots b_{n1} \otimes x_{1n} \oplus \dots \oplus b_{nn} \otimes x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\underbrace{x_{11} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_{n1} \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \dots \\ b_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{1. veerg}} \dots \underbrace{x_{1n} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_{nn} \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \dots \\ b_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{n. veerg}} \right).$$

Maatriksi B veeruruum $C(B)$ avaldub kujul

$$C(B) = \left\{ k_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} + \dots + k_n \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \dots \\ b_{nn} \end{pmatrix} \mid k_1, \dots, k_n \in K \right\}.$$

Paneme tähele, et maatriksi BX veerud sisalduvad hulgas $C(B)$. Seega $C(A) = C(BX) \subseteq C(B)$. Järelikult kehtib väide (ii).

Eeldame nüüd, et kehtib $C(A) \subseteq C(B)$. Kuna poolkorpuses K leidub multiplikatiivne ühikelement 1 ja kehtib $a \otimes 0 = 0 = 0 \otimes a$ iga $a \in K$ korral, siis maatriksi A iga veeru A_i korral

$$1A_i = A_i = (0A_1) + \dots + (0A_{i-1}) + (1A_i) + (0A_{i+1}) + \dots + (0A_n) \in C(A).$$

Kuna A veerud sisalduvad hulgas $C(A)$ ning kehtib $C(A) \subseteq C(B)$, siis A veerud sisalduvad ka hulgas $C(B)$. Järelikult saame A iga veeru esitada B veergude lineaarse kombinatsioonina, mis aga tähendab seda, et leidub $X \in M_n(K)$ nii, et $A = BX$. Seega kehtib (i). □

Definitsioon. Greeni seosed $\mathcal{R}$ $\mathcal{L}$ ja $\mathcal{H}$ defineeritakse monoidil M järgmiselt: iga $a, b \in M$ korral

$$a\mathcal{R}b \iff a \leq_{\mathcal{R}} b \text{ ja } b \leq_{\mathcal{R}} a \iff aM = bM,$$

$$a\mathcal{L}b \iff a \leq_{\mathcal{L}} b \text{ ja } b \leq_{\mathcal{L}} a \iff Ma = Mb,$$

$$a\mathcal{H}b \iff a(\mathcal{R} \cap \mathcal{L})b.$$

Artikli [7] järelduse 3.2 üldistusena saame järgmise tulemuse.

Järeldus 11. *Olgu $A, B \in M_n(K)$. Siis järgnevad väited on samaväärsed:*

(i) $A\mathcal{R}B$ *(vastavalt* $A\mathcal{L}B$*);*

(ii) $C(A) = C(B)$ *(vastavalt* $R(A) = R(B)$*);*

(iii) $PC(A) = PC(B)$ *(vastavalt* $PR(A) = PR(B)$*).*

Võrduste $C(A) = C(B)$ või $PC(A) = PC(B)$ kontrollimine maatriksite A ja B jaoks ei pruugi üldjuhul lihtne olla. Teist järku maatriksite jaoks õnnestub anda $\mathcal{R}$-klasside täielik kirjeldus.

Teoreem 12 ([11, lause 2.1])**.** *Olgu* $\mathbf{A}$ *lineaarselt järjestatud Abeli rühm. Siis poolrühma* $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ $\mathcal{R}$*-klasside hulk on*

$$\{R_{xy} \mid x, y \in A, x \leq y\},$$

kus $R_{xy} = R^1_{xy} \cup R^2_{xy}$*,*

$$R^1_{xy} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a+x & b+y \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in A \right\}, \quad R^2_{xy} = \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ b+y & a+x \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in A \right\}.$$

Tõestus. Esmalt näitame, et iga maatriks $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{A})$ on ühes sellises klasssis. Kuna $\mathbf{A}$ on lineaarselt järjestatud Abeli rühm, siis $c - a \leq d - b$ või $c - a > d - b$. Kui $c - a \leq d - b$, siis tähistame $x := c - a$, $y := d - b$ ning kui $c - a > d - b$, siis tähistame $y := c - a$ ja $x := d - b$. Seega $X \in R_{xy}$.

