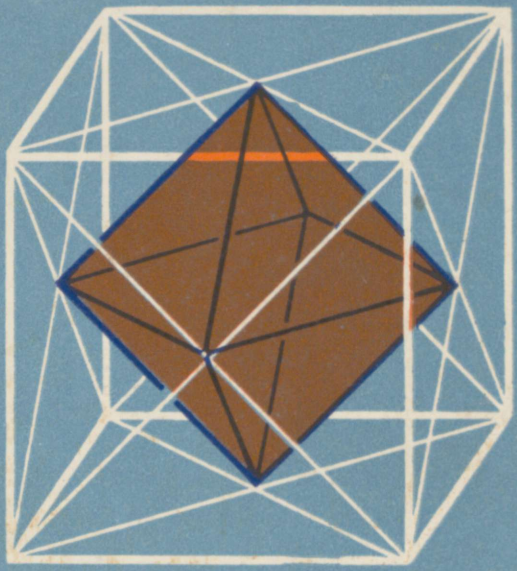
matemaatika

K. ARIVA O. PRINITS



XI KLASSILE

A - 33261

K. ARIVA O. PRINITS

NA-

MATEMAATIKA

XI KLASSILE

KATSEÕPIK

«VALGUS» · TALLINN 1973

51
A 75

Kaane kujundanud *R. Tungla*

Katseõpikuks kinnitanud Eesti NSV Haridusministeerium

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

TÜ Raamatukogu
N

© KIRJASTUS «VALGUS», 1973

6—6—1

1. MATEMAATILISE TEOORIA LOOGILINE ÜLESEHITUS.

Eelmistes klassides on tundma õpitud hulk mitmesuguseid matemaatilisi lauseid. Seejuures ilmnes, et peaaegu iga lause tuleneb ühest või mitmest eelnevast lausest ja on omakorda aluseks mõne järgneva lause tuletamisel.

Näiteks lause *Kumera n-nurga sisenurkade summa on* $(n-2)$ 180° tuleneb lausest *Kolmnurga sisenurkade summa on sirgnurk.* Esimesest lausest aga omakorda tuleneb lause *Kumera hulknurga välisnurkade summa on võrdne kahe sirgnurga summaga.*

Sellist matemaatiliste lausete tulenevust üksteisest nimetatakse nende lausete vaheliseks loogiliseks sõltuvuseks.

Lausete süsteemi, mis koosneb üksteisest loogiliselt sõltuvatest matemaatilistest lausetest, nimetatakse matemaatiliseks teooriaks.

Matemaatika uurimisväli jaguneb paljudeks erinevateks valdkondadeks. Iga valdkonna puhul kasvab selle uurimisest välja teatav matemaatiline teooria. Näiteks tekkis hulkade uurimisel hulgateooria, arvude uurimisel arvuteooria, juhuslike nähtuste uurimisel tõenäosusteooria, kujundite uurimisel geomeetria jne.

Vaatleme üldist meetodit matemaatilise teooria moodustamiseks ja uurimiseks.

1.1. INDUKTSIOON JA DEDUKTSIOON.

Uurides mingite objektide hulka, peame teadma tunnuseid, mille alusel see hulk on moodustatud. Hulka määravateks tunnusteks on tema elementide sellised ühised omadused, mille poolest nad erinevad kõigist teistest, s. t. hulka mittekuuluvatest objektidest. Seega hulk moodustatakse kõigist millegi poolest samalaadsetest objektidest.

Hulga uurimisel võrreldakse hulga elemente. Kui hulga paljudel elementidel on peale hulka määravate tunnuste veel mingi

ühine omadus, siis tekib mõte, et see omadus on ka teistel selle hulga elementidel. Teisiti: **kui mingi väide on tõene paljudel üksikjuhtudel, siis võib arvata, et see väide on tõene kõigil samalaadsetel üksikjuhtudel.** Sellist järeldamisviisi nimetatakse **induktsiooniks.** Öeldakse ka, et induktsioon on järeldamine üksikult üldisele.

Näide 1. Väide, et Maa tõmbab külge tema lähedusse sattunud keha, on osutunud tõeseks kõigi seni vaadeldud kehade puhul. Seepärast võib arvata, et see väide on tõene üldiselt, s. t. kõigi kehade korral. Selline järeldus on induktiivne.

Näide 2. Mõõtes nurki mitmesugustes kolmnurkades, võib jõuda veendumusele, et iga kolmnurga sisenurkade summa on kas 180° või sellele õige lähedane arv. Tegemist on induktiivse järeldusega.

Näide 3. Võrduste

$$6=3+3 \qquad 12=5+7$$
$$8=3+5 \qquad 14=3+11=7+7$$
$$10=3+7=5+5 \qquad 16=3+13=5+11$$

vaatlemisel märkame, et nende vasakuteks poolteks on järjestikused paarisarvud, paremateks poolteks aga paaritute algarvude summad. Arve 2 ja 4 kahe paaritu algarvu summana esitada ei saa. Arv 4 ise on algarvu ruut. Teeme induktiivse järelduse: iga paarisarv, mis ei ole algarv ega algarvu ruut, on esitatav kahe paaritu algarvu summana. Seda lauset nimetatakse Goldbachi väiteks.

Näide 4. Vaatleme arvujada, mille üldliige on n^2+n+17. Kirjutame selle jada mõned liikmed:

17; 19; 23; 29; 37; 47; 59; ...

Kõik saadud arvud on algarvud. Induktiivne järeldus: vaadeldava jada kõik liikmed on algarvud.

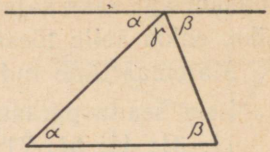
Induktiivne järeldus üldiselt ei tarvitse olla tõene. Kui leidub kas või üksainus erijuht, kus väide ei kehti, siis see väide üldkujul on väär.

Näites 4 tehtud induktiivne järeldus on väär. Tõepoolest, jada üldliige on esitatav kujul $n(n+1)+17$. Siit ilmneb, et jada seitsmeteistkümnes ja kaheksateistkümnes liige jaguvad arvuga 17.

Seega vajab iga induktiivne järeldus kontrollimist. Iga induktiivselt saadud väide tuleb kas ümber lükata või tõestada.

Nagu selgus, on väite vääruse näitamiseks piisav leida üks

erijuht, kus väide ei kehti. Väidet tõestada on tunduvalt raskem. Sellest, et väidet pole seni õnnestunud ümber lükata, ei järeldu põrmugi, et väide on tõene.



Joon. 1.

Kui hulgas on suhteliselt vähe elemente, siis saab väite tõestada sel teel, et kontrollitakse läbi kõik üksikjuhud. Induktsiooni nimetatakse niisugusel juhul t ä i e l i k u k s.

Kui hulgas on väga palju elemente või hulk on lõpmatu, siis on täielik induktsioon üldiselt võimatu. Näiteks ei saa praktiliselt kontrollida, kas Maa tõmbab külge iga keha; samuti ei saa mõõta kõigi kolmnurkade nurki. Sellistel juhtudel saab induktsioon olla ainult o s a l i n e ehk m i t t e t ä i e l i k. Ainsateks eranditeks on need lõpmatud hulgad, kus induktiivsele järeldusele saab rakendada **täieliku induktsiooni printsiipi**, millega tutvusime 10-ndas klassis. Sel korral on väide tõestatav loogilise arutluse teel ilma otseselt iga üksikjuhtu kontrollimata. Et täieliku induktsiooni printsiip on rakendatav ainult matemaatikas, siis nimetatakse sellel printsiibil teostatud induktsiooni **matemaatiliseks induktsiooniks.**

Matemaatilise sisuga väidetes on harilikult jutt lõpmatutest hulkadest. Enamikul juhtudest ei saa siin täielikku induktsiooni väidete tõestamisel kasutada. Matemaatikas tõestatakse väiteid teiste üldiste otsustuste abil, mille tõesus on eelnevalt kindlaks tehtud.

Näiteks induktiivne järeldus kolmnurga sisenurkade summa kohta (näide 2) tõestatakse lausega põiknurkade võrdsusest *Sisemised põiknurgad, mis tekivad kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmanda sirgega, on võrdsed* (joon. 1). See lause kehtib üldiselt, s. t. iga põiknurkade paari puhul, seega ka vaadeldaval erijuhul. Tõestamine toimub loogilise arutluse teel, mis on sõltumatu kolmnurga valikust.

Väite tõesuse järeldamist teistest üldistest tõestest lausetest nimetatakse deduktsiooniks. Öeldakse ka, et deduktsioon on järeldamine üldiselt vähem üldisele või üksikule.

Deduktiivne järeldus on tõene, kui laused, millest see järeldus tehakse, on tõesed.

Väidet, mida ei ole suudetud ümber lükata ega tõestada, nimetatakse h ü p o t e e s i k s. Näiteks Goldbachi väide, mis sõnastati

rohkem kui kaks sajandit tagasi, on tänapäevani jäänud hüpoteesiks, ehkki selle tõesus on kontrollitud arvuni 100 000 000.

Matemaatiline induktsioon on deduktsiooni eriliik.

1. Leia seaduspärasus, mille alusel on moodustatud arvujada 11; 31; 41; 61; 71; 101; 131; ...
   Lisa mõned järgnevad liikmed.
2. Antud on jada mõned esimesed liikmed. Leia kaks järgnevat liiget ja kirjuta üldliikme valem.
   1) 1; 1; 2; 6; 24; 120; 720; ...
   2) -1; 0; 3; 8; 15; 24; 35; ...
   3) 2; 6; 12; 20; 30; 42; 56; ...
3. Missuguse seaduspärasuse järgi on koostatud järgmine tabel? Selle seaduspärasuse lühikeseks väljendamiseks kirjuta tabeli $(n+1)$-ne rida. Näita, et see rida on õigesti kirjutatud.

0	1	$=0+1$
1	$2+3+4$	$=1+8$
2	$5+6+7+8+9$	$=8+27$
3	$10+11+12+13+14+15+16$	$=27+64$

4. Sõnasta täieliku induktsiooni printsiip.
5. Tuleta matemaatilise induktsiooni abil
   1) aritmeetilise progressiooni üldliikme valem;
   2) geomeetrilise progressiooni üldliikme valem;
   3) astmefunktsiooni x^n tuletise valem, kui $n \in N$.

1.2. AKSIOOMID JA TEOREEMID.

Vaatleme lauseid:

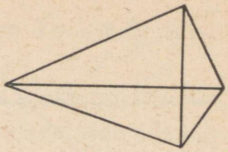
1. *Kui rööpküliku diagonaalid on risti, siis rööpkülik on romb;*
2. *Kui nelinurga diagonaalid on risti, siis nelinurk on romb.*

Mõlemal juhul on tegemist liitlausega, mis on saadud kahe lause ühendamisel sidesõnadega *kui* ja *siis*. Laused, millest need liitlaused on moodustatud, võivad eraldi võetult olla nii tõesed kui ka väärad.

Iga lauset, mis on esitatav sidesõnade *kui* ja *siis* abil moodustatud kaheosalise liitlausena, nimetatakse teoreemiks.

Näiteks lause *Rombi diagonaalid on risti* on teoreem, sest selle saab esitada liitlausena *Kui rööpkülik on romb, siis tema diagonaalid on risti.*

Teoreemi osa, mis on seotud sõnaga *kui*, nimetatakse teoreemi **eelduseks**, seda osa aga, mis on seotud sõnaga *siis*, nimetatakse teoreemi **väiteks.**



Joon. 2.

Teoreemi nimetatakse õigeks ehk tõeseks, kui teoreemi eeldusest järeldub teoreemi väide. Teoreem võib olla nii tõene kui ka väär. Näiteks teoreem 1 on tõene, teoreem 2 aga on väär (joon. 2).

Teoreem tõestatakse (kui see on võimalik) loogiliselt arutledes. Seejuures kasutatakse eelnevalt teada olevaid lauseid ja konstrueeritakse nende abil deduktiivsete järelduste ahel, mis viib teoreemi eelduselt teoreemi väiteni.

Teoreemi ei või tõestada ühegi lause abil, mille tõestamisel teoreemi ennast on kasutatud. Vastupidisel juhul tekib väärtõestus, mida nimetatakse ka ringtõestuseks: teoreem tõestatakse teoreemi enda kaudu.

Niisiis, teoreemi tõestamiseks on tarvilik, et leiduvad laused, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

1) nad on tõesed,

2) nende lausete tõestamisel ei ole tõestatavat teoreemi kasutatud,

3) nende lausete abil saab vaadeldava teoreemi tõestada.

Nimetame selliseid lauseid tõestatavale teoreemile l o o g i l i s e l t e e l n e v a t e k s l a u s e t e k s.

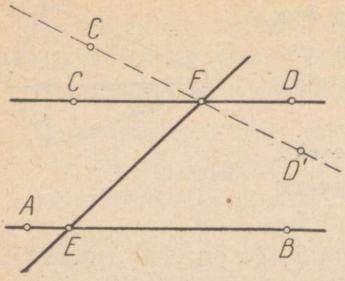
Et teoreemile loogiliselt eelnev teoreem peab olema tõene, siis vajab ta ise tõestamist, seega peavad leiduma talle loogiliselt eelnevad laused.

Liikudes mööda üksteisele loogiliselt eelnevate teoreemide ahelat tagasi, jõuame lõpuks teooria esimeste väideteni, mida pole võimalik tõestada, sest puuduvad eelnevad laused. Mingitest väidetest peab teooria ju algama! Selleks et tõestada järgnevaid teoreeme, tuleb teooria esimesed väited lugeda tõesteks ilma neid tõestamata.

Niisiis, iga matemaatiline teooria peab algama lausetest, mis loetakse tõesteks ilma tõestamata.

Tõestamata jäetud lauseid, mida loetakse tõesteks ja mis on aluseks kõigi teooriasse kuuluvate teoreemide tõestamisel, nimetatakse aksioomideks.

N ä i d e. Tõestame lause põiknurkade võrdsusest, mida kasutasime kolmnurga sisenurkade summa määramisel.



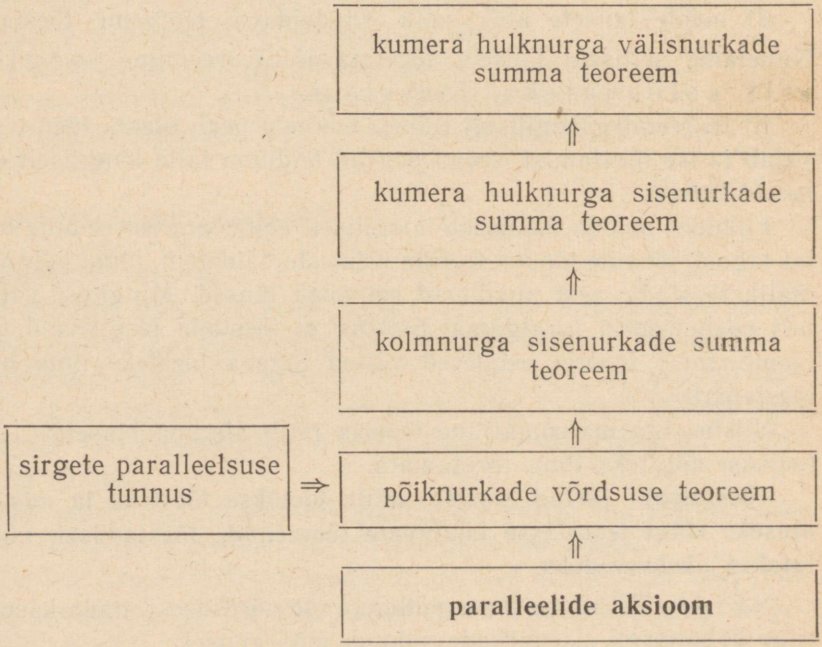
Joon. 3.

Olgu $CD \parallel AB$ (joon. 3). Leidub sirge $C'D'$, mille puhul $\angle EFD' = \angle AEF$. Kasutame kahe sirge paralleelsuse tunnust *Kui kahe sirge lõikumisel kolmandaga tekivad võrdsed sisemised põiknurgad, siis need sirged on paralleelsed.* Selle teoreemi põhjal $C'D' \parallel AB$. Kuid *Sirgest väljaspool asetsevat punkti läbib ainult üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.* Järelikult

$$C'D' = CD \Rightarrow \angle EFD = \angle EFD' = \angle AEF.$$

Lauset paralleelsirge ühesusest eelmistes klassides ei tõestatud — see loeti tõeseks. Seda lauset nimetatakse **paralleelide aksioomiks.**

Eelnevatest näidetest saime üksteisest järjestikku loogiliselt sõltuvate lausete ahela:



Sirgete paralleelsuse tunnuse tõestamisel tuleb kasutada teisi aksioome, mida koolimatemaatikas ei vaadelda.

Nagu selgus, on aksioomide olemasolu igas matemaatilises teoorias paratamatu. Kõigi teoorias sisalduvate teoreemide tõesus või väärus tuleneb aksioomidest.[1] Et aksioome ei tõestata, siis tekib küsimus, millest tuleneb nende tõesus.

Aksioomide tõesus selgub teooria rakendamisel; iga teooriat kontrollib praktika. Näiteks geomeetria kasutamisel igapäevases elus, tehnikas ja teaduses on alati saadud tulemusi, mis on kooskõlas tegelikkusega. Sellest järeldamegi, et geomeetria aksioomid on tõesed, s. t. vastavad tegelikkusele. On aga selge, et see järeldus on saadud osalise induktsiooni teel. Seepärast on aksioomid õigupoolest hüpoteesid.

6. Sõnasta iga järgnev teoreem nii, et on selgelt eraldatud selle eeldus ja väide.

1) Nurgapoolitaja iga punkt on võrdsetel kaugustel nurga haaradest.

2) Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

3) Kaks kolmnurka, mille küljed on vastavalt paralleelsed või risti, on sarnased.

4) Kahe võrdsete alustega rööpküliku pindalade suhe võrdub nende kõrguste suhtega.

5) Kolmnurga iga külg on väiksem kahe teise külje summast.

6) Kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis.

7) Sirge ei saa lõigata ringjoont rohkem kui kahes punktis.

8) Antud punktis diferentseeruv funktsioon on pidev selles punktis.

9) Sündmuse ja tema vastandsündmuse tõenäosuste summa on üks.

10) Igal monotoonsel tõkestatud jadal on piirväärtus.

[1] Et teoreemid tõestatakse loogiliste arutlustega, siis tuleb uurida veel loogikat — õpetust õigest mõtlemisest. Ka siin eraldatakse välja aksioomid — õige mõtlemise põhiseadused.

1.3. PÖÖRD-, VASTAND- JA PÖÖRDVASTANDTEOREEM. VASTUVÄITELINE TÕESTUS.

Kui antud teoreemis vahetada eeldus ja väide, siis tekib teoreem, mida nimetatakse antud teoreemi **pöördteoreemiks.**

Kui antud teoreemis asendada eeldus ja väide nende eitustega, siis tekib teoreem, mida nimetatakse antud teoreemi **vastandteoreemiks.**

Kui antud teoreemis vahetada eeldus ja väide ning seejärel asendada nad nende eitustega, siis tekib teoreem, mida nimetatakse antud teoreemi **pöördvastandteoreemiks.**

Näide 1

1. *Kui nelinurk on rööpkülik, siis tema iga kahe lähisnurga summa on sirgnurk.*

2. *Kui nelinurga iga kahe lähisnurga summa on sirgnurk, siis nelinurk on rööpkülik.*

3. *Kui nelinurk ei ole rööpkülik, siis tema iga kahe lähisnurga summa ei ole sirgnurk.*

4. *Kui nelinurga iga kahe lähisnurga summa ei ole sirgnurk, siis nelinurk ei ole rööpkülik.*

Näide 2.

1. *Kui ühe kolmnurga küljed on vastavalt paralleelsed teise kolmnurga külgedega, siis need kolmnurgad on sarnased.*

2. *Kui kaks kolmnurka on sarnased, siis nende küljed on vastavalt paralleelsed.*

3. *Kui ühe kolmnurga küljed ei ole vastavalt paralleelsed teise kolmnurga külgedega, siis need kolmnurgad ei ole sarnased.*

4. *Kui kaks kolmnurka ei ole sarnased, siis nende küljed ei ole vastavalt paralleelsed.*

Mõlemas näites

teoreemid 1 ja 2 } on teineteise pöördteoreemid,
teoreemid 3 ja 4 }

teoreemid 1 ja 3 } on teineteise vastandteoreemid,
teoreemid 2 ja 4 }

teoreemid 1 ja 4 } on teineteise pöördvastandteoreemid.
teoreemid 2 ja 3 }

Näites 1 on kõik neli teoreemi tõesed. Näites 2 on teoreemid 1 ja 4 tõesed, teoreemid 2 ja 3 aga väärad.

Näidetest ilmneb, et kui üks pöördteoreemidest või üks vastandteoreemidest on tõene, siis teine võib olla nii tõene kui ka väär. Järelikult vajab kumbki kahest pöördteoreemist ja samuti kahest vastandteoreemist eraldi tõestamist.

Tähistame laused, millest on moodustatud teoreem, tähtedega p ja q, ning nende eitused vastavalt tähtedega $\overline{p}$ ja $\overline{q}$, siis uuritava teoreemineliku saab kirjutada nii:

1. $p \Rightarrow q$, 2. $q \Rightarrow p$,
3. $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$, 4. $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

Teoreem. **Kui teoreem on tõene, siis ka tema pöördvastandteoreem on tõene.**

Vaatleme näiteks teoreemi $p \Rightarrow q$ ja tema pöördvastandteoreemi $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

E e l d u s. Teoreem $p \Rightarrow q$ on tõene.

V ä i d e. Teoreem $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ on tõene.

T õ e s t u s. Kui lause $\overline{q}$ on tõene, siis lause q on väär. Kui q on väär, siis on väär ka p, sest eelduse kohaselt p tõesusest järelduks q tõesus. Kui aga p on väär, siis $\overline{p}$ on tõene. Niisiis, lause $\overline{q}$ tõesusest järeldub lause $\overline{p}$ tõesus: teoreem $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ on tõene.

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$. ∎[1]

J ä r e l d u s 1. Kui teoreem $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ on tõene, siis on ka teoreem $p \Rightarrow q$ tõene:

$(\overline{q} \Rightarrow \overline{p}) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

Tõepoolest, lause $p \Rightarrow q$ on teoreemi $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ pöördvastandteoreem.

Võtame tulemused kokku:

---

[1] Märk ∎ näitab teoreemi tõestuskäigu lõppemist.

teineteise pöördvastandteoreemid on mõlemad kas tõesed või väärad; tõestada neist on tarvis ainult üht.

Seepärast öeldakse, et teineteise pöördvastandteoreemid on samaväärsed ja kirjutatakse:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

J ä r e l d u s 2. *Teoreemi pöördteoreem ja vastandteoreem on samaväärsed:*

$$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q}).$$

Tõepoolest, teoreemi pöördteoreem ja vastandteoreem on teineteise pöördvastandteoreemid.

Kui teoreemi eeldusest p järeldatakse teoreemi väide q, siis räägitakse teoreemi o t s e s e s t t õ e s t a m i s e s t. Mõnikord on teoreemi lihtsam tõestada **vastuväiteliselt.** Vastuväitelisel tõestamisel loetakse tõesteks teoreemi eeldus p ja väite eitus $\overline{q}$ (nn. vastuväiteline oletus) ning näidatakse, et sellistel eeldustel tekib loogiline vastuolu kas mõne aksioomi või tõestatud teoreemiga. Saadud vastuolust ilmneb, et p ja $\overline{q}$ ei saa korraga olla tõesed laused. Seega juhul, kui p on tõene, peab $\overline{q}$ olema väär, järelikult q peab olema tõene, s. t. teoreem $p \Rightarrow q$ on tõene.

Teoreemi asemel võib tõestada tema pöördvastandteoreemi. Ka sel juhul on tegemist vastuväitelise tõestusega. Tõepoolest, ka sel juhul lähtutakse vastuväitelisest oletusest, et lause $\overline{q}$ on tõene. Kui lause $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ on tõestatud, siis on tekkinud otsene vastuolu teoreemi $p \Rightarrow q$ eeldusega: laused p ja $\overline{p}$ peaksid korraga olema tõesed.

N ä i d e 3. Tõestame vastuväiteliselt teoreemi *Kui tasandi kaks erinevat sirget s ja t on paralleelsed kolmanda sirgega v samal tasandil, siis nad on paralleelsed ka omavahel.*

E e l d u s. $s \neq t \wedge s \parallel v \wedge t \parallel v$.

V ä i d e. $s \parallel t$.

T õ e s t u s. Oletame, et $s \nparallel t$. Et $s \neq t$, siis s ja t lõikuvad mingis punktis A, kusjuures $A \notin v$. Paralleelide aksioomi põhjal läbib punkti A ainult üks sirge, mis on paralleelne sirgega v. Järelikult s ja t kas ühtivad või vähemalt üks neist ei ole paralleelne sirgega v. (Oleme tõestanud pöördvastandteoreemi.) See järeldus on vastuolus teoreemi eeldusega, seepärast oletus, et $s \nparallel t$, on väär. Järelikult $s \parallel t$. ∎

7. Sõnasta teoreemid, mis on samaväärsed järgmiste teoreemidega.
1) Kui sirged, mis lõikavad nurga haarasid, on paralleelsed, siis haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega.
2) Kui logaritmi alus on suurem ühest, siis ühest suurema arvu logaritm on positiivne.
3) Kui kahe sirge lõikamisel kolmandaga tekivad mittevõrdsed kaasnurgad, siis need sirged ei ole paralleelsed.
4) Kui võrratuse mõlemad pooled korrutada negatiivse arvuga, siis võrratuse märk muutub vastupidiseks.
5) Ristküliku diagonaalid on võrdsed.
6) Kolmnurga sisenurkade summa on sirgnurk.

8. Sõnasta teoreemi pöörd-, vastand- ja pöördvastandteoreem. Missugune neist on tõene?
1) Kui arv lõpeb viiega, siis ta jagub viiega.
2) Kui nelinurk on rööpkülik, siis tema diagonaalid poolitavad teineteist.
3) Kui $x=-5$, siis $|x|=5$.
4) Rombi diagonaalid on risti.
5) Funktsioon, mis on antud punktis diferentseeruv, on selles punktis ka pidev.
6) Kui kolmnurga küljed on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külgedega, siis need kolmnurgad on võrdsed.
7) Kui kolmnurga üks nurk on täis- või nürinurk, siis ülejäänud nurgad on teravad.
8) Kui ruutvõrrandi vabaliige on null, siis tema üks lahenditest on null.
9) Täisnurkse kolmnurga kahe lühema külje ruutude summa on võrdne kolmanda külje ruuduga.
10) Kui läbi kumera nelinurga tippude saab joonestada ringjoone, siis nelinurga vastasnurkade summa on sirgnurk.

9. Tõesta vastuväiteliselt teoreemid.
1) Sisemised põiknurgad, mis tekivad kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmanda sirgega, on võrdsed.
2) Kui sirge on kahe paralleelse sirgega ühel tasandil ja lõikab üht nendest sirgetest, siis lõikab ta ka teist.
3) Kui nelinurga vastasnurkade summa on 180°, siis läbi nelinurga tippude saab joonestada ringjoone.

4) Igas kolmnurgas võrdsete nurkade vastas on võrdsed küljed ja suurema nurga vastas on suurem külg.

10. Kas tekib vastuolu, kui väära väidet püütakse tõestada vastuväiteliselt? Põhjenda vastust.

1.4. TARVILIK JA PIISAV TINGIMUS.

Teoreemi ja selle pöördteoreemi saab kokku võtta üheks lauseks, kasutades sõnu *tarvilik ja piisav* või *siis ja ainult siis* või *need ja ainult need* või *üks ja ainult üks.*

Näide 1. Vaadeldes koos teoreemiga

Kui nelinurk on rööpkülik, siis tema diagonaalid poolitavad teineteist

samaväärset lauset

Kui nelinurga diagonaalid ei poolita teineteist, siis nelinurk ei ole rööpkülik,

märkame, et selle teoreemi saab sõnastada ka nii:

Et nelinurk oleks rööpkülik, on tarvilik, et tema diagonaalid poolitavad teineteist.

Seepärast öeldakse, et vaadeldav teoreem on **tarvilik tingimus** selleks, et nelinurk oleks rööpkülik.

Pöördteoreemi

Kui nelinurga diagonaalid poolitavad teineteist, siis nelinurk on rööpkülik

saab sõnastada nii:

Et nelinurk oleks rööpkülik, on piisav, et tema diagonaalid poolitavad teineteist.

Seepärast öeldakse, et see pöördteoreem on **piisav tingimus** selleks, et nelinurk oleks rööpkülik.

Võtame teoreemi ja pöördteoreemi kokku üheks lauseks

Et nelinurk oleks rööpkülik, on tarvilik ja piisav, et tema diagonaalid poolitavad teineteist

ehk

Nelinurk on rööpkülik siis ja ainult siis, kui tema diagonaalid poolitavad teineteist.

Öeldakse, et saadud lause on **tarvilik ja piisav tingimus** selleks, et nelinurk oleks rööpkülik. Kui jätta sellest ära sõnad *siis ja*, saame tarviliku tingimuse; kui aga jätta ära sõnad *ja ainult siis*, siis saame piisava tingimuse. Seega määrab sõna *siis* tingimuse piisavuse ja sõnad *ainult siis* tingimuse tarvilikkuse.

Näide 2.

Kui arv jagub 3-ga, siis tema ristsumma jagub 3-ga.	*Kui arvu ristsumma jagub 3-ga, siis arv jagub 3-ga.*

Arv jagub 3-ga siis ja ainult siis, kui tema ristsumma jagub 3-ga.

Et teoreem ja pöördteoreem vajavad eraldi tõestamist, siis tuleb tarvilik ja piisav tingimus tõestada kahes osas: eraldi tuleb tõestada tingimuse tarvilikkus ja tingimuse piisavus.

11. Lähtudes järgnevast teoreemist sõnasta vastav tarvilik ja piisav tingimus, kui see on tõene.

1) Kui kaasnurgad, mis on tekkinud kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, on võrdsed, siis need kaks sirget on paralleelsed.

2) Nelinurk, mille kaks vastaskülge on paralleelsed ja võrdsed, on rööpkülik.

3) Ühe ja sama ringjoone või võrdsete ringjoonte võrdsed kõõlud on võrdsetel kaugustel keskpunktist.

4) Piirdenurka mõõdab pool kaarest, millele see piirdenurk toetub.

5) Rombi diagonaalid poolitavad tema nurki.

6) Kui funktsioon on antud punktis diferentseeruv, siis on ta selles punktis ka pidev.

7) Kui funktsiooni määramispiirkonnas punktis x_0 argumendi muudu lähenemisel nullile ka funktsiooni muut läheneb nullile, siis funktsioon on pidev selles punktis.

8) Kui $f(-x)=f(x)$, siis funktsioon $f(x)$ on paarisfunktsioon.

12. Selgita, kas saab võtta tarvilikeks ja piisavateks tingimusteks

1) kolmnurkade võrdsuse tunnuseid;

2) kolmnurkade sarnasuse tunnuseid.

13. Tõesta teoreemid.

1) Kolmnurga mediaan on pool küljest, mille ta poolitab, siis ja ainult siis, kui ta on täisnurkne.

2) Täisnurkse kolmnurga kaatet on pool hüpotenuusi siis ja ainult siis, kui selle kaateti vastasnurk on 30°.

3) Sirged DD', EE', FF', ..., mis lõikavad nurga ABC haarasid, jaotavad need haarad võrdelisteks osadeks siis ja ainult siis, kui need sirged on paralleelsed.

14. Kas punktiiri asemele tuleb kirjutada sõnad *tarvilik ja piisav* või ainult *tarvilik* või ainult *piisav*?

1) Et nelinurk oleks ristkülik, on ....., et tema diagonaalid on võrdsed.

2) Et nelinurk oleks rööpkülik, on ....., et tema kõik küljed on võrdsed.

3) Et nelinurk oleks ristkülik, on ....., et tema kõik nurgad on võrdsed.

4) Et nelinurk oleks rööpkülik, on ....., et tema diagonaalid on võrdsed.

5) Et funktsioon oleks antud punktis diferentseeruv, on ....., et ta on selles punktis pidev.

1.5. ALGMÕISTED JA TULETATUD MÕISTED.

Peale lausete, mis sisaldavad mingit väidet (teoreemid, aksioomid), peab matemaatilises teoorias olema veel lauseid, mis selgitavad uute mõistete sisu.

Lauset, mis selgitab mõiste sisu, nimetatakse definitsiooniks, kui selles sisalduvatest andmetest saab tuletada mõiste kõik ülejäänud omadused.

Definitsioon peab niisiis mõiste täielikult määrama. Lisaks nõutakse, et definitsioon ei sisaldaks midagi liigset, s. t. sellist, mida saab järeldada teistest definitsioonis antud tingimustest.

Lause *Rööpkülik on nelinurk, mille vastasküljed on paralleelsed* on definitsioon, sest see määrab rööpküliku täielikult. Oleks üleliigne nõuda definitsioonis veel midagi rööpküliku külgede või nurkade kohta.

Igas definitsioonis saab kasutada sõna *nimetatakse*. Näiteks võib öelda, et *Rööpkülikuks nimetatakse nelinurka, mille vastasküljed on paralleelsed.*

Iga definitsiooni saab sõnastada nii, et selles on näidatud hulk, millesse defineeritav objekt kuulub, ja tunnus, mis eristab defineeritava objekti selle hulga kõigist teistest elementidest. Näiteks rööpküliku defineerimisel märgitakse, et ta kuulub nelinurkade

hulka, ja lisatakse tunnus, mille poolest ta erineb kõigist teistest nelinurkadest. Mõistet, mis määrab hulga, milles defineeritav objekt sisaldub, nimetatakse üldmõisteks. Tingimust, mis eraldab defineeritava objekti selle hulga teistest elementidest, nimetatakse liigitunnuseks.

Liigitunnus on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et üldmõistega määratud hulga element on defineeritav objekt. Seepärast teoreemi, mis sisaldab tarvilikku ja piisavat tingimust, saab ümber sõnastada uuritava mõiste uueks definitsiooniks. Mõiste senine definitsioon tuleb siis muuta teoreemiks, mis sisaldab tarvilikku ja piisavat tingimust.

Näide.

Definitsioon. *Rööpkülikuks nimetatakse nelinurka, mille diagonaalid poolitavad teineteist.*

Teoreem. *Nelinurk on rööpkülik siis ja ainult siis, kui ta vastasküljed on paralleelsed.*

Siit ilmneb, et mõistet saab mitmel viisil defineerida.

Mõistet ei või defineerida ühegi sellise mõiste kaudu, mille defineerimisel teda ennast on kasutatud. Vastupidisel juhul tekib viga, mida nimetatakse tautoloogiaks: mõiste defineeritakse mõiste enda kaudu.

Et definitsioonil oleks mõte, peab selles kasutatud mõistete sisu olema teada. Näiteks selleks, et mõista, mis on *rööpkülik*, on tarvis teada, mis on *nelinurk*, selle *vastasküljed* ja nende *paralleelsus*. Need mõisted peavad olema eelnevalt defineeritud.

Seega on mõiste defineerimiseks tarvis, et sellele eelneksid niisugused mõisted, mille sisu on teada ja mille kaudu selle mõiste saab defineerida. Nimetame selliseid mõisteid vaadeldavale mõistele loogiliselt eelnevateks mõisteteks.

Kui liikuda antud mõistelt mööda talle loogiliselt eelnevate mõistete ahelat tagasi, siis jõuame lõpuks teooria esimeste mõisteteni, mida enam pole võimalik defineerida, sest puuduvad eelnevad mõisted. Mingitest mõistetest peab ju teooria algama!

Näiteks *nelinurga vastaskülgede* defineerimisel on vajalik mõiste *sirglõik*. Definitsioonis *Sirglõik AB on hulk, mis koosneb erinevatest punktidest A ja B ning kõigist punktidest, mis on A ja B vahel* on aga mõisted *punkt, hulk* ja *on vahel* defineerimata. Samuti taandub *sirglõikude paralleelsus* defineerimata mõistele *sirge*.

Niisiis peab iga matemaatiline teooria algama mõistetest, mis selles teoorias jäävad defineerimata.

Defineerimata mõisteid, mis on aluseks teooria kõigi ülejäänud mõistete defineerimisel, nimetatakse teooria algmõisteteks. Mõisteid aga, mis defineeritakse algmõistete ja teiste juba defineeritud mõistete kaudu, nimetatakse tuletatud mõisteteks.

15. Kas järgmised laused on korrektsed definitsioonid? Kui ei, siis näita puudus ja muuda lauset nii, et see osutub korrektseks definitsiooniks.
1) Rööpkülik on nelinurk, mille vastasküljed on paralleelsed ja võrdsed.
2) Rööpkülik on nelinurk, mille üks paar vastaskülgi on paralleelsed ja võrdsed.
3) Romb on rööpkülik, mille diagonaalid on risti.
4) Mediaan on sirglõik, mis poolitab kolmnurga külje.
5) Romb on rööpkülik, mille küljed on võrdsed.
6) Ringjoone puutuja on sirge, millel ei ole rohkem kui üks ühine punkt ringjoonega.
7) Funktsiooni tuletiseks kohal x_0 nimetatakse funktsiooni muudu ja argumendi muudu jagatise piirväärtust.
8) Võrrandit, millele saab anda kuju $ax^2+bx+c=0$, nimetatakse ruutvõrrandiks.

16. Defineeri
1) ringjoon,
2) sirgete paralleelsus,
3) piirdenurk,
4) kolmnurk,
5) võrrand,
6) ringjoone pikkus,
7) kahe muutujaga võrrandi lahend,
8) arvu p logaritm alusel a,
9) funktsioon,
10) funktsiooni pidevus.

17. Leia üldmõiste ja liigitunnus ning sõnasta definitsioon nii, et üldmõiste on selgesti välja eraldatud.
1) Nurka ringi kahe raadiuse vahel nimetatakse kesknurgaks.
2) Lõiku, mis ühendab trapetsi haarade keskpunkte, nimetatakse trapetsi kesklõiguks.
3) Ringi osa, mille eraldab kõõl, nimetatakse segmendiks.
4) Lõpmatu kahaneva geomeetrilise progressiooni summaks nimetatakse selle progressiooni n esimese liikme summa piirväärtust liikmete arvu n piiramatul kasvamisel.

5) Iga nullist erineva arvu aste astendajaga null on üks.
6) Sündmuse tõenäosus on soodsate võimaluste arvu ja kõigi võimaluste arvu suhe.
7) Sirget nimetatakse ringjoone puutujaks, kui tal on ringjoonega üks ja ainult üks ühine punkt.

18. Defineeri ruut, kui üldmõisteks on võetud
1) ristkülik, 2) rööpkülik,
3) nelinurk, 4) hulknurk,
5) punktihulk.

19. Defineeri rööpkülik kuuel erineval viisil.

1.6. KUJUTLUSE OSA MATEMAATIKAS.

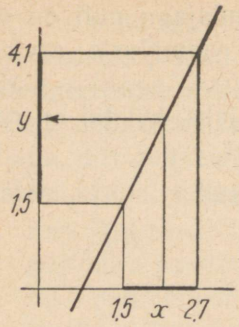
Kujundeid tutvustatakse jooniste ja mudelite abil: joonestatakse tahvlile kolmnurk või rööpkülik, näidatakse prismakujulist keha jne. Jooniste ja mudelite abil, samuti ümbritsevate esemete vaatlemisega tekitatakse kujunditest teatavad kujutlused.

Et täiel määral mõista, mida tähendab defineerimine ja tõestamine, on tarvis selgitada, missugune osatähtsus matemaatikas on kujutlusel, näitlikkusel ja joonistel.

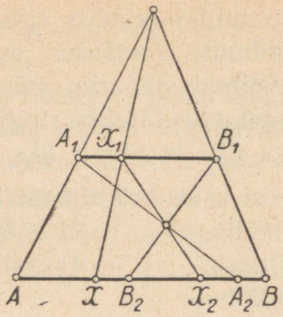
Kujutlus on mõiste tekkimisel vajalik, kuid mõiste täpne sisu määratakse alles definitsiooniga. Kujutlus ei asenda definitsiooni. Kui pole teada, et rööpküliku vastasküljed on paralleelsed (või pole teada mõni muu tingimus, mis määrab rööpküliku), siis ainult kujutluse põhjal ei saa rööpkülikut joonestadagi, rääkimata selle omaduste uurimisest.

Kujutlust ei sobi võtta aluseks ka väite tõesuse üle otsustamisel, sest kujutlus on subjektiivne. See, mis ühele inimesele on selgesti kujuteldav ja seetõttu tundub talle tõesena, võib teise jaoks olla ebaselge, mittemõistetav või koguni väär. On väga raske otsustada, millal kujutlus on küllalt selge.

Kujutlus ei sobi tõestusvahendiks ka sellepärast, et paljusid matemaatilisi mõisteid ja vahekordi on raske või üldse võimatu kujutleda. Näiteks ei suuda me kujutleda arvu 5, vaid ainult selle sümbolit ja mitmesuguseid hulki, milles on viis elementi. Ei saa selgelt kujutleda, et geomeetriline kujund, näiteks sirglõik, kolmnurk või risttahukas koosneb punktidest, ehkki iga punkti läbimõõt on null. Sirge ja tasandi lõpmatust ei saa kujutlusega haarata. Võimatu on kujutleda, et ratsionaalarvude hulk on samaaegselt tihe ja mittepidev ning et irratsionaalarvuliste koordinaatidega



Joon. 4.



Joon. 5.

punktide eemaldamisel jääb arvteljele rohkem tühje kohti kui punkte. Üldse tekivad kujutlemisel raskused tavaliselt siis, kui tegemist on lõpmatute hulkadega.

N ä i d e. Lõplike hulkade vaatlemisel tekib veendumus, et tervik on suurem igast oma osast. Tõepoolest, lõpliku hulga elemente ei saa seada üksühesesse vastavusse elementidega selle hulga üheski osahulgas, mis ei ühti hulga endaga. Üksühene vastavus on võimalik nende ja ainult nende lõplikkude hulkade vahel, milles on ühepalju elemente.

Paarisarvude hulk on täisarvude hulga osahulk. Näib endastmõistetavana, et paarisarve on kaks korda vähem kui täisarve. Kuid täisarvude ja paarisarvude vahel saab korraldada üksühese vastavuse, näiteks eeskirjaga

$$k \to 2k, \; k \in Z.$$

Analoogia põhjal lõplike hulkadega tuleb seega ütelda, et paarisarve on niisama palju kui täisarve.

Joonisel 4 on kujutatud üksühene vastavus $x \to y$ kahe arvlõigu

$$1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}7 \text{ ja } 1{,}5 \leqslant y \leqslant 4{,}1$$

vahel. Sama võttega saab korraldada üksühese vastavuse mistahes kahe sirglõigu punktide vahel. Joonisel 5 on näidatud kaks sellist vastavust

$$AB \to A_1B_1 \text{ ja } A_1B_1 \to A_2B_2.$$

Tulemuseks on üksühene vastavus lõigu AB ja selle osalõigu A_2B_2 punktide vahel.

Niisiis, ehkki kujutlust ei saa võtta ei definitsiooniks ega tõestusvahendiks, on kujutlemisel ometi väga tähtis osa matemaatikas. Eriti oluline on kujutlemisoskus geomeetrias. Kujutlus

1) aitab uusi mõisteid defineerida,
2) viib mõttele, missuguseid uusi väiteid püstitada,
3) laseb aimata, kuidas neid väiteid tõestada.

Seepärast tuleb geomeetriat uurides püüda alati kõiki mõisteid ja vahekordi selgelt ette kujutada. Siin on hädavajalik kujutada kõike uuritavat joonistel.

Jooniste kasutamisel ei tohi aga unustada, et matemaatikas on tarvis kõike, mida kujutletakse, sõnastada täpsete lausetena. Vahekordi, mis kujutluse või joonise põhjal tunduvad tõestena, on alati tarvis tõestada loogiliste arutluste abil.

20. Korralda üksühene vastavus

1) naturaalarvude hulga ja naturaalarvude k-kordsete hulga vahel;
2) naturaalarvude hulga ja naturaalarvude k-ndate astmete hulga vahel;
3) positiivsete täisarvude hulga ja algarvude hulga vahel;
4) naturaalarvude hulga ja täisarvude hulga vahel;
5) naturaalarvude hulga ja ratsionaalarvude hulga vahel.

21. Korralda joonise abil üksühene vastavus

1) kahe erinevate pikkustega sirglõigu punktide vahel (koordinaattelgi kasutamata);
2) kahe kiire punktide vahel;
3) ühe otspunktita lõigu ja kiire punktide vahel;
4) poolringjoone ja sirge punktide vahel.

22. Korralda üksühene vastavus

1) tingimusi $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ rahuldavate reaalarvude hulga ja kõigi reaalarvude hulga vahel (Näpunäide. Kasuta trigonomeetriat.);
2) vabalt valitud sirglõigu sisepunktide ja sirge punktide vahel.

Matemaatilise teooria rangelt loogilisel ülesehitusel

1) loetletakse kõik teooria algmõisted,

2) sõnastatakse kõik teooria aksioomid,

3) defineeritakse kõik ülejäänud teooriasse kuuluvad mõisted, võttes aluseks ainult teooria algmõisted,

4) tõestatakse kõik ülejäänud teooriasse kuuluvad väited, võttes aluseks ainult teooria aksioomid.

Matemaatilise teooria kirjeldatud ülesehitamisviisi nimetatakse **aksiomaatiliseks** ehk **deduktiivseks meetodiks.** Aksiomaatilisel meetodil ülesehitatud teooriat nimetatakse **deduktiivseks teooriaks.**

Kõigi deduktiivsesse teooriasse kuuluvate mõistete hulk jaguneb kaheks osahulgaks:

1) **algmõisted** — otseselt ei defineerita, ainult nimetatakse ja tähistatakse;

2) **tuletatud mõisted** — defineeritakse kas vahetult algmõistete kaudu või selliste mõistete kaudu, mis on juba defineeritud algmõistete abil.

Kõigi deduktiivsesse teooriasse kuuluvate väidete hulk jaguneb samuti kaheks osahulgaks:

1) **aksioomid** — ei tõestata, kuid loetakse tõesteks;

2) **teoreemid** — tõestatakse kas vahetult aksioomide kaudu või selliste väidete kaudu, mis on juba tõestatud aksioomide abil.

Siit ilmneb, et deduktiivne teooria sisaldab kolme liiki lauseid: aksioome, definitsioone ja teoreeme.[1] Teoreeme, mille tõestus on väga lihtne, nimetatakse sageli ka järeldusteks. Vähemtähtsad järeldused esitatakse tihti vahemärkustena ilma neile nimetust omistamata.

Aksioomidega teatatakse kõik omadused ja vahekorrad, mis algmõistete puhul loetakse tõesteks ja mis on aluseks kogu deduktiivsele teooriale. Selles mõttes ei jää algmõisted täielikult defineerimata. Neid ei defineerita küll otseselt, s. o. teiste mõistete

---

[1] Ütleme täpsemalt: teooriasse kuuluvad ainult tõesed teoreemid ja ainult sellised definitsioonid, millega määratud objekt on olemas. Näiteks definitsioon *Rombi tippe läbivat ringjoont nimetatakse rombi ümberringjooneks* üldiselt ei määra midagi ja geomeetriasse ei kuulu.

kaudu, kuid nad defineeritakse kaudselt — aksioomide abil. Niisiis, aksioomide süsteem on algmõistete kaudne definitsioon.

1.8. ALGMÕISTETE JA AKSIOOMIDE SÜSTEEMI MOODUSTAMINE.

Nagu selgus, on algmõistete väljaeraldamine deduktiivses teoorias loogiliselt paratamatu. Kuid teooriast endast ei tulene, missugused mõisted võtta algmõisteteks. Viimaste valimisel esineb teatav vabadus.

Senised algmõisted võib asendada mingite teiste teooriasse kuuluvate mõistetega. Sel juhul muutuvad senised algmõisted tuletatavateks — neid saab nüüd defineerida uute algmõistete kaudu. Seega on teooria jagunemine algmõisteteks ja tuletatud mõisteteks suhteline: iga mõiste on defineeritav, kui võtta teatavad teised mõisted algmõisteteks.

Algmõistete muutmisel tuleb muuta ka aksioome, sest aksioomid peavad kirjeldama algmõisteid. Järelikult esineb ka aksioomide süsteemi koostamisel teatav vabadus: ka aksioomi ja teoreemi mõisted on suhtelised. Iga aksioomi saab tõestada, s. t. muuta teoreemiks, kui mõned seni teoreemideks olnud väited võtta aksioomideks.

Algmõistete ja aksioomide süsteemi ei saa siiski moodustada täiesti vabalt. Peab olema täidetud kolm tingimust.

1) Aksioomide süsteemis ei tohi olla loogilist vasturääkivust, s. t. selles ei või olla kaht teineteist eitavat aksioomi ja samuti ei või aksioomidest järelduda kaht teineteist eitavat väidet.

2) Algmõisteid ja aksioome peab olema küllalt palju, nii et nende alusel saab teooria iga ülejäänud mõiste defineerida ja iga ülejäänud väite tõestada või ümber lükata.

3) Algmõisteid ja aksioome ei tohi olla liiga palju, s. t. ei tohi olla algmõisteid, mida ülejäänud algmõistete abil saab defineerida, ega aksioome, mida ülejäänud aksioomide abil saab tõestada.

Algmõisteteks võetakse harilikult kõige lihtsamad mõisted ja väited. See aga ei tähenda, et teooria ülesehitamisel jäetakse iga lihtne mõiste defineerimata ja iga lihtne väide tõestamata. Kui talitada nii siis algmõisteid ja aksioome oleks liiga palju. See-

pärast deduktiivses teoorias defineeritakse ka selliseid mõisteid, mis tunduvad täiesti selgetena, ning tõestatakse väiteid, mille kehtivus ei tekita mingit kahtlust. Selliste definitsioonide ja tõestuste eesmärk on näidata loogilist sõltuvust lausete vahel.

1.9. GEOMEETRIA AKSIOMAATILISEST ÜLESEHITUSEST.

Kujundit, mille kõik punktid kuuluvad ühele tasandile, nimetatakse tasapinnaliseks kujundiks. Kui aga kujundi kõik punktid ei kuulu ühele tasandile, siis räägitakse ruumilisest kujundist.

Ühel tasandil asetsevate kujundite teooriat nimetatakse tasandigeomeetriaks ehk **planimeetriaks.** Kõigi kujundite teooriat nimetatakse ruumigeomeetriaks ehk **stereomeetriaks.**

Planimeetria niisiis sisaldub stereomeetrias. Deduktiivne geomeetria ehitatakse üles nii, et planimeetria algmõisted ja aksioomid on osa stereomeetria algmõistetest ja aksioomidest.

Planimeetria on siiski iseseisev, stereomeetriast sõltumatu teooria — omaette geomeetria. Planimeetria on tasapinnaliste kujundite kõigi selliste omaduste hulk, mida saab kindlaks teha ruumi kasutamata. Planimeetrias ei saa korraga vaadelda kahte kujundit, mis asetsevad erinevatel tasanditel.

Koolis vaadeldakse vaid kõige lihtsamaid kujundeid, seega ainult osa planimeetriast ja stereomeetriast. Kooliplanimeetria on eelmistes klassides läbi uuritud. Ka stereomeetriast on juba olnud juttu. Nüüd on ülesandeks süvendada teadmisi stereomeetriast. Me käsitleme osa koolistereomeetriast aksiomaatiliselt.

Geomeetria käsitlus eelmistes klassides oli ainult osaliselt deduktiivne. Seal ei eraldatud välja algmõisteid ja aksioomidest märgiti ainult mõned. Peale paralleelide aksioomi vaadeldakse koolis harilikult veel viit geomeetria aksioomi:

1. *Iga kaht erinevat punkti läbib sirge;*
2. *Kaht erinevat punkti läbib ainult üks sirge;*
3. *Iga kolme punkti, mis ei ole ühel sirgel, läbib tasand;*
4. *Kolme punkti, mis ei ole ühel sirgel, läbib ainult üks tasand;*
5. *Kui sirge kaks erinevat punkti on tasandil, siis kogu sirge on tasandil.*

Aksioomid 1 ja 2 võetakse kokku sirge põhiomadusena *Kaks erinevat punkti määravad ühe ja ainult ühe sirge.* Aksioo-

mid 3 ja 4 võetakse kokku tasandi põhiomadusena *Kolm punkti, mis ei ole ühel sirgel, määravad ühe ja ainult ühe tasandi.*

Loetletud aksioomidest kaugeltki ei piisa kogu geomeetria ülesehitamiseks. Seepärast tuli eelmistes klassides sageli tõestusvahenditeks võtta joonis ja kujutlus. Nendest aksioomidest näiteks ei järeldu. et sirge ja tasandi punktide hulgad on lõpmatud — see loeti endastmõistetavaks. Õigupoolest lisati sel viisil kaks uut aksioomi. Endastmõistetavaks peeti ka seda, et sirge iga punkt jaotab sirge ülejäänud punktide hulga kaheks osahulgaks, mille ühisosa on tühi. Ainult joonise põhjal otsustati, et sirge, mis läbib ringi sisepunkti, lõikab ringjoont kahes punktis. Selliseid näiteid saab tuua palju.

Punkti, sirget ja tasandit eelmistes klassides ei defineeritud; neist tekitati ainult kujutlus esemete vaatlemise teel. Seega võeti need mõisted algmõisteteks. Kuid nendest algmõistetest ei piisa.

Saksa matemaatik David Hilbert koostas 1899. aastal geomeetria algmõistete ja aksioomide süsteemi, mis rahuldab eespool märgitud kolme tingimust. Selles süsteemis on 6 algmõistet (nende hulgas *punkt*, *sirge* ja *tasand*) ning 23 aksioomi (nende hulgas koolis vaadeldavad 6 aksioomi). Koolis käsitlemiseks on Hilberti süsteem liiga keeruline.

Deduktiivse teooria ülesehitust saab lihtsustada, kui loobuda nõudest, et teooria oleks täiesti sõltumatu teistest matemaatilistest teooriatest. Osa mõisteid ja vahekordi saab siis võtta mõnest teisest teooriast ning jätta seal defineeritavaiks ja tõestatavaiks.

Kõigis matemaatilistes teooriates on tänapäeval käibel lihtsamad hulgateooria mõisted. Näiteks geomeetria ülesehitamisel võetakse abiks järgmised mõisted: *hulk*, *kuuluvus hulka*, *vastavus hulkade vahel*, *hulkade ühend*, *ühisosa* ja *ristkorrutis*. Neid mõisteid kasutame edaspidi ka stereomeetria käsitlemisel.

23. Mida nimetatakse
    1) matemaatiliseks teooriaks?
    2) algmõisteks?
    3) tuletatud mõisteks?
    4) definitsiooniks?
    5) aksioomiks?
    6) teoreemiks?
    7) induktsiooniks?
    8) deduktsiooniks?
24. Missuguseid teoreeme nimetatakse samaväärseteks? Missugune teoreem on samaväärne teoreemiga $p \Rightarrow q$? teoreemiga $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$?
25. Kirjelda vastuväitelist tõestust.
26. Kirjelda aksiomaatilist meetodit.

