

Per. A-1459
-A256

TALLINNA POLÜTEHNILISE
INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
СЕРИЯ А № 256

**СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА**

СБОРНИК СТАТЕЙ

V

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А

№ 256

1967

УДК 624

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

V

ТАЛЛИН
1967

KONTROLLEKSEMPLAR

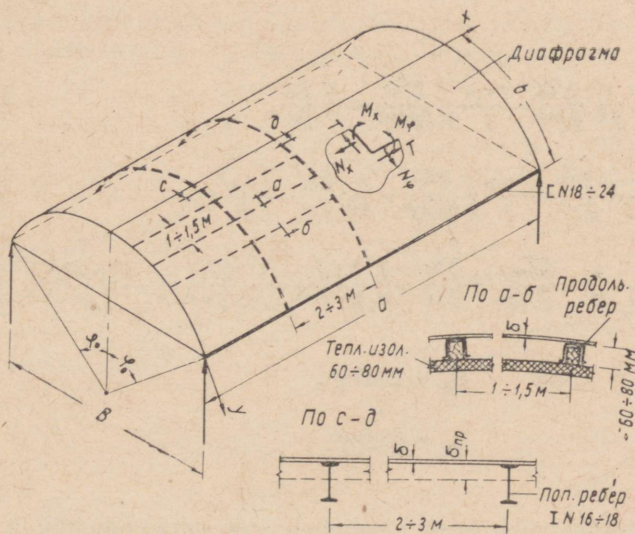
УДК 621.031
624.04

И. И. Ааре

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Введение

В современном строительстве все чаще применяются металлические цилиндрические оболочки, усиленные продольными и поперечными ребрами.



Фиг. 1

При проектировании металлических ортотропных оболочек основная трудность заключается в отсутствии подходящих инженерных методов расчета. Имеющиеся методы, как правило, приспособлены для расчета железобетонных оболочек в предположении равенства нулю коэффициента Пуассона и не подходят для оценки работы металлических оболочек. В предлагаемой работе предлагается метод расчета металлических оболочек в перемещениях, с учетом приведенных толщин, т. е. с учетом жесткостей продольных и поперечных ребер. Следует отметить, что полученные теоретические результаты находятся в хорошем соответствии с проведенным экспериментом как в части напряжений, так и в части перемещений.

Б. Расчет цилиндрической оболочки, свободно опертой по торцам

Для цилиндрической оболочки дифференциальные уравнения, выраженные в перемещениях, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{1-\mu^2}{E\delta} q_y, \\ \mu \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{R \partial \varphi} - \frac{W}{R} - \frac{\sigma_{пр}^3}{\delta \cdot 12} \left(R \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{2}{R} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^4 W}{\partial \varphi^4} \right) = - \frac{R(1-\mu^2)}{E\delta} q_z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{где} \quad q_y = q \sin \varphi,$$

$$q_z = q \cos \varphi.$$

Зависимости между компонентами перемещений и компонентами усилий и моментов даются формулами:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{R \partial \varphi} - \frac{w}{R}, \quad \gamma = \frac{\partial U}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$N_x = \frac{E \delta_{np(x)}}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \mu \frac{w}{R} \right),$$

$$N_\varphi = \frac{E \delta_{np(y)}}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial v}{R \partial \varphi} - \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial U}{\partial x} \right),$$

$$T = \frac{E \delta}{2(1 + \mu)} \left(\frac{\partial U}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

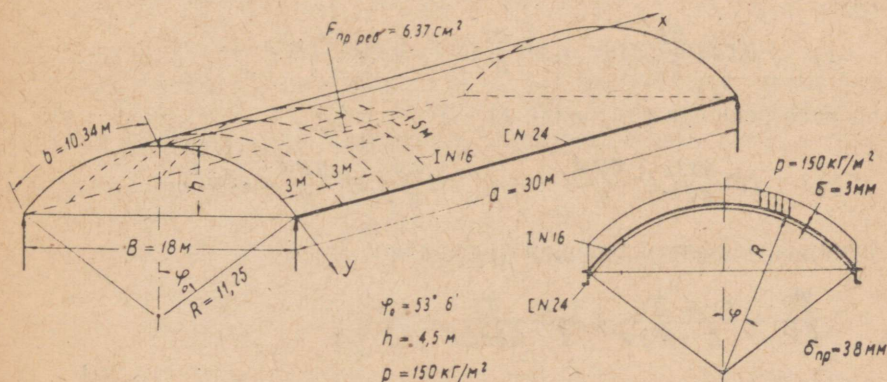
$$M_x = - \frac{E \delta_{np(x)}^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$M_\varphi = - \frac{E \delta_{np(y)}^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$Q_\varphi = - \frac{E \delta^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right). \quad (2)$$

Рассмотрим случай цилиндрической оболочки, опертой по торцам и подвергающейся, как показано на фиг. 2, действию равномерно распределенной вертикальной нагрузки q .

Опорами для оболочек служат жесткие диафрагмы по концам. В практических задачах обычно можно считать, что кри-



Фиг. 2

волинейные края оболочки оперты так, что на этих границах имеет место:

$$x=0, a; \omega=0; v=0; N_x=M_x=0.$$

Граничные условия на прямолинейных краях могут быть произвольными.

Система (1), совместно с граничными условиями, определяет перемещения оболочки u , v и w . Из (2) получим искомые усилия.

Возьмем компоненты смещения u , v , w в виде рядов:

$$u = u_n \cos \frac{\pi x}{a} \cos \varphi + \cos \frac{\pi x}{a} \left[C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} + D_1 (R \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} + \frac{a}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a}) \right], \quad (3)$$

$$v = v_n \sin \frac{\pi x}{a} \sin \varphi + \sin \frac{\pi x}{a} \left[C_2 \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} + D_2 (R \varphi \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a}) \right], \quad (4)$$

$$w = w_n \sin \frac{\pi x}{a} \cos \varphi + \sin \frac{\pi x}{a} (A_1 \operatorname{ch} \varphi + B_1 \varphi \operatorname{sh} \varphi). \quad (5)$$

Обозначим: $u'_n = \frac{u_n}{a}, \quad A'_1 = \frac{A_1}{a},$

$v'_n = \frac{v_n}{a}, \quad B'_1 = \frac{B_1}{a},$

$w'_n = \frac{w_n}{a}, \quad C'_1 = \frac{C_1}{a},$

где

1) $u_n \cos \frac{\pi x}{a} \cos \varphi; v_n \sin \frac{\pi x}{a} \sin \varphi; w_n \sin \frac{\pi x}{a} \cos \varphi$ —

частное решение уравнений (1), а

2) $\cos \frac{\pi x}{a} [C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} + \dots]; \sin \frac{\pi x}{a} [C_2 \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} + \dots]$ —

функция, удовлетворяющая уравнением.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3) А, В., — постоянные интегрирования, находим из условий сопряжения контура (ребер) и пластины.

Проекция нагрузки на оси y и z (фиг. 2):

$$y = q \sin \varphi \approx \frac{4}{\pi} q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \varphi,$$

$$z = q \cos \varphi \approx \frac{4}{\pi} q \sin \frac{\pi x}{a} \cos \varphi.$$

Подставляя ряды (3), (4) и (5) в уравнения (1), мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & -\pi^2 u' \cos \varphi - \frac{1-\mu}{2} \frac{a^2}{R^2} u' \cos \varphi + \frac{1+\mu}{2} \frac{a}{R} \pi v' \cos \varphi = \\ & -\mu \frac{a}{R} \pi w' \cos \varphi + \mu \frac{a}{R} \pi (A' \operatorname{ch} \varphi + B' \varphi \operatorname{sh} \varphi); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & -v' \sin \varphi - \frac{1-\mu}{2} \frac{R^2}{a^2} \pi^2 v' \sin \varphi + \frac{1+\mu}{2} \frac{R}{a} \pi u' \sin \varphi = \\ & -w' \sin \varphi + [A' \operatorname{sh} \varphi + B' (\varphi \operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi)] - \frac{R}{a} q^0 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{где} \quad q^0 = \frac{4}{\pi} \frac{(1-\mu^2)}{E \delta} R q.$$

Умножим (7) на функции $\cos \varphi$, (8) на функции $\sin \varphi$ и берем интегралы, получив таким образом систему алгебраических уравнений для вычисления коэффициентов w^1 , v^1 :

$$\int_0^a \int_0^{\varphi_0} X_1 \cos \varphi \, dx \, d\varphi = 0, \quad (7')$$

$$\int_0^a \int_0^{\varphi_0} X_2 \sin \varphi \, dx \, d\varphi = 0. \quad (8')$$

Продольные края оболочки подкрепляют обычно гибкими бортовыми элементами — стрингерами. В данном случае при-

ходим к такой системе граничных условий:

$$\varphi = \varphi_0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{а) } M_\varphi = 0, \\ \text{б) } N_\varphi = 0, \\ \text{в) } Q_\varphi = 0, \\ \text{г) } \varepsilon_x^{00} = \varepsilon_x^\delta. \end{array} \right\} \quad (9)$$

(Удлинение ε_x^{00} оболочки на краю $\varphi = \varphi_0$ должно быть равно удлинению борта).

Таким образом получим следующие уравнения при $\varphi = \varphi_0$:

а) $M_\varphi = 0$.

$$\begin{aligned} & -w'_1 \cos \varphi_0 + [A'_1 \operatorname{ch} \varphi_0 + B'_1 (\varphi_0 \operatorname{sh} \varphi_0 + 2 \operatorname{ch} \varphi_0)] - \frac{R^2}{a^2} \mu \pi^2 w'_1 \cos \varphi_0 - \\ & - \frac{R^2}{a^2} \mu \pi^2 (A'_1 \operatorname{ch} \varphi_0 + B'_1 \varphi_0 \operatorname{sh} \varphi_0) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

б) $N_\varphi = 0$.

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma}{R} v'_1 \cos \varphi_0 + (1 - \mu) \pi \left[C'_1 \operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} + D_1 \left(\frac{b}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi b}{a} - \frac{1}{\pi} \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} \right) \right] - \\ & - \frac{\sigma}{R} w'_1 \cos \varphi_0 - \frac{\sigma}{R} (A'_1 \operatorname{ch} \varphi_0 + B'_1 \varphi_0 \operatorname{sh} \varphi_0) - \mu \pi u'_1 \cos \varphi_0 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

в) $\frac{\partial^3 W}{R^3 \partial \varphi^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 W}{R \partial x^2 \partial \varphi} = 0$.

$$\begin{aligned} & w'_1 \sin \varphi_0 + A'_1 \operatorname{sh} \varphi_0 + B'_1 (\varphi_0 \operatorname{ch} \varphi_0 + 3 \operatorname{sh} \varphi_0) + (2 - \mu) \frac{R^2}{a^2} \pi^2 \left\{ w_1 \sin \varphi_0 - \right. \\ & \left. - [A'_1 \operatorname{sh} \varphi_0 + B'_1 (\varphi_0 \operatorname{ch} \varphi_0 + \operatorname{sh} \varphi_0)] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

г) $\varepsilon_x^{00} = \varepsilon_x^{cm}$.

$$\begin{aligned} & \left(\operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} + 2 \alpha \operatorname{sh} \frac{\pi b}{a} \right) C'_1 + \left[\left(\frac{b}{a} + \frac{4\mu}{\pi(1+\mu)} \alpha \right) \operatorname{sh} \frac{\pi b}{a} + \left(\frac{1}{\pi} + 2\alpha \frac{b}{a} \right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} \right] D_1 = (-\cos \varphi_0 + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\sigma}{R} \sin \varphi_0) u'_1 - \alpha \sin \varphi_0 v'_1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{где} \quad \alpha = \frac{\sigma b}{2\pi(1+\mu)F_{cm}}$$

В результате имеем 4 уравнения для определения константы A_1^1, B_1^1, C_1 и D_1 .

Теперь остается лишь определить параметр ω_1^1 из уравнений (16). Подставляя найденные значения u^1, v^1, A^1, \dots в (16), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma}{R} v_1' \cos \varphi - \mu \pi u_1' \cos \varphi + \mu(1-\mu) \left[C_1' \operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} + D_1 \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} - \frac{1}{\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} \right) \right] - \\ & - \frac{\sigma}{R} w_1' \cos \varphi - \frac{\sigma}{R} (A_1' \operatorname{ch} \varphi + B_1' \varphi \operatorname{sh} \varphi) - \frac{\sigma_{\text{нп}}^3 R}{a^2 \sigma} \frac{\pi^4}{12} \left\{ \left(1 - 2 \frac{\sigma^2}{R^2 \pi^2} + \frac{\sigma^4}{R^4 \pi^4} \right) \cdot \right. \\ & \cdot w_1' \cos \varphi + \left(1 - 2 \frac{\sigma^2}{R^2 \pi^2} + \frac{\sigma^4}{R^4 \pi^4} \right) A_1' \operatorname{ch} \varphi + \left[\left(1 - 2 \frac{\sigma^2}{R^2 \pi^2} \right) \varphi \operatorname{sh} \varphi - \left(\frac{4\sigma^2}{R^2 \pi^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4 \frac{\sigma^4}{R^4 \pi^4} \right) \operatorname{ch} \varphi \right] B_1' \left. \right\} = -q^0 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Умножая (14) на $\cos \varphi$ и проинтегрируя

$$\int_0^a \int_0^{\varphi_0} X_3 \cos \varphi \, dx \, d\varphi = 0, \quad (14a)$$

мы получим уравнения для вычисления параметра w_1^1 .

Напряжения σ_x, σ_y и τ находим из выражений:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{E \sin \frac{\pi x}{a}}{1-\mu^2} \left\{ -\pi u_1' \cos \varphi + \mu \frac{\sigma}{R} v_1' \cos \varphi - \mu \frac{\sigma}{R} w_1' \cos \varphi - \pi(1-\mu) \left[C_1' \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + \right. \right. \\ & \left. \left. + D_1 \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} + \frac{1}{\pi} \frac{1+2\mu-3\mu^2}{1-\mu^2} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} \right) \right] - \mu \frac{\sigma}{R} (A_1' \operatorname{ch} \varphi + B_1' \varphi \operatorname{sh} \varphi) \right\}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \frac{E \sin \frac{\pi x}{a}}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\sigma}{R} v_1' \cos \varphi - \mu \pi u_1' \cos \varphi - \frac{\sigma}{R} w_1' \cos \varphi - \frac{\sigma}{R} (A_1' \operatorname{ch} \varphi + \right. \\ & \left. + B_1' \varphi \operatorname{sh} \varphi) + (1-\mu) \pi \left[C_1' \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + D_1 \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} - \frac{1}{\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{E \cos \frac{\pi x}{a}}{2(1+\mu)} \left\{ -\frac{\sigma}{R} u_1' \sin \varphi + \pi v_1' \sin \varphi + 2\pi \left[C_1' \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} + D_1 \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Расчет показывает, что напряженное состояние оболочек существенно образом зависит от жесткости контурных стрингеров на сжатие.

Пример расчета

В качестве примера применения уравнений (1) рассчитываем стальную оболочку, подкрепленную по продольным краям стрингерами (фиг. 2).

Выбирая

$$w = w_1 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \varphi + \sin \frac{\pi x}{a} (A_1 \operatorname{ch} \varphi + B_1 \varphi \operatorname{sh} \varphi),$$

$$u = u_1 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \varphi + \cos \frac{\pi x}{a} \left[C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} + D_1 (R \varphi \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} + \frac{a}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a}) \right],$$

$$v = v_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \varphi + \sin \frac{\pi x}{a} \left[C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a} + D_1 (R \varphi \operatorname{ch} \frac{\pi R \varphi}{a} - 2 \frac{(1-\mu)a}{(1-\mu)\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi R \varphi}{a}) \right]$$

и подставляя в уравнение (7¹, 8¹), находим при $\mu=0,3$:

$$\begin{aligned} -12,35724u_1^1 + 5,44406v_1^1 &= 2,512646\omega_1^1 + \\ &+ 3,23076A_1^1 + 0,777254B_1^1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,765763u_1^1 - 1,48576v_1^1 &= +1,1845\omega_1^1 + 1,1845A_1^1 + 2,56497B_1^1 - \\ &- 0,375q^*, \end{aligned}$$

где $q^* = \frac{4(1-\mu^2)Rq}{\pi E\delta}$ (параметр нагрузки).

Из краевых условий (10÷13) получим следующие уравнения при $\varphi = \varphi_0$:

а) $M_\varphi = 0$.

$$0,854083A_1^1 + 3,50310B_1^1 = 0,848788\omega_1^1.$$

б) $N_\varphi = 0$.

$$\begin{aligned} 3,657348C_1 + 0,390284D_1 &= -1,598107v_1^1 + 1,598107\omega_1^1 + \\ &+ 3,89873A_1^1 + 2,63993B_1^1 + 0,56467u_1^1. \end{aligned}$$

в)
$$\frac{\partial^3 w}{R^3 \partial \varphi^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{R \partial x^2 \partial \varphi} = 0.$$

$$1,44815A_1^1 + 1,155845B_1^1 = 2,68713\omega_1^1.$$

$$\gamma) \epsilon_x^{06} = \epsilon_x^{cm}.$$

$$35,14692C_1 + 20,55144D_1 = 5,79673 u_1' - 9,04977v_1'.$$

Из этих уравнений получаем:

$$u_1' = -1,237559\omega_1' + 0,143886q^*;$$

$$v_1' = -1,160357\omega_1' + 0,326553q^*;$$

$$A_1' = 2,062298\omega_1';$$

$$B_1' = -0,259825\omega_1';$$

$$C_1 = 3,365021\omega_1' - 0,134363q^*;$$

$$D_1 = -5,592937\omega_1' + 0,126575q^*.$$

Умножая (14) на $\cos\varphi$ и интегрируя, получим соответственно (14а):

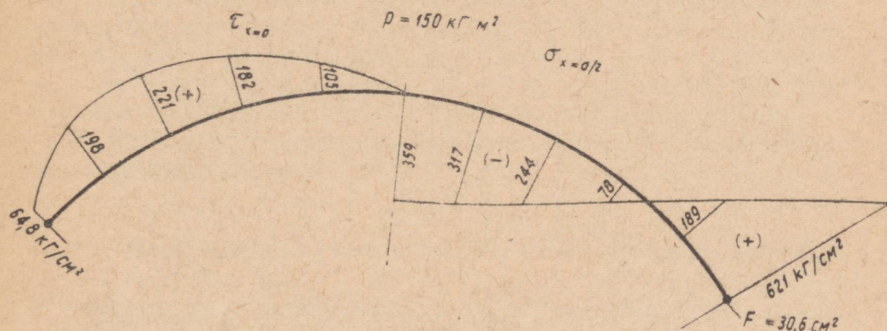
$$2,6666v_1' - 0,9424779u_1' + 2,969524C_1 - 0,191835D_1 - 2,666\omega_1' - 3,4202A_1' - 0,8228364B_1' + 1,000q^* = 0.$$

Подставив сюда u_1' , v_1' , A_1' , B_1' , C_1 и D_1 получим

$$\omega_1' = 4,282 q^*.$$

При $q = 150 \text{ кг/м}^2$, $q^* = 31,1$.

Напряжения σ_x и τ представлены на фиг. 3.



Фиг. 3

Полученные теоретические результаты хорошо совпадают с экспериментальными исследованиями, проведенными в ТПИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Тимошенко и С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. Москва, 1963.

И. И. Ааре, С. И. Иднурм

РАСЧЕТ ВЫСОКИХ ТОНКОСТЕННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БАЛОК

I. Постановка задачи

Расчет высоких тонкостенных металлических балок входит в число наиболее актуальных вопросов теории упругости. В настоящей работе рассматривается расчет высоких тонкостенных металлических балок при равномерно распределенной нагрузке, приложенной на верхней или на нижней грани балки. Данный метод решения учитывает реальные жесткости нижнего и верхнего пояса, а также жесткости торцевых ребер. При решении задачи легко определяются величины деформации.

Во второй части настоящей работы рассматриваются вопросы устойчивости стенки балки.

II. Изгиб высоких тонкостенных металлических балок

Рассмотрим составную балку, свободно опертую по концам и подвергающуюся действию равномерно распределенных вертикальных нагрузок, приложенных на верхней или нижней грани балки (фиг. 1).

