

TARTU ÜLIKOOL

LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND

MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Stefan Ehin

**Helmholtzi võrrandi Dirichlet'
kolmemõõtmelise välisülesande lahendamine
rajaelemendi meetodil**

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: kaasprof. Urve Kangro

TARTU 2025

**HELMHOLTZI VÕRRANDI DIRICHLET'
KOLMEMÕÕTMELISE VÄLISÜLESANDE LAHENDAMINE
RAJAELEMENDI MEETODIL**

Bakalaureusetöö

Stefan Ehin

Lühikokkuvõte

Antud töös vaadeldakse Helmholtzi võrrandi Dirichlet' välisülesande taandamist rajaintegraalvõrrandile ning viimase lahendamist raja trianguleerimise ning projektsioonimeetodi rakendamise teel. Selle käigus kommenteeritakse algse ülesande lahenduvust ning tõestatakse projekteeritud võrrandi lahenduvus ning lähislahendi koondumine esialgse ülesande lahendiks. Lisaks tõestatakse trianguleeritud pinna puhul Bramble-Hilberti lemma konstandi sõltumatus pinnast ning esitatakse katse tõestada lähispinna poolt määratud lahendi lähedus algse ülesande lahendile.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Helmholtz, rajaintegraal.

**SOLVING THREE-DIMENSIONAL EXTERIOR DIRICHLET
PROBLEM FOR HELMHOLTZ EQUATION WITH
BOUNDARY ELEMENT METHOD**

Bachelor thesis

Stefan Ehin

Abstract

We study a conversion of the Dirichlet exterior problem for the Helmholtz equation to a boundary integral equation and approximation of the solution of the former by means of boundary triangulation and projection method.

We comment on existence and uniqueness of solution for the initial problem and prove the two for a projection method problem. We also show that in case of triangulated surface the constant in Bramble-Hilbert lemma does not depend on the surface and prove convergence of projection method. At the end we provide an attempt to prove that solution of a differential equation induced by triangulated boundary is close to the actual solution.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key Words: Helmholtz, boundary integral.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Kasutatavad tähistused	6
2 Ülesande püstitus	11
3 Rajaintegraalvõrrandiks taandamine	13
4 Lähendamine	15
4.1 Lähendi leidumine ja ühesus	15
4.2 Splainiga lähendamine	17
4.3 Lähendist lähendpinnal	25
4.4 Lähendpinna ülesandest	27
Kokkuvõte	34
Kasutatud allikad	35
Lisa 1. Programm	36
Lisa 2. Nõrk püstitus	43

Sissejuhatus

On teada [3, lk. 3], et homogeeses keskkonnas on heli levimine kirjeldatav lainevõrrandi

$$\ddot{p} - c^2 \Delta p = 0$$

abil, kus c on heli kiirus ning p on rõhk. Kui heli sagedus, amplituud ja faas on ajas muutumatud, siis nimetame lahendit harmooniliseks. Sel juhul avaldub see kujul

$$p(t, x) = \operatorname{Re} (u(x)e^{-i\omega t})$$

ning lainevõrrand taandub Helmholtzi võrrandiks

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

kus $k = \omega/c$.

Soovides teada, kuidas laine käitub takistustega keskkonnas, tuleb tōkete omaduste kirjeldamiseks lisada algtingimusele ka rajatingimus. Sellest omakorda saame rajatingimuse Helmholtzi ülesande jaoks. Juhul, kui eeldatakse täielikku peegeldumist, on tegu Dirichlet' rajatingimusega, mis määrab lahendi väärtuse rajal. Täpsemalt, etteantud sisendlaine puhul määrame rajatingimuseks selle laine vastandfunktsiooni ahend rajale. Otsitavaks on antud juhul peegeldunud ehk väljundlaine. Eelmainitud moel määratud rajatingimus tagab selle, et kogulaine ehk sisend- ja väljundlainete summa on keha sees null.

Kirjeldatud ülesannet võib uurida nii tōkestatud kui ka tōkestamata piirkonnas puhul. Antud juhul tegeleme viimasega, kuna praktikas võib see rohkem huvi pakkuda. Samal põhjusel eelistame tegutseda kolmemõõtmelises ruumis, kuigi ülesanne on uuritav ka üldisel juhul.

Diferentsiaalvõrrandi lahendamise asemel taandame ta rajaintegraalvõrrandiks, trianguleerime raja ning otsime lähilahendit lähispinna ülesande jaoks. Selles töös tõestame mõned tulemused, mis on vajalikud antud meetodi koon-dumise tõestamise jaoks. Praktikas võib meetodit rakendada näiteks lisa 1 kirjeldatud viisil.

1 Kasutatavad tähistused

Funktsioonide lähtehulgad selles peatükis on selged kontekstist ning seetõttu jätame need täpsustamata. Hulga otsekorrutist iseendaga tähistame astmena ning diferentsiaalid jätame tihti kirjutamata.

Multiindeksiks nimetame indekse korteeži ning tähistame seda suure ladina tähega. Kui A sisaldab k elementi, siis kirjutame $|A| = k$. Lisaks tähistame

$$\begin{aligned}ab &:= (a, b), \\(a_1, \dots, a_n)a &:= (a_1, \dots, a_n, a), \\a(a_1, \dots, a_n) &:= (a, a_1, \dots, a_n), \\(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_m) &:= (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m).\end{aligned}$$

Tuletist vektori \vec{v} suunas tähistame $\partial_{\vec{v}}$ ning a -nda baasvektori suunas tähistame ∂_a ning seda kasutades defineerime

$$\partial_{(a_1, \dots, a_k)} := \partial_1 \dots \partial_k. \tag{1.1}$$

Baasi ortonormeerituse eeldusel on Laplace'i operaatoriks seega

$$\Delta := \sum_a \partial_{aa}.$$

Gradiendiks aga nimetame operaatorit, mis seab funktsioonile vastavusse baasivektorite suunaliste tuletiste korteeži:

$$\nabla := (\partial_a).$$

Tuletame meelde, et igale normile $\|\cdot\|_X$ vastab teatud funktsioonide hulk,

mille elemendid f rahuldavad tingimust $\|f\|_X < \infty$. Sellist hulka nimetame antud normile vastavaks ruumiks.

Kui E on mõõtv hulk, siis saame uurida lihtsat skalaarkorrutist

$$\langle f, g \rangle_{L^2(E)} := \int_E fg.$$

Indutseeritud norm on sel juhul kujul

$$\|f\|_{L^2(E)} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2(E)}}. \quad (1.2)$$

Kui R on lahtine hulk ja $k \in \mathbb{N}$, siis võime uurida normi

$$\|f\|_{C^k(R)} = \sum_{|A| \leq k} \sup_{x \in R} |\partial_A f(x)|.$$

Funktsiooni f kandjaks nimetame hulga $\{x \in R : f(x) \neq 0\}$ sulundit ning tähistame seda $\text{supp } f$. Sobolevi ruumide defineerimisel läheb vaja C^k alamruumi

$$C_c^k(R) := \{f \in C^k(R) : \text{supp } f \text{ on kompaktne}\}.$$

Edaspidi mõistame tuletist nõrgas mõttes. Ütleme, et v on A -järku u nõrk tuletis, kui

$$\int_R u \partial_A \varphi = (-1)^{|A|} \int_R v \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(R).$$

Kui R on piirkond ja $k \in \mathbb{N}$, siis võime uurida poolnormi

$$\|f\|_{H^k(R)} := \left(\sum_{|A|=k} \|\partial_A f\|_{L^2(R)}^2 \right)^{1/2}.$$