Nüüd näitame, et (i) kui kaks maatriksit kuuluvad hulka R_{xy}, siis nad on $\mathcal{R}$-seoses, (ii) kui kaks maatriksit kuuluvad erinevatesse hulkadesse, siis nad ei ole $\mathcal{R}$-seoses. Alustame esimesest.

Tänu järeldusele 11 me teame, et maatriksid X ja Y on $\mathcal{R}$-seoses parajasti siis, kui $C(X) = C(Y)$. Lihtne on aru saada, et

$$C(X) = C(Y) \iff X_1, X_2 \in L(Y_1, Y_2) \text{ ja } Y_1, Y_2 \in L(X_1, X_2),$$

kus X_1, X_2 on maatriksi X veerud ja Y_1, Y_2 on maatriksi Y veerud. Olgu $x \leq y$ ja

$X, Y \in R_{xy}$. Siis on meil neli võimalust.

1. $X, Y \in R^1_{xy}$. Siis peame näitama, et

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ a+x & b+y \end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix} c & d \\ c+x & d+y \end{pmatrix} = Y.$$

Näeme, et

$$\begin{aligned}
(c-a)X_1 + (c-b+x-y)X_2 &= (c-a)\begin{pmatrix} a \\ a+x \end{pmatrix} + (c-b+x-y)\begin{pmatrix} b \\ b+y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c \\ c+x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+x-y \\ c+x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c \vee (c+x-y) \\ (c+x) \vee (c+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c+x \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d-a+x-y)X_1 + (d-b)X_2 &= (d-a+x-y)\begin{pmatrix} a \\ a+x \end{pmatrix} + (d-b)\begin{pmatrix} b \\ b+y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d+x-y \\ d+2x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d+y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (d+x-y) \vee d \\ (d+2x-y) \vee (d+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d+y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Seega $Y_1, Y_2 \in L(X_1, X_2)$. Analoogiliselt saab näidata, et $X_1, X_2 \in L(Y_1, Y_2)$.

2. $X, Y \in R^2_{xy}$. See on anloogiline eelmise juhuga.

3. $X \in R^1_{xy}$, $Y \in R^2_{xy}$. Siis on vaja näidata, et

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ a+x & b+y \end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix} c & d \\ c+y & d+x \end{pmatrix} = Y.$$

Näeme, et

$$\begin{aligned}(c-a+x-y)X_1+(c-b)X_2 &= (c-a+x-y)\begin{pmatrix} a \\ a+x \end{pmatrix} + (c-b)\begin{pmatrix} b \\ b+y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c+x-y \\ c+2x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ c+y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c+x-y)\vee c \\ (c+2x-y)\vee(c+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c+y \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d-a)X_1+(d-b+x-y)X_2 &= (d-a)\begin{pmatrix} a \\ a+x \end{pmatrix} + (d-b+x-y)\begin{pmatrix} b \\ b+y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d \\ d+x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d+x-y \\ d+x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d\vee(d+x-y) \\ (d+x)\vee(d+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d+x \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Seega $Y_1, Y_2 \in L(X_1, X_2)$. Analoogiliselt saab näidata, et $X_1, X_2 \in L(Y_1, Y_2)$.

4. $X \in R^2_{xy}$, $Y \in R^1_{xy}$. See on analoog eelmisega.

Veendume nüüd, et erinevatesse hulkadesse kuuluvad maatriksid ei ole $\mathcal{R}$-seoses.

Oletame, et $R_{xy} = R_{zw}$, kus $x \leq y$ ja $z \leq w$ ning kas $x \neq z$ või $y \neq w$. Siis muuhulgas

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & w \end{pmatrix} = Y.$$

Näitame, et siit tekib vastuolu. See vastuolu näitab, et kui $(x, y) \neq (z, w)$, siis $R_{xy} \neq R_{zw}$.

Kuna Y_1 avaldub X_1, X_2 lineaarkombinatsioonina, siis leiduvad sellised $\lambda, \mu \in$

A, et

$$0 = \lambda \vee \mu,$$
$$z = (\lambda + x) \vee (\mu + y).$$

Kuna järjestus on lineaarne, siis nende võrduste kehtimiseks on neli võimalust.

1) Kui $0 = \lambda$ ja $z = \lambda + x$, siis $x = z$.