27. Miks on tarvis igas deduktiivses teoorias välja eraldada algmõistete ja aksioomide süsteem?
28. Missuguseid tingimusi peab rahuldama algmõistete ja aksioomide süsteem?
29. Mida tähendab lause *Mõistete jaotus alg- ja tuletatud mõisteteks on suhteline*?
30. Mida tähendab lause *Väidete jaotus aksioomideks ja teoreemideks on suhteline*?
31. Mida nimetatakse planimeetriaks? stereomeetriaks?
32. Missuguseid kujundeid nimetatakse tasapinnalisteks? ruumilisteks? Too näiteid.
33. Missuguseid geomeetria aksioome kasutatakse koolis?
34. Mida nimetatakse
    1) kahe hulga ühendiks? 2) kahe hulga ühisosaks?
    3) hulkade ristkorrutiseks? 4) üksüheseks vastavuseks?

2. SIRGETE JA TASANDITE VASTASTIKUSED ASENDID.

Vaatleme aksiomaatilise meetodi rakendamist. Näitena käsitleme stereomeetria algosa deduktiivselt. Aluseks võtame aksioomide hulga, mis on piisav sirgete ja tasandite kõigi vastastikuste asendite määramiseks peale ristseisu. Defineerime kõik vajalikud mõisted ja tõestame teoreemid kasutamata kujutlust. Eelmistes klassides õpitud mõistetest ja vahekordadest kasutame ainult neid, mis kuuluvad hulgateooriasse.

2.1. EKVIVALENTSUSRELATSIOON JA EKVIVALENTSUSKLASSID.

Enne stereomeetria käsitlemist meenutame ja laiendame teadmisi hulkadest.

Def. 1. **Hulkade A ja B ristkorrutiseks $A \times B$ nimetatakse hulka, mille elementideks on kõik võimalikud järjestatud paarid, kus esimesel kohal on hulga A mingi element ja teisel kohal hulga B mingi element:**

$$A \times B = \{(x;\ y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Edaspidi on vajalik vaid juht, kus $B = A$, s. o. hulga ristkorrutis iseendaga:

$$A \times A = \{(x;\ y) \mid x \in A \wedge y \in A\}.$$

Näiteks, tasandi punktide koordinaadipaaride hulk $\{(x;\ y)\}$ on reaalarvude hulga R ristkorrutis iseendaga:

$$\{(x;\ y)\} = R \times R.$$

Meenutame, et juhul, kui

$x \in A \Rightarrow x \in B$,

nimetatakse hulka A hulga B osahulgaks. Kui seejuures $A \neq \varnothing$ ja $A \neq B$, siis hulka A nimetatakse hulga B **pärisosahulgaks**. Järgnevas definitsioonis peame silmas hulga pärisosahulki, ehkki definitsioonil on mõte ka siis, kui tegemist on mittepärisosahulkadega.

Def. 2. **Hulga $A \times A$ iga osahulka nimetatakse relatsiooniks ehk seoseks hulgas A. Kui $S \subset A \times A$ ja $(a; b) \in S$, siis öeldakse, et elemendid a ja b on seoses S.**

Näide 1. Olgu $\mathbf{M}$ hulga M kõigi osahulkade hulk. Moodustame ristkorrutise $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$. Defineerime selles ristkorrutises osahulga S nii: iga kahe hulga $A \subset M$ ja $B \subset M$ puhul loeme paari $(A; B)$ kuuluvaks hulka S siis ja ainult siis, kui $A \subset B$. Hulk S on relatsioon hulgas $\mathbf{M}$. Seega sümbol $\subset$ määrab relatsiooni hulga kõigi osahulkade hulgas.

Def. 3. **Relatsiooni S hulgas A nimetatakse ekvivalentsusrelatsiooniks, kui ta on**

1) **refleksiivne**, s. t. $(x; x) \in S$ iga $x \in A$ korral;
2) **sümmeetriline**, s. t. $(x; y) \in S \Rightarrow (y; x) \in S$;
3) **transitiivne**, s. t. $(x; y) \in S \wedge (y; z) \in S \Rightarrow (x; z) \in S$.

Kui S on ekvivalentsusrelatsioon hulgas A ja $(a; b) \in S$, siis öeldakse, et *element a on ekvivalentne elemendiga b*. Seega saab ekvivalentsuse tingimused sõnastada ka nii:

1) refleksiivsus: hulga A iga element on ekvivalentne iseendaga;

2) sümmeetria: kui element x on ekvivalentne elemendiga y, siis ka element y on ekvivalentne elemendiga x;

3) transitiivsus: kui element x on ekvivalentne elemendiga y ja element y on ekvivalentne elemendiga z, siis ka element x on ekvivalentne elemendiga z.

Näide 2. Olgu A teatava kooli kõigi õpilaste hulk. Defineerime hulgas A relatsiooni S: tähendagu lause $(a; b) \in S$ seda, et a ja b on sama klassi õpilased. Siis

$(a; a) \in S$ iga $a \in A$ korral,

$(a; b) \in S \Rightarrow (b; a) \in S$,

$(a; b) \in S \wedge (b; c) \in S \Rightarrow (a; c) \in S$.

Järelikult on S ekvivalentsusrelatsioon kooli kõigi õpilaste hulgas.

Näide 3. Vaatleme tasandi kõigi kujundite hulka $\mathbf{K}$. Moodustame hulga $S \subset \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, võttes sellesse kõik sellised paarid

$(K_1; K_2)$, mis koosnevad võrdsetest (kongruentsetest) kujunditest:

$(K_1; K_2) \in S \Leftrightarrow K_1 = K_2$.

S on ekvivalentsusrelatsioon, sest

1) iga kujund on võrdne iseendaga: $(K; K) \in S$ iga $K \in \mathbf{K}$ korral,

2) kui $K_1 = K_2$, siis $K_2 = K_1$, s. t. $(K_1; K_2) \in S \Rightarrow (K_2; K_1) \in S$,

3) kui $K_1 = K_2$ ja $K_2 = K_3$, siis $K_1 = K_3$, seega

$(K_1; K_2) \in S \wedge (K_2; K_3) \in S \Rightarrow (K_1; K_3) \in S$.

Näide 4. Olgu M kõigi harilike murdude hulk. Defineerime paaride hulgas $M \times M$ osahulga S tingimusega

$$\left(\frac{m}{n}; \frac{p}{q}\right) \in S \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Et murdude võrdsus on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne, siis S on ekvivalentsusrelatsioon murdude hulgas.

Samuti nagu kooli õpilaste hulk A jaguneb klassideks (näide 2), nii jagunevad ekvivalentsusrelatsiooni toimel osahulkadeks ka kujundite hulk $\mathbf{K}$ (näide 3) ja harilike murdude hulk M (näide 4). Iga sel viisil saadud osahulk hulgas $\mathbf{K}$ koosneb neist ja ainult neist kujunditest, mis on paarikaupa kongruentsed, hulgas M aga neist ja ainult neist harilikest murdudest, mis on paarikaupa võrdsed. Osutub, et samal viisil jaguneb osahulkadeks iga hulk, milles on antud ekvivalentsusrelatsioon.

Teoreem. **Kui hulgas A on antud ekvivalentsusrelatsioon, siis hulk A jaguneb mittetühjadeks osahulkadeks nii, et**

1) iga element kuulub ühte ja ainult ühte osahulka,

2) iga kaks elementi ühest osahulgast on ekvivalentsed,

3) iga kaks elementi erinevatest osahulkadest on mitte-ekvivalentsed.

Tõestus. Kui element a on ekvivalentne elemendiga b, siis kirjutame lühidalt $a \sim b$. Ekvivalentsuse tingimused saab siis avaldada nii:

1) refleksiivsus: $x \sim x$ iga $x \in A$ korral;

2) sümmeetria: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;

3) transitiivsus: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Olgu a hulga A vabalt valitud element ja A_a hulga A kõigi selliste elementide hulk, mis on ekvivalentsed elemendiga a, s. t.

$A_a = \{x \mid x \in A \wedge x \sim a\}$.

Hulk A_a ei ole tühi, sest $a \sim a$, mistõttu $a \in A_a$.

Kui $x \in A_a$ ja $y \in A_a$, siis $x \sim a$ ja $y \sim a$. Sümmeetria tõttu siis ka $a \sim y$. Järelikult transitiivsuse tõttu $x \sim y$ ja sümmeetria tõttu ka $y \sim x$. Seega on iga kaks elementi hulgast A_a ekvivalentsed.

Kui $A_a = A$, siis teoreem on tõestatud. Kui aga $A_a \neq A$, siis leidub element $b \in A$, nii et $b \notin A_a$. Moodustame samal viisil osahulga A_b:

$A_b = \{x \mid x \in A \wedge x \sim b\}$.

Samuti nagu hulga A_a puhul, nii veendume ka siin, et hulk A_b ei ole tühi ja iga kaks elementi hulgast A_b on ekvivalentsed.

Olgu $x \in A_a$ ja $y \in A_b$. Oletame vastuväiteliselt, et $x \sim y$. Et $x \sim a$, siis $a \sim x$ (sümmeetria) ja $a \sim y$ (transitiivsus). Kuid $y \sim b$, seepärast ka $a \sim b$ ja $b \sim a$, s. o. $b \in A_a$. On tekkinud vastuolu eeldusega, et $b \notin A_a$. Järelikult on oletus $x \sim y$ väär: ükski element hulgast A_b ei ole ekvivalentne ühegi elemendiga hulgast A_a.

Kui $A_a \cup A_b = A$, siis teoreem on tõestatud. Kui aga $A_a \cup A_b \neq A$, siis leidub element $c \in A$, nii et $c \notin A_a$ ja $c \notin A_b$. Moodustame hulga A_c. Selle korral kehtivad kõik eelnevad arutlused. Jätkates üha uute osahulkade eraldamist, ammendame lõpuks hulga A, nii et hulga A iga element satub mõnda osahulka. ▮

Def. 4. **Osahulki, milledeks ekvivalentsusrelatsioon jaotab hulga, nimetatakse ekvivalentsusklassideks.**

Näiteks ekvivalentsusklasse, milledeks murdude võrdsus jaotab harilikkude murdude hulga, nimetatakse ratsionaalarvudeks.

35. Kas järgmised vahekorrad on relatsioonid? Missugused neist on ekvivalentsusrelatsioonid?

1) hulknurkade sarnasus;
2) sirgete ristseis;
3) võrrandite samaväärsus;
4) funktsioonide pidevus;
5) kolmnurkade võrdhaarsus;
6) hulkade võrdsus;
7) sirgete lõikumine;
8) teoreemide samaväärsus;
9) hulknurkade pindvõrdsus;
10) arvude samamärgilisus;
11) vektorite samasuunalisus;
12) murdude samanimelisus;
13) punktide sümmeetria sirge suhtes;
14) sama jäägi tekkimine täisarvude jagamisel antud täisarvuga k.

2.2. ALGMÕISTED JA VIIS AKSIOOMI.

Alustame nüüd geomeetria aksiomaatilist käsitlemist.

Ruumi loeme hulgaks. Ruumi elemente nimetame **punktideks** (tähised: A, B, C, ...). Vaatleme ruumi osahulki, mida nimetame **sirgeteks** (tähised: a, b, c, ...) ja **tasanditeks** (tähised: α, β, γ, ...). Punkt, sirge, tasand ja ruum on meie käsitluses algmõisted. Nende olemasolu ja omaduste uurimiseks sõnastame sobivad aksioomid.

Aksioom 1. **Sirge ja tasand on ruumi erinevad pärisosahulgad.**

Sellest aksioomist ei järeldu sirgete ja tasandite olemasolu, sest ruum võib olla tühi või koosneda ühest elemendist. Võime vaid järeldada, et kui leidub sirgeid ja tasandeid, siis nii igal sirgel kui ka igal tasandil on vähemalt üks punkt. Samuti järeldame, et väljaspool sirget ja ka väljaspool tasandit peab olema vähemalt üks punkt.

Aksioom 2. **Leidub vähemalt üks sirge.**

Eelnev märkus lubab lisada, et leidub vähemalt kaks erinevat punkti: üks on antud sirgel ja teine väljaspool seda.

Def. 1. **Punkte, mis kuuluvad ühele sirgele, nimetatakse kollineaarseteks punktideks.**

Aksioom 3. **Iga kaks punkti on kollineaarsed.**

Siit järeldub juba kahe erineva sirge olemasolu. Tõepoolest, leidub sirge a (aksioom 2) ning punktid $A \in a$ ja $B \notin a$ (aksioom 1). Aksioomi 3 põhjal leidub sirge b, mis sisaldab punkte A ja B. Et $B \notin a$, siis $b \neq a$.

Aksioom 4. **Iga kahe erineva sirge ühisosa kas on tühi või koosneb ühest punktist.**

Järeldus 1. *Kaht erinevat punkti A ja B läbib üks ja ainult üks sirge* (tähis AB).

Tõepoolest, üks selline sirge leidub (aksioom 3). Kui oletada, et leidub veel teine, eelmisest erinev sirge, mis läbib neid punkte, siis tekib vastuolu aksioomiga 4: erinevate sirgete ühisosas peaks olema kaks erinevat punkti.

Def. 2. **Kaht sirget, mille ühisosa koosneb ühest punktist, nimetatakse lõikuvateks sirgeteks. Lõikuvate sirgete ühist punkti nimetatakse nende lõikepunktiks.**

Kahe lõikuva sirge olemasolu ilmnes aksioomile 3 järgnevas märkuses. Samal viisil veendume, et iga sirge jaoks leidub vähemalt üks teda lõikav sirge.

Def. 3. **Punkte ja sirgeid, mis kuuluvad ühele tasandile, nimetatakse komplanaarseteks punktideks ja sirgeteks.**

Aksioom 5. **Iga kaks lõikuvat sirget on komplanaarsed.**

Järeldus 2. *Iga sirget läbib vähemalt üks tasand.*

See asjaolu tuleneb definitsioonile 2 järgnevast märkusest.

Aksioomist 2 järeldub nüüd, et leidub vähemalt üks tasand.

36. Tõesta, et
    1) leidub kolm mittekollineaarset pukti;
    2) iga kolm mittekollineaarset punkti on komplanaarsed;
    3) leidub vähemalt kolm paarikaupa lõikuvat sirget;
    4) iga sirget läbib vähemalt kaks erinevat tasandit.
37. Leia tõestatud lause, mis planimeetrias loeti aksioomiks.

2.3. SIHT TASANDIL. SIRGEKIMP JA SIRGESIDUM.

Def. 1. **Sirgeid a ja b nimetatakse paralleelseteks** (tähis $a \parallel b$), **kui kas $a = b$ või a ja b on komplanaarsed ning $a \cap b = \varnothing$.**

Niisiis, erinevalt senisest loeme kaks sirget paralleelseteks ka

siis, kui nad ühtivad. Selle kokkuleppe põhjal on iga sirge paralleelne iseendaga.

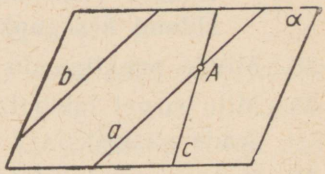
Aksioom 6. **Iga tasandi α ja iga sirge a ning iga punkti A korral, mis kuuluvad tasandile α, leidub tasandil α üks ja ainult üks sirge b, mis sisaldab punkti A ja on paralleelne sirgega a.**

Järeldus 1. *Iga kaks komplanaarset sirget kas lõikuvad või on paralleelsed.*

Tõepoolest, iga kahe erineva sirge ühisosa koosneb kas ühest punktist või on tühi (aksioom 4). Esimesel juhul kasutame definitsiooni[1] 2.2.2, teisel juhul definitsiooni 1.

Teoreem 1. **Kui kolmest komplanaarsest sirgest kaks on paralleelsed ja kolmas sirge lõikab neist ühte, siis lõikab ta ka teist.**

Tõestus. Olgu a, b ja c komplanaarsed, s. t. mingile tasandile α kuuluvad sirged ning olgu $a \| b$ ja $a \cap c = \{A\}$ (joon. 6). Sirge c ei saa olla paralleelne sirgega b. Tõepoolest, kui $c \| b$, siis punkti A läbib kaks erinevat sirget, mis on mõlemad tasandil α ja paralleelsed sirgega b; kuid aksioomi 6 tõttu on see võimatu. Seega lõikab sirge c ka sirget b (järeldus 1). ∎



Joon. 6.

Teoreem 2. **Sirgete paralleelsus on ekvivalentsusrelatsioon komplanaarsete sirgete hulgas.**

Tõestus. Sirgete paralleelsuse refleksiivsus ja sümmeetria tulenevad vahetult paralleelsuse definitsioonist: sirge on paralleelne iseendaga ja kahe sirge paralleelsus on nende vastastikune omadus. Veendume, et komplanaarsete sirgete paralleelsus on ka transitiivne. Olgu a, b ja c mingid komplanaarsed sirged ning $a \| b$ ja $b \| c$. Sirge c ei saa lõigata sirget a, sest vastupidisel juhul peaks ta lõikama ka sirget b (teoreem 1). Seega $c \| a$ (järeldus 1). ∎

---

[1] Teoreeme, definitsioone ja järeldusi nummerdame iga artikli piires alates ühest. Viidates näiteks definitsioonile samas artiklis, kasutame definitsiooni numbrit; viidates eelnevatele artiklitele, lisame artikli numbri. Näiteks definitsioon 2.2.2 on definitsioon 2 artiklis 2.2.

Def. 2. **Tasandi sirgete ekvivalentsusklasse, mille määrab paralleelsusseos, nimetatakse paralleelsete sirgete kimpudeks. Sirge kuuluvust paralleelsete sirgete kimpu nimetatakse sirge sihiks tasandil.**

Paralleelsete sirgete kimp on niisiis tasandi kõigi omavahel paralleelsete sirgete hulk. Nüüd võib ka ütelda, et sirged on paralleelsed, kui nad on samasihilised.

Sirge sihi ruumis võtame kasutusele edaspidi, kui on selgitatud vajalikud loogilised eeldused.

Omistame nüüd nimetuse ka lõikuvate sirgete hulkadele nii tasandil kui ruumis.

Def. 3. **Kõigi komplanaarsete sirgete hulka, mis läbivad vabalt valitud punkti A, nimetatakse lõikuvate sirgete kimbuks ja punkti A selle kimbu keskpunktiks. Ruumi kõigi sirgete hulka, mis läbivad vabalt valitud punkti A, nimetatakse lõikuvate sirgete sidumiks ja punkti A selle sidumi keskpunktiks.**

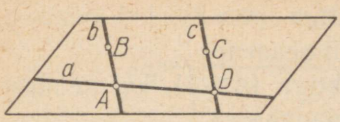
38. Mitme punktiga on määratud siht tasandil? Põhjenda.
39. Mitu sirget läbib tasandit antud punkti antud sihis? Põhjenda vastust.
40. Kas on mõtet rääkida
    1) paralleelsetest sihtidest tasandil?
    2) lõikuvatest sihtidest tasandil?
41. Sirgesidumi keskpunkti A läbib tasand α. Kuidas nimetatakse selle sidumi ja tasandi α ühisosa?
42. Kas sirgete lõikumine on ekvivalentsusrelatsioon tasandi või ruumi sirgete hulgas? Põhjenda vastust.

2.4. TASANDI MÄÄRAMINE PUNKTIDE JA SIRGETEGA.

Aksioom 7. **Kahe erineva tasandi ühisosa kas on tühi või koosneb ühest sirgest.**

Teoreem 1. **Iga kolme mittekollineaarset punkti läbib üks ja ainult üks tasand.**

Tõestus. Mittekollineaarsed punktid A, B ja C määravad kaks lõikuvat sirget AB ja AC. Leidub tasand α, mis läbib neid sirgeid (aksioom 5). Oletame vastuväiteliselt, et leidub veel teine tasandist α erinev tasand β, mis läbib punkte A, B ja C. Et $\alpha \neq \beta$ ja $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$, siis hulk $\alpha \cap \beta$ on sirge (aksioom 7). On tekkinud vastuolu teoreemi eeldusega: punktid A, B ja C, mis kuuluvad



Joon. 7.

tasandite ühisosa, peavad olema kollineaarsed. Järelikult on tehtud oletus väär. Seega läbib punkte A, B ja C ainult üks tasand. ∎

Teoreem 2. **Igal sirgel on vähemalt kaks erinevat punkti.**

Tõestus. Vaatleme mingit sirget a (joon. 7). Leidub punkt $A \in a$ ja punkt $B \notin a$. Lõikuvad sirged a ja $b = AB$ on mingil tasandil α (aksioom 5). Tasand α on temal asetsevast sirgest b erinev ruumi osahulk (aksioom 1). Seepärast leidub tasandil α punkt C, mis ei kuulu sirgele b. Kui $C \in a$, siis väide on tõene. Vaatleme juhtu, kus $C \notin a$. Tasandil α leidub sirge c, mis läbib punkti C ja on paralleelne sirgega b (aksioom 6). Sirge a lõikab sirget c mingis punktis D (teoreem 2.3.1). Punktid A ja D ei ühti, sest sirgetel b ja c ei ole ühiseid punkte. Järelikult on sirgel a vähemalt kaks erinevat punkti. ∎

Tähtsamad järeldused teoreemidest 1 ja 2.

Järeldus 1. *Iga sirget a ja iga punkti $A \notin a$ läbib üks ja ainult üks tasand.*

Järeldus 2. *Iga kaht lõikuvat sirget läbib üks ja ainult üks tasand.*

Järeldus 3. *Iga kaht erinevat paralleelset sirget läbib üks ja ainult üks tasand.*

Järeldus 4. *Iga sirge a ja iga punkti A korral leidub üks ja ainult üks sirge, mis läbib punkti A ja on paralleelne sirgega a.*

43. Tõesta viimased neli järeldust.

44. Tõesta, et leidub
1) vähemalt kolm lõikuvat sirget, mis kuuluvad ühte kimpu;
2) vähemalt neli lõikuvat sirget, mis kuuluvad ühte sidumisse.

45. Tõesta, et igal tasandil leidub
1) vähemalt üks sirge;
2) vähemalt kolm mittekollineaarset punkti;
3) vähemalt kaks erinevat paralleelset sirget.

46. Öeldakse et punktid A, B, C ja D määravad rööpküliku ning on selle tipud, kui $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$ ja $AB \neq CD$. Tõesta, et igal tasandil leidub vähemalt üks rööpkülik.

47. Missugune seni aksioomiks loetud lause on artiklis 2.4 tõestatud?

48. Mitu sirget on määratud n punktiga ($n>2$), kui nendest punktidest ükski kolmik ei ole kollineaarne?
49. Mitu tasandit on määratud n punktiga ($n>3$), kui nendest punktidest ükski nelik ei ole komplanaarne?
50. n sirget ($n > 3$) kuuluvad ühte sidumisse. Nendest sirgetest ükski kolmik ei ole komplanaarne. Mitu tasandit on määratud nende sirgetega?
51. Mitu tasandit on määratud n sirgega ($n>3$), mis on paarikaupa paralleelsed ja millest ükski kolmik ei ole komplanaarne?
52. Tõesta, et igast neljast mittekomplanaarsest punktist iga kolm punkti on mittekollineaarsed.
53. Öeldakse, et iga neli mittekomplanaarset punkti määravad kolmnurkse püramiidi ehk tetraeedri ja on selle tippudeks. Tõesta, et leidub vähemalt üks tetraeeder.
54. Tõesta, et leidub neli sirget, millest üks on paralleelne iga ülejäänud sirgega nendest neljast, kuid ükski kolmik ei ole komplanaarne.

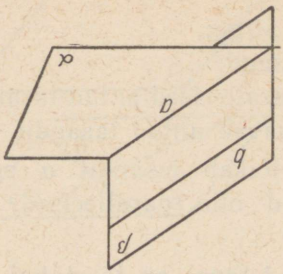
2.5. SIRGE JA TASANDI VASTASTIKUSED ASENDID.

Teoreem 1 (tunnus, mil sirge kuulub tasandile). **Kui sirge kaks erinevat punkti on tasandil, siis on kogu sirge sel tasandil.**

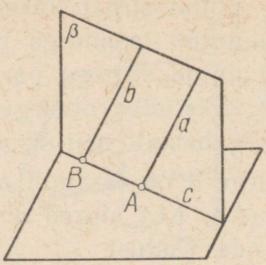
Tõestus. Olgu sirge a punktid A ja B tasandil α. Oletame vastuväiteliselt, et sirgel a leidub punkte, mis ei kuulu tasandile α. Leidub tasand β, mis läbib sirget a (järeldus 2.2.2). Tasand β erineb tasandist α, sest α ei sisalda kogu sirget a. Hulk $\alpha \cap \beta$ ei ole tühi, sest selles on punktid A ja B. Seega hulk $\alpha \cap \beta$ on mingi sirge b (aksioom 7). Et sirge b on tasandil α, siis ta erineb sirgest a. On tekkinud vastuolu järeldusega 2.2.1: punkte A ja B läbib kaks erinevat sirget a ja b. Järelikult on tehtud oletus väär. Seega kuulub kogu sirge a tasandile α. ∎

Def. 1. **Sirget a ja tasandit α nimetatakse paralleelseteks** (tähis $a \parallel \alpha$), **kui $a \cap \alpha = \varnothing$, ning lõikuvateks, kui $a \cap \alpha \neq \varnothing$ ja $a \not\subset \alpha$.**

Järeldus 1. *Iga sirge ja iga tasandi korral sirge kas asetseb tasandil, on tasandiga paralleelne või lõikab tasandit; viimasel juhul on sirgel ja tasandil ainult üks ühine punkt* (teoreem 1).



Joon. 8.



Joon. 9.

Def. 2. **Sirge ja tasandi ainsat ühist punkti nimetatakse nende lõikepunktiks.**

Teoreem 2 (sirge ja tasandi paralleelsuse tunnus). **Kui sirge, mis ei ole tasandil, on paralleelne tasandil asetseva sirgega, siis on ta paralleelne ka selle tasandiga.**

Tõestus. Kui $a \subset \alpha$ ja $b \not\subset \alpha$ (joon. 8), siis $a \neq b$. Kui seejuures $a \parallel b$, siis $a \cap b = \varnothing$. Sirged a ja b määravad tasandi β (järeldus 2.4.3), kusjuures $\alpha \cap \beta = a$ (aksioom 7). Et $b \subset \beta$, siis sirge b ja tasandi α ühine punkt peab olema nii tasandil α kui ka tasandil β, s. o. sirgel a. Kuid $a \cap b = \varnothing$, seepärast $b \cap \alpha = \varnothing$. Järelikult $b \parallel \alpha$ (definitsioon 1). ■

Teoreem 3. **Kui sirge a lõikab tasandit α, siis lõikab tasandit α ka iga sirge, mis on paralleelne sirgega a.**

Tõestus. Olgu $a \cap \alpha = \{A\}$ ja $b \parallel a$ (joon. 9). Sirged a ja b määravad tasandi β (järeldus 2.4.3). Tasandid α ja β ei ühti. Nende ühisosas on vähemalt punkt A. Järelikult on nende ühisosaks teatav sirge c (aksioom 7). Sirge c on komplanaarne sirgetega a ja b ning lõikab sirget a punktis A. Seepärast lõikab ta ka sirget b (teoreem 2.3.1) teatavas punktis B. Niisiis $B \in b$ ja et $B \in c$ ning $c \subset \alpha$, siis ka $B \in \alpha$. Et aga $b \not\subset \alpha$, siis $b \cap \alpha = \{B\}$ (teoreem 1). Seega b ja α lõikuvad. ■

55. Tõesta teoreemi 2 pöördteoreem. Võta need laused kokku ühe lausega.
56. Defineeri sirge ja tasandi paralleelsus uuel viisil, kasutades eelneva ülesande lahendust.
57. Miks ei ole mõtet vaadelda teoreemi 3 pöördteoreemi?
58. Tõesta, et leidub
    1) antud tasandit lõikav sirge;

2) antud sirget lõikav tasand;
3) antud tasandiga paralleelne sirge;
4) antud sirgega paralleelne tasand;
5) kaks lõikuvat sirget, mis on paralleelsed antud tasandiga;
6) vähemalt neli sirget, mis lõikavad antud tasandit.

59. Sirge a on tasandil α; sirge b lõikab tasandit α punktis $A \notin a$. Kas sirged a ja b võivad olla paralleelsed? Põhjenda vastust.

60. Missugune seni aksioomiks loetud lause on tõestatud artiklis 2.5?

61. Sirge a ei kuulu tasandile α. Tasandil α on sirgekimp, mille keskpunkt on A.
1) Mitme kimpu kuuluva sirgega võib sirge a olla paralleelne?
2) Mitut kimpu kuuluvat sirget võib a lõigata?
Põhjenda vastust.

62. Tasand α erineb tasandist β. Tasandil α on paralleelsete sirgete kimp.
1) Mitut kimpu kuuluvat sirget võib β läbida?
2) Mitut kimpu kuuluvat sirget võib β lõigata?
3) Mitme kimpu kuuluva sirgega võib β olla paralleelne?
Põhjenda vastust.

63. On teada, et $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$ ja $\alpha \cap \beta = b$. Tõesta, et $a \parallel b$.

2.6. KAHE TASANDI VASTASTIKUSED ASENDID.

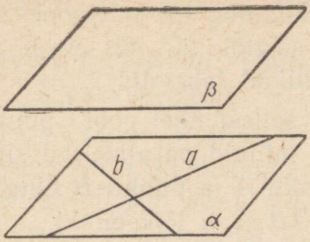
Def. 1. **Tasandeid α ja β nimetatakse paralleelseteks** (tähis $\alpha \parallel \beta$), **kui kas $\alpha = \beta$ või $\alpha \cap \beta = \varnothing$, ja lõikuvateks, kui $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ ning $\alpha \neq \beta$.**

Järeldus 1. *Iga kaks tasandit kas on paralleelsed või lõikuvad; viimasel juhul on nende ühisosaks sirge* (aksioom 7).

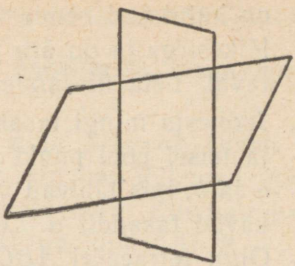
Def. 2. **Lõikuvate tasandite ühist sirget nimetatakse nende lõikesirgeks.**

Teoreem 1. **Kui ühe tasandi kahest lõikuvast sirgest kumbki on paralleelne teise tasandiga, siis need tasandid on paralleelsed.**

Tõestus. Olgu tasandil α sirged a ja b, mis lõikuvad omavahel ja on paralleelsed tasandiga β (joon. 10). On tarvis näi-



Joon. 10.



Joon. 11.

data, et siis $\alpha \parallel \beta$. Oletame vastuväiteliselt, et need tasandid lõikuvad ja $\alpha \cap \beta = c$. Et $c \subset \alpha$, siis c kas lõikab sirgeid a ja b või on nendega paralleelne. Kuid mõlemaga paralleelne ta olla ei saa (teoreem 2.3.1). Olgu näiteks $b \cap c = \{A\}$. Et $A \in c$ ja $c \subset \beta$, siis $A \in \beta$. Seega $A \in b$ ja $A \in \beta$, mistõttu $b \cap \beta \neq \varnothing$. On tekkinud vastuolu eeldusega, et sirge b on paralleelne tasandiga β. Järelikult on oletus väär. Niisiis $\alpha \parallel \beta$ (järeldus 1). ■

Järeldus 2 (kahe tasandi paralleelsuse tunnus). *Kui tasandi kaks lõikuvat sirget on vastavalt paralleelsed teise tasandi kahe lõikuva sirgega, siis need tasandid on paralleelsed* (teoreem 2.5.2 ja teoreem 1).

64. Tõesta, et teoreemi 1 saab laiendada tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks.

65. Defineeri kahe tasandi paralleelsus uuel viisil, kasutades eelneva ülesande lahendust.

66. Kas kahe tasandi paralleelsuse tunnuse saab sõnastada tarviliku ja piisava tingimusena?

67. Tõesta, et leidub tasand, mis
1) lõikab antud tasandit;
2) on paralleelne antud tasandiga.

68. Kujuta joonisel [1]
1) tasand;
2) kaks paralleelset tasandit;
3) kaks lõikuvat tasandit.

69. Joonisel 11 on kujutatud kaks tasandit. Tee joonis, millel

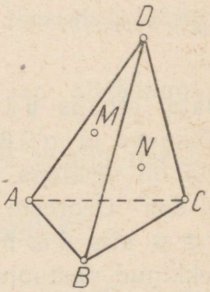
[1] Ülesannete 68—74 lahendamisel tuleb kasutada kujutlust. Aluseks võetud aksioomide põhjal ei saa defineerida sirglõiku ega otsustada, millal kaks punkti on teine teise pool tasandit. Defineerida saab küll tetraeedri tipud (ül. 53), mitte aga selle servi ja tahke.

on kujutatud nende tasandite lõikumine, s. t. on joonestatud lõikesirge ja on ära jäetud need sirglõigud,[1] mis ei ole nähtaval. Leia ülesande kõik võimalikud lahendid.

70. Joonesta mingi tasand α. Märgi sellest ühel pool[1] punkt A ja teisel pool punkt B. Joonesta mingid paralleelsed sirged a ja b, mis läbivad vastavalt punkti A ja punkti B ning lõikavad tasandit α. Leia joonisel AB ja α lõikepunkt.

71. Olgu tetraeedri $ABCD$ tahul[1] ABD märgitud punkt M ja tahul BCD punkt N nii, nagu on näidatud joonisel 12. Tee joonis, millel on kujutatud järgmised punktihulgad:

1) $s = DMN \cap ABD$;
2) $t = DMN \cap BCD$;
3) $u = DMN \cap ABC$;
4) $\{P\} = MN \cap ABC$;
5) $\{Q\} = AC \cap DMN$;
6) $v = DMN \cap ACD$;
7) $\{R\} = MN \cap ACD$.



Joon. 12.

72. Tetraeedri $KLMN$ serval[1] KN on märgitud punkt A, serva KM pikendusel punkt B ja serva ML pikendusel punkt C. Leia tasandi ABC lõige
1) tasandiga KLM;
2) tetraeedriga $KLMN$.
Viiruta viimane lõige.

73. Joonesta tetraeeder $ABCD$ ning märgi selle servadel AD, BD ja CD vastavalt punktid M, N ja P nii, et sirged MN, NP ja PM lõikavad tasandit ABC. Leia joonisel
1) sirgete MN, NP, PM lõikepunktid Q, R, S tasandiga ABC;
2) tasandite ABC ja MNP lõikesirge s;
3) tasandid α ja β, mis läbivad punkti M ja on paralleelsed vastavalt tasandiga ABC ja tasandiga BCD.
Viiruta tasandite α ja β lõiked tetraeedriga.

74. Tetraeedri ühel tahul on märgitud punkt P nii, et see ei asetse tetraeedri ühelgi serval. Leia tasandid, mis läbivad punkti P ja on paralleelsed tetraeedri ühe ülejäänud tahuga.

---

[1] Vt. märkus lk. 37 lõpus.

Teoreem 1. **Tasandi lõikesirged kahe paralleelse tasandiga on paralleelsed.**

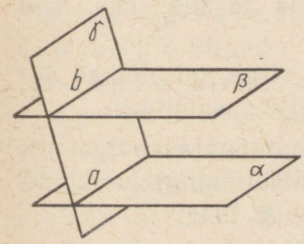
Tõestus. Olgu $\alpha \parallel \beta$ ja $\alpha \cap \gamma = a$ ning $\beta \cap \gamma = b$ (joon. 13). Sirged a ja b on tasandil γ, seepärast nad kas lõikuvad või on paralleelsed. Kui $\alpha = \beta$, siis $a = b$, mistõttu $a \parallel b$. Kui aga $\alpha \neq \beta$, siis $\alpha \cap \beta = \varnothing$, seepärast ka $a \cap \beta = \varnothing$, seega jälle $a \parallel b$. ∎

Teoreem 2. **Kui sirge lõikab üht paralleelsetest tasanditest, siis lõikab ta ka teist.**

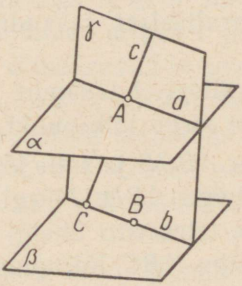
Tõestus. Olgu $\alpha \parallel \beta$ ja $\alpha \cap \gamma = a$ ning $\beta \cap \gamma = b$ (joon. 13). tõene. Kui $\alpha \cap \beta = \varnothing$ (joon. 14), siis $A \notin \beta$, mistõttu $c \not\subset \beta$. Olgu B tasandi β mingi punkt. Kui $B \in c$, siis väide on jälle tõene: $c \cap \beta = \{B\}$. Kui aga $B \notin c$, siis sirge c ja punkt B määravad teatava tasandi γ. Tasandid α ja γ lõikuvad, sest $A \in \alpha$ ja $A \in \gamma$, kuid $B \in \gamma$ ja $B \notin \alpha$. Ka tasandid β ja γ lõikuvad, sest $B \in \beta$ ja $B \in \gamma$, kuid $A \in \gamma$ ja $A \in \beta$. Olgu $\alpha \cap \gamma = a$ ja $\beta \cap \gamma = b$, siis $a \parallel b$ (teoreem 1). Sirge c on komplanaarne sirgetega a ja b ning lõikab sirget a. Järelikult lõikab ta ka sirget b (teoreem 2.3.1). Olgu $b \cap c = \{C\}$. Et $c \not\subset \beta$, siis $c \not\subset \beta = \{C\}$, s. o. sirge c lõikab tasandit β. ∎

Teoreem 3. **Kui tasand lõikab üht kahest paralleelsest tasandist, siis lõikab ta ka teist.**

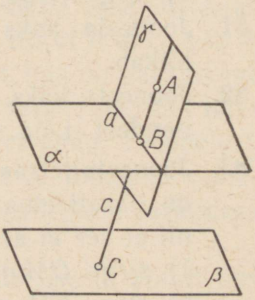
Tõestus. Olgu $\alpha \parallel \beta$ ja $\alpha \cap \gamma = a$, siis $\gamma \neq \beta$. Kui $\alpha = \beta$, siis väide on tõene. Kui aga $\alpha \cap \beta = \varnothing$ (joon. 15), siis vaatleme tasandil γ sirget c, mis lõikab sirget a. Selline sirge on olemas, sest tasandil γ leidub punkt A, mis ei kuulu sirgele a (aksioom 1). Kui $B \in a$, siis võib võtta $c = AB$. Sirge c lõikab tasandit α, sest $c \neq a$. Järelikult lõikab ta ka tasandit β (teoreem 2) mingis punktis C.



Joon. 13.



Joon. 14.



Joon. 15.

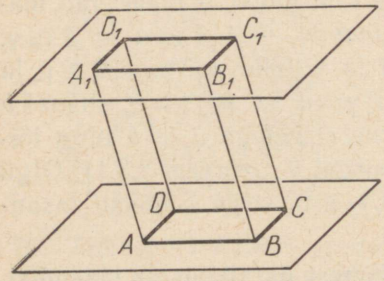
Et $C \in \beta$ ja $C \in \gamma$ ning $\beta \neq \gamma$, siis tasand γ lõikab tasandit β (aksioom 7, def. 2.6.1). ∎

75. Sõnasta teoreemi 1 pöörd-, vastand- ja pöördvastandteoreem. Missugune neist teoreemidest on tõene?

76. Miks pole mõtet vaadelda teoreemide 2 ja 3 pöörd- ja vastandteoreeme?

77. Tõesta, et leidub
1) sirge, mis lõikab kaht antud paralleelset tasandit;
2) tasand, mis lõikab kaht antud paralleelset tasandit.

78. Tasandid α ja β on erinevad ja paralleelsed, samuti sirged a ja b. Sirge a lõikab tasandit α. Tõesta, et nende sirgete ja tasandite lõikepunktid on rööpküliku tipud.



Joon. 16.

79. Kui $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$ on erinevatel tasanditel paiknevad rööpkülikud (vt. ül. 46), mille küljed on vastavalt paralleelsed (joon. 16), siis öeldakse, et nende tipud määravad rööptahuka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (lühidalt: $A \ldots D_1$) ja on selle rööptahuka tippudeks. Tõesta, et leidub vähemalt üks rööptahukas.

80. $A \ldots D_1$ on rööptahukas. Tõesta, et
1) sirged AB_1 ja DC_1 on paralleelsed;
2) sirge B_1C_1 lõikab tasandit ACD_1;
3) tasandid BDA_1 ja CB_1D_1 on paralleelsed;
4) punktid A, B, C ja D_1 ei ole komplanaarsed;
5) sirged A_1C_1 ja DB_1 ei ole komplanaarsed.

81. Joonesta kaks paralleelset tasandit ja tasand, mis neid lõikab.

82. Joonesta kaks paralleelset tasandit ja sirge, mis lõikab üht nendest. Leia selle sirge lõikepunkt teise tasandiga.

83. Joonesta tetraeeder $ABCD$ ja selle lõige mingi tasandiga, mis on paralleelne tahuga ABD. Märgi lõikel mingi punkt M, nii et see ei asetse tetraeedri ühelgi tahul. Leia
1) sirge DM ja tahu ABC lõikepunkt;
2) sirge CM ja tahu ABD lõikepunkt;
3) tasandi BCM lõige tetraeedriga.

Tasandil asetseva sirge kirjeldamisel saame kasutada mõistet *siht*. Aksioomi 6 tõttu tasandil läbib antud punkti üks ja ainult üks sirge, mis kuulub antud paralleelsete sirgete kimpu, s. t. millel on antud siht. Sirge tasandil on niisiis määratud, kui on antud üks punkt ja üks siht.

Moodustame nüüd mõiste, mille abil saab samal viisil kirjeldada tasandit.

Teoreem 1. **Tasandite paralleelsus on ekvivalentsusrelatsioon tasandite hulgas.**

Tõestus. Tasandite paralleelsuse refleksiivsus ja sümmeetria järelduvad tasandite paralleelsuse definitsioonist 2.6.1. Kui $\alpha \parallel \beta$ ja $\beta \parallel \gamma$, siis α ja γ ei saa lõikuda, sest vastupidisel juhul peaksid lõikuma ka γ ja β (teoreem 2.7.3). Seega $\alpha \parallel \gamma$ (järeldus 2.6.1). Niisiis, tasandite paralleelsus on ka transitiivne. ∎

Def. 1. **Tasandite ekvivalentsusklasse, mille määrab paralleelsusrelatsioon, nimetatakse paralleelsete tasandite kimpudeks. Tasandi kuuluvust paralleelsete tasandite kimpu nimetatakse tasandi rihiks.**

Paralleelsete tasandite kimp on niisiis kõigi omavahel paralleelsete tasandite hulk. Tasandi riht iseloomustab samal viisil tasandit nagu sirge siht iseloomustab sirget. Paralleelsetel tasanditel ei ole ühiseid punkte, kuid nad kuuluvad ühte kimpu, s. t. neil on ühine riht. Seepärast võib ütelda, et paralleelsed tasandid on samarihilised.

Teoreem 2. **Iga punkti läbib üks ja ainult üks tasand, mis on paralleelne antud tasandiga.**

Tõestus. Olgu antud tasand α. Iga punkti $A \in \alpha$ puhul on väide vahetult selge. Kui aga $A \notin \alpha$, siis võtame tasandil kaks lõikuvat sirget a ja b. Leiduvad sirged c ja d, nii et $A \in c$, $A \in d$, $c \parallel a$ ja $d \parallel b$. Sirged c ja d määravad tasandi β, mis on paralleelne tasandiga α (järeldused 2.4.2 ja 2.6.2.). Teisi tasandeid, mis läbivad punkti A ja on paralleelsed tasandiga α, ei leidu. Tõepoolest, iga kaks erinevat tasandit, mis läbivad punkti A, lõikuvad (aksioom 7). Järelikult ei saa nad mõlemad olla paralleelsed tasandiga α (teoreem 2.7.3). ∎

Teoreemist 2 järeldub, et antud punkti läbib üks ja ainult üks tasand, mis kuulub antud paralleelsete tasandite kimpu, s. t. millel on antud riht. Sõnastame selle tulemuse.

Järeldus 1. **Iga punkti läbib üks ja ainult üks tasand antud rihis.**

Omistame nimetused ka lõikuvate tasandite hulkadele.

Def. 2. **Antud sirget läbivate tasandite hulka nimetatakse lõikuvate tasandite kimbuks ja nende ühist sirget selle kimbu teljeks.**

Antud punkti läbivate tasandite hulka nimetatakse lõikuvate tasandite sidumiks ja nende ühist punkti selle sidumi keskpunktiks.

84. Kirjelda rihi määramist punktide ja sirgete abil.
85. Tõesta lause: kaks tasandit lõikuvad siis ja ainult siis, kui neil on erinevad rihid.
86. Kas on mõtet rääkida
    1) paralleelsetest rihtidest?
    2) lõikuvatest rihtidest?
87. Kahel tasandil on ühine riht. Kas neil tasanditel võib olla ühiseid punkte?
88. Kuidas saab tasandisidumist eraldada tasandikimbu?
89. Tasand α lõikab tasandikimbu telge. Kas tasand α kuulub sellesse kimpu? Kirjelda tasandi α ja vaadeldava tasandikimbu ühisosa.
90. Sirgesidumil ja tasandisidumil on ühine keskpunkt. Tõesta, et need sidumid punktihulkadena ühtivad.
91. Sirgekimbu keskpunkt asetseb tasandikimbu teljel. Kas sellest järeldub, et sirgekimp sisaldab tasandikimbu telge? Kas on õige ütelda, et see sirgekimp sisaldub vaadeldavas tasandikimbus?

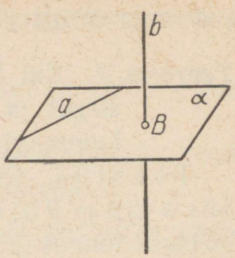
2.9. KAHE SIRGE VASTASTIKUSED ASENDID.

Tasandil iga kaks sirget kas lõikuvad või on paralleelsed. Ruumis iga kaks sirget, mis lõikuvad või on paralleelsed, on komplanaarsed. Osutub, et ruumis on võimalik veel kolmas kahe sirge vastastikune asend — juhtum, mil sirged on mittekomplanaarsed. See selgub järgnevast teoreemist.

Teoreem 1. **Kui sirge *a* on tasandil α, sirge *b* aga lõikab tasandit α punktis *B*, mis ei kuulu sirgele *a*, siis sirged *a* ja *b* on mittekomplanaarsed** (joon. 17).

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub tasand β, mis

sisaldab sirgeid a ja b. Siis tasand β sisaldab sirget a ja punkti B. Kuid ka tasand α sisaldab sirget a ja punkti B. Et $B \notin a$, siis $\beta = \alpha$ (järeldus 2.4.1). Aga see on võimatu, sest eelduse järgi $b \not\subset \alpha$, kuid $b \subset \beta$. saadud vastuolu näitab, et kirjeldatud tasandit β ei leidu. ■



Joon. 17.

Def. 1. **Kaht sirget, mis ei ole komplanaarsed, nimetatakse kiivsirgeteks ja nende vastastikust asendit kiivseisuks.**

Järeldus 1. *Iga kaks sirget ruumis kas lõikuvad, on paralleelsed või on kiivsed.*

Kasutusele võetud seitse aksioomi ei võimalda otsustada, missugune on iga kahe sirge vastastikune asend. Näiteks järeldub nendest aksioomidest küll, et rööpküliku $ABCD$ vastastippe läbivad sirged AC ja BD on komplanaarsed, s. o. mittekiivsed, seega kas lõikuvad või paralleelsed, kuid aksioomidest ei tulene, kumb kahest viimasest võimalusest on tõene. Seda, et need sirged lõikuvad, saame seni otsustada vaid joonise põhjal. Et deduktiivses teoorias joonis ei ole tõestusvahend, siis tähendab selline otsustus uue aksioomi lisamist.

Aksioom 8. **Sirged, mis läbivad rööpküliku vastastippe, lõikuvad.**

92. Kas on tõene lause: kui ruumi kahel sirgel pole ühtki ühist punkti, siis need sirged on paralleelsed?

93. Missugused tetraeedri $ABCD$ tippudega määratud sirged on kiivsed? Miks?

94. Tõesta, et leidub sirge, mis on kiivne
1) antud sirge suhtes;
2) kahe antud paralleelse sirge suhtes;
3) kahe antud kiivsirge suhtes.

95. Kas kiivseis on transitiivne relatsioon kõigi sirgete hulgas?

96. $A \ldots D_1$ on rööptahukas. Tõesta, et
1) BA_1 ja B_1D_1 on kiivsirged;
2) BA_1 ja DC_1 on kiivsirged;
3) BA_1 ja DB_1 on kiivsirged;
4) punktid B, D, A_1 ja C_1 on mittekomplanaarsed.

97. Tõesta: kui a ja b on kiivsirged, siis leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib sirget a ja on paralleelne sirgega b.

98. Tõesta, et läbi kahe kiivsirge saab asetada paralleelsed tasandid. Mitu sellist tasandipaari on olemas?

Teoreem 1. **Kui kaks tasandit läbivad teine teist paralleelset sirget ja lõikuvad, siis nende lõikesirge on paralleelne kummagi antud sirgega.**

Tõestus. Olgu $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ ja $\alpha \cap \beta = c$ (joon. 18). Siis $a \not\subset \beta$ ja $b \not\subset \alpha$, mistõttu $a \parallel \beta$ ja $b \parallel \alpha$ (sirge ja tasandi paralleelsuse tunnus 2.5.2). Seega $a \cap \beta = \varnothing$ ja $b \cap \alpha = \varnothing$. Et aga $c \subset \alpha$ ja $c \subset \beta$, siis ka $a \cap c = \varnothing$ ja $b \cap c = \varnothing$. Sirge c on komplanaarne nii sirgega a kui ka sirgega b, järelikult $a \parallel c$ ja $b \parallel c$. ∎

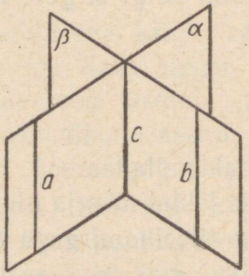
Teoreem 2. **Sirgete paralleelsus on ekvivalentsusrelatsioon ruumi sirgete hulgas.**

Tõestus. Relatsiooni refleksiivsus ja sümmeetria järelduvad vahetult definitsioonist 2.3.1. Näitame, et sirgete paralleelsus on transitiivne ka ruumis.

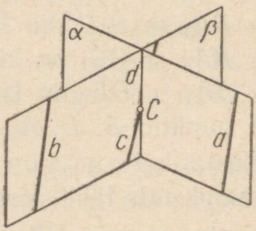
Olgu a, b ja c mittekomplanaarsed sirged ning $a \parallel b$ ja $b \parallel c$. Sirgete mittekomplanaarsuse tõttu b ja c ei ühti, seega nad määravad teatava tasandi β, kusjuures $a \not\subset \beta$ (joon. 19). Et $a \parallel b$ ja $b \subset \beta$, siis $a \parallel \beta$ (teoreem 2.5.2), seega $a \cap \beta = \varnothing$. Et aga $c \in \beta$, siis ka $a \cap c = \varnothing$. Sirged a ja c on niisiis kas paralleelsed või kiivsed.

Oletame vastuväiteliselt, et a ja c on kiivsirged. Siis tasand α, mis läbib sirget a ja mingit punkti C sirgel c, ei sisalda sirget c. Tasandid α ja β lõikuvad, sest $C \in \alpha$ ja $C \in \beta$, kuid $a \subset \alpha$ ja $a \not\subset \beta$. Olgu $\alpha \cap \beta = d$. Et $a \parallel b$, siis teoreemi 1 põhjal $b \parallel d$. Kuid ka $c \parallel b$ ja $C \in c$. On tekkinud vastuolu aksioomiga 6: tasandil β läbib punkti C kaks erinevat sirget, mis on paralleelsed sirgega b. Järelikult on tehtud oletus väär; seega $a \parallel c$. ∎

Def. 1. **Ekvivalentsusklasse, milledeks paralleelsusseos jaotab ruumi sirgete hulga, nimetatakse paralleelsete sirgete**



Joon. 18.



Joon. 19.

sidumiks. Sirge kuuluvust paralleelsete sirgete sidumisse nimetatakse sirge sihiks ruumis.

Paralleelsete sirgete sidum on niisiis ruumi kõigi omavahel paralleelsete sirgete hulk.

Nüüd võib ütelda, et sirgete paralleelsus tähendab nende samasihilisust mitte ainult tasandil, vaid ka ruumis.

Järeldus 1. *Iga punkti läbib üks ja ainult üks sirge antud sihis* (järeldus 2.4.4).

99. Missugused rööptahuka $A \ldots D_1$ tippudega määratud sirged on samasihilised?

100. Missugune järgmistest mõistetest on (kujutluse järgi) üheselt määratud?

1) Vertikaalne siht. 2) Vertikaalne riht.
3) Horisontaalne siht. 4) Horisontaalne riht.

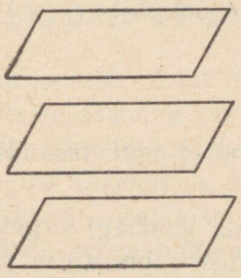
101. Sõnasta tarvilik ja piisav tingimus selleks, et tasand eraldaks paralleelsete sirgete sidumist paralleelsete sirgete kimbu.

2.11. KOLME TASANDI VASTASTIKUSED ASENDID.

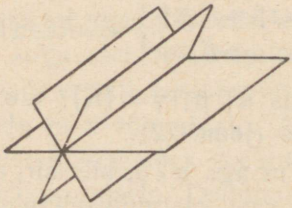
Kolme erineva tasandi võimalike vastastikuste asendite selgitamisel kasutame nende lõikesirgete arvu. Et kolmel tasandil ei saa olla rohkem kui kolm lõikesirget, siis võivad esineda järgmised juhud.

1) *Tasanditel pole ühtki lõikesirget.* Sel juhul on tasandid paralleelsed, s. o. kuuluvad ühte paralleelsete tasandite kimpu (joon. 20). Seega on neil tasanditel ühine riht.

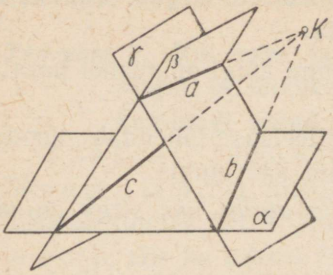
2) *Tasanditel on üks lõikesirge.* Sel juhul peavad vähemalt



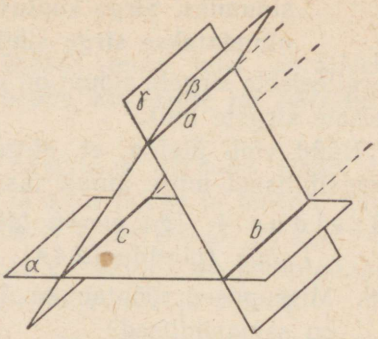
Joon. 20.



Joon. 21.



Joon. 22.



Joon. 23.

kaks tasandit lõikuma. Kolmas tasand ei saa olla mõlema lõikuva tasandiga paralleelne (tekiks vastuolu teoreemiga 2.7.3), seega peab ta lõikama vähemalt üht neist. Et aga lõikesirgeid on ainult üks, siis peab ka kolmas tasand läbima kahe esimese lõikesirget. Niisiis kuuluvad tasandid ühte lõikuvate tasandite kimpu (joon. 21).

3) *Tasanditel on kaks lõikesirget.* Sel juhul on kaks tasandit paralleelsed samuti nagu lõikesirgedki (teoreem 2.7.1, joon. 13).

4) *Tasanditel on kolm lõikesirget.* Seda juhtu kirjeldab järgnev teoreem.

