Plan eometrie

hulen

Ferd. B ſthorn's ung.

Als Lehrhilfsmittel für die
Schulen des dorpater Lehrbezirks
zugelassen durch Verfügung
des Curatorischen Conseils
vom 24 März 1880.

Repetitorium

der

Planimetrie und Stereometrie

zum Gebrauch

für Gymnasien und Kreisschulen

bearbeitet

von

O. E. Schmidt,

Inspector der Kreisschule zu Bauske.

Mitau, 1880.

Ferd. Besthorn's Buchhandlung.

Von der Censur erlaubt. Riga, den 25. October 1879.

Vorrede.

Die Ansicht, daß jeder Lehrer der Mathematik beim Unterrichte derselben meist seine eigene Methode befolgt; ferner die Ueberzeugung, daß bei gehöriger Anleitung der Schüler Zeichnung und Beweis zu den Lehrsätzen selbst auffinden könne, veranlaßte mich bei der im Nachstehenden angestellten Sammlung von Lehrsätzen von Figur und Beweis abzusehen. Indem ich in weiterer Linie von dem Gesichtspunkte ausging, es komme schließlich darauf an, möglichst umfassend die Eigenschaften der in der Geometrie abgehandelten Figuren und Körper kennen zu lernen, gruppirte ich die Sätze nach der im Register angeführten Weise.

Allen Schülern, welche am Schlusse ihres Real- oder Gymnasialcursus stehen; ferner allen Freunden der Geometrie dürfte die nachfolgende Sammlung vielleicht als geeignetes Repetitorium, theilweise auch als Formelbuch dienen. Möge es von Nutzen sein und Wohlwollen auf seinem Wege finden.

Bauske, den 31. October 1879.

E. S.

Inhalt.

A.

Andeutungen zur geometrischen Propädeutik.

1) Die Arten der geometrischen Größen.

2) Gerade. Strecke. Strahl.

3) Lage mehrerer Geraden zu einander. Positive uud negative Richtung. Horizontale und Vertikale. Convergenz und Divergenz zweier Geraden. Parallelen. Strahlenbüschel.

4) Die krumme Linie. Richtungsänderung. Stetigkeit. Continuität und Discontinuität.

5) Entstehung der Winkel. Vollwinkel, gestreckter und rechter Winkel. Concave, convexe, spitze und stumpfe Winkel. Anstoßende und Nebenwinkel. Correspondirende, Wechselwinkel, Gegenwinkel und Scheitelwinkel.

6) Bewegung eines Punkts mit Aenderung der Richtung und Zurückkehr zum Ausgang. Die Figur. Geradlinige und krummlinige Figur. Perimeter. Diagonalen und Transversalen.

7) Eintheilung der geradlinigen Figuren. Arten der Dreiecke und Vierecke. Vielecke und Vielseite. Reguläre und irreguläre Polygone. Vielecke mit concaven und convexen Polygonwinkeln. Isoperimetrie der Polygone.

8) Der Kreis und die Gerade. Halbmesser und Durchmesser. Sehne, Tangente und Sekante. Lage zweier Kreise zu einander. Concentricität und Excentricität der Kreise. Centrale. Chordale. Symmetralen und Polaren.

9) Der Kreis und die Polygone. Reguläre eingeschriebene und umschriebene Polygone. Sehnen- und Tangentenpolygone. Polygone, welche gleichzeitig Sehnen- und Tangentenpolygone sind. Sternförmige Polygone.

10) Die Curven. Beschreibung der Kegelschnitte. Leitstrahlen, Durchmesser, Sehnen, Tangenten, Normalen, Sekanten und Asymptoten. Krümmungskreis und Krümmungsradius.

11) Besondere Punkte geradliniger und krnmmliniger Figuren. Durchschnittspunkte von Geraden und Curven. Durchschnittspunkte

von Transversalen geradliniger Figuren. Mittelpunkte der Figuren. Mittelpunkt der mittleren Entfernungen eines Systems von Punkten. Schwerpunkte. Brennpunkte. Berührungspunkt. Symmetralpunkte. Pole. Culminations-, Wende- und Rückkehrpunkte.

12) Die allgemeinen Grundsätze.

13) Die Forderungssätze.

14) Die Lehrsätze. Voraussetzung und Behauptung.

15) Der indirecte und directe Beweis.

16) Die geometrische Aufgabe. Constructionen. Synthese und Analyse.

17) Construction von Snmmen, Differenzen, Quadraten und Produkten von Strecken.

18) Geometrische Deutung algebraïscher Ausdrücke.

19) Vergleichung der Figuren. Vergleichung in Bezug auf gleiche Gestalt und Größe (Congruenz); Gleichheit der Gestalt (Aehnlichkeit); gleiche Größe ohne Rücksicht auf Gestalt (Flächeninhalt).

20) Die Maßsysteme. Eintheilung und Anwendung der Maßstäbe.

21) Die Winkelmessung. Transporteur. Instrumente zur Messung von Vertical- und Horizontalwinkeln.

22) Nivellir- und Feldmeßkunst.

23) Geodäsie und Markscheidekunst.

B.

Einleitende Lehrsätze.

24) Alle rechten Winkel sind einander gleich.

25) Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 2 Rechte. Scheitelwinkel sind einander gleich.

26) Sind zwei Winkel einander gleich, so sind es auch ihre Nebenwinkel.

27) Sind zwei Winkel einander gleich, so sind es auch ihre Complemente.

28) Wenn 2 Gerade mit einer dritten Geraden Winkel bilden, die gleich oder um 180^0 verschieden sind, so schneiden sie sich nicht.

29) Wenn zwei Parallelen von einer Geraden durchschnitten werden, so sind 1) die Wechselwinkel gleich; 2) die correspondirenden gleich; 3) beträgt die Summe zweier Nebenwinkel 2 Rechte.

30) Wenn 2 Gerade von einer dritten durchschnitten werden und es sind 1) die Wechselwinkel gleich; 2) die correspondirenden gleich; wenn 3) die Summe zweier Nebenwinkel 2 Rechte beträgt, so sind die erstern 2 Geraden einander parallel.

31) Zwei Gerade siud parallel, wenn sie auf einer dritten Geraden senkrecht stehen.

32) Zwei Winkel sind gleich, wenn ihre Schenkel paarweise einander parallel und ihre Oeffnungen nach einer Seite liegen.

33) Zwei Geraden, welche einer dritten parallel sind, sind einander parallel.

34) Eine Gerade, welche auf einer von 2 Parallelen senkrecht steht, ist auch auf der zweiten Parallelen senkrecht.

35) Von einem Punkt innerhalb einer Geraden kann nur eine Senkrechte hinauf errichtet werden.

36) Von einem Punkte außerhalb einer Geraden kann nur eine Senkrechte auf die Gerade herabgefällt werden.

C.

Das Dreieck.

37) Der Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe seiner beiden innern Gegenwinkel.

38) Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt immer 2 Rechte.

39) Sind in 2 Dreiecken 2 Winkel einzeln gleich, so ist auch der dritte Winkel des einen Dreiecks dem dritten Winkel des andern gleich.

40) Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.

41) Der größern Seite eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber.

42) Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber.

43) Dem größern Winkel liegt die größere Seite gegenüber.

44) Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die Summe, größer als die Differenz der beiden übrigen Seiten.

45) Wenn 2 Dreiecke 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel der Reihe nach gleich haben, so sind sie congruent (I).

46) Wenn in 2 Dreiecken eine Seite und die derselben anliegenden Winkel einzeln gleich sind, sind die Dreiecke congruent (II).

47) Wenn in 2 Dreiecken eine Seite und 2 übereinstimmend liegende Winkel (ein anliegender und ein Gegenwinkel) einzeln gleich sind, so sind die Dreiecke congruent (III).

48) Wenn in 2 Dreiecken alle 3 Seiten der Reihe nach gleich sind, so sind die Dreiecke congruent (IV).

49) Wenn in 2 Dreiecken 2 Seiten und die Gegenwinkel der größern einzeln gleich sind, so sind die Dreiecke einander congruent.

50) Wenn in 2 Dreiecken 2 Seiten und die Gegenwinkel der kleinern einzeln gleich sind, so bleibt es unentschieden, ob die Dreiecke congruent sind oder nicht.

51) Sind in 2 Dreiecken 2 Seiten einzeln gleich, der von denselben eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck größer ist als in dem andern, so hat der größere Winkel auch die größere Gegenseite und die Dreiecke sind nicht congruent.

52) Wenn in 2 Dreiecken 2 Seiten einander gleich sind, die dritte Seite aber ungleich, so hat die größere Seite auch den größern Gegenwinkel und die Dreicke sind nicht congruent.

53) Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke eine Kathete unverändert bleibt, und ein anliegender Winkel wächst, so wächst sowohl die andere Cathete, als auch die Hypothenuse.

54) Wenn die Hypothenuse unverändert bleibt und ein anliegender Winkel wächst, so wächst die ihm gegenüberliegende Cathete und die andere Cathete nimmt ab.

55) Im gleichschenkligen Dreieck ist die Halbirende des Winkels an der Spitze senkrecht zur Basis und halbirt die Senkrechte aus der Spitze auf die Basis eben die Basis.

56) Theilt man den einen Schenkel eines Winkels iu n gleiche Theile und zieht aus den Theilpunkten parallele Linien zum andern Schenkel, so wird jener ebenfalls in n gleiche Theile getheilt.

57) Schneidet man 2 Seiten eines Dreiecks parallel mit der dritten Seite durch eine Gerade, so stehen die obern und untern Abschnitte der durchschnittenen Seiten in demselben Verhältnisse wie die ganzen Seiten.

58) Wenn eine Gerade 2 Seiten eines Dreiecks proportionirt schneidet, so ist sie der dritten Seite parallel.

59) Zwei Geraden werden durch Parallelen proportionirt geschnitten.

60) Wenn in 2 Dreiecken zwei Winkel einzeln gleich sind, so sind die gleichliegenden Seiten proportionirt, demnach die Dreiecke ähnlich. (I)

61) Wenn in 2 Dreiecken die gleichliegenden Seiten proportionirt sind, so sind die Winkel einzeln gleich, demnach die Dreiecke ähnlich. (II)

62) Wenn in 2 Dreiecken ein Winkel gleich und die denselben einschließenden Seiten proportionirt sind, sind auch die andern Winkel einzeln gleich und die Dreiecke ähnlich. (III)

63) Wenn in 2 Dreiecken ein Winkel gleich, ferner eine anliegende und eine Gegenseite in dem einen Dreieck dasselbe Verhältniß haben, wie die gleichliegenden Seiten des andern Dreiecks, so sind die Dreiecke ähnlich. (IV)

64) Sind die Seiten eines Dreiecks parallel den Seiten eines zweiten, so sind beide Dreiecke ähnlich.

65) Wenn die Seiten eines Dreiecks auf den Seiten eines zweiten Dreiecks senkrecht stehen, so sind die Dreiecke ähnlich.

66) In ähnlichen Dreiecken liegen den gleichliegenden Seiten gleiche Winkel gegenüber.

67) Eine Gerade CD, welche einen Winkel C im Dreieck ABC halbirt, theilt die Gegenseite AB in 2 Stücke AD und BD, die sich ebenso erhalten, wie die 2 übrigen Seiten des Dreiecks AC und CB, an denen sie liegen.

68) Eine Gerade, welche die Basis eines Dreiecks nach demselben Verhältnisse (67) theilt, halbirt den Winkel an der Spitze.

69) Das Höhenperpendikel zerschneidet ein rechtwinkliges Dreieck in 2 Dreiecke, welche unter sich und dem ganzen Dreieck ähnlich sind.

70) Werden in zwei ähnlichen Dreiecken ABC und abc von den Ecken C und c Senkrechte CD und cd auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt, so sind die dadurch entstehenden Dreiecke ACD und acd, ferner auch BCD und bcd einander ähnlich.

71) In 2 ähnlichen Dreiecken verhalten sich gleichliegende Grundlinien, wie die den gleichliegenden Grundlinien zugehörigen Höhen.

71) Die 3 Seiten eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Höhenperdendikel.

72) In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkte der Hypothenuse gleich der Hälfte der letztern.

73) In jedem rechtwinkligen Dreiecke zerschneidet die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkte der Hypothenuse das rechtwinklige Dreieck in 2 gleichschenklige.

74) Die Distanzen eines beliebigen Punktes im gleichseitigen Dreieck von dessen Seiten sind zusammen gleich der Höhe des Dreiecks.

75) Wenn man von einer Ecke eines Dreiecks zwei Linien zur Basis zieht, von denen die eine senkrecht, die andere nach dem Mittelpunkte der Basis geht, so ist der von beiden Geraden eingeschlossene Winkel die Hälfte der Differenz der beiden Winkel an der Basis.

76) Wenn man von einem Endpunkte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sowohl zur Gegenseite als auch deren Verlängerung je eine Gerade zieht, so daß die Distanz ihrer Endpunkte der erstern Linie gleich ist, so ist der Winkel, den der andere Schenkel des Dreiecks mit der erstern Geraden bildet, das Doppelte desjenigen, den die Basis mit der zweiten Geraden bildet.

77) Wenn man von einem Endpunkte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks an den gegenüberliegenden Schenkel eine Gerade zieht, welche ebenso lang ist, wie dieser Schenkel, so schließt diese Linie mit der Verlängerung der Basis einen Winkel ein, der dreimal so groß ist, als einer der gleichen Dreieckswinkel.

78) Wenn man aus dem einen Endpunkte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ein Loth auf die Gegenseite fällt, so schneidet das von der Spitze auf die Basis gefällte Loth davon ein Stück ab, welches sich zum Schenkel verhält, wie die halbe Basis zur zugehörigen Höhe.

79) Wenn man von einem Punkte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Schenkel Lothe fällt, so ist die Summe derselben stets gleich der zu einem Schenkel gehörigen Höhe.

80) Wenn man von einem beliebigen Punkte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks nach den Schenkeln 2 Linien zieht, die mit der Basis gleiche Winkel bilden und die Durchschnittspunkte auf den Schenkeln mit den gegenüberliegenden Winkelspitzen verbindet, so sind die Dreiecke, welche die erstgezogenen Linien, die jetzigen Verbindungslinien und die Abschnitte auf der Basis einschließen, von gleicher Größe.

81) Wenn man von den Endpunkten der Basis eines Dreiecks auf die Halbirungslinie Lothe fällt, so wird das zwischen den Fußpunkten liegende Stück der Halbirungslinie durch das auf sie vom Mittelpunkte der Basis gefällte Loth halbirt.

82) Wenn von einem Endpunkte der Basis eines Dreiecks eine Gerade parallel der Gegenseite und von einem Punkte der Parallelen 2 beliebige Geraden nach den beiden andern Seiten, beziehlich deren Verlängerungen gezogen worden, so haben die beiden letztern Geraden dasselbe Verhältniß zu einander, welches die mit ihnen parallel durch die beiden andern Winkelspitzen gezogenen und durch dieselben Seiten begrenzten Geraden haben.

83) Wenn man den Durchschnittspunkt der Halbirungslinien zweier Außenwinkel eines Dreiecks mit der gegenüberliegenden Winkelspitze des Dreiecks verbindet, so wird der dritte Winkel durch dieselbe halbirt.

84) Wenn man in einem Dreiecke die Basis so weit verlängert, daß das Verhältniß der ganzen verlängerten Linie zur Verlängerung sich ebenso verhält wie die Quadrate der beiden Dreiecksseiten, so ist die Verbindungslinie der Spitze mit dem Endpunkte der Verlängerung das geometrische Mittel zwischen der verlängerten Basis und der Verlängerung.

85) Wenn man von eiuem Punkte innerhalb eines Dreiecks Perpendikel auf 2 Seiten errichtet, so verhält sich der Abstand des angenommenen Punktes vom Durchschnittspunkte dieser Seiten zum Abstande des Fußpunkts beider Perpendikel, wie eine der Seiten zu der zur andern gehörigen Höhe.

86) Wenn man die 3 Winkel eines Dreiecks halbirt und eine der winkelhalbirenden Transversalen über den gemeinsamen Durchschnittspunkt hinaus verlängert bis zur Gegenseite, so ist der Winkel, den diese Verlängerung mit einer der beiden anderen Winkel halbirenden bildet, gleich dem Winkel, welchen die dritte Halbirende mit dem vom gemeinsamen Durchschnittspunkt auf die erwähnte Dreiecksseite gefällten Perpendikel bildet.

87) Wenn man von den Ecken eines Dreiecks nach den Gegenseiten, beziehlich deren Verlängerungen Linien zieht, die unter sich und einer gegebenen Geraden gleich sind, ferner durch einen Punkt innerhalb des Dreiecks Parallelen mit jenen Geraden bis zu den Dreiecksseiten zieht, so ist die Summe dieser Parallelen gleich der gegebenen Geraden.

88) Wenn man eine Seite eines Dreiecks in beliebig 2 Theile theilt, vom Theilungspunkte aus 2 Linien parallel zieht mit den beiden übrigen Seiten und deren Durchschnittspunkte mit den ent-

gegengesetzten Seiten verbindet, so wird jede Gerade, die man mit einer der beiden ersten parallel zieht und die von den Dreiecksseiten begrenzt wird, von der andern Parallelen und der Verbindungslinie so geschnitten, daß die änßern Abschnitte dasselbe Verhältniß zu einander haben, als die Stücke der zuerst getheilten Linie.

89) Wenn über der Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks als Basis ein zweites Dreieck construirt ist, welches die andere Kathete zur Höhe hat und man zieht durch einen Punkt, in welchem die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks die Halbirungslinie des R schneidet, eine Parallele mit der Basis, so ist das zwischen den andern Seiten des zweiten Dreiecks liegende Stück derselben die Seite des in. dasselbe eingeschriebenen Quadrats.

90) Wenn man durch einen Punkt innerhalb eines Dreiecks Parallelen mit den Seiten zieht bis zum Umfange, so ist das Produkt aus 3 alternirenden Segmenten dieser Parallelen gleich dem Produkte aus den 3 übrigen.

91) Wenn man über den Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks Quadrate beschreibt und jeden Endpunkt der Hypothenuse mit den gegenüberliegenden Winkelspitzen des nicht an diesem Endpunkte liegenden Quadrats verbindet, so schneiden sich diese beiden Verbindungslinien auf der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks.

92) Wenn man über den 3 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks Quadrate beschreibt und die aufeinander folgenden Winkelspitzen verbindet, so sind die dadurch entstandenen 3 äußern Dreiecke unter sich und dem Urdreiecke gleich.

93) Wenn man über den 3 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks Quadrate beschreibt nnd die auf der Hypothenuse senkrechten Seiten des Hypothenusenquadrats verlängert bis zu den Seiten (bez. deren Verlängerungen) der Cathetenquadrate, welche den Catheten gegeuüberliegen, so werden hierdurch Dreiecke abgeschnitten, welche dem Urdreiecke congruent sind.

94) Wenn man von den beiden äußersten Winkelspitzen der über den Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks beschriebenen Quadrate Lothe fällt auf die Verlängerungen der Hypothenuse, so schneiden diese von denselben gleiche Stücke ab; die Lothe aber selbst sind zusammen gleich der Hypothenuse.

95) Wenn man über den Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks Quadrate beschreibt und die Schenkel der spitzen Winkel mit den

gegenüberliegenden Winkelspitzen der Quadrate verbindet, so schneiden diese Linien von den Catheten gleiche Stücke ab und zwar ist jedes derselben das geometrische Mittel zwischen den übrigen Stücken.

96) Wenn man den Außenwinkel eines Dreiecks halbirt, so ist das Quadrat der Halbirungslinie gleich dem Unterschied der Rechtecke aus den Segmenten der Basis und aus den beiden andern Seiten.

97) Zieht man in einem Dreiecke eine winkelhalbirende Trausversale, so theilt sie die Gegenseite in 2 Abschnitte, die sich wie die beiden einschließenden Seiten des Dreiecks verhalten.

98) Die Umkehrung von 97?

99) Halbirt man den Winkel eines Dreiecks und den zugehörigen Außenwinkel, so sind die Durchschnittspunkte der winkelhalbirenden Transversalen nebst den beiden andern Eckpunkten 4 harmonische Punkte.

100) Wenn durch die 3 Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen eine beliebige Transversale gezogen wird, so theilt dieselbe jede Dreieckseite in 2 Abschnitte und es ist das Produkt aus 3 solcher Abschnitte, welche keinen gemeinsamen Endpunkt haben, dem Producte aus den 3 übrigen Abschnitten gleich. (Theorem des Menelaus.)

101) Vier vou einem Punkte ausgehende Geraden schneiden jede durch dieselben gezogene Transversale so, daß jedes der 3 möglichen Doppelverhältnisse, die sich aus den Abständen je zweier Durchschnittspunkte von den beiden übrigen bilden lassen, einen unveränderlichen Werth hat. (Pappus, Briechon.)

102) Sind die 4 Durchschnitte der Transversale mit den Geraden harmonische Punkte, so schneidet jede andere Gerade dieselben Strahlen auch in 4 harmonischen Punkten.

103) Bei harmonischen Punkten hat eines der 3 möglichen Doppelverhältnisse (101) den Werth Eins. Man nennt in diesem Falle die Strahlen harmonische.

104) Wenn man die Spitze eines Dreiecks mit dem Halbirungspunkte der Basis verbindet und durch einen Endpunkt der letztern eine Transversale zieht, welche die erwähnte Verbindungslinie, die gegenüberstehende Dreiecksseite und die durch die Spitze mit der Basis parallel gezogene Gerade schneidet, so sind die 4 Durchschnittspunkte dieser Transversale harmonische Punkte.

105) Zieht man durch 3 harmonische Strahlen OB, OC, OD zum 4. Strahl OA eine Transversale ECF, so wird dieselbe von OC in C halbirt.

106) Trägt man auf eine der Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks von ihren beiden Endpunkten aus 2 Strecken, welche dem Ueberschuß der Hypothenuse über die Cathete gleich sind, so wird dadurch jede Cathete harmonisch getheilt.

107) Trägt man von einem Punkte einer Geraden aus auf letzterer 3 Stücke ab, welche der Reihe nach eine stetige geometrische Proportion bilden, zieht auch noch unter einem beliebigen Winkel gegen die angenommene Gerade eine zweite durch den erstern Punkt von der Länge des geometrischen Mittels der genannten Proportion und verbindet den Endpunkt der letztern Geraden mit den Endpunkten der abgetragenen Proportionalen, so bilden diese 3 Verbindungslinien jederzeit zwei gleiche Winkel.

108) Sind von einem Punkte außerhalb einer harmonisch getheilten Geraden nach den 4 Theilungspunkten Verbindungslinien (harmonische Strahlen) so gezogen, daß die erste auf der dritten senkrecht steht, so bildet die zweite und vierte mit der dritten gleiche Winkel.

109) Wenn durch einen Punkt einer winkelhalbirenden Transversale eine Gerade gezogen wird bis zum Durchschritte sowohl mit den Schenkeln des Winkels, als auch mit dem auf der halbirenden im Scheitel des Winkels errichteten Lothe, so wird die erstere harmonisch getheilt.

110) Bilden 3 von einem Punkte ausgehende Strahlen spitze Winkel und es wird eine von einem beliebigen Punkte außer diesen Geraden an dieselben gezogene Transversale harmonisch getheilt, so ist dieses auch mit jeder beliebigen andern durch den angenommenen Punkt gehenden Transversale der Fall.

111) Wird eine Gerade in 2 gleiche und in 2 ungleiche Theile getheilt und die ganze Linie soweit verlängert, daß die Verlängerung zur ganzen verlängerten Linie sich ebenso verhält, wie die genannten ungleichen Abschnitte, so bilden die Abstände des Punktes der ungleichen Theilung von einem Endpunkte der gegebenen Geraden, vom Mittelpunkte derselben, vom Endpunkte der Verlängerung und endlich vom andern Endpunkte der gegebenen Geraden der Reihe nach die 4 Glieder einer geometrischen Proportion.

112) Wenn eine Gerade in beliebige 2 Theile getheilt und so weit verlängert wird, daß die Verlängerung zur ganzen verlängerten Linie sich verhält, wie die Abschnitte der gegebenen Geraden; wenn

ferner durch den angenommenen Theilungspunkt eine beliebige Gerade gezogen wird bis zum Durchschnitte mit den Lothen, welche auf der gegebenen Geraden in ihren Endpunkten errichtet sind, und endlich die letztern Durchschnittspunkte mit dem Endpunkte der Verlängerung verbunden werden, so haben diese letztern Linien dasselbe Verhältniß zu einander, als die Abschnitte der zwischen den Lothen gezogenen Linie.

113) Dreiecke von gleicher Basis und Höhe sind inhaltsgleich.

114) Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Basis und Höhe; der Inhalt desselben ist demnach

$$F = \frac{1}{2} gh.$$

115) Das Quadrat der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Cathetenquadrate. (Pythagoras.)

116) Die Umkehrung von 115?

117) Das Quadrat über einer Dreieckseite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, vermehrt, beziehlich vermindert um das doppelte Rechteck aus einer letzten Seiten und der Projection der andern Seite auf dieselbe, je nachdem der eingeschlossene Winkel stumpf oder spitz ist.

118) Aehnliche Dreiecke verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate zweier homologen Seiten

$$D : d = A^2 : a^2.$$

119) Das Höhenperpendikel eines rechtwinkligen Dreiecks ist das geometrische Mittel zwischen beiden Hypothenusenabschnitten.

120) Die Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist das geometrische Mittel zwischen der ganzen Hypothenuse und dem durch das Höhenperpendikel gebildeten, derselben Cathete anliegendem Abschnitte.

121) Die Quadrate der Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie die durch das Höhenperpendikel gebildeten Hypothenusenabschnitte.

122) Im rechtwinkligen Dreieck ist der Abstand der Hypothenusenmitte vom Scheitel der halben Hypothenuse gleich.

123) Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Produkt aus seinem halben Umfange und dem um die Hypothenuse vermindertem halben Umfange

$$\frac{1}{2} bc = \frac{1}{4} (b + c + \sqrt{b^2 + c^2}) (b + c - \sqrt{b^2 + c^2})$$

124) Fällt man aus dem Endpunkte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ein Loth auf die gegenüberliegende Seite, so

schneidet das von dem Scheitel auf die Basis gefällte Loth von dem erstern ein Stück ab, das sich zum Schenkel ebenso verhält, wie die Basis zur zugehörigen Höhe.

125) Zieht man aus dem Scheitel eines Dreiecks eine Gerade nach einem beliebigen Punkte der Basis, so ist die Summe der Quadrate den beiden andern Seiten gleich dem doppelten Quadrate der Transversale nebst dem doppelten Quadrate der halben Basis; d. h.

$$b^2 + c^2 = 2t^2 + \tfrac{1}{2}a^2.$$

126) Zieht man vom Scheitel eines Dreiecks zur Basis eine winkelhalbirende Transversale, so verhalten sich die beiden andern Dreiecksseiten wie die anliegenden Basisabschnitte.

127) Verbindet man den Scheitel des Dreiecks ABC mit einem beliebigen Punkte P der Basis oder deren Verlängerung, so findet allemal die Relation statt (Stewart)

$$AB^2 \times CP + AC^2 \times BP - AP^2 \times BC = BC \times BP \times CP.$$

128) In jedem Dreiecke ist das Quadrat einer winkelhalbirenden Transversale gleich dem Rechtecke aus den beiden anliegenden Seiten, vermindert um das Rechteck aus den beiden Abschnitten der Basis

$$t^2 = bc - uv.$$

129) Hierbei haben die beiden Abschnitte die Längen

$$u = ab : (b + c)$$
$$v = ac : (b + c).$$

130) In jedem Dreiecke ist das vierfache Quadrat einer seitenhalbirenden Transversale gleich der doppelten Summe der Quadrate der einschließenden Seiten, vermindert um das Quadrat der Seite zu welcher die Transversale gezogen

$$4t^2 = 2\,(b^2 + c^2) - a^2.$$

131) Die Relation zwischen der zur Seite a eines Dreiecks gehörenden Höhenlinie h und den 3 Seiten a, b, c ist

$$4a^2h^2 = 2\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

132) Die Relation zwischen einer seitenhalbirenden Transversale, welche zur Seite a gehört und den 3 Seiten a, b, c des Dreiecks lautet

$$4m^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

133) Jede beliebige Transversale bestimmt auf den Seiten eines Dreiecks oder dessen Verlängerungen sechs solche Abschnitte, daß das Produkt aus 3 derselben, welche keine gemeinsamen Endpunkte haben, gleich ist dem Produkt der 3 andern. Schneiden sich überdies die 3 Trans-

versalen Aa, Bb, Cc des Dreiecks ABC in einem Punkte O, so besteht zwischen den 6 Abschnitten die Relation

$$\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1.$$

134) In jedem Dreiecke schneiden sich 1) die 3 Höhenlinien in einem Punkt; 2) die 3 winkelhalbirenden Transversalen in einem Punkte; 3) die 3 seitenhalbirenden Transversalen in einem Punkte; 4) die in den Mitten der Seiten errichteten Lothe in einem Punkte.

