

Stereomeetrilised ülesanded täielikkude lahendustega

I

Sissejuhatus. Sirgjooned, tasapinnad
ja nurgad. Prisma ja rööptahukas.
Püramiid. Tüvipüramiid ja tüviprisma

Iseõppimiseks

Toimetanud
Oskar Kool

Autori kirjastus, Tartus
1932

Stereomeetrilised ülesanded täielikkude lahendustega

I

Sissejuhatus. Sirgjooned, tasapinnad
ja nurgad. Prisma ja rööptahukas.
Püramiid. Tüvipüramiid ja tüviprisma

Iseõppimiseks

Toimetanud
Oskar Kool

Autori kirjastus, Tartus
1932



5765

A-8394

Sissejuhatus.

Laused. I. Iga suuruse asemele võib panna te-
maga võrdse teise suuruse.

II. Kaks suurust, mis võrduvad sama kolmandaga,
on võrdsed: $a = m$, $b = m$, $a = b$.

III. Pythagorase teoreem. Hüpotenuusi ruut võr-
dub kaatetite ruutude summaga: $c^2 = a^2 + b^2$. Järelikult
 $a^2 = c^2 - b^2$, s. o. kaateti ruut võrdub hüpotenuusi ja teise
kaateti ruutude vahega.

IV. Kaatet, mille vastasnurk 30° , on pool hüpote-
nuusist. — Tõestamiseks tõmmata korrapärasest kolmnur-
gas, mille külg on a , nurgapoolitaja. Saame püstkolmnur-
ga (täisnurkse kolmnurga) hüpotenuusiga a ja kaate-
tiga $\frac{1}{2}a$.

V. Korrapärase kolmnurga kõrgus h külja a kaudu
(ehk kaatet, mille vastasnurk 60° , hüpotenuusi kaudu)
avaldub valemiga: $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. — Tõepoolest: $h^2 = a^2 -$
 $-(\frac{1}{2}a)^2 = \frac{3}{4}a^2$, $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

VI. Ringi sissejoonestatud korrapärase 6-nurga
(korrap. kõõlkuusnurga) külg võrdub raadiusega: $a_6 = R$.

VII. Ringi sissejoonestatud korrapärase kolmnurga
(korrap. kõõlkolmnurga) külg: $a_3 = R\sqrt{3}$. Järelikult $R =$
 $= \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}a_3\sqrt{3}$. Korrapärase kolmnurga apoteem (kor-
rap. kolmnurga sissejoonestatud ringi raadius) on pool
selle kolmnurga ümberjoonestatud ringi raadiusest:
 $r = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a_3\sqrt{3} = \frac{1}{6}a_3\sqrt{3}$.

VIII. Ruudu diagonaal d (võrdhaarse püstkolmnurga hüpotenuus) külje (kaateti) a kaudu avaldab valemiga: $d = a\sqrt{2}$. Tõepoolest: $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, $d = a\sqrt{2}$.

IX. Ruudu külje a diagonaali d kaudu (ehk kaatet, mille vastasnurk 45° , hüpotenuusi kaudu) avaldub valemiga: $a = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$. Eelmisest lausest saame: $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$.

X. Parallelogrammi diagonaalide ruutude summa võrdub külgede ruutude summaga.

XI. Kolmnurga pind võrdub poole aluse ja kõrguse korrutisega: $Q = \frac{1}{2}ah$.

XII. Kolmnurga külgede ja vastavate kõrguste korrutised on võrdsed, sest nad kujutavad kolmnurga kahekordset pinda: $ah_a = bh_b = ch_c$.

XIII. Korrapärase, s. o. võrdkülgse kolmnurga pind külje a kaudu avaldub valemiga: $Q = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. — Tõepoolest, aluse pool $= \frac{1}{2}a$, kõrgus $= \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, s. o. $Q = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

XIV. Kolmnurga kõrguse h_a ja pinna Q avaldised külgede a , b ja c kaudu on: $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $Q = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kus $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

XV. Kolmnurga ümber- ja sissejoonestatud ringide raadiuste avaldised on: $R = \frac{abc}{4Q}$, $r = \frac{Q}{p}$, kus a , b ja c on kolmnurga küljed, Q pind ning $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Pind: $Q = pr$.

XVI. Ühele tasapinnale tõmmatud ristjooned on rööbikud.

XVII. Võrdsete kaldjoonte projektsioonid on võrdsed.

XVIII. Teoreem kolmest ristjoonest. Sirge, mis risti kaldjoone projektsiooniga, on risti kaldjoone enesega, kui ta kaldjoone alusest läbi läheb.

XIX. Sarnaste hulktahkude pinnad (külgpinnad, põhipinnad) suhtuvad nagu kõrguste või vastavate servade ja joonte ruudud.

XX. Sarnaste hulktahkude mahud suhtuvad nagu kõrguste või vastavate servade ja joonte kuubid.

Neile lausetele on lahendustes vastavate rooma numbritega tähelepanu juhitud.

Võrdelised suurused. Suurusele, mis võrdeline x -ga, võib anda kuju mx , kus m on jääv tegur. Tõepoolest, kui x suureneb 2 korda, siis ka mx suureneb 2 korda. Üldiselt, kui x suureneb või väheneb a korda, siis ka mx suureneb või väheneb a korda. Jäävat suurust m nim. võrdelisuse (proportsionaalsuse) koeffitsiendiks. — Kui x on a ja b keskmine võrdeline, siis ta rahuldab võrret $a:x=x:b$. Korrutades saame $x^2=ab$. Tähendab, kahe arvu keskmine võrdeline on niisugune arv, mille ruut võrdub nende arvude korrutisega. Ruumi kokkukohi mõttes on viimasel kujul lahendustes antud keskmisi võrdelisi suurusi. Ka võime juurida: $x=\sqrt{ab}$, s. o. kahe arvu keskmine võrdeline võrdub ruutjuurega nende korrutisest.

Ruutvõrrand. Üldise ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ juured on

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Taandatud ruutvõrrandit $x^2=px+q=0$ saab üldise ruutvõrrandi järgi lahendada, kui lugeda $a=1$, $b=p$, $c=q$:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Kuid võib ka teisiti lahendada:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Esimesel lahendusel on see paremus, et seal on vähem murde.

Taandatud ruutvõrrandite juurte omaduse põhjal:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ ja } x_1 x_2 = q$$

on võimalik lahendada võrrandeid, kus on teada juurte summa ja korrutis.

Näide 1. $x + y = 8$, $xy = 15$. Lugeses x ja y ruutvõrrandi $z^2 - 8z + 15 = 0$ juurteks, leiame:

$$z_1 = +4 + \sqrt{16 - 15} = 4 + 1 = 5$$

$$z_2 = +4 - \sqrt{16 - 15} = 4 - 1 = 3$$

$$\text{Jär. } x_1 = 5, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = 5.$$

Näide 2. $x - y = 3$, $xy = 54$. Teisendame: $x + (-y) = 3$, $x(-y) = -54$. Kirjutame: $z^2 - 3z - 54 = 0$ ja

$$z_1 = \frac{+3 + \sqrt{9 + 4 \cdot 54}}{2} = \frac{+3 + 15}{2} = 9$$

$$z_2 = \frac{3 - \sqrt{9 + 4 \cdot 54}}{2} = \frac{3 - 15}{2} = -6.$$

$$\text{Jär. } x_1 = 9, -y_1 = -6, y_1 = 6; x_2 = -6, -y_2 = 9, y_2 = -9.$$

Järelekatse. $x_1 - y_1 = 9 - 6 = 3$, $x_1 y_1 = 9 \cdot 6 = 54$; $x_2 - y_2 = -6 - (-9) = 3$, $x_2 y_2 = -6 \cdot -9 = 54$. Rahuldavad.

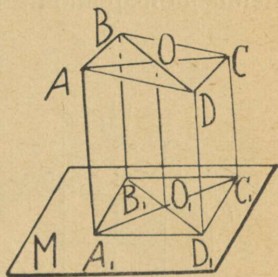
Vastastehted. Sama arvuga kordasaadetud vastastehted tühistavad teineteist. Saame ikka jälle selle arvu, millest välja läheme: $a + b - b = a$, $a - b + b = a$; $(a \times b) : b = a$, $(a : b) \times b = a$; $\sqrt{a^2} = a$, $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt[3]{a^3} = a$, $(\sqrt[3]{a})^3 = a$, $\sqrt[n]{a^n} = a$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Ülesanded ¹⁾ ja lahendused.

Sirgjooned, tasapinnad ja nurgad.

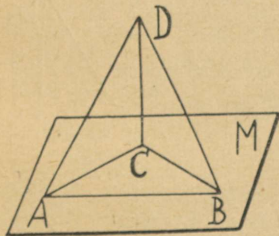
1. Rööpküliliku kolme tipu A, B ja C kaugused tasapinnast M on vastavalt a, b ja c. Leida neljanda tipu D kaugus sellest tasapinnast.

Tõmbame rööpküliliku tippudest (joon. 1) ja diagonaalide lõikepunktist O ristjooned tasapinnale M: $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$, $DD_1 = x$, olgu ristjoon $OO_1 = m$. Jär. $\frac{1}{2}(a + c) = m$, sest OO_1 on trapetsi AA_1C_1C keskjoon (XVI); samuti $\frac{1}{2}(b + x) = m$. Lause II: $\frac{1}{2}(b + x) = \frac{1}{2}(a + c)$, s. o. $x = a + c - b$.



Joon. 1.

2. Püstkolmnurga suurima nurga tipust on tõmmatud ristjoon $CD = c$ kolmnurga tasapinnale. Ristjoone ülemise otsa kaugus teistest kolmnurga tippudest on a ja b. Leida hüpotenuus ja valida arvud ²⁾.



Joon. 2.

Üks kaatet AC (joon. 2) avaldub ristjoone $CD = c$ ja kauguse $AD = a$ kaudu: $AC^2 = a^2 - c^2$; sarnaselt $BC^2 = b^2 - c^2$. Olgu hüpotenuus $AB = x$, siis $x^2 = AC^2 + BC^2 = a^2 + b^2 - 2c^2$ ja $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}$. — Arvud peab nii valima, et $a > c$ ja $b > c$ (kaldjooned ja ristjoon), siis tuleb $a^2 + b^2 > 2c^2$ ja juurealune arv on positiivne.

Näide 1. $a = b = 3$, $c = 1$. $x = \sqrt{16} = 4$.

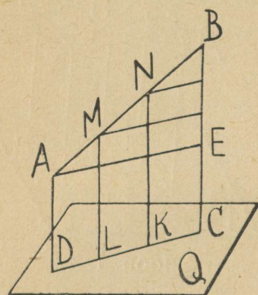
Näide 2. $a = 11$, $b = 12$, $c = 4$. $x = \sqrt{233} = 15,264$.

1) Suurem jagu ülesandeid on võetud eestikeelseist õpikuist.

2) Mõeldakse aritmeetilisi arve.

Logaritmidega¹⁾: $\lg x = \frac{1}{2} \lg 233 = \frac{1}{2} \cdot 2,3674 = 1,1837$;
 $x = 15,26$. Viie kohaga: $\lg x = 1,18368$; $x = 15,264$.

3. Sirglõik AB asetseb ühel pool tasapinda Q, kusjuures otsapunktid A ja B on tasapinnast vastavalt 10 ja 16 m kaugusel. AB on jagatud kolmeks võrdseks osaks. Leida jaotuspunktide kaugused tasapinnast.

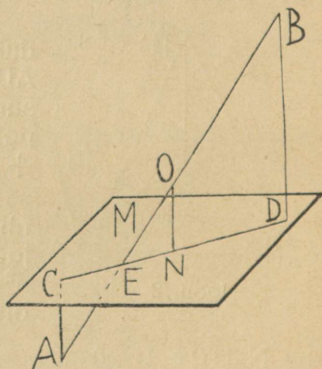


Joon. 3.

Tõmbame B-st ristjoone BC tasapinnale Q (joon. 3), siis A-st ja jaotuspunktide M ja N ristjooned tasapinnale ja BC-le. Oma-me: $AD = 10$ m, $BC = 16$ m. Sirglõik $BE = 16 - 10 = 6$ m jagub kolmeks võrdseks osaks, s. o. $6 : 3 = 2$ m. Otsitavad kaugused: $ML = 10 + 2 = 12$ m, $NK = 12 + 2 = 14$ m.

4. Sirglõigu otsapunktide kaugused tasapinnast on 8 ja 2, kusjuures sirglõik lõikab tasapinda. Leida sirglõigu keskkoha kaugus tasapinnast.

Tõmbame sirglõigu otstest ja keskkohast O ristjooned tasapinnale: $BD = 8$, $AC = 2$, ON on otsitav (joon. 4). Kolmnurkad BED, OEN ja AEC on sarnased. Võime kirjutada: $ON : AC = OE : AE$ (1). Sirglõigu OE avaldame AE kaudu. Et $BD : AC = 4$ ja $BD = 4 AC$, siis ka $BE = 4 AE$ ja terve sirglõik $AB = 5 AE$. Edasi: $OB = \frac{1}{2} AB = \frac{5}{2} AE$, $OE = BE - OB = 4 AE - \frac{5}{2} AE = \frac{3}{2} AE$. Paneme asemele (1): $ON : 2 = \frac{3}{2} AE : AE$, jär. $ON = (2 \cdot \frac{3}{2} AE) : AE = 3$.

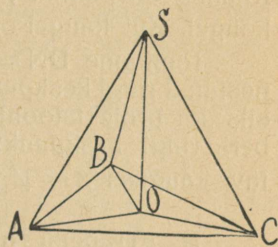


Joon. 4.

1) Log. tabelite tarvitamisest vaadata: O. Kool — Trig. planimeetria ülesandeid.

5. Võrdkülgse kolmnurga tasapinnale on tõmmatud ristjoon $a = 13$ m. Selle ristjoone ülemise otsa kaugus igast kolmnurga tipust on $b = 14$ m. Leida kolmnurga külj ja pind.

Tehes joonise 5, näeme, et antud on korrapä. kolmnurkse püramiidi kõrgus $SO = a$ ja külgserv $SA = b$, tarvis leida põhja külj ja põhja pind. Võrdsetele kaldjoontele vastavad võrdsed projektsioonid, sellep. $OA = OB = OC$ on korrapä. kolmnurga ABC ümberjoonestatud ringi raadius: $R = \frac{1}{3}x\sqrt{3}$, kus $x = AC$ (VII). Püstkolmnurgast SOA saame kaateti: $R = \sqrt{b^2 - a^2}$, jär.



Joon. 5.

$$\text{II) : } \frac{1}{3}x\sqrt{3} = \sqrt{b^2 - a^2} \text{ ja } x = \frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3(b^2 - a^2)} = 9 \text{ m.}$$

$$\text{Pind (XIII) : } Q = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} = 0,75(b^2 - a^2)\sqrt{3} = 35,073 \text{ m}^2.$$

$$\text{Logaritmidega : } \lg Q = \lg 0,75 + \lg 27 + \frac{1}{2}\lg 3 = 1,8751 + 1,4314 + 0,2386 = 1,5451; Q = 35,08 \text{ m}^2. \text{ Viie kohaga : } \lg Q = 1,54498; Q = 35,073 \text{ m}^2.$$

6. Ruumis asetseb kolm rööbikut sirget, millede kaugused üksteisest on 30 m, 26 m ja 28 m. Leida, kui kaugel asetseb iga sirge tasapinnast, mis läheb läbi kahe teise sirge.

Tähendagu A, B ja C sirgete ja nende risttasapinna ühistäppe. Otsitavad kaugused on kolmnurga ABC kõrgused. Olgu nad: CM, AN ja BL. Küljed on: $AB = 30$ m, $BC = 26$ m ja $AC = 28$ m. Kõrgused (XIV): $CM = \frac{2}{30}\sqrt{42(42-30)(42-26)(42-28)} = \frac{2}{30} \cdot 336 = 22\frac{2}{5}$ m, $AN = \frac{2}{26} \cdot 336 = 25\frac{1}{13}$ m, $BL = \frac{2}{28} \cdot 336 = 24$ m.

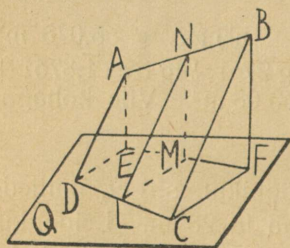
7. Ruumisasetsevast punktist on tasapinnale tõmmatud kaks kaldjoont: $m = 40$ cm ja $n = 30$ cm. Leida n projektsiooni pikkus, kui m projektsioon on 32 cm.

Punkti kaugus tasapinnast $= \sqrt{40^2 - 32^2} = 24$ cm.
 Lühema kaldjoone projektsioon $= \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$ cm.

8. Püstkolmnurga ABC hüpotenuus $AB = 12$ m. Ruumis on punkt D, mis kolmnurga igast tipust on 10 m kaugel. Kui kaugel on see punkt kolmnurga tasapinnast?

Ristjoone $DN = x$ alus N on kolmnurga ümberjoonestatud ringi keskpunktis, sest kui kaldjooned on võrdsed, siis ka projektsioonid on võrdsed. Püstkolmnurga ümberj. ringi keskpunkt on hüpotenuusi keskkohas. Otsitav kaugus: $x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ m (joon. 7).

9. Trapetsi alused on 5 m ja 10 m. Läbi ühe kõrvalkülje on tõmmatud tasapind, mis asetseb 6 m kaugusel vastaskülje keskkohast. Leida vastastippude kaugused tasapinnast.



joon. 6.

Vaatleme trapetsit ABCD, kus $AD \parallel BC$ (joon. 6). Antud: $AD = 5$ m, $BC = 10$ m, $NM = 6$ m. Otsitavad: BF ja AE ($AE \perp Q$, $NM \perp Q$, $BF \perp Q$). Trapetsi keskjoon: $NL = \frac{1}{2}(10 + 5) = 7\frac{1}{2}$ m. Kolmnurkade sarnadus: $BF : NM = BC : NL$ ehk $BF : 6 = 10 : 7\frac{1}{2}$, s. o. $BF = 8$ m; $AE : NM = AD : NL$ ehk $AE : 6 = 5 : 7\frac{1}{2}$, s. o. $AE = 4$ m.

10. Punktist A on tõmmatud tasapinnale M kaldjooned: $AB = 10$ cm ja $AC = 17$ cm; nende projektsioonid tasapinnal M suhtuvad nagu 2:5. Kui kaugel on punkt A tasapinnast M?

Tähendagu D ristjoone alust tasapinnal, otsitav on $AD = x$. Projektsioonide BD ja CD, mis olgu vastavalt y ja z, suhe on antud: $y : z = 2 : 5$ (1). Püstkolmnurkadest ADB ja ADC saame: $x^2 = 10^2 - y^2$, $x^2 = 17^2 - z^2$ (2). Lause II: $100 - y^2 = 289 - z^2$, jär. $z^2 - y^2 = 189$ (3). Vör-

randeist (1) ja (3) omame: $y = \frac{2}{5}z$, $z^2 - (\frac{2}{5}z)^2 = 189$ ja $z^2 = 225$. Järelikult (2): $x^2 = 17^2 - 225 = 64$, $x = \sqrt{64} = 8$ cm. Teha joonis.

11. Püstkolmnurga ABC kaatetid on 15 cm ja 20 cm. Püstnurga tipust C on kolmnurga tasapinnale tõmmatud ristjoon $CD = 35$ cm. Leida punkti D kaugus hüpotenuusist.

Hüpotenuus (joon. 7):

$$AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ cm.}$$

Kolmnurga kahekordne pind:

$$AB \cdot CN = AC \cdot BC \text{ ehk } 25 \cdot CN =$$

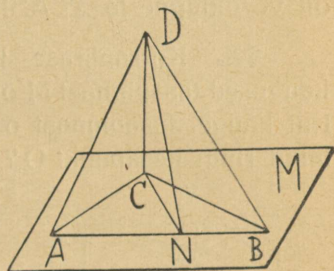
$$= 15 \cdot 20; \quad CN = (15 \cdot 20) : 25 =$$

$$= 12 \text{ cm.} \quad \text{Otsitav kaugus:}$$

$$DN = \sqrt{35^2 + 12^2} = 37 \text{ cm.}$$

— Silmas pidada lauset XVIII.

Punktis N lõikuvad kolm ristjoont: $CN \perp AB$, $DN \perp AB$.



Joon. 7.

12. Kas võib olla kolmetahune nurk järgmiste tasapindsete nurkadega: 1) 130° , 85° ja 36° ; 2) 100° , 70° ja 40° ?

Iga kumera ruumisnurga tasapindsete nurkade summa on väiksem kui 360° . Kolmetahuse nurga kahe tasapindse nurga summa on suurem kui kolmas nurk.

1. $85^\circ + 36^\circ = 121^\circ$, $130^\circ > 121^\circ$; ei või olla.

2. $70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$, $100^\circ < 110^\circ$, $70^\circ + 40^\circ + 100^\circ < 360^\circ$; võib olla.

13. Kas saab moodustada kumera neljatahuse nurga järgnevaist tasapindsetest nurkadest: 1) 40° , 70° , 100° ja 150° ; 2) 130° , 50° , 30° ja 70° ?

1. $40^\circ + 70^\circ + 100^\circ + 150^\circ = 360^\circ$; ei saa.

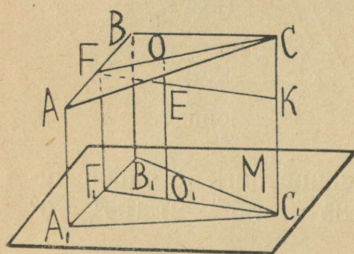
2. $130^\circ + 50^\circ + 30^\circ + 70^\circ < 360^\circ$; saab.

14. Kolmetahuse nurga SABC kaks tasapindset

nurka on kumbki 45° , nende vahel olev kahetahune nurk $= 90^\circ$. Kui suur on kolmas tasapindne nurk?

Tõmbame tasapinna $ACB \perp SC$. Antud: $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $\sphericalangle ASC = \sphericalangle BSC = 45^\circ$. Otsitav on nurk ASB . Võrdhaarsed püstkolmnurgad ASC ja BSC ühtuvad, sest neil on tipu S juures 45° nurgad ja ühine külg SC , sellepärast $AC = BC$. Aga kolmnurk ACB on siis ka võrdhaarne ja ühtub teistega. Järelikult nende hüpotenuusid on võrdsed: $AS = BS = AB$. Tähendab, $\triangle ASB$ on võrdkülgne ja $\sphericalangle ASB = 60^\circ$.

15. Korrapärase kolmnurga tippude A , B ja C kaugused tasapinnast M on vastavalt 3 cm, 5 cm ja 7 cm. Kui kaugel tasapinnast on selle kolmnurga ümberjoonestatud ringi keskpunkt O ?



Joon 8.

Punktidest A, B, C, O ja F ($AF = BF$) tõmbame ristjooned tasapinnale (joon. 8) ja $FK \parallel F_1C_1$. Otsitav kaugus: $OO_1 = OE + EO_1$. Trapetsi ABB_1A_1 keskjoon: $FF_1 = \frac{1}{2}(3 + 5) = 4$ cm, s. o. $EO_1 = KC_1 = 4$ cm. Sirgloik $CK = 7 - 4 = 3$ cm. Korrap. kolmnurga ümber- ja sissejoonestatud ringide raadiused olenevad üksteisest: $OC = 2 \cdot OF$. Jär. $3 \cdot OF = CF$ ja $OF = \frac{1}{3}CF$.

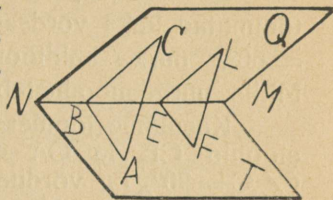
Et $\triangle KFC \sim \triangle EFO$, siis ka $OE = \frac{1}{3}CK = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ cm. Kaugus $OO_1 = 1 + 4 = 5$ cm. — Silmas pidada lauset XVI.

16 Püstnurkse kahetahuse nurga servale punktidesse A ja B on tõmmatud tahkudel ristjooned AC ja BD . Leida CD pikkus, kui $AB = 6$ m, $AC = 3$ m, ja $BD = 2$ m.

Ühendame A ja D , saame püstkolmnurga ABD , kus $AB = 6$ m, $BD = 2$ m ja hüpotenuus AD on tundmatu: $AD^2 = 6^2 + 2^2 = 40$, s. o. $AD^2 = 40$. Ühendame D ja C , saame püstkolmnurga ADC , kus hüpotenuus CD on otsitav: $CD^2 = AD^2 + AC^2 = 40 + 3^2 = 49$, $CD = \sqrt{49} = 7$ m.

17. Kahetahuse nurga ühel tahul on võetud kaks punkti, mis kahetahuse nurga servast 51 cm ja 34 cm kaugel asetsevad. Esimese punkti kaugus teisest tahust on 15 cm. Leida teise punkti kaugus samast tahust.

Olgu punktid A ja F ülesandes nimetatud punktideks (joon. 9). Tõmbame $AB \perp NM$, $AC \perp Q$, $FE \perp NM$ ja $FL \perp Q$. Kolmnurgad ABC ja FEL on sarnased: $LF : AC = FE : AB$ ehk $LF : 15 = 34 : 51$, s. o. otsitav kaugus $LF = (15 \cdot 34) : 51 = 10$ cm.



Joon. 9.

18. Kolmnurga küljed on 10, 17 ja 21 m. Kõige suurema nurga tipust on kolmnurga tasapinnale tõmmatud ristjoon = 15 m. Leida ristjoone tipu kaugus kolmnurga kõige suuremast küljest.

Antud: $AC = 10$ m, $BC = 17$ m ja $AB = 21$ m, $CD = 15$ m, kusjuures $CD \perp ABC$ (joon. 7). Punkti kauguseks sirgjoonest loetakse punktist sirgele tõmmatud ristjoone pikkust. Ristjoone saame järgmiselt: tõmbame $CN \perp AB$, järelkult (XVIII) $DN \perp AB$. Otsitav kaugus on kolmnurga DCN hüpotenuus DN. Kolmnurga ACB kõrgus: $CN = \frac{2}{21} \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} = 8$ m. Nüüd omame: $DN^2 = 8^2 + 15^2 = 289$, $DN = \sqrt{289} = 17$ m.

19. Punkti kaugus tasapinnast on h. Leida kaldjoonte pikkused, mis sellest punktist on tasapinnale tõmmatud järgmisi nurgi: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° ; 4) 18° .

Olgu otsitavad kaldjooned x, y, z ja u.

1. $x = 2h$ (IV).

2. $y = h\sqrt{2}$ (VIII).

3. $h = \frac{1}{2}z\sqrt{3}$ (V), jär. $z = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.

4. Kaugust h võime vaadelda ringi sissejoonestatud korrap. kümmenurga külje poolena, kuna raadius

oleks otsitav. On teada, et $a_{10} = \frac{1}{2} R(\sqrt{5} - 1)$, sellep.
 $h = \frac{1}{4} u(\sqrt{5} - 1)$ ja $u = \frac{4h}{\sqrt{5} - 1} = \frac{4h(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = h(\sqrt{5} + 1)$.

20. Väljaspool asetsevast punktist on tasapinnale tõmmatud kaks võrdset kaldjoont, nurk nende vahel = 60° , nurk kaldjoonte projektsioonide vahel = 90° . Millise nurga moodustab iga kaldjoon oma projektsiooniga?

Kasutame joonist 7. Kaldjoonte DB ja AD projektsioonid CB ja CA on võrdsed. Jär. kolmnurk ACB ($\angle C = 90^\circ$) on võrdhaarne, aga kolmnurk ADB on võrdkülgne, sest ta on võrdhaarne ja tipunurk $\angle ADB = 60^\circ$. Olgu $CN \perp AB$. Siis $NB = NA = NC$ ($\angle NCB = 45^\circ$). Püstkolmnurgast CNB saame: $CB^2 = NB^2 + NC^2 = 2NB^2$, $CB = NB \cdot \sqrt{2}$. Et $DB = 2 \cdot NB$, siis püstkolmnurgast DCB omame: $DC^2 = DB^2 - CB^2 = (2 \cdot NB)^2 - (NB \cdot \sqrt{2})^2 = 2 \cdot NB^2$, s. o. $DC = NB \cdot \sqrt{2}$. Kaatetid DC ja CB on võrdsed, sellep. otsitav nurk $\angle CBD = 45^\circ$. Niisama suur on ka $\angle DAC$.

21. Ruudu diagonaalide lõikepunkti on tema tasapinnale tõmmatud ristjoon, mille pikkus b. Ruudu külg on a. Kui kaugel ruudu tippudest on b ülemine ots? Valida arvud.

Ruudu diagonaali pool = $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$ ja ristjoon b moodustavad püstkolmnurga, mille hüpotenuus x on otsitav: $x^2 = (\frac{1}{2} a\sqrt{2})^2 + b^2$, $x = \sqrt{0,5 a^2 + b^2}$. Arvud on meelevaldsed.

Näide 1. $a = 8$; $b = 7$; $x = \sqrt{81} = 9$.

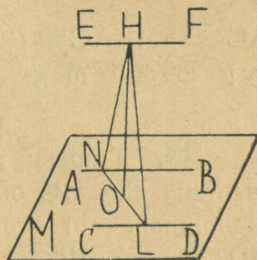
Näide 2. $a = 37,6$; $b = 55$; $x = \sqrt{3731,88} = 61,089$. Logaritmidega: $\lg x = \frac{1}{2} \lg 3731,88 = \frac{1}{2} \cdot 3,5719 = 1,7859$; $x = 61,09$. Viie kohaga: $\lg x = 1,78596$; $x = 61,089$.

22. Sirglõik, mille pikkus on 10, lõikab tasapinda; tema otsapunktide kaugused tasapinnast on 5 ja 3. Kui pikk on selle sirglõigu projektsioon tasapinnal?

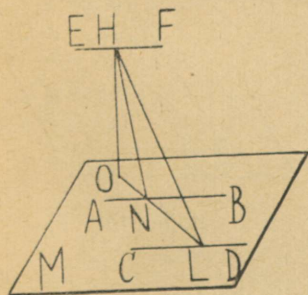
Antud: $AB = 10$, $BD = 5$ ja $AC = 3$ ($BD \perp M$, $AC \perp M$).
 Leida: $DC = DE + CE$ (joon. 4). Olgu $BE = u$, siis
 $AE = 10 - u$. Kolmnurkade sarnadus: $u : (10 - u) = 5 : 3$
 ja $3u = 50 - 5u$, s. o. $u = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$. Vähem osa $AE =$
 $= 10 - 6\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$. Püstkolmnurkade BDE ja ACE omame:
 $DE^2 = (6\frac{1}{4})^2 - 5^2 = \frac{225}{16} - 25 = \frac{225 - 400}{16} = \frac{-175}{16}$, $DE = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$; $CE^2 =$
 $= AE^2 - AC^2 = (3\frac{3}{4})^2 - 3^2 = \frac{81}{16} - 9 = \frac{81 - 144}{16} = \frac{-63}{16}$, $CE = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$. Jä-
 relikult $DC = 3\frac{3}{4} + 2\frac{1}{4} = 6$.

23. Tasapinnal M on 28 m kaugusel teine teisest
 kaks paralleelset sirget AB ja CD . Tasapinnast 15 m
 eemal on AB -ga paralleelne sirge EF . Leida EF ja CD
 kaugus üksteisest, kui AB -st EF -ni on 17 m.

1. juhtum. Ülesandes ni-
 metatud sirged on paarikaupa pa-
 ralleelsed. Tõmbame tasapinna
 HNL (joon. 10), mis on nende-
 gari. Kolmnurgas NHL on teada:
 $NL = 28$ m, $HN = 17$ m ja kõr-
 gus $HO = 15$ m. Otsitav on HL .
 Püstkolmnurgast HNO saame:
 $ON^2 = HN^2 - HO^2 = 17^2 - 15^2 =$
 $= 64$, $ON = \sqrt{64} = 8$ m; $LO =$
 $= 28 - 8 = 20$ m. Püstkolmnur-
 gas HOL on HL hüpotenuusiks:
 $HL^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, $HL = \sqrt{625} = 25$ m.



Joon. 10.

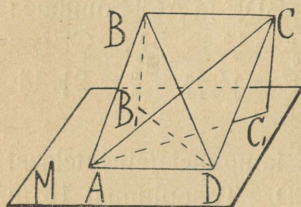


Joon. 11.

2. juhtum. $ON = 8$ m
 (joon. 11), $LO = 8 + 28 = 36$ m.
 Otsitav kaugus: $HL = \sqrt{HO^2 + LO^2} =$
 $= \sqrt{15^2 + 36^2} = 39$ m.

24. Rööpküliku $ABCD$ ti-
 pud A ja D on tasapinnal M ,
 kuna B ja C temast eemal aset-
 sevad. Külge $AD = 10$ m, külge $AB =$
 $= 15$ m, nurkjoonte AC ja BD

projektsioonid tasapinnal M on vastavalt $13\frac{1}{2}$ ja $10\frac{1}{2}$ m. Leida nurkjooned.



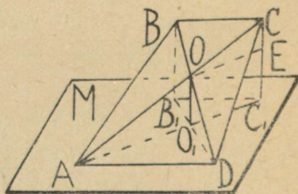
Joon. 12.

Et sirge BC rööbik AD -ga, mis tasapinnal M , siis $BC \parallel M$ (joon. 12). Tasapinnaga rööbik sirge on igalpool tasapinnast ühekaugusel, sellepärast ristjooned BB_1 ja CC_1 on võrdsed. Lause X: $AC^2 + BD^2 = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 15^2$, s. o. $AC^2 + BD^2 = 625$ (1). Lause III: $BB_1^2 = BD^2 - (10\frac{1}{2})^2$; $CC_1^2 = AC^2 - (13\frac{1}{2})^2$. Järelikult (II) $AC^2 - (13\frac{1}{2})^2 = BD^2 - (10\frac{1}{2})^2$ ja $AC^2 - BD^2 = 72$ (2). Liites ja lahutades võrrandid (1) ja (2), saame:

$$AC^2 = 361, AC = \sqrt{361} = 19 \text{ m}; BD^2 = 289, BD = \sqrt{289} = 17 \text{ m}.$$

25. Trapetsi $ABCD$ alus AD asetseb tasapinnal M , kuna alus BC on temast 5 m kaugel. Kui kaugel on tasapinnast M trapetsi nurkjoonte lõikepunkt, kui $AD : BC = 7 : 3$?

Tõmbame tasapinnad BB_1C_1C , BB_1D ja CC_1A ja risti tasapinnale M (joon. 13). Nende lõikejooned BB_1 , CC_1 ja OO_1 on siis ka risti M -ga. Antud: $BB_1 = CC_1 = 5$ m ja $AD : BC = 7 : 3$. Otsitav: $OO_1 = x$. Lause XVI: $OO_1 \parallel CC_1$. Olgu $OE \parallel AC_1$, nii et $EC_1 = x$. Kolmnurgad AOD ja BOC on sarnased, samuti AOO_1 ja OCE . Võime kirjutada: $AD : BC = AO : CO = 7 : 3$ ja $OO_1 : CE = AO : CO = 7 : 3$, s. o. $OO_1 : CE = 7 : 3$ (1). Et aga $CE = 5 - x$, siis võrdest (1) omame $x : (5 - x) = 7 : 3$, s. o. $3x = 35 - 7x$ ja $x = 3,5$ m.



Joon. 13.

26. Võrdhaarse kolmnurga ADB alus AB asetseb tasapinnal M, kuna tipp D on temast $a = 6$ m kaugel; kolmnurga külje ja kõrguse projektsioonid tasapinnal on vastavalt $b = 17$ m ja $c = 8$ m. Leida kolmnurga ADB pind.

Ristjoon $DC = a$ ($DC \perp M$); külgede projektsioonid $AC = BC = b$; kõrguse DN projektsioon $CN = c$ (joon. 7). Otsitav pind: $Q = \frac{1}{2} AB \cdot DN$. Lause III: $AN = \frac{1}{2} AB = \sqrt{b^2 - c^2}$, $DN = \sqrt{a^2 + b^2}$. Tähendab: $Q = \sqrt{b^2 - c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)} = 150 \text{ m}^2$.

27. Kolmnurga ABC küljed on: $AB = 7$ m, $AC = 8$ m ja $BC = 9$ m. Külge AC asetseb tasapinnal M, kuna tipp B tasapinnast δ m kaugusel on. Leida ABC projektsiooni pind tasapinnal M.

Olgu $BL \perp M$, $LN \perp AC$. Otsitav on kolmnurga ALC pind: $Q = \frac{1}{2} AC \cdot LN$. Kolmnurga ABC kõrgus: $BN = \frac{2}{3} \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = 3\sqrt{5}$ m. Lause III: $LN = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6$ m. Järelikult $Q = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ m}^2$.

28. Kolmnurgas ABC on $\angle B = 90^\circ$. Sirglõik BD on risti kolmnurga tasapinnaga. Punkt D on ühendatud A ja C-ga. $AB = 3$ m, $BC = 2$ m ja $BD = 1$ m. Leida 1) kolmnurga ADC pind ja 2) tasapinna ADC kaugust B-st.

1. Olgu $BE \perp AC$, siis ka $DE \perp AC$. Otsitav pind: $Q = \frac{1}{2} AC \cdot DE$. Pythagorase lause: $AC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, $AC = \sqrt{13}$ m. Kolmnurga ABC kahekordne pind: $AC \cdot BE = AB \cdot BC$, s. o. $BE = (3 \cdot 2) : \sqrt{13} = 6 : \sqrt{13}$. Püstkolmnurgast BDE omame: $DE^2 = (6 : \sqrt{13})^2 + 1^2 = 49 : 13$ ja $DE = 7 : \sqrt{13}$. Pind: $Q = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{7}{\sqrt{13}} = 3,5 \text{ m}^2$.

2. Otsitav kaugus $= BN = x$ on risti DE-ga. Kolmnurga DBE kahekordne pind: $DE \cdot x = BE \cdot BD$, s. o. $x = (6 : \sqrt{13}) : (7 : \sqrt{13}) = \frac{6}{7} \text{ m}$.

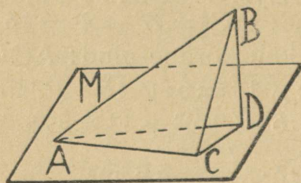
29. Punktist, mille kaugus tasapinnast on h , on tõmmatud kaks kaldjoont, mis tasapinnaga moodustavad nurgad 45° ja 30° , kuid isekeskis moodustavad nad nurga 90° . Leida kaldjoonte otsapunktide kaugus teineteisest.

Antud: $DC \perp M$, $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle DBC = 45^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ$, $DC = h$. Otsitav on AB (joon. 7). Lauseid IV ja VIII: $AD = 2h$, $DB = h\sqrt{2}$. Pthagorase lause: $AB^2 = (2h)^2 + (h\sqrt{2})^2 = 6h^2$, $AB = h\sqrt{6}$.

30. Läbi püstkolmnurga hüpotenuusi, mille pikkus 2 m, on tõmmatud tasapind, mis kummagi kaatetiga moodustab 45° nurga. Leida tasapinna kaugus püstnurga tipust.

Olgu kolmnurgas ADB nurk $D = 90^\circ$ ja $DC \perp M$. Kolmnurgad DCA ja DCB (joon. 2) on võrdhaarsed ja ühtivad (ühine kaatet DC , nurk 45°), sellep. ka antud kolmnurk ADB on võrdhaarne: $AD = BD$. Pythagorase teoreem: $AD^2 + BD^2 = 2^2$ ehk $2AD^2 = 4$, $AD = \sqrt{2}$ m. Edasi: $AC^2 + DC^2 = AD^2 = 2$, s. o. $2DC^2 = 2$, $DC^2 = 1$, $DC = \sqrt{1} = 1$ m.

31. Kui võrdhaarse püstkolmnurga üks kaatet asetseb tasapinnal M , teine aga moodustab temaga 45° nurga, siis moodustab hüpotenuus tasapinnaga 30° nurga. Tõestada.



Joon. 14.

Antud: $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$ (joon. 14). Teravnurga tipust B on tõmmatud $BD \perp M$. Tingimuse järgi kaatet AC asetseb tasapinnal M , $\angle BCD = 45^\circ$. Jär. $BD = CD$. Pythagorase teoreem: $AB^2 = 2BC^2$ ning $BC^2 = 2BD^2$, järelikult $AB^2 = 2(2BD^2) = 4BD^2$, s. o. $AB = 2BD$ ja $BD = \frac{1}{2}AB$. Lause IV järgi on $\angle BAD = 30^\circ$. Seda oligi tarvis tõestada.

32. Sirglõik, mille pikkus 10, lõikab tasapinda; tema otsapunktide kaugused tasapinnast on 3 ja 2. Leida selle tasapinna ja sirglõigu nurk.

Kaugused tasapinnani: $BD = 3$ ja $AC = 2$ (joon. 4). Terve sirglõik $AB = 10$. Olgu $BE = x$, siis $AE = 10 - x$. Sarnadus: $x : (10 - x) = 3 : 2$, jär. $2x = 30 - 3x$, s. o. $x = 6$. Tähendab: $BD = \frac{1}{2} BE$ ($3 = \frac{1}{2} \cdot 6$) ja nurk $DEB = 30^\circ$.

33. Tasapinnad M ja P on rööbiti. Tasapinna M punktidest A ja B on tasapinnale P tõmmatud kaldjooned $AC = 37$ ja $BD = 125$ m; AC projektsioon ühele tasapinnale = 12 m. Leida BD projektsioon.

Tasapindade kaugus $= \sqrt{37^2 - 12^2} = 35$ m. Otsitav projektsioon x on niisuguse püstkolmnurga kaatet, mille hüpotenuus on 125 m ja teine kaatet 35 m, s. o. $x = \sqrt{125^2 - 35^2} = 120$ m.

34. Kolmnurk ABC, milles nurk $C = 90^\circ$, toetub kaatetiga AC tasapinnale M, moodustades temaga 45° kahetahuse nurga. Leida kaugus tipust B tasapinnani M, kui AC on 2 m a $AB : BC = 3 : 1$.

Otsitav kaugus on BD, $BD \perp M$ (joon. 14); $\angle BCD = 45^\circ$, $BD = DC$. Antud suhtest järgneb, et $AB = 3BC$ (1); peale selle $AB^2 - BC^2 = 4$ (2). Võrrandeist (1) ja (2) leiame: $(3 \cdot BC)^2 - BC^2 = 4$ ehk $BC^2 = \frac{1}{2}$. Pythagorase teoreem: $BD^2 + DC^2 = BC^2$ ehk $2BD^2 = \frac{1}{2}$, $BD^2 = \frac{1}{4}$, $BD = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ m = 5 dm.

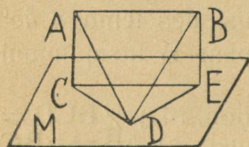
35. Püstkolmnurga kaatetid on 7 ja 24. Leida püstinurga tipu ja selle tasapinna kaugus, mis hüpotenuusist läbi läheb ja kolmnurga tasapinnaga 30° nurga moodustab.

Hüpotenuus $= \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$. Olgu hüpotenuusile vastav kõrgus z. Kolmnurga kahekordne pind: $25 \cdot z = 24 \cdot 7$, s. o. $z = 6,72$. Otsitav kaugus x on 30° -lise nurga vastaskaatet, kuna hüpotenuus on 6,72; jär. $x = \frac{1}{2} \cdot 6,72 = 3,36$.

36. Läbi punkti E, mis jagab sirge $AB = 25$ cm suhtes $2:3$, on tõmmatud tasapind M nii, et lõikude AE ja BE projektsioonide summa $= 15$ cm. Leida A ja B kaugused tasapinnast M.

