

TARTU RIIKLIK ÜLIKOO

L. Võhandu

ARVUTUSMEETODID
I

TARTU 1961

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
GEOMEETRIA KATEEDER

L. Võhandu

ARVUTUSMEETODID I

TARTU 1961

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18
Л. Выханду
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
На эстонском языке



Vastutav toimetaja E. Tamme
Korrektor E. Võhandu

=====
TRÜ rotaprint 1961. Trükipoognaid 9,2.
Tir. 400 eks. MB 04680. Tell. nr. 530.
Hind 28 kop.

I. TÄPNE ARVUTAMINE.

§ 1. Liitmine ja lahutamine.

Need on lihtsaimad arvutusoperatsioonid ning siin on raske erilisi lihtsustusi leida. Märkimist väärivad juht, kus on tegemist terve rea arvude liitmisega. Siis püütakse liidetavaid 2-3 kaupa kombineerida, nii et nende summa oleks 10 või 20. Sel otstarbel võime isegi mõnest numbrist üle hüpata ja seda tagantjärele arvestada.

Päris kasulik on meeles pidada, et järgmiste arvukolmikute summa on 20: 2,9,9; 3,8,9; 4,7,9; 4,8,8; 5,6,9; 6,6,8; 6,7,7.

Näiteid:

$$\begin{array}{r} 48 \\ (72) \\ (56) \\ (29) \\ (81) \\ 23 \\ \hline 423 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 87 \\ (48) \\ (65) \\ 43 \\ (29) \\ (69) \\ (82) \\ (84) \\ 45 \\ \hline 552 \end{array}$$

Siin on tingimuseks, et liidetavaid, mille summa on 10

või 20, ei tohi kaua otsida. Peale selle on oluline, et vahesummasid ei tohi eraldi arvutada ega ka mõttes nimetada, vaid nende liitmine peab toimuma otsekohe, liidetavaid ainult pilguga haarates. (Esimese näite puhul mõtleme nii: 10, 20, 29, 39, 43; 8, 20, 30, 40, 42. Teise näite puhul: 20, 40, 47, 52; 13, 23, 73, 43, 55). Liidetavaid võib rühmitada mitmeti, peamine on arvutuste mugav teostamine.

Lahutamise asemel on tihti kasulikum liita:

-	8965	(4 ja 1 on 5; 7 ja 2 on 16, 1 meeles;
	<u>3674</u>	7 ja 2 on 9; 3 ja 5 on 8).
	5291	

See on eriti kasulik, kui on tarvis ühest arvust lahutada terve hulk arve.

Näide.

	6484
	<u>572</u>
	484
	566
-	321
	248
	36
	175
	<u>849</u>
	3233

Kui mitme nulliga lõppevast arvust on vaja lahutada mingit teist arvu, siis tuleb lahutatava viimane koht täiendada kümneni ja teised nullide kohal olevad numbrid üheksani:

$$20000 - 3456 = 16544$$

§ 2. Korrutamise erivõtted.

Korrutamise juures saab juba rakendada üsna mitmeid töövaeva vähendavaid võtteid. Kõigepealt vaatleme nn. suurt ükskordühte. Selleks, et korrutada kahte kümne ja kahekümne vahel asetsevat arvu, kasutame kergesti kontrollitavat samasust

$$(10 + a)(10 + b) = (10 + a + b) \cdot 10 + ab.$$

Näiteid: $17 \cdot 18 = (25 \text{ ja viis kuus}) = 306,$

$$12 \cdot 14 = (16 \text{ ja } 8) = 168,$$

$$12 \cdot 19 = (21 \text{ ja üks } 8) = 228.$$

See võtte on ilmselt üldistatav ka kahe 20 ja 30 vahel asetseva arvu korrutamiseks:

$$(20 + a)(20 + b) = (20 + a + b) \cdot 20 + ab.$$

Näiteid: $24 \cdot 21 = (25; 500 \text{ ja } 4) = 504,$

$$23 \cdot 22 = (25, 500 \text{ ja } 6) = 506,$$

$$21 \cdot 28 = (29, 580 \text{ ja } 8) = 588.$$

Üldiselt

$$(10c + a)(10c + b) = (10c + a + b) \cdot 10c + ab.$$

Praktiliselt tuleb selle valemi rakendamine arvesse ainult c väärtuste 1, 2, 3 puhul. Küll aga pakub huvi erijuht, kus $a + b = 10$. Sel korral valem lihtsustub tunduvalt:

$$(10c + a)(10c + b) = 100c(c + 1) + ab.$$

Näiteid: $24 \cdot 26 = 624,$

$$33 \cdot 37 = 1221,$$

$$182 \cdot 188 = 34216,$$

$$45 \cdot 45 = 2025.$$

Suure ükskordühe juures kasutatud lihtsustusvõtet, mis võimaldab kahe korrutise leidmist asendada ühe liitmise ja

ühe korrutamise, on sobiv rakendada ka 10^n läheduses asetsevate arvude korrutamiseks:

$$(10^n - a)(10^n - b) = (10^n - a - b) \cdot 10^n + ab,$$

$$(10^n + a)(10^n + b) = (10^n + a + b) \cdot 10^n + ab,$$

$$(10^n + a)(10^n - b) = (10^n + a - b) \cdot 10^n - ab.$$

(Valemid $n = 2, 3, 4$ jaoks välja kirjutada!).

Näiteid: $97 \cdot 83 = 8051$, $108 \cdot 114 = (122 \text{ ja üks } 12) =$
 $= 12312$, $984 \cdot 983 = 967272$, $1023 \cdot 1028 =$
 $= 1051644$, $98 \cdot 105 = 10290$, $968 \cdot 1012 = 979616$.

Väikese treeningu järel saab rakendada ka valemeid

$$(5 \cdot 10^n \pm a)(5 \cdot 10^n \pm b) = \frac{1}{2}(5 \cdot 10^n \pm a \pm b) \cdot 10^{n+1} + ab,$$

$$(5 \cdot 10^n + a)(5 \cdot 10^n - b) = \frac{1}{2}(5 \cdot 10^n + a - b) \cdot 10^{n+1} - ab.$$

Näiteid: $52 \cdot 56 = 2912$, $502 \cdot 513 = 257526$,
 $4188 \cdot 4996 = 20923248$,
 $5107 \cdot 4895 = 25010000 - 11235 = 24998765$.

Ka arvudega $15 = 10 + \frac{1}{2} \cdot 10$ ja $25 = \frac{1}{4} \cdot 100$ korrutamine ei valmista raskusi:

$$187 \cdot 15 = 1870 + 935 = 2805,$$

$$493 \cdot 25 = 12325.$$

§3. Täpsete arvutuste kontrollist.

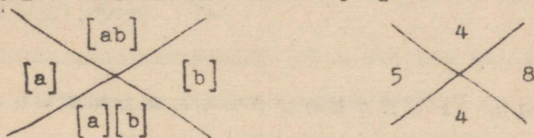
Täpsete arvutuste kontrollimiseks kasutatakse kordusarvutust mingis jäägiklassiringis. Harilikult kasutatakse jäägiklassiringi $R^{(9)}$ või $R^{(11)}$. Kui tähistada arvu a R -jääki sümboliga $[a]$, siis järeldub seosest $a + b = c$ seos $[a] + [b] = [c]$ ja seosest $a \cdot b = c$ seos $[a] \cdot [b] = [c]$.

Tuletame meelde: arvu üheksajääk võrdub selle arvu ühe-

kohalise ristsummaga (leitakse järjestikku ristsummade ristsummasid, kuni jõutakse ühekohalise arvuni):

$$[438]_9 = [15]_9 = 6.$$

Üheksajäägi rakendamine arvutuste kontrolliks on lihtne. Näiteks korrutise $23 \cdot 26 = 598$ puhul peame kontrollima, kas üheksajääkide korrutis võrdub korrutise üheksajäägiga. Tõepoolest $5 \cdot 8 = 40 = 4$ ja $[598]_9 = [22]_9 = 4$. Kontrollimise käiku on sobiv korraldada järgmise skeemi:



Üheksajäägiga kontrollimisel peame arvestama seda, et sellega ei avasta kõiki vigu. Kui kirjutada 52 asemel kogemata 25, siis üheksajääk ei muutu. Samuti ei muutu üheksajääk, kui kirjutada juurde mõni 9, näiteks $[529]_9 = [52]_9 = 7$. Seda viimast asjaolu saab edukalt ära kasutada pikemate arvude üheksajääkide arvutamise lihtsustamiseks. Nimelt võib ristsumma arvutamisel ära jätta kõik üheksad või üheksa kordsed:

$$[598]_9 = [13 = 5 + 8]_9 = 4; \quad [54362]_9 = 2.$$

Et üheksajäägiga kontroll võimaldab küllalt sageli esinevate vigade läbilipsamist, siis on kontrolliks kindlam kasutada üheteistkümnepääki.

Üheteistkümnepäägi arvutamiseks peame meeles, kuidas leida arvu 12. üheteistkümnepääki. Selleks piisab, kui ühelietest lahutada kümnelised: $2 - 1 = 1$. Pikemate arvude puhul tuleb liikuda lõpust alates kahe koha kaupa ettepoole ja rakendada iga paari juures sama võtet. Tekkivate jääkide summa

annabki arvu üheteistkümnejäägi (endal tõestada!).

$$[43'87'26'59]_{11} = (4,4 + 4 = 8, 8 - 1 = 7, 7 - 1 = 6) = 6.$$

Ümmarsulgudesse on märgitud mõttes nimetatavad vahetulemused.

Üheteistkümnejääk avastab numbrite järjekorra vahetamise otsekohe: $[52]_{11} = -3$, $[25]_{11} = 3$.

Näide rakendamisest:

$$92 \cdot 89 = 8188$$

$$\begin{array}{r} \times \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} -7 \\ -7 \\ -7 \\ 1 \end{array}$$

§ 4. India ristkorrutamismeetod.

Kahe- ja kolmekohaliste arvude korrutamiseks on kasulik tarvitada nn. "india ristkorrutamismeetodit".

Korrutise $43 \cdot 87$ leidmiseks kirjutame korrutatavad teineteise alla:

$$\begin{array}{r} \times \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} 43 \\ 87 \end{array} .$$

Korrutise üheliste leidmiseks korrutame 7 ja 3. Saame 20 ja üks. Ühe paneme korrutise üheliste kohale kirja

$$\begin{array}{r} \times \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} 43 \\ 87 \\ \hline 1 \end{array} .$$

Korrutise kümnete leidmiseks korrutame vastavalt ühe korrutatava ühelised teise korrutatava kümmelistega ja liidame nende summale üheliste korrutamisel saadud kümmelised: $7 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 2 = 54$. Paneme kümmeliste arvu kirja:

$$\begin{array}{r} \times \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} 43 \\ 87 \\ \hline 41 \\ \hline 8 \end{array} .$$

Korrutise sajaliste leidmiseks korrutame kümnelised ja liidame meeldejäänud sajaliste arvu: $8 \cdot 4 + 5 = 37$.

Lõplikult

$$\begin{array}{r} \times 43 \\ 87 \\ \hline 3741 \end{array}$$

Märgime, et meelespeetavad arvud on kasulikum kohe liita esimese leitava osakorrutisega (toodud näite puhul: 2, 30 (= 28 + 2), 54).

Ristkorrutamismeetodi eelis seisneb selles, et osakorrutiste liitmine ei tekita mingeid raskusi ja juba üsna väikesel treeningu järel on võimalik ristkorrutamismeetodiga kahe- ja kolmekohalisi arve korrutada isegi kiiremini kui aritmeetriga.

Toome veel ühe näite, kus sulgudes on märgitud ainult mõttes nimetatavad arvud. Osakorrutisi pole vaja nimetada, need võib kohe eelnevale tulemusele juurde liita.

$$\begin{array}{r} 37 \quad (42, 22, 50, 17) \\ 46 \\ \hline 1702 \end{array}$$

Ka kolmekohaliste arvude korrutamine toimub sama skeemi kohaselt (üleskirjutatavad numbrid on sulgudes alla kriipsutatud).

$$\begin{array}{r} 234 \quad (24, 20, 40, 20, 32, 47, 16, 26, 10) \\ 456 \\ \hline 106704 \end{array}$$

Kahekohaliste arvude korrutamine toimub seega lõpust alates järgmise skeemi kohaselt:

2

9

$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \times 7 \\ \hline 6 \end{array}$ 12
3/2

7

1 X 1 .

Kolmekohaliste arvude korrutamise aga järgmise skeemi kohaselt:

1 X * X 1 .

§ 5. Arvude ruutude leidmine.

Järgnevas vaatleme võtteid, mis võimaldavad 2- kuni 3-kohaliste arvude ruute peast leida. Suuremakohaliste arvude jaoks vaatleme hõlpsasti kasutatavat kirjalikku arvutuskeemi.

Kõigepealt märgime, et viiega lõppevate arvude ruute on kerge arvutada järgmise eeskirja kohaselt:

$$(10a + 5)^2 = a(a + 1) \cdot 100 + 25.$$

(Kümneliste arv tuleb korrutada ühe võrra suurema arvuga ja tulemusele tuleb lõppu juurde kirjutada 25).

$$45^2 = 2025, 95^2 = 9025, 125^2 = 15625, 175^2 = 30625, 235^2 = 55225.$$

Edaspidiseks tuleb pähe õppida arvude 1-25 ruudud: sealhulgas $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, $19^2 = 361$, $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, $23^2 = 529$, $24^2 = 576$, $25^2 = 625$.

Arvude 25-75 ruutude leidmiseks kasutame valemit

$$a^2 = (a - 25) \cdot 100 + (50 - a)^2.$$

(Lahutame antud arvust 25 ja kirjutame talle kahe kohaga juurde 50 suhtes võetud täienduse (vst. liia) ruudu).

$$48^2 = 2304, 37^2 = (12 \text{ ja üks } 69) = 1369, 28^2 = (3 \text{ ja neli } 84) = 784, 54^2 = (25 + 4) \cdot 100 + 16 = 2916, 56^2 = 3136, 67^2 = (42 \text{ ja kaks } 89) = 4489, 0,39^2 = 0,1521, 7,2^2 = 51,84.$$

Arvude 75-125 ruutude leidmiseks kasutame valemit

$$a^2 = [a - (100 - a)] \cdot 100 + (100 - a)^2.$$

Sajast väiksema arvu puhul lahutame sellest täienduse sajani ja kirjutame kahe kohaga juurde täienduse ruudu.

Sajast suurema arvu puhul liidame sellele liia üle saja ja kirjutame kahe kohaga juurde liia ruudu.

$$96^2 = 9216, 99^2 = 9801, 87^2 = 7569, 106^2 = 11236, 123^2 = 15129.$$

Suuremate arvude ruutude leidmiseks võib soovitada järgmist mugavat arvutuskeemi. Kuna $4986^2 = (4 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6)^2$, siis kasutame hulkliikme ruudu leidmise eeskirja, vastavaid arvutusi otstarbekalt skeemi paigutades.

$$\begin{array}{r} 4986^2 \\ \hline 16816436 \\ 734496 \\ 6508 \\ 48 \\ \hline 24860196 \end{array}$$

Skeemi esimeses reas asetsevad kõigi numbrite ruudud kahe kohaga kirjutatult ($3^2 = 09!$). Skeemi teises reas asetsevad lõpust alates kõigi kõrvuti olevate numbrite kahekordsed korrutised. Skeemi kolmandas reas asetsevad lõpust alates üle ühe võetud numbrite kahekordsed korrutised jne. Kõik korrutised on kirjutatud kahe kohaga.

$$\begin{array}{r} 234567^2 \\ \hline 40916253649 \\ 1224406084 \\ 16304870 \\ 203656 \\ 2442 \\ 28 \\ \hline 55021677489 \end{array}$$

§ 6. Arvude kuupide leidmine

Kahekohaliste arvude kuupide leidmiseks sobib valem:

$$(10a + b)^3 = a^3 \cdot 1000 + b^3 + (10a + b) \cdot 3ab \cdot 10.$$

Lõpuosa arvutamiseks kasutame ristkorrutamismeetodit.

$$3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$$

$$3 \cdot 2 \cdot 9 = 54$$

$$64^3 = 216064$$

$$29^3 = 8729$$

$$\underline{4608}$$

$$\underline{1566}$$

$$262144,$$

$$24389 .$$

§ 7. Mõned üldised märkused korrutamise ja jagamise kohta.

"Käsitsi" korrutamisel tuleb alati hoolega jälgida, kas teguritel pole mõningaid erilisi omadusi, mis aitavad töömah- tu vähendada ja koos sellega ka tulemuste usaldatavust tõsta.

Mõnikord on üks teguritest niisugune, et üks tema osa on teise osa täpne kordne. Näiteks teguri 186 puhul korrutame kõigepealt kuuega ja siis tulemust kolmega:

$$2374$$

$$5462$$

$$\times 186$$

$$\times 856$$

$$\underline{15444}$$

$$43696$$

$$46332$$

$$\underline{305872}$$

$$478764$$

$$4675472 .$$

Tuleb õppida nägema ka niisuguseid võimalusi, nagu

$$6125$$

$$(6 \cdot 345; \frac{1}{8} \cdot 1000 \cdot 345).$$

$$\underline{345}$$

$$2070000$$

$$\underline{43125}$$

$$2113125$$

Täpse jagamise juures pole olulisi lihtsustusvõtteid.

Võib ehk märkida, et mõnikord murru $\frac{a}{b}$ lugejat ning nimeta-
jat sobiva arvuga korrutades saab arvutusi lihtsustada:

$$\frac{286}{45} = \frac{572}{90} ; \quad \frac{68}{25} = \frac{68 \cdot 4}{100} ; \quad \frac{a}{125} = \frac{a \cdot 8}{1000} .$$

Üldisi eeskirju niisuguste võimaluste otsimiseks ei saa anda. Pealegi ei tasu nende spetsiaalne otsimine end ära. Mõtet on neil võtetel ainult siis, kui lihtsustusvõimalusi märgatakse silmapilkselt.

Vastav nägemisoskus kasvab aga koos arvutuslike kogemustega.

§ 8. Arvutamise abivahenditest.

Arvutuste kergendamiseks sobivatest abivahenditest tuleb mainida kõigepealt mitmesuguseid tabeleid.

Korrutamise hõlbustamiseks on väga sobivad O'Rurki korrutustabelid [1], mis võimaldavad kohe lugeda iga kolmekohalise arvu korrutist iga kahekohalise arvuga. Nende tabelite abil läheb korrutamine tunduvalt kiiremini kui logaritmade või arvutusmasina "Felix" abil.

Igal matemaatikul peaks olema Barlow' tabelid [2], mis sisaldavad arvude 1-12500 ruudud, kuubid, ruutjuured, kuupjuured ja pöördväärtused. Nende tabelite suureks plussiks on see, et nad on vigadeta.

Lõpuks väärivad veel märkimist Segali ja Semendjajevi viiekohalised elementaarfunktsioonide tabelid [3].

Logaritme arvutusvahendina kasutatakse kaasajal kaunis harva, enamasti on lihtsam elektriajamiga töötavate arvutus-

masinate või isegi elektronarvutusmasinate kasutamine.

Lõpuks tuleb veel märkida, et terve rea väiksemat täpsust nõudvate arvutuste juures (3-4 tükikohta) on otstarbekas arvutusalükati või nomogrammide (graafiliste arvutustabelite) kasutamine.

II. LIGIKAUDNE ARVUTAMINE .

§ 1. Ligikaudse arvutamise põhiprobleemid .

Seni me vaatlesime täpsete arvudega arvutamist. Praktikas on aga reeglina tegemist ligikaudsete arvudega. See on tingitud mitmest asjaolust. Esimene ja väga sagedane põhjus on see, et avaldis, mille väärtuse me peame leidma, sisaldab suurusi, mis on saadud mõõtmise teel. Mõõtmistulemused on aga alati usaldatavad ainult teatava vea ülempiirini. Füüsikas ja astronoomias on kogu aeg tegemist ligikaudsete arvudega. Aga ka puhtmatemaatiliste avaldiste juures tuleb paratamatult opereerida ligikaudsete arvudega. Nii näiteks kasutatakse irratsionaalarvu asemel ju alati selle lähisväärtust.

Ligikaudsete arvudega opereerimine toob meid kolme põhiprobleemi juurde.

1. Tuleb hinnata ligikaudseid suurusi sisaldava avaldise väärtuse täpsust.

Võib näiteks küsida, millise täpsusega me leiame π^2 , $\frac{1}{\pi}$,

$\sqrt{\pi}$, kui π jaoks kasutada lähisväärtusi 3,14 või 3,1416.

2. Tuleb otsustada, millise täpsusega peab võtma teatavasse avaldusse kuuluvaid suurusid, et garanteerida avaldise väärtusele nõutavat täpsust.

Näidetena vaatleme järgmisi ülesandeid:

Ülesanne nr. 1. Kui täpselt tuleb võtta π ja $\sqrt{2}$, et saada korrutist $\pi\sqrt{2}$ veaga, mis ei ületa suurust $5 \cdot 10^{-8}$?

Ülesanne nr. 2. Kui täpselt tuleb arvutada $\sqrt{5}$, et $\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + \sqrt{5}}$ viga ei ületaks suurust $5 \cdot 10^{-8}$?

Kui need probleemid on lahendatud, siis kerkivad uued küsimused. Oletame näiteks, et $\sqrt{2}\pi$ arvutamise juures selgus, et nii $\sqrt{2}$ kui π tuleb vajaliku täpsuse garanteerimiseks võtta kaheksa kümnendkohaga: $\sqrt{2} = 1,41421356$; $\pi = 3,14159265$. Harilikul viisil korrutades saame tulemuses 16 kümnendkoha. Meil on aga teada, et juba kaheksas kümnendkoht on ebakindel ja edasised kohad ei oma üldse mõtet. Siit järgneb kolmas põhiprobleem.

3. Kuidas teostada elementaaroperatsioonid nii, et vajalik täpsus oleks saavutatav minimaalse töökuluga?

§ 2. Absoluutne ja relatiivne viga.

Kui a on suuruse A lähisväärtus, siis kirjutame lühiduse mõttes

$$A \approx a.$$

Ligikaudse arvu a tõeliseks veaks nimetame suurust

$$\Delta = A - a.$$

rühim

Ligikaudse arvu a absoluutseks veaks nimetame suvalist positiivset arvu m , mis rahuldab võrratust

$$|\Delta| = |A - a| \leq m.$$

Täpne väärtus A asetseb seega tōkete

$$a - m \leq A \leq a + m$$

vahel ja ümberpōrdult - lähisväärtus a asetseb tōkete

$$A - m \leq a \leq A + m$$

vahel. Sageli kasutatakse kirjutusviisi

$$A = a \pm m.$$

Absoluutne viga ei iseloomusta suuruse täpsust küllaldata-selt. Kui näiteks mõõta sentimeetrilise täpsusega laua pikkust või maja pikkust, siis on ilmne, et teine mõõtmine on esimesest palju täpsemini teostatud, kuigi absoluutsed vead on võrdsed. On veel teine asjaolu, mis sunnib meid absoluutse vea asemel otsima paremat vea hinnangut. Nimelt on absoluutne viga enamasti nimega arv, mõõtühikut muutes aga muutub ka absoluutne viga.

Ligikaudsete suuruste täpsuse hindamiseks kasutatakse seepärast sageli nn. relatiivset viga.

Ligikaudse arvu a tōeliseks relatiivseks veaks nimetame suurust

$$\eta = \frac{\Delta}{a}.$$

Ligikaudse arvu a relatiivseks veaks aga nimetame suvalist positiivset arvu δ , mille korral on täidetud võrratus

$$|\eta| = \left| \frac{\Delta}{a} \right| \leq \delta.$$

Siit järeldub, et kui ligikaudse arvu a absoluutne viga on teada, siis võime selle arvu relatiivseks veaks lugeda

suuruse

$$\delta = \frac{m}{|a|}$$

Kui laua pikkus on 1 meeter ja maja pikkus 10 meetrit ning mõlemad on mõõdetud sentimeetrilise täpsusega, siis laua puhul on relatiivne viga $0,01 = 1\%$, maja puhul aga ainult $0,001 = 0,1\%$.

§ 3. T ü v i k o h a d j a k ü n n e n d k o h a d .

Kui meil on tegemist mingi ligikaudse arvuga, siis on oluline eristada tüvikohti ja kümnendkohti. Arvul $0,00352$ on viis kümnendkohta ja kolm tüvikohta, arvul $12,340$ aga kolm kümnendkohta ja viis tüvikohta. Kuna tüvikohtade hulka võib muuta arvu lõppu nulle juurde kirjutades või kustutades, siis võib seda arvaolu kasutada arvude niisuguseks esitamiseks, et nende viimase tüvikoha järgi saaks otsustada ligikaudse arvu absoluutse vea suuruse üle.

Lepime kokku lugeda ligikaudse arvu a viimast kohta õigeks, kui ta viga ei ületa üht ühikut. Tabelites on enamasti viga alla poole viimase koha ühiku, kuid viimasel ajal on üha enam ilmunud tabeleid, kus viga ulatub ühe viimase koha ühikuni.

Ligikaudsete arvude juures tuleb säilitada ainult õiged kohad (pikemate arvutuste juures tuleb vigade kuhjumise vältimiseks säilitada vahearvutustes 1-2 enamkohta). Eriti tähelepanelik peab olema ligikaudse arvu lõpus asetsevate nullide suhtes. Tuleb kindlaks teha, kas null on tähendusega number või seisab ta tundmatu numbril asemel. Näiteks võrdu-

ses "1 kg = 1000 g" on kõik nullid õiged, võrduses "Tartus on 80000 elanikku" on nullid tundmatute numbrite asemel. Edasises kasutame kahtlaste numbrite märkimiseks allakriipsutamist, kahtlaste lõpunullide puhul aga ka esitamist kümne astmete kaudu:

$$6,7\underline{8}, \underline{80000} = 8 \cdot 10^4.$$

Arv 6,000 on seega palju täpsem arv kui arv 6,0.

Kahtlaste kohtade ümardamisel lähtume järgmistest reeglitest. Kui viimasele ümardamisel säilivale kohale järgneb:

- a) 0,1,2,3,4, siis viimane koht ei muutu;
- b) 6,7,8,9, siis suurendatakse viimast kohta ühe võrra;
- c) 5 veel vähemalt ühe nullist erineva lisakohaga, siis suurendatakse viimast kohta ühe võrra;
- d) ümardamisel saadud 5, siis ümardatakse vastupidiselt varasemale suunale;
- e) täpne 5 või tundmatu 5, siis ümardatakse säiliv koht paarisarvuks.

Näiteid ümardamise kohta:

- a) 8,6334 → 8,633 → 8,63;
- b) 12,6358 → 12,636 → 12,64;
- c) 8,27501 → 8,28;
- d) 16,8149 → 16,815 → 16,81;
14,1352 → 14,135 → 14,14;
- e) 0,0735 → 0,074;
0,385 → 0,38.

§ 4. Vigade edasikandumisest arvutustes.

Olgu meil vaja leida pidevalt diferentseeruva funktsiooni

$$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

väärtusi, kus argumentidel x_1, x_2, \dots, x_n on vastavalt vead m_1, m_2, \dots, m_n . On ilmne, et argumentide vead kanduvad edasi ka nendest funktsionaalselt sõltuvale suurusele U . Funktsiooni väärtuse viga avaldub kujul

$$\Delta U \approx df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i .$$

Kui vead m_1, m_2, \dots, m_n on küllalt väikesed, siis ΔU on küllalt hästi kirjeldatav df väärtusega kohal x_1, x_2, \dots, x_n . Suuruse U absoluutse vea m_u hinnanguks saame siit:

$$m_u \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| m_i .$$

Vaatleme nüüd selle valemi rakendamist rea sageli esinevate operatsioonide korral.