Каждый из элементов (стенка, поясы и опорные ребра) можно рассматривать как систему, находящуюся в условиях плоского напряженного состояния. Влиянием жесткости изгиба тонких полок можно пренебречь. Взаимодействие между стенкой и полками выражается в возникновении касательных усилий по линии примыкания. Эти усилия определяются из условия тождественности деформаций удлинения стенки и полки в соединении.

Интенсивность внешней нагрузки может быть представлена

в виде тригонометрического ряда

$$q = \sum_n q_n \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Данную задачу решаем в перемещениях.
Подставляя значения напряжений

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$\tau = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

в дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0,$$

получим систему из двух дифференциальных уравнений с неизвестными функциями u , v

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2)$$

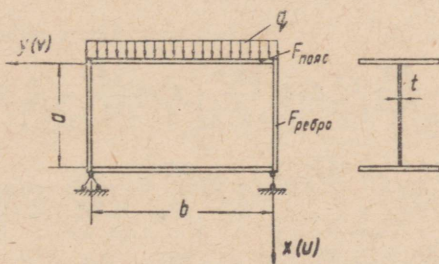
Как видно из предыдущего, для определения напряженного и деформированного состояния балки достаточно решить систему из полученных двух дифференциальных уравнений, принимая во внимание граничные условия задачи.

Функции u и v целесообразно подобрать таким образом, чтобы уравнения равновесия были автоматически удовлетворены. В случае симметричной нагрузки задаемся перемещениями u и v в виде

$$\begin{aligned}
 U = & \sum_p \cos \frac{\rho \pi x}{a} \left[\bar{A}_p \operatorname{ch} \frac{\rho \pi y}{a} + \bar{B}_p \operatorname{sh} \frac{\rho \pi y}{a} + \bar{C}_p \left(y \operatorname{ch} \frac{\rho \pi y}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \operatorname{sh} \frac{\rho \pi y}{a} \right) + \right. \\
 & \left. + \bar{D}_p \left(y \operatorname{sh} \frac{\rho \pi y}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \operatorname{ch} \frac{\rho \pi y}{a} \right) \right] + \sum_p \sin \frac{\rho \pi y}{b} \left[\bar{E}_p \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{b} + \bar{F}_p \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{b} + \right. \\
 & \left. + \bar{G}_p \left(x \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{b} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{b}{\rho \pi} \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{b} \right) + \bar{H}_p \left(x \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{b} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{b}{\rho \pi} \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{b} \right) \right]; \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V = & \sum_p \sin \frac{\rho \pi x}{a} \left[\bar{A}_p \operatorname{sh} \frac{\rho \pi y}{a} + \bar{B}_p \operatorname{ch} \frac{\rho \pi y}{a} + \bar{C}_p \left(y \operatorname{sh} \frac{\rho \pi y}{a} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a}{\rho \pi} \operatorname{ch} \frac{\rho \pi y}{a} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \bar{D}_p \left(y \operatorname{ch} \frac{\rho \pi y}{a} - 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a}{\rho \pi} \operatorname{sh} \frac{\rho \pi y}{a} \right) \right] + \sum_p \cos \frac{\rho \pi y}{b} \left[\bar{E}_p \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{b} + \right. \\
 & \left. + \bar{F}_p \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{b} + \bar{G}_p \left(x \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{b} + \frac{b}{\rho \pi} \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{b} \right) + \bar{H}_p \left(x \operatorname{sh} \frac{\rho \pi x}{b} + \frac{b}{\rho \pi} \operatorname{ch} \frac{\rho \pi x}{b} \right) \right]. \quad (4)
 \end{aligned}$$

При помощи функции перемещений (3) и (4) выражаем напряжения:



Фиг. 1

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] = E\pi \frac{1-\mu}{1-\mu^2} \left[\sum_p \sin \frac{\rho\pi x}{a} \left\{ \bar{A}_p' \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} + \bar{B}_p' \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + \bar{C}_p' \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} + \frac{1+3\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} \right) + \bar{D}_p' \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + \frac{1+3\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} \right) \right\} + \sum_p \rho \sin \frac{\rho\pi y}{b} \left\{ \bar{E}_p' \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} + \bar{F}_p' \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} + \bar{G}_p' \left(\frac{x}{b} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} \right) + \bar{H}_p' \left(\frac{x}{b} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} \right) \right\} \right].$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{E\pi(1-\mu)}{1-\mu^2} \left[\sum_p \rho \sin \frac{\rho\pi x}{a} \left\{ \bar{A}_p' \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} + \bar{B}_p' \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + \bar{C}_p' \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} \right) + \bar{D}_p' \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} \right) \right\} - \sum_p \rho \sin \frac{\rho\pi y}{b} \left\{ \bar{E}_p' \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} + \bar{F}_p' \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} + \bar{G}_p' \left(\frac{x}{b} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} + \frac{1+3\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} \right) + \bar{H}_p' \left(\frac{x}{b} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} + \frac{1+3\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} \right) \right\} \right].$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \frac{E\pi}{1+\mu} \left[\sum_p \rho \cos \frac{\rho\pi x}{a} \left\{ \bar{A}_p' \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + \bar{B}_p' \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} + \bar{C}_p' \left(\frac{y}{a} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} \right) + \bar{D}_p' \left(\frac{y}{a} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi y}{a} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi y}{a} \right) \right\} + \sum_p \rho \cos \frac{\rho\pi y}{b} \left\{ \bar{E}_p' \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} + \bar{F}_p' \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} + \bar{G}_p' \left(\frac{x}{b} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} \right) + \bar{H}_p' \left(\frac{x}{b} \operatorname{ch} \frac{\rho\pi x}{b} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \operatorname{sh} \frac{\rho\pi x}{b} \right) \right\} \right].$$

$$\text{где } \bar{A}_p' = \frac{\bar{A}_p}{a}, \quad \bar{B}_p' = \frac{\bar{B}_p}{a}, \quad \bar{E}_p' = \frac{\bar{E}_p}{b}, \quad \bar{F}_p' = \frac{\bar{F}_p}{b}$$

Имея величины коэффициентов $\bar{A}'_p, \bar{B}'_p, \bar{C}_p, \bar{D}_p, \bar{E}'_p, \bar{F}'_p, \bar{G}_p$ и \bar{H}_p , сможем определить напряжения и перемещения в любой точке стенки балки.

Указанные коэффициенты определяем из краевых условий

$$1) \text{ При } x=0: \sigma_x = -q/t = -\sum \frac{q}{t} \sin \frac{\rho \pi y}{b}$$

$$\bar{E}'_p = \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\pi \rho} \bar{H}_p = -\frac{q_p(1+\mu)}{t \pi \rho} = -q'_p.$$

$$2) \text{ При } x=0: \epsilon_y^{\text{пн}} = \epsilon_y^{\text{ребро}},$$

$$\epsilon_{y_{x=0}}^{\text{пн}} = \frac{\partial y}{\partial y_{x=0}} = -\sum_p \sin \frac{\rho \pi y}{b} [\rho \pi E'_p + 100 \bar{H}_p].$$

$$\epsilon_{y_{x=0}}^{\text{ребро}} = \frac{t \int_{x=0}^y \tau_{x=0} dy}{E_{\text{ребро}}} = -\frac{qt}{F_{\text{ребро}}(1+\mu)} \left\{ \sum_p \left[\bar{A}'_p \left(ch \frac{\rho \pi y}{a} - 1 \right) + \bar{B}'_p sh \frac{\rho \pi y}{a} + \bar{C}_p \left(\frac{y}{a} ch \frac{\rho \pi y}{a} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho \pi} sh \frac{\rho \pi y}{a} \right) + \bar{D}_p \left(\frac{y}{a} sh \frac{\rho \pi y}{a} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho \pi} \cdot \left(ch \frac{\rho \pi y}{a} - 1 \right) \right) + \sum \frac{b}{a} \sin \frac{\rho \pi y}{b} \left(\bar{F}'_p + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho \pi} G_p \right) \right] \right\}.$$

Разложим в ряд Фурье:

$$\bar{A}'_p \left(ch \frac{\rho \pi y}{a} - 1 \right) + \bar{B}'_p sh \frac{\rho \pi y}{a} + \bar{C}_p \left(\frac{y}{a} ch \frac{\rho \pi y}{a} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho \pi} sh \frac{\rho \pi y}{a} \right) + \bar{D}_p \left[\frac{y}{a} sh \frac{\rho \pi y}{a} - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho \pi} \left(ch \frac{\rho \pi y}{a} - 1 \right) \right] = \sum_n f_{pn} \sin \frac{n \pi y}{a}.$$

При $p=1$ и $n=1$ имеем:

$$f_{11} = 2,734903\bar{A}'_1 + 3,67078\bar{B}'_1 + 1,886447\bar{C}_1 + 1,928300\bar{D}_1;$$

при $p=1$ и $n=3$:

$$f_{13} = 2,012303\bar{A}'_1 + 2,205647\bar{B}'_1 + 1,695441\bar{C}_1 + 1,407644\bar{D}_1;$$

при $p=3$ и $n=1$:

$$f_{31} = 393,22883\bar{A}'_3 + 294,43842\bar{B}'_3 + 251,42606\bar{C}_3 + 251,69567\bar{D}_3;$$

при $p=3$ и $n=3$:

$$f_{33} = 657,07904\bar{A}'_3 + 657,39734\bar{B}'_3 + 474,96914\bar{C}_3 + 475,01243\bar{D}_3.$$

Уравнение (б) с учетом разложения принимает вид:

$$-\frac{t\sigma}{F_{ребро}(1+\mu)} \left[\sum_p \sum_n f_{pn} \sin \frac{\rho\pi y}{a} + \sum \frac{b}{a} \sin \frac{\rho\pi y}{b} (\bar{F}'_p + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{1}{\rho\pi} \bar{G}'_p) \right] =$$

$$= -\sum \sin \frac{\rho\pi y}{b} [\rho\pi \bar{E}'_p + 1,00 \bar{H}'_p].$$

Такие же уравнения составляем для остальных трех граней стенки балки. В результате получаем линейную систему из 8 уравнений, из которой находим неизвестные $\bar{A}'_p, \bar{B}'_p, \bar{G}'_p, \bar{D}'_p, \bar{E}'_p, \bar{F}'_p, \bar{G}'_p, \bar{H}'_p$.

Далее приводим примеры приложения данного метода на конкретные случаи.

Пример 1.

Соотношение жесткостей:

$$\frac{at}{F_{ребро}} = \frac{at}{F_{пояс}} = 2; \quad \frac{a}{b} = 1.$$

Нагрузка приложена на грани $x = a$.

Решаем случай $p = 1$ и $n = 1$. В результате имеем:

$$\bar{A}'_1 = + 0,087464 q/t \frac{1+\mu}{E\pi},$$

$$\bar{B}'_1 = - 0,120744 q/t \frac{1+\mu}{E\pi},$$

$$\bar{C}'_1 = - 0,468022 q/t \frac{1+\mu}{E\pi},$$

$$\bar{D}'_1 = + 0,510299 q/t \frac{1+\mu}{E\pi},$$

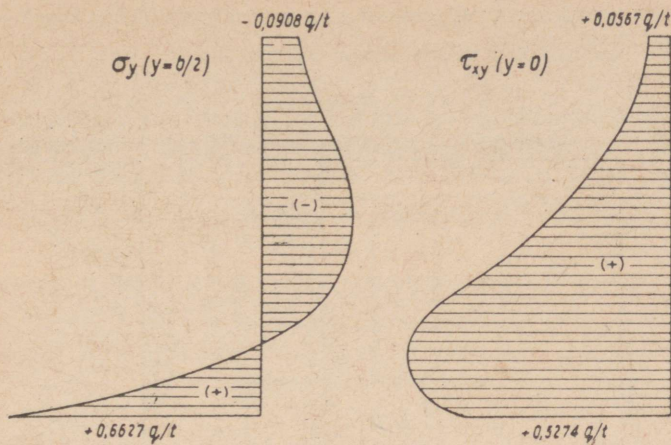
$$\bar{E}'_1 = + 0,024456 q/t \frac{1+\mu}{E\pi},$$

$$\bar{F}'_1 = + 0,305955 q/t \frac{1+\mu}{E\pi},$$

$$\bar{G}'_1 = - 0,406551 q/t \frac{1+\mu}{E\pi},$$

$$\bar{H}'_1 = + 0,142684 q/t \frac{1+\mu}{E\pi}.$$

Эпюры нормальных напряжений σ_y и касательных напряжений τ_{xy} даны на фиг. 2.



Фиг. 2

Пример 2.

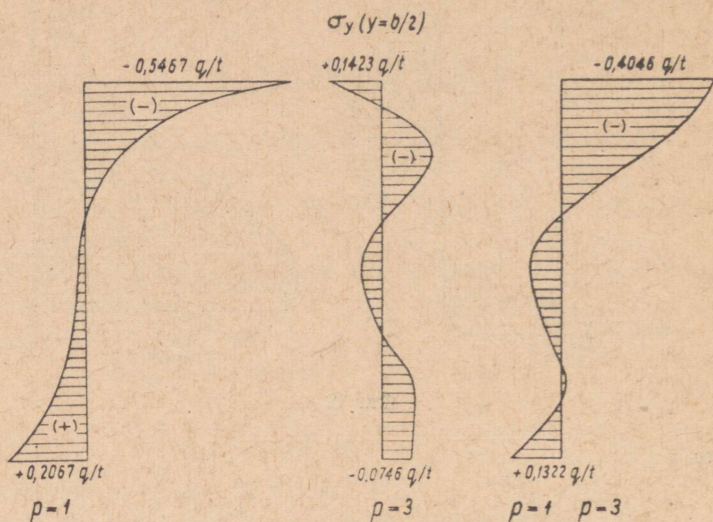
$$\frac{at}{F_{\text{ребро}}} = \frac{at}{F_{\text{пояс}}} = 2; \quad \frac{a}{b} = 1.$$

Нагрузка q приложена на верхней грани $x=0$.

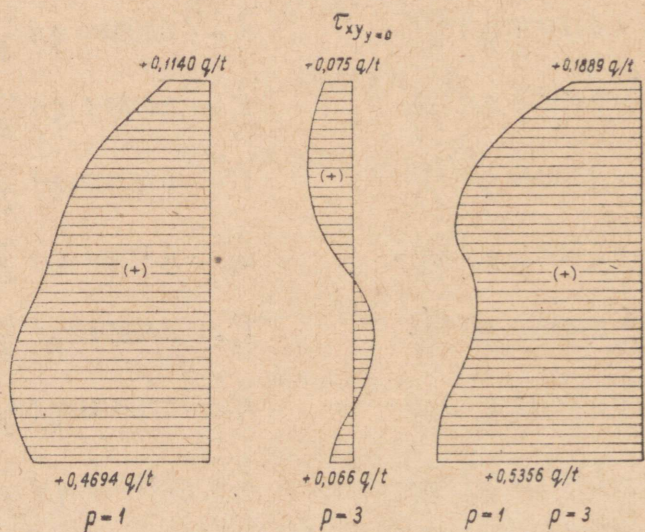
С учетом первого и третьего членов в разложении получим коэффициенты:

$$\begin{aligned} \bar{A}'_1 &= + 0,134472 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi}, & \bar{A}'_3 &= + 0,0118614 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi} \\ \bar{B}'_1 &= - 0,185638 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi}, & \bar{B}'_3 &= - 0,0118919 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi} \\ \bar{C}'_1 &= - 0,719560 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi}, & \bar{C}'_3 &= - 0,207579 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi} \\ \bar{D}'_1 &= + 0,784559 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi}, & \bar{D}'_3 &= + 0,207611 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi} \\ \bar{E}'_1 &= - 0,783258 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi}, & \bar{E}'_3 &= - 0,0906162 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi} \\ \bar{F}'_1 &= + 0,831050 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi}, & \bar{F}'_3 &= + 0,0906195 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi} \\ \bar{G}'_1 &= - 2,897594 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi}, & \bar{G}'_3 &= - 0,890125 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi} \\ \bar{H}'_1 &= + 2,858745 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi}, & \bar{H}'_3 &= + 0,890121 \ q/t \ \frac{1+\mu}{E\pi} \end{aligned}$$

Эпюры нормальных напряжений σ_y и касательных напряжений τ представлены на фиг. 3 и 4.



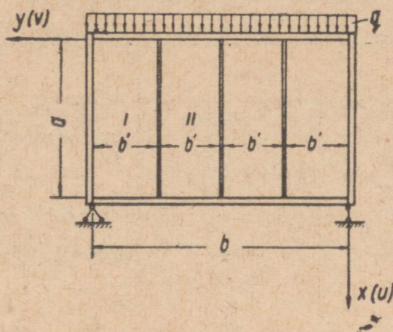
Фиг. 3



Фиг. 4

III. Определение критической нагрузки $q_{кр}$ для тонкостенной металлической балки

Выделяем одну панель из балки, представленной на фиг. 5 и рассмотрим ее как пластинку, шарнирно опертую по контуру:



Фиг. 5

Решение данной задачи базируется на основном дифференциальном уравнении для прогиба w тонкой плоской пластинки под действием сил, приложенных в ее срединной плоскости (уравнение Сен-Венана):

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = t(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}). \quad (8)$$

Выражения нормальных (5), (6) и касательных напряжений (7) найдены во второй части настоящей статьи. Прогибы срединной поверхности панели выражаем функцией

$$w = \sum_p \sum_n w_{pn} \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b'}, \quad (9)$$

удовлетворяющей граничным условиям.

Выражения нормальных напряжений (5) и (6) и касательных напряжений (7) и функцию прогиба (9) подставляем в уравнение Сен-Венана (8). Применяя метод Галеркина, получаем линейную систему из k однородных уравнений, где k — число членов в функции прогибов (9). Система однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами имеет нулевые решения $w_{11} = w_{12} = \dots = 0$ в случае, если детерминант Δ , составленный из коэффициентов этих уравнений, не равен нулю. Следовательно, уравнение $\Delta = 0$ является условием устойчивости

стенки балки. Раскрывая детерминант Δ , получаем алгебраическое уравнение k -го порядка. Наименьший положительный корень уравнения $\Delta=0$ является критической нагрузкой q_{kd} .

При помощи данного метода определены критические нагрузки $q_{кр}$ для нескольких случаев, приведенных в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

a/b	σ/b	$\frac{bt^3}{F_{плос}(1+\mu)} = 20,51$		$\frac{bt}{F_{плос}(1+\mu)} = 5$	
		I панель	II панель	I панель	II панель
1,0	0,1	$q_{кр} = 2,42 \frac{Et\pi^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2$	$q_{кр} = 2,51 \frac{Et\pi^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2$	—	—
2,0	0,5	—	—	$q_{кр} = 24,89 \frac{Et\pi^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2$	$q_{кр} = 12,53 \frac{Et\pi^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2$

IV. Заключение

Вышеуказанным методом решен ряд численных примеров. При решении частично была использована электронная вычислительная машина МИНСК-2.

Напряжения в высоких балках, имеющих соотношение размеров $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{2}$, могут быть определены по формулам сопротивления материалов без существенной погрешности. Когда же соотношение размеров $\frac{a}{b} > \frac{1}{2}$, формулы сопротивления материалов не пригодны: нулевая линия значительно передвигается, приближаясь к месту приложения нагрузки. Зона максимальных нормальных напряжений σ_y уже не находится на краях панели, а перемещается в сторону нулевой линии.

При проектировании высоких тонкостенных балок следует учитывать скопление касательных напряжений в районе передачи опорных реакций.

Жесткость торцевых ребер оказывает значительное влияние на напряженное состояние балки.

Кроме того, следует отметить, что критические нагрузки отдельных панелей высоких балок существенно зависят от распределения нормальных и касательных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Ааре. Изгиб гибких пластин, шарнирно опертых по ребрам. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 200, 1963.