Teoreem 1. **Kui kolmel tasandil on kolm lõikesirget, siis need sirged kas lõikuvad ühes punktis või on paralleelsed.**

Tõestus. Olgu $\alpha \cap \beta = c$, $\beta \cap \gamma = a$ ja $\gamma \cap \alpha = b$. Siis a ja b on tasandil γ, b ja c tasandil α ning c ja a tasandil β. Seega ei ole sirgete hulgas kiivsirgeid, mistõttu need sirged paariviisi kas lõikuvad või on paralleelsed.

Kui üks paar sirgeid, näiteks a ja b, lõikuvad, siis peab nende lõikepunkti K läbima ka kolmas sirge. Tõepoolest

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \beta \Rightarrow K \in \beta \\ b \subset \alpha \Rightarrow K \in \alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow K \in \alpha \cap \beta \Leftrightarrow K \in c.$$

Niisiis $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{K\}$, s. o. tasandid kuuluvad ühte tasandisidumisse (joon. 22).

Kui aga $a \parallel b$, siis sirge c ei saa lõigata kumbagi sirgetest a ja b, sest vastupidisel juhul peaksid tõestuse eelmise osa põhjal ka a ja b lõikuma. Niisiis $c \parallel a$ ja $c \parallel b$ (joon. 23). ■

Tõestuskäigust ei ilmne, et kõik kirjeldatud viis juhtu tõepoolest järelduvad aluseks võetud aksioomidest. Iga juhu võimalikkus vajab eraldi tõestamist (juhtu 3 on vaadeldud ülesandes 77.2).

102. Mis on ühist kahel
1) lõikuval sirgel? 2) paralleelsel sirgel?
3) lõikuval tasandil? 4) paralleelsel tasandil?

103. Tõesta, et igal sirgel on vähemalt kolm punkti.
N ä p u n ä i d e. Kasuta aksioomi 8.

104. Tõesta, et leidub kolm tasandit,
1) millel on kolm paralleelset lõikesirget;
2) mis kuuluvad ühte sidumisse;
3) mis kuuluvad ühte kimpu (vaadelda kaht juhtu).

105. Missugused rööptahuka $A \ldots D_1$ tippudega määratud
1) sirged kuuluvad sidumisse keskpunktiga C_1?
2) tasandid kuuluvad kimpu teljega DD_1?
3) tasandid kuuluvad sidumisse keskpunktiga B?

106. Tõesta, et
1) igal sirgel on lõpmata palju punkte;
2) igas sirgekimbus on lõpmata palju sirgeid;
3) igas tasandikimbus on lõpmata palju tasandeid;
4) igas sirgesidumis on lõpmata palju sirgeid;
5) igas tasandisidumis on lõpmata palju tasandeid.

107. Missugused võivad olla
1) kolme erineva sirge vastastikused asendid tasandil?
2) kolme erineva sirge vastastikused asendid ruumis?
3) nelja erineva sirge vastastikused asendid tasandil?
4) nelja erineva sirge vastastikused asendid ruumis?
5) nelja erineva tasandi vastastikused asendid?

3. VEKTORID JA AFIINSED KOORDINAADID.

Aksioomidest, mis me võtsime aluseks sirgete ja tasandite vastastikuste asendite uurimisel, ei piisa kogu stereomeetria deduktiivseks ülesehitamiseks. Kuid me ei seagi endale eesmärgiks luua niisugust aksioomide süsteemi, mis seda teha võimaldaks. Alates käesolevast peatükist kasutame eelmistes klassides omandatud teadmisi, seega toetume osaliselt jälle kujutlusele. Definitsioonidest ja teoreemidest tõstame edaspidi esile vaid tähtsamaid.

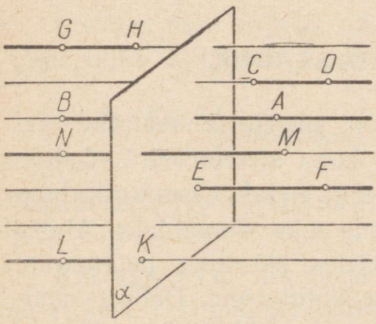
Sirge iga punkt lahutab sirge ülejäänud punktide hulga kaheks mittetühjaks osahulgaks, mille ühisosa on tühi. Osahulki, milledeks punkt A lahutab sirge s ülejäänud punktide hulga, nimetatakse sirgel s punktiga A piirnevateks **poolsirgeteks.** Kui A on poolsirge piirpunkt ja B on mingi punkt poolsirgel, siis poolsirge tähis on AB.

Tasandi iga sirge lahutab tasandi ülejäänud punktide hulga kaheks mittetühjaks osahulgaks, mille ühisosa on tühi. Osahulki, milledeks sirge s lahutab tasandi α ülejäänud punktide hulga, nimetatakse tasandil α sirgega s äärnevateks **pooltasanditeks.** Kui $s=AB$ on pooltasandi äärsirge ja C on mingi punkt pooltasandil, siis pooltasandi tähis on sC ehk ABC.

Iga tasand lahutab ruumi ülejäänud punktide hulga kaheks mittetühjaks osahulgaks, mille ühisosa on tühi. Osahulki, milledeks tasand α lahutab ruumi ülejäänud punktide hulga, nimetatakse tasandiga α äärnevateks **poolruumideks**. Kui $\alpha=ABC$ on poolruumi äärtasand ja D on mingi punkt poolruumis, siis poolruumi tähis on αD ehk $ABCD$.

Kaht poolsirget nimetatakse paralleelseteks, kui nad kuuluvad paralleelsetele sirgetele. Poolsirgete paralleelsus on ekvivalentsusrelatsioon (ülesanne 108), seepärast kõigi poolsirgete hulk jaguneb paralleelsete poolsirgete klassideks.

Vaatleme mingit paralleelsete sirgete sidumit. Sidumi sirgete kõigi poolsirgete hulk P ongi üks paralleelsete poolsirgete klass. Jaotame klassi P kaheks osahulgaks P' ja P''. Olgu α mingi tasand, mis lõikab sidumi sirgeid, ja αA ning αB sellega äärnevad poolruumid (joon. 24). Loeme poolsirge $XY \in P$ hulga P' elemendiks, kui kas $XY \subset \alpha A$ või $X \in \alpha B$ ja XY lõikab tasandit α. Kõik ülejäänud poolsirged klassist P loeme hulga P'' elementideks.



Joon. 24.

Näiteks poolsirged CD, EF ja BA joonisel 24 kuuluvad hulka P', poolsirged HG, KL ja MN aga hulka P''.

Hulka P'' saab kirjeldada samasuguste tingimustega nagu hulka P'. Hulga P jaotus hulkadeks P' ja

P'' ei sõltu tasandi α valikust (oluline on vaid tingimus, et α lõikab sirgeid).

Kaht poolsirget, mis mõlemad kuuluvad kas hulka P' või hulka P'', nimetatakse **samasuunalisteks.** Olgu S samasuunaliste poolsirgete paaride hulk. S on hulga $P \times P$ osahulk, seega relatsioon hulgas P. Relatsioon S on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne; järelikult on ta ekvivalentsusrelatsioon. Samasuunaliste poolsirgete hulgad P' ja P'' on sellele relatsioonile vastavad ekvivalentsusklassid.

Niisiis, iga paralleelsete ehk samasihiliste poolsirgete klass jaguneb kaheks samasuunaliste poolsirgete ekvivalentsusklassiks. Poolsirge kuuluvust ühte nendest ekvivalentsusklassidest nimetatakse **poolsirge suunaks.** Poolsirgeid erinevatest ekvivalentsusklassidest nimetatakse **vastassuunalisteks.** Võib ütelda ka, et igas sihis on võimalik valida kahe vastupidise suuna vahel. Suuna määramiseks peab siht olema ette antud.

Poolsirge AB ja tema piirpunkti A ühendit nimetatakse **kiireks,** mille alguspunkt on A. Kiirel on sama suund ja tähis mis poolsirgel.

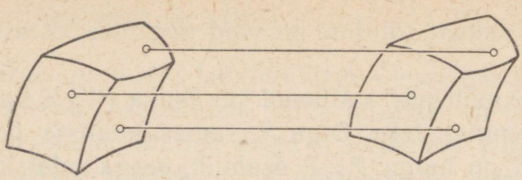
Kiirte AB ja BA ühisosa on **sirglõik** ehk **lõik** AB. Lõigule AB saab omistada kas kiire AB või kiire BA suuna. Lõigu suuna määrab tema otspunktide järjestus. Suunaga varustatud lõiku nimetatakse **orienteeritud lõiguks.** Selle märkimiseks, et lõik AB on orienteeritud ja tema alguspunkt on A, kasutame tähist $\overrightarrow{AB}$.

Lõike AB ja CD nimetatakse paralleelseteks (tähis: $AB \| CD$), kui nad kuuluvad paralleelsetele sirgetele. Paralleelsed orienteeritud lõigud $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ võivad olla samasuunalised (tähis: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$) või vastassuunalised (tähis: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$).

Olgu L kõigi orienteeritud lõikude hulk. Vaatleme hulga $L \times L$ osahulki P, S ja V, mille määravad järgmised tingimused:

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \in P \Leftrightarrow AB \| CD \quad \text{(samasihilisus ehk paralleelsus)},$$
$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \quad \text{(samasuunalisus)}$$
$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \in V \Leftrightarrow AB = CD \quad \text{(võrdsus)}.$$

P, S ja V on erinevad ekvivalentsusrelatsioonid hulgas L. Kaks lõiku võivad samaaegselt olla paralleelsed, samasuunalised ja võrdsed, seega $P \cap S \cap V \neq \emptyset$. Olgu $P \cap S \cap V = Q$. Et $Q \subset L \times L$, siis



Joon. 25.

Q on relatsioon hulgas L. Ka relatsioon Q on ekvivalentsusrelatsioon, seepärast jaotab ta hulga L ekvivalentsusklassideks.

Def. **Paralleelsete, samasuunaliste ja võrdsete orienteeritud lõikude ekvivalentsusklasse nimetatakse vektoriteks.**

Vektorite jaoks kasutame tähiseid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Vektorile $\vec{v}$ kuuluvate orienteeritud lõikude ühist sihti, suunda ja pikkust nimetatakse vektori $\vec{v}$ sihiks, suunaks ja pikkuseks. Vektori $\vec{v}$ pikkuse jaoks kasutame tähist $|\vec{v}|$.

Kui vektoritel $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on ühine siht, suund ja pikkus, siis nad ühtivad, s. o. koosnevad samadest orienteeritud lõikudest. Vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ühtimist märgime võrdusega $\vec{u}=\vec{v}$.

Mingi keha K kulgeval liikumisel asendist K_1 asendisse K_2 keha punktide trajektoorideks on sirglõigud, millele see liikumine omistab teatava suuna (joon. 25). Seejuures on kõik trajektoorid paralleelsed, samasuunalised ja võrdsed. Keha sellist liikumist nimetatakse sageli ka **keha lükkeks** teatava vektori võrra. Tuleb aga silmas pidada, et keha lükkega määratud lõikude hulk on ainult osa vektorile kuuluvatest lõikudest. Vektori korral on ruumi iga punkt ühe vektorile kuuluva orienteeritud lõigu alguspunktiks.

Olgu W ruumi kõigi punktide hulk ja T mingile vektorile $\vec{v}$ kuuluvate sirglõikude otspunktipaaride hulk. Siis $T \subset W \times W$, seega T on relatsioon hulgas W.

Relatsiooni, mille elemendid koosnevad vektorile $\vec{v}$ kuuluvate lõikude otspunktidest, nimetatakse vektorile $\vec{v}$ vastavaks **ruumi lükkeks.**

Kui on teada mingi vektorile kuuluv orienteeritud sirglõik, siis on teada vektori siht, suund ja pikkus. Seepärast vaadeldakse kogu vektori asemel sageli ainult üht talle kuuluvat orienteeritud

lõiku ja kujutatakse vektorit joonisel sellise lõiguna. Vektorit esindava orienteeritud lõigu alguspunkti saab valida täiesti vabalt. Kui alguspunktiks on valitud näiteks punkt A, siis öeldakse, et vektor on rakendatud punkti A.

Asjaolu, et vektorit $\vec{v}$ esindab lõik $\overrightarrow{AB}$, märgitakse võrdusega $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$. Seejuures öeldakse, et vektor $\vec{v}$ viib punkti A punkti B. Sümbol $\overrightarrow{AB}$ eraldi võetult tähendab vektorit, mis viib punkti A punkti B.

Samasihilisi vektoreid nimetatakse **kollineaarseteks.** Sõna *kollineaarsus* osutab siin sellele, et ühte punkti rakendatult viivad samasihilised vektorid selle punkti ühe ja sellesama sirge punktideks. Kollineaarsuse ja sama- ning vastassuunalisuse märkimiseks kasutame juba tuntud sümboleid: $\vec{u}\parallel\vec{v}$, $\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}$ ja $\vec{u}\uparrow\downarrow\vec{v}$.

108. Tõesta, et

1) poolsirgete paralleelsus on ekvivalentsusrelatsioon;
2) orienteeritud lõikude samasuunalisus on ekvivalentsusrelatsioon;
3) lõikude võrdsus on ekvivalentsusrelatsioon.

109. Kas on tõene, et

1) samasuunaliste poolsirgete ekvivalentsusklass kuulub ühte poolruumi?
2) iga lõplik samasuunaliste poolsirgete hulk kuulub ühte poolruumi?

Põhjenda vastust.

110. Kirjelda samasuunaliste poolsirgete ekvivalentsusklassi tasandil (planimeetrias).

111. Kuidas defineeritakse vektor füüsikas? Mille poolest geomeetrias antud definitsioon erineb?

112. Mida tähendab võrdus $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

113. Tõesta lause: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

114. Mitu vektorit on määratud kujundi tippudega, kui kujund on

1) sirglõik?
2) kolmnurk?
3) rööpkülik?
4) viisnurk?
5) korrapärane kuusnurk?
6) tetraeeder?
7) rööptahukas?

TARTU ÜLIKOOLI RAAMATUKOGU
TÜ Raamatukogu N

115. $ABCDEF$ on korrapärane kuusnurk. Leia punkt, millesse

1) vektor $\vec{a}=\overrightarrow{FE}$ viib punkti B;

2) vektor $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ viib punkti F.

116. $A \ldots D_1$ on rööptahukas. Leia punkt, millesse

1) vektor $\vec{a}=\overrightarrow{D_1B_1}$ viib punkti D;

2) vektor $\vec{b}=\overrightarrow{C_1B_1}$ viib punkti D;

3) vektor $\vec{c}=\overrightarrow{BC_1}$ viib punkti A.

117. Kas nelinurk $ABCD$ on rööpkülik, kui

1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$? 2) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$?

3) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$? 4) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$?

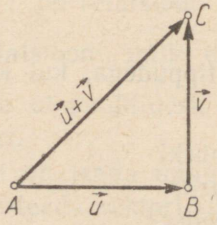
3.2. VEKTORITE SUMMA JA VAHE.

Planimeetrias tundma õpitud reegleid vektorite liitmiseks ja lahutamiseks kasutatakse ka ruumigeomeetrias.

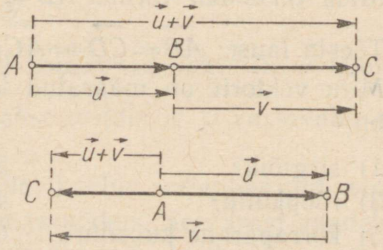
Vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ liitmiseks rakendame vektori $\vec{u}$ vabalt valitud punkti A. Olgu $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$. Rakendame vektori $\vec{v}$ punkti B. Olgu $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. Vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ summaks on vektor $\overrightarrow{AC}$ (joon. 26):

$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}.$$

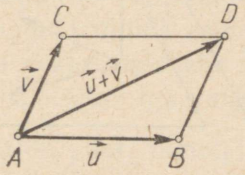
Kolmnurgareegel. **Kahe vektori liitmiseks rakendame ühe vektori vabalt valitud punkti ja teise vektori esimese vektori**



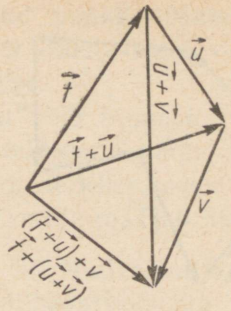
Joon. 26.



Joon. 27.



Joon. 28.



Joon. 29.

lõpp-punkti; summa on vektor, mis viib esimese vektori alguspunkti teise vektori lõpp-punkti.

Kolmnurgareeglit saab rakendada iga kahe vektori, sealhulgas ka kollineaarsete vektorite liitmisel (joon. 27). Kahe mittekollineaarse vektori summa saab leida veel teisiti.

Rööpkülikureegel. **Kahe mittekollineaarse vektori liitmiseks rakendame nad vabalt valitud punkti; summa on vektor, mis viib ühise alguspunkti liidetavatele vektoritele ehitatud rööpküliku vastastippu** (joon. 28).

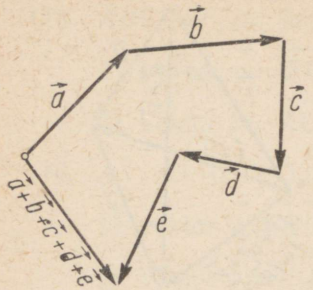
Kolme vektori liitmiseks liidame esmalt kaks vektorit ja seejärel summaga kolmanda vektori. Vektorite $\vec{t}$, $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ summa on niisiis vektor $(\vec{t}+\vec{u})+\vec{v}$, kus sulud eraldavad esmajärjekorras liidetavaid vektoreid. Sel viisil saab järjestikku liita mistahes lõpliku arvu vektoreid.

Vektorite summal on järgmised a l g e b r a l i s e d o m a d u s e d.

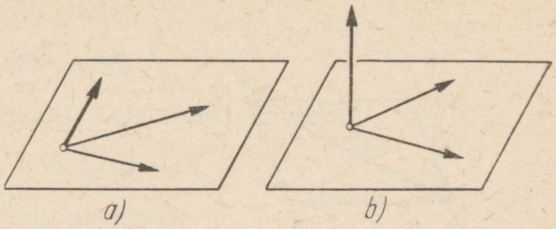
1. **Vektorite summa on kommutatiivne**, s. t. sõltumatu liidetavate järjekorrast. Näiteks kahe vektori $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ korral (joon. 28)

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}.$$

2. **Vektorite summa on assotsiatiivne**, s. t. sõltumatu sulgude paigutusest. Näiteks kolme vektori korral (joon. 29)



Joon. 30.



Joon. 31.

$$(\vec{t}+\vec{u})+\vec{v}=\vec{t}+(\vec{u}+\vec{v}).$$

Kui liidetavaid vektoreid on rohkem kui kaks, siis on kolmnurgareegli korduva rakendamise asemel lihtsam kasutada üldisemat nn. hulknurgareeglit.

Hulknurgareegel. **Vektorite liitmiseks rakendame ühe vektori vabalt valitud punkti ja iga järgneva vektori eelneva vektori lõpp-punkti; summa on vektor, mis viib esimese vektori alguspunkti viimase vektori lõpp-punkti** (joon. 30).

Saadud vektorhulknurk ruumigeomeetrias ei ole üldiselt tasapinnaline.

Vektoreid, mis ühte punkti rakendatult viivad selle punkti ühe ja sellesama tasandi punktideks, nimetatakse **komplanaarseteks** vektoriteks. Joonisel 31, *a* on kolm komplanaarset vektorit, joonisel 31, *b* aga kolm mittekomplanaarset vektorit.

Nagu kahe mittekollineaarse vektori liitmisel võib kolmnurgareegli asendada rööpkülikureegliga, nii saab stereomeetrias kolme mittekomplanaarse vektori liitmisel hulknurgareegli asemel kasutada rööptahukareeglit. Tõepoolest, hulknurgareegli järgi (joon. 32)

$$\vec{t}+\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1},$$

kuid $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1}$, mistõttu

$$\vec{t}+\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}.$$

Rööptahukareegel. **Kolme mittekomplanaarse vektori liitmiseks**

rakendame nad ühte vabalt valitud punkti; summa on vektor, mis viib ühise alguspunkti liidetavatele vektoritele ehitatud rööptahuka vastastippu.

Vektorite liitmisel ehitatud hulknurgas võib viimase vektori lõpp-punkt ühtida esimese vektori alguspunktiga. Summa on sel juhul vektor, mis viib vabalt valitud punkti sellekssamaks punktiks, s. t. jätab iga punkti paigale. Vektorit, mille määrab ühtivate punktide paar, nimetatakse **nullvektoriks** $\vec{0}$. Nullvektoril ei ole kindlat sihti ega suunda; ta on loetav kollineaarseks iga vektoriga. Nullvektori pikkus on 0.

Vektorit $\overrightarrow{BA}$ nimetatakse vektori $\overrightarrow{AB}$ **vastandvektoriks.** Vektori $\vec{v}$ vastandvektori tähis on $-\vec{v}$. Kui $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, siis $-\vec{v}=\overrightarrow{BA}$ ja

$$-(-\vec{v})=-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}=\vec{v}.$$

Seega on vektor ise vastandvektoriks oma vastandvektorile. Vastandvektorite summa on nullvektor.

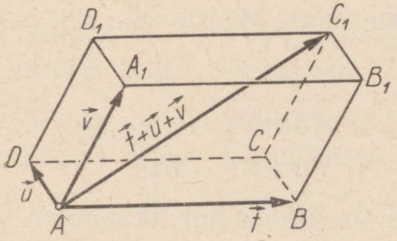
Vektori lahutamiseks liidetakse vastandvektor. Kahe vektori vahe defineeritakse niisiis võrdusega

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v}).$$

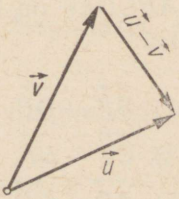
Vektorite vahe saab leida järgmise reegli abil:

vektorist teise vektori lahutamiseks rakendame nad ühte vabalt valitud punkti; vahe on vektor, mis viib lahutatava vektori lõpp-punkti esimese vektori lõpp-punkti (joon. 33).

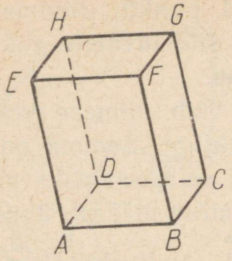
118. Missuguse kahe vektori liitmisel ei saa kasutada rööpkülikureeglit? Missuguse kolme vektori liitmisel ei saa kasutada rööptahukareeglit? Miks?



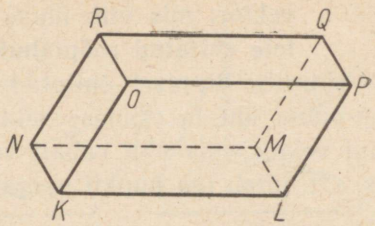
Joon. 32.



Joon. 33.



Joon. 34.



Joon. 35.

119. Leia vektor

1) $\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{KT}+\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{MK}$;

2) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}$, kui $\vec{a}=\overrightarrow{CF}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{FA}$, $\vec{e}=\overrightarrow{BE}$ ja $\vec{f}=\overrightarrow{AD}$.

120. $A \ldots H$ on rööptahukas (joon. 34). Määra selle abil vektorid

1) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}$;
2) $\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{CB}$;
3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}$;
4) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{FH}$;
5) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CG}$;
6) $\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{BA}$;
7) $\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{DG}$;
8) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$.

121. Avalda vektor $\overrightarrow{AG}$ joonise 34 põhjal kuuel viisil kolme vektori summana, nii et iga kaks summat erinevad vähemalt ühe liidetava määramisel kasutatud punktide poolest. Mitu sellist summat vektori $\overrightarrow{AG}$ jaoks üldse on võimalik moodustada?

122. $ABCDEF$ on korrapärane kuusnurk. Määra selle abil vektorid

1) $\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{DE}$;
2) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CB}$;
3) $\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{BF}$;
4) $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BD}$;
5) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{FE}$;
6) $\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{EF}$.

123. Kasutades rööptahukat $K \ldots R$ (joon. 35) määra vektorid

1) $\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KO}$;
2) $\overrightarrow{LP}-\overrightarrow{NM}$;
3) $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{KM}$;
4) $\overrightarrow{QM}-\overrightarrow{RL}$;
5) $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{NO}$;
6) $\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{LM}$;
7) $\overrightarrow{KQ}-\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{MO}$;
8) $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{NO}$.

124. Tõesta, et
1) vektor ei muutu, kui talle liita nullvektor;
2) vastandvektorite summa on nullvektor;
3) vektorite summa vastandvektor on liidetavate vektorite vastandvektorite summa;
4) võrduses, mis sisaldab vektoreid, saab viia liikme teisele poole võrdusmärki, muutes ta samal ajal vastandvektoriks;
5) kui vektorite summat sisaldavate sulgude ees on miinus, siis sulgude avamisel tuleb sulgudes olevad märgid muuta vastupidisteks.

125. Tõesta, et vektorite summa ei sõltu punktist, millesse esimene vektor rakendatakse.

126. Tõesta joonise abil
1) kahe vektori summa kommutatiivsus;
2) kolme vektori summa assotsiatiivsus.

127. Tõesta, et iga kolme vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ korral

$$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{c}.$$

128. Kolmnurga ABC külgedele on konstrueeritud mingid rööpkülikud $ABKL$, $BCMN$ ja $CAPQ$ nii, et iga kahe rööpküliku ühisosa koosneb ühest punktist. Tõesta, et lõikudest KN, MQ ja PL saab konstrueerida kolmnurga, säilitades iga lõigu pikkuse.

129. Tõesta, et $|\vec{u}+\vec{v}|\leqslant|\vec{u}|+|\vec{v}|$. Millisel tingimusel selles seoses esineb võrdusmärk?

130. Tõesta, et $|\vec{u}-\vec{v}|\leqslant|\vec{u}|+|\vec{v}|$. Millisel tingimusel selles seoses esineb võrdusmärk?

131. Missugusel tingimusel $\vec{u}+\vec{v}\|\vec{u}-\vec{v}$?

132. Missugusel tingimusel kehtib võrdus

1) $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}-\vec{v}|$?

2) $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|-|\vec{v}|$?

133. Arvuta

1) $|\vec{u}-\vec{v}|$, kui $|\vec{u}|=13$, $|\vec{v}|=19$ ja $|\vec{u}+\vec{v}|=24$;

2) $|\vec{u}+\vec{v}|$, kui $|\vec{u}|=11$, $|\vec{v}|=23$ ja $|\vec{u}-\vec{v}|=30$.

134. Vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on määratud rööptahuka ühest tipust lähtuvate servadega. Missugusel tingimusel

1) kehtivad samaaegselt võrdused

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}| \text{ ja } |\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}|=|\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}|?$$

2) kehtivad võrdused

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}|=|\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}|?$$

3.3. VEKTORI KORRUTIS JA JAGATIS ARVUGA.

Vektori korrutis arvuga defineeritakse ruumis samal viisil kui tasandil.

Def. **Vektori $\vec{v}$ ja reaalarvu a korrutiseks nimetatakse vektorit, mis on**

1) vektoriga $\vec{v}$ kollineaarne,

2) vektoriga $\vec{v}$ samasuunaline, kui $a>0$, ja vastassuunaline, kui $a<0$,

3) pikkuselt võrdne vektori $\vec{v}$ pikkuse ja arvu a absoluutväärtuse korrutisega.

Vektori $\vec{v}$ ja arvu a korrutise tähis on $a\vec{v}$. Kirjutame selle abil definitsiooni tingimused:

1) $a\vec{v} \parallel \vec{v}$;

2) $a\vec{v}$ $\begin{cases} \uparrow\uparrow\vec{v}, \text{ kui } a>0, \\ \uparrow\downarrow\vec{v}, \text{ kui } a<0; \end{cases}$

3) $|a\vec{v}| = |a|\,|\vec{v}|$.

Kolmandast tingimusest järeldub, et

$$a\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}.$$

Vektori ja arvu korrutisel on järgmised algebralised omadused.

1. **Vektori korrutis arvuga on assotsiatiivne arvteguri suhtes:**

$$\boxed{a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}}$$

2. **Vektori korrutis arvuga on distributiivne arvude summa suhtes:**

$$\boxed{(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}}$$

3. **Vektori korrutis arvuga on distributiivne vektorite summa suhtes:**

$$\boxed{a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}}$$

Nende lausete tõestused stereomeetrias ei erine millegi poolest vastavatest tõestustest planimeetrias.

Def. **Vektori $\vec{v}$ jagatiseks arvuga $a \neq 0$ nimetatakse vektori $\vec{v}$ korrutist arvu a pöördväärtusega:**

$$\frac{\vec{v}}{a} = \frac{1}{a}\vec{v}.$$

Vektorite liitmist (ja lahutamist) ning arvuga korrutamist (ja jagamist) nimetatakse **lineaarteheteks** vektoritega. Lineaartehete abil saab vektoritest moodustada hulkliikmeid, milles vektorid ei esine nimetajates. Selliste hulkliikmete teisendamine toimub samade reeglite põhjal, mis on teada tähti sisaldavate avaldiste kohta.

Näide.

$$\frac{\vec{u}-5\vec{v}}{4}-\frac{2\vec{u}-3\vec{v}}{6}+\frac{1}{2}\vec{u}=\frac{3\vec{u}-15\vec{v}-4\vec{u}+6\vec{v}+6\vec{u}}{12}=$$

$$=\frac{5\vec{u}-9\vec{v}}{12}=\frac{5}{12}\vec{u}-\frac{3}{4}\vec{v}.$$

135. Lihtsusta.

1) $3(\vec{p}-2\vec{q})-2\left(\frac{1}{2}\vec{r}-\vec{p}-2\vec{q}\right)$

2) $\frac{2\vec{s}-\vec{t}}{2}-\frac{3\vec{t}-2\vec{s}}{3}-\frac{4\vec{s}-3\vec{t}}{6}$.

136. Avalda vektor $\vec{s}$ vektori $\vec{u}$ kaudu, kui

1) $4\vec{s}+12\vec{u}=\vec{0}$;

2) $3\vec{u}-2\vec{s}-4\vec{t}=\vec{0}$ ja $\vec{t}=5\vec{s}-2\vec{u}$;

3) $2\vec{t}+3\vec{u}-4\vec{v}-2\vec{s}=\vec{0}$ ja $2\vec{u}+2\vec{v}-\vec{t}-2\vec{s}=\vec{0}$;

4) $3\vec{u}-\frac{3}{4}\vec{t}+2\vec{s}=\vec{0}$ ja $4\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{t}-\frac{1}{3}\vec{s}=\vec{0}$;

5) $\frac{2}{3}\vec{s}+\frac{5}{2}\vec{t}-0{,}7\vec{u}+5\vec{v}=\vec{0}$ ja $2\vec{s}-15\vec{t}-30\vec{v}=\vec{0}$.

137. Tõesta, et

1) $a\vec{u}=a\vec{v} \wedge a\neq 0 \Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$;

2) $a\vec{v}=b\vec{v} \wedge \vec{v}\neq 0 \Rightarrow a=b$.

138. Mida võib võrduse $d\vec{u}=-b\vec{v}$ põhjal öelda arvude a ja b ning vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ kohta?

139. Tõesta võrdus $a(-\vec{v})=-(a\vec{v})$.

140. $ABCDEF$ on korrapärane kuusnurk ning $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{d}$, $\overrightarrow{EF}=\vec{e}$ ja $\overrightarrow{FA}=\vec{f}$. Tee joonis ja leia sellel

vektorid:

1) $\vec{d}+2\vec{f}+\vec{b}-2\vec{a}$;

2) $\vec{f}-2\vec{e}-\vec{c}+2\vec{d}$.

141. $ABCDE$ on korrapärane viisnurk ning $\overrightarrow{AB}=\vec{r}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{s}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{t}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{u}$ ja $\overrightarrow{EA}=\vec{v}$. Tee joonis ja leia sellel vektorid:

1) $\vec{r}-\vec{s}+\vec{t}-\vec{u}+\vec{v}$;

2) $\vec{r}+2\vec{t}+\frac{1}{2}\vec{v}$;

3) $2\vec{r}+\frac{1}{2}\vec{s}-3\vec{t}-\vec{u}+2\vec{v}$.

142. $A\ldots D_1$ on rööptahukas, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ja $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. Tee joonis ja leia sellel vektorid:

1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$;

2) $\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$;

3) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$;

4) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$;

5) $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

6) $-\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

3.4. KOLLINEAARSETE VEKTORITE HULK.

Teoreem. **Kollineaarsete vektorite hulgast saab iga vektori avaldada sellest hulgast vabalt valitud vektori kaudu, mis erineb nullvektorist.**

T õ e s t u s. Vaatleme mingit kaht kollineaarset vektorit $\vec{v}$ ja $\vec{a}\neq\vec{0}$.

Kui $\vec{v}=\vec{0}$, siis $\vec{v}=0\vec{a}$. Sel erijuhul on väide niisiis tõene.

Kui $\vec{v}\neq\vec{0}$, siis kasutame väite tõestamisel ühikvektoreid, s. t. vektoreid, mille pikkus on 1. Ühikvektori saame, kui jagame vektori tema pikkusega. Tõepoolest, vektorid

$$\vec{v}_1=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{ja} \quad \vec{a}_1=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

on ühikvektorid, sest näiteks

$$|\vec{v}_1|=\left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right|=\frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|}=1.$$

Seejuures vektori ja arvu korrutise definitsiooni põhjal

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v} \wedge \vec{a}_1 \parallel \vec{a} \wedge \vec{v} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{a}_1.$$

Järelikult on vektorid $\vec{v}_1$ ja $\vec{a}_1$ kas sama- või vastassuunalised. Uurime kumbagi juhtu:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_1 \Rightarrow \vec{v}_1=\vec{a}_1 \\ \vec{v}=|\vec{v}|\,\vec{v}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}=|\vec{v}|\,\vec{a}_1=|\vec{v}|\,\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{|\vec{v}|}{|\vec{a}|}\vec{a};$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_1 \uparrow\downarrow \vec{a}_1 \Rightarrow \vec{v}_1=-\vec{a}_1 \\ \vec{v}=|\vec{v}|\,\vec{v}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}=|\vec{v}|\,(-\vec{a}_1)=|\vec{v}|\left(-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)=$$

$$=-\frac{|\vec{v}|}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

Seega mõlemal juhul leidub teatav reaalarv x, nii et $\vec{v}=x\vec{a}$. ∎

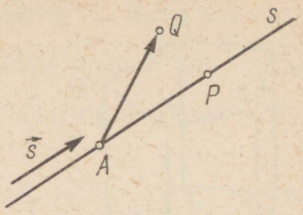
Märgime lisaks, et kui $\vec{v}\neq\vec{0}$, siis muidugi saab ka vektori $\vec{a}$ avaldada $\vec{v}$ kaudu. Kui aga $\vec{v}=\vec{0}$ ja $\vec{a}\neq\vec{0}$, siis seda teha ei saa. Ainsal teoreemis vaatlemata erijuhul, kui $\vec{v}=\vec{a}=\vec{0}$, kehtivad võrdused $\vec{v}=x\vec{a}$ ja $\vec{a}=x\vec{v}$ iga reaalarvu x korral.

Seega on kahe vektori kollineaarsuseks tarvilik, et vähemalt üks neist on avaldatav teise kaudu. See tingimus on ka piisav, sest vektori ja arvu korrutise definitsiooni põhjal

$$\vec{v}=x\vec{a} \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{a}.$$

Kaks vektorit on kollineaarsed siis ja ainult siis, kui vähemalt üks neist on avaldatav teise kaudu.

Kirjeldame nüüd ka punktide kollineaarsust vektorite abil.



Joon. 36.

Sirge on teada, kui on teada tema üks punkt ja siht. Sihi määrab erinevate punktide paar, seega nullvektorist erinev vektor. Vektorit, mida kasutatakse sirge sihi määramisel, nimetatakse sirge **sihivektoriks.**

Olgu A sirge s vabalt valitud punkt ja $\vec{s}$ selle sirge mingi sihivektor (joon. 36). Ruumi punkt P kuulub sirgele s siis ja ainult siis, kui vektoril $\overrightarrow{AP}$ on sirge s siht, s. t. $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{s}$. Tõepoolest, kui $P \in s$, siis $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{s}$; kui aga $P \notin s$, siis $\overrightarrow{AP} \nparallel \vec{s}$; näiteks $\overrightarrow{AQ} \nparallel \vec{s}$. Et $\vec{s} \neq \vec{0}$, siis tõestatud teoreemi põhjal

$$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{s} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = x\vec{s}.$$

Punkti A ja sihivektoriga $\vec{s}$ määratud sirgele s kuulub iga selline ja ainult selline punkt, mille korral $\overrightarrow{AP} = x\vec{s}$:

$$s = \{P \mid \overrightarrow{AP} = x\vec{s} \wedge x \in R\}.$$

143. $3\vec{u} + 5\vec{v} = \vec{0}$. Kas $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on kollineaarsed?

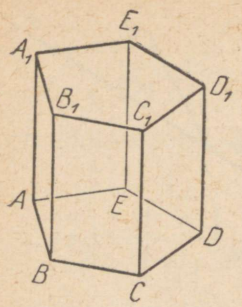
144. Näita, et $\vec{t}$ ja $\vec{v}$ on kollineaarsed.

1) $2\vec{t} - 5\vec{u} + 4\vec{v} = \vec{0}$ ja $5\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{0}$.

2) $1{,}5\vec{t} + 0{,}9\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{0}$ ja $0{,}1\vec{u} - \vec{t} + 0{,}2\vec{v} = \vec{0}$.

145. s on sirge, mis läbib punkti C vektori $\vec{a}$ sihis. Kirjuta see lause sümbolitega.

146. t on sirge, mis läbib punkte P ja Q. Kirjelda sirget t punkti ja sihivektori abil ning kirjuta vastav lause sümbolitega.



Joon. 37.

147. $A \ldots F_1$ on korrapärane kuusnurkne prisma (joon. 37). Avalda, kus võimalik, prisma tippudega määratud vektorid

1) vektori $\overrightarrow{D_1D}$ kaudu;

2) vektori $\overrightarrow{AB}$ kaudu;

3) vektori $\overrightarrow{EB}$ kaudu;

4) vektori $\overrightarrow{AF_1}$ kaudu;

5) vektori $\overrightarrow{D_1A}$ kaudu.

148. Missugune on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et sirged

$$s=\{P \mid \overrightarrow{AP}=x\vec{s}\} \text{ ja } t=\{P \mid \overrightarrow{BP}=x\vec{t}\}$$

1) on paralleelsed?
2) ühtivad?
3) ei ole paralleelsed?

3.5. KOMPLANAARSETE VEKTORITE HULK.

Teoreem. **Komplanaarsete vektorite hulgast saab iga vektori avaldada kahe sellest hulgast vabalt valitud mittekollineaarse vektori kaudu.**

Tõestus. Olgu $\vec{v}$, $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ mingid komplanaarsed vektorid ning $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Erijuhul, kui $\vec{v}$ on kollineaarne ühega vektoritest $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, on väide tõene. Tõepoolest, et $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, siis $\vec{a} \nparallel \vec{0}$ ja $\vec{b} \nparallel \vec{0}$, ning kui näiteks $\vec{v} \parallel \vec{a}$, siis

$$\vec{v}=x\vec{a} \Rightarrow \vec{v}=x\vec{a}+0\vec{b}.$$

Kui $\vec{v}$ ei ole kollineaarne ühegagi vektoritest $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, siis raken-

dame need vektorid ühte vabalt valitud punkti A. Konstrueerime rööpküliku $AXPY$, mille külgedel on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ sihid ning mille tipust A lähtuv diagonaal kujutab vektorit $\vec{v}$ (joon. 38). Rööpkülikureegli järgi

$$\vec{v}=\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{AY}.$$

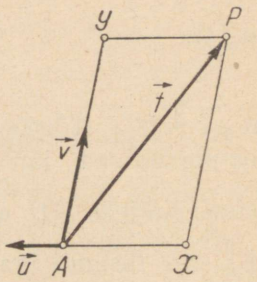
Et aga

$$\overrightarrow{AX} \parallel \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{AX}=x\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AY} \parallel \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AY}=y\vec{b},$$

siis

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}.$$



Joon. 38.

Seega leiduvad reaalarvud x ja y, mille abil vektor $\vec{v}$ avaldub vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu. ■

Kolm komplanaarset vektorit võivad kõik olla paarikaupa kollineaarsed; sel juhul saab neid avaldada üksteise kaudu vastavalt kollineaarsuse tingimusele. Seega on kolme vektori komplanaarsuseks tarvilik, et vähemalt üht neist saab avaldada ülejäänud kahe kaudu.

See tingimus osutub ka piisavaks. Tõepoolest, kui

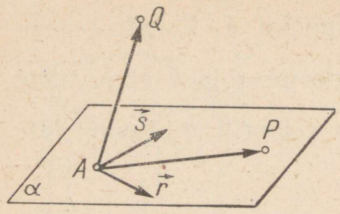
$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b},$$

siis vektorit $\vec{v}$ saab kujutada sellise rööpküliku diagonaalina, mille külgedeks on vektorid $x\vec{a}$ ja $y\vec{b}$. Järelikult on vektorid $\vec{v}$, $x\vec{a}$ ja $y\vec{b}$ komplanaarsed; kuid siis on komplanaarsed ka vektorid $\vec{v}$, $\vec{a}$ ja $\vec{b}$.

Kolm vektorit on komplanaarsed siis ja ainult siis, kui vähemalt üks neist on avaldatav kahe ülejäänud vektori kaudu.

Uurime punktide komplanaarsust.

Tasand on teada, kui on teada tema üks punkt ja riht. Riht on määratav kolme mittekollineaarse punktiga, seega ka kahe mittekollineaarse vektoriga. Kaht mittekollineaarset vektorit, mida



Joon. 39.

kasutatakse tasandi rihi määramisel, nimetatakse tasandi rihivektoriteks.

Olgu A tasandi α vabalt valitud punkt ning $\vec{r}$ ja $\vec{s}$ selle tasandi rihivektorid (joon. 39). Punkt P kuulub tasandile α siis ja ainult siis, kui vektor $\overrightarrow{AP}$ on komplanaarne vektoritega $\vec{r}$ ja $\vec{s}$. Tõepoolest, iga punkti $P \in \alpha$ korral $\overrightarrow{AP}$, $\vec{r}$ ja $\vec{s}$ on komplanaarsed; kui aga $P \notin \alpha$, siis sellist komplanaarsust ei esine. Näiteks $\overrightarrow{AQ}$ ei ole komplanaarne vektoritega $\vec{r}$ ja $\vec{s}$. Et $\vec{r} \nparallel \vec{s}$, siis tasandi iga punkti P iseloomustab tingimus

$$\overrightarrow{AP} = x\vec{r} + y\vec{s}.$$

Punktiga A ning rihivektoritega $\vec{r}$ ja $\vec{s}$ määratud tasandile α kuulub iga selline ja ainult selline punkt P, mille korral $\overrightarrow{AP} = x\vec{r} + y\vec{s}$:

$$\alpha = \{P \mid \overrightarrow{AP} = x\vec{r} + y\vec{s} \wedge x \in R \wedge y \in R\}.$$

149. $A \ldots H$ on rööptahukas (joon. 34). Missugused selle rööptahuka tippudega määratud vektorid on komplanaarsed vektoritega

1) $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AD}$?
2) $\overrightarrow{AH}$ ja $\overrightarrow{CF}$?
3) $\overrightarrow{CE}$ ja $\overrightarrow{AD}$?

150. Mitu rihti määravad vektorid, mis vastavad
1) tetraeedri tippude paaridele?
2) kolmnurkse prisma tippude paaridele?
3) rööptahuka tippude paaridele?

151. $2\vec{t} + 3\vec{u} - 4\vec{v} = \vec{0}$. Kas $\vec{t}$, $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on komplanaarsed?

152. $\vec{s}-\vec{t}+3\vec{u}-6\vec{v}=\vec{0}$ ja $\vec{t}-2\vec{u}-3\vec{v}=\vec{0}$. Näita, et vektorid $\vec{s}$, $\vec{t}$ ja $\vec{u}$ on komplanaarsed.

153. Kas vektorid $\vec{t}$, $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on komplanaarsed?

1) $\vec{t}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{u}=\vec{c}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

2) $\vec{t}=\vec{c}-\vec{a}$, $\vec{u}=\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

3) $\vec{t}=2\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{u}=2\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$, $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

154. Kolmnurga ABC mediaanid on AM, BN ja CP. Avalda vektorid $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ ja $\overrightarrow{CP}$ vektorite $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ja $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ kaudu.

155. Punkt O on kolmnurga ABC raskuskese. Tõesta, et $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

156. Tõesta, et muutmata kolmnurga mediaanide sihte saab mediaanidest moodustada uue kolmnurga.

157. A, B ja C on kolmnurga DEF külgede keskpunktid. Tõesta, et iga punkti O korral jõudude $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ja $\overrightarrow{OC}$ resultant ühtib jõudude $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ ja $\overrightarrow{OF}$ resultandiga.

158. $ABCDEF$ on korrapärane kuusnurk; $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ ja $\overrightarrow{AE}=\vec{v}$. Avalda vektorid $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ ja $\overrightarrow{EF}$ vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ kaudu.

159. Rombis $ABCD$ on $\overrightarrow{AC}=\vec{s}$ ja $\overrightarrow{BD}=\vec{t}$. Avalda vektorid $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{DA}$ vektorite $\vec{s}$ ja $\vec{t}$ kaudu.

160. Võrdhaarse trapetsi $ABCD$ üks alus on AB ja $\angle BAD=60°$; $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Avalda $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu.

161. Nelinurgas $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{q}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{r}$ ja $\overrightarrow{DA}=\vec{s}$. Diagonaalide AC ja BD keskpunktid on vastavalt E ja F. Tõesta, et $\overrightarrow{EF}=\frac{\vec{p}+\vec{r}}{2}=-\frac{\vec{q}+\vec{s}}{2}$. Nelinurk võib olla nii tasapinnaline kui ka ruumiline. Kas tõestuskäik sõltub sellest?

162. α on tasand, mis läbib punkti D vektoritega $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ määratud rihis. Kirjuta see lause sümbolitega.

163. P, Q ja R on tasandi α mittekollineaarsed punktid. Kirjelda tasandit α ühe punkti ja kahe vektori abil. Kirjuta vastav lause sümbolitega.

164. Missugused on tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et sirged $s=\{A \mid \overrightarrow{AP}=x\vec{s}\}$ ja $t=\{B \mid \overrightarrow{BP}=x\vec{t}\}$

1) lõikuvad?
2) on kiivsirged?

165. Missugused on tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et sirge $s=\{A \mid \overrightarrow{AP}=x\vec{s}\}$ ja tasandi $\alpha=\{B \mid \overrightarrow{BP}=y\vec{a}+z\vec{b}\}$ puhul on tõene lause

1) s ja α lõikuvad?
2) $s \subset \alpha$?
3) $s \parallel \alpha$?

3.6. RUUMI VEKTORITE HULK.

Teoreem. **Iga vektor on avaldatav kolme vabalt valitud mittekomplanaarse vektori kaudu.**

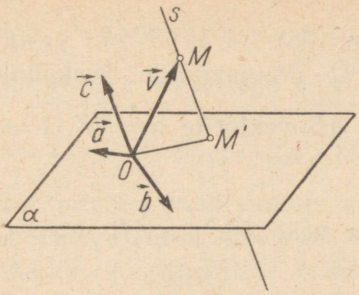
T õ e s t u s. Olgu $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ vabalt valitud mittekomplanaarsed vektorid ning $\vec{v}$ mingi neljas vektor. Kui $\vec{v}$ on komplanaarne ühe paariga vektoritest $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$, siis väide on tõene. Tõepoolest, olgu $\vec{v}$, $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ komplanaarsed. Et $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ ei ole komplanaarsed, siis $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Järelikult saab vektori $\vec{v}$ avaldada $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu:

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}.$$

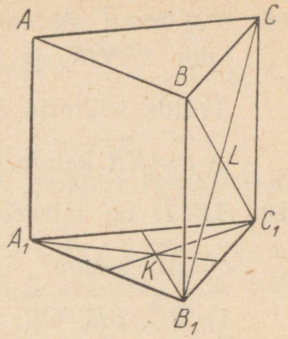
Kuid siis on tõene ka võrdus

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+0\vec{c}.$$

Üldjuhul ei ole $\vec{v}$ komplanaarne ühegi paariga vektoritest $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$. Rakendame need vektorid ühte vabalt valitud punkti O. Olgu $\vec{v}=\overrightarrow{OM}$ (joon. 40). Sirge



Joon. 40.



Joon. 41.

$$s=\{P \mid \overrightarrow{MP}=z\vec{c}\}$$

ja tasand

$$\alpha=\{P \mid \overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}\}$$

lõikuvad, sest vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on mittekomplanaarsed. Olgu $s \cap \alpha=\{M'\}$, siis kolmnurgareegli põhjal

$$\vec{v}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}.$$

Kuid $\overrightarrow{OM'}$ on komplanaarne mittekollineaarsete vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ning $\overrightarrow{M'M} \parallel \vec{c}$, järelikult

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM'}=x\vec{a}+y\vec{b}\\ \overrightarrow{M'M}=z\vec{c}.\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}.$$

Seega on väide tõene ka üldjuhul. ■

166. $A \ldots D_1$ on rööptahukas. Avalda vektorite $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ kaudu vektorid $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB_1}$ ja $\overrightarrow{A_1C}$.

167. $A \ldots C_1$ on kolmnurkne prisma (joon. 41), K on selle põhja $A_1B_1C_1$ mediaanide lõikepunkt ja L on tahu BCC_1B_1 diagonaalide lõikepunkt. Avalda vektorid $\overrightarrow{AK}=\vec{k}$, $\overrightarrow{AL}=\vec{l}$ ja $\overrightarrow{KL}=\vec{m}$ vektorite $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ kaudu.

168. $K \ldots R$ on rööptahukas (joon. 35). A ja B on vastavalt tahu $OPQR$ ja tahu $MLPQ$ diagonaalide keskpunktid. Avalda vektorid $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{NB}$ ja $\overrightarrow{AB}$ vektorite $\vec{a}=\overrightarrow{NK}$, $\vec{b}=\overrightarrow{NM}$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{NR}$ kaudu.

169. $ABCD$ on tetraeeder. Avalda vektorite $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$ kaudu

1) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$;

2) $\overrightarrow{DM}$, kui M on serva BC keskpunkt;

3) $\overrightarrow{AQ}$, kui Q on tahu BCD raskuskese.

170. $A \ldots F_1$ on korrapärane kuusnurkne prisma (joon. 37). Avalda vektorite $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AF}$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ kaudu vektorid $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{C_1F_1}$, $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{D_1C}$, $\overrightarrow{FE_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$ ja $\overrightarrow{DF_1}$.

171. $A \ldots F_1$ on korrapärane kuusnurkne prisma. Avalda vektorite $\vec{a}=\overrightarrow{F_1E_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{B_1A}$ kaudu vektorid $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DF_1}$, $\overrightarrow{FC}$ ja $\overrightarrow{C_1F}$.

3.7. RUUMI VEKTORBAAS. VEKTORI KOORDINAADID.

Nagu selgus, saab ruumi iga vektori $\vec{v}$ avaldada vabalt valitud kolme mittekomplanaarse vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ kaudu:

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}.$$

Def. **Kui kõik vaadeldavad vektorid avaldatakse kolme mittekomplanaarse vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ kaudu, siis järjestatud hulka $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ nimetatakse ruumi vektorbaasiks. Arvkordajaid, mille abil vektor $\vec{v}$ avaldub baasivektorite kaudu, nimetatakse vektori $\vec{v}$ koordinaatideks selle baasi suhtes.**

Vektori koordinaate tähistatakse suurte tähtedega. Asjaolu, et

vektori $\vec{v}$ koordinaatideks antud baasi suhtes on reaalarvud X, Y Z, märgitakse võrdusega $\vec{v}=(X; Y; Z)$. Seega

$$\vec{v}=(X; Y; Z) \Leftrightarrow \vec{v}=X\vec{a}+Y\vec{b}+Z\vec{c}.$$

Vektorbaasi saab ruumis valida vabalt. Vektori koordinaadid kahe erineva baasi suhtes on erinevad.

Vektori koordinaatide määramisel antud baasi suhtes kasutame vabalt valitud punkti O. Näitame, et koordinaadid ei sõltu selle punkti valikust.

Teoreem. **Vektorbaas määrab vektori koordinaadid üheselt.**

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et mingil vektoril $\vec{v}$ on kahed erinevad koordinaadid antud baasi $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ suhtes:

$$\vec{v}=(X_1; Y_1; Z_1) \text{ ja } \vec{v}=(X_2; Y_2; Z_2).$$

Siis

$$\vec{v}=X_1\vec{a}+Y_1\vec{b}+Z_1\vec{c}=X_2\vec{a}+Y_2\vec{b}+Z_2\vec{c}$$

ehk

$$(X_1-X_2)\vec{a}+(Y_1-Y_2)\vec{b}+(Z_1-Z_2)\vec{c}=\vec{0}.$$

Oletuse kohaselt vähemalt üks kordaja viimases võrduses ei ole null. Olgu näiteks $X_1-X_2\neq 0$, siis

$$\vec{a}=-\frac{Y_1-Y_2}{X_1-X_2}\vec{b}-\frac{Z_1-Z_2}{X_1-X_2}\vec{c}.$$

See võrdus tähendab, et baasivektorid on komplanaarsed. Kuid see on vastuolus vektorbaasi definitsiooniga. Järelikult on tehtud oletus väär, s. t

$$X_1=X_2,\ Y_1=Y_2,\ Z_1=Z_2. \blacksquare$$

Järeldus. *Iga vektorbaas korraldab üksühese vastavuse ruumi vektorite ja järjestatud reaalarvukolmikute vahel.*

172. $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ on vektorbaas. Määra baasivektorite koordinaadid selle baasi suhtes.

173. $SABC$ on tetraeeder; K, L ja M on selle servade SA, SB ja SC keskpunktid ning P, Q ja R on vastasservade kesk-

punktid. Baasivektoriteks on võetud $\vec{a}=\overrightarrow{SA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{SB}$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{SC}$. Määra $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{LQ}$ ja $\overrightarrow{MR}$ koordinaadid.

174. Baasivektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ ning punkti O abil on konstrueeritud tetraeeder $OABC$ nii, et $\overrightarrow{OA}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{b}$ ja $\overrightarrow{OC}=-\vec{c}$. Määra $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ja $\overrightarrow{CA}$ koordinaadid.

175. Baasivektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ ning punkti A abil on konstrueeritud rööptahukas $A\ldots D_1$ nii, et $\overrightarrow{AB}=-2\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=3\vec{a}$ ja $\overrightarrow{AA_1}=4\vec{c}$. Määra $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{D_1B}$ ja $\overrightarrow{B_1D}$ koordinaadid.