Liitmine. Olgu $U = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, kus $x_i > 0$.

Et $\frac{\partial U}{\partial x_1} = 1$, siis $m_u = \sum m_i$.

Seega liitmisel liituvad ka liidetavate absoluutvead.

Näiteks arvude $2,35 \pm 0,01$ ja $3,46 \pm 0,05$ liitmisel saame summaks $5,81 \pm 0,06$.

Jahutamine. Vaatleme kahe arvu vahet $U = x_1 - x_2$ ($x_1 > x_2 > 0$). Absoluutne viga avaldub jälle summamana $m_u = m_1 + m_2$. Keerulisem on aga lugu relatiivse veaga. Et lähedaste arvude korral U on suhteliselt väike arv, siis relatiivne

viga võib kasvada väga suureks. Näiteks vahe $U = 32,43 - 32,41 = 0,02$ korral ($m_1 = m_2 = 0,01$) on absoluutne viga $m_u = 0,02$, relatiivne viga aga

$$\delta = \frac{0,02}{0,02} = 1 = 100 \%$$

Nende samade arvude liitmisel on relatiivne viga aga ainult

$$\delta = \frac{0,02}{4,84} = 0,0003 = 0,03 \%$$

(Vea väärtus tuleb alati ümardada ülespoole!).

Siit näeme, et lahutamine on arvutamise täpsuse mõttes üsna halb operatsioon. Kui on karta, et arvutuste käigus on tegemist lähedaste arvude lahutamise, siis tuleb alati püüda lahutamisest arvutuseeskirja kuju teisendamisega vabaneda. Näitena võib tuua õhukese kerakihi ruumala arvutamise valemi:

$$V = \frac{4}{3} \pi [(R + a)^3 - R^3].$$

Numbriliseks arvutamiseks tuleb ta teisendada kujule

$$V = \frac{4}{3} \pi (3R^2a + 3Ra^2 + a^3).$$

Siin pole enam karta suure relatiivse vea tekkimist.

Korrutamine. Olgu $U = x_1 \cdot x_2 \dots \cdot x_n$.

Korrutise vea arvutamisel on otstarbekas lähtuda relatiivsest veast. Peale lihtsaid arvutusi leiame, et

$$\delta = \frac{m_u}{u} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{m_i}{x_i} \right|.$$

Korrutamisel tegurite relatiivsed vead liituvad.

Näiteks korrutise $U = x_1 x_2$ korral, kus $x_1 = 10 \pm 0,1$; $x_2 = 100 \pm 0,2$, on U relatiivne viga

$$\frac{0,1}{10} + \frac{0,2}{100} = 0,01 + 0,002 = 0,012$$

ja absoluutne viga

$$m_u = 1000 \cdot 0,012 = 12.$$

Jagamine. Olgu $U = \frac{x_1}{x_2}$.

Kuna $\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}$ ja $\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2}$, siis leiame, et

$$\delta = \frac{m_U}{U} = \left| \frac{m_1}{x_1} \right| + \left| \frac{m_2}{x_2} \right|.$$

Jagamisel jagatava ja jagaja relatiivsed vead liituvad.

Logaritmine. Olgu $U = \ln x$.

Et $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x}$, siis U absoluutne viga on $\frac{m_x}{x}$, ehk teiste sõnadega, loomuliku logaritmi absoluutne viga võrdub argumenti relatiivse veaga.

Kümnendlogaritmi puhul arvestame seost $\log x = M \ln x$, kus $M = \log e \approx 0,434$. Siit leiame, et kümnendlogaritmi absoluutne viga võrdub poolega ta argumenti relatiivsest veast.

Juurimine. Olgu $U = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Et $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$, siis juure relatiivne viga on

$$\delta = m_x \cdot \left| \frac{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}}{x^{\frac{1}{n}}} \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{m_x}{x} \right| = \frac{1}{n} \delta_x.$$

Seega n -nda juure relatiivne viga on juuritava relatiivsest veast n korda väiksem.

Astendamine: $U = x^n$. Et $\frac{\partial U}{\partial x} = n x^{n-1}$, siis

$$\delta = m_x \left| \frac{nx^{n-1}}{x^n} \right| = n \cdot \frac{m_x}{|x|} = n \delta_x.$$

Seega n -nda astme relatiivne viga on astendatava relatiivsest veast n korda suurem.

Ka trigonomeetriliste arvutuste puhul ei valmista ees-

pool toodud veahinnangu rakendamine erilisi raskusi.

Näide. Kolmnurgast on antud küljed $a = 5,2 \pm 0,05$ ja $b = 7,8 \pm 0,05$ ning nende vaheline nurk $C = 35,6^\circ \pm 0,1^\circ$.

Leida kül c .

$$\text{Koosinuslause põhjal } c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = 4,682.$$

Absoluutne ja relatiivne viga avalduvad kujul

$$m_c \leq m_a \left| \frac{a - b \cos C}{c} \right| + m_b \left| \frac{b - a \cos C}{c} \right| + m_c \left| \frac{ab \sin C}{c} \right| ;$$
$$\delta_c = \left| \frac{m_c}{c} \right|.$$

Seega

$$m_c \leq \frac{1}{4,68} \left\{ 0,05(5,15 - 7,85 \cdot 0,8141) + (7,85 - 5,15 \cdot 0,8121) \cdot 0,05 + 0,00175 \cdot 5,25 \cdot 7,85 \cdot 0,5835 \right\} \leq 0,062$$

ja

$$\delta_c \leq \left| \frac{0,062}{4,68} \right| \leq 0,0133 = 1,33 \%$$

Lõplikult

$$c = 4,682 \pm 0,062 = 4,682 \cdot (1 \pm 0,0133).$$

§ 5. Lõpptulemusete vajalikku täpsust garanteerivate argumentide täpsuse valikust.

Võib püstitada ka eelmises punktis vaadeldud ülesande pöördülesande - leida, millised võivad olla argumentide x_1, x_2, \dots, x_n vead m_1, m_2, \dots, m_n , et garanteerida tulemusele $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ etteantud täpsust.

See probleem pole mitme muutuja funktsioonide korral üheselt lahenduv, sest viga m_1 võib mitmeti niiviisi kombineerida, et m_y jääks etteantud tükkest väiksemaks. Kõige väiksema vaevaga saab sellele küsimusele vastata, kui ee

dada, et kõik osadiferentsiaalid $\frac{\partial y}{\partial x_i} m_i$ ($i = 1, \dots, n$) mõjuvad tulemuse veale ühesuguselt, s. o.

$$m_y \approx n \cdot \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| m_i.$$

Siit saame, et

$$m_i \approx \frac{m_y}{n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|}.$$

Näide. Millise täpsusega tuleb kolmnurgas mõõta külge $c \approx 12$ cm ja nurki $A \approx 65^\circ$, $C \approx 63^\circ$, et külge a leida relatiivse veaga 0,5 % ?

Otsitava külje ligikaudne väärtus on

$$a = c \frac{\sin A}{\sin C} \approx 12 \frac{0,9063}{0,8910} \approx 12,2 \text{ cm}$$

ja

$$m_a \approx 0,005 \cdot 12,2 \approx 0,061 \text{ cm.}$$

Mõõdetavate elementide absoluutsed vead võivad seega olla:

$$m_c \approx \frac{m_a}{3 \left| \frac{\sin A}{\sin C} \right|} \approx \frac{0,061}{3 \cdot 1,017} \approx 0,02 \text{ cm;}$$

$$m_A \approx \frac{m_a}{3c \left| \frac{\cos A}{\sin C} \right|} \approx \frac{0,061}{36 \cdot 0,474} \approx 0,0036 \approx 0,21\%;$$

$$m_C \approx \frac{m_a}{3c \left| \frac{\sin A \cos C}{\sin^2 C} \right|} \approx \frac{0,061}{36 \cdot 0,518} \approx 0,0033 \approx 0,19\%.$$

Etteantud veaga tulemuse leidmiseks piisab, kui külge c mõõta täpsusega 0,02 cm, nurki A ja C täpsusega 10'.

§ 6. Ligikaudsel arvutamisel
säilitatavate kohtade arv.

Keerulisemate arvutuste korral tuleb säilitatavate kohtade arvu hinnata eelmises punktis toodud üldise vea hindamise valemi abil. Aritmeetiliste tehete korral võib aga kasutada jämeda "rusikareeglina" järgmisi akadeemik A. N. Krõlovi poolt antud eeskirju.

Ligikaudsete arvude liitmisel ja lahutamisel tuleb tulemuses säilitada niipalju kümnendkohti, kui neid on vähima kümnendkohtade hulgaga arvus.

Ligikaudsete arvude korrutamisel ja jagamisel tuleb tulemuses säilitada vaid niipalju tüvikohti, kui neid on vähima tüvikohtade hulgaga arvus.

Nende reegliteni jõuame, kui peame silmas, et liitmisel ja lahutamisel liituvad absoluutvead, s. t. kohtade arvestus käib kümnendkohtade järgi; korrutamisel ja jagamisel aga liituvad relatiivsed vead, s. t. kohtade arvestus toimub tüvikohtade järgi.

Wärgime, et ligikaudse arvu a relatiivne viga avaldub kujul

$$\delta \leq \frac{1}{a_1 10^{k-1}},$$

kus a_1 on esimese tüvikoha number ja k on õigete tüvikohtade arv.

Korrutamise ja jagamisega analoogiline reegel kehtib ka logaritmime, eksponent- ja trigonomeetriliste funktsioonide arvutamise korral.

Vahetulemuste arvutamisel tuleb võtta üks koht rohkem, kui seda soovitavad äsjased reeglid. Lõpptulemuses see lisa-koht ümardatakse. (Lisakohale tõmmatakse tavaliselt kriips alla või kirjutatakse vähendatud kujul).

Kui mõned andmetest omavad rohkem tüvikohti kui teised, siis tuleb need enne tehete sooritamist ümardada, säilitades vaid ühe lisakoha.

Näiteid:

$$2,4 + 13,85 + 0,0473 = 2,4 + 13,8\bar{5} + 0,0\bar{5} = 16,3\bar{0} = 16,3;$$

$$3527\bar{0} + 6385 + 437\bar{00} = 854\bar{00}; \quad 8,8 \cdot 12,47 = 8,8 \cdot 12,5 = 110;$$

$$45,77 - 2,3658 = 45,77 - 2,37 = 43,40;$$

$$\sqrt{68,7:5003} = 68,7:500\bar{0} = 0,0137.$$

§ 7. Lühendatud korrutamine ja jagamine.

Olgu meil vaja leida korrutis $98,7352 \cdot 39,87$. Harilikul viisil korrutades:

$$\begin{array}{r} 98,7352 \\ \times 39,87 \\ \hline 6911464 \\ 7398816 \\ 8886168 \\ 2962056 \\ \hline 3936,572424 \end{array}$$

Elmises punktis toodud reegli põhjal peaksime tulemu-
ses säilitama 4 tüvikohta. Tähebtab, harilikul viisil kor-
rutades me teeme palju üleaarust tööd. Enamus leitud numbreist
pole meile vajalikud ja järelikult tuleks korrutamist teos-
tada niisugusel viisil, et üleaaruseid kohti ei oleks vaja

arvutadagi.

Vaatleme järgnevas nn. lühendatud korrutamise võtet. Kirjeldame seda võtet eespool toodud näite varal.

Kuna me lõpptulemuses säilitame ainult 4 tüvikohta, siis osakorrutistes on mõtet säilitada ülimalt viit tüvikohata. Märgime täpsema arvu ülearuseid kohti pealetõmmatud kriipsuga:

$$\begin{array}{r} 98,735\bar{2} \\ \times 39,87 \\ \hline 29621 \end{array}$$

Korrutamist alustame arvu 39,87 peast. Esimene osakorrutis tuleb 29621 (viimase koha saamisel võtsime arvesse 5 ja 3 korrutamisel tekkiva kümneliste arvu 2: $3 \cdot 3 + 2$). Järgmise osakorrutise leidmiseks läheme korrutajas ühe järgu võrra madalamale. Osakorrutise lõpunumbri järgu säilitamiseks tuleb korrutatavas jälle ühele kohale kriips peale tõmmata. Uue osakorrutise lõpnumber on 6: ($735 \cdot 9 = 66$). Järgmise osakorrutise leidmiseks kustutame jälle ühe koha, jne. seni, kuni korrutaja kohad on kõik ammendatud. Korrutuskeem näeks lõplikult välja nii:

$$\begin{array}{r} 98,735\bar{2} \\ \times 39,87 \\ \hline 29621 \\ 8886 \\ 790 \\ 69 \\ \hline 39366 = 3937. \end{array}$$

Muide, selle korrutise arvutamist võiks teha ka järgmiselt:
 $98,7352 \cdot 39,87 = (100 - 1,265) \cdot 39,87 = 3987 - 1,265 \cdot 39,87 =$

$$= 3987 - 50 = 3937.$$

Ümmarguste arvude läheduses olevate arvude korral tuleb nii-
sugust võimalust alati jälgida!

Toome veel paar näidet ligikaudse korrutamise kohta.

6,14	56,83
<u>0,45</u>	<u>3,52</u>
2,46	17 05
<u>0,31</u>	2 84
2,8	<u>11</u>
	200 .

Leiame kolme kohaga korrutise $2,3456 \cdot 3,2178$:

$$\begin{array}{r} 2,3456 \\ 3,2178 \\ \hline 7,036 \\ 469 \\ 23 \\ 16 \\ 2 \\ \hline 7,55 \end{array}$$

Ligikaudsete arvude jagamisel kustutame jagajas järjest
kohti ära, sest koolipraktikas kasutatav jagatavale nullide
lõppu lisamine pole millegagi õigustatud.

Jagame nelja kohaga arvud $12,3743$ ja 18364 . Jagajas
kustutame kohe alguses viienda tüvikoha, jagatavas ümardame
kuuenda tüvikoha.

$$\begin{array}{r} 12,3743 : 18364 = 0,0006739 \\ 11\ 018 \\ \hline 1\ 356 \\ 1\ 285 \\ \hline 71 \\ 55 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline \end{array}$$

Jagame kolme kohaga 62,73 ja 4,6752:

$$\begin{array}{r} 62,73:4,6752 = 13,4 \\ \underline{468} \\ 159 \\ \underline{140} \\ 19 \end{array}$$

§ 8. Etteantud täpsusega
arvutamine.

Kui andmed võib võtta suvalise täpsusega, siis tuleb nad k-kohalise täpsuse saavutamiseks võtta niisuguse kohtade arvuga, et me saame varasemate reeglite põhjal tulemuses k + 1 kohta.

Näide. Leiame ringjoone pikkuse kolme tüvikohaga, kui $d = \sqrt{2}$ cm. Et tulemuses on vaja kolme kohta, siis võtame π kui $\sqrt{2}$ nelja tüvikohaga.

$$\begin{array}{r} 3,14\bar{2} \\ \underline{1,414} \\ 3\ 142 \\ \underline{1\ 257} \\ 31 \\ \underline{13} \\ 4,44\bar{3} \end{array}$$

Järelikult ringjoone pikkus kolme tüvikohaga on 4,44.

Leiame eelnevalt kümnendmurdudeks teisendatud murdude $1\frac{3}{7}$, $\frac{1}{45}$, $\frac{21}{11}$, $\frac{11}{12}$ korrutise kolme õige tüvikohaga. Selleks võtame kõik kümnendmurrud nelja tüvikohaga:

$$1\frac{3}{7} \approx 1,429; \quad \frac{1}{45} \approx 0,02222; \quad \frac{21}{11} \approx 1,909; \quad \frac{11}{12} = 0,9167.$$

Järjest korrutades saame

1,425	0,03175	0,06062
0,02222	1,909	0,9167
<hr/>	<hr/>	<hr/>
2858	3175	5456
286	2858	61
28	29	36
3		4
<hr/>	<hr/>	<hr/>
0,03175	0,06062	0,05557 .

Samal ajal leiame otseselt, et

$$\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{45} \cdot \frac{21}{11} \cdot \frac{11}{12} = \frac{1}{18} = 0,05555 .$$

Kui on tarvis saada tulemuse vea täpset hinnangut, või kui on tegemist lahutamisega, siis tuleb loomulikult lähtuda eespool antud üldisest hindamisvõttest.

§ 9. A r v u t u s s k e e m .

Vähegi keerulisemate valemite põhjal arvutamiseks (eriti kui on tegemist sama valemi korduva rakendamisega) tuleb arvutused tingimata korraldada arvutusskeemi. Sobivalt valitud arvutusskeem aitab oluliselt vähendada vigade tekkimise võimalust ja ühtlasi kergendab ka arvutuste kontrollimist. Peame meeles, ilma kontrollita pole ükski arvutus midagi väärt.

Lihtsa näitena arvutusskeemi kasutamise kohta koostame funktsiooni $V = \sqrt{x^2 + 3,367x} + 3,873$ tabeli argumendi väärtuste $x = 0,1,2,3,4,5$ jaoks nelja tüvikohaga.

Hulkliikme $x^2 + 3,367x + 3,873$ väärtuste arvutamiseks kasutame Horneri skeemi, s. t. esitame hulkliikme kujul $(x + 3,367)x + 3,873$.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
x	(1) + 3,367	(2)·x	(3) + 3,873	v = √(4)
0		0	3,873	1,968
1	4,367	4,367	8,240	2,871
2	5,367	10,734	14,607	3,822
3	6,367	19,101	22,974	4,793
4	7,367	29,468	33,341	5,774
5	8,367	41,835	45,708	6,761

Ruutjuurte arvutamiseks kasutati Segali ja Semendjajevi viiekohalisi tabelleid [3].

Arvutuste kontrolliks on siin kõige lihtsam kahekordse arvutuse teostamine erinevate arvutajate poolt.

Hulkliikme väärtuse arvutamiseks kasutatud Horneri skeem on üheks tüüpilisemaks arvutusskeemiks. Horneri skeemi abil saab hulkliikme $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ väärtuste kõrval leida ka tuletiste väärtusi. Tuletiste arvutamiseks vajaliku arvutuseeskirja saamiseks tuletame meelde, et hulkliiget $f(x)$ lineaarteguriga $x - x_0$ jagades saame tulemuseks $f(x) = (x - x_0)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + b_n$, kusjuures jagatispoliinoomi $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}$ kordajad leiame Horneri skeemiga seose $b_i = a_i + x_0b_{i-1}$ abil. Kui jagatispoliinoomi omakorda jagada lineaarteguriga $x - x_0$, siis saame võrduse

$$f(x) = b_n + (x-x_0)[c_{n-1} + (x-x_0)(c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \dots + c_{n-2})] = \\ = b_n + c_{n-1}(x-x_0) + (c_0x^{n-2} + c_1x^{n-3} + \dots + c_{n-2})(x-x_0)^2.$$

Peale n-kordset järjestikust lineaarteguriga $x - x_0$ jagamist jõuame järgmise $f(x)$ arenduseni:

$$f(x) = b_n + c_{n-1}(x-x_0) + d_{n-2}(x-x_0)^2 + e_{n-3}(x-x_0)^3 + \dots + \ell_0(x-x_0)^n.$$

Kui saadud tulemust võrrelda hulkliikme $f(x)$ Taylori reaksarendusega kohal x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

siis jagamise ja Taylori reaksarenduse ühesust arvestades on ilmne, et

$$f(x_0) = b_n, f'(x_0) = c_{n-1}, \frac{f''(x_0)}{2!} = d_{n-2}, \dots, \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \ell_0,$$

kusjuures suurused $b_n, c_{n-1}, d_{n-2}, \dots, \ell_0$ on Horneri skeemi järjestikuse rakendamise teel lihtsal viisil leitavad:

	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
x_0		$x_0 b_0$	$x_0 b_1$	\dots	$x_0 b_{n-4}$	$x_0 b_{n-3}$	$x_0 b_{n-2}$	$x_0 b_{n-1}$
	$b_0 = a_0$	b_1	b_2	\dots	b_{n-3}	b_{n-2}	b_{n-1}	$b_n = f(x_0)$
		$x_0 c_0$	$x_0 c_1$	\dots	$x_0 c_{n-4}$	$x_0 c_{n-3}$	$x_0 c_{n-2}$	
	$c_0 = b_0$	c_1	c_2	\dots	c_{n-3}	c_{n-2}	$c_{n-1} = f'(x_0)$	
		$x_0 d_0$	$x_0 d_1$	\dots	$x_0 d_{n-4}$	$x_0 d_{n-3}$		
	$d_0 = c_0$	d_1	\dots	d_{n-3}	$d_{n-2} = \frac{f''(x_0)}{2!}$			
	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Näide. Leiame hulkliikme $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x + 10$ enda ja tuletiste väärtused kohal $x_0 = -2$:

	1	5	6	7	10
-2		-2	-6	0	-14
	1	3	0	7	$-4=f(-2)$
		-2	-2	4	
	1	1	-2	$11=f'(-2)$	
		-2	2		
	1	-1	$0=\frac{f''(-2)}{2}$		
		-2			
	1	$-3=\frac{f'''(-2)}{6}$			
					$1=\frac{f^{IV}(-2)}{24}$

Horneri skeemi võib järelkult kasutada ka hulkliikme Taylori reaksarenduse leidmiseks kohal $x_0 = -2$:

$$f(x) = -4 + 11(x+2) - 3(x+2)^3 + (x+2)^4.$$

§ 10. Reaksarenduste kasutamises t ligikaudsel arvutamisel.

Ligikaudse arvutamise juures on sageli otstarbekas kasutada reaksarendusi.

Eriti palju leiab rakendamist Taylori reaksarendus:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots$$

Näidetena võib tuua matemaatilisest analüüsist juba tuntud reaksarendused:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (|x| < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (|x| < \infty),$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots \quad (|x| < \frac{\pi}{2}),$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \dots \right] \quad (|x| < \pi),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (|x| < \infty).$$

Küllaltki ammendava valiku sellistest reaksarendustest võib leida Bronšteini ja Semendjajevi "Matemaatika käsiraamatust". Vea hinnanguks sobib ärajäetud rea liikme suurusjärk. Näiteks lähendvalem $\sin x = x$ garanteerib meile 1%-lise täpsuse vahemikus $(-14^\circ, +14^\circ)$, valem $\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$ aga juba vahemikus $(-59^\circ, +59^\circ)$.

Teine praktikas suurt tähtsust omav reaksarenduste klass põhineb binoomrea kasutamisel:

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \dots + x^m.$$

Siit saame rea olulisi erijuhte:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots \quad (|x| < 1),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (|x| < 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 - \frac{5}{16} x^3 + \frac{35}{128} x^4 + \dots \quad (|x| < 1).$$

Vea hinnanguks sobib jälle ärajäetud rea liikme suurusjärk.

Ülesanne. Leida kõigi toodud reaksarenduste puhul, mil-
liste argumendi väärtuste korral garanteerivad rea 2-3 esi-
mest liiget 0,1%-lise täpsuse.

Neid reaksarendusi saab edukalt kasutada keerulisemate
avaldiste koostisosadena.

Näide 1.

$$\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} \frac{1}{1+\frac{x}{b}} = \frac{a}{b} \left[1 - \frac{x}{b} + \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^3 + \dots \right];$$

$$\frac{384}{1002} = 0,384 \left(1 - \frac{2}{1000} \right) = 0,384;$$

$$\frac{384}{1012} = 0,384 \left(1 - \frac{12}{1000} \right) = 0,384 - 0,005 = 0,379.$$

Näide 2. Olgu meil vaja leida suurus y valemist

$$y = b - \sqrt{b^2 - x^2},$$

kus $b > x$.

Binoomvalemit kasutades saame

$$\sqrt{b^2 - x^2} = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} = b \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{b^2} + \frac{1}{8} \frac{x^4}{b^4} - \dots \right)$$

ja järelikult

$$y = \frac{1}{2} \frac{x^2}{b} - \frac{1}{8} \frac{x^4}{b^3} + \dots$$

Kui piirduda reaksarenduses esimese liikmega

$$y = \frac{1}{2} \frac{x^2}{b},$$

siis absoluutne viga on umbes $\frac{1}{8} \frac{x^4}{b^3}$. Saadud valem annab seeg
y väärtuse relatiivse veaga $25 \left(\frac{x}{b} \right)^2 \%$.

Kui $b = 100$ cm ja $x = 10$ cm, siis $y = 0,500$ cm,

kusjuures relatiivne viga on $\frac{1}{4}$ %. Absoluutviga on seega 0,001 cm. Et sama täpselt arvutada ruutjuure väärtust otse-selt leides, peaksime ruutjuure andma viie õige tüvikohaga.

Näide 3. Ruutjuure ligikaudne arvutamine reaksarenduse abil.

Lähtume kujust $\sqrt{a^2 + x}$, kus $a^2 \gg x$. Binoomrida annab

$$\sqrt{a^2 + x} = a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a^2} - \frac{1}{8} \frac{x^2}{a^4} + \dots \right). \text{ Siit}$$

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a},$$

kusjuures veahinnanguks saame $\frac{1}{8} \frac{x^2}{a^3}$.

Näiteid. $\sqrt{83} = \sqrt{9^2 + 2} \approx 9 + \frac{2}{18} = 9,111$, veaga.

$$\frac{4}{9 \cdot 700} \approx 6 \cdot 10^{-4}.$$

$$\sqrt{8735} = \sqrt{94^2 - 101} \approx 94 - \frac{101}{188} = 93,463, \text{ veaga } \frac{10^4}{8 \cdot 8 \cdot 10^5} \approx$$

$$\approx 2 \cdot 10^{-3}.$$

III. ARVUTUSLÜKATI.

§ 1. Arvutuslükati ehitus.

Standardne arvutuslükati koosneb kolmest osast: korpusest ehk põhiosast, keelest ja märkijast. Korpusele on kantud 4 skaalat. Neid nimetatakse järjekorras ülevalt alla K-, A-, D- ja L-skaalaks. Keele esiküljele on kantud 3 skaalat ja neid nimetatakse järjekorras ülevalt alla B-, E- ja C-skaalaks. Keele tagaküljel leiame veel kolm skaalat, mis omavad tähistusi Sin, S&T ja Tg. Märkija klaasi alumisele küljele on graveeritud peenike joon ehk "niit", mida kasutatakse lükati skaaladel jaotuste fikseerimiseks.

§ 2. L- ja D-skaala.

L-skaala on jaotatud ühtlaselt kümnendikeks, sajandikeks ja kahetuhandendikeks. Kui kahetuhandendike jaotuste vahet silmamõõduliselt poolitada, siis saab L-skaalal mõõta kaugusi skaala algusest täpsusega kuni 0,001 (kui pikkuseühikuks võtta kogu L-skaala pikkus).

Harjutus. Paigutada niit L-skaala algusest järgmistele kaugustele: 0,023; 0,408; 0,501; 0,51; 0,051; 0,094; 0,005.