Ю. К. Энгельбрехт

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ВИСЯЧИХ ПОКРЫТИЙ

Введение

В течение последних лет исследования по висячим покрытиям ведутся в направлении разработки методики инженерных методов расчета. Исследование работы висячих покрытий отрицательной кривизны ведется и на кафедре строительных конструкций ТПИ. Параллельно с теоретическими исследованиями ведутся экспериментальные работы на моделях висячих покрытий. По программе экспериментальных работ первого этапа, одной из задач которого была разработка методики эксперимента, проведено исследование работы элементарной системы висячего покрытия с одним узлом. После этого проводятся испытания систем с большим числом тросов. Проведено испытание системы с 3 несущими и стягивающими тросами. Контур для этих систем был спроектирован «абсолютно» жестким. Настоящая статья дает обзор результатов проведенных экспериментов.

Основы расчета таких конструкций, разработанные в ТПИ, изложены в [1, 3, 4, и 5]. Задачей экспериментальных работ была проверка предпосылок и алгоритмов, используемых в названных работах. Наибольшие усилия на первом этапе были приложены исследованию элементарной системы. Особое внимание было обращено на выяснение характера изменений предварительного напряжения. Как известно, жесткость висячих покрытий отрицательной кривизны достигается благодаря предварительному напряжению, которое должно сохраняться и при самой невыгодной комбинации внешних нагрузок. Предварительное напряжение реализуется при помощи т. н. контактного

усилия, воздействующего в узлах несущих и стягивающих тросов. Так как предварительное напряжение составляет довольно большую часть всей нагрузки, исследование изменений его является весьма важной проблемой. По данным автора, экспериментальное исследование данной проблемы раньше не было проведено. Общая жесткость системы оказывает влияние и на смещения, что также являлось предметом исследований. При испытании системы с тремя тросами обращали главное внимание на несимметричную нагрузку. Параллельно статическим нагрузкам провели и испытания при динамических нагрузках. Целью их было выяснение частоты собственных колебаний висячих конструкций. Результаты динамического испытания будут приведены отдельно.

1. Изготовление и испытание моделей

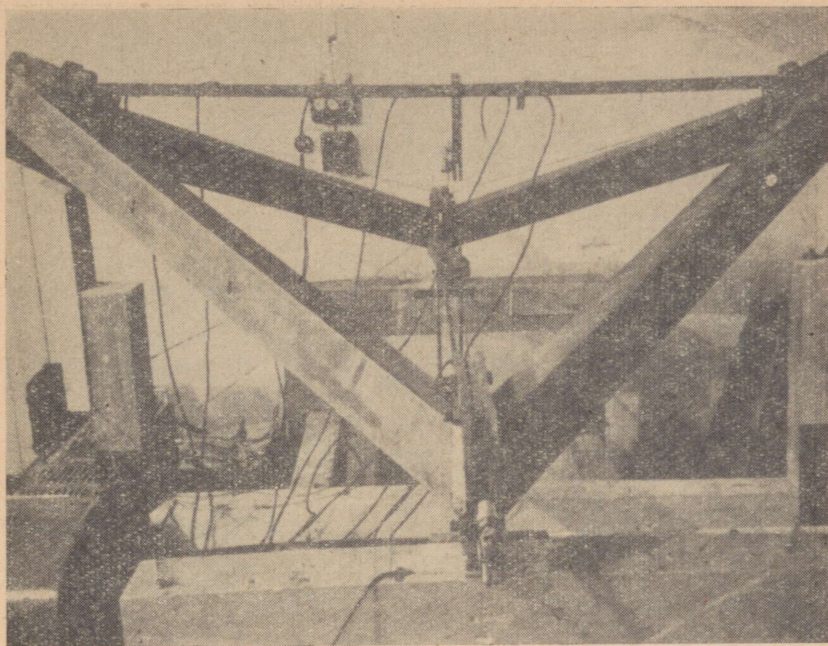
1. 1. Используемые материалы

Тросы моделировались стальной проволокой из высокопрочной стали. Для элементарной системы была использована проволока диаметром 3,5 мм ($\sigma_p = 17000 \text{ кг/см}^2 = 1668 \text{ Мн/м}^2$) и диаметром 1,6 мм ($\sigma_p = 18000 \text{ кг/см}^2 = 1766 \text{ Мн/м}^2$). Для системы с тремя несущими и стягивающими тросами была использована проволока диаметром 1,6 мм. Ранее был определен модуль упругости для обеих проволок, среднее значение которого составляло $1,9 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2 = 1,86 \text{ Гн/м}^2$.

1. 2. Изготовление моделей

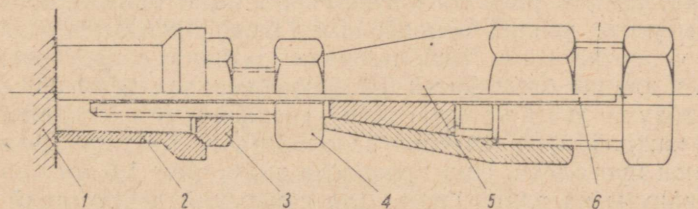
Жесткий контур был образован из двух сваренных швеллеров № 10 в виде четырехугольной пространственной рамы (фиг. 1), длина одной стороны которой по осям была равна 120 см. Углы рамы были осуществлены при помощи стальных листов и болтов диаметром 14 мм. Для обеспечения жесткости рама была снабжена затяжкой. Такая пространственная рама обеспечивает висячему покрытию форму гиперболического параболоида, если стрелки главных несущего и стягивающего тросов одинаковы.

Анкеровка проволок моделирующих тросов осуществлена при помощи натяжных головок. Проволоку диаметром 1,6 мм анкервали в простой головке, изготовленной из плит толщиной 5 мм. Конструкция натяжной головки для проволоки диаметром 3,5 мм дана на фиг. 2. Натяжные головки были заранее испытаны, что позволяло оценить податливость их как нулевую. Натяжение проволок осуществлялось при помощи простого

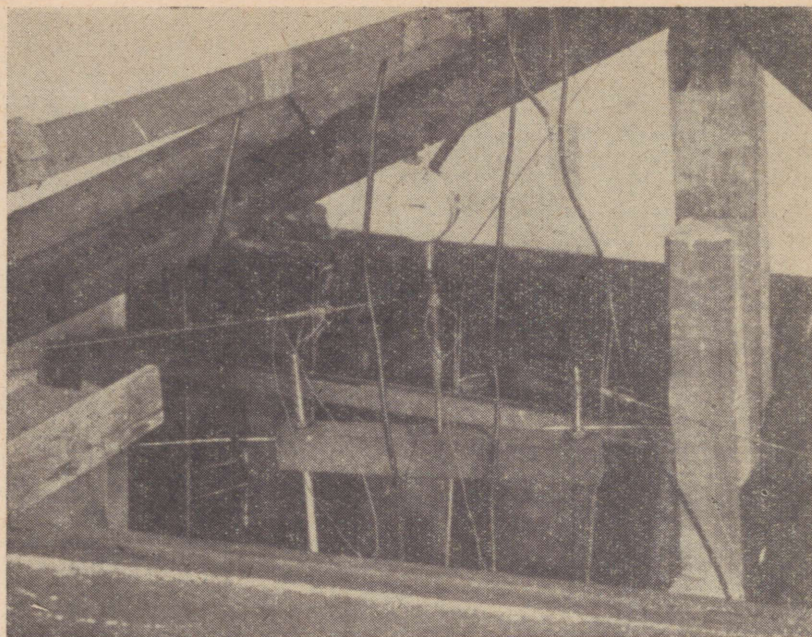


Фиг. 1. Общий вид элементарной системы

приспособления (фиг. 3), состоящего из гильзы, снабженной с фазой гайки и болта с отверстием. Ход одного приспособления равнялся 2,5 см.



Фиг. 2. Анкеровка и натяжение проволоки диаметром 3,5 мм:
1 — контур; 2 — гильза; 3 — гайка; 4 — болт; 5 — анкерсочное устройство; 6 — проволока



Фиг. 3. Элементарный узел. Расположение индикатора

1. 3. Измерительные приборы

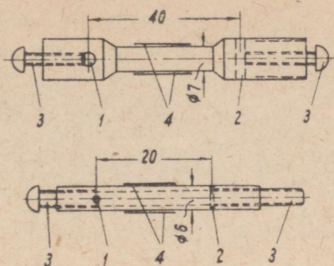
Вертикальные смещения регистрировали индикаторами (цена деления 0,01 мм). Для контроля измеряли и смещения контура, которые равнялись нулю, как и было запроектировано.

Измерение усилий в проволоках было произведено датчиками сопротивления. Использовали датчики сопротивлением 120 Ω и длиной базы 25 мм. Датчики были заклеены прямо на проволоку по два в каждую точку, соединенные последовательно. В каждой точке датчики находились на противоположных сторонах проволоки. При проволоке диаметром 1,6 мм они были сдвинуты на длину базы. Для измерений деформаций был использован измеритель деформаций ЭИД-3, цена делений которого была $0,5 \cdot 10^{-5}$ единицы относительной деформации.

Для измерения контактных усилий использовали т. н. измеритель контактных усилий. Проволоки в узлах были соединены не непосредственно, а при помощи натянутого стержня (фиг. 4). Расположение проволоки было зафиксировано винтиками.

Фиг. 4. Измерители для контактных усилий.

1 — отверстие для несущей проволоки;
2 — отверстие для стягивающей проволоки;
3 — болты-фиксаторы; 4 — место для приклеивания датчиков



Для измерений деформаций стержней на них были приклеены датчики, на каждом измерителе по два, соединенных последовательно. Загрузка узла производилась по тому же стержню. Ранее измерители были затарированы и график $\varepsilon = \varphi(P)$ был использован для определения контактного усилия.

1. 4. Загрузка и испытание

Модель находилась на специальном стенде. Для элементарной системы часть работы провели с нагрузкой при помощи динамометра. Сила, измеряемая динамометром, передавалась на узел с рычажной системой. В качестве основной нагрузки для обеих систем были использованы чугунные противовесы, весом 25 кгс (245,3 н). Загрузку элементарной системы производили этапами, а системы с тремя несущими и стягивающими тросами за один этап.

Испытание элементарной системы произвели двумя частями: 1) систему из проволоки диаметром 3,5 мм испытывали при семи различных контактных усилиях всего 16 раз и 2) систему из проволоки диаметром 1,6 мм при двух начальных контактных усилиях всего 5 раз. Систему с тремя тросами испытывали при постоянном контактном усилии на симметричной и несимметричной нагрузке, обращая внимание и на определение влияния загрузки одного узла и одной проволоки.

2. Анализ результатов

А. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СИСТЕМА

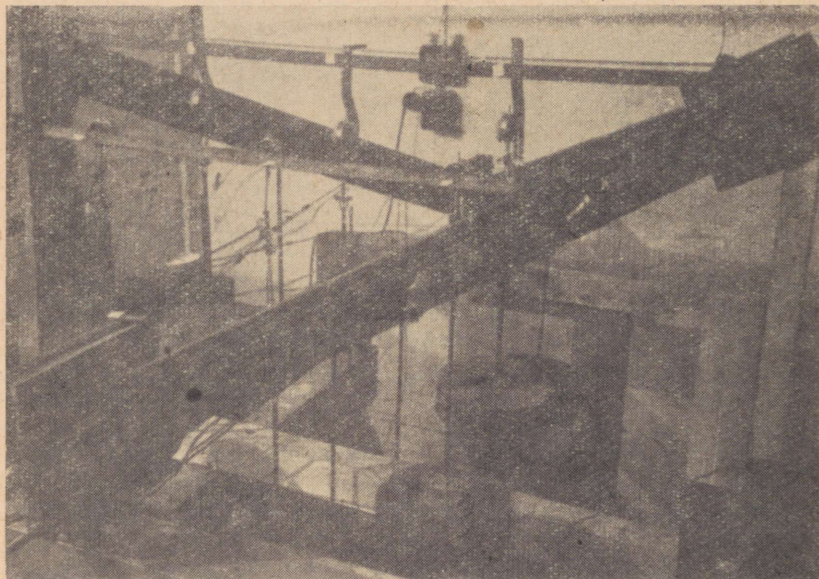
2. 1. Теоретические основы

Контактное усилие от предварительного напряжения обозначаем P_0 . При приложении на узел внешней нагрузки Q уменьшается контактное усилие на ΔP и обозначено P . Индекс 1 обозначает несущий, индекс 2 стягивающий тросы. Остальные обозначения: l — пролет, f — провисание троса, Δf — изменение провисания, F — площадь сечения троса.

Усилия в тросах от предварительного напряжения находим из равновесия усилий в узле:

$$T_1 = \frac{P_0}{2\sin\alpha_1} = \frac{P_0\sqrt{l_1^2 + 4f_1^2}}{4f_1}, \quad (1)$$

$$T_2 = \frac{P_0}{2\sin\alpha_2} = \frac{P_0\sqrt{l_2^2 + 4f_2^2}}{4f_2}. \quad (2)$$



Фиг. 5. Вид системы с 3 несущими и стягивающими тросами

При приложении нагрузки Q на узел вычисляем усилия:

$$T_1 = \frac{Q + P}{2\sin(\alpha_1 + \Delta\alpha_1)} = \frac{(Q + P)\sqrt{l_1^2 + 4(f_1 + \Delta f)^2}}{4(f_1 + \Delta f)}, \quad (3)$$

$$T_2 = \frac{P}{2\sin(\alpha_2 - \Delta\alpha_2)} = \frac{P\sqrt{l_2^2 + 4(f_2 - \Delta f)^2}}{4(f_2 - \Delta f)}. \quad (4)$$

Изменение провисания Δf вычисляется по формуле

$$\Delta f = \frac{(Q + P - P_0)(\sqrt{l_1^2 + 4f_1^2})^3}{16EF_1f_1^2}. \quad (5)$$

Контактное усилие при приложении нагрузки Q

$$P = P_0 - \frac{Q}{1 + \frac{F_1}{F_2} \frac{f_1^2}{f_2^2} \left(\sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} + 4 \frac{f_2^2}{f_1^2}} \right)^3}. \quad (6)$$

При вычислении контактных усилий представляет интерес вопрос об отношении максимальной внешней нагрузки Q и начального контактного усилия P_0 . Его можно вычислить из формулы (6), принимая $P=0$:

$$\kappa = \frac{P_0}{Q} = \frac{1}{1 + \frac{F_1}{F_2} \frac{f_1^2}{f_2^2} \left(\sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} + 4 \frac{f_2^2}{f_1^2}} \right)^3}. \quad (7)$$

При помощи этого т. н. коэффициента нормальной жесткости можно оценить способность конструкции воспринимать внешние нагрузки. Предельные значения коэффициента определяются $0 < \kappa < 1$. Практически значения κ колеблются от 0,1 до 0,7. Конструкция способна воспринимать тем большие нагрузки, чем меньше значение κ .

2. 2. Расчет испытываемой конструкции

Пользуясь вышеизложенными формулами вычисляем теоретические смещения и усилия.

Для иллюстрации результатов проводим здесь расчет при регистрировании начального контактного усилия $P_0 = 197,5 \text{ кгс} = 1937, 5 \text{ н}$. Нужные данные о геометрии конструкций: $l_1 = 182,5 \text{ см}$; $l_2 = 197 \text{ см}$; $f_1 = f_2 = 22 \text{ см}$; $F_1 = F_2 = 0,096 \text{ см}^2$.

Усилия в проволоках при предварительном напряжении:

$$T_1 = \frac{197,5}{2 \cdot 0,234} = 422 \text{ кгс} = 4139,8 \text{ н};$$

$$T_2 = \frac{197,5}{2 \cdot 0,217} = 455 \text{ кгс} = 4463,6 \text{ н}.$$

Контактное усилие при любой внешней нагрузке Q вычисляем:

$$P = P_0 - \frac{Q}{1 + \frac{0,096 \cdot 22^2}{0,096 \cdot 22^2} \left(\sqrt{\frac{182,5^2}{197,5^2} + 4 \cdot \frac{22^2}{22^2}} \right)^3} = P_0 - 0,447 Q.$$

При этом коэффициент κ равен 0,447. Изменение провисания вычисляем:

$$\Delta f = \frac{(Q + P - P_0) \left(\sqrt{182,5^2 + 4 \cdot 22^2} \right)^3}{16 \cdot 1,94 \cdot 10^6 \cdot 0,096 \cdot 22^2} = (Q + P - P_0) \cdot 0,00459.$$

Результаты расчетов приведены в таблице 1 вместе с экспериментальными данными.

Как видно из таблицы, экспериментальные величины совпадают довольно точно с расчетными. Самые большие, и при этом тенденциозные расхождения видны в величинах усилия

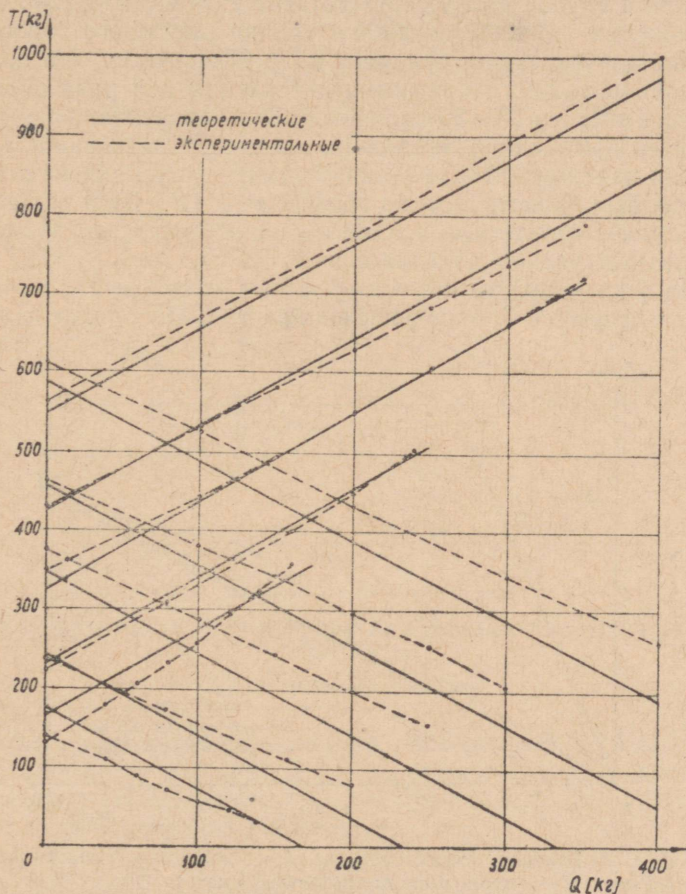
Таблица 1

		Единица измерения	Внешнее усилие Q , в кг (н)					
			0	100 (981)	150 (1472)	200 (1462)	250 (2453)	300 (2943)
Расчетные	Контактное усилие P	кг _(н)	197,5 (1938)	152,8 (1499)	130,4 (1279)	108,1 (1061)	85,7 (841)	63,4 (622)
	Усилие несущего троса T_1	кг _(н)	422 (4140)	534 (5239)	585 (5739)	644 (6318)	696 (6828)	749 (7348)
	Усилие стягивающего троса T_2	кг _(н)	455 (4464)	355 (3483)	305 (2992)	255 (2502)	204 (2001)	151 (1481)
	Смещение Δf	см	0	0,254	0,381	0,507	0,634	0,762
Экспериментальные	P	кг _(н)	197,5 (1938)	157 (1540)	130 (1275)	115 (1128)	90 (883)	62 (608)
	T_1	кг _(н)	426 (4179)	524 (5140)	577 (5660)	625 (6131)	678 (6651)	731 (7171)
	T_2	кг _(н)	459 (4503)	381 (3738)	342 (3355)	294 (2884)	252 (2472)	201 (1972)
	Δf	см	0	0,241	0,388	0,530	0,679	0,820
Разности	P	%	—	-2,75	+0,31	-6,36	-5,01	+2,21
	T_1	%	-0,95	+1,87	-1,37	+2,95	+2,58	+2,41
	T_2	%	-0,88	-4,87	-12,10	-15,30	-23,50	-33,10
	Δf	%	—	-2,75	+0,31	-6,36	-5,01	+2,21

натягивающей проволоки T_2 . Здесь на результаты влияет изгибная жесткость проволоки и при уменьшении усилия влияние увеличивается.

2.3 Анализ результатов

Графики изменения усилий в тросах при разных начальных условиях и внешней нагрузке приведены на фиг. 6. Расчетные усилия несущего троса тем лучше сходятся с экспериментальными, чем больше усилия стягивающего троса. Как указано, здесь оказывает влияние изгибная жесткость проволоки и нелинейность задачи.