135) Wenn man über der Hypothenuse und den Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren beschreibt, so ist das Polygon über der Hypothenuse gleich der Summe der Cathetenpolygone.

136) Der Inhalt eines Dreiecks ausgedrückt durch seine 3 Seiten a, b, c beträgt

$$F = \tfrac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$$ oder

$$16\,F^2 = 2\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

und für $a + b + c = 2s$.

$$F = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}.$$

Für das gleichschenklige Dreieck ist $b = c$; also

$$F = a/4 \sqrt{4b^2 - a^2}$$

und für das gleichseitige $a = b = c$.

$$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

137) Um den Inhalt des Dreiecks durch seine 3 Höhenlinien auszudrücken, berechnet man aus letztern, welche d, e, f heißen mögen

$$a = \frac{4de^2f^2}{w};\; b = \frac{4d^2ef^2}{w};\; c = \frac{4d^2e^2f}{w};$$ wo

$$w = \sqrt{(de + ef + df)(de + ef - df)(de + df - ef)(df + ef - de)}$$

und wende 136 an.

138) Soll der Inhalt durch die 3 seitenhalbirenden Transversalen ausgedrückt werden, so sind die Seiten, falls g, h, k jene Mittellinien bedeuten

$$a = \tfrac{2}{3} \sqrt{2\,(h^2 + k^2) - g^2}$$

$$b = \tfrac{2}{3} \sqrt{2\,(g^2 + k^2) - h^2}$$

$$c = \tfrac{2}{3} \sqrt{2\,(g^2 + h^2) - k^2}$$

wo nunmehr 136 angewendet werden kann.

139) Unter allen Dreiecken von gleicher Basis und Höhe hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang und unter allen Dreiecken von gleicher Basis und gleichem Umfange den größten Inhalt.

140) Unter allen Dreiecken gleichen Inhalts hat das gleichseitige den kleinsten Umfang und nnter allen Dreiecken gleichen Umfanges den größten Inhalt.

141) Unter allen Dreiecken, dessen Ecken auf den 3 Seiten eines Dreiecks liegen, ist dasjenige ein Minimum, dessen Ecken die Halbirungspunkte der Dreiecke sind.

142) Beschreibt man über jede der 3 Seiten eines Dreiecks nach außen ein gleichseitiges Dreieck und verbindet die Scheitel derselben mit der gegenüberliegenden Ecke des Urdreiecks, so sind diese 3 Transversalen einander gleich und schneiden sich in einem Punkte; außerdem sind die Winkel um diesen Punkt einander gleich.

Sind die Abstände dieses Punktes von den Ecken des Dreiecks x, y, z und die 3 Seiten a, b, c, so ist

$$a^2 = y^2 + z^2 + yz$$
$$b^2 = x^2 + z^2 + xz$$
$$c^2 = x^2 + y^2 + yx$$
$$4f = (xy + xz + yz)\sqrt{3}$$
$$s^2 = 2f\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Die Summe dieser 3 Linien ist in Bezug auf die Ecken des Dreiecks ein Minimum.

143) Innerhalb eines Dreiecks giebt es einen Punkt von der Beschaffenhrit, daß die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den 3 Seiten ein Minimum wird.

Ist f der Inhalt des Dreiecks und sind u, v, w die Abstände, so ist

$$2f = au + bv + cw$$
$$u = 2af : (a^2 + b^2 + c^2)$$
$$v = 2bf : (a^2 + b^2 + c^2)$$
$$w = 2cf : (a^2 + b^2 + c^2).$$

144) Soll die Summe der Rechtecke derselben Perpendikel ein Minimum werden, so ergeben sich die Werthe von u, v, w aus den Gleichungen

$$bv - au + (b - a)\,w = 0$$
$$cw - bv + (c - b)\,u = 0$$
$$au + bv + cw = 2f.$$

145) Soll aus 2 Seiten a und b das Dreieck vom größten Inhalte gebildet werden, so müssen diese Seiten einen Rechten einschließen; mithin

$$f = \frac{1}{2}ab.$$

146) Soll in ein Dreieck von der Basis b und Höhe h ein Dreieck so eingeschrieben werden, daß seine Ecken in den 3 Seiten liegen, die Basis des eingeschriebenen Dreiecks der Basis des ursprünglichen parallel ist und der Inhalt ein Maximum werden soll, so muß die Parallele durch den Halbirungspunkt der Höhe gehen, wobei also $b^1 = b/2$; $h^1 = h/2$ ist.

147) In jedem Dreiecke ist die Gerade, welche die Mitten zweier Seiten verbindet, parallel mit der dritten Seite und halb so groß als diese.

148) Die Summe der beiden aus irgend einem Punkte der Basis eines gleichschenkfigen Dreiecks gefällten Perpendikel ist gleich der Schenkelhöhe.

149) In jedem Dreiecke ist die Summe der seitenhalbirenden Transversalen kleiner als der Umfang des Dreiecks.

150) Zieht man durch den Durchschnitt der winkelhalbirenden Transversalen eines Dreiecks ABC eine Parallele PQ zur Basis BC, so ist derselbe ebenso lang als die beiden Segmente BP und CQ.

151) Sucht man auf der Basis AB eines Dreiecks ABC einen Punkt, welcher von der Beschaffenheit ist, daß die Summe seiner Entfernungen von den Seiten AC und BC ein Minimum ist, so ergiebt sich, daß dieser Punkt in der Ecke A liegt.

152) Sucht man in der Ebene eines Dreiecks einen Punkt von der Beschaffenheit, daß die Summe seiner 3 Entfernungen von den Seiten des Dreiecks ein Minimum wird, so findet sich, daß derselbe in der Spitze des größten der 3 Winkel des Dreiecks liegt, daß Minimum der Summe ist also die kleinste der 3 Höhen des Dreiecks.

153) Wenn man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks Quadrate beschreibt und die Endpunkte der von den Endpunkten der Hypothenuse auslaufenden Quadratseiten, welche nicht Seiten des Dreiecks sind, verbindet; so ist die Summe der Quadrate dieser Verbindungslinien gleich dem fünffachen Quadrat der Hypothenuse.

D.

Das Viereck.

154) In jedem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel einander gleich.

155) Sind in einem Winkel die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.

156) Die Diagonale theilt ein Parallelogramm in 2 congruente Dreiecke.

157) Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

158) In jedem Parallelogramm halbiren sich die Diagonalen und zwar im Quadrat und Rhombus unter rechten Winkeln.

159) Die Umkehrung von 158.

160) Schneidet in einem Parallelogramm ABCD eine Gerade DE aus dem einen Endpunkt D von der Seite AB ein Stück AE $= \frac{1}{n}$ AB ab, so schneidet sie von der Diagonale AB ein Stück AE $= \left(\frac{1}{n+1}\right)$ AC ab, und umgekehrt.

161) Parallelogramme von gleicher Basis und Höhe sind einander gleich.

162) Beschreibt man auf 2 Seiten AC, BC eines Dreiecks ABC auswärts zwei beliebige Parallelogramme ACFG und ACHJ und verlängert ihre den Seiten des Dreiecks parallelen Seiten FG und JH, bis sie in K zusammentreffen, zieht die Gerade CK und errichtet über AB ein Viereck ABDE, dessen 2 Seiten AE und BD mit CH parallel und bis an die verlängerten Seiten der beiden Parallelogramme gehen, so ist auch ABDE ein Parallelogramm, das ebenso groß ist als die beiden vorigen zusammen. (Pappus.)

163) Welcher Satz folgt, wenn in 161 das Dreieck ABC in C rechtwinklig ist?

164) Das Quadrat über der Summe zweier Strecken a und b ist gleich der Summe aus den Quadraten beider Strecken und dem doppelten Rechteck derselben

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

165) Das Quadrat über der Differenz zweier Strecken ist gleich der Summe der Quadrate beider Strecken weniger dem doppelten Rechteck derselben

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

166) Das Rechteck aus der Summe zweier Strecken und ihrer Differenz ist gleich der Differenz der Quadrate beider Strecken

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

167) Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich dem Inhalte nach wie ihre Höhen und umgekehrt.

168) Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus seiner Basis und Höhe im Quadrat der Maßeinheit

$$R = bh\ \square^{\text{einh.}}$$

169) Der Inhalt eines jeden Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus dessen Basis und Höhe.

170) Der Inhalt eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite $Q = a^2$.

171) Der Inhalt eines Rhombus ist gleich dem halben Produkt beider Diagonalen $R = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

172) In jedem Vierecke bilden die Halbirungspunkte der 4 Seiten die Ecken eines Parallelogramms.

173) In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der 4 Seiten so groß als die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.

174) Halbirt man die Seiten eines Vierecks ABCD und zwar AB in E, BC in F, CD in G und AD in H, zieht die Diagonalen ACBD, beschreibt das Parallelogramm EFGH, zieht zu letzterm die Diagonalen EG und FH, durchschneidet die Diagonale BD in K durch HK $\parallel$ AB, zieht durch den Durchschnittspunkt J der Diagonalen EG und FH die Gerade KL nach AC, welche AC in L schneidet, zieht ferner LF, welche ebenfalls AB parallel ist, und endlich LH, FK und FH, so ist LFHK ebenfalls ein Parallelogramm und es bestehen zwischen den Linien der ganzen Construction folgende Relationen:

1) $AC^2 + BD^2 = 2(EG^2 + FH^2)$
2) $AD^2 + BC^2 = 2(EF^2 + LK^2)$
3) $CD^2 + AB^2 = 2(FH^2 + LK^2)$
4) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(EG^2 + FH^2) + 4KL^2$
5) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4KL^2$ (Euler)
6) $AB^2 + CD^2 + 2EG^2 = BC^2 + AD^2 + 2FH^2$

7) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + AC^2 + BD^1 = 4(EG^2 + FH^2 + LK^2)$

8) $$\left.\begin{array}{l} EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \\ + EK^2 + GK^2 + GL^2 + EL^2 \\ + FK^2 + HK^2 + HL^2 + LF^2 \\ + EG^2 + FH^2 + LK^2 \end{array}\right\} = \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(AC^2 + BD^2 + AD^2) \\ + \tfrac{1}{2}(BC^2 + CD^2 + AB^2) \\ + \tfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CD^2) \\ + \tfrac{1}{4}(AD^2 + AC^2 + BD^2) \end{array}$$

175) In jedem Trapez beträgt die Halbirungslinie der Schenkel die Hälfte der Summe beider Parallelseiten

$$m = \tfrac{1}{2}(a + b).$$

176) Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der halben Summe beider Parallelseiten und der Höhe

$$T = \tfrac{1}{2}(a + b)h.$$

177) In jedem Trapez ist die Summe der Quadrate der 4 Seiten um das Quadrat des Unterschieds der Parallelseiten größer alu der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f^2 + g^2 + (a - b)^2$; also auch

$c^2 + d^2 - f^2 - g^2 + 2ab = 0$, oder

$2ab = (f^2 + g^2) - (c^2 + d^2)$.

178) Setzt man in 176 $c = d$, so ist auch $f = g$ und somit

$$ab = f^2 - c^2.$$

179) Zieht man von der Ecke eines Parallelogramms eine Gerade, welche eine Diagonale, eine Seite und die Verlängerung einer andern Seite schneidet, so ist der Abschnitt zwischen jener Ecke und der Diagonale das geometrische Mittel zwischen den Segmenten innerhalb beider Seiten und der Diagonale.

180) Verbindet man einen beliebigen Punkt innerhalb eines Parallelogramms mit den Ecken desselben, so ist von den 4 entstandenen Dreiecken die Summe je zweier gegenüberstehender Dreiecke der Hälfte des Parallelogramms gleich.

181) Zieht man aus der Ecke eines Rechtecks eine beliebige Gerade zu einer Gegenseite und fällt von dem andern Endpunkte der jener erstern Ecke angehörigen Seite ein Loth, so ist das Rechteck aus beiden Geraden gleich dem ursprünglichen Rechteck.

182) Der Umfang eines Rechtecks ist kleiner als derjenige eines gleichschenkligen Dreiecks von gleichem Inhalte und gleicher Höhe.

183) Verbindet man einen beliebigen Punkt innerhalb eines Rechtecks mit den Ecken desselben, so ist die Summe der Quadrate über 2 nach entgegengesetzten Ecken gezogenen Linien gleich der Summe der Quadrate der beiben übrigen Geraden.

184) In jedem Vierecke ist die Summe der Quadrate der 4 Seiten so groß als die Summe der Quadrate beider Diagonalen nebst dem vierfachen Quadrat der Linie, welche die Halbirungspunkte der letztern verbindet

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f^2 + g^2 + 4h^2.$$

185) In jedem Vierecke ist die Summe der Quadrate der 4 Seiten gleich der doppelten Summe der Quadrate der beiden seitenhalbirenden Transversalen

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(t^2 + t_{,}^2).$$

186) Wenn man zwischen 2 Gegenseiten eines Parallelogramms eine Gerade parallel den andern zieht und den einen Endpunkt dieser Linie mit einer der gegenüberliegenden Winkelspitzen verbindet, so schneidet diese Verbindungslinie eine der Diagonalen des Parallelogramms so, daß die dadurch gebildeten Segmente der ganzen Diagonale im umgekehrten Verhältniß stehen zu den Segmenten desjenigen Stückes der Diagonale, welches zwischen ben beiden Parallelen liegt, deren Endpunkte verbunden werden.

187) Wenn man in einem Parallelogramme 2 Linien parallel mit 2 anliegenden Seiten zieht bis zum Durchschnitte mit den Seiten, so schneiden sich von den 4 Verbindungslinien der Durchschnittspunkte je zwei gegenüberliegende gehörig verlängert in einem Punkte, der auf der Verlängerung der Diagonale liegt.

188) Wenn man auf den Seiten eines Quadrats von den Ecken aus gleiche Stücke gleichmäßig abträgt, so bestimmen die Abtragungspunkte die Winkelspitzen eines neuen Quadrats.

189) Die Summe der Diagonalen eines Vierecks ist kleiner als die Summe der Abstände irgend eines vom Durchschnitt der Diagonalen verschiedenen Punktes innerhalb der Figur von den Winkelspitzen.

190) Jedes Viereck wird durch seine beiden Diagonalen in 4 Dreiecke getheilt, welche die Glieder einer geometrischen Proportion bilden.

191) Zieht man von einem Endpunkte einer Seite eines Rechtecks eine beliebige Linie an deren Gegenseite und fällt auf diese Gerade vom andern Endpunkte der erstern Seite ein Loth, so ist das Rechteck aus den beiden gezogenen Linien gleich dem gegebenen Rechtecke.

192) Verbindet man in einem Trapez die Endpunkte des einen Schenkels mit dem Halbirungspunkte des zweiten, so ist das so gebildete Dreieck so groß als das Trapez.

193) Wenn in einem Trapez 2 anliegende Winkel Rechte sind und das Trapez halbirt ist durch eine Gerade, welche durch den Halbirungspunkt einer der nicht parallelen Seiten geht, so schneidet diese den andern Schenkel so, daß die ganze Seite zu einem ihrer Abschnitte sich ebenso verhält, wie die Summe der Parallelseiten zu der einen von ihnen, welche jenem Abschnitte nicht anliegt.

194) Wenn man über 2 Seiten eines Dreiecks ein Paar beliebige Parallelogramme construirt, so ist die Summe ihrer Flächen gleich dem Flächeninhalte eines über der Basis beschriebenen Parallelogramms, dessen zweite Seite gleich ist der Verbindungslinie der Spitze mit dem Durchschnittspunkte der Seiten der beiden vorigen Parallelogramme.

195) Verbindet man einen Punkt innerhalb eines Rechtecks mit den Winkelspitzen, so ist die Summe der Quadrate über 2 nach entgegengesetzten Winkelspitzen gezogenen Linien gleich der Summe der Quadrate über den beiden übrigen.

196) Die Summe der Diagonalen eines Vierecks ist doppelt so groß, als die Summe der Quadrate über den Verbindungslinien der Halbirungspunkte der Gegenseiteu.

197) In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate der Linien, welche die Halbirungspunkte der Gegenseiten verbinden und die Quadrate der halbirten Seiten gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten und der beiden Diagonalen.

198) Der Inhalt eines Trapezes, dessen Parallelseiten a und c und dessen Schenkel b und d sind, beträgt

$$F = \frac{a+c}{4(a-c)} \sqrt{(a+b-c+d)(-a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)}$$

199) Der Inhalt eines Vierecks, dessen Seiten a, b, c, d und darin 2 Gegenwinkel gleich sind, beträgt

$$F = \frac{ad+bc}{4(ad-bc)} \sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(-a-c+b+d)}$$

200) Der Inhalt eines Vierecks darin zwei Gegenwinkel die Größe A und B haben und darin die Seiten a und b den Winkel A, desgleichen c und d den Winkel B einschließen, beträgt stets

$$F = \tfrac{1}{2}(ab \sin. A + cd \sin. B).$$

201) Unter allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat den größten Inhalt und unter allen gleichen Inhalts den kleinsten Umfang.

202) Soll in ein Dreieck ABC das größtmöglichste Rechteck so eingeschrieben werden, daß die Grundlinien in einander liegen und die Ecken des Rechtecks auf den Schenkeln des Dreiecks sich befinden, so ist die Basis des Rechtecks gleich der halben Dreiecksbasis und dessen Höhe gleich der halben Dreieckshöhe

$$b^1 = \frac{1}{2}b; \quad h^1 = \frac{1}{2}h; \quad \text{also } M = \frac{1}{4}bh.$$

203) Soll in ein Dreieck, dessen 2 Seiten a und b das größte Parallelogramm so eingeschrieben werden, daß dasselbe den von a und b eingeschlossenen Winkel mit dem Dreiecke gemeinsam hat, so sind die Seiten desselben ½a und ½b.

204) Das kleinste Quadrat, das sich einem gegebenen Quadrate einzeichnen läßt, hat seine Ecken in den Halbirungspunkten der Seiten des gegebenen Quadrats.

205) Wenn ein Punkt innerhalb eines Rechtecks nach Berührung der 4 Seiten des Rechtecks zum Ausgange zurüückkehren soll und seine Bewegung eine geradlinige ist, so ist der kürzeste von allen Wegen, den er beschreibt, gleich der Summe der beiden Diagonalen des Rechtecks.

206) Wenn eine Gerade AB in 2 Abschnitte AC und BC getheilt wird, die sich verhalten wie b : a und man fällt von A, B, C auf eine beliebige Gerade XY die Perpendikel AA^1, BB^1, CC^1, so ist

$$(a + b)\, CC^1 = a \,.\, AA^1 + b \,.\, BB^1$$

207) Es soll ein Quadrat einem gleichseitigen Dreieck eingeschrieben werden, so daß 2 Ecken des erstern in den Seiten des Dreiecks und die Grundlinien beider auf einander liegen.

208) Es soll ein Quadrat einem gegebenen Quadrate eingeschrieben werden.

209) Ein Quadrat einem regulären Fünfecke einzuschreiben.

210) Ein Quadrat einem regulären Sechsecke etnzuschreiben.

E.

Die Polygone.

211) Jedes Polygon hat ebenso Winkel oder Ecken als Seiten.

212) Die Anzahl der Diagonalen eines Polygons ist stets, wenn die Seitenzahl desselben n beträgt

$$D = n/2\,(n - 3).$$

213) Wenn ein Polygon theilweise innerhalb, theilweise außerhalb eines andern Polygons liegt, so müssen sich ihre Perimeter wenigstens in 2 Punkten schneiden.

214) In jedem Polygon betragen die Polygonwinkel soviel mal 2 Rechte als das Polygon Seiten hat, weniger 4 Rechte

$$P = 2n\,R - 4R = 180^0(n - 2),$$

daher jeder Polygonwinkel, falls das Polygon regelmäßig ist,

$$w = \frac{180^0}{n}(n - 2) = 180^0\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

wobei jeder Centriwinkel desselben Polygons

$$c = \frac{360^0}{n} \text{ beträgt.}$$

215) Jedes Polygon hat mindestens 3 concave Winkel. Die Außenwinkel eines Polygons mit concaven Winkeln betragen stets 4 Rechte.

216) Ein Polygon kann durch Diagonalen auf verschiedene Weise in Dreiecke zerlegt werden. Die Anzahl dieser Zerlegungen wächst mit der Seitenzahl n der Polygone außerordentlich; sie beträgt

$$Zn = \frac{n\;.\;(n + 1)\;(n + 2)\;.\;.\;.\;.\;(2n - 5)\;(2n - 4)}{2\;.\;3\;.\;4\;\;.\;.\;.\;.\;(n - 3)\;(n - 2)}$$

Die Factorenfolge im Zähler beginnt mit n, diejenige im Nenner mit 2 und beide werden soweit fortgesetzt, bis 2 übereinander stehende Factoren sich wie 2 : 1 verhalten.

217) Jedes Polygon läßt sich in ein Quadrat von gleichem Inhalte durch Construction verwandeln.

218) Polygone sind ähnlich, wenn ihre Winkel einzeln gleich und die gleichliegenden Seiten dasselbe Verhältniß haben.

219) Aehnliche Polygone lassen sich durch ähnlich liegende Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegen.

220) Polygone, welche aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und gleichliegender Dreiecke zusammengesetzt sind, sind ähnlich.

221) Die Perimeter ähnlicher Polygone verhalten sich wie zwei homologe Seiten.

222) Aehnliche Polygone verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach wie die Quadrate zweier homologer Seiten oder Diagonalen.

223) Schneidet man die Seite eines beliebigen Polygons durch eine Transversale, so ist das Produkt der Segmente, welche keine gemeinsame Endpunkte haben, gleich dem Produkt der andern Segmente.

224) Zieht man durch einen in der Ebene eines Polygons von ungerader Seitenzahl liegenden Punkt nach allen Ecken Transversalen und verlängert dieselben, bis sie die Gegenseiten des Polygons treffen, so entstehen auf jeder Seite 2 Abschnitte, von welchen das Produkt derjenigen, die keine gemeinsamen Endpunkte haben, gleich ist dem Produkte der andern.

225) Der Inhalt eines beliebigen Polygons wird gefunden, wenn man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, diese einzeln berechnet und schließlich die Inhalte derselben addirt.

226) Der Inhalt eines jeden Polygons wird auch gefunden, wenn man durch seine Ecken nach einer beliebigen Geraden Perpendikel zieht, hierauf jedes innerhalb des Polygons fallende Stück dieser Perpendikel mit der Distanz der folgenden Parallele von der vorhergehenden multiplicirt und die halbe Summe der entstandenen Produkte bildet. (Gauß, Balzer.)

227) Sind von einem Polygone alle Seiten weniger eine gegeben und sämmtliche Polygonwinkel, so findet man die unbekannte Seite folgendermaßen: Man nehme die Quadrate aller gegebenen Seiten, bilde ferner die doppelten Produkte je zweier dieser Seiten nach den möglichen Combinationen und multiplicire jedes derselben mit dem Cosinus der algebraischen Summe der zwischen den respectiven Seiten liegenden äußern Winkel, addire hierauf alle zusammen und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel (Meier Hirsch); so ist z. B. die sechste Seite eines Sechsecks

$$f = \sqrt{\begin{Bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab \cos. B + 2ac \cos. (B + C) \\ + 2ad \cos. (B + C + D) + 2ae \cos. (B + C + D + E) \\ + 2bc \cos. C + 2bd \cos. (C + D) + 2be \cos. (C + D \\ + E) + 2cd \cos. D + 2ce \cos. (D + E) + 2de \cos. E \end{Bmatrix}}$$

228) Um den Flächeninhalt desselben Polygons zu finden, bilde man die halbe Summe der Produkte von je 2 gegebenen Seiten nach allen möglichen Combinationen, jedes derselben mit dem Sinus der algebraischen Summe der dazwischen liegenden äußern Winkel multiplicirt. (Meier Hirsch.)

229) Mittelst 227 kann auch jede Diagonale des Polygons berechnet werden, indem man sich das gegebene Polygon durch die Diagonale in 2 Polygone zerlegt denkt.

230) Die Aufgabe 227 führt außerdem auf mancherlei brauchbare Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines Polygons, z. B. für das Neuneck ABCDEFGHJ in Bezug auf die Diagonale AF: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab \cos. B + 2ac \cos. (B + C) + ad \cos. (B + C + D) + ae \cos. (B + C + D + E) + 2be \cos. G + 2bd \cos. (C + D) + 2be \cos. (C + D + E) + 2cd \cos. D + 2ce \cos. (D + E) + 2de \cos. E = f^2 + g^2 + h^2 + i^2 + 2fg \cos. G + 2fh \cos. (G + H) + 2fi \cos. (G + H + J) + 2gh \cos. H + 2gi \cos. (H + J) + 2hi \cos. J.$ (Meier Hirsch.)

F.

Der Kreis.

231) Kreise, welche mit gleichen Radien beschrieben sind, sind gleich und alle mit ungleichen Radien beschriebenen Kreise sind ähnlich.

232) Der Durchmesser theilt den Kreis in 2 congruente Theile.

233) Zu gleichen Centriwinkeln gehören in gleichen Kreisen auch gleiche Sehnen, gleiche Bogen, Sectoren und Segmente.

234) Zu gleichen Bogen gehören in gleichen Kreisen auch gleiche Centriwinkel, gleiche Sehnen, Sectoren und Segmente.

235) Zu gleichen Sehnen gehören in gleichen Kreisen gleiche Bogen, Centriwinkel, Segmente und Sectoren.

236) Jede vom Centrum des Kreises auf eine Sehne herabgelassene Senkrechte halbirt die Sehne und beide Bögen derselben.

237) Jede in der Mitte einer Sehne errichtete Senkrechte geht durch das Kreiscentrum und jene Gerade, welche die Sehnenmitte mit dem Kreiscentrum verbindet, steht auf der Sehne senkrecht.

238) Errichtet man am Endpunkte eines Radius eine Senkrechte, so ist dieselbe eine Tangente des Kreises.

239) Errichtet man im Berührungspunkte einer Tangente ein Perpendikel, so geht dasselbe durch das Centrum des Kreises.

240) In jedem Kreise verhalten sich 2 Mittelpunktswinkel so wie ihre Bögen.

241) Der Centriwinkel ist stets doppelt so groß als der auf demselben Bogen befindliche Peripheriewinkel.

242) Alle auf gleichem Bogen stehende Peripheriewinkel sind einander gleich.

243) Der auf dem Durchmesser stehende Peripheriewinkel ist ein Rechter.

244) Der von einer Tangente und Sehne gebildete spitze Winkel ist stets gleich dem Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf dem kleinen Bogen ruht; der stumpfe Winkel ist gleich dem anf dem größern Bogen stehenden Peripheriewinkel.

245) Der Winkel, unter dem sich 2 Kreissehnen schneiden, ist gleich dem Peripheriewinkel, der auf der Summe oder Differenz der zwischen den Sehnen liegenden Bögen steht, je nachdem diese Sehnen sich innerhalb oder außerhalb des Kreises schneiden.

246) Wenn von einem Punkte außerhalb zweier sich nicht schneidenden Kreise an die Mittelpunkte Linien gezogen sind, deren Verhältniß dem der Radien gleich ist, so schließen die von jenem Punkte nach einerlei Seite der Kreise gezogenen Tangenten einen Winkel ein, welcher dem von den erstern Linien eingeschlossenen gleich ist.

247) Wenn man die Endpunkte beliebig vieler, einander anliegender, glelcher Kreisbögen mit 2 festen Punkten in dem übrigen Theile des Umfanges verbindet und diese Linien bis zum Durchschnitt verlängert, so sind die sämmtlichen auf diese Weise gebildeten Winkel einander gleich.

248) Wenn man von einem außerhalb eines Kreises liegenden Punkte an den Kreis beide Tangenten zieht, so ist der vou ihnen eingeschlossene Winkel doppelt so groß als der Winkel, den die Verbindungslinie der Berührungspunkte mit dem an einen der letztern gezogenen Durchmesser bildet.