D-skaala jaotused ei ole ühtlased ja lühenevad skaala parempoolse otsa suunas. D-skaala kõige jämedam alajaotus on varustatud numbritega 1, 2, 3, ..., 10. Kui paigutada niit järjestikku D-skaala jaotustele 1, 2, 3, ..., 10 ja seeläbi juures lugeda L-skaalalt vastavaid väärtusi, siis saame järgmise tabeli:

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L	0,000	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1,000

Teiselt poolt aga leiame kümnendlogaritmid tabelist, et

$$\log 1 = 0,0000, \log 2 = 0,3010, \log 3 = 0,4771, \log 4 = 0,6021, \log 5 = 0,6990, \log 6 = 0,7782, \log 7 = 0,8451, \log 8 = 0,9031, \log 9 = 0,9542, \log 10 = 1,0000.$$

Neid väärtusi võrreldes jõuame järeldusele, et D-skaala jaotused 1, 2, ..., 10 on paigutatud nii, et nende kaugused skaala alusest võrduvad jaotustele vastavate arvude kümnendlogaritmidega. Selliselt jaotatud skaalaid nimetatakse logaritmilisteks skaaladeks.

D-skaala peenemad alajaotused vastavad arvudele, millel on peale ühe täiskoha veel kümnendikke ja sajandikke. Nii näiteks leiame D-skaala 1. ja 2. jaotuse vahel jaotusi, mis on tähistatud arvudega 1.1; 1.2; ... 1.9. Selles D-skaala osas vastavad sajandikkudele kõige peenemad jaotused. Asetades niidi 1.4 ja 1.5 vahele esimesele, teisele jne. kõige peenemale jaotusele, saame arvud 1,41; 1,42 jne. D-skaala 2. ja 4. jaotuse vahel on võimalik täpselt märkida 2, 4, 6, 8 sajandikuga arve. Kahe naaberjaotuse vahet silmamõõduliselt poolitades saame märkida aga ka 1, 3, 5, 7, 9 sajan-

dikuga arve.

Kõige raskem (eriti algajale) on D-skaala 4. ja 10. jaotuse vahelises piirkonnas leida 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 sajandikuga arvudele vastavaid kohti, sest selles piirkonnas on kahe naaberjaotuse vahe 5 sajandikku. Siin tuleb kasutada silmamõõdulist interpoleerimist, mis nõuab päris head treeningut.

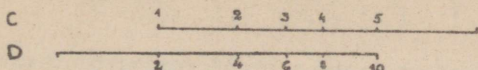
Harjutusi: Märkige niidiga D-skaalal järgmised arvud: 1,04; 1,09; 1,15; 1,26; 2,02; 2,13; 2,26; 2,43; 2,50; 4,4; 4,45; 4,64; 4,72; 5,09; 8,13; 7,68; 2,08; 2,8; 3,17; 5,17.

Eespool nägime, et D-skaala jaotused vastavad ainult ühe täiskohaga arvudele ja seda peame arvestama lükati teooriaga seotud küsimuste juures. Lükati kasutamise praktikas aga, nagu hiljem selgub, võime D-skaala ühele ja samale jaotusele seada vastavusse kõik ühesuguste tüvinumbritega arvud. Nii näiteks D-skaala jaotusele 2 vastavad arvud 20, 200, ..., 0,2, 0,02; 0,002 jne. Samuti vastavad jaotusele 4,55 arvud 45,5, 455, 4550, ..., 0,455, 0,0455 jne.

§ 3. Logaritmiliste skaalade põhiomadusi.

C-skaala jaotused ühtuvad D-skaala jaotustega. Selles on kerge veenduda otsese võrdluse teel. Kui viia C- ja D-skaala esimesed jaotused ühtimisele, siis langevad ka kõik ülejäänud C- ja D-skaala vastavad jaotused kokku.

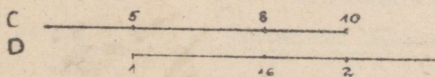
Vaatleme nüüd lükati seisus, kus C-skaala esimene jaotus on viidud D-skaala 2 kohale.



Niisuguse lükati seisu juures asetsevad C-skaala jaotused 1, 2, 3, 4 ja 5 vastavalt D-skaala jaotuste 2, 4, 6, 8 ja 10 kohal, millest nähtub, et ükssteise kohal asuvaltele C- ja D-skaala jaotustele vastavad arvud on võrdelised. Kui omistada C-skaalale kantud arvudele murru lugeja tähendus ja D-skaala arvudele murru nimetaja tähendus, siis teineteise kohal asetsevad C- ja D-skaala arvud kujutavad rida võrdseid murde. Joonisel näidatud lükati seisu juures oleksid niisugusteks murdudeks

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}.$$

Vahetame C-skaala esimese jaotuse C-skaala viimase jaotusega, s. t. viime C-skaala 10 D-skaala 2 kohale. (Edaspidi nimetame seda operatsiooni lühidalt keele ülelülkeks).



Sellise lükati seisu juures asuvad C-skaala jaotused 5, 6, 7, 8, 9, 10 vastavalt D-skaala jaotuste 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2 kohal. Seega ka selle lükati seisu juures on teineteise kohal olevate C- ja D-skaala jaotustele vastavad arvud võrdelised ja nendest arvudest moodustatud murrud on võrdsed:

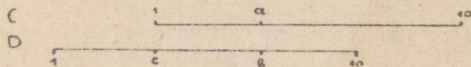
$$\frac{5}{1}, \frac{6}{1,2}, \frac{7}{1,4}, \frac{8}{1,6}, \frac{9}{1,8}, \frac{10}{2}.$$

Kui võrdleme viimaste murdude väärtust (5) lükati esimesest seisust saadud murdude väärtusega (0,5), siis näeme, et viimaste murdude väärtus on 10 korda suurem esimeste murdude väärtusest. Arvude suurusjärke arvestamata jättes võime ütelda, et nii esimese kui ka teise lükati seisu juures saab C- ja D-skaala kohakuti asuvatele jaotustele vastavatest arvudest moodustada murde, mille väärtuste tüvinumbrid on võrdsed. Siit järeldub ka asjaolu, et C-skaala esimese ja viimase jaotuse vahetamine ei avalda mõju kirjeldatud murdude väärtuste tüvenumbritele ja me võime selles mõttes C-skaala esimest ja viimast jaotust pidada samaväärseks.

Näitame, et kirjeldatud konkreetsest näitest järeldatud tulemused kehtivad iga lükati seisu korral.

Teoreem. Mis tähes lükati seisu juures on C- ja D-skaaladel kohakuti asuvad arvud võrdelised.

Anneme keelele suvalise nihke:



Olgu a ja b kaks suvalist teineteise kohal asuvat arvu C- ja D-skaalal. Neile arvudele vastavad kaugused skaalade alguspunktidest on $\log a$ ja $\log b$. Joonisest nähtub, et $\log c + \log a = \log b$.

Logaritmi omaduste põhjal

$$ca = b,$$

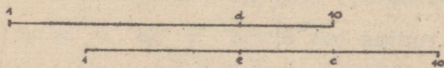
ehk

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{c}.$$

Iga konkreetse lükati seisu juures on c ning seega ka $\frac{1}{c}$ konstantne suurus. Et a ja b olid suvaliselt valitud teineteise kohal asuvad arvud, siis peavad kõik kohakuti asuvatest arvudest moodustatud murrud olema võrdsed.

Kui mingi konkreetse lükati seisu juures teha keele ülelücke, siis uue lükati seisu järgi moodustatud murrud on võrdsed ja nende väärtuste tüvenumbrid ühtivad esialgse lükati seisu järgi moodustatud murdude väärtuste tüvenumbritega.

Teostame keele ülelücke:



Vaatleme jälle C- ja D-skaala kahte suvalist kohakuti asuvat arvu d ja e . Joonisest nähtub, et

$$\log e + \log 10 - \log d = \log c,$$

kust

$$\frac{10e}{d} = c,$$

ehk

$$\frac{d}{e} = \frac{10}{c}.$$

Arvud c ja $\frac{10}{c}$ on konkreetse lükati asendi korral konstantsed, seega peavad kõik kohakuti olevatest arvudest

moodustatud murrud olema võrdsed. Lükati teise seisuga järgi leitud murdude väärtus on esimese seisuga saadud murdude väärtusest 10 korda suurem, siit järeldub, et mõlemal korral on murdude tüvenumbrid võrdsed.

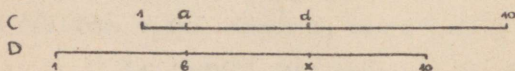
§ 4. Võrde realiseerimine lükatil.

Kui meil on tarvis leida neljandat võrdelist avaldisest

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{x},$$

siis toimime järgmiselt.

Vaatleme C- ja D-skaala vahelist pilu murrujoonena ja paigutame võrde liikmed skaaladele C ja D täpselt nii, nagu nad võrdes seisavad. Selleks viime keele lükkega kõigepealt kohakuti võrde tuntud osa arvud a ja b ning loeme siis niidi abil C-skaala jaotuse d kohalt D-skaalalt neljanda võrdelise väärtuse.



Mõnikord võib juhtuda, et neljas võrdeline satub lugemispiirkonnast välja. Sel puhul tuleb teha keele ülelücke ja kõik on jälle korras. Et ülesannete lahendamisevõtteid saaks lühemalt kirjeldada, selleks võtame kasutusele tähistuse C-24, 0-42, C-4, C-1, D-10 jne., kusjuures D, C, A jne. näitavad, misuguse skaalaga on tegemist ja arvud 24, 42, 4, 1, 10 jne. näitavad skaala jaotustele vastavate arvude tüvenumbreid.

Harjutusi. Leida neljas võrdeline:

$$\frac{2,4}{4,2} = \frac{4}{x} ; \frac{2,4}{4,2} = \frac{8}{x} ; \frac{28,3}{119} = \frac{x}{34,5} ; \frac{x}{0,57} = \frac{632}{4,02}$$

Mitu protsenti moodustab arv 0,446 arvust 6,15?

§ 5. Korrutamine ja jagamine C- ja D-skaala abil.

Eespool selgus, et võrde lahendamine on C- ja D-skaala abil alati kergesti teostatav. Selgub, et võrdele üleminekut on hea kasutada üsna mitmekesiste ülesannete lahendamise juures. Nii näiteks kahe arvu korrutise

$$a \cdot b = x$$

leidmiseks kirjutame

$$a \cdot b = 1 \cdot x$$

ning võime kohe üles kirjutada neli võrret:

$$1. \frac{1}{a} = \frac{b}{x},$$

$$2. \frac{a}{1} = \frac{x}{b},$$

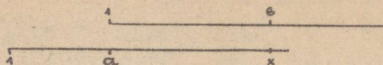
$$3. \frac{a}{x} = \frac{1}{b},$$

$$4. \frac{x}{a} = \frac{b}{1}.$$

Valides nendest neljast võrdest ükskõik millise, saame hõlpsasti leida otsitava suuruse võrde lahendamise meetodil.

Võrde $\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$ lükatil realiseerimiseks viime C-1 ja

D-a kohakuti ning lükkame niidi C-b kohale. Korrutise x tüvenumbrid leiame niidi alt D-skaalalt:



Kui C-b peaks sattuma väljaspoole D-skaala piirkonda, siis teeme keele ülelükke.

Muidugi jõuame sama tulemuseni ka ülejäänud kolme võrret lahendades. Et kahe arvu korrutamisel vältida võrdele üleminekut, siis kasutatakse korrutamiseks tavaliselt viimasel skeemil toodud lükati asendit.

Harjutusi. $2,4 \cdot 31$; $37,2 \cdot 1,82$; $4,04 \cdot 66,5$; $208 \cdot 520$;
 $0,133 \cdot 0,732$; $0,0206 \cdot 873$; $0,00846 \cdot 52,7$; $68,9 \cdot 72,6$; $2,008 \cdot 76,28$.

Kahe arvu jagatise

$$\frac{a}{b} = x$$

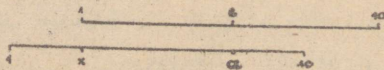
leidmiseks võtame jälle appi võrde

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{1},$$

ehk

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{x}.$$

Viimase võrde realiseerimiseks viime C-b D-a kohale ja loeme vastuse tüvenumbrid D-skaalalt C-1 kohalt. (Kui C-1 satub väljaspoole D-skaala piirkonda, siis loeme vastuse C-10 kohalt). Vastuse õige suurusjärgu määrame jämeda hindamise teel.



Peame jälle meeles kahe arvu jagamiseks vajaliku lükati seisu, et iga kord poleks tarvis üle minna võrdele.

Harjutusi. 24:6; 86,6:17,4; 0,192:6,45; 3,08:0,0755.

§ 6. Pöördskaalad.

Keele keskel asetsevat skaalat nimetatakse pöördskaalaks ehk lühidalt E-skaalaks. Ta kujutab endast ümberpööratud C-skaalat. E-skaala iga jaotus on skaala parempoolsest otspunktist kaugusel, mis võrdub sellele jaotusele vastava arvu logaritmiga. E-skaala jaotuste lugemisel ja märkimisel ei tohi unustada, et see peab toimuma paremalt vasakule.

Kerge on veenduda, et iga E- ja C-skaalal kohakuti seisva arvupaari korrutis on 10. Arvude suurusjärke arvestamata jättes võime ütelda, et E- ja C-skaala kohakuti asetsevatele jaotustele vastavad pöördarvude tüvenumbrid.

Pöördskaalat võib edukalt kasutada mitme arvu järjest korrutamise või järjest jagamise puhul.

Näiteks korrutise $64,3 \cdot 7,35 \cdot 0,122$ arvutamine toimub pöördskaalala abil järgmiselt. Kirjutame selle korrutise ümber kujul

$$x = 64,3 : \frac{1}{7,35} \cdot 0,122$$

ja toome D-643 kohale E-735. Nüüd on C-1 kohal D-skaalal vahetulemus. Selle korrutamine 0,122-ga on juba lihtne.

Pöördskaalat on sageli mõnus kasutada ka ainult kahe arvu korrutamisel keele lükke ulatuse vähendamiseks. Olgu näiteks vaja korrutada 1,2 kaheksaga. Kui lükat on algseisus, siis tarvitseb vaid pöördskaalala 8 tuua D-1,2 kohale niidi

alla ja korrutis 9,6 asetseb D-skaalal C-10 kohal.

Kui meil on aga lükati algseisust vaja leida korrutis 1,2·1,6, siis kasutame loomulikult harilikku korrutusviisi.

C-, D- ja E-skaalasad otstarbekalt kombineerides saab ka üsna pikki arvavaldisi kerge vaevaga arvutada.

Kõigepealt märgime, et avaldiste

$$x = \frac{abcd}{efg}$$

arvutamisel on otstarbekas korrutamist ja jagamist vaheldumisi teostada. Jagame arvu a arvuga e; tulemust lugemata korrutame ta niidi abil arvuga b; nüüd toome niidi alla arvu f ja korrutame saaduse kohe arvuga c; lõpuks jagame arvuga g ja korrutame niidi abil arvuga d.

Näide:

$$x = \frac{62,2 \cdot 5,04 \cdot 0,38 \cdot 4,72}{0,73 \cdot 13,2 \cdot 2,71} = 21,5.$$

Koma asukohta määrame jämeda arvutusega: $0,73 \cdot 13,2 \approx 10$;
 $62,2 : 10 \approx 6$; $6 \cdot 5 \approx 30$; $30 \cdot 0,4 \approx 12$; $12 \cdot 5 \approx 60$; $60 : 3 \approx 20$.

Kui avaldise kuju on niisugune, et jagamisi ja korrutamisi ei saa vaheldumisi teostada, siis saame pöördskaalat appi võttes säilitada endist mugavat arvutuskeemi. Näiteks arvutame

$$x = \frac{3,1}{0,627 \cdot 2,44 \cdot 13,3} = \frac{3,1 \cdot \frac{1}{2,44}}{0,627 \cdot 13,4} = 0,1525.$$

(Koma asukoht: $0,627 \cdot 2,44 \approx 1$; $3,1 : 13,3 \approx$ veerand).

Ka teiste taoliste avaldiste jaoks saab skaalasad kombineerides anda otstarbekaid arvutuskeeme, mis vähendavad keele vajalike liigutuste arvu. Mida vähem on keele lükkeid, seda parem on täpsus!

§ 7. A- ja B- skaala .

A- ja B-skaala on logaritmilised skaalad, s. t. iga jaotus asub skaala algusest kaugusel, mis võrdub sellele jaotusele vastava arvu kümnendlogaritmiga, kusjuures pikkuseühikuks on pool kogu skaala pikkusest. See aga tähendab, et 0- või D-skaala arvu kohal on A- või B-skaalal (kui lükat on algseisus) sellest arvust kaks korda suurema logaritmiga arv ehk teiste sõnadega, selle arvu ruut. Selles võime veenduda ka otsese võrdlemise teel.

Harjutusi. Leida 3^2 , 14^2 , $10,7^2$, 24^2 , $3,16^2$, $0,4^2$, 506^2 , $0,064^2$. Arvude suurusjärgu määrame peast.

Ilma pikemata on selge, et kui asetada niit A-skaala mingile jaotusele, siis peab niidi all D-skaalal seisma jaotus, mis vastab A-skaala arvu ruutjuurele. Ruutjuure leidmisel peame A-skaala esimese poole jaotustele vastavaid arve lugema ühe täiskohaga arvudeks, teise poole jaotustele vastavaid arve aga kahe täiskohaga arvudeks ja D-skaala jaotustele vastavaid arve ühe täiskohaga arvudeks.

Vajaduse korral muudame arvud, mis pole ühe või kahe täiskohalised, niisugusteks koma kahe koha kaupa vasakule või paremale nihutamiseks.

Harjutus. Leida $\sqrt{1,15}$, $\sqrt{11,5}$, $\sqrt{5,6}$, $\sqrt{0,56}$, $\sqrt{2800}$, $\sqrt{0,9}$, $\sqrt{0,025}$, $\sqrt{0,031}$, $\sqrt{82500}$.

§ 8. K - s k a a l a .

K-skaala on logaritmiline skaala, s. t. ta jaotused asuvad skaala algusest kaugusel, mis võrdub jaotustele vastava arvu kümnendlogaritmiga, kusjuures pikkusühikuks on võetud üks kolmandik kogu skaala pikkusest. See tähendab, et D-skaala arvule vastab K-skaalal ta kuup.

Näide: $0,214^3 = 0,0098$.

Harjutus. Leida $15,4^3$, 288^3 , $92,5^3$, $0,51^3$, $0,00444^3$, $0,0007^3$.

Kuupjuure leidmiseks talitame ümberpöörduvalt, s. t. viime niidi antud arvule vastavale jaotusele K-skaalal ja vastuse loeme D-skaalalt niidi järgi. Kui antud arv on ühe, kahe või kolme täiskohaga, siis kasutame vastavalt esimest, teist või kolmandat K-skaala osa. Kui arv pole ühe, kahe või kolme täiskohaga, siis muudame ta niisuguseks koma kolme koha kaupa vajalikus suunas nihutamisega.

Harjutus. Leida järgmiste arvude kuupjuured: $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{336}$, $\sqrt[3]{1,47}$, $\sqrt[3]{146000}$, $\sqrt[3]{0,45}$, $\sqrt[3]{0,1}$, $\sqrt[3]{10000}$, $\sqrt[3]{0,0072}$.

§ 9. K o m b i n e e r i t u d a r v u t u s e d e r i n e v a t e s k a a l a d e a b i l .

Arvutuslükati on eriti kasulik kombineeritud arvutuste juures, kui on korruga tarvis kasutada mitut skaalat. Toome mõned näited avaldistest, mille väärtusi saab leida ühe keele asetusega.

$$x = \frac{a}{b^2}, \quad x = ab\sqrt{c}, \quad x = a\sqrt{\frac{b}{c}}, \quad x = \sqrt{ab}, \quad x = ab\sqrt{ab},$$

$$x = ab^2, x = ab^3, x = \frac{a}{b} \sqrt{c}, x = abc^2, x = a \sqrt[3]{\frac{b}{c}}, x = \sqrt{a} \sqrt[3]{\frac{b}{c}}, x = \frac{a^2}{b^3} \text{ jne.}$$

Kõigi nende avaldiste väärtuste leidmise printsiip on ühine: avaldis tuleb viia võrde kujule, nii et võrre oleks realiseeritav kas AB- või CD-skaaladel. Juuri sisaldavad avaldised on realiseeritavad CD-skaaladel, astmeid sisaldavad avaldised AB- ja K-skaaladel.

Näiteks avaldise $x = \frac{1}{a} \sqrt[3]{\frac{b}{c}}$ arvutamisel peame silmas, et kuupjuuri saab leida vaid D-skaalalt. Järelikult tuleb võrre realiseerida skaaladel C ja D. Kõigepealt anname võrdele kuju

$$\frac{x}{\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{a \sqrt[3]{c}},$$

siis viime a lugejasse:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt[3]{c}}.$$

See võrre on juba realiseeritav. K-skaala c kohale toome niidi alla pöördaskaala a ja K-skaala b kohalt loeme C-skaalalt vastuse.

Harjutus. Leida kõigi eespool toodud avaldiste jaoks realiseeritud võrded. Võtta vabalt ette mõni arvukolmik a, b, c ja arvutada nende avaldiste väärtused.

§ 10. Trigonomeetrilised skaalad.

Keele tagaküljele on kantud trigonomeetrilised skaalad: ülal siinusskaala (sin), keskel väikeste nurkade siinuste ja tangensite ühine skaala S & T ja all tangensskaala Tg.

Väikeste nurkade siinuste ja tangensite skaala hõlmab nurki $0^{\circ}34',4 - 5^{\circ}44'$, siinusskaala nurki $5^{\circ}44' - 90^{\circ}$ ja tangensskaala nurki $5^{\circ}43' - 45^{\circ}$.

Need nurkade väärtused on valitud kaalutlusel, et iga skaala puhul parempoolses otsas oleva nurga funktsiooni väärtus oleks vasakpoolses otsas olevast funktsiooni väärtusest 10 korda suurem:

$$\sin 0^{\circ}34',4 \approx \tan 0^{\circ}34',4 \approx 0,01000;$$

$$\sin 5^{\circ}44' \approx \tan 5^{\circ}43' \approx 0,1000;$$

$$\sin 90^{\circ} = 1,000, \quad \tan 45^{\circ} = 1,000.$$

Trigonomeetrilistele skaaladele on kantud nurkade siinuste ja tangensite logaritmid, jaotuste juurde on aga kirjutatud nendele vastavad nurgad.

Nende skaalade abil arvutamiseks pöörame keele ümber. Kui panna skaalade lõpud kohakuti, siis on meil olemas siinuste ja tangensite tabel. Tarvitseb vaid viia niit siinusskaala 30° kohale, ja me saame D-skaalalt lugeda $\sin 30^{\circ} = 0,5$. Edasi $\sin 18^{\circ}10' = 0,312$, $\sin 1^{\circ}11' = 0,02067$, $\tan 30^{\circ} = 0,5774$, $\tan 12^{\circ}34' = 0,223$ jne.

Teiste nurkade ja nurgafunktsioonide puhul kasutame üleminekuseid:

$$\cos A = \sin (90^{\circ} - A);$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}, \quad \text{kui } 0 \leq A \leq 45^{\circ};$$

$$\tan A = \cot (90^{\circ} - A) = \frac{1}{\tan (90^{\circ} - A)}, \quad \text{kui } 45^{\circ} \leq A < 90^{\circ};$$

$$\cot A = \tan (90^{\circ} - A), \quad \text{kui } 45^{\circ} \leq A \leq 90^{\circ}.$$

Harjutusi. Leide trigonomeetriliste funktsioonide väärtused: $\sin 22^{\circ}44'$, $\sin 49^{\circ}45'$, $\sin 4^{\circ}02'$, $\tan 40^{\circ}10'$,

$\tan 8^{\circ}37'$, $\tan 2^{\circ}39'$, $\tan 67^{\circ}30'$, $\tan 88^{\circ}15'$, $\cos 40'$,
 $\cot 78^{\circ}$, $\cot 25^{\circ}10'$, $\sin 54^{\circ}$, $\cot 87^{\circ}48'$, $\cos 81^{\circ}54'$,
 $\tan 86^{\circ}32'$.

Leida nurgad, kui $\sin A = 0,323$, $\tan A = 0,982$, $\tan A =$
 $= 0,0722$, $\sin A = 0,1146$, $\sin A = 0,0605$, $\sin A = 0,0215$,
 $\tan A = 0,0308$, $\cot A = 0,3$, $\tan A = 6,6$, $\cot A = 0,073$,
 $\cos A = 0,482$, $\cos A = 0,062$, $\cot A = 56,4$, $\cot A = 0,073$.

§11. Üleminek radiaanmõõdustikule.
 34' väiksemate nurkade trigonomeetrilised funktsioonid.

Nurga suuruse leidmiseks radiaanides, kui nurk on antud kraadides, minutites või sekundites, kasutame vastavalt valemid:

$$1) \alpha = \frac{A^{\circ} \pi}{180}, \text{ kui } A^{\circ} \text{ on nurga suurus kraadides,}$$

$$2) \alpha = \frac{A' \pi}{180 \cdot 60} = \frac{A'}{3438} = \frac{A'}{\varphi'}, \text{ kui } A' \text{ on nurga suurus minutites,}$$

$$3) \alpha = \frac{A'' \cdot \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{A''}{2063 \cdot 10^4} = \frac{A''}{\varphi''}, \text{ kui } A'' \text{ on nurga suurus sekundites}$$

(φ' ja φ'' on lüketil tähistatud erimärkidega).

Näide. $112^{\circ}30' = 112,5^{\circ} = 1,96$ radiaani. Radiaanmõõdu leidmiseks kasutame siin võrret $\frac{180}{\pi} = \frac{112,5}{A}$.

Harjutusi. Leida järgmiste nurkade radiaanmõõdud:

$A = 23'$, $A = 17''$, $A = 40,6'$, $A = 0,023'$, $A = 0,0075''$.

34'-st väiksemate nurkade trigonomeetriliste funktsioonide leidmisel lähtume asjaolust, et 34'-st väiksemate nurkade siinused ja tangensid võrduvad lücati täpsuse piires nen-

de nurkade radiaanmõõtudega.

$$\begin{aligned} \text{Näide. } \sin 20' &= \frac{20}{\rho'} = 0,00582; \quad \tan 1' = \frac{1}{\rho'} = 0,000291; \\ \cot 89^{\circ}54' &= \tan 6' = \frac{6}{\rho'} = 0,00174; \quad \tan 89^{\circ}44' = \frac{1}{\tan 16'} = \\ &= \frac{\rho'}{16} = 214. \end{aligned}$$

Ka vastupidine ülesanne, trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse põhjal leida argumendi väärtus, ei tekita siin erilisi raskusi.

$$\text{Harjutusi. } \sin A = 0,0032, \quad \tan A = 4700, \quad \cot A = 365, \\ \cot A = 893.$$

Juhime veel lugeja tähelepanu asjaolule, et lükati kor-puse tagaküljel on kriipsudega, nn. indeksitega varustatud väljalõiked, mis võimaldavad trigonomeetriliste funktsiooni-de väärtuste leidmist ilma keelt ümber pöörmata. Enamasti on aga need indeksid tõmmatud ebatäpselt, nii et enne nende kasutamist tuleb igal juhul teha vastav kontroll. Nii näi- teks, kui viia siinusskaala indeksi kohale nurk 30° ja lü- kati ümber pöörata, siis näeme, et otsitav siinuse väärtus 0,5 asetseb (või vähemalt peaks asetsema) D-10 kohal C- skaalal. D-10 kohale tulevad nii siinuse kui ka siinuse ja tangensi ühisskaala nurkade funktsioonide väärtused. Tangen- si väärtused tulevad aga D-1 kohale C-skaalale, kui vas- tav nurk viia ühtimisele tangensskaala indeksiga. Juhul, kui lükatil on korrektsed indeksid, siis on ilmne, et mõningaid lihtsamaid arvutusi, nagu $a \cdot \sin A$, $b \cdot \tan B$ jne. ,saab teostada ilma keelt ümber pöörmata. Ebatäpsete indeksite korral tuleb aga arvutused teostada keelt ümber pöörates ja võrdeprintsiiibist lähtudes.