Kui sirglõik AB (joon. 4) jagub punktis E suhtes $2:3$, mis samas suhtes jagub ka projektsioonide DE ja CE summa CD, sest kolmnurgad BDE ja ACE on sarnased; $BD \perp M$, $AC \perp M$. Sirglõigu osad on: $BE = \frac{25}{2+3} \cdot 3 = 15$ cm, $AE = \frac{25}{5} \cdot 2 = 10$ cm. Projektsioonid on: $DE = \frac{15}{5} \cdot 3 = 9$ cm, $CE = \frac{15}{5} \cdot 2 = 6$ cm. Nüüd määrame otsitavad kaugused BD ja AC kui kaatetid: $BD = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ cm, $AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm.

37. Tasapinnaga M rööbiti oleva sirglõigu AB otsapunktidest on tasapinnale tõmmatud ristjoon AC ja kaldjoon BD, kusjuures viimane on risti AB-ga. Määrata kaugus CD, kui $AB = a$, $AC = b$ ja $BD = c$.



Joon. 15.

Ühendame punktid A ja D (joon. 15). Saame kaks püstkolmnurka ACD ja ABD. Otsitava kauguse ruut: $CD^2 = AD^2 - AC^2$, s. o. $CD^2 = AD^2 - b^2$ (1). Lause III: $AD^2 = AB^2 + BD^2 = a^2 + c^2$. Võrrand (1): $CD^2 = a^2 + c^2 - b^2$ ja $CD = \sqrt{c^2 - b^2 + a^2}$. — Leida teisi lahendusvõimalusi.

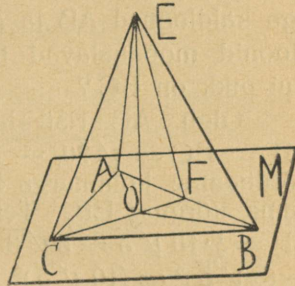
38. Võrdkülgse kolmnurga külge on 3 m. Kui kaugel kolmnurga tasapinnast asetseb punkt, mille kaugus kolmnurga igast tipust on 2 m?

Olgu $AB = BC = AC = 3$ m (joon. 5) ja kaugused $SA = SB = SC = 2$ m. Et kaldjooned võrdsed, siis on võrdsed ka projektsioonid, s. o. punkt O on kolmnurga ABC ümberjoonestatud ringi keskpunkt, raadius (VII) $AO = \frac{1}{3} \cdot 3 \sqrt{3} = \sqrt{3}$ m. Otsitav kaugus: $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$, $SO = \sqrt{1} = 1$ m.

39. Võrdhaarse kolmnurga alus ja kõrgus on kumbki 4 m. Ruumis on punkt, mis asetseb kolmnurga igast tipust ühekaugusel, aga tema tasapinnast 6 m kaugusel. Kui kaugel on see punkt kolmnurga tippudest?

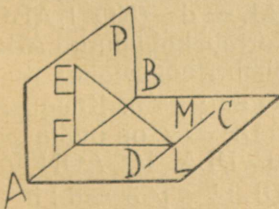
Antud: $AC = BC$, $AB =$
 $= CF = 4$ m (joon. 16) ja
 $EO = 6$ m, kusjuures $EO \perp M$,
 $CF \perp AB$. Kolmnurga ABC
 pind: $Q = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ m². Haar:
 $AC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$, $AC =$
 $= \sqrt{20}$ m. Võrdsete kaldjoonte
 projektsioonid, ümberjoonestatud
 ringi raadius: $AO = \frac{abc}{4Q} =$
 $= \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20} \cdot 4}{4 \cdot 8} = \frac{5}{2}$ m. Otsitav

kaugus: $AF^2 = AO^2 + EO^2 =$
 $= (\frac{5}{2})^2 + 6^2 = 1\frac{6}{4}^9$, $AE = \sqrt{1\frac{3}{4}} = 6\frac{1}{2}$ m.



Joon. 16.

40. AB on kahe ristsiapinna M ja P lõikjoon, CD on sirge tasapinnal M, mis rööbib AB-ga ja asetseb temast 60 m kaugusel; E on punkt tasapinnal P ja asetseb 91 m AB-st kaugel. Leida kaugus E-st CD-ni.



Joon. 17.

Tõmbame tasapinna (joon. 17) läbi punkti E risti AB-le ja CD-le. Otsitav kaugus on püstkolmnurga EFL hüpotenuus: $EL^2 = EF^2 + FL^2 = 91^2 + 60^2 =$
 $= 11881$, $EL = \sqrt{11881} = 109$ m.

41. Kolmnurga ABC küljed on $AB = 9$, $BC = 6$ ja $AC = 5$. Läbi AC kulgeb tasapind, mis kolmnurga tasapinnaga 45° nurga moodustab. Leida tasapinna M ja tipu B kaugus teineteisest.

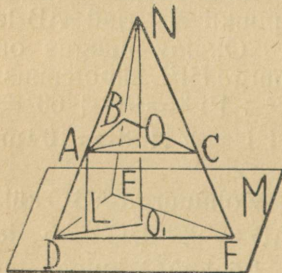
Tipust B tõmbame ristjoone BN tasapinnale M ja ristjoone BD küljele AC. Otsitav kaugus on võrdhaarse

püstkolmnurga BND kaatet BN. Kolmnurga ABC kõrgus: $BD = \frac{2}{3} \sqrt{10(10-5)(10-9)(10-6)} = 4\sqrt{2}$. Kaugus: $2BN^2 = BD^2$ ehk $2BN^2 = (4\sqrt{2})^2$, s. o. $BN = \sqrt{16} = 4$.

42. Punktist A tasapinnale tõmmatud ristjoon on 10, aga kaldjooned AB ja AC on kumbki 20; nende projektioonid moodustavad tasapinnal omavahel nurga 120° . Kui pikk on BC?

Olgu AE risti tasapinnaga. Projektatsioonid on: $EB = EC = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$. Sirgloik BC on võrdhaarse kolmnurga BEC alus, tipunurk $= 120^\circ$, tõmbame kõrguse EF. Tema vastasnurk $= 30^\circ$, sellepärast $EF = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Pythagorase teoreem: $(\frac{1}{2}BC)^2 + (5\sqrt{3})^2 = (10\sqrt{3})^2$, $BC^2 = 900$, $BC = 30$.

43. Võrdkülgse kolmnurga külge on a, tema tipud on d kaugusel tasapinnast M. Kolmnurga keskpunkti on püstitatud ristjoon h. Selle ristjoone ülemisest otsast on tõmmatud kaldjooned läbi kolmnurga tippude tasapinnani M. Määrata kaldjoonte lõigud kolmnurga tippudest kuni tasapinnani ja nende alumiste otste kaugused üksteisest.



Joon. 18.

Antud: $AB = BC = AC = a$, $NO = h$, $AL = d$ ($NO \perp ABC$, $AL \perp M$). Korrarp. kolmnurga ABC (joon. 18) ümberjoonestatud ringi raadius: $AO = \frac{1}{3} a\sqrt{3}$. Kaugused $AD = x$ ja $DF = z$ on otsitavad. Kolmnurgad DLA ja AON on sarnased: $DL : \frac{1}{3} a\sqrt{3} = d : h$ ja $DL = \frac{ad\sqrt{3}}{3h}$. Pythagorase teoreem, kolmnurk DLA: $x^2 = d^2 + (\frac{ad\sqrt{3}}{3h})^2 = \frac{d^2}{h^2} (h^2 + \frac{a^2}{3})$, $x =$

$= \frac{d}{h} \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}$. Korrarp. kolmnurga DEF ümberjoonestatud

ringi raadius: $DO_1 = \frac{1}{3}z\sqrt{3}$, jär. $\frac{1}{3}z\sqrt{3} = DL + LO_1 =$
 $= \frac{ad\sqrt{3}}{3h} + \frac{a\sqrt{3}}{3}$, s. o. $z = \frac{ad}{h} + a = \frac{a(d+h)}{h}$.

Prisma ja rööptahukas.

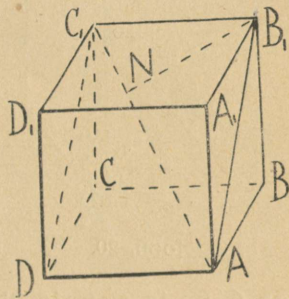
Joonosi, nurki, lõikeid. 44. Kuubi serv on a . Leida 1) diagonaal, 2) diagonaallõike pind ja 3) tipu kaugus diagonaalist.

1. Kolmnurgas AB_1C_1 (joon. 19) on $\angle B_1 = 90^\circ$. Kolmnurk ABB_1 : $AB_1^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, $AB_1 = a\sqrt{2}$. Jär. $AC_1^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2$, $AC_1 = a\sqrt{3}$.

2. Pind AB_1C_1D : $Q = AD \cdot AB_1 = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

3. Otsitav kaugus $B_1N = x$ on kolmnurga AB_1C_1 kõrgus. Kahekordne kolmnurga pind: $AC_1 \cdot x = AB_1 \cdot B_1C_1$ ja $x = (AB_1 \cdot B_1C_1) : AC_1 = (a\sqrt{2} \cdot a) : a\sqrt{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$.

Märkus. Risttahuka diagonaali ruut võrdub tema mõõdete ruutude summaga: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Näiteks: $a = 12$, $b = 16$, $c = 21$; $d = \sqrt{12^2 + 16^2 + 21^2} = 29$. Selle lause põhjal oleksime saanud ka diagonaali AC_1 kätte: $AC_1^2 = a^2 + a^2 + a^2$ jne. Kuubi diagonaal d ja serv a on seotud üksteisega: $d = a\sqrt{3}$. Kui on antud d , leiame $a = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}d\sqrt{3}$.

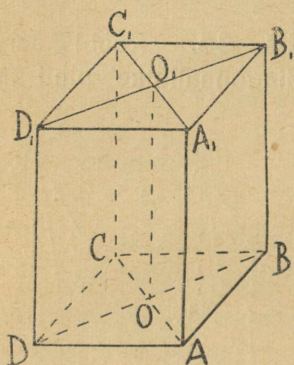


Joon. 19.

45. Kuubi nurkjoon on tema tahu nurkjoonest mõõdu võrra suurem. Leida kuubi serv.

Eelmisest ülesandest teame, et kuubi diagonaal ja

tema tahu diagonaal avalduvad külje a kaudu vastavalt $a\sqrt{3}$ ja $a\sqrt{2}$. Nende vahe: $a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = m$, $a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = m$ ja $a = \frac{m}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{m(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = m(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.



Joon. 20.

46. Korrapärase nelinurkse prisma külgtahu pind $= Q$. Leida diagonaallõike pind.

Külgtahu pind (joon. 20): $AB \cdot B_1B = Q$ (1). Otsitav pind: $S = BD \cdot B_1B$. Ruudu diagonaal külje kaudu: $BD = AB\sqrt{2}$, sellepärast $S = AB \cdot B_1B\sqrt{2}$, aga (1) põhjal $S = Q\sqrt{2}$.

47. Leida püströöptahuka nurkjooned, teades, et tema külgserv on 5 m, põhiservad aga 6 m ja 8 m ja üks põhja nurkjoontest on 12.

Üks otsitav diagonaal x on püstkolmnurga hüpotenuus, kuna kaatetid on 5 m ja 12 m, s. o. $x = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ m. Olgu põhja tundmatu diagonaal z . Lause X: $z^2 + 12^2 = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 8^2$; $z^2 = 56$. Teine rööptahuka diagonaal: $y^2 = z^2 + 5^2 = 56 + 25 = 81$, $y^2 = 81$, $y = 9$ m.

48. Risttahuka nurkjoon on 25 m, kõrgus 9 m ja põhja pind 240 m². Leida põhja küljed.

Möödete ruutude summa: $a^2 + b^2 + c^2 = 25^2$. Et aga $c = 9$ m, siis $a^2 + b^2 + 9^2 = 625$ ja $a^2 + b^2 = 544$ (1). Kahekordne põhja pind: $2ab = 480$ m² (2). Liidame ja lahutame (1) ja (2): $a^2 + 2ab + b^2 = 1024$, $(a + b)^2 = 1024$, $a + b = \sqrt{1024} = 32$ m (3); $(a - b)^2 = 64$, $a - b = \sqrt{64} = 8$ m (4). Võrrandid (3) ja (4) annavad $a = \frac{1}{2}(32 + 8) = 20$ m, $b = \frac{1}{2}(32 - 8) = 12$ m.

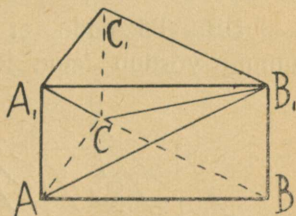
Märkus. Kui tundmatute summa ja vahe on teada, siis üks tundmatu on pool vabade liikmete summast, teine aga pool nende vahest.

49. Ühest kuubi tipust on tõmmatud kahe kõrvaltahu nurkjooned. Kui suure nurga nad moodustavad?

Ühendame nimetatud diagonaalide otsad, omame korrap. kolmnurga, sellepärast otsitav nurk on 60° .

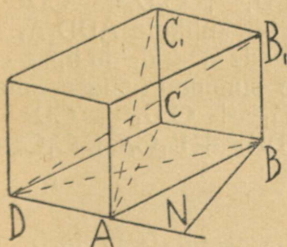
50. Kolmnurkse püstprisma külgtahkude diagonaalid on 4, 7 ja 8. Prisma põhjaks on püstkolmnurk. Leida prisma kõrgus.

Tähendagu h kõrgust. Iga külgserva võime kõrguseks võtta. Olgu $\angle ACB = 90^\circ$, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ (joon. 21). Antud: $AB_1 = 8$, $B_1C = 7$, $A_1C = 4$. $\triangle ABB_1$, $\triangle B_1BC$ ja $\triangle A_1AC$, (III): $h^2 = 8^2 - c^2$ (1), $h^2 = 7^2 - a^2$ (2) ja $h^2 = 4^2 - b^2$ (3). Jär. (2) ja (3): $2h^2 = 65 - (a^2 + b^2)$. Aga $a^2 + b^2 = c^2$, sellep. $2h^2 = 65 - c^2$ (4). Lahutamise teel saame võrrandeist (1) ja (4): $h^2 = 1$, $h = \sqrt{1} = 1$.



Joon. 21.

51. Püströöptahuka põhiservad on 2 m ja 5 m, kaugus kahe vähema põhiserva vahel on 4 m. Leida rööptahuka diagonaalid, kui kõrgus $= \sqrt{8}$ m.



Joon. 22.

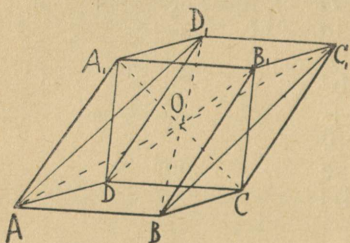
Tõmbame BN risti serva DA pikendusele (joon. 22). Antud: $AB = 5$ m, $AD = 2$ m, $BN = 4$ m. Lause III: $AN^2 = AB^2 - BN^2 = 5^2 - 4^2 = 9$, $AN = \sqrt{9} = 3$ m. Nüüd leiame: $DN = AN + AD = 3 + 2 = 5$ m. Lause III: $BD^2 = BN^2 + DN^2 = 4^2 + 5^2 = 41$. Lause X: $AC^2 + BD^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AD^2$,

$AC^2 + 41 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 2^2$, s. o. $AC^2 = 17$. Diagonaalid: $B_1D^2 = BB_1^2 + BD^2 = (\sqrt{8})^2 + 41 = 49$, $B_1D = \sqrt{49} = 7$ m; $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = 17 + (\sqrt{8})^2 = 25$, $AC_1 = \sqrt{25} = 5$ m.

52. Püstprisma põhjaks on romb; prisma nurkjooned (diagonaalid) on 8 ja 5, kõrgus aga 2. Leida põhja külg.

Põhja nurkjooned on: $x = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60}$, $y = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$. Rombi nurkjooned jagavad üksteist lõikepunktis pooleks ja on teineteisega risti. Otsitav põhja külg z on püstkolmnurga hüpotenuus, kuna kaatetid on $\frac{1}{2}\sqrt{60}$ ja $\frac{1}{2}\sqrt{21}$, jär. $z^2 = \frac{1}{4} \cdot 60 + \frac{1}{4} \cdot 21 = \frac{81}{4}$, $z = \sqrt{\frac{81}{4}} = 4\frac{1}{2}$.

53. Tõestada, et rööptahuka diagonaalide ruutude summa võrdub tema kõigi servade ruutude summaga.



Joon. 23.

Rööptahukal on neli diagonaali: $AC_1 = a$, $BD_1 = b$, $CA_1 = c$ ja $DB_1 = d$ (joon. 23). Tähistame ära ka külgtahkude ADD_1A_1 ja BCC_1B_1 diagonaalid ja kasutame lauset X : $AD_1 = d_1$, $DA_1 = a_1$, $BC_1 = c_1$, $CB_1 = b_1$; rööpkülik ABC_1D_1 : $a^2 + b^2 = AB^2 + C_1D_1^2 +$

$d_1^2 + c_1^2$ (1); rööpkülik A_1B_1CD : $c^2 + d^2 = A_1B_1^2 + CD^2 + a_1^2 + b_1^2$ (2). Liidame (1) ja (2) ning korraldame liikmeid: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = AB^2 + A_1B_1^2 + C_1D_1^2 + CD^2 + (a_1^2 + d_1^2) + (b_1^2 + c_1^2)$. Kui rööpkülikute ADD_1A_1 ja BCC_1B_1 diagonaalide ruutude summade $a_1^2 + d_1^2$ ja $b_1^2 + c_1^2$ asemele paneme külgede ruutude summad, siis saame: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = AB^2 + A_1B_1^2 + C_1D_1^2 + CD^2 + AA_1^2 + A_1D_1^2 + D_1D^2 + AD^2 + BB_1^2 + B_1C_1^2 + C_1C^2 + BC^2$. Seda oligi tarvis tõestada.

54. Püströöptahuka põhiservad on 3 m ja 5 m, kuna üks põhja diagonaal = 4 m. Rööptahuka vähem

nurkjoon moodustab põhja tasapinnaga nurga 60° . Leida rööptahuka nurkjooned.

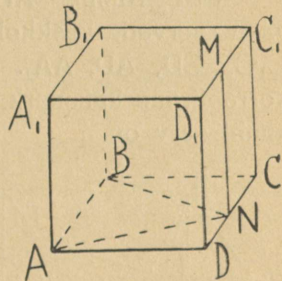
Kasutame joonist 22. Antud: $AD = 3\text{ m}$, $AB = 5\text{ m}$, $AC = 4\text{ m}$. Lause X: $BD^2 + 4^2 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3^2$, $BD^2 = 52$, $BD = \sqrt{52}\text{ m}$. Et $\sqrt{52} > 4$, siis nurk $\angle CAC_1 = 60^\circ$ ja $\angle AC_1C = 30^\circ$. Jär. diagonaal $AC_1 = 2 \cdot 4 = 8\text{ m}$. Kõrguse ruut: $CC_1^2 = AC_1^2 - AC^2 = 8^2 - 4^2 = 48$. Teine diagonaal: $B_1D^2 = BB_1^2 + BD^2 = 52 + 48 = 100$, $B_1D = 10\text{ m}$.

55. Korrapärase nelinurkse prisma nurkjoon on 5, külgtahu nurkjoon = 4. Leida põhja külg.

Meil on risttahukas, mille põhjaks ruut. Olgu ruudu külg x ja prisma kõrgus z . Omame: $x^2 + x^2 + z^2 = 5^2$. Aga $x^2 + z^2 = 4^2$, sellep. $x^2 + 4^2 = 5^2$, $x^2 = 9$, $x = \sqrt{9} = 3$.

56. Sirge joon jagab kuubi tahu $s = 64\text{ cm}^2$ suhtes $a:b = 3:5$. Kui kaugel on see sirge joon neist kuubi servadest, mis temaga rööbikud?

Rahuldagu sirge MN (joon. 24) ülesandes nim. tingimust; pinnad NCC_1M ja $DNMD_1$ on siis vastavalt $\frac{as}{a+b}$ ja $\frac{bs}{a+b}$. Kaugused NC , ND , NB ja NA on otsitavad. Kuubi serv $= \sqrt{s}$. Pindade avaldamine: $\sqrt{s} \cdot NC = \frac{as}{a+b}$, $\sqrt{s} \cdot$



Joon. 24.

$\cdot ND = \frac{bs}{a+b}$. Jär. $NC = \frac{as}{a+b}$:
 $:\sqrt{s} = \frac{a}{a+b} \sqrt{s} = 3\text{ cm}$, $ND =$

$= \frac{bs}{a+b} : \sqrt{s} = \frac{b}{a+b} \sqrt{s} = 5\text{ cm}$. Teised kaugused: $NB^2 =$
 $= BC^2 + NC^2 = (\sqrt{s})^2 + \left(\frac{a}{a+b} \sqrt{s}\right)^2 = \frac{s(2a^2 + 2ab + b^2)}{(a+b)^2}$,

$NB = \frac{\sqrt{s(2a^2 + 2ab + b^2)}}{a+b} = \sqrt{73}\text{ cm}$; $NA^2 = AD^2 +$
 $+ ND^2 = (\sqrt{s})^2 + \left(\frac{b}{a+b} \sqrt{s}\right)^2 = \frac{s(a^2 + 2ab + 2b^2)}{(a+b)^2}$, $NA =$
 $= \frac{\sqrt{s(a^2 + 2ab + 2b^2)}}{a+b} = \sqrt{89}\text{ cm}$.

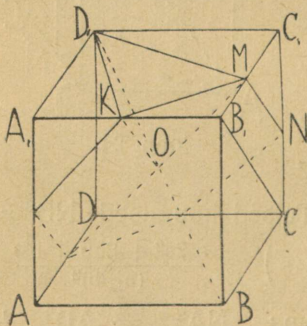
57. Leida püströõptahuka nurkjooned, teades, et iga serv on a ja põhja nurk $= 60^\circ$.

Põhja 60° -lise nurga vastasnurkjoon $= a$, a on korrap. kolmnurga külj. Põhja teise nurkjoone pool on selle kolmnurga kõrgus $= \frac{1}{2} a\sqrt{3}$, terve nurkjoon $= a\sqrt{3}$. Rööptahuka nurkjooned: $x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, $x = a\sqrt{2}$; $y^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 = 4a^2$, $y = 2a$.

58. Kuubi serv $= a$. Läbi ühes tipus lõikuva kolme serva otsapunktide on tõmmatud tasapind. Leida lõike pind.

Lõige on korrap. kolmnurk, mille külgedeks on kuubi tahkude diagonaalid $= a\sqrt{2}$. Ta läheb läbi ülemise põhja tipu ja alumise põhja diagonaali. Otsitav pind (XIII): $Q = \frac{1}{4} (a\sqrt{2})^2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$.

59. Kuubis $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ on ühendatud järgmiste servade keskkohad (joon. 25): AA_1 , $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 C$, CD , AD , AA_1 . Tõestada, et saadud kujund on korrapärane kuusnurk. Leida selle kuusnurga pind, kui kuubi serv on a .



joon. 25.

Kõik kuusnurga küljed on võrdsed kuubi tahu diagonaali poolega ($MN = \frac{1}{2} B_1 C_1$), sellep. ta on korrapärane: $NM = \frac{1}{2} B_1 C_1 = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$ jne.

Kuusnurga pind: $Q = 6 \cdot \frac{1}{2} (\frac{1}{2} a\sqrt{2})^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$.

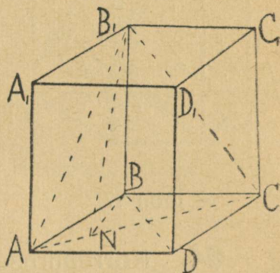
Märkus. Võib tõestada, et vaadeldava kuusnurga tasapind on risti kuubi diagonaaliga. Kui arvutada kolmnurkade $D_1 O K$ ja $D_1 O M$ küljed, siis näeme, et ühe külje ruut võrdub kahe teise külje ruutude sum-

maga, s. o. nurgad $D_1 O K$ ja $D_1 O M$ on 90° . Jultatus. $MK = OM = OK = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$, $D_1 O = \frac{1}{2} a\sqrt{3}$, $D_1 M^2 = MC_1^2 +$

$+D_1C_1^2$. Kui sirge on risti kahe sirgega tasapinnal jne. Teisiti: Sümmeetria, korrap. kuusnurksed piiramiidid.

60. Risttahuka mõõted on 2; 4; 6. Läbi kolme ühes tipus lõikuva serva otste on tõmmatud tasapind. Leida lõike pind.

Mõõted: $AB = 2$, $BC = 4$, $BB_1 = 6$ (joon. 26). Põhja diagonaal: $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$. Kolmnurga ABC kahekordne pind: $\sqrt{20}$. $BN = 2.4$ ja $BN = 8 : \sqrt{20}$ ($BN \perp AC$, $B_1N \perp AC$). Püstkolmnurk $B_1BN : B_1N^2 = (8 : \sqrt{20})^2 + 6^2 = 39,2$; $B_1N = \sqrt{39,2}$. Otsitav pind: $Q = \frac{1}{2}AC \cdot B_1N = \frac{1}{2}\sqrt{20} \cdot \sqrt{39,2} = \frac{1}{2}\sqrt{20 \cdot 39,2} = 14$.



Joon. 26.

61. Kolmnurkse püstprisma põhja küljed on 10, 17 ja 21, kõrgus aga 18. Leida lõike pind, mis kulgeb külgserva ja põhja kõige vähemat kõrgust.

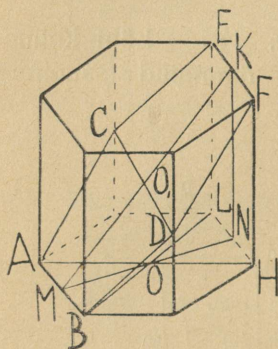
Põhja kõige vähem kõrgus kulgeb kõige suuremat külge: $h = \frac{2}{21} \sqrt{24(24-10)(24-7)(24-21)} = 8$. Otsitav pind $Q = 8 \cdot 18 = 144$.

62. Kolmnurkses püstprismas on tõmmatud läbi põhja serva lõige, mis kulgeb vastaskülgserva ja moodustab põhjaga nurga 45° . Põhja pind = Q . Leida lõike pind.

Põhja külg olgu a ja kõrgus h . Pind: $Q = \frac{1}{2}ah$ ja $ah = 2Q$ (1). Lõike alus = a , kõrgus = $h\sqrt{2}$ (VIII). Lõike pind: $P = \frac{1}{2}ah\sqrt{2}$, kuid (1) põhjal $P = \frac{1}{2} \cdot 2Q\sqrt{2} = Q\sqrt{2}$.

63. Korrapärase kuusnurkse prisma põhiserv on 3

ja kõrgus 13. Läbi ülemise ja alumise põhja vastasservade kulgeb lõige. Leida selle lõike pind.



Joon 27.

Otsitav pind koosneb võrdpindsetest trapetsitest ABDC ja CDFE (joon. 27): $Q = \frac{1}{2} (AB + CD) MO_1 \cdot 2$ ehk $Q = \frac{3}{2} AB \cdot KM$, sest $CD = 2 AB$ ja $2 \cdot MO_1 = KM$. Et $OH = 3$ (VI) ja $NH = \frac{3}{2}$, siis $ON^2 = 3^2 - (\frac{3}{2})^2 = \frac{27}{4}$ ja $ON = \frac{3}{2} \sqrt{3}$, $MN = 2 ON = 3\sqrt{3}$ (O on põhja keskpunkt, $ON \perp LH$). Püstkolmnurk KMN annab: $KM^2 = (\frac{3}{2} \sqrt{3})^2 + 13^2 = 196$, $KM = \sqrt{196} = 14$. Pind: $Q = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 14 = 63$.

64. Korrapärase kuusnurkse prisma põhiserv on 1. Ühte põhiserva kulgeb tasapind, mis lõikab kõiki prisma külgservi ja moodustab põhjaga nurga 30° . Leida lõike pind.

$Q = \frac{3}{2} AB \cdot KM$ (eelm. ü.) ja $MN = \sqrt{3}$ (1). Tingimus: $\angle KMN = 30^\circ$, s. o. $\angle MKN = 60^\circ$ ja (V) $MN = \frac{1}{2} KM \cdot \sqrt{3}$, kuid (1) põhjal $\sqrt{3} = \frac{1}{2} KM \sqrt{3}$, jär. $KM = 2$. Pind: $Q = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 3$.

65. Rööptahuka põhja küljed: $a = 20$, $b = 18$; serv $k = 25$. Serva projektsioon külje a peale $f = 7$ ja külje b peale $g = 15$. Leida ristlõike ümbermõõt.

Olgu serva projekteerijad külgedele a ja b vastavalt z ja v ning ristlõike küljed x ja y . Omame (III): $z = \sqrt{k^2 - f^2}$, $v = \sqrt{k^2 - g^2}$. Pooi külgpinda kahel viisil: $kx + ky = az + bv$ ja $k(x + y) = a\sqrt{k^2 - f^2} + b\sqrt{k^2 - g^2}$. Ümbermõõt: $2(x + y) = \frac{2}{k} (a\sqrt{k^2 - f^2} + b\sqrt{k^2 - g^2}) = 67,2$.

66. Tõestada, et kui korrapärases nelinurkses pris-

mas $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ diagonaalid $B_1 D$ ja $D_1 B$ on risti, siis diagonaalid $A_1 C$ ja $B_1 D$ moodustavad nurga 60° .

Olgu diagonaalide lõikepunkt O . Tõestada, et kui $\angle BOD = 90^\circ$, siis $\angle COB = 60^\circ$. Risttahuka diagonaalid on võrdsed. Võrdhaarne püstkolmnurk DCB : $DB^2 = BC^2 + DC^2 = 2 \cdot BC^2$. Võrdhaarne püstkolmnurk DOB : $DB^2 = BO^2 + DO^2 = 2 \cdot BO^2$. Jär. (II) $2 BC^2 = 2 \cdot BO^2$ ja $BC = BO$. Aga $CO = BO$, s. o. $BC = BO = CO$. Tähendab, $\angle COB = 60^\circ$.

67. Kolmnurkse kaldprisma kaks kahetahust nurka külgtahkude vahel on $40^\circ 41' 18''$ ja $101^\circ 27' 32''$. Kui suur on kolmas kahet. nurk?

Tõmbame ristlõike. Saame kolmnurga, mille kaks nurka on teada, kolmas: $x = 180^\circ - (40^\circ 41' 18'' + 101^\circ 27' 31'') = 37^\circ 51' 10''$.

68. Püströöptahukas, mille põhjaks $ABCD$, on antud: $AB = 29$ cm, $AD = 36$ cm, $BD = 25$ cm ja külgserv $= 48$ cm. Leida lõike $AB_1 C_1 D$ pind.

Tõmbame kolmnurga ABD kõrguse BN . Omame: $BN = \frac{2}{3} \sqrt{45(45 - 36)(45 - 29)(45 - 25)} = 20$ cm. Lõike kõrguse saame püstkolmnurgast $B_1 BN$: $B_1 N^2 = B_1 B^2 + BN^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$, $B_1 N = \sqrt{2704} = 52$ cm. Otsitav pind: $Q = AD \cdot B_1 N = 36 \cdot 52 = 1872$ cm².

69. Püströöptahuka põhja küljed on 17 cm ja 28 cm, üks põhja diagonaal $= 25$ cm. Diagonaallõigete pindade summa suhtub põhja pinnasse nagu 16: 15. Leida diagonaallõigete pinnad.

Vaatleme rööptahukat $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, kus on antud $AB = 17$ cm, $AD = 28$ cm ja $BD = 25$ cm. Leiame põhja teise diagonaali AC . Lause X : $AC^2 + 25^2 = 2 \cdot 28^2 + 2 \cdot 17^2$, s. o. $AC^2 = 1521$, $AC = \sqrt{1521} = 39$ cm. Põhja pind $= 2 \cdot \Delta ABD = 2 \cdot \sqrt{35(35 - 17)(35 - 25)(35 - 28)} = 420$ cm². Olgu külgserv x . Otsitavad pinnad: $Q_1 = 25x$ cm² ja $Q_2 = 39x$ cm². Tingimus: $(25x + 39x)$

: 420 = 16 : 15, s. o. $64x = (420 \cdot 16) : 15 = 448$, $x = 448 : 64 = 7$. Jär. $Q_1 = 25 \cdot 7 = 175 \text{ cm}^2$ ja $Q_2 = 39 \cdot 7 = 273 \text{ cm}^2$.

70. Kaldrööptahuka põhjaks on romb ABCD, kus $\angle BAD = 60^\circ$; külgservad moodustavad põhjaga nurga 60° ja tasapind AA_1C_1C on risti põhjaga. Tõestada, et lõigete BB_1D_1D ja AA_1C_1C pinnad suhtuvad nagu 2 : 3.

Vaatleme rööptahukat $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ühendame põhjade diagonaalide lõikepunktid O ja O_1 ning tõmbame O_1N risti põhjaga ABCD, siis $O_1N \perp AC$, sest AA_1C_1C on risti põhjaga. Lõigete BB_1D_1D ja AA_1C_1C pinnad: $Q = BD \cdot OO_1$ ja $Q_1 = AC \cdot O_1N$ (1). Kolmnurk BAD on võrdhaarne ja tema tipunurk $A = 60^\circ$, sellep. on ta võrdkülgne. Jär. $AO = \frac{1}{2}BD \cdot \sqrt{3}$ (V) ja $AC = BD \cdot \sqrt{3}$ (rombi diagonaal). Nurk $O_1ON = 60^\circ$ ja $O_1N = \frac{1}{2}OO_1 \sqrt{3}$. Paneme asemele (1): $Q_1 = BD \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}OO_1 \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}BD \cdot O_1O$. Suhe: $Q : Q_1 = (BD \cdot OO_1) : (\frac{3}{2}BD \cdot OO_1) = \frac{2}{3}$.

71. Püströöptahuka külgserv = 1 m, põhja küljed on 23 dm ja 11 dm. Põhja diagonaalid suhtuvad nagu 2 : 3. Leida diagonaallõigete pinnad.

1 m = 10 dm. Olgu põhja diagonaalid $2x$ dm ja $3x$ dm. Lause X: $(2x)^2 + (3x)^2 = 2 \cdot 23^2 + 2 \cdot 11^2$, s. o. $13x^2 = 1300$, $x^2 = 100$, $x = \sqrt{100} = 10$. Jär. $2x = 20$ dm ja $3x = 30$ dm. Otsitavad pinnad: $Q_1 = 20 \cdot 10 = 200 \text{ dm}^2 = 2 \text{ m}^2$, $Q_2 = 30 \cdot 10 = 300 \text{ dm}^2 = 3 \text{ m}^2$.

Külg- ja täispindu. 72. Kuubi diagonaalpinna ümbermõõt on $2p$. Leida kuubi täispind.

Kuubi täispind: $S = 6a^2$. Tingimus: $2a + 2a\sqrt{2} = 2p$, kus a on kuubi serv ja $a\sqrt{2}$ kuubi tahu diagonaal, jär. $a(\sqrt{2} + 1) = p$ ja $a = \frac{p}{\sqrt{2} + 1} = \frac{p(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = p(\sqrt{2} - 1)$. Täispind: $S = 6p^2(\sqrt{2} - 1)^2 = 6p^2(3 - 2\sqrt{2})$.

73. Risttahuka diagonaal $a = 17$; tipust põhja

diagonaalile tõmmatud ristjoon jagab selle diagonaali lõikudeks $f = 9,6$ ja $g = 5,4$. Leida risttahuka täispind.

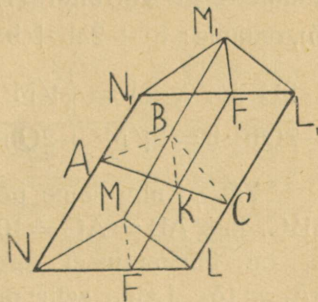
Täispind: $S = 2(xy + xz + yz)$, kus x ja y on põhiservad ja z külgserv. $x^2 + y^2 + z^2 = 289$ (ü. nr. 44). Peale selle: $x^2 + y^2 = (f + g)^2 = 225$. Lahutame eelmisest võrrandist viimase, saame $z^2 = 64$, $z = \sqrt{64} = 8$. Kaatet oma lähislõigu ja hüüp. keskmise võrdelisena: $x^2 = f(f + g) = 144$, $x = \sqrt{144} = 12$; $y^2 = g(f + g) = 81$, $y = \sqrt{81} = 9$. Täispind: $S = 2(12 \cdot 9 + 12 \cdot 8 + 9 \cdot 8) = 552$.

74. Kaldprisma külgserv $a = 20$; tema ristlõige on püstkolmnurk, mille hüpotenuusi jagab sissejoonestatud ringi puutepunkt osadeks $m = 10$ ja $n = 3$. Leida prisma külgpind.

Asetsegu ristlõike ABC ($\angle C = 90^\circ$) külgedel AB , AC ja BC vastavalt puutepunktid M , N ja L . Olgu $CN = CL = z$, $AM = AN = m$ ja $BM = BL = n$. Jär. $AB = m + n$, $AC = m + z$, $BC = n + z$. Pythagorase teoreem: $(n + m)^2 = (m + z)^2 + (n + z)^2$, s. o. $z^2 + (m + n)z - mn = 0$ ja $z^2 + 13z - 30 = 0$; $z_1 = +2$, $z_2 = -15$; kõlbab $z = 2$. Nüüd: $AB = m + n = 13$, $AC = m + z = 12$, $BC = n + z = 5$. Otsitav külgpind: $Q = (13 + 12 + 5) \cdot 20 = 600$.

75. Kolmnurkse kaldprisma kaks külgtahku moodustavad nurga 60° ; nende tahkude pinnad on 5 ja 8. Leida prisma külgpind.

Olgu ristlõike ABC nurk $A = 60^\circ$, $BK \perp AC$, $AK = u$, $AB = x$, $AC = y$, $BC = z$ ja külgserv t (joon. 28). Kolmnurga teravnurga vastaskülje ruut: $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy$. Nurk $ABK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, nii et $u = \frac{1}{2}x$ ja $z^2 = x^2 + y^2 - xy$ (1). Tingimuse järgi: $xt = 8$ ehk



Joon. 28.

$x = \frac{8}{1}$, $yt = 5$ ehk $y = \frac{5}{1}$. Võrrandist (1) saame nüüd:
 $z^2 = \left(\frac{8}{1}\right)^2 + \left(\frac{5}{1}\right)^2 - \frac{5}{1} \cdot \frac{8}{1}$ ehk $z^2 = 49$ ja $zt = \sqrt{49} = 7$.
 See on tahu LMM₁L₁ pind. Otsitav pind: $Q = 5 + 8 + 7 = 20$.

76. Rööptahuka ühe tipu juures olevad tasapindsed nurgad on igaüks 45°. Leida täispind, kui servad on a, b ja c.

Olgu põhjad: ABCD ja A₁B₁C₁D₁, servad: AB = a, AD = b ja AA₁ = c, nurgad: $\angle BAA_1 = \angle BAD = \angle DAA_1 = 45^\circ$. Tõmbame A₁L ⊥ AB, A₁N ⊥ AD ja DM ⊥ AB, siis (IX) A₁L = $\frac{1}{2}c\sqrt{2}$, A₁N = $\frac{1}{2}c\sqrt{2}$ ja DM = $\frac{1}{2}b\sqrt{2}$. Tahkude ABCD, AA₁B₁B ja AA₁D₁D pinnad on vastavalt: $a \cdot \frac{1}{2}b\sqrt{2}$, $a \cdot \frac{1}{2}c\sqrt{2}$ ja $b \cdot \frac{1}{2}c\sqrt{2}$. Rööptahuka vastastahkude pinnad on võrdsed, otsitav täispind: $S = ab\sqrt{2} + ac\sqrt{2} + bc\sqrt{2} = (ab + ac + bc)\sqrt{2}$.

77. Leida risttahuka külgpind, kui tema kõrgus = h, põhja pind = Q ja diagonaallõike pind = M.

Otsitav külgpind: $P = 2(a + b)h$, kus a = AB, b = AD ja h = BB₁ (joon. 20). Tingimuse järgi: ab = Q (1) ja BD · h = M (2). Et aga $BD^2 = a^2 + b^2$, siis (2) põhjal saame: $(a^2 + b^2)h^2 = M^2$ ja $a^2 + b^2 = \frac{M^2}{h^2}$ (3). Korrutame 2-ga võrrandi (1), liidame saaduse ja võrrandi (3), omame: $a^2 + 2ab + b^2 = \frac{M^2}{h^2} + 2Q$ ehk $(a + b)^2 = \frac{M^2}{h^2} + 2Q$ ja $a + b = \frac{1}{h}\sqrt{M^2 + 2Qh^2}$. Jär. $P = 2 \cdot \frac{1}{h}\sqrt{M^2 + 2Qh^2} \cdot h = 2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}$.

78. Kaldprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk ABC, kus AB = AC = 10 ja BC = 12. Teise põhja tipp A₁ on ühekaugusel tippudest A, B ja C ning serv AA₁ = 13. Leida selle prisma täispind.

Tahud AA₁C₁C ja AA₁B₁B on võrdpindsed rööp-

külükud, kuna tahk BB_1C_1C on ristkülik. Tõmbame $A_1M \perp AC$ ja $AN \perp BC$, siis $AM = MC = 5$ ja $NC = NB = 6$, sest kolmnurgad ABC ja AA_1C on võrdhaarsed. Otsitav täispind: $S = 2 \cdot AC \cdot A_1M + 2 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot AN + BC \cdot BB_1 = 2AC \cdot A_1M + BC \cdot AN + BC \cdot BB_1$ (1). Tingimus: $AA_1 = BB_1 = 13$. Püstkolmnurkadest AA_1M ja ANC saame: $A_1M^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, $A_1M = \sqrt{144} = 12$; $AN^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, $AN = \sqrt{64} = 8$. Jär. $S = 2 \cdot 10 \cdot 12 + 12 \cdot 8 + 12 \cdot 13 = 492$.

79. Avaldada püströöptahuka külgpind, kui põhjaks on romb ja diagonaallõigetete pinnad on M ja N .

Külgpind: $Q = 4 AB \cdot AA_1$ (joon. 20). Lause X: $AC^2 + BD^2 = 4 \cdot AB^2$ (1). Tingimuse järgi: $AC \cdot AA_1 = M$ ja $AC = M : AA_1$, $BD \cdot BB_1 = N$ ja $BD = N : AA_1$. Võrrand (1): $(M : AA_1)^2 + (N : AA_1)^2 = 4AB^2$, s. o. $4 \cdot AB^2 \cdot AA_1^2 = M^2 + N^2$ ja $2AB \cdot AA_1 = \sqrt{M^2 + N^2}$. Jär. $Q = 2\sqrt{M^2 + N^2}$.

80. Püstprisma põhjadeks on võrdhaarsed trapetsid $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$; $AB = CD = 13$ cm, $BC = 11$ cm ja $AD = 21$ cm; diagonaallõike pind = 180 cm². Leida prisma täispind ja AB_1C_1D pind.