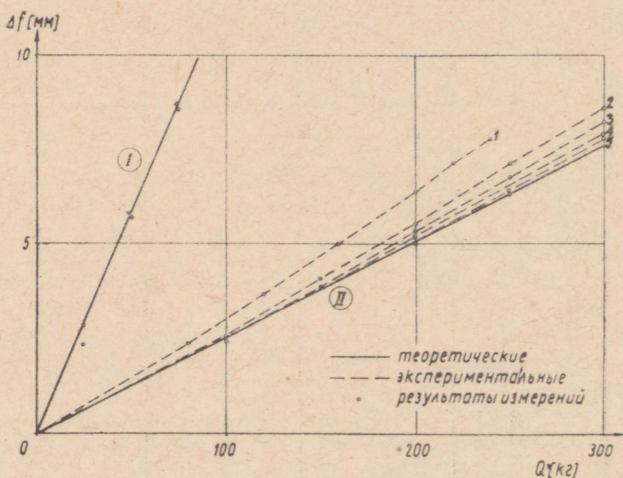
Фиг. 6. Графики изменения усилий в проволоках

При разработке опытных данных выяснилось, что рост усилий в тросах при разных начальных контактных усилиях не одинаков и уменьшается, когда увеличивается начальное контактное усилие, т. е. повышается жесткость конструкции. При данном $\frac{f}{l} \left(\sim \frac{1}{10} \right)$ уменьшение составляет 2—3% от роста контактного усилия. Теоретические расчеты подтверждают этот факт.

Величины смещений при разной внешней нагрузке приведены на фиг. 7. Исползованная методика расчета не учитывает жесткости системы при расчете изменений провисания. Как видно из графика, приведенная формула соответствует максимальному возможному предварительному напряжению. В данном случае этому соответствует $P_0 = 300 \text{ кг} = 2943 \text{ н}$. При приложении $Q = 500 \text{ кг} = 4905 \text{ н}$ усилие несущего троса еще больше допустимого, равняясь $0,7R$. Выясняется, что при увеличении начального контактного усиления в 3 раза смещения уменьшаются на 25—30 процентов. Это определяет влияние начального контактного усилия на величины смещения.

Для нахождения изменения контактного усилия из опытных данных был сконструирован график $\epsilon = \phi(P + Q)$ и так измерялись суммы контактных усилий и внешней нагрузки. Изменение контактных усилий дано на фиг. 8.

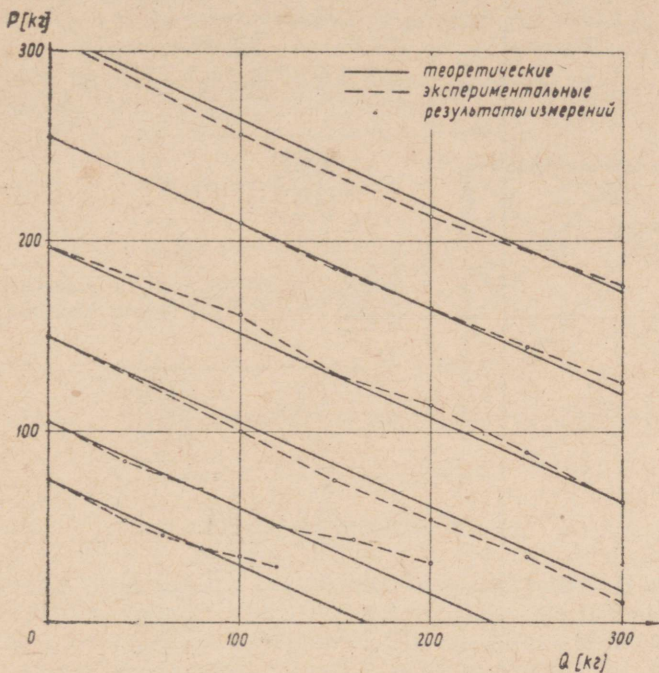
По фигуре видно, что коэффициент жесткости χ , вычисляемый по формуле 7, определяется как tga . Используя изменяю-



Фиг. 7. Графики смещения узла. I — проволока диаметром 1,6 мм; II — проволока диаметром 3,5 мм:

1 — $P_0 = 100 \text{ кг}$ (981 н); 2 — $P_0 = 150 \text{ кг}$ (1472 н); 3 — $P_0 = 200 \text{ кг}$ (1962 н); 4 — $P_0 = 250 \text{ кг}$ (2453 н); 5 — $P_0 = 300 \text{ кг}$ (2943 н)

щиеся контактные усилия до такого предела, когда сохраняется 25% от первоначальных усилий, получаем довольно точное совпадение с расчетными данными. Таким образом полученные максимальные величины внешних нагрузок Q отличаются на 4% от расчетных. При меньших величинах, чем 25% от начальной контактной силы, влияет на результаты изгибная жесткость проволоки.



Фиг. 8. Графики изменения контактных усилий

Б. Система из трех несущих и стягивающих тросов

2.4 Теоретические основы

Расчет проводится по методике, изложенной в [3 и 5]. На основе этих работ составлена система уравнений для определения неизвестных контактных усилий и смещений. Алгоритм учитывает и горизонтальные смещения.

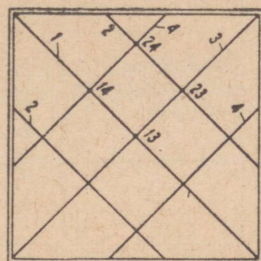
При равномерно распределенной нагрузке система уравнений состоит из 12 уравнений. Соответственно [5] используем линейные уравнения. Для нагрузки в каждом узле $25 \text{ кг} =$

Таблица 2

№	P_{13}	P_{14}	P_{23}	P_{24}	Δf_{13}	Δf_{14}	Δf_{23}	Δf_{24}	Δx_{14}	Δx_{24}	Δy_{23}	Δy_{24}	b
1	1	0	0	0	-18,479	+18,479	0	0	+153,365	0	0	0	-5,0
2	0	1	0	0	-12,162	+10,089	0	0	+191,706	0	0	0	0
3	0	1	0	0	+3,125	-37,362	0	0	-115,223	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	-20,032	+20,032	0	+153,365	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	-5,252	-2,556	0	+115,024	0	0	-6,3
6	0	0	0	1	0	0	+3,896	-55480	0	-219,052	0	0	-6,3
7	1	0	0	0	+18,479	0	-18,479	0	0	0	+153,365	0	+20
8	0	0	1	0	+12,126	0	-10,089	0	0	0	+191,706	0	+25
9	0	0	1	0	-3,125	0	+37,362	0	0	0	-115,223	0	+25
10	0	1	0	0	0	+20,032	0	-20,032	0	0	0	+153,365	+25
11	0	0	0	1	0	+5,252	0	+2,556	0	0	0	+115,024	+18,7
12	0	0	0	1	0	+3,896	0	+55,180	0	0	0	-219,052	+18,7

245,3 н матрица системы в виде $AX=B$ приведена в табл. 2. Обозначения соответствуют фигуре 9, индекс обозначает узел. Начальные данные уравнение поверхности $z=20\left(\frac{x}{100}\right)^2 - 20\left(\frac{y}{100}\right)^2$; начальные контактные усилия: $P_{13}^0=20 \text{ кгс}=196,2 \text{ н}$; $P_{14}^0=P_{23}^0=25 \text{ кгс}=245,3 \text{ н}$; $P_{24}^0=18,7 \text{ кгс}=183,4 \text{ н}$.

Решения системы: $P_{13}=7,50 \text{ кгс}=73,6 \text{ н}$; $P_{14}=13,56 \text{ кгс}=133 \text{ н}$; $P_{23}=11,44 \text{ кгс}=112,2 \text{ н}$; $P_{24}=6,20 \text{ кгс}=60,1 \text{ н}$; $\Delta f_{13}=-0,875 \text{ см}$; $\Delta f_{14}=0,576 \text{ см}$; $\Delta f_{23}=0,576 \text{ см}$; $\Delta f_{24}=0,543 \text{ см}$; $\Delta x_{14}=-0,0455 \text{ см}$; $\Delta x_{24}=-0,0703 \text{ см}$; $\Delta y_{23}=+0,0455 \text{ см}$; $\Delta y_{24}=+0,0703 \text{ см}$.



Фиг. 9. Система с тремя несущими и стягивающими тросами

2.5 Анализ результатов

Система составлена из проволок диаметром 1,6 мм, что позволяет реализовать значительно меньшие контактные усилия, чем для проволок диаметром 3,5 мм. При натяжении системы наблюдали по значениям контактных усилий. Выяснилось, что чувствительность измерителей контактных усилий была слишком маленькая, поэтому не удавалось реализовать точно запроектированные усилия. Натяжение проволок проводилось по одному, и контактные усилия, учитываемые с возможной точностью, были реализованы с максимальной погрешностью 20%. Самое большое отклонение было в узле 24, и этим объясняются расхождения в усилиях отрезков системы в непосредственном соседстве данного узла.

Расчетные и экспериментальные усилия приведены в таблице 3.

Среднее отклонение расчетных усилий от экспериментальных величин составляет 13%, причем расхождения при разных комбинациях нагрузок остаются такими же как при начальном состоянии. Большую роль играет здесь малая чувствительность измерителей, что учитывается в дальнейших опытах.

Таблица 3

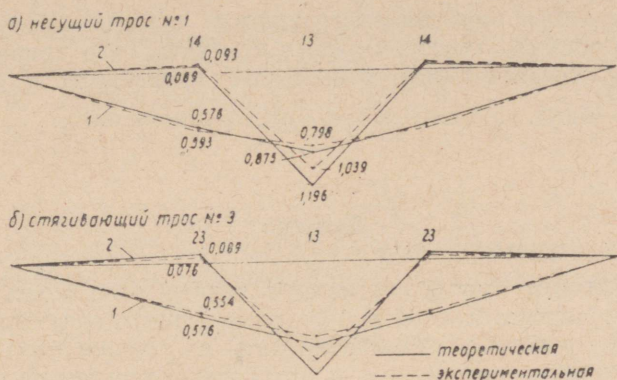
№	Нагрузка	№ троса	Отрезок троса	Вычисленное усилие, кгс(н)		Усилие из эксперимента, кгс(н)		Разность, %
1	Предварительное напряжение	1	0—14	129,8	(1273)	118	(1158)	+ 9,1
2		1	14—13	125,4	(1230)	114	(1118)	+ 9,05
3		2	0—24	159	(1560)	152	(1491)	+ 4,4
4		2	24—13	157	(1540)	134	(1315)	+14,61
5		3	0—13	129,8	(1273)	137,8	(1352)	+ 5,81
6		3	23—13	125,4	(1230)	132	(1295)	- 5,36
7		4	0—24	159	(1560)	105	(1030)	+33,8
8		4	24—14	157	(1540)	127,2	(1248)	+18,9
9	Равномерно распределенная нагрузка	1	0—14	188	(1844)	180	(1766)	+ 4,45
10		1	14—13	199	(1962)	187	(1834)	+ 6,41
11		2	0—24	194	(1903)	206	(2021)	- 6,18
12		2	24—13	232	(2276)	194	(1903)	+16,32
13		3	0—13	75	(736)	79	(775)	- 5,33
14		3	23—13	38,5	(377)	44	(432)	-14,27
15		4	0—24	67,2	(659)	71	(697)	- 5,65
16		4	24—14	85,6	(840)	94,5	(927)	-11,60
17	Нагрузка в срединной точке	1	0—14	176	(1727)	159	(1560)	+ 9,64
18		1	14—13	146	(1432)	144	(1413)	+ 1,37
19		2	0—24	157,4	(1544)	151	(1481)	+ 4,06
20		2	24—13	151,3	(1484)	132,5	(1300)	+12,4
21		3	0—13	105	(9030)	113,8	(1116)	+ 8,37
22		3	23—13	78,5	(770)	89	(873)	-13,39
23		4	0—24	159	(1560)	110	(1079)	+30,8
24		4	24—23	169	(1658)	138	(1354)	+18,35

Для сравнения можно обратить внимание на таблицу I, где усилия больше, чем в таблице 3.

Величины смещений средних несущего и стягивающего тросов приведены на фиг. 10. Среднее отклонение составляет 10%. Разности смещений при загрузке срединной точки превышают эту величину, что обусловлено и тем, что расчет смещений проведен с линейными уравнениями.

Анализируя результаты опыта видно, что загрузка отдельной проволоки приводит к изменениям усилий, не отличающихся существенно от изменений, вызванных равномерно распределенной нагрузкой той же интенсивности. Регистрируемые разности составляют 5%. Только в одном случае разность достигла 25% при загрузке стягивающей проволоки. Из этого следует, что в других проволоках эта комбинация нагрузок не должна вызвать существенных изменений усилий. Так вызвала

такая нагрузка отдельной проволоки изменения усилий в несущих проволоках до 2%, в стягивающих до 9%.



Фиг. 10. Смещения отдельных узлов, в см:

1 — равномерно распределенная нагрузка; 2 — нагрузка той же интенсивности в среднем узле

Загрузка отдельного узла влияет существенно на усилия проволок, пересекающихся в этом узле. В остальных проволоках зарегистрировали изменение усилий в среднем до 3%, и только в одном случае — 12%.

Очень важным является то обстоятельство, что усилия стягивающей проволоки могут при несимметричной нагрузке превышать усилия от предварительного напряжения. Хотя увеличение было зарегистрировано только до 3%, при некоторых комбинациях нагрузок следует обратить внимание на то обстоятельство, например, когда при весьма невыгодной нагрузке для стягивающих тросов — отсосе ветра — приходится учитывать и несимметричную снеговую нагрузку. С другой стороны, несимметричная нагрузка может исчерпать предварительное напряжение, если последнее было определено только из равномерно распределенной нагрузки. Испытания не дошли до исчерпания предварительного напряжения, но зарегистрировали большее влияние несимметричной нагрузки на изменения контактных усилий. Можно полагать, что такое местное исчерпание предварительного напряжения не влияет существенно на общую жесткость системы и может представлять интерес с точки зрения динамики.

Следует отметить, что влияние несимметричной нагрузки на смещения больше, чем на усилия. Так, смещение узла может при несимметричной нагрузке превышать на 30% смещение при равномерной нагрузке той же интенсивности. Были регистриро-

ваны и смещения в отрицательном направлении, максимальная величина которых составляла до 35% от смещений при равномерной нагрузке.

Приведенные замечания применимы и на общий случай с большим числом тросов. Следует отметить, что приведенные величины соответствуют отношению провисания к пролету $\frac{f}{l} = \frac{1}{10}$, и могут измениться при других отношениях.

Выводы

Проведенные опыты составляют первый этап в запланированной исследовательской работе по висячим покрытиям отрицательной кривизны. Можно оценить на результатах опытов обоснованность предпосылок и алгоритмов теоретических расчетов, приведенных в (3) и (5). Результаты позволяют развивать названную методику на самые общие случаи. Опыты дали возможность определить влияние несимметричной нагрузки на конструкции такого вида и указать на некоторые детали, существенные при оценке несущей способности тросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Х. Лауль, В. Р. Кульбах, А. А. Сумбак. О вопросах статического расчета и испытания конструкций покрытия Таллинской певческой эстрады. Труды ТПИ серия А, № 184, 1961.
2. Висячие покрытия (Тр. совещ. по исслед. и внедр. висячих покрытий). Москва, 1962.
3. В. Р. Кульбах. Упрощенный расчет предварительно напряженных висячих покрытий отрицательной кривизны. Труды ТПИ, серия А, № 200, 1963.
4. Ю. К. Энгельбрехт. Некоторые вопросы расчета висячих покрытий. Сборник научных трудов студентов IV. Труды ТПИ, серия А, № 217, 1965.
5. В. Р. Кульбах, Ю. К. Энгельбрехт. Расчет висячих покрытий отрицательной кривизны с конечным числом тросов. См. наст. сборник, стр. 39.

В. Р. Кульбах, Ю. К. Энгельбрехт

РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ ПОКРЫТИЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТРОСОВ

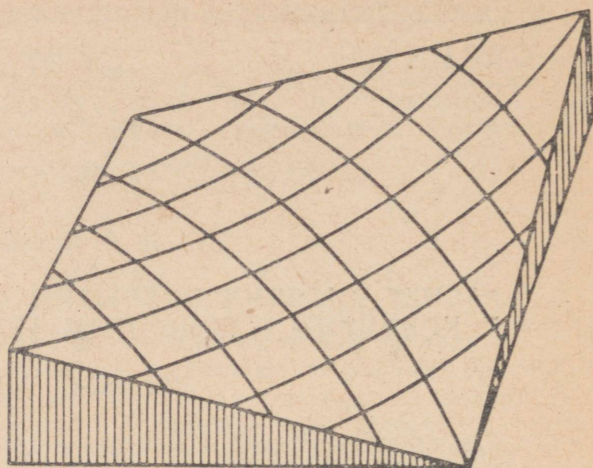
Введение

Определение усилий и деформаций висячих покрытий отрицательной гауссовой кривизны (фиг. 1) представляет собой сравнительно сложную задачу строительной механики. Решение этой задачи привлекло внимание исследователей сравнительно недавно — около 10 лет тому назад в связи с внедрением указанных конструкций в практику строительства.

Все способы статистического расчета висячих покрытий отрицательной кривизны можно разделить на две группы: 1) способы расчета висячего покрытия как пространственной сетки из конечного числа тросов (дискретная схема), 2) способы расчета висячего покрытия как своеобразной безмоментной оболочки (мембраны), в которой тросы заменяются непрерывными элементами, сопротивляющимися только растяжению (континуентальная схема). В данной статье приводится схема расчета, относящаяся к первой группе способов расчета. Несущие элементы покрытия разделяются на две системы: а) система несущих тросов и б) система натягивающих тросов. Взаимное воздействие между этими системами осуществляется контактными усилиями, передаваемыми в узлах сетки. Контактные усилия обеспечивают предварительное напряжение системы и изменяются при приложении внешней нагрузки.

В качестве исходного состояния рассматривается состояние предварительного напряжения системы. Начальная геометрия системы и начальные контактные усилия в узлах принимаются за известные. При составлении расчетной схемы приняты следующие допущения:

- 1) тросы упругие и состоят из отдельных прямолинейных участков между узлами;
- 2) несущие тросы неподвижно соединены в узлах с натягивающими;



Фиг. 1. Схема висячего покрытия отрицательной кривизны

3) нагрузка передается только в узлах.

В основном рассматриваются случаи вертикальной нагрузки, но распространение полученных результатов на случаи любых сосредоточенных в узлах нагрузок не представляет трудности.

При составлении уравнений равновесия и геометрических уравнений учтены как вертикальные, так и горизонтальные смещения узлов. Анализ показывает, что учет последних может оказать существенное влияние на результаты расчета.

Приведенные в данной статье уравнения обобщают результаты, полученные в предыдущих работах [3]. Они позволяют более точно определить деформации и усилия системы, а вводимые упрощения, обоснованные в каждом конкретном случае, не вносят существенной погрешности в результаты расчета.

1. Уравнения равновесия

а) Несущие тросы.

