

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Taavi Orumaa
**Suhtelised adjunksioonid virtuaalsetes
topeltkategooriates**

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD. Ülo Reimaa

TARTU 2026

SUHTELISED ADJUNKTSIOONID VIRTUAALSETES TOPELTKATEGOORIATES

Bakalaureusetöö

Taavi Orumaa

Lühikokkuvõte

Tehakse läbi sissejuhatus virtuaalsetesse topeltkategooriatesse, tutvustatakse lõtvat kompositsiooni ja ahendeid, tehakse läbi näiteid ning tõestatakse mõnda üldist omadust. Tutvustatakse suhtelise adjunktsiooni mõistet virtuaalse topeltkategooria kontekstis, uuritakse erinevaid viise kuidas suhtelisi adjunktsioone saab komponeerida ning tuuakse nende kohta näiteid.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: Suhteline adjunktsioon, virtuaalne topeltkategooria.

RELATIVE ADJUNCTIONS IN VIRTUAL DOUBLE CATEGORIES

Bachelor thesis

Taavi Orumaa

Abstract

This bachelor's thesis presents an introduction to virtual double categories, introduces loose composition and restriction, works through examples, and proves some general properties. The thesis then introduces the concept of relative adjunctions in virtual double categories, investigates different ways in which they can be composed, and provides examples of them.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Key Words: Relative adjunction, virtual double category.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Virtuaalsed Topeltkategooriad	5
2 Virtuaalsed Taglastused	24
3 Suhtelised adjunktsioonid	36
4 Suhteliste adjunktsioonide komponeerimine	40
Kasutatud allikad	48
Lisa 1. Sissejuhatus kategooriateooriasse	50
Lisa 2. Teoreem 1 faktoriseeringu ja unikaalsuse kontroll	54

Sissejuhatus

Kui meil on antud kaks kategooriat $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$, mingid nendevahelised funktorid $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ning samuti on olemas ka loomulik isomorfism $B(F(-), -) \cong A(-, G(-))$, siis need andmed moodustavad adjunktsiooni $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ vahel mis kirjeldab mingit n-ö nõrka ekvivalentsi. Adjunktsioonid on kategooriateooria üks kõige tähtsamaid mõisteid ja tihtipeale tahame, et kahe kategooria vahel oleks olemas adjunktsioon, kuid alati ei pruugi nii olla.

Kui kahe kategooria vahel ei ole adjunktsiooni, siis loomulik oleks mõelda, et kuidas saaks seda olukorda üldistada, et mingit kategooriate vahelist seost siiski kirjeldada. Sellises olukorras on üks mõtteviis lisada juurde funktor ja uurida adjunktsiooni mingi funktori suhtes, näiteks võime uurida, et äkki on loomuliku isomorfismi $B(F(-), -) \cong A(-, G(-))$ asemel hoopis loomulik isomorfism mingi kolmanda funktori J suhtes ehk $B(F(-), -) \cong A(J(-), G(-))$. Sellisel viisil on jõutud suhtelise adjunktsiooni mõisteni.

Kuna adjunktsioon on defineeritud läbi funktorite ja loomulike teisenduste, siis adjunktsioonid on oma olemuselt 2-kategooria siseselt uuritavad. 2-kategooria on struktuur milles on olemas kaks morfismide klassi: 1-morfismid, mis on objektide vahelised morfismid, tihtipeale funktorid, ja 2-morfismid, mis on 1-morfismide vahelised morfismid, tihtipeale loomulikud teisendused.

Suhteliste adjunktsioonide kirjeldamiseks on tarvis rikkalikumat matemaatilist struktuuri—selleks võtame kasutusele virtuaalsed topeltkategooriad. Virtuaalses topeltkategoorias on meil mingi kogum objekte, mille vahel on kahte tüüpi morfisme, mida kutsume lõtvadeks ja jäikadeks morfismideks. Objektid ja jäigad morfismid moodustavad tavalises mõttes kategooria, aga lõtvade morfismide kogumil ei ole defineeritud komponeerimisoperatsiooni. Lisaks on struktuuri hulgas lõtvadest ja jäikadest morfismidest moodustatud ruute täitvad 2-morfismid. Nende 2-morfismide seas esinevad kindlat tüüpi 2-morfismid, mis

omavad erilist tähtsust ja mida võib lugeda virtuaalsete topeltkategoriate defineerimisel üheks suuremaks motivatsiooniks ning mida hiljem kasutamegi suhteliste adjunktsioonide defineerimiseks.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on tutvustada suhtelisi adjunktsioone ning uurida erinevaid viise nende kokku panemiseks ehk komponeerimiseks. Suhteliste adjunktsioonide tutvustamiseks on tehtud sissejuhatas virtuaalsete topeltkategoriate teooriasse, tuvastatud nendes olevaid tähtsamaid struktuure ning tõestatakse mõnda nende kohta käivat omadust. Töö on jagatud neljaks peatükiks: esimeses kahes peatükis tutvustatakse virtuaalseid topeltkategoriad, virtuaalseid taglastusi ja põhimõisteid nagu lõtv kompositsioon, ahendid ja baasivahetusmorfismid, lisaks tehakse enamus tutvustatud mõistete korral läbi näiteid ja mõne mõiste puhul tõestatakse ka mõni lause või teoreem. Viimases kahes peatükis tutvustatakse suhtelisi adjunktsioone ja tõestatakse ära nende komponeerimisega seotud kaks juba varem teadaolevat lauset ning üks uus lause, mis on autorile teadaolevalt originaalne tulemus, lisaks tuuakse kirjeldatud olukordade kohta näiteid.

Bakalaureusetöö lugejalt eeldatakse, et tal on olnud varasemat kokkupuudet kategooriateooria põhiliste mõistete ja tulemustega (näiteks on läbinud kursuse Kategooriateooria), kuid enamus keerulisemad mõisted on ilmutatul kujul välja toodud ning minimaalne sissejuhatas kategooriateooriale on leitav [Lisast 1](#).

1 Virtuaalsed Topeltkategooriad

Meie eesmärk on uurida *suhtelisi adjunksioone*, aga meie definitisooni jaoks oleks vaja kõigepealt defineerida *virtuaalsed taglastused*. Selleks, et virtuaalseid taglastusi vaadelda oleks tarvis kõigepealt rääkida virtuaalsetest topeltkategooriatest, sest virtuaalsed taglastused on virtuaalsete topeltkategooriate kaudu defineeritud.

Eelnevast asjaolust motiveeritud, pühendamegi esimese peatüki virtuaalsete topeltkategooriate tutvustamisele ning põhistruktuuride tuvastamisele. Lugemise lihtsustamiseks on enne antud peatüki lugemist soovituslik tutvuda kategooriateooria põhimõistetega (vt [Lisa 1](#)).

Definitsioon 1. Olgu antud klass objekte X , mille iga kahe objekti $A, B \in X$ korral fikseerime kaks klassi morfisme $\text{Vert}(A, B)$ ja $\text{Hor}(A, B)$, mida kutsume vastavalt vertikaalseteks ja horisontaalseteks morfismideks ning mille elemente kujutame vastavalt nooltena $A \rightarrow B$ ning $A \rightrightarrows B$. Ennikut $(p_1, \dots, p_n, f, g, q)$, kus $p_1, \dots, p_n$ ($n \geq 0$) on järjestatud komplekt horisontaalseid morfisme, f, g on järjestatud paar vertikaalseid morfisme ja q on horisontaalne morfism, mis paiknevad nagu diagrammis

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_0 & \xleftarrow{p_1} & A_1 & \xleftarrow{p_2} & \dots & \xleftarrow{p_{n-1}} & A_{n-1} & \xleftarrow{p_n} & A_n \\
 f \downarrow & & & & & & & & \downarrow g \\
 B_0 & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & & & & & & & B_1 \\
 & & & & & & q & &
 \end{array}$$

nimetame **raamiks**.

Definitsioon 2. Olgu antud kollektsioon raame R . Olgu antud iga raami $(p_1, \dots, p_n, f, g, q) \in R$ korral mingi klass morfisme, mille elemente kutsume

seda raami täitvateks 2-morfismideks, mida tähistame $\phi_r : p_1, \dots, p_n \xRightarrow{f} q$.

$$\begin{array}{c}
 A_0 \xleftarrow{p_1} A_1 \xleftarrow{p_2} \dots \xleftarrow{p_{n-1}} A_{n-1} \xleftarrow{p_n} A_n \\
 \downarrow f \qquad \qquad \qquad \phi_r \qquad \qquad \qquad \downarrow g \\
 B_0 \xleftarrow{\qquad \qquad \qquad q \qquad \qquad \qquad} B_1.
 \end{array}$$

Olgu antud jada raame $r, r_1, \dots, r_n \in R$ nii, et neid täitvad 2-morfismid on kujul $\phi_r : p_1, \dots, p_n \xRightarrow{f} q$ ning $\phi_{r_i} : l_1^i, \dots, l_{m_i}^i \xRightarrow{f_i} p_i$ ($1 \leq i \leq n$), kusjuures $g_i = f_{i+1}$. Diagrammi kujul

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 A'_0 & \xleftarrow{l_1^1} & \dots & \xleftarrow{l_{m_1}^1} & A'_1 & \xleftarrow{l_1^2} & \dots & \xleftarrow{l_{m_2}^2} & A'_2 & & A'_{n-2} & \xleftarrow{l_1^{n-1}} & \dots & \xleftarrow{l_{m_{n-1}}^{n-1}} & A'_{n-1} & \xleftarrow{l_1^n} & \dots & \xleftarrow{l_{m_n}^n} & A'_n
 \end{array} \\
 \downarrow f_1 \quad \phi_{r_1} \quad \downarrow g_1 \quad \phi_{r_2} \quad \downarrow g_2 \quad \dots \quad \downarrow g_{n-2} \quad \phi_{r_{n-1}} \quad \downarrow g_{n-1} \quad \phi_{r_n} \quad \downarrow g_n \\
 \begin{array}{ccccccc}
 A_0 & \xleftarrow{p_1} & A_1 & \xleftarrow{p_2} & A_2 & & A_{n-2} & \xleftarrow{p_{n-1}} & A_{n-1} & \xleftarrow{p_n} & A_n
 \end{array} \\
 \downarrow g \qquad \qquad \qquad \phi_r \qquad \qquad \qquad \downarrow g \\
 B_0 \xleftarrow{\qquad \qquad \qquad q \qquad \qquad \qquad} B_1
 \end{array}$$

nimetame **kleepimisdiagrammiks**.

Märkus 1. Kategooriateoorias on tihti võetud kõikide hulkade hulga taoliste probleemide vältimiseks kasutusele klassid. Iga hulk on klass, kuid mitte vastupidi, kusjuures kõikide hulkade kogum on klass. Antud töös ainult klassi mõistest ei piisa ja on tarvis ühe taseme võrra kõrgemale minna, seega võtame kasutusele **konglomeraadi** mõiste. Nagu ka hulkade ja klasside puhul, siis iga klass on konglomeraat, kusjuures kõikide klasside kogum on konglomeraat.

Definitsioon 3. [1, definitsioon 2.1] **Virtuaalne topeltkategooria** $\mathbb{X}$ koosneb järgnevatest andmetest:

1. Kategooriast X , mis ei pruugi olla väike (vt Lisa 1). Täpsemalt $\mathbb{X}$ Objektide konglomeraadiks on $\text{Ob}(\mathbb{X}) = \text{Ob}(X)$ Kleepimisdiagrammides,

kus objektide nimetused ei oma tähtsust, võime tähistada, ka võimalikult paarikaupa erinevaid, objekte punktiga $(\cdot)$. Jäika morfismi f objektist A objekti B tähistame noolega $f : A \rightarrow B$, ühikmorfismi $1_A : A \rightarrow A$, mida kutsume *jäigaks ühikuks*, vahel tähistame märgiga $=$.

2. Iga objektipaari $A, B \in \text{Ob}(\mathbb{X})$ jaoks on antud klass morfisme $\mathbb{X}_{\text{lõtv}}(A, B)$, mida kutsume *lõtvadeks morfismideks*. Tähistame lõtva morfismi p objektist A objekti B noolega, mille keskel on vertikaalne joon $p : A \rightarrowtail B$.
3. Vaatleme virtuaalse topeltkateooria $\mathbb{X}$ kõikvõimalike fikseeritud jäikade ja lõtvade morfismide poolt tekitatud raamide (kus meil on klassid $\text{Vert}(A, B) = \mathbb{X}_{\text{jäik}}(A, B)$ ning $\text{Hor}(A, B) = \mathbb{X}_{\text{lõtv}}(A, B)$) kollektsiooni $\mathbb{X}_{\text{raam}}$. Igal raamil $(p_1, \dots, p_n, f, g, q) \in \mathbb{X}_{\text{raam}}$ on antud klass antud raami täitvaid morfisme $\mathbb{X}_{f,g}(p_1, \dots, p_n; q)$, mida nimetame 2-morfismideks. Kui meil on fikseeritud raam $(p_1, \dots, p_n, f, g, q)$, siis tähistame 2-morfismi $\phi \in \mathbb{X}_{f,g}(p_1, \dots, p_n; q)$ korral $\phi : p_1, \dots, p_n \overset{f}{\Rightarrow}^g q$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_0 & \xleftarrow{p_1} & A_1 & \xleftarrow{p_2} & \dots & \xleftarrow{p_{n-1}} & A_{n-1} & \xleftarrow{p_n} & A_n \\
 f \downarrow & & & & \phi & & & & \downarrow g \\
 B_0 & \xleftarrow{\quad} & & & & & & & B_1 \\
 & & & & & & q & &
 \end{array}$$

Kui 2-morfismi ϕ antud raami jäigad morfismid f_0, f_n on jäigad ühikud, siis ütleme, et ϕ on *globulaarne* ja kirjutame $\phi : p_1, \dots, p_n \Rightarrow q$

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_0 & \xleftarrow{p_1} & A_1 & \xleftarrow{p_2} & \dots & \xleftarrow{p_{n-1}} & A_{n-1} & \xleftarrow{p_n} & A_n \\
 \parallel & & & & \phi & & & & \parallel \\
 B_0 & \xleftarrow{\quad} & & & & & & & B_1 \\
 & & & & & & q & &
 \end{array}$$

On ka võimalik, et 2-morfism on kujul $\phi : \Rightarrow q$ ehk 2-morfismi vasakul on pikkusega 0 lõtvade morfismide jada, sellist olukorda tähistame

järgnevalt:

$$\begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ \parallel & \phi & \parallel \\ A & \xleftarrow{q} & A. \end{array}$$

4. igale 2-morfismide paigutusele, mis on kujul

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \xleftarrow{p_1^1} & \cdots & \xleftarrow{p_{m_1}^1} & \cdot & \cdots & \cdot & \xleftarrow{p_1^n} & \cdots & \xleftarrow{p_{m_n}^n} & \cdot \\ f \downarrow & & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow f' \\ \cdot & \xleftarrow{\quad} & \cdot & & \cdot & & \cdot & \xleftarrow{\quad} & \cdot & & \cdot \\ g \downarrow & & & \psi & & & & & & & \downarrow g' \\ \cdot & \xleftarrow{\quad} & \cdot & & \cdot & & \cdot & \xleftarrow{\quad} & \cdot & & \cdot \end{array}$$

on vastavusse seatud 2-morfism, mis on kujul

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xleftarrow{p_1^1} & \cdots & \xleftarrow{p_{m_n}^n} & \cdot \\ g \circ f \downarrow & & \psi(\phi_1, \dots, \phi_n) & & \downarrow g' \circ f' \\ \cdot & \xleftarrow{\quad} & \cdot & & \cdot \end{array}$$

s.o 2-morfismide kompositsioon.