Otsitav täispind olgu S , külgpind S_1 ja põhjade pindade summa S_2 , s. o. $S = S_1 + S_2$. Tõmbame $CN \perp AD$, $BM \perp AD$, jär. $C_1N \perp AD$ (XVIII). Leiame lõigu DN : $DN = AM$, $BC = MN$, $2 \cdot DN = AD - BC$, s. o. $DN = \frac{1}{2}(21 - 11) = 5$ cm. Lause III: $CN^2 = CD^2 - DN^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, $CN = \sqrt{144} = 12$ cm. $AN = 21 - 5 = 16$ cm. Lause III: $AC^2 = AN^2 + CN^2 = 16^2 + 144 = 400$, $AC = \sqrt{400} = 20$ cm. Tingimus: $AC \cdot C_1C = 180$ cm². Tähendab: $CC_1 = 180 : 20 = 9$ cm. Jär. $S_1 = (21 + 2 \cdot 13 + 11) \cdot 9 = 522$ cm² ja $S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}(21 + 11) \cdot 12 = 384$ cm², s. o. $S = 522 + 384 = 906$ cm². Lõige AB_1C_1D on trapets, mille kõrgus C_1N on tarvis leida. Lause III: $C_1N^2 = C_1C^2 + CN^2 = 9^2 + 144 = 225$, $C_1N = \sqrt{225} = 15$ cm. Otsitav lõike pind: $Q = \frac{1}{2}(21 + 11) \cdot 15 = 240$ cm².

81. Kolmnurkse kaldprisma külgserv = 8 cm, rist-

lõike küljed suhtuvad nagu 9:10:17, aga tema pind = 144 cm². Leida külgpind.

Ristlõike ABC (joon. 28) küljed BC = a, AC = b ja AB = c suhtuvad nagu $\frac{a}{9} = \frac{b}{10} = \frac{c}{17} = x$, s. o. a = 9x, b = 10x ja c = 17x, kus x ja küljed on tundmatud suurused. Lõike pind: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 144$ cm², $\sqrt{18x \cdot 9x \cdot 8x \cdot x} = 144$, s. o. $36x^2 = 144$, x = 2 cm. Kolmnurga ABC ümbermõõt: 9x + 10x + 17x = 72 cm. Otsitav pind: Q = 72 · 8 = 576 cm².

32. Kolmnurkse kaldprisma kaks tahku on teineteisega risti. Läbi nende ühise serva a = 15 risti vastastahule tõmmatud tasapind jagab selle tahu pinna osadeks m² = 54 ja n² = 96. Leida külgpind.

Risttasapind: MFF₁M₁, ristlõige: ABC, ∠B = 90° (joon. 28). Olgu AB = x, BC = y, AC = z. Tingimuse järgi: KC · a = m², AK · a = n², s. o. KC = $\frac{m^2}{a}$, AK = $\frac{n^2}{a}$ ja z = AK + KC = $\frac{m^2 + n^2}{a}$. Kaatet kui keskmine võrdeline: x² = AK · AC = $\frac{n^2}{a^2} (m^2 + n^2)$, x = $\frac{n}{a} \sqrt{m^2 + n^2}$; samuti y = $\frac{m}{a} \sqrt{m^2 + n^2}$. Külgpind: Q = (x + y + z) a = $\left(\frac{n}{a} \sqrt{m^2 + n^2} + \frac{m}{a} \sqrt{m^2 + n^2} + \frac{m^2 + n^2}{a} \right) a = m^2 + n^2 + (m + n) \sqrt{m^2 + n^2}$. Numbritega: Q = 54 + 96 + (√54 + √96) √150 = 360.

83. Korrapärase kolmnurkse prisma põhja ümberjoonestatud ringi raadius on r ja külgtahu ümberjoonestatud ringi raadius = R. Leida külgpind.

Valem: a₃ = r√3. Sellega on põhja külge teada. Külgtahu diagonaal = 2R. Külgserva, mis olgu x, saame Pythagorase teoreemi põhjal: x² = (2R)² - (r√3)² = 4R² - 3r², s. o. x = √(4R² - 3r²). Külgpind: Q = 3a₃ · x = 3r√3 √(4R² - 3r²) = 3r√(3(4R² - 3r²)).

84. Korrapärase 12-nurkse prisma telgdiagonaalpind on m^2 . Leida külgpind.

Otsitav pind: $Q = 12 a_{12} \cdot x$, kus a_{12} on korrapärase 12-nurga külge ja x prisma kõrgus. Kahendamisvalem:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2n}^2}{4}}}. \quad \text{Kui } n = 6, \text{ siis } a_{12} = \\ = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \text{ sest } a_6 = R. \text{ Tingimus: } 2R \cdot x = m^2, \\ \text{s. o. } x = \frac{m^2}{2R}. \text{ Korrutades saame: } a_{12} \cdot x = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \\ \cdot \frac{m^2}{2R} = \frac{m^2}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}. \text{ Jär. } Q = 12 \cdot \frac{m^2}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \\ = 6 m^2\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

85. Korrapärasest kolmnurksest prismast lõikab tasapind, mis kulgeb põhiserva ja moodustab põhjaga 30° -lise nurga. Lõike pind on m^2 ja prisma külgserv h. Leida täispind.

Tingimus: $\frac{1}{2}xy = m^2$, kus x on prisma põhja külge ja y lõike kõrgus. Põhja kõrgus $= \frac{1}{2}x\sqrt{3}$. Lause V: $\frac{1}{2}x\sqrt{3} = \frac{1}{2}y\sqrt{3}$, s. o. $x = y$. Jär. $\frac{1}{2}x^2 = m^2$, $x = m\sqrt{2}$. Külgpind: $3xh = 3hm\sqrt{2}$. Ühe põhja pind $= \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}m^2\sqrt{3}$. Täispind: $Q = 3hm\sqrt{2} + m^2\sqrt{3}$.

86. Püstprisma põhjaks on korrapärase kolmnurk; prisma kõrgus on 66, põhja pind $= 792$ Leida külgpind.

$$\text{Põhja pind: } \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = 792, \text{ siit põhja külge } a = \\ = 2\sqrt{\frac{792}{\sqrt{3}}}. \text{ Külgpind: } Q = 3ah = 3 \cdot 2\sqrt{\frac{792}{\sqrt{3}}} \cdot 66 = \\ = 396\sqrt{\frac{792}{\sqrt{3}}}. \text{ Logaritmime: } \lg Q = \lg 396 + \frac{1}{2}(\lg 792 - \\ - \frac{1}{2}\lg 3) = 3,9278; Q = 8468. \text{ Viie kohaga: } \lg Q = \\ = 3,92779; Q = 8468,2.$$

87. Leida korrapärase nelinurkse prisma täispind, kui ta nurkjoon on 14, aga külgtahu nurkjoon $= 10$.

Põhja külge olgu a ja prisma kõrgus h . Jär. $2a^2 + h^2 =$

$= 14^2$ ja $a^2 + h^2 = 10^2$. Peale lahutamist saame: $a^2 = 96$, $a = \sqrt{96}$. Kõrgus: $96 + h^2 = 100$, $h^2 = 4$, $h = 2$. Täispind: $Q = 2a^2 + 4ah = 192 + 8\sqrt{96} = 192 + 8 \cdot 9,8 = 270,4$.

88. Püstprisma põhjaks on korrapärane kaheksanurk, mille pind 536. Prisma kõrgus on 9. Leida külgpind.

Kahendamisvalemi abil saame: $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Külgpind $Q = 8 \cdot a_8 \cdot 9 = 72a_8 = 72R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Leiame kaheksanurga apoteemi x . Lause III: $x^2 = R^2 - (\frac{1}{2}a_8)^2 = R^2 - (\frac{1}{2}R\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2 = \frac{3}{4}R^2 + \frac{1}{4}R^2\sqrt{2}$, $x = \frac{1}{2}R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Kaheksanurga pind: $8 \cdot \frac{1}{2}a_8 \cdot x = 536$, s. o. $4R\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}R\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 536$. Siit saame: $2R^2\sqrt{2} = 536$ ja $R = \sqrt{\frac{268}{\sqrt{2}}}$. Külgpind: $Q = 72 \cdot \sqrt{\frac{268}{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 72 \cdot \sqrt{\frac{268(2 - 1,4142)}{\sqrt{2}}}$, s. o. $Q = 72 \sqrt{\frac{268 \cdot 0,5858}{\sqrt{2}}}$. Logaritmime: $\lg Q = \lg 72 + \frac{1}{2}(\lg 268 + \lg 0,5858 - \frac{1}{2}\lg 2) = 2,8800$; $Q = 758,6$. Viie kohaga: $\lg Q = 2,88001$; $Q = 758,6$.

89. Prisma põhjaks on korrap. 10-nurk, mille ümberjoonestatud ringi raadius $= r$. Prisma külgserv võrdub põhja diagonaaliga, mis tõmmatud esimesest tipust neljandasse. Leida külgpind.

Olgu ABCDEFGHIK prisma põhi. Otsitav pind: $Q = 10 AB \cdot AD$. Korrap. 10-nurga külg $AB = a_{10} = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$. Külgserva $= AD$ saame püstkolmnurgast ADF, kus $AF = 2r$ ja $DF = a_5$. Määrame a_5 . Kahendamisvalemi ruut: $a_{10}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_5^2}$ (1). Et aga $a_{10}^2 = [\frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)]^2 = \frac{1}{2}r^2(3 - \sqrt{5})$, siis (1) $\frac{3}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^2\sqrt{5} = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_5^2}$ ja $r + r\sqrt{5} = 4\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_5^2}$. Tõstame pooltekaupa ruutu ja lihtsustame: $(r + r\sqrt{5})^2 = (4\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_5^2})^2$, $6r^2 + 2r^2\sqrt{5} = 16(r^2 - \frac{1}{4}a_5^2)$, s. o. $a_5^2 = \frac{5}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^2\sqrt{5} = \frac{1}{4}r^2(10 - 2\sqrt{5})$, $a_5 = \frac{1}{2}r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Lause III: $AD^2 = AF^2 - DF^2 = 4r^2 - \frac{5}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2\sqrt{5} =$

$$= \frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2\sqrt{5} = \frac{1}{4}r^2(6 + 2\sqrt{5}), \text{ s. o. } AD = \frac{1}{2}r\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \\ = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} + 1). \text{ Tõestus on all märkuses. Otsitav külgpind: } \\ Q = 10 \cdot \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{1}{2}r(\sqrt{5} + 1) = 10r^2.$$

Märkus. Liitradikaal $\sqrt{m \pm \sqrt{n}}$ taandub vahel kahe liitradikaali summaks või vaheks. Tõestamisel võtame ainult summa ja oletame, et $\sqrt{m + \sqrt{n}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (1), kus \sqrt{n} , \sqrt{x} ja \sqrt{y} on irratsionaalarvud, aga m , n , x ja y ratsionaalarvud. Ruudime esimese: $m + \sqrt{n} + x + y + 2\sqrt{xy}$. Korraldame: $m - (x + y) = 2\sqrt{xy} - \sqrt{n}$. Ratsionaalarvude vahe võib võrduda irratsionaalarvude vahega ainult siis, kui mõlemad vahed on 0. Jär. $x + y = m$ (2) ja $2\sqrt{xy} = \sqrt{n}$ (3). Ruudime kolmanda: $4xy = n$ ja $xy = \frac{1}{4}n$ (4). Lahendades koos võrrandid (2) ja (4), omame: $x = \frac{m + \sqrt{m^2 - n}}{2}$ ja $y = \frac{m - \sqrt{m^2 - n}}{2}$. Tähendab: $\sqrt{m \pm \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - n}}{2}} \pm \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - n}}{2}}$. Avald. $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{6 + \sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{2}} + \sqrt{\frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2}} = \sqrt{5} + 1$.

Mahte. 90. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille pind Q ; diagonaallõigete pinnad on M ja N . Leida maht.

Otsitav maht: $V = Q \cdot AA_1$ (joon. 20). Rombi pind on pool tema diagonaalide korrutisest, sellep. $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = Q$ ja $AC \cdot BD = 2Q$ (1). Külgservad on võrdsed: $AA_1 = BB_1$. Diagonaallõigete pindade $A_1A \cdot AC = M$ ja $BD \cdot BB_1 = N$ korrutamisel saame $AA_1^2 \cdot AC \cdot BD = M \cdot N$ ehk (1) $AA_1^2 \cdot 2Q = M \cdot N$ ja $AA_1 = \sqrt{\frac{M \cdot N}{2Q}}$. Jär. $V = Q \cdot \sqrt{\frac{M \cdot N}{2Q}} = \sqrt{\frac{Q \cdot M \cdot N}{2}}$.

91. Püströöptahuka põhja küljed a ja b moodus-

tavad omavahel 30° nurga; rööptahuka külgpind on P . Leida maht.

Olgu rööptahuka kõrgus x . Külgpind: $2(a+b)x=P$, s. o. $x = \frac{P}{2(a+b)}$. Põhja kõrgus y on 30° nurga vastas, sellep. $y = \frac{1}{2}a$. Põhja pind $= \frac{1}{2}ab$. Maht: $V = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{P}{2(a+b)} = \frac{P \cdot ab}{4(a+b)}$.

92. Leida kuubi maht 1) diagonaali l kaudu, 2) täispinna s kaudu.

1. Mõõdete ruutude summa: $3a^2 = l^2$, kus a on kuubi serv. Siit $a^2 = \frac{1}{3}l^2$ ja $a = \frac{1}{\sqrt{3}}l$. Maht: $V = a^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}l\right)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}l^3$ (1).

2. Täispind: $6a^2 = s$. Siit $a = \sqrt{\frac{s}{6}}$. Maht: $V = a^3 = \left(\sqrt{\frac{s}{6}}\right)^3 = \frac{s}{6} \sqrt{\frac{s}{6}}$ (2).

Märkus. Diagonaal mahu kaudu (1): $l^3 = \frac{9V}{\sqrt{3}}$, $l = \sqrt[3]{\frac{9V}{\sqrt{3}}}$. Täispind mahu kaudu (2): $\frac{s^2}{36} \cdot \frac{s}{6} = V^2$, $s^3 = 6^3 \cdot V^2$, $s = 6 \sqrt[3]{V^2}$. Täispind diagonaali kaudu: $s = 6a^2 = 6 \cdot \frac{l^2}{3} = 2l^2$. Diagonaal pinna kaudu: $2l^2 = s$, $l^2 = \frac{1}{2}s = \frac{2}{4}s$, $l = \frac{1}{2}\sqrt{2s}$.

93. Leida risttahuka maht, kui tahkude pinnad on L , M ja N .

Mõõted: a , b ja c . Maht: $V = abc$. Aga $ab = L$, $ac = M$ ja $bc = N$. Korrutades saame: $ab \cdot ac \cdot bc = L \cdot M \cdot N$ ja $a^2 b^2 c^2 = L \cdot M \cdot N$, s. o. $abc = \sqrt{L \cdot M \cdot N}$ ja $V = \sqrt{L \cdot M \cdot N}$.

94. Leida rööptahuka maht, kui kõik tahud on võrdsed rombid (romboeder) küljega a ja teravnurgaga 60° .

Olgu rööptahuka $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ tipu A juures kõik nurgad 60° . Otsitav maht: $V = Qh$, kus Q on põhja pind ja h rööpt. kõrgus. Ühendame tipud B ja D isekeskis ja A_1 —ga. Kõrgus $h = A_1 O$ on korrap. kolmnurkse püramiidi kõrgus. $AA_1 = a$, $OA = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$; laused VII ja XVII. Püramiidi kõik servad $= a$. Teoreem III: $A_1 O^2 = AA_1^2 - OA^2 = a^2 - (\frac{1}{3}a\sqrt{3})^2 = \frac{2}{3}a^2 = \frac{6}{9}a^2$, $A_1 O = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$. Põhi koosneb kahest korrap. kolmnurgast, sellep. $V = Qh = 2 \cdot \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}a\sqrt{6}$, s. o. $V = \frac{1}{2}a^3\sqrt{2}$.

95. Leida kolmnurkse püstprisma maht, kui põhja pind on 6, aga külgtahkude pinnad 6, 8 ja 10.

Põhja küljed (joon. 21): $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$; kõrgus $AA_1 = x$. Tingimuse järgi: $ax = 6$ ja $a = \frac{6}{x}$; $bx = 8$, $b = \frac{8}{x}$; $cx = 10$, $c = \frac{10}{x}$. Põhja pind: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6$, $\sqrt{\frac{12}{x}(\frac{12}{x} - \frac{6}{x})(\frac{12}{x} - \frac{8}{x})(\frac{12}{x} - \frac{10}{x})} = 6$, siit $\frac{24}{x^2} = 6$, $x^2 = 4$, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Kõlbab $x = 2$. Otsitav maht: $V = 6 \cdot 2 = 12$.

96. Leida korrapärase 10-nurkse prisma maht, kui tema külgtahuks on ruut, mille pind Q .

Põhja pind koosneb kümnest võrdsest kolmnurgast, sellep. maht $V = 10 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot ON \cdot AB = 5 AB^2 \cdot ON = 5 Q \cdot ON$ (1), kus AB on põhja külge (= kõrgus) ja ON on 10-nurga apoteem. Lause III: $ON^2 = OA^2 - NA^2$ (2). Sirglõik $OA = R$, s. o. põhja ümberj. ringi raadius. Valem $a_{10} = \frac{1}{2} R (\sqrt{5} - 1)$. Siin on $a_{10} = AB = \sqrt{Q}$. Jär. $\sqrt{Q} = \frac{1}{2} R (\sqrt{5} - 1)$ ja $R = \frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2\sqrt{Q}(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{\sqrt{Q}}{2} (\sqrt{5} + 1) = OA$. Sirglõik $NA = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{Q}$. Võrrand (2): $ON^2 = [\frac{1}{2} \sqrt{Q}(\sqrt{5} + 1)]^2 - [\frac{1}{2} \sqrt{Q}]^2 = \frac{1}{4} Q(5 + 2\sqrt{5})$, $ON = \frac{1}{2} \sqrt{Q(5 + 2\sqrt{5})}$. Avaldisest (1) omame: $V = \frac{5}{2} Q \cdot \sqrt{Q(5 + 2\sqrt{5})}$.

97. Kuupi lõikab tasapind nii, et tekib korrarp. kuusnurk. Selle kuusnurga pind on m^2 . Leida kuubi maht.

Tähendab x kuubi serva, siis maht $V = x^3$. Kuubi tahu diagonaal $= x\sqrt{2}$, pool temast $\frac{1}{2}x\sqrt{2} =$ kuusnurga külj (ü. nr. 59). Kuusnurga pind: $6 \cdot \frac{1}{4} (\frac{1}{2}x\sqrt{2})^2 \sqrt{3} =$
 $= \frac{3}{4}x^2\sqrt{3} = m^2$ ja $x = \frac{2m}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$. Jär. $V = \left(\frac{2m}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right)^3 =$
 $= \frac{8m^3}{9\sqrt{3}}$.

Näide. $m^2 = 527$, $m = \sqrt{527}$, $V = \frac{8 \cdot \sqrt{527^3}}{9\sqrt{3}}$. Logaritmime: $\lg V = \lg 8 + \frac{3}{2} \lg 527 - \lg 9 - \frac{1}{4} \lg 3 = 3,9123$;
 $V = 8172$. Viie kohaga: $\lg V = 3,91229$; $V = 8171,2$.

98. Risttahuka põhja ümberjoonestatud ringi raadius on r ja selle põhja diagonaalid lõikuvad 60° -lisi nurgi, ka põhjadega risti oleva diagonaalpinna diagonaalid lõikuvad 60° -lisi nurgi. Leida maht.

Põhja diagonaalid jagavad põhja pinna 4 võrdpindseks kolmnurgaks, milledest kaks on võrdkülgseid küljega r (tipunurk võrdhaarses kolmnurgas $= 60^\circ$). Põhja pind $=$
 $= 4 \cdot \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3} = r^2 \sqrt{3}$. Diagonaalpinnal lõikuvad diagonaalid moodustavad vastu põhjasid võrdkülgseid kolmnurgad küljega $2r$ ja kõrgusega $\frac{1}{2} \cdot 2r \sqrt{3} = r\sqrt{3}$. Risttahuka kõrgus $= 2 \cdot r \sqrt{3}$. Otsitav maht: $V = r^2 \sqrt{3} \cdot 2r \sqrt{3} = 6r^3$.

99. Risttahuka diagonaalpind on 150 cm^2 ; selle diagonaalpinna ümbermõõt on 50 cm ja põhja ümbermõõt on 42 cm . Leida maht.

Mõõted: x, y, z ; põhja diagonaal $= u$. Otsitav maht $V = xyz$. Ülesande järgi: $uz = 150$ (1) ja $2u + 2z = 50$ ehk $u + z = 25$ (2). Juurte korrutis (1) ja summa (2): $v^2 - 25v + 150 = 0$; $v_1 = u = 15 \text{ cm}$, $v_2 = z = 10 \text{ cm}$. Edasi: $2x + 2y = 42$ ehk $x + y = 21$ (3), $x^2 +$

$+y^2=u^2=15^2$, s. o. $x^2+y^2=225$ (4). Lahendame võrrandid (3) ja (4): $y=21-x$, $x^2+(21-x)^2=225$, $x^2-21x+108=0$, $x_1=12$ cm, $x_2=9$ cm; jär. $y_1=9$ cm ja $y_2=12$ cm. Maht $V=x_1y_1z=12\cdot 9\cdot 10=1080$ cm³ ehk $V=x_2y_2z=9\cdot 12\cdot 10=1080$ cm³.

100. Risttahuka ühe külgtahu pind on $3\frac{3}{7}$ korda suurem teise külgtahu pinnast. Diagonaalpind, mis põhjaga risti, on 400 cm²; põhja pind = 168 cm². Leida maht.

Tingimuse järgi: $xz=3\frac{3}{7}\cdot yz$ (1), $xy=168$ cm² (2), $zt=400$ cm² (3), kus x ja y on risttahuka põhja küljed, z kõrgus ja t põhja diagonaal. Maht: $V=xyz$. Võrrand (1): $x=3\frac{3}{7}\cdot y$; jär. (2): $3\frac{3}{7}yy=168$, $y^2=49$, $y=7$ cm; $x=3\frac{3}{7}\cdot 7=24$ cm. Pythagorase teoreem: $t^2=x^2+y^2=24^2+7^2=625$, $t=\sqrt{625}=25$ cm. Võrrand (3): $25z=400$, $z=16$ cm. Maht $V=24\cdot 7\cdot 16=2688$ cm³.

101. Risttahuka täispind on s ja külgpind k . Tema põhjaks on ruut. Leida maht.

Olgu põhja külg x ja kõrgus z . Maht: $V=x^2z$. Külgpind: $4xz=k$; täispind: $2x^2+4xz=s$ ehk $2x^2+k=s$. Jär. $z=\frac{k}{4x}$ ja $x^2=\frac{s-k}{2}$, $x=\sqrt{\frac{s-k}{2}}$. Maht: $V=x^2\cdot z=x^2\cdot\frac{k}{4x}=\frac{k}{4}x=\frac{k}{4}\sqrt{\frac{s-k}{2}}=\frac{k}{8}\sqrt{2(s-k)}$.

102. Trapets ABCD on püstprisma põhjaks; trapetsi alused: $AD=39$ ja $BC=22$; küljed: $AB=26$ ja $CD=25$; lõike AA_1C_1C pind on 400. Leida maht.

Tõmbame $CM\parallel AB$ ja $CN\perp AD$. Kolmnurga MCD küljed: $CM=AB=26$, $CD=25$, $DM=AD-BC=17$. Kolmnurga (trapetsi) kõrgus: $CN=\frac{2}{17}\sqrt{34(34-26)(34-25)(34-17)}=24$. Lause III: $DN^2=CD^2-CN^2=25^2-24^2=49$, $DN=\sqrt{49}=7$. Sirglõik $AN=39-7=32$. Lause III: $AC^2=CN^2+AN^2=24^2+32^2=1456$.

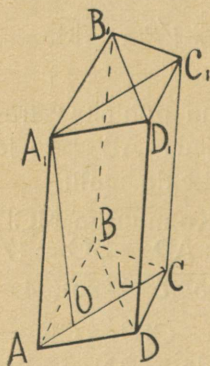
$= 1600$, $AC = \sqrt{1600} = 40$. Tingimus: $AC \cdot AA_1 = 400$, $40 \cdot AA_1 = 400$, siit saame prisma kõrguse $AA_1 = 10$. Maht: $V = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CN \cdot AA_1 = \frac{1}{2}(39 + 22) \cdot 24 \cdot 10 = 7320$.

103. Kolmnurkse kaldprisma ühe külgtahu pind on Q ja selle tahu kaugus vastasservast d . Leida maht. Ristlõike ABC (joon. 28) kõrgus $BK = d$. Tahu LL_1N_1N pind: $AC \cdot NN_1 = Q$. Maht: $V = \frac{1}{2} AC \cdot d \cdot NN_1 = \frac{1}{2} AC \cdot NN_1 \cdot d = \frac{1}{2} Q \cdot d$.

104. Leida rööptahuka maht, kui tema kahe tahu pinnad on P ja Q ning nende tahkude ühise serva a juures kahetahune nurk $= 30^\circ$.

Tõmbame rööptahuka ristlõike (ristlõige on risti külgservaga) $HLMN$ kõrguse HG nii, et ta oleks 30° nurga vastu. Maht: $V = LM \cdot HG \cdot a$ (1). Ülesande järgi: $a \cdot LM = P$ ja $LM = \frac{P}{a}$, $a \cdot HL = Q$ ja $HL = \frac{Q}{a}$. Sirglõik $HG = \frac{1}{2} HL$ (IV). Avaldisest (1) saame: $V = LM \cdot \frac{1}{2} HL \cdot a = \frac{P}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{a} \cdot a$, s. o. $V = \frac{P \cdot Q}{2a}$.

105. Kaldprisma põhjaks on nelinurk $ABCD$, mille diagonaalid on isekeskis risti. Diagonaallõige AA_1C_1C on põhjaga risti. Leida selle prisma maht, kui diagonaal $BD = 16$ dm ja AA_1C_1C pind $= 250$ dm².



Joon. 29

Tingimus: $AC \perp BD$ (joon. 29). Kõrgus $A_1O \perp AC$. Maht: $V = (\frac{1}{2} BD \cdot AL + \frac{1}{2} BD \cdot LC) \cdot A_1O = \frac{1}{2} BD (AL + LC) \cdot A_1O = \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot A_1O$. Aga $AC \cdot A_1O = 250$ dm² ja $BD = 16$ dm. Jär. $V = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 250 = 2000$ dm³ $= 2$ m³.

106. Kahe kuubi täispinnad on s ja k . Leida mahtude suhe.

Kuupide servad: x ja z . Mahtude suhe: $\frac{v}{v_1} = \frac{x^3}{z^3} = \left(\frac{x}{z}\right)^3$. Täispinnad: $6x^2 = s$ ja $6z^2 = k$, jär. $\frac{6x^2}{6z^2} = \frac{s}{k}$ ja $\frac{x}{z} = \sqrt{\frac{s}{k}}$. Mahud: $\frac{v}{v_1} = \left(\sqrt{\frac{s}{k}}\right)^3 = \sqrt{s^3} : \sqrt{k^3}$.

107. Leida korrap. 12-nurkse prisma maht, kui põhja raadius on r , aga prisma kõige vähem diagonaal võrdub põhja teise diagonaaliga, s. o. diagonaaliga, mis järgneb kõige vähemale.

Tõmbame prisma $ABCD \dots A_1B_1C_1D_1 \dots$ põhja keskpunktist O küljele BC ristjoone ON . Külgserv CC_1 on kõrguseks. Maht: $V = 12 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot ON \cdot CC_1 = 6 \cdot BC \cdot ON \cdot CC_1$. Põhja vähim diagonaal $AC = a_6 = r$. Teine diag. $AD = a_4 = r\sqrt{2}$. Prisma kõige vähem diag. $AC_1 = AD = r\sqrt{2}$. Püstitolmnurk AC_1C annab: $CC_1^2 = AC_1^2 - AC^2 = (r\sqrt{2})^2 - r^2 = r^2$, $CC_1 = \sqrt{r^2} = r$. Kahendamisvalemi abil saame: $BC = a_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Lause III: $ON^2 = OB^2 - NB^2 = OB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2}r\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{4}r^2(2 + \sqrt{3})$, $ON = \frac{1}{2}r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Maht: $V = 6 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}r \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot r$, s. o. $V = 3r^3$.

108. Leida korrapärase 5-nurkse prisma maht, kui põhja raadius on r ja külgserv võrdub põhja küljega.

Olgu põhja külg a_5 ja apoteem m_5 . Maht: $V = 5 \cdot \frac{1}{2} a_5 \cdot m_5 \cdot a_5 = \frac{5}{2} a_5^2 m_5$. Nagu teada, $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_5^2}}$ (kahendamisvalem). Peale lihtsustamist omame: $a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ (ü. nr. 89). Apoteem: $m_5 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}a_5\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{16}r^2(10 - 2\sqrt{5})} = \frac{r}{4}(\sqrt{5} + 1)$. Jär. $V = \frac{5}{2} \cdot \frac{r^2}{4} \cdot (10 - 2\sqrt{5}) \cdot \frac{r}{4}(\sqrt{5} + 1) = \frac{5}{4}r^3\sqrt{5}$.

109. Kahe korrab. samanimelise prisma kõrgused suhtuvad nagu $m:n$; vastavad põhiservad suhtuvad nagu $k:s$. Kuidas suhtuvad nende prismade mahud?

Tähendagu x ja z prismade kõrgusi, u ja u_1 põhjade pindasid. Mahud: $v = ux$, $v_1 = u_1z$. Suhe: $\frac{v}{v_1} = \frac{ux}{u_1z} = \frac{u}{u_1} \cdot \frac{m}{n}$, sest $\frac{x}{z} = \frac{m}{n}$. Põhjade pinnad suhtuvad nagu põhiservade ruudud: $\frac{u}{u_1} = \frac{k^2}{s^2}$. Jär. $\frac{v}{v_1} = \frac{k^2m}{s^2n}$.

110. Korrapärase 100 000-nurkse prisma külgpind $k = 100$ ja põhipind $s = 12,56$. Leida maht.

Olgu prisma kõrgus x . Maht: $V = sx$. Suure nurkade arvu pärast võib lugeda põhja ringiks: $\pi r^2 = s$ (1) ja $2\pi r x = k$ (2). Võrrandid (1) ja (2): $r^2 = \frac{s}{\pi}$, $r = \sqrt{\frac{s}{\pi}}$; $x = \frac{k}{2\pi r} = \frac{k}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{s}}$. Maht: $V = s \cdot \frac{k}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{s}} = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{s}{\pi}} = \frac{100}{2} \sqrt{\frac{12,56}{3,14}} = 100$.

111. Kolmnurkse püstprisma külgtahkude pinnad on m , n , e ; külgserv $= k$. Leida maht.

Olgu põhja küljed a , b ja c . Maht: $V = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \cdot k$ (1). Aga $ak = m$, $bk = n$, $ck = e$, jär. $a = \frac{m}{k}$, $b = \frac{n}{k}$, $c = \frac{e}{k}$. Kui leitud väärtused asetame avaldisse (1) ja lihtsustame, saame: $V = \frac{1}{4k} \sqrt{(m+n+e)(m+n-e)(m+e-n)(n+e-m)}$.

112. Kahe korrab. samanimelise prisma külgpinnad on võrdelised a ja b -ga, vastavad kõrgused on võrdelised m ja n -ga. Kuidas suhtuvad nende prismade mahud?

Ühe prisma külgpind: $Q = kxz$, kus k on põhja külgede arv, x põhja külj ja z prisma kõrgus. Sarnaselt:

$Q_1 = kx_1z_1$. Suhe: $Q : Q_1 = \frac{kxz}{kx_1z_1} = \frac{a}{b}$ ehk $\frac{xz}{x_1z_1} = \frac{a}{b}$. Tingimus: $\frac{z}{z_1} = \frac{m}{n}$. Jär. $\frac{x}{x_1} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ ja $\frac{x}{x_1} = \frac{an}{bm}$. Mahud: $V = k \cdot \frac{1}{2} xuz$, $V_1 = k \cdot \frac{1}{2} x_1u_1z_1$, kus u ja u_1 on põhjade apoteemid. Suhe: $V : V_1 = k \cdot \frac{1}{2} xuz : k \cdot \frac{1}{2} x_1u_1z_1 = \frac{x}{x_1} \cdot \frac{z}{z_1} \cdot \frac{u}{u_1}$, s. o. $V : V_1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{u}{u_1}$. Apoteemid u ja u_1 suhtuvad aga nagu põhjade küljed x ja x_1 , sellep. $V : V_1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{an}{bm} = \frac{a^2n}{b^2m}$.

113. Nelinurkse püstprisma põhjaga ristised diagonaalpinnad a_1 ja a_2 on isekeskis risti ja nende lõikejoone pikkus on k . Leida maht.

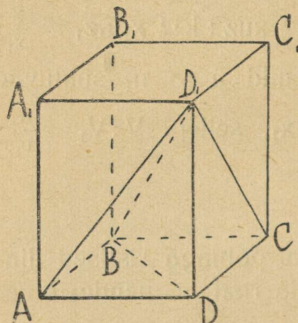
Ülesandest järgneb, et AC ja BD on risti (joon. 20), $OO_1 = k$. Pinnad: $AC \cdot k = a_1$, $BD \cdot k = a_2$, jär. $AC = \frac{a_1}{k}$ ja $BD = \frac{a_2}{k}$. Põhja pind koosneb kahest kolmnurgast: $Q = \frac{1}{2} AC \cdot DO + \frac{1}{2} AC \cdot BO = \frac{1}{2} AC(DO + BO) = \frac{1}{2} AC \cdot DB = \frac{a_1 a_2}{2k^2}$. Maht: $V = Q \cdot k = \frac{a_1 a_2}{2k^2} \cdot k = \frac{a_1 a_2}{2k}$.

114. Rööptahuka kaks diagonaali e ja f lõikuvad 45° nurgi ja neist määratud diagonaalpind on temaga rööbikust servast kaugusel a . Leida maht.

Olgu $AC_1 = f$ ja $BD_1 = e$, $\angle D_1OC_1 = 45^\circ$ (joon. 23). Tasapind AD_1C_1B jagab rööptahuka kaheks võrdmahtseks kolmnurkseks prismaks. Kui prismas $AA_1D_1BB_1C_1$ kujutame ristlõike läbi serva A_1B_1 , siis selle lõike kõrgus $= a$. (Terve prisma ristlõike kõrgus $= 2a$). Tähenagu x rööpküliliku ABC_1D_1 külgede AB ja D_1C_1 kaugust üksteisest (ristlõike alus). Ristlõike pind $= \frac{1}{2} xa$. Kolmnurkse prisma maht $= \frac{1}{2} xa \cdot D_1C_1$. Otsitav maht: $V = 2 \cdot \frac{1}{2} xa \cdot D_1C_1 = ax \cdot D_1C_1$. Kujutame kolmnurga OD_1C_1 kõrguse z tipust D_1 ; $z = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} e) \sqrt{2} = \frac{1}{4} e \sqrt{2}$ (IX). Kolmnurkga OD_1C_1 pind $= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} f) \cdot \frac{1}{4} e \sqrt{2} = \frac{1}{16} ef \sqrt{2}$. Rööp-

küliku ABC_1D_1 pind kahel viisil: $x \cdot D_1C_1 = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \text{ ef } \sqrt{2}$, s. o. $x \cdot D_1C_1 = \frac{1}{4} \text{ ef } \sqrt{2}$. Jär. $V = a \cdot \frac{1}{4} \text{ ef } \sqrt{2} = \frac{1}{4} a \text{ ef } \sqrt{2}$.

115. Leida risttahuka maht, kui tema nurkjoon l moodustab ühe tahuga 30° nurga, aga teisega 45° nurga.



Joon. 30.

Otsitav maht: $V = AB \cdot BC \cdot D_1D$ (joon. 30). Lause IV: $AB = \frac{1}{2} l$; lause IX: $BC = \frac{1}{2} l \sqrt{2}$. Püstkolmnurgad BCD ja BDD_1 : $BD^2 = BC^2 + CD^2 = (\frac{1}{2} l \sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2} l)^2 = \frac{3}{4} l^2$; $D_1D^2 = BD_1^2 - BD^2 = l^2 - \frac{3}{4} l^2 = \frac{1}{4} l^2$, $D_1D = \sqrt{\frac{1}{4} l^2} = \frac{1}{2} l$. Maht: $V = \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} l \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} l = \frac{1}{8} l^3 \sqrt{2}$.

116. Püstprisma põhjaks on rööpkülik, mille teravnurk on 30° ja pind 4. Prisma külgtahkude pinnad on 6 ja 12. Leida maht.

Olgu $AD = BC = x$, $AB = CD = z$, külgserv $C_1C = t$, $\angle C = 30^\circ$, $BN \perp DC$ (joon. 24). Jär. $BN = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} x$. Võtame tahud serva CC_1 juurest: $tx = 6$ (1), $tz = 12$ (2); põhipind: $z \cdot \frac{1}{2} x = 4$ ja $zx = 8$ (3). Korrutame võrrandid (1), (2) ja (3): $t^2 x^2 z^2 = 576$, s. o. $txz = \sqrt{576} = 24$. Jagame viimase võrrandi kolmandaga: $txz : zx = 24 : 8$, s. o. $t = 3$. Otsitav maht: $V = 4 \cdot 3 = 12$.

117. Rööptahuka põhja ümbermõõt on $2p = 68$, põhja kõrgused: $d_1 = 5$ ja $d_2 = 12$. Külgserva $k = 17$ projektsioon põhja peale $a = 8$. Leida maht.

Olgu põhja küljed x ja y . Põhja pind kahel viisil: $d_1 x = d_2 y$. Võrrand: $2x + 2y = 2p$ ja $x + y = p$. Lahendame võrrandid: $x = p - y$, $d_1(p - y) = d_2 y$, siit saame $y = \frac{d_1 p}{d_1 + d_2}$. Jär. $x = p - \frac{d_1 p}{d_1 + d_2} = \frac{d_2 p}{d_1 + d_2}$. Rööptahuka kõrgus: $h = \sqrt{k^2 - a^2}$. Maht: $V = d_1 x h = \frac{d_1 d_2 p}{d_1 + d_2} \cdot \sqrt{k^2 - a^2} = 1800$.

118. Risttahuka servad suhtuvad nagu 2:3:6, diagonaal = 35 cm. Leida maht.

Mõõdete (servade) ruutude summa: $x^2 + y^2 + z^2 = 35^2$. Suhted $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$ annavad $x = \frac{1}{3}z$, $y = \frac{1}{2}z$. Jär. $(\frac{1}{3}z)^2 + (\frac{1}{2}z)^2 + z^2 = 1225$, s. o. $z = 30$ cm. Teised mõõdud: $x = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$ cm, $y = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$ cm. Maht: $V = xyz = 10 \cdot 15 \cdot 30 = 4500$ cm³ = 4,5 dm³.

119. Prisma külgtahud on ruudud. Tema põhjaks on korrap. kolmnurk, mille ümberjoonestatud ringi raadius = R. Leida maht.

Põhja serv x ja kõrgus on võrdsed. Lause VII: $x = R\sqrt{3}$. Maht: $V = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} \cdot x = \frac{1}{4}x^3\sqrt{3} = \frac{1}{4}(R\sqrt{3})^3\sqrt{3} = \frac{9}{4}R^3$.

120. Korrapärase kolmnurkse prisma põhja sissejoonestatud ringi raadius on r, külgtahu ümberj. ringi raadius = R. Leida maht.

Põhja külge olgu x ja prisma kõrgus z. Külgtahu diagonaal = 2R. Lause VII: $r = \frac{1}{6}x\sqrt{3}$. Jär. $x = 6r:\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$. Kõrgus: $z^2 = (2R)^2 - (2r\sqrt{3})^2 = 4R^2 - 12r^2$, s. o. $z = 2\sqrt{R^2 - 3r^2}$. Maht: $V = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} \cdot z = \frac{1}{4}(2r\sqrt{3})^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - 3r^2} = 6r^2\sqrt{3R^2 - 9r^2}$.

121. Rööptahuka ABCDEFGH servade pikkused on: AB = 7 $\frac{2}{7}$, AD = 10 $\frac{5}{7}$ ja AE = 17; põhja diagonaal AC = 12, rööptahuka diagonaal AG = 25. Diagonaalpind AEGC on risti põhjaga. Leida maht.

Kolmnurga AGC küljed on teada, GC = AE = 17. Tema kõrgus on ka prisma kõrguseks:

$$h = \frac{2}{12} \sqrt{27(27-25)(27-17)(27-12)} = 15.$$

Kolmnurga ABC küljed on teada, tema pind:

$$Q = \sqrt{15(15-12)(15-7\frac{2}{7})(15-10\frac{5}{7})} = 27^0.$$

Maht: $V = 2Q \cdot h = 2 \cdot 27^0 \cdot 15 = 1157\frac{1}{7}$.

122. Korrarp. $\sqrt{3}$ -nurkse prisma külgpind on 12 korda nii suur kui põhipind ja kõigi servade summa on $m(2 + \sqrt{3})$. Leida maht.

Otsitav maht: $V = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} \cdot z$, kus x on põhja külj ja z külgserv. Külgpind: $\sqrt{3}xz$, ühe põhja pind: $\frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$. Võrrandid: $12 \cdot \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} = \sqrt{3}xz$ (1), $6x + \sqrt{3}z = m(2 + \sqrt{3})$. Esimesest saame: $z = x\sqrt{3}$. Jär. $6x + \sqrt{3}x\sqrt{3} = m(2 + \sqrt{3})$ ja $\sqrt{3}x(2 + \sqrt{3}) = m(2 + \sqrt{3})$, s. o. $x = \frac{1}{3}m$. Külgserv $z = \frac{1}{3}m\sqrt{3}$. Maht: $V = \frac{1}{4}(\frac{1}{3}m)^2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}m\sqrt{3} = \frac{1}{8}m^3$.

123. Kolmnurkse prisma põhipind on s ja põhja sissejoonestatud ringi raadius r . Külgserva pikkus võrdub põhja ümbermõõdu poolega ja tema kalle põhja vastu on 45° . Leida maht.

Lause XV: $pr = s$, $p = \frac{s}{r}$, see on serva pikkus. Kõrgus (IX): $h = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{r} \sqrt{2} = \frac{s\sqrt{2}}{2r}$. Maht: $V = sh = s \cdot \frac{s\sqrt{2}}{2r} = \frac{s^2\sqrt{2}}{2r}$.

124. Kolmnurkse püstprisma külgpind on a^2 . Selle prisma külgtahkude kahetahuste nurkade poolitajate tasapindade lõikejoon on ühest tahust kaugusel d . Leida maht.

Otsitav maht: $V = Q \cdot h$. Põhiservad: x, y, z . Külgpind: $(x + y + z)h = a^2$. Kõrgus $h = \frac{a^2}{x + y + z}$. Kaugus d on põhja sissejoonestatud ringi raadius. Põhja pind (XV): $Q = \frac{1}{2}(x + y + z)d$. Järelikult $V = \frac{1}{2}(x + y + z)d \cdot \frac{a^2}{x + y + z} = \frac{1}{2}a^2d$.

125. Püstprisma põhjaks on püstkolmnurk, mille kaatetid suhtuvad nagu 24:7. Hüpotenuusi ja prisma kõrguse suhe on 5:2; külgpind = 140 m^2 . Leida maht.

Kaatetid: $a = 24x \text{ m}$, $b = 7x \text{ m}$, hüpotenuus $c = \sqrt{(24x)^2 + (7x)^2} = 25x \text{ m}$. Kõrgus: $h = 25x \cdot \frac{2}{5} = 10x \text{ m}$.