Рассмотрим равновесие i -того несущего троса (фиг. 2). Пусть в узле i, k в состоянии предварительного напряжения действует контактное усилие $P_{i,k}^0$. При приложении внешней на-

грузки $Q_{i,k}^{\circ}$ система деформируется, а контактное усилие пре-
вращается в

$$P_{i,k} = P_{i,k}^{\circ} + \Delta P_{i,k}.$$

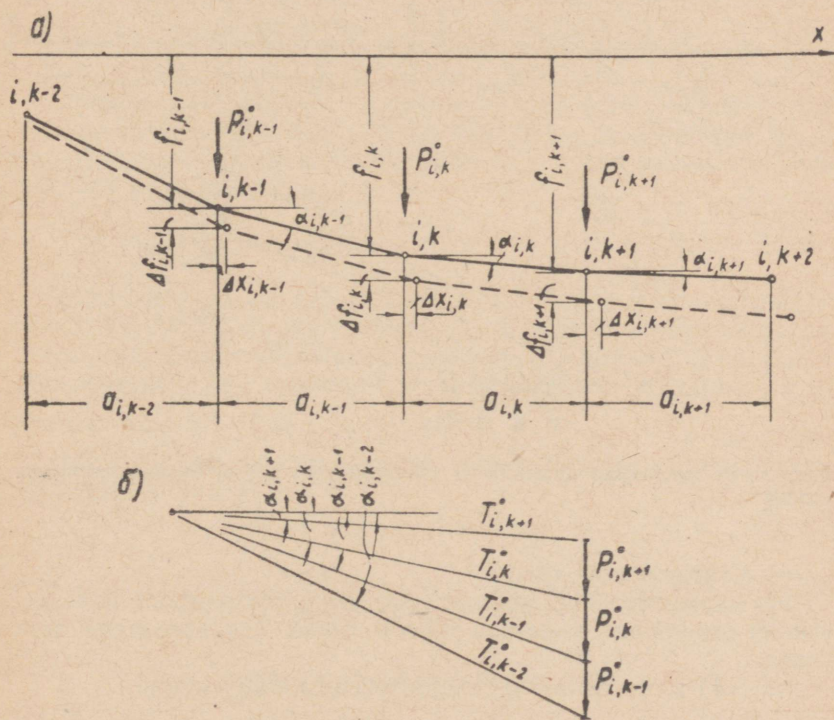
Из многоугольника усилий для узлов i, k и $i, k+1$ (фиг. 2)
находим усилия отдельных участков тросов:

1) в состоянии предварительного напряжения из условия
равновесия узла i, k :

$$T_{i,k}^{\circ} = \frac{P_{i,k}^{\circ} \cdot \cos \alpha_{i,k-1}}{\sin(\alpha_{i,k-1} - \alpha_{i,k})} = \frac{P_{i,k}^{\circ}}{\operatorname{tg} \alpha_{i,k-1} \cdot \cos \alpha_{i,k} - \sin \alpha_{i,k}}; \quad (1)$$

из условия равновесия узла $i, k+1$:

$$T_{i,k}^{\circ} = \frac{P_{i,k+1}^{\circ} \cdot \cos \alpha_{i,k+1}}{\sin(\alpha_{i,k} - \alpha_{i,k+1})} = \frac{P_{i,k+1}^{\circ}}{\sin \alpha_{i,k} - \cos \alpha_{i,k} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i,k+1}}; \quad (2)$$



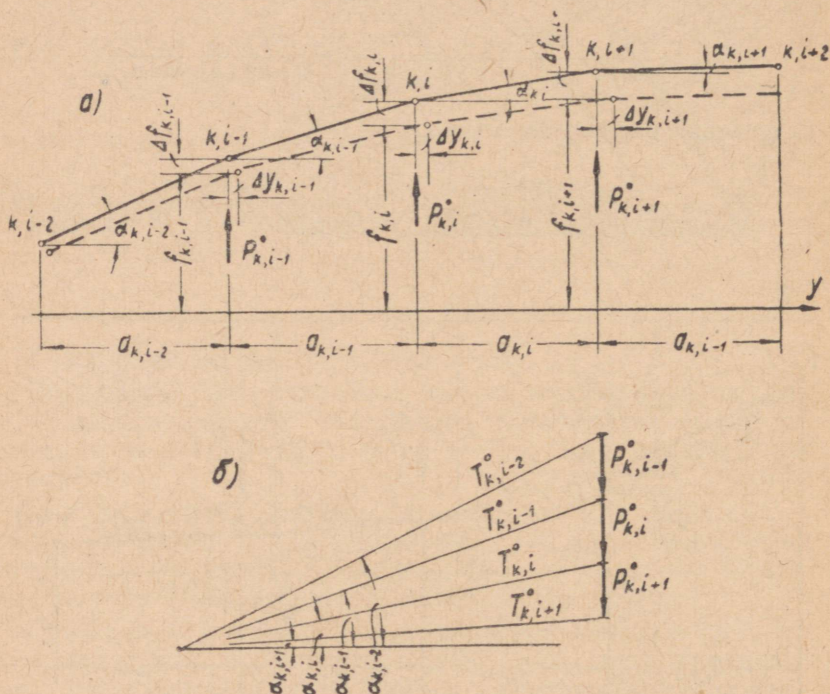
Фиг. 2. а) расчетная схема i -го несущего троса; б) многоугольник усилий.
Пунктиром обозначено деформированное очертание троса

2) при приложении внешней нагрузки Q имеем соответственно:

$$T_{i,k} = \frac{P_{i,k} + Q_{i,k}}{\operatorname{tg}(\alpha_{i,k-1} + \Delta\alpha_{i,k-1}) \cdot \cos(\alpha_{i,k} + \Delta\alpha_{i,k}) - \sin(\alpha_{i,k} + \Delta\alpha_{i,k})}; \quad (3)$$

и

$$T_{i,k} = \frac{P_{i,k+1} + Q_{i,k+1}}{\sin(\alpha_{i,k} + \Delta\alpha_{i,k}) - \cos(\alpha_{i,k} + \Delta\alpha_{i,k}) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{i,k+1} + \Delta\alpha_{i,k+1})}; \quad (4)$$



Фиг. 3. а) расчетная схема k -го стягивающего троса; б) многоугольник усилий

б) Стягивающие тросы.

Из многоугольника усилий (фиг. 3) для k -го троса находим усилия отдельных участков тросов также из равновесия двух узлов:

1) в состоянии предварительного напряжения:

$$T_{k,i}^{\circ} = \frac{P_{k,i}^{\circ}}{\operatorname{tg} \alpha_{k,i-1} \cdot \cos \alpha_{k,i} - \sin \alpha_{k,i}}; \quad (5)$$

$$T_{k,i}^{\circ} = \frac{P_{k,i+1}^{\circ}}{\sin \alpha_{k,i} - \cos \alpha_{k,i} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{k,i+1}}; \quad (6)$$

2) при приложении внешней нагрузки:

$$T_{k,i} = \frac{P_{k,i}}{\operatorname{tg}(\alpha_{k,i-1} - \Delta \alpha_{k,i-1}) \cdot \cos(\alpha_{k,i} - \Delta \alpha_{k,i}) - \sin(\alpha_{k,i} - \Delta \alpha_{k,i})}; \quad (7)$$

$$T_{k,i} = \frac{P_{k,i+1}}{\sin(\alpha_{k,i} - \Delta \alpha_{k,i}) - \cos(\alpha_{k,i} - \Delta \alpha_{k,i}) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{k,i+1} - \Delta \alpha_{k,i+1})}. \quad (8)$$

2. Геометрические зависимости

Рассмотрим зависимости деформаций отдельных участков тросов от смещений узлов. Исходим из наиболее общего случая (фиг. 4а), а затем вводим упрощения обычного характера приводящие к незначительным погрешностям.

Изменение угла наклона отрезка троса определяется зависимостью (фиг. 4а):

$$\cos \Delta \alpha = \frac{a^2 + a \Delta x_2 - a \Delta x_1 + f^2 + f \cdot \Delta f_2 - f \cdot \Delta f_1}{\sqrt{a^2 + f^2} \cdot \sqrt{(a + \Delta x_2 - \Delta x_1)^2 + (\Delta y_2 - \Delta y_1)^2 + (f + \Delta f_2 - \Delta f_1)^2}}$$

Пренебрегая малыми величинами второго порядка под знаком квадратного корня, мы избавляемся от смещений Δy_1 и Δy_2 . Получаем плоскую схему (фиг. 4б), а для изменения угла наклона троса находим:

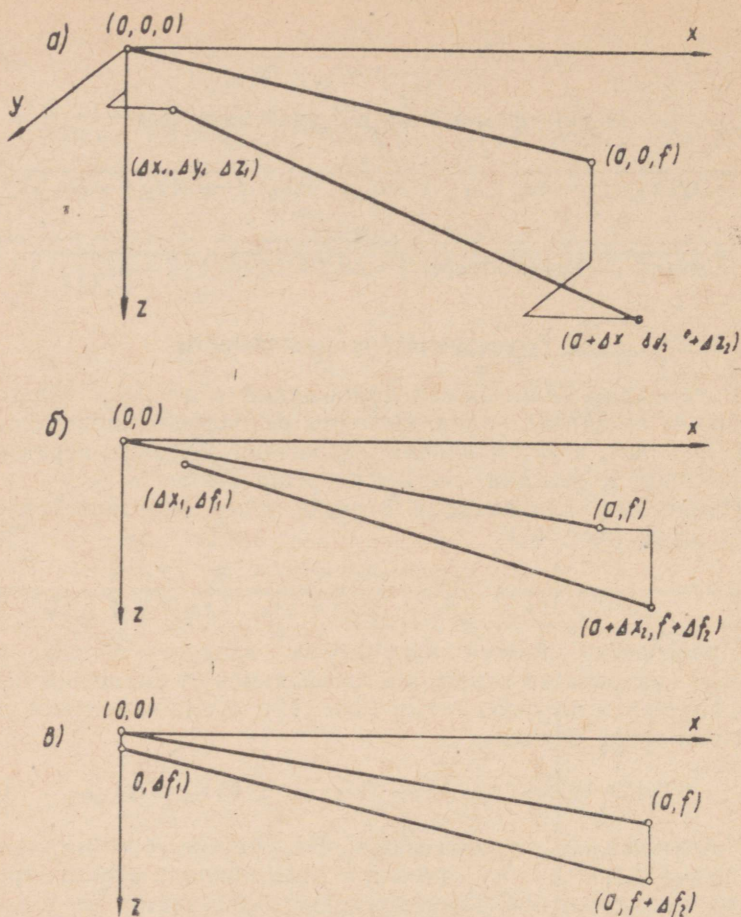
$$\sin \Delta \alpha \cong \operatorname{tg} \Delta \alpha = \frac{1}{a} (\Delta f_2 - \Delta f_1) - \frac{f}{a^2} (\Delta x_2 - \Delta x_1). \quad (9a)$$

Численный анализ показывает, что влияние горизонтальных смещений Δx_1 и Δx_2 на изменение угла наклона отрезка троса также несущественно. Пренебрежение величинами Δx_1 и Δx_2 в зависимости (9а) приводит к максимальной погрешности в усилиях на 0,2% (при соотношении $\frac{f}{i} = \frac{1}{10}$).

После указанных упрощений имеем (фиг. 4в), используя обобщенные индексы:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_{i,k} \pm \Delta \alpha_{i,k}) &\cong \sin \alpha_{i,k} \pm \\ &\pm \frac{\cos^2 \alpha_{i,k}}{\sqrt{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2}} \cdot (\Delta f_{i,k+1} - \Delta f_{i,k}); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_{i,k} \pm \Delta \alpha_{i,k}) &\cong \cos \alpha_{i,k} \mp \\ &\mp \frac{\sin \alpha_{i,k} \cdot \cos \alpha_{i,k}}{\sqrt{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2}} \cdot (\Delta f_{i,k+1} - \Delta f_{i,k}); \end{aligned} \quad (10)$$



Фиг. 4. Схемы смещения узлов отрезка троса для вычисления изменения угла между начальным и деформированным состоянием: а) общий случай; б) без учета поперечного горизонтального смещения; в) без учета горизонтальных смещений

$$\operatorname{tg}(a_{i,k} \pm \Delta a_{i,k}) = \operatorname{tg} a_{i,k} \pm \frac{1}{a} \cdot (\Delta f_{i,k+1} - \Delta f_{i,k}). \quad (11)$$

Удлинения отдельных отрезков тросов должны определяться с учетом горизонтальных смещений. При неучете горизонтальных смещений невозможно удовлетворять условиям совместности деформаций, а разница в усилиях отдельных участков тросов может достигнуть $\sim 20\%$ (при $\frac{f}{l} = \frac{1}{10}$). При вычисле-

нии удлинений пренебрегаем малыми величинами второго и высших порядков; вследствие чего поперечные горизонтальные смещения в формулы не входят.

Согласно фиг. 2 имеем для несущих тросов:

$$\Delta s_{i,k} = \sqrt{(f_{i,k+1} + \Delta f_{i,k+1} - f_{i,k} - \Delta f_{i,k})^2 + (a_{i,k} + \Delta x_{i,k+1} - \Delta x_{i,k})^2} - \sqrt{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2}.$$

Принимая во внимание вышеуказанные предпосылки, получаем после разложения подкоренных выражений в ряд Маклорена:

$$\Delta s_{i,k} = \frac{(f_{i,k+1} - f_{i,k}) (\Delta f_{i,k+1} - \Delta f_{i,k}) + a_{i,k} (\Delta x_{i,k+1} - \Delta x_{i,k})}{\sqrt{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2}}. \quad (12)$$

Для отрезка натягивающих тросов получаем:

$$\Delta s_{k,i} = \frac{(f_{k,i+1} - f_{k,i}) (\Delta f_{k,i+1} - \Delta f_{k,i}) + a_{k,i} (\Delta y_{k,i} - \Delta y_{k,i+1})}{\sqrt{(f_{k,i+1} - f_{k,i})^2 + a_{k,i}^2}}. \quad (13)$$

3. Уравнения упругих деформаций и система разрешающих уравнений

Упругое удлинение для отрезка несущего троса:

$$\Delta s_{i,k} = \frac{1}{EF_i} (T_{i,k} - T_{i,k}^0) \sqrt{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2}; \quad (14)$$

для натягивающего троса соответственно:

$$\Delta s_{k,i} = \frac{1}{EF_k} (T_{k,i} - T_{k,i}^0) \sqrt{(f_{k,i+1} - f_{k,i})^2 + a_{k,i}^2}. \quad (15)$$

Подставляя в зависимости (14) и (15) значения усилий по формулам (1) ... (8) и применяя выражения для угловых функций по (9) ... (11), мы сможем выписать систему разрешающих уравнений.

Пусть висячее покрытие состоит из m несущих и n натягивающих тросов, имеющих соответственно x_i или λ_k прямолинейных отрезков.

Общее количество узлов будет:

$$\sum_{i=1}^m (\alpha_i - 1) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1). \quad (16)$$

В каждом узле имеем 4 неизвестные величины: контактное усилие $P_{i,k}$, вертикальное смещение $\Delta f_{i,k}$ и горизонтальные смещения $\Delta x_{i,k}$ и $\Delta y_{k,i}$.

Общее количество неизвестных

$$4 \sum_{i=1}^m (\alpha_i - 1) = 4 \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1). \quad (17)$$

Для решения задачи имеем следующие уравнения:

- 1) $2 \sum_{i=1}^m (\alpha_i - 1)$ уравнений для несущих тросов;
- 2) $2 \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1)$ уравнений для стягивающих тросов).

Общее количество уравнений:

$$2 \sum_{i=1}^m (\alpha_i - 1) + 2 \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1) = 4 \sum_{i=1}^m (\alpha_i - 1) = 4 \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1). \quad (18)$$

Получим систему алгебраических уравнений относительно вышеупомянутых неизвестных. Учитывая контактные усилия и смещения из решения данной системы, находим максимальные усилия в тросах и проверяем сечения тросов. Следует отметить, что в общем случае получим нелинейную систему уравнений. Однако нелинейностью, связанной с количественным изменением нагрузки, можно пренебречь при сравнительно малых величинах $\frac{\Delta f}{f}$. Оправдано употребление линейной системы при равномерно распределенной нагрузке на всей или на большей части площади покрытия. При загрузке отдельных узлов или небольших участков покрытия линейной системы могут быть существенные погрешности. В таком случае следует учитывать нелинейность системы, решая соответствующую систему нелинейных уравнений или решая линейную систему, прикладывая нагрузки небольшими ступенями; при этом каждое предыдущее состояние принимается за исходное для следующей ступени. В таком случае решение системы нелинейных уравнений сводится к многократному решению систем линейных уравнений с переменными коэффициентами.

При симметричной нагрузке уменьшается число неизвестных и соответственно уравнений. Так, например, при равномерно распределенной нагрузке уменьшается число уравнений до 4 раз в зависимости от числа тросов и от симметрии покрытия. Для системы, представленной на фиг. 1, число уравнений для произвольной нагрузки составляет 148, а для равномерно распределенной нагрузки — 44. Следует отметить, что неравномерность распределения контактных усилий не позволяет уменьшить число уравнений до минимума.

4. Вывод отдельных уравнений

а) Общие уравнения

1. Рассмотрим отрезок $a_{i,k}$ i -го несущего троса, вычисляя усилие из равновесия узла с меньшим номером последовательности. Отметим, что нумерация начинается с края.

Приравниванием удлинений по уравнениям (12) и (14) получим после простых преобразований:

$$T_{i,k} - T_{i,k}^{\circ} = \frac{E \cdot F_i}{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2} [(f_{i,k+1} - f_{i,k}) (\Delta f_{i,k+1} - f_{i,k}) + a_{i,k} (\Delta x_{i,k+1} - \Delta x_{i,k})]. \quad (19)$$

Усилия вычисляем при помощи уравнений (1) и (3), принимая во внимание зависимости (9), (10) и (11). Получим:

$$\frac{P_{i,k} + Q_{i,k}}{\operatorname{tg} a_{i,k-1} \cdot \cos a_{i,k} - \sin a_{i,k} + C_1 \cdot \Delta f_{i,k-1} + C_2 \cdot \Delta f_{i,k} + C_3 \cdot \Delta f_{i,k+1}} - \frac{P_{i,k}^{\circ}}{\operatorname{tg} a_{i,k-1} \cdot \cos a_{i,k} - \sin a_{i,k}} = \frac{EF_i}{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2} \cdot [(f_{i,k+1} - f_{i,k}) (\Delta f_{i,k+1} - \Delta f_{i,k}) + a_{i,k} (\Delta x_{i,k+1} - \Delta x_{i,k})], \quad (20)$$

где C_1, C_2, C_3 константы. Пренебрегая величинами второго порядка малости, имеем после преобразований линейное уравнение.