5. Iga lõdva morfismi $p : A' \rightarrow A$ korral on antud 2-morfism $1_p : p \Rightarrow p$ ehk p ühikmorfism, tähistame seda 2-morfismi märgiga = kleepimisdiagrammides.

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{p} & A' \\ \parallel & = & \parallel \\ A & \xleftarrow{p} & A'. \end{array}$$

6. Olgu antud 2-morfismid

$$\theta : q_1, \dots, q_n \xrightarrow{f_\theta} q, \quad \psi_i : p_1^i, \dots, p_{k_i}^i \xrightarrow{f_i} q_i \quad (1 \leq i \leq m \text{ ja } 1 \leq k_i)$$

ja

$$\phi_{ik} : l_1^{ik}, \dots, l_{s_{ik}}^{ik} \xRightarrow{f_{ik}} p_k^i (1 \leq k \leq k_i \text{ ja } 1 \leq s_{ik}),$$

siis kehtib assotsiatiivsuse aksioom

$$\begin{aligned} & (\theta(\psi_1, \dots, \psi_m))(\phi_{11}, \dots, \phi_{mk_m}) = \\ & \theta(\psi_1(\phi_{11}, \dots, \phi_{1k_1}), \dots, \psi_m(\phi_{m1}, \dots, \phi_{mk_m})) \end{aligned} \quad (1)$$

ja iga 2-morfismi $\phi : p_1, \dots, p_n \xRightarrow{f} q$ korral kehtivad järgnevad ühiku aksioomid

$$\phi(1_{p_1}, \dots, 1_{p_n}) = \phi \quad (2)$$

ja

$$1_b(\phi) = \phi. \quad (3)$$

Tahame ka rääkida lõtvade morfismide vahelistest isomorfismidest, seega on otstarbeks võtta kasutusele järgnev kategooria.

Definitsioon 4. [1, lk 7] Olgu $\mathbb{X}$ virtuaalne topeltkategooria ning $A, B \in \text{Ob}(\mathbb{X})$. Moodustame kategooria $\mathbb{X}[[A, B]]$, mille objektideks on lõdvad morfismid $p : A \rightarrow B$ ja mille morfismideks on globulaarsed 2-morfismid $\phi : p \Rightarrow q$

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{p} & A \\ \parallel & \phi & \parallel \\ B & \xleftarrow{q} & A. \end{array}$$

Definitsioon 5. Olgu antud objektid $p, q \in \text{Ob}(\mathbb{X}[[A, B]])$. Ütleme, et globulaarne 2-morfism $\phi : p \Rightarrow q$ on *lõtvade morfismide isomorfism*, kui leidub

$\psi : q \Rightarrow p$ nii, et $\phi(\psi) = 1_q$ ja $\psi(\phi) = 1_p$

$$\begin{array}{c}
 B \xleftarrow{p} A \\
 \parallel \quad \phi \quad \parallel \\
 B \xleftarrow{q} A \\
 \parallel \quad \psi \quad \parallel \\
 B \xleftarrow{p} A
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 B \xleftarrow{p} A \\
 \parallel \quad 1_p \quad \parallel \\
 B \xleftarrow{p} A
 \end{array}
 \quad \text{ja} \quad
 \begin{array}{c}
 B \xleftarrow{q} A \\
 \parallel \quad \psi \quad \parallel \\
 B \xleftarrow{p} A \\
 \parallel \quad \phi \quad \parallel \\
 B \xleftarrow{q} A
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 B \xleftarrow{q} A \\
 \parallel \quad 1_q \quad \parallel \\
 B \xleftarrow{q} A
 \end{array}$$

Kui lõtvade morfismide p ja q vahel leidub lõtvade morfismide isomorfism ϕ , siis p ja q on isomorfsed kategoorias $\mathbb{X}[A, B]$ ja tähistame $p \cong q$.

Näide 1. Vaatleme triviaalset kategooriat $\mathbf{1}$ kus on üks objekt ja morfirm, täpsemalt on meil $\text{Ob}(\mathbf{1}) = \{\star\}$ ning $\mathbf{1}(\star, \star) = \{1_\star\}$. Fikseerime mingi osaliselt järjestatud hulga P ning moodustame virtuaalse topeltkategooria $\text{CoCart}(P)$, mille objektideks ja jääkadeks morfismideks on kategooria $\mathbf{1}$ objekt ja morfirm ning lõdvdad morfismid on P elemendid $p \in P$, sellisel juhul kui meil on nüüd antud raam

$$\begin{array}{c}
 \star \xleftarrow{p_1} \star \xleftarrow{p_2} \dots \xleftarrow{p_{n-1}} \star \xleftarrow{p_n} \star \\
 \parallel \quad \quad \quad \phi \quad \quad \quad \parallel \\
 \star \xleftarrow{q} \star,
 \end{array}$$

siis unikaalne 2-morfism ϕ eksisteerib parajasti siis, kui iga $i \in 1, \dots, n$ korral $p_i \leq q$, ehk 2-morfism on võrratuste pere $(p_i \leq q)_{i=1}^n$.

On lihtne näha, et need andmed moodustavad virtuaalse topeltkategooria, sest ühik 2-morfismid on alati olemas, sest osalise järjestuse seos on refleksiivne

ning kui meil on antud 2-morfismid

$$\begin{array}{ccc}
 \star & \xleftarrow{p_1^1} \dots \xleftarrow{p_{m_1}^1} & \star \\
 \parallel & & \parallel \\
 \star & \xleftarrow{p_1} & \star \\
 \parallel & & \parallel \\
 \star & \xleftarrow{q} & \star
 \end{array}
 \quad \dots \quad
 \begin{array}{ccc}
 \star & \xleftarrow{p_1^n} \dots \xleftarrow{p_{m_n}^n} & \star \\
 \parallel & & \parallel \\
 \star & \xleftarrow{p_n} & \star \\
 \parallel & & \parallel \\
 \star & \xleftarrow{q} & \star
 \end{array}$$

ψ

siis meil on pered $(p_k^i \leq p_i)_{i=1}^n$ ning $(p_i \leq q)_{i=1}^n$, aga ilmselt peab ka kehtima, et $(p_k^i \leq q)_{i=1}^n$ osalise järjestuse transitiivsuse tõttu. Assotsiatiivsuse ja ühikute aksioomid tulenevad sellest, et virtuaalses topeltkateoorias $\text{CoCart}(P)$ on igal raamil ülimalt üks 2-morfism, mis seda täidab.

Näide 2. Vaatleme virtuaalset topeltkateooriat Set-Prof . Selle objektideks on lokaalselt väiksed kateooriad A (s.t, et A kõikide suvaliste objektide a_1, a_2 vaheliste morfismide klassid $A(a_1, a_2)$ on hulgad, mitte pärisklassid), jäigad morfismid on tavalised funktorid, lõdvad morfismid on profunktorid¹ ehk $A \rightrightarrows B$ on funktor $B^{\text{op}} \times A \rightarrow \text{Set}$, ja 2-morfismid raamiga

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_0 & \xleftarrow{p_1} & A_1 & \xleftarrow{p_2} & \dots & \xleftarrow{p_{n-1}} & A_{n-1} & \xleftarrow{p_n} & A_n \\
 F \downarrow & & & & \phi & & & & \downarrow G \\
 B_0 & \xleftarrow{q} & & & & & & & B_1
 \end{array}$$

on funktsioonide pered, mis järjendi $(a_0, \dots, a_n) \in A_0 \times \dots \times A_n$ korral annavad loomuliku teisenduse

$$p_1(a_0, a_1) \times p_2(a_1, a_2) \times \dots \times p_n(a_{n-1}, a_n) \xrightarrow{\phi_{a_0, \dots, a_n}} q(F(a_0), G(a_n)).$$

¹Profunktooreid kutsutakse ka *distributooriteks* (ingl *distributor*) ja *(bi)mooduliteks* (ingl *(bi)module*).

mis on loomulik a_0, a_n suhtes ja ekstraloomulik $a_1, \dots, a_{n-1}$ suhtes. Loomulikkus a_0 suhtes tähendab, et iga morfismi $f : a'_0 \rightarrow a_0$ korral kommuteerub diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 p_1(a'_0, a_1) \times \dots \times p_n(a_{n-1}, a_n) & \xrightarrow{\phi_{a'_0, \dots, a_n}} & q(F(a_0), G(a_n)) \\
 \uparrow p_1(f, a_1) \times \dots \times p_n(a_{n-1}, a_n) & & \uparrow q(F(f), G(a_n)) \\
 p_1(a_0, a_1) \times \dots \times p_n(a_{n-1}, a_n) & \xrightarrow{\phi_{a_0, \dots, a_n}} & q(F(a_0), G(a'_n))
 \end{array}$$

ning loomulikkus a_n suhtes tähendab, et iga morfismi $g : a_n \rightarrow a'_n$ korral kommuteerub diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 p_1(a_0, a_1) \times \dots \times p_n(a_{n-1}, a_n) & \xrightarrow{\phi_{a_0, \dots, a_n}} & q(F(a_0), G(a_n)) \\
 \downarrow p_1(a_0, a_1) \times \dots \times p_n(a_{n-1}, g) & & \downarrow q(F(a_0), G(g)) \\
 p_1(a_0, a_1) \times \dots \times p_n(a_{n-1}, a'_n) & \xrightarrow{\phi_{a_0, \dots, a'_n}} & q(F(a_0), G(a'_n)).
 \end{array}$$

Ekstraloomulikkus $a_1, \dots, a_{n-1}$ suhtes tähendab, et iga $a_i, i \in \{1, \dots, n-1\}$ ja morfismi $f : a_i \rightarrow a'_i$ korral kommuteerub diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \dots \times p_i(a_{i-1}, a_i) \times p_{i+1}(a_i, a_{i+1}) \times \dots & & \\
 \uparrow \dots \times p_i(a_{i-1}, 1) \times p_{i+1}(f, a_{i+1}) \times \dots & \searrow \phi_{a_0, \dots, a_i, \dots, a_n} & \\
 \dots \times p_i(a_{i-1}, a_i) \times p_{i+1}(a'_i, a_{i+1}) \times \dots & & q(F(x_0), G(a_n)). \\
 \downarrow \dots \times p_i(a_{i-1}, f) \times p_{i+1}(1, a_{i+1}) \times \dots & \nearrow \phi_{a_0, \dots, a'_i, \dots, a_n} & \\
 \dots \times p_i(a_{i-1}, a'_i) \times p_{i+1}(a'_i, a_{i+1}) \times \dots & &
 \end{array}$$

Näitame, et tegemist on ikkagist virtuaalse topeltkategooriga. Et kategooriad ja funktorid moodustavad kategooria, siis on antud näite jäikade morfismide

definiitsioon virtuaalse topeltkategooria omaga kooskõlas. Lõtvade morfismide kohta midagi kontrollida vaja ei ole ning 2-morfismid on samuti eelnevalt defineeritud. Lõdva morfismi $p : A_1 \rightrightarrows A_0$ korral ühik 2-morfismi $1_p : p \Rightarrow p$ annab meile see, et on olemas funktori samasusteisendus, mis on loomulik teisendus, mida defineerime võrdusega $(1_p)_{a_0, a_1} := 1_{p(a_0, a_1)}$ iga paari $(a_0, a_1) \in A_0 \times A_1$ korral. Defineerime nüüd 2-morfismide komponeerimisoperatsiooni. Selleks eeldame, et meile on antud kleepimisdiagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 A_0^1 & \xleftarrow{p_1^1} & \cdots & \xleftarrow{p_{m_1}^1} & A_{m_1}^1 & \cdots & A_0^n & \xleftarrow{p_1^n} & \cdots & \xleftarrow{p_{m_n}^n} & A_{m_n}^n \\
 F_0 \downarrow & & \phi_n & & F_1 \downarrow & & F_{n-1} \downarrow & & \phi_1 & & F_n \downarrow \\
 B_0^1 & \xleftarrow{q_n} & & & B_1^1 & \cdots & B_0^n & \xleftarrow{q_1} & & & B_1^n \\
 G_0 \downarrow & & & & \psi & & & & & & G_n \downarrow \\
 C_0 & \xleftarrow{q} & & & & & & & & & C_1
 \end{array}$$

Siis, iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral on antud loomulikud teisendused, mis on funktsioonide pered

$$p_1^i(a_0^i, a_1^i) \times p_2^i(a_1^i, a_0^i) \times \cdots \times p_{m_i}^i(a_{m_i-1}^i, a_{m_i}^i) \xrightarrow{\phi_i} q_i(F_{i-1}(a_0^i), F_i(a_{m_i}^i)).$$

Ei ole raske näha, et funktorite ja loomulike teisenduste kompositsioon säilitab vastavalt funktooriaalsust, loomulikkust ja ekstraloomulikkust [3], järelikult saame, et on ka olemas loomulik teisendus

$$\begin{aligned}
 \Psi(\phi_1(a_0^1, \dots, a_{m_1}^1), \dots, \phi_n(a_0^n, \dots, a_{m_n}^n)) &= \\
 \Psi(q_1(F_0(a_0^1), F_1(a_{m_1}^1)), \dots, q_n(F_{n-1}(a_0^n), F_n(a_{m_n}^n))) &= \\
 q(G_0 F_0(a_0^1), G_n F_n(a_{m_n}^n)), &
 \end{aligned}$$

mis tähendab, et on olemas ka raam

$$\begin{array}{ccc}
 A_0^1 & \xleftarrow{p_1^1} \dots \xleftarrow{p_{m_n}^n} & A_{m_n}^n \\
 G_0 \circ F_0 \downarrow & \psi(\phi_1, \dots, \phi_n) & \downarrow G_n \circ F_n \\
 C_0 & \xleftarrow{q} & C_1
 \end{array}$$

Jääb veel kontrollida, et kehtivad assotsiatiivsuse ja ühiku aksioomid, aga ei ole raske näha, et definitsiooni põhiselt loomulike teisenduste komponeerimine on assotsiatiivne ja funktoore samasusteisendused käituvad selle komponeerimise suhtes ühikelementidena [4].

Märkus 2. Eelnevas näites 2 saab ahendada objektide kollektsiooni ühe-objektistele kategooriatele, ehk monoididele, ning vaadelda jäiku morfisme (funktooreid) kui monoidide homomorfisme ja lõtvu morfisme (profunktooreid) kui bipolügoone.

Vaatleme veel ühte näidet, mis on näite 2 erijuht, kus on vaadeldud hulki diskreetsete kategooriatena, küll aga teeme selle näite läbi konkreetsete objektidega ja morfismidega.

Näide 3. [2, näide 2.6] Vaatleme virtuaalset topeltkategooriat Set-Mat , selle objektid on hulgad, ehk $\text{Ob}(\text{Set-Mat}) = \text{Ob}(\text{Set})$, jäigad morfismid on funktsioonid, lõdvad morfismid $X \xrightarrow{p} Y$ on hulkade pered $\{p(y, x)\}_{x \in X, y \in Y}$ (s.t $X \times Y$ -maatriksid, mille komponendid on hulgad) ja 2-morfismid raamiga

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0 & \xleftarrow{p_1} & X_1 & \xleftarrow{p_2} & \dots & \xleftarrow{p_{n-1}} & X_{n-1} & \xleftarrow{p_n} & X_n \\
 f \downarrow & & & & \phi & & & & \downarrow g \\
 Y_0 & \xleftarrow{q} & & & & & & & Y_1
 \end{array}$$

on funktsioonide pered

$$p_1(x_0, x_1) \times p_2(x_1, x_2) \times \cdots \times p_n(x_{n-1}, x_n) \xrightarrow{\phi} q(f(x_0), g(x_n)), \quad (4)$$

mis on olemas iga järjendi $(x_0, \dots, x_n) \in X_0 \times \cdots \times X_n$ jaoks. Kui $n = 0$, avaldise 4 vasakpoolses n -aarses ostekorrutises, siis interpreteerime seda kui mingit üheelemendilist hulka $\{*\}$.

