



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

---

---

M. Liigant

MATEMAATILISE FÜÜSIKA  
VÕRRANDID

I

TARTU 1977

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Teoreetilise füüsika kateeder

M. Liigant

MATEMAATILISE FÜÜSIKA  
VÕRRANDID

I

Põhivõrrandid. Klassifikatsioon.

Cauchy ülesanne.

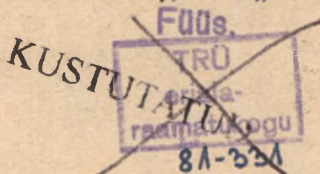
TARTU 1977

Kinnitatud Füüsika-Keemiateaduskonna nõukogus  
17. detsembril 1976

Käesolev väljaanne on esimene osa õppevahendist füüsikaosakonna üliõpilastele matemaatilise füüsika võrrandite kursuse omandamiseks. Materjali valikult ja yulatuselt vastab õppevahend põhilises osas ametlikule programmile. Oluliselt erinev on aga materjali esitamise järjekord. Kõige esmalt tuletatakse need võrrandid, mille lahendamist mitmesugustel lisatingimustel hiljem vaadeldakse. Seejärel käsitletakse küsimusi seoses matemaatilise füüsika ülesannete seadega. Põhiline osa materjalist on pühendatud lahendusmeetodite esitamisele ja konkreetsete ülesannete lahendamisele, kusjuures seda tehakse ülesannete, mitte võrrandite, tüüpide kaupa. Suhteliselt vähe tähelepanu on osutatud ülesannete seade korrektsuse küsimusele. Seepärast käesolev õppevahend vastab kõige enam õpikute [1], [2] vaimule.

Esitatav materjal on jaotatud peatükkideks ja paragrahvideks, viimased jagunevad omakorda punktideks. Valemite numeratsioon on toodud paragrahvide kaupa. Iga paragrahvi viimases punktis on toodud ülesanded, mis taotleavad kas tekstis esitatud meetodite ja tulemuste rakendamist või seal esitatud materjali täiendamist.

*Lõpetatud,  
04.2014, B*



## S i s u k o r d

I. Matemaatilise füüsika ülesanded ja nende klassifikatsioon . . . . .	5
§ 1. Matemaatilise füüsika võrrandid . . . . .	5
1.1. Keele võnkumise võrrand . . . . .	5
1.2. Membraani võnkumise võrrand ja üldine lainevõrrand . . . . .	8
1.3. Varda pikivõnkumiste võrrand . . . . .	9
1.4. Telegraafivõrrand . . . . .	11
1.5. Soojustivuse võrrand . . . . .	13
1.6. Difusioonivõrrand . . . . .	16
1.7. Poissoni ja Laplace'i võrrandid . . . . .	16
1.8. Helmholtzi võrrand . . . . .	18
1.9. Ülesanded . . . . .	19
§ 2. Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite klassifikatsioon. . . . .	20
2.1. Klassifikatsioon $n$ sõltumatu muutuja korral	20
2.2. Klassifikatsioon kahe sõltumatu muutuja korral. . . . .	23
2.3. Lineaarne konstantsete kordajatega võrrand	28
2.4. Ülesanded . . . . .	30
§ 3. Matemaatilise füüsika ülesannete seade . . . . .	31
3.1. Alg- ja rajatingimused. . . . .	31
3.2. Segaülesanne, rajaülesanne, Cauchy ülesanne	34
3.3. Ülesande seade korrektsus . . . . .	38
3.4. Segaülesande lahendi ainsus . . . . .	40
3.5. Maksimumprintsip . . . . .	42
3.6. Ülesanded . . . . .	46

§ 4. Üldistatud funktsioonide ja üldistatud lahendi mõiste . . . . .	47
4.1. Üldistatud funktsioonid e. distributsioonid. . . . .	47
4.2. Delta-funktsioon $\delta(x)$ . . . . .	50
4.3. Üldistatud lahendi mõiste . . . . .	55
4.4. Ülesanded. . . . .	57
II. Cauchy ülesanne . . . . .	59
§ 5. Levivate lainete meetod. . . . .	59
5.1. Homogeense lõpmatu keele vabad võnkumised. . . . .	59
5.2. Lainete peegeldumine keele otspunktis. . . . .	65
5.3. Võrrandid, mille lahend avaldub suvalise profiiliga laine kujul . . . . .	70
5.4. Ülesanded. . . . .	73
§ 6. Cauchy ülesanne lainevõrrandi jaoks. . . . .	75
6.1. Poissoni valem . . . . .	75
6.2. Silindrilised lained . . . . .	80
6.3. Hilinev potentsiaal. . . . .	82
6.4. Ülesanded. . . . .	86
§ 7. Cauchy ülesanne soojusjuhtivuse võrrandi jaoks. . . . .	87
7.1. Soojuse levimine lõpmatus vardas . . . . .	87
7.2. Allikafunktsioon . . . . .	94
7.3. Soojuse levimine ruumis. . . . .	97
7.4. Ülesanded. . . . .	99
Kirjandus . . . . .	100

I. MATEMAATILISE FÜÜSIKA ULESANDED JA NENDE  
KLASSIFIKATSIOON

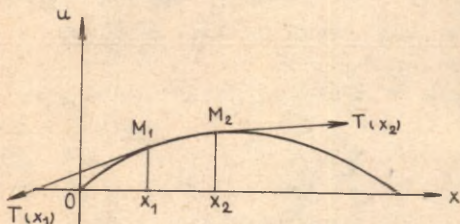
§ 1. Matemaatilise füüsika võrrandid

1.1. Keele võnkumise võrrand

Keeleks nimetame pinguletõmmatud elastset painduvat traati.

Olgu tasakaaluasendis keel suunatud piki  $x$ -telge. Kui ta sellest asendist välja viia ja jätta siis omapead, hakkab ta võnkuma. Tähistame  $u(x,t)$  keele punkti koordinaadiga  $x$  kõrvalekalde tasakaaluasendist ajamomendil  $t$ . Vaatleme edaspidi vaid keele väikesi ristvõnkumisi, s.t. oletame, et kõik keele punktid liiguvad ühes ja samas tasandis risti  $x$ -teljega ning tuletis  $\frac{\partial u}{\partial x}$  on sedavõrd väike, et võime piirduda kõige madalamat järku liikmega  $\frac{\partial u}{\partial x}$  suhtes.

Tähistame keele punktis  $x$  ajamomendil  $t$  mõjuva pingejõu  $T(x,t)$ . Näitame, et tehtud eeldustel  $T(x,t) = T_0 = \text{const}$ . Vaatleme selleks keele suvalist vahemikku  $(x_1, x_2)$ , mis tasakaaluasendist väljaviiduna on  $M_1 M_2$  (vt. joon. 1). Vahemiku  $M_1 M_2$  pikkus



Joon. 1

$$S_{M_1 M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$$

Seega keele võnkumisel tema pikennemist ei toimu. Hooke'i seaduse põhjal siis ping jõud keele mis tahes punktis ei sõltu ajast. Näitame, et ta ei sõltu ka keele punkti koordinaadist  $x$ . Keele vahemikule  $M_1 M_2$  mõjuvad järgmised jõud: a) ping jõud, mis tänu keele elastsusele on suunatud piki keele puutujat punktides  $M_1$  ja  $M_2$ , b) välis jõud, mille kohta eeldame, et nad mõjuvad risti  $x$ -teljega, c) inertsi jõud. Kuna vaatleme ainult ristvõnkumisi, siis peab nende jõudude  $x$ -teljega paralleelselt mõjuvate komponentide summa olema null:

$$T(x_1) \cos \alpha(x_1) - T(x_2) \cos \alpha(x_2) = 0,$$

kus  $\alpha(x)$  on nurk punktis  $x$  keelele võetud puutuja ja  $x$ -telje positiivse suuna vahel. Tehtud eeldustel

$$\cos \alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx 1$$

ning

$$T(x_1) \approx T(x_2).$$

Tänu vahemiku  $(x_1, x_2)$  suvalisusele võimegi teha järelduse, et väikeste võnkumiste korral ping jõud ei sõltu ka keele punkti koordinaadist.

Keele väikesi ristvõnkumisi kirjeldava võrrandi tutletamisel lähtume d'Alemberti printsiibist, mille kohaselt kõik keelele mõjuvad jõud, kaasa arvatud inertsi jõud, peavad olema tasakaalus. Leiame kõikide suvalisele keele vahemikule  $(x_1, x_2)$  mõjuvate jõudude komponendid risti  $x$ -teljega.

Vahemikule  $(x_1, x_2)$  mõjuva summaarse pingejõu  $u$ -telje suunaline komponent on

$$T_0 \sin \alpha(x_2) - T_0 \sin \alpha(x_1).$$

Kuna tehtud eelduste raames

$$\sin \alpha(x) = \frac{\tan \alpha(x)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx u_x,$$

siis

$$T_0 \sin \alpha(x_2) - T_0 \sin \alpha(x_1) = T_0 u_x \Big|_{x_1}^{x_2} = T_0 \int_{x_1}^{x_2} u_{xx} dx.$$

Tähistame risti  $x$ -teljega mõjuva välisjõu tiheduse (massiühikule mõjuva jõu)  $f(x, t)$  ja olgu  $\rho(x)$  keele lineaarne tihedus (pikkusühiku mass). Siis keele elemendile  $dx$  mõjuv välisjõud on  $\rho(x) dx f(x, t)$  ja kogu vahemikule  $(x_1, x_2)$  mõjub välisjõud

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) f(x, t) dx.$$

Keele elemendi  $dx$  kiirendus on  $u_{tt}(x, t)$  ning vahemikule  $(x_1, x_2)$  mõjub inertsijõud

$$- \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_{tt} dx.$$

Seega d'Alemberti printsiibi kohaselt

$$\int_{x_1}^{x_2} [T_0 u_{xx} + \rho(x) f(x, t) - \rho(x) u_{tt}] dx = 0. \quad (1.1)$$

Vahemiku  $(x_1, x_2)$  suvalisuse tõttu saab võrdus (1.1) kehtida ainult siis, kui keele mis tahes punktis  $x$  ja mis tahes ajahetkel  $t$

$$T_0 u_{xx} + \rho(x) f(x, t) - \rho(x) u_{tt} = 0$$

ehk

$$u_{tt} = \frac{T_0}{\rho(x)} u_{xx} + f(x, t). \quad (1.2)$$

Seda võrrandit nimetataksegi keele väikeste ristvõnkumiste võrrandiks ehk lühidalt keele võnkumise võrrandiks. Homogeense keele korral  $\rho(x) = \rho = \text{const}$  ning võrrandi (1.2) võib kirjutada kujul

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (1.3)$$

kus

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho} = \text{const}$$

(arvestame, et füüsikalist mõtet omavad ainult  $T_0$  ja  $\rho$  positiivsed väärtused). Kui keelele välisjõudu ei mõju, s.t.  $f(x, t) \equiv 0$ , siis saame võrrandi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

mida nimetatakse keele vabade võnkumiste võrrandiks. Kui välisjõu tihedus  $f(x, t) \neq 0$ , siis kõneldakse keele sundvõnkumistest.

## 1.2. Membraani võnkumise võrrand ja üldine lainevõrrand

Membraaniks nimetame servast ühtlaselt pingutatud õhukest elastset painduvat tasandilist kilet.

Kui tasakaaluasendis membraan paikneb  $(x, y)$ -tasandis, siis tema väikesi ristvõnkumisi kirjeldab võrrand

$$u_{tt} = \frac{T_0}{\rho(x, y)} (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad (1.4)$$

milles  $u = u(x, y, t)$  on otsitav funktsioon, mis annab membraani punkti  $(x, y)$  kõrvalekalde tasakaaluasendist ajamomendil  $t$ ,  $\rho(x, y)$  on membraani pindtihedus,  $T_0$  on ping jõud ja  $f(x, y, t)$  on membraanile risti  $(x, y)$ -tasandiga mõjuva välisjõu tihedus. Võrrandi (1.4) tuletuse, mis on analoogiline keele võnkumise võrrandi tuletusega, võib leida õpikust [1].

Homogeense membraani korral  $\rho(x, y) = \rho = \text{const}$  ja võrrand (1.4) omandab kuju

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t), \quad (1.5)$$

kus

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho} = \text{const.}$$

Välisjõu puudumisel  $f(x,y,t) \equiv 0$  ning saame membraani vabade võnkumiste võrrandi kujul

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}).$$

Homogeense keele võnkumise võrrand (1.3) ja membraani võnkumise võrrand (1.5) on vastavalt ühe- ja kahe- ja kolme- ja neljemeelse erijuht üldisest lainevõrrandist

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x,y,z,t), \quad (1.6)$$

kus  $a^2 = \text{const.}$  Võrrand (1.6) kirjeldab, näiteks, teatud lihtsustavatel eeldustel hääle levimist homogeenses gaasilises keskkonnas. Sel juhul otsitavaks funktsiooniks võib olla kas gaasi tihedus, rõhk või kiirusvälja potentsiaal. Võrrandi (1.6) tuletuse võib leida samuti õpikust [1].

Lainevõrrandi (1.6) võib kirjutada ka kujul

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t),$$

kus

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

on Laplace'i operaator. Kuna

$$\Delta u = \text{divgrad } u,$$

siis võib kasutada ka kuju

$$u_{tt} = a^2 \text{divgrad } u + f(x,y,z,t). \quad (1.7)$$

### 1.3. Varda pikivõnkumiste võrrand

Vaatleme elastset varrast, mille telg on suunatud piki  $x$ -telge. Kui varras telje sihis välja venitada või kokku suruda ja jätta seejärel omapead, siis tekivad temas pikivõnkumised. Tuletame võrrandi, mis kirjeldab neid võnkumisi.

Olgu varda mingi ristlõike koordinaat tasakaaluasendis  $x$  ja tähistagu  $X$  sama ristlõike  $x$ -koordinaati suvalisel ajamomendil  $t$ . Suurus  $u(x,t) = X - x$  annab ristlõike  $x$  kõrvalekalde tasakaaluasendist ajamomendil  $t$ . Väikeste võnkumiste korral vardas tekivad pingejõud allub Hooke'i seadusele. Selle seaduse rakendamiseks on vaja leida suhteline pikenemine sõltuvalt ristlõikest  $x$  ja ajamomendist  $t$ . Vaatleme varda vahemikku  $(x, x + \Delta x)$ . Ajamomendil  $t$  ristlõike  $x$  koordinaat on  $x + u(x,t)$ , ristlõikel  $x + \Delta x$  aga  $x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$ . Seega selle vahemiku suhteline pikenemine on

$$\frac{[x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)] - [x + u(x, t)] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}.$$

Leides piirväärtuse, kui  $\Delta x \rightarrow 0$ , saame, et suhteline pikenemine ristlõike  $x$  jaoks ajamomendil  $t$  on  $u_x(x, t)$ . Hooke'i seaduse kohaselt ristlõikele  $x$  mõjuv pingejõud on

$$T(x, t) = k(x)S(x)u_x(x, t),$$

kus  $S(x)$  - varda ristlõikepindala ja  $k(x)$  - Young'i moodul ( $k(x) > 0$ ).

Rakendame varda suvalise vahemiku  $(x_1, x_2)$  jaoks d'Alemberti printsiipi. Vahemikule mõjuv pingejõud on

$$\begin{aligned} k(x_2)S(x_2)u_x(x_2, t) - k(x_1)S(x_1)u_x(x_1, t) &= \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [k(x)S(x)u_x(x, t)] dx. \end{aligned}$$

Kui vardale mõjub veel  $x$ -telje suunas välisjõud tihedusega  $f(x, t)$ , siis vaadeldavale vahemikule mõjuv välisjõud on

$$\int_{x_1}^{x_2} S(x) \rho(x) f(x, t) dx,$$

kus  $\rho(x)$  on varda tihedus. Vahemiku  $(x_1, x_2)$  jaoks inertsi jõud

$$- \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) S(x) u_{tt}(x, t) dx.$$

D'Alemberti printsiibi kohaselt

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [k(x)S(x)u_x] + \rho(x)S(x)f(x,t) - \rho(x)S(x)u_{tt} \right\} dx = 0,$$

kust vahemiku  $(x_1, x_2)$  suvalisuse tõttu saamegi varda pikivõnkumiste võrrandi kujul

$$\rho(x)S(x)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} [k(x)S(x)u_x] + \rho(x)S(x)f(x,t) \quad (1.8)$$

ehk

$$u_{tt} = \frac{1}{\rho(x)S(x)} \frac{\partial}{\partial x} [k(x)S(x)u_x] + f(x,t).$$

Homogeense varda korral  $S(x) = S = \text{const}$ ,  $k(x) = k = \text{const}$  ja  $\rho(x) = \rho = \text{const}$ . Võrrand omandab kuju

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

kus  $a^2 = \frac{k}{\rho} = \text{const}$ . Näeme, et homogeense varda pikivõnkumiste võrrand langeb formaalselt kokku homogeense keele ristvõnkumiste võrrandiga (1.3).

Võrrandit (1.8) võib vaadelda kui ühemõttelist erijuhtu üldisest võnkumiste võrrandist

$$\rho(\mathbf{M})u_{tt} = \text{div} [k(\mathbf{M})\text{grad } u] - \rho(\mathbf{M})u + F(\mathbf{M},t), \quad (1.9)$$

kus otsitav funktsioon sõltub ruumipunkti  $\mathbf{M}$  koordinaatidest  $x, y, z$  ja ajast  $t$ , s.t.

$$u = u(x, y, z, t) = u(\mathbf{M}, t),$$

suurused  $\rho = \rho(x, y, z) = \rho(\mathbf{M})$ ,  $k = k(x, y, z) = k(\mathbf{M})$  ja  $q = q(x, y, z) = q(\mathbf{M})$  on määratud selle keskkonna omadustega, kus võnkumine toimub, seejuures füüsikalisest sisust tulenevalt  $\rho > 0$ ,  $k > 0$  ja  $q \geq 0$ , ning  $F(x, y, z, t) = F(\mathbf{M}, t)$  iseloomustab välisäirituse intensiivsust.

Võrrandi (1.9) erikujuks on ilmselt ka lainevõrrand (1.7).

#### 1.4. Telegraafivõrrand

Kui juhet läbib muutuv elektrivool, siis tekib juhtme ümber muutuv magnetväli, mis omakorda kutsub esile voolutugevuse  $i$  ja pinge  $v$  muutumise juhis. Tähistagu  $i(x, t)$

ja  $v(x,t)$  vastavalt voolutugevust ja pinget juhtme punktis  $x$  ajamomendil  $t$ . Oletame, et juhtme oomiline takistus, mahtuvus ja induktiivsus on konstantsed piki juhet. Tähistame need suurused juhtme pikkusühiku kohta vastavalt  $R, C$  ja  $L$ . Peale nende on vaja arvestada veel kadusid läbi isolatsioon. Kadu ajaühikus on võrdeline pingega ja vastavat võrdetegurit juhtme pikkusühiku kohta tähistame  $G$ .

Vaatleme juhtme elementi  $(x, x + dx)$ . Pingelang selles elemendis

$$v(x,t) - v(x + dx,t) = -v_x dx$$

avaldub Ohm'i seaduse kohaselt valemiga

$$-v_x dx = iR dx + i_t L dx. \quad (1.10)$$

Juhtme elementi ajaühikus siseneva ja temast ajaühikus väljuva laengu vahe

$$i(x,t) - i(x + dx,t) = -i_x dx$$

läheb selle elemendi laadimiseks ja kadudeks, s.t.

$$i_x dx = C v_t dx + G v dx. \quad (1.11)$$

Seostest (1.10) ja (1.11) saame järgmised kaks võrrandit voolutugevuse ja pinge määramiseks

$$v_x + L i_t + R i = 0, \quad (1.12)$$

$$i_x + C v_t + G v = 0. \quad (1.13)$$

Püüame saada eraldi võrrandid voolutugevuse ja pinge jaoks. Diferentseerime võrdust (1.13)  $x$  järgi, võrdust (1.12) korrutame suurusega  $-C$ , diferentseerime seejärel  $t$  järgi ning liidame. Saame

$$i_{xx} + G v_x - C L i_{tt} - C R i_t = 0.$$

Asendades  $v_x$  valemi (1.12) kohaselt, leiame võrrandi voolutugevuse jaoks

$$i_{xx} = C L i_{tt} + (G L + C R) i_t + G R i.$$

Analoogiliselt saame võrrandi pinge jaoks

$$v_{xx} = C L v_{tt} + (G L + C R) v_t + G R v.$$

Näeme, et voolutugevus ja pinge rahuldavad üht ja sama võrrandit

$$w_{xx} = a_0 w_{tt} + 2b_0 w_t + c_0 w, \quad (1.14)$$

milles  $a_0 = CL$ ,  $2b_0 = GL + CR$  ja  $c_0 = GR$ . Võrrandit (1.14) nimetatakse telegraafivõrrandiks.

Kui tuua sisse uus otsitav funktsioon  $u(x,t)$  seosega

$$w = e^{-\frac{b_0 t}{a_0}} u,$$

siis omandab võrrand (1.14) lihtsama kuju

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b^2 u, \quad (1.15)$$

milles

$$a^2 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{CL}, \quad b^2 = \frac{b_0^2 - a_0 c_0}{a_0} = \frac{(GL + CR)^2 - 4CLGR}{4CL}.$$

Kui kadusid võib mitte arvestada ja juhtme oomiline takistus on väga väike, s.t.  $G \approx 0$  ja  $R \approx 0$ , siis saame võrrandi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

### 1.5. Soojusjuhtivuse võrrand

Soojuse levimist mingis kehas või ruumpiirkonnas võib iseloomustada keha temperatuuriga  $u(x,y,z,t)$ . Kui keha erinevad osad on erineva temperatuuriga, siis leiab aset soojuse levimine kõrgema temperatuuriga osadelt madalama temperatuuriga osadele.

Vaatleme uuritava keha suvalist osa  $V$ , mis on ümbritsetud kinnise sileda pinnaga  $S$ . Keha osa  $V$  saab soojust juurde või annab ära tänu sellele, et toimub soojusvahetus teda ümbritsevate keha osadega ja temas võivad paikneda soojusallikad, mis eraldavad või neelavad soojust.