Antud poolnormile vastab ka loomulik norm

$$\|f\|_{H^k(R)} := \left(\sum_{0 \leq j \leq k} |f|_{H^j(R)}^2 \right)^{1/2}.$$

Sarnast normi võime uurida ka murdarvulise järgu puhul. Meil aga osutub see kasulikuks vaid raja puhul. Hulga R raja tähistame ∂R . Seejuures peame eeldama, et raja on Lipschitz-pidev. Normi defineerimisel läheb vaja poolnormi

$$|f|_{H^\theta(\partial R)} := \left(\int_{\partial R^2} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{2\theta+2}} \right)^{1/2},$$

kus $\theta \in (0, 1)$. Madalamat järku Sobolevi ruumide puhul esineb norm kujul

$$\|f\|_{H^\theta(\partial R)} := (\|f\|_{L^2(\partial R)}^2 + |f|_{H^\theta(\partial R)}^2)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Ruumi $H^\theta(\partial R)$ kaasruumi tähistame seejuures $H^{-\theta}(\partial R)$. Tuletame meelde, et iga norm $\|\cdot\|_X$ indutseerib kaasruumi normi

$$\|x^*\|_{X^*} := \sup_{0 \neq x \in X} x^*(x) \|x\|_X^{-1}. \quad (1.4)$$

Kasulikuks osutub ka Lipschitz-pidevate operaatorite ruum. Kui A ja B on meetrilised ruumid ning $T : A \rightarrow B$, siis

$$|T|_{\text{Lip}(A,B)} := \sup_{x,y \in A} \frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)}$$

ja

$$\|T\|_{\text{Lip}(A,B)} := |T|_{\text{Lip}(A,B)} + \|T\|_{L^\infty(A,B)},$$

kus kasutame L^∞ normi loomulikku üldistust. Seejuures juhul $B = \mathbb{R}$ kirjutame $\text{Lip}(A)$.

Ruumi \mathbb{R}^n varustame normiga

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{\ell_n^2} := \left(\sum_a x_a^2 \right)^{1/2}$$

ja maatriksite ruumi normiga

$$\|M\|_F := \left(\sum_{a,b} |M_{ab}^2| \right)^{1/2},$$

kus M_{ab} on vastavad maatriksi elemendid. Ruumi ℓ_n^2 normi on aga tavaks tähistada ka lihtsalt püstkriipsude abil. Vahel $x \in \mathbb{R}^n$ puhul tähistame

$$r := |x|.$$

Ütleme, et bilineaarvorm $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ on positiivselt määratud, kui

$$\exists \alpha > 0 \forall v \in V \quad |a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Operaatori $T : A \rightarrow B$ puhul tähistame $\mathcal{R}(T) := B$ ning kirjutades $\mathcal{N}(T)$ peame silmas operaatori nullruumi.

Olgu R piirkond ning $q \in H^{1/2}(\partial R)$. Kuna L^2 on tihe ruumis $H^{-1/2}$, siis leidub jada q_n nii, et $\|q_n - q\|_{H^{-1/2}(\partial R)} \rightarrow 0$. Olgu $\Phi : R \rightarrow \mathbb{C}$. Kui iga $n \in \mathbb{N}$ puhul

$$u_n(x) := \int_{\partial R} \Phi(x - y) q_n(y) \in H^1(R),$$

siis tähistame

$$q \star \Phi := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

kui see piirväärtus leidub. Kusjuures viimane tähendab, et

$$\|q \star \Phi - u_n\|_{H^1(R)} \rightarrow 0.$$

Lisaks on teada [3, lk. 50], et iga $u \in H^1(R)$ puhul $u \in H^{1/2}(\partial R)$ ning järelikult võime vaadelda $q \star \Phi$ ka $H^{1/2}(\partial R)$ elemendina.

Vahel on mugav funktsioonide kompositsiooni esitada operaator kujul:

$$f^*g := g \circ f.$$

Seda eelkõige seetõttu, et määramispiirkonna muutmise üldistamisel säilitame tähistuse ühtsuse.

2 Ülesande püstitus

Helmholtzi võrrandiks on

$$(\Delta + k^2)u = 0.$$

Võrrandi kehtimist nõuame edaspidi vaid lahtises hulgas $\Omega_e \subset \mathbb{R}^3$, mille täiendhulga sisemus Ω on tõkestatud ning raja Γ on tükiti C^1 . Uuritavaks rajatingimuseks on

$$u|_{\Gamma} = u_d.$$

Kirjeldamaks, et laine liigub allikast eemale, mitte selle suunas, lisame ka Sommerfeldi radiatsioonitingimuse nõrgema variandi:

$$\partial_r u - iku \in L^2(\Omega_e).$$

Ilma viimase tingimusega poleks uuritava välisülesande lahend üheselt määratud. Kokkuvõttes saame Helmholtzi võrrandi Dirichlet' välisülesande

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u|_{\Omega_e} = 0, \\ u|_{\Gamma} = u_d, \\ \partial_r u - iku \in L^2(\Omega_e). \end{cases} \quad (2.1)$$

Lahendeid otsime edaspidi ruumist

$$H := \left\{ u : \frac{u}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial r} - iku \in L^2(\Omega_e) \right\}.$$

Tegu on kaalutud H^1 ruumiga, mille elemendid rahuldavad radiatsioonitingimust. Kaalud on lisatud piirkonna tõkestamatuse tõttu ning valitud kooskõlas sfääri erijuhuga [3, lk. 43] ning veidi mugandatud tagamaks sõltumatust

nullpunkti asukoha valikust [3, lk. 59]. Kaalu järk on tingitud asjaolust, et lahendid käituvad lõpmatuses nagu $1/r$. Piirduda esimest järku diferentseeruvusega võime tänu sellele, et lahendame uuritavat ülesannet nõrgas mõttes. Täpsemat selgitust leiab lisa 2.

Osutub [3, lk. 102–104], et antud ruum on piisavalt väike.

Teoreem 2.1. *Ülesandel (2.1) on ruumis H ülimalt üks lahend.*

Samas on ta ka piisavalt suur [3, lk. 105–107].

Teoreem 2.2. *Kui $u_d \in H^{1/2}(\Gamma)$, siis ülesandel (2.1) leidub lahend ruumis H .*

Seejuures pole tingimus u_d jaoks kitsendav, kuna ruumi H^1 funktsiooni ahend rajale asub ruumis $H^{1/2}$ [3, lk. 50].

3 Rajaintegraalvõrrandiks taandamine

Ülesande (2.1) asemel on lihtsam lahendada teatud konvolutsioonilist integraalvõrrandit. Vastava integraaloperaatori tuumaks on

$$E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}.$$

Radiatsioonitingimusega seoses võib tähele panna, et

$$\partial_r E(x) - ikE(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|^2}.$$

Otsene kontroll näitab, et E rahuldab Helmholtzi võrrandit kõikjal peale punkti 0. Täpsemalt, distributsioonide mõttes

$$(\Delta + k^2)E = \delta,$$

kus δ on Diraci delta. See on põhjuseks, miks uurime edaspidi konvolutsiooni just sellega. Märkame lisaks, et E on kooskõlas väitega, et lahendid käituvad lõpmatuses nagu $1/r$.

Rajaoperaatoriks nimetame

$$S : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), q \mapsto q \star E.$$

Ütleme, et lainearv k on kriitiline, kui $-k^2$ on ülesande

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u|_{\Omega} = 0, \\ u_d = 0 \end{cases}$$

omaväärtus. On tõestatud [3, lk. 142], et rajaoperaatoril on hea omadus.

Teoreem 3.1. *Kui k pole kriitiline, siis operaator S on isomorfism.*

Alljärgnev on antud tulemuse otsene järeldus.

Teoreem 3.2. *Kui $u_d \in H^{1/2}(\Gamma)$ ja k pole kriitiline, siis ülesanne*

$$Sq = u_d. \quad (3.1)$$

on üheselt lahenduv.

Rajaoperaatori sihtruumi laiendades saame potentsiaali

$$\mathcal{S} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H, q \mapsto q \star E.$$

Teoreemi 3.2 ja [3, lk. 110–113] põhjal saame kasuliku tulemuse.

Teoreem 3.3. *Kui q on võrrandi (3.1) lahend, siis Sq on ülesande (2.1) lahend.*

Pöörame tähelepanu, et tänu sisestusele

$$L^2(\Gamma) \xrightarrow{f \mapsto \langle \cdot, f \rangle_{L^2(\Gamma)}} H^{-\theta}(\Gamma) \quad \theta \in (0, 1)$$

võime $L^2(\Gamma)$ funktsioone rakendada $H^\theta(\Gamma)$ elementidele. Lõpuks võime märkida, et juhul, kui $q \in L^2(\Gamma)$, avaldub ülesande (2.1) lahend kujul

$$u(x) = \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} q(y).$$

4 Lähendamine

Võrrandi (3.1) täpse lahendi leidmine võib osutuda keeruliseks. Sellest tingituna konstrueerime lähisvõrrandi.