Võtame konkreetseuse mõttes hulga

$$X_0 = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}, \quad W = \{1\}, \quad Y_0 = \{A, K, Q, J\},$$

$$X_1 = \{\text{ärtu, ruutu, risti, poti}\} \quad \text{ja} \quad Y_1 = \{a, k, q, j\}$$

ning funktsioonid $f: Y_0 \rightarrow Y_1$ ja $g: X_0 \rightarrow X_1$, mida defineerime järgmiselt

$$f(A) = a, \quad f(K) = k, \quad f(Q) = q \quad \text{ja} \quad f(J) = j$$

ja

$$g(\heartsuit) = \text{ärtu}, \quad g(\diamondsuit) = \text{ruutu}, \quad g(\clubsuit) = \text{risti} \quad \text{ja} \quad g(\spadesuit) = \text{poti}.$$

Võtame juurde nüüd vastavad lõdvad morfismid

$$p_1: X_0 \rightrightarrows W, \quad p_2: W \rightrightarrows Y_0 \quad \text{ja} \quad q: X_1 \rightrightarrows Y_1.$$

Definitsiooni kohaselt on p_1 suurusega 4×1 maatriks, mida defineerime hetkel näiteks paaride peal, ehk $p_1(w, x) = \{w, x\}$, seega lõdvale morfismile p_1 vastab

maatriks

$$1 \begin{pmatrix} \heartsuit \{1, \heartsuit\} \\ \diamondsuit \{1, \diamondsuit\} \\ \clubsuit \{1, \clubsuit\} \\ \spadesuit \{1, \spadesuit\} \end{pmatrix}.$$

Sarnaselt defineerides, et $p_2(y, w) = \{y, w\}$, siis saame 4×1 maatriksi

$$1 \begin{pmatrix} A & K & Q & J \\ \{A, 1\} & \{K, 1\} & \{Q, 1\} & \{J, 1\} \end{pmatrix}.$$

Samamoodi teeme ka lõdva morfismiga q , et saada $q(y, x) = \{y, x\}$, see annab meile 4×4 maatriksi

$$\begin{matrix} & \text{ärtu} & \text{ruutu} & \text{risti} & \text{poti} \\ \begin{matrix} a \\ k \\ q \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} \{a, \text{ärtu}\} \\ \{k, \text{ärtu}\} \\ \{q, \text{ärtu}\} \\ \{j, \text{ärtu}\} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \{a, \text{ruutu}\} \\ \{k, \text{ruutu}\} \\ \{q, \text{ruutu}\} \\ \{j, \text{ruutu}\} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \{a, \text{risti}\} \\ \{k, \text{risti}\} \\ \{q, \text{risti}\} \\ \{j, \text{risti}\} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \{a, \text{poti}\} \\ \{k, \text{poti}\} \\ \{q, \text{poti}\} \\ \{j, \text{poti}\} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Oleme saanud raami

$$\begin{array}{ccccc} Y_0 & \xleftarrow{p_2} & W & \xleftarrow{p_1} & X_0 \\ f \downarrow & & \phi & & \downarrow g \\ Y_1 & \xleftarrow{q} & & & X_1, \end{array}$$

kus ϕ on funktsioonide pere kõikvõimalike järjendite $(x_0, w, y_0) \in X_0 \times W \times Y_0$ jaoks. Võtame näiteks järjendi $(\heartsuit, 1, A)$, siis saame, et $\phi_{(\heartsuit, 1, A)}$ on funktsioon

$$\phi_{(\heartsuit, 1, A)} : \{1, \heartsuit\} \times \{A, 1\} \rightarrow \{a, \text{ärtu}\}.$$

Tähelepanelik lugeja on võib-olla juba märganud, et meil on juttu olnud ühikutest jääkade morfismide ja 2-morfismide jaoks, aga lõtvu ühikuid ei ole siia mainitud. Tulevikus defineerime lõtvad ühikud universaalomaduse kaudu, kuid märgime, et lõtva ühikut mingil objektidel võib üldjuhul ka mitte leiduda. Tegelikult ei ole palju raskem defineerida lõtva kompositsiooni ja siis vaadelda ühikuid kui 0-aarseid kompositsioone.

Definitsioon 6. [1, definitsioon 2.4] Ütleme, et 2-morfism

$$\begin{array}{c} \cdot \xleftarrow{q_1} \cdots \xleftarrow{q_m} \cdot \\ \parallel \quad \text{opcart} \quad \parallel \\ \cdot \xleftarrow{q} \cdot \end{array}$$

on virtuaalses topeltkategorias *esitav*, kui iga 2-morfismi

$$\begin{array}{c} \cdot \xleftarrow{p_1} \cdots \xleftarrow{p_l} \cdot \xleftarrow{q_1} \cdots \xleftarrow{q_m} \cdot \xleftarrow{r_1} \cdots \xleftarrow{r_n} \cdot \\ f \downarrow \quad \quad \quad \phi \quad \quad \quad \downarrow g \\ \cdot \xleftarrow{s} \cdot \end{array}$$

korral, 2-morfism ϕ faktoriseerub läbi 2-morfismi *opcart* unikaalselt järgneval viisil:

$$\begin{array}{c} \cdot \xleftarrow{p_1} \cdots \xleftarrow{p_l} \cdot \xleftarrow{q_1} \cdots \xleftarrow{q_m} \cdot \xleftarrow{r_1} \cdots \xleftarrow{r_n} \cdot \\ \parallel \quad = \quad \parallel \quad \parallel \quad = \quad \parallel \quad \text{opcart} \quad \parallel \quad = \quad \parallel \quad \parallel \quad = \quad \parallel \\ \cdot \xleftarrow{p_1} \cdots \xleftarrow{p_l} \cdot \xleftarrow{q} \cdot \xleftarrow{r_1} \cdots \xleftarrow{r_n} \cdot \\ f \downarrow \quad \quad \quad \phi' \quad \quad \quad \downarrow g \\ \cdot \xleftarrow{s} \cdot \end{array}$$

mis tähendab, et $\phi = \phi' (1_{p_1}, \dots, 1_{p_l}, \text{opcart}, 1_{r_1}, \dots, 1_{r_n})$, teisisõnu 2-morfism *opcart* on esitav parajasti siis, kui raami $(p_1, \dots, p_l, q, r_1, \dots, r_n, f, g, s)$ korral on

meil bijektsioon 2-morfismide klasside vahel:

$$\begin{array}{c} \phi \mapsto \phi(1, \dots, 1, \text{opcart}, 1, \dots, 1) \\ \mathbb{X}_{f,g}(p_1, \dots, p_l, q, r_1, \dots, r_n; s) \longrightarrow \mathbb{X}_{f,g}(p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_m, r_1, \dots, r_n; s) \end{array}$$

Sellisel juhul kutsume lõtv morfismi q morfismide $q_1, \dots, q_m$ **lõdvaks kompositsiooniks** ning tähistame $q =: q_1 \odot \dots \odot q_m$.

Eeldusel, et lõtv kompositsioon $q_1 \odot \dots \odot q_m$ eksisteerib, on meil kleepimisdiagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \xleftarrow{\quad} & \cdot & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{\quad} & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow \\ \phi_1 & & & & \dots & & \phi_m \\ \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow \\ \cdot & \xleftarrow{\quad} & \cdot & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{\quad} & \cdot \\ q_1 & & & & & & q_m \\ \parallel & & & & \text{opcart} & & \parallel \\ \cdot & \xleftarrow{\quad} & & & & & \cdot \\ & & q_1 \odot \dots \odot q_m & & & & \end{array}$$

Kui $m = 0$, siis on meil esitav 2-morfism kujul

$$\begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ \parallel & & \parallel \\ & \phi & \\ \parallel & & \parallel \\ A & \xleftarrow{\quad} & A \\ & q & \end{array}$$

Sellisel juhul ütleme, et $q : A \rightarrow A$ on A **lõtv ühik** ja tähistame $q := A(1, 1)$. Lõdvad kompositsioonid, kui need eksisteerivad, on ühesed isomorfismi täpsuseni, assotsiatiivsed isomorfismi täpsuseni ja lõdvad ühikud on taandatavad. Lõtvade ühikute taandavus tähendab, et lõtvade kompositsioonide $A(1, 1) \odot p$ ja $q \odot A(1, 1)$ korral on olemas isomorfismid $A(1, 1) \odot p \cong p$ ja $q \odot A(1, 1) \cong q$. Assotsiatiivsus tähendab siin, et kui $p \odot q$ eksisteerib, siis $(p \odot q) \odot r$ eksisteerib parajasti siis kui $p \odot q \odot r$ eksisteerib, kusjuures siis nad on isomorfsed. Sellest ka järeldub, et kui $p \odot q$ ja $q \odot r$ eksisteerivad, siis $(p \odot q) \odot r \cong p \odot (q \odot r)$, millest kumbki on olemas kui teine on olemas [2]. Küll, aga ei pruugi kehtida, et kui $p \odot q \odot r$ on olemas, siis on olemas $p \odot q$ või $q \odot r$, seega ei saa

üldiselt kirjutada, et $p \odot q \odot r \cong (p \odot q) \odot r$ või $p \odot q \odot r \cong p \odot (q \odot r)$, sest vastavad kompositsioonid ei pruugi eksisteerida. Kusjuures lõdvas kompositsioonis võib lõtve morfisme vahetada isomorfsete lõtvade morfismide vastu, näiteks kui $p \cong p'$ ja $q \cong q'$, siis lõtv kompositsioon $p \odot q$ leidub parajasti siis, kui leidub isomorfsete lõtvade morfismide kompositsioon $p' \odot q'$, ning lisaks, kui need kompositsioonid leiduvad, on need isomorfsed.

Eelnevalt mainitud omadused tegelikult tuginevad tugevalt omadusele, et esitavate 2-morfismide kompositsioon on esitav, seega oleks otstarbekas see ära tõestada.

Lause 1. *Olgu $\mathbb{X}$ virtuaalne topeltkateooria. Olgu antud globulaarne 2-morfism $\psi : p_1, \dots, p_n \Rightarrow p$ ning olgu iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral antud esitav 2-morfism $\phi_i : p_1^i, \dots, p_{n_i}^i \Rightarrow p_i$.*

1. *Kui ψ on esitav, siis kompositsioon $\psi(\phi_1, \dots, \phi_n)$ on esitav.*
2. *Kui kompositsioon $\psi(\phi_1, \dots, \phi_n)$ on esitav, siis ψ on esitav.*

Tõestus. 1). Olgu antud esitav 2-morfism $\psi : p_1, \dots, p_n \Rightarrow p$ ning iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral esitav 2-morfism $\phi_i : p_1^i, \dots, p_{n_i}^i \Rightarrow p_i$. Peame näitama, et $\psi(\phi_1, \dots, \phi_n)$ on esitav. Fikseerime raami $(r_1, \dots, r_k, p, r_{k+1}, \dots, r_m, f, g, s)$, mida täitvateks 2-morfismideks on klass $\mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p, r_{k+1}, \dots, r_m; s)$. Kuna ψ on esitav, siis on meil olemas bijektsioon α , mille korral kui on antud 2-morfism $\pi \in \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p, r_{k+1}, \dots, r_m; s)$, siis $\pi \mapsto \pi(1, \dots, 1, \psi, 1, \dots, 1)$

$$\mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p, r_{k+1}, \dots, r_m; s) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1, \dots, p_n, r_{k+1}, \dots, r_m; s).$$

Kuna $\phi_1 : p_1^1, \dots, p_{n_1}^1 \Rightarrow p_1$ on esitav, siis on meil samuti olemas bijektsioon β_1 ,

mille korral $\pi \mapsto \pi(1, \dots, 1, \phi_1, 1, \dots, 1)$

$$\begin{array}{c} \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p, r_{k+1}, \dots, r_m; s) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1, \dots, p_n, r_{k+1}, \dots, r_m; s) \\ \downarrow \beta_1 \\ \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1^1, \dots, p_{n_1}^1, \dots, p_n, r_{k+1}, \dots, r_m; s). \end{array}$$

Kuna ϕ_i on esitav iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral, siis saame, et meil on sarnaselt ka bijektsioonid β_i , mille korral $\pi \mapsto \pi(1, \dots, 1, \phi_i, 1, \dots, 1)$

$$\begin{array}{c} \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p, r_{k+1}, \dots, r_m; s) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1, \dots, p_n, r_{k+1}, \dots, r_m; s) \\ \downarrow \beta_1 \\ \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1^1, \dots, p_{n_1}^1, \dots, p_n, r_{k+1}, \dots, r_m; s) \\ \downarrow \beta_2 \\ \dots \\ \downarrow \beta_n \\ \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1^1, \dots, p_{n_1}^1, \dots, p_1^n, \dots, p_{n_n}^n, r_{k+1}, \dots, r_m; s). \end{array}$$

Märkame, et kuna alustasime raamiga π , milles on olemas vastavad lõdvad morfismid $p_1, \dots, p_n$, siis näeme, et järjestikku rakendamise puhul virtuaalse topelt-kategooria assotsiatiivsuse võrdusest 1 järeldub, et

$$\begin{aligned} (\beta_2 \circ \beta_1)(\pi) &= \pi(1, \dots, 1, \phi_1, 1, \dots, 1)(1, \dots, 1, \phi_2, 1, \dots, 1) \\ &= \pi(1, \dots, 1, \phi_1, \phi_2, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Analoogselt näeme siis, et

$$(\beta_n \circ \dots \circ \beta_1)(\pi) = \pi(1, \dots, 1, \phi_1, \dots, \phi_n, 1, \dots, 1).$$

Kui veel lisaks π on saadud raamist $\mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p, r_{k+1}, \dots, r_m; s)$ läbi bijekt-

siooni α , siis

$$\begin{aligned} ((\beta_n \circ \dots \circ \beta_1) \circ \alpha)(\pi) &= \pi(1, \dots, 1, \psi, 1, \dots, 1)(1, \dots, 1, \phi_1, \dots, \phi_n, 1, \dots, 1) \\ &= \pi(1, \dots, 1, \psi(\phi_1, \dots, \phi_n), 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Meil on bijektiivsete kujutuste jada, järelikult on meil ka bijektsioon, mis on saadud läbi eelneval diagrammil olevate kujutuse komponeerimise:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p, r_{k+1}, \dots, r_m; s) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1, \dots, p_n, r_{k+1}, \dots, r_m; s) \\ & \searrow \beta_n \circ \dots \circ \beta_1 \circ \alpha & \downarrow \beta_1 \\ & & \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1^1, \dots, p_{n_1}^1, \dots, p_n, r_{k+1}, \dots, r_m; s) \\ & & \downarrow \beta_2 \\ & & \dots \\ & & \downarrow \beta_n \\ & \searrow \pi \mapsto \pi(1, \dots, 1, \psi(\phi_1, \dots, \phi_n), 1, \dots, 1) & \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1^1, \dots, p_{n_1}^1, \dots, p_1^n, \dots, p_{n_n}^n, r_{k+1}, \dots, r_m; s). \end{array}$$

Oleme leidnud vajaliku bijektsiooni, järelikult $\psi(\phi_1, \dots, \phi_n)$ on esitav, nii nagu taheti.