§ 12. Kolmnurkade lahendamine
arvutuslükatiga.

Kolmnurkade lahendamiseks peame silmas, et kõik trigonomeetrilised skaalad kombineerituna D-skaalaga moodustavad võrrete koostamiseks sobivad skaalapaarid.

Nii näiteks siinusskaala ja D-skaala kombinatsioon annab meile siinuslause realiseeringu:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}.$$

T- ja D-skaala aga annavad seose

$$\frac{\tan A}{a} = \frac{\tan B}{b}.$$

Seda asjaolu kasutamegi kolmnurkade lahendamisel.

Näide. Leida täisnurkse kolmnurga kaatetid, kui hüpoteenus $c = 18,6$ cm ja üks teravnurk $A = 37^{\circ}30'$.

Lahendus. Teine teravnurk $B = 90^{\circ} - 37^{\circ}30' = 52^{\circ}30'$.

Külje a leidmiseks kasutame võrret

$$\frac{a}{c} = \sin A,$$

ehk

$$\frac{1}{c} = \frac{\sin A}{a}.$$

Võrde realiseerimiseks peame silmas, et $1 = \sin 90^{\circ}$.

Järelikult

$$\frac{\sin 90^{\circ}}{18,6} = \frac{\sin 37^{\circ}30'}{a}.$$

Siit

$$a = 11,3.$$

Kaateti b saame leida samast võrdest kasutades nurka $52^{\circ}30'$:

$$b = 14,75.$$

Harjutusi. Leida täisnurkse kolmnurga hüpotenuus ja teine kaatet, kui üks kaatet $a = 7,2$ m ja selle kaateti vastasnurk $A = 12^{\circ}45'$.

Leida täisnurkse kolmnurga nurgad, kui on antud hüpotenuus $c = 1,72$ m ja kaatet $a = 0,45$ m.

Leida täisnurkse kolmnurga nurgad, kui kaatetid on $a = 2,38$ m ja $b = 42,5$ m.

1. Ka kaldnurksete kolmnurkade lahendamise juures on sageli sobiv kasutada siinuslauset

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} .$$

Selleks on vaja, et kolmnurgast oleks antud üks külg ja kaks nurka või kaks külge ja ühe külje vastasnurk.

Näide. Kolmnurgas on antud külg $a = 215$ m, nurk $A = 50^{\circ}30'$ ja nurk $B = 28^{\circ}25'$. Leida küljed b ja c .

Siinuslauselst saame kohe

$$\frac{\sin 50^{\circ}30'}{215} = \frac{\sin 28^{\circ}25'}{b} ,$$

kust $b = 132,5$ m. Suurusjärgu hindamiseks piisab tavaliselt kolmnurga kaju ligikaudsest visandist. Ka peame silmas, et kolmnurgas esub suurema nurga vastas pikem külg.

Harjutus. Kolmnurgas on antud külg $a = 52,5$ m ja külg $b = 31,6$ m. Külje a vastasnurk $A = 122^{\circ}16'$. Leida külg c ning nurgad B ja C .

2. Kui kolmnurgast on antud kaks külge a ja b ning nende vaheline nurk C , siis on sobiv kasutada tangenslauset

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\tan \frac{A + B}{2}}{\tan \frac{A - B}{2}} ,$$

mida tuleb vaid esitada kujul

$$\frac{\tan \frac{A-B}{2}}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{a+b}$$

Näide. Antud on kaks külge $a = 40,8$ cm, $b = 37,7$ ja nende vaheline nurk $C = 112^{\circ}40'$. Leida külge c ning nurgad A ja B .

Lahendus. $a + b = 88,5$; $a - b = 3,1$.

Edasi $\frac{A+B}{2} = \frac{180^{\circ} - C}{2}$ ehk $\frac{A+B}{2} = 90^{\circ} - \frac{C}{2}$;

$$\frac{C}{2} = \frac{112^{\circ}40'}{2} = 56^{\circ}20'; \quad \frac{A+B}{2} = 90^{\circ} - 56^{\circ}20' = 33^{\circ}40'.$$

Koostame võrde

$$\frac{\tan \frac{A-B}{2}}{3,1} = \frac{\tan 33^{\circ}40'}{88,5},$$

millest $\frac{A-B}{2} = 1^{\circ}20'$ (tulemus tuleb lugeda S ja T ühisskaalalt, sest $3,1:88,5 = 0,035$, milline väärtus on $0,01$ ja $0,1$ vahel).

Nurkade A ja B määramiseks saame võrrandisüsteemi

$$\frac{A+B}{2} = 33^{\circ}40',$$

$$\frac{A-B}{2} = 1^{\circ}20',$$

mida lahendades leiame, et $A = 35^{\circ}$, $B = 32^{\circ}20'$.

Külge c puhul kasutame siinuslauset

$$\frac{\sin 35^{\circ}}{40,8} = \frac{\sin 112^{\circ}40'}{c}.$$

Võrde realiseerimisel peame silmas asjaolu, et

$$\sin 112^{\circ}40' = \sin (180^{\circ} - 112^{\circ}40') = \sin 67^{\circ}20'.$$

Seega külg $c = 66$ cm.

3. Kui kolmnurgast on antud kolm külge, siis kasutame valemeid

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

kus $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Näide. Kolmnurga küljed on $a = 15,4$; $b = 21,6$; $c = 12,8$. Leida nurgad.

Peale lihtsaid arvutusi leiame

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{3,3 \cdot 12,1}{24,9 \cdot 9,5}} = 0,41.$$

Siit $A = 44^{\circ}30'$.

Analoogiliselt

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{9,5 \cdot 12,1}{24,9 \cdot 3,3}} = 1,19, \quad B = 99^{\circ}22',$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{3,3 \cdot 9,5}{24,9 \cdot 12,1}} = 0,328, \quad C = 36^{\circ}16'.$$

Kolmnurga nurkade summa $A + B + C = 180^{\circ}8'$. Kõrvalekalle on lükati täpsuse piires paratamatu.

§ 13. Erimärgid lükatil.

Lükatile on kantud rida erimärkidega jaotusi, nagu π , c , c_1 , M , φ' , φ'' ja φ_n . Arvutuslükati tagaküljel on antud nende suuruste tähendused ja arvvaartused.

$$\pi = 3,14159,$$

$$M = \frac{1}{\pi} = 0,31831,$$

$$c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,12838,$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = 3,56825,$$

$$\rho' = \frac{360 \cdot 60}{2\pi} = 3437,8,$$

$$\rho'' = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} = 60\rho' = 206300,$$

$$\rho'' = 636620.$$

Vaatleme mõningaid ülesandeid, kus need suurused leiavad rakendamist.

Ringjoone pikkuse arvutamine.

Ringjoone pikkus võrdub π -kordse diameetriga.

Ringi pindala arvutamine.

Ringi pindala võib arvutada valemitega

$$S = \pi r^2 \quad \text{või} \quad S = \frac{\pi d^2}{4},$$

kus r on ringi raadius ja d on ringi diameeter.

Esimesel juhul realiseerime skaaladel A ja B võrde

$$\frac{S}{r^2} = \frac{\pi}{1}.$$

Teisel juhul anname ringi pindala valemile uue kuju

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{d^2}{\left(\sqrt{\frac{4}{\pi}}\right)^2}.$$

Eespool nägime, et $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$ on lükatil tähistatud c -ga.

Seega

$$S = \frac{d^2}{c^2} = \left(\frac{d}{c}\right)^2$$

Ringi pindala leidmiseks tarvitseb vaid ringi läbimõõtu jagada c -ga ja C -skaala alguse või lõpu kohalt lugeda A -skaalalt vastus.

Silindri ruumala arvutamine.

Silindri ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega:

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4} = \frac{d^2 h}{c^2},$$

ehk võrdena

$$\frac{d^2}{c^2} = \frac{h}{V}.$$

Üleminek nurgakraadidelt radiaanidele.

Seda osa on käsitletud juba eespool (punkt 11).

Sentesimaaljaotus.

Sentesimaaljaotuse korral on ringjoon jaotatud 400 kraadiks, üks kraad on jaotatud sajaks minutiks ja üks minut sajaks sekundiks. Sellise jaotuse juures vastab $400 \cdot 100 \cdot 100$ sekundile 2π radiaani ja ühele sekundile vastab

$$\frac{2\pi}{400 \cdot 100 \cdot 100} = \frac{1}{636620} = \frac{1}{\rho''} \text{ radiaani.}$$

Kui nurga suurus A on antud sentesimaaljaotuse sekundites, siis vastava radiaanmõõdu leiame valemi

$$\alpha = \frac{A''}{\rho''}$$

järgi. α suurusjärgu hindamiseks võtame ρ'' ligikaudseks väärtuseks 600000 ehk $6 \cdot 10^5$.

Näide. Leida nurga radiaanmõõt, kui ta suurus sentesimaaljaotuse järgi on $4^{\circ}28''$.

$$\alpha = \frac{42800}{636620} = 0,0672 \text{ radiaani.}$$

§ 14. Logaritmilised arvutused.

L- ja D-skaala abil võib leida üsna keeruliste avaldiste väärtusi, mis nõuavad logaritmade appivõtmist.

Arvutame näiteks avaldise $2,46^{0,91}$ väärtuse. Olgu $x = 2,46^{0,91}$, siis $\log x = 0,91 \cdot \log 2,46$. Viime niidi D-2,46 kohale, siis L-skaalal on logaritmi mantiss: 391, s.t. $\log 2,46 = 0,391$. Seega $\log x = 0,91 \cdot 0,391 = 0,356$. Viies niidi L-356 kohale, saame D-skaalalt 227. Et logaritmi täisosaga oli null, siis $2,46^{0,91} = 2,27$.

Vaatleme veel ühte näidet. Leida $x = 0,00462^{0,129}$. Logaritmides saame $\log x = 0,129 \cdot 0,00462$. Harilikul viisil leiame $\log 0,00462 = \bar{3},665$. Edasiseks arvutamiseks tuleb logaritm teha üleni negatiivseks: $\bar{3},665 = -2,335$; $\log x = -2,335 \cdot 0,129 = -0,301$. Antilogaritmi võtmiseks teeme mantissi jälle positiivseks: $-0,301 = \bar{1},699$. Siit $x = 0,500$.

Harjutusi. $1,62^{0,91}$; $2,67^{1,55}$; $\pi^{2,12}$; $10^{-3,27}$;

$$\sqrt[7]{0,062} \sqrt[0,4275]{}; \frac{1,36 \cdot 0,63^{0,605}}{3^{0,58} \cdot 15^{2,9}}; \frac{109}{716} \sqrt[3]{\frac{95\pi}{404}};$$

$$\left(\frac{38}{27}\right)^{0,07} \cdot \left(\frac{51}{43}\right)^{0,03}.$$

§ 15. Arvutuslükati täpsusest.

Arvutuslükatiga teostatavate arvutuste täpsuse hindamiseks peame silmas, et lükati skaaladele on kantud jaotused $u = Lf(x)$, kus L on vastava skaala pikkus ja $f(x)$ on skaalale vastav funktsioon. Lugemi viga Δu on argumendi x veaga seotud järgmiselt:

$$\Delta u \approx Lf'(x)\Delta x .$$

Siit leiame, et

$$\Delta x \approx \frac{u}{Lf'(x)} .$$

Relatiivne viga on seega

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta u}{Lf'(x)x} .$$

Vaatleme näitena pühiskaalade C ja D täpsust. Nende skaalade puhul $f(x) = \log x$, ja relatiivne viga

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta u}{L \log e} = \text{const.}$$

Relatiivse vea konstantsus ongi üheks lükati suureks eeliseks. Kuna nende skaalade puhul $L = 250$ mm, siis võttes lugemi täpsuseks $0,1$ mm, saame, et

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0,1}{250 \cdot 0,4343} \approx 0,001 = 0,1\% .$$

See on keskmine täpsus, sest jaotuste vahed pole kõikjal ühesugused ja interpolatsioon pole võrdse täpsusega teostatav. Praktiliselt ei ületa siiski viga $0,2\%$.

Mõnikord saab lükati täpsust kergesti tõsta. Näiteks korrutise $52,74$ puhul annab lükat vastuseks 3850 . Et korrutis on neljakohaline arv ja lõpeb kaheksaga, siis $52,74 = 3848$.

Kui mõnda korrutist või jagatist on vaja leida $4-5$ õige tüvikohaga, siis leiame tulemuse $1-2$ tüvikohta käsitsi ja kolm viimast kohta lükatiga:

$$\pi \cdot 4712 = 3 \cdot 4712 + 0,1416 \cdot 4712 = 14136 + 667 = 14803 .$$

§ 16. Mõned üldised märkused.

Arvutuslükatil arvutamise oskuse aluseks on arvude paigutamine lükatile ja nende sealt lugemine. Kui arvude lugemine toimub küllaläidase kiiruse ja täpsusega (silma järgi interpoleerimine nõuab mõningat treeningut), siis on garanteeritud ka õigete tulemuste saamine. Korras lükat ei valetata isegi. Vea puhul on süüdi alati arvutaja.

Arvutuslükatil töötamist tuleb seni harjutada, kuni arvutamise võtmed on muutunud täiesti automaatseks. Alles siis suudetakse vabaneda võimalikest vigadest.

Toome siin näite ühest arvestustööst. Selle variandi kõik 10 ülesannet tuleb lahendada 50 minuti jooksul ilma ühegi veata (lubatud kõrvalekalle on 0,3%). Need näited tuleb mitu korda läbi arvutada, nii et liigutused muutuksid tõepoolest automaatseteks. Kui 50 minuti piir on saavutatud, siis tuleb endal koostada veel 1-2 taolist kontrollvarianti. Ainult nii õpitakse usaldama oma arvutustulemusi. Kui aga iga vajaliku tehte juures peab tükk aega mõtlema, siis tekivad paratamatult vead

- 1) $\frac{12,67 \cdot 0,001534 \cdot 23,73}{0,0567 \cdot 3,95 \cdot 0,0856}$,
- 2) $\frac{19,37 \cdot 3,56^2 \cdot 0,023}{0,00753 \cdot 0,032 \cdot 6,74}$,
- 3) $\frac{2,68 \cdot \sqrt[3]{0,658 \cdot 5,94}}{63,8 \cdot \sqrt{0,00356}}$,
- 4) $\sqrt{3970} \cdot \sqrt[3]{0,05}$,
- 5) $\sqrt{0,000356} \cdot \sqrt{6,743}$,
- 6) $0,000356^{0,0134}$,
- 7) $\pi^{-0,0567}$,
- 8) $\frac{11,2 \sin 47^{\circ}20'}{\tan 56^{\circ}20'}$,
- 9) $\frac{0,639 \cdot \sqrt[3]{0,724 \cdot 42,2}}{12,74 \cdot \tan 68^{\circ}10'}$,
- 10) $\frac{13,2^{0,43} \cos 47^{\circ}40' \cdot 2,38}{0,0146 \tan 71^{\circ}10' \cdot 0,037^2}$.

IV. VÖRRANDITE LAHENDAMINE.

§ 1. Sissejuhatus.

Milles peatükis vaatleme võrrandeid

$$f(x) = 0,$$

milles otsitavaks suuruseks on arv. (Erinevalt diferentsiaalvõrranditest, mille lahendiks on funktsioon). Toome mõned näited nn. harilike võrrandite kohta:

$$x^2 + ax + b = 0,$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x^2 + \sqrt{x} - 2 = 0,$$

$$x^2 - \ln x - 2 = 0,$$

$$e^{-x} \cos x = 0,$$

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Algebrakursusest on ruut- ja kuupvõrrandi lahendamiseks vajalikud valemid juba tuntud. Ka neljanda astme võrrandi üldjuht on lahenduv radikaalides, kuigi tunduvalt suurema töömahuga kui ruutvõrrand. Kõrgema astme algebraliste võrrandite ($n > 4$) ja transtsendentsete võrrandite korral aga pole üldjuhul radikaalides lahendamine üldse võimalik. Kõigil neil juhtudel tuleb kasutada juurte leidmiseks nn. lahendusmeetodeid, mis põhimõtteliselt võimaldavad juurte leid-

mist kui tahes suure täpsusega ja mis ka kuup- ning neljanda astme võrrandi puhul annavad lahendi praktiliselt palju kiiremini kätte kui algebras tuletatud "täpsed" meetodid. Isegi ruutvõrrandi lahendamisel tuleb mõnikord tavalist lahenduskaiku modifitseerida. Nimelt, kui ruutvõrrandi üks juur on absoluutväärtuselt suur ja teine väike, siis väiksema juure leidmisel tekib lähedaste arvude lahutamise tõttu suur tüvi-kohtade kadu ja koos sellega juure relatiivse vea suur kasv. Sellest raskusest saab aga üle, kui arvutada väiksem juur vabaliikme ja absoluutväärtuselt suurema juure jagatisena.

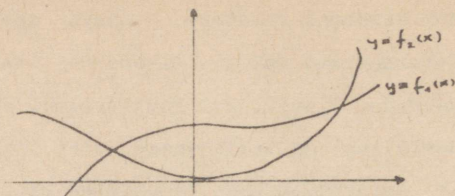
Kui $f(x)$ on antud, siis võrrandi $f(x) = 0$ lahendamise toimub enamasti kahes etapis. Esimesel etapil määratakse otsetavate juurte lähendid väikese täpsusega ja teisel etapil asume nende jämedate väärtuste parandamisele soovitud täpsuseni.

§ 2. Alglähendite leidmine.

Võrrandi lahenditele esimeste lähendite leidmiseks kasutame kas graafilisi meetodeid või ka lihtsalt funktsiooni tabelleerimist.

Alglähendite graafiliseks leidmiseks tuleb üles joonistada funktsiooni $y = f(x)$ graafik ja leida argumenti x väärtused, mille puhul $y = 0$. Graafikute kasutamisel on arvutuste hulga vähendamiseks mõnikord kasulik mitte otseselt funktsiooni $y = f(x)$ skitseerida, vaid esitada võrrand kõigepealt kujul $f_1(x) = f_2(x)$ ning siis määrata kõverate $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ lõikepunktid (vt. graafik). Parim

protseduur sõltub võrrandi kujust ja siin on raske anda üldisi eeskirju.



Toome paar näidet mõnede tüüpiliste võtete kohta:

1. Võrrand $f(x) = x^n + ax + b = 0$. Kasutame funktsioonide $y = x^n$ ja $y = -(ax + b)$ graafikuid.

2. Võrrandi $e^{1/4} x \sin x = 1$ skitseerimiseks kirjutame ta ümber kujul $\sin x = e^{-1/4} x$ ja leiame siis kõvera $y = \sin x$ lõikepunktid kõveraga $y = e^{-1/4} x$. Niisugune esitusviis väldib korrutiste $e^{1/4} x \sin x$ arvutamise.

3. Kui kõver $y = f(x)$ lõikab x -telge väikese nurga all, siis võib lõikepunkti määramisel tekkida suur viga. Selle vältimiseks joonistatakse üles funktsiooni $y = kf(x)$ graafik, kus $k = \text{const} > 1$. See tõstab kõvera tõusunurka ja aitab lõikekohta täpsemini määrata.

Alglähendite leidmine tabelleerimise abil. Võrrandite lahendamine tabelleerimise abil põhineb matemaatilisest analüüsist teadaoleval asjaolul, et kui pideval funktsioonil on lõigu otstel erinevate märkidega väärtused, siis tal on selles lõigus vähemalt üks nullkoht.

Kui me peale mõningat katsetamist oleme jõudnud niisuguse lõiguni, siis edasine töö kulgeb juba põhimõtteliselt lihtsalt.

Leiame funktsiooni väärtuse lõigu keskpunktis ja valime

välja selle lõigu poole, mille otstes funktsiooni väärtustel on erinevad märgid. Poolitamist järjest korrates võime leida funktsiooni nullkohad kui tahes suure täpsusega. (Niisugune protsess on oma äärmiselt lihtsa programmeeritavuse tõttu leidnud kasutamist ka kaasaegsetes elektronarvutites).

Käsitsi arvutamisel tuleb funktsiooni väärtuste arvutamisel püüda töö vähendamiseks maksimaalselt ära kasutada mitmesuguseid tabeleid ja eriti arvutuslükkatit. Mõnikord saab sobivate tabelite olemasolu korral võrrandi lahendeid leida üsna kergesti.

Näiteks võrrandi $e^x - 5 \operatorname{th} x = 0$ korral saame Bronšteini ja Semendjajevi matemaatilises käsiraamatus [4] toodud e^x ja $\operatorname{th} x$ tabeleid kasutades (suurusi e^x ja $\frac{10}{2} \operatorname{th} x$ võrreldes), et $x_1 \approx 0,27$, $x_2 \approx 1,51$.

Algebraaliste võrrandite

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

korral kasutama tabelleerimiseks Horneri skeemi (lk. 31).

§ 3. Algebraalise võrrandi reaallahendite eraldamine.

Algebraaliste võrrandite

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad a_0 > 0$$

reaallahendite leidmisel on enne tabelleerimist kasulik kindlaks määrata piirkond, millest võrrandi lahendeid tasub üldse otsida.

Positiivsete juurte ülemise tõkke leidmiseks kasutatakse sageli nn. MacLaurini valemit

$$K = 1 + \sqrt[q]{\frac{M}{a_0}},$$

kus M on negatiivsete kordajate absoluutväärtuste maksimum ja q on esimese negatiivse kordaja järjekorranumber.

Tõepoolest, kuna

$$\begin{aligned} f(x) &\geq a_0 x^n - M(x^{n-q} + x^{n-q-1} + \dots + x + 1) = \\ &= a_0 x^n - M \frac{x^{n-q+1} - 1}{x - 1}, \end{aligned}$$

siis $x > 1$ korral saame

$$\begin{aligned} f(x) &> a_0 x^n - \frac{M x^{n-q+1}}{x - 1} = \frac{x^{n-q+1}}{x - 1} [a_0 x^{q-1} (x - 1) - M] > \\ &> \frac{x^{n-q+1}}{x - 1} [a_0 (x - 1)^q - M]. \end{aligned}$$

Siit on ilmne, et kui $x \geq 1 + \sqrt[q]{\frac{M}{a_0}}$, siis $f(x) > 0$.

MacLaurini valem annab ainult positiivsete juurte ülemise tõkke. Kui aga võrrandis teha muutuja vahetus $x = -z$, siis saame leida ka negatiivsete juurte alumise tõkke. Asendustega $x = \frac{1}{z}$, $x = -\frac{1}{z}$ võime aga leida ka positiivsete juurte alumise ja negatiivsete juurte ülemise tõkke.

Teiseks kasulikuks algebrast teada olevaks abivahendiks on nn. Descartes'i reegel, mis ütleb, et võrrandi

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

positiivsete lahendite arv, loendatud vastavalt iga lahendi kordsusele, on kas võrdne märgimuutude arvuga selle võrran-

di kordajate jadas

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$$

või on sellest paarisarvu võrra väiksem.

Mis puutub negatiivsete lahendite arvusse, siis selle leidmiseks tarvitseb vaid teha muutuja vahetus $x = -z$ ja rakendada jälle Descartes'i reeglit.

Näide reaallahendite eraldamise kohta.

Olgu meil tegemist võrrandiga

$$2x^5 - 10x^3 + 10x + 3 = 0.$$

1. Positiivsete lahendite ülemine tõke: $a_0 = 2, q = 2, M = 10.$

$$K_1 = 1 + \sqrt{5} < 4;$$

2. Positiivsete juurte alumine tõke. Asendus $x = \frac{1}{z}$ annab võrrandi $3z^5 + 10z^4 - 10z^2 + 2 = 0$ jaoks tõkke

$$K_2 = 1 + \sqrt[3]{\frac{10}{3}} < 3,$$

kust saame positiivsete juurte alumise tõkke $\frac{1}{K_2} > \frac{1}{3}.$

3. Negatiivsete juurte alumine tõke. Asendus $x = -z$ annab võrrandi

$$2x^5 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$$

jaoks tõkke

$$K_3 = 1 + \sqrt{5} < 4,$$

kust $-K_3 > -4.$

4. Negatiivsete juurte ülemine tõke. Asendus $x = -\frac{1}{z}$ annab võrrandi

$$3x^5 - 10x^4 + 10x^2 - 2 = 0$$

jaoks tõkke $K_4 = 1 + \frac{10}{3} < 5,$ kust

$$-\frac{1}{K_4} < -\frac{1}{5}.$$

Seega asetsevad võrrandi $2x^5 - 10x^3 + 10x + 3 = 0$ positiivsed lahendid vahemikus $(\frac{1}{3}, 4)$ ja negatiivsed lahendid vahemikus $(-4, -\frac{1}{5})$.

Descartes'i reegel ütleb veel lisaks, et sel võrrandil on kas 2 või 0 positiivset lahendit ja 3 või 1 negatiivset lahendit.

Reaallahendite täielikuks eraldamiseks on algebrast teada nn. Sturm'i lause, kuid selle lause rakendamiseks vajalik arvutustöö ei tasu end praktiliselt ära. Lihtsam on juba kasutada MacLaurini valemit ja Descartes'i reeglit koos järgneva tabelleerimisega.

§ 4. Iteratsioonimeetod.

Kui võrrandi $f(x) = 0$ juure x^* jaoks on leitud lähend x_0 , siis üheks lähendi parandamise võimaluseks on järjestikuste lähendite meetodi ehk nn. iteratsioonimeetodi rakendamine.

Selleks esitame võrrandi $f(x) = 0$ kujul

$$x = F(x),$$

mis on alati võimalik ja seejuures väga mitmeti, näiteks kas või nii

$$x = x + cf(x) \quad (c \text{ on suvaline konstant}).$$

Leiame nüüd järjest

$$x_1 = F(x_0),$$

$$x_2 = F(x_1),$$

.....

$$x_n = F(x_{n-1}).$$

Seda järjestikust arvude x_n leidmist nimetatakse itereerimiseks.

Selgub, et teatavate piisavate tingimuste täidetuse korral iteratsiooniprotsess koondub, s.t. küllalt suure n korral lähend x_n erinebkiitahes vähe võrrandi juurest x^* .

Teoreem. Kui jada $\{x_n\}$ ja võrrandi $x = F(x)$ juurt x^* sisaldavas vahemikus on täidetud tingimus

$$|F'(x)| \leq m < 1,$$

siis $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

Tõestus. Kuna x^* on võrrandi $x = F(x)$ juur, siis

$$x^* = F(x^*).$$

Vastavalt definitsioonile on

$$x_1 = F(x_0).$$

Lahutame esimesest võrdusest teise ja rakendame Lagrange'i

keskväärtusteoreemi:

$$x^* - x_1 = F(x^*) - F(x_0) = (x^* - x_0)F'(\xi_0),$$

kus $\xi_0 \in (x^*, x_0)$.

