TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Matemaatika- ja Füüsikakool

XXVII

J. Reimand

MATEMAATILINE INDUKTSIOON

Teine trükk

Juhendmaterjal I ja II kursuse õpilastele

TARTU 1973

Matemaatiline induktsioon.

Tunneme n a t u r a a l a r v e 1, 2, 3, ... ja nende mitmeid omadusi. Näiteks arvu lahutumist algtegurite korrutiseks, Pythagorase teoreemi nõudeid rahuldavaid arve, summa sõltumatust liidetavate järjekorrast, naturaalarvude järjestust ja palju muud. Seekord tutvume naturaalarvude j ä r g n e v u s e omadusega ja selle rakendustega.

Võibolla te polegi seni märganud niisuguse omaduse olemasolu. Pole viga. Ka inimkond kasutas naturaalarve mitu tuhat aastat, enne kui märkas seda omadust. Ja ka kaasaegsed matemaatika professorid ja akadeemikud ei tunne veel kõiki naturaalarvude omadusi. Näiteks pole teada, kas üle ühe paiknevate algarvude paaride, nn. "kaksikute" hulk 3 ja 5, 5 ja 7, 11 ja 13, 17 ja 19, 29 ja 31, 41 ja 43, 59 ja 61, 71 ja 73, 101 ja 103 jne. on lõplik või lõpmatu. Lahendamata küsimuste olemasolu näitab, et väliselt lihtne naturaalarvude hulk on sisult väga rikas ja keerukas. Vahel arvatakse, et selliste keeruliste omaduste uurimine on mõttetu. Sellise arvamuse väljendamisel on aga suur risk eksida. Sageli selgub hiljem, et arvamuse avaldaja kippus rääkima asjadest, millest ta veel ei küündinud aru saama. Nii peeti sada aastat matemaatilist loogikat praktikale mittevajalikuks ... kuni see osutus väga vajalikuks elektronarvutite loomisel. Ka koolis peavad mõned õpilased esialgu teoreemide tõestamist või mõne teema õppimist kasutuks. Pole vist siiski õige arvata, et terve inimkond eksib juba mitusada aastat, kohustades oma lapsi koolis tõestamist õppima. Tegelik elu on väga keeruline. Seepärast olge tähelepanelikud nähtuste tundmaõppimisel ja ettevaatlikud lõplike otsuste, eriti eitavate otsuste tegemisel! Sel põhjusel ei julge minagi väita, et tulevane "kaksikute" probleemi lahendaja ei ole praegu teie hulgas ja ei alusta tutvumist m a t e m a a t i l i s e i n d u k t s i o o n i g a.

Niisiis, naturaalarvudel on järgnevuse omadus. Selle "avastamiseks" peab nagu seisma jääma ja teraselt vaatama, muidu ta jääb märkamatuks oma lihtsuse tõttu.

Igale naturaalarvule järgneb naturaalarv.

Näiteks 1-le järgneb 2, 6-le 7, 2135-le 2136 jne., üldiselt naturaalarvule k järgneb naturaalarv $k+1$. Vahel tähistatakse arvule*) k järgnevat arvu veel k' (loetakse: kaa-prim); siis $k' = k + 1$. Muuseas paneme tähele, et igale arvule järgneb ainult ü k s arv.

Veidi järgnevuse omaduse tähtsusest. Möödunud sajandi teisel poolel nõudis matemaatika edasiarendamine naturaalarve ja nende omadusi kirjeldava teooria, nn. naturaalarvude teooria ülesehitamist deduktiivselt, s.o. üksteisele järgnevate teoreemide süsteemina, kus järgnevaid teoreeme tõestatakse eelnenud teoreemide abil. Sellise teooria esimese teoreemi tõestamiseks tuleb võtta paratamatult mõned tõed aluseks, mida antud teoorias ei saa tõestada. Neid tõdesid nimetatakse aksioomideks. Aksioome püütakse valida võimalikult vähe.

