L. NEUMANN · P. KALANTAROV

ELEKTROTEHNIKA TEOREETILISED ALUSED

I

ELEKTROTEHNIKA FÜÜSIKALISED ALUSED JA ALALISVOOLUAHELATE TEOORIA

L. R. NEUMANN ja P. L. KALANTAROV

ELEKTROTEHNIKA TEOREETILISED ALUSED

KOLMES OSAS

ESIMENE OSA

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1964

A
25 898/11

L. R. NEUMANN ja P. L. KALANTAROV

ELEKTROTEHNIKA FÜÜSIKALISED ALUSED JA ALALISVOOLUAHELATE TEOORIA

NSV Liidu Kõrgema Hariduse Ministeeriumi poolt lubatud kasutada õpikuna elektrotehnilistes ja energeetilistes kõrgemates õppeasutustes ning teaduskondades

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1964

6 T 2.1
N 31

Originaali tiitel:

Л. Р. Нейман и П. Л. Калантаров
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
Издание пятое, переработанное
Часть первая. Физические основы электротехники и теория цепей постоянного тока
Госэнергоиздат, Москва—Ленинград, 1959

Tõlkinud H. Jänes
Kaane kujundanud H. Polberg

«Elektrotehnika teoreetiliste aluste» kursus on ette nähtud kõikide energeetiliste ja elektrotehniliste kõrgemate õppeasutuste ja teaduskondade üliõpilastele. Kursuse sisu vastab NSV Liidu Kõrgema Hariduse Ministeeriumi programmile samanimelise õppeaine kohta. Kursus koosneb kolmest osast: esimene osa — «Elektrotehnika füüsikalised alused ja alalisvooluahelate teooria», mille kirjutas L. R. Neumann, välja arvatud peatükk lineaarsete alalisvooluahelate arvutamisest, mille kirjutas P. L. Kalantarov ja täiendas L. R. Neumann; teine osa — «Vahelduvvooluahelate teooria», mille kirjutas P. L. Kalantarov ja töötas ümber ning täiendas L. R. Neumann; kolmas osa — «Elektromagnetilise välja teooria», mille kirjutas L. R. Neumann.

Esimeses osas käsitletakse elektromagnetiliste nähtuste kohta käivaid põhimõisteid ja seadusi ning elektri- ja magnetahelate arvutusmeetodeid alalisvoolu puhul.

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
60770

Retsenseerinud U. Agur

EESSÕNA EESTIKEELSELE VÄLJAANDELE

«Elektrotehnika teoreetiliste aluste» kursusel on kõrgemate elektrotehniliste, elektroenergeetiliste ja raadiotehniliste õppeasutuste ning teaduskondade õppeplaanides füüsikalis-matemaatiliste distsipliinide ja eriõppeainete vahepiiril keskne koht. Sellest tulenevad kursuse kaks põhiülesannet. Nendest esimene, tulevase inseneri või teadusliku töötaja konkreetsest kitsast erialast sõltumatu iseseisev ülesanne seisneb selles, et anda küllalt laialdasi teadmisi elektromagnetiliste nähtuste teooria ning elektriahelate ja elektromagnetiliste väljade arvutusmeetodite valdkonnast. Niisuguseid laiu teadmisi ei saa anda eriõppeainetes. Nad on aga hädavajalikud, sest nendeta pole loominguline töö võimalik. Kursuse teiseks ülesandeks on järgnevate eriõppeainete omandamiseks vajaliku teoreetilise ettevalmistuse andmine. Nendes eriõppeainetes tungib teooria sügavamale, kuid juba kitsama küsimustiku piires.

Tehnika kiire progressiga, uute elektrotehniliste ja elektrofüüsikaliste seadmete loomisega ning uute eriõppeainete tekkimisega käib kaasas elektromagnetiliste protsesside analüüsi ja arvutuse teoreetiliste meetodite areng. See tõstabki «Elektrotehnika teoreetiliste aluste» kursuse osatähtsust ja esitab talle üha uusi ja uusi nõudmisi. Vastavalt sellele muutubki minu ja P. L. Kalantarovi poolt koostatud kursus iga järjekordse põhiväljaandega. Neid väljaandeid on olnud juba viis, milledest viimased kaks ilmusid pärast P. L. Kalantarovi surma. Ka neid väljaandeid olen oluliselt täiendanud ja ümber töötanud. Tõlgetena NSV Liidu eri keeltes ja sotsialistliku koostöö maades on ilmunud veel üksteist väljaannet. Käesolev eestikeelne väljaanne on seega üldse seitsmeteistkümnes, s. o. tõlge viimasest, viiendast põhiväljaandest.

Eesti teadlased ja insenerid lisavad tõhusa osa Eesti Nõukogude Sotsialistliku Vabariigi ja kogu Nõukogude Liidu elektritööstuse ja elektroenergeetika arendamisse. See hinnaline panus on otseselt seotud Eesti NSV kõrgemates õppeasutustes kõrge teadusliku kvalifikatsiooniga spetsialistide ettevalmistamisega.

Väljendan lootust, et meie raamatu eestikeelne väljaanne aitab kaasa selle suure ja tähtsa ülesande lahendamisele.

Suurima rahuldustundega väljendan oma sügavat tänu dotsent Hans Jänesele ja kõigile, kes töötasid kaasa meie raamatu eesti keeles väljaandmisel.

Leningrad, jaanuar 1964

L. Neumann

EESSÕNA VENEKEELSE VÄLJAANDE VIIENDALE TRÜKILE

Teose viies trükk töötati täiendavalt ümber. Esimesse ja teise ossa on sisse viidud uued paragrahvid, kus käsitletakse pooljuhtdioode ja -trioode elektriahela elementidena. See nõudis teose mitmetes kohtades pooljuhtides esinevate füüsikaliste nähtuste vaatlemist. Peatükki neliklemmidest tuli täiendada aktiivsete neliklemmidega ning vaadelda neliklemmide võrrandite mitmesuguseid kirjutusviise. Esimeses osas on küsimuse käsitlust laetud osakese liikumise kohta elektri- ja magnetväljas täiendatud andmetega uutes elementaarosakeste kiirendajates toimuvatest protsessidest, kusjuures see materjal on eraldatud omaette paragrahvi. Teises osas on oluliselt täiendatud uute paragrahvidega siirdeprotsessidele pühendatud peatükki. Vaadeldud on Fourier' integraali kasutamist nende protsesside arvutamiseks ja sellele vastavalt on sisse viidud sageduskarakteristikute mõiste. Samuti on sisse viidud ülekandefunktsiooni mõiste ja laiendatud tagasisidestuste mõistet. Esitatakse faasitasapinnal siirdeprotsesside kujutamise meetodit ja sellega seotud isokliinide meetodit siirdeprotsesside uurimiseks mittelineaarsetes elektriahelates. Need täiendused olid vajalikud, sest nimetatud küsimused on uutele elektrotehnika arengusuundadele suure tähtsusega.

Loomulikult tuli teose üldise mahu säilitamiseks kärpida tema üksikuid kohti ja välja jätta mõned küsimused, millel pole nii olulist tähtsust.

Viiendas trükis kasutatud terminoloogia on viidud täielikku vastavusse teoreetilise elektrotehnika terminoloogiaga, mille kinnitas ja soovitas 1957. a. NSV Liidu Teaduste Akadeemia Tehnikaterminoloogia Komitee.

Teose ümbertöötamisel arvestasin mitmete isikute eri soove. Loen meeldivaks kohustuseks avaldada nendele isikutele oma tänu. Ka võtsin arvesse rea soovitusi «Elektrotehnika teoreetiliste aluste» kursuse sisu kohta, mida väljendasid 1958. a. jaanuaris Leningradis toimunud teoreetilise elektrotehnika teaduslik-metoodilisest konverentsist osavõtjad ning Kõrgema Hariduse Ministeeriumi poolt Moskvas samuti 1958. a. jaanuaris läbiviidud

kõrgemate koolide elektrotehnika teoreetiliste aluste kateedrite esindajate teaduslik-metoodilisest seminarist osavõtjad.

Väljendan oma sügavat lugupidamist retsensendile prof. A. J. Kapljanskile, kes vaatas läbi viienda trüki käsikirja ja tegi rea kasulikke märkusi, I. A. Zaitsevile ja M. S. Kijanitsõnale, kes osutasid minule suurt abi toimetamisel ja käsikirja trükkimiseks ettevalmistamisel, ning M. I. Kalinini nimelise Leningradi Polütehnilise Instituudi teoreetilise elektrotehnika kateedri liikmetele, kes võtsid aktiivselt osa arutlusest uute küsimuste käsitlusmeetodite kohta.

L. Neumann

EESSÕNA VENEKEELSE VÄLJAANDE NELJANDALE TRÜKILE

«Elekrotehnika teoreetiliste aluste» õpiku neljas trükk ilmub pärast oma ühe autori — Pavel Lazarevitš Kalantarovi surma, kes pühendas oma elutöö meie kodumaale elektrotehnikaspetsialistide arvuka pere ettevalmistamisele.

Vastavalt paljude kõrgemate õppeasutuste esindajate soovidele ilmub neljas trükk uuesti kolmes eri köites. See kergendab märgatavalt raamatu kasutamist, sest «Elektrotehnika teoreetiliste aluste» kursust loetakse kõrgemates õppeasutustes mitmel semestril.

Teose ümbertöötamisel neljandaks trükiks arvestasin neid soovitusi, mis esinevad rohketes arvamustes eelmise väljaande kohta ja mis on osaliselt avaldatud ajakirja «Электричество» 1953. a. numbrites ning on osaliselt saadetud meile vahetult. Samuti on arvestatud 1953. aastal ajakirjas «Электричество» toimunud diskussiooni teoreetilise elektrotehnika terminoloogia alal.

Raamatu esimeses osas «Elektrotehnika füüsikalised alused ja alalisvooluahelate teooria» (autor L. R. Neiman) on täiendatud peatükki, kus üldistatakse põhiprintsiipe ja süvendatakse elektromagnetilisi nähtusi iseloomustavaid vastastikuseid seoseid. Selles me näemegi nimetatud kursuse osa ühte põhiülesannetest. Kursuse esimeses osas P. L. Kalantarovi poolt varem kirjutatud lineaarsete alalisvooluahelate arvutusmeetoditele pühendatud peatükki on täiendatud nende meetodite vaatlemisega konkreetsete näidete varal. Seoses mittelineaarsete elementide laialdase rakendamisega kaasaegses elektrotehnikas, koos nende eriliste omaduste ärakasutamisega, on mittelineaarsete alalisvoolu-elektriahelate arvutusi kirjeldav peatükk minu poolt uuesti kirjutatud.

Raamatu teine osa «Vahelduvvooluahelate teooria» (autor P. L. Kalantarov) on minu poolt mõnes osas ümber töötatud vastavalt retsensioonides avaldatud soovitustele ja arvestades uusi arenevaid suundi elektrotehnikas. Suuremat tähelepanu on pööratud nähtuste füüsikalisele küljele, seda eriti esimeses pea-

tükis. Varem kui eelmises trükis tutvustatakse sümbolimeetodit, sest see on vajalik üliõpilastele praktilistes tundides. Oluliselt on laiendatud mittelineaarsete vahelduvvooluahelate peatükki, mida täiendati nendes ahelates tekkivate siirdeprotsesside arvutamise meetoditega. Rohkem tähelepanu on osutatud esitatavate teoreetiliste meetodite tegelikule rakendusele ja uuritavate üldiste printsiipide praktilisele tähtsusele.

Raamatu kolmandat osa «Elektromagnetilise välja teooria» (autor L. R. Neiman) on muudetud vähem. Tehtud muudatused taotlevad samu eesmärke kui raamatu esimeses ja teises osas tehtud muudatusedki.

Mõned peatükid, mida võib vaadelda kui mittekohustuslikke, on laotud vastavalt avaldatud soovidele peene kirjaga.

Loen oma kohuseks avaldada tänu kõikidele isikutele, kes võtsid osa meie teose eelmise väljaande arutelust ja avaldasid rohkesti väärtuslikke soove. Väljendan samuti tänu retsensendile prof. A. J. Kapljanskile, kes vaatas hoolikalt läbi uue trüki käsikirja ja tegi rea kasulikke märkusi. Käsikirja trükkimiseks ettevalmistamisel ja toimetamisel osutasid mulle suurt abi I. A. Zaitsev ja V. F. Berednikova, kellele väljendan oma sügavat tänu.

L. Neumann

SISSEJUHATUS

Sotsialismiehitamise ja sotsialismilt kommunismile ülemineku epohhi meie maal iseloomustab ennenägematu kodumaise teaduse ja tehnika areng. Suure Sotsialistliku Oktoobrirevolutsiooni võit lõi tingimused rahvamajanduse laialdaseks elektrifitseerimiseks. Rahvamajanduse elektrifitseerimise erakordset tähtsust kommunistliku ühiskonna ehitamisel kinnitab Nõukogude riigi suure rajaja V. I. Lenini kuulus tees: «Kommunism — see on nõukogude võim pluss kogu maa elektrifitseerimine.»

Vastavalt NLKP XXI kongressi otsusele kujuneb käesolev seitseaastak 1959—1965 otsustavaks etapiks kogu maa täieliku elektrifitseerimise kohta käivate Lenini ideede ellurakendamisel. NLKP XXI kongressi otsustes kavandatud suurejooneliste ülesannete täitmine nõuab uute suundade arendamist teaduses ja tehnikas, mis omakorda on lahutamatult seotud teoreetiliste probleemide sügava läbitöötamisega kõikidel teadusaladel. Et kõrgematest õppeasutustest väljalastavad elektriinsenerid oleksid võimelised teaduslikult lahendama meie maa ees seisvaid suuri ülesandeid, peavad nad omandama laialdasi teoreetilisi teadmisi ja oskust neid praktikas rakendada. Kursus «Elektrotehnika teoreetilised alused», milles teoreetiliste küsimuste käsitlemine on lahutamatult seotud elektrotehnika praktiliste ülesannetega, ongi üheks tähtsaimaks lüliks elektriinseneride teoreetilise ettevalmistuse süsteemis.

*

Esimesed tööd elektriliste nähtuste valdkonnast Venemaal kuuluvad geniaalsele vene õpetlasele — akadeemikule M. V. Lomonossovile. M. V. Lomonossov, kes on loonud mitmesugustel teadusaladel palju suurepäraseid teoseid, pühendas neist suure hulga elektriliste nähtuste tundmaõppimisele. M. V. Lomonossov esitas oma teoreetilistes uurimustes väiteid, mis tunduvalt ennetasid tema kaasaega, ning püstitas probleeme erakordse sügavusega. Näiteks esitas Teaduste Akadeemia tema ettepanekul

konkursi teemaks 1755. a. preemiale ülesande «leida elektrilise jõu algpõhjus ja koostada selle täpne teooria».

Selle kõrval püüdis M. V. Lomonossov teaduslikele avastustele alati leida praktilist rakendust. Ta osutas oma töödes võimalusele kaitsta inimest ja hooneid piksekahjustuste vastu piksevarraste ehitamise teel. Selles suhtes on tähelepanuväärsed M. V. Lomonossovi sõnad tema täiendustes füüsika kursusele, kus ta väljendas mõtte, et elektrialaste katsete seas on katseid, mis «ennustavad inimkonnale suurt lootust ja heaolu».

Oma töödes arendas ja kaitses M. V. Lomonossov õpetust maailma tunnetatavuse ja materiaalsuse kohta, eriti elektri materiaalsuse kohta. M. V. Lomonossovi mitmesuguste teadusalade töödele iseloomulik materialistlik põhiprobleemide lahendamisele lähenemine sai hiljem eesrindlike vene teadlaste ja leiutajate parimaks traditsiooniks. See traditsioon on saanud nende erakordse edu allikaks teaduse- ja tehnikavallas.

M. V. Lomonossovi kaasaegseks oli vene akadeemik F. Aepinus. Temale kuulub termoelektriliste nähtuste ja elektrostaatilise induktsiooni nähtuste avastamise prioriteet. Eriti tuleb märkida F. Aepinuse ettekannet, mille ta tegi 1758. a. Teaduste Akadeemias teemal «Kõne elektrilise jõu ja magnetismi sugulusest».

Praegusel ajal on meile hästi teada, et elektriliste ja magnetiliste nähtuste vahel on olemas lahutamatu seos, ja see väide on aluseks kogu kaasaegsele õpetusele elektromagnetilistest nähtustest. Ometi tuli teaduslik mõte sellisele veendumusele alles katseliste faktide kauakestva kogunemise tulemusena. Pika aja kestel käsitati elektrilisi ja magnetilisi nähtusi iseseisvatena, omavahel mitteseotutena. Esimene põhjalik teaduslik teos magnetiliste ja elektriliste nähtuste kohta, mis ilmus 1600. a., kuulub Gilbertile. Siiski tuli Gilbert selles töös väärale järeldusele, et elektrilistel ja magnetilistel nähtustel ei ole omavahelist seost.

Sarnasus elektriliselt laetud kehade mehaanilise vastastikuse mõju ja magnetite pooluste mehaanilise vastastikuse mõju vahel viis loomulikult püüdele neid nähtusi ühesuguselt seletada. Tekkis ettekujutus positiivsetest ja negatiivsetest magnetilistest massidest, mis on jaotunud magneti otstele ja mis osutuvad magnetiliste mõjutuste põhjuseks. Kuid nagu nüüd meile teada on, ei vasta taoline eeldus magnetiliste nähtuste füüsikalisele olemusele. See tekkis ajalooliselt analoogia tõttu ettekujutusega positiivsest ja negatiivsest elektrist, mis vastab elektriliste nähtuste füüsikalisele olemusele. Vastavalt kaasaegsele ettekujutusele on mistahes keha elektrilaeng laengute kogum, mis moodustub lakkamatus liikumises olevate positiivselt või negatiivselt laetud elementaarosakeste — prootonite, elektronide jne. laengutest.

Kvantitatiivsed seosed, mis iseloomustavad elektriliselt laetud kehade või magnetpooluste magnetiliste masside mehaanilist vastastikust mõju, avaldas Coulomb esimesena 1785. a. Kuid juba Coulomb pööras tähelepanu olulisele erinevusele magnetiliste masside ja elektrilaengute vahel. See erinevus ilmneb järgmistest lihtsatest katselistest faktidest. Meil õnnestub ilma vaevata eraldada üksteisest positiivset ja negatiivset elektrilaengut, kuid mitte kunagi ega mitte mingisugustel tingimustel ei õnnestu korraldada katset, mille tulemusena oleks eraldatud üksteisest positiivne ja negatiivne magnetiline mass. Seoses sellega väitis Coulomb, et magneti keha väikesed ruumielemendid muutuvad magneetimisel väikesteks magnetiteks ning et positiivsed magnetilised massid nihkuvad ühes suunas ja negatiivsed vastupidises suunas ainult nende ruumielementide sisemuses.

Kui aga positiivsed ja negatiivsed magnetilised massid esineksid elementaarmagnetite sisemuses iseseisvalt, siis võiks ikkagi loota mingi katsega, mille kestel toimuks vahetu mõju-avaldamine elementaarmagnetitele, eraldada negatiivset massi positiivsest, taoliselt sellele, nagu summaarse nulliga võrduva elektrilaenguga molekuli mõjutamisel õnnestub meil seda lahutada negatiivselt ja positiivselt laetud osakesteks, niinimetatud ioonideks. Ometi ei õnnestu ka elementaarprotsessides mitte kunagi avastada eraldi esinevaid positiivseid ja negatiivseid magnetilisi masse.

Magnetiliste nähtuste tegelik olemus avastati möödunud sajandi alguses. See periood on kuulus rea suurepäraste avastuste poolest, mis tõestasid kõige tihedama seose olemasolu elektriliste nähtuste ja magnetiliste nähtuste vahel.

1819. a. korraldas oma katseid Oersted, mille tulemusena ta avastas elektrivoolu mehaanilise mõju magnetnõelale. 1820. a. näitas Ampère, et voolu all olev solenoid on oma toime poolest analoogiline magnetiga, ja avaldas mõtte, et püsimagneti korral on magnetiliste omaduste tekkimise tegelikuks põhjuseks samuti elektrivoolud, mis sulguvad mööda mingeid elementaarkontuure magneti keha sees. Need ideed leidsid konkreetse avalduse praegusaegsetes tõekspidamistes, millele vastavalt püsimagneti magnetväli on põhjustatud magneti aines eksisteerivate elementaarelektrivoolude poolt. Viimased on ekvivalentsed ainet moodustavate elementaarosakeste magnetiliste momentidega. Tegelikult on need elementaarvoolud tingitud sellest, et aatomites elektronid pöörlevad oma telje ümber ja tiirlevad mööda orbiite.

Niisiis jõuame veendumusele, et tegelikkuses magnetilisi masse ei ole olemas.

Kõigi mainitud uurimuste põhjal fikseeriti ülitähtis tõsiasi, et elektriliselt laetud osakeste liikumisega kaasnevad alati magnetilised nähtused. Sellega ongi näidatud, et vastupidiselt Gil-

berti arvamusele ei kujuta magnetilised nähtused endast midagi iseseisvat, midagi niisugust, mis mingil viisil ei ole seotud elektriliste nähtustega.

1831. a. teatas Faraday elektromagnetilise induktsiooni nähtuse avastamisest. Ta tegi kindlaks elektrivoolu tekkimise vooluringis, mis liigub magneti või teise voolust läbitava vooluringi suhtes. Seega tõestati, et ka elektrilised nähtused võivad tekkida magnetiliste nähtuste valdkonda kuuluvate protsesside tulemusena.

1833. a. formuleeris vene akadeemik E. H. Lenz esimesena erakordselt tähtsa väite, millega konstateeriti Oerstedi ja Faraday poolt avastatud nähtuste ühtsust ja pööratavust. See väide sai aluseks tähtsale elektrimasinate pööratavuse printsiibile. E. H. Lenz sõnastas indutseeritud voolu suuna määramise juhise, mis väljendab elektrodünaamika põhiprintsiipi — elektromagnetilise inertsi printsiipi.

Seoses kõikide nende avastustega on eriliselt vaja märkida põhilist juhtideed, mida kõrvalekaldumatult järgis oma uurimustes Faraday ja mida arendas akadeemik V. F. Mitkevitš oma töödes. See on idee elektriliselt laetud kehade ja vooluringide vahel ruumis toimuvate protsesside füüsikalisest reaalsusest. Vastavalt nendele kujutlustele teostub nii laetud kehade vastastikune mõju kui ka vooluringide vastastikune mõju neid ümbritseva elektromagnetilise välja kaudu, mis on mateeria üheks eriliigiks.

Elektromagnetilise välja teooria loomise teene kuulub Maxwellile, kes avaldas selle 1873. a. ilmunud klassikalises teoses «Traktaat elektrist ja magnetismist». Selle traktaadi sisuks on Faraday põhiliste füüsikaliste ideede matemaatiline esitus ning nende edasine süvendamine ja laiendamine.

Maxwelli elektromagnetilise välja teooria leidis eksperimentaalse kinnituse ja arenduse H. Hertzi poolt 1887.—1889. a. teostatud suurepärastes katsetes elektromagnetiliste lainete saamise ja levimise kohta, P. N. Lebedevi töödes (1895. a.) väga lühikese lainepikkusega elektromagnetiliste lainete genereerimise ja levimise kohta, P. N. Lebedevi klassikalistes katsetes (1900.—1910. a.), millega ta eksperimentaalselt tõestas valguse rõhu, A. S. Popovi poolt (1895. a.) raadio leiutamises ja raadioside teostamises, ning kogu edasises praktilise ja teoreetilise raadiotehnika arengus.

Kõik ülalnimetatud avastused viisid elektriliste ja magnetiliste nähtuste vahelise sügava seose tunnustamisele. Sisuliselt on meil alati tegemist elektromagnetilise liitnähtusega.

Hiliseimat perioodi iseloomustab veelgi sügavam aineehituse tundmaõppimine. Tekkis ettekujutus mateeria elektromagnetilisest ehitusest. Vastavalt lihtsaimale mudelile koosneb aatom positiivset laengut omavast tuumast ja tuuma ümber tiirlevatest

negatiivse laenguga elektronidest. Aatomituumade radioaktiivse lagunemise avastamine näitas, et ka tuumad kujutavad endast keerukaid moodustisi, mis on võimelised edasisteks muundumisteks. Väga tähelepanuväärseks osutus positronide avastamine, s. o. osakeste avastamine, mille positiivne laeng võrdub suuruse poolest elektroni negatiivse laenguga ja mille mass on elektroni massiga samas suurusjärgus. Positroni tekkimisel toimub footoni ehk elektromagnetilise välja kvandi muundumine kaheks elektrilaengut omavaks elementaarosakeseks — positroniks ja elektroniks. Kaasaegsete füüsikaliste uurimuste tulemusena on avastatud terve rida elektrilaengut ja magnetilist momenti omavaid elementaarosakesi, samuti on õpitud tundma nende osakeste omadusi ja vastastikust mõju.

Kõik nimetatud avastused ja rida teisi tähtsaid avastusi on eriti hinnatavad selle poolest, et nad purustasid lõplikult ettekujutuse aatomitest kui mateeria kõigutamatutest algelementidest. Mateeria on pidevas liikumises, arengus. Iga mateeria liikumise vorm on võimeline muunduma teiseks, uute kvalitatiivsete omadustega vormiks.

Need progressiivsed ideed ongi olnud aluseks viimaste aastate hiilgavatele saavutustele, mis lõid võimalused tuumade muundumisel toimuvate protsesside inimese tahtele allutamiseks. Nende protsessidega kaasneb hiiglasliku energiahulga eraldumine. Sellega on loodud uued laialdased võimalused loodusjõudude kasutamiseks inimese hüvanguks.

*

«Elektrotehnika teoreetiliste aluste» kursuse sisu ja ülesehitus on määratud vajadusega anda võimalikult harmooniline ettekujutus mitmesugustes elektrotehnilistes seadistes ja aparaatides toimuvatest elektromagnetilistest nähtustest ja protsessidest ning esitada nende protsesside põhilisi arvutusmeetodeid.

Seoses sellega on kursuse esimeses osas erilist tähelepanu pühendatud elektromagnetiliste nähtuste sügavamale käsitlusele ja neid nähtusi iseloomustavate suuruste omavaheliste seoste kindlaksmääramisele. See on vajalik kahes järgmises osas esitatavate elektri- ja magnetahelate ning elektromagnetilise välja teooria küllaldase sügavusega tundmaõppimiseks.

Võimalus eraldada elektromagnetiliste nähtuste üldisest teooriast suurt osa, nn. elektri- ja magnetahelate teooriat, on seotud nii analüüsi meetoditega paljude elektrotehniliste seadmete puhul kui ka praktiliste kaalutlustega.

Elektromagnetiliste nähtuste tehnilisel kasutamisel rakendatakse enamikul juhtumitel abinõusid elektri- ja magnetväljade võimalikult väikestesse ruumaladesse koondamiseks. Elektrivälja ruumala vähendamiseks kasutatakse kondensaatorites dielektri-

kuna suure dielektrilise läbitavusega materjale. Magnetvälja ruumala kokkusurumiseks valmistatakse magnetahelad suurt magnetilist läbitavust omavatest materjalidest.

Elektriahelate valmistamine suure elektrijuhtivusega materjalidest, mis on ümbritsetud isoleeriva keskkonnaga, võimaldab luua elektrivoolu jaoks kindlaksmääratud teekonnad. Magnetahelate moodustamine suure magnetilise läbitavusega materjalidest, mis on ümbritsetud suhteliselt väikese magnetilise läbitavusega keskkonnaga, võimaldab luua magnetvoole soovitud teekonnad. Võib väita, et suurem osa elektrotehnilisi seadmeid kujutab endast mingit elektriahelate ja magnetahelate ühendust.

Ahelate teooria aluseks on Ohmi, Kirchhoffi, Lenzi ja Joule'i poolt avastatud seadused.

Elektri- ja magnetahelate parameetrid sõltuvad ahelate geomeetrilisest kujust ja ahelate valmistamiseks kasutatud materjalide füüsikalistest omadustest.

Kui ahelate parameetrid sõltuvad neis ahelates toimuvate protsesside intensiivsusest, siis nimetatakse neid protsesse kui ka ahelaid, milles need protsessid toimuvad, mittelineaarseteks. Mittelineaarsete ahelate teooria on olulises osas välja töötatud tänu nõukogude teadlaste akadeemikute L. I. Mandelštami, N. D. Papaleksi ja A. A. Andronovi töödele.

Neil juhtumitel, kui keskkondade füüsikalised omadused või vastavalt ahelate parameetrid ei sõltu nendes toimuvate protsesside intensiivsusest, on avaldised, mis seovad elektri- ja magnetväljades ning ahelates protsesse iseloomustavaid suurusi, lineaarse iseloomuga, s. t. vaatluse alla võetud suurused, nende tuletised ja integraalid esinevad nendes avaldistes ainult esimeses astmes, kui ei vaadelda protsesside energeetilist külge. Selliseid protsesse ja vastavalt ka ahelaid nimetatakse lineaarseteks. Nende kohta on rakendatav suurt tähtsust omav nn. superpositsiooni printsiip ehk ülestusprintsiip. Superpositsiooni printsiibi järgi on mingis füüsikalises olukorras mitme ühelaadilise põhjuse koosmõjul esilekutsutavad tagajärjed samas füüsikalises olukorras iga põhjuse poolt eraldi esilekutsutavate tagajärgede summaks. Selle printsiibi kasutamine võimaldab lihtsatel juhtumitel saadud tagajärgi üldistada keerukamate juhtumite kohta. Samuti vastupidi, selle printsiibi rakendamine võimaldab lahutada keerukat ülesannet mitmeks lihtsamaks. Edaspidises kasutame laialdaselt superpositsiooni printsiipi.

Paljusid elektrotehnika küsimusi ei saa täielikult käsitleda ahelate teooria abil ning neid saab lahendada ainult elektromagnetilise välja teooria meetoditega. Elektri- ja magnetahelate parameetrite arvutamiseks on kõigepealt vaja tunda nende ahelatega seotud elektri- ja magnetvälju. Nii on näiteks elektriahela induktiivsuse määramiseks vaja osata arvutada selle ahela magnetvälja. Kondensaatorite või elektriülekandeliinide

elektrimahtuvuse määramiseks on vaja osata arvutada nende elektrivälju. See on täiesti seaduspärane, sest elektri- ja magnetahelate parameetrid faktiliselt peegeldavadki endas integraalsel kujul vaadeldavate ahelatega seotud elektri- ja magnetväljade konfiguratsiooni ning samuti keskkonna füüsikalisi omadusi, kus need väljad eksisteerivad. Rida väga tähtsaid ülesandeid on võimalik lahendada ainult väljateoorias arendatavate meetoditega. Sellisteks küsimusteks on näiteks elektromagnetiliste lainete kiirgamine antenni poolt ja nende levimine ruumis.

Kursuse esimeses osas kindlaksmääratud põhiliste seaduspärasuste teadmine võimaldab alustada elektromagnetilise välja teooria tundmaõppimist seda välja tervikuna iseloomustavatest üldistest võrranditest ja näidata, et juhtumid, millede korral avaldub ainult elektriväli või ainult magnetväli, kujutavad endast erijuhtumeid, millede puhul vaatlustingimused on sellised, et mingis ruumi piiratud osas on võimalik avastada ainult üht elektromagnetilise protsessi külge. Selles avaldub ilmekalt elektriliste ja magnetiliste nähtuste ühtsuse idee.

ESIMENE PEATÜKK

ELEKTRIVÄLJA TUGEVUS. ELEKTRIPINGE JA ELEKTROMOTOORNE JÕUD

§ 1. Elektrilaengut omavad elementaarosakesed ja nende elektromagnetiline väli kui mateeria eriliik

Nagu sissejuhatuses märgitud, on kaasaegne õpetus elektromagnetilistest nähtustest kujunenud nende pikaajalise uurimise ja praktilisel kasutamisel saadud kogemuste järkjärgulise kogunemise tulemusena. Üha laialdasemaks muutuv elektri tehniline kasutamine tõstis üles uusi probleeme, mis nõudsid teoreetilist ja eksperimentaalset lahendust; see soodustas edasist teadmiste süvenemist elektriliste ja magnetiliste nähtuste olemuse alal.

Käesoleval ajal on meil laialdased teadmised elektrilistest ja magnetilistest nähtustest ja rohked kogemused nende nähtuste kasutamiseks tootmistegevuse kõige erilaadsematel aladel.

Elektrilaengut omavad mateeria elementaarosakesed (näiteks negatiivset laengut omav elektron, positiivset laengut omav prooton) on aine aatomite tähtsaimateks struktuurielementideks ja seetõttu on loomulik, et elektromagnetiliste nähtustega on seoses kõige erinevamad loodusnähtused. Siin on kohane meenutada Engelsi sõnu, mida ta lausus sel ajal, kui alles rajati alust elektriliste ja magnetiliste nähtuste õpetusele ja astuti esimesi samme elektri praktilise kasutamise teel. «Maa peal ei toimu peaaegu ainsatki muutust, millega ei kaasneks elektrilisi nähtusi.» (F. Engels. Looduse dialektika. 1962, lk. 79.)

Laetud elementaarosakesed kuuluvad aine aatomite ja molekulide koosseisu, kuid nad võivad olla ka vabas olekus. Nad on lakkamatus liikumises ja on ümbritsetud, nagu me ütleme, *elektromagnetilisest väljast.* Elektrilaengut omavad osakesed ja nende elektromagnetiline väli moodustavad mateeria erilise liigi — erilise selles mõttes, et sellele on omased erilised, elektromagnetilised omadused, mida ei arvestata teiste mateeria liikumise vormide, näiteks mehaanilise liikumise vormi vaatlemisel.

Nimetatud elementaarosakeste *elektrilaeng* on tähtsaimaks

füüsikaliseks omaduseks, mis iseloomustab nende osakeste vastastikust seost oma elektromagnetilise väljaga ja nende osakeste vastastikust mõju välise elektromagnetilise väljaga. Peale elektrilaengu on nendel mateeriaosakestel ka teisi omadusi — mass, energia, impulss jne., mis on omased teistele mateeria liikumise vormidele, mida õpitakse näiteks mehaanikas.

Mõiste *elekter* omistatakse tihti kogu elektromagnetiliste nähtuste kogumile. Selline lai tähendus antakse nimetatud mõistele siis, kui kõneldakse elektrit käsitlevast teadusest. Selle kõrval kasutatakse teda terminis *elektrihulk* kitsamas mõttes, nimelt *elektrilaengu* sünonüümina.

Laengut omavad elementaarosakesed ja nende elektromagnetiline väli moodustavad tegelikult ühtse terviku. Rangelt võttes ei saa me näidata täpset piiri elektrilaenguga osakese ja tema elektromagnetilise välja vahel. Ometi võib oletada, et osake ja selle elektrilaeng, näiteks elektroni, prootoni jne. laeng, on koondunud väga väikesesse ruumipiirkonda. Just sellele ruumi väga väikesele piirkonnale on iseloomulik see mateeria liikumise vorm, millega seostatakse elektriliselt laetud osakese mõistet. Väljaspool nimetatud ruumipiirkonda on esiplaanil see füüsikaline nähtus, see mateeria liikumise vorm, millega me seostame elektromagnetilise välja mõistet. See asjaolu lubab luua ettekujutuse, mille järgi nii elementaarosakese elektrilaeng kui ka elementaarosake ise hõlmavad ainult ruumi mingit piiratud piirkonda. Viimast ümbritsevas ruumis on selle ettekujutuse järgi laengut omava osakesega seostatud elektromagnetiline väli, kusjuures elektrilaengu ruumtihedus on seal täpselt võrdne nulliga.

Sellise laialt kasutatava teadusliku abstraktsiooni puhul tekib vajadus anda nimetus ruumi sellele piirkonnale, kus esineb elektromagnetiline väli, kuid milles puuduvad mateeria senituntud osakesed. Otsustame edaspidi kasutada ruumi selle piirkonna tähistamiseks terminit *tühjus*. Selle termini me seostame ainult ruumi kui mateeria välja kujul eksisteerimise vormi mõistega, aga mitte selles ruumis toimuvate füüsikaliste protsessidega. Seejuures peame meeles, et ruum on lahutamatu temas toimuvatest materiaalsetest protsessidest ja et absoluutselt tühja, füüsikalise mateeriaga täitmata ruumi ei ole ega saagi olla. Selles ruumiosas, mida me nimetame tühjuseks, esineb alati elektromagnetiline väli ja samuti ka gravitatsiooniväli, mis on mateeria eriliigid.

Oluline on märkida, et samal ajal, kui laetud elementaarosake ei ole mõeldav ilma oma elektromagnetilise väljata, võib elektromagnetiline väli eksisteerida vabas olekus, lahus osakesest. Selline on footon, samuti ka antennist kiiratud elektromagnetiline väli.

Mateeria liikumine, mida me seostame elektriliselt laetud

osakese mõistega ning elektromagnetilise välja mõistega, ei ole taandatav mehaaniliseks liikumiseks. Elektriliste ja magnetiliste nähtuste iseloomustamiseks on vaja tarvitusele võtta uusi mõisteid, mida mehaanika ei käsitle ja mida põhimõtteliselt ei saa määratleda ainult mehaaniliste suuruste kaudu. Elektrilaeng on käesoleval juhtumil üheks selliseks uueks mõisteks. Seoses öelduga tsiteerime V. I. Lenini suurepäraseid sõnu: «Ükskõik kui kummaline ka ei oleks «kaine mõistuse» seisukohalt kaalutu eetri muutumine kaalutavaks mateeriaks ja vastupidi, kui «imelik» ka ei oleks, et elektronil puudub igasugune muu mass peale elektromagnetilise massi, kui ebaharilik ka ei oleks, et mehaanilised liikumisseadused piirduvad ainult ühe loodusnähtuste valdkonnaga ja alluvad elektromagnetiliste nähtuste sügavamatele seadustele jne. — on see kõik vaid dialektilise materialismi veelkordne *kinnitus*.» (V. I. Lenin. Teosed. 1952, 14. kd., lk. 241.)

Selles lauses, mille V. I. Lenin väljendas dialektilise materialismi põhiteeside arendamisel, on selgelt formuleeritud mõte, et elektromagnetilised nähtused ei ole taandatavad nähtusteks, millede uurimine moodustab mehaanika aine. Mehaanikas käsitletakse inertse massiga materiaalsete kehade liikumist ruumis. Asjaolu, et vaadeldavatel kehadel võivad olla elektrilaengud, niisamuti ka asjaolu, et kehad ise koosnevad positiivselt ja negatiivselt laetud elementaarosakestest, ei mahu kuidagi mehaanikas vaadeldavate küsimuste ringi. Sellepärast on loomulik, et mehaanika seadustest ei ole võimalik tuletada elektromagnetiliste nähtuste sügavamaid seaduspärasusi.

§ 2. Elektriväli

Nagu juba märgitud, ümbritseb liikuvaid laetud elementaarosakesi elektromagnetiline väli. Ometi ei tule ruumi mingis osas magnetilised nähtused teatud tingimustel ilmsiks ja täheldatakse ainult elektrilisi nähtusi. Selliseks nähtuseks on näiteks liikumatute laetud kehade juhtum.

Elementaarosakesed, mille laengud moodustavad kehade kogulaengud, liiguvad kaootiliselt kehade pindade lähedal ja seetõttu juba tühistel kaugustel kehade pindadest nende resulteeriv magnetväli praktiliselt puudub.

Analoogiliselt tuleb liikumatute püsimagnetite lähedal ilmsiks ainult magnetväli.

Selliste tingimuste loomise võimalus lubab alguses tundma õppida elektrivälja ja magnetvälja eraldi. Sellest hoolimata on juba kursuse esimeses osas meie tähtsaimaks ülesandeks nende väljade kui ühtse elektromagnetilise välja kahe külje vaheliste seoste kindlaksmääramine. Elektri- ja magnetahelates vahelduv-

voolu korral toimuvate protsesside täielik füüsikaline käsitlus kursuse teises osas ei ole võimalik ilma nende seoste sügava tundmaõppimiseta.

Elektrivälja, s. o. ühtse elektromagnetilise välja ühe külje iseloomustajaks võib kasutada selle mingit mõjuavaldust. On kokku lepitud iseloomustada elektrivälja mehaaniliste jõududega, mis mõjuvad sellesse välja viidavatele *liikumatutele* laetud kehadele. Sellele vastavalt *nimetame elektriväljaks elektromagnetilise välja kahest küljest seda külge, mis avaldub mehaanilise mõju kaudu liikumatutele laetud kehadele ja osakestele.*

Elektrivälja olemasolu kindlakstegemiseks on tingimata vaja võtta *liikumatu* laetud keha, sest liikuvale laetud kehale ei mõju ainult elektriväli, vaid, nagu näidatakse hiljem, ka magnetväli.

Elektrivälja lihtsaimaks juhtumiks on liikumatute elektriliselt laetud kehade väli. Sellist välja me nimetame *elektrostaatiliseks.* Teadusharu, mille raames õpitakse tundma elektrostaatilisi välju ja nende mõjuavaldusi, nimetatakse *elektrostaatikaks.*

§ 3. Juhtivad ained, dielektrikud ja pooljuhid

Elektrivälja uurimisel aines on vaja arvestada aine elektrilisi omadusi. Elektriliste omaduste järgi võib aineid jaotada kolme põhiklassi — *juhtivad ained* (elektrijuhid), *dielektrikud* (isoleerained ehk mittejuhid) ja *pooljuhtivad ained* (pooljuhid).[1]

Juhtivateks aineteks on sellised, milles esineb suurel hulgal elektrilaengut omavaid vabu elementaarosakesi (elektrone või positiivseid ja negatiivseid ioone). Elektrivälja mõjul hakkavad need elementaarosakesed korrapäraselt liikuma ja sellega moodustavadki aines kindlasuunalise elektrivoolu. Juhtivate ainete hulka kuuluvad kõik metallid, milledes *elektrijuhtivus*, s. o. omadus alaliselektrivälja mõjul juhtida elektrivoolu, on tingitud nn. vabade elektronide ehk juhtivuselektronide, s. o. aatomitega nõrgalt seotud elektronide olemasolust. Viimased liiguvad kergesti ühe aatomi juurest teise juurde ja korrapärase liikumise puhul moodustavadki metallis elektrivoolu. Märkimisväärset elektrijuhtivust omavad ka elektrolüüdid, s. o. soolade, aluste ja hapete lahused ning mõningad soolad sulas olekus. Elektrolüütide elektrijuhtivus on tingitud positiivsete ja negatiivsete ioonide olemasolust, milledeks lagundub osa lahustatud aine või sulatatud soola molekule. Ka gaasid on ioniseeritud olekus võimelised elektrit juhtima.

---

[1] Elektrijuhtideks, pooljuhtideks ja dielektrikuteks nimetame ka nendest ainetest kehi. — *Toim.*

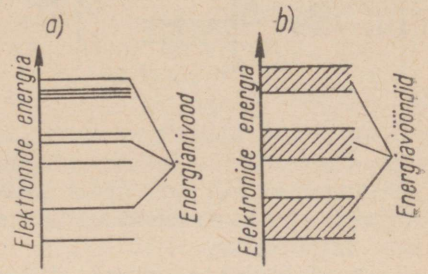
Dielektrikuteks on ained, milles laengut omavaid vabu osakesi esineb tühisel hulgal ja esiplaanile astub järgmises peatükis vaadeldav polarisatsiooninähtus. Siia kuuluvad näiteks klaas, vilk, õli, õhk mitteioniseeritud olekus jne.

Pooljuhtideks on ained, mis oma elektrijuhtivuse väärtuse poolest asuvad juhtivate ainete ja dielektrikute vahepeal ning paistavad silma rea omapäraste, neile iseloomulike omadustega. Need omadused on seoses sellega, et nendes ainetes on peale vabade elektronide (juhtivuselektronide) poolt põhjustatud elektrijuhtivuse veel elektrijuhtivus, mis on põhjustatud nn. «aukude» ümberpaiknemisest elektrivälja mõjul. «Augud» on valentselektronidega täitmata kohad aatomites. Valentselektronideks on aatomi välimises elektronkihis paiknevad elektronid. Nende, elektronide poolt mittehõivatud kohtade ümberpaiknemine aines ühe aatomi juurest teise juurde on oma olemuselt valentselektronide üksteisejärgse ümberpaiknemise tagajärjeks. Mingis aatomis vabale kohale tuleb valentselektron naaberaatomist, vabanenud kohale selles viimases aatomis tuleb valentselektron omakorda järgmisest naaberaatomist jne. Selline aukude ümberpaiknemine on oma tagajärje poolest ekvivalentne absoluutväärtuselt elektroni laenguga võrdset laengut omava positiivselt laetud osakeste liikumisega. See, et on olemas pooljuhte erinevat tüüpi elektrijuhtivusega — elektronjuhtivusega ehk *n*-tüüpi (*n* — negatiivne) juhtivusega ja aukjuhtivusega ehk *p*-tüüpi (*p* — positiivne) juhtivusega — võimaldab luua mitmesuguseid hinnatavate omadustega pooljuhtseadiseid, millest tuleb juttu hiljem. Pooljuhtivate ainete hulka kuulub rida elemente, milledest käesoleval ajal on kõige tähtsamad germaanium (Ge), räni (Si), seleen (Se), rida sulameid, näiteks Mg_3Sb_2, ZnSb, rida oksiide, näiteks Al_2O_3, Cu_2O jne.

Erinevust elektrijuhtide, dielektrikute ja pooljuhtide vahel võib iseloomustada kvantteooria kujutluste seisukohalt. Need kujutlused on edaspidi vajalikud pooljuhtseadiste kui elektriahelate elementide töötamisprintsiipide ja omaduste selgitamiseks.

Üksildases, s. o. eraldiseisvas aatomis iseloomustatakse kõiki elektrone erinevate kvantolekutega. Iga kvantolekut iseloomustab tema kvantarvude kogum (esimene ehk peakvantarv iseloomustab elektroni keskmist kaugust tuumast, teine — elektroni liikumishulga momenti, kolmas — orbitaalset magnetilist momenti ja neljas — elektroni pöörlemist oma telje ümber). Üksildases aatomis asuvad elektronid täiesti kindlatel energianivoodel, mis vastavad nende teatud kvantolekutele ja teatud energiale aatomis. Seejuures saab igal energianivool asetseda ainult kaks elektroni, mis erinevad ainult pöördemomentide (spinnide) suuna poolest oma telgede suhtes, sest kahe sellise elektroni energiad on peaaegu võrdsed. Joonisel 1, *a* on skemaa-

tiliselt kujutatud elektronide energianivoosid üksildases aatomis. Mida kõrgemal asub joonisel kujutatud joon, seda suurem on energia. Kaugused joonte vahel vastavad teatud energia juurdekasvudele. Ergastamata olekus asuvad elektronid kõikidel järjestikku alt üles asetsevatel põhinivoodel. Kuid aatomi ergastamisel, näiteks valguse mõjul, on võimalik elektronide üleminek ergastatud olekutesse kõrgematele energianivoodele.

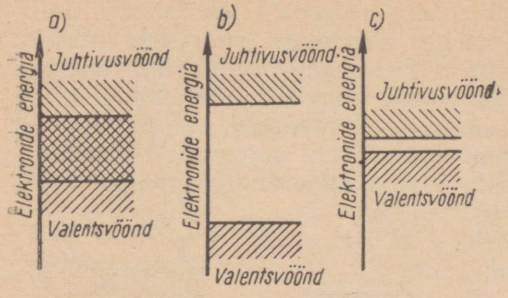


Joon. 1.

Kui suur arv N ühesugust aatomit lähenevad sedavõrd, et nende vastastikuse mõju tagajärjel moodustub kõva või vedel keha, siis selle mõju tagajärjel iga nii põhilisele kui ergastatud olekule vastav energianivoo lõhestub N lähestikku asuvaks nivooks. Tulemuseks on, et iga üksikus aatomis esineva nivoo asemel moodustub kehas peaaegu katkematu riba N nivoost või, nagu öeldakse, energiavöönd. Joonisel 1, *b* on skemaatiliselt kujutatud kõva keha energiavööndid. Kui aatomid on ergastamata, siis on kõik põhivööndid elektronidega täidetud. Ülemises täidetud vööndis paiknevad valentselektronid, mis määravad aine keemilised omadused. Seda vööndit nimetatakse täidetud vööndiks ehk valentsvööndiks.

Vastavalt kvantteooriale on juhtivusvool võimalik ainult siis, kui aines on olemas elektronide poolt täitmata kvantolekuid, nii et elektronid võivad üle minna ühest olekust teise. Selline üleminek, mis põhjustab vabade elektronide kaootilise liikumise, võib toimuda aine aatomite soojusliku liikumise tõttu. Välise elektrivälja mõjul lisandub sellele elektronide kaootilisele liikumisele nende korrapärane liikumine, mis kujutabki endast juhtivusvoolu. Kuid nagu märgitud, on juhtivusvoolu tekkimise põhitingimuseks vabade kvantolekute olemasolu ja võimalus elektronide üleminekuks nendesse olekutesse teistest kvantolekutest. Sellelt vaatekohalt seisneb erinevus juhtivate ainete, dielektrikute ja pooljuhtide vahel alljärgnevas. Elektrijuhtides ulatub ergastatud olekute vöönd valentsesse energiavööndisse (joon. 2, *a*), mistõttu elektronid võivad kergesti üle minna valentsvööndist ergastatud olekute vööndisse, kus leidub suurel hulgal vabu olekuid. Need elektronid ongi vabad elektronid ehk juhtivuselektronid. Seetõttu nimetatakse ergastatud olekute vööndit ka juhtivusvööndiks. Juhtivusvöönd ei sisalda mitte ainult ergastusele, vaid ka aine aatomite täielikule ioniseerimisele vastavaid energianivoosid.

Dielektrikutes on valents- (täidetud) ja juhtivusvööndi vahel



Joon. 2.

märgatav energeetiline lünk (keeluvöönd) (joon. 2, *b*), milles elektronide stabiilsed olekud ei ole võimalikud. Täidetud vööndis olevad elektronid peavad soojusliku või mõne muu välise mõju tagajärjel omandama küllaldase energia, et minna üle juhtivusvööndisse. Dielektrikutel on see energeetiline lünk niivõrd suur, et toatemperatuuril on üpris väike arv elektrone võimelised üle minema juhtivusvööndisse ja seetõttu ongi dielektrikute juhtivus väga väike.

Pooljuhtides on energeetiline lünk valentsvööndi ja juhtivusvööndi vahel samuti olemas, kuid ta on võrdlemisi väike (joon. 2, *c*). Vastavalt sellele on energia, mis on vajalik elektroni üleviimiseks valentsvööndist juhtivusvööndisse, märgatavalt väiksem kui dielektrikutes. Seejuures moodustub paar elektron—auk. Juhtivusvööndisse üleläinud elektron osutub vabaks elektroniks, sest selles vööndis on palju täitmata olekuid, millesse nimetatud elektron võib kergesti üle minna. Valentsvööndis tekkinud vaba koht (auk) omakorda loob võimaluse sellesse teise elektroni üleminekuks samast valentsvööndist, s. o. toimub justkui tühimiku ümberpaiknemine. Seega tekib sellises pooljuhis elektron-auk-juhtivus, s. o. välise elektrivälja mõjul elektronide liikumine juhtivusvööndis ühes suunas ja augu liikumine valentsvööndis teises suunas. Kuid eriti hinnatavaks osutub võimalus lisandite abil anda pooljuhile peamiselt elektron- või peamiselt aukjuhtivust. Sellest räägime pooljuhtseadiste käsitlemisel.

Käesoleva kursuse põhiülesandeks on tundma õppida mitmesugustes elektrotehnilistes seadmetes toimuvaid elektromagnetilisi protsesse. Seetõttu me vaatleme peamiselt makroskoopilisi protsesse. Teiste sõnadega: me võtame ajalise ja ruumilise keskmise mikroskoopilistest ebaühtlustest, mis on tingitud sellest, et meie poolt uuritavad protsessid kujutavad endast tegelikkuses määratu suure hulga elementaarprotsesside kogumit. Siiski me pöördume elementaarprotsesside käsitlemise juurde neil juhtumitel, kui see on vajalik uuritavate nähtuste füüsikaliseks selgitamiseks. Võttes aines toimuvatest protsessidest keskmised ülalnimetatud mõttes, iseloomustame ainet vastavate keskmiste parameetritega ja seejuures nimetame sageli ainet keskkonnaks. Märgime, et *homogeenseks* ehk *ühtlikuks* nimetatakse keskkonda, mis oma kõikides ruumielementides on ühe-

suguste füüsikaliste omadustega. *Isotroopseks* nimetatakse keskkonda, mille omadused kõikides ruumielementides on ühesugused igas suunas.

§ 4. Elektrivälja tugevus

Elektrostaatilist välja uurides võime oletada, et laetud juhtivad kehad asetsevad ideaalses isoleerivas keskkonnas, mis ei oma elektrijuhtivust. Sel puhul võivad laengud säilida kehadel kui tahes kaua.

Elektrivälja uurimiseks kõigis tema punktides tuleb kasutada *punktikujulist laetud proovikeha*, millel on nii väikesed joonmõõtmed, et tema piirides võib uuritavat välja vaadelda homogeensena. Lisaks sellele peab proovikeha laeng q_0 olema küllalt väike. Proovikeha mõõtmed ja samuti tema laeng peavad olema küllalt väikesed seetõttu, et tema sisseviimine uuritavasse välja ei kutsuks esile mingisugust märgatavat laengute ümberjaotumist seda välja määravatel teistel kehadel.

Uurides punktikujulise laetud proovikeha abil elektrostaatilist välja liikumatute laetud kehade ümbruses, märkame, et selle välja igas punktis mõjub proovikehale suuruse ja suuna poolest täiesti kindel mehaaniline jõud.

Nimetatud asjaolu kasutades määramegi *põhilise füüsikalise suuruse*, mis iseloomustab elektrivälja igas tema punktis ja mida nimetatakse *elektrivälja tugevuseks*.

Elektrivälja tugevus võrdub välja antud punkti asetatud liikumatule positiivselt laetud proovikehale mõjuva mehaanilise jõu $\mathbf{f}$ *ja selle keha laengu* q_0 *suhtega.* Elektrivälja tugevust kujutatakse vektorina $\mathbf{E}$, mille suund ühtib positiivselt laetud proovikehale mõjuva mehaanilise jõu vektoriga $\mathbf{f}$. Seega

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q_0}.$$

Laeng q_0 ei mõjuta uuritavat välja määravate laengute jaotumist, kui suurus q_0 läheneb nullile. Vastavalt sellele võib anda järgmise täpse definitsiooni:

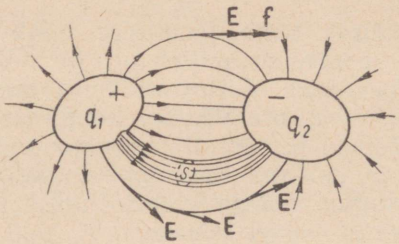
Elektrivälja tugevus on vektoriaalne suurus, mis võrdub vaadeldavasse välja punkti asetatud liikumatule punktikujulisele laetud kehale elektrivälja poolt mõjuva jõu ja selle keha laengu suhte piirväärtusega, kui see laeng läheneb nullile. Tema suunaks võetakse positiivselt laetud punktikujulisele kehale mõjuva jõu suund. Seega

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\mathbf{f}}{q_0}.$$

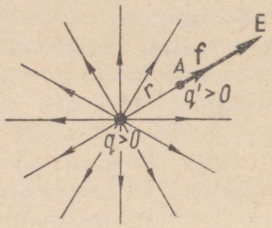
Määranud väljatugevuse kõigis välja punktides, võib tõmmata rida jooni selliselt, et nende joonte igale punktile tõm-

matud puutuja langeb suunalt ühte väljatugevuse vektoriga (joon. 3). Neid jooni nimetatakse *elektrivälja tugevuse joonteks*. Joonisel varustatakse nad nooltega, mis näitavad vektori **E** suunda. Nende joonte kogum moodustab elektrivälja pildi.

Kujutame elektriväljas suletud kontuuri, mis piirab mingit pinda s (joon. 3). Tõmbame läbi selle kontuuri kõikide punktide väljatugevuse jooned. Nende joonte kogum moodustab torukujulise pinna. Elektrivälja osa, mis on piiratud niisuguse torukujulise pinnaga, nimetatakse *väljatugevuse toruks*.



Joon. 3.



Joon. 4.

Määrame tühjusse asetatud liikumatu punktikujulise laetud keha väljatugevuse, kusjuures keha laeng on q (joon. 4). Selle keha joonmõõtmed loeme äärmiselt väikesteks, võrreldes kaugusega temast kuni punktideni, kus vaadeldakse tema välja. Punktikujulise laetud keha välja uurimisel näeme, et selle väljatugevus on suunatud piki raadiusi r, mis algavad punktist, kus keha asub. Kui $q > 0$, siis langeb väljatugevuse suund ühte raadiusvektori **r** suunaga ning tema suurus on võrdeline laenguga q ja pöördvõrdeline kauguse r ruuduga. See asjaolu, et vektor **E** omab nimetatud suunda ja et E suurus oleneb ainult r-ist, on täiesti loomulik, sest üksildase punktikujulise laetud keha väli peabki omama sfäärilist sümmeetriat.

Laetud keha mõju antakse edasi läbi teda ümbritseva sfäärilise pinna, mille $s = 4\pi r^2$. Seepärast on loomulik lugeda väljatugevust muutuvaks pöördvõrdeliselt selle pinna suurusega. See vastab katselisele faktile, mille kohaselt E muutub pöördvõrdeliselt r^2-ga. Järelikult võime kirjutada:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Suurust ε_0 nimetatakse *elektriliseks konstandiks*. Me oletasime, et punktikujuline keha laenguga q on asetatud tühjusse. Vastavalt sellele käib elektriline konstant ε_0 juhtumi kohta, mille puhul elektrivälja vaadeldakse tühjuses.

Kui punktikujulist keha laenguga q ümbritseb homogeenne ja isotroopne isoleeraine, siis, nagu näitab katse, muutub välja-

tugevus teistsuguseks, võrreldes juhtumiga, kui sellesama laenguga keha asub tühjuses. Vastavalt sellele kirjutatakse:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_a} \frac{q}{4\pi r^2}$$

Suurust ε_a nimetatakse seejuures aine *absoluutseks dielektriliseks läbitavuseks*. Ta on dielektriku peamiseks iseloomustajaks. Aine *dielektriliseks läbitavuseks* ehk *aine suhteliseks dielektriliseks läbitavuseks* nimetatakse suurust $\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}$, mis on võrdne aine absoluutse dielektrilise läbitavuse ε_a ja elektrilise konstandi ε_0 suhtega.

Suuruse ε_0, samuti antud aine jaoks suuruse ε_a arvulised väärtused sõltuvad elektrilaengu, pikkuse ja mehaanilise jõu mõõtühikute valikust. Meie kasutame edaspidi absoluutset praktilist ratsionaliseeritud ühikute süsteemi, mille mehaanilisteks lähteühikuteks on pikkusühik — *meeter*, massiühik — *kilogramm* ja ajaühik — *sekund* ning mis sisaldab kõik praktilised elektromagnetilised ühikud; nendeks on: *amper*, *volt*, *oom*, *kulon*, *veeber*, *farad* ja *henri*. Eeldades, et elektromagnetiliseks lähteühikuks on amper, tähistatakse seda süsteemi MKSA.[1] Märgime ära, et selles mehaaniliste, elektriliste ja magnetiliste ühikute ühtses süsteemis on jõu ühikuks *njuuton*, energia ja töö ühikuks *džaul* ning võimsuse ühikuks *vatt*.

MKSA- ja CGS-süsteemi ühikute vahelised seosed on toodud lisas.

MKSA-süsteemis omandab elektriline konstant ε_0 väärtuse

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot c_0^2} \frac{\text{farad}}{\text{meeter}},$$

kus $c_0 = 2{,}998 \cdot 10^8 \approx 3 \cdot 10^8$ on valguse kiiruse arvuline väärtus tühjuses, väljendatud meetrites sekundi kohta.

Järelikult

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}.$$

Kui asetada punkti A (joon. 4) teine punktlaeng q', siis esimese laengu väljas mõjub temale mehaaniline jõud $f = Eq'$. Järelikult

$$f = \frac{1}{\varepsilon_a} \frac{qq'}{4\pi r^2}.$$

Kui laengud q ja q' asuvad tühjuses, siis

$$f = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{qq'}{4\pi r^2}.$$

[1] Kõik ratsionaliseeritud MKSA-süsteemi ühikud kuuluvad praegu NSV Liidus eelissüsteemina kasutatavasse rahvusvahelisse mõõtühikute süsteemi (SI). Peale loetletud nimeliste ühikute kuuluvad sellesse süsteemi ka ühikud *siimens* ja *tesla*. — *Toim.*

Mõju ja vastumõju võrdsuse printsiibist järeldub, et laengule q mõjub laengu q' poolt suuruselt niisama suur, kuid suunalt vastupidine jõud.

Ühesuguse märgiga q ja q' puhul on need jõud tõukejõududeks, erinevate q ja q' märkide puhul aga tõmbejõududeks.

Saadud sõltuvus väljendab *Coulomb*'i *seadust*.

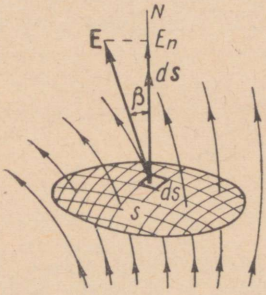
Kirjutusviisi, milles on toodud ülalkirjutatud Coulomb'i seadus, nimetatakse *ratsionaliseeritud* kirjutusviisiks erinevalt nn. *ratsionaliseerimata* kirjutusviisist, mille kohaselt $f = \frac{1}{\varepsilon_a} \frac{qq'}{r^2}$. Viimati nimetatud kirjutusviis kujunes ajalooliselt varem, kuid teda kasutatakse veel käesoleval ajalgi. Jõu muutumise võrdeliselt laengute q ja q' korrutisega ja pöördvõrdeliselt kauguse ruuduga r^2 avastas Coulomb eksperimentaalselt 1785. a.

Meie kirjutame Coulomb'i seaduse ja teised seosed käesoleval ajal laialdaselt kasutatavas ratsionaliseeritud kirjutusviisis. See kirjutusviis kaotab teguri 4π kõige üldisemates seostes ja toob selle teguri uuesti sisse oma loomulikule kohale nendesse seostesse, mis vastavad sfäärilise sümmeetriaga iseloomustuvatele juhtumitele. Samuti on äärmiselt oluline see, et elektromagnetilise välja võrrandite ratsionaliseeritud kirjutusviisiga saavutatakse sümmeetria elektrilisi ja magnetilisi suurusi käsitlevate seoste vahel.

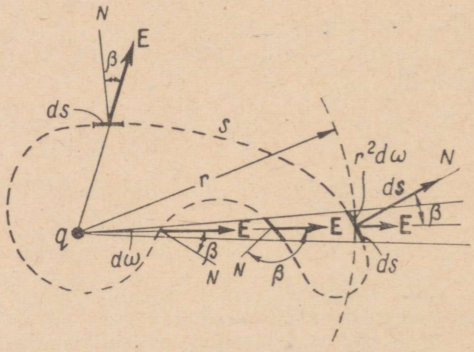
Elektrilaengu (elektrihulga) mõõtühikuks on MKSA-süsteemis *kulon* (1 C).

§ 5. Gaussi teoreem

Kujutame elektriväljas mingi kontuuriga piiratud pinda s (joon. 5). Pinna mingist punktist suuname pinnale tinglikult valitud positiivses suunas normaali N. Pinna normaali N ja vektori **E** vahelise nurga tähistame tähega β. Vektori **E** komponent pinnaelemendi ds normaali suunas on siis $E_n = E \cos \beta$.



Joon. 5.



Joon. 6.

Pinnaelementide ja nende normaalisuunaliste vektori komponentide korrutiste integraali üle pinna s nimetatakse *vektori vooks* läbi selle pinna.

Elektrivälja tugevuse vektori voo läbi pinna s tähistame Ψ_E, kusjuures

$$\Psi_E = \int_s E \cos \beta \, ds.$$

Tähistagu ds vektorit, mille pikkus võrdub arvuliselt pinnaelemendi ds pinnaga ja mille suund ühtib pinnaelemendi positiivse normaali suunaga. Vastavalt sellele saame kirjutada voo avaldise lühendatult vektorkujus:

$$\Psi_E = \int_s \mathbf{E} \, ds,$$

milles $\mathbf{E}\,ds = E \cos \beta \, ds$ on vektorite **E** ja ds skalaarkorrutis. Vektori voog on skalaar.

Vaatleme homogeenses ja isotroopses dielektrikus kinnist pinda, millega piiratud ruumis asetseb punktlaeng q. Joonisel 6 kujutatud kinnine kõverjoon on kinnise pinna jälg joonise tasapinnal. Loeme pinna välisnormaali positiivseks ja määrame vektori **E** voo läbi kõne all oleva kinnise pinna. Eraldame kogu ruumist lõpmatult peenikese koonilise väljatugevuse toru. See toru läbib kinnist pinda üks või mitu korda, lõigates igal läbimisel pinnast elemendi ds. Vektori **E** voog läbi pinnaelemendi ds on

$$E \cos \beta \, ds = \mathbf{E}\,ds.$$

Kui element ds asetseb punktist, kuhu meie eelduse kohaselt on koondatud punktlaeng q, kaugusel r, siis

$$E = \frac{1}{\varepsilon_a} \frac{q}{4\pi r^2} \text{ ja } \cos \beta \, ds = \pm r^2 d\omega.$$

Siin $d\omega$ on ruuminurk, milles näeme pinda ds siis, kui seda vaadata punktlaengu asukohast. Seega on $\cos \beta \, ds$ pinnaelemendi ds projektsioon sellisele kerapinnale, mille raadius on r ja keskpunkt ühtib punktlaengu asukohaga. Nimetatud projektsioon ühtib kerapinna elemendiga $r^2 d\omega$, mille lõikab välja kooniline toru. Plussmärk tuleb panna siis, kui $\cos \beta > 0$, s. t. kui väljatugevuse joon väljub kinnisest pinnast, miinusmärk aga siis, kui väljatugevuse joon siseneb kinnisesse pinda. Seega

$$\mathbf{E}\,ds = \pm \frac{1}{\varepsilon_a} \frac{q}{4\pi} d\omega.$$

Siit nähtub, et toru ristlõiget läbiva voo avaldis ei sisalda kaugust laengust kuni vaadeldava lõikeni, järelikult on voog ühe ja sama toru kõigis lõigetes absoluutväärtuselt võrdne. Seejuures peame lugema voogu positiivseks siis, kui väljatugevuse

torud väljuvad kinnisest pinnast, ja negatiivseks siis, kui nad sisenevad kinnisesse pinda.

Kui laeng q asub seespool kinnist pinda (joon. 6), siis läbivad torud pinda üks kord või mitu korda, kuid tingimata paaritu arv kordi. Arvestades seda, et raadiusvektor väljub kinnisest pinnast alati ühe võrra enam kordi kui siseneb, saame ühe vootoru summaarseks vooks läbi kinnise pinna

$$\mathbf{E}\,\mathrm{ds} = \frac{1}{\varepsilon_a}\frac{q}{4\pi}\,\mathrm{d}\omega.$$

Avaldise vasaku poole integreerimisel üle kogu pinna tuleb paremal poolel summeerida kõigi elementaartorude ruuminurgad, s. t. võtta ruuminurk, mis sisaldab punktlaengut ümbritsevat kogu ruumi. Sellise ruuminurga suurus on 4π. Seega saame võrrandi

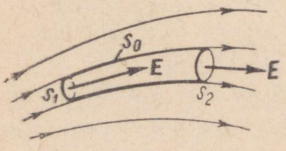
$$\oint_s \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = \frac{q}{\varepsilon_a},$$

mis väljendabki *Gaussi teoreemi.*

Kuna väljatugevuse vektori integraal üle kinnise pinna osutus sõltumatuks laengu asukohast kinnise pinnaga piiratud ruumis, siis on Gaussi teoreem kehtiv ka sellel juhtumil, kui laeng q asub mistahes kujuga kehal või kui q on mitme keha laengu algebraline summa. Oluline on ainult, et kõik need laengud asuksid seespool vaadeldavat kinnist pinda.

Seega võime Gaussi teoreemi sõnastada alljärgnevalt:

elektrivälja tugevuse vektori voog läbi kinnise pinna on homogeenses ja isotroopses dielektrikus võrdne seespool kinnist pinda asuva laengu jagatisega dielektriku absoluutse dielektrilise läbitavusega.



Joon. 7.

Kui laengud asuvad tühjuses, siis tuleb Gaussi teoreemi väljendavas võrrandis ε_a asemele kirjutada elektriline konstant ε_0.

Gaussi teoreemi rakendamisel pinna kohta, mis piirab väljatugevuse toru teatud lõiku (joon. 7), saame:

$$\oint_s \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = \int_{s_1} \mathbf{E}\,\mathrm{ds} + \int_{s_2} \mathbf{E}\,\mathrm{ds} + \int_{s_0} \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = 0.$$

Kuna vektor $\mathbf{E}$ on toru külgpinna s_0 puutujaks, siis $\int_{s_0} \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = 0$. Järelikult $\int_{s_1} \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = -\int_{s_2} \mathbf{E}\,\mathrm{ds}$, s. t. *voog läbi väljatugevuse toru erinevate ristlõigete on võrdse suurusega.* See annab aluse ühiktoru mõiste sissetoomisele. Viimase all mõtleme vootoru, mille ristlõiget läbib voog suurusega üks voo ühik. Vastavalt sellele võime mingit pinda läbivat voogu Ψ_E käsitada selle pin-

naga lõikuvate ühiktorude arvuna. Voog läbi pinnaelemendi ds, mis on risti vektoriga **E**, on $d\Psi_E = \mathbf{E}\,ds = E\,ds$. Järelikult võrdub vektori **E** moodul voo tihedusega:

$$E = \frac{d\Psi_E}{ds},$$

s. t. ühiktorude arvuga läbi pinnaühiku, mis on risti vektoriga **E**. Ühiktorude tihedus või nende torude telgedega ühtivate väljatugevuse joonte tihedus annab ettekujutuse vektori **E** suurusest.

Gaussi teoreemist tuleneb oluline järeldus, et mistahes kujuga laetud juhtiva keha elektrilaeng asetseb keha pinnal või täpsemalt üsna õhukeses kihis pinna lähedal.

Staatilises olukorras peab väljatugevus elektrit juhtiva laetud keha sees olema võrdne nulliga. Vastasel korral põhjustaks elektrivälja olemasolu juhtivas kehas leiduvate vabade elektrilaenguga elementaarosakeste liikumise. Seega saab staatiline olukord tekkida ainult siis, kui väljatugevus mistahes kohas elektrijuhi sees on võrdne nulliga. Seepärast võrdub nulliga ka juhtiva keha sees võetud mingit kinnist pinda läbiva voo $\Psi_E = \oint_s \mathbf{E}\,ds$ väärtus. Gaussi teoreemi põhjal peab aga siis ka seespool kinnist pinda olev laeng võrduma nulliga. Siit järeldub, et keha sees on summaarne laeng võrdne nulliga ja keha laeng on jaotunud ainult keha pinnale.

Järeldus, et laetud juhtiva keha sees väli puudub, on õige ka õõnsa juhtiva keha kohta sel juhtumil, kui õõnsus on igast küljest kinnine. Tõepoolest, kui õõnsuseta laetud juhtiva keha sees väli puudub, siis õõnsuse moodustamine, s. t. osa juhtiva keskkonna asendamine dielektrikuga, ei saa põhjustada juhtiva keha välispinnal laengute ümberpaiknemist, ning väli õõnsuses puudub niisamuti, nagu see puudub õõnsuseta juhtiva keha sees.

Negatiivselt laetud metallkeha puhul on meil tegemist keha vabade elektronide ülejäägiga. Need liigsed elektronid asetsevad laetud keha pinna lähedal, sest keha sees ruumtihedus $\varrho = 0$. Muidugi võime laengu puudumisest keha sees kõnelda ainult nähtuse makroskoopilise käsitluse juures, s. o. niisuguse käsitluse juures, mille puhul vähim ruumielement, millega opereerime ja mis on küllalt väike, võrreldes keha ruumalaga, sisaldab siiski suurt arvu positiivselt ja negatiivselt laetud elementaarosakesi, nii et ruumielemendi summaarne laeng võib võrduda nulliga.

Positiivselt laetud metallkehas on vabade elektronide puudujääk, sest osa nendest siirdus keha elektriseerimisel mingile teisele kehale, mis laadus negatiivselt. Ala, kus positiivne laeng domineerib elektronide negatiivse laengu üle, piirdub õhukese kihiga keha välispinna lähedal.

Rakendame Gaussi teoreemi väljatugevuse arvutamiseks sfäärilise, teljelise ja tasapinnalise sümmeetria juhtumitel.

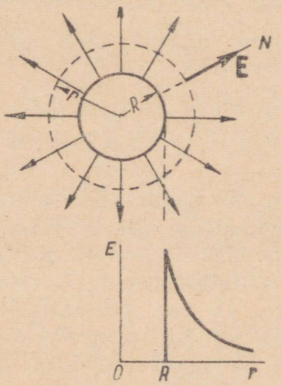
Vaatleme üksildast juhtivat kera, mille raadius on R ja laeng q (joon. 8).

Kõigis punktides laetud kera suhtes kontsentriliselt asetseval sfäärilisel pinnal raadiusega $r(r > R)$ on vektor $\mathbf{E}$ suuruselt võrdne ja pinna välisnormaali suunaline. Seega kirjutame $\oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = \oint_S E\,ds = E\oint_S ds = 4\pi r^2 E$. Gaussi teoreemi põhjal $4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon}$.

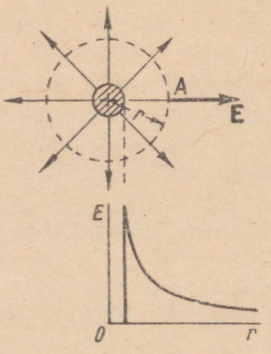
Järelikult

$$E = \frac{1}{\varepsilon_a}\frac{q}{4\pi r^2},$$

s. t. väljaspool kera on väli täpselt samasugune nagu siis, kui kogu laeng q oleks koondatud kera keskpunkti.



Joon. 8.



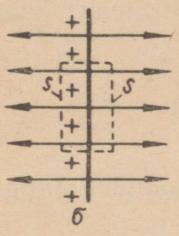
Joon. 9.

Joonise 8 alumises osas on kujutatud väljatugevuse E sõltuvus raadiusest r.

Gaussi teoreemi kasutamise teise näitena vaatleme üksildase lõpmatult pika sirge ümmarguse ristlõikega juhtme välja. Joonisel 9 on näidatud juhtme ristlõige. Olgu laengu joontihedus, mis arvuliselt võrdub laenguga juhtme pikkusühiku kohta, tähistatud tähega τ. Väljatugevuse määramiseks punktis A, kaugusel r juhtme teljest, kasutame kujutletavat silindrilist pinda läbi punkti A, mille telg ühtib juhtme teljega. Muudame selle silindrilise pinna kinniseks kahe sellise tasapinna abil, mis on risti juhtme teljega ja millede omavaheline kaugus on l. Sümmeetria tõttu juhtme telje suhtes peavad kõik väljatugevuse jooned

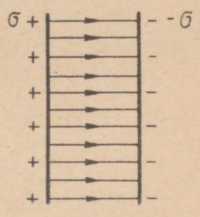
olema radiaalsed sirged risti juhtme pinnaga. Juhtme teljest võrdsel kaugusel asetsevates kõikides punktides peab väljatugevus olema ühesuguse väärtusega. Läbi silindri otspindade on väljatugevuse vektori voog võrdne nulliga, sest väljatugevuse jooned on pinnale puutujateks. Külgmisel silindrilisel pinnal on **E** vektor kõikjal välisnormaali suunaline ja kõigis punktides võrdse suurusega. Rakendades Gaussi teoreemi vaadeldava kinnise pinna kohta saame:

$$\oint_s \mathbf{E}\,\mathrm{d}s = 2\pi r l E = \frac{\tau l}{\varepsilon_a} \text{ või } E = \frac{\tau}{\varepsilon_a 2\pi r}.$$



Joon. 10.

Määrame veel ühtlaselt laetud lõpmatu tasapinna (joon. 10) välja. Olgu laengu pinditihedus σ. Ümbritseme osa tasapinnast sellise kinnise pinnaga, mis on moodustatud kahest laetud tasapinnaga paralleelsest tasapinnast s ja silindrilisest külgpinnast, mis on nendega risti. Väli on laetud tasapinna mõlemal poolel homogeenne. Väljatugevuse jooned on silindrilise pinna puutujateks ja risti tasapindadega s. Gaussi teoreem annab:



Joon. 11.

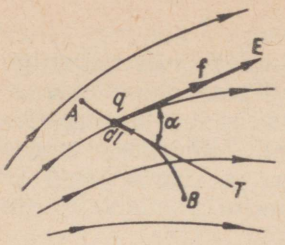
$$\oint_s \mathbf{E}\,\mathrm{d}s = E \cdot 2s = \frac{\sigma s}{\varepsilon_a} \text{ või } E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_a}.$$

Erinevat märki laengutega, kuid ühesuuruste laengu pinditihedustega σ (joon. 11) laetud kahe plaadi välja võib saada positiivselt ja negatiivselt laetud plaatide väljade superponeerimise ehk ülestamise teel. Väljaspool plaate $E = 0$ ja plaatide vahel $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_a}$.

§ 6. Elektripinge

Kui osake laenguga q liigub elektriväljas mööda mingit teekonda, siis teevad temale mõjuvad välja jõud tööd. Selle töö suhe liikuva laengu suurusesse on füüsikaline suurus, mida nimetatakse *elektripingeks*. Elektripinge iseloomustab elektriväljа omadusi antud teekonna ulatusel, nimelt välja võimet teha tööd laetud osakeste liikumisel mööda seda teekonda.

Kujutleme, et osake positiivse laenguga q liigub elektriväljas punktist A punkti B mööda mingit määratud teekonda (joon. 12). Osakesele mõjuv jõud $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$ on teekonna igas punktis suunatud mööda väljatugevuse joone puutujat, mis läbib seda punkti. Olgu teekonna mingis punktis jõu f ja puutuja T



Joon. 12.

positiivse suuna vahel nurk α. Tähistame dl-ga vektorit, mis on suuruselt võrdne teekonna elemendiga dl ja on suunatud puutuja positiivses suunas, s. o. laetud osakese ümberpaiknemise suunas. Siis α on nurk vektorite **E** ja dl vahel.

Laengut omava osakese ümberpaiknemisel teekonnal dl teevad välja jõud töö

$$dA = f \cos \alpha \, dl = qE \cos \alpha \, dl = q \, \mathbf{E} \, \mathrm{dl}.$$

Töö, mille teevad välja jõud osakese ümberpaiknemisel kogu teekonna ulatuses punktist A punktini B,

$$A = \int_A^B f \cos \alpha \, dl = q \int_A^B E \cos \alpha \, dl = q \int_A^B \mathbf{E} \, \mathrm{dl}.$$

Niisiis on töö võrdeline väljatugevuse joonintegraaliga $\int_A^B E \cos \alpha \, dl$ mööda antud teekonda.

See joonintegraal on võrdne *elektripingega* mööda etteantud teekonda A-st B-ni. Pinget on kombeks tähistada tähega u. Seega

$$u_{AB} = \int_A^B E \cos \alpha \, dl = \int_A^B \mathbf{E} \, \mathrm{dl}.$$

Tööd, mida tehakse laenguga q osakeste ümberpaiknemisel mööda antud teekonda A-st B-ni, võib järelikult kujutada laengu korrutisena pingega u_{AB} mööda seda teekonda:

$$A = q u_{AB}.$$

Seejuures võib vaadeldav teekond üldjuhtumil kulgeda täielikult juhis, täielikult dielektrikus või osaliselt juhis ja osaliselt dielektrikus.

Vastavalt ülaltoodule *on elektripinge füüsikaline suurus, mis iseloomustab elektrivälja vaadeldava teekonna ulatuses ja on võrdne elektrivälja tugevuse joonintegraaliga mööda seda teekonda.*

Rääkides pingest teekonna mingil osal, kasutatakse sageli terminit *pingelang* teekonna antud osal. Vastavalt sellele on elektrivälja tugevuse joonintegraal mööda mingit kinnist kontuuri $\oint \mathbf{E} \, \mathrm{dl}$ võrdne pingelangude summaga selle kontuuri kõikidel osadel.

MKSA ühikute süsteemis on pinge mõõtühikuks *volt* (1 V).

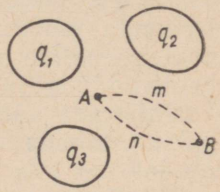
Öeldust selgub, et *elektrivälja tugevuse suurus on võrdne pingelanguga väljatugevuse joone pikkusühiku kohta.*

Tõepoolest, kui teekond langeb ühte väljatugevuse joonega, siis pingelang teekonnal dl on võrdne $du = E\,dl$, ja järelikult $E = \frac{du}{dl}$. Seepärast on MKSA ühikute süsteemis elektrivälja tugevuse mõõtühikuks *volt meetri kohta* $\left(1\,\frac{V}{m}\right)$.

§ 7. Elektrostaatilise välja potentsiaal

Elektrostaatilises väljas võrdub väljatugevuse joonintegraal mööda mistahes kinnist kontuuri ehk ringintegraal nulliga:

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0.$$



Joon. 13.

See tähtis elektrostaatilise välja omadus tuleneb energia jäävuse seadusest. Vaatleme paigalseisvate laetud kehade süsteemi (joon. 13) ja eeldame, et mööda kinnist teekonda $AmBnA$ liigub punktikujuline keha laenguga q. Kinnise teekonna ühel osal toimub liikumine välja jõudude suunas ja nende poolt tehtud töö osutub positiivseks. Teekonna teisel osal aga toimub liikumine välja jõududele vastassuunas ja nende poolt tehtud töö osutub negatiivseks. Töö, mis on kulutatud laengut q omava keha ümberpaigutamiseks väljas mööda kogu kinnist teekonda, peab võrduma nulliga:

$$q \oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0, \text{ s. t. } \oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0.$$

Tõepoolest, selle tingimuse puudumisel võiks alati leida niisuguse kontuuri $AmBnA$ läbimise suuna, et selleks kulutatud töö osutuks positiivseks. Ent siis pöörduks süsteem, millesse kuulub ka keha laenguga q, pärast kinnise teekonna läbimist täpselt esialgsesse seisundisse, see tähendaks aga, et oleks võimalik korduvalt mistahes arv kordi laengut q omava kehaga kontuuri läbida ja saada igakordsel läbimisel lõpliku suurusega positiivse tööhulga. Niisuguse ammendamatu energiaallika olemasolu võimalus on vastuolus energia jäävuse seadusega. Seega elektrostaatilises väljas peab väljatugevuse joonintegraal mööda mistahes kinnist kontuuri võrduma nulliga.

Siit tuleneb vahetult, et väljatugevuse joonintegraali suurus ei sõltu integreerimisteekonna valikust teekonna antud alg- ja lõpp-punktide A ning B korral. Tõepoolest:

$$\oint_{AmBnA} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0,$$

millest

$$\int_{AmB} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\int_{BnA} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \int_{AnB} \mathbf{E}\,d\mathbf{l}.$$

Et aga teekonnad m ja n on valitud meelevaldselt, siis järelikult integraal $\int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{l}$ elektrostaatilises väljas ei sõltu integreerimisteekonna valikust, vaid osutub ainult punktide A ja B koordinaatide funktsiooniks.

Selle integraaliga võrduvat suurust nimetatakse punktide A ja B elektriliste potentsiaalide vaheks ning tähistatakse $U_A - U_B$. Seega $U_A - U_B = \int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{l}$.

Teisest küljest võrdub see integraal pingega mööda mingit teekonda punktist A punkti B. Järelikult terminid «pinge» ja «potentsiaalide vahe», kasutatuna elektrostaatilise välja puhul, kehtivad ühe ja sama suuruse kohta.

Edaspidi tähistame potentsiaalide vahet samuti nagu pingetki tähega u, millele vastavalt kasutame tähistust: $U_A - U_B = u_{AB}$.

Ülalöeldust selgub, et *elektrostaatilise välja kahe punkti elektriliste potentsiaalide vahe on arvuliselt võrdne välja jõudude tööga positiivset ühiklaengut omava punktikujulise keha ümberpaigutamisel ühest punktist teise.*

Valime lõpp-punktiks ruumis antud punkti P. Siis integraali väärtus $\int_A^P \mathbf{E}\,d\mathbf{l}$ osutub ainult punkti A koordinaatide x, y, z funktsiooniks. Tähistades selle funktsiooni tähisega U_A või $U(x, y, z)$, võime kirjutada:

$$\int_A^P \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = U_A = U(x, y, z).$$

Suurust U nimetatakse välja vaadeldava punkti *elektriliseks potentsiaaliks*. Antud punkti P potentsiaal on võrdne nulliga, sest $U_P = \int_P^P \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0$.

Antud välja iseloomustavat elektrilist potentsiaali võib määrata ainult täpsusega kuni suvalise konstandini, mis sõltub punkti P (mille potentsiaal loetakse võrdseks nulliga) suvalisest valikust.

Elektrivälja, mida on võimalik igas punktis iseloomustada täpsusega kuni suvalise konstandini skalaarsuurusega, mida nimetatakse elektriliseks potentsiaaliks, kannab *potentsiaalse elektrivälja* nime. Selliseks nimelt osutubki elektrostaatiline väli.

Elektrostaatikaalastes reaalsetes praktilistes ülesannetes võetakse maapinna potentsiaal harilikult võrdseks nulliga. Niisuguste ülesannete teoreetilisel käsitlemisel, milledes vaadeldakse lõpliku suurusega ruumiossa paigutatud ja lõpmata dielektrilise keskkonnaga ümbritsetud laetud kehi, loetakse nulliga võrdseks nende punktide potentsiaalid, mis asuvad lõpmata kaugel laetud kehadest, s. t. potentsiaal määratakse integraaliga

$$U = \int_A^\infty \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Pindu, mis on risti elektrivälja tugevuse joontega, nimetatakse *samapotentsiaalipindadeks* ehk ekvipotentsiaalipindadeks. Tõepoolest, antud pinnal mööda mistahes joont $\int_A^B E\cos\alpha\,\mathrm{d}l = 0$, sest $\cos\alpha = 0$. Järelikult sellel pinnal olevate mistahes kahe punkti A ja B potentsiaalide vahe on võrdne nulliga.

Võrrand $U(x, y, z) = \text{const}$ määrab samapotentsiaalipinnal olevate punktide kogumi, s. t. on selle pinna võrrandiks. Samapotentsiaalipinna jälgjooni joonise tasapinnal nimetatakse *samapotentsiaalijoonteks*. Ilmselt lõikuvad samapotentsiaalijooned kõikjal väljatugevuse vektori joontega täisnurga all.

Nagu eespool nägime, puudub igasuguses elektrostaatilises süsteemis väli ($\mathbf{E} = 0$) juhtivast materjalist kehade sisemuses, järelikult omab iga juhtiv keha kogu ulatuses võrdset potentsiaali. Juhtivate kehade pinnad ongi samapotentsiaalipindadeks, milledega elektrivälja tugevuse jooned on dielektrikus risti.

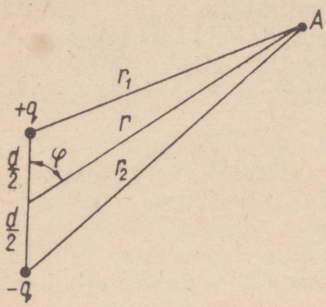
Määrame punktikujulise laetud keha (laenguga q) (vt. joon. 4) välja potentsiaali. Seejuures on loomulik valida integreerimisteekond mööda radiaalset väljajoont. Siis $\mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = E\,\mathrm{d}r$, ning lugedes punkti P lõpmatuses olevaks, saame:

$$U = \int_r^\infty E\,\mathrm{d}r = \int_r^\infty \frac{1}{\varepsilon_a}\frac{q}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}r = \left| -\frac{1}{\varepsilon_a}\frac{q}{4\pi r}\right|_r^\infty = \frac{1}{\varepsilon_a}\frac{q}{4\pi r}.$$

Potentsiaal läheneb lõpmatuses nullile, kuid kogu ruumi ulatuses omab lõpliku väärtuse, erandiks on eriline punkt $r = 0$, kuhu eeldatakse laeng koondatud olevat. Olgu märgitud, et viimane eeldus osutub matemaatiliseks abstraktsiooniks, sest igasugune füüsikaline keha ja vastavalt tema laeng hõivab mingisuguse, olgugi väga väikese ruumiosa. Sama seaduse järgi muutub potentsiaal ka laetud kera ümbritsevas ruumis, sest väli väljaspool kera on samasugune nagu juhtumil, kui kogu kera laeng oleks koondatud tema tsentrisse.

Leiame veel elektridipooli (joon. 14) potentsiaali. Elektridipool on süsteem kahest võrdse suuruse ja vastupidise märgiga

punktikujulisest laengust $q_1 = -q_2 = q$, mis on teineteise suhtes nihutatud kaugusele d. Termini «dipool» kasutamisel eeldatakse, et d on väike võrreldes kaugusega r dipooli tsentrist punktini, kus vaadeldakse tema välja. Rakendades superpositsiooni printsiipi, saame punkti A potentsiaali:



Joon. 14.

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Kui $r \gg d$, siis võime kirjutada, et $r_1 r_2 \approx r^2$ ja $r_2 - r_1 \approx d\cos\varphi$.

Järelikult

$$U = \frac{qd\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_a r^2} = \frac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_a r^2},$$

kus $p = qd$ on *dipooli elektrilise momendi* suurus.

Dipooli elektriliseks momendiks nimetatakse vektorsuurust **p**, *mis võrdub arvuliselt korrutisega qd ja on suunatud negatiivselt laengult positiivsele laengule.*

§ 8. Elektromotoorsed jõud

Igasuguse potentsiaalse elektrivälja, eriti elektrostaatilise välja iseloomulik omadus — väljatugevuse joonintegraali võrdumine nulliga mööda ükskõik millist kinnist kontuuri — kehtib ainult ruumi selles osas, mis paikneb väljaspool nn. *elektromotoorse jõu* (emj.) allikaid.

Emj. ilmnemine on seotud mitteelektrostaatilise ning üldjuhtumil mittepotentsiaalse iseloomuga elektriväljade olemasoluga.

Üldjuhtumil me räägime, et kinnises kontuuris toimib elektromotoorne jõud, kui elektrivälja tugevuse joonintegraal mööda seda kontuuri ei võrdu nulliga, kusjuures, nagu kohe näidatakse, see joonintegraal just võrdubki kontuuris toimiva elektromotoorse jõuga. Emj. allikateks võivad olla näiteks elektrigeneraatorid, galvaanielemendid, akumulaatorid, termoelemendid.

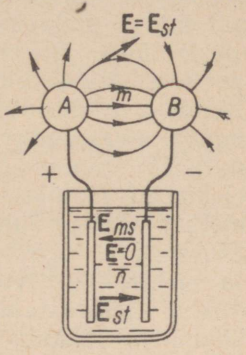
Nimetame elektrivoolu läbilaskmiseks ettenähtud seadiste kogumit leppeliselt *elektriahelaks* tingimusel, et elektromagnetilisi protsesse nendes seadistes saab kirjeldada emj., voolu ning pinge mõistete abil.

Kui suletud elektriahelas tekib emj. mõjul elektrivool, siis see emj. teeb tööd elektrivoolu alalhoidmiseks ahelas. See töö tehakse emj. allika sisemuses mingi energia arvel, elektrigeneraatoris generaatorit pöörlema paneva mootori mehaanilise töö

arvel, galvaanielementides ja akumulaatorites elektrokeemilise energia arvel, termoelementides soojusliku energia arvel.

Emj. mõiste olemuse selgitamiseks vaatleme näitena galvaanielementi (joon. 15). Kehad A ja B, mis on ühendatud elemendi klemmidega, osutuvad laetuiks elemendi emj. mõjul. Vektori $\mathbf{E}$ integraal mööda ükskõik millist teekonda m kehade A ja B vahel dielektrikus võrdub nende kehade potentsiaalide vahega:

$$\int_{AmB} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = U_A - U_B = u_{AB}.$$



Joon. 15.

Kui me aga valime integreerimisteekonna kehalt A mööda ühendusjuhet elemendi positiivsele elektroodile, seejärel läbi elektrolüüdi (teekonnalõik n) negatiivsele elektroodile ning lõpuks mööda ühendusjuhet kehale B, siis tuleb tunnistada, et mööda seda teekonda integraali väärtus võrdub nulliga:

$$\int_{AnB} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0.$$

Tõepoolest, kogu vaadeldud teekond kulgeb täielikult juhtivas keskkonnas. Juhtivus metallides kindlustatakse juhtivuselektronide olemasoluga, juhtivus elektrolüüdis — lahustunud aine molekulide osalisest dissotsiatsioonist tingitud positiivsete ioonide olemasoluga. Vaatamata vabade laetud osakeste olemasolule kogu vaadeldava teekonna ulatuses nende korrapärast liikumist ei teki ning vool ahelas puudub. See tähendab, et kogu näidatud teekonnal $\mathbf{E} = 0$ ning järelikult võrdub nulliga ka vektori $\mathbf{E}$ integraal.

Resulteeriva elektrivälja puudumine ($\mathbf{E} = 0$) elektroodide välispinna lähedastes õhukestes kihtides on tingitud sellest, et nendes kihtides on elektroodide ja elektrolüüdi laengutest tekitatud elektriväljaga, mille tugevus on $\mathbf{E}_{st}$, superponeeritud võrdne ning vastasmärgiline *mitteelektrostaatilise* päritoluga *kõrvaline* elektriväli tugevusega $\mathbf{E}_{ms}$. Seda võib kirjutada alljärgnevalt:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{st} + \mathbf{E}_{ms} = 0 \quad \text{või} \quad \mathbf{E}_{st} = -\mathbf{E}_{ms}.$$

Sellele vastavalt saame:

$$\int_{AnB} \mathbf{E}_{st}\,d\mathbf{l} = -\int_{AnB} \mathbf{E}_{ms}\,d\mathbf{l} = \int_{BnA} \mathbf{E}_{ms}\,d\mathbf{l}.$$

Suurus

$$\int_{BnA} \mathbf{E}_{ms}\,d\mathbf{l} = e.$$

kujutabki endast galvaanielemendi elektromotoorset jõudu, mis püüab elemendi sees laetud osakesi liikuma panna vastassuunaliselt elektrostaatilise välja $\mathbf{E}_{st}$ poolt tekitatud jõududele.

Pöörame tähelepanu sellele, et allika sees on emj. suunatud allika negatiivselt klemmilt positiivsele. Nimetatud emj. olemus seisneb selles, et positiivsed ioonid (juhtivuselektronideta metalli aatomid) püüavad lahustusrõhu toimel väljuda elektroodist elektrolüüti. Sellele üleminekule tegutseb vastu elektrolüüdi poolt positiivsetele metalliioonidele mõjuv osmootiline rõhk. Nende rõhkude vahe mõjul toimubki positiivsete ioonide üleminek elektroodist elektrolüüti või vastupidi, olenevalt sellest, millises suunas on rõhk ülekaalus. Lõpptulemusena osutub elektrood laetuks, esimesel juhtumil negatiivselt (ülekaalus on metalli jäänud juhtivuselektronid) ja teisel juhtumil positiivselt. Elektrolüüt aga omandab vastasmärgilise laengu. Elektroodi ja elektrolüüdi vahel tekib potentsiaalide erinevus ning moodustub elektrostaatiline väli $\mathbf{E}_{st}$, mis takistab ioonide üleminekut. Üleminek lakkab, kui rõhkude vahe tasakaalustub elektrostaatilise välja jõududega.