Külgpind: $(24x + 7x + 25x) \cdot 10x = 140m^2$, s. o. $560x^2 = 140$, $x = \frac{1}{2}$. Jär. $a = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$ m, $b = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ m, $h = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ m. Maht: $V = \frac{1}{2}abh = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{7}{2} \cdot 5 = 105$ m³.

✓ **126.** Läbi risttahuka külgserva keskkoha ja ühe põhiserva minev tasapind annab lõike, mille pind on 15 cm²; külgserva pikkus on 8 cm ja risttahuka põhjaks on ruut. Leida maht.

Tähendagu x põhja külge. Otsitav maht: $V = 8x^3$. Lõike vähem külge on ka x . Olgu teine külge z . Võrrandid $xz = 15$ (1), $z^2 - x^2 = 4^2$ (2). Avaldame esimesest z ja paneme teise: $z = \frac{15}{x}$, $(\frac{15}{x})^2 - x^2 = 16$ ja $225 - x^4 = 16x^2$, s. o. $x^4 + 16x^2 - 225 = 0$ (3). Valime $x^2 = v$ (4), jär. võrrand (3) saab kuju: $v^2 + 16v - 225 = 0$, $v = \frac{-16 \pm \sqrt{8^2 + 225}}{2} = \frac{-16 \pm 17}{2}$. Kõlbab $v = 9$. Jär. $x^2 = 9$, $x = 3$. Kõlbab $x = 3$ cm ja $z = \frac{15}{3} = 5$ cm. Maht: $v = 8 \cdot 3^3 = 72$ cm³.

127. Risttahuka mõõted on 2, 3 ja 6. Leida kuubi serv tingimusel, et nende kahe keha mahud suhtuksid nagu pinnad.

Olgu kuubi serv x , risttahuka põhja küljed $a = 2$, $b = 3$ ja kõrgus $c = 6$. Risttahuka maht: $v = abc = 36$, tema täispind: $s = 2(ab + ac + bc) = 72$. Kuubi maht: $v_1 = x^3$, täispind: $s_1 = 6x^2$. Tingimus: $\frac{v}{v_1} = \frac{s}{s_1}$ ja $\frac{36}{x^3} = \frac{72}{6x^2}$. Jär. $72x^3 = 36 \cdot 6x^2$, $72x = 36 \cdot 6$, $x = 3$.

Järelekatse. $v_1 = 3^3 = 27$, $s_1 = 6 \cdot 3^2 = 54$. Mahtude suhe: $\frac{v}{v_1} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$. Pindade suhe: $\frac{s}{s_1} = \frac{72}{54} = \frac{4}{3}$. Õige.

128. Korrapärase kolmnurkse prisma kõrgus on k ja maht v . Leida külgpind.

Otsitav külgpind: $Q = 3kx$, kus x on põhja külge. Põhja pind $= \frac{1}{2}x^2\sqrt{3}$ (XIII). Maht: $\frac{1}{2}x^2\sqrt{3} \cdot k = v$ ja $x = 2\sqrt{\frac{v}{k\sqrt{3}}}$. Jär. $Q = 3k \cdot 2\sqrt{\frac{v}{k\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}kv\sqrt{3}$.

Näide 1. $k = 34\sqrt{3}$, $v = 136$; $Q = 408$.

Näide 2. $k = 64,57$; $v = 200,73$. $Q = 519,02$. Logaritmidega: $\lg Q = \lg 2 + \frac{1}{2}(\lg 3 + \lg k + \lg v + \frac{1}{2} \lg 3) = 2,7152$; $Q = 519$. Viie kohaga: $\lg Q = 2,71519$; $Q = 519,02$.

129. Kuubi diagonaallõike pind on P . Leida 1) serv, 2) tahu diagonaal, 3) kuubi diagonaal, 4) kuubi pind ja 5) maht.

1. Kuubi serv x ja tahu diagonaal z on omavahel seotud: $z = x\sqrt{2}$ (1). Edasi: $xz = P$, (1) põhjal $xx\sqrt{2} = P$, s. o. $x = \sqrt{\frac{P}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{P\sqrt{2}}{2}}$.

2. Tahu diagonaal $z = \sqrt{\frac{P\sqrt{2}}{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{P\sqrt{2}}$.

3. Kuubi diagonaal $d = x\sqrt{3} = \sqrt{\frac{P\sqrt{2}}{2}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{2}P\sqrt{2}}$ (ü. nr. 44).

4. Pind $Q = 6x^2 = 6\left(\sqrt{\frac{P\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = 3P\sqrt{2}$.

5. Maht $V = x^3 = \left(\sqrt{\frac{P\sqrt{2}}{2}}\right)^3 = \frac{P\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{P\sqrt{2}}{2}} = \frac{P}{2} \sqrt{P\sqrt{2}}$.

130. Metallist, mille erikaal d , on valatud kuup, mis õhus kaalub ¹⁾ p kg. Leida 1) kuubi serv ja 2) kaal vees.

1. Kuubi maht: $x^3 = \frac{p}{d}$, serv $x = \sqrt[3]{\frac{p}{d}}$ dm.

2. Vees kaotab iga keha niipalju oma kaalust, kui palju kaalub tema mahu suurune osa vett. Vee kaal: $\frac{p}{d}$ kg, kuubi kaal vees: $z = p - \frac{p}{d} = \frac{p}{d}(d - 1)$ kg.

1) Õige täpsatel mõtmetel arvestatakse ka kaalukaotusega õhus.

131. On teada, et

1) 1 mürialiiter = 10000 liitrit = 10000 dm³

2) 1 kiloliiter = 1000 liitrit = 1000 dm³

3) 1 hektoliiter = 100 liitrit = 100 dm³

4) 1 dekaliiter = 10 liitrit = 10 dm³

5) 1 liiter = 1 dm³ = 1000 cm³

6) 1 detsiliiter = 0,1 liitrit = 100 cm³

7) 1 sentiliiter = 0,01 liitrit = 10 cm³

8) 1 milliliiter = 0,001 liitrit = 1 cm³

Need mõõdud on kuubikujulised. Leida igäihe {serv.

Lahendamine on kõigil juhtumel sarnane, sellep. vaatleme ainult kahte esimest. Teistel on antud vastused.

1. $a^3 = 10000 \text{ dm}^3$ ja $a = \sqrt[3]{10000} \text{ dm}$. Logaritmime: $\lg a = \frac{1}{3} \lg 10000 = 1,3333$; $a = 21,54 \text{ dm}$. Viie kohaga: $\lg a = 1,33333$; $a = 21,544 \text{ dm}$.

2. $b^3 = 1000 \text{ dm}^3$, $b = \sqrt[3]{1000} = 10 \text{ dm} = 1 \text{ m}$.

3. $c^3 = 100 \text{ dm}^3$, $c = \sqrt[3]{100} \approx 4,642 \text{ dm} = 46,42 \text{ cm}$;
(46,416 cm).

4. $d^3 = 10 \text{ dm}^3$, $d = \sqrt[3]{10} \approx 2,154 \text{ dm} = 21,54 \text{ cm}$;
(21,544 cm).

5. $e^3 = 1 \text{ dm}^3$, $e = \sqrt[3]{1} = 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$.

6. $f^3 = 100 \text{ cm}^3$, $f = \sqrt[3]{100} \approx 4,642 \text{ cm}$; (4,6416 cm).

7. $g^3 = 10 \text{ cm}^3$, $g = \sqrt[3]{10} \approx 2,154 \text{ cm}$; (2,1544 cm).

8. $h^3 = 1 \text{ cm}^3$, $h = \sqrt[3]{1} = 1 \text{ cm}$.

132. Risttahuka servad suhtuvad nagu 3:7:8. Täispind = 808 cm². Leida servad.

Servad: $AB = x$, $BC = y$, $BB_1 = z$ (joon. 20).

Ülesande järgi: $\frac{x}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8}$ (1); $2xy + 2xz + 2yz = 808$ ja $xy + xz + yz = 404$ (2). Suhete reast (1) saame: $x = \frac{3}{8}z$ (3), $y = \frac{7}{8}z$ (4). Nüüd leiame (2) põhjal: $\frac{3}{8}z \cdot \frac{7}{8}z + \frac{3}{8}z \cdot z + \frac{7}{8}z \cdot z = 404$ ja $z^2 = 256$, $z = \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$. Võrrandeist (3) ja (4) omame: $x = \frac{3}{8} \cdot 16 = 6 \text{ cm}$, $y = \frac{7}{8} \cdot 16 = 14 \text{ cm}$.

Järelekatse. $\frac{6}{3} = \frac{1^4}{7} = \frac{1^6}{8} = 2$; $2 \cdot 6 \cdot 14 + 2 \cdot 6 \cdot 16 + 2 \cdot 14 \cdot 16 = 808$. Õige.

133. Kui kuubi serva suurendada 2 cm võrra, siis suureneb tema maht 98 cm³ võrra. Leida serv.

Olgu kuubi serv x ja maht v . Omame võrrandid: $x^3 = v$ ja $(x + 2)^3 = v + 98$. Vahe: $(x + 2)^3 - x^3 = 98$. Lahutame teguriteks: $(x + 2 - x)[(x + 2)^2 + (x + 2)x + x^2] = 98$. Jär. $x^2 + 2x - 15 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = -5$. Otsitav serv $x = 3$ cm. — Järelekatse. $3^3 = 27$; $3 + 2 = 5$, $5^3 = 125$; $125 - 27 = 98$. Õige.

134. Kui kuubi serva suurendada 1 m võrra, siis maht suureneb 125 korda. Leida serv.

Omame võrrandid: $x^3 = v$ ja $(x + 1)^3 = 125v$. Jagatis: $(x + 1)^3 : x^3 = 125$, s. o. $(x + 1) : x = 5$ ja $x = \frac{1}{4} m = 25$ cm.

135. Kuubi pind on 1) 5046 m², 2) $793\frac{1}{2}$ m², 3) 47 m². Leida serv.

1. Omame võrrandi $6x^2 = 5046$ ja $x^2 = 841$, s. o. $x = \sqrt{841} = 29$ m.

2. $6z^2 = 793\frac{1}{2}$, $z^2 = \frac{1587}{12} = \frac{529}{4}$, $z = \sqrt{\frac{529}{4}} = \frac{23}{2} = 11\frac{1}{2}$ m.

3. $6y^2 = 47$, $y = \sqrt{\frac{47}{6}} = \frac{1}{6} \sqrt{282} = \frac{1}{6} \cdot 16,8 = 2,8$ m.

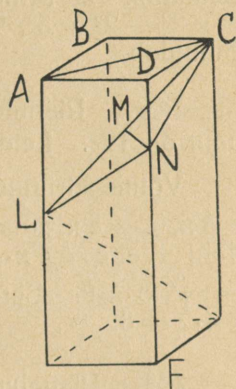
136. Kuubi maht on 1) 3375 m³, 2) 21952 m³. Leida serv.

1. Omame võrrandi: $x^3 = 3375$, s. o. $x = \sqrt[3]{3375} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3} = 3 \cdot 5 = 15$ m.

2. $y^3 = 21952$, $y = \sqrt[3]{21952} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 7^3} = 2^2 \cdot 7 = 28$ m.

137. Ruut ühes diagonaaliga on murtud kokku nii, et on tekkinud korrast nelinurkse prisma külgpind. Millise nurga moodustavad diagonaali lõigud üksteisega?

Olgu ruudu külg $4a$, siis $DC = DN = a$, $AC = a\sqrt{2}$,
 $AL = 2a$, $DF = 4a$ (joon. 31).
 Otsitav on nurk LNC . Püstkolmnurk
 DCN : $CN = a\sqrt{2}$, ka $LN = a\sqrt{2}$.
 $\triangle LAC$: $CL^2 = (2a)^2 + (a\sqrt{2})^2 = 6a^2$,
 $CL = a\sqrt{6}$. Võrdh. kolmnurga CNL
 kõrgus: $MN^2 = CN^2 - CM^2 =$
 $= (a\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2}a\sqrt{6})^2 = \frac{1}{4}a^2$, $MN =$
 $= \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, s. o. $MN = \frac{1}{2}CN$ ja $\angle MCN =$
 $= 30^\circ = \angle MLN$, $\angle LNC = 120^\circ$.



Joon. 31.

138. Risttahuka täispind on
 5472, külgpind 3960 ja kõrgus 36.
 Leida diagonaal.

Tähendagu a , b ja $c = 36$ mõõ-
 teid ning d diagonaali. Diagonaali
 ruut: $d^2 = a^2 + b^2 + 36^2$ (1). Põhjate pindade summa: $2ab =$
 $= 5472 - 3960 = 1512$ (2). Külgpind: $2(a + b) \cdot 36 = 3960$,
 siit $a + b = 55$, mille ruut: $a^2 + 2ab + b^2 = 3025$. Teise
 põhjal $a^2 + 1512 + b^2 = 3025$, s. o. $a^2 + b^2 = 1513$. Võr-
 rand (1): $d^2 = 1513 + 36^2 = 2809$ ja $d = \sqrt{2809} = 53$.

139. Korrapärase nelinurkse prisma diagonaal on
 3, külgpind 8, leida kõrgus.

Tingimus: $4yx = 8$, kus y on põhja külg ja x prisma
 kõrgus, jär. $yx = 2$ (1). Mõõdete ruutude summast $x^2 +$
 $+ y^2 + y^2 = 3^2$ saame $x^2 + 2y^2 = 9$ (2). Võrrandist (1)
 leiame: $y = \frac{2}{x}$; (2) võtab kuju: $x^2 + 2\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 9$ ja $x^4 -$
 $- 9x^2 + 8 = 0$. Kui oletada, et $x^2 = z$ (3), siis saame:
 $z^2 - 9z + 8 = 0$, s. o. $z_1 = 8$, $z_2 = 1$. Nüüd omame (3)
 põhjal: $x^2 = 8$, $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$; $x^2 = 1$, $x = \pm\sqrt{1} =$
 $= \pm 1$. Kõrguseks kõlbavad positiivsed juured $2\sqrt{2}$ ja
 1. On olemas kaks prisma, mis ülesannet rahuldavad.
 Järelekatse. 1. Kõrgus $= 2\sqrt{2}$. (2) saame põhja külje:
 $y = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Diagonaali ruut: $(2\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 +$

$+(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = 3^2, 9 = 9$. Külgpind: $4 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8, 8 = 8$.
 Rahuldab. 2. Põhja kül: $y = \frac{2}{1} = 2$. Diagonaali ruut:
 $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2, 9 = 9$. Külgpind: $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8, 8 = 8$.
 Rahuldab.

140. Risttahuka servad suhtuvad nagu 2:3:4, maht on 192. Leida servad.

Võime kirjutada: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = x$ ja $a = 2x$, $b = 3x$, $c = 4x$, kus x ja servad a , b ja c on tundmatud. Maht: $abc = 2x \cdot 3x \cdot 4x = 192$ ja $x^3 = 192:24 = 8$; $x = \sqrt[3]{8} = 2$. Servad: $a = 2 \cdot 2 = 4$, $b = 3 \cdot 2 = 6$, $c = 4 \cdot 2 = 8$.

141. Risttahuka tahkude diagonaalid on: $a = \sqrt{337}$, $b = 20$ ja $c = 15$. Leida diagonaal, maht ja täispind.

Mõõted: x , y , z (= kõrgus). Maht: $V = xyz$; täispind: $S = 2(xy + xz + yz)$; diagonaali ruut: $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Lause III: $x^2 + y^2 = a^2$ (1), $x^2 + z^2 = b^2$ (2), $y^2 + z^2 = c^2$ (3). Liites võrrandid (1), (2) ja (3) saame: $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ (4). Jär. $d = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{481} \approx 21,9317$. — Lahutame võrrandist (4) võrrandi (1) ja juurime, omame: $z = \sqrt{\frac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2)} = 12$. Sarnaselt: $y = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)} = 9$, $x = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)} = 16$. Maht: $V = \frac{1}{4} \sqrt{2(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)} = 1728$. — Et mitte kirjutada liiga pikka tähtavaldist, paneme täispinnale kohe arvud asemele; saame: $S = 2(16 \cdot 9 + 16 \cdot 12 + 9 \cdot 12) = 888$.

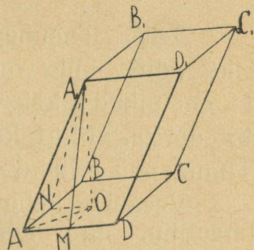
142. Kaldrööptahuka põhjaks on püstkülik külgedega a ja b . Külgserv c moodustab põhja servadega nurgad $= 60^\circ$. Leida 1) maht, 2) külgserva kalle põhja vastu ja 3) külgpind.

Antud: $AD = a$, $AB = b$, $AA_1 = c$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^\circ$ (joon. 32).

1. Maht: $V = abh$, kus kõrgus $h = A_1O$. Olgu $OM \perp AD$, $ON \perp AB$, siis $A_1M \perp AD$ ja $A_1N \perp AB$. Ühise hüpotenuusiga püstkolmnurgad A_1AM ja A_1AN omavad nurga $= 60^\circ$, sellep. $\triangle A_1AM \cong \triangle A_1AN$, s. o. $A_1M = A_1N$, $AM = AN$. Nelinurk $AMON$ on ruut. Sirglõik $AM = \frac{1}{2}c$ (IV); $AO = AM\sqrt{2} = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$. Pythagorase teoreem, $\triangle AA_1O$: $A_1O^2 = c^2 - (\frac{1}{2}c\sqrt{2})^2 = \frac{3}{4}c^2$, $A_1O = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$. Jär. $V = ab \frac{1}{2}c\sqrt{3} = \frac{1}{2}abc\sqrt{3}$.

2. $\angle A_1AO = 45^\circ$, sest $AO = A_1O = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$.

3. Külgpind: $Q = 2 \cdot AD \cdot A_1M + 2 \cdot AB \cdot A_1N$. Lause V : $A_1N = A_1M = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$. Tähendab, $Q = 2a \cdot \frac{1}{2}c\sqrt{3} + 2b \cdot \frac{1}{2}c\sqrt{3} = (a + b)c\sqrt{3}$.



Joon. 32.

143. Ruutpõhjaga risttahuka maht on v ja külgpind s . Leida täispind.

Olgu põhja külj x ja kõrgus z . Maht: $x^2 z = v$; külgpind: $4xz = s$. Jagame: $\frac{x^2 z}{4xz} = \frac{v}{s}$, s. o. $x = \frac{4v}{s}$. Täis-

pind: $S = 2 \cdot \left(\frac{4v}{s}\right)^2 + s = \frac{32v^2}{s^2} + s$.

144. Risttahuka täispind on 2238, maht = 7182, üks põhja külj on 19. Leida risttahuka mõlemad kõrgused.

Otsitavad kõrgused x ja y on risttahuka mõõted. Maht: $19xy = 7182$ ja $xy = 378$ (1). Täispind: $2(19x + 19y + xy) = 2238$ ja $19x + 19y + 378 = 1119$, s. o. $x + y = 39$ (2). Juurte korrutis (1) ja summa (2): $z^2 - 39z + 378 = 0$; $z_1 = x = 21$, $z_2 = y = 18$, või ümberpöördukt: $z_1 = y = 21$, $z_2 = x = 18$.

145. Risttahuka täispind on 1112, külgpind 728 ja maht 2496. Leida mõõted.

Mõõted: x, y, z . Külgpind: $2(x + y)z = 728$ (1); täispind: $2xy + 728 = 1112$ ja $xy = 192$ (2); maht: $xyz =$

= 2496 ja (2) põhjal $192z = 2496$, $z = 13$. Võrrand (1) annab nüüd: $x + y = 28$ (3). Ruutvõrrandi juurte summa (3) ja korrutis (2): $v^2 - 28v + 192 = 0$; $v_1 = x = 16$, $v_2 = y = 12$.

146. Tammepuust kolmetahune prisma ujub vees. Üks põhja külge on 14 cm ja teised küljed on kumbki 11 cm pikad; külgserv = 20 cm ja moodustab põhjaga 45° nurga. Mitu kantsentimeetrit vett on välja surutud? Tammepuu erikaal = 0,9.

Veesujuv keha ja temast väljasurutud vesi kaaluvad ühepalju, nad tasakaalustavad teineteist. Arvutades prisma kaalu, saame ühtlasi ka väljasurutud vee kaalu. Prisma põhja pind: $Q = \sqrt{18(18-14)(18-11)(18-11)} = 42\sqrt{2}$ cm². Kõrgus: $h = \frac{1}{2} \cdot 20 \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ cm (IX). Maht: $V = Q \cdot h = 42\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 840$ cm³. Prisma kaal: $0,9 \cdot 840 = 756$ grammi. Et vee kaal grammides ja vastav maht kantsentimeetrites avalduvad sama arvuga (vee erikaal = 1), siis leitud arv 756 vastab väljasurutud vee hulga kantsentimeetrites.

147. Puust kolmetahune prisma ujub vees nii, et veesolev külgtahk on horisontaalne. Vastasserva kaugus sellest külgtahust on m ja puu erikaal = d . Kui sügaval vees ujub see prisma?

Prisma ristlõige on kolmnurk, millest veesolev osa kujutab trapetsit. Olgu trapetsi suurem alus u ja vähem z . Lõike kõrgus on antud = m , kuna trapetsi kõrgus = x on otsitav. Terve lõige ja veest väljas olev osa on sarnased kolmnurgad. Prisma maht: $V = \frac{1}{2} umt$, kus t on prisma külgserv. Prisma kaal: $Vd = \frac{1}{2} umtd$. Väljasurutud vee maht: $V_1 = \frac{1}{2} (u + z) xt$. Selle vee kaal: $V_1 \cdot 1 = \frac{1}{2} (u + z) xt \cdot 1$. Leitud kaalud on võrdsed (ü. nr. 146), s. o. $\frac{1}{2} umtd = \frac{1}{2} (u + z) xt$ (1). Kolmnurkade sarnaduse põhjal: $u : z = m : (m - x)$, s. o. $u = \frac{mz}{m - x}$. Paneme võrrandisse (1) asemele ja lühendame: $\frac{1}{2} \cdot \frac{mz}{m - x} \cdot md =$

$= \left(\frac{mz}{m-x} + z \right) x$; jär. $x^2 - 2mx + m^2d = 0$ ja $x = m \pm \sqrt{m^2 - m^2d} = m(1 \pm \sqrt{1-d})$. Võimalik on $x = m(1 - \sqrt{1-d})$, sest $x < m$. Peab olema $1-d > 0$, $1 > d$ ehk $d < 1$.

148. Korrapärase kuusnurkse prisma täispind = s. Leida kõrgus, kui ta võrdub põhja küljega.

Kõrgus ja põhja külj = x. Ühe põhja pind: $6 \cdot \frac{1}{4} x^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} x^2 \sqrt{3}$. Külgpind: $6x \cdot x = 6x^2$. Täispind: $6x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} x^2 \sqrt{3} = s$. Siit leiame: $x^2(6 + 3\sqrt{3}) = s$ ja $x = \sqrt{\frac{s}{3(2 + \sqrt{3})}}$.

149. Korrapärase kolmnurkse prisma külgpind on k ja täispind s. Leida 1) põhja külj, 2) külgserv ja 3) maht.

1. Põhja külj = x. Põhjade pinnad koos: $2 \cdot \frac{1}{4} x^2 \sqrt{3} = s - k$, siit saame: $x = \sqrt{\frac{2(s-k)}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2}{3}(s-k)\sqrt{3}}$.

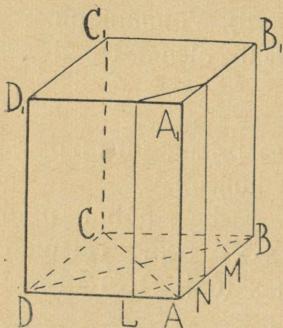
2. Külgserv = z. Külgpind: $3xz = k$. Jär. $z = \frac{k}{3x}$, s. o. $z = \frac{k}{3} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2(s-k)}} = \frac{k}{\sqrt{6(s-k)\sqrt{3}}}$.

3. Maht: $V = \frac{1}{2}(s-k)z = \frac{k(s-k)}{2\sqrt{6(s-k)\sqrt{3}}}$.

150. Korrapärase 4-nurkse prisma kaal on p. Külgservadele rööbikute tasapindadega on temast ära lõigatud 4 tükki nii, et järgi on jäänud korr. 8-nurkne prisma. Kui palju kaalub iga äralõigatud tükk?

Olgu aine erikaal d, äralõigatud tüki põhja külj AN = AL = x, AB = a, kõrgus AA₁ = z ja kaheksanurga külj NM = NL = y (joon. 33). Kolmnurga LAN pind = $\frac{1}{2} x^2$. Ot-sitav kaal: $p_1 = \frac{1}{2} x^2 zd$. Prisma kaal: $p = a^2 zd$. Suhe: $p_1 : p = \frac{1}{2} x^2 zd : a^2 zd$, s. o. $p_1 = \frac{1}{2} p \cdot \frac{x^2}{a^2}$ (1). Püstkolmnurgast

LAN saame: $y^2 = x^2 + x^2$, s. o. $y = x\sqrt{2}$ (2). Aga $AN + NM + MB = a$ ehk $2x + y = a$;
 (2) põhjal: $2x + x\sqrt{2} = a$, s. o.



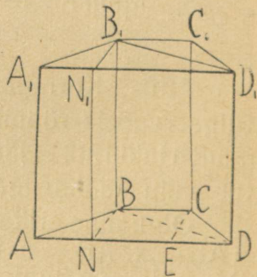
$$x = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{1}{2} a (2 - \sqrt{2}). \quad \text{Jär. (1) } p_1 = \frac{p}{2a^2} \left[\frac{a}{2} (2 - \sqrt{2}) \right]^2 = \frac{1}{4} p (3 - 2\sqrt{2}).$$

Joon. 33.

151. Vahtrapuust prisma on ujudes 13824 cm³ vett välja surunud. Prisma põhi = 1280 cm², ühe külgtahu ja põhja vaheline nurk on 30°, selle külgtahu ja põhja ühine serv on 16 cm pikk. Kui suur on selle tahu pind? Vahtrapu erikaal = 0,6.

Prisma kaal = 13824 grammi (ü. nr. 146). Prisma maht = 13824 : 0,6 = 23040 cm³. Prisma kõrgus = 23040 : 1280 = 18 sm. Vaadeldava tahu ülemise serva punktist A tõmbame tahu kõrguse AB ja prisma kõrguse AC = 18 cm. Nurk ABC = 30°, jär. AB = 2 · 18 = 36 cm (IV). Otsitav pind: Q = 16 · 36 = 576 cm².

152. Prisma kaks tahku on rööbikud, kuid mitte võrdsed; teised kaks tahku on võrdsed, kuid mitte rööbikud. Läbi suurema rööbiku külgtahu serva a minev diagonaalpind m² on risti ühe mitterööbiku külgtahuga. Selle diagonaalpinna projektsiooni DD₁N₁N pind suurema rööbiku külgtahu peale on n². Leida maht ja külgpind.



Joon. 34.

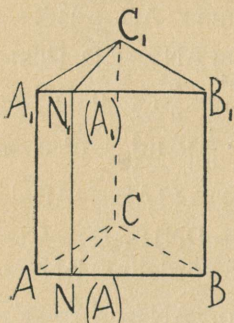
Selle prisma põhjad on võrdhaarsed trapetsid (joon. 34). Otsitav maht: $V = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BN \cdot DD_1$, kus $BN \perp AD$

(CE \perp AD), $DD_1 = a$. Ülesande põhjal: $a \cdot DN = n^2$, $a \cdot BD = m^2$ ja $DN = \frac{n^2}{a}$, $BD = \frac{m^2}{a}$. Summa $AD + BC = (AN + DN) + (DN - ED) = 2 \cdot DN$, sest $AN = ED$. Püstkolmnurk BND: $BN^2 = BD^2 - DN^2 = \frac{m^4}{a^2} - \frac{n^4}{a^2}$, s. o. $BN = \frac{1}{a} \sqrt{m^4 - n^4}$. Maht: $V = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{n^2}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{m^4 - n^4} \cdot a = \frac{n^2}{a} \sqrt{(m^2 + n^2)(m^2 - n^2)}$.—Külgpind: $Q = (2AB + AD + BC) \cdot a = (2AB + 2 \cdot DN) a = 2a(AB + DN)$; $AB = CD$. Kõrgus kui hüpotenuusi lõikude keskmine võrdeline: $BN^2 = DN \cdot AN$ ehk $\frac{m^4}{a^2} - \frac{n^4}{a^2} = \frac{n^2}{a} \cdot AN$, s. o. $AN = \frac{m^4}{an^2} - \frac{n^2}{a}$ ($AB \perp BD$). Kaatet kui keskmine võrdeline: $AB^2 = AD \cdot AN$ ehk $AB^2 = (AN + DN) AN = \left(\frac{m^4}{an^2} - \frac{n^2}{a} + \frac{n^2}{a}\right) \left(\frac{m^4}{an^2} - \frac{n^2}{a}\right) = \frac{m^4}{an^2} \left(\frac{m^4}{an^2} - \frac{n^2}{a}\right) = \frac{m^4}{a^2} \left(\frac{m^4}{n^4} - 1\right)$, $AB = \frac{m^2}{a} \sqrt{\frac{m^4}{n^4} - 1}$. Külgpind: $Q = 2a \left(\frac{m^2}{a} \sqrt{\frac{m^4}{n^4} - 1} + \frac{n^2}{a}\right) = 2 \left(n^2 + m^2 \sqrt{\frac{m^4}{n^4} - 1}\right)$.

153. Püstprisma põhjaks on püstkolmnurk, mille hüpotenuus jagub puutepunktis selle kolmnurga sissejoonestatud ringiga osadeks $a = 10$ cm ja $b = 3$ cm. Prisma maht $v = 1110$ cm³. Leida külgpind.

Puutujate võrdsuse tõttu põhja ümbermõõt $= 2a + 2b + 2r = 2(a + b + r)$; ühe tipu juures, kus nurk $= 90^\circ$, tekib ruut, kui ühendada ringi keskpunkt puutepunktidega. Otsitav külgpind: $Q = 2(a + b + r)x$, kus x on prisma kõrgus. Põhja pind (XV) $= (a + b + r)r$. Maht $= (a + b + r)rx = v$, siit saame: $x = \frac{v}{(a + b + r)r}$ är. $Q = 2(a + b + r) \cdot \frac{v}{(a + b + r)r} = \frac{2}{r} \cdot v$. Lause III: $(a + b)^2 = (a + r)^2 + (b + r)^2$, siit omame: $r^2 + (a + b)r - ab = 0$ ja $r = (-a - b + \sqrt{(a + b)^2 + 4ab}) : 2$. Külgpind $Q = 4v : [-a - b + \sqrt{(a + b)^2 + 4ab}] = 1110$ cm².

- 154.** Kolmnurkse püstprisma maht on 12672, kõrgus = 33, kaks põhja külge on vastavalt 24 ja 32. Leida kolmas põhja külge.



Joon. 35.

Põhja pind = $12672 : 33 = 384$.
Olgu $CN \perp AB$, $AC = 32$ ja $AB = 24$ (joon. 35). Põhja pind: $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot CN = 384$, s. o. $CN = 32$. Siit järeldame, et CN ja AC langevad ühte, põhjaks on tõepoolest püstkolmnurk CNB , mille kaatetid $CN = 32$ ja $BN = 24$. Otsitav hüpotenuus: $CB^2 = 32^2 + 24^2 = 1600$, $CB = \sqrt{1600} = 40$.

- 155.** Korrapärase kolmnurkse prisma maht on v ja külgpind s . Leida põhja sissejoonestatud ringi pind.

Maht: $\frac{1}{4} x^2 \sqrt{3} \cdot z = v$ (1), külgpind: $3xz = s$ (2), kus x on põhja külge ja z prisma kõrgus. Jagame võrrandid (1) ja (2): $(\frac{1}{4} x^2 \sqrt{3} \cdot z) : (3xz) = v : s$, s. o. $x = \frac{4v\sqrt{3}}{s}$.

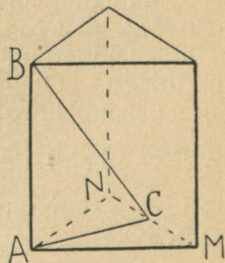
Põhja sissej. ringi raadius: $r = \frac{1}{8} x \sqrt{3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4v\sqrt{3}}{s} \cdot \sqrt{3} = \frac{2v}{s}$. Otsitav pind: $Q = \pi r^2 = \pi \left(\frac{2v}{s}\right)^2$.

- 156.** Korrapärase kolmnurkse prisma tipu kaugus d temaga mitte samal tahul asuvast servast moodustab põhjaga 60° nurga. Leida maht, külgpind ja täispind.

Nurk $ACB = 60^\circ$, $BC = d$, kusjuures $BC \perp NM$; tundmatu $AM = x$ (joon. 36). Püstkolmnurgast ACB , kus $\angle B = 30^\circ$, omame: $AC = \frac{1}{2} d$. Püstkolmnurgast ACM , kus $\angle M = 60^\circ$, leiame $AC = \frac{1}{2} x \sqrt{3}$. Jär.

$\frac{1}{2} x \sqrt{3} = \frac{1}{2} d$, $x = d : \sqrt{3}$. Prisma kõrgus:

$AB = h = \frac{1}{2} d \sqrt{3}$. Maht: $V = \frac{1}{4} x^2 \sqrt{3} \cdot h =$



Joon. 36.

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{d}{\sqrt{3}} \right)^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} d \sqrt{3} = \frac{1}{8} d^3. \quad \text{— Külgpind: } Q = 3 xh =$$

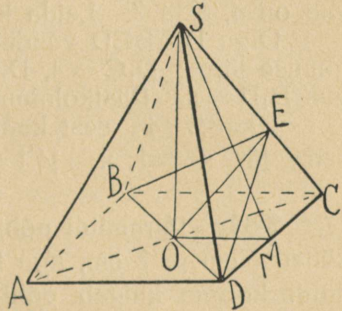
$$= 3 \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} d \sqrt{3} = \frac{3}{2} d^2. \quad \text{— Täispind: } S = 3 xh + 2 \cdot \frac{1}{4} x^2 \cdot$$

$$\sqrt{3} = \frac{3}{2} d^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{d}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{6} d^2 (9 + \sqrt{3}).$$

Püramiid.

Joonosi, nurki, lõikeid. 157. Korrapärase nelinurkse (neljatahuse) püramiidi külgtahkude kalle põhja suhtes on 45° . Milline on külgtahkude kalle üksteise suhtes ?

SO on püramiidi kõrgus, $OM \perp CD$, tasapind $BED \perp SC$ (joon. 37). Tingimus: $\angle SMO = 45^\circ$. Nurk BED on otsitav. Olgu põhja serv a; siis $OM = SO = \frac{1}{2} a$, $OC = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ (VIII). Lause III: $SC^2 = SO^2 + OC^2 = (\frac{1}{2} a)^2 + (\frac{1}{2} a \sqrt{2})^2 = \frac{3}{4} a^2$, $SC = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$. Lause XII: $EO \cdot SC = SO \cdot OC$, jär. $EO = (\frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{2}) : \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \frac{1}{6} a \sqrt{6}$.



joon. 37.

Püstkolmnurk EOD: $ED^2 = EO^2 + DO^2 = (\frac{1}{6} a \sqrt{6})^2 + (\frac{1}{2} a \cdot \sqrt{2})^2 = \frac{2}{3} a^2$, $ED = \frac{1}{3} a \sqrt{6}$. Nüüd näeme, et hüpotenuus $ED = 2EO$, s. o. $\angle EDO = 30^\circ$ ja $\angle DEO = 60^\circ$, aga otsitav nurk $BED = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

158. Püstkolmnurk, mille kaatetid 6 ja 8, on püramiidi põhjaks; püramiidi iga külgserv on 13. Leida kõrgus.

Kõrguse DN alus N (joon. 7) langeb XVII lause põhjal kolmnurga ümberjoonestatud ringi keskpunkti, s. o.

hüpoteenuusi keskkoha. Hüpotenuus $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Kõrgus: $DN^2 = DB^2 - NB^2$, s. o. $DN = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

159. Korrapärase kolmnurkse püramiidi külgserv b moodustab põhjaga nurga 30° . Leida põhja külg.

Joon. 5, XVII lause. $AO = \frac{1}{3} x \sqrt{3}$, kus x on võrdkülge kolmnurga ABC külg (VII). Ülesande järgi: $SA = b$, $\angle SAO = 30^\circ$. Lause IV: $SO = \frac{1}{2} b$. Püstkolmnurk AOS: $AO^2 = SA^2 - SO^2$ ehk $(\frac{1}{3} x \sqrt{3})^2 = b^2 - (\frac{1}{2} b)^2$, s. o. $x = \frac{3}{2} b$.

160. Püramiidi põhjaks on püstkülik; üks külgservadest on püramiidi kõrguseks, kuna teised külgservad on 4, 8 ja 7. Leida kõrgus.

Olgu D_1ABCD vaadeldav püramiid (joon. 30). Tingimuse järgi: $D_1C = 4$, $D_1B = 8$, $D_1A = 7$. Otsitav kõrgus $D_1D = x$. Püstkolmnurgad ADD_1 ja D_1CB annavad: $7^2 - x^2 = 8^2 - 4^2$, sest kaatetid BC ja AD on ühesuured. Jär. $x^2 = 1$, $x = \sqrt{1} = 1$.

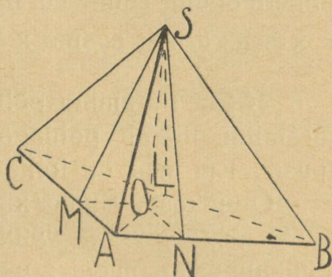
161. Püramiidi põhjaks on parallelogramm, mille küljed 3 cm ja 7 cm, aga üks diagonaal = 6 cm. Püramiidi kõrgus kulgeb põhja diagonaalide lõikepunkti ja on 4 cm pikk. Leida külgservad.

Antud: $AB = CD = 3$ cm, $AD = BC = 7$ cm, $AC = 6$ cm ja $SO = 4$ cm (joon. 37). Otsitavad: $SA = SC$ ja $SB = SD$. Lause X: $AC^2 + BD^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AD^2$ ja $6^2 + BD^2 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 7^2$, s. o. $BD = 4\sqrt{5}$ cm. Rööpküliku diagonaalid poolitavad üksteist, sellepärast $AO = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ cm, $DO = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ cm. Püstkolmnurkadest AOS ja SOD omame: $SA^2 = SO^2 + AO^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $SA = 5$ cm; $SD^2 = SO^2 + DO^2 = 4^2 + (2\sqrt{5})^2 = 36$, $SD = \sqrt{36} = 6$ cm.

162. Püramiidi põhjaks on püstkolmnurk, mille

kaatetid 3 ja 4; iga külgtahk moodustab põhjaga nurga 60° . Leida kõrgus.

Otsitav on SO (joon. 38). Olgu $ON \perp AB$, $OM \perp AC$ ja $OL \perp BC$, siis ka (XVIII) $SN \perp AB$, $SM \perp AC$ ja $SL \perp BC$. Antud: $\angle SNO = \angle SMO = \angle SLO = 60^\circ$; $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle CAB = 90^\circ$. Püstkolmnurgad SNO, SMO ja SLO ühtuvad, sest neil on ühine kaatet SO, mille vastasnurgad on kõigil 60° . Jär. $OM = ON = OL = \triangle ABC$ sissej. ringi raadiusega. Lause III: $BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, $BC = \sqrt{25} = 5$ (egiptuse kolmnurk: kaatetid 3 ja 4 ning hüpotenuus 5). Lause XV: $ON = Q : p$. Aga $Q = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ ja $p = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5) = 6$, nii et $ON = 6 : 6 = 1$. Lause IV: $SN = 2 \cdot ON = 2$. Lause V: $SO = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.



Joon. 38.

163. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv, kui selle püramiidi kõrgus on 7 cm ja põhja külg 8 cm.

$OM = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ cm (joon. 37). Püstkolmnurk SOM: $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 7^2 + 4^2 = 65$. Otsitav külgserv: $SD^2 = DM^2 + SM^2 = 4^2 + 65 = 81$, $SD = \sqrt{81} = 9$ cm.

164. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhja kõige lühem nurkjoon võrdub püramiidi kõrgusega. Kui suur on põhja ja külgserva moodustatud nurk?

Olgu püramiidi SABCDEF põhja külg $AB = a (= OB)$. Tingimus: $AC = SO =$ kõrgus. Kõige lühem nurkjoon = korrapä. kolmnurga külg = $AC = SO = a\sqrt{3}$. Leiame külgserva: $SB^2 = SO^2 + OB^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 = 4a^2$, $SB = \sqrt{4a^2} = 2a$. Jär. nurk $BSO = 30^\circ$ ja $\angle SBO = 60^\circ$, mis oligi tarvis leida.

165. Püramiidi põhja übermõõt on s ja kõrgus k . See püramiid on läbi lõigatud põhjale rööbiku tasapinnaga a kaugusel tipust. Kui pikk on lõike übermõõt?

Lõige ja põhi on sarnased hulknurgad. Nende übermõõdud suhtuvad nagu nende tipukaugused, s. o. $s : x = k : a$, siit saame $x = \frac{a}{k} \cdot s$.

166. Püramiidi põhipind on u ja kõrgus k . Seda püramiidi lõikab põhjaga rööbik tasapind a kaugusel tipust. Kui suur on lõike pind?

Olgu otsitav pind x . Lõigete pinnad suhtuvad sarnastes püramiidides nagu vastavate (servade) kõrguste (tipukauguste) ruudud: $u : x = k^2 : a^2$ (1). Jär. $x = \frac{a^2}{k^2} \cdot u$.

Märkus: Võrrandist (1) võime leida ükskõik misuguse suuruse, kui teised kolm on antud, näiteks: $a = k\sqrt{\frac{x}{u}}$, $u = \frac{k^2}{a^2} \cdot x$.

167. Hiilgava punkti ja seina vahel on seinaga rööbik ekraan. Punkti kaugus seinast on 6 m ja ekraanist 4 m. Ekraani pind on 236 cm². Kui suur on tema varju pind?

Siin on otsitav u (eelm. ü); $k = 6$ m, $a = 4$ m, $x = 236$ cm². Jär. $u = \frac{6^2}{4^2} \cdot 236 = 531$ cm². Erinimelised mõõdud!

168. Püramiidi kõrgus on 8 m ja põhja pind 32 m². Kui kaugel põhjast on rööplõige, mille pind on 18 m²?

Ülesanne nr. 166: $k = 8$ m, $u = 32$ m², $x = 18$ m². Jär. $a = k\sqrt{\frac{x}{u}} = 8 \cdot \sqrt{\frac{18}{32}} = 8 \cdot \sqrt{\frac{9}{16}} = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$ m. Otsitav kaugus: $8 - 6 = 2$ m.

169. Püramiidi põhja pind on 150 m², aga põhjast 14 m kaugusel tõmmatud rööplõike pind on 54 m². Leida püramiidi kõrgus.

Kui x tähendab kõrgust, siis lõike kaugus tipust on $x - 14$. Kirjutame: $\frac{x^2}{(x-14)^2} = \frac{150}{54}$ ja $\frac{x^2}{(x-14)^2} = \frac{25}{9}$, s. o. $\frac{x}{x-14} = \frac{5}{3}$. Jär. $x = 35$ m.

170. Püramiidi kõrgus on jagatud neljaks võrdseks osaks. Läbi saadud punktide on tõmmatud põhjale rööbikud tasapinnad. Leida lõigete pinnad, kui põhja pind = 48.