Analoogilised võrdused saame ka järgmiste lähendite

jaoks:

$$x^* - x_2 = (x^* - x_1)F'(\xi_1)$$

$$x^* - x_3 = (x^* - x_2)F'(\xi_2)$$

.....

$$x^* - x_n = (x^* - x_{n-1})F'(\xi_{n-1}),$$

kus $\xi_i \in (x_i, x^*)$. Need võrdusi liikmeti korrutades ja lihtsustades saame

$$x^* - x_n = (x^* - x_0)F'(\xi_0)F'(\xi_1)\dots F'(\xi_{n-1}).$$

Arvestades teoreemi tingimust, jõuame hinnanguuni

$$|x^* - x_n| \leq |x^* - x_0| m^n.$$

Et $m < 1$, siis sellega ongi teoreem tõestatud.

Vea hinnangu saamiseks arvestame, et

$$|x^* - x_n| \leq m|x^* - x_{n-1}|,$$

siit

$$|x^* - x_n| \leq m|x^* - x_n + x_n - x_{n-1}| \leq m|x^* - x_n| + m|x_n - x_{n-1}|,$$

ehk

$$|x^* - x_n| \leq \frac{m}{1-m} |x_n - x_{n-1}|.$$

Analoogilist mõttekäiku rakendades võib jõuda ka hinnanguni

$$|x^* - x_n| \leq \frac{m^n}{1-m} |x_1 - x_0|.$$

Näitena iteratsioonimeetodi rakendamise kohta vaatleme võrrandit

$$x^3 - 5x + 3 = 0.$$

Sellele võrrandile saab anda mitu iteratsiooniks sobivat kuju

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{5x - 3},$$

$$(2) \quad x = \frac{1}{5}(x^3 + 3),$$

$$(3) \quad x = x + (x^3 - 5x + 3).$$

Tabelleerimisega leiame kergesti, et selle võrrandi kolm reaaljuurt asetsevad vahemikes $(0,5; 1)$, $(1,5; 2)$ ja $(-2, -3)$. Kuju (3) puhul on $F'(x) = 3x^2 - 4$ ja $|F'(x)|$ pole ühest väiksem ühegi vahemiku korral.

Kuju (2) korral on $F'(x) = \frac{3x^2}{5}$, tähendab iteratsioonikoondub juureks, mis on lõigul $[0,5; 1]$, kui alglähend valida samast lõigust. Järjestikuste lähendite leidmise protsess kulgeb järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 1, \\
 x_1 &= 0,8, \\
 x_2 &= 0,70, \\
 x_3 &= 0,67, \\
 x_4 &= 0,66, \\
 x_5 &= 0,658, \\
 x_6 &= 0,657, \\
 x_7 &= 0,657.
 \end{aligned}$$

Seega arvutuslükati täpsuse juures $x = 0,657$. Kuju (1) korral on $F'(x) = \frac{5}{3\sqrt{(5x-3)^2}}$ ja mõlemas ülejäänud sähemikus on $F'(x)$ ühest väiksem. Iteratsioonikuju $x = \sqrt[3]{5x-3}$ korral võib kasutada jälle lükatit või Bronštein'i ja Semendjajevi matemaatika käsiraamatus [4] toodud tabeleid. Vastavad arvutused annavad $x = -2,491$ ja $x = 1,834$.

§ 5. Iteratsioonimeetodi koonduvuse kiirendamine.

Nagu eelnevast paragrahvist nähtus, on iteratsioonimeetodi koonduvus mõnikord küllaltki aeglane. Koonduvuse kiirendamiseks võime kasutada ära asjaolu, et järjestikuste lähendite vead kahanevad geometrilises progressioonis.

Seostest

$$\begin{aligned}
 x^* - x_{k+1} &\approx m(x^* - x_k) \\
 x^* - x_k &\approx m(x^* - x_{k-1})
 \end{aligned}$$

meile tundmatut koonduvustegurit elimineerides saame

$$x^* \approx \frac{x_{k-1}x_{k+1} - x_k^2}{x_{k-1} + x_{k+1} - 2x_k},$$

ehk peale lihtsat ümberkirjutust:

$$\bar{x}_{k+1} = x_{k+1} - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k-1} + x_{k+1} - 2x_k}$$

(Viimane valemi kuju on palju vähem tundlik täpsuse kao suhtes). Saadud valemi rakendamine toimub harilikult järgmiselt. Mingist alglähendist x_k lähtudes arvutame iteratsioonieeskirja põhjal kaks järgmist lähendit ja kasutame siis uue alglähendi saamiseks äsjatuletatud koonduvuse kiirendamise võtet. Peab veel märkima, et nimetatud koonduvuse kiirendamise võttega õnnestub ka mitte eriti kiiresti hajuvaid iteratsiooniprotsesse teha koonduvateks.

Näide. Leiame $\sqrt[3]{10}$. Kuupjuure leidmine tähendab võrrandi $x^3 - 10 = 0$ lahendamist. Katsetame iteratsioonikujuga

$$x = \frac{10}{x^2}$$

Alglähendist $x_0 = 2$ lähtudes saame $x_1 = 2,5$ ja $x_2 = 1,6$. Koonduvuse kiirendamise võte annab:

$$\bar{x}_2 = 1,6 - \frac{0,9^2}{-1,4} = 1,6 + \frac{0,81}{1,4} = 2,18.$$

Järgmised lähendid on $x_3 = 2,105$, $x_4 = 2,257$. Koonduvuse kiirendamise võte annab

$$\bar{x}_4 = 2,257 - \frac{0,152^2}{0,227} = 2,155.$$

Kui silmas pidada, et $\sqrt[3]{10} = 2,1544$, ja et iteratsiooniprotsess $x = \frac{10}{x^2}$ hajub, siis tuleb saadud tulemust hinnata küllaltki heaks.

§6. Newtoni meetod ja kõõlude meetod.

Asendame võrrandi $f(x) = 0$ samaväärse võrrandiga

$$x = F(x),$$

kus $F(x) = x - p f(x)$ ja määrame konstandi p nii, et iteratsioonifunktsiooni tuletis $F'(x)$ oleks meid huvitavas piirkonnas võimalikult väike. Sageli leitakse p nii, et $F'(x_0) = 0$, kust

$$p = - \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Sel viisil saame iteratsioonieeskirja

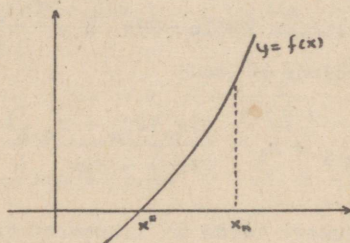
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)},$$

mille rakendamine on suhteliselt lihtne ja mis koondub harilikust iteratsioonimeetodist paremini.

Kui tuletise arvutamine valmistab raskusi $f'(x)$ keerulise kaju tõttu, siis võib tuletist lähendada nullkoha ümbruses kõverat $y = f(x)$ lähendava sirge tõusuga:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Graafiliselt võib seda olukorda kujutada ette järgmiselt:



Probleem seisneb iteratsioonieskirja

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{k}$$

jaoks niisuguse kordaja k valikus, mis viiks meid võimalikult lähedale juurele x^* . Ideaalseks kordajaks oleks ilmselt punkte (x_n, y_n) ja $(x^*, 0)$ läbiva kõõlu tõus. Kuid kuna me juurt x^* täpselt ei tunne, siis ei tea me ka ideaalset kordajat k , vaid peame leppima mitmesuguste võrrandist arvatavate k lähenditega.

1. Kui k jäetakse kogu aeg võrdseks punktis x_0 leitud puutuja tõusuga $f'(x_0)$, siis saame meile juba tuttava modifitseeritud Newtoni meetodi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

2. Kui igas lähendpunktis x_n arvutatakse uus puutuja tõusu väärtus, siis saame iteratsioonieskirjaks nn. Newtoni meetodi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Modifitseeritud Newtoni meetod koondub küll Newtoni meetodist aeglasemalt, kuid tema rakendamine on see-eest lihtsam.

3. Kui kordajaks k valida kaht nullpunkti ümbruses asetsevat punkti läbiva kõõlu tõus $k = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$, siis saame nn. kõõlude meetodi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

mida võib kirjandusest leida ka lineaarse interpolatsioonimeetodi või Regula falsi (vale eelduse reegli) nime all.

Kõõlude meetod leiab oma lihtsa arvutuskeemi tõttu eriti sageli rakendamist kaasaegsetes elektronarvutites.

Teine võimalus Newtoni meetodi tuletamiseks, mis annab ka järjestikeste lähendite veahinnangud, on järgmine.

Taylori valemi põhjal kehtib võrdus

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_n)^2 \quad (\xi \in [x^*, x_n]).$$

Seega võrrandi $f(x) = 0$ lahend x^* rahuldab seost

$$x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(x - x_n)^2.$$

Kui vastavas piirkonnas $|f'(x)| \geq m$ ja $|f''(x)| \leq M$, siis saame Newtoni meetodi jaoks veahinnangu

$$|x^* - x_{n+1}| \leq \frac{M}{2m} |x^* - x_n|^2.$$

Nagu sellest veahinnangust nähtub, on Newtoni meetod nn. ruutkoonduvusega meetod, s.t. järgmise lähendi viga on ligikaudselt võrdne eelmise lähendi vea ruuduga.

Kõigi iteratsioonimeetodite puhul saab vea hindamiseks kasutada Lagrange'i keskväertusteoreemi. Kui võrrandi $f(x) = 0$ lähislahend on x_n , siis Lagrange'i teoreemi põhjal

$$f(x^*) - f(x_n) = f'(\xi)(x^* - x_n),$$

ehk

$$x^* - x_n = - \frac{f(x_n)}{f'(\xi)}.$$

Kui vastavas piirkonnas $|f'(x)| \geq m$, siis saamegi veahinnangu

$$|x^* - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

§ 7. Näiteid.

Näide 1. Lahendame kõõlude meetodi abil võrrandi $x^3 - e^x = 0$. Kuupide ja e^x tabelit kasutades leiame, et juure ligikaudseks väärtuseks sobib $x_0 = 1,7$. Arvutame nüüd $f(x_0)$:

$$f(x_0) = 1,7^3 - e^{1,7} = 4,919 - 5,4739 = -0,5609.$$

Teise väärtusena proovime $x_1 = 1,8$. $f(x_1) = 5,832 - 6,0496 = -0,2176$. Nagu näha, tulemus paranes.

Katsetame veel väärtusega $x_2 = 1,9$. $f(x_2) = 6,859 - 6,6859 = 0,1731$. Seega juur asetseb $x_1 = 1,8$ ja $x_2 = 1,9$ vahel. Rakendame nüüd kõõlude meetodit:

$$x_3 = 1,9 - \frac{0,1731 \cdot 0,1}{0,3907} = 1,9 - 0,0443 = 1,8557 \approx 1,856.$$

Kuna $f(x_3) = 1,856^3 - e^{1,856} = 6,393 - 6,393 = 0$, siis neljakohalise täpsusega on selle võrrandi lahend 1,856.

Näide 2. Leiame võrrandi $x^3 - 4x + 5 = 0$ reaaluured kuue tüvikohaga.

Descartes'i reegel ütleb, et sellel võrrandil on kas 2 või 0 positiivset juurt ja 1 negatiivne reaaluur. Alustamegi negatiivse juure otsimisega.

Katsetame mõningate x väärtustega: $f(-2) = 5$; $f(-3) = -10$. Ilmselt juur on -2 ja -3 vahel ning -2 -le lähemal. Proovime nüüd lähendit $-2,3$. Arvutused teostame arvutuslükatiga Horneri skeemi abil.

	1	0	-4	5
-2,3	1	-2,3	1,29	2,03
-2,4	1	-2,4	1,76	0,77
-2,5	1	-2,5	2,25	-0,63

Esimene hinnang oli veel veidi liiga ebatäpne. Katsetame lähenditega $-2,4$ ja $-2,5$. Nagu näeme, sobib järgmiseks lähendiks $-2,45$. Teostame nüüd arvutused täpsemalt:

	1	0	-4	5
$-2,45$				
		$-2,45$	$6,0025$	$-4,906125$
	1	$-2,45$	$2,0025$	$0,093875 = f(-2,45)$
		$-2,45$	$12,005$	
	1	$-4,90$	$14,0075 = f'(-2,45)$	

Newtoni meetod annab paranduseks

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{0,093875}{14,0075}$$

Mitme kohaga jagada? Õigete kohtade arvu saamiseks hindame leitava paranduse suurust ($-0,0067$). Paranduse ruut on $0,000045$. Näeme, et viga on viiendas kümnendkohas. Järelikult piisab, kui me arvutame paranduse suuruse lükatiga. Lükatilt saame paranduseks $-0,00670$. Järgmine lähend on seega $-2,45670$, kusjuures viimane koht on kahtlane. Et meil oli ülesandeks leida juurte väärtused kuue tüvikohaga, siis oleks tarvis parandada ainult viimast kohta. See on polünoomvõrrandite puhul kergesti teostatav. Nimelt tuleb meil $\frac{1}{2} f''(x_0)$ leidmiseks rakendada veel ainult üks kord Horneri skeemi:

	1	$-4,90$	$14,0075$
$-2,45$		$-2,45$	
	1	$-7,35 = \frac{1}{2} f''(-2,45)$	

Eespool nägime, et Newtoni meetodiga leitud lähendi

x_{n+1} viga on

$$- \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} (x^* - x_n)^2.$$

Kuna me oleme juba jõudnud juure vahetusse lähedusse, siis võime $f''(\xi)$ asendada küllaltki täpselt suurusega $f''(x_n)$ ja $(x^* - x_n)^2$ suurusega $\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2$. See annab meile ühtlasi uue iteratsioonimeetodi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2,$$

mis kannab Euler-Tšebõševi meetodi nime.

Kui teise tuletise väärtus on leitud, siis Euler-Tšebõševi valem annab melle viimase koha täpsustuse kerge vaevaga (arvutused lükatil):

$$- \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)} \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)^2 = 0,000023.$$

Lõplikult $x_1 = -2,45670 + 0,00002 = -2,45668$. (Tõenäoliselt oleks õige ka seitsmes tüvikoht, kuid siis tuleks Newtoni meetodi parandus $-0,00670$ arvutada nelja tüvikohaga).

Vaadeldava võrrandi ülejäänud juured on kompleksed. See nähtub ruutvõrrandist $x^2 - 2,45x + 2,0025 = 0$, mille saime lineaarteguri $x + 2,45$ eraldamise tulemusena.

Oletame nüüd, et meil oli vaja leida sellesama võrrandi vähim reaaluur seitsme tüvikohaga ilma teist tuletist kasutamata. (Näiteks mõne trenstsendentseid funktsioone või ruub

juuri sisaldava võrrandi korral on teise tuletise arvutamine sageli väga ebameeldiv töö).

Kui me võtaksime nüüd uueks alglähendiks $x_1 = -2,4567$, siis saaksime järgmise lähendi leida umbkaudu veaga $(0,000045)^2 = 0,000000002$! Seitsme õige tüvikoha leidmiseks pole seega nii täpset alglähendit tarvis. Esiteks teeksime ülearust tööd ja teiseks tuleks juurde veel üks ootamatu ras- kus. Nii täpse alglähendi korral on $f(x_1)$ tüvikohtade arv väga väike ja kui me ei arvuta 9-10 tüvikohaga, siis me ei tarvitse saada paranduses ühtegi õiget kohta. (Punkti väärtus tuleb leida ligikaudselt ja jagamisel säilib ju tu- lemuses vaid niipalju tüvikohti, kui neid on väiksema tüvi- kohtade hulgaga arvul!).

Proovime, kas alglähendist $-2,457$ piisab seitsme õige tüvikoha saamiseks. Lähendi $-2,457$ viga on $0,0003$. Uue lähendi viga on seega alla $0,00000009$. Tähendab, alglähend $-2,457$ garanteerib meile tõenäoliselt veel isegi kaheksan- das tüvikohas ülimalt üheühikulise vea.

Arvutusi teostame jälle Horneri skeemi abil. Meil on pa- randuses vaja saada kolm õiget tüvikohta, seega ka $f(x)$ väärtuses peab olema vähemalt kolm tüvikohta.

	1	0	-4	5
-2,457		-2,457	6,03685	
	1	-2,457	2,03685	

Enne, kui asuda järgmise korrutise arvutamisele, teeme väikese "lahinguluure" $f(x)$ tüvikohtade arvu kohta. Selleks leiame korrutisest $2,457 \cdot 2,03685$ kõigepealt $2,457 \cdot 2 =$

= 4,914 ja korrutame lükati abil veel juurde 2,457.

• 0,03685 = 0,0906. Seega

$$f(-2,457) = 5 - 5,0046 = -0,0046.$$

Tähendab, lükatist ei piisa ja vastav korrutis tuleb leida kuue tüvikohaga (kasutame lühendatud korrutamist):

$$\begin{array}{r} 2,03\bar{6}85 \\ \underline{2,457} \\ 407370 \\ 81474 \\ 10184 \\ \underline{1426} \\ 5,00454 \end{array}$$

Järelikult $f(x_1) = -0,00454$. Tuletise väärtuse arvutamiseks piisab lükati täpsusest:

	1	-2,457	2,03685
-2,457		-2,457	12,05
	1	-4,914	14,09

uus parandus:
$$- \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = + \frac{0,00454}{14,09} = 0,000322.$$

Seega seitsme tüvikohaga $x = 2,456678$.

3.8. Newtoni meetodi üldistused.

Kui $f(x)$ reaksarendusest võtta rohkem liikmeid, siis saame järjest paremaid lähendfunktsioone ja vastavalt sellele ka järjest täpsemaid iteratsioonivalemeid.

Kui näiteks võtta kolm esimest Taylori rea liiget:

$$0 = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

ja asendada kolmandas liikmes üks tegur $x - x_0$. Newtoni meetodiga arvutatud lähendiga, siis saame tekkivat lineaarvõrrandit tundmatu x suhtes lahendada

$$x = x_0 - \frac{ff'}{f'^2 - \frac{1}{2}ff''}$$

(lühiduse mõttes on argument ära jäetud).

Selle iteratsioonimeetodi esitas juba 1694. aastal inglase Halley. Newtoni meetod pärineb umbes 1670-test aastatest.

See meetod on juba kuupkoonduvusega meetod. Muide, kuupkoonduvusega oli ka Euler-Tšebõševi meetod, kuid Halley meetod annab üldiselt veidi täpsemaid tulemusi.

Näiteks võrrandi $x^3 - 4x + 5 = 0$ puhul saame algähendist $-2,45$ lähtudes

$$\begin{aligned} x_1 &= -2,45 - \frac{0,093875 \cdot 14,0075}{14,0075^2 + 7,35 \cdot 0,093875} = \\ &= -2,45 - \frac{1,314954}{196,9000} = -2,456678. \end{aligned}$$

Nagu näha, on tulemus seitsme tüvikohaga õige. Jäme veahinnang annab $(0,0067)^3 = 0,0000003$.

Kuupkoonduvusega meetodeid eksisteerib lõpmata palju. Nende üldisema teooria andis Ü. Kaasik oma kandidaadiväitekirjas. Teiste kuupkoonduvusega meetodite hulgas näib efektiivsem olevat L. Võhandu poolt vaadeldud meetod

$$x_1 = x_0 - \frac{f(f'^2 - \frac{1}{2}ff'')}{f'(f'^2 - ff'')} = x_0 - \left(\frac{f}{f'}\right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}\frac{f}{f'}\frac{f''}{f'}}{1 - \frac{f}{f'}\frac{f''}{f'}}$$

mille puhul viga hindab suurus

$$-\frac{f'''}{6f'} \cdot \Delta x_0^3,$$

kus Δx_0 on äsja leitud parandus. Vea suuruse hinnang vaadeldud näite puhul on $+2,14 \cdot 10^{-8}$. Peale vastavaid arvutusi leiame, et

$$x_1 = -2,45667838.$$

Kuigi kuupkoonduvusega meetodid on väga efektiivsed koonduvuse mõttes, on nende kasutamine sageli raskendatud teise tuletise leidmise vajaduse tõttu.

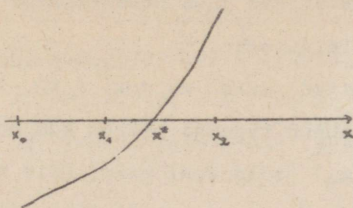
Kuupkoonduvusega meetodite rakendamist raskendab ka valemite keerukus, mis nõuab suhteliselt palju arvutusi. Nende rakendamine näib olevat efektiivne juhul, kui funktsiooni väärtuste arvutamine nõuab küllalt palju tööd, näiteks kõrgema astme algebraliste võrrandite puhul.

Juhul, kui tuletiste arvutamine on ebamugav, on üheks väljapääsuks kasutada kõõlude meetodit. Et kõõlude meetod on ainult lineaarse koonduvusega, siis otsiti ka siin koonduvuse parandamise võimalusi. Need leidigi kõrgemat järku interpolatsioonivalemite kasutuselevõtmise näol.

Praktikas piisab enamasti ruutinterpolatsioonist. Arvutused osutuvad eriti lihtsaks, kui valida kolm võrdkaugustel asetsevat argumendi väärtust:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h.$$

Abstsissid x_0, x_1, x_2 olgu nii valitud, et otsitav juur asetseb lõigus $[x_0, x_2]$.



Kolme punkti läbivatest interpolatsioonipolünoomidest sobib meile eriti Stirlingi polünoom $y(t) = y_1 + \bar{\delta} y_1 t + \frac{1}{2} \delta^2 y_1 t^2$, kus $t = \frac{x - x_1}{h}$ ja suurused $\bar{\delta} y_1$ ning $\delta^2 y_1$ on leitavad järgmise vahede skeemi abil (vastavad tõestused järgnevad kursuse edasises osas)

x_0	x_0	$\delta y_{1/2}$	
x_1	y_1	$\delta y_{3/2}$	$\delta^2 y_1$
x_2	y_2		

$$\bar{\delta} y_1 = \frac{1}{2} (\delta y_{1/2} + \delta y_{3/2}).$$

Nullkoha leidmiseks saame siit ruutvõrrandi

$$y_1 + \bar{\delta} y_1 t + \frac{1}{2} \delta^2 y_1 t^2 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendamiseks on mõistlik kasutada iteratsioonimeetodit. Nimelt me kirjutame võrrandi ümber kujul

$$t = a + bt^2$$

ja kasutame t alglähendina väärtust a . Teist liiget bt^2

vaatleme parandusena. Kuna $t < 1$, siis on parandus kaunis väike ja harilikult piisab juba ühest-kahest iteratsioonist õige t väärtuse leidmiseks.

Kui t on leitud, siis $x_3 = x_1 + th$. Arvutades nüüd $f(x_3)$, saame ettenähtud täpsuse piires kas nulli või väga väikese arvu. Kui $f(x_3)$ pole veel null, siis võime lähendit x_3 veelgi parandada Newtoni meetodi abil. Nimelt annab interpolatsioonipolünoom meile hea lähendi $f'(x)$ jaoks:

$$f' = \frac{dy \cdot dt}{dt \cdot dx} = \frac{1}{h} (\delta y_1 + \delta^2 y_1 t).$$

Siit saame veel korrektuurina

$$\delta x = - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Näide. Leiame võrrandi $x \tan x = 1/2$ juure, mis asetseb 0,6 ja 0,7 vahel. Vajalik täpsus olgu seitse tüvikohata. Arvutuste mõnusamaks läbiviimiseks anname võrrandile kuju $2x - \cot x = 0$. Kasutame Hrenovi seitsmekohalisi trigonomeetrilisi tabeleid, mis nõuab aga radiaanide eelnevat teisendamist kraadideks.

x	x°	y
0,60	$34^\circ 22' 38,89''$	-0,2616960
0,65	$37^\circ 14' 32,13''$	-0,0154356
0,70	$40^\circ 06' 25,37''$	+0,2127582

(Ruumi kokkuhoiu mõttes on skeemist ära jäetud veerud $2x$ ja $\cot x$)

Koostame nüüd vahede skeemi:

$$\begin{array}{r} \delta y \\ 0,2462604 \\ \underline{0,2281938} \\ 0,4744542 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \delta^2 y \\ 0,0180666 \end{array}$$

$$\bar{\delta}y_1 = 0,2372271.$$

Skeemi põhjal

$$y = -0,0154356 + 0,2372271 t + 0,0090333 t^2 = 0$$

$$y' = 20 (0,2372271 + 0,0180666 t)$$

Esimest võrrandit t suhtes lahendades (siin on vaja juba arvutusmasinat):

$$t = 0,065066765 - 0,038078701 t^2 = a + bt^2.$$

Iteratiivne lahendamine:

$a = 0,065066765$	$0,065066765$	$0,065066765$
$bt^2 = -0,000161213$	$-0,000160415$	$-0,000160419$
$0,064905552$	$0,064906350$	$0,064906346$

$$t = 0,06490635$$

$$h = 0,05$$

$$x_3 = 0,65 + th = 0,65324532.$$

Uuesti võrrandisse asetamine annab

$$f(x_3) = -0,0001217:$$

Newtoni meetodiga parandamine:

$$y' = 4,767994,$$

$$\delta x = 0,00002552.$$

Uus lähend:

$$x_4 = 0,65327084,$$

$$f(x_4) = -0,0000095,$$

$$\delta x = -0,0000020.$$

Lõplikult:

$$x = 0,6532688.$$

§ 9. Kompleksjuurte leidmine.

Järgnevas vaatleme ainult reaalkordajatega algebralisi võrrandeid

$$x^n + a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

millest on eraldatud juba kõik reaalsjuured. Kompleksjuurte leidmiseks võib kasutada kõiki eespool vaadeldud meetodeid, kuna aga argumendi väärtused on kompleksarvulised, siis kujunevad arvutused üsnegi komplitseerituks ja ka arv 1 toob endaga kaasa eksimise võimaluse. Reaalarvuliste kordajatega võrrandite puhul saab aga edukalt ära kasutada asjaolu, et kompleksjuured esinevad siin alati kaaskompleksarvude paardena

$$x_{1,2} = u \pm iv.$$

See võimaldab mõlemaid kompleksseid lineaartegureid $(x - x_1)$ ja $(x - x_2)$ võtta kokku üheks reaalkordajatega ruutteguriks

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + 2ux + (u^2 + v^2) = x^2 - px - q,$$

kus $p = 2u$, $q = -(u^2 - v^2)$.

Seega taandub kompleksjuurte leidmise ülesanne ruuttegurite eraldamise ülesandele. Enne, kui asume ruuttegurite eraldamise probleemi käsitlema, vaatleme, kuidas üldistada Horneri skeemi ruutteguriga jagamise jaoks.

Kui viienda astme polünoomi $x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$ jagada ruutteguriga $x^2 - px - q$, siis saame

$$\begin{aligned} & x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = \\ & = (x^2 - px - q)(x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3) + b_4x + b_5. \end{aligned}$$

Paremat poolt läbi korrutades ja tundmatu x astmete ees olevaid kordajaid võrrutades saame

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 - p, \\ a_2 &= b_2 - pb_1 - q, \\ a_3 &= b_3 - pb_2 - qb_1, \\ a_4 &= b_4 - pb_3 - qb_2, \\ a_5 &= b_5 - qb_3. \end{aligned}$$

Siit avalduvad meid huvitavad kordajad b_i rekurrentsete seoste kaudu

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + p, \\ b_2 &= a_2 + pb_1 + q, \\ b_3 &= a_3 + pb_2 + qb_1, \\ b_4 &= a_4 + pb_3 + qb_2, \\ b_5 &= a_5 + \quad \quad qb_3. \end{aligned}$$

Arvutusi on otstarbekas korraldada järgmise skeemina:

	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
p		p	pb_1	pb_2	pb_3	
q			q	qb_1	qb_2	qb_3
	1	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5

Üldistus muudele astmetele on siit väga lihtne.