4.1 Lähendi leidumine ja ühesus

Alustame lähendamiseks kasutatava meetodi defineerimisest.

Definitsioon 4.1. Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ injektiivne. Olgu $X_n \subset X$ ja $Y_n \subset Y$ alamruumide jada, kus $\dim X_n = \dim Y_n = n$, ning $P_n : Y \rightarrow Y_n$ projektor. Iga $f \in Y$ puhul paarile (X_n, P_n) vastav **projektsioonimeetod** lähendab võrrandi

$$Aq = f, \quad q \in X$$

võrrandiga

$$P_n A q_n = P_n f, \quad q_n \in X_n.$$

Ütleme, et projektsioonimeetod **koondub** operaatori A puhul, kui leidub $n_0 \in \mathbb{N}$ selline, et iga $n \geq n_0$ puhul leidub iga $f \in A(X)$ jaoks lähisvõrrandi üheselt määratud lahend $q_n \in X_n$ ning $q_n \rightarrow q$, kus q on algse võrrandi üheselt määratud lahend [1, lk. 242].

Näitamaks, et lähisülesanne on üheselt lahenduv, kasutame raamatus [3] tõestatud lemmat.

Lemma 4.1 (Lax-Milgram). *Kui V on Hilberti ruum ning a selle ruumi pidev, positiivselt määratud bilineaarvorm ja $g \in V^*$, siis ülesandel*

$$\forall v \in V \quad a(u, v) = g(v)$$

leidub üheselt määratud lahend $u \in V$.

Selle rakendamiseks defineerime vormi

$$b : H^{-1/2}(\partial R) \times H^{-1/2}(\partial R) \rightarrow \mathbb{R}, (q_1, q_2) \mapsto q_2(Sq_1).$$

Antud kujutusel on vajalikke omadusi.

Lemma 4.2. *Kujutus b on pidev, sümmeetriline, positiivselt määratud ja bilineaarne.*

Nüüd jõuamegi lähisvõrrandi üheselt lahenduvuse tõestamiseni.

Teoreem 4.1. *Kui R on piirkond, $X_n \subseteq H^{1/2}(\partial R)$ ning $P_n : H^{1/2}(\partial R) \rightarrow X_n$ on L^2 -ortoprojektor, siis paarile (X_n, P_n) vastav lähisvõrrand on operaatore S puhul üheselt lahenduv.*

Tõestus. Kuna P_n on L^2 -ortoprojektor ja $\mathcal{R}(P_n) = X_n$, siis $\mathcal{N}(P_n) = X_n^{\perp L^2}$. Seda arvestades on selge, et alljärgnevad väited on samaväärsed:

$$\begin{aligned} P_n Sq_n &= P_n f \\ P_n(Sq_n - f) &= 0 \\ Sq_n - f &\in \mathcal{N}(P_n) \\ Sq_n - f &\in X_n^{\perp L^2} \\ \langle Sq_n - f, w \rangle_{L^2(\partial R)} &= 0 \quad \forall w \in X_n \\ b(q_n, w) &= f(w) \quad \forall w \in X_n. \end{aligned}$$

Seega lemmade 4.1 ja 4.2 põhjal on ülesande lahend üheselt määratud. \square

4.2 Splainiga lähendamine

Soovides lähisvõrrandi lahendamisel arvutit kasutada, tuleb lähendada ka pinda. Antud juhul kasutame selleks trianguleerimist. Selles alapeatükis uurime kuivõrd hästi saame splineiga lähendada lähendpinnal määratud funktsiooni. Osutub, et on mugav kasutusele võtta kõrgemat järku diferentsiaali mõiste. Seejuures võime mõelda sellest kui tensorist.

Definitsioon 4.2. Kui vektorruumid V ja W on üle sama korpuse, siis nende tensorkorrutiseks nimetame vektorruumi $V \otimes W$, millega on assotsieeritud bilineaarne kujutus

$$V \times W \rightarrow V \otimes W, (v, w) \mapsto v \otimes w. \quad (4.1)$$

Uue vektorruumi elemente nimetame tensoriteks.

Pole raske kontrollida, et esimest järku diferentsiaaloperaatorid ja diferentsiaalid moodustavad vektorruume järgnevate tehete suhtes:

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{u}} + \partial_{\vec{v}} &:= \partial_{\vec{u}+\vec{v}}, \\ \mu \partial_{\vec{u}} &:= \partial_{\mu \vec{u}}, \\ df + dg &:= d(f + g), \\ \mu df &:= d(\mu f). \end{aligned}$$

Piirkonnas R määratud diferentsiaaloperaatorite ja diferentsiaalide vektorruume tähistame vastavalt TR ja T^*R . Nende baaselemente tähistame vastavalt ∂_a ja dx^a . Neid ruume tensorkorrutades saame uusi vektorruume. Ruumiks $\otimes^n TR \otimes \otimes^m T^*R$ nimetame n ruumi TR ja m ruumi T^*R tensorkor-

rutist. Antud ruumi baasi saame kirja panna lühidalt

$$\partial_{(a_1, \dots, a_n)} \otimes dx^{(b_1, \dots, b_m)} := \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_n} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_m} .$$

Kõrgemat järku diferentsiaaloperaatoreid võib vaadelda ruumi $\bigotimes^n TR$ elementidena. Paneme tähele, et tähistus on kooskõlas definitsiooniga (1.1).

Edaspidi võtame kasutusele Einsteini notatsiooni. Täpsemalt, kui sama indeks leiab aset avaldises nii ülemises kui ka alumises positsioonis, siis mõistame selle all summeerimist üle selle indeksi ehk

$$x^a y_a = \sum_a x^a y_a .$$

Samuti tähistame ka multiindeksite puhul

$$x^A y_A = \sum_A x^A y_A .$$

Vormiks (4.1) võime valida

$$(f^A_B \partial_A \otimes dx^B) \otimes (g^C_D \partial_C \otimes dx^D) := f^A_B g^C_D \partial_A \otimes \partial_C \otimes dx^B \otimes dx^D . \quad (4.2)$$

Antud vorm kirjeldab, kuidas madalamat järku tensoritest saada kõrgemat järku tensoreid. Otsesest kontrollist selgub, et kujutus on tõepoolest bilineaarne. Täisdiferentsiaali on loomulik üldistada kui

$$d(f^A_B \partial_A \otimes dx^B) := \partial_A \otimes df^A_B \otimes dx^B .$$

On lihtne kontrollida, et üldistatud diferentsiaal on lineaarne kujutus. Üldis-

tusest järeldub, et juhul $|A| = k$ kehtib

$$d^k f = \partial_A f dx^A,$$

mis on kooskõlas matemaatilise analüüsiga.

Kuna lähispind koosneb kolmnurkadest, siis uurime teisendust, mis kujutab normaliseeritud kolmnurga uuritavaks kolmnurgaks.

Lemma 4.3. *Olgu Δ ja Δ' kolmnurgad vastavalt tippudega $((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ ja $((x_i, y_i))_{i=1}^3$. Seejuures olgu Δ' mitte kõdunud. Tähistame*

$$J := \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Teisendus

$$\phi : (x, y)^T \mapsto J(x, y)^T + (x_1, y_1)^T \quad (4.4)$$

on bijektiivne ning kujutab kolmnurga Δ kolmnurgaks Δ' .

Tõestus. Kuna kolmnurk Δ' pole kõdunud, siis vektorid $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ja $(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ pole paralleelsed ning seega on lineaarselt sõltumatud. Sellest järeldub, et J on pööratav. Kuna nihke operaator on samuti pööratav, siis ka antud operaatorite kompositsioon ϕ on pööratav ehk bijektiivne. Otsene kontroll näitab, et kolmnurga Δ tipud kujutuvad kolmnurga Δ' tippudeks. Kujutuse afiinsusest seega järeldub, et Δ kujutiseks on tõepoolest Δ' . \square

Sarnaselt varasemaga tähistame

$$d\phi^{(a_1, \dots, a_k)} := d\phi^{a_1} \otimes \dots \otimes d\phi^{a_k}.$$

Definitsioonist (4.2) ja diferentsiaali lineaarsusest järeldub järgmine tulemus.