2). Paneme tähele, et kui meil on diagramm kujul

$$\begin{array}{ccc} & \cdot & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ \cdot & \xrightarrow{g \circ f} & \cdot \end{array}$$

Siis, kui kaks kolmest morfismidest f , g ja $g \circ f$ on isomorfismid, siis ka kolmas on isomorfism. Punktis 1) nägime, et meil on diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p, r_{k+1}, \dots, r_m; s) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1, \dots, p_n, r_{k+1}, \dots, r_m; s) \\ & \searrow \beta_n \circ \dots \circ \beta_1 \circ \alpha & \downarrow \beta_n \circ \dots \circ \beta_1 \\ & & \mathbb{X}_{f,g}(r_1, \dots, r_k, p_1^1, \dots, p_{n_1}^1, \dots, p_1^n, \dots, p_{n_n}^n, r_{k+1}, \dots, r_m; s). \end{array}$$

Sellest, et $\beta_n \circ \dots \circ \beta_1 \circ \alpha$ ja $\beta_n \circ \dots \circ \beta_1$ on isomorfismid järeltub, et ka α on isomorfism ja seega ψ on esitav. $\square$

Näide 4. Olgu $\mathbb{X}$ virtuaalne topeltkateooria. Iga lõtv morfism $1_p : p \Rightarrow p$ on esitav. Selle nägemiseks vaatleme suvalist raami, mis on kujul

$$\begin{array}{c}
 \cdot \xleftarrow{p_1} \dots \xleftarrow{p_l} \cdot \xleftarrow{p} \cdot \xleftarrow{r_1} \dots \xleftarrow{r_n} \cdot \\
 \downarrow f \qquad \qquad \qquad \phi \qquad \qquad \qquad \downarrow g \\
 \cdot \xleftarrow{\quad \quad \quad} \cdot
 \end{array}$$

Kui me kleebime siia otsa 1_p , siis saame kleepimisdiagrammi

$$\begin{array}{c}
 \cdot \xleftarrow{p_1} \dots \xleftarrow{p_l} \cdot \xleftarrow{p} \cdot \xleftarrow{r_1} \dots \xleftarrow{r_n} \cdot \\
 \parallel \quad \quad \parallel \quad \quad \parallel \quad \quad \parallel \quad \quad \parallel \\
 \cdot \xleftarrow{p_1} \dots \xleftarrow{p_l} \cdot \xleftarrow{p} \cdot \xleftarrow{r_1} \dots \xleftarrow{r_n} \cdot \\
 \downarrow f \qquad \qquad \qquad \phi' \qquad \qquad \qquad \downarrow g \\
 \cdot \xleftarrow{\quad \quad \quad} \cdot
 \end{array}$$

Kui võtame, et $\phi' = \phi$, siis virtuaalse topeltkateooria ühiku aksioomi 2 kohaselt $\phi(1, \dots, 1, 1_p, 1, \dots, 1) = \phi$, järelikult 1_p on esitav.

Näide 5. Olgu antud osaliselt järjestatud hulk $P = [6] = \{1, \dots, 6\} \subset \mathbb{N}$ millel on jaguvuse osaline järjestus s.t, et $x \leq y$ parajasti siis, kui $x \mid y$. Kui me vaatleme näites 1 moodustatud kategooriat $\text{CoCart}(\mathbf{P})$, siis lõtvade morfismide kompositsioon $p_1 \odot \dots \odot p_n$ on nende lõtvade morfismide ehk osaliselt järjestatud hulga elementide ülemine raja. Paneme tähele, et osaliselt järjestatud hulgas P ei pruugi ülemist raja olemas olla. Antud osaliselt järjestatus hulgas P on kahe elemendi ülemine raja nende vähim ühiskordne ja näiteks elementide $4, 5 \in P$ korral nende vähim ühiskordne on $20 \notin P$, seega lõtv kompositsioon $4 \odot 5$ ei saa eksisteerida.

Näide 6. [2, näide 5.3] Varem vaadeldud näites kategooria Set-Mat puhul on

hulga A lõtv ühik antud maatriksiga

$$A(a, a') = \begin{cases} \{*\}, & \text{kui } a = a', \\ \emptyset, & \text{kui } a \neq a'. \end{cases}$$

Siin $\{*\}$ on mingi suvaline fikseeritud üheelemendiline hulk. Paneme ka tähele, et kui valida mingi muu üheelemendiline hulk $\{\star\}$, siis saame isomorfse maatriksi, mis on samuti lõtv ühik. Antud asjaolust ongi näha, et lõtv ühik on vaid isomorfismi täpsuseni määratud. Kuna kategoorias Set on kopiirid antud läbi lõikumatute ühendite, siis lõtv kompositsioon on antud läbi "maatriksite korrutamise". Konkreetsete morfismide $p : X \rightarrow Y$ ja $q : Y \rightarrow Z$ jaoks see on

$$(q \odot p)(x, z) = \coprod_{y \in Y} q(z, y) \times p(y, x).$$

Võttes näitest 3 lõdvad morfismid $p_1 : X_0 \rightarrow W$ ja $p_2 : W \rightarrow Y_0$ saame leida lõdva kompositsiooni elementide $\heartsuit \in X_0$ ja $A \in Y_0$ korral, s.o

$$\begin{aligned} (p_2 \odot p_1)(\heartsuit, A) &= \coprod_{w \in W} p_2(A, w) \times p_1(w, \heartsuit) = \\ &= p_2(A, 1) \times p_1(1, \heartsuit) = \{A, 1\} \times \{1, \heartsuit\} = \\ &= \{(A, 1), (A, \heartsuit), (1, 1), (1, \heartsuit)\}. \end{aligned}$$

2 Virtuaalsed Taglastused

Virtuaalsetes topeltkategoriates võib tihtipeale juhtuda, et lõdvad ja jäigad morfismid on tõhusamalt seotud kui definitsioonist näha on. Näiteks võime vaadelda näidet 2, kus tutvustasime lokaalselt väikestest kategooriatest, funktoritest ja profunktoritest koosneva kategooria. Selle kategooria puhul võib juhtuda, et meil on funktor $f : A \rightarrow B$ mille puhul on näha, et f on isomorfismi täpsuseni sama mis profunktor $B(1, f) : A \rightarrow B$, kus $B(1, f)(b, a) = B(b, f(a))$ ².

Vaadeldud morfismi $B(1, f)$ võib samuti tõlgendada sellisena, et kõigepealt me vaatleme profunktorit $B(-, -) : B \rightarrow B$ ja siis eelkomponeerime seda mingisuguse jäiga morfismi ehk funkoriga f . Eelkomponeerimise all mõtleme kompositsiooni

$$B^{\text{op}} \times A \xrightarrow{1 \times f} B^{\text{op}} \times B \xrightarrow{B(-, -)} \text{Set},$$

Ning kui ka $g : A' \rightarrow B$ on antud, siis

$$(A')^{\text{op}} \times A \xrightarrow{g \times f} B^{\text{op}} \times B \xrightarrow{B(-, -)} \text{Set}.$$

See motiveerib järgneva üldise definitsiooni. [2]

Definitsioon 7. [1, definitsioon 2.7] 2-morfism

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xleftarrow{p} & \cdot \\ f \downarrow & \text{cart} & \downarrow g \\ \cdot & \xleftarrow{q} & \cdot \end{array}$$

² $B(b, f(a))$ on kõikide morfismide $g : b \rightarrow f(a)$ hulk objektide $b \in \text{Ob}(B)$ ja $f(a) \in \text{Ob}(B)$ vahel.

virtuaalses topeltkategorias on **ahendav**, kui iga 2-morfismi

$$\begin{array}{ccc}
 \cdot & \xleftarrow{r_1} \dots \xleftarrow{r_n} & \cdot \\
 f \circ f' \downarrow & \phi & \downarrow g \circ g' \\
 \cdot & \xleftarrow{q} & \cdot
 \end{array}$$

korral, see faktoriseerub unikaalselt järgneval viisil:

$$\begin{array}{ccc}
 \cdot & \xleftarrow{r_1} \dots \xleftarrow{r_n} & \cdot \\
 f \circ f' \downarrow & \phi & \downarrow g \circ g' \\
 \cdot & \xleftarrow{q} & \cdot
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \cdot & \xleftarrow{r_1} \dots \xleftarrow{r_n} & \cdot \\
 f' \downarrow & \phi' & \downarrow g' \\
 \cdot & \xleftarrow{p} & \cdot \\
 f \downarrow & cart & \downarrow g \\
 \cdot & \xleftarrow{q} & \cdot
 \end{array}$$

Sellisel juhul ütleme, et p on q **ahend** piki jääkade morfismide paari f, g ning tähistame $p = q(f, g)$. Ahendid on unikaalsed isomorfismi täpsuseni ja käituvad pseudofunktoriaalselt s.t, et kui on antud lõtv morfism $q : A \rightrightarrows B$ ning jäägad morfismid $f : D \rightarrow C$ ning $g : C \rightarrow B$, siis kehtivad isomorfismid $q(1, 1) \cong q$ ja $q(1, g)(1, f) \cong q(1, f \circ g)$ [2, definitsioon 7.1]. Kui veel lisaks q on lõtv ühik $A(1, 1)$, siis kirjutame $p = A(1, 1)(f, g)$ asemel lihtsalt $A(f, g)$.

Märkame, et kui ahendame lõtva ühikut $A(1, 1)$ mööda jääkade ühikmorfismide paari $(1, 1)$, siis saame, et $A(1, 1)(1, 1) = A(1, 1)$, mis võib segadust tekitada. Segaduse vältimiseks vaatleme järgnevat näidet

Näide 7. Alati on võimalik vaadelda ühik 2-morfismi $1_{A(1,1)}$ kui ahendavat 2-morfismi, millest saamegi ahendi $A(1, 1)(1_A, 1_A)$, see on seetõttu, et ühikute komponeerimise aksioomi 3 kohaselt on ahendava 2-morfismi universaaloma-

dus alati täidetud. Selle sama aksioomi järgi peab siis ka kehtima, et

$$\begin{array}{c} A \\ \parallel \\ A \end{array} \xleftarrow[A(1,1)]{\phi} \begin{array}{c} A \\ \parallel \\ A \end{array} = \begin{array}{ccc} A & \xleftarrow[A(1,1)]{\phi} & A \\ \parallel & & \parallel \\ A & \xleftarrow[A(1,1)]{1_{A(1,1)}} & A \\ \parallel & & \parallel \\ A & \xleftarrow[A(1,1)]{} & A \end{array}$$

Kuna ahendid on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud, siis kokkuleppeliselt võime alati valida $A(1, 1)(1_A, 1_A)$ ahendavaks 2-morfismiks $1_{A(1,1)}$, millest tulenevalt saamegi, et $A(1, 1)(1_A, 1_A) = A(1, 1)$.

Näide 8. [1] Varem vaadeldud näites 2 olevas kategoorias Set-Prof lõdva morfismi $p : A \rightrightarrows B$, ehk profunktori $p : B^{\text{op}} \times A \rightarrow \text{Set}$, ning jäikade morfismide ehk funktorite $f : A' \rightarrow A$ ja $g : B' \rightarrow B$ korral on ahend eelkompositsioon $p(f, g)$, kus eelkompositsiooni all on mõeldud kompositsiooni

$$(B')^{\text{op}} \times A' \xrightarrow{g \times f} B^{\text{op}} \times A \xrightarrow{p} \text{Set}$$

Näide 9. Kategoorias Set-Mat on ahendamine maatriksite ümberindekseerimine. Sisuliselt see tähendab, et maatriksi indeksid muudetakse funktsioonidega f ja g eelkomponeerides ümber. Teeme läbi ühe konkreetse näite, milleks kõigepealt vaatleme diagrammi, mille morfismid me eelnevalt defineerisime.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow[p]{} & A \\ f \downarrow & \text{cart} & \downarrow g \\ Y & \xleftarrow[q]{} & B. \end{array}$$

Defineerime, et

$$X = \{x_i \mid i \in \{0, \dots, 120\}\}, \quad Y = \{y_i \mid i \in \{0, 1\}\},$$

$$A = \{a_i \mid i \in \{0, \dots, 64\}\}, \quad \text{ja} \quad B = \{b_i \mid i \in \{0, 1, 2\}\}.$$

ning olgu f ja g sellised, et

$$f(x_i) = y_0 \quad \text{ja} \quad g(a_i) = b_0.$$

Teame, et lõtv morfism q vastab võrdusele $q(y, b) = \{y, b\}$, mis tähendab, et meil on 2×3 maatriks

$$\begin{array}{ccc} & b_0 & b_1 & b_2 \\ \begin{array}{l} y_0 \\ y_1 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} \{y_0, b_0\} & \{y_0, b_1\} & \{y_0, b_2\} \\ \{y_1, b_0\} & \{y_1, b_1\} & \{y_1, b_2\} \end{array} \right) \end{array}$$

Siin kohal tuleb ka meelde, et q ei pea olema defineeritud alati läbi kahelemendiliste hulkade, vaid võib olla suvaline mingi hulkade pere $\{q(y, x)\}$. Leiame nüüd $p = q(f, g)$. Kuna eelnevalt defineerisime f ja g läbi konstantsete kujutuste, siis näeme, et iga $x \in \text{Ob}(X)$ ja $a \in \text{Ob}(A)$ korral p on tegelikult täpselt selline, et $p = q(f(x), g(a)) = q(y_0, b_0) = \{y_0, b_0\}$, ehk ahend p on 1×1 maatriks

$$\begin{array}{c} b_0 \\ y_0 \left(\{y_0, b_0\} \right) \end{array}$$

Ehk oleme ahendanud 2×3 maatriksi 1×1 maatriksiks.

Kuna lõdvad ühikud ja ahendid on eriti tähtsal kohal virtuaalsete topeltkategooriate teoorias siis osutub kasulikuks kui oleks viis nende olemasolu alati eeldada, et neid kasutada saaks. Sellest tulenevalt võtame kasutusele virtuaalse

taglastuse mõiste.

Definitsioon 8. [1, definitsioon 2.10] **Virtuaalne taglastus** on virtuaalne topeltkateooria, milles on olemas kõik lõdvad ühikud ja ahendid.

Näide 10. Varem mainitud virtuaalne topeltkateooria $\mathbf{Set}\text{-}\mathbf{Mat}$ on samuti virtuaalne taglastus. Selgub, et lõdvad ühikud, mille konstruktsiooni kirjeldamise näites 6, ja ahendid, mille konstruktsiooni kirjeldasime näites 9, on selles konkreetses kateoorias alati kirjeldatud viisidel konstrueeritavad.

Nüüd, et virtuaalse taglastuse formaalne definitsioon on antud, siis on vundament rajatud, et saaks hakata rääkima *suhtelistest adjunktsioonidest*. Peatüki lõpetuseks tutvustame veel paar asja, mida hiljem kasutame ning toome välja ühe kasuliku teoreemi ahendite isomorfsuse kohta.

Definitsioon 9. [2, lk 32] Olgu $f : A \rightarrow B$ jääk morfism virtuaalses taglastuses $\mathbb{X}$, selle morfismi **baasivahetusmorfismid** on ahendid

$$B(f, 1) \quad \text{ja} \quad B(1, f).$$

Baasivahetusmorfismidega kaasnevad ahendavad 2-morfismid

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{B(f, 1)} & B \\ f \downarrow & \lrcorner f & \parallel \\ B & \xleftarrow{B(1, 1)} & B \end{array} \quad \text{ja} \quad \begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{B(1, f)} & A \\ \parallel & f \lrcorner & \downarrow f \\ B & \xleftarrow{B(1, 1)} & B. \end{array}$$

Kasutades $\lrcorner f$ ja $f \lrcorner$ universaalomadusi saame järgnevat raami

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{A(1, 1)} & A \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xleftarrow{B(1, 1)} & B \end{array}$$

faktoriseerides lisaks 2-morfismid

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{A(1,1)} & A \\
 \parallel & \lrcorner f & \downarrow f \\
 A & \xleftarrow{B(f,1)} & B
 \end{array}
 \quad \text{ja} \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{A(1,1)} & A \\
 \downarrow f & \lrcorner f & \parallel \\
 B & \xleftarrow{B(1,f)} & A
 \end{array}$$

Lisaks saame 2-morfismide $f_{\lrcorner}$ ja $\lrcorner f$ puhul ahendi definitsiooni kohaselt keh-
tivad järgnevad võrrandid:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{A(1,1)} & A \\
 \parallel & \lrcorner f & \downarrow f \\
 A & \xleftarrow{B(f,1)} & B \\
 \downarrow f & \lrcorner f & \parallel \\
 B & \xleftarrow{B(1,1)} & B
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{A(1,1)} & A \\
 \downarrow f & & \downarrow f \\
 B & \xleftarrow{B(1,1)} & B
 \end{array}
 \\
 \begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{A(1,1)} & A \\
 \downarrow f & \lrcorner f & \parallel \\
 B & \xleftarrow{B(1,f)} & A \\
 \parallel & f^{\lrcorner} & \downarrow f \\
 B & \xleftarrow{B(1,1)} & B
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{A(1,1)} & A \\
 \downarrow f & & \downarrow f \\
 B & \xleftarrow{B(1,1)} & B
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (5)$$

Toome nüüd esile ühe kasuliku konstruktsiooni.