Rõhkude vahest tingitud mehaanilise jõu f toime ioonile on ekvivalentne elektrivälja olemasoluga, mille tugevus $\mathbf{E}_{ms} = \frac{\mathbf{f}}{q}$, kus q — iooni laeng. See on täielikult kooskõlas elektrivälja tugevuse definitsiooniga. Seega tasakaaluolukord tekib tingimusel

$$\mathbf{E}_{st} + \mathbf{E}_{ms} = \mathbf{E} = 0.$$

Joonisel 15 on vektorid $\mathbf{E}_{ms}$ ja $\mathbf{E}_{st}$ tinglikult kujutatud elektrolüüdiga täidetud elektroodidevahelises ruumis, kuigi ülaltoodust on selge, et nad erinevad nullist ainult õhukestes kihtides elektroodide ja elektrolüüdi vahel.

Kui elektroodid on valmistatud erinevatest materjalidest, siis potentsiaalide vahed nende ja elektrolüüdi vahel tulevad üldjuhtumil erinevad, mis põhjustab potentsiaalide vahe tekkimise elektroodide vahel.

Võttes vektori $\mathbf{E}$ joonintegraali mööda kinnist kontuuri *AmBnA*, mis osaliselt kulgeb emj. allika *sisemuses*, saame:

$$\oint_{AmBnA} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = U_A - U_B,$$

sest

$$\int_{BnA} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0.$$

Teisest küljest

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{st}\,d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_{ms}\,d\mathbf{l} = e,$$

sest

$$\oint \mathbf{E}_{st}\, d\mathbf{l} = 0, \text{ kuid } \oint \mathbf{E}_{ms}\, d\mathbf{l} = \int_{BnA} \mathbf{E}_{ms}\, d\mathbf{l} = e.$$

Järelikult

$$e = U_A - U_B,$$

s. o. *elemendi emj. võrdub potentsiaalide vahega või, mis on antud juhtumil sama, klemmidevahelise pingega ehk klemmipingega katkestatud välisahela puhul* (voolu puudumisel ahelas).

Öeldust nähtub, et tingimus $\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0$ kehtib ainult väljaspool emj. allikaid asetsevas ruumiosas.

Vaadeldud näites, kus galvaanielemendis voolu ei esine, puudub resulteeriv väli kõikjal elemendi sees (nähtuse makroskoopilisel käsitlusel). See on tingitud mitteelektrostaatilistest, antud juhtumil elektrokeemilistest põhjustest. Vastavalt sellele on ka pinge mööda teekonda *BnA* elemendi sees voolu puudumisel võrdne nulliga.

Vajadus kõrvalise elektrivälja mõiste kui resulteeriva välja komponendi ning sellele vastavalt emj. $e = \oint \mathbf{E}_{ms}\, d\mathbf{l}$ mõiste sissetoomiseks on tingitud sellest, et just selle emj. suurusega on määratud laengut omavate elementaarosakeste ümberpaigutamiseks kulutatav töö, mis on seotud elektrokeemiliste protsessidega. Järelikult just emj. iseloomustab energia muundumist elemendi sees voolu läbimisel. Seoses sellega, rääkides *emj. allikatest*, me kasutame samuti terminit *energiaallikas*.

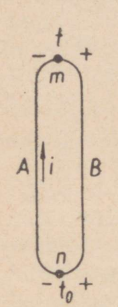
Üsnagi tähtis on asjaolu, et elemendi emj. peaaegu ei sõltu elektrivoolust ahelas.

Elektromotoorsed jõud tekivad samuti erisuguste metallide kokkupuutel. Sellisel juhtumil tekivad nn. kontaktelektromotoorsed jõud seoses juhtivuselektronide üleminekuga ühest metallist teise kokkupuutekohas, mis põhjustab ühes metallis positiivse ning teises metallis negatiivse laengu ülekülluse. Seda elektronide üleminekut võib vaadelda kõrvalise, mitteelektrostaatilise iseloomuga elektrivälja toime tulemusena kokkupuutekohas. Erimärgiliste laengute tekkimine kokkupuutuvatel metallidel põhjustab nn. kontaktpotentsiaalide vahe tekkimise, mis voolu puudumisel võrdub kontaktelektromotoorse jõuga. Kontaktelektromotoorne jõud sõltub kokkupuutuvatest metallidest ning temperatuurist. Suurusjärgult võib ta olla kümnendikvoltidest kuni mõne voldini.

Nagu katse näitab, tekib emj. ka homogeensest elektrijuhist kehas, kui teda soojendada ebaühtlaselt tema pikkuse ulatuses nii, et üks keha ots omab kõrgemat temperatuuri kui teine. Emj. tekkimist säärasel juhtumil võib seletada juhtivuselektronide mõningase üleminekuga kuumemalt juhi otsalt jahedamale selle

tõttu, et elektronide soojusliku liikumise intensiivsus temperatuuri tõustes kasvab.

Moodustame suletud ahela kahest erisugusest materjalist juhtmest A ja B (joon. 16). Juhtmete jootekohtades m ja n tekivad kontaktelektromotoorsed jõud. Kui mõlema jootekoha temperatuur on ühesugune, siis resulteeriv emj. kontuuris $AmBnA$ on võrdne nulliga, sest elektromotoorsed jõud jootekohtades on võrdsed ning vastasmärgilised. Kui aga jootekohtade temperatuurid t ja t_0 on erinevad, siis emj. e kinnises kontuuris ei võrdu nulliga, vaid on määratud kontaktelektromotoorsete jõudude erinevusega jootekohtades m ja n ning elektromotoorsete jõududega pikkuse ulatuses ebaühtlaselt kuumutatud juhtmetes A ja B. Võime kirjutada:



Joon. 16.

$$e = e_{AB}(t) - e_{AB}(t_0) + e_A(t_0, t) + e_B(t, t_0),$$

kus $e_{AB}(t)$ — kontaktelektromotoorne jõud juhtmete A ja B ühenduskohas temperatuuril t, lugedes suunaga juhtmelt A juhtmele B; $e_{AB}(t_0)$ — sama temperatuuril t_0; $e_A(t_0, t)$ — emj. juhtmes A temperatuuril t_0 juhtme alguses ning temperatuuril t juhtme lõpus; $e_B(t, t_0)$ — sama juhtmes B temperatuuril t juhtme alguses ning t_0 juhtme lõpus.

Emj. e antud juhtmepaari puhul sõltub jootekohtade temperatuuridest t ja t_0. Teda nimetatakse *termoelektromotoorseks* jõuks ja vaadeldud ahelat *termoelemendiks* ehk *termopaariks*. Etteantud temperatuuri t_0 puhul jahedamas jootekohas sõltub e suurus ainult kuumema jootekoha temperatuurist t. Lülitades galvanomeetri termoelemendi ahelasse, saab voolu suuruse järgi otsustada e suuruse üle ning järelikult ka kuumema jootekoha temperatuuri t üle. Termoelektrilised nähtused avastas vene akadeemik F. U. Aepinus.

Termoelemendis on emj. toime voolu läbimisel seotud soojusliku energia muundumisega elektromagnetiliseks energiaks. Tavaliselt kasutatavate termopaaride emj. on suurusjärgus mõnest millivoldist kuni kümnendike millivoltideni külmade ning kuumade jootekohtade temperatuuridel vastavalt 0° ja 100° C.

Vastavalt ülaltoodule *kujutab mingil teekonnal mõjuv emj. endast füüsikalist suurust, mis iseloomustab kõrvalise elektrivälja võimet tekitada elektrivoolu ja mis võrdub kõrvalise elektrivälja tugevuse joonintegraaliga mööda seda teekonda. Kõrvalise elektrivälja all mõistetakse välja, mis on tingitud soojuslikest protsessidest, keemilistest reaktsioonidest, kontaktnähtustest, mehaanilistest jõududest ja teistest mitteelektromagnetilistest protsessidest (makroskoopilisel ainekäsitlusel). Kõrvalist elektrivälja, nagu igasugust elektrivälja, iseloomustavad sellesse välja asetatud elektriliselt laetud osakestele ning kehadele mõjuvad*

mehaanilised jõud. Edaspidi mõistet *elektromotoorne jõud* laiendatakse — sellesse lülitatakse emj., mis indutseeritakse magnetvoo ajalise muutuse puhul. Kui suletud ahelas kõrvalise emj. mõjul tekib vool, siis toimub ahelas mingit liiki energia muundumine elektromagnetiliseks energiaks. Mõjuva emj. suurus on sel juhtumil arvuliselt võrdne tööga, mida sooritavad kõrvalise elektrivälja jõud positiivse ühiklaengu ümberpaigutamisel mööda suletud ahelat.

Kõikidel juhtumitel, kui kinnises kontuuris, mis on võetud näiteks mööda suletud elektriahelat, toimib mingisugune emj. allikas, on resulteeriva elektrivälja joonintegraal mööda seda kontuuri erinev nullist ja võrdub allika elektromotoorse jõuga.

Edaspidi, paigalseisvate laetud süsteemide väljade vaatlemisel, me eeldame, et vaadeldavas ruumis ei ole emj. allikaid ja järelikult igasuguse kontuuri kohta selles ruumis kehtib tingimus

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0.$$

TEINE PEATÜKK

DIELEKTRIKUTE POLARISATSIOON JA ELEKTRINIHE. ELEKTRIMAHTUVUS

§ 9. Dielektrikute polarisatsioon

Nagu juba märgitud, sõltub laetud kehade vahel mõjuv jõud kehi ümbritseva dielektriku elektrilistest omadustest. Neid omadusi iseloomustasime aine dielektrilise läbitavusega. Katse näitab, et kaks elektriliselt laetud keha laengutega q_1 ja q_2 mõjuvad teineteisele mistahes homogeenses ja isotroopses dielektrikus väiksema jõuga kui tühjuses. Vastavalt sellele on ükskõik millisesse homogeensesse ja isotroopsesse dielektrikusse asetatud keha (laenguga q) elektrivälja tugevus väiksem kui juhtumil, mil sama keha sama laenguga asub tühjuses. Kuna absoluutne dielektriline läbitavus ε_a või vastavalt elektriline konstant ε_0 lähevad mehaanilise jõu ja väljatugevuse avaldises nimetajasse, siis vastavalt varemõeldule on iga aine absoluutne dielektriline läbitavus ε_a alati suurem elektrilisest konstandist ε_0.

Dielektriku osa elektrilistes nähtustes on seotud erilise füüsikalise seisundiga, mille ta omandab elektrivälja mõjul. Erinevalt juhtivatest ainetest, kus on küllaldane hulk vabu laetud elementaarosakesi, on dielektrikus kõik, või täpsemalt öeldes, praktiliselt kõik laetud elementaarosakesed seotud aatomisiseste, molekulisiseste või molekulidevaheliste jõududega. Seepärast on dielektrikus välise elektrivälja mõjul juhtivusvool, mis on tingitud elektrilaengute edasikandmisest vabade elektronide või ioonide poolt, tavaliselt tühiselt väike. Nagu eespool märgitud, on dielektrikute tühiselt väike elektrijuhtivus vastavalt kvantteooriale seletatav valentsvööndi ja juhtivusvööndi vahelise suure energeetilise lünga (keeluvööndi) olemasoluga. Toatemperatuuril omab ainult äärmiselt väike elektronide hulk piisavalt energiat, et ületada see lünk ja minna juhtivusvööndisse. Dielektrikutes saavutab energeetilise lünga laius suurusjärgu 10 elektronvolti, samal ajal kui soojusliikumise energia keskmine väärtus toatemperatuuril on umbes 0,3 elektronvolti (ener-

gia ühik 1 elektronvolt on võrdne kineetilise energiaga, mille omandab elektron läbides elektriväljas potentsiaalide vahe 1 V). Me loeme dielektrikute elektrijuhtivuse võrdseks nulliga.

Dielektriku viimisel välisesse välja hakkavad aine molekulide koosseisu kuuluvatele laetud elementaarosakestele mõjuma väljast tingitud mehaanilised jõud. Need jõud kutsuvad esile molekulide sees positiivsete laengutega osakeste nihkumise välja suunas ja negatiivsete laengutega osakeste nihkumise vastassuunas. Kui väljatugevus ei ole erakordselt suur, siis positiivsete ja negatiivsete laengutega osakesed ei saa täiesti lahku minna, sest aatomisisesed, molekulisisesed ja molekulidevahelised jõud hoiavad neid koos.

Esineb rida aineid, mille molekulid on välise välja puudumisel elektriliselt neutraalsed, s. o. sellise molekuli koosseisu kuuluvad laengud ei tekita elektrivälja väljaspool molekuli asuvas ruumis, s. o. kõikide elektronide elektrilise mõju kese molekulis ühtib positiivsete tuumade mõju keskmega.

Molekuli koosseisu kuuluvate positiivselt ja negatiivselt laetud osakeste vastupidistes suundades nihkumise tulemusena välise välja mõjul nende elektriliste mõjude keskmed ei ühti. Välises ruumis tajutakse molekuli dipoolina, s. o. kahe võrdse vastasmärgilise teineteise suhtes mingi vahemaa d võrra nihutatud punktlaengu q ja $-q$ süsteemina.

Välise elektrivälja mõjul muutub iga molekul dipooliks ja dielektrik osutub *polariseerituks.*

Polariseeritud dielektriku mingi ruumala elektriliseks momendiks nimetatakse vektorsuurust, mis on võrdne kõigi selle ruumalas olevate dipoolide elektriliste momentide geomeetrilise summaga.

Dielektriku elektrilise polarisatsiooni astet antud punktis iseloomustatakse vektorsuurusega, mida nimetatakse *polariseerumuseks* või *polarisatsiooni intensiivsuseks* ja tähistatakse tähega **P**.

Polariseerumus on võrdne dielektriku mingi antud punkti haarava ruumala elektrilise momendi ja selle ruumala suhte piirväärtusega, kui see ruumala läheneb nullile.

Ainetes, millede molekulid omandavad polaarsuse ülalvaadeldud skeemi järgi välise välja mõjul toimuva deformatsiooni tulemusena, on kõikide dipoolide teljed ühesuunalised. Võime kirjutada:

$$P = N_1 p = N_1 q d,$$

kus $N_1 = \frac{dN}{dV}$ on dipoolide (molekulide) arv aine ruumalaühiku kohta, kusjuures dN on dipoolide arv ruumalas dV. Katse näitab, et tegelikult kasutatavate väljade puhul on kõikide niisuguste ainete polariseerumus võrdeline väljatugevusega, s. o.

$$P = \alpha_a E.$$

Tegurit α_a nimetame aine *absoluutseks dielektriliseks vastu-*

võtlikkuseks. Suhet $\alpha = \frac{\alpha_a}{\varepsilon_0}$ nimetatakse *suhteliseks dielektriliseks vastuvõtlikkuseks* ehk lihtsalt *dielektriliseks vastuvõtlikkuseks*. Ülalvaadeldud dipoole nimetatakse *kvaasielastseteks dipoolideks*. Dielektrikute hulka, mille molekulidel on niisugused omadused, kuuluvad näiteks gaasid: vesinik, hapnik, lämmastik. Nende ainete dielektriline vastuvõtlikkus ei sõltu temperatuurist, sest välise elektrivälja jõud tasakaalustatakse neis molekulisiseste jõududega, mis ei sõltu molekulide soojusliikumisest.

On olemas teine isoleerainete klass, millede molekulidel on nullist erinev elektriline moment isegi välise välja puudumisel. Niisuguseid molekule nimetatakse *polaarseteks*. Toome näiteks kloorvesinikgaasi (HCl), mille molekulid koosnevad positiivsest vesiniku ioonist ja negatiivsest kloori ioonist, mis asuvad teineteisest teatud kaugusel, s. o. nad moodustavad dipooli. Soojusliikumine viib dipoolid kaootilisse asendisse, ja eri dipoolide elektriväljad välises keskkonnas vastastikku neutraliseeruvad. Kui tuua selline aine välisesse välja, siis dipoolid püüavad asetuda oma telgedega piki väljajooni. Seda korrastatud paigutust takistab aga soojusliikumine. Resultaadina leiab aset ainult dipoolide mõningane pöördumine välja suunas ja dielektrik osutub teatud määral polariseerituks. Seejuures lisandub dipoolide telgede orienteerumise nähtusele veel molekulide ülalvaadeldud deformeerumise efekt. Katse näitab, et praktikas kasutatavate väljade puhul on polaarsete molekulidega dielektrikute polariseerumus samuti võrdeline väljatugevusega, s. o. $P = \alpha_a E$. Sellest võrdelisusest kõrvalekaldumine võib esineda ainult väga tugevate väljade puhul, kui saavutatakse nn. küllastus, mil peaaegu kõik dipoolid on juba orienteerunud piki välist välja. Polaarsete molekulidega dielektrikute dielektriline vastuvõtlikkus väheneb temperatuuri tõusuga, sest seejuures kasvab soojusliikumise desorienteeriv mõju.

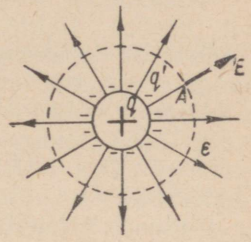
Eksisteerib veel eri grupp dielektrikuid, nn. senjettelektrikud, millede α_a sõltub tugevasti väljatugevusest ning mõne väljatugevuse ja temperatuuri väärtuse juures saavutab äärmiselt suuri väärtusi. Nende ainete peamistest omadustest räägitakse edaspidi mittelineaarse karakteristikuga kondensaatorite käsitlemisel.

Üldjoontes esitatud nähtuste pilt välise elektrivälja mõju all olevas dielektrikus lubab seletada seda fakti, et iga aine ε_a on suurem kui ε_0.

Asetame laetud juhtiva keha, näiteks kera, homogeensesse ja isotroopsesse dielektrikusse, mille $\varepsilon_a = \text{const}$ (joon. 17). Keha laengu q mõjul dielektrik polariseerub. Kui $q > 0$, siis positiivse laenguga osakesed molekulides nihkuvad kehast eemale ja negatiivse laenguga osakesed veidi lähenevad kehale. Siiski jääb dielektrik kogu oma ruumalas elektriliselt neutraalseks

selles mõttes, et igas mahuelemendis dipoolide positiivsete laengute summa jääb võrdseks negatiivsete laengute summaga, järelikult laengu ruumtihedus on endiselt null. Erandiks on õhuke dielektriku piirikiht laetud keha pinna lähedal, kus nagu paljastuksid dipoolide negatiivsed laengud. Need laengud moodustavad keha pinna lähedal nn. seotud negatiivse laengu q'.

Terminiga «seotud laeng» me tähistame elektrilaengut, mis ilmneb polariseeritud dielektrikute piirpindadel. Seda laengut omavad need osakesed, mis on seotud molekulisiseste jõududega ja mis järelikult ei hakka liikuma muutumatu elektrivälja mõjul. Sellega erineb ta oluliselt nn. vabast laengust, mille moodustab näiteks juhi liigne laeng. Kui juhi sees kujuneks alaliselektriväli, siis vabad laetud osakesed hakkaksid liikuma — juhis tekiks alalisvool. Vaba laeng võib elektrostaatilises väljas olla paigal ainult juhi pinnal, mis on ümbritsetud ideaalse dielektrikuga.



Joon. 17.

Kasutades Gaussi teoreemi § 5 saadud kujul laetud keha haarava suletud sfäärilise pinna kohta, mille jälg on kujutatud joonisel 17 kriipsjoonega, saame:

$$\oint_s \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = \frac{q}{\varepsilon_a},$$

kus q on keha vaba laeng. Suurus ε_a on erinev ε_0-st ja sellega võetakse formaalselt arvesse dielektriku polarisatsiooni mõju väljatugevuse suurusele. Arvestades polarisatsiooni mõju seotud laengu q' ilmumisega dielektriku piirpinnale, peame vaatlema välja tühjuses eksisteerivana, kuid tekitatuna mitte ainult keha vabast laengust q, vaid ka seotud laengu q' poolt. Vastavalt võib Gaussi teoreemi kirjutada ka kujul

$$\oint_s \mathbf{E}\,\mathrm{ds} = \frac{q+q'}{\varepsilon_0}.$$

Seotud laengu q' märk on alati vastupidine keha vaba laengu q märgile. Seepärast põhjustabki aine polarisatsiooninähtus alati laenguga q keha elektrivälja nõrgenemist, võrreldes juhtumiga, mil sama keha sama laenguga q asuks tühjuses. Tuleb märkida, et $|q'| < |q|$, sest loomulikult võib polarisatsioon ainult nõrgendada, mitte aga täielikult hävitada teda tekitavat välja. Võrrutades kahe viimase võrduse parempoolsed osad, saame:

$$\frac{q}{\varepsilon_a} = \frac{q+q'}{\varepsilon_0}.$$

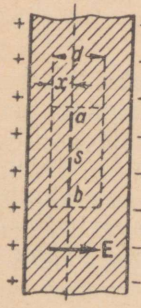
Arvestades ülaltoodud vahekorda q ja q' vahel, võime kirjutada:

$$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} = \frac{q}{q+q'} > 1.$$

Seega isoleeraine molekulide juuresolekul väli nõrgeneb seotud laengute tekkimise tagajärjel ning välja nõrgenemise fakti väljendab see, et igal ainel $\varepsilon_a > \varepsilon_0$.

Dielektriku polariseerumuse me määrasime kui suuruse, mis on võrdne elektrilise momendiga aine ruumalaühiku kohta. Teda võib iseloomustada veel veidi teisiti, sidudes polariseerumuse enese määrangu positiivselt ja negatiivselt laetud osakeste nihkumise faktiga dielektrikus välja mõjul. Olgu isoleeraine paigutatud homogeensesse elektrivälja kahe laetud metallplaadi vahele. Välja tekkimisel nihkuvad positiivse laenguga osakesed dielektrikus negatiivselt laetud plaadi suunas keskmiselt kauguse x ulatuses. Negatiivse laenguga osakesed kanduvad seejuures positiivselt laetud plaadi suunas kauguse $d - x$ võrra, kus d on mööda väljatugevuse joont loetav keskmine kaugus, mille võrra eemalduvad teineteisest positiivsete ja negatiivsete laengutega osakesed. Kvaasielastsetel dipoolidel on d kaugus dipooli laengute keskpunktide vahel, s. o. dipooli telje pikkus. Polaarsetel molekulidel on d dipoolide telgede projektsioonide keskmine väärtus väljatugevuse suunale.

Paigutame mõtteliselt läbi dielektriku väljatugevuse joontega risti asetseva pinna ja vaatleme selle pinna osana pindala s. Joonisel 18 on pinnaosa s jälg $a - b$ esile tõstetud tugeva kriipsjoonega. Väljatugevuse muutumise ajal nullist kuni lõppväärtuseni läbivad pinda s välja jõudude suunas kõik positiivsed laengud, mis enne välja tekkimist olid mahus xs, ja vastu välja jõudusid kõik negatiivsed laengud, mis enne välja tekkimist olid mahus $(d - x)s$ (joon. 18). Kui q on dipooli positiivne laeng ja N_1 dipoolide arv ruumalaühikus, siis välja tekkimise protsessis nihkub läbi pinna s vektori **E** suunas positiivne laeng qN_1xs ja vastassuunas negatiivne laeng $-qN_1(d-x)s$.



Joon. 18.

Kuna negatiivse laengu nihkumine välja jõududele vastassuunas on ekvivalentne positiivse laengu nihkumisega välja jõudude suunas, siis summaarne läbi pinna s nihkuv laeng

$$Q' = qN_1xs + qN_1(d-x)s = N_1qds = Ps,$$

sest

$$N_1qd = P.$$

Seega

$$P = \frac{Q'}{s}.$$

Üldjuhtumil, s. o. mittehomogeense välja puhul tuleb kirjutada:

$$P = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta Q'}{\Delta s} = \frac{dQ'}{ds},$$

s. t. *polariseerumus on võrdne dielektriku aines välja tekkimise protsessis läbi osakeste nihkumissuunaga risti oleva pinnaelemendi nihkuvate laetud osakeste poolt edasikantava elektrilaengu ja selle pinnaelemendi suhte piirväärtusega, kui pinnaelement läheneb nullile.*

Anisotroopsetes kristallilistes kehades on dielektriline vastuvõtlikkus eri peatelgede suundades erineva väärtusega.

Kui vektor **E** ei ole suunatud piki üht kristalli peatelge, siis vektor **P** juba enam ei ühti vektori **E** suunaga. Füüsikaliselt on see seletatav asjaoluga, et laetud elementaarosakesed kristallide molekulides ei nihku välise välja mõju suunas, vaid mõningal määral kalduvad sellesse suunda, kus nihkumisele vastumõjuvad molekulidevahelised jõud on kõige nõrgemad ja dielektriline vastuvõtlikkus suurim.

Ükskõik missuguse, kuid teadaoleva koordinaattelgede *OX*, *OY* ja *OZ* paigutuse puhul kristalli peatelgede suhtes võib vektorite **P** ja **E** telgede *OX*, *OY* ja *OZ* suunaliste komponentide vahelise seose kirjutada kujul:

$$P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z;$$
$$P_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z;$$
$$P_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z,$$

seega dielektriline vastuvõtlikkus (nii absoluutne kui ka suhteline) on seejuures tensorsuurus.

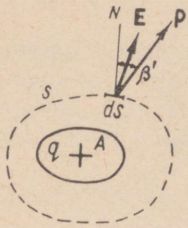
§ 10. Elektrinihe. Maxwelli postulaat

Vaatleme mistahes kujuga keha *A*, mille laeng on *q* (joon. 19). Keha ümbritseb dielektrik, üldjuhtumil mittehomogeenne ja anisotroopne. Ümbritseme keha dielektrikus asetseva kujuteldava kinnise pinnaga *s*. Keha vaba laengu *q* suurenemisel nullist kuni lõppväärtuseni tugevnes elektriväli dielektrikus ja suurenes dielektriku polarisatsioon. Välja tekkimise protsessis toimus dielektriku aine koosseisu kuuluvate elektrilaengut omavate elementaarosakeste nihkumine ja läbi pinna *s* kanti nende osakestega laeng *Q'*. Vastavalt eelmises paragrahvis toodule võib selle laengu esitada kujul

$$Q' = \oint_s P \cos \beta' \, ds = \oint_s \mathbf{P} \, d\mathbf{s},$$

kus **P** on polariseerumuse vektor pinna *s* punktides.

Kui seejuures $q > 0$, siis ka $Q' > 0$, sest sel juhtumil nihkuvad positiivselt laetud osakesed pinna s positiivse välisnormaali suunas.



Joon. 19.

Pinnaga s piiratud ruumalasse ilmub lisaks vabale laengule q veel seotud laeng q'. Homogeense dielektriku puhul ilmub see seotud laeng, nagu ülal märgitud, dielektriku piirile laetud keha välispinna lähedale. Üldjuhtumil, mittehomogeense dielektriku puhul ilmuvad seotud laengud ka erineva dielektrilise läbitavusega osade eralduspindadele. Oluline on märkida, et sõltumata sellest, kuhu on laiali paiknenud seotud laengud, peab kehtima ilmne võrdus

$$q' = -Q'.$$

Tõepoolest, enne elektrivälja moodustumist oli elektrilaengu ruumtihedus kõikjal dielektrikus võrdne nulliga ja samuti võrdus nulliga seotud laeng q'. Seetõttu ühemärgilise seotud laengu ülejäägi q' ilmumine pärast välja tekkimist pinnaga s piiratud ruumalasse on võimalik ainult selle tulemusena, et läbi pinna s kandub polarisatsiooni protsessis nihkuvate laetud osakestega laeng Q'. Seejuures peavad absoluutväärtused $|q'|$ ja $|Q'|$ olema teineteisega võrdsed, kuid suurused q' ja Q' ise peavad olema märgilt vastupidised, sest positiivse laengu nihkumisel läbi pinna s seestpoolt väljapoole moodustub selle pinnaga piiratud ruumis negatiivse laengu ülejääk.

Seega saame:

$$q' = -Q' = -\oint_s \mathbf{P}\, d\mathbf{s}.$$

Kasutame nüüd Gaussi teoreemi kujul

$$\oint_s \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = \frac{q + q'}{\varepsilon_0},$$

rakendades seda sellesama suletud pinna s kohta. Selles kujus võib Gaussi teoreemi kasutada mistahes keskkonna kohta, sest aine mõju arvestatakse siin seotud laengutega q' ja välja vaadeldakse eksisteerivana tühjuses.

Korrutades viimase võrduse paremat ja vasakut poolt ε_0-ga, saame:

$$\oint_s \varepsilon_0 \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = q + q' = q - \oint_s \mathbf{P}\, d\mathbf{s}.$$

Siit leiame:

$$\oint_s \varepsilon_0 \mathbf{E}\, d\mathbf{s} + \oint_s \mathbf{P}\, d\mathbf{s} = \oint_s (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})\, d\mathbf{s} = q.$$

Tähistame tähega **D** vektorit, mis on võrdne vektorite $\varepsilon_0\mathbf{E}$ ja **P** summaga:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

ja nimetame seda *elektrinihke vektoriks.*

Seega

$$\oint_s \mathbf{D}\,\mathrm{d}s = \oint_s D\cos\beta\,\mathrm{d}s = q,$$

s. o. *elektrinihke vektori voog läbi kinnise pinna välisnormaali suunas on võrdne vaba elektrilaenguga, mis on suletud selle pinnaga piiratud ruumiossa.*

Viimases seoses on β nurk vektori **D** ja pinna s elemendi $\mathrm{d}s$ normaali vahel.

Mõisted elektrinihe dielektrikus ja elektrinihke vektor võttis kasutusele Maxwell.

Elektrinihke vektori teise komponendi **P** esitasime kui dielektriku aine koosseisu kuuluvate laetud elementaarosakeste nihkumise resultaadi, kusjuures nihkumine toimus läbi pinna, mis oli risti osakeste nihkumise suunaga. Vastavalt saime:

$$P = \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}s}.$$

Elektrinihke vektori esimene komponent $\varepsilon_0\mathbf{E}$, mille me tähistame tähega $\mathbf{D}_0$, ei ole tingitud elektriliselt laetud osakeste nihkumisest läbi mingi pinna, sest see käib elektrivälja kohta tühjuses, s. t. ruumi selle piirkonna kohta, milles puuduvad laetud osakesed.

Suurus $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0\mathbf{E}$, samuti nagu väljatugevus **E**, iseloomustab elektrivälja ennast selle antud punktis. Tähtis on märkida, et D_0 füüsikaline dimensioon on sama mis dielektriku polariseerumuse P dimensioongi, s. o. elektrilaengu ja pinnaühiku jagatis. See asjaolu annab võimaluse teha väga tähtsaid üldistusi ajas muutuva elektrivälja juhtumi kohta. Neid üldistusi arendataksegi edaspidi elektrivoolu ja selle magnetvälja käsitlevates peatükkides.

Seost

$$\oint_s \mathbf{D}\,\mathrm{d}s = q,$$

mis konstateerib mistahes kinnist pinda läbiva elektrinihke vektori voo võrdumist vaba laenguga, mis on suletud selle pinnaga piiratud ruumalasse, nimetatakse vahel Gaussi üldistatud teoreemiks.

Tõepoolest, selle seose saime kasutades Gaussi teoreemi. Gaussi teoreemi tõestatakse Coulomb'i seaduse alusel aga ainult *elektrostaatilise* välja juhtumi kohta. Seevastu loetakse seos

TRÜ Raamatukogu

$\oint_s \mathbf{D}\,ds = q$ Maxwelli aluseks võttes õigeks eranditult kõigil juhtumitel ja kuitahes kiirelt muutuvate *vahelduvate* elektriväljade puhul.

Niisuguse laia üldistuse juures tuleb seda seost käsitada elektromagnetilise välja teooria põhipostulaadina. Kõik järeldused nimetatud teooriast, mis võtab selle postulaadi üheks peateesiks, leiavad katsel täielikku kinnitust. Kirjeldatud seost nimetame *Maxwelli postulaadiks.*

Homogeense ja isotroopse keskkonna juhtumil on kehtiv Gaussi teoreem

$$\oint_s \mathbf{E}\,ds = \frac{q}{\varepsilon_a}.$$

Teiselt poolt annab Maxwelli postulaat

$$\oint_s \mathbf{D}\,ds = q.$$

Mõlemad avaldised ühtivad, kui võtta

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}.$$

See võrdus annab seose **D** ja **E** vektorite vahel mistahes isotroopse keskkonna antud punktis, kusjuures ε_a on keskkonna absoluutne dielektriline läbitavus vaadeldavas punktis. Seejuures ei ole vaja keskkonda homogeenseks pidada. Tõepoolest, kui seos $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$ on kõlblik homogeense keskkonna jaoks, siis võime alati eraldada mittehomogeenses keskkonnas vaadeldava punkti ümbruses niivõrd väikese ruumala, et selle piirides võib keskkonna lugeda homogeenseks. Kuna Maxwelli postulaat on õige kõigil juhtumitel, siis on isotroopse keskkonna kohta alati võimalik kirjutada:

$$\oint \varepsilon_a \mathbf{E}\,ds = q.$$

Homogeense keskkonna puhul võib ε_a tuua integraalimärgi ette. Seejuures saamegi Gaussi teoreemi. Mittehomogeense keskkonna puhul aga ei või ε_a-d integraalimärgi ette tuua.

Seega on isotroopse keskkonna absoluutne dielektriline läbitavus antud punktis võrdne elektrinihke suuruse ja väljatugevuse suuruse jagatisega:

$$\varepsilon_a = \frac{D}{E}.$$

Isotroopse keskkonna kohta saame:

$$D = \varepsilon_a E = D_0 + P = \varepsilon_0 E + a_a E,$$

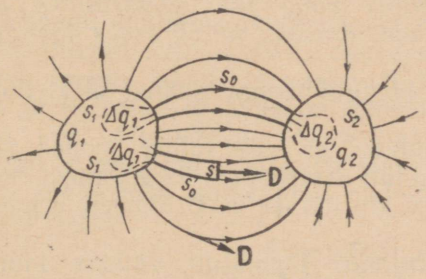
millest

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 + a_a \quad \text{või} \quad \varepsilon = 1 + a.$$

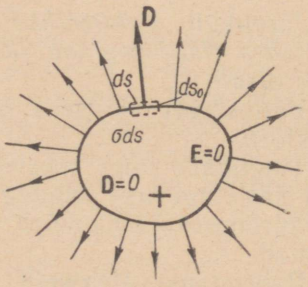
Anisotroopsetes kristallilistes kehades võib antud, kuid seejuures suvalise telgede *OX*, *OY*, *OZ* asetuse puhul kristalli peatelgede suhtes kirjutada seose vektorite **D** ja **E** peateljesihiliste projektsioonide vahel kujul, mis on analoogiline eelmises paragrahvis kirjutatud seosega vektorite **P** ja **E** projektsioonide vahel. Seejuures on dielektriline läbitavus tensorsuuruseks.

Suuremal osal ainetel on suurus $\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}$ vahemikus 1 kuni 10. Ainult mõned ained, näiteks vedelikud — vesi, metüülpiiritus ja atsetoon, omavad tunduvalt suuremat suhtelist dielektrilist läbitavust. Nende vedelike molekulid on polaarsed ja suure elektrilise momendiga, millest ongi tingitud ε suur väärtus.

Peaaegu kõigil ainetel on suurus ε_a laiades piirides väljatugevusest sõltumatu. Polaarsete molekulidega dielektrikute puhul aga, nagu näidati eespool, tuleb üsna tugevate väljade juures oodata küllastusnähtust. Polarisatsiooni kasv väljatugevuse suurenemisel peab aeglustuma selle tõttu, et tugevates väljades osutuvad peaaegu kõik dipoolid orienteerituks välja suunas. Järelikult peavad dielektriline vastuvõtlikkus ja dielektriline läbitavus niivõrd tugevates väljades väljatugevuse suurenemisel vähenema. Selle nähtuse jälgimine on seotud suurte raskustega. Siiski õnnestus seda efekti nähtavale tuua katses etüülpiiritusega. Senjettelektrikute puhul sõltub suuruse ε_a, samuti nagu suuruse α_a väärtuski järsult elektrivälja tugevusest. Senjettelektrikute omadusi vaadeldakse allpool.



Joon. 20.



Joon. 21.

Olles määranud elektrinihke vektori välja kõigis punktides, võime kujutada joonte parve selliselt, et nende joonte puutujad igas punktis ühtiksid nihkevektori suunaga (joon. 20). Neid jooni nimetatakse *elektrinihke joonteks*. Joonisel varustatakse nad nooltega, mis näitavad vektori **D** suunda.

Mingit pinda *s* piirava kontuuri iga punkti läbivate nihkejoonte kogum (joon. 20) moodustab torupinna, mis eraldab kogu väljast nn. *elektrinihke toru*. Nihkejooned ja -torud algavad positiivsetel laengutel ja lõpevad negatiivsetel.

Teeme kindlaks seose nihketoru otstel asetsevate laengute Δq_1 ja Δq_2 vahel.

Rakendades Maxwelli postulaati kinnise pinna kohta, mis on moodustatud toru külgpinnast s_0 ja laetud juhtiva keha sees asetsevatest pindadest s_1 ja s_2 (joon. 20), saame:

$$\int_{s_1} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} + \int_{s_0} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} + \int_{s_2} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} = \Delta q_1 + \Delta q_2.$$

Kuna laetud juhtivate kehade sees väli puudub, siis $\int_{s_1} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} + \int_{s_2} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} = 0$. Et vektor **D** on puutujaks pinnale s_0, siis $\int_{s_0} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} = 0$. Seega

$$\Delta q_1 = -\Delta q_2,$$

s. o. *elektrinihke torud toetuvad oma otstega võrdsetele ja vastasmärgilistele laengutele.*

Rakendades Maxwelli postulaati kinnise pinna kohta, mis on moodustatud toru mingist ristlõikepinnast s, toru külgpinna osast s_0' ja pinnast s_1, leiame:

$$\int_{s} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} + \int_{s'_0} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} + \int_{s_1} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} = \Delta q_1 \quad \text{või} \quad \int_{s} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} = \Delta q_1,$$

sest

$$\int_{s'_0} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} = 0 \quad \text{ja} \quad \int_{s_1} \mathbf{D}\,\mathrm{ds} = 0.$$

Järelikult *elektrinihke vektori voog läbi elektrinihke toru mistahes ristlõikepinna jääb konstantseks ja võrdseks laenguga toru otsal.*

Võttes Δq_1 võrdseks ühe laenguühikuga saame elektrinihke ühiktoru.

Tingimata tuleb meeles pidada, et elektrinihke jooned ühtivad väljatugevuse joontega ainult isotroopses keskkonnas, kuna anisotroopses keskkonnas on vektoritel **D** ja **E** üldiselt erinevad suunad.

Rakendame Maxwelli postulaati lõpmatult väikese kinnise pinna kohta, mis haarab väikese laengu $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}s$ laetud juhtiva keha pinnal (joon. 21), kusjuures σ on keha laengu pindtihedus antud kohas. Kinnise pinna võtame sellise, et suurusega $\mathrm{d}s$ osa temast oleks juhtiva keha pinna vastava elemendiga paralleelne ja asetseks dielektrikus keha pinnale lõpmatult lähedal. Teine osa $\mathrm{d}s_0$, millel on silindriline kuju, olgu risti keha pinnaga ja lõikugu sellega. Osa pinnast asetseb keha sees. Keha sees ei ole välja ning $D = 0$. Vektori **D** voog läbi pinna $\mathrm{d}s_0$ on võrdne nulliga, sest siin $\cos\beta = 0\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$. Nullist erinevaks jääb voog $\mathrm{d}\Psi_D$ läbi pinna $\mathrm{d}s$. Vektor **E**, isotroopses keskkonnas

aga ka vektor **D**, on risti keha pinnaga ja pinnaga ds. Järelikult on siin $\cos\beta = 1$ ja $d\Psi_D = D\,ds$. Kasutades Maxwelli postulaati saame:

$$D\,ds = \sigma\,ds \quad \text{või} \quad D = \sigma,$$

s. t. isotroopses dielektrikus juhtiva keha pinna lähedal on elektrinihke vektori suurus võrdne elektrilaengu pindtihedusega keha pinna vastavas punktis.

Elektrinihke mõõtühikuks on MKSA ühikute süsteemis *kulon ruutmeetri kohta* (1 C/m²).

§ 11. Üksildase keha ja kondensaatori elektrimahtuvus

Üksildase juhtiva keha laeng on võrdeline keha potentsiaaliga, kui keha ümbritseva keskkonna dielektriline läbitavus ei sõltu väljatugevusest, s. t. on igas keskkonna punktis konstantne suurus. See tähtis väide tuleneb kõikide välja võrrandite lineaarsusest konstantse ε_a puhul. Järelikult võime kirjutada:

$$q = CU.$$

Suurust C nimetatakse *keha elektrimahtuvuseks.*

Seega *on üksildase keha elektrimahtuvus võrdne keha laengu ja tema potentsiaali suhtega:*

$$C = \frac{q}{U}.$$

Seejuures eeldatakse, et kehast lõpmatult kaugel olevate punktide potentsiaal on võrdne nulliga.

Laengu suhteline jaotumine keha pinnal ja järelikult ka välja pilt sõltuvad keha kujust. Seepärast sõltuvad keha potentsiaal antud laengu puhul ja vastavalt keha mahtuvus keha mõõtmetest ja kujust. Kui keha on ümbritsetud homogeensest dielektrikust, siis väljatugevus ja vastavalt ka keha potentsiaal antud laengu puhul, nagu järgneb Gaussi teoreemist, on pöördvõrdelised dielektriku absoluutse dielektrilise läbitavusega ε_a. Öeldu alusel saame:

$$C = \varepsilon_a f(g_1, g_2, \ldots),$$

kus $g_1, g_2 \ldots$ on keha kuju ja mõõtmeid iseloomustavad geomeetrilised suurused.

Seega *on üksildase keha mahtuvus homogeense keskkonna puhul võrdeline keskkonna absoluutse dielektrilise läbitavusega ja sõltub keha mõõtmetest ja kujust.*

Üldisemal juhtumil, kui keha ümbritseva dielektriku eri osadel on erinevad dielektrilised läbitavused, sõltub keha mahtuvus keerukal viisil dielektriku erinevate homogeensete osade dielektrilistest läbitavustest, dielektriku nende osade vaheliste piirpindade paigutusest keha suhtes ja keha pinna kujust ning mõõtmetest, s. o.

$$C = F(\varepsilon_{ak}, g_k).$$

Elektrimahtuvuse ühik MKSA ühikute süsteemis on *farad* (1 F). Absoluutse dielektrilise läbitavuse ühik selles süsteemis, nagu märgiti § 4, on *farad meetri kohta* $\left(1\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right)$. Tõepoolest, avaldisest $\varepsilon_a = \frac{D}{E}$ järeldub, et suuruse ε_a ühik on $1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} : \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} =$ $= 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}} = 1\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$.

Määrame juhtiva kera mahtuvuse, kui kera raadius on R ja kui kera on ümbritsetud homogeensest keskkonnast. Kera potentsiaal leitakse § 7 toodud valemist $U = \frac{1}{\varepsilon_a}\frac{q}{4\pi r}$. Asendades valemis $r = R$, saame, et $U = \frac{1}{\varepsilon_a}\frac{q}{4\pi R}$, millest

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon_a R.$$

Käsitleme järgnevalt dielektrikuga ümbritsetud kahe juhtiva keha süsteemi. Oletame, et kehad laetakse nende ühendamise teel ühe ja sellesama emj. allika erinimeliste klemmide külge nii, et kehade laengud osutuvad suuruselt võrdseteks ja märgilt vastupidisteks $q_1 = -q_2 = q$. Mõlema keha laeng on võrdeline kehade potentsiaalide vahega $U_1 - U_2 = u$, kui ε_a ei sõltu väljatugevusest, s. o.

$$q = C(U_1 - U_2) = Cu.$$

Elektrimahtuvuseks kehade vahel nimetatakse suurust

$$C = \frac{q}{u},$$

mis on võrdne ühe keha laengu ja nende kehade potentsiaalide vahe suhtega.

Kahe keha vaheline mahtuvus sõltub kehade pindade kujust ja mõõtmetest ning nende vastastikusest asetusest. Homogeense dielektrilise keskkonna puhul on kehadevaheline mahtuvus võrdeline keskkonna absoluutse dielektrilise läbitavusega, s. o.

$$C = \varepsilon_a f(g_1, g_2, \ldots),$$

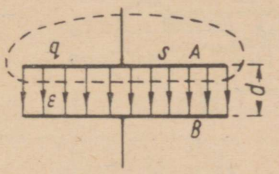
kus g_1, g_2 on kehade kuju, mõõtmeid ja vastastikust asetust määravad geomeetrilised suurused.

Üldisemal juhtumil, kui dielektrik koosneb mitmest osast, milledel on erinevad dielektrilised läbitavused, võime kirjutada:

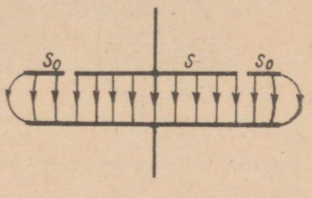
$$C = F(\varepsilon_{ak}, g_k),$$

s. o. kahe juhtiva keha vaheline mahtuvus sõltub dielektriku erinevate homogeensete osade dielektrilistest läbitavustest, dielektriku nende osade vaheliste piirpindade asetusest kehade suhtes, kehade kujust ja mõõtmetest ning kehade vastastikusest asetusest.

Väga sageli moodustatakse dielektrikuga eraldatud süsteem kahest juhtivast kehast just eesmärgiga kasutada tema elektrimahtuvust. Niisugusel juhtumil nimetatakse seda süsteemi kondensaatoriks, dielektrikuga eraldatud juhtivaid kehi aga kondensaatori plaatideks. Kõige sagedamini kasutataksegi neid kehi paralleelsete plaatide või koaksiaalsete ümarsilindrite kujul.



Joon. 22.



Joon. 23.

Määrame tasapinnalise kondensaatori mahtuvuse, jättes seejuures arvestamata välja moonutumise tema äärtes. Kasutame Maxwelli postulaati kinnise pinna kohta, mis haarab ühe plaadi laengu q. Selle kinnise pinna jälg on kujutatud joonisel 22 kriipsjoonega. Kondensaatori sees oleva pinnaosa asetame risti väljatugevuse joontega. Väljajooned lõikavad ainult suletud pinna seda osa, mis on võrdne plaadi pindalaga. Seega

$$\oint_S \mathbf{D}\,\mathrm{ds} = Ds = q \quad \text{ja} \quad E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{q}{\varepsilon_a S}.$$

Kondensaatori plaatide A ja B potentsiaalide vahe u on võrdne vektori E joonintegraaliga mööda mingit teekonda plaatide vahel. Olgu d plaatidevaheline kaugus. Valides integreerimisteekonna mööda väljatugevuse joont ja märkides, et homogeenses väljas $E = \text{const}$, saame:

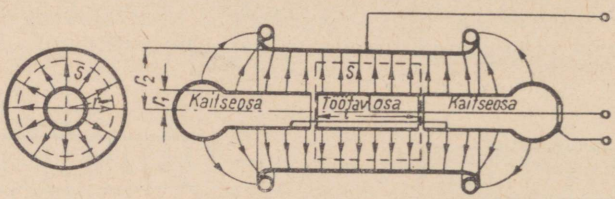
$$u = \int_A^B \mathbf{E}\,\mathrm{dl} = \int_A^B E\,\mathrm{d}l = E\int_A^B \mathrm{d}l = Ed = \frac{q}{\varepsilon_a S}d.$$

Järelikult

$$C = \frac{q}{u} = \frac{\varepsilon_a S}{d}.$$

Tegelikult on elektriväli kondensaatori äärtes moonutatud (joon. 23) ning mahtuvus rangelt võttes erineb mõningal määral viimase valemi järgi arvutatust. Siiski, kui d on palju väiksem plaatide joonmõõtmetest, on selle tagajärjel tekkinud viga tühine. Kõrgepingele arvestatud etaloonkondensaatorites, millel d on suur, ümbritsetakse tavaliselt ühe plaadi töötav osa nn. kaitserõngaga (joon. 23), mille potentsiaal on väga lähedane töötava osa potentsiaalile. Kaitserõnga küllaldase laiuse korral võib lugeda välja plaadi töötava osa juures homogeenseks ja plaadi

töötava osa mahtuvuse teise plaadi suhtes arvutada valemiga $C = \frac{\varepsilon_a S}{d}$, kusjuures s on töötava osa pindala.



Joon. 24.

Joonisel 24 on kujutatud silindriline õhkkondensaator, mida tarvitatakse mõõtelülitustes kõrgepinge puhul. Ääreefekti kõrvaldamiseks kasutatakse sisemisest silindrist ainult seda osa, mille pikkus on l. Ümbritseme sisemise silindri töötava osa suletud pinnaga, mille moodustavad silindriline pind põhjaraadiusega r ja kaks tasast otspinda. Vektori **D** voog läbi otspindade on võrdne nulliga. Rakendades selle suletud pinna kohta Maxwelli postulaati, saame:

$$\oint_s \mathbf{D}\,\mathrm{d}s = D2\pi rl = q \quad \text{ja} \quad E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{q}{\varepsilon_a 2\pi rl},$$

kusjuures q on töötava osa laeng.

Potentsiaalide vahe plaatide vahel, mille raadiused on r_1 ja r_2 (joon. 24), määratakse integraaliga

$$u = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = \frac{q}{\varepsilon_a 2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{1}{\varepsilon_a}\frac{q}{2\pi l} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

ja järelikult

$$C = \frac{q}{u} = \frac{2\pi l \varepsilon_a}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Saadud valem kehtib ka kontsentrilise, s. o. koaksiaalselt asetseva sinna- ja tagasijuhtmega kaabli mahtuvuse arvutamiseks.

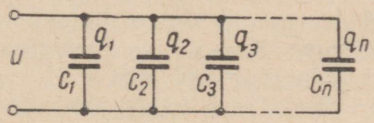
Leiame veel mahtuvuse avaldise sfäärilisele kondensaatorile, mille plaatideks on kahe kontsentrilise, raadiustega r_1 ja r_2 sfääri pinnad. Plaatide vahel on dielektriku kiht absoluutse dielektrilise läbitavusega ε_a. Elektriväli plaatide vahel on samasugune nagu siis, kui sisemise sfäärilise plaadi laeng q oleks koondatud sfääri tsentrisse. Järelikult $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^2}$, kusjuures $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

Plaatide potentsiaalide vahe

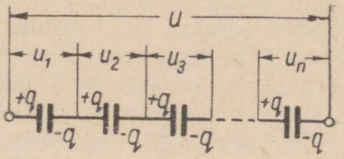
$$u = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

ja otsitava mahtuvuse jaoks saame avaldise

$$C = \frac{q}{u} = 4\pi\varepsilon_a\,\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$



Joon. 25.



Joon. 26.

Kondensaatorite paralleelühenduse puhul (joon. 25) on pinge u kõikidel kondensaatoritel ühine. Kogu kondensaatorite grupi laeng võrdub üksikute kondensaatorite laengute $q_1, q_2, \ldots q_n$ summaga: $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$. Seega

$$\frac{q}{u} = \frac{q_1}{u} + \frac{q_2}{u} + \ldots + \frac{q_n}{u}$$

või

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n.$$

Järelikult *kogu paralleelselt ühendatud kondensaatorite grupi mahtuvus on võrdne üksikute kondensaatorite mahtuvuste summaga.*

Kondensaatorite järjestikühenduse puhul (joon. 26) on laengud kõikide kondensaatorite plaatidel võrdse suurusega.

Olgu üldpinge tähistatud tähega u ja pinged üksikutel kondensaatoritel $u_1, u_2, \ldots u_n$. Sel juhtumil

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Järelikult

$$\frac{u}{q} = \frac{u_1}{q} + \frac{u_2}{q} + \ldots + \frac{u_n}{q}$$

või

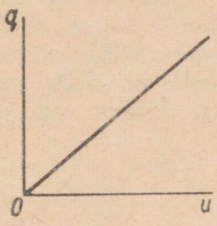
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n},$$

s. t. *järjestikku ühendatud kondensaatorite grupi mahtuvuse pöördväärtus on võrdne üksikute kondensaatorite mahtuvuste pöördväärtuste summaga.*

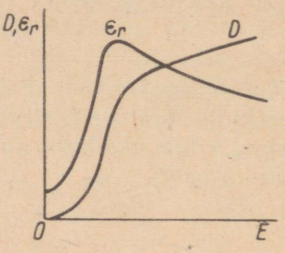
§ 12. Mittelineaarse karakteristikuga kondensaatorid

Kui kondensaatori dielektriku dielektriline läbitavus ei sõltu elektrivälja tugevusest, siis ka kondensaatori mahtuvus C ei sõltu pingest kondensaatoril. See kehtib enamiku kasutatavate kondensaatorite puhul. Niisuguse kondensaatori laengu q sõltuvust pingest u väljendab sirge joon (joon. 27). Sel puhul öeldakse, et kondensaatoril on *lineaarne karakteristik* ehk tunnusjoon $q = f(u) = Cu$.

Ent nagu juba märgitud, esineb aineid, nn. senjettelektrikuid, milledel suurus ε_a sõltub tunduvalt elektrivälja tugevusest. Elektrivälja tugevuse teatud väärtustel nende ainete dielektriline läbitavus saavutab eriti suuri väärtusi. Kui välise elektrivälja puudumisel senjettelektrik ei olnud polariseeritud, siis väljatugevuse E kasvamisel suureneb elektrinihe D vastavalt joonisel 28 kujutatud kõverale. Seos D ja E vahel osutub mittelineaarseks.



Joon. 27.



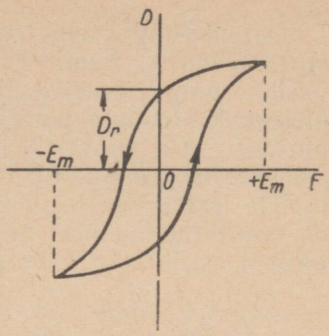
Joon. 28.

Dielektriline läbitavus $\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}$ väljatugevuse kasvamisel algul suureneb, saavutab maksimumi ja seejärel väheneb. Väljatugevuse perioodilisel muutmisel piirides $+E_m$ ja $-E_m$ täheldatakse nn. *hüstereesinähtust* — kõver $D = f(E)$ väljatugevuse vähendamisel ei ühti vastava kõveraga väljatugevuse suurendamisel (joon. 29). Väljatugevuse vähendamisel nullini säilib mõningane *jääkpolarisatsioon* ja vastavalt *jääknihe* D_r.

Nimetus «senjettelektrikud» on seotud ühe aine, senjettsoola nimetusega, mille puhul esmakordselt avastati toodud omadused. Senjettsool on viinhappe naatriumi ja kaaliumi kaksiksool ($NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$). Kõrget polariseeruvust täheldatakse senjettsoola kristallides ühe tema kristallograafilise telje suunas. Need senjettsoola erilised omadused ilmnevad ainult temperatuurivahemikus —18 kuni +22,5° C ja sõltuvad üsna tugevasti temperatuurist. Senjettelektrikute omadusi uurisid esmakordselt põhjalikult I. V. Kurtšatov ja P. P. Kobeko.

Senjettelektrikute gruppi kuulub ka baariumi metatitanaat ($TiO_2 \cdot BaO$), mille senjettelektrilised omadused avastas nõu-

kogude teadlane B. M. Vul. Baariumtitanaadi suhteline dielektriline läbitavus ε on toatemperatuuril üle 1000. Senjettelektrilised omadused säilivad tal kuni temperatuurini +80° C.



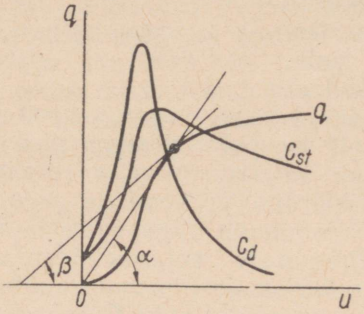
Joon. 29.

Senjettelektrikute olemasolul on sügav põhimõtteline tähtsus. Nende omadused dielektrikute grupis on tunduval määral analoogilised ferromagnetiliste ainete omadustega. See ongi aluseks senjettelektrikute omaduste niisugusele füüsikalisele seletusele, mis ühtib ferromagnetiliste ainete omaduste seletusega (§ 57). Eeldatakse, et üksikud senjettelektrikute piirkonnad on teatud suunas spontaanselt (isetekkeliselt) polariseerunud. Väliselt see polarisatsioon ei avaldu seni, kuni erinevad piirkonnad on polariseerunud vastupidistes suundades. Välise välja toimel pöördub piirkondade polarisatsioon välja suunda. See pöördumine toimub väga väikeste hüpetena, mis vastavad üksikute piirkondade polarisatsioonisuuna muutumisele. Selle piirkondade polarisatsioonisuuna muutumise tõttu toimubki aine polariseerumuse ja elektrinihke D kiire suurenemine, mis vastab kõvera $D = f(E)$ järsu tõusuga osale joonisel 28. Mingil väljatugevusel toimub *küllastumine*, kui peaaegu kõik spontaanse polarisatsiooni piirkonnad osutuvad välja suunas polariseerituks. Järelikult küllalt suurtel väljatugevustel kasvab elektrinihe väljatugevuse suurenemisel üha aeglasemalt.

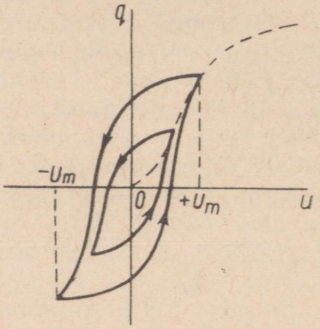
I. V. Kurtšatovi poolt kirjeldatud katsetel suure paksusega senjettsoola kristallidega oli suhtelise dielektrilise läbitavuse maksimaalne väärtus suurusjärgus 100 000 ning küllastumine saavutati juba väljatugevusel $30 \frac{V}{cm}$. Baariumtitanaadil aga toimub küllastumine tunduvalt suurematel väljatugevustel. Temperatuur 22,5° C senjettsoolale ning vastavalt 80° C baariumtitanaadile on iseloomulik selle poolest, et selle juures üksikute piirkondade spontaanne endapolarisatsioon hävitatakse soojusliku liikumisega ja senjettelektrik omandab tavaliste dielektrikute elektrilised omadused.

Kui kondensaatoris on dielektrikuks senjettelektrik, siis sõltuvus $q = f(u)$, s. t. kondensaatori plaadil oleva laengu q sõltuvus plaatidevahelisest pingest u on mittelineaarne ja oma iseloomult analoogiline joonistel 28 ja 29 kujutatud sõltuvusele $D = f(E)$. Lihtsamal juhtumil, s. o. tasapinnalise kondensaatori puhul, mille väli on homogeenne, erinevad kõverad $q = f(u)$ ja $D = f(E)$ ainult mastaabi poolest, sest tasapinnalisel kondensaatoril $q = Ds$ ja $u = Ed$, kus s — kondensaatori plaadi pindala ja d — dielektriku paksus.

Öeldakse, et senjettkondensaatori *karakteristik* $q = f(u)$ on *mittelineaarne*. Joonisel 30 ongi kujutatud see karakteristik, mis vastab pinge suurenemisele tingimusel, et pinge puudumisel dielektrik ei olnud polariseeritud. Pinge perioodilisel muutumisel piirides $+U_m$ kuni $-U_m$ võtab karakteristik joonisel 31 esitatud *hüstereesisilmuse* kuju. Pinge U_m amplituudide erinevatele väärtustele vastavate hüstereesisilmuste tippe läbiv kõver $q = f(u)$ on kujutatud joonisel 31 kriipsjoonega ning on ligilähedane joonisel 30 kujutatud kõverale $q = f(u)$.



Joon. 30.



Joon. 31.

Tehakse vahet kondensaatori *staatiliste* ja *dünaamiliste karakteristikute* vahel.

Staatiline karakteristik seob kondensaatori ajaliselt muutumatute laengute väärtusi vastavate ajaliselt muutumatute pingete väärtustega. Praktiliselt võib selle karakteristiku leida laengu q rea väärtuste mõõtmisega, mis vastavad pinge u reale väärtustele. Siinjuures on pinge u ühelt väärtuselt teisele ülemineku vaja küllaldast viivitust, et laengu q uus väärtus jõuaks välja kujuneda. See laengu q uus väärtus ei kujune aga välja hetkeliselt nn. dielektrilise viskoossuse tõttu.

Küllalt kiirel pinge muutumisel viib dielektrilise viskoossuse nähtus selleni, et sõltuvus $q = f(u)$ erineb staatilise karakteristikuga määratud sõltuvusest. Seos $q = f(u)$ väljendub siis dünaamilise karakteristikuna. Eriti suurel määral erinevad dünaamilised hüstereesisilmused staatilistest pinge kiiretel perioodilistel muutmistel. Küllalt aeglasel pinge muutmisel dünaamilised karakteristikud tegelikult ühtivad staatilistega.

Sõltuvuse $q = f(u)$ mittelineaarse iseloomu tõttu sõltub niisuguse kondensaatori mahtuvus pingest u kondensaatori plaatidel. Seejuures eristatakse nn. *staatilist mahtuvust*, mis määratakse q ja u suhtena:

$$C_{st} = \frac{q}{u},$$

ja dünaamilist mahtuvust, mis määratakse laengu juurdekasvu Δq ja pinge juurdekasvu Δu suhte piirväärtusena, kusjuures juurdekasv Δu läheneb nullile:

$$C_d = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta u} = \frac{dq}{du}.$$

Staatiline mahtuvus määratakse staatilisest karakteristikust ning on mittelineaarse karakteristikuga kondensaatori korral pinge funktsioon. Dünaamiline mahtuvus määratakse dünaamilisest karakteristikust ja kuna viimase kuju sõltub pinge muutumise kiirusest pinge mitmesugustel väärtustel, siis dünaamiline mahtuvus ei osutu ainult pinge suuruse, vaid üldiselt võttes ka viimase ajaliste tuletiste funktsiooniks. Mittelineaarse karakteristikuga kondensaatori staatiline ja dünaamiline mahtuvus erinevad teineteisest ka küllalt aeglasel pinge muutmisel, kuigi nad määratakse seejuures ühest ja samast staatilisest karakteristikust. See nähtub kas või jooniselt 30, sest staatiline mahtuvus

$$C_{st} = \frac{q}{u} = k \operatorname{tg} \alpha = f_1(u),$$

ent dünaamiline mahtuvus

$$C_d = \frac{dq}{du} = k \operatorname{tg} \beta = f_2(u),$$

kus k sõltub abstsiss- ja ordinaattelje mastaapidest.

Mittelineaarse karakteristikuga kondensaatorid hakkavad leidma kasutamist automaatjuhtimisseadmetes. Niisuguste kondensaatorite mittelineaarsete omaduste mõningatest kasutamisvõimalustest räägime mittelineaarsete vahelduvvooluahelate käsitlemisel.

KOLMAS PEATÜKK

ELEKTRIVÄLJA ENERGIA JA MEHAANILISED AVALDUMISVIISID

§ 13. Laetud kehade süsteemi energia

Laetud kehade süsteem on teatud energiavaru kandjaks. Selle energia annavad süsteemile välised energiaallikad laengute moodustamise protsessis, kusjuures see energia võib uuesti tagastuda energiaallikatele või muunduda teisteks energialiikideks laengute vähenemisel.

Laetud juhtivate kehade süsteemi salvestunud energia avaldise määramiseks vaatleme tööd, mida teevad välised energiaallikad süsteemi laengute moodustamisel. Elementaartöö, mille teevad välised jõud mingi keha laengu q_k suurendamisel suuruse dq_k võrra, on võrdne $dA_k = U_k dq_k$, kus U_k on keha potentsiaal. Kogu töö süsteemi n keha laengute muutmisel nullist kuni lõpliku väärtuseni avaldub kujul

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} A_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{q_k} U_k dq_k.$$

Oletame, et süsteemi laetakse väga aeglaselt, teoreetiliselt koguni lõpmatult aeglaselt. Seejuures on elektrivoolud, mis tekivad laengute kandmisel laetavate kehade pinnale, lõpmatult väikesed. Järelikult on lõpmatult väikesed ka kaod lõpliku takistusega juhtides. Kuigi sealjuures protsess lõpmatult kaua kestab, on juhtmetes esinevaid kadusid iseloomustav võimsus siiski teise järgu lõpmatult väike suurus, sest ta on võrdeline voolu ruuduga. Oletame samuti, et dielektrikus eneses väljatugevuse muutumisel ei toimu pöördumatuid protsesse. Sellisel juhtumil võime energia jäävuse seaduse alusel kinnitada, et kogu allikate poolt laengute moodustamisel tehtav töö läheb süsteemi energiavaru loomiseks. Tähistades laetud kehade süsteemi energia W_e-ga, võime kirjutada võrduse

$$A = W_e.$$

Potentsiaal k-ndal kehal U_k sõltub kõigi kehade laengutest $q_1, q_2 \ldots, q_n$. Keskkonna *konstantse* dielektrilise läbitavuse puhul on see sõltuvus *lineaarne* ja vastavalt superpositsiooni printsiibile peab omama kuju

$$U_k = a_{k1}q_1 + a_{k2}q_2 + \ldots + a_{kk}q_k + \ldots + a_{kn}q_n.$$

Tegureid a nimetatakse potentsiaaliteguriteks. See avaldis tuleb asetada töö A avaldises integraalimärgi taha.

Energia jäävuse seaduse alusel võime samuti kinnitada, et väliste allikate poolt tehtav töö kehade laengute suurendamisel nullist kuni nende lõplike väärtusteni ei sõltu laengute moodustamise järjekorrast. Vastasel korral võiksime valida alati niisuguse laengute moodustamise järjekorra ja sellest erineva laengute vähendamise niisuguse järjekorra, et väliste allikate poolt kulutatav energia oleks väiksem neile tagastatavast energiast, mis oleks aga energia jäävuse seaduse rikkumine. Seepärast on meil õigus valida laengute tekitamise järjekorda oma äranägemise järgi. Oletame, et kõik laengud kasvavad üksteisega võrdeliselt, s. o. $q_s = \gamma_{ks}q_k$, kus $\gamma_{ks} = \text{const}$. Iga keha potentsiaal kasvab siis võrdeliselt tema laenguga. Tõepoolest:

$$U_k = (a_{k1}\gamma_{k1} + a_{k2}\gamma_{k2} + \ldots + a_{kn}\gamma_{kn})\,q_k = m_k q_k,$$

kusjuures $m_k = \text{const}$. Otsitav töö

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{q_k} U_k \mathrm{d}q_k = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \int_0^{q_k} q_k \mathrm{d}q_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k q_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{U_k q_k}{2}.$$

Kasutades võrdust $A = W_e$, saame:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k.$$

Järelikult võrdub laetud kehade süsteemi energia kehade potentsiaalide ja nende laengute korrutiste poolsummaga.

Laetud kondensaatori erijuhtumil on meil kaks laetud keha laengutega q_1 ja q_2, mis on suuruselt võrdsed ja märgilt vastupidised. Võttes $q = q_1 = -q_2$, saame laetud kondensaatori energia avaldiseks

$$W_e = \frac{U_1 q_1}{2} + \frac{U_2 q_2}{2} = \frac{(U_1 - U_2)q}{2}.$$

Tähistades plaatide potentsiaalide U_1 ja U_2 vahet tähega u ja kasutades seost $q = Cu$, kus C on kondensaatori mahtuvus, saame:

$$W_e = \frac{uq}{2} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Laetud kehade energia avaldist võib esitada veel teisel kujul. Märkides, et $q_k = \int\limits_{s_k} \sigma \, ds$, kus σ on laengu pindtihedus ja s_k antud keha pind, ning võttes arvesse, et iga keha pinna kõikidel punktidel $U_k = \text{const}$, saame:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k \int\limits_{s_k} \sigma \, ds = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \int\limits_{s_k} U_k \sigma \, ds = \frac{1}{2} \int\limits_{s} U \sigma \, ds,$$

kus s on kõikide juhtivate kehade välispindade kogum.

§ 14. Energia jaotumine elektriväljas

Viimases avaldises on elektriliselt laetud kehade süsteemi energia väljendatud potentsiaalide kaudu ruumi nendes punktides, kus σ ei võrdu nulliga. Selles avaldises on küllaldane võtta integraalid ainult üle kehade pindade.

See avaldis ei võimalda otsustada, kuhu see energia on jaotunud. Näitame, et elektriliselt laetud kehade energiat tuleb käsitada neid kehasid ümbritseva elektrivälja energiana. See käsitus vastab arvamusele elektriväljast kui mateeria eriliigist. Seda oletust aluseks võttes peame lugema dielektriku iga ruumielemendi, kus väljatugevus erineb nullist, teatud energiavaru kandjaks. Seega tuleb rääkida energia ruumtihedusest välja igas punktis. Märkides elektrivälja energia ruumtiheduse W_e'-ga, võime väljendada laetud kehade süsteemi energiat kui süsteemi ümbritseva elektrivälja energiat integraalina

$$W_e = \int\limits_{V} W_e' \, dV,$$

mis võetakse juba üle kogu elektrivälja.

Vaatleme algul lihtsaimat juhtumit — homogeenset välja. Selline on väli paralleelsete plaatide vahel keskmises osas (joon. 23). Eraldame mõlemast plaadist teineteise vastas olevad osad pindadega s. Olgu nende plaatide osadel olevad laengud $q_1 = -q_2 = q$. Laengute q_1 ja q_2 energia avaldub kujul

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} q_k U_k = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 = \frac{1}{2} q (U_1 - U_2),$$

kusjuures $U_1 - U_2 = u$ on plaatide potentsiaalide vahe. Kuna väli on homogeenne, siis $u = Ed$, kus d on plaatidevaheline kaugus. Elektrinihke voog läbi iga pinna s, mis asetseb plaatidevahelises dielektrikus paralleelselt plaatide pindadega ja mis lõikab kõiki laengult $q_1 = q$ algavaid nihkevoo torusid, on võrdne selle laenguga (§ 10). Välja homogeensuse tõttu $Ds = q$.

Järelikult

$$W_e = \frac{1}{2} DEsd = \frac{1}{2} DEV,$$

kus $V = sd$ on dielektriku maht, millesse on koondunud laengute q_1 ja q_2 väli. Energia välja mahuühiku kohta

$$W_e' = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} DE = \frac{\varepsilon_a E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_a}.$$

Kogu välja energiat võib seega esitada integraali kujul

$$W_e = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \, dV.$$

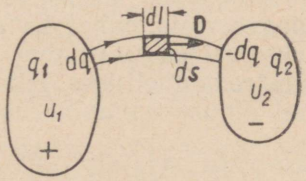
Saadud elektrivälja ruumtiheduse avaldis on õige ainult isotroopse keskkonna kohta, kus vektorid **E** ja **D** ühtivad suunalt. Anisotroopse keskkonna puhul on energia ruumtihedus

$$W_e' = \frac{\mathbf{ED}}{2},$$

kus $\mathbf{ED} = ED \cos \alpha$ on vektorite **E** ja **D** skalaarkorrutis, kusjuures need vektorid moodustavad teineteisega nurga α. Vastavalt sellele on kogu välja energia esitatav kujul:

$$W_e = \int_V \frac{\mathbf{ED}}{2} \, dV.$$

Näitame, et see avaldis kehtib ka mittehomogeense välja ja anisotroopse keskkonna üldise juhtumi puhul. Sel eesmärgil vaatleme kahte juhtivat keha võrdsete ja vastasmärgiliste laengutega $q_1 = -q_2 = q$ (joon. 32). Eraldame elektriväljas lõpmatult peenikese elektrinihke toru. Toru lõpmatult väikese lõigu dl ulatuses võib välja lugeda homogeenseks. Selles torulõigu ruumis on välja energia võrdne



Joon. 32.

$$W_e' \, ds \, dl = \frac{1}{2} DE \cos \alpha \, ds \, dl,$$

kus ds on toru ristlõige. Integreerides piki kogu toru ja meenutades, et nihkevoog Dds on ühesugune kõigis toru ristlõigetes ja võrdne laenguga dq toru otsal, leiame:

$$dW_e = \int_l \frac{1}{2} D \, ds \, E \cos \alpha \, dl = \frac{1}{2} D \, ds \int_l E \cos \alpha \, dl = \frac{1}{2} (U_1 - U_2) \, dq,$$

sest integraal $\int_l E \cos \alpha \, dl$ on võrdne potentsiaalide vahega toru otstel. Lõpliku ristlõikega toru puhul, kui laengud tema otstel

asuvad samapotentsiaalipindadel, näiteks kahe laetud juhtiva keha pindadel, saame:

$$\Delta W_e = \frac{1}{2}(U_1 - U_2)\Delta q,$$

kus Δq on laeng toru otsal.

Summeerides kõigi nihkevoo torude energia ja arvestades, et kõikidel torudel on suurus $U_1 - U_2$ ühesuguse väärtusega, saame:

$$W_e = \frac{1}{2}(U_1 - U_2)q = \frac{1}{2}U_1 q_1 + \frac{1}{2}U_2 q_2.$$

Seega on energia avaldis integraali kujul üle välja kogu ruumi

$$W_e = \int_V \frac{\mathbf{ED}}{2}\,\mathrm{d}V$$

ekvivalentne avaldisega

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} q_k U_k,$$

mis saadi energia jäävuse seaduse alusel. Liikumatute laengute poolt tekitatud välja puhul on formaalsest vaatepunktist lähtudes ükskõik, millist avaldist kasutada energia arvutamisel. Edaspidi me siiski näeme, et elektriväli võib tekkida ajaliselt muutuva magnetvälja puhul ka elektrilaengute täielikul puudumisel. Näiteks esineb niisugune väli raadioantenni poolt väljakiiratud elektromagnetilises laines. Energia arvutamisel jääb sel juhtumil ainuke võimalus vaadelda teda välja energiana ja kasutada järelikult avaldist $W_e = \int_V \frac{\mathbf{ED}}{2}\,\mathrm{d}V$. Samuti võib liikuva elektrilaengu elektrivälja energiat määrata nimelt selle avaldisega. Kasutades seda avaldist, saame kõikidel juhtumitel katsega ühtivaid tulemusi. Seepärast tuleb tunnistada, et kujutlus energia jaotumisest elektriväljas ruumtihedusega $\frac{1}{2}\mathbf{ED}$ vastab vaadeldava füüsikalise nähtuse olemusele.

§ 15. Energiakaod dielektrikus vahelduvelektrivälja puhul

Laetud kehade süsteemi energia avaldised

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k \quad \text{ja} \quad W_e = \int_V \frac{\mathbf{ED}}{2}\,\mathrm{d}V$$

tuletati eeldusel, et kehade potentsiaalid sõltuvad kehade laengutest *lineaarselt*. See on õige siis, kui keskkondades, kus väli moodustub, on dielektriline läbitavus konstantne, elektrivälja tugevusest sõltumatu. Ainult sellisel juhtumil on toodud avaldised kehtivad.

Peale selle eeldati nende avaldiste tuletamisel, et kehade laengute suurendamisel ja vastavalt dielektrikus elektrivälja ülesehitamisel energiakadusid juhtmetes ja dielektrikus ei esine.

Reaalsetes dielektrikutes, isegi kui dielektriline läbitavus ei sõltu väljatugevusest, esinevad elektrivälja olemasolul energiakaod, nn. dielektrikuskaod, ja seda eriti siis, kui väli ajaliselt muutub. Reaalsed dielektrikud omavad lõplikku, kuigi väga väikest juhtivust, mis põhjustab mõningat energiakadu isegi alalisvälja korral. Heade dielektrikute puhul on see kadu siiski väga väike. Perioodiliselt muutuva vahelduvvälja korral tekivad dielektrikus lisakaod, mis on seotud dielektriku polarisatsiooni muutumisega. Juba 1886. a. näitas I. I. Borgmann katseliselt, et pinge perioodilisel muutumisel on kadu tahke dielektrikuga kondensaatorites võrdeline maksimaalse pinge ruuduga. Peale selle on see kadu võrdeline perioodide arvuga sekundis, s. o. pinge sagedusega. Nagu katseliste uurimuste tulemused näitavad, võib dielektriku ruumalaühikule taandatud võimsuse arvutamiseks kasutada valemit järgmisel kujul:

$$P' = kfE_m^2,$$

kus f on sagedus, E_m — elektrivälja tugevuse maksimaalväärtus, k — materjali iseloomustav suurus. Vaadeldav kadu on väga väike kõrgekvaliteedilises vilgus ja parafiinis. Seetõttu kasutatakse neid materjale kõrgetel sagedustel töötavate kondensaatorite valmistamisel.

Kondensaatorite ja kaablite isolatsiooniks kasutatavas immutatud paberis on see kadu märgatavalt suurem kui vilgus. Seetõttu ei ole paberisolatsiooniga kondensaatorid kõlblikud kasutamiseks kõrgetel sagedustel. N. P. Bogoroditski töötas välja uued elektriisoleermaterjalid, mis kujutavad endast eri tüüpi portselani, milles energiakadu elektrivälja tugevuse sama amplituudi ja sageduse juures on kümme ja rohkem korda väiksem kui tavalises portselanis. Neid uusi elektriisoleermaterjale kasutatakse kõrgsageduskondensaatorite valmistamisel.

Vahelduvvälja korral sõltub dielektrikuskadu paljudel materjalidel suurel määral temperatuurist. Soojuskindlate elektriisoleermaterjalide loomine, millede elektrilised omadused muutuvad vähe temperatuuri muutumisel laias diapasoonis, omab suurt praktilist tähtsust. Selles suhtes pakuvad suurt huvi K. A. Andrianovi tööde alusel loodud räniorgaanilised elektriisoleermaterjalid. Need materjalid on keemiliselt inertsed ja vastupidavad oksüdeerumisele. Nende dielektriline läbitavus ja

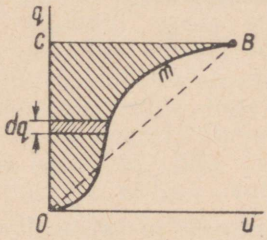
dielektrikuskaod vahelduvelektrivälja puhul muutuvad vähe temperatuuri muutumisel vahemikus 20 kuni 180° C.

Soojuskindluse ja keemilise inertsuse mõttes on veelgi paremate omadustega mõned uued, nn. fluororgaaniliste ainete hulka kuuluvad materjalid.

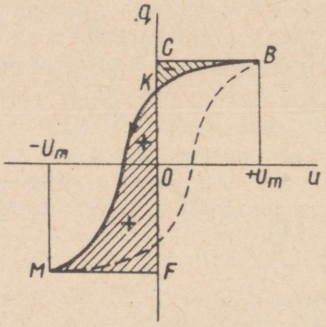
Tavaliselt on energiakadu dielektrikus elektrivälja tugevuse muutumise ühe perioodi kestel palju väiksem energiast, mis salvestatakse elektriväljas perioodi vältel esineva maksimaalse väljatugevuse juures. Seetõttu võib dielektrilise läbitavuse konstantsuse puhul välja energia arvutamiseks kasutada avaldisi

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k = \int_V \frac{\mathbf{ED}}{2}\,\mathrm{d}V,$$

mida põhjendati kadude puudumise eeldusel.



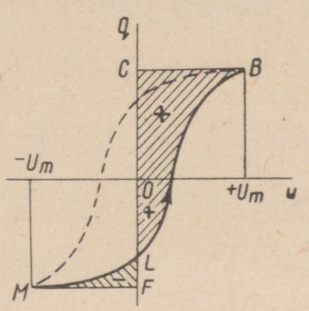
Joon. 33.



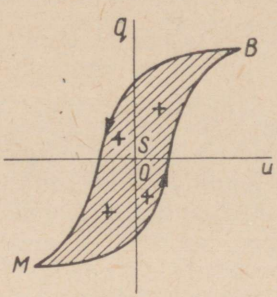
Joon. 34.

Siiski pole need avaldised õiged *mittelineaarse* karakteristikuga $D = f(E)$ dielektrikute puhul. Laadigu sellise dielektrikuga kondensaatorit energiaallikas pingega u. Allika tööd kondensaatori laadimisel iseloomustab, sõltumata sellest, milline on u ja q vaheline seos, integraal $A = \int_0^q u\,\mathrm{d}q$. See järeldub potentsiaalide vahe mõiste definitsioonist. Korrutis $u\mathrm{d}q$ on määratud tihedalt viirutatud riba pindalaga joonisel 33. Kogu töö on määratud viirutatud pinnaga *OmBCO*. Laengu ja pinge vahelise sõltuvuse $q = f(u)$ mittelineaarsuse tõttu on see töö erinev suurusest $\frac{Uq}{2}$, mis on määratud kolmnurga *OCB* pindalaga. Peale selle on kondensaatori elektriväljas salvestatav energia välja ülesehitamisel tekkivate dielektrikuskadude võrra väiksem kui välise allika töö A. Neid kadusid on perioodiliselt muutuva elektrivälja korral kerge määrata. Nagu varem märgitud, on sõltuvus $q = f(u)$ senjettelektrikutega kondensaatorites seejuures kuju-

tatav hüstereesisilmusena. Pinge vähenemisel väärtuselt U_m kuni 0 on välise allika töö negatiivne, sest $u > 0$ ja $dq < 0$, ning määratud pinnaga CKB (joon. 34). Pinge muutumisel väärtuselt 0 kuni $-U_m$ teeb väline allikas positiivset tööd ($u < 0$ ja $dq < 0$), mis on määratud pinnaga KMF. Pinge muutumisel



Joon. 35.



Joon. 36.

väärtuselt $-U_m$ kuni 0 on allika töö negatiivne ($u < 0$ ja $dq > 0$) ning määratud pinnaga MFL (joon. 35), ja lõpuks, pinge suurenemisel väärtuselt 0 kuni U_m teeb allikas positiivset tööd ($u > 0$ ja $dq > 0$), mis on määratud pinnaga LCB. Asetades joonise 34 joonisele 35 näeme, et välise allika kogu töö A kondensaatori pinge muutumisel ühe perioodi kestel on määratud hüstereesisilmuse pindalaga S (joon. 36), s. o.

$$A = \oint u \, dq = abS,$$

kus a ja b on abstsiss- ja ordinaattelje mastaabid.

Kuna pärast ringkäiku suletud tsükli järgi dielektrik pöördub tagasi lähteolekusse, siis ka elektrivälja energia saavutab uuesti lähteväärtuse. Järelikult kulutatakse sel juhtumil kogu töö A pöördumatutele protsessidele dielektrikus, s. o. ta võrdub energiakaoga W_h kondensaatori dielektrikus pinge muutumise ühe perioodi kestel. Seda kadu nimetatakse *dielektriliseks hüstereesikaoks*.

Tasapinnalise kondensaatori puhul, mille plaatide pindala on s ja dielektriku paksus d, kehtivad seosed: $q = Ds$ ja $u = Ed$. Järelikult $W_h = sd \oint E \, dD$. Kuna $sd = V$ on dielektriku ruumala, milles väli esineb, siis on dielektriku ruumalaühikule taandatud väljatugevuse muutumise ühe tsükli kestel tekkiv kadu järgmine:

$$W_h' = \oint E \, dD.$$

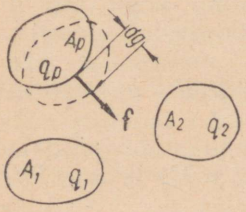
See kadu väljendub vastavas mõõtkavas silmuse pindalana D ja E koordinaatides, nagu on kujutatud joonisel 29. Selle kül-

laltki tunduva kao esinemine sellistes ainetes nagu baariumtitanaat raskendab nende kasutamist vahelduvväljade korral, eriti kõrgetel sagedustel.

§ 16. Laetud kehadele mõjuvad jõud

Punktikujuliste laetud kehade vastastikusest mõjust tingitud mehaanilisi jõude võib arvutada Coulomb'i seaduse abil. Kui laetud kehasid ei saa käsitleda punktlaengutena, on vahetu Coulomb'i seaduse rakendamine võimatu. Üldjuhtumil on antud laetud kehale mõjuva resulteeriva jõu arvutamine küllaltki lihtne, kui on teada kehade mahtuvused või kehadevahelised mahtuvused funktsioonidena geomeetrilistest koordinaatidest.

Eespool näidati, et mahtuvus sõltub keskkonna dielektrilisest läbitavusest ja tähega g tähistatud geomeetrilistest suurustest, mis määravad kehade kuju, mõõtmed ja vastastikuse asetuse. Edaspidi nimetame suurusi g süsteemi *üldistatud geomeetrilisteks koordinaatideks*. Nendeks võivad olla kehade lineaarsed ümberpaigutused etteantud teekonda mööda, kehade vahekaugused, kehade pöördenurgad mingi telje ümber, kehade pindalad või ruumalad jne. Koordinaatide g sellise üldistatud käsitluse korral tuleb neid koordinaate muuta püüdvaid jõude f täpselt samuti vaadelda *üldistatud jõududena*. Kõikidel juhtumitel peab üldistatud jõud f rahuldama põhitingimust: jõu korrutis tema poolt põhjustatava koordinaadimuutusega võrdugu tööga, mida teeb jõud seda koordinaati muutes. Sõltuvalt üldistatud koordinaadi g valikust saab ka üldistatud jõud ühe või teise tähenduse. Niisiis, kui g on lineaarne ümberpaigutus, on f tavaline mehaaniline jõud; kui g on pöördenurk, on f jõupaari moment; kui g on pind, on f pindpinevus; kui g on ruum, on f rõhk.



Joon. 37.

Üldistatud koordinaatide vähim arv, mis on vajalik süsteemi asendi määramiseks, on võrdne, nagu mehaanikast teada, süsteemi vabadusastmete arvuga. Kui näiteks keha liigub mööda mingit etteantud juhtjoont, on küllaldane teada teepikkust, mille keha on läbinud mööda juhtjoont alates algasendist. Teljele kinnitatud ühe keha korral on küllaldane teada ainult keha pöördenurka selle telje ümber. Kui keha on kinnitatud ühes punktis, siis võib tema asendi määrata kolme pöördenurgaga jne. Igale üldistatud koordinaadile vastab oma üldistatud jõud, mis püüab muuta nimelt seda koordinaati.

Vaatleme meelevaldset süsteemi n laetud kehast (joon. 37). Eeldame, et kõik laetud kehad, peale keha A_p, on liikumatult

kinnitatud, ja ainult keha A_p võib nii ümber paigutuda, et muutub ainult üks tema koordinaat g. See koordinaadi g muutmine toimub jõu f mõjul, mis on laetud keha A_p ja kõikide teiste süsteemi laetud kehade vastastikuse mõju tulemuseks.

Lähtume eeldusest, et nii kehade laengute võimalikud muutused kui ka keha A_p ümberpaigutus toimub väga aeglaselt, teoreetiliselt lõpmatult aeglaselt. Seejuures on laengute ümberpaigutuse tagajärjel kehade pindadel tekkivad elektrivoolud lõpmatult väikesed. Järelikult võib eeldada, et energiakadusid juhtides ei esine. Samuti eeldame, et väljatugevuse muutumisele dielektrikus ei kaasne energiakadusid selles keskkonnas. Nende tingimuste korral peab väliste energiaallikate poolt kehade laengute muutmiseks dq_k võrra kulutatav töö katma elektrivälja energia juurdekasvu ja samuti mehaanilise töö, mida teeb jõud f keha A_p asendit muutes. Öeldut võib väljendada võrrandiga

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k \, dq_k = d_g W_e + f \, dg.$$

Indeks g suuruse $d_g W_e$ juures näitab, et vaadeldakse ainult süsteemi ühe koordinaadi g muutumisele vastavat energia juurdekasvu. See võrrand on kehtiv sõltumata sellest, millisel viisil muutuvad kehade potentsiaalid ja laengud. Ta osutub energia jäävuse seaduse avaldiseks, rakendatuna meie poolt vaadeldavale juhtumile.

Jõule f lihtsaima avaldise saamiseks eeldame, et kõikide kehade laengud jäävad muutumatuteks: $q_k = \text{const}$. See tingimus on rahuldatud, kui kõik kehad on emj. allikate küljest lahti ühendatud. Kuid siis $dq_k = 0$ ja vastavalt võrdub nulliga ka väliste allikate töö:

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k \, dq_k = 0.$$

Sel juhtumil

$$0 = (d_g W_e)_{q_k = \text{const}} + f \, dg$$

ehk

$$f \, dg = -(d_g W_e)_{q_k = \text{const}}.$$

Üldine indeks $q_k = \text{const}$ energia juurdekasvu juures näitab, et laengud säilivad muutumatutena.

Kui dg on jõu f mõjul toimuv ümberpaigutus, siis $f \, dg > 0$. Viimasest võrdusest järeldub, et $d_g W_e < 0$, s. o. elektrivälja energia väheneb. Tõepoolest võib mehaaniline töö toimuda väljalülitatud väliste energiaallikate puhul ainult süsteemi sisemiste energiavarude arvel, antud juhtumil elektrivälja energia arvel.

Viimasest võrdusest saame:

$$f = -\left(\frac{\mathrm{d}_g W_e}{\mathrm{d}g}\right)_{q_k=\mathrm{const}} = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial g}\right)_{q_k=\mathrm{const}},$$

s. o. *mehaaniline jõud, mis püüab muuta süsteemi antud koordinaati, on võrdne elektrivälja energia vähenemisega selle jõu poolt muudetava koordinaadi ühiku kohta eeldusel, et kõikide kehade laengud jäävad muutumatuteks.*

Vaatleme veel teist, samuti väga tähtsat juhtumit, kus süsteemi liikumise ajal säilitatakse muutumatutena kõikide kehade potentsiaalid, s. o. kui $U_k = \mathrm{const}$. Selline režiim leiab aset siis, kui kõik kehad on lülitatud selliste väliste emj. allikate klemmidele, millede klemmipinged jäävad konstantseteks. Kuna süsteemi geomeetrilise konfiguratsiooni muutumisel muutuvad mahtuvused kehade vahel, siis kehade potentsiaalide konstantsuse korral peavad muutuma nende laengud. Lisalaengud võivad süsteemi kanduda ainult välistelt emj. allikatelt, mis peavad selleks teatud tööd kulutama. Seega on võrrandi

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k \, \mathrm{d}q_k = \mathrm{d}_g W_e + f \, \mathrm{d}g$$

kõik liikmed nüüd nullist erinevad. Siiski, kui $U_k = \mathrm{const}$ ja keskkondade dielektrilised läbitavused ei sõltu väljatugevusest, on elektrivälja energia juurdekasvu ja väliste allikate töö vahel lihtne seos. Tõepoolest võib seejuures laetud kehade süsteemi elektrivälja energiat esitada alljärgneval kujul:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k q_k$$

ja järelikult on energia juurdekasv potentsiaalide konstantsuse korral võrdne avaldisega

$$(\mathrm{d}_g W_e)_{U_k=\mathrm{const}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} U_k \, \mathrm{d}q_k,$$

s. o. ta võrdub täpselt *poole* väliste allikate tööga. Ülejäänud pool väliste allikate tööst läheb mehaanilise töö $f \, \mathrm{d}g$ tegemiseks. Seega on mehaaniline töö võrdne elektrivälja energia juurdekasvuga:

$$f \, \mathrm{d}g = +(\mathrm{d}_g W_e)_{U_k=\mathrm{const}}.$$

Kui süsteemis toimub ümberpaigutus jõu f mõjul, siis $f \, \mathrm{d}g > 0$. Energia juurdekasv $U_k = \mathrm{const}$ korral on samuti positiivne, ja välja energia suureneb.

Viimasest võrdusest saame mehaanilise jõu kohta veel ühe avaldise:

$$f = + \left(\frac{\partial W_e}{\partial g}\right)_{U_k = \text{const}},$$

s. o. *mehaaniline jõud, mis püüab muuta süsteemi antud koordinaati, on võrdne elektrivälja energia suurenemisega selle jõu poolt muudetava koordinaadi ühiku kohta eeldusel, et kõikide kehade potentsiaalid hoitakse konstantsetena.*

On vaja alla kriipsutada, et mõlemad avaldised jõu kohta on samaselt võrdsed, s. o. võib kirjutada:

$$f = - \left(\frac{\partial W_e}{\partial g}\right)_{q_k = \text{const}} = + \left(\frac{\partial W_e}{\partial g}\right)_{U_k = \text{const}}.$$

Jõud sõltub ainult kehade asendist ja nende laengute väärtustest antud hetkel ning ei saa sõltuda sellest, kuidas areneb energeetiline protsess sel juhtumil, kui süsteem hakkab jõu mõjul liikuma. Kuid see energeetiline protsess on erisugune sõltuvalt sellest, kas me hoiame süsteemi liikumisel konstantsetena kehade laengud või nende potentsiaalid, või siis, üldiselt võttes, muutuvad nii kehade laengud kui ka potentsiaalid. See on ka mõistetav, sest elektrivälja energia ei ole määratud ainult kehade asendiga, vaid ka nende laengutega, ja järelikult sõltub energia muutumine nii kehade asendi kui ka laengute muutumisest.

Demonstreerime jõu f mõlemate avaldiste samasust näitega kondensaatori plaatide tõmbejõu kohta. Laetud kondensaatori energia

$$W_e = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

kus $u = U_1 - U_2$ on kondensaatori plaatide potentsiaalide vahe. Otseselt sõltub koordinaatidest kondensaatori mahtuvus C. Määrates jõudu valemi järgi, mille puhul $q_k = \text{const}$, kasutame energia avaldist kondensaatori laengu kaudu. Saame:

$$f = - \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{q^2}{2C}\right)_{q = \text{const}} = - \frac{q^2}{2} \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial g} = \frac{u^2}{2} \frac{\partial C}{\partial g}.$$

Määrates jõudu valemi järgi, mille puhul $U_k = \text{const}$, kasutame energia avaldist potentsiaalide vahe kaudu. Leiame:

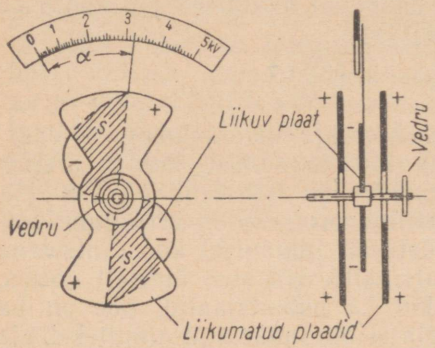
$$f = + \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{Cu^2}{2}\right)_{u = \text{const}} = \frac{u^2}{2} \frac{\partial C}{\partial g}.$$

Niisiis on mõlemad jõu avaldised tõepoolest täiesti ühesugused. Ainult tuletise võtmisel tuleb ühel juhtumil lugeda konstantseteks laengud, teisel juhtumil aga potentsiaalid.

Kuna jõu f mõjul tekkival liikumisel on $f\,dg > 0$, siis viimasest avaldisest järeldub, et sellise liikumise korral $dC > 0$, s. o. mahtuvus suureneb. Järelikult kondensaatori plaatidele mõjuvad jõud püüavad suurendada kondensaatori mahtuvust.