Lemma 4.4. *Kui R on piirkond ja $\mathcal{T}_A \in \bigotimes^n TR \otimes \bigotimes^m T^*R$, siis*

$$d(\mathcal{T}_A \otimes d\phi^A) = d\mathcal{T}_A \otimes d\phi^A.$$

Tõestus. Kui multiindeks on tühi, siis väide selgelt kehtib. Kehtigu väide k elementi sisaldavate multiindeksite puhul. Tõestame väite ühe elemendi võrra suuremate multiindeksite jaoks. Olgu aA suvaline $k+1$ elementi sisaldav multiindeks. Kuna A sisaldab k elementi, siis selle puhul väide kehtib. Kuna $\partial_b\phi^a$ on konstandid, siis saame sellest järeldada, et

$$\begin{aligned} d(\mathcal{T}_{aA} \otimes d\phi^{aA}) &= d(\mathcal{T}_{aA} \otimes d\phi^a \otimes d\phi^A) = d(\mathcal{T}_{aA} \otimes d\phi^a) \otimes d\phi^A = \\ d(\mathcal{T}_{aA} \otimes \partial_b\phi^a dx^b) \otimes d\phi^A &= \partial_b\phi^a d\mathcal{T}_{aA} \otimes dx^b \otimes d\phi^A = d\mathcal{T}_{aA} \otimes d\phi^{aA}. \quad \square \end{aligned}$$

Uurime nüüd kompositsiooni kõrgemat järku diferentsiaali.

Lemma 4.5. *Kui $|A| = k$, siis*

$$d^k(q \circ \phi) = d\phi^A \partial_A q \circ \phi.$$

Tõestus. Selge, et väide kehtib juhul $k = 0$. Kehtigu väide $k = l$ puhul. Tõestame $k = l + 1$ jaoks. Tuginedes lemmale 4.4

$$\begin{aligned} d^{l+1}(q \circ \phi) &= d(d\phi^A \partial_A q \circ \phi) = d(\partial_A q \circ \phi) \otimes d\phi^A = \partial_b(\partial_A q \circ \phi) dx^b \otimes d\phi^A = \\ (\partial_b\phi^a \partial_{aA} q \circ \phi) dx^b \otimes d\phi^A &= (\partial_{aA} q \circ \phi) d\phi^{aA}. \quad \square \end{aligned}$$

Edaspidi soovime kompositsiooni diferentsiaali esitada operaator kujul. Selleks tasub sisse tuua maatriksi jälje üldistus. Kui $|A| = i - 1$ ja $|D| = j - 1$, siis tähistame

$$\mathrm{tr}_j^i(f^{AbC}{}_{DeF} \partial_{AbC} \otimes dx^{DeF}) := f^{AwC}{}_{DwF} \partial_{AC} \otimes dx^{DF}.$$

Kuna \mathbb{R}^n on samastatav sellel ruumil tegutsevate esimest järku diferentsiaaloperaatorite ruumiga saame $\phi = \phi^a \mathbf{e}_a$ esitada kujul $\phi^a \partial_a$. Selle samastuse abil saame ilusa tulemuse.

Lemma 4.6. *Kujutuse ϕ diferentsiaal avaldub kujul*

$$d\phi = \partial_b \phi^a \partial_a \otimes dx^b.$$

Tõestus. Eeltoodud definitsioonide põhjal

$$d\phi = d(\phi^a \partial_a) = \partial_a \otimes d\phi^a = \partial_a \otimes \partial_b \phi^a dx^b = \partial_b \phi^a \partial_a \otimes dx^b. \quad \square$$

Nüüd saame sisse tuua operaatori, mis on kompositsiooni diferentsiaali avaldamisel kesksel kohal:

$$T_j := \text{tr}_j^1(d\phi \otimes \cdot). \quad (4.5)$$

Järgnevalt läheb vaja järgmist abitulemust.

Lemma 4.7. *Kui $|A| = k$ ja $j \in \mathbb{N}_0$, siis*

$$T_{k+1} \dots T_2 d^{k+j} q = d\phi^A \otimes d^j \partial_A q.$$

Tõestus. Selge, et väide lehtib juhul $k = 0$. Kehtigu väide $k = l$ puhul iga j jaoks. Valime j ning tõestame väite $k = l + 1$ jaoks. Kui $|A| = l$ ja $|B| = j$, siis

$$\begin{aligned} T_{l+2} \dots T_2 d^{l+1+j} q &= T_{l+2}(d\phi^A \otimes d^{1+j} \partial_A q) = \\ &= \text{tr}_{l+2}^1(\partial_b \phi^a \partial_{cBA} q \partial_a \otimes dx^b \otimes d\phi^A \otimes dx^{cB}) = \\ &= \partial_b \phi^a \partial_{aBA} q dx^b \otimes d\phi^A \otimes dx^B = d\phi^{aA} \otimes d^j \partial_{aA} q. \quad \square \end{aligned}$$

Üldisema lemma 4.7 asemel oleme huvitatud kitsamast olukorrast.

Järeldus 4.1. Kui $|A| = k$, siis

$$T_{k+1} \dots T_2 d^k q = d\phi^A \partial_A q.$$

Nüüd järeldub lemmast 4.5 ning järeldusest 4.1 meid huvitav tulemus.

Teoreem 4.2. Kompositsiooni kõrgemat järku diferentsiaal avaldub kujul

$$d^k(q \circ \phi) = T_{k+1} \dots T_2 d^k q \circ \phi.$$

Ruumi $\otimes^k T^*R$ saab vaadelda ka normeeritud ruumina. Kui R on mingi piirkond, siis

$$\|f_A dx^A\|_{L^2(\otimes^k T^*R)} := \left(\sum_A \|f_A\|_{L^2(R)}^2 \right)^{1/2}.$$

Otsene kontroll näitab, et operaator (4.5) on lineaarne. Kuna operaator on lõplikumõõtmeline, siis on ta ka pidev.

Lemma 4.8. Kui $1 \leq j \leq k+1$, siis $T_j \in \mathcal{L}(L^2(\otimes^k T^*R))$.

Uurime nüüd, kui hästi saab funktsiooni lähendada polünoomiga. Tugineme seejures tuntud tulemusele.

Definitsioon 4.3 (Tugev koonuse tingimus). Olgu $R \subset \mathbb{R}^N$ tõkestatud ning ∂R selle raja. Ütleme, et R rahuldab tugevat koonuse tingimust, kui leidub ∂R lahtine kate $\{O_i\}$ ja vastavad koonused $\{C_i\}$ tippudega nullpunktis, mille puhul

$$\forall x \in R \cap O_i \quad x + C_i \subset R.$$

Lemma 4.9. Rahuldagu $R \subset \mathbb{R}^n$ tugevat koonuse tingimust ning olgu $q \in$

$H^k(R)$. Leidub ülimalt $k - 1$ järku polünoom p , mille puhul

$$|q - p|_{H^j(R)} \leq C|q|_{H^k(R)},$$

kus C ei sõltu funktsioonist q ning $j \leq k$.

Tõestus. Otsene järeldus artiklis [2, lk. 3] esinevast kahest lemmast. \square

Osutub, et operaatori (4.5) normi saab hinnata.

Lemma 4.10. *Kui $2 \leq j \leq k + 1$, siis*

$$\|T_j\|_{\mathcal{L}(L^2(\otimes^n T^*R))} \leq \|J\|_F.$$

Tõestus. Olgu antud k ja vastav j . Olgu $|A| = j - 2$ ja $|B| = k - j + 1$.