249) Wenn man von 2 Punkten in der Peripherie eines Kreises nach irgend welchen Punkten einer beliebigen Tangente gerade Linien zieht, so ist von den Winkeln, welche die einzelnen Paare bilden, derjenige der größte, welcher das nach dem Berührungspunkte gezogene Linienpaar einschließt.

250) Wenn von einem Punkte der Verlängerung eines Kreisdurchmessers 3 Linien gezogen werden, von denen die erste mit dem Durchmesser einen gegebenen Winkel macht, die zweite den Kreis berührt und die dritte den Umfang in 2 Punkten schneidet und wenn ferner die Verlängerung des Durchmessers und die Abstände desjenigen seiner Endpunkte, über welchen hinaus er verlängert worden, von den 3 Linien der Reihe nach die Glieder eine geometrische Proportion

bilden, so schneiden sich die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte, der Durchmesserpunkte und der Durchschnittspunkte der Sekante unter einem Winkel, der dem gegebenen Winkel gleich ist.

251) Wenn man durch den Mittelpunkt einer Sehne im Kreise 2 beliebige andere zieht, so schneiden die Verbindunglinien der Endpunkte der letztern auf der erstern vom Mittelpunkte aus gleiche Stücke ab.

252) Wenn man den Mittelpunkt eines Kreises mit einem beliebigen Punkte einer Sehne verbindet, so ist das Quadrat über der Verbindungslinie zusammen mit dem Rechtecke aus den Abschnitten der Sehne dem Quadrate des Radius gleich.

253) Wenn sich in einem Kreise 2 Sehnen rechtwinklig schneiden, so ist in dem durch ihre Endpunkte bestimmten Vierecke die Summe der Quadrate zweiter Gegenseiten gleich der Summe der Quadrate der beiden andern.

254) Wenn 2 Sehnen eines Kreises gleiche Distanz vom Mittelpunkte haben, so sind sie von gleicher Länge und umgekehrt: Sehnen von gleicher Länge haben gleiche Distanz vom Centrum.

255) Wenn man in den Endpunkten einer Sehne Lothe errichtet, bis diese irgend einen Durchmesser schneiden, so haben diese Durchschnittspunkte vom Centrum jederzeit gleiche Abstände.

256) Wenn man von den Endpunkten irgend eines Durchmessers Lothe auf irgend eine Sehne, bez. deren Verlängerung fällt, so sind die zwischen den Lothen und der Peripherie liegenden Stücke der Sehne von gleicher Länge.

257) Wenn man von einem Punkte in der Peripherie eines Kreises auf jede Seite eine beliebige Anzahl gleicher Bögen abschneidet und die gleichvielten Abtragungspunkte paarweise verbindet, so ist die Summe aller der dadurch entstandenen Sehnen gleich der letzteren Sehne verlängert bis zum Durchschnitte mit der Geraden, welche den angenommenen Punkt mit einem Endpunkt der erstern Sehne verbindet.

258) Wenn die Peripherie eines Halbkreises in eine ungerade Anzahl gleicher Theile getheilt ist und die vom Durchmesser gleichweit abstehenden Punktenpaare durch Sehnen verbunden werden, so sind die Stücke aller dieser Sehnen, welche zwischen den nach den Endpunkten der entferntesten Sehne gezogenen Radien liegen, zusammengenommen, gleich dem Radius.

259) Wenn man sowohl vom Mittelpunkte als auch von den Endpunkten eines Bogens nach einem beliebigen Punkte der Peripherie gerade Linien zieht, so verhält sich die Summe der beiden äußern zur mittlern, wie die Sehne des genannten Bogens zur Sehne seiner Hälfte.

260) Wenn man von einem Endpunkte des Durchmessers eines Halbkreises eine Sehne zieht, welche gleich dem Radius ist, auf diese vom Centrum ein Loth fällt und letzteres bis zur Peripherie verlängert, so ist dieser Radius das geometrische Mittel zwischeu den Entfernungen seines Endpunktes von dcn Endpunkten des Durchmessers.

261) Wenn man von einem Endpunkte des Durchmessers eines Kreises aus zwei Sehnen zieht und von dem Endpunkte der einen ein Loth auf den Durchmesser fällt, so schneidet dieses die zweite Sehne so, daß die erstere das geometrische Mittel ist zwischen der zwetten und ihrem dem Durchmesser anliegenden Stücke.

262) Wenn man die Endpunkte eines Durchmessers mit 2 Peripheriepunkten verbindet, so verhält sich die Summe der zu einem Punkte gezogenen Linien zur Summe der zum andern gezogenen, wie die Distanzen der betreffenden Punkte vom entgegengesetzten Endpunkte des Durchmessers, welcher auf dem vorigen senkrecht steht.

263) Wenn man von den Endpunkten einer beliebigen Sehne Lothe auf einen beliebigen Durchmesser fällt, so hat die Summe derselben zu dem zwischen ihnen liegenden Stücke des Durchmessers dasselbe Verhältniß, wie die durch einen der Endpunkte der angenommenen Sehne senkrecht auf ihr gezogene zweite Sehne zur erstern hat.

264) Wenn man von irgend einem Punkte des Bogens eines Kreissegments ein Loth auf die Basis und auf dem größern Stücke der Basis sowohl als des Bogens, bezüglich des kleinern, abträgt, so ist der erstere Rest gleich der zum zweiten gehörigen Sehne.

265) Wenn sich eine Sehne und ein Durchmesser im Kreise schneiden und man errichtet in einem Endpunkte der Sehne auf derselben ein Loth bis zum Durchschnitte mit der Peripherie und dem verlängerten Durchmesser, so verhält sich das ganze Perpendikel zum außerhalb des Kreises liegenden Stücke, wie das größere Stück der Sehne zum kleinern.

266) Wenn man in den Endpunkten einer Sehne Lothe errichtet auf derselben bis zum Durchschnitte mit einem Durchmesser und verbindet die Durchschnittspunkte mit einem Punkte der Sehne so, daß

die Verbindungslinien mit der Sehne gleiche Winkel bilden, so ist die Summe dieser Verbindungslinien gleich dem Durchmesser.

267) Wenn eine Sehne durch eine zweite halbirt wird und man zieht an den Endpunkten der letztern Lothe bis zum Durchschnitte mit den Verlängerungen der erstern, so sind die außerhalb des Kreises fallenden Stücke der letztern stets von gleicher Länge.

268) Wenn man von dem einen Endpunkte eines Durchmessers aus beiderseits gleiche Längen abträgt und deren Endpunkte mit einem beliebigen Punkte in der Peripherie verbindet, so bilden die Durchschnittspunkte der letztern Verbindungslinien und des Durchmessers, resp. deren Verlängerungen mit den Endpunkten des Durchmessers zusammen 4 harmonische Punkte.

269) Wenn man von den Endpunkten der Sehne Perpendikel auf einen Durchmesser und von einem Endpunkte des letztern wiederum ein Perpendikel auf die Sehne fällt, so wird letztere so getheilt, daß die Stücke bezüglich die mittleren Proportionalen sind zwischen den Stücken, welche vom Durchmesser durch die darauf gefällten Lothe abgeschnitten werden.

270) Wenn von den Endpunkten eines Durchmessers eine beliebige Anzahl von Sehnen gezogen werden, von denen sich immer zwei und zwei in einem Perpendikel auf dem Durchmesser schneiden, so gehen alle Verbindungslinien der Endpunkte zweier entsprechenden Sehnen durch einen und denselben Punkt des verlängerten Durchmessers.

271) Wenn man durch den Mittelpunkt einer Sehne 2 beliebige andere Sehnen zieht, so schneiden die Verbindungslinien der Endpunkte der letztern auf der erstern vom Centrum aus gleiche Stücke ab.

272) Wenn man den Mittelpunkt des Kreises mit einem beliebigen Punkte einer Sehne verbindet, so ist das Quadrat über die Verbindungslinie zusammen mit dem Rechtecke aus den Abschnitten der Sehne gleich dem Quadrate des Radius.

273) Wenn sich in einem Kreise 2 Sehnen rechtwinklig schneiden, so ist in dem durch ihre Endpunkte bestimmten Vierecke die Summe der Quadrate zweier Gegenseiten gleich der Summe der Quadrate der beiden andern.

274) Wenn man von einem Punkte eines Durchmessers eines Halbkreises zwei Gerade zieht, von denen die eine senkrecht auf dem Durchmesser steht und die andere nach dem Centrum der Halbkreis=

peripherie geht, so ist die Quadratsumme beider Geraden gleich dem Quadrat des Radius.

275) Wenn eine Sehne auf einem Durchmesser senkrecht steht und von einer zweiten Sehne geschnitten wird, so ist das Rechteck aus den Segmenten der zweiten Sehne zusammen mit dem Quadrate des Stücks der ersten, welches zwischen der zweiten und dem Durchmesser liegt, constant.

276) Wenn eine Gerade eine Sehne eines gegebenen Kreises schneidet und auf einem Durchmesser senkrecht steht, so ist das Rechteck aus den Segmenten des Durchmessers um das Quadrat des zwischen Sehne und Durchmesser befindlichen Perpendikels kleiner oder größer als das Rechteck aus den Segmenten der Sehne, je nach dem dieses Loth außerhalb des Kreises liegt oder nicht.

277) Wenn eine Sehne dem Durchmesser parallel und ein Punkt des letztern mit den Endpunkten der erstern verbunden ist, so ist die Quadratsumme dieser Linien gleich der Quadratsumme der Durchmesserabschnitte.

278) Wenn man von den Endpunkten einer Sehne, welche senkrecht ist auf einem Durchmesser, nach einem beliebigen Punkte der Kreisperipherie Linien zieht und diese nöthigenfalls bis zum Durchschnitte mit dem Durchmesser verlängert, so ist das Rechteck aus den Abständen dieser Durchschnittspunkte vom Centrum gleich dem Quadrate des Radius.

279) Wenn man aus den Endpunkten des Durchmessers eines Halbkreises an irgend einen Punkt der Peripherie Linien zieht, so schneiden diese von jedem auf dem Durchmesser errichteten Perpendikel Stücke ab, deren Rechteck gleich ist dem Rechteck aus den Segmenten des Durchmessers.

280) Wenn der Bogen eines Halbkreises in 3 gleiche Theile getheilt wird und die Theilungspunkte mit einem Endpunkte des Durchmessers verbunden werden, so ist die Differenz der zu diesen Verbindungslinien gehörigen Kreissegmente gleich dem zu einem der 3 gleichen Bögen gehörigen Sector.

281) Wenn man von einem Punkte der Verlängerung eines Kreisdurchmessers eine Tangente an den Kreis zieht, und vom Berührungspunkte auf den Durchmesser ein Loth fällt, so wird ersterer durch letzteres in 2 Stücke getheilt, die sich verhalten, wie die Ent-

fernungen des angenommenen Punktes von den Endpunkten des Durchmessers.

282) Wenn man an die Endpunkte eines Durchmessers Tangenten zieht und dieselben bis zum Durchschnitte mit einer beliebigen dritten verlängert, so stehen die Verbindungslinien dieser Durchschnittspunkte mit dem Centrum senkrecht auf einander.

283) Wenn man an die Endpunkte eines Durchmessers Tangenten zieht und dieselben bis zum Durchschnitte mit einer beliebigen verlängert, so wird letztere im Berührungspunkte so getheilt, daß der Radius die mittlere Proportionale zwischen den Stücken derselben ist.

284) Zieht man eine beliebige Sehne senkrecht auf einen Kreisdurchmesser und an einen Endpunkt der erstern eine Tangente, dann schneidet das von einem beliebigen Punkte der Tangente gefällte Loth letzteren so, daß das Stück zwischen dem Fußpunkte und der Sehne zur begrenzten Tangente dasselbe Verhältniß hat, wie die Sehne zum Durchmesser.

285) Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente und eine Sekante, so ist erstere das geometrische Mittel zwischen der ganzen Sekante und ihrem äußern Abschnitte.

286) Zwei von einem Punkte außerhalb eines Kreises in letztern führende Sekanten verhalten sich umgekehrt wie ihre äußern Abschnitte.

287) Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises an denselben die beiden Tangenten, durch einen Berührungspunkt und auf letztern vom andern Berührungspunkt eine Senkrechte, so wird diese von der Verbindungslinie zwischen dem andern Endpunkte des Durchmessers und dem außerhalb angenommenen Punkte halbirt.

288) Zieht man von einem Punkte außerhalb des Kreises an diesen eine Tangente und eine Sekante und von demselben Punkte aus in beliebiger Richtung eine dritte Linie gleich der Tangente, so ist diese letztere parallel der Sehne, welche zwischen den Verbindungslinien ihres andern Endpunkts mit der Durchschnittspunkten der Sekante liegt.

289) Wenn man von einem Punkte außerhalb eines Kreises an denselben die beiden Tangenten, durch einen Berührungspunkt einen Durchmesser und auf letztern vom andern Berührungspunkt eine Senkrechte zieht, so wird diese von der Verbindungslinie zwischen dem andern Endpunkte des Durchmessers und dem außerhalb angenommenen Punkte halbirt.

290) Wenn in einem Kreise eine Sehne durch eine zweite halbirt wird und man zieht an die Endpunkte jeder der Sehnen Tangenten bis zum Durchschnitte, so ist die Verbindungslinie der beiden Durchschnittspunkte parallel der halbirten Sehne.

291) Wenn man von einem Punkte außerhalb eines Kreises die beiden Tangenten zieht und deren Berührungspunkte durch sich innerhalb des Kreises schneidende Linien mit den Endpunkten eines Durchmessers verbindet, so steht die Verbindungslinie des innerhalb des Kreises liegenden Durchschnittspunktes und des außerhalb angenommenen Punktes auf dem Durchmesser senkrecht.

292) Wenn man an den Mittelpunkt eines Quadrantenbogens einen Radius zieht, diesen bis zu der an einen der Endpunkte des Bogens gezogenen Tangente verlängert und mit letzterer eine Parallele zieht, welche den Kreisbogen schneidet; so schneiden der Kreisbogen und der Radius von derselben Stücke ab, deren Quadratsumme gleich dem Quadrate des Radius ist.

293) Wenn man von einem außerhalb eines Kreises an diesen sowohl eine Tangente als eine Sekante zieht, so ist das Quadrat der Tangente gleich dem Quadrate des von der Sekante durch die zur Tangente gehörigen Berührungssehne abgeschnittenen Stückes zusammen mit dem Rechtecke aus den Segmenten des in den Kreis fallenden Stückes der Sekante.

294) Zieht man von einem Punkte außerhalb des Kreises an diesen die beiden Tangenten und eine beliebige Sekante, so wird die letztere durch die Berührungssehne und die Kreisperipherie harmonisch getheilt.

295) Wenn von 2 Punkten außerhalb eines Kreises an diesen 2 Tangenten so gezogen werden, daß die Summe ihrer Quadrate gleich dem Quadrate der Verbindungslinie beider Punkte ist, und man zieht von einem der Punkte an den Kreis noch eine beliebige Sekante und vom andern Punkte nach den Durchschnittspunkten jener zwei andere Linien, so liegen deren Durchschnittspunkte mit der Peripherie und der erstern der erwähnten Punkte in gerader Linie.

296) Zieht man zur Centrale zweier Kreise eine Paralle, welche den einen Kreis in den Punkten A und B, den zweiten in C und D schneidet, so ist 1) die Summe des AC und BD gleich der doppelten Centrale; 2) die Differenz $AB^2 - CD^2$ der vierfachen Differenz der Quadrate beider Radien gleich.

297) Das Rechteck aus den Entfernungen je zweier potenzhaltender Punkte einer Symmetrale vom äußern Symmetralpunkt sind einander gleich.

298) Die äußere Potenz eines Punktes ist gleich dem Quadrate der Tangente und die innere Potenz gleich dem halben Quadrate der kleinsten Sehne, welche durch den Punkt gezogen werden kann. Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis heißt das Rechteck aus den Entfernungen dieses innerhalb oder außerhalb des Kreises gelegenen Punktes von den Durchschnittspunkten der durch ihn gehenden Geraden mit der Peripherie dieses Kreises.

299) Die Potenz eines Punktes ist auch gleich der Differenz der Quadrate der Entfernung dieses Punktes vom Centrum und des Radius.

300) Die Chordale zweier Kreise steht auf der Centrale senkrecht und halbirt die an beide Kreise gezogenen gemeinsamen Tangenten.

301) Die Differenz der Quadrate der Entfernungen eines jeden Punktes der Chordale von den Mittelpunkten der beiden Kreise ist gleich der constanten Differenz der Quadrate beider Radien.

302) Zieht man von einem der Durchschnittspunkte zweier sich schneidender gleichen Kreise eine Gerade, welche die Umfänge beider Kreise schneidet, so wird das zwischen den Umfängen liegende Stück dieser Geraden durch den Umfang desjenigen Kreises, welchen die gemeinsame Sehne der gleichen Kreise zum Durchmesser hat, halbirt.

303) Jede durch den Berührungspunkt zweier einander von außen oder innen berührender Kreise gezogene Gerade schneidet von den Kreisen ähnliche Segmente ab.

304) Zieht man durch den Berührungspunkt zweier Kreise zwei beliebige Gerade beiderseits bis zu den Peripherien, so sind die Stücke zwischen dem Berührungspunkte und den Peripherien der einen Geraden denen der andern proportional.

305) Wenn 2 Kreise einander berühren, so ist das zwischen den Berührungspunkten einer an beide Kreise gezogenen Tangente liegende Stück das geometrische Mittel zwischen den Durchmessern beider Kreise.

306) Liegt der Mittelpunkt des einen von 2 sich schneidenden Kreisen im Umfange des andern und es wird von diesem Centrum eine Gerade gezogen nach beliebiger Richtung, so schneiden die

gemeinschaftliche Sehne und die Umfänge beider Kreise von derselben Stücke ab, welche eine stetige geometrische Proportion bilden.

307) Wenn man über einem der an die Endpunkte eines Quadranten gezogenen Radien einen Halbkreis innerhalb des Quadranten beschreibt und in letzterem noch einen beliebigen Radius zieht, so ist das Stück des letztern von seinem Endpunkte bis zum Umfange des Halbkreises gleich dem von diesem Endpunkte auf die gemeinsame Tangente gefälltem Perpendikel.

308) Wenn man über einem der an die Endpunkte eines Quadranten gezogenen Radius einen Halbkreis innerhalb des Quadranten beschreibt und einen beliebigen Radius des letztern bis zur gemeinsamen Tangente verlängert, so bilden diese Linien, die durch die Kreisumfänge von ihr abgeschnittenen Stücke und der anliegende Abschnitt des Durchmessers, welcher durch das vom Durchschnittspunkte des Halbkreisumfanges auf ihn gefällte Loth gebildet wird, die 4 Glieder einer Proportion.

309) Wenn man über der Sehne eines Quadranten einen Halbkreis beschreibt und in letzterm 2 Supplementarsehnen zieht, so ist das Stück der größern zwischen den beiden Kreisumfängen gleich der kleinern Sehne.

310) Wenn von 2 sich schneidenden Kreisen der Mittelpunkt des einen in der Peripherie des andern liegt und man zieht von einem ihrer Durchschnittspunkte im erstern eine Sehne, welche den zweiten schneidet, so ist das zwischen beiden Umfängen liegende Stück derselben gleich der Verbindungslinie des andern Durchschnittspunkts der Kreise mit dem Endpunkte des vorgenannten Stückes, welcher in der Peripherie des zweiten Kreises liegt.

311) Wenn man von einem der Durchschnittspunkte zweier sich schneidender Kreise eine Linie zieht bis zum Durchschnitte mit beiden Kreisumfängen, so wird das zwischen letztern liegende Stück derselben durch den über der gemeinschaftlichen Sehne beschriebenen Halbkreis in 2 Stücke getheilt, die sich verhalten, wie die in einem Endpunkte der gemeinsamen Sehne auf ihr errichteten und bis zu den Kreisumfängen verlängerten Perpendikel.

312) Schneiden sich mehrere Kreise in denselben 2 Punkten und man zieht von einem dieser Punkte aus beliebig viele Linien bis zum Durchschnitte mit allen Peripherien, so haben die zwischen den letztern liegenden Stücke stets dasselbe Verhältniß.

313) Wenn man an je 2 von 3 ungleichen Kreisen die Tangenten zieht und bis zum Durchschnitte verlängert, so liegen die 3 Durchschnittspunkte stets in gerader Linie.

314) Wenn ein Kreis durch das Centrum eines zweiten geht und man zieht in letzterm eine Sehne, welche auf der gemeinsamen Sehne beider Kreise senkrecht steht, so wird dieselbe vom erstern Kreise so getheilt, daß das Rechteck aus ihren Segmenten gleich ist dem Rechtecke aus der zweiten Sehne und dem geometrischen Mittel zwischen ihren Segmenten.

315) Wenn sich 2 Kreise schneiden und man zieht von einem Durchschnittspunkte aus Linien, welche beide Peripherien schneiden, so verhalten sich die Rechtecke aus den Segmenten dieser Linien, wie die Abstände ihrer Theilungspunkte von der gemeinsamen Sehne beider Kreise.

316) Wenn sich 2 gleiche Kreise schneiden und man von einem Durchschnittspunkte aus eine Transversale zieht, welche beide Peripherien schneidet, so ist das Flächenstück, welches das zwischen beide Peripherien fallende Stück der Transversale abschneidet, gleich dem durch dessen Endpunkte bestimmten Dreiecke.

317) Wenn von 3 gleichen Kreisen 2 einander von außen berühren und der dritte ebenfalls durch den Berührungspunkt geht, so ist das Stück des letztern, welches von Bögen der erstern Kreise und dem über deren convexen Seite stehenden Bogenstücke des letztern begrenzt wird, gleich dem Vierecke, welches man erhält, wenn man die Durchschnittspunkte der Peripherien mit dem Berührungspunkte und auch dem Punkte verbindet, in welchem die den erstern Kreisen gemeinsame Tangente den dritten Kreis schneidet.

318) Wenn man über 2 beliebigen Segmenten des Durchmessers eines Halbkreises Halbkreise beschreibt, so ist die von den 3 Peripherien eingeschlossene Figur einem Kreise gleich, der das geometrische Mittel zwischen den erwähnten Segmenten zum Durchmesser hat.

319) Der Perimeter eines Kreises ist gleich dem Produkte aus der Länge des Durchmessers und der constanten Verhältnißzahl π des Durchmessers und Umfanges

$$\frac{u}{d} = \pi.$$

$$P = 2r\pi.$$

320) Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Quadrate des Radius multiplicirt mit der Zahl π.

$$F = r^2\pi = \frac{1}{4}d^2\pi.$$

321) Der Inhalt eines dem Bogen b entsprechenden Kreissectors ist gleich dem halben Produkte aus dem Sectorbogen und Radius

$$F = \frac{1}{2}br = \frac{r^2 b\pi}{360}$$

322) Der Inhalt eines Kreissegmentes vom Bogen b und der Höhe h ist gleich der Differenz des zugehörigen Sectors nnd des über dessen Sehne stehenden Dreiecks

$$F = \frac{r^2\, b\pi}{360} - \frac{1}{2}(r - h)\sqrt{2rh - h^2}.$$

323) Für das zwischen 2 parallelen Sehnen liegende Stück innerhalb eines Halbkreises, welches als Differenz zweier Segmente von den Höhen H und h angesehen werden kann, erhält man als Inhalt

$$F = \frac{r^2\,\pi}{360}(B - b) + [(r - h)\sqrt{2rh - h^2} - (r - H)\sqrt{2rH - H^2}].$$

324) Der Inhalt eines den Radien R und r entsprechenden Kreisringes ist

$$F = \pi(R^2 - r^2).$$

325) Der Inhalt eines zwischen 2 zusammenstoßenden Sehnen von der Länge S und s und dem zwischenliegenden Bogen begrenzten Theiles des Kreises ist

$$F = \frac{r^2\,\pi}{360}(360^0 - B - b) + \frac{1}{8}[S\sqrt{4r^2 - S^2} + s\sqrt{4r^2 - s^2}],$$

wo B und b die den Sehnen S und s entsprechenden Bögen bedeuten.

326) Der Inhalt eines Kreistrapezes ist

$$F = w\pi\,(2R - h)\,h,$$

wo w der Winkel des zugehörigen Sectors und h die Höhe des Trapezes bedeutet.

327) Soll in einen gegebenen Kreis ein gegebener Winkel so als Peripheriewinkel eigetragen werden, daß der zwischen seinen Winkeln und dem Kreisbogen befindliche Flächenraum ein Maximum werden soll, so muß der nach dem Scheitel gezogene Radius den Winkel halbiren.

328) Soll der Umfang desselben Flächenraums ein Maximum werden, so gilt dieselbe Construction.

329) Von allen Kreissectoren von gleichem Umfange 2u hat den größten Inhalt der einem Kreise vom Radius $\frac{u}{2}$ und dem Bogen u, also dem Centriwinkel $114^0\ 35'\ 29{,}76''$ angehörige Sector.

330) Unter allen Kreissegmenten gleichen Umfangs 2u hat den größten Inhalt der einem Kreise vom Radius $\frac{u}{\pi}$ angehörige.

331) Unter allen Kreissegmenten gleichen Inhalts f^2 hat den kleinsten Umfang ein ganzer Kreis vom Radius

$$r = \frac{f}{\sqrt{\pi}}$$

332) Wenn man über dem Durchmesser 2r eines Halbkreises 2 sich berührende Halbkreise und über diese einen ganzen Kreis beschreibt, so haben die erstern Kreise, falls der nach Abzug der 3 Kreise vom Halbkreise verbleibende Raum ein Maximum werden soll, die Radien

$$\frac{r}{2} \text{ und } \frac{r}{3}$$

333) Von allen Linienpaaren, welche man von 2 Punkten außerhalb eines gegebenen Kreises an die convexe Peripherie desselben zieht, haben die beiden die kleinste Summe, welche mit der an ihren Convergenzpunkt gezogenen Tangente gleiche Winkel bilden.

334) Wenn man auf dem Durchmesser eines Kreises einen Punkt annimmt, der nicht Centrum ist, so ist von allen Sehnen, die durch diesen Punkt gehen, die auf dem Durchmesser senkrechte die kleinste.

335) Nimmt man auf einer Kreislinie einen Bogen von $42^0\ 20'\ 47{,}23''$ an, zieht die diesen Bogen begrenzenden Radien, projicirt den einen Bogenendpunkt auf den gegenüberliegenden Radius, so hat der zum Centrum zu liegende Abschnitt des letztern dieselbe Länge, wie der obige Bogen, nämlich für

$$r = 1; \ \text{arc} = 0{,}7390847.$$

336) Derjenige Sector, der durch seine Sehne halbirt wird, hat die Bogenlänge arc $= 108^0\ 36'\ 13{,}75''$ und die Sehnenlänge $s = 1{,}6242058$.

337) Wenn ein Kreisquadrant durch eine mit dem Radius parallele Gerade halbirt werden soll, so hat diese Gerade die Länge 0,914770 und der Bogen beträgt $66^0\ 10'\ 23{,}52''$.

338) Soll eine Sehne den Halbkreis halbiren, so hat der Bogen $132^0\ 20'\ 47{,}25''$ und die Sehne die Länge $s = 1{,}8295422$.

339) Soll von einem Punkte der Peripherie aus der ganze Kreis in 3 gleiche Theile getheilt werden, so haben die beiden äußern Bögen $149^0\ 16'\ 27''$, der innere $61^0\ 27'\ 6''$ und die Sehne die Länge 1,9285340.

340) Ueber AB als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben und im Mittelpunkte C die GH $\perp$ AB gezogen. Man theile AC in 5 gleiche Theile, davon AD zwei seien. Ebenso theile man BC in 2 gleiche Theile und trage den einen BE auf den verläugerten Durchmesser nach BF. Beschreibt man jetzt über DE einen Halbkreis, der GH in G schneidet und über AF einen Halbkreis, der GH in H schneidet, so ist GH näherungsweise der Seite eines Quadrats, welches an Inhalt dem Kreise gleich ist. Wie groß ist der begangene Fehler?

341) Man ziehe in einem Kreise den Durchmesser AB, setze darauf senkrecht den Radius CD, nehme CE $=$ ⅞CD, verbinde A mit E und mache AF $=$ ½CD. Zieht man nun senkrecht auf AB und FH parallel der EG die Gerade FG, so ist näherungsweise AH gleich dem Kreisumfange (Jacob de Gelder).