Saadud avaldiste väärtus seisneb nende ühtsuses: jõu arvutamiseks on meil küllaldane teada, kuidas sõltuvad koordinaatidest elektrimahtuvused C, mis lähevad elektrivälja energia avaldisse.

Näitena vaatleme elektrostaatilist voltmeetrit, mis on kujutatud skemaatiliselt joonisel 38. Voltmeetri liikuva ja liikumatu osa vaheline mahtuvus sõltub liikuva osa pöördenurgast α, s. o. $C = F(\alpha)$.



Joon. 38.

Et üldistatud koordinaadiks on võetud pöördenurk, siis üldistatud jõuks on liikuvale plaadile mõjuv pöördemoment M. Moment, mis määratakse tõmbejõududega erinevaid märke omavate laengutega liikuvate ja liikumatute plaatide vahel, avaldub kujul

$$M = \frac{u^2}{2}\frac{\partial C}{\partial \alpha}.$$

Tasakaaluasendis tasakaalustatakse see moment vedru väändemomendiga, mis on võrdeline nurgaga α, s. o. $M' = k_1\alpha$. Tasakaaluasend on seega määratud võrrandiga

$$\frac{u^2}{2}\frac{\partial C}{\partial \alpha} = k_1\alpha.$$

Sellest võrrandist on näha, et voltmeetri skaala iseloom, s. o. seos $\alpha = \varphi(u)$ määratakse sõltuvusega $C = F(\alpha)$. Kui näiteks $C = k'\alpha$, s. o. kui mahtuvus on võrdeline liikuva osa pöördenurgaga, siis

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{k'}{k_1}u^2,$$

s. o. voltmeetri skaala omab ruutiseloomu.

Leiame, missugune peaks olema sõltuvus $C = F(\alpha)$, et voltmeetri skaala oleks ühtlane. Me sooviksime, et mõõteriista osuti hälbenurk α oleks võrdeline pingega, s. o. et oleks täidetud tingimus $\alpha = k_2u$. Asendades siit u väärtuse tasakaaluvõrrandisse, saame:

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = 2k_1k_2^2\frac{1}{\alpha},$$

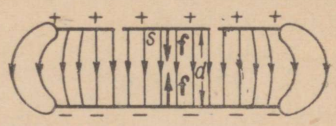
kust leitakse nõutav C sõltuvus α-st:

$$C = 2k_1k_2^2 \ln \alpha + A.$$

Kui mitte arvestada ääreefekti, siis on plaatidevaheline mah-

tuvus võrdeline kattuva osaga s plaatide pinnast, mis on joonisel viirutatud. See pind peab suurenema võrdeliselt nurga α logaritmiga. Tuleb märkida, et mahtuvuse jaoks saadud võrrandit ei ole võimalik rahuldada $\alpha = 0$ juures, sest mahtuvus ei saa omandada lõpmatult suuri väärtusi. Seetõttu ei ole põhimõtteliselt võimalik seda tüüpi voltmeetri korral saavutada ühtlast skaalat selle algusosas.

Teise näitena vaatleme laetud tasapinnalise kondensaatori plaatide vastastikust tõmbejõudu. Määrame jõu, mis mõjub plaadi väljalõigatud keskosale, mida ümbritseb küllalt lai kaitserõngas, et plaadi keskosa all olevat välja võiks lugeda homogeenseks (joon. 39). Kondensaatori keskosa mahtuvus $C = \frac{\varepsilon_a S}{d}$, kus s on väljalõigatud plaadiosa sisemine pindala ja d — kaugus plaatide vahel. Plaatide vahekaugust d muuta püüdev jõud



Joon. 39.

$$f = \frac{u^2}{2}\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{u^2}{2}\frac{\varepsilon_a s}{d^2}.$$

Kuna vaadeldavas süsteemis on väli homogeenne, kehtib seos $\frac{u^2}{d^2} = E^2$ ja järelikult $f = -\frac{\varepsilon_a E^2}{2} s = -\frac{ED}{2} s$. Miinusmärk näitab, et jõud mõjub vahekauguse d vähendamise suunas, s. o. püüab plaate lähendada. Plaadi pinnaühiku kohta tuleva jõu absoluutväärtus

$$f' = \frac{|f|}{s} = \frac{ED}{2}$$

on arvuliselt võrdne elektrivälja energiaga dielektriku ruumalaühikus.

Selle paragrahvi lõpetamiseks tutvume lühidalt Faraday kujutlustega mehaaniliste jõudude iseloomu kohta elektriväljas. Faraday käsitles mehaanilisi vastastikuseid mõjutusi laetud kehade vahel nende kehade vahelist ruumi täitva dielektriku erilise füüsikalise oleku tagajärjena.

Faraday kujutluse järgi on kondensaatori plaatidele mõjuvad jõud elektrinihke torudele kogu nende pikkuse ulatuses mõjuva tõmbe tagajärjeks. Seejuures vootoru mistahes ristlõike pinnaühikule taandatud pikitõmbejõud

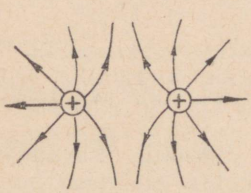
$$f' = \frac{ED}{2} = \frac{\varepsilon_a E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_a}.$$

See pikitõmme avaldub plaatidele mõjuvate jõudude kujul, sest vootorud lõpevad plaatide pindadel.

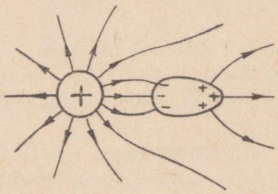
Kooskõlas nende kujutlustega peab vootorude pikitõmbele

kaasnema nende külgsuunaline laialisurumine. Tõepoolest, kui esineks ainult pikitõmme, siis vootorud asetuksid piki lühimat vahekaugust ja ei oleks võimalik seletada vootorude kõverdumist kondensaatori servade juures. Seda kõverdumist võib seletada sellega, et pikitõmbe kõrval esineb vootorude vahel ka külgsurve. Külgsurve suurust saab määrata, kui uurida vootoru lõigu tasakaalu mittehomogeenses väljas. Seejuures selgub, et külgsurve ja pikitõmbe jõud, taandatuna pinnaühikule, on omavahel võrdsed.

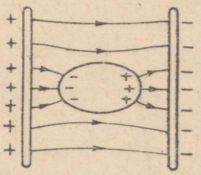
Kujutlus nihkevoo torude pikitõmbe ja külgsurve kohta aitab meil, kui väljapilt on joonestatud, laetud kehadele mõjuvate jõudude üldist iseloomu ülevaatlikult ette kujutada. Nii selgub joonistelt 17 ja 21, et üksildase laetud keha pind püüab suurendada oma mõõtmeid; pinna pealt algavad nihkevoo torud nagu venitaksid teda kõikides suundades välja. Erinevat märki omavate laengutega kaks keha (vt. joon. 20) tõmbuvad vastastikku justkui ühelt kehalt teisele minevate vootorude pikitõmbe tagajärjel. Ühemärgilisi laenguid kandvad kehad (joon. 40) tõukuvad. Seda võib vastavalt nendele kujutlustele seletada kehadest väljuvate vootorude külgsurvega. Laadimata juhtiv keha, mis on viidud laetud keha välja, tõmbub viimase poole, nagu on kerge märgata joonisel 41 kujutatud väljapildist. Üldiselt püüab iga juhtiv laadimata keha, mis on viidud mittehomogeensesse välisesse välja, ümber paikneda selles suunas, kus väljatugevus omab suuremat väärtust. Pikerguse kujuga juhtiv keha (joon. 42) asetub välises homogeenses väljas piki välja suunda, püüdmata seejuures ümber paikneda ei ühes ega teises suunas.



Joon. 40.



Joon. 41.



Joon. 42.

Tõmbejõud peavad avalduma mitte ainult dielektriku ja juhi vahelisel piiril, vaid ka kahe erineva dielektriku piiril. Sel juhtumil, kui elektrinihke jooned lõikavad lahutuspinda normaali suunas, omab vektor **D** ühesugust väärtust mõlemas keskkonnas; pinnaühikule tulev nihkevoo torude tõmme aga on vastavalt avaldisele $f' = \frac{D^2}{2\varepsilon_a}$ suurem selles keskkonnas, mille dielektriline läbitavus on väiksem. Järelikult mõjub lahutuspinnale rõhk suunaga selle keskkonna poole, mille dielektriline läbitavus on väiksem. Kahe dielektriku lahutuspinnale mõjuvate jõududega

võib seletada nähtust, et isoleerainest keha, mille dielektriline läbitavus on suurem ümbritseva keskkonna omast, tõmbub mittehomogeensesse välja.

Faraday meetod, mida Maxwell kvantitatiivses suhtes edasi arendas, võimaldab mitte ainult jõudusid kvalitatiivselt hinnata, vaid ka neid arvutada niisama täpselt kui Coulomb'i seaduse abil, mis oma kujult vastab kujutlusele laengute kaugmõjust. Kuna elektromagnetiline väli on üheks mateeria liigiks, siis me peame vastu võtma Faraday põhilised seisukohad jõudude ülekandmise kohta ühelt laetud kehalt teisele elektrivälja vahendusel. Faraday kujutlust nihkevoo torude ja nende omaduste kohta aga tuleb käsitada ainult kui elektriväljas jõudude ülekandmise ilmeka kirjeldamise viisi. Elektriväljas toimuvaid füüsikalisi protsesse ise ei saa muidugi taandada mehaanilisteks pingeteks ja rõhkudeks mingisuguses hüpoteetilises keskkonnas, millest räägiti esimeses paragrahvis.

Taolised katsed redutseerida elektrivälja nähtusi temas esinevaiks mehaanilisteks pingeteks ja rõhkudeks osutuvad elektromagnetiliste nähtuste mehhanistlikuks tõlgenduseks. Nagu selgus esimestes paragrahvides, omavad elektromagnetiliste nähtuste valdkonnas tundmaõpitavad mateeria liigid — laetud osakesed ja elektromagnetiline väli — erilisi, mehaanikas mittekäsitletavaid elektromagnetilisi omadusi. Nende osakeste (elektronide, prootonite jne.) puhul on selleks eriliseks iseloomustavaks omaduseks nende elektrilaeng. Vastavalt sellele osutuvad ka füüsikalised suurused E ja D_0, mis määravad elektromagnetilise protsessi intensiivsuse elektriväljas, elektromagnetilisteks suurusteks, s. o. ei ole hoopiski mitte tugevuseks ja nihkeks mehaanilises mõttes.

Teaduse kaasaegse taseme juures ei saa me anda väljas toimuva protsessi näitlikku interpretatsiooni: me ei tunne välja sisemist ehitust, samuti nagu me veel ei tunne elektroni, prootoni jne. sisemist ehitust. Teaduse edasises arengus omandatakse kahtlemata sügavamaid teadmisi ka nende probleemide kohta.

NELJAS PEATÜKK

ELEKTRIVOOL

§ 17. Elektrivool ja voolutihedus

Laetud osakeste liikumise nähtust nimetatakse *elektrivooluks*. Elektrivoolu mõistesse kuulub, nagu näitame § 20, samuti elektrivälja ajalise muutumise nähtus, s. o. nn. elektriline nihkevool tühjuses.

Terminit elektrivool kasutatakse mitte ainult nende nähtuste endi, vaid ka nende intensiivsuse iseloomustamiseks. Seejuures on ta sünonüümiks terminile *elektrivoolu tugevus*. Viimati nimetatud tähenduses on elektrivool füüsikaline suurus. Piirdudes esialgu laetud osakeste liikumise nähtuse vaatlemisega, võime määratleda elektrivoolu kui suuruse (voolu tugevuse) järgmiselt: *mingit pinda s läbiv elektrivool i võrdub laetud osakeste poolt ajavahemiku Δt jooksul läbi selle pinna s kantud laengu Δq ja selle ajavahemiku suuruse jagatise piirväärtusega ajavahemiku lähenemisel nullile*, s. o.

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

Elektrivool on skalaarsuurus. Pinna s erinevatel elementidel võib laetud osakeste liikumise suund olla väga mitmesugune. Kui aga vaatleme üsna väikest pinnaelementi Δs, võime lugeda laetud osakeste liikumise suuna kõigis pinnaelemendi punktides ühesuguseks, kusjuures see väide muutub seda rangemaks, mida enam väheneb Δs, s. o. kui $\Delta s \to 0$. Seoses sellega võetakse kasutusele vektorsuurus — *voolutihedus, mis võrdub laetud osakeste liikumissuunaga risti asetatud pinnaelementi Δs läbiva voolu Δi ja sama pinnaelemendi jagatise piirväärtusega pinnaelemendi suuruse lähenemisel nullile*, s. o.

$$\delta = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}s}.$$

Voolutiheduse suund ühtib positiivselt laetud osakeste liikumise suunaga ehk on vastassuunaline negatiivselt laetud osakeste liikumise suunaga.

Kui nurk vektori δ ja pinna positiivse normaali vahel on β, siis kehtib seos

$$di = \delta \cos \beta \, ds = \delta \, ds.$$

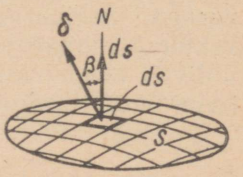
Seetõttu on lõplike mõõtmetega pinda s (joon. 43) läbiv vool

$$i = \int_s \delta \cos \beta \, ds = \int_s \delta \, ds.$$

Ainult sel juhtumil, kui voolutihedus on pinna kõigis punktides suuruselt võrdne ja moodustab pinna normaaliga igal pool sama nurga, võib kirjutada:

$$i = \delta \cos \beta \int_s ds = \delta \cos \beta \, s.$$

Kui peale selle veel voolu suund on risti pinnaga, siis $i = \delta s$. Selline tingimus on täidetud ajaliselt konstantse voolu puhul juhtmetes, s. t. juhtides, mille ristmõõtmed on pikkusega võrreldes väiksed. Seetõttu, kui uuritakse protsesse elektriahelates, mis on koostatud väikese ristlõikega juhtmetest, kõneldakse harilikult voolu kui terviku suunast ahela selles või teises osas. Üeldu põhjal on selge, et voolu suunast kui täielikult kindlaksmääratud suunast ruumis võime üldjuhtumil kõnelda ainult lõpmatult väikese voolu di puhul läbi lõpmatult väikese pinna ds. See on voolutiheduse vektori suund ruumi antud punktis.



Joon. 43.

Ruumis, milles eksisteerib elektrivool, võib tõmmata jooni selliselt, et voolutiheduse vektorid oleksid nendele joontele puutujateks kõigis punktides. Selliseid jooni nimetame *voolujoonteks*. Ruumiosa, mis on piiratud voolujoonte kogumist moodustatud torupinnaga, nimetatakse *voolutoruks*.

Ruumi, milles on olemas vool, võib kokkuleppeliselt jaotada võrdse vooluga voolutorudeks. Seejuures on voolutorudega ristiolevat pinnaühikut läbivate torude arv võrdeline voolutihedusega. Kui veel leppeliselt kujutada iga voolutoru ruumis ühe joonena, mis ühtib toru teljega, siis selliste joonte kogum annab meile näitliku pildi mitte ainult voolutiheduse vektori suunast, vaid ka suurusest ruumi kõigis punktides. Kõneldes edaspidi voolujoontest, me mõtlemegi nende all voolutorude telgi.

MKSA ühikute süsteemis on voolu mõõtühikuks amper (1 A) ja voolutiheduse ühikuks *amper ruutmeetri kohta* (1 A/m^2).

§ 18. Vool juhtivas keskkonnas

Elektrivool juhtivas keskkonnas on seotud elektrivälja olemasoluga selles keskkonnas. Nimelt selle elektrivälja mõjul alustavadki laetud osakesed juhis korrapärast liikumist. Seda elektrivoolu liiki nimetatakse *juhtivusvooluks*.

Vastavalt elektroniteooriale on elektrivool metallides nn. vabade, aatomitega nõrgalt seotud, kergesti aatomilt aatomile minevate elektronide liikumine. Ülaltoodud kvantteooria kohaselt on niisuguste ainete suur elektrijuhtivus põhjustatud valentsvööndi ja juhtivusvööndi kattumisega neis. Järelikult puudub nende vööndite vahel energeetiline lünk ja valentselektronid võivad kergesti üle minna juhtivusvööndi vabadele energeetilistele nivoodele, muutudes vabadeks elektronideks. Antud väljatugevuse ja temperatuuri juures tekib teatud kindel voolutihedus, s. o. elektronid saavad teatud kindla keskmise kiiruse väljajoonte suunale vastupidises suunas, sest elektroni laeng on negatiivne. Asjaolu, et elektronide keskmine kiirus alalisväljas jääb konstantseks, on seotud sellega, et elektriväljas elektronide poolt kiirendamisel saadud kineetiline energia antakse üle aine aatomitele ja läheb soojusliikumiseks. Juhi konstantse temperatuuri puhul osutub voolutihedus võrdeliseks elektrivälja tugevusega. Seejuures ühtib isotroopses keskkonnas voolutiheduse vektor δ suunalt elektrivälja tugevuse vektoriga **E** ja voolujooned ühtivad elektrivälja tugevuse joontega. Öeldu põhjal võime juhtivusvoolu tiheduse jaoks kirjutada:

$$\delta = \gamma \mathbf{E}.$$

Suurust γ nimetatakse *aine elektrierijuhtivuseks*.

Erijuhtivuse pöördväärtust $\varrho = \frac{1}{\gamma}$ nimetatakse *aine elektrieritakistuseks*. Järelikult võib elektrivälja tugevuse ja voolutiheduse vahelise seose anda kujul

$$\mathbf{E} = \varrho \delta.$$

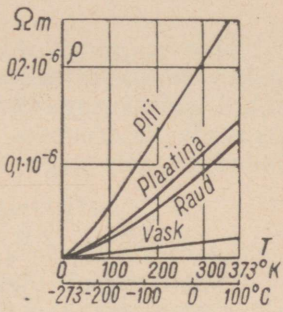
Eritakistuse mõõtühikuks on MKSA ühikute süsteemis *oom-meeter* (1 Ωm). Tõepoolest, suhtest $\varrho = \frac{E}{\delta}$ saame selle mõõtühikuks $1 \frac{V}{m} \cdot \frac{m^2}{A} = 1 \frac{V \cdot m}{A} = 1\ \Omega \cdot m$, sest $1 \frac{V}{A} = 1\ \Omega$ (oom) on elektritakistuse mõõtühik. Erijuhtivuse mõõtühikuks on vastavalt $1 \frac{1}{\Omega m} = 1 \frac{S}{m}$, sest $\frac{1}{\Omega} = S$ (siimens).

Normaaltemperatuuril omavad suurimat erijuhtivust puhas hõbe ja vask.

Suurus γ sõltub tugevasti lisanditest, mis tavaliselt alati esinevad metallides. Eriti teravalt avaldub lisandite mõju, kui

nad moodustavad põhimetalliga kõvasulameid. Seepärast puhastataksegi elektrotehniliseks otstarbeks kasutatavat vaske elektrolüüsi teel. Ometi on ka elektrotehnilises vases mõningane hulk lisandeid. Suurust γ mõjutab ka mehaaniline töötlemine. Külmtöötlemine vähendab γ-t teatud määral. Elektrotehnilise vase standardseks erijuhtivuseks võetakse kvaliteetvase erijuhtivus, mis on võrdne $58 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$ 20° C juures ja mis vastab eritakistusele $0{,}017241 \cdot 10^{-6}$ Ωm. Juhtivate ainete hulka kuuluvad samuti süsi ja elektrolüüdid. Viimastes on juhtivus põhjustatud positiivsetest ja negatiivsetest ioonidest.

Juhtivate ainete erijuhtivus γ ja vastavalt ka eritakistus ϱ sõltuvad temperatuurist. Joonisel 44 on graafiliselt kujutatud vase, raua, plaatina ja plii eritakistuse sõltuvus temperatuurist. Teatud piirides võib neid sõltuvusi lugeda lineaarseteks. Seepärast temperatuuril t kehtiva eritakistuse ϱ_t arvutamiseks temperatuuri t_a juures teadaoleva eritakistuse ϱ_a väärtuse kaudu võibki kasutada järgmist ligikaudset sõltuvust, kui ainult t ei erine liiga palju t_a-st:



Joon. 44.

$$\varrho_t = \varrho_a[1 + \alpha(t - t_a)].$$

Suurust α nimetatakse *takistuse temperatuuriteguriks*. Metallidel on takistuse temperatuuritegur positiivne, elektrolüütidel ja söel aga negatiivne.

Laengute jaotumine juhtidel neis kulgevate alalisvoolude puhul peab olema statsionaarne, sest igasse juhi ruumielementi teatud ajavahemiku jooksul sissetoodav elektrilaeng peab võrduma sellest ruumielemendist sama ajavahemiku jooksul väljaviidava laenguga. Statsionaarselt jaotunud laengute elektriväli on aga identne analoogilisel viisil jaotunud liikumatute laengute elektrostaatilise väljaga. Seepärast on väljaspool emj. allikate piirkonda alalisvoolude elektriväli, samuti nagu elektrostaatiline väligi, potentsiaalne ja tema igas, emj. allikat mitteläbivas kinnises kontuuris kehtib võrdus

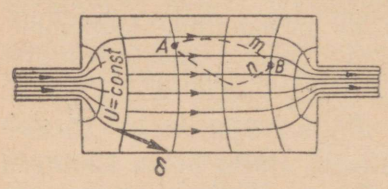
$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0.$$

Erinevalt elektrostaatilisest väljast nimetatakse liikumatutes juhtides voolavate alalisvoolude välja *statsionaarseks* elektriväljaks.

Elektrivälja tugevuse joonintegraal punktist A punktini B (joon. 45) osutub määratuks, samuti nagu elektrostaatilises väljaski, ainult nende punktide asukohaga ning ei sõltu nendevahelise teekonna valikust (näiteks teekond m või n) tingimusel, et

see teekond ei läbi emj. allikat. See joonintegraal on võrdne punktide A ja B potentsiaalide vahega:

$$\int_A^B \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = U_A - U_B.$$



Joon. 45.

Samapotentsiaalipinnad, mis on määratavad võrranditega

$$U(x, y, z) = \text{const},$$

lõikuvad väljatugevuse joontega täisnurga all.

Juhtivuse suhtes isotroopses keskkonnas langevad voolujooned ühte väljatugevuse joontega, sest niisuguse keskkonna igas punktis on voolutiheduse ja elektrivälja tugevuse vektorid, mis on seotud sõltuvusega $\delta = \gamma\mathbf{E}$, ühe ja sama suunaga. Seepärast lõikuvadki isotroopses keskkonnas voolujooned samapotentsiaalipindadega täisnurga all.

§ 19. Konvektsioonivool

Elektrilaengute ülekandmine vabas ruumis liikuvate elementaarosakeste või kehade kaudu kujutab endast *elektrilist ülekandevoolu* ehk *konvektsioonivoolu*. Konvektsioonivool erineb juhtivusvoolust selle poolest, et tema tihedust ei saa väljendada suhtega $\delta = \gamma\mathbf{E}$, kus erijuhtivus γ on voolu juhtivat keskkonda iseloomustav kindel suurus. Elektrilaengut omavate osakeste või kehade *vaba* liikumise juhtumil elektriväljas ei ole nende kiirus võrdeline väljatugevusega E. Tõepoolest, osakesele laenguga q on elektriväljas mõjuv jõud võrdne qE. Niisuguse osakese kiirendus on võrdeline väljatugevusega. Vastavalt sellele on tema liikumine vabas ruumis ühtlaselt kiirenev, sest puudub keskkonna takistus.

Konvektsioonivoolu tähtsaks juhtumiks on laengut omavate elementaarosakeste liikumine tühjuses. Mitte vähem tähtsaks konvektsioonivoolu juhtumiks on elektrivool gaasides. Avaldame konvektsioonivoolu tiheduse liikuvate osakeste laengu keskmise ruumtiheduse ϱ ja osakeste kiiruse v kaudu. Sel eesmärgil eraldame ruumist risttahuka, mille maht on $\mathrm{d}l\,\mathrm{d}s$ (joon. 46). Olgu serv $\mathrm{d}l$ paralleelne kiiruse vektoriga. Laeng risttahuka sees on $\mathrm{d}q = \varrho\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}s$. Kogu see laeng läheb läbi pinna $\mathrm{d}s$ niisuguse ajavahemiku $\mathrm{d}t$ jooksul, mille vältel laetud elementaarosakesed läbivad teekonna $\mathrm{d}l$. See ajavahemik kujuneb määratuks tingimusega $\mathrm{d}l = v\,\mathrm{d}t$. Järelikult on vool läbi pinna $\mathrm{d}s$ võrdne $\mathrm{d}i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \varrho v\,\mathrm{d}s$, voolutiheduse jaoks aga saame:

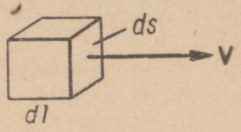
$$\delta = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}s} = \varrho v.$$

Negatiivse laenguga ($\varrho < 0$) osakeste liikumisel on voolu leppeline positiivne suund vastupidine liikumise suunaga, ja δ ning v absoluutväärtuste vahel kehtib sõltuvus

$$\delta = -\varrho v.$$

Mõlemad sõltuvused ϱ mõlema märgi jaoks omandavad ühise kuju vektoriaalses kirjutusviisis:

$$\delta = \varrho \mathbf{v}.$$



Joon. 46.

Kui $\varrho > 0$, langevad vektorite δ ja $\mathbf{v}$ suunad ühte, kui aga $\varrho < 0$, on need vektorid vastassuunalised.

Kui üheaegselt liiguvad positiivselt laetud osakesed kiirusega $\mathbf{v}_+$ ja laengute ruumtihedusega ϱ_+ ning negatiivselt laetud osakesed kiirusega $\mathbf{v}_-$ ja laengute ruumtihedusega ϱ_-, siis konvektsioonivoolu tihedus $\delta = \varrho_+\mathbf{v}_+ + \varrho_-\mathbf{v}_-$.

§ 20. Elektriline nihkevool dielektrikus

Mitmesugustes tehnilistes seadmetes kasutatavad dielektrikud omavad ehkki väga väikest, kuid siiski lõplikku erijuhtivust. Selles paragrahvis meid vahetult huvitavate nähtuste uurimisel me üldse ei arvesta dielektrikute elektrijuhtivust, seega vaatleme dielektrikuid ideaalsetena.

Elektrivälja iga muutumise puhul ajas muutub dielektriku polariseerumus P, mille tõttu dielektriku aines tema aatomite ja molekulide koosseisu kuuluvad elektrilaengutega elementaarosakesed liiguvad. Seda elektrivoolu liiki dielektrikus nimetatakse *elektriliseks polarisatsioonivooluks*. Kuna laetud osakesed dielektrikus ei ole vabad ja võivad ainult nihkuda elektrivälja mõjul, siis nimetatakse polarisatsioonivoolu ka elektriliseks nihkevooluks. Edaspidi näeme, et polariseerumuse P muutumisest tingitud nihkevool moodustab üksnes osa kogu nihkevoolust dielektrikus. Selle voolu tihedust δ' pole raske siduda aine polariseerumuse P muutumisega.

§ 9 oli suurus P väljendatud elektrilaengu dQ' kaudu, mille kandsid üle laetud osakesed, mis nihkusid dielektriku aines elektrivälja tekkimise protsessis läbi osakeste nihkumissuunaga risti oleva pinnaelemendi ds, kujul

$$P = \frac{dQ'}{ds}.$$

Kui pinnaelement ds on laetud osakeste nihkumissuuna suhtes vabalt orienteeritud, saame vastavalt:

$$P_n = \frac{dQ'}{ds},$$

kus P_n on vektori $\mathbf{P}$ normaalkomponent pinnaelemendile ds.

Suuruse **P** muutumisel ajas läbib pinnaelementi ds vool

$$di = \frac{d}{dt}(P_n\, ds) = \frac{dP_n}{dt}\, ds.$$

Teisest küljest

$$di = \delta_n'\, ds,$$

kus δ_n' on voolutiheduse vektori δ' normaalkomponent pinnaelemendi ds suhtes. Seega

$$\delta_n' = \frac{dP_n}{dt}.$$

Kuna pinnaelemendi ds asendit võib valida vabalt, siis tuleme järeldusele, et voolutiheduse vektori δ' mingisuguse suunaga komponent on võrdne aine polariseerumuse vektori **P** samasuunalise komponendi tuletisega aja järgi. Seega saame kirjutada:

$$\delta_x' = \frac{dP_x}{dt};\quad \delta_y' = \frac{dP_y}{dt};\quad \delta_z' = \frac{dP_z}{dt}.$$

Seega voolutiheduse vektor

$$\delta' = \mathbf{i}\frac{dP_x}{dt} + \mathbf{j}\frac{dP_y}{dt} + \mathbf{k}\frac{dP_z}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{i}P_x + \mathbf{j}P_y + \mathbf{k}P_z),$$

kus **i**, **j**, **k** on telgede OX, OY ja OZ suunalised ühikvektorid.
Kuna $\mathbf{i}P_x + \mathbf{j}P_y + \mathbf{k}P_z = \mathbf{P}$, saame:

$$\delta' = \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Järelikult on nihkevoolu tiheduse vektori vaadeldav osa võrdne aine polariseerumuse vektori tuletisega aja järgi.

Ülalpool juba märgiti, et nihkevool ja vastavalt nihkevoolu tihedus δ', mis on tingitud aine polariseerumuse muutumisest, moodustavad ainult osa kogu nihkevoolust ja vastavalt ka nihkevoolu tihedusest dielektrikus. Tegelikult on elektrinihke vektoril **D** dielektrikus kaks komponenti $\mathbf{D}_0$ ja **P**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P},$$

kus $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0\mathbf{E}$. Elektrivälja muutumisel muutuvad mõlemad komponendid ja sellele vastavalt saame:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{d\mathbf{D}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Nagu äsja selgus, on viimase avaldise teine komponent nihkevoolu tiheduse vektor δ', mis on põhjustatud laengut omavate elementaarosakeste liikumisest dielektriku aines. On ilmne, et ka esimene komponent omab voolutiheduse füüsika-

list dimensiooni. Ta iseloomustab füüsikalist protsessi elektriväljas eneses selle muutumisel ajas. Ruumipiirkonda, mida vaadeldakse kui mateeria välja kujul esinemise vormi, s. o. piirkonda, kus puuduvad meile tuntud mateeria osakesed, nimetati eespool tühjuseks. Järelikult me võime esimest komponenti nimetada *elektrilise nihkevoolu tiheduseks tühjuses:*

$$\delta_0 = \frac{dD_0}{dt}.$$

Niisiis on kogu *elektrilise nihkevoolu tiheduse vektor dielektrikus*

$$\delta = \frac{dD}{dt} = \delta_0 + \delta' = \frac{dD_0}{dt} + \frac{dP}{dt}.$$

Teaduse kaasaegse taseme juures ei saa esimesele komponendile näitlikku tõlgendust anda, sest meil ei ole veel kuigi detailset ettekujutust elektromagnetilise välja sisemisest ehitusest, temas toimuvatest sisemistest protsessidest. Isegi mitte omades nihkevoolu tiheduse esimese komponendi δ_0 kohta samavõrd näitlikku ettekujutust kui tema teise komponendi δ' kohta, võime siiski teha äärmiselt tähtsa oletuse. Tuleb nimelt oodata, et elektrivoolu tähtsaim avaldus — temaga seotud magnetvälja tekkimine — on ühesugune mõlemal komponendil. Katse kinnitab täielikult seda oletust.

Esmakordselt avaldas neid mõtteid Maxwell ja nad viisid ta elektromagnetilise välja teooria loomisele. Tõepoolest, nende mõtete kohaselt peab elektrivälja igal muutumisel, isegi kui eeldada, et temas aine osakesed puuduvad ($\mathbf{P} = 0$), tekkima samas ruumis elektriväljaga seotud magnetväli, s. o. tekib ühtne elektromagnetiline väli. Neid tähtsaid kujutlusi arendame edaspidi üksikasjalikumalt. Siin on oluline märkida, et katse kinnitab täielikult Maxwelli elektromagnetismiteooria järeldusi. Neid kinnitasid H. Hertzi ja P. N. Lebedevi elektromagnetiliste lainete eksperimentaalsed uurimused. Nende kõige selgemaks kinnituseks olid A. S. Popovi tähelepanuväärsed tööd ning raadio leiutamine tema poolt, milledel põhineb raadiotehnika kaasaegne erakordselt laialdane areng. Seejuures on kõik käesolevaks ajaks saavutatud praktilised tulemused elektromagnetiliste lainete kiirgumise ja levimise alal täielikus kooskõlas elektromagnetilise välja teooriaga, mille aluseks on kujutlus elektrilistest nihkevooludest dielektrikus ja tühjuses.

Järelikult on voolutiheduse vektorite δ_0 ja δ' summat kujutav nihkevoolu tiheduse vektor võrdne elektrinihke vektori tuletisega aja järgi:

$$\delta = \frac{dD}{dt}.$$

Seda tuletist tuleb mõista vektoriaalses tähenduses. Kui

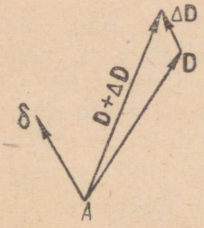
punktis A muutub nihkevektor mitte ainult suuruselt, vaid ka suunalt (joon. 47), siis voolutiheduse vektor δ enam suunalt nihkevektoriga ei ühti. Vektori δ suunaks on see suund, millele läheneb ajavahemiku Δt jooksul tekkinud nihkevektori **D** juurdekasvu $\Delta\mathbf{D}$ suund, kui $\Delta t \to 0$.

Joonistel 48 ja 49 on toodud erijuhtumid, kus **D** muutub ainult suuruselt või ainult suunalt.

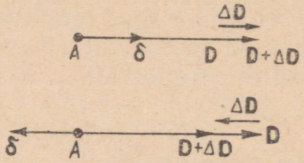
Nihkevoolu tiheduse vektori komponentidele saame kõikidel juhtumitel avaldised:

$$\delta_x = \frac{dD_x}{dt}; \quad \delta_y = \frac{dD_y}{dt}; \quad \delta_z = \frac{dD_z}{dt}.$$

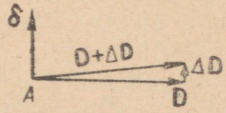
Põhimõtteliselt esineb nihkevool vahelduvvälja puhul mitte ainult dielektrikutes, vaid ka pooljuhtivates ja juhtivates ainetes. Tõepoolest, nende ainete molekulid peavad välise välja mõjul polariseeruma samuti kui dielektriku molekulidki ja peale selle peab tekkima nihe tühjuses. Pooljuhtivates ainetes tuleb arvestada nihkevoole ainult küllalt kõrgete elektrivälja muutumise sageduste puhul. Juhtivates ainetes on aga nihkevoolud juhtivusvooludega võrreldes tühiselt väikesed isegi väga kõrgetel sagedustel. Teisest küljest esinevad isoleerainetes tavaliselt kõrvuti nihkevooludega ka juhtivusvoolud, kuigi nad on esimestega võrreldes isegi madalatel sagedustel väga väikesed.



Joon. 47.



Joon. 48.



Joon. 49.

Oma juhtivuse poolest teravalt erinevate materjaligruppide olemasolu võimaldab luua meile soovitavaid vooluteekondi, nagu näiteks ülekandeliinides, elektrivõrkudes, masinate mähistes jne.

§ 21. Elektrivoolu pidevuse printsiip

Kujutleme kinnist pinda s dielektrikus (joon. 50) ja toimugu seespool seda pinda asetseva keha A laadimine. Keha laengu q suurenemisel tugevneb keha ümbritsev elektriväli ja suureneb elektrinihe dielektrikus. Seetõttu läbib pinda s seest väljapoole

nihkevool. Nihkevektori voog läbi pinna s võrdub vaba laenguga q, mis on suletud pinna sisse:

$$\oint_s \mathbf{D}\,\mathrm{ds} = q.$$

Võtame sellest võrdusest tuletise aja järgi. Saame:

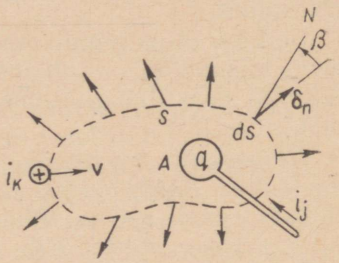
$$\oint_s \frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{ds} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

Suurus

$$\oint_s \frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{ds} = \oint_s \delta\,\mathrm{ds} = i_n$$

on nihkevool läbi pinna s seest väljapoole.

Suurus $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ on pinna s sisse suletud vaba laengu kasvamise kiirus. Pinnaga s piiratud ruumalas oleva vaba positiivse laengu suurenemine on võimalik ainult positiivsete laengute ülekandmisega välisest ruumist sellesse ruumi või negatiivsete laengute ülekandmisega vastassuunas. See ülekandmine võib toimuda kas juhtivusvoolu i_j näol juhtmetes, mis läbivad pinda s, või konvektsioonivoolu i_k näol, mille puhul laenguid kantakse läbi pinna laetud kehadega või siis ruumis liikuvate laetud elementaarosakestega.



Joon. 50.

Kui $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} > 0$, siis kandub positiivseid laenguid välisest ruumist pinnaga s piiratud ruumi ning järelikult on voolude summa $(i_j + i_k)$ negatiivne, sest positiivseks loeme välisnormaali suunda. Seega

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -(i_j + i_k).$$

Võrduse $\oint_s \frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{ds} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ võib nüüd kirjutada kujul

$$i_n = -(i_j + i_k) \quad \text{või} \quad i_n + i_j + i_k = 0.$$

Järelikult *võrdub nulliga kõigi vooluliikide — juhtivus-, konvektsiooni- ja nihkevoolu — summa läbi mistahes kinnise pinna.*

Kui tähistada indeksita tähega δ voolutihedust, sõltumata

voolu liigist, ja tähega i kogu voolu läbi pinna, siis saame mistahes kinnise pinna kohta:

$$i = \oint_s \delta \, ds = 0,$$

mis ongi elektrivoolu pidevuse printsiibi üldavaldiseks. See tähtis printsiip kõlab: *kogu elektrivool läbi mistahes kinnise pinna, mis on võetud ükskõik millises keskkonnas, võrdub nulliga.* Seejuures loetakse pinnast väljuvat voolu positiivseks, pinda sisenevat — negatiivseks.

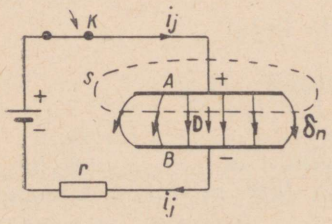
Seega ei ole voolujoontel mitte kusagil ei algust ega lõppu — nad on põhimõtteliselt kinnised jooned. Elektrivool kulgeb alati mööda kinnisi teekondi.

Kõige öeldu põhjal on selge, et voolu pidevuse ehk kinnisuse printsiip omandab üldise tähenduse ainult selle tõttu, et võeti kasutusele mõiste nihkevool dielektrikus, tühjuse nihkevoolu arvestades.

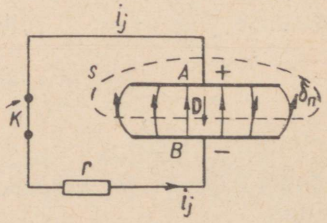
Selleks et paremini selgitada nihkevoolude osa voolu kinnisuse küsimuses, vaatleme mõningaid näiteid, mis käsitlevad tähtsaid praktilisi juhtumeid või mis omavad põhimõttelist tähtsust.

Kõigepealt vaatleme järjestikku lülitatud kondensaatorit sisaldavas elektriahelas toimuvaid protsesse kondensaatori laadimisel (joon. 51) ja tühjenemisel (joon. 52). Kui nihkevoolusid mitte arvesse võtta, näib see ahel katkestatuna.

Eeldame, et mingil hetkel lülitatakse laadimata kondensaator emj. allika ahelasse lüliti K abil (joon. 51). Kondensaator laadub: ühelt kondensaatori plaadilt teisele neid ühendava juhtme kaudu ülekantavad elektrilaengud kogunevad plaatidele. Kondensaatori plaatidel oleva laengu suurenemisel tugevneb elektriväli plaatide vahel ja dielektrikus tekivad elektrilised nihkevoolud. Kui ümbritseme ühe plaatidest, näiteks plaadi A, kinnise pinnaga s, siis sel ajal, kui seda pinda läbivat juhet mööda voolab plaadile A juhtivusvool i_j, moodustub dielektrikus nihkevool, mis läbib pinda s seestpoolt väljapoole ja võrdub täpselt vooluga i_j juhtmes. Nihkejooned dielektrikus on pikenduseks

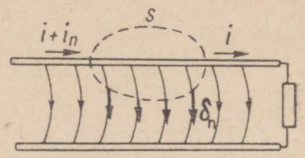


Joon. 51.



Joon. 52.

voolujoontele juhis. Tõepoolest, elektriväli on suunatud positiivselt plaadilt A negatiivsele plaadile B ning elektriväli tugevneb. Järelikult on nihkevoolu joonte suund samuti positiivselt plaadilt negatiivsele. Juhtmes positiivsele plaadile juhtivusvoolu kujul suunduv elektrivool jätkub dielektrikus nihkevooluna. Negatiivselt plaadilt edasi kulgeb vool jällegi juhtivusvooluna juhtmes. Seega ongi elektrivoolu teekond kinniine.



Joon. 53.

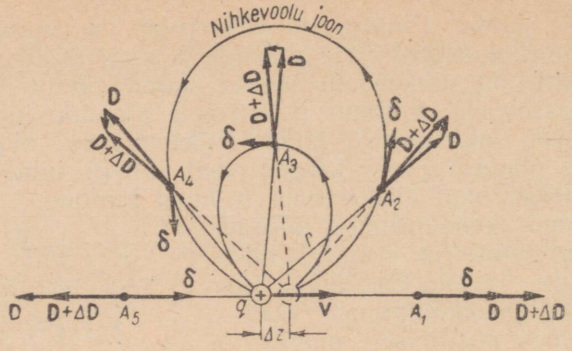
Kui laetud kondensaator lülitada emj. allikast lahti ja seejärel lühistada takistiga r (joon. 52), algab kondensaatori tühjakslaadimine. Vool i_j voolab juhtmes positiivselt plaadilt A negatiivsele B. Dielektrikus on elektrivälja suund endiselt positiivselt plaadilt negatiivsele. Nüüd aga väli nõrgeneb ja järelikult on voolutiheduse vektor ning nihkevektor $\mathbf{D}$ vastassuunalised. Nihkevoolu jooned on suunatud negatiivselt plaadilt positiivsele ja ongi juhtmes oleva juhtivusvoolu jätkuks.

Teise näitena vaatleme ülekandeliini (joon. 53). Juhtmetevaheline mahtuvus on jaotunud piki kogu liini. Juhtmetele rakendatud vahelduvpinge korral tekivad juhtmete vahel dielektrikus nihkevoolud. Võtame kinnise pinna s selliselt, et see haaraks osa ühest liini juhtmest. Pinna sisse suunduv juhtme vool erineb pinnast väljasuunduvast juhtme voolust selle nihkevoolu võrra, mis läbib pinda s. Seetõttu on vahelduvvool juhtmes ühel ja samal hetkel juhtme erinevates ristlõigetes erinev. Seda asjaolu tuleb arvestada juhtmetevahelise pinge kiirete muutuste korral ja väga pikkade liinide puhul.

Viimase näitena vaatleme, kuidas on realiseeritud voolujoonte kinnisus konvektsioonivoolu juhtumil, s. o. liikuvate laetud kehade või osakeste puhul. Sellel juhtumil on sügav põhimõtteline tähtsus, sest iga elektrivool, välja arvatud nihkevool tühjuses, kujutab endast suure hulga üksikute laetud elementaarosakeste liikumist.

Vaatleme üksildast punktlaengut q, mis liigub tühjuses kiirusega v (joon. 54). Igal hetkel on vektor $\mathbf{D}$ ruumi mistahes punktis suunatud piki radiaalset sirget, mis väljub laengu tsentrist. Nihkevektori suurus $D = \varepsilon_0 E = \frac{q}{4\pi r^2}$. (Me eeldame siinjuures, et v on tunduvalt väiksem valguse kiirusest ja järelikult on väli sama iseloomuga nagu liikumatu laengu puhul).

Ajavahemiku Δt jooksul läbib laeng teekonna $\Delta z = v\Delta t$. Vastavalt laengu uuele asendile saab nihkevektor ruumi igas punktis uue väärtuse $\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}$. Nihkevoolu tiheduse vektori $\delta = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$ suunaks on kõikjal suund, millele läheneb $\Delta\mathbf{D}$, kui $\Delta t \to 0$. Jooni-



Joon. 54.

sel 54 on konstrueeritud voolutiheduse vektorid ruumi mõnedes punktides. Kui me määraksime selliselt voolutiheduse vektorid küllalt suures hulgas ruumipunktides, saaksime tõmmata nihkevoolu tiheduse jooned. Neil oleks joonisel kujutatud joonte kuju. Näeme, et nihkevool on konvektsioonivoolu jätkuks ja voolujooned on kinnised.

Suure arvu liikuvate laetud elementaarosakeste puhul muutub nihkevoolu joonte pilt keerukamaks, voolujooned osutuvad aga endiselt kinnisteks, sest see keerukam voolujoonte pilt saadakse mitme, joonisel 54 kujutatud lihtpildi superponeerimise ehk ülestamisega.

§ 22. Alalisvooluahelate seadused

Paragrahvides 18 ja 21 kindlakstehtud seosed suuruste vahel, mis iseloomustavad elektrilisi nähtusi juhtivas keskkonnas, ja elektrivoolu pidevuse printsiip annavad võimaluse alalisvooluelektriahelate arvutamiseks. Elektriahelat on otstarbekas jaotada osadeks. Kogu ahelaosa, milles vool on ühe ja sama väärtusega, nimetatakse ahela *haruks*. Kolme või enama haru ühenduskohta nimetatakse ahela *sõlmeks*. Ahela arvutamise põhiülesanne seisneb voolude määramises kõigis ahela harudes selles ahelas toimivate allikate etteantud elektromotoorsete jõudude ja antud ahelat moodustavaid elemente iseloomustavate andmete järgi, s. o. niinimetatud ahela parameetrite järgi.

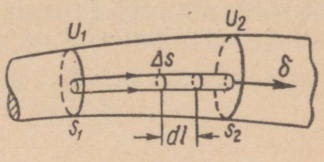
Eeltoodud üldistest seostest tulenevadki alalisvooluahelate seadused, mida kasutatakse ahelate arvutamisel.

a) O h m i s e a d u s. Juhtivas keskkonnas voolu iseloomustavast seosest $\delta = \gamma E$, kui $\gamma = \text{const}$, järeldub, et alalisvoolu puhul on pingelang emj. allikaid mittesisaldavas elektrijuhi osas võrdeline vooluga juhis.

Olgu juhi kaks ristlõiget s_1 ja s_2 (joon. 55) võetud selliselt, et kumbki neist on samapotentsiaalipinnaks. Nende pindade potentsiaalid tähistame U_1 ja U_2. Oletame, et vaadeldavate ristlõigete vahelises juhiosas ei ole emj. allikaid. Märgime pingelangu ehk potentsiaalide vahet sellel osal nagu eespoolgi tähega u:

$$u = U_1 - U_2.$$

Eraldame selle juhiosa sees (joon. 55) väga peene voolutoru. Olgu Δs toru ristlõige, mis üldiselt muutub piki toru, dl — toru pikkuse element ja l — toru ristlõigete s_1 ja s_2 vaheline pikkus. Isotroopses keskkonnas langeb vektor **E** igal pool ühte toru suunaga. Saame:



Joon. 55.

$$u = \int_l \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \int_l E\,dl = \int_l \varrho\delta\,dl.$$

Asetades siia voolutiheduse avaldise $\delta = \frac{\Delta i}{\Delta s}$ ja märkides, et voolu Δi võib tuua integraali märgi ette, sest ta on vastavalt voolu pidevuse printsiibile ühesugune kõigis toru ristlõigetes, saame:

$$u = \int_l \frac{\varrho \Delta i}{\Delta s}\,dl = \Delta i \int_l \frac{\varrho}{\Delta s}\,dl.$$

Siit on näha, et Δi on võrdeline u-ga, kui ϱ ei sõltu δ-st. Kuna potentsiaalide vahe $u = U_1 - U_2$ on ühesugune kõigil voolutorudel vaadeldavas juhiosas ristlõigete s_1 ja s_2 vahel, siis, arvutades kogu juhi voolu i kõikide eri torude voolude Δi summeerimise teel, tuleme järeldusele, et vool i on võrdeline u-ga:

$$u = ri.$$

Suurust r nimetatakse vaadeldava juhiosa *elektritakistuseks*. Seos

$$i = \frac{u}{r}$$

väljendab Ohmi seadust juhi osa kohta. See seadus kõlab järgmiselt: *vool juhis on võrdne juhiosa pingelangu ja juhiosa elektritakistuse jagatisega.*

MKSA ühikute süsteemis on elektritakistuse ühikuks *oom* (1 Ω).

Takistuse pöördväärtust $g = \frac{1}{r}$ nimetatakse antud juhiosa

elektrijuhtivuseks. Sellele vastavalt võib Ohmi seadust esitada ka kujul

$$i = gu.$$

Märgime siin, et seost $\delta = \frac{\mathbf{E}}{\varrho} = \gamma \mathbf{E}$ tuleb vaadelda kui Ohmi seaduse väljendust diferentsiaalkujus.

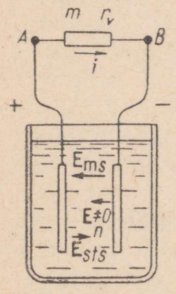
Tuletame takistuse avaldise lihtsaima juhtumi — konstantse ristlõikega sirge juhtme jaoks.

Sel juhtumil on iga voolutoru ristlõige Δs konstantne kogu pikkuse ulatusel ja teda võib integraali märgi alt välja tuua. Kui juhtme materjal on homogeenne, siis $\varrho = \text{const}$ ja me võime kirjutada: $\Delta i = \frac{u}{\frac{\varrho}{\Delta s}\int_l \mathrm{d}l} = \frac{u}{\varrho l}\Delta s$. Kuna pinge u on kõikidel voolutorudel ühesugune, siis $i = \sum \Delta i = \frac{u}{\varrho l}\sum \Delta s = \frac{s}{\varrho l}\, u$. Järelikult avaldub niisuguse juhtme elektritakistus kujul

$$r = \frac{\varrho l}{s} = \frac{l}{\gamma s}.$$

Märgime, et antud juhtumil jaguneb vool ühtlaselt üle juhtme ristlõike, sest kõigil ühesuguste ristlõigetega torudel on ühesugune takistus. Viimast valemit saab juhtmete takistuse arvutamiseks kasutada ka sel juhtumil, kui juhtmed on üksikutes kohtades painutatud, nagu näiteks elektrijuhtmestikus, või isegi kogu pikkuses painutatud, kui seejuures kõverusraadius ületab tunduvalt juhtme ristmõõtmeid, nagu näiteks poolis või reostaadi mähises.

Keerukamatel juhtumitel, kui juhi ristlõike joonmõõtmed on võrreldavad tema pikkusega ja juht on keeruka kujuga, tuleb takistuse arvutamiseks kasutada väljateooria meetodeid. Need meetodid esitatakse kursuse viimases osas.



Joon. 56.

Vaatleme suletud elektriahelat, milles sisaldub emj. allikas, näiteks galvaanielement (joon. 56). Allika emj. e mõjul tekib ahelas vool i. Kuna eritakistus ϱ keskkonnal, mida läbib vool allika sees, on nullist erinev, siis ka resulteeriv elektrivälja tugevus $\mathbf{E}$ allika sees on samuti nullist erinev ja sõltub voolutihedusest vastavalt seosele $\mathbf{E} = \varrho\delta$. See resulteeriv väli peab allika sees olema suunatud voolujoonte suunas, s. o. negatiivselt pooluselt positiivsele. Tuletame meelde, et vaadeldes § 8 avatud klemmidega elemendi juhtumit, oli meil igal pool elemendi sees $\mathbf{E} = 0$.

See tuleneb vahetult ka seosest $\mathbf{E} = \varrho\delta$, sest avatud elemendis vool puudub ja $\delta = 0$.

Vaadeldes samuti nagu § 8 resulteerivat välja elemendi sees elektroodide ja elektrolüüdi vahelistes kontaktkihtides kui elektroodide ja elektrolüüdi laengutest tekitatud statsionaarsele väljale $\mathbf{E}_{sts}$ mitteelektrostaatilise päritoluga lisavälja $\mathbf{E}_{ms}$ liitumise tulemust, saame nendes kihtides: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{sts} + \mathbf{E}_{ms}$. Väli elektrolüüdis ja ka elektroode elemendi klemmidega ühendavates juhtmetes on alalisvoolu puhul samuti statsionaarne väli tugevusega $\mathbf{E}_{sts} = \varrho\delta$.

Võttes väljatugevuse joonintegraali negatiivselt klemmilt B mööda teekonda n allika sees kuni positiivse klemmini A, saame:

$$\int_{BnA} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{BnA} \mathbf{E}_{sts}\,\mathrm{d}\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E}_{ms}\,\mathrm{d}\mathbf{l}. \qquad (*)$$

Vastavalt § 8 toodule on viimane integraal võrdne allika elektromotoorse jõuga:

$$\int_{BnA} \mathbf{E}_{ms}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = e.$$

Statsionaarse välja tugevuse $\mathbf{E}_{sts}$ joonintegraal, samuti nagu elektrostaatilise välja omagi, ei sõltu integreerimisteekonna valikust. Järelikult

$$\int_{BnA} \mathbf{E}_{sts}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{BmA} \mathbf{E}_{sts}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_{AmB} \mathbf{E}_{sts}\,\mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Seega võib võrduse (*) esitada kujul

$$e = \int_{AmB} \mathbf{E}_{sts}\,\mathrm{d}\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Märkides edasi, et ahela välises osas, s. o. teekonnal AmB, on resulteeriv väljatugevus $\mathbf{E}$ võrdne statsionaarse väljatugevusega $\mathbf{E}_{sts}$, sest sellel teekonnal emj. allikaid ei ole, saame lõplikult kirjutada:

$$e = \int_{AmB} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Esimene integraal ei ole midagi muud kui ahela välisel osal, mille takistus on r_v, esinev pingelang $u = r_v i$.

Teine integraal kujutab endast pingelangu emj. allika sees, mis on võrdne $r_s i$, kui allika sisetakistust märkida r_s. Vastavalt sellele kirjutame viimase võrrandi kujul

$$e = u + r_s i \quad \text{või} \quad u = e - r_s i,$$

s. o. pinge allika klemmidel võrdub allika elektromotoorse jõuga, millest on lahutatud pingelang tema sisetakistusel.

Pannes u asemele $r_v i$, kirjutame:

$$e = r_v i + r_s i = (r_v + r_s) i = ri,$$

kus r on kogu suletud ahela elektritakistus.

Siit saame Ohmi seaduse formuleeringu kogu suletud ahela kohta:

$$i = \frac{e}{r},$$

s. o. *suletud elektriahela vool võrdub selles ahelas mõjuva allika emj. ja kogu ahela takistuse jagatisega.*

Üldjuhtumil, kui suletud ahelas mõjub mitu emj. allikat, tuleb e all mõista kõikide allikate elektromotoorsete jõudude summat.

b) Kirchhoffi esimene seadus. Võtame vaatluse alla elektriahela sõlme (joon. 57). Ümbritsedes ahela sõlme kinnise pinnaga s ja kasutades elektrivoolu pidevuse printsiipi, saame:

$$\oint_s \delta \, ds = \sum_{k=1}^{k=n} i_k = 0,$$

kus i_1, i_2, ... i_n on voolud sõlmega ühendatud juhtmetes.

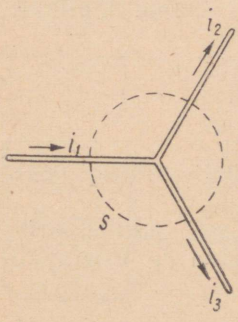
Võrrand

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k = 0$$

väljendab Kirchhoffi esimest seadust, mis ütleb:

elektriahela sõlmega ühendatud juhtmete voolude summa võrdub nulliga.

Seejuures tuleb summat mõista algebraliselt, s. o. lugeda sõlmest eemalduvad voolud positiivseteks, sõlme suunduvad voolud aga negatiivseteks.



Joon. 57.

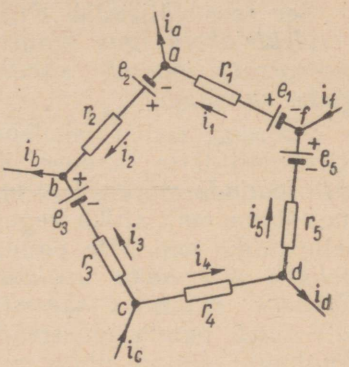
Kuna keerukate ahelate arvutamisel ei ole paljudel juhtumitel voolude tegelikke suundi ahela harudes varem teada, siis on vaja eelnevalt ette anda voolude leppelised positiivsed suunad kõigis ahela harudes, märkides need suunad skeemil nooltega. Kirchhoffi esimese seaduse järgi võrrandite koostamisel tuleb seejuures voolu algebralise tähise ette panna plussmärk, kui selle voolu leppeline positiivne suund on valitud sõlmest eemale, ja miinusmärk, kui leppeline positiivne suund on valitud sõlme poole. Seega, valinud voolude posi-

tiivsed suunad, nagu kujutatud nooltega joonisel 57, peame võrrandi kirjutama kujul

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Kui ahela arvutuse tulemusena mingisugune vool saab negatiivse arvulise väärtuse, siis tähendab see, et selle voolu tegelik suund on leppeliselt valitud ja skeemil noolega märgitud suunale vastupidine.

c) Kirchhoffi teine seadus. Võtame vaatluse alla mingi elektriahela kinnise kontuuri (joon. 58). Üldjuhtumil mõjub kontuuris mitu emj. allikat. Oletame, et punktides a, b, c, ... hargnevad kontuuri suhtes välisesse ahelaossa voolud i_a, i_b, i_c, ... Need punktid jaotavad kontuuri reaks lõikudeks, milledel ei ole hargnemisi. Olgu e_1, e_2, e_3 ... allikate elektromotoorsed jõud nendes hargnemata lõikudes ja i_1, i_2, i_3 ... voolud nendes lõikudes. Kui mõnes lõigus on mitu allikat ühendatud järjestikku, siis selle lõigu vastav emj. võrdub selles lõigus olevate allikate elektromotoorsete jõudude algebralise summaga. Tähistame lõikude takistused r_1, r_2, r_3, ..., kusjuures nendesse takistustesse arvestame ka allikate sisetakistused.



Joon. 58.

Võtame väljatugevuse joonintegraali mööda kogu kinnist kontuuri *abcdfa*:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{E}_{sts} + \mathbf{E}_{ms})\, d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{sts}\, d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_{ms}\, d\mathbf{l}.$$

Kuna

$$\oint \mathbf{E}_{sts}\, d\mathbf{l} = 0,$$

siis

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{ms}\, d\mathbf{l}.$$

Võrduse vasak pool kujutab endast pingelangude summat kontuuri kõikides lõikudes. Teda võib esitada kujul

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^{k=n} r_k i_k,$$

kus n on kontuuri hargnemata lõikude arv.

Võrduse parem pool kujutab endast kõigi allikate elektromotoorsete jõudude summat, mis mõjuvad suletud kontuuris. Seega

$$\oint \mathbf{E}_{ms}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = \sum_{k=1}^{k=n} e_k.$$

Järelikult

$$\sum_{k=1}^{k=n} e_k = \sum_{k=1}^{k=n} r_k i_k.$$

See seos väljendab Kirchhoffi teist seadust, mis ütleb: *elektriahela igas kinnises kontuuris võrdub allikate elektromotoorsete jõudude summa kontuuri kõigi lõikude pingelangude summaga.*

Pöörame erilist tähelepanu sellele, et võrrandite koostamisel Kirchhoffi teise seaduse järgi *on vaja arvestada elektromotoorsete jõudude märke.* Kui kontuuri ringkäigu valitud suuna puhul me läbime emj. allika negatiivselt pooluselt positiivsele, siis tuleb selle allika emj. ette panna plussmärk. Peale selle *on vaja leppeliselt ette anda voolude positiivsed suunad kõigis kontuuri lõikudes, märkides skeemil need suunad nooltega.* Pingelangu ette tuleb panna plussmärk nende lõikude puhul, kus kontuuri ringkäigu suund ühtib valitud positiivse voolu suunaga, ja miinusmärk lõikude puhul, kus need suunad on vastupidised.

d) L e n z i - J o u l e'i s e a d u s. Kandugu ajavahemiku $\mathrm{d}t$ jooksul läbi juhi ristlõike laeng $\mathrm{d}q$. Elektrivälja jõudude poolt selle ajavahemiku jooksul tehtav töö mingil juhiosal, mis ei hargne ega sisalda emj. allikaid, on võrdne

$$\mathrm{d}A = u\, \mathrm{d}q,$$

kus u on pingelang juhiosal. Seda tööd vajatakse voolu alalhoidmiseks ja kulutatakse soojuse eraldamiseks vaadeldaval juhiosal.

Juhis voolu alalhoidmiseks vajalik võimsus

$$p = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = u\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = ui.$$

Kasutades võrdusi $u = ri$ ja $\frac{1}{r} = g$, kus r on juhiosa takistus ja g — juhtivus, saame:

$$p = i^2 r = \frac{u^2}{r} = u^2 g.$$

Need seosed väljendavadki *Lenzi-Joule'i seadust.*

Vastavalt saame kogu suletud hargnemata ahela kohta

$$p = i^2 r = \frac{e^2}{r},$$

kus e on ahelas mõjuvate allikate elektromotoorsete jõudude summa ja r — kogu suletud ahela takistus.

Kirjutame Lenzi-Joule'i seaduse avaldise voolutoru lõpmatult väikese lõigu kohta, mille pikkus on dl ja ristlõige ds. Võimsus, mis on seotud soojuse eraldumisega toru lõigu ruumalas $dV = dl\, ds$, on

$$dp = du\, di = E\, dl\, \delta\, ds = E\delta\, dV.$$

Võimsus mahuühiku kohta

$$p' = \frac{dp}{dV} = E\delta = \delta^2 \varrho = E^2 \gamma.$$

Need seosed on Lenzi-Joule'i seaduse avaldised diferentsiaalkujus.

VIIES PEATÜKK

LINEAARSETE ALALISVOOLUAHELATE ARVUTUS

§ 23. Lineaarsed ja mittelineaarsed elektriahelad

Ohmi, Kirchhoffi ja Lenzi-Joule'i seadusi väljendavaist seostest järeldub, et alalisvooluahelate elementide *parameetriteks* osutuvad nende *takistused* või *juhtivused.*

Paljudel praktilistel juhtumitel võib neid parameetreid lugeda püsisuurusteks, mis ei sõltu ei vooludest ahela elementides ega pingetest nende klemmidel. Sellise elemendi *karakteristik*, s. t. pinge sõltuvus voolust on *lineaarne*: $u = ri = \frac{i}{g}$, kus $r = \text{const}$ ja $g = \text{const}$. Graafiliselt väljendab seda sõltuvust sirge (joon. 59) ning vastavalt nimetataksegi selliseid ahela elemente *lineaarseteks elementideks.*

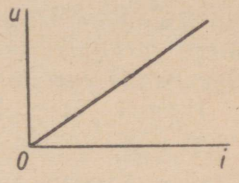
Rakendades Ohmi ja Kirchhoffi seadusi alalisvooluahelatele, mis sisaldavad elemente, millede parameetrid ei sõltu neid läbivast voolust ja pingest nende klemmidel, saame lineaarsed algebralised sõltuvused elektromotoorsete jõudude, pingete ja voolude vahel. Sellist liiki ahelaid nimetatakse *lineaarseteks elektriahelateks.*

Lineaarsete ahelate arvutamiseks võib kasutada superpositsiooni printsiipi ja järelikult kehtivad nende suhtes kõik sellest printsiibist tulenevad liitahelate arvutusmeetodid, mida käsitletakse allpool.

Tuleb märkida, et rangelt võttes sõltuvad ahela elementide parameetrid alati nende elementide voolust kas või juba sellepärast, et juhtmete takistus sõltub nende temperatuurist, juhtmete temperatuur aga muutub koos voolu muutumisega, sest juhtmetes neelduv võimsus muutub. Siiski ei avaldu see sõltuvus paljudel juhtumitel kuigi teravalt ning esimeses lähenduses võib ahela elementide parameetreid lugeda voolust ja pingest sõltumatuteks, s. t. vaadelda ahelat lineaarsena. Selline lihtsustus on erakordselt suure praktilise tähtsusega, sest lineaarsete

liitahelate arvutamiseks on meil üsna laialdasi võimalusi selle tõttu, et protsesse neis ahelais väljendatakse lineaarsete võrrandite süsteemiga.

Pärast seda, kui taoline arvutus on tehtud ja voolud ahela kõikides elementides leitud, võib vajaduse korral ahela elementide takistuste suurustesse sisse viia parandused vastavalt leitud vooludele ning sooritada teine, täpsustatum arvutus. Paljudel juhtumitel pole niisugune täpsustamine siiski vajalik.



Joon. 59.

Praktikas tuleb ette ka niisuguseid ahela elemente, millede parameetrid sõltuvad tunduvalt elemendi voolust või pingest ta klemmidel. Niisuguse elemendi *karakteristik*, s. t. elemendi klemmidel oleva pinge ehk klemmipinge sõltuvus elemendi voolust $u = f(i)$, samuti vastav pöördsõltuvus $i = f(u)$ osutuvad *mittelineaarseteks*. Neid karakteristikuid nimetatakse voltamperkarakteristikuiks ehk pingevoolukarakteristikuiks. Ahela mittelineaarse karakteristikuga elemente nimetatakse *mittelineaarseteks elementideks*.

Rakendades mittelineaarseid elemente sisaldavatele alalisvooluahelatele Ohmi ja Kirchhoffi seadusi, saame elektromotoorseid jõude, pingeid ja voole siduvate mittelineaarsete algebraliste võrrandite süsteemi. Sellist liiki ahelaid nimetatakse *mittelineaarseteks ahelateks*.

Mittelineaarsete ahelate arvutamiseks on meil palju väiksemad võimalused kui lineaarsete ahelate arvutamiseks. Mittelineaarsete ahelate arvutus osutub seepärast tunduvalt keerukamaks. Mittelineaarsetel ahelatel on rida erilisi omadusi ning seetõttu leiavad nad käesoleval ajal järjest laialdasemat kasutamist automaatsetes juhtimis-, reguleerimis-, mõõte- jne. süsteemides.

Elektriahelad võivad üldiselt olla väga keeruka struktuuriga. Meie käsitleme esmajärjekorras lihtsamaid elektriahelaid, mis moodustuvad järjestikku ja paralleelselt ühendatud tarbijatest, ja alles seejärel läheme üle keerukamate ahelate vaatlemisele.

Käesolevas peatükis esitatakse lineaarsete alalisvooluahelate arvutusmeetodeid. Järgmises peatükis käsitletakse mittelineaarsete alalisvooluahelate arvutusmeetodeid.

§ 24. Tarbijate järjestik-, paralleel- ja segaühendus

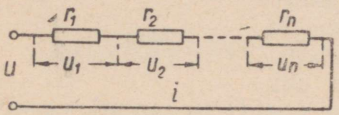
Elektriahela elementide järjestikühenduseks nimetatakse nende niisugust ühendust, kus kõiki neid elemente läbib üks ja sama vool. Vaatleme mitmest järjestikku ühendatud tarbijast koosnevat ahelat, mille klemmidele on rakendatud pinge u

(joon. 60). Tähistame üksikute tarbijate takistused tähtedega $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ja klemmipinged vastavalt $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Saame:

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = r_1 i + r_2 i + \ldots + r_n i = \\ = (r_1 + r_2 + \ldots + r_n) i = ri,$$

kui asendada $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$. Järelikult *järjestikku ühendatud tarbijaist koosneva kogu ahela takistus r on võrdne kõikide nende tarbijate takistuste summaga.*

Pinged järjestikühenduse üksikutel osadel suhtuvad üksteisesse nagu nende osade takistused.



Joon. 60.

Elektriahela elementide paralleel- ehk rööpühenduseks nimetatakse niisugust ühendust, kus kõik need elemendid on ühendatud ühe ja sama sõlmede paariga, s. t. kui nad kõik on sama klemmipingega. Vaatleme ahelat, mis koosneb mitmest paralleelselt ühendatud tarbijast, millede klemmidele on rakendatud pinge u (joon. 61). Tähistame üksikute tarbijate juhtivused tähtedega $g_1, g_2, \ldots, g_n$, ja nende voolud vastavalt $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Siis saame Kirchhoffi I seaduse järgi voolu jaoks ahela hargnemata osas

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n = g_1 u + g_2 u + \ldots + g_n u = \\ = (g_1 + g_2 + \ldots + g_n) u = gu,$$

kui asendada $g_1 + g_2 + \ldots + g_n = g$. Järelikult *mitmest paralleelselt ühendatud tarbijast koosneva kogu ahela juhtivus g võrdub kõikide nende tarbijate juhtivuste summaga.*

Paralleelühenduse korral voolud ahela üksikuis harudes suhtuvad üksteisesse nagu nende harude juhtivused ja on järelikult pöördvõrdelised nende harude takistustega.

Järjestik- ja paralleelühendusi sisaldavate ahelate arvutusmeetodeid võib kasutada ka tarbijate segaühenduse jaoks, sest see kujutab endast järjestik- ja paralleelühenduste kombinatsiooni. Tõestame seda ahela näitega, mille skeem on toodud joonisel 62.

Ahela kahest paralleelharust koosneva hargosa ekvivalentne juhtivus

$$g_{23} = g_2 + g_3 = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_2 + r_3}{r_2 r_3}.$$

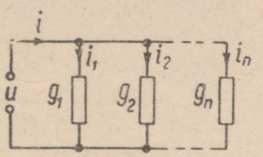
Ahela selle osa ekvivalentne takistus

$$r_{23} = \frac{1}{g_{23}} = \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$

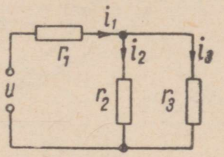
Liites takistuse r_{23} ahela mittehargneva osa takistusega r_1, saame kogu ahela ekvivalentse takistuse

$$r = r_1 + r_{23}.$$

Nüüd, teades kogu ahela klemmipinget u, võime leida ahela üksikute harude voolud ja klemmipinged. Vool ahela mittehargnevas osas $i_1 = \frac{u}{r}$. Korrutades voolu i_1 takistusega r_1, leiame esimese haru klemmipinge $u_1 = r_1 i_1$; korrutades aga voolu i_1 takistusega r_{23}, saame ahela hargosa klemmipinge $u_{23} = r_{23} i_1$. Seejärel võime määrata voolud i_2 ja i_3, jagades pinge u_{23} vastavalt takistustega r_2 ja r_3.



Joon. 61.



Joon. 62.

Ahela igas harus tarbitava võimsuse leidmiseks tuleb korrutada haru takistus selle haru voolu ruuduga või korrutada haru juhtivus selle haru klemmipinge ruuduga. Kogu ahelas tarbitav võimsus võrdub üksikutes harudes tarbitavate võimsuste summaga.

§ 25. Energiaülekanne mööda kahejuhtmelist liini

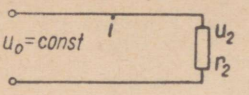
Vaatleme energiaülekande lihtsaimat juhtumit, nimelt energia ülekandmist mööda kahejuhtmelist liini kaugusele l tingimusel, et pinge liini sisendklemmidel u_0 on konstantne.

Eeldame, et kaovoolu läbi juhtmetevahelise isolatsiooni ehk voolulekke võime arvestamata jätta. Seega on meil tegemist liini lõpus oleva tarbija ja liini juhtmete järjestikühendusega. Kuna kõik elektromagnetilise energia tarbijad valmistatakse tööks kindla pinge juures ja iga tarbijaliigi puhul on kindlaks määratud nende klemmipinge lubatava alanemise piirid, mille ületamisel on tarbijate normaalne töö oluliselt häiritud, siis on energiaülekande puhul küsimus liini pingekaost Δu ja tarbija klemmipingest u_2 väga tähtis.

Tähistades liini ja tarbija takistused vastavalt r_1 ja r_2 ning liini voolu tähega i (joon. 63), võime kirjutada seosed:

$$\Delta u = r_1 i; \quad u_2 = u_0 - \Delta u = u_0 - r_1 i.$$

Nii Δu kui ka u_2 on $u_0 = \text{const}$ ja $r_1 = \text{const}$ puhul seotud voo-



Joon. 63.

luga i lineaarsete seostega, millede graafikud on antud joonisel 64. *Liini tühijooksul*, s. o. kui $r_2 = \infty$, saame:

$$i = 0, \quad \Delta u = 0; \quad u_2 = u_0,$$

kuid *lühistatud liini* puhul, s. o. kui $r_2 = 0$, leiame:

$$i = \frac{u_0}{r_1}; \quad \Delta u = u_0; \quad u_2 = 0.$$

Teiseks tähtsaks küsimuseks on ülekandeliini kasuteguri η küsimus. Kasuteguri η all mõistame tarbijale üleantud võimsuse p_2 suhet võimsusesse p_0, mis on antud liini sisendklemmidele. Tähistades liinis kaotsimineva võimsuse Δp-ga, saame:

$$p_0 = u_0 i; \quad \Delta p = r_1 i^2;$$

$$p_2 = p_0 - \Delta p = u_0 i - r_1 i^2$$

ja järelikult

$$\eta = \frac{p_2}{p_0} = \frac{u_0 i - r_1 i^2}{u_0 i} = 1 - \frac{r_1}{u_0} i = 1 - \frac{i}{i_k},$$

milles $i_k = \frac{u_0}{r_1}$ on nn. lühisvool. Seega on liini kasutegur η seotud vooluga i lineaarse sõltuvusega (joon. 64), kusjuures tühijooksul $\eta = 1$, kuid lühisel $\eta = 0$.

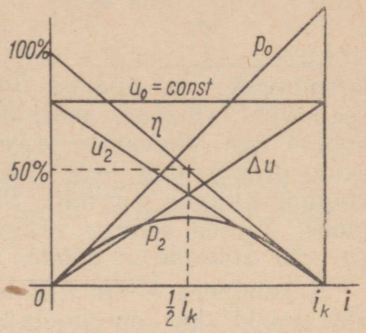
Uurides p_2 avaldist ei ole raske kindlaks teha, et p_2 omab maksimumi $i = \frac{u_0}{2r_1} = \frac{i_k}{2}$ juures, s. o. siis, kui tarbija takistus võrdub liini takistusega. Seejuures $p_{2max} = \frac{u_0^2}{4r_1}$ ja $\eta = 0{,}5 = 50\%$. Mõnevõrragi suurema energiahulga ülekandmisel on η selline väike väärtus lubamatu.

Ülekandeliini projekteerimisel on ette antud harilikult võimsus p_2 ja suhtelise pingekao lubatud suurus $\varepsilon = \frac{\Delta u}{u_2}$, ning järelikult ka liini kasuteguri η suurus, sest $\eta = \frac{u_2}{u_0} = \frac{1}{1+\varepsilon}$. Suhtelise pingekao ε kohta saame:

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{u_2} = \frac{i r_1}{u_2} = \frac{p_2 r_1}{u_2^2} = \frac{p_2}{u_2^2} \varrho \frac{2l}{s},$$

kus ϱ on eritakistus, s — ristlõige ja $2l$ — liini mõlema juhtme kogupikkus. Seega on etteantud p_2, l, ϱ, ε ja seega ka etteantud η väärtuse juures juhtmete ristlõige pöördvõrdeline pinge ruuduga. Siit järeldub, et energiat on kasulik üle kanda kõrgetel pingetel, sest tõstes pinget n korda, me vähendame juhtmete kaalu n^2 korda.

Energiaülekande alalisvooluga teostas esmakordselt F. A. Pirotski 1874. a. Peterburis. F. A. Pirotski avaldas 1877. a. artikli «Vee kui jõuallika töö ülekandmisest igasuguse kauguse taha galvaani voolu näol». Selles artiklis esitas ta idee suure võimsusega energia elektriliseks kaugülekandeks juba palju aastaid enne selle praktilist ellurakendamist suurtes mastaapides. Elektromagnetilise energia liini kaudu ülekandmise küsimuse esimene teoreetiline uurimus kuulub D. A. Latšinovile, kes näitas oma 1880. a. avaldatud artiklis «Elektromehaaniline töö», et elektrilise energiaülekande võimsuse ja kauguse suurendamisel on kõrge ökonoomsus saavutatav pinge tõstmise teel.



Joon. 64.

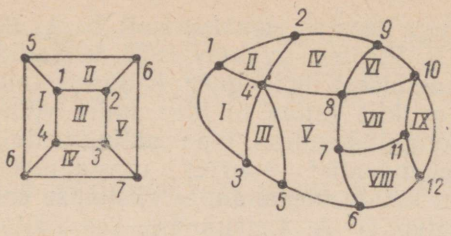
Huvitav on märkida, et kuigi järgnev elektrikaugülekannete areng läks vahelduvvoolu kasutamise teed, mis võimaldab pinget muundada lihtsate seadmete, s. o. transformaatorite abil, osutub kaasaegses, eriti aga NSV Liidu energeetikas esinevate energiaülekannete tohutute võimsuste ja kauguste puhul siiski uuesti otstarbekaks tagasi pöörduda alalisvoolu-energiaülekande idee realiseerimise juurde, kuid nüüd juba ülikõrgel pingel. Neid praktika jaoks tähtsaid ja teoreetilisest küljest huvitavaid küsimusi võime üksikasjalisemalt arutleda pärast seda, kui oleme kursuse teises osas tundma õppinud vahelduvvooluahelates toimuvaid põhinähtusi.

§ 26. Liitahelate arvutusest

Elektriahelaid, mida ei saa teisendada tarbijate järjestik- või paralleelühenduseks, nimetame *liitahelateks*. Iga liitahelat võib arvutada Kirchhoffi seaduste alusel koostatud võrrandisüsteemi lahendamisega.

Koosnegu liitahel p harust ja olgu tal q sõlme.

Kui on antud ahela kõikide allikate elektromotoorsed jõud ja kõikide harude takistused, siis on tundmatuteks p voolu harudes. Rakendades igale sõlmele Kirchhoffi esimest seadust, saame q võrrandit, kusjuures neist ainult $(q - 1)$ on üksteisest sõltumatud. Võrrandite sõltumatus esimese $(q - 1)$ sõlme jaoks tuleneb sellest, et alati võib kindlaks määrata niisuguse nende sõlmede valiku järjekorra, mille puhul iga järgmine sõlm erineb eelmistest vähemalt ühe uue haru poolest. Selleks, võtnud ühe sõlmedest lähtesõlmeks, peame talle üksteise järel lisama naa-



Joon. 65.

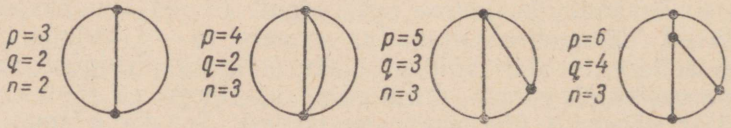
bersõlmed väikseima uute harude arvuga, nagu see on näiteks toodud joonisel 65. Seejuures viimane sõlm q ei saa enam sisaldada uusi harusid.

Summeerides võrrandeid esimese $(q-1)$ sõlme kohta näeme, et kõik voolud, peale voolude viimase q-nda sõlmega ühendatud harudes, koonduvad, sest igaüks neist läheb summasse kaks korda ja seejuures erinevate märkidega. Sõlmega q ühendatud harude voolud aga lähevad sellesse summasse üks kord ja resultaadina saamegi võrrandi, mis ütleb, et sõlmega q ühendatud harude voolude summa on null. See on võrrand viimase q-nda sõlme jaoks. Seoses sellega räägime, et q sõlmega ahelal on ainult $(q-1)$ *sõltumatut sõlme.*

Rakendades Kirchhoffi teist seadust, võib koostada nii palju võrrandeid, kui on suletud kontuure ahelas. Seejuures võivad ühed võrrandid siiski osutuda teiste järeldusteks. Selleks et võrrandid oleksid sõltumatud, või nagu räägitakse, et kontuurid oleksid sõltumatud, tuleb need kontuurid valida nii, et iga järgnev erineks eelnevatest vähemalt ühe uue haru poolest. *Sõltumatute kontuuride* arv n on võrdne $(p-q+1)$. Võrduse $n=p-q+1$ õigsus on ilmne ahela kohta, mis koosneb kolmest harust ja millel on kaks sõlme (joon. 66). Ühendades selle ahelaga ühe uue haru kas selle ahela kahe sõlme vahele või sõlme ja ahela vabalt võetud punkti vahele või lõpuks — ahela vabalt võetud punktide vahele, suurendame sõltumatute kontuuride arvu ühe võrra, kusjuures $(p-q+1)$ suureneb samuti ühe võrra. Seega kõigi nende juhtumite puhul seos $n=p-q+1$ jääb jõusse, millest tulenebki tema õigsus iga liitahela kohta.

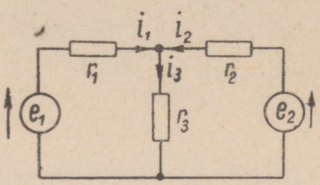
Eeltoodust järeldub, et Kirchhoffi seadused lubavad koostada süsteemi $(q-1)+(p-q+1)=p$ sõltumatust võrrandist. Selle süsteemi lahendamisega võib määrata voolud liitahela kõigis p harus, kui on teada ahela parameetrid ja selles ahelas toimivad elektromotoorsed jõud.

Näitena vaatleme konstantsete parameetritega ahelat, mis on



Joon. 66.

kujutatud joonisel 67. Sellel ahelal on $p = 3$ haru, $q = 2$ sõlme ja kaks emj. allikat. Allikate elektromotoorsete jõudude suunad on näidatud nooltega. Allikate sisetakistused olgu võetud takistuste r_1 ja r_2 väärtuste sisse. Anname ette voolude positiivsed suunad, märkides need joonisel samuti nooltega. Kirchhoffi esimese seaduse järgi võib koostada ühe $(q - 1 = 1)$ sõltumatu võrrandi:



Joon. 67.

$$i_1 + i_2 = i_3.$$

Sõltumatute kontuuride arv on $p - q + 1 = 2$. Valime nendeks kontuurideks: kontuuri, mis sisaldab elektromotoorset jõudu e_1 ja takistusi r_1 ja r_3, ning kontuuri, mis sisaldab elektromotoorset jõudu e_2 ja takistusi r_2 ja r_3. Koostades nende kohta võrrandid Kirchhoffi teise seaduse järgi, saame:

$$e_1 = r_1 i_1 + r_3 i_3, \qquad e_2 = r_2 i_2 + r_3 i_3.$$

Korrutame nendest võrranditest esimest r_2-ga ja teist r_1-ga. Liites saadud tulemused ning arvestades, et $i_1 + i_2 = i_3$, saame voolu i_3 avaldise:

$$i_3 = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1} = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{D},$$

kus

$$D = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1.$$

Kasutades voolu i_3 jaoks leitud avaldist, saame võrranditest, mis ülalpool on kirjutatud vastavalt Kirchhoffi teisele seadusele, avaldised ülejäänud vooludele:

$$i_1 = \frac{e_1(r_2 + r_3) - e_2 r_3}{D}; \qquad i_2 = \frac{e_2(r_1 + r_3) - e_1 r_3}{D}.$$

Kui näiteks $e_2 r_3 > e_1(r_2 + r_3)$, siis vool $i_1 < 0$. See tähendab, et sel juhtumil on tegelik vool esimeses harus suunatud noolele vastupidiselt, s. o. vastu leppeliselt valitud positiivset suunda. Seejuures on vool i suunatud ka vastupidiselt selle haru allika elektromotoorsele jõule e_1, s. o. allikas tarbib energiat. See energia, samuti nagu harude takistites r_1, r_2 ja r_3 tarbitav energia toodetakse emj. allikas e_2.

Analoogiliselt koostatakse ja lahendatakse võrrandid iga kuitahes keeruka lineaarse ahela kohta. Nii näiteks saame joonisel 68 kujutatud ahelale $(p = 6,\ q - 1 = 3,\ p - q + 1 = 3)$ skeemil nooltega näidatud elektromotoorsete jõudude ja voolude leppeliselt valitud positiivsete suundade puhul järgmised võrrandid:
sõlmele a

$$-i_1 + i_4 + i_3 = 0;$$

sõlmele b

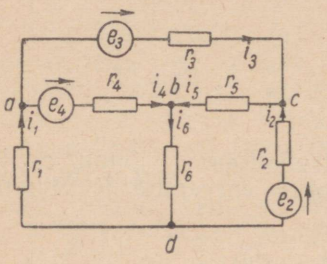
$$-i_4 - i_5 + i_6 = 0;$$

sõlmele a

$$-i_2 + i_5 - i_3 = 0;$$

kontuurile r_1, e_4, r_4, r_6

$$e_4 = r_1 i_1 + r_4 i_4 + r_6 i_6;$$



Joon. 68.

kontuurile e_2, r_2, r_5, r_6

$$e_2 = r_2 i_2 + r_5 i_5 + r_6 i_6;$$

kontuurile e_3, r_3, r_5, r_4, e_4

$$e_3 - e_4 = r_3 i_3 + r_5 i_5 - r_4 i_4.$$

Liitahelate arvutamise raskus seisneb p lineaarse algebralise võrrandi ühiselt lahendamise vajalikkuses. Seoses sellega osutuvad väärtuslikuks niisugused meetodid, mis lubavad nii või teisiti ülesannet lihtsustada. Need meetodid võimaldavad kas vähendada võrrandite arvu või tükeldada keerukas ülesanne reaks lihtsamateks ülesanneteks või lõpuks — teisendada ahelat selliselt, et arvutus lihtsustuks. Järgmistes paragrahvides vaatlemegi neist meetoditest põhilisi.

§ 27. Kontuurvoolumeetod

Maxwell näitas, et iga lineaarse liitahela arvutuse võib redutseerida $n = p - q + 1$ võrrandist koosneva süsteemi lahendamiseks, kui võtta vaatluse alla ainult nn. *kontuurvoolud*, s. o. voolud, mis sulguvad sõltumatutes kontuurides. Seejuures tegelikke voolusid harudes, mis on ühised kahele või enamale kontuurile, tuleb vaadelda kui vastavate kontuurvoolude algebralisi summasid.

Asudes võrrandite koostamisele n sõltumatust kontuurist koosneva ahela kohta, anname vabalt ette kõikide kontuurvoolude positiivsed suunad ja valime leppeliselt ringkäigu suuna kontuurides ühtelangevaks nende kontuurvoolude suundadega. Kõikide kontuuri k kuuluvate emj. allikate elektromotoorsete jõudude summa tähistame e_{kk}. Selle summa koostamisel tuleb ringkäigu suunaga suunalt ühtivad elektromotoorsed jõud võtta plussmärgiga, mitteühtivad aga miinusmärgiga. Kõikide k-ndasse kontuuri minevate harude takistuste summat tähistame r_{kk} ja nimetame *kontuuri omatakistuseks*. Kontuuride k ja m ühise haru kõikide takistuste summat tähistame r_{km} või r_{mk} ja nime-

tame *k-nda ja m-nda kontuuri ühistakistuseks ehk vastastikuseks takistuseks*. Kasutades kontuurvoolude meetodit ahelale, millel on n sõltumatut kontuuri, saame Kirchhoffi teise seaduse järgi n lineaarsest võrrandist koosneva järgmise süsteemi:

$$\begin{aligned}
r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + r_{13}i_3 + \ldots + r_{1n}i_n &= e_{11};\\
r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + r_{23}i_3 + \ldots + r_{2n}i_n &= e_{22};\\
\ldots\ldots\ldots

teise seaduse järgi. *Kontuurvoolude* i_1 ja i_2 positiivsed suunad võtame nii, nagu on joonisel 69 nooltega näidatud. Antud erijuhtumil on kontuurvoolud i_1 ja i_2 võrdsed tegelike vooludega esimeses ja teises harus. Tegelik vool kolmandas harus on aga võrdne kontuurvoolude i_1 ja i_2 summaga. Kasutades kontuurvoolumeetodit, saame ainult kaks võrrandit:

$$r_{11}i_1 + r_{12}i_2 = e_{11}; \qquad r_{21}i_1 + r_{22}i_2 = e_{22},$$

kusjuures mõlema kontuuri omatakistused on

$$r_{11} = r_1 + r_3 \quad \text{ja} \quad r_{22} = r_2 + r_3$$

ning ühistakistus

$$r_{12} = r_{21} = r_3.$$

Mõlema kontuuri elektromotoorsed jõud $e_{11} = e_1$ ja $e_{22} = e_2$. Süsteemi determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11}, & r_{12} \\ r_{21}, & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{21}^2 = (r_1 + r_3)(r_2 + r_3) - r_3^2 =$$

$$= r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = D.$$

Vastavalt

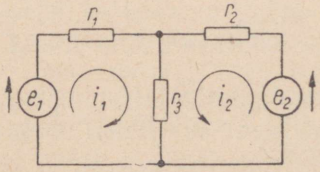
$$\Delta_{11} = r_{22} = r_2 + r_3; \qquad \Delta_{22} = r_{11} = r_1 + r_3;$$
$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = -r_{12} = -r_3.$$

Saame:

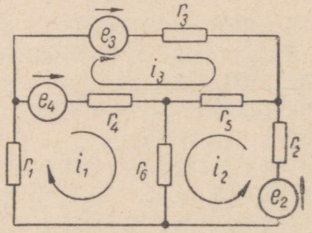
$$i_1 = \frac{e_1(r_2 + r_3) - e_2r_3}{D} \quad \text{ja} \quad i_2 = \frac{-e_1r_3 + e_2(r_1 + r_3)}{D},$$

mis langeb ühte eelmises paragrahvis toodud lahendusega. Vool i_3 saadakse voolude i_1 ja i_2 summeerimise teel:

$$i_3 = i_1 + i_2 = \frac{e_1r_2 + e_2r_1}{D}.$$



Joon. 69



Joon. 70.

Koostame kontuurvoolumeetodi järgi võrrandid joonisel 68 kujutatud ahelale. Valime sõltumatud kontuurid ja voolude positiivsed suunad neis kontuurides kooskõlas joonisele 70. Võrrandeid on ainult kolm ja need on järgmised:

$$r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + r_{13}i_3 = e_{11};$$
$$r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + r_{23}i_3 = e_{22};$$
$$r_{31}i_1 + r_{32}i_2 + r_{33}i_3 = e_{33},$$

kusjuures:

$r_{11} = r_1 + r_4 + r_6$, $r_{22} = r_2 + r_5 + r_6$, $r_{33} = r_3 + r_5 + r_4$;
$r_{12} = r_{21} = r_6$, $r_{13} = r_{31} = -r_4$, $r_{23} = r_{32} = r_5$;
$e_{11} = e_4$, $e_{22} = e_2$, $e_{33} = e_3 - e_4$.

§ 28. Superpositsiooni printsiip

Eelmises paragrahvis saadud i_k avaldises kujutab igaüks suurustest e_{11}, e_{22}, ... e_{kk} endast kõikide vastavasse kontuuri kuuluvate allikate elektromotoorsete jõudude summat. Kirjutades need summad täielikult välja ja grupeerides iga eri allika elektromotoorset jõudu sisaldavad liikmed, saame i_k jaoks avaldise liidetavate rea kujul, kus igal liidetaval on kordajaks ühe või teise allika emj. Siit järeldub, et kontuurvool mistahes kontuuris võrdub nende voolude summaga, mis on tekitatud iga emj. poolt eraldi selles kontuuris. See äärmiselt tähtis väide elektromotoorsete jõudude mõju sõltumatusest, mis on tuntud *superpositsiooni printsiibi* ehk *ülestusprintsiibi* nimetuse all, tuleneb Kirchhoffi seaduste alusel *lineaarsete* ahelate kohta saadud võrrandite *lineaarsusest* ja järelikult on kehtiv *konstantsete parameetritega* ahelate kohta. Superpositsiooni printsiip on kehtiv mitte ainult iga kontuurvoolu, vaid ka iga voolu kohta mistahes harus, sest kontuuride kogumi võib alati valida nii, et meid huvitav haru oleks ainult ühes kontuuris.

Tuleb silmas pidada, et võimsuste kohta ei saa superpositsiooni printsiipi kasutada isegi mitte lineaarsetes ahelates, sest võimsused on elektromotoorsete jõudude ja voolude ruutfunktsioonid.

Superpositsiooni printsiip võimaldab tükeldada keeruka ülesande reaks lihtsamateks, milledest igaühes mõjub vaadeldavas liitahelas ainult üks emj., kõik teised emj. allikad eeldatakse aga lühistatud olevaks, kusjuures nende sisetakistused olgu juurde lisatud vastavate harude takistustele.

Kasutades superpositsiooni printsiipi näiteks joonisel 67 kujutatud ahela arvutamiseks, saame kaks lihtsamat ülesannet

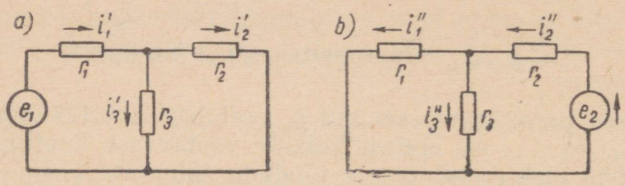
vastavalt joonisele 71, *a* ja *b*, millede voolud leitakse elementaarselt:

$$i_1' = \frac{e_1}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}} = \frac{e_1(r_2 + r_3)}{D};$$

$$i_2' = i_1' \frac{r_3}{r_2 + r_3} = \frac{e_1 r_3}{D}; \qquad i_3' = i_1' \frac{r_2}{r_2 + r_3} = \frac{e_1 r_2}{D};$$

$$i_2'' = \frac{e_2}{r_2 + \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3}} = \frac{e_2(r_1 + r_3)}{D};$$

$$i_1'' = i_2'' \frac{r_3}{r_1 + r_3} = \frac{e_2 r_3}{D}; \qquad i_3'' = i_2'' \frac{r_1}{r_1 + r_3} = \frac{e_2 r_1}{D}.$$



Joon. 71.

Järelikult on tegelikud voolud harudes mõlema emj. allika toimimisel, arvestades noolte suundi joonistel 67 ja 71, järgmised:

$$i_1 = i_1' - i_1'' = \frac{e_1(r_2 + r_3) - e_2 r_3}{D};$$

$$i_2 = i_2'' - i_2' = \frac{e_2(r_1 + r_3) - e_1 r_3}{D};$$

$$i_3 = i_3' + i_3'' = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{D}.$$

Need tulemused ühtivad eespool teiste meetoditega saadud avaldistega.

Joonisel 68 kujutatud ahela arvutamise ülesande võib superpositsiooni printsiibi abil tükeldada vastavalt kolmeks lihtsamaks sellesama ahela arvutamise ülesandeks, kusjuures korraga mõjub ainult üks emj., s. o. e_2, e_3 või e_4.