Уравнение имеет вид:

$$P_{i,k} + Q_{i,k} - P_{i,k}^{\circ} + \bar{C}_1 \Delta f_{i,k-1} + \bar{C}_2 \Delta f_{i,k} + \bar{C}_3 \Delta f_{i,k+1} + \bar{C}_4 \Delta x_{i,k} + \bar{C}_5 \cdot \Delta x_{i,k+1} = 0, \quad (21)$$

$$\text{где } \bar{C}_1 = -T_{i,k}^{\circ} \cdot C_1;$$

$$\bar{C}_2 = C_4 \cdot (f_{i,k+1} - f_{i,k}) - T_{i,k}^{\circ} \cdot C_2;$$

$$\bar{C}_3 = -C_4 (f_{i,k+1} - f_{i,k}) - T_{i,k}^{\circ} \cdot C_3;$$

$$\bar{C}_4 = C_4 \cdot a_{i,k};$$

$$\bar{C}_5 = -C_4 \cdot a_{i,k};$$

$$C_1 = -\frac{\cos \alpha_{i,k}}{a_{i,k-1}};$$

$$C_2 = -(C_1 + C_3);$$

$$C_3 = -\frac{\sin \alpha_{i,k} \cdot \cos \alpha_{i,k} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i,k-1} + \cos^2 \alpha_{i,k}}{\sqrt{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2}};$$

$$C_4 = \frac{EF_1 (\operatorname{tg} \alpha_{i,k-1} \cdot \cos \alpha_{i,k} - \sin \alpha_{i,k})}{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2}.$$

2. Для отрезка $a_{i,k}$ i -го несущего троса находим из условия равновесия узла с большим номером последовательности:

$$P_{i,k+1} + Q_{i,k+1} - P_{i,k+1}^{\circ} + \bar{C}_6 \Delta f_{i,k} + \bar{C}_7 \Delta f_{i,k+1} + \bar{C}_8 \Delta f_{i,k+2} + \\ + \bar{C}_9 \cdot \Delta x_{i,k} + \bar{C}_{10} \cdot \Delta x_{i,k+1} = 0. \quad (22)$$

$$\text{где } \bar{C}_6 = C_9 (f_{i,k+1} - f_{i,k}) - T_{i,k}^{\circ} \cdot C_6;$$

$$\bar{C}_7 = -C_9 (f_{i,k+1} - f_{i,k}) - T_{i,k}^{\circ} \cdot C_7;$$

$$\bar{C}_8 = -T_{i,k}^{\circ} \cdot C_8;$$

$$\bar{C}_9 = C_9 \cdot a_{i,k};$$

$$\bar{C}_{10} = -C_9 \cdot a_{i,k};$$

$$C_6 = -\frac{\cos^2 \alpha_{i,k} + \sin \alpha_{i,k} \cdot \cos \alpha_{i,k} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i,k+1}}{\sqrt{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2}}$$

$$C_7 = -(C_6 + C_8);$$

$$C_8 = -\frac{\cos \alpha_{i,k}}{a_{i,k+1}};$$

$$C_9 = \frac{EF_1 (\sin \alpha_{i,k} - \cos \alpha_{i,k} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i,k+1})}{(f_{i,k+1} - f_{i,k})^2 + a_{i,k}^2}.$$

3. Для отрезка $a_{k,i}$ k -го стягивающего троса вычисляем усилие из условия равновесия узла с меньшим номером последовательности:

$$P_{k,i} - P_{k,i}^{\circ} + \bar{C}_{11} \Delta f_{k,i-1} + \bar{C}_{12} \Delta f_{k,i} + \bar{C}_{13} \Delta f_{k,i+1} + \bar{C}_{14} \cdot \Delta y_{k,i} + \bar{C}_{15} \cdot \Delta y_{k,i+1} = 0, \quad (23)$$

где: $\bar{C}_{11} = -T_{k,i}^{\circ} \cdot C_{11}$;

$$\bar{C}_{12} = -C_{14} (f_{k,i+1} - f_{k,i}) - T_{k,i}^{\circ} \cdot C_{12};$$

$$\bar{C}_{13} = C_{14} (f_{k,i+1} - f_{k,i}) - T_{k,i}^{\circ} \cdot C_{13};$$

$$\bar{C}_{14} = C_{14} \cdot a_{k,i};$$

$$\bar{C}_{15} = -C_{14} \cdot a_{k,i};$$

$$C_{11} = \frac{\cos \alpha_{k,i}}{a_{k,i-1}};$$

$$C_{12} = -(C_{11} + C_{13});$$

$$C_{13} = \frac{\sin \alpha_{k,i} \cdot \cos \alpha_{k,i} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{k,i-1} + \cos^2 \alpha_{k,i}}{\sqrt{(f_{k,i+1} - f_{k,i})^2 + a_{k,i}^2}}$$

$$C_{14} = \frac{EF_k (\operatorname{tg} \alpha_{k,i-1} \cdot \cos \alpha_{k,i} - \sin \alpha_{k,i})}{(f_{k,i+1} - f_{k,i})^2 + a_{k,i}^2}$$

4. Для отрезка $a_{k,i}$ k -го стягивающего троса вычисляем усилие из условия равновесия узла с большим номером последовательности:

$$P_{k,i+1} - P_{k,i+1}^{\circ} + \bar{C}_{16} \cdot \Delta f_{k,i} + \bar{C}_{17} \Delta f_{k,i+1} + \bar{C}_{18} \cdot \Delta f_{k,i+2} + \bar{C}_{19} \Delta y_{k,i} + \bar{C}_{20} \Delta y_{k,i+1} = 0, \quad (24)$$

где: $\bar{C}_{16} = -C_{19} (f_{k,i+1} - f_{k,i}) - T_{k,i}^{\circ} \cdot C_{16}$;

$$\bar{C}_{17} = C_{19} (f_{k,i+1} - f_{k,i}) - T_{k,i}^{\circ} \cdot C_{17};$$

$$\bar{C}_{18} = -T_{k,i}^{\circ} \cdot C_{18};$$

$$\bar{C}_{19} = C_{19} \cdot a_{k,i};$$

$$C_{20} = -C_{19} \cdot a_{k,i};$$

$$C_{16} = \frac{\cos^2 \alpha_{k,i} + \sin \alpha_{k,i} \cdot \cos \alpha_{k,i} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{k,i+1}}{\sqrt{(f_{k,i+1} - f_{k,i})^2 + a_{k,i}^2}}$$

$$C_{17} = -(C_{16} + C_{18});$$

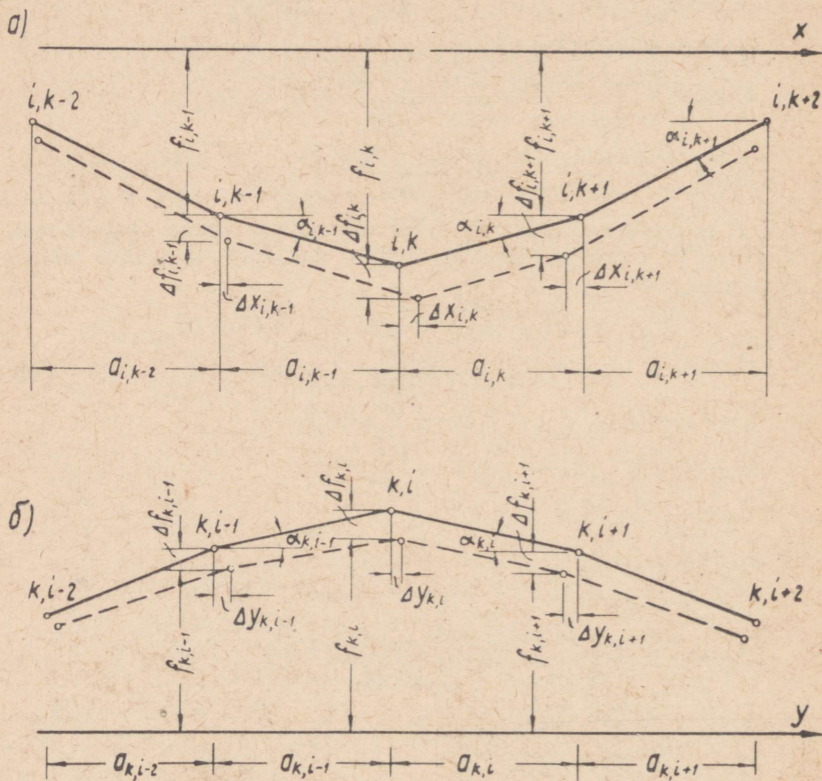
$$C_{18} = \frac{\cos \alpha_{k,i}}{a_{k,i+1}}$$

$$C_{19} = \frac{EF_k (\sin \alpha_{k,i} - \cos \alpha_{k,i} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{k,i+1})}{(f_{k,i+1} - f_{k,i})^2 + a_{k,i}^2}$$

б) уравнения равновесия отрезков при срединной точке тросов

Уравнениям отрезков при срединной точке следует уделять особое внимание, так как для простоты составления уравнений за положительное направление горизонтальных смещений принято направление к срединной точке троса. Такое положительное направление оправдывается также при учете деформаций контура.

Принятые нами положительные направления смещений указаны для несущих тросов на фиг. 5а, для стягивающих тросов — на фиг. 5б. Учитывая вышеприведенное, не представляет трудностей составить уравнения для отрезков при срединной точке.



Фиг. 5. Расчетная схема смещений узлов вблизи срединной точки тросов: а) несущий трос; б) стягивающий трос

5. Влияние деформации контура

Следует различать податливый, сравнительно жесткий и абсолютно жесткий контуры. Податливый контур образуется, например, мощным тросом, отдельные точки которого могут смещаться по направлениям x , y и z . Сравнительно жесткий контур представляет собой оптимально проектируемый жесткий контур, опертый колоннами или массивной стеной и смещающийся в направлении x и y . Хотя эти смещения малы, они оказывают довольно большое влияние на смещения и усилия вантовой сетки. Абсолютно жесткий контур не смещается в такой мере, чтобы оказать существенное влияние на смещения и усилия вантовой сетки.

Геометрическое удлинение первого от контура отрезка находим из (12) и (13), принимая:

а) при податливом контуре $\Delta f_{i,k}$, $\Delta x_{i,k}$, $\Delta f_{k,i}$ и $\Delta y_{k,i}$ за смещения контура;

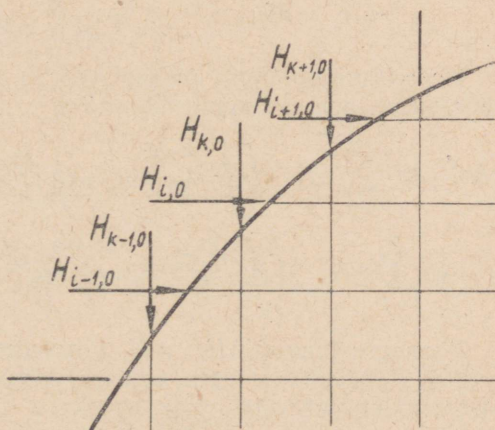
б) при сравнительно жестком контуре $\Delta f_{i,k} = \Delta f_{k,i} = 0$ и $\Delta x_{i,k}$, $\Delta y_{k,i}$ за смещения контура;

в) при жестком контуре $\Delta f_{i,k} = \Delta x_{i,k} = \Delta f_{k,i} = \Delta y_{k,i} = 0$.

Рассмотрим общую схему для учета смещений сравнительно жесткого контура. На контур действует горизонтальная нагрузка (фиг. 6).

$$H_{i,0} = T_{i,0} \cdot \cos \alpha_{i,0}. \quad (25)$$

Фиг. 6. Участок контура с горизонтальной нагрузкой



Состояние предварительного напряжения принимаем за известное. Вычисляем смещение точки $i,0$ контура, когда в каждой точке действует единичная сила:

$$\Delta x_{i,0}^1 = \sum_{i=1}^n \oint \frac{m_i^o m_i^n}{EI} ds + \sum_{k=1}^m \oint \frac{m_i^o m_k^n}{EI} ds + \sum_{i=1}^n \oint \frac{n_i^o n_i^n}{EF} ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \oint \frac{n_i^o n_k^n}{EF} ds + \sum_{i=1}^n \mu \oint \frac{q_i^o q_i^n}{GF} ds + \sum_{k=1}^m \mu \oint \frac{q_i^o q_k^n}{GF} ds \quad (26)$$

действительные нагрузки в каждой точке $\Delta H_{i,0}$ и $\Delta H_{k,0}$:

$$\Delta H_{i,0} = H_{i,0} - H_{i,0}^o = T_{i,0} \cdot \cos(\alpha_{i,0} + \Delta \alpha_{i,0}) - T_{i,0}^o \cdot \cos \alpha_{i,0}; \quad (27)$$

$$H_{k,0} = H_{k,0} - H_{k,0}^o = T_{k,0} \cdot \cos \alpha_{k,0} - \Delta \alpha_{k,0} - T_{k,0}^o \cdot \cos \alpha_{k,0}. \quad (28)$$

Величину $H_{i,0}$ можно вычислить из условия равновесия узла $i,1$:

$$H_{i,0} = \frac{(P_{i,1} + Q_{i,1}) \cdot \cos(\alpha_{i,0} + \Delta \alpha_{i,0})}{[\sin(\alpha_{i,0} + \Delta \alpha_{i,0}) - \cos(\alpha_{i,0} + \Delta \alpha_{i,0}) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{i,0} + \Delta \alpha_{i,0})]} =$$

$$= \frac{P_{i,1} + Q_{i,1}}{\bar{C}_{20} + \bar{C}_{21} \cdot \Delta f_{i,1} + \bar{C}_{22} \cdot \Delta f_{i,2}}, \quad (29)$$

где \bar{C}_{20} , \bar{C}_{21} и \bar{C}_{22} константы, вычисляемые с учетом уравнений (9), (10) и (11). Аналогично:

$$H_{k,0} = \frac{P_{k,1}}{\bar{C}_{23} + \bar{C}_{24} \Delta f_{k,1} + \bar{C}_{25} \cdot \Delta f_{k,2}}. \quad (30)$$

Используя принцип независимости действия сил, вычисляем действительное смещение точки $i,0$:

$$\Delta x_{i,0}^p = \sum_{i=1}^n \Delta H_{i,0} \left(\oint \frac{m_i^o m_i^n}{EI} ds + \oint \frac{n_i^o n_i^n}{EF} ds + \mu \oint \frac{q_i^o q_i^n}{GF} ds \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \Delta H_{k,0} \left(\oint \frac{m_i^o m_k^n}{EI} ds + \oint \frac{n_i^o n_k^n}{EF} ds + \mu \oint \frac{q_i^o q_k^n}{GF} ds \right). \quad (31)$$

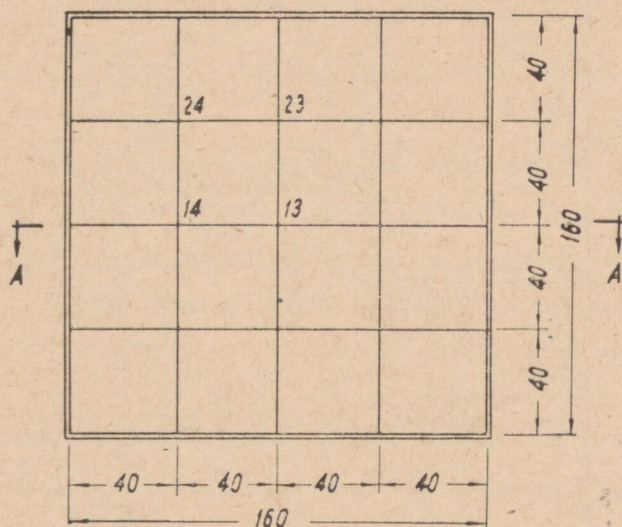
Разности усилий $\Delta H_{i,0}$ и $H_{k,0}$ вычисляются из уравнений (27) и (28). Следует отметить, что эти уравнения не линейные относительно неизвестных. Как видно, в уравнения войдут вертикальные смещения приконтурных точек. Поскольку величины их сравнительно малые — приконтурные точки смещаются мало — можно этими величинами пренебречь. Такое пренебрежение дает максимальную погрешность на 2—3%. Следовательно, в уравнениях (29) и (30) можно считать $\bar{C}_{21} = \bar{C}_{22} = \bar{C}_{24} = \bar{C}_{25} = 0$.

В уравнении смещения $\Delta x_{i,0}^P$ имеем неизвестные контактные усилия $P_{i,1}$ и $P_{k,1}$. Эти величины включаем в систему разрешающих уравнений.

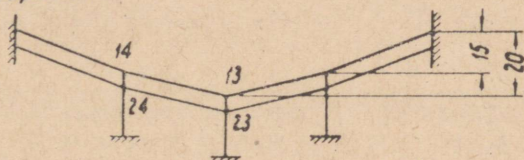
В общем случае такой прямой ход решения может оказаться очень трудоемким. Вторая возможность учесть смещения контура — это итерационный способ. Первоначально ведется расчет с абсолютно жестким контуром. Затем вычисляются смещения контура по найденным усилиям, а потом смещения подставляются в уравнении системы и ведется расчет снова. Следует отметить, что изменяются только некоторые уравнения и процесс сходится быстро.

Пример расчета

Имеется висячее покрытие с 3-мя несущими и 3-мя стягивающими тросами (фиг. 7). Начальная контактная сила $P_{i,k}^0 = 150 \text{ кгс} = 1471,5 \text{ н}$, внешняя нагрузка $50 \text{ кгс} = 490,5 \text{ н}$ в узле, $EF = 2,268 \cdot 10^5 \text{ кгс} = 2,225 \text{ Мн}$.



Разрез А-А



Фиг. 7. Схема расположения тросов. Размеры даны в см

Таблица 1

№	P_{13}	P_{14}	P_{23}	P_{24}	Δf_{13}	Δf_{14}	Δf_{23}	Δf_{24}	Δx_{14}	Δx_{24}	Δy_{23}	Δy_{24}	b
1	1	0	0	0	-199,421	+199,421	0	0	+1384,959	0	0	0	+100
2	0	1	0	0	-159,353	+144,353	0	0	+1384,959	0	0	0	+100
3	0	1	0	0	+15,0	-465,124	0	0	-1163,618	0	0	0	+100
4	0	0	1	0	0	0	-199,421	+199,421	0	+1384,959	0	0	+100
5	0	0	0	1	0	0	-159,353	+144,353	0	+1384,959	0	0	+100
6	0	0	0	1	0	0	+15,0	-465,124	0	-1163,618	0	0	+100
7	1	0	0	0	+199,421	0	-199,421	0	0	0	+1384,959	0	+150
8	0	0	1	0	+159,353	0	-144,353	0	0	0	+1384,959	0	+150
9	0	0	1	0	-15,0	0	+465,124	0	0	0	-1163,618	0	+150
10	0	1	0	0	0	+199,421	0	-199,421	0	0	0	+1384,959	+150
11	0	0	0	1	0	+159,353	0	-144,353	0	0	0	+1384,959	+150
12	0	0	0	1	0	-15,0	0	+465,124	0	0	0	-1163,618	+150

Поверхность покрытия — гиперболический параболоид, уравнение которой: $z = 20\left(\frac{x}{80}\right)^2 - 20\left(\frac{y}{80}\right)^2$. Требуется вычислить смещения узлов и найти максимальные усилия. Так как нагрузка равномерно распределенная, общее число уравнений равно 12. По вышеизложенной схеме выпишем систему разрешающих уравнений в виде $AX = B$:

Решая систему, получим:

Таблица 2

P_{13} кг (н)	P_{14} кг (н)	P_{23} кг (н)	P_{24} кг (н)	Δf_{13} см	Δf_{14} см
125,0 (1226,25)	126.2863 (1238,87)	(123,7136) (1213,63)	125,0 (1226,25)	0,1093	0,1029
Δf_{23} см	Δf_{24} см	Δx_{14} см	Δx_{24} см	Δy_{23} см	Δy_{24} см
0,1029	0,09822	-0,01713	-0,01645	0,01727	0,01645

Из решения заметно неравномерное изменение контактной силы, что вызвано непараболическим очертанием отдельных тросов после приложения внешней нагрузки. Очевиден характер горизонтальных смещений для отдельных тросов при жестком контуре: для несущих — к контуру, для стягивающих — от контура.

Дальнейший ход решений не представляет никаких трудностей. При помощи уравнений типа (3) и (4) определяются усилия (максимальное усилие в данном случае $T = 746,9$ кг = 7327 н) и проверяется сечение троса.

Параллельно решены линейная система, где в геометрических зависимостях учтены и горизонтальные смещения (случай 1) и нелинейная система уравнений, учитывающая малые второго порядка (случай 2).

Решения этих систем представлены в таблице 3:

Анализ показывает, что погрешность линейной системы (табл. 1) незначительна.

Проведен контрольный расчет для отдельной нити, с использованием известного уравнения

$$H_1^3 - \left(H_0 - \frac{EF \int_0^1 Q_0^2 dx}{2l \cdot H_0^2} \right) H_1^2 - \frac{EF}{2l} \int_0^1 Q_1^2 dx = 0 \quad (32)$$

для определения распора. При этом учитываем контактные усилия из решенной системы уравнений. Уравнение (3) для среднего несущего троса имеет вид:

$$H_1^3 + 8259,375 H_1^2 - 4,379477 \cdot 10^9 = 0,$$

откуда $H_1 = 699,10$ кгс = 6858,96 н.

Таблица 3.

№	P_{13} кгс (н)	P_{14} кгс (н)	P_{23} кгс (н)	P_{24} кгс (н)	Δf_{13} см	Δf_{14} см
Случай 1	125,0 (1226,25)	126,3988 (1234,97)	123,6011 (1212,53)	125,0 (1226,25)	0,1098	0,1027
Случай 2	125,0 (1226,25)	126,1113 (1237,15)	123,8887 (1215,35)	125,0 (1226,25)	0,1087	0,1031

№	Δf_{23} см	Δf_{24} см	Δx_{14} см	Δx_{24} см	Δy_{23} см	Δy_{24} см
Случай 1	0,1027	0,09771	-0,01708	-0,01636	0,01708	0,01636
Случай 2	0,1031	0,09928	-0,01727	-0,01670	0,01727	0,01670

При помощи вычисленных из нашей системы смещений находим распор H по формуле

$$H = \frac{M}{i}$$

Для срединной точки получаем:

$$H_1 = \frac{14051,452}{20,1093} = 698,75 \text{ кгс} = 6854,74 \text{ н.}$$

Разница составляет 0,06% и ее можно считать несущественной.