Pinda  $S$  läbiva soojushulga  $Q_1$  võib leida järgmiselt. Vaatleme pinnaelementi  $dS$  ja loeme teda läbiva soojushulga  $dQ_1$  positiivseks siis, kui see soojushulk siseneb keha ossa  $V$ . Fourier' seaduse kohaselt pinnaelementi

$dS$  ajavahemikus  $(t, t + dt)$  läbinud soojushulk on võrdeline pindalaga  $dS$ , ajavahemikuga  $dt$  ja temperatuuri muutisega pinnaelemendi välise normaali  $\vec{n}$  suunas:

$$dQ_1 = k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt.$$

Kui on tegemist isotroopse keha, s.t. keha juhib soojust kõikides suundades ühtemoodi, siis soojusjuhtivuse kordaja  $k$  on skalaarne suurus, seejuures mittehomogeense keha korral  $k = k(x, y, z)$ . Suvalises ajavahemikus  $(t_1, t_2)$  pinda  $S$  läbiv soojushulk on antud valemiga

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt.$$

Kuna  $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad } u \cdot \vec{n}$ , siis kasutades Ostrogradsky valemit, võime kirjutada

$$\int_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_V \text{div}(k \text{ grad } u) dV$$

ning

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \text{div}(k \text{ grad } u) dV.$$

Tähistame kehas olevate soojusallikate tiheduse  $f(x, y, z, t)$ . Ta annab ajaühikus ja ruumalaühikus eraldunud (kui  $f > 0$ ) või neeldunud (kui  $f < 0$ ) soojushulga. Keha osasse  $V$  ajavahemikus  $(t_1, t_2)$  eraldunud või temas neeldunud soojushulk  $Q_2$  on antud valemiga

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V f(x, y, z, t) dV.$$

Keha osasse  $V$  ajavahemikus  $(t_1, t_2)$  sisenenud (või sealt väljunud) soojushulk  $Q_1 + Q_2$  kutsub  $V$  igas punktis esile temperatuuri muutuse  $\Delta u = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)$ . Selleks muutuseks vajalik soojushulk  $Q$  on antud valemiga

$$Q = \int_V c \rho [u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)] dV = \\ = \int_V c \rho \int_{t_1}^{t_2} u_t dt dV,$$

milles  $c = c(x,y,z)$  on keha soojusmahtuvus ja

$\rho = \rho(x,y,z)$  on keha tihedus. Kuna  $Q = Q_1 + Q_2$ , siis

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V [c \rho u_t - \text{div}(k \text{grad } u) - \beta(x,y,z,t)] dV = 0.$$

Keha osa  $V$  ja ajavahemiku  $(t_1, t_2)$  suvalisuse tõttu kehtib see võrdus ainult siis, kui keha mis tahes punktis ja mis tahes ajamomendil

$$c \rho u_t = \text{div}(k \text{grad } u) + f(x,y,z,t). \quad (1.16)$$

Võrrandit (1.16) nimetatakse soojusjuhtivuse võrrandiks.

Homogeense keha korral  $c = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$  ja  $k = \text{const}$  ning soojusjuhtivuse võrrand omandab kuju

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + F(x,y,z,t), \quad (1.17)$$

kus  $a^2 = \frac{k}{c\rho} = \text{const}$  ja  $F(x,y,z,t) = \frac{f(x,y,z,t)}{c\rho}$ .

Soojusallikate puudumise korral  $f(x,y,z,t) = 0$  ning võrrand (1.16) omab kuju

$$c \rho u_t = \text{div}(k \text{grad } u).$$

Erijuhul, kui uuritavaks kehaks on õhuke  $z$ -teljega risti olev homogeenne plaat, mille põhjad on soojuslikult isoleeritud, võime lugeda, et temperatuur ei sõltu  $z$ -koordinaadist ning võrrand (1.17) omandab kuju

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + F(x,y,t). \quad (1.18)$$

Peene homogeenne varda korral, mis on suunatud piki  $x$ -telje ja mille külgpind on soojuslikult isoleeritud, saame

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x,t). \quad (1.19)$$

Võrrandeid (1.18) ja (1.19) võime vaadelda kui võrrandi (1.17) kahe- ja ühemõõtmelisi erijuhte.

## 1.6. Difusioonivõrrand

Kui keskkond on ebaühtlaselt täidetud gaasiga, siis toimub gaasi difusioon suurema kontsentratsiooniga kohtadest väiksema kontsentratsiooniga kohtadesse. Sama nähtus esineb lahustes, kui lahustunud aine kontsentratsioon pole kõikjal ühesugune.

Difusiooni kirjeldava võrrandi tuletamine on analoogiline soojusjuhtivuse võrrandi tuletamisega. Ainsad erinevused seisnevad järgnevas.

Et leida difundeeruva aine voogu (massi)  $dQ_1$  läbi pinnaelemendi  $dS$  ajavahemiku  $dt$  jooksul, tuleb kasutada Nernsti seadust, mille kohaselt

$$dQ_1 = D \frac{\partial u}{\partial n} dS dt.$$

Siin  $D$  on difusioonikoefitsient ja  $u = u(M, t)$  on difundeeruva aine kontsentratsioon.

Ruumielemendis  $dV$  ja ajavahemikus  $(t, t + dt)$  kontsentratsiooni muutmiseks vajalik difundeeruva aine mass on antud seosega

$$dQ = c [u(M, t + dt) - u(M, t)] dV = cu_t(M, t) dt dV,$$

milles suurust  $c$  nimetatakse poorsuskoefitsiendiks.

Difusioonivõrrand omab kuju

$$cu_t = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} u) + f(M, t), \quad (1.20)$$

milles funktsioon  $f(M, t)$  annab ruumiühikus ja ajaühikus eralduva ( $f > 0$ ) või laguneva ( $f < 0$ ) difundeeruva aine massi.

Soojusjuhtivuse võrrandit (1.16) ja difusioonivõrrandit (1.20) võib vaadelda kui erijuhte võrrandist

$$\operatorname{div} [k(M) \operatorname{grad} u] - q(M)u + F(M, t) = q(M)u_t.$$

## 1.7. Poissoni ja Laplace'i võrrandid

Vaatleme statsionaarsete laengute poolt tekitatud elektrivälja  $\vec{E}$  keskkonnas, mille dielektriline konstant  $\epsilon = 1$ . Protsessi statsionaarsuse tõttu

$$\text{rot } \vec{E} = 0,$$

s.t. elektrivälili  $\vec{E}$  on potentsiaalne väli. Leidub selline skalaarne funktsioon  $u(M)$ , mida nimetame potentsiaaliks, et

$$\vec{E} = -\text{grad } u(M). \quad (1.21)$$

Elektrodünaamikast on teada, et elektrivälja voog läbi kinise pinna  $S$  avaldub seosega

$$\int_S \vec{E} \vec{n} dS = 4\pi e, \quad (1.22)$$

kus  $e$  on pinnaga  $S$  piiratud ruumipiirkonnas  $V$  asuv kogulaeng. Olgu  $\zeta = \zeta(M)$  laengu tihedus. Siis

$$e = \int_V \zeta(M) dV. \quad (1.23)$$

Ostrogradsky valemi kohaselt

$$\int_S \vec{E} \vec{n} dS = \int_V \text{div } \vec{E} dV. \quad (1.24)$$

Valemitest (1.22) - (1.24) järgneb, et

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \zeta(M).$$

Asendades siia avaldise (1.21), leiame elektrivälja potentsiaali jaoks võrrandi

$$\Delta u = F(M), \quad (1.25)$$

kus  $F(M) = -4\pi \zeta(M)$ . Võrrandit (1.25) nimetatakse Poissoni võrrandiks.

Vaatleme kokkusurumatu vedeliku pöörisevaba statsionaarset liikumist. Pöörisevaba liikumise korral kiiruseväli  $\vec{v}$  on potentsiaalne, s.t. leidub selline funktsioon  $u = u(M)$ , et

$$\vec{v} = -\text{grad } u. \quad (1.26)$$

Allikate puudumise korral

$$\text{div } \vec{v} = 0.$$

Asendades siia avaldise (1.26), leiame kiiruse potentsiaali jaoks võrrandi

$$\text{div grad } u = 0$$

ehk

$$\Delta u = 0. \quad (1.27)$$

Võrrandit (1.27) nimetatakse Laplace'i võrrandiks.

Kui kehas asuvate soojusallikate tihedus  $f$  ei sõltu ajast ning keha välispind hoitakse ajast sõltumatu temperatuuril, siis aja  $t$  kasvades temperatuurijaotus kehas läheneb mingile ajast sõltumatu (statsionaarsele) jaotusele  $u(x,y,z)$ . Statsionaarne temperatuurijaotus on leitav võrrandist

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f(M) = 0.$$

Homogeense keha korral  $k = \text{const}$  ja saame Poissoni võrrandi. Kui lisaks puuduvad veel soojusallikad, siis statsionaarne temperatuurijaotus rahuldab Laplace'i võrrandit.

### 1.8. Helmholtzi võrrand

Lainete levimist homogeenses keskkonnas kirjeldab võrrand

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t). \quad (1.28)$$

Olgu välisäiritus ajas perioodiliselt muutuv, s.t.

$$f(M,t) = a^2 f_0(M) \cos \omega t,$$

kus  $\omega$  on välisäirituse sagedus ja  $a^2 f_0(M)$  amplituud. Võrrand (1.28) omab sel juhul kuju

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} = \Delta u + f_0(M) \cos \omega t. \quad (1.29)$$

Perioodiliste protsesside uurimisel kasutatakse sageli kompleksseid funktsioone. Vaatleme (1.29) asemel võrrandit

$$\frac{1}{a^2} \bar{u}_{tt} = \Delta \bar{u} + f_0(M) e^{i\omega t}. \quad (1.30)$$

Võrrandi (1.29) lahend  $u(M,t)$  kujutab endast ilmselt võrrandi (1.30) lahendi  $\bar{u}(M,t)$  reaalosa.

Küllalt pika ajavahemiku möödumisel alghetkest langeb keskkonnas toimuvate võnkumiste sagedus kokku välisäirituse sagedusega, s.t. me võime võrrandile (1.30) otsida lahendit kujul

$$\bar{u}(M,t) = v(M) e^{i\omega t}.$$

Amplituudi  $v(M)$  jaoks me saame võrrandi

$$\Delta v + k^2 v = -f_0(M), \quad (1.31)$$

kus  $k = \frac{\omega}{a}$ . Võrrandit (1.31) nimetatakse Helmholtzi võrrandiks.

Helmholtzi, Poissoni ja Laplace'i võrrandeid võib vaadelda kui võrrandi

$$\operatorname{div} [k(M) \operatorname{grad} u] - q(M)u + F(M) = 0$$

erikujusid.

### 1.9. Ülesanded

1. Tuletada keele võnkumise võrrand, kui keel võngub keskkonnas, mille poolt keelele mõjuv takistusjõud on võrdeline kiirusega.

2. Tuletada ristvõnkumiste võrrand raske vertikaalse keele jaoks, mis otspunktis  $x = 0$  on jäigalt kinnitatud, otspunktis  $x = \ell$  on aga vaba.

3. Tuletada võrrand otspunktis  $x = 0$  kinnitatud ja otspunktis  $x = \ell$  vaba vertikaalse elastse vedru pikivõnkumiste jaoks, arvestades raskusjõudu.

4. Tuletada soojusjuhtivuse võrrand peene varda jaoks, kui varda külgpinnal toimub konvektiivne soojusvahetus ümbritseva keskkonnaga seaduse  $h(u - \varphi)$  kohaselt ( $h$  - soojusvahetuse koefitsient,  $\varphi$  - keskkonna temperatuur), seejuures

$$\varphi = \varphi(t).$$

5. Leida võrrand, mis võimaldab määrata temperatuuri homogeenses keras, mis on paigutatud konstantse temperatuuriga keskkonda ja milles paiknevad soojusallikad tihedusega  $q_0 e^{-\alpha t}$ . Arvestada, et temperatuur sõltub ainult ajast ja kaugusest kera keskpunktist.

6. Leida difusioonivõrrand, kui toimub difundeeruva aine lagunemine kiirusega, mis on võrdeline kontsentratsiooniga.

7. Leida difusioonivõrrand keskkonna jaoks, mis liigub kiirusega  $v(x)$   $x$ -telje positiivses suunas.

§ 2. Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite klassifikatsioon

2.1. Klassifikatsioon n sõltumatu muutuja korral

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis seob omavahel otsitava funktsiooni  $u(x_1, \dots, x_n)$ , sõltumatud muutujad  $x_1, \dots, x_n$  ja otsitava funktsiooni esimest ning teist järku osatuletised. Tema üldkujuks on

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots, u_{x_n x_n}) = 0.$$

Võrrandit me nimetame lineaarseks teist järku osatuletiste suhtes, kui ta on kirjutatav kujul

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_{x_i x_j} = f(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}). \quad (2.1)$$

Vasakul seisvat avaldist nimetatakse lineaarse võrrandi peaosaks. Seejuures võib üldsust kitsendamata eeldada, et kordajad  $a_{ij}$  rahuldavad tingimust  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) (põhjendada!).

Kui teist järku osatuletiste kordajad  $a_{ij}$  sõltuvad peale  $x_1, \dots, x_n$  veel otsitavast funktsioonist  $u$  ja tema esimest järku osatuletistest, nimetatakse võrrandit kvaa-silineaarseks. Tema üldkujun on

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) u_{x_i x_j} &= \\ &= f(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}). \end{aligned}$$

Teist järku võrrandit kujul

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) u_{x_i} + c(x_1, \dots, x_n) u = f(x_1, \dots, x_n)$$

nimetatakse linearseks võrrandiks. Kui  $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ , nimetatakse lineaarset võrrandit homogeenseks, vastasel korral aga mittehomogeenseks.

Erijuhul võivad lineaarse võrrandi kõik kordajad olla konstandid. Sel juhul nimetatakse võrrandit linearseks konstantsete kordajatega võrrandiks.

Vaatleme võrrandit (2.1), kusjuures kordajad  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) olgu sõltumatute muutujate  $x_1, \dots, x_n$  reaalsed funktsioonid. Toome sisse uued sõltumatud muutujad  $\xi_1, \dots, \xi_n$  teisenduse

$$\xi_k = \xi_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.2)$$

abil nii, et teisenduse jakobiaan oleks erinev nullist. Siis

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n c_{ki} u_{\xi_k}, \quad \text{kus } c_{ki} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \quad (2.3)$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k, \ell=1}^n c_{ki} c_{\ell j} u_{\xi_k \xi_\ell} + \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Asendades (2.3) võrrandisse (2.1), teiseneb see kujule

$$\sum_{k, \ell=1}^n \bar{a}_{k\ell} u_{\xi_k \xi_\ell} = \bar{f}(\xi_1, \dots, \xi_n, u, u_{\xi_1}, \dots, u_{\xi_n}),$$

milles

$$\bar{a}_{k\ell} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_{ki} c_{\ell j}. \quad (2.4)$$

Fikseerime meid huvitavas piirkonnas punkti  $M_0$  koordinaatidega  $x_1^0, \dots, x_n^0$  ning moodustame ruutvormi

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 y_i y_j, \quad (2.5)$$

mille kordajateks on võrrandi (2.1) kordajad  $a_{ij}$  punktis  $M_0$ . Lineaarteisendus

$$y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \eta_k \quad (2.6)$$

viib ruutvormi (2.5) kujule

$$\sum_{k,l=1}^n \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l,$$

milles

$$\bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 \alpha_{ki} \alpha_{lj}. \quad (2.7)$$

Algebrast on teada, et kordajate  $\alpha_{ki}$  sobiva valiku korral viib teisendus (2.6) ruutvormi (2.5) diagonaalkujule

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \eta_k^2, \quad (2.8)$$

milles kordajad  $\lambda_k$  on 0, -1 või 1.

Avaldistest (2.4) ja (2.7) järeldub, et ruutvormi (2.5) kordajad teisenevad lineaarse muutujate vahetuse korral sama seaduse kohaselt nagu võrrandi (2.1) peaosa kordajad teisenduse (2.2) korral. Kui teisendus (2.2) valida nii, et punktis  $M_0$

$$c_{L_i}^0 = \left. \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right|_{M_0} = \alpha_{ki}, \quad (2.9)$$

kus  $\alpha_{ki}$  on sellise lineaarteisenduse (2.6) kordajad, mis viib ruutvormi (2.5) diagonaalkujule, siis see teisendus viib võrrandi (2.1) kujule, milles peaosa kordajad omavad punktis  $M_0$  väärtusi 0, -1 või 1. Sellist võrrandi kuju nimetatakse kanooniliseks kujuks.

Võrrand (2.1) on punktis  $M_0$  elliptilist tüüpi, kui ruutvormi (2.5) diagonaalkujus (2.8) kõik  $n$  liiget on sama märgiga. Elliptilist tüüpi võrrandi kanooniliseks kujuks on

$$\sum_{i=1}^n u_{\xi_i \xi_i} = \bar{f}(\xi_1, \dots, \xi_n, u, u_{\xi_1}, \dots, u_{\xi_n}).$$

Võrrand (2.1) on punktis  $M_0$  hüperboolset tüüpi, kui ruutvormi (2.5) diagonaalkujus (2.8)  $n-1$  liiget on sama märgiga, üks liige aga vastupidise märgiga. Hüperboolset tüüpi võrrandi kanooniliseks kujuks on

$$u_{\xi_1 \xi_1} = \sum_{i=2}^n u_{\xi_i \xi_i} + \bar{f}(\xi_1, \dots, \xi_n, u, u_{\xi_1}, \dots, u_{\xi_n}).$$

Võrrand (2.1) on punktis  $M_0$  paraboolset tüüpi, kui ruutvormi (2.5) diagonaalkujus (2.8) vähemalt üks kordajatest võrdub nulliga. Paraboolset tüüpi võrrandi kanooniliseks kujuks on

$$\sum_{i=1}^{m < n} (\pm u_{\xi_i \xi_i}) = \bar{f}(\xi_1, \dots, \xi_n, u, u_{\xi_1}, \dots, u_{\xi_n}).$$

Võrrand (2.1) on elliptilist, hüperboolset või paraboolset tüüpi piirkonnas, kui ta on vastavat tüüpi selle piirkonna igas punktis.

Tingimusest (2.9) järeleb, et võrrandi (2.1) viib punktis  $M_0$  kanoonilisele kujule teisendus

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n x_{ki} x_i \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.10)$$

Kui võrrand (2.1) on konstantsete kordajatega, siis ühe ja sama muutujate vahetusega (2.10) saame võrrandi taandada kanoonilisele kujule kogu määramispiirkonnas. Mittekonstantsete kordajate ja  $n > 2$  korral üldiselt pole võimalik leida sellist muutujate vahetust, mis taandaks võrrandi kanoonilisele kujule isegi ükskõik kui väikeses piirkonnas (vt. [1]).

## 2.2. Klassifikatsioon kahe sõltumatu muutuja korral

Kahe sõltumatu muutuja (tähistame nad  $x$  ja  $y$ ) korral

teist järku osatuletiste suhtes lineaarse võrrandi üldkuju on

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \quad (2.11)$$

Olgu kordajad  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  ja  $a_{22}$  meid huvitavas piirkonnas  $D$  muutujate  $x, y$  reaalsed ja pidevalt diferentseeruvad funktsioonid.

Toome sisse uued sõltumatud muutujad  $\xi, \eta$  seostega

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (2.12)$$

kus funktsioonid  $\varphi$  ja  $\psi$  on kaks korda pidevalt diferentseeruvad. Teisenduse pööratavuse garanteerimiseks nõuame, et teisenduse jakobiaan  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$  oleks piirkonnas  $D$  nullist erinev.

Võrrandis (2.11) esinevad otsitava funktsiooni osatuletised avalduvad järgmiselt:

$$u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x,$$

$$u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_x \psi_x + u_{\eta\eta} \psi_x^2 + u_\xi \varphi_{xx} + u_\eta \psi_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \varphi_x \varphi_y + (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \psi_x \psi_y + u_\xi \varphi_{xy} + u_\eta \psi_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_y \psi_y + u_{\eta\eta} \psi_y^2 + u_\xi \varphi_{yy} + u_\eta \psi_{yy}.$$

Asendades need avaldised võrrandisse (2.11), saame

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} = \bar{f}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (2.13)$$

milles

$$\bar{a}_{11} = a_{11} \varphi_x^2 + 2a_{12} \varphi_x \varphi_y + a_{22} \varphi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11} \varphi_x \psi_x + a_{12} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + a_{22} \varphi_y \psi_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11} \psi_x^2 + 2a_{12} \varphi_x \psi_y + a_{22} \psi_y^2$$

Vahetu asenduse teel võib kontrollida, et kehtib võr-

dus

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11} \bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) \left[ \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right]^2, \quad (2.14)$$

s.t. avaldis  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  ei muuda muutujate vahetuse (2.12) korral märki. Taandagu muutujate vahetus (2.12) võrrandi (2.11) kanoonilisele kujule. Siis  $\bar{a}_{12} = 0$  ning elliptilist tüüpi võrrandi korral  $\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} > 0$ , hüperboolset tüüpi võrrandi korral  $\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} < 0$  ja paraboolset tüüpi võrrandi korral  $\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = 0$ . Seega võrrand (2.11) on piirkonna D punktis  $(x,y)$  hüperboolset tüüpi, kui  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$  selles punktis; paraboolset tüüpi, kui  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$  selles punktis; elliptilist tüüpi, kui  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$  selles punktis. Püüame leida muutujate vahetuse, mis viiks võrrandi (2.11) kanoonilisele kujule.

Esalt valime funktsioonid  $\varphi(x,y)$  ja  $\psi(x,y)$  selliselt, et teisendatud võrrand (2.13) oleks võimalikult lihtne. Kui funktsioonid  $\varphi(x,y)$  ja  $\psi(x,y)$  on osatuletistega võrrandi

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \quad (2.15)$$

lahenditeks, siis  $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$ . Üldsust kitsendamata võime eeldada, et vaadeldavas punktis  $(x,y)$  kordaja  $a_{11} \neq 0$  (põhjustada!). Lahendades võrrandi (2.15) kui ruutvõrrandi  $z_x$  suhtes, saame tema asemel kaks võrrandit

$$a_{11}z_x + (a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})z_y = 0. \quad (2.16)$$

Harilike diferentsiaalvõrrandite teooriast on teada (vt. [12]), et võrrandite (2.16) lahendite  $z = \varphi(x,y)$  ja  $z = \psi(x,y)$  leidmiseks tuleb leida võrrandite

$$a_{11}dy + (a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})dx = 0 \quad (2.17)$$

esimesed integraalid

$$\varphi(x,y) = C, \quad \psi(x,y) = C.$$

Harilikke diferentsiaalvõrrandeid (2.17) nimetatakse võrrandi (2.11) karakteristlikeks võrranditeks, võrrandite (2.17) esimesi integraale aga võrrandi (2.11) karakteristikuteks.

Olgu võrrand (2.11) piirkonnas D hüperboolset tüüpi.

Sel juhul  $a_{11}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$  ning võrrandil (2.11) on kaks parve karakteristikuid  $\varphi(x, y) = C$ ,  $\psi(x, y) = C$ .  
Veendume, et muutujate vahetuse

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

korral Jakobiaan erineb nullist. Piki karakteristikuid

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy = C,$$

$$\psi_x dx + \psi_y dy = 0$$

ehk

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{dy}{dx}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{dy}{dx}.$$

Võrrandite (2.17) põhjal

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}},$$

$$\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Neist võrdustest järeldubki, et

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq \frac{\psi_x}{\psi_y}.$$

Seega vaadeldav muutujate vahetus viib hüperboolset tüüpi võrrandi kujule

$$u_{\xi\eta} = \frac{\bar{f}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})}{2\bar{a}_{12}}. \quad (2.18)$$

Muutujate vahetus

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

viib võrrandi (2.18) kujule

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_{\alpha}, u_{\beta}),$$

mis on võrrandi (2.11) kanooniliseks kujuks hüperboolset tüüpi võrrandi korral. Hüperboolset tüüpi võrrandite korral nimetatakse ka kuju (2.18) kanooniliseks.