Aksioomide valik pole tavaliselt ühene, kuid nähtavasti saab valida aksioomideks ainult vaadeldava objekti suhtes väga olulisi tõdesid, mis nagu sisaldavad endas kogu teooria kontsentraadi. Sest järgnev teooria saadakse ju aksioomidest järeldamise kaudu. Kuid mingist kohvrist saab leida ainult seda, mis seal sisaldub. Nii ka siin.

Kui otsiti aksioome naturaalarvude teooria ülesehitamiseks, jäädi peatuma ka naturaalarvude järgnevuse omadusel. Lähemal uurimisel selgus, et see omadus on naturaalarvude suhtes üks olulisemaid. Ta väljendab lausa naturaalarvude

---

*) Järgnevas kirjutises mõistame arvu all ikka naturaalarvu.

e l e m u s t, mis seisnebki järgnevuses. Muide, järgnevuse omadus peegeldab ka naturaalarvude järjestatust suuruse järgi ja asjaolu, et naturaalarvude järjend on lõpmatu. Järgnevuse omadus koos järgnevuse ühesusega valitigi aksioomiks.

Kuid järgnevuse omadust saab kasutada alles siis, kui o n o l e m a s mingi naturaalarv. Seepärast valiti aksioomiks ka naturaalarvu 1 olemasolu. Kolmandaks aksioomiks valiti e e l n e v u s e omadus ("järgneb" asendada sõnaga "eelneb") koos eelnevuse ühesusega. Viimane omadus puudub ainult esimesel naturaalarvul. Selgus, et need kolm aksioomi kirjeldavad naturaalarvude hulka täielikult. Puudub aga meetod, mille abil tõestada selle hulga omadusi. Tõestada e i s a a k o n t r o l l i m i s e teel, sest naturaalarvude hulk on lõpmatu, meie eluaeg aga lõplik. Selgitame seda näite abil. Püüame tõestada kontrollimise teel, et summa ei sõltu liidetavate järjekorrast. Teeme seda erijuhul, arvude 1 ja a korral. Oletame, et liidame igas minutis arvud 1 ja a mõlemas järjekorras ning võrdleme tulemusi. Arvutades nii seitse tundi tööpäeviti kolmekümne aasta jooksul, jõuame kontrollida umbes

$$30(365 - 55) \cdot 7 \cdot 60 = 3\ 906\ 000,$$

s.o. peaaegu 4 miljonit arvu. Sellise tõestamismeetodi perspektiivitus on ilmne !

Neljanda ja viimase aksioomina valitigi t õ e s t a m i s m e e t o d naturaalarvude hulga jaoks. Ka see sisaldab järgnevuse omadust.

Kui mingi naturaalarvude hulk sisaldab arvu 1 ja selles kehtib järgnevuse omadus, siis see hulk sisaldab kõiki naturaalarve.

Nüüd saab tõestada naturaalarvude kohta käiva väite lõpliku arvu sammudega. Esiteks tuleb näidata, et väide kehtib naturaalarvu 1 korral. Seda saab teha kontrollimise teel. Teiseks tuleb näidata, et väitel on järgnevuse omadus. (Kuidas seda konkreetselt teha, seda vaatame hiljem). Rohkem meil polegi vaja teha, sest nüüd hakkab tööle viimane aksioom ehk, täpsemini, järgnevuse omadus. Selle kaudu nagu kandub väite õigsuse kontroll a u t o m a a t s e l t edasi kõikidele naturaalarvudele. Nii toimub väite ühekordse kehtivuse ja järgnevuse omaduse alusel väite ü l d i s t a m i n e kõikidele naturaalarvudele momentaalselt, mõttelennu kiirusega.

Üldistamist üksikjuhult üldjuhule nimetatakse <u>induktsiooniks</u>. Seepärast nimetatakse neljandat aksioomi ka induktsiooniaksioomiks. Tõestamismeetodit, mis tugineb induktsiooniaksioomil, nimetatakse <u>matemaatiliseks induktsiooniks</u>. Viimase erinevus harilikust induktsioonist seisneb selles, et hariliku induktsiooni korral üldistuse õigsus jääb tõestamata, matemaatilise induktsiooni korral aga tõestatakse. Seega matemaatiline induktsioon täiendab harilikku induktsiooni, väldib valesid üldistusi.