342) In einem Kreise ziehe man den Durchmesser AB und lege durch B senkrecht eine Tangente DE. Den Radius BC trage man von B nach F, mache aus B und F mit BC den Kreuzschnitt bei G nnd ziehe CG, welche die Tangente in D schneidet. Trägt man nun von D aus den Radius dreimal auf DE bis E und zieht AE, so ist AE näherungsweise gleich der halben Kreisperipherie (Kochanski).

343) Es ist AB eine gegebene Strecke. Theilt man AB in 3 gleiche Theile und nimmt 2 davon gleich AC, errichtet in C eine Senkrechte CD $=$ CB und trägt AD von A nach E auf, addirt zum Abschnitt BE noch ¼EF, so ist BF nahezu der Durchmesser eines Kreises, dessen Umfang gleich AB ist.

344) Zieht man in einem Kreise 2 aufeinander senkrechte Durchmesser AB und EF und aus A die Sehne AD gleich der Seite des regulären eingeschriebeneu Dreiecks, nimmt auf AB das Stück AH $=$ AD und beschreibt aus H mit AH einen Kreis, der den verlängerten Durchmesser EF in M schneidet, so ist CM näherungsweise gleich dem Quadrantenbogen (Nicolaus de Cusa).

345) Setzt man an den Endpunkt A eines Durchmessers AB des gegebenen Kreises einen Winkel C $=$ arcsin. $\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ und verlängert den Schenkel AD desselben, bis er die an dem andern

Endpunkt B des Durchmessers errichtete Tangente in C schneidet, so ist BC gleich dem Kreisquadranten. (Simon a Quercu.) Wie groß ist hier der Fehler?

346) Von den Endpunkten A und B des Durchmessers AB eines Kreises ziehe man die Senkrechten AM und BM, von welchen jede dem Durchmesser gleich ist, verlängere AB bis D so, daß AD $= \frac{1}{2}$AB, errichte in D die Senkrechte DE $=$ DA, verbinde E mit M und D mit B durch EM und DB, welche sich in F schneiden. Zieht man durch F eine Parallele zu AB und durch das Centrum CP $\parallel$ AM, so ist die dadurch bestimmte Gerade FG dem Quadrantenbogen näherungsweise gleich (Wanschaff). Ist diese Construction brauchbar und genau genug?

347) Trägt man in einen Halbkreis ADB den Radius als Sehne ein, halbirt die letztere in E, zieht vom Centrum aus CE, verlängert dieselbe, bis sie die in B auf AB errichtete Senkrechte in T schneidet und errichtet am andern Endpunkte A des Durchmessers eine Senkrechte AH, welche dem 4fachen Radius gleich ist, so ist, wenn man T mit H verbindet, die TH nahezu der halben Kreisperipherie gleich.

348) Man nehme auf dem einen Schenkel eines Rechten vom Scheitel aus AB gleich dem Radius des gegebenen Kreises, auf dem andern Schenkel gleichfalls vom Scheitel AC $= \frac{11}{5}$ AB und AD $= \frac{13}{5}$ AB, ziehe BC und BD, mache AE $=$ BC und lege durch E die EF $\parallel$ BD, so ist AF nahezu dem Umfange des Halbkreises gleich (Specht).

349) Das Dreieck ACB sei gleichschenklig. Man halbire die Basis AB in a, ziehe Ca und mache Cb $=$ Ca, verbinde a mit b, halbire ferner ab in a′, ziehe Ca′, mache Cb′ $=$ Ca′, verbinde a′ mit b′, verfahre ebenso mit dem Dreiecke a′Cb′ und wiederhole dasselbe Verfahren, so liegt b zwischen C und B, b′ zwischen C und b u. s. w. Man gelangt auf diese Weise fortgehend immer näher einem Punkte x, der die Eigenschaft hat, daß wenn man aus C mit Cx einen Kreis beschreibt, der Bogen xy der Senkrechten Ap auf BC diesem Kreisbogen gleich ist (Johann Bernouilli).

350) Um den Radius eines Kreises zu finden, dessen Umfang einer gegebenen Geraden gleich ist, bilde man aus letzterer das Quadrat

ABCD, verlängere die Diagonale BD und bestimme in derselben einen Punkt von der Eigenschaft, daß, wenn man das Loth ab auf die verlängerte AD fällt, das hierdurch bestimmte Rechteck gleich ¼ABCD wird; hierauf suche man b', so ist das Rechteck aa'b'c' gleich ¼Aabc. Durch so fortgesetzte Construction erhält man die Linien Da, Da' u. s. w. und diese Geraden kommen dem gesuchten Radius immer näher (Descartes).

351) Ueber AB als Durchmesser sei ein Kreis beschrieben und AB in 4 gleiche Theile getheilt; AC seien drei solcher Theile. Errichtet man in C die CD = ¼AB $\perp$ AB und zieht AD, so ist letztere Gerade nahezu dem Quadrantenbogen des Kreises gleich (Wolf). Wie groß ist der bei dieser Construction begangene Fehler?

G.

Die Kreisdreiecke.

352) Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich der Summe der 3 Seiten multiplicirt mit dem halben Radius des eingeschriebenen Kreises $F = \frac{1}{2}(a + b + c)\, r.$

353) Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem vierten Theile des Produkts seiner 3 Seiten dividirt durch den Radius des umschriebenen Kreises

$$F = \frac{abc}{4R}$$

354) Der Radius des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises steht zu den 3 Seiten in folgender Beziehung

$$4r^2(a + b + c)^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

und für das rechtwinklige Dreieck

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

355) Für den Radius des umschriebenen Kreises und die 3 Seiten findet die Relation statt

$$4R^2[8(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - 4(a^4 + b^4 + c^4)] = a^2b^2c^2.$$

356) Die Beziehungen zwischen den 3 Radien o, p, q der äußern Berührungskreise eines Dreiecks sind

$$\left.\begin{array}{l} o = \frac{1}{2}(b + c - a) \\ p = \frac{1}{2}(a + c - b) \\ q = \frac{1}{2}(b + a - c) \\ q = o + p + r \end{array}\right\} \text{für das rechtwinklige Dreieck.}$$

Für das schiefwinklige Dreieck hat man

$$4o^2(b + c - a)^2 = 4p^2(a + c - b)^2 = 4q^2(b + a - c)^2$$
$$= 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

357) Die Summe der Abschnitte auf einer Dreiecksseite, welche durch die Berührungspunkte des innern und eines äußern Berührungskreises bestimmt werden, ist dem halben Umfange des Dreiecks gleich und jeder einzelne dieser Abschnitte ist gleich dem halben Umfange vermindert um eine Dreiecksseite

358) Der reciproke Werth des Radius des einem Dreiecke einbeschriebenen Kreises ist gleich der Summe der reciproken Werthe der 3 Höhenlinien

$$1/r = 1/d + 1/e + 1/f.$$

359) Der reciproke Werth des Apothems ist gleich der Summe der reciproken Werthe der Radien der 3 äußern Berührungskreise

$$1/r = 1/o + 1/p + 1/q.$$

360) Der reciproke Werth jeder Höhenlinie ist gleich der halben Differenz zwischen den reciproken Werthen des Radius des innern und dem Radius des jener Höbe entgegengesetzten äußern Berührungskreises $1/h = 1/2(1/r - 1/o).$

361) Der reciproke Werth jeder Höhenlinie ist gleich der halben Summe aus den reciproken Werthen der dieser Höhe anliegenden äußern Berührungskreisradien

$$1/h = 1/2(1/p + 1/q).$$

362) Beschreibt man in ein rechtwinkliges Dreieck einen Kreis, so ist dessen Durchmesser gleich der Differenz aus der Summe der Catheten und der Hypothenuse.

363) Beschreibt man in ein rechtwinkliges Dreieck einen Halbkreis, dessen Durchmesser auf einer Cathete liegt und dessen Peripherie die beiden andern Seiten berührt und man zieht vom Endpunkte des Durchmessers eine Linie durch den Berührungspunkt auf der Hypothenuse bis zur Verlängerung der zweiten Cathete, so ist diese Verlängerung der Cathete gleich.

364) Beschreibt man um ein Dreieck einen Kreis und zieht durch die Mitte einer Seite einen Durchmesser und fällt vom Endpunkte desselben ein Loth auf die längste der beiden andern Seiten, so wird diese so getheilt, daß das eine Segment gleich derselben Summe, des andern gleich der halben Differenz der beiden letzterwähnten Seiten ist.

365) Fällt man ferner vom Fußpunkte desselben Perpendikels ein zweites Perpendikel auf die den Winkel an der Spitze halbirenden Transversale, so wird die Basis durch dasselbe halbirt.

366) Wenn in einen Halbkreis ein Dreieck beschrieben ist, dessen Basis der Durchmesser und man errichtet auf dem Durchmesser ein Perpendikel, welches eine der andern Seiten schneidet, die Peripherie und die 3. Seite schneidet, so stehen die 3 Abschnitte dieses Lothes in stetiger geometrischer Proportion.

367) Beschreibt man in einen Halbkreis ein Dreieck, dessen eine Seite dem Durchmesser, die andere gleich dem Radius, so ist die dritte Seite das geometrische Mittel zwischen der zweiten Seite und der Summe der ersten und zweiten.

368) Verlängert man die Basis eines Dreiecks beiderseits um die anstoßende Seite und beschreibt um das aus den Endpunkten der Verlängerungen und dem Scheitel bestimmte Dreieck einen Kreis, so halbirt der an der Spitze gezogene Radius dieses Kreises den Winkel an der Spitze.

369) Wenn man an die Endpunkte eines Schenkels eines in einen Kreis eingeschriebenen gleichschenkligen Dreiecks Tangenten bis zum gegenseitigen Durchschnitte zieht und sowohl dessen Durchschnittspunkt als auch einen Berührungspunkt mit einem beliebigen Punkte der Peripherie verbindet, so schneiden diese Verbindungslinien die Basis oder deren Verlängerung so, daß die vom andern Berührungspunkte ausgemessenen Abschnitte in geometrischer Progression stehen.

370) Der Punkt, in welchem die winkelhalbirende Transversale eines Dreiecks die Peripherie des umschriebenen Kreises schneidet, hat von den Endpunkten der Basis und dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises gleiche Abstände.

371) Wenn man von der Spitze eines in einen Kreis eingeschriebenen Dreiecks eine Gerade an die Basis zieht, welche der an einem Endpunkte der letztern gezogenen Tangente parallel läuft, so ist diese die 4. Proportionale zur Basis und den beiden andern Seiten.

372) Wenn man von dem Scheitel eines Dreiecks an den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises eine Gerade zieht und dieselbe bis zur Peripherie des umschriebenen Kreises verlängert, so verhält sich die ganze Linie zur Verlängerung ebenso, wie die Summe der anstoßenden Seiten zur Basis.

373) Wenn man von den Endpunkten der Basis eines Dreiecks an die winkelhalbirende Transversale von der Spitze Lothe fällt und durch die Fußpunkte dieser Lothe und durch den Fußpunkt der zur Basis gehörigen Höhe einen Kreis beschreibt, so halbirt dessen Umfang die Basis des Dreiecks.

374) Wenn man über den durch die Höhe gebildeten Abschnitten der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks Halbkreise beschreibt, so schneiden diese von den Catheten Stücke ab, welche sich verhalten, wie die Cuben der ganzen Seiten.

375) In einem Dreiecke sei die Basis a und die beiden andern Seiten b und c. Man erhält, wenn der Ausdruck

$$\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$$

mit w bezeichnet wird: (Euler)

1) für die Distanz des Schnittpunkts der 3 Höhen von der Basis $(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) : 6w$;

2) für die Distanz des Schnittpunkts der 3 seitenhalbirenden Transversalen $w : 6a$;

3) für die Distanz des Centrums des eingeschriebenen Kreises $\frac{1}{2}(a + b - c)$;

4) für die Distanz des Centrums des umschriebenen Kreises $a(b^2 + c^2 - a^2) : 2w$.

Die Entfernung der Fußpunkte dieser Perpendikel vom linken Endpunkt der Basis sind beziehungsweise

1) $(b^2 + c^2 - a^2) : 2a$;

2) $(3a^2 + b^2 - c^2) : 6a$;

3) $(b + a - c) : 2$;

4) $\frac{a}{2}$

376) Setzt man

$$16f^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$a + b + c = u;\ ab + ac + bc = v;\ abc = w,$$

so erhält man für die Abstände der betrachteten 4 Dreieckspunkte von einander: (Fuß)

$$(1) \text{ von } (2)\ \frac{w}{4f^2}\ \tfrac{4}{9}(u^2 - 2v)$$

$$(1) \text{ von } (3)\ \frac{w^2}{4f^2} - \frac{4w}{u} - u^2 + 3v$$

$$(1) \text{ von } (4)\ \frac{9w^2}{16f^2} + 2v - u^2$$

(2) von (3) $(5uv - u^3 - 18w) : 9u$

(2) von (4) $\frac{w^2}{16f^2} - \frac{1}{9}(u^2 - 2v)$

(3) von (4) $\frac{w^2}{16f^2} - \frac{w}{u}$

377) Ist unter 3 merkwürdigen Dreieckspunkten die Lage des Schwerpunkts gegeben und setzt man zur Abkürzung

$$F = \sqrt{\frac{w^2}{16f^2} - \frac{w}{u}}$$

$$G = \sqrt{\frac{w^2}{16f^2} - \frac{1}{9}(u^2 - 2v)}$$

$$H = \sqrt{5uv - u^3 - 18w}$$

$$F' = 4f^4 : (3G^2 + 6H^2 - 2F^2)$$

$$G' = 3f^2(F^2 - G^2 - 2H^2) : 3(G^2 + 2H^2) - 2F^2$$

$$H' = 36H^2 + 32G + \frac{20G^2}{F}$$

so sind die 3 Seiten des Dreiecks den Wurzeln der kubischen Gleichung (Fuß)

$$x^3 - x^2\sqrt{H'} + x\left(\frac{1}{4}H' + 2G' + \frac{G_,^2}{F'}\right) - G'\sqrt{H'} = 0.$$

Ist das Dreieck gleichschenklig, so liegen alle 4 Punkte in derselben Geraden.

378) Zwischen den Radien des um und in ein Dreieck beschriebenen Kreises R,r uud der Centrallinie l besteht die Relation

$$l^2 = R^2 - 2Rr.$$

379) Soll in einen Kreis vom Radius R parallel mit einer Tangente eine Sehne derartig gezogen werden, daß das über derselben in den Kreis geschriebene Dreieck ein Maximum werde, so muß die Sehne um den halben Radius von der Tangente abstehen und der Scheitel desselben in dem Endpunkte des auf der Tangente senkrechten Durchmessers liegen; also $M = \frac{3}{8}R^2\sqrt{3}$.

H.

Die Kreisvierecke.

380) Wenn man aus den Endpunkten der Seite eines Quadrats erst mit der Seite selbst, dann mit der Diagonale als Radius Kreise beschreibt, so ist die mondförmige Fläche gleich dem Quadrate.

381) Wenn man über den großen Seiten eines Rechtecks nach einer Seite hin Halbkreise beschreibt, so ist die von beiden Peripherien und den 2 übrigen Rechteckseiten begrenzte Figur an Inhalt dem Rechtecke gleich.

382) In jedem Kreisvierecke ist die Summe der Produkte der Gegenseiten dem Produkte beider Diagonalen gleich (Ptolemäus).

383) In jedem Vierecke, das nicht Kreisviereck ist, ist das Rechteck aus den Diagonalen kleiner als die Summe der Rechtecke aus den Gegenseiten.

384) In jedem Kreisviereck verhalten sich die Diagonalen wie die Summe der Rechtecke aus den die Diagonalen einschließenden Seiten

$$f : g = (ad + be) : (ab + cd).$$

385) Die 3 Diagonalen eines Kreisvierecks haben die Länge:

$$f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$$

$$g = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

$$h = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ab + cd)}{ac + bd}}$$

386) Der Flächeninhalt eines Kreisvierecks, dessen Seiten a, b, c, d sind, beträgt

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a+b+c+d)}$$

und falls $a + b + c + d = u$

$$F = \sqrt{\left(\frac{u}{2} - a\right)\left(\frac{u}{2} - b\right)\left(\frac{u}{2} - c\right)\left(\frac{u}{2} - d\right)}$$

Der Radius des diesem Vierecke umschriebenen Kreises beträgt

$$R = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}}$$

387) Der Inhalt eines Kreisvierecks ist auch gleich dem Produkte seiner 3 Diagonalen, dividirt durch den 4fachen Radius des umschriebenen Kreises (Gerhard)

$$F = \frac{fgh}{4R}$$

388) Läßt sich um und in ein Viereck ein Kreis beschreiben, so ist die Relation zwischen beiden Radien R,r und der Centrale beider Kreise e

$$(R^2 - e^2)^2 = 2r^2(R^2 + e^2).$$

389) Für ein Viereck von der vorigen Eigenschaft, erhält man ferner (Fuß)

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{abcd}}$$

$$r = \frac{\sqrt{abcd}}{a + c} = \frac{\sqrt{abcd}}{b + d}$$

$$F = \sqrt{abcd}$$

390) Die winkelhalbirenden Transversalen eines Vierecks bestimmen auf den Seiten die Ecken eines Kreisvierecks.

391) In jedem vollständigen Vierecke wird jede der 3 Diagonalen von den beiden übrigen harmonisch geschnitten. (Pappus, Lahire.)

392) Das größte Rechteck, das sich einem Kreise vom Radius R einschreiben läßt, hat die Seiten $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$ und $\frac{2}{3}R\sqrt{6}$; also $M = \frac{4}{3}R^2\sqrt{2}$.

393) Soll aus 4 Linien a, b, c, d das Viereck vom größten Inhalte gebildet werden, so muß dasselbe ein Kreisviereck sein.

394) Unter allen einem Kreise eingeschriebenen Vierecken hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

J.

Die Kreispolygone.

395) Der Inhalt eines jeden Tangentenpolygons oder eines regulären Polygons ist gleich dem Produkte aus seinem halben Umfange und dem Radius des eingeschriebenen Kreises

$$F = \frac{u}{2} \cdot R.$$

396) In jedem Sehnenpolygon ist die Summe des 1., 3., 5. . . . Winkels gleich der Summe des 2., 4. 6. . . . Winkels.

397) In jedem Tangentenpolygon ist die Summe der 1., 3., 5. . . . Seite gleich der Summe der 2., 4., 6. . . . Seite.

398) Die Relationen zwischen den Seiten eines dem Kreise vom Radius R eingeschriebenen n-Ecks und 2n-Ecks a_n und a_{2n}, und der Seite des umschriebenen n-Ecks u_n sind:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2_n}}$$

$$a_n = \frac{a_{2n}}{R}\sqrt{4R^2 - a^2_{2n}}$$

$$u_n = \frac{2a_n \,.\, R}{\sqrt{4R^2 - a^2_n}}$$

$$a_n = \frac{2u_n \,.\, R}{\sqrt{4R^2 + u^2_n}}$$

399) Der Umfaug eines eingeschriebenen regulären n=Ecks ist kleiner als der Umfang des umschriebenen regulären n=Ecks

$$E_n < U_n.$$

400) Der Umfang des eingeschriebenen 2n=Ecks ist größer als der Umfang des eingeschriebenen n=Ecks

$$E_{2n} > E_n.$$

401) Der Umfaug des umschriebeuen 2n=Ecks ist das harmonische Mittel zwischen den Umfängen des eingeschriebenen und nmschriebenen n=Ecks

$$U_{2n} = \frac{2E_n \,.\, U_n}{E_n + U_n.}$$

402) Der Umfang des umschriebenen 2n=Ecks ist das geometrische Mittel der Umfänge des eingeschriebenen n=Ecks und umschriebenen 2n=Ecks

$$E_{2u} = \sqrt{E_n \,.\, U_{2n}}$$

403) Das eingeschriebene 2n=Eck ist das geometrische Mittel zwischen den Flächen des eingeschriebenen und umschriebenen n=Ecks

$$E_{2n} = \sqrt{E_n \,.\, U_n.}$$

404) Das umschriebene 2n=Eck ist das harmonische Mittel zwischen den Flächen des eingeschriebenen 2n=Ecks und umschriebenen n=Ecks

$$U_{2n} = \frac{2E_{2n} \,.\, U_n}{E_{2n} + U_n.}$$

405) Die Differenz des umschriebenen und eingeschriebeneu 2n=Ecks ist kleiner als der 4. Theil der Differenz des umschriebenen und eingeschriebenen n=Ecks

$$(U_{2n} - E_{2n}) < \tfrac{1}{4}(U_n - E_n).$$

406) Die Differenz des eingeschriebenen 4n=Ecks und 2nEcks ist größer als der 4. Theil der Differenz des eingeschriebenen 2n=Ecks und n=Ecks

$$(E_{4n} - E_{2n}) > \tfrac{1}{4}(E_{2n} - E_n).$$

407) Die Differenz des umschriebenen und eingeschriebenen 2n-Ecks ist größer als die Hälfte der Differenz des eingeschriebenen 2n-Ecks und n-Ecks

$$(U_{2n} - E_{2n}) > \tfrac{1}{2}(E_{2n} - E_n).$$

408) Der Kreis ist an Inhalt größer als die Summe eines eingeschriebenen 2n-Ecks und des 3. Theiles des eingeschriebenen 2n-Ecks und n-Ecks

$$K > E_{2n} + \tfrac{1}{3}(E_{2n} - E_n).$$

409) Der Kreis ist an Inhalt kleiner als die Differenz des umschriebenen n-Ecks und dem dritten Theile der Differenz des umschriebenen und eingeschriebenen n-Ecks

$$K < U_n - \tfrac{1}{3}(U_n - E_n).$$

410) Unter allen isoperimetrischen Polygonen von gleicher Seitenzahl ist das gleichseitige ein Maximum.

411) Unter allen Polygonen von gleicher Seitenzahl und gleichem Inhalte hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

412) Unter allen isoperimetrischen Polygonen von gleicher Seitenzahl ist das reguläre am größten.

413) Von 2 regulären Polygonen von gleichem Umfang hat dasjenige von größerer Seitenzahl auch den größern Inhalt.

414) Unter allen isoperimetrischen Sehnenpolygonen hat das reguläre den größten Inhalt.

415) Unter allen Polygonen gleichen Inhalts, welchr einem Kreise eingeschrieben sind, hat das reguläre den kleinsten Umfang.

416) Unter allen regulären isoperimetrischen Polygonen hat der Kreis (das centrische Unendlicheck) den größten Inhalt.

417) Unter allen Figuren gleichen Inhalts hat der Kreis den kleinsten Umfang.

418) Die Summe der Perpendikel, welche aus den Ecken eines regulären Polygons auf eine der Seiten gefällt wird, ist gleich dem mit der Seitenzahl multiplicirten Radius des eingeschriebenen Kreises.

419) Wenn man eine Kreislinie in eine ungerade Anzahl gleicher Theile theilt und man verbindet den irgend einem Theilpunkt diametral gegenüberliegenden Punkt mit allen auf demselben Halbkreis liegerden Punkten, so ist das Produkt aller auf solche Art gezogener Sehnen gleich der durch die Zahl der Sehnen ausgedrückten Potenz des Radius

$$OA_1 \times OA_2 \times OA_3 \times OA_4 = R^4.$$

420) Wenn man die Kreislinie in eine ungerade Anzahl gleicher Theile theilt und man verbindet den Punkt, der dem mit Null bezeichneten Theilpunkt diametral gegenüberliegt, mit denjenigen Theilpunkten, deren Indexe die Progression 0, 2, 4, 8 . . . bilden, so ist das Produkt der so gezogenen Sehnen gleich der durch ihre Zahl ausgedrückten Potenz des Radius. Für den in 9 Theile getheilten Umfang ist z. B.

$$OA_1 \,.\, OA_2 \,.\, OA_4 = R^3.$$

421) Die Relationen zwischen den Radien R und r des einem Polygon umschriebenen und eingeschriebenen Kreises und der Centrallinie e sind

1) für das Fünfeck

$$(R^2 - e^2)^3 + 2(R^2 - e^2)^2 Rr - 4(R^2 - e^2) R^2 r^2 - 8 Rr^3 e^2 = 0.$$

2) Sechseck

$$3(R^2 - e^2)^4 - 4(R^2 - e^2)^2 (R^2 + e^2) r^2 - 16 R^2 r^4 e^2 = 0.$$

3) Siebeneck.

Setzt man $p = R + r$; $q = R - r$, so ist

$$[pq - rp + rq - 2r^2]\, 2pqr\sqrt{(p - r)(p + q)} + [p^2q^2 - p^2r^2 - r^2q^2]\, 2r\sqrt{(q - r)(p + q)} = \pm (pq - rp + rq)(p^2q^2 + r^2p^2 - r^2q^2).$$

4) Achteck

$$p^2r\sqrt{q^2 - r^2} + q^2r\sqrt{p^2 - r^2} + pq\sqrt{(p^2 - r^2)(q^2 - r^2)} - pqr^2 = 0.$$

422) Theilt man den Radius eines Kreises nach stetiger Proportion, so ist das größere Stück desselben der Seite des demselben Kreise eingeschriebenen regulären Zehnecks gleich

$$a = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

423) Durch Subtraction des 10-Eckbogens vom 6-Eckbogen erhält man den Bogen des regulären 15-Ecks

$$\text{arc. } 1/6 - \text{arc. } 1/10 = \text{arc. } 1/15 \text{ oder auch}$$

$$\text{arc. } 2/5 - \text{arc. } 1/3 = \text{arc. } 1/15.$$

424) In demselben Kreise ist das Quadrat der Fünfeckseite gleich der Summe der Quadrate der Sechseckseite und Zehneckseite

$$a^2_5 = a^2_6 + a^2_{10}.$$

425) In dem regulären 5-Eck schneiden sich 2 Diagonalen, die nicht von derselben Ecke ausgehen nach stetiger Proportion und zwar ist das größere Stück der Fünfeckseite gleich.

426) Verlängert man 2 Seiten des 5-Ecks bis zu ihrem Durchschnitte, so ist jede der beiden Verlängerungen der Diagonale des Fünfecks gleich.

427) Die Flächen der isoperimetrischen regulären Polygone vom Dreieck an bis zum Kreise bilden eine steigende Reihe; die Umfänge dieser Polygone eine fallende Reihe.

428) Ist n eine Primzahl und also n — 1 eine zusammengesetzte, so zerlege man n — 1 in seine Primfactoren, wodurch n — 1 die Form $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \ldots$ erhält; die Theilung des Kreises in n gleiche Theile fordert dann die gleichzeitige Auflösung von a Gleichungen des zweiten, b Gleichungen des dritten, c Gleichungen des fünften Grades u. s. w. Da sich aber durch Kreis und Gerade nur die Wurzeln quadratischer Gleichungen construiren lassen, so folgt, daß die Einschreibung eines regulären n-Ecks, n als Primzahl vorausgesetzt, nur dann elementar-geometrisch möglich ist, wenn n — 1 eine Potenz von 2 ausmacht. Diese Eigenschaft findet statt bei den Zahlen n = 3, 5, 17, 257 . . . . . (Gauß.)

429) Es sei AB der Durchmesser eines Kreises und CD ein auf demselben senkrechter Radius. Man theile um näherungsweise ein n-Eck in denselben Kreis zu beschreiben, AB in n gleiche Theile, verlängere sowohl AB als CD nach außen um einen solchen Theil AC = DF = $\frac{1}{n}$AB und ziehe EF, welche den Kreis zum ersten Mal in G schneidet. Dann ist die Gerade zwischen G und dem dritten Theilpunkt H näherungsweise der Seite des gesuchten regulären n-Ecks gleich.

Setzt man den Radius = R, so erhält man für die Seite den Ausdruck

$$a = \frac{R}{2}\sqrt{(n-4)^2 + 32 - (n-6)\sqrt{(n-2)^2 - 8}}$$

Diese Construction ist brauchbar vom 6-Eck an.

430) Um die Dreitheilung eines Winkels ACD näherungsweise auszuführen, ziehe man von irgend einem Punkte A des einen Schenkels eine Senkrechte AD auf den andern, mache CB = CD ziehe CF = AD parallel zu AD und die Hypothenuse AB. Nun verlängere man AC so, daß CJ = AB wird und beschreibe aus C mit CJ einen Bogen, ziehe JF und verlängere diese Linie, bis sie die in G auf CF errichtete Senkrechte GH in H trifft; sodann ist

$$\angle\, GHJ = \tfrac{1}{3} \angle\, ACD \text{ . approx.}$$

431) Es bedeute: a die Seite des regulären n-Ecks,
R den Radius des umschriebenen Kreises,
r den Radius des eigeschriebenen Kreises,
A die Seite des umschriebenen n-Ecks,
f den Flächeninhalt des eingeschrieb. n-Ecks.