2) Kui $0 = \lambda$ ja $z = \mu + y$, siis $x = x + \lambda \leq z$ ja $\mu \leq \lambda = 0$, Seega $z = y + \mu \leq y$ ning $x \leq z \leq y$.

3) Kui $0 = \mu$ ja $z = \lambda + x$, siis $\lambda \leq \mu$ ja $y = \mu + y \leq \lambda + x = z$. Järelikult $y \leq z = \lambda + x \leq x \leq y$, kust $x = y = z$, vastuolu.

4) Kui $0 = \mu$ ja $z = \mu + y$, siis $y = z$.

Seega peab kehtima vähemalt üks kolmest võimalusest: $x = z$, $y = z$ või $x \leq z \leq y$. Arutledes analoogiliselt veeruga Y_2 saame, et $x = w$, $y = w$ või $x \leq w \leq y$. Siit tekib meil 9 erinevat paari:

1) kui $x = z$ ja $x = w$, siis $x = z = w \leq y$;

2) kui $x = z$ ja $y = w$, siis saame vastuolu eeldusega $x \neq z$ või $y \neq w$;

3) $x = z$ ja $x = z \leq w \leq y$;

4) kui $y = z$ ja $x = w$, siis võrratusest $x \leq y = z \leq w = x$ järeldub, et $x = y = z = w$, vastuolu eeldusega $x \neq z$ või $y \neq w$;

5) kui $y = z$ ja $y = w$, siis $x \leq z = w = y$;

6) kui $y = z$ ja $x \leq w \leq y$, siis võrratustest $x \leq y = z \leq w \leq y$ järeldub, et $x \leq z = w = y$;

7) kui $x \leq z \leq y$ ja $x = w$, siis võrratustest $z \leq w = x \leq z$ järeldub, et $x = z = w \leq y$;

8) $x \leq z \leq y$ ja $y = w$;

9) $x \leq z \leq y$ ja $x \leq w \leq y$,

millest 2 on vastuolulised ja ülejäänud 7 viivad võrratusteni

$$x \leq z \leq w \leq y. \tag{1}$$

Vahetades maatriksite X ja Y rollid saame, et

$$z \leq x \leq y \leq w. \tag{2}$$

Pannes võrratused (1) ja (2) kokku saame, et $x \leq z \leq x$ ja $y \leq w \leq y$, millest $x = z$ ja $y = w$, vastuolu.

Seega erinevatesse hulkadesse kuuluvad maatriksid ei saa olla $\mathcal{R}$-seoses. □

Järeldus 13 ([11, järldus 2.3])**.** *Poolrühmas $M_2(\mathbf{A})$ kehtib järgmine seos*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathcal{R} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \iff \{a-c, b-d\} = \{x-z, y-w\}.$$

Teoreem 14 ([11, lause 2.4])**.** *Olgu $\mathbf{A}$ lineaarselt järjestatud Abeli rühm. Siis poolrühma $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ $\mathcal{L}$-klasside hulk on*

$$\{L_{xy} \mid x, y \in A, x \leq y\},$$

kus $L_{xy} = L^1_{xy} \cup L^2_{xy}$,

$$L^1_{xy} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+x \\ b & b+y \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in A \right\}, \quad L^2_{xy} = \left\{ \begin{pmatrix} b & b+y \\ a & a+x \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in A \right\}.$$

Tõestus. Analoogne teoreemi 12 tõestusega. □

Järeldus 15 ([11, järeldus 2.5])**.** *Poolrühmas $M_2(\mathbf{A})$ kehtib järgmine seos*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathcal{L} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \iff \{a-b, c-d\} = \{x-y, z-w\}.$$

Lause 16 ([11, lause 2.6])**.** *Olgu $\mathbf{A}$ lineaarselt järjestatud Abeli rühm. Siis poolrühma $M_2(\mathbf{A}, \cdot)$ $\mathcal{H}$-klassideks on hulgad*

$$L_{uv} \cap R_{zw} = (L^1_{uv} \cap R^1_{zw}) \cup (L^2_{uv} \cap R^2_{zw}), \tag{3}$$

kus

$$L^1_{uv} \cap R^1_{zw} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+u \\ a+z & a+v+z \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in A \right\}, \tag{4}$$

$$L^2_{uv} \cap R^2_{zw} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+v \\ a+w & a+u+w \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in A \right\}, \tag{5}$$

$u, v, z, w \in A$, $u \leq v$, $z \leq w$ ja $u + w = v + z$.