Ajaloo vältel on mitmed rahvad jõudnud naturaalarvude tundmaõppimisele ja kasutamisele iseseisvalt ning see on neile suurt kasu toonud, võimaldades elu paremini organiseerida ja tootmist arendada. Seetõttu võib põhjendatult küsida, kas matemaatika kirjeldused naturaalarvude kohta on õiged, kas naturaalarvude <u>aksiomaatiline</u>, s.o. aksioomidele tuginev teooria on õige või mitte? Sellest sõltub ka matemaatilise induktsiooni õigsus. Vastus on järgmine. Kui naturaalarvude aksioomid on õiged, siis on ka teooria õige. Aksioomide õigsusele aga viitab kaks asjaolu. Esiteks pole vastuolusid selles teoorias, mis tuletati nendest aksioomidest. Teiseks pole teooria sattunud pika aja jooksul vastuollu igapäevase eluga, praktikaga. Viimast väidet võiksime selgitada maakaardi ja maastikuga. Kuidas? Aksioomid on nähtavasti õiged. Nende lõplikku õigsust aga ei saagi tõestada.

Eelnev arutelu oli mõeldud idee andmiseks looduse ja matemaatika vahekorra küsimuses. Seda ei tohi aga nii mõista, nagu oleksid matemaatika tulemused kaheldavad ja neid ei võikski rakendada. Kahelda loomulikult võib ja peabki, kuid teistes teadusharudes on seda vaja rohkem kui matemaatikas. Praktika on kinnitanud matemaatika ja matemaatiliste meetodite vajalikkust ühiskonnale.

Järgnevas kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit mitmesuguste tõestamisülesannete lahendamiseks. Selleks tuleb niisiis iga väite korral näidata kahe eelduse täidetust:

(I) väide kehtib arvu 1 korral,

(II) väitel on järgnevuse omadus.

Sisuliselt pole oluline, millises järjekorras neid eeldusi kontrollida. Tavaliselt alustatakse esimese eelduse kontrollimisega. Seda on lihtsam teha, ka pole muret, et näeme asjata vaeva järgnevuse omaduse tõestamisega siis, kui väide arvu 1 korral ei kehtigi. Esimese eelduse kuju võib ka muuta. Nimelt pole oluline, kas väide kehtib just arvu 1 korral. Piisab, kui väide kehtib m i n g i naturaalarvu korral. Siis toimub üldistamine sellele arvule järgnevatele arvudele. Loomulikult pole siis toestatud väite kehtivus kõigi naturaalarvude korral, vaid ainult alates kontrollitud arvust.

1. N ä i d e. Tõestada, et n esimese naturaalarvu summa võrdub avaldise $\frac{n(n+1)}{2}$ väärtusega.

Tuleb tõestada, et iga naturaalarvu korral kehtib valem

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Valemi kehtivus sõltub naturaalarvust. Niisugusel juhul saame tõestada matemaatilise induktsiooni abil.

(I) Kontrollime, kas valem üldse kehtib. Kui $n = 1$, võrdub vasak pool

$$v = 1,$$

ja parem pool

$$p = \frac{1(1 + 1)}{2} = 1.$$

Järelikult $\qquad v = p$

ning valem kehtib, kui $n = 1$.

(II) kontrollime, kas valemil on järgnevuse omadus. Võtame suvalise arvu k. Järgnevuse omadus tähendaks nüüd, et valemi kehtivusest k korral j ä r e l d u b valemi kehtivus $k + 1$ korral. Seega tuleb tõestada teoreem:

$$E: 1 + 2 + 3 + \ldots + (k - 1) + k = \frac{k(k + 1)}{2},$$

$$V: 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

T: Lähtume väite vasakust poolest ja püüame selle teisendada väite paremaks pooleks. Loomulikult võib kasutada selle teisendamise käigus eeldust.

$$v = \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + k}_{\text{eeldus}} + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) =$$

$$= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = p.$$

Teoreem on tõestatud. Esitatud valemil on järgnevuse omadus.