Lause 2. Olgu antud virtuaalne taglastus $\bowtie$ ning lõtv morfism $p: A \rightarrow B$, siis
leidub esitav 2-morfism kujul

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xleftarrow{B(1,1)} & B \xleftarrow{p} A \\
 \parallel & \phi & \parallel \\
 B & \xleftarrow{p} & A
 \end{array}$$

ehk lõdva ühiku $B(1, 1)$ ja p lõtv kompositsioon leidub ning $B(1, 1) \odot p \cong p$.

Tõestus. Paneme tähele, et lõdva ühiku definitsiooni kohaselt on lõtva ühikut
 $B(1, 1)$ defineeriv 2-morfism esitav ja seega peab kehtima võrdus iga 2-morfismi

$\phi : B(1, 1), p \Rightarrow p$ korral $1_p = \phi(opcart, 1_p)$

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xleftarrow{p} & A \\
 \parallel & & \parallel \\
 B & \xleftarrow{p} & A
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 B & \xlongequal{\quad} & B & \xleftarrow{p} & A \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & opcart & & 1_p & \\
 B & \xleftarrow{B(1,1)} & B & \xleftarrow{p} & A \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & \phi & & \\
 B & \xleftarrow{p} & & & A
 \end{array}
 \quad (6)$$

Kuna varem näitest 4 nägime, et ka 1_p on esitav, siis näeme, et võrduse 6 paremal poolel oleva diagrammi kompositsioon on esitav, ning ülemised kaks ruutu on samuti esitavad, järelikult lause 1 kohaselt ka ϕ on esitav. $\square$

Duaalselt on ka iga lõdva morfismi $p : A \rightarrow B$ korral olemas esitav 2-morfism

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \xleftarrow{p} & A & \xleftarrow{A(1,1)} & A \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 & opcart & & & \\
 B & \xleftarrow{p} & & & A
 \end{array}
 \quad (7)$$

mille korral $p \odot A(1, 1) \cong p$.

Kusjuures kombineerides lauses 6 konstrueeritud 2-morfismi ja 2-morfismi 7, saame veel ühe konstruktsiooni.

Lause 3. Olgu antud virtuaalne taglastus $\bowtie$ ning lõtv morfism $p : B \rightarrow C$, siis leidub esitav 2-morfism kujul

$$\begin{array}{ccccccc}
 C & \xleftarrow{C(1,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,1)} & B \\
 \parallel & & & & \phi & & \parallel \\
 C & \xleftarrow{p} & & & & & B
 \end{array}$$

Tõestus. Lauses 2 konstrueerisime suvalise lõdva morfismi $p : B \rightarrow C$ jaoks

esitavad 2-morfismid

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xleftarrow{C(1,1)} & C & \xleftarrow{p} & B \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 C & \xleftarrow{p} & & & B
 \end{array}
 \quad \text{opcart}$$

ning

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,1)} & B \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 C & \xleftarrow{p} & & & B
 \end{array}
 \quad \text{opcart}$$

Kleebime need kokku järgnevalt

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xleftarrow{C(1,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,1)} & B \\
 \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\
 = & & & & \text{opcart} & & \\
 C & \xleftarrow{C(1,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & & B \\
 \parallel & & & & & & \parallel \\
 C & \xleftarrow{p} & & & B
 \end{array}
 \quad \text{opcart}$$

Komponeerides neid saame uue 2-morfismi

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xleftarrow{C(1,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,1)} & B \\
 \parallel & & & & \phi & & \parallel \\
 C & \xleftarrow{p} & & & B
 \end{array}$$

kusjuures ϕ on esitav lause 1 kohaselt. □

Kasutades lauses 2 konstrueeritud 2-morfismi, sellele duuaalselt konstrueeritud 2-morfismi 7 ning baasivahetusmorfismide 2-morfisme saame, et kehtivad ka

võrrandid:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{A(1,1)} & A & \xleftarrow{B(f,1)} & B \\
 \parallel & \downarrow f_{\lrcorner} & \downarrow f & \uparrow f & \parallel \\
 A & \xleftarrow{B(f,1)} & B & \xleftarrow{B(1,1)} & B \\
 \parallel & & \text{opcart} & & \parallel \\
 A & \xleftarrow{B(f,1)} & & & B
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccccc}
 B & \xleftarrow{B(1,f)} & A & \xleftarrow{A(1,1)} & A \\
 \parallel & \downarrow f^{\lrcorner} & \downarrow f & \lrcorner f & \parallel \\
 B & \xleftarrow{B(1,1)} & B & \xleftarrow{B(1,f)} & A \\
 \parallel & & \text{opcart} & & \parallel \\
 B & \xleftarrow{B(1,f)} & & & A
 \end{array}
 \end{array} = \begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{A(1,1)} & A \xleftarrow{B(f,1)} B \\
 \parallel & \text{opcart} & \parallel \\
 A & \xleftarrow{B(f,1)} & B.
 \end{array} \quad (8)$$

Selle väite tõestust me käesolevas töös ei esita, kuid märgime, et see on leitav allikast [2, lk 39].

Näide 11. Kategoorias Set-Mat funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ korral on baasivahe-
tusemorfism $Y(f, 1)$ maatriks

$$Y(f, 1)(x, y) = \begin{cases} \{*\}, & \text{kui } f(x) = y, \\ \emptyset, & \text{muidu.} \end{cases}$$

Teoreem 1. [2, teoreem 7.16] Olgu $p : B \rightrightarrows C$ lõtv morfism ja $f : D \rightarrow C$ ning $g : A \rightarrow B$ jäägad morfismid virtuaalses taglastuses $\bowtie$. Siis lõtv kompositsioon $C(f, 1) \odot p \odot B(1, g)$ eksisteerib ja on isomorfne ahendiga $p(f, g)$.

Tõestus. Lauses 3 konstrueerisime suvalise lõdva morfismi p puhul esitava 2-

morfismi, mis on kujul

$$\begin{array}{ccccccc}
 C & \xleftarrow{C(1,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,1)} & B \\
 \parallel & & & \phi & & & \parallel \\
 C & \xleftarrow{p} & & & & & B.
 \end{array}$$

Vaatleme nüüd kleepimisdiagrammi

$$\begin{array}{ccccccc}
 D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A \\
 f \downarrow & \lrcorner f & \parallel & 1_p & \parallel & g^\top & \downarrow g \\
 C & \xleftarrow{C(1,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,1)} & B \\
 \parallel & & \phi & & & & \parallel \\
 C & \xleftarrow{p} & & & & & B.
 \end{array}$$

Kuna virtuaalses taglastuses on olemas kõik ahendid, siis on olemas ahendav ruut

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xleftarrow{p(f,g)} & A \\
 f \downarrow & cart & \downarrow g \\
 C & \xleftarrow{p} & B.
 \end{array}$$

Ahendi universaalomaduse kohaselt varem vaadeldud kompositsioon faktoriseerub läbi ahendava 2-morfismi, mis defineerib $p(f, g)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A \\
 f \downarrow & \phi(\lrcorner f, 1_p, g^\top) & & & & & \downarrow g \\
 C & \xleftarrow{p} & & & & & B
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A \\
 \parallel & & & \alpha & & & \parallel \\
 D & \xleftarrow{p(f,g)} & & & & & A \\
 f \downarrow & cart & & & & & \downarrow g \\
 C & \xleftarrow{p} & & & & & B.
 \end{array}$$

See annab meile kanoonilise 2-morfismi

$$\begin{array}{ccccccc}
 D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A \\
 \parallel & & & & & & \parallel \\
 D & \xleftarrow{p(f,g)} & & & & & A
 \end{array}$$

α

Piisab näidata, et α on *esitav*. Selleks eeldame, et meil on mingi teine 2-morfism

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \xleftarrow{\quad} & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A & \xleftarrow{\quad} & \cdot \\
 \downarrow h & & & & & & & & & & \downarrow k \\
 \cdot & \xleftarrow{\quad} & & & & & & & & & \cdot
 \end{array}$$

β

q

Meil on vaja seda faktoriseerida unikaalselt läbi α . Faktoriseerimise annab meile kompositsioon

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \xleftarrow{\quad} & D & \xleftarrow{\quad} & D & \xleftarrow{p(f,g)} & A & \xleftarrow{\quad} & A & \xleftarrow{\quad} & \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \cdot & \xleftarrow{\quad} & D & \xleftarrow{D(1,1)} & D & \xleftarrow{p(f,g)} & A & \xleftarrow{A(1,1)} & A & \xleftarrow{\quad} & \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \cdot & \xleftarrow{\quad} & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A & \xleftarrow{\quad} & \cdot \\
 \downarrow h & & & & & & & & & & \downarrow k \\
 \cdot & \xleftarrow{\quad} & & & & & & & & & \cdot
 \end{array}$$

β

q

See, et tegemist on unikaalse faktoriseerimisega, saame baasivahetusmorfismide võrranditest 5 ja 8, aga see on üsna mahukas protsess, seega on see eraldi leitav [Lisast 2](#). □

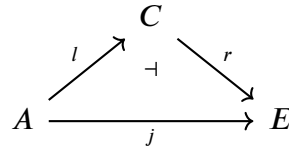
Antud teoreem sisuliselt ütleb meile, et kõik *ahendid* on kättesaadavad baasivahetusmorfismidega komponeerides, sealt tuleb ka nimi baasivahetusmorfismidele [2].

Järeldus 1. [2, järeldus 7.19] Virtuaalse taglastuse $\bowtie$ jääkade morfismide $f : D \rightarrow C$ ja $g : C \rightarrow B$ korral kompositsioon $B(1, g) \odot C(1, f)$ alati eksisteerib ja on isomorfne ahendiga $B(1, g \circ f)$, ning kompositsioon $C(f, 1) \odot B(g, 1)$ alati eksisteerib ja on isomorfne ahendiga $B(g \circ f, 1)$.

3 Suhtelised adjunktsioonid

Adjunktsioonid on kategooriateoorias hästi tuntud uurimisobjektid ja, nii nagu ka tihti peale mujal matemaatikas, soovime adjunktsiooni mõistet üldistada. Kasutades virtuaalseid taglastusi, saamegi üldistuse adjunktsioonidele nimelt *suhtelised adjunktsioonid*. Üldistatud definitsioon on omakorda kasulik, sest mittesuhtelisi adjunktsioone on väga lihtne vaadelda kui suhtelist varianti, mis võimaldab suhteliste adjunktsioonide tõhusat uurimist ja hiljem tavalisele juhule kitsendamist.

Definitsioon 10. [1, definitsioon 5.1] Olgu $\mathbb{X}$ virtuaalne taglastus. Suhteline adjunktsioon taglastuses $\mathbb{X}$ koosneb järgnevatest andmetest:



1. Jäigast morfismist $j : A \rightarrow E$, mida nimetame juureks.
2. Jäigast morfismist $l : A \rightarrow C$, mida nimetame vasakpoolseks suhteliseks jäigaks kaasmorfismiks.
3. Jäigast morfismist $r : C \rightarrow E$, mida nimetame parempoolseks suhteliseks jäigaks kaasmorfismiks.
4. Isomorfismist $\alpha : C(l, 1) \Rightarrow E(j, r)$ ning ka selle pöördmorfismist $\beta : E(j, r) \Rightarrow C(l, 1)$, mida vastavalt nimetame vasak- ja parempoolseteks transpositsioonioperaatoriteks.

Sellised andmed märgime $l \dashv_j r$. Kusjuures ütleme, et j -suhteline adjunktsioon on suhteline adjunktsioon mille juur on j .

Märkus 3. [1, järeldus 5.6] Kui j on ühikmorfism, siis j -suhteline adjunktsioon on täpselt mittesuhteline adjunktsioon.

Toome nüüd näite, mis annab natuke arusaama, et milline suhteline adjunkt-sioon võib välja näha, aga ka samas illustreerib asjaolu, et on olemas suhtelisi adjunktsioone, mis ei ole tavalised mittesuhtelised adjunktsioonid. Selleks kõigepealt märgime, et suhtelisi adjunktsioone saab kitsendada funktoritele järgmisel viisil: Olgu $J : A \rightarrow E$ funktor, ütleme, et funktoril $R : C \rightarrow E$ on vasakpoolne J -suhteline kaasfunktor kui eksisteerib funktor $L : A \rightarrow C$ nii, et meil on loomulik isomorfism $C(L(-), -) \cong E(J(-), R(-))$.

Näide 12. [6, lk 87] Vaatleme virtuaalsed taglastust Set-Prof . Vaatleme seal olevaid jäika morfismi ehk funktorit $J : \text{FinAb} \rightarrow \text{AbGrp}$, mis on lõplike Abeli rühmade kategooria sisestus kõikide Abeli rühmade kategooriasse. Nüüd kuna kategoorias $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}$ on olemas nullobjekt (vt Lisa 1), milleks on vektorruum $0_{\text{Vect}_{\mathbb{Q}}} := \{0\}$, siis saame moodustada nullfunktori $L : \text{FinAb} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}$ s.t, et iga $A \in \text{Ob}(\text{FinAb})$ korral $L(A) = 0_{\text{Vect}_{\mathbb{Q}}}$ ning iga $A_1, A_2 \in \text{Ob}(\text{FinAb})$ ja $f : A_1 \rightarrow A_2$ korral $L(f) = 0_{0,0} : 0_{\text{Vect}_{\mathbb{Q}}} \rightarrow 0_{\text{Vect}_{\mathbb{Q}}}$, kus $0_{0,0}$ on objekti $0_{\text{Vect}_{\mathbb{Q}}}$ ühikfunktor $1_{0_{\text{Vect}_{\mathbb{Q}}}}$.

Eelnevalt kirjeldatud funktoore L ja J puhul L on J -suhteline vasakpoolne kaasfunktor unustavale funktoorele $V : \text{Vect}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{AbGrp}$, ehk $L \dashv_J V$.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Vect}_{\mathbb{Q}} & \\ L \nearrow & \dashv & \searrow V \\ \text{FinAb} & \xrightarrow{J} & \text{AbGrp} \end{array}$$

Selleks, et näidata eelneva väite kehtivust, eeldame, et meil on antud objektid $A \in \text{Ob}(\text{FinAb})$ ja $X \in \text{Ob}(\text{Vect}_{\mathbb{Q}})$, tarvis on näidata, et $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}(L(A), X)$ ja $\text{AbGrp}(J(A), V(X))$ moodustavad A ja X suhtes loomuliku isomorfismi. Teame, et $L(A) = 0_{\text{Vect}_{\mathbb{Q}}}$, järelikult

$$\text{Vect}_{\mathbb{Q}}(L(A), X) = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(0, X) \stackrel{*}{=} \{0_{0,X}\},$$

kus võrdus (*) kehtib seetõttu, et meil on alati olemas nullobjektist unikaalne

morfism $0_{0,X} : 0_{Vect_{\mathbb{Q}}} \rightarrow X$. Olgu nüüd $V(X)$ vektorruumi X aluseks olev Abeli rühm, ehk oleme unustanud vektorruumi skalaarkorrutamise tehte. Siis kuna J on sisestus, on meil

$$AbGrp(J(A), V(X)) = AbGrp(A, V(X)).$$

Kasutame nüüd ära fakti, et iga homomorfism lõplikust Abeli rühmast A vektorruumi X aluseks olevasse rühma $V(X)$ on nullkujutus [6, lk 87]. Siis

$$AbGrp(A, V(X)) = \{0_{A,V(X)}\},$$

kus $0_{A,V(X)} : A \rightarrow V(X)$ on unikaalne nullkujutus. Nüüd saame defineerida triviaalse ühe-elementiliste hulkade vahelise bijektsiooni

$$\Phi_{A,X} : Vect_{\mathbb{Q}}(L(A), X) \rightarrow AbGrp(J(A), V(X)),$$

mis on antud eeskirjaga

$$\Phi_{A,X}(0_{0,X}) = 0_{A,V(X)}.$$

Selle loomulikkus A ja X suhtes on triviaalne.