§ 29. Vastastikkuse printsiip

Vaatleme komplitseeritud lineaarse ahela kahte haru *ab* ja *cd*, kusjuures sõltumatute kontuuride kogumi valime nii, et haru *ab* sisalduks ainult ühes kontuuris *k*, haru *cd* aga ainult ühes kontuuris *m*. Seda tingimust on kahe haru kohta alati võimalik täita. Võrdusest $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$ järeldub siis väga oluline *vastastikkuse printsiip*, mis on püstitatud Maxwelli poolt. See printsiip väidab: kui emj. $e_{ab} = e$, toimides kuitahes keeruka ahela harus *ab*, kutsub esile teiste elektromotoorsete jõudude puudumisel sama ahela teises harus *cd* voolu $i_{cd} = i$, siis samasugune emj. $e_{cd} = e$, toimides harus *cd*, kutsuks teiste elektromotoorsete jõudude puudumisel harus *ab* esile samasuguse voolu $i_{ab} = i$. Tõepoolest, võrdustest

$$i_{ab} = i_k = e\frac{\Delta_{km}}{\Delta} \quad \text{ja} \quad i_{cd} = i_m = e\frac{\Delta_{mk}}{\Delta}$$

järeldub, et $i_{ab} = i_{cd}$, sest $\Delta_{mk} = \Delta_{km}$.

Näiteks joonisel 67 kujutatud ahela puhul järeldub ülaltoodud üldistest i_1 ja i_2 avaldistest, et
$e_1 = 0$ ja $e_2 = e$ korral

$$i_1 = \frac{-er_8}{D},$$

kuid $e_1 = e$ ja $e_2 = 0$ korral

$$i_2 = \frac{-er_8}{D}.$$

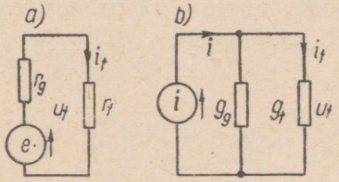
§ 30. Elektromotoorse jõu allikate ja vooluallikate ekvivalentsuse tingimused

Elektriahela energiaallikaid käsitletakse harilikult *emj. e allikatena* (joon. 72, *a*), milledel on mingi sisetakistus r_g. Kuid vahel on otstarbekas vaadelda energiaallikaid *voolu i allikatena* (joon. 72, *b*), milledel on mingi sisejuhtivus g_g.

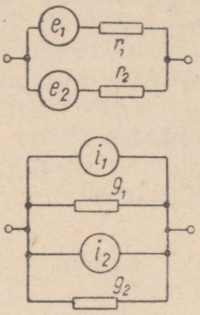
Emj. allikat ja vooluallikat nimetame ekvivalentseteks siis, kui nendest ühe asendamine teisega ei muuda ülejäänud ahela režiimi. Erijuhtumil, kui emj. allikaga ja vooluallikaga on ühendatud tarbijad, milledel on ühesugused takistused r_t (joon. 72, *a*) ja $r_t = \frac{1}{g_t}$ (joon. 72, *b*), siis on nende allikate ekvivalentsuse tingimuseks tarbijate voolude i_t võrdumine mõlemal juhtumil.

Emj. allika juhtumil

$$i_t = \frac{e}{r_g + r_t} = \frac{\frac{e}{r_g}}{1 + \frac{r_t}{r_g}}.$$



Joon. 72.



Joon. 73.

Vooluallika juhtumil

$$i_t = i\,\frac{g_t}{g_g + g_t} = \frac{i}{1 + \frac{g_g}{g_t}}.$$

Kuna need voolud peavad olema võrdsed tarbija takistuse $r_t = \frac{1}{g_t}$ mistahes väärtuste juures, siis peab kehtima võrdus

$$1 + \frac{r_t}{r_g} = 1 + \frac{g_g}{g_t}.$$

Järelikult peab emj. allika sisetakistuse r_g ja ekvivalentse vooluallika sisejuhtivuse g_g vahel esinema seos

$$r_g g_g = 1.$$

Peale selle, nagu nähtub voolu i_t avaldistest, peab emj. allika emj. e ja ekvivalentse vooluallika voolu i vahel kehtima seos

$$i = \frac{e}{r_g} \quad \text{või} \quad e = \frac{i}{g_g}.$$

Toodud avaldistest järeldub, et sisetakistusega r_g emj. allika ja sisejuhtivusega g_g vooluallika vastastikune asendamine on alati võimalik, kui ei r_g ega g_g ei võrdu ei nulli ega lõpmatusega. Võimalus asendada emj. allikaid ekvivalentsete vooluallikatega lubab lihtsustada mõningate küsimuste lahendamist.

Nõutagu näiteks ekvivalentse haru leidmist kahele paralleelselt ühendatud harule, mis sisaldavad elektromotoorseid jõude e_1 ja e_2 ning takistusi $r_1 = \frac{1}{g_1}$ ja $r_2 = \frac{1}{g_2}$ (joon. 73). Vaadeldes neid harusid vastavate sisetakistustega emj. allikatena ja asendades nad voolu $i_1 = e_1 g_1$ ja voolu $i_2 = e_2 g_2$ allikatega, milledel on sisejuhtivused g_1 ja g_2, võime need kaks vooluallikat ühendada üheks voolu $i = i_1 + i_2$ allikaks, millel on sisejuhtivus $g = g_1 + g_2$, ning minna sellelt üle ekvivalentsele emj. $e = \frac{i}{g} = \frac{e_1 g_1 + e_2 g_2}{g_1 + g_2}$ allikale, millel on sisetakistus $r = \frac{1}{g_1 + g_2}$. Kasutades seda moodust n paralleelselt ühendatud haru juhtumil leiame, et nendele paralleelharudele ekvivalentne haru sisaldab elektromotoorset jõudu

$$e = \frac{e_1 g_1 + e_2 g_2 + \ldots + e_n g_n}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}$$

ja takistust $r = 1 : (g_1 + g_2 + \ldots + g_n)$.

Näitena vaatleme uuesti sedasama ahelat, mis on kujutatud joonisel 67. Asendame harud, mis sisaldavad elektromotoorseid jõude e_1 ja e_2 ja takistusi r_1 ja r_2, ühe ekvivalentse haruga, mis sisaldab elektromotoorset jõudu

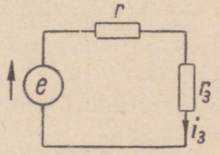
$$e = \frac{e_1 g_1 + e_2 g_2}{g_1 + g_2} = \frac{\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{r_1 + r_2}$$

ja takistust

$$r = \frac{1}{g_1 + g_2} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Saame lihtsa skeemi, mis on esitatud joonisel 74. Selle skeemi vool võrdub tegeliku ahela vooluga i_3. Seega

$$i_3 = \frac{e}{r + r_3} = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{D}.$$



Joon. 74.

Vool i_1 on nüüd kergesti leitav võrrandist $e_1 = i_1 r_1 + i_3 r_3$, ja vool i_2 määratakse võrrandist $i_1 + i_2 = i_3$.

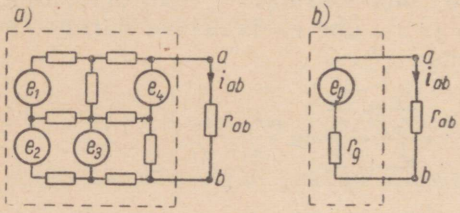
Juhime tähelepanu sellele, et emj. allika asendamisel ekvivalentse vooluallikaga allika sees kaotatav võimsus üldiselt muutub. Näiteks $r_t = \infty$ puhul (joon. 72) on kaod pingeallikas võrdsed nulliga, kuid vooluallikas on nad $\frac{i^2}{g_g} = i^2 r_g \neq 0$. Kuid see ei ole oluline, sest me asen-

dame emj. allika ekvivalentse vooluallikaga voolude ja pingete arvutamiseks ahela ülejäänud, ümberkujundamisele mittekuuluvas osas. Ahela selles osas aga jäävad voolud ja pinged muutuseta ja järelikult jääb muutuseta ka võimsus.

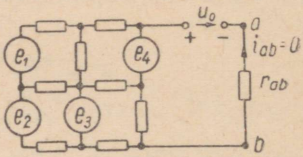
§ 31. Ekvivalentse generaatori teoreem

Eeldame, et on olemas mitme emj. allikaga liitahel ja on tarvis määrata vool i_{ab}, mis tekib nende elektromotoorsete jõudude toimel mingis kindlas takistust r_{ab} omavas harus (joon. 75, *a*).

Ekvivalentse generaatori teoreem kõlab järgmiselt: *takistust r_{ab} omava eraldatud haru suhtes liitahela kogu ülejäänud emj. allikaid sisaldavat osa* (ümbritsetud joonisel 75, *a* kriipsjoonega) *võib asendada ühe ekvivalentse generaatoriga* (ehk asegeneraatoriga), *mille emj. on e_g ja sisetakistus r_g. Viimased määratakse liitahela selle ülejäänud osa teadaolevate elektromotoorsete jõudude ja takistuste kaudu* (joon. 75, *b*). Näitame niisuguse asenduse võimalikkust ja määrame suurused e_g ja r_g.



Joon. 75.



Joon. 76.

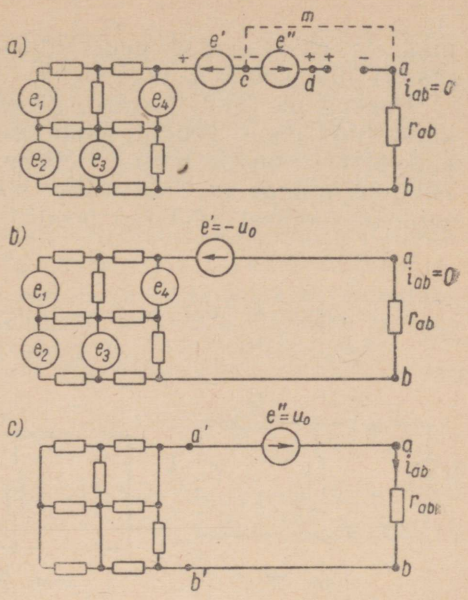
Kui katkestada haru takistusega r_{ab} (joon. 76), siis katkestuskohal tekib kõikide elektromotoorsete jõudude mõjul pinge u_0.

Nüüd toome sellesse avatud harusse täiendavalt kaks teineteisega suuruselt võrdset, kuid vastassuunalist elektromotoorset jõudu e' ja e'' (joon. 77, *a*). Kuna need elektromotoorsed jõud vastastikku kompenseeruvad, siis pinge u_0 jääb katkestuskohas endiseks.

Valime emj. suuruse e'' võrdseks pingega u_0 katkestuskohas, s. t. $e'' = u_0$. Seejuures saame, et $e' = -u_0$. Punktide *a* ja *c* elektrilised potentsiaalid on ühesugused, sest minnes punktist *c* punkti *d*, kasvab potentsiaal suuruse u_0 võrra, minnes aga punktist *d* punkti *a*, kahaneb ta sama suuruse võrra. Seepärast, kui lühistada punktid *a* ja *c* juhtmega *amc*, nagu näidatud joonisel 77, *a* kriipsjoonega, siis ahelas ei muutu midagi ning vool

i_{ab} jääb võrdseks nulliga. Seejuures kujuneb skeem vastavalt joonisele 77, *b*, kusjuures ahel on suletud ja vastab täielikult antud ahelale, kuid selle režiim erineb antud ahela omast lisaemj. e' olemasolu ning voolu $i_{ab} = 0$ tõttu.

Vaatleme nüüd teist režiimi, kui kõik antud emj. allikad on lühistatud nende sisetakistuste säilitamisel ahelas ja vaadeldavasse harru on lülitatud täiendav emj. $e'' = u_0$ (joon. 77, *c*). Selle emj. mõjul tekib vool i_{ab}, mis on võrdne otsitava vooluga reaalses skeemis (joon. 75, *a*). See tõsiasi tuleneb superpositsiooni printsiibist. Tõepoolest, superponeerides ehk ülestades joonisel 77, *b* ja *c* saadud skeemidele vastavad režiimid, me jõuame elektromotoorsete jõudude lähteskeemini (joon. 75, *a*), ja et ühel neist režiimidest (joon. 77, *b*) on vool vaadeldavas harus võrdne nulliga, siis teisel režiimil (joon. 77, *c*) on ta võrdne otsitava vooluga i_{ab}.



Joon. 77.

Tähistame lühistatud emj. allikate korral r_g-ga joonisel 75, *a* kriipsjoonega piiratud kogu ahelaosa takistuse punktide *a* ja *b* vahel. See on võrdne joonisel 77, *c* toodud ahela punktide *a'* ja *b'* vahelise vasakpoolse osa takistusega.

Joonisel 77, *c* kujutatud skeem vastab skeemile joonisel 75, *b*; see tõestab joonisel 75, *a* kriipsjoonega piiratud liitahela osa asendamise võimalust ekvivalentse generaatoriga.

Seega otsitava voolu i_{ab} võib arvutada järgmise valemi abil:

$$i_{ab} = \frac{u_0}{r_g + r_{ab}},$$

s. t. voolu määramiseks on vaja leida kas eksperimentaalselt või arvutuslikult pinge u_0 haru *ab* katkestuskohas ning ahela kogu ülejäänud osa takistus r_g selles esinevate emj. allikate lühistatuse korral.

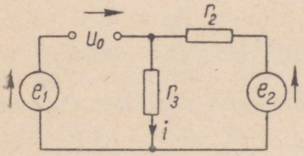
Tähistame voolu harus *ab*, kui $r_{ab} = 0$, s. t. kui ekvivalentne generaator on lühistatud, tähisega i_k. Siis i_{ab} avaldisest saame, et $r_g = u_0 : i_k$, s. t. ekvivalentse generaatori sisetakistuse võib

määrata ekvivalentse generaatori tühijooksupinge u_0 ja generaatori lühisvoolu i_k jagatisena.

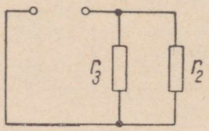
Rakendame ekvivalentse generaatori teoreemi joonisel 67 kujutatud ahela voolude määramiseks. Voolu i_1 määramiseks katkestame esimese haru ja leiame pinge ta klemmidel (joon. 78). Tühijooksupinge u_0 positiivse suuna loeme ühtivaks otsitava voolu i_1 joonisel näidatud positiivse suunaga. Seega saame:

$$u_0 + ir_3 = e_1,$$

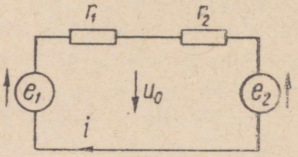
$$u_0 = e_1 - ir_3 = e_1 - \frac{e_2}{r_2 + r_3} r_3 = \frac{e_1(r_2 + r_3) - e_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$



Joon. 78.



Joon. 79.



Joon. 80.

Takistus r_g võrdub nende klemmide vahelise kogu ülejäänud ahela takistusega lühistatud emj. allikate korral (joon. 79):

$$r_g = \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$

Järelikult otsitav vool

$$i_1 = \frac{u_0}{r_1 + r_g} = \frac{e_1(r_2 + r_3) - e_2 r_3}{D}.$$

Selle meetodi järgi voolu i_3 määramiseks katkestame kolmanda haru (joon. 80). Pinge selle haru klemmidel

$$u_0 = e_1 - ir_1 = e_1 - \frac{e_1 - e_2}{r_1 + r_2} r_1 = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

Suurus r_g on sel juhtumil

$$r_g = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Järelikult

$$i_3 = \frac{u_0}{r_3 + r_g} = \frac{e_1 r_2 + e_2 r_1}{D}.$$

Selles skeemis ekvivalentse generaatori meetodil voolu i_3 määramise näitest nähtub, et see meetod ühtib antud juhtumil täielikult § 30 vaadeldud meetodiga, mispuhul paralleelselt ühen-

datud mitu konstantset elektromotoorset jõudu ja takistust sisaldavat haru asendati ühe ekvivalentse sisetakistusega ekvivalentse emj. allikaga. Ekvivalentse generaatori meetod osutub siiski palju üldisemaks, sest see võimaldab asendada asegeneraatoriga mistahes keerukamat emj. allikaid sisaldavat liitahelat, mis on ühendatud haruga, kus määratakse vool. Eriti oli see näha sellesama ahela (joon. 67) näite puhul voolu i_1 määramisel.

Veel ühe ekvivalentse generaatori teoreemi rakenduse näitena vaatleme voolu i_0 määramist tasakaalustamata silla nullmõõteriista harus ab (joon. 81, a) juhtumil, kui võib jätta arvestamata silda toitva emj. allika sisetakistuse. Eeldades, et haru ab on avatud (joon. 81, b), leiame, et pinge u_{0ab} tema klemmidel

$$u_{0ab} = u_{cb} - u_{ca} = u\left(\frac{r_3}{r_3 + r_4} - \frac{r_1}{r_1 + r_2}\right).$$

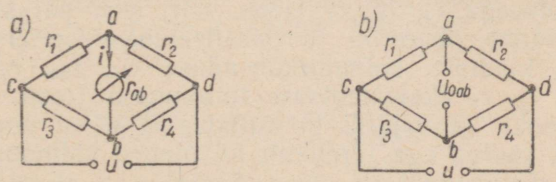
Punktide a ja b vahel oleva ahela takistuse suuruseks nullmõõteriista katkestatud haru ja punktide c ning d lühistamise korral saame:

$$r_g = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}.$$

Järelikult otsitav vool

$$i_0 = u\left(\frac{r_3}{r_3 + r_4} - \frac{r_1}{r_1 + r_2}\right) : \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} + r_{ab}\right),$$

kus r_{ab} — nullmõõteriista takistus.



Joon. 81.

Ekvivalentse generaatori teoreemi võib teisendada, asendades emj. u_0 generaatori, mille sisetakistus on r_g, voolu $i_k = \frac{u_0}{r_g}$ generaatoriga, mille sisejuhtivus $g_g = \frac{1}{r_g}$. Seejuures tuleb arvestada, et vool i_k saadakse harus ab selle lühistamisel, s. t. kui $r_t = 0$.

Teostades näidatud asenduse elemendi $r_t = \frac{1}{g_t}$ puhul, saame klemmipinge $u_t = i_t r_t$ jaoks (§ 30):

$$u_t = \frac{i_k}{g_g + g_t}.$$

Sellest avaldisest järeldub, et elemendi g_t suhtes võib liitahela kogu kompaktset osa vaadelda voolugeneraatorina i_k, mille sisejuhtivus on g_g.

Lõpuks märgime, et kui ahelasse on lülitatud peale emj. allikate vooluallikad, siis ekvivalentse generaatori sisetakistuse r_g või sisejuhtivuse g_g määramisel tuleb nende vooluallikate voolu harud katkestada ja jätta ahelasse nende sisejuhtivused.

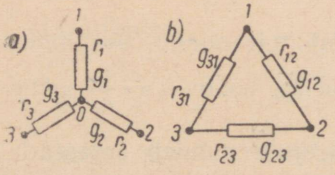
§ 32. Kolmeharulise tähtühenduse teisendamine kolmnurkühenduseks

Sageli esineb liitahelas osi, mispuhul ühest sõlmest lähtub n haru. Need n haru, millest igaüks on ühendatud ühise sõlme külge oma ühe otsaga, moodustavad nn. *tähtühenduse* (n-harulise tähtühenduse).

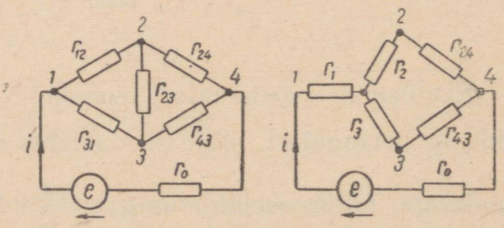
Sageli esineb ka juhtum, mille puhul n haru moodustavad suletud hulknurga, s. o. nn. hulknurkühenduse (n-nurkühenduse). Erijuhtumi kohta, kui elementide arv on kolm, on joonisel 82, *a* näidatud *tähtühendus* ja joonisel 82, *b kolmnurkühendus*.

Lineaarsete ahelate arvutust võib mõnikord tunduvalt lihtsustada, kui asendada nende mingis osas kolmnurkühendus ekvivalentse tähtühendusega, või vastupidi. Nii lihtsustub tasakaalustamata silla arvutus kolmnurkühenduse r_{12}, r_{23}, r_{31} asendamisel tähtühendusega r_1, r_2, r_3 (joon. 83), sest pärast asendust taandub ülesanne järjestik- ja paralleelühenduse arvutamisele.

Määrame kindlaks kolmnurkühenduse r_{12}, r_{23}, r_{31} ja tähtühenduse r_1, r_2, r_3 ekvivalentsuse tingimused (joon. 82). Ekvivalentsuse jaoks on vajalik ja küllaldane, et ei muutuks ülejäänud ahela voolud ega järelikult ka pinged kolmnurkühenduse asendamisel tähtühendusega või vastupidi, s. o. et takistused või



Joon. 82.



Joon. 83.

juhtivused punktide *1*, *2*, *3* iga paari vahel oleksid ühesugused kolmnurkühenduse ja tähtühenduse puhul.

Kolmnurkühenduse tippude *1* ja *2* vahelise takistuse kohta saame:

$$1 : \left(\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{23}+r_{31}}\right) = \frac{r_{12}(r_{23}+r_{31})}{r_{12}+r_{23}+r_{31}}.$$

Selle takistusega peab olema võrdne takistus ekvivalentse tähtühenduse punktide *1* ja *2* vahel, s. o. $r_1 + r_2$. Kasutades samasugust arutlust punktide *2* ja *3* ning seejärel ka punktide *3* ja *1* kohta, saame kolm võrrandit:

$$r_1 + r_2 = \frac{r_{12}(r_{23}+r_{31})}{r_{12}+r_{23}+r_{31}}; \quad r_2 + r_3 = \frac{r_{23}(r_{31}+r_{12})}{r_{12}+r_{23}+r_{31}};$$

$$r_3 + r_1 = \frac{r_{31}(r_{12}+r_{23})}{r_{12}+r_{23}+r_{31}}.$$

Lahendades need võrrandid r_1, r_2, r_3 suhtes, leiame:

$$r_1 = \frac{r_{31}r_{12}}{r_{12}+r_{23}+r_{31}}; \quad r_2 = \frac{r_{12}r_{23}}{r_{12}+r_{23}+r_{31}}; \quad r_3 = \frac{r_{23}r_{31}}{r_{12}+r_{23}+r_{31}},$$

millest vastavate juhtivuste jaoks saame avaldised

$$g_1 = g_{31} + g_{12} + \frac{g_{31}g_{12}}{g_{23}}; \quad g_2 = g_{12} + g_{23} + \frac{g_{12}g_{23}}{g_{31}};$$

$$g_3 = g_{23} + g_{31} + \frac{g_{23}g_{31}}{g_{12}}.$$

Lahendades pöördülesannet kolmeharulise tähtühenduse teisendamisest ekvivalentsesse kolmnurkühendusse on vaja väljendada r_{12}, r_{23}, r_{31} r_1, r_2, r_3 kaudu. Takistuste r_1, r_2, r_3 avaldistest saame:

$$r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{r_{12}r_{23}r_{31}}{r_{12}+r_{23}+r_{31}}.$$

Jagades viimase võrduse järjekorras takistusi r_1, r_2, r_3 määravate võrdustega, leiame:

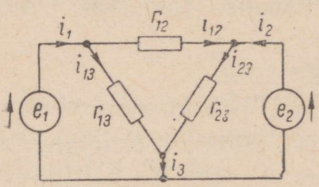
$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1r_2}{r_3}; \quad r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2r_3}{r_1};$$

$$r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3r_1}{r_2},$$

millest juhtivustele üle minnes saame:

$$g_{12} = \frac{g_1g_2}{g_1+g_2+g_3}; \quad g_{23} = \frac{g_2g_3}{g_1+g_2+g_3}; \quad g_{31} = \frac{g_3g_1}{g_1+g_2+g_3}.$$

Kasu, mida võib saada kolmnurkühenduse asendamisel ekvivalentse tähtühendusega, ilmnes tasakaalustamata silla näites (joon. 83). Pöördteisendust tähtühendusest ekvivalentsesse kolmnurkühendusse on otstarbekas kasutada näiteks joonisel 67 kujutatud ahela arvutamisel. Selles ahelas on harud takistustega r_1, r_2 ja r_3 ühendatud tähte. Asendades selle tähtühenduse ekvivalentse kolmnurkühendusega, saame joonisel 84 kujutatud skeemi, milles voolud i_1, i_2 ja i_3 on võrdsed otsitavate voolude tegelikus ahelas (joon. 67). Nende voolude arvutus joonisel 84 näidatud skeemile on äärmiselt lihtne. Saame:



Joon. 84.

$$i_1 = i_{12} + i_{13} = \frac{e_1 - e_2}{r_{12}} + \frac{e_1}{r_{31}};$$

$$i_2 = -i_{12} + i_{23} = -\frac{e_1 - e_2}{r_{12}} + \frac{e_2}{r_{23}}.$$

Vastavalt ülaltoodud valemitele saame:

$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3} = \frac{D}{r_3}; \qquad r_{23} = \frac{D}{r_1}; \qquad r_{31} = \frac{D}{r_2}.$$

Järelikult

$$i_1 = \frac{(e_1 - e_2) r_3 + e_1 r_2}{D} = \frac{e_1 (r_3 + r_2) - e_2 r_3}{D}$$

ja

$$i_2 = \frac{-(e_1 - e_2) r_3 + e_2 r_1}{D} = \frac{e_2 (r_1 + r_3) - e_1 r_3}{D},$$

mille saime ka varem teiste meetoditega.

Tähtühenduse, millel on n haru, võib teisendada täielikuks n-nurkühenduseks, s. o. n-nurkühenduseks, mille kõik tipud on omavahel paariviisi ühendatud ja millel on järelikult $\frac{1}{2}(n-1) \cdot n$ külge. Seejuures ekvivalentse hulknurkühenduse tippude k ja m vaheline juhtivus

$$g_{km} = \frac{g_k g_m}{\Sigma g},$$

kus g_k ja g_m on tähtühenduse k-nda ja m-nda haru juhtivused ja Σg — teisendatava tähtühenduse kõikide harude juhtivuste summa. Pöördülesanne, s. o. n-nurkühendusele ekvivalentse täht-

ühenduse otsimine $n > 3$ puhul, on üldiselt lahendamatu. Siiski on meetodeid, mis võimaldavad täieliku nelinurkühenduse teisendada temaga ekvivalentseks lihtsamaks ahelaks.

§ 33. Sõlmepingemeetod

Liitahela arvutamisel valime vabalt ühe tema q sõlmest, näiteks q-nda sõlme, *lähtesõlmeks*. Pannes lähtesõlmele indeksi 0, nimetame pingeid u_{10}, u_{20}, ..., $u_{(q-1)0}$ iga ülejäänud $(q-1)$ sõlme ja lähtesõlme vahel leppeliselt sõlmepingeteks. Ahela arvutamiseks on piisav määrata sõlmepinged, sest neid teades võib leida pinge u_{km} iga kahe sõlme k ja m vahel seosest $u_{km} = u_{k0} - u_{m0}$, ja seejärel ka voolu i_{km} harus km seose abil

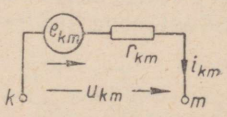
$$i_{km} = \frac{e_{km} + u_{km}}{r_{km}} = g_{km}(e_{km} + u_{km}) = g_{km}[e_{km} + (u_{k0} - u_{m0})],$$

kus $r_{km} = \frac{1}{g_{km}}$ on harus km olevate takistuste summa ja e_{km} — selles harus olevate allikate elektromotoorsete jõudude summa (joon. 85).

Sõlmepingete määramisel lähtume $(q-1)$ sõltumatu võrrandi süsteemist, mille võime välja kirjutada kõikide sõlmede kohta, peale lähtesõlme, kasutades Kirchhoffi esimest seadust. Seega saame:

$$i_{12} + i_{13} + i_{14} + \ldots + i_{1,\,q-1} + i_{10} = 0;$$

$$i_{21} + i_{23} + i_{24} + \ldots + i_{2,\,q-1} + i_{20} = 0;$$



Joon. 85.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$i_{q-1,1} + i_{q-1,2} + i_{q-1,3} + \ldots + i_{q-1,\,q-2} + i_{q-1,0} = 0.$$

Kasutades sõltuvusi kujuga

$$i_{km} = g_{km}(e_{km} + u_{km}),$$

teisendame selle süsteemi järgmiseks:

$$g_{12}u_{12} + g_{13}u_{13} + \ldots + g_{1,\,q-1}u_{1,\,q-1} + g_{10}u_{10} = i_1;$$

$$g_{21}u_{21} + g_{23}u_{23} + \ldots + g_{2,\,q-1}u_{2,\,q-1} + g_{20}u_{20} = i_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_{q-1,1}u_{q-1,1} + g_{q-1,2}u_{q-1,2} + \ldots + g_{q-1,\,q-2}u_{q-1,\,q-2} + g_{q-1,0}u_{q-1,0} = i_{q-1},$$

kus

$$i_k = -g_{k1}e_{k1} - g_{k2}e_{k2} - \ldots - g_{k,\,q-1}e_{k,\,q-1} - g_{k0}e_{k0}.$$

Asendame sõlmedevahelised pinged sõlmepingetega, kasuta-

des sõltuvusi kujuga $u_{km} = u_{k0} - u_{m0}$. Siis, märkinud kõigi sõlmega k ühendatud harude juhtivuste summa g_{kk}-ga, s. o. asendades

$$g_{k1} + g_{k2} + \ldots + g_{k,\,k-1} + g_{k,\,k+1} + \ldots + g_{k,\,q-1} + g_{k0} = g_{kk},$$

saame:

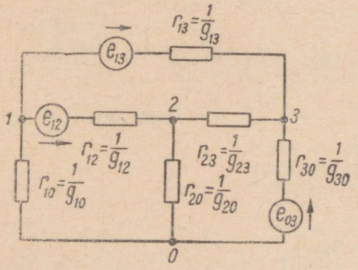
$$\begin{aligned} g_{11}u_{10} - g_{12}u_{20} - \ldots - g_{1,\,q-1}u_{q-1,0} &= i_1; \\ -g_{21}u_{10} + g_{22}u_{20} - \ldots - g_{2,\,q-1}u_{q-1,0} &= i_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -g_{q-1,1}u_{10} - g_{q-1,2}u_{20} - \ldots + g_{q-1,\,q-1}u_{q-1,0} &= i_{q-1}. \end{aligned}$$

Lahendades selle süsteemi, leiame sõlmepinged, kusjuures sõlmepinge u_{k0} k-nda sõlme jaoks

$$u_{k0} = i_1 \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} + i_2 \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} + \ldots + i_m \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} + \ldots + i_{q-1} \frac{\Delta_{q-1,\,k}}{\Delta},$$

kus Δ on süsteemi peadeterminant ning Δ_{mk} tema algebraline täiend. Pärast seda kui sõlmepinged on leitud, ei kujuta voolude määramine ahela harudes, nagu eespool näidatud, mingisuguseid raskusi.

Kui mingite sõlmede, näiteks sõlmede k ja m vahel on mitu emj. allikatega paralleelharu, siis vastavalt § 30 võib neid asendada ühe ekvivalentse haruga, millel on ekvivalentne emj. ja ekvivalentne juhtivus.



Joon. 86.

Näitena koostame sõlmepingemeetodil joonisel 68 kujutatud ahela võrrandid. Kuna nüüd koostatakse võrrandid sõlmede kohta, siis on kohasem nummerdada mitte harud, nagu seda on tehtud joonisel 68 ülesande lahendamisel kontuurvoolude meetodil, vaid sõlmed (joon. 86). Harude takistused ja juhtivused ning samuti harude voolud on sobivam varustada kahe indeksiga, mis vastavad nende sõlmede numbritele, millede vahel antud haru asetseb. Valides joonisel 68 sõlme d lähtesõlmeks, omistame talle indeksi 0 (joon. 86). Ülejäänud sõlmede 1, 2 ja 3 jaoks saame võrrandid:

$$\begin{aligned} g_{11}u_{10} - g_{12}u_{20} - g_{13}u_{30} &= i_1; \\ -g_{21}u_{10} + g_{22}u_{20} - g_{23}u_{30} &= i_2; \\ -g_{31}u_{10} - g_{32}u_{20} + g_{33}u_{30} &= i_3, \end{aligned}$$

kus

$$g_{11} = g_{10} + g_{12} + g_{13} = \frac{1}{r_{10}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}};$$

$$g_{22} = g_{20} + g_{21} + g_{23}, \qquad g_{33} = g_{30} + g_{31} + g_{32};$$

$$i_1 = -e_{12}g_{12} - e_{13}g_{13}, \qquad (e_{10} = 0);$$

$$i_2 = e_{12}g_{12}, \qquad (e_{23} = 0, \quad e_{20} = 0);$$

$$i_3 = e_{13}g_{13} + e_{03}g_{30} \qquad (e_{32} = 0).$$

Lahendanud kolme võrrandi süsteemi sõlmepingete u_{10}, u_{20} ja u_{30} suhtes, leiame kergesti harudele rakendunud pinged ja harude voolud.

Märgime, et harude voolude ja nende klemmidele rakendunud pingete tähistamine kahe indeksiga, mis vastavad sõlmede tähistusele, on selle poolest väärtuslik, et siis selgub juba analüütilises üleskirjutuses valitud leppeline positiivne voolu, pinge või elektromotoorse jõu suund. Selleks on küllaldane kokku leppida, et positiivne suund võetakse esimesele indeksile vastavast sõlmest teisele indeksile vastava sõlme poole. Selline kirjutusviis oligi eespool läbi viidud ja seda kasutatakse ka edaspidi. Ilmselt kehtivad seosed:

$$i_{ab} = -i_{ba}; \qquad u_{ab} = -u_{ba}; \qquad e_{ab} = -e_{ba}.$$

Harude takistused ja juhtivused on aga parameetrid, milledel ei ole suunda. Seepärast on nende puhul indeksite järjekord tähtsusetu, s. o.

$$r_{ab} = r_{ba}; \qquad g_{ab} = g_{ba}.$$

Lõpuks märgime, et kontuurvoolumeetod ja sõlmepingemeetod nagu täiendavad teineteist. Kui esimest kasutatakse ahela sõltumatute kontuuride kohta, siis teist kasutatakse ahela sõltumatute sõlmede kohta. Millist meetodit on otstarbekam kasutada, sõltub ahela konfiguratsioonist, nimelt sellest, mis on väiksem, kas sõltumatute kontuuride arv $(p - q + 1)$ või sõltumatute sõlmede arv $(q - 1)$. Esimesel juhtumil on parem kasutada kontuurvoolumeetodit, teisel juhtumil aga sõlmepingemeetodit.

KUUES PEATÜKK

MITTELINEAARSETE ALALISVOOLUAHELATE ARVUTUS

§ 34. Alalisvooluahela mittelineaarseid elemente

Mittelineaarseteks elementideks on alalisvooluahelas need seadised, millede elektritakistus või vastavalt elektrijuhtivus sõltub nende voolust või klemmipingest, s. o. millede karakteristikud $u = f(i)$ on mittelineaarsed.

Karakteristikuid, mis väljendavad alalispinge sõltuvust alalisvoolu vastavatest väärtustest, nimetatakse *staatilisteks* karakteristikuteks. Karakteristikuid, mis on saadud voolu küllalt kiirete muutumiste juures, nimetatakse *dünaamilisteks* karakteristikuteks ja nad võivad erineda staatilistest näiteks soojusliku inertsi tõttu.

Mittelineaarse elemendi puhul võetakse tarvitusele: *staatiline* takistus ja juhtivus

$$r_{st} = \frac{u}{i} = f_1(i) \quad \text{ning} \quad g_{st} = \frac{i}{u} = F_1(i),$$

mis määratakse staatiliselt karakteristikult, ning *dünaamiline* takistus ja juhtivus

$$r_d = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di} = f_2(i) \quad \text{ning} \quad g_d = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{di}{du} = F_2(i),$$

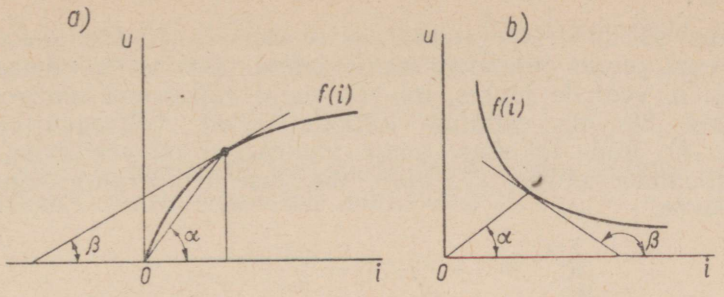
mis määratakse dünaamiliselt karakteristikult.

Uurides mittelineaarseid elemente, määrame alalisvooluahela puhul nii staatilised kui ka dünaamilised takistused ja juhtivused staatilistelt karakteristikutelt, sest voolu küllalt aeglaste muutumiste korral ühtivad dünaamilised karakteristikud staatilistega.

Ilmselt peavad kehtima seosed

$$r_{st} g_{st} = 1 \quad \text{ja} \quad r_d g_d = 1.$$

Üldiselt aga $r_{st} \neq r_d$ ja $g_{st} \neq g_d$.



Joon. 87.

Karakteristiku $u = f(i)$ kuju järgi eristatakse *sümmeetrilisi* ja *mittesümmeetrilisi* elemente. Sümmeetriliste elementide karakteristik kujutub telgede suhtes sümmeetrilise kõverana; seega sõltub selliste elementide takistus voolust ühesuguselt elemendi voolu mõlema suuna korral. Mittesümmeetrilised elemendid omavad mittesümmeetrilist karakteristikut: nende elementide takistus sõltub voolust elemendi voolu kummagi suuna puhul erinevalt.

Staatiline takistus on võrdeline koordinaatide algusest karakteristiku antud punkti tõmmatud kiire kaldenurga α tangensiga (joon. 87):

$$r_{st} = k \operatorname{tg} \alpha.$$

Dünaamiline takistus on võrdeline karakteristiku antud punktis tõmmatud puutuja kaldenurga β tangensiga:

$$r_d = k \operatorname{tg} \beta.$$

Seejuures $k = \frac{v}{a}$, kus v ja a on pinge ja voolu mõõtkavad. Vastavalt eelnevale

$$g_{st} = \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{ja} \quad g_d = \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \beta.$$

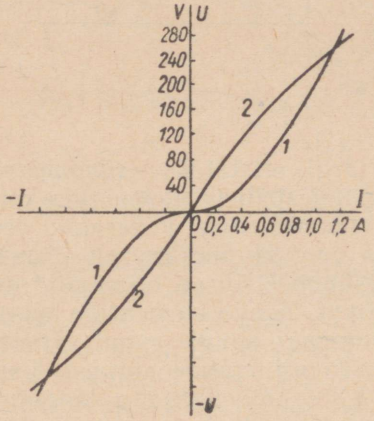
Kõik need parameetrid muutuvad üleminekul karakteristiku ühest punktist teise. Nõndanimetatud *passiivsete*, s. o. energiaallikaid mittesisaldavate elementide juures on alati $r_{st} > 0$ ja $g_{st} > 0$. Passiivse elemendi r_d ja g_d on positiivsed aga ainult siis, kui antud punkt asub karakteristiku *tõusval* osal (joon. 87, *a*), ja nad on negatiivsed, kui antud punkt asub karakteristiku *langeval* osal (joon. 87, *b*).

Vaatleme järgnevalt alalisvooluahelate iseloomulikumaid ja kõige sagedamini esinevaid mittelineaarseid elemente.

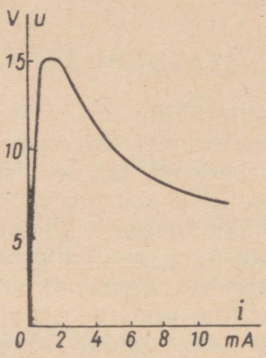
Sümmeetriliste elementide hulka kuuluvad näiteks hõõglambid ja termotakistid, türiitelemendid, barretterid, huumlambid, elektrikaar ühesuguste elektroodide vahel.

Hõõglambid töötavad kõrgel temperatuuril. Kuna hõõgniidi

takistus sõltub temperatuurist, siis erineb hõõglambi takistus nimivoolu juures tunduvalt sama lambi takistusest külmas olekus, s. o. voolude juures, mis on palju väiksemad nimivoolust. Joonisel 88 on esitatud karakteristikud volframniitlambile (kõver *1*), mille takistuse temperatuuritegur on positiivne, ning söeniitlambile (kõver *2*), mille takistuse temperatuuritegur on negatiivne.



Joon. 88.



Joon. 89.

Eriti tuleb arvestada elektrivõrkude valgustuskoormuse mittelineaarsust selliste küsimuste uurimisel, nagu tarbija karakteristiku mõju generaatorite koormusele avariiolukordades, sest avariiolukordadega kaasnevad harilikult tarbijate pinge järsud kõikumised.

Takistuse temperatuurisõltuvus leiab rakendamist nn. *termotakistites*, milledel on harilikult joonisel 88 näidatud *2.* kõvera tüüpi karakteristik. Neid takisteid kasutatakse seadistes ja aparaatides, kus on vaja kompenseerida nende takistuse muutumist temperatuuri muutumisel, samuti temperatuuri mõõtmiseks ja automaatseks reguleerimiseks, viitereleedes jne. Samuti valmistatakse ka pooljuhtmaterjalist termotakisteid, mida nimetatakse termistorideks. Nendel on joonisel 89 esitatud karakteristik, mille tunduv osa on langev. Üks termistori konstruktsioone kujutab endast kerakest, mis on valmistatud metallide (nikli, magneesiumi jt.) oksiididest koos vase ülipeenendatud pulbri lisandiga juhtivuse suurendamiseks. Selle kerakesega on ühendatud kaks iriidiumplaatinast traati voolu juurdejuhtimiseks. Kogu see seadis on ümbritsetud klaaskestaga. Selliseid termistore kasutatakse elektrimõõtmisteks kõrgsagedustehnikas.

Kõrgepingetehnikas kasutatakse mittelineaarseid elemente, mis on valmistatud keraamilisest materjalist türiidist, mille juh-

tivus pinge tõusmisel järsult suureneb. *Türiitelementide* voolu ja pinge vahelise seose võib väljendada kujul

$$|i| = A|u|^n,$$

milles $n \approx 3{,}5$, kusjuures karakteristik on sümmeetriline.

Järelikult nende elementide juhtivused

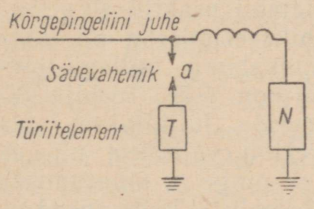
$$g_{st} = \frac{i}{u} = \frac{|i|}{|u|} = A|u|^{n-1} \approx A|u|^{2{,}5};$$

$$g_d = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}|i|}{\mathrm{d}|u|} = An|u|^{n-1} \approx An|u|^{2{,}5}.$$

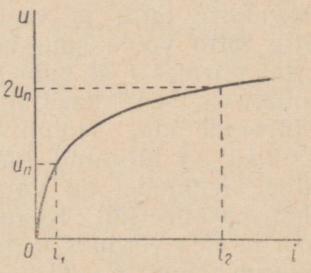
Selline türiitelementide juhtivuse pingest sõltuvuse iseloom võimaldab neid kasutada kõrgepingeseadmete — elektrijaamade, alajaamade, transformaatorite jne. kaitsmisel liigpingete vastu. Selleks otstarbeks kasutatakse nn. türiitlahendajaid, mis kujutavad endast türiitketastest sammast *T*. See sammas lülitatakse sädevahemiku *a* kaudu paralleelselt kaitstava seadmega *N*, harilikult vahelduvvoolu-kõrgepingeliini juhtme ja maa vahele (joon. 90).

Nimipinge juures ei toimu sädevahemiku läbilööki ja vool lahendajat ei läbi. Kui pinge liinis tõuseb kõrgemale nimiväärtusest, toimub sädevahemiku läbilöök ja türiitsammast läbib tugev vool, sest pinge kõrgenemisel langeb järsult türiitsamba takistus. Seega laetakse liin tühjaks läbi türiitlahendaja ja pinge liinis alaneb. Pinge alanemisel kasvab lahendaja takistus ja seda läbiv vool väheneb järsult. Selle tagajärjel gaaslahendus sädevahemikus katkeb ja järelikult katkeb ka vool lahendajas täielikult. Joonisel 91 on esitatud lahendajates kasutatavate türiitketaste näidiskarakteristik. Pinge kahekordsel suurenemisel nimipingega võrreldes suureneb vool umbes 10 korda.

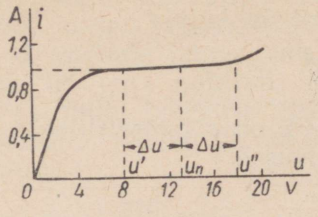
Joonisel 92 on kujutatud *barretteri* karakteristik. Barretter kujutab endast vesinikuga täidetud ja kinnijoodetud klaasballooni, mille sees on raudniit. Raudniit on ühendatud balloon



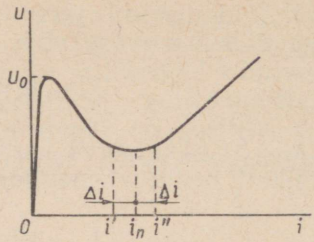
Joon. 90.



Joon. 91.



Joon. 92.



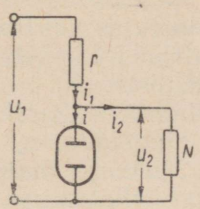
Joon. 93.

väljaviikudega. Niidi temperatuuri muutumine seoses teda läbiva voolu muutumisega ja samuti niidi vastavad jahutustingimused tekitavadki joonisel näidatud mittelineaarse sõltuvuse voolu ja pinge vahel. Barretteri klemmipinge muutumisel piirides u'-st kuni u''-ni vool peaaegu ei muutu. Seetõttu kasutataksegi barrettereid voolu *stabiliseerimiseks*. Selleks lülitatakse nad järjestikku tarbijaga, milles on vaja voolu stabiliseerida. Kui valida lülituse normaalne töörežiim selliselt, et toitevõrgu ja tarbija pingete vahe, mis langeb barretteri klemmidele, võrduks u_n-ga (joon. 92), siis võrgu pinge kõikumistel piirides $\pm\Delta u$ langevad need kõikumised peaaegu täielikult barretterile, mistõttu vool ei muutu ja muutumatuks jääb tarbija konstantse takistuse juures ka tarbija klemmipinge. Ahela vool jääb konstantseks ka tarbija takistuse muutumistel, kuigi seejuures tarbija pinge muutub. Voolu stabiliseerimiseks on tähtis ainult see, et võrgu ja tarbija pingete vahe kõikumised ei väljuks piiridest u' kuni u'' (joon. 92).

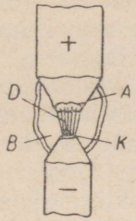
Mittelineaarsete elementidena kasutatakse laialt ka *huumlampe* (neoonlambid, huumlahendusstabilitron jne.). Need lambid kujutavad endast inertse gaasiga täidetud kinnijoodetud balloone, milledesse on viidud kaks elektroodi. Elektroodide vahel on gaasvahemik. Joonisel 93 on antud sellise lambi karakteristik. Kui järk-järgult suurendada pinget kustunud lambil, siis vool veidi kasvab, kuid jääb seejuures siiski tühiselt väikeseks. Pingel u_0 tekib elektroodide vahel huumlahendus — lamp süttib, s. o. gaas helendub. Lambi karakteristik on ionisatsiooni astme kasvamise tõttu ja vastavalt gaasvahemiku juhtivuse suurenemise tõttu voolu suurenemisel ühes osas langev. Voolu muutumisel piirides i'-st kuni i''-ni jääb pinge lambil praktiliselt muutumatuks. Seda kasutataksegi pinge stabiliseerimiseks nn. stabilitronide abil. Stabilitron on huumlahenduslamp, millega järjestikku on lülitatud lineaarne takisti r (joon. 94). Tarbija N, mille klemmidel on vaja pinget stabiliseerida, lülitatakse lambiga paralleelselt. Kogu ahela normaalrežiim valitakse nii, et vool lambis võrduks i_n-ga (joon. 93). Võrgu pinge u_1 muutumisel muutub takisti r vool $i_1 = i + i_2$. Kui need voolu i_1 kõikumised ei välju piiridest $\pm\Delta i$ (joon. 93), siis langevad nad praktiliselt

täielikult lambi voolule i. Lambi ja tarbija pinge u_2 ning tarbija vool i_2 tegelikult ei muutu. Pinge u_2 jääb stabiilseks ka tarbija takistuse muutumisel. Seejuures kompenseeritakse voolu i_2 muutumine lambi voolu i muutumisega. Pinge u_2 stabiliseerimiseks on tingimata vajalik, et võrgu pinge või tarbija takistuse kõikumistel jääks lambi vool piiridesse i' kuni i'' (joon. 93).

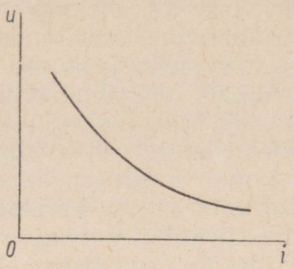
Ulatuslikku rakendamist leiab *elektrikaar*, mis on samuti elektriahela mittelineaarne element.



Joon. 94.



Joon. 95.



Joon. 96.

Elektrikaareks nimetatava nähtuse avastas professor V. V. Petrov 1802. a. Joonisel 95 on skemaatiliselt kujutatud elektromotoorse jõu allikast toidetav ja õhus atmosfäärirõhul põlev elektrikaar süsielektroodide vahel. Temperatuur katoodi aktiivosas K, mis kiirgab elektrone, on suurusjärgus 2700 ... 3150° C. Anoodi osa A, mida pommitavad elektronid ja millel on harilikult nõgus kuju, nimetatakse elektrikaare *kraatriks*. Kraatri temperatuur ulatub 3500 ... 3900° C. Katoodi aktiivosa ja kraatri vahel asubki elektrikaar D, mille temperatuur on kuni 4800° C. Kaare poolt hõivatud ruumis on gaasid ja aurud ioniseeritud seisundis. Seega kannavad kaares elektrilaenguid üle nii elektronid kui ka ioonid. Põhiliselt moodustab kaare voolu siiski elektronide voog. Kaart ennast ümbritseb oreool B, s. o. ümbris, milles toimub aurude ja söe osakeste põlemine ning ka õhu põlemisproduktide, s. o. lämmastikoksiidide moodustumine.

Akadeemik V. F. Mitkevitš teostas aastatel 1902—1905 elektrikaare uurimusi, milledega ta püstitas kaare põlemise üldised tingimused ja näitas samuti, et põhilisteks voolu kandjateks kaares on elektronid. V. F. Mitkevitši poolt korraldatud katsetest järeldub, et elektrikaare kujunemise ja püsimise põhitingimuseks on elektronide emissioon katoodilt. Termoelektronemissiooni puhul (V. F. Mitkevitši poolt uuritud juhtumil) on katoodi kõrge temperatuur kaare põlemise kohustusliku tingimusena hädavajalik. Anoodi kõrgel temperatuuril on teisejärguline tähtsus. Vastavalt viimastele uurimustele oletatakse, et sel juhtumil, kui on loodud tingimused küllalt võimsaks autoelektron-

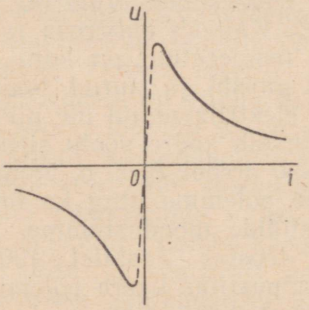
emissiooniks katoodilt, on võimalik kaare püsimine ka külma katoodi puhul. Seega *on elektrikaare tekkimise põhitingimuseks küllalt võimas elektronide emissioon katoodilt.*

Elektrikaar leiab kasutamist elektrotehnika paljudel aladel. P. N. Jablotškov pani 1876. a. oma kuulsa elektriküünla leiutamisega aluse laialdasele elektri kasutamisele valgustuseks. Praegusel ajal kasutatakse elektrikaart valgusallikana prožektorites ja projektsiooniaparaatides. Metallurgias kasutatakse võimsaid elektrikaari nn. elektrikaarahjudes. Väga laialdaselt on levinud elektrikaarega keevitamise meetod, mille põhialused andsid N. G. Slavjanov ja N. N. Benardos. Keemiatööstuses kasutatakse elektrikaart õhu lämmastiku sidumiseks. Elektrikaart kasutatakse laialdaselt veel vahelduvvoolu alaldavates seadistes.

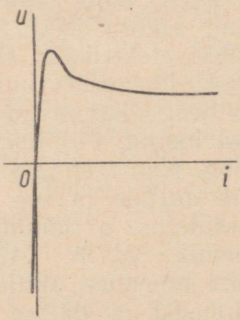
Elektrikaarel on eredalt väljenduv mittelineaarne karakteristik. Voolu i suurenemisel väheneb kaare pingelang u, s. t. kaarel on langev karakteristik (joon. 96). Mõlema ühesuguse elektroodi puhul on kaare karakteristik sümmeetriline (joon. 97).

Mittesümmeetriliste mittelineaarsete elementide hulka kuuluvad näiteks elektrikaar erisuguste elektroodide puhul, kujult erinevate elektroodidega huumlamp, elavhõbeventiil, kenotron, gasotron, pooljuhtventiil.

See asjaolu, et põhiliseks voolukandjaks elektrikaares on võimas negatiivse laenguga osakeste, elektronide voog ja et kaare püsimiseks on tingimata vajalik elektronide võimas emissioon katoodilt, s. o. negatiivselt elektroodilt, viibki meid järeldusele, et erisuguste elektroodide puhul peab kaare karakteristik olema mittesümmeetriline. Kõige teravamalt avaldub mittesümmeetria



Joon. 97.



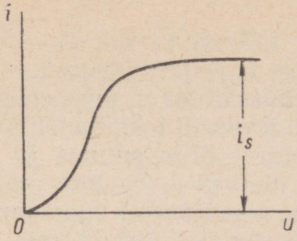
Joon. 98.

siis, kui üks elektroodidest on tingimustes, millede puhul tekib võimas elektronide emissioon sellelt elektroodilt, teine elektrood aga asetseb tingimustes, millede puhul temalt ei ole võimalik saada kuigi märgatavat elektronide emissiooni. Selline olukord tekib näiteks juhtumil, kui üks elektrood on kuumutatud kõrge temperatuurini, mis on küllaldane võimsaks termoelektronemissi-

ooniks, teine aga hoitakse kunstlikult külmana; või siis ühe elektroodi lähedal võivad kujuneda kõrged väljatugevused, mis on küllaldased võimsaks autoelektronemissiooniks, teise elektroodi pinna lähedal aga sellised väljatugevused tekkida ei saa. Nendel tingimustel juhib seadis voolu ainult ühes suunas ja on kasutatav vahelduvvoolu alaldamiseks. Selliste seadiste tähtsaks esindajaks on *elavhõbeventiil.* Viimane kujutab endast anumat, millest on võimalikult hoolikalt eemaldatud õhk ja mis on täidetud elavhõbeda aurudega. Katoodiks on vedel elavhõbe, anoodiks aga raud- või grafiitsilindrid. Elektrikaar põleb elavhõbeda aurus. Elektronide emissioon toimub vedela elavhõbeda pinnalt, nn. katoodtäpilt. Seega võib vool, aluseks võetud positiivsest suunast lähtudes, ventiili läbida ainult anoodilt katoodile. Katoodtäppi ei lasta kustuda harilikult kõrvalisest energiaallikast toidetava ergutuskaare abil. Viimane põleb katoodi ja selle lähedale asetatud abianoodi vahel. Elavhõbeventiili karakteristik, s. o. peaanoodi ja katoodi vahelise pinge *u* sõltuvus voolust *i* ergutuskaare olemasolul on näidatud joonisel 98. Kaare põlemisel on pingelang ventiilil väike (15...30 V) ja sõltub voolust vähesel määral. Vool elavhõbeda auru kaares moodustub mitte ainult elektronide liikumisest katoodilt anoodile, vaid ka positiivsete elavhõbeda ioonide liikumisest anoodilt katoodile. Seetõttu kuuluvad elavhõbeventiilid *ioonseadiste* hulka. Ventiili pinge märgi muutumisel on ventiili läbiv vastuvool tühine. Elavhõbeventiile valmistatakse nii väikesele võimsusele (kinnijoodetud klaasanumates) kui ka suurele võimsusele (tühjakspumbatavates raudanumates). Võimalus ehitada elavhõbeventiile väga kõrgetele, mitmesaja tuhande voldistele vastupingetele ning samaaegselt tugevatele, mitmesaja amprini ulatuvatele vooludele, omab erakordset tähtsust vahelduvvoolu alalisvooluks ja vastupidi muundamisel. Elavhõbeventiilidega muundusseadmeid kasutatakse kõrgepingelise alalisvooluliini otstes. Sellest tuleb juttu vahelduvvooluteooria vastavas osas.

Vahelduvvoolu alaldamiseks kasutatavate mittelineaarsete mittesümmeetriliste elementide tähtsaks esindajaks on *kenotron* — kahe elektroodiga vaakuumlamp. Kenotroni üht elektroodi kuumutatakse eri vooluallika abil nii kõrge temperatuurini, et tema pinnalt kiirguksid elektronid, kuna samal ajal on teise elektroodi temperatuur küllalt madal, et tema pinnalt ei saaks kiirguda elektrone. Seetõttu saab vool läbida kenotroni ainult siis, kui anood on katoodi suhtes positiivne. Kuna kenotronis moodustab voolu ainult elektronide liikumine, siis kuuluvad kenotronid *elektronseadiste* hulka.

Kenotroni karakteristik, s. o. tema voolu *i* sõltuvus anoodi ja katoodi vahelisest pingest *u*, on näidatud joonisel 99. Kui pinge *u* saavutab väärtuse, mille juures kõik katoodilt väljakiiratud elektronid anoodile kanduvad, saavutab vool *i küllastus-*



Joon. 99.

vooluks nimetatava piirväärtuse i_s. Küllastusvoolu väärtust võib suurendada ainult katoodi temperatuuri tõstmisega. See asjaolu, et vool ei küüni madalatel pingetel küllastusvooluni, on seotud antud hetkel selles ruumis asuvate ja katoodilt anoodile liikuvate elektronide negatiivse ruumlaengu olemasoluga katoodi ja anoodi vahelises ruumis. See negatiivne ruumlaeng moodustab katoodi ette positiivselt laetud anoodi väljale vastupidise elektrivälja, mis piirabki anoodi ja katoodi vahelise antud pinge puhul voolu. Karakteristiku algosas võib i ja u vahelise sõltuvuse esitada kujul $i = ku^{3/2}$, mida võib ka teoreetiliselt tõestada. Kenotrone on kerge ehitada kõrgele pingele, sest nendes on realiseeritud kõrge vaakuum. Kenotronide oluliseks puuduseks on nende suur pingelang, mis ongi seotud ülalmainitud negatiivse ruumlaengu mõjuga. Ioonseadised on selles suhtes kenotronidest paremad: nende pingelang on väike, sest ioonide positiivne laeng kompenseerib tunduval määral elektronide negatiivse laengu.

Vahelduvvoolu alaldamiseks kasutatavate ioonseadiste hulka kuuluvad peale ülalnimetatud elavhõbeventiilide samuti *gasotronid*. Gasotronid on nagu kenotronidki kõrvalisest energiaallikast kuumutatava tahke katoodiga lambid, mis on aga täidetud kas inertsete gaasidega või elavhõbeda aurudega. Viimasel juhtumil viiakse ballooni vedela elavhõbeda tilk, mille pinnal moodustuvadki elavhõbeda küllastunud aurud. Gasotroni karakteristik on kujult analoogiline elavhõbeventiili karakteristikuga (joon. 98).

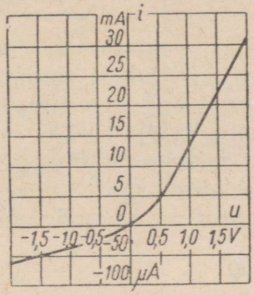
§ 35. Pooljuhtdioodid kui elektriahela mittelineaarsed elemendid

Pooljuhtdioodid, mis omavad mittesümmeetrilist mittelineaarset karakteristikut ehk tunnusjoont, on erakordselt laialdaselt levinud. Juba pika aja jooksul kasutatakse vahelduvvoolu alaldamiseks vask(I)oksiid- ja seleenpooljuhtventiile.

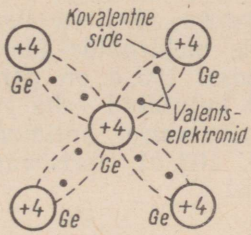
Joonisel 100 on toodud vask(I)oksiidiga kaetud vaskplaadist ja sellele asetatud pliiplaadist koosneva *pooljuhtventiili* mittelineaarne tunnusjoon. Need ventiilid omavad suurt juhtivust vask(I)oksiidilt plii poole ja väga väikest juhtivust vastupidises suunas.

Erilist huvi pakuvad üha laialdasemalt levivad germaaniumja ränipooljuhtventiilid. Vaatleme nendes ventiilides toimuvaid protsesse üksikasjalisemalt, sest niisugune käsitlus on edaspidi vajalik germaaniumtrioodide töötamispõhimõtte selgitamiseks.

Germaanium ja räni kuuluvad elementide neljandasse rühma — nende aatomite välises elektronkattes on neli valentselektroni. Germaaniumi kristallis paiknevad aatomid nii, et iga aatom asub nelja naaberaatomi vahel, mis asetsevad tema suhtes võrdsetel kaugustel ja ühesuguste nurkade all. Iga aatomi neli valentselektroni on nn. kovalentses sidemes nelja naaberaatomiga. Seega



Joon. 100.



Joon. 101.

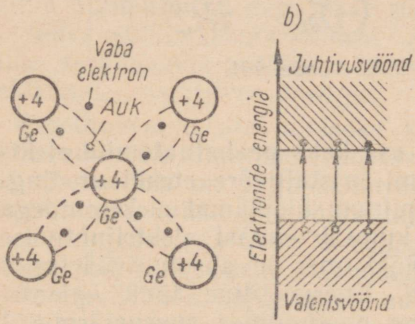
võtab igast kovalentsest sidemest osa kaks naaberaatomite elektroni. Joonisel 101 on germaaniumi kristallivõre struktuur tinglikult kujutatud tasapinnal. Aatomituum ülejäänud elektronidega on keemilises mõttes inertne ja kujutab endast elektrijuhtivuse seisukohalt positiivse laenguga jääki, mis on absoluutväärtuselt võrdne nelja elektroni laenguga. Energeetiline lünk valentsvööndi ja juhtivusvööndi vahel on pooljuhtides suurusjärgus 1 elektronvolt (germaaniumil 0,72 eV, ränil 1,11 eV), seega märgatavalt väiksem kui dielektrikutes. Seetõttu on pooljuhtides toatemperatuuril rohkem elektrone kui dielektrikutes võimelised ületama seda lünka ja üle minema juhtivusvööndisse. Seejuures tekivad valentsvööndis elektronide poolt hõivamata kohad, s. o. positiivsed augud. See protsess on skemaatiliselt näidatud kristallivõre mudelil joonisel 102, *a* ja energiadiagrammil joonisel 102, *b*. Pooljuhi juhtivuse määravad elektronid juhtivusvööndis ja augud valentsvööndis. Puhta germaaniumi eritakistus on $t = 20°$ C juures suurusjärgus $\varrho = 0{,}6$ Ωm, samal ajal kui sellisel dielektrikul nagu vilk $\varrho = 9 \cdot 10^{13}$ Ωm. Temperatuuri tõusmisel suureneb elektronide hulk, mis on võimelised ületama energeetilist lünka. Selle tagajärjel väheneb temperatuuri tõusul puhta germaaniumi eritakistus, s. o. puhta germaaniumi takistuse temperatuuritegur on negatiivne.

Erakordselt tähtis on asjaolu, et germaaniumi juhtivuse suurust ja iseloomu on võimalik mõjutada temale kolmanda (boor, indium) või viienda (arseen, antimon) rühma elementide tühiselt väikeste hulkade lisandamise teel.

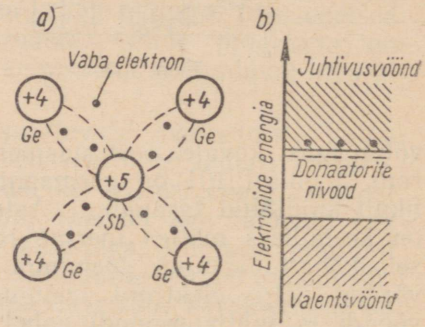
Eeldame, et germaaniumi kristalli on lisatud väike kogus

viienda rühma elementi, mille aatomid omavad viis valentselektroni. Lisandi aatomid asendavad kristallivõres germaaniumi aatomeid. Seejuures lisandi aatomi neli valentselektroni astuvad kovalentsetesse sidemetesse nelja naabruses asuva germaaniumi aatomiga, kuid viies lisandi aatomi valentselektron, mis neist sidemetest osa ei võta, osutub oma aatomiga nõrgalt seotuks. Ta vabaneb kergesti, muutudes vabaks juhtivuselektroniks, näiteks soojusliku liikumise toimel.

Seda tüüpi lisandeid nimetatakse elektronide donaatoriteks ehk «allikateks». Selliste lisanditega pooljuhte, mida iseloomustab vabade elektronide ülekaal, nimetatakse *n*-tüüpi pooljuhtideks. Joonisel 103, *a* on germaaniumi kristallivõre mudelil skemaatiliselt kujutatud vaba elektroni tekkimine ühe germaaniumi aatomi asendumisel antimonlisandi aatomiga. Energiadiagrammil (joon. 103, *b*) asetsevad donaatorite nivood energeetilises



Joon. 102.

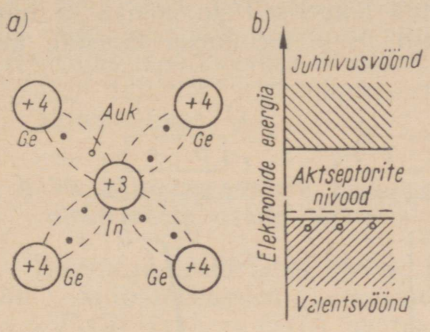


Joon. 103.

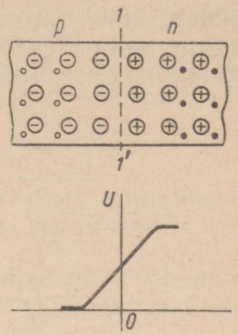
lüngas juhtivusvööndi lähedal, mistõttu donaatorite liigse elektroni vabastamiseks ja selle üleviimiseks juhtivusvööndisse on vaja vähe energiat. Pärast selle elektroni lahkumist kujutab lisandi aatom endast võresse kinnitatud positiivset iooni. Sellise elemendi tühiselt väike lisamine suurendab oluliselt germaaniumi elektrijuhtivust. Nii vähendab ühe donaatoraatomi lisamine 10^8 germaaniumi aatomi kohta germaaniumi eritakistust toatemperatuuril väärtuseni $\varrho = 0{,}04\ \Omega m$.

Eeldame nüüd, et germaaniumile on lisandatud väikeses koguses ühte kolmanda rühma elementi, mille aatomid omavad kolme valentselektroni. Need aatomid asendavad samuti kristallivõres germaaniumi aatomeid. Seejuures astuvad kolm lisandi aatomi valentselektroni kovalentsetesse sidemetesse kolme naabruses asuva germaaniumi aatomiga, kuid kovalentses sidemes neljanda germaaniumi aatomiga tekib elektroni poolt hõivamata koht, s. o. auk. Sellesse hõivamata kohta võib võrdlemisi kergesti üle minna elektron kõrvalasuvast kovalentsest sidemest, jättes

sinna augu. Sellesse uuesti tekkinud auku võib üle minna elektron järgmisest kovalentsest sidemest jne. Kõik toimub nii, nagu liiguks auguga ekvivalentne positiivselt laetud osake.



Joon. 104.



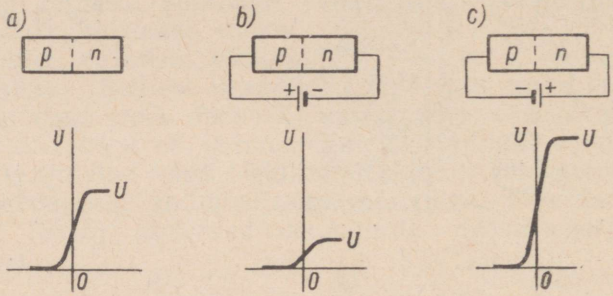
Joon. 105.

Seda tüüpi lisandeid nimetatakse elektronide aktseptoriteks ehk «vastuvõtjateks». Selliste lisanditega pooljuhte, mida iseloomustab aukjuhtivus, nimetatakse *p*-tüüpi pooljuhtideks. Kristallivõre mudelil (joon. 104, *a*) on skemaatiliselt kujutatud augu tekkimine germaaniumi ühe aatomi indiumlisandi aatomiga asendumise juhtumil. Energiadiagrammil (joon. 104, *b*) asetsevad aktseptorite nivood energeetilises lüngas valentsvööndi läheduses. See on kooskõlas asjaoluga, et valentsvööndist elektroni üleviimiseks aktseptorite nivoole koos augu tekkimisega valentsvööndis on vaja vähe energiat. Pärast augu lahkumist (täitumist) kujutab lisaelemendi aatom endast võresse kinnitatud negatiivset iooni.

Erineva juhtivusiseloomuga pooljuhtide saamine võimaldab luua seadiseid vahelduvvoolu alaldamiseks.

Eeldame, et germaaniumi proovitükisse on pinnast *1—1'* vasakule (joon. 105) sisse viidud aktseptorlisandid, sellest pinnast paremale aga donaatorlisandid, s. o. vasakul on *p*-tüüpi ja paremal *n*-tüüpi germaanium. Öeldakse, et pinna *1—1'* läheduses on *p—n* üleminek. Põhilisteks voolukandjateks on *p*-tüüpi germaaniumis augud ja *n*-tüüpi germaaniumis elektronid. Augud difundeeruvad vasakult paremale: piirkonnast *p* piirkonda *n*. Vabad elektronid difundeeruvad vastupidises suunas. Seega moodustub pinnast *1—1'* vasakule negatiivne jääklaeng ja paremale positiivne jääklaeng. Elektronide ja aukude rekombinatsiooni tagajärjel ei ole pinna *1—1'* lähedal asuvates piirkondades ei vabu elektrone ega auke, ning sisuliselt luuakse jääklaeng aktseptori negatiivsete ioonide poolt vasakul ja donaatori positiivsete ioonide poolt paremal. Seega tekib *p—n* ülemineku kohas paremalt vasakule suunatud elektriväli, mis takistab eda-

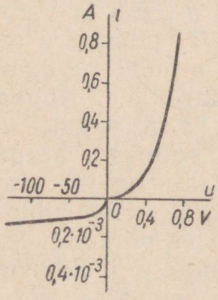
sist aukude ja elektronide difusiooni. Piirkonna *p* ja piirkonna *n* vahel moodustub elektripotentsiaalide vahe, s. o. tekib nn. potentsiaalbarjäär. Joonistel 105 all ja 106, *a* on näidatud potentsiaali jaotumine *p*—*n* ülemineku piirkonnas. Siin ja edaspidi on potentsiaali nullväärtuseks võetud leppeliselt potentsiaal *p*-tüüpi germaaniumi piirkonnas vahetult *p*—*n* ülemineku lähedal, kus ruumlaengut enam ei ole.



Joon. 106.

Ühendame sellise mudeli alalispingeallikaga, nagu näidatud joonisel 106, *b*. Sellise lülituse korral vähendab allika pinge potentsiaalbarjääri suurust ja põhilised voolukandjad (vasakul augud ja paremal elektronid) saavad võimaluse *p*—*n* ülemineku läbimiseks. Ahelas tekib nn. pärivool, mis kasvab allika pinge suurenemisel (joon. 107). Kui mudelile rakendada välisest allikast eelmise juhtumiga võrreldes vastupidise märgiga pinge, nn. vastupinge (joon. 106, *c*), suureneb potentsiaalbarjäär selle pinge võrra ja põhilised voolukandjad ei saa läbida eraldus-pinda *1*—*1'*. Siiski ei lakka vool täiesti.

Peale põhiliste voolukandjate, mis on põhjustatud lisandite olemasolust, esineb nii *p* kui ka *n* piirkonnas vähesel hulgal nn. mittepõhilisi voolukandjaid, millede laengute märgid on vastupidised põhiliste voolukandjate laengute märkidele. Nimelt *p* piirkonnas esineb vähesel arvul vabu elektrone ja *n* piirkonnas auke. Nad ilmuvad mõlemas piirkonnas soojusliku liikumise mõjul elektron-auk-paaride moodustumise tagajärjel vastavalt joonisel 102 näidatud skeemile. On ilmne, et need mittepõhilised voolukandjad läbivad vabalt potentsiaalbarjääri, sest siin elektriväli ei takista, vaid soodustab nende läbiminekut. Nad moodustavad nn. vastuvoolu. Vastupinge suurenemisel saavutab see vastuvool kiiresti oma piirväärtuse, mis on määratud



Joon. 107.

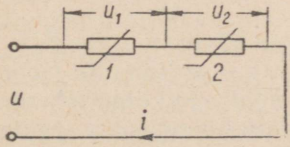
seadises ajaühiku jooksul tekitatavate elektron-auk-paaride arvuga. Vastuvool on pärivoolust palju kordi väiksem. Joonisel 107 on toodud germaaniumventiili tunnusjoon. Et samal joonisel oleks võimalik kujutada päri- ja vastuvoolu, on nad antud erinevates mõõtkavades. Pooljuhtventiilidega alaldid leiavad erakordselt laialdast rakendust elektrimõõteriistades, elektroonikas ja automaatikas.

§ 36. Mittelineaarseid elemente sisaldavate emj. allikateta elektriahela osade järjestik-, paralleel- ja segaühendus

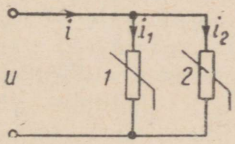
Koosnegu elektriahel (joon. 108) kahest järjestikku ühendatud mittelineaarsest elemendist, millede karakteristikud $u_1 = F_1(i_1)$ ja $u_2 = F_2(i_2)$ on teada. Sel juhtumil

$$u = u_1 + u_2, \qquad i_1 = i_2 = i.$$

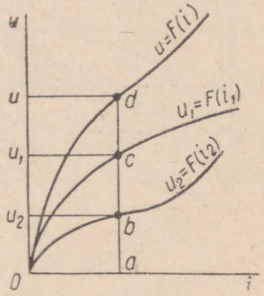
Kujutades joonisel 109 üksikute elementide teadaolevad karakteristikud kõveratena ja liites nende ordinaadid erinevate voolu väärtuste korral, saame tervikuna kogu ahela kohta kehtiva karakteristiku $u = F(i)$ punktid. Näiteks $ab + ac = ad$. Selle karakteristiku järgi on juba kerge leida i, u_1 ja u_2 väärtused u mistahes antud väärtuse korral.



Joon. 108.



Joon. 110.

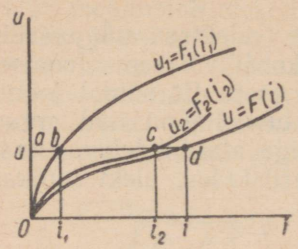


Joon. 109.

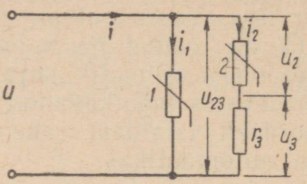
On ilmne, et seda meetodit võib laiendada mistahes arvu järjestikku ühendatud mittelineaarsete ja lineaarsete elementide juhtumile.

Koosnegu elektriahel (joon. 110) kahest paralleelselt ühendatud teadaoleva karakteristikuga mittelineaarsest elemendist. Sel korral

$$i = i_1 + i_2; \qquad u_1 = u_2 = u.$$



Joon. 111.



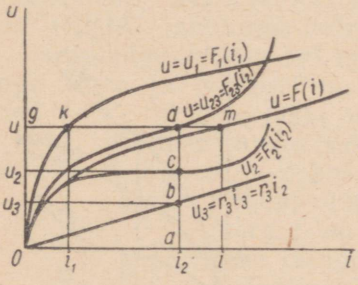
Joon. 112.

Liites joonisel 111 kõverate $u_1 = F_1(i_1)$ ja $u_2 = F_2(i_2)$ abstsissid, saame tervikuna kogu ahela kohta kehtiva karakteristiku $u = F(i)$ punktid. Näiteks $ab + ac = ad$.

Ahela järjestikku ja paralleelselt ühendatud eri osade segaühenduse korral kogu ahela karakteristiku saamiseks tervikuna võib kasutada neidsamu võtteid. Joonisel 112 ongi toodud kolme elemendi segaühenduse näide, kusjuures üks neist elementidest, nimelt kolmas, on lineaarse karakteristikuga. Saame järgmised võrrandid:

$$u = u_{23} = u_2 + u_3; \qquad u_3 = r_3 i_2;$$

$$i = i_1 + i_2; \qquad (i_3 = i_2, \quad u_{23} = u_1 = u).$$



Joon. 113.

Liidame algul kõverate $u_2 = F_2(i_2)$ ja $u_3 = r_3 i_3 = r_3 i_2$ ordinaadid (joon. 113). Saame teise ja kolmanda elemendi järjestikühenduse karakteristikut kujutava kõvera $u = F_{23}(i_2)$. Näiteks $ab + ac = ad$. Liites seejärel paralleelharude karakteristikuid kujutavate kõverate $u = F_{23}(i_2)$ ja $u = F_1(i_1)$ abstsissid, saame kogu ahela karakteristiku $u = F(i)$. Näiteks $gk + gd = gm$. Kasutades joonisel 113 toodud karakteristikute kogumit, on kerge leida ahela kõikide osade pinged ja voolud, kui üks pingetest (u, u_2 või u_3) või vooludest (i, i_1 või i_2) on antud.

§ 37. Mittelineaarseid elemente ja emj. allikaid sisaldavate elektriahela osade järjestik-, paralleel- ja segaühendus

Olgu vaatluse all haru järjestikku ühendatud mittelineaarsest elemendist ja emj. allikast (joon. 114), kusjuures mittelineaarse

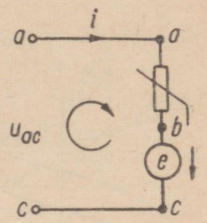
elemendi karakteristik $u_{ab} = F(i)$ ning emj. e suurus ja suund on antud. Kogu haru pinge punktide a ja c vahel

$$u_{ac} = u_{ab} + u_{bc} = u_{ab} - e_{bc}.$$

See sõltuvus saadakse, kui rakendada joonisel 114 ringikujulise noolega näidatud kontuurile Kirchhoffi teist seadust:

$$e_{bc} = u_{ca} + u_{ab} = -u_{ac} + u_{ab} \quad \text{või} \quad u_{ac} = u_{ab} - e_{bc}.$$

Kui emj. e mõjub voolu valitud positiivses suunas, s. t. $e_{bc} > 0$, siis positiivse voolu korral see aitab kaasa voolu läbimisele ja $e_{bc} < u_{ab}$ puhul see vähendab suurust u_{ac}. Joonisel 115, a on kujutatud mittelineaarse elemendi karakteristik $u_{ab} = F(i)$ ja sirge, mis vastab suurusele $e_{bc} > 0$. Siia on kantud ka kogu haru resulteeriv karakteristik $u_{ac} = F_1(i)$.

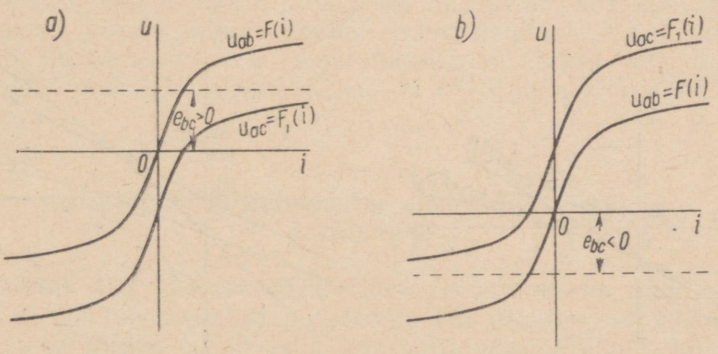


Joon. 114.

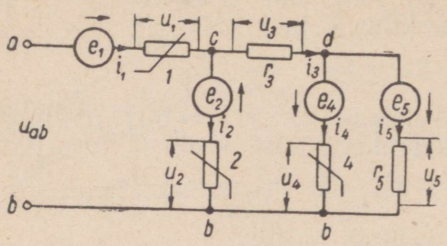
Joonisel 115, b on teostatud sama konstruktsioon, kuid suurus $e_{bc} < 0$, s. o. vaadeldavas harus toimib emj. allikas voolu valitud positiivsele suunale vastupidiselt.

Eeldame, et elektriahel (joon. 116) klemmide ab vahel koosneb mistahes arvust lineaarseid ja mittelineaarseid elemente ning emj. allikaid sisaldavatest järjestikku ja paralleelselt ühendatud osadest. Klemmidele a ja b on rakendatud pinge u_{ab}. Anname ette ahela kõikides harudes voolude positiivsed suunad. Elektromotoorsete jõudude suunad ja suurused kõikides harudes on antud, samuti on antud harude kõikide elementide karakteristikud. Ehitame äsja esitatud meetodil kõikide harude resulteerivad karakteristikud (joon. 117 ... 121).

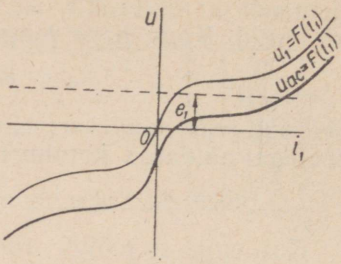
Kasutades neid karakteristikuid, rakendame edaspidi segaühenduse arvutamiseks neidsamu meetodeid, mis esitati eelmises paragrahvis. Niisiis joonisel 116 kujutatud ahela puhul liidame harude d—4—b ja d—5—b karakteristikuid kujutavate



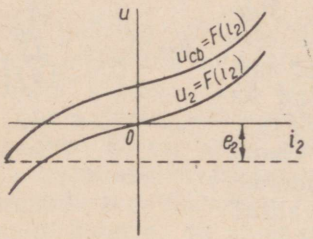
Joon. 115.



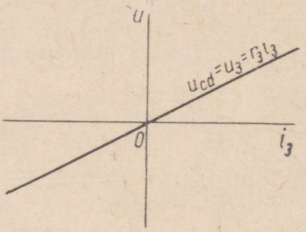
Joon. 116.



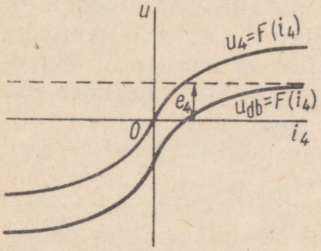
Joon. 117.



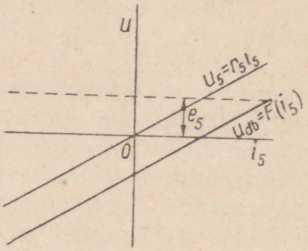
Joon. 118.



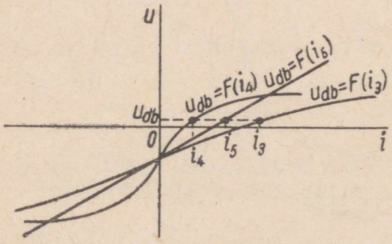
Joon. 119.



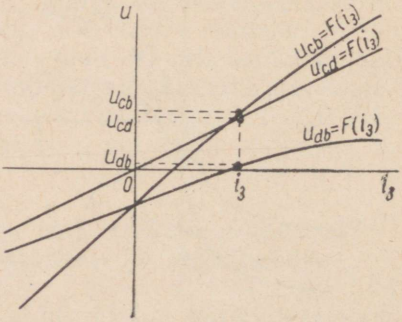
Joon. 120.



Joon. 121.



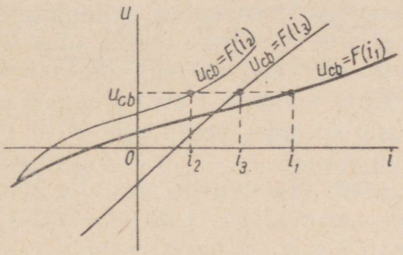
Joon. 122.



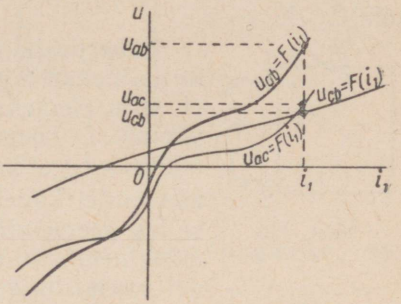
Joon. 123.

kõverate $u_{db} = F(i_4)$ ja $u_{db} = F(i_5)$ abstsissid, sest need harud on ühendatud paralleelselt. Saamegi nende paralleelselt ühendatud harude karakteristiku $u_{db} = F(i_3)$, mis on kujutatud joonisel 122. Liites seejärel kõvera $u_{db} = F(i_3)$ ordinaadid sirge $u_3 = r_3 i_3$ ordinaatidega, sest kolmas osa on ühendatud järjestikku paralleelselt ühendatud neljanda ja viienda osaga, saame kõigi nende kolme osa ühise karakteristiku $u_{cb} = F(i_3)$ (joon. 123).

Selle kõvera abstsissidele lisame teise haru karakteristikut kujutava kõvera $u_{cb} = F(i_2)$ abstsissid. Saame kogu ahela



Joon. 124.



Joon. 125.

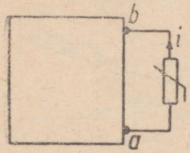
klemmide c ja b vahel oleva osa karakteristiku $u_{cb} = F(i_1)$ (joon. 124). Liites lõpuks selle kõvera ordinaadid kõvera $u_{ac} = F(i_1)$ ordinaatidega, leiame klemmide a ja b vahel oleva kogu ahela karakteristiku (joon. 125). Kasutades konstrueeritud karakteristikuid, leiame hõlpsasti kõikide harude voolud ja pinged, kui on antud kogu ahelale rakendatud pinge u_{ab}. Kui on antud üks vooludest või üks pingetest mingil haru osal, siis saab neist karakteristikuist määrata kõikide ülejäänud harude voolud ja pinged ning kogu ahela klemmipinge u_{ab}. Joonistel 122 ... 125 on kriipsjoonega näidatud ühe sellise erirežiimi lahendamine. Märgime, et kui klemmid a ja b on lühistatud, siis tekivad voolud ahelas ainult kõikide ahelas endas sisalduvate emj. allikate toimel. Seejuures $u_{ab} = 0$ ja järelikult määratakse lahendus joonisel 125 toodud karakteristiku $u_{ab} = F(i_1)$ ja abstsisstelje lõikepunktiga.

§ 38. Ühe mittelineaarse elemendiga liitahela arvutamine

Ükskõik kui keeruka elektriahela arvutamiseks, mis üldjuhtumil ei ole moodustatud järjestikku või paralleelselt ühendatud osadest ja milles on ükskõik kui palju emj. allikaid, kuid mis

sisaldab ainult üht mittelineaarset elementi, võib kasutada ekvivalentse generaatori meetodit.

Olgu mittelineaarne element lülitatud liitahela harusse *ab*. Joonisel 126 tõstame selle haru esile, kujutades liitahela kogu ülejäänud osa leppeliselt ristkülikuna. Selle ristküliku sees olev ahela osa koosneb ainult lineaarsetest elementidest ja emj. allikatest ning järelikult on tema kohta eraldi rakendatav superpositsiooni printsiip. Superpositsiooni printsiip aga ei ole rakendatav mittelineaarse elemendiga haru *ab* kohta ning järelikult ei ole ta rakendatav ka seda elementi sisaldava kogu ahela kohta.



Joon. 126.

Superpositsiooni printsiip ei ole rakendatav mittelineaarse elemendiga haru kohta sellepärast, et selle elemendi takistus r sõltub temas olevast voolust i. Tõepoolest, oletame, et me lahutasime otsitava tegeliku režiimi vooluga i mittelineaarses elemendis kaheks osarežiimiks vooludega i' ja i'' selles elemendis, kusjuures $i = i' + i''$. Pinged mittelineaarsel elemendil tegelikul režiimil ja nendel osarežiimidel on vastavalt: $u = ri$, $u' = r'i'$ ja $u'' = r''i''$. Kuna r sõltub i-st, siis üldiselt võttes $r' \neq r'' \neq r$ ja järelikult $u \neq u' + u''$. Seepärast me ei saagi tegelikku vooluga i ja pingega u režiimi osarežiime teineteisele superponeerides ehk ülestades.

Siiski on superpositsiooni resultaat õige, kui ühes osarežiimis mittelineaarse elemendi vool i' ja pinge u' puuduvad, s. o. $i' = 0$ ja $u' = 0$, teises osarežiimis aga on vool i'' võrdne tegeliku režiimi vooluga i; järelikult on siis ka pinge u'' võrdne tegeliku režiimi pingega u. Seejuures

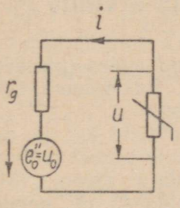
$$i = 0 + i'' \quad \text{ja} \quad u = 0 + u''.$$

Selleks et need kaks osarežiimi annaksid superpositsiooni puhul tegelikud voolud ja pinged kogu antud mittelineaarset elementi sisaldavas liitahelas, on vajalik, et nendes režiimides igas k-ndas harus toimivate elektromotoorsete jõudude e_k' ja e_k'' summa oleks võrdne tegeliku elektromotoorse jõuga e_k selles harus, s. o., et $e_k' + e_k'' = e_k$.

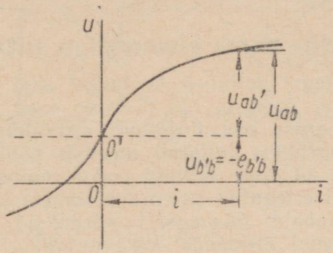
Kõiki neid nõudeid rahuldab ekvivalentse generaatori meetod. Kasutades seda meetodit, viime nõutava esimese režiimi saamiseks mittelineaarse elemendiga harusse *ab* sisse niisuguse lisaelektromotoorse jõu e_0', et kõikides ülejäänud harudes antud elektromotoorsete jõududega e_k võrdsete elektromotoorsete jõudude e_k' mõjumisel vool mittelineaarses elemendis saaks võrdseks nulliga: $i' = 0$. Olgu mittelineaarse elemendi karakteristik niisugune, et seejuures $u' = 0$. Emj. e_0' on võrdne ja vastupidine pingega u_0, mille tekitavad kõik antud emj. allikad mittelineaarse

elemendiga haru katkestamisel selle haru katkestuskohas, s. o. $e_0' = -u_0$.

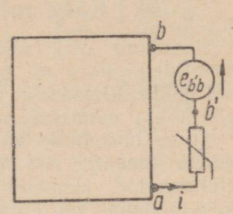
Teises osarežiimis viime mittelineaarse elemendiga harusse sisse emj. $e_0'' = -e_0' = u_0$, kõik antud emj. allikad aga lühistame, säilitades harudes nende sisetakistused, s. o. võtame $e_k'' = 0$.



Joon. 127.



Joon. 128.



Joon. 129.

Ülestades need kaks osarežiimi, saame ahela lineaarse osa kõikides harudes:

$$e_k' + e_k'' = e_k + 0 = e_k; \quad i_k' + i_k'' = i_k$$

ja harus a,b:

$$e_0' + e_0'' = 0; \quad u' + u'' = 0 + u'' = u; \quad i' + i'' = 0 + i'' = i,$$

s. o. saame otsitava tegeliku režiimi kogu ahelas.

Tähistades nagu varemgi r_g-ga kogu ahela klemmide a ja b vahelise lineaarse osa takistuse, kui emj. allikad temas on lühistatud, saame:

$$i = \frac{u_0}{r_g + r(i)},$$

kus $r(i)$ on mittelineaarse elemendi takistus, kui vool temas on i. Seega me asendame ahela kogu keeruka lineaarse osa ekvivalentse generaatoriga, mille emj. $e_0'' = u_0$ ja sisetakistus on r_g (joon. 127). Suuruste u_0 ja r_g arvutused on puhtlineaarsed ülesanded ja neid võib lahendada § 27 . . . 33 esitatud meetoditega. Voolu i leidmine joonisel 127 kujutatud ahelas on kergesti teostatav § 36 toodud graafilise konstruktsiooniga, kui on antud mittelineaarse elemendi karakteristik $u = F(i)$.

Ülaltoodus oli ainult üks piirav tingimus, et karakteristik $u = F(i)$ läbiks koordinaatide alguspunkti, s. o. et $i = 0$ puhul samuti ka $u = 0$. Kui see pole nii (joon. 128), siis, nihutades abstsisstelge selliselt, et karakteristik läbiks uut koordinaatide alguspunkti O', näeme, et tegelik mittelineaarne element, mille karakteristik $u_{ab} = F(i)$ ei läbi koordinaatide alguspunkti, on asendatav koordinaatide alguspunkti läbivat karakteristikut

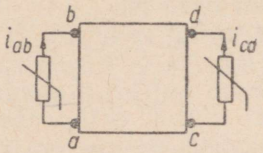
$u_{ab'} = F'(i) = F(i) - u_{b'b} = F(i) + e_{b'b}$ omava mittelineaarse elemendi ja sisetakistuseta emj. e_{bb} allika järjestikühendusega (joon. 129).

Kui see emj. allikas lugeda ahela lineaarse osa juurde kuuluvaks, siis on klemmide a ja b' suhtes õiged kõik ülaltoodud arutlused.

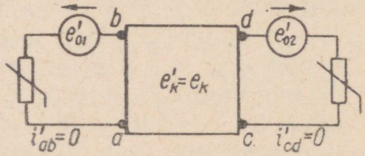
§ 39. Kahe mittelineaarse elemendiga liitahela arvutus

Sisaldagu emj. allikatega kuitahes keerukas ahel kaks mittelineaarsete elementidega haru *ab* ja *cd*. Joonisel 130 tõstame need harud esile, kujutades ahela kogu ülejäänud lineaarse osa tinglikult ristkülikuna. Rakendame selle ahela kohta eelmises paragrahvis esitatud meetodi põhimõtet.

Viime harudesse *ab* ja *cd* sisse sellised elektromotoorsed jõud e_{01}' ja e_{02}', et ahela lineaarse osa kõigi etteantud elektromotoorsete jõudude toimel mõlema mittelineaarse elemendi voolud *üheaegselt* võrduksid nulliga (joon. 131). Olgu mõlema mittelineaarse elemendi karakteristikud sellised, et nendes elementides voolude puudumisel nende pinged võrduksid nulliga. Sellisel juhtumil on elektromotoorsed jõud e_{01}' ja e_{02}' võrdsed ja vastupidised pingetega u_{01} ja u_{02}, mis tekivad mõlemate mittelineaarseid elemente sisaldavate harude *üheaegsel* lahtiühendamisel nende harude katkestuskohtades (joon. 132). Nende pingete leidmine osutub lineaarseks ülesandeks.



Joon. 130.



Joon. 131.