(III) Üldtõestuse osade (I) ja (II) tulemuste ühendamisest järgneb (induktsiooni aksioomi põhjal), et tõestatav valem kehtib iga naturaalarvu korral.

Kõrvalpõikena märgime, et üldiselt on soovitav teisenduste käigus tuua ühised tegurid sulgude ette. Nii saab vältida kõrgema astme hulkliikmete tekkimist, mida me ei oska teguriteks lahutada.

2. N ä i d e. Leida summa

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n + 1)}$$

arvutamise eeskiri.

Oletuse otsimine.

Ülesande lahendamiseks peame leidma esialgse valemi, mille järgi saaks S_n väärtust arvutada. Seejärel tuleks tõestada leitud valemi kehtivus. Püüame tuletada otsitavat valemit üksikjuhtude põhjal, s.t. induktsiooni teel. Selleks võrdsustame n arvudega 1, 2 ja 3.

$$n = 1 \qquad S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \qquad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$n = 3 \qquad S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}\,.$$

Nende tulemuste põhjal võib püstitada oletuse ehk <u>hüpoteesi</u>, et

$$S_n = \frac{n}{n+1}\,.$$

Matemaatikas on lubatud selle valemi väljakirjutamine niisuguste saatesõnadega: "Analoogia põhjal kehtib i g a naturaalarvu korral valem ...". Sest induktsioon võib anda nii õigeid kui ka valesid järeldusi!

Hüpoteesi toestamiseks kasutame matemaatilist ehk <u>täielikku induktsiooni</u>.

(I) Valides $n = 1$, saame

$$v = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad p = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Valem kehtib.

(II) Järgnevuse omaduse olemasolu kontrollimine.

$$E:\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}\,.$$

$$V:\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k+1}{k+2}\,.$$

$$T:\ v = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{eeldus}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k+1}{k+2} = p.$$

(III) Leitud valemil on nii konkreetne kehtivus arvu 1 korral kui ka järgnevuse omadus. Selle põhjal valem

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

kehtib iga naturaalarvu korral.

3. N ä i d e. Tõestada, et 840 jagub iga naturaalarvuga, mis on väiksem kui 30.

(I) Valides $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, saame jaatavad vastused,

(II) Järgnevuse omaduse kehtivust ei saa aga toestada. See järeldub juba ühest eitavast näitest: 840 ei jagu 11-ga. Järelikult väide ei kehti.

4. N ä i d e. Selgitada, kas funktsiooni

$$f(n) = n^2 + n + 41$$

väärtused iga naturaalarvu korral on alg- või kordarvud

Oletuse otsimine.

Võrdustame n arvudega 1, 2, 3, 4 ja 5. Saame $f(1) = 43$, $f(2) = 47$, $f(3) = 53$, $f(4) = 61$, $f(5) = 71$. Kontrollitud juhtude alusel võime püstitada hüpoteesi, et avaldise $f(n)$ väärtuseks on iga n korral a l g a r v . Ühtlasi on kontrollitud väite õigsus, kui $n = 1$.

(II) Järgnevuse omaduse töestamine ei õnnestu. Kuid sellest veel ei järeldu, et oletus on vale.

Jätkates oletuse kontrollimist, saaksime vastuseks algarvud kõigi n väärtuste korral kuni 40-ni. Kuid $n = 40$ korral saame

$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 40\cdot 41 + 41 = 41(40+1)$, s.o. kordarvu. Järelikult on funktsiooni $f(n)$ väärtusteks nii alg- kui ka kordarvud. I n d u k t s i o o n i a l u s e l t e h t u d o l e t u s o s u t u s v a l e k s. Vaadeldud näide hoiatab kergekäeliste üldistuste tegemise eest.

5. N ä i d e. Tõestada, et iga naturaalarv võrdub talle järgneva naturaalarvuga.

Alustame seekord järgnevuse omaduse kontrollimisegs, kuna kahes eelmises näites just selle puudumine osutus määravaks.