Relationen zwischen a, R, r, A, f für die einfachsten regulären Polygone.

Gesucht	Dreieck.	Sechseck.	Zwölfeck.
a	$R\sqrt{3}$	R	$R\sqrt{2-\sqrt{3}}$
a	$2r\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}r\sqrt{3}$	$2r\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
R	$\frac{1}{3}a\sqrt{3}$	a	$a\sqrt{2+\sqrt{2}}$
R	$2r$	$\frac{2}{3}r\sqrt{3}$	$2r\sqrt{2-\sqrt{3}}$
r	$\frac{a}{6}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$
r	$\frac{1}{2}R$	$\frac{R}{2}\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$
A	$2R\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}R\sqrt{3}$	$2R\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
A	$\frac{2}{3}a\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}a\sqrt{3}$	$2a\sqrt{2-\sqrt{3}}$
f	$\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$	$3R^2$
f	$\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$	$3a^2\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

Gesucht	Viereck.	Achteck.	Sechzehneck.
a	$R\sqrt{2}$	$R\sqrt{(2-\sqrt{2})}$	$R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
a	$2r$	$2r\sqrt{(3-2\sqrt{2})}$	$2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
R	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$	$a:\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
R	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$	$2r:\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
r	$\frac{R}{2}\sqrt{2}$	$\frac{R}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$	$\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
r	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}\sqrt{(3+2\sqrt{2})}$	$\frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
A	$2R$	$2R\sqrt{(3-2\sqrt{2})}$	$2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
A	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$	$\frac{2a}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
f	a^2	$2a^2\sqrt{(3+2\sqrt{2})}$	$2a^2\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
f	$2R^2$	$2R^2\sqrt{2}$	$2R^2\sqrt{(2-\sqrt{2})}$

Gesucht.	Fünfeck.	Zehneck.	Fünfzehneck.
a	$\frac{R}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$	$\frac{R}{2}(\sqrt{5 - 1})$	$\frac{R}{4}[\sqrt{15 + \sqrt{3} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}]$
a	$\frac{2}{5}r\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$	$r\sqrt{1a - \frac{2}{5}\sqrt{5}}$	
R	$\frac{a}{2}\sqrt{(2 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$	$\frac{a}{2}(\sqrt{5 + 1})$	$\frac{a}{3}\sqrt{3 - \sqrt{15}) + \sqrt{50 - 22\sqrt{5}}}$
R	$\frac{r}{5}\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}$	$r\sqrt{(2 - \frac{2}{5}\sqrt{5})}$	
r	$\frac{R}{4}\sqrt{(6 + 2\sqrt{5})}$	$\frac{R}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$	$\frac{R}{4}\sqrt{9 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{15 + 6\sqrt{5}}}$
r	$\frac{a}{2}\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$	$\frac{a}{2}\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$	
A	$a\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}$	$a\sqrt{(2 - \frac{2}{5}\sqrt{5})}$	
A	$2R\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$	$R\sqrt{(1 - \frac{2}{5}\sqrt{5})}$	
f	$\frac{5}{8}R^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$	$\frac{5}{2}a^2\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$	
f	$\frac{5}{4}a^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$	$\frac{5}{4}R^2\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$	

432) Die Seite des regulären 17-Ecks ist

$$a = \frac{R}{4}\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}$$

$$= R\ 0{,}3674990.$$

Zur Construction dieser Seite dienen die Formeln für R = 1

$$\tfrac{1}{2}X = \sqrt{\tfrac{17}{64}} + \tfrac{1}{8} = \sqrt{[(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{8})^2]} + \tfrac{1}{8}$$

$$\tfrac{1}{2}Y = \sqrt{\tfrac{17}{64}} - \tfrac{1}{8} = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{8})^2} - \tfrac{1}{8}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}X + \sqrt{(\tfrac{1}{2}X + (\tfrac{1}{2})^2}$$

$$y = +\tfrac{1}{2}Y + \sqrt{(\tfrac{1}{2}Y)^2 + (\tfrac{1}{2})^2}$$

$$z = \sqrt{2x}$$

$$\cos.\ 2x = \tfrac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - z^2})$$

Errichtet man im Endpunkte dieses Cosinus ein Perpendikel auf demselben, so schneidet dieses den Bogen 2φ ab, womit gleichzeitig die Seite des 17-Ecks $2 \sin. \varphi = \text{Chord.} \frac{360^0}{17}$ bestimmt ist (Schlömilch).

433) Aus der 17-Eckseite findet sich für die Seite des reg. 34-Ecks

$$a = \frac{R}{8}[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}]$$

$$= R\ .\ 0{,}184538.$$

Um dieselbe zu construiren, verfährt man folgendermaßen:

Ueber dem Radius AO des gegebenen Kreises, darin das 34-Eck zu verzeichnen, beschreibe man als Durchmesser einen Kreis; errichte die Tangente AD = 2R, verbinde D mit der Mitte C von AO durch CD, welche den kleinen Kreis von E und E′ schneidet, construire ferner über DE und DE′ die Halbkreise DHE und DH′E′, ziehe DF = R $\perp$ CD und verbinde F mit den Mittelpunkten G,G′ der Halbkreise DE und DE′ durch die Geraden FG und FG′, welche die Halbkreise in H und H′ schneiden. Ueber FH′ als Durchmesser beschreibe man einen neuen Halbkreis FMH′, ziehe in der Distanz FJ = FL eine Parallele JR mit FH′ und fälle aus R das Loth RS $\perp$ FH′, so ist FS gleich der gesuchten Seite.

Theil II.

Stereometrie.

Inhalt.

Benutzte Schriften.

La Fremoire, Elementar-Geometrie v. Kauffmann.

Legendre, Comp. der Stereometrie v. Hechel.

Balzer, Elemente der Mathematik.

Meier Hirsch, Geometrische Aufgaben.

Hechel, Sphärische Trigonometrie.

Westberg, Elemente der Geometrie.

Sohncke's Aufgaben aus der Differentialrechnung v. Heis.

Thiedner, Aufgaben aus der Physik.

Koppe, Krystallographie.

A.

Zur Propädeutik.

§ 1. Der Punkt im Raume. Fixirung desselben. Coordinatensysteme.

§ 2. Mehrere Punkte im Raume. Geraden, welche durch 2 und mehrere Punkte hindurchgehen. Mittelpunkt der mittlern Entfernungen eines System's von Punkten. Durchschnittspunkte von Geraden in der Ebene und im Raume. Entfernung eines Punkts von einer Geraden.

§ 3. Die Ebene. Durchschnitt der Ebene von Geraden. Abstand eines Punkts von einer Ebene. Fußpunkt von Geraden. Horizontal-, Vertikal- und schiefe Ebene. Durchschnitt von Ebenen.

§ 4. Der Winkel in der Ebene und im Raume. Neigungswinkel einer Geraden zu einer Ebene. Flächenwinkel zweier Ebenen und Neigungswinkel derselben. Körperwinkel oder Raumeck, gebildet durch Durchschnitt dreier oder mehrerer Ebenen.

§ 5. Projection von Punkten, Linien, Flächen und Winkeln auf die Horizontale.

§ 6. Krumme Fläche. Tangenten und Tangentialebenen an derselben. Art der Krümmung. Flächennormalen. Projectionen von Flächen.

§ 7. Polyeder. Begrenzungsflächen, Kanten und Ecken. Basis, Höhe und Seitenhöhe. Seitenkanten und Grundkanten. Reguläre und irreguläre Polyeder. Querschnitte. Complanation und Cubatur.

§ 8. Krummflächige Körper. Axen derselben. Haupt- und Parallelquerschnitte. Schnitte durch die Axen und beliebig geführte ebene Durchschnitte. Complanation und Cubatur. Eintheilung der Flächen.

§ 9. Durchschnitte von krummen Flächen. Linien doppelter Krümmung. Linien auf den Flächen.

§ 10. Congruenz, Aehnlichkeit und Symmetrie der Polyeder. Gerad- und schiefbasische Körper.

§ 11. Das Prisma. Parallelepipedon und Cubus. Gestutzte Prismen. Gerade und schiefe Prismen. Mantel des Prisma's.

§ 12. Die Pyramide. Die Tetraeder. Der Pyramidenstumpf und Obelisk. Schräg abgestutzte gerade und schiefe Pyramiden. Pyramidenmantel.

§ 13. Der Cylinder. Axe und Höhe desselben. Die Cylinder zweiter und höherer Ordnung. Cylindermantel. Gestutzte Cylinder und Cylinderhufe. Querschnitte.

§ 14. Die Kegel und dessen Entstehung. Einfache und Doppelkegel. Kegelstumpf. Gerade und schiefe Kegel. Kegelaxe. Kegelschnitte.

§ 15. Die Entstehung der Kugel. Pole, Axe, größte Kreise, Parallelkreise und Meridiane der Kugel. Kugelhaube und Kugelsegment. Kugelzone und Kugelschicht. Kugelsector. Kugelzweieck und Kugelkeil. Sphärisches Dreieck und Kugelpyramide.

§ 16. Die regulären Polyeder der ersten Art. Tetraeder, Octaeder, Ikosaeder, Dodekaeder und Hexaeder.

§ 17. Die regulären Polyeder der zweiten Art.

§ 18. Die regulären Polyeder der dritten Art.

§ 19. Die Rhomboeder.

§ 20. Erzeugung der Rotationskörper.

§ 21. Erzeugung von keilförmigen und conoidischen Körpern.

§ 22. Gänzlich irreguläre Körper mit parallelen und nicht parallelen Flächen.

§ 23. Krumme Körper. Eintheilung derselben nach Ordnungen.

B.

Gerade und Ebenen im Raume.

§ 24. Liegt ein Theil einer Geraden in einer Ebene, so liegt auch die ganze Gerade in derselben Ebene.

§ 25. Liegen 2 Punkte einer Geraden in einer Ebene, so fällt auch die ganze Gerade in dieselbe.

§ 26. Fällt eine Ebene theilweise mit einer andern zusammen, so fallen beide Ebenen auch vollständig zusammen.

§ 27. Durch 2 oder mehrere in gerader Linie liegende Punkte können unzählige Ebenen gelegt werden; liegen 3 Punkte nicht in einer Geraden, so ist nur eine Ebene durch dieselben zu legen möglich.

§ 28. Zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

§ 29. Eine Gerade ist auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen Geraden, die in der Ebene durch ihren Fußpunkt gezogen werden, senkrecht steht. Auch ist die Ebene senkrecht auf der Geraden.

§ 30. Liegt eine Gerade in einer Ebene, so kann nur eine Ebene in dieser Geraden auf der ersten Ebene senkrecht stehen; desgleichen kann durch eine außerhalb einer Ebene liegenden Geraden nur eine Ebene senkrecht auf die erste Ebene hinabgefällt werden.

§ 31. Eine Gerade ist parallel einer Ebene, wenn sie letztere nirgends schneidet, so weit man beide auch verlängern mag, oder — falls die Abstände der Geraden von dər Ebene allerorts einander gleich sind. Unter derselben Bedingung sind auch Ebenen einander parallel.

§ 32. Zwei Geraden, welche sich schneiden, befinden sich in derselben Ebene und bestimmen die Richtung derselben.

§ 33. Von allen Geraden, welche von einem Punkte außerhalb einer Ebene nach letzterer gezogen werden, ist die Senkrechte die kürzeste, und je weiter die Geraden sich vom Perpendikel entfernen, um so länger sind sie.

§ 34. Durch einen Punkt einer Geraden kann nur eine Ebene senkrecht auf die Gerade gelegt werden.

§ 35. Ist eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede Ebene, welche durch die Senkrechte gelegt wird, auf der ersten Ebene senkrecht.

§ 36. Liegt eine Gerade schräge zu einer Ebene und man fällt aus einem Punkte der Geraden eine Senkrechte auf die Ebene und verbindet die Fußpunkte beider Geraden durch eine dritte Gerade, so ist der spitze Winkel (Neigungswinkel), den die Schräge mit der Verbindungslinie der Fußpunkte beider Geraden bildet, der kleinste von allen Winkeln, die sich mit irgend einer andern Geraden aus ihrem Fußpunkte in der Ebene bildet.

§ 37. Wenn von 4 Ebenen zwei und zwei sich durchschneiden und die ebenen Winkel, welche 2 Senkrechten aus einem Punkte auf der Kante in beiden Ebenen bilden, gleich sind; so fallen die entsprechenden Ebenen zusammen, sobald man ihre Kanten aufeinander und eine ihrer Ebenen auf die ihr entsprechende des andern Flächenwinkels legt.

§ 38. Sind 2 Ebenen auf einander senkrecht und man zieht durch die eine Ebene eine Senkrechte auf die Durchschnittsgerade, so ist diese auch senkrecht auf der andern Ebene.

§ 39. Wenn man aus der Durchschnittsgeraden zweier aufeinander senkrechter Ebenen ein Loth auf eine derselben errichtet, so liegt dasselbe gleichzeitig ganz in der andern Ebene.

§ 40. Alle Geraden, welche einer auf einer Ebene senkrechten Geraden parallel sind, sind auch senkrecht auf der Ebene.

§ 41. Alle Perpendikel auf derselben Ebene sind einander parallel.

§ 42. Alle Geraden, welche einer beliebigeu Geraden einzeln parallel sind, sind untereinander parallel, wenn sie auch nicht in derselben Ebene liegen.

§ 43. Werden Ebenen von einer Ebene durchschnitteu, so sind sämmtliche Durchschnittsgerade einander parallel.

§ 44. Alle auf einer Geraden senkrechte Ebenen sind einander parallel.

§ 45. Parallele Gerade zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.

§ 46. Steht eine Gerade auf einer von beliebig vielen parallelen Ebenen senkrecht, so ist sie auch senkrecht auf sämmtlichen Ebencn.

§ 47. Wenn die Schenkel zweier Winkel, die nicht in derselben Ebene liegen, nach einer Seite hin parallel sind, so sind die Winkel gleich und ihre Ebenen parallel.

§ 48. Wenn 3 Gerade, welche nicht in derselben Ebene liegen, gleich und parallel sind, so sind die Dreiecke, welche entstehen, wenn die Endpunkte der Geraden verbunden werden, gleich, und die Ebenen diesem Dreiecke parallel.

§ 49. Wenn 2 Ebenen, die sich gegenseitig schneiden, auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie auf derselben Ebene senkrecht.

§ 50. Zwei Gerade werden von 3 parallelen Ebenen proportionirt geschnitten.

§ 51. Ein Viereck ABCD liege entweder in derselben Ebene oder nicht. Schneidet man die Gegenseiten mittelst zweien Geraden EF und GH in gleichem Verhältnisse, so daß die Proportionen

$$AE : BE = DF : FC$$
$$BG : CG = AH : DH$$

stattfinden, so schneiden sich EF und GH derartig in einem Punkte M, daß

$$HM : MG = AE : EB$$
$$EM : FM = AH : DH \ldots$$ (Legendre.)

§ 52. Wenn eine erste Gerade EF 2 Gegenseiten eines windschiefen Vierecks ABCD, und eine zweite Gerade GH die beiden andern Seiten desselben Vierecks proportionirt schneidet, so liegen 1) beide Geraden in einer Ebene; 2) jede derselben wird von der andern in 2 Abschnitte getheilt, welche den Abschnitten der von ihr nicht getroffenen Seiten proportionirt sind.

§ 53. Jede Transversalebene bestimmt auf den 4 Seiten eines windschiefen Vierecks 8 Abschnitte von solcher Art, daß das Produkt aus 4 Abschnitten, welche keine gemeinsamen Endpunkte haben, gleich ist dem Produkt der 4 andern Abschnitte.

§ 54. In jedem windschiefen Viereck bilden die Mitten der Seiten die 4 Eckpunkte eines Parallelogramms und liegt der Durchschnittspunkt der Geraden, welche die Mitten der Gegenseiten verbinden, in der Mitte der Geraden, welche die Mitten der Diagonalen verbinden.

§ 55. Wenn man durch eine beliebige Gerade XY und die die Ecken eines windschiefen Polygons ABC . . . von ungerader Seitenanzahl, Ebenen legt, welche die beziehlich entgegenliegenden Seiten in 2 Abschnitte theilen, so ist das Produkt in den Abschnitten, welche keine gemeinsamen Endpunkte haben, gleich dem Produkt der übrigen Abschnitte.

§ 56. Ist ein Dreieck ABC im Raume gegen eine Ebene um den Winkel ν geneigt, so besteht zwischen dem Dreiecke und der Projection desselben in der Ebene die Relation

$$ABC = A'B'C' \sec. \nu \text{ oder } A'B'C' = ABC \cos. \nu.$$

§ 57. Für ein Polygon und der Projection desselben erhält man durch Zerlegung in Dreiecke und Anwendung des vorigen Satzes

$$ABCD \ldots = A'B'C'D' \ldots \sec. \nu.$$

§ 58. Die Beziehungen zwischen einem Winkel w und seiner Projection w' in der Horizontalen sind, falls die Neigungswinkel seiner Schenkel mit der Projectionsebene u und ν heißen

$$\cos. w' = (\cos. w - \cos. u \cos. \nu) : \sin. u \sin. \nu$$

$$\mathrm{tg}\, {}^1\!/\!_2 w' = \sqrt{\frac{\sin. (s-u) \sin. (s-\nu)}{\sin. s \sin. (s-w)}};\ s = {}^1\!/\!_2(u+\nu+w)$$

und der Neigungswinkel ϱ der Ebene des Winkels gegen die Projectionsebene ist bestimmt durch

$$\cos. \varrho = \sin. w \sqrt{\sin. s \sin. (s-u) \sin. (s-\nu) \sin. (s-w)}.$$

C.

Körperliche Winkel und Dreiecke.

§ 59. In einem dreiwinkligen Raumeck ist die Summe zweier ebener Winkel stets größer, als der dritte Winkel.

§ 60. Die Summe aller ebenen Winkel eines Raumecks ist stets kleiner als 4 R.

§ 61. Wenn in 2 dreiwinkligen Raumecken alle 3 ebenen Winkel des einen Raumecks der Reihe nach denen des andern Raumecks gleich sind, so sind beide Raumecke einander congruent.

§ 62. Wenn 2 dreiwinklige Raumecke einander congruent sind, so machen die Ebenen, in welchen die gleichen Winkel liegen, mit einander gleiche Winkel.

§ 63. Die Summe der Winkel eines convexen Raumecks von n Seiten ist klainer als 2nR und größer als 2 (n — 2) R.

§ 64. Zwei symmetrische Raumecke sind inhaltsgleich.

§ 65. Jedes dreiwinklige Raumeck ist gleich dem Ueberschuß der halben Summe seiner 3 Flächenwinkel über einen rechten Flächenwinkel.

§ 66. Jedes convexe Raumeck ist gleich dem Ueberschuß der halben Summe ihrer Flächenwinkel über sovielmal 2R Flächenwinkel, als es Seitenflächen hat, weniger zwei.

§ 67. Wenn man in einem convexen Raumeck, dessen Seiten alle, mit Ausnahme einer constant sind, einen einzigen von den Gegenwinkeln dieser Seite sich ändern läßt, so zwar, daß das Raumeck convex bleibt, so wird die veränderliche Seite größer oder kleiner, je nachdem der bezeichnete Gegenwinkel größer oder kleiner wird.

§ 68. Wenn man den Winkel eines convexen Raumecks, dessen Seiten constant sind, sich beliebig ändern läßt und man bezeichnet der Reihe nach mit + alle diejenigen Kanten, deren Winkel größer werden, und mit dem — diejenigen, deren Winkel abnehmen, so findet man mindestens einen viermaligen Zeichenwechsel.

§ 69. In jedem körperlichen Dreiecke steht der größern Seite der größere Winkel gegenüber.

§ 70. Zwei körperliche Dreiecke, welche beziehlich gleiche Seiten haben, die auf ähnliche Art liegen, sind einander congruent.

§ 71. In jedem körperlichen Dreieck schneiden sich die Halbirebenen der Winkel in einer Geraden.

§ 72. Jede Ebene, welche man senkrecht auf die Durchschnittslinie der 3 innern winkelhalbirenden Ebenen eines körperlichen Dreiecks legt, schneidet die 6 Halbirebenen in den 3 Seiten und den 3 Höhen eines und desselben Dreiecks.

§ 73. In jedem körperlichen Dreieck schneiden sich die Ebenen, welche man durch die Kanten und die Halbirlinien ihrer Gegenseiten legt, in derselben Geraden.

§ 74. In jedem körperlichen Dreieck schneiden sich die Ebenen, welche man durch die Halbirlinien der Seiten des körperlichen Dreiecks senkrecht auf diese legt, ebenfalls in einer und derselben Geraden.

§ 75. Die Ebenen, welche mau durch die Kanten des körperlichen Dreiecks senkrecht auf die Gegenseiten legt, schneiden sich in derselben Geraden.

§ 76. In jedem körperlichen Dreieck ist die Summe der von den Kanten und den Halbirungslinien der Gegenseiten gebildeten Winkel kleiner als die Summe der Seiten.

§ 77. Wenn man ein körperliches Dreieck, das 3 rechte Winkel enthält, durch eine beliebige Ebene schneidet, so projiciren sich die Kanten des körperlichen Dreiecks auf die Höhenperpendikel des durch den ebenen Schnitt bestimmten Dreiecks, und die Spitze des körperlichen Dreiecks hat zu seiner Projection den Durchschnitt der 3 Höhenperpendikel (la Fremoire).

D.

Allgemeine Sätze über Polyeder.

§ 78. Subtrahirt man von der Summe der Flächen und Kanten eines Polyeders die Eckenzahl, so ist die Differenz constant gleich 2 $F + E - K = 2.$

§ 79. In jedem Polyeder finden zwischen der Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken die Relationen statt:

$$E \leqq 2(F - 2); \; E \geqq \tfrac{1}{2}(F + 4)$$
$$K \leqq 3(F - 2); \; K \geqq \tfrac{3}{2}F.$$

§ 80. In jedem Polyeder sind die Seitenflächen von ungerader Seitenzahl immer in gerader Anzahl vorhanden; desgleichen die Ecken von ungleicher Kantenzahl.

§ 81. In jedem convexen Polyeder gibt die Zahl der dreiseitigen Seitenflächen vermehrt um die Zahl der dreikantigen Ecken eine Summe, welche niemals kleiner als 8 sein darf

$$T_3 + E_3 \geqq 8.$$

§ 82. Wenn die Oberfläche eines Polyeders nur aus Dreiecken oder Drei- und Sechsecken besteht, so ist die Anzahl der Dreiecke nie kleiner als 4

$$D \geqq 4.$$

§ 83. Besteht die Oberfläche des P nur aus Vierecken oder aus Vier- und Sechsecken, so ist die Zahl der Vierecke nie kleiner als 6

$$V \geqq 6.$$

84. Ist die Oberfläche des Polyeders aus Fünfecken oder Fünf- und Sechsecken zusammengesetzt, so ist die Anzahl der Fünfecke

$$F \geqq 12.$$

§ 85. In jedem Polyeder, das nur dreikantige Ecken und zu Seitenflächen Fünf- und Sechsecke hat, ist die Anzahl der Fünfecke gleich 12.

§ 86. Hat ein Polyeder nur Dreiecke zu Seitenflächen und sind seine Ecken zum Theil fünf- oder sechskantig, so ist die Anzahl der fünfkantigen Ecken = 12.

§ 87. Die Summe der ebenen Winkel eines convexen Polyeders ist soviel mal 4R, als das Polyeder Ecken hat, weniger 2

$$S_w = 4(E - 2)R.$$

§ 88. In jedem Polyeder ist die Summe der Ecken gleich dem Ueberschuß der Summe der Flächenwinkel über soviel mal 2R Flächenwinkel, als das Polyeder Flächen hat, weniger 2

$$S_e = (F - 2)\,2.$$

§ 89. Wenn man die Oberfläche eines Polyeders in T von einander abgesonderte Theile theilt durch K Kanten, welche N von einander abgesonderte Netze bilden und bezeichnet mit E die Anzahl der Ecken, so findet die Relation statt (Thibauld)

$$F + E - K - N = 1.$$

§ 90. Zwei Polyeder sind congruent, wenn ihre Seitenflächen der Reihe nach einzeln einander congruent sind.

§ 91. Zwei Polyeder können nicht einerlei und gleichviel Ecken haben, ohne ganz in einander zu fallen.

§ 92. In 2 symmetrischen Polyedern sind ähnlich liegende Seitenflächen einander gleich und die Neigung zweier zusammenstoßenden Ebenen in dem einen Polyeder ist der Neigung ähnlich liegenden Ebenen in dem andern gleich.

E.

Pyramide und Prisma.

§ 93. Jede Ebene, welche durch die Mitten zweier Gegenkanten eines Tetraeders gelegt wird, theilt diesen Körper in 2 inhaltsgleiche Theile.

§ 94. In jedem Tetraeder schneiden sich die Geraden, welche man aus den 4 Ecken je nach dem Mittelpunkt der mittleren Entfernungen der Gegenfläche zieht, in einem und demselben Punkte, welcher der Mittelpunkt der mittlern Entfernungen des Tetraders ist. Theilt man jede der 4 Geraden in 4 gleiche Theile, so liegt dieser letztere Punkt im dritten Theilpunkt einer jeden von der Ecke aus gerechnet, aus welcher sie gezogen worden.

§ 95. In jedem Tetraeder halbiren sich die Geraden, welche die Mitten je zweier Gegenkanten verbinden, im Mittelpunkt der mittlern Entfernungen der 4 Ecken des Tetraeders.

§ 96. In jedem Tetraeder theilt die Halbirungsebene jedes Flächenwinkels die gegenüberliegende Kante in 2 Abschnitte, welche dem Inhalte der anliegenden Seitenflächen proportionirt sind.

§ 97. Zwei Prismen sind congruent, wenn ein körperlicher Winkel von 3 einzeln gleichen und ähnlich liegenden Ebenen in dem einen und in dem andern begrenzt wird.

§ 98. Zwei Prismen von congruenten Grundflächen und gleicher Höhe sind congruent, wenn sie außerdem beide gerade sind.

§ 99. In jedem Parallelepipedon sind 1) die gegenüberstehenden Seitenflächen gleich und parallel; 2) die gegenüberliegenden Raumecke symmetrisch; 3) die gegenüberstehenden Flächenwinkel gleich.

§ 100. In jedem Parallelepipedon halbiren sich die Diagonalen gegenseitig.

§ 101. Die Diagonalebene theilt ein Parallelepipedon in 2 symmetrisch gleiche und inhaltsgleiche Prismen.

§ 102. In jedem Prisma sind sämmtliche Parallelschnitte einander gleich und congruent.

§ 103. Parallelepipeden und Prismen von gleicher Höhe und Basis sind an Inhalt gleich.

§ 104. Jedes schiefwinklige Parallelepipedon oder jedes schiefe Prisma überhaupt kann in ein solches von gleichem Volumen verwandelt werden, welches gleiche Basis und Höhe hat wie das schiefwinklige und außerdem rechtwinklig ist.

§ 105. Das Quadrat über der Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist gleich der Snmme der Quadrate der drei in eine Ecke zusammenstoßender Kanten

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

§ 106. Im schiefwinkligen Parallelepipedon mit den Kanten a, b, c und den Neigungswinkeln A, B, C ist das Diagonalenquadrat

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos. C + 2ac \cos. B + 2bc \cos. A.$$

§ 107. Rechtwinklige Parallelepipeden von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen und von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen.

§ 108. Rechtwinklige Prismen verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

§ 109. Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkte seiner drei in eine Ecke zusammenstoßenden Kanten

$$V = abc.$$

§ 110. Das Volumen eines jeden Prisma's ist gleich dem Produkt aus Grundfiäche und Höhe

$$V = Gh$$

§ 111. Die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist

$$O = 2(ab + ac + bc)$$

und eines schiefwinkligen mit den drei Neigungswinkeln der Kanten μ, ν, ϱ

$$O = 2(ab \sin. \mu + ac \sin. \nu + bc \sin. \varrho).$$

§ 112. Die Oberfläche eines nseitigen geraden Prismas von der Höhe h beträgt

$$O = G + G + nh = 2G + nh.$$

§ 113. Wenn eine Pyramide von einer Ebene parallel mit der Basis geschnitten wird, so sind die Durchschnittslinien den Kanten an der Grundfläche und den Höhen proportional und ist der Querschnitt der Basis ähnlich.