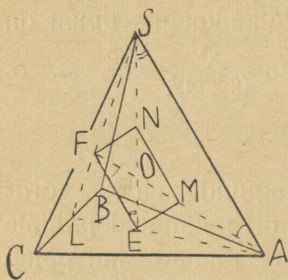
Tähendagu h püramiidi kõrgust ja M_1, M_2, M_3 lõigete pindu (tipust alates) ja M põhipinda. Lõigete kaugused tipust on $\frac{1}{4}h, \frac{2}{4}h, \frac{3}{4}h$. Põhjaga rööbikute lõigete pinnad suhtuvad nagu tipukauguste ruudud. Jär. $M_1 : M = (\frac{1}{4}h)^2 : h^2$, s. o. $M_1 = \frac{1}{16}M = \frac{1}{16} \cdot 48 = 3$; $M_2 : M = (\frac{2}{4}h)^2 : h^2$, s. o. $M_2 = \frac{4}{16}M = \frac{4}{16} \cdot 48 = 12$; $M_3 : M = (\frac{3}{4}h)^2 : h^2$, s. o. $M_3 = \frac{9}{16}M = \frac{9}{16} \cdot 48 = 27$.

Märkus. Kesklõike korral saaksime: $M : M_1 = (\frac{1}{2}h)^2 : h^2$, s. o. $M_1 = \frac{1}{4}M$. Üldisel juhtumil oleksid tipukaugused $\frac{1}{n}h, \frac{2}{n}h, \frac{3}{n}h$ jne., aga lõigete pinnad: $\frac{1}{n^2} \cdot M, \frac{4}{n^2} \cdot M, \frac{9}{n^2} \cdot M$ jne.

171. Püramiidis on tõmmatud lõige, mis rööbik põhjaga ja mille pind moodustab $\frac{4}{9}$ põhja pinnast. Kuidas suhtuvad kõrguse osad?

Tähendagu M põhja pinda, x ja y kõrguse osi, kusjuures y on tipupoolne osa. Terve kõrgus = $x + y$. Lõike pind = $\frac{4}{9}M$. Eelmise ü. järgi võime kirjutada: $(\frac{x+y}{y})^2 = M : \frac{4}{9}M = \frac{9}{4}$, s. o. $\frac{x+y}{y} = \frac{3}{2}$ ja $\frac{x}{y} + 1 = \frac{3}{2}$, jär. $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

172. Leida kaugus korrap. tetraeedri kahe kõrguse keskkoha vahel, kui tema serv on a .



Joon. 39.

Ühendame kõrguste keskkohad M ja N (joon. 39) ja ka E ja F. Kolmnurgad SLA ja FLE on sarnased. Aga $AL = 3LE$, jär. $SA = 3EF$ ehk $EF = \frac{1}{3}SA = \frac{1}{3}a$. Edasi: $\triangle AOS \sim \triangle FOE$. Et $SA = 3EF$, siis ka $AO = 3FO$ ja $AF = 4FO$, s. o. $FM = 2FO$ ja $FO = MO$. Samuti $NO = EO$. Kujundi EFNM diagonaalid poolitavad üksteist, ta on rööpkülik. Otsitav kaugus: $NM = EF = \frac{1}{3}a$.

173. Kolmnurkse püramiidi iga serv on a . Leida lõike pind, mis läbi külgserva ja kõrguse läheb.

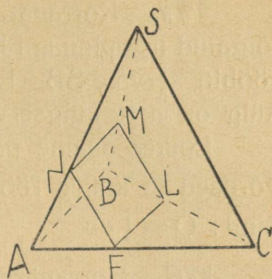
Otsitav on lõike ASL pind $Q = \frac{1}{2}AL \cdot SE$ (joon. 39). Tahkude kõrgused: $SL = AL = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Põhja sissejoonestatud ringi raadius $EL = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$. Lõike kõrgus: $SE^2 = SL^2 - EL^2 = (\frac{1}{2}a\sqrt{3})^2 - (\frac{1}{6}a\sqrt{3})^2 = \frac{2}{3}a^2$, $SE = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Jär. $Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{2}$.

174. Korrapärase nelinurkse püramiidi iga serv on 2. Leida lõike pind, mis läbi põhja ühe diagonaali läheb ja ühe külgservaga rööbiti on.

Otsitav on lõike BED pind: $Q = \frac{1}{2}BD \cdot EO$ (joon. 37). Korrapärase nelinurkse püramiidi põhjaks on ruut, s. o. $BD = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Kolmnurga ASC keskjoon $EO = \frac{1}{2}AS = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ ($AO = OC$, $OE \parallel AS$). Pind $Q = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$.

175. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhja külg on a , külgserv b . Leida ruutlõike pind, mis rööbiti on kahe mittelõikuva servaga.

Olgu ruudu külg $NM = LM = x$ ja $SM = z$. Otsitav pind: $Q = x^2$ (joon. 40). Kolmnurkade sarnadus: $\triangle ASB \sim \triangle NSM$, jär. $AB : NM = SB : SM$ ja $a : x = b : z$ (1). Samuti: $\triangle SBC \sim \triangle MBL$, jär. $SC : ML = SB : MB$ ja $b : x = b : (b - z)$ (2).



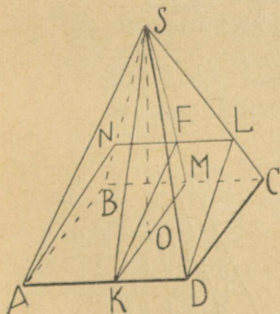
Joon. 40.

Võrrand (1): $z = \frac{bx}{a}$ (3). Võrrand (2): $(b - z)b = bx$, s. o. $b - z = x$ ja $z = b - x$ (4). Võrrandid (3) ja (4) annavad: $\frac{bx}{a} = b - x$, kust $bx = ab - ax$,

$ax + bx = ab$, $(a + b)x = ab$, $x = \frac{ab}{a + b}$. Tähendab: $Q = \left(\frac{ab}{a + b}\right)^2$.

176. Korrapärases nelinurkses püramiidis on tõmmatud tasapind läbi põhiserva risti vastastahule. Leida lõike pind, kui põhja serv = 30 cm ja kõrgus = 20 cm.

Lõige ANLD on võrdhaarne trapets (joon. 41). Otsitav pind: $Q = \frac{1}{2}(AD + LN)FK$. Kaks tasapinda ANLD ja BSC, mis kulgevad rööbikuid AD ja BC, lõikuvad mööda sirget LN, mis rööbik AD ja BC-ga. Tingimus: $\angle KFS = 90^\circ$. Veel on teada: $AD = 30$ cm ja $SO = 20$ cm. Teoreem III: $SM^2 = SO^2 + MO^2 = 20^2 + 15^2 = 625$, $SM = \sqrt{625} = 25$ cm. Lause XII: $SM \cdot FK = KM \cdot SO$, $25 \cdot FK = 30 \cdot 20$ ja $FK = 24$ cm. Lause III: $SF^2 = SK^2 - FK^2 = 25^2 - 24^2 = 49$, $SF = 7$ cm. Kolmnurgad LSN ja CSB on sarnased, jär. $LN : BC = SF : SM$ ja $LN : 30 = 7 : 25$, $LN = 8,4$ cm. Tähendab: $Q = \frac{1}{2}(30 + 8,4) \cdot 24 = 460,8$ cm².



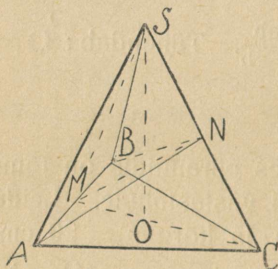
Joon. 41.

s. o. $LN = 8,4$ cm.
 $= 460,8$ cm².

177. Korrapärase kolmnurkne püramiid $SABC$ on lõigatud tasapinnaga läbi servade AB ja BC keskohtade rööbiti servale SB . Leida lõike pind, kui püramiidi põhja külg on a ja külgserv b .

Lõikes saame püstküliku (nelinurga diagonaalid on võrdsed ja küljed rööbikud) külgedega $\frac{a}{2}$ ja $\frac{b}{2}$. Otsitav pind: $Q = \frac{1}{4} ab$.

178. Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrgus on 4 ja põhja külg 1. Leida lõike pind, mis läbi põhja ühe külje läheb ja vastaskülgservaga risti on.



Joon. 42.

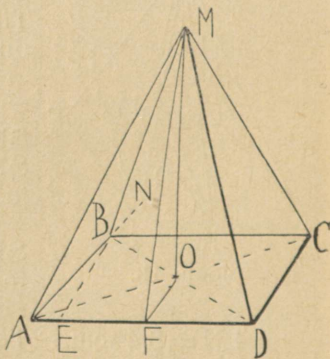
$$= \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{7} = \frac{6}{7}. \quad \text{Jär. } Q = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{7}.$$

Otsitav pind: $Q = \frac{1}{2} AB \cdot NM$ (joon. 42). Lauseid V ($CM \perp AB$, $MN \perp SC$) ja VII ($SO \perp ABC$): $CM = \frac{1}{2} \sqrt{3}$, $CO = \frac{1}{3} \sqrt{3}$. Lause III: $SC^2 = SO^2 + CO^2 = 4^2 + (\frac{1}{3} \sqrt{3})^2 = \frac{49}{3}$, $SC = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Kolmnurga MSC kahekordne pind kahel viisil: $SC \cdot NM = CM \cdot SO$, $\frac{7}{\sqrt{3}} \cdot NM = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 4$, s. o. $NM =$

Külj- ja täispindu.

179. Püramiidi põhjaks on rööpkülik, mille küljed on 5 ja 4, ent üks nurkjoon on 3. Püramiidi kõrgus kulgeb põhja nurkjoonte lõikepunkti ja võrdub 2. Leida selle püramiidi täispind.

Kolmnurga ABD (joon. 45) küljed: $AD = 5$, $AB = 4$ ja $BD = 3$ (egiptuse kolmnurk), jär. $\angle ABD = 90^\circ$. MB projektsioon $OB \perp AN$, siis ka kaldjoon

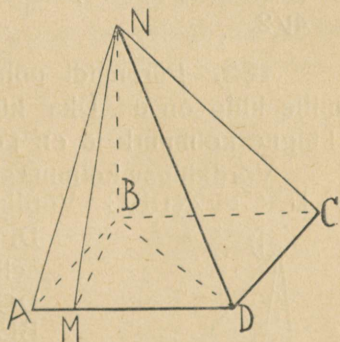


Joon. 45

$MB \perp AN$, s. o. $\angle MBA = 90^\circ$. Teoreem III: $BM^2 = OB^2 + MO^2 = (\frac{3}{2})^2 + 2^2 = \frac{25}{4}$, $BM = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$. Tõmbame $BE \perp AD$, $OF \perp AD$. Teoreem XII: $AD \cdot BE = AB \cdot BD$, $5 \cdot BE = 4 \cdot 3$, s. o. $BE = \frac{12}{5}$. Kolmnurga BDE keskjoon $OF = \frac{1}{2} BE = \frac{6}{5}$. Teoreem III: $MF^2 = OF^2 + MO^2 = \frac{36}{25} + 4 = \frac{136}{25}$, $MF = \frac{1}{5} \sqrt{136}$. Otsitav pind: $Q = AD \cdot BE + 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BM + 2 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot MF = 5 \cdot \frac{12}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{5} \sqrt{136} = 22 + \sqrt{136}$.

180. Püramiidil, mille kõrgus = 1, on romb põhjaks. Kaks külgtahku, mis omavahel 120° nurga moodustavad, on põhjaga risti, ent kaks teist moodustavad põhjaga 30° nurga. Leida põhja ja külgtakude pinnad.

Kui tahud NBC ja NBA (joon. 44) on risti põhjaga, siis ka nende lõikejoon NB (= 1) on risti põhjaga; $\angle ABC = 120^\circ$. Diagonaal poolitab rombi nurki: $\angle ABD = 60^\circ$. Kolmnurk ABD on võrdkülgne, sest ka $\angle BAD = 60^\circ$. Tõmbame $BM \perp AD$, siis ka (XVIII) $NM \perp AD$. Lause IV: $NB = \frac{1}{2} NM$ (tingimus: $\angle NMB = 30^\circ$), $1 = \frac{1}{2} NM$, s. o. $NM = 2$. Nurk $NBM = 90^\circ$, sest tasapinnale tõmmatud ristjoon on risti iga sirgega, mis sel tasapinnal tema alusest läbi läheb; jär. $BM^2 = NM^2 - NB^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, $BM = \sqrt{3}$. Lause V: $BM = \frac{1}{2} AD \cdot \sqrt{3}$, s. o. $\sqrt{3} = \frac{1}{2} AD \cdot \sqrt{3}$ ja $AD = 2 (= AB)$. Põhja pind: $Q = AD \cdot BM = 2\sqrt{3}$. Külgtahud on paarikaupa võrdsed: $Q_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot NB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$; $Q_2 = \frac{1}{2} AD \cdot NM = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.



Joon. 44.

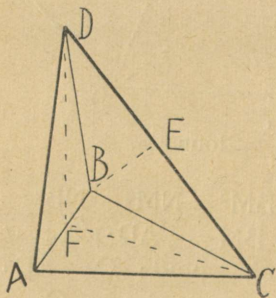
181. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi külgpind, kui selle püramiidi põhja külg on 2 ja külgtahud moodustavad omavahel 120° kahetahused nurgad.

Ülesandest nr. 157 teame, et $\angle SMO = 45^\circ$, kui $\angle DEB = 120^\circ$. Kõrgus $SO = MO = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Teoreem III: $SM^2 = SO^2 + MO^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, $SM = \sqrt{2}$. Külgpind: $Q = 4 \cdot \frac{1}{2} DC \cdot SM = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Teisiti saab ka lahendada. Olgu tasapind BED risti servaga SC (joon. 37), $\angle BED = 120^\circ$. Nurk $OED = 60^\circ$, sellepärast $OD = \frac{1}{2} ED \cdot \sqrt{3}$. Lause IX: $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} ED \cdot \sqrt{3}$, s. o. $ED = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{6}$. Teoreem IV: $OE = \frac{1}{3} \sqrt{6}$. Pythagorase teoreem: $EC^2 = CD^2 - ED^2 = 4 - \frac{2^4}{9} = \frac{10}{9}$, $EC = \frac{2}{3} \sqrt{3}$. Hüpotenuusile tõmmatud kõrgus kui keskmine võrdeline: $OE^2 = SE \cdot EC$ ja $(\frac{1}{3} \sqrt{6})^2 = SE \cdot \frac{2}{3} \sqrt{3}$, siit $SE = \frac{1}{3} \sqrt{3}$. Külgserv: $SC = SE + EC = \frac{1}{3} \sqrt{3} + \frac{2}{3} \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Püstkolmnurk SMC: $SM^2 = SC^2 - MC^2 = (\sqrt{3})^2 - (\frac{1}{2} \cdot 2)^2 = 2$, $SM = \sqrt{2}$. Külgpind: $Q = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

182. Püramiidi põhjaks on võrdkülgne kolmnurk, mille külg on a. Üks külgtahkudest on samuti võrdkülgne kolmnurk ja on põhjaga risti. Leida külgpind.

Võrdkülgse kolmnurga ADB (joon. 45) pind $= \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$. $\triangle DAC \equiv \triangle DBC$. Võrdkülgsete kolmnurkade kõrgused:



$DF = CF = \frac{1}{2} a\sqrt{3}$, $\angle DFC = 90^\circ$, sellep. $DC^2 = 2 \cdot (\frac{1}{2} a\sqrt{3})^2 = \frac{6}{4} a^2$ ja $DC = \frac{1}{2} a\sqrt{6}$. Olgu $BE \perp DC$; $BE^2 = BC^2 - (\frac{1}{2} DC)^2 = a^2 - (\frac{1}{4} a\sqrt{6})^2 = \frac{10}{8} a^2$, $BE = \frac{1}{4} a\sqrt{10}$. Kolmnurga DBC pind $= \frac{1}{2} DC \cdot BE = \frac{1}{4} a\sqrt{6} \cdot \frac{1}{4} a\sqrt{10} = \frac{1}{8} a^2 \sqrt{15}$. Külgpind: $Q = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{8} a^2 \sqrt{15} = \frac{1}{4} a^2 (\sqrt{3} + \sqrt{15})$.

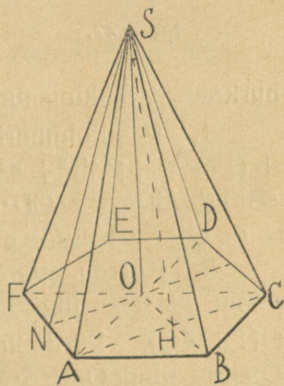
joon. 45.

183. Läbi korrapärase nelinurkse püramiidi tipu ja kahe järjekorras oleva põhiserva keskkohdade tõmmatud tasapind annab lõikudes püramiidiga kolmnurga, mille pind on s. Leida külgpind, kui põhiserv on a.

Lõige on võrdhaarne kolmnurk, mille haaradeks püramiidi apoteemid, alus aga on rööbiti põhja diagonaaliga ja on pool temast, sest kolmnurga külgede keskohtade ühendusjoon on pool alusest. Lõike alus $= \frac{1}{2} a\sqrt{2}$ (VIII), tema pind $= s$, järelikult võime lõike kõrguse x leida: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot x = s$, siit $x = \frac{2s\sqrt{2}}{a}$. Püstkolmnurgas, mille kaatetiteks pool lõike alust ja lõike kõrgus, võime hüpotenuusi, s. o. püramiidi apoteemi y leida Pythagorase teoreemi põhjal: $y^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{2s\sqrt{2}}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{8} + \frac{8s^2}{a^2}$, $y = \frac{1}{4a} \sqrt{2(a^4 + 64s^2)}$. Korrapärase püramiidi külgpind on põhja poole ümbermõõdu ja apoteemi korruktis: $Q = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot \frac{1}{4a} \cdot \sqrt{2(a^4 + 64s^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^4 + 64s^2)}$.

184. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhja ümberjoonestatud ringi raadius on r ja vähem diagonaalpind $= a^2$. Kui suur on püramiidi külgpind?

Otsitav külgpind: $Q = 6 \cdot \frac{1}{2} AF \cdot SN = 3AF \cdot SN$ (1), kus $AF = r$ ja $SN \perp AF$ (joon. 46). Leiame SN : $SN^2 = NO^2 + SO^2$ (2). Korrapärase kolmnurga FOA kõrgus $NO = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$. Peame veel teadma SO^2 . Tingimus: $\frac{1}{2} AC \cdot SH = a^2$ (3). Ringi (puudub joonisel) sissej. korrapärase kolmn. külge $AC = r\sqrt{3}$. Jär. (3) $\frac{1}{2} r\sqrt{3} \cdot SH = a^2$, s. o. $SH = \frac{2a^2}{r\sqrt{3}}$. Kujund AOCB on romb: $OH = HB = \frac{1}{2} r$, rombi diagonaalid poolituvad. (Võime kasutada ka kolmnurka DAC). Lause III: $SO^2 = SH^2 - OH^2 =$

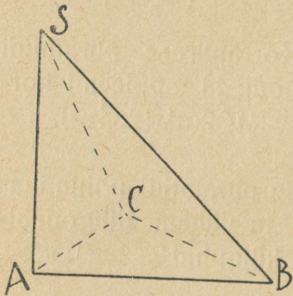


Joon. 46.

$$= \left(\frac{2a^2}{r\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2. \text{ Tähendab (2), } SN^2 = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a^2}{r\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{2} + \frac{4a^4}{3r^2}, \text{ s. o. } SN = \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{4a^4}{3r^2}}$$

Paneme asemele (1) ja lihtsustame: $Q = 3r \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{4a^4}{3r^2}} = \sqrt{12a^4 + 4,5r^4}$.

185. Püramiidi $SABC$ põhjaks on püstkolmnurk ABC , mille hüpotenuus $AB = 26$ cm ja kaatet $AC = 24$ cm. Serv $SA = 18$ cm ja on ABC tasapinnaga risti. Leida külgpind.



Joon. 47.

SC projektsioon $AC \perp CB$, sellep. ka $SC \perp CB$ (joon. 47) ja otsitav külgpind koosneb kolmest püstkolmnurgast: $Q = \triangle SAB + \triangle SCB + \triangle SAC$. Leiame lõigud: $CB = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$ cm; $SC = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$ cm. Jär. $Q = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 18 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 = 600 \text{ cm}^2 = 6 \text{ dm}^2$.

186. Põhja külje a ja kõrguse h kaudu leida täispind korrapärasel 1) nelinurksel, 2) kolmnurksel ja 3) kuusnurksel püramiidil.

1. Püstkolmnurk SOM (joon. 37): $SM = \sqrt{h^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + a^2}$. Otsitav täispind: $Q_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} CD \cdot SM + CD^2 = 2 \cdot CD \cdot SM + CD^2 = 2a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + a^2} + a^2$, s. o. $Q_1 = a \sqrt{4h^2 + a^2} + a^2$.

2. Korrap. püram. $SABC$ põhja pind $= \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$; põhja sissej. ringi raadius $ON = \frac{1}{8} a \sqrt{3}$ ($SO \perp ABC$, $ON \perp AB$). Püramiidi apoteem $SN = \sqrt{h^2 + (\frac{1}{8} a \sqrt{3})^2}$. Otsitav pind $Q_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot SN + \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$, $Q_2 = \frac{3}{2} a \sqrt{h^2 + \frac{1}{64} a^2} + \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{3}{4} a \sqrt{4h^2 + \frac{1}{8} a^2} + \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$.

3. Joon. 46. Põhja pind $= 6 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$. Korrap. $\triangle AOF$ kõrgus $ON = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$. Püramiidi apoteem: $SN^2 = SO^2 + NO^2 = h^2 + (\frac{1}{2} a \sqrt{3})^2$, s. o. $SN = \sqrt{h^2 + \frac{3}{4} a^2}$.

Täispind: $Q_3 = 6 \cdot \frac{1}{2} AF \cdot SN + \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = 3a \sqrt{h^2 + \frac{3}{4} a^2} + \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} a \sqrt{4h^2 + 3a^2} + \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$.

187. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi külgpind, kui selle püramiidi kõrgus on 8 ja apoteem 10.

Põhja külje pool $= \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$. Põhja külg on 12.
Külgpind: $Q = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 240$.

188. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on b ja kõrgus h . Leida külgpind.

Otsitav külgpind: $Q = 4 \cdot \frac{1}{2} CD \cdot SM = 2 CD \cdot SM$
(joon. 37). Põhja diagonaali pool: $CO = \sqrt{b^2 - h^2}$. Püstkolmnurk CMO, $CM = OM$, s. o. $2 \cdot CM^2 = CO^2$, $2 \cdot CM^2 = b^2 - h^2$ ja $CM = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 - h^2}$, $CD = \sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 - h^2}$. Kolmnurk SMC, lause III: $SM^2 = SC^2 - CM^2 = b^2 - \frac{1}{4}(b^2 - h^2) = \frac{3}{4}(b^2 + h^2)$, s. o. $SM = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + h^2}$. Jär. $Q = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 - h^2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + h^2} = 2 \sqrt{(b^2 - h^2)(b^2 + h^2)}$ ja $Q = 2 \sqrt{b^4 - h^4}$.

189. Korrapärase kuusnurkse püramiidi apoteem on m ja põhja apoteem n . Leida täispind.

Antud: $SN = m$ ja $ON = n$. Peale selle $AF = OA$ (joon. 46). Otsitav täispind: $Q = 6 \cdot \frac{1}{2} AF \cdot SN + 6 \cdot \frac{1}{2} AF \cdot ON$ ehk $Q = 3 AF (SN + ON)$. Kolmnurk ONA, lause III: $OA^2 = ON^2 + NA^2$, s. o. $OA^2 = ON^2 + (\frac{1}{2} OA)^2$, jär. $OA^2 = \frac{4}{3} \cdot ON^2$, $OA = \frac{2}{\sqrt{3}} ON = \frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot n$, ka $AF = \frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot n$. Paneme pinna avaldisse vastavad väärtused asemele: $Q = 3 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot n (m + n)$, s. o. $Q = 2n \sqrt{3} (m + n)$.

190. Korrapärase 1) kolmnurkse, 2) kuusnurkse püramiidi põhja külg $= 2$ ja kahetahune nurk põhja ja külgtahtu vahel on 30° . Leida külgpind.

1. Joon. 38. Külgpind: $Q_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot SN = \frac{3}{2} AB \cdot SN$ (1). Antud: $\angle SNO = 30^\circ$ ja $AB = 2$. Põhja apoteem $NO = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{3} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$. Lause V: $ON = \frac{1}{2} SN \cdot \sqrt{3}$

ja $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}SN \cdot \sqrt{3}$, s. o. $SN = \frac{2}{3}$. Avaldis (1): $Q_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = 2$.

2. Joon. 46. Külgpind: $Q_2 = 6 \cdot \frac{1}{2}AF \cdot SN = 3AF \cdot SN$. Antud: $AF = 2$, $\angle SNO = 30^\circ$. Kolmnurk FOA, lause V: $ON = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Kolmnurk SON, lause V: $ON = \frac{1}{2}SN \cdot \sqrt{3}$. Jär. $\sqrt{3} = \frac{1}{2}SN \sqrt{3}$ ja $SN = 2$. Külgpinna avaldis: $Q_2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

191. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhja külge $= a$, külgserv moodustab põhjaga nurga 45° . Leida külgpind.

Otsitav on püramiidi SABC külgpind: $Q = 3 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot SN = \frac{3}{2}AB \cdot SN$ (1). Antud: $\angle SBO = 45^\circ$, $AB = a$ ($SN \perp AB$, $SO \perp ABC$). Kolmnurk SOB, lause IX: $OB = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot BS$. Et aga $OB = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, siis $\frac{1}{3}a\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot BS$ ja $BS = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$. Püstkolmnurk SNB: $SN^2 = BS^2 - BN^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{12}a^2$, s. o. $SN^2 = \frac{5}{6}a^2$ ja $SN = \frac{1}{6}a\sqrt{15}$. Avaldis (1): $Q = \frac{3}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{6}a\sqrt{15} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{15}$.

192. Püramiidi kõrgus $= h$. Kui kaugel tipust on ristlõige, mis külgpinda poolitab?

Tähendagu k külgpinda ja x lõike kaugust tipust. Külgpinna osad: $\frac{1}{2}k$, $\frac{1}{2}k$. Lause XIX: $x^2 : h^2 = (\frac{1}{2}k) : k$, siit $x = h\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Märkus. Sarnaselt lahendatakse ka üldisemal juhtumil. On näiteks külgpind jagatud n võrdseks osaks, siis oleksid osapüramiidide külgpinnad (tipust arvates) $\frac{1}{n}k$, $\frac{2}{n}k$, $\frac{3}{n}k$ jne. Kaugused x_1, x_2, x_3 jne. on otsitavad. Lause XIX: $x_1^2 : h^2 = \left(\frac{1}{n}k\right) : k$, s. o. $x_1 = h\sqrt{\frac{1}{n}}$; $x_2^2 : h^2 = \left(\frac{2}{n}k\right) : k$, $x_2 = h\sqrt{\frac{2}{n}}$ jne. Üldisest lahendusest võib tuletada lahen-

dusi erijuhtumite jaoks. On $n = 4$, saame: $x_1 = h\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}h$, $x_2 = h\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}h\sqrt{2}$, $x_3 = h\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}h\sqrt{3}$.

193. Püramiidi külgpind on põhjaga rööbiti tasapindadega jagatud osadeks, mis suhtuvad kui 1) 4:5, 2) 9:16:11 (tipust arvates). Kuidas suhtuvad kõrguse osad isekeskis?

1. Vaatleme püramiidi SNML (joon. 48). kus olgu SEFD külgpind = x ja NMLEFD külgpind = z , kõrguse osad $ST = k$, $TP = m$. Terve külgpind = $x + z$, terve kõrgus = $k + m$. Võrdest

$\frac{x}{4} = \frac{z}{5}$ saame $z = \frac{5}{4}x$ (võib ka kasutada võrret $\frac{z}{x} = \frac{5}{4}$).

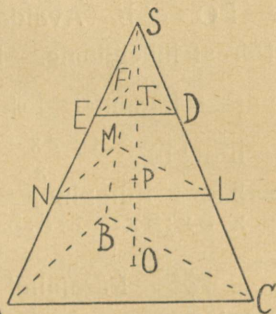
Avaldame m ka k kaudu. Lause XIX: $\left(\frac{k+m}{k}\right)^2 = \frac{x+z}{x}$, $\left(1 + \frac{m}{k}\right)^2 = \frac{x + \frac{5}{4}x}{x}$, s. o. A

$\left(1 + \frac{m}{k}\right)^2 = \frac{9}{4}$ ja $1 + \frac{m}{k} = \frac{3}{2}$. Jär.

$\frac{m}{k} = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}k$. Otsitav suhe: $k : m = k : \frac{1}{2}k = \frac{2}{1}k : \frac{1}{2}k = 2 : 1$

2. Sarnaselt eelmisele olgu külgpinna osad x , z ja u , kõrguse osad k , m ja n . Suhete reast $\frac{x}{9} = \frac{z}{16} = \frac{u}{11}$ saame $z = \frac{16}{9}x$ ja $u = \frac{11}{9}x$, teisiti: $\frac{z}{x} = \frac{16}{9}$, $\frac{u}{x} = \frac{11}{9}$. Avaldame kõik kõrguse osad k kaudu. Lause XIX: $\left(\frac{k+m}{k}\right)^2 = \frac{x+z}{x}$. Jagame ja asetame: $\left(1 + \frac{m}{k}\right)^2 = 1 + \frac{z}{x} = 1 + \frac{16}{9}$, s. o. $\left(1 + \frac{m}{k}\right)^2 = \frac{25}{9}$ ja $1 + \frac{m}{k} = \frac{5}{3}$, $\frac{m}{k} = \frac{2}{3}$, $m = \frac{2}{3}k$.

Edasi: $\left(\frac{k+m+n}{k}\right)^2 = \frac{x+z+u}{x}$, $\left(1 + \frac{m}{k} + \frac{n}{k}\right)^2 = 1 + \frac{z}{x} + \frac{u}{x}$, s. o. $\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{n}{k}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} + \frac{11}{9} = \frac{36}{9}$, $1 + \frac{2}{3} + \frac{n}{k} = \frac{6}{3}$, $\frac{n}{k} = \frac{3}{3} - 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{3}k$.



Joon. 48.

$+ \frac{n}{k} = \frac{6}{3} = 2$, $\frac{n}{k} = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{3} k$. Kõrguse osad suhtuvad nagu $k : m : n = k : \frac{2}{3} k : \frac{1}{3} k = 3 : 2 : 1$.

194. Püramiidi kõrgus on jagatud kolmeks võrdseks osaks põhjale rööbikute tasapindadega. Kuidas suhtuvad külpinna osad?

Tähendagu x , z ja u püramiidi külpinna osi, s. o. SEFD külgpind $= x$, SNML külgpind $= x + z$, SABC külgpind $= x + z + u$ (joon. 48). Tingimus: $ST = TP = PO = \frac{1}{3} h$. Avaldame kõik külpinna osad x kaudu. Pärast lühendame. Lause XIX: $\frac{x+z}{z} = (\frac{2}{3} h)^2 : (\frac{1}{3} h)^2$; ehk pärast jagamist: $1 + \frac{z}{x} = 4$ ja $z = 3x$. Samuti $\frac{x+z+u}{x} = h^2 : (\frac{1}{3} h)^2$, $\frac{x+3x+u}{x} = 9$ ja $1 + 3 + \frac{u}{x} = 9$, s. o. $u = 5x$. Külpinna osad suhtuvad nagu: $x : z : u = x : 3x : 5x = 1 : 3 : 5$.

195. Püramiidi kõrgus on jagatud põhjaga rööbiku tasapinnaga osadeks, mis suhtuvad nagu 1) 4:3, 2) 5:2 (iipust arvates). Kuidas suhtuvad omavahel külpinna osad?

1. Olgu x ja z külpinna osad ja $4u$ ja $3u$ kõrguse osad; terve külgpind $= x + z$, terve kõrgus $= 4u + 3u = 7u$. Kirjutame: $\frac{x+z}{x} = (\frac{7u}{4u})^2$, $1 + \frac{z}{x} = \frac{49}{16}$, $\frac{z}{x} = \frac{33}{16}$. Otsitav suhe: $x : z = 16 : 33$.

2. Sarnaselt eelmisega leiame, et külpinna osade suhe on 25:24.

Mahte. 196. Leida korrapärase 1) nelinurkse, 2) kolmnurkse, 3) kuusnurkse püramiidi maht, kui põhja külg on a ja külgserv b .

1. Korrapärase püramiidi põhjaks on korrapärane hulknurk ja kõrguse alus langeb põhja keskohta. Püramiidi maht võrdub põhja pinna ja kõrguse kolmandiku korrutisega. Jär. $V_1 = DC^2 \cdot \frac{1}{3} SO = \frac{1}{3} DC^2 \cdot SO$ (1). Antud:

DC = a ja SC = b (joon. 37). Lause III: $SO^2 = SC^2 - OC^2$ — OC^2 (2). Et aga $AC = a\sqrt{2}$, siis $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.
 (2) saame $SO^2 = b^2 - (\frac{1}{2}a\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}(4b^2 - 2a^2)$, $SO = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 2a^2}$. Maht (1): $V_1 = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 2a^2} = \frac{1}{6}a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}$.

2. $V_2 = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}SO = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3} \cdot SO$ (joon. 5). Kolmnurga ABC ümberjoonestatud ringi raadius $OC = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, $SC = b$. Lause III: $SO^2 = SC^2 - OC^2 = b^2 - (\frac{1}{3}a\sqrt{3})^2 = b^2 - \frac{1}{3}a^2$, $SO = \sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2}$. Maht $V_2 = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}\sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}$.

3. $V_3 = 6 \cdot \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}SO = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} \cdot SO$ (joon. 46). Lause III: $SO^2 = SA^2 - OA^2 = b^2 - a^2$, $SO = \sqrt{b^2 - a^2}$. Maht: $V_3 = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3(b^2 - a^2)}$.

197. Kolmnurkse püramiidi servad a, b ja c on vastastikku risti. Leida maht.

Valime põhjaks tahu, kus asuvad servad a ja b, see tahk on püstkolmnurk, tema pind $= \frac{1}{2}ab$. Külgserv c on selle tahuga risti, ta on püramiidi kõrguseks. Maht: $V = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{3}c = \frac{1}{6}abc$.

Märkus. Kui $a = b = c$, siis $V = \frac{1}{6}a^3$.

198. Kolmnurkse püramiidi külgtahud on vastastikku risti; nende tahkude pinnad on 6, 4 ja 3. Leida 1) maht ja 2) külgservad.

1. Tähendagu a, b ja c külgservi. Eelmise ülesande järgi oleks maht $V = \frac{1}{6}abc$, sest need servad on omavahel risti. Külgtahud on püstkolmnurgad, nende kahekordsed pinnad on: $ab = 12$, $ac = 8$ ja $bc = 6$. Korrutame need võrrandid pooltekaupa, s. o. $a^2b^2c^2 = 576$ ja $abc = \sqrt{576} = 24$. Maht: $V = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$.

2. Külgservad on: $a = (abc) : (bc) = 24 : 6 = 4$, $b = (abc) : (ac) = 24 : 8 = 3$, $c = (abc) : (ab) = 24 : 12 = 2$.

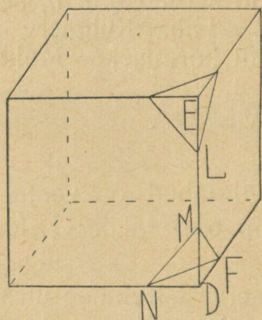
199. Kolmnurkses püramiidis EABC on antud:

$EC = 30$ cm, $EB = EA = 65$ cm, $AC = BC = 61$ cm.
 $AB = 120$ cm. Leida maht.

Otsitav maht: $V = \frac{1}{2} AB \cdot CF \cdot \frac{1}{3} EO = \frac{1}{3} AF \cdot CF \cdot EO$,
 kus $CF \perp AB$, EO on püramiidi kõrgus ja $AF = \frac{1}{2} AB = 60$
 cm (joon. 16). Kolmnurgad AFC ja EFA , lause III:
 $CF^2 = 61^2 - 60^2 = 121$, $CF = \sqrt{121} = 11$ cm; $EF^2 =$
 $= 65^2 - 60^2 = 625$, $EF = \sqrt{625} = 25$ cm. Kolmnurgas
 FEC on küljed teada: $EF = 25$ cm, $EC = 30$ cm, $CF =$
 $= 11$ cm. Tema kõrgus (XIV): $EO = \frac{2}{11} \sqrt{33(33 - 11)}$
 $(33 - 25)(33 - 30) = 24$ cm. Jär. $V = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 11 \cdot 24 = 5280$
 cm^3 .

Märkus. Püramiidi kõrguse alus O asetseb võrdhaarse kolmnurga ACB kõrgusel CF , sest võrdsete kaldjoonte EA ja EB projektsioonid AO ja BO on ühesuused.

200. Kuubil, mille serv a , on tipud nii ära lõigatud, et igast tahust korrapärane kaheksanurk järele on jäänud. Leida saadud keha maht.



Joon. 49.

Ära on lõigatud 8 võrdmahtset püramiidi. Ühe (MFDN) maht $= \frac{1}{2} DN \cdot DF \cdot \frac{1}{3} DM = \frac{1}{6} DM^3$, sest $DN = DF = DM$ (joon. 49). Otsitav maht: $V = a^3 - \frac{8}{3} \cdot DM^3 =$
 $= a^3 - \frac{4}{3} DM^3$ (1). Olgu $DM = LE =$
 $= x$ ja korrap. 8-nurga külg $MN =$
 $= LM = y$, siis $2x + y = a$ (2). Püstkolmnurgast DMN saame:
 $MN^2 = DM^2 + DN^2$, jär. $y^2 = 2x^2$,
 s. o. $y = x\sqrt{2}$. Nüüd omame (2)
 põhjal: $2x + x\sqrt{2} = a$, $x(2 + \sqrt{2}) =$

$$= a, x = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{1}{2} a(2 - \sqrt{2}). \text{ Jär. (1) an-}$$

$$\text{nab: } V = a^3 - \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2} a(2 - \sqrt{2}) \right]^3 = \frac{7}{3} a^3 (\sqrt{2} - 1).$$

Märkus. Kuubi serv a ja maht v on lihtsalt seotud $v = a^3$. Kui oleks olnud antud v , siis vastus oleks $V = \frac{7}{3} v (\sqrt{2} - 1)$.

201. Korrapärase püramiidi külgpind on s ja põhja keskkoha kaugus külgtahust $= a$. Leida maht.

Ühendame põhja keskkoha kõigi püramiidi tippudega. Saame niipalju püramiide, kuipalju põhjal on külgi. Neil püramiididel on kõigil ühesuurused kõrgused $= a$, kuna põhjade pindade summa $= s$. Sellepärast maht: $V = s \cdot \frac{1}{3} a = \frac{1}{3} sa$.

Märkus. Vastus ei olene põhja külgede arvust, kui külgpind on antud suurus.

202. Kolmnurkse püramiidi põhja servad on a , b ja c . Kõik külgservad on m . Leida maht.

Antud: $SA = SB = SC = m$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (joon. 5). Põhja pind: $Q = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Kõrguse SO alus O on kolmnurga ABC ümberjoonestatud ringi keskpunktiis, sest $OA = OB = OC$ (XVII). Raadius $OA = \frac{abc}{4Q}$ (XV). Pythagorase teoreem: $SO^2 = SA^2 - OA^2 = m^2 - \left(\frac{abc}{4Q}\right)^2$, $SO = \sqrt{m^2 - \left(\frac{abc}{4Q}\right)^2} = \frac{1}{4Q} \sqrt{16m^2Q^2 - a^2b^2c^2}$. Maht: $V = Q \cdot \frac{1}{3} SO = \frac{1}{12} \sqrt{16m^2Q^2 - a^2b^2c^2}$, kus Q on eelpool leitud suurus.

203. Läbi kolmnurkse püramiidi tipu ja iga kahe põhiserva keskkoha on tõmmatud tasapinnad. Püramiidi maht on V . Kui suurteks osadeks jagavad tasapinnad püramiidi mahu?

Tasapinnad jagavad põhja neljaks ühesuuruseks osaks, sellepärast on saadud püramiidide mahud $\frac{1}{4} V$.

204. Tasapind lõikab korrapärast nelinurkset püramiidi nii, et läheb läbi põhja diagonaali ja külgserva a keskkoha; lõikes tekib võrdkülgne kolmnurk. Leida maht.

Otsitav maht: $V = DC^2 \cdot \frac{1}{3} SO$ (joon. 37). Lõike

küljed: $BD = DE = EB = x$. Põhja külg $DC = \frac{1}{2} x \sqrt{2}$, kus põhja diagonaal $BD = x$ (IX). Kolmnurgas DSC on küljed $SD = SC = a$, $DC = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{2}$ ja mediaan $DE = x$. Paneme mediaani valemisse $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ vastavald suurud asemele: $x = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2(\frac{1}{2} x \sqrt{2})^2 - a^2}$. Peale ruutimist ja lihtsustamist saame: $x^2 = \frac{1}{4} (a^2 + x^2)$ ja $x = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$. Põhja diagonaali pool: $OC = \frac{1}{3} a \sqrt{3} = \frac{1}{2} x$. Püstkolmnurk SOC: $SO^2 = SC^2 - OC^2 = a^2 - (\frac{1}{3} a \sqrt{3})^2 = \frac{1}{3} a^2$, $SO = \sqrt{\frac{1}{3} a^2} = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$. Külg $DC = \frac{1}{2} x \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} a \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{6} a \sqrt{6}$. Maht: $V = (\frac{1}{6} a \sqrt{6})^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} a \sqrt{3} = \frac{1}{108} a^3 \sqrt{3}$.

205. Kolmnurkses püramiidis on kaks tahku võrdhaarset kolmnurkad ühise alusega a , mille kaugus vastasservast b on d . Leida maht.

Läbi püramiidi SABC (joon. 42) serva $SC = b$ tõmbame võrdhaarsete kolmnurkade ACB ja ASB ühisele servale $AB = a$ ristlõike CMS. Selle lõike kõrgus $NM = d$. Püramiid SABC koosneb kahest püramiidist ACMS ja BCMS, millel ühine põhi CMS pinnaga $= \frac{1}{2} bd$. Otsitav maht: $V = \frac{1}{2} bd \cdot \frac{1}{3} AM + \frac{1}{2} bd \cdot \frac{1}{3} BM = \frac{1}{6} bd (AM + BM) = \frac{1}{6} bda$, s. o. $V = \frac{1}{6} abd$.

206. Leida kolmnurkse püramiidi maht, kui selle püramiidi kahe tahu pinnad on s ja k , nende ühine serv aga a ja nendest moodustatud kahetahune nurk $= 30^\circ$.

Olgu pind $ACB = s$ ja ASB pind $= k$, lõikejoon $AB = a$ (joon. 42). Otsitav maht: $V = s \cdot \frac{1}{3} SO = \frac{1}{3} s \cdot SO$, kus SO on püramiidi kõrgus. Tõmbame $OM \perp AB$ ja ühendame S ja M , siis $SM \perp AB$ (XVIII). Antud: $\angle SMO = 30^\circ$; jär. $SO = \frac{1}{2} SM$. Aga $\frac{1}{2} AB \cdot SM = k$, $\frac{1}{2} a \cdot SM = k$, s. o. $SM = \frac{2k}{a}$. Tähendab, $SO = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{a} = \frac{k}{a}$. Maht: $V = \frac{1}{3} s \cdot \frac{k}{a} = \frac{sk}{3a}$.

207. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi maht, kui põhi- ja külgpind on vastavalt s ja k .

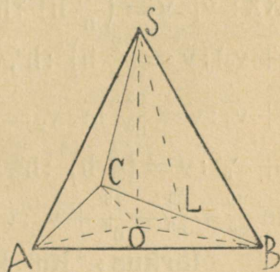
Otsitav maht: $V = CD^2 \cdot \frac{1}{3} SO = \frac{1}{3} CD^2 \cdot SO$ (joon. 37).
 Ülesande järgi: $CD^2 = k$ (1), $4 \cdot \frac{1}{2} CD \cdot SM = s$ (2). Lause III: $SO^2 = SM^2 - OM^2$ (3). Võrrandeist (1), (2) ja (3) saame tarvilikud suurused: $CD = \sqrt{k}$, $2\sqrt{k} \cdot SM = s$, $SM = s : 2\sqrt{k}$; $OM = \frac{1}{2} CD$, $OM^2 = \frac{1}{4} CD^2 = \frac{1}{4} k$. Asetame kolmandasse: $SO^2 = \left(\frac{s}{2\sqrt{k}}\right)^2 - \frac{1}{4} k$. Jär. $SO^2 = \frac{1}{4k}(s^2 - k^2)$, $SO = \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \sqrt{s^2 - k^2}$. Mahu avaldis: $V = \frac{1}{3} \cdot k \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \sqrt{s^2 - k^2} = \frac{1}{6} \sqrt{k} \cdot \sqrt{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} \sqrt{s^2 - k^2}$, s. o. $V = \frac{1}{6} \sqrt{k}(s^2 - k^2)$. ($SM \perp CD$, $SO =$ kõrgus).

208. Püstkolmnurk, mille kaatedid on 6 ja 8, on püramiidi põhjaks. Iga külgserv moodustab põhjaga 45° nurga. Leida maht.

Tõmbame püramiidi kõrguse DN (joon. 7). Püstkolmnurgad AND, BND ja CND ühtuvad, sest neil on ühine kaatet DN ja kõigi nurgad selle kaateti vastas on 45° . Jär. $NB = NA = NC =$ kolmnurga ABC ümberj. ringi raadius $= \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 8^2} = 5 = DN$, N on hüpotenuusi keskkohk. Maht: $V = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = 40$.

209. Kolmnurkse püramiidi üks serv on 4, aga teised igauks 3. Leida maht.

Asetegu püramiid SABC nii, et tahk ABC, mille serv $BC = 4$, oleks põhjaks (joon. 50). Maht: $V = \frac{1}{2} BC \cdot AL \cdot \frac{1}{3} SO = \frac{1}{6} BC \cdot AL \cdot SO$, kus SO on püramiidi kõrgus ja $AL \perp BC$. Külgservade projektsioonid (XV) on kõik võrdsed: $OA = OB = OC = R = \frac{abc}{4Q}$. Kolmnurga BAC pind: $Q = \frac{1}{2} BC \cdot AL$. Lause III: $AL^2 = AB^2 - BL^2 = 3^2 - 2^2 = 5$, $AL = \sqrt{5}$. Jär. $Q = \frac{1}{2}$.



Joon. 50.

4. $\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$. Raadius $OA = \frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{9}{2\sqrt{5}}$. Lause III:
 $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 3^2 - \left(\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{99}{20}$, $SO = \frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$.
 Tähendab, $V = \frac{1}{6} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}} = \sqrt{11}$.

210. Leida kolmnurkse püramiidi maht, kui selle püramiidi kaks mittelõikuvat serva on kumbki 4, aga teised servad on igauks 3.

Olgu servad $SC = AB = 4$ ja teised igauks 3 (joon. 42). Tõmbame tasapinna $ANB \perp SC$ ja $NM \perp AB$. Otsitav maht koosneb kahest püramiidist $AMSC$ ja $BSMC$: $V = \frac{1}{2} SC \cdot MN \cdot \frac{1}{3} AM + \frac{1}{2} SC \cdot MN \cdot BM = \frac{1}{6} SC \cdot MN (AM + BM) = \frac{1}{6} SC \cdot MN \cdot AB$, s. o. $V = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot MN \cdot 4 = \frac{8}{3} MN$. Võrdhaarsed kolmnurgad ASB ja ACB ühtuvad, $CM = SM = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Lause III: $MN^2 = CM^2 - NC^2 = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 1$, $MN = \sqrt{1} = 1$, Maht $V = \frac{8}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3}$. Teisiti: arvutame püramiidi kõrguse SO kolmnurgast MSC .

211. Põhjaga rööbikud tasapinnad jagavad püramiidi kõrguse (serva) n võrdseks osaks. Leida mahu vastavad osad.

Iga osa kõrgus on $\frac{1}{n}h$, kus h on püramiidi kõrgus. Olgu mahu osad (tipust alates): v_1, v_2, v_3 jne. Teoreem XX: $v_1 : v = \left(\frac{1}{n}h\right)^3 : h^3$, s. o. $v_1 = \frac{1^3}{n^3}v$. Teine osa: $(v_1 + v_2) : v = \left(\frac{2}{n}h\right)^3 : h^3$, jär. $\left(\frac{1^3}{n^3}v + v_2\right) : v = \frac{2^3}{n^3}$, s. o. $\frac{1^3}{n^3} + v_2 : v = \frac{2^3}{n^3}$ ja $v_2 = \frac{2^3 - 1^3}{n^3} \cdot v$. Kolmas osa: $(v_1 + v_2 + v_3) : v = \left(\frac{3}{n}h\right)^3 : h^3$, s. o. $\left(\frac{1^3}{n^3}v + \frac{2^3 - 1^3}{n^3}v + v_3\right) : v = \frac{3^3}{n^3}$ ja $\frac{1^3}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} - \frac{1^3}{n^3} + v_3 : v = \frac{3^3}{n^3}$, $v_3 = \frac{3^3 - 2^3}{n^3} \cdot v$ jne.

Märkus: Kui kõrgus pooleks jagada, siis $v_1 = \frac{1}{8}v$. Mahu osad suhtuvad: $v_1 : v_2 : v_3 : v_4 \dots = 1 : (2^3 - 1^3) : (3^3 - 2^3) : (4^3 - 3^3) \dots = 1 : 7 : 19 : 37 \dots$

212. Püramiidi kõrgus = h ; põhjale rööbiti tõmmatud tasapinnad jagavad püramiidi mahu n võrdseks osaks. Leida lõigete kaugused tipust.

Terve maht olgu v . Võrdsed osad oleksid siis $\frac{1}{n}v$. Tähendagu x_1, x_2, x_3 jne. lõigete kaugusi tipust. Mahu osad tipust alates oleksid vastavalt: $\frac{1}{n}v, \frac{2}{n}v, \frac{3}{n}v$ jne.

Teoreem XX: $\frac{1}{n}v : v = x_1^3 : h^3$, siit saame $x_1 = h \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$.

Samuti: $(\frac{2}{n}v) : v = x_2^3 : h^3$ ja $x_2 = h \sqrt[3]{\frac{2}{n}}$. Sarnaselt

leiame: $x_3 = h \sqrt[3]{\frac{3}{n}}$ jne.

Märkus. Tasapindade kaugused tipust suhtuvad omavahel: $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{3}$ jne., sest $h \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$ lühendub. —

Üksikute osade kõrgused on: $x_1 = h \sqrt[3]{\frac{1}{n}}, x_2 - x_1 = h \sqrt[3]{\frac{1}{n}}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}), x_3 - x_2 = h \sqrt[3]{\frac{1}{n}}(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$ jne. Oleks püramiidi maht kaheks ühesuuruseks osaks jagatud, siis $x_1 = h \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

213. Püramiidi põhjaga paralleelsed tasapinnad jagavad tema mahu osadeks, mis suhtuvad nagu $1 : 26 : 37$ (tipust alates). Kuidas suhtuvad kõrguse osad?

Olgu SEFD maht = $1 \cdot x$, NMLEFD maht = $26 \cdot x$, ABCNML maht = $37 \cdot x$, lõikepinnad paralleelsed põhjaga, püramiidi kõrgus $SO = k$, $ST = k_1$, $TP = k_2$ ja $PO = k_3$ (joon. 48). Lause XX: $(\frac{k_1}{k})^3 = \frac{x}{64x}$, kus terve püramiidi

maht = $64x = x + 26x + 37x$. Jär. $\frac{k_1}{k} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$ ja $k_1 = \frac{1}{4}k$. Sarnaselt: $(\frac{k_1 + k_2}{k})^3 = \frac{x + 26x}{64x} = \frac{27}{64}$, s. o. $\frac{k_1 + k_2}{k} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$,

$\frac{k_1}{k} + \frac{k_2}{k} = \frac{3}{4}, \frac{1}{4} + \frac{k_2}{k} = \frac{3}{4}$ ja $k_2 = \frac{2}{4}k$. Sirg-
lõik $k_3 = k - (k_1 + k_2) = k - (\frac{1}{4}k + \frac{2}{4}k) = \frac{1}{4}k$. Tähen-
dab: $k_1 : k_2 : k_3 = \frac{1}{4}k : \frac{2}{4}k : \frac{1}{4}k = 1 : 2 : 1$.

214. Põhjaga paralleelne tasapind poolitab püramiidi külgsinna. Kuidas jagab see tasapind püramiidi mahu?

Jagagu põhjaga paralleelne tasapind NML püramiidi külgsinna pooleks (joon. 48), nii et SNML külgsinna = $s_1 = ABCNML$ külgsinna = s_2 . Vastavad mahud ja kõrgused olgu: v_1, v_2 ja k_1, k_2 . Lause XIX, XX: $\frac{s_1 + s_2}{2} = 2 = \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1}\right)^2, \frac{k_1 + k_2}{k_1} = \sqrt{2}$; mahud: $\frac{v_1 + v_2}{v_1} = \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1}\right)^3 = (\sqrt{2})^3, \frac{v_1 + v_2}{v_1} = 2\sqrt{2}, 1 + \frac{v_2}{v_1} = 2\sqrt{2}, \frac{v_2}{v_1} = 2\sqrt{2} - 1$. Ümberpöörduvalt: $v_1 : v_2 = 1 : (2\sqrt{2} - 1)$.

215. Püramiidi maht on jagatud põhjale paralleelsete tasapindadega kolmeks võrdseks osaks. Üks tema põhisev on a . Leida lõigete küljed, mis vastavad a -le.

Antud: $AB = a$; otsitavad: $NM = x$ ja $EF = z$ (joon. 48). Olgu kõige ülemise osa maht v_1 , kahe ülemise osa mahtude summa v_2 ja terve püramiidi maht v_3 . Tingimus: $\frac{v_1}{1} = \frac{v_2}{2} = \frac{v_3}{3}$. Siit saame $\frac{v_1}{1} = \frac{v_3}{3}$ ja $\frac{v_1}{v_3} = \frac{1}{3}$. Lause XX: $\left(\frac{z}{a}\right)^3 = \frac{v_1}{v_3} = \frac{1}{3}$, s. o. $z = a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. Edasi: $\frac{v_2}{v_3} = \frac{2}{3} = \left(\frac{x}{a}\right)^3$, s. o. $x = a\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

216. Kui kaugel püramiidi SABC tipust S tuleb tõmmata põhjale rööbik tasapind, mis püramiidi jagaks osadeks, mille mahtude suhe = m ?

Jagagu tasapind EFD (joon. 48) püramiidi SABC osadeks nii, et SEFD ja ABCEFD mahtude v_1 ja v_2 suhe on m , s. o. $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{m}$ (1). Olgu kõrgus $SO = h$ teada ja $ST = x$ otsitav. Lause XX: $\frac{v_1 + v_2}{v_1} = \frac{h^3}{x^3}$ (2). Võtame (1) tuletatud võrde $\frac{v_1 + v_2}{v_1} = \frac{m + 1}{m}$ (3). Teise ja kolmanda põhjal saame: $\frac{h^3}{x^3} = \frac{m + 1}{m}$, s. o. $x = h\sqrt[3]{\frac{m}{m + 1}}$.

217. Püramiid, mille kõrgus k , on jagatud põhjale rööbikute tasapindadega osadeks, mis suhtuvad nagu $m:n:r$. Leida tasapindade kaugused tipust.

Antud: $SO = k$ (joon. 48). Otsitavad: $ST = x$, $SP = z$. Üksikute osade mahud (tipu juurest alates): v_1, v_2, v_3 , nii et $v_1 + v_2 + v_3 =$ terve püramiidi maht. Tingimus: $\frac{v_1}{m} = \frac{v_2}{n} = \frac{v_3}{r}$. Siin on rida võrdseid suhteid,

sellepärast $\frac{v_1 + v_2 + v_3}{m + n + r} = \frac{v_1}{m}$ (1) ja $\frac{v_1 + v_2 + v_3}{v_1} = \frac{m + n + r}{m} =$
 $= \left(\frac{k}{x}\right)^3$, s. o. $x = k \sqrt[3]{\frac{m}{m + n + r}}$. Ka $\frac{v_1 + v_2}{m + n} = \frac{v_1}{m}$, jär. (1)

põhjal: $\frac{v_1 + v_2 + v_3}{m + n + r} = \frac{v_1 + v_2}{m + n}$, s. o. $\frac{v_1 + v_2 + v_3}{v_1 + v_2} = \frac{m + n + r}{m + n} =$
 $= \left(\frac{k}{z}\right)^3$ ja $z = k \sqrt[3]{\frac{m + n}{m + n + r}}$.

218. Leida korrapärase tetraeedri¹⁾ pind ja maht serva a kaudu.

Pind koosneb neljast korrapärasest kolmnurgast: $P = 4 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = a^2 \sqrt{3}$. — Põhja pind $= \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$. Kõrguse SE (joon. 39) saame püstkolmnurgast AES , kus $SE \perp ABC$, $AS = a$ ja $AE = R = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$, s. o. $SE^2 =$
 $= AS^2 - AE^2 = a^2 - \left(\frac{1}{3} a \sqrt{3}\right)^2 = \frac{6}{9} a^2$, $SE = \frac{1}{3} a \sqrt{6}$.
 Maht: $V = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} a \sqrt{6} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

Märkus. Kui näiteks oleks antud pind P ja otsitaks serva a , siis pööraksime ülesande ümber, loeksime antuks serva ja otsiksime, nagu eelpool, pinda; saadud vahekorras leiaksime serva pinna kaudu: $P = a^2 \sqrt{3}$,
 aga $a = \sqrt{\frac{P}{\sqrt{3}}}$. Samuti on mahuga: $V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$,
 aga $a = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{2}}}$. Oleks antud maht V ja otsiksime pinda P , siis avaldaksime nad mõlemad serva kaudu, viimati eraldaksime serva: $a = \sqrt{\frac{P}{\sqrt{3}}}$, $a = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{2}}}$, jär.

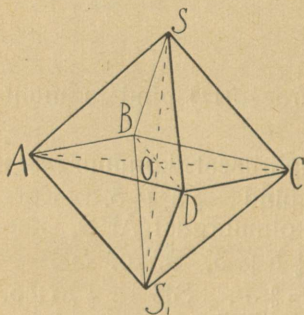
1) Korrapärasest tetraeedrit nimetatakse tihti lihtsalt tetraeedriks.

$\sqrt{\frac{P}{\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{2}}}$. Ruudime: $\frac{P}{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\frac{144V^2}{2}}$, s. o. $P = \sqrt{3} \sqrt[3]{72V^2}$. Viime ühisele juurenäitajale ja lihtsustame: $P = \sqrt[6]{3^3} \sqrt[6]{72^2 V^4} = \sqrt[6]{3^7 \cdot 2^6 \cdot V^4} = 6 \sqrt[6]{3V^4}$.

Näide. Leida P , kui $V = 679,48$. — Logaritmime leitud avaldise: $\lg P = \lg 6 + \frac{1}{6}(\lg 3 + 4 \lg V) = 0,7782 + \frac{1}{6}(0,4771 + 11,3288) = 2,7459$; $P = 557$. Viie kohaga: $\lg P = 2,74579$, $P = 556,91$.

219. Leida korrapärase oktaeedri¹⁾ pind ja maht serva a kaudu.

Korrapärase oktaeedri servad on kõik ühepikkused.



Joon. 51.

Pind koosneb 8 korrapärasest kolmnurgast (joon. 51), sellepärast: $P = 8 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} = 2a^2 \cdot \sqrt{3}$.

$\sqrt{3}$. — Lõige ABCD jagab oktaeedri kaheks korrap. nelinurkseks püramiidiks. Põhja külge (AB) ja külgserv (SA) on võrdsed a . Kõrguse saame lõikest $ASCS_1$. See lõige on ruut, sest diagonaalid AC ja SS_1 on võrdsed ja ristised, külge $AS = a$. Diagonaal: $SS_1 = a\sqrt{2}$. Maht: $V = 2a^2 \cdot \frac{1}{3}(\frac{1}{2} a \cdot \sqrt{2}) = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$.

220. Korrapärase oktaeedri pind on s . Leida serv ja sümmeetria telg.

Pind serva kaudu (ü. nr. 219): $s = 2a^2 \sqrt{3}$, jär. $2a^2 \sqrt{3} = s$, $a^2 = \frac{s}{2\sqrt{3}}$, $a = \sqrt{\frac{s}{2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{s\sqrt{3}}{6}}$. Sümmeetria telg: $SS_1 = a\sqrt{2} = \sqrt{\frac{s}{2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{s}{\sqrt{3}}}$.

1) Korrap. oktaeedrit nim. tihti lihtsalt oktaeedriks.

221. Korrarap. oktaeedri maht on V . Leida pind.

Avaldame mahu ja pinna mõlemad serva kaudu, pärast eraldame serva. Maht: $V = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$ (ü. nr. 219).

Serv mahu kaudu: $a^3 = \frac{3V}{\sqrt{2}}$, $a = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}}}$ (1). Pind

serva kaudu: $s = 2 a^2 \sqrt{3}$ (ü. nr. 220). Ümberpöördult:

$2 a^2 \sqrt{3} = s$, $a^2 = \frac{s}{2\sqrt{3}}$, $a = \sqrt{\frac{s}{2\sqrt{3}}}$ (2). Pinna ja mahu

sideme saame (1) ja (2): $\sqrt{\frac{s}{2\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}}}$. Kui teise astme

juure ruudime, saame juurealuse arvu: $\frac{s}{2\sqrt{3}} =$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{\sqrt{2}}\right)^2}$, s. o. $s = 2\sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{9V^2}{2}} = \sqrt[6]{3^2} \sqrt[6]{\frac{2^6 \cdot 3^4 V^4}{2^2}} =$

$= \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^7 \cdot V^4} = 3 \sqrt[6]{48 V^4}$. Jär. $s = 3 \sqrt[6]{48 V^4}$.

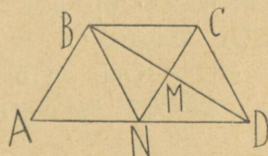
Märkus. Kui leitud avaldise kuuendale astmele tõstame, saame: $3^6 \cdot 48 V^4 = s^6$, s. o. $V^4 = \frac{s^6}{3^6 \cdot 3 \cdot 2^4}$. Jär. $V =$

$= \frac{s}{3 \cdot 2} \sqrt[4]{\frac{s^2}{3^2 \cdot 3}} = \frac{s}{6} \sqrt[4]{\frac{s^2 \cdot 3}{3^4}} = \frac{s}{18} \sqrt{s \sqrt{3}}$, s. o. $V = \frac{s}{18} \cdot$

$\sqrt{s \sqrt{3}}$. Nii avaldub maht pinna kaudu.

222. Korrarap. tetraeedri külgpind on tasandatud üheks nelinurgaks. Leida selle nelinurga diagonaal, kui tetraeedri serv on 1.

Otsitav diagonaal $x = DB$ (joon. 52) on sama suur kui kahekordne korrapärase kolmnurga kõrgus (V): $x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$.



Joon. 52.

223. Korrarap. 6-nurkse püramiidi kõrgus on h ja põhiserv a . Leida 1) maht, 2) täispind ja 3) diagonaal-õigete pinnad.

1. Otsitav maht: $V = Q \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{3} Q \cdot h$, kus Q on

põhja pind. $Q = 6 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$. Jär. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \cdot h = \frac{1}{2} a^2 h \sqrt{3}$.

2. Külgpind $= 6 \cdot \frac{1}{2} AF \cdot SN = 3 \cdot AF \cdot SN$ (joon. 46).
 $ON = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$, $ON \perp AF$. Püstkolmnurk SON : $SN^2 = ON^2 + SO^2 = (\frac{1}{2} a \sqrt{3})^2 + h^2 = 0,75 a^2 + h^2$, $SN = \sqrt{0,75 a^2 + h^2}$. Täispind: $P = 3 a \sqrt{0,75 a^2 + h^2} + 1,5 a^2 \sqrt{3}$.

3. Lõike ASD pind $= \frac{1}{2} AD \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 2 a h = ah$.
 Teise lõike ASC pind: $T = \frac{1}{2} AC \cdot SH$ (1). Korrab. kolmnurga küljena (VII) vaadeldav $AC = R \sqrt{3} = a \sqrt{3}$. Rombi $ABCO$ diagonaalid poolituvad: $OH = \frac{1}{2} OB = \frac{1}{2} a$.
 Lause III: $SH^2 = OH^2 + OS^2 = (\frac{1}{2} a)^2 + h^2$, $SH = \sqrt{0,25 a^2 + h^2}$. Jär. $T = 0,5 a \sqrt{3} \sqrt{0,25 a^2 + h^2} = 0,5 a \cdot \sqrt{0,75 a^2 + 3h^2}$.

224. Korrab. 6-nurkse püramiidi suurima telglõike pind on niisama suur kui põhipind; püramiidi maht $= 2250$. Leida külgpind.

Otsitav külgpind: $P = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot AF \cdot SN = 3 AF \cdot SN$, kus SN on apoteem ja AF põhja külge (joon. 46). Eelmises ülesandes leitud suurustest moodustame käesolevale ülesandele vastavalt võrrandid: $\frac{1}{2} a^2 h \sqrt{3} = 2250$ (1), $ah = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$ ja $h = \frac{3}{2} a \sqrt{3}$ (2). Lahendame võrrandid (1) ja (2): $\frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{3}{2} a \sqrt{3} \sqrt{3} = 2250$, s. o. $a = \sqrt[3]{1000} = 10 = AF$, jär. $h = \frac{3}{2} \cdot 10 \sqrt{3} = 15 \sqrt{3} = SO$. Korrapärase kolmnurga AOF kõrgus $ON = \frac{1}{2} a \sqrt{3} = 5 \sqrt{3}$. Lause III: $SN^2 = SO^2 + ON^2 = (15 \sqrt{3})^2 + (5 \sqrt{3})^2 = 750$, $SN = \sqrt{750} = \sqrt{25 \cdot 30} = 5 \sqrt{30}$. Külgpind: $P = 3 \cdot 10 \cdot 5 \sqrt{30} = 150 \sqrt{30}$.

225. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ja külgtahud on isekeskis risti. Leida külgpind ja maht.

Kõik külgtahud on võrdhaarsed püstkolmnurgad hüpotenuusiga $= a$. Kaatetid on külgservadeks. Ühe külgtahu pind $= \frac{1}{2} xx = \frac{1}{2} x^2$, kus x on kaatet; terve külgpind: $Q = 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 = \frac{3}{2} x^2$. Kuid $x^2 + x^2 = a^2$, $x^2 = \frac{1}{2} a^2$, $x = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$;

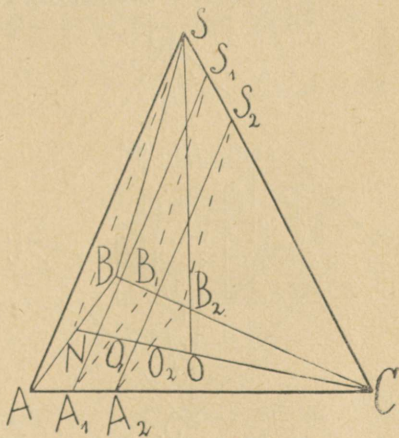
jär. $Q = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{3}{4} a^2$. — Valime püramiidi põhjaks ühe külgtahu, külgserv on siis kõrguseks. Maht: $V = \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{3} x = \frac{1}{6} x^2 \cdot x = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{2} = \frac{1}{24} a^3 \sqrt{2}$.

226. Kolmetahuse (kolmnurkse) püramiidi ühe tahu küljed on 17 cm, 25 cm ja 28 cm pikad. Selle tahu kaugus vastastipust on 8 cm ja vastastipu projektsioon selle tahu peal asetseb tahu nurkade poolitajate lõikepunktis. Leida maht ja täispind.

Põhja küljed: $BC = 17$ cm, $AC = 25$ cm, $AB = 28$ cm. Püramiidi kõrgus $SO = 8$ cm (joon. 38). Põhja pind: $Q = \sqrt{35(35-17)(35-25)(35-28)} = 210$ cm². Maht: $V = 210 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 = 560$ cm³. Tipu S projektsioon on kõrguse alus O põhjal. Nurgap. (puuduvad joonisel) lõikuvad kolmn. sissej. ringi keskpunktis, sellep. külgedega ristised lõigud OL , ON , OM on võrdsed põhja sissej. ringi raadiusega. Lause XV : $OL = Q : p = 210 : 35 = 6$ cm. Külgtahkude kõrgused on ühesuurused (kolmnurkade ühtivus). Kõrgus: $SL^2 = OL^2 + OS^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, $SL = \sqrt{100} = 10$ cm. Külgpind: $\frac{1}{2}(17 + 25 + 28) \cdot 10 = 350$ cm². Täispind: $P = 350 + 210 = 560$ cm².

227. Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrgus on jagatud kolmeks võrdseks osaks ja püramiid lõigatud läbi jagamispunktide külgtahule paralleelsete tasapindadega. Kuidas suhtuvad saadud osade mahud?

Püramiidi kõrguse alus O (joon. 53) jagab põhja kõrguse $CN = k$ osadeks $OC = \frac{2}{3}k$ ja $ON = \frac{1}{3}k$. Tasapinnad $A_1S_1B_1$ ja $A_2S_2B_2$, mis SO kolmeks võrdseks

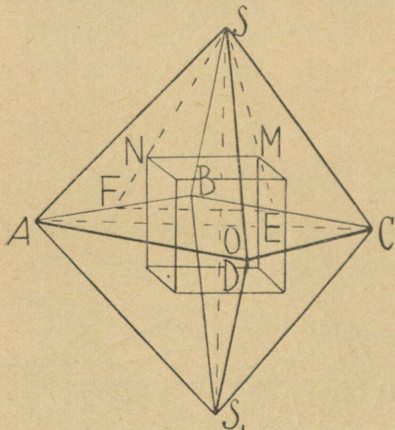


joon. 53.

osaks jagavad, jagavad ka ON kolmeks võrdseks osaks: $OO_2 = O_2O_1 = O_1N = \frac{1}{3}k$. Tähendagu v, v_1 ja v_2 vastavalt sarnaste püramiidide $SABC, S_1A_1B_1C$ ja $S_2A_2B_2C$ mahte (need püramiidid on sarnased, sest ühe tahuga paralleelsed tasapinnad lõikavad ära antud püramiidist te-maga sarnased püramiidid). Neil püramiididel on vastavateks joonteks $CN = k, CO_1 = \frac{8}{9}k$ ja $CO_2 = \frac{7}{9}k$. Püramiidi mahu osad olgu: $x = v - v_1, y = v_1 - v_2$ ja $z = v_2$. Lause XX: $v_1 : v = (\frac{8}{9}k)^3 : k^3$, s. o. $v_1 : v = 512 : 729$ ja $v_1 = \frac{512}{729}v$; $x = v - \frac{512}{729}v = \frac{217}{729}v$. Edasi: $v_2 : v = (\frac{7}{9}k)^3 : k^3, v_2 : v = 343 : 729$, s. o. $v_2 = \frac{343}{729}v$, ja $y = v_1 - v_2 = \frac{512}{729}v - \frac{343}{729}v = \frac{169}{729}v$. Jär. $x : y : z = \frac{217}{729}v : \frac{169}{729}v : \frac{343}{729}v = 217 : 169 : 343$.

228. Kuubi tahkude keskkohad on korrapärase oktaedri tippudeks. Leida nende kehade mahtude suhe.

Kuubi serv $= a$, maht $v = a^3$: oktaedri serv $= b$, maht $v_1 = \frac{1}{3}b^3\sqrt{2}$ (ü. nr. 219). Avaldame okt. serva b kuubi serva a kaudu. Ühendades kuubi kahe järgse vertikaalse tahu keskkohad, saame oktaedri serva b , mis rööbik kuubi põhjaga; b projektsioon põhjal on sama suur kui b ja võrdub kuubi põhja diagonaali poolega, s. o. $b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Jär. $v_1 = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}a\sqrt{2})^3\sqrt{2} = \frac{1}{6}a^3$. Suhe: $v : v_1 = a^3 : \frac{1}{6}a^3 = 6 : 1$. — Teisiti: Oktaedri sümmeetria telg $b\sqrt{2}$ on võrdne kuubi servaga: $a = b\sqrt{2}$.



Joon. 54.

229. Oktaedri serv on a . Kui suur on niisuguse keha täispind ja maht, mille tipud asetsevad oktaedri tahkude keskpunktides?

Oktaedri kaheksa tahu keskkohad on kuubi tippudeks. Kuubi serv $NM = x$ (joon. 54). Punkt M on tahu BSC keskoht, $SM = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ (VII). Apoteem $SE = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Ruudu ABCD diagonaal $AC = a\sqrt{2}$, $EF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Et kolmnurgad ESF ja MSN on sarnased, siis $EF : NM = ES : MS$, $(\frac{1}{2}a\sqrt{2}) : NM = (\frac{1}{2}a\sqrt{3}) : (\frac{1}{3}a\sqrt{3})$ ja $NM = \frac{1}{3}a\sqrt{2}$. Kuubi täispind: $P = 6 \cdot (\frac{1}{3}a\sqrt{2})^2 = \frac{4}{3}a^2$. Maht: $V = (\frac{1}{3}a\sqrt{2})^3 = \frac{2}{27}a^3\sqrt{2}$.

230. Korrapärase tetraeedri tahkude keskpunktides asetsevad teise korrapärase tetraeedri tipud. Kuidas suhtuvad nende pinnad ja mahud?

Olgu suurema tetraeedri serv a . Ülesandes nr. 172 leidsime, et tahkude keskkochtade kaugus $EF = \frac{1}{3}a$. See on vähema tetraeedri serv. Pinnad suhtuvad sarnastel hulktahkudel nagu servade ruudud, mahud aga nagu servade kuubid, sellepärast $P : p = a^2 : (\frac{1}{3}a)^2 = 9 : 1$. Mahud: $V : v = a^3 : (\frac{1}{3}a)^3 = 27 : 1$.

231. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv $a = 6$ ja maht $v = 9\sqrt{2}$. Leida külgpind.

Külgpind: $P = \frac{3}{2}AB \cdot SM = \frac{3}{2}a \cdot SM$ (joon. 42). Lause VII: $MO = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Maht: $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}SO = v$, s. o. $SO = \frac{12v}{a^2\sqrt{3}}$. Lause III: $SM^2 = MO^2 + SO^2$ ja $SM^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{12v}{a^2\sqrt{3}}\right)^2$ ning $SM = \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{48v^2}{a^4}}$. Tähendab: $P = \frac{3}{2}a \cdot \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{48v^2}{a^4}} = 27$. ($SM \perp AB$, $SO \perp ABC$).

Järelekatse. Loeme antuks $P = 27$ ja $a = 6$; leiame v . — Võrrandid: $v = \frac{1}{4} \cdot 6^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}SO$, s. o. $v = 3\sqrt{3} \cdot SO$ (1); $\frac{3}{2} \cdot 6 \cdot SM = 27$, $SM = 3$. Lause III: $SO^2 = SM^2 - MO^2 = 3^2 - (\frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3})^2 = 6$, $SO = \sqrt{6}$. Võrrand (1): $v = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 9\sqrt{2}$. Õige.

232. Püramiid on jagatud põhjaga rööbiku tasapinnaga osadeks nii, et kõrguse osad (tipust alates) suh-

tuvad nagu 3:4; lõike pind on põhja pinnast 200 cm² võrra vähem. Leida põhja pind.

Põhja pind = x cm², lõike pind: $x - 200$ cm². Kõrguse osad: $3z$ ja $4z$, terve kõrgus = $3z + 4z = 7z$. Lause XIX: $\frac{x - 200}{x} = \left(\frac{3z}{7z}\right)^2 = \frac{9}{49}$. Jär. $x = 245$ cm².

233. Püramiid, mille põhja pind 98, on läbi lõigatud kahe põhjale rööbiku tasapinnaga, saadud kõrguse osad (tipust alates) suhtuvad kui 4:2:1. Leida lõigete pinnad.

Kõrguse osad: $4x$, $2x$, x . Lõigete kaugused tipust: $4x$ ja $2x + 4x = 6x$; terve kõrgus = $7x$. Lõigete pinnad: z ja u . Lause XIX: $\frac{z}{98} = \left(\frac{4x}{7x}\right)^2 = \frac{16}{49}$. $z = \frac{16}{49} \cdot 98 = 32$. Sarnaselt: $u = 72$.

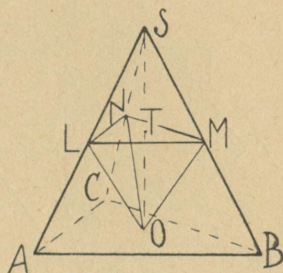
234. Korrab. nelinurkse püramiidi diagonaalpind on sama suur kui põhipind. Maht $v = 288$. Leida külgpind.

Külgpind: $Q = 4 \cdot \frac{1}{2} CD \cdot SM = 2CD \cdot SM$ (joon. 37). Olgu: $CD = a$, kõrgus $SO = h$. Võrrandid: $a^2 = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot h$ ja $a = \frac{1}{2}h\sqrt{2}$ (1), $\frac{1}{3}a^2h = v$ (2). Asetamine teise: $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}h\sqrt{2}\right)^2 \cdot h = v$. Siit $h = \sqrt[3]{6v}$. Esimesest saame: $a = \frac{1}{2}\sqrt[3]{6v} \cdot \sqrt{2}$. Lause III: $SM^2 = SO^2 + MO^2 = (\sqrt[3]{6v})^2 + \left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{6v} \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \frac{9}{8}\sqrt[3]{36v^2}$, $SM = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{6v}$. Külgpind: $Q = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{6v} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sqrt[3]{6v} = 3\sqrt[3]{\frac{9}{2}v^2}$. Numbritega: $Q = 3\sqrt[3]{\frac{9}{2} \cdot 288^2} = 3\sqrt[3]{3^6 \cdot 2^9} = 3 \cdot 3^2 \cdot 2^3 = 3^3 \cdot 2^3 = (3 \cdot 2)^3 = 6^3 = 216$.

235. Tetraeedri sisse on kujutatud uus tetraeeder nii, et viimase kolm tippu asetsevad esimese servadel,

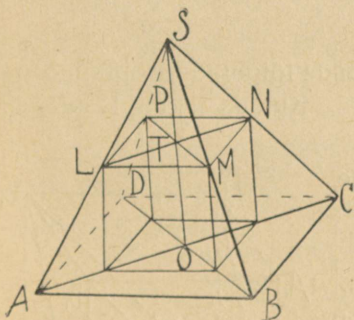
kuna neljas tipp asetseb esimese tetraeedri põhja keskpunktis. Antud tetraeedri serv on a . Kui pikk on sissekujutatud tetraeedri serv?

Rahuldagu tetraeeder OLMN ülesannet (joon. 55). Püramiid SLMN on ka tetraeeder. Neil on ühine serv LM, sellep. on neil kõik servad võrdsed, samuti ka kõrgused ST ja OT. Tähendab, uue tetraeedri kõrgus on pool antud tetraeedri kõrgusest, jär. ka serv on pool antud tetraeedri servast, s. o. $LM = \frac{1}{2} a$.



Joon. 55.

236. Korrapärase nelinurkse püramiidi sisse on kuup nii joonestatud, et neli tippu asuvad külgservadel ja ülejäänud neli tippu põhjal. Leida selle kuubi serv, kui püramiidi põhja külge on a ja kõrgush.



Joon. 56.

Kuubi serv $LM = x = TO$, $ST = h - x$ (joon. 56). Lõike LMNP ja põhja pinna suhe $\frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{h-x}{h}\right)^2$. Siit saame peale juurimist:

$$\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}; \text{ jär. } hx = ah -$$

$$- ax, \quad ax + hx = ah, \quad (a + h)x = ah, \quad x = \frac{ah}{a + h}.$$

237. Korrapärase oktaeedri sisse on kuup nii joonestatud, et tipud asetsevad oktaeedri servadel. Leida

2. Osade mahud: $v_1 = v_3 = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{1}{8} a = \frac{1}{8} a^3$. Kesk-
mise osa maht: $v_2 = a^3 - (v_1 + v_3) = a^3 - \frac{2}{8} a^3 = \frac{4}{8} a^3$.
Tähendab: $v_1 : v_2 : v_3 = \frac{1}{8} a^3 : \frac{4}{8} a^3 : \frac{1}{8} a^3 = 1 : 4 : 1$.

239. Korrab. kuusnurkse püramiidi põhiserv = a ,
külgpind aga on k . Leida külgserv ja maht.

Külgpind: $6 \cdot \frac{1}{2} AF \cdot SN = k$, $\sqrt{3} a \cdot SN = k$; apoteem
 $SN = \frac{k}{\sqrt{3} a}$ (joon. 46). Lause III: $SA^2 = SN^2 + AN^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{3} a}\right)^2 +$
 $+\left(\frac{a}{2}\right)^2$; jär. otsitav külgserv $SA = \sqrt{\frac{k^2}{9a^2} + \frac{a^2}{4}}$. Korrab.
kolmnurga AOF kõrgus: $ON = \frac{1}{2} a \sqrt{\sqrt{3}}$. Püramiidi kõrgus,
lause III: $SO^2 = SN^2 - ON^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{3} a}\right)^2 - \left(\frac{a \sqrt{\sqrt{3}}}{2}\right)^2$, s. o.

$SO = \sqrt{\frac{k^2}{9a^2} - \frac{\sqrt{3} a^2}{4}}$. Otsitav maht: $V = 6 \cdot \frac{1}{2} AF \cdot ON \cdot \frac{1}{3} SO =$
 $= AF \cdot ON \cdot SO$, $V = a \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{k^2}{9a^2} - \frac{\sqrt{3} a^2}{4}} = \frac{a^2}{2} \sqrt{\frac{k^2}{3a^2} - \frac{9a^2}{4}}$.

Näide. Leida SA ja V , kui $k = 239,4$ ja $a = 7,65$.

$SA = \sqrt{\frac{239,4^2}{9 \cdot 7,65^2} + \frac{7,65^2}{4}}$. Olgu: $m = \frac{239,4^2}{9 \cdot 7,65^2}$, $n = \frac{7,65^2}{4}$. Loga-
ritmime: $\lg m = 2 \lg 239,4 - \lg 9 - 2 \lg 7,65 = 2,0366$; $m =$
 $= 108,8$; $\lg n = 2 \lg 7,65 - \lg 4 = 1,1653$; $n = 14,63$. Jär.
 $SA = \sqrt{123,43}$; $\lg(SA) = 1,0457$; $SA = 11,11$. $V =$
 $= \frac{a^2}{2} \sqrt{\sqrt{3}m - 9n} = \frac{7,65^2}{2} \sqrt{194,73}$; $\lg V = 2 \lg 7,65 - \lg 2 +$
 $+ \frac{1}{2} \lg 194,73 = 2,6111$; $V = 408,4$ Viie kohaga: $\lg(SA) =$
 $= 1,04573$, $SA = 11,1105$; $\lg V = 2,61104$, $V = 408,35$.

Märkus. Ülesanne on võimalik, kui $\frac{k^2}{3a^2} - \frac{9a^2}{4} > 0$,
sest juuremärgi all peab positiivne arv olema. Siit järg-
neb $\frac{k^2}{3a^2} > \frac{9a^2}{4}$ ja $k > \frac{3}{2} \sqrt{\sqrt{3}} a^2$. Et aga $1,5 \sqrt{\sqrt{3}} = 2,6$ (liiaga),
siis $k > 2,6 a^2$. Seda võrratust tuleb arvude valimisel tähele
panna.

240. Korrab. nelinurkse püramiidi külgpind on
 $14,76 \text{ m}^2$, täispind aga 18 m^2 . Leida püramiidi põhja
külj ja kõrgus.

Põhja külge = a , püramiidi apoteem = k ja kõrgus = h . Külgpind: $4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot k = 14,76$ ja $2 ak = 14,76$. Täispind: $a^2 + 2 ak = 18$; (1) põhjal: $a^2 + 14,76 = 18$. Siit $a^2 = 3,24$ ja $a = \sqrt{3,24} = 1,8$ m. Apoteem: $2 \cdot 1,8 k = 14,76$, $k = 14,76 : 3,6 = 4,1$ m. Kõrgus: $h^2 = k^2 - (\frac{1}{2} a)^2 = 16$, $h = \sqrt{16} = 4$ m.

241. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on $h = 30$ ja külgpind $k = 2176$. Leida põhja külge.

Põhja külge = x , püramiidi apoteem = m . Võrrandid: $4 \cdot \frac{1}{2} xm = k$ ja $2 mx = k$ (1), $(\frac{1}{2} x)^2 = m^2 - h^2$, $x^2 = 4 m^2 - 4 h^2$ (2). Võrrand (1): $m = \frac{k}{2x}$. Võrrand (2): $x^2 = 4 \cdot (\frac{k}{2x})^2 - 4 h^2$ ja $x^2 = \frac{k^2}{x^2} - 4 h^2$, s. o. $x^4 + 4 h^2 x^2 - k^2 = 0$ (3). Olgu $x^2 = z$. Jär. (3) $z^2 + 4 h^2 z - k^2 = 0$ ja $z = \frac{-4 h^2 \pm \sqrt{16 h^4 + k^2}}{2}$; $x^2 = -2 h^2 + \sqrt{4 h^4 + k^2}$, $x = \sqrt{-2 h^2 + \sqrt{4 h^4 + k^2}} = 32$.

242. Rööpkülik, mille küljed 20 ja 36 ning pind 360, on püramiidi põhjaks. Püramiidi kõrgus on 12 ja läheb läbi põhja diagonaalide lõikepunkti. Leida külgpind.

Põhja pind: $AD \cdot BE = 360$, $36 \cdot BE = 360$, põhja kõrgus $BE = 360 : 36 = 10$ (joon. 43). Tõmbame $OF \perp AD$, $OF = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$. Tahu AMD kõrgus: $MF^2 = MO^2 + OF^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, $MF = \sqrt{169} = 13$. Selle tahu pind = $\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 13 = 234$. Tõmmates põhja teise kõrguse AB ja CD vahel, leiame sarnaselt eelmisega, et tahu DMC pind = 150. Otsitav külgpind: $Q = 2 \cdot 234 + 2 \cdot 150 = 768$.

243. Püramiidi põhjaks on romb diagonaalidega $d = 6$ cm ja $e = 8$ cm; kõrgus $h = 8,2$ cm langeb diagonaalide lõikepunkti. Leida 1) maht ja 2) täispind.

1. Rombi pind võrdub diagonaalide korrutise poolega: $Q = \frac{1}{2} de = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ cm². Maht: $V = Q \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{2} de \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{6} deh = 98,4$ cm³.