Kui võrrand (2.11) on piirkonnas  $D$  paraboolset tüüpi, s.t.

$$a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0,$$

siis on võrrandil ainult üks karakteristik võrrand

$$a_{11} dy + a_{12} dx = 0$$

ning üks karakteristikute parv

$$\psi(x, y) = C.$$

Teeme muutujate vahetuse

$$\xi = \psi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y).$$

Antud juhul  $\eta(x, y)$  on funktsioonist  $\psi(x, y)$  sõltumatu suvaline funktsioon. Sellise muutujate vahetuse korral võrrandis (2.13)  $\bar{a}_{11} = 0$ . Seose (2.14) põhjal ka  $\bar{a}_{12} = 0$  ning võrrand (2.11) taandub kanoonilisele kujule

$$u_{\eta\eta} = \bar{\Phi}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}).$$

Elliptilist tüüpi võrrandi korral  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$  ning võrranditel (2.17) pole reaalseid lahendeid. Olgu esimese võrrandi (2.17) kompleksne integraal

$$\psi(x, y) = C,$$

siis teise võrrandi integraaliks on

$$\psi^*(x, y) = C,$$

milles  $\psi^*(x, y)$  on funktsiooni  $\psi(x, y)$  kaasfunktsioon.

Tuues sisse kompleksed muutujad

$$\xi = \psi(x, y), \quad \eta = \psi^*(x, y),$$

teiseneb võrrand (2.11) kujule (2.18). Kuna  $\xi$  ja  $\eta$  on kaaskompleksid, siis tehes muutujate vahetuse

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta), \quad (2.19)$$

me läheme uuesti üle reaalmuutujatele. Muutujate vahetus (2.19) viib võrrandi (2.18) kujule

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \bar{\Phi}(\alpha, \beta, u, u_{\alpha}, u_{\beta}),$$

mis ongi elliptilist tüüpi võrrandi kanooniline kuju.

### 2.3. Lineaarne konstantsete kordajatega võrrand

Kahe sõltumatu muutuja korral konstantsete kordajatega lineaarne võrrand omab kuju

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y). \quad (2.20)$$

Karakteristikute parved on antud võrranditega

$$y - \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x = C_1,$$

$$y - \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x = C_2,$$

millest järeneb, et karakteristikuteks on sirged. Kui võrrand (2.20) on hüperboolset tüüpi, siis muutujate vahetus

$$\xi = y - \frac{a_{12}}{a_{11}}x, \quad \eta = -\frac{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x$$

viib võrrandi kanoonilisele kujule

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + B_1u_{\xi} + B_2u_{\eta} + Cu = F(\xi, \eta). \quad (2.21)$$

Paraboolset tüüpi võrrandi korral teeme muutujate vahetuse

$$\xi = y - \frac{a_{12}}{a_{11}}x, \quad \eta = y$$

ning kanooniline kuju on

$$u_{\eta\eta} + B_1u_{\xi} + B_2u_{\eta} + Cu = F(\xi, \eta). \quad (2.22)$$

Elliptilist tüüpi võrrandi korral muutujate vahetus kujul

$$\xi = y - \frac{a_{12}}{a_{11}}x, \quad \eta = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}}x$$

viib võrrandi kanoonilisele kujule

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + B_1 u_{\xi} + B_2 u_{\eta} + C u = F(\xi, \eta). \quad (2.23)$$

Võrrandite (2.21), (2.22) ja (2.23) edasiseks lihtsustamiseks toome  $u$  asemel sisse uue funktsiooni avaldisega

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} v,$$

milles  $\lambda$  ja  $\mu$  on esialgu suvalised konstandid. Siis

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi} + \lambda v), \quad u_{\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta} + \mu v), \\ u_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_{\xi} + \lambda^2 v), \quad (2.24) \\ u_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_{\eta} + \mu^2 v). \end{aligned}$$

Asendades avaldised (2.24) võrrandisse (2.21) ning jagades seejärel võrrandi mõlemad pooli suurusega  $e^{\lambda\xi + \mu\eta}$ , saame

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + (B_1 + 2\lambda)v_{\xi} + (B_2 - 2\mu)v_{\eta} + (\lambda^2 - \mu^2 + B_1\lambda + B_2\mu + C)v = F_1,$$

milles

$$F_1 = F e^{-(\lambda\xi + \mu\eta)}.$$

Konstandid  $\lambda$  ja  $\mu$  valime nii, et esimest järku osatuletiste kordajad võrduksid nulliga ( $\lambda = -\frac{1}{2}B_1$ ,  $\mu = \frac{1}{2}B_2$ ).

Tulemusena saame

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \bar{C}v = F_1,$$

milles

$$\bar{C} = C + \frac{1}{4}(B_2^2 - B_1^2).$$

Elliptilise võrrandi (2.23) korral valime

$$\lambda = -\frac{1}{2}B_1, \quad \mu = -\frac{B_2}{2}$$

ning võrrand teiseneb kujule

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \bar{C}v = F_1,$$

milles

$$\bar{c} = c - \frac{1}{4}(B_1^2 + B_2^2).$$

Paraboolse võrrandi (2.22) korral pärast avaldiste (2.24) asendamist saame

$$V_{\eta\eta} + B_1 V_{\xi} + (B_2 + 2\mu)V_{\eta} + (\mu^2 + B_1\lambda + B_2\mu + C)v = F_1.$$

Sel juhul muudame nulliks  $V_{\eta}$  ja  $v$  kordajad, võttes

$$\mu = -\frac{1}{2}B_2, \quad \lambda = \frac{1}{B_1}\left(\frac{B_2^2}{4} - C\right).$$

Võrrand omandab kuju

$$V_{\eta\eta} + B_1 V_{\xi} = F_1.$$

#### 2.4. Ülesanded

1. Määrata võrrandi tüüp ja viia kanoonilisele kujule.

Lihtsustada maksimaalselt.

a)  $u_{xx} - 25u_{yy} - 8u_x + 20u_y - 3u + e^x = 0,$

b)  $8u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_x + u_y + 2u = 0,$

c)  $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y + u = 0,$

d)  $u_{xx} - 2u_{xy} + 4u_{yy} + 5u_x + 3u_y + u = 0,$

e)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y + u = 0,$

f)  $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_y + u = 0.$

2. Määrata võrrandi tüüp ja viia kanoonilisele kujule

a)  $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + yu_x = 0,$

b)  $e^x u_{xx} - 2e^y u_{xy} - 3e^{2y-x} u_{yy} = 0,$

c)  $(1-2x)^2 u_{xx} + (1+2y)^2 u_{yy} + 2yu_y = 0,$

d)  $y^2 u_{xx} + 4xy u_{xy} + 5x^2 u_{yy} = 0,$

e)  $e^y u_{xx} - 2e^{-x} u_{xy} + e^{-2x-y} u_{yy} = 0.$

3. Viia kanoonilisele kujule võrrandid

a)  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0,$

b)  $u_{xx} + u_{tt} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{tx} + u_{xz} + u_{ty} - 2u_{yz} = 0.$

4. Leida muutujate vahetus, mis viib võrrandi

$$\operatorname{div} [k(M) \operatorname{grad} u] - q(M)u + F(M,t) = \rho(M)u_{tt}$$

kanoonilisele kujule punktis  $M_0$ .

### § 3. Matemaatilise füüsika ülesannete seade

#### 3.1. Alg- ja rajatingimused

Nägime, et rida füüsikalisi protsesse on kirjeldatud väärtustega, mis on võrrandi

$$\operatorname{div} [k(M) \operatorname{grad} u] - q(M)u + F(M,t) = \rho(M)u_{tt} \quad (3.1)$$

erikujudeks.

Võrrand (3.1) on  $n$ -mõõtmelise ruumi  $R^n$  ( $n \leq 3$ ) mistahes punktis  $M = (x_1, \dots, x_n)$  ja mis tahes  $t$  väärtuse korral hüperboolset tüüpi. Ta omab lõpmata palju erilahendeid. Seepärast ainult võrrandist (3.1) ei piisa uuritava protsessi täielikuks määramiseks. On vaja anda ette veel ülesande füüsikalise sisust tulenevad lisatingimused. Sellisteks lisatingimusteks on algtingimused ja rajatingimused.

Algtingimused kirjeldavad uuritavat füüsikalist protsessi meid huvitava ajavahemiku alguses, s. t. alghetkel  $t = 0$ . Rajatingimused näitavad, mis toimub uuritava keha või ruumi piirkonna  $\Omega$  rajal  $\Sigma$ .

Hüperboolset tüüpi võrrandi korral algtingimused omavad kuju

$$u(M,0) = \varphi(M), \quad u_t(M,0) = \psi(M),$$

milles  $\varphi(M)$  ja  $\psi(M)$  on etteantud funktsioonid. Näiteks, keele võnkumiste uurimisel esimene algtingimus annab keele kõikide punktide jaoks hälbe tasakaaluasendist alghetkel (alghälbe), teine algtingimus aga keele punktide kiiruse alghetkel (algkiiruse).

Rajatingimused võivad olla väga erinevad. Meie vaatleme ainult kolme põhilist rajatingimuste liiki.

Kui keel on kinnitatud otspunktides  $x = 0$  ja  $x = l$ , siis rajatingimused omavad kuju

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Üldisem on olukord, millal keele otspunktid liiguvad mingi seaduse kohaselt. Rajatingimused omavad siis kuju

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

kus  $\mu_1(t)$  ja  $\mu_2(t)$  on etteantud funktsioonid.

Rajatingimusi, mis annavad otsitava funktsiooni väärtused keha rajal, nimetatakse esimest liiki rajatingimusteks. Nende üldkuju on

$$u|_{\Sigma} = \mu(p, t) \quad (p \in \Sigma).$$

Teist liiki rajatingimuse saamiseks vaatleme vedru pi-kivõnkumisi juhul, kui otspunktis  $x = l$  mõjub vedrule ajaliselt muutuv välisjõud  $p(t)$ . See välisjõud on tasakaalustatud pingejõu  $T$  poolt:

$$T(l, t) = [k(x)S(x) \frac{\partial u}{\partial x}]_{x=l} = p(t).$$

Rajatingimuse võib kirjutada kujul

$$u_x(l, t) = v(t) = \frac{p(t)}{k(l)S(l)}.$$

Erijuhul, kui otspunkt  $x = l$  on vaba,

$$u_x(l, t) = 0$$

Rajatingimust sellisel kujul nimetatakse vaba otspunkti tingimuseks.

Üldiselt teist liiki rajatingimus on kirjutatav kujul

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = v(p, t),$$

kus  $\frac{\partial}{\partial n}$  on tuletis raja  $\Sigma$  välise normaali suunas, ning  $p \in \Sigma$ .

Kolmandat liiki rajatingimuse tuletamiseks vaatleme varrast, mille otspunkt  $x = l$  on kinnitatud elastseit vedru abil, kusjuures vedru teine otspunkt liigub varda pi-kitelje sihis ja tema hälve algasendist on antud funktsi-

ooniga  $r(t)$ . Vedru poolt vardale mõjuv jõud, mis on võrdeline vedru piknemisega, on tasakaalustatud varda otspunktis  $x = l$  tekkiva pingejõuga:

$$k(l) S(l) u_x(l, t) = \alpha [r(t) - u(l, t)],$$

kus  $\alpha$  on vedru jäikuskoefitsient. Rajatingimus on kirjutatav kujul

$$u_x(l, t) + \gamma u(l, t) = \beta(t),$$

milles

$$\gamma = \frac{\alpha}{k(l)S(l)}, \quad \beta(t) = \frac{\alpha r(t)}{k(l)S(l)}.$$

Kolmandat liiki rajatingimuse üldine kuju on

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u \right]_{\Sigma} = \beta(P, t) \quad (P \in \Sigma).$$

Märgime, et vaadeldud rajatingimuste kolm liiki on üles kirjutatavad ühise avaldisega

$$\left[ \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2 u \right]_{\Sigma} = \beta(P, t) \quad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0). \quad (3.2)$$

Esimest liiki rajatingimuse saame, kui  $\gamma_1 = 0$ , teist liiki rajatingimuse puhul  $\gamma_2 = 0$  ning  $\gamma_1 \neq 0$  ja  $\gamma_2 \neq 0$  korral on tegemist kolmandat liiki rajatingimusega.

Võrrand

$$\operatorname{div} [k(M) \operatorname{grad} u] - q(M)u + F(M, t) = g(M)u_t \quad (3.3)$$

on parabolset tüüpi (veenduda!). Sel korral on ainult üks algtingimus,

$$u(M, 0) = \varphi(M),$$

mis annab otsitava suuruse väärtused alghetkel. Näiteks, soojusjuhtivuse võrrandi korral algtingimus annab temperatuuri jaotuse kehas alghetkel.

Vaatleme kolme põhilist rajatingimuste liiki võrrandile (3.3)

1. Keha raja hoitakse etteantud temperatuuril  $\mu(P, t)$ :

$$u|_{\Sigma} = \mu(P, t).$$

2. Antakse ette soojusvoog  $Q(P, t)$  läbi raja:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = Q(P, t)$$

ehk

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \nu(P, t) = \frac{Q(P, t)}{k(P)}$$

3. Antakse ette keha ümbritseva keskkonna temperatuur  $\theta$ . Sel juhul soojusvoog läbi raja  $\Sigma$  vastavalt Newtoni seadusele

$$Q = h(\theta - u)_{\Sigma}$$

ja vastavalt Fourier' seadusele

$$Q = k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma}$$

Saame

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u \right]_{\Sigma} = \beta(P, t),$$

milles

$$\gamma = \frac{h}{k}, \quad \beta(P, t) = \frac{h\theta}{k} \Big|_{\Sigma}$$

Näeme, et võrrandi (3.3) korral kolm põhilist rajatingimuste liiki on samuti matemaatiliselt kirjeldatavad avaldisega (3.2).

Elliptilist tüüpi võrrandi näiteks on Poissoni ja Laplace'i võrrandi. Kuna otsitav funktsioon ei sõltu ajast, siis elliptilist tüüpi võrrandi korral algtingimused puuduvad. Põhilised rajatingimuste liigid on samuti esitatavad kujul (3.2), kus funktsioon  $\beta$  sõltub ainult raja  $\Sigma$  punkti  $P$  koordinaatidest.

### 3.2. Segaülesanne, rajaülesanne, Cauchy ülesanne

Nagu juba öeldud, teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendi üheseks määramiseks on vaja ette anda lisatingimused. Vastavalt lisatingimuste iseloomule eristame järgmisi matemaatilise füüsika ülesannete põ-

hiliike: segaülesanne, rajaülesanne ja Cauchy ülesanne.

Olgu  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  lahtine tõkestatud piirkond, milles toimub uuritav protsess,  $\Sigma$  selle raja,  $\bar{\Omega}$  sulund. Protsessi kulgemise uuritavat ajavahemikku tähistame  $0 < t \leq T$ , ehk  $(0, T]$ , seejuures võib olla  $T = \infty$ . Lahtist piirkonda, mille korral  $M \in \Omega$  ja  $0 < t \leq T$ , tähistame  $G = \Omega \times (0, T]$ , kinnist piirkonda, kus  $M \in \bar{\Omega}$  ja  $0 \leq t \leq T$ , tähistame  $\bar{G} = \bar{\Omega} \times [0, T]$ . Tähistame veel  $\Gamma = \mathbb{R}^n \times (0, T]$  ja  $\bar{\Gamma} = \mathbb{R}^n \times [0, T]$ . Sümboliga  $C^m(\Omega)$  tähistame piirkonnas  $\Omega$  määratud ja  $m$  korda ( $0 \leq m < \infty$ ) pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka

a) Segäülesandeks nimetatakse ülesannet, mille korral antakse ette nii alg- kui ka rajatingimused. Segäülesanne esineb hüperboolset või parabolset tüüpi võrrandi korral, kui uuritav protsess toimub tõkestatud ruumipiirkonnas.

Segäülesande hüperboolset tüüpi võrrandi (3.1) jaoks võib formuleerida järgmiselt: leida kinnises piirkonnas  $\bar{G}$  määratud funktsioon  $u(M, t) \in C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$ , mis rahuldab

- 1) lahtises piirkonnas  $G$  võrrandit (3.1),
- 2) algtingimusi

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M) \quad (M \in \bar{\Omega}),$$

- 3) rajatingimust

$$\left[ \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2 u \right]_{\Sigma} = \beta(P, t) \quad (t \in [0, T]).$$

Parabolset tüüpi võrrandi korral asendub võrrand (3.1) loomulikult võrrandiga (3.3) ning puudub teine algtingimus.

Sõltuvalt rajatingimuse liigist eristame esimest, teist ja kolmandat liiki segäülesandeid.

b) Rajaülesanne esineb elliptilist tüüpi võrrandite korral, kui otsitav funktsioon ei sõltu ajast ja ta on formuleeritav järgmiselt. Leida kinnises piirkonnas  $\bar{\Omega}$  määratud funktsioon  $u(M) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ , mis rahuldab

1) lahtises piirkonnas  $\Omega$  võrrandid

$$\operatorname{div} [k(M) \operatorname{grad} u] - q(M)u = F(M),$$

2) rajatingimust

$$\left[ \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2 u \right]_{\Sigma} = \beta(P).$$

Elliptilist tüüpi võrrandite korral esimest liiki rajatingimust

$$u|_{\Sigma} = \mu(P)$$

nimetatakse Dirichlet' rajatingimuseks, teist liiki rajatingimust

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = \nu(P)$$

Neumanni rajatingimuseks. Esimest ja teist liiki rajaülesandeid nimetatakse ka vastavalt Dirichlet' ja Neumanni rajaülesanneteks.

Kui piirkond  $\Omega$ , kus võrrandile lahendit otsitakse, on tõkestatud piirkond, siis on tegemist sisemise rajaülesandega. Kui aga piirkond  $\Omega$  on ruumi  $R^n$  osaks, mis asub väljaspool mõnesugust tõkestatud piirkonda, siis nimetatakse rajaülesannet väliseks. Sel korral on vaja lisaks rajatingimusele veel ette anda otsitava funktsiooni käitumine lõpmatuses.

c) Rajal kehtiva režiimi mõju rajast küllalt kaugel asuvates punktides avaldub alles küllalt pika ajavahemiku järel. Seepärast juhtub, kui meid huvitab uuritav nähtus ajavahemikus, millal rajarežiimi mõju on veel ebaoluline, võime segaülesande asemel vaadelda ülesannet ilma rajatingimusteta kogu ruumis  $R^n$ . Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy ülesandeks ehk algväärtus-ülesandeks.

Paraboolset tüüpi võrrandi korral võib Cauchy ülesande formuleerida järgmiselt. Leida piirkonnas  $\bar{\Gamma}$  määratud funktsioon  $u(M,t) = C^0(\bar{\Gamma}) \cap C^2(\Gamma)$ , mis rahuldab

1) piirkonnas  $\Gamma$  võrrandit (3.3),

2) algtingimust

$$u(M,0) = \varphi(M) \quad (M \in R^n).$$

Analoogiliselt formuleeritakse Cauchy ülesanne hüperboolset tüüpi võrrandi (3.1) korral. Lisaks tuleb teine algingimus ning otsitav funktsioon  $u(M,t) \in C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$ .

Peale vaadeldud kolme matemaatilise füüsika ülesannete põhiliigi võib märkida veel järgmisi ülesandeid.

Huvitagu meid varda pikivõnkumine otspunkti  $x = 0$  läheduses ajavahemikus, millal teises otspunktis valitseva rajarežiimi mõju on ebaoluline. Sel korral võime vaadelda järgmist ülesannet poollõpmatu varda jaoks. Leida  $x \geq 0$  ja  $0 \leq t \leq T$  korral määratud funktsioon

$$u(x,t) \in C^1(x \geq 0; 0 \leq t \leq T) \cap C^2(x > 0, 0 < t \leq T), \quad \text{mis}$$

1) rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial}{\partial x} [k(x)u_x] + F(x,t) = \rho(x)u_{tt} \quad (x > 0, 0 < t \leq T),$$

2) rahuldab algingimusi

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x),$$

3) rahuldab rajatingimust

$$[\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma_2 u]_{x=0} = \beta(t).$$

Uuritava nähtuse iseloom ajavahemikus, mis on kaugel alghetkest, on praktiliselt määratud rajarežiimiga, kuna igasugusele reaalsele süsteemile omase "hõõrdumise" tõttu algrežiimi mõju ajaga nõrgeneb. Seda tüüpi ülesandeid koh-tame, näiteks, juhul kui süsteemi ergutatakse pikaajali-selt perioodilise rajarežiimiga. Segäülesande asemel võib vaadelda järgmist algingimusteta ülesannet.

Leida piirkonnas  $\bar{\Omega}$  ja  $t > -\infty$  korral määratud funktsioon  $u(M,t) \in C^1(\bar{\Omega}, t > -\infty) \cap C^2(\Omega, t > -\infty)$ , mis rahuldab

1) piirkonnas  $\Omega$  ja  $t > -\infty$  korral võrrandit (3.1),

2) rajatingimust

$$[\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2 u]_{\Sigma} = \beta(P,t) \quad (t > -\infty).$$

Eespool esitatud ülesannete omapäraks on see, et eeldatakse lahendi küllaldast siledust (lahendi enda ja tema osatuletiste pidevust) ning lahend rahuldab võrrandit selle määramispiirkonna igas punktis. Sellist ülesande seadet nimetatakse klassikaliseks ja vastavat lahendit - klassikaliseks lahendiks. On selge, et lahendi küllaldase sileduse nõuet on võimalik täita ainult siis, kui võrrandis esinevad funktsioonid  $k(M)$ ,  $q(M)$ ,  $\rho(M)$  ja  $F(M,t)$  on pidevad. Praktikas pakuvad aga küllalt suurt huvi ülesanded, mille korral, näiteks, funktsioon  $F(M,t)$  on iseärasustega. Tuleb loobuda lahendi sileduse nõudest ja võtta kasutusele nn. üldistatud lahendi mõiste. Sel küsimusel peatume lühidalt mõnevõrra hiljem.

### 3.3. Ülesande seade korrektsus

Matemaatilise füüsika ülesanded kirjeldavad reaalseid füüsikalisi protsesse. Seepärast on loomulik, et ülesannete seade peab tagama järgmiste tingimuste täitmise:

- 1) lahend eksisteerib mingis funktsioonide klassis  $M_1$ ,
- 2) lahend on ühene mingis funktsioonide klassis  $M_2$ ,
- 3) funktsioonide klassis  $M_1 \cap M_2$  lahend sõltub pidevalt ülesande lähteandmetest.

Lähteandmete all me mõistame alg- ja rajatingimusi, võrrandi vabaliiget, võrrandi kordajaid jne. Ülesande lahendi pidev sõltuvus, näiteks, rajatingimusest

$$u|_{\Sigma} = \beta(P, t)$$

tähendab järgmist. Olgu meil funktsioonide jada  $\beta_k(P, t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), mis koondub teatud mõttes funktsiooniks  $\beta(P, t)$  ja olgu  $u_k(M, t)$  funktsioonile  $\beta_k(P, t)$  vastav ülesande lahend,  $u(M, t)$  aga funktsioonile  $\beta(P, t)$  vastav lahend. Kui jada  $u_k(M, t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) koondub teatud mõttes funktsiooniks  $u(M, t)$ , siis öeldaksegi, et ülesande lahend sõltub pidevalt lähteandmetest (antud juhul rajatingimusest).

Ülesannet, mis rahuldab kõiki kolme eespool toodud tingimust, nimetatakse korrektseks.