Tõestus. Kõige pealt paneme tähele, et kui $u + w = z + v$, siis ühisosa $L_{uv} \cap R_{zw}$ on mittetühi. Tõepoolest, kui $u + w = z + v$, siis $u + w - z = v$ ja $\begin{pmatrix} 0 & u \\ z & u+w \end{pmatrix} \in L_{uv} \cap R_{zw}$.

Näitame nüüd, et kõik teised võimalikud ühisosad $\mathcal{L}$-klasside ja $\mathcal{R}$-klasside vahel on tühjad. Selleks näitame, et kui $u + w \neq z + v$, siis $L_{uv} \cap R_{zw} = \emptyset$. Oletame vastuväiteliselt, et $u + w \neq z + v$, kuid leidub maatriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L_{uv} \cap R_{zw}$. Sellisel juhul on meil neli võimalust, mis kõik viivad vastuoluni.

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L^1_{uv} \cap R^1_{zw}$. Siis $b - a = u$, $d - c = v$, $c - a = z$ ja $d - b = w$. Seega $u + w = d - a = z + v$, mis on vastuolu.

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L^2_{uv} \cap R^2_{zw}$. Analoogne eelmisega.

3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L^1_{uv} \cap R^2_{zw}$. Siis $b-a=u$, $d-c=v$, $c-a=w$ ja $d-b=z$. Nüüd

$$u \leq v \Rightarrow b-a \leq d-c \Rightarrow b+c \leq a+d, \ \ z \leq w \Rightarrow d-b \leq c-a \Rightarrow a+d \leq b+c,$$

kust $b+c=a+d$. Seega

$$u+w = b+c-2a = a+d-2a = d-a = 2d-a-d = 2d-b-c = z+v,$$

mis on vastuolu.

4) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L^2_{uv} \cap R^1_{zw}$. Analoogne eelmisega.

Lõpetuseks tõestame hulkade võrdused (1), (2) ja (3). Oletame, et $u \leq v$, $z \leq w$ ja $u+w=v+z$. Siis

$$u=v, z=w \quad \text{või} \quad u<v, z<w.$$

Esimesel juhul $L^1_{uv} = L^2_{uv} = L_{uv}$, $R^1_{zw} = R^2_{zw} = R_{zw}$ ning võrdus (3) kehtib.

Vaatame nüüd juhtu, kus $u<v$ ja $z<w$. Kui $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L^1_{uv} \cap R^2_{zw}$, nagu punktis 3), siis $a+d=b+c$. Seega $a+c+v=a+d=b+c=a+u+c$, millest järeldub $v=u$, vastuolu. Seega $L^1_{uv} \cap R^2_{zw} = \emptyset$. Sarnaselt saame, et $L^2_{uv} \cap R^1_{zw} = \emptyset$. Seega saame, et võrdus (3) kehtib.

Näitame, et võrdus (4) kehtib. Sisalduvus $\supseteq$ tuleb sellest, et $a+v+z-a-u = z+v-u = w$. Teistpidi sisalduvuse $\subseteq$ näitamiseks vaatame maatriksit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L^1_{uv} \cap R^1_{zw}$. Siis $b-a=u$, $d-c=v$, $c-a=z$ ja $d-b=w$. Seega $b=a+u$, $c=a+z$, $d=b+w=(a+u)+(v+z-u)=a+v+z$ ja

$X = \begin{pmatrix} a & a+u \\ a+z & a+v+z \end{pmatrix}.$

Jääb veel näidata võrduse (5) kehtivus. Sisalduvus $\supseteq$ tuleb sellest, et $a+u+w-a-v = u+w-v = z$. Teistpidi sisalduvuse $\subseteq$ näitamiseks vaatame maatriksit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L^2_{uv} \cap R^2_{zw}$. Siis $b-a=v$, $d-c=u$, $c-a=w$ ja $d-b=z$. Seega $b=a+v$, $c=a+w$, $d=b+z=(a+v)+(u+w-v)=a+u+w$ ja $X = \begin{pmatrix} a & a+v \\ a+w & a+u+w \end{pmatrix}.$ $\square$