3.8. LINEAARTEHTED JA KOLLINEAARSUSE TINGIMUS KOORDINAATKUJUS.

Teoreem. **Vektorite summa (vahe) koordinaatideks on vektorite vastavate koordinaatide summad (vahed).**

Tõestus. Vaatleme mingit kaht vektorit $\vec{v}_1=(X_1; Y_1; Z_1)$ ja $\vec{v}_2=(X_2; Y_2; Z_2)$. Avaldame nende summa ja vahe:

$$\vec{v}_1\pm\vec{v}_2=(X_1\vec{a}+Y_1\vec{b}+Z_1\vec{c})\pm(X_2\vec{a}+Y_2\vec{b}+Z_2\vec{c})=$$
$$=(X_1\pm X_2)\vec{a}+(Y_1\pm Y_2)\vec{b}+(Z_1\pm Z_2)\vec{c}.$$

Vektori koordinaatide definitsiooni põhjal järeldub siit, et

$$\vec{v}_1\pm\vec{v}_2=(X_1\pm X_2; Y_1\pm Y_2; Z_1\pm Z_2).\blacksquare$$

Teoreem. **Vektori ja arvu korrutise koordinaatideks on vektori koordinaatide korrutised selle arvuga.**

Tõestus. Vaatleme mingit vektorit $\vec{v}=(X; Y; Z)$ ja mingit reaalarvu p. Avaldame nende korrutise:

$$p\vec{v}=p(X\vec{a}+Y\vec{b}+Z\vec{c})=(pX)\vec{a}+(pY)\vec{b}+(pZ)\vec{c}.$$

Vektori koordinaatide definitsiooni põhjal järeldub siit, et

$$p\vec{v}=(pX; pY; pZ).\blacksquare$$

Teoreem. **Vektorid on kollineaarsed siis ja ainult siis, kui nende koordinaadid on võrdelised.**

Tõestus. Vektorid $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ on kollineaarsed siis ja ainult siis, kui leidub reaalarv p, nii et $\vec{v}_1 = p\vec{v}_2$, s. t.

$$X_1\vec{a} + Y_1\vec{b} + Z_1\vec{c} = (pX_2)\vec{a} + (pY_2)\vec{b} + (pZ_2)\vec{c}$$

ehk

$$(X_1 - pX_2)\vec{a} + (Y_1 - pY_2)\vec{b} + (Z_1 - pZ_2)\vec{c} = \vec{0}.$$

Kui oletada, et saadud võrduses mõni kordaja pole null, siis tekib vastuolu vektorbaasi definitsiooniga: ühe baasivektori saaks avaldada teiste baasivektorite kaudu. Järelikult on kõik kordajad nullid:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 - pX_2 = 0 \Rightarrow X_1 = pX_2 \\ Y_1 - pY_2 = 0 \Rightarrow Y_1 = pY_2 \\ Z_1 - pZ_2 = 0 \Rightarrow Z_1 = pZ_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Kui näiteks $X_2 = 0$, siis ka $X_1 = 0$ ja vastupidi. Suhtele $\frac{0}{0}$ võib omistada mistahes väärtuse.

Kui $\vec{v}_1 = \vec{0}$, siis $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$ ja võrdused

$$\frac{0}{X_2} = \frac{0}{Y_2} = \frac{0}{Z_2}$$

on õiged iga kolme arvu X_2, Y_2 ja Z_2 puhul: nullvektor on kollineaarne iga vektoriga. ∎

176. $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 3;\ -3)$ ja $\overrightarrow{BC} = (4;\ -5;\ 1)$. Leia vektorid $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{CA}$.

177. $\vec{a} = (-4{,}2;\ 11{,}1;\ -7{,}4)$. Leia vektor $\frac{2}{3}\vec{a}$.

178. $\vec{p} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ ja $\vec{q} = -5\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$. Leia vektorite $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{p} - \vec{q}$ ja $\vec{q} - \vec{p}$ koordinaadid.

179. $\vec{t} = (2;\ -3;\ 5)$, $\vec{u} = (-1;\ 2;\ -4)$ ja $\vec{v} = (7;\ 0;\ 2)$. Määra järgmiste vektorite koordinaadid:

1) $\vec{t}+\vec{u}+\vec{v}$;
2) $\vec{t}-\vec{u}-\vec{v}$;
3) $-\vec{t}+\vec{u}-\vec{v}$;
4) $2\vec{u}-5\vec{t}+\vec{v}$;
5) $2\vec{t}+3\vec{u}-2\vec{v}$;
6) $3(\vec{v}-\vec{u}-2\vec{t})$.

180. Tõesta, et vektorite $\vec{k}=(-5; 3; 11)$, $\vec{l}=(7; -14; -6)$ ja $\vec{m}=(-2; 11; -5)$ abil saab konstrueerida kolmnurga.

181. Kuidas muutuvad kõigi vektorite koordinaadid, kui
1) esimese baasivektori pikkust vähendatakse viis korda?
2) teise baasivektori pikkust suurendatakse kolm korda?

182. Baasivektoriteks on võetud rööptahuka $A \ldots D_1$ orienteeritud servadega $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{D_1D}$ ja $\overrightarrow{DC}$ määratud vektorid nende antud järjekorras. Määra vektori $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{C_1D}$ koordinaadid selle baasi suhtes.

183. Kas vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on kollineaarsed?

1) $\vec{u}=(6; -4; 8)$, $\vec{v}=(-9; 6; -12)$
2) $\vec{u}=\left(3\frac{3}{5}; -3; 4\frac{1}{2}\right)$, $\vec{v}=\left(-10; 8\frac{1}{3}; -12\frac{1}{2}\right)$
3) $\vec{u}=(3{,}7; 5{,}4; -0{,}8)$, $\vec{v}=(1{,}11; 1{,}62; -0{,}26)$

184. Missugune on sirgete $s=\{P \mid \overrightarrow{AP}=x\vec{s}\}$ ja $t=\{P \mid \overrightarrow{AP}=x\vec{t}\}$ vastastikune asend, kui
1) $\vec{s}=(16; -12; 24)$ ja $\vec{t}=(-12; 9; -18)$?
2) $\vec{s}=(3; 7; 9)$ ja $\vec{t}=(6; 14; -18)$?

185. Leia järgmiste vektorite hulgast need, mis on kollineaarsed mõne baasivektoriga või komplanaarsed mõne baasivektorite paariga.

$\vec{k}=(-1; 3; 0)$, $\vec{l}=(0; 0; 5)$, $\vec{m}=(2; -4; 7)$
$\vec{n}=(-2; 0; 2)$, $\vec{p}=(0; -21; 0)$, $\vec{q}=(0; 3{,}4; 17)$

186. Leia tundmatud koordinaadid, kui $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$.
1) $\vec{u}=(3; -1; 2)$, $\vec{v}=(9; Y; Z)$

2) $\vec{u}=(X;\ -1{,}2;\ Y)$, $\vec{v}=(-1{,}5;\ 6;\ 2)$

187. Leia tundmatud koordinaadid, kui $\vec{u}\uparrow\downarrow\vec{v}$.

1) $\vec{u}=(-3;\ 4;\ 15)$, $\vec{v}=(X;\ Y;\ -1{,}5)$

2) $\vec{u}=\left(\frac{2}{3};\ Y;\ Z\right)$, $\vec{v}=\left(\frac{5}{6};\ \frac{3}{2};\ -1\frac{1}{4}\right)$

188. Leia tundmatud koordinaadid, kui $\vec{u}\parallel\vec{v}$.

1) $\vec{u}=(2;\ -2;\ 1)$, $\vec{v}=(X;\ -2;\ Y)$

2) $\vec{u}=(9;\ Y;\ Z)$, $\vec{v}=(-3;\ 0;\ 5)$

3) $\vec{u}=(X_1;\ 0;\ Z_1)$, $\vec{v}=(0;\ Y_2;\ 0)$

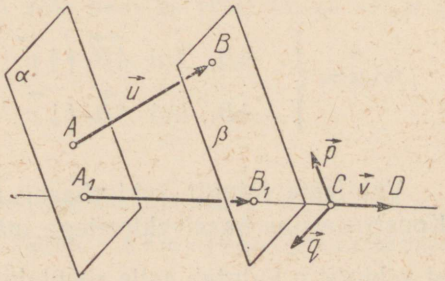
4) $\vec{u}=(-5;\ -7;\ Z_1)$, $\vec{v}=(X_2;\ 1{,}4;\ -3{,}1)$

189. Sirge s sihivektoriks on $\vec{s}=(8;\ 6;\ -12)$. Leia veel kolm vektorit, mille võib võtta selle sirge sihivektoriteks.

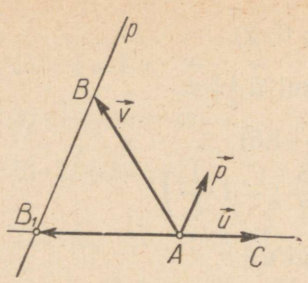
190. Tasandi α rihi määravad vektorid $\vec{r}=(1;\ -1;\ 3)$ ja $\vec{s}=(-2;\ 5;\ 4)$. Leia veel kaks paari vektoreid, mille võib võtta tasandi α rihivektoreiks. Uued rihivektorid moodusta nii, et nad ei ole kollineaarsed seniste rihivektoritega.

3.9. VEKTORI PROJEKTSIOON.

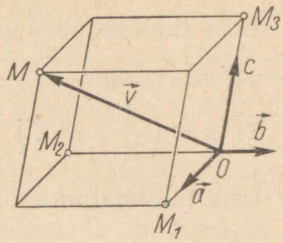
Vaatleme mingeid vektoreid $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ja $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ (joon. 42). Asetame läbi punktide A ja B paralleelsed tasandid α ja β, mis lõikavad sirgeid AB ja CD. Olgu $\alpha\cap CD=\{A_1\}$ ja $\beta\cap CD=\{B_1\}$. Punktipaar $(A;\ B)$ määrab järjestuse punktipaaris $(A_1;\ B_1)$. Järelikult vastab vektorile $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ vektor $\overrightarrow{A_1B_1}$.



Joon. 42.



Joon. 43.



Joon. 44.

Öeldakse, et vektor $\overrightarrow{A_1B_1}$ on saadud vektori $\vec{u}$ projekteerimisel vektorile $\vec{v}$ tasandite α ja β ühises rihis. Joonisel 42 on projekteerimise rihti määravateks vektoriteks $\vec{p}$ ja $\vec{q}$.

Arvu, mis võrdub vektori $\overrightarrow{A_1B_1}$ pikkusega, kui $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{v}$, ja selle vastandarvuga, kui $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{v}$, nimetatakse vektori $\vec{u}$ **projektsiooniks** vektoril $\vec{v}$ ja tähistatakse sümboliga $pr_{\vec{v}}\vec{u}$. Niisiis

$$pr_{\vec{v}}\vec{u} = \begin{cases} A_1B_1, \text{ kui } \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{v} \text{ (nagu joonisel 42)}, \\ -A_1B_1, \text{ kui } \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{v}. \end{cases}$$

Projekteerimise lihtsustamiseks võib vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ eelnevalt rakendada ühte punkti (joon. 43). Vektori $\vec{u}$ saab nüüd projekteerida vektorile $\vec{v}$ sirge p abil. Sirge p sihti nimetatakse projekteerimise sihiks. Siin

$$pr_{\vec{v}}\vec{u} = \begin{cases} AB_1, \text{ kui } \overrightarrow{AB_1} \uparrow\uparrow \vec{v}, \\ -AB_1, \text{ kui } \overrightarrow{AB_1} \uparrow\downarrow \vec{v}. \end{cases}$$

Vaatleme mingit vektorbaasi $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ ja mingit vektorit $\vec{v}$. Konstrueerime baasivektoritega määratud rihtides rööptahuka nii, et vektorit $\vec{v}$ kujutab selle rööptahuka diagonaal (joon. 44). Rööp-

$$\vec{v}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}.$$

Vektorid $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ ja $\overrightarrow{OM_3}$ on saadud vektori $\vec{v}$ projekteerimisel baasivektoritele rihtides, mille määravad samuti baasivektorid.[1]

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM_1}\parallel\vec{a}\Rightarrow\overrightarrow{OM_1}=X\vec{a}\\ \overrightarrow{OM_2}\parallel\vec{b}\Rightarrow\overrightarrow{OM_2}=Y\vec{b}\\ \overrightarrow{OM_3}\parallel\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{OM_3}=Z\vec{c}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{v}=X\vec{a}+Y\vec{b}+Z\vec{c}$$

Arvud X, Y ja Z on vektori $\vec{v}$ koordinaadid vaadeldava baasi suhtes, sest vektorit saab antud baasi kaudu avaldada ainult ühel viisil.

$$\overrightarrow{OM_1}=X\vec{a}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}|X|=\dfrac{OM_1}{|\vec{a}|}\\ X>0,\ \text{kui}\ \overrightarrow{OM_1}\uparrow\uparrow\vec{a}\\ X<0,\ \text{kui}\ \overrightarrow{OM_1}\uparrow\downarrow\vec{a}\end{array}\right\}\Rightarrow X=\frac{pr_a\vec{v}}{|\vec{a}|}$$

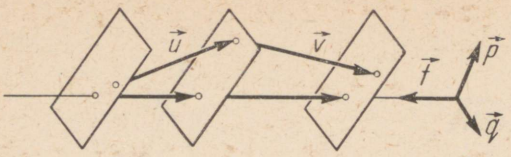
Seega vektori esimene koordinaat on vektori esimese projektsiooni ja esimese baasivektori pikkuse suhe. Analoogiline tähendus on ka vektori ülejäänud koordinaatidel. Erijuhul, kui baasivektoriteks on ühikvektorid, on vektori koordinaatideks tema projektsioonid baasivektoritel.

Vektori $\vec{u}$ projekteerimisel mingile vektorile $\vec{v}$ vektoritega $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ määratud rihis (joon. 42) võib baasiks võtta hulga $(\vec{v};\ \vec{p};\ \vec{q})$. Siis

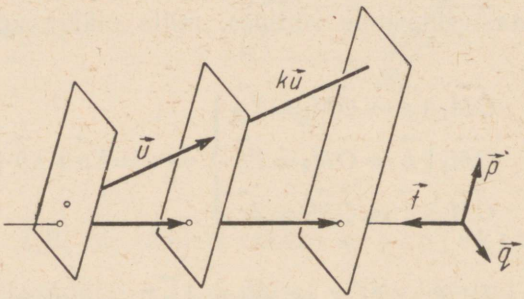
$$pr_{\vec{v}}\vec{u}=X\,|\vec{v}|.$$

---

[1] Et samal viisil toimub jõu lahutamine komponentideks füüsikas, siis nimetatakse vektoreid $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ ja $\overrightarrow{OM_3}$ vektori $\vec{v}$ komponentideks baasivektorite suhtes.



Joon. 45.



Joon. 46.

Olgu vektorile $\vec{t}$ vektorite $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ rihis projekteeritud vektorid

1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ ja $\vec{u}+\vec{v}$ (joon. 45),

2) $\vec{v}$ ja $k\vec{v}$ (joon. 46).

Võtame baasiks hulga $(\vec{t};\ \vec{p};\ \vec{q})$. Olgu vektorite $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$ ja $k\vec{v}$ esimesed koordinaadid selle baasi suhtes vastavalt X_1, X_2, X' ja X''. Siis

$$pr_{\vec{t}}\vec{u}=X_1|\vec{t}|,\ pr_{\vec{t}}\vec{v}=X_2|\vec{t}|,\ pr_{\vec{t}}(\vec{u}+\vec{v})=X'|\vec{t}|,\ pr_{\vec{t}}(k\vec{v})=X''|\vec{t}|.$$

Kasutame lineaartehete kohta tõestatud teoreeme:

$$X'=X_1+X_2 \Rightarrow pr_{\vec{t}}(\vec{u}+\vec{v})=X'|\vec{t}|=(X_1+X_2)|\vec{t}|=$$
$$=X_1|\vec{t}|+X_2|\vec{t}|=pr_{\vec{t}}\vec{u}+pr_{\vec{t}}\vec{v}.$$
$$X'=kX_2 \Rightarrow pr_{\vec{t}}(k\vec{v})=X''|\vec{t}|=kX_2|\vec{t}|=k\,pr_{\vec{t}}\vec{v}.$$

Seega

$$pr_{\vec{t}}(\vec{u}+\vec{v})=pr_{\vec{t}}\vec{u}+pr_{\vec{t}}\vec{v}.$$
$$pr_{\vec{t}}(k\vec{v})=k\,pr_{\vec{t}}\vec{v}.$$

Vektorite summa projektsioon võrdub vektorite projektsioonide summaga.

Vektori ja arvu korrutise projektsioon võrdub vektori projektsiooni ja selle arvu korrutisega.

191. $\vec{v}=(-2;\ 0{,}7;\ 1{,}3)$. Leia vektori $\vec{v}$ projektsioonid baasivektoritel, kui $|\vec{a}|=1{,}5$, $|\vec{b}|=10$ ja $|\vec{c}|=5$.

192. $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, $|\vec{c}|=5$, $pr_a\vec{v}=-12$, $pr_b\vec{v}=18$, $pr_c\vec{v}=-15$. Avalda vektor $\vec{v}$ baasivektorite kaudu.

193. $\vec{v}=(3;\ -7;\ 4{,}1)$, $pr_a\vec{v}=12$, $pr_b\vec{v}=-14$, $pr_c\vec{v}=16{,}4$. Kui pikad on baasivektorid?

194. $\vec{v}=3\vec{r}+4\vec{s}$, $|\vec{r}|=2$ ja $|\vec{s}|=5$. Leia $pr_r\vec{v}$ ja $pr_s\vec{v}$.

195. $\vec{v}=-2\vec{u}$, $pr_u\vec{v}=-8$. Leia $|\vec{u}|$.

196. $|\vec{m}|=\frac{3}{4}$, $|\vec{n}|=\frac{2}{3}$, $pr_m\vec{u}=-6$ ja $pr_n\vec{u}=\frac{4}{9}$. Avalda vektor $\vec{u}$ vektorite $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ kaudu.

197. Baas $(\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c})$ koosneb ühikvektoritest. Punkti O abil on konstrueeritud tetraeeder $OABC$ nii, et $\overrightarrow{OA}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=-3\vec{b}$ ja $\overrightarrow{OC}=1{,}5\vec{c}$. Tahkude OAC ja ABC raskuskeskmed on vastavalt K ja L. Määra vektori $\vec{r}=\overrightarrow{KL}$ projektsioonid baasivektoritel.

198. Tetraeedris $ABCD$ $AB=2$, $AC=3$ ja $AD=4$. Punkt M on tahu BCD raskuskese. Määra vektori $\vec{v}=\overrightarrow{AM}$ projektsioonid vektoritel $\vec{m}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}=\overrightarrow{AC}$ ja $\vec{p}=\overrightarrow{AD}$.

199. Tetraeedris $KLMN$ $KL=4$, $KM=6$ ja $KN=5$. Punkt S on serva LM keskpunkt. Määra vektori $\vec{u}=\overrightarrow{SN}$ projektsioonid vektoritel $\vec{l}=\overrightarrow{KL}$, $\vec{m}=\overrightarrow{KM}$ ja $\vec{n}=\overrightarrow{KN}$.

200. Rööptahuka $A\ldots D_1$ mõõtmed on: $AB=8$, $AD=6$ ja $AA_1=9$. Servade BB_1 ja C_1D_1 keskpunktid on vastavalt P ja Q. Määra vektori $\vec{k}=\overrightarrow{PQ}$ projektsioonid vektoritel $\vec{t}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$ ja $\vec{v}=\overrightarrow{AA_1}$.

Kasutame vektoreid selleks, et varustada koordinaatidega ka ruumi punktid.

Valime ruumis vabalt punkti O. Ruumi iga punkti M jaoks leidub üks ja ainult üks vektor $\vec{v}$, mis viib punkti O punkti M, s. t. mille puhul $\vec{v}=\overrightarrow{OM}$. Vastupidi, iga vektori $\vec{v}$ jaoks leidub üks ja ainult üks punkt M, millesse vektor $\vec{v}$ viib punkti O, s. o. mille puhul $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$.

Seega on punkti O abil korraldatud üksühene vastavus ruumi punktide ja vektorite vahel.

Vektorit $\overrightarrow{OM}$ nimetatakse punkti M **kohavektoriks** punkti O suhtes.

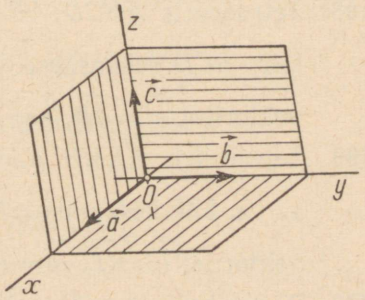
Def. **Hulka $(O; \vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$, milles O on ruumis vabalt valitud punkt ja $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ ruumi mingi vektorbaas, nimetatakse ruumi reeperiks ja punkti O selle reeperi alguspunktiks. Punkti M kohavektori $\overrightarrow{OM}$ koordinaate baasi $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ suhtes nimetatakse punkti M afiinseteks[1] koordinaatideks reeperi $(O; \vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ suhtes.**

Ruumi reeper korraldab üksühese vastavuse ruumi punktide ja järjestatud reaalarvukolmikute vahel. Punkti koordinaadid erinevate reeperite suhtes on erinevad.

Punkti koordinaate tähistatakse väikeste tähtedega. Punkti M jaoks, mille koordinaadid on x, y ja z, kasutatakse tähist $M(x; y; z)$. Seega

$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}.$$

Punkti koordinaadid on baasivektorite kaudu järjestatud. Punkti esimest koordinaati x nimetatakse **abstsissiks,** teist koordi-



Joon. 47.

[1] Ruumi punktidele saab omistada ka teistsuguseid, mitteafiinseid koordinaate. Et me neid ei vaatle, siis edaspidi räägime lihtsalt punkti koordinaatidest.

naati y punkti **ordinaadiks** ja kolmandat koordinaati z punkti **aplikaadiks.**

Reeperi alguspunkt O ja baasivektorid määravad kolm mittekomplanaarset sirget, mida nimetatakse **koordinaattelgedeks** (joon. 47):

$\{P \mid \overrightarrow{OP} = x\vec{a}\}$ x-telg ehk abstsisstelg,

$\{P \mid \overrightarrow{OP} = y\vec{b}\}$ y-telg ehk ordinaattelg,

$\{P \mid \overrightarrow{OP} = z\vec{c}\}$ z-telg ehk aplikaattelg.

Koordinaattelje suunda joonisel osutame vastavalt tähega x, y või z. Vektorite käsitlemisel nooleteravikku telje «lõppu» ei sobi märkida, sest telg ei ole vektor.

Baasivektorid määravad kolm rihti. Reeperi alguspunkti läbib nendes rihtides kolm tasandit, mida nimetatakse **koordinaattasanditeks:**

$\{P \mid \overrightarrow{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}\}$ xy-tasand,

$\{P \mid \overrightarrow{OP} = x\vec{a} + z\vec{c}\}$ xz-tasand,

$\{P \mid \overrightarrow{OP} = y\vec{b} + z\vec{c}\}$ yz-tasand.

Koordinaattasandid lõikuvad mööda koordinaattelgi.

Kui punkt on abstsisssteljel, siis $\overrightarrow{OM} \| \vec{a}$, mistõttu

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} \Rightarrow M(x; 0; 0).$$

Samuti veendume, et punkt $M(0; y; 0)$ on ordinaatteljel ja $M(0; 0; z)$ aplikaatteljel. Telgede lõikepunkt — reeperi alguspunkt — on $O(0; 0; 0)$.

Kui punkt on xy-tasandil, siis $\overrightarrow{OM}$ on komplanaarne vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Järelikult

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{a} + y\vec{b} + 0\vec{c} \Rightarrow M(x; y; 0).$$

Samuti veendume, et $M(x; 0; z)$ on xz-tasandil ja $M(0; y; z)$ on yz-tasandil.

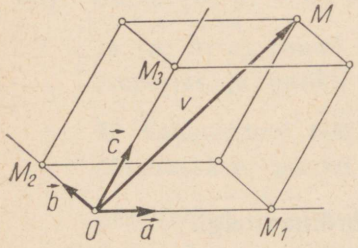
Kui punkt M ei ole ühelgi koordinaattasandil, siis tema ükski koordinaat ei ole null. Punkti M koordinaadid on sel juhul määra-

tud koordinaattasanditega paralleelsete tasandite

$$\{P \mid \overrightarrow{MP} = x\vec{a} + y\vec{b}\},$$
$$\{P \mid \overrightarrow{MP} = x\vec{a} + z\vec{c}\},$$
$$\{P \mid \overrightarrow{MP} = y\vec{b} + z\vec{c}\}$$

ja koordinaattelgede lõikepunktidega M_1 $(x;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ y;\ 0)$ ja M_3 $(0;\ 0;\ z)$ (joon. 48). Tõepoolest,

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= x\vec{a} \\ \overrightarrow{OM_2} &= y\vec{b} \\ \overrightarrow{OM_3} &= z\vec{c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \Rightarrow M(x;\ y;\ z).$$



Joon. 48.

Ehkki punkti koordinaadid on defineeritud vektori koordinaatide kaudu, on punkti ja vektori koordinaatide vahel siiski oluline erinevus. Vektori koordinaadid määratakse vektorbaasiga; nad ei sõltu punktist O, mida me nende määramisel kasutame. Seepärast vektori koordinaatide puhul ei saa rääkida koordinaattasanditest ega -telgedest; siin on olulised vaid rihid, mille määravad baasivektorid. Punkti koordinaadid sõltuvad nii baasivektorite kui ka punkti O valikust. Seepärast on punkti koordinaadid alati seotud koordinaattasandite ja -telgedega.

Teoreem. **Kui $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, siis $\vec{v}$ koordinaatideks on punktide B ja A koordinaatide vahed.**

Tõestus. Viigu vektor $\vec{v} = (X;\ Y;\ Z)$ punkti $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ punkti B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Et

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

siis

$$\vec{v} = (X;\ Y;\ Z) = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

Et vektori koordinaadid on antud baasiga üheselt määratud, siis

$X=x_2-x_1$, $Y=y_2-y_1$, $Z=z_2-z_1$. ∎

Punkti $M(x; y; z)$ kohavektori $\overrightarrow{OM}=(X; Y; Z)$ puhul

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OO},$$

seega

$$(X; Y; Z)=(x-0; y-0; z-0),$$

mistõttu

$$X=x,\ Y=y,\ Z=z.$$

201. Määra punktide $A(1; -2; 3)$ ja $B(-7; 5; 4)$ abil vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid.

202. Antud on punkt $M\left(\frac{2}{3}; 4; \frac{1}{2}\right)$ ja vektor $\vec{s}=\left(\frac{1}{3}; -5; \frac{3}{2}\right)$. Määra punkt N nii, et $\overrightarrow{MN}=\vec{s}$.

203. Antud on neli punkti $P(2; 2; -7)$, $Q(5; -4; 2)$, $R(-1; 5; -10)$ ja $S(5; -7; 8)$. Kas vektorid $\overrightarrow{PQ}$ ja $\overrightarrow{RS}$ on kollineaarsed?

204. Antud on punkt $L(2{,}3; -3{,}5; -0{,}8)$ ja vektor $\vec{v}=(-0{,}4; 1{,}2; -3)$. Määra punkt K nii, et $\overrightarrow{KL}=\vec{v}$.

205. Antud on punktid $A(3; 0; -1)$, $B(-3; 1; -3)$, $C(-2; 4; 4)$ ja $D(7; -2; 7)$. Kas sirged AB ja CD on paralleelsed?

206. Kas punktid $A(-3; 2; 4)$, $B(6; 5; 10)$ ja $C(3; 4; 8)$ on kollineaarsed?

207. Kas punktid $A(3; 2; +1)$, $B(2; 4; 2)$ ja $C(0; 8; 8)$ on kollineaarsed?

208. Kas punktid $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$ ja $D(3; -5; 3)$ on trapetsi tippudeks?

209. Mis liiki nelinurga tippudeks on punktid $A(2; 0; -4)$, $B(7; -15; 16)$, $C(-1; -1; 11)$ ja $D(-4; 8; -1)$?

210. Mis liiki nelinurga tippudeks on punktid $A(1; -3; -2)$, $B(8; 0; -4)$, $C(4; 8; -3)$ ja $D(-3; 5; -1)$?

211. Tõesta, et sirglõigu keskpunkti koordinaatideks on otspunktide vastavate koordinaatide aritmeetilised keskmised.

212. $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -4)$ ja $C(-1; 1; 2)$ on rööpküliku $ABCD$ tipud. Leia neljas tipp. Kontrollimiseks määra mõlema diagonaali keskpunktid.

213. $A(2; -5; 3)$ on kolmnurga ABC tipp; $\overrightarrow{AB} = (4; 1; 2)$ ja $\overrightarrow{BC} = (3; -2; 5)$. Leia ülejäänud tipud ja vektor $\overrightarrow{CA}$.

214. $A(2; -1; 1)$, $B(1; 3; 4)$, $A_1(4; 2; 0)$ ja $D(6; 0; 1)$ on rööptahuka $A \ldots D_1$ tipud. Leia ülejäänud tipud.

215. Missugusel koordinaattasandil või -teljel asetsevad punktid $A(0; -3; 1)$, $B(0; 4; 0)$, $C(2; 0; -5)$, $D(0; 0; -3)$, $E(7; -9; 0)$, $F(11; 0; 0)$?

216. Missugune koordinaatide abil väljendatav tingimus iseloomustab tasandit, mis on paralleelne xy-tasandiga? xz-tasandiga? yz-tasandiga?

217. Missugune koordinaatide abil väljendatav tingimus iseloomustab sirget, mis on paralleelne x-teljega? y-teljega? z-teljega?

218. Kirjelda sirge asendit koordinaattelgede ja -tasandite suhtes, teades, et sirge sihivektoriks on $\vec{s}_1 = (3; 0; -5)$, $\vec{s}_2 = (2; 0; 0)$, $\vec{s}_3 = (-5; -2; 0)$, $\vec{s}_4 = (0; 5; 4)$, $\vec{s}_5 = (0; 0; 10)$, $\vec{s}_6 = (0; -7; 0)$, $\vec{s}_7 = (1; -2; 9)$.

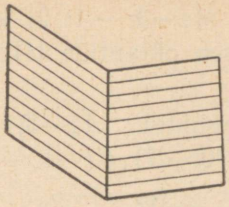
3.11. KOORDINAATOKTANDID.

Sirge ja sellega äärneva pooltasandi ühendit nimetatakse kinniseks pooltasandiks. Tasandi ja sellega äärneva poolruumi ühendit nimetatakse kinniseks poolruumiks.

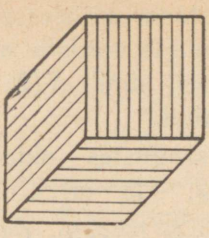
Rääkides pooltasandist või poolruumist mõtleme edaspidi alati kinnist pooltasandit või kinnist poolruumi.

Def. **Kahe lõikuvate või ühtivate äärtasanditega poolruumi ühisosa nimetatakse kahetahuliseks nurgaks** (joon. 49). **Äärtasandite lõikesirget nimetatakse kahetahulise nurga servaks ja nurgale kuuluvaid äärpooltasandeid nurga tahkudeks.**

Def. **Kolme ühes punktis lõikuvate äärtasanditega poolruumi ühisosa nimetatakse kolmetahuliseks nurgaks** (joon. 50). **Äärtasandite ühist punkti nimetatakse kolmetahulise nurga tipuks ja nurgale kuuluvate äärtasandite osi nurga tahkudeks.**



Joon. 49.



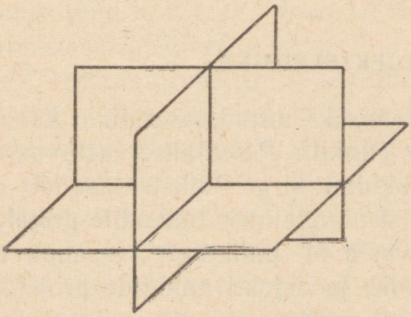
Joon. 50.

Kolm ühes punktis lõikuvat tasandit määravad kaheksa ühise tipuga kolmetahulist nurka (joon. 51). Neid kolmetahulisi nurki nimetatakse **ruumi oktantideks.**

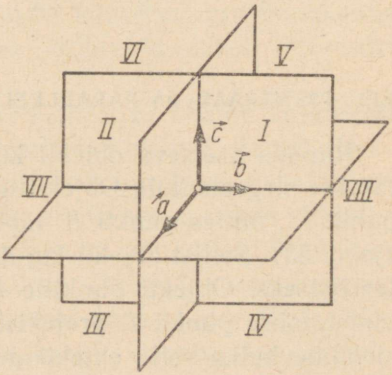
Ruumi oktandid, mille määravad koordinaattasandid, nummerdatakse nagu koordinaatveerandid planimeetrias. Et kolmetahulise nurga servadeks on kiired ja antud punktist lähtuva kiire saab määrata vektoriga, siis on võimalik kolmetahulist nurka kirjeldada kolme vektori abil. Kasutame oktantide järgmist numeratsiooni (joon. 52):

I $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
II $(\vec{a}, -\vec{b}, \vec{c})$
III $(\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c})$
IV $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$

V $(-\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
VI $(-\vec{a}, -\vec{b}, \vec{c})$
VII $(-\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c})$
VIII $(-\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$



Joon. 51.



Joon. 52.

Otsustada, millisesse oktanti kuulub antud punkt, saab punkti koordinaatide märkide abil. Näiteks punkt $M(-3; -1; 2)$ kuulub oktanti VI, punkt $N(2; 0; -5)$ aga asetseb oktantide III ja IV ühisel tahul.

219. Missugustes oktantides asuvad punktid: $A(-3; 4; 1)$, $B(2; -1; -5)$, $C(3; 9; 7)$, $D(-2; -10; -7)$, $E(-1; -9; 3)$, $F(-5; 5; -5)$, $G(8; -2; 6)$, $H(4; 1; -3)$?

220. Millistes oktantides võivad asuda punktid, kui

1) $xy>0$? 2) $yz<0$?
3) $xz>0$? 4) $xyz<0$?
5) $xyz>0$?

221. Kuidas asetsevad koordinaattasandite ja -telgede suhtes punktid: $A(3; -4; -1)$, $B(5; 0; -3)$, $C(-4; 3; 0)$, $D(5; 0; 0)$, $E(0; -1; 2)$, $F(-2; 2; -2)$, $G(0; -7; 0)$, $H(-4; -3; -1)$?

222. On antud punktid $P\left(\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{6}\right)$ ja $Q\left(-\frac{3}{5}; 0; \frac{2}{3}\right)$. Leia

1) lõigu PQ keskpunkti;

2) punkt, mille kohavektor on $\overrightarrow{PQ}$.

223. On antud punktid $A(-2; 3; 0)$, $B(-2; -1; 5)$ ja $C(7; 0; -4)$. Leia punktid, mille kohavektorid on

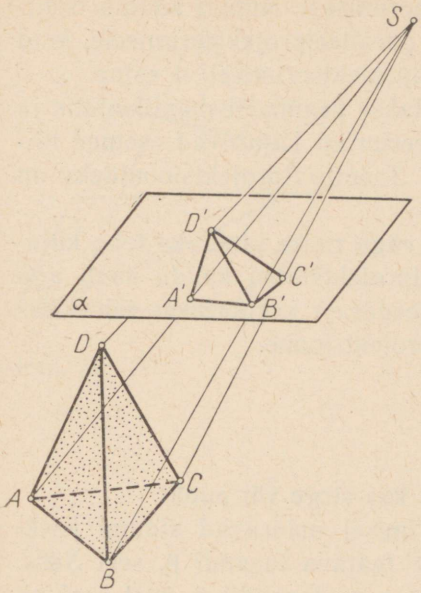
1) $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$;

2) $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{BA}$;

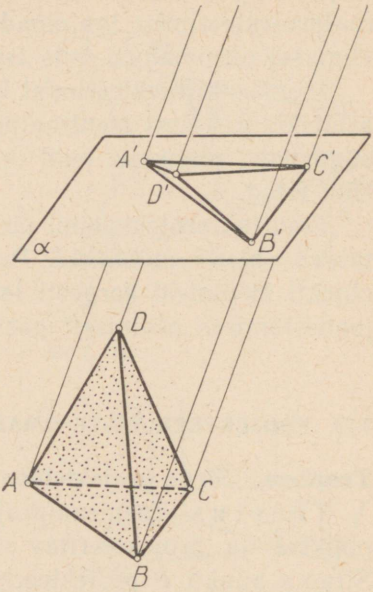
3) $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.

3.12. TSENTRAAL- JA PARALLEELPROJEKTEERIMINE.

Ruumis asetseva objekti kujutamiseks antud tasandil α kasutatakse sirgesidumit. Objekti igale punktile P seatakse vastavusse punkt P', milles punkti P läbiv sidumi sirge lõikab tasandit α (joon. 53). Sellist objekti kujutamist nimetatakse **tasandile projekteerimiseks.** Objekti punktile P vastavat punkti P' tasandil α nimetatakse **punkti P projektsiooniks** ja objekti punktide projektsioonide hulka selle **objekti projektsiooniks** tasandil α. Tasandit, millele toimub projekteerimine, nimetatakse **ekraaniks.**



Joon. 53.



Joon. 54.

Projekteeriv sirgesidum võib koosneda lõikuvatest või paralleelsetest sirgetest. Kui projekteerimine toimub lõikuvate sirgete sidumi abil, siis räägitakse **tsentraalprojekteerimisest**, paralleelsete sirgete sidumi korral kõneldakse aga **paralleelprojekteerimisest** ehk projekteerimisest antud sihis. Joonisel 53 on näidatud, kuidas toimub tetraeedri $ABCD$ tsentraalprojekteerimine tasandile α. Projekteeriva sidumi keskpunkt on S; tetraeedri projektsiooniks on kujund $A'B'C'D'$. Joonisel 54 on kujutatud sama tetraeedri paralleelprojekteerimine.

Tsentraalprojekteerimisel tuleb projekteeriva sidumi keskpunkt valida väljaspool ekraani ja projekteeritavat objekti. Paralleelprojekteerimisel on nõutav, et valitud siht ei ole paralleelne ekraaniga.

Paralleelprojekteerimisest annab ettekujutuse akna kujutis, mis tekib päikesepaistelisel päeval põrandal või seinal. Projekteerivateks sirgeteks on siin päikesekiired. Päikese suure kauguse tõttu võib valgusekiired kujutise piirides lugeda paralleelseteks.

Paralleelprojekteerimist vaadeldaksegi tsentraalprojekteerimise erijuhuna, kus sirgesidumi keskpunkt on lõpmata kaugel. Sellist vaateviisi õigustab asjaolu, et tsentraalprojekteerimine on

tõepoolest üldisem paralleelprojekteerimisest. Nimelt kuulub tsentraalprojekteerimise iga omadus ka paralleelprojekteerimisele, kuid viimasel on omadusi, mis tsentraalprojekteerimisel ei esine.

Tsentraalprojekteerimist kasutatakse peamiselt maalikunstis ja arhitektuuris, sest tsentraalprojekteerimisel kujutuvad esemed niisugustena, nagu me neid näeme. Tsentraalprojektsioonideks on kõik fotod.

Tsentraalprojektsiooni järgi on väga raske kindlaks teha kujutatava objekti mõõtmeid. Paralleelprojektsiooni kaudu saab aga objekti mõõtmeid kergesti leida. Seepärast kasutatakse tehnilises joonestamises peamiselt paralleelprojektsioone.

3.13. PROJEKTEERIMISTE OMADUSI.

Teoreem. **Sirge projektsiooniks on kas sirge või punkt.**

Tõestus. Tsentraalprojekteerimisel määravad sidumi keskpunkt S ja projekteeritav sirge s teatava tasandi β, sest $S \notin s$. Sirge s punkti P projekteeriv sirge p on tasandil β, sest seal on sirge p kaks punkti S ja P. Järelikult on sirge s iga punkti P projektsioon P' sirgel $s' = \alpha \cap \beta$, s. t. sirge s' ongi sirge s tsentraalprojektsioon (joon. 55).

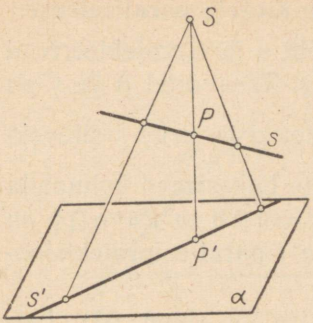
Paralleelprojekteerimisel määravad projekteeritava sirge s punkt P ja sihivektor $\vec{s}$ ning projekteeriva sidumi sihivektor $\vec{p}$ tasandi $\beta = \{X \mid \overrightarrow{PX} = u\vec{s} + v\vec{p}\}$, sest $\vec{s} \nparallel \vec{p}$. Punkti $P \in s$ projekteeriv sirge p on tasandil β, sest $P \in \beta$ ja $\vec{p}$ on komplanaarne selle tasandi rihivektoritega. Seega on sirge s paralleelprojektsiooniks sirge $s' = \alpha \cap \beta$ (joon. 56). ∎

Sirge projektsiooniks on punkt siis ja ainult siis, kui sirge kuulub projekteerivasse sidumisse.

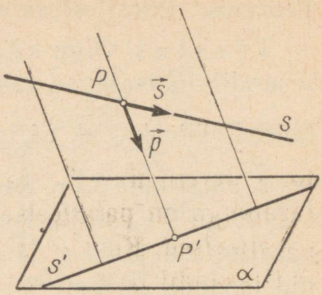
Projekteerivasse sidumisse mittekuuluva sirge s korral võib rääkida seda sirget projekteerivast tasandist (tasand β eelneva teoreemi tõestuskäigus). Viimane eraldab projekteerivast sirgesidumist sirgekimbu, mis projekteerib sirge s ekraanile.

Tsentraalprojekteerimine üldiselt sirgete paralleelsust ei säilita. Näiteks joonisel 57 sirged s ja t kujutuvad ekraanile α lõikuvate sirgetena s' ja t'.

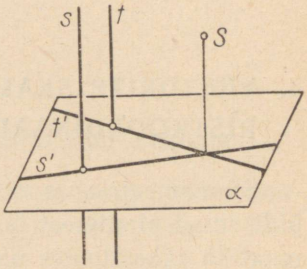
Tsentraalprojekteerimisel sirglõigu kujutiseks võib olla sirglõik, kiir või kiirte paar (joon. 58).



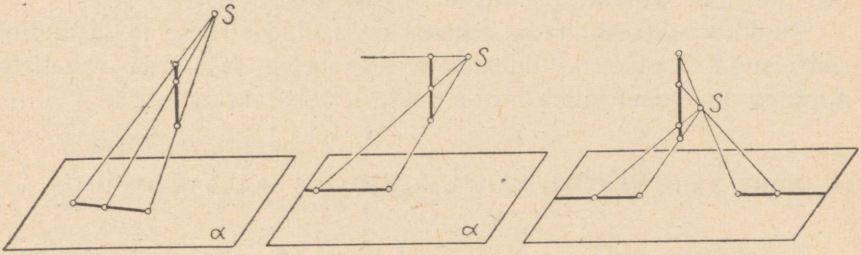
Joon. 55.



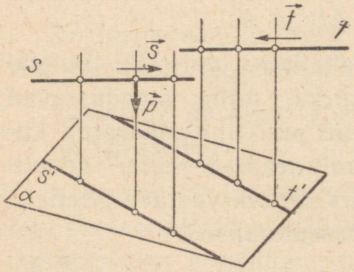
Joon. 56.



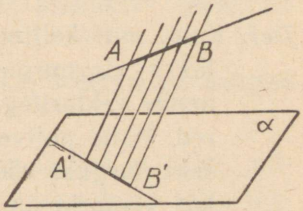
Joon. 57.



Joon. 58.



Joon. 59.



Joon. 60.

Teoreem. **Paralleelprojekteerimine säilitab sirgete paralleelsuse.**

Tõestus. Olgu $s \parallel t$ (joon. 59). Sirgeid s ja t projekteerivad tasandile α teatavad tasandid, olgu β ja γ. Tasanditel β ja γ on ühised rihivektorid, näiteks sidumi sihivektor $\vec{p}$ ja sirge s sihivektor $\vec{s}$. Järelikult $\beta \parallel \gamma$. Paralleelsete tasandite lõikesirged kolmanda tasandiga on paralleelsed. Seega sirged $s' = \alpha \cap \beta$ ja $t' = \alpha \cap \gamma$ on paralleelsed. Kuid s' ja t' ongi sirgete s ja t paralleelprojektsioonid tasandil α. ∎

Sirglõigu paralleelprojektsiooniks on sirglõik (joon. 60). Eelneva teoreemi põhjal säilitab paralleelprojekteerimine ka sirglõikude paralleelsuse.

4. VEKTORITE SKALAARKORRUTIS. RISTSEIS JA RISTKOORDINAADID RUUMIS.

Stereomeetrias seni tundma õpitud afiinsed koordinaadid on üldisemad planimeetrias vaadeldud ristkoordinaatidest. Kuid matemaatika rakendustes on kõige tähtsamad nimelt ristkoordinaadid, mis me nüüd võtame kasutusele ka ruumis.

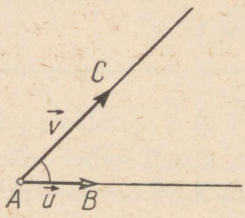
Punkti ristkoordinaadid ruumis on seotud sirgete ja tasandite ristseisuga. Ristseisu, üldisemalt, sirgete ja tasandite vaheliste nurkade uurimisel läheb tarvis vektorite skalaarkorrutist.

4.1. NURK KAHE VEKTORI VAHEL. VEKTORITE SKALAARKORRUTIS.

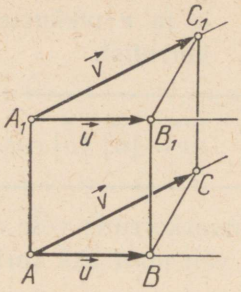
Rakendame mingid nullvektorist erinevad vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ vabalt valitud punkti A. Olgu $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ja $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (joon. 61). Punkt A ja vektorid $\vec{u}$ ning $\vec{v}$ määravad kaks kiirt AB ja AC.

Def. **Kahe mittekollineaarse vektori vaheliseks nurgaks nimetatakse sirgnurgast väiksemat nurka, mille moodustavad nende vektoritega ja vabalt valitud punktiga määratud kiired. Kahe nullvektorist erineva kollineaarse vektori vaheliseks nurgaks võetakse nurk 0 või sirgnurk vastavalt sellele, kas vektorid on sama- või vastassuunalised.**

Vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ vahelist nurka märgime sümboliga $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.



Joon. 61.



Joon. 62

Definitsiooni kohaselt

$$0° \leqslant \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leqslant 180° \text{ ehk } 0 \leqslant \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leqslant \pi.$$

Teoreem. **Kahe vektori vaheline nurk ei sõltu tipu asukohast.**

Tõestus. Olgu vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ vahelise nurga moodustamisel kasutatud erinevaid punkte A ja A_1 (joon. 62), siis

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1},$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} \Rightarrow BC = B_1C_1 \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} \Rightarrow AB = A_1B_1 \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} \Rightarrow AC = A_1C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1,$$

$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow \angle BAC = \angle B_1A_1C_1. \blacksquare$$

Vektoritevaheline nurk ei sõltu vektorite pikkusest, seepärast võib tõestatud teoreemi sõnastada ka nii:

vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.

Vektorite skalaarkorrutise mõiste stereomeetrias ei erine millegi poolest planimeetrias õpitust. Teatav erinevus tekib alles skalaarkorrutise väljendamisel koordinaatide kaudu.

Def. **Vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ skalaarkorrutiseks** (tähis: $\vec{u}\vec{v}$) **nimetatakse**

$\vec{u}$ ja $\vec{v}$ pikkuste ning $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ vahelise nurga koosinuse korrutist.

$$\boxed{\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\angle(\vec{u},\vec{v}).}$$

Skalaarkorrutis võib olla null kahel ja ainult kahel juhul:
1) kui vähemalt üks korrutatavatest vektoritest on nullvektor,
2) kui vektorid on risti (tähis: $\vec{u}\perp\vec{v}$).

Et nullvektori võib lugeda ristiolevaks iga vektoriga, siis võrdus $\vec{u}\vec{v}=0$ on vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ **ristseisu tunnus**:

$$\vec{u}\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}.$$

Skalaarkorrutis võib olla nii positiivne kui ka negatiivne arv:

$$\vec{u}\vec{v}\begin{cases} >0, \text{ kui } \angle(\vec{u},\vec{v})<\frac{\pi}{2}, \\ <0, \text{ kui } \angle(\vec{u},\vec{v})>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Kollineaarsete vektorite skalaarkorrutis on absoluutväärtuselt võrdne vektorite pikkuste korrutisega, kusjuures

$$\vec{u}\vec{v}=\begin{cases} |\vec{u}|\,|\vec{v}|, \text{ kui } \vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}, \text{ s.t. } \angle(\vec{u},\vec{v})=0, \\ -|\vec{u}|\,|\vec{v}|, \text{ kui } \vec{u}\uparrow\downarrow\vec{v}, \text{ s.t. } \angle(\vec{u},\vec{v})=\pi. \end{cases}$$

Vektori skalaarkorrutist iseendaga nimetatakse vektori skalaarruuduks (tähis: $\vec{v}^2$). Vektori pikkus võrdub ruutjuurega tema skalaarruudust:

$$\vec{v}^2=\vec{v}\vec{v}=|\vec{v}|\,|\vec{v}|=|\vec{v}|^2 \Rightarrow \boxed{|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^2}.}$$

Tuleb silmas pidada, et $\sqrt{\vec{v}^2}\neq\vec{v}$, sest $\vec{v}^2$ on arv.

Kui skalaarkorrutis on teada, siis vektoritevahelise nurga saab arvutada valemiga

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}.$$

224. Leia vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ skalaarkorrutis, kui

1) $|\vec{u}|=8$, $|\vec{v}|=5$, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60°$;
2) $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=7$, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 120°$;
3) $\vec{u} \perp \vec{v}$;
4) $|\vec{u}|=11$, $|\vec{v}|=4$, $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$;
5) $|\vec{u}| = 9$, $|\vec{v}|=8$, $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$.

225. $ABCDEF$ on korrapärane kuusnurk, mille keskpunkt on O ja külg on a. Leia skalaarkorrutised:

1) $\vec{AB}\,\vec{ED}$; 2) $\vec{AD}\,\vec{CB}$; 3) $\vec{OA}\,\vec{OB}$;
4) $\vec{OA}\,\vec{OC}$; 5) $\vec{OA}\,\vec{OD}$; 6) $\vec{AB}\,\vec{AD}$;
7) $\vec{AB}\,\vec{AC}$.

226. Tetraeedri iga serva pikkus on a. Servade AB, AD ja DC keskpunktid on vastavalt M, N ja P. Leia skalaarkorrutised:

1) $\vec{AC}\,\vec{AB}$; 2) $\vec{AD}\,\vec{DB}$; 3) $\vec{PN}\,\vec{AC}$;
4) $\vec{MN}\,\vec{BC}$; 5) $\vec{NP}\,\vec{BA}$; 6) $\vec{PM}\,\vec{PB}$.

227. 1) Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuus $AB=c$. Arvuta summa

$$\vec{AB}\,\vec{AC}+\vec{BC}\,\vec{BA}+\vec{CA}\,\vec{CB}.$$

2) Tõesta, et paralleelprojekteerimine säilitab paralleelsete sirglõikude suhte.

Rakendame mittekollineaarsed vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ vabalt valitud punkti A. Olgu $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ja $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ (joon. 63). Planimeetriast on teada, et tasandil ABC leidub üks ja ainult üks sirge s, mis läbib punkti C ja on risti sirgega $u=AB$. Olgu $s \cap u = C_1$.

Vektor $\overrightarrow{AC_1}$ määrab vektori $\vec{v}$ projektsiooni vektoril $\vec{u}$. Et $s \perp u$, siis $pr_{\vec{u}}\vec{v}$ nimetatakse $\vec{v}$ **ristprojektsiooniks** vektoril $\vec{u}$.

Teoreem. **Vektori $\vec{v}$ ristprojektsioon vektoril $\vec{u}$ võrdub vektori $\vec{v}$ pikkuse ning $\vec{v}$ ja $\vec{u}$ vahelise nurga koosinuse korrutisega.**

Tõestus. Olgu $\angle(\vec{u},\vec{v})=\varphi$. Kui $\varphi<\frac{\pi}{2}$ (joon. 63), siis $\overrightarrow{AC_1} \uparrow\uparrow \vec{u}$ ja täisnurksest kolmnurgast AC_1C ilmneb, et

$$AC_1=|\vec{v}|\cos\varphi.$$

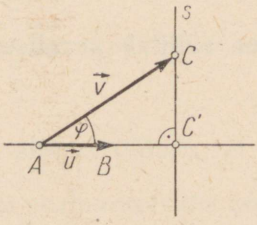
Kui aga $\varphi>\frac{\pi}{2}$ (joon. 64), siis $\overrightarrow{AC_1} \uparrow\downarrow \vec{u}$ ning

$$AC_1=|\vec{v}|\cos(\pi-\varphi)=-|\vec{v}|\cos\varphi.$$

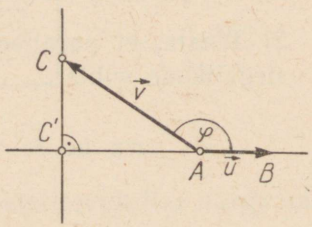
Kuid

$$pr_{\vec{u}}\vec{v}=\begin{cases} AC_1, \text{ kui } \overrightarrow{AC_1} \uparrow\uparrow \vec{u}, \\ -AC_1, \text{ kui } \overrightarrow{AC_1} \uparrow\downarrow \vec{u}. \end{cases}$$

Järelikult kehtib mõlemal juhul võrdus



Joon. 63.



Joon. 64.

$$pr_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}| \cos\varphi.$$

See võrdus on tõene ka siis, kui $\vec{u} \perp \vec{v}$ või $\vec{u} \| \vec{v}$. Tõepoolest, esimesel juhul $\overrightarrow{AC_1} = \vec{0} \Rightarrow pr_{\vec{u}}\vec{v} = 0$, kuid ka $|\vec{v}| \cos\frac{\pi}{2} = |\vec{v}| \cdot 0 = 0$.

Teisel juhul aga

$\overrightarrow{AC_1} \uparrow\uparrow \vec{u} \Rightarrow pr_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}|$, kuid ka $|\vec{v}| \cos 0 = |\vec{v}| \cdot 1 = |\vec{v}|$,

$\overrightarrow{AC_1} \uparrow\downarrow \vec{u} \Rightarrow pr_{\vec{u}}\vec{v} = -|\vec{v}|$, kuid ka $|\vec{v}| \cos\pi =$

$= |\vec{v}| \cdot (-1) = -|\vec{v}|$. ∎

Järeldus. *Kahe vektori skalaarkorrutis on võrdne korrutisega, mille teguriteks on ühe vektori pikkus ja teise vektori ristprojektsioon esimesel vektoril:*

$$\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|\, pr_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}|\, pr_{\vec{v}}\vec{u}.$$

4.3. SKALAARKORRUTISE ALGEBRALISED OMADUSED.

Teoreem. **Vektorite skalaarkorrutis on**

1) **kommutatiivne,**
2) **distributiivne vektorite summa suhtes,**
3) **assotsiatiivne arvteguri suhtes,**

s. t.

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u},$$
$$(\vec{t}+\vec{u})\vec{v} = \vec{t}\vec{v} + \vec{u}\vec{v},$$
$$(a\vec{u})\vec{v} = a(\vec{u}\vec{v}) = \vec{u}(a\vec{v}).$$

Tõestus. Väite esimene osa järeldub arvude korrutise kommutatiivsusest:

$$\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\angle(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{v}|\,|\vec{u}| \cos\angle(\vec{v},\vec{u}) = \vec{v}\vec{u}.$$

Väite kaks ülejäänud osa tõestame skalaarkorrutise ja vektori ristprojektsiooni vahelise seose abil. Seejuures kasutame vektori projektsioonide omadusi:

$$(\vec{t}+\vec{u})\vec{v}=|\vec{v}|\,pr_{\vec{v}}(\vec{t}+\vec{u})=|\vec{v}|\,(pr_{\vec{v}}\vec{t}+pr_{\vec{v}}\vec{u})=$$
$$=|\vec{v}|\,pr_{\vec{v}}\vec{t}+|\vec{v}|\,pr_{\vec{v}}\vec{u}=\vec{t}\vec{v}+\vec{u}\vec{v}.$$
$$(a\vec{u})\vec{v}=|\vec{v}|\,pr_{\vec{v}}(a\vec{u})=|\vec{v}|\,(a\,pr_{\vec{v}}\vec{u})=a(|\vec{v}|\,pr_{\vec{v}}\vec{u})=a(\vec{u}\vec{v}).$$

Samal viisil on tõestatav, et $\vec{u}(a\vec{v})=a(\vec{u}\vec{v})$. ∎

Vektorite skalaarkorrutisel ja arvude korrutisel on niisiis rida ühiseid algebralisi omadusi. Kuid neil esineb ka mitmeid olulisi erinevusi.