Lahendi olemasolu nõue tuleneb asjaolust, et kui ülesanne kirjeldab reaalselt toimuvat protsessi, siis peab ülesandel lahend eksisteerima. Lahendi olemasolu näitamine on tihedalt seotud sellise funktsiooni konstrueerimisega, mis rahuldab kõiki ülesande tingimusi.

Lahendi ühesuse nõue tuleneb sellest, et kindlate lähteandmete korral füüsikaline protsess kulgeb mingil kindlal, ühesel viisil. Seepärast füüsikalistest kaalutlustest lähtudes peab ülesandel olema ühene lahend. See vajab aga ranget matemaatilist tõestust.

Lahendi stabiilsuse (pidev sõltuvus lähteandmetest) nõue tuleneb järgmistest füüsikalistest kaalutlustest. Ülesande lähteandmed saadakse tavaliselt eksperimendist mõõtmise teel. Mõõtmisvigade tõttu pole lähteandmed täpsed. On selge, et matemaatiline ülesanne on heas kooskõlas tema poolt kirjeldatava protsessiga, kui väike viga lähteandmetes toob kaasa ka väikese vea ülesande lahendis.

Tuleb märkida, et rakendustes esineb küllalt sageli ka mittekorrektseid ülesandeid. Sellise ülesande lahendamiseks püütakse leida korrektsete ülesannete jada nii, et vaadeldav mittekorrektne ülesanne oleks nende korrektsete ülesannete piirjuht. Mittekorrektse ülesande lahendiks võetakse siis küllalt lähedase korrektse ülesande lahend. Mittekorrektsete ülesannete teoorial me käesolevas õppevahendis pikemalt ei peatu.

Mittekorrektselt seatud ülesande näitena tuuakse tavaliselt ülesanne, mis konstrueeriti Hadamard'i poolt. Cauchy ülesande

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \quad (\text{Laplace'i võrrand})$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \frac{1}{k} \sin kx$$

lahendiks on funktsioon

$$u_k(x, t) = \frac{\sin kt}{k^2} \sin kx.$$

Kui  $k \rightarrow \infty$ , siis teises lisatingimuses  $\frac{1}{k} \sin kx \rightarrow 0$ . Lisatingimuse  $u_t(x, 0) = 0$  korral ülesande lahendiks oleks

$u(x,t) = 0$ . Kuid  $x \neq n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) korral  $u_k(x,t) \not\rightarrow 0$ , kui  $k \rightarrow \infty$ . Lahendi stabiilsuse nõue pole täidetud.

### 3.4. Segaülesande lahendi ainsus

Vaatleme segaülesannet hüperboolsele võrrandile ühe-  
mõõtmelisel juhul. Leida piirkonnas  $\bar{\Omega} = [0, \ell] \times [0, T]$   
määratud funktsioon  $u(x,t) \in C^2(\bar{\Omega})$ , mis rahuldab

1) lahtises piirkonnas  $\Omega = (0, \ell) \times (0, T]$  võrrandit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u + F(x,t) = \rho(x)u_{tt}, \quad (3.4)$$

2) algtingimusi

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x),$$

3) rajatingimusi

$$(\gamma_1 u_x - \gamma_2 u)_{x=0} = \beta_1(t), \quad (\gamma_1' u_x + \gamma_2' u)_{x=\ell} = \beta_2(t).$$

Seejuures võrrandis (3.4) esinevad funktsioonid  $\rho(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  ja  $k(x) > 0$  olgu pidevad  $0 \leq x \leq \ell$  korral, rajatingimustes esinevad suurused  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_1'$  ja  $\gamma_2'$  olgu mittenegatiivsed. Näitame, et toodud ülesande lahend on ühene.

Olgu  $u_1(x,t)$  ja  $u_2(x,t)$  selle ülesande kaks lahendit. Funktsioon  $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$  rahuldab ilmselt piirkonnas  $\Omega$  võrrandit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] - q(x)v = \rho(x)v_{tt}, \quad (3.5)$$

algtingimusi

$$v(x,0) = v_t(x,0) = 0$$

ning rajatingimusi

$$[\gamma_1 v_x - \gamma_2 v]_{x=0} = [\gamma_1' v_x + \gamma_2' v]_{x=\ell} = 0. \quad (3.6)$$

Näitame, et  $v(x,t) \equiv 0$ .

Vaatleme abifunktsiooni

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[ k(x) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \varphi(x) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + q(x) v^2 \right] dx, \quad (3.7)$$

mida nimetatakse energiaintegraaliks. Ta annab võnkuva süsteemi kineetilise ja potentsiaalse energia summa (vt. [1]).

Leiame  $\frac{dE}{dt}$ .

Tänu funktsioonide  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\varphi(x)$ , aga samuti funktsiooni  $v(x,t)$  ja tema osatuletiste pidevusele lõigul  $[0, \ell]$  võime avaldist (3.7) diferentseerida integraalimärgi all:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^{\ell} \left[ k(x) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \varphi(x) \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q(x) v \frac{\partial v}{\partial t} \right] dx.$$

Integreerides esimest liidetavat ositi, leiame

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= k(x) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{x=0}^{x=\ell} + \\ &+ \int_0^{\ell} \left[ \varphi(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + q(x) v \right] \frac{\partial v}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Kuna funktsioon  $v(x,t)$  rahuldab võrrandit (3.5), siis

$$\frac{dE}{dt} = k(x) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{x=0}^{x=\ell} \quad (3.8)$$

Kui rajatingimused (3.6) on esimest liiki, siis  $v(0,t) = v(\ell,t) = 0$ , kust järgneb  $v_t(0,t) = v_t(\ell,t) = 0$ . Seega  $\frac{dE}{dt} = 0$ . Teist liiki rajatingimuste korral  $v_x(0,t) = v_x(\ell,t) = 0$  ning (3.8) põhjal  $\frac{dE}{dt} = 0$ . Järelikult esimest ja teist liiki rajatingimuste korral

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[ k(x) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \varphi(x) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + q(x) v^2 \right]_{t=0} dx.$$

Algtingimuste põhjal  $v(x,0) = 0$  (siis ka  $v_x(x,0) = 0$ ) ja  $v_t(x,0) = 0$ . Seega  $E(t) = E(0) = 0$ .

Kolmandat liiki rajatingimuste korral

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} v \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} v \Big|_{x=l}.$$

Pärast asendamisest avaldisse (3.8) leiame

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} v \frac{\partial v}{\partial t} k(x) \Big|_{x=l} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} v \frac{\partial v}{\partial t} k(x) \Big|_{x=0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} k(x) v^2 \Big|_{x=l} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} k(x) v^2 \Big|_{x=0} \right]. \end{aligned}$$

Integreerides saame

$$\int_0^t \frac{dE}{dt} dt = -\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} k(x) v^2 \Big|_{x=l} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} k(x) v^2 \Big|_{x=0} \right] dt$$

ehk

$$\begin{aligned} E(t) - E(0) &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} k(x) v^2 \Big|_{x=l} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} k(x) v^2 \Big|_{x=0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} k(x) v^2 \Big|_{x=l} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} k(x) v^2 \Big|_{x=0} \right]_{t=0}. \end{aligned}$$

Esimesest algtingimusest  $v(x,0) = 0$  järgneb, et  $v(l,0) = v(0,0) = 0$ . Eespool näitasime, et  $E(0) = 0$ . Seega

$$E(t) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} k(x) v^2 \Big|_{x=l} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} k(x) v^2 \Big|_{x=0} \right] \leq 0.$$

Teiselt poolt funktsiooni  $E(t)$  avaldisest (3.7) järgneb, et  $E(t) \geq 0$ . Seega ka kolmandat liiki rajatingimuse korral  $E(t) = 0$ .

Avaldise (3.7) põhjal  $E(t) = 0$  ainult siis, kui

$$v_x(x,t) = 0, \quad v_t(x,t) = 0.$$

Seega

$$v(x,t) = \text{const} = v(x,0) = 0, \quad \text{m. o. t. t.}$$

### 3.5. Maksimumprintsip

Tõestame järgmise teoreemi, mis on tuntud maksimum-

printsipi nime all ja mis omab olulist kohta parabolset tüüpi võrranditega seotud ülesannete uurimisel.

Teoreem: Kinnises piirkonnas  $\bar{G}$  pidev funktsioon  $u(M,t)$ , mis lahtises piirkonnas  $G$  rahuldab võrrandit

$$\operatorname{div} [k(M)\operatorname{grad} u] - q(M)u = \varphi(M)u_t \quad (3.9)$$

on kas piirkonnas  $\bar{G}$  mittepositiivne või saavutab maksimaalse (positiivse) väärtuse kas ajahetkel  $t = 0$  või rajal  $\Sigma$ .

Tõestus: Tähistame

$$\max \left[ 0, \max_{\substack{M \in \bar{\Omega} \\ t=0}} u(M,t), \max_{\substack{M \in \Sigma \\ t \in [0,T]}} u(M,t) \right] = m.$$

Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon  $u(M,t)$  on piirkonnas  $\bar{G}$  positiivne ja saavutab maksimumi punktis  $M_0 \in \bar{\Omega}$  ja hetkel  $t_0 \in (0,T]$ , s.t.

$$u(M_0, t_0) = m + \varepsilon > m > 0.$$

Moodustame abifunktsiooni

$$v(M,t) = u(M,t) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{T-t}{T}.$$

Ilmselt

$$u(M,t) \leq v(M,t) \leq u(M,t) + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kui } (M,t) \in \bar{G}.$$

Seega

$$v(M_0, t_0) \geq u(M_0, t_0) = m + \varepsilon.$$

Funktsioon  $v(M,t)$  kui pidev funktsioon saavutab kinnises piirkonnas  $\bar{G}$  maksimaalse väärtuse. Olgu see punktis  $M_1$  hetkel  $t_1$ . Siis

$$v(M_1, t_1) \geq v(M_0, t_0) \geq m + \varepsilon > \varepsilon.$$

Igas raja  $\Sigma$  punktis  $P$

$v(P,t) < v(P,t) + \frac{\varepsilon}{2} = v(P,t) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \leq u(P,t) + \varepsilon \leq m + \varepsilon \leq v(M_0, t_0)$   
ja hetkel  $t = 0$

$$v(M,0) < v(M,0) + \frac{\varepsilon}{2} = v(M,0) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \leq u(M,0) + \varepsilon \leq m + \varepsilon \leq v(M_0, t_0).$$

Seega  $M_1 \in \Omega$  ja  $t_1 \in (0, T]$ . Kui funktsioon  $v(M, t)$  omab  $(M_1, t_1)$  korral maksimumi, siis

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t_1} \geq 0, \quad \text{grad } v \Big|_{M_1} = 0, \quad \Delta v \Big|_{M_1} \leq 0.$$

Arvestades, et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2T}, \quad \text{grad } u = \text{grad } v, \quad \Delta u = \Delta v$$

leiame

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div} [k \text{grad } u] + qu \Big|_{M_1, t_1} = \\ & = \rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u - \text{grad } k \text{grad } u + qu \Big|_{M_1, t_1} = \\ & = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho \varepsilon}{2T} - k \Delta v - \text{grad } k \text{grad } v + qv - \frac{q \varepsilon}{2} \frac{T-t}{T} \Big|_{M_1, t_1} \geq \\ & \geq \frac{\rho \varepsilon}{2T} + q\varepsilon - \frac{q \varepsilon}{2T} (T-t_1) = q\varepsilon \left(1 - \frac{T-t_1}{2T}\right) + \frac{\varepsilon \rho}{2T} > 0. \end{aligned}$$

Saadud tulemus ütleb, et funktsioon  $u(M, t)$  ei rahulda ühes piirkonna  $G$  punktis võrrandit (3.9), mis on vastuolus teoreemi eeldusega.

Maksimumprintsibist võib teha mitmed järeldused.

Järeldus 1: Piirkonnas  $\bar{G}$  pidev funktsioon  $u(M, t)$ , mis piirkonnas  $G$  rahuldab võrrandit (3.9) on kas piirkonnas  $\bar{G}$  mittenegatiivne või saavutab minimaalse (negatiivse) väärtuse kas hetkel  $t = 0$  või rajal  $\Sigma$ .

See nn. minimumprintsip järeldub maksimumprintsibist funktsiooni  $-u(M, t)$  jaoks.

Järeldus 2: Esimest liiki segaülesande

$$\text{div} [k(M) \text{grad } u] - q(M)u + F(M, t) = \rho(M)u_t \quad (M, t) \in G,$$

$$u(M, 0) = \varphi(M) \quad (M \in \bar{\Omega}),$$

$$u \Big|_{\Sigma} = \beta(P, t) \quad (P \in \Sigma, t \in [0, T])$$

klassikaline lahend on ühene.

Olgu  $u_1(M,t)$  ja  $u_2(M,t)$  selle ülesande kaks lahendit.

Funktsioon  $u(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$  rahuldab ilmselt võrrandit (3.9) ja lisatingimusi

$$u(M,0) = 0, \quad u|_{\Sigma} = 0.$$

Maksimum- ja miinimumprintsibi kohaselt saavutab funktsioon  $u(M,t)$  maksimaalse ja minimaalse väärtuse kas rajal  $\Sigma$  või ajahetkel  $t = 0$ . Need väärtused võrduvad nulliga, mis tähendabki

$$u(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t) \equiv 0.$$

Järeldus 3: Esimest liiki segaülesande klassikaline lahend sõltub pidevalt funktsioonidest  $\varphi(M)$  ja  $\beta(P,t)$ .

Olgu  $u(M,t)$  segaülesande

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu + F = \rho u_t,$$

$$u(M,0) = \varphi(M), \quad u|_{\Sigma} = \beta(P,t)$$

lahend,  $\bar{u}(M,t)$  aga segaülesande

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \bar{u}) - q\bar{u} + F = \rho \bar{u}_t,$$

$$\bar{u}(M,0) = \bar{\varphi}(M), \quad \bar{u}|_{\Sigma} = \bar{\beta}(P,t)$$

lahend ning olgu

$$|\varphi(M) - \bar{\varphi}(M)| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad |\beta(P,t) - \bar{\beta}(P,t)| < \varepsilon.$$

Funktsioon  $u - \bar{u}$  rahuldab võrrandit (3.9) ning nii rajal  $\Sigma$  kui ka ajahetkel  $t = 0$

$$|u - \bar{u}| < \varepsilon$$

ehk

$$-\varepsilon < u - \bar{u} < \varepsilon.$$

Maksimumprintsibiist järeldub siis otseselt, et kogu piirkonnas  $\bar{G}$

$$-\varepsilon < u - \bar{u} < \varepsilon$$

ehk

$$|u - \bar{u}| < \varepsilon.$$

Maksimumprintsipi omab selge füüsikalise tähenduse. Ku-na soojus levib kõrgema temperatuuriga piirkonnast madala-

ma temperatuuriga piirkonda, siis soojusallikate puudumise korral saab keha temperatuur olla maksimaalne kas alghetkel või keha pinnal.

### 3.6. Ülesanded

1. Püstitada ülesanne varda pikivõnkumiste leidmiseks, kui otpunkt  $x = 0$  on kinnitatud jäigalt ja otpunktis  $x = l$  on varda külge risti tema teljega kinnitatud vedeliku sisse asetatud plaat. Vedeliku poolt plaadile mõjuv takistusjõud on võrdeline plaadi liikumiskiirusega. Alghälve ja algkiirus on suvalised.

2. Püstitada ülesanne vertikaalse vedru pikivõnkumiste leidmiseks, kui otpunkt  $x = 0$  on kinnitatud elastselt ja otpunktis  $x = l$  on vedru külge kinnitatud raskus massiga  $m$ . Alghälve on suvaline, algkiirus on null.

3. Püstitada ülesanne elektriliste võnkumiste leidmiseks väga väikese takistuse ja kaoga juhtmes, kui otpunkt  $x = 0$  on maandatud läbi takistuse  $R_0$ , otpunkt  $x = l$  on maandatud läbi mahtuvuse  $C_0$ . Pinge ja voolutugevuse jaotus alghetkel on suvalised.

4. Püstitada ülesanne poollõpmatu varda soojenemise jaoks, kui varda otpunkt põleb, ning põlemisfront, mille temperatuur on  $\varphi(t)$ , levib kiirusega  $v$  piki varrast. Alghetkel on temperatuur vardas null.

5. Püstitada ülesanne vertikaalse vedru pikivõnkumiste leidmiseks, kui otpunkt  $x = 0$  on kinnitatud jäigalt ja otpunktis  $x = l$  on vedru külge kinnitatud raskus massiga  $m$ , mis alghetkel  $t = 0$  lakkab mõjumast.

## § 4. Üldistatud funktsioonide ja üldistatud lahendi mõiste

### 4.1. Üldistatud funktsioonid e. distributsioonid

Ruumis  $R^n$  määratud funktsiooni  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x)$  kandjaks  $\text{supp } \varphi$  (lühend ingliskeelsest sõnast "support") nimetatakse selliste punktide  $x \in R^n$  hulga sulundit, milles funktsioon erineb nullist. Kui funktsiooni kandja on tõekestatud, siis nimetame funktsiooni finiidseks.

Vaatleme selliseid ruumis  $R^n$  määratud funktsioone  $\varphi(x)$ , mis omavad mis tahes järku pidevaid tuletisi, s. t.  $\varphi(x) \in C^\infty(R^n)$  ja mis on finiidsed. Neid funktsioone nimetame põhifunktsioonideks ja põhifunktsioonide hulka nimetame põhifunktsioonide ruumiks  $D$ . Põhifunktsioone võib liita ja reaalarvuga korrutada. Tulemuseks on jällegi põhifunktsioon. Seega ruum  $D$  on lineaarne ruum. Ütleme, et põhifunktsioonide jada  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x), \dots$  koondub ruumis  $D$  põhifunktsiooniks  $\varphi(x)$ , kui 1) leidub selline tõekestatud hulk  $U \subset R^n$ , et  $\text{supp } \varphi_k \subset U$  ( $k=1, 2, \dots$ ); 2) iga täisarvu  $\alpha$  korral funktsioonide jada  $D^\alpha \varphi_k(x)$  koondub ühtlaselt funktsiooniks  $D^\alpha \varphi(x)$ . Siin oleme kasutanud tähistust

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^\alpha \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

milles  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha$ .

On selge, et ruumi  $D$  kuuluvad funktsioonid ei saa olla analüütilised. Tõepoolest, iga ruumi  $D$  kuuluv funktsioon on võrdne nulliga väljaspool mingit kera (finitisuse tõttu). Kui ta oleks seejuures analüütiline, siis analüütilise funktsiooni ainsuse teoreemi kohaselt oleks see funktsioon identselt võrdne nulliga.

Põhifunktsiooni näiteks on funktsioon

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}} & , \text{ kui } |x| \leq \varepsilon, \\ 0 & , \text{ kui } |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

kus  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ ,  $\varepsilon > 0$  ja  $C_\varepsilon$  on normeerimistegur, s.t.  $C_\varepsilon$  on valitud nii, et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Me ütleme, et ruumil  $D$  on määratud funktsionaal  $f$ , kui on antud eeskiri, mille kohaselt igale funktsioonile  $\varphi(x) \in D$  on vastavusse seatud mingi arv, mille tähistame  $\langle f, \varphi \rangle$ .

Funktsionaali  $f$  me nimetame lineaarseks, kui mis tahes kahe skalaari  $\lambda$  ja  $\mu$  ning suvaliste põhifunktsioonide  $\varphi_1(x)$  ja  $\varphi_2(x)$  korral kehtib võrdus

$$\langle f, \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \rangle = \lambda \langle f, \varphi_1 \rangle + \mu \langle f, \varphi_2 \rangle.$$

Funktsionaali  $f$  me nimetame pidevaks, kui põhifunktsioonide jada  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  koondumisest põhifunktsiooniks  $\varphi(x)$  järgneb arvjada  $\langle f, \varphi_1 \rangle, \langle f, \varphi_2 \rangle, \dots$  koondumine arvuks  $\langle f, \varphi \rangle$ .

Üldistatud funktsioonideks e. distributsioonideks nimetatakse põhifunktsioonide ruumil määratud pidevaid lineaarseid funktsionaale. Kõikide ruumil  $D$  määratud distributsioonide hulka nimetatakse distributsioonide ruumiks  $D'$ . Ruum  $D'$  on lineaarne ruum, kui distributsioonide  $f$  ja  $g$  lineaarne kombinatsioon  $\lambda f + \mu g$  defineerida funktsionaalina, mis on arvutatav järgmiselt:

$$\langle \lambda f + \mu g, \varphi \rangle = \lambda \langle f, \varphi \rangle + \mu \langle g, \varphi \rangle.$$

Koondumine ruumis  $D'$  defineeritakse järgmiselt: distributsioonide jada  $f_1, f_2, \dots$  koondub distributsiooniks  $f$  ruumis  $D'$ , kui iga  $\varphi(x) \in D$  korral arvjada  $\langle f_1, \varphi \rangle, \langle f_2, \varphi \rangle, \dots$  koondub arvuks  $\langle f, \varphi \rangle$ .

Üeldakse, et distributsioon  $f$  on piirkonnas  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  võrdne nulliga, kui iga põhifunktsiooni  $\varphi(x)$ , mille  $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ , korral  $\langle f, \varphi \rangle = 0$ . Distributsiooni  $f$  kandjaks  $\text{supp } f$  nimetatakse nende ruumi  $\mathbb{R}^n$  punktide hulka, mille üheski ümbruses distributsioon  $f$  ei võrdu nulliga. Distributsiooni nimetatakse finiitseks, kui tema kandja on tüketatud.

Olgu  $f(x)$  ruumis  $\mathbb{R}^n$  lokaalselt integreeruv funktsioon, s.t. ta on integreeruv ruumi  $\mathbb{R}^n$  igas lõplikus piirkonnas. Selle funktsiooni abil me võime igale põhifunktsioonile  $\varphi(x) \in D$  seada vastavusse arvu

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\text{supp } \varphi} f(x) \varphi(x) dx, \quad (4.1)$$

s.t. defineerida funktsionaali. Selliselt defineeritud funktsionaal on lineaarne ja pidev (veenduda!), s.t. ta on distributsioon. Valemiga (4.1) määratud distributsioone nimetatakse regulaarseteks. Seega iga lokaalselt integreeruv funktsioon määrab valemi (4.1) kohaselt regulaarse distributsiooni. On võimalik näidata, et iga regulaarne distributsioon on määratud ühe kindla lokaalselt integreeruva funktsiooni poolt. Järelikult ruumis  $\mathbb{R}^n$  lokaalselt integreeruvate funktsioonide ja regulaarsete distributsioonide vahel on üksühene vastavus. Seepärast võib samastada lokaalselt integreeruvat funktsiooni ja tema poolt valemiga (4.1) määratud regulaarset distributsiooni.

Distributsioonide jaoks kasutatakse sageli ka tähistust  $f(x)$ , millega rõhutatakse seda, et funktsionaali  $f$  rakendatakse funktsioonidele, mille argumendiks on  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Distributsioone, mis pole regulaarsed, nimetatakse singulaarseteks.

Tenetest distributsioonidega vaatleme käesolevas ainult distributsiooni ja funktsiooni korrutist ning distributsiooni tuletist.