Nagu ka tavaliste adjunktsioonidega, on vasakpoolsed suhtelised jäigad kaasmorfismid unikaalsed isomorfismi täpsuseni, kuigi parempoolsete suhteliste jäikade kaasmorfismide puhul see ei pruugi kehtida. Näiteks, kui tähistame, et 0 on tühi kategooria, siis, suvaliste kategooriate C ja E korral, iga funktor $r : C \rightarrow E$ on parempoolne suhteline jäik kaasmorfism unikaalsele morfismile $[]_C : 0 \rightarrow C$, unikaalse funktori $[]_E : 0 \rightarrow E$ suhtes, aga neid morfisme

$r : C \rightarrow E$ on tavaliselt mitu, kusjuures need ei pruugi olla isomorfsed [1].

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \lrcorner_C \nearrow & \dashv & \searrow r \\ 0 & \xrightarrow{\quad \lrcorner_E \quad} & E. \end{array}$$

Märkus 4. Parempoolsed j -suhtelised jäigad kaasmorfismid on unikaalsed isomorfismi täpsuseni kui juur j on tihe, tüüpiliselt see tähendab, et j on funktor $j : C \rightarrow \mathcal{D}$, mille puhul iga sihtkategooria objekt $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ on kanooniliselt esitatav funktori j kujutise objektide kopiirina, antud selgitus ei ole küll täpne kirjeldus virtuaalse topeltkategooria jaoks.³ Kuigi me neid käesolevas töös ei uuri, siiski märgime, et paljud olulised tulemused kehtivad vaid tiheda juurega suhteliste adjunktsioonide korral [1].

³Täpsem tiheduse definitsioon on leitav artiklist [1, definitsioon 3.19].

4 Suhteliste adjunktsioonide komponeerimine

Nüüdseks saame eeltöö tehtuks lugeda ja saame uurida suhteliste adjunktsioonide komponeerimise omadusi. Suhteliste adjunktsioonide komponeerimiseks on kaks peamist viisi, mida on juba varemates uuringutes välja toodud (vt [1]), nendeks on eelkomponeerimine mingi jäiga morfismiga ja teine on seotud kahe kokku kleebitud adjunktsiooniga. Eelnevalt mainitud omadused kehtivad lisaeeldusteta, aga lisaks nende välja toomisele, toome esile ka ühe uue tulemuse, mis on seotud järelkomponeerimisega, kuid see vajab juba lisaeeldust.

Esmalt on meil reegel, mis annab meile võimaluse suhtelist adjunktsiooni eelkomponeerida jäiga morfismiga.

Lause 4. [1, lause 5.29] Olgu $l \dashv_j r$ suhteline adjunktsioon ja $l' : A \rightarrow B$ jäik morfism, nii nagu on vasakpoolsel diagrammil

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \nearrow l & & \searrow r & \\ A & \xrightarrow{l'} B & & \xrightarrow{j} D & \\ & \searrow j & & \nearrow & \end{array} \quad \dashv \quad \begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \nearrow l \circ l' & & \searrow r & \\ A & \xrightarrow{l \circ l'} B & & \xrightarrow{j \circ l'} D & \\ & \searrow j \circ l' & & \nearrow & \end{array}$$

Siis $(l \circ l') \dashv_{j \circ l'} r$.

Tõestus. Kuna meil on antud, et $l \dashv_j r$, siis $C(l, 1) \cong D(j, r)$, tarvis on näidata, et $C(l \circ l', 1) \cong D(j \circ l', r)$. Saame isomorfismide ahela

$$\begin{aligned} C(l \circ l', 1) &\cong B(l', 1) \odot C(l, 1) && \text{(järeldus 1)} \\ &\cong B(l', 1) \odot D(j, r) && (l \dashv_j r) \\ &\cong B(l', 1) \odot D(j, 1) \odot D(1, 1) \odot D(1, r) && \text{(teoreem 1)} \\ &\cong D(j \circ l', 1) \odot D(1, 1) \odot D(1, r) && \text{(järeldus 1)} \\ &\cong D(j \circ l', r). && \text{(teoreem 1)} \end{aligned}$$

Järelikult $C(l \circ l', 1) \cong D(j \circ l', r)$, nii nagu taheti. $\square$

Näide 13. Näites 12 nägime, et jäiga morfismi $J : FinAb \rightarrow AbGrp$ korral

$$Vect_{\mathbb{Q}} \leftarrow FinAb : L \dashv_J V : Vect_{\mathbb{Q}} \rightarrow AbGrp.$$

Vaatleme nüüd funktoori $L' : FinSet \rightarrow FinAb$. Funktor L' seab lõplikule hul-
gale $[n] = \{1, \dots, n\}$ vastavusse lõpliku Abeli rühma $L'([n]) = \bigoplus_{s \in [n]} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
kusjuures $\bigoplus_{s \in [n]} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Näiteks on meil hulga $[2]$ korral $L'(\{1, 2\}) =$
 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Tähistame $L'([n])$ elemente kui ennikuid $(a_s)_{s \in S}$, $a_s \in \mathbb{Z}/2$, siis funk-
tor L' seab morfismile $f : [n] \rightarrow [m]$ vastavusse morfismi $L'(f) : L'([n]) \rightarrow$
 $L'([m])$ nii, et

$$(L'(f)(a))_t = \sum_{s \in f^{-1}(t)} a_s \pmod{2}.$$

See tähendab, et kui me võtame näiteks hulgad

$$[3] = \{1, 2, 3\} \quad \text{ja} \quad [2] = \{1, 2\}$$

ning funktsiooni f , mis on defineeritud järgnevalt

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 1 \quad \text{ja} \quad f(3) = 2,$$

siis kui meil on element $(a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, saame vastavalt kujutada seda
järgneval viisil $L'(f)(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2, a_3)$. Saame nüüd vaadelda diagram-
mi

$$\begin{array}{ccccc} & & Vect_{\mathbb{Q}} & & \\ & \nearrow L & & \searrow V & \\ FinSet & \xrightarrow{L'} & FinAb & \xrightarrow{J} & AbGrp. \end{array}$$

Lause 4 kohaselt on meil nüüd olemas suhteline adjunktsioon $(L \circ L') \dashv_{J \circ L'} V$.

$$\begin{array}{ccccc} & & Vect_{\mathbb{Q}} & & \\ & \nearrow L \circ L' & & \searrow V & \\ FinSet & \xrightarrow{J \circ L'} & AbGrp. & & \end{array}$$

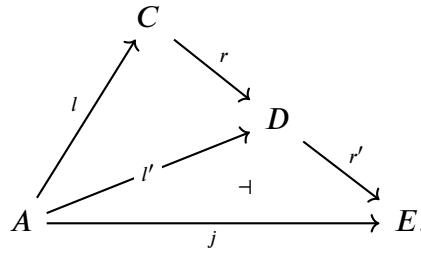
Näeme, et näidata oleks vaja, hulga $[n]$ ja vektorruumi X korral, isomorfisust

$$\text{Vect}_{\mathbb{Q}}((L \circ L')([n]), X) \cong \text{AbGrp}((J \circ L')([n]), V(X)),$$

aga ilmselt kuna $(L \circ L')([n]) = L((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n)$ ja $(J \circ L')([n]) = J((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n)$, siis on tegemist näite 12 konkreetsema juhuga.

Jäiga morfismiga eelkomponeerimisele on meil lisaks kleepimisreegel, mis on analoogne tagasitõmbajate kleepimisega [1].

Lause 5. [1, lause 5.30] Olgu $(l' \dashv_j r')$. Vaatleme järgnevat diagrammi



Vasakpoolne kolmnurk on suhteline adjunksioon $(l \dashv_{l'} r)$ parajasti siis, kui välimine kolmnurk on suhteline adjunksioon $(l \dashv_j (r' \circ r))$.

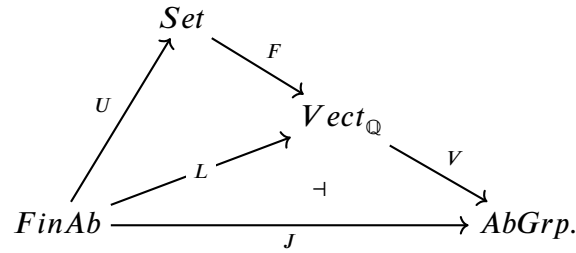
Tõestus. Meil on antud, et $D(l', 1) \cong E(j, r')$, sest $l' \dashv_j r'$. Saame isomorfismide ahela

$$\begin{aligned} D(l', r) &\cong D(l', 1) \odot D(1, 1) \odot D(1, r) && \text{(teoreem 1)} \\ &\cong E(j, r') \odot D(1, 1) \odot D(1, r) && (l' \dashv_j r') \\ &\cong E(j, r') \odot D(1, r) && (D(1, 1) \text{ on ühik}) \\ &\cong E(j, 1) \odot E(1, 1) \odot E(1, r') \odot D(1, r) && \text{(teoreem 1)} \\ &\cong E(j, 1) \odot E(1, 1) \odot E(1, r' \circ r) && \text{(järelkus 1)} \\ &\cong E(j, r' \circ r). && \text{(teoreem 1)} \end{aligned}$$

Oleme saanud, et $D(l', r) \cong E(j, r' \circ r)$. Kui nüüd vasakpoolne kolmnurk on l' -suhteline adjunktsioon, siis saame, et $C(l, 1) \cong D(l', r)$, mis eelneva arutelu põhjal on samaväärne sellega, et $C(l, 1) \cong E(j, r' \circ r)$, mis on täpselt see tingimus, et väline kolmnurk on j -suhteline adjunktsioon. Teisel juhul, kui väline kolmnurk on j -suhteline adjunktsioon, siis on meil, et $C(l, 1) \cong E(j, r' \circ r)$, see on muidugi samaväärne sellega, et $C(l, 1) \cong D(l', r)$, mistõttu vasakpoolne kolmnurk on l' -suhteline adjunktsioon.

□

Näide 14. Vaatleme diagrammi



Kus parempoolne kolmnurk on suhteline adjunktsioon näitest 12 ja vasakpoolne kolmnurk on moodustatud vabast funktorist $F : \text{Set} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}$ ja konstantsest funktorist $U : \text{FinAb} \rightarrow \text{Set}$, tühjale hulgale ehk iga lõpliku Abeli rühma $A \in \text{Ob}(\text{FinAb})$ korral $U(A) = \emptyset$.

Olgu antud lõplik Abeli rühm A ja hulk X . Paneme tähele, et tühjast hulgast suvalisse hulka on ainult üks unikaalne morfism ja järelikult peab kehtima, et $\text{Set}(U(A), X) = \{f\}$, kus $f : \emptyset \rightarrow X$ ning kuna $L(A) = 0_{\text{Vect}_{\mathbb{Q}}}$, siis peab olema, et $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}(L(A), F(X)) = \{0_{0, F(X)}\}$, kus $0_{0, F(X)}$ on unikaalne morfism nullobjektist vabasse vektorruumi $F(X)$. Kuna need on mõlemad üheelemendilised hulgad, siis ilmselt

$$\text{Set}(U(A), X) \cong \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(L(A), F(X)),$$

mille korral loomulikkus on triviaalne, seega $U \dashv_L F$. Nüüd lause 5 ütlebki täpselt seda, et välimine kolmnurk on J -suhteline adjunktsioon ($U \dashv_J (V \circ F)$).

$$\begin{array}{ccc} & \text{Set} & \\ U \nearrow & \dashv & \searrow V \circ F \\ \text{FinAb} & \xrightarrow{J} & \text{AbGrp.} \end{array}$$

Olgu A suvaline lõplik Abeli rühm ja X mingi hulk, saame eelnevat väidet kinnitada vaadeldes isomorfismi

$$\text{Set}(U(A), X) \cong \text{AbGrp}(J(A), (V \circ F)(X)).$$

Ilmselt $\text{Set}(U(A), X) = \{f\}$, kus $f : \emptyset \rightarrow X$ on unikaalne nullfunktsioon, ja $\text{AbGrp}(J(A), (V \circ F)(X)) = \text{AbGrp}(J(A), W)$, kus W on vaba vektorruumi $F(X)$ aluseks olev rühm. Nüüd kasutame uuesti ära näites 12 mainitud asjaolu, et iga homomorfism lõplikust Abeli rühmast vektorruumi X aluseks olevasse rühma W on nullkujutus, järelkult $\text{AbGrp}(J(A), W) = \{0_{J(A), W}\}$, kus 0 on nullkujutus. Jällegi oleme saanud kaks üheelemendilist hulka, mille vahel saab defineerida triviaalse bijektsiooni

$$\Phi_{A,X} : \text{Set}(U(A), X) \rightarrow \text{AbGrp}(J(A), W),$$

mis on defineeritud järgnevalt

$$\Phi_{A,X}(f) = 0_{J(A), W}.$$

Selle loomulikkus A ja X suhtes on triviaalne.

Nagu varem sai mainitud, siis need on kaks klassikalisemat tulemust, mis olid juba varem uuritud. Esitame nüüd ühe uue tulemuse, mis on sarnane eelmise kleepimisreegliga. Selleks kõigepealt toome sisse uue mõiste, mida on meil tarvis kasutada.

Definitsioon 11. [5, lk 5]⁴ Olgu $\mathbb{X}$ virtuaalne taglastus. Ütleme, et jääk morfism $j : A \rightarrow E$ on **Cauchy tihe**, kui leidub esitav 2-morfism kujul

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xleftarrow{E(1,j)} & D & \xleftarrow{E(j,1)} & E \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 E & \xleftarrow{E(1,1)} & & & E.
 \end{array}
 \quad \smile_j (1,1)$$

Eelnevast definitsioonist ei ole raske näha, et kui $\smile_j (1,1)$ on esitav, siis lõtv kompositsioon $E(1,j) \odot E(j,1)$ eksisteerib ja on isomorfne ühikuga $E(1,1)$ ehk

$$E(1,j) \odot E(j,1) \cong E(1,1).$$

Lause 6. Olgu $(l \dashv_l r)$. Vaatleme järgnevat diagrammi

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & \nearrow l & & \searrow r & \\
 A & & & & D \\
 & \nearrow l' & & \searrow r' & \\
 & & E & &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \lambda \\ j \end{array}$$

Olgu r Cauchy tihe. Kui välimine kolmnurk on suhteline adjunktsioon $(l \dashv_j (r' \circ r))$, siis ka parempoolne kolmnurk on suhteline adjunktsioon $(l' \dashv_j r')$.

Tõestus. Eelduste kohaselt on meil adjunktsioonid $(l \dashv_l r)$ ja $(l \dashv_j (r' \circ r))$, millest saame vastavalt kaks isomorfismi $C(l,1) \cong D(l',r)$ ja $C(l,1) \cong E(j,r' \circ r)$. Meil on tarvis näidata, et

$$D(l',1) \cong E(j,r').$$

⁴Viidatud artiklis olev definitsioon ei ole täpselt sama mis on antud siin, sest seal on valitud välja konkreetselt kategooriatest koosnev virtuaalne topeltkateooria.