4 Idempotendid ja täisidempodendid

4.1 Idempotendid

Artiklis [7, teoreem 4.1] Johnson ja Kambites tõestasid, et üle troopilise poolringi vaadeldavate (2×2)-maatriksite multiplikatiivses poolrühmas on idempotentidel täpselt neli kuju. Sarnaselt neile kirjeldame selles peatükis ära poolrühma $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$, kus $\mathbf{A}$ on lineaarselt järjestatud Abeli rühm, idempotendid.

Teoreem 17 ([12, teoreem 2.1])**.** *Olgu* $\mathbf{A} = (A, +, \leq)$ *võrejärjestusega Abeli rühm. Siis maatriksid*

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x+y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+y & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \Theta := \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix},$$

kus $x, y \in \mathbf{A}^{\perp}$ *ja* $x + y \leq 0$*, on idempotendid poolrühmas* $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$*. Kui* $\mathbf{A}$ *on lineaarselt järjestatud Abeli rühm, siis poolrühma* $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$ *iga idempotent on sellisel kujul.*

Tõestus. Veendume esmalt, et need neli (2×2)-maatriksit on idempotendid. Nullmaatriksi Θ korral on see ilmne. Kui $x + y \leq 0$, siis

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x+y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \vee (x+y) & x \vee (2x+y) \\ y \vee (x+2y) & (x+y) \vee (2x+2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x+y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \vee (x+y) & x \vee x \\ y \vee y & (x+y) \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x+y & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+y & x \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x+2y) \vee (x+y) & (2x+y) \vee x \\ (x+2y) \vee y & (x+y) \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x \\ y & 0 \end{pmatrix}.$$

Seega need neli maatriksit on idempotendid.

Eeldame nüüd, et **A** on lineaarse järjestusega ning olgu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Siis peavad kehtima võrdused

$$(a+a) \vee (b+c) = a \quad (1) \qquad\qquad (a+b) \vee (b+d) = b \quad (2)$$

$$(a+c) \vee (c+d) = c \quad (3) \qquad\qquad (b+c) \vee (d+d) = d \quad (4).$$

Kuna järjestus on lineaarne, siis mistahes $a, b, c \in A$ korral $a \vee b = c$ parajasti siis, kui $a, b \leq c$ ja $a = c$ või $b = c$.

Võrduste (1) ja (4) põhjal näeme, et $a+a \leq a$ ning $d+d \leq d$, kust $\perp \leq a, d \leq 0$. Vaatleme a jaoks kahte võimalust.

1) Oletame, et $a < 0$. Kui $a \in A$, siis $a + a < a$ ning (1) põhjal saame, et $a = b+c$. Kui $a = \perp$, siis jällegi (1) põhjal $b+c = \perp$, ning ka sellel juhul $a = b+c$. Kui nüüd $d = 0$, siis saame maatriksi kujul

$$\begin{pmatrix} b+c & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \text{ kus } b, c \in A^{\perp} \text{ ja } b+c < 0.$$

Teisalt kui $d \neq 0$, siis $d < 0$. Kui $d \in A$, siis $d + d < d$ ja (4) põhjal $b + c = d$. Kui $d = \perp$, siis võrdusest (4) järeldub, et $b + c = \perp = d$. Seega igal juhul $b + c = d$. Kui $b \in A$, siis $a + b, b + d < b$, mis on vastuolus võrdusega (2). Kui $c \in A$, siis $a + c, c + d < c$, mis on vastuolus võrdusega (3). Seega $b = c = \perp$. Kuid kuna $a = d = b + c$, siis $a = d = \perp$ ning oleme saanud nullmaatriksi Θ.