Olgu  $a(x)$  mis tahes arv korda pidevalt diferentseeruv funktsioon, s.t.  $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  Funktsiooni  $a(x)$  ja

distributsiooni  $f \in D'$  korrutiseks nimetame distributsiooni  $af$ , mis igale põhifunktsioonile  $\varphi(x)$  seab vastavusse arvu

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle.$$

Distributsiooni  $f$   $\alpha$ -järku tuletiseks nimetame distributsiooni  $D^\alpha f$ , mis igale põhifunktsioonile  $\varphi(x)$  seab vastavusse arvu

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle f, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Distributsioon on lõpmata arv kordi diferentseeruv.

On lihtne kontrollida, et kehtivad tavalised diferentseerimise eeskirjad:

$$D^\alpha (f + g) = D^\alpha f + D^\alpha g,$$

$$D^1 (af) = (D^1 a)f + aD^1 f.$$

Märgime, et regulaarse distributsiooni tuletis ei tarvitse olla regulaarne distributsioon. Kui distributsioon  $f$  on regulaarne ja temale vastav lokaalselt integreeruv funktsioon  $f(x)$  on  $m$  korda pidevalt diferentseeruv, siis  $\alpha \leq m$  korral on ka distributsioon  $D^\alpha f$  regulaarne ja üldistatud tuletis  $D^\alpha f$  langeb kokku funktsiooni  $f(x)$  vastava klassikalise tuletisega.

Eespool me esitasime ainult olulisemad mõisted seoses distributsioonidega. Põhjalikuma käsitluse võib leida E. Tamme ja G. Vainikko loengukonspektist [7] või õpikutest [6] ja [9].

#### 4.2. Delta-funktsioon $\delta(x)$

Delta-funktsiooniks  $\delta(x)$  nimetatakse distributsiooni, mis igale põhifunktsioonile  $\varphi(x)$  seab vastavusse arvu  $\varphi(0)$ , s.t.

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Delta-funktsioon on singulaarne distributsioon. Tõepoolest, oletame, et eksisteerib lokaalselt integreeruv funktsioon  $f(x)$ , mille jaoks

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (4.2)$$

See võrdus peab kehtima mis tahes põhifunktsiooni  $\varphi(x)$  korral. Ta peab kehtima ka siis, kui

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & \text{kui } |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{kui } |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

s. t.

$$\int_{|x| \leq \varepsilon} f(x) e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}} dx = e^{-1}. \quad (4.3)$$

Kui  $\varepsilon \rightarrow 0$ , siis võrduse (4.3) vasakul pool seisev integraal läheneb nullile. See on aga vastuolus võrdusega (4.3). Järelikult võrdus (4.2) ei saa kehtida ja delta-funktsioon pole regulaarne distributsioon.

Sageli kasutatakse veel "nihutatud" delta-funktsiooni  $\delta(x - x_0)$ , mis on määratud seosega

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x_0).$$

Näitame, et delta-funktsioon on finitne, kusjuures tema kandjaks on ühepunktiline hulk  $\{0\}$ . Vaatleme punkti  $x \in \mathbb{R}^n$ , mille korral  $|x| \neq 0$ . Me võime alati leida sellise punkti  $x$  ümbruse  $U$ , et  $0 \notin U$ . Iga põhifunktsiooni  $\varphi(x)$  korral, mille kandja  $\text{supp } \varphi \subset U$ , kehtib seos

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0.$$

Distributsiooni kandja definiitsiooni järgi siis punktid  $x \in \mathbb{R}^n$ , mille  $|x| \neq 0$ , ei kuulu delta-funktsiooni kandjasse. Olgu  $U'$  punkti  $x = 0$  suvaline ümbrus. Iga põhifunktsiooni  $\varphi(x)$  korral, mille jaoks kehtib tingimus  $0 \in \text{supp } \varphi \subset U'$ , saame  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \neq 0$ . Seega punkti  $x = 0$  üheski ümbruses delta-funktsioon ei võrdu nulliga, mis tähendab, et punkt  $x = 0$  kuulub delta-funktsiooni kandjasse.

Delta-funktsiooni tuletised on distributsioonid, mis igale funktsioonile  $\varphi \in D$  seavad vastavusse arvu

$$\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle \delta, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(0).$$

Vaatleme ühemuutujafunktsiooni  $f(x)$ , mis on kõikjal pidev ja omab pidevat esimest järku klassikalist tuletist  $f'(x)$ , välja arvatud punkt  $x = x_0$ , kus funktsioon ise ja tema tuletis on katkevad. Leiame vastava regulaarse distributsiooni üldistatud tuletise

$$\begin{aligned} \langle D' f, \varphi \rangle &= - \langle f, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{x_0} f(x) \varphi'(x) dx - \\ &- \int_{x_0}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = - f(x_0-0) \varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x) \varphi(x) dx + \\ &+ f(x_0+0) \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = [f(x_0+0) - f(x_0-0)] \varphi(x_0) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = [f(x_0+0) - f(x_0-0)] \langle \delta(x-x_0), \varphi \rangle + \\ &+ \langle f'(x), \varphi \rangle = [f(x_0+0) - f(x_0-0)] \delta(x-x_0) + f'(x), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Seega

$$D' f = f'(x) + [f(x_0+0) - f(x_0-0)] \delta(x-x_0). \quad (4.4)$$

Olgu funktsiooniks  $f(x)$  Heaviside' funktsioon

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ 1, & \text{kui } x \geq 0. \end{cases}$$

Seose (4.4) põhjal

$$D' \theta = \delta(x).$$

Kuna eespool vaadeldud funktsioon  $\omega_\varepsilon(x)$  on lokaalselt integreeruv, siis ta määrab regulaarse distributsiooni, mille võib samastada selle funktsiooniga. Näitame, et distributsioonide  $\omega_\varepsilon(x)$  jada koondub  $\varepsilon \rightarrow +0$  korral delta-funktsiooniks. Koondumise definitsiooni kohaselt rüümis  $D'$  on vaja näidata, et mis tahes  $\varphi(x) \in D$  korral

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Tänu põhifunktsiooni  $\varphi(x)$  pidevusele võib mis tahes  $\eta > 0$  korral leida sellise  $\varepsilon_0 > 0$ , et  $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$ , kui  $|x| < \varepsilon_0$ . Siis iga  $\varepsilon < \varepsilon_0$  korral

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) dx \right| = \\ & = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx = \\ & = \int_{|x| \leq \varepsilon} \omega_\varepsilon(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \int_{|x| \leq \varepsilon} \omega_\varepsilon(x) dx = \eta, \text{ m. o. t. t.} \end{aligned}$$

Distributsioonide jadasid, mis koonduvad delta-funktsiooniks, nimetatakse delta-jadadeks.

**Teoreem:** Kui funktsioonide  $\delta_\nu(x)$  jada rahuldab tingimusi

1) iga  $k > 0$  korral leidub sõltumata  $\nu$ -st selline konstant  $K$ , et

$$\int_{|x| \leq k} |\delta_\nu(x)| dx \leq K,$$

2) mis tahes lõigul  $0 < a \leq |x| \leq \frac{1}{a} < \infty$  jada  $\delta_\nu(x) \rightarrow 0$  ühtlaselt, kui  $\nu \rightarrow \infty$ ,

3) mis tahes  $a > 0$  korral

$$\int_{|x| \leq a} \delta_\nu(x) dx \rightarrow 1, \text{ kui } \nu \rightarrow \infty,$$

siis vastav regulaarsete distributsioonide  $\delta_\nu$  jada koondub delta-funktsiooniks, s.t.

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_\nu(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Tõestus. Iga  $\varphi(x) \in D$  korral

$$\begin{aligned} \langle \delta_\nu, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta_\nu(x) \varphi(x) dx = \int_{|x| \leq a} [\varphi(x) - \varphi(0)] \delta_\nu(x) dx + \\ &+ \varphi(0) \int_{|x| \leq a} \delta_\nu(x) dx + \int_{|x| > a} \delta_\nu(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Kuna  $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq |x| \sqrt{n} M$ , kus  $M$  on funktsiooni  $\varphi(x)$  esimest järku osatuletiste maksimaalne väärtus, siis  $a \leq k$  korral

$$\left| \int_{|x| \leq a} [\varphi(x) - \varphi(0)] \delta_\nu(x) dx \right| \leq a \sqrt{n} M \int_{|x| \leq a} |\delta_\nu(x)| dx \leq a \sqrt{n} M \int_{|x| \leq k} |\delta_\nu(x)| dx \leq a \sqrt{n} M \cdot K. \text{ Valides } a \leq \frac{\varepsilon}{3kM\sqrt{n}}, \text{ saame}$$

$$\left| \int_{|x| \leq a} [\varphi(x) - \varphi(0)] \delta_\nu(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{sõltumata } \nu\text{-st.}$$

Kui  $a$  valida küllalt väiksena (muidugi  $a \leq k$  ja  $a \leq \frac{\varepsilon}{3kM\sqrt{n}}$ ),

siis  $\varphi(x)$  finitiisuse tõttu supp  $\varphi$  sisaldub sfääris

$$|x| < \frac{1}{a} \quad \text{Järelikult}$$

$$\begin{aligned} \int_{|x| > a} \delta_\nu(x) \varphi(x) dx &= \int_{\frac{1}{a} \geq |x| > a} \delta_\nu(x) \varphi(x) dx + \int_{|x| > \frac{1}{a}} \delta_\nu(x) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\frac{1}{a} \geq |x| > a} \delta_\nu(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Teoreemi teise tingimuse kohaselt leidub selline  $\nu_1$ , et  $\nu \geq \nu_1$  korral

$$\left| \int_{\frac{1}{a} \geq |x| > a} \delta_\nu(x) \varphi(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tänu kolmandale tingimusele leidub selline  $\nu_2$ , et  $\nu \geq \nu_2$  korral

$$\left| \varphi(0) \int_{|x| \leq a} \delta_\nu(x) dx - \varphi(0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Olgu nüüd  $\nu_0 = \max(\nu_1, \nu_2)$ . Siis  $\nu \geq \nu_0$  korral

$$\begin{aligned} | \langle \delta_\nu, \varphi \rangle - \varphi(0) | &\leq \left| \int_{|x| \leq a} [\varphi(x) - \varphi(0)] \delta_\nu(x) dx \right| + \\ &+ \left| \varphi(0) \int_{|x| \leq a} \delta_\nu(x) dx - \varphi(0) \right| + \left| \int_{|x| > a} \delta_\nu(x) \varphi(x) dx \right| \leq \varepsilon, \text{ m. o. t. t.} \end{aligned}$$

Toome mõned delta-jadade näited:

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \rightarrow \delta(x), \quad \text{kui } \varepsilon \rightarrow +0;$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \rightarrow \delta(x), \quad \text{kui } \varepsilon \rightarrow +0;$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi \varepsilon x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon} \rightarrow \delta(x), \quad \text{kui } \varepsilon \rightarrow +0;$$

$$\tilde{\delta}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon} \rightarrow \delta(x), \text{ kui } \varepsilon \rightarrow +0.$$

Kuna võib kirjutada

$$\frac{1}{\pi x} \sin vx = \frac{1}{2\pi} \int_{-v}^{+v} e^{i\xi x} d\xi,$$

siis

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-v}^{+v} e^{i\xi x} d\xi \rightarrow \delta(x), \text{ kui } v \rightarrow +\infty.$$

Delta-funktsiooni rakenduslik tähtsus tuleneb asjaolust, et tänapäeva füüsikas, eriti kvantfüüsikas, kohtame kõrvuti suurustega, mis omavad pideva jaotuse, selliseid mõisteid, nagu punktmass, punktlaeng, punktsoojusallikas jne. Selliste suuruste matemaatiliseks kirjeldamiseks sobibki delta-funktsioon.

#### 4.3. Üldistatud lahendi mõiste

Vaatleme järgmist segaülesannet hüperboolset tüüpi võrrandi jaoks

$$\begin{aligned} \rho(M) u_{tt} &= \operatorname{div} [k(M) \operatorname{grad} u] - q(M)u + F(M, t) \quad ((M, t) \in G), \\ u(M, 0) &= \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M) \quad (M \in \bar{G}), \end{aligned}$$

$$\left[ \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2 u \right]_{\Sigma} = 0 \quad (t \in [0, T]),$$

kus  $k(M) \in C^1(\bar{G})$ ,  $q(M) \in C^0(\bar{G})$ ,  $\rho(M) \in C^0(\bar{G})$ . Selle ülesande klassikaliseks lahendiks nimetatakse funktsiooni  $u(M, t) \in C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$ , mis rahuldab kõiki ülesande nõudeid. Klassikalise lahendi olemasoluks on vaja, et oleksid täidetud järgmised sileduse tingimused:  $F(M, t) \in C^0(G)$ ,  $\varphi(M) \in C^1(\bar{G})$ ,  $\psi(M) \in C^0(\bar{G})$ . Need tingimused aga ei tarvitse olla täidetud. Võib esineda olukord, kus näiteks funktsioon  $F(M, t)$ , mis iseloomustab välismõjusid (näiteks võnkuvale süsteemile mõjuvat välisjõudu), ei ole pidev. Sel juhul ülesandel klassikalist lahendit ei tarvitse eksisteerida. Tuleb loobuda lahendi sileduse nõudest ning tuua sisse üldistatud lahendi mõiste.

Olgu  $L_2(\Omega)$  selliste funktsioonide  $f(M)$  hulk, millede jaoks  $|f(M)|^2$  on integreeruv ruumi  $R^n$  piirkonnas  $\Omega$ . Neid funktsioone nimetatakse integreeruva ruuduga funktsioonideks. Funktsiooni  $f(M)$  normiks ruumis  $L_2(\Omega)$  nimetatakse suurust

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\Omega} |f(M)|^2 d\Omega}.$$

Vaatleme funktsioone  $g(M, t)$ , mis iga fikseeritud  $t \in [0, T]$  korral kuuluvad ruumi  $L_2(\Omega)$  ja mis on lõigul  $[0, T]$  muutuja  $t$  suhtes pidevad ruumis  $L_2(\Omega)$ , s.t. mille korral

$$\|g(M, t') - g(M, t)\| \rightarrow 0 \text{ kui } t' \rightarrow t; t', t \in [0, T].$$

Tähistame sümbooliga  $C(0, T; L_2)$  kõigi selliste funktsioonide hulga. Funktsioonide  $g_k(M, t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) jada koondub hulgal  $C(0, T; L_2)$  funktsiooniks  $g(M, t)$ , kui iga  $t \in [0, T]$  puhul

$$\|g_k(M, t) - g(M, t)\| \rightarrow 0 \text{ } k \rightarrow \infty \text{ korral.}$$

Definieerime veel hulga  $H^1(\Omega)$ , mille elementideks on integreeruva ruuduga funktsioonid, mille esimest järku üldistatud tuletised on samuti integreeruva ruuduga piirkonnas  $\Omega$ .

Vaatleme järgmisi funktsioonide jadasid:

1.  $F_1(M, t), F_2(M, t), \dots$ , kus  $F_k(M, t)$  on piirkonnas  $\bar{G}$  pidevad funktsioonid, s.t. nad kuuluvad hulka  $C(0, T; L_2)$ , ja koondugu see jada funktsiooniks  $F(M, t)$  iga  $T > 0$  korral;
2.  $\varphi_1(M), \varphi_2(M), \dots$ , kus  $\varphi_k(M)$  on piirkonnas  $\bar{\Omega}$  pidevad funktsioonid, mille esimest järku osatuletised on pidevad piirkonnas  $\bar{\Omega}$ , s.t. nad kuuluvad hulka  $H^1(\bar{\Omega})$ , ja koondugu see jada funktsiooniks  $\varphi(M)$ ;
3.  $\Psi_1(M), \Psi_2(M), \dots$ , kus  $\Psi_k(M)$  on piirkonnas  $\bar{\Omega}$  pidevad funktsioonid, s.t. nad kuuluvad hulka  $L_2(\bar{\Omega})$ , ja koondugu see jada funktsiooniks  $\Psi(M)$ .

Iga  $k = 1, 2, \dots$  korral eksisteerigu segaülesande

$$q(M) \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \operatorname{div}[k(M) \operatorname{grad} u_k] - q(M) u_k + F_k(M, t) \quad ((M, t) \in G),$$

$$u_k|_{t=0} = \varphi_k(M), \quad \frac{\partial u_k}{\partial t}|_{t=0} = \psi_k(M) \quad (M \in \bar{\Omega}),$$

$$\left[ \gamma_1 \frac{\partial u_k}{\partial n} + \gamma_2 u_k \right]_{\Sigma} = 0 \quad (t \in [0, T])$$

klassikaline lahend  $u_k(M, t)$ .

On võimalik näidata ([6], et lahendite  $u_k(M, t)$  ja da koondub funktsiooniks  $u(M, t)$ , mis on koos oma esimest järku üldistatud tuletistega iga  $t > 0$  korral integreeruva ruuduga piirkonnas  $\bar{\Omega}$ . Seda funktsiooni  $u(M, t)$  nimetataksegi vaadeldava ülesande üldistatud lahendiks. Tema olemasoluks on tarvilik, et  $F(M, t) \in C(0, T; L_2)$ ,  $\varphi(M) \in H^1(\Omega)$  ja  $\psi(M) \in L_2(\Omega)$ .

#### 4.4. Ülesanded

1. Veenduda, et järgmised funktsionaalid on lineaarsed ja pidevad, s.t. määravad distributsiooni

- $\lambda f + \mu g$ ,
- $af$ ,
- $D^\alpha f$ .

Siin  $f, g \in D'$ ,  $a = a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\lambda$  ja  $\mu$  - reaalarvud.

2. Näidata, et

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

3. Näidata, et

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x).$$

4. Näidata, et kui  $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , siis

$$\psi(x) \delta(x) = \psi(0) \delta(x).$$

5. Näidata, et kui  $f(x)$  on ühemuutujafunktsioon, mis omab ühekordse nullkoha punktis  $x = x_0$ , siis

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}.$$

Märkus. Distributsiooni  $\delta[f(x)]$  defineerime kui funktsionaali, mis igale põhifunktsioonile  $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  seab vastavusse arvu

$$\langle \delta[f(x)], \varphi(x) \rangle = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\nu[f(x)] \varphi(x) dx,$$

kus jada  $\delta_n(y)$  on delta-jada.

Kui funktsioon  $f(x)$  omab  $n$  ühekordset nullkohta  $x_i$ , siis kehtib seos

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}.$$

6. Näidata, et kehtib seos

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm iy} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi \delta(x),$$

kus  $P\left(\frac{1}{x}\right)$  on distributsioon (nimetatakse teda funktsiooni  $\frac{1}{x}$  peaosaks), mis igale põhifunktsioonile  $\varphi(x) \in D$  seab vastavusse arvu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Märkus: Arvestada, et

$$\frac{1}{x \pm iy} = \frac{d}{dx} \ln(x \pm iy).$$

## II. CAUCHY ÜLESANNE

### § 5. Levivate lainete meetod

#### 5.1. Homogeense lõpmatu keele vabad võnkumised

Vaatleme Cauchy ülesannet: leida funktsioon  $u(x,t)$ , mis rahuldab  $-\infty < x < +\infty$  ja  $t > 0$  korral võrrandit

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad (5.1)$$

ja algtingimusi

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad (5.2)$$

kus  $\varphi(x)$  ja  $\psi(x)$  on vahemikus  $-\infty < x < \infty$  etteantud funktsioonid. See ülesanne kirjeldab homogeense lõpmatu keele vabu võnkumisi, mis on esile kutsutud alghälbest ja algkiirusest.

Võrrandi (5.1) karakteristikuteks on sirged

$$x + at = C_1, \quad x - at = C_2.$$

Muutujate vahetus

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

viib võrrandi (5.1) kujule

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Selle võrrandi integreerimine annab

$$u(\xi, \eta) = F_1(\xi) + F_2(\eta),$$

kus  $F_1(\xi)$  ja  $F_2(\eta)$  on suvalised funktsioonid. Pöördudes tagasi muutujatele  $x$  ja  $t$ , leiame

$$u(x,t) = F_1(x + at) + F_2(x - at). \quad (5.3)$$

Lihtne on veenduda, et see funktsioon rahuldab võrrandit (5.1), kui funktsioonid  $F_1$  ja  $F_2$  on kaks korda pidevalt diferentseeruvad.

Funktsioonid  $F_1$  ja  $F_2$  määrame nii, et valemiga (5.3) määratud funktsioon rahuldaks ka algtingimusi (5.2):

$$u(x,0) = F_1(x) + F_2(x) = \varphi(x), \quad (5.4)$$

$$u_t(x,0) = aF_1'(x) - aF_2'(x) = \psi(x).$$

Teise võrduse integreerimine annab

$$a[F_1(x) - F_2(x)] = \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + c, \quad (5.5)$$

kus  $x_0$  ja  $c$  on suvalised konstandid. Võrdustest (5.4) ja (5.5) leiame

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + \frac{c}{2a}, \quad (5.6)$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2a}. \quad (5.7)$$

Asendades need avaldised valemisse (5.3), saame vaadeldava Cauchy ülesande lahendi kujul

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad (5.8)$$

mis on tuntud d'Alembert'i valemi nime all.

Vahetu kontrolli abil võime veenduda, et valemiga (5.8) antud funktsioon rahuldab võrrandit (5.1) ja algtingimusi (5.2), kui funktsioon  $\varphi(x)$  on kaks korda ja funktsioon  $\psi(x)$  üks kord pidevalt diferentseeruv. Lahendi ühesus tuleneb valemi (5.8) tuletamismeetodist.

Näitame veel leitud lahendi stabiilsust. Olgu  $\bar{u}(x,t)$  vaadeldava ülesande lahend teistsuguse alghälbe  $\bar{\varphi}(x)$  ja algkiiruse  $\bar{\psi}(x)$  korral, kusjuures

$$|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| < \delta, \quad |\psi(x) - \bar{\psi}(x)| < \delta.$$

Siis iga  $0 \leq t \leq T$  korral

$$\begin{aligned} |u(x,t) - \bar{u}(x,t)| &\leq \frac{|\varphi(x+at) - \bar{\varphi}(x+at)|}{2} + \frac{|\varphi(x-at) - \bar{\varphi}(x-at)|}{2} + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi(\xi) - \bar{\psi}(\xi)| d\xi \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2a} 2at \leq \delta(1+T). \end{aligned}$$

Kui võtta  $\delta = \frac{\epsilon}{1+T}$ , siis võrratus  $|u(x-t) - \bar{u}(x,t)| < \epsilon$  tähendabki lahendi stabiilsust.

Olgu märgitud, et vaadeldava Cauchy ülesande üldistatud lahend avaldub samuti d'Alembert'i valemiga.

Asume nüüd valemi (5.8) füüsikalisele interpreteerimisele.

Vaatleme erijuhtu, kui  $F_1 = 0$ , s.t. keele vönkumist kirjeldab funktsioon

$$u(x,t) = F_2(x-at).$$

Oletame, et vaatleja hakkab hetkel  $t = 0$  liikuma punktist  $x = 0$  kiirusega  $a$   $x$ -telje positiivses suunas. Keele mingi punkti koordinaat liikumatus koordinaatsüsteemis  $(x)$  ja vaatlejaga kaasa liikuvas koordinaatsüsteemis  $(x')$  on seotud valemiga

$$x' = x - at.$$

Vaatlejaga seotud koordinaatsüsteemis

$$u = F_2(x'),$$

mis tähendab, et selles süsteemis keele hälve ei sõltu ajast. Järelikult funktsioon  $F_2(x - at)$  annab kiirusega  $a$  paremale ( $x$ -telje positiivses suunas) liikuva profiili, mille kuju on antud valemiga (5.7). Analoogselt, funktsioon  $F_1(x + at)$  annab kiirusega  $a$  vasakule ( $x$ -telje negatiivses suunas) liikuva profiili, mille kuju annab valem (5.6).