Skalaarkorrutis ei ole assotsiatiivne vektorteguri suhtes, sest $(\vec{t}\vec{u})\vec{v}$ ei ole enam vektorite skalaarkorrutis, vaid reaalarvu $\vec{t}\vec{u}$ ja vektori $\vec{v}$ korrutis, kusjuures

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{t}\vec{u})\vec{v}\parallel\vec{v}\\ \vec{t}(\vec{u}\vec{v})\parallel\vec{t}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{üldiselt } (\vec{t}\vec{u})\vec{v}\neq\vec{t}(\vec{u}\vec{v}).$$

Siit tuleneb, et vektorite skalaarkorrutise puhul ei saa rakendada kõiki arvude algebrast tuntud korrutamise abivalemeid. Näiteks on küll tõene, et

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{u}\vec{v}+\vec{v}\vec{u}-\vec{v}^2=\vec{u}^2-\vec{v}^2,$$

kuid

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}^2-\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2)=\vec{u}^2\vec{u}-(\vec{u}\vec{v})\vec{u}+\vec{v}^2\vec{u}+\vec{u}^2\vec{v}-(\vec{u}\vec{v})\vec{v}+$$
$$+\vec{v}^2\vec{v}\neq\vec{u}^3+\vec{v}^3,$$

sest üldiselt $(\vec{u}\vec{v})\vec{u}\neq\vec{u}^2\vec{v}$ ja $\vec{v}^2\vec{u}\neq(\vec{u}\vec{v})\vec{v}$.

Kahe arvu korrutis on null siis ja ainult siis, kui vähemalt üks tegureist on null. Kahe vektori skalaarkorrutis võib aga null olla ka siis, kui kumbki teguritest ei ole nullvektor; see on nii, kui vektorid on risti.

Siit järeldub, et skalaarkorrutisel ei ole pöördtehet — vektoriga ei saa jagada. Seepärast ei saa võrdust

$$\vec{t}\vec{u}=\vec{v}\vec{u}$$

lihtsustada vektoriga $\vec{u}$ läbijagamise teel. Siin

$\vec{t}\vec{u}=\vec{v}\vec{u} \Rightarrow (\vec{t}-\vec{v})\vec{u}=0 \Rightarrow (\vec{t}-\vec{v}) \perp \vec{u}$,

kusjuures $\vec{t}-\vec{v}$ ei pea olema nullvektor, s. t. võib olla, et $\vec{t} \neq \vec{v}$.

228. $|\vec{v}|=6{,}4$ ja $pr_{\vec{u}}\vec{v}=-3{,}2$. Arvuta $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

229. $|\vec{u}|=10$, $|\vec{v}|=7$ ja $pr_{\vec{u}}\vec{v}=-1{,}4$. Arvuta $\vec{u}\vec{v}$ ja $pr_{\vec{v}}\vec{u}$.

230. Leia $\vec{u}\vec{v}$, kui $\vec{u}=3\vec{k}+\vec{l}-2\vec{m}$, $\vec{v}=\vec{k}-4\vec{l}-5\vec{m}$ ning $\vec{k}$, $\vec{l}$ ja $\vec{m}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid.

231. Tõesta, et vektorid $\vec{s}=\vec{t}(\vec{u}\vec{v})-\vec{u}(\vec{t}\vec{v})$ ja $\vec{v}$ on risti.

232. Tõesta, et vektorid $\vec{k}=\vec{l}-\dfrac{\vec{m}(\vec{m}\vec{l})}{\vec{m}^2}$ ja $\vec{m}$ on risti.

233. On teada, et $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$ ja $\angle(\vec{u}, \vec{v})=120°$. Arvuta

1) $\vec{u}\vec{v}$;
2) $\vec{u}^2$;
3) $\vec{v}^2$;
4) $(\vec{u}+\vec{v})^2$;
5) $(\vec{u}-\vec{v})^2$;
6) $(3\vec{u}-2\vec{v})(\vec{u}+2\vec{v})$;
7) $(3\vec{u}+2\vec{v})^2$;
8) $(2\vec{u}-3\vec{v})^2$.

234. Vektorid $\vec{t}$, $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on paarikaupa risti, $|\vec{t}|=3$, $|\vec{u}|=5$ ja $|\vec{v}|=8$. Arvuta

1) $(3\vec{t}-2\vec{u})(\vec{u}+3\vec{v})$;
2) $(\vec{t}+\vec{u}+\vec{v})^2$;
3) $(\vec{t}+2\vec{u}-3\vec{v})^2$.

235. Missugust tingimust peavad rahuldama vektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$, kui $\vec{u}+\vec{v} \perp \vec{u}-\vec{v}$?

236. Tõesta. et rombi diagonaalid on risti.

Näpunäide. Võta rombi ühest tipust lähtuvad küljed vektoriteks.

237. Jõud $\vec{P}$ ja $\vec{Q}$ on rakendatud ühte punkti; nende jõudude

vaheline nurk on 120°. Arvuta resultantjõu $\vec{R}$ suurus $|\vec{R}|$, kui $|\vec{P}|=7$ ja $|\vec{Q}|=4$.

238. Arvuta vektori $\vec{v}=3\vec{s}-4\vec{t}$ pikkus, kui $\vec{s}$ ja $\vec{t}$ on ristuvad ühikvektorid.

239. Rööpküliku külgedega määratud vektorid on $\vec{p}=5\vec{u}+2\vec{v}$ ja $\vec{q}=\vec{u}-3\vec{v}$. Arvuta rööpküliku diagonaalide pikkused, kui $|\vec{u}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=3$ ja $\angle(\vec{u},\vec{v})=45°$.

240. Arvuta

1) vektorite $\vec{u}=3\vec{k}+2\vec{l}$ ja $\vec{v}=\vec{k}+5\vec{l}$ vaheline nurk, kui $\vec{k}\perp\vec{l}$ ja $|\vec{k}|=|\vec{l}|=1$;

2) kolmnurga ABC nurgad, kui $\overrightarrow{AB}=2\vec{p}+6\vec{q}$, $\overrightarrow{BC}=3\vec{p}+7\vec{q}$, $\overrightarrow{CA}=-3\vec{p}-\vec{q}$ ning $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ on ristuvad ühikvektorid;

3) vektori $\vec{v}=6\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ pikkus ja nurgad, mille ta moodustab ristuvate ühikvektoritega $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$;

4) rööpküliku $ABCD$ diagonaalide vaheline nurk, kui $AB=3$, $AC=1$ ja $\angle BAC=30°$;

5) võrdhaarse täisnurkse kolmnurga teravnurga tippudest joonestatud mediaanide vaheline nurk;

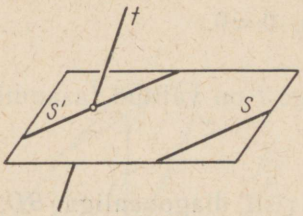
6) vektori $\vec{v}=10\vec{k}+2\vec{l}$ ristprojektsioon vektoril $\vec{u}=5\vec{k}+12\vec{l}$, kui $\vec{k}\perp\vec{l}$ ja $|\vec{k}|=|\vec{l}|=1$.

4.4. NURK KAHE SIRGE VAHEL. KAHE SIRGE NING SIRGE JA TASANDI RISTSEIS.

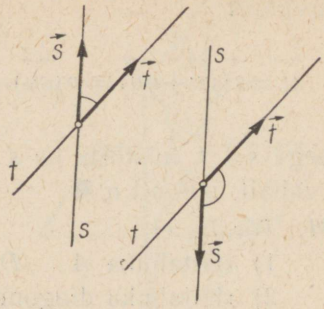
Def. **Nurgaks kahe sirge vahel nimetatakse nurka nende sirgete sihivektorite vahel.**

Selle definitsiooniga on nurk määratud iga kahe sirge vahel, seega ka niisuguste sirgete vahel, mis ei lõiku, s. t. mis on kas paralleelsed või kiivsed.

Et paralleelsetel sirgetel võib võtta ühise sihivektori, siis kiivsirgete s ja t vaheline nurk on vaadeldav nurgana sirgete s' ja t vahel, kus s' on paralleelne sirgega s ja lõikab sirget t (joon. 65).



Joon. 65.



Joon. 66.

Kahe sirge vaheline nurk ei ole üheselt määratud: muutes ühe sirge sihivektori vastassuunaliseks, saame nurga, mis täiendab senise nurga sirgnurgani (joon. 66).

Nurk paralleelsete sirgete vahel on kas 0 või π vastavalt sihivektorite valikule.

Def. **Kaht sirget *s* ja *t* nimetatakse ristuvateks sirgeteks** (tähis: $s \perp t$), **kui nende sihivektorid on risti.**

Def. **Kui sirge *s* on risti iga sirgega tasandil α, siis öeldakse, et sirge *s* on risti tasandiga α** (tähis: $s \perp \alpha$).

Teoreem (sirge ja tasandi ristseisu tunnus). **Kui sirge on risti tasandi kahe lõikuva sirgega, siis sirge on risti tasandiga.**

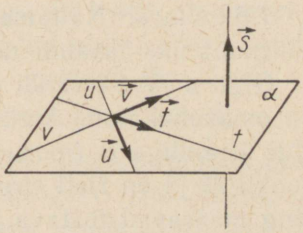
Tõestus. Olgu u ja v tasandi α mingid kaks lõikuvat sirget ning $s \perp u$ ja $s \perp v$ (joon. 67). Vaatleme mingit kolmandat sirget t tasandil α.

Olgu sirgete s, t, u ja v sihivektorid vastavalt $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ ja $\vec{v}$. Eelduse järgi

$$\vec{s} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{s}\vec{u} = 0,$$
$$\vec{s} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{s}\vec{v} = 0.$$

Et $\vec{t}$, $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on komplanaarsed ning $\vec{u} \nparallel \vec{v}$, siis

$$\vec{t} = p\vec{u} + q\vec{v}.$$



Joon. 67.

$$\vec{s}\vec{t}=\vec{s}(p\vec{u}+q\vec{v})=p(\vec{s}\vec{u})+q(\vec{s}\vec{v})=p\cdot 0+q\cdot 0=0.$$

Seega $\vec{s}\perp\vec{t}$, mistõttu ka $s\perp t$. Et aga sirge t on valitud tasandil α vabalt, siis $s\perp\alpha$. ∎

241. Tõesta, et
1) risttahuka $A\ldots D_1$ serv AA_1 on risti diagonaaliga BD;
2) risttahuka diagonaali ruut võrdub risttahuka ühest tipust lähtuvate servade ruutude summaga;
3) kui tetraeedri kõik servad on võrdsed, siis tetraeedri vastasservad on risti.

242. Võrdhaarse kolmnurga võrdsetele külgedele joonestatud mediaanid on risti. Arvuta tipunurga koosinus.

243. $A\ldots D_1$ on risttahukas; $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ja $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. Arvuta vektorite $\overrightarrow{DB_1}$ ja $\overrightarrow{C_1B}$ vaheline nurk.

244. Kolmnurga küljed rahuldavad võrdust $a^2+b^2=5c^2$. Tõesta, et külgedele a ja b joonestatud mediaanid on risti.

245. Tetraeedris $ABCD$ $AD=a$, $AB=b$, $AD\perp AB$, $AD\perp AC$ ja $\angle BAC=45°$. Leia sirgete AC ja BD vahelise nurga koosinus. Arvuta see nurk, kui $a=b$.

4.5. TASANDI NORMAAL.

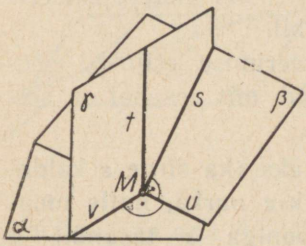
Sirget, mis on risti tasandiga, nimetatakse **tasandi normaaliks** ja tema sihivektorit t a s a n d i n o r m a a l v e k t o r i k s.

Kui kahest paralleelsirgest üks on tasandi normaal, siis on seda ka teine, sest paralleelsetel sirgetel on ühine sihivektor.

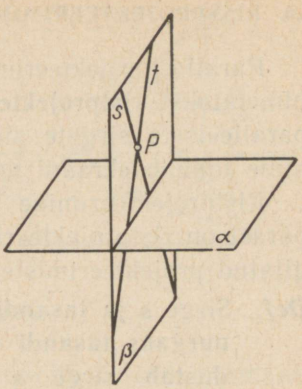
Teoreem. **Ruumi iga punkti läbib üks ja ainult üks tasandi normaal.**

T õ e s t u s. Näitame esmalt, et tasandi iga punkti M läbib vähemalt üks tasandi normaal.

Olgu u ja v tasandi α kaks sirget, mis lõikuvad punktis M ja on omavahel risti. Asetame läbi sirge u mingi tasandi β, mis ei ühti tasandiga α (joon. 68). Tasandil β leidub sirge s, mis läbib punkti M ja on risti sirgega u. Sirged s ja v lõikuvad punktis M ning määravad teatava tasandi γ. Tasandil γ leidub sirge t, mis läbib punkti M ja on risti sirgega v. Seega



Joon. 68.



Joon. 69.

$$\left.\begin{matrix} u \perp v \\ u \perp s \end{matrix}\right\} \Rightarrow u \perp \gamma \Rightarrow u \perp t,$$

$$\left.\begin{matrix} t \perp u \\ t \perp v \end{matrix}\right\} \Rightarrow t \perp \alpha.$$

Tasandi α punkti M läbib normaal t.

Kui $M \notin \alpha$, siis vaatleme tasandi α normaali t, mis läbib tasandi α mingit punkti P. Sirge p, mis läbib punkti M ja on paralleelne sirgega t, on samuti tasandi α normaal. Seega läbib ruumi iga punkti M vähemalt üks tasandi α normaal.

Tõestame nüüd, et antud punkti läbib ainult üks tasandi α normaal.

Oletame vastuväiteliselt, et mingit punkti P läbib tasandi kaks erinevat normaali s ja t. Sirged s ja t määravad teatava tasandi β, mis lõikab tasandit α mööda mingit sirget u (joon. 69). Seejuures s ja t on risti sirgega u. Kuid s, t ja u on komplanaarsed — nad on tasandil β. Seega tasandil β läbib punkti P kaks erinevat sirget, mis on risti sirgega u. Nagu on teada planimeetriast, ei ole see võimalik. Järelikult on tehtud oletus väär: ühtki punkti ei saa läbida tasandi kaks erinevat normaali. ∎

246. Tõesta, et tasandi iga kaks normaali on paralleelsed.

247. Kui iga vektor kollineaarsete vektorite hulgast on risti iga vektoriga komplanaarsete vektorite hulgast, siis öeldakse, et siht on risti rihiga. Tõesta, et ruumis leidub üks ja ainult üks siht, mis on risti antud rihiga.

Paralleelprojekteerimist ekraaniga ristuva sirgesidumi abil nimetatakse **ristprojekteerimiseks**. Et tasandi normaalide hulk on paralleelsete sirgete sidum (ülesanne 246), siis ristprojekteerimine toimub ekraani normaalide sidumi abil.

Ristprojekteerimine on paralleelprojekteerimise erijuht,[1] seepärast on ristprojekteerimisel kõik omadused, mis eespool on selgitatud projekteerimiste uurimisel.

Def. **Sirge *s* ja tasandi α vaheliseks nurgaks (ka sirge *s* kaldenurgaks tasandi α suhtes) nimetatakse nurka, mille moodustab sirge *s* oma ristprojektsiooniga *s* tasandil α** (joon. 70).

Nurk sirge ja tasandi vahel on vähim nurk sirge ja tasandil asetsevate sirgete vahel.

Erijuhul, kui sirge ristprojektsiooniks tasandil on punkt, kuulub sirge tasandi normaalide hulka. Nurgaks sirge ja tasandi vahel on sel juhul täisnurk.

Sirglõigu ristprojektsiooni pikkus võrdub sirglõigu pikkuse ja kaldenurga koosinuse korrutisega:

$$A'B' = AB \cos \varphi.$$

See lause on kergesti välja loetav täisnurksest kolmnurgast AB_1B joonisel 71. Kerge on märgata selle lause seost teoreemiga vektori ristprojektsioonist teisel vektoril. Ühtlasi järeldub siit, et ekraaniga paralleelne lõik võrdub oma ristprojektsiooniga.

Vaatleme veel täisnurga ristprojektsiooni.

Teoreem. **Nurk, mille üks haar on tasandil või on sellega paralleelne, on täisnurk siis ja ainult siis, kui tema ristprojektsioon sellel tasandil on täisnurk.**

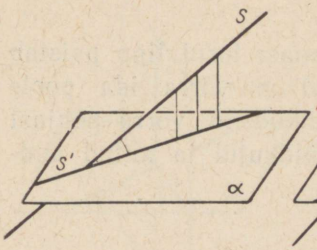
Tõestus. Olgu nurga $\varphi = \angle BAC$ haar AC paralleelne tasandiga α (joon. 72). Kiir AC on siis paralleelne ka oma ristprojektsiooniga $A'C'$ tasandil α.

Sirge AA' on tasandi α normaal, seepärast

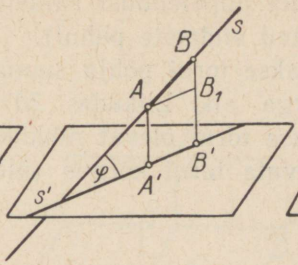
$$A'C' \perp AA' \Rightarrow AC \perp AA'.$$

Kui φ on täisnurk, siis $AC \perp AB$, mistõttu AC on tasandi BAA'

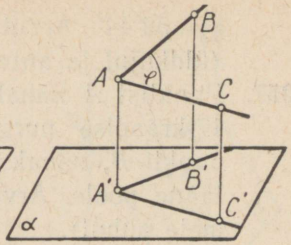
[1] Paralleelprojekteerimist, mis ei toimu risti ekraaniga, nimetatakse ka kaldprojekteerimiseks.



Joon. 70.



Joon. 71.



Joon. 72.

normaal. Et aga $A'C' \parallel AC$, siis ka $A'C'$ on selle tasandi normaal. Järelikult $A'C' \perp A'B'$, s. t. nurga φ ristprojektsioon on täisnurk.

Vastupidi, kui φ ristprojektsioon on täisnurk, s. t. $A'C' \perp A'B'$, siis $A'C'$ on tasandi BAA' normaal. Ka AC peab siis olema selle tasandi normaal. Järelikult $AC \perp AB$, s. t. φ on täisnurk. ∎

248. Kui suur on nurk.
1) kuubi diagonaali ja selle otspunktist lähtuva serva vahel?
2) kuubi diagonaali ja tahu vahel?

249. Risttahuka mõõtmed on 4 cm, 5 cm ja 7 cm. Kui suur on nurk risttahuka diagonaali ja kõige väiksema tahu vahel?

250. Väljaspool tasandit olevast punktist lähtub kaldlõik, mille pikkus on 35 cm. Selle kaldlõigu ristprojektsiooni pikkus on 12 cm. Kui suur on lõigu kaldenurk tasandi suhtes?

251. Kaldlõigu pikkus on 13,4 m; lõigu kaldenurk tasandi suhtes on 63°36′. Arvuta lõigu ristprojektsiooni pikkus.

252. Punktist, mille kaugus tasandist on 12 cm, lähtub tasandi 20 cm pikkune kaldlõik. Leia kaldlõigu ristprojektsiooni pikkus ja kaldenurga suurus.

253. Lõigu otspunktid on tasandist 3 dm ja 6,3 dm kaugusel. Leia lõigu ristprojektsiooni pikkus, kui lõigu pikkus on 6,5 dm.

254. Lõik, mille pikkus on 20 cm, lõikab tasandit nii, et lõigu otspunktid on tasandist 4 cm ja 6 cm kaugusel. Kui suur on lõigu ja tasandi vaheline nurk?

255. Ruudu külje pikkus on 20 cm. Ruudu keskpunktist O lähtub 15 cm pikkune lõik OP risti ruudu tasandiga. Punktist P on tõmmatud lõik punkti C. Arvuta lõigu PC kaldenurk ruudu tasandi suhtes.

256. Täisnurkses kolmnurgas kaateti a lähisnurk $\varphi_1 = 36°48'$. Kaatet a on tasandil α ja kaatet b moodustab tasandiga α nurga

$\varphi_2 = 52°44'$. Arvuta hüpotenuusi kaldenurk tasandi α suhtes (üldkujul ja antud andmete puhul).

257. Punktist A nähakse torni põhja suunas; torni tipp paistab 17-kraadise nurga all. Liikudes 70 m võrra ida poole punkti B, nähakse torni olevat nihkunud 40° võrra põhjast lääne poole. Arvuta torni kõrgus (üldkujul ja antud andmete puhul).

4,7. KAHETAHULINE NURK. KAHE TASANDI RISTSEIS.

Et omistada kahetahulisele nurgale mõõtarv, vaadeldakse kaht kiirt, mis lähtuvad kahetahulise nurga serva mingist punktist, on risti servaga ja asetsevad teine teisel tahul (joon. 73). Nurka kahe sellise kiire vahel nimetatakse kahetahulise nurga **joonnurgaks**.

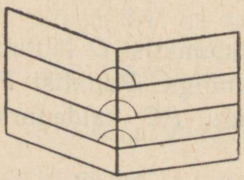
Joonnurga suuruse arvutamisel kasutatakse vektoreid. Et erinevate tippudega joonnurkade puhul kasutatavad vektorid on vastavalt kollineaarsed ja samasuunalised, siis tulemus ei sõltu joonnurga tipu asukohast kahetahulise nurga serval — kõik antud kahetahulise nurga joonnurgad on võrdsed.

Joonnurga suurus võetaksegi kahetahulise nurga mõõtarvuks. Seepärast öeldakse, et *kahetahulist nurka mõõdab tema joonnurk*.

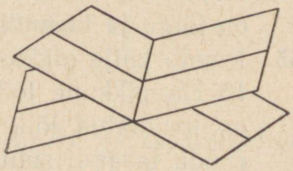
Kahe tasandi lõikumisel tekib neli kahetahulist nurka (joon. 74). Nende kahetahuliste nurkade joonnurkade võrdlemine näitab, et tegemist on kahe võrdsete kahetahuliste nurkade paariga.

Def. **Nurgaks kahe tasandi vahel nimetatakse kahetahulist nurka, mille moodustavad need tasandid.**

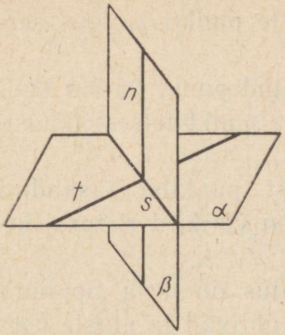
Def. **Kui kahe tasandi lõikumisel tekkinud kahetahulised nurgad on kõik võrdsed, siis öeldakse, et need tasandid on risti** (tähis: $\alpha \perp \beta$).



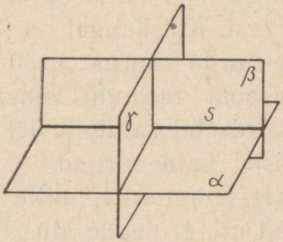
Joon. 73.



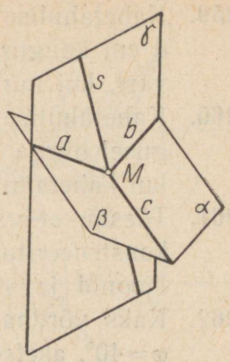
Joon. 74.



Joon. 75.



Joon. 76.



Joon. 77.

Teoreem. **Tasandi α normaali läbiv tasand on risti tasandiga α.**

Tõestus. Läbigu tasand β tasandi α normaali n ja olgu s nende tasandite lõikesirge (joon. 75). Et $n \perp \alpha$, siis $n \perp s$, seepärast joonnurga üheks haaraks võib võtta kiire normaalil n. Joonnurga teine haar on siis sirgel t, mis läbib normaali n ja tasandi α lõikepunkti. Et $n \perp t$, s. t. sirgete n ja t vahelised nurgad on kõik võrdsed, siis $\alpha \perp \beta$. ■

Teoreem. **Tasand on risti kahe lõikuva tasandiga siis ja ainult siis, kui ta on risti nende tasandite lõikesirgega.**

Tõestus.

Piisavus. Olgu tasand γ risti tasandite α ja β lõikesirgega s (joon. 76). Siis s on tasandi γ normaal. Tasandid α ja β läbivad sirget s, seega eelneva teoreemi põhjal $\alpha \perp \gamma$ ja $\beta \perp \gamma$.

Tarvilikkus. Olgu tasand γ risti tasanditega α ja β, $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = a$ ja $a \cap b \cap c = \{M\}$ (joon. 77). Vaatleme tasandite α ja γ vahelise kahetahulise nurga joonnurka, mille tipp on M. Selle joonnurga üks haar on sirgel $s \in \gamma$ ja teine sirgel $n \in \alpha$. Et $\alpha \perp \gamma$, siis $s \perp n$. Kuid ka $b \perp n$. Seega on sirge n risti kahe lõikuva sirgega tasandil γ, s. t. ta on tasandi γ normaal. Niisiis, tasandi γ normaal, mis läbib punkti M, on tasandil α.

Samal viisil veendume sirge a abil, et tasandi γ normaal n on tasandil β. Järelikult, $n = \alpha \cap \beta$, s. t. $n = c$. See aga tähendab, et $\gamma \perp c$. ■

258. Määra kahetahulise nurga suurus, kui punkt, mis asetseb ühel tahul, on nurga servast 2 korda kaugemal kui teisest tahust.

259. Kahetahulise nurga ühel tahul on võetud punkt, mis on a cm kaugusel teisest tahust. Leia selle punkti kaugus servast, kui nurk tahkude vahel on 45°.

260. Kahetahulise nurga ühel tahul on võetud punkt 25 cm kaugusel nurga servast. Kui kaugel on see punkt teisest tahust, kui kahetahulise nurga suurus on 50°?

261. Tõesta, et väljaspool tasandit olevast punktist tasandini konstrueeritud võrdsetel kaldlõikudel on võrdsed ristprojektsioonid ja võrdsed kaldenurgad.

262. Kaks võrdhaarset kolmnurka, mille alus on a ja tipunurk $\varphi=40°$, asetsevad nii, et nende alused ühtivad ja aluste vastastippude vaheline kaugus on samuti a. Kui suur on kolmnurkade tasandite vaheline nurk?

263. Võrdkülgse kolmnurga üks külg asetseb tasandil ja teine moodustab tasandiga nurga $\frac{\pi}{4}$. Kui suure nurga moodustab kolmnurk selle tasandiga?

4.8. HULKNURGA RISTPROJEKTSIOONI PINDALA.

Hulknurga tsentraalprojektsioon võib osutuda hulknurgast erinevaks kujundiks. Hulknurga paralleelprojektsiooniks on küll samanimeline hulknurk, kuid üldiselt projekteerimisel hulknurga kuju ja pindala muutuvad. Erijuhul, kui on tegemist ristprojekteerimisega, saab anda lihtsa eeskirja pindala muutuse määramiseks.

Teoreem. **Hulknurga ristprojektsiooni pindala võrdub hulknurga pindala ning hulknurga tasandi ja ekraani vahelise nurga koosinuse korrutisega.**

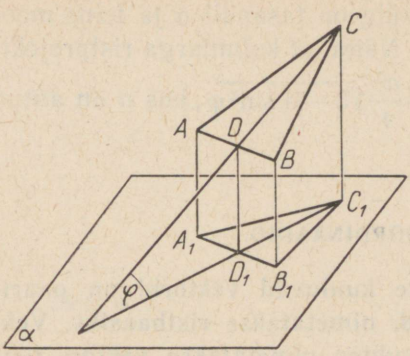
Tõestus. Vaatleme esmalt kolmnurka ABC, mille külg AB on paralleelne ekraaniga (joon. 78) või asetseb ekraanil. Olgu kolmnurga tasandi ja ekraani vaheline nurk φ. Loeme AB kolmnurga aluseks, siis sirge s, millele kuulub kolmnurga kõrgus DC, moodustab ekraaniga nurga φ. Järelikult on kõrguse ristprojektsioon ekraanil

$$D_1C_1=DC\cos\varphi.$$

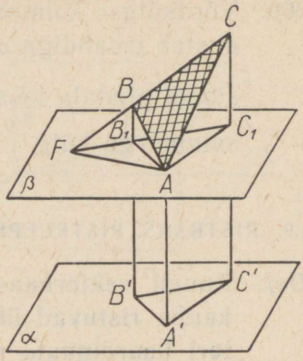
Et aluse ristprojektsioon on $A_1B_1=AB$, siis kolmnurga projektsiooni pindala on

$$S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}A_1B_1\cdot D_1C_1=\frac{1}{2}AB\cdot DC\cos\varphi=S_{ABC}\cos\varphi.$$

Kui kolmnurga ABC ükski külg ei ole paralleelne tasandiga ega asetse sellel, siis asetame läbi kolmnurga ühe tipu, näiteks tipu A, abitasandi β, mis on paral-



Joon. 78.



Joon. 79.

leelne tasandiga α, ja vaatleme kolmnurga ABC ristprojektsiooni AB_1C_1 tasandil β (joon. 79). Olgu $\{F\} = BC \cap \beta$. Kasutame eelnevat tulemust:

$$S_{AB_1C_1} = S_{AFC_1} - S_{AFB_1} = S_{AFC} \cos\varphi - S_{AFB} \cos\varphi =$$
$$= (S_{AFC} - S_{AFB}) \cos\varphi = S_{ABC} \cos\varphi.$$

Tõestuse lõpetuseks märgime, et iga hulknurga saab jaotada lõplikuks arvuks kolmnurkadeks, kusjuures hulknurga pindala võrdub nende kolmnurkade pindalade summaga. ■

264. Kas teoreem hulknurga ristprojektsiooni pindalast on tõene, kui hulknurga tasand on
1) paralleelne ekraaniga?
2) risti ekraaniga?

265. Kas hulknurga ristprojektsiooni pindala saab olla suurem hulknurga enda pindalast?

266. Kuupi lõikab tasand, mis läbib alumist põhiserva 30-kraadise nurga all põhja suhtes. Leia lõike pindala, kui kuubi serv on a.

267. Nelinurk $ABCD$, milles $AB = 20$ cm, $BC = 42$ cm, $AD = 26$ cm, $CD = 30$ cm ja $AC = 34$ cm, asetseb 120-kraadise kahetahulise nurga tahul. Arvuta nelinurga ristprojektsiooni pindala nurga teisel tahul.

268. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga üks kaatet on tasandil α ja teine moodustab selle tasandiga nurga φ. Näita, et hüpotenuus moodustab tasandiga α nurga $\arcsin\frac{\sin\varphi}{2}$. Leia see nurk, kui $\varphi = 45°$

269. Võrdkülgse kolmnurga üks külg on tasandil α ja teine moodustab tasandiga α nurga φ. Näita, et kolmnurga ristprojektsiooni pindala tasandil α on $\frac{a^2}{4}\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$, kus a on antud kolmnurga külg.

4.9. RISTBAAS. RISTREEPER. RISTKOORDINAADID.

Def. **Ruumi vektorbaasi, millesse kuuluvad vektorid on paarikaupa ristuvad ühikvektorid, nimetatakse ristbaasiks. Vektori koordinaate ristbaasi suhtes nimetatakse vektori ristkoordinaatideks.**

Ristbaasi kuuluvate vektorite jaoks kasutatakse tähiseid $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$.

Niisiis, ristbaas $(\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$ rahuldab järgmisi tingimusi:

$$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1,$$
$$\vec{i}\perp\vec{j},\ \vec{j}\perp\vec{k},\ \vec{k}\perp\vec{i}.$$

Nendest tingimustest järeldub ristbaasi vektorite skalaarkorrutiste tabel:

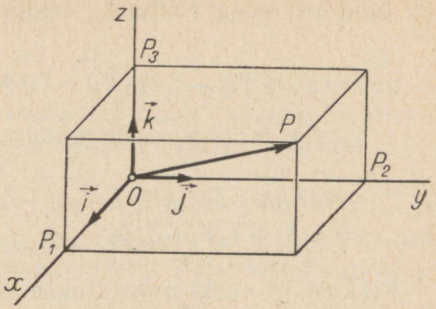
	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Vektori ristkoordinaatide jaoks kasutame seniseid tähiseid X, Y ja Z. Seega

$$\vec{v}=(X;\ Y;\ Z)\Leftrightarrow\vec{v}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}.$$

Ristkoordinaadid on vektori eespool vaadeldud koordinaatide[1] erijuht. Seepärast kehtivad ristkoordinaatide puhul kõik eelnevalt

[1] Kui tahetakse eristada afiinseid koordinaate, mis ei ole ristkoordinaadid, siis räägitakse kaldkoordinaatidest.



Joon. 80.

selgitatud seosed ühesuse, lineaartehete ja vektorite kollineaarsuse kohta.

Def. **Afiinset reeperit, millesse kuuluv vektorbaas on ristbaas, nimetatakse ristreeperiks. Punkti koordinaate ristreeperi suhtes nimetatakse punkti ristkoordinaatideks.**

Punkti ristkoordinaatide jaoks kasutame tähiseid x, y ja z. Seega

$$P(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Ristreeperi puhul koordinaatteljed ja koordinaattasandid on paarikaupa risti. Kui punkt P ei asetse ühelgi koordinaattasandil, siis tema ristkoordinaatide määramisel tekib risttahukas (joon. 80).

Planimeetrias kasutasime ainult ristkoordinaate.

4.10. SKALAARKORRUTIS KOORDINAATKUJUS. ARVUTUSVALEMID.

Lineaartehete jaoks ristkoordinaadid mingeid lihtsustusi ei anna. Oluline lihtsustus tekib aga skalaarkorrutise puhul. Kui üldistes afiinsetes koordinaatides (kaldkoordinaatides) skalaarkorrutis avaldub üheksaliikmelise summana, milles tuleb arvestada baasivektorite pikkusi ja baasivektorite vahelisi nurki, siis ristkoordinaatides säilib vaid kolm liiget. Veendume selles.

Teoreem. **Kahe vektori skalaarkorrutis võrdub nende vektorite vastavate ristkoordinaatide korrutiste summaga.**

Tõestus. Korrutame mingid kaks vektorit $\vec{u} = (X_1;\ Y_1;\ Z_1)$ ja $\vec{v} = (X_2;\ Y_2;\ Z_2)$ skalaarselt, kasutades skalaarkorrutise algebra-

lisi omadusi ning ristbaasi vektorite skalaarkorrutiste tabelit:

$$\vec{u}\vec{v} = (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k})\,(X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}) =$$
$$= X_1X_2\vec{i}^2 + X_1Y_2\vec{i}\vec{j} + X_1Z_2\vec{i}\vec{k} + Y_1X_2\vec{j}\vec{i} + Y_1Y_2\vec{j}^2 +$$
$$+ Y_1Z_2\vec{j}\vec{k} + Z_1X_2\vec{k}\vec{i} + Z_2Y_1\vec{k}\vec{j} + Z_2Z_1\vec{k}^2 =$$
$$= X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Pikkusi ja nurki arvutatakse skalaarkorrutise kaudu. Ristkoordinaatides saab neid arvutusi teostada järgmiste valemite järgi.

1. Vektori $\vec{v} = (X;\ Y;\ Z)$ pikkus

$$\vec{v} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,.$$

2. Kahe punkti $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ja $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ vaheline kaugus — lõigu AB pikkus — arvutatakse vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkusena eelmise valemi põhjal:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

3. Nurk φ kahe vektori $\vec{u} = (X_1;\ Y_1;\ Z_1)$ ja $\vec{v} = (X_2;\ Y_2;\ Z_2)$ vahel arvutatakse selle nurga koosinuse kaudu:

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}\,.$$

4. Nurgad φ_1, φ_2 ja φ_3 vektori $\vec{v} = (X;\ Y;\ Z)$ ja ristbaasi vektorite vahel arvutatakse eelneva valemi põhjal:

$$\cos\varphi_1 = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\varphi_3=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Arve $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$ ja $\cos\varphi_3$ nimetatakse vektori $\vec{v}$ **suunakoosinusteks**. Vahetult kontrollides eelnevate valemite abil veendume, et

$$\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3=1.$$

5. Vektori $\vec{v}=(X_1;\ Y_1;\ Z_1)$ ristprojektsioon vektoril $\vec{u}=(X_2;\ Y_2;\ Z_2)$ on arvutatav valemiga, mis tuleneb seosest ristprojektsiooni ja skalaarkorrutise vahel:

$$pr_{\vec{u}}\vec{v}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_2^2+X_2^2+Z_2^2}}.$$

270. Leia reeperi alguspunkti kaugus punktidest $A(4;\ -2;\ -4)$, $B(-4;\ 12;\ 6)$, $C(12;\ -4;\ 3)$, $D(12;\ 16;\ -15)$.

271. Antud on punktid $A(1;\ -2;\ -3)$, $B(2;\ -3;\ 0)$, $C(3;\ 1;\ -9)$, $D(-1;\ 1;\ -12)$. Arvuta AC, BD ja CD.

272. Tõesta, et kolmnurk tippudega $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(0;\ -4;\ 2)$ ja $C(-3;\ 2;\ 1)$ on võrdkülgne.

273. Kas kolmnurk tippudega $A(3;\ -2;\ 5)$, $B(-2;\ 1;\ -3)$ ja $C(5;\ 1;\ -1)$ on terav-, täis- või nürinurkne?

274. Arvuta vektoritele $\vec{a}=(3;\ -5;\ 8)$ ja $\vec{b}=(-1;\ 1;\ -4)$ konstrueeritud rööpküliku diagonaali pikkus.

275. Arvuta vektori $\vec{a}=(12;\ -15;\ -16)$ suunakoosinused.

276. Kolmnurga tipud on $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$ ja $C(1;\ -2;\ 1)$. Arvuta tipu A juures olev välisnurk.

277. Nelinurga tipud on $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(-4;\ 1;\ 1)$ ja $D(-5;\ -5;\ 3)$. Tõesta, et diagonaalid AG ja BD on risti.

278. Leia vektori $\vec{a}$ ristprojektsioon vektoril $\vec{b}$, kui

1) $\vec{a}=(5;\ 2;\ 5)$, $\vec{b}=(2;\ -1;\ 2)$;

2) $\vec{a}=(8;\ 4;\ 1)$, $\vec{b}=(2;\ -2;\ 1)$.

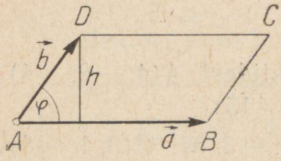
279. On antud punktid $M(-5;\ 7;\ -6)$ ja $N(7;\ -9;\ 9)$. Arvuta vektori $\vec{a}=(1;\ -3;\ 1)$ ristprojektsioon vektoril $\overrightarrow{MN}$.

280. On antud punktid $A(-2;\ 3;\ -4)$, $B(3;\ 2;\ 5)$, $C(1;\ -1;\ 2)$ ja $D(3;\ 2;\ -4)$. Arvuta $pr_{CD}\overrightarrow{AB}$.

281. Arvuta töö, mille teeb jõud $\vec{F}=(3;\ -5;\ 2)$ rakenduspunkti nihkel vektori $\vec{s}=(2;\ -5;\ 7)$ võrra.

282. Arvuta töö, mille teeb jõud $\vec{F}=(3;\ -2;\ 5)$, kui ta rakenduspunkt liigub mööda sirget punktist $A(2;\ -3;\ 5)$ punkti $B(3;\ -2;\ -1)$.

4.11. RÖÖPKÜLIKU JA KOLMNURGA PINDALA.



Joon. 81.

Tuletame valemi rööpküliku pindala arvutamiseks rööpküliku tippude ristkoordinaatide järgi.

Arutluste lihtsustamiseks kasutame rööpküliku lähiskülgedega määratud vektoreid. Olgu rööpkülikus $ABCD$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(X_1;\ Y_1;\ Z_1)$ ja $\vec{b}=\overrightarrow{AD}=(X_2;\ Y_2;\ Z_2)$. Määrame pindala (joon. 81):

$$S_{ABCD}=AB\cdot h=AB\cdot AD\cdot\sin\varphi=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\varphi}=$$

$$=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sqrt{1-\frac{(\vec{a}\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2}}=\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2}.$$

Teisendame juurealust avaldist:

$$|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2=$$
$$=(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)(X_2^2+Y_2^2+Z_2^2)-(X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2)^2=$$
$$=X_1^2X_2^2+X_1^2Y_2^2+X_1^2Z_2^2+Y_1^2X_2^2+Y_1^2Y_2^2+Y_1^2Z_2^2+Z_1^2X_2^2+$$
$$+Z_1^2Y_2^2+Z_1^2Z_2^2-X_1^2X_2^2-Y_1^2Y_2^2-Z_1^2Z_2^2-2X_1X_2Y_1Y_2-$$
$$-2X_1X_2Z_1Z_2-2Y_1Y_2Z_1Z_2=$$
$$=(Y_1^2Z_2^2-2Y_1Y_2Z_1Z_2+Y_2^2Z_1^2)+(X_2^2Z_1^2-2X_1X_2Z_1Z_2+X_1^2Z_2^2)+$$
$$+(X_1^2Y_2^2-2X_1X_2Y_1Y_2+X_2^2Y_1^2)=$$
$$=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)^2+(X_2Z_1-X_1Z_2)^2+(X_1Y_2-X_2Y_1)^2=$$

$$= \left|\begin{matrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{matrix}\right|^2.$$

Järelikult

$$S_{ABCD} = \sqrt{\left|\begin{matrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{matrix}\right|^2}.$$

Kui on teada rööpküliku kolme tipu koordinaadid, siis saab nende kaudu määrata kahe vektori koordinaadid ja arvutada rööpküliku pindala leitud valemi abil.

N ä i d e. Arvutada rööpküliku $ABCD$ pindala tema tippude $A(2; 0; -1)$, $B(-3; 2; 2)$ ja $D(4; 1; -2)$ koordinaatide järgi.

Lahendus.

$\overrightarrow{AB} = (-5; 2; 3)$,

$\overrightarrow{AD} = (2; 1; -1)$;

$$X = \left|\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right| = -5,$$

$$Y = \left|\begin{matrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{matrix}\right| = 1,$$

$$Z = \left|\begin{matrix} -5 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right| = -9;$$

$$S_{ABCD} = \sqrt{5^2 + 1^2 + 9^2} = \sqrt{107}.$$

Vastus. Rööpküliku pindala on $\sqrt{107}$.

Sama võttega saab arvutada ka kolmnurga pindala tema tippude koordinaatide kaudu. Et kolmnurga pindala on pool vastava rööpküliku pindalast, tuleb vaid saadav ruutjuur jagada kahega.

283. Rööpküliku $ABCD$ tippudest on teada $B(8; 0; -4)$, $C(4; 8; -3)$ ja $D(-3; 5; -1)$. Arvuta rööpküliku pindala.

284. Arvuta kolmnurga pindala, kui kolmnurga tipud on $A(0; 2; -3)$, $B(4; 4; 1)$ ja $C(-1; 0; -1)$.

285. Nelinurga $ABCD$ tippudeks on punktid $A(-1; 2; -2)$, $B(-2; 5; 1)$, $C(-1; 6; 0)$ ja $D(2; 3; -6)$. Näita, et see nelinurk on tasapinnaline ja arvuta pindala.

286. Arvuta tetraeedri pindala, kui tetraeedri tipud on $A(2; 2; 2)$, $B(2; 2; -2)$, $C(2; -2; 2)$ ja $D(-2; 2; 2)$.

Tuletame valemi rööptahuka ruumala arvutamiseks rööptahuka tippude ristkoordinaatide kaudu.

Kasutame vektoreid. Olgu rööptahuka $A \ldots D_1$ puhul $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(X_1; Y_1; Z_1)$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}=(X_2; Y_2; Z_2)$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}=(X_3; Y_3; Z_3)$ (joon. 82). Arvutame rööptahuka ruumala V.

$$V=S_p h.$$

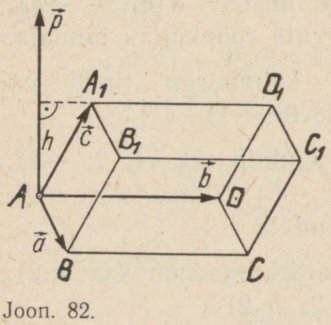
Valem põhja pindala arvutamiseks on eespool leitud. Võtame kasutusele vektori $\vec{p}$, mille koordinaatideks on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ koordinaatidest moodustatud determinandid:

$$\vec{p}=\left(\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right).$$

Vektori $\vec{p}$ pikkus on arvuliselt võrdne rööptahuka põhja pindalaga. $\vec{p}$ on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Tõepoolest, näiteks vektori $\vec{a}$ korral

$$\vec{a}\vec{p}=X_1\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}+Y_1\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}+Z_1\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}=$$
$$=X_1Y_1Z_2-X_1Y_2Z_1+X_2Y_1Z_1-X_1Y_1Z_2+X_1Y_2Z_1-X_2Y_1Z_1=$$
$$=0\Rightarrow \vec{a}\perp\vec{p}.$$

Rööptahuka kõrgus h on vektori $\vec{c}$ ristprojektsiooni absoluutväärtus vektoril $\vec{p}$:



Joon. 82.

$$h=|pr_{\vec{p}}\vec{c}|.$$

Järelikult

$$V=|\vec{p}|\,|pr_{\vec{p}}\vec{c}|=|\vec{p}|\,pr_{\vec{p}}\vec{c}|=|\vec{p}\vec{c}|,$$

s. t. rööptahuka ruumala võrdub vektorite $\vec{p}$ ja $\vec{c}$ skalaarkorrutise absoluutväärtusega. Avaldame rööptahuka ruumala koordinaatide kaudu:

$$V=\left|\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} X_3+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} Y_3+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} Z_3\right|=$$
$$=|X_1Y_2Z_3+X_2Y_3Z_1+X_3Y_1Z_2-X_3Y_2Z_1-X_2Y_1Z_3-X_1Y_3Z_2|.$$

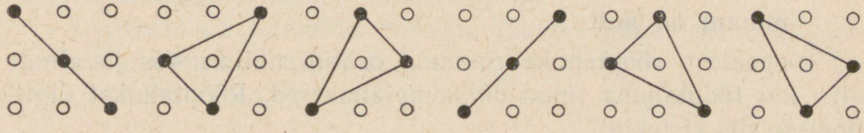
Selleks et leitud valemit oleks kergem meeles pidada, kasutame valemi parema poole jaoks tähist

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

mida nimetatakse kolmandat järku determinandiks (eespool kasutatud determinandid on teist järku). See determinant koosneb vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ koordinaatidest, mis on kirjutatud kohakuti kolme ritta. Niisiis,

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=X_1Y_2Z_3+X_2Y_3Z_1+X_3Y_1Z_3-X_3Y_2Z_1-X_2Y_1Z_3-X_1Y_3Z_2.$$

Liikmete moodustamine parempoolses summas tuleb meelde jätta järgmise skeemi abil:



Lisatud märgid näitavad, et kolm esimest liiget tuleb võtta muutumatult, kolm viimast aga vastupidiste märkidega. Muidugi võib determinandi liikmeid arvutada ka mistahes teises järjekorras, kuid seejuures peab jälgima, et märk võetakse reegli järgi, mille määrab skeem.

Seega on rööptahuka ruumala arvutatav kolmandat järku determinandi absoluutväärtusena:

$$V=\left|\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}\right|.$$

Seejuures on determinant moodustatud rööptahuka lähisservadega määratud vektorite koordinaatidest.

Näide. Arvutada rööptahuka $A \ldots D_1$ ruumala tippude $A(2; -1; -1)$, $B(5; -1; 2)$, $D(3; 0; -3)$ ja $A_1(6; 0; -1)$ koordinaatide kaudu.

Lahendus.

$$\overrightarrow{AB}=(3; 0; 3), \qquad \overrightarrow{AD}=(1; 1; -2), \qquad \overrightarrow{AA_1}=(4; 1; 0);$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 0+1\cdot 1\cdot 3+4\cdot 0\cdot(-2)-4\cdot 1\cdot 3-1\cdot 0\cdot 0- -3\cdot(-2)\cdot 1=3-12+6=-3.$$

Vastus. $V=3$.

Sama võttega saab arvutada ka tetraeedri ruumala tema tippude koordinaatide kaudu. Tuleb vaid silmas pidada, et tetraeedri ruumala on üks kuuendik vastava rööptahuka ruumalast. Seepärast tuleb tetraeedri puhul determinandi väärtus jagada kuuega.

Rööptahuka ruumala valemist saab teha tähtsa järelduse:

kolm vektorit on komplanaarsed siis ja ainult siis, kui nende koordinaatidest moodustatud kolmandat järku determinant on null.

Tõepoolest, rööptahuka ruumala osutub nulliks siis ja ainult siis, kui rööptahuka tipud on komplanaarsed. Rööptahukat õigupoolest siis ei tekigi.

287. Kas vektorid on komplanaarsed?

1) $\vec{a}=(2; 3; -1)$, $\vec{b}=(1; -1; 3)$, $\vec{c}=(1; 9; -11)$;

2) $\vec{a}=(3; -2; 1)$, $\vec{t}=(2; 1; 2)$, $\vec{v}=(3; -1; -2)$;

3) $\vec{k}=(2; -1; 2)$, $\vec{l}=(1; 2; -3)$, $\vec{m}=(3; -4; 7)$.

Missuguse nendest vektorikolmikutest saab võtta ruumi vektorbaasiks?

288. Tõesta, et punktid $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ ja $D(2; 1; 3)$ on komplanaarsed.

289. Rööptahuka $A \ldots D_1$ tippudest on teada $A(3; 5; 1)$, $B(5; 2; 2)$, $D(4; 1; -2)$ ja $D_1(3; 8; 3)$. Arvuta ruumala.

290. Kas punktid $A(2; 0; 1)$, $B(4; -1; -2)$, $C(-1; 2; 5)$ ja $D(2; 1; 0)$ on tetraeedri tipud?

291. Arvuta tetraeedri $ABCD$ ruumala, teades, et $\overrightarrow{AB}=(4;\ -2;\ 0)$, $\overrightarrow{CA}=(-3;\ 6;\ 3)$ ja $\overrightarrow{CD}=(1;\ 4;\ -5)$.

292. Tetraeedri tipud on $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(5;\ 5;\ 4)$, $C(3;\ 2;\ -1)$ ja $D(4;\ 1;\ 3)$. Arvuta ruumala.

293. Tetraeedri tipud on $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ -2)$, $C(6;\ 3;\ 7)$ ja $D(-5;\ 4;\ 8)$. Arvuta tipust D lähtuv kõrgus.

294. Kas punktid $A(4;\ -2;\ -2)$, $B(3;\ 1;\ 1)$, $C(4;\ 2;\ 0)$ ja $D(7;\ -1;\ -6)$ on komplanaarsed?

5. KORDAMISEKS JA TÄIENDAMISEKS.

5.1. FUNKTSIOONI TULETIS.

Def. **Funktsiooni $f(x)$ tuletiseks $f'(x)$ nimetatakse piirväärtust**

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, **kus Δx on argumendi muut ja $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ on funktsiooni muut.**

Funktsiooni tuletis on seega funktsioon, mis antud funktsioonist tuletatakse etteantud eeskirja järgi.

X klassis on tuletatud mitmete funktsioonide tuletised. Need on kokku võetud tabelisse 1.

Tabel 1

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x	1	$\sin x$	$\cos x$
x^2	$2x$	$\cos x$	$-\sin x$
x^3	$3x^2$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
c	0	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
x^n	nx^{n-1}	a^x	$a^x\ln a$

Eeskirjad kahe funktsiooni summa, korrutise ja jagatise tuletise leidmiseks on toodud tabelis 2.

Tabel 2

y	y'
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Liitfunktsiooni ja pöördfunktsiooni tuletise leidmise eeskirjad on paigutatud tabelisse 3.

Tabel 3

Liitfunktsioon $f[g(x)]$	$f'[g(x)]g'(x)$
Pöördfunktsioon $y=f(x)\Rightarrow x=g(y)$ $y=g(x)$	$g'(x)=\frac{1}{f'[g(x)]}$

Näide 1. Leida funktsiooni $y=x^2\sin x$ tuletis.

$y=x^2\cdot\sin x;$

$y'=2x\cdot\sin x+x^2\cdot\cos x=x(2\sin x+\cos x).$

Näide 2. Leida funktsiooni $s=\frac{t^2-1}{\sqrt{t}}$ tuletis.

$$s=\frac{t^2-1}{\sqrt{t}};$$

$$s'=\frac{2t\cdot\sqrt{t}-(t^2-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}}{t}=\frac{4t^2-t^2+1}{2t\sqrt{t}}=\frac{3t^2+1}{2t\sqrt{t}}.$$

Näide 3. Leida funktsiooni $y=\sin 2x$ tuletis.

$y=\sin 2x$;
$u=2x$, $y=\sin u$;
$y'=(\sin u)'_u\cdot(2x)'_x=\cos u\cdot 2=2\cos 2x$.

Näide 4. Leida funktsiooni a^{x^2} ja $(a^x)^2$ tuletis.

1) $y=a^{x^2}$;
$u=x^2$, $y=a^u$;
$y'=(a^u)'_u\cdot(x^2)'_x=a^u\ln a\cdot 2x=a^{x^2}\ln a\cdot 2x=2\ln a\cdot xa^{x^2}$.

2) $y=(a^x)^2=a^{2x}$;
$u=2x$, $y=a^u$;
$y'=(a^u)'_u\cdot(2x)'_x=a^u\ln a\cdot 2=2\ln a\cdot a^{2x}$.

Näide 5. Leida funktsiooni $y=\sin x$ pöördfunktsiooni tuletis.

$y=\sin x\Rightarrow x=\arcsin y$;
$f(x)=\sin x$, $g(x)=\arcsin x$;
$f'(x)=\cos x$;

$$g'(x)=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

295. Mis on funktsiooni tuletis?

296. Missugune geomeetriline tähendus on funktsiooni tuletisel?

297. Missugune füüsikaline tähendus on funktsiooni tuletisel?

298. Leia funktsiooni tuletis.

1) $x-5$
2) $2-3x$
3) $3(2-4x)$
4) $(1+x)^2$
5) $(x-2)^2$
6) $(2x+1)^3$
7) a^x+e^x
8) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$
9) $2\ln x-3\log x$

299. Leia pöördfunktsiooni tuletis.

1) $y=x^2$
2) $y=x^3$
3) $y=\ln x$
4) $y=\log_a x$
5) $y=\cos x$
6) $y=\tan x$

300. Leia funktsiooni tuletis kohal $x=1$.

1) x^2-3x
2) $2x^4+5x^2-2$
3) $\frac{x^8}{8}-\frac{x^5}{10}+\frac{x^3}{9}$
4) $x\sqrt{x}$
5) $x^2 \ln x$
6) x^3e^x
7) $(2\sqrt{x}-\ln x)^2$
8) $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3^x}{\ln 3}\right)^2$
9) $(\sin x+\cos x)^2$

301. Leia funktsiooni tuletis kohal $t=\frac{\pi}{4}$.

1) $\sin t+\cos t$
2) $\sin t \cdot \tan t$
3) $\frac{\cos t}{\sin t}$
4) $\sin 3t$
5) $\cos^2 t$
6) $\tan\left(\frac{4}{3}t\right)$

302. Leia puutuja tõus ja puutuja võrrand:

1) $y=3x^2$, kui $x=\frac{3}{2}$;
2) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, kui $x=\frac{\pi}{2}$;
3) $y=\sqrt{z^2-2}$, kui $z=2$;
4) $y=\ln\frac{x}{2}$ kui $x=2$.