Näide. Jagame $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + 7$ ruutteguriga $x^2 - 3x - 5$:

	1	3	5	6	7
3		3	18	78	
5			5	30	140
	1	6	28	114	147

$$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + 7 = (x^2 - 3x - 5)(x^2 + 6x + 28) + 114x + 147.$$

Ruutteguriga jagub mingi kõrgema astmega polünoom parajasti siis, kui esimese astme jääkpolünoomi kordajad on nullid.

Ruuttegurite eraldamiseks on olemas terve rida meetodeid, kuid selle kursuse piires piirdume vaid Lini meetodiga ehk m eelviimase jäägi meetodiga.

Olgu meil teadmised polünoomiga

$$x^4 + 13x^3 + 49x^2 + 85x + 60 = (x^2 + 3x + 4)(x^2 + 10x + 15).$$

Jagame seda neljanda astme polünoomi ruutteguriga $x^2 + 3x + 4$

	1	13	49	85	60
-3		-3	-30	-45	
-4			-4	-40	-60
	1	10	15	0	0

Nagu näeme, tuleb jäägiks tõepoolest nullpolünoom. Vaatame, mis juhtub siis, kui me ei jaga lõpuni välja, vaid peatume üks samm varem, s.t. jätame põhiskeemist ära liikmed pb_{n-2} ja qb_{n-2} .

	1	13	49	85	60
-3		-3	-30		
-4			-4	-40	
	1	10	15	45	60

Sel korral saame eelviimaseks jäägiks ruutpolünoomi

$$15x^2 + 45x + 60 = 15(x^2 + 3x + 4).$$

Elmselt kehtib omadus, et täpse ruutteguri korral normeeritud eelviimane jääk võrdub ruutteguri endaga. Seda asjaolu võib ära kasutada kergesti rakendatava iteratsioonimeetodi saamiseks. Nimelt võtame ette mingi otsitava ruutteguri

alglähendi, jagame sellega polünoomi kuni eelviimase jäägini, normeerime selle jäägi ja võtame ta uueks alglähendiks jne.

Selle meetodi koonduvuse kohta ei saa anda kergesti rakendatavaid kriteeriume, kuid praktika näitab, et eelviimase jäägi meetod koondub küllaltki avaratel tingimustel (kuigi mitte just alati selleks ruutteguriks, mille lähedusest alustatakse).

Jääb veel lahendada küsimus, kuidas leida otsitavale ruuttegurile alglähendit. Selle küsimuse lahendamiseks on kõige lihtsam lähtuda Vieta valemitest.

Nimelt kehtivad polünoomi $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ korral tema kordajate a_1 ja juurte x_1, \dots, x_n vahel järgmised seosed:

$$-a_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n.$$

Kui kahe esimese juure moodulid on teiste juurte moodulitest palju suuremad, siis kehtib ligikaudne võrdus

$$-a_1 \approx x_1 + x_2,$$

$$a_2 \approx x_1x_2.$$

See aga tähendab, et kaks kõige suuremat juurt rahuldavad ligikaudselt võrrandid

$$x^2 + a_1x + a_2 = 0.$$

Siit saamegi sobiva alglähendi.

Teine võimalus alglähendi valikuks on kahe väiksema mooduliga juure ligikaudne eraldamine:

$$a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = a_{n-2}\left(x^2 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x + \frac{a_n}{a_{n-2}}\right).$$

Enamasti ongi kasulikum kahe väiksema mooduliga juure

eraldamine.

Näide. Leiame hulkliikme $x^4 + 6x^3 + 23x^2 + 42x + 40 =$
 $= (x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x + 10)$ ruuttegurid.

Alglähendiks valime $23x^2 + 42x + 40 = 23(x^2 + 1,83x +$
 $+1,74)$.

Arvutused korraldame üldistatud Horneri skeemi:

	1	6	23	42	40
-1,83		-1,83	-7,63		
-1,74			-1,74	-7,26	
	1	4,17	13,63	34,74	40
-2,55		-2,55	-8,70		
-2,94			-2,94	10,14	
	1	3,45	11,36	31,86	40
-2,81		-2,81	-8,96		
-3,53			-3,53	11,27	
	1	3,19	10,51	30,73	40
-2,92		-2,92	-9,00		
-3,81			-3,81	11,73	
	1	3,08	10,19	30,27	40

Viimase itereerimise tulemusena saame uueks lähendiks $x^2 + 2,97x + 3,93$. Nagu senisest arvutuskäigust nähtub, on meil tõepoolest tegemist koonduva iteratsiooniprotsessiga. Koonduvuse kiirendamiseks kasutame eespool tuletatud koonduvuse kiirendamise võtet.

Kuna meil on tegemist ruuttegurite leidmisega, siis on selle võtte rakendamiseks kaks varianti. Juhul, kui ruuttegu-
 ri mõlemad kordajad järjestikustes lähendites muutuvad mono-
 toonselt ühes suunas, siis on otstarbekas kiirendamise võtet
 rakendada otseselt tegurite kordajatele (omaette x korda-
 jatele ja omaette vabaliikmetele). Kui aga ruuttegurite kor-

dajad ei muutu monotoonselt, siis on parem leida järjestikus- te ruuttegurite kompleksjuured ja rakendada koonduvuse kii- rendamise võtet nendele. Üleminek kompleksjuurtelt ruuttegu- rile toimub jälle harilikul viisil. Peab märkima, et kuigi siin on tegemist kompleksarvudega, ei kujune arvutused eriti keeruliseks.

Muide, nimetatud koonduvuse kiirendamise võttega õnnes- tub ka mitte eriti kiiresti hajuvaid iteratsiooniprotsesse teha koonduvateks.

Kasutame nüüd koonduvuse kiirendamise võtet meie poolt vaadeldud näite juures. Kolm viimast lähendit on

$$x^2 + 2,81x + 3,53 ,$$

$$x^2 + 2,92x + 3,81 ,$$

$$x^2 + 2,97x + 3,93 .$$

Kuna on tegemist monotoonselt muutuvate kordajatega, siis rakendame koonduvuse kiirendamise võtet otseselt korda- jatele:

$$p = 2,97 - \frac{(2,97 - 2,92)^2}{(0,01 + 0,17 - 0,24)} = 2,97 + \frac{0,0025}{0,06} = 3,01;$$

$$q = 3,93 - \frac{0,08^2}{(0,03 + 0,43 - 0,62)} = 3,93 + \frac{0,0064}{0,16} = 3,97.$$

Uueks lähendiks saame seega $x^2 + 3,01x + 3,97$. Raken- dame jälle eelviimase jäägi meetodit.

	1	6	23	42	40
-3,01		-3,01	-9,00		
-3,97			-3,97	-11,88	
	1	-2,99	10,03	30,12	40

Viimane lähend on lükati täpsuse piires $x^2 + 3,00x + 4,00$.

Kui meil on vaja suuremat täpsust, siis tuleb arvutamisel koh-
tade arvu suurendada ja kasutada kas korrutamistabeleid või
arvutusmasinat.

Belviimase jäägi meetod koondub harilikult küllalt häs-
ti, kui on tegemist võrranditega, milles lahendite reaalosad
on negatiivsed ehk, nagu insenerid ütlevad, kui on tegemist
stabiilsete võrranditega. Nimelt võib näidata, et autoregu-
leeruvate protsesside dünaamikat kirjeldavatel diferentsiaal-
võrranditel on stabiilsed lahendid, kui nende karakteristiklike
võrrandite juurte reaalosad on negatiivsed. Vastasel korral
on tegemist ebastabiilsete protsessidega ja see asjaolu ka-
jastub huvitava viisil ka eelviimase jäägi meetodi koonduvu-
ses.

Vajaduse korral saab juurte reaalosi teha negatiivseks
lihtsalt nullpunkti nihutamise teel.

§ 10. Lobatševski meetod.

Reaalkordajatega algebraliste võrrandite lahendamisel
on üheks universaalsemaks meetodiks Lobatševski meetod. Selle
meetodi olemus seisneb järgnevas.

Olgu võrrandi

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

lahendid kõik reaalsed ja erinevad, kusjuures

$$|x_1| > |x_2| > \dots > |x_n|.$$

Kui x_1 on teistest lahenditest palju suurem, siis Vie-
ta valemite põhjal kehtib ligikaudne võrdus

$$x_1 \approx -a_1 : a_0.$$

Mida rohkem x_1 teistest juurtest erineb, seda parem see lähend on. Lobatševski andis meetodi, kuidas võrrandilt $f(x)=0$ üle minna võrrandile $f_1(z) = 0$, mille nullkontadeks on suurused $-x_1^2, -x_2^2, \dots, -x_n^2$; s.t. ta andis meetodi, kuidas võrrandi lahendite vahelkordi meile sobivas suunas muuta. Saadud võrrandilt $f_1(z)$ võib üle minna võrrandile, mille lahendid on $-x_1^4, -x_2^4, \dots, -x_n^4$. Niiviisi järjest edasi minnes võrrandi lähendid eralduvad üha rohkem. Kui kaks kõrvutise juure x_{i+1} ja x_i absoluutväärtuste suhe on k , siis peale m -kordset teisendamist saame abivõrrandi, mille vastavate lahendite absoluutväärtuste suhe on juba k^{2^m} . Kuna $k < 1$, siis küllalt suure m korral saab k kui tahes väikeseks.

Olgu m -ndaks abivõrrandiks võrrand

$$p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0.$$

Kui ta lahenditeks on suurused y_1, y_2, \dots, y_n , siis Vieta valemite põhjal

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = -p_1 : p_0,$$

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + \dots + y_{n-1} y_n = p_2 : p_0,$$

$$y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + \dots + y_{n-2} y_{n-1} y_n = -p_3 : p_0,$$

.....

Küllalt suure m korral

$$y_1 = -p_1 : p_0,$$

$$y_1 y_2 = p_2 : p_0,$$

$$y_1 y_2 y_3 = -p_3 : p_0,$$

.....

Järjest järgmist seost eelmisega jagades saame

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -p_1 : p_0, \\
 y_2 &= -p_2 : p_1, \\
 y_3 &= -p_3 : p_2, \\
 &\dots \\
 y_n &= -p_n : p_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Seega küllalt suure m korral laguneb võrrand

$$p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0$$

n lineaarseks võrrandiks:

$$p_0 y + p_1 = 0, \quad p_1 y + p_2 = 0, \quad \dots, \quad p_{n-1} y + p_n = 0,$$

mille lahendamine on juba lihtne ülesanne.

Kuna selle võrrandi lahendid y_1, y_2, \dots, y_n on algvõrrandi $f(x) = 0$ lahendite absoluutväärtuste 2^m astmed, siis algvõrrandi lahendite absoluutväärtuste saamiseks tuleb neist võtta 2^m astme juur. Lahenditele õigete märkide omistamiseks ja arvutuste kontrolliks kasutame Horneri skeemi.

Vaatleme nüüd, kuidas saab Lobatševski teisendust realiseerida. Selleks korrutame hulkliikme

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = \\
 &= a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)
 \end{aligned}$$

hulkliikmega

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= (-1)^n (a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots) = \\
 &= (-1)^n a_0 (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n).
 \end{aligned}$$

Korrutises

$$f(x)f(-x) = (-1)^n a_0^2 (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \dots (x^2 - x_n^2)$$

puudivad ilmselt muutuja x paaritud astmed. Kui nüüd teha

asendus $x^2 = -z$, siis saame võrrandi

$$f_1(z) = a_0^2 (z + x_1^2)(z + x_2^2) \dots (z + x_n^2) = 0,$$

mille lahenditeks on suurused $-x_1^2, -x_2^2, \dots, -x_n^2$.

Võrrandi

$$f_1(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = 0$$

kordajate arvutamise eeskirja leidmiseks korrutame hulkliikme $f(x)$ hulkliikmege $f(-x)$ tegelikult läbi. Asendades siis x^2 suurusega $-z$, saame, et

$$f_1(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n =$$

$$= a_0^2 z^n + a_1^2 \left| z^{n-1} + a_2^2 \right| z^{n-2} + a_3^2 \left| z^{n-3} + \dots + a_n^2 \right.$$

$$\quad - 2a_0 a_2 \quad \left. \begin{array}{l} - 2a_1 a_3 \\ + 2a_0 a_4 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} - 2a_2 a_4 \\ + 2a_1 a_5 \\ - 2a_0 a_6 \end{array}$$

Seega uue võrrandi iga kordaja saamiseks tuleb võtta algvõrrandi vastava kordaja ruut, sellest lahutada temast vasakul ja paremal asetsevate kordajate kahekordne korrutis, liita üle ühe asetsevate kordajate kahekordne korrutis jne.

Kuigi teisendamiseks vajalik arvutuseeskiri on nüüd olemas, jääb veel lahendada rida küsimusi: kui kaugele tuleb teisendustega minna, kuidas arvutusi kontrollida, kuidas toimida kompleksjuurte korral jne. Kõiki neid küsimusi käsitleme konkreetsete näidete varal. Esimese näitena vaatleme võrrandit

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

mille lahenditeks on 1, 2 ja 3.

Arvutused korraldatakse järgmise skeemi, kusjuures arvude kiire kasvu tõttu viskame ülearused kohad minema ja kasutame kirjutusviisi, kus kümne astmed kirjutame koma kohale indeksina:

$$2376000 = 2,376 \cdot 10^6 = 2^6 \cdot 376.$$

Arvutused on teostatud arvutuslükati abil. Nagu skeemist nähtub, kahekordsed korrutised kahanevad kogu aeg. Peale lahendite 32. astme moodustamist kahekordsed korrutised järgnevad võrrandite kordajatele enam mõju ei avalda. See asjaolu ongi tunnuseks, et astendamise võib lõpetada.

1	-6	11	-6	Astmed
1	36 -22	121 -72	36	
1	14	49	36	2
	$1^2 96$ -0 98	$2^3 40$ -1 01	$1^3 296$	
1	$0^2 98$	$1^3 39$	$1^3 296$	4
	$9^3 60$	$1^6 93$	$1^6 68$	
1	$6^3 82$	$1^6 68$	$1^6 68$	8
	$4^7 65$ -0 34	$2^{12} 82$ -0 02	$2^{12} 82$	
1	$4^7 31$	$2^{12} 80$	$2^{12} 82$	16
	$1^{15} 86$ -0 01	$7^{24} 84$ -0 00	$7^{24} 95$	
1	$1^{15} 85$	$7^{24} 84$	$7^{24} 95$	32
		Vahed	Vahed: 32	
$\log 7^{24} 95$	24,9004	0,0061	0,0002	$ x_1 = 1,000$
$\log 7^{24} 84$	24,8943	9,6271	0,3008	$ x_2 = 1,999$
$\log 1^{15} 85$	15,2672	15,2672	0,4771	$ x_3 = 3,000$

Lahendite absoluutväärtuste määramiseks kasutame neljakohalisi logaritme. Lahendite märkide leidmiseks kasutame Horneri skeemi. See võimaldab kontrollida arvutuste täpsust

ja annab ka võimaluse leitud lahendite täpsustamiseks (vt. Newtoni meetod, lk. 73).

Kui võrrandil esineb reaallahendite kõrval ka kompleksjuuri, siis peegeldub see selles, et teisendatud võrrandites esineb negatiivseid kordajaid. Kui negatiivsed kordajaid esineb ühesainsas veerus, siis on tegemist ühe kaaskompleksjuurte paariga ja selle eraldamine ei tekita raskusi. Mitme negatiivset märki omava veeru korral tuleb aga soovitada pöördumist Berezini ja Židkovi raamatu [5] poole.

Toome ühe näite üht kompleksjuurte paari omava võrrandi lahendamisest. Olgu võrrandiks $12x^3 - 17x^2 + 55x + 15 = 0$. Järjestikuste abivõrrandite leidmise korraldame jällegi harilikku skeemi.

12	-17	55	15	1
	-289	3025		
	-1320	510		
144	$-1^3 03$	$3^3 54$	225	2
	$1^6 06$	$1^7 25$		
	$-1^6 02$	$0^7 05$		
$2^4 07$	$0^6 04$	$1^7 30$	$5^7 06$	4
	$0^{11} 02$	$1^{14} 69$		
	$-5^{11} 88$	000		
$4^8 27$	$-5^{11} 86$	$1^{14} 69$	$2^9 55$	8

Nagu näeme, teises veerus esineb teisendatud võrrandites negatiivseid kordajaid ja ei toimu kahekordsete korrutiste kahanemist. Seega on tegemist kompleksjuurtega. Vähima reaaluure leidmine on lihtne:

$$x_3 \approx -\sqrt[8]{\frac{2^9 55}{1^{14} 69}} \approx -0,2497.$$

Minusmärgi saame juurde omistada Descartes'i reegli põhjal. Sel võrrandil on üksainus reaalkjuur. Descartes'i reegel ütleb aga, et võrrandil on 2 või 0 positiivset reaalkjuurt ja 1 negatiivne reaalkjuur.

Kompleksjuurte leidmiseks võib kasutada ruutvõrrandit

$$4^8 27 (x^8)^2 - 5^{11} 86 (x^8) + 1^{14} 69 = 0.$$

Identsam on aga leida kõigepealt ruutvõrrandi lahendi moodul

$$r^2 \approx \sqrt[8]{\frac{1^{14} 69}{4^8 27}} \approx 5,008,$$

ja siis kasutada Vieta teoreemi, mille põhjal $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}$. Kuna $x_1 + x_2 = (u + iv) + (u - iv) = 2u$, siis

$$2u + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}, \text{ ehk } u = \frac{-\frac{a_1}{a_0} - x_3}{2} = \frac{+\frac{17}{12} + 0,2497}{2} = 0,8332.$$

Imaginaarosa kordaja v aga leiame seosest

$$u^2 + v^2 = r^2.$$

Siit saame, et $v = \sqrt{5,008 - 0,8332^2} = 2,077$.

Seega $x_{1,2} = 0,8332 \pm 2,077i$.

Märgime, et täpsed juurte väärtused on

$$x_3 = -0,25, \quad x_{1,2} = \frac{5}{6} \pm i \sqrt{\frac{155}{6}} = 0,83333\dots \pm i \cdot 2,0742\dots$$

Lobatševski meetodi kasutamine võib kõrgema astme võrrandite puhul lähedaste juurte korral nõuda küllaltki palju

tööd. Seepärast töötatakse tavaliselt alguses lükati täpsusega ja hiljem parandatakse leitud lähendeid Newtoni meetodi või eelviimase jäägi meetodiga vajaliku täpsuseni.

§ 11. Ligikaudsete parameetritega võrrandite lahendamine.

Enamus praktikas esinevaid võrrandeid on ligikaudsete kordajatega. Niisuguseid võrrandeid nimetatakse ligikaudseteks võrranditeks. On selge, et kordajate ebatäpsused mõjuvad ka võrrandi juurtele. Iga ligikaudse võrrandi lahendil on nn. tingimatu viga, mis ei sõltu ei lahendusmeetodist ega arvutajast. Antud põhivõrrandi lahendamine on aga põhimõtteliselt võimalik suvalise täpsusega. Põhivõrrandi lahendi viga nimetatakse tinglikuks veaks ja ta sõltub ainult arvutajast. Koguviga avaldub tingliku ja tingimatu vea summana.

Olgu ligikaudse võrrandi kuju

$$f(x, a_1(\pm \Delta a_1), a_2(\pm \Delta a_2), \dots, a_m(\pm \Delta a_m)) = 0,$$

kus x on tundmatu ja a_i -d on antud ligikaudsed arvud ning Δa_i nende absoluutvead. Põhivõrrand, mida me lahendame, on

$$f(x, a_1, a_2, \dots, a_m) = 0.$$

See võrrand määrab iga ühekordse juure $x = a$ ümbruses x -i kordajate a_i ilmutamata funktsioonina, kusjuures selle ilmutamata funktsiooni diferentsiaal avaldub kujul

$$dx = - \frac{1}{f'_a} \left(\frac{\partial f}{\partial a_1} da_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_m} da_m \right).$$

(f'_a tähistab f tuletist muutuja x järgi kohal $x = a$).

Kui vead Δa_i on küllalt väikesed, siis võib juure $x = a$ tingimatut viga hinnata järgmiselt:

$$\Delta a = \frac{1}{|f'_a|} (|f'_{a_1}| \Delta a_1 + \dots + |f'_{a_m}| \Delta a_m).$$

Erijuhul saame siit algebralise võrrandi

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

juure $x = a$ tingimatuks veaks

$$\Delta a = \frac{1}{|f'_a|} (|a|^{n-1} \Delta a_0 + |a|^{n-2} \Delta a_1 + \dots + \Delta a_n).$$

Kui kõik kordajad on antud võrdse absoluutse veaga v , siis

$$\Delta a = \frac{v(1 - |a|^{n+1})}{(1 - |a|)|f'_a|}.$$

Ligikaudsete võrrandite lahendamisel ei saa juuri leida täpsemini, kui seda võimaldab tingimatu viga (iga erineva juure puhul on tingimatu viga erinev!). Juurte arvutamisel tekki-va tingimatu vea hindamiseks piisab jämedatest lähenditest, mida saame kas graafikult või lükati ja Horneri skeemi abil.

§ 12. Mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamine.

Mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamine on üsnagi töömahukas ülesanne. Kuigi selliste süsteemide jaoks on olemas terve rida iteratsioonimeetodeid, on nende meetodite koonduvus enamasti üsnagi aeglane ja nad vajavad häid alglähendeid.

Vaatleme konkreetsuse mõttes kahe võrrandi ja kahe tundmatuga võrrandisüsteemi

$$f(x,y) = 0,$$

$$g(x,y) = 0.$$

Seldame, et me oleme mingil viisil leidnud süsteemi lahendi jaoks küllalt hea alglähendi (x_0, y_0) . Alglähendi otsimiseks sobib sageli graafiline meetod.

Arendame nüüd $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ kohal (x_0, y_0) Taylori ritta.

$$0 = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \dots$$

$$0 = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)\Delta x + g_y(x_0, y_0)\Delta y + \dots$$

Piirdudes reaksarenduses lineaarsete liikmetega, saame paranduste Δx ja Δy määramiseks lineaarse võrrandisüsteemi. Geomeetriliselt tähendaks see kõverate $f(x,y) = 0$ ja $g(x,y) = 0$ asendamist lõikepunkti ümbruses sirgetega ja nende sirgete lõikepunkti leidmist.

Leitud paranduste abil saame uued lähendid

$$x_1 = x_0 + \Delta x,$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y,$$

millega võime protsessi jälle korrata.

Näide. Leiame süsteemi

$$2x^3 - y^2 - 1 = 0,$$

$$xy^3 - y - 4 = 0$$

reaallahendid.

Jäme skits näitab, et kõveratel on üksainus lõikepunkt, mille koordinaadid on ligikaudu $(1,2; 1,7)$. Vastavaid osatuletiste väärtusi arvutades saame lineaarse võrrandisüsteemi

$$8,64 \Delta x - 3,40 \Delta y = 0,434,$$

$$4,91 \Delta x + 9,40 \Delta y = -0,1956.$$

Siit

$$\Delta x = 0,0349, \Delta y = -0,0390.$$

Uuteks lähenditeks on seega $x = 1,2349$; $y = 1,6610$.

Neid lähendeid uuesti võrrandisüsteemi asetades saame, et

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= 74,70 \cdot 10^{-4}, \\ g(x_1, y_1) &= -19,87 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Lineaarvõrrandisüsteem uute paranduste leidmiseks on seega

$$\begin{aligned} 9,150\Delta x - 3,322\Delta y &= -74,70 \cdot 10^{-4}, \\ 4,583\Delta x + 9,221\Delta y &= 19,87 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

ja uued parandused: $\Delta x_1 = -6,253 \cdot 10^{-4}$; $\Delta y_1 = 5,263 \cdot 10^{-4}$.

Lõplikult saame

$$\begin{aligned} x &= 1,2342747 \\ y &= 1,6615263. \end{aligned}$$

Leitud lähendites on viimased kohad kahtlased.

Kõrvuti äsja vaadeldud Newtoni meetodi üldistusega võib süsteemi lahendamiseks kasutada ka lihtsat iteratsioonimeetodit.

Kui me saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

kirjutada ümber kujul

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= F(x, y), \\ y &= G(x, y), \end{aligned}$$

kus paremad pooled muutuvad x ja y muutumisel üsna aeglaselt, siis on sellega määratud iteratsiooniprotsess

$$(2) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= F(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= G(x_n, y_n). \end{aligned}$$

Lahutades võrdustest (1) vastavalt võrdused (2), saame

$$x - x_{n+1} = F(x, y) - F(x_n, y_n),$$

$$y - y_{n+1} = G(x, y) - G(x_n, y_n).$$

Rakendame nende võrduste parematele pooltele keskväärtsulauset

$$x - x_{n+1} = (x - x_n)F_x + (y - y_n)F_y$$

$$y - y_{n+1} = (x - x_n)G_x + (y - y_n)G_y,$$

kus osatuletised on võetud x ja x_n ning y ja y_n vahelistes punktides.

Vigade absoluutväärtuste jaoks saame siit

$$|x - x_{n+1}| \leq |x - x_n| \cdot |F_x| + |y - y_n| \cdot |F_y|,$$

$$|y - y_{n+1}| \leq |x - x_n| \cdot |G_x| + |y - y_n| \cdot |G_y|.$$

Võrratusi liites ja eeldades, et $|F_x| + |G_x| < m < 1$ ning $|F_y| + |G_y| < m < 1$, näeme, et

$$|x - x_{n+1}| + |y - y_{n+1}| \leq m(|x - x_n| + |y - y_n|).$$

Tähendab, iteratsioonimeetodi koonduvuseks on piisav, et lähendit ja kõiki lähendeid sisaldavas piirkonnas oleksid täidetud tingimused

$$|F_x| + |G_x| \leq m < 1,$$

$$|F_y| + |G_y| \leq m < 1.$$

Näide. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\sin A = 0,160 \cos A + 0,335 \sin(A + B)$$

$$\sin B = 0,160 \cos B + 0,500 \sin(A + B).$$

Lahendame selle süsteemi iteratsioonimeetodiga, lähtudes alg-lähendist $A = 30^\circ$, $B = 30^\circ$.

n	sin A	sin B	A	B
0	-	-	30°	30°
1	0,4287	0,5716	$25,38^{\circ}$	$34,86^{\circ}$
2	0,4361	0,5653	$25,86^{\circ}$	$34,42^{\circ}$
3	0,4349	0,5662	$25,78^{\circ}$	$34,49^{\circ}$
4	0,4349	0,5661	$25,78^{\circ}$	$34,48^{\circ}$

n	A + B	cos A	cos B	sin(A + B)
0	60°	0,8660	0,8660	0,8660
1	$60,24^{\circ}$	0,9035	0,8206	0,8681
2	$60,28^{\circ}$	0,8999	0,8249	0,8684
3	$60,27^{\circ}$	0,9005	0,8242	0,8684
4	-	-	-	-

V. STATISTIKA ALGED

§ 1. S i s s e j u h a t u s .

Väga paljude teadusharude juures on teoreetiliste järelduste tegemiseks vajalik küllaltki mahuka vaatlusmaterjali kogumine. Enne kui vaatlusmaterjalist saab teha lõppjärelduksi või teoreetilisi üldistusi, tuleb teostada nn. vaatlusmaterjali statistiline töötlemine. See on hädavajalik protseduur, sest mitmesugustest faktoritest tingituna on üksikvaatluste tulemused üksteisest vähem või rohkem erinevad.