Kui nüüd ahela lineaarses osas lühistada kõik etteantud emj. allikad ($e_k'' = 0$), säilitades harudes nende allikate sisetakistused, ning viia ahelatesse *ab* ja *cd* sisse allikad, millede elektromotoorsed jõud olgu $e_{01}'' = -e_{01}' = u_{01}$ ja $e_{02}'' = -e_{02}' = u_{02}$ (joon. 133), siis eelmise paragrahvi arutluste põhjal võib kinnitada, et selles režiimis on mittelineaarsete elementide voolud võrdsed otsitavate vooludega i_{ab} ja i_{cd}, mis tekivad nendes harudes tegelikus liitahelas (joon. 130) kõikide antud elektromotoorsete jõudude toimel.

Ülesande lihtsustamine seisneb selles, et suure arvu liitahela harudes mõjuvate etteantud elektromotoorsete jõudude asemel on meil nüüd ainult kaks ekvivalentset elektromotoorset jõudu e_{01}'' ja e_{02}'', mis on ühendatud mittelineaarsete elementidega harudesse. Seejuures muutus liitahela kogu lineaarne osa, nagu öeldakse, *passiivseks*, s. o. elektromotoorse jõu allikaid mittesisaldavaks.

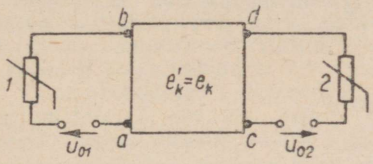
Seda võtet võib seetõttu nimetada liitahela kogu lineaarsest osast *elektromotoorsete jõudude vaadeldavatesse eraldatud harudesse väljatoomise meetodiks*.

Seega taandub ülesanne joonisel 132 kujutatud lineaarse ahela ning joonisel 133 toodud mittelineaarse ahela arvutamiseks. Nende kahe ülesande lahendamisel leitud voolude summeerimise teel saadakse voolud kõikides harudes. Voolud mittelineaarsetes harudes saadakse kohe teise ülesande lahendusest, sest esimese ülesande puhul on nad võrdsed nulliga.

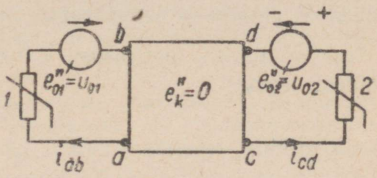
Teine, mittelineaarne ülesanne (joon. 133) lahendatakse liitahela lineaarse osa asendamise teel lihtsa *ekvivalentse* skeemiga, mis käitub klemmide a ja

b ning klemmide *c* ja *d* suhtes samuti kui tegelik liitahelgi, s. o. samade pingete puhul nendel klemmidel osutuvad neid klemme läbivad voolud ekvivalentses skeemis samasugusteks kui tegelikus liitahelas.

Näitame sellise asenduse võimalikkust ja leiame lihtsaima ekvivalentse skeemi kuju.



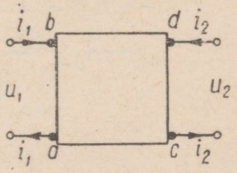
Joon. 132.



Joon. 133.

Kuitahes keerukat elektriahelat, millel on kaks paari klemme, kusjuures kummaski paaris on vastava välise ahela suhtes üks klemmidest sisenemisklemm ja teine väljumisklemm, nimetatakse *neliklemmiks*. Kui neliklemmis sisalduvad emj. allikad (või vooluallikad), siis seda neliklemmi nimetatakse *aktiivseks* neliklemmiks. Nii näiteks on joonisel 130 kujutatud neliklemm klemmide *a* ja *b* ja klemmide *c* ja *d* vahel aktiivne. Kui aga neliklemmi sees ei ole emj. allikaid (või vooluallikaid), siis sellist neliklemmi nimetatakse *passiivseks*. Joonisel 133 kujutatud neliklemm klemmide *a* ja *b* ja klemmide *c* ja *d* vahel on passiivne. Edaspidi tutvume neliklemmide üldise teooriaga, milles uuritakse sisend- ja väljundklemmidele (joon. 134) rakendatud pingete $u_1 = u_{ba}$ ja $u_2 = u_{dc}$ ning voolude i_1 ja i_2 vahelist seost. Praegu piirdume ainult lineaarseid elemente sisaldava passiivse neliklemmi lihtsaima aseskeemi leidmise ülesandega.

Olgu sekundaarne välisahel katkestatud ($i_2 = 0$) ning olgu klemmidele *a* ja *b* rakendatud primaarse välisahela poolt pinge u_1'. Selle pinge mõjul siseneb neliklemmi klemmi *b* kaudu ja väljub klemmi *a* kaudu vool i_1. Neliklemmi kõigi elementide lineaarsuse tõttu on vool i_1 võrdeline pingega u_1'. Täpselt samuti on pinge u_2', mis seejuures tekib katkestatud sekundaarklemmidel, võrdeline vooluga i_1.



Joon. 134.

Järelikult

$$u_1' = R_{11} i_1; \qquad u_2' = R_{21} i_1,$$

kus suurustel R_{11} ja R_{21} on takistuse dimensioon. Neid võib määrata äsjavaadeldud režiimiga ahela arvutusest või kindlaks teha eksperimentaalselt.

Olgu nüüd primaarahel katkestatud ($i_1 = 0$), kuid sekundaarklemmidele olgu rakendatud pinge u_2'', mille mõjul tekib vool i_2. Seejuures tekib katkestatud primaarklemmidel pinge u_1''.

Võib kirjutada:

$$u_1'' = R_{12} i_2; \qquad u_2'' = R_{22} i_2.$$

Selle režiimi jaoks on võimalik arvutada või eksperimentaalselt määrata parameetrid R_{22} ja R_{12}. Superponeerides need kaks režiimi, saame neliklemmi võrrandid üheaegselt primaar- ja sekundaarklemmidel mõjuvate pingete $u_1 = u_1' + u_1''$ ja $u_2 = u_2' + u_2''$ puhuks:

$$u_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2; \qquad u_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2.$$

Vastastikkuse printsiibi alusel võib väita, et $R_{12} = R_{21}$. Tõepoolest, olgu sekundaarahel lühistatud ($u_2 = 0$) ja primaarahelasse, mis omab samuti nulliga võrduvat takistust, olgu lülitatud emj. $e_1 = u_1$ allikas. Seejuures

$$e_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2; \qquad 0 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2.$$

Avaldades i_1 teisest võrrandist i_2 kaudu ja asendades esimesse, saame:

$$e_1 = \frac{R_{12}R_{21} - R_{11}R_{22}}{R_{21}}\, i_2.$$

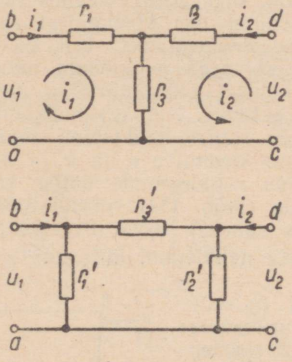
Kui, vastupidi, lühistada primaarklemmid ja lülitada nulliga võrduvat takistust omavasse sekundaarahelasse emj. $e_2 = u_2$ allikas, siis

$$0 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2; \qquad e_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2,$$

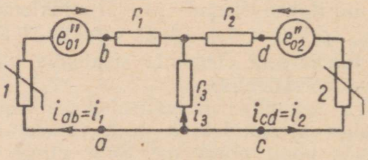
millest leiame:

$$e_2 = \frac{R_{21}R_{12} - R_{22}R_{11}}{R_{12}}\, i_1.$$

Kooskõlas vastastikkuse printsiibiga, kui $e_1 = e_2$, peab nende režiimide puhul $i_1 = i_2$, järelikult on võrdsed i_2 ja i_1 ees kordajatena seisvad suurused, mis leiab aset, kui $R_{12} = R_{21}$.



Joon. 135.



Joon. 136.

Seega sisaldavad neliklemmi võrrandid ainult kolme sõltumatut parameetrit: R_{11}, R_{22} ja R_{12}. Vastavalt peab lihtsaim neliklemmi aseskeem ehk ekvivalentne skeem omama ka ainult kolme elementi. Selliseid skeeme saab olla kaks ja nad on kujutatud joonisel 135. Esimest nimetatakse T-kujuliseks skeemiks, teist Π-kujuliseks skeemiks. Teine saadakse esimesest tähtühenduse teisendamisega ekvivalentseks kolmnurkühenduseks. T-kujuline skeem kujutab endast ahelat kahe sõltumatu kontuuriga, mille kontuurvoolud on i_1 ja i_2. Eespool kirjutatud neliklemmi võrrandid

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2; \qquad u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$$

osutuvad kontuurvoolude võrranditeks selle skeemi jaoks.

On ilmne, et kontuuride omatakistused

$$R_{11} = r_1 + r_3; \qquad R_{22} = r_2 + r_3$$

ning vastastikune takistus $R_{12} = r_3$.

Siit määratakse T-kujulise ekvivalentse skeemi takistused r_1, r_2 ja r_3 neliklemmi parameetrite R_{11}, R_{22} ja R_{12} kaudu. Viimased on eeltoodud viisil arvutatud või eksperimentaalselt määratud.

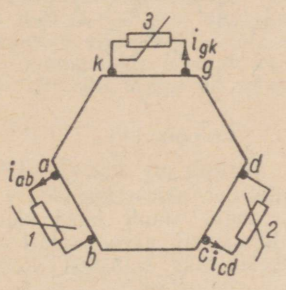
Asendades joonisel 133 kujutatud neliklemmi temaga ekvivalentse T-kujulise skeemiga, saame ahela (joon. 136), mida on lihtne arvutada § 37 esitatud graafiliste võtetega.

§ 40. Kolme mittelineaarse elemendiga liitahela arvutamine

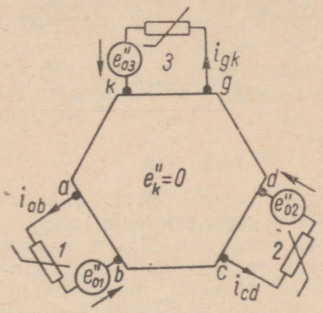
Sisaldagu kuitahes keerukas emj. allikatega elektriahel kolm mittelineaarsete elementidega haru *ab*, *cd* ja *gk*. Eraldame joonisel 137 need harud, tähistades kogu ülejäänud lineaarse osa tinglikult kuusnurgana.

See kolme klemmipaari omav osa, mille iga paari üks klemm osutub vastava välisahela (või haru) suhtes sisenemis- ja teine väljumisklemmiks, kujutab nn. *kuusklemmi*. Antud juhtumil osutub kuusklemm *aktiivseks*, sest ta sisaldab emj. allikaid.

Viime kõikidesse väljatoodud mittelineaarsetesse harudesse niisugused elektromotoorsed jõud e_{01}', e_{02}' ja e_{03}', et kõikide antud elektromotoorsete jõudude toimel oleksid voolud i_{ab}, i_{cd} ja i_{gk} mittelineaarsetes elementides *üheaegselt* võrdsed nulliga. Need elektromotoorsed jõud e_{01}', e_{02}' ja e_{03}' on märgilt vastupidised, kuid suuruselt võrdsed pingetega u_{01}, u_{02} ja u_{03}, mis tekivad harude *ab*, *cd* ja *gk* katkestuskohas kõikide antud elektromotoorsete jõudude toimel.



Joon. 137.



Joon. 138.

Kui nüüd tuua mittelineaarsetesse harudesse elektromotoorsed jõud $e_{01}'' = -e_{01}' = u_{01}$, $e_{02}'' = -e_{02}' = u_{02}$, $e_{03}'' = -e_{03}' = u_{03}$ ja lühistada kõik antud emj. allikad, säilitades vastavates harudes nende sisetakistused (joon. 138), siis on voolud mittelineaarsetes harudes võrdsed tegeliku ülesande otsitavate vooludega i_{ab}, i_{cd} ja i_{gk}. Klemmide *a* ja *b*, *c* ja *d*, *g* ja *k* vaheline kuusklemm osutub seejuures passiivseks.

Passiivse lineaarse kuusklemmi (joon. 139) kohta kehtivad järgmised võrrandid:

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{13}i_3;$$
$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{23}i_3;$$
$$u_3 = R_{31}i_1 + R_{32}i_2 + R_{33}i_3,$$

kus $u_1 = u_{ba}$, $u_2 = u_{dc}$ ja $u_3 = u_{kg}$ on kuusklemmi klemmidele väljastpoolt rakendatud pinged.

Neid võrrandeid on kerge saada superpositsiooni printsiibi alusel. Kui rakendada pinge u_1' ainult klemmidele *b* ja *a* ning teine ja kolmas välisahel katkestada ($i_2 = 0$ ja $i_3 = 0$), siis saame:

$$a_1' = R_{11}i_1; \qquad u_2' = R_{21}i_1; \qquad u_3' = R_{31}i_1.$$

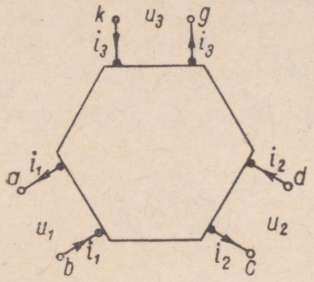
Rakendades pinge u_2'' klemmidele *d* ja *c* ning katkestades esimese ja kolmanda välisahela, saame:

$$u_1'' = R_{12}i_2; \qquad u_2'' = R_{22}i_2; \qquad u_3'' = R_{2}i_2.$$

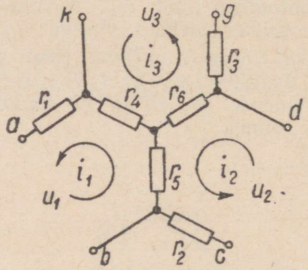
Lõpuks, katkestatud esimese ja teise välisahela korral välise pinge u_3'' toimel klemmide k ja g vahel saame:

$$u_1''' = R_{13}i_3; \qquad u_2''' = R_{23}i_3; \qquad u_3''' = R_{33}i_3.$$

Ülestades need kolm režiimi ja võttes arvesse, et $u_1' + u_1'' + u_1''' = u_1$, $u_2' + u_2'' + u''' = u_2$ ja $u_3' + u_3'' + u_3''' = u_3$, saame lineaarse passiivse kuusklemmi ülalkirjutatud võrrandid. Nendesse võrranditesse asetatavad parameetrid määratakse arvutuslikult või katseliselt äsjavaadeldud kolmest osarežiimist.



Joon. 139.



Joon. 140.

Vastastikkuse printsiibi põhjal võib väita, et $R_{21} = R_{12}$, $R_{32} = R_{23}$ ja $R_{31} = R_{13}$. Seega sisaldavad kuusklemmi võrrandid ainult kuus sõltumatut parameetrit ja järelikult peab kuusklemmi lihtsaimal ekvivalentsel skeemil olema kuus elementi. Joonisel 140 on kujutatud üks sellistest võimalikest skeemidest kolme sõltumatu kontuuriga, millede voolud on i_1, i_2 ja i_3. Kuusklemmi võrrandid kujutavadki selle ekvivalentse skeemi kontuurvoolude võrrandeid.

Kontuuride omatakistused

$$R_{11} = r_1 + r_4 + r_5; \qquad R_{22} = r_2 + r_5 + r_6; \qquad R_{33} = r_3 + r_6 + r_4.$$

Vastastikused takistused R_{12}, R_{23} ja R_{31} on negatiivsed, sest kontuurvoolude positiivsed suunad on ühistes harudes vastupidised, kuid kuusklemmi võrrandeisse me kirjutasime kõik liikmed plussmärgiga. Saame:

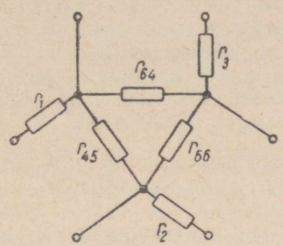
$$R_{12} = R_{21} = -r_5; \qquad R_{23} = R_{32} = -r_6; \qquad R_{13} = R_{31} = -r_4.$$

Neist võrrandeist määratakse kuusklemmi parameetrite kaudu ekvivalentse skeemi elementide takistused.

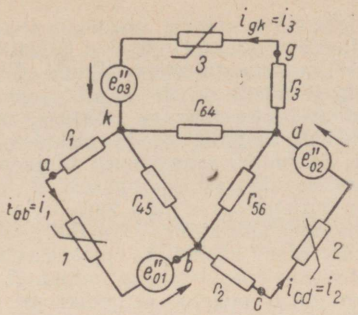
Asendame takistuste r_4, r_5 ja r_6 tähtühenduse jooniselt 140 ekvivalentse kolmnurkühendusega. Saame kuusklemmi teise võimaliku ekvivalentse skeemi (joon. 141), mida kasutades teisendame joonisel 138 kujutatud skeemi joonisel 142 esitatud kujusse.

Selles skeemis on harud indeksitega 1 ja 45, 2 ja 56, samuti ka 3 ja 64 paarikaupa paralleelselt ühendatud, nende harude paaridest moodustatud kontuurid aga on omavahel järjestikku. Kolmes harus on mittelineaarsed elemendid ja emj. allikad. Niisugust ahelat on kerge arvutada § 37 esitatud graafiliste võtete abil.

Märgime, et erijuhtumil, kui antud tegeliku liitahela kõik kolm mittelineaarsete elementidega haru suunduvad tähtühendust moodustades ühte sõlme, osutub nende harude samaaegse katkestamise korral see sõlm kogu ahelast väljalülitatuks. Selle sõlme potentsiaal ei ole määratav ahela teiste punktide suhtes ja järelikult ei ole määratavad ka pinged katkestuskohtades. Kuid sel juhtumil on küllaldane katkestada ainult kaks mittelineaarsete elementidega haru, sest vool kolmandas mittelineaarse elemendiga harus on sel



Joon. 141.



Joon. 142.

juhtumil niikuinii võrdne nulliga. Seega mittelineaarsete elementide voolude arvutamiseks on küllalt, kui sisse viia ainult kaks ekvivalentset emj. allikat, näiteks e_{01}'' ja e_{02}''. Juhtumil kui mittelineaarse elemendi karakteristik ei läbi koordinaatide alguspunkti, võib selle mittelineaarse elemendi asendada koordinaatide alguspunkti läbivat karakteristikut omava mittelineaarse elemendiga ja emj. allikaga, nagu oli näidatud § 38 lõpus.

§ 41. Nelja ja enama mittelineaarse elemendiga liitahela arvutamine. Järkjärgulise lähenemise meetod

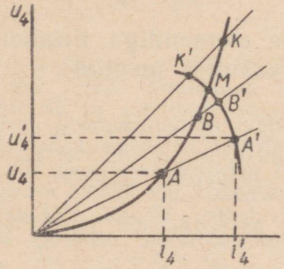
Sel juhtumil, kui liitahela koostisse kuuluv mittelineaarseid elemente sisaldav harude grupp on ühendatud ahela ülejäänud osaga kahe klemmi kaudu ja kui tema sees on ainult järjestik- ja paralleelühendused, siis § 36 ja 37 toodud meetodite abil saab selle grupi asendada ühe üldise ekvivalentset mittelineaarset karakteristikut omava ekvivalentse haruga. Kui selliseid gruppe ei ole rohkem kui kolm, siis lahendub ülesanne eelmises kolmes paragrahvis näidatud meetoditega.

Siiski võib juhtuda, et niisuguseid gruppe on võimatu moodustada. Näiteks sisaldagu ahel nelja mittelineaarsete elementidega haru, mida ei saa ühendada sellisteks gruppideks. Kui eraldame liitahelast need neli haru, siis järelejäänud ahela lineaarne osa moodustab aktiivse kaheksaklemmi. Eelmistes paragrahvides esitatud meetoditega võib sellest kaheksaklemmist välja tuua kõik elektromotoorsed jõud, asendades nad nelja ekvivalentse elektromotoorse jõuga neljas mittelineaarses harus. Siiski ei ole võimalik järelejäänud passiivset kaheksaklemmi üldjuhtumil niisuguse ekvivalentse skeemiga asendada, et tema poolt koos nelja mittelineaarse elemendiga moodustatud ahel sisaldaks ainult järjestik- ja paralleelühendusi. Seepärast ei osutu ka võimalikuks § 37 toodud graafilist võtet lahendamiseks kasutada.

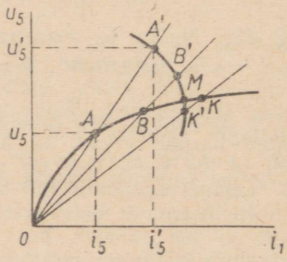
Sellisel keerukal juhtumil võib kasutada järkjärgulise lähenemise meetodit ehk nn. iteratsioonimeetodit. Anname meelevaldselt ette voolu i_4 väärtuse neljandas mittelineaarses harus. Selle haru teadaoleva karakteristiku (joon. 143) järgi määrame pinge u_4 (karakteristiku punkt A) ja haru takistuse $r_4 = \frac{u_4}{i_4}$. Asendame neljanda mittelineaarse haru lineaarsega, millel on samasugune takistus r_4, kuid mis ei sõltu voolust. Seega asendame mittelineaarse karakteristiku joonisel 143 koordinaatide algusest läbi punkti A mineva sirgega. Seejuures taandub ülesanne kolme mittelineaarse haruga ülesandeks, mis lahendub eelmises paragrahvis toodud meetodiga. Teostades

sellise lahenduse, leiame voolu i_4' ja pinge u_4' väärtused (punkt A' joonisel 143), mis esineksid siis, kui neljanda mittelineaarse takisti asemele oleks lülitatud lineaarne takisti r_4. Punkt A' ei asetse mittelineaarse takisti karakteristikul, järelikult ei ole leitud i_4' ja u_4' väärtused meie ülesande lahenditeks. Anname ette teise r_4 väärtuse, mis vastab näiteks mittelineaarse haru karakteristiku punktile B, ja oletades, et $r_4 = \text{const}$, teostame uuesti ahela arvutuse. Seejuures saame uued i_4' ja u_4' väärtused, mis määravad punkti B' koordinaatide algusest läbi punkti B mineval sirgel. Kuna punkt B' samuti ei asetse mittelineaarse haru karakteristikul, siis ka uued i_4' ja u_4' ei ole tegeliku ülesande lahenditeks. Kuivõrd esimesel lahendamisel saadi punkti A' jaoks suuremad voolud ja pinged kui punkti A jaoks, siis oli loomulik valida teiseks lahendamiseks punkt B karakteristikul punktist A kõrgemal. Seejuures tuleb oodata, et punkt B' osutub karakteristikule lähemaks kui punkt A'. Teostame niisugust arvutust rea punktide jaoks seni, kuni mingile punktile, näiteks K-le, vastav punkt K' satub teisele poole karakteristikut. Kui nüüd tõmmata kõver läbi punktide $A', B', \ldots K'$, siis selle kõvera ja neljanda mittelineaarse haru karakteristiku lõikepunkt M annab suuruste i_4, u_4 ja $r_4 = \frac{u_4}{i_4}$ otsitavad väärtused. Tehes nüüd veel kord kogu kolme mittelineaarse elemendiga elektriahela arvutuse selle $r_4 = \text{const}$ väärtuse juures, leiame voolud ja pinged kõikides ülejäänud harudes.

Kui elektriahel sisaldab viis mittelineaarset haru, mida ei saa ühendada järjestik- ja paralleelühendustega harude gruppideks, siis võib järkjärgulise lähenemise meetodit kasutades toimida järgmisel viisil.



Joon. 143.



Joon. 144.

Anname ette viienda mittelineaarse haru takistuse väärtuse r_5, mis vastab tema karakteristiku mingile punktile. Selle $r_5 = \text{const}$ väärtuse juures teeme r_4 rea väärtuste jaoks arvutused, nagu äsja esitati, ja leiame karakteristikut $u_4 = F(i_4)$ rahuldava lahenduse. Seejuures saadud u_5' ja i_5' väärtused ei vasta üldjuhtumil siiski viienda haru karakteristikule $u_5 = F(i_5)$; näiteks vastab etteantud r_5 väärtus karakteristiku $u_5 = F(i_5)$ punktile A (joon. 144), leitud i_5' ja u_5' väärtused aga määravad punkti A'. Anname ette uue r_5 väärtuse (punkt B joonisel 144) ja viime uuesti läbi arvutuste seeria, kuni karakteristik $u_4 = F(i_4)$ on rahuldatud. Saame uued i_5' ja u_5' väärtused (punkt B' joonisel 144). Tehes mitu niisuguste arvutuste seeriat erinevate r_5 väärtuste juures, saame tõelise väärtuse (punkt M) joonisel 144 läbi punktide $A', B', \ldots K'$ mineva kõvera lõikumisel viienda haru karakteristikuga.

Vaadeldud meetodid haaravad kõiki tähtsamaid juhtumeid. Tõepoolest, teravalt avalduvat mittelineaarsust omavate elementidega elektriahelaid luuakse praktikas nende ahelate eriomaduste saamiseks. Nendest eriomadustest räägitakse järgmises paragrahvis. Siiski on vaevalt võimalik ette aimata mittelineaarsete elementide niisugust ühendusviisi ja nende karakteristikute kuju, mis parimal viisil tagaksid nõutavate eriomaduste saamise,

kui mittelineaarsete elementide arv on väga suur ja ahela konfiguratsioon liialt keerukas. Seepärast tavaliselt ei tekigi vajadust koostada nendeks eesmärkideks väga suurest arvust mittelineaarsetest elementidest liiga keerukaid ahelaid. Kui aga taoline elektriahel tegelikkuses siiski esineb, tuleb selles toimuvate protsesside analüüsimiseks kasutada eksperimentaalset uurimist, sest sellise ahela arvutus, kui see ka on võimalik, osutub äärmiselt mahukaks.

§ 42. Mittelineaarsete alalisvooluahelate eriomaduste analüütiline uurimine etteantud režiimist väikeste kõrvalekaldumiste puhul

Mittelineaarne sõltuvus voolude ja pingete vahel mittelineaarsetes elektriahelates annab neile ahelatele rea suurepäraseid eriomadusi, mida edukalt kasutatakse mitmesugustes tegelikes seadistes, eriti elektrimõõteriistades ja automaatikavahendites. Need eriomadused ilmnevad mittelineaarsete ahelate omapärases käitumises voolude ja pingete kõrvalekaldumisel nende etteantud režiimile vastavatest väärtustest. Mõningatest nendest omadustest oli juttu § 34 elektriahela mittelineaarsete elementide vaatlemisel.

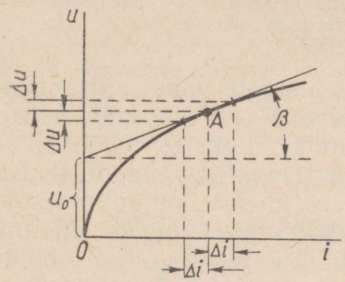
Nii näiteks võib ehitada seadiseid, milledes sisendklemmidel oleva pinge u_1 kõrvalekaldumisel teatud piirides tema nimiväärtusest jääb pinge u_2 väljundklemmidel muutumatuks või peaaegu muutumatuks. Niisugune seadis töötab pinge stabilisaatorina. Selliseks seadiseks on näiteks § 34 kirjeldatud stabilitron. Analoogiliselt võib mittelineaarsete elementide abil, näiteks barretteri abil, saavutada voolu stabiliseerumist.

Sildlülituses olevate mittelineaarsete elementidega elektriahelas võib luua olukorra, et silla ühel diagonaalil võrdub väljundpinge u_2 nulliga ainult ühel kindlal etteantud sisendpinge u_1 väärtusel silla teisel diagonaalil. Suuruse u_1 kõrvalekaldumisel sellest väärtusest tekib nullist erinev pinge u_2. Seejuures u_1 suurenemisele vastab ühe märgiga pinge u_2 ja u_1 vähenemisele teise märgiga pinge u_2. Niisugune seadis võib olla pinge u_1 etteantud väärtusest kõrvalekaldumise näitajaks (indikaatoriks) ning teda võib kasutada selle pinge automaatseks hoidmiseks etteantud väärtuse lähedal.

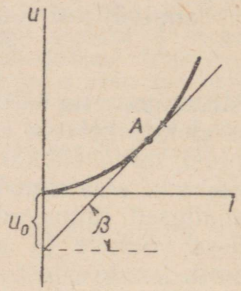
Mittelineaarse elektriahela käitumise analüütiliseks uurimiseks väikestel kõrvalekaldumistel antud režiimist ei ole tingimata vaja analüütilist avaldist iga ahela koostisse kuuluva mittelineaarse elemendi kogu karakteristiku kohta. On küllaldane avaldada võrrandina väike karakteristiku ehk tunnusjoone osa antud režiimile vastava tööpunkti A lähedal. Tavaliselt on küllaldane asendada see karakteristiku osa sirglõiguga, mis on karakteristikule puutujaks punktis A (joon. 145). Selle sirge võrrand on kujuga

$$u = u_0 + r_d i,$$

kus u_0 määratakse selle sirge ja ordinaattelje lõikepunktiga (joon. 145), $r_d = k \operatorname{tg} \beta$ aga on mittelineaarse elemendi dünaamiline takistus karakteristiku punktis A, kusjuures k on pinge mõõtkava ja voolu mõõtkava jagatis. Suurus u_0 võib olla nii positiivne (joon. 145) kui ka negatiivne (joon. 146). Suurus r_d võib samuti olla positiivne, nimelt kui i suurenemisel u kasvab, või negatiivne langeva karakteristiku juhtumil.



Joon. 145.



Joon. 146.

Mingis piirkonnas karakteristiku sirglõiguga asendamise meetodit nimetatakse ülesande *lineariseerimiseks* vastavas piirkonnas. Kasutame seda meetodit stabilitroni töö uurimiseks mingi etteantud režiimi lähedal. Stabilitroni skeem on näidatud joonisel 94. Tähistame tarbija N takistuse r_2-ga. Saame võrrandite süsteemi:

$$u_1 = ri_1 + u_2; \quad u_2 = r_2 i_2; \quad u_2 = u_0 + r_d i; \quad i_1 = i + i_2.$$

Asetades kolmandasse võrrandisse $i = i_1 - i_2$ neljandast võrrandist ja asendades i_2 suhtega $\frac{u_2}{r_2}$ teisest võrrandist, avaldame i_1 u_2 kaudu. Pannes selle i_1 avaldise esimesse võrrandisse, saame seose u_2 ja u_1 vahel:

$$u_2 = \frac{r_2 r_d}{r r_d + r_2 r + r_2 r_d} u_1 + \frac{r r_2}{r r_d + r_2 r + r_2 r_d} u_0.$$

Pingestabilisaatori kvaliteeti iseloomustatakse nn. stabiliseerimisteguriga k, mis on võrdne primaarpinge suhtelise muutuse $\frac{\Delta u_1}{u_1}$ ja sekundaarpinge suhtelise muutuse $\frac{\Delta u_2}{u_2}$ jagatisega.

Seega pinge stabiliseerimistegur

$$k = \frac{\Delta u_1}{u_1} : \frac{\Delta u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} : \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1}.$$

Pingeid u_2 ja u_1 siduvast võrrandist saame:

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{r_2 r_d}{r r_d + r_2 r + r_2 r_d};$$

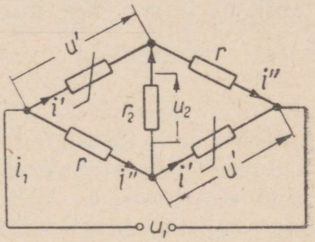
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{r_2 r_d}{r r_d + r_2 r + r_2 r_d} + \frac{r r_2}{r r_d + r_2 r + r_2 r_d} \cdot \frac{u_0}{u_1} = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1}\left(1 + \frac{r}{r_d}\frac{u_0}{u_1}\right).$$

Järelikult avaldub otsitav stabiliseerimistegur kujul

$$k = 1 + \frac{r}{r_d}\frac{u_0}{u_1}.$$

On soovitav, et k oleks võimalikult suurem, sest siis vastab primaarpinge suurele suhtelisele muutusele sekundaarpinge väike suhteline muutus. Viimasest avaldisest on näha, et $k = \infty$, kui $r_d = 0$, s. t. kui punkt A asub karakteristiku horisontaalsel osal. Sel juhtumil jääb sekundaarpinge u_2 primaarpinge u_1 muutumisel konstantseks.

Saadud avaldis võimaldab arvutada stabiliseerimistegurit karakteristiku igale punktile ja u_1 igale väärtusele.



Joon. 147.

Stabilitroni kui mittelineaarse elemendi karakteristik tema kasutatavas tööpiirkonnas on tegelikult abstsisstelje suhtes teatava kaldega, mis eri punktides on erinev. Kasutades § 36 esitatud graafilist meetodit, saame leida punkti A asukoha tunnusjoonel ning temale vastavad r_d ja u_0 väärtused primaarpinge u_1 ja koormustakistuse r_2 mitmesuguste väärtuste jaoks. Asetades need väärtused viimasesse valemisse, leiamegi suuruse k. Sel teel võib leida sõltuvused $k = F(u_1)$ mitmesuguste r_2 väärtuste puhul.

Rõhutame, et pinge stabiliseerimine saavutatakse ainult tänu ahela mittelineaarsetele omadustele. Tõepoolest, kui asendaksime mittelineaarse elemendi lineaarsega, millel on konstantne takistus, siis saaksime $u_0 = 0$ ja $k = 1$, s. o. primaar- ja sekundaarpinge suhtelised muutused oleksid teineteisega võrdsed ning mingisugust stabiliseerimist ei esineks.

Teise näitena uurime sümmeetrilist silda, mille kahes vastandõlas on kaks ühesugust mittelineaarset elementi ja kahes teises õlas ühesugused konstantse takistusega lineaarsed takistid r (joon. 147). Siin kehtivad võrrandid:

$$u_1 = u' + ri''; \quad u' = u_2 + ri'';$$
$$i' = i'' - i_2; \quad u' = u_0 + r_d i'; \quad u_2 = r_2 i_2.$$

Asetame i' kolmandast võrrandist neljandasse. Leitud u' avaldise asetame esimesse ja teise võrrandisse ning asendame i_2 u_2-ga vastavalt viiendale võrrandile. Saame kaks u_1, u_2 ja i'' sisaldavat võrrandit. Elimineerides nendest i'', leiame u_2 ja u_1 vahelise seose:

$$u_2 = \frac{r_d - r}{r + r_d + \frac{2rr_d}{r_2}} u_1 + \frac{2r}{r + r_d + \frac{2rr_d}{r_2}} u_0.$$

Kui $r_d = r$, siis väljundpinge u_2 ei sõltu sisendpingest u_1, s. o. sild töötab pinge stabilisaatorina. Stabiliseerimisteguri üldavaldis

$$k = \frac{u_2}{u_1} : \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = 1 + \frac{2r}{r_d - r} \frac{u_0}{u_1}.$$

Siin $r_d = r$ puhul $k = \infty$, s. o. esineb sekundaarpinge täielik stabiliseerimine. Sel puhul sekundaarpinge

$$u_2 = \frac{1}{1 + \frac{r}{r_2}} u_0.$$

Sama silda võib kasutada ka primaarpinge mingist tema eteantud väärtusest u_1 kõrvalekaldumise Δu_1 näitajana. Tasakaalustame sel eesmärgil silla sellel sisendpinge u_1 väärtusel. On ilmne, et tasakaal, s. o. $u_2 = 0$, saavutatakse siis, kui silla õlgade mittelineaarsete elementide staatiline takistus saab võrdseks teiste lineaarsete õlgade takistusega r, s. t. kui $r_{st} = r$.

Kasutades u_2 ja u_1 siduvat võrrandit ning määrates sellest juurdekasvud Δu_2 ja Δu_1, saame:

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{r_d - r}{r + r_d + \frac{2rr_d}{r_2}} = \mu.$$

Suurust μ nimetatakse silla võimendusteguriks.

Sekundaarahelasse antav võimsus

$$p_2 = \frac{(\Delta u_2)^2}{r_2} = (\Delta u_1)^2 \frac{(r_d - r)^2}{r_2 \left(r + r_d + \frac{2rr_d}{r_2} \right)^2}.$$

Sekundaarahela takistuse r_2 võib valida niisuguse, et võimsus p_2 oleks antud Δu_1, r_d ja r puhul suurim. Võttes p_2-st tuletise r_2 järgi ja võrdsustades selle nulliga, saame:

$$r_2 = \frac{2rr_d}{r + r_d} \quad \text{või} \quad r_2 = \frac{2r_{st}r_d}{r_{st} + r_d},$$

sest $r = r_{st}$.

Sel juhtumil võimendustegur

$$\mu = \frac{r_d - r_{st}}{2(r_{st} + r_d)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{r_d}{r_{st}} - 1}{\frac{r_d}{r_{st}} + 1}.$$

Iga $r_d > 0$ puhul ei ületa μ absoluutväärtus 0,5. Sellele vaatamata annab niisugune seadis võimaluse jälgida primaarpinge äärmiselt väikesi suhtelisi kõrvalekaldumisi $\frac{\Delta u_1}{u_1}$ tema etteantud väärtusest u_1, sest etteantud u_1 väärtuse puhul sekundaarahela pinge u_2 võrdub nulliga. Järelikult saab suuruse Δu_2 lugemiseks kasutada väga suure tundlikkusega mõõteriista. Sekundaarahela mõõteriista hälvet võib ära kasutada antud u_1 väärtuse väga suure täpsusega automaatseks püsivana hoidmiseks vastava reguleeriva seadise mõjutamise teel.

Vaadeldud näidetest selgub, et mittelineaarse elemendi karakteristiku lineariseerimise meetodit tema tööpunkti A lähedal saab eduga kasutada mittelineaarsete elektriahelate rea tähtsate omaduste analüütiliseks uurimiseks.

Märgime, et peale mittelineaarsete elektriahelate äsjavaadeldud eriomaduste võib nendes ahelates saada veel teisigi väga väärtuslikke omadusi. Nii on langeva karakteristikuga mittelineaarsete elementide olemasolul ahelas võimalikud mittestabiilsed ehk labiilsed režiimid, nagu me edaspidi veendume. Seejuures osutub võimalikuks luua seadiseid, kus sisendklemmidele rakendatud pinge u_1 sujuval muutmisel pinge u_2 väljundklemmidel muutub mingi etteantud väärtuse saavutamisel hüppeliselt. Seda omadust võib kasutada releeseadistes.

Režiimide stabiilsuse ehk püsivuse uurimine langeva karakteristikuga elemente sisaldavates mittelineaarsetes elektriahelates nõuab nendes ahelates toimuvate protsesside käsitlemist vahelduvvoolude puhul. Sellele huvitavale ja tähtsale küsimusele me pühendame tähelepanu kursuse teise osa lõpus.

SEITSMES PEATÜKK

MAGNETVOOG JA ELEKTROMAGNETILISE INDUKTSIOONI NÄHTUS

§ 43. Magnetväli

Esimeses paragrahvis märgiti, et lakkamatus liikumises olevaid elektriliselt laetud elementaarosakesi ümbritseb elektromagnetiline väli. Need osakesed ei ole mõeldavad ilma oma elektromagnetilise väljata, millega nad moodustavad ühtse liitterviku. Elektromagnetiline väli võib eksisteerida nii seotuna laetud osakestega kui ka osakestest eraldi vaba väljakiiratud elektromagnetilise väljana.

Elektromagnetilist välja kui mateeria eriliiki iseloomustavad tema kaks külge — elektriväli ja magnetväli. Eelmistes peatükkides me uurisime ühtse elektromagnetilise välja üht külge — elektrivälja. Käesolevas peatükis me uurime elektromagnetilise välja teist, *magnetväljaks* nimetatavat külge.

Kuna elektri- ja magnetväli on mateeria ühe ja sama liigi — elektromagnetilise välja eri küljed, siis eksisteerib nende vahel lahutamatu seos. Seepärast me määrame magnetvälja iseloomustavate suuruste sissetoomisel ühtlasi kindlaks vastastikuse seose nende ja elektrivälja iseloomustavate suuruste vahel, kusjuures me peame seda ülesannet tähtsaimaks.

Magnetväli avaldub üht või teist liiki elektrivoole ümbritsevas ruumis, näiteks vooluringe, s. o. elektrivooludega juhtmekontuure ümbritsevas ruumis. Selles ruumis me avastame mitmeid erilisi nähtusi. Vooluringide lähedal liikuvates juhtmetes tekivad (indutseeruvad) elektromotoorsed jõud. Vooluringide lähedusse paigutatud magnetnõel püüab teatud viisil orienteeruda nende suhtes. Mingile kõrvalisele sellesse ruumi toodud vooluga juhtmele ehk *voolujuhtmele* mõjub mehaaniline jõud, mis on suunatud teatud kindlal viisil ja sõltub juurdetoodud voolujuhtme asendist põhivooluringide suhtes. See mehaaniline jõud esineb ka sel juhtumil, kui juurdetoodud voolujuhtme summaarne elektrilaeng on võrdne nulliga, s. o. need esinevad

ka sel juhtumil, kui elektrivälja poolt juhtmele mõjuvad jõud puuduvad, vaatamata elektrivälja eksisteerimisele vaadeldavas ruumiosas.

Kõiki neid erilisi nähtusi me käsitleme selles ruumis esineva magnetvälja avaldumisviisidena, milledest igaüht võib kasutada magnetvälja avastamiseks ja määramiseks. Sellele vastavalt võime anda näiteks järgmise definitsiooni:

magnetväljaks me nimetame üht elektromagnetilise välja kahest küljest, mis avaldub näiteks väljas liikuvates juhtmetes elektromotoorsete jõudude tekkes või väljas laadimata voolujuhtmele mõjuvate mehaaniliste jõudude tekkes.

Magnetvälja kindlakstegemiseks tuleb tingimata võtta *laadimata* voolujuhe, sest laetud voolujuhtmele ei mõju üksnes magnet-, vaid ka elektriväli.

§ 44. Magnetiline induktsioon

Valime magnetvälja kvantitatiivseks iseloomustajaks esimese eelmises paragrahvis näidatud avaldumisviisi. Üldised kaalutlused niisuguse valiku kasuks toome käesoleva osa lõpp-paragrahvis pärast seda, kui on käsitletud kõiki põhilisi magnetvälja avaldumisviise ja on kindlaks määratud seosed ühtse elektromagnetilise välja kahe külje — elektri- ja magnetvälja vahel. Siis on ka arusaadavad taolise valiku olulised eelised.

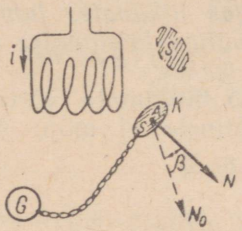
Elektromagnetilise induktsiooni nähtus, mis seisneb indutseeritud elektromotoorsete jõudude tekkes magnetväljas asuvates liikuvates juhtmetes või muutuvas magnetväljas asuvates liikumatutes juhtmetes, on erakordselt suure tähtsusega. Seepärast me osutamegi edaspidi selle nähtuse vaatlemisele erilist tähelepanu. Siin aga, nagu äsja märgitud, kasutame seda nähtust selleks, et iseloomustada magnetvälja kvantitatiivsest küljest.

Paigutame vooluga elektriahela, näiteks solenoidi (joon. 148) lähedusse tasapinnalise väga peenest traadist ringjoonekujulise keeru K. Nimetame selle keeru proovikeeruks. Selle juurest tulevad juhtmed punume tihedasti omavahel kokku, et ei moodustuks täiendavaid keerde, ning ühendame need solenoidist küllalt kaugel asetseva ballistilise galvanomeetriga. Ballistiline galvanomeeter võimaldab mõõta elektrilaengut q, mis läbib ahelat, kuhu ta on lülitatud, s. o. elektrilaengu suurust, mis kandub ahelas toimuva vooluprotsessi vältel läbi juhtme ristlõike. Ballistilise galvanomeetri hälve ehk liikuva osa kõrvalekalle on võrdeline q suurusega tingimusel, et vool galvanomeetri ahelas esineks küllalt lühikese ajavahemiku kestel, võrreldes galvanomeetri liikuva süsteemi omavõnkeperioodiga.

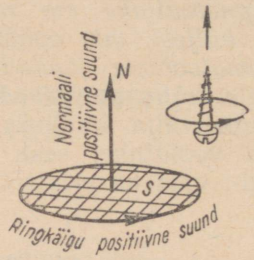
Katse näitab, et kui viia proovikeerd solenoidist küllaldasele kaugusele, sõltub seejuures tekkiv galvanomeetri hälve ja järe-

likult ka suurus q ainult proovikeeru algasendist solenoidi suhtes. Üldsegi ei sõltu galvanomeetri hälve proovikeeru lõppasendist, kui see keerd viiakse solenoidist küllalt kaugele.

Korrates seda katset proovikeeru ühe ja sama algasendi puhul, kuid keerust, ühendusjuhtmeist ja galvanomeetrist moodustuva ahela elektritakistuse r erinevatel väärtustel, selgub, et suuruse q väärtus muutub pöördvõrdeliselt takistusega.



Joon. 148.



Joon. 149.

Valime mingi suuna mööda proovikeerdu ringkäigu positiivseks suunaks. Suuruse q loeme positiivseks, kui positiivne laeng kandub mööda keerdu ringkäigu positiivses suunas. Pooli keeru tasapinna normaali N positiivseks suunaks võtame parema käe kruvi telje kulgemise suuna, kui kruvi pea pöördub selles suunas, mis on keeru ringkäigul positiivseks võetud (joon. 149).

Jätame nüüd ahela elektritakistuse muutmatuks ja kordame katset uuesti, vähendades algul keeruga piiratud tasapinna s mõõtmeid, seejärel aga keeru algasendis tema positiivse normaali suunda. Lepime seejuures kokku, et keeruga piiratud tasapinna s kese tuleb iga kord ühitada ühe ja sama punktiga A, mis on solenoidi suhtes ruumis fikseeritud (joon. 148).

Katse näitab, et pinna s küllalt väikeste mõõtmete korral muutub suurus q võrdeliselt selle pinna suurusega.

Peale selle on olemas niisugune positiivse normaali N_0 suund, mille korral q osutub antud s suuruse puhul suurimaks. Positiivse normaali N mistahes teise suuna puhul osutub suurus q võrdeliseks selle suuna ja N_0 suuna vahelise nurga β koosinusega.

Kõik need tulemused võib väljendada üldise sõltuvusega

$$q = B \cos \beta \frac{s}{r}.$$

Suurus B enam ei sõltu katse tingimustest (s, r ja β-st) ja ta on määratud ainult punkti A asendiga voolust läbitava solenoidi suhtes. Järelikult iseloomustab suurus B magnetvälja antud punktis. Seda suurust nimetatakse *magnetiliseks induktsiooniks*.

Magnetilist induktsiooni tuleb käsitada vektoriaalse suurusena. Magnetilise induktsiooni vektori **B** suuna loeme ühtivaks positiivse normaali N_0 suunaga.

Kõikides kirjeldatud katsetes võib selle asemel, et eemaldada proovikeerd suurele kaugusele solenoidist, viimasest voolu välja lülitada — efekt on sama. Seda tulebki oodata, sest esimesel juhtumil keerd eemaldatakse magnetväljast, teisel juhtumil aga magnetväli kaob koos voolu lakkamisega solenoidis.

Edaspidi näeme, et magnetiline induktsioon määrab ka mehaanilised jõud, mis mõjuvad magnetväljas voolujuhtmetele ning laetud liikuvatele osakestele ja kehadele. Seepärast peamegi käsitlema magnetilist induktsiooni kui magnetvälja põhilist iseloomustajat.

§ 45. Magnetvoog

Magnetilise induktsiooni vektori voogu läbi mingi pinna s (joon. 150) *nimetatakse lühidalt magnetvooks* läbi selle pinna ja tähistatakse tähega Φ. Seega

$$\Phi = \int_s B \cos \beta \, ds = \int_s \mathbf{B} \, ds.$$

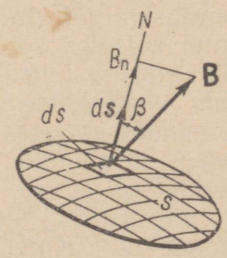
Magnetiline induktsioon on võrdne *magnetvoo tihedusega* välja antud punktis. Tõepoolest, võttes pinna risti vektoriga **B**, saame:

$$\cos \beta = 1; \quad d\Phi = B \, ds; \quad B = \frac{d\Phi}{ds}.$$

Magnetvoo mõõtühikuks on MKSA ühikute süsteemis *veeber* (1 Wb). Magnetilise induktsiooni mõõtühik selles süsteemis on vastavalt *veeber ruutmeetri* kohta $\left(1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}\right)$ ehk *tesla* (T).

Kui pind *s* on niivõrd väike, et tema ulatuses võib magnetvälja lugeda homogeenseks, siis võib kirjutada:

$$\Phi = \int_s B \cos \beta \, ds = B \cos \beta \, s.$$



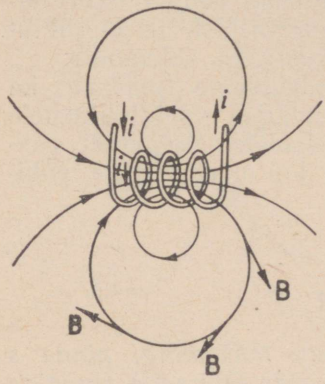
Joon. 150.

Arvestades seda, võime eelmises paragrahvis kirjeldatud kaitseid iseloomustava suhte kirjutada järgmisel kujul:

$$q = \frac{B \cos \beta s}{r} = \frac{\Phi}{r}.$$

Seega nendes katsetes läbi proovikeeru juhtme ristlõike kantav elektrilaeng on võrdne keeru algasendis keeru poolt piiratavat pinda s läbiva magnetvoo Φ ja proovikeeru kogu suletud ahela elektritakistuse jagatisega.

Magnetväli vooluringe ümbritsevas ruumis eksisteerib sõltumatult meie katsetest. Need katsed proovikeeruga on vajalikud ainult magnetvälja avastamiseks ja magnetvoo ning magnetilise induktsiooni mõõtmiseks. Seepärast me võime rääkida magnetvoost läbi pinna, mis on piiratud mingi kujutletava kontuuriga, näiteks joonisel 148 kriipsjoonega näidatud kontuuriga. On selge, et selle voo mõõtmiseks on vaja niisuguse kujutletava kontuuriga ühitada väikese ristlõikega juhtmest proovikeerd ning mõõta siis elektrilaeng q, mis kandub läbi proovikeeru juhtme ristlõike proovikeeru eemaldamisel magnetvälja piirkonnast. Voo väärtus määratakse seejuures seosest $\Phi = rq$.



Joon. 151.

Me loeme magnetvoo keeru kontuuri suhtes positiivseks, kui voo kadumisel kandub positiivne laeng mööda keerdu edasi ringkäigu positiivses suunas.

Ülalkirjeldatud katsetes eemaldati proovikeerd välja piirkonnast ning keeruga piiratud pinda läbiv magnetvoog muutus algväärtusest Φ kuni nullini. Kui nendes katsetes keerdu välja piirkonnast mitte täiesti välja viia, vaid ainult teda väljas ühest asendist teise ümber paigutada, siis igal niisugusel ümberpaigutamisel esineb üldjuhtumil galvanomeetri hälve. Kandugu keeru ümberpaigutamisel asendist A asendisse D läbi galvanomeetri laeng Δq. Kui paigutada keerd asendist A algul mingisugusesse asendisse C, seejärel aga asendist C sellessesamasse lõppasendisse D, siis nende kahe ümberpaigutuse puhul läbi galvanomeetri kanduvate laengute summa osutub samuti võrdseks Δq-ga. Siit on selge, et üldjuhtumil tekitab laengu Δq keeru kontuuriga piiratud pinda s läbiva voo muutus $\Delta\Phi$. Ülalkirjeldatud katsetes võrdus voo juurdekasv keeru algasendile vastava voo suuruse absoluutväärtusega ainult sellepärast, et keerdu läbiv voog katse lõpus osutus võrdseks nulliga. Siiski kehtib ka nendes katsetes niisugune võrdus ainult voo ja tema juurdekasvu absoluutväärtuste vahel. Kui voog Φ proovikeeru algasendis oli keeru kontuuri suhtes *positiivne*, siis on selge, et voo vähenemisel nullini on tema juurdekasv *negatiivne* ja võrdne $\Delta\Phi = -\Phi$. Kuna vastavalt voo märgi määramisele $\Phi > 0$ ($\Delta\Phi < 0$), kui $q > 0$, siis üldjuhtumil peab kehtima seos

$$\Delta q = -\frac{\Delta \Phi}{r},$$

mis on elektromagnetilise induktsiooni seaduse üks põhiformuleeringuid.

Uurides proovikeeru abil kogu ruumi mingisuguse vooluringi ümber (joon. 151), saab määrata kõigis ruumipunktides vektori **B** ja seejärel tõmmata rea jooni selliselt, et puutujad nende joonte igas punktis ühtiksid suunalt vektoriga **B**. Neid jooni nimetatakse *magnetilise induktsiooni joonteks*. Nad varustatakse nooltega, mis näitavad vektori **B** suunda.

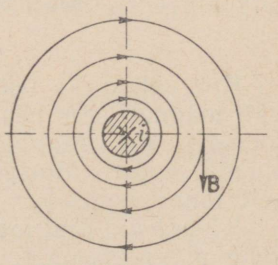
Ruumi osa, mis on piiratud magnetilise induktsiooni joonte kogumist moodustatud torukujulise pinnaga, nimetatakse *magnetilise induktsiooni toruks*. Kogu magnetvälja võib endale ette kujutada jaotatuna magnetilise induktsiooni torudeks. Leppeliselt võib kujutada iga niisugust toru ühe magnetilise induktsiooni joonega, mis ühtib toru teljega.

Magnetilise induktsiooni torusid, mille ristlõiget läbiv voog võrdub ühikuga, nimetatakse *ühiktorudeks*. Vastavalt nimetatakse ühiktorusid kujutavaid magnetilise induktsiooni jooni magnetilise induktsiooni *ühikjoonteks*.

§ 46. Magnetvoo pidevuse printsiip

Magnetvoo pidevuse printsiibil on elektromagnetiliste nähtuste teoorias põhjapanev tähtsus. See printsiip ütleb, et magnetilise induktsiooni joontel ei ole kuskil ei algust ega lõppu — nad on igal pool pidevad.

Selle tähtsa printsiibi õigsuses me veendume eranditult kõigil juhtumitel, kui magnetväli esineb õhus või üldse niisuguses keskkonnas, kus välja võib vahetult uurida katselisel teel. Näiteks sirge voolujuhtme ümber on magnetilise induktsiooni jooned ringjooned, mille tsentrid on juhtme teljel (joon. 152). Joonte suund on seotud voolu suunaga parema käe kruvi reegliga. Joonisel 152 on kujutatud voolujuhtme ristlõige, kusjuures vool läheb vaatlejast eemale. See suund on näidatud noole saba kujutava kaldristiga. Sel juhtumil, kui vool on suunatud vaatleja poole, pannakse juhtme ristlõikesse tinglikult noole teravikku kujutav punkt.

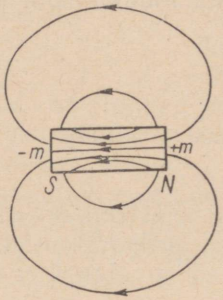


Joon. 152.

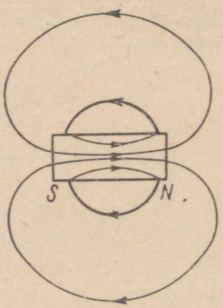
Kui keerukas ka ei oleks elektrivoolu teekonna kuju, on seda teekonda ümbritsevad magnetilise induktsiooni jooned alati pide-

vad. Näiteks võib tuua vooluga solenoidi välja, mille magnetjoonte pilt on kujutatud joonisel 151.

Erilise vaatluse alla tuleb võtta magnetilise induktsiooni joonte pidevuse küsimus sel juhtumil, kui magnetväljas asetsevad tahked kehad ja meil ei ole võimalust vahetult uurida nende kehade sees esinevat välja. Näiteks püsimagneti välja saab vahetult katselisel teel uurida ainult väljaspool magnetit olevas ruumis. Seepärast on vaja mingite lisafaktide või kaalutluste alusel kindlaks määrata, kas magnetilise induktsiooni jooned jätkuvad ka magneti keha enese sees. Tõepoolest, välja esinemist väljaspool magnetit võiks seletada eriliste *magnetilisteks massideks* nimetatavate magnetvoo allikate olemasoluga magneti pooluste pindadel. Vastavalt sellisele ettekujutusele peab magneti põhjapoolusel, kus näiliselt magnetilise induktsiooni jooned algavad, asuma positiivne magnetiline mass, ja lõunapoolusel, kus jooned lõpevad, negatiivne magnetiline mass. Niisugune ettekujutus magnetiliste nähtuste loomusest kujuneski, kuid kehtis ajalooliselt kuni elektrivoolude magnetvälja avastamiseni.



Joon. 153.



Joon. 154.

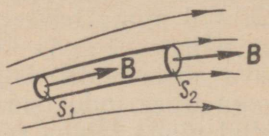
Kui väli oleks tekitatud magnetiliste masside (m) poolt, siis väli magneti sees peaks välja nägema nii, nagu see on kujutatud joonisel 153. Magnetilise induktsiooni jooned magneti sees, samuti nagu väljaspool teda, osutuksid suunatuks põhjapooluselt lõunapoolusele.

Käesoleval ajal me seletame magneti magneetumust, või üldse keha magneetumust, elementaarvoolude olemasoluga keha aines ja samuti elementaarosakeste magnetiliste momentide olemasoluga. Need elementaarvoolud aatomites tekivad elektronide liikumisel mööda orbiite. Kuigi elementaarosakeste sisemine ehitus ja vastavalt nende magnetiliste momentide loomus ei ole käesoleval ajal veel läbi uuritud, võib teha oletuse, et ka elementaarosakeste magnetilised momendid on nende osakeste niisuguse sisemise liikumise tulemuseks, millel on elektrivoolude iseloom.

Sellest räägitakse § 54, mis on pühendatud aine magneetumuse vaatlemisele.

Lähtudes nendest ettekujutustest tuleme järeldusele, et magneti sees peavad magnetilise induktsiooni jooned kulgema samuti nagu solenoidis (joon. 151): nad peavad kujutama endast väljaspool magnetit asuvate joonte järge. Niisugune õige välja pilt on kujutatud joonisel 154.

Need kaalutlused viivad meid järeldusele, et tegelikkuses magnetilisi masse ei ole. Sellist järeldust kinnitab magneti katkimurdmise katse. Kui väikesteks osadeks me ka magneti ei purustaks, kunagi ei ole võimalik saada magneti niisuguseid osi, millel avalduks ühemärgilise magnetilise massi ülekaal.



Joon. 155.

Kõik need kaalutlused jäävad jõusse iga magnetvoost läbitava keha suhtes.

Niisiis *magnetväli on alati seotud elektrivooluga. Erandita kõigil juhtumitel on magnetilise induktsiooni jooned pidevad.*

Matemaatiliselt formuleeritakse magnetvoo pidevuse printsiip järgmiselt:

$$\oint_s \mathbf{B}\, ds = 0,$$

s. o. *magnetvoog läbi mistahes kinnise pinna võrdub nulliga.*

Rakendades võrrandit $\oint_s \mathbf{B}\, ds = 0$ magnetilise induktsiooni toru vabalt võetud osa pinna kohta (joon. 155), on kerge veenduda, et läbi toru ristlõike s_1 sisenev voog võrdub läbi ristlõike s_2 väljuva vooga. Järelikult on voog läbi toru erinevate ristlõigete ühe ja sama väärtusega.

§ 47. Elektromagnetilise induktsiooni seadus

Elektromagnetilise induktsiooni nähtuse avastas 1831. a. Faraday, kes katseliste uurimuste seeria tulemusena püstitas seda nähtust kvantitatiivselt iseloomustava põhilise seaduse.

Elektromagnetilise induktsiooni seadus formuleeriti § 45 siiski veidi erineval kujul, võrreldes Faraday formuleeringuga. Seal saadi seos

$$\Delta q = -\frac{\Delta \Phi}{r},$$

mis kõlab: *elektromagnetilise induktsiooni protsessis mingi ajavahemiku vältel läbi ahela ristlõike kanduv elektrilaeng Δq on võrdne selle ajavahemiku vältel ahela kontuuriga piiratud pinda*

läbiva magnetvoo vastupidise märgiga võetud juurdekasvu $\Delta\Phi$ *ja ahela takistuse* jagatisega.

Seda elektromagnetilise induktsiooni seaduse formuleeringut tuleb käsitada kui põhilist. Nagu me edaspidi näeme, erineb ta Faraday formuleeringust ainult tähenduse poolest, mis antakse võrduse parempoolse osa lugejas asuvale suurusele.

Juhime tähelepanu sellele, et voog Φ läbi ahela kontuuriga piiratud pinna tekitatakse üldjuhtumil nii vaadeldava ahela suhtes väliste voolude ja magneeditud kehade poolt kui ka vaadeldava ahela enda voolu poolt. Seega üldjuhtumil on $\Delta\Phi$ elektromagnetilise induktsiooni seaduse avaldises ahela kontuuriga piiratud pinda läbiva resulteeriva magnetvoo juurdekasv. Seejuures saame resulteeriva voo lõpmata väikese muutuse korral:

$$\mathrm{d}q = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{r},$$

kusjuures $\mathrm{d}q = i\,\mathrm{d}t$ on läbi ahela ristlõike ajavahemiku $\mathrm{d}t$ vältel kantav elektrilaeng. Selle ajavahemiku kestel muutub voog $\mathrm{d}\Phi$ võrra. Saame:

$$i\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{r},$$

ehk

$$ir = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Korrutis ir on pingelang kogu suletud ahelas. Vastavalt Kirchhoffi teisele seadusele on see pingelang võrdne selles ahelas mõjuva elektromotoorse jõuga e. Järelikult peame tunnistama, et viimase võrduse parempoolses osas asuv suurus kujutab endast ahelas elektromagnetilise induktsiooni protsessis tekkivat elektromotoorset jõudu. Seega saame:

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

s. o. ahela kontuuriga piiratud pinda läbiva magnetvoo muutumise korral on ahelas indutseeritav elektromotoorne jõud võrdne voo muutumise kiirusega, kui see on võetud miinusmärgiga. See viimane elektromagnetilise induktsiooni seaduse formuleering kuulub Maxwellile.

Mõlemad toodud formuleeringud sisaldavad selle ahela kontuuriga, milles emj. indutseeritakse, piiratud pinda s läbiva magnetvoo Φ muutust. Kuna lõplik mittekinnine pind on piiratav alati kinnise kontuuriga, siis on ülaltoodud formuleeringud rakendatavad ainult kinniste kontuuride, mitte aga nende osade suhtes.

Magnetvoog Φ läbi pinna s on võrdne magnetilise induktsiooni ühiktorude arvuga (magnetilise induktsiooni ühikjoonte arvuga), mida haarab seda pinda piirav kontuur.

Meile on teada, et magnetilise induktsiooni jooned on alati pidevad. Seepärast võib magnetilise induktsiooni joon indutseeritud voolu teekonna kontuuri siseneda või sellest väljuda ainult kuskil selle kontuuriga lõikudes. Seega kontuuriga haaratava voo muutus $\Delta\Phi$ peab võrduma kontuuriga lõikunud magnetilise induktsiooni ühikjoonte arvuga ΔN:

$$\Delta\Phi = \Delta N.$$

Elektromagnetilise induktsiooni seadust võib esitada nüüd kujul

$$\Delta q = -\frac{\Delta N}{r},$$

s. o. *indutseeritud vooluga ahela ristlõiget mingi ajavahemiku vältel läbiv elektrilaeng on võrdne selle aja kestel ahela kontuuriga lõikunud magnetilise induktsiooni ühikjoonte arvu ja ahela takistuse jagatisega, võetuna vastupidise märgiga.*

Sellisel kujul andiski Faraday elektromagnetilise induktsiooni seaduse. Faraday kujutles magnetvoogu kui magnetilise induktsiooni torude kogumit, mis tema ettekujutuste järgi osutuvad voo füüsikalisteks elementideks. Iga magnetväljas täheldatavat nähtust käsitles ta kui niisuguste torude eriliste omaduste ilmnemist. Näiteks elektromagnetilise induktsiooni nähtus tekib nende kujutluste põhjal alati indutseeritud vooluga ahela kontuuri lõikumisel magnetilise induktsiooni torudega.

Võrdus $\Delta\Phi = \Delta N$ peab olema õige mistahes ajavahemiku jooksul toimuva voo mistahes muutuse kohta. Niisiis võime oletada, et $\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}N$, ja esitada indutseeritud elektromotoorse jõu avaldise kujul

$$e = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t},$$

s. t. *kontuuris indutseeritav emj. on võrdne selle kontuuri magnetilise induktsiooni ühikjoontega lõikumise kiirusega, võetuna vastupidise märgiga.*

Seda Faraday põhilisest formuleeringust tulenevat elektromagnetilise induktsiooni seaduse formuleeringut me nimetame samuti Faraday formuleeringuks.

Suletud kontuuride puhul on Maxwelli ja Faraday formuleeringud identsed ning suletud kontuuris tekkiva emj. kohta võib alati kirjutada:

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}.$$

Ent kui Maxwelli indutseeritud emj. avaldis on oma olemuselt rakendatav ainult kinniste kontuuride korral, siis Faraday avaldist emj. kohta, milles kogu tähelepanu osutatakse kontuuri lõikumisele magnetilise induktsiooni ühikjoontega, saab rakendada

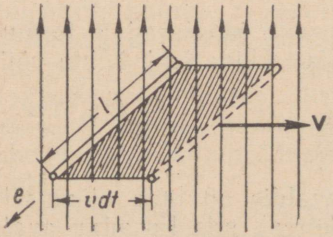
ka kontuuri lõikude jaoks. Selles suhtes osutub viimane avaldis universaalsemaks.

Vaatleme homogeenses magnetväljas (joon. 156) kiirusega v liikuvat juhtme sirgjoonelist lõiku pikkusega l. Eeldame, et liikumissuund on risti magnetilise induktsiooni joontega ja juhtme teljega. Peale selle on juhtme telg risti veel magnetilise induktsiooni joontega. Ajavahemiku dt vältel asetub juhtmelõik ümber kauguse $v\,dt$ võrra ja moodustab pinna $lv\,dt$. Kõik seda pinda läbivad magnetilise induktsiooni jooned lõikuvad juhtmelõiguga. Kuna magnetilise induktsiooni joontega risti oleva pinna ühikut läbivate ühikjoonte arv on võrdne magnetilise induktsiooni B suurusega, siis ajaühikus juhtmelõiguga lõikuvate magnetilise induktsiooni ühikjoonte arv on võrdne $\frac{Blv\,dt}{dt} = Blv$. Järelikult saame juhtmelõigus indutseeritava emj. e absoluutväärtuse jaoks vastavalt Faraday elektromagnetilise induktsiooni seaduse formuleeringule avaldise

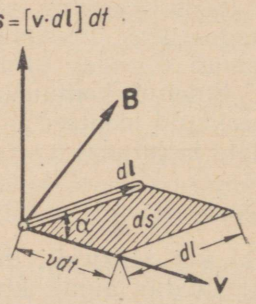
$$e = Blv.$$

Emj. jõu suuna võib määrata parema käe juhise abil. Kui parema käe pöial, nimetissõrm ja keskmine sõrm asetada vastastikku risti selliselt, et pöial oleks asetatud liikumissuunas, nimetissõrm välja suunas, siis keskmine sõrm näitab emj. suunda. See seadus jääb kergesti meelde, kui osutada tähelepanu sellele, et sõrmede järjekord käel: pöial, nimetissõrm ja keskmine sõrm vastavad sõnade: liikumine, magnetväli, vool (s. o. elektromotoorse jõu mõjumise võimalik tulemus) algustähtede tähestikulisele järjekorrale.

Viimasel kujul toodud elektromotoorse jõu avaldist kasutatakse harilikult elektrimasinate mähiste varrastes indutseeritava emj. arvutamiseks. On selge, et see avaldis emj. hetkväärtuse jaoks osutub õigeks ka sel juhtumil, kui induktsioon juhtme



Joon. 156.



Joon. 157.

liikumise suunas muutuks, kuid oleks konstantne juhtme pikkuse ulatuses. Juhtme liikumisel konstantse kiirusega on emj. hetkväärtuse ajast sõltumist väljendav kõver sarnane ruumis juhtme liikumise suunas induktsiooni muutumist kujutava kõveraga. Kasutades seda asjaolu, võime saada elektrimasina rootori mähises meile soovitava kõvera kujuga elektromotoorse jõu, kui elektrimasina konstrueerimisel jaotada vastaval viisil magnetvoog masina õhupilus.

Üldjuhtumil, kui juhe on meelevaldse kujuga ja liigub mittehomogeenses väljas, võib kirjutada avaldise juhtmelõigus $d\boldsymbol{l}$ indutseeritava lõpmata väikese emj. de jaoks. Olgu $d\mathbf{l}$ juhtme telge mööda leppeliselt positiivseks loetud poolele suunatud ja suuruse poolest lõigu pikkusega võrdne vektor. Moodustagu kiirusvektor $\mathbf{v}$ vektoriga $d\mathbf{l}$ nurga α (joon. 157). Siis pind, mille lõik $d\boldsymbol{l}$ aja dt vältel moodustab, on $ds = v\,dt\,d\boldsymbol{l}\sin\alpha$. Kujutades seda pinda viimasele risti suunatud vektoriga $d\mathbf{s}$, võime kirjutada:

$$d\mathbf{s} = [\mathbf{v}\,dt \cdot d\mathbf{l}] = [\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}]\,dt,$$

kus $[\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}]$ on vektorite $\mathbf{v}$ ja $d\mathbf{l}$ vektorkorrutis. Voog $d\Phi = \mathbf{B}\,d\mathbf{s} = \mathbf{B}[\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}]\,dt$ läbi selle pinna on võrdne aja dt vältel juhtmelõiguga $d\boldsymbol{l}$ lõikunud magnetilise induktsiooni ühikjoonte arvuga. Järelikult lõigus $d\boldsymbol{l}$ indutseeritav emj.

$$de = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mathbf{B}[\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}] = \mathbf{B}[d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}].$$

Kui $de > 0$, siis see tähendab, et emj. mõjub lõigu $d\boldsymbol{l}$ positiivses suunas.

Ei ole raske veenduda, et ülaltoodud parema käe juhis tuleneb vahetult viimasest valemist erijuhtumi jaoks, kui kõik vektorid $\mathbf{B}$, $d\mathbf{l}$ ja $\mathbf{v}$ on vastastikku risti.

§ 22 märgiti, et pingelangude summa mööda elektriahela suletud kontuuri on võrdne elektrivälja tugevuse ringintegraaliga mööda seda ahelat, s. o.

$$ir = \oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l}.$$

Teisest küljest, juhtumil kui elektriahelaga ahelduv magnetvoog on ajaliselt muutuv, kehtib äsja saadud võrdus

$$ir = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Järelikult võib kirjutada:

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Maxwell üldistas selle võrduse juhtumile, kui kontuur paik-

neb mistahes keskkonnas. Meie loeme ühtlasi selle võrduse õigeks mistahes, ka tingimata mitte juhtmest moodustuva kinnise kontuuri puhul. Üldjuhtumil võib see kontuur olla kujutletavaks kontuuriks, mis asub kas tervikuna dielektrikus või siis osaliselt juhtivas keskkonnas ja osaliselt dielektrikus. Eranditult kõikidel juhtumitel mistahes kontuuriga piiratud pinda läbiva ajaliselt muutuva magnetvoo korral tekib selles kontuuris emj. Juhtivas keskkonnas võib emj. põhjustada juhtivusvoole, dielektrikus tekitab vahelduv emj. elektrilisi nihkevoole. Viimane võrdus tõendab, et magnetvälja ajalisel muutumisel tekib samas ruumis temaga seotud elektriväli. Elektripinge mööda mistahes suletud kontuuri on seejuures võrdne selles kontuuris indutseeritava elektromotoorse jõuga.

Oma olemuselt osutuvad need mõlemad väljad — magnet- ja elektriväli — ühtse elektromagnetilise välja kaheks küljeks.

Viimane võrrand, käsitletuna sellises laias mõttes, on üheks elektromagnetilise välja põhivõrrandiks.

§ 48. Aheldusvoog

Magnetvoog Φ läbi mingi kontuuriga, näiteks voolust läbitava ahela kontuuriga piiratud pinna s on võrdne magnetilise induktsiooni vektori pindintegraaliga, mis on võetud üle selle pinna s:

$$\Phi = \int_s \mathbf{B}\, d\mathbf{s}.$$

See avaldis on õige ükskõik kui keeruka kontuuriga piiratud mistahes pinna kohta. Üldjuhtumil võib see pind olla hoopiski keeruka kujuga. Nii on joonisel 158 viirutusega näidatud pind, mis on tõmmatud kruvijooneliselt asetatud kolme keeruga pooli moodustavale kontuurile. Magnetilise induktsiooni üksikud jooned läbistavad seda pinda mitu korda: jooned *4*, *5*, *6*, *7* ja *8* — kolm korda, joon *3* — kaks korda.

Niisuguse keeruka pinna uurimine kujuneb aga raskeks ja seepärast neil juhtumitel, kui pooli keerud asuvad tihedasti üksteise ligidal, kasutatakse harilikult lihtsustatud kujutlust. Võib kujutleda, et pooli iga keerd on peaaegu suletud, nagu see on näidatud joonisel 159. Siis saab ühe keeruka liitpinna s jagada mitmeks lihtsaks, nimelt pindadeks s_1, s_2, s_3, mis on piiratud pooli üksikute keerdudega, ja pinnaks s_0, mis on piiratud emj. allikaga, juurdeviigujuhtmetega ja pooli üksikuid keerde ühendavate juhtmelõikudega. Niisugusel lihtsustamisel muutub iga keerd täielikult määratuks ja osutub võimalikuks rääkida ühe keeruga ahelduvast voost.

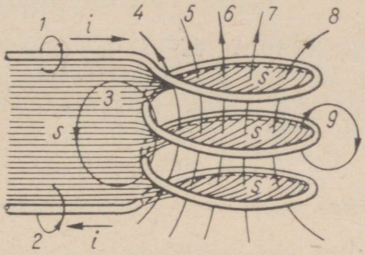
On kokku lepitud tähistada tähega Φ voogu läbi ühe keeru kontuuriga piiratud pinna. Kasutades voo seda tähistust, me

käsitlesime seni kõikidel juhtumitel ainult selliseid lihtsaid kontuure.

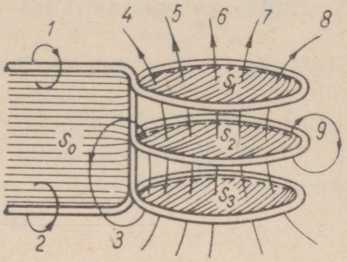
Erinevalt ühe keeruga ahelduvast voost nimetatakse *aheldusvooks* ja tähistatakse tähega Ψ voogu läbi kogu elektriahela kontuuriga piiratud pinna $s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3$. Ilmselt saame:

$$\Psi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3,$$

kus Φ_0 — juurdeviiguahela kontuuriga ahelduv voog ja Φ_1, Φ_2, Φ_3 — pooli üksikute keerdudega ahelduvad vood. Termin *aheldusvoog* on seotud asjaoluga, et magnetilise induktsiooni



Joon. 158.



Joon. 159.

üksikud jooned ahelduvad mitu korda kogu ahelaga. Aheldusvoo saab leida ahela tegelikku kontuuri (joon. 158) kunstlikult joonisel 159 esitatud ekvivalentseks kontuuriks teisendamata. Suuruse Ψ leidmiseks tuleb korrutada magnetilise induktsiooni iga ühikjoone voog ahela nende keerdude arvuga, mida see joon aheldab, ja liita saadud arvud algebraliselt. Seejuures tuleb positiivseks lugeda neid magnetilise induktsiooni jooni, mille suund on seotud elektriahela kontuuris oleva voolu positiivse suunaga parema käe juhise kohaselt.

On selge, et kogu ahelas indutseeritav emj. määratakse aheldusvooga Ψ. Tõepoolest, voo vähenemisel nullini lõikub magnetilise induktsiooni iga joon nii mitu korda voolu teekonna kontuuriga, kui mitu korda ta temaga aheldub. Seepärast peab kehtima võrdus

$$e = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Vood Φ_1, Φ_2 jne., mis ahelduvad pooli üksikute keerdudega, on üldiselt erinevad. Seepärast on erinevad ka üksikutes keerdudes indutseeritavad elektromotoorsed jõud. Paljudel juhtumitel võib ligikaudselt arvestada, et kõik magnetilise induktsiooni jooned ahelduvad pooli kõigi w keeruga. Siis on pooli aheldusvoog seotud ühe keeru vooga lihtsa valemiga $\Psi = w\Phi$,

kusjuures siia ei kuulu voolu juurdeviiguahelaga ahelduv voog Φ_0. Niisugusel juhtumil on poolis indutseeritav emj.

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -w\frac{d\Phi}{dt}.$$

Niisugust lihtsustatud arvutuskäiku võib harilikult kasutada ferromagnetilisest materjalist kinniste südamikega poolides indutseeritavate elektromotoorsete jõudude arvutamisel.

§ 49. Enda- ja vastastikuse induktsiooni elektromotoorsed jõud

Lihtsaimal üheainsa vooluringi juhtumil on selle vooluringi kontuuriga ahelduv magnetvoog määratud vooluga i sellessamas vooluringis. Niisugust voogu nimetatakse *endainduktsiooni vooks.* Mingi vooluringi ehk mittehargneva elektriahela *endainduktsiooni aheldusvoog* tähistatakse Ψ_L-ga. Me võime selle esitada kujul

$$\Psi_L = Li.$$

Suurust L nimetatakse vooluringi või elektriahela *omainduktiivsuseks* ehk lihtsalt *induktiivsuseks.* Induktiivsus sõltub ahela mõõtmetest ja kujust ning ka keskkonna omadustest, kus magnetväli esineb.

Endainduktsiooni voo muutumisel tekib vooluringi kontuuris *endainduktsiooni emj.* Voo Ψ_L muutumine võib toimuda nii voolu muutumise kui ka vooluringi induktiivsuse muutumise tõttu. Seepärast võib üldjuhtumil endainduktsiooni elektromotoorset jõudu e_L esitada kahe liikme summana:

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}.$$

Juhtumil, kui $L = \text{const}$, saame:

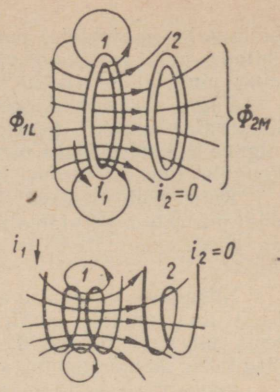
$$e_L = -L\frac{di}{dt}.$$

Kahe või mitme vooluringi korral ühega neist vooluringidest ahelduv magnetvoog on üldiselt põhjustatud kõikide vooluringide vooludest. Vaatleme kaht vooluringi ja eeldame, et ainult esimest neist läbib vool (joon. 160). Võib juhtuda, et osa esimese vooluringi endainduktsiooni voo magnetilise induktsiooni jooni aheldub samuti ka teise vooluringiga. Seejuures teise vooluringiga ahelduvat ja esimese vooluringi vooluga määratud voogu nimetatakse *vastastikuse induktsiooni vooks.* Teise vooluringiga ahelduvat *vastastikuse induktsiooni aheldusvoogu* tähistame Ψ_{2M} või Ψ_{21}. Esimene indeks näitab alati, millise ahelaga

voo aheldumist vaadeldakse. Teine indeks (M või 1) näitab, et voog on põhjustatud mõne teise, antud juhtumil esimese ahela voolust. Võib kirjutada:

$$\Psi_{2M} = M_{21} i_1.$$

Suurust M_{21} nimetatakse vooluringide või elektriahelate *vastastikuseks induktiivsuseks*, mis sõltub vooluringide või elektriahelate mõõtmetest ja kujust, nende vastastikusest asendist ning keskkonna magnetilistest omadustest.



Joon. 160.

Teise vooluringiga ahelduva vastastikuse induktsiooni voo muutumisel tekib selles kontuuris *vastastikuse induktsiooni elektromotoorne jõud.* Voog Ψ_{2M} võib muutuda kas voolu i_1 või vastastikuse induktiivsuse M_{21} muutumise tõttu. Vastavalt sellele võib teises kontuuris tekkiva vastastikuse induktsiooni elektromotoorse jõu esitada kujul

$$e_{2M} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_2 M}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(M_{21} i_1)}{\mathrm{d}t} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - i_1\frac{\mathrm{d}M_{21}}{\mathrm{d}t}.$$

Kui $M_{21} = \text{const}$, siis $e_{2M} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$.

§ 50. Elektromagnetilise induktsiooni nähtusel põhineva kommutaatorita alalisvoolumasina ehitamise võimatus

Elektromagnetilise induktsiooni nähtusel põhinevad alalisvoolumasinad varustatakse kommutaatoriga, et saada alalispinget nende klemmidel. Masina ankrumähises indutseeritakse vahelduv emj., mille keskväärtus perioodi kohta on võrdne nulliga. Selle emj. alaldamiseks kasutataksegi kommutaatorit. Kommutaator teeb masina kallimaks ja nõuab pidevat hoolitsust masina töötamise ajal. Kommutaatori olemasolu piirab tööpinge väärtust ja võimsust, millele võib ehitada masina. Kõrge pinge ja suure võimsuse korral muutub raskeks võidelda kommutaatori sädelusega. On mõistetav, et leiutajad on korduvalt püüdnud luua ilma kommutaatorita alalisvoolumasinaid, kus täiesti puuduksid ükskõik millised libisevad kontaktid indutseeritud voolu peaahelas. Selliselt õnnestub luua küll vahelduvvoolugeneraatoreid, kus indutseeritud voolu mähis asetatakse staatoriks nimetatavale masina liikumatule osale ja selle mähise väljaviigud ühendatakse vahetult ilma mingisuguste libisevate kontaktideta välise ahela klemmidega. Rootoriks nimetatavale masina pöörlevale osale asetatakse ergutusmähis, mida toidetakse alalisvooluga. See tuuakse juurde läbi harjade, mis hõõrduvad vastu rootori võllile kinnitatud pöörlevaid rõngaid. Nende libisevate kontaktide olemasolu ergutusahelas, s. o. ühes abiahelas, ei tekita masina konstrueerimisel raskusi, sest võimsus ergutusahelas on väike, võrreldes võimsusega staatori mähise ahelas.

Libisevate kontaktide puudumine vahelduvvoolumasina peaahelas võimaldab ehitada neid masinaid väga suurele võimsusele, 300 000 ja enam kilovatti, ning pingele üle 10 000 voldi.

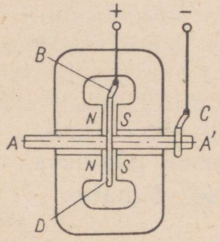
Väga ahvatlev on mõte luua ka alalisvoolu jaoks masin, millel ei ole libisevaid kontakte peaahelas, s. o. ei ole tavalist kommutaatorit. Kui niisugune võimalus oleks olemas, siis tal oleks erakordne tähtsus ülisuure energia kaugülekande probleemi lahendamiseks kõrgepingelise alalisvooluga.

Kuid kõik senised kommutaatorita alalisvoolumasinate loomise katsed olid määratud paratamatule ebaõnnestumisele. Näitame, et niisugust masinat on elektromagnetilise induktsiooni nähtust kasutades põhimõtteliselt võimatu luua.

Niisuguse masina indutseeritud voolu ahela kontuur peab olema elektriliselt muutumatuks kontuuriks, s. o. temas ei tohi toimuda mingisuguseid tema pidevust rikkuvaid muudatusi. Selles seisnebki põhiline eesmärk, mida järgitakse kommutaatorita masina loomise katsetes.

Elektriliselt muutumatu kontuuriga ahelal ei esine kuskil ega kunagi katkestust ja kunagi ei lühistata ühtki tema osa, s. o. kunagi ei ühendata elektriliselt kahte erinevat kontuuri punkti teineteisega. Niisuguse ahela kohta on alati rakendatav elektromagnetilise induktsiooni seaduse formuleering kujul $e = -\frac{d\Psi}{dt}$. Alalisvoolumasin peab tekitama oma klemmidel konstantse emj. või see emj. peab igal juhtumil omama alaliskomponenti. Seega nõutakse, et oleks täidetud tingimus $e = e_0 + e_\sim$. Siin $e_0 = \text{const}$, $e_\sim$ aga on emj. vahelduv perioodiline komponent, mille keskväärtus perioodi kohta võrdub nulliga. Saame, et $-\frac{d\Psi}{dt} = e_0 + e_\sim$. Integreerides selle võrrandi, leiame:

$$\Psi = -e_0 t - \int e_\sim dt + \text{const.}$$



Joon. 161.

Siit järeldub silmanähtavalt, et tingimuse $e_0 \not\equiv 0$ täitmiseks peab staatorile asetatud mähise kontuuriga haaratava magnetvoo absoluutväärtus piiramatult kasvama. On täiesti selge, et võimatu on saavutada magnetvoo lõpliku kiirusega kasvamist kuitahes pika ajavahemiku jooksul. Seepärast ei saagi ehitada kommutaatorita elektrimasinat, mille töötamine põhineks elektromagnetilise induktsiooni nähtusel ja mis annaks konstantset elektromotoorset jõudu kuitahes pika ajavahemiku vältel.

On vaja teha selgitav märkus veel selle kohta, et nn. unipolaarmasinaid ei saa vaadelda kommutaatorita masinatena. Joonisel 161 on kujutatud unipolaarmasina põhimõtteskeem. Magneti või elektromagneti ümarpooluste vahel pöörleb võllile kinnitatud juhtivast materjalist ketas. Ketta raadiused lõikavad magnetilise induktsiooni jooni ja järelikult indutseeritakse kettas piki raadiusi suunatud emj. Võlli ja ketta välise ääre vahele tekib pinge, mille võib edasi anda masina klemmidele harjade B ja C abil. Nendest üks libiseb ketta äärel ja teine võllile kinnitatud rõngal. Masina konstantse pöörlemiskiiruse puhul on ka tema klemmipinge konstantne. Antud juhtumil on meil tegemist lõpmatult suure kommutaatori lestade arvuga kommutaatormasinaga, sest masina pöörlemisel tulevad harja alla üha uued ja uued ketta radiaalsed elemendid.

Kommutaatorita alalisvoolumasina loomise ülesanne, mille lahendamiseks on seni tehtud ainult ebaõnnestunud katseid, ei lahendu ka unipolaarmasinate abil. Unipolaarmasinas on peaahelal ainult üks keerd ja järelikult pole võimalik saada temas kuigi suurt elektromotoorset jõudu.

Niisiis alalispinge saamiseks niisuguse elektrimasina klemmidel, milles kasutatakse elektromagnetilise induktsiooni nähtust, on vaja varustada see masin kommutaatoriga. Kommutaatori abil toimub masina mähise sektsioonide ümberlülitamine.

On olemas veel üks tee alalisvoolu saamiseks, mida võib vahetult näha elektromagnetilise induktsiooni avaldisest kujul $\Delta q = -\frac{\Delta\Phi}{r}$. Kui vahelduvvoolugeneraatorist ja tarbijast koosnevasse ahelasse lülitada järjestikku seadis, mille takistus muutub perioodiliselt sünkroonselt, s. o. taktis voo muutumisega generaatoris, siis võib ahelas saada alaliskomponenti omava voolu. Olgu näiteks ajavahemikus, mil voog suureneb ($\Delta\Phi > 0$), r suur ning vastavalt suurus Δq, olles negatiivne, väikese absoluutväärtusega, seevastu voo vähenemise ($\Delta\Phi < 0$) ajavahemikus aga r väike ning vastavalt suurus Δq, olles positiivne, tunduva suurusega. Järelikult sisaldavad ahela vool ja tarbija pinge alaliskomponente, kuigi voo poolt indutseeritud elektromotoorses jõus alaliskomponent puudub. Nimelt sel teel luuaksegi mitmesuguste ventiilidega (kenotronidega, gasotronidega, pooljuhtventiilidega jne.) vahelduvvoolualaldeid. Nendel ventiilidel on voolu eri suundade puhul erinevad takistused. Niisuguste ventiilide kui mittelineaarsete elementide karakteristikuid vaadeldi § 34 ja 35, alaldites toimuvaid protsesse aga uuritakse mittelineaarsete vahelduvvooluahelate vaatlemisel teose teises osas.

§ 51. Elektromagnetiline inerts. Lenzi printsiip

Miinusmärk indutseeritud emj. avaldises näitab seda, et see emj. püüab tekitada sellisel viisil suunatud voolusid, mis takistavad magnetvoo muutumist. See asjaolu väljendab Lenzi poolt formuleeritud elektromagnetilise inertsi printsiipi. Tõepoolest, oletame, et vooluringiga ahelduv voog väheneb, s. o. $d\Psi < 0$. Sel juhtumil $e = -\frac{d\Psi}{dt} > 0$ ja järelikult vooluringi kontuuris tekkiv emj. püüab esile kutsuda voolu positiivses suunas ja sellega takistada voo vähenemist. Vastupidi, kui voog kasvab, siis $d\Psi > 0$ ja $e < 0$. Sel juhtumil püüab kontuuris indutseeritav emj. tekitada voolu negatiivses suunas ja sellega takistada voo suurenemist. Seega näeme, et indutseeritud elektromotoorsed jõud omavad inertsjõudude iseloomu.

Öeldu alusel võime formuleerida elektromagnetilise inertsi printsiibi elektromagnetiliste protsesside suhtes, mis toimuvad vooluringide süsteemis. Nimelt: *vooluringide süsteemis esineb tendents säilitada süsteemi eri vooluringidega ahelduvad magnetvood muutumatutena. Igal katsel muuta vooluringidega ahelduvaid voogusid tekivad vooluringide kontuurides elektromotoorsed jõud, mis püüavad takistada seda muutumist.* Lihtsaimal, ühe vooluringi juhtumil tekib endainduktsiooni emj.

$$e = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

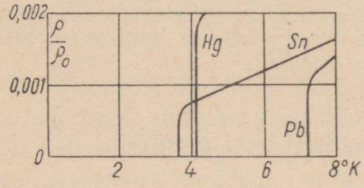
Lihtsaimal juhtumil, mida vaadeldakse dünaamikas, nimelt

vabalt liikuva materiaalse punkti juhtumil, seisneb inertsi printsiip selles, et vabale materiaalsele punktile on omane säilitada oma liikumishulka. Kui väliste jõudude toimel muutub materiaalse punkti liikumishulk, siis tekivad seejuures väliste jõududega võrdsed ja vastassuunalised inertsjõud, mis takistavad liikumishulga muutumist. Kui jõu suund ühtib kiiruse v suunaga, siis inertsjõud

$$f = -\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = -m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

kus m on materiaalse punkti mass.

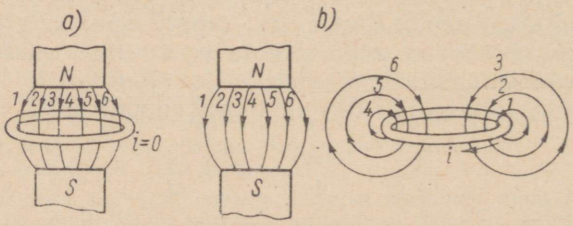
Näeme, et elektromagnetilises protsessis võib magnetvoogu vaadelda liikumishulgana, vooluringi induktiivsust elektromagnetilise inertsi tegurina ja voolu elektrilise kiirusena. Süsteemi elektriliseks koordinaadiks on elektrilaeng q, mis kandub läbi vooluringi ristlõike alates mingist alghetkest, sest $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$



Joon. 162.

Inertsjõud avalduvad kõige täielikumalt süsteemis, milles ei ole hõõrdumist. Vastavalt ka elektromagnetiline inerts avaldub kõige täielikumalt ahelates, millede elektritakistus võrdub nulliga. Niisugust ülijuhtivat ahelat võib luua katseliselt. Ülijuhtivuse nähtus seisneb selles, et mõnedel metallidel, näiteks pliil, tinal ja elavhõbedal, on väga madalal temperatuuril (suurusjärguga mõni Kelvini kraad) peaaegu nulliga võrdne eritakistus. Nende metallide eritakistus väheneb temperatuuri alanemisel alguses sujuva kõvera järgi (joon. 162), kuid mingi antud metallile omase temperatuuri juures langeb äkki kuni äärmiselt väikese väärtuseni. Temperatuuri edasisel alanemisel jääb eritakistus tühiselt väikeseks, praktiliselt võrdseks nulliga. Joonisel 162 on ordinaatteljele kantud ülalnimetatud metallide antud temperatuuril T esineva eritakistuse suhe nende eritakistusse temperatuuril 273° K.

Oletame, et pliirõngas on toodud välisesse magnetvälja



Joon. 163.

(joon. 163, *a*) ja seejärel külmutatud, s. o. tehtud ülijuhtivaks. Aheldugu seejuures rõngaga väline voog $\Psi_M = \Psi_0$. Eemaldame nüüd rõnga välisest väljast. Rõngas tekib väline emj. $e_M = -\frac{d\Psi_M}{dt}$, mille mõjul rõngas tekib vool i ja moodustub endainduktsiooni voog Ψ_L. Välise emj. ja endainduktsiooni emj. summa peab võrduma vooluringi pingelanguga ir. Kuna $r = 0$, saame:

$$-\frac{d\Psi_M}{dt} - \frac{d\Psi_L}{dt} = 0,$$

millest järeldub, et

$$\Psi_M + \Psi_L = \text{const}.$$

Rõnga algasendis $\Psi_M = \Psi_0$ ja $\Psi_L = 0$ (joon. 163, *a*). Järelikult $\Psi_M + \Psi_L = \Psi_0$. Kui rõngas eemaldatakse välise välja piirkonnast (joon. 163, *b*), saame $\Psi_M = 0$ ja $\Psi_L = Li = \Psi_0$.

Näeme, et $r = 0$ puhul avaldub elektromagnetiline inerts täiel määral. Resulteeriv aheldusvoog jääb konstantseks ning toimub ainult välise voo muundumine endainduktsiooni vooks.

§ 52. Elektromotoorne jõud, pinge, potentsiaalide vahe

Pöördume tagasi terminite «elektromotoorne jõud», «elektripinge» ja «elektripotentsiaalide vahe» põhimäärangute juurde, et endale selgesti ette kujutada, missugustel juhtumitel võib kasutada üht või teist neist termineist.

Mingil teekonnal mõjuv emj. on võrdne mitteelektrostaatilise päritoluga kõrvalise elektrivälja ja ka muutuva magnetvälja mõjul indutseeritud elektrivälja tugevuse joonintegraaliga mööda seda teekonda. Elektromotoorse jõu teket võivad tingida mitmesugused põhjused. Kui elektriahelas on elektrolüütjuhtivusega osi, siis võib emj. tekkida elektrokeemiliste protsesside tõttu. Kahe erinevast metallist juhi puutekohas tekib kontaktelektromotoorne jõud. Magnetvoo muutumisel mistahes keskkonnas asuvas kontuuris tekivad elektromagnetilise induktsiooni elektromotoorsed jõud.