Выводы

Приведенный прямой метод расчета дискретной вантовой сетки отрицательной кривизны позволяет определить усилия и смещения системы при воздействии произвольных вертикальных нагрузок. Возможен учет деформации контура. В ходе решения задачи определяются как усилия отдельных участков, так и распределение контактных усилий. Наличие подобных коэффициентов в разрешающих уравнениях упрощает их составление. Решение системы в линейной постановке легко осуществляется с помощью электронных вычислительных машин. Также возможна разработка дополнительной программы для составления уравнений по вышеизложенному алгоритму. В дальнейшем предусмотрено установление пределов применимости линейной и нелинейной теории в зависимости от соотношений размеров покрытия.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Качурин. Теория висячих систем. Ленинград—Москва, 1962.
2. Висячие покрытия (тр. совещ. по исслед. и внедр. висячих покрытий). Москва, 1962.
3. В. Р. Кульбах. Упрощенный расчет предварительно напряженных висячих покрытий отрицательной кривизны. Труды ТПИ, серия А, № 200, 1963.

УДК 624.074
624.04

В. Р. Кульбах, Ю. К. Энгельбрехт

**О РАСЧЕТЕ УПРУГОЙ НИТИ ПО МЕТОДУ
ДЕФОРМАЦИИ**

Статический расчет отдельной упругой нити развит в нескольких работах. Широко известны труды Р. Н. Мацелинского [1] и В. К. Качурина [3]. А. Р. Ржаницин [4] дополнил проведенный таким же образом ход решения членами второго порядка малости. Одной из предпосылок в этих решениях является пологость нити. В. К. Качурин дает границы пологости $\frac{l}{f} = \frac{1}{10} \div \frac{1}{20}$, позволяя на некоторой комбинации нагрузок перейти эти границы. Большинство конструкций из упругих нитей удовлетворяют этому условию. Названное решение очень рационально и универсально — оно позволяет решать задачи с любой нагрузкой.

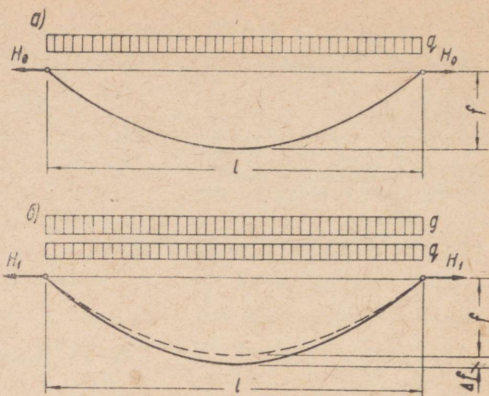
Проследим коротко ход расчета упругой нити по [3].
Длина нити при начальной нагрузке (фиг. 1) равна

$$L_0 = l + \frac{1}{2H_0^2} \int_1 Q_0^2 dx. \quad (1)$$

После дополнительного нагружения имеем

$$L_1 = l + \frac{1}{2H_1^2} \int_1 Q_1^2 dx. \quad (2)$$

В приведенных формулах Q_0 и Q_1 обозначают поперечные силы простой балки с таким же пролетом и выражения $\int_1 Q_0^2 dx$ и $\int_1 Q_1^2 dx$ — характеристики нагрузки до и после приложения дополнительной нагрузки.



Фиг. 1. Схема расчета нити: а) начальное состояние; б) после приложения дополнительной нагрузки

Упругую деформацию нити можно считать равной

$$\Delta L = \frac{(H_1 - H_0)l}{EF}, \quad (3)$$

где учитывается пологость нити, заменяя длину нити L_0 пролетом l и усилие в нити распором H .

Величины L_0 , L_1 и ΔL связаны следующей зависимостью:

$$L_1 = L_0 + \Delta L. \quad (4)$$

Подставляя в формулу (4) величины, определенные формулами (1), (2) и (3), получаем после простых преобразований уравнение для определения неизвестного распора H_1 :

$$H_1^3 + \left(\frac{EF}{2lH_0^2} \int_1 Q_0^2 dx - H_0 \right) H_1^2 - \frac{EF}{2l} \int_1 Q_1^2 dx = 0. \quad (5)$$

Для расчета пространственных преднапряженных висячих покрытий, состоящих из отдельных нитей, можно бы принципиально использовать такой же ход решения, составляя для каждой нити отдельное уравнение, но здесь возникают некоторые трудности. Начальным состоянием такого вида конструкций является предварительно напряженная система, которая реализуется контактными усилиями, возникающими в узлах несущих и стягивающих тросов. Считаем, что для начального состояния Q и H определены. При загрузивании конструкций контактные усилия изменяются благодаря деформациям конструкций, и в характеристиках нагрузки типа $\int_1 Q_1^2 dx$ появля-

ются дополнительно неизвестные изменения контактных усилий. Для полного решения получаемой системы уравнений третьей степени нужны дополнительные уравнения для определения изменения контактных усилий.

На кафедре строительных конструкций ТПИ разработана другая схема для расчета пространственных висячих покрытий. Ход решения задачи по идее В. Р. Кульбаха приведен в [2], [5] и [6]. Полученная система разрешающих уравнений решается относительно неизвестных смещений и контактных усилий. Представляет интерес применить эту схему для отдельной упругой нити, чтобы сравнить ее с изложенным выше ходом решения.

Как при вышеизложенном методе, так и здесь провисание нити должно быть известно для одной комбинации нагрузок. Начальным состоянием считаем равновесие нити при нагрузке q (фиг. 1).

Предполагаем, что равновесное положение нити представляет собой параболу

$$y = f \left(\frac{x}{a} \right)^2, \quad (6)$$

где $a = \frac{l}{2}$. Принципиально можно равновесное положение принимать и по цепной линии или по синусоиду, но используем параболу, как в [3]. Кроме того, названные кривые не различаются существенно при инженерных расчетах и они находят применение для облегчения расчетов (для задач динамики принимают за равновесное положение обычно синусоид).

Длина нити равна

$$L = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx. \quad (7)$$

При помощи уравнения (6) находим для начального состояния

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2f}{a^2} x, \quad (8)$$

и после приложения дополнительной нагрузки

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(f + \Delta f)}{a^2} x. \quad (9)$$

Теперь вычисляем при помощи уравнения (7) длину нити для обеих комбинаций нагрузок, разложив подкоренные вы-

ражения в ряд Маклорена. Получаем до точности двух членов:

$$L_0 = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l} \quad (10)$$

и

$$L_1 = l + \frac{8}{3} \frac{(f + \Delta f)^2}{l}. \quad (11)$$

Из уравнений (4) находим ΔL :

$$\Delta L = L_1 - L_0 = \frac{8}{3l} (2f \cdot \Delta f + \Delta f^2). \quad (12)$$

С другой стороны, упругую деформацию можно вычислить:

$$\Delta L = \int_L \frac{\Delta T ds}{EF}. \quad (13)$$

Здесь заменяем:

$$\Delta T = \frac{\Delta H}{\cos \alpha}; \quad ds = \frac{dx}{\cos \alpha};$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{2f}{a^2} \right)^2 x^2.$$

Получаем:

$$\Delta L = 2\Delta H \int_0^{\frac{l}{2}} \left[1 + \left(\frac{2f}{a^2} \right)^2 x^2 \right] dx. \quad (14)$$

Известно, что

$$\Delta H = H_1 - H_0 = \frac{(q+g)l^2}{8(f+\Delta f)} - \frac{ql^2}{8f}. \quad (15)$$

Подставляя величину ΔH из уравнения (15) в уравнение (13), получаем:

$$\Delta L = \frac{(3l^3 + 16f^2l)(gf - q\Delta f)}{24EF \cdot f(f + \Delta f)}. \quad (16)$$

Приравняв величины ΔL из уравнений (12) и (16), получаем окончательное уравнение для определения изменения провисания Δf :

$$\Delta f^3 + 3f\Delta f^2 + \left(\frac{3gl^4}{64EF} + \frac{ql^2f}{4EF} + 2f^2 \right) \Delta f - \left(\frac{3ql^4}{64EFf} + \frac{gf^2l^2}{4EF} \right) = 0. \quad (17)$$

Полученное уравнение в данном виде подходит только для вычисления изменения прогиба при равномерно распределенной нагрузке, в этом его недостаток. При других комбинациях нагрузок приходится дугу нити делить на отдельные участки и вычислять упругие деформации отдельно для каждой части. В общем случае отдельной нити это довольно трудоемко. Отдельную нить пространственных конструкций можно считать состоящий из отдельных отрезков, где в местах перелома, т. е. в узлах действуют как контактное усилие, так и внешняя нагрузка. При этом узлы находятся на кривой, что соответствует поверхности покрытия. Расчет упругих деформаций отдельных прямых отрезков существенно легче, сравнивая с кривыми.

В дальнейшем рассмотрим разницу двух методов на примерах. Вычислим упругую нить при равномерно распределенной нагрузке для разных отношений

Пусть $l=100$ м; $F=25$ см²; $E=2 \cdot 10^6$ кг/см² = 1,962 Гн/м²; начальная нагрузка $q=25$ кг/м = 245,25 н/м; дополнительная нагрузка $g=250$ кг/м = 2452,5 н/м. Определим распоры и изменения провисания срединной точки нити при следующих значениях:

f м	25	10	5	2,5	2	1
$\frac{f}{l}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$

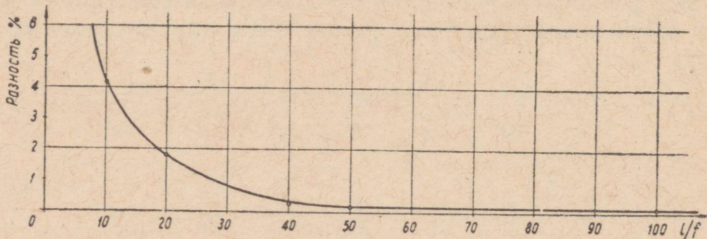
Не показывая промежуточных вычислений, приводим результаты в таблице 1.

Как видно из таблицы, разница в распорах и в провисаниях доходит до 0,14%. В смещениях разность больше (фиг. 2).

Вполне естественно, что при росте отношения $\frac{f}{l}$ разность в смещениях, вычисляемых по-разному, увеличивается. Это потому, что при выведении уравнения (5) принимали длину нити L равной пролету l в уравнении упругой деформации. Когда пологость увеличивается, то разность асимптотически уменьшается. Приведенный расчет показывает довольно точную сходимость данных методов.

Рассмотрим теперь примеры расчета нитей, состоящих из отдельных отрезков. Методика расчета для пространственных конструкций приведена в [6], здесь применяем ее для отдельной нити. В общем случае получаем нелинейную систему уравнений, которую при равномерной нагрузке можно с ма-

№	Наименование величин	Используемое разрешающее уравнение	Ед. изм.	$\frac{f}{l}$					
				$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$
1	H_1	5	т	13,74	33,98	63,51	96,91	105,05	122,72
2	H_1	16	т	13,74	33,96	63,42	96,85	105,00	122,63
3	H_1	5	кн	134,79	333,34	623,03	950,69	1030,34	1203,88
4	H_1	16	кн	134,79	333,15	622,15	950,10	1030,05	1203,00
5	f_1	5	м	25,0182	10,1162	5,4125	3,5471	3,2123	2,8010
6	f_1	16	м	25,0250	10,1210	5,4202	3,5493	3,2738	2,8031
7	Δf	5	см	1,82	11,62	41,25	104,71	127,23	180,10
8	Δf	16	см	2,50	12,10	42,02	104,93	127,38	180,31
9	$\frac{\Delta f_5 - \Delta f_{16}}{\Delta f_{16}} \cdot 100$	—	%	37,4	4,13	1,87	0,21	0,118	0,116

Фиг. 2. Гравик разностей величины Δf , вычисленной по двум методам.

ленькой погрешностью заменить линейной системой; при неравномерной нагрузке погрешность увеличивается. Достоинством является вычисление горизонтальных смещений, что в некоторых случаях оказывается полезным.

Пример 1

Вычислим распор и смещения троса по фигуре 3 после приложения нагрузки $5 \tau = 19,05 \text{ кн}$ в каждый узел. Пусть площадь сечения троса будет 25 см^2 ; модуль упругости равен $2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = 2 \cdot 10^2 \text{ Гн/м}^2$; $P_0 = 5 \tau = 49,05 \text{ кн}$.

Вычисляем упругие деформации отрезков 01 и 12 по примеру уравнений (12) и (14) и по методике, приведенной в [6]. Составляем систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} -5,61 \Delta f + 62,3 \Delta x + 5 = 0 \\ -2,5 \Delta f - 5000 \Delta x + 5 = 0 \end{cases}$$

при решении которой получим:

$$\Delta f = 0,895 \text{ м}, \quad \Delta x = 0,00055 \text{ м}.$$

Вычисляем распор H_1 , учитывая с Δf :

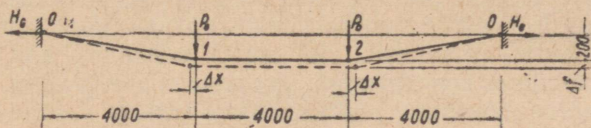
$$H_1 = \frac{M_1}{f} = \frac{400}{2,895} = 138,2 \text{ т} = 1355 \text{ кн}.$$

По классическому методу вычисляем H_1 из уравнения:

$$H_1^3 - 58,333 H_1^2 - 1,667 \cdot 10^6 = 0,$$

откуда $H_1 = 141,5 \text{ т} = 1388,12 \text{ кн}$.

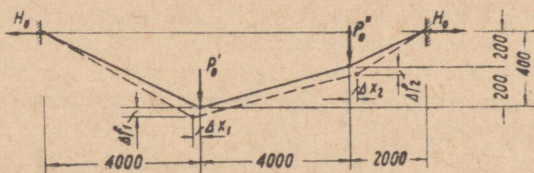
Разница в величинах усилия и провисания составляет 2,35%, разница в изменении провисания 8,2%.



Фиг. 3. Схема к примеру 1. Размеры в сантиметрах

Пример 2

Вычислить распор и смещения троса по фигуре 4 после приложения нагрузки 5 т = 49,05 кн в каждый узел. Другие данные аналогичны примеру 1; $P_0^I = 15 \text{ т} = 147,15 \text{ кн}$; $P_0^{II} = 5 \text{ т} = 49,05 \text{ кн}$.



Фиг. 4. Схема к примеру 2. Размеры в сантиметрах

Для нахождения смещений троса придется составлять систему из четырех уравнений, где неизвестными являются 2 вертикальных и 2 горизонтальных смещения.

Система уравнений:

$$\begin{cases} -23,36\Delta f_1 + 2,51\Delta f_2 + 185 \Delta x_1 & + 5 = 0 \\ + 4,34\Delta f_1 - 6,84\Delta f_2 - 186,7\Delta x_1 - 186,7\Delta x_2 + 5 = 0 \\ + 5,63\Delta f_1 - 10,62\Delta f_2 - 62,3\Delta x_1 - 62,3\Delta x_2 + 5 = 0 \\ + 2,51\Delta f_1 - 20,01\Delta f_2 & + 123,1\Delta x_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

Решая уравнение, получаем округленно: $\Delta f_1 = 0,12 \text{ м}$; $\Delta f_2 = 0,46 \text{ м}$; $\Delta x_1 = 0,031 \text{ м}$; $\Delta x_2 = -0,019 \text{ м}$. Из соответствующей нелинейной системы получим: $\Delta f_1 = 0,13 \text{ м}$; $\Delta f_2 = 0,36 \text{ м}$; $\Delta x_1 = 0,033 \text{ м}$; $\Delta x_2 = -0,026 \text{ м}$.

Как видно, решения линейной системы не удовлетворяют условия совместности усилий, так как для распора H_1 получим разные значения из

равновесия узлов 1 и 2, соответственно 136 и 130 т (1334,2 кн и 1275,3 кн). Учитывая решения нелинейной системы, получаем единичное значение для $H_1 = 135,4$ т = 1328,3 кн.

Уравнение (5) для нити;

$$H_1^3 + 75 H_1^2 - 3,6 \cdot 10^6 = 0,$$

откуда $H_1 = 132$ т = 1294,9 кн.

Величины смещений равны $\Delta f_1 = 0,24$ м; $\Delta f_2 = 0,42$ м. Разница в величинах распора и провисаний составляет 2,6%, но в смещениях она достигает до 42%. Такая разница обусловлена, с одной стороны, и горизонтальными смещениями, которыми не учитывают в классической теории.

Вышеизложенная методика расчета не претендует на место подходящей схемы расчета для отдельной нити из-за трудоемкости. Ее можно использовать только для вычислений горизонтальных смещений. Но схема подходит для расчета пространственных конструкций, как показано в [2, 5, и 6]. Цель данной статьи показать тесную связь между классической и вышеизложенной методиками расчета. Как видно из примеров, разница в усилиях в худшем случае доходит до 3%, причем это обусловлено и учетом горизонтальных смещений. Использование данной схемы оправдано для расчета пространственных преднапряженных висячих конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Мацелинский. Статический расчет гибких висячих конструкций. Москва—Ленинград, 1950.
2. Х. Х. Лауль, В. Р. Кульбах, А. А. Сумбак. О вопросах статического расчета и испытания конструкций покрытия Таллинской певческой эстрады. Труды ТПИ, серия А, № 184, 1961.
3. В. К. Качурин. Теория висячих систем. Ленинград—Москва, 1962.
4. Висячие покрытия (Тр. совещ. по исслед. и внедр. висячих покрытий). Москва, 1962.
5. В. Р. Кульбах. Упрощенный расчет предварительно напряженных висячих покрытий отрицательной кривизны. Труды ТПИ, серия А, № 200, 1963.
6. В. Р. Кульбах, Ю. К. Энгельбрехт. Расчет висячих покрытий отрицательной кривизны с конечным числом тросов. См. наст. сборник, стр. 39.

УДК 621.031
624.012.4.056

А. А. Сумбак

РАСЧЕТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Введение

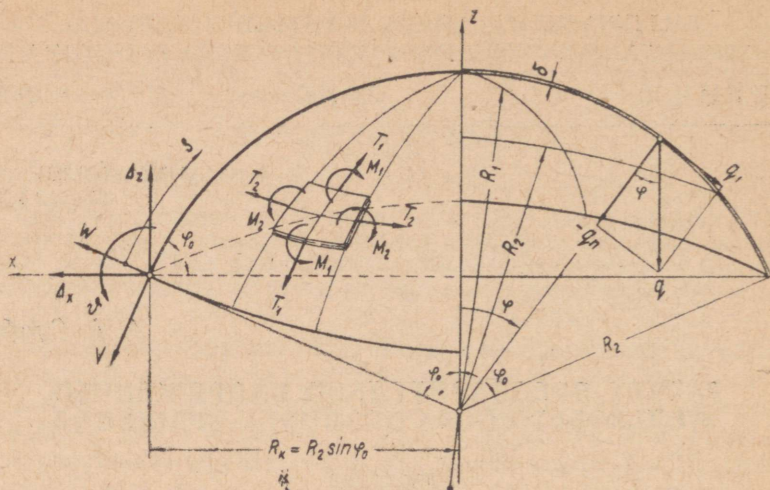
Железобетонные оболочки вращения (купола) являются весьма эффективными и экономичными конструкциями, которыми можно покрыть большие пролеты (200 м и даже больше). Однако при конструировании возникают некоторые трудности, вызванные краевым эффектом в районе опорного кольца. Возникающие у опорного кольца большие растягивающие усилия T_2 и изгибающие моменты M_1 требуют дополнительную арматуру, а также увеличение толщины оболочки в этой зоне. При сборных оболочках горизонтальное перемещение опорного кольца и восприятие растягивающих усилий вызывают существенные конструктивные трудности. Все эти недостатки могут быть устранены применением предварительного напряжения опорного кольца.

В данной статье изложен практический метод расчета предварительно напряженных оболочек вращения на базе методики, предложенной В. В. Новожиловым [1] для расчета оболочек без предварительного напряжения.

1. Расчетная схема

Рассматриваются оболочки вращения (купола), срединная поверхность которых образуется вращением плоской кривой вокруг оси z (фиг. 1), с предварительно напряженным опорным кольцом (фиг. 2).