Siin tuleb vahet teha, kas meil on tegemist mingi objekti suuruse määramisega (mõõtmisvigade probleem) või on meil vaja iseloomustada mingit kollektiivi, mille üksikindiviidid on üksteisest teataval määral erinevad (näit. inimesed).

Mõõtmisvigade probleemi kohta võib leida üsna piisava käsitluse P. Prülleri ja H. Tammeti brošüürist [6], mille omandamine ja läbitöötamine on enne käesoleva peatüki materjalide juurde asumist kohustuslik.

Järgnevalt kirjeldame lähemalt mõningaid nimetatud brošüüris toodud tulemuste hindamisvõtteid ja näitame üldise printsiibi taoliste hinnangute saamiseks.

§ 2. Vähi m ruu tu de p ri nts i i p .

Juhul, kui on tegemist tunnusega, mille hajumine teatava keskväärtuse ümber on põhjustatud ainult juhuslikest faktoritest, siis väidab vähimruutude printsiip, et vaadeldava suuruse tõenäosim väärtus on selline, mille suhtes arvutatud üksikvaatluste väärtuste hälvete ruutude summa on minimaalne.

Kui üksikvaatlused on x_1, x_2, \dots, x_n , siis vähimruutude printsiip ütleb, et tõenäosim väärtus \bar{x} rahuldab tingimust

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min.$$

Määrame suuruse \bar{x} nii, et miinimumtingimus oleks rahuldatud:

$$\frac{d}{d\bar{x}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Sellest võrrandist leiame, et

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

s.t. muutuja tõenäosimaks väärtuseks on ta aritmeetiline keskmine.

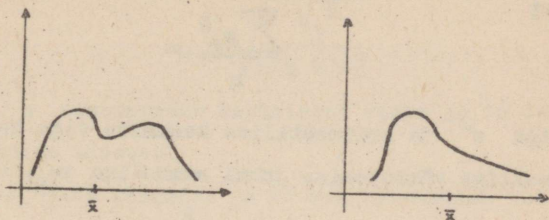
Peame siit meeles edasiseks tähtsa asjaolu, et aritmeetiline keskmine annab minimaalse hälvete ruutude summa. Ühtlasi näeme miinimumtingimusest, et aritmeetilise keskmise suhtes arvutatud hälvete summa on null.

Need kaks omadust teevadki aritmeetilise keskmise üheks enamkasutatavaks statistiliseks tunnusarvuks.

Aritmeetiline keskmine ei sobi suuruse kirjeldamiseks, kui on tegemist suuruse ebasümmeetrilise või mitmetipulise

jaotumisega.

Aritmeetiline keskmine ei esinda vaatluste hulka näiteks järgmiste jaotuste korral:



Niisugustel kordadel on parem kasutada statistikana moodi. Mood näitab, milline suuruse väärtus esineb kõige sagedamini.

§ 3. Aritmeetilise keskmise viga.

Kui me teostame suuruse x mõõtmist, siis kõik vaatlused x_i on vigased. Tähistame vaatluste tõelisi vigu nii:

$$(1) \quad x_i - \bar{x} = w_i.$$

Kui w on aritmeetilise keskmise viga, siis $\bar{x} - x = w$, ehk $x = \bar{x} - w$. Liidame nüüd n seost (1):

$$nx = \sum x_i - \sum w_i = n\bar{x} - \sum w_i,$$

millest

$$n(\bar{x} - w) = n\bar{x} - \sum w_i,$$

ehk

$$nw = \sum w_i.$$

Viimast võrdust ruutu tõstes saame

$$n^2 w^2 = \sum w_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \quad (i \neq j).$$

Kuna positiivsete ja negatiivsete vigade esinemine on

võrdtõenäoline, siis kahekordses summas toimub liikmete vastastikune kustumine ja ta on esimese liikmega võrreldes praktiliselt null. Kui tähistada tõeliste vigade ruutude summa keskmist

$$\frac{\sum w_i^2}{n}$$

sümboliga s^2 ja aritmeetilise keskmise viga kahekordse summa nulliga võrrutamise juhul sümboliga m_x , siis

$$m_x^2 = \frac{s^2}{n}$$

ehk

$$m_x = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Et meil tõelised vead pole teada, siis peame püüdma neid seostada aritmeetilise keskmise suhtes arvutatud üksikvaatluste hälvetega.

Tähistades $x_i - \bar{x} = v_i$ ja pidades silmas, et $x_i - x = w_i$, saame esimest võrdust teisest lahutades

$$\bar{x} - x = w_i - v_i.$$

Teiselt poolt aga $\bar{x} - x = w$, seega

$$w = w_i - v_i$$

ehk

$$v_i = w_i - w.$$

Selle võrduse mõlemaid pooli ruutu tõstes ja summeerides saame:

$$\sum v_i^2 = \sum w_i^2 - 2w \sum w_i + nw^2 = ns^2 - nw^2.$$

Siit

$$\sum v_i^2 = ns^2 - s^2 = (n-1)s^2.$$

Tähendab

$$s^2 = \frac{v_i^2}{n-1}$$

ja aritmeetilise keskmise nn. standardvige avaldub kujul

$$m_x = \sqrt{\frac{v_i^2}{n(n-1)}}$$

Suurust s nimetatakse keskmiseks veaks ja ta peegeldab üksikmõõtmise täpsust.

Toome ühe näite keskmise ja ta vea arvutamise kohta. Olgu meil tegemist vaatlusseeriaga

18,6; 18,7; 18,3; 18,8; 18,6; 18,7.

Aritmeetilise keskmise arvutamisel peame silmas, et sageli on kasulik kõiki vaadeldud suurusi vähendada ühe ja sama suuruse võrra, see vähendab aritmeetilist tööd (vastavalt väheneb muidugi ka aritmeetiline keskmine). Praegusel juhul on mõistlik vähendada kõiki vaatlusi suuruse $A = 18,6$ võrra:

x_i	$x_i - A$
18,6	0,0
18,7	0,1
(1) 18,3	-0,3
18,8	0,2
18,6	0,0
18,7	0,1
	$\Sigma = 0,1$

Et $n = 6$, siis $\bar{x} = A + \frac{\Sigma(x_i - A)}{6} = 18,6 + \frac{0,1}{6} = 18,62$.

Leitud keskmise vea hindamiseks tuleb arvutada keskmise suhtes arvutatud hälvete ruutude summa. Arvutuste lihtsustamiseks kasutame seost

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - A)^2 - n(\bar{x} - A)^2$$

(endal tõestada!).

$$(x_i - A)^2 = 0 + 0,01 + 0,09 + 0,04 + 0,0 + 0,01 = 0,15;$$

$$m_x = \sqrt{\frac{0,15 - 6 \cdot 0,017^2}{6(6 - 1)}} = 0,07.$$

Märkus. Hälvete ruutude ja nende summa arvutamise teostame otstarbekalt püistskeemi (1) kolmandas veerus.

Arvutuse tulemused esitatakse tavaliselt kujul: $\bar{x} \pm m_x$.

§ 4. Aritmeetilise keskmise usaldatavus.

Aritmeetilise keskmise arvutamisega on tihedalt seotud keskmise usaldatavuse ja usalduspiiride mõisted. Küllalt varieeruvate mõõtmistulemuste puhul kerkib paratamatult küsimus, kas keskmine tõepoolest esindab vaatlusseeriat ja millised võivad olla piirid, mille vahel otsitav väärtus peaks teatava tõenäosusega asuma.

Väikeste vaatlusseeriatega korral ($n < 20$) ei kehti nimelt normaalne jaotusseadus, vaid kõik tõenäosuslikud hinnanguid tuleb teostada nn. Studenti t-jaotuse põhjal (t-jaotuse tabelit vt. lk. 141).

Kui keskmine ja ta viga on leitud, siis keskmise usaldatavuse kontroll toimub järgmise, statistikas tüüpilise mõttekäigu põhjal. Nimelt me püstitame kõigepealt hüpoteesi, et keskmine pole usaldatav (nn. nullhüpotees) ja kontrollime

siis Studenti t -jaotuse abil, kui suur on nullhüpoteesi tõenäosus meie käsutuses olevat vaatluste arvu ja suhet $t = \frac{\bar{x}}{m_x}$ arvestades. Ebatõenäoliseks loeme hüpoteesi harilikult siis, kui ta tõenäosus on alla 0,05. Studenti t -jaotuse tabeli kasutamisel kohtume veel ühe uue mõistega - vabadusastmete arvuga. Vabadusastmete arv näitab, kui suur on peale meid huvitavate parameetrite määramist vabalt valitavate vaatluste arv. Nii näiteks on aritmeetilise keskmise usaldatavuse hindamise juures vabadusastmete arv $n - 1$, sest teatava kindla keskmise etteandmise korral me võime $n - 1$ vaatluse väärtust vabalt valida ja alles n -nda väärtuse peame võtma sellise, et väärtuste aritmeetiline keskmine võrduks etteantuga. Toodud näite puhul

$$t = \frac{\bar{x}}{m_x} = \frac{18,62}{0,07} = 266.$$

t -tabelist järele vaadates näeme, et viie vabadusastme korral on $t = 266$ puhul nullhüpoteesi tõenäosus alla 0,001, s.t. nullhüpotees, mis väidab, et keskmine pole usaldatav, on väga väikese tõenäosusega. Järelikult tuleb keskmist lugeda usaldatavaks.

Edasi leiame keskmise usalduspiirid. Piirid arvutatakse valemist

$$\bar{x} \pm m_x \cdot t(5\%; n-1),$$

kus $n-1$ on vabadusastmete arv ja 5% on tavaline nullhüpoteesi tõenäosus.

Varem toodud näite puhul

$$18,62 \pm 2,57 \cdot 0,07 = 18,62 \pm 0,18.$$

Tulemust tõlgendame järgmiselt: kui me teostame veel terve rea selliseid vaatlusseeriaid, siis 95% juhtudel langeb \bar{x} vahemikku

$$18,44 \leq \bar{x} \leq 18,80.$$

Üksikvaatluste usalduspiirideks on

$$\bar{x} \pm s \cdot t(5\%; n-1).$$

Nendesse piiridesse langeb 95% kõigist vaatlustest. Väljaspool usalduspiire olevate vaatluste korral peab eraldi uurima, millest on kõrvalekalle tingitud.

§ 5. Dispersioonide ja keskmiste võrdlemine.

Kui me läheme ühelt vaatlusseerialt üle kahele vaatlusseeriale, siis me võime peale kummagi seeria keskmiste ja nende vigede arvutamist püstitada ka küsimuse nende keskmiste erinevustest. Kõrvuti keskmiste võrdlemisega on aga suur tähtsus ka materjali varieeruvuse võrdlemisel.

Varieeruvuse iseloomustajana kasutatakse harilikult nn. dispersiooni

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

Varieeruvuste erinevuse olulisuse hindamiseks kasutatakse nn. F-testi. Kui meil on ühe n_1 vaatlusega seeria puhul tegemist dispersiooniga s_1^2 ja teise n_2 vaatlusega seeria puhul dispersiooniga s_2^2 , siis dispersioonide võrdlemiseks kasutame dispersioonide suhet

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} ,$$

kusjuures indeksid on nii valitud, et dispersioonide suhe on alati ühest suurem. Edasi tuleb vaid F-tabelist (lk. 142) vaadata, milline on vabadusastmetega n_1-1 ja n_2-1 nullhüpoteesi tõenäosus. (Tabeli peast tuleb võtta suurema dispersiooni vabadusaste).

Kui selgub, et dispersioonid on oluliselt erinevad (nullhüpoteesi tõenäosus on alla 0,05), siis on juba kindel, et meil on tegemist täiesti erinevalt käituvate seeriatega ja küllalt tihti ei tekigi enam vajadust keskmiste võrdlemiseks. Seda peamiselt just bioloogias. Füüsikaliste mõõtmiste korral näitab dispersioonide erinevus lihtsalt seda, et mõõtmised on teostatud oluliselt erineva täpsusega. Bioloogias aga on dispersioonide erinevus juba suure sisulise tähtsusega. Oletame näiteks, et sordiaretusliku töö juures aretati kaks uut kartulisorti, mille keskmised hektarisaagid olid võrdsed, aga mille dispersioonid olid oluliselt erinevad. See tähendab, et ühes sordis olid kõik kartulid enam-vähem ühesuurused, teises sordis oli aga palju väga suuri kartuleid ja palju väga väikesi kartuleid, mis võib selle sordi majanduslikku efektiivsust juba oluliselt mõjutada.

Kui dispersioonid ei erine oluliselt (nullhüpoteesi tõenäosus $p > 0,05$), siis kasutame keskmiste erinevuse olulisuse hindamiseks t-testi.

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

$n_1 + n_2 - 2$ vabadusastmega .

Näitena võrdleme seeriat 18,5; 18,9; 18,7; 18,9; 19,0; 19,1; 19,2 meie poolt eespool vaadeldud seeriaga. Uue seeria puhul $\bar{x} = 18,9$; $s^2 = 0,057$. Vana seeria puhul oli $\bar{x} = 18,62$. $s^2 = 0,03$.

Kontrollime kõigepealt dispersioonide erinevust:

$$F = \frac{0,057}{0,03} = 1,9.$$

F-tabelist leiame 6 ja 5 vabadusastmega, et nullhüpoteesi tõenäosus on üle 0,20, s.t. me ei saa nullhüpoteesi ümber lükata ja järelikult tuleb dispersioonid lugeda homogeenseteks.

Nüüd võrdleme keskmisi:

$$t = \frac{0,28}{\sqrt{\frac{0,15 + 0,34}{11}}} \cdot \sqrt{\frac{42}{13}} = \frac{0,28}{\sqrt{0,0166}} = \frac{0,28}{0,129} = 2,17.$$

t-tabelist leiame 11 vabadusastmega, et nullhüpoteesi tõenäosus on õige veidi üle 0,05. Varasema kokkuleppe põhjal peaksime ütlema, et nullhüpotees peab paika ja järelikult keskmised pole oluliselt erinevad. Kuna aga nullhüpoteesi tõenäosus on parajasti kriitilise väärtuse 0,05 juures, siis on mõistlikum lõplikku otsustust mitte vastu võtta ja uurida asja konkreetse ülosande korral lähemalt.

Kui dispersioonid on oluliselt erinevad, siis leitakse kahe seeria korral, mille andmed on \bar{x}_1, s_1^2, n_1 ja \bar{x}_2, s_2^2, n_2 , kriitiline t väärtus järgmiselt:

$$t' = \frac{n_1 t_1 + n_2 t_2}{n_1 + n_2},$$

kus

$$n_1 = \frac{s_1^2}{n_1}, \quad w_2 = \frac{s_2^2}{n_2}, \quad t_1 = t_{5\%}^{(n_1-1)}, \quad t_2 = t_{5\%}^{(n_2-1)}$$

ning empiiriline t saadakse seosest

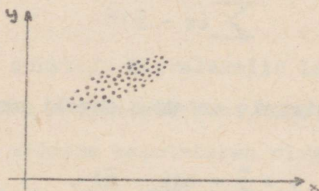
$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s},$$

$$\text{kus } s = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}.$$

Harjutus. Võrrelda seeriat 17,4; 20,8; 21,3; 23,7; 24,3 seeriaga 17,8; 17,9; 18,0; 18,2; 20,0.

§ 6. Regressioon ja korrelatsioon.

Küllalt sageli on eksperimentaatoril tarvis uurida kahe teatava tunnuse vahelist seost. Olgu meil näiteks antud n indiviidi puhul arvupaarid $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ja olgu nende arvupaaride paigutus tasandil järgmine:



Graafikult on ilmne, et tunnused x ja y on omavahel seotud, kusjuures seose kuju on nähtavasti lineaarne: $y = a + bx$. "Parima" sirge, nn. regressioonisirge kordajate a ja b leidmiseks kasutatakse jälle vähimruutude printsiipi, mis nõuab, et hälvete ruutude summa

$$\sum [y_i - (a + bx_i)]^2$$

oleks minimaalne.

Kordajate a ja b määramiseks saame a ja b järgi võetud osatuletisi nulliga võrrutades lineaarse võrrandisüsteemi:

$$-2 \sum [y_i - (a + bx_i)] = 0,$$

$$2 \sum [y_i - (a + bx_i)] x_i = 0.$$

Süsteemi üksikasjalikumalt välja kirjutades

$$a \cdot n + b \cdot \sum x_i = \sum y_i$$

$$a \cdot \sum x_i + b \cdot \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

ning lahendades saame

$$b = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2},$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x}.$$

Kordaja b avaldist saab veel ümber kirjutada kujul

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

(tõestada!).

Ka regressioonisirgele antakse sageli praktiliseks kasutamiseks mugavam kuju:

$$y = \bar{y} + b(x - \bar{x}).$$

Et otsustada, kas leitud tõus b on oluline või mitte, arvutame välja selle keskmise vea:

$$s_b = \sqrt{\frac{\sum [y_i - (a + bx_i)]^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2 - b \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 2}}$$

Regressioonikordaja olulisuse hindamiseks kasutame t -testi

$$t = \frac{b}{s} \sqrt{(x_i - \bar{x})^2}$$

vabadusastmete arvuga $n - 2$ (sirge määramiseks kulub kaks punkti).

Üksikvaatlused võivad regressioonisirgest normaalselt kõrvale kalduda suuruse $t_{5\%}^{(n-2)} \cdot s_b$ võrra.

Juhime lugeja tähelepanu asjaolule, et äsjaes käsitluses me vaatlesime suurust y sõltuvana suurusest x ja vastavalt sellele minimaliseerisime vertikaalsuunaliste hälvete ruutude summa. Kui me aga otsiksime suurust x suuruse y funktsioonina, siis tuleks meil minimaliseerida horisontaalsuunaliste hälvete ruutude summa ja sirge $x = \bar{x} + b'(y - \bar{y})$ tõus b' avaldub järgmiselt:

$$b' = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

(Üldiselt $b \cdot b' \neq 1$, võrdus kehtib ainult täpse lineaarse seose korral).

Mida väiksem on punktide kõrvalekalle leitud regressioonisirgest, seda tihedam on ilmselt seos kahe vaadeldava tunnuse vahel. Tiheduse mõõduna kasutatakse sirge ümber olevate y väärtuste hajuvuse ja y -de koguhajuvuse suhet

$$B = \frac{\sum \frac{(Y_1 - \bar{y})^2}{n-1}}{\sum \frac{(y_1 - \bar{y})^2}{n-1}}, \text{ kus } Y_1 \text{ on sirge punkt abstsissiga } x_1.$$

Silmas pidades, et $Y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$, saame

$$B = \frac{b^2 \frac{1}{n-1} \sum (x_1 - \bar{x})^2}{\frac{1}{n-1} \sum (y_1 - \bar{y})^2}.$$

Aasendades b tema avaldisega suuruste x ja y kaudu, leiame, et

$$B = \frac{\left[\frac{1}{n-1} \sum (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) \right]^2}{\frac{1}{n-1} \sum (x_1 - \bar{x})^2 \frac{1}{n-1} \sum (y_1 - \bar{y})^2} = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}.$$

Kui kõik punktid asetsevad sirgel, siis B avaldises lugeja ja nimetaja ühtuvad ning $B = 1$. Kui kõik Y_1 -d võrduvad \bar{y} -ga, siis saab lugeja nulliks ning $B = 0$. Sel korral pole x ja y vahel lineaarset seostatust. B näitab, milline osa y koguarieeruvusest on seletatav lineaarse seosega x ja y vahel.

Statistilises kirjanduses on seose tiheduse mõõduna rohkem läbi löönud nn. korrelatsioonikordaja

$$r = \sqrt{B} = \frac{\sum (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_1 - \bar{x})^2 \sum (y_1 - \bar{y})^2}},$$

mis muutub samuti nullist üheni, kuid omab lisaks absoluutväärtusele ka märki. r on positiivne, kui x ja y kasvavad ühes suunas; r on negatiivne, kui ühe muutuja kasvades teine kahaneb.

Korrelatsioonikordaja r usaldatavuse hindamiseks kasutame, järele t -testi

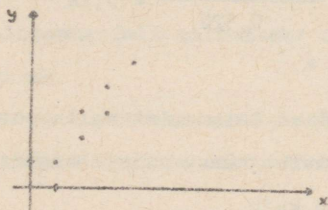
$$\begin{cases} t = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \\ n' = n - 2 \end{cases}$$

(Selle kriteeriumi saame, kui leiendame sobival viisil regressioonikordaja b usaldatavuse hindamise valemit. Tõestada!).

Näide.

Vaatleme järgmisi punktipaare (x_i, y_i) : (1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,5) ja leiame nende punktide jaoks regressioonisirged ning x ja y vahelise korrelatsioonikordaja.

Kõigepealt kontrollime graafiku põhjal, kas lineaarse seose otsimine suuruste x ja y vahel on üldse otstarbekas



Graafik näitab, et lineaarse seose otsimine on põhjendatud. Arvutame nüüd edesiseks vajalikud suurused $\sum (y_i - \bar{y})^2$, $\sum (x_i - \bar{x})^2$, $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$. Arvutused korraldame järgmise skeemina:

x_1	y_1	$x_1 - \bar{x}$	$y_1 - \bar{y}$	$(x_1 - \bar{x})^2$	$(y_1 - \bar{y})^2$	$(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})$
1	1	-1,5	-2	2,25	4	3,0
2	2	-0,5	-1	0,25	1,0	0,5
2	3	-0,5	0	0,25	0	0
3	3	+0,5	0	0,25	0	0
3	4	+0,5	+1	0,25	1	0,5
4	5	+1,5	+2	2,25	4	3
$\Sigma = 15$	$\Sigma = 18$	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 5,50$	$\Sigma = 10$	$\Sigma = 7$

$$\bar{x} = 2,5, \quad \bar{y} = 3.$$

Regressioonisirge tõus

$$b = \frac{7}{5,50} = 1,273.$$

Tõusu usaldatavus:

$$s_b = \sqrt{\frac{10 - 1,273 \cdot 7}{4}} = \sqrt{\frac{1,09}{4}} = 0,522,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1,273 \cdot \sqrt{5,50}}{0,522} = 5,72 \\ n' = 4. \end{array} \right.$$

Studenti t-tabelist leiame, et nullhüpooteesi tõenäosus on alla 0,01. Seega tuleb tõusu pidada usaldatavaks ning regressioonisirge omab kuju

$$y = 3 + 1,273(x - 2,5).$$

Üksikvaatlus võib regressioonisirgest kalduda kõrvale suuruse

$$0,522 \cdot 2,78 = 1,45$$

võrra.

Korrelatsioonikordaja $r = \frac{7}{\sqrt{5,50 \cdot 10}} = 0,944$. See tähendab, et $0,944^2 = 0,89 = 89\%$ y varieeruvusest on seletatav

x varieeruvusega. Ainult 11% on tingitud meile tundmatu-
test faktoritest. Kui avaldada suurus x suuruse y kaudu,
siis saame

$$b' = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Seega

$$x = 2,5 + 0,7(y - 3).$$

$$\begin{aligned} \text{Tõusu } b' \text{ usaldatavus: } s_b &= \sqrt{\frac{5,5 - 0,77}{4}} = \sqrt{\frac{0,6}{4}} = \\ &= \sqrt{0,15} = 0,387, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t = \frac{0,7 \cdot \sqrt{10}}{0,387} = 5,72 \\ n' = 4. \end{cases}$$

§ 7. Mittelineaarne regressioon.

Vähimruutude printsiipi saab edukalt rakendada ka juhul,
kui vaatlusmaterjali silumiseks on vaja kasutada kõrgemat jär-
ku polünoome.

Olgu meil näiteks vaatlusandmeid (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) vaja lähendada ruutpolünoomiga

$$y = a + bx + cx^2.$$

Vähimruutude printsiibi põhjal minimaliseerime suuruse

$$\sum [y_i - (a + bx_i + cx_i^2)]^2.$$

Vastavaid osatuletisi välja arvutades ja nulliga võrru-
tades saame a, b ja c määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}
 a \cdot n + b \sum x + c \sum x^2 &= \sum y, \\
 a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 &= \sum xy, \\
 a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 &= \sum x^2 y.
 \end{aligned}$$

Leitud lähendamise headust saab jälle kontrollida vasta-
va vea väljaarvutamise teel:

$$s = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-3}},$$

kus $v_i = y_i - (a + bx_i + cx_i^2)$.

Kui s on alla mõõtmisvea suurust, siis võib piirduda ruutpolünoomiga, kui aga s ületab mõõtmisvea, siis tuleb otsida paremat lähendit kuup- või kõrgema astme polünoomi näol või kasutada polünoomide asemel hoopis eksponentsiaalset tüüpi kõveraid. (Võimalikest lähenduskõveratest võib leida ülevaate Bronšteini ja Semendjajevi kõrgema matemaatika käsiraamatu viimasest peatükist).

Näide. Ajamomentidel t_i mõõdeti teatavat suurust H , kusjuures mõõtmisviga oli kindlasti väiksem kui $\pm 0,1$.

t	H	t'
0	8,3	-5
5	7,1	-4
10	6,2	-3
15	5,5	-2
20	4,7	-1
25	4,1	0
30	3,6	1
35	3,2	2
40	2,8	3
45	2,5	4
50	2,3	5

Arvutuste hõlbustamiseks toome sisse abimuutuja $t' = \frac{t - 25}{5}$. Kasutame kõigepealt lineaarset lähendamist

$$H = a + bt'.$$

Arvutusi läbi viies leiame, et $a = 4,5727$ ja $b = -0,5854$. Vastav lähendamisviga $s = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{1,88}{9}} = 0,46$.

Saadud lähendusviga on aga oluliselt suurem teadaolevast H mõõtmise täpsusest $0,1$. Järelikult lineaarsest lähendist ei piisa mõõtmistulemuste iseloomustamiseks.

Katsetame ruutpolünoomiga. Peale vastavaid arvutusi leiame, et

$$H = 4,11 - 0,584t' + 0,046t'^2$$

ning viga

$$s = \sqrt{\frac{3,92 \cdot 10^{-2}}{8}} = 0,07.$$

Saadud tulemus vastab mõõtmise täpsusele, seega piisab andmete silumiseks ruutpolünoomist.

Vähimruutude printsiibi rakendamine ka kõrgema astme polünoomide korral ei tekita ilmselt põhimõttelisi raskusi.

§ 8. Statistilisest veahinnangust vigade edasikandmisel.

Olgu meil vaja arvutada pidevalt diferentseeruva funktsiooni $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ väärtus kohal $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, kusjuures $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ on saadud mõõtmise tulemusena ja omavad vastavalt keskmisi vigu m_1, m_2, \dots, m_n .

Ligikaudset arvutamist käsitlevas peatükis me jõudsime

vea hinnangu ni diferentsiaali

$$dU = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} m_i$$

kaudu (osatuuletiste $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ väärtused on leitud punktis $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$). Vea ülemise tõkke saamiseks me oletasime täpsuse mõttes kõige halvemat võimalust, s.t., et vead võivad kõik liituda. Praktika näitab aga, et selline ühesuunaline vigade liitumine on väga vähe tõenäoline. Saksa matemaatik Stadthagen vaatles möödunud sajandi 80-ndail aastail kahekümne arvu kümnendlogaritmid liitmist. Logaritmid võeti viie kümnendkohaga, absoluutviga hinnati seitsmenda kümnendkoha ühikutes. Range vahinnangu põhjal me saaksime absoluutvea suuruseks $20 \cdot 50 = 1000$ seitsmenda koha ühikut, s.t. 10 viienda koha ühikut. Stadthagen teostas 440 sellist liitmist ja vaatles tegelikult tekkinud vigu. Tegelik vigade jaotus kujunes järgmiseks:

Absoluutne viga	Suhteline summade hulk eksperimentis
0 - 100	65%
100 - 200	28%
200 - 300	6%
300 - 400	1%
400 - 1000	0%

Toodud näitest selgub, et maksimaalne veatõke on väga suure ülehinnanguga.