Mõiste «elektripinge» või «pingelang» on seotud resulteeriva elektriväljaga. *Elektripinge mööda mingit teekonda punktist A punktini B on võrdne resulteeriva elektrivälja (elektrostaatilise, statsionaarse, kõrvalise, indutseeritud) tugevuse joonintegraaliga mööda seda teekonda.*

Tingimata on vaja alla kriipsutada, et pinge kahe punkti A ja B vahel (joon. 164) vahelduva magnetvälja korral sõltub teekonna valikust, mida mööda me elektrivälja tugevuse joon-

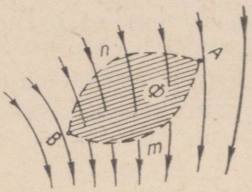
integraali punktist A punktini B moodustame. Tõepoolest, suletud kontuuri $AmBnA$ kohta muutuvas magnetväljas saame:

$$\oint_{AmBnA} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

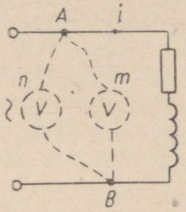
kus Φ on voog läbi selle kontuuriga piiratud pinna. Järelikult

$$\int_{AmB} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{AnB} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} - \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Näitena vaatleme vahelduvvooluahelat (joon. 165). Niisuguse ahela juhtmeid ümbritsev magnetväli on ajaliselt muutuv. Seepärast indutseeruvadki kontuurides, mida me võime endile mõttes



Joon. 164.



Joon. 165.

dielektrikuis ette kujutada, elektromotoorsed jõud. Seetõttu pinge ahela punktide A ja B vahel *sõltub teekonna valikust* punktist A punktini B. Ja tõepoolest, sel juhtumil voltmeetri näit põhimõtteliselt sõltubki voltmeetri ja ühendusjuhtmete asendist ahela kontuuri suhtes. Siit selgub, et rangelt võttes ei saagi vahelduvvoolu ahelate puhul rääkida pingest ahela kahe punkti vahel või pingest ahela klemmidel, lisamata selgitavat märkust selle kohta, millist teekonda mööda pinge määratakse. Ometi tarvitame sageli väljendit «pinge vahelduvvooluahela klemmidel» ehk «vahelduvvooluahela klemmipinge» ilma igasuguse selgituseta, sest see määramatus on harilikes ahelates madalatel sagedustel ja mitte liiga suurte voolude puhul praktiliselt tähtsusetu, kui muidugi integreerimisteekonda ei valita kohtadesse, kus vahelduvad magnetväljad on eriti tugevad. See määramatus osutub praktiliselt märgatavaks väga kõrgetel sagedustel ja ahela väga suurte voolude puhul. Sellistel juhtumitel on võimalik rääkida ainult pingest ahela kahe punkti vahel mööda antud kindlaksmääratud teekonda.

Nagu varem näidati, ei sõltu elektrivälja tugevuse joonintegraal elektrostaatilises väljas ja liikumatuid juhtmeid läbivate alalisvoolude elektriväljas üldse teekonna valikust punktide

A ja B vahel, kui integreerimisteekond ei läbi emj. allikaid. Niisugustes väljades on emj. mistahes emj. allikaid mitteläbivas suletud kontuuris võrdne nulliga. Niisuguseid välju võib täielikult iseloomustada skalaarse elektripotentsiaaliga, s. t. nad osutuvad potentsiaalväljadeks. Nende suhtes on kasutatav termin «punktide A ja B potentsiaalide vahe».

Seega mõiste «potentsiaalide vahe», mis on kasutatav ainult potentsiaalväljade korral, on palju kitsam kui mistahes elektriväljade puhul kasutatav mõiste «pinge».

Kahe punkti elektripotentsiaalide vahe on võrdne potentsiaalse (elektrostaatilise või statsionaarse) elektrivälja tugevuse joonintegraaliga ühest antud punktist teise.

Potentsiaalvälja korral mõisted «pinge punktide A ja B vahel» ja «punktide A ja B potentsiaalide vahe» oma olemuselt ühtivad.

Vaatleme veidi üksikasjalikumalt äsja väljendatud üldisi põhimõtteid konkreetsete näidete varal. Kõigepealt pöördume tagasi joonisel 165 kujutatud ahela näite juurde.

Kui vool selles ahelas oleks muutumatu, siis elektriväli oleks statsionaarne ja potentsiaalne, s. t. sel puhul võiks kirjutada:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{sts} \quad \text{või} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{pot}.$$

See elektriväli on seotud laengutega juhtmete pinnal ja antud juhtumil osutub ahela takistusest tingitud pingelangu tulemuseks.

Nagu äsja märgiti, ei sõltu elektripinge punktide A ja B vahel sel juhtumil teekonna valikust. Pinge mööda mistahes suletud kontuuri on võrdne nulliga: $\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0$. Viimati öeldu on kooskõlas sellega, et mistahes antud kontuuri emj. $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ on niisuguses väljas võrdne nulliga, sest $\Phi = \text{const}$.

Kui vool ahela juhtmetes hakkab ajaliselt muutuma, siis põhjustab see füüsikaliselt juhtmeid ümbritseva elektromagnetilise välja muutumise. Selles muutuvas väljas sõltub pinge punktide A ja B vahel igal hetkel teekonna valikust nende punktide A ja B vahel. Formaalselt võib seejuures resulteerivat elektrivälja käsitada kahe välja summana, milledest üks on statsionaarne (*potentsiaalne*) elektriväli, mis on samuti kui alalisvoolu puhulgi seotud laengutega juhtmete pinnal, ja teine muutuvast magnetväljast põhjustatud indutseeritud elektriväli (nn. *pöörisväli*). Seega

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{sts} + \mathbf{E}_{ind} \quad \text{ehk} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{pot} + \mathbf{E}_{pööris}.$$

Statsionaarse (potentsiaalse) välja kohta mistahes suletud kontuuri puhul

$$\oint \mathbf{E}_{sts}\, d\mathbf{l} = 0.$$

Indutseeritud välja (pöörisvälja) jaoks vastavalt

$$\oint \mathbf{E}_{ind}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \neq 0.$$

Seega saame resulteeriva välja kohta:

$$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint (\mathbf{E}_{sts} + \mathbf{E}_{ind})\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \neq 0.$$

Ülalesitatud definitsiooni kohaselt käsitletakse elektromotoorse jõuna ainult suurust $\oint \mathbf{E}_{ind}\,\mathrm{d}\mathbf{l}$. Teda võib esitada kontuuri üksikute osade elektromotoorsete jõudude summana, näiteks joonise 165 kohaselt kujul

$$\oint_{AmBnA} \mathbf{E}_{ind}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E}_{ind}\,\mathrm{d}\mathbf{l} + \int_{BnA} \mathbf{E}_{ind}\,\mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Kasutades mõistete «pinge» ja «elektromotoorne jõud» varem valitud definitsioone, saame suletud kontuuri kohta:

$$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{ind}\,\mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad (*)$$

s. t. *pinge mööda suletud kontuuri on võrdne selles kontuuris indutseeritava elektromotoorse jõuga.* See tulemus saadakse alati, sest $\oint \mathbf{E}_{sts}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = 0$. Kontuuri üksikute lõikude puhul aga ei ole lõigu pinge ja emj. teineteisega võrdsed. Nii näiteks

$$u_{AmB} = \int_{AmB} \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{AmB} \mathbf{E}_{sts}\,\mathrm{d}\mathbf{l} + \int_{AmB} \mathbf{E}_{ind}\,\mathrm{d}\mathbf{l} \neq \int_{AmB} \mathbf{E}_{ind}\,\mathrm{d}\mathbf{l},$$

sest

$$\int_{AmB} \mathbf{E}_{sts}\,\mathrm{d}\mathbf{l} \neq 0.$$

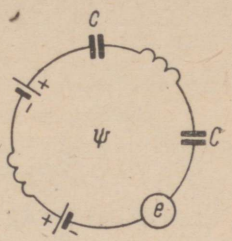
Võrdusel (*) on sama mõte, mis Kirchhoffi II seaduselgi, kuid seda seadust on antud juhtumil rakendatud dielektrikus asuva mõttelise kontuuri kohta.

Teise näitena vaatleme mittehargnevat elektriahelat, mis sisaldab induktiivpoole, kondensaatoreid, generaatoreid ja mitmesuguseid emj. allikaid — akumulaatoreid, termoelemente jne. — ning ühendusjuhtmeid (joon. 166).

Olgu Ψ kogu ahela aheldusvoog, mis haarab endasse ahela kõikide üksikute elementidega, sealhulgas ka generaatori mähistega ahelduvad magnetvood.

Moodustame kinnise integreerimisteekonna mööda ühendusjuhtmeid, mööda induktiivpoole ning generaatorite mähiseid moodustavaid juhtmeid, läbi emj. allikate ja läbi kondensaatorite plaatide vahelise dielektriku.

Võrduse (*) vasakpoolsele osale vastav suurus $\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l}$ kujutab seejuures ahela kõikide lõikude pingelangude summat, s. o. kõikide juhtmete takistustel ja emj. allikate sisetakistustel tekkivate pingelangude *ir* ning kõikide kondensaatorite plaatidevaheliste pingete u_C summat.



Joon. 166.

See suurus võrdub kõikide integreerimisteekonnaga määratud kontuuris mõjuvate elektromotoorsete jõudude summaga. Sellesse summasse kuulub ühelt poolt poolides, generaatorites ja ühendusjuhtmetes muutuva aheldusvoo Ψ tagajärjel indutseeritavate elektromotoorsete jõudude summa

$$\Sigma e_{ind\,k} = \oint \mathbf{E}_{ind}\,d\mathbf{l} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

ja teiselt poolt kõikide teiste energiaallikate elektromotoorsete jõudude summa, milledes elektromotoorsed jõud määratakse kõrvalise mitteelektrostaatilise päritoluga elektriväljaga:

$$\Sigma e_{ms\,k} = \oint \mathbf{E}_{ms}\,d\mathbf{l}.$$

Seega võrrandi (*) asemel saame nüüd

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{ind}\,d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_{ms}\,d\mathbf{l}$$

või

$$\Sigma ir_k + \Sigma u_{Ck} = \Sigma e_{ind\,k} + \Sigma e_{ms\,k}.$$

Seda võrrandit tuleb käsitada kui Kirchhoffi II seaduse üldistust vaadeldud ahelale, mis on õige nii alalis- kui ka vahelduvvoolu puhul. Seejuures alalisvoolu korral $\Sigma e_{ind\,k} = 0$. Vaadeldud ahelas alalisvool võrdub nulliga, sest ta ei saa läbida kondensaatoreid. Järelikult alalisvoolu korral

$$\Sigma u_{Ck} = \Sigma e_{ms\,k}.$$

Kui aga kondensaatorid lühistada, siis

$$\Sigma u_{Ck} = 0 \quad \text{ja} \quad \Sigma ir_k = \Sigma e_{ms\,k},$$

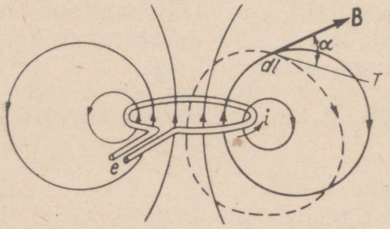
mis vastab ülaltoodud Kirchhoffi seadusele alalisvooluahela kohta.

KAHEKSAS PEATÜKK

MAGNETVÄLJA TUGEVUS JA KOGUVOOLU SEADUS

§ 53. Magnetvälja seos elektrivooluga

Magnetväli on eranditult kõikidel juhtumitel seotud elektrivooluga. Elektrivool ja tema magnetväli esinevad alati samaaegselt ning on oma olemuselt ainult ühtse füüsikalise protsessi erinevaiks karakteristikuiks. Käesolevas paragrahvis määrame kindlaks nende suuruste vahelise seose.



Joon. 167.

Vaatleme meelevaldse kujuga juhtmekeerdu, mida läbib vool i (joon. 167). Keeru ümber eksisteerib magnetväli. Eeldame, et keerd asub tühjuses.

Moodustame magnetilise induktsiooni joonintegraali mööda mingit kinnist teekonda, mis haarab vooluga keerdu ja on joonisel kujutatud kriipsjoonega. Nimetame kinnise teekonna, mida mööda ringintegraal võetakse, integreerimiskontuuriks. Katse näitab, et sõltumata integreerimiskontuuri kujust on magnetilise induktsiooni integraal mööda seda kontuuri võrdeline kontuuriga haaratava vooluga, s. t. kehtib võrdus

$$\oint B \cos \alpha \, dl = \oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 i.$$

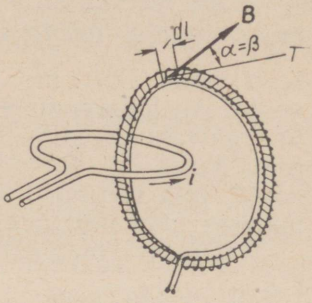
Suurust μ_0 me nimetame *magnetiliseks konstandiks*. Tema füüsikaline dimensioon on seoses elektrilise konstandi ε_0 dimensiooniga. Võrduse vasakpoolne osa omab tõepoolest dimensiooni

$$[Bl] = \left[\frac{\Phi}{l}\right] = \left[\frac{ut}{l}\right] = [Et] = \left[\frac{qt}{\varepsilon_0 l^2}\right].$$

Arvestades, et elektrivoolu i dimensioon on $[i]=\left[\frac{q}{t}\right]$, saame magnetilise konstandi μ_0 dimensiooniks

$$[\mu_0]=\left[\frac{t^2}{\varepsilon_0 l^2}\right]=\left[\frac{1}{\varepsilon_0 v^2}\right].$$

Järelikult on μ_0 dimensioon võrdne elektrilise konstandi ε_0 ja kiiruse ruudu korrutise pöördsuuruse dimensiooniga. Suuruse μ_0 arvväärtus sõltub mõõtühikute süsteemi valikust.



Joon. 168.

Magnetilise konstandi mõõtühikuks on MKSA ühikute süsteemis *henri meetri kohta* $\left(1\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\right)$. Toodud seosest mööda kinnist teekonda võetud magnetilise induktsiooni integraali ja voolu i vahel nähtub tõepoolest, et μ_0 mõõtühikuks MKSA ühikute süsteemis on $1\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}=1\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{A}}=1\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{Am}}$. Kuid $1\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}}$, nagu me edaspidi näeme, on induktiivsuse mõõtühik 1 *henri*. Selles ühikute süsteemis ratsionaliseeritud kujuga võrrandite puhul on magnetilise konstandi väärtuseks (vt. lisa)

$$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\approx 1{,}257\cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}.$$

Võrduse $\oint \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{l}=\mu_0 i$ õigsust võib kontrollida järgmise katsega.

Võtame õhukese painduva isoleermaterjalist lindi. Mähime ümber selle lindi ühtlaselt kogu lindi ulatuses peenikese traadi (joon. 168). Olgu w_1 mähise keerdude arv lindi pikkusühiku kohta, s — lindi ristlõige ja $\mathrm{d}l$ — lindi pikkuse element. Magnetvoog läbi lindi ristlõike on $\Phi=\int_s \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$. Lindi ristlõike väiksuse tõttu võib lugeda välja eraldi iga ristlõike ulatuses homogeenseks, s. t. voo arvutamisel võib lugeda induktsiooni konstantseks. Järelikult $\Phi=B\cos\beta\, s$, kus β on nurk ristlõike s normaali ja vektori $\mathbf{B}$ suuna vahel. Kuid ristlõike normaal ühtib suunalt $\mathrm{d}l$-ga. Järelikult on nurk β võrdne nurgaga α vektori $\mathbf{B}$ ja lindi telje puutuja T suuna vahel. Niisiis on mähise üht keerdu läbiv voog

$$\Phi=B\cos\alpha\, s.$$

Lindi lõigu $\mathrm{d}l$ keerdude aheldusvoog

$$\mathrm{d}\Psi=\Phi w_1\,\mathrm{d}l=B\cos\alpha\, s w_1\,\mathrm{d}l.$$

Lindi kogu pikkuse kohta on lindi mähise kõikide keerdude aheldusvoog

$$\Psi = sw_1 \oint B \cos \alpha \, dl.$$

Seega mõõtes aheldusvoogu Ψ ja teades suurusi s ja w_1, on meil võimalik mõõta mööda lindi telge integraali $\oint B \cos \alpha \, dl$. Kirjeldatud linti me nimetame lühiduse mõttes *magnetiliseks vööks*. Aheldusvoogu Ψ võib alalisvoolu i korral mõõta ballistilise galvanomeetriga, lülitades voolu välja või avades lindi ja eemaldades ta kiiresti välja mõjupiirkonnast. Vahelduvvoolu korral võib voo amplituudi määrata sel teel, et mõõdetakse lindi mähises indutseeritava emj. amplituud.

Katsetades magnetilise vööga me veendume, et *ringintegraal* $\oint \mathbf{B}\, dl$ *mööda voolu* i *teekonda haaravat suletud kontuuri ei sõltu integreerimiskontuuri kujust ja on võrdeline vooluga* i. Märgime seejuures, et kui ringkäigu positiivne suund mööda integreerimiskontuuri on seotud voolu i positiivse suunaga parema käe kruvi reegli järgi, siis $\oint \mathbf{B}\, dl$ ja i on sama märgiga. Kui integreerimiskontuur ei haara voolu, siis on ringintegraal $\oint \mathbf{B}\, dl$ võrdne nulliga sõltumata integreerimiskontuuri kujust.

Seos $\oint \mathbf{B}\, dl = \mu_0 i$ väljendab magnetvälja ja voolu vahelist lahutamatut seost. Tõepoolest, kui ühitada magnetväljas integreerimisteekond magnetilise induktsiooni mistahes joonega, mis on alati kinnine, ja valida liikumise suund integreerimisteekonnal vektori $\mathbf{B}$ suunas, siis saame, et $\oint \mathbf{B}\, dl > 0$ ja järelikult ka $i > 0$. Seega *magnetilise induktsiooni iga joon haarab endaga tingimata elektrivoolu. Vastavalt sellele on elektrivool alati ümbritsetud magnetväljast.*

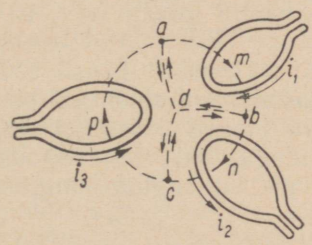
Magnetväli on põhiliseks elektrivoolu esinemise tunnuseks. Elektrivoolu eksisteerimise üle me võime otsustada mitmesuguste tunnuste abil, näiteks voolu soojusliku või elektrokeemilise toime kaudu. Kuid need voolu nähtused esinevad ainult vastavate tingimuste olemasolul, magnetväli aga kaasneb elektrivooluga alati. Üksikutel juhtumitel me võime otsustada elektrivoolu olemasolu üle ainult tema magnetvälja kaudu. Niisuguseks juhtumiks osutub vool ülijuhtivas vooluringis, mis kulgeb ilma vähegi märgatava soojuse eraldumiseta.

Üldistame seose $\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \mu_0 i$ keerukamate vooluringide juhtumile. Olgu meil mõned voolujuhtmed, mis on haaratud integreerimiskontuuriga (joon. 169). Alati saab selle kontuuri täiendavate joonte abil jaotada mitmeks kontuuriks, milledest igaüks haarab ühe voolu. Nii võib näiteks joonisel 169 kujutatud kolme voolu haarava kontuuri *ambncpa* jaotada joontega *ad*, *bd* ja *cd* kontuurideks *ambda*, *bncdb* ja *cpadc*, milledest igaüks haarab ühe voolu. Saame:

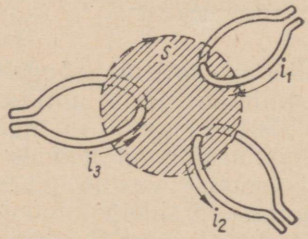
$$\oint_{ambda} \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \mu_0 i_1; \qquad \oint_{bncdb} \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \mu_0 i_2; \qquad \oint_{cpadc} \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \mu_0 i_3.$$

Liidame need võrdused. Seejuures integraalide liikmed mööda jooni *ad*, *bd* ja *cd* paarikaupa kompenseeruvad ja vasakpoolsesse ossa jääb integraal mööda kontuuri *ambncpa*. Järelikult

$$\oint_{ambncpa} \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \mu_0 (i_1 + i_2 + i_3).$$



Joon. 169.



Joon. 170.

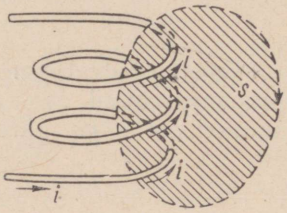
Võrrandi parempoolne osa kujutab endast integreerimiskontuuriga piiratud pinda läbivate kõikide voolude summat. Joonisel 170 on see pind viirutatud ja tähistatud tähega *s*. Positiivseteks me peame lugema neid voole, mis on suunatud parema käe kruvi kulgemise suunas, kui kruvi pea pöörduks integreerimiskontuuri positiivseks valitud ringkäigu suunas, sest siis ühtib voolu magnetvälja induktsioonijoonte suund ringkäigu positiivse suunaga integreerimiskontuuril. Joonisel 169 kujutatud juhtumil on voolud i_1 ja i_3 positiivsed, vool i_2 aga negatiivne.

Võib juhtuda, et voolude leppelised positiivsed suunad elektriahelates on antud sõltumatult integreerimiskontuuril ringkäigu positiivse suuna valikust. Sel juhtumil tuleb parempoolses osas iga voolu algebralise avaldise ette asetada pluss- või miinusmärk sõltuvalt sellest, kas leppelised positiivsed integreerimiskontuuri ringkäigu ja voolu suunad vastavad või ei vasta parema käe kruvi reeglile.

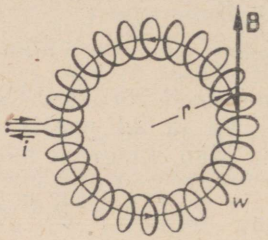
Vaatleme w keeruga pooli tähtsat erijuhtumit. Pooli keerde läbib vool i ja integreerimiskontuur haarab kõiki keerde (joon. 171). Integreerimiskontuuriga piiratud pinda s läbivate voolude summa on seejuures võrdne wi. Järelikult

$$\oint \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 wi.$$

Üksikuil lihtsamail juhtumeil võib saadud seoseid kasutada magnetilise induktsiooni määramiseks.



Joon. 171.



Joon. 172.

Näitena vaatleme rõngakujulist w keerust koosnevat solenoidi, mille keerud on ühtlaselt jaotatud kogu solenoidi pikkusele (joon. 172). Magnetilise induktsiooni jooned osutuvad ringjoonteks, mis ahelduvad kõikide keerdudega, kui viimased on tihedasti teineteise vastas. Suurus B piki niisugust ringjoont on konstantne. Järelikult

$$\oint \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = B \oint \mathrm{d}l = Bl = \mu_0 wi$$

ja

$$B = \frac{\mu_0 wi}{l} = \frac{\mu_0 wi}{2\pi r},$$

kus $l = 2\pi r$ on magnetilise induktsiooni joone pikkus ja r — selle raadius.

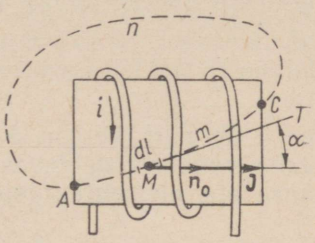
§ 54. Aine magneetumus ja magnetvälja tugevus

Eelmises paragrahvis vaadeldi juhtumit, kui vooluringide magnetväli asub tühjuses. Katse näitab, et kui nendesamade vooludega needsamad vooluringid ümbritseda ainega või asetada nende lähedale kas või osassegi ruumi mingisugusest ainest kehad, siis magnetväli suuremal või vähemal määral muutub. See välja muutus on aines eneses välise magnetvälja mõjul tekkiva elementaarsete molekulisiseste ja aatomisiseste elektrivoolude teatud orienteerituse tulemus.

Elementaarvoolud esinevad iga aine sees ka välise välja puudumisel. Me kujutleme neid voole kui elektronide liikumist mööda orbiite aine aatomite sees ja kui elektronide pöörlemist ümber oma telgede. Mõiste alla «elementaarelektrivool» me viime siinjuures ka selle seni veel läbiuurimata sisemise liikumise elementaarosakestes, mis põhjustab nende osakeste magnetiliste momentide tekkimise, millest räägitakse selle paragrahvi lõpus. Kui elementaarvoolud aine sees on kaootiliselt orienteeritud, siis nähtuse makroskoopilisel vaatlemisel nad magnetvälja ei tekita. Kui selle välise välja mõjul, kuhu tuuakse aine, siiski tekib teatud määral elementaarvoolude kooskõlastatud orienteerumine, siis nad moodustavad oma lisamagnetvälja, mis välisele väljale ülestudes teda muudab.

Aine magnetilisi omadusi vaadeldakse eriparagrahvis. Märgime siin, et on olemas aineid, milledes elementaarvoolud välise välja mõjul paigutuvad nii, et resulteeriv väli tugevneb. Nende hulka kuuluvad nn. *paramagnetilised* ja *ferromagnetilised* ained.

Esineb veel grupp aineid, mida nimetatakse *diamagnetilisteks*, kus välise magnetvälja mõjul tekivad niisugused lisaelementaarvoolud, mis nõrgendavad neid esilekutsunud välja.



Joon. 173.

Vaatleme pooli vooluga i, millel on w keerdu ja millesse on paigutatud mingist ainest keha (joon. 173).

Võtame magnetilise induktsiooni joonintegraali mööda kinnist kontuuri $AmCnA$, mis haarab kõik pooli keerud. Integreerimiskontuuri osa AmC asub keha sees ja osa CnA tühjuses.

Pooli voolu i poolt tekitatud magnetvälja mõjul keha magneetub, s. o. elementaarvoolud keha aines orienteeruvad teatud määral omavahel kooskõlastatult ja tekitavad oma magnetvälja. Joont AmC haaravate elementaarvoolude summa erineb nullist. Tähistame seda summat tähega i'. Saame:

$$\oint \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 w i + \mu_0 i'.$$

Olgu $\mathrm{d}i'$ joone AmC lõiku $\mathrm{d}l$ haaravate elementaarvoolude summa. Suurus $\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}l}$ kujutab endast joont AmC haaravat elementaarvoolu selle joone pikkusühiku kohta tema antud punktis M. On loomulik, et suurus $\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}l}$ sõltub joone AmC suunast, s. o. lõigu $\mathrm{d}l$ suunast vaadeldavas punktis M.

Mingisuguse teatud suuna puhul, mida me märgime ühik-

vektoriga $\mathbf{n}_0$, on suurus $\frac{di'}{dl}$ suurima väärtusega. Märgime lõigu dl selles suunas dn-ga ja toome sisse vektorsuuruse

$$\mathbf{J} = \frac{di'}{dn}\mathbf{n}_0,$$

mida nimetame aine *magneetumuseks.*

Aine magneetumus on suuruse poolest arvuliselt võrdne elementaarvoolude summaga, mis haaravad läbi antud punkti sellises suunas tõmmatud joone pikkusühikut, et see summa oleks suurim. Vektori **J** *suund ongi selliseks suunaks. Ta on seotud elementaarvoolude suunaga parema käe kruvi reegliga.* Lõigu dl vabalt võetud suuna puhul saame:

$$\frac{di'}{dl} = J\cos\alpha,$$

kus α on nurk vektori **J** suuna ja joone AmC puutuja positiivse suuna vahel vaadeldavas punktis M. Seega on kogu joont AmC haaravate elementaarvoolude summa väärtus

$$i' = \int\limits_{AmC} \frac{di'}{dl}\,dl = \int\limits_{AmC} \mathbf{J}\cos\alpha\,dl = \int\limits_{AmC} \mathbf{J}\,d\mathbf{l}.$$

Kuna suletud integreerimiskontuuri lõigul CnA (joon. 173) ei ole elementaarvoolusid, siis

$$\oint\limits_{AmCnA} \mathbf{J}\,d\mathbf{l} = \int\limits_{AmC} \mathbf{J}\,d\mathbf{l} = i'.$$

Seega

$$\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \mu_0 wi + \mu_0 i' = \mu_0 wi + \mu_0 \oint \mathbf{J}\,d\mathbf{l}$$

või

$$\oint \left(\frac{B}{\mu_0} - \mathbf{J}\right) d\mathbf{l} = wi.$$

Integraalimärgi all sulgudes olevat vektorsuurust märgitakse tähega **H** ja nimetatakse *magnetvälja tugevuseks.* Saame:

$$\mathbf{H} = \frac{B}{\mu_0} - \mathbf{J},$$

millest

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}).$$

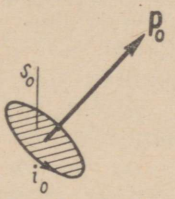
Tühjuse erijuhtumil $\mathbf{J} = 0$ ja $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$.

Tuues tähise **H** integraalimärgi-alusesse avaldisse saame:

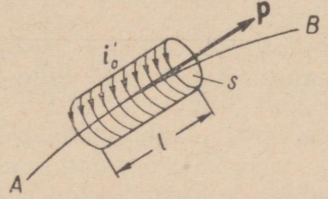
$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = wi.$$

Toodud magnetvälja tugevuse määrang üldjuhtumi jaoks on väärtuslik nimelt sellepärast, et magnetvälja tugevuse joonintegraal mööda iga suletud kontuuri on määratud *ainult makroskoopiliste vooludega*, mis voolavad integreerimiskontuuriga haaratud juhtmetes. Elementaarvoolude olemasolu aines *ei mõjuta* magnetvälja tugevuse mööda *suletud* kontuuri võetava joonintegraali suurust.

Määranud kõikides magnetvälja punktides väljatugevuse, võib tõmmata rea sellise omadusega jooni, et puutujate suund nende joonte kõikides punktides ühtib vektori **H** suunaga. Niisuguseid jooni nimetatakse *magnetvälja tugevuse joonteks*. Joonistel nad varustatakse nooltega, mis näitavad vektori **H** suunda.



Joon. 174.



Joon. 175.

Aine magneetumusele **J** võib anda veel teise määrangu, mis on seotud elementaarvoolu *magnetilise momendi* mõistega. Elementaarvoolu i_0 magnetiliseks momendiks p_0 nimetatakse suuruse i_0 korrutist pindalaga s_0, mis haaratakse selle vooluga. Magnetiline moment on vektorsuurus. Vektori $\mathbf{p}_0$ suund (joon. 174) võetakse piki pinna s_0 normaali ja seotakse voolu i_0 suunaga parema käe kruvi reegli abil. Seega

$$\mathbf{p}_0 = i_0 \mathbf{s}_0,$$

kus $\mathbf{s}_0$ on vektor, mis on suuruse poolest arvuliselt võrdne s_0-ga ja omab äsjanimetatud suunda.

Eraldame magneeditud aine sees silindri pikkusega l ja alusega s (joon. 175) ning oletame, et selle silindri mahus on aine makroskoopilises mõttes homogeenselt magneetunud. Olgu **p** kõikide elementaarvoolude magnetiliste momentide $\mathbf{p}_0$ geomeetriline summa silindri mahus. Vektorsuurust **p** nimetatakse *antud aine mahu magnetiliseks momendiks*.

Oletame, et silinder on eraldatud nii, et vektor **p** on suunatud mööda tema telge. Kõik elementaarvoolud silindri mahus võib asendada ühe ekvivalentse vooluga i_0', mis voolab silindri pin-

nal (joon. 175). Valime suuruse i_0' nii, et säiliks magnetilise momendi p väärtus, seega olgu

$$i_0's = p.$$

Niisuguse valiku peame tegema sellepärast, et elementaarvoolude magnetväli on täielikult määratud nende voolude magnetiliste momentidega.

Tõmbame joone AB, mis läheb mööda silindri telge. Silindri pikkusel l haarab seda joont vool i_0'. Järelikult vastavalt aine magneetumuse **J** varem antud määrangule saame:

$$i_0' = Jl, \text{ s. o. } i_0's = p = Jls = JV,$$

või

$$J = \frac{p}{V} \text{ ning } \mathbf{J} = \frac{\mathbf{p}}{V}.$$

Kui aine on magneetunud ebaühtlaselt, siis on vaja üle minna piirsuhtele

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{\mathbf{dp}}{dV},$$

kus $\Delta \mathbf{p}$ on aine mahu ΔV magnetiline moment.

Seega *aine magneetumus antud punktis on võrdne mingi antud punkti sisaldava aine ruumiosa magnetilise momendi ja selle ruumiosa mahu jagatise piirväärtusega selle mahu lähenemisel nullile.*

Nagu eespool märgitud, viisime elementaarvoolu mõiste alla ka seni veel läbiuurimata sisemise liikumise elementaarosakestes, mis põhjustab nende magnetiliste momentide tekkimise. Elektroni magnetilisel momendil on teatud kindel väärtus, s. t. magnetiline moment omab kvandilist iseloomu. Samuti on elektronil kindel liikumishulga moment. Elektroni magnetilist momenti ja liikumishulga momenti võib vaadelda elektroni pöörlemise (spinni) avaldumisena. Tõepoolest, elektroni laengu elementide ringliikumine elektroni telje ümber kujutab endast kinnist elementaarset ringvoolu, mis nagu iga elektrivool on ümbritsetud temaga seotud magnetväljast. Siiski ei anna niisugune lihtne ettekujutus võimalust elektroni magnetilise momendi ja liikumishulga momendi suurusi omavahel kooskõlastada elektroni pöörlemisraadiuse ja nurkkiiruse võimalike suurustega.

Magnetilist momenti omavad samuti ka need elementaarosakesed, millel ei olegi elektrilaengut, näiteks neutron. Seega tuleb tunnistada, et elementaarosakeste magnetilised momendid on nendes osakestes keerukamate, osakeste olemust ja peamisi omadusi määravate sisemiste protsesside tulemuseks. Siiski on täiesti loomulik siinkohal jätkata neid loogilisi arutlusi, mille põhjal omal ajal loobuti elektrilaengutega sarnaste magnetiliste

masside reaalse eksisteerimise kujutlusest. See asjaolu, et magnetväli avastati mitte ainult magneeditud kehade juures, vaid ka makroskoopiliste elektrivooludega juhtmete juures, andis vastavalt ülalmärgitule aluse oletada, et ka magneeditud kehade juhtumil tekitatakse magnetväli elektrivoolude poolt. Need elektrivoolud eksisteerivad keha aine sees elementaarsete (molekulaarsete) suletud vooluде kujul. Oluline on märkida, et sel ajal kui Ampère esmakordselt selle oletuse väljendas, ei olnud veel tekkinud üksikasjalist kujutlust aine aatomite ja molekulide elektromagnetilisest ehitusest. Jätkates seda arutlust, võime käesoleval ajal oletada, et ka elementaarosakeste magnetiline moment on nendes osakestes toimuva mingisuguse keeruka sisemise liikumise tulemus. Sellel liikumisel on kinniste elektrivoolude iseloom, kuid see liikumine on tunduvalt keerukam elektroni kui terviku lihtsast pöörlemisest ümber oma telje. Oluline on märkida, et ka kvantteoorias annab elektronide magnetilistest momentidest tingitud magnetvälja formaalne käsitlus teatud üldise avaldise elektrivoolude tiheduse kohta.

Seega on täielik alus mõistega «elementaarvoolud aines» haarata kõik nähtused, mis on seotud aine magneetumusega. Ka selles laias mõttes jääb kehtima väide, et erandita kõikidel juhtumitel on magnetväli seotud elektrivooludega.

§ 55. Koguvoolu seadus

Vastavalt eelmises paragrahvis antud magnetvälja tugevuse määrangule on magnetvälja tugevuse joonintegraal mööda kinnist kontuuri võrdne elektrivooluga, mis on haaratud selle kontuuriga, s. t. vooluga läbi selle kontuuriga piiratud pinna s:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = i.$$

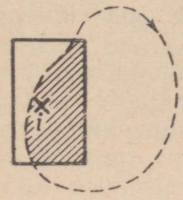
Üldjuhtumil, kui vool i on jaotatud pinnale s tihedusega δ, mis on pinna eri punktides erisugune, saame seose

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_s \delta\, d\mathbf{s} = i.$$

Näiteks kui integreerimiskontuur haarab osa vooluga juhtme ristlõikest (joon. 176), siis tuleb võrrandi paremas pooles arvesse võtta ainult juhtme voolu see osa, mida integreerimiskontuur haarab.

Maxwelli järgi tuleb võrrandi $\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = i$ paremas pooles suuruse i all mõista mitte ainult juhtivusvoole, vaid ka konvektsioonivoole ning nihkevoole läbi integreerimiskontuuriga piira-

tud pinna. Juhtivus-, konvektsiooni- ja nihkevoolude summat võib nimetada *koguvooluks* läbi vaadeldava pinna. Seost $\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = i$ nimetatakse sellele vastavalt *koguvoolu seaduseks.*



Joon. 176.

Magnetvälja tugevuse joonintegraali mööda mingit kontuuri nimetatakse *magnetomotoorseks jõuks* (mmj.) mööda seda kontuuri ehk *magneetimisergutuseks.* Magnetomotoorset jõudu märgitakse tähega *F.*

Kasutades terminit «magnetomotoorne jõud», võib koguvoolu seaduse väljendada järgmiste sõnadega:

magnetomotoorne jõud mööda kinnist kontuuri võrdub selle kontuuriga haaratava koguvooluga.

Võrrand $\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = i$ saab oma parema poole sellise laia tõlgenduse juures üheks elektromagnetilise välja põhivõrrandiks.

Tõepoolest, eeldame, et juhtivus- ja konvektsioonivoolud puuduvad ning esinevad ainult nihkevoolud. Kuid nihkevoolud tekivad dielektrikus ainult elektrivälja ajalise muutumise puhul. Järelikult tõestab võrrand

$$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = i,$$

et *elektrivälja iga ajalise muutumise puhul tekib sellessamas ruumis magnetväli, mis on tihedalt seotud elektriväljaga ja selle muutumistega ning oma olemuselt kujutabki endast koos elektriväljaga ühtset elektromagnetilist välja*

Märgime, et mõistet «magnetomotoorne jõud» võib kasutada ka joone lõigu kohta punktist *A* punktini *B.* Seejuures

$$F_{AB} = \int_A^B \mathbf{H}\,d\mathbf{l}.$$

Kasutades mõistet «magnetomotoorne jõud» võime suurusele, mida me nimetame magnetvälja tugevuseks, anda ka järgmise tähenduse. Väljatugevus osutub arvuliselt võrdseks magnetomotoorse jõuga väljatugevuse joone suunas võetud pikkusühiku kohta: $H = \frac{dF}{dl}$.

Siit on näha, et magnetvälja tugevuse mõõtühikuks on MKSA ühikute süsteemis *amper meetri kohta* (A/m).

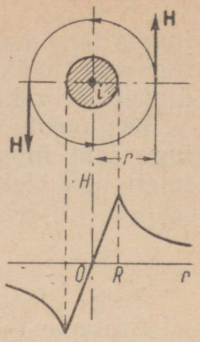
Koguvoolu seaduse rakendamise näitena määrame sirge ümmarguse ristlõikega juhtme väljatugevuse (joon. 177). Sümmeetria tõttu on väljatugevuse joonteks ringjooned, millede

tsentrid asuvad juhtme teljel. Piki iga sellist ringjoont on väljatugevus konstantne. Kui väljatugevuse joone raadius r on suurem juhtme ristlõike raadiusest R, siis haarab väljatugevuse joon kogu voolu i ja vastavalt koguvoolu seadusele

$$H \cdot 2\pi r = i,$$

s. o.

$$H = \frac{i}{2\pi r}.$$



Joon. 177.

Magnetväli on olemas ka juhtme sees. Väljatugevuse jooned juhtme sees haaravad ainult osa kogu juhtme voolust. Alalisvoolu puhul on voolutihedus ühesugune ristlõike kõigis punktides ja võrdne $\delta = \frac{i}{s} = \frac{i}{\pi R^2}$. See osa voolust, mis haaratakse väljatugevuse joonega, mille raadius on r, on seejuures võrdne $\pi r^2 \delta = i \frac{r^2}{R^2}$. Seega saame:

$$H \cdot 2\pi r = i \frac{r^2}{R^2},$$

millest

$$H = \frac{i}{2\pi R^2} r.$$

Joonisel 177 on kujutatud sõltuvus $H = f(r)$ üksildase ümmarguse ristlõikega juhtme kohta.

§ 56. Liikuva laetud osakese ja vooluelemendi magnetväli

Paragrahvis 21 uuriti nihkevoolu joonte pilti, mis moodustub elektrilaenguga q laetud osakese ümber siis, kui osake liigub kiirusega v, mis on väike võrreldes valguse kiirusega. See välja pilt on kujutatud joonisel 178. Konvektsioonivool koos nihkevooluga moodustab suletud kontuuri.

Liikuva laetud osakese ümber moodustub magnetväli, mille väljatugevusjooned peavad olema sümmeetriatingimuse alusel ringjooned (joon. 178). Need ringjooned asetsevad kiirusvektori **v** risttasapindades ja nende tsentrid on sirgjoonel, mis on vektori **v** pikenduseks. Magnetvälja tugevuse joonintegraal mööda väljatugevuse joont, mille raadius on ϱ (joon. 179), on võrdne

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \oint H\, dl = H \oint dl = 2\pi\varrho H = 2\pi r \sin\alpha\, H,$$

sest antud juhtumil on piki väljatugevuse joont $H = \text{const}$. See-

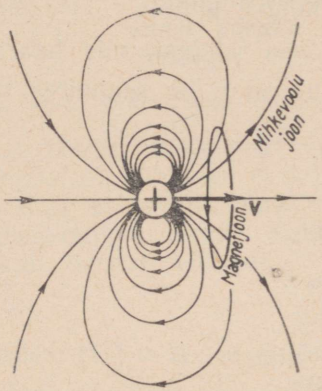
juures on r kaugus osakesest laenguga q kuni vaadeldava väljatugevuse joone punktideni ja α on nurk, mille moodustab raadiusvektor **r** kiirusvektoriga **v**.

Koguvoolu seaduse alusel on see joonintegraal võrdne vooluga läbi integreerimiskontuuriga piiratud pinna s, antud juhtumil aga elektrilise nihkevooluga i_n läbi selle pinna. Järelikult

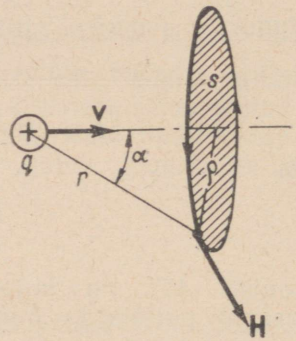
$$H = \frac{i_n}{2\pi r \sin \alpha}.$$

Seega H suuruse leidmiseks on vaja määrata vool i_n.

Asetame telje OZ laengu liikumise suunas (joon. 180). Olgu laengu tsentri koordinaat z ja vaadeldava ringjoone punktide kaugus tasapinnast XOY ζ.



Joon. 178.



Joon 179.

Vool läbi kõikide vaadeldava ringjoonega piiratud pindade on voolu pidevuse printsiibi kohaselt ühesuurune. Määrame nihkevoolu läbi selle ringjoonega piiratud pinna, mis kujutab endast osa kerapinnast, mille raadius on r (joon. 180) ja mille tsenter on laengu asukohas.

Nihkevoolu vektori voog läbi sellise pinna võrdub

$$\int_s \mathbf{D}\, d\mathbf{s} = \int_s D\, ds = \int_s \frac{q}{4\pi r^2}\, ds.$$

Esitades ds ribana laiusega $r\, d\alpha'$ ja pikkusega $2\pi\varrho' = 2\pi r \sin \alpha'$, kus α' on raadiusele ϱ' vastav nurk, saame:

$$\int_s D\, ds = \int_0^{\alpha} \frac{q}{4\pi r^2} 2\pi r \sin \alpha'\, r\, d\alpha' = \frac{q}{2}(1 - \cos \alpha).$$

Otsitav vool

$$i_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S D\,\mathrm{d}s = \frac{q}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(1-\cos\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{2}\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

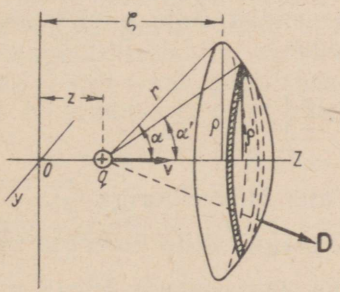
Suuruste z ja α vahel kehtib seos $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\zeta - z}{\varrho}$. Selle võrduse diferentseerimisel saame, et $-\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sin^2\alpha} = -\frac{\mathrm{d}z}{\varrho}$. Kuna $\varrho = r\sin\alpha$, siis $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} = \frac{\sin\alpha}{r}$. Pidades täiendavalt silmas, et $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v$, saame nihkevoolu jaoks avaldise

$$i_n = \frac{qv}{2r}\sin^2\alpha.$$

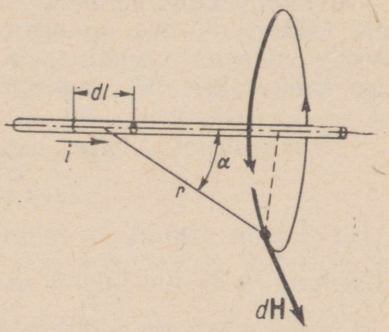
Kasutades seda i_n avaldist, leiame otsitava magnetvälja tugevuse, mille tekitab liikuv osake laenguga q:

$$H = \frac{qv}{4\pi r^2}\sin\alpha.$$

A. A. Eichenwald uuris Venemaal 1904. a. väga põhjalikult nihkevoolude magnetvälja. A. A. Eichenwald võrdles magnetvälja, mis moodustub ümber oma telje pöörleva laetud rõngakujulise



Joon. 180.



Joon. 181.

metallriba lähedal, selle magnetväljaga, mille tekitab sellessamas, kuid liikumatus ribas esinev juhtivusvool. Ta konstateeris nende väljade samasust. A. F. Joffe näitas 1911. a., et katoodkiired, s. o. kiirelt liikuvad elektronid, tekitavad enda ümber magnetvälja. Nihkevoolude magnetvälja kõigi katseliste uurimiste tulemused kinnitavad liikuva laetud osakese magnetvälja tugevuse viimatiesitatud avaldise õigsust.

Juhtme voolu i vaatleme samuti laetud osakeste liikumisena

juhtmes. Asugu pikkusega dl juhtmeelemendi (joon. 181) mahus nende vabade osakeste laeng dq, mis võtavad osa liikumisest piki juhet. Olgu dt ajavahemik, mille jooksul laeng dq liigub kaugusele dl. Ajavahemiku dt sellise valiku puhul kandub läbi juhtme iga ristlõike laeng, mis võrdub just dq-ga. Järelikult $\frac{dq}{dt} = i$. Seega $v\,dq = \frac{dl}{dt} i\,dt = i\,dl$. Korrutist $i\,dl$ nimetatakse *vooluelemendiks*.

Laengut dq, mis kandub piki juhtmeelementi kiirusega v, võib teatud kaugusel juhtmeelemendist vaadelda kui punktlaengut. Seetõttu määrataksegi magnetvälja tugevus, mis on laengu dq ülekandumise resultaadiks, kui kiirus on v, valemiga

$$dH = \frac{v\,dq}{4\pi r^2} \sin \alpha.$$

Asendades korrutise $v\,dq$ korrutisega $i\,dl$, saame *Biot'-Savart'i-Laplace'i seaduse:*

$$dH = \frac{i\,dl}{4\pi r^2} \sin \alpha.$$

Vektor $d\mathbf{H}$ on risti tasapinnaga, mis läbib dl-i ja r-i. Ta on suunatud parema käe kruvi pea pöörlemisega määratavale poolele, kui kruvi telje kulgliikumine toimub voolu suunas. Võttes kasutusele vektori $d\mathbf{l}$, mis on suunatud positiivse voolu suunas, ja vektori $\mathbf{r}$, mis on suunatud vooluelemendist selle punkti poole, milles määratakse $d\mathbf{H}$, saame kirjutada:

$$d\mathbf{H} = \frac{i}{4\pi r^2} \left[d\mathbf{l} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right],$$

kus $\left[d\mathbf{l} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right]$ on vektori $d\mathbf{l}$ vektorkorrutis ühikvektoriga $\frac{\mathbf{r}}{r}$.

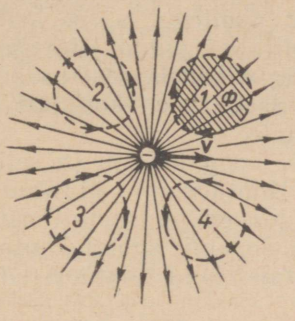
Laenguga q laetud liikuva osakese magnetvälja tugevuse avaldis $H = \frac{qv}{4\pi r^2} \sin \alpha$ on õige ainult siis, kui osakese kiirus v on tunduvalt väiksem valguse kiirusest c ($v \ll c$), sest selle avaldise tuletamisel eeldasime ju, et $D = \frac{q}{4\pi r^2}$, s. o. eeldasime elektrivälja iseloomu samaks mis laenguga q laetud liikumatu osakese puhulgi. See on ligilähedaselt õige ainult siis, kui $v \ll c$.

Tõepoolest, osakese liikumisel indutseeritakse osakest ümbritsevas ruumis kujutletavates kontuurides elektromotoorsed jõud, sest neid kontuure läbiv magnetvoog, mis on määratletav liikuva osakese magnetväljaga, muutub ajas. Kuid indutseeritud emj. ilmumine on vahelduva magnetvälja poolt indutseeritud

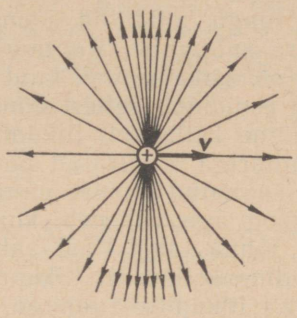
elektrivälja tekkimise resultaat, mida väljendabki elektromagnetilise induktsiooni seadus:

$$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

See indutseeritud elektriväli liitub sümmeetrilise elektriväljaga, mis esineb laenguga q laetud osakese väga aeglase liikumise puhul, ning muudab kiirelt liikuva osakese resulteeriva välja kuju. Vastavalt muutuvad ka i_n ja H avaldised, võrreldes ülalesitatutega.



Joon. 182.



Joon. 183.

Elektrilaenguga laetud kiirelt liikuva osakese elektri- ja magnetvälja tugevuse avaldisi saab leida ainult sellise osakese elektromagnetilise välja võrrandite lahendamise teel. Nende võrrandite hulgas on põhilisteks võrrandid, mis väljendavad koguvoolu seadust ja elektromagnetilise induktsiooni seadust:

$$\oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = i \text{ ja } \oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

ning samuti Maxwelli postulaat ja magnetvoo pidevuse printsiip:

$$\oint \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = q \text{ ja } \oint \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0.$$

Ülaltoodud H avaldis $v \ll c$ puhul on saadud koguvoolu seaduse ja Maxwelli postulaadi kasutamisel, kusjuures on eeldatud, et elektriväli on samasugune nagu liikumatu osakese puhul. Määrame kiirelt liikuva osakese elektrivälja muutumise kvalitatiivse iseloomu, kasutades elektromagnetilise induktsiooni seadust.

Joonisel 182 on kujutatud kriipsjoonega ruumis mõtteliselt võetud neli liikumatut kontuuri, mille suhtes osake positiivse laenguga q liigub kiirusega v.

Kontuuriga *1* piiratud pinda läbiv magnetvoog Φ kasvab, sest osake läheneb kontuurile ja voo Φ jooned on suunatud joonise pinnalt vaatleja poole. Selles kontuuris tekib emj., mis võrdub $-\frac{d\Phi}{dt}$ ja on suunatud nii, nagu näidatud kontuuril nooltega. Viimases võib veenduda, kujutledes juhtmekeerdu, mis ühtib kriipsjoonega tõmmatud kontuuriga. Elektromagnetilise inertsi printsiibil tekib sellises juhtmekeerus emj., mis kutsub esile voolu, mille endainduktsiooni voog on suunatud kasvavale välisele voole Φ vastu, s. o. joonise pinna taha. Kasutades parema käe kruvi reeglit on kerge mõista, et indutseeritud emj. suund on selline, nagu näidatud joonisel 182 nooltega, s. o. kellaosuti liikumise suunaline. Kontuuriga *2* piiratud pinda läbivatel voojoontel on sama suund, kuid see voog väheneb, sest osake laenguga q eemaldub sellest kontuurist. Seetõttu on kontuuri *2* emj. vastupidine kellaosuti liikumise suunale.

Kontuuriga *4* piiratud pinda läbiv voog kasvab ja selle jooned on suunatud joonise pinna taha. Kontuuriga *3* piiratud pinda läbiv voog aga väheneb, kuid selle jooned on samuti suunatud joonise pinna taha. Vastavalt sellele on emj. suund kontuuris *4* vastupidine kellaosuti liikumise suunale, kuid kontuuris *3* ühtib kellaosuti liikumise suunaga.

Jooniselt selgub, et elektriväli tugevneb osakese tsentrit läbiva ja liikumissuunaga ristuva tasapinna juures ning nõrgeneb osakese ees ja taga joone ümbruses, mida mööda kiirusvektor on suunatud. Resulteeriva elektrivälja tugevuse jooned tihenevadki mainitud tasapinna läheduses (joon. 183). Vastavalt muutub ka kiirelt liikuva elektrilaenguga osakese magnetväli: see tugevneb sama pinna juures ja nõrgeneb joone ümbruses, mida mööda osake liigub.

Välja jaotumise selline ebaühtlus põhjustab välja energia suurenemist, võrreldes selle energiaga, mis oleks olemas, kui väljade jaotumine jääks samasuguseks nagu osakese liikumise väikese kiiruse puhul. Selles võib veenduda, vaadeldes elektrivälja energiat, mille ruumtiheduse avaldis $W_e' = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ on meile juba teada. Kuna W_e' on võrdeline väljatugevuse ruuduga, siis välja jaotumise ebaühtluse mistahes suurenemine viib välja kogu energia $W_e = \int_V W_e' dV$ suurenemisele. Sedasama tuleb öelda ka magnetvälja energia kohta, sest me näeme edaspidi, et magnetvälja energia ruumtihedus on võrdeline H^2-ga.

Vaadeldust tulenevad väga tähtsad järeldused osakese inertse massi m muutumise iseloomu kohta kiiruse v suurenemisel. Kiirusega v liikuva ja laengut q omava osakese magnetvälja tekkimist sellele väljale omase energiaga, mille ruumtihedus on võrdeline H^2-ga ja järelikult võrdeline ka v^2-ga, tuleb käsitada kui sellele osakesele kineetilise energia $\frac{mv^2}{2}$ andmist. Sellel viisil määratavat osakese massil m on elektromagnetiline iseloom, sest see on määratud osakese elektromagnetilise väljaga ning nimetatakse elektromagnetiliseks massiks. Võib eeldada, et sellise elementaarosakese nagu elekt-

roni mass on elektromagnetiline, ning määrata siit elektroni raadiuse, kõrvutades liikuva elektroni m ja v kaudu väljendatud kineetilise energia elektroni kogu magnetvälja energia avaldisega. Erinevatel eeldustel elektronis elektrilaengu jaotumise kohta saame seejuures erinevad raadiuse väärtused. Siiski on võimalik, et elektromagnetiline mass ei ole elektroni kogu massiks.

Elektroni elektromagnetiline mass jääb muutumatuks seni, kuni lisaenergia, võrreldes selle energiaga, mida elektron omab $v \approx 0$ juures, s. o. energia, mis on seostatav elektroni liikumisega kiirusel v ja mida nimetatakse kineetiliseks energiaks, muutub võrdeliselt v^2-ga. Aga see on nii ainult seni, kuni elektroni elektri- ja magnetväli tema ümbruses ei muutu, jäädes praktiliselt sellekssamaks nagu väga väikese kiiruse juures. Suurte liikumiskiiruste korral, nagu me nägime, muutub elektroni elektromagnetiline väli nii, et tema lisaenergia, mis on seotud elektroni liikumisega, kasvab kiiremini kui v^2. Seda tuleb käsitada elektroni massi suurenemisena. Elektromagnetilise välja võrrandite täielik lahendamine viib tulemusele, et elektroni elektromagnetiline mass, samuti nagu elektrilaengut omava iga osakese masski, kasvab lõpmatult osakese kiiruse v lähenemisel valguse kiirusele. Ühtlase sirgjoonelise liikumise korral väljendub see seos kujul

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

kus m_0 on mass väga aeglase liikumise puhul, s. o. kui $v \ll c$, ehk nn. seisumass. Tuleb märkida, et relatiivsusteooria kohaselt rahuldab seda seost iga inertne mass, s. o. seda seost rahuldab elektroni kogu mass, isegi kui see ei ole täielikult elektromagnetiline. See asjaolu ei anna samuti võimalust üheselt väita, et elektroni kogu massil on elektromagnetiline iseloom ülalnäidatud mõttes. Ometi pakub ülalesitatu suurt huvi selles suhtes, et relatiivsusteooria tähtsaimad teesid elektromagnetiliste nähtuste kohta tulenevad vahetult põhivõrrandeist, põhilistest vastastikustest seostest, mis iseloomustavad neid nähtusi ja moodustavad selles kursuses meie uurimise vahetu objekti.

Toodud m-i avaldisest selgub, et mateeria osakesed, mis omavad massi m_0, ei saa liikuda valguse kiirust c ületavate või ka valguse kiirusega võrdsete kiirustega.

§ 57. Aine magnetilised omadused

Isotroopse aine puhul langevad vektorid **B**, **H** ja **J** suunalt ühte ning võib kirjutada:

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} \quad \text{ja} \quad \mathbf{J} = \varkappa \mathbf{H}.$$

Seejuures saame:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu_0(1 + \varkappa)\mathbf{H} = \mu_a \mathbf{H},$$

millest

$$\mu_a = \mu_0(1 + \varkappa).$$

Suurust μ_a nimetatakse aine *absoluutseks magnetiliseks läbitavuseks* ja suurust $\varkappa$ aine *magnetiliseks vastuvõtlikkuseks*. Suhet $\frac{\mu_a}{\mu_0} = \mu$ nimetatakse aine *suhteliseks magnetiliseks läbitavuseks* või lihtsalt aine *magnetiliseks läbitavuseks*.

Järelikult

$$\mu = 1 + \varkappa.$$

Paramagnetilistel ainetel $\mu_a > \mu_0$ ja $\varkappa > 0$. *Diamagnetilistel* ainetel $\mu_a < \mu_0$ ja $\varkappa < 0$. Eri grupi moodustavad ferromagnetilised ained, millel $\mu_a \gg \mu_0$ ning μ_a suurus sõltub väljatugevusest ja eelnevatest magnetilistest olukordadest.

Anisotroopsete ainete puhul on vaja teada μ_a ja $\varkappa$ väärtusi kõikide peatelgede suunas.

Kui anisotroopses aines asetada teljed *OX*, *OY*, *OZ* vabalt, kuid peatelgede suhtes kindlaksmääratult, siis juhtumil, kui magnetiline läbitavus ja magnetiline vastuvõtlikkus ei sõltu väljatugevusest, võib vektorite **B** ja **H** ning vastavalt **J** ja **H** koordinaattelgedele võetud projektsioonide vahelise seose kirjutada kujul, mis on analoogiline § 9 toodud vektorite **P** ja **E** projektsioonide vahelise seose kujuga.

Seejuures on magnetiline läbitavus ja magnetiline vastuvõtlikkus tensorsuurusteks.

Paramagnetiliste ainete aatomid ja molekulid paistavad silma selle poolest, et aatomi- või molekulisiseste elementaarvoolude magnetväljad vastastikku aatomi või molekuli piirides ei kompenseeru, s. o. elementaarvoolude resulteeriv väli ulatub aatomi või molekuli piiridest välja. Niisugustel aatomitel ja molekulidel on ka välise välja puudumisel nullist erinev magnetiline moment. Välise magnetvälja mõjul nad püüavad asetuda nii, et nende väljad langeksid ühte välise väljaga. Nimetame aatomi (molekuli) magnetiliseks teljeks telge, mida mööda on suunatud aatomi (molekuli) magnetiline moment **p**.

Paramagnetilistes gaasides, milleks on näiteks hapnik, takistab aatomite või molekulide magnetiliste telgede pöördumist välja suunas soojusliikumine, mis püüab aatomid segi paisata nii, et nende magnetilised teljed oleksid kõikvõimalike suundadega. Olgu N_1 aatomite (molekulide) arv aine mahuühikus. Välise väljatugevuse H küllalt suurte väärtuste korral, kui kõikide aatomite magnetilised teljed paigutuksid välja suunas, oleks saavutatud *küllastus*. Seejuures omandaks aine magneetumus suurima võimaliku väärtuse $\mathbf{J}_\infty = N_1\mathbf{p}$. Siiski on tavalisel temperatuuril isegi väga tugevate väljade puhul paramagnetiliste ainete magnetiline olek veel kaugel küllastusest ning J kasvab võrdeliselt H-ga. Paramagnetiliste ainete magnetiline vastuvõtlikkus $\varkappa$ on pöördvõrdeline absoluutse temperatuuriga.

Diamagnetiliste ainete hulka kuuluvad ained, mille aatomitel (molekulidel) välise välja puudumisel ei ole magnetilist momenti. Nende ainete aatomisisesed elementaarvoolud on orienteeritud selliselt, et nende magnetväljad väljaspool aatomi piire vastastikku kompenseeruvad. Diamagnetiliste ainete aatomid ei püüa välises väljas kindlaksmääratud viisil asetuda. Diamagnetilist nähtust seletatakse järgmisel viisil. Nende ainete aatomi-

sisesed elementaarvoolud kujutavad endast elektronide liikumist mööda orbiite. Nende vooludega ei kaasne energia kulu. Järelikult võib neid voole käsitada vooludena ülijuhtivates vooluringides. Vastavalt elektromagnetilise inertsi printsiibile peab niisuguse vooluringiga aheldunud magnetvoog jääma muutumatuks. Seepärast diamagnetilise aine aatomi viimisel välisesse magnetvälja peavad aatomisisesed elementaarvoolud muutuma selliselt, et see voolude muutus kompenseeriks välise välja aatomi sees. Teiste sõnadega, lisaelementaarvoolud tekitavad välisele väljale vastassuunalise välja, mida meie tajume aine absoluutse magnetilise läbitavuse μ_a vähenemisena, võrreldes μ_0-ga. Üldse ilmneb diamagnetiline nähtus väga nõrgalt, sest välisele väljale osutub läbitungimatuks ainult see ainest hõivatud ruumiosa, kus eksisteerivad elementaarvoolud. Kogu ülejäänud ruumiosas, nimelt aatomitevahelises ruumis, moodustub väline väli vabalt. Kõige tugevamalt avalduvad diamagnetilised omadused vismuti juures, mille absoluutne magnetiline läbitavus $\mu_a \approx 0{,}99983\,\mu_0$.

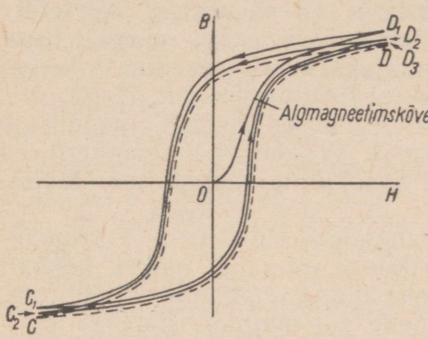
Eri grupi moodustavad ferromagnetilised ained. Ferromagnetiliste ainete peamisteks esindajateks on raud, nikkel, koobalt ja nende sulamid. Nende ainete absoluutne magnetiline läbitavus ületab μ_0 tunduvalt, mis annab neile kui magnetilistele materjalidele erakordse tähtsuse. Ferromagnetiliste ainete iseloomustavaks tunnuseks on magnetilise läbitavuse sõltuvus väljatugevusest ja eelnevatest magnetilistest olukordadest. Raua puhul tegi kogu sõltuvuse $\varkappa = f(J)$ käigu esimesena kindlaks A. G. Stoletov 1871. a.

A. G. Stoletov avastas esimesena oma uurimuses, et raua magnetiline vastuvõtlikkus magneetumuse suurenemisel algul suureneb, saavutab maksimaalse väärtuse ja seejärel uuesti väheneb. Ta näitas oma töös, et raua magnetiliste omaduste uurimine peab omama suurt praktilist tähtsust elektrimasinate ehitamisel. Käesoleval ajal me teame, kuivõrd õige oli see A. G. Stoletovi seisukoht. Kaasaegsete elektrimasinate, transformaatorite, aparaatide ja mõõteriistade otstarbekas ehitamine ei ole võimalik ilma neis kasutatavate mitmesuguste ferromagnetiliste materjalide magnetiliste omaduste detailse uurimiseta.

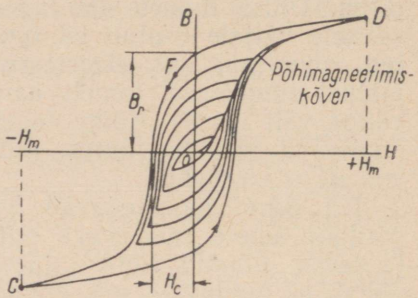
Ferromagnetilistes ainetes võib magnetiline induktsioon omada ühel ja samal väljatugevuse väärtusel mitmesuguseid väärtusi, sõltuvalt materjali eelnevatest magnetilistest olukordadest. Selleks et suurust $\mu_a = \frac{B}{H}$ võiks kasutada ferromagnetiliste materjalide magnetiliste omaduste iseloomustajana, on vaja täpselt kokku leppida selle suuruse määramise meetodis.

Vaatleme ferromagnetilise aine magneetumise protsessi. Oletame, et algul oli aine täiesti lahti magneeditud, s. o. elementaarvoolude väli ei avaldunud välises ruumis. Välise väljatuge-

vuse monotoonsel suurendamisel kasvab induktsioon algul kiiresti (kõver OD_1 joon. 184), sest elementaarvoolud orienteeruvad nii, et nende magnetvood lisanduvad välisele voole. Induktsiooni suurtel väärtustel tema kasvamise kiirus väheneb. Aine magnetiline olek läheneb *küllastusele*. Seejuures on juba peaaegu kõik elementaarvoolud orienteeritud nii, et nende magnetväljad langevad suunalt ühte välise väljaga. Kõverat OD_1 (joon. 184), mis saadakse tingimusel, et aine eelnevalt oli lahti magneeditud, nimetatakse *algmagneetimiskõveraks*.



Joon. 184.



Joon. 185.

Oletame, et väljatugevus viiakse kuni mingisuguse väärtuseni $+H_m$ (punkt D_1 joonisel 184) ja seejärel uuesti vähendatakse. Kõver $B = f(H)$ asub väheneva väljatugevuse puhul ülalpool algmagneetimiskõverat. Suuruse H vähendamisel nullini täheldatakse jääkmagneetumust ja sellele vastavat *jääkinduktsiooni*. See tõestab, et elementaarvoolud teatud määral säilitasid oma korrastatud orientatsiooni. Selleks et induktsioon saaks võrdseks nulliga, peab väljatugevus omandama negatiivse väärtuse, mida nimetatakse *koertsitiivjõuks*. Kui viia H kuni negatiivse väärtuseni $-H_m$, mis on absoluutväärtuselt võrdne suurima positiivse väärtusega, omandab induktsioon punktile C_1 vastava negatiivse väärtuse. Suurendades uuesti väljatugevust kuni $+H_m$, saame haru C_1D_2. Punkt D_2 asub allpool punkti D_1, sest kõver satub sinna lähtudes negatiivse jääkinduktsiooni punktist, kuna aga punkti D_1 satub kõver lähtudes koordinaatide alguspunktist, s. o. aine neutraalsele olekule vastavast punktist. Teistkordsele suuruse H vähendamisele vastab kõver D_2C_2, sellele järgnevale väljatugevuse kasvule kõver C_2D_3 jne.

Seega sõltub induktsiooni väärtus antud väljatugevuse väärtuse puhul magneetimisprotsessi käigust. Seda nähtust nimetatakse *hüstereesiks*. Alles pärast piisavat arvu (umbes kümmet) ümbermagneetimist me saame *sümmeetrilise hüstereesisil-*

muse (*CD*), mis on joonisel 184 kujutatud kriipsjoonega. Joonisel 185 on kujutatud erinevate H_m väärtuste juures saadud sümmeetriliste hüstereesisilmuste parv. Sümmeetriliste hüstereesisilmuste tippe läbivat kõverat $B = f(H)$ nimetatakse *põhimagneetimiskõveraks* ja see on antud materjalisordile täiesti kindlaks kõveraks. Seepärast määrataksegi leppeliselt ferromagnetiliste ainete magnetiline läbitavus just põhimagneetimiskõverast. Täpselt samuti määratakse jääkinduktsioon B_r ja koertsitiivjõud H_c tavaliselt sümmeetrilisest hüstereesisilmusest (joon. 185), kusjuures H_m peab olema piisavalt suur, et H_m puhul oleks aine olek lähedane magnetilisele küllastusele.

On teada, et ferromagnetiline aine koosneb välise välja puudumisel eri piirkondadest, millest igaüks on isetekkeliselt magneetunud mingis kindlas suunas.

Isetekkeliselt magneetunud piirkondade magnetväljad ei avaldu välises ruumis selle tõttu, et eri piirkonnad on magneetunud erinevates suundades. Piirkondade magneetumus J_s sõltub absoluutsest temperatuurist. Absoluutsel null-temperatuuril on J_s võrdne magneetumusega J_∞ täieliku küllastuse juures. Soojusliikumine vähendab suurust J_s ning mingil antud ainele iseloomulikul temperatuuril Θ piirkonna elementaarvoolude korrapärane paigutus hävineb täielikult. Seda temperatuuri nimetatakse *Curie' punktiks*. Tema väärtuseks on raual umbes 770° C, niklil umbes 360° C ja koobaltil 1120° C. Ülalpool Curie' punkti saab aine harilike paramagnetiliste ainete omadused: ta suhteline magnetiline läbitavus osutub natuke suuremaks ühest ja magnetiline vastuvõtlikkus on määratud sõltuvusega $\varkappa = \frac{C}{T - \Theta}$. Viimane erineb harilikele paramagnetilistele ainetele vastavast sõltuvusest ainult selle poolest, et nimetajas on absoluutse temperatuuri T asemel temperatuuride vahe $T - \Theta$, kusjuures $C = \text{const}$.

Vaatleme, kuidas seletub tehniliste ferromagnetiliste materjalide magneetumise protsess.

Nagu näitab arvutus, on piirkonna sees elementaarvoole orienteeritud olukorras hoidvate jõududega ekvivalentne sisemine väli äärmiselt tugev. Nii on raua puhul selle välja tugevus ligikaudu $1{,}2 \cdot 10^9 \frac{\text{A}}{\text{m}}$. Seepärast Curie' punktist tunduvalt madalamatel temperatuuridel toimubki välise välja mõjul ainult piirkondade magneetumuse suuna muutus, kuna J_s suurus jääb praktiliselt muutumatuks.

Välja puudumisel asetub vektor J_s igas piirkonnas mingisugusesse eelistatud suunda, mis sõltub aine kristallistruktuurist ja elastsuspingetest. Viimane tegur on tihedalt seotud nn. *magnetostriktsiooniga*, s. o. kehade mõõtmete muutumisega magneetumisel. Näiteks raudvarras suhteliselt nõrkades väljades mag-

neetumisel pikeneb välja suunas, tugevates väljades aga lüheneb. Täheldatakse ka vastupidist nähtust. Nimelt raua pikitõmme nõrkade väljade puhul suurendab magneetumust, tugevate väljade puhul aga vähendab. Niklil on negatiivne magnetostriktsioon: tema pikkus lüheneb välja suunas. Vastavalt sellele nikli venitamisel tema magneetumus antud välja puhul tõmbe suunas väheneb. Vastupidi, nikli surumine mingis suunas kergendab magneetumist selles suunas. Kehade pikkuse muutumised magneetumisel on väga väikesed: nad on suurusjärgus 10^{-6} pikkust.

Magnetostriktsiooninähtust kasutatakse mõningates praktilistes seadmetes — näiteks heli- ja ultraheligeneraatorites. Helisagedusliku vahelduvvooluga pooli sisse asetatakse suhteliselt suure magnetostriktsiooniga materjalist, näiteks niklist, südamik. Pöörisvoolude nõrgendamiseks tehakse südamik õhukestest üksteisest isoleeritud lehtedest. Pooli vahelduvas magnetväljas südamik muudab perioodiliselt oma pikkust. Pikkus muutub kahekordse sagedusega, võrreldes voolu sagedusega poolis, sest magnetvoo absoluutväärtus saavutab pooli voolu perioodi vältel maksimumi kaks korda. Vedelikku, näiteks vette sukeldatuna tekitab niisugune südamik selles võnkumisi. Need võnkumised, peegeldudes põhjast või mingisugustelt vees asuvatelt esemetelt, saabuvad tagasi vastuvõtjasse. Kui on teada võnkumiste väljasaatmise suund, nende levimiskiirus ja ajavahemik signaali väljasaatmisest tagasipöördumiseni, saab määrata eseme asukoha, millelt võnkumised peegeldusid.

Magnetostriktsiooni uurimisel on sügav põhimõtteline tähtsus, sest ülaltoodud faktid annavad tunnistust sellest, et magnetostriktsiooninähtus ja mehaaniliste sisepingete mõju isetekkeliselt magneetunud piirkondade magneetumuse suunale on teineteisega tihedalt seotud. Võib sõnastada järgmise juhise: tõmbe mõjul kujuneb välja piirkondade niisugune magneetumuse suund, et sellega seotud magnetostriktsioon veelgi rohkem suurendab tõmbe tagajärjel tekkivat keha pikenemist; surve mõjul piirkondade magneetumus kujuneb niisuguses suunas, et magnetostriktsioon veelgi enam suurendab surve tagajärjel tekkivat keha lühenemist.

Seepärast aines, millel on positiivne magnetostriktsioon, on magneetumuse eelistatud suund tõmbejõudude suunas ja risti survejõududega. Aines, millel on negatiivne magnetostriktsioon (näiteks niklis), on magneetumuse eelistatud suund risti tõmbejõududega ja survejõudude suunas. Seega isetekkeliselt magneetunud piirkondade magneetumuse suund on välise välja puudumisel määratud elastsuspingetega nendes piirkondades ja nende piirkondade kristallistruktuuriga.

Nagu oletatakse, toimub piirkondade magneetumuse suuna muutumine välise välja mõjul kahe skeemi järgi. Eelkõige on võimalik järkjärguline magneetumuse pöördumine välja suunas.

Siiski arvutus näitab, et niisugune pöördumine saab märgatavaks ainult küllalt tugevate väljade puhul. Seepärast tuleb pidada võimalikuks magneetumuse suuna muutumist kahte naaberpiirkonda eraldavate piiride nihkumise teel. Suureneb see piirkond, mille magneetumus on sobivamalt orienteeritud välise välja suunas. Piiride nihkumine toimub tagasipöörduvalt ehk reversiivselt ainult kuni teatud piirini, mille juures saabub mittestabiilne olukord ja kogu teine piirkond või selle mingi järelejäänud osa korraldub ümber hüppeliselt. Niisugune protsess on tagasipöördumatu. Näiteks antud piirkonna ümberkorraldumisel toimuva magnetvoo kiire muutumisega kaasnevad kohalikud voolud ning neile vastavad kaod. Need pöördumatud protsessid ferromagnetiliste ainete ümbermagneetimisel vahelduvas magnetväljas on *hüstereesikadudeks* nimetatavate kadude tekkimise põhjuseks. Seost hüstereesikao suuruse ja hüstereesisilmuse pindala vahel ning selle kao sõltuvust magnetilise induktsiooni amplituudist käsitletakse järgmises paragrahvis.

Piirkondade magneetumuse suuna muutumine nendevaheliste piiride nihkumise teel toimub kõige intensiivsemalt aine magneetimiskõvera järsul osal. Tugevamate väljade puhul, mille juures aine magneetimiskõver muutub lamedaks, toimub magnetilise induktsiooni suurenemine põhiliselt piirkondade magneetumuse pöördumise arvel välja suunda.

Kui magneetida aine teatud kindlas suunas, s. o. orienteerida kõikide piirkondade magneetumus selles suunas, ning vähendada seejärel välise välja tugevus nullini, siis säilib piirkondade magneetumuse mõningane eelissuund, mis seni oli vägivaldselt antud välise välja poolt. Niisugust aine magneetumust me nimetamegi jääkmagneetumuseks ja talle vastavat magnetilise induktsiooni väärtust jääkinduktsiooniks.

Käesolevas paragrahvis toodu annab üldise pildi ferromagnetilistes ainetes esinevatest nähtustest. Nende nähtuste uurimisele on pühendatud suur hulk töid erinevatelt autoritelt; ulatuslikud tööd selles valdkonnas kuuluvad N. S. Akulovile, V. K. Arkadjevile, A. S. Zaimovskile jt.

§ 58. Hüstereesikaod

Ferromagnetilise aine ümbermagneetimisel esinevad temas hüstereesist tingitud nn. hüstereesikaod.

Kerge on veenduda, et suletud hüstereesisilmuse pindala B ja H koordinaadistikus, korrutatuna abstsiss- ja ordinaattelgede mõõtkavadega, määrab nende kadude suuruse ümbermagneetimise ühe tsükli jaoks.

Oletame, et magneeditav ferromagnetilisest ainest keha on peene rõnga kujuga, mille ringpikkus on l ja ristlõige s. Rõngas

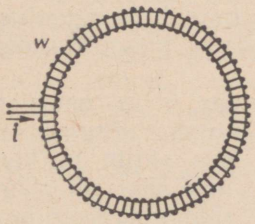
magneeditakse vooluga i mähises, mille w keerdu on ühtlaselt jaotatud rõnga pikkusele (joon. 186). Mähise aheldusvoo $\Psi = w\Phi$ muutusega $d\Psi$ seotud välise emj. allika töö määratakse mähise klemmipinge selle osaga $\left(+\frac{d\Psi}{dt}\right)$, mis ületab aheldusvoo muutusest indutseeritava emj. $\left(-\frac{d\Psi}{dt}\right)$:

$$dA = i\frac{d\Psi}{dt}dt = i\,d\Psi = iw\,d\Phi.$$

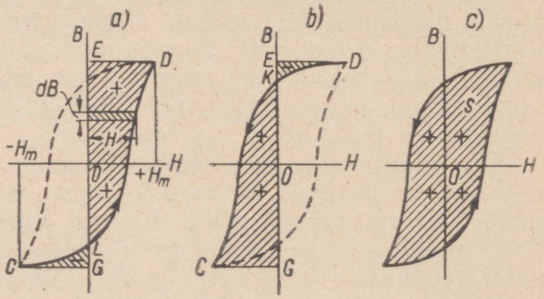
Välise emj. allika poolt kulutatav töö aine mahuühiku magnetilise oleku muutmiseks on

$$dA' = \frac{dA}{ls} = \frac{iw}{l}d\left(\frac{\Phi}{s}\right) = H\,dB.$$

See töö määratakse ribakese pindalaga, mille pikkus on H ja laius dB ning mis joonisel 187, a on tihedalt viirutatud.



Joon. 186.



Joon. 187.

Väljatugevuse suurendamisel $-H_m$-st kuni $+H_m$-ni määratakse töö pindalade EDL ja CLG absoluutväärtuste vahega. Pindala EDL on positiivne, sest $H > 0$ ja $dB > 0$. Pindala CLG on negatiivne, sest $H < 0$ ja $dB > 0$. Seepärast ongi vaja võtta nende pindalade absoluutväärtuste vahe.

Väljatugevuse vähendamisel määratakse töö pindalade KCG ja KED (joon. 187, b) absoluutväärtuste vahega. Pindala KCG on positiivne, sest $H < 0$ ja $dB < 0$, pindala KED aga negatiivne, sest $H > 0$, ent $dB < 0$. Ülestades joonised 187, a ja 187, b, saame joonise 187, c. Seega on välise allika töö, mis kulutatakse aine mahuühiku tsüklilisele ümbermagneetimisele, määratud hüstereesisilmuse pindalaga S. See töö

$$A' = \oint H\,dB = Shb,$$

kus h on abstsisstelje mõõtkava ja b —ordinaattelje mõõtkava.

Pärast ringkäiku mööda suletud hüstereesisilmust muutub aine magnetiline olek taas selliseks, nagu see oli enne ringkäigu algust. Järelikult mingisuguseid muutusi süsteemi energia tagavaras ei toimu, ning tuleb järeldada, et töö A' kulub aine ümbermagneetimisega seoses olevatele pöördumatutele protsessidele.

Tähistades hüstereesinähtuse tagajärjel ühe terve sümmeetrilise ümbermagneetimise tsükli jooksul kaotatud energiat aine mahuühiku kohta W_h', saame:

$$W_h' = A' \quad \text{või} \quad W_h' = \oint H \, dB.$$

Steinmetz esitas empiirilise valemi

$$W_h' = \eta' B_m^{1,6},$$

kus B_m on magnetilise induktsiooni amplituud ja η' — materjali liigist sõltuv tegur. Valem astmenäitajaga 1,6 sobib rahuldavalt katsetulemustega, kui B_m on vahemikus $0{,}1\ \text{T} < B_m < 1\ \text{T}$. Juhtumil kui $0 < B_m < 0{,}1\ \text{T}$ ning samuti kui $1\ \text{T} < B_m < 1{,}6\ \text{T}$, annab õigemaid tulemusi valem

$$W_h' = \eta'' B_m^2.$$

Mõlemat viimast valemit võib esitada kujul

$$W_h' = \eta B_m^n.$$

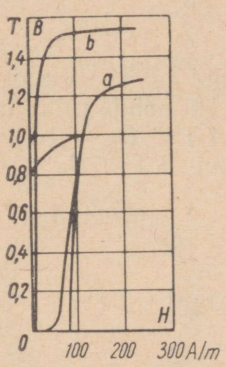
Induktsiooni väga suurte väärtuste korral osal materjalidest astmenäitaja n algul suureneb koos B_m suurenemisega, muutub suuremaks ka 2 ja seejärel uuesti väheneb. Seepärast tuleb toodud empiirilisi valemeid käsitada ainult kui ligikaudset väljendust hüstereesist tingitud energiakadude sõltuvusele induktsiooni amplituudist mitte liiga suurtel B_m väärtustel ja B_m muutumise vastavates intervallides.

Üldiselt tuleb märkida, et magnetvälja tugevuse kiiretel perioodilistel muutumistel erineb sõltuvust $B = f(H)$ väljendava silmuse kuju *staatilisest* hüstereesisilmusest, mis saadakse väljatugevuse aeglastel muutmistel. Seejuures pole magnetiline induktsioon mitte ainult väljatugevuse, vaid ka selle tuletiste funktsioon aja järgi. Selle põhjuseks on ferromagnetilises materjalis tekkivad pöörisvoolud ja magnetiline viskoossus. *Pöörisvooludeks* nimetatakse elektrilisi juhtivusvoole, mis tekivad ja sulguvad vahelduvas magnetväljas asuva massiivse juhtiva keha sees. Sõltuvust $B = f(H)$ väljendava *dünaamilise* silmuse pindala määrab seejuures ümbermagneetimise ja pöörisvoolude kogu energiakao ferromagnetilise aine mahuühikus väljatugevuse muutumise ühe perioodi jooksul.

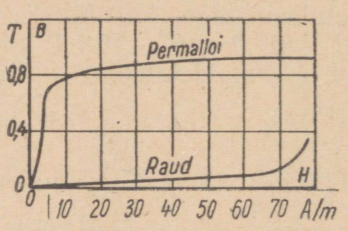
§ 59. Mõnede ferromagnetiliste materjalide magnetilised omadused

Illustratsiooniks ülaltoodule esitame andmeid mõnede ferromagnetiliste materjalide magnetiliste omaduste kohta.

Rauas on alati raskesti kõrvaldatavaid lisandeid, mis avaldavad mõju tema magnetilistele omadustele. Nii vähendavad süsiniku ja hapniku olemasolu (ka väikestes hulkades) tunduvalt magnetilist läbitavust. Joonisel 188 on kujutatud põhimagneetimiskõver ja hüstereesisilmuse osad tööstuslikult puhtale rauale (kõver *a*), milles on 0,1% lisandeid, ja spetsiaalse töötlemise teel saadud laboratoorsele proovile, milles lisandite sisaldust oli



Joon. 188.



Joon. 189.

vähendatud kuni 0,01% (kõver *b*). Puhta raua eritöötlemisega saadi üpris kõrge absoluutse magnetilise läbitavusega materjal, millel $\mu_{a\,max} = 180\,000\,\mu_0$. Hüstereesikadu oli nendes proovikehades äärmiselt väike ja moodustas kõigest $0{,}045\frac{W}{kg}$ sagedusel $f = 50$ Hz ja induktsiooni amplituudi puhul $B_m = 1$ T. Vahelduva magnetvoo tingimustes töötamiseks määratud elektrotehnilistes seadmetes ei kasutata puhast rauda, sest tal on võrdlemisi väike eritakistus ja pöörisvoolukaod osutuvad suurteks. Nimetatud seadmetes kasutatakse elektrotehnilist terast, kus peamiseks lisandiks on räni (Si). Räni lisamine väikeses koguses suurendab tunduvalt materjali eritakistust. Räni lisamine kuni 1,7%-lises koguses vähendab ka hüstereesikadusid. Elektrimasinaehituses kasutataval elektrotehnilisel terasel ongi umbes selline ränisisaldus. Lehtteras transformaatorite südamike ja vahelduvvoolumasinate magnetahelate osade valmistamiseks, mis töötavad vahelduvinduktsioonide suurte väärtuste juures, sisaldab ligi 4% Si. Sellega saavutatakse pöörisvoolukao tunduv vähenemine. Kokku on pöö-

risvoolu- ja hüstereesikadu 0,35 mm paksustes transformaatoriterase heades sortides umbes 1 $\frac{W}{kg}$ $f = 50$ Hz ja $B_m = 1$ T puhul.

Teistest sulamitest pakuvad erilist huvi raua sulamid nikliga. Sulamil, mis sisaldab 78,5% Ni, on äärmiselt suur maksimaalne magnetiline läbitavus $\mu = 100\,000 \ldots 200\,000$. Seda sulamit nimetatakse *permalloiks*. Joonisel 189 on võrdluseks toodud permalloi ja tööstuslikult puhta raua magneetimiskõverad.

Permalloi kõrge kvaliteet saavutatakse ainult tema termilise töötlemise režiimi eriti hoolikal täitmisel. Peale selle alandavad neid permalloi väärtuslikke omadusi kergesti mehaanilised pinged ja põrutused. Nagu nähtub jooniselt 189, saavutatakse permalloi küllastus juba väga nõrkade väljade korral. Nõrkades väljades on permalloi läbitavus 15—20 korda suurem kui harilikul elektrotehnilisel terasel. Mõned lisandid, näiteks molübdeen, suurendavad veelgi permalloi magnetilist läbitavust, parandades samaaegselt tema omadusi (eritakistuse suurenemine ja vastavalt kadude vähenemine) vahelduvväljades magneetimisel. Näiteks supermalloil, sulamil, mis sisaldab 79% Ni, 16% Fe ja 5% Mo, on maksimaalne magnetiline läbitavus $\mu = 800\,000$. Seetõttu võib permalloitüüpi sulameid kasutada eduga seadmetes, milledes esinevad nõrgad magnetväljad, näiteks voolutransformaatorites.

Täiesti teistsugustele nõuetele peavad vastama materjalid, mis on määratud püsimagnetite valmistamiseks. Püsimagneti aine magnetilist olekut iseloomustatakse mingi punktiga F (joon. 185) hüstereesisilmuse osal, mis asub teljestiku teises kvadrandis.

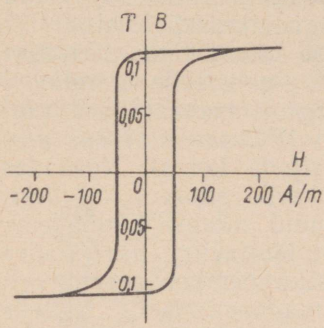
Niisugustelt materjalidelt nõutakse, et neil oleks tugev jääkinduktsioon B_r ja suur koertsitiivjõud H_c. Viimane on vajalik selleks, et püsimagneti magneetumus oleks stabiilne.

Üheks nendele nõuetele vastavaks parimaks materjaliks on sulam *magniko*. See koosneb rauast, niklist, alumiiniumist, koobaltist ja vasest ning selle $B_r = 1{,}25$ T ja $H_c = 44\,000 \frac{A}{m}$. Selle sulami magnetilised omadused ei ole tingitud ainult tema koostisest, vaid ka spetsiaalsest töötlemisest: pärast valamist jahutatakse magnet tugevas magnetväljas.

Kõrgsagedusväljades töötamiseks määratud poolide ja transformaatorite südamike valmistamiseks kasutatakse spetsiaalseid ferromagnetilisi materjale, nn. magnetodielektrikuid ja ferriite.

Magnetodielektrikud koosnevad ferromagnetilise materjali pulbrist, nn. alusainest, ja isoleermaterjalist sideainest. Nad valmistatakse alusaine ja sideaine kokkupressimise teel. Alusaine annab magnetodielektrikutele vajalikud magnetilised omadused; pöörisvoolukadude vähendamiseks peab ta esinema väga väikeste terakestena. Sideaine isoleerib aluse terakesi üksteisest. Magnetodielektrikute magnetiline läbitavus on võrdlemisi väike

— suurusjärgus mõnest mõnekümneni — ja ta muutub vähe magnetvälja tugevuse kasvamisel. Kõige enam on levinud magnetodielektrikud, mis on valmistatud maksimaalset magnetilist läbitavust $\mu = 21\,000$ omava ja otsekohe väga peene pulbri kujul saadava karbonüülraua alusel. Nendel magnetodielektrikutel $\mu = 8$. Võrreldes teiste magnetodielektrikutega on neil vähimad kaod ning küllalt hea ajaline stabiilsus ja omaduste püsivus temperatuuri muutumisel.



Joon. 190.

Ferriidid on keraamilised materjalid, mis valmistatakse tahkete rauaoksiidide ning teiste metallide (näiteks nikli ja tsingi) tahkete oksiidide segust. Peenestatud ja läbisegatud oksiidid pressitakse kokku ja seejärel kuumutatakse temperatuuril 800 kuni 1400° C, kusjuures toimub nende paakumine. Koostise, terade suuruse, kuumutamise kestuse ja temperatuuri muutmisega võib saada väga mitmesuguste omadustega ferriite. Võrreldes magnetodielektrikutega on ferriitidel väiksemad kaod ja suurem magnetiline läbitavus, suurusjärgus mõnisada kuni mõni tuhat.

Magneesium-tsink-ferriitide eriliseks omaduseks on ristkülikulise kujuga hüstereesisilmus (joon. 190). Ristkülikulise hüstereesisilmuse omandavad ka nikkel-tsink-ferriidid mehaanilise surve tulemusena, mis on seotud neis aineis magnetostriktsioonile vastupidise nähtuse ilmnemisega. Ristkülikulise hüstereesisilmusega ferriittoroidid on laialt levinud kiiretoimelistes arvutites ja impulsstehnika mitmesugustes seadistes. Seejuures tuleb silmas pidada, et äärmiselt kiiretel magnetvoo muutustel, nagu eespool märgiti, deformeerub hüstereesisilmus magnetilise viskoossuse ja pöörisvoolude tagajärjel.

Mida enam me omandame teadmisi aine ehitusest, seda laialdasemad võimalused avanevad nii- või teistsuguste väga väärtuslike magnetiliste omadustega materjalide loomiseks.

ÜHEKSAS PEATÜKK

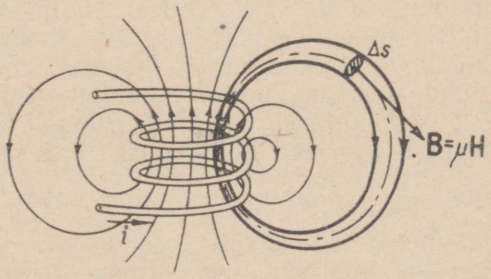
MAGNETAHELATE ARVUTUS

§ 60. Magnetahel. Magnetahela seadus

Magnetahelaks nimetatakse harilikult ferromagnetilisi kehi sisaldavate ja kinnist teekonda moodustavate elementide kogumit, milles tekitatakse magnetomotoorse jõu (mmj.) olemasolu korral magnetvoog. Nimetatud ahelat mööda sulguvadki magnetilise induktsiooni jooned. Magnetahela seadus püstitab seose magnetahela magnetvoo, piki ahelat toimiva mmj., magnetahela geomeetriliste mõõtmete ning magnetahelat moodustavate kehade ja keskkondade magnetiliste läbitavuste vahel. Vaatleme algul meelevaldse kujuga vooluringi, näiteks w keerust koosnevat pooli (joon. 191). Eraldame pooli magnetväljas magnetilise induktsiooni elementaartoru, mille ristlõike lineaarmõõtmed olgu üsna väikesed, võrreldes toru pikkusega. Joonisel on see märgitud kahe jämeda joonega. Mmj. piki toru telge on

$$F = \oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint H \cos\alpha\,\mathrm{d}l = wi.$$

Vektor **B** on suunatud mööda toru telje puutujat. Piirdume isotroopse keskkonna juhtumiga. Siis vektori **H** suund ühtib kõikjal vektori **B** suunaga ja on järelikult samuti magnetilise induktsiooni toru telje puutuja suunaline. Seega $\cos\alpha = 1$, ja võime kirjutada, et $\oint H\mathrm{d}l = wi$.



Joon. 191.

Magnetvoog läbi toru ristlõike Δs on $\Delta\Phi = B\Delta s = \mu_a H \Delta s$. Järelikult

$$H = \frac{\Delta\Phi}{\mu_a \Delta s} \quad \text{ja} \quad \oint \frac{\Delta\Phi}{\mu_a \Delta s} \mathrm{d}l = wi.$$

Voog $\Delta\Phi$ on konstantse väärtusega kogu toru pikkuses ja selle võib tuua integraalimärgi ette. Leiame:

$$\Delta\Phi \oint \frac{\mathrm{d}l}{\mu_a \Delta s} = wi \quad \text{või} \quad \Delta\Phi = \frac{wi}{\oint \frac{\mathrm{d}l}{\mu_a \Delta s}} = \frac{F}{R_m}.$$

Murru nimetajas olevat suurust nimetatakse *tõkestuseks* ehk *magnetiliseks takistuseks*. Antud juhtumil on see vaadeldava magnetilise induktsiooni toru magnetiline takistus.

Lihtsaimal juhtumil, kui suurused μ_a ja Δs on konstantsed piki kogu toru, saame, et $R_m = \frac{l}{\mu_a \Delta s}$. Sellised omadused on vootorudel joonistel 172 ja 186 kujutatud rõngakujulise solenoidi sees.

Magnetilise takistuse avaldist $R_m = \frac{l}{\mu_a s}$ võib suure täpsusega kasutada mistahes kujuga ferromagnetilisest materjalist südamike korral, kui magnetiline läbitavus ja ristlõige s on kogu südamiku pikkuses konstantsed. Südamiku kujul ei ole olulist tähtsust, sest praktiliselt kõik magnetilise induktsiooni jooned kulgevad mööda südamikku. Seejuures on magnetvoo, mmj. ja magnetilise takistuse vaheline sõltuvus järgmise kujuga:

$$\Phi = \frac{F}{R_m} = \frac{wi}{\frac{l}{\mu_a s}}.$$

See seos väljendabki *magnetahela seadust.*

Magnetahela seadust võib esitatud kujul kasutada ka nende magnetahelate arvutamisel, millede magnetilise induktsiooni joonte teekond peaaegu täielikult kulgeb ferromagnetilises keskkonnas, välja arvatud lühikesed magnetahela osad, nn. õhupilud, kus magnetilise induktsiooni jooned läbivad õhu. Niisugused on näiteks elektrimasinate magnetahelad, milledes masina pöörleva ja liikumatu osa vahel esinebki väike õhkvahemik, s. o. õhupilu. Seejuures tuleb valemit $R_m = \frac{l}{\mu_a s}$ kasutada magnetahela üksikute osade kohta, sest ahela eri lõikude magnetiline läbitavus on erinev. Keerukamate magnetahelate ja liitahelate arvutamisest räägitakse järgmistes paragrahvides.