(II) Järgnevuse omaduse olemasolu:

E: $k = k + 1$,

V: $k + 1 = k + 2$.

T: Lähtume eeldusest ja liidame selle mõlemale poolele arvu 1:

$$k = k + 1 \quad \Big| + 1, \text{ saame}$$

$$k + 1 = (k + 1) + 1 \quad \text{ehk}$$

$$k + 1 = k + 2.$$

Järelikult väitel on järgnevuse omadus.

(I) Väite konkreetne kontrollimine. Meil ei õnnestu aga leida kahte järjestikust ja võrdset naturaalarvu. Väide on seega vale. Näited 3, 4 ja 5 juhtisid tähelepanu sellele, et matemaatilist induktsiooni saab rakendada ainult siis, kui mõlemad eeldused (I ja II) on rahuldatud.

K o r d a m i s k ü s i m u s i .

1. Mida tähistatakse sõnaga aksioom ?
2. Millised naturaalarvude omadused valiti aksioomideks ?
3. Kuidas nimetatakse järeldamist üldjuhult üksikjuhule ?
4. Kuidas nimetatakse järeldamist üksikjuhult üldjuhule ?
5. Millise järeldamise korral võib eksida ? Miks ?
6. Kuidas saab vältida valejärelduste tegemist ?
7. Mida nimetatakse matemaatiliseks induktsiooniks ?
8. Millised on matemaatilise induktsiooni eeldused ?
9. Kuidas kontrollitakse nende täidetust ?
10. Milleks kasutatakse matemaatilist induktsiooni ?

Ülesandeid.

1. Tõestada, et

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

2. Tõestada, et

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} .$$

3. Tõestada, et

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2 .$$

4. Leida ja tõestada, millega võrdub n esimese paaritu arvu summa, s.o.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) .$$

5. Tõestada, et n esimese naturaalarvu kuupide summa on ruut, s.o.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

M ä r k u s: Kasutage parema poole teisendamiseks ül.1 lahendust.

6. Tõestada, et

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} .$$

7. Tõestada, et

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} .$$

8. Tõestada, et kolme järjestikuse naturaalarvu kuupide summa jagub 9-ga.

9. Tõestada, et $n^3 + 5n$ jagub 6-ga iga naturaalarvu korral.

10. Tõestada, et aritmeetilise progressiooni n-es liige avaldub valemiga

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

kui aritmeetiliseks progressiooniks nimetatakse arvude jada, milles iga arv, alates teisest, võrdub eelneva arvu ning ühe ja sama, antud jada jaoks jääva arvu summaga.

11. Tõestada, et geomeetrilise progressiooni n-es liige avaldub valemiga

$$a_n = a_1 q^{n - 1},$$

kui geomeetriliseks progressiooniks nimetatakse niisugust arvude jada, milles iga arv, alates teisest, võrdub eelneva arvu ning ühe ja sama, antud jada jaoks jääva arvu korrutisega.

12. Tõestada, et

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n .$$

13. Tõestada, et

$$2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = 2n^2 .$$

14. Tõestada, et iga naturaalarvu n korral kehtib valem

$$\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}, \quad \text{kus} \quad b \neq 0 .$$

15. Tõestada, et n-nurga sisenurkade summa S_n avaldub valemiga

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ, \quad \text{kus} \quad n > 2 .$$

16. Tõestada, et kui $n > 1$, kehtib võrratus

$$S_n = \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} .$$

M ä r k u s: Näidata, et $S_{n+1} - S_n > 0$, millest järeldub, et $S_{n+1} > S_n$.

Я. Рейманд

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

На эстонском языке

Тартуский государственный университет

ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Paljundamisele antud 9. X 1973. Rotaatoripaber, 30x42. 1/4. Trükipoognaid 1,0.
Tingtrükipoognaid 0,93. Trükiarv 500.
Tell. nr. 959.
TRÜ rotaprint, ENSV, Tartu, Pälsoni tn. 14.
Tasuta