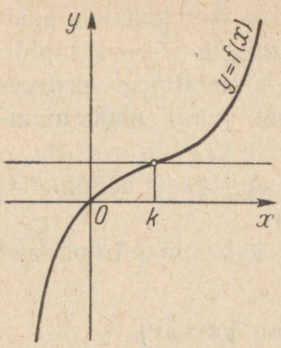
303. Leia liikumise hetkeline kiirus:

1) $s=\frac{t}{2}-\frac{1}{3}$, kui $t=\frac{1}{4}$;
2) $s=\frac{gt^2}{2}$, kui $t=0{,}2$;
3) $s=v_0t+\frac{gt^2}{2}$, kui $t=g$.

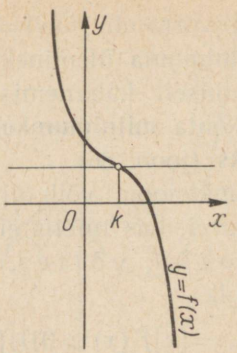
5.2. FUNKTSIOONI UURIMINE.

Funktsiooni tuletise mõistet kasutatakse funktsiooni uurimisel. Teame, et

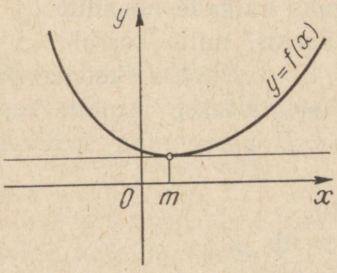
kui $f'(x_0)>0$, siis funktsioon $f(x)$ on kohal $x=x_0$ kasvav,
kui $f'(x_0)<0$, siis funktsioon $f(x)$ on kohal $x=x_0$ kahanev,
kui $f'(x_0)=0$, siis $x=x_0$ on funktsiooni **ekstreemumkohaks,** erandjuhul aga nn. **käänukohaks.**



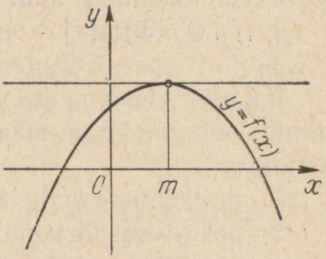
Joon. 83.



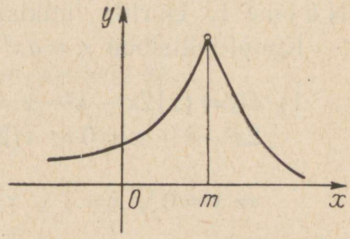
Joon. 84.



Joon. 85.



Joon. 86.



Joon. 87.

Käänukohal on funktsioon kasvav (joon. 83) või kahanev (joon. 84).

Funktsiooni **kasvamispiirkonnaks** on argumendi kõigi nende väärtuste hulk, mille puhul funktsioon on kasvav, ja **kahanemispiirkonnaks** argumendi kõigi nende väärtuste hulk, mille puhul funktsioon on kahanev.

Et võrrandi $f'(x)=0$ lahend oleks ekstreemumkohaks, peab seal toimuma üleminek kahanemiselt kasvamisele või, vastupidi, kasvamiselt kahanemisele. Esimesel juhul nimetatakse ekstreemumkohta **miinimumkohaks** (joon. 85), teisel juhul **maksimumkohaks** (joon. 86).

Funktsioonil võib olla ekstreemumkoht ka niisugusel argumendi väärtusel, kus tuletis ei eksisteeri (joon. 87).

Kokku võttes, funktsiooni $y=f(x)$ kasvamispiirkonnaks on hulk

$$K_+=\{x|f'(x)>0\}\cup\{x|f'(x)=0 \text{ ja } f(x) \text{ on kasvav}\},$$

kahanemispiirkonnaks on hulk

$$K_-=\{x|f'(x)<0\}\cup\{x|f'(x)=0 \text{ ja } f(x) \text{ on kahanev}\},$$

ekstreemumkohtade hulk K_0 on osahulgaks hulkade ühendile

$\{x|f'(x)=0\}\cup\{x|x$ on argumendi väärtus, mille korral $f'(x)$ ei eksisteeri$\}$.

Funktsiooni uurimiseks selgitatakse esmalt, kas funktsioon on kogu määramispiirkonnas D pidev ning seejärel leitakse:

1) nullkohtade hulk $D_0=\{x|f(x)=0\}$,
2) positiivsuspiirkond $D_+=\{x|f(x)>0\}$ ja negatiivsuspiirkond $D_-=\{x|f(x)<0\}$,
3) ekstreemumkohtade hulk K_0,
4) kasvamispiirkond K_+ ja kahanemispiirkond K_-.

Näide 1. Uurida funktsiooni $y=2x^3+x^2+x$.

Kuupfunktsioon $y=ax^3+bx^2+cx+d$ on pidev funktsioon.

1) $D_0=\{x|2x^3-x^2-x=0\}$;
$2x^3-x^2-x=0 \Rightarrow x(2x^2-x-1)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x=0 \vee x=1 \vee x=-\frac{1}{2};$$

$$D_0=\left\{-\frac{1}{2};\ 0;\ 1\right\}.$$

2) $D_+=\{x|2x^3-x^2-x>0\}$ ja $D_-=\{x|2x^3-x^2-x<0\}$.
Võttes $x=-1$, saame $f(-1)=2\cdot(-1)^3-(-1)^2-(-1)=$
$=-2<0$.

Arvestades nüüd nullkohti ja funktsiooni pidevust, on positiivsuspiirkond ja negatiivsuspiirkond kohe esitatavad:

$D_+ = \left\{ x \mid -\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > 1 \right\}$;

$D_- = \left\{ x \mid x < -\frac{1}{2} \vee 0 < x < 1 \right\}$.

3) $y' = 6x^2 - 2x - 1$;

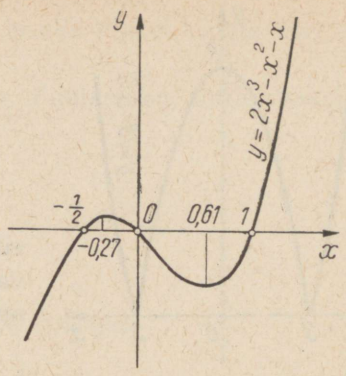
$6x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x \approx -0{,}27 \vee x \approx$

$\approx 0{,}61$.

Et

x	-1	0	1
y'	7	-1	3

,



Joon. 88.

siis toimub tuletise nullkohas $-0{,}27$ üleminek kasvamiselt kahanemisele ja nullkohas 0,61 kahanemiselt kasvamisele. Seega

$K_0 = \{-0{,}27;\ 0{,}61\}$,

kusjuures esimene element selles hulgas on maksimumkohaks ja teine miinimumkohaks.

4) $y' = 6x^2 - 2x - 1$. Et ruutkolmliige on pidev funktsioon, siis

$K_+ = \{x \mid x < -0{,}27 \vee x > 0{,}61\}$;
$K_- = \{x \mid -0{,}27 < x < 0{,}61\}$.

Antud funktsiooni graafik on esitatud joonisel 88.

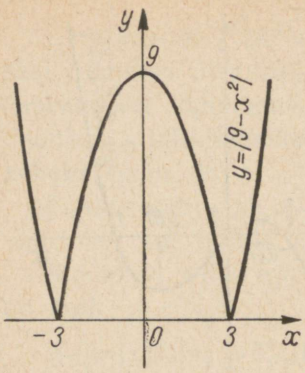
N ä i d e 2. Uurida funktsiooni $y = |9 - x^2|$.

Teame, et ruutfunktsioon on pidev.

1) $D_0 = \{x \mid |9 - x^2| = 0\}$;
$|9 - x^2| = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$;
$D_0 = \{-3;\ 3\}$.

2) $D_+ = \{x \mid |9 - x^2| > 0\} = \{x \mid x < -3 \vee -3 < x < 3 \vee x > 3\}$;
$D_- = \varnothing$.

3) Kui $-3 < x < 3$, siis $y = 9 - x^2$ ja $y' = -2x$.
Kui $x < -3 \vee x > 3$, siis $y = x^2 - 9$ ja $y' = 2x$.
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$.



Joon. 89.

Et

x	-1	1
y'	2	-2

,

siis kohal $x=0$ toimub üleminek kasvamiselt kahanemisele ja seega $x=0$ on maksimumkohaks.

Kohal $x=-3$ ja kohal $x=3$ antud funktsioonil tuletist ei eksisteeri, sest kui $x\to-3^-$, siis $y'\to6$ ja kui $x\to-3^+$, siis $y'\to-6$ ning kui $x\to3^-$, siis $y'\to-6$ ja kui $x\to3^+$, siis $y'\to6$.

Et funktsioon on positiivne kõikjal, välja arvatud nullkohtades, siis peab kohtadel $x=-3$ ja $x=3$ toimuma üleminek kahanemiselt kasvamisele, s. t. need on miinimumkohad. Seega

$$K_0=\{-3;\ 0;\ 3\},$$

kusjuures esimene ja kolmas element selles hulgas on miinimumkohaks, teine element aga maksimumkohaks.

4) Eelnenud arutelust järgneb, et

$$K_+=\{x\,|\,-3<x<0\vee x>3\}\text{ ja }K_-=\{x\,|\,x<-3\vee 0<x<3\}.$$

Funktsiooni $y=|9-x^2|$ graafik on esitatud joonisel 89.

304. Uuri funktsioone.

1) $y=5x^2-4x-1$
2) $y=2+x-3x^2$
3) $y=16x-4x^3$
4) $y=|x^2-4|$
5) $y=|1-2x|$
6) $y=|x^3|$

5.3. EKSTREEMUMÜLESANDED.

Teame, et funktsiooni $y=f(x)$ ekstreemumkohti otsime võrrandi

$$f'(x)=0$$

lahendite hulgast. Seda tõsiasja saab ära kasutada paljude praktilist laadi ülesannete lahendamiseks. Selgitame seda mõnede näidete abil.

N ä i d e 1. Jaotada arv 70 kaheks osaks nii, et nende korrutis oleks suurim.

Olgu üks arv x, siis teine on $70-x$. Funktsioon, mille maksimumkoht tuleb leida, on

$$y=x(70-x)$$

ehk

$$y=70x-x^2.$$

Leiame tuletise ja võrdsustame selle nulliga:

$$y'=70-2x;\ 70-2x=0,$$

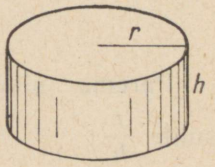
millest

$$x=35.$$

Et antud funktsioon on ruutfunktsioon negatiivse ruutliikme kordajaga, siis haripunkti abstsiss on maksimumkohaks ja seega korrutis

$$35\cdot 35=1225$$

on suurim.



Joon. 90.

N ä i d e 2. Missuguste mõõtmete korral on silindrikujulise konservitoosi valmistamiseks kulutatud vähim hulk plekki ja kui palju, kui konservitoosi ruumala on V (joon. 90)?

Tähistame silindri põhja raadiuse tähega r, kõrguse tähega h ja täispindala tähega S. Siis

$$S=2\pi rh+2\pi r^2,$$

millele lisandub ülesande andmete kohaselt tingimus $\pi r^2h=V$, mis võimaldab meil S avaldada kas r või h funktsioonina.

Avaldame võrdusest $V=\pi r^2h$ näiteks h:

$$h=\frac{V}{\pi r^2}$$

ja asetame selle S avaldisse:

$$S=2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}+\pi r^2.$$

Pärast taandamist saame

$$S=\frac{2V}{r}+2\pi r^2.$$

Et leida, missuguse r väärtuse korral on S väärtus väikseim, leiame r järgi tuletise ja võrdsustame selle 0-ga:

$$S'=-\frac{2V}{r^2}+4\pi r;$$

$$\frac{-2V}{r^2}+4\pi r=0.$$

Lahendame selle võrrandi:

$$-V+2\pi r^3=0;$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Et $h=\frac{V}{\pi r^2}$, siis $h=\frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4V}}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

Parema ülevaate saamiseks konservitoosi kujust leiame suhte $\frac{r}{h}$:

$$\frac{r}{h}=\frac{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}=\sqrt[3]{\frac{V\cdot\pi}{2\pi\cdot 4V}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2},$$

s. t. et konservitoosi kõrgus peab olema kaks korda suurem kui raadius ehk, teisiti, konservitoosi põhja läbimõõt ja kõrgus peavad olema võrdsed.

Tekib küsimus, kas leitud tulemuste korral kulub konservitoosi valmistamiseks vähim või suurim hulk plekki.

Olgu Δr kuitahes väike positiivne arv ja r võrrandi

$$-\frac{2V}{r^2}+4\pi r=0$$

lahend. Pannes selle võrduse vasakusse poolde r asemele $r+\Delta r$, saame avaldise

$$-\frac{2V}{(r+\Delta r)^2}+4\pi(r+\Delta r).$$

Et

$$\frac{2V}{r^2}>\frac{2V}{(r+\Delta r)^2} \text{ ja seega } \frac{-2V}{r^2}<\frac{-2V}{(r+\Delta r)^2}$$

ning et

$$4\pi r<4\pi(r+\Delta r),$$

siis

$$-\frac{2V}{r^2}+4\pi r<-\frac{2V}{(r+\Delta r)^2}+4\pi(r+\Delta r).$$

Samuti selgub, et

$$-\frac{2V}{r^2}+4\pi r>-\frac{2V}{(r-\Delta r)^2}+4\pi(r-\Delta r).$$

Teame, et

$$\text{kui } r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \text{ siis } S'=-\frac{2V}{r^2}+4\pi r=0.$$

Nüüd veendusime, et

$$\text{kui } r>\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \text{ siis } S'>0, \text{ ja}$$

$$\text{kui } r<\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \text{ siis } S'<0.$$

Seega toimub funktsioonil $S=\frac{2V}{r}+2\pi r^2$ kohal $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ üleminek kahanemiselt kasvamisele, s. t. et käesoleval juhul on ekstreemumkoht miinimumkohaks.

Leitud avaldised r ja h jaoks võimaldavad arvutada vähima plekihulga, mis on vajalik antud andmetele vastava konservitoosi valmistamiseks:

$$S=2\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}+2\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}=$$

$$=2\pi\left(\frac{\sqrt[3]{16\pi V^2}}{2\pi}+\frac{\sqrt[3]{2\pi V^2}}{2\pi}\right)=2\sqrt[3]{2\pi V^2}+\sqrt[3]{2\pi V^2}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Niisiis, antud ruumalaga V silindrikujulise konservitoosi valmistamiseks kulub vähim hulk plekki juhul, kui $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ja $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. Vajatav plekihulk on $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ ruutühikut.

305. 20 cm pikkune lõik on jaotatud kahte ossa. Üks osa võetakse ristküliku aluseks, teine kõrguseks. Missuguse aluse puhul on ristküliku pindala suurim?

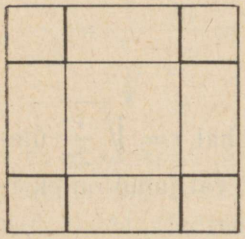
306. Ristküliku pindala on 100 cm^2. Missuguste mõõtmete korral on selle ristküliku ümbermõõt vähim?

307. Tõesta, et kahe positiivse arvu korrutis juhul, kui nende arvude summa on konstantne, on maksimaalne võrdsete tegurite korral.

308. Tõesta, et kahe positiivse arvu summa juhul, kui nende arvude korrutis on konstantne, on minimaalne võrdsete liidetavate korral.

309. Traadiga, mille pikkus on $2a$ meetrit, tuleb ümbritseda kolmest küljest ristkülikukujuline koppel. Leia selle maatüki mõõtmed nii, et traadiga piiratava ala pindala oleks suurim, kui traataed tuleb teha kahekordne.

310. Kolmnurga pindala on 18. Ehita see kolmnurk nii, et tema aluse ja kõrguse summa oleks väikseim. Mitu lahendit on sellel ülesandel?



Joon. 91.

311. Ruudukujulise plekitahvli külg on 60 cm. Plekitahvli nurkadest tuleb lõigata ära 4 ruutu nii, et järelejäänud osast saaks servi üles pöörates suurima ruumalaga karbi (joon. 91). Leia väljalõigatud ruutude külje pikkus.

312. Ristkülikukujulisest papitükist, mille mõõtmed on 3 dm ja 5 dm, tuleb valmistada kaaneta karp. Selleks lõigatakse papitüki nurkadest ära võrdsed ruudud ja murtakse servad üles. Kui suur peab olema väljalõigatavate ruutude külg, et karbi ruumala oleks suurim?

313. Mõõda mõne konservitoosi kõrgus ja põhja läbimõõt ning leia, kui palju oleks saanud plekki kokku hoida:
a) ühe samasuguse ruumalaga konservitoosi valmistamisel;

b) 100 000 sellise konservitoosi valmistamisel (vt. näide 2).

314. Mõõda tikutoosi mõõtmed. Kui suur on tema ruumala? Missugused peavad olema tikutoosi mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali, eeldades, et toosi pikkus on tiku pikkusega määratud ja toosi pandavate tikkude arv jääb samaks? (Arvutuste hõlbustamiseks loeme toosi kesta ja sahtli ristlõike mõõtmed võrdseteks.)

315. Kuidas tuleb valida silindrikujulise (pealt lahtise) liitri mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks vähim hulk plekki?

316. Soovitakse valmistada 1000-liitrine silindrikujuline boiler. Külje materjali ruutdetsimeeter maksab 50 kop., otste materjali ruutdetsimeeter 1 rbl. Missuguste mõõtmete korral on boileri valmistamise kulud väikseimad?

317. Risttahukakujulise paagi põhjaks on ruut. Paagi pindala ilma kaaneta on 108 dm^2. Missugused peavad olema paagi mõõtmed, et paagi ruumala oleks suurim?

318. Tuleb valmistada pealt lahtine risttahukakujuline anum, mille põhjaks on ruut ja mille ruumala on 32 l. Millised peavad olema anuma mõõtmed, et selle valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali?

319. Soovitakse valmistada 100-liitrine risttahukakujuline ruudukujulise põhjaga akvaarium. Kuidas tuleb valida akvaariumi mõõtmed, et
a) punasest vasest servad maksaksid võimalikult vähe?
b) põhi- ja külgpind tuleksid võimalikult odavad?

320. Aken koosneb ristkülikust ja sellele asetatud poolringist. Akna ümbermõõt on p. Kuidas tuleb valida akna laius ja kõrgus, et akent läbiv valgushulk oleks suurim?

321. Raamatu leheküljele soovitakse mahutada S cm^2 teksti ja jätta selle ümber l cm laiused ääred. Missugused mõõtmed peavad olema lehel, et raamatu valmistamiseks kuluks võimalikult vähe paberit?

322. Lahenda eelmine ülesanne juhul, kui $l=1{,}5$ ja $S=196$ cm^2. Kui palju on võimalik kokku hoida paberit, kui raamatu leheküljel on teksti $11\times17{,}8$ cm^2, raamatus on 400 lehekülge ja raamatu tiraaž on 30 000 eksemplari?

323. Veeanum koosneb lahtisest silindrist ja selle otsa kinnitatud poolkerast. Missugused peavad olema selle anuma mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks võimalikult vähe materjali, kui anuma ruumala on V m^3?

324. Võrdhaarse kolmnurga aluse ja kõrguse summa on s. Kolmnurk pöörleb oma kõrguse ümber. Missugune seos peab olema aluse ja kõrguse vahel, et tekkinud pöördkeha ruumala oleks maksimaalne?

5.4. VÕRRANDI LIGIKAUDNE LAHENDAMINE.

Lineaarsete ja ruutvõrrandite lahendamine toimub kindlate eeskirjade kohaselt ja tulemuseks saadakse täpne lahend.

Millal ruutvõrrandil reaalarvulised lahendid puuduvad?

Näiteid.

1) $3x-1=7;$
$3x=8;$
$x=\frac{8}{3}.$

2) $2x^2-3x+1=0;$
$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4};$
$x_1=\frac{4}{4}=1;$
$x_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

Kui ruutvõrrandi lahendid on irratsionaalarvud, siis leides ruutjuure kas algoritmi abil teatud täpsusega või kasutades tabeleid, saame kümnendmurrud, mis on ruutvõrrandi ligikaudseiks lahendeiks.

Näide.

$2x^2+x-2=0;$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{4};$

$x\approx\frac{-1\pm4{,}123}{4};$

$x_1\approx\frac{3{,}123}{4}\approx0{,}78;$

$x_2\approx\frac{-5{,}123}{4}\approx-1{,}28.$

Siin on lahendid antud sajandiku täpsusega.

Kuupvõrrandi lahendamiseks võib kasutada ka vastavat

lahendivalemit[1], kuid praktiliseks kasutamiseks on see liialt kohmakas. Enamikul juhtudel kasutatakse kuupvõrrandite (samuti teiste kõrgema astme võrrandite) lahendamiseks mõnd nn. ligikaudse lahendamise võtet. See on võte, mille abil osutub võimalikuks kas proovimise teel või graafikult leitud lahendi ligikaudset väärtust täpsustada.

Olgu näiteks antud võrrand

$x^3-3x-5=0.$

Tähistame võrrandi vasaku poole $f(x)$-ga, s. t.

$f(x)=x^3-3x-5.$

Kui $x=1$, siis $f(1)=-7$;
„ $x=2$, „ $f(2)=-3$;
„ $x=3$, „ $f(3)=13$.

Saadud tulemuste põhjal võime öelda, et funktsioonil x^3-3x-5 on vähemalt üks nullkoht arvude 2 ja 3 vahel, sest funktsioon x^3-3x-5 on pidev ja seega peab ta üleminekul negatiivsetelt väärtustelt positiivsetele läbima nullkoha.

Kui soovime antud võrrandi lahendit saada kümnendiku täpsusega, siis tuleb arvude

2,1; 2,2; 2,3; . . . ; 2,9

hulgast leida need, mille vahel asub funktsiooni x^3-3x-5 nullkoht. Proovimise teel saame kindlaks teha, et

$f(2,2)\approx-1,0$ ja $f(2,3)\approx 0,3.$

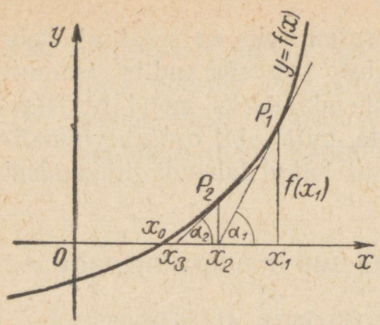
Seega on võrrandi $x^3-3x-5=0$ ligikaudseteks lahenditeks 2,2 ja 2,3. Kumb neist on täpsem, see selgub, kui otsime funktsioonile x^3-3x-5 samal viisil nullkohta arvude

2,21; 2,22; 2,23; . . . ; 2,29

hulgast.

Arvutustehniliselt muutub proovimise meetod järjest keerukamaks. Matemaatikud on otsinud valemeid, mille abil saab võrrandi lahendeid kergemini täpsustada. Siinkohal tutvumegi neist

[1] Nii nagu ruutvõrrandite lahendamiseks on olemas lahendivalem, on ka kolmanda ja neljanda astme võrrandite lahendamiseks vastavad lahendivalemid. Neid valemeid tuntakse Cardano valemite nime all. Võrrandeile, mille aste on kõrgem kui 4, lahendivalemeid ei leidu. Seda tõestas XIX sajandil prantsuse matemaatik Galois.



Joon. 92.

ühega, mille võttis kasutusele tuntud inglise füüsik ja matemaatik *Isaac Newton*.

Olgu antud lahendada võrrand $f(x)=0$, s. t. ülesandeks on määrata funktsiooni $y=f(x)$ nullkoht. Esitagu joonisel 92 kujutatud kõver funktsiooni $y=f(x)$ graafikut. Tähistame selle funktsiooni nullkoha tähega x_0, mis aga tähendab, et x_0 on antud võrrandi täpne lahend.

Oletame, et proovimise teel on leitud antud võrrandi lahendi esimeseks lähendiks x_1, s. t. $x_0 \approx x_1$ ehk

$$x_0 = x_1 + a,$$

kus a on nn. p a r a n d u s, s. o. täpse lahendi ja ligikaudse lahendi vahe.

Abstsissile x_1 vastab graafikul punkt P_1. Läbi selle punkti kõverale tõmmatud puutuja moodustab x-teljega nurga α_1. Selle puutuja tõus $k_1 = f'(x_1) = \tan \alpha_1$. Puutuja ja x-telje lõikepunkt määrab antud võrrandi lahendile märksa parema lähendi x_2, kui seda on x_1.

Kasutades joonisel esitatud kolmnurka, võime kirjutada

$$\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = \tan \alpha_1$$

ja siit

$$x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{\tan \alpha_1}.$$

Et

$$\tan \alpha_1 = f'(x_1),$$

siis

$$\boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.}$$

Kui tahame saada veel täpsemat lahendit, siis võtame kõveral punkti $P_2(x_2; y_2)$ ja läbi selle punkti tõmbame puutuja, mis lõikumisel x-teljega määrabki antud võrrandi lahendile täpsema lähendi x_3. Et siin on probleem täpselt samasugune nagu x_2 määramisel, siis võime kohe kirjutada, et

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Kui ka sellest täpsusest ei piisa, siis tuleb analoogilise mõttekäigu abil leida järgmine lähend:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \text{ jne.}$$

Kuidas avaldub x_5, x_n?

N ä i d e. Olgu tarvis leida võrrandi

$$x^3 - x - 5 = 0$$

lahendi õiged numbrid kuni tuhandikeni.

Antud ülesandes $f(x) = x^3 - x - 5$. Proovimise teel leiame, et $f(1) = -5$ ja $f(2) = 1$. Seega on üks lahend 1 ja 2 vahel. Olgu $x_1 = 2$. Newtoni võtte rakendamiseks on vaja teada $f(x)$ tuletist:

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Nüüd võime avaldada x_2:

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{11} \approx 1{,}909.$$

Analoogiliselt leiame x_3 ja x_4:

$$x_3 = 1{,}909 - \frac{0{,}048}{9{,}935} \approx 1{,}909 - 0{,}005 = 1{,}904;$$

$$x_4 = 1{,}904 - \frac{0{,}002}{9{,}878} \approx 1{,}904 - 0{,}0002 \approx 1{,}904.$$

Tulemustest järeldub, et ligikaudses lahendis $x = 1{,}904$ on kõik numbrid õiged.

325. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, leides lahendid sajandiku täpsusega.

1) $x^2 = 30$
2) $3x^2 = 78$
3) $2{,}3x^2 - 46{,}1 = 0$
4) $x^2 - 3x - 3 = 0$
5) $x^2 + x - 8 = 0$
6) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

326. Leia, missuguste täisarvude vahel on järgmistel võrranditel lahend.

1) $x^3-3x-1=0$
2) $x^3-5x-10=0$
3) $x^3+2{,}5x+40=0$
4) $x^3+x^2-1=0$
5) $x^3-3x^2+2x-1=0$
6) $x^3+2x^2-3x+1=0$

327. Leia järgmiste võrrandite lahenditele täisarvulised lähendid ja täpsusta neid Newtoni võttega.

1) $x^3-4x+7=0$
2) $x^3-6x+3{,}5=0$
3) $x^3-2x-5=0$
4) $x^3+6x^2+5=0$
5) $x^3-2x+18=0$
6) $x^4-x-4=0$

328. Võrrandi $x^3+px+q=0$ lahendid on samad mis võrrandil $x^3=-px-q$. Seega on antud võrrandi lahenditeks funktsioonide

$y=x^3$ ja $y=-px-q$

graafikute lõikepunktide abstsissid. Kasutades seda tõsiasja, kontrolli ülesande 325 ja ülesande 326 kahe esimese võrrandi lahendeid graafiliselt.

329. Pane avaldises x^3+bx^2+cx+d tähe x asemele $(x+a)$. Missugune väärtus tuleb anda a-le, et pärast asendamist poleks avaldises enam x^2-ga liiget?

330. On antud võrrand $x^3+3x^2+2x-1=0$. Teisenda selle võrrandi vasak pool niisuguseks, et sealt puuduks x^2-ga liige (vt. eelmine ülesanne). Kas antud võrrandil ja saadud võrrandil on ühesugused lahendid? Mille võrra need lahendid erinevad?

331. Lahenda võrrandid järgmise skeemi kohaselt:

a) kasuta ruutliikmest vabastamise teisendust;
b) leia saadud võrrandile ligikaudsed lahendid, kasutades funktsiooni $y=x^3$ graafikut;
c) täpsusta saadud lahendeid Newtoni võttega sajandikeni.

1) $x^3+x^2-1=0$
2) $x^3-6x^2-10=0$
3) $x^3+2x^2-3x+1=0$
4) $x^3+3x^2-x-3=0$
5) $x^3-3{,}9x^2-3{,}9x+10{,}8=0$
6) $x^3-4{,}2x^2-12{,}6x+45{,}9=0$

6. MÄÄRAMATA INTEGRAAL.

6.1. ALGFUNKTSIOON.

Vaatleme kaht funktsioonide hulka:

$$A=\{x^2;\ x^2-1;\ x^2+3;\ x^2-100;\ 2^x;\ 2^x-5;\ 2^x+10\}$$

ja

$$B=\{2x;\ 2^x \ln 2\}.$$

Olgu $a \in A$ ja $b \in B$, siis hulga $A \times B$ üheks osahulgaks T on relatsioon «a tuletis on b»:

$$T=\{(x^2;\ 2x),\ (x^2-1;\ 2x),\ (x^2+3;\ 2x),\ (x^2-100;\ 2x),\ (2^x;\ 2^x \ln 2),\ (2^x-5;\ 2^x \ln 2),\ (2^x+10;\ 2^x \ln 2)\}.$$

Paneme tähele, et $2x$ on tuletiseks neljale hulka A kuuluvale funktsioonile ja $2^x \ln 2$ on tuletiseks ülejäänud kolmele hulga A funktsioonile.

Nimetage veel funktsioone, mille tuletiseks on $2x$, mille tuletiseks on $2^x \ln 2$!

On ilmne, et selliseid funktsioone on lõpmata palju.

Võrreldes avaldisi x^2, x^2-1, x^2+3, x^2-100, aga samuti $x^2+\frac{1}{3}$, x^2-2 jne., paneme tähele, et nad erinevad üksteisest konstantse liidetava võrra. See tõsiasi võimaldab need avaldised kokku võtta ühte nn. üldavaldisse x^2+C, kus C on mistahes konstant.

Niisiis,

x^2+C on üldavaldiseks kõigile neile funktsioonidele, mille tuletiseks on $2x$, s. t. $(x^2+C)'=2x$;

2^x+C on üldavaldiseks kõigile neile funktsioonidele, mille tuletis on $2^x \ln 2$, s. t. $(2^x+C)'=2^x \ln 2$.

Def. **Funktsiooni $F(x)$ nimetatakse antud funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks, kui $F'(x)=f(x)$.**

Näiteks funktsioonid

$$x^2,\ x^2-1,\ x^2+3,\ x^2-100,\ x^2+\frac{1}{3},\ x^2-2 \text{ jne.}$$

on algfunktsioonideks funktsioonile $2x$ ja funktsioonid

2^x, 2^x-5, 2^x+10 jne.

on algfunktsiooniks funktsioonile $2^x \ln 2$.

Teoreem. **Kui $F(x)$ on algfunktsiooniks funktsioonile $f(x)$, siis on ka $F(x)+C$, kus C on konstant, algfunktsiooniks funktsioonile $f(x)$.**

Tõestus. Eeldame, et $F'(x)=f(x)$. Tuginedes summa tuletise leidmise eeskirjale ja teades, et konstandi tuletis on 0, võime kirjutada:

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)=f(x).$$

Summat $F(x)+C$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **algfunktsioonide üldavaldiseks.**

Antud funktsioonile tuletise leidmist nimetatakse **diferentseerimiseks**; funktsiooni leidmist etteantud tuletise järgi nimetatakse **integreerimiseks.**

332. Missugune tehe on pöördtehteks liitmisele? korrutamisele? astendamisele?

333. Missugust operatsiooni nimetatakse diferentseerimiseks? integreerimiseks?

334. Missugust operatsiooni võime nimetada diferentseerimise pöördoperatsiooniks?

335. Leia 3 algfunktsiooni.

1) 1
2) -5
3) $3x^2$
4) $\sin x$
5) $\cos x$
6) $\frac{2}{x}$
7) $\frac{1}{\sqrt{x}}$
8) $x+x^2$
9) $2x^2+3x^3$
10) $\frac{x}{2}-\frac{x^3}{4}$
11) $\cos^2 x-\sin^2 x$
12) $\sin^2 x-\cos^2 x$

336. Näita, et kui $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon, siis on seda iga funktsioon $F(x)+C$, kus C on konstant.

337. Näita, et kui $F(x)$ ja $G(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonid, siis $F(x)=G(x)+C$.

338. Leia algfunktsioonide üldavaldis.

1) $f'(x)+g'(x)$
2) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3) $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

339. Leia algfunktsioonide üldavaldis.

1) 0
2) a
3) $ax+b$
4) ax^2+bx+c
5) x^2+2x+1
6) x^3+3x^2+3x+1
7) a^x
8) e^x
9) x^e

6.2. MÄÄRAMATA INTEGRAAL.

Def. **Antud funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonide üldavaldist $F(x)+C$ nimetatakse määramata integraaliks.**

Integraali märgiks on sümbol $\int$. Selle abil esitatakse ülesanne *Leida funktsiooni $f(x)$ algfunktsioonide üldavaldis* ehk teisiti sõnastatult *Leida funktsiooni $f(x)$ määramata integraal* järgmiselt:

$$\int f(x)\,dx.$$

Teades, et $F'(x)=f(x)$, saame antud ülesandele anda ka vastuse

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Viimase võrduse võime kirjutada ka järgmiselt:

$$\int F'(x)\,dx=F(x)+C.$$

Siit ilmneb, et integraali märgi all (järel) olev avaldis $f(x)\,dx$ on algfunktsiooni $F(x)$ diferentsiaal.

N ä i t e i d.

1) $\int 2x\,dx=x^2+C$
2) $\int 2^x \ln 2\,dx=2^x+C$
3) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$
4) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$
5) $\int \frac{dx}{x}=\ln x+C$
6) $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, kus $n\neq -1$

7) $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

8) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$

6.3. MÄÄRAMATA INTEGRAALI OMADUSI.

Edaspidises aine käsitluses ja ülesannete lahendamisel kasutatakse kaht määramata integraali omadust.

Teoreem. **Summa integraal on võrdne liidetavate integraalide summaga.**

Tõestus. On antud funktsioonid $f(x)$, $F(x)$, $g(x)$ ja $G(x)$, kusjuures

$$f(x)=F'(x) \text{ ja } g(x)=G'(x),$$

ehk

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C_1 \quad \text{ja} \quad \int g(x)\,dx=G(x)+C_2.$$

Väidame, et

$$\int[f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx.$$

Tõestamiseks integreerime oletatava võrduse pooled eraldi, saame

$$\int[f(x)+g(x)]\,dx=F(x)+G(x)+C,$$

sest

$$[F(x)+G(x)+C]'=f(x)+g(x)$$

ja

$$\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx=F(x)+C_1+G(x)+C_2$$

eelduste põhjal.

Et konstandid C, C_1 ja C_2 on määramata arvud, siis saab neid alati nii valida, et $C=C_1+C_2$ ja seega kehtib võrdus

$$F(x)+G(x)+C=F(x)+C_1+G(x)+C_2,$$

mis tõestabki väite. ∎

Näide 1.

$$\int (x^3+x^5)\,dx=\int x^3\,dx+\int x^5\,dx=$$
$$=\frac{x^4}{4}+C_1+\frac{x^6}{6}+C_2=\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+C.$$

Näide 2.

$$\int \frac{x^2-2x-3}{x-3}\,dx=\int \frac{(x+1)(x-3)}{x-3}\,dx=\int (x+1)\,dx=$$
$$=\int x\,dx+\int 1\cdot dx=\frac{x^2}{2}+C_1+x+C_2=\frac{x^2}{2}+x+C.$$

Teoreem. **Integreeritava funktsiooni ees oleva konstantse teguri võib tuua integraali märgi ette.**

Tõestus. Eeldame, et on antud funktsioonid $f(x)$ ja $F(x)$ nii, et $f'(x)=F(x)$ ehk

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Väidame, et

$$\int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx.$$

Tõestamiseks integreerime eraldi oletatava võrduse mõlemad pooled.

$$\int cf(x)\,dx=cF(x)+C_1, \text{ sest } [cF(x)+C_1]'=cf(x)$$

ja

$$c\int f(x)\,dx=c[F(x)+C] \text{ eelduse põhjal.}$$

Et konstandid C ja C_1 on määramata arvud, siis saab neid ikka nii valida, et $cC=C_1$ ja seega kehtib võrdus

$$cF(x)+C_1=c[F(x)+C],$$

mis tõestabki väite. ∎

Näide 1.

$$\int 5\sin x\,dx=5\int \sin x\,dx=-5\cos x+C.$$

Näide 2.

$$\int \frac{2+3x^2\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int \frac{2}{\cos^2 x}\,dx+\int 3x^2\,dx=$$
$$=2\int \frac{dx}{\cos^2 x}+3\int x^2\,dx=2\tan x+C_1+3\cdot\frac{x^3}{3}+C_2=$$
$$=2\tan x+x^3+C.$$

340. Kuidas kontrollida algfunktsioonide üldavaldise õigsust?

341. Integreeri.

1) $\int 3x^2\,dx$ 4) $\int \frac{dx}{x^2}$ 7) $\int x^n\,dx$

2) $\int x^2\,dx$ 5) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ 8) $\int \frac{dx}{x^2}$

3) $\int x^3\,dx$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 9) $\int \sin x\,dx$

342. Integreeri.

1) $\int x^5\,dx$ 4) $\int 5\cdot 5^x\,dx$ 7) $\int \cos x\,dx$

2) $\int 5x^2\,dx$ 5) $\int 5^{x+5}\,dx$ 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

3) $\int \frac{x^5}{5}\,dx$ 6) $\int 5^{x-5}\,dx$ 9) $\int \frac{3\,dx}{5\cos^2 x}$

343. Integreeri.

1) $\int 4x\,dx$ 4) $\int (x+\sin x)\,dx$

2) $\int \frac{1}{2}x^2\,dx$ 5) $\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

3) $\int \frac{3dx}{\cos^2 x}$ 6) $\int (\sin x+\cos x)\,dx$

344. Integreeri ja kontrolli saadud vastuseid.

1) $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$ 2) $\int \left(\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)dx$ 3) $\int \sqrt{x^3}\,dx$

4) $\int x^{\frac{3}{2}}dx$ 5) $\int\left(\frac{x^4}{3}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{5}\right)dx$ 6) $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx$

7) $\int\frac{2}{3}x\,dx$ 8) $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ 9) $\int\sin\frac{\pi}{4}dx$

345. 1) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$ 4) $\int\frac{\sqrt{u^3}+1}{\sqrt{u}+1}du$

2) $\int(1-z)^2dz$ 5) $\int\frac{x^2+7x+12}{x+4}dx$

3) $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$ 6) $\int\frac{1+2x^2}{x^2}dx$

346. 1) $\int(x+3)^4dx$ 4) $\int(z-2)^5dz$

2) $\int(y+4)^7dy$ 5) $\int(x-a)^4da$

3) $\int(x-a)^4dx$ 6) $\int(x^2+c)^6dx$

347. 1) $\int\frac{x^2-3x-10}{x-5}dx$ 3) $\int\frac{x^2-8x+15}{3-x}dx$

2) $\int\frac{x^2+5x+6}{x+2}dx$ 4) $\int\frac{2x^2-5x-3}{2x+1}dx$

348. 1) $\int\frac{2x^2-50}{x+5}dx$ 3) $\int\frac{54+2x^3}{3+x}dx$

2) $\int\frac{3x^2-24}{x-2}dx$ 4) $\int\frac{x^4-8x^2+16}{[(x-2)(x+2)]^2}dx$

349. 1) $\int\frac{2+3u}{\sqrt{u}}du$ 3) $\int\frac{(3\sqrt{v}-4v^2)^3}{v^2\sqrt{v}}dv$

2) $\int\frac{(4z-5)^4}{z^2}dz$ 4) $\int\frac{(1-\sqrt{x})^5}{x\sqrt{x}}dx$

350. 1) $\int\frac{3-\cos^2x}{\cos^2x}dx$ 2) $\int\frac{\sin^2x-4}{\sin^2x}dx$

3) $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}\,dx$ 4) $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

351. Integreeri.

1) $\int x\sqrt{x}\,dx$ 4) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$ 7) $\int 3e^u\,du$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ 5) $\int \tan^2 x\,dx$ 8) $\int (2e^t - 3\cos t)\,dt$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[2]{x\sqrt{x}}}$ 6) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$ 9) $\int \frac{2\cos^2 v + 3u}{\cos^2 v}\,dv$

352. Leia tuletis.

1) $y = \cos(x+3)$ 4) $y = \ln|x|$ 7) $y = \sqrt{x^2+1}$

2) $s = \sin(t-2)$ 5) $k = 5^{3m}$ 8) $z = a^{3v-2}$

3) $r = \tan(\varphi + 2\pi)$ 6) $p = e^{\frac{q}{2}}$ 9) $w = 2\ln\left(\frac{u}{2} + \frac{2}{3}\right)$

353. Integreeri.

1) $\int \frac{dx}{x+2}$ 4) $\int \cos(2\varphi+1)\,d\varphi$ 7) $\int (3x-4)^{\frac{1}{2}}\,dx$

2) $\int \frac{dx}{2x-1}$ 5) $\int \sin\left(\frac{\varphi}{2} - 3\right)d\varphi$ 8) $\int \left(\frac{x}{4} - 3\right)^{\frac{5}{3}} dx$

3) $\int \frac{dx}{3-x}$ 6) $\int \tan(1-\varphi)\,d\varphi$ 9) $\int \left(8 - \frac{x}{8}\right)^{-8} dx$

354. Leia keha liikumise võrrand hetkelise kiiruse avaldise järgi.

1) $\cos t$ 3) $\frac{1}{t}$

2) $t^3 + t^2$ 4) $t^4 + t^5$

355. Leia keha liikumise võrrand hetkelise kiiruse avaldise järgi, kui on teada keha poolt läbitud tee pikkus etteantud ajamomendil:

1) $(1+t)^2$, kus $s(1) = 1$;

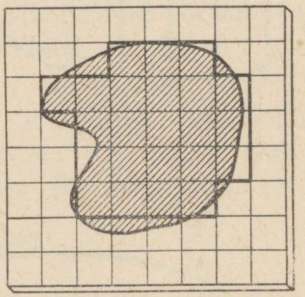
2) $\sin t + \cos t$, kui $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

7. MÄÄRATUD INTEGRAAL.

7.1. KÕVERTRAPETSI PINDALA.

Kinnise kõveraga piiratud pinnatüki suuruse leidmiseks kasutatakse järgmisi võtteid:

a) pinnatükk asetatakse ruudustikule (või ruudustikuga klaas pinnatükile) ja loetakse ära, mitu tervet ruutu ja mitu sellist ruutu, millest enam kui pool asetseb vaadeldava pinnatüki sisepiirkonnas, on kokku (joon. 93);



Joon. 93.

b) pinnatüki suurus määratakse planimeetriga (joon. 94);

c) pinnatüki suurus arvutatakse integraali abil.

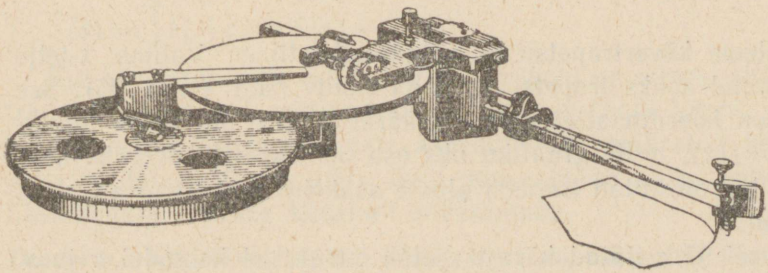
Viimase võttega tutvumegi lähemalt.

Iga kinnise kõveraga piiratud pinnatükki saab tükeldada osadeks, nii nagu näidatud joonisel 95. Need osad sarnanevad täisnurksete trapetsite ja kolmnurkadega. Et kolmnurka võib vaadelda trapetsi erijuhuna (üks haar on kõdunud nulliks), siis on vaadeldavaid kujundeid hakatud nimetama ühise nimetusega **kõvertrapetsiteks** (ka kõverjoonelisteks trapetsiteks).

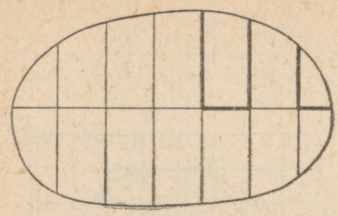
Def. **Kui täisnurkses trapetsis asendada aluste suhtes kaldu olev haar mistahes joone lõiguga, siis saadud kujundit nimetatakse kõvertrapetsiks.**

Täisnurkne trapets on seega kõvertrapetsi erijuht.

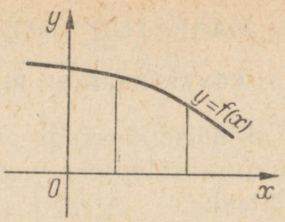
Kinnise kõveraga piiratud pinnatüki suuruse arvutamise probleem on lahendatud, kui oskame arvutada kõvertrapetsi pindala.



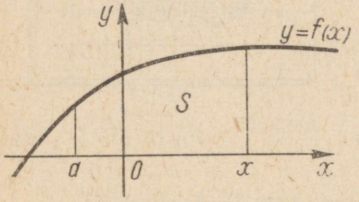
Joon. 94.



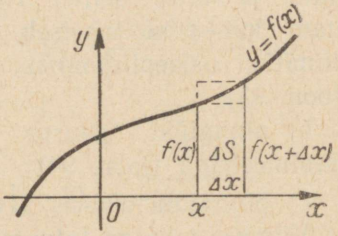
Joon. 95.



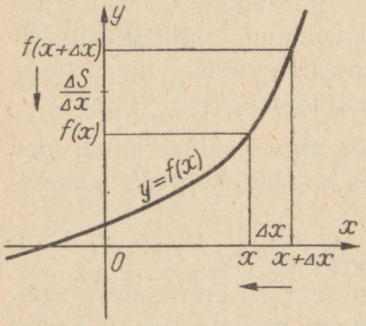
Joon. 96.



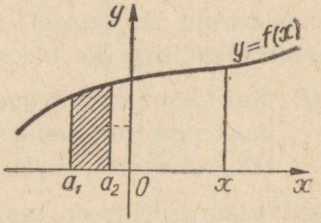
Joon. 97.



Joon. 98



Joon. 99.



Joon. 100.

Vaatleme kõvertrapetsit koordinaatteljestikus. Valime x-telje nii, et sellel asuks trapetsi alustega ristuv haar (joon. 96). See trapets on koordinaatteljestikus määratud, kui on teada funktsioon $y=f(x)$, mille graafiku üks osa on trapetsi kõveraks haaraks, ja kui on antud trapetsi aluste asukohti määravad abstsissi väärtused.

Joonisel 97 esitatud kõvertrapetsil on alused kohtadel a ja x. Et muutuja x igale võimalikule väärtusele vastab kõvertrapetsi

aluse üks kindel asukoht ja seega üks kindel kõvertrapetsi pindala suurus S, siis S on muutuja x funktsioon, sümbolites

$$S=S(x).$$

Teoreem. **Kui kõvertrapetsi kõver haar on määratud võrrandiga $y=f(x)$ ja selle trapetsi pindala $S=S(x)$, siis $S'(x)=f(x)$.**

Tõestus. Muutugu argumendi väärtus x suuruse Δx võrra, selle tagajärjel muutub kõvertrapetsi pindala ΔS võrra. Olgu funktsioon $y=f(x)$ koha x ümbruses kasvav, siis, nagu aitab selgitada joonis 98, kehtivad võrratused

$$f(x)\Delta x<\Delta S<f(x+\Delta x)\Delta x.$$

Jagades saadud võrratused positiivse arvuga Δx, saame

$$f(x)<\frac{\Delta S}{\Delta x}<f(x+\Delta x).$$

Seega jääb suhe $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ funktsiooniväärtuste $f(x)$ ja $f(x+\Delta x)$ vahele (joon. 99). Kui nüüd $\Delta x\to 0$, siis $f(x+\Delta x)\to f(x)$ ja et $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ peab jääma $f(x)$ ja $f(x+\Delta x)$ vahele, siis ka $\frac{\Delta S}{\Delta x}\to f(x)$, s. t.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$$

ehk

$$S'(x)=f(x).\blacksquare$$

Viimases tõestuses ei kasutatud kõvertrapetsi esimese aluse asukohta a. Seepärast ei määra ka tõestatud võrdus $S'(x)=f(x)$ kõvertrapetsi pindala $S(x)$ üheselt, vaid

$$S(x)=\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Kui kõvertrapetsite esimese aluse asukoht on erinev, siis nende trapetsite pindalad erinevad üksteisest konstandi võrra, mis on võrdne nende esimeste aluste asukohtadega määratud kõvertrapetsi pindalaga (joon. 100). Seni, kui esimese aluse asukoht on fikseerimata, on see konstant määramata.

Teoreem. **Kui kõvertrapetsi kõver haar on määratud võrrandiga $y=f(x)$ ja alused argumendi väärtustega a ja b, siis**

selle kõvertrapetsi pindala $S=F(b)-F(a)$, kus $F'(x)=f(x)$.

Tõestus. Fikseerime kõvertrapetsi esimese aluse kohal a. Nüüd sõltumata teise aluse asukohast x peab konstandil C võrdusest $S(x)=F(x)+C$ olema kindel üks ja sama väärtus. See arv on kergesti määratav, kui $x=a$, sest siis on $S(x)=0$ ja järelikult

$0=F(a)+C$, millest $C=-F(a)$.

Seega, kui kõvertrapetsi esimene alus on kohal a ja teine kohal x, siis tema pindala

$S(x)=F(x)-F(a)$.

Fikseerides nüüd ka trapetsi teise aluse asukoha, näiteks kohal $x=b$, saame

$S=S(b)=F(b)-F(a)$ ·■

Illustreerime tõestatud väidet näitega.

Ülesanne. Leida sirgetega $x=2$, $x=4$, $y=0$ ja $y=x$ määratus täisnurkse trapetsi pindala.

Lahendus. Antud ülesandes on $a=2$, $b=4$ ja $f(x)=x$. Seega $F(x)=\frac{x^2}{2}$ $\left(\text{sest } \left(\frac{x^2}{2}\right)'=x\right)$ ja $S=F(4)-F(2)=\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}=6$.

7.2. MÄÄRATUD INTEGRAAL.

Kui kõvertrapetsi esimese aluse asukoht oli fikseerimata ja teise aluse asukoht võis vabalt muutuda, siis avaldus selle trapetsi pindala määramata integraalina

$$S(x)=\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Integraali sümbolit kasutatakse kõvertrapetsi pindala esitamiseks ka siis, kui tema esimene või mõlemad alused on fikseeritud. Aluste asukohad märgitakse integraali sümboli otste juurde. Kui trapetsi esimene alus asub kohal a ja teine alus muutuja x mistahes väärtusel, siis trapetsi pindala kirjutame üles järgmiselt:

$$S(x)=\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a).$$

Kui aga esimene alus on fikseeritud kohal a ja teine kohal b, siis järgmiselt:

$$S=S(b)=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Kirjutust $\int_a^b f(x)\,dx$ nimetatakse **määratud integraaliks**. Arve a ja b nimetatakse määratud integraali **rajadeks**.

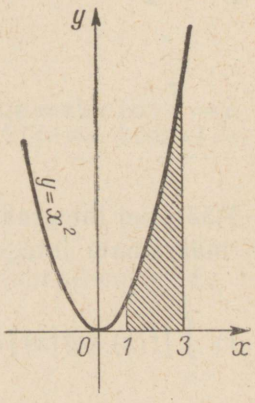
Määratud integraal on seega arv, mis näitab vastava kõvertrapetsi pindala suurust.

Võrdust

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),\ \text{kus}\ F'(x)=f(x),$$

mis on määratud integraali arvutamise eeskirjaks, nimetatakse diferentsiaal- ja integraalarvutuse loojate nimede järgi **Newton-Leibnizi valemiks.**[1]

Näide 1. Leida kõvertrapetsi pindala, kui kõver haar on määratud võrrandiga $y=x^2$ ja alused on fikseeritud kohtadel 1 ja 3 (joon. 101).



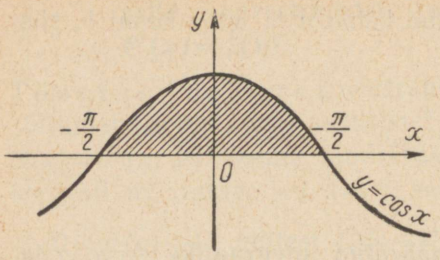
Joon. 101.

$$S=\int_1^3 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Märkused. 1) Algfunktsioon fikseeritakse määratud integraali arvutamisel

[1] Newton, Isaac (1643—1727), inglise füüsik, matemaatik ja astronoom. Oli aastatel 1669—1701 Cambridge'i ülikooli matemaatikaprofessoriks. Newton tõi matemaatikasse binoomrea (Newtoni binoom), fluksiooniteooria (diferentsiaal-arvutus) ja integraalarvutuse alused.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646—1716), saksa filosoof, matemaatik, füüsik ja diplomaat. Oli kõrgema matemaatika aluse rajajaks sõltumatult I. Newtonist. Tõi matemaatikasse tänapäevani kasutusel olevad sümbolid, alates aritmeetiliste tehete märkimisest kuni tuletise ja integraali sümboliteni. Oli esimese arvutusmasina leiutaja ja matemaatilise loogika rajaja.



Joon. 102.

määramata konstandina. Selleks pole vajadust, sest $[F(b)+C]-[F(a)+C]=F(b)-F(a)$.

2) Algfunktsiooni järgi märgitakse püstkriips ja selle otste juurde integraali rajad — arvud, millega tuleb asendada muutuja määratud integraali väärtuse arvutamiseks.

Näide 2. Leida kõvertrapetsi pindala, kui kõver haar on määratud võrrandiga $y=\cos x$ ja alused on fikseeritud kohtadel $-\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$ (joon. 102).

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2.$$

Määratud integraalide korral kehtivad samasugused omadused kui määramata integraalide korral:

1) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx;$

2) $\int_a^b cf(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx.$

Jätame need aga tõestamata.