Magnetahela seadus on kujult analoogiline Ohmi seadusega elektriahela jaoks:

$$i = \frac{e}{r},$$

kus i on vool ahelas, e — ahelas mõjuv emj. ja r — ahela elektritakistus. Homogeensest juhtmest ahela korral on seejuures $r = \frac{l}{\gamma s}$.

Ent see analoogia on formaalne. Oma olemuse poolest erinevad Ohmi seadus ja magnetahela seadus teineteisest oluliselt. Alalis-emj. eksisteerimine on võimalik, ilma et ta toimel elektriahelas elektrivoolu tekikski, seega on võimalik ka siis, kui juhtmetest ahel on katkestatud ja kogu ahela takistus on lõpmata suur. Vastupidiselt sellele on mmj. eksisteerimine alati seotud magnetvoo samaaegse esinemisega. Viimane väide osutub ainult teiseks formuleeringuks varem väljendatud printsipiaalsele väitele, millele vastavalt elektrivoolu ja teda ümbritsevat magnetvälja tuleb käsitada ühtse elektromagnetilise protsessi erinevate iseloomustajatena.

§ 61. Järjestikmagnetahela arvutus

Tehniliste seadmete magnetahelad sisaldavad harilikult ferromagnetilisest materjalist osi, mille magnetiline läbitavus sõltub magnetvälja tugevusest. Seega on meil harilikult tegemist *mittelineaarsete magnetahelatega.*

Kui esimeses lähenduses jätta peamagnetahelast õhku hargnevad nn. puistemagnetvood arvestamata, siis osutub liitmagnetahela arvutus analoogiliseks vastava mittelineaarse liitelektriahela arvutusega.

Lihtsaima magnetahela juhtumil on kõik ahelaosad järjestikku. Sel puhul on w keeruga mähise voolust i tingitud kogu mmj. $F = wi$ võrdne üksikute osade magnetomotoorsete jõudude summaga, s. t.

$$F = \oint \mathbf{H}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = wi = \Sigma F_k.$$

Kui on võimalik jätta puistevood tähele panemata, siis on vood Φ kõikides ahelaosades ja kõikides antud osa ristlõigetes s_k ühesugused. Kasutades magnetahela seadust kogu magnetahela ja tema osade kohta, saame:

$$F = \Phi R_m; \qquad F_k = \Phi R_{mk},$$

kus R_m on kogu magnetahela magnetiline takistus, R_{mk} — tema

k-nda osa magnetiline takistus. Asetades need avaldised võrdusse $F = \Sigma F_k$ ja taandades Φ, saame:

$$R_m = \Sigma R_{mk},$$

s. t. järjestikühenduse kogu magnetiline takistus arvutatakse kõikide ahelaosade magnetiliste takistuste summana.

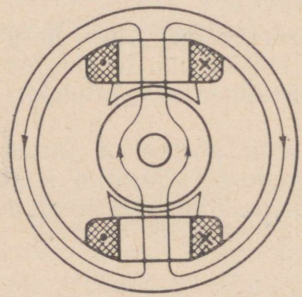
Olgu erijuhtumil magnetahela antud osa ristlõige s_k konstantne ja lubatagu puistevood arvestamata jätta. Oletades, et voog on jaotunud ühtlaselt üle ristlõike, on sellisel erijuhtumil ja niisuguste lihtsustuste korral magnetiline induktsioon ühesugune antud ahelaosa kõikides punktides. Vastavalt on ühesugune kõikides punktides ka magnetiline läbitavus, kui kogu ahelaosa koosneb homogeensest materjalist. Sel juhtumil võib kirjutada:

$$R_{mk} = \frac{l_k}{s_k \mu_{ak}},$$

kus l_k on k-nda osa pikkus ja μ_{ak} — absoluutne magnetiline läbitavus, ning vastavalt

$$R_m = \sum \frac{l_k}{s_k \mu_{ak}}.$$

Joonisel 192 on skemaatiliselt kujutatud kahepooluselise elektrimasina magnetahel. Kuigi voog ikkes hargneb kahte ossa, võib siiski niisugust ahelat vaadelda mittehargnevana, kui kahekordistada ikke ristlõige. Nii võib toimida seetõttu, et ikke mõlematel osadel on võrdne magnetiline takistus. Muidugi võib ahelat vaadelda mittehargnevana ainult puistevooge arvestamata jättes.



Joon. 192.

Magnetahelat arvutatakse tegelikult järgmise skeemi kohaselt. Enamasti osutub antuks magnetvoog Φ, mis peab moodustuma arvutatavas magnetahelas, näiteks masina õhupilus. Üldandmete alusel visandatakse projekteeritava seadise magnetahela eskiis ja valitakse magnetahela iga osa materjal. Antakse ette magnetilise induktsiooni keskmine väärtus ahela igale osale. Selle keskmise induktsiooni väärtuse suurus valitakse sõltuvalt osa materjali liigist ja ülesandest, mis on ahela antud osal kogu seadmes. Seejärel määratakse iga ahelaosa ristlõige s voo ja induktsiooni jagatisena.

Kuna induktsiooni väärtus ja materjal on valitud, võib järgnevalt magneetimiskõveratest leida iga ahelaosa jaoks magnet-

välja tugevuse H suuruse. Et väljatugevus on arvuliselt võrdne pikkusühiku kohta tuleva magnetomotoorse jõuga, siis mmj., mis on vajalik voo kulgemiseks läbi ahela antud osa, võrdub korrutisega $H_k l_k$. Ahela kõikide osade järjestikühenduse korral on antud voo tekitamiseks vajalik kogu otsitav mmj. võrdne üksikute osade magnetomotoorsete jõudude summaga, s. o.

$$wi = \Sigma H_k l_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \ldots$$

Kui magnetahela antud konstruktsiooni puhul osutub etteantuks mitte Φ, vaid mmj. wi, tuleb arvutamiseks kasutada üldmeetodit, mis on esitatud järgmises paragrahvis.

Täpsema arvutuse korral tuleb arvestada ka puistevooge. Puistevoogude olemasolu tõttu võib magnetvoog olla erinev ahela üksikutes teineteisele järgnevates osades ning samuti ühe ja sama ahelaosa eri ristlõigetes. Tingimata on vaja arvestada ka seda, et voog jaguneb üksikutes kohtades ristlõike ulatuses ebaühtlaselt. Näiteks masina pooluste äärtel (joon. 192) toimub magnetilise induktsiooni joonte tihenemine ja magnetiline induktsioon poolusekingade nendes kohtades saavutab väga suuri väärtusi. Vastavalt ongi poolusekingade need kohad tugevasti küllastatud ja nende magnetiline läbitavus on suhteliselt väike. Viimast asjaolu arvestatakse vastavate empiiriliste teguritega.

Seega osutub isegi suhteliselt lihtsa magnetahela täpne arvutus küllaltki keerukaks.

§ 62. Hargmagnetahelate arvutus

Hargmagnetahela üldjuhtumil on vaja tingimata ahela sõlmede jaoks kasutada magnetvoo pidevuse printsiibist tulenevat võrrandit. Ümbritseme magnetahela sõlme (joon. 193) kinnise pinnaga s. Vastavalt pidevuse printsiibile on magnetvoog läbi selle pinna võrdne nulliga:

$$\Phi = \oint_s \mathbf{B}\, \mathrm{ds} = 0.$$

Järelikult voogude summa ühte sõlme suunduvates magnetahela osades on võrdne nulliga:

$$\Sigma \Phi_k = 0.$$

See võrrand on sarnane Kirchhoffi I seadusega elektriahelate kohta. Joonisel kujutatud ahela jaoks saame:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3.$$

Mmj. mööda kontuuri $AbBcA$ on võrdne nulliga. Järelikult on mmj. mööda teekonda AbB võrdne magnetomotoorse jõuga mööda

teekonda *AcB*. Selle mmj. tähistame F_{23}. Peale selle tähistame osa *BaA* magnetilise takistuse tähisega R_{m1}, osa *AbB* takistuse — R_{m2} ja osa *AcB* takistuse — R_{m3}. Siis saame:

$$\Phi_2 = \frac{F_{23}}{R_{m2}}; \quad \Phi_3 = \frac{F_{23}}{R_{m3}}.$$

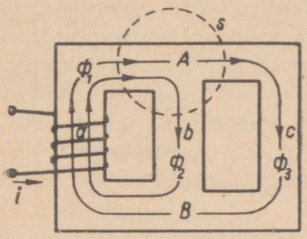
Järelikult

$$\Phi_1 = \frac{F_{23}}{R_{m2}} + \frac{F_{23}}{R_{m3}} = F_{23}\left(\frac{1}{R_{m2}} + \frac{1}{R_{m3}}\right) = F_{23}\frac{1}{R_{m23}},$$

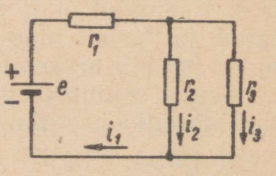
millest

$$\frac{1}{R_{m23}} = \frac{1}{R_{m2}} + \frac{1}{R_{m3}}.$$

Magnetilise takistuse pöördsuurust nimetatakse *magnetiliseks juhtivuseks*. Seega magnetahela paralleelühenduse üldine magnetiline juhtivus on võrdne ahela paralleelosade magnetiliste



Joon. 193.



Joon. 194.

juhtivuste summaga. Joonisel 193 kujutatud kogu ahela magnetiline takistus

$$R_m = R_{m1} + R_{m23}$$

ja mmj. wi ning voo Φ_1 vahel kehtib seos

$$\Phi_1 = \frac{wi}{R_m}.$$

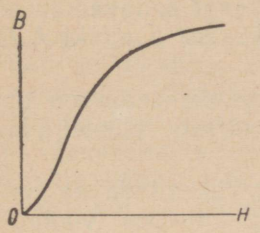
Liitmagnetahela mistahes suletud kontuuri kohta võib kirjutada seaduse, mis on analoogiline Kirchhoffi II seadusega elektriahelate puhul. Nimelt magnetomotoorsete jõudude summa mööda magnetahela suletud kontuuri on võrdne magnetahela kontuuri kõikide lõikude jaoks moodustatud magnetvoogude ja magnetiliste takistuste korrutiste summaga:

$$\Sigma w_k i_k = \Sigma \Phi_k R_{mk}.$$

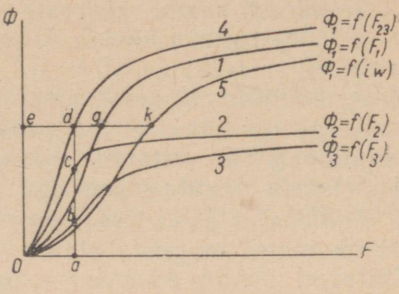
Tõepoolest:

$$\Sigma w_k i_k = \Sigma F_k = \Sigma H_k l_k = \Sigma \mu_{ak} s_k H_k \frac{l_k}{\mu_{ak} s_k} = \Sigma \Phi_k R_{mk}.$$

Seega liitmagnetahela arvutus, kui jätta arvestamata puistevood, on analoogiline vastava elektriahela arvutusega. Näiteks joonisel 193 kujutatud magnetahela arvutus on analoogiline joonisel 194 toodud elektriahela arvutusega. Seejuures mmj. wi vastab elektromotoorsele jõule e, magnetvoogudele Φ_1, Φ_2 ja Φ_3 vastavad voolud i_1, i_2 ja i_3 ning magnetilistele takistustele R_{m1}, R_{m2} ja R_{m3} elektritakistused r_1, r_2 ja r_3.



Joon. 195.



Joon. 196.

Hargmagnetahela arvutus muutub hoopis keerukaks, kui magnetiline läbitavus sõltub väljatugevusest. Ferromagnetiliste materjalide korral ongi see nii. Kõik ülaltoodud võrrandid jäävad kehtima, kuid neis esinevate ahelaosade magnetilised takistused sõltuvad otsitavast väljatugevusest neis osades. Jääb kehtima ka analoogia elektriahela arvutamisega, kuid vastava elektriahela osad peavad olema mittelineaarsete $i = f(u)$ karakteristikutega. Need karakteristikud olgu analoogilised magnetahela osade mittelineaarsete karakteristikutega $\Phi = f(F)$. Arvutamisel tuleb neil juhtumeil kasutada materjali magneetimiskõverat, mis annabki magnetilise induktsiooni sõltuvuse väljatugevusest (joon. 195).

Näitena vaatleme joonisel 193 kujutatud ahelat. Kasutades magneetimiskõverat (joon. 195), konstrueerime kõverad $\Phi = f(F)$ iga ahelaosa jaoks eraldi (kõverad *1*, *2* ja *3*, joonisel 196). Nende kõverate konstrueerimiseks tuleb joonisel 195 kujutatud magneetimiskõvera ordinaadid korrutada ahelaosa ristlõikega ja abstsissid ahelaosa pikkusega. Näiteks sõltuvust $\Phi_1 = f(F_1)$ esitav kõver *1* saadakse joonisel 195 toodud kõvera ordinaatide korrutamisel s_1-ga ja abstsisside korrutamisel l_1-ga. Kuna

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \quad \text{ja} \quad F_2 = F_3 = F_{23},$$

siis liites kõverate *2* ja *3* (joon. 196) ordinaadid, saame sõltuvust $\Phi_1 = f(F_{23})$ esitava kõvera *4*, sest kõverad *2* ja *3* esitavadki sõltuvusi $\Phi_2 = f(F_2)$ ja $\Phi_3 = f(F_3)$. Näiteks kõvera *4* punkt *d* leitakse summast $ad = ab + ac$.

Kogu mmj. iw on võrdne magnetomotoorsete jõudude F_1 ja F_{23} summaga. Siinjuures F_1 on vajalik voo Φ_1 kulgemiseks läbi esimese ahelaosa ja F_{23} voo Φ_1 kulgemiseks läbi paralleelosa, mis on moodustunud teisest ja kolmandast ahelaosast. Seega

$$iw = F_1 + F_{23}.$$

Seepärast saame kõverate *1* ja *4* abstsisside liitmisel seost $\Phi_1 = f(iw)$ esitava kõvera *5*, sest kõverad *1* ja *4* esitavad ju sõltuvusi $\Phi_1 = f(F_1)$ ja $\Phi_1 = f(F_{23})$. Näiteks kõvera *5* punkt k leitakse summast $ek = ed + eg$.

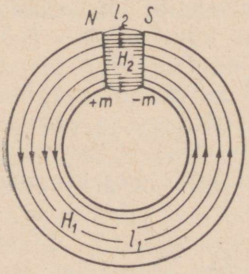
Kerge on näha, et hargmagnetahela arvutusmeetod on analoogiline § 36 esitatud vastava mittelineaarsete elementidega elektriahela arvutusmeetodiga.

Analoogiat elektriahelatega võib edukalt rakendada ka palju keerukamate magnetahelate arvutamiseks, milledes vooludest läbitavad poolid esinevad magnetahela erinevates harudes.

Puistevoogude olemasolu liitmagnetahelates raskendab erakordselt arvutusi. Selliseid arvutusi võib läbi viia järkjärgulise lähenemise meetodiga. Algul leiame puistevooge mitte arvestades magnetomotoorsete jõudude jaotuse ahelaosades. Seejärel, kasutades elektromagnetilise välja arvutamise erimeetodeid, leiame selle jaotuse alusel puistevood ja täpsustame vooge magnetahela osades. See võimaldab omakorda täpsustada magnetomotoorsete jõudude jaotust ning vastavalt puistevoogude suurusi jne.

§ 63. Püsimagnetite arvutusest

Ferromagnetilistele ainetele omast jääkmagnetismi nähtust kasutatakse laialdaselt püsimagnetite valmistamisel.



Joon. 197.

Vaatleme rõngakujulist õhupiluga püsimagnetit (joon. 197). Tähistame kõik õhupilu kohta käivad suurused indeksiga *2* ja magneti keha kohta käivad suurused indeksiga *1*. Füüsikaliselt tekitatakse püsimagneti väli magneti elementaarvoolude poolt. Kuid väljatugevus H, millega me opereerime kõikides tehnilistes arvutustes, määratakse nii, et $\oint \mathbf{H}\,\mathrm{dl}$ on võrdne ainult integreerimiskontuuriga haaratavaid juhtmeid läbivate makroskoopiliste vooludega ja tema suurusesse ei kuulu elementaarvoolud magneeditud kehades. Püsimagneti korral on kõikjal $\oint \mathbf{H}\,\mathrm{dl} = 0$, sest makro-

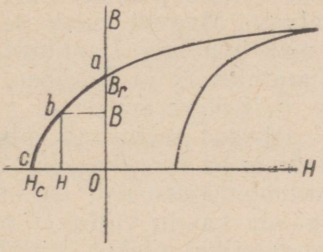
voole ei ole. Peale selle on see integraal samuti võrdne nulliga mööda teekonda magneti ja õhupilu teljel. Järelikult

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0,$$

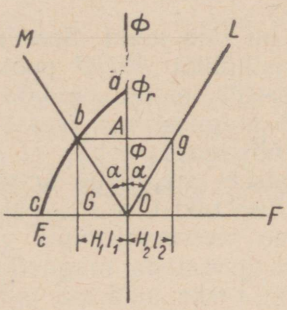
s. t.

$$H_1 l_1 = -H_2 l_2,$$

kus l_1 ja l_2 on magneti ja õhupilu telje pikkused ning H_1 ja H_2 — väljatugevused magnetis ja õhupilus. Lihtsustamiseks eeldame, et väli on nii magnetis kui ka õhupilus homogeenne. Märgime, et viimastes võrdustes ja edaspidi käesolevas paragrahvis me mõistame H all mitte vektori **H** moodulit, mis on alati positiivne, vaid algebralist suurust, mis võib olla positiivne või negatiivne sõltuvalt sellest, kas vektori **H** suund ühtib positiivse liikumise suunaga või on sellele vastupidine.



Joon. 198.



Joon. 199.

Üldjuhtumil, kui väli ei ole homogeenne, tuleb kirjutada, et $F_1 = -F_2$, kus F_1 ja F_2 on magnetomotoorsed jõud mööda magneti ja õhupilu telge.

Joonisel 198 on kujutatud magneti materjali iseloomustava hüstereesisilmuse osa, mis on üles võetud suurel magnetilisel küllastusel õhupiluta (suletud) rõnga korral. Seejuures on B_r jääkinduktsioon ja H_c — koertsitiivjõud. Haru *abc* nimetatakse *lahtimagneetimiskõveraks*. Joonisel 199 on see haru esitatud ümberarvutatult koordinaatidesse F ja Φ, kusjuures F on mmj. mööda magneti telge ja Φ — voog magneti neutraaltsoonis. Ühtlasel magneetimisel $F = H_1 l_1$ ja $\Phi = B_1 s_1$, kus s_1 on magneti ristlõige.

Õhupilu puudumisel $B = B_r$, $\Phi = \Phi_r$ ja H on kõikjal võrdne nulliga. Õhupilu olemasolu korral on magnetvoo kulgemiseks läbi magnetilist takistust R_{m2} omava õhupilu vaja magnetomotoorset jõudu $F_2 = R_{m2}\Phi_2$.

Kui lugeda väli õhupilus ligikaudu homogeenseks, siis

$$F_2 = H_2 l_2 = \frac{l_2}{\mu_0 s_2} \Phi.$$

Joonisel 199 kujutab sirge OL seost F_2 ja Φ vahel. Et $F_1 = -F_2$, siis seost F_1 ja Φ vahel esitav sirge OM osutub sirge OL peegelkujutiseks ordinaattelje suhtes. Ilmselt kiire OM lõikepunkt b lahtimagneetimiskõvera abc-ga määrabki magneti aine magnetilise oleku õhupilu olemasolul.

Magnetvälja energia magneti õhupilus määratakse avaldisega

$$\frac{\Phi F_2}{2},$$

mis homogeense välja korral avaldub kujul

$$\frac{B_2 S_2 H_2 l_2}{2} = \frac{B_2 H_2}{2} V_2,$$

kus V_2 on pilu maht. See energia on võrdne joonisel 199 kujutatud ristküliku $AbGO$ poole pindalaga. Magnet tuleb selliselt projekteerida, et see pindala oleks maksimaalne. Järelikult peab punkt b magneetimiskõveral koordinaatides H ja B (joon. 198) asuma niisuguses kohas, et korrutis $|BH|$ oleks suurim.

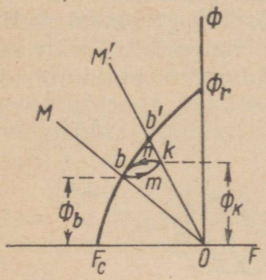
Reaalsete magnetite arvutamise raskused seisnevad selles, et magnetilise takistuse R_{m2} väljaarvutamine on keerukas, kui arvestada voo teekonnal õhus välja mittehomogeensust, samuti on keerukas arvestada magneti külgpindade kaudu väljuvat puistevoogu ja raske määrata magneti magnetilist olekut mittehomogeensel magneetumisel.

§ 64. Püsimagnetitega magnetahelate arvutusest

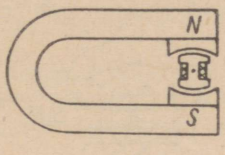
Kui magneti õhupilusse viia keha, mis on valmistatud nn. pehmemagnetmaterjalist, s. o. suhteliselt nõrkades väljades kergesti magneetuvast ferromagnetilisest ainest, siis võib selle keha magnetilist takistust mitte arvestada ja väita, et sellise keha sisseviimine on ekvivalentne õhupilu ja selle magnetilise takistuse vähenemisega. Vastavalt saame sirge OM asemel sirge OM' (joon. 200). Siiski ei satu magnetiaine magnetiline olek mööda lahtimagneetimiskõverat punkti b', vaid hoopis punkti k mööda kõverat bmk. Magnetvoog suureneb väärtuseni Φ_k. Kui uuesti eemaldada ferromagnetiline keha õhupilust, siis läheb magnetiline olek tagasi punkti b mööda kõverat knb. Silmus $bmknb$ kannab *osahüstereesisilmuse* nimetust.

Seda liiki nähtused toimuvad püsimagnetitega elektrigeneraatorites, näiteks magneetos (joon. 201). Magneeto pooluskin-

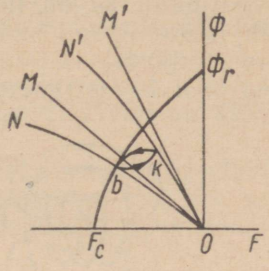
gadel ja ankrul on väike magnetiline takistus. Õhupilu magnetiline takistus aga muutub sõltuvalt ankru asendist. Joonisel kujutatud asendis on tal kõige väiksem väärtus. Ankru pööramisel nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra on tal kõige suurem väärtus. Magneti magnetahelas muutub magnetvoog ankru pöörlemisel perioodiliselt pii-



Joon. 200.



Joon. 201.



Joon. 202.

rides Φ_k kuni Φ_b (joon. 200). Ankru mähist läbiv voog aga muutub selle mähise suhtes $+\Phi_k$-st kuni $-\Phi_k$-ni, kui ankur ja mähis pöörduvad nurga π võrra joonisel näidatud asendist. Vastavalt on mähises ankru samade asenditega fikseeritud poole pöörde jooksul indutseeritava emj. keskväärtus

$$e_k = \frac{2\Phi_k}{T/2},$$

kus T on ankru täispöörde aeg.

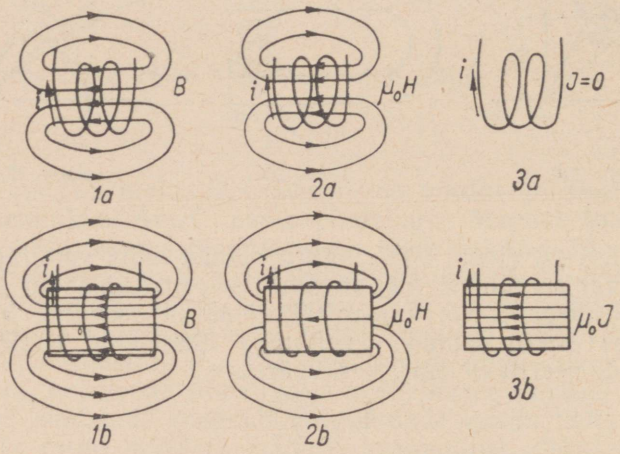
Kui võtta arvesse poolusekingade ja ankru lõplikku magnetilist takistust, saame sirgete OM ja OM' asemel kõverad ON ja ON' (joon. 202). Teljega OF paralleelsed lõigud, mis moodustavad kõvera ON ja sirge OM ning kõvera ON' ja sirge OM' vahel, kujutavad abstsisstelje mastaabis mmj. väärtusi piki poolusekingi ja ankrut vastavatel magnetvoo väärtustel. Need mmj. väärtused võib saada poolusekingade ja ankru materjali magneetimiskõveratest. Seejuures asuvad osahüstereesisilmuse tipud b ja k kõveratel ON ja ON'.

§ 65. Magnetvälja tugevuse jaotumine piki mittehomogeenset magnetahelat

Vaatleme magnetvälja tugevuse jaotumist piki mittehomogeenset magnetahelat. Võtame nimelt vaatluse alla ferromagnetilisest materjalist lühikese südamikuga pooli välja. Joonise 203 kujundil 1*a* on näidatud magnetilise induktsiooni vektori **B** väli, mis on tekitatud pooli voolu poolt südamiku puudumisel. Kujun-

dil 1*b* on näidatud vektori **B** väli pooli sama voolu juures, kuid sisseasetatud südamiku puhul. Kui pooli sisemusse asetatakse ferromagnetilisest materjalist südamik, siis väheneb kogu magnetahela üldine magnetiline takistus, mille tõttu muutumatu mmj. *wi* puhul, s. o. pooli mähise muutumatu voolu puhul, magnetvoog kasvab ja induktsioon kõikides ruumi punktides suureneb. Kõikidel juhtumitel on vektori **B** jooned pidevad.

Kujundil 2*a* on näidatud vektoriga **H** võrdelise vektori $\mu_0\mathbf{H}$ väli juhtumil, kui südamik puudub. Kujundil 2*a* esitatud väli ei erine kujundil 1*a* kujutatud väljast, sest südamiku puudumisel igal pool $\mathbf{J} = 0$ (kujund 3*a*) ja $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$.



Joon. 203.

Südamiku sissetoomisel aga jaotub vektori **H** ja vastavalt ka vektori $\mu_0\mathbf{H}$ väli (kujund 2*b*) teistsuguselt. Väljatugevuse joonintegraal mööda kogu magnetilist teekonda, s. o. kogu mmj. jääb muutumatuks. Kuid nüüd jaotub seesama mmj. teisiti ahela eri osade vahel. Võrdlemisi väike osa temast kulutatakse voo kulgemisele läbi südamiku, millel on väike magnetiline takistus ferromagnetilise materjali suure magnetilise läbitavuse tõttu. Suurem osa magnetomotoorsest jõust läheb voo ülejäänud teekonna osale, seega teekonnale läbi õhu. Seoses sellega toimub vektori **H** välja nõrgenemine südamiku sees ja tema suurenemine väljaspool südamikku (kujund 2*b*). Väljaspool südamikku on endiselt $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Südamiku sees aga kehtib seos $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{J}$, kus **J** on südamiku magneetumuse vektor.

Juhime tähelepanu sellele, et südamiku olemasolul on vektori **H** jooned katkelised: nad algavad ja lõpevad südamiku pinnal. Üldiselt on vektori **H** jooned katkelised kahe erineva magnetilise

läbitavusega keskkonna lahutuspinnal, kui magnetjooned (vektori **B** jooned) lõikavad seda pinda. Vektori **J** jooned (kujund 3*b*) on samuti katkelised, sest $\mathbf{J} \neq 0$ ainult südamiku aines.

Märgime, et südamiku sissetoomisel väljapildi muutumise seletamine magnetilise takistuse mõiste sissetoomisega on formaalne, sest tegelikkuses ei tugevne magnetvoog südamiku sisseasetamisel mitte magnetilise takistuse vähenemise tagajärjel, vaid selle tõttu, et pooli makroskoopilise voolu väljale lisandub südamiku kehas olevate elementaarvoolude väli. Füüsikaliselt eksisteerib magnetväli tühjuses ka südamiku sisseasetamisel, kuid seejuures ta tekitatakse mitte ainult makroskoopiliste, vaid ka elementaarvoolude poolt. See tegelikult eksisteeriv väli on näidatud kujundil 1*b*.

Ikkagi osutub ülalnäidatud viisil määratud magnetilise takistuse ja ka väljatugevuse mõiste väga kasulikuks, sest see võimaldab arvutada liitmagnetahelaid analoogiliselt elektriahelatega.

Huvitav on märkida, et homogeense ferromagnetilisest ainest kinnise südamiku puhul (joon. 186), kui südamikule on ühtlaselt asetatud w keeruga mähis, on nii vektori **B** kui ka vektori **H** väli piki südamikku ühtlaselt jaotunud. Sel erijuhtumil kujutab vektori $\mu_0\mathbf{H}$ väli endast seda füüsikalist välja, mis esineks südamiku puudumisel ja voolu olemasolul mähises; vektori $\mu_0\mathbf{J}$ väli aga kujutab endast seda füüsikalist välja, mis esineks südamiku kehas ainuüksi elementaarvoolude olemasolu puhul. Sel lihtsaimal erijuhtumil on suur praktiline väärtus südamiku aine magnetiliste omaduste uurimisel, sest seejuures arvutatakse väljatugevus valemi $H = \frac{wi}{l}$ järgi samuti kui südamiku puudumiselgi. Siin on l südamiku telje pikkus. Magnetilise induktsiooni B võib aga saada südamiku magnetvoo mõõtmise teel, näiteks ballistilise meetodiga.

KÜMNES PEATÜKK

ELEKTRIAHELATE INDUKTIIVSUSED

§ 66. Omainduktiivsus

Suhtest $\Psi_L = Li$ saame:

$$L = \frac{\Psi_L}{i},$$

s. o. *elektriahela induktiivsus on võrdne selle ahela endainduktsiooni aheldusvoo ja voolu suhtega.*

Sel viisil defineeritud induktiivsust nimetatakse *staatiliseks induktiivsuseks*, kui suurus Ψ_L on määratud alalisvoolu puhul. Staatiline induktiivsus sõltub ainult vooluringi mõõtmetest ja kujust ning selle keskkonna magnetilise läbitavuse väärtusest, milles endainduktsiooni voog eksisteerib. Ta ei sõltu vooluringi voolust, kui magnetiline läbitavus ei sõltu väljatugevusest.

Kui keskkond on homogeenne, s. o. kui μ_a on ühe ja sama väärtusega kõigis ruumipunktides, kus magnetvoog esineb, siis võib kirjutada:

$$L = \mu_a f(g),$$

kus $f(g)$ on vooluringi mõõtmeid ja kuju määravate geomeetriliste parameetrite funktsioon. Tõepoolest, $\mu_a = \text{const}$ puhul muutub suurus H igas ruumipunktis võrdeliselt vooluringi vooluga i. Seepärast on magnetilise induktsiooni vektori $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$ voog võrdeline μ_a ja i-ga, järelikult aga on induktiivsus võrdeline läbitavusega μ_a ja vooluringi mõõtmetest ja kujust sõltuva mingisuguse funktsiooniga $f(g)$. Üldisemal juhtumil, kui magnetiline läbitavus on eri punktides erineva väärtusega, ei saa magnetilist läbitavust L avaldisele üldise kordajana välja tuua, ning see avaldis tuleb kirjutada kujul

$$L = F(\mu_a, g).$$

Lõpuks, kui μ_a sõltub väljatugevusest, siis sõltub L vooluringi

voolust. Vahel me märgime staatilist induktiivsust indeksiga «*st*», s. o. kirjutame L_{st}.

Sageli osutub otstarbekaks kasutada arvutustes nn. *dünaamilist induktiivsust, mis on võrdne elektriahela endainduktsiooni aheldusvoo juurdekasvu ja ahela voolu juurdekasvu suhte piirväärtusega voolu juurdekasvu lähenemisel nullile:*

$$L_d = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta \Psi_L}{\Delta i} = \frac{d\Psi_L}{di}.$$

Seejuures oletatakse, et ahelat moodustava vooluringi mõõtmed ei muutu ja järelikult kasvab Ψ_L ainult voolu i suurenemise tõttu.

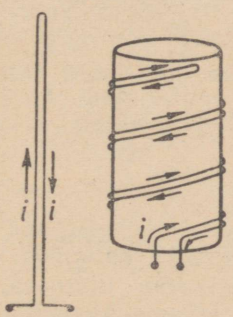
Dünaamilist induktiivsust võib esitada veel ka teisel kujul, nimelt

$$L_d = \frac{\frac{d\Psi_L}{dt}}{\frac{di}{dt}} = -\frac{e_L}{\frac{di}{dt}}.$$

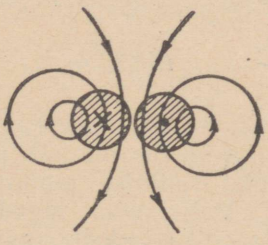
Järelikult *on geomeetriliselt muutumatu vooluringi dünaamiline induktiivsus võrdne vooluringi kontuuris tekkiva endainduktsiooni emj. ja vooluringi voolu muutumise kiiruse suhtega, mis on võetud miinusmärgiga.*

Igal vooluringil on $L > 0$, sest elektrivoolu eksisteerimine ei ole võimalik ilma magnetväljata ning vooluringi vool ja endainduktsiooni voog on alati ühemärgilised: voolujoonte suund ja endainduktsiooni voo joonte suund on omavahel seotud parema käe kruvi reegliga.

Kui on vajalik, saab vähendada ahela induktiivsust, kuid moodustada ahelat, millel induktiivsus täielikult puudub, ei ole võimalik. Radikaalseks abinõuks, mis vähendab ahela induktiivsust, on ahela nende osade maksimaalne lähendamine, milledes



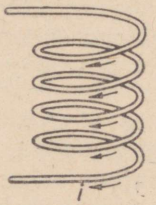
Joon. 204.



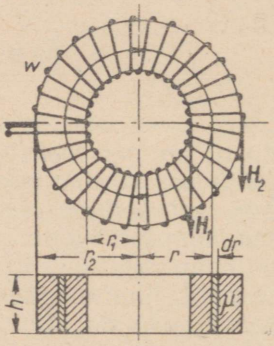
Joon. 205.

voolud on vastupidiste suundadega. Seda moodust kasutatakse vahelduvvoolujuhtmete induktiivsuse vähendamiseks väga tugeva voolu puhul, näiteks võimsate elektriahjude toitejuhtmete puhul. Laialdaselt kasutatakse seda viisi ka nn. induktiivsusevabade takistite valmistamisel, mis on määratud kasutamiseks mitmesugustes mõõteahelates ja -riistades. Sel eesmärgil pannakse traat kahekordselt kokku, s. o. moodustatakse nn. bifilaarsilmus (joon. 204). Kui kahekordselt kokkupandud traat on pikk, keritakse ta poolile. Siiski on ka bifilaarmähisega poolil olemas induktiivsus, ehkki väike, kuid lõpliku suurusega, sest alati jääb alles traatide eneste kehasid läbiv voog (joon. 205).

Kui vastupidi eelmisele soovitakse ahela induktiivsust võimalikult suurendada, siis mähitakse traat sel viisil, et tema kõrvutiasetatud osades on voolud samasuunalised (joon. 206). Endainduktsioonipoolid just nii valmistataksegi.



Joon. 206.



Joon. 207.

Esimese näitena määrame niisuguse mähise induktiivsuse, mis on ühtlaselt mähitud ristkülikulise ristlõikega toroidsüdamikule (joon. 207). Sel juhtumil on magnetilise induktsiooni joonteks ringjooned, millede keskpunktid on toroidi teljel. Mmj. on ühe ja sama väärtusega mööda kõiki jooni ning võrdne $\oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = wi$. Suurus H on konstantne piki iga joont. Järelikult

$$H \oint \mathrm{d}l = H \cdot 2\pi r = wi \quad \text{ja} \quad H = \frac{wi}{2\pi r},$$

kus r on antud joone raadius.

Väljatugevus muutub piki raadiust, kuid on ühesugune kõigis südamiku ristlõike punktides, mis on võrdsel kaugusel toroidi teljest. Välja võib lugeda homogeenseks riba ulatuses, mille pindala on $\mathrm{d}s = h\,\mathrm{d}r$, kus h on südamiku kõrgus. Voog läbi selle riba

$$d\Phi = B\,ds = \mu_a Hh\,dr = \frac{\mu_a wih}{2\pi}\frac{dr}{r}.$$

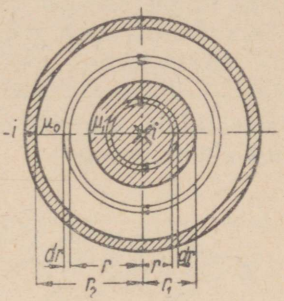
Voog läbi kogu südamiku ristlõike

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_a wih}{2\pi}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_a wih}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

kus r_1 ja r_2 on südamiku sisemine ja välimine raadius.

Oletus, et kõik magnetilise induktsiooni jooned on toroidi teljel asetsevate keskpunktidega ringjooned, on seoses nende induktsioonijoonte mittearvestamisega, mis haaravad ainult mähise üksikuid keerdusid. See on võimalik küllalt tiheda mähise puhul. Sellisel oletusel aheldub iga magnetilise induktsiooni joon mähise kõikide keerdudega ja järelikult endainduktsiooni aheldusvoog

$$\Psi_L = \Phi w = \frac{\mu_a w^2 ih}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$



Joon. 208.

Seega avaldub toroidi mähise induktiivsus valemiga

$$L = \frac{\mu_a w^2 h}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Teise näitena leiame kontsentrilise kaabli (joon. 208) induktiivsuse avaldise. Olgu r_1 sisemise (sinna-) juhtme ristlõike raadius ja r_2 välimise (tagasi-) juhtme ristlõike sisemine raadius. Tagasijuhtme sisemuses oleva voo jätame selle juhtme väikese paksuse tõttu arvestamata. Väljaspool kaablit väli puudub, sest voolude summa sinna- ja tagasijuhtmes on null. Järelikult võrdub nulliga ka magnetvälja tugevuse joonintegraal, mis on võetud mööda ükskõik millist, kogu kaablit haaravat kontuuri. Seega tuleb arvestada voogu isoleeraines ja voogu sisemise juhtme sees. Mõlemad nendest vooqudest on määratud ainult vooluga i sisemises juhtmes. Vaadeldav näide on eriti huvitav selle poolest, et siin on vaja leida aheldusvoog, mille määravad juhet ennast läbivad magnetilise induktsiooni jooned. Väljatugevus isoleerkihis avaldub valemiga

$$H = \frac{i}{2\pi r}$$

ja sisemise juhtme sees valemiga

$$H = \frac{i}{2\pi r_1^2}r,$$

kusjuures r on kaugus kaabli teljest kuni punktini, kus määratakse **H**. Viimane valem on õige ainult tingimusel, et vool jaotub ühtlaselt üle juhtme ristlõike, s. o. ainult alalisvoolu puhul. Need valemid saadi § 55.

Jaotame voo rõngakujulisteks torukesteks, millel on ristkülikuline ristlõige $\mathrm{d}s = l\,\mathrm{d}r$, kus l on kaabli pikkus. Voog läbi niisuguse torukese ristlõike

$$\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}s = \mu_a H l\,\mathrm{d}r.$$

Magnetilise induktsiooni torukesed, mis asuvad isoleerkihis, ahelduvad üks kord kogu vooluga i. Järelikult, võttes isoleeraine $\mu_a = \mu_0$, saame nende torukeste kohta:

$$\mathrm{d}\Psi = \mathrm{d}\Phi = \mu_0 \frac{i}{2\pi r} l\,\mathrm{d}r.$$

Isoleerkihis asuvate magnetilise induktsiooni joonte poolt tingitud aheldusvoog

$$\Psi' = \int_{r_1}^{r_2} \mu_0 \frac{i}{2\pi} l \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} il \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Sisemise juhtme sees asuvad magnetilise induktsiooni torukesed ahelduvad ainult osaga voolust. Kui vool on ühtlaselt jaotunud üle juhtme ristlõike, siis torukese poolt, mille raadius on r, haaratav voolu osa

$$i_r = \frac{i}{\pi r_1^2} \pi r^2 = i \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Kui vaadelda kogu juhet ainsa keeruna, siis suhe $\frac{i_r}{i}$ kujutab endast antud magnetilise induktsiooni torukesega haaratavat keeru osa. Seepärast annab torukese voog $\mathrm{d}\Phi$ kogu voolu i suhtes aheldusvoo $\mathrm{d}\Psi$, mis on võrdne

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{i_r}{i}\,\mathrm{d}\Phi = \frac{r^2}{r_1^2} \mu_a \frac{i}{2\pi r_1^2} rl\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_a}{2\pi} \frac{il}{r_1^4} r^3\,\mathrm{d}r,$$

kus μ_a on juhtme materjali absoluutne magnetiline läbitavus. Juhtme sees sulguvate magnetilise induktsiooni joontega määratud aheldusvoog Ψ'' omab väärtuse

$$\Psi'' = \int_0^{r_1} \frac{\mu_a}{2\pi} \frac{il}{r_1^4} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_a}{8\pi} il.$$

Otsitav induktiivsus avaldub valemiga

$$L = \frac{\Psi' + \Psi''}{i} = \frac{l}{2\pi}\left(\mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu_a}{4}\right).$$

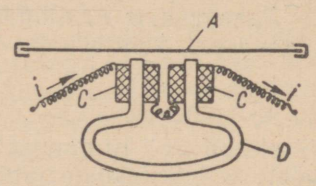
Juhime tähelepanu sellele, et vaadeldavates näidetes saadud valemid illustreerivad varem esitatud üldist väidet, mille kohaselt staatiline induktiivsus sõltub ainult keskkonna magnetilisest läbitavusest ja ahela vooluringi mõõtmetest ning kujust. Kui μ_a on igal pool ühesuguse väärtusega, läheb ta L avaldisse üldise kordajana. Induktiivsus ei sõltu ahela voolust, kui μ_a ei sõltu väljatugevusest.

Suletud või peaaegu suletud südamikuga poolide puhul võib ligikaudu arvestada, et kõik endainduktsiooni voo jooned aheldavad pooli kõikide keerdudega ja arvutada endainduktsiooni aheldusvoog seosest $\Psi_L = \Phi w$. Südamiku ristlõike voogu Φ võib seejuures arvutada magnetahela seaduse alusel:

$$\Phi = \frac{wi}{R_m},$$

kus R_m on magnetiline takistus. Järelikult saame induktiivsusele avaldise

$$L = \frac{\Psi_L}{i} = \frac{w^2}{R_m}.$$



Joon. 209.

Induktiivsus muutub elektriahela vooluringi mõõtmete ja kuju muutumisel või magnetahela mõõtmete muutumisel, kus endainduktsiooni voog esineb.

Muutuva induktiivsusega ahela näiteks võib olla telefonipoolide ahel, mis on skemaatiliselt kujutatud joonisel 209. Niisuguse ahela induktiivsust võib ligikaudselt arvutada viimase valemi järgi. Siinjuures on R_m magnetiline takistus, mis on võrdne südamiku (tavaliselt magneeditud), õhupilu ja membraaniosa A magnetiliste takistuste summaga. Membraani võnkumisel muutub suurus R_m membraani ja südamiku poolustevahelise õhupilu muutumise tagajärjel ning järelikult muutub ka ahela induktiivsus.

§ 67. Vastastikune induktiivsus

Kahe vooluringi vastastikune induktiivsus arvutatakse § 49 toodud seosest

$$\Psi_{2M} = M_{21} i_1,$$

kus Ψ_{2M} on vastastikuse induktsiooni aheldusvoog, mis aheldub

teise vooluringiga, kuid on põhjustatud esimese vooluringi voolust. Saame:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{2M}}{i_1}.$$

Kui teises vooluringis on vool ($i_2 \neq 0$), kuid esimeses vooluringis vool puudub ($i_1 = 0$), siis tekib teist vooluringi ümbritsev endainduktsiooni voog. Osa selle voo jooni aheldub ka esimese vooluringiga, moodustades vastastikuse induktsiooni voo. Vastastikuse induktsiooni aheldusvoog Ψ_{1M} on vooluga i_2 seoses avaldisega

$$\Psi_{1M} = M_{12} i_2,$$

millest

$$M_{12} = \frac{\Psi_{1M}}{i_2}.$$

Paragrahvis 72 näidatakse, et tingimusel, kui μ_a ei sõltu väljatugevusest, kehtib kahe vooluringi kohta alati võrdus

$$M_{12} = M_{21}.$$

Järelikult sel tingimusel me võime ära jätta indeksid vastastikuste induktiivsuste juurest ja kirjutada:

$$M = \frac{\Psi_{1M}}{i_2} = \frac{\Psi_{2M}}{i_1}.$$

Seega *kahe ahela vastastikune induktiivsus on võrdne ühe ahela vastastikuse induktsiooni aheldusvoo ja teise ahela voolu jagatisega.*

Need avaldised määravad alalisvoolude puhul *staatilise* vastastikuse induktiivsuse.

Dünaamiline vastastikune induktiivsus määratakse avaldistest

$$M_d = \lim_{\Delta i_2 \to 0} \frac{\Delta \Psi_{1M}}{\Delta i_2} = \frac{\mathrm{d}\Psi_{1M}}{\mathrm{d}i_2} \text{ ehk } \quad M_d = \lim_{\Delta i_1 \to 0} \frac{\Delta \Psi_{2M}}{\Delta i_1} = \frac{\mathrm{d}\Psi_{2M}}{\mathrm{d}i_2}$$

või vastastikuse induktsiooni elektromotoorseid jõude sisaldavatest avaldistest:

$$M_d = -\frac{e_{1M}}{\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}} = -\frac{e_{2M}}{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}.$$

Seejuures oletatakse, et vooluringide mõõtmed ja kuju ning nende vastastikune asend on muutumatud.

Sel juhtumil, kui magnetiline läbitavus on välja kõikides

punktides ühe ja sama väärtusega, võib staatilise vastastikuse induktiivsuse esitada korrutise kujul

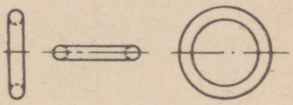
$$M = \mu_a f(g),$$

kus $f(g)$ on vooluringide mõõtmetest ja kujust ning nende vastastikusest asendist sõltuv suurus. Üldisemal juhtumil, kui suurus μ_a on erinev keskkonna eri punktides, kus väli esineb, saame:

$$M = F(\mu_a, g).$$

Lõpuks, kui magnetiline läbitavus sõltub väljatugevusest, siis M sõltub voolust.

Suurus M võib olla nii positiivne kui ka negatiivne ja erijuhtumil võrdne nulliga. Voolude positiivsed suunad mõlemates vooluringides võib alati valida vabalt. Kui need suunad on kord valitud, siis peame suuruse M lugema positiivseks, kui positiivsete voolude puhul vooluringidega ahelduvad vastastikuse induktsiooni vood osutuvad samuti positiivseteks, s. o. ühtivad märgilt endainduktsiooni voogudega. Teiste sõnadega, $M > 0$, *kui positiivsete voolude puhul magnetvood vooluringide suhtes on samasuunalised, ja* $M < 0$, *kui positiivsete voolude puhul vood on vastassuunalised.*

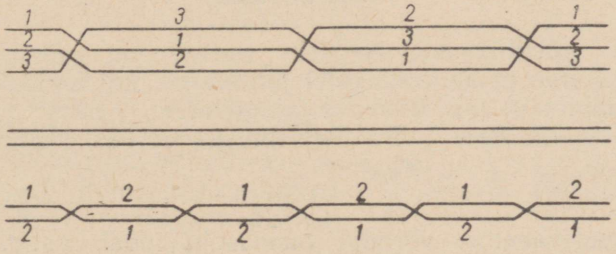


Joon. 210.

Paljudel juhtumitel on väga tähtis võimaluse korral vähendada ühe ahela induktiivset mõju teistele. Kolm keerdu või kolm silindrilist pooli saab alati paigutada nii (joon. 210), et oleks täidetud tingimus

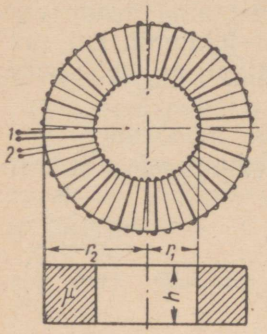
$$M_{12} = M_{23} = M_{31} = 0.$$

Elektrienergia ülekandeliinid avaldavad induktiivset mõju nende ligidale paigutatud sideliinidele. Niisugust induktiivset mõju avaldavad üksteisele ka sideliini eri juhtmepaarid, mis paiknevad paralleelselt. Selle kahjuliku mõju hävitamiseks kasutatakse piki liini teatud vahemaade tagant juhtmete ümberase-



Joon. 211.

tust ehk transpositsiooni, s. o. muudetakse nii tugevvooluliini juhtmete kui ka sideliini eri juhtmepaaride asetust (joon. 211). Selle tulemusena ühtedel ja teistel liini lõikudel esinevad induktiivsed mõjud vastastikku kompenseeruvad.



Joon 212.

Näitena leiame kahe mähise vahelise vastastikuse induktiivsuse avaldise, kui mähised on ühtlaselt jaotatud ristkülikukujulise ristlõikega toroidsüdamikule (joon. 212). Olgu ühe mähise keerdude arv w_1 ja teise oma w_2. Vastavalt eelmises paragrahvis saadud avaldisele on südamiku magnetvoog

$$\Phi = \frac{\mu_a}{2\pi} w_1 i_1 h \ln \frac{r_2}{r_1},$$

kus h on endiselt südamiku kõrgus, r_1 ja r_2 — tema sisemine ja välimine raadius ning μ_a — südamiku absoluutne magnetiline läbitavus.

Teise mähise vastastikuse induktsiooni aheldusvoog

$$\Psi_{2M} = \Phi w_2 = \frac{\mu_a}{2\pi} w_1 w_2 i_1 h \ln \frac{r_2}{r_1},$$

ja järelikult vastastikune induktiivsus avaldub valemiga

$$M = \frac{\mu_a}{2\pi} w_1 w_2 h \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

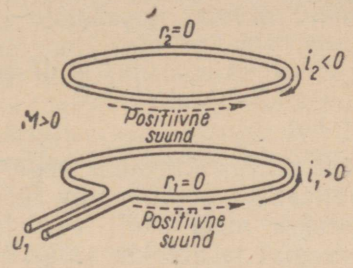
Muutuva vastastikuse induktiivsusega ahelate näiteks on kõik elektrimasinad, milledes masina liikumatule osale asetatud mähise poolide ja pöörlevale osale asetatud mähise poolide vaheline vastastikune induktiivsus perioodiliselt muutub.

§ 68. Seos induktiivsuste vahel. Ekvivalentsed induktiivsused

Üheks induktiivsustevaheliseks seoseks on eelkõige võrdus $M_{kp} = M_{pk}$, mis on õige kõikidel juhtumitel, kui keskkonna magnetiline läbitavus ei sõltu väljatugevusest. Seda tõestatakse paragrahvis 72. Real juhtumitel ilmneb, et üks induktiivsustest $M_{kp} = \frac{\Psi_{kM}}{i_p}$ või $M_{pk} = \frac{\Psi_{pM}}{i_k}$ on palju lihtsamalt arvutatav kui teine. Nendevaheline võrduse olemasolu lubab valida ükskõik kumma arvutuskäigu.

Peatume kahe meelevaldse vooluringi induktiivsuste L_1, L_2 ja M vahelisel sõltuvusel. Olgu esimese vooluringi klemmidele rakendatud pinge u_1 (joon. 213), teine vooluring aga lühistatud. Selleks et reljeefselt esile tuua süsteemi elektromagnetilise inertsiga seotud nähtusi, oletame, et $r_1 = 0$ ja $r_2 = 0$, s. t. oletame, et vooluringid on moodustatud ülijuhtivast materjalist. Pinge u_1 tekitab esimeses vooluringis voolu i_1, mis indutseerib teises vooluringis vastastikuse induktsiooni emj.

$$e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}.$$



Joon. 213.

See emj. tekitab teises vooluringis voolu i_2, mis muutub nii, et enda-induktsiooni emj. tasakaalustaks emj. e_{2M}, s. o. nende elektromotoorsete jõudude summa peab võrduma nulliga:

$$-M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = 0, \quad \text{ehk} \quad -M \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Pinge u_1 esimese vooluringi klemmidel tasakaalustatakse enda-induktsiooni ja vastastikuse induktsiooni elektromotoorsete jõududega, s. t. tal peavad olema nendele elektromotoorsetele jõududele vastupidiste märkidega komponendid. Järelikult

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}.$$

Asetades tuletise $\frac{di_2}{dt}$ eelviimasest võrrandist viimasesse, leiame:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) \frac{di_1}{dt} = L_1' \frac{di_1}{dt}.$$

Saadud avaldis näitab, et elektromagnetiline protsess primaarahelas kulgeb nii, nagu oleks see ahel üksildane ja omaks seejuures ekvivalentset induktiivsust

$$L_1' = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right).$$

Suurus L_1' on alati positiivne. Et selles veenduda, eeldame, et $L_1' < 0$, ja näitame, et niisugune oletus on vastuolus energia jäävuse seadusega. Olgu kuni hetkeni $t = 0$ primaarahel emj. allikast lahti ühendatud ja mõlemad voolud i_1 ja i_2 olgu võrdsed nulliga. Hetkel $t = 0$ lülitatagu ahela klemmidele pingeallikas alalispingega $u_1 = U_1 = \text{const}$. Saame:

$$u_1 = U_1 = L_1' \frac{di_1}{dt} \quad \text{või} \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{U_1}{L_1'} = \text{const}$$

ja järelikult

$$i_1 = \frac{U_1}{L_1'} t + C = \frac{U_1}{L_1'} t.$$

Välise pingeallika töö ahela sulgemise hetkest kuni hekteni t on võrdne

$$\int_0^t U_1 i_1 \, dt = \int_0^t \frac{U_1^2}{L_1'} t \, dt = \frac{U_1^2}{2L_1'} t^2.$$

Kui suurus L_1' oleks negatiivne, siis oleks samuti negatiivne ka välisallika poolt tehtav töö. See tähendaks, et kogu aeg ammutatakse meie poolt vaadeldavast kahe vooluringiga süsteemist energiat ja antakse välisallikale. Seejuures annaks süsteem energiat piiramatul hulgal ja lõpmatuseni kasvava võimsusega. Niisugune protsess on vastuolus energia jäävuse seadusega ja järelikult on oletus $L_1' < 0$ vale. Induktiivsus L_1' ei saa olla ka võrdne nulliga, sest võimatu on moodustada ahelat, milles voolu olemasolu puhul puuduks magnetvoog täielikult.

Niisiis peab kõikidel juhtumitel kehtima

$$L_1' = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) > 0,$$

millest saame:

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} < 1.$$

Suhet $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$ nimetatakse kahe ahela *sidestusteguriks*. Alati kehtib võrratus $k < 1$.

Saadud ekvivalentse induktiivsuse L_1' avaldis võimaldab selgitada, kuidas mõjutavad nn. *pöörisvoolud* ehk *Foucault' voolud* antud vooluringi induktiivsust. Nimetatud voolud tekivad vahelduva või muutuva magnetvoo puhul juhtivates kehades, mis asuvad antud vooluringi vahetus läheduses.

Sisuliselt esineb nendel juhtumitel endainduktsiooni voo ja vastastikuse induktsiooni voogude liitumine. Viimased on põhjustatud kõrvalistes kehades indutseeritavatest vooludest. Siiski käsitatakse sellistel juhtumitel muutunud resulteerivat voogu, mis aheldub antud vooluringiga, harilikult puhtformaalselt endainduktsiooni voona. Niisugustel tingimustel määratud vooluringi induktiivsust nimetatakse *ekvivalentseks induktiivsuseks*.

Pöörisvoolude nähtuse kvalitatiivseks hindamiseks asendame massiivse juhtiva keha, kus need voolud tekivad, mingisuguse ekvivalentse lühistatud vooluringiga ehk lühiskeeruga. Olgu L_1 antud vooluringi induktiivsus pöörisvoolude puudumisel, L_2 olgu lühiskeeru induktiivsus ja M — vooluringi ja keeru vaheline vas-

tastikune induktiivsus. Kui võtta lühiskeeru takistus $r_2 = 0$, siis määratakse esimese vooluringi ekvivalentne induktiivsus avaldisega

$$L_1' = L_1\left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) = L_1(1 - k^2),$$

s. o. lühistatud sekundaarvooluringi olemasolul osutub induktiivsus väiksemaks üksildase primaarvooluringi induktiivsusest L_1. Füüsikaliselt seletub see induktiivsuse vähenemine voolu i_2 tekkimisega sekundaarvooluringis, mis tekitab primaarvooluringis endainduktsiooni voole $L_1 i_1$ vastasmärgilise vastastikuse induktsiooni voo Mi_2. Tõepoolest, integreerides lühiskeeru elektromotoorsete jõudude tasakaalu väljendavat võrrandit

$$-M\frac{di_1}{dt} = L_2\frac{di_2}{dt}$$

ja arvestades, et $i_1 = 0$ puhul ka $i_2 = 0$, saame:

$$-Mi_1 = L_2 i_2 \quad \text{ehk} \quad \frac{i_2}{i_1} = -\frac{M}{L_2}.$$

Järelikult

$$\frac{Mi_2}{L_1 i_1} = -\frac{M^2}{L_1 L_2} < 0,$$

s. t. vood Mi_2 ja $L_1 i_1$ on erinevate märkidega.

Võrdusest $L_2 i_2 = -Mi_1$ saame võrrandi $L_2 i_2 + Mi_1 = 0$, mis näitab, et sekundaarvooluringi resulteeriv aheldusvoog jääb konstantseks ja võrdseks nulliga. Seda tulebki oodata, sest sekundaarvooluring on ülijuhtiv. Vastavalt elektromagnetilise inertsi printsiibile ei saa niisuguse vooluringi resulteerivat aheldusvoogu muuta mitte ühelgi viisil. Antud juhtumil oli see aheldusvoog protsessi algul võrdne nulliga ja ta jääb ka kogu aeg võrdseks nulliga.

Ülijuhtiva sekundaarvooluringi puhul ei sõltu ekvivalentse induktiivsuse vähenemine voolu muutumise kiirusest — ta on ühesugune nii vahelduv- kui ka alalisvoolu puhul. Järelikult vähenevad ühteviisi nii staatiline kui ka dünaamiline induktiivsus. See on seotud asjaoluga, et alalisvool võib ülijuhtivas vooluringis eksisteerida ilma emj. toimeta ükskõik kui kaua.

Kui $r_2 \neq 0$, siis vahelduvvoolu puhul esimeses vooluringis on lühistatud sekundaarvooluringis tekkivate pöörisvoolude mõju suurusele L_1' sama iseloomuga kui $r_2 = 0$ puhulgi, kuid avaldub ainult vähem teravalt. Ta avaldub seda vähem, mida väiksem on voolu sagedus, sest sageduse vähenemisel väheneb sekundaarvooluringi vastastikuse induktsiooni emj. ja antud takistuse r_2 puhul väheneb ka vool i_2. Alalisvoolu i_1 puhul, kui $r_2 \neq 0$, võrdub vool i_2 sekundaarvooluringis nulliga ja järelikult saame, et $L_1' = L_1$. Seega lühistatud vooluringide juuresolek, milledes

võivad tekkida pöörisvoolud, mõjutab reaalsetes tingimustes ainult dünaamilise, kuid mitte staatilise induktiivsuse suurust.

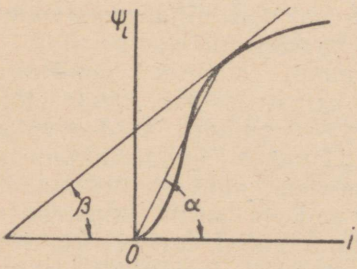
Vahelduvvoolu korral mõjutab vooluringi induktiivsuse suurust samuti nn. *pinnanähtus*. Vahelduvvool jaotub mitteühtlaselt üle juhtme ristlõike, sest eri vooluniitides, milledeks võib mõtteliselt juhtme jaotada, indutseeritakse erinevad elektromotoorsed jõud. Voolutihedus osutub suuremaks juhtme pinna lähedal ja väheneb ristlõike keskosa suunas. Ilmselt põhjustab juhtme ristlõike ulatuses voolujaotuse muutumine vooluringiga aheldunud voo muutumise ja järelikult ka vooluringi ekvivalentse induktiivsuse muutumise.

Massiivjuhtmetes esineva pinnanähtuse mõju nendest juhtmetest moodustatud vooluringi induktiivsusele saab kvalitatiivselt hinnata, kui kasutada pöörisvoolude vaadeldud toimet. Mitteühtlaselt juhtme ristlõikes jaotunud vahelduvvoolu võib käsitada ühtlaselt jaotunud voolule juhtme enese sisemuses tekkivate pöörisvoolude ülestumise tulemusena. Need pöörisvoolud tekitab juhtme enese sisemuses eksisteeriv muutuv magnetvoog. Nende pöörisvoolude poolt tekitatud magnetvoog, samuti nagu ülalvaadeldud välise massiivse keha juhtumilgi, on orienteeritud nii, et tema tekkimine põhjustab resulteeriva voo vähenemise juhtme sees. Järelikult vähendab pinnanähtus ekvivalentset dünaamilist induktiivsust.

§ 69. Ferromagnetilisest materjalist südamikuga pooli mittelineaarne karakteristik

Vooluringi induktiivsus sõltub selle keskkonna magnetilistest omadustest, milles vooluringi vooluga seotud magnetväli eksisteerib.

Diamagnetilise keskkonna juhtumil, mille $\mu_a < \mu_0$, osutub vooluringi induktiivsus väiksemaks induktiivsusest, mis tal oleks siis, kui keskkonna magnetiline läbitavus võrduks μ_0-ga. Paramagnetilise keskkonna juhtumil $\mu_a > \mu_0$, mis põhjustab vooluringi induktiivsuse suurenemise. Suurimat praktilist huvi pakub ferromagnetilise keskkonna juhtum, kui $\mu_a \gg \mu_0$.



Joon. 214.

Vaatleme ferromagnetilisest materjalist südamikuga pooli. Seos pooli keerdudega aheldatud voo ja pooli voolu i vahel on esitatud kõverana joonisel 214. Kõver kirjeldab voolu kasvamise juhtumit alates nullväärtusest tingimusel, et südamik on eelnevalt lahti magneeditud. See

kõver on samalaadne südamiku materjali algmagneetimiskõveraga $B = f(H)$, sest aheldusvoog Ψ_L määratakse magnetilise induktsiooni B väärtustega, vool i aga väljatugevuse H väärtustega. Suletud südamiku homogeensel magneetumisel on aheldusvoog Ψ_L võrdeline B-ga, vool i — võrdeline H-ga ning kõverad $\Psi_L = F(i)$ ja $B = f(H)$ on sarnased. Aheldusvoog Ψ_L ei ole võrdeline vooluga. Seepärast öeldakse, et ferromagnetilisest materjalist südamikuga poolil on *mittelineaarne karakteristik* $\Psi_L = F(i)$. Niisuguse pooli induktiivsus *sõltub voolust*. Kerge on näha, et ferromagnetilisest materjalist südamikuga poolil on staatiline ja dünaamiline induktiivsus erinevad. Tõepoolest, staatiline induktiivsus on võrdne (joon. 214)

$$L_{st} = \frac{\Psi_L}{i} = k \operatorname{tg} \alpha = F_1(i),$$

kuid dünaamiline induktiivsus

$$L_d = \frac{d\Psi_L}{di} = k \operatorname{tg} \beta = F_2(i),$$

kus kordaja k sõltub abstsiss- ja ordinaattelgede mõõtkavadest. Märgime, et üldjuhtumil määratakse dünaamiline induktiivsus pooli *dünaamilisest karakteristikust*, mis küllalt kiiretel voolu muutustel erineb *staatilisest karakteristikust* pöörisvoolunähtuse ja magnetilise viskoossuse tõttu.

Perioodiliste protsesside puhul on dünaamiline karakteristik kinnise silmuse kujuga, kusjuures küllalt madalal sagedusel ta langeb tegelikult ühte staatilise hüstereesisilmusega.

Kui meid huvitab alalisaheldusvoo Ψ_L suurus antud alalisvoolu i puhul, peame kasutama staatilist induktiivsust. Kui aga on vaja välja arvutada muutuva magnetvoo puhul ahelas indutseeritavat elektromotoorset jõudu, siis tuleb kasutada dünaamilist induktiivsust.

ÜHETEISTKÜMNES PEATÜKK

MAGNETVÄLJA ENERGIA JA MEHAANILISED AVALDUMISVIISID

§ 70. Vooluringide süsteemi energia

Elektriahelates tekivad voolude väljakujunemise ajal enda- ja vastastikuse induktsiooni elektromotoorsed jõud. Välised energiaallikad, millede külge elektriahelad on ühendatud, teevad seejuures tööd, sest allikate elektromotoorsed jõud peavad ületama ahelate vooluringides tekkivaid enda- ja vastastikuse induktsiooni elektromotoorseid jõude. Osa allikate poolt antavast energiast salvestatakse elektriahelates ja ta võib voolude vähenemisel ahelate vooluringides kas täielikult või osaliselt uuesti tagastuda.

Välise energiaallika poolt k-nda ahela klemmidel tekitatud pingel u_k peab olema komponent, mis on võrdne pingelanguga ahela takistusel, ja komponent, mis tasakaalustab selles ahelas indutseeritava elektromotoorse jõu:

$$u_k = i_k r_k + \frac{\mathrm{d}\Psi_k}{\mathrm{d}t}.$$

Oletame, et energiaallika sisetakistus võrdub nulliga või ta on arvestatud ahela takistuse juurde. Sel juhtumil on ahela klemmidega ühendatud allika emj. e_k võrdne pingega u_k ja aja $\mathrm{d}t$ jooksul energiaallika poolt tehtav töö võrdub

$$u_k i_k \,\mathrm{d}t = i_k^2 r_k \,\mathrm{d}t + i_k \,\mathrm{d}\Psi_k.$$

Esimene liidetav kujutab energiat, mis kulutatakse ahela juhtmetes seoses soojuse eraldumise pöördumatu protsessiga. Teine liidetav kujutab seda osa allika tööst, mis on seotud aheldusvoo Ψ_k muutumisega. See osa tööst meid vahetult huvitabki. Tähistame selle töö

$$i_k \,\mathrm{d}\Psi_k = \mathrm{d}A_k.$$

Olgu vaadeldavas ahelate süsteemis n eri vooluringi. Kõikide

energiaallikate kogu töö, mis kulutatakse seoses aheldusvoogude muutumisega süsteemi kõigis n kontuuris nullist kuni lõpliku väärtuseni, võrdub

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} A_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{\Psi_k} i_k \, d\Psi_k.$$

Eeldame, et keskkonna magnetiline läbitavus ei sõltu väljatugevusest ja voolud kujunevad välja väga aeglaselt. Seejuures ei toimu elektriahelate juhtmeid ümbritsevas keskkonnas mingisuguseid pöördumatuid protsesse. Kõik vooluringid loeme geomeetriliselt muutumatuteks ja liikumatuteks. Järelikult ei tehta süsteemis mehaanilist tööd vooluringide ümberpaigutamiseks. Sellistel tingimustel võime energia jäävuse seaduse alusel kinnitada, et kogu töö A läheb elektriahelate süsteemi energiavaru W_m loomiseks, s. o. $A = W_m$.

Lõpmatult aeglasel voolude väljakujunemisel võib vooluringe ümbritsevat magnetvälja igal erineval hetkel käsitada alalisväljana. Seepärast on vooluringide voolud ja nendega ahelduvad vood omavahel seotud staatiliste oma- ja vastastikuste induktiivsuste kaudu. Need induktiivsused sõltuvad ainult süsteemi geomeetrilistest koordinaatidest ja magnetilise läbitavuse väärtusest.

Kuna eeldasime, et suurus μ_a ei sõltu väljatugevusest, siis võime kasutada superpositsiooni printsiipi ja vaadelda k-nda vooluringi aheldusvoogu Ψ_k kui sellesama vooluringi voolust põhjustatud endainduktsiooni aheldusvoo ja teiste vooluringide vooludega määratud vastastikuse induktsiooni aheldusvoogude summat:

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} i_p \quad (p \neq k).$$

Energia jäävuse seaduse alusel võib kinnitada, et töö A ei sõltu voolude väljakujunemise järjekorrast. Vastasel korral saaks alati valida voolude tekitamise niisuguse järjekorra ja sellest erineva voolude uuesti nullini vähendamise teistsuguse järjekorra, et väliste allikate poolt kulutatud energia oleks väiksem neile tagastatud energiast. See oleks energia jäävuse seaduse rikkumine. Seepärast on meil õigus valida voolude tekitamise järjekord oma äranägemise järgi. Töö A avaldise integraali on kõige lihtsam võtta, kui oletada, et kõik voolud kasvavad võrdeliselt üksteisega, s. o. $i_p = a_{kp} i_k$, kus $a_{kp} = \text{const}$. Seejuures võib aheldusvoo avaldise esitada kujul

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} a_{kp} i_k = (L_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp} a_{kp}) i_k = m_k i_k,$$

kus

$$p \neq k \quad \text{ja} \quad m_k = (L_k + \sum_{p=1}^{p=n} M_{kp}\alpha_{kp}) = \text{const.}$$

Otsitav töö

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{\Psi_k} i_k \, d\Psi_k = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \int_0^{i_k} i_k \, di_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k i_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{i_k \Psi_k}{2}.$$

Kasutades võrdust $A = W_m$, leiame:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k \Psi_k.$$

Järelikult on vooluringide süsteemi energia võrdne vooluringide voolude ja vooluringide aheldusvoogude korrutiste poolsummaga.

Asetame meie poolt energia W_m jaoks saadud avaldisse aheldusvoogude Ψ_k avaldised, mis väljendavad vooluringide aheldusvooge vooluringide voolude ning vooluringide oma- ja vastastikuste induktiivsuste kaudu. Märkides, et $M_{kp} = M_{pk}$, saame:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} L_k i_k^2 + \ldots + \\ + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + \ldots + M_{kp} i_k i_p + \ldots$$

Seega on vooluringide süsteemi energia nende vooluringide voolude ruutfunktsioon.

§ 71. Energia jaotumine magnetväljas

Voolude süsteemi energiat me kujutleme jaotununa nende voolude magnetväljas. Vastavalt sellele võib voolude süsteemi energiat alati väljendada üle kogu magnetvälja võetava ruumintegraali kujul:

$$W_m = \int_V W_m' \, dV,$$

kusjuures W_m' on magnetvälja energia ruumtihedus.

Vaatleme algul lihtsaimat juhtumit, mille puhul välja võib lugeda homogeenseks. Vaatleme nimelt õhukest rõngakujulist solenoidi ühtlaselt jaotatud mähisega, millel on w keerdu (vt. joon. 186). Olgu s südamiku ristlõige, l — solenoidi ringpikkus ja μ_a — südamiku materjali absoluutne magnetiline läbitavus. Oletame, et suurus μ_a on konstantne. Tiheda mähise puhul on kogu

väli koondunud südamiku sisse ja iga magnetilise induktsiooni joon aheldub mähise kõikide keerdudega. Järelikult on mähise aheldusvoog Ψ seotud südamiku ristlõike vooga Φ avaldisega $\Psi = w\Phi$.

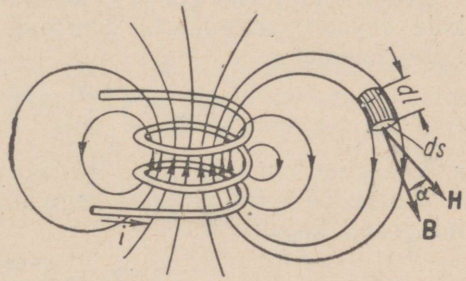
Vastavalt eelmises paragrahvis saadud avaldisele võrdub niisuguses ahelas salvestunud energia $W_m = \frac{\Psi i}{2} = \frac{\Phi w i}{2}$. Kuna ristlõike s piirides võib magnetilist induktsiooni lugeda konstantseks, siis $\Phi = Bs$. Peale selle saame koguvoolu seaduse alusel, et $wi = \oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = Hl$, sest piki südamikku $H = \text{const}$. Seega võib energia avaldist esitada kujul $W_m = \frac{BHsl}{2}$. Suurus $sl = V$ on magnetvälja poolt hõivatud ruumi maht. Järelikult kehtib magnetvälja energia ruumtiheduse kohta avaldis

$$W_m' = \frac{W_m}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_a H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_a}.$$

Anisotroopse keskkonna puhul peab väljaenergia ruumtihedus avalduma kujul

$$W_m' = \frac{\mathbf{BH}}{2},$$

kus $\mathbf{BH} = BH\cos\alpha$ on vektorite **B** ja **H** skalaarkorrutis. Vektorid **B** ja **H** on anisotroopses keskkonnas üldjuhtumil erinevate suundadega. Nurk α ongi nende vektorite vaheline nurk.



Joon. 215.

Näitame, et saadud väljaenergia ruumtiheduse avaldis on õige kõige üldisemal mittehomogeense välja juhtumil anisotroopses keskkonnas, s. o. näitame, et kogu välja energia võib esitada üle kogu välja võetud integraali kujul:

$$W_m = \int_V \frac{\mathbf{BH}}{2}\,\mathrm{d}V.$$

Sel eesmärgil vaatleme joonisel 215 kujutatud pooli välja. Kujutleme, et kogu väli on jaotatud magnetilise induktsiooni elementaartorukesteks. Eraldame ühes sellises torukeses elementaarlõigu pikkusega $\mathrm{d}l$. Olgu $\mathrm{d}s$ torukese ristlõige. Torukese lõigu lõpmatult väikese mahuga $\mathrm{d}V = \mathrm{d}s\,\mathrm{d}l$ ruumi piirides võib lugeda

välja homogeenseks. Kasutades energia ruumtiheduse avaldist, saame välja energia mahus dV:

$$W_m' \, dV = \frac{BH}{2} \, dV = \frac{BH \cos \alpha \, ds \, dl}{2}.$$

Arvutame nüüd kogu elementaartorukese mahus oleva energia dW_m. Selleks integreerime saadud avaldise mööda torukese telge. Torukese ristlõike voog $d\Phi = B \, ds$ on konstantse väärtusega piki kogu torukest ja selle võib tuua integraalimärgi ette. Saame:

$$dW_m = \oint_l \frac{BH \cos \alpha}{2} ds \, dl = \frac{d\Phi}{2} \oint_l H \cos \alpha \, dl.$$

Koguvoolu seaduse alusel $\oint H \cos \alpha \, dl = wi$, kus w on keerdude arv, millega antud toruke aheldub. Märkides, et $w \, d\Phi = d\Psi$ on see aheldusvoo osa, mis tuuakse antud torukesega kogu ahela aheldusvoo suurusse, saame:

$$dW_m = \frac{d\Phi}{2} wi = \frac{i \, d\Psi}{2}.$$

Kogu välja energia W_m saamiseks on vaja summeerida kõikide elementaartorukeste energiad. Teostades sellise summeerimise, leiame:

$$W_m = \int \frac{i \, d\Psi}{2} = \frac{i}{2} \int d\Psi = \frac{i\Psi}{2},$$

s. o. saame sama avaldise mis energia jäävuse seaduse aluselgi.

Seega võib üldjuhtumil kogu magnetvälja energia väljendada integraali kujul:

$$W_m = \int_V \frac{BH}{2} dV,$$

kus integreerimine viiakse läbi kogu ruumi mahus, kus magnetväli esineb.

§ 72. Vastastikkuse printsiip

Kasutades väidet, et vooluringide süsteemi magnetvälja energia ei sõltu voolude tekitamise järjekorrast, on kerge näidata, et võrdus

$$M_{kp} = M_{pk}$$

kehtib kõikidel juhtumitel, kui magnetiline läbitavus ei sõltu magnetvälja tugevusest.

Vaatleme kaht vooluringi. Nende magnetälja energia

$$W_m = \sum_{k=1}^{k=2} \frac{i_k \Psi_k}{2} = \frac{i_1 \Psi_1}{2} + \frac{i_2 \Psi_2}{2} = \frac{i_1}{2}(L_1 i_1 + M_{12} i_2) +$$

$$+ \frac{i_2}{2}(L_2 i_2 + M_{21} i_1) = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + \frac{M_{12} + M_{21}}{2} i_1 i_2.$$

Selle avaldise tuletamisel eeldati, et mõlemad voolud kasvavad teineteisega võrdeliselt.

Oletame nüüd, et voolud kujunevad teises järjekorras. Alguses kujunegu esimese vooluringi vool i_1 kuni oma lõpliku väärtuseni, teise vooluringi vool aga jäägu seejuures võrdseks nulliga. Esimese vooluringi energiaallika emj. teeb töö

$$A_1 = \int_0^{\Psi_{1L}} i_1 \, d\Psi_{1L} = L_1 \int_0^{i_1} i_1 \, di_1 = \frac{L_1 i_1^2}{2}.$$

Jättes nüüd voolu i_1 muutumatuks, suurendame voolu i_2 nullist kuni tema lõpliku väärtuseni. Teise vooluringi energiaallika emj. teeb töö

$$A_2 = \int_0^{\Psi_{2L}} i_2 \, d\Psi_{2L} = \frac{L_2 i_2^2}{2}.$$

Esimese vooluringi energiaallika emj. teeb seejuures samuti tööd, sest voolu i_1 hoidmiseks konstantsena peab ta ületama vastastikuse induktsiooni emj., mis tekib esimeses vooluringis teise vooluringi voolu muutumisel. See töö

$$A_3 = \int_0^{\Psi_{1M}} i_1 \, d\Psi_{1M} = M_{12} i_1 \int_0^{i_2} di_2 = M_{12} i_1 i_2,$$

kusjuures i_1 kui konstantne suurus tuuakse integraalimärgi ette.

Seega magnetvälja energia

$$W_m = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M_{12} i_1 i_2.$$

Kõrvutades selle avaldise eespool kõikide voolude üheaegse kasvamise oletusel saadud avaldisega, ilmneb seos $\frac{M_{12} + M_{21}}{2} = M_{12}$ ehk $M_{12} = M_{21}$, mida oligi vaja tõestada.

Selle seose alusel võib formuleerida vastastikkuse printsiibi vooluringide magnetvälja puhul järgmisel viisil:

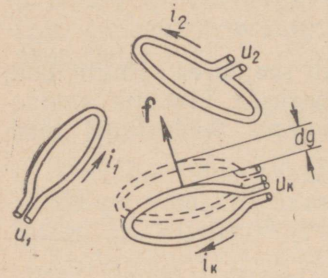
kui esimese vooluringi vool i tekitab teises vooluringis vastastikuse induktsiooni aheldusvoo Ψ, siis teise vooluringi samasugune vool i tekitaks esimeses vooluringis niisama suure vastastikuse induktsiooni aheldusvoo Ψ.

§ 73. Elektromagnetiline jõud

Nagu näitab katse, mõjuvad magnetvälja asetatud elektrivooludega juhtmetele mehaanilised jõud. Neid mehaanilisi jõudusid nimetatakse *elektromagnetilisteks jõududeks* ehk *elektrodünaamilisteks jõududeks*. Elektromagnetilised jõud tekivad mitte ainult välisesse välja asetatud vooluringis, vaid ka sel juhtumil, kui see vooluring on üksildane ja teda ümbritsev väli on põhjustatud vooluringi enese voolust.

Elektromagnetiliste jõudude hulka me loeme ka need mehaanilised jõud, mis mõjuvad magnetvälja asetatud ferromagnetilisest materjalist kehadele. Oma olemuselt on meil ka sellel juhtumil tegemist mehaaniliste jõududega, mis mõjuvad elektrivooludele magnetväljas. Antud juhtumil on nendeks vooludeks elementaarvoolud, mis eksisteerivad ferromagnetilisest materjalist kehas.

Seega me nimetame elektromagnetilisteks jõududeks vooluringide vastastikuse mõju mehaanilisi jõudusid, üksildases vooluringis tekkivaid jõudusid, magnetite vastastikuseid tõmbe- ja tõukejõudusid, voolude ja magnetite vastastikuse mõju jõudusid ning jõudusid, millede mõjul ferromagnetilised kehad tõmbuvad magnetite või vooluringide külge.



Joon. 216.

Vaatleme n vooluringist koosnevat süsteemi. Vooluringide asend on määratud vajaliku arvu üldistatud geomeetriliste koordinaatidega. Nagu selgitati § 16, võib üldistatud geomeetriliseks koordinaadiks olla iga geomeetriline suurus, mis määrab süsteemi asendi ruumis. Mehaanilisi jõudusid, mis püüavad muuta süsteemi koordinaate, tuleb seejuures samuti vaadelda üldistatud jõududena.

Saagu jõu f mõjul mingisugune süsteemi koordinaat g juurdekasvu dg jõu mõjumise suunas. Oletame, et kõik ülejäänud süsteemi koordinaadid jäävad muutumatuks. Näiteks süsteemi üks vooluringidest (joon. 216) muudab oma asendit mingis suunas, kuid kõik teised vooluringid jäävad liikumatuks. Jõud f teeb seejuures töö $f\,dg$. Koordinaadi g muutumise tulemusena toimub üldjuhtumil vooluringide magnetvälja energia muutumine suuruse $d_g W_m$ võrra. Indeksiga g me märgime, et muutub ainult üks geomeetriline koordinaat.

Oletame, et juhtmeid ümbritsevas keskkonnas pöördumatud protsessid puuduvad. Sel juhtumil kulutatakse süsteemi vooluringide klemmidel mõjuvate väliste energiaallikate töö soojuse eraldamiseks voolujuhtmetes, magnetvälja energiavaru muutmi-

seks ja elektromagnetilise jõu poolt tehtavaks mehaaniliseks tööks $f\,\mathrm{d}g$. Öeldu väljendub võrrandiga

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k i_k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{k=n} i_k^2 r_k\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}_g W_m + f\,\mathrm{d}g.$$

Välise energiaallika poolt k-nda vooluringi klemmidel tekitatava pinge u_k jaoks saame:

$$u_k = i_k r_k + \frac{\mathrm{d}\Psi_k}{\mathrm{d}t},$$

kus Ψ_k on selle vooluringi aheldusvoog. Järelikult võib kõikide energiaallikate tööd esitada ka kujul

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k i_k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{k=n} i_k^2 r_k\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{k=n} i_k\,\mathrm{d}\Psi_k.$$

Võrreldes omavahel mõlemat energiaallikate tööde summa avaldist, saame:

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k\,\mathrm{d}\Psi_k = \mathrm{d}_g W_m + f\,\mathrm{d}g.$$

Järelikult allikate töö see osa, mis on seotud vooluringide voogude muutumisega, kulutatakse magnetvälja energia muutmiseks ja mehaaniliseks tööks.

Viimane võrrand on õige sõltumata sellest, mil viisil vooluringide voolud ja nende aheldusvood ajaliselt muutuvad. Ta on energia jäävuse seaduse väljenduseks, rakendatuna vaadeldavale juhtumile.

Lihtsaimad avaldised saadakse jõule f siis, kui oletada, et muutumatuks jäävad kas kõikide vooluringide aheldusvood või kõikide vooluringide voolud.

Hoitagu vooluringi liikumisel aheldusvood muutumatuina, s. o. $\Psi_k = \mathrm{const}$. Kuna koordinaadi muutumisel muutuvad temast sõltuvad induktiivsused, siis tuleb ilmselt aheldusvoogude konstantseina hoidmiseks vooluringide voolusid vastaval viisil muuta. See erirežiim on huvitav selle poolest, et energiaallikad teevad tööd ainult soojuse eraldamiseks vooluringides, sest $\mathrm{d}\Psi_k = 0$ ja $\sum_{k=1}^{k=n} i_k\,\mathrm{d}\Psi_k = 0$. Näiteks kui kõikide vooluringide takistused r_k oleksid võrdsed nulliga, siis poleks energiaallikaid üldse vaja, sest ülijuhtivate vooluringide vood jäävad muutumatuks juba elektromagnetilise inertsi printsiibi kohaselt. Juhtumil kui $\Psi_k = \mathrm{const}$, saame:

$$0 = (\mathrm{d}_g W_m)_{\Psi_k = \mathrm{const}} + f\,\mathrm{d}g.$$

Kuna me vaatleme ümberpaigutust dg, mis toimub jõu f mõjul, siis $f\,dg > 0$ ja järelikult $d_g W_m < 0$, s. t. magnetvälja energia väheneb. Seda tuligi oodata, sest elektromagnetilise jõu positiivset tööd võidakse teha antud juhtumil ainult magnetvälja energia arvel. Viimasest võrrandist saame:

$$f = -\left(\frac{d_g W_m}{dg}\right)_{\Psi_k = \text{const}} = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{\Psi_k = \text{const}},$$

s. o. *elektromagnetiline jõud, mis püüab muuta süsteemi antud koordinaati, võrdub magnetvälja energia vähenemisega selle jõu poolt tekitatava koordinaadimuutuse ühiku kohta eeldusel, et vooluringide aheldusvood jäävad muutumatuks.*

Oletame nüüd, et kõikides vooluringides hoitakse voolud muutumatuina. Kui üks vooluringidest liigub elektromagnetilise jõu toimel, muutuvad aheldusvood Ψ_k. Allikate töö see osa, mis on seotud vooluringide aheldusvoogude muutumisega, ei võrdu nulliga, s. t.

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k\, d\Psi_k \neq 0.$$

Vaadeldaval juhtumil kehtib selle töö suuruse ja magnetvälja energia W_m juurdekasvu vahel lihtne seos. Varem saime energia jaoks avaldise

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k \Psi_k.$$

Kui $i_k = \text{const}$, saame

$$(d_g W_m)_{i_k = \text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} i_k\, d\Psi_k.$$

Me jõuame tähelepanuväärsele järeldusele: voolude konstantsuse puhul on magnetvälja energia juurdekasv täpselt võrdne poolega energiaallikate poolt tehtava töö vaadeldavast osast. Allikate töö vaadeldava osa ülejäänud pool läheb vastavalt võrrandile

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k\, d\Psi_k = d_g W_m + f\, dg$$

mehaanilise töö tegemiseks. Seepärast

$$f\, dg = +(d_g W_m)_{i_k = \text{const}}.$$

Seega voolude konstantsuse puhul on mehaanilise töö saamine seotud süsteemi energiavaru vältimatu suurenemisega. See energiavaru suurenemine võrdub täpselt tehtud mehaanilise tööga.

Viimasest võrdusest saame veel ühe avaldise elektromagnetilise jõu jaoks:

$$f = +\left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{i_k = \text{const}},$$

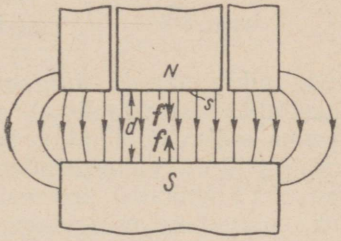
s. o. *elektromagnetiline jõud, mis püüab muuta süsteemi antud koordinaati, võrdub magnetvälja energia suurenemisega jõu poolt tekitatava koordinaadimuutuse ühiku kohta eeldusel, et vooluringide voolud hoitakse konstantsetena.*

Vaja on rõhutada, et mõlemad meie poolt saadud avaldised määravad ühe ja sellesama jõu, s. t.

$$f = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{\Psi_k = \text{const}} = +\left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{i_k = \text{const}}.$$

Vaatleme jõudu f, mis mõjub joonisel 217 kujutatud elektromagneti pooluse keskmisele osale ja püüab muuta poolustevahelist kaugust d. Kogu poolusest me lõikame välja ainult tema keskosa, mille piirides saab välja lugeda homogeenseks. Jõu arvutamiseks kasutame avaldist

$$f = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{\Psi = \text{const}}.$$



Joon. 217.

Pooluse keskosa lõpmatult väikesel nihkumisel jääb väli homogeenseks. Kuna $\Psi = \text{const}$, siis jääb muutumatuks ka magnetiline induktsioon B ja samuti välja energia ruumtihedus $W_m' = \frac{B^2}{2\mu_a}$. Seepärast toimub välja energia muutus ainult väljalõigatud põhjapooluse osa ja lõunapooluse vahelise ruumi mahu muutumise tagajärjel. Selles mahus sisalduv energia võrdub $W_m = W_m' sd$, kus s on pooluse väljalõigatud osa pindala. Seega saame:

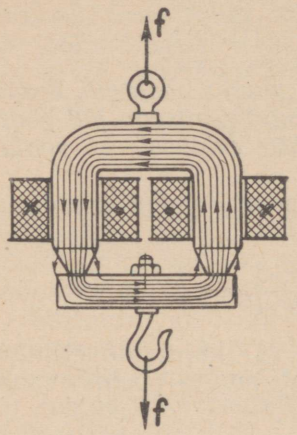
$$f = -\frac{\partial W_m}{\partial d} = -W_m' s = -\frac{B^2}{2\mu_0} s = -\frac{HB}{2} s,$$

kusjuures õhu absoluutne magnetiline läbitavus on võetud võrdseks magnetilise konstandiga μ_0. Miinusmärk näitab seda, et jõud püüavad vähendada poolustevahelist kaugust. Pooluse pinnaühiku kohta tuleva jõu absoluutväärtus

$$f' = \frac{|f|}{s} = \frac{HB}{2},$$

s. t. võrdub arvuliselt magnetvälja energiaga, mis on salvestunud elektromagneti poolustevahelise ruumi mahuühikusse.

Faraday kujutluste järgi on see jõud nende tõmbejõudude tagajärjeks, mis mõjuvad magnetilise induktsiooni torudele kogu nende pikkuse ulatuses. Pikitõmbe jõud, mis tuleb torude mistahes ristlõike pinnaühiku kohta, võrdub selle kujutluse järgi



Joon. 218.

$$f' = \frac{HB}{2} = \frac{\mu_a H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_a}.$$

Pooluste ääre juures esineva magnetilise induktsiooni torude kõverdumise seletamiseks on selle kujutluse puhul vaja oletada, et kõrvuti torude pikitõmbega esinevad ka torudevahelised külgsuunalised survejõud. Vaadeldes mittehomogeenses väljas vootoru lõigu tasakaalu, selgub, et külgsurve ja pikitõmbe jõud, taandatuna pinnaühikule, on omavahel võrdsed.

Kujutlust magnetilise induktsiooni torude pikitõmbe ja külgsurve jõududest tuleb mõista ainult kui meetodit, mis võimaldab selgelt ette kujutada vooluringide süsteemis mõjuvate jõudude üldist iseloomu ja suunda, kui magnetvälja pilt on valmis joonestatud. Elektromagnetilises väljas toimuvaid füüsikalisi protsesse ise aga ei saa taandada mehaanilisteks pingeteks mingisuguses hüpoteetilises keskkonnas. Sellest räägiti esimeses paragrahvis ja laetud kehade vastastikuste mehaaniliste mõjude vaatlemisel.

Pooluse pinnaühikule tuleva jõu avaldist kasutatakse elektromagneti tõstejõu arvutamisel. Elektromagneti tõstejõuks nimetatakse jõudu, mis on vajalik ankru lahtirebimiseks elektromagneti pooluste küljest. Kui $2s$ on mõlema pooluse pindala, mille ulatuses ankur pooluste külge liibub (joon. 218), siis tõstejõud

$$f = f' \cdot 2s = \frac{B^2}{2\mu_0} 2s = \frac{\Phi^2}{\mu_0 s}.$$

Magnetvoo läbi pinna s võib määrata magnetahela seaduse abil

$$\Phi = \frac{iw}{R_m},$$

kus iw on elektromagneti poolide voolu korrutis poolide keerdude arvuga ja R_m — elektromagneti magnetahela magnetiline takistus. Etteantud mmj. puhul on mõtet teatud piirideni vähendada pooluste pindasid s. Seejuures kasvab tõstejõud poolusekingade lauppindade juures magnetilise induktsiooni joonte tihenemise

ja magnetilise induktsiooni suurenemise tagajärjel. Niisugune pindade s vähendamine võib olla siiski kasulik ainult seni, kuni ta vähe mõjutab kogu magnetahela magnetilise takistuse R_m suurust. Lisaks sellele poolusekingad väga suurte induktsioonide puhul küllastuvad ja nende magnetiline läbitavus väheneb. See aitab samuti kaasa magnetilise takistuse R_m suurenemisele.

§ 74. Elektromagnetilised jõud ühe ja kahe vooluringi korral

Lihtsaimal juhtumil, s. o. ühe vooluringi korral, saame magnetvälja energia jaoks avaldise

$$W_m = \frac{Li^2}{2}.$$

Kasutame elektromagnetilise jõu arvutamiseks avaldist, mille saime eeldusel, et $i_k = \text{const}$:

$$f = \left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{i = \text{const}} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial g}.$$

Kui ümberpaigutus dg toimub jõu f mõjul, siis $f\,dg > 0$, ja seega ka $dL > 0$. Järelikult tekivad vooluringis niisugused jõud, mis püüavad vooluringi selliselt deformeerida, et ta induktiivsus suureneks.

Märgime siinjuures, et viimane avaldis ei nõua enam mingeid lisatingimusi voolu konstantsuse osas. See lisatingimus on täielikult rakendatud i^2 toomisega tuletise märgi ette. See avaldis on sobiv ka elektromagnetilise jõu hetkväärtuse määramiseks vahelduvvoolu antud hetkväärtuse juures.

Ülal nähtus, et mõlemad, nii eeldusel $\Psi_k = \text{const}$ kui ka eeldusel $i_k = \text{const}$ saadud valemid on identsed, s. t. võib kirjutada:

$$f = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{\Psi_k = \text{const}} = +\left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{i_k = \text{const}}.$$

Demonstreerime seda näitega ühe vooluringi kohta. Et kasutada esimest valemit jõu jaoks, tuleb energia avaldada endainduktsiooni aheldusvoo kaudu. Saame:

$$W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{(Li)^2}{2L} = \frac{\Psi_L^2}{2L}.$$

Siit

$$f = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{\Psi_L = \text{const}} = -\frac{\Psi_L^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\Psi_L^2}{2L^2}\frac{\partial L}{\partial g} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial g},$$

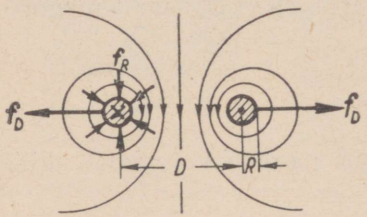
mis ühtib täielikult avaldisest $f = \left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{i=\text{const}}$ saadud tulemusega.

Näitena leiame ülekandeliini juhtmetele mõjuvate jõudude avaldise. Kahejuhtmelise liini induktiivsus määratakse valemiga (III osa)

$$L = \frac{l}{\pi}\left(\mu_0 \ln \frac{D}{R} + \frac{\mu_a}{4}\right),$$

kus l on liini pikkus, D — juhtmete telgedevaheline kaugus, R — juhtme ristlõike raadius ning μ_0 ja μ_a — õhu ja juhtmematerjali absoluutsed magnetilised läbitavused. Koordinaati D, s. t. juhtmete telgedevahelist kaugust muuta püüdev jõud

$$f_D = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial D} = \frac{i^2}{2}\frac{l}{\pi}\mu_0\frac{1}{D},$$



Joon. 219.

mis osutub positiivseks, s. t. jõud püüab suurendada juhtmetevahelist kaugust. Faraday kujutluste järgi seletub jõu niisugune suund magnetilise induktsiooni joonte külgsurvega (joon. 219).