Tuginedes Cauchy-Schwartz-Bunjakovski võrratusele:

$$\begin{aligned} \|T_j f_{AaB} dx^{AaB}\|_{L^2(\otimes^k T^*R)}^2 &= \|\mathrm{tr}_j^1 \partial_c \phi^b f_{AaB} \partial_b \otimes dx^{cAaB}\|_{L^2(\otimes^k T^*R)}^2 = \\ &= \|\partial_c \phi^a f_{AaB} dx^{cAB}\|_{L^2(\otimes^k T^*R)}^2 = \sum_{cAB} \|\partial_c \phi^a f_{AaB}\|_{L^2(R)}^2 \leq \\ &= \sum_{cAB} \int_R |\partial_c \phi^a f_{AaB}|^2 \leq \sum_{cAB} \int_R \left(\sum_a |\partial_c \phi^a|^2 \right) \left(\sum_a |f_{AaB}|^2 \right) = \\ &= \left(\sum_{ca} |\partial_c \phi^a|^2 \right) \sum_{AaB} \int_R |f_{AaB}|^2 = \|J\|_F^2 \|f_{AaB} dx^{AaB}\|_{L^2(\otimes^k T^*R)}^2 \quad \square \end{aligned}$$

Lemmadest 4.9 ja 4.10 nüüd järeldub kolmnurkade puhul huvitav hinnang.

Järeldus 4.2. *Leidub $C > 0$ nii, et iga $q \in H^k(\Delta')$ jaoks leidub ülimalt $k - 1$ järku polünoom, mille puhul*

$$\|q - p\|_{L^2(\Delta')} \leq C \|J\|_F^k |q|_{H^k(\Delta')}.$$

Tõestus. Olgu $p \circ \phi$ ja C vastavalt ülimalt $k - 1$ järku polünoom ja konstant lemmast 4.9. Sellest, et ϕ on afinne teisendus, järeldub, et ka p on ülimalt $k - 1$ järku polünoom ning seega

$$\begin{aligned} \|q - p\|_{L^2(\Delta')} |\det J|^{-1/2} &= \|(q - p) \circ \phi\|_{L^2(\Delta)} \leq C |q \circ \phi|_{H^k(\Delta)} = \\ &= C \|d^k(q \circ \phi)\|_{L^2(\otimes^k T^* \Delta)} = C \|T_{k+1} \dots T_2 d^k q \circ \phi\|_{L^2(\otimes^k T^* \Delta)} \leq \\ &= C \|T_{k+1}\| \dots \|T_2\| \|d^k q \circ \phi\|_{L^2(\otimes^k T^* \Delta')} \leq C \|J\|_F^k \|d^k q\|_{L^2(\otimes^k T^* \Delta')} |\det J|^{-1/2} = \\ &= C \|J\|_F^k |q|_{H^k(\Delta')} |\det J|^{-1/2}. \quad \square \end{aligned}$$

Järeldust 4.2 saame üldistada ka kolmnurkadest Δ_i koosnevale pinnale Γ_Δ . Selleks sümbolitega J_i ja ϕ_i tähistame kolmnurgale Δ_i vastavat maatriksit (4.3) ja kujutust (4.4). Lisaks tähistame $h := \max_i \|J_i\|_F$. Nüüd jõuamegi järelduse 4.2 üldistuseni.

Järeldus 4.3. *Leidub $C > 0$, mille puhul iga $q \in H^n(\Gamma_\Delta)$ jaoks leidub spline s , mis on kolmnurkadel Δ_i ülimalt $k - 1$ järku polünoom ning rahuldab võrratust*

$$\|q - s\|_{L^2(\Gamma_\Delta)} \leq Ch^n |q|_{H^n(\Gamma_\Delta)}.$$

Tõestus. Lemmast 4.2 saame

$$\begin{aligned} \|q - s\|_{L^2(\Gamma_\Delta)}^2 &= \sum_i \|q - s\|_{L^2(\Delta_i)}^2 \leq \\ &= \sum_i C^2 \|J_i\|_F^{2n} |q|_{H^n(\Delta_i)}^2 \leq C^2 h^{2n} |q|_{H^n(\Gamma_\Delta)}^2. \quad \square \end{aligned}$$

Tegu on Bramble-Hilberti lemma erijuhuga. Tõestuse käigus aga nägime, et antud juhul on konstant C pinnast sõltumatu, kuna rakendasime lemmat 4.9 vaid normaliseeritud kolmnurga puhul.

4.3 Lähendist lähendpinnal

Seame nüüd eesmärgiks näidata, et ülesande (3.1) lahend trianguleeritud pinnal puhul on hästi lähendatav splineiga. Selleks läheb meil vaja tulemusi, mis on tõestatavad ka diskretiseerimata raja puhul. Selles peatükis teoreemis 4.1 esineva projektsioonide meetodi ülesande lahendit tähistame q_n .

Alustuseks paneme tähele, et lahendi ja lähendi erinevus on hinnatav lahendi projektsiooni kaugusega lähendist endast.

Lemma 4.11. *Leidub $C > 0$ nii, et kui q on ülesande (3.1) lahend, siis teoreemi 4.1 eeldustel kehtib projektori $Q_n : H^{-1/2}(\partial R) \rightarrow X_n$ puhul*

$$\|q - q_n\|_{H^{-1/2}(\partial R)} \leq C \|Q_n q - q\|_{H^{-1/2}(\partial R)}.$$

Tõestus. Alustuseks paneme tähele, et q_n definitsiooni põhjal

$$b(Q_n q - q_n, q - q_n) = (Q_n(q - q_n))S(q - q_n) = (Q_n(q - q_n))(f - Sq_n) = 0.$$

Kui γ on b positiivselt määratuse konstant, siis

$$\begin{aligned} \|Q_n q - q_n\|_{H^{-1/2}(\partial R)}^2 &\leq \frac{1}{\gamma} b(Q_n q - q_n, Q_n q - q_n) = \\ &\frac{1}{\gamma} b(Q_n q - q_n, (Q_n q - q) + (q - q_n)) = \frac{1}{\gamma} b(Q_n q - q_n, Q_n q - q) \leq \\ &\frac{\|S\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}(\partial R), H^{1/2}(\partial R))}}{\gamma} \|Q_n q - q_n\|_{H^{-1/2}(\partial R)} \|Q_n q - q\|_{H^{-1/2}(\partial R)}. \end{aligned}$$

Nüüd piisab märgata, et

$$\begin{aligned} \|q - q_n\|_{H^{-1/2}(\partial R)} &\leq \|q - Q_n q\|_{H^{-1/2}(\partial R)} + \|Q_n q - q_n\|_{H^{-1/2}(\partial R)} \leq \\ &\left(1 + \frac{\|S\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}(\partial R), H^{1/2}(\partial R))}}{\gamma}\right) \|q - Q_n q\|_{H^{-1/2}(\partial R)}. \quad \square \end{aligned}$$

Loomulik oleks oletada, et Sobolevi normid on monotoonselt kasvavad järgu järgi. Piirdume aga mõne kitsama väitega.

Lemma 4.12. *Kehtib hinnang*

$$\|\cdot\|_{L^2(\partial R)} \leq \|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial R)}.$$

Tõestus. Väide järeldub otse definitsioonidest (1.2) ja (1.3). □

Järgmise hinnangu tõestamiseks varustame kaasruumi ekvivalentse normiga

$$\|\cdot\|'_{H^{-1/2}(\partial R)} := \sqrt{b(\cdot, \cdot)}. \quad (4.6)$$

Lemma 4.13. *Normid (1.4) ja (4.6) on $H^{-1/2}(\partial R)$ puhul ekvivalentsed.*

Tõestus. Kui γ on vormi b positiivselt määratuse konstant, siis

$$\begin{aligned} \gamma \|\nu\|_{H^{-1/2}(\partial R)}^2 &\leq \nu(S\nu) \leq \|\nu\|_{H^{-1/2}(\partial R)} \|S\nu\|_{H^{1/2}(\partial R)} \leq \\ &\|\nu\|_{H^{-1/2}(\partial R)}^2 \|S\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}(\partial R), H^{1/2}(\partial R))}. \end{aligned} \quad \square$$

Nüüd jõuamegi teise hinnanguni.