Hoopis praktilisema vahinnangu ni jõuame, kui kasutada eelmistes paragrahvides kesutatud vea hindamist keskmise vea abil.

Et üksikmõõtmiste vigadel on nii pluss- kui ka miinus-
 märke, siis toimub nende vigade tasendumine arvutuste käigus.
 Kui me vaatleme suuruste x_1, x_2, \dots, x_n k üksikmõõtmise
 tulemusi üksikmõõtmise vigadega m_{nj} , siis on suuruse U vas-
 tav üksikvaatluse viga

$$dU_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} m_{ij}.$$

k üksikvaatluse keskmise vee leidmiseks tuleb meil lei-
 da suurus

$$m_u = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k (dU_j)^2}{k-1}}.$$

Üksikvaatluse viga dU_j on aga summa, mille ruututõst-
 misel kahekordsed korrutised tasenduvad ja peale vabadusast-
 mete arvu $k-1$ jagamist saame

$$m_u = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} m_i\right)^2}, \quad (m_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^k m_{ij}^2}{k-1}).$$

Näiteks summa $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ puhul, kus $m_i = m$,
 saame summa keskmiseks veaks

$$m_u = m \cdot \sqrt{n}.$$

§ 9. Kaalutatud mõõtmised.

Üht ja sama suurust mõõdeti n vaatleja poolt ning
 saadi mõõtmistulemusteks $q_1 \pm m_1, q_2 \pm m_2, \dots, q_n \pm m_n$,
 kusjuures q -d ja m -d on üldiselt rääkides erinevad suu-
 rused. Kuidas võtta kõikide nende mõõtmiste tulemusi kokku
 suurusele q võimalikult parema hinnangu saamiseks? Et olu-
 korras paremat ülevaadet saada, võtame konkreetse näite.

Viis inimest mõtsid spetsiaalse riistaga - planeet-
riga teatavat pindala:

q_1	m_1	p_1	$p(q - 460)$	v	pv	pv^2
462	2	4	8	+1,724	+6,896	11,87
460	4	1	0	+3,724	+3,724	13,85
473	2	4	52	-9,276	-37,104	344,29
463	1	16	48	+0,724	+11,584	8,34
460	2	4	0	+3,724	+14,896	55,43
		29	108		- 0,004	
$M=4$		$q' = \frac{108}{29} = 3,724$				

Mõõtmiste erinev täpsus võis tuleneda riista erinevast täpsusest või ka mõõtmiste erinevast arvust. Ilmselt oleks ebamajanduslik ja ka väär, kui me leiaksime lihtsalt q_1 -de aritmeetilise keskmise vaatluste erinevat täpsust arvestamata jättes.

Mõõtmistulemuste erineva täpsuse arvesse võtmiseks lähutatakse mõttelisest fiktsioonist, mis võimaldab probleemi suhteliselt lihtsalt lahendada. Nimelt mõeldakse, et kõik mõõtmised on vaatlejate poolt teostatud ühe ja sama riistaga, mille keskmine viga on M ja tulemuste q_1 erinev täpsus on tingitud ainult üksikmõõtmiste erinevast arvust.

Kui nende fiktiivsete üksikmõõtmiste hulk tähistada suurusega p_1 , siis ilmselt kehtib võrdus

$$m_1 = \frac{M}{\sqrt{p_1}}.$$

Olgu need fiktiivsed üksikmõõtmised, mille keskmine on

$$q_1 \quad r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \dots, r_{p_1}^{(i)}.$$

Siit saame, et

$$q_1 = \frac{r_1^{(1)} + \dots + r_{p_1}^{(1)}}{p_1},$$

$$q_2 = \frac{r_1^{(2)} + \dots + r_{p_2}^{(2)}}{p_2},$$

.....

$$q_n = \frac{r_1^{(n)} + \dots + r_{p_n}^{(n)}}{p_n}.$$

Meie käsutuses on seega $p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum p_i$ fiktiivset võrdtäpset üksikmöötmist, mille keskmise leidmine on lihtne:

$$q = \frac{(r_1^{(1)} + \dots + r_{p_1}^{(1)}) + \dots + (r_1^{(1)} + \dots + r_{p_n}^{(n)})}{\sum p_i}.$$

Lugejas olevad sulgavaldised on aga parajasti $p_1 q_1$, $p_2 q_2$, ..., $p_n q_n$. Seega

$$q = \frac{\sum p_i q_i}{\sum p_i}.$$

Kui me suurusi p_i tunneksime, siis oleks kaalutud keskmise leidmine juba lihtne ülesanne. Nagu märgitud, need kordajad p_i on seotud suuruste q_i vigadega: $m_i = \frac{M}{\sqrt{p_i}}$. Sellest võrdusest saame, et $p_i = \frac{M^2}{m_i^2}$. Esimesel hetkel võib näida, et p -de leidmine on võimatu M mittetundmise pärast. Vaadeldes aga lähemalt kaalutud keskmise q valemit, näeme, et suurus M taendub q avaldisest välja. M on seega arvutuslik abisuurus, mida võib valida täiesti suvaliselt.

Suurusi p_i nimetatakse kaaludeks, millega tuleb üksikseeriade keskmisi korrutada enne täpsustatud keskmise saamiseks võimaliku summa leidmist.

Kaalatud keskmise viga on

$$m_q = \frac{M}{\sqrt{\sum p_i}}$$

Ka viga on tegelikult M -st sõltumatu ja on määratud ainult suurustega m_i , sest vea avaldist üksikasjalikult välja kirjutades näeme, et avaldisest

$$m_q = \frac{M}{\sqrt{\sum \frac{M^2}{m_i^2}}}$$

taandub M välja.

Tegelikul arvutamisel valime M võrdseks suurimaks veaga m_i . Esitatud konkreetse näite puhul on arvutuste hõlbustamiseks leitud 1560 suhtes võetud hälvete keskmine. Tegelik keskmine 1563,724 on saadud hälvete keskmist 3,724 1560 võrra suurendades.

Analüüsime saadud tulemust veel lähemalt.

Kõigepealt moodustame arvutuste kontrollimiseks hälbed $v_i = q - q_i$. Nimelt peab kehtima arvutuse täpsuse piires võrdus $\sum p_i v_i = 0$ (Endal tõestada!).

Edasi selgub, et summast $S = \sum p_i v_i^2$ saab teha olulisi järeldusi kaalutud keskmise täpsuse kohta. Seda täpsust hindab küll juba keskmine viga $m_q = \frac{M}{\sqrt{\sum p_i}}$, kuid see ei

võta arvesse v_i suurust. Et näidata summa S tähendust

kaalutud keskmise q täpsuse hindamisel, pöördume veel kord võrdtäpsete fiktiivsete üksikvaatluste juurde tagasi. Nende keskmine viga arvutatakse formaalselt ükskord antud q_i -de suhtes võetud hälvete kaudu ja teinekord kaalutud keskmise q suhtes võetud hälvete kaudu. Mõlema tulemuse võrrutamisel saame S ja M vahelise seose.

Olgu fiktiivsete üksikvaatluste $r_h^{(i)}$ hälbed antud q_i suhtes

$$u_{ih} = q_i - r_h^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, p_i).$$

Siit saame, et

$$q_i = \frac{\sum_{h=1}^{p_i} r_h^{(i)}}{p_i} \quad \text{ja} \quad \sum_{h=1}^{p_i} u_{ih} = 0 \quad \text{kõigi } i\text{-de puhul.}$$

Keskmise vea jaoks saame seega kõigi i -de korral avaldise (vaatlused on võrdtäpsed!)

$$(1) \quad M = \sqrt{\frac{\sum_{h=1}^{p_i} u_{ih}^2}{p_i - 1}}.$$

Hälbed kaalutud keskmisest olgu $w_{ih} = q - r_h^{(i)}$. Kui nende kaudu arvutada keskmine viga M , siis saame

$$M^2 = \frac{\sum_{h=1}^{p_1} w_{1h}^2 + \sum_{h=1}^{p_2} w_{2h}^2 + \dots + \sum_{h=1}^{p_n} w_{nh}^2}{p_1 + p_2 + \dots + p_n - 1}.$$

Siit järeldub, et

$$M = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i v_i^2}{n - 1}}.$$

Kas nii arvatud keskmise vea M väärtus peab ühtuma varem suvaliselt võetud M väärtusega? Vahetegemiseks varustame arvatud keskmise vea väärtuse ülakomaga:

$$M' = \sqrt{\frac{\sum p_i v_i^2}{n-1}} .$$

Sellele küsimusele saame lihtsaimini vastuse, kui arvutame M' välja. Arvutused annavad ootamatult tulemuseks $M' = 10,4$ (M oli 4!).

Erinevuse põhjuseks on asjaolu, et q_3 mõõtmisel oli tehtud riista justeerimisel viga: planimeetri üleminekukordaja oli valesti arvatud. Niipea, kui mõne mõõduriista nullpunkt on valesti määratud, peegeldub see otsekohe M' ja M erinevuses.

Kui teistest vaatlustest erinevat vaatlust ei õnnestu parandada, siis tuleb saadud kaalutud keskmise täpsuse ülehindamise vältimiseks võtta kaalutud keskmise veaks suurus

$$m_q = \frac{M'}{\sqrt{\sum p_i}} .$$

HARJUFUSÜLESANDEID.

Liitmine ja lahutamine.

Järgnevas tabelis on läbiseegi toodud kõik arvud 1-99:

1	8	15	22	29	36	43	50
57	64	71	78	85	92	99	6
13	20	27	34	41	48	55	62
69	76	83	90	97	4	11	18
25	32	39	46	53	60	67	74
81	88	95	2	9	16	23	30
37	44	51	58	65	72	79	86
93	7	14	21	28	35	42	49
56	63	70	77	84	91	98	5
12	19	26	33	40	47	54	61
68	75	82	89	96	3	10	17
24	31	38	45	52	59	66	73
80	87	94					

1. Leida kõikide veergude summad ülevalt alla liites.
2. Leida kõikide veergude summad alt üles liites.
3. Leida kõikide ridade summad.
4. Leida kahes kõrvutises veerus asetsevate arvude summad
($1 + 8 = 9$, $57 + 64 = 121$, $13 + 20 = 33$, ...) liitmist vasakult paremale teostades.
5. Leida kõikide veergude summad, liitmist ülevalt alla teostades ning arve kahekohaliste arvudena liites ($1 + 57 =$

= 58; 58 + 13 = 71; 71 + 69 = 140, ...).

6. Leida järgmised vahed:

279 - 186 =	828 - 665 =
317 - 197 =	2,62 - 1,89 =
950 - 669 =	4,47 - 2,61 =
256 - 191 =	3,23 - 1,60 =
477 - 281 =	7,44 - 4,49 =
7207 - 387 =	2652 - 689 =
7919 - 758 =	8704 - 253 =
950,49 - 498,65 =	416,07 - 219,44 =
10000 - 6734 =	2690 - 327 =

K o r r u t a m i n e .

7. Leida peast järgmised korrutised:

17 · 12 =	23 · 28 =
13 · 15 =	22 · 26 =
19 · 18 =	16 · 12 =
27 · 21 =	13 · 19 =
25 · 27 =	14 · 13 =
107 · 114 =	106 · 123 =
111 · 113 =	112 · 118 =
103 · 142 =	109 · 103 =
86 · 97 =	87 · 94 =
77 · 96 =	83 · 92 =
88 · 107 =	1004 · 1027 =
93 · 106 =	1012 · 1025 =
89 · 115 =	106 · 98 =
38 · 46 =	492 · 496 =
54 · 58 =	491 · 498 =
507 · 509 =	502 · 513 =
503 · 531 =	466 · 494 =
987 · 996 =	993 · 1015 =

8. Korrutada järgmised arvud arvudega 11,15 ja 25:

42, 36, 87, 91, 62, 34, 73, 264, 786, 935, 12634.

9. Leida korrutised:

$$\begin{array}{ll} 34 \cdot 36 = & 84 \cdot 86 = \\ 82 \cdot 88 = & 73 \cdot 77 = \\ 16 \cdot 14 = & 43 \cdot 47 = \end{array}$$

10. Ristkorrutamismeetodit kasutades arvutada korrutised:

$$\begin{array}{r} 47 \\ \hline 26 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 345 \\ \hline 678 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 284 \\ \hline 362 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 74 \\ \hline 38 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \hline 383 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 72 \\ \hline 34 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 673 \\ \hline 56 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 436 \\ \hline 87 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 68 \\ \hline 393 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 262 \\ \hline 585 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 734 \\ \hline 28 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 64 \\ \hline 38 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \hline 83 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 87 \\ \hline 46 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 47 \\ \hline 43 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 82 \\ \hline 37 \\ \hline \end{array}$$

Arvude ruudud ja kuubid.

11. Leida järgmiste arvude ruudud:

$$\begin{array}{ll} 35^2 = & 85^2 = \\ 65^2 = & 165^2 = \\ 135^2 = & 285^2 = \\ 245^2 = & 885^2 = \\ 515^2 = & 945^2 = \\ 94^2 = & 98^2 = \\ 106^2 = & 113^2 = \\ 87^2 = & 78^2 = \end{array}$$

$76^2 =$	$48^2 =$
$28^2 =$	$36^2 =$
$86^2 =$	$57^2 =$
$115^2 =$	$84^2 =$
$965^2 =$	$1123^2 =$
$873^2 =$	$998^2 =$

12. Kirjaliku skeemi abil arvutada järgmiste arvude ruudud:

$$387^2, 8394^2, 658^2, 3875^2, 1093^2.$$

13. Leida kuubid:

$$11^3, 18^3, 26^3, 31^3, 49^3, 88^3, 99^3, 102^3.$$

L i g i k e u d n e a r v u t a m i n e .

14. Leida summad:

$$13,42 + 0,847 + 168,07 + 346,8 =$$

$$8,6734 + 39,735 + 2,65 + 78,3 =$$

15. Leida vahed:

$6,719 - 2,354 =$	$3,965 - 4,38 =$
$68,73 - 0,673 =$	$12,76 - 6,76 =$
$426,7 - 38,653 =$	$13,854 - 8,8538 =$

16. Leida korrutised ja jagatised:

$3,47 \cdot 0,009 =$	$15,748 : 0,825 =$
$4,6783 \cdot 8,6 =$	$581,46 : 87,62 =$
$1,43 \cdot 3,75 =$	$0,0636 : 0,00231 =$
$62,735 \cdot 3,453 =$	$0,03476 : 92,85 =$

17. Kui suur on korrapärase 24-nurga perimeeter, kui ta kül-
je pikkus on 1,08 cm?

18. Leida vahe $6\frac{4}{9} - 2,6538$.

19. Arvutada järkjärgulise avaldise väärtus, muutes harilikud murrud enne kolme kümnendkohaga arvudeks:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} .$$

Kontrollida tulemuse täpsust.

20. Mitme tüvikohaga peab võtma arvu π , et ta relatiivne viga oleks alla 0,001, alla 0,00001?

21. Teades, et ligikaudse arvu 8,67348 relatiivne viga on 0,01%, hinnate selle arvu õigete tüvikohtade hulka.

22. Leida avaldise

$$x = \frac{(12\frac{2}{3} - 8\frac{5}{6}) 1\frac{5}{2}}{4\frac{3}{5}}$$

väärtus nelja õige kümnendkohaga (kahel viisil).

23. Leida avaldise

$$x = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}$$

väärtus kolme kümnendkohaga.

24. Leida avaldise

$$x = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}$$

väärtus kolme tüvikohaga. Mitme kohaga tuleb arvutada ruutjuured?

25. Leida kolme kümnendkohaga $\sin 72^\circ$, arvestades asjaolu, et

$$\sin 72^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} .$$

26. Leida avaldise $z = \frac{x^2 - y^2 + \sqrt{xy}}{x^2 - 2\sqrt{xy}}$ väärtus kahe kümnend-

kohaga, kui $x = 2,3$; $y = 5$.

27. Leida $x = \frac{c + d^2}{a\sqrt[3]{c}}$, kui $a = 1,185 \pm 0,015$, $c = 1\frac{13}{15}$,

$d = 5,46 \pm 0,01$.

28. Leida täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, kui kaatetid on $2,17 \pm 0,005$ ja $3,9 \pm 0,05$.

29. Milliste nurkade puhul on tangensite tabelis argumendi veal kõige väiksem mõju tangensi väärtusele?

30. Kolmnurga pindala tahetakse leida 0,2%-lise täpsusega. Millise täpsusega tuleb selleks mõõta suurusi $a \approx 148,8\text{m}$, $b \approx 96,5\text{m}$ ja $C \approx 47,3^\circ$?

A r v u t a m i n e l i g i k a u d s e t e
v a l e m i t e a b i l .

31. Ligikaudseid valemeid kasutades leida:

$1,003 \cdot 1,024 =$	$1,018^2 =$
$0,996 \cdot 0,992 =$	$1,0086^2 =$
$1,006 \cdot 1,018 =$	$0,994^2 =$
$1,015^3 =$	$0,994^3 =$
$0,98^3 =$	$1,006^3 =$
$\sqrt{1,008} =$	$\sqrt{0,994} =$
$\sqrt{1,0076} =$	$\sqrt{1,013} =$
$\sqrt[3]{1,07} =$	$\sqrt[3]{0,992} =$

$$1 : 1,016 =$$

$$1,003 : 0,988 =$$

$$1,017 \quad 0,998 \quad 1,005 =$$

$$1 : 1,0032^2 =$$

$$\sqrt{\frac{1,003 \cdot 1,019}{0,991}} =$$

$$1 : 0,982 =$$

$$0,998 : 1,024 =$$

$$1 : 0,986^2 =$$

$$1 : \sqrt[3]{1,006} =$$

$$\sqrt{\frac{0,979 \cdot 1,0094}{1,0017}} =$$

A r v u t u s l ü k a t i .

Kõik tähekesega märgitud ülesanded tuleb lahendada üheainsa keele asetusega ainult niiti liigutades.

32*. Teisendage järgmised tollides mõõdetud pikkused sentimeetritesse:

0,758; 1,361; 2,493; 3,58; 5,71; 9,26; 11,07

(1 toll = 2,540 cm).

33*. 13,25 kilomeetri pikkune teelõik tuleb jaotada viide ossa, mis suhtuvad nagu 2:3:5:7,5:10.

34*. Leida ringide pindalad, kui nende läbimõõdud on 1,35; 4,91; 7,25; 11,31; 24,06; 38,77.

35*. Kõrguselt h vabalt langeva keha kiirus avaldub valemiga

$$v = \sqrt{2gh} .$$

Millised kiirused vastavad kõrgustele

12, 23, 36, 58, 112 m?

36. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

$$\frac{815 \cdot 0,504}{71,6 \cdot 0,0281}$$

;

$$\frac{427 \cdot 0,0879}{17,35 \cdot 0,526}$$

$$\frac{37,5 \cdot 12,5 \cdot 16}{62,5};$$

$$\frac{7,2 \cdot 6,8 \cdot 12 \cdot 35}{2,4 \cdot 1,7}$$

37. Leidke järgmiste avaldiste väärtused ja märkige üles arvutamiseks kuluv aeg. Kui te kõik arvutused teete õigesti ja ei kuluta selleks aega üle 25 minuti, siis olete saavutanud juba küllaldase arvutusvilumuse:

a) $1,2 \cdot 20,6 \cdot 1,43 \cdot 0,223;$

b) $\frac{4,75 \cdot 6,25 \cdot 0,52 \cdot 22,1}{14,05 \cdot 3,76 \cdot 8,24};$

c) $\frac{1920 \cdot 0,00509 \cdot \sqrt{6,24}}{4,07 \cdot 70};$

d) $\sqrt{\frac{48,8 \cdot 0,00506}{12,6 \cdot 0,0304}};$

e) $\frac{6,08 \cdot \sqrt[3]{0,0495}}{15,8 \cdot 0,00834};$

f) $2,67^{1,55}.$

H a r i l i k u d v ö r r a n d i d .

38. Leida järgmiste võrrandite reaaluurte arv ja hinnata nende ligikaudseid väärtusi:

a) $2x - 2^x = 0;$

b) $2^x = 4x;$

c) $x^2 = 2^x;$

d) $3x - 2 = 2^x;$

e) $\cos x = x^2;$

f) $\sin x = x;$

g) $\cos x = x;$

$$h) x^3 = \sqrt{x+2};$$

$$i) \sqrt{10-x+3} = \sqrt{7+x};$$

$$j) e^x = 1 + x\sqrt{x};$$

$$k) \log x = \sin x;$$

$$l) \sin x = \frac{1}{x};$$

39. Leida võrrandi

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

reaaljuured täpsusega 0,001, kasutades seejuures

- kõõlude meetodit;
- Newtoni meetodit;
- mõnda kuupkoonduvusega meetodit.

40. Leida võrrandi

$$x^6 + 6x - 8 = 0$$

positiivne juur kuue õige kümnendkohaga.

41. Leida võrrandi

$$x = \cos x$$

reaaljuured täpsusega 0,0001.

42. Leida võrrandi

$$x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 14x^2 + 24x - 1 = 0$$

kõik juured 0,1% täpsusega.

43. Leida Lobatševski meetodiga võrrandi

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 30x - 49 = 0$$

kõik juured 4 õige tüvikohaga.

44. Leida võrrandi

$$x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 5 = 0$$

kõik juured lükati täpsusega.

46. Võrrandisüsteemi

$$20x^2 = 1 - 2x^3 + 4y^3$$

$$10y = 5 + 2x^2 - 3y^3$$

lahendi alglahendiks sobib paar $x = 0,3$; $y = 0,5$. Parandada neid väärtusi iteratsioonimeetodiga.

47. Lahendada võrrandisüsteem

$$x = \ln \frac{y}{z},$$

$$y = 3 + z^2 - x^2,$$

$$z = 1 + \frac{xy}{10}.$$

48. Lahendada 0,01% lise täpsusega Newtoni meetodi abil võrrandisüsteem

$$4,5x^2 + 2y^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 1,5x - y = 0.$$

Studenti t - tabel .

Nullhüpoteesi tõenäosus p vabadusastmete arvu n' korral.

	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
2	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,37	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
25	1,71	2,06	2,48	2,79	3,73
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

F - t a b e l
Nullhüpoteesi tõenäosus 0,05

	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,9
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

F - t a b e l
 Nullhypooteesi tõenäosus 0,01

	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,3	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,9	9,5	9,0
6	1,37	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,8	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,7	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,3	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,1	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	2,9
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,3	2,9	2,5
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,5	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,3	3,0	2,7	2,2
26	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,3	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	3,2	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,0	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,8	2,5	2,1	1,6
120	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,7	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,2	1,8	1,0

K i r j a n d u s .

1. О'Рурк. Таблицы умножения. М., 1959.
2. Таблицы Барлоу. М., 1950.
3. Б.И. Сегал и К.А. Семендяев. Пятизначные математические таблицы. М., 1959.
4. И.Н. Бронштейн и К.А. Семендяев. Справочник по высшей математике. М., 1959.
5. И.С. Березин и Н.П. Жидков. Методы вычислений. I, II . М., 1959.
6. P.Prüller ja H.Tammet. Mõõtmisvigade arvutamine. Tartu 1961.

S i s u k o r d .

I TÄPNE ARVUTAMINE.

§ 1.	Lõitmine ja lahutamine	3
§ 2.	Korrutamise erivõtted	5
§ 3.	Täpsete arvutuste kontrollist	6
§ 4.	India ristkorrutamismeetod	8
§ 5.	Arvude ruutude leidmine	10
§ 6.	Arvude kuupide leidmine	12
§ 7.	Mõned üldised märkused korrutamise ja jagamise kohta	12
§ 8.	Arvutamise abivahenditest	13

II LIGIKAUDNE ARVUTAMINE.

§ 1.	Ligikaudse arvutamise põhiprobleemid	14
§ 2.	Absoluutne ja relatiivne viga	15
§ 3.	Tüvikohad ja kümnendkohad	17
§ 4.	Vigade edasikandumisest arvutustes	19
§ 5.	Lõpptulemusele vajalikku täpsust garanteerivate argumentide valikust	22
§ 6.	Ligikaudsel arvutamisel säilitatavate kohtade arv	24
§ 7.	Lühendatud korrutamine ja jagamine	25
§ 8.	Etteantud täpsusega arvutamine	28
§ 9.	Arvutuskeem	29
§ 10.	Reaksarenduste kasutamisest ligikaudsel arvutamisel	32

III ARVUTUSLÜKATI.

§ 1.	Arvutuslükati ehitus	36
§ 2.	L- ja D-skaala	36
§ 3.	Logaritmiliste skaalade põhiomadusi	38
§ 4.	Võrde realiseerimine lükatil	42
§ 6.	Pöördskaala	45

§ 7.	A- ja B-skaala	47
§ 8.	K-skaala	48
§ 9.	Kombineeritud arvutused erinevate skaalade abil	48
§ 10.	Trigonomeetrilised skaalad	49
§ 11.	Oleminek radiaanmõõdestikule. 34' väiksemate nurkade trigonomeetrilised funktsioonid	51
§ 12.	Kolmnurkade lahendamine arvutuslükatiga	53
§ 13.	Erimärgid lükatil	56
§ 14.	Logaritmilised arvutused	59
§ 15.	Arvutuslükati täpsusest	59
§ 16.	Mõned üldised märkused	61

IV VÖRRANDITE LAHENDAMINE.

§ 1.	Sissejuhatus	62
§ 2.	Alglahendite leidmine	63
§ 3.	Algebraalse võrrandi reaallahendite eraldamine	65
✓ § 4.	Iteratsioonimeetod	68
§ 5.	Iteratsioonimeetodi koonduvuse kiirendamine	71
§ 6.	Newtoni meetod ja kõõlude meetod	73
§ 7.	Näiteid	76
§ 8.	Newtoni meetodi üldistused	80
§ 9.	Kompleksjuurte leidmine	86
§ 10.	Lobatševski meetod	92
§ 11.	Ligikaudsete parameetritega võrrandite lahendamine	99
§ 12.	Mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamine	100

V STATISTIKA ALGED.

§ 1.	Sissejuhatus	105
§ 2.	Vähimruutude printsiip	106
§ 3.	Aritmeetilise keskmise viga	107
§ 4.	Aritmeetilise keskmise usaldatavus	110
§ 5.	Dispersioonide ja keskmiste võrdlemine	112
§ 6.	Regressioon ja korrelatsioon	115
§ 7.	Mittelineaarne regressioon	121
§ 8.	Statistilisest vahhinnangust vigade edasikandmisel	123
§ 9.	Kaalutud mõõtmised	125

HARJUTUSÜLESANDEID.

Litmine ja lahutamine	131
Korrutamine	132
Arvude ruudud ja kuubid	133
Ligikaudne arvutamine	134
Arvutamine ligikaudsete valemite abil	136
Arvutuslükati	137
Harilikud võrrandid	138
Studenti t-tabel	141
F-tabel	142
F-tabel	143
Kirjandus	144

A-23938

Hind 28 kop.

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00365902 8