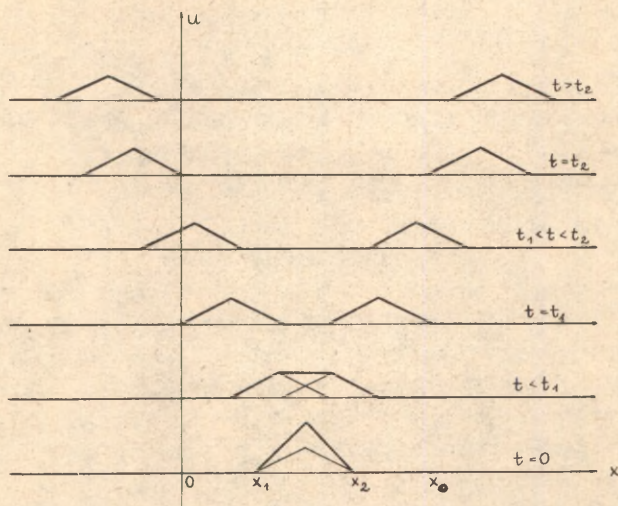
Seega vaadeldava ülesande lahend (5.8) kujutab endast kahe laine summat, üks lainetest, n.n. otselaine, liigub kiirusega  $a$  paremale, teine, n.n. vastulaine liigub sama kiirusega vasakule. See asjaolu võimaldab esitada järgmise graafilise meetodi keele profiili leidmiseks mis tahes ajahetkel  $t$ . Joonistame vastavalt valemitele (5.6) ja (5.7) kõverad  $u_1 = F_1(x)$  ja  $u_2 = F_2(x)$ , mis annavad vastu- ja otselaine ajahetkel  $t = 0$ . Nihutame kõverat  $u_1 = F_1(x)$  piki  $x$ -telge suuruse  $at$  võrra vasakule, kõverat  $u_2 = F_2(x)$  - suuruse  $at$  võrra paremale. Keele profiili leiame nihutatud kõverate ordinaatide algebralise liitmise teel.

Selgitame eraldi alghälve ja algkiiruse mõju keele vönkumisele.

a) Vaatleme esmalt juhtu, kus keelele algkiirust ei anta, s.t.  $\psi(x) \equiv 0$ . Lahend (5.8) omab kuju

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}$$

Otse- ja vastulaine omavad ühesuguse profiili, mis on antud funktsiooniga  $\frac{1}{2} \varphi(x)$ . Olgu alghälve  $\varphi(x) = 0$  kõikjal, välja arvatud keele vahemik  $(x_1, x_2)$ . Vaatleme keele punkti  $x_0$ , mis asub vahemikust  $(x_1, x_2)$  paremal, s. t.  $x_0 > x_2$  (vt. joon. 2).



Joon. 2.

Kuna  $x_0 + at > x_0 > x_2$ , siis  $\varphi(x_0 + at) = 0$  ning punkti  $x_0$  vastulaine ei läbi. Ajahetkel  $t < t_1 = (x_0 - x_2)/a$ :a saame  $x_0 - at > x_0 - at_1 = x_2$ . Seega  $\varphi(x_0 - at) = 0$  ning punkt  $x_0$  pole häiritud. Hetkel  $t = t_1$  läbib punkti  $x_0$  otselaine eesmine front. Ajavahemikus  $t_1 < t < t_2 = (x_0 - x_1)/a$ :a saame  $x_1 = x_0 - at_2 < x_0 - at < x_0 - at_1 = x_2$ . Seega  $\varphi(x_0 - at) \neq 0$  ning punkt  $x_0$  on häiritud, kusjuures teda läbib otselaine. Hetkel  $t_2$  läbib punkti  $x_0$  otselaine ta-

gumine front ning seejärel on punktis  $x_0$  häiritus jälle võrdne nulliga, kuna  $t > t_2$  korral  $x_0 - at < x_0 - at_2 = x_1$ . Analoogselt võib käsitleda juhtu, kus punkt  $x_0$  asub vahemikus  $(x_1, x_2)$  või sellest vasakul. Esimesel juhul läbib punkti  $x_0$  nii otse- kui vastulaine, teisel juhul ainult vastulaine.

Seega ruumiliselt lokaliseeritud alghälve kutsu keelele mistahes punktis  $x_0$  esile ajalisel lokaliseeritud häirituse.

b) Olgu nüüd  $\varphi(x) \equiv 0$ , s.t. keelele alghälvet ei anta. Valem (5.8) omandab kuju

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \quad (5.9)$$

Valemi (5.9) võib ümber kirjutada kujul

$$u(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at),$$

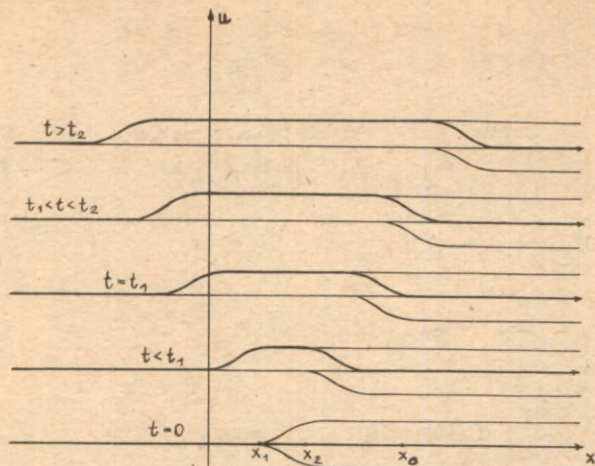
milles

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi. \quad (5.10)$$

Jällegi otse- ja vastulaine profiil on ühesugune ning antud valemiga (5.10), ainult nende poolt esilekutsutud hälbepid on vastupidise märgiga. Oletame, et algkiirus  $\psi(x) = 0$  kõikjal, välja arvatud keele vahemik  $(x_1, x_2)$ . Vaatleme jällegi punkti  $x_0$ , mis asub vahemikust  $(x_1, x_2)$  paremal (vt. joonis 3).

Kui  $t < t_1 = (x_0 - x_2) : a$ , siis valemis (5.9) integreerimisvahemik  $(x_0 - at, x_0 + at)$  ei oma ühiseid punkte vahemikuga  $(x_1, x_2)$  ning  $u(x_0, t) = 0$ , s.t. punkt  $x_0$  pole häiritud. Hetkel  $t = t_1$  läbib punkti  $x_0$  laine eesmine front. Kui  $(x_0 - x_1) : a = t_2 > t > t_1$ , siis integreerimisvahemik  $(x_0 - at, x_0 + at)$  kattub osaliselt vahemikuga  $(x_1, x_2)$  ning

$$u(x_0, t) = \int_{x_0-at}^{x_0+at} \psi(\xi) d\xi = \int_{x_0-at}^{x_1} \psi(\xi) d\xi \neq 0.$$



Joon. 3

Kui näiteks kõikidele punktidele vahemikust  $(x_1, x_2)$  anda ühesuunaline algkiirus, s.t. funktsioon  $\psi(x)$  ei muuda märki selles vahemikus, siis ajavahemiku  $(t_1, t_2)$  jooksul hälve punktis  $x_0$  kasvab monotoonselt. Alates hetkest  $t_2$  integreerimisvahemik  $(x_0 - at, x_0 + at)$  hõlmab täielikult vahemiku  $(x_1, x_2)$ , mistõttu

$$u(x_0, t) = \int_{x_0 - at}^{x_0 + at} \psi(\xi) d\xi = \int_{x_1}^{x_2} \psi(\xi) d\xi = \text{const}, \quad (5.11)$$

s.t. hälve ei muutu ajas. Seega ruumiliselt lokaliseeritud algkiirus tingib olukorra, kus keele tasakaal ei taastu, vaid tekib jääknihe, mille suurus on antud valemiga (5.11).

## 5.2. Lainete peegeldumine keele otspunktis

Vaatleme poollõpmatu keele võnkumise ülesannet, mis on tähtis keele otspunktis lainete peegeldumise uurimise seisukohalt. Otspunktis  $x = 0$  kinnitatud (või vaba) keele korral seisneb ta järgnevas: leida võrrandi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (5.12)$$

lahend  $0 < x < \infty$  ja  $t > 0$  korral, mis rahuldab algtingimusi

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (5.13)$$

ning rajatingimust

$$u(0,t) = 0 \quad (\text{või } u_x(0,t) = 0).$$

Funktsioonid  $\varphi(x)$  ja  $\psi(x)$  on määratud vahemikus  $0 < x < \infty$ .

Võrrandi (5.12) lahend avaldub samuti nagu lõpmatu keele korralgi kujul

$$u(x,t) = F_1(x+at) + F_2(x-at), \quad (5.14)$$

kus funktsioonid  $F_1$  ja  $F_2$  on suvalised. Nende määramine algtingimustest, samuti nagu tegime seda lõpmatu keele korral, on seotud järgmise raskusega. Algtingimuste (5.13) rahuldamiseks on vaja funktsioonid  $F_1$  ja  $F_2$  võtta vastavalt valemitele (5.6) ja (5.7). Kuna funktsioonid  $\varphi(x)$  ja  $\psi(x)$  on määratud ainult  $x > 0$  jaoks, siis need valemid määravad ka funktsioonid  $F_1$  ja  $F_2$  ainult positiivsete argumentide väärtuste jaoks. Lahendis (5.14) võib aga funktsiooni  $F_2$  argument olla negatiivne (kui  $t > \frac{x}{a}$ ). Seepärast lahendi esitamiseks kujul (5.14) on vaja funktsioone  $\varphi(x)$  ja  $\psi(x)$  jätkata negatiivsetele argumentidele väärtustele.

Tõestame järgmised lemmad.

**Lemma 1.** Kui Cauchy ülesandes lõpmatu keele jaoks funktsioonid  $\varphi(x)$  ja  $\psi(x)$  on paaritufunktsioonid keele punkti  $x = 0$  suhtes, siis Cauchy ülesande lahend võrdub punktis  $x = 0$  nulliga.

Kui  $\varphi(x) = -\varphi(-x)$  ja  $\psi(x) = -\psi(-x)$ , siis valemi (5.8) kohaselt

$$u(0,t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} \psi(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{\varphi(at) - \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} \psi(\xi) d\xi = 0,$$

kuna integraal paaritufunktsioonist rajades, mis on sümmeetrilised punkti  $\xi = 0$  suhtes, võrdub nulliga.

Lemma 2. Kui Cauchy ülesandes lõpmatu keele jaoks funktsioonid  $\varphi(x)$  ja  $\psi(x)$  on paarisfunktsioonid keele punkti  $x = 0$  suhtes, siis Cauchy ülesande lahendi tuletis  $u_x$  võrdub punktis  $x = 0$  nulliga.

Kui  $\varphi(x) = \varphi(-x)$  ja  $\psi(x) = \psi(-x)$ , siis  $\varphi'(x) = -\varphi'(-x)$  ja  $\psi'(x) = -\psi'(-x)$  ning valemist (5.8) järgneb:

$$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(-at)] =$$

$$= \frac{\varphi'(at) - \varphi'(at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(at)] = 0.$$

Otspunktis  $x = 0$  kinnitatud keele korral jätkame funktsioone  $\varphi(x)$  ja  $\psi(x)$  nii, et jätkatud funktsioonid  $\tilde{\Phi}(x)$  ja  $\tilde{\Psi}(x)$  oleksid paaritufunktsioonid  $x = 0$  suhtes:

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{kui } x > 0, \\ -\varphi(-x), & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{kui } x > 0, \\ -\psi(-x), & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Kui vaatleme Cauchy ülesannet algtingimustega  $u(x,0) = \tilde{\Phi}(x)$  ja  $u_t(x,0) = \tilde{\Psi}(x)$ , siis tema lahend avaldub valemiga

$$u(x,t) = \frac{\tilde{\Phi}(x+at) + \tilde{\Phi}(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\Psi}(\xi) d\xi. \quad (5.15)$$

Veendume, et valem (5.15) annab ka vaadeldava ülesande lahendi kinnitatud otspunkti korral. Tõepoolest, valemi (5.15) kohaselt funktsioon  $u(x, t)$  avaldub otse- ja pöördlaine summana, mistõttu ta rahuldab võrrandit (5.12):

$$u(x, t) = F_1(x + at) + F_2(x - at), \quad (5.16)$$

milles

$$F_1(x) = \frac{\bar{\Phi}(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_c^x \Psi(\xi) d\xi, \quad (5.17)$$

$$F_2(x) = \frac{\bar{\Phi}(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \Psi(\xi) d\xi. \quad (5.18)$$

Keele punktide  $x > 0$  jaoks

$$u(x, 0) = \frac{\bar{\Phi}(x) + \bar{\Phi}(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_x^x \Psi(\xi) d\xi = \bar{\Phi}(x) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \frac{a\bar{\Phi}'(x) - a\bar{\Phi}'(x)}{2} + \frac{1}{2a} [a\Psi(x) + a\Psi(x)] = \Psi(x) = \psi(x).$$

Otspunktis  $x = 0$

$$u(0, t) = \frac{\bar{\Phi}(at) + \bar{\Phi}(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(\xi) d\xi = 0$$

tänu sellele, et  $\bar{\Phi}(x)$  ja  $\Psi(x)$  on paaritufunktsioonid.

Vaba otspunkti  $x = 0$  korral jätkame funktsioone  $\varphi(x)$  ja  $\psi(x)$  nii, et jätkatud funktsioonid  $\bar{\Phi}(x)$  ja  $\Psi(x)$  oleksid paarisfunktsioonid:

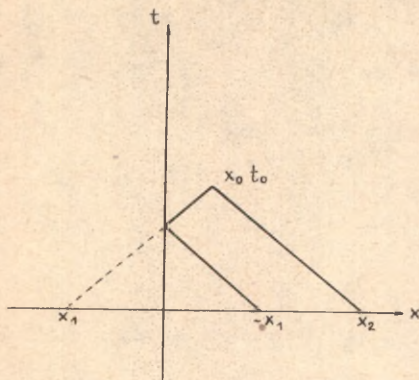
$$\bar{\Phi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{kui } x > 0, \\ \varphi(-x), & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{kui } x > 0, \\ \psi(-x), & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Ülesande lahend avaldub samuti valemiga (5.15). Asume leitud lahendit (5.16) füüsikaliselt interpreteerima. Piki karakteristikut  $x + at = C_1$  funktsioon  $F_1(x + at)$  on

konstantne. Funktsioon  $F_2(x - at)$  on konstantne piki karakteristikut  $x - at = C_2$ . Et selgitada, mis toimub

keele punktis  $x_0$  ajahetkel  $t_0$ , võtame  $(x, t)$ -tasandil karakteristikud  $x - at = x_0 - at_0$  ja  $x + at = x_0 + at_0$ , mis läbivad punkti  $(x_0, t_0)$  (vt. joon. 4). Need karakteristikud lõikavad  $x$ -telge punktides koordinaatidega vastavalt  $x_1$  ja  $x_2$ . Seega võime kirjutada  $u(x_0, t_0) = F_1(x_2) + F_2(x_1)$ . Selle valemi kohaselt hälve punktis  $x_0$  hetkel  $t_0$  kujutab endast kahe laine summat: üks neist on otselaine, mis on alghetkel



Joonis 4.

lähtunud keele punktist  $x_1$  ja teine - vastulaine, mis on lähtunud keele punktist  $x_2$ . Kui  $t_0 < \frac{x_0}{a}$ , siis  $x_2 < 0$  ja  $x_1 > 0$ , s.t. punktid  $x_1$  ja  $x_2$  on keele reaalsed punktid.

Kui  $t_0 > \frac{x_0}{a}$ , siis  $x_2 > 0$  ja  $x_1 < 0$ , s.t. punkt  $x_1$  on fiktiivne punkt. Kui funktsioonid  $\Phi(x)$  ja  $\Psi(x)$  on paaritufunktsioonid, siis

$$F_2(x_1) = \frac{\Phi(x_1)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{x_1} \Psi(\xi) d\xi = \frac{-\Phi(-x_1)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{-x_1} \Psi(\xi) d\xi = -F_1(-x_1).$$

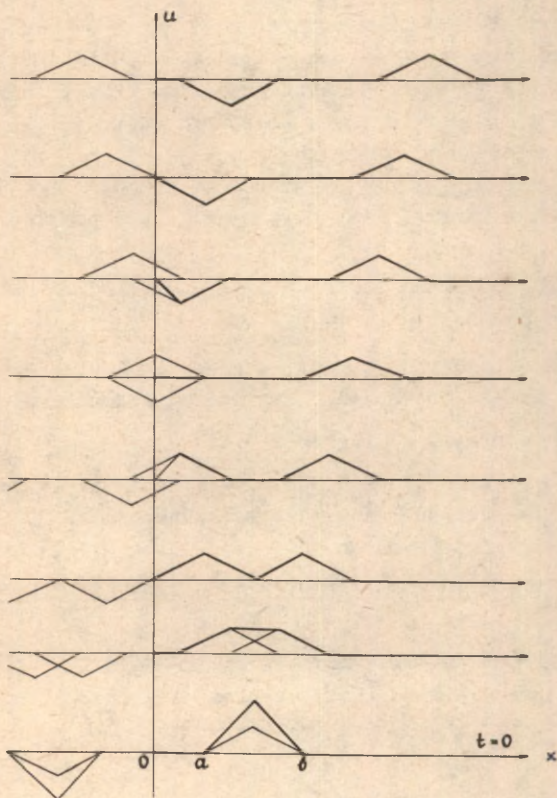
Seega otselaine  $F_2(x_1)$  ei ole midagi muud kui vastulaine  $-F_1(-x_1)$ , mis on alghetkel lähtunud keele punktist

$-x_1 > 0$  ja mis jõudis hetkel  $t = -\frac{x_1}{a} = \frac{at_0 - x_0}{a}$  keele otspunkti  $x = 0$ , muutis liikumissuunda (peegeldus) ja hälve märki. Seega keele kinnitatud otspunktis toimub vas-

tulaine peegeldumine, kusjuures peegeldumisel säilib hälve absoluutväärtus, märk muutub aga vastupidiseks.

Analoogiline arutus näitab, et vaba otspunkti korral toimub otspunktis  $x = 0$  vastulaine peegeldumine ilma hälve märgi muutumiseta.

Graafiliselt võib poollõpmatu keele profiili kinnitatud otspunkti korral leida järgmiselt. Jätkame funktsioone



Joonis 5.

$\psi(x)$  ja  $\Psi(x)$  kogu  $x$ -teljele nii, et jätkatud funktsioonid  $\Phi(x)$  ja  $\Psi(x)$  oleksid paaritufunktsioonid. Valemite (5.17) ja (5.18) kohaselt arvutame vastu- ja otselaine profiilid  $u_1 = F_1(x)$  ja  $u_2 = F_2(x)$ . Nihutame kõverat  $u_1$  suuruse at võrra vasemale, kõverat  $u_2$  aga sama suuruse võrra paremale. Liidame algebraliselt nihutatud kõverate ordinaadid. Saadud kõver  $x$ -telje positiivses osas annabki keele profiili hetkel  $t$ .

Joonisel 5 on kujutatud otspunktis  $x = 0$  kinnitatud poollõpmata keele profiil erinevatel ajahetkedel, kui algkiirus on null ja alghälve erineb nullist ainult vahemikus  $(a, b)$ , kus ta omab võrdhaarse kolmnurga kuju.

Ülalvaadeldud peegeldamise (või jätkamise) meetod on üsnagi universaalne ning rakendatav ka näiteks soojusjuhtivuse võrrandi korral (vt. ülesanded 2 ja 3 punktis 7.4).

### 5.3. Võrrandid, mille lahend avaldub suvalise profiiliga laine kujul

Püstitame ülesande uurida, kas peale keele võrrandi on veel selliseid võrrandeid, mis omavad lahendi kujul

$$u(x, t) = \mu(t)f(x - at), \quad (5.19)$$

milles  $f$  on suvaline funktsioon,  $a$  - konstantne suurus ja  $\mu(t)$  - mingi üldjuhul ajast sõltuv funktsioon. Piirdume seejuures lineaarse konstantsete kordajatega võrrandiga kahe sõltumatu muutuja korral. Sellise võrrandi üldkuju on järgmine

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1u_x + b_2u_t + cu = 0. \quad (5.20)$$

Asendades avaldise (5.19) võrrandisse (5.20), leiame

$$f'' \cdot (a_{11} - 2a_{12}a + a_{22}a^2) + f' \cdot (2a_{12}\mu' - 2a_{22}a\mu' + b_1\mu - b_2a\mu) + f \cdot (a_{22}\mu'' + b_2\mu' + c\mu) = 0.$$

Suvalise funktsiooni  $f$  korral kehtib see võrdus, kui

$$a_{11} - 2a_{12}a + a_{22}a^2 = 0, \quad (5.21)$$

$$2\mu'(a_{12} - a_{22}a) + \mu(b_1 - b_2a) = 0, \quad (5.22)$$

$$a_{22}\mu'' + b_2\mu' + c\mu = 0. \quad (5.23)$$

Tingimustest (5.22) ja (5.23) järeldub, et funktsioon  $\mu(t)$  omab kuju

$$\mu(t) = e^{-kt}.$$

Lahendit kujul

$$u(x,t) = e^{-kt}f(x - at) \quad (5.24)$$

nimetatakse suvalise profiiliga sumbuvaks laineks. Kui  $k = 0$ , siis sumbumist ei toimu. Laine levimiskiiruse  $a$  jaoks saame tingimusest (5.21):

$$a = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}. \quad (5.25)$$

Avaldisest (5.22) leiame sumbumise dekremendi  $k$ :

$$k = \frac{b_1 - b_2a}{2(a_{12} - a_{22}a)}. \quad (5.26)$$

Asendades avaldise funktsiooni  $\mu(t)$  jaoks tingimusse (5.23) ja arvestades seost (5.26), saame pärast lihtsustusi järgmise avaldise, mida peavad rahuldama võrrandi (5.20) kordajad:

$$4c(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) + (a_{11}b_2^2 - 2a_{12}b_1b_2 + a_{22}b_1^2) = 0.$$

Valemist (5.25) järeleb, et elliptilist tüüpi võrrandi korral ( $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ ) vaadeldavat tüüpi lahend pole võimalik, kuna laine levimiskiirus  $a$  on sel juhul kompleksne suurus.

Hüperboolset tüüpi võrrandi korral ( $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ ) on võimalikud kaks erinevat reaalselt lainete levimiskii-  
rust. Seejuures valemistest (5.26) ja (5.23) järeleb, et sumbumatu laine kujul ( $k = 0$ ) avaldub hüperboolset tüüpi võrrandi lahend, kui  $b_1 - b_2a = 0$  ja  $c = 0$ . Esimene neist tingimustest on mõlema  $a$  väärtuse korral täidetav ainult siis, kui  $b_1 = b_2 = 0$ . Seega hüperboolset tüüpi võrrand omab lahendi suvalise profiiliga sumbumatu laine kujul siis, kui ta omab kuju

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} = 0. \quad (5.27)$$

Muutujate vahetus

$$\xi = x - \frac{a_{12}}{a_{22}}t, \quad \eta = t$$

viib selle võrrandi kujule

$$u_{\eta\eta} = a^2 u_{\xi\xi}.$$

Seega võrrand (5.27) kujutab endast keele võrrandit liikuv  
vas koordinaatsüsteemis.