Lemma 4.14. *Leidub $C > 0$ nii, et*

$$\|\cdot\|_{H^{-1/2}(\partial R)} \leq C \|\cdot\|_{L^2(\partial R)}.$$

Tõestus. Olgu $\nu \in L^2(\partial R)$. Arvestades lemmat 4.13 ja 4.12 saame

$$\begin{aligned} \|\nu\|_{H^{-1/2}(\partial R)}^2 &\leq C' \|\nu\|_{H^{-1/2}(\partial R)}^2 = C' \nu(S\nu) = C' \langle S\nu, \nu \rangle_{L^2(\partial R)} \leq \\ &C' \|S\nu\|_{L^2(\partial R)} \|\nu\|_{L^2(\partial R)} \leq C' \|S\nu\|_{H^{1/2}(\partial R)} \|\nu\|_{L^2(\partial R)} \leq \\ &C' \|S\|_{\mathcal{L}(H^{-1/2}(\partial R), H^{1/2}(\partial R))} \|\nu\|_{H^{-1/2}(\partial R)} \|\nu\|_{L^2(\partial R)}. \end{aligned} \quad \square$$

Nüüd saame näidata, et lahend ja lähend on lähedased.

Teoreem 4.3. *Kui X_n on lineaarsplainide ruum ja $q \in H^1(\Gamma_\Delta)$, siis mingi $C > 0$ puhul*

$$\|q - q_n\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\Delta)} \leq Ch\|q\|_{H^1(\Gamma_\Delta)}.$$

Tõestus. Lemmade 4.11 ja 4.14 ning järelduse 4.3 põhjal

$$\begin{aligned} \|q - q_n\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\Delta)} &\leq C'\|q - Q_n q\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\Delta)} \leq \\ &C''\|q - Q_n q\|_{L^2(\Gamma_\Delta)} \leq C'''h\|q\|_{H^1(\Gamma_\Delta)}. \end{aligned} \quad \square$$

4.4 Lähendpinna ülesandest

Antud peatükis on kirjeldatud ebaõnnestunud katse näidata, et lähispinna poolt indutseeritud diferentsiaalvõrrandi lahend on algele ülesandele heaks lähendiks. Lähenemise põhiideeks on hinnata integraaloperaatori normi tuuma mingi normiga. Loomulikul viisil saadud tuuma norm aga osutub liiga tugevaks eelduseks. Teatud määral on vale lähenemine tingitud sellest, et tuuma E koheldakse kui parameetriga ruumi $H^{1/2}$ elementi. Sellega seoses on kasutusel ka tähistus

$$q(T.\Phi) := q \star \Phi.$$

See lähenemine on aga vale, kuna rajaoperaatori sihtruumiks on $H^{1/2}$ ehk kujutised selle operaatoriga ei pruugi olla punktiviisi määratud. Punktis võib olla näiteks singulaarsus.

Olgu S_Δ ja \mathcal{S}_Δ lähendpinna vastavalt rajaoperaator ja potentsiaal,

$$\pi : \Gamma_\Delta \rightarrow \pi(\Gamma_\Delta) \subset \Gamma$$

projektor ning $\bar{\pi} := \pi^{-1}$. Näitame, et

$$\delta_\Delta := (\mathcal{S}_\Delta \mathcal{S}_\Delta^{-1} \pi^* - \mathcal{S} \mathcal{S}^{-1}) u_d$$

on väike. Alustuseks kontrollime, et tõepoolest $\pi^* u_d \in H^{1/2}(\Gamma_\Delta)$. Selleks läheb meil vaja Jacobi determinandi üldistust. Kirjeldagu seega

$$\mathcal{J} : \Gamma_\Delta \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{ja} \quad \bar{\mathcal{J}} : \pi(\Gamma_\Delta) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

vastavalt kujutuste π ja $\bar{\pi}$ lokaalset pindala muutut.

Lemma 4.15. *Kui $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\pi \in \text{Lip}(\Gamma_\Delta, \pi(\Gamma_\Delta))$ ja $\bar{\mathcal{J}} \in L^\infty(\pi(\Gamma_\Delta))$, siis*

$$\pi^* u \in H^{1/2}(\Gamma_\Delta).$$

Tõestus. Ruuduga integreeruvus järeldeb sellest, et

$$\|\pi^* u\|_{L^2(\Gamma_\Delta)}^2 = \int_{\Gamma_\Delta} |\pi^* u|^2 = \int_{\pi(\Gamma_\Delta)} |u|^2 \bar{\mathcal{J}} \leq \|\bar{\mathcal{J}}\|_{L^\infty(\pi(\Gamma_\Delta))} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Poolnorm on tõkestatud, kuna

$$\begin{aligned} |\pi^* u|_{H^{1/2}(\Gamma_\Delta)}^2 &= \int_{\Gamma_\Delta^2} \frac{|\pi^* u(x) - \pi^* u_d(y)|^2}{|x - y|^3} = \\ &= \int_{\pi(\Gamma_\Delta)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|\bar{\pi}(x) - \bar{\pi}(y)|^3} \bar{\mathcal{J}}(x) \bar{\mathcal{J}}(y) \leq \\ &\|\bar{\mathcal{J}}\|_{L^\infty(\pi(\Gamma_\Delta))}^2 |\pi|_{\text{Lip}(\Gamma_\Delta, \pi(\Gamma_\Delta))}^3 |u|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned} \quad \square$$

Edaspidi on mugav kahemuutuja funktsioone vaadelda veidi ebatavaliselt.

Definitsioon 4.4 (Bochneri ruum). Kui $Y(U)$ on funktsioonide normeeritud ruum, X normeeritud ruum, $T : U \rightarrow X$ ning $\|T\|_X \in Y(U)$, siis tähistame $T \in Y(U; X)$.

Hindamiseks suurust δ_Δ tuleb kasuks teatud liiki korrutamise kinnisus.

Lemma 4.16. *Kehtib hinnang*

$$\|fu\|_{H^{1/2}(\partial R)} \leq C_R \|f\|_{\text{Lip}(\partial R)} \|u\|_{H^{1/2}(\partial R)},$$

kus

$$C_R := \sqrt{2 \max\{1, C'_R\}} \quad \text{j} \ddot{a} \quad C'_R := \|T \cdot | \cdot |^{-1}\|_{C(\partial R; L^1(\partial R))}.$$

Tõestus. Märkame, et

$$\|fu\|_{L^2(\partial R)} \leq \|f\|_{L^\infty(\partial R)} \|u\|_{L^2(\partial R)}.$$

Seejuures

$$\int_{\partial R^2} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|} \leq C'_R \|u\|_{L^2(\partial R)}^2.$$

Arvestades, et

$$(ab - cd)^2 = (a(b-d) + d(a-c))^2 \leq 2a^2(b-d)^2 + 2d^2(a-c)^2$$

saame

$$\begin{aligned} |fu|_{H^{1/2}(\partial R)}^2 &= \int_{\partial R^2} \frac{|f(x)u(x) - f(y)u(y)|^2}{|x-y|^3} \leq \\ &2 \int_{\partial R^2} \frac{f^2(x)(u(x) - u(y))^2 + u^2(y)(f(x) - f(y))^2}{|x-y|^3} \leq \\ &2\|f\|_{L^\infty(\partial R)}^2 \|u\|_{H^{1/2}(\partial R)}^2 + 2\|f\|_{\text{Lip}(\partial R)}^2 C'_R \|u\|_{L^2(\partial R)}^2. \end{aligned}$$

Konstant C_R nüüd järeldub sellest, et

$$\begin{aligned} &\max\{\|f\|_{L^\infty(\partial R)}^2 + 2C'_R \|f\|_{\text{Lip}(\partial R)}^2, 2\|f\|_{L^\infty(\partial R)}^2\} \leq \\ &2 \max\{1, C'_R\} (\|f\|_{L^\infty(\partial R)}^2 + \|f\|_{\text{Lip}(\partial R)}^2) \leq 2 \max\{1, C'_R\} \|f\|_{\text{Lip}(\partial R)}^2. \end{aligned}$$

□

Kasulikuks osutub ka teatud üldistus. Kuna $q_\Delta \in L^2(\Gamma_\Delta)$ puhul

$$(\bar{\pi}^* q_\Delta)u = \int_{\pi(\Gamma_\Delta)} u \bar{\pi}^* q_\Delta = \int_{\Gamma_\Delta} q_\Delta \mathcal{J} \pi^* u,$$

siis on loomulik ka iga $q_\Delta \in H^{-1/2}(\Gamma)$ puhul defineerida

$$(\bar{\pi}^* q_\Delta)u := q_\Delta(\mathcal{J} \pi^* u). \quad (4.7)$$

Saame näidata, et hea projektori puhul säilib ka vastav ruum.