§ 114. Werden 2 Pyramiden von gleicher Basis und Höhe in gleichem Abstand von der Basis parallel durchschnitten, so sind die Querschnitte inhaltsgleich.

§ 115. Tetraeder von gleicher Basis und Höhe sind inhaltsgleich, da jedes Tetraeder der dritte Theil eines Prismas von gleicher Basis und Höhe ist.

§ 116. Das Volumen jedes Tetraeders ist gleich dem dritten Theile des Produkts aus Basis und Höhe

$$V = \tfrac{1}{3} Gh.$$

§ 117. Das Volumen jeder Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Produkts aus Basis und Höhe

$$V = \tfrac{1}{3} Gh.$$

§ 118. Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen und von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen.

§ 119. Die Oberflächen ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Quadrate und die Volumina wie die Cuben ihrer Höhen oder homologen Kanten.

§ 120. Die Oberfläche einer nseitigen regulären Pyramide ist, wenn a das Apothem der Basis, k die Grundkante und s die Seitenhöhe bezeichnet.

$$O = \frac{nak}{2} + \frac{nas}{2} = \tfrac{1}{2} an\,(k + s) = \frac{U}{2}\,(k + s).$$

§ 121. Der Inhalt eines Tetraeders ist, falls die 3 Seitenkanten einander gleich k, und die Grundkanten a, b, c

$$V = \tfrac{1}{12} \sqrt{(a + b + c)\,(a + b - c)\,(b + c - a)\,B^2 - a^2b^2c^2}$$

§ 122. Bezeichnet man in einem Tetraeder mit a, b, c die Grundkanteu, und mit A, B, C die diesen Grundkanten gegenüberliegenden Seitenkanten, so ist der Inhalt desselben

$$V = \tfrac{1}{2} \sqrt{\begin{aligned} &A^2 a^2 (B^2 + b^2 + C^2 + c^2 - A^2 - a^2) + B^2 b^2 (A^2 + a^2 \\ &+ C^2 + c^2 - B^2 - b^2) + C^2 c^2 (A^2 + a^2 + B^2 + b^2 \\ &- C^2 - c^2) - (a^2 b^2 c^2 - a^2 B^2 C^2 - b^2 A^2 C^2 - c^2 A^2 B^2) \end{aligned}}$$

§ 123. In jeder Pyramide ist die Basis gleich der Summe der Produkte aus jeder Seitenfläche in den Cosinus ihres Neigungswinkels gegen die Basis.

§ 124. Das Quadrat der vierten Seitenfläche eines Tetraeders ist gleich der Summe der Quadrate der andern Seitenflächen, weniger den doppelten Produkten aus je zwei derselben in den Cosinus ihres Neigungswinkels

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB \cos.(AB) - 2AC \cos.(AC) - 2BC \cos.(BC)$$

und sind die Winkel Rechte $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$

§ 125. Kennt man von einem Parallelpipedon, einem dreiseitigen Prisma oder einem Tetraeder, die zu einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b, c und deren Kantenwinkel A, B, C, so ist

$$\nu = \text{arc. sin. } \frac{2}{\sin. C}\sqrt{\sin. S \sin. (S - R) \sin. (S - B) \sin. (S - C)}$$

der Neigungswinkel der Kante a zur Basis und wenn man das hier vorkommende Radikal mit R bezeichnet

$$h = \frac{2a}{\sin. C} \,.\, R \,.\, \text{die Höhe}$$

$$\varphi = \text{arc. sin. } \left(\frac{2R}{\sin. B \sin. C}\right)$$

und endlich das Volumen allgemein für die 3 angeführten Körper

$$V = 2abc \,.\, R.$$

§ 126. Für den Inhalt eines Tetraeders hat man, dieselben Bezeichnungen beibehaltend

$$V = \tfrac{1}{6} abc \sqrt{1 - \cos.^2 A - \cos.^2 B - \cos.^2 C + 2 \cos. A \cos. B \cos. C}$$

§ 127. Das Volumen eines jeden Pyramidenstumpfes, dessen beide Grundflächen G und g, zwei homologe Grundkanten A und a sind, und dessen Höhe h beträgt, ist

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{AG - ag}{A - a} \text{ oder durch h, G, g allein ausgedrückt}$$

$$V = \frac{h}{3} (G + g + \sqrt{Gg}), \text{ d. h.}$$

der Pyramidenstumpf ist an Inhalt der Summe dreier Pyramiden gleich, die die Höhe des Stumpfes zur gemeinsamen Höhe haben und deren Grundflächen die untere und obere Grundfläche und eine mittelproportionale zwischen den beiden erstern, sind.

§ 128. Die Oberfläche eines Pyramidenstumpfs von den Grundflächen G und g beträgt, wenn man mit A, B, C, D .... die untern, a, b, c, d .... die obern Grundkanten und mit s, s', s'' .... die entsprechenden Seitenhöhen bezeichnet

$$O = G + g + \frac{s}{2}(A + a) + \frac{s'}{2}(B + b) + \frac{s''}{2}(C + c) + \ldots.$$

und im Falle $A = B = C = D$; $a = b = c \ldots.$; $s = s'$; $s'' \ldots$

$$O = G + g + \frac{s}{2}(U + u) \text{ wo } U = A + B + C + \ldots.; \; u = a + b + c + \ldots.$$

§ 129. Wenn man ein dreiseitiges Prisma von der Basis ABC mit einer gegen die Basis beliebig geneigten Ebene DEF schneidet, so ist der prismatische Stumpf ABCDEF gleich der Summe dreier Pyramiden, deren Spitzen D, E und F sind und deren gemeinsame Basis ABC ist, d. h.

$$V = \tfrac{1}{3}G\,(H + H' + H'').$$

§ 130. Unter allen rechtwnkligen Parallelepipeden vom Inhalte V hat der Würfel die kleinste Oberfläche, und unter gleichen Oberflächen O das größte Volumen.

§ 131. Unter denjenigen Parallelepipeden gleichen Inhalts V, welche eine gleiche Kante K und eine gleiche Ecke haben, hat die kleinste Oberfläche dasjenige, darin die beiden an der gieichen Kante liegenden Seitenflächen an Inhalt gleich sind.

§ 132. Unter allen Prismen von gleicher Höhe h, gleicher Basis B und einer gleichen Seitenfläche f hat dasjenige die kleinste Oberfläche, darin die beiden an der gleichen Kante liegenden Seitenflächen an Inhalt gleich sind.

§ 133. Unter allen dreiseitigen Prismen von gleicher Höhe h und gleicher Basis B hat die kleinste Oberfläche das gerade.

§ 134. Unter allen Prismen von gegebener Seitenzahl und gleicher Höhe hat das gerade die kleinste Oberfläche.

§ 135. Unter allen Prismen von gleicher Höhe, gleicher Seitenzahl und gleichem Volumen, hat dasjenige, dessen Basis regulär ist, die kleinste Summe der Seitenflächen.

§ 136. Unter allen geraden Prismen von gleicher Seitenzahl, gleicher Höhe und gleicher Oberfläche hat dasjenige von regulärer Basis das größte Volumen und bei gleichem Volumen die kleinste Oberfläche.

§ 137. Das gerade Parallelepiped hat unter allen von gleicher Seitenfläche und Basis das größte Volumen (folgt aus 136).

§ 138. Soll aus einer rechteckigen Tafel, deren Seiten a und b durch Wegschneiden von 4 gleichen Eckquadraten und gehöriges Zusammenbiegen ein offener rechtwinkliger Kasten von möglichst großem Inhalte gefertigt werden, so hat die Quadratseite die Länge

$$x = \frac{(a + b) - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{b.}$$

§ 139. Unter allen Pyramiden von gleicher Höhe und gleicher regulärer Basis, ist bei der geraden Pyramide die Summe der Seitenflächen am kleinsten.

§ 140. Unter allen Pyramiden von 3 Seiten und der Gestalt und Größe nach gegebenen Basis, welche außerdem eine gegebene Höhe und eine bloß der Größe nach gegebene Seitenfläche haben, wird die Summe der beiden andern Seitenflächen ein Minimum, wenn die Höhen dieser Seitenflächen und ihre Neigungswinkel gegen die Basis, wie auch die Höhen ihrer Projectionen einander gleich sind.

§ 141. Unter allen dreifachen Pyramiden von gleicher Höhe und der Gestalt und Größe nach gegebenen gleichen Basis hat die kleinste Summe der Seitenflächen diejenige, für welche die Projection ihrer Spitze in den Mittelpunkt des in die Basis eingeschriebenen Kreises fällt und für welche sowohl die Höhen der Seitenflächen, als ihre Neigungswinkel zur Basis von gleicher Größe sind.

§ 141. Sind von einer dreiseitigen Pyramide die Basis und eine Seitenfläche ihrer Größe nach gegeben; ferner die diesen beiden Flächen gemeinsame Kante nebst der Höhe der Pyramide, so wird die Summe der beiden andern Seitenflächen am kleinsten, wenn die Basis der Pyramide gleichschenklig ist.

§ 142. Unter allen gleich hohen dreiseitigen Pyramiden von gleicher Basis hat diejenige die kleinste Summe der Seitenflächen, in welcher die Basis gleichseitig ist.

§ 143. Unter allen dreiseitigen Pyramiden von gleichem Volumen hat das reguläre Tetraeder die kleinste Oberfläche.

§ 144. Unter allen Pyramiden von gleicher Höhe, auf Grundflächen von gleicher Seitenzahl, von gleichem Perimeter und gleichem Volumen hat die gerade Pyramide die kleinste Oberfläche.

§ 145. Unter allen Pyramiden von gleicher Oberfläche, auf isoperimetrischen Grundflächen und von gleicher Fläche hat die gerade Pyramide das größte Volumen.

§ 146. Unter allen geraden gleich hohen Pyramiden auf Grundflächen gleichen Inhalts und gleicher Seitenzahl, hat diejenige Pyramide, deren Basis regulär ist, die kleinste Oberfläche.

§ 147. Eine gerade Pyramide von gegebener Höhe auf regulärer, der Größe nach gegebener Basis, hat eine desto kleinere Oberfläche, je größer die Seitenzahl der Basis ist.

F.

Cylinder, Kegel und Kugel.

§ 148. Eine Ebene ABCD ist stets kleiner als eine zwischen denselben Grenzen liegende krumme Fläche.

§ 149. Von 2 Flächen gleichen Umfangs hat die convexe einen größeren Inhalt als die ebene.

§ 150. Jeder mit der Basis parallele Querschnitt eines Cylinders ist ein mit den Grundflächen congruenter Kreis; jeder mit der Axe parallel geführte Querschnitt im Allgemeinen ein Parallelogramm.

§ 151. Das Volumen eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkte aus seiner Basis und Höhe.

$$V = r^2 \pi h.$$

§ 152. Die Manterfläche des Cylinders beträgt
$M = 2r\pi h$ und die Gesammtoberfläche
$O = 2r\pi\ (h + r)$.

§ 153. Das Volumen des schiefen Kreiscylinders von der Länge l und dem Neigungswinkel ν gegen die Basis, beträgt

$$V = r^2 \pi l\ .\ \sin.\ \nu.$$

§ 154. Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen und von gleichen Grundflächen, wie ihre Höhen.

§ 155. Aehnliche gerade Cylinder verhalten sich ihrer Mantelfläche nach wie die Quadrate und ihrem Volumen nach wie die Cuben ihrer Radien oder Höhen.

§ 156. Die Oberfläche eines Cylinders ist größer als die convexe Oberfläche jedes eingeschriebenen Prisma's und kleiner als die Oberfläche jedes umschriebenen Prisma's.

§ 157. Die Oberfläche eines Cylinders ist immer kleiner als die Oberfläche eines Prisma's von gleicher Höhe und gleichem Volumen.

§ 158. Das Volumen eines Cylinders ist größer als dasjenige eines Prismas von regulärer Basis, gleicher Höhe und Oberfläche mit dem Cylinder.

§ 159. Wenn man um die Basis eines geraden Cylinders irgend ein reguläres oder irreguläres Polygon beschreibt und auf dieses ein gerades Prisma von gleicher Höhe mit dem Cylinder setzt, so verhält sich das Volumen und die Oberfläche des Cylinders zum Volumen und der Oberfläche des umschriebenen Prisma's, wie die Perimeter der Grundflächen beider Körper.

§ 160. Unter allen geraden Cylindern von gleichem Volumen V hat der einem Würfel eingeschriebene die kleinste Oberfläche

$$2r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi.}}$$

§ 161. Unter allen Cylindern von gleicher Oberfläche O hat der der dem Cubus eingeschriebene das größte Volumen

$$2r = h = \sqrt{\frac{O}{2\pi.}}$$

§ 162. Schneidet man einen Kegel parallel mit der Basis, so ist diese Durchschnittsfigur ein Kreis.

§ 163. Das Volumen des geraden Kreiskegels beträgt

$$V = \tfrac{1}{3} r^2 \pi h$$

und dessen Mantelfläche für die Seitenhöhe s

$M = r\pi s$; demnach die Gesammtoberfläche

$$O = r\pi\,(r + s) = r\pi\,(r + \sqrt{h^2 + r^2}).$$

§ 165. Kegel von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen und von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen.

§ 165. Aehnliche Kegel verhalten sich ihrer Oberfläche nach wie die Quadrate und ihrem Volumen nach wie die Cuben der Radien oder Höhen.

§ 166. Der Kegel ist seinem Volumen nach gleich dem dritten Theil eines Cylinders von gleicher Basis und Höhe.

§ 167. Das Volumen eines Kegelstumpfes von den parallelen Basisradien R und r und Höhe h, beträgt

$$V = \tfrac{1}{3} h\pi\,(R^2 + Rr + r^2).$$

Der Mantel des Stumpfes ferner, wenn s die Seitenhöhe bezeichnet

$$M = (R + r)\,\pi s$$

und demnach die Gesammtoberfläche

$$O = \pi\,(R^2 + r^2 + (R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2})$$

§ 168. Ein Kegelstumpf ist kleiner als ein Cylinder, dessen Basis der halben Summe der beiden Grundflächen des Kegels und dessen Höhe der Höhe des Stumpfes gleich ist.

§ 169. Der Kegelstumpf ist größer als ein Cylinder, von dessen Basis der Durchmesser der halben Suume der Durchmesser der beiden Grundflächen des Stumpfes und dessen Höhe ebenfalls der Höhe des Stumpfes gleich ist.

§ 170. Die Oberfläche eines Kegelstumpfes ist auch gleich dem Produkte seiner Seitenhöhe in den Umfang eines Querschnitts mitten zwischen den Grundflächen.

§ 171. Das Volumen des Kegels durch den Radius und Winkel w an der Spitze ausgedrückt, ist

$$V = \tfrac{1}{3} r^2 \pi \,.\, \mathrm{tg} \tfrac{1}{2} w$$

und die Oberfläche desselben

$$O = r^2 \pi \left(1 + \mathrm{cosec.}\ \tfrac{1}{2} w\right).$$

§ 172. Das Volumen eines schiefen Kreiskegels, dessen längste und kürzeste Seitenhöhe S und s, beträgt für den Radius r

$$V = \tfrac{1}{3} r \pi \sqrt{16 r^2 S^2 - (S^2 - s^2 - 4r^2)^2}$$

? 173. Unter allen Kegeln von gleicher Höhe und gleicher Basis hat der gerade die kleinste Mantelfläche.

§ 174. Der gerade Kegel hat eine kleinere Oberfläche als jede gerade oder schiefe Pyramide von gleicher Basis und Höhe.

§ 175. Der gerade Kegel hat eine kleinere Oberfläche als jeder schiefe Kegel von gleicher Basis und Höhe.

§ 176. Der gerade Kegel hat eine kleinere Oberfläche als jeder gerade oder schiefe kegelförmige Körper von gleicher Basis und Höhe.

§ 177. Beschreibt man um einen geraden Kegel eine Pyramide, so verhält sich Volumen und Oberfläche des Kegels zu Volumen und Oberfläche der Pyramide, wie die Perimeter der Grundflächen beider Körper.

§ 178. Unter allen geraden Kegeln gleichen Volumens hat die kleinste Mantelfläche derjenige, in welchem sich die Quadrate von Radius, Höhe und Seitenhöhe wie 1 : 2 : 3 verhalten

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi \sqrt{2}}} : h = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6V}} : s = \sqrt{5}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}.$$

§ 179. Unter allen geraden Kegeln gleichen Volumens hat die kleinste Gesammtoberfläche derjenige, in dem die Seitenhöhe das Dreifache des Radius beträgt

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sqrt{2}}};\quad h = 2\sqrt[3]{\frac{\pi}{3V}};\quad s = 3\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sqrt{2}}}.$$

§ 180. Unter allen Kegeln gleicher Mantelfläche M hat das größte Volumen derselbe Kegel, wie im § 178. Hier ist

$$r = \tfrac{1}{3}\sqrt[4]{27\sqrt{\frac{M}{\pi}}};\quad h = \tfrac{1}{3}\sqrt[4]{27\sqrt{\frac{2M}{\pi}}};\quad s = \tfrac{1}{3}\sqrt[4]{27\sqrt{\frac{3M}{\pi}}}$$

§ 181. Unter allen Kegeln gleicher Gesammtoberfläche O, hat das größte Volumen derselbe, wie im § 179.

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}};\quad h = \sqrt{\frac{2O}{\pi}};\quad s = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}.$$

§ 182. Der größte Cylinder, der sich einem Kegel $\frac{1}{3}r^2\pi h$ einschreiben läßt, hat die Dimensionen $r' = \frac{2}{3}r$; $h' = \frac{1}{3}h$.

§ 183. Der Cylinder von der größten Mantelfläche, welcher demselben Kegel eingeschrieben wird, hat die Elemente $r' = \frac{1}{2}r$; $h' = \frac{1}{2}h$; und soll die ganze Oberfläche ein Maximum werden

$$r' = \frac{rh}{2(h-r)};\quad h' = \frac{h\,(h-2r)}{2\,(h-r}$$

§ 184. Die Oberfläche der Kugel ist gleich dem vierfachen Produkt des größten Kugelkreises

$$O = 4r^2\pi$$

und das Volumen der Kugel

$$V = \tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

§ 185. Im Kugelsector beträgt die Oberfläche

$$O = r\pi\,(2h + \sqrt{2rh - h^2})$$

und das Volumen

$$V = \tfrac{2}{3}r^2\pi h$$

wo h die Höhe der Calotte bezeichnet.

§ 186. Im Kugelsegmente beträgt

$$O = h\pi\,(2r + h)$$
$$V = h^2\pi\,(r - \tfrac{1}{3}h).$$

§ 187. Die Oberfläche einer Kugelzone ist

$$O = 2r\pi h$$

und das Volumen der von ihr umschlossenen Kugelschicht

$$V = \pi\,(H - h)\,[r(H + h) - H^2 + h^2 + Hh)].$$

§ 188. Die Fläche eines Kugelzweiecks beträgt, wenn z der Winkel des Zweiecks $O = \frac{1}{90}zr^2\pi$
und das Volumen des entsprechenden Kugelkeils

$$V = \frac{1}{270}r^3z\pi.$$

§ 189. Die Fläche eines sphärischen Dreiecks, dessen 3 Winkel A, B, C sind, beträgt

$$O = \frac{r^2\pi}{180}(A + B + C - 180^0) = E \cdot \frac{r^2\pi}{180} \;\ldots\; E = \text{Excess}.$$

und das Volumen der zugehörigen Kugelpyramide

$$V = \frac{r^3\pi}{540}(A + B + C - 180^0).$$

§ 190. Die Fläche eines Kugelvielecks, dessen Seitenzahl n, beträgt

$$O = \frac{r^2\pi}{120}(A + B + C + \ldots - 180^0 \cdot n)$$

und das Volumen der entsprechenden Kugelpyramide

$$V = \frac{r^3\pi}{2160}(A + B + C + \ldots - 180^0 \cdot n).$$

§ 191. Kennt man die Läugen der Seiten eines sphärischen Dreiecks a, b, c, so ist der Exceß

$$E = 2 \text{ arc. sin.} \left(\sqrt{\frac{\sin. s \sin. (s - a) \sin. (s - b) \sin. (s - c)}{2 \cos. \frac{1}{2}a \cos. \frac{1}{2}b \cos. \frac{1}{2}c.}}\right)$$

§ 192. Ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten gegen den Kugelradius sehr klein sind, kann wie ein ebenes Dreieck berechnet werden, dessen Seiten einzeln die nämliche Länge haben und dessen Winkel dadurch gebildet sind, daß jeder Winkel des sphärischen Dreiecks um ⅓ des sphärischen Excesses vermindert werden. (Legendre.)

§ 193. Symmetrische Kugeldreiecke haben gleiches Volumen.

§ 194. Kugeln verhalten sich ihrer Oberfläche nach wie die Quadrate und dem Volumen nach wie die Cuben ihrer Radien.

§ 195. Unter allen gleichvoluminösen Körpern hat die Kugel die kleinste Oberfläche und unter allen Körpern von gleicher Oberfläche den größten Inhalt.

§ 196. Unter allen Kugelsectoren gleichens Volumens V wird ein Maximum derjenige vom Radius $r = \sqrt[3]{\frac{15V}{2\pi}}$; $h = \frac{1}{5}r$,

„ „ „ „ „ $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$; $h = r$, d. h. eine Halbkugel.

§ 197. Unter allen Kugelsectoren gleicher Oberfläche O haben die größten und kleinsten körperlichen Inhalte dieselben wie im § 196 mit dem Unterschiede, daß hier ein Minimum stattfindet, wo dort ein Maximum war und umgekehrt.

§ 198. Unter allen Kugelsegmenten gleichen Volumens V wird die Oberfläche ein Maximum für eine Kugel vom Radius

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{6V}{\pi}}.$$

§ 199. Unter alleu Kugelsegmenten von gleicher Oberfläche O hat das größte Volumen eine Kugel vom Radius

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}.$$

§ 200. Der größte einer Kugel eingeschriebene Cylinder hat die Dimensionen

$$r' = \frac{r}{3}\sqrt{6};\ h' = \tfrac{2}{3}r\sqrt{3}$$

und soll der Mantel desselben ein Maximum sein

$$r' = \frac{r}{2}\sqrt{2};\ h' = r\sqrt{2}$$

und soll die Gesammtoberfläche am größten ausfallen

$$r' = \frac{r}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{\tfrac{1}{5}}};\ h' = r\sqrt{2 - 2\sqrt{\tfrac{1}{5}}}.$$

§ 201. Der größte einer Kugel eingeschriebene Kegel hat die Elemente $r' = \tfrac{2}{3}r\sqrt{2};\ h' = \tfrac{4}{3}r$
und falls dessen Mantel am größten sein soll, der gleiche. Soll die Gesammtfläche ein Maximum werden, so sind die Kegeldimensionen

$$r = \frac{r}{16}\sqrt{190 + 14\sqrt{17}};\ h' = \frac{r}{16}\left[23 - \sqrt{17}\right].$$

§ 202. Soll einer Kugel das größte Parallelepiped eingeschrieben werden, so ist dessen Kante diejenige eines Würfels vom Volumen $\tfrac{4}{3}r^3$.

§ 203. Unter allen Kugeldreiecken mit einer gegebenen Seite und von gegebenem Umfange ist dasjenige am größten, in welchem die beiden andern Seiten gleich sind.

§ 204. Unter allen Kugelvielecken von gleichem Umfange und derselben Seitenzahl ist das gleichseitige am größten.

§ 205. Unter allen Kugelvielecken und gleichen Umfanges und gleicher Seitenzahl ist das reguläre am größten.

G.

Die regulären Polyeder.

I. Von Figuren einerlei Art begrenzt.

§ 206. Es gibt derselben nur fünf, um und in welche sich eine Kugel beschreiben läßt. Es bezeichne uun

a die Kante,
u den Kantenwinkel, v den Neigungswinkel zweier Seitenflächen,
M die Anzahl der Begrenzungsflächen an einer Ecke,
n die Seitenzahl einer Fläche,
N die Anzahl der Begrenzungsflächen,
R der Radius der umschriebenen Kugel,
r „ „ „ eingeschriebenen Kugel,
ϱ „ „ „ kantenberührenden Kugel,
O die Oberfläche und V das Volumen.

§ 207. Allgemeine Formeln

$$u = 180^0 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$\sin. \tfrac{1}{2}v = \cos. \frac{180^0}{\pi} : \sin. \frac{180^0}{\pi}$$

$$r = \tfrac{1}{2}a \,.\, tg \tfrac{1}{2}v \,.\, cotg \frac{180^0}{\pi}$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$$

$$R = \tfrac{1}{2}a \,.\, tg \tfrac{1}{2}v \,.\, tg \frac{180^0}{n}$$

$$O = \tfrac{1}{4}a^2 . nN \; cotg \frac{180^0}{n}$$

$$V = \tfrac{1}{24}a^3 . nN \,.\, tg \tfrac{1}{2}v \,.\, cotg^2 \frac{180^0}{n}$$

§ 208. Für das Tetraeder hat man

$$N = 4;\ n = 3;\ u = 60^0;\ M = 3$$

Folglich unter Anwendung der Formeln

$$v = 70^0\ 31'\ 44''$$

$$r = \frac{a}{12}\sqrt{6};\ \varrho = \frac{a}{4}\sqrt{2}$$

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$$

$$O = a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$

§ 309. Das Octaeder.

$n = 3;\ N = 8;\ u = 60^0;\ M = 3$

$v = 109^0\ 28'\ 16''$

$$r = \frac{a}{6}\sqrt{6};\ \varrho = \frac{a}{2}$$

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$O = 2a^2\sqrt{3}$$

$$V = \tfrac{1}{3}a^3\sqrt{2}$$

§ 210. Das Icosaeder.

$n = 3;\ N = 20;\ u = 60^0;\ M = 5$

$v = 138^0\ 11'\ 23''$

$$r = \frac{a}{12}(3\sqrt{3} + \sqrt{15})$$

$$\varrho = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5})$$

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$O = 5a^2\sqrt{3}$$

$$V = \tfrac{5}{12}a^3(\sqrt{5} + 3)$$

§ 211. Das Hexaeder.

$n = 4;\ N = 6;\ u = 90^0;\ M = 3$

$$v = 90^0;\ c = \frac{a}{2};\ \varrho = \frac{a}{2}\sqrt{2};\ R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$O = 6a^2;\ V = a^3$$

§ 212. Das Dodekaeder.

$n = 5;\ N = 12;\ u = 108^0;\ M = 3$

$v = 116^0\ 33'\ 54''$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}};\ \varrho = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{5})$$

$$R = \frac{a}{4}(\sqrt{15} + \sqrt{3})$$

$$O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$
$$V = \tfrac{1}{4}a^3 (15 + 7\sqrt{5})$$

II. Von Flächen zweierlei Art begrenzt.

§ 213. Ein Polyeder dieser Art ist bestimmt, wenn die Figur der Begrenzungsflächen, die Anzahl der letztern und die Zahl der ebenen Winkel jeder Art, welche ein Raumeck bilden, gegeben sind. Es bedeute hier

a die Kante; β der der Kante entspr. sphärische Bogen
m und n die Seitenzahlen der Figuren erster u. zweiter Art
p und q die Anzahl der Flächenwinkel „ „ „ „
σ und τ die Größe der Flächenwinkel
E und K Anzahl der Ecken und Kanten
M und N Anzahl der mEcke und nEcke
φ und ψ die den Polygonwinkeln beider Art entsprechenden sphär. Winkel
R, r, s die Radien der um- und eingeschriebenen Kugeln
f und g die Radien des um das mEck und nEck beschriebenen Kreises
F und G Flächen des mEcks und nEcks
O die Oberfläche
V das Volumen.

§ 214. Allgemeine Formeln.