2) Eeldame nüüd, et $a = 0$. Võrduse (1) põhjal saame, et $b + c \leq 0$ ning (4)

põhjal $d = 0$ või $d = b + c$. Seega oleme saanud maatriksid kujul

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & b+c \end{pmatrix}, \text{ kus } b, c \in A^{\perp} \text{ ja } b + c \leq 0.$$

Sellega on lause tõestatud. □

Definitsioon. Olgu G rühm. Olgu $F \leq G$ rühma G pärisalamrühm. Siis F on G **maksimaalne alamrühm** (*ingl. k. maximal subgroup*), kui

$$\forall H \leq G, F \subseteq H \subseteq G \implies F = H \text{ või } G = H.$$

On teada, et poolrühma maksimaalsed alamrühmad on parajasti need $\mathcal{H}$-klassid, mis sisaldavad idempotente.

Lause 18 ([11, lause 5.1])**.** *Poolrühma* $(M_2(\mathbf{A}), \cdot)$ $\mathcal{H}$*-klass* $L_{uv} \cap R_{zw}$ *sisadab idempotenti parajasti siis, kui*

$$u = v, z = w \quad \textit{või} \quad z = -v, w = -u.$$

Seega nende $\mathcal{H}$-klassidel, mis sisaldavad idempotente, on kaks võimaliku kuju: $L_{uu} \cap R_{zz}$ ja $L_{uv} \cap R_{-v,-u}$.

4.2 Poolrühma $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$ lokaalsetest alampoolrühmadest

Iga idempotent tekitab poolrühmas lokaalse alampoolrühma. Need mängivad tähtsat rolli muuhulgas poolrühmade Morita teoorias.

Definitsioon ([2])**.** Olgu S poolrühm ja $e \in E(S)$. Siis hulk

$$eSe = \{ese \mid s \in S\}$$

on poolrühma S alampoolrühm (sest mistahes $s, t \in S$ korral $(ese)(ete) = esete \in eSe$), mida nimetatakse **lokaalseks alampoolrühmaks.**

Kui e on poolrühma $S = (M_2(\mathbf{A}^\perp), \cdot)$ idempotent, siis üldiselt ei ole lihtne kindlaks teha, millistest maatriksitest koosneb lokaalne alampoolrühm eSe. Mõne idempotendi korral on see siiski võimalik. Toome ühe sellise konkreetse näite.

Lause 19 ([12, lause 2.6])**.** *Kui* $\mathbf{A}$ *on lineaarselt järjestatud Abeli rühm, siis idempotendi* $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \perp & 0 \end{pmatrix}$ *poolt tekitatud poolrühma* $S = (M_2(\mathbf{A}^\perp), \cdot)$ *lokaalne alampoolrühm on*

$$eSe = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid c \leq a \leq b, c \leq d \leq b \right\}.$$

Poolrühm eSe *on regulaarne.*

Tõestus. Tähistame

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid c \leq a \leq b, c \leq d \leq b \right\}.$$

Näitame, et iga maatriksi $X \in M_2(\mathbf{A}^\perp)$ korral korrutis eXe kuulub hulka H.

Olgu $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{A}^\perp)$, siis

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \perp & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \perp & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \vee z & y \vee w \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \perp & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \vee z & (x \vee z) \vee (y \vee w) \\ z & z \vee w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ülemise raja definitsiooni põhjal on selge, et $z \leq x \vee z \leq (x \vee z) \vee (y \vee w)$ ja $z \leq z \vee w \leq (x \vee z) \vee (y \vee w)$ ning järelikult $eXe \in H$. Oleme tõestanud, et $eSe \subseteq H$.

Näitame nüüd, et iga maatriks hulgast H esitub korrutisena eXe, kus $X \in M_2(\mathbf{A}^{\perp})$ on mingi maatriks. Olgu $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$. Kuna kehtivad võrratused $c \leq a \leq b$ ja $c \leq d \leq b$, siis

$$eY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \perp & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \vee c & b \vee d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Y$$

$$Ye = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \perp & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \vee b \\ c & c \vee d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Y$$

Järelikult $Y = eYe$.