Vaatleme veel telegraafivõrrandit

$$u_{xx} = CLu_{tt} + (CR + LG)u_t + GR = 0. \quad (5.28)$$

See võrrand omab lahendi sumbumatu laine kujul ainult siis, kui  $G = R = 0$ . Need tingimused pole aga praktikas täidetud. Sumbuva laine kujul omab võrrand (5.28) lahendi siis, kui

$$\underline{CR = LG} \quad (5.29)$$

Seejuures laine levimiskiirus

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

ja sumbumise dekrement

$$k = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}.$$

Sidekanaleid, mille korral on täidetud tingimus (5.29), nimetatakse moonutusteta kanaliteks, kuna signaal antakse mööda selliseid kanaleid edasi moonutusteta. Toimub ainult signaali nõrgenemine, mida on aga võimalik kompenseerida signaali võimendamise teel. Moonutuste puudumine omab erilist tähtsust kaugside.

Paraboolset tüüpi võrrandi korral  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$  ning valemist (5.25) järgneb, et on võimalik ainult üks laine levimiskiirus

$$a = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Et sumbumise dekrement oleks lõplik suurus, peab valemi (5.26) põhjal

$$b_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}} b_2 = 0.$$

See tingimus on täidetud, kui kas  $b_1 = b_2 = 0$  või  $b_1 : b_2 = a_{12} : a_{11} = \sqrt{a_{11} : a_{22}}$ . Esimesel juhul võrrand (5.20) omab kuju

$$a_{11} u_{xx} + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} u_{xt} + a_{22} u_{tt} + cu = 0, \quad (5.30)$$

teisel juhul

$$a_{11} u_{xx} + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} u_{xt} + a_{22} u_{tt} + \frac{b_2}{\sqrt{a_{22}}} (\sqrt{a_{11}} u_x + \sqrt{a_{22}} u_t) + cu = 0. \quad (5.31)$$

Muutujate vahetus

$$\xi = x - \frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}}} t, \quad \eta = t$$

viib võrrandid (5.30) ja (5.31) kujule

$$a_{22} u_{\eta\eta} + cu = 0,$$

$$a_{22} u_{\eta\eta} + b_2 u_{\eta} + cu = 0.$$

Sisuliselt saame tavalised diferentsiaalvõrrandid. Seega ka paraboolset tüüpi võrrandid ei oma lahendit suvalise profiiliga laine kujul.

#### 5.4. Ülesanded

1. Leida lõpmatu keele profiil ajamomendil  $t = \frac{2}{a}$ ,

kui

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 2, x > 4, \\ \sin \pi(x-2), & \text{kui } 2 < x < 4, \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < -2, x > 0, \\ -\sqrt{3} \cos \pi x, & \text{kui } -2 < x < 0. \end{cases}$$

2. Leida graafiliselt lõpmatu keele profiil ajamomendil  $t = \frac{2}{a}$ , kui

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & \text{kui } -2 < x < 0, \\ -x + 1, & \text{kui } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{kui } x < -2, x > 1, \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} -\frac{a}{2}, & \text{kui } 2 < x < 4, \\ a, & \text{kui } 4 < x < 5, \\ 0, & \text{kui } x < -2, x > 1. \end{cases}$$

3. Leida graafiliselt poollõpmatu keele profiil ajamomendil  $t = \frac{4}{a}$ , kui keele otspunkt  $x = 0$  on kinnitatud, keele alghälve  $u(x, 0) = 0$  ja algkiirus

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 2, x > 6, \\ 2a, & \text{kui } 2 < x < 3, \\ -a, & \text{kui } 3 < x < 6. \end{cases}$$

4. Leida graafiliselt poollõpmatu keele profiil hetkel  $t = \frac{3}{a}$ , kui keele otspunkt  $x = 0$  on vaba, alghälve

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - x, & \text{kui } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{kui } x > 1 \end{cases}$$

ja algkiirus

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 1, x > 3, \\ a, & \text{kui } 1 < x < 3. \end{cases}$$

5. Millise  $a_{11}$  korral võrrand

$$a_{11} u_{xx} - 2u_{xt} + u_{tt} + 14u_x - 6u_t + 5u = 0$$

omab lahendi suvalise profiiliga sumbuva laine kujul.

Leida see lahend.

6. Lahendada ülesanne rajarežiimi levimisest:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt},$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \quad (x \geq 0),$$

$$u(0,t) = \mu(t) \quad (t > 0).$$

Lahendit otsida otselaine kujul.

7. Lahendada poollõpmatu keele võnkumise ülesanne, kui otspunktis  $x = 0$  on antud kolmandat liiki rajatingimus:

$$u_x(0,t) - u(0,t) = 0$$

8. Lahendada jätkamise meetodil otspunktis  $x = 0$  kinnitatud ja otspunktis  $x = l$  vaba keele võnkumise ülesanne ajavahemiku  $0 \leq t \leq \frac{l}{a}$  jaoks.

§ 6. Cauchy ülesanne lainevõrrandi jaoks

### 6.1. Poissoni valem

Vaatleme Cauchy ülesannet: leida funktsioon

$u(x,y,z,t) = u(M,t)$ , mis  $M \in R^3$  ja  $t > 0$  korral on võrrandi

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (6.1)$$

lahendiks ja rahuldab algtingimusi

$$u(M,0) = \varphi(M), \quad u_t(M,0) = \psi(M), \quad (6.2)$$

kus  $\varphi(M) \in C^3(R^3)$  ja  $\psi(M) \in C^2(R^3)$  on etteantud funktsioonid. See ülesanne kirjeldab alghäirituse levimist lõpmatus ruumis.

Näitame, et lainevõrrandit (6.1) rahuldab funktsioon

$$v(M,t) = \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{at}^M} \frac{\omega(\xi, \eta, \xi)}{r} dS_{at}, \quad (6.3)$$

kus  $\omega(\xi, \eta, \xi)$  on suvaline funktsioon hulgast  $C^3(R^3)$  ja  $S_{at}^M$  on sfäär keskpunktiga  $M = (x,y,z)$  ja raadiusega

$r = at$ . Sfääri punkti  $P = (\xi, \eta, \zeta)$  koordinaadid avalduvad valemitega

$$\xi = x + \alpha at, \quad \eta = y + \beta at, \quad \zeta = z + \gamma at,$$

milles  $\alpha, \beta$  ja  $\gamma$  on raadiuse  $MP$  sihikoosinused.

Kujutame veel punkti  $M$  ümber ühikulise raadiusega sfääri  $S_1^M$ . Ilmselt

$$dS_{at} = r^2 dS_1 = (at)^2 dS_1.$$

Seepärast võib kirjutada

$$V(M, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S_1^M} \omega(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at) dS_1. \quad (6.4)$$

Valemist (6.4) leiame

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{t}{4\pi} \int_{S_1^M} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) dS_1 = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}^M} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) dS_{at}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Valemi (6.4) diferentseerimine aja  $t$  järele annab

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1^M} \omega(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at) dS_1 + \\ &+ \frac{at}{4\pi} \int_{S_1^M} \left( \alpha \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right) dS_1 = \\ &= \frac{V}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_{S_{at}^M} \left( \alpha \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right) dS_{at} = \\ &= \frac{V}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_{D_{at}^M} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Viimati kasutasime Ostrogradsky valemit, kusjuures  $D_{at}^M$  on sfääriga  $S_{at}^M$  ümbritsetud kera. Tähistame

$$J = \int_{D_{\text{at}}^M} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho, \quad (6.7)$$

milles  $\theta, \varphi, \rho$  on sfäärilised koordinaadid algusega punktis M. Seega

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v}{t} + \frac{J}{4\pi at}.$$

Diferentseerides seda avaldist  $t$  järele, leiame

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{v}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{J}{4\pi at^2} =$$

$$= -\frac{v}{t^2} + \frac{v}{t^2} + \frac{J}{4\pi at^2} + \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{J}{4\pi at^2} = \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial J}{\partial t}.$$

Avaldisest (6.7) leiame

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi \right]_{\rho=at} \frac{\partial(at)}{\partial t} =$$

$$= a^3 t^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= a^3 t^2 \int_{S_1^M} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) dS_1 = a \int_{S_{\text{at}}^M} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) dS_{\text{at}}$$

Arvestades avaldist (6.5), saame

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_{\text{at}}^M} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) dS_{\text{at}} = a^2 \Delta v,$$

mis näitabki, et funktsioon (6.3) rahuldab lainevõrrandit.

Funktsiooni (6.3) nimetatakse lainevõrrandi fundamentaallahendiks ruumis  $R^3$   $t > 0$  korral.

Valemitest (6.4) ja (6.6) järgneb, et funktsioon  $v(M, t)$  rahuldab algtingimusi

$$v(M, 0) = 0,$$

$$v_t(M, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1^M} \omega(x, y, z) dS_1 = \frac{\omega(x, y, z)}{4\pi} \int_{S_1^M} dS_1 = \omega(M).$$

Kuna lainevõrrand on lineaarne konstantsete kordajatega homogeenne võrrand, siis rahuldab teda ka funktsioon

$\frac{\partial v}{\partial t}$ , kusjuures

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \omega(M),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = a^2 \Delta v \Big|_{t=0} = 0.$$

Viimane võrdus järeldub asjaolust, et  $v(M, 0) = 0$ .

Eeltoodu põhjal võrrandi (6.1) lahenditeks on funktsioonid

$$u_1(M, t) = \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS_{at},$$

$$u_2(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS_{at} \right].$$

Esimene neist funktsioonidest rahuldab algtingimusi

$$u_1 \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(M),$$

teine

$$u_2 \Big|_{t=0} = \varphi(M), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Seega ülesande (6.1), (6.2) lahendiks on funktsioon

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS_{at} + \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS_{at} \quad (6.8)$$

Valemit (6.8) nimetatakse Poissoni valemiks.

Näitame, et leitud lahend on ühene. Olgu Cauchy ülesandel (6.1), (6.2) kaks lahendit  $u$  ja  $\bar{u}$ . Nende vahe  $u - \bar{u}$  rahuldab samuti võrrandit (6.1) ja algtingimusi

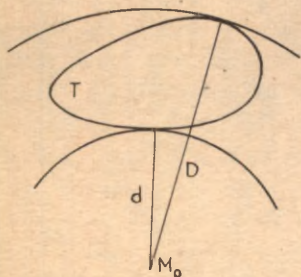
$$[u - \bar{u}]_{t=0} = 0, \quad [u_t - \bar{u}_t]_{t=0} = 0.$$

Valemist (6.8) järgneb siis  $u - \bar{u} = 0$ .

Leitud lahendi füüsikaliseks interpreteerimiseks oletame, et alghäiritus, s.t. funktsioonid  $\varphi(M)$  ja  $\psi(M)$ , erinevad nullist ainult mingis tõekestatud piirkonnas  $T$  (joon. 6). Vaatleme punkti  $M_0$ , mis asub väljaspool piirkonda  $T$ . Valemi (6.8) kohaselt on punkt  $M_0$  häiritud neil ajamomentidel, millal sfäär  $S_{at}^{M_0}$  (raadiusega  $a$  ja keskpunktiga  $M_0$ ) lõikab piirkonda  $T$ . Olgu punkti  $M_0$  kaugus piirkonna  $T$  lähima ja kaugeima punktini vastavalt  $d$  ja  $D$ . Ajamomentidel  $t < t_1 = \frac{d}{a}$  sfäär  $S_{at}^{M_0}$  ei lõika piirkonda  $T$  ning punkt  $M_0$  on häirimata, temani ei ole veel häiritus jõudnud. Alates ajamomendist  $t_1$  kuni ajamomendini  $t_2 = \frac{D}{a}$  on punkt

$M_0$  häiritud, kuna sfäär  $S_{at}^{M_0}$  lõikab piirkonda  $T$ . Kui  $t > t_2$ , siis punkt  $M_0$  on jälle häirimata, kuna sfäär  $S_{at}^{M_0}$  hõlmab piirkonda  $T$ .

Ajamomendil  $t$  on häiritud need punktid  $M$ , mille puhul sfäärid  $S_{at}^M$  lõikavad piirkonda  $T$ . Teiste sõnadega, häiritud on need punktid, mis asuvad sfääridel  $S_{at}^P$ , kus  $P \in T$ . Nende sfääride välist



Joon. 6.

mähispinda nimetatakse laine eesmiseks frondiks, mis eraldab punkte, kuhu häiritus pole veel jõudnud, punktidest, mis on vaadeldaval hetkel häiritud. Kui sfääride  $S_{at}^P$  parv omab seesmise mähispinna, siis on lainel olemas ka tagumine front.

Seega, ruumiliselt lokaliseeritud alghäiritus tingib ruumi igas punktis ajaliselt lokaliseeritud häirituse, kusjuures ruumis leviv laine omab eesmise ja tagumise frondi. See tulemus on tuntud Huygensi printsiibina.

## 6.2. Silindrilised lained

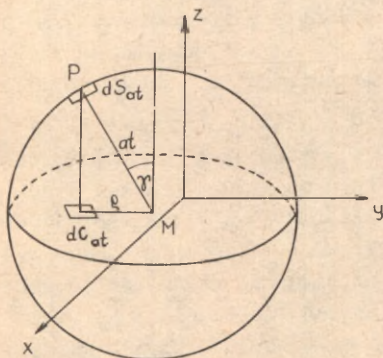
Vaatleme olukorda, kus alghäiritus, s. t. funktsioonid  $\varphi(M)$  ja  $\psi(M)$ , ei sõltu ruumikoordinaadist  $z$ . Siis valemi (6.8) kohaselt ka Cauchy ülesande lahend ei sõltu koordinaadist  $z$ . Järelikult Poissoni valem annab ka võrrandi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6.9)$$

lahendi lisatingimustel

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x, y). \quad (6.10)$$

Ülesanne (6.9), (6.10) on Cauchy ülesanne tasandil.



Joon. 7.

Me võime valemit (6.8) teisendada, kuna vaadeldaval juhul võib integreerimise üle sfääri  $S_{at}^M$  ülemise (alumise) poole asendada integreerimisega üle ringi  $C_{at}^M$ , mis tekitab sfääri  $S_{at}^M$  ja  $(x, y)$ -tasandi lõikumisel (joon. 7).

Sfääri  $S_{at}^M$  element  $dS_{at}$  ja ringi  $C_{at}^M$  element  $dC_{at}$  on omava-

hel seotud valemiga  $dS_{at} \cos \gamma = dC_{at} = d\xi d\eta$ , kusjuures

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}}{at} = \frac{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at}.$$

Seega Cauchy ülesande lahend tasandilisel juhul

$$u(M, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{C_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{C_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \quad (6.11)$$

Kirjelatud meetod tasandilise ülesande lahendi leidmiseks ruumilise ülesande lahendi põhjal kannab laskumis-  
meetodi nime.

Lahendi (6.11) interpreteerimiseks oletame jälle, et alghäiritus erineb nullist ainult mingis  $(x, y)$ -tasandi lõplikus piirkonnas  $T$ . Vaatleme punktis  $M_0 = (x_0, y_0)$ , mis asub väljaspool piirkonda  $T$ . Olgu  $d$  ja  $D$  piirkonna  $T$  punktide minimaalne ja maksimaalne kaugus punktist  $M_0$ . Kuni ajamomendini  $t_1 = \frac{d}{a}$  ring  $C_{at}^{M_0}$  ei oma ühiseid punkte piirkonnaga  $T$  ning  $u(M_0, t) = 0$ , s.t. punkt  $M_0$  pole häiritud. Alates ajamomendist  $t_1$  ring  $C_{at}^{M_0}$  ja piirkond  $T$  omavad ühiseid punkte, ning punkt  $M_0$  on häiritud. Kui  $t > t_2 = \frac{D}{a}$ , siis piirkond  $T$  sisaldub ringis  $C_{at}^{M_0}$  ning

$$u(M_0, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_T \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x_0)^2 - (\eta - y_0)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a} \int_T \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x_0)^2 - (\eta - y_0)^2}}.$$

Seega häiritus jääb punktis  $M_0$  püsima, kuigi ta aja jooksul kahaneb ning  $t \rightarrow \infty$  korral läheneb nullile. Tekib laine, millel on eesmine front, kuid pole tagumist fronti. Huygen-  
si printsiip ei kehti.

Kolmemõõtmelisel juhul on tegemist olukorraga, kus funktsioonid  $\varphi(M)$  ja  $\psi(M)$  erinevad nullist lõpmatus silindris, mille juhtjooneks on piirkonna  $T$  raja ja moodustajateks on  $z$ -teljega paralleelsed sirged. Alates hetkest  $t_1$  sfäär  $S_{at}^{M_0}$  lõikab seda silindrit ning integraalid Poissoni valemis (6.8) erinevad nullist, s.t. punkt  $M_0$  on häiritud. Ruumis leviv laine omab silindrilise kuju.

### 6.3. Hilinev potentsiaal

Eespool uurisime alghäirituse levimist ruumis ja tasandil. Nüüd vaatleme välishäirituse levimist. Selleks on vaja lahendada järgmine ülesanne: leida funktsioon  $u(M, t)$ , mis  $M \in R^3$  ja  $t > 0$  korral on mittehomoogeense lainevõrrandi

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t)$$

lahendiks ja rahuldab algtingimusi

$$u(M, 0) = 0, \quad u_t(M, 0) = 0.$$

Seejuures funktsioon  $f \in C^2(R^3, t \geq 0)$ .

Toodud ülesande lahendamiseks leiame algul lahendi ülesandele

$$v_{tt} = a^2 \Delta v, \quad (6.12)$$

$$v(M, \tau) = 0, \quad v_t(M, \tau) = f(M, \tau). \quad (6.13)$$

Selle ülesande omapäraks on, et algmomenidiks pole mitte ajamoment  $t = 0$ , vaid  $t = \tau$ , kus  $\tau$  on mingi fikseeritud ajamoment, mida võib vaadelda parameetrina.

Me näitasime, et funktsioon

$$v(M, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S_1^M} \omega(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at) dS_1 \quad (6.14)$$

rahuldab homogeenset lainevõrrandit (6.12) ja algtingimusi

$$v(M, 0) = 0, \quad v_t(M, 0) = \omega(x, y, z).$$

Ülesande (6.12), (6.13) lahendi saame, kui võtame valemis (6.14)  $\omega(x, y, z) = f(x, y, z, \tau)$  ja  $t$  asendame suurusga  $t - \tau$ . Järelikult

$$v(x, y, z, t; \tau) = \frac{t-\tau}{4\pi} \int_{S_1^M} f[x+\alpha a(t-\tau), y+\beta a(t-\tau), z+\gamma a(t-\tau), \tau] dS_1.$$

Näitame, et eespool formuleeritud ülesande lahendiks on funktsioon

$$u(M, t) = \int_0^t v(x, y, z, t; \tau) d\tau. \quad (6.15)$$

Kuna integreerimisrajad ei sõltu koordinaatidest, siis

$$\Delta u = \int_0^t \Delta v d\tau. \quad (6.16)$$

Valemi (6.15) diferentseerimine aja  $t$  järgi annab

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t} d\tau + v|_{\tau=t}.$$

Esimese algtingimuse (6.13) kohaselt teine liidetav võrdub nulliga ning

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t} d\tau. \quad (6.17)$$

Diferentseerides veel kord, leiame

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\tau + \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{\tau=t}.$$

Arvestades teist algtingimust (6.13),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\tau + f(M, t). \quad (6.18)$$

Seostest (6.12), (6.16) ja (6.18) järgnebki, et funktsioon (6.15) rahuldab mittehomoogeenset lainevõrrandit. Valemitest (6.15) ja (6.17) leiame

$$u(M, 0) = 0, \quad u_t(M, 0) = 0.$$

Seega vaadeldava ülesande lahendiks on funktsioon

$$u(M, t) = \int_0^t \frac{t-\tau}{4\pi} \int_{S_1^M} f[x+\alpha a(t-\tau), y+\beta a(t-\tau), z+\gamma a(t-\tau), \tau] dS_1 d\tau. \quad (6.19)$$

Toome  $\tau$  asemel sisse uue muutuja  $r$  seosega

$$r = a(t - \tau)$$

ja arvestame, et sfäärilistes koordinaatides

$$dS_1 = \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Siis

$$\begin{aligned} u(M, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{at}^0 \frac{r}{a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(x+\alpha r, y+\beta r, z+\gamma r, t-\frac{r}{a}) \sin\theta d\theta d\varphi dr = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+\alpha r, y+\beta r, z+\gamma r, t-\frac{r}{a})}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr. \end{aligned}$$

Läheme sfäärilistelt koordinaatidelt  $\theta, \varphi, r$  üle ristkoordinaatidele  $\xi, \eta, \zeta$  arvestades seoseid

$$x+\alpha r = \xi, \quad y+\beta r = \eta, \quad z+\gamma r = \zeta,$$

$$r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr = d\xi d\eta d\zeta.$$

Leiame

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{D_{at}^M} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{a})}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (6.20)$$

milles  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$  ja  $D_{at}^M$  on kera keskpunktiga  $M = (x, y, z)$  ja raadiusega  $at$ .

Leitud lahendi (6.20) iseärasuseks on see, et integreerimisel funktsioon  $f$  ei võeta mitte ajahetkel  $t$ , mille jaoks me funktsiooni  $u$  arvutame, vaid ajahetkel  $t - \frac{r}{a}$ . Suurus

$\frac{a}{c}$  annab ajavahemiku, mis kulub kiirusega  $a$  levival protsessil selleks, et läbida vahemaa punktist  $(\xi, \eta, \zeta)$  punktini  $(x, y, z)$ . Seepärast avaldist (6.20) nimetatakse hilinevaks potentsiaaliks.

Leiame laskumismeetodil hilineva potentsiaali avaldise ka tasandil ja sirgel. Lähtume valemist (6.19), milles integreerimise üle sfääri  $S_1^M$  asendame integreerimisega üle sfääri  $S_{a(t-\tau)}^M$  (selle sfääri raadius on  $a(t-\tau)$ ). Kuna

$$dS_{a(t-\tau)} = a^2(t-\tau)^2 dS_1,$$

siis

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \int_{S_{a(t-\tau)}^M} f(\xi, \eta, \zeta, \tau) dS_{a(t-\tau)} d\tau. \quad (6.21)$$

Tasandilisel juhul funktsioon  $f$  ei sõltu koordinaadist  $z$  ning integreerimise üle sfääri  $S_{a(t-\tau)}^M$  võib asendada integreerimisega üle ringi  $C_{a(t-\tau)}^M$ , mis tekib sfääri  $S_{a(t-\tau)}^M$  ja  $(x, y)$ -tasandi lõikumisel. Toimides analoogiliselt nagu käesoleva paragrahvi teises punktis, leiame ülesande lahendiks tasandil

$$u(M, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{C_{a(t-\tau)}^M} \frac{f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 + (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}}.$$

Kui funktsioon  $f$  sõltub ainult koordinaadist  $x$ , siis ilmselt ka ülesande lahend sõltub ainult sellest koordinaadist. Tema tuletamisel lähtume valemist (6.21), mis sfäärilistes koordinaatides omab kuju

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi, \eta, \zeta, \tau) a^2(t-\tau)^2 \sin\theta d\theta d\varphi d\tau.$$

Võtame sfäärilised koordinaadid nii, et polaartelg oleks suunatud piki  $x$ -telge. Siis

$$\begin{aligned}\xi &= x + a(t-\tau)\cos\theta, \\ d\xi &= -a(t-\tau)\sin\theta d\theta, \\ f &= f(x, t).\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}u(x, t) &= -\frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \int_0^{2\pi} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) \frac{a^2(t-\tau)^2}{a(t-\tau)} d\xi d\varphi d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi d\tau.\end{aligned}$$

Järelikult hilinev potentsiaal sirgel avaldub valemiga

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Lõpetuseks märgime ilma tõestuseta, et vaadeldud ülesande lahend on ühene ja sõltub pidevalt funktsioonist  $f(x, y, z, t)$ .