2. Külgtahud on võrdsed. Külgpind $= 4 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot MF = 2AD \cdot MF$ (joon. 43). $AO = \frac{1}{2} d = 3$ cm, $OD = \frac{1}{2} e = 4$ cm, $\angle AOD = 90^\circ$, jär. $AD = 5$ cm. Tõmbame $OF \perp AD$. Lause XII: $AD \cdot OF = AO \cdot OD$, $5 \cdot OF = 3 \cdot 4$, $OF = 2,4$ cm. Lause III: $MF^2 = MO^2 + OF^2 = 8,2^2 + 2,4^2 = 73$, $MF = \sqrt{73}$. Külgpind $= 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{73} = 10\sqrt{73}$ cm². Täispind: $S = 24 + 10\sqrt{73}$ cm².

244. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille haara jagab sissejoonestatud ring puutepunktis lõikudeks $a = 4$ ja $b = 9$. Püramiidi kõrgus h langeb selle ringi keskpunkti. Leida 1) maht ja 2) külgpind.

1. Olgu antud püramiid SABCD, mille põhja sisse on ring O joonestatud. Ühendame haara AD otsad ja O . Saame $\angle AOD = 90^\circ$. Nurgad A ja D jaguvad poolleks. Raadius $OL \perp AD$. Keskmise võrdeline: $OL^2 = ab$, $OL = \sqrt{ab}$. Ringi ümberjoonestatud nelinurga vastaskülgede summad on võrdsed, sellep. põhja ümbermõõt on $2[2(a+b)] = 4(a+b)$. Põhja pind $= \frac{1}{2} \cdot 4(a+b) \cdot OL = 2(a+b)\sqrt{ab}$. Maht: $V = \frac{2}{3} h(a+b)\sqrt{ab} = 416$.

2. Külgtahkude kõrgused on võrdsed. Leiame ühe niisuguse kõrguse SL . Lause III: $SL^2 = OL^2 + SO^2 = ab + h^2$, $SL = \sqrt{ab + h^2}$. Külgpind: $Q = \frac{1}{2} \cdot 4(a+b) \cdot \sqrt{ab + h^2} = 2(a+b)\sqrt{ab + h^2} = 260$.

245. Korrapärase püramiidi põhjaks on kaksteistnurk, mille raadius R . Külgserv moodustab põhjaga 45° nurga. Leida maht.

Vaatleme püramiidi SABCD... Otsitav maht: $V = 12 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot ON \cdot \frac{1}{3} SO = 2AB \cdot ON \cdot SO$. Põhja külge: $AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (ü. nr. 84). Kõrgus $SO = R$. Põhja apoteemi ON saame kolmnurgast ANO ($ON \perp AB$). Lause III: $ON^2 = OA^2 - (\frac{1}{2} AB)^2 = R^2 - (\frac{1}{2} R\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 = \frac{1}{4} R^2(2 + \sqrt{3})$, $ON = \frac{1}{2} R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Maht: $V = 2 \cdot R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

$$\cdot \frac{1}{2} R \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot R = R^3 \sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}, \text{ s. o. } V = \\ = R^3 \sqrt{4 - 3} = R^3.$$

246. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on h ja tipu juures olev tasapindne nurk $= 60^\circ$. Leida maht.

Külgtahkudeks on siin võrdhaarsed kolmnurgad. Kui niisuguse kolmnurga tipunurk $= 60^\circ$, siis on ta võrdkülgne, s. o. $SC = CD = SD = x$ (joon. 37). Otsitav maht: $V = CD^2 \cdot \frac{1}{3} SO = \frac{1}{3} CD^2 \cdot SO$, kus SO on püram. kõrgus. Püramiidi apoteem $SM = \frac{1}{2} x \sqrt{3}$; põhja apoteem $OM = \frac{1}{2} x$. Lause III: $SM^2 = OM^2 + SO^2$, s. o. $(\frac{1}{2} x \sqrt{3})^2 = (\frac{1}{2} x)^2 + h^2$ ja $x^2 = 2h^2$, $x = h\sqrt{2}$. Mahu valem: $V = \frac{1}{3} (h\sqrt{2})^2 h = \frac{2}{3} h^3$.

247. Korrap. kolmnurkse püramiidi maht on v . Kõrgus jagab läbi külgserva mineva telglõike pinna kaheks osaks nii, et üks osa on m^2 võrra suurem kui teine osa. Leida külgpind.

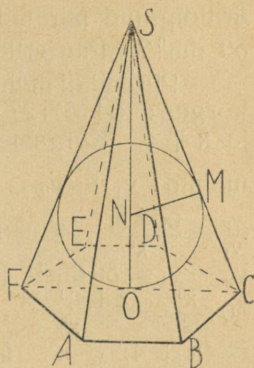
Otsitav külgpind: $Q = \frac{3}{2} CB \cdot SL$ (joon. 39). Olgu $CB = x$, $EL = r$, $SE = h$. Võrrandid: $EA = 2r$ (1); $\frac{1}{2} \cdot 2rh - \frac{1}{2} rh = m^2$, $rh = 2m^2$ (2). Lause XV: $\frac{3}{2} x \cdot r \cdot \frac{1}{3} h = v$, $xrh = 2v$ (3). Asetame teisest kolmandasse: $x \cdot 2m^2 = 2v$, s. o. $x = \frac{v}{m^2}$. Lause VII: $r = \frac{1}{8} x \sqrt{3}$, s. o. $r = \frac{v \sqrt{3}}{6m^2}$.

Teine: $\frac{v \sqrt{3}}{6m^2} \cdot h = 2m^2$, s. o. $h = \frac{12m^4}{v \sqrt{3}}$. Lause III: $SL^2 = SE^2 + EL^2 = \left(\frac{12m^4}{v \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{v \sqrt{3}}{6m^2}\right)^2$, jär. $SL = \sqrt{\left(\frac{12m^4}{v \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{v \sqrt{3}}{6m^2}\right)^2}$. Külgpinna avaldis: $Q = \frac{3v}{2m^2} \sqrt{\left(\frac{12m^4}{v \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{v \sqrt{3}}{6m^2}\right)^2} = \frac{1}{4m^4} \sqrt{3(576m^{12} + v^4)}$.

248. Korrap. 6-nurkse püramiidi telgdiagonaalpinna sissejoonestatud ringi raadius on a ja püramiidi kõrgus $= h$. Leida maht.

Korrap. kuusn. püramiidi mahu leidmiseks on piisav teada kõrgust ja põhja raadiust. Leiame põhja raadiuse $OC = CM = r$ (joon. 59). $SN = h - a$, $NM = a = NO$. Lause III: $SM^2 = SN^2 - NM^2 = (h - a)^2 - a^2 = h^2 - 2ha = h(h - 2a)$, $SM = \sqrt{h(h - 2a)}$. Püstkolmnurk SOC: $SC = r + SM = r + \sqrt{h(h - 2a)}$, $OC = r$, $SO = h$, jär. $[r + \sqrt{h(h - 2a)}]^2 = r^2 + h^2$. Peale astendamist ja lihtsustamist saame: $r\sqrt{h(h - 2a)} = ah$, $r = \frac{ah}{\sqrt{h(h - 2a)}}$.

Maht: $V = 6 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{ah}{\sqrt{h(h - 2a)}} \right)^2 \sqrt{\frac{3}{2}} h = \frac{a^2 h^2 \sqrt{3}}{2(h - 2a)}$.



Joon. 59.

249. Korrapärase 6-nurkse püramiidi külgtahu ümberjoonestatud ringi raadius on $r = 46$ ja apoteem $m = 81$. Leida 1) külgpind ja 2) maht.

1. Tarvis leida põhja külg. Lause XV: $r = \frac{ab^2}{4Q}$, kus $a = AF$, $b = AS = FS$ ja Q on külgtahu pind (joon. 46). Et aga $Q = \frac{1}{2} am$ ($m = SN$), siis $r = \frac{b^2}{2m}$ ja $b = \sqrt{2mr}$. Lause III: $AN^2 = b^2 - m^2 = 2mr - m^2$, $AN = \sqrt{m(2r - m)} = \frac{1}{2} AF$. Otsitav külgpind: $P = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{m(2r - m)} \cdot m = 6m\sqrt{m(2r - m)} = 4374\sqrt{11}$.

2. Kõrgus: $SO^2 = SA^2 - AO^2 = (\sqrt{2mr})^2 - [2\sqrt{m(2r - m)}]^2 = 4m^2 - 6mr$, $SO = \sqrt{2m(2m - 3r)}$. Maht: $V = 6 \cdot \frac{1}{4} [2\sqrt{m(2r - m)}]^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{2m(2m - 3r)} = 2m(2r - m)\sqrt{6m(2m - 3r)} = 597368$.

250. Püramiidikujuline puutükk kaalub 46,008 kg, põhja pind $= 27 \text{ dm}^2$. Kui kaugel püramiidi tipust tuleb

tõmmata põhjale kaks rööbikut tasapinda nii, et nendest äralõigatud püramiidi osa kõrgus oleks 4 dm, maht aga 30 dm³? Puu erikaal = 0,852.

Püramiidi maht: $v = 46,008 : 0,852 = 54 \text{ dm}^3$. Püramiidi kõrgus: $(54 \cdot 3) : 27 = 6 \text{ dm}$. Lõigete kaugused tipust: x ja $x + 4$. Kõrgustele x ja $x + 4$ vastavate püramiidide mahud: v_1 ja v_2 . Lause XX: $\frac{54}{v_1} = \frac{6^3}{x^3}$ ja $v_1 = \frac{1}{4} x^3$. Edasi: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{(x+4)^3}{x^3}$. Tuletisvõrre: $\frac{v_2 - v_1}{v_1} = \frac{(x+4)^3 - x^3}{x^3}$. Et aga $v_2 - v_1 = 30 \text{ dm}^3$ ja $v_1 = \frac{1}{4} x^3$, siis võime kirjutada: $30 : \frac{x^3}{4} = \frac{(x+4)^3 - x^3}{x^3}$ ja $\frac{120}{x^3} = \frac{(x+4)^3 - x^3}{x^3}$, s. o. $120 = (x+4)^3 - x^3$. Peale kuupimist ja lihtsustamist saame siit: $3x^2 + 12x - 14 = 0$, $x = (-6 + \sqrt{78}) : 3 = 0,9439 \text{ dm}$; $x + 4 = 4,9439 \text{ dm}$.

251. Marmoritükk, millel tetraeedri kuju, tarvis lõigata kaheks osaks nii, et vähema osa kaal oleks $\frac{1}{8}$ suurema osa kaalust. Kuidas seda teha?

Kui vähema osa kaal on $\frac{1}{8}$ suurema osa kaalust, siis on vähema osa kaal $\frac{1}{8}$ terve tetraeedri kaalust. Homogeensete (ühtlaste) kehade kaalud suhtuvad nagu mahud, kuid viimased suhtuvad nagu vastavate servade kuubid. Täheandab, tuleb tõmmata lõige läbi servade punktide, millede kaugused tipust = $\frac{1}{4}$ servast (64 on 4 kuup).

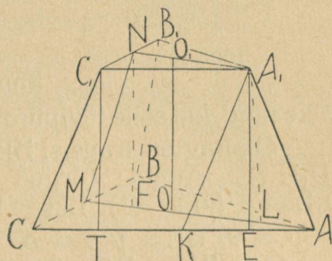
252. Püramiidikujulise puutüki kõrguseks on h ja põhjaks ruut küljega a . Temasse on tehtud õõnsus, mis on täidetud metalliga. Saadud keha kaal on p . Puu erikaal = d , metalli erikaal = d_1 . Leida metalli maht.

Püramiidi maht = $\frac{1}{3} a^2 h$, püramiidi kaal = $\frac{1}{3} a^2 h d$. Õõnsuse maht v on otsitav. Õõnsusele vastav puu kaal: vd ; õõnsusele vastav metalli kaal: vd_1 . Keha kaal: $\frac{1}{3} a^2 h d - vd + vd_1 = p$. Siit saame otsitava mahu $v = \frac{3p - a^2 h d}{3(d_1 - d)}$.

Tüvipüramiid ja tüviprisma.

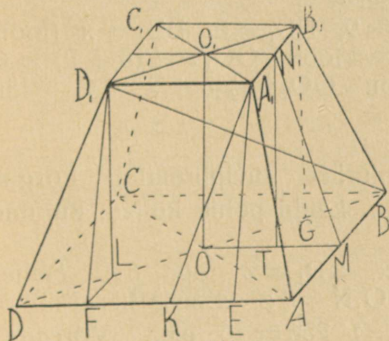
Joonosi ja lõikeid. 253. Leida korrapärase
1) kolmnurkse, 2) nelinurkse ja 3) kuusnurkse tüvi-
püramiidi kõrgus, kui tema külgserv on l , alumine
põhja külg a ja ülemine põhja külg b .

1. Antud: $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $A_1A = l$ (joon. 60). Põh-
jade keskkohad: O_1 ja O .
Kõrgus: $O_1O = A_1L$. Ra-
adiused: $OA = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, $O_1A_1 =$
 $= \frac{1}{3}b\sqrt{3}$. Sirglõik $AL = AO -$
 $- LO = AO - A_1O_1 = \frac{1}{3}a\sqrt{3} -$
 $- \frac{1}{3}b\sqrt{3} = \frac{1}{3}(a - b)\sqrt{3}$.
Lause III: $A_1L^2 = A_1A^2 -$
 $- AL^2 = l^2 - [\frac{1}{3}(a - b)\sqrt{3}]^2$,
s. o. otsitav kõrgus $A_1L =$
 $= \sqrt{l^2 - \frac{1}{3}(a - b)^2}$. Leida teisi lahendusvõimalusi. Tõm-



Joon. 60.

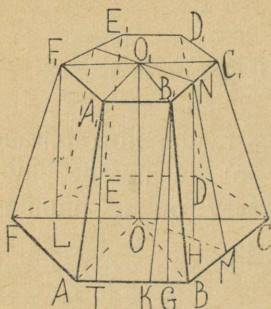
bame $A_1E \perp AC$, $C_1T \perp AC$, võib ka $A_1K \parallel C_1C$. Leiame
 $A_1E = NM$. Kolmnurk
NFM.



Joon. 61.

2. Antud: $AD = a$,
 $A_1D_1 = b$, $D_1D = l$ (joon. 61).
Otsitav kõrgus: $O_1O =$
 $= D_1L$. Põhjate diagonaa-
lide pooled: $OD = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$,
 $O_1D_1 = \frac{1}{2}b\sqrt{2}$; $DL =$
 $= OD - OL = OD - O_1D_1 =$
 $= \frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}b\sqrt{2} = \frac{1}{2}(a -$
 $- b)\sqrt{2}$. Lause III, kõrgus:
 $D_1L^2 = D_1D^2 - DL^2 = l^2 -$
 $- [\frac{1}{2}(a - b)\sqrt{2}]^2$; $D_1L =$

$= \sqrt{l^2 - \frac{1}{2}(a - b)^2}$. Leida teisi lahendusvõimalusi.



Joon. 62.

3. Otsitav kõrgus $O_1O = F_1L$ (joon. 62). Põhjade ümberjoonestatud ringide raadiused on võrdsed põhjade külgedega: $OF = AF = a$, $O_1F_1 = A_1F_1 = b$. Külgserv $F_1F = l$. Sirglõik $FL = a - b$. Lause III: $F_1L^2 = F_1F^2 - FL^2 = l^2 - (a - b)^2$, $F_1L = \sqrt{l^2 - (a - b)^2}$. Leida teisi lahendusvõimalusi.

254. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi diagonaal-lõike pind, kui selle tüvipüramiidi kõrgus on 4 ja diagonaal 5.

Otsitav on trapetsi BB_1D_1D pind: $Q = \frac{1}{2}(BD + B_1D_1) \cdot D_1L$ (1). Antud: kõrgus $D_1L = 4 = B_1G$ ja diagonaal $D_1B = 5$ (joon. 61). Lause III: $BL^2 = D_1B^2 - D_1L^2 = 5^2 - 4^2 = 9$, $BL = \sqrt{9} = 3$. Põhjade diagonaalid: $B_1D_1 = LG = BL - BG$ (2), $BD = BL + DL$, $BD = BL + BG$ (3), sest $DL = BG$. Liidame (2) ja (3), saame: $BD + B_1D_1 = 2 \cdot BL = 2 \cdot 3 = 6$. Avaldis (1): $Q = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.

255. Nelinurkse tüviprisma kolm külgserva on: 3, 5 ja 9. Leida neljas külgserv.

Olgu $CC_1 = 3$, $AA_1 = 9$, $DD_1 = 5$, $BB_1 = x$ (joon. 1). Trapetsi AA_1C_1C keskjoon $OO_1 = \frac{1}{2}(3 + 9) = 6$. Trapetsi BB_1D_1D keskjoon $OO_1 = \frac{1}{2}(5 + x) = 6$. Jär. $\frac{1}{2}(5 + x) = 6$, $x = 7$.

256. Korrapä. nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on 63 cm, apoteem = 65 cm. Leida põhja küljed, kui nad suhtuvad nagu 7:3.

Põhja küljed: $AD = x$, $A_1D_1 = z$ (joon. 61). Suhe: $x : z = 7 : 3$ (1). $OM = \frac{1}{2}x$, $O_1N = \frac{1}{2}z$. Lause III: $MT^2 = 65^2 - 63^2 = 256$, $MT = \sqrt{256} = 16$ cm. Võrrand: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = 16$ (2). Esimesest saame: $x = \frac{7}{3}z$ (3). Jär. (2): $\frac{7}{8}z - \frac{1}{2}z = 16$, $z = 24$ cm. Võrrand (3): $x = \frac{7}{3} \cdot 24 = 56$ cm.

257. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on 10 ja 2, kõrgus = 7. Leida külgserv.

Põhjade külgede poolte vahe $TM = \frac{1}{2} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 = AE$ (joon. 61). Leiame apoteemi. Lause III: $NM^2 = NT^2 + TM^2 = 7^2 + 4^2 = 65$, $NM = \sqrt{65} = A_1E$. Lause III: $A_1A^2 = A_1E^2 + AE^2 = (\sqrt{65})^2 + 4^2 = 81$, $A_1A = \sqrt{81} = 9$. Teisi võimalusi: $DB = 10\sqrt{2}$, $D_1B_1 = 2\sqrt{2}$ ine.

258. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on 2 ja 6. Külgtahk moodustab suurema põhjaga nurga 60° . Leida tüvipüramiidi kõrgus.

Põhjade sissej. ringide raadiused: $OM = \frac{1}{8} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$, $O_1N = \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ (joon. 60). Nende vahe $MF = \sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$. Tingimus: $\angle FMN = 60^\circ$. Jär. $NM = 2MF = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Otsitav kõrgus $OO_1 = NF$. Lause III: $NF^2 = NM^2 - MF^2 = (\frac{3}{2}\sqrt{3})^2 - (\frac{3}{4}\sqrt{3})^2 = 4$, $NF = \sqrt{4} = 2$.

259. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi külgserv moodustab alumise põhjaga nurga 45° ; põhjade pinnad on s ja k ($s > k$). Leida diagonaallõike pind.

Trapetsi DD_1B_1B (joon. 61) pind on otsitav: $Q = \frac{1}{2}(DB + D_1B_1) \cdot D_1L$; $D_1L \perp BD$. Põhjade küljed: $AD = \sqrt{s}$, $A_1D_1 = \sqrt{k}$. Põhjade diagonaalid: $DB = \sqrt{s} \cdot \sqrt{2}$, $D_1B_1 = \sqrt{k} \cdot \sqrt{2}$. Nende poolte vahe $DL = D_1L = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{s} - \sqrt{k})$. Tingimus: $\angle LDD_1 = 45^\circ$. Asetame leitud suurused pinna avaldisse: $Q = \frac{1}{2}(\sqrt{s} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{k} \cdot \sqrt{2}) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{s} - \sqrt{k}) = \frac{1}{2}(s - k)$.

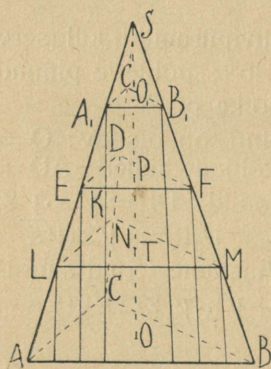
260. Tõestada, et tüvipüramiidi põhjade pinnad s ja k ($s > k$) ning kesklõike pind m on seotud võrrandiga $\sqrt{m} = \frac{1}{2}(\sqrt{s} + \sqrt{k})$. Kesklõige läheb läbi kõrguse keskkoha rööbiti põhjadega.

Tähendagu a ja b tüvipüramiidi põhjade külgi ja c kesklõike külge. Lõige ja põhjad on sarnased hulknur-

gad. Nende pinnad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud: $\frac{s}{k} = \frac{a^2}{b^2}$, $\frac{m}{k} = \frac{c^2}{b^2}$. Jär. $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{k}} = \frac{a}{b}$ (1), $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k}} = \frac{c}{b}$ (2). Võtame esimesest tulestisvõrde: $\frac{\sqrt{s} + \sqrt{k}}{\sqrt{k}} = \frac{a+b}{b}$ (3). Et aga $\frac{1}{2}(a+b) = c$ ja $a+b = 2c$, siis kolmandast saame: $\frac{\sqrt{s} + \sqrt{k}}{\sqrt{k}} = \frac{2c}{b}$ ja $\frac{\sqrt{s} + \sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = \frac{c}{b}$ (4). Võrrandid (2) ja (4): $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{s} + \sqrt{k}}{2\sqrt{k}}$. Peale korrutamist \sqrt{k} saame: $\sqrt{m} = \frac{\sqrt{s} + \sqrt{k}}{2}$.

261. Tüvipüramiidi põhjade pinnad on 12 ja 75. Põhjaga rööbikute tasapindadega on külgserv jagatud kolmeks võrdseks osaks. Leida nende lõigete pinnad.

Vaatleme tüvipüramiidi $ABCA_1B_1C_1$, milles on tõmmatud ülesandele vastavad tasapinnad (joon. 63). Tõmbame ristjooned servade ja tasapindade lõikepunktidest põhja küljele. Olgu lõigete LMN ja EFD pinnad s ja k ning $A_1B_1 = m$, $EK = x$. Võime kirjutada: $EF = m + 2x$, $LM = m + 4x$, $AB = m + 6x$. Suhted: $\left(\frac{m+6x}{m}\right)^2 = \frac{75}{12} = \frac{25}{4}$, s. o.



Joon. 63.

$$\frac{m+6x}{m} = \frac{5}{2} \text{ ja } 1 + 6 \cdot \frac{x}{m} = \frac{5}{2}, \frac{x}{m} = \frac{1}{4}$$

$$(1). \text{ Edasi: } \left(\frac{m+4x}{m}\right)^2 = \frac{s}{12}, \frac{m+4x}{m} = \sqrt{\frac{s}{12}}, 1 + 4 \cdot \frac{x}{m} = \sqrt{\frac{s}{12}}; (1)$$

põhjal $\sqrt{\frac{s}{12}} = 2$. Tõstame ruutu:

$\frac{s}{12} = 4$, $s = 48$. Sarnaselt leiame, et $k = 27$. — Kui tüvipüram. on korrapäratu, tõmbame läbi pnnktide A_1 , E ja L rööbjooned B_1B -le.

262. Tüvipüramiidi kõrgus = h ja põhjade pind on s ja k ($s > k$). Kui kaugel ülemisest põhjast asetseb põhjadega rööbik lõige, mille pind on põhjade pindade keskmine võrdeline?

Rahuldagu tüvipüramiidi ABCEFD lõike LMN pind $z = \sqrt{sk}$ ülesannet (joon. 63). Olgu tüvipüramiid ehitatud täispüramiidiks ja $PO = h$, $PT = x$, $SO = c$; jär. $SP = c - h$, $ST = c - h + x$. Suhted: $\frac{k}{s} = \left(\frac{c-h}{c}\right)^2$,

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{s}} = \frac{c-h}{c} \quad (1). \quad \text{Samuti: } \frac{\sqrt[4]{sk}}{\sqrt{s}} = \frac{c-h+x}{c}, \quad \frac{\sqrt[4]{sk}}{\sqrt{s^2}} = \frac{c-h+x}{c},$$

$$\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{s}} = \frac{c-h+x}{c} \quad (2). \quad \text{Võrrandis (1) ja (2) on tundmatud}$$

x ja c . Lahendame. Esimene: $c\sqrt{k} = c\sqrt{s} - h\sqrt{s}$,
 $c = \frac{h\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{k}}$. Teine: $c\sqrt[4]{k} = c\sqrt[4]{s} - h\sqrt[4]{s} + x\sqrt[4]{s}$,

$$c = \frac{h\sqrt[4]{s} - x\sqrt[4]{s}}{\sqrt[4]{s} - \sqrt[4]{k}}. \quad \text{Jär. } \frac{h\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{k}} = \frac{h\sqrt[4]{s} - x\sqrt[4]{s}}{\sqrt[4]{s} - \sqrt[4]{k}} \quad \text{ja}$$

$$\frac{h\sqrt[4]{s^2}}{\sqrt[4]{s^2} - \sqrt[4]{k^2}} = \frac{h\sqrt[4]{s} - x\sqrt[4]{s}}{\sqrt[4]{s} - \sqrt[4]{k}}, \quad \text{s o. } \frac{h\sqrt[4]{s}}{\sqrt[4]{s} + \sqrt[4]{k}} = h - x \quad \text{ja}$$

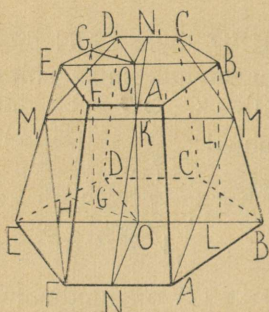
$$x = h - \frac{h\sqrt[4]{s}}{\sqrt[4]{s} + \sqrt[4]{k}} = \frac{h\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{s} + \sqrt[4]{k}}.$$

263. Tüvipüramiidi põhjade vastavad küljed suhtuvad nagu 13:17 ja kesklõike ümbermõõt = 45 dm. Leida põhjade ümbermõõdud.

Olgu otsitavad ümbermõõdud P ja p ning põhjade küljed $13x$ ja $17x$. Kesklõike külg = $\frac{1}{2}(13x + 17x) = 15x$. Sarnaste hulknurkade perimeetrid (ümbermõõdud) suhtuvad nagu vastavad küljed: $P:45 = 17x:15x$, $P = 51$ dm; $p:45 = 13x:15x$, $p = 39$ dm.

264. Korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on 2 ja 4. Teravad kahetahused nurgad on

60°. Leida selle lõike pind, mis läbi ülemise ja alumise põhja vastaskülgede läheb.

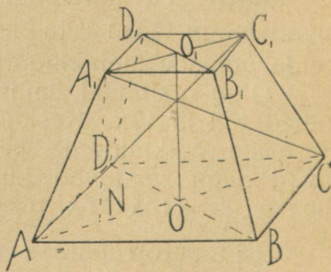


Joon. 64

Lahendame (1) ja (2): $2 \cdot O_1K + O_1K = 3$, $O_1K = 1$, $OK = 2$. Püstkolmnurkadest KO_1N_1 ja KON leiame, et $N_1K = 2$, $NK = 4$. Kolmnurgad LB_1B ja L_1B_1M on sarnased, $LB = 4 - 2 = 2$, $LB_1 = 3$, $B_1L_1 = 1 = O_1K$, s. o. $BL : L_1M = LB_1 : L_1B_1$, $2 : L_1M = 3 : 1$, $L_1M = \frac{2}{3}$. Trapetsite AMM_1F ja $MC_1D_1M_1$ ühine alus $MM_1 = 4 + 2 \cdot \frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$. Nende pinnad moodustavad otsitava pinna: $Q = \frac{1}{2}(AF + MM_1) \cdot KN + \frac{1}{2}(MM_1 + C_1D_1) \cdot N_1K = \frac{1}{2}(4 + 5\frac{1}{3}) \cdot 4 + \frac{1}{2}(5\frac{1}{3} + 2) \cdot 2 = 26$.

265. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi vastasnurkjooned on kumbki 2 ja on vastamisi risti. Leida selle tüvipüramiidi kõrgus.

Tingimusest järgneb, et nurk $A_1CN = 45^\circ$ ja $A_1N = NC$ ($A_1N \perp AC$). Võrdhaarse püstkolmnurga A_1NC (joon. 65) haar: $A_1N^2 + NC^2 = A_1C^2$, $2 \cdot A_1N^2 = 2^2$, $AN = \sqrt{2} = O_1O$. See ongi otsitav kõrgus.



Joon. 65.

Korrap. kolmnurkade kõrgused $OH = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, $O_1G_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$; vahe $GH = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$ (joon. 64). Tingimus: $\angle OHG_1 = 60^\circ$, jär, $\angle HG_1G = 30^\circ$ ja $G_1H = 2 \cdot HG = 2\sqrt{3}$. Tüvipüramiidi kõrgus $G_1G = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 = O_1O$. Kolmnurgad NOK ja N_1O_1K on sarnased, $ON = 2\sqrt{3}$, $O_1N_1 = \sqrt{3}$. Võrrid: $OK : O_1K = ON : O_1N_1$ ja $OK : O_1K = 2\sqrt{3} : \sqrt{3}$, s. o. $OK = 2 \cdot O_1K$ (1). Võrrand: $OK + O_1K = 3$ (2).

266. Korrapp. nelinurkse tüvipüramiidi suurema põhja külg on vähema põhja küljest 4 võrra suurem; kõrgus = 1. Leida külgserv.

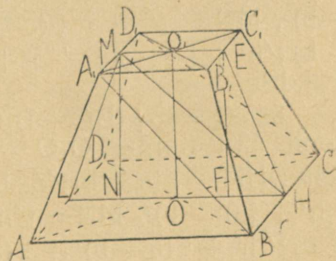
Põhjade külgede vahe $AD - A_1D_1 = 2 \cdot DF = 4$ ($D_1F \perp AD$), s. o. $DF = 2$ (joon. 61). Nurk $DFL = 90^\circ$, $DF = FL$, jär. $DL^2 = 2 \cdot DF^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$. Otsitav külgserv on D_1D ; lause III: $D_1D^2 = D_1L^2 + DL^2 = 1^2 + 8 = 9$, $D_1D = \sqrt{9} = 3$. Siinjuures $D_1L \perp BD$.

267. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kesklõike pind, kui selle tüvipüramiidi kõrgus on 1 ja vastasnurkjooned on omavahel risti.

Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kesklõige on ruut (keskl. läheb läbi kõrguse keskkoha rööbiti põhjadega), mille külg x ja diagonaal $x\sqrt{2}$ on vastavalt põhjade külgede ja põhjade diagonaalide aritmeetilised keskmised. Olgu $A_1N \perp AC$ (joon. 65). Kõrgus $A_1N = OO_1 = 1$. Ülesandest järgneb ($AC_1 \perp A_1C$), et $\angle A_1CN = 45^\circ$, s. o. $A_1N = NC = 1$. Põhjade nurkjooned: $AC = 1 + AN$, $A_1C_1 = 1 - AN$ (tõmmata punktist C_1 ristjoon AC -le). Peale liitmist saame: $AC + A_1C_1 = 2$. Lõike diagonaal $x\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Siit saame lõike külje $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Otsitav lõikepind: $Q = x^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Külj- ja täispindu. 268. Tasapind lõikab korrapp. 4- nurkset tüvipüramiidi ühte alumist ja ühte ülemist põhiserva mööda, olles risti selle külgtahuga, millel asetseb viimane põhiserv. Nende servade kaugus üksteisest on d ja selle kauguse projektsioon alumise põhja peale on p . Leida külgpind.

Otsitav külgpind koosneb neljast ühesuurusest tra-



Joon. 66.

petsist: $Q = \frac{4}{2} (AD + A_1D_1) ML$. Antud: ristlõike HML nurk $M = 90^\circ$, $MH = d$ ja $HN = p$; siinjuures $MN \perp LH$, $EF \perp LH$ (joon. 66). Põhiserv $AD = HL = HN + LN = p + LN$. Põhiserv $A_1D_1 = ME = NF = HN - FH = p - LN$, sest $FH = LN$. Lause III: $MN^2 = MH^2 - HN^2 = d^2 - p^2$. Kõrgus hüpotenuusi lõikude keskmise võrdelisena: $MN^2 = LN \cdot HN$, $d^2 - p^2 = LN \cdot p$, $LN = \frac{1}{p} (d^2 - p^2)$. Tüvip. apoteem; lause III: $ML^2 = MN^2 + LN^2 = d^2 - p^2 + \frac{1}{p^2} (d^2 - p^2)^2 = \frac{d^2}{p^2} (d^2 - p^2)$, $ML = \frac{d}{p} \sqrt{d^2 - p^2}$. Külgpind: $Q = \frac{4}{2} (p + LN + p - LN) \cdot \frac{d}{p} \sqrt{d^2 - p^2} = 4d \sqrt{d^2 - p^2}$.

269. Leida korrapärase 1) kolmnurkse, 2) nelinurkse ja 3) kuusnurkse tüvipüramiidi täispind, kui kõrgus on h ja põhjade küljed a ja b ($a > b$).

1. Otsitav pind koosneb külgpinnast ja kahest põhja pinnast: $Q = 3 \cdot \frac{1}{2} (BC + C_1B_1) \cdot MN + \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} + \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3}$ (joon. 60). Põhjade apoteemid: $OM = \frac{1}{6} a \sqrt{3}$, $O_1N = \frac{1}{6} b \sqrt{3}$. Nende vahe: $FM = \frac{1}{6} a \sqrt{3} - \frac{1}{6} b \sqrt{3} = \frac{1}{6} (a - b) \sqrt{3}$. Kõrgus $O_1O = NF = h$. Tüvipüramiidi apoteem: MN . Lause III: $MN^2 = NF^2 + FM^2 = h^2 + [\frac{1}{6} (a - b) \sqrt{3}]^2$, $MN = \sqrt{h^2 + \frac{1}{12} (a - b)^2}$. Täispind: $Q = \frac{3}{2} (a + b) \sqrt{h^2 + \frac{1}{12} (a - b)^2} + \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4} (a + b) \sqrt{36h^2 + 3(a - b)^2} + \frac{1}{4} (a^2 + b^2) \sqrt{3}$.

2. $Q = 4 \cdot \frac{1}{2} (AB + A_1B_1) MN + a^2 + b^2$ (joon. 61). Põhjade apoteemide vahe: $TM = \frac{1}{2} (a - b)$. Kõrgus: $O_1O = NT = h$. Lause III: $MN^2 = NT^2 + TM^2 = h^2 + \frac{1}{4} (a - b)^2$, $MN = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} (a - b)^2}$. Tähendab: $Q = 2 (a + b) \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} (a - b)^2} + a^2 + b^2 = (a + b) \sqrt{4h^2 + (a - b)^2} + a^2 + b^2$.

3. $Q = 6 \cdot \frac{1}{2} (BC + B_1C_1) \cdot MN + 6 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} + 6 \cdot \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3}$ (joon. 62). Kõrgus $O_1O = NH = h$. Põhjade apoteemide vahe: $HM = \frac{1}{2} (a - b) \sqrt{3}$. Lause III: $MN^2 = NH^2 + HM^2 = h^2 + \frac{3}{4} (a - b)^2$, $MN = \sqrt{h^2 + \frac{3}{4} (a - b)^2}$. Jär. $Q = 3 (a + b) \sqrt{h^2 + \frac{3}{4} (a - b)^2} + \frac{3}{2} (a^2 + b^2) \sqrt{3} = \frac{3}{2} (a + b) \sqrt{4h^2 + 3(a - b)^2} + \frac{3}{2} (a^2 + b^2) \sqrt{3}$.

270. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on 1, apoteem 2 ja nurkjoon 3. Leida külgpind.

Olgu põhjade küljed $AB = x$, $A_1B_1 = z$ (joon. 61).
 Antud: $D_1B = 3$, apoteem $NM = 2$, kõrgus $O_1O = D_1L = 1$.
 Külgpind: $Q = 4 \cdot \frac{1}{2} (x + z) NM = 4 \cdot \frac{1}{2} (x + z) \cdot 2 = 4(x + z)$.
 Lause III: $BL^2 = D_1B^2 - D_1L^2 = 3^2 - 1^2 = 8$, $BL = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
 Põhjade nurkjooned: $BD = x\sqrt{2} = BL + DL = 2\sqrt{2} + DL$;
 $B_1D_1 = z\sqrt{2} = LG = BL - GB = 2\sqrt{2} - DL$,
 sest $DL = GB$, $B_1G \perp BD$. Jär. $x = 2 + \frac{DL}{\sqrt{2}}$, $z = 2 - \frac{DL}{\sqrt{2}}$.
 Otsitav külgpind: $Q = 4 \left(2 + \frac{DL}{\sqrt{2}} + 2 - \frac{DL}{\sqrt{2}} \right) = 16$.

271. Tüvipüramiidi põhjade vastavad küljed suhtuvad nagu 3:11. Kuidas suhtuvad kesklõike (läheb läbi kõrguse keskkoha rööbiti põhjadega) läbi tekkinud külgpinna osad?

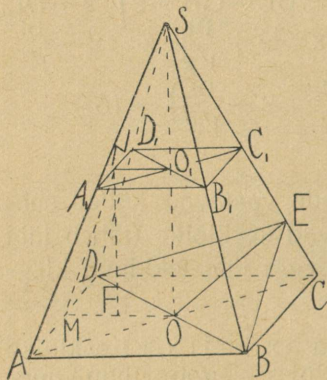
Põhjade küljed võivad olla $3x$ ja $11x$. Kesklõike külg $= \frac{1}{2}(3x + 11x) = 7x$. Kesklõike jagab tüvip. apoteemi, mis olgu m , pooleks. Ühe külgtahu pinna osad on: $Q_1 = \frac{1}{2}(7x + 3x) \cdot \frac{1}{2}m = \frac{5}{2}xm$, $Q_2 = \frac{1}{2}(7x + 11x) \cdot \frac{1}{2}m = \frac{9}{2}mx$. Nende suhe: $Q_1:Q_2 = \frac{5}{2}mx:\frac{9}{2}mx = 5:9$. Iga külgtahk on selles suhtes jagatud, jär. terve külgpind on nii jagatud.

272. Tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja pinnad on vastavalt s ja k . Leida selle põhjadega rööbiku lõikepind, mis külgpinda poolitab.

Ehitame tüvipüramiidi $ABCEFD$ täispüramiidiks (joonis 48). Otsitav on NML pind $= x$, kuna antud on $\triangle ABC$ pind $= s$, $\triangle EFD$ pind $= k$ ja $ANLC$ pind $= NEDL$ pinnaga. Püramiidi külgtahu ASC kolmnurkade pindadest saame võrrandi: $\triangle ASC - \triangle NSL = \triangle NSL - \triangle ESD$ ja $\triangle ASC = 2 \cdot \triangle NSL - \triangle ESD$ (1).
 Jagame (1) liikmed $\triangle ESD$ pinnaga: $\frac{\triangle ASC}{\triangle ESD} = 2 \cdot \frac{\triangle NSL}{\triangle ESD} -$

— 1 (2). Et aga $\frac{\triangle ASC}{\triangle ESD} = \frac{AC^2}{ED^2} = \frac{s}{k}$ ja $\frac{\triangle NSL}{\triangle ESD} = \frac{NL^2}{ED^2} = \frac{x}{k}$,
 siis teisest omame: $\frac{s}{k} = 2 \cdot \frac{x}{k} - 1$, ja $x = \frac{1}{2}(s + k)$.

273. Korrarp. 4-nurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on 4 ja 2. Külgtahkudest moodustatud kahetahused nurgad on 120° . Leida külgpind.



Joon. 67.

Tõmbame tüvipüramiidis $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ lõike BED risti servale $C_1 C$ ja apoteemi NM . Antud: $AD = 4$, $A_1 D_1 = 2$ ja $\angle BED = 120^\circ$ (joon. 67). Otsitav külgpind: $Q = 4 \cdot \frac{1}{2} (AD + A_1 D_1) NM = 2(4 + 2)NM = 12 \cdot NM$. Ehitame tüvip. täispüramiidiks. Ül. nr 157 teame, et nurk $OMN = 45^\circ$. Olgu $NF \perp \perp OM$. Põhjade apoteemide vahe $FM = 1 = NF$. Lause III: $NM^2 = FM^2 + NF^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, $NM = \sqrt{2}$. Jär.

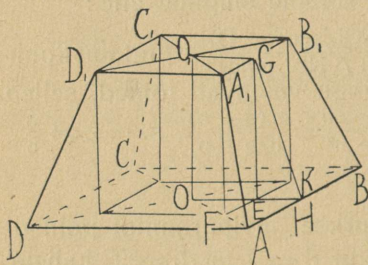
$$Q = 12\sqrt{2}.$$

Teisiti. $\angle OEB = 60^\circ$, $\angle EBO = 30^\circ$. Diagonaal $BD = 4\sqrt{2}$, $OB = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Jär. $2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot EB\sqrt{3}$, $EB = 2 \cdot 2\sqrt{2} : \sqrt{3}$; $EO = \frac{1}{2} EB$. Lause III: $EC^2 = 4^2 - (4\sqrt{2} : \sqrt{3})^2$; EO kui keskmine võrdeline. Jne.

274. Tüvipüramiidi põhjade pinnad on a^2 ja b^2 . Kuidas suhtuvad külgpinna osad, mis tekivad põhjadega rööbiti tõmmatud tasapinna ja külgpinna lõikumisel, kui selle lõike pind on põhjade pindade geomeetriline keskmine?

Tüvipüramiidi $ABCEFD$ (joon. 48) põhjade pinnad olgu a^2 ja b^2 , kuna lõike NML pind $= x$ rahuldagu tingimust $x^2 = a^2 b^2$, $x = \sqrt{a^2 b^2} = ab$. Suhe $z = (ANLC$

276. Korrar. tüvipüramiidi põhjade pinnad on M ja N . Suurem põhi ($M > N$) moodustab külgtahkudega kahetahused nurgad 60° . Leida külgpind.



Joon. 69.

Lihtsuse pärast võtame põhjade külgede arvu $n = 4$ (joon. 69). Olgu $AB = x$, $A_1B_1 = y$ ja GH tüvip. apoteem. Otsitav külgpind: $Q = 4 \cdot \frac{1}{2}(x + y) \cdot GH = 2(x + y)GH$ (1). Tingimus: $\angle GHE = 60^\circ$, s. o. $\angle HGE = 30^\circ$, $EH = \frac{1}{2}GH$. Külgtahkude projektsioonipind: $4 \cdot \frac{1}{2}(AB + FK) \cdot EH = M - N$,

$$2(x + y) \cdot \frac{1}{2}GH = M - N. \quad \text{Esimest saame nüüd: } Q = 2(M - N).$$

Mahte. 277. Korrapärase 1) kolmnurkse, 2) nelinurkse ja 3) kuusnurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on a ja b , kahetahused nurgad põhja juures $= 45^\circ$. Leida mahud.

1. Tüvipüramiidi mahu valem: $Q = \frac{1}{3}H(Q + q + \sqrt{Qq})$, kus H on kõrgus ja Q ning q põhjade pinnad. Siin on $Q = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$, $\sqrt{Qq} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4}b^2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}ab\sqrt{3}$. Tingimus: $\angle NMF = 45^\circ$ (joon. 60), s. o. kõrgus $O_1O = NF$ on niisama suur kui põhjade apoteemide vahe $MF = OM - OF = \frac{1}{8}a\sqrt{3} - \frac{1}{8}b\sqrt{3} = \frac{1}{8}(a - b)\sqrt{3}$. Otsitav maht: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(a - b)\sqrt{3} \cdot (\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} + \frac{1}{4}b^2\sqrt{3} + \frac{1}{4}ab\sqrt{3}) = \frac{1}{18}(a - b)\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot (a^2 + b^2 + ab) = \frac{1}{24}(a^3 - b^3)$.