Lemma 4.17. *Kui on rahuldatud lemma 4.15 eeldused, $\mathcal{J} \in \text{Lip}(\pi(\Gamma_\Delta))$ ning $q_\Delta \in H^{-1/2}(\pi(\Gamma_\Delta))$, siis*

$$\bar{\pi}^* q_\Delta \in H^{-1/2}(\pi(\Gamma_\Delta)).$$

Tõestus. Definiitsiooni (4.7) tõttu piisab tõestamast, et

$$\mathcal{J} \pi^* u \in H^{1/2}(\Gamma_\Delta) \quad \forall u \in H^{1/2}(\pi(\Gamma_\Delta)).$$

See aga järeldub lemmadest 4.15 ja 4.16. □

Nüüd sooritame muutujavahetuse.

Lemma 4.18. *Kujutis lähispinna rajaoperaatoriga on esitatav kujul*

$$\mathcal{S}_\Delta q_\Delta = (\bar{\pi}^* q_\Delta)(\bar{\mathcal{J}} \bar{\pi}^* T.E).$$

Tõestus. Arvestades, et $\mathcal{J} \pi^* \bar{\mathcal{J}} = 1$, definiitsiooni (4.7) põhjal

$$\mathcal{S}_\Delta q_\Delta = q_\Delta \star E = q_\Delta(T.E) = q_\Delta(\mathcal{J} \pi^*(\bar{\mathcal{J}} \bar{\pi}^* T.E)) = (\bar{\pi}^* q_\Delta)(\bar{\mathcal{J}} \bar{\pi}^* T.E). \quad \square$$

Nüüd saame uuritava vahe kirja panna uuel kujul.

Järeldus 4.4. *Lahendi ja lähendi vahe avaldub kujul*

$$\delta_{\Delta} = (\bar{\pi}^* S_{\Delta}^{-1} \pi^* u_d)(\bar{\mathcal{J}} \bar{\pi}^* T.E) - (S^{-1} u_d)(T.E).$$

Tõestus. Otsene järeldus lemmast 4.18. □

Soovides antud vahet hinnata on aga mugavam uurida lahtikirjutatud kuju.

Järeldus 4.5. *Lahendi ja lähendi vahe on esitatav kujul*

$$\begin{aligned} \delta_{\Delta} = & (\bar{\pi}^* S_{\Delta}^{-1} \pi^* u_d - S^{-1} u_d)(\bar{\mathcal{J}} \bar{\pi}^* T.E) + \\ & (S^{-1} u_d)(\bar{\mathcal{J}}(\bar{\pi}^* - I)T.E) - \\ & (S^{-1} u_d)(T.E)|_{\Gamma \setminus \pi(\Gamma_{\Delta})}. \end{aligned}$$

Tõestus. Otsene järeldus järeldusest 4.4. □

Nüüd saab antud suurust hinnata liidetavate kaupa. Märkame, et järelduses 4.5 toodud kuju on mugav ka veel ühel põhjusel.

Lemma 4.19. *Kui R ja Q piirkonnad, siis*

$$\|qT\|_{H^{1/2}(\partial R)} \leq \|q\|_{H^{-1/2}(\partial Q)} \|T\|_{H^{1/2}(\partial R; H^{1/2}(\partial Q))}.$$

Tõestus. Võrratus järeldub järgnevast ahelast:

$$\begin{aligned} |qT|_{H^{1/2}(\partial R)}^2 &= \int_{\partial R^2} \frac{|q(T(x) - T(y))|^2}{|x - y|^3} \leq \|q\|_{H^{-1/2}(\partial Q)}^2 |T|_{H^{1/2}(\partial R; H^{1/2}(\partial Q))}^2 \\ \|qT\|_{L^2(\partial R)} &\leq \|q\|_{H^{-1/2}(\partial Q)} \|T\|_{L^2(\partial R; H^{1/2}(\partial Q))}. \end{aligned} \quad \square$$

Sarnasel viisil saame üldistada ka varasemat tulemust.

Lemma 4.20. *Kui ruumid X, Y, Z on sellised, et*

$$\|fg\|_X \leq \|f\|_Y \|g\|_Z,$$

siis

$$\|fT\|_{H^{1/2}(\partial Q; X)} \leq \|f\|_Y \|T\|_{H^{1/2}(\partial Q; Z)}.$$

Tõestus.

$$\begin{aligned} \|fT\|_{L^2(\partial Q; X)} &= \sqrt{\int_{\partial Q} \|fT(x)\|_X^2} \leq \|f\|_Y \|T\|_{L^2(\partial Q; Z)} \\ \|fT\|_{H^{1/2}(\partial Q; X)} &= \sqrt{\int_{\partial Q^2} \frac{\|f(T(x) - T(y))\|_X^2}{|x - y|^3}} \leq \|f\|_Y \|T\|_{H^{1/2}(\partial Q; Z)} \quad \square \end{aligned}$$

Meil läheb aga vaja kitsamat juhtu.

Järeldus 4.6. *Kehtib hinnang*

$$\|fT\|_{H^{1/2}(\partial Q; H^{1/2}(\partial R))} \leq C_R \|f\|_{\text{Lip}(\partial R)} \|T\|_{H^{1/2}(\partial Q; H^{1/2}(\partial R))}.$$

Tõestus. Otsene järeldus lemmadest 4.16 ja 4.20. □

Nagu aga peatüki alguses sai öeldud, osutub ruum $H^{1/2}(\partial Q; H^{1/2}(\partial R))$ liiga väikeseks. See avaldub juba selles, et isegi lihtsaim uuritavatest tuumadest – Laplace'i tuum $|x - y|^{-1}$ – pole ruumis $L^2(\partial Q; L^2(\partial R))$.

Kui tuum oleks antud ruumis, saaks singulaarsuse ümber torukujulise ümbruse välja lõigata ning nii L^2 normi kui ka $H^{1/2}$ poolnormi puhul hinnata ülejäänud integreeritava avaldise L^∞ normiga. Viimane norm aga hääbuks protsessis $\|\pi - \text{id}\|_{L^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$. Vähendades antud protsessis vastavalt torukujulise ümbruse raadiust, saaksime, et tuumade normide vahe häähub.

Viimane kehtiks tänu eeldusele, et tuum on eelmainitud ruumis ning järelikult norm üle singulaarsuse ümbruse oleks lõplik ning seega hulga mõõdu hääbumisel hääbuks ka norm üle ümbruse.

Kokkuvõte

Käesolevas töös sai antud ülevaade algse diferentsiaalvõrrandi lahenduvuse ning integraalvõrrandile taandamise kohta. Samuti on tõestatud vastava projektsioonimeetodi koonduvus ning näidatud, et trianguleeritud pinna puhul ei sõltu Bramble-Hilberti lemma konstant pinnast. Lisaks sai esitatud katse näidata, et trianguleeritud pinna poolt määratud diferentsiaalvõrrandi lahend on lähedane algse ülesande lahendile. Viimase puhul aga osutus lähenemine viljatuks. Samuti tasub tähelepanu pöörata asjaolule, et koonduvuskiiruse tuletamiseks on tarvis enamus tulemusi üldistada.

Kasutatud allikad

- [1] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Springer, 2014.
- [2] C. Morrey. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, 1966.
- [3] J. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations: integral representations for harmonic problems*. Springer, 2001.