356. Arvuta integraali väärtus.

1) $\int_2^5 dx$ 2) $\int_p^q dx$ 3) $\int_1^2 (2x^2-x+1)\,dx$

4) $\int_{-3}^{1} x\,dx$ 5) $\int_{a}^{b} 2x\,dx$ 6) $\int_{-2}^{-1} (5+2x-3x^2)\,dx$

7) $\int_{0}^{4} x^2\,dx$ 8) $\int_{m-n}^{m+n} \frac{x}{2}\,dx$ 9) $\int_{m}^{m^2} (x^3-x^2+x)\,dx$

357. Arvuta integraali väärtus.

1) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$ 4) $\int_{2}^{4} x^{-5}x^2\,dx$ 7) $\int_{0}^{2} (2x-3)^2 dx$

2) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ 5) $\int_{4}^{9} x\sqrt{x}\,dx$ 8) $\int_{2}^{3} \left(\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\right)^2 dx$

3) $\int_{1}^{3} x^{-3}\,dx$ 6) $\int_{1}^{a^2} \frac{x^3\,dx}{x^{-2}\sqrt{x}}$ 9) $\int_{1}^{5} \left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x}\right) dx$

358. Arvuta integraali väärtus.

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,dx$ 7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (2\sin x+3\cos x)\,dx$

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx$ 5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\frac{x}{2}\,dx$ 8) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} (\sin x+\cos x)^2 dx$

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ 6) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$ 9) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$

359. Tuginedes Newton-Leibnizi valemile, tõesta määratud integraali omadused.

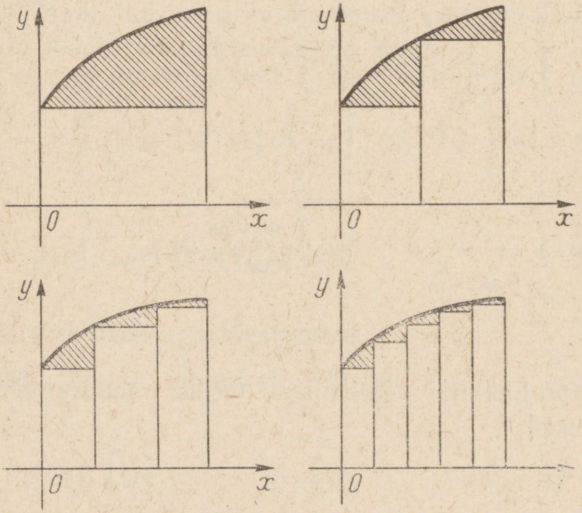
Kõvertrapets kuulub nende kujundite hulka, mille pindala ei ole pinnaühikuga otseselt võrreldav ning ta ei ole ka tükeldamiste ja täiendamiste teel teisendatav niisugusteks kujunditeks, mille pindala oskame leida. Seepärast on kõvertrapetsi pindala, nagu näiteks ringi pindalagi, defineeritav piirväärtusena.

Võrdleme kõvertrapetsit ristkülikutega, nii nagu näidatud joonisel 103. Näeme, et kui tükeldada antud trapetsit järjest kitsamaiks trapetseiks ja neid kitsamaid trapetseid võrrelda ristkülikutega, siis erinevus antud kõvertrapetsi pindala ja ristkülikute pindalade summa vahel järjest väheneb. Niisuguste ristkülikute pindalade summa piirväärtusena ongi antud kõvertrapetsi pindala defineeritav. Kui tähistame $a=x_1$ ja $b=x_n$ (joon. 104), siis

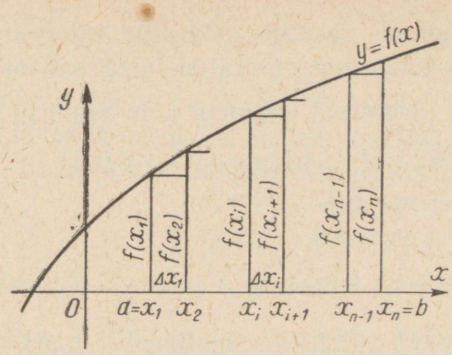
$$S=\lim_{n\to\infty}[f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2)+\ldots+f(x_i)\ (x_{i+1}-x_i)+$$
$$+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})],$$

kusjuures kõik vahed $(x_{i+1}-x_i)\to 0$.

Nurksulgudes on summa, mille liidetavad erinevad üksteisest ainult indeksite poolest. Sellist summat saab üles kirjutada lühemalt, kasutades selleks nn. s u m m a m ä r k i $\sum$:



Joon. 103.



Joon. 104.

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i),$$

kusjuures $(x_{i+1}-x_i)\to 0$.

Loeme: kõvertrapetsi pindala on võrdne piirväärtusega summast, mille liidetavaiks on korrutised $f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i)$, kus i omab järjest täisarvulisi väärtusi 1-st $(n-1)$-ni, kus n kasvab tõkestamatult ja kõik vahed $(x_{i+1}-x_i)$ lähenevad nullile. Tähistades vahesid $x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$, saame kõvertrapetsi pindala piirväärtusena

$$S=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Teame, et funktsiooni $y=f(x)$ graafikuga ja argumendi väärtustega a ja b määratud kõvertrapetsi pindala avaldub määratud integraalina

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Seega

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Saadud seos osutub väga kasulikuks, sest niisugusele summa piirväärtusele taanduvad mitmed teisedki probleemid peale kõvertrapetsi pindala leidmise ülesande. Et niisugune summa, nn.

integraalsumma, avaldub määratud integraalina, siis taanduvad kõik need probleemid määratud integraali arvutamisele.

360. Esita järgmised summad summamärgi abil.

1) $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)$

2) $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$

3) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_s^2$

4) $(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_4)\ +\ldots+(x_k+x_{k+1})$

5) $\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\frac{a_5+a_6}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}+a_n}{2}$

361. Esita järgmised summad summamärgita.

1) $\sum_{i=1}^{4}(a_i+b_i)^i$

2) $\sum_{i=2}^{5}\frac{1+2}{i}$

3) $\sum_{i=3}^{8}\frac{3-i^2}{i-2}$

4) $\sum_{i=1}^{4}(i^2+2i+1)$

5) $\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)]^2(x_{i+1}-x_i)$

6) $\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right]^2$

362. Kõvertrapets on määratud kõveraga $y=x^2$ ning abstsissi väärtustega 1 ja 5. Tükelda see trapets neljaks kitsamaks võrdse kõrgusega kõvertrapetsiks ja lähenda nende pindalad
a) ristkülikutega, mille üheks küljeks on iga trapetsi esimene alus ja teiseks küljeks trapetsi kõrgus;
b) ristkülikutega, mille üheks küljeks on iga trapetsi teine alus ja teiseks küljeks trapetsi kõrgus;
c) kahekaupa harilike täisnurksete trapetsitega.
Arvuta antud kõvertrapetsi pindala vastavad ligikaudsed väärtused. Missugune saadud tulemustest on täpseim?

363. Kõvertrapets on määratud kõveraga $y=\sin x$ ning abstsissi väärtustega 0 ja π. Tükelda see trapets kuueks kitsamaks võrdse kõrgusega kõvertrapetsiks ja lähenda nende pindalad nii nagu eelmises ülesandeski. Leia antud kõvertrapetsi pindala vastavad ligikaudsed väärtused. Missugune tükeldusviis annab siin kõige täpsema tulemuse?

364. Tükelda antud kõvertrapets n kitsamaks võrdse kõrgusega kõvertrapetsiks, lähenda need ristkülikutega, mille üheks

küljeks on esimene alus ja teiseks küljeks trapetsi kõrgus. Avalda antud kõvertrapetsi pindala ligikaudne väärtus.

365. Tükelda antud kõvertrapets $2n$ kitsamaks võrdse kõrgusega kõvertrapetsiks, lähenda need kahekaupa harilike täisnurksete trapetsitega ja avalda antud kõvertrapetsi pindala ligikaudne väärtus.

7.4. PINDALA ARVUTAMINE.

Et määratud integraal võimaldab arvutada kõvertrapetsi pindala, siis taandub kõveraga piiratud pinnatüki suuruse arvutamine integreerimisele. Integreerimisvõtete õpetamine on aga kõrgema kooli ülesanne ja seepärast jääb kinnise kõveraga piiratud pinnatüki suuruse leidmise ülesanne keskkoolis lõpetamata, õigemini, keskkoolis me sellega ainult alustame. Aga siingi avardub meie oskus pindalasid arvutada tänu määratud integraalile tunduvalt.

Pindalade arvutamisel tuleb silmas pidada, et juhul, kui funktsiooni $y=f(x)$ graafik paikneb allpool x-telge, on $f(x)<0$. Seetõttu on ka $f(x_i)\Delta x_i$, nende summa ja selle summa piirväärtus kõik negatiivsed. Niisiis, kui kõvertrapets on allpool x-telge, saame tema pindala arvutamisel määratud integraali abil tulemuseks negatiivse arvu.

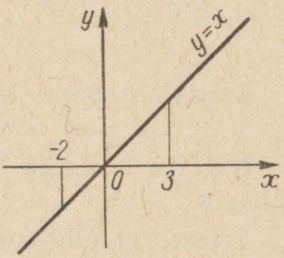
Juhul kui funktsiooni $y=f(x)$ graafik lõikab antud vahemikus x-telge, saadakse määratud integraali arvutamisel ülalpool ja allpool x-telge asetsevate pindalade vahe.

N ä i d e 1. Leida funktsiooni $y=x$ graafiku alune pindala vahemikus -2-st 3-ni.

Lahendus kujul

$$S=\int_{-2}^{3} x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3}=\frac{9}{2}-\frac{4}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5$$

pole õige, sest nagu jooniselt 105 näeme, on $\frac{9}{2}$ positiivse osa pindala ja 2 negatiivse osa pindala. Nii et integreerimise tulemusena saime nende pindalade vahe. Et saada õiget pindala väärtust, tuleb leida eraldi pindala all-



Joon. 105.

pool x-telge ja ülalpool x-telge, kusjuures esimene integraal võetakse miinusmärgiga.

$$S=-\int_{-2}^{0} x\,dx+\int_{0}^{3} x\,dx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3}=2+4{,}5=6{,}5.$$

Näide 2. Leida joontega $y=x^2$ ja $y=x$ piiratud kujundi pindala.

Leiame antud joonte lõikepunktide abstsissid. Selleks lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x, \end{cases}$$

millest

$$x^2-x=0.$$

Selle võrrandi lahenditeks saame

$$x_1=0 \text{ ja } x_2=1.$$

Jooniselt 106 näeme, et otsitava pindala leidmiseks tuleb leida vahemikus $[0,1]$ esmalt sirge $y=x$ alune pindala, seejärel kõvera $y=x^2$ alune pindala ja siis esimesest tulemusest lahutada teine. Tähistades otsitava pindala tähega S, võime kirjutada, et

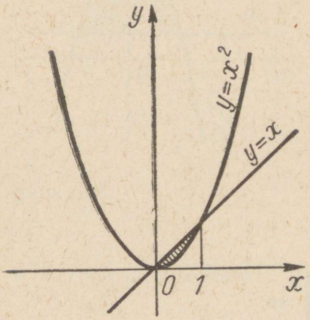
$$S=\int_{0}^{1} x\,dx-\int_{0}^{1} x^2\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}-\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-0\right)-\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{6}.$$

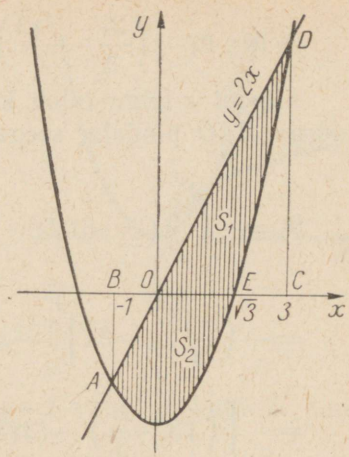
Seega on otsitav pindala $\frac{1}{6}$ ruutühikut.

Näide 3. Leida joontega $y=x^2-3$ ja $y=2x$ piiratud kujundi pindala.

Leiame antud joonte lõikepunktid. Selleks lahendame need võrrandid süsteemina



Joon. 106.



Joon. 107.

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 2x, \end{cases}$$

millest

$$x^2 - 3 = 2x$$

ja

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Saadud ruutvõrrandi lahendid on

$$x_1 = -1 \text{ ja } x_2 = 3.$$

Joonisel 107 on kujutatud otsitav pindala. Näeme, et osa otsitavast pindalast on ülalpool x-telge ja osa allpool x-telge. Seepärast leiame need pindalad eraldi, tähistades nad vastavalt tähtedega S_1 ja S_2.

Ülalpool x-telge tuleb kolmnurga OCD pindalast lahutada kujundi ECD pindala. Punkti E abstsiss saadakse võrrandi

$$x^2 - 3 = 0$$

positiivse lahendina, seega $E\ (\sqrt{3},\ 0)$ ja

$$S_1 = \int_0^3 2x\,dx - \int_{\sqrt{3}}^3 (x^2 - 3)\,dx = x^2 \Big|_0^3 - \frac{x^3}{3} \Big|_{\sqrt{3}}^3 + 3x \Big|_{\sqrt{3}}^3 =$$

$$= (9-0) - \left(\frac{27}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) + (9-3\sqrt{3}) = 9-2\sqrt{3}.$$

Allpool x-telge tuleb kujundi BAE pindalast lahutada kolmnurga BAO pindala, seega

$$S_2 = -\left(\int_{-1}^{\sqrt{3}} (x^2-3)\,dx - \int_{-1}^{0} 2x\,dx\right) =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{\sqrt{3}} - 3x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}} - x^2\Big|_{-1}^{0}\right) =$$

$$= -\left[\left(\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right) - (3\sqrt{3}+3) - (0-1)\right] =$$

$$= -\left(-2\sqrt{3} - 1\frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{3} + 1\frac{2}{3}.$$

Kogu pindala

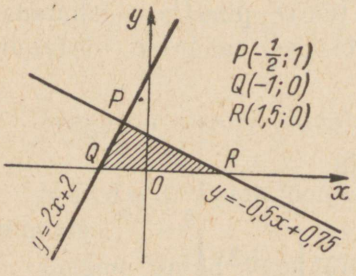
$$S = S_1 + S_2 = 9 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 1\frac{2}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

366. Leia pindala kujundil, mida piirab funktsiooni $y=x^2-4x+5$ graafik, x-telg ja sirged $x=3$ ja $x=5$.

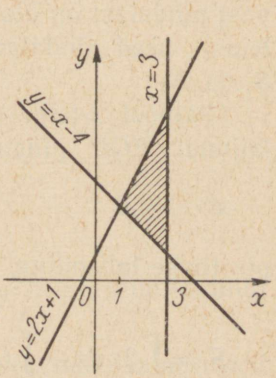
367. Leia parabooliga $y=\frac{x^2}{2}$, sirgetega $x=3$ ja $x=6$ ning x-teljega piiratud kujundi pindala.

368. Leia joonistel 108 ja 109 kujutatud pindalad integreerimise teel.

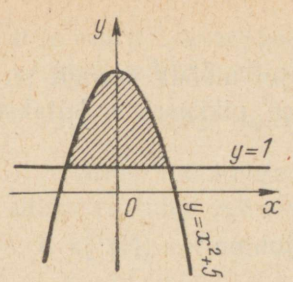
369. Leia sirge $y=2x+3$ ja parabooli $y=x^2$ poolt piiratud kujundi pindala.



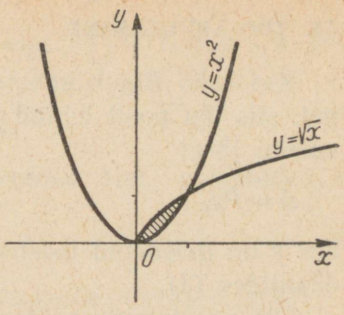
Joon. 108.



Joon. 109.



Joon. 110.



Joon. 111.

370. Leia parabooli $y=x^2$ ja sirge $y=8$ vahelise kujundi pindala.

371. Leia kõveratega $y=\frac{1}{4}x^2$ ja $y=3-\frac{x^2}{2}$ piiratud kujundi pindala.

372. Leia joonistel 110 ja 111 viirutatud kujundite pindalad.

373. Leia kõvera $y=\sin x$ ja x-telje vahelise kujundi pindala vahemikus $(0, \pi)$ ja vahemikus $(\pi, 2\pi)$. Võrdle tulemusi.

374. Leia kõvera $y=\cos x$ ja x-telje vahelise kujundi pindala vahemikus $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ ja vahemikus $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Võrdle tulemusi omavahel ja eelmise ülesande tulemustega.

375. Leia kõverate $y=\sin x$ ja $y=\cos x$ vahelise kujundi pindala nende kõverate kahe järjestikuse lõikepunkti vahel.

376. Leia kõveratega $y=x^2$ ja $y=x^3$ piiratud kujundi pindala.

377. Leia kõveratega $y=x^2-4$ ja $y=-x^2$ piiratud kujundi pindala.

378. Leia kõveratega $y=\sin x$ ja $y=\tan x$ piiratud kujundi pindala vahemikus $-\frac{\pi}{4}$ kuni $\frac{\pi}{4}$.

379. Leia kõveratega $y=x^4$ ja $y=-10x^2+11$ piiratud kujundi pindala.

380. Leia kõveratega $y=x^4$ ja $y=-8x^2+9$ piiratud kujundi pindala.

381. Leia kõveraga $y=\sin x$ ja sirgega $y=0{,}5$ piiratud kujundite pindalade summa vahemikus -2π kuni 6π.

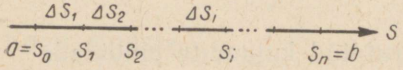
Kui keha liigub konstantse jõu P mõjul mööda mingit sirget, siis jõu poolt tehtud töö A läbitud tee pikkusel s leitakse valemi järgi

$$A = Ps,$$

kus s on mõõdetud meetrites (m), P — njuutonites (N) ja A — džaulides (J).

Töö arvutamine on aga märksa keerulisem, kui liikumine toimub muutuva jõu mõjul. Tuletame valemi sellise juhu jaoks.

Oletame, et keha liigub mööda sirgjoont kohast a kohani b muutuva jõu P mõjul, mis sõltub läbitud tee pikkusest s, s. t. $P = f(s)$.



Joon. 112.

Jaotame vahemiku kohast a kohani b n võrdseks osaks (joon. 112). Mida suurem on n, seda väiksem on teeosakese Δs pikkus ja seda enam oleme õigustatud teeosakese Δs ulatuses lugema jõudu konstantseks, lugedes selle võrdseks näiteks jõu suurusega teeosakese lõpp-punktis. Nii saame avaldada töö hulga A l i g i k a u d s e väärtuse:

$$A \approx f(s_1)\Delta s_1 + f(s_2)\Delta s_2 + \ldots + f(s_n)\Delta s_n$$

ehk

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta s_i.$$

Töö hulga A t ä p s e väärtuse saame, kui leiame piirväärtuse

$$A = \lim_{n-\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(s_i)\Delta s_i] = \int_a^b f(s)\,ds.$$

N ä i d e 1. Venitamata olekus on vedru 20 cm pikk. 100 N suurune jõud venitab teda 5 cm pikemaks. Kui palju tööd on tarvis teha, et venitada vedru pikkuselt 25 cm pikkuseni 35 cm?

L a h e n d u s. Hooke'i seaduse põhjal on venitusjõud F võrde-

line vedru deformatsiooniga x, s. t. $F=kx$. Et 100 N suurune jõud venitab vedru 5 cm pikemaks, siis

$$100=k\cdot 0{,}05;\quad k=2000;\quad F=2000x.$$

Tehtud töö hulga leiame integreerimise teel, arvestades, et pikkused tuleb esitada meetrites:

$$A=\int_{0{,}05}^{0{,}15} 2000x\,dx=\frac{2000x^2}{2}\Bigg|_{0{,}05}^{0{,}15}=1000(0{,}15^2-0{,}05^2)=20\ (\text{J})$$

382. Jõud 10 N venitab vedru 3 cm pikemaks. Kui palju tehakse seejuures tööd?

383. Jõud 40 N venitab vedru 8 cm pikemaks. Kui palju tehakse seejuures tööd?

384. Jõud 60 N venitab vedru 2 cm pikemaks. Vedru algpikkus on 14 cm. Kui palju tuleb teha tööd, et venitada vedru 20 cm pikkuseks?

8. TAHKKEHAD JA PÖÖRDKEHAD.

8.1. SISSEJUHATUSEKS.

Geomeetriliste kehadega tutvusime juba 8-klassilises koolis. Nüüd keskkooli lõpuklassis süvendame, laiendame ja süstematiseerime varemõpitud teadmisi, kasutades vahepeal juurdeõpitut, peamiselt piirväärtuse ja integraali mõistet.

Meile juba tuttavad geomeetrilised kehad kuuluvad kahte ruumiliste kehade osahulka. Nendeks on **tahkkehad** ja **pöördkehad.** Tahkkehadest tunneme prismat (tema erijuhuks on kuup, risttahukas ja rööptahukas) ja korrapärast püramiidi. Pöördkehadest silindrit, koonust ja kera.

Tahkkehad defineerisime teda piiravate tahkude kuju ja asendi järgi ning pöördkehad pöörleva tasapinnalise kujundi abil. Näiteks *Keha, mis on piiratud kahe võrdse paralleelse hulknurga ja nii mitme ristkülikuga, kui mitu külge on nendel hulknurkadel, nimetatakse püstprismaks* (VI kl. matemaatika õpik, lk. 256) või *Koonuseks nimetatakse keha, mille moodustab ümber ühe oma kaateti pöörlev täisnurkne kolmnurk* (VIII kl. matemaatika õpik, lk. 235).

Pindalavalemite tuletamisel kasutasime vaadeldava keha pinna-

laotust (välja arvatud sfäär), ruumalavalemite tuletamisel tuginesime tükeldamis- ja täiendamismeetodile (prisma), katselisele meetodile (korrapärane püramiid) ja Cavalieri printsiibile (pöördkehad).

Nüüd täiendame tahkkehade hulka regulaarsete tahkkehadega, mittekorrapärase püramiidiga ja tüvipüramiidiga ning pöördkehade hulka tüvikoonusega ja kera osadega (sektor, segment). Kehad defineerisime ühtse printsiibi järgi, lähtudes vastavatest pindadest, tutvume kehade omadustega ja tuletame pindala- ja ruumalavalemid piirväärtuse ja integraali mõistet kasutades.

385. Missuguste kehade pindala arvutatakse valemiga $S=üh$, kus $ü$ on põhja ümbermõõt ja h on keha kõrgus?

386. Missuguste kehade ruumala arvutatakse valemiga $V=S_p h$, kus S_p on põhja pindala ja h on keha kõrgus?

387. Missuguste kehade ruumala arvutatakse valemiga $V=\frac{1}{3}S_p h$?

388. Missuguste valemitega arvutatakse sfääri pindala ja kera ruumala?

389. Missugune kujund on koonuse külgpinnalaotus? Kuidas arvutada selle kujundi pindala?

390. Milles seisneb Cavalieri printsiip?

391. Defineeri silindrit kui pöördkeha.

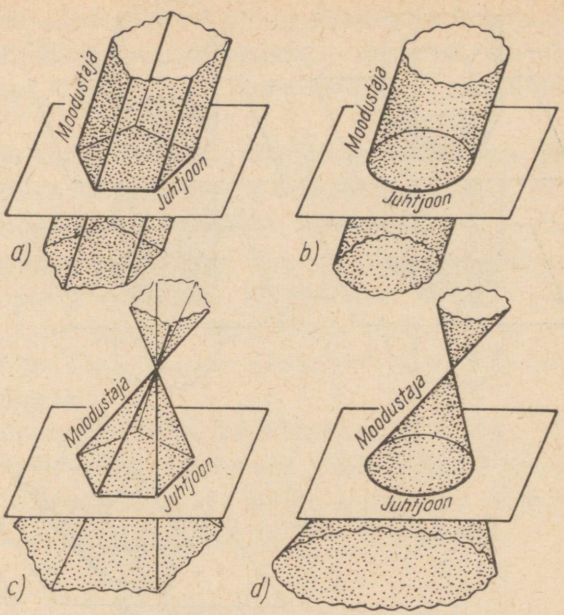
392. Missugust keha nimetatakse korrapäraseks püramiidiks?

393. Mis on korrapärane hulknurk ja missugune on tema pindala valem?

394. Kui suur on korrapärase kolmnurga, nelinurga, viisnurga ja kuusnurga iga sisenurk?

8.2. KEHADE DEFINEERIMINE VASTAVATE PINDADE ABIL.

Nagu juba märgitud, lähtume kehade defineerimisel vastavatest pindadest. Nende pindade defineerimisel tugineme ruumis liikuvale sirgele, nn. **moodustajale** ja moodustaja liikumist juhtivale joonele, nn. **juhtjoonele.** Meid huvitavad pinnad, mille juhtjooneks on tasandiline kinnine murdjoon või kõverjoon ja moodustaja liigub mööda juhtjoont nii, et ta säilitab oma sihi (nn. paralleelne liikumine) või läbib üht kindlat ruumipunkti, mis ei asetse juhtjoonega määratud tasandil (nn. püsipunktiga liikumine).



Joon. 113.

Joonisel 113 kujutatud pindadele saame anda vastavalt nende moodustamise viisile järgmised definitsioonid:

a) pinda, mis tekib moodustaja paralleelsel liikumisel mööda kinnist murdjoont, nimetatakse **prismaliseks pinnaks**;

b) pinda, mis tekib moodustaja paralleelsel liikumisel mööda kinnist kõverjoont, nimetatakse **silindriliseks pinnaks**;

c) pinda, mis tekib püsipunktiga moodustaja liikumisel mööda kinnist murdjoont, nimetatakse **püramiidiliseks pinnaks**;

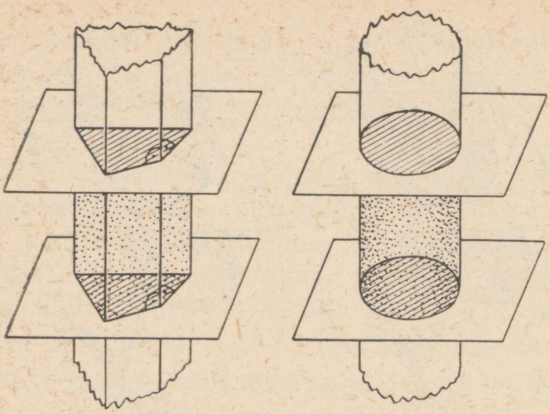
d) pinda, mis tekib püsipunktiga moodustaja liikumisel mööda kinnist kõverjoont, nimetatakse **kooniliseks pinnaks.**

Tuginedes nendele pindadele, defineerime kehad.

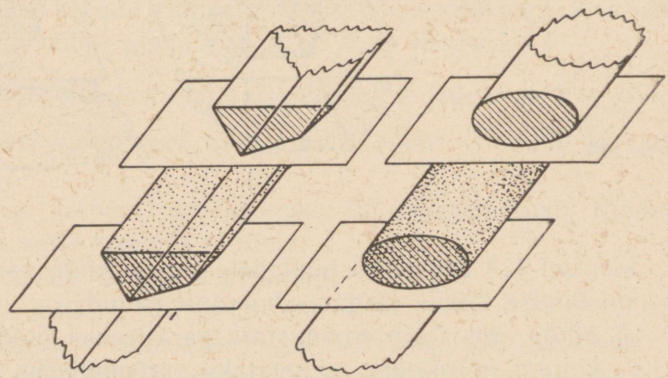
Def. **Keha, mis tekib prismalise pinna lõikamisel kahe paralleelse tasandiga, mis ei ole paralleelsed moodustajaga, nimetatakse prismaks.**

Def. **Keha, mis tekib silindrilise pinna lõikamisel kahe paralleelse tasandiga, mis ei ole paralleelsed moodustajaga, nimetatakse silindriks.**

Kui pindu lõikavad paralleelsed tasandid on moodustajaga risti, siis nimetatakse saadud kehi vastavalt **püstprismaks** või **püstsi-**



Joon. 114.



Joon. 115.

lindriks (joon. 114), vastupidisel juhul aga **kaldprismaks** või **kaldsilindriks** (joon. 115).

Prismat või silindrit piirav pind koosneb vastavalt prismalise pinna või silindrilise pinna osast, nn. **külgpinnast**, ja paralleelsete tasandite tükkidest, nn. **põhjadest.**

Põhjadevahelist kaugust nimetatakse vastavalt prisma või silindri **kõrguseks.**

Märkus. Koolimatemaatikas ei käsitleta kõikvõimalikke prismasid ja silindreid. Me vaatleme neid prismasid, mille põhjaks on kumer hulknurk, ja püstsilindreid, mille põhjaks on ring. Edaspidises ongi mõisted *prisma* ja *silinder* kasutusel ainult sellises tähenduses.

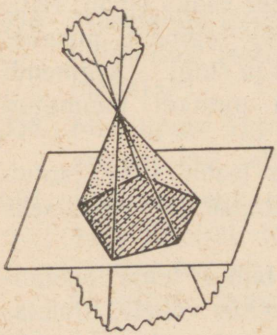
Nii püramiidiline kui ka kooniline pind koosneb kahest moodustaja püsipunkti suhtes sümmeetrilisest osast.

Def. **Keha, mis tekib püramiidilise pinna lõikamisel moodustaja püsipunkti mitteläbiva ja moodustaja mistahes asendiga mitteparalleelse tasandiga, nimetatakse püramiidiks** (joon. 116).

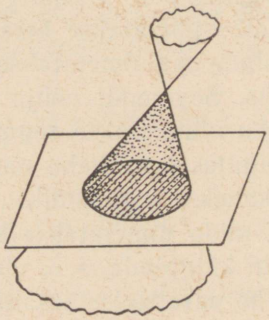
Def. **Keha, mis tekib koonilise pinna lõikamisel moodustaja püsipunkti mitteläbiva ja moodustaja mistahes asendiga mitteparalleelse tasandiga, nimetatakse koonuseks** (joon. 117).

Püramiidi või koonust piirav pind koosneb vastavalt püramiidilise või koonilise pinna osast, nn. **külgpinnast**, ja seda pinda lõikava tasandi tükist, nn. **põhjast.** Moodustaja püsipunkt on püramiidi või koonuse **tipp.** Tipu kaugus põhjast on vastavalt püramiidi või koonuse **kõrgus.**

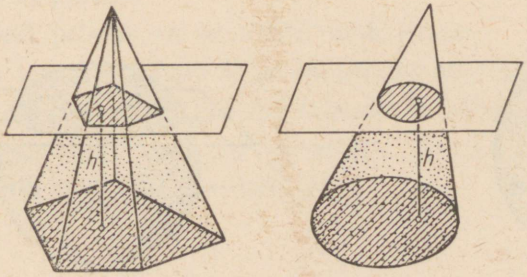
M ä r k u s. Koolimatemaatikas käsitletakse püramiide, mille põhjaks on kumer hulknurk, ja koonuseid, mille põhjaks on ring ning mille kõrguse aluspunktiks on põhja keskpunkt. Edaspidi mõistame *püramiidi* ja *koonust* ainult sellises tähenduses.



Joon. 116.



Joon. 117.



Joon. 118.

Lõigates püramiidi või koonust põhjaga paralleelse tasapinnaga ja eraldades tipupoolse osa, jääb järele vastavalt kas **tüvipüramiid** või **tüvikoonus** (joon. 118).

Tüvipüramiidi või tüvikoonust piirav pind koosneb püramiidilisest või koonilisest **külgpinnast** ja kahest erineva suurusega paralleelsest **põhjast.** Põhjadevahelist kaugust nimetatakse vastavalt tüvipüramiidi või tüvikoonuse **kõrguseks.**

Sfääri defineerimiseks kasutame sirglõiku, mille üks otspunkt on püsipunkt. Sfäär on kõigi nende punktide hulk, mis võivad olla selle sirglõigu teiseks otspunktiks (joon. 119).

Def. **Sfäär on ruumi kõigi nende punktide hulk, mis asetsevad ühest etteantud punktist võrdsel kaugusel.**

Etteantud punkti nimetatakse **sfääri keskpunktiks** ja sfääri kõigi punktide kaugust keskpunktist **sfääri raadiuseks.**

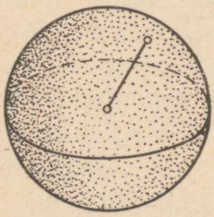
Sfäär on kinnine pind, millega piiratud ruumiosa nimetatakse keraks. Sfääri keskpunkt on ka **kera keskpunkt** ja sfääri raadius **kera raadius.**

Lõigates kera tasandiga, jaotub kera kaheks osaks (joon. 120). Neid osi nimetatakse **kera segmentideks.** Kera segmenti piiravat kera pinna osa nimetatakse **sfääri segmendiks** ja ringi — **segmendi põhjaks.** Segmendi põhja keskpunktist kera pinnani tõmmatud ristlõiku nimetatakse **segmendi kõrguseks.**

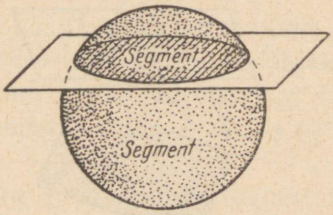
Lõigates kera kahe paralleelse tasandiga (joon. 121), jaotub kera kaheks segmendiks ja paralleelsete tasandite vaheliseks osaks, mida nimetatakse **kera kihiks.**

Kihi külgpinda, s. o. pinda, mis eraldub sfäärist tema lõikamisel kahe paralleelse tasandiga ja mis jääb nende vahele, nimetatakse **kera vööks.**

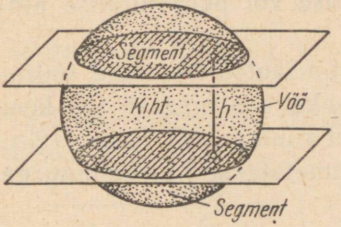
Kera kihti piiravad peale vöö veel paralleelsete tasandite osad



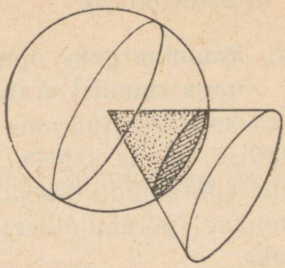
Joon. 119.



Joon. 120.



Joon. 121.



Joon. 122.

— ringid, mida nimetatakse **kihi põhjadeks.** Põhjadevahelist kaugust nimetatakse nii **kera kihi** kui ka **kera vöö kõrguseks.**

Asetsegu koonuse tipp kera keskpunktis (joon. 122). Koonuse külgpind eraldab siis kerast osa, mida nimetatakse **kera sektoriks.**

Kera sektor on liitkeha, mis koosneb kera segmendist ja koonusest. Sellel segmendil ja koonusel on ühine põhi.

395. Missugune kujund on silindri külgpinna laotuseks? koonuse külgpinna laotuseks? Kuidas arvutatakse nende kujundite pindala?

396. Missugune kujund on tüvikoonuse pinnalaotuseks? Kuidas arvutatakse selle kujundi pindala?

397. Kirjelda keha, mille saame, kui
1) püramiidi definitsioonis jätame ära ühe või mõlemad tingimused;
2) silindri definitsioonis jätame ära seal esineva tingimuse.

398. Kirjelda keha, mille saame, kui prismalist pinda lõikame kahe mitteparalleelse tasandiga, mis pole paralleelsed moodustaja ühegi asendiga. Kas see keha on tükeldatav meile tuntud kehadeks?

399. Defineeri prisma ja püramiid tahkkehana.

400. Tõesta teoreem *Sfääri lõige tasandiga on ringjoon.*

401. Defineeri riba ja nurga abil kolmnurk, rööpkülik ja trapets.

402. Defineeri ringi segment ja sektor. Esita valemid nende kujundite pindala arvutamiseks.

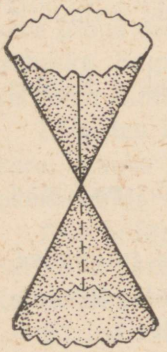
Def. **Ruuminurgaks nimetatakse koonilise või püramiidilise pinnaga ruumist eraldatud osa.**

Et koonilise (püramiidilise) pinna tipp jaotab koonilise (püramiidilise) pinna kaheks ühesuguseks osaks, siis määrab iga kooniline (püramiidiline) pind kaks võrdset ruuminurka (joon. 123). Koonilise (püramiidilise) pinna tippu nimetatakse ka **ruuminurga tipuks.**

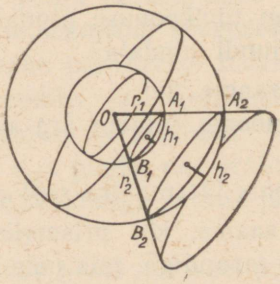
Kui ruuminurga tipp on sfääri keskpunktis, siis sõltumata sfääri raadiusest jääb sfäärist ruuminurgaga äralõigatud pinnatüki ja sfääri pindala suhe konstantseks.

Tõestame selle omaduse juhul, kui ruuminurga moodustab kooniline pind ja selle lõige sfääriga on ringjoon.

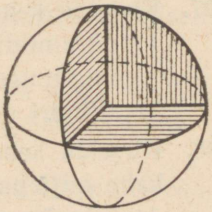
Teoreem. **Kui koonilise pinna tipp on sfääri keskpunktis ja koonilise pinna eraldatud segmendi pindala ja sfääri pindala lise pinnaga eraldatud segmendi pindala ja sfääri pindala suhe ei sõltu sfääri raadiusest.**



Joon. 123.



Joon. 124.



Joon. 125.

Tõestus. Vaatleme kaht kontsentrilist sfääri raadiusega r_1 ja r_2 (joon. 124). Lõikame neid koonilise pinnaga, mille tipp on sfääride ühises keskpunktis. Et segmendi pindala on $2\pi rh$ ja sfääri pindala $4\pi r^2$, kus h on segmendi kõrgus ja r sfääri raadius, siis moodustades meid huvitavad suhted, saame:

$$\frac{2\pi r h_1}{4\pi r_1^2} = \frac{h_1}{2r_1},$$

$$\frac{2\pi r h_2}{4\pi r_2^2} = \frac{h_2}{2r_2}.$$

Seega tuleb tõestada, et $\frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2}$.

Vaatleme kolmnurki OA_1B_1 ja OA_2B_2. Need kolmnurgad on sarnased. Miks? Siit

$$\frac{r_1 - h_1}{r_1} = \frac{r_2 - h_2}{r_2} \Rightarrow 1 - \frac{h_1}{r_2} = 1 - \frac{h_2}{r_2} \Rightarrow \frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2}.$$

Seega

$$\frac{2\pi r h_1}{4\pi r_1^2} = \frac{2\pi r h_2}{4\pi r_2^2}. \blacksquare$$

Tõestatud omadusele tugineb ruuminurkade mõõtmine.

Def. **Ruuminurga ühikuks on ruuminurk, mis sfääri pinnast eraldab tüki, mille suurus on võrdne sfääri raadiuse ruuduga.**

Ruuminurga ühikut nimetatakse **stereoradiaaniks** ehk lühidalt **sterradiaaniks.**

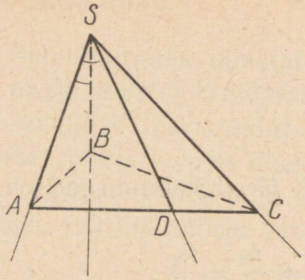
Ülesanne. Näidata, et kolme ristuva tasapinnaga määratud ruuminurga suurus on $\frac{\pi}{2}$.

Lahendus. Kolme ristuva tasapinna poolt moodustatud püramiidiline pind eraldab sfääri pinnast $\frac{1}{8}$ osa (joon. 125), s. o. $\frac{4\pi r^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2}$. Et ühikuks on r^2, siis vaadeldava ruuminurga suurus ongi $\frac{\pi r^2}{2r^2} = \frac{\pi}{2}$.

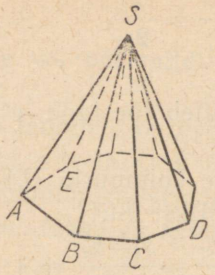
8.4. MITMETAHULISED NURGAD.

Def. **Püramiidilise pinnaga määratud ruuminurka nimetatakse mitmetahuliseks nurgaks.**

Kui püramiidilise pinna juhtjoon on kinnine kumer murdjoon, siis nimetatakse vastavat mitmetahulist nurka **kumeraks.** Edaspidi mõistamegi mitmetahulise nurga all alati kumerat mitmetahulist nurka. Mitmetahulise nurga tahkudeks on ühise tipuga nurgad, mida nimetatakse **tasanurkadeks.**



Joon. 126.



Joon. 127.

Tutvume tasanurkade kahe omadusega.

Teoreem. **Kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kahe ülejäänud tasanurga summast.**

Tõestus. Olgu kolmetahulise nurga $SABC$ suurimaks tasanurgaks ASC (joon. 126). Kui väide on õige kõige suurema tasanurga kohta, siis on ta kindlasti õige ka teiste tasanurkade kohta.

Joonestame tipust S tahul ASC kiire CD nii, et $\angle ASD = \angle ASB$ ja võtame $SD = SB$. Lõikame nüüd kolmetahulist nurka tasandiga, mis läbib punkte D ja B ning lõikab servi SA ja SC vastavalt punktides A ja C. Lõige on kolmnurk ABC. Selles

$$AD + DC < AB + BC,$$

sest igas kolmnurgas on üks külg väiksem kahe teise külje summast.

Et $\triangle ASD = \triangle ASB$ (miks?), siis $AD = AB$. Lahutades ülalsaadud võrratuse pooltest võrdsed liikmed AD ja AB, saame

$$DC < BC.$$

Kolmnurkades BSC ja DSC on $SB = SD$, $SC = SC$ ning $DC < BC$. Järelikult $\angle DSC < \angle BSC$.

Nurkadevahelistest seostest

$$\angle ASD = \angle ASB,$$
$$\angle DSC < \angle BSC$$

järeldubki, et

$$\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC.\blacksquare$$

Teoreem. **Mitmetahulise nurga tasanurkade summa on väiksem kui 2π.**

Tõestus. Lõikame mitmetahulist nurka mingi tasandiga (joon. 127). Siis püramiidi $SA \ldots E$ põhja tipud on kolmetahuliste nurkade tippudeks. Eelneva teoreemi põhjal

$$\begin{aligned}
&\angle ABC < \angle ABS + \angle CBS\\
&\angle BCD < \angle BCS + \angle DCS\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\ \angle EAB < \angle EAS + \angle BAS\\
&\pi(n-2) < n\pi - x,
\end{aligned}$$

kus n on püramiidi põhja tippude arv ja x on tipu S juures asuvate tasanurkade summa. Viimasest võrratusest

$$x < n\pi - (n-2)\pi \Rightarrow x < 2\pi. \blacksquare$$

403. Leia kera sektoriga määratud ruuminurk, kus sektori koonuselise osa kõrgus ja põhja raadius on võrdsed.

V. $2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

404. Nimetades kahe paralleelse tasandiga eraldatud ruumiosa *kihiks*, defineeri kihi ja ruuminurga abil

1) rööptahukas,
2) püramiid,
3) tüvipüramiid,
4) koonus,
5) tüvikoonus.

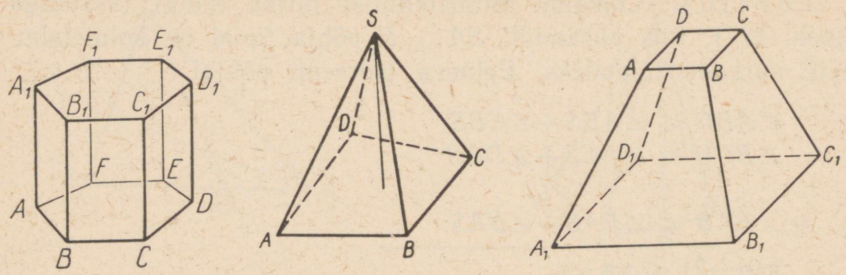
405. Missugust nurka nimetatakse kahetahuliseks nurgaks? Kas kahetahuline nurk on ruuminurk?

8.5. TAHKKEHAD.

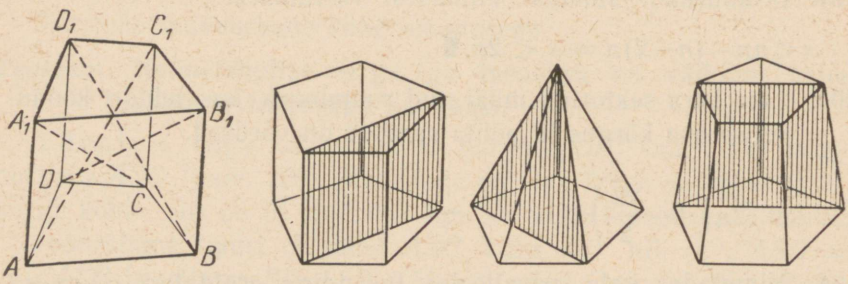
Nagu eespool mainitud, jaotub koolis käsitletavate kehade hulk kaheks osahulgaks — tahkkehade ja pöördkehade hulgaks. Tahkkehadeks on prisma, püramiid, tüvipüramiid ja regulaarsed tahkkehad Neid kehi piirav pind koosneb hulknurkadest, mida nimetatakse **tahkudeks.**

Tahkkeha külgpind koosneb **külgtahkudest**, põhjadeks on **põhitahud.**

Tahud lõikuvad mööda **servi**: külgtahud mööda **külgservi**, külgtahud ja põhitahk mööda **põhiservi**. Servade ühiseid punkte nimetatakse **tippudeks**.



Joon. 128.



Joon. 129. Joon. 130.

Vastavalt põhitahu tippude arvule nimetatakse tahkkeha kolmnurkseks, nelinurkseks, viisnurkseks jne.

Tahkkehadest kõnelemise hõlbustamiseks tähistatakse nende tipud tähtedega. Joonisel 128 on esitatud prisma $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, lühemalt $A \ldots E_1$, püramiid $SABCD$ ja tüvipüramiid $ABCDA_1B_1C_1D_1$, lühemalt $A \ldots D_1$.

Kaht mitte ühel tahul asetsevat tippu ühendavat sirglõiku nimetatakse selle tahkkeha **diagonaaliks**. Joonisel 129 on prisma $A \ldots D_1$ diagonaalideks AC_1, BD_1, SA_1 ja DB_1. Püramiidil pole diagonaale. Prisma, püramiidi või tüvipüramiidi kaks mitte ühele tahule kuuluvat külgserva määravad **diagonaallõike** (joon. 130).

Püramiidi kõrgusega ristuva tasandi ja püramiidi lõiget nimetatakse **ristlõikeks** ehk **põhjaga paralleelseks lõikeks** (joon. 118).

Püstprismat, mille põhjaks on korrapärane hulknurk, nimetatakse **korrapäraseks prismaks.**

Püramiidi, mille põhjaks on korrapärane hulknurk ja mille kõrguse aluspunktiks on põhja keskpunkt, nimetatakse **korrapäraseks püramiidiks.**

Tüvipüramiidi, mis on saadud korrapärase püramiidi lõikamisel põhjaga paralleelse tasandiga, nimetatakse **korrapäraseks tüvipüramiidiks.**

Tutvume nüüd regulaarsete tahkkehadega.

Def. **Tahkkeha, mille kõik tahud on võrdsed korrapärased samanimelised hulknurgad ja mille iga tipu juurde koondub võrdne arv servi, nimetatakse regulaarseks tahkkehaks.**

Regulaarseid tahkkehi on viis: **regulaarne heksaeeder** (kr. *hex* — kuus, *hedra* — alus, pind) ehk **kuup**, regulaarne **tetraeeder** (kr. *tettara* — neli), **regulaarne oktaeeder** (kr. *oktō* — kaheksa), **regulaarne dodekaeeder** (kr. *dodeka* — kaksteist), **regulaarne ikosaeeder** (kr. *eikosi* — kakskümmend) (joon. 131).

406. Joonesta:

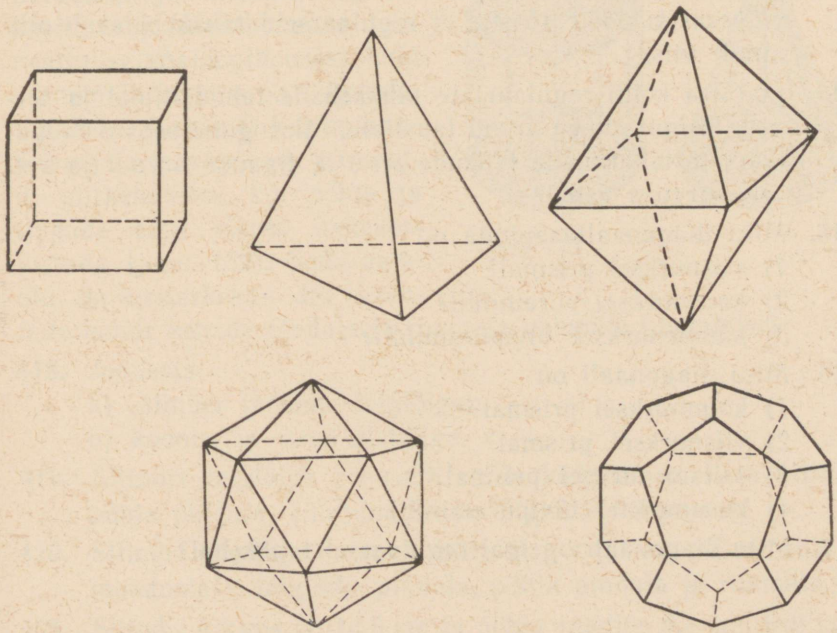
a) korrapärane viisnurkne prisma ja selle diagonaallõiked;

b) korrapärane nelinurkne püramiid ja selle diagonaallõige;

c) rööptahukas ja selle diagonaalid;

d) mittekorrapärane kolmnurkne püramiid ja selle põhjaga paralleelne lõige.

407. Vaatleme kõigi korrapäraste prismade ja korrapäraste püra-



Joon. 131.

miidide hulka A ja regulaarsete tahkkehade hulka B. Missugused kehad kuuluvad hulka $A \cap B$?

408. Tähistame kuupide hulga tähega K, risttahukate hulga tähega L, rööptahukate hulga tähega M ja prismade hulga tähega P. Missugused järgmistest lausetest on tõesed?

1) $K \subset L$ 2) $M \subset L$ 3) $P \subset L$ 4) $K \subset M$ 5) $L \subset M$
6) $P \subset M$ 7) $L \subset K$ 8) $M \subset K$ 9) $P \subset K$ 10) $K \subset P$
11) $L \subset P$ 12) $M \subset P$

409. Missugused kehad kuuluvad hulka?

1) $K \cup L$? 3) $P \cup K$? 5) $L \cap P$?
2) $M \cap L$? 4) $M \cap K$? 6) $P \cup L$?

410. Defineeri rööptahukas prismana ja tõesta, et rööptahuka kõik tahud on rööpkülikud.

411. Defineeri risttahukas prismana ja tõesta, et risttahuka kõik tahud on ristkülikud.

412. Defineeri kuup prismana ja tõesta, et kuubi kõik tahud on ruudud.

413. Tuginedes teoreemile *Ruuminurga tasanurkade summa on väiksem kui 360°* tõesta, et regulaarseid tahkkehi saab olla ainult viis.

414. Loe ära kõigi regulaarsete tahkkehade tahud, tipud ja servad. Paiguta need arvud tabelisse. Missugune seos on regulaarsete tahkkehade tahkude arvu n, tippude arvu t ja servade arvu s vahel?

415. Mitu diagonaaltasapinda on
1) viisnurksel prismal?
2) kuusnurksel püramiidil?
3) kümnenurksel tüvipüramiidil?

416. Mitu diagonaali on
1) kolmnurksel prismal?
2) viisnurksel prismal?
3) seitsmenurksel prismal?
4) kuusnurksel tüvipüramiidil?

417. Mitu diagonaali on igal regulaarsel tahkkehal?

Juba VIII klassis tutvusime pöördkeha mõistega. Pöördkehadeks on silinder, koonus, tüvikoonus ja kera, kui mõistame neid eespool mainitud kitsendatud mõttes.

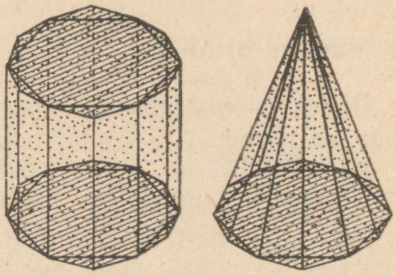
Missuguse tasandilise kujundi pöörlemisel ja missuguse sirge ümber tekib silinder? koonus? tüvikoonus? kera?

Silindri põhjade keskpunktidega määratud kõrgust nimetatakse silindri **teljeks**. Telge läbiva tasandi ja silindri lõiget nimetatakse **silindri telglõikeks**. Kõrgusega ristuva tasandi ja silindri lõiget nimetatakse **silindri ristlõikeks** ehk **põhjadega paralleelseks lõikeks**.

Koonuse kõrgust läbiva tasandi ja koonuse lõiget nimetatakse **koonuse telglõikeks**. Kõrgusega ristuva tasandi ja koonuse lõiget nimetatakse **koonuse ristlõikeks** ehk **põhjaga paralleelseks lõikeks**.

Kera lõiget tema keskpunkti läbiva tasandiga nimetatakse **suurringiks**.

Eespool vaatlesime kehi paarikaupa: prisma ja silinder, püramiid ja koonus. Selline käsitlusviis tuleneb nende defineerimise analoogilisusest, kuid silinder ja koonus on tõlgendatavad ka vastavalt korrapärase prisma ja korrapärase püramiidi piirkehadena, kui põhja ja tippude arvu järjest kahekordistada (joon. 132). Seda asjaolu on otstarbekas ära kasutada nende kehade pindala ja ruumala valemite tuletamisel.



Joon. 132.

418. Joonesta:
a) silinder ja tema telglõige;
b) koonus ja tema ristlõige.

419. Silindri telglõige on ruut, mille külg on a. Leia silindri põhja pindala, külgpindala ja telglõike diagonaal.

420. Silindri telglõige on ruut, mille diagonaal on a. Leia silindri moodustaja, telglõike pindala, põhja pindala ja ruumala.

421. Silindri kõrgus on 16,8 cm ja põhja raadius 8,4 cm. Kui suur on telglõike pindala?

422. Silindri telglõige on ruut pindalaga 169 cm². Leia silindri täispindala ja ruumala.

423. Koonuse telglõige on korrapärane kolmnurk, mille külg on m. Leia koonuse külgpindala, täispindala ja telglõike pindala.

424. Koonuse telglõige on korrapärane kolmnurk, mille kõrgus on h. Leia koonuse telglõike pindala ja koonuse ruumala.

425. Koonuse põhja pindala ja telglõike pindala suhe on π. Leia moodustaja kaldenurk põhja suhtes.

426. Koonuse põhja raadius on r. Läbi kõrguse keskpunkti on võetud põhjaga paralleelne lõige. Leia lõike pindala.

427. Avalda koonuse põhja pindala, kui moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning telglõike pindala on Q. Arvuta see pindala, kui $\alpha = 34{,}2°$ ja $Q = 18$ dm².

428. Koonuse moodustaja m ja põhja vaheline nurk on α. Avalda koonuse põhja pindala. Arvuta see, kui $m = 0{,}32$ m ja $\alpha = 63{,}8°$.

8.7. KEHADE OMADUSI.

Oleme varem tutvunud prisma mitmete erijuhtudega, nagu kuup, risttahukas ja rööptahukas.

Rööptahukas on prisma, mille põhjaks on rööpkülik.

Missugust rööptahukat nimetatakse risttahukaks?

Missugust risttahukat nimetatakse kuubiks?

Tõestame mõned rööptahuka omadused.