Viimaks veendume, et see poolrühm on regulaarne. Olgu $Z := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in eSe$ maatriks, mille ükski element ei ole $\perp$. Siis $c \leq a \leq b$ ja $c \leq d \leq b$. Näitame, et leidub selline $Y \in eSe$, et $ZYZ = Z$. Kuna $\mathbf{A}$ järjestus on lineaarne, siis kehtib kas $c - a \leq d - b$ või $d - b < c - a$. Märkame, et maatriksid

$$\begin{pmatrix} -a & -a+b-d \\ -a+c-d & -d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b-c+d & -c \\ -b & a-b-c \end{pmatrix} \in eSe,$$

sest esimese maatriksi puhul

$$-a+c-d \leq -a \leq -a+b-d, \text{ sest } c-d \leq 0 \text{ ja } b-d \geq 0;$$

$$-a+c-d \leq -d \leq -a+b-d, \text{ sest } -a+c \leq 0 \text{ ja } -a+b \geq 0$$

ning teise maatriksi puhul

$$-b \leq -b-c+d \leq -c, \text{ sest } -c+d \geq 0 \text{ ja } -b+d \leq 0;$$

$$-b \leq a-b-c \leq -c, \text{ sest } a-c \geq 0 \text{ ja } a-b \leq 0.$$

Seega teoreemi 5 tõestuse põhjal on poolrühma eSe maatriksid, milles ei ole elementi $\perp$, regulaarsed.

Vaatame veel maatrikseid $Z \in eSe$, kus vähemalt üks element on $\perp$. Kuna kehtib $c \leq a \leq b$ ja $c \leq d \leq b$, siis selliseid maatrikseid on viit tüüpi:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix}, \text{ kus } a, b, d \in A.$$

Viimase maatriksi puhul on ilmne, et ta on regulaarne. Esimese kolme maatriksi korral rahuldab võrdust $ZYZ = Z$ maatriks $Y = \begin{pmatrix} -a & -a+b-d \\ \perp & -d \end{pmatrix} \in eSe$. Vaatame seda näiteks esimese maatriksi korral, teised kaks tulevad analoogiliselt. Tõepoolest,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & -a+b-d \\ \perp & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-d \\ \perp & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \perp & d \end{pmatrix}.$$

Neljanda maatriksi $\begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix}$ korral sobib $Y = \begin{pmatrix} -b-c+d & -c \\ -b & a-b-c \end{pmatrix} \in eSe$, sest

$$\begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b-c+d & -c \\ -b & a-b-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a-c \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix}.$$

Seega olemegi saanud, et poolrühm eSe on regulaarne.

$\square$

4.3 Täisidempotendid

Sarnaselt ringide täisidempotendi definitsioonile (vt. [14], lk 485) defineerime käesolevas alajaotuses poolringi täisidempotendi mõiste. Näitame, et kui $\mathbf{A}$ on lineaarselt järjestatud Abeli rühm, siis poolringi $M_2(\mathbf{A}^{\perp})$ kõik idempotendid (v.a. Θ) on täisidempotendid.

Definitsioon. Poolringi $(R, \oplus, \otimes)$ idempotenti e nimetatakse **täisidempotendiks** (ingl. k. *full idempotent*), kui $R = ReR$, kus

$$ReR = \left\{(r_1 \otimes e \otimes r_1') \oplus \ldots \oplus (r_n \otimes e \otimes r_n') \mid n \in \mathbb{N}, r_i, r_i' \in R\right\}.$$

Definitsioon. Poolrühma S idempotenti e nimetatakse **täisidempotendiks**, kui $S = SeS$, kus

$$SeS = \left\{ses' \mid s, s' \in S\right\}.$$

Täisidempotendid mängivad tähtsat rolli Morita teoorias.

Teoreem 20. *Kui* $\mathbf{A}$ *on lineaarselt järjestatud Abeli rühm, siis poolringi* $M_2(\mathbf{A}^\perp)$ *kõik idempotendid, välja arvatud nullmaatriks, on täisidempotendid.*

Tõestus. Paneme tähele, et iga maatriks hulgast $M_2(\mathbf{A}^\perp)$ on esitatav "summana" kujul

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & d \end{pmatrix}.$$

Seega piisab iga idempotendi $e \neq \Theta$ ja iga maatriksi

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} a & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & d \end{pmatrix} \right\}$$

korral näidata, et leiduvad sellised maatriksid B, C, et $A = BeC$.