Соответственно обозначениям, приведенным на фиг. 1, усилия и перемещения оболочки могут быть выражены формулами, изложенными В. В. Новожиловым [1]:



Фиг. 1

$$M_1 = \left[M_0 \sqrt{2} \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2R_2 c} \sin \varphi_0 (Q_{x0} - Q_{x0}^*) \sin \beta \right] e^{-\beta},$$

$$M_2 \approx \sqrt{M_1}$$

$$T_1 = \left[\cos \varphi_0 (Q_{x0} - Q_{x0}^*) \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} \right) + M_0 \sqrt{\frac{2}{R_2 c}} \operatorname{ctg} \varphi_0 \sin \beta \right] e^{-\beta} + T_1^*,$$

$$T_2 = \left[\sqrt{\frac{2R_2}{c}} \sin \varphi_0 (Q_{x0} - Q_{x0}^*) \cos \beta - \frac{\sqrt{2} M_0}{c} \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} \right) \right] e^{-\beta} + T_2^*, \quad (1)$$

$$\omega = \frac{R_2 \sqrt{2}}{E \delta} \left[\frac{R_2}{c} (Q_{x0} - Q_{x0}^*) \sin \varphi_0 \cos \beta - \frac{M_0}{c} \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} \right) \right] e^{-\beta} + \omega^*,$$

$$\Delta_x = \frac{R_2 \sqrt{2}}{E \delta} \sin \varphi \left[\sqrt{\frac{R_2}{c}} (Q_{x0} - Q_{x0}^*) \sin \varphi_0 \cos \beta - \frac{M_0}{c} \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} \right) \right] e^{-\beta} + \Delta_x^*,$$

$$\vartheta = - \frac{1}{E \delta} \sqrt{\frac{2R_2}{c}} \left[\sqrt{\frac{R_2}{c}} \sin \varphi_0 (Q_{x0} - Q_{x0}^*) \cos \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{c} M_0 \cos \beta \right] e^{-\beta} + \vartheta^*, \quad (1)$$

где

$$c = \frac{\delta}{\sqrt{12(1-\nu^2)}},$$

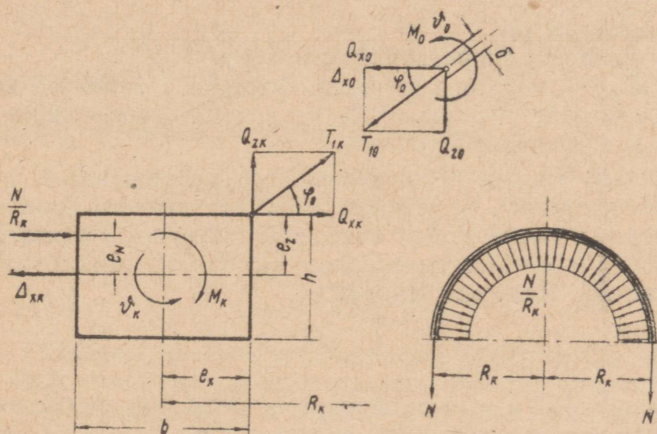
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s}{\sqrt{R_{20}c}},$$

$$Q_{x0}^* = T_1^* \cos \varphi_0, \quad (2)$$

где R_{20} — значение радиуса R_2 у опорного кольца ($\varphi = \varphi_0$).

В формулах (1) звездочками обозначены усилия и перемещения, определяемые по безмоментной теории оболочек.

Краевые значения усилия Q_x и изгибающего момента M_1 (соответственно Q_{x0} и M_0 в формулах (1)), определяем из контактной задачи на линии примыкания оболочки к опорному кольцу.



Фиг. 2

Учитывая, что на контактной линии (фиг. 2) должны быть соблюдены условия:

$$\Delta_{xk} = \Delta_{x0}, \quad \vartheta_k = \vartheta_0, \quad Q_{xk} = Q_{x0}, \quad M_k = M_0, \quad (3)$$

полчим:

$$\Delta_{xk} = \alpha_{11} Q_{x0} + \alpha_{12} M_0 - \alpha_{11} Q_{x0}^* + \Delta_{x0}^*,$$

$$\vartheta_k = \alpha_{21} Q_{x0} + \alpha_{22} M_0 - \alpha_{21} Q_{x0}^* + \vartheta_0^*, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{vk} &= -\frac{R_k^2}{E_k bh} \left(Q_{x0} + \frac{N}{R_k} \right), \\ \sigma_k &= \frac{R_k^2}{E_k I_k} \left(-M_0 - Q_{x0} e_z + T_{10}^* e_x \sin \varphi_0 \mp \frac{N}{R_k} e_N \right), \\ \alpha_{11} &= \frac{2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E} \left(\frac{R_{20}}{\delta} \right)^{\frac{3}{2}} \sin^2 \varphi_0, \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= -\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{E \delta^2} R_{20} \sin \varphi_0, \\ \alpha_{22} &= \frac{4 [3(1-\nu^2)]^{\frac{3}{4}}}{E \delta^2} \sqrt{\frac{R_{20}}{\delta}}. \end{aligned} \quad (5)$$

В формулах (5)

N — усилие в напрягаемой арматуре,

E и E_k — модули упругости оболочки и опорного кольца,

I_k — момент инерции опорного кольца относительно оси x ,

ν — коэффициент Пуассона.

Величину усилия предварительного напряжения N целесообразно определить из условия, обеспечивающего практически безмоментное напряженное состояние оболочки. Размеры сечения опорного кольца определили, исходя из конструктивных соображений. Далее из условия

$$\Delta_{xk} = \Delta_{x0}^* \quad (6)$$

при помощи (5) и перемещения края оболочки, определяемого по безмоментной теории (9), получим

$$N = -R_k T_{10}^* \cos \varphi_0 - \frac{E_k bh}{E \delta} (T_{20}^* - \nu T_{10}^* \sin \varphi_0). \quad (7)$$

Изложенная методика применима для расчета оболочек вращения разной формы (сферические, эллипсоидические, параболические, гиперболические). При расчете следует иметь в виду, что соответственно форме оболочки изменяются лишь величины, определяемые по безмоментной теории (обозначены звездочкой). Перемещения можем определить в следующем виде:

$$\omega^* = \Delta_x^* \sin \varphi + \Delta_z^* \cos \varphi,$$

$$v^* = \Delta_x^* \cos \varphi - \Delta_z^* \sin \varphi, \quad (8)$$

где

$$v^* = \left(\int \frac{1}{E\delta} [T_1^* R_1 + vR_2] - T_2^* (R_2 - vR_1) \right] \frac{d\varphi}{\sin \varphi} + C \sin \varphi,$$

$$\omega^* = \frac{R_2}{E\delta} (T_2^* - vT_1^*) - v^* \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\Delta_x^* = \frac{R_2 \sin \varphi}{E\delta} (T_2^* - vT_1^*), \quad (9)$$

где постоянное C определяем в зависимости от краевых условий у опорного кольца.

Для определения безмоментных усилий (фиг. 1) имеем:

$$T_1^* = -\frac{q}{R_2 \sin^2 \varphi} \int_0^{\varphi} R_1 R_2 \sin \varphi \, d\varphi,$$

$$T_2^* = -qR_2 \cos \varphi + \frac{q}{R_1 \sin^2 \varphi} \int_0^{\varphi} R_1 R_2 \sin \varphi \, d\varphi, \quad (10)$$

Выражая радиусы кривизны формулами

$$R_1 = \frac{R}{(\sqrt{1+k \sin^2 \varphi})^3},$$

$$R_2 = \frac{R}{\sqrt{1+k \sin^2 \varphi}}, \quad (11)$$

можем оболочки вращения, срединные поверхности которых образуются вращением кривых второго порядка вокруг их оси симметрии, подразделить в зависимости от постоянной k следующим образом: $k=0$ — сфера; $k=-1$ — параболоид; $k > -1$ — эллипсоиды; $k < -1$ — гиперboloиды. В формулах (11) R обозначает радиусы кривизны в вершине оболочки ($\varphi=0$).

Для сферических оболочек, широко применяемых в практике ($R_1=R_2=R$), учитывая (9) и (10), получим:

$$T_1^* = -\frac{qR}{1+\cos \varphi},$$

$$T_2^* = -qR \left(\cos \varphi - \frac{1}{1+\cos \varphi} \right),$$

$$v^* = \frac{qR^2}{E\delta} \left[(1-v) \ln \sin \varphi - (1-v^2) \left(\frac{1}{2(1+\cos \varphi)} + \operatorname{Intg} \frac{\varphi}{2} \right) + C \right] \sin \varphi,$$

$$\omega^* = \frac{qR^2}{E\delta} \left(\frac{1+\nu}{1+\cos\varphi} - \cos\varphi \right) - \nu^* \operatorname{tg}\varphi, \quad (12)$$

$$\Delta_x^* = \frac{qR^2 \sin\varphi}{E\delta} \left(\frac{1+\nu}{1+\cos\varphi} - \cos\varphi \right),$$

$$\vartheta^* = - \frac{qR}{E\delta} 2\sin\varphi.$$

Аналогично для параболических оболочек

$$T_1^* = - \frac{qR}{3} \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{1+\cos\varphi} \right), \quad (13)$$

$$T_2^* = -qR \left[1 - \frac{\cos^2\varphi}{3} \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{1+\cos\varphi} \right) \right]$$

и для эллиптических оболочек:

$$T_1^* = - \frac{qR_k \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2\varphi}}{\sin^2\varphi} \left\{ \frac{(1-\cos\varphi)(1+\varepsilon^2 \cos\varphi)}{1+\varepsilon^2 \cos^2\varphi} + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon} \ln \left[\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \sqrt{\frac{1-\varepsilon \cos\varphi}{1+\varepsilon \cos\varphi}} \right] \right\}, \quad (14)$$

$$T_2^* = - \frac{qR_k \cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2\varphi}} - \frac{1-\varepsilon^2 \cos^2\varphi}{1-\varepsilon^2} T_1^*,$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{k}{1+k}, \quad (15)$$

Численный пример

В качестве примера рассчитаем сферическую оболочку (купол), нагруженную собственным весом q . Исходные данные расчета (фиг. 1 и 2) следующие:

$$\left. \begin{array}{lll} R = 60,0 \text{ м}, & \delta = 0,07 \text{ м}, & \Omega = bh = 0,5 \times 0,6 \text{ м}, \\ R_k = 40,0 \text{ м}, & q = 0,330 \text{ т/м}^2, & E = 300.000 \text{ кг/см}^2. \\ \varphi_0 = 41,9^\circ, & s_0 = 43,88 \text{ м}, & \end{array} \right\} (16)$$

По формуле (7) определим оптимальную величину усилия предвзятельного напряжения

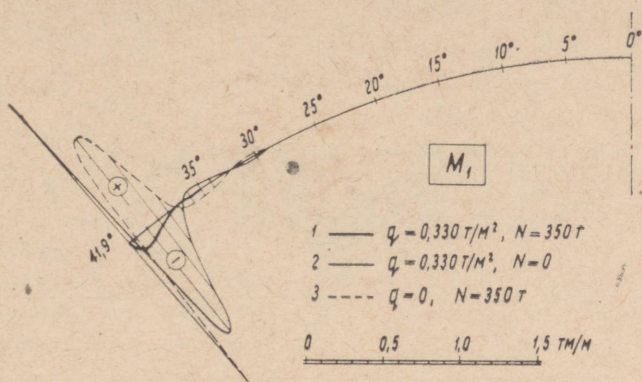
$$N \approx 350 \text{ т}. \quad (17)$$

Далее, используя формулы (5) (см. фиг. 2), составим систему уравнений (4). В данном примере предполагается, что опорное кольцо опирается так, что оно может свободно перемещаться в горизонтальном направлении, но не может иметь поворота ($\varphi_k = 0$). В этом случае получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 0,0115Q_{x0} - 0,00929 M_0 + 0,974 &= 0, \\ -0,00929Q_{x0} + 0,0178 M_0 - 0,0786 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

откуда

$$M_0 = -0,0082 \text{ Тм/м}, \quad Q_{x0} = -8,48 \text{ Т/м}. \quad (19)$$



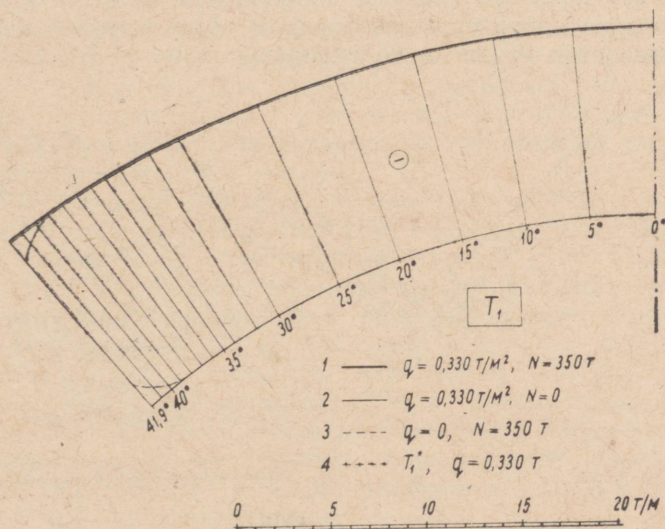
Фиг. 3

Совершенно аналогично составим систему уравнений для оболочки без предварительного напряжения ($N=0$):

$$\left. \begin{aligned} 0,0115Q_{x0} - 0,00929 M_0 + 0,0818 &= 0; \\ -0,00929Q_{x0} + 0,0178 M_0 - 0,0786 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

которую удовлетворяют:

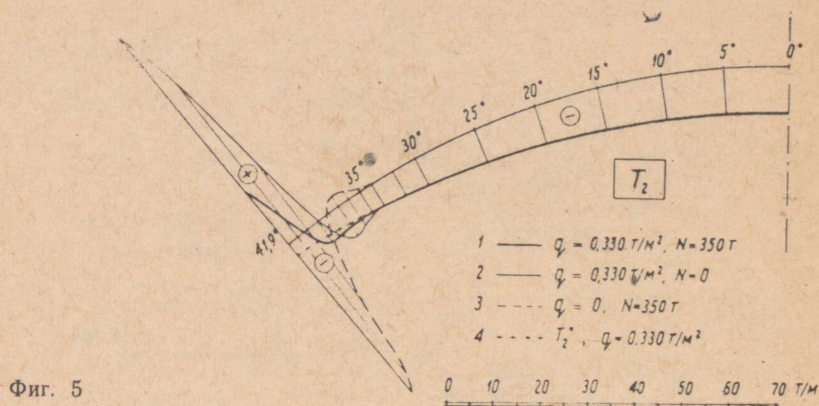
$$M_0 = 1,22 \text{ Тм/м}, \quad Q_{x0} = -6,13 \text{ Т/м}. \quad (21)$$



Фиг. 4

Зная (19) и (21), определим по формулам (1) усилия и перемещения оболочек с предварительным напряжением и без предварительного напряжения. Для упрощения и наглядности расчета вычисления целесообразно произвести его в табулированном виде.

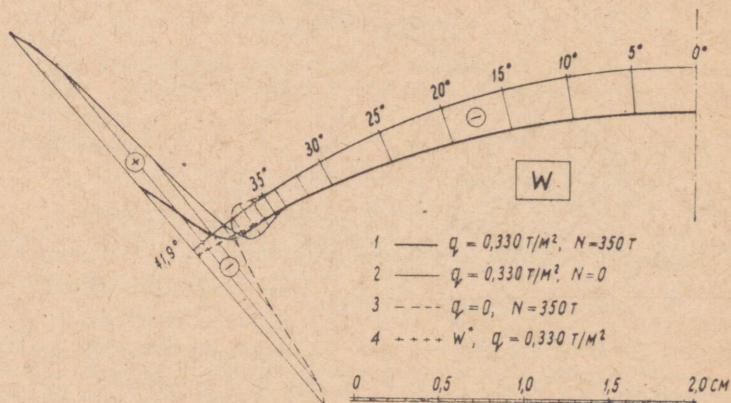
Некоторые результаты вычислений представлены на фигурах 3—7.



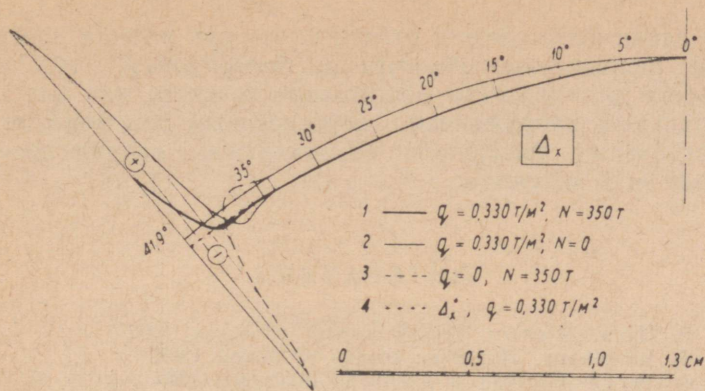
Фиг. 5

Заключение

Из сравнения оболочек с предварительным напряжением и без предварительного напряжения следует, что предварительное напряжение вызывает в зоне опорного кольца явное изменение усилий и перемещений (фиг. 3—7). В данном слу-



Фиг. 6



Фиг. 7

чае влияние предварительного напряжения охватывает зону у опорного кольца шириной примерно 7° — 8° . В предварительно напряженных оболочках (на фигурах обозначено линией 1) достигается безмоментное напряженное состояние почти на протяжении всей оболочки. Следует отметить, что на фиг. 4—7 усилия и перемещения определены по безмоментной теории (обозначены линией 4) и не указаны там, где они полностью совпадают с соответственными величинами предварительно напряженной оболочки (линия 1).

Предварительным напряжением почти полностью ликвидируются изгибающие моменты M_1 (фиг. 3) и не требуется дополнительная арматура. При этом следует отметить, что при оболочке без предварительного напряжения при данной толщине оболочки конструктивно невозможно восприятие изгибающих моментов ($M_1 = 1,22 \text{ Tm/m}$).

Примерно два раза уменьшается зона растяжения и при этом суммарное растягивающее усилие T_2 уменьшается примерно в десять раз (фиг. 5). Почти аналогичное влияние имеет предварительное напряжение на перемещения w и Δ_x (фиг. 6—7). На усилия T_1 предварительное напряжение практически не влияет (фиг. 4).

Применением предварительного напряжения достигается значительная экономия в арматуре, а также отпадает необходимость утолщения оболочки в зоне примыкания к опорному кольцу. Одновременно практически ликвидируется нежелательная зона растяжения в районе опорного кольца и предотвращается возникновение трещин.

В заключение следует отметить, что при расчете предварительно напряженных оболочек по безмоментной теории достигается для практики достаточная точность, так как предварительным напряжением, определенным по формуле (7), обеспечивается практически безмоментное напряженное состояние всей оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек. 1962.
2. К. Ф. Черных. Линейная теория оболочек. 1962.
3. В. Флюгге. Статика и динамика оболочек. 1961.

СОДЕРЖАНИЕ

1. И. И. Ааре. К вопросу расчета металлических цилиндрических оболочек	3
2. И. И. Ааре, С. И. Иднурм. Расчет высоких тонкостенных металлических балок	13
3. Ю. К. Энгельбрехт. Экспериментальное исследование работы предварительно напряженных висячих конструкций	23
4. В. Р. Кульбах, Ю. К. Энгельбрехт. Расчет висячих покрытий отрицательной кривизны с конечным числом тросов	39
5. В. Р. Кульбах, Ю. К. Энгельбрехт. О расчете упругой нити по методу деформации	57
6. А. А. Сумбак. Расчет предварительно напряженных железобетонных оболочек вращения	65

Статьи поступили в редакцию 29 X 1966 г.

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ
И
СТРОИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА
Сборник статей
V

Таллинский политехнический институт
Редактор В. Райдна
Технический редактор Л. Лоопер

Сдано в набор 17 XI 1966. Подписано к печати 29 XII 1967. Бумага 60 × 90 1/16.
Печатных листов 4,75. Учетно-издательских листов 3,5. Тираж 500. МВ 11339.
Заказ № 1880.

Типография «Коммунист», Таллин, ул. Пикк 2.

Цена 23 коп.

Цена 23 коп.