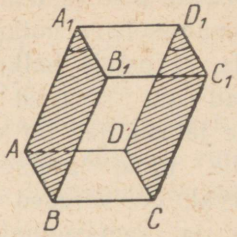
Teoreem. **Rööptahuka vastastahud on paralleelsed.**

Tõestus. Rööptahuka $A \ldots D_1$ (joon. 133) vastastahkudel AA_1B_1B ja DD_1C_1C on $AA_1 \parallel DD_1$ kui rööpküliku AA_1D_1D vastasküljed ja $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ kui rööpküliku $A_1B_1C_1D_1$ vastasküljed. Kahe tasandi paralleelsuse tunnuse järgi on siis tahud AA_1B_1B ja DD_1C_1C paralleelsed. ∎

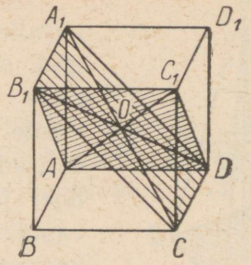
Analoogiliselt saab tõestada tahkude DD_1A_1A ja CC_1B_1B paralleelsuse. Rööptahuka põhjad $A_1B_1C_1D_1$ ja $ABCD$ on paralleelsed prisma definitsiooni põhjal.

Teoreem. **Rööptahuka vastastahud on võrdsed.**

Tõestus. Tugineme kahe rööpküliku võrdsuse tunnusele: *kaks rööpkülikut on võrdsed, kui ühe rööpküliku lähisküljed ja*



Joon. 133.



Joon. 134.

nendevaheline nurk on võrdsed teise rööpküliku vastavate elementidega.

See tunnus järeldub kergesti analoogilisest kolmnurkade võrdsuse tunnusest, kui tükeldada rööpkülik diagonaaliga kaheks võrdseks kolmnurgaks.

Rööptahuka $A \ldots D_1$ (joon. 133) vastastahkudel AA_1B_1B ja DD_1C_1C on $AA_1 = DD_1$ ja $A_1B_1 = D_1C_1$ kui rööpküliku vastasküljed; $\angle AA_1B_1 = \angle DD_1C_1$ kui vastavalt paralleelsete haaradega nurgad. Seega on kahe rööpküliku võrdsuse tunnuse tingimused täidetud ja tahud AA_1B_1B ning DD_1C_1C on võrdsed. ■

Analoogiliselt näidatakse ka teiste vastastahkude võrdsust.

Teoreem. **Rööptahuka diagonaalidel on ühine keskpunkt.**

Tõestus. Tugineme rööpküliku diagonaalide omadusele: *rööpküliku diagonaalid poolituvad oma lõikepunktis.*

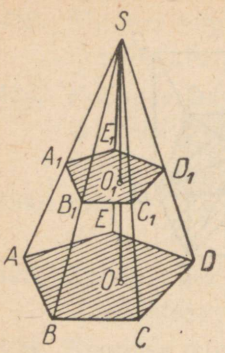
Rööptahuka diagonaallõige ADC_1B_1 (joon. 134) on rööpkülik, sest

$$AD \parallel A_1D_1 \wedge A_1D_1 \parallel B_1C_1 \Rightarrow AD \parallel B_1C_1.$$

Siis aga on rööpküliku diagonaalid AC_1 ja DB_1 rööpküliku ADC_1B_1 diagonaalideks ja, järelikult, poolituvad lõikepunktis O. Täpselt samuti veendume, et diagonaallõiked DCB_1A_1 ja CBA_1D_1 on rööpkülikud ning diagonaalide paarid DB_1 ja CA_1 ning CA_1 ja BD_1 peavad poolituma samuti punktis O. Punkt O asetseb kõigil diagonaalidel, s. t. on nende ühiseks punktiks. ■

Tutvume nüüd püramiidi põhjaga paralleelse lõike kahe omadusega.

Teoreem. **Püramiidi põhjaga paralleelne lõige on põhjaga sarnane hulknurk.**



Joon. 135.

Tõestus. Et püramiidi põhi ja temaga paralleelne lõige on samanimelised hulknurgad, siis tuleb tõestada, et nende hulknurkade vastavad nurgad on võrdsed ja nende võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Nurgad, mille tipud asetsevad ühel ja samal külgserval, on võrdsed kui vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad. Võrdsete nurkade lähiskülgede võrdelisuse tõestamine tugineb kolmnurkade sarnasusele. Kasutades joonist 135, tõestame näiteks võrdsete nurkade $\angle ABC$ ja $\angle A_1B_1C_1$ lähiskülgede võrdelisuse. Et

$$\triangle A_1SB_1 \sim \triangle ASB \text{ ja } \triangle B_1SC_1 \sim \triangle BSC \text{ (miks?)},$$

siis

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SB_1}{SB} \text{ ja } \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{SB_1}{SB},$$

millest

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}.$$

Nii saame tõestada kõigi võrdsete nurkade lähiskülgede võrdelisuse, s. t. et

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA}. \blacksquare$$

Teoreem. **Püramiidi põhja pindala ja põhjaga paralleelse lõike pindala suhtuvad nii nagu neile vastavate püramiidide kõrguste ruudud.**

Tõestus. Vaatleme joonist 135. Kolmnurgad SB_1O_1 ja SBO (kus O_1 ja O on vastavate püramiidide kõrguste aluspunktid) on sarnased. Miks? Sellest järeldub, et

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{SO_1}{SO}.$$

Et ka

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{A_1B_1}{AB}$$

(vt. eelmise teoreemi tõestust), siis

$$\frac{SO_1}{SO}=\frac{A_1B_1}{AB}.$$

Teame, et sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nii nagu vastavate külgede ruudud. Tähistades põhja pindala sümboliga S_p ja lõike pindala sümboliga S_l, võime kirjutada:

$$\frac{S_l}{S_p}=\frac{A_1B_1^2}{AB^2}$$

Siit saame eelmist võrdust kasutades, et

$$\frac{S_l}{S_p}=\frac{SO_1^2}{SO^2}. \blacksquare$$

429. Tõesta, et risttahuka diagonaali ruut võrdub külgede ruutude summaga.

430. Leia risttahuka diagonaali pikkus, kui tema mõõtmed on:
a) 1 cm, 2 cm ja 2 cm;
b) 6 m, 60 dm ja 700 cm;
c) 8 dm, 90 cm ja 1,2 m.

431. Risttahuka põhiservad on 7 dm ja 24 dm ning kõrgus on 8 dm. Arvuta diagonaallõike pindala.

432. Risttahuka külgserv on 5 cm, diagonaallõike pindala on 205 cm² ja põhja pindala on 360 cm². Leia põhiservad.

433. Korrapärase nelinurkse prisma põhja pindala on 144 cm² ja kõrgus on 14 cm. Arvuta prisma diagonaal.

434. Arvuta korrapärase nelinurkse prisma diagonaal, kui põhja diagonaal on 8 cm ja külgtahu diagonaal on 7 cm.

435. Prisma põhjaks on korrapärane kuusnurk küljega a. Prisma külgtahud on ruudud. Leia prisma diagonaalide pikkused ja diagonaallõigete pindalad.

436. Korrapärases kuusnurkses prismas, mille külgtahud on ruudud, pannakse tasapind läbi alumise põhja ühe serva ja tema vastas asetseva ülemise põhja serva. Põhiserv on a. Leia saadud lõike pindala.

437. Leia kuubi diagonaalide vaheline nurk.

438. Risttahuka mõõtmed on 3, 4 ja 5. Leia diagonaalidevaheline nurk.

439. Leia püströöptahuka diagonaallõigete pindalad, kui rööp-

tahuka kõrgus on võrdne põhja lühema diagonaaliga ja põhiservad on 3,4 cm ja 5,7 cm ning nendevaheline nurk 62°10′.

440. Leia risttahuka diagonaallõike pindala, kui põhiservad on 18,2 cm ja 31,6 cm ning selle diagonaallõike diagonaalide vaheline nurk on 32,1°.

441. Risttahuka diagonaal moodustab risttahuka servadega nurgad α, β ja γ. Tõesta, et $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Leia α, β ja γ, kui risttahuka mõõtmed on 8,5 cm, 7,2 cm ja 4,8 cm.

442. Risttahuka diagonaal moodustab ühe otspunkti juures tahkudega nurgad α, β ja γ. Tõesta, et $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

443. Püramiidi põhja pindala on 36 cm² ja kõrgus 8 cm. Leia püramiidi põhjaga paralleelse lõike pindala, kui lõige asub tipust 4 cm kaugusel.

444. Püramiidi põhja pindala on 30 cm² ja kõrgus 10 cm. Leia lõike kaugus põhjast, kui lõike pindala on $7\frac{1}{2}$ cm².

445. Püramiidi põhjaks on ruut küljega 6 cm. Kui pikk on põhjast 2 cm kõrgusel asuva paralleelse lõike külg, kui püramiidi kõrgus on 10 cm?

446. Püramiidi põhjaks on võrdkülgne kolmnurk, mille külg on 5 cm. Kui suur on põhjast 2 cm kaugusel asuva paralleelse lõike pindala, kui püramiidi kõrgus on 8 cm?

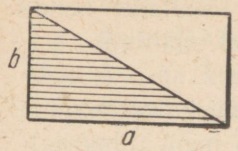
447. Püramiidi põhja pindala ja põhjaga paralleelse lõike pindala suhtuvad nagu 3 : 2. Leia püramiidi kõrgus, kui lõige asub tipust 7 ühiku kaugusel.

448. Püramiidi põhjaks on korrapärane kuusnurk küljega 3 cm. Põhjaga paralleelse lõike külg on 1 cm. Leia püramiidi põhja pindala ja põhjaga paralleelse lõike pindala, kui lõige asub tipust 5 cm kaugusel.

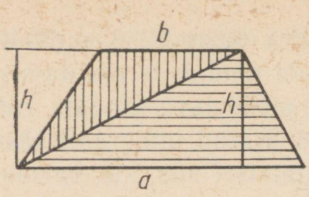
8.8. KEHADE PINDALA JA RUUMALA OTSESEST JA KAUDSEST MÕÕTMISEST.

Nagu tasandilise kujundi pindala, nii mõistame ka keha pindala (ruumala) mõõtmise all vastava pinnalaotuse (ruumiosa) võrdlemist pindalaühikuga (ruumalaühikuga). Pindalaühikuks on ruut, mille külg on võrdne pikkusühikuga, ja ruumalaühikuks kuup, mille serv on võrdne pikkusühikuga.

Otseselt saab pindalaühikuga võrrelda vaid ristküliku pindala



Joon. 136.



Joon. 137.

ja ruumalaühikuga risttahuka ruumala, kui ristküliku ja risttahuka mõõtmed on parajasti pikkusühiku kordsed. Saab näidata, et ristküliku pindala ja risttahuka ruumala avalduvad vastavalt valemitega $S=ab$ ja $V=abc$ sõltumata sellest, kas mõõtmed a, b ja c avalduvad naturaalarvudena või mistahes positiivsete reaalarvudena. Edaspidi veendumegi selle väite õigsuses risttahuka ruumala valemi puhul.

Kolmnurk, rööpkülik, trapets (üldiselt mistahes hulknurk, välja arvatud ristkülik) ei ole pindalaühikuga otseselt võrreldav. Vastavate pindalavalemite tuletamiseks kasutatakse V ja VI klassis tükeldamis- ja täiendamismeetodit. Näiteks saadakse täisnurkse kolmnurga pindala valem, kui täiendada kolmnurk ristkülikuks (joon. 136), trapetsi pindala valemi saamiseks tükeldatakse trapets mööda diagonaali kaheks kolmnurgaks (joon. 137).

Ringi pindala valemi tuletamisel ei vii aga lõplik tükeldamine enam eesmärgile ja seepärast X klassis defineeriti ringi pindala piirväärtuse mõiste kaudu järgmiselt: *ringi pindalaks nimetatakse korrapärase kõõlhulknurga tippude arvu lõpmatul kahekordistamisel saadud hulknurkade pindalade jada piirväärtust.*

Mistahes kinnise kõveraga piiratud pinnatüki suuruse arvutamise taandasime kõvertrapetsi pindala arvutamisele määratud integraalina.

Kehade ruumala valemite tuletamine toimub analoogiliselt.

Kui risttahuka ruumala valemi kehtivus mistahes positiivsete reaalarvuliste mõõtmete a, b ja c korral on tõestatud, siis püstprisma ruumala valemini jõutakse tükeldamismeetodil. Kaldprisma, püramiidi ja silindri ruumala defineerime aga piirväärtuse mõiste abil, teiste pöördkehade ruumala valemite tuletamiseks kasutame üldist pöördkehade ruumala valemit, mis samuti tugineb piirväärtuse mõistele.

Pöördkehade pindala arvutati nooremates klassides nende pindade laotamise teel tasapinnale (välja arvatud sfäär) ja leiti siis

vastava tasandilise kujundi pindala. Nüüd aga kasutame nende kehade pindalade arvutamisel piirväärtuse mõistet, säilitades sellega mõõdetava pindala ruumilisena.

Määratud integraali kasutame kehade pindalade ja ruumalade arvutamisel siis, kui vastav defineerimisviis viib meid integraalsummani, s. o. piirväärtuseni $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

449. Avalda kuubi täispindala ja ruumala, kui kuubi serv on a; $\sqrt{a}$; $(a+b)^2$; $\sqrt{a+b}$.

450. Avalda risttahuka täispindala ja ruumala, kui risttahuka mõõtmed on:

1) p, q, r;

2) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$;

3) $\sqrt{x}$, x, x^2.

451. Täida lüngad.

Korrapärane püramiid							
Põhi	Põhiserv	Apoteem	Kõrgus	Põhja pindala	Külgpindala	Täispindala	Ruumala
Kolmnurk	a	e					
Nelinurk	b		h				
Kuusnurk	c		c				

452. Avalda silindri täispindala ja ruumala, kui silindri põhja sisse joonestatud kolmnurga külg on x ja silindri kõrgus on $\sqrt{x}$.

453. Leia silindri täispindala ja ruumala, kui silindri pinnalaotuse mõõtmed on $\frac{a}{\pi}$ ja a^2.

454. Avalda koonuse täispindala ja ruumala, kui koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk külje pikkusega $\sqrt{a}$.

455. Avalda koonuse täispindala ja ruumala, kui koonuse põhja pindala on võrdne rombi pindalaga, mille külg on a ja terav-

nurk 60°, ning koonuse kõrgus on võrdne rombi pikema diagonaaliga.

456. Avalda kera pindala ja ruumala, kui kera suurringjoone võrrand xy-tasandil on $x^2+y^2=25$.

8.9. PRISMA KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Juba VI klassis õppisime tundma korrapärase prisma külg- ja täispindala valemeid

$$S_k=üh \text{ ja } S=S_k+2S_p,$$

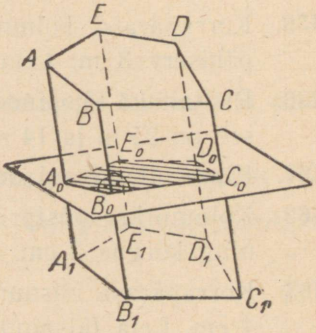
kus $ü$ on prisma põhja ümbermõõt ja h prisma kõrgus.

Need valemid kehtivad mitte ainult korrapärase prisma, vaid ka mistahes püstprisma puhul (vt. ül. 457).

Selgitame, kuidas toimub kaldprisma külgpindala arvutamine.

Teoreem. **Kaldprisma külgpindala võrdub tema ristlõike ümbermõõdu ja külgserva korrutisega.**

T õ e s t u s. Lõikame prismat tasandiga, mis on risti külgservadega (joon. 138). Lõige on hulknurk, mida nimetatakse prisma **ristlõikeks.**



Joon. 138.

Kaldprisma külgtahkudeks on rööpkülikud. Vaatleme külgservi nende rööpkülikute alustena. Kõrguseks on siis vastaval tahul asetsev ristlõike serv. Et kaldprisma külgservad on kõik võrdsed kui kahe paralleelse tasandi vahelised paralleelsete sirgete lõigud, siis saame külgpindala avaldada rööpkülikute pindalade summana:

$$S_k=AA_1\cdot A_0B_0+BB_1\cdot B_0C_0+\ldots+EE_1\cdot E_0A_0.$$

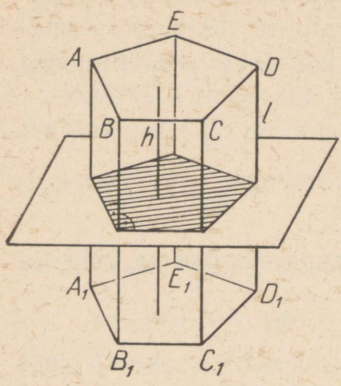
Et

$$AA_1=BB_1=\ldots=EE_1=l,$$

siis

$$S_k=(A_0B_0+B_0C_0+\ldots+E_0A_0)\,l.$$

Tähistades ristlõike ümbermõõdu tähega $ü$, saame



Joon. 139.

$$S_k = \ddot{u}l.$$

Püstprismat saab vaadelda kaldprisma erijuhuna. Sel juhul on ristlõige paralleelne põhjadega ja, järelikult, $l = h$ (joon. 139). Viimase teoreemi väide kehtib seega iga prisma puhul.

Prisma täispindala S saamiseks tuleb külgpindalaga liita kahekordne põhja pindala S_p, s. t.

$$S = S_k + 2S_p.$$

457. Tõesta, et iga püstprisma külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega.

458. Kuidas avaldub korrapärase prisma külgpindala? täispindala?

459. Korrapärase kolmnurkse püstprisma kõrgus on 12 cm ja põhiserv 3 m. Leia prisma täispindala.

460. Risttahuka täispindala on 1714 m². Põhja lähisservade pikkused on 25 m ja 14 m. Arvuta külgpindala ja külgserv.

461. Kuubi diagonaal on 10 cm. Leia kuubi täispindala.

462. Kolmnurkse püstprisma põhiservad on 6 cm, 7 cm ja 8 cm ning kõrgus 5 cm. Leia täispindala.

463. Korrapärase viisnurkse prisma põhiserv on 3 cm ja kõrgus 4 cm. Leia täispindala.

464. Kolmnurkse kaldprisma kaks külgtahku on teineteisega risti; nende ühine serv on 24 cm ning asetseb teistest külgservadest 12 cm ja 35 cm kaugusel. Arvuta prisma külgpindala.

465. Püstprisma põhjaks on romb küljega 4 cm ja teravnurgaga 36°15′. Leia prisma täispindala, kui prisma kõrgus on võrdne rombi pikema diagonaaliga.

466. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille külje pikkus on 58 cm ja teravnurk 63°. Rööptahuka pikem diagonaal moodustab põhitahuga 52°-se nurga. Leia täispindala.

Risttahuka ruumala valemit $V=abc$, kus a, b ja c on risttahuka mõõtmed, kasutame juba IV klassist alates. Valemi kehtivuses veendusime tol korral katseliselt, võrreldes risttahuka ruumala otseselt ruumalaühikuga (ühikkuubiga). Vahepealsetes klassides hakkasime aga seda valemit kasutama ka mittenaturaalarvuliste mõõtmete korral. Tõestamegi nüüd, et risttahuka ruumala avaldub ikka kujul $V=abc$, kus a, b ja c on mistahes positiivsed reaalarvud.

Lemma. **Risttahuka ruumaia on võrdeline ühe oma mõõtmega, kui teised mõõtmed ei muutu.**

T õ e s t u s. Veendume, et väide on õige nii naturaalarvulise, murdarvulise kui ka irratsionaalarvulise mõõtme korral.

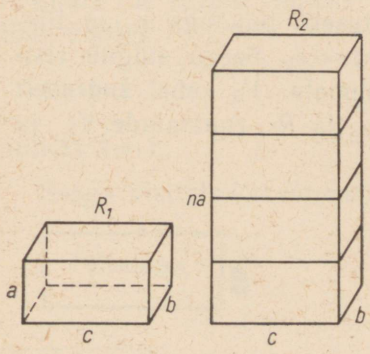
a) Olgu antud risttahukas R_1 mõõtmetega a, b ja c ning risttahukas R_2 mõõtmetega na, b, c, kus n on naturaalarv. Nagu joonisel 140 näeme, on risttahukas R_2 saadav n risttahukast R_1. Tähistades esimese risttahuka ruumala V_1 ja teise oma V_2, võime kirjutada

$$V_2=nV_1.$$

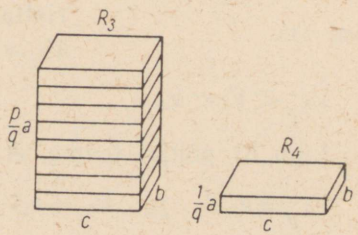
Seega,

kui risttahuka mõõde suureneb naturaalarv *n* korda, siis suureneb ka tema ruumala *n* korda.

b) Vaatleme nüüd kõrvuti risttahukaga R_1 risttahukat R_3, mille mõõtmed on $\frac{p}{q}\cdot a$, b ja c, kus $\frac{p}{q}$ on positiivne murdarv



Joon. 140.



Joon. 141.

(joon. 141). Jaotame risttahuka R_1 paralleelsete tasapindadega q võrdseks risttahukaks R_4, mille mõõtmed on $\frac{1}{q} \cdot a$, b ja c. Risttahukaid R_4 mahub risttahukasse R_3 täpselt p tükki. Tähistades risttahuka R_3 ruumala sümboliga V_3 ja risttahuka R_4 ruumala sümboliga V_4, saame

$$V_3 = pV_4.$$

Et risttahukaid R_4 mahub risttahukasse R_1 parajasti q tükki, siis

$$V_1 = qV_4.$$

Avaldades sellest võrdusest V_4:

$$V_4 = \frac{1}{q} \cdot V_1$$

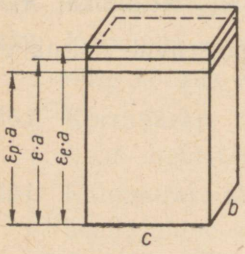
ja asendades eelmises võrduses V_4 saadud avaldisega, saame

$$V_3 = p \cdot \frac{1}{q} \cdot V_1 = \frac{p}{q} \cdot V_1.$$

Seega,

kui risttahuka mõõde muutub murdarv $\frac{p}{q}$ korda, siis muutub ka tema ruumala sama murdarv $\frac{p}{q}$ korda.

c) Vaatleme nüüd veel risttahukat R_5, mille mõõtmed on εa, b, c, kus ε on irratsionaalarv (joon. 142). Irratsionaalarvu saab lähendada kuitahes suure täpsusega ratsionaalarvu abil. Olgu ε mingiks lähisväärtuseks puuduga ε_p ja liiaga ε_l, s. t. $\varepsilon_p < \varepsilon < \varepsilon_l$. Seega sulgub risttahuka R_5 ruumala V_5 oma suuruselt risttahukate R_{5_p} ja R_{5_l} ruumalade V_{5_p} ja V_{5_l} vahele:



Joon. 142.

$$V_{5_p} < V_5 < V_{5_l}.$$

Juhu b) põhjal teame, et

$$V_{5_p} = \varepsilon_p V_1 \quad \text{ja} \quad V_{5_l} = \varepsilon_l V_1,$$

ja seega

$\varepsilon_p V_1 < V_5 < \varepsilon_l V_1$.

Teiselt poolt, lähtudes võrratustest

$\varepsilon_p < \varepsilon < \varepsilon_l$,

saame

$\varepsilon_p V_1 < \varepsilon V_1 < \varepsilon_l V_1$.

Et mõlemad võrratuste read jäävad kehtima, kui ε_p ja ε_l esitada järjest suurema arvu kohtadega pärast koma, siis

$V_5 = \varepsilon V_1$.

Kui risttahuka mõõde muutub irratsionaalarvu ε kordseks, siis muutub ka risttahuka ruumala ε kordseks.

Seega, kui risttahuka ruumala on V ja tema üks mõõde on[1] $a \in R_+$, siis $V = ka$, kus k on konstant. ■

Teoreem. **Risttahuka ruumala on võrdne oma kolme mõõtme korrutisega.**

Tõestus. Olgu risttahuka mõõtmed a, b ja c, siis

$V = k_1 a$, $V = k_2 b$ ja $V = k_3 c$.

Et lemma tõestamisel eeldasime kahe külje pikkuse muutumatust, siis võime kõik need kolm võrdust esitada kujul

$V = kabc$.

Sel juhul $k_1 = kbc$, $k_2 = kac$ ja $k_3 = kab$.

Võrdetegur k peab olema üks kindel arv, mis jääb samaks iga risttahuka puhul. k määrame niisuguse risttahuka abil, mille ruumala me teame. Selleks risttahukaks on ühikkuup. Peab kehtima võrdus

$1 = k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$,

millest $k = 1$.

Seega risttahuka ruumala

$$\boxed{V = abc.}$$ ■

[1] R_+ on positiivsete reaalarvude hulga tähis.

Et risttahuka kahe mõõtme korrutis väljendab ühe tahu pindala ja kolmas mõõde on sellele tahule kui põhjale vastav risttahuka kõrgus, siis

risttahuka ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

467. Leia risttahuka ruumala, kui tema mõõtmed on

1) 1,03 m, 2,45 m, 0,67 m;

2) $3\frac{3}{4}$ cm, $5\frac{1}{2}$ cm, $7\frac{1}{2}$ cm;

3) a, $2a$, $\frac{a}{2}$.

468. Risttahuka mõõtmed suhtuvad nagu 4 : 5 : 6. Risttahuka täispindala on 592 cm^2. Kui suured on risttahuka mõõtmed? Kui suur on risttahuka ruumala?

469. Kahe risttahuka vastavad mõõtmed suhtuvad nagu $m : n$. Kuidas suhtuvad nende risttahukate täispindalad? Kuidas suhtuvad nende risttahukate ruumalad?

470. Risttahuka mõõtmed suhtuvad nagu 1 : 2 : 3. Kui suured peavad olema need mõõtmed, kui risttahuka ruumala on 1 m^3?

471. Risttahuka diagonaallõikeks on ruut pindalaga 100 m^2. Leia selle risttahuka täispindala ja ruumala, kui põhiservad suhtuvad nagu 3 : 4.

472. 1) Risttahuka mõõtmed suhtuvad nagu 12 : 16 : 21. Risttahuka diagonaal on 87 cm. Kui suur on selle risttahuka ruumala?
2) 1,5 cm paksustest laudadest tehti kast, mille välimised mõõtmed on 1,6 m, 95 cm ja 50 cm. Kui palju kulus kasti valmistamiseks puitu ja kui suur on kasti sisemine ruumala?

473. Hõbepaber (stanniolpaber) pikkusega 24 cm ja laiusega 15 cm kaalub 6,561 grammi. Kui paks on see paber, kui stannioli tihedus on $7{,}29\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?

474. Risttahukakujulisest paagist pikkusega $4\frac{1}{2}$ m, laiusega 3,4 m ja kõrgusega $1\frac{1}{2}$ m, mis on täidetud veega, lastakse ära joosta 96 hl vett. Kui kõrgel on nüüd paagis veepind?

475. Väikese risttahukakujulise klaasvanni välised mõõtmed on: pikkus 8 cm, laius 5 cm ja kõrgus 4 cm. Klaasi paksus on

6 mm. Leia, kui palju kaalub klaasvann ja sellesse vanni mahtuv elavhõbe, kui klaasi tihedus on $2{,}4\frac{g}{cm^3}$ ja elavhõbeda tihedus $13{,}6\frac{g}{cm^3}$.

476. Risttahuka mõõtmed on 3 cm, 4 cm ja 5 cm. Kui iga tema serva pikendada x cm võrra, siis suureneb täispindala 54 cm² võrra. Mitu korda suureneb ruumala?

477. Risttahuka kolme tahu pindalad on 2 m², 3 m² ja 6 m². Leia ruumala.

478. Leia risttahuka ruumala, kui tema diagonaal moodustab põhitahuga nurga α, suurema külgtahuga aga nurga β. Risttahuka diagonaali pikkus on d. Uuri saadud valemit.

479. Risttahuka põhja diagonaal on d, põhja diagonaalide vaheline nurk on α ning risttahuka pikemaid põhiservi läbiva lõiketasapinna ja põhitahu vaheline nurk on β. Leia risttahuka ruumala. Arvuta ruumala, kui $d=7{,}5$; $\alpha=43°$ ja $\beta=57°$.

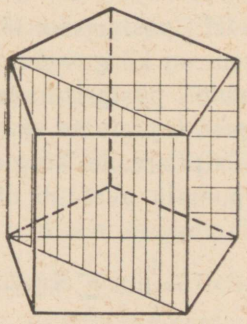
8.11. PRISMA RUUMALA.

Eeldades, et risttahuka ruumala valem on teada, veendutakse juba V klassis, et kolmnurkse püstprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega ning VI klassis, et ka korrapärase prisma ruumala avaldub põhja pindala ja kõrguse korrutisega .Näitame nüüd, et sama eeskiri kehtib i g a p ü s t p r i s m a korral.

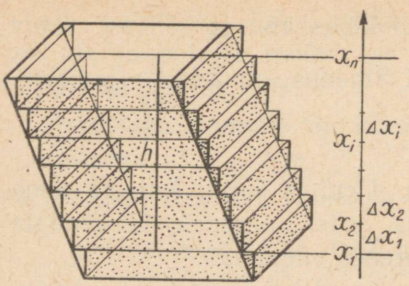
Teoreem. **Püstprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.**

T õ e s t u s. Olgu antud n-nurkne püstprisma, mille põhja pindala on S ja kõrgus h. See prisma on diagonaallõigetega tükeldatav $n-2$ kolmnurkseks püstprismaks (joon. 143). Antud prisma põhi tükeldub kolmnurkadeks, mille pindalad on S_1, $S_2, \ldots, S_{n-2}$. Avaldame nüüd otsitava ruumala V kolmnurksete püstprismade ruumala summana:

$$V=S_1h+S_2h+\ldots+S_{n-2}h$$



Joon. 143.



Joon. 144.

ehk

$$V=\sum_{i=1}^{n-2} S_i h=\ h\sum_{i=1}^{n-2} S_i = hS_p,$$

s. t.

$$V=S_p h. \blacksquare$$

Tõestame, et see valem kehtib ka k a l d p r i s m a puhul.

Teoreem. **Kaldprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.**

T õ e s t u s. Olgu kaldprisma põhja pindala S_p ja kõrgus h. Jaotame kaldprisma kõrguse n osaks

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2, \ldots,\ \Delta x_i,\ \ldots,\ \Delta x_n$$

ja lõikame kaldprismat põhjaga paralleelsete tasanditega läbi kõrguse jaotuspunktide (joon. 144). Antud kaldprisma tükeldub siis õhukesteks kaldprismadeks. Lähendades need õhukesed kaldprismad püstprismadega, saame avaldada otsitava ruumala lähisväärtuse:

$$V\approx \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i.$$

Et püstprisma lähendab kaldprismat seda paremini, mida väiksem on kõrgus Δx_i, siis defineerimegi antud kaldprisma ruumala nende püstprismade ruumalade summa piirväärtusena, kui kõrguse h jaotuste arv n saab kuitahes suureks ($n\to\infty$) nii, et kõigi püstprismade kõrgused lähenevad nullile ($\Delta x_i\to 0$). Kaldprisma ruumala avaldub nüüd integraalsummana

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i = \int_0^h S(x)\,dx.$$

Et lõike pindala $S(x)$ ei sõltu x väärtusest ja on ikka võrdne põhja pindalaga S_p, siis

$$V=\int_0^h S_p\,dx=S_p x\Big|_0^h=S_p h. \blacksquare$$

$$\boxed{V=S_p h}$$

480. Arvuta korrapärase kuusnurkse prisma ruumala, kui prisma kõik servad on võrdsed a-ga.

481. Arvuta korrapärase kuusnurkse prisma ruumala, kui prisma kõrgus on 12 m ja põhiserv 35 cm.

482. Püstprisma kõrgus on 1,8 m ja ruumala 0,54 m³. Leia prisma põhiservad, kui prisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatetite pikkused erinevad 70 cm võrra.

483. Leia nelinurkse püstprisma ruumala ja täispindala, kui prisma põhjaks on romb, mille diagonaalid on 8 cm ja 6 cm ja kui prisma kõrgus on 10 cm.

484. Püstprisma põhjaks on võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 0,8 m. Prisma kõrgus on 1,5 m. Leia ruumala.

485. Majale pikkusega 18 m ja laiusega 12 m on ehitatud 60°-se nurga all katus. Kui suur on pööning?

486. Püstprisma põhjaks on kolmnurk külgedega 6,5 cm, 7,2 cm ja 4,8 cm. Leia prisma ruumala, kui kõrgus on 60 cm?

487. Maantee rajamiseks tuleb ehitada teetamm, mille ristlõikeks on võrdhaarne trapets ülemise alusega 8 m, haaradega 2,6 m ja kõrgusega 2,4 m. Mitu m³ pinnast tuleb vedada kohale niisuguse teetammi iga 10 m pikkuse lõigu ehitamiseks?

488. Kanal on alt 20 m ja veepinnalt 25 m lai. Vee sügavus on 3,5 m. Mitu kuupmeetrit vett voolab 1 tunni jooksul läbi kanali, kui veevoolu kiirus on 40 cm sekundis?

489. Risttahuka diagonaal d moodustab põhjaga nurga α. Põhja diagonaali ja põhiserva vaheline nurk on β. Leia risttahuka külgpindala, täispindala ja ruumala, kui $\beta=21°30'$, $\alpha=54°20'$ ja $d=17{,}9$ m.

490. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille väiksem diagonaal on d ja teravnurk on α. Rööptahuka kõrgus on $\frac{d}{2}$. Leia rööptahuka täispindala ja ruumala, kui $d=25{,}8$ ja $\alpha=75°20'$.

491. Püstprisma põhjaks on kolmnurk ABC, mille külg $AC=38{,}1$ dm, külg $BC=34{,}8$ dm ja nurk $ABC=58°20'$. Prisma külgserv võrdub kolmnurga ABC küljele AB tõmmatud kõrgusega. Arvuta prisma ruumala.

492. Püstprisma kõrgus $h=20$ dm. Prisma põhjaks on ringi ümber kujundatud täisnurkne trapets, mille teravnurk $\alpha=45°30'$; ringi raadius $r=6$ dm. Arvuta prisma ruumala.

493. Püstprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haar on a ja tipunurk α. Ülemise põhja tipust on tõmmatud võrdsete külgtahkude diagonaalid, mille vaheline nurk on β. Leia prisma täispindala ja ruumala, kui $a=97{,}84$ cm; $\alpha=63°30'$ ja $\beta=39°40'$.

494. Prisma põhjaks on kolmnurk, mille üks külg on 2 cm ja teised küljed on 3 cm. Külgserv on 4 cm ja ta moodustab põhjaga 45°-se nurga. Arvuta prismaga ruumvõrdse kuubi serv.

495. Prisma põhjaks on kolmnurk külgedega 3 cm, 5 cm ja 7 cm. Külgserva pikkus on 8 cm ja ta moodustab põhjaga nurga 60°. Arvuta prisma ruumala.

496. Kolmnurkse kaldprisma põhiserv on 17,4 cm, külgserv on 64,5 cm ja külgserv moodustab põhjaga nurga 82°40'. Leia ruumala.

8.12. SILINDRI KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Def. **Silindri külgpindalaks S nimetatakse tema sisse kujundatud korrapärase prisma külgpindala S_n piirväärtust, kui prisma põhja tippude arv n tõkestamatult kasvab,** s. t.

$$S_k=\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Teoreem. **Silindri külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega.**

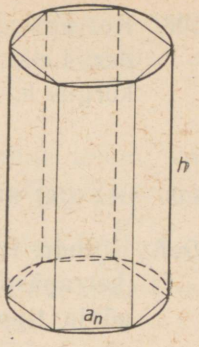
Tõestus. Et $S_n=na_nh$, kus n on korrapärase prisma põhja tippude arv, a_n — tema põhiserva pikkus ja h — nii prisma kui ka silindri kõrgus (joon. 145), siis

$$S_k=\lim_{n\to\infty}(na_nh).$$

Et h ei sõltu n-st, siis

$S_k = h \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (na_n)$.

Nagu juba teame, on $\lim\limits_{n\to\infty} (na_n)$, s. o. prisma põhjaks oleva korrapärase hulknurga ümbermõõdu piirväärtuseks põhja tippude arvu tõkestamatul kasvamisel selle hulknurga ümber joonestatud ringjoone pikkus. Seega, kui silindri põhjaks oleva ringi raadius on r, siis $\lim\limits_{n\to\infty} (na_n) = 2\pi r$ ja



Joon. 145.

$$S_k = 2\pi rh.$$

Silindri täispindala

$$S_t = 2\pi r(r+h).$$

497. Kuidas tuletati ringjoone pikkuse valem?

498. Defineeri silinder prisma kaudu.

499. Sõnasta silindri täispindala valem.

500. Arvuta silindri täispindala, kui

a) $r = 1{,}25$ m ja $h = 53$ cm;
b) $r = 2{,}5$ mm ja $h = 45{,}3$ cm.

501. Ristkülik mõõtmetega m cm ja n cm pöörleb kord lühema, kord pikema külje ümber. Kummal juhul on silindri täispindala suurem, kui $m > n$? Arvuta need täispindalad, kui $n = 15{,}3$ cm ja $m = 23{,}8$ cm.

502. Silindrikujulise aurukatla läbimõõt on 0,7 m ja pikkus 3,8 m. Kui suur on auru rõhumine kogu katla pinnale, kui auru rõhk ruutsentimeetrile on 100 N?

503. Silindrikujulise korstna kõrgus on 18 m ja läbimõõt 65 cm. Mitu ruutmeetrit plekki kulub korstna valmistamiseks, kui neetekohtadele kulub 10% kogu vajatavast plekist?

504. Leia ruudukujulise telglõikega silindri täispindala, kui silindri külgpindala on 100 cm^2.

505. Avalda silindri täispindala põhja pindala S_p ja telglõike pindala Q kaudu. Arvuta täispindala, kui $S_p = 30$ cm^2 ja $Q = 42{,}4$ cm^2.

506. Korrapärase nelinurkse prisma ümber on kujundatud silinder. Leia silindri täispindala, kui prisma põhiserv on a ja kõrgus h. Arvuta täispindala, kui $a=4{,}8$ dm ja $h=1{,}3$ m.

8.13. SILINDRI RUUMALA.

Def. **Silindri ruumalaks V nimetatakse silindri sisse kujundatud korrapärase prisma ruumala V_n piirväärtust, kui prisma põhja tippude arv n tõkestamatult kasvab,** s. t.

$$V=\lim_{n\to\infty} V_n.$$

Teoreem. **Silindri ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.**

Tõestus. Et $V_n=na_n\cdot\frac{k_n}{2}\cdot h$, kus n on korrapärase prisma külgservade arv, a_n — põhiserva pikkus, k_n — põhja apoteem ja h — nii prisma kui ka silindri kõrgus, siis

$$V=\lim_{n\to\infty}\left(na_n\cdot\frac{k_n}{2}\cdot h\right).$$

Et korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega ja et $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)=2\pi r$ ning $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=r$, siis

$$V=\lim_{n\to\infty}(na_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k_n}{2}\cdot h\right)=2\pi r\cdot\frac{r}{2}\cdot h=\pi r^2h.$$

$$\boxed{V=\pi r^2h.}$$

Et πr^2 on silindri põhja pindala, siis saamegi väite. ∎

Tulemus kinnitab varem VIII klassis Cavalieri printsiibi abil leitud ruumala valemi õigsust.

507. Kuidas tuletati ringi pindala valem?

508. Mis on π?

509. Missugust prismat nimetatakse korrapäraseks?

510. Arvuta ümarterase jooksva meetri mass, kui tema läbimõõt on 4,5 cm ja tihedus $7{,}8\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

511. Praktikas kasutatakse ümarterase jooksva meetri massi m

arvutamiseks valemit $m=612d^2$, kus d on ümarterase läbimõõt. Põhjenda selle valemi õigsust. Terase tihedus on $7{,}8\frac{g}{cm^3}$.

512. Kui palju kaalub ülalt lahtine silindrikujuline anum, kui anuma sisemine kõrgus on 20 cm, sisemine läbimõõt 6 cm, seina paksus 2 mm ja anuma materjali tihedus $7{,}6\frac{g}{cm^3}$?

513. Kui palju vett voolab 45 minuti jooksul läbi toru, mille sisemine läbimõõt on 6 cm? Voolu kiirus on $5\frac{cm}{s}$.

514. Mitu veinipudeli korki tuleb võtta, et nad kaaluksid 10 N, kui silindrikujulised korgid on 3,9 cm pikad, 2,3 cm paksud ja korgi tihedus on $0{,}24\frac{g}{cm^3}$?

515. Ristkülik mõõtmetega m cm ja n cm pöörleb kord lühema, kord pikema külje ümber. Kummal juhul on silindri ruumala suurem, kui $m<n$? Arvuta ruumalad, kui $m=10{,}2$ cm ja $n=132$ mm.

516. Silindri külgpindala on S_k ja põhja ümbermõõt c. Avalda silindri ruumala. Arvuta, kui $S_k=396{,}4$ ja $c=14{,}2$.

517. Ruudukujulise telglõikega silindri põhja sisse on kujundatud korrapärane n-nurk, mille külg on a_n. Arvuta silindri ruumala. Arvuta, kui $a_5=8{,}3$.

518. Cavalieri printsiibi kohaselt on kaks keha ruumvõrdsed, kui nad täidavad kolme tingimust:
1) kehade kõrgused on võrdsed;
2) kehade põhjade pindalad on võrdsed;
3) kehade põhjadega paralleelsed lõiked, mis on nende põhjadest võrdsetel kaugustel, on pindvõrdsed.

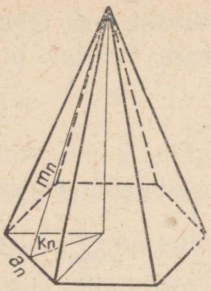
Tõesta Cavalieri printsiibi õigsus määratud integraali abil.

8.14. PÜRAMIIDI KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Püramiidi külgpind koosneb kolmnurkadest. Üldjuhul on need kolmnurgad erinevad ja seega tuleb külgpindala leidmiseks arvutada iga külgtahu pindala eraldi ja tulemused liita. Kui aga püramiid on korrapärane, siis saab tema külgpindala avaldada valemina.

Korrapärast püramiidi käsitlesime juba VII klassis.

Teoreem. **Korrapärase püramiidi külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja püramiidi apoteemi poole korrutisega.**



Joon. 146.

Tõestus. Olgu n-nurkse korrapärase püramiidi põhiserv a_n ja apoteem m_n (joon. 146). Ühe külgtahu pindala on siis $\frac{1}{2}a_n m_n$ ja kogu külgpindala

$$S_k = n \cdot \frac{1}{2} a_n m_n = \frac{1}{2} n a_n m_n.$$

Et na_n on püramiidi põhja ümbermõõt, siis ongi väide tõestatud. ∎

$$\boxed{S_k = \frac{1}{2} n a_n m_n}$$

Täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga liita põhja pindala, s. t.

$$S_t = S_k + S_p.$$

Kui tähistada põhja apoteem k_n-ga, siis korrapärase püramiidi puhul

$$\boxed{S_t = \frac{1}{2} n \cdot a_n (m_n + k_n).}$$

Tõesta see!

519. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 2 cm ja apoteem 3 cm. Leia täispindala.

520. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 6 cm ja kõrgus 4 cm. Leia täispindala.

521. Avalda korrapärase nelinurkse püramiidi külgpindala, kui tema kõik servad on a cm.

522. Leia kolmnurkse püramiidi täispindala, kui selle püramiidi iga serv on a cm.

523. Torni põhi on ruut küljega 5 m. Tuleb ehitada 8 m kõrgune püramiidikujuline katus. Leia sarikapalkide pikkus (püra-

miidi tipu ja põhja tipu vaheline kaugus). Kui palju plekki kulub torni katuse katmiseks, kui ühendustele kulub 5% katust katva pleki pindalast?

524. Torni katusel on korrapärase kuusnurkse püramiidi külgpinna kuju. Katuse põhja ümbermõõt on 10,2 m ja iga tema tahu kõrgus on 6 m. Leia katuse pindala. Kui palju vajatakse katuse katmiseks 4 m pikkusi ja 0,3 m laiusi laudu, kui katuse kujust tingituna arvestatakse laudade vajadus 15% suuremana katuse pindalast?

525. Paviljoni katus on kujult korrapärane kaheksanurkne püramiid põhiservaga 4,6 m ja külgservaga 7 m. Mitu tahvlit katuseplekki kulub selle katuse katmiseks, kui iga ruutmeetri kohta kulub 1,2 tahvlit plekki?

526. Korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrgus on 12 cm ja põhiserv on 6 cm. Leia püramiidi täispindala.

527. Korrapärase kuusnurkse püramiidi külgserv on 10 cm ja apoteem 9 cm. Arvuta püramiidi täispindala.

528. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhiserv on 2,4 dm ja külgserv 7,6 dm. Arvuta püramiidi täispindala.

529. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgtahu tipunurk α. Avalda püramiidi täispindala.

530. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on h ja külgtahu tipunurk 2α. Leia püramiidi külgpindala.

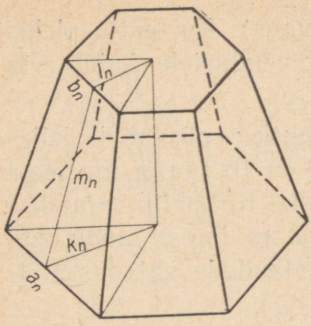
531. Püramiidi põhjaks on ruut, mille külg on a. Kaks külgtahku on risti põhitahuga, teised kaks moodustavad aga põhitahuga nurga φ. Avalda püramiidi külg- ja täispindala.

532. Püramiidi põhjaks on romb, mille külg on a ja teravnurk α. Kaks külgtahku, mille vahele jääb rombi teravnurk, on risti põhitahuga, ülejäänud kaks moodustavad aga põhitahuga nurga φ. Leia püramiidi külgpindala.

8.15. TÜVIPÜRAMIIDI KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Tüvipüramiidi külgtahkudeks on trapetsid, mille pindalade summana avaldubki külgpindala. Kui tüvipüramiid on korrapärane, siis saab tema külgpindala avaldada valemina.

Teoreem. **Korrapärase tüvipüramiidi külgpindala on võrdne põhjade ümbermõõtude poolsumma ja apoteemi korrutisega.**



Joon. 147.

Tõestus. Olgu korrapärase n-nurkse tüvipüramiidi ühe põhja serv a_n, teise põhja serv b_n ning apoteem m_n (joon. 147), siis ühe külgtahu pindala on $\frac{a_n+b_n}{2}\cdot m_n$. Tähistades külgpindala S_k-ga, saame

$$S_k=\frac{a_n+b_n}{2}\cdot m_n n$$

ehk

$$\boxed{S_k=\frac{na_n+nb_n}{2}\cdot m_n.}$$

Korrapärase tüvipüramiidi täispindala avaldub valemina

$$\boxed{S=\frac{n}{2}\left[a_n(m_n+k_n)+b_n(m_n+l_n)\right],}$$

kus k_n on selle põhja apoteem, mille külg on a_n, ja l_n on selle külje apoteem, mille külg on b_n. Tõesta see valem!

533. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 12 cm ja 5 cm ning tüvipüramiidi kõrgus on 30 cm. Leia täispindala.

534. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 8 cm ja 6 cm ning kõrgus on 14 cm. Leia külgserva pikkus ja täispindala.

535. Korrapärase tüvipüramiidi põhjadeks on korrapärased kuusnurgad küljepikkusega vastavalt 20 cm ja 9 cm. Külgserva pikkus on 61 cm. Leia tüvipüramiidi kõrgus ja täispindala.

536. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 17,8 cm ja 1,8 cm ning külgserv on 12,8 cm. Leia täispindala.

537. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on h ning külgserv ja diagonaal moodustavad suurema põhitahuga vastavalt nurgad α ja β. Leia tüvipüramiidi külgpindala.

Et püramiidi ei saa tükeldada lõplikuks arvuks kehadeks, mille ruumala oskame leida, siis kasutame siingi ruumala defineerimiseks piirväärtuse mõistet.

Tükeldame püramiidi tema põhjaga paralleelsete tasapindadega võrdse kõrgusega tüvipüramiididekś. Olgu neid tüvipüramiide koos tipu juurde jäänud püramiidiga n. Täiendame nüüd joonist püstprismadega nii, nagu näidatud joonisel 148. See püstprismade poolt moodustatud keha läheneb oma kujult püramiidile seda enam, mida suurem on n.

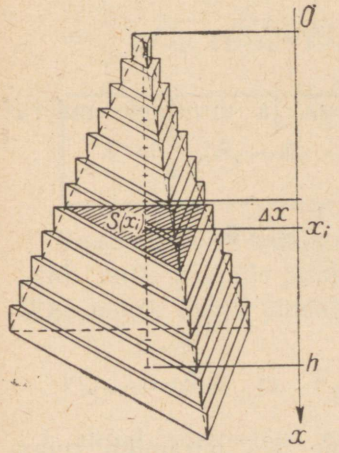
Def. **Püramiidi ruumalaks nimetatakse tema põhjaga paralleelsete lõigete abil moodustatud prismade ruumalade summa piirväärtust, kui prismade arv tõkestamatult kasvab.**

Tähistades prismade ruumalad vastavalt $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ja püramiidi ruumala tähega V, siis

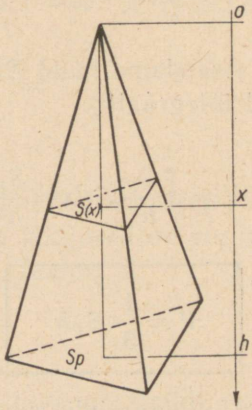
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i.$$

Teoreem. **Püramiidi ruumala on võrdne ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest.**

Tõestus. Olgu püramiidi kõrgus h ja põhja pindala S_p. Paneme tähele (joon. 149), et püramiidi põhjaga paralleelse



Joon. 148.



Joon. 149.

lõike pindala on tipu kauguse funktsioon. Olgu lõike kaugus tipust x, siis lõike pindala on x funktsioon, mida tähistame $S(x)$-ga.

Tuginedes püramiidi põhjaga paralleelsete lõigete omadusele, võime kirjutada, et

$$\frac{S(x)}{S_p}=\frac{x^2}{h^2},$$

millest

$$S(x)=\frac{S_p}{h^2}x^2.$$

Seega on püramiidi põhjaga paralleelse lõike pindala tipu kauguse suhtes ruutfunktsioon.

Tähistame lõigetevahelised kaugused Δx-ga ja lähendame tüvipüramiidi, mille alumiseks põhjaks on $S(x_i)$, prismaga V_i, mille ruumala on $S(x_i)\Delta x$. Et püramiidi ruumala defineerisime kõigi selliste prismade ruumalade summa piirväärtusena, kui lõigete arv tõkestamatult kasvab, siis

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}S(x_i)\Delta x.$$

Sellise summa piirväärtus on aga võrdne määratud integraaliga. Nii saame, et

$$V=\int_0^h S(x)\,dx.$$

Asendame nüüd $S(x)$ tema avaldisega ja arvutame määratud integraali:

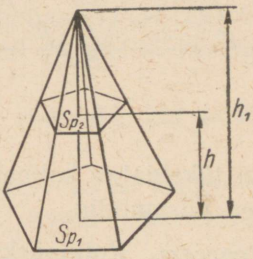
$$V=\int_0^h \frac{S_p}{h^2}x^2\,dx=\frac{S_p}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h=\frac{S_p}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}S_ph.$$

$$\boxed{V=\frac{1}{3}S_ph}$$

Tüvipüramiidi ruumala valemi saame, kui püramiidi ruumalast lahutame tema ristlõikega eraldatud püramiidi ruumala.

Teoreem. **Tüvipüramiidi ruumala on võrdne niisuguse püramiidi ruumalaga, mille kõrgus on võrdne tüvipüramiidi kõrgusega ja mille põhja pindala on võrdne tüvipüramiidi põhjade pindalade ja nende geomeetrilise keskmise summaga.**

Tõestus. Olgu tüvipüramiidi põhjade pindalad S_{p_1} ja S_{p_2} kusjuures $S_{p_1} > S_{p_2}$, ning tüvipüramiidi kõrgus h. Täiendame tüvipüramiidi püramiidiks (joon. 150). Olgu selle püramiidi kõrgus h_1. Tüvipüramiidi ruumala avaldub siis kahe püramiidi ruumalade vahena:



Joon. 150.

$$V = \frac{S_{p_1} h_1}{3} - \frac{S_{p_2}(h_1 - h)}{3}.$$

Püramiidi põhjaga paralleelse lõike omadustest teame, et

$$\frac{S_{p_1}}{S_{p_2}} = \frac{h_1^2}{(h_1-h)^2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_1-h} = \sqrt{\frac{S_{p_1}}{S_{p_2}}} \Rightarrow h_1 = \frac{h\sqrt{S_{p_1}}}{\sqrt{S_{p_1}} - \sqrt{S_{p_2}}}.$$

Seega

$$V = \frac{h_1}{3}(S_{p_1} - S_{p_2}) + \frac{h}{3} \cdot S_{p_2} = \frac{h}{3} \cdot \frac{\sqrt{S_{p_1}}(S_{p_1} - S_{p_2})}{\sqrt{S_{p_1}} - \sqrt{S_{p_2}}} + \frac{h}{3} \cdot S_{p_2} =$$

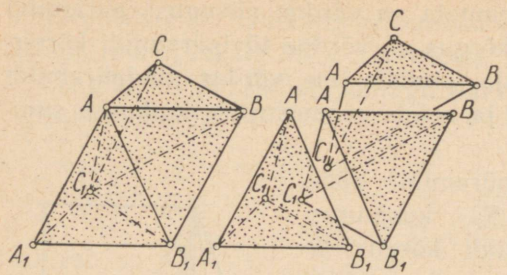
$$= \frac{h}{3}[\sqrt{S_{p_1}}(\sqrt{S_{p_1}} + \sqrt{S_{p_2}}) + S_{p_2}] = \frac{h}{3}(S_{p_1} + S_{p_2} + \sqrt{S_{p_1} S_{p_2}}). \blacksquare$$

$$\boxed{V = \frac{h}{3}(S_{p_1} + S_{p_2} + \sqrt{S_{p_1} S_{p_2}})}$$

Vaatleme üht kolmnurkset prismat ja üht kolmnurkset püramiidi, mille põhjade pindalad on võrdsed ja kõrgused on võrdsed. Olgu nende põhja pindala S_p ja kõrgus h. Teame, et

$$V_{prisma} = S_p h \quad \text{ja} \quad V_{püramiid} = \frac{1}{3} S_p h,$$

s. t. antud eeldusel on prisma ruumala vastava püramiidi ruumalast kolm korda suurem. Tekib küsimus, kas kolmnurne prisma



Joon. 151.

on tükeldatav kolmeks osaks nii, et need osad oleksid ruumvõrdsed püramiidid.

Teoreem. **Kolmnurkne prisma on tükeldatav kolmeks ruumvõrdseks püramiidiks.**

Tõestus. Lõikame antud prismat $A \ldots C_1$ (joon. 151) kahe tasapinnaga. Üks neist läbib tippe A, B_1 ja C_1 ning teine A, B ja C_1. Selle tagajärjel tükeldub prisma kolmeks püramiidiks. Nimeta need!

Püramiidid $AA_1B_1C_1$ ja C_1ABC on ruumvõrdsed, sest neil mõlemal on põhjaks prisma põhi ja kõrguseks prisma kõrgus. Seega on nende püramiidide ruumalad võrdsed prisma põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega. Tähistades püramiidi $AA_1B_1C_1$ ruumala V_1-ga ja püramiidi C_1ABC ruumala V_2-ga, võime kirjutada:

$$V_1 = V_2 = \frac{S_p h}{3}.$$

Vaatame nüüd püramiide ABB_1C_1 ja $ABCC_1$. Need on samuti ruumvõrdsed, sest nende põhjad BB_1C ja BC_1C on võrdsed (miks?) ja