#### 6.4. Ülesanded

1. Lahendada ülesanne

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (-\infty < x, y, z < +\infty; 0 < t < \infty),$$

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(r), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(r),$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (0 \leq r < \infty).$$

2. Lahendada ülesanne

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(r, t) \quad (0 \leq r < \infty; 0 < t < \infty),$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = 0.$$

### 3. Lahendada ülesanne

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (-\infty < x, y, z < \infty; 0 < t < \infty),$$

$$a) \quad u|_{t=0} = \begin{cases} U_0 = \text{const}, & \text{kui } r < r_0, \\ 0, & \text{kui } r > r_0, \end{cases}$$

$$b) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{t=0} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} U_0 = \text{const}, & \text{kui } r < r_0, \\ 0, & \text{kui } r > r_0, \end{cases}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

4. Tuletada laskumismeetodil, lähtudes valemist (6.11), d'Alemberti valem (5.8).

## § 7. Cauchy ülesanne soojusjuhtivuse võrrandi jaoks

### 7.1. Soojuse levimine lõpmatus vardas

Uurime soojuse levimist lõpmatus homogeenes vardas, mille külgpind on soojuslikult isoleeritud nii, et soojusvahetust varda ja ümbritseva keskkonna vahel ei toimu. Matemaatilisel võime selle ülesande formuleerida järgmiselt: leida tõkestatud funktsioon  $u(x, t)$ , mis on  $t > 0$  ja  $-\infty < x < \infty$  korral võrrandi

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{7.1}$$

lahendiks ja rahuldab algtingimust

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{7.2}$$

milles  $\varphi(x)$  on pidev tõkestatud funktsioon.

Otsime võrrandi (7.1) erilahendeid kujul

$$u(x, t) = T(t)X(x). \tag{7.3}$$

Asendades (7.3) võrrandisse (7.1), saame

$$T'(t)X(x) = \alpha^2 T(t)X''(x)$$

ehk

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad (\lambda^2 = \text{const}),$$

kuna ajast  $t$  sõltuv funktsioon saab võrduda koordinaadist  $x$  sõltuva funktsiooniga ainult siis, kui mõlemad funktsioonid on konstantsed. Saame järgmised võrrandid  $T(t)$  ja  $X(x)$  määramiseks:

$$T'(t) + \alpha^2 \lambda^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Lahendades need võrrandid, leiame võrrandi (7.1) erilahendid kujul

$$u_\lambda(x, t) = [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \alpha^2 t}.$$

Iga reaalarvu  $-\infty < \lambda < +\infty$  korral saame ühe erilahendi, kusjuures kordajad  $A$  ja  $B$  võivad olla erinevate konstandi  $\lambda$  väärtuste korral erinevad.

Moodustame funktsiooni

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} d\lambda. \quad (7.4)$$

Kui selle funktsiooni tuletised on leitavad diferentseerimise teel integraali märgi all, siis ta rahuldab võrrandit (7.1). Algtingimuse (7.2) täitmiseks tuleb  $A(\lambda)$  ja  $B(\lambda)$  määrata selliselt, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = \varphi(x).$$

Esitame funktsiooni  $\varphi(x)$  Fourier' integraali abil:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} & \left[ \cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + \right. \\ & \left. + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] d\lambda. \end{aligned}$$

Seega algtingimuse rahuldamiseks tuleb võtta

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi d\xi,$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

Asendades valemisse (7.4), saame

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos \lambda \xi \cos \lambda x + \sin \lambda \xi \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 a^2 t} \varphi(\xi) d\xi d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda (\xi - x) e^{-\lambda^2 a^2 t} d\xi d\lambda. \end{aligned}$$

Muudame integreerimisjärjekorra ning arvestame, et integraali all on  $\lambda$  suhtes paarisfunktsioon. Seega

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda d\xi.$$

Kuna

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}},$$

siis saame ülesande formaalse lahendi jaoks valemi

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi, \quad (7.5)$$

milles

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}. \quad (7.6)$$

Näitame, et konstrueeritud formaalne lahend (7.5) on tõepoolest ülesande (7.1), (7.2) lahend. Selleks on vaja näidata, et iga tõkestatud pideva funktsiooni  $|\varphi(x)| \leq M$

korral valemiga (7.5) määratud funktsioon on tõkestatud, rahuldab võrrandit (7.1) ja

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x).$$

Funktsiooni  $u(x, t)$  tõkestatus järgneb lihtsalt valemist (7.5), kui teha muutujavahetus

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}. \quad (7.7)$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &< \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi)| e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{\sqrt{4a^2 t}} \leq \\ &\leq M \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4a^2 t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = M. \end{aligned}$$

Funktsioon (7.5) rahuldab võrrandit (7.1), kui tema osatuletised võib leida integraali märgi all diferentseerimise teel. On teada, et lõpmatute rajadega parameetritest sõltuva integraali tuletise parameetri järgi võime leida integraali märgi all diferentseerimise teel, kui selle tulemusena saadud lõpmatute rajadega integraal on ühtlaselt koonduv (antud juhul  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t \geq \varepsilon$ , kus  $\varepsilon$  on suvaline positiivne suurus, korral). Weierstrassi tunnuse järgi lõpmatute rajadega integraal on ühtlaselt koonduv, kui leidub selline integraalialuse funktsiooni majorant  $g(\xi)$ , et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) d\xi < \infty.$$

Näitame, et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) d\xi.$$

Valemi (7.6) põhjal leiame:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) d\xi = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{2t} G(x, \xi, t) d\xi + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{4a^2 t^2} (\xi - x)^2 G(x, \xi, t) d\xi.$$

Mõlemad viimase võrduse paremal pool olevad integraalid on järgmist tüüpi:

$$I = C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t^k} (\xi - x)^m e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

kus  $C$  on mingi konstant;  $k$  ja  $m$  on positiivsed arvud, kusjuures  $2k > m + 1$ . Muutujavahetus (7.7) teisendab need integraalid kujule

$$I = C(2a)^{m+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x + 2a\alpha\sqrt{\pi t})}{t^{k - \frac{m+1}{2}}} \alpha^m e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

See integraal on ühtlaselt koonduv  $t \geq \varepsilon > 0$  korral, kuna integraali all seisva funktsiooni majorant

$$g(\alpha) = \frac{M}{\varepsilon^{k - \frac{m+1}{2}}} |\alpha|^m e^{-\alpha^2}$$

on integreeruv vahemikus  $-\infty < \alpha < +\infty$ .

Analoogiliselt saab näidata, et osatuletised  $u_x$  ja  $u_{xx}$  saab leida integraali märgi all diferentseerimise teel.

Näitame veel, et

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x)$$

iga  $x$  korral. Muutujavahetus (7.7) teisendab funktsiooni (7.5) kujule

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+2\alpha\sqrt{t}) e^{-\alpha^2} d\alpha$$

ning

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1. \quad (7.8)$$

Seega

$$u(x,t) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x+2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)] e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Tänu funktsiooni  $\varphi(x)$  tõkestatusel

$$|\varphi(x+2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| < 2M$$

iga  $x, t$  ja  $\alpha$  korral. Integraali (7.8) koondumise tõttu leidub mis tahes  $\varepsilon > 0$  korral selline küllalt suur arv  $N$ , et

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{ja} \quad \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tänu  $\varphi(x)$  pidevusele leidub vastavalt igale arvule  $\varepsilon > 0$  selline arv  $\eta > 0$ , et

$$|\varphi(x+2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

iga  $|\alpha| < N$  korral, kui  $t < \eta$ . Neid tulemusi arvestades leiame

$$\begin{aligned} |u(x,t) - \varphi(x)| &< \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} |\varphi(x+2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N |\varphi(x+2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_N^{\infty} |\varphi(x+2\alpha\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha \\ &\leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

kui ainult  $t < \eta$ .

Seega funktsioon (7.5) annab tõepoolest ülesande (7.1), (7.2) lahendi.

Näitame, et leitud lahend on ühene ja sõltub pidevalt funktsioonist  $\varphi(x)$ .

Olgu  $u_1(x,t)$  ja  $u_2(x,t)$  ülesande (7.1), (7.2) kaks lahendit. Vahe  $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$  rahuldab võrrandit (7.1) ning algtingimust  $w(x,0) = 0$ . Peale selle

$$|w(x,t)| \leq |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| \leq 2M.$$

Kuna lõpmatu keele korral ei saa miinimumprintsipi otsest rakendada, siis võtame vaatlusele tõkestatud piirkonna

$$|x| \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.9)$$

kus  $L$  on suvaline positiivne arv. Abifunktsioon

$$v(x,t) = \frac{4M}{L^2} \left( \frac{x^2}{2} + a^2 t \right)$$

rahuldab võrrandit (7.1). Piirkonna (7.9) rajal

$$v(x,0) \geq 0 = w(x,0), \quad v(\pm L, t) \geq 2M \geq |w(\pm L, t)|,$$

kust järgneb:

$$v(x,0) \pm w(x,0) \geq 0,$$

$$v(\pm L, t) \pm w(\pm L, t) \geq 0.$$

Rakendades piirkonnas (7.9) funktsioonidele  $v(x,t) \pm w(x,t)$  miinimumprintsipi, saame

$$v(x,t) \pm w(x,t) \geq 0,$$

kust

$$-v(x,t) \leq w(x,t) \leq v(x,t)$$

ehk

$$|w(x,t)| \leq v(x,t) = \frac{4M}{L^2} \left( \frac{x^2}{2} + a^2 t \right).$$

Fikseerime  $x$  ja  $t$  väärtused ning laseme suurusel  $L$  tõkestamatult kasvada, saame

$$|w(x, t)| = 0.$$

Lahendi stabiilsuse näitamiseks võtame funktsioonid  $u_1(x, t)$  ja  $u_2(x, t)$ , mis on võrrandi (7.1) lahendid algtingimustel  $u_1(x, 0) = \varphi_1(x)$ ,  $u_2(x, 0) = \varphi_2(x)$ , kusjuures

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \varepsilon. \quad \text{Siis saame}$$

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| G(x, \xi, t) d\xi <$$

$$< \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) d\xi = \varepsilon, \quad \text{m. o. t. t.}$$

## 7.2. Allikafunktsioon

Asume leitud lahendit (7.5) füüsikaliselt interpreteerima.

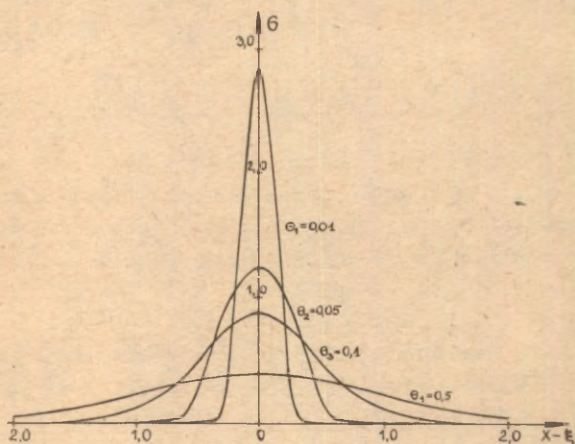
Funktsiooni  $G(x, \xi, t)$  nimetatakse soojusjuhtivusvõrrandi fundamentaallahendiks ühemõõtmelisel juhul. Et ta rahuldab võrrandit (7.1), selles võib veenduda vahetu asenduse teel. Seega funktsioon  $G(x, \xi, t)$  annab füüsikaliselt temperatuuri jaotuse lõpmatus vardas. Küsimus on ainult selles, millise temperatuuri algjaotuse korral.

Kui varda soojusmahtuvus on  $c$  ja tihedus  $\rho$ , siis temperatuuri jaotuse  $G(x, \xi, t)$  korral vardas olev soojushulk momendil  $t$  on arvutatav järgmiselt (kasutame muutujavahetust (7.7)).

$$Q = c\rho \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) d\xi = \frac{c\rho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$= \frac{c\rho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = c\rho.$$

Seega vardas olev soojushulk ei muutu aja jooksul. Joonisel 8 on kujutatud funktsiooni  $G$  graafikud erinevate  $\Theta = at$  korral. On näha, et väikese  $t$  korral peaaegu kogu kõvera  $G$  ja abstsissitelje vaheline pindala asub kitsas vahemikus  $\xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon$ . Kuna see pindala korrutatuna suurusega  $c\varrho$  annab vardas oleva soojushulga, siis algmomentide lähedastel ajamomentidel praktiliselt kogu soojushulk  $c\varrho$  on koondunud punkti  $x = \xi$  väikesesse ümbrusesse. Üldust järgneb, et alghetkel  $t = 0$  kogu soojushulk  $c\varrho$  paikneb punktis  $x = \xi$ . Siit võib teha järelduse, et funktsioon  $G(x, \xi, t)$  annab temperatuuri jaotuse lõpmatus vardas het-



Joon. 8

kel  $t$ , kui alghetkel  $t = 0$  varda punktis  $x = \xi$  eraldus soojushulk  $Q = c\varrho$ . Seepärast nimetatakse funktsiooni  $G(x, \xi, t)$  hetkelise punktsoojusallika funktsiooniks ehk lühidalt al-likafunktsiooniks.

Me nägime, et funktsioonid

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\theta}}$$

moodustavad delta-jada, kui  $\theta \rightarrow 0$ . Seega soojusjuhtivusvõrrandi fundamentaallahend (7.6) rahuldab algtingimust

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(x, \xi, t) = \delta(x - \xi).$$

Allikafunktsiooni abil on võimalik lihtsalt interpreteerida ka valemit (7.5).

Olgu varda algtemperatuur  $\varphi(x)$  positiivne mingis küllalt väikeses varda vahemikus  $\alpha < x < \beta$  ning null väljaspool seda vahemikku. Siis valemi (7.5) kohaselt temperatuuri jaotus hetkel  $t$  on antud valemiga

$$u(x, t) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

millest järgneb, et kui tahes väikese  $t$  ja kui tahes suure  $x$  korral  $u(x, t) > 0$ . See on võimalik ainult juhul, kui soojus levib vardas lõpmatu suure kiirusega. Vastuolu soojuse olemuse molekulaarkineetilise ettekujutusega on tingitud asjaolust, et soojusjuhtivuse võrrandi tuletamisel me jätsime täielikult soojuse levimise mehhanismi kõrvale.

Võtame varda punkti  $x = \xi$  väikese ümbruse  $d\xi$ . Eraldagu selles ümbruses hetkel  $t = 0$  soojushulk  $dQ = c\rho\varphi(\xi)d\xi$ , mistõttu alghetkel selles ümbruses temperatuur on  $\varphi(\xi)$ . Tänu  $d\xi$  väiksusele võib lugeda, et soojushulk  $dQ$  eraldub punktis  $x = \xi$ . Selline hetkeline punktsoojusallikas kutsub lõpmatus vardas esile temperatuurijaotuse

$$\varphi(\xi)G(x, \xi, t)d\xi.$$

Summeerides seda avaldist üle kogu lõpmatu varda, saamegi algtemperatuurist  $\varphi(x)$  tingitud temperatuurijaotuse jaoks valemi

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi,$$

mis ühtib valemiga (7.5).

### 7.3. Soojuse levimine ruumis

Vaatleme veel lühidalt soojuse levimist ruumis  $R^3$ . Olgu vaja leida võrrandi

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = a^2 \Delta u \quad (7.10)$$

tökestatud lahend ruumis  $R^3$   $t > 0$  korral, mis rahuldab algtingimust

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad (7.11)$$

milles  $\varphi(M)$  on tökestatud tükati pidev funktsioon ruumis  $R^3$ .

Kolmemõõtmelisel juhul soojusjuhtivuse võrrandi fundamentaallahendiks on funktsioon

$$G(M, M_0, t) = \left( \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2}{4a^2 t}},$$

mida nimetatakse ka allikafunktsiooniks ruumis. Ta annab temperatuuri punktis  $M = (x, y, z)$  ajamomendil  $t$ , kui alghetkel  $t = 0$  eraldub punktis  $M_0 = (\xi, \eta, \xi)$  soojushulk  $Q = c\varrho$ .

Vaatleme ruumalaelementi  $d\xi d\eta d\xi$ , mis sisaldab punkti  $M_0$ . Algtemperatuuri  $\varphi(M_0)$  tekitamiseks on vaja, et selles elemendis eralduks algmomendil  $t = 0$  soojushulk  $dQ = c\varrho \varphi(M_0) d\xi d\eta d\xi$ . Elemendi  $d\xi d\eta d\xi$  väiksuse tõttu võime lugeda, et see soojushulk eraldub punktis  $M_0$ . Vastavalt allikafunktsiooni füüsikalisele sisule sellise hetkelise punktsoojusallika korral temperatuur punktis  $M$  ajamomendil  $t$  on

$$\frac{dQ}{c\varrho} G(M, M_0, t) = G(M, M_0, t) \varphi(M_0) d\xi d\eta d\xi.$$

Integreerides seda avaldist üle ruumi  $R^3$ , saamegi algtemperatuurist tingitud temperatuurijaotuse

$$u(M, t) = \int_{R^3} G(M, M_0, t) \varphi(M_0) d\xi d\eta d\zeta. \quad (7.12)$$

On vaja näidata, et funktsioon (7.12) annab tõepoolest ülesande (7.10), (7.11) lahendi, s.t. see funktsioon on tõkestatud ruumis  $R^3$ ,  $t > 0$  korral rahuldab võrrandit (7.10) ja rahuldab algtingimust (7.11). Tõestus on analoogiline vastava tõestusega lõpmata varda korral. Seepärast me ei esita teda.

Allikafunktsiooni abil on võimalik lahendada ka ülesanne soojusallikate poolt eraldatud soojuse levimisest. Matemaatiliselt seisneb see ülesanne järgnevas: leida funktsioon  $u(M, t)$ , mis  $M \in R^3$  ja  $t > 0$  korral rahuldab võrrandit

$$u_t = a^2 \Delta u + \frac{f(M, t)}{c\rho} \quad (7.13)$$

ja algtingimust

$$u(M, 0) = 0. \quad (7.14)$$

Võrrandis (7.13) funktsioon  $f$  annab soojusallikate poolt ruumiühikus ja ajaühikus eraldatud soojushulga.

Vaatleme jällegi ruumielementi  $d\xi d\eta d\zeta$ , mis sisaldab punkti  $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ . Selles ruumielemendis paiknevad soojusallikad eraldavad ajavahemikus  $(\tau, \tau + d\tau)$  soojushulga

$$dQ = f(M_0, \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau.$$

Ruumielemendi  $d\xi d\eta d\zeta$  ja  $d\tau$  väiksuse tõttu võime lugeda, et soojushulk  $dQ$  eraldub punktis  $M_0$  hetkel  $\tau$ . Sellise hetkelise punktsoojusallika poolt tingitud temperatuuri jaotus ruumis ajamomendil  $t$  on antud avaldisega

$$\frac{dQ}{c\rho} G(M, M_0, t - \tau) = \frac{f(M_0, \tau)}{c\rho} G(M, M_0, t - \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau,$$

milles funktsioon

$$G(M, M_0, t - \tau) = \left( \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

annab temperatuurijaotuse ruumis  $R^3$ , kui ajamomendil  $t = \tau$  eraldub punktis  $M_0$  soojushulk  $Q = c\rho$ . Kogu ruumis  $R^3$  paiknevate soojusallikate poolt ajavahemikus  $(0, t)$  eraldatud soojushulk tingib punktis  $M$  hetkel  $t$  temperatuuri

$$u(M, t) = \int_0^t \int_{R^3} \frac{\rho(M_0)}{c\rho} G(M, M_0, t - \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau. \quad (7.15)$$

Me ei peatu tõestusel, et valemiga (7.15) määratud funktsioon on tõepoolest ülesande (7.13), (7.14) lahend.

#### 7.4. Ülesanded

##### 1. Lahendada ülesanne

$$u_t = a^2 \ddot{u}_{xx} \quad (-\infty < x < +\infty, 0 < t < +\infty),$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & , \text{ kui } -\infty < x < -l, \\ u_0 = \text{const} \neq 0 & , \text{ kui } -l < x < +l, \\ 0 & , \text{ kui } +l < x < +\infty. \end{cases}$$

2. Leida temperatuurijaotus poollõpmatus vardas, kui varda otspunkt  $x = 0$  hoitakse nulliga võrduva temperatuuri juures ning  $u(x, 0) = \varphi(x)$ .

3. Leida temperatuurijaotus poollõpmatus vardas, kui varda otspunktis  $x = 0$  ei toimu soojusvahetust ümbritseva keskkonnaga ning  $u(x, 0) = \varphi(x)$ .

4. Leida allikafunktsioon võrrandile

$$u_t = a^2 \ddot{u}_{xx} - hu \quad (-\infty < x < +\infty),$$

mis kirjeldab soojuse levimist vardas, mille külgpinnal toimub konvektiivne soojusvahetus väliskeskkonnaga.

5. Leida temperatuurijaotus lõpmatus ruumis, kui alghetkel  $t = 0$  eraldub sfääril raadiusega  $r'$  ühtlaselt soojushulk  $Q$ .

KIRJANDUS

1. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М., 1972.
2. Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
3. В.И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, М., 1967; т. III, М., 1969; т. IV, М., 1957.
4. С.Л. Соболев. Уравнения математической физики. М., 1966.
5. И.Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.
6. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М., 1971.
7. Е. Тамме, G. Vainikko. Matemaatilise füüsika võrrandid I: TRÜ rotaprint, 1974.
8. В.Я. Арсенин. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. М., 1966.
9. Л. Шварц. Математические методы для физических наук. М., 1965.
10. Б.М. Будаков, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике. М., 1972.
11. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под ред. В.С.Владимирова. М., 1974.
12. Т. Sõrmu, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tln., 1972.

Март Лийгант. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ I. Основные уравнения. Классификация. На эстонском языке. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Плигосли, 18. Vastutav toimetaja P. Kard. Paljundamisele antud 31.05.1977. Rotaatoripaber 30x42 1/4. Trükiroognaid 6,25. Tingtrükiroognaid 5,81. Arvestusroognaid 5,46. Trükiarv 600. TRÜ trükikoda, ENSV, Tartu, Pälsoni t. 14. Tell. nr. 685.  
Hind 20 kop.

20 kop.

1911  
12  
14