Leiame juhtme ristlõike raadiust R muuta püüdva jõu. Saame:

$$f_R = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial R} = -\frac{i^2}{2}\frac{l}{\pi}\mu_0\frac{1}{R}.$$

Jõud saadakse negatiivne, s. t. ta püüab vähendada raadiust R. Selle jõu teket võib vastavalt Faraday kujutlustele seletada juhet haaravate magnetilise induktsiooni joonte püüdega kokku tõmbuda või samuti nende joonte külgsurvega. Jõud f_R on jaotunud juhtme pinnale.

Vaatleme kahe vooluringi juhtumit. Kahest vooluringist koosneva süsteemi magnetvälja energia jaoks saame avaldise:

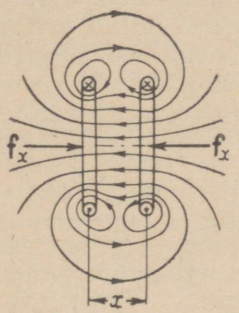
$$W_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

Leiame elektromagnetilise jõu, mis püüab muuta vooluringide vastastikust asendit määravat koordinaati g. Sellest koordinaadist sõltub ainult vastastikune induktiivsus. Seepärast on otsitav elektromagnetiline jõud

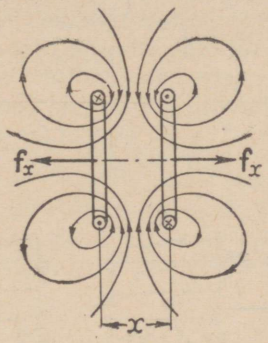
$$f = \left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{i_k=\text{const}} = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g}.$$

Leiame joonisel 220 kujutatud kahe juhtmekeeru vahelist kau-

gust x muuta püüdva jõu suuna. Lepime kokku, et voolud mõlemas keerus on samasuunalised. Sellisel juhtumil on positiivsete voolude korral keerdude vood suunatud ühes suunas ja järelikult $M > 0$. Vahekauguse x suurenemisel vastastikune induktiivsus väheneb, s. t. $\frac{dM}{dx} < 0$. Ühesuguse suunaga voolude korral (joon. 220) saame, et $i_1 i_2 > 0$ ja $f_x < 0$. Kui voolud on vastassuunalised (joon. 221), siis $i_1 i_2 < 0$ ja $f_x > 0$. Esimesel juhtumil püüab jõud vähendada koordinaati x. Nagu nähtub jooniselt 220, võib seda jõudu vastavalt Faraday kujutlusele vaadelda kui mõlemat keerdu haaravate magnetilise induktsiooni joonte kokkutõmbumist. Teisel juhtumil püüab jõud suurendada keerdude vahekaugust x, mida võib selgitada magnetilise induktsiooni joonte külgsurvega. Kõik induktsioonijooned on nüüd sunnitud läbima keerdudevahelise ruumi (joon. 221).



Joon. 220.



Joon. 221.

Avaldises $f = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g}$ on mõlemad voolud toodud tuletisemärgi ette. Tuues tuletisemärgi ette ainult ühe vooluringi voolu, saame:

$$f = i_1 \left[\frac{\partial (M i_2)}{\partial g}\right]_{i_2 = \text{const}} = i_1 \left(\frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g}\right)_{i_2 = \text{const}}$$

või

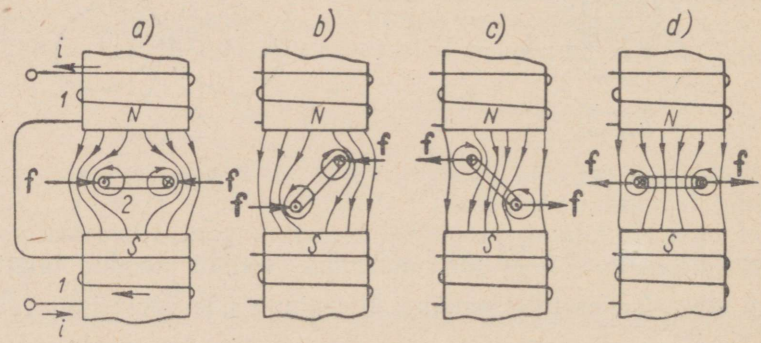
$$f = i_2 \left[\frac{\partial (M i_1)}{\partial g}\right]_{i_1 = \text{const}} = i_2 \left(\frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g}\right)_{i_1 = \text{const}}.$$

Kui vooluringid paigutuvad ümber jõu f mõjul, siis $f\,dg > 0$. Sel juhtumil saame esimesest võrdusest, et $i_1\,d\Psi_{1M} > 0$. Seega $i_1 > 0$ korral ka $d\Psi_{1M} > 0$, s. t. vastastikuse induktsiooni aheldusvoog Ψ_{1M} suureneb. Teiste sõnadega, kui endainduktsiooni aheldusvoog $L_1 i_1$ on positiivne, siis vastastikuse induktsiooni aheldusvoog Mi_2 püüab saavutada suurima võimaliku positiivse

väärtuse. Voolu $i_1 < 0$ korral $d\Psi_{1M} < 0$, s. t. Ψ_{1M} väheneb. Järelikult kui endainduktsiooni aheldusvoog $L_1 i_1$ on negatiivne, siis ka vastastikuse induktsiooni aheldusvoog Ψ_{1M} püüab muutuda negatiivseks ja sealjuures absoluutväärtuselt suurimaks. Analüüsides teist võrdust jõuame teise vooluringi vastastikuse induktsiooni aheldusvoo Mi_1 suhtes analoogiliste järeldusteni.

Niisiis *elektromagnetilised jõud püüavad jäiku vooluringe, tingimusel et nende voolud on konstantsed, paigutada selliselt, et iga vooluring haaraks võimalikult suurema osa sellist välist magnetvoogu, mis vooluringi enda suhtes on positiivne.*

Sõnu «enda suhtes positiivne» tuleb mõista selles mõttes, et vooluringid püüavad paigutuda niiviisi, et välise voo magnetilise induktsiooni jooned vooluringide sees kulgeksid sellessamas suunas, mis endainduktsiooni voo magnetilise induktsiooni joonedki. Niisiis joonisel 220 kujutatud keerud vastastikku tõmbuvad, sest nende lähenemisel suurenevad vastastikuse induktsiooni vood, millede magnetilise induktsiooni jooned antud juhtumil on keeru sees samasuunalised endainduktsiooni voo magnetilise induktsiooni joontega. Joonisel 221 kujutatud keerud vastastikku tõukuvad, sest keerdude vahekauguse suurenemisel vastastikuse induktsiooni vood, mis sellel juhtumil läbivad keerde negatiiv-



Joon. 222.

ses suunas, absoluutväärtuselt vähenevad. See on samaväärne keerde positiivses suunas läbivate voogude suurenemisega. Vooluringi tendents võimalikult rohkem välisvoogu haarata ilmneb veelgi ülevaatlikumalt homogeensesse välisesse välja paigutatud juhtmekeeru korral (joon. 222). Asend *a* on mittestabiilse tasakaalu asend. Välise magnetvoo ja endainduktsiooni voo magnetilise induktsiooni jooned on keeru sees selle asendi puhul vastupidiste suundadega. Keeru kõrvalekalle sellest asendist ühes või teises suunas (joonisel vastupäeva) tekitab jõupaari, mis pöörab keeru stabiilse tasakaalu asendisse *d*. Asendis *d* on

välise voo osa, mis haaratakse keeruga positiivses mõttes, suurima võimaliku väärtusega.

Vaatleme energeetilisi protsesse selles süsteemis eeldusel, et voolud püsivad konstantsetena. Niisugust süsteemi võib käsitleda alalisvoolumootori põhimõtteskeemina, sest sellel harilikult ongi ergutusmähis paigutatud masina liikumatule ja ankrumähis pöörlevale osale.

Loeme voolud i_1 ja i_2 positiivseks. Sel puhul asendis a peame arvestama, et $M < 0$. Olgu seejuures $M = -M_0$. Magnetvälja energia süsteemi selle asendi puhul

$$W_{m0} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M_0 i_1 i_2.$$

Peale sekundaarvooluringi (ankrumähise keeru) pööramist asendisse d saavutab välja energia väärtuse

$$W_{mk} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_0 i_1 i_2$$

ja järelikult on energia juurdekasv pöörde vältel

$$\Delta W_m = W_{mk} - W_{m0} = 2M_0 i_1 i_2.$$

Voolude konstantsuse korral on väljaenergia see juurdekasv, nagu näidati § 73, täpselt võrdne elektromagnetilise jõu poolt sellesama ajavahemiku vältel tehtud tööga A. Järelikult peavad välised emj. allikad selle ajavahemiku vältel andma süsteemile energiahulga A', mis on võrdne elektromagnetilise jõu poolt tehtud töö kahekordse suurusega:

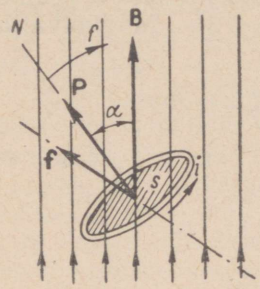
$$A' = \Delta W_m + A = 2A.$$

Seejuures ei ole tähelepanu osutatud soojenemiskadudele, mis tekivad mähiste traatides voolu toimel.

Siit on selge, et elektromagnetilises mehhanismis, mille kõiki vooluringe läbivad alalisvoolud, võib mehaaniliseks tööks muunduda mitte üle poole väliseist emj. allikaist tulevast energiast, sest seejuures peab tingimata toimuma magnetvälja energia suurenemine, mis on võrdne sooritatud mehaanilise tööga. Niisugune mehhanism ei saa teha mehaanilist tööd lõpliku võimsuse juures mistahes pika ajavahemiku vältel, sest magnetvälja energia ei saa muutuda lõpmata suureks.

Ometi muundatakse alalisvoolumootoreis mehaaniliseks tööks üle poole mootorit toitvast elektriahelast tulevast energiast ja see muundumine võib toimuda lõpliku võimsuse korral kuitahes pika aja vältel. Niisuguse muundamise võimalus on seotud sellega, et vool ankrumähise keerdudes ei jää kogu aeg konstantseks, vaid muudab perioodiliselt oma suunda. Kui joonisel 222 kujutatud keerd või talle vastav ankrumähise pool (sektsioon) jõuab asendisse d, toimub voolu kommuteerimine, s. t. voolu suuna muutmine.

Kommuteerimise tulemusena muutub voolu suund samasuguseks kui lähteasendis a ja kogu protsess kordub uuesti keeru järgneva pöördumise vältel nurga π võrra. Kommuteerimisel ei tohi mingil juhtumil toimuda keeru vooluringi katkestamist, sest ahela katkestamisel ei kasutata ära magnetvälja salvestunud energiat ja masina kasutegur osutub väiksemaks kui 50%. Mootoris lühistatakse kommuteerimisperioodiks ankrumähise sektsioon harja abil; voolu muutumisel sektsioonis antakse süsteemis salvestunud lisaenergia transformatoorsel teel teistesse ankrumähise sektsioonidesse ning ka ergutusahelasse ja osutubki sel viisil ära kasutatuks.



Joon. 223.

Öeldust on selge, et põhimõtteliselt on võimatu luua ilma kommutaatorita alalisvoolumootorit, samuti nagu on võimatu ehitada ilma kommutaatorita alalisvoolugeneraatorit, nagu näidati § 50.

Määrame veel pöördemomendi f, mis mõjub tasapinnalisele vooluga i keerule välises homogeenses magnetväljas. Olgu B välise välja magnetiline induktsioon, s — voolu teekonnaga piiratud pind ja α — selle pinna positiivse normaali N ja vektori **B** vahel moodustuv nurk, mida loetakse alates vektori **B** suunast (joon. 223). Normaali positiivse suuna seome voolu i positiivse suunaga parema käe kruvi reegliga.

USA + USSR = PEACE

Vastavalt ülaltoodud avaldistele

$$f = i_1 \left(\frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g}\right)_{i_2 = \text{const}} \quad \text{ja} \quad f = i_2 \left(\frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g}\right)_{i_1 = \text{const}}$$

võib otsitavat pöördemomenti esitada keeru voolu i korrutisena välise aheldusvoo tuletisega nurga α järgi $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$. Saame:

$$\Psi = Bs \cos \alpha \quad \text{ja} \quad f = i \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = -isB \sin \alpha = -pB \sin \alpha,$$

kus $p = is$ on ringvoolu magnetiline moment. Vektorkujul on viimane avaldis järgmine (joon. 223):

$$\mathbf{f} = [\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}].$$

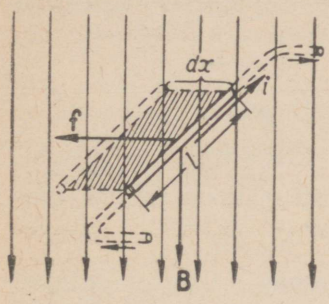
Me jõuame tähelepanuväärse järelduseni, et pöördemoment ei sõltu eraldi ei i-st ega s-st, vaid on täielikult määratud magnetilise momendiga p.

Öeldu kehtib täiel määral ka mistahes elementaarvoolude kohta, sest definitsiooni järgi me nimetame elementaarseks sellist ringvoolu, mis kulgeb nii väikeses vooluringis, et viimase ulatuses võib välist välja lugeda homogeenseks.

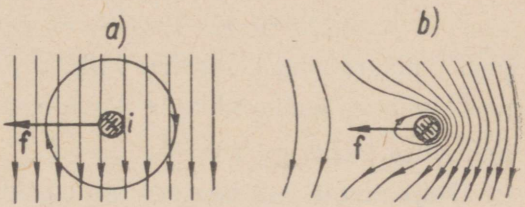
§ 75. Välises magnetväljas voolujuhtmele mõjuv jõud. Mitkevitši juhis

Mingile vooluringile mõjuvat elektromagnetilist jõudu võib esitada vooluringi üksikutele elementidele mõjuvate jõudude summana.

Vaatleme algul lihtsat juhtumit, kui sirge juhtmelõik pikkusega l ja vooluga i on paigutatud homogeensesse välisesse välja risti magnetilise induktsiooni vektoriga **B** (joon. 224). Lõik l moodustab osa kinnisest vooluringist. Väline väli mõjub vooluringile sellise jõuga, mis püüab vooluringi ümber paigutada niisuguses suunas, et selle ümberpaigutumise korral toimuks vooluringiga ahelduva voo suurim võimalik suurenemine. See tingimus on rahuldatud, kui jõud mõjub risti nii vektoriga **B** kui ka juhtmelõigu teljega. Jõu suuna võib määrata vasaku käe



Joon. 224.



Joon. 225.

juhise põhjal. Kui vasaku käe pöial, nimetis- ja keskmine sõrm asetada üksteisega risti ja nii, et nimetissõrm asuks välja ja keskmine sõrm voolu suunas, siis näitab pöial jõu suunda. See juhis jääb kergesti meelde, kui panna tähele, et sõrmede järjekord käel: pöial, nimetis- ja keskmine sõrm vastab sõnade: liikumine (s. o. jõu mõjumise võimalik tulemus), magnetväli ja vool algustähtede tähestikulisele järjekorrale. Kuid tunduvalt lihtsam on kasutada jõu suuna määramiseks *Mitkevitši juhist*, mis põhineb kujutlusel magnetilise induktsiooni joonte külgsurvest ja pikisuunalisest kokkutõmbumisest. Selleks on küllaldane endale ette kujutada peale välise välja ka endainduktsioonivoo välja juhtme läheduses (joon. 225, *a*) ja arutleda, kummal pool juhet osutub resulteeriv väli tugevamaks ja kummal nõrgemaks. On selge, et juhe magnetilise induktsiooni torude vahelise külgsurve toimel püüab nihkuda sinnapoole, kus väli on nõrgem. See selgub täielikult, kui joonistada resulteeriva välja pilt (joon. 225, *b*).

Eeldame, et juhtmelõik nihkub elektromagnetilise jõu mõjul

kauguse dx võrra (joon. 224). Vooluringi väline aheldusvoog saab seejuures juurdekasvu

$$d\Psi = d\Phi = Bl\,dx.$$

Vastavalt avaldistele

$$f = i_1 \left(\frac{\partial \Psi_{1M}}{\partial g}\right)_{i_2 = \text{const}} \quad \text{ja} \quad f = i_2 \left(\frac{\partial \Psi_{2M}}{\partial g}\right)_{i_1 = \text{const}}$$

võib otsitava jõu esitada juhtmelõigus oleva voolu i korrutisena välise aheldusvoo tuletisega $\frac{d\Psi}{dx}$, mis on võetud koordinaadi x järgi. Saame:

$$f = i\frac{d\Psi}{dx} = i\frac{Bl\,dx}{dx} = Bli.$$

Huvitav on võrrelda saadud avaldist liikuvas juhtmes indutseeritava emj. avaldisega

$$e = Blv.$$

Juhtme geomeetrilist koordinaati x muuta püüdev mehaaniline jõud f määratakse elektrilise kiirusega, s. t. vooluga $i = \frac{dq}{dt}$ juhtmes. Juhtmes voolu tekitada püüdev emj. määratakse juhtme geomeetrilise kiirusega $v = \frac{dx}{dt}$.

Üldjuhtumil, kui meelevaldse kujuga voolujuhe on paigutatud välisesse mittehomogeensesse välja, tuleb kogu juhe jagada lõikudeks dl ja leida igale üksikule lõigule mõjuva jõu df avaldis. Olgu vektor $d\mathbf{l}$ suunatud piki juhtme telge juhet läbiva voolu positiivses suunas ja suuruselt lõigu dl pikkusega võrdne (joon. 226). Moodustagu vektor $\mathbf{B}$ vektoriga $d\mathbf{l}$ nurga α. Jõud df peab olema risti nii $d\mathbf{l}$-i kui ka $\mathbf{B}$-ga, sest ainult sellisel juhtumil vastab jõu mõjul toimuvale nihkele dx lõigu dl suurim lõikumiste arv välise välja magnetilise induktsiooni ühikjoontega, s. t. vooluringiga aheldava välise voo suurenemine osutub suurimaks. Lõigu nihkumisel dx võrra osutub välise voo juurdekasv võrdseks

$$d\Phi = B\cos\beta\,ds = B\cos\beta\,dl\,dx,$$

kus $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ on nurk vektori $\mathbf{B}$ ja pinna $ds = dl\,dx$ normaali N suuna vahel. Jõud df on võrdne

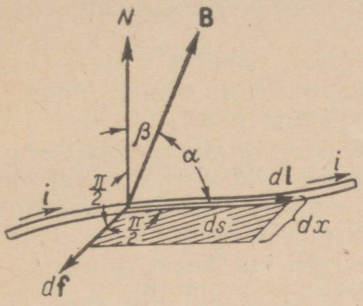
$$df = i\frac{d\Phi}{dx} = iB\cos\beta\,dl = iB\sin\alpha\,dl.$$

Vektorkujul saab elemendile dl mõjuva elektromagnetilise jõu esitada avaldisena

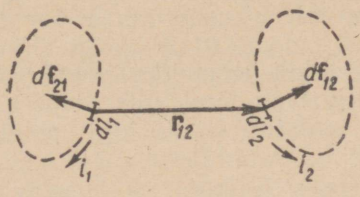
$$d\mathbf{f} = i[d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}].$$

Kogu vooluringile mõjuva resultantjõu saab leida vooluringi elementidele mõjuvate elementaarjõudude geomeetrilise summeerimisega.

Viimane avaldis võimaldab leida jõu df_{12}, millega vooluelement $i_1\,dl_1$ mõjub teisele vooluelemendile $i_2\,dl_2$ (joon. 227).



Joon. 226.



Joon. 227.

Vooluelemendi $i_1\,dl_1$ poolt teise vooluelemendi asukohas tekitatav väljatugevus on tingimusel, kui $\mu_a = \text{const}$, vastavalt § 56 toodud avaldistele võrdne

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{i_1}{4\pi r^2}\left[d\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r}\right],$$

kus $\mathbf{r}_{12}$ on elementide vahekaugusega võrdne ja esimeselt elemendilt teisele suunatud vektor. Niisiis

$$d\mathbf{f}_{12} = i_2[d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{B}_2] = \frac{\mu_a}{4\pi}\frac{i_1 i_2}{r^2}\left[d\mathbf{l}_2 \cdot \left[d\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r}\right]\right],$$

sest $d\mathbf{B}_2 = \mu_a\, d\mathbf{H}_2$.

Vektor $d\mathbf{H}_2$ on risti vektoreid $d\mathbf{l}_1$ ja $\mathbf{r}_{12}$ läbiva tasapinnaga. Järelikult $d\mathbf{H}_2$-ga risti olev jõud $d\mathbf{f}_{12}$ asub sellessamas tasapinnas. Peale selle on jõud $d\mathbf{f}_{12}$ risti elemendiga $d\mathbf{l}_2$.

Analoogiliselt saame jõu $d\mathbf{f}_{21}$ jaoks, millega vooluelement $i_2\,dl_2$ mõjub vooluelemendile $i_1\,dl_1$, avaldise

$$d\mathbf{f}_{21} = \frac{\mu_a}{4\pi}\frac{i_1 i_2}{r^2}\left[d\mathbf{l}_1 \cdot \left[d\mathbf{l}_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_{21}}{r}\right]\right],$$

kus $\mathbf{r}_{21}$ on elementide vahekaugusega võrdne ja teiselt elemendilt esimesele suunatud vektor.

Kujutagu dl_1 ühe vooluringi ja dl_2 teise vooluringi elementaarlõike (joon. 227). Integreerides viimast avaldist mööda kogu teist vooluringi, saame esimese vooluringi elemendile dl_1 kogu teise vooluringi poolt mõjuva jõu. Integreerides veel kord seda avaldist mööda kogu esimest vooluringi, saame resultantjõu, millega teine vooluring mõjub esimesele.

Osutame tähelepanu sellele, et üldjuhtumil ei ole jõud df_{12} ja df_{21} ei võrdsed ega vastassuunalised. Seda on kerge näha jooniselt 227. Eriti teravalt ilmneb võrratus $f_{12} \neq f_{21}$ siis, kui üks vooluelement, näiteks $i_1 dl_1$, on suunatud piki raadiusvektorit r_{12}, teine vooluelement aga moodustab raadiusvektoriga r_{21} mingi nullist erineva nurga. Seejuures $[dl_1 \cdot r_{12}] = 0$, kuid $[dl_2 \cdot r_{21}] \neq 0$ ja järelikult $df_{12} = 0$, kuna $df_{21} \neq 0$.

Seega vaadeldavad jõud df_{12} ja df_{21} ei rahulda mõju ja vastumõju võrdsuse printsiipi. Tingimata on vaja silmas pidada, et alalisvoolu element $i\,dl$ ei saa eksisteerida eraldatult, sest voolujooned peavad alati olema kinnised. Lõik dl osutub alati kinnise vooluringi elemendiks. Seepärast omavad füüsikalist mõtet ainult resulteerivad jõud, mis mõjuvad kummalegi suletud vooluringile teise suletud vooluringi poolt. Nende resulteerivate jõudude puhul on rahuldatud mõju ja vastumõju võrdsuse printsiip.

Seoses öelduga on huvitav märkida, et jõu df_{12} meie poolt saadud avaldisele võib lisada niisuguse liidetava, et ühest küljest kahe vooluelemendi korral oleks rahuldatud mõju ja vastumõju võrdsuse printsiip ja teisest küljest kinnistele vooluringidele mõjuvad resulteerivad jõud seejuures ei muutuks. See liidetav peab rahuldama tingimust, et integreerimisel mööda voolu kinnisi teekondi ta annaks nulli. Näiteks Ampère esitas kahe vooluelemendi vastastikuse toime jõudu väljendava valemi, mille kohaselt neile elementidele mõjuvad jõud osutuvad võrdseks ja vastassuunalisteks. Siiski on Ampère'i valem ülaltoodust tunduvalt keerukam, ehkki mööda suletud kontuure integreerides annab sama tulemuse.

§ 76. Elektri- ja magnetväljas tekkivate jõudude võrdlus

Huvitav on kõrvutada vooluringide süsteemi elektromagnetilise jõu avaldisi

$$f = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{\Psi_k = \text{const}} = +\left(\frac{\partial W_m}{\partial g}\right)_{i_k = \text{const}}$$

laetud kehade süsteemis tekkivate vastavate jõudude avaldistega

$$f = +\left(\frac{\partial W_e}{\partial g}\right)_{U_k = \text{const}} = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial g}\right)_{q_k = \text{const}}.$$

Peaaegu kõik kaasaegsed elektrimasinad, -aparaadid ja -mõõteriistad põhinevad magnetvälja kaudu toimiva vastastikuse mõju printsiibil ja ainult mõningates neist, näiteks elektrostaatilises voltmeetris, kasutatakse vastastikust mõju, mis toimib elektrivälja vahendusel. See on seoses asjaoluga, et vooluringide vastastikuse mõju jõude õnnestub meil saada tunduvalt suurematena laetud kehade vastastikuse mõju jõududest. Näi-

teks elektrimasinate konstrueerimisel püstitatakse alati ülesanne antud põhikarakteristikute ja eriti masina etteantud võimsuse korral saada masin võimalikult väiksemate mõõtmetega. Seda on aga võimalik saavutada ainult õige suurte vastastikuse mõju jõudude korral, mis toimivad masina liikumatu ja liikuva osa vahel.

Mehaaniliste jõudude f üldavaldised annavad meile vastuse, miks kaasaegsetes konstruktsioonides eelistatakse just magnetvälja vahendusel toimiva vastastikuse mõju printsiipi. Jõud magnet- ja elektriväljas on võrdsed, kui tuletised magnetvälja ja elektrivälja energiast vastava koordinaadi järgi on võrdsed, s. t. tingimusel:

$$\left|\frac{\partial W_m}{\partial g}\right| = \left|\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|.$$

Kui me soovime saavutada seda võrdust magnetilise vastastikuse mõju printsiibil põhinevate seadmete ja elektrilise vastastikuse mõju printsiibil põhinevate seadmete jaoks, siis ühesuguste ümberpaigutuste dg korral peavad mõlemates seadmetes olema ühesugused ka energia muutused $|dW_m|$ ja $|dW_e|$. Ümberpaigutuvate osade ühesuguste pindade korral see nõuab seda, et magnetvälja ja elektrivälja energia ruumtihedused W_m' ja W_e' vastastikku mõjuvate osade vahelises ruumis mõlemat tüüpi seadmetes oleksid samas suurusjärgus, s. t. et oleks rahuldatud võrdus

$$\frac{BH}{2} = \frac{DE}{2}.$$

Harilikult on ruum täidetud õhuga ja järelikult

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

või (III osa)

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Kaasaegsetes suurtes elektrimasinates, mis põhinevad magnetvälja vahendusel toimiva vastastikuse mõju printsiibil, saavutab magnetiline induktsioon õhupilus väärtusi 1 T ja isegi rohkem. Järelikult elektrilise vastastikuse mõju printsiibil ehitatud masinas on vaja saavutada elektrivälja tugevusi suurusjärgus

$$E = c_0 B \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{cm}}.$$

Niisuguseid kolossaalseid elektrivälja tugevusi ei ole võimalik saavutada isegi sel juhtumil, kui luua ideaalne vaakuum masina liikuvate ja liikumatute osade vahel, sest elektrivälja mõjul algab märgatav elektronide väljumine metallist, s. t. auto-

elektronemissioon praktiliselt juba väljatugevusel suurusjärgus $10^6 \frac{V}{cm}$.

Tuleb märkida, et kaht masinatüüpi on võrreldud nende tööpindade ühesuguste mõõtmete korral. Tegelikult tuleks neid masinatüüpe võrrelda nende ühesuguste gabariitide korral. Selles suhtes omavad elektrilisel vastastikusel mõjul põhinevad masinad suure eelise olemasolevate magnetilisel vastastikusel mõjul põhinevate masinate ees. Magnetilise induktsiooni jooned osutuvad põhimõtteliselt kinnisteks ja järelikult tuleb magnetvoo juhtimiseks luua kogukad magnetahelad. Elektrivälja jooned algavad ja lõpevad laetud metallpindadel ja seega ei ole vaja luua kogukaid ahelaid elektrilise nihkevoo juhtimiseks väljaspool pilusid masina vastastikku mõjuvate osade vahel. Seepärast viimase masinatüübi korral osutub võimalikuks masina samade üldgabariitide korral tunduvalt suurendada tema tööpindu, mis võimaldab vähendada elektrivälja tugevust, võrreldes ülalarvutatuga. Kuid sellele vaatamata kujunevad nõutavad väljatugevused väga suurteks. Võib-olla edasine tehnika areng avab perspektiive taolist liiki masinate ehitamiseks, eriti noil juhtumeil, kui on vaja luua masinaid väga kõrgele pingele.

Huvitav on märkida, et magnetvälja kaudu toimiva vastastikuse mõju printsiibil põhinevaid elektrimasinate kõiki kaasaegseid tüüpe: sünkroon-, asünkroon-, alalisvoolu-, kommutaator-, jne. masinaid võib luua ka elektrivälja kaudu toimiva vastastikuse mõju printsiibi alusel. Seda küsimust on üksikasjaliselt käsitletud A. J. Kapljanski töödes.

§ 77. Elektri- ja magnetväljas liikuvale elektrilaenguga osakesele mõjuv jõud

Magnetväljas liikuvale elektrilaenguga elementaarosakesele mõjub välja poolt mehaaniline jõud, mida võib määrata avaldisega $\mathrm{d}\mathbf{f} = i[\mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}]$.

Vaatleme pikkusega $\mathrm{d}l$ ja ristlõikega $\mathrm{d}s$ juhtmelõiku. Käsitades juhtme voolu kui elektronide korrapärast liikumist, võib voolutihedust esitada kujul $\delta = N_1 e v$, kus N_1 on juhtivuselektronide arv juhtme mahuühikus, e — elektroni laengu absoluutväärtus ja v — elektronide keskmine kiirus voolujoonte suunas. Juhtmelõigu vool omab väärtuse $\mathrm{d}i = \delta\, \mathrm{d}s = N_1 e v\, \mathrm{d}s$. Kiirusvektor $\mathbf{v}$ on suunalt vastupidine jõu $\mathrm{d}\mathbf{f}$ avaldisse kuuluva vektoriga $\mathrm{d}\mathbf{l}$, sest elektronide laeng on negatiivne. Seda arvestades võime mahtu $\mathrm{d}V = \mathrm{d}l\, \mathrm{d}s$ omavale juhtmelõigule mõjuva jõu väljendada kujul

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = N_1 e v\, \mathrm{d}s\, [\mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}] = -N_1 e\, \mathrm{d}l\, \mathrm{d}s\, [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}].$$

Juhtivuselektronide arv mahus dV on võrdne $N_1\,dV = N_1\,dl\,ds$. Järelikult ühele elektronile mõjuv jõud

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{f}}{N_1\,dl\,ds} = -e[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}].$$

Miinusmärk tuli sellesse avaldisse seepärast, et elektroni laeng on negatiivne, e-ga aga me tähistasime elektroni laengu absoluutväärtust. Kui tähistada q-ga mistahes liikuva osakese laengut nii, et suurus q võib olla nii negatiivne kui positiivne, siis

$$\mathbf{f} = q[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}].$$

Kui ruumis, milles liigub osake laenguga q, esineb samuti ka elektriväli väljatugevusega **E**, siis osakesele mõjuv summaarne jõud

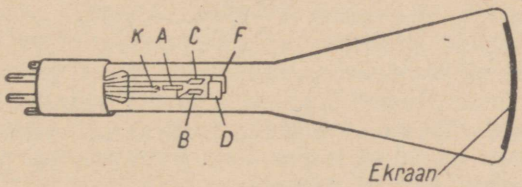
$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}].$$

Nagu järeldub avaldisest $\mathbf{f} = q[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}]$, on magnetväljas liikuvale laengut q omavale osakesele mõjuv jõud risti vektoriga **B** ja risti kiirusvektoriga **v**. Viimane asjaolu näitab, et see jõud muudab ainult kiiruse suunda, kuid ei muuda kiiruse suurust v.

§ 78. Laetud elementaarosakeste liikumine elektri- ja magnetväljas. Elektronostsillograafid ja -mikroskoobid

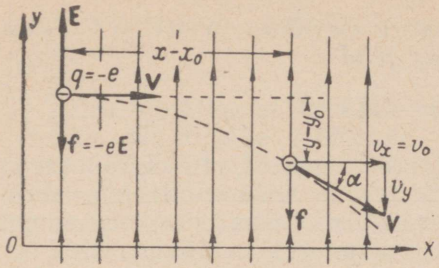
Liikuvate laetud elementaarosakeste juhtimist ehk tüürimist elektri- ja magnetvälja abil rakendatakse erakordselt laialdaselt kaasaegses tehnikas ja eksperimentaalfüüsikas. Nii rakendatakse näiteks elektronlampides ja -ostsillograafides liikuvate elektronide juhtimist elektrivälja abil.

Joonisel 228 on skemaatiliselt kujutatud elektronostsillograafides kasutatav elektronkiiretoru. Katoodi K lähedusse on paigu-



Joon. 228.

tatud torukujuline tsentraalkanaliga anood A. Osa katoodist väljakiiratud ja katoodi ning anoodi vahelises ruumis elektrivälja poolt kiirendatud elektrone läbib anoodis oleva ava ja jätkab inertsi tõttu oma teekonda. See peenike elektronkiir langeb fluorestseerivale ekraanile ja jätab sinna jälje helendava täpi näol. Rakendades plaatidele B—C uuritava pinge, tekitame plaatide vahele elektrivälja, mille tugevus muutub võrdeliselt selle



Joon. 229.

pingega. Elektronid, lennates plaatidevahelises väljas, kalduvad sirgjoonelisest teekonnast kõrvale.

Leiame elektroni trajektoori juhtumil, kui liikumine toimub homogeenses väljas ja kui elektroni algkiirus v_0 on risti väljatugevuse joontega (joon. 229). Valime telgede suunad nii, et telje OX suund ühtiks vektori $\mathbf{v}_0$ suunaga ja telje OY suund vektori $\mathbf{E}$ suunaga. Liikumisvõrrandid saadakse seejuures järgmised:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = qE; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Siin on m elektroni mass ja q — elektroni laeng.

Järelikult

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \text{const} = v_0; \quad \frac{dy}{dt} = v_y = \frac{q}{m}Et + v_{0y} = \frac{q}{m}Et;$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = \text{const} = v_{0z} = 0.$$

Liikumine toimub tasapinna XOY paralleeltasapinnas. Integreerides veel kord, saame:

$$x = v_0t + x_0; \qquad y = \frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2 + y_0.$$

Järelikult

$$y - y_0 = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{E}{v_0^2}(x - x_0)^2, \qquad (*)$$

s. t. liikumistrajektoor on parabool. Joonisel 229 on kujutatud elektroni teekond (laeng $q = -e < 0$). Elektronkiire hälve Δy plaatide väljast lahkumise hetkeks määratakse viimasest võrrandist, kui selles asendada: $q = -e$, $y - y_0 = \Delta y$ ja $x - x_0 = l$, kus l on plaatide pikkus. Saame:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{E}{v_0^2}l^2.$$

Elektronide algkiirus v_0 enne sisenemist plaatidevahelisse elektrivälja määratakse anoodi ja katoodi vahelise pingega u_{AK}, sest see pinge määrab elektroni poolt teekonnal katoodist anoodini saadava kineetilise energia. Nimelt

$$\frac{mv_0^2}{2} = eu_{AK}. \quad \text{Järelikult } v_0 = \sqrt{2\frac{e}{m}u_{AK}}.$$

Et $E = u_x/d$, kus u_x on plaatide B ja C vaheline uuritav pinge ja d — plaatide vahekaugus, siis võib hälbe Δy esitada kujul

$$\Delta y = -\frac{1}{4}\frac{u_x}{u_{AK}}\frac{l^2}{d}.$$

Elektronkiire esialgse suuna ja suuna vahel, mille kiir omandab pärast plaatide väljast lahkumist, moodustub nurk α (joon. 229), mille tangens leitakse võrrandi (*) diferentseerimisel. Saame:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{e}{m}\frac{E}{v_0^2}(x - x_0) = -\frac{1}{2}\frac{u_x}{u_{AK}}\frac{l}{d}.$$

Helendava täpi kogu hälve kallutusplaatide B—C äärest kaugusel l_1 oleval ekraanil on väärtusega

$$h = \Delta y + l_1 \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}\frac{u_x}{u_{AK}}\frac{l}{d}\left(\frac{l}{2} + l_1\right).$$

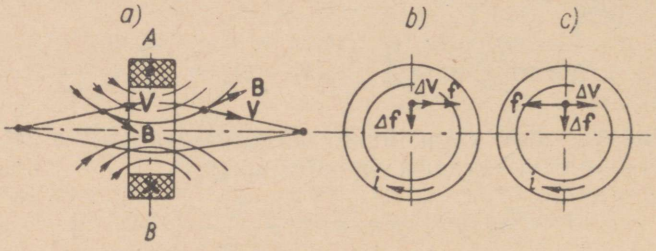
See hälve on võrdeline uuritava pingega u_x. Paigutades elektronide teekonnale teise plaatidepaari D—F, mis on esimese suhtes nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra pööratud (joon. 228), ja rakendades sellele ajaliselt monotoonselt kasvava pinge, me sunnime elektronkiirt ekraanil liikuma hälbe h suhtes ristsuunas. Mõlema plaadipaari samaaegse mõju tulemusena näeme ekraanil ristkoordinaatides uuritava pinge ajalist sõltuvust kujutavat kõverat. Elektronkiir on praktiliselt inertsivaba. Seepärast osutubki elektronostsillograaf asendamatuks riistaks väga kiiresti kulgevate protsesside üleskirjutamiseks.

Vaatleme näidetena mõningaid tähtsamaid juhtumeid, milledes kasutatakse liikuvate elementaarosakeste juhtimist magnetvälja abil. Elektronkiiretorudes ja mitmetes füüsikaalastes riistades rakendatakse kiiresti lendavate elektronide või teiste laetud osakeste kimbu kõrvalekallet magnetväljas. Nagu eelmises paragrahvis näidati, on magnetväljas liikuvale laengut q omavale osakesele mõjuv jõud risti vektoriga **B** ja risti kiirusvektoriga **v**. Seepärast on laetud osakeste kimbu kallutamiseks mingis suunas vaja osakeste teekonnnale luua magnetväli, mille jooned on risti selle suunaga ja osakeste liikumise suunaga. Magnetilise induktsiooni B suuruse muutumisel muutub ka kimbu kõrvalekalle tema esialgsest suunast.

Eriti huvitavaks osutub magnetvälja rakendamine liikuvate laetud elementaarosakeste, näiteks elektronide hajuva kimbu fokuseerimiseks. Eeldame, et elektronide teekonnale on paigutatud voolust läbitav pool nii, et pooli telg ühtib lendavate elektronide kimbu teljega, kusjuures kimp läbib vabalt pooli ava. Joonisel 230, *a* on pool näidatud lõikes ja kujutatud elektronide

trajektoorid pooli telge läbivates meridiaantasapindades ning ka pooli välja magnetilise induktsiooni jooned. Jooniselt on kerge näha, et pooli magnetvälja sisenevatele elektronidele mõjuvad meridiaantasapindadele risti suunatud jõud **f** (joon. 230, *b*).

Selle tagajärjel kalduvad elektronid oma esialgsest liikumise suunast kõrvale ja hakkavad liikuma kruvijoont mööda ümber pooli telje. Kiiruse komponendid Δv teljega risti olevates tasapinda-



Joon. 230.

des, s. o. komponendid, mis seda kruviliikumist põhjustavad ja elektromagnetilise jõu **f** mõjul tekivad, on näidatud joonisel 230, *b* negatiivse laenguga osakese juhtumi jaoks. Joon. 230, *b* kehtib tasapindade kohta, mis asuvad joonisel 230, *a* näidatud tasapinnast *A*—*B* vasakul. Tasapind *A*—*B* on iseloomulik selle poolest, et kui elektron läbib seda tasapinda, muutub vektori **B** ja meridiaantasapinnas oleva kiirusvektori komponendi **v** suundade vahelise nurga märk. Kerge on näha, et elektroni läbiminekul tasapinnast *A*—*B* muudab meridiaantasapinnas olevast kiirusvektori komponendist **v** põhjustatud jõud **f** oma suunda. See jõu **f** uus suund on näidatud joonisel 230, *c*. Järelikult pärast seda, kui elektronid on pinna *A*—*B* läbinud, hakkab jõud **f** vähendama kiiruse komponente Δv.

Võib näidata, et vajalike tingimuste täitmisel muutub suurus Δv pooli väljast lahkumisel võrdseks nulliga ja järelikult elektroni teekond muutub uuesti meridiaantasapinnas asuvaks sirgeks. Siiski erineb selle sirge suund elektronide liikumise suunast enne sisenemist magnetvälja. Tõepoolest, osakese pooli välja ulatuses liikumisel esinev kiiruse komponent Δv põhjustab täiendava jõu Δf. See jõud Δf on risti **B** ja Δv-ga ning omab kogu aeg teljesuunalise komponendi (joon. 230, *b*, *c*). Seda on kerge näha vektorite **B** ja Δv vastastikest suundadest. Selle täiendava jõu Δf mõjul toimubki trajektoori kõverdumine meridiaanpindades (joon. 230, *a*). Küllalt tugeva välja korral poolis muutub hajuv elektronide kimp pärast välja läbimist koonduvaks. Sellel rajanebki magnetvälja fokuseeriv toime.

Pooli voolu muutumisega saab muuta fookuskaugust. Mag-

netväljaga elektronkiire fokuseerimist kasutatakse elektronkiiretorudes.

Hajuvat elektronide kimpu saab fokuseerida ka elektriväljaga. Selleks on vaja kimbu teekonnale paigutada vastava kujuga elektroodid, mis tekitaksid kimbu telje suhtes sümmeetrilise elektrivälja. Selle välja mõjul elektronid kalduvadki kimbu telje poole.

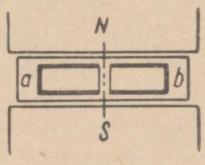
Ülalkirjeldatud fokuseerivaid seadiseid võib vaadelda kui magnetilisi või vastavalt elektrilisi läätsi, millede mõju hajuvale elektronide kimbule on sarnane klaasläätsede mõjuga hajuvatele valguskiirtele. Magnetilisi ja elektrilisi läätsi kasutatakse elektronmikroskoopides, milledes elektronkiir etendab sedasama osa mis valguskiired harilikes mikroskoopides. Elektronmikroskoobid annavad väga suuri suurendusi ja võimaldavad nähtavaks teha esemeid, millede mõõtmed on niivõrd väikesed, et neid harilike mikroskoopidega ei saa enam avastada.

§ 79. Laetud elementaarosakeste liikumine elektri- ja magnetväljas. Elementaarosakeste kiirendajad

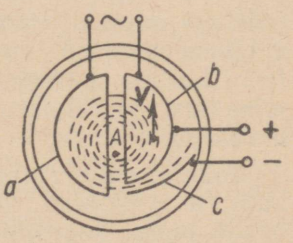
Vaatleme, kuidas teostub laetud elementaarosakeste liikumise kiirendamine ja juhtimine kaasaegsetes võimsates seadmetes, mis on määratud väga kiirete osakeste saamiseks.

Selliseid kiirendajaid kasutatakse laialdaselt aatomituuma füüsika küsimuste eksperimentaalseks uurimiseks. Joon. 231 illustreerib skemaatiliselt ühe sellise seadme, nn. *tsüklotroni* töötamispõhimõtet.

Võimsa elektromagneti poolustevahelisse tugevasti hõrendatud ruumi on paigutatud ajaliselt muutumatusse ja homogeensesse magnetvälja kaks isoleeritud metallkambrit *a* ja *b*. Need kambrid omavad tasase silindrilise karbi kahe poole kuju, mis on lahti lõigatud aluse diameetrit läbiva tasapinnaga. Kambrid on valmistatud mitteferromagnetilisest materjalist ja ei takista elektromagneti magnetvoo tungimist nende õõnsustesse.



Kambritele rakendatakse kõrgsagedus-pinge. Tekitatagu punktis *A* (joon. 231) hetkel, mil kamber *b* on negatiivne kambri *a* suhtes, mingil viisil positiivset laengut omavaid osakesi. Kambrite vahel oleva elektrivälja mõjul saavad osakesed kiirenduse kambri *b* suunas ja sisenevad selle õõnsusse. Kambri õõnsuses elektrivälja ei ole ja osakesed liiguvad inertsi



Joon. 231.

mõjul. Siiski ei ole see liikumine sirgjooneline, sest osakesed liiguvad magnetväljas ja igaühele neist mõjub elektromagnetiline jõud, mis on risti kiirusvektoriga ja magnetilise induktsiooni vektoriga. See jõud ei muuda kiiruse v suurust.

Kerge on veenduda, et homogeenses magnetväljas, mille magnetilise induktsiooni jooned on risti kiirusvektoriga, toimub laetud osakese liikumine ringjoont mööda. Ringjoone raadiust r ei ole raske määrata, kui panna tähele, et elektromagnetiline jõud kutsub esile kiirenduse $\frac{v^2}{r}$, mis on risti liikumissuunaga. Kui m on osakese mass, siis saame, et $qvB = \frac{mv^2}{r}$ või $r = \frac{m}{q}\frac{v}{B}$. Järelikult kui $B = \text{const}$, siis $r = \text{const}$.

Poole ringjoone läbimise aeg $\tau = \frac{\pi r}{v} = \pi \frac{m}{q}\frac{1}{B}$. Ajavahemiku τ möödumisel asetseb osake jällegi kambritevahelise ruumi läheduses. Kui selleks hetkeks muuta kambritevahelise pinge märki, siis kiirendatakse osakest elektrivälja mõjul uuesti ja ta siseneb kambri a õõnsusesse suurema kiirusega. Ta läbib kambris a poolringi, kuid juba suurema raadiusega.

Väga oluliseks osutub asjaolu, et poolringi läbimise aeg τ alalismagnetväljas ei sõltu osakese kiirusest v, niikaua kuni osakese massi võib lugeda sõltumatuks tema kiirusest. Seetõttu ilmub osake uuesti kambritevahelisse ruumi sama ajavahemiku τ möödumisel. Järelikult kui rakendada kambritele kõrgsageduslik vahelduvpinge, mille periood on 2τ, nii et pinge saavutaks maksimaalväärtusi U_m neil hetkedel, mil osake läbib kambritevahelist ruumi, siis saab osake iga kord samamärgilise kiirenduse. Kui osake, liikudes spiraali mööda, läbib kambritevahelise ruumi n korda, siis saavutab ta samasuguse kiiruse, mille ta saavutaks, liikudes elektriväljas punktide vahel, mille potentsiaalide vahe on nU_m.

Kiiresti liikuvate osakeste väljaviimiseks tsüklotronist on küllaldane, kui vastaval kaugusel kambrite tsentrist luua lisa-alalis-elektriväli kambri b seina ja spetsiaalse plaadi c vahel (joon. 231).

Ülaltoodud kaalutlused on õiged niikaua, kui osakese kiirus jääb märgatavalt väiksemaks valguse kiirusest, s. o. $v \ll c$, sest v lähenemisel c-le on vaja arvestada osakese massi suurenemist tema kiiruse suurenemisel, millest oli juttu § 56. Massi suurenemise tõttu on võimatu saavutada kiirust v, mis on võrdne valguse kiirusega.

Tsüklotronid võimaldavad saada deuterone, mille energia on kuni 10 ... 25 MeV. Osakeste väga suure kiiruse korral suureneb nende massi kasvamise tõttu osakese ringorbiidil tiirlemise aeg 2τ, mis tekitab mittevastavuse selle ajavahemiku ja kiirendava

pinge perioodi T vahel. Seda mittevastavust saab kõrvaldada sel teel, et muudetakse vajalikul viisil kiirendava pinge sagedust vastavalt osakeste kiirendumisele. Sellist seadet nimetatakse *fasotroniks*. Üks suurimaid fasotrone maailmas, mis võimaldab saada prootoneid energiaga 680 MeV, on ehitatud NSV Liidus Ühendatud Tuumauurimiste Instituudis. Veel suurem efekt saavutatakse niinimetatud *sünkrofasotronides*, milledes tagatakse osakeste liikumine muutumatu raadiusega orbiidil. See võimaldab loobuda massiivpoolustega elektromagnetist ja luua rõngakujuline elektromagnet, mille poolused asetsevad ainult piki rõngakujulist vaakuumkambrit. Seetõttu on võimalik võrdlemisi piiratud materjalikulu juures ehitada üpris suure raadiusega elektromagnet ja vastavalt ka kamber, mis võimaldab saada väga suure energiaga osakesi.

Vajadus suurendada orbiidi raadiust osakese energia suurenemisel tuleneb järgmistest lihtsatest kaalutlustest. Osakese kogu energia W, mis koosneb tema endaenergiast aeglasel liikumisel ja kineetilisest energiast, on võrdne mc^2. Ringorbiidil liikumisel kehtib võrdus

$$\frac{mv^2}{r} = qvB.$$

Järelikult

$$W = mc^2 = \frac{qc}{\beta} rB,$$

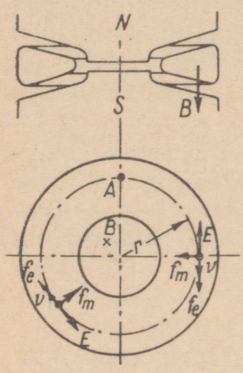
kus $\beta = \frac{v}{c}$. Suurte kiiruste juures $\beta \approx 1$, ja suurus W on võrdeline korrutisega rB. Kuna induktsiooni võib suurendada ainult kuni teatud piirini, siis suurte energiate saamiseks on vaja suurendada orbiidi raadiust r.

Ühendatud Tuumauurimiste Instituudi sünkrofasotron võimaldab saada prootoneid energiaga kümme miljardit elektronvolti. Tema tasakaaluorbiidi raadius on 28 m. Osakesed viiakse kambrisse eelkiirendaja abil juba küllaltki suure kiirusega. Seejärel neid kiirendatakse sünkrofasotronis kõrgsagedusliku vahelduvelektrivälja abil samal viisil kui tsüklotronis ja fasotroniski, kusjuures sagedus muutub vastavalt osakeste kiirenemisele. Üheaegselt muudetakse sobival viisil ka magnetvälja, et hoida osakesi muutumatul ringorbiidil. Suure intensiivsusega osakeste kimpude saamiseks omab väga suurt tähtsust osakese liikumise faasi automaatse stabiliseerimise (autofaseerimise) omadus, s. o. omadus, et kogu kiirendustsüklit on võimelised läbima mitte ainult need osakesed, nn. resonantsosakesed, millede kiirus kambrisse sisenemisel rangelt vastab kiirendava välja sagedusele, vaid ka need osakesed, mis omavad resonantsosakeste kiirusest erinevat, kuid sellele lähedast sisenemiskiirust.

Kõigis ülaltoodud näidetes kasutatakse liikuvate osakeste

juhtimiseks kas elektri- või magnetvälja. Tsüklotronis ja fasotronis kasutatakse osakeste kiirendamiseks elektrivälja, ringikujuliste teekondade saamiseks aga magnetvälja. Nendes seadmetes aga ei ole elektriväli ja magnetväli omavahel vahetult seotud ning sisuliselt on meil siin tegemist ainult kahe erineva välja lihtsa superpositsiooniga.

Kaasaegses eksperimentaalfüüsikas kasutatakse ka teistsugust seadet, mis on määratud väga kiirete elektronide saamiseks ja mis on saanud nimetuseks *beetatron*. Beetatronis toimub nii elektronide kiirendamine kui ka nende teekonna kõverdamine ühtse elektromagnetilise välja mõjul. Elektriväli ja magnetväli on beetatronis teineteisega seotud ja nad on ühtse elektromagnetilise protsessi kaks külge. Selles suhtes pakub beetatroni töötamispõhimõttega tutvumine erilist huvi.



Joon. 232.

Vahelduvvooluga toidetava mähisega elektromagneti (joon. 232) pooluste vahele on paigutatud silindriline kamber, milles toimub elektronide kiirendamine kõrge vaakuumi juures. Elektronide kiirendamiseks kasutatakse ajavahemikku, mille kestel magnetvoog monotoonselt suureneb nullväärtuselt kuni mingi lõpliku väärtuseni. Kujutleme mõttes ringkontuuri, mis asetseb kambri sees magnetilise induktsiooni joontega risti oleval tasapinnal ja aheldab osa elektromagneti magnetvoost. See kontuur on joonisel kujutatud kriipspunktjoonega. Kuna selle kontuuriga piiratud pinda läbiv magnetvoog Φ muutub ajas, siis indutseeritakse kontuuris emj., mis võrdub $-\frac{d\Phi}{dt}$. Emj. tekkimine tähistab elektrivälja ilmumist, sest vastavalt üldisele definitsioonile on emj. võrdne elektrivälja tugevuse joonintegraaliga. Võttes elektrivälja tugevuse vektori joonintegraali mööda vaadeldavat kontuuri, saame:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Ajas muutuva magnetvälja tõttu tekkiv elektriväli ei ole seotud elektrilaengutega ja vastavalt sellele on niisuguse elektrivälja jooned kinnised.

Joonise 232 alumise projektsiooni kohaselt on magnetvoog suunatud vaatlejast eemale ja olgu ta suurenev. Seejuures indutseeritakse kontuuris emj., mille suund on näidatud vektori **E** suunaga. Tõepoolest, kui kriipspunktjoonega näidatud ringjoonega ühtiks juhtivast ainest suletud keerd, siis kooskõlas elektromagnetilise inertsi printsiibiga tekiks viimases vool, mille enda-

induktsiooni voog oleks suunatud suurenevale välisele voole vastu, s. o. vool tekiks suunas, mis on näidatud vektori **E** suunaga. Suletud juhtmekeeru puudumisel juhtivusvoolu ei teki, kuid sellest sõltumata tekib ruumis indutseeritud elektriväli.

Ilmugu hetkel, mil voog hakkab oma nullväärtuselt suurenema, kontuuri punkti A vabu elektrone. Tekkivas elektriväljas mõjub elektronidele jõud $\mathbf{f}_e = -e\mathbf{E}$, mis on suunalt vektorile **E** vastupidine, sest elektroni laeng on negatiivne. Tähise e abil märgime, nagu tavaliselt, elektroni laengu absoluutväärtust. Selle jõu mõjul hakkavad elektronid liikuma. Liikuvatele elektronidele mõjub veel magnetvälja poolt jõud $\mathbf{f}_m = -e[\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}]$. Jõu $\mathbf{f}_m$ suund on näidatud joonisel 232.

Jõudude $\mathbf{f}_e$ ja $\mathbf{f}_m$ mõjul võib saavutada, et elektron liigub ringorbiidil. Leiame selleks vajalikud tingimused. Tähistame ringorbiidi raadiuse tähega r. Välja täieliku sümmeetria puhul orbiidi tsentri suhtes jaotub emj. piki orbiiti ühtlaselt ja võib kirjutada:

$$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = E_t \cdot 2\pi r = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Kuna E_t võib olla nii positiivne kui negatiivne, siis on talle pandud indeks t, et eraldada teda vektori **E** moodulist.

Kiirenduse piki orbiiti põhjustab jõud $f_{et} = -eE_t$. Järelikult

$$f_{et} = -eE_t = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}.$$

Seega

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Kuna $r = \text{const}$ ja $v = 0$, kui $\Phi = 0$, siis

$$v = \frac{e}{2\pi r m}\Phi.$$

Elektron hoitakse ringorbiidil jõu $\mathbf{f}_m$ mõjul, mis peab tasakaalustama tsentrifugaaljõu. Järelikult peab olema rahuldatud võrrand

$$Bev = \frac{mv^2}{r} \quad \text{ehk} \quad B = \frac{m}{e}\frac{v}{r},$$

kus B on magnetilise induktsiooni väärtus orbiidil, s. t. orbiidi punktides. Asetades magnetilise induktsiooni avaldisse kiiruse v asemele tema avaldise voo Φ kaudu, saame:

$$B = \frac{1}{2}\frac{\Phi}{\pi r^2}.$$

Saadud seos näitab, et magnetiline induktsioon peab orbiidil olema kaks korda väiksem orbiidiga haaratava ringi pinna keskmisest induktsioonist. Selle saavutamiseks on vaja magnetvälja orbiidiga haaratava pinna keskosas vastavalt tugevdada.

Seda saab teostada pooluste vahekauguse vähendamisega, nagu näidatud joonisel 232.

Uurime elektroni ringorbiidi stabiilsuse küsimust. Kui võrdus $2\pi r^2 B = \Phi$ on rahuldatud raadiuse r mingis muutumisvahemikus, siis terve selle vahemiku ulatuses on võimalik mistahes ringorbiit. Järelikult mistahes juhuslik raadiuse muutumine juhuslike häirete mõjul viib elektroni uuele ringorbiidile. Seaduse, millele seejuures allub magnetilise induktsiooni sõltuvus raadiusest, leiame võrduse $2\pi r^2 B = \Phi$ diferentseerimisel. Märkides, et $d\Phi = B \cdot 2\pi r\, dr$, saame:

$$2\pi \left(B \cdot 2r\, dr + r^2 \frac{\partial B}{\partial r} dr \right) = B \cdot 2\pi r\, dr \quad \text{või}$$

$$\frac{B}{r} + \frac{\partial B}{\partial r} = 0,$$

s. t. $-\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{B}{r}$, ja järelikult $B = \frac{\text{const}}{r}$.

Beetatronis tuleb aga luua tingimused, et elektroni liikumine oleks stabiilne mööda üht kindlat orbiiti, mille raadius on r_0. See tähendab, et võrdus $2\pi r^2 B = \Phi$ peab olema rahuldatud ainult $r = r_0$ korral. Magnetilise induktsiooni B sõltuvus r-st $r = r_0$ läheduses peab olema selline, et elektroni orbiidi raadiuse juhuslikul suurenemisel suuruse δ_r võrra elektromagnetiline jõud f_m oleks suurem tsentrifugaaljõust, ja raadiuse juhusliku vähenemise korral ta oleks tsentrifugaaljõust väiksem. Kuna suurus f_m on võrdeline magnetilise induktsiooniga, siis ilmselt muutub orbiit, mille raadius on r_0, stabiilseks, kui on rahuldatud järgmised tingimused:

$$B > \frac{1}{2} \frac{\Phi}{\pi r^2}, \quad \text{kui} \quad \delta r > 0$$

ja

$$B < \frac{1}{2} \frac{\Phi}{\pi r^2}, \quad \text{kui} \quad \delta r < 0.$$

Need tingimused on rahuldatud, kui stabiilse orbiidi läheduses väheneb induktsioon r-i suurenedes aeglasemalt kui sel juhtumil, kui kõik naaberorbiidid on võimalikud. Järelikult on need tingimused rahuldatud, kui $r = r_0$ puhul kehtib võrratus

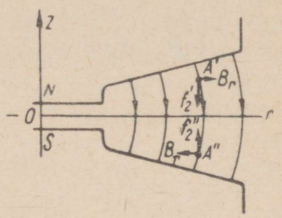
$$-\frac{\partial B}{\partial r} < \frac{B}{r}.$$

See võrratus on näiteks rahuldatud, kui B ja r vahel kehtib sõltuvus $B = \frac{\text{const}}{r^n}$, kusjuures $0 < n < 1$.

Vertikaalsihis tagatakse orbiidi stabiilsus magnetilise induktsiooni joonte kõverdumisega (joon. 233) ning poolustevaheliselt

keskmiselt tasapinnalt kõrvalekaldumisel magnetilise induktsiooni horisontaalsete (radiaalsete) komponentide B_r tekkimisega. Vastavalt, nagu kerge on taibata, mõjuvad elektronile, mis liigub ringorbiidil (joon. 233, punktides A' või A'' suunaga joonise pinnalt vaatleja poole) punktides A' või A'' vastavalt jõud f_z' või f_z'', mis püüavad elektroni keskmisele tasapinnale tagasi nihutada.

Beetatronid ehitatakse elektronide saamiseks, mille energia on suurusjärgus sajad miljonid elektronvoldid. Suuremate energiatega elektronide saamiseks kasutatakse *sünkrotrone*. Nendes, samuti kui beetatroniski, toidetakse elektromagneti mähist vahelduvvooluga ja kasutatakse ajavahemikku, mille vältel magnetväli tugevneb. Sünkrotronis on elektromagneti poolused rõngakujulised nagu sünkrofasotroniski. Seespool orbiiti puudub seetõttu küllaldase suurusega ajaliselt tugevnev magnetvoog, mis võiks tagada elektronide kiirendamiseks küllalt tugevat indutseeritud elektrivälja, nagu see esineb beetatronis. Elektrone kiirendatakse sünkrotronis elektronide trajektoorile asetatud elektroodide vahelise kõrgsageduselektrivälja abil analoogiliselt sellele, nagu see esineb tsüklotronides ja fasotronides. Kui elektronide sisseviimine toimub seejuures nii suurel kiirusel, mis on juba lähedane valguse kiirusele, siis elektronide edasisel kiirendamisel muutub nende kiirus hoopiski tähtsusetult ja energia kasvab ainult elektronide massi suurenemise arvel. Seetõttu osutub võimalikuks toita kiirendavat süsteemi konstantse sagedusega pingeallikast.



Joon. 233.

§ 80. Elektriliste ja magnetiliste nähtuste ühtsus

Esimese osa lõpetamiseks pühendame tähelepanu juba mitmel korral mainitud tihedale seosele elektriliste ja magnetiliste nähtuste vahel.

Elektrilaenguga elementaarosakesed on ümbritsetud elektriväljast. Elektrinihke vektori voog läbi iga kinnise pinna, mis haarab osakese laenguga q, võrdub vastavalt Maxwelli postulaadile selle osakese laenguga, s. t.

$$\oint \mathbf{D}\, d\mathbf{s} = q.$$

Siinjuures kehtib vektori **D** ja elektrivälja tugevuse vektori vahel seos

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Elementaarosakesed (elektronid, prootonid jt.) asuvad pidevas liikumises ja on järelikult ümbritsetud ka magnetväljast. Paragrahvis 56 leiti magnetvälja tugevuse H avaldis kiirusega $v \ll c$ liikuvale elektrilaenguga q osakesele ja samuti vaadeldi kvalitatiivselt osakese elektri- ja magnetvälja muutumise iseloomu osakese kiiruse suurenemisel.

Magnetvälja tugevus määrati koguvoolu seaduse alusel:

$$\oint \mathbf{H}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = i,$$

kusjuures i all mõisteti elektrilist nihkevoolu, mis tekib liikuva elektrilaenguga osakese ümber. Nihkevoolu tihedus avaldub seosega

$$\delta = \frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t}.$$

Sellele vastavalt võib antud juhtumil koguvoolu seaduse kirjutada kujul

$$\oint \mathbf{H}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_s \frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_s \mathbf{D}\, \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{\mathrm{d}\Psi_D}{\mathrm{d}t},$$

kus $\Psi_D = \int_s \mathbf{D}\, \mathrm{d}\mathbf{s}$ on elektrinihke vektori voog läbi pinna s, mis on piiratud kontuuriga, mida mööda võetakse magnetvälja tugevuse ringintegraal.

Vaadeldes osakest ümbritsevas ruumis osakese liikumise joont läbivatel tasapindadel mõtteliselt võetud kinnisi kontuure, me konstateerisime, et magnetvoog Φ läbi nende kontuuridega piiratud pinna s muutub ajas, sest osake liigub nende kontuuride suhtes. Vastavalt elektromagnetilise induktsiooni seadusele

$$\oint \mathbf{E}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

indutseeritakse nendes kontuurides elektromotoorsed jõud, s. t. ruumis, kus need kontuurid asuvad, tekib muutuva magnetvoo poolt indutseeritud elektriväli.

Kuna $\Phi = \int_s \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{s}$, siis võib elektromagnetilise induktsiooni seaduse kirjutada kujul

$$\oint \mathbf{E}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_s \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Indutseeritud elektrivälja tekkimine muudab liikuva osakese välja, võrreldes osakese väga aeglase liikumise korral esineva väljaga.

Magnetilise induktsiooni vektori jooned on kõikidel juhtumitel pidevad, mis matemaatiliselt väljendub järgmisel kujul:

$$\oint_s \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0.$$

Seega eksisteerib liikuva elektrilaenguga osakese ümber ühtne elektromagnetiline väli, mille kaks külge — elektriväli ja magnetväli — on tihedalt teineteisega seotud. See nende vastastikune seos väljendubki ülaltoodud võrrandites.

Elektrilaenguga elementaarosake ja tema elektromagnetiline väli kujutavad endast mateeria eriliiki. Elektrilaenguga osake ei ole mõeldav ilma osakese elektromagnetilise väljata. Seevastu elektromagnetiline väli kui mateeria eriliik võib esineda ka osakesest lahus footoni või antennist kiiratud elektromagnetilise välja kujul. Niisugust välja iseloomustavad võrrandid on samad mis liikuva osakese elektromagnetilise välja puhulgi, ainult võrrandi $\oint \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = q$ asemel kehtib nüüd kõikjal $\oint \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0$.

Seega on välja põhivõrrandite kogum sel juhtumil järgmine:

$$\oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{\mathrm{d}\Psi_D}{\mathrm{d}t};$$

$$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t};$$

$$\oint_s \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0; \quad \oint_s \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0.$$

Esimesed kaks võrrandit näitavad, et muutuv elektriväli tekitab magnetvälja ja muutuv magnetväli omakorda tekitab elektrivälja. Koos moodustavad need väljad ühtse elektromagnetilise välja. Teised kaks võrrandit näitavad seda, et sel juhtumil on mitte ainult magnetvälja jooned, vaid ka elektrivälja jooned kõikjal pidevad.

Nagu me näitame kursuse kolmandas osas, peab niisugune laetud osakestest eraldatud elektromagnetiline väli tingimata liikuma temale omase kiirusega — valguse kiirusega c. Laetud osakesele kuuluv elektromagnetiline väli aga, nagu ka osake ise, saab liikuda osakesega koos kui tervik ainult valguse kiirusest c väiksema kiirusega.

Elektromagnetiline väli on teatud energiahulga kandjaks. Elektromagnetilise välja energia ruumtihedus moodustub tema elektri- ja magnetvälja energiate ruumtihedustest:

$$W' = W_e' + W_m' = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

Seega on elektromagnetilise välja liikumine alati seotud energia ülekandmisega. Seda äärmiselt tähtsat asjaolu uuritakse spetsiaalselt kursuse kolmandas osas. Muidugi omab elektromagnetiline väli kui mateeria liik ka rea teisi omadusi: inertne mass, liikumishulk jne., kuid praktilisest seisukohast on meie jaoks kõige tähtsam tema energeetiline iseloomustus.

Teose esimeses osas toodud põhilisi füüsikalisi kujutlusi ja seoseid arendatakse edasi viimases osas, mis on tervenisti pühendatud elektromagnetilise välja uurimisele. Need kujutlused ja seosed on aga täiesti vajalikud ka elektri- ja magnetahelates ning eriti vahelduvvooluahelates toimuvate elektromagnetiliste protsesside sügavaks uurimiseks, mis on kursuse teise osa aineks.

Füüsika iga osa ülesehitamisel on väga tähtis aluseks võtta minimaalne vajalik hulk katseliste faktidena võetavaid seoseid, mida koos nende vastavate üldistustega käsitatakse aksioomidena. Ülejäänud seosed peavad neist tulenema kui järeldused, s. t. olema teoreemideks.

Eespool on eksperimendist ja eksperimendi üldistustest tulenevatena võetud põhialusteks Maxwelli postulaat, magnetvoo pidevuse printsiip, elektromagnetilise induktsiooni seadus ja koguvoolu seadus.

Coulomb'i katselise seaduse ja sellest homogeense ja isotroopse keskkonna ning elektrostaatilise välja juhtumi jaoks tuleneva Gaussi teoreemi alusel, mida seejärel üldistati iga keskkonna ja iga ajaliselt muutuva elektrivälja jaoks, saime Maxwelli postulaadi

$$\oint_s \mathbf{D}\,\mathrm{ds} = q,$$

mis seob elektrivälja osakeste või kehade elektrilaengutega.

Magnetilise induktsiooni joonte pidevuse katseline fakt, mis vahetult on kontrollitav igal pool elektrivoolusid ümbritsevas magnetväljas, kus see kontrollimine on võimalik, ja mis aine elementaarvoolude ja aine elementaarosakeste magnetiliste momentide kaasaegsete füüsikaliste kujutluste alusel on üldistatud ka magnetvälja juhtumile iga tahke aine sees, kus vahetu eksperiment on võimatu, on meil formuleeritud magnetvoo pidevuse põhiprintsiibina:

$$\oint_s \mathbf{B}\,\mathrm{ds} = 0.$$

See printsiip ütleb, et looduses ei esine magnetilisi masse kui magnetvälja joonte allikaid, mis oleksid analoogilised elektrivälja joonte allikateks olevate osakeste või kehade elektrilaengutega.

Katselisel teel juhtivatest kehadest suletud elektriahelate jaoks

kindlakstehtud elektromagnetilise induktsiooni seadus, mis on üldistatud mistahes keskkonnas ja muutuvas magnetväljas igale mõtteliselt võetavale kontuurile, annab üheks elektromagnetilise välja põhivõrrandiks

$$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

See võrrand seob muutuvat magnetvälja muutuva magnetvälja puhul tekkiva elektriväljaga, mille väljajooned on pidevad, s. t. kinnised.

Samuti juhtivus- ja konvektsioonivoolude puhul katselisel teel kindlakstehtud koguvoolu seadus, mis on üldistatud kõikidele elektrivoolu liikidele, kaasa arvatud ka elektrilised nihkevoolud, annab teiseks elektromagnetilise välja põhivõrrandiks

$$\oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = i.$$

See võrrand seob elektriliselt laetud osakeste ja kehade liikumist ning ajaliselt muutuvat elektrivälja neil juhtumeil tekkiva magnetväljaga.

Võtnud need seosed põhilisteks, saame teised sõltuvused nende järeldustena. Näiteks Biot'-Savart'i-Laplace'i seadus, mis määrab vooluelemendi magnetvälja tugevuse (§ 56), saadakse näidatud põhiseoste järeldusena. Täpselt samuti saadakse kõik elektromagnetilise jõu avaldised (§ 73 ... 75) nende seoste järeldusena, kasutades energia jäävuse seadust.

Siin on huvitav märkida, et kui tuua sisse magnetilise induktsiooni mõiste, kasutades magnetväljas voolujuhtmele mõjuvat mehaanilist jõudu, siis õnnestub elektromagnetilise induktsiooni seadust tuletada ainult liikuvate vooluringide jaoks, sest ainult sel puhul teeb elektromagnetiline jõud tööd. Elektromagnetilise induktsiooni seaduse õigsust muutuvas magnetväljas asuvate liikumatute vooluringide puhul aga tuleb uuesti põhjendada katsega.

Elektromagnetilise välja teooriale pühendatud viimase osa esimestes paragrahvides näeme, et mistahes vektori välja täielikuks määramiseks on vaja teada selle vektori joonintegraalide väärtusi mööda kõiki võimalikke suletud kontuure ja samuti teada vektori joonte allikaid, s. o. selle vektori pindintegraalide väärtusi mööda kõiki võimalikke kinnisi pindasid. See just ongi arvesse võetud ülalvalitud põhiseostes. Seega ei ole nende põhiseoste valik juhuslik, vaid tihedalt seotud uuritavate nähtuste olemusega.

MKSA- JA CGS-SÜSTEEMIDE ÜHIKUTE VAHELISED SEOSED

Vastavalt Standardite, Mõõtude ja Mõõteriistade Komitee poolt 10. VII 1956. a. kinnitatud ГОСТ-ile 8033-56, mis hakkas kehtima alates 1. jaanuarist 1957. a., on kehtestatud elektrilisteks ja magnetilisteks mõõtmisteks põhilisena absoluutne praktiline ühikute süsteem MKSA, mille põhiühikuteks on meeter, kilogramm, sekund ja amper.[1] Selles süsteemis on elektromagnetilise välja võrrandite ratsionaliseeritud kirjutusviisi puhul elektriline konstant

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi c_0^2} \cdot 10^7 \text{ faradit meetri kohta}$$

(kus c_0 on valguse kiiruse numbriline väärtus tühjuse puhul, väljendatud meetrites sekundis) ja magnetiline konstant

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ henrit meetri kohta.}$$

Selle standardiga on lubatud samuti elektrilisteks ja magnetilisteks mõõtmisteks kasutada ka absoluutset CGS-süsteemi, mille põhiühikuteks on sentimeeter, gramm ja sekund ning milles elektriline konstant ε_0 ja magnetiline konstant μ_0 elektromagnetilise välja võrrandite ratsionaliseerimata kirjutusviisi puhul võrduvad ühega.

Peale selle lubatakse süsteemiväliste ühikutena kasutada energiaühikuid elektronvolt ($1\ \text{eV} = 1{,}60207 \cdot 10^{-9}$ J), kiloelektronvolt ($1\ \text{keV} = 10^3\ \text{eV}$) ja megaelektronvolt ($1\ \text{MeV} = 10^6\ \text{eV}$).

MKSA ja CGS ühikute vahelised seosed on toodud tabelis.

---

[1] Alates 1. jaanuarist 1963 on NSV Liidus mõõtühikute eelissüsteemiks rahvusvaheline mõõtühikute süsteem (SI), milles põhiühikuteks on pikkusühik meeter, massiühik kilogramm, ajaühik sekund, vooluühik amper, termodünaamilise temperatuuri ühik Kelvini kraad (°K) ja valgustugevuse ühik kandela (cd). Rahvusvaheline mõõtühikute süsteem sisaldab kõik ratsionaliseeritud MKSA-süsteemi ühikud, välja arvatud elektrijuhtivuse ühik *siimens* ja magnetilise induktsiooni ühik *tesla*. Need kaks ühikut on võrdlustabelisse juurde lisatud. — *Toim.*

Jrk. nr.	Suuruse nimetus	Ühiku nimetus ja tähis				1 CGS ühik võrdub
		MKSA-süsteemis		CGS-süsteemis		
1	Mehaaniline jõud	njuuton	N	düün	dyn	10^{-5} N
2	Töö ja energia	džaul	J	erg	erg	10^{-7} J
3	Võimsus	vatt	W	—	—	10^{-7} W
4	Elektrilaeng	kulon	C	—	—	$\frac{1}{c_0} \cdot 10$ C
5	Elektripinge, emj., elektripotentsiaalide vahe	volt	V	—	—	$c_0 \cdot 10^{-8}$ V
6	Elektrivälja tugevus	—	V/m	—	—	$c_0 \cdot 10^{-6}$ V/m
7	Elektrimahtuvus	farad	F	—	—	$\frac{1}{c_0^2} \cdot 10^9$ F
8	Elektrivool	amper	A	—	—	$\frac{1}{c_0} \cdot 10$ A
9	Elektritakistus	oom	Ω	—	—	$c_0^2 \cdot 10^{-9}$ Ω
10	Elektrijuhtivus	siimens	S	—	—	$\frac{1}{c_0^2} \cdot 10^9$ S
11	Magnetvoog	veeber	Wb	maksvell	Mx	10^{-8} Wb
12	Magnetiline induktsioon	tesla	T	gauss	Gs	10^{-4} T
13	Induktiivsus ja vastastikune induktiivsus	henri	H	—	—	$c_0^2 \cdot 10^{-9}$ H
14	Magnetomotoorne jõud	amper või amperkeerd	A At	gilbert	Gb	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10$ A
15	Magnetvälja tugevus	—	A/m	örsted	Oe	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^3$ A/m

Märkus. Sümboliga $c_0 \approx 2{,}998 \cdot 10^{10} \approx 3 \cdot 10^{10}$ on tähistatud valguse kiiruse numbrilist väärtust tühjuse puhul, väljendatuna sentimeetrites sekundis.

SISUNÄITAJA

absoluutne dielektriline läbitavus 27
absoluutne dielektriline vastuvõtlikkus 45
absoluutne magnetiline läbitavus 199
ahela haru 92
ahela sõlm 92
aheldusvoog 170
aktiivne neliklemm 147
aktseptor 137
algmagneetimiskõver 202
Aepinus, F., elektriliste ja magnetiliste nähtuste sugulusest 12, 42
Ampère, voolu ja magnetvälja seosest 191, kahe vooluelemendi vastastikusest toimest 258
amper 81
Andrianov, K. A., räniorgaanilised isoleermaterjalid 69
Andronov, A. A., mittelineaarsete protsesside teooria 16
asegeneraator 116
autofaseerimine 267

ballistiline galvanomeeter 159
barretter 129, 153
beetatron 268
Benardos, N. N., elektrikaarkeevitus 132
bifilaarsilmus 226
Biot'-Savart'i-Laplace'i seadus 196
Bogoroditski, N. P., uued isoleermaterjalid 69
Borgmann, I. I., dielektrikuskadudest 69

Coulomb, erinevusest magnetiliste masside ja elektrilaengute vahel 13
Coulomb'i seadus 28
Curie' punkt 203

diamagnetilised ained 200
dielektrikud 21
dielektrikuskadu 69
dielektriline hüstereesikadu 71
dielektriline läbitavus 27
dielektriline polarisatsioon 44
dipooli elektriline moment 38
donaator 136
dünaamiline hüstereesisilmus 207
dünaamiline induktiivsus 225
dünaamiline juhtivus 126
dünaamiline karakteristik 126
dünaamiline mahtuvus 63
dünaamiline takistus 126
dünaamiline vastastikune induktiivsus 230
Eichenwald, A. A., nihkevoolude magnetvälja uurimine 195
ekvivalentne generaator 116
ekvivalentne induktiivsus 233, 234
ekvivalentse generaatori teoreem 116
elavhõbeventiil 133
elekter 19
elektriahel 38
elektridipool 37
elektrierijuhtivus 82
elektrieritakistus 82
elektrihulk 19
elektrijuhtivus 21, 94
elektrikaar 131
elektrilaeng 18, 20
elektrilaenguga osakesele mõjuv jõud 261
elektriline hüstereesinähtus 60
elektriline hüstereesisilmus 62
elektriline konstant 26
elektriline moment 45
elektriliselt muutumatu kontuur 174
elektriliste ja magnetiliste nähtuste ühtsus 271
elektriliste potentsiaalide vahe 36, 179
elektrimahtuvus 55
elektrinihe 51
elektrinihke jooned 53
elektrinihke toru 53
elektripinge 33, 177

elektritakistus 93
elektrivool 80
elektrivoolu pidevuse printsiip 88
elektrivoolu tugevus 80
elektriväli 20
elektrivälja tugevus 25, 35
elektrivälja tugevuse jooned 26
elektromagnetiline inerts 175
elektromagnetiline jõud, elektrodünaamiline jõud 244
elektromagnetiline jõud kahe vooluringi korral 251
elektromagnetilise induktsiooni seadus 165
elektromagneti tõstejõud 248
elektromotoorne jõud 38, 177
emj. allikas 41, 113
elektronide donaator 136
elektroni kvantolek 22
elektronkiir 261
elektronostsillograaf 261
elektronseadis 133
elektronvolt 45
elektrostaatika 21
elektrostaatiline väli 21
elementaarelektrivool 187
endainduktsiooni emj. 172
endainduktsioonivoog 172
energiaallikas 41
energia jaotumine elektriväljas 66
energia ruumtihedus elektriväljas 67
energiavöönd 23

Faraday, elektromagnetilise induktsiooni avastamine 14, elektromagnetilise induktsiooni seadus 167, kujutlus mehaaniliste jõudude olemusest 77
farad 56
fasotron 267
ferriidid 210
ferromagnetilised ained 201
fokuseerimine magnetväljaga 264
footon 19
Foucault' voolud 234

gasotron 134
Gaussi teoreem 28, 30
Gaussi üldistatud teoreem 51
Gilbert, magnetilistest ja elektrilistest nähtustest 12

hargmagnetahel 215
henri 183
Hertz, H., elektromagnetiliste lainete tekitamise ja levimise katsed 14
homogeenne keskkond 24
hulknurkühendus 120

huumlamp 130
hüsterees 202
hüstereesikaod 205
hüstereesisilmus 219

induktiivsus 224
indutseeritud emj. 166
ioonseadis 133
isotroopne keskkond 25
iteratsioonimeetod 151

Jablotškov, P. N., elektriküünla leiutamine 132
Joffe, A. F., katoodkiirte magnetväli 195
juhtivad ained 21
juhtivuselektron 21
juhtivusvool 82
juhtivusvöönd 23
jõud laetud kehade süsteemis 74
järjestikahel 101
järjestikmagnetahel 213
järjestikühendus 101
järkjärgulise lähenemise meetod 151
jääkinduktsioon 202, 205, 219
jääkmagneetumus 202, 205
jääknihe 60
jääkpolariseerumus 60

Kapljanski, A. J., elektrimasinad elektrivälja vahendusel 260
kenotron 133
Kirchhoffi esimene seadus 96
Kirchhoffi teine seadus 97
klemmipinge 101
klemmipinge vahelduvvooluahelas 178
koaksiaalkaabli induktiivsus 227
koertsitiivjõud 202, 219
koguvool 192
koguvoolu seadus 192
kolmnurkühendus 120
kommutaator 173
kondensaator 57
kondensaatori dünaamiline karakteristik 62
kondensaatori staatiline karakteristik 62
kondensaatorite järjestikühendus 59
kondensaatorite paralleelühendus 59
kontuuri omatakistus 108
kontuuride vastastikune takistus 109
kontuuride ühistakistus 109
kontuurvool 108
kontuurvoolumeetod 108
konvektsioonivool 84
kulon 28
Kurtšatov, I. V., senjettelektrikute uurimine 60

kuusklemm 149
kvaasielastsed dipoolid 46
küllastus 200

laengu joontihedus 32
laetud kehade süsteemi energia 65
lahtimagneetimiskõver 219
Latšinov, D. A., uurimus energiaülekandest 105
Lebedev, P. N., valguse elektromagnetilise loomuse uurimine, valguse rõhu avastamine 14
Lenin, V. I., Nõukogudemaa elektrifitseerimisest 11
Lenz, E. H., elektromagnetilise inertsi printsiip 14
Lenzi printsiip 175
Lenzi-Joule'i seadus 98
liitahel 105
liitmagnetahela arvutus 217
lineaarne elektriahel 100
lineaarsed elemendid 100
lineariseerimine 154
Lomonossov, M. V., tööd elektriliste nähtuste valdkonnast 11, 12
lähtesõlm 123
magneetimisergutus 192
magneetimiskõver 217
magneeto 220
magneetumus 188
magnetahel 211
magnetahela seadus 212
magnetiline induktsioon 160
magnetiline juhtivus 216
magnetiline konstant 182
magnetiline läbitavus 199
magnetiline mass 164
magnetiline moment 189
magnetiline takistus 212
magnetiline telg 200
magnetiline vastuvõtlikkus 199
magnetiline vöö 184
magnetilise induktsiooni joon 163
magnetilise induktsiooni toru 163
magnetodielektrikud 209
magnetomotoorne jõud 192
magnetostriktsioon 203
magnetvoog 161
magnetvoo pidevuse printsiip 165
magnetvoo tihedus 161
magnetväli 159
magnetvälja energia ruumtihedus 242
magnetvälja tugevus 188
magnetvälja tugevuse joon 189
magniko 209
Mandelštam, L. I., mittelineaarsete protsesside teooria 16
Maxwell, elektromagnetilise välja teooria 14, elektromagnetilise induktsiooni seadus 166
Maxwelli postulaat 49, 52
Mitkevitš, V. F., füüsikaline ettekujutus elektromagnetilistest nähtustest 14, elektrikaare uurimine 131
Mitkevitši juhis 255
mittelineaarne elektriahel 101
mittelineaarne element 101
mittelineaarne karakteristik 237
mittelineaarse karakteristikuga kondensaator 60
mittesümmeetriline element 127
MKSA-süsteem 27

neliklemm 147
neliklemmi aseskeemid 148
nihkevool 85
nihkevoolu tiheduse vektor 87
n-tüüpi pooljuht 22

Oersted, elektrivoolu mehaaniline mõju magnetnõelale 13
Ohmi seadus 92
omainduktiivsus, induktiivsus 172, 224
oom 82, 93
osahüstereesisilmus 220

Papaleksi, N. D., mittelineaarsete protsesside teooria 16
paralleelahel 102
paralleelühendus 102
paramagnetilised ained 200
parema käe juhis 168
passiivne element 127
passiivne neliklemm 147
permalloi 209
Petrov, V. V., elektrikaare avastamine 131
pinge 177
pingelang 34
pingestabilisaator 153
pinge stabiliseerimine 130
pinnanähtus 236
Pirotski, F. A., energiaülekanne 105
p-n üleminek 137
polaarne molekul 46
polarisatsioon 53
polarisatsioonivool 85
polariseerumus 45, 49
pooli dünaamiline karakteristik 237
pooli staatiline karakteristik 237
pooljuhid 21, 134
pooljuhtdiood 134
pooljuhtventiil 134
Popov, A. S., raadio leiutamine 14

potentsiaal 35
potentsiaalide vahe 36
potentsiaalitegur 65
potentsiaalne elektriväli 36
potentsiaalväli 179
proovikeerd 159
p-tüüpi pooljuht 22
põhimagneetimiskõver 203
pöörisvoolud 207, 234
püsimagnet 218

ratsionaliseeritud ja ratsionaliseerimata kirjutusviis 28
rööpahel 102
rööpühendus 102

samapotentsiaalijoon 37
samapotentsiaalipind 37
segaühendus 102
senjettelektrikud 46, 60
seotud laeng 47, 50
sidestustegur 234
siimens 82
silla võimendustegur 156
Slavjanov, N. G., elektrikaarkeevitus 132
solenoid 186
staatiline hüstereesisilmus 207
staatiline induktiivsus 224
staatiline juhtivus 126
staatiline karakteristik 126
staatiline mahtuvus 62
staatiline takistus 126
staatiline vastastikune induktiivsus 230
stabiliseerimistegur 154
stabilitron 154
statsionaarne elektriväli 83
Steinmetz, hüstereesikadude määramine 207
Stoletov, A. G., raua magnetiliste omaduste uurimine 201
suhteline dielektriline läbitavus 27
suhteline dielektriline vastuvõtlikkus 46
suhteline magnetiline läbitavus 199
supermalloi 209
superpositsiooni printsiip, ülestusprintsiip 111
sõlmepingemeetod 123
sõltumatu kontuur 106
sõltumatu sõlm 106
sümmeetriline element 127
sümmeetriline hüstereesisilmus 202
sünkrofasotron 267
sünkrotron 271

takistuse temperatuuritegur 83
termistor 128
termoelektromotoorne jõud 42
termoelement, termopaar 42
termotakisti 128
tesla 161
toroidsüdamikuga pool 226
transpositsioon 232
tsüklotron 265
tähtühendus 120
tühjus 19
türiitelement 129

unipolaarmasin 174

vaba laeng 47
valentselektron 22
valentsvöönd 23
vasaku käe juhis 255
vastastikkuse printsiip 113, 243
vastastikune induktiivsus 173
vastastikuse induktiivsuse märk 231
vastastikuse induktsiooni emj. 173
vastastikuse induktsiooni voog 172
veeber 161
vektori voog 29
volt 34
voltamperkarakteristik 101
vooluallikas 113
vooluelement 196
voolujoon 81
voolujuhe 158
voolujuhtmele mõjuv jõud 255
vooluring 158
vooluringide süsteemi energia 240
voolu stabiliseerimine 130
voolutihedus 80
voolutoru 81
voo ühiktoru 30
välisesse välja paigutatud juhtmekeerd 252
väljatugevuse joonintegraal 35
väljatugevuse toru 26

ühikjoon 163
ühiktoru 163
üldistatud jõud 72
üldistatud koordinaadid 72
ülekandeliini kasutegur 104
ülekandevool 84
ülestusprintsiip 111
ülijuhtivus 176

SISUKORD

Sissejuhatus 11

Esimene peatükk

Elektrivälja tugevus. Elektripinge ja elektromotoorne jõud 18

§ 1. Elektrilaengut omavad elementaarosakesed ja nende elektromagnetiline väli kui mateeria eriliik 18
§ 2. Elektriväli 20
§ 3. Juhtivad ained, dielektrikud ja pooljuhid 21
§ 4. Elektrivälja tugevus 25
§ 5. Gaussi teoreem 28
§ 6. Elektripinge 33
§ 7. Elektrostaatilise välja potentsiaal 35
§ 8. Elektromotoorsed jõud 38

Teine peatükk

Dielektrikute polarisatsioon ja elektrinihe. Elektrimahtuvus 44

§ 9. Dielektrikute polarisatsioon 44
§ 10. Elektrinihe. Maxwelli postulaat 49
§ 11. Üksildase keha ja kondensaatori elektrimahtuvus 55
§ 12. Mittelineaarse karakteristikuga kondensaatorid 60

Kolmas peatükk

Elektrivälja energia ja mehaanilised avaldumisviisid 64

§ 13. Laetud kehade süsteemi energia 64
§ 14. Energia jaotumine elektriväljas 66
§ 15. Energiakaod dielektrikus vahelduvelektrivälja puhul 68
§ 16. Laetud kehadele mõjuvad jõud 72

Neljas peatükk

Elektrivool 80

§ 17. Elektrivool ja voolutihedus 80
§ 18. Vool juhtivas keskkonnas 82
§ 19. Konvektsioonivool 84
§ 20. Elektriline nihkevool dielektrikus 85
§ 21. Elektrivoolu pidevuse printsiip 88
§ 22. Alalisvooluahelate seadused 92

Viies peatükk

Lineaarsete alalisvooluahelate arvutus 100
§ 23. Lineaarsed ja mittelineaarsed elektriahelad 100
§ 24. Tarbijate järjestik-, paralleel- ja segaühendus 101
§ 25. Energiaülekanne mööda kahejuhtmelist liini 103
§ 26. Liitahelate arvutusest 105
§ 27. Kontuurvoolumeetod 108
§ 28. Superpositsiooni printsiip 111
§ 29. Vastastikkuse printsiip 113
§ 30. Elektromotoorse jõu allikate ja vooluallikate ekvivalentsuse tingimused 113
§ 31. Ekvivalentse generaatori teoreem 116
§ 32. Kolmeharulise tähtühenduse teisendamine kolmnurkühenduseks . . 120
§ 33. Sõlmepingemeetod 123

Kuues peatükk

Mittelineaarsete alalisvooluahelate arvutus 126
§ 34. Alalisvooluahela mittelineaarseid elemente 126
§ 35. Pooljuhtdioodid kui elektriahela mittelineaarsed elemendid 134
§ 36. Mittelineaarseid elemente sisaldavate emj. allikateta elektriahela osade järjestik-, paralleel- ja segaühendus 139
§ 37. Mittelineaarseid elemente ja emj. allikaid sisaldavate elektriahela osade järjestik-, paralleel- ja segaühendus 140
§ 38. Ühe mittelineaarse elemendiga liitahela arvutamine 143
§ 39. Kahe mittelineaarse elemendiga liitahela arvutamine 146
§ 40. Kolme mittelineaarse elemendiga liitahela arvutamine 149
§ 41. Nelja ja enama mittelineaarse elemendiga liitahela arvutamine. Järkjärgulise lähenemise meetod 151
§ 42. Mittelineaarsete alalisvooluahelate eriomaduste analüütiline uurimine etteantud režiimist väikeste kõrvalekaldumiste puhul 153

Seitsmes peatükk

Magnetvoog ja elektromagnetilise induktsiooni nähtus 158
§ 43. Magnetväli 158
§ 44. Magnetiline induktsioon 159
§ 45. Magnetvoog 161
§ 46. Magnetvoo pidevuse printsiip 163
§ 47. Elektromagnetilise induktsiooni seadus 165
§ 48. Aheldusvoog 170
§ 49. Enda- ja vastastikuse induktsiooni elektromotoorsed jõud 172
§ 50. Elektromagnetilise induktsiooni nähtusel põhineva kommutaatorita alalisvoolumasina ehitamise võimatus 173
§ 51. Elektromagnetiline inerts. Lenzi printsiip 175
§ 52. Elektromotoorne jõud, pinge, potentsiaalide vahe 177

Kaheksas peatükk

Magnetvälja tugevus ja koguvoolu seadus 182
§ 53. Magnetvälja seos elektrivooluga 182
§ 54. Aine magneetumus ja magnetvälja tugevus 186
§ 55. Koguvoolu seadus 191
§ 56. Liikuva, laetud osakese ja vooluelemendi magnetväli 193
§ 57. Aine magnetilised omadused 199
§ 58. Hüstereesikaod 205
§ 59. Mõnede ferromagnetiliste materjalide magnetilised omadused . . 208

Üheksas peatükk

Magnetahelate arvutus 211
§ 60. Magnetahel. Magnetahela seadus 211
§ 61. Järjestikmagnetahela arvutus 213
§ 62. Hargmagnetahelate arvutus 215
§ 63. Püsimagnetite arvutusest 218
§ 64. Püsimagnetitega magnetahelate arvutusest 220
§ 65. Magnetvälja tugevuse jaotumine piki mittehomogeenset magnetahelat 221

Kümnes peatükk

Elektriahelate induktiivsused 224
§ 66. Omainduktiivsus 224
§ 67. Vastastikune induktiivsus 229
§ 68. Seos induktiivsuste vahel. Ekvivalentsed induktiivsused 232
§ 69. Ferromagnetilisest materjalist südamikuga pooli mittelineaarne karakteristik 236

Üheteistkümnes peatükk

Magnetvälja energia ja mehaanilised avaldumisviisid 238
§ 70. Vooluringide süsteemi energia 238
§ 71. Energia jaotumine magnetväljas 240
§ 72. Vastastikkuse printsiip 242
§ 73. Elektromagnetiline jõud 244
§ 74. Elektromagnetilised jõud ühe ja kahe vooluringi korral 249
§ 75. Välises magnetväljas voolujuhtmele mõjuv jõud. Mitkevitši juhis 255
§ 76. Elektri- ja magnetväljas tekkivate jõudude võrdlus 258
§ 77. Elektri- ja magnetväljas liikuvale elektrilaenguga osakesele mõjuv jõud 260
§ 78. Laetud elementaarosakeste liikumine elektri- ja magnetväljas. Elektronostsillograafid ja -mikroskoobid 261
§ 79. Laetud elementaarosakeste liikumine elektri- ja magnetväljas. Elementaarosakeste kiirendajad 265
§ 80. Elektriliste ja magnetiliste nähtuste ühtsus 271

Lisa 276
Sisunäitaja 278

Нейман Леонид Робертович, Калантаров Павел Лазаревич
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
Часть первая
На эстонском языке
Обложка Х. Полберг
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10
*
Toimetaja L. Abo. Kunstiline toimetaja R. Tungla. Tehniline toimetaja L. Krikmann. Korrektorid H. Kahar ja V. Leibak

Ladumisele antud 20. I 1964. Trükkimisele antud 9. IV 1964. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 17,75. Arvestuspoognaid 17,47. Trükiarv 3000. Tellimise nr. 622. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 85 kop.

3—5

55 kop.

A-25898

TARTU ÜLIKOOLI RAAMATUKOGU
1 0300 00125046 5