Gegeben die Elemente m, n p, q.

$$E = 4mn : S$$
$$M = 4np : S$$
$$N = 4mq : S$$
$$S = 2mn + 2np + 2mq - mnp - mnq$$
$$K = \tfrac{1}{2}(Mm + Nn)$$
$$u = 180^0\left(1 - \frac{2}{m}\right); \; v = 180^0\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$
$$\cos. \tfrac{1}{2}\beta = \cos. \frac{180^0}{m} : \sin. \tfrac{1}{2}\varphi = \cos. \frac{180^0}{m} : \sin. \tfrac{1}{2}\psi$$
$$\sin. \tfrac{1}{2}\sigma = \cos. \tfrac{1}{2}\beta \sin. \tfrac{1}{2}\varphi; \; \sin. \tfrac{1}{2}\tau = \cos. \tfrac{1}{2}\beta \sin. \tfrac{1}{2}\psi$$
$$\sin. \tfrac{1}{2}q\psi = \sin. \tfrac{1}{2}p\varphi$$
$$a = 2R \sin. \tfrac{1}{2}\beta; \; R = \frac{a}{2} \operatorname{cosec.} \tfrac{1}{2}\beta$$

$r = \sqrt{R^2 - f^2}$; $s = \sqrt{R^2 - g^2}$

$F = \frac{1}{2}am\sqrt{f^2 - \frac{1}{4}a^2}$; $G = \frac{1}{2}an\sqrt{f^2 - \frac{1}{4}a^2}$

$O = MF + NG$; $V = \frac{1}{3}(Mfr + NGs)$

§ 215. № 1. Begrenzt von 2 Dreiecken und 3 Quadraten.

$m = 3$; $n = 4$; $p = 1$; $q = 2$; $M = 2$; $N = 3$; $\sigma = 60^0$; $\tau = 90^0$; $E = 6$; $K = 9$.

$\cos. \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4}\sqrt{2}$; $\cos. \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{4}\sqrt{14}$

$\cos. \frac{1}{2}\beta = \frac{2}{7}\sqrt{7}$; $\sin. \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{7}\sqrt{21}$

$a = \frac{2}{7}R\sqrt{21}$

$f = \frac{2}{7}R^2\sqrt{3}$; $G = \frac{12}{7}R^2$

$F = \frac{2}{7}R^2\sqrt{3}$; $G = \frac{12}{7}R^2$

$r = R\sqrt{\frac{3}{7}}$; $s = R\sqrt{\frac{1}{7}}$

$O = \frac{1}{7}R^2 (36 + 6\sqrt{3})$; $V = \frac{18}{49}R^3\sqrt{7}$.

§ 216. № 2. Begrenzt von 8 Dreiecken und 18 Quadraten.

$n = 3$; $n = 4$; $p = 1$; $q = 3$; $6 = 60^0$; $\tau = 90^0$; $M = 8$; $N = 18$; $E = 24$; $K = 48$

$\sin. \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}\sqrt{(3 - \frac{1}{2}\sqrt{2})}$

$\cos. \frac{1}{2}\beta = \sqrt{(\frac{12}{17} + \frac{2}{17}\sqrt{2})}$; $\sin. \frac{1}{2}\beta = \sqrt{(\frac{5}{17} - \frac{2}{17}\sqrt{2})}$

$f = R\sqrt{\frac{20}{51} - \frac{8}{51}\sqrt{2}}$; $g = R\sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}}$

$a = 2R\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{2}}{17}}$

$F = \frac{R^2}{17}\sqrt{3\,(5 - 2\sqrt{2})}$; $G = \frac{4R^2}{17}(5 - 2\sqrt{2})$

$r = R\sqrt{\frac{31 + 8\sqrt{2}}{51}}$; $s = R\sqrt{\frac{7 + 4\sqrt{2}}{17}}$

$O = \frac{R^2}{17}(5 - 2\sqrt{2})\,(8\sqrt{3} + 72)$

$V = \frac{R^3(5 - 2\sqrt{2})}{17\sqrt{17}}\left[\frac{8}{3}\sqrt{31 + 8\sqrt{2}} + 24\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}\right]$

§ 217. № 3. Begrenzt von 8 Dreiecken und 6 Quadraten.

$m = 3$; $n = 4$; $p = q = 2$; $6 = 60^0$; $\tau = 90^0$; $M = 8$; $N = 6$; $E = 12$; $K = 24$.

$\sin. \frac{1}{2}\varphi = \sin. \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\cos. \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin. \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}$

$f = R\sqrt{\frac{1}{3}}$; $g = R\sqrt{\frac{1}{2}}$

$a = R$

$F = \frac{1}{4}R^2\sqrt{3}$; $G = R$
$r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$; $s = R\sqrt{\frac{1}{2}}$
$O = R^2(6 + 2\sqrt{3})$
$V = \frac{5}{3}R^3\sqrt{2}$.

§ 218. № 4. Begrenzt von 32 Dreiecken und 6 Quadraten.
$m = 3$; $n = 4$; $q = 1$; $6 = 60^0$; $\tau = 90^0$;
$M = 32$; $N = 6$; $E = 24$; $K = 60$. Hier ist
$\cos.\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{2}\,[\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\sqrt{69}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\sqrt{69}}]$ u. s. w.

§ 219. № 5. Begrenzt von 8 Dreiecken und 6 Achtecken.
$m = 3$; $n = 8$; $p = 1$; $q = 2$; $\sigma = 60^0$; $\tau = 135^0$;
$M = 8$; $N = 6$; $E = 24$; $K = 36$.
$\sin.\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$; $\cos.\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$
$\cos.\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{10 + 4\sqrt{2}}{17}}$; $\sin.\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{17}}$
$f = \sqrt{\frac{28 - 16\sqrt{2}}{51}}$; $g = R\sqrt{\frac{12 - 2\sqrt{2}}{17}}$
$a = 2R\sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{17}}$
$F = \frac{R^2}{17}(7 - 4\sqrt{2})$
$G = \frac{4}{17}R^2(19 - 6\sqrt{2})$
$r = R\sqrt{\frac{23 + 16\sqrt{2}}{51}}$; $s = R\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{2}}{17}}$
$O = \frac{R^2}{17}(56\sqrt{3} - 32\sqrt{6} + 72\sqrt{2} - 24)$
$V = \frac{8R^3}{17\sqrt{17}}(\sqrt{71 + 8\sqrt{2}})^{4/3}$

§ 220. № 6. Begrenzt von 20 Dreiecken und 12 Zehnecken.
$m = 3$; $n = 10$; $p = 1$; $q = 2$; $\sigma = 60^0$; $\tau = 144^0$;
$M = 20$; $N = 12$; $E = 60$; $K = 90$.
$\cos.\frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{1}{40}\sqrt{5}}$; $\sin.\frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{7}{8} + \frac{1}{40}\sqrt{5}}$
$\cos.\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{85 + 15\sqrt{5}}{122}}$; $\sin.\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{37 - 15\sqrt{5}}{122}}$
$f = R\sqrt{\frac{24 - 30\sqrt{5}}{122}}$; $g = R\sqrt{\frac{72 - 16\sqrt{5}}{61}}$

$$a = 2R\sqrt{\frac{37 - 15\sqrt{5}}{122}}$$

$$F = \frac{R^2}{122}\sqrt{3\,(37 - 15\sqrt{5})}$$

$$G = 5R^2\sqrt{\frac{2617 - 1117\sqrt{5}}{61}}$$

$$r = R\sqrt{\frac{109 + 30\sqrt{5}}{122}};\ s = R\sqrt{\frac{16\sqrt{5} - 11}{61}}$$

$$O = \frac{R^2}{61}.\,10\sqrt{3\,(37-15\sqrt{5})} + 60R^2\sqrt{\frac{2617-1117\sqrt{5}}{61}}$$

$$V = \frac{R^3}{3\sqrt{61}}\left(20F\sqrt{\frac{109+30\sqrt{5}}{3}} + 12G\sqrt{\frac{16\sqrt{5}-11}{61}}\right)$$

§ 221. № 7. Begrenzt vou 4 Dreiecken und 4 Sechsecken.

$m = 3;\ n = 6;\ p = 1;\ q = 2;\ \sigma = 60^0;\ \tau = 120^0;$

$M = 4;\ N = 4;\ E = 12;\ K = 18.$

$\cos.\ \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{6}\sqrt{3};\ \sin.\ \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{6}\sqrt{33}$

$\cos.\ \frac{1}{2}\beta = \frac{3}{11}\sqrt{11};\ \sin.\ \frac{1}{2}\beta = \frac{2}{11}\sqrt{22}$

$a = 2R\sqrt{2/11}$

$f = 2R\sqrt{2/33};\ g = 2R\sqrt{2/11}$

$F = \frac{2}{11}R^2\sqrt{3};\ G = \frac{2}{12}R^2\sqrt{3}$

$r = R\sqrt{24/33};\ s = R\sqrt{3/11}$

$O = \frac{56}{11}R^2\sqrt{3}$

$V = \frac{184}{33}\sqrt{1/11}$

§ 222. № 8. Begrenzt von 20 Dreiecken und 12 Fünfecken.

$m = 3;\ n = 5;\ p = q = 2;\ \sigma = 60^0;\ \tau = 180^0;$

$M = 20;\ N = 12;\ E = 30;\ K = 60.$

$\sin.\ \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5})}$

$\cos.\ \frac{1}{2}\beta = \sqrt{(\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}};\ \sin.\ \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$

$$a = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$f = \frac{R}{6}(\sqrt{13} - \sqrt{3});\ g = R\sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{10}\sqrt{5})}$$

$$F = \frac{R^2}{16}\sqrt{3(6 - 2\sqrt{5})};\ G = \tfrac{1}{3}R^2\sqrt{5}\sqrt{50 - 2\sqrt{5}}$$

$O = \frac{5}{4}R^2\,(6\sqrt{3} - 2\sqrt{15}) + \frac{3}{2}R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$V = \frac{1}{6}R^3\,(11\sqrt{5} - 5)$

§ 223. № 9. Begrenzt von 80 Dreiecken und 12 Fünfecken.

$E = 60;\ K = 120;\ m = 3;\ n = 5;\ p = 4;\ q = 1;$
$\sigma = 60^0;\ \tau = 108^0;\ M = 80;\ N = 12.$

$$\cos.\frac{{}^3\varphi}{2} - \tfrac{1}{2}\cos.\frac{\varphi}{2} = \tfrac{1}{8}(1 + \sqrt{5})$$

und nach Berechnung von cos. $\tfrac{1}{2}\varphi$ kann wie früher verfahren werden.

§ 224. № 10. Begrenzt von 6 Quadraten und 8 Sechsecken.

$E = 24;\ K = 36;\ m = 4;\ n = 6;\ p = 1;\ q = 2;$
$\sigma = 90^0;\ \tau = 120^0;\ M = 6;\ N = 8.$

$\cos.\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{\tfrac{1}{6}};\ \sin.\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{\tfrac{5}{6}}$

$\cos.\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\tfrac{9}{10}};\ \sin.\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\tfrac{1}{10}}$

$f = R\sqrt{\tfrac{1}{5}};\ g = R\sqrt{\tfrac{2}{5}}$

$a = 2R\sqrt{\tfrac{1}{10}}$

$F = \tfrac{2}{5}R^2;\ G = \tfrac{3}{5}R^2\sqrt{3}$

$O = \tfrac{12}{5}R^2\,(2\sqrt{3} + 1)$

$V = \tfrac{32}{5}R^3\sqrt{\tfrac{3}{5}}$

§ 225. № 11. Begrenzt von 12 Fünfecken und 20 Sechsecken.

$E = 60;\ K = 90;\ m = 5;\ n = 6;\ p = 1;\ q = 2;$
$\sigma = 108^0;\ \tau = 120^0;\ M = 12;\ N = 20.$

$\cos.\tfrac{1}{2}\psi = \tfrac{1}{12}(\sqrt{15} + \sqrt{3});\ \sin.\tfrac{1}{2}\psi = \tfrac{1}{4}\sqrt{14 - \tfrac{2}{3}\sqrt{5}}$

$$\cos.\tfrac{1}{2}\beta = 6 : \sqrt{(42 - 2\sqrt{5})};\ \sin.\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(29 - 9\sqrt{5})}{218}}$$

$$f = 2R\sqrt{\frac{25 - 4\sqrt{5}}{545}};\ g = 2R\sqrt{\frac{29 - 9\sqrt{5}}{218}}$$

$$a = 2R\sqrt{\frac{20 - 9\sqrt{5}}{218}}$$

$$F = \frac{R^2}{18}(29 - 9\sqrt{5})\sqrt{25 + 10\sqrt{5}};\ G = \frac{6R^2}{218}\sqrt{3(29 - 9\sqrt{5})}$$

$$V = \frac{58 - 18\sqrt{5}}{109\sqrt{109}}(\sqrt{2185 + 970\sqrt{5}} + 10\sqrt{153 + 54\sqrt{5}})$$

$$O = \frac{(29 - 9\sqrt{5})}{109}\,R^2[6\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} + 60\sqrt{3}]$$

§ 226. № 12. Begrenzt von 2n Dreiecken und 2 nEcken.

$E = 2n;\ K = 4n.$

§ 227. № 13. Begrenzt von nQuadraten und 2 nEcken.

$E = 2n;\ K = 3n.$

Der Polyeder 12 und 13 gibt es unzählige.

§ 228. Die Polyeder mit 4seitigen Ecken haben, falls jede Ecke von 3 MEcken und einem NEck eingeschlossen wird.

$\frac{3E}{M}$ MEckige und $\frac{E}{N}$ NEckige Flächen.

§ 229. Wenn jede Ecke von 2 MEcken und 2 NEcken eingeschlossen, so gibt es

$\frac{2E}{M}$ MEckige und $\frac{2E}{N}$ NEckige Flächen.

§ 230. Wird jede Fläche von einem MEck und einem NEck eingeschlossen, so hat das P 20 Dreiecke, 30 Vierecke u. 12 Fünfecke.

§ 231. Polyeder mit 5seitigen Ecken.

Jede Ecke wird von 4 MEcken und einem NEck eingeschlossen; sodann hat es

$\frac{4E}{M}$ MEckige und $\frac{E}{N}$ NEckige Flächen.

§ 232. Zu diesen Polyedern findet man das polare Polyeder, indem man durch die Eckpunkte die Ebenen legt, welche die umschriebene Kugel berühren.

Außer dem einfachen Icosaeder und Dodekaeder gibt es noch ein Sterndodekaeder, jenes mit 12 fünfseitigen Ecken, deren Kugelschnitte reguläre sphärische Sternfünfecke sind, und die von regulären Dreiecken eingeschlossen werden; das andere mit 20 dreiseitigen Ecken, die von regulären Sternfünfecken eingeschlosseu sind. Ferner gibt es noch 2 außerordentliche reguläre Polyeder mit 12 5seitigen Ecken, mit 12 regulären Fünfeckflächen und 30 Kanten. (Keppler, Poinsot, Cauchy, Heß.)

III. Von Flächen dreierlei Art begrenzt.

§ 233. Von diesen Polyedern gibt es nur drei u. zwar bedeute

a die Kante: β der entsprechende sphärische Bogen

K, E Anzahl der Kanten und Ecken

l, m, n Anzahl der Seiten der Figuren jederlei Art

L, M, N Anzahl der lEcke, mEcke und nEcke

o, p, q Bnzahl der lEck-, mEck- und nEckwinkel, welche ein Raumeck bilden

ϱ, σ, τ die Größe dieser Winkel

φ, ψ, χ die entsprechenden sphärischen Winkel f, g, h die Radien des um das lEck, mEck und nEck beschriebenen Kreises

F, G, H die Flächen des lEcks, mEcks und nEcks

r, s, t die Radien der die lEcke, mEcke und nEcke berührenden Kugeln

R der Radius der umschriebenen Kugel

O die Oberfläche; V das Volumen.

§ 234. Allgemeine Formeln.

$E = 4lm : S$; $L = 4omn : S$; $M = 4pln : S$; $N = 4lmq : S$

$S = 2omn + 2pln + 2lmq - lmn\,(o + p + q - 2)$

$K = \frac{1}{2}E\,(o + p + q)$

$\varrho = 180^0 \left(1 - \frac{2}{l}\right)$; $\sigma = 180^0 \left(1 - \frac{2}{m}\right)$; $\tau = 180^0 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$

$\sin.\ \frac{1}{2}\varrho\ \sin.\ \frac{1}{2}\psi = \sin.\ \frac{1}{2}\varphi\ \sin.\ \frac{1}{2}\sigma$

$\sin.\ \frac{1}{2}\varrho\ \sin.\ \frac{1}{2}\chi = \sin.\ \frac{1}{2}\tau\ \sin.\ \frac{1}{2}\varphi$

$o\varphi + p\psi + q\chi = 360^0$

$\cos.\frac{1}{2}\beta = \sin.\frac{1}{2}\varrho : = \sin.\frac{1}{2}\sigma : \sin.\frac{1}{2}\psi = \sin.\frac{1}{2}\tau : \sin.\frac{1}{2}\chi$

$a = 2R\ \sin.\ \frac{1}{2}\beta$

$F = \frac{1}{2}al\sqrt{f^2 - \frac{1}{4}a^2}$; $G = \frac{1}{2}am\sqrt{g^2 - \frac{1}{4}a^2}$; $H = \frac{1}{2}an\sqrt{h^2 - \frac{1}{4}a^2}$

$r = \sqrt{R^2 - f^2}$; $s = \sqrt{R^2 - g^2}$; $t = \sqrt{R^2 - h^2}$

$O = LF + MG + NH$

$V = \frac{1}{3}(LFr + MGs + NHt)$.

§ 235. № I. Begrenzt von 20 Dreiecken, 30 Quadraten und 12 Fünfecken.

$E = 60$; $K = 120$; $l = 3$; $m = 4$; $n = 5$; $o = 1$; $p = 2$; $q = 1$

$\varrho = 60^0$; $\sigma = 90^0$; $\tau = 108^0$; $L = 20$; $M = 30$; $N = 12$

$$\sin.\ \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{249 - 15\sqrt{5}}{608}}$$

$$\cos.\ \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{37848 - 1880\sqrt{5}}{60876}};$$

$$a = 2R\sqrt{\frac{5757 - 470\sqrt{5}}{15219}}$$

$$f = 2R\sqrt{\frac{5757 - 470\sqrt{5}}{15219}};\quad g = R\sqrt{2}\sqrt{\frac{5757 - 470\sqrt{5}}{15219}};$$

$$h = R\sqrt{2 + \frac{2}{3}\sqrt{5}}\sqrt{\frac{5757 - 470\sqrt{5}}{15219}}$$

Setzt man $\sqrt{\frac{5757 - 470\sqrt{5}}{15219}} = w$; so ist

$$F = 3R^2w^2\sqrt{3};\ G = 4R^2w^2;\ H = R^2w^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

$$r = R\sqrt{\frac{1880\sqrt{5} - 7309}{15219}};\ s = R\sqrt{\frac{3705 - 470\sqrt{5}}{15219}};$$

$$t = R\sqrt{\frac{22325 - 6814\sqrt{5}}{76095}}$$

$$O = 12R^2w^2\,(10 + 5\sqrt{5} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}})$$

$$V = {}^{20}\!/\!_{3}FR\sqrt{1 - 4w^2} + 10GR\sqrt{1 - 2w^2}$$

$$4HR\sqrt{1 - 2w^2 - {}^{2}\!/\!_{5}w^2\sqrt{3}}$$

§ 236. № II. Begrenzt von 12 Quadraten, 8 Sechsecken und 6 Achtecken.

$$E = 48;\ K = 72;\ l = 4;\ m = 6;\ n = 8;\ o = q = q = 1$$

$$\varrho = 90^0;\ \sigma = 120^0;\ \tau = 135^0;\ L = 12;\ M = 8;\ N = 6$$

$$\sin.\ {}^{1}\!/\!_{2}\varphi = \sqrt{\frac{14 - \sqrt{2}}{24}}$$

$$\sin.\ {}^{1}\!/\!_{2}\beta = \sqrt{\frac{84 + 6\sqrt{2}}{97}};\ \cos.\ {}^{1}\!/\!_{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}}$$

$$a = 2R\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{97}}$$

$$f = R\sqrt{\frac{26 - 12\sqrt{2}}{97}};\ g = 2R\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{2}}{07}};$$

$$h = R\sqrt{\frac{28 + 2\sqrt{2}}{97}}$$

$$F = \frac{R^2}{97}(52 - 24\sqrt{3});\ G = \frac{6R^2}{97}\sqrt{3}\,(13 - 6\sqrt{2});$$

$$H = \frac{8R^2}{97}\sqrt{99 + 14\sqrt{2}}$$

$$r = R\sqrt{\frac{71+12\sqrt{2}}{97}};\ s = R\sqrt{\frac{45+24\sqrt{2}}{97}};\ t = B\sqrt{\frac{69-2\sqrt{2}}{97}}$$

$$O = R^2[12(52-24\sqrt{2}) + 48\sqrt{3}(13-6\sqrt{2}) + 48\sqrt{99+14\sqrt{2}}]$$

$$V = 4FR\sqrt{\frac{71 + 12\sqrt{2}}{97}} + {}^{8}\!/\!_{3}GR\sqrt{\frac{45 + 24\sqrt{2}}{97}}$$

$$+ 2HR\sqrt{\frac{69 - 2\sqrt{2}}{97}}$$

§ 237. № III. Begrenzt von 30 Quadraten, 20 Sechsecken, 12 Zehnecken.

$E = 120;\ K = 180;\ l = 4;\ m = 6;\ n = 10;$
$o = p = q = 1.$

$\varrho = 90^0;\ \sigma = 120^0;\ \tau = 144^0;\ L = 30;\ M = 20;$
$N = 12.$

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\tfrac{7}{12} - \tfrac{1}{30}\sqrt{5}}$$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{210 + 12\sqrt{5}}{241}};\quad \sin.\ \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}}$$

$$a = 2R\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}}$$

$$f = R\sqrt{\frac{62 - 24\sqrt{5}}{241}};\quad g = 2R\sqrt{\frac{31 - 12\sqrt{5}}{241}};$$

$$h = R\sqrt{\frac{66 - 10\sqrt{5}}{241}}$$

$$F = \frac{4R^2}{241}(31 - 12\sqrt{5})$$

$$G = \frac{6R^2\sqrt{3}}{241}(31 - 12\sqrt{5})$$

$$H = \frac{10R^2}{241}\sqrt{965 - 358\sqrt{5}}$$

$$O = 30F + 20G + 12H$$

$$r = R\sqrt{\frac{179 + 24\sqrt{5}}{241}}$$

$$s = R\sqrt{\frac{117 + 48\sqrt{5}}{241}}$$

$$t = R\sqrt{\frac{175 + 10\sqrt{5}}{241}}$$

$$V = 10Rr + \tfrac{20}{3}GRS + 4HRt.$$

IV. Von lauter Rhomben begrenzt.

§ 238. Solcher von congruenten Rhomben begrenzter Körper gibt es bedingungsweise nur drei. Es bedeute

a die Kante
w der spitze Winkel im Rhombus
v der Neigungswinkel

r Radius der eingeschriebenen Kugel
O die Oberfläche; V das Volumen.

§ 239. Das Rhomboeder.

$v = \frac{1}{2} \sec. \frac{1}{2}w$

$D = 2a^2 \sin. \frac{1}{2}w\sqrt{1 + 2 \cos. w}$ Diagonalebene

$b = a\sqrt{3+6\cos. w};\ c = a\sqrt{3-2\cos. w}$ die Diagonalen

$O = 6a^2 \sin. w$

$V = 2a^3 \sin. \frac{1}{2}w\sqrt{\sin. \frac{3}{2}w \sin. \frac{w}{2}}$

§ 240. Das Rhomben-Dodekaeder.

$N = 12;\ E = 14;\ K = 24;\ w = 70^0\ 31'\ 44''$

$v = 120^0$

$r = \frac{1}{2} \sin. \operatorname{cotg} \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{2}{3}};\ a = r\sqrt{\frac{3}{2}}$

$O = 12r^2\sqrt{2};\ V = 4r^3\sqrt{2}.$

§ 241. Das Triakontaeder.

$n = 30;\ E = 32;\ K = 60;\ w = 63^0\ 26'\ 6''$

$v = 144^0;\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

$r = a\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}};\ a = r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$

$O = 60r^2(\sqrt{5} - 2)$

$V = 20r^3(\sqrt{5} - 2)$

H.

Die Rotationskörper.

§ 242. Dieselben entstehen, wenn eine gerad- oder krummlinige Figur sich um eine in ihrer Ebene liegende und als Rotationsaxe angenommene Gerade dreht. Jeder Punkt der Figur beschreibt um die Rotationsaxe einen Kreis, der geometrische Ort der Mittelpunkte dieser Kreise ist also die Rotationsaxe.

§ 243. Dreht sich ein Polygon um eine seiner Seiten, so entsteht ein Körper, welcher im Allgemeinen aus ganzen und abgestumpften Kegeln zusammengesetzt ist.

§ 244. Schwingt ein Dreieck um eine durch einen seiner Endpunkte gehende Gerade, so beschreibt dasselbe einen Körper, der aus einem Hohlkegel und Hohlkegelstumpf besteht. Das Volumen desselben ist gleich dem Produkte aus der Fläche des Dreiecks und ⅔ des

Umfangs jenes Kreises, den der Mittelpunkt der nicht in der Rotationsaxe liegenden Seite des Dreiecks, beschreibt, d. h. liegt die Spitze C des Dreiecks ABC in der Rotationsaxe CX und man halbirt AB in M und zieht MQ $\perp$ AB, so ist $V = ABC \times {}^2/_3\pi \times MQ$.

§ 245. Versteht man unter „Mittelwerth" aller auf der Rotationsaxe senkrechten Kreisquerschnitte denjenigen, der das arithmetische Mittel aller solcher Querschnitte ist, so findet man das Volumen eines jeden durch Umdrehung einer beliebigen Figur um eine beliebige Gerade enstandenen Körpers, wenn man jenen mittleren Querschnitt mit der auf der Axe gerechneten Höhe des Körpers multiplicirt, d. h. $V = MQ \, . \, h$.

§ 246. Kennt man die Lage des Schwerpunkts der Umdrehungsfigur, so kann zur Ermittelung der Oberfläche und des Volumens von der Guldinischen Regel Gebrauch gemacht werden. Hiernach wird die Fläche oder das Volumen eines Rotationskörpers gefunden, wenn man die umgedrehte Linie, beziehlich Figur mit dem Wege ihres Schwerpunkts multiplicirt.

$$V = F \, . \, w_s; \quad O = L \, . \, w_s$$

§ 247. Macht die Linie oder Fläche keine ganze Umdrehung, sondern vollendet nur einen Theil desselben, so hat man die Erzeugende nur mit dem Bogen zu multipliciren, welchen der Schwerpunkt bei seiner Rotation beschreibt.

§ 248. Rotirt ein reguläres nEck vom Radius R um eine Gerade, deren Entfernung e vom Schwerpunkte des Polygons beträgt, so ist

$$O = 4Rne\pi \text{ sin. } \frac{180^0}{n}$$

$$V = naR^2\pi \text{ . sin. } \frac{180^8}{n}$$

§ 249. Rotirt ein Kreis vom Radius R und ist e wieder die Distanz des Schwerpunkts von der Rotationsaxe, so ergibt sich

$$O = 4re\pi$$

$$V = 2r^2e\pi^2.$$

J.

Irreguläre Polyeder.

I. Mit parallelen Grundflächen.

§ 250. Die Seitenflächen seien Trapeze und die Grundflächen 2 parallele Polygone, z. B. ABCDEF und abcdef; wovon AB = a; BC = b; CD = c; DE = d; EF = e und die Winkel B, C, D, E bekannt seien. Man denke sich die Ecken des obern kleinern Polygons auf die Seite des untern projicirt und diese Projectionen durch gerade Linien verbuuden. Alsdann wird der ganze Körper zerlegt in ein 6seitiges Prisma, in 4 dreiseitige Prismen und in 4 Tetraeder. Die Höhe aller dieser Körper h ist gleich der Entfernung beider Grundflächen. Nennt man die Basis des 6seitigen Prismas P, die Summe der Grundflächen der dreiseitigen Prismen Q und die Summe der Tetraedergrundflächen R, so ist das Volumen des ganzen Körpers

$$V = h\,(P + \tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{3}R).$$

Setzt man entsprechend ab = a'; bc = b'; cd = c'; de = d'; ef = e', so wird nunmehr

$$V = \tfrac{1}{6}h \left\{ \begin{array}{l} (ab + ab' + a'b,)\ \sin.\ B + (ac' + a'c')\ \sin.\ (B + C) + \\ (ad + ad' + a'd')\ \sin.\ (B + C + D) + (ae + ae' + a'e') \\ \sin.\ (B + C + D + E) + (bc + bc' + b'c')\ \sin.\ C + \\ (bd + bd' + b'd')\ \sin.\ (C + D) + (be + be' + b'e') \\ \sin.\ (C + D + E) + (cd + cd' + c'd')\ \sin.\ D + \\ (ce + ce' + c'e')\ \sin.\ (D + E) + (de + de' + d''e)\ \sin.\ E \end{array} \right\}$$

und hier können die Winkel B, C, D . . . . sowohl concav als convex sein. Sind die Grundflächen nEcke, so ist die Anzahl der Glieder, woraus der Ausdruck für V besteht, der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen gleich, welche sich aus (n — 1) verschiedener Seiten a, b, c . . . . bilden lassen; also für n = 8 offenbar

$$A = \frac{(8 - 1)\ (8 - 2)}{1\ .\ 2} = 21.$$

§ 251. Der vorstehende Satz kann zur Berechnung eines jeden Polyeders dienen. Man stellt den zu berechnenden Körper auf eine seiner Flächen und zertheile denselben durch Ebenen, welche parallel der Basis gelegt werden, in Körper von der eben beschriebenen Art, berechne deren Volumina einzeln und bilde von sämmtlichen die Summe.