Märkame, et

$$D(l', r) \cong C(l, 1) \cong E(j, r' \circ r) \implies D(l', r) \cong E(j, r' \circ r).$$

Meil on isomorfismide ahelad

$$\begin{aligned} D(l', r) &\cong D(l', 1) \odot D(1, 1) \odot D(1, r) && \text{(teoreem 1)} \\ &\cong D(l', 1) \odot D(1, 1) \odot D(1, 1) \odot D(1, r) && (D(1, 1) \text{ on ühik}) \\ &\cong D(l', 1) \odot D(1, r) && \text{(teoreem 1)} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} E(j, r' \circ r) &\cong E(j, 1) \odot E(1, 1) \odot E(1, r' \circ r) && \text{(teoreem 1)} \\ &\cong E(j, 1) \odot E(1, 1) \odot E(1, r') \odot D(1, r) && \text{(järelkus 1)} \\ &\cong E(j, r') \odot D(1, r). && \text{(Teoreem 1)} \end{aligned}$$

Kokkuvõttes

$$D(l', 1) \odot D(1, r) \cong E(j, r') \odot D(1, r). \quad (9)$$

See on juba peaaegu õigel kujul, aga veel on tarvis saada lahti ahendist $D(1, r)$.

Selleks kasutame ära asjaolu, et virtuaalses taglastuses eksisteerib ahend $D(r, 1)$,

sest sellisel juhul saame, et

$$\begin{aligned}
D(l', 1) &\cong D(l', 1) \odot D(1, 1) && (D(1, 1) \text{ on ühik}) \\
&\cong D(l', 1) \odot (D(1, r) \odot D(r, 1)) && (r \text{ on Cauchy tihe}) \\
&\cong (D(l', 1) \odot D(1, r)) \odot D(r, 1) && (\text{assot.}) \\
&\cong (E(j, r') \odot D(1, r)) \odot D(r, 1) && (\text{isomorfism 9}) \\
&\cong E(j, r') \odot (D(1, r) \odot D(r, 1)) && (\text{assot.}) \\
&\cong E(j, r') \odot D(1, 1) && (r \text{ on Cauchy tihe}) \\
&\cong E(j, r'). && (D(1, 1) \text{ on ühik})
\end{aligned}$$

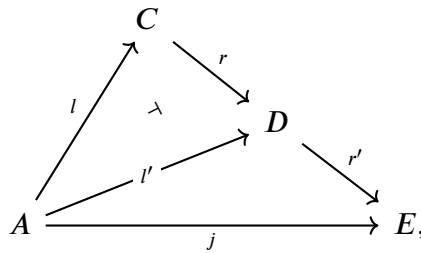
Kokkuvõttes saamegi, et

$$D(l', 1) \cong E(j, r'),$$

nii nagu taheti. □

Lause 5 põhjal ei ole raske näha, et tegelikult saab ka teistpidi kleepida olene-mata sellest kas on teada, et r on Cauchy tihe. See asjaolu annab meile lausega 5 sarnase järelduse.

Järeldus 2. *Vaatleme lauses 6 vaadeldud diagrammi*



kus r on Cauchy tihe. Parempoolne kolmnurk on suhteline adjunktsioon $(l' \dashv_j r')$ parajasti siis, kui välimine kolmnurk on suhteline adjunktsioon $(l \dashv_j (r' \circ r))$.

Tõestus. Vahetu järeldus lausetest 5 ja 6. □

Kasutatud allikad

- [1] N. Arkor ja D. McDermott. „The formal theory of relative monads“. *J. Pure Appl. Algebra* 228.9 (2024), Paper No. 107676, 107. DOI: [10.1016/j.jpaa.2024.107676](https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2024.107676).
- [2] G. S. H. Cruttwell ja M. A. Shulman. „A unified framework for generalized multicategories“. *Theory Appl. Categ.* 24 (2010), No. 21, 580–655.
- [3] S. Eilenberg ja G. M. Kelly. „A generalization of the functorial calculus“. *J. Algebra* 3 (1966), lk. 366–375. DOI: [10.1016/0021-8693\(66\)90006-8](https://doi.org/10.1016/0021-8693(66)90006-8).
- [4] V. Laan ja Reimaa. *Kategooriateooria konspekt*. Loengumaterjal. Tartu ülikool, 2024.
- [5] D. A. Mateo. „Cauchy density“. *Arxiv* (2025). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.07869>. (Vaadatud 05.04.2026).
- [6] F. Ulmer. „Properties of dense and relative adjoint functors“. *J. Algebra* 8 (1968), lk. 77–95. DOI: [10.1016/0021-8693\(68\)90036-7](https://doi.org/10.1016/0021-8693(68)90036-7).

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Taavi Orumaa,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Suhelised adjunktsioonid virtuaalsetes topeltkategooriates", mille juhendaja on Ülo Reimaa, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Taavi Orumaa

27.05.2026

Lisa 1. Sissejuhatus kategooriateooriasse

Käesolevas lisas on toodud välja kõik põhimõisted, mida võiks vajadusel jooksvalt meelde tuletada töö lugemise käigus. Kõik järgnevad mõisted on võetud kursuse Kategooriateooria konspektist (2024) (vt [4]), kuigi need võivad olla töö jaoks sobivamale kujule kohendatud.

Kõigepealt alustame hulgateoreetilistest alustest. On hästi teada, et kõigi hulka-de hulka ei ole olemas, aga kategooriateoorias on tihti käsitluselt kõigi hulkade, rühmade, topoloogiliste ruumide ja teiste matemaatiliste objektide kogumeid. Et vältida seda probleemi vaatleme peale hulkade veel kogumeid, mida kutsume **klassideks**. Iga hulk on klass, kuid mitte vastupidi. Klasse, mis ei ole hulgad nimetatakse pärisklassideks. Teadavasti on olemas kõigi hulkade klass, kõigi rühmade klass jne. Antud klasside jaoks saab moodustada nende ühisosa, ühendi ja otsekorrutise, samuti saab vaadelda kujutusi klasside vahel, ekvivalentsiseoseid klassidel jne [4].

Järgnevas definitsioonis on kasutusel hulga ja klassi mõisted, aga märgime, et kategooriateoorias need suurused võivad tihtipeale olla erinevad.

Definitsioon 1. Kategooria C koosneb järgnevatest andmetest:

1. Klass $\text{Ob}(C)$ mis on kategooria objektid;
2. Iga kahe objekti $A, B \in \text{Ob}(C)$ korral on olemas hulk $C(A, B)$, mis on objektide A ja B vaheliste morfismide hulk;
3. iga kolme objekti $A, B, C \in \text{Ob}(C)$ korral on olemas kujutus

$$C(A, B) \times C(B, C) \rightarrow C(A, C);$$

paari (f, g) kujutist tähistame $g \circ f$ või lühidalt gf ;

4. iga objekti $A \in \text{Ob}(C)$ jaoks on olemas morfism $1_A \in C(A, A)$, mida kutsume ühikmorfismiks.

Lisaks peavad need andmed rahuldama järgmiseid aksioome:

1. kui objektipaaride korral kehtib, et $(A, B) \neq (A', B')$, siis

$$C(A, B) \cap C(A', B') = \emptyset$$

2. Assotsiatiivsuse aksioom: mistahes morfismide $f \in C(A, B)$, $g \in C(B, C)$, $h \in C(C, D)$ korral kehtib, et

$$h(gf) = (hg)f.$$

3. Ühiku aksioom: mistahes morfismide $f \in C(A, B)$, $g \in C(B, C)$ korral kehtivad võrdused $1_B f = f$ ja $g 1_B = g$.

Definitsioon 2. Kategooria on **väike** kui tema objektide klass on hulk, vastasel korral kutsutakse kategooriat **suureks**.

Osutub otstarbekasaks ka defineerida kahe kategooria vahelist morfismi, ehk funktoorit.

Definitsioon 3. Kahe kategooria $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ korral **funktor** $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ koosneb järgnevast:

1. kujutusest $F_0 : \text{Ob}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$;
2. iga objektipaari $A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ korral eksisteerib kujutus

$$F_{A,A'} : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A'))$$

nii, et

1. mistahes morfismide $f \in \mathcal{A}(A, A')$, $g \in \mathcal{A}(A', A'')$ korral

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f);$$

2. iga objekti $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ korral

$$F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

Suvalise kategooria $\mathcal{A}$ korral, funktoori $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ kutsume endofunktoriks.

Märkus 5. Funktooreid vahel ka liigitatakse kaheks, kontravariantseteks ja kovariantseteks. Antud definitsioon on kovariante funktoori.

Definitsioon 4. Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ kategooriad ja $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funktoori, **loomulik teisendus** $\alpha : F \Rightarrow G$ on morfismide pere, mis igale objektile $x \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ paneb vastavusse morfismi $\alpha_x : F(x) \rightarrow G(x)$ nii, et iga morfismi $f : x \rightarrow y$ korral diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \\ \alpha_x \downarrow & & \downarrow \alpha_y \\ G(x) & \xrightarrow{G(f)} & G(y) \end{array}$$

kategoorias $\mathcal{B}$ kommuteerub.

Definitsioon 5. Loomulikku teisendust $\alpha : F \Rightarrow G$, kus $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, nimetatakse **loomulikuks isomorfismiks**, kui $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$ on isomorfism kategoorias $\mathcal{B}$ iga $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ korral. Funktooreid F ja G nimetatakse loomulikult isomorfseteks, kui leidub loomulik isomorfism $F \Rightarrow G$.

Definitsioon 6. Kategooria $\mathcal{C}$ objekti **1** nimetatakse **lõppobjektiks**, kui $\mathcal{C}$ igast objektist C leidub täpselt üks morfism objekti **1**. Kategooria $\mathcal{C}$ objekt **0** on **alg-**

objekt, kui objektist $\mathbf{0}$ leidub täpselt üks morfism C igasse objekti. Objekt on **nullobjekt**, kui ta on korraga nii lõpp- kui algobjekt.

Definitsioon 7. Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategooriad. **Adjunktsioon** kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ on kolmik $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, kus $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ on funktorid ja $\varphi = (\varphi_{A,B})_{(A,B) \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \times \text{Ob}(\mathcal{B})}$ on bijektiivsete kujutiste

$$\varphi_{A,B} : \mathcal{B}(F(A), B) \rightarrow \mathcal{A}(A, G(B))$$

süsteem, mis on loomulik A ja B suhtes, s.t, et mistahes morfismide $k : A' \rightarrow A$ ja $h : B \rightarrow B'$ korral diagrammid

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ \downarrow \scriptstyle _{\circ F(k)} & & \downarrow \scriptstyle _{\circ k} \\ \mathcal{B}(F(A'), B) & \xrightarrow{\varphi_{A',B}} & \mathcal{A}(A', G(B)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ \downarrow \scriptstyle h \circ _ & & \downarrow \scriptstyle G(h) \circ _ \\ \mathcal{B}(F(A), B') & \xrightarrow{\varphi_{A,B'}} & \mathcal{A}(A, G(B')) \end{array}$$

kommuteeruvad.

Kui $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on adjunktsioon, siis ütleme, et F on G **vasakpoolne kaasfunktor** ja G on F **parempoolne kaasfunktor** ning kirjutame $F \dashv G$.

Lisa 2. Teoreem 1 faktoriseeringu ja unikaalsuse kontroll

Varem sai väidetud, et [Teoreemis 1](#) olev kompositsioon

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \leftarrow \text{---} & D & \xlongequal{\quad} & D & \xleftarrow{p(f,g)} & A \xlongequal{\quad} A \leftarrow \text{---} \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & = & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \cdot & \leftarrow \text{---} & D & \xleftarrow{D(1,1)} & D & \xleftarrow{p(f,g)} & A & \xleftarrow{A(1,1)} & A & \leftarrow \text{---} \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & \text{cart} & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \cdot & \leftarrow \text{---} & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A & \leftarrow \text{---} \cdot \\
 \downarrow h & & & & & \beta & & & & \downarrow k \\
 \cdot & \leftarrow \text{---} & & & & & & & & \cdot \\
 & & & & & q & & & &
 \end{array} \quad (10)$$

on unikaalne faktoriseering mingile 2-morfismile

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \leftarrow \text{---} & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A & \leftarrow \text{---} \cdot \\
 \downarrow h & & & & & \beta & & & & \downarrow k \\
 \cdot & \leftarrow \text{---} & & & & & & & & \cdot \\
 & & & & & q & & & &
 \end{array} \quad (11)$$

läbi 2-morfismi

$$\begin{array}{ccccccc}
 D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A \\
 \parallel & & & \alpha & & & \parallel \\
 D & \xleftarrow{p(f,g)} & & & & & A.
 \end{array}$$

Enne kontrolli määrgime, et kasutame diagrammi lihtsustamiseks alternatiivset

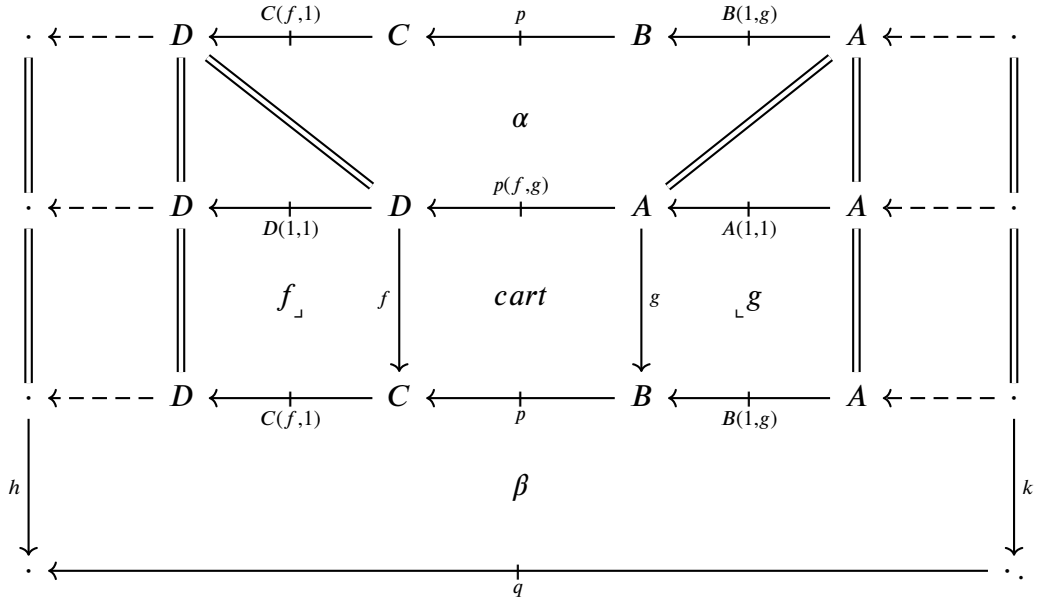
tähistust 0-aarsele 2-morfismile

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xlongequal{\quad} & D \\
 \parallel & & \parallel \\
 D & \xleftarrow{D(1,1)} & D
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & D & \\
 \parallel & & \parallel \\
 D & \xleftarrow{D(1,1)} & D
 \end{array}
 .$$