2. $Q = AB^2 = a^2$ (joon. 61), $q = A_1B_1^2 = b^2$, $\sqrt{Qq} = \sqrt{a^2b^2} = ab$. Tingimus: $\angle NMT = 45^\circ$, s. o. tüvip. kõrgus NT võrdub põhjade apoteemide vahega: $NT = TM = \frac{1}{2}(a - b) = H$. Maht: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(a - b)(a^2 + b^2 + ab) = \frac{1}{6}(a^3 - b^3)$.

3. $Q = 6 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$, $q = 6 \cdot \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} b^2 \sqrt{3}$,
 $\sqrt{Qq} = \sqrt{\frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} b^2 \sqrt{3}} = \frac{3}{2} ab \sqrt{3}$. Kõrgus on niisama suur kui põhjade apoteemide vahe, s. o. $NH = HM = \frac{1}{2} a \sqrt{3} - \frac{1}{2} b \sqrt{3} = \frac{1}{2} (a - b) \sqrt{3}$ (joon. 62). Maht: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (a - b) \sqrt{3} (\frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} + \frac{3}{2} b^2 \sqrt{3} + \frac{3}{2} ab \sqrt{3}) = \frac{3}{4} (a^3 - b^3)$.

278. Püst-tüviprisma põhjaks on kolmnurk, mille küljed on 5, 5 ja 6; külgservad on 8, 10 ja 12. Leida maht.

Kolmnurkse tüviprisma maht võrdub kolme püramiidi mahtude summaga, kusjuures kõigi püramiidide põhjaks on prisma põhi, tippudeks aga põhjaga mitterööbiku lõike tipud. $V = Q \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$. Teisiti: Kolmnurkse tüviprisma maht võrdub ristlõike pinna ja külgservade aritmeetilise keskmise korrutisega: $V = S \cdot \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3}$.

Põhja pind: $Q = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = 12$. Otsitav maht: $V = 12 \cdot \frac{1}{3} (8 + 10 + 12) = 120$.

279. Kolmnurkse tüviprisma külgservad on 17, 25 ja 30, nende kaugused aga üksteisest on 18, 20, 34. Leida maht.

Ristlõige on kolmnurk, mille küljed 18, 20 ja 34, tema pind: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 144$. Maht: $V = 144 \cdot \frac{1}{3} (17 + 25 + 30) = 3456$.

280. Läbi korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi apoteemi a ja kõrguse tõmmatud tasapind annab lõikes kujundi, mille sissejoonestatud ringi raadius on r . Leida maht.

Tõmbame läbi tüvip. $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ vastasapoteemide $M_1 M = N_1 N = a$ lõike ja kõrguse $O_1 O = 2r$. Otsitav maht koosneb kuuest võrdsest kolmn. tüvipüramiidist: $V = 6 \cdot \frac{1}{3} O_1 O \cdot (\frac{1}{4} CD^2 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{4} C_1 D_1^2 \cdot \sqrt{3} +$

$+\frac{1}{4} CD \cdot C_1D_1 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} O_1O \cdot \sqrt{3} (CD^2 + C_1D_1^2 + CD \cdot C_1D_1)$. Võrdsed summad: $MN + M_1N_1 = M_1M + N_1N$, s. o. $2 \cdot ON + 2 \cdot O_1N_1 = 2a$. Siit saame põhjade apoteemide summa: $ON + O_1N_1 = a$ (1). Nende vahe LN ($N_1L \perp ON$) saame püstkolmnurgast N_1LN , kus $N_1L = O_1O = 2r$. Jär. $LN = \sqrt{a^2 - 4r^2}$, s. o. $ON - O_1N_1 = \sqrt{a^2 - 4r^2}$ (2). Peale liitmist ja lahutamist saame võrrandeist (1) ja (2): $ON = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4r^2})$, $O_1N_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4r^2})$. Lause V: $ON = \frac{1}{2} CD \cdot \sqrt{3}$, s. o. $CD = \frac{2 \cdot ON}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3} (a + \sqrt{a^2 - 4r^2})$. Sarnaselt: $C_1D_1 = \frac{1}{3} \sqrt{3} (a - \sqrt{a^2 - 4r^2})$. Mahu avaldis: $V = r \sqrt{3} [\frac{3}{8} (a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 4r^2} + a^2 - 4r^2) + \frac{3}{8} (a^2 - 2a\sqrt{a^2 - 4r^2} + a^2 - 4r^2) + \frac{3}{8} (a^2 - a^2 + 4r^2)]$, s. o. $V = \frac{4}{3} r \sqrt{3} (a^2 - r^2)$.

281. Leida niisuguse tüvirööptahuka maht, mille põhja pind P , kuna h_1 ja h_2 on diagonaaliga ühendatud ülemise põhja tippudest alumisele põhjale tõmmatud ristjooned.

Tõmbame tüvirööptahuka $ABCD A_1B_1C_1D_1$ ülemise põhja tippudest ja diagonaalide lõikepunktist ristjooned alla: $A_1F = h_1$, $B_1L = x_1$, $C_1M = h_2$, $D_1N = x_2$ ning $O_1O = y$. Trapetsi A_1FMC_1 alused on $A_1F = h_1$, $C_1M = h_2$, keskjoon $O_1O = y$, s. o. $\frac{1}{2}(h_1 + h_2) = y$ (1). Sarnaselt: $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = y$ (2). Esimene ja teine annavad: $\frac{1}{2}(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ja $h_1 + h_2 = x_1 + x_2$. Otsitav maht: $V = ABCA_1B_1C_1$ maht + $ACDA_1C_1D_1 = \frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{3} (h_1 + x_1 + h_2) + \frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{3} (h_1 + x_2 + h_2) = \frac{1}{6} P (2h_1 + 2h_2 + x_1 + x_2) = \frac{1}{6} P (2h_1 + 2h_2 + h_1 + h_2)$, jär. $V = P \cdot \frac{1}{2} (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} P (h_1 + h_2)$.

282. Tüvipüramiidi põhjade vastavad küljed on $a=3$ ja $b=2$. Kuidas suhtuvad omavahel kesklõike kaudu moodustatud tüvipüramiidi mahu osad?

Antud: $AC = a$, $ED = b$ (joon. 48). Otsitakse mahu suhte $NMLEFD = x$ ja $ABCNML = z$ suhet. Täiendus-püramiidi $SEFD$ maht olgu u . Kesklõike ($TP = PO$) külj on trapetsi $AEDC$ keskjoon: $NL = \frac{1}{2}(a + b)$. Lause XX:

$$\begin{aligned} \frac{u+x}{u} &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 : b^3, \quad \frac{u+x}{u} = \frac{(a+b)^3}{8b^3}. \text{ Tuletisvõrre: } \frac{u+x-u}{u} = \\ &= \frac{(a+b)^3 - 8b^3}{8b^3}, \quad \frac{x}{u} = \frac{(a+b)^3 - 8b^3}{8b^3} \quad (1). \text{ Sarnaselt: } \frac{u+x+z}{u} = \\ &= \frac{a^3}{b^3}, \quad \frac{u+x+z-u}{u} = \frac{a^3 - b^3}{b^3} \text{ ja } \frac{x}{u} + \frac{z}{u} = \frac{a^3 - b^3}{b^3}. \text{ Paneme} \\ \text{siia } \frac{x}{u} &\text{ leitud (1) suuruse asemele. Peale lihtsustamist} \\ \text{saame: } \frac{z}{u} &= \frac{8a^3 - (a+b)^3}{8b^3} \quad (2). \text{ Jagame avaldised (1) ja (2),} \\ \text{omame: } \frac{x}{z} &= \frac{(a+b)^3 - 8b^3}{8a^3 - (a+b)^3} = \frac{a^2 + 4ab + 7b^2}{b^2 + 4ab + 7a^2} = \frac{61}{91}. \end{aligned}$$

283. Tüvipüramiid, mille kõrgus k ja põhjade pinnad m ja n , on lõigatud läbi kahe tasapinnaga, mis jagavad kõrguse kolmeks võrdseks osaks ja on põhjadega paralleelsed. Leida tüvipüramiidi osade mahud.

Ehitame tüvipüramiidi täispüramiidiks, mille tipu kaugus tüvipüramiidi ülemisest põhjast olgu z . Tähendagu x ja y lõigete pindasid (altpoolt alates). Leiame z , x ja y . Lõigete pinnad suhtuvad nagu tipukauguste ruudud:

$$\begin{aligned} (k+z)^2 : z^2 &= m : n, \text{ jär. } z = \frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}. \text{ Samuti: } (k+z)^2 : \\ &: (z + \frac{2}{3}k)^2 = m : x, \text{ s. o. } x = m(z + \frac{2}{3}k)^2 : (k+z)^2 = \\ &= m\left(\frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} + \frac{2}{3}k\right)^2 : \left(k + \frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{m} + \sqrt{n}}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Sarnaselt leiame, et $y = \left(\frac{\sqrt{m} + 2\sqrt{n}}{3}\right)^2$. Esimese osa maht altpoolt alates: $V_1 = \frac{1}{9}k(m + x + \sqrt{mx})$. Siia paneme x tema väärtuse asemele. Peale lihtsustamist saame: $V_1 = \frac{k}{81}(19m + n + 7\sqrt{mn})$. Teiste osade mahud on: $V_2 = \frac{k}{81}(7m + 7n + 13\sqrt{mn})$ ja $V_3 = \frac{k}{81}(19n + m + 7\sqrt{mn})$.

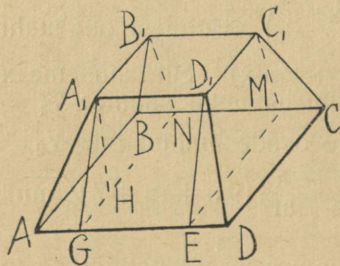
284. Korrapärase 1) kolmnurkse, 2) nelinurkse ja 3) kuusnurkse tüvipüramiidi külgserv on l ja põhiservad on a ning b . Leida igäühe maht.

1. Põhjade pinnad: $Q = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$, $q = \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3}$,
 $\sqrt{Qq} = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3}} = \frac{1}{4} ab \sqrt{3}$. Kõrguse $O_1O =$
 $= A_1L$ saame kolmnurgast A_1LA (joon. 60), kus $A_1L \perp AO$
ja põhjade ümberj. ringide raadiuste vahe $AL = \frac{1}{3} a \sqrt{3} -$
 $-\frac{1}{3} b \sqrt{3} = \frac{1}{3} (a - b) \sqrt{3}$. Lause III: $A_1L^2 = A_1A^2 - AL^2 =$
 $= l^2 - \frac{1}{3} (a - b)^2$, $A_1L = \sqrt{l^2 - \frac{1}{3} (a - b)^2}$. Otsitav maht:
 $V = \frac{1}{3} \sqrt{l^2 - \frac{1}{3} (a - b)^2} \cdot (\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} + \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3} + \frac{1}{4} ab \sqrt{3}) =$
 $= \frac{1}{12} (a^2 + ab + b^2) \sqrt{3} l^2 - (a - b)^2$.

2. Kõrguse leiame püstkolmnurgast D_1LD (joon. 61):
 $D_1L^2 = l^2 - [\frac{1}{2} (a - b) \sqrt{2}]^2 = l^2 - \frac{1}{2} (a - b)^2$, $D_1L =$
 $= \sqrt{l^2 - \frac{1}{2} (a - b)^2}$. Maht: $V = \frac{1}{3} \sqrt{l^2 - \frac{1}{2} (a - b)^2} (a^2 + ab +$
 $+ b^2) = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2) \sqrt{l^2 - \frac{1}{2} (a - b)^2}$.

3. Kõrguse saame püstkolmnurgast F_1LF (joon. 62),
kus $FL = a - b$. Lause III: $F_1L^2 = F_1F^2 - FL^2 = l^2 -$
 $-(a - b)^2$, $F_1L = \sqrt{l^2 - (a - b)^2}$. Maht: $V = \frac{1}{6} \sqrt{l^2 - (a - b)^2} \cdot$
 $\cdot (\frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} + \frac{3}{2} b^2 \sqrt{3} + \frac{3}{2} ab \sqrt{3}) = \frac{1}{2} \sqrt{3} (a^2 + ab + b^2) \cdot$
 $\cdot \sqrt{l^2 - (a - b)^2}$.

285. Korrapärane nelinurkne tüvipüramiid on ja-
gatud kolmeks osaks tasapindadega, mis läbi ülemise
põhja vastaskülgede tõmmatud ja mis alumise põhjaga
risti on. Leida iga osa maht, kui tüvip. kõrgus on 4 dm,
aga põhjade küljed 2 ja 5 dm.

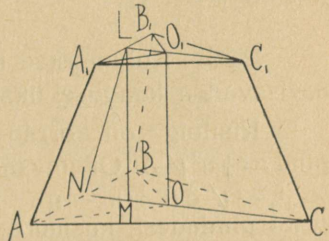


Joon. 70.

Olgu A_1B_1NG ja C_1D_1EM
(joon. 70) ülesandes nim. ta-
sapinnad. Keskmise osa on
nelinurkne püstprisma, mille
põhjaks trapets GA_1B_1N ja
kõrguseks $A_1D_1 = 2$ dm. Te-
ma maht: $V_1 = \frac{1}{2} (A_1B_1 + GN) \cdot$
 $\cdot A_1H \cdot A_1D_1 = \frac{1}{2} (2 + 5) \cdot 4 \cdot 2 =$
 $= 28 \text{ dm}^3$. Tüvipüramiidi
maht $= \frac{4}{3} (5^2 + 2^2 + 5 \cdot 2) =$
 $= 52 \text{ dm}^3$. Äärmiste osade
mahud: $V_2 = V_3 = \frac{1}{2} (52 -$
 $- 28) = 12 \text{ dm}^3$. ($A_1H \perp GN$).

286. Tüvipüramiidi kõrgus on 13. Tema alumiseks põhjaks on võrdhaarne kolmnurk alusega 12 cm ja haaraga 10 cm. Ülemise põhja ümbermõõt on 16 cm. Põhjade nurgapoolitajate lõikepunktid asuvad ühel põhjadega perpendikulaarsel sirgel. Leida maht ja külgpind.

Põhjad on sarnased hulknurgad, nende ümbermõõdud suhtuvad nagu vastavad küljed. Vastaku alusele $AB = c = 12$ cm (joon. 71) vähemas põhjas $A_1B_1 = c_1$. Võime järeldada, et $c_1 : c = 16 : (12 + 10 + 10)$, s. o. $c_1 = 6$ cm. Alus on poolevähem ($12 : 2 = 6$), samuti ka haarad: $B_1C_1 = A_1C_1 = a_1 = b_1 = 5$ cm.



Joon. 71.

Alumise põhja pind $Q = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 48$ cm². Ülemise põhja pind on 4 korda ($2^2 = 4$) vähem: $q = 48 : 4 = 12$ cm². Maht: $V = \frac{1}{3}(48 + 12 + \sqrt{48 \cdot 12}) = 364$ cm³. — Kolmnurga nurgapoolitajad lõikuvad sissej. ringi keskpunktis. Külgtahu kõrgus, lause III: $LN^2 = LM^2 + NM^2$ (1), kus $NM = ON - LO_1$ on raadiuste vahe ja $LM = 13 = O_1O =$ kõrgus. Raadius (XV): $ON = 48 : \frac{3}{2} = 32$ cm. Teine raadius on poolevähem: $LO_1 = 16$ cm. Jär. $NM = 32 - 16 = 16$ cm. Paneme asemele (1): $LN^2 = 13^2 + 16^2 = 413$, $LN = \sqrt{413}$ cm. Teiste tahkude kõrgused on niisama suured. Külgpind: $P = \frac{1}{2}(12 + 6) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{413} + 2 \cdot \frac{1}{2}(10 + 5) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{413} = 12 \sqrt{413}$ cm².

287. Leida korrap. 4-nurkse tüvipüramiidi põhiservad, kui selle tüvip. kõrgus on 12, põhiservade vahe on 10 ja täispind on 512.

Otsitavad on $AD = x$ ja $A_1D_1 = y$ (joon. 61). Tingimuse järgi: $x - y = 10$ (1), kõrgus $O_1O = D_1L = 12$, täispind: $4 \cdot \frac{1}{2}(x + y)z + x^2 + y^2 = 512$ (2), kus apoteem $A_1E = D_1F = z$. Põhiservade vahe: $x - y = 2 \cdot DF = 10$

($DF = AE$), siit saame $DF = 5 = LF$, sest püstkolmnurk DFL on võrdhaarne ($D_1F \perp AD$, $D_1L \perp DB$, $LF \perp AD$).
Teoreem III: $D_1F^2 = D_1L^2 + LF^2$, s. o. $z^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, $z = \sqrt{169} = 13$. Võrrandist (1) omame: $x = 10 + y$ (3). Võrrand (2): $2(10 + y + y) \cdot 13 + (10 + y)^2 + y^2 = 512$, $y^2 + 36y - 76 = 0$, $y = 2$. Teise põhja serv (3): $x = 10 + 2 = 12$.

288. Kolmnurkse tüviprisma külgservad l , m ja n asetsevad a kaugusel üksteisest. Leida maht ja külgpind,

Ristlõige on korr. kolmnurk, mille külg $= a$; jär. pind $= \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$. Otsitav maht: $V = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} (l + m + n) = \frac{1}{9} a^2 \sqrt{3} (l + m + n)$. Külgpind P koosneb kolme trapetsi pindadest, kusjuures kõigi trapetsite kõrgused $= a$, aga alused on l ja m , l ja n , m ja n . Tähendab: $P = \frac{1}{2} (l + m) a + \frac{1}{2} (l + n) a + \frac{1}{2} (m + n) a = a (l + m + n)$.

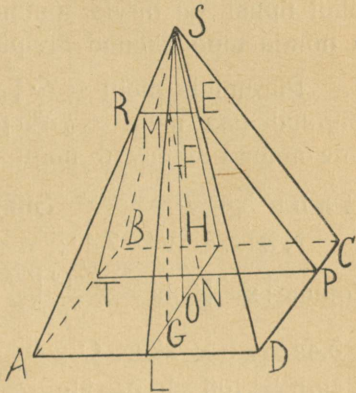
289. Korrapärase nelinurkses tüviprismas on antud põhja serv $= a$, kaks lähiskülgserva on kumbki b , aga kaks teist $= c$. Leida maht ning külgpind.

Eritleme tüviprismat $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, kus $AB = BC = CD = DA = a$, $A_1 A = D_1 D = c$ ja $B_1 B = C_1 C = b$. Mahu leidmiseks jagame tüviprisma tasapinnaga $BB_1 D_1 D$ kaheks kolmnurkseks tüviprismaks. Maht: $V = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{3} (b + b + c) + \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{3} (c + c + b) = \frac{1}{2} a^2 (b + c)$. Külgpind S koosneb kahe püstküliku $AA_1 D_1 D$ ja $BB_1 C_1 C$ ning kahe trapetsi $AA_1 B_1 B$ ja $DD_1 C_1 C$ pindadest: $S = ac + ab + 2 \cdot \frac{1}{2} (b + c) a = 2 a (b + c)$.

290. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhja külg on a ja kõrgus h . See püramiid on lõigatud läbi kõrguse keskkoha külgtahule rööbiku tasapinnaga. Missugusteks osadeks jaguneb püramiidi maht?

Olgu lõige $TPER$ ja külgtahk BSC rööbikud (joon. 72) ja $OF = \frac{1}{2} SO = \frac{1}{2} h$, põhja külg $= a$. Läbi kõrguse tõmbame põhja küljele ristlõike LSH . Kolmnurgad LMN ja LSH on sarnased, sest $MN \parallel SH$. Kolmnurgas SOH on

$OF = \frac{1}{2}SO$ ja $FN \parallel SH$, jär. $ON = \frac{1}{2}OH = \frac{1}{4}a$. Kolm-
 nurga LMN alus $LN =$
 $= \frac{3}{4}a$, ka kõrgus $MG = \frac{3}{4}h$.
 Ristlõike LMN pind $= \frac{1}{2}LN \cdot$
 $\cdot MG = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{3}{4}h = \frac{9}{8}ah$.
 Servad: $AD = TP = a$,
 $RE = \frac{1}{4}a$. Osa $RTAEPD$ on
 tüüpiprisma, tema maht
 on $\frac{9}{8}ah \cdot \frac{1}{3}(2a + \frac{1}{4}a) =$
 $= \frac{27}{128}a^2h$. Terve püramiidi
 maht $= a^2 \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}a^2h$. Osa
 $BCSREPT$ maht: $\frac{1}{3}a^2h -$
 $- \frac{27}{128}a^2h = \frac{47}{384}a^2h$.



Joon. 72.

291. Korrapärase
 kuusnurkse tüüpipüramiidi
 maht on v , kõrgus h ja
 alumise põhja serv a . Leida
 ülemine põhja serv.

Mahu valemis $v = 6 \cdot \frac{1}{3}h (\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} + \frac{1}{4}b^2\sqrt{3} +$
 $+ \frac{1}{4}ab\sqrt{3})$ on tundmatu b . Peale lihtsustamist omame
 ruutvõrrandi $3hb^2 + 3hab + 3ha^2 - 2v\sqrt{3} = 0$, mille po-
 sitiivne juur on otsitav põhjaserf $b = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{2v}{\sqrt{3}h} - \frac{3a^2}{4}}$.

Märkus. Numbriliste arvudega on see ülesanne
 võimalik kahel tingimusel: 1) $\frac{2v}{\sqrt{3}h} - \frac{3a^2}{4} > 0$, 2) $\sqrt{\frac{2v}{\sqrt{3}h} -$
 $-\frac{3a^2}{4}} > \left| -\frac{a}{2} \right|$. Esimesest omame $v > \frac{3}{8}a^2h\sqrt{3}$. Aga
 $\frac{3}{8}\sqrt{3} \approx 0,7$ (liiaga), jär. $v > 0,7a^2h$ (1). Teisest saame
 peale ruutimist ja lihtsustamist $v > \frac{1}{2}a^2h\sqrt{3}$. Aga $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx$
 $\approx 0,9$ (liiaga), jär. $v > 0,9a^2h$ (2). Tingimus (1) on täi-
 detud, kui (2) on täidetud ($0,9a^2h > 0,7a^2h$), sellepärast
 omame lõplikult ühe tingimuse: ülesanne on võimalik,
 kui $v > 0,9a^2h$.

Näide $v = 10,5 \text{ m}^3$, $h = \sqrt{3} \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$. Jär.
 $b = 1 \text{ m}$.

292. Korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrgus on h ja põhja serv a . Leida x , mille kaugusel püramiidi tipust on tarvis tõmmata⁴ põhjale rööbik tasapind, et nõnda moodustatud tüvipüramiidi maht oleks v .

Püramiidi maht $= 6 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{2} a^2 h \sqrt{3}$. Äralõigatud osa maht $= \frac{1}{2} a^2 h \sqrt{3} - v$. Sarnaste püramiidide mahud suhtuvad nagu kõrguste kuubid: $\frac{1}{2} a^2 h \sqrt{3} : (\frac{1}{2} a^2 h \sqrt{3} - v) = h^3 : x^3$. Siit leiame $x = \sqrt[3]{\frac{3a^2 h^3 - 2vh^2 \sqrt{3}}{3a^2}}$.

Näide. $v=67,49$; $a=8,52$; $h=14,1$. Leida x .
Võtame: $x = \sqrt[3]{h^3 - \frac{2vh^2 \sqrt{3}}{3a^2}}$. Logaritmime: $\lg h^3 = 3 \lg h = 3,4476$; $h = 2803$. Olgu $m = \frac{2vh^2 \sqrt{3}}{3a^2}$; $\lg m = \lg 2 + \lg v + 2 \lg h + \frac{1}{2} \lg 3 - \lg 3 - 2 \lg a = 2,3293$; $m = 213,5$. Vahe: $h^3 - m = 2589,5$. Jär. $x = \sqrt[3]{2589,5}$; $\lg x = \frac{1}{3} \lg 2589,5 = 1,1377$; $x = 13,73$. Viie kohaga: $\lg x = 1,13776$; $x = 13,733$.

Järelekatse. Äralõigatud püramiidi kõrgus on $x = 13,733$, kuna põhja külje a_1 saame võrdest $a_1 : a = x : h$; $a_1 = \frac{ax}{h}$. Antud püramiidi maht $V_1 = 6 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{2} a^2 h \sqrt{3}$; $\lg V_1 = 2,94763$; $V_1 = 886,4$. Äralõigatud püramiidi maht $V_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{xa}{h}\right)^2 x \sqrt{3}$; $\lg V_2 = 2,91325$; $V_2 = 818,94$. Vahe: $V_1 - V_2 = 67,46 \approx v$. Rahuldab.

293. Tüvipüramiidi põhjade pinnad on $s = 245$ ja $k = 45$, maht $v = 1975$. Leida täiendus. kõrgus ja maht.

Täienduspüramiidi kõrgus $= x$. Tüvipüramiidi kõrguse z määrame võrrandist $\frac{1}{3} z (s + k + \sqrt{sk}) = v$, $z = \frac{3v}{s + k + \sqrt{sk}}$ (1). Lause XIX: $\left(\frac{x+z}{x}\right)^2 = \frac{s}{k}$, $\frac{x+z}{x} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{k}}$.

Tuletisvõrre: $\frac{x+z-x}{x} = \frac{\sqrt{s} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}}$. Siit saame: $x = \frac{z \sqrt{k}}{\sqrt{s} - \sqrt{k}}$. Esimese põhjal: $x = \frac{3v \sqrt{k}}{(\sqrt{s} - \sqrt{k})(s + k + \sqrt{sk})}$.

$$= \frac{3v\sqrt{k}}{\sqrt{s^3} - \sqrt{k^3}}, \text{ s. o. } x = \frac{3v\sqrt{k}}{s\sqrt{s-k}\sqrt{k}} = 11,25. \quad - \text{ Maht:}$$

$$V = k \cdot \frac{1}{3} x = \frac{vk\sqrt{k}}{s\sqrt{s-k}\sqrt{k}} = 168,75.$$

294. Tüvipüramiidi maht = 76 m^3 , kõrgus on 6 m . Ühe põhja pind on 18 m^2 . Leida teise põhja pind.

Otsitav põhja pind = x . Mahu valem: $\frac{1}{3} \cdot 6(18+x + \sqrt{18x}) = 76$. Jär. $x + 3\sqrt{2x} - 20 = 0$ (1). Võtame $\sqrt{x} = z$ (2). Esimene: $z^2 + 3\sqrt{2} \cdot z - 20 = 0$, $z = (-3 \cdot \sqrt{2} \pm \sqrt{18 + 80}) : 2$. Tähendab: $z = (-3\sqrt{2} + 7\sqrt{2}) : 2 = 2\sqrt{2}$. Teine: $\sqrt{x} = 2\sqrt{2}$, $(\sqrt{x})^2 = (2\sqrt{2})^2$, $x = 8 \text{ m}^2$.

295. Tüvipüramiidi maht on 42 m^3 , kõrgus = 9 m . Leida põhjade pinnad, kui nende vahe on 6 m^2 .

Mahu valem: $\frac{1}{3} \cdot 9(x + y + \sqrt{xy}) = 42$, jär. $x + y + \sqrt{xy} = 14$ (1), kus x ja y on tüvipüramiidi põhjade pinnad. Vahe $x - y = 6$ (2). Lahendame võrrandid (1) ja (2): $x = 6 + y$ (2); $6 + y + y + \sqrt{(6 + y)y} = 14$ (1) ja $\sqrt{(6 + y)y} = 8 - 2y$. Peale ruutimist ja lihtsustamist saame siit $3y^2 - 38y + 64 = 0$, $y = 2 \text{ m}^2$, ($y = 10\frac{2}{3}$). Tähendab: $x = 6 + 2 = 8 \text{ m}^2$.

296. Tüvipüramiidi maht on 475 m^3 ja kõrgus = 15 m . Leida põhjade pinnad, kui nende suhe on $4:9$.

Mahu valem: $\frac{1}{3} \cdot 15(x + y + \sqrt{xy}) = 475$, jär. $x + y + \sqrt{xy} = 95$ (1), kus x ja y on otsitavad pinnad. Suhe: $x : y = 4 : 9$ annab $x = \frac{4}{9}y$ (2). Esimesest omame nüüd: $\frac{4}{9}y + y + \sqrt{\frac{4}{9}yy} = 95$ ja $y = 45 \text{ m}^2$. Teine: $x = \frac{4}{9} \cdot 45 = 20 \text{ m}^2$.

297. Tüvipüramiidi põhjade vastavad küljed suhtuvad nagu $5:8$, maht on 1720 m^3 ja kõrgus = 20 m . Leida põhjade pinnad.

Mahu valem: $\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot (x + y + \sqrt{xy}) = 1720$, jär. $x + y + \sqrt{xy} = 258$ (1), kus x ja y on otsitavad pinnad.

Põhjade pinnad suhtuvad nagu põhjade külgede ruudud: $x:y = 25:64$, s. o. $x = \frac{25}{64}y$ (2). Võrrand (1): $\frac{25}{64}y + y + \sqrt{\frac{25}{64}y^2} = 258$, $y = 128 \text{ m}^2$. Võrrand (2): $x = \frac{25}{64} \cdot 128 = 50 \text{ m}^2$.

298. Korrab. 6-nurkse tüvipüramiidi telgdiagonaal-
löike ümberjoonestatud ringi keskpunkti kaugus alumisest
põhjast on 9 cm ja ülemisest põhjast 12 cm. Leida
1) maht ja 2) külgpind, kui ringi raadius on 15 cm,

1. Otsitav maht: $V = \frac{1}{3} O_1 O \cdot (6 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} + 6 \cdot \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3} + 6 \cdot \frac{1}{4} ab \sqrt{3}) = \frac{1}{2} O_1 O \cdot \sqrt{3} (a^2 + b^2 + ab)$, kus põhjade keskpunktide ühendusjoon $O_1 O = 9 + 12 = 21 \text{ cm}$ on kõrgus ja a ning b põhjade küljed. Mingu ring P läbi külgserva $A_1 A$ otste. Omame: $O_1 P = 12 \text{ cm}$, $OP = 9 \text{ cm}$, $A_1 P = 15 \text{ cm}$, $AP = 15 \text{ cm}$. Lause III: $O_1 A_1^2 = A_1 P^2 - O_1 P^2 = 15^2 - 12^2 = 81$, $O_1 A_1 = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$, s. o. $b = 9 \text{ cm}$. Samuti $OA = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ cm}$, s. o. $a = 12 \text{ cm}$. Maht: $V = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot \sqrt{3} (144 + 81 + 108) = 3496,5 \sqrt{3} \text{ cm}^3$.

2. Külgpind: $Q = 6 \cdot \frac{1}{2} (a + b) c = 3(a + b) c$, kus c on tüvip. apoteem. Selle apoteemi saame püstkolmnurga hüpotenuusina, kuna tüvipüramiidi kõrgus = 21 cm ja põhjade apoteemide vahe = $\frac{1}{2} a \sqrt{3} - \frac{1}{2} b \sqrt{3} = \frac{1}{2} (12 - 9) \sqrt{3} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \text{ cm}$ on kaatetiteks. Lause III: $c^2 = 21^2 + (\frac{3}{2} \sqrt{3})^2 = 441 + \frac{27}{4} = \frac{1749,1}{4}$, $c = \frac{1}{2} \sqrt{1791} \text{ cm}$. Tähenab: $Q = 3(12 + 9) \frac{1}{2} \sqrt{1791} = 31,5 \sqrt{1791} \text{ cm}^2$.

299. Korrab. 4-nurkse tüvipüram. põhjade küljed on a ja b . Külgpind võrdub põhjade pindade summaga. Leida kõrgus.

Otsitav on tüvipüramiidi kõrgus $O_1 O = D_1 L = x$ (joon. 61). Tingimus: $4 \cdot \frac{1}{2} (a + b) \cdot D_1 F = a^2 + b^2$ ($D_1 F \perp AD$) ja $D_1 F = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}$. Lause III: $D_1 L^2 = D_1 F^2 - FL^2$, kus $FL = DF = \frac{1}{2} (a - b)$, s. o. $x^2 = \left[\frac{a^2 + b^2}{2(a + b)} \right]^2 - \left[\frac{a - b}{2} \right]^2 = \frac{a^2 b^2}{(a + b)^2}$ ja $x = \frac{ab}{a + b}$.

300. Tüvipüramiidil, mille põhjade küljed suhtuvad nagu 5:2, on jagatud kõrgus põhjadele rööbikute tasapindadega kolmeks võrdseks osaks. Kuidas suhtuvad saadud osade mahud?

Ehitame tüvipüramiidi täispüramiidiks. Tähendagu x , y ja z tüvipüramiidi osade mahte (ülevalt alates) ja v täienduspüramiidi $SA_1B_1C_1$ mahtu (joon. 63). Ülesande järgi võivad põhjade küljed olla: $A_1B_1 = 2k$, $AB = 5k$. Tõmbame ristjooned külgservade ja tasapindade lõikepunktidest põhja küljele AB . Olgu $EK = u$ ja püramiid korrapärane (korrapäratul juhtumil tõmbaksime läbi ühe serva punktide paralleelid teisele). Esimese lõike külge $EF = 2k + 2u$, teise lõike külge $LM = 2k + 4u$, $AB = 2k + 6u = 5k$. Viimasest võrrandist saame: $u = \frac{1}{2}k$. Jär. $EF = 3k$ ja $LM = 4k$. Lause XX: $\frac{v+x}{v} = \left(\frac{3k}{2k}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

Jagame v -ga: $\frac{v}{v} + \frac{x}{v} = \frac{27}{8}$, s. o. $\frac{x}{v} = \frac{19}{8}$, $x = \frac{19}{8}v$. Teine osa: $\frac{v+x+y}{v} = \left(\frac{4k}{2k}\right)^3$, $1 + \frac{x}{v} + \frac{y}{v} = \frac{64}{8}$, $\frac{y}{v} = \frac{64}{8} - 1 - \frac{19}{8} = \frac{37}{8}$, $y = \frac{37}{8}v$. Kolmas osa: $\frac{v+x+y+z}{v} = \left(\frac{5k}{2k}\right)^3$, $1 + \frac{x}{v} + \frac{y}{v} + \frac{z}{v} = \frac{125}{8}$, $\frac{z}{v} = \frac{61}{8}$, s. o. $z = \frac{61}{8}v$. Tähendab: $x:y:z = \frac{19}{8}v : \frac{37}{8}v : \frac{61}{8}v = 19:37:61$.

301. Tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja pinnad on vastavalt a^2 ja b^2 . Leida lõike pind, mis tüvipüramiidi mahu poolitab ja mis põhjadega rööbiti on.

Ehitame tüvip. täispüramiidiks (joon. 48). Antud: $\triangle ABC$ pind $= a^2$, $\triangle EFD$ pind $= b^2$. Otsitav $\triangle NML$ pind $= x^2$. Olgu täienduspüramiidi $SEFD$ maht $= v$ ja iga võrdse osa maht $= v_1$. Lause XX: $\frac{v+v_1}{v} = \frac{NL^3}{ED^3}$ (1). Aga $\frac{NL^2}{ED^2} = \frac{x^2}{b^2}$ ja $\frac{NL}{ED} = \frac{x}{b}$. Jär. esimesest saame: $\frac{v+v_1}{v} = \frac{x^3}{b^3}$ ja $1 + \frac{v_1}{v} = \frac{x^3}{b^3}$, $\frac{v_1}{v} = \frac{x^3}{b^3} - 1$ (2). Edasi: $\frac{v+2v_1}{v} = \frac{AC^3}{ED^3}$ (3). Aga $\frac{AC^2}{ED^2} = \frac{a^2}{b^2}$ ja $\frac{AC}{ED} = \frac{a}{b}$. Sellepärast (3)

omame: $1 + 2 \cdot \frac{v_1}{v} = \frac{a^3}{b^3}$. Teise põhjal saame: $1 + 2 \left(\frac{x^3}{b^3} - 1 \right) = \frac{a^3}{b^3}$. Jär. $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(a^3 + b^3)}$ ja $x^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(a^3 + b^3)^2}$.

302. Tüvipüramiidi vastavad põhjade küljed suhtuvad nagu 1:4. Põhjadega rööbik tasapind jagab selle tüvip. külgpinna osadeks, mille suhe 1:4. Kuidas suhtuvad mahu osad?

Ehitame tüvipüramiidi täispüramiidiks (joon. 48). Olgu täienduspüramiidi SEFD maht v ja järgnevate osade mahud v_1 ning v_2 . Tasapind NML, mis külgpinna jagab 1:4 suhtes, jagab ka külgtahu AEDC pinna samas suhtes 1:4. Tähendagu s kolmnurga ESD pinda ja s_1 ja s_2 tahu AEDC osade pindasid. Põhiservad: $ED = x$ ja $AC = 4x$. Avaldame lõike NML külje NL ka x kaudu.

Kasutame pindade ja külgede suhteid: $\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{4}$, $s_2 = 4 s_1$
 (1); $\frac{s + s_1 + s_2}{s} = \left(\frac{4x}{x} \right)^2 = 16$, (1) põhjal $\frac{s + s_1 + 4 s_1}{s} = 16$ ja $\frac{s_1}{s} = 3$. Edasi: $\frac{NL^2}{x^2} = \frac{s + s_1}{s} = 1 + \frac{s_1}{s} = 1 + 3 = 4$. Jär. $\frac{NL}{x} = 2$, $NL = 2x$. Mahtude suhted: $\frac{v + v_1}{v} = \left(\frac{NL}{x} \right)^3 = \left(\frac{2x}{x} \right)^3 = 8$, s. o. $1 + \frac{v_1}{v} = 8$ ja $\frac{v_1}{v} = 7$, $v_1 = 7v$; $\frac{v + v_1 + v_2}{v} = \left(\frac{AC}{ED} \right)^3 = \left(\frac{4x}{x} \right)^3 = 64$ ja $1 + \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} = 64$, $1 + 7 + \frac{v_2}{v} = 64$, $\frac{v_2}{v} = 56$, $v_2 = 56v$. Otsitav suhe: $v_1 : v_2 = 7v : 56v = 1 : 8$.

303. Kahe sarnase hulktahu mahtude summa on v , vastavate servade suhe $= m:n$. Leida hulktahkude mahud.

Olgu ühe hulktahu maht x , teise maht on siis $v - x$.
 Teoreem XX: $x : (v - x) = m^3 : n^3$, millest $x = \frac{m^3 v}{m^3 + n^3}$.
 Teise maht: $v - x = v - \frac{m^3 v}{m^3 + n^3} = \frac{n^3 v}{m^3 + n^3}$.

304. Jagada tüvipüramiidi maht põhjadele B ja b rööbiku tasapinnaga m:n suhtes.

Ehitame tüvipüramiidi $NMLN_1M_1L_1$, mille põhjade pinnad $NML = B$ ja $N_1M_1L_1 = b$ ning kõrgus $O_1O = H$, täispüramiidiks $SNML$. Olgu tipu S kaugus põhjadest ja lõikest EFD, mis tüvip. mahu antud suhtes jagab, vastavalt $SO_1 = x$, $SO = u$ ja $SK = z$, täienduspüramiidi maht = v, osade mahud v_1 ja v_2 . Tingimus: $v_1 : v_2 = m : n$. Et lõiget tõmmata, peame teadma, kui kaugel

ta asetseb ühest põhjast. Lause XIX: $\frac{u^2}{x^2} = \frac{B}{b}$, $\frac{u}{x} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}}$

$$(1). \text{ Tuletisvõrrre: } \frac{u-x}{x} = \frac{\sqrt{B}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}, \quad \frac{H}{x} = \frac{\sqrt{B}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}},$$

$$x = \frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} \quad (2). \text{ Esimene ja teine: } u = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} \cdot x =$$

$$= \frac{H\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} \quad (3). \text{ Leiame lõike kauguse tipust S. } \frac{v_1}{v_2} =$$

$$= \frac{m}{n}, \quad v_2 = \frac{n}{m} v_1 \quad (4); \quad \frac{v+v_1}{v} = \frac{z^3}{x^3}, \quad \frac{v_1}{v} = \frac{z^3-x^3}{x^3} \quad (5), \quad \frac{v+v_1+v_2}{v} =$$

$$= \frac{u^3}{x^3}. \text{ Neljanda põhjal saame viimasest võrrandist}$$

$$\frac{v+v_1+\frac{n}{m}v_1}{v} = \frac{u^3}{x^3}, \quad \frac{v_1+\frac{n}{m}v_1}{v} = \frac{u^3-x^3}{x^3}, \quad \frac{v_1(m+n)}{mv} =$$

$$= \frac{u^3-x^3}{x^3} \quad (6). \text{ Peale kuuenda võrrandi jagamist viiendaga}$$

$$\text{omame } \frac{m+n}{m} = \frac{u^3-x^3}{z^3-x^3}. \text{ Järelikult } z^3 = \frac{mu^3+nx^3}{m+n}. \text{ Teise}$$

ja kolmanda abil eraldame u ja x, Peale lihtsustam. leiame:

$$z = \frac{H}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} \sqrt[3]{\frac{m\sqrt{B^3+n\sqrt{b^3}}}{m+n}}. \text{ Lõike kaugus suure-}$$

$$\text{mast põhjast on } u-z = \frac{H\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} - \frac{H}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} \cdot$$

$$\sqrt[3]{\frac{m\sqrt{B^3+n\sqrt{b^3}}}{m+n}} = \frac{H}{\sqrt{B}+\sqrt{b}} \left(\sqrt{B} - \sqrt[3]{\frac{m\sqrt{B^3+n\sqrt{b^3}}}{m+n}} \right).$$

Trükivigu!

Lk. Rida.	On:	Peab olema:
3 12 alt	külja	külje
4 1 "	ta kaldjoone	ta projektsiooni tasapinnal on ja kaldjoone
5 5 "	$x^2 = px + q = 0$	$x^2 + px + q = 0$
17 10 "	kaugust _g	kaugus

A-8394

Samalt autorilt on varem ilmunud:

1. **Analüütilise geomeetria põhijooni ja ülesandeid.**
Hind 75 senti.
Gümnaasiumi humanitaarharu kursus, kohane ka iseõppimiseks. On püütud anda rohkem praktilisi võtteid, asetades valemid teisele kohale.
2. **Trigonomeetrilisi planimeetria ülesandeid.**
Hind 65 senti.
Keskkooli kursus. Vastused nelja- ja viiekohaliste logaritmid järgi. Näiteid log. tabelite tarvitamisest. Tarvilik vahend planimeetria ja trigonomeetria kordamisel ning trigonomeetriliste valemite arvutamisel.
3. **Trigonomeetrilisi stereomeetria ülesandeid.**
Hind 75 senti.
Keskkooli kursus. Vastused nelja- ja viiek. log. järgi. Tarvilik vahend trigonomeetria ja stereomeetria kordamisel ning trig. val. arvutamisel.
4. **M. Tullius Cicero. Esimene kõne Catilina vastu.**
Hind 1 kroon.
Tõlge ladina keelest, sõnastik, grammatilised reeglid. Kõigi raskemate vormide seletused, konjunktiivivi põhjused. Iseõppijad võivad selle raamatuga alata ladina kirjanikkude lugemist.

Pealadu :

»Postimehe« raamatukauplus,

Tartus, Suurturg nr. 16.

Hind Kr. 1.50.