Lisa 1. Programm

Ülesandest parema ülevaate saamiseks sai kirjutatud programm, mille jook-
sutamiseks on tarvis paigaldada pakette `matplotlib` ja `bempp_cl`. Program-
mi kirjeldust võib leida koodi kommentaaridest. Tagamaks animatsiooni head
kvaliteeti on valitud võrdlemisi suured parameetrid. Seetõttu võib programmi
jooksutamine võtta mõne minuti.

```
import bempp_cl.api as api
import numpy as np
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation

# Parema kvaliteedi eesmärgil
# loobume interaktiivsusest.
matplotlib.use("Agg")

# --- Algandmed ---

# Sisendlaineiks valime tasandlaine
# amplituudiga A,
# sagedusega w
# kiirusega v,
# suunaga dir.

A = 1
w = 8
```

```

v = 1
k = w / v
dir = np.array([0, 1, 0])
k_vector = k * dir

# --- Rajaintegraalvõrrandi püstitus ---

# Valime pinna.
grid = api.shapes.regular_sphere(3)

# Valime funktsioonide klassi,
# kust otsime lähislahendi.
# Antud juhul on selleks
# katkevad linearsplainid.
space = api.function_space(grid, "DP", 1)

# Defineerime rajaoperaatori.
slp = api.operators.boundary.helmholtz.single_layer(
    space, space, space, wavenumber=k
)

# Rajatingimuseks valime sisendlaine vastandlaine.
@api.complex_callable
def f(x, n, domain_index, result):
    result[0] = -A * np.exp(1j * (np.dot(k_vector, x)))

# Asendame täpse rajatingimuse selle

```

```

# lähendiga samast funktsioonide klassist, kust
# otsime lahendit.
rhs = api.GridFunction(space, fun=f)

# Leiame rajaintegraalvõrrandi lahendi.
sol, _ = api.linalg.gmres(slp, rhs)

# --- Rajaintegraalvõrrandi interpreteerimine ---

# Lahend ise on määratud kolmemõõtmelises ruumis,
# kuid visualiseerimiseks valime XY tasandi osahulga.

# Määrame ristküliku.
ys = np.array([-4, 4])
xs = ys * 16 / 9
# Valime võrgu tiheduse.
nodes_per_unit = 300j

# Genereerime võrgu.
plot_grid = np.mgrid[
    ys[0] : ys[1] : nodes_per_unit * np.ptp(ys),
    xs[0] : xs[1] : nodes_per_unit * np.ptp(xs),
]
points = np.vstack(
    (plot_grid[0].ravel(),
     plot_grid[1].ravel(),
     np.zeros(plot_grid[0].size))

```

```

)

# Kasutades loodud võrku defineerime potentsiaali.
single = api.operators.potential.helmholtz.single_layer(
    space, points, wavenumber=k
)

# Rajaintegraalvõrrandi lahendi põhjal saame
# lainevõrrandi lahendi ajahetkel 0.
# Tegu on väljundlainega.
u_ref = single.evaluate(sol)
# Alguses valitud parameetrite põhjal
# konstrueerime sisendlaine ajahetkel 0.
u_inc = A * np.exp(1j * (np.dot(k_vector, points)))

# Sageduse põhjal määrame, kuidas
# muutub kompleksarvu argument.
phasor = lambda t: np.exp(-1j * w * t)

# Leiame liitlaine.
wave = lambda t: ((u_ref + u_inc) * phasor(t)).real

# --- Visualiseerimine ---

# Määrame kvaliteedi.
# Punktide arv tolli kohta.
dpi = 100

```

```

# Loome graafiku.
fig = plt.figure(figsize=(16, 9), dpi=dpi)
ax = fig.add_subplot(111)

# Liitlaine ajahetkel 0.
wave_t = wave(0)
wave_t = wave_t.reshape(plot_grid[0].shape)

# Värvide valikuks määrame väärtuste vahemiku.
vmin = -np.max(np.abs(wave_t))
vmax = np.max(np.abs(wave_t))

# Joonistamiseks.
c = ax.imshow(
    wave_t,
    extent=(xs[0], xs[1], ys[0], ys[1]),
    cmap="coolwarm",
    origin="lower",
    animated=True,
    vmin=vmin,
    vmax=vmax,
)

# Animatsiooni samm.
def update(t):
    wave_t = wave(t)

```

```

    wave_t = wave_t.reshape(plot_grid[0].shape)

    c.set_data(wave_t)
    return [c]

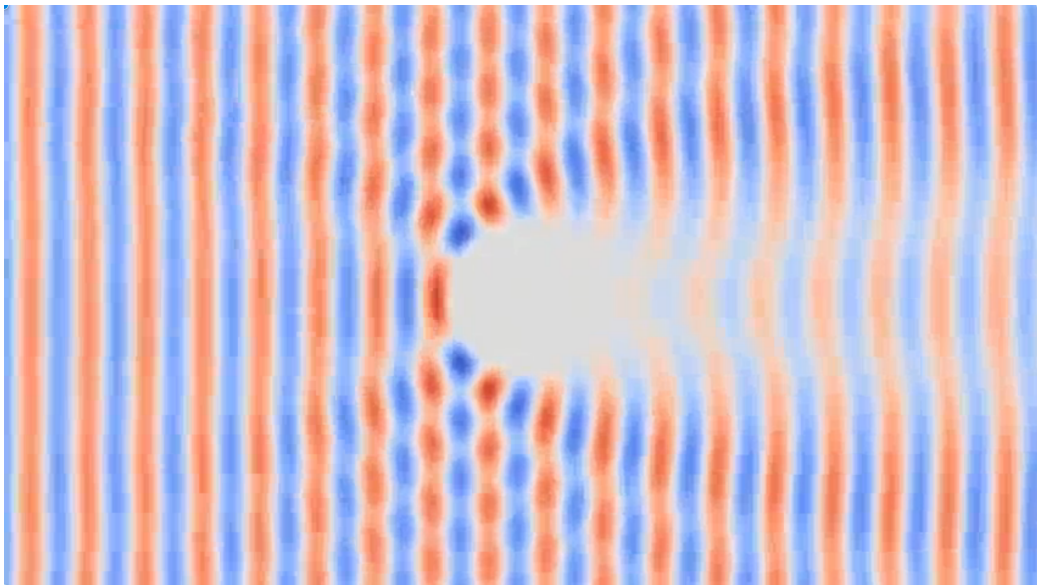
ax.axis("off")
plt.subplots_adjust(left=0, right=1, top=1, bottom=0)

# Animeerimiseks.
ani = FuncAnimation(
    fig,
    update,
    frames=np.linspace(0, 2 * np.pi / w, 100), interval=10,
    blit=True
)

# Salvesta animatsioon.
ani.save(f"sphere_with_k{k}.mp4", dpi=dpi, writer="ffmpeg")

```

Programmi jooksumisel on väljundiks animatsioon vastava lainevõrrandi sisend- ja väljundlaine summast. Kuvatõmmis sellest animatsioonist on esitatud joonisel 1.



Joonis 1: Näide liitlainest.

Lisa 2. Nõrk püstitus

Selles lisas tugineme lähenemisele, mis on kirjeldatud raamatus [3, lk. 56]. Alustame ülesandest 2.1. On teada [3, lk. 50–54], et leidub pidev jätkamise operaator

$$\mathcal{R} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega_e).$$

Seda kasutades otsime lahendit kujul $u = v - \mathcal{R}u_d$. Seejuures raamatus [3, lk. 54] tehtud tähelepaneku põhjal on $\mathcal{R}u_d$ kandja tõkestatud ja seega antud liige ei sega radiatsioonitingimust. Tähistades

$$g := -(\Delta + k^2)\mathcal{R}u_d,$$

saame seega tingimusteks

$$(\Delta + k^2)v = g$$

ja

$$v|_{\Gamma} = 0.$$

Tähistades

$$H_0 := \{f \in H : f|_{\Gamma} = 0\}$$

otsime lahendit v ruumist H_0 . Nõrga ülesande võime alustuseks püstitada kujul

$$\int_{\Omega_e} w(\Delta + k^2)v = \int_{\Omega_e} wg \quad \forall w \in H_0^1(\Omega_e).$$

Arvestades aga Greeni esimest valemit

$$\int_{\Omega_e} w\Delta v = \int_{\Gamma} w\partial_{\vec{n}}v - \int_{\Omega_e} \nabla w \cdot \nabla v,$$

kus \vec{n} on pinna normaalisuunaline vektor, ning tingimust $w|_{\Gamma} = 0$, saame ülesandeks

$$-\int_{\Omega_e} \nabla w \cdot \nabla v + k^2 \int_{\Omega_e} wv = \int_{\Omega_e} wg \quad w \in H_0^1(\Omega_e).$$

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Stefan Ehin,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Helmholtzi võrrandi Dirichlet' kolmemõõtmelise välisülesande lahendamine rajaelemendi meetodil", mille juhendaja on Urve Kangro, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Stefan Ehin

25.05.2025