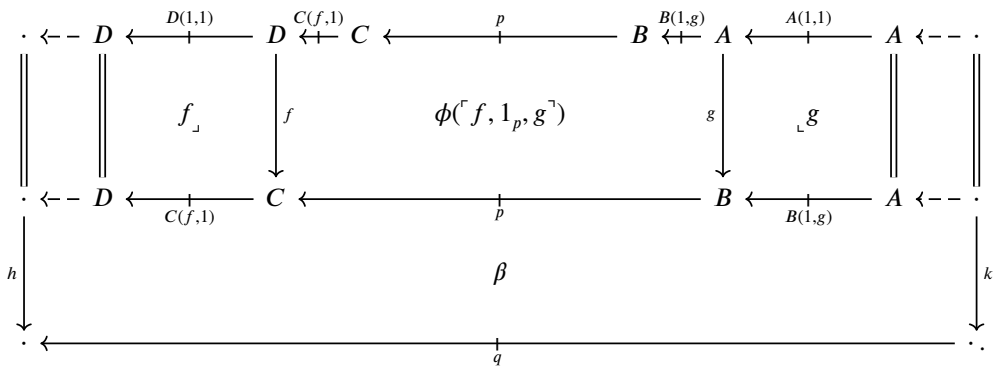
Kõigepealt kontrollime samm-sammult, et tegu on ikkagist fakotriseeinguga. Selle nägemiseks võtame jälle esile kompositsiooni 10 ja komponeerime seda ülevalt 2-morfismiga α , saame uue diagrammi

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \leftarrow \cdots & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A & \leftarrow \cdots & \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & & & & & \parallel & & \parallel \\
 & & & \alpha & & & & & & & \\
 \cdot & \leftarrow \cdots & D & \xleftarrow{p(f,g)} & A & \leftarrow \cdots & \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \cdot & \leftarrow \cdots & D & \xleftarrow{D(1,1)} & D & \xleftarrow{p(f,g)} & A & \xleftarrow{A(1,1)} & A & \leftarrow \cdots & \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & f_{\lrcorner} & f & \text{cart} & g & \lrcorner g & & & & \\
 \cdot & \leftarrow \cdots & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B & \xleftarrow{B(1,g)} & A & \leftarrow \cdots & \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 h \downarrow & & & \beta & & & & & & & k \downarrow \\
 \cdot & \leftarrow \cdots & & & & & & & & & \cdot \\
 & & & q & & & & & & &
 \end{array}$$

Komponeerime raamid α ja $1_{p(f,g)}$, tuletame meelde, et $1_{p(f,g)}(\alpha) = \alpha$



Kasutame varem α defineerimiseks kasutatud võrdust ning taandame ülemised ühikruudud, et saada



Selleks, et veel taandada lisame ühikuid järgneval viisil

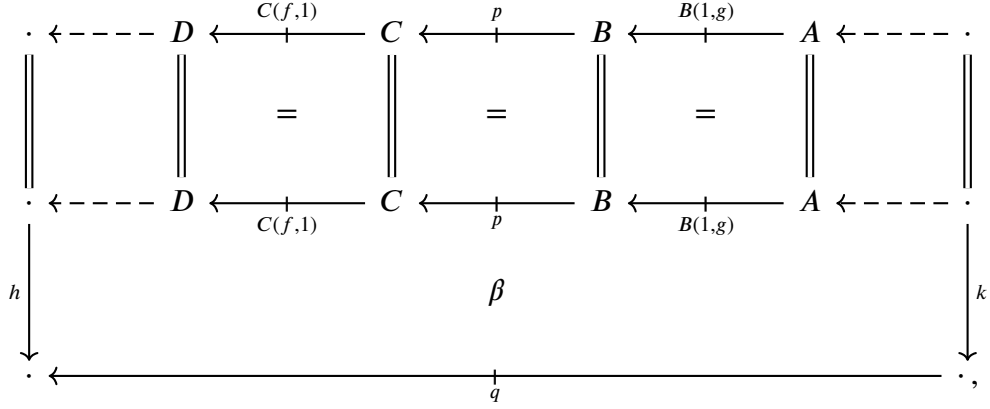
$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \leftarrow & D & \xleftarrow{D(1,1)} & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C \xleftarrow{p} B \xleftarrow{B(1,g)} A \xleftarrow{A(1,1)} A \leftarrow \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & f_{\lrcorner} & & \downarrow f & & \lrcorner f & & 1_p & & g^{\lrcorner} & & g & & \lrcorner g & & \\
 \cdot & \leftarrow & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{C(1,1)} & C \xleftarrow{p} B \xleftarrow{B(1,1)} B \xleftarrow{B(1,g)} A \leftarrow \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \cdot & \leftarrow & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B \xleftarrow{B(1,g)} & A \leftarrow \cdot \\
 \downarrow h & & & & & & \beta & & & & & & \downarrow k \\
 \cdot & \leftarrow & & & & & q & & & & & & \cdot
 \end{array}$$

Need on täpselt võrrandid 8, mida saame taandada järgnevalt

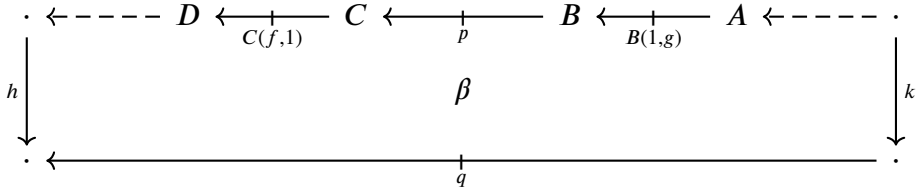
$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \leftarrow \cdots & D & \xleftarrow{D(1,1)} & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C \xleftarrow{p} B \xleftarrow{B(1,g)} A \xleftarrow{A(1,1)} A \leftarrow \cdots & \cdot \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & & & 1_p & & & & & & \\
 \cdot & \leftarrow \cdots & D & \xleftarrow{C(f,1)} & C & \xleftarrow{p} & B \xleftarrow{B(1,g)} & A \leftarrow \cdots & \cdot \\
 \downarrow h & & & & & & \beta & & & & \downarrow k \\
 \cdot & \leftarrow & & & & & q & & & & \cdot
 \end{array}$$

Nüüd saame jätta ära lõdvad ühikud, et saada ühik 2-morfismidest koosneva

diagrammi



aga see on täpselt see mida tahtsime, sest nüüd saame ühik 2-morfismid ära jätta, et saada kätte 2-morfism β

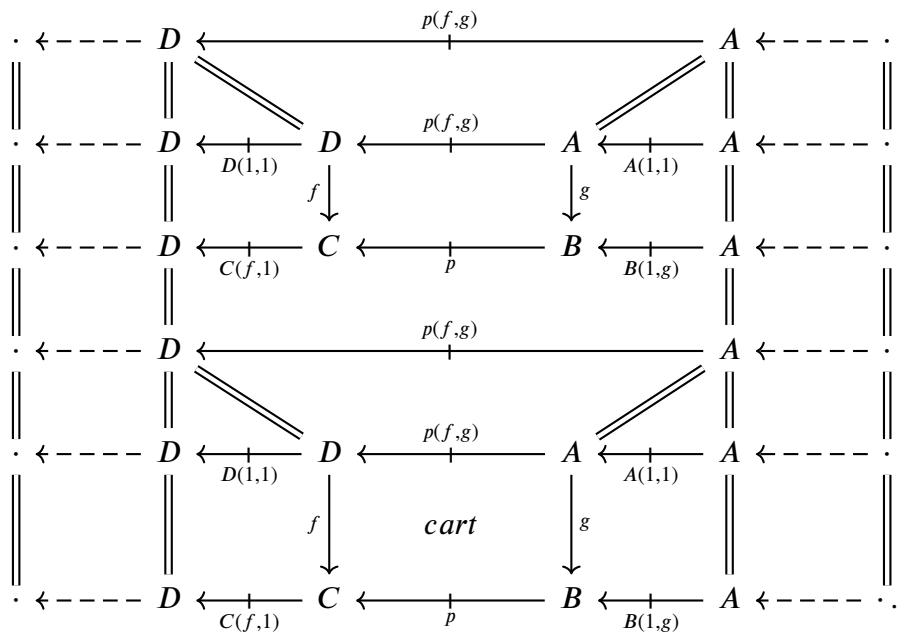


Kuna komponeerimisel α -ga saime tagasi 2-morfismi 11, siis on tõesti tegemist faktoriseerimisega.

Veel oleks vajalik näidata, et see faktoriseerimine on unikaalne. Selleks eeldame, et meil on mingi teine faktoriseering

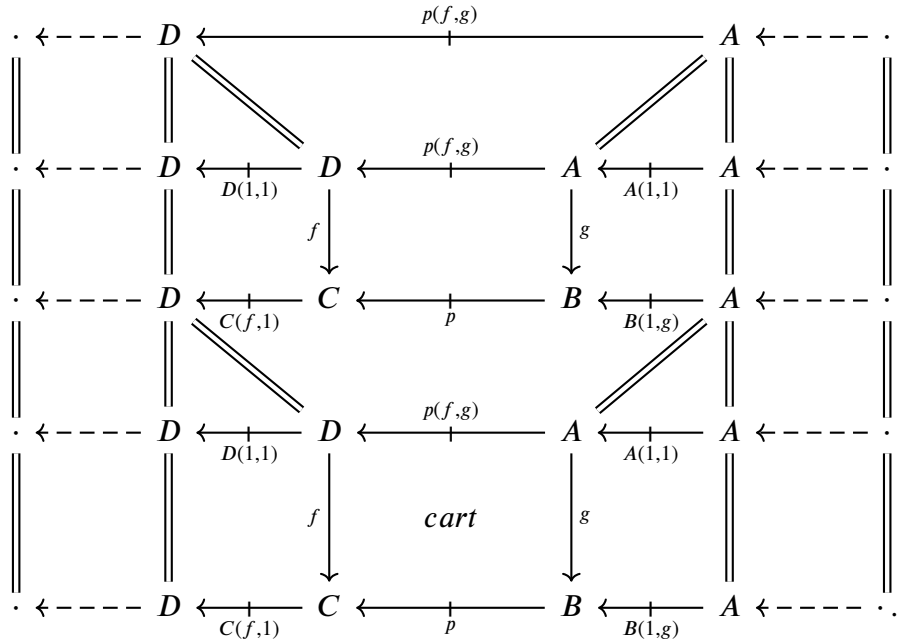
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \cdot \leftarrow D \xleftarrow{C(f,1)} C \xleftarrow{p} B \xleftarrow{B(1,g)} A \leftarrow \cdot \\
 \parallel \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \quad \parallel \\
 \cdot \leftarrow D \xleftarrow{p(f,g)} A \leftarrow \cdot \\
 \parallel \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \quad \parallel \\
 \cdot \leftarrow D \xleftarrow{D(1,1)} D \xleftarrow{p(f,g)} A \xleftarrow{A(1,1)} A \leftarrow \cdot \\
 \parallel \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \quad \parallel \\
 \cdot \leftarrow D \xleftarrow{C(f,1)} C \xleftarrow{p} B \xleftarrow{B(1,g)} A \leftarrow \cdot
 \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{\alpha}
 \begin{array}{c}
 \cdot \leftarrow D \xleftarrow{C(f,1)} C \xleftarrow{p} B \xleftarrow{B(1,g)} A \leftarrow \cdot \\
 \downarrow h \quad \quad \quad \downarrow k \\
 \cdot \leftarrow \quad \quad \quad \cdot
 \end{array}
 \quad (12)$$

Meie ülesanne on näidata, et seda kompositsiooni faktoriseerides saame kätte võrduse 12 vasaku poole ilma ruuduta α , sest sellisel juhul saame, et see vasakul poolel olev fakotriseering on sama, mis fakotriseering 10. Võtame siis võrduse 12 vasaku poole ja paneme selle 2-morfismi 11 asemele kompositsioonis 10. See annab meile järgneva diagrammi

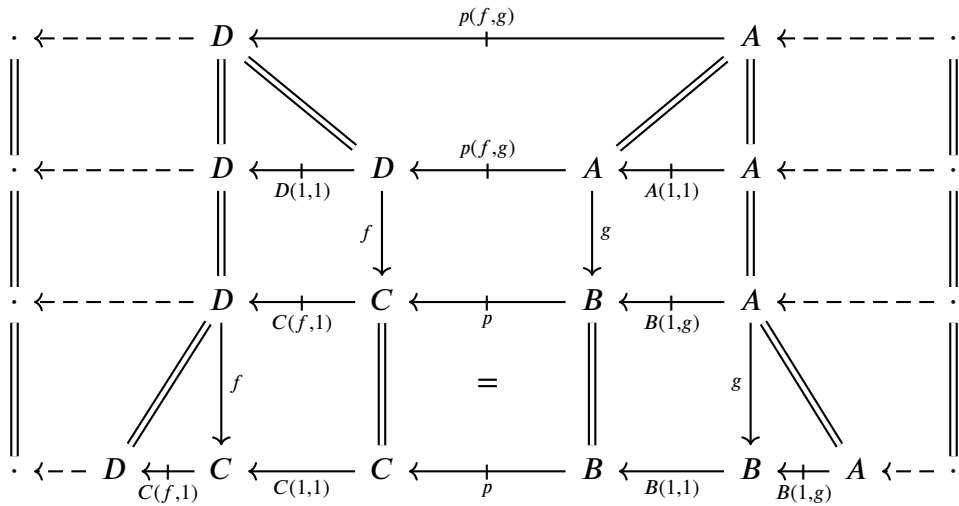


Märkame, et meil on ahendav ruut, mida saame universaalomaduse kohaselt

kokku tõmmata, see annab uue kompositsiooni

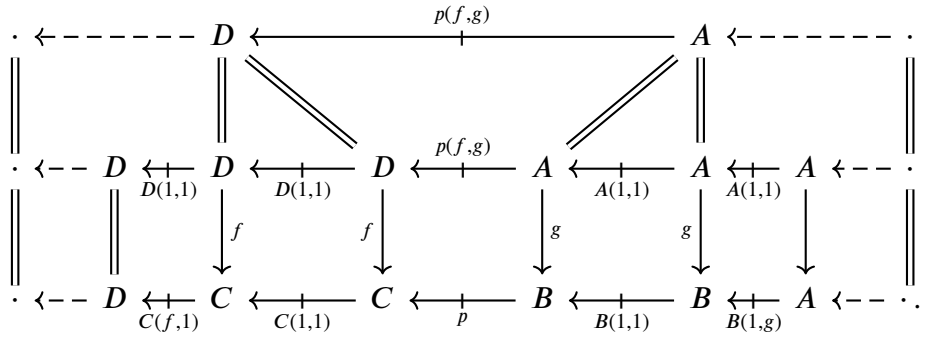


Siin on nüüd jällegi ahendav ruut mida saame kokku tõmmata, lisame veel alla lisaks lõdvad ühikud $C(1, 1)$ ja $B(1, 1)$, kokkuvõttes saame kompositsiooni

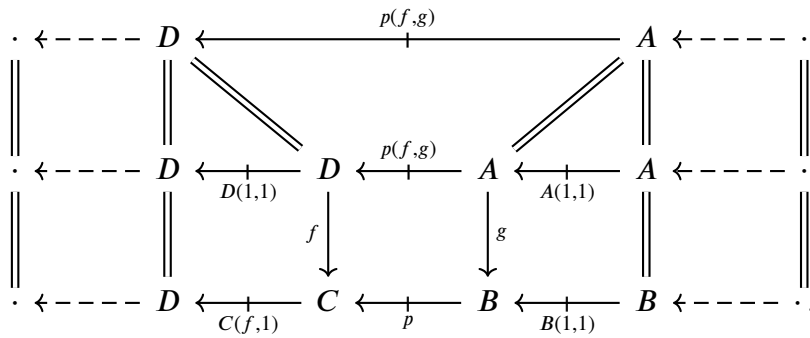


Nüüd saame kasutada võrrandeid 5, et taandada vasakult ja paremalt, selle tu-

lemusena saame kompositsiooni



Jättes ära lõdvdad ühikud saame kompositsiooni



See, aga on täpselt võrduse 12 vasakul poolel olev kompositsioon ilma ruuduta α . Järelikult on faktoriseering 10 unikaalne ja seega α on esitav ruut, nii nagu tahtsime.