1) Iga idempotent $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, kus $x+y \leq 0$, on täisidempotent, sest

$$\begin{pmatrix} 0 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & d \end{pmatrix}.$$

2) Iga idempotent $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x+y \end{pmatrix}$, kus $x+y \leq 0$, on täisidempotent, sest

$$\begin{pmatrix} 0 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x+y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x+y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & b \\ \perp & \perp \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & -x-y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x+y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ c & \perp \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & -x-y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x+y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & d \end{pmatrix}.$$

3) Idempotentide $\begin{pmatrix} x+y & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, kus $x+y \leq 0$, korral on tõestus analoogiline. □

Võib küsida, kas ka poolrühma $(M_2(\mathbf{A}^{\perp}), \cdot)$ kõik nullmaatriksist erinevad idempotendid on täisidempotendid? Tuleb välja, et nii see ei ole.

Näide 21. Oletame, et idempotentne maatriks $B = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix}$ on täisidempotent poolrühmas $(M_2(\overline{\mathbb{R}}), \cdot)$. Siis leiduvad $a, b, c, d, e, f, g, h \in \overline{\mathbb{R}}$ nii, et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\infty \\ c & -\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+e & a+f \\ c+e & c+f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{cases} a+e &= 0 \\ a+f &= 0 \\ c+e &= 0 \\ c+f &= 1. \end{cases}$$

Kuna $a + e = a + f$, siis $e = f$. Seega $1 = c + f = c + e = 0$, mis on vastuolu. Järelikult maatriks B ei saa olla täisidempotent.

Kui S on poolrühm, siis selle poolrühma idempotentide hulk $E(S)$ on osaliselt järejestatud hulk loomuliku järjestusseose $\leq$ suhtes, mis on defineeritud

$$f \leq e \iff ef = f = fe$$

(vt [1, peatükk 1.8]).

Osutub, et osaliselt järjestatud hulk $E(S)$ on võre teatud maatrikspoolrühmade S korral.

Teoreem 22 ([12, teoreem 4.1])**.** *Kui* $\mathbf{A}$ *on lineaarselt järjestatud Abeli rühm, siis poolrühma* $M_2(\mathbf{A}^{\perp})$ *idempotentide osaliselt järjestatud hulk on võre.*

See tulemus on tõestatud teoreemina 4.1 artiklis [12].

Viited

[1] Clifford, A. H., Preston, G. B., *The Algebraic Theory of Semigroups. Vol. I*, Mathematical Surveys, No. 7, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1961.

[2] East J. Transformation representations of sandwich semigroups, *Exp. Math.* 29(3), 2020, 291–295.

[3] Fuchs, L., *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, Oxford, 1963.

[4] Gould, V., Johnson, M., Naz, M., Matrix semigroups over semirings, *Internat. J. Algebra Comput.* 30, 2020, 267–337.

[5] Hebisch, U., Weinert, H. J., *Handbook of Algebra Vol 1*, "Semirings and Semifields", Elsevier Science, Amsterdam, 1996, 427–428.

[6] Hebisch, U., Weinert, H. J., *Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science.* Vol. 5, World Scientific, Singapore, 1998.

[7] Johnson, M., Kambites, M., Multiplicative structure of 2×2 tropical matrices, *Linear Algebra Appl.* 435(7), 2011, 1612–1625.

[8] Kilp, M., *Algebra I*, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.

[9] Kilp, M., *Algebra II*, Tartu Ülikool, Tartu, 1998.

[10] Laan, V., *Algebra I*, URL: https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.038/2023_fall/uploads/Main/kon.pdf, külastatud 30.12.23.

[11] Laan, V., Kutti, M., Green's relations for 2×2 matrices over linearly ordered abelian groups, käsikiri.

[12] Laan, V., Kutti, M., Idempotent 2×2 matrices over linearly ordered abelian groups, *Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl.*, avaldatud elektrooniliselt 30.10.2023.

[13] Laan, V., Tart, L., *Sissejuhatus algebra struktuuridesse*, URL:https://kodu.ut.ee/~ltart/SJAS/Sissejuh_alg_str.pdf, külastatud 12.02.2022.

[14] Lam, T. Y., *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics 189, Springer-Verlag, New York, 1999.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Marilyn Kutti,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose
   "Troopiline algebra ja maatriksid üle järjestatud Abeli rühmade",
   mille juhendaja on Valdis Laan,
   reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, alates ***30.09.2025*** kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Marilyn Kutti
23.05.2024