§ 252. Der Inhalt eines Körpers, welcher von 2 parallelen dreieckigen Grundflächen, von 2 windschiefen Vierecken und einem Trapez begrenzt wird, ist gleich dem Produkte aus der Summe beider Grundflächen und der halben Höhe.

$$V = \tfrac{1}{2}h\,(D + d).$$

§ 253. Derselbe Satz gilt auch für einen Körper. welcher von parallelen Dreiecken, einem Parallelogramme und 2 schiefen Flächen begrenzt wird.

§ 254. Der Inhalt eines achteckigen Körpers, welcher von 2 parallelen ebenen und vier schiefen Dreiecken begrenzt wird, kann unter der Bedingung, daß 2 gegenüberliegende Seitenlinien desselben parallel sind, mittelst desselben Satzes berechnet werden.

§ 256. Der Inhalt eines jeden Polyeders, dessen Seitenlinien abwechselnd parallel sind und deren 2 parallelen Grundflächen und lauter schiefen Seitenflächen begrenzt wird, ist immer dem Produkte aus der Summe beider Grundflächen und der halben Höhe gleich.

§ 256. Das Volumen eines jeden von 2 parallelen Polygonen von gleicher Seitenzahl und ebensoviel Vierecken, als jedes Polygon Seiten hat, begrenzten Polyeders ist gleich der Differenz, welche erhalten wird, wenn von dem Produkte der Summe seiner beiden Grundflächen und der halben Höhe, die Summe der Produkte von jeden zwei unmittelbar auf einander folgenden Projectionen seiner Seitenlinien in den Sinus ihres Neigungswinkels in den 12. Theil dieser Höhe abgezogen wird.

$$V = \tfrac{1}{2}h\,(G + g) - \tfrac{1}{2}h\,(ab \sin. \nu + bc \sin. \nu_1 + cd \sin. \nu_2 + \ldots)$$

II. Von nicht parallelen Flächen begrenzt.

§ 257. Von einer Ecke aus denke man sich den ganzen Körper durch Diagonalebenen nach je zwei andern Ecken in lauter Tetraeder zerschnitten, suche das Volumen eines jeden besonders und bilde schließlich die Summe aller dieser Volumina.

§ 258. Der Inhalt eines jeden beliebigen Polyeders ist auch gleich dem Produkte aus dem Mittelwerthe aller nach einer Richtung parallel gelegten Querschnitte und der nach derselben Richtung genommenen Höhe

$$V = M(Q)\,.\,h.$$

§ 259. Das Volumen eines dreiseitigen abgekürzten Prisma's ist gleich dem dritten Theile aus der Summe seiner Seitenlinien mit dem Sinus ihres Neigungswinkels gegen die Basis und der Basis

$$V = \triangle ABC \sin. \nu\ (AD + EB + CF).$$

§ 260. Das Volumen eines beliebigen gestutzten Prismas ist gleich dem Produkte aus seiner Basis und der Entfernung der Schwerpunkte der Basis und ihrer Gegenfläche.

§ 261. Das Volumen eines jeden geraden oder schiefen Prisma's ist gleich dem Produkte aus einem auf seinen Seitenlinien senkrechten Querschnitt und der Entfernung der Schwerpunkte seiner Grundflächen.

§ 262. Die Oberfläche eines Prismenstumpfs ist gleich dem Produkte aus dem Perimeter des betreffenden anf den Seitenlinien senkrechten Querschnitts und der Entfernung der Schwerpunkte der Grundflächen.

§ 263. Läßt man von allen Ecken eines beliebigen Polyeders Perpendikel auf eine nach Belieben angenommene Ebene herab, so findet man den Inhalt des Körpers, wenn man alle entstandenen abgekürzten Prismen nach dem vorigen Satze berechnet und die Summe aller dieser Volumina bildet.

$$P = V_1 + V_2 + V_3 \ldots .$$

§ 264. Wenn irgend eine gerade oder krummlinige Figur sich längs einer geraden oder krummen Linie so bewegt, daß sie immer auf der Richtung ihrer Bewegung senkrecht bleibt, so ist das Volumen des erzeugten Körpers gleich dem Produkte aus der erzeugenden Figur und dem Wege ihres Schwerpunkts; ferner die Oberfläche gleich dem Produkte aus der erzeugenden Linie unv dem Wege des Schwerpunkts.

§ 265. Das Volumen und die Oberfläche eines Körpers, welcher durch die Bewegung einer, gegen die jedesmalige Richtung unter demselben Winkel geneigter Fläche erzeugt wird, ist gleich dem Produkte aus der Projection der erzeugten Fläche, resp. Linie für das Complement des gegebenen Winkels und dem Wege des Schwerpunkts der erzeugenden Fläche, beziehlich Linie.

§ 266. Das Volumen eines jeden Conoids ist gleich dem Produkte aus seiner Basis und seiner halben Höhe.

$$V = \tfrac{1}{2}Bh.$$

§ 267. ABCDEF sei ein keilförmiger Körper, welcher von dem schiefen Viereck AEFD von Parallelogramme BECF, von den beiden Dreiecken ABE und DCF und von dem Trapeze ABCD eingeschlossen wird. Nennt man den Inhalt des Trapezes T, seine Schenkel AB = a; CD = b, den Neigungswinkel derselben ν, die Höhe des Keils h, so ist sein Volumen

$$V = \tfrac{1}{2}h\,(T - \tfrac{1}{6}ah \sin. \nu).$$

K.

Krummflächige Körper.

§ 268. Ein Cylinder vom Radius r wird gegen die Horizontalfläche unter dem Winkel α eben durchschnitten; der Inhalt des gestutzten Cylinders ist sodann

$$V = \tfrac{2}{3}r^3 tg\alpha$$

und legt man einen zweiten Durchschnitt unter dem Winkel β derartig, daß beide Schnitte sich berühren, so ist das Volumen dieses cylindrischen Keils oder Hufes

$$V = \tfrac{2}{3}r^3(tg\alpha + tg\beta) = \tfrac{2}{3}r^3 \cdot \frac{\sin. (\alpha + \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta}$$

und dessen Oberfläche

$$O = 2r^2 \cdot \frac{\sin. \alpha + \beta}{\cos. \alpha \cos. \beta}.$$

§ 269. Das Volumen des 3axigen Ellipsoids beträgt

$V = \tfrac{4}{3}\pi \cdot abc$ (wo a, b, c die Längen der Halbaxen) und schneidet man mittelst einer der YZ parallelen Ellipse ein Segment ab, so ist

$$V_s = \frac{ab}{c2}\,(c^2\lambda - \tfrac{1}{3}h)\,\pi.$$

§ 270. Im einmantligen Hyperboloid beträgt

$V_s = \dfrac{bc\pi}{a2}\,(ah^2 - \tfrac{1}{3}h^3)$ und für $h = a$

$V = \tfrac{2}{3}abc\pi.$

§ 271. Für das zweimantlige Hyperboloid ist

$V_s = \dfrac{ab}{c2}\,(\tfrac{2}{3}c^3 - c^2h + \tfrac{1}{3}h^3)$ und für $h = 2c$

$V = \tfrac{1}{3}abc\pi.$

§ 272. Im elliptischen Paraboloid ist

$$V_s = h^2\pi\sqrt{ab}.$$

§ 273. Für das hyperbolische Paraboloid

$$V_s = \frac{h^4}{6a^2}\sqrt{ab}$$ und für ein Rotationsparaboloid mit dem Parameter p und der Höhe h

$$V_h = \tfrac{1}{2}h^2p\pi.$$

§ 274. Der Inhalt eines Klostergewölbes mit kreisförmiger Gewölblinie beträgt für denjenigen Theil, der auf den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks a und b ruht und die Höhe h hat.

$$V = \frac{bh}{12a}(3a^2 + h^2)$$

und für ein elliptisches Klostergewölbe

$$V = \tfrac{1}{3}abh$$

endlich für ein parabolisches Klostergewölbe

$$V = \frac{12h^2}{b}\left(\sqrt{(a^2 + 4h^2)^3} - a^3\right)$$

§ 275. Der Inhalt eines parabolisch gekrümmten Fasses von der Bodenweite 2b, Spundweite 2a und Länge l, beträgt

$$V = \tfrac{1}{5}l\pi\,(8a^2 + 4ab + 3b^2)$$

und falls das Faß elliptisch gekrümmt ist

$$V = \tfrac{1}{3}l\pi\,(2a^2 + b^2)$$

L.

Einige crystallographische Körper.

I. Des regulären Systems.

§ 276. Das reguläre Octaeder § 207.

§ 277. Das Pentagon-Dodekaeder begrenzt von 12 congruenten nicht regulären Fünfecken. Letztere haben 4 gleiche Seiten; die fünfte Seite ist länger. Die Winkel sind A = 102° 36′; B = 106° 36′; C = 121° 35′; E = 20; K = 30.

Die Neigungswinkel der Flächen sind hier

106° 16′; 112° 37′; 126° 52′

118° 41′; 117° 26′; 113° 35′

Ist ABCDE das Fünfeck; $AB = BC = CD = DE = a$; $\angle ABC = \angle CDE = v = 102^0\ 36'$; $\angle BCD = w = 106^0\ 36'$: alsdann ist die fünfte Seite

$$AE = \sqrt{3a^2 + 4a^2 \cos.v + 2a^2 \cos.w + 4a^2 \cos.(v+w) + 2a^2 \cos.(2v+w)}$$

und der Flächeninhalt

$$F = \tfrac{1}{2}a^2 \,(2 \sin.v + \sin.w + 2 \sin.(v+w) + \sin.(2v+w)).$$

Ist nun die Höhe jeder der 12 gleichen 5seitigen Pyramiden, welche dab Polyeder zusammensetzen, r, so erhält man als Volumen des ganzen Körpers

$$V = 2a^2r\,[2 \sin.v + \text{siu.}\,w + 2 \sin.(v+w) + \sin.(2v+w)].$$

§ 278. Hexaeder. § 209.

§ 279. Trapezoeder; begrenzt von 24 Deltoiden. Es entsteht durch Abeckung des Würfels und gehörige Abkantung. Ist die Kante des Würfels a und die Strecke, welche von jeder Ecke des Würfels aus constant zur Abeckung genommen wird, b, so ist der Inhalt eines Deltoids

$$D = (a^3 \sqrt{a^2 + 2b^2}) : (a + b)\,(a + 2b).$$

Das Trapezoeder hat 26 Ecken und 48 Kanten. Die ebenen Winkel in den Deltoiden sind

$78^0\ 28'$	$82^0\ 15'$	$117^0\ 2'$
$84^0\ 15'$	$81^0\ 26'$	$112^0\ 53'$

§ 280. Das Hexakisoctaeder begrenzt von 48 ungleichseitigen Dreiecken $E = 26$; $K = 72$.

Die ebenen Winkel betragen hier

$36^0\ 49'$	$56^0\ 15'$	$86^0\ 56'$
$39^0\ 48'$	$54^0\ 22'$	$85^0\ 50'$

Die Flächen sind einander geneigt unter

149^0;	$158^0\ 13'$;	$158^0\ 13'$
$154^0\ 47'$;	$144^0\ 3'$	$162^0\ 15$.

§ 281. Das Tetrakis-Hexaeder begrenzt von 24 gleichschenkligen Dreiecken $E = 14$; $K = 36$.

Die ebenen Winkel

$83^0\ 38'$	$48^0\ 11'$
$86^0\ 59'$	$46^0\ 30'$

Neigung der Flächen

$143^0\ 8' \quad 143^0\ 8'$

$126^0\ 52' \quad 154^0\ 9'$

Ist die Grundkante der gleichschenkligen Dreiecke a und die Schenkellänge b; so erhält man für die Oberfläche und das Volumen dieses Polyeders

$$O = ba\sqrt{4b^2 - a^2}$$

$$V = a^2 (a + \sqrt{4b^2 - 2a^2})$$

§ 282. Das Triakis-Octaeder begrenzt von 24 gleichschenkligen Dreiecken

$$E = 14;\ K = 36.$$

Die ebenen Winkel sind

$119^0\ 14'; \quad 30^0\ 23'$

$118^0\ 4'; \quad 30^0\ 58'$

und die Neigung der Flächen

$129^c\ 31' \quad 162^0\ 39'$

$141^0\ 3' \quad 152^0\ 44'$

Die Basislänge gleichschenkliger Dreiecke sei a und die Schenkellänge b; demnach

$$O = ba\sqrt{4b^2 - a^2}$$

§ 283. Reguläres Tetraeder. § 206.

§ 284. Das Triakis-Tetraeder begrenzt von 12 gleichschenkligen Dreiecken

$$E = 8;\ K = 18.$$

Die ebenen Winkel sind hier

$117^0\ 2'; \quad 31^0\ 29'$

$112^0\ 53'; \quad 33^0\ 33'$

und die Neigung der Flächen

$109^0\ 28' \quad 146^6\ 27'$

$129^0\ 31' \quad 129^0\ 31'$

Behält man dieselben Bezeichnungen, so ist

$$O = 3a\sqrt{4b^2 - a^2}$$

§ 285. Rechtes Deltoid-Dodekaeder begrenzt von 12 Deltoiden

$$E = 14;\ K = 24.$$

Die Neigung der Flächen beträgt hier

$82^0\ 10'$ $162^0\ 39'$

90^0 $152^0\ 44'$

Nennt man den von den 2 ungleichen Seiten des Deltoids a und b eingeschlossenen Winkel w, so haben die beiden Diagonalen die Längen

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos. w}$; $d = a\sqrt{2(1 + \cos. w)}$; also

$D = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos. w}\sqrt{2(1 + \cos. w)} = ab\sin. w$; mithin

$O = D_{12} = 12ab\sin. w$ und wenn die gemeinsame Höhe aller 12 gleichen Pyramiden h beträgt $V = 4abh\sin. w$.

§ 286. Rechtes Hexakis-Tetraeder, begrenzt von 24 ungleichseitigen Dreiecken

$E = 14;\ K = 36.$

Die Neigung der Flächen beträgt

$110^0\ 55'$; $158^0\ 13'$; $158^0\ 13'$

$122^0\ 53'$; $152^0\ 20'$; $152^0\ 20'$

Setzt man die halbe Summe der ungleichen Seiten eines Dreiecks $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$, so ist

$$O = 24\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

§ 287. Das Trapezoïd-Ikositetraeder, begrenzt von 24 Trapezoiden

$E = 26;\ K = 48.$

Die Neigung der Flächen ist hier

$115^0\ 23'$ 149^0 $141^0\ 47'$

$128^0\ 15'$ $154^0\ 47'$ $131^0\ 49'$

$118^0\ 59'$ $160^0\ 32'$ $131^0\ 5'$

Sind die Seiten eines Trapezoids a, b, c und die 2 eingeschlossenen Winkel B und C, so beträgt die vierte Seite

$$AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos. B + 2ac\cos.(B + C) + 2bc\cos. C}$$

und der Flächeninhalt des Trapezes

$F = \frac{1}{2}[ab\sin. B + ac\sin.(B + C) + bc\sin. C]$; demnach die Oberfläche des Polyeders

$C = 12[ab\sin. B + ac\sin.(B + C) + bc\sin. C]$ und das Volumen

$V = 4h[ab\sin. B + ac\sin.(B + C) + bc\sin. C]$

II. Aus andern Systemen.

§ 288. Das quadratische Octaeder begrenzt von 8 gleichschenkligen Dreiecken

$$E = 6;\ K = 12.$$
$$O = 2a\sqrt{4b^2 - a^2}$$
$$V = \tfrac{2}{3}a^2\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 - b^2}$$

§ 289. Das Dioctaeder, eine Doppelpyramide, begrenzt von 16 gleichschenkligen Dreiecken

$$E = 10;\ K = 24.$$
$$O = 4a\sqrt{4b^2 - a^2}$$

§ 290. Das Hexagonaldodekaeder, begrenzt von 12 gleichschenkligen Dreiecken

$$E = 8;\ K = 18.$$
$$O = 3a\sqrt{4b^2 - a^2}$$

§ 291. Das Didodekaeder, begrenzt von 24 gleichsch. Dreiecken

$$E = 14;\ K = 36.$$
$$O = 6a\sqrt{4b^2 - a^2}$$

§ 292. Das Rhomboeder. § 236.

§ 293. Das Rhomben-Octaeder begrenzt von 8 ungleichseitigen Dreiecken

$$E = 6;\ K = 12.$$

Sind die 3 Seiten des Dreiecks a, b, c, so wird

$$O = 8\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};\ \tfrac{1}{2}(a+b+c) = s$$

$V = \tfrac{2}{3}h\ .\ a^2 \sin. w$; wo w der spitze Winkel der rhomb. Basis der Doppelpyramide.

§ 294. Das Skalenoeder begrenzt von 12 ungleichseitigen Dreiecken

$$E = 8;\ K = 18.$$
$$O = 12\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$V = 4h\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

M.

Anhang.

§ 295. Masse und Dichtigkeit.

1. Jeder materielle Körper übt auf seine Unterstützungsfläche einen Druck aus. Die Größe dieses Druckes nennt man „Gewicht" des Körpers. Als Einheit des Gewichts ist ein Kubikcentimeter reinen Wassers bei $+ 4^0$ Cölsius angenommen und führt den Namen Gramm.

2. Unter Dichtigkeit eines Körpers versteht man das Verhältniß seines Gewichtes zum Volumen desselben. Als Einheit ist die Dichtigkeit des Wassers für alle starren und flüssigen Körper augenommen. Die Dichte oder das Volumengewicht eines Körpers bestimmen heißt demnach: ausmitteln, wieviel ein bestimmtes Volumen dieses Körpers wiegt, wenn ein gleiches Volumen Wasser 1 wiegt.

3. Bei einem überall homogenen Körper ist die Masse desselben gleich dem Produkte aus Dichtigkeit und Volumen des Körpers. Das Gewicht eines Körpers ist stets seiner Masse proportional.

4. Aendert ein Punkt oder ein Körper seinen Bewegungszustand oder geht er aus dem Zustande der Ruhe in denjenigen der Bewegung über, so geschieht dieses durch eine „Kraft". Jede Kraft kann ihrer Größe nach mit einem Gewichte verglichen und durch dasselbe gemessen werden. Eine Kraft, welche auf einen Körper einwirkt, ertheilt letztern eine gewisse Beschleunigung oder Verzögerung. Nimmt man als Einheit der Beschleunigung 1 Meter und als Einheit der Kraft 1 Kilogramm; so ertheilt die

Kraft	1	der Masse	1	die Beschleunigung	1	
„	P	„ „	1	„ „	P	
„	P	„ „	M	„ „	P : M;	dem-

nach ergeben sich die Relationen

Beschleunigung $p = \frac{M}{P}$; $M = \frac{P}{p}$; $P = Mp$

Denkt man sich die Masse der Schwere unterworfen, so ist die Kraft, welche auf die Masse wirkt, gleich dem Gewichte G der Masse und die Beschleunigung gleich der Beschleunigung des freien Falles $g = 9{,}81$ Meter; folglich

$$M = \frac{G}{g}$$

d. h. man findet die Masse, wenn man das Gewicht des Körpers durch die Beschleunigung des freien Falles dividirt.

5. Das Produkt aus Kraft und Zeit der Bewegung heißt „Zeiteffect"; das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit „Quantität"; das Produkt aus Kraft und dem zurückgelegten Wege „Arbeit der Kraft" und das Produkt aus Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit „lebendige Kraft"; demnach, wenn t die Zeit, w den Weg, v die Geschwindigkeit bedeutet

$$E = Kt; \; Q = Mv; \; A = Kw; \; L = Mv^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

§ 296. Momentenbestimmung.

1. Durch die Wirkung der Kräfte wird ein starrer Körper entweder in fortschreitende Bewegung oder in Umdrehung versetzt. Wirken 2 Kräfte auf ein starres System, so läßt sich in letzterm ein Punkt von der Beschaffenheit finden, daß eine in demselben angebrachte Mittelkraft den in den Angriffspunkten des Systems angebrachten Kräften das Gleichgewicht hält. Die Distanz der Angriffslinie einer Kraft von jenem Unterstützungspunkte nennt man den „Arm"; das Produkt aus der Armlänge und der Kraft, nennt man das „statische Moment" der Kraft in Bezug auf den Unterstützungspunkt.

2. Denkt man sich, eine gerade oder krumme Linie beschreibe um eine Axe eine Rotationsfläche und jeder Punkt des Körpers werde mit dem Quadrate seines Drehungsradius multiplicirt und alle diese Produkte summirt, so stellt die erhaltene Summe das „Trägheitsmoment" des rotirenden Systems vor. Dasselbe drückt die Größe einer Masse aus, welche, falls sie in der Distanz 1 von der Rotationsaxe angebracht ist, auf die Elemente der Bewegung denselben Einfluß übt, wie die an verschiedenen Punkten wirkenden Massentheilchen. Bei dieser Rotation haben alle Massenelemente dieselbe Winkelbeschleunigung und Winkelgeschwindigkeit. Erstere ist gleich dem Quotienten aus dem statischen Momente des Kräftepaars und dem Trägheitsmomente des Systems in Bezug auf die Rotationsaxe. Aus der Winkelbeschleunigung flndet sich sodann auch die Winkelgeschwindigkeit und der Winkelweg.

§ 297. Schwerpunktsbestimmungen.

1. Ein starrer Körper läßt sich als eine Verbindung schwerer Punkte, deren Gewichte gleichgerichtete Parallelkräfte sind, vorstellen. Die Mittelkraft dieser Parallelkräfte nennt man „Gewicht", den

Mittelpunkt derselben den „Schwerpunkt" des Systems. Man kann sich also das ganze Gewicht eines Körpers als eine im Schwerpunkte angreifende, nach dem Erdcentrum gerichtete Kraft vorstellen. Der Abstand des Schwerpunkts von einer Ebene wird gefunden, wenn man die Summe der Produkte aus den Massenelementen des Körpers und ihren Distanzen von der Ebene durch die Gesammtmasse des Körpers theilt.

2. Die statische Standhaftigkeit eines Körpers wird gefunden, wenn man das Produkt aus seinem Volumen und dem Abstande des Schwerpunkts von derjenigen Kante, um welche der Körper gedreht wird, bildet.

3. Die dynamische Standfestigkeit ist gleich dem Produkte aus dem Gewichte des Körpers und der Differenz des Schwerpunktsabstands von der Drehkante und der Entfernung desselben von der Unterstützungsfläche.

4. Der Schwerpunkt S einer Geraden liegt im Halbirungspunkt derselben.

5. Der S. eines Dreiecks liegt im Durchschnittspunkte der seitenhalbirenden Transversalen um $\frac{1}{3}$ der Höhe von der Basis entfernt.

6. Der S. des Dreiecksumfangs liegt im Mittelpunkte des demselben eingeschriebenen Kreises.

7. Der S. eines Kreisbogens, dessen Radius r und Sehne s beträgt, ist vom Mittelpunkte entfernt um $\frac{rs}{b}$, wo b die Bogenlänge bedeutet.

8. Der S. eines Kreises und eines regulären Polygons liegt Mittelpunkte dieser Figuren.

9. Der S. eines Parallelogramms befindet sich im Durchschnittspunkte der Diagonalen derselben.

10. Der S. eines Trapezes, dessen Parallelseiten $a > b$ und Höhe h befindet sich im Abstande $\frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$ von der Basis.

11. Um den S. eines beliebigen Vielecks zu finden, zerlege man es in Dreiecke, suche deren Schwerpunkte und bestimme den Mittelpunkt der mittlern Entfernungen dieser Punkte.

12. Der S. eines Kreissectors vom Radius r und der Sehne s befindet sich um $\frac{2rs}{3b}$ vom Centrum entfernt.

13. Unter denselben Bezeichnungen erhält man für den Abstand des S. eines Kreissegments vom Centrum

$$\tfrac{1}{2}rb - \frac{s}{2}\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2}$$

14. Der S. eines Halbkreises hat den Abstand $\frac{4r}{3\pi}$. vom C.

15. Der S. eines Kegels vom Radius r und der Höhe h ist um $\frac{1}{4}h$ von der Basis entfernt.

16. Der S. desselben Kegelmantels hat den Abstand $\frac{1}{3}h$ von der Basis.

17. Der S. einer jeden Pyramide ist um $\frac{1}{4}h$ von der Basis entfernt.

18. Der S. eines Kugelsectors von der Calottenhöhe h und dem Radius r hat vom Centrum den Abstand $\frac{3}{8}(2r - h)$.

19. Der S. des Kugelabschnitts $\frac{3(2r - h)^2}{4(4r - h)}$.

20. Der S. der Halbkugel demnach für $h = r$ offenbar $\frac{3}{8}r$.

§ 298. Trägheitsmomente. Die Masse werde mit M bezeichnet.

1. Das T. einer dünnen Stange von der Länge b beträgt

$\frac{1}{3}Mb^2$ für eine durch den Endpunkt gehende senkrechte Axe

$\frac{1}{12}Mb^2$ „ „ „ „ Mittelpunkt „ „ „

2. Das T. eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a u. b ist

$\frac{1}{6}M(2a^2 + \sqrt{a^2 + b^2})$ für eine im Endpunkte der Hyp. auf dem $\triangle$ senkrechte Axe.

3. Das T. eines gleichschenkligen Dreiecks von der Höhe h und der Schenkellänge l beträgt

$\frac{1}{6}M(2h^2 + l^2)$ für eine im Scheitel senkrechte Axe.

4. Das T. eines Rechtecks, dessen Seiten a und b ist

$\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$ für eine im Eckpunkt senkrechte Axe.

5. Das T. eines regulären Polygons ist, wenn dessen Radien R und r

$\frac{1}{6}M(R^2 + 2r^2)$ für eine im Mittelpunkte senkr. Axe.

6. Das T. eines Kreises vom Radius r beträgt

$\frac{1}{2}Mr^2$ für eine im Centrum senkrechte Axe.

7. Das T. eines senkrechten Prismas, dessen Basis ein rechtw. Dreieck von den Katheten a und b und dessen Höhe h beträgt

$\frac{1}{6}M(3a^2 + b^2)$, falls es sich um die der Seite b gegenüberliegende Höhenkante dreht.

8. Das T. eines gleichschenkligen Prismas von der Höhe h ist für eine gleiche Axenlage

$\frac{1}{24}M(12a^2 + b^2)$; a die Basis: b die Schenkellänge des $\triangle$.

9. Das T. eines dreiseitigen Prismas von den Grundkanten a, b, c und der Höhe h ist

$\frac{1}{12}M(3b^2 + 3c^2 - a^2)$, falls es sich um die der Seite a gegenüberliegende Kante dreht.

10. Das T. eines senkrechten Parallelepipeds, dessen Kanten a, b, c, beträgt

$\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$, falls es sich um c dreht;

$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$, falls es sich um eine durch den S. gehende und c parallele Axe dreht.

11. Das T. eines um seine geometrische Axe sich drehenden Cylinders vom Radius r und der Höhe h

$\frac{1}{2}Mr^2$.

12. Das T. eines Hohlcylinders von den Radien R und r beträgt unter denselben Umständen

$\frac{1}{2}M(R^2 + r^2)$.

13. Das T. eines Kugelsegments vom Radius r und der Höhe h ist

$\frac{Mh}{30r - 10h}(20r^2 - 15rh + 3h^2)$ sei eine mit h zusammenfallende Axe.

14. Das T. einer Kugel vom Radius r ist

$\frac{2}{5}Mr^2$ für eine durch den Mittelpunkt gehende Axe.

Gedruckt bei J. F. Steffenhagen und Sohn in Mitau.

Gedruckt bei J. F. Steffenhagen und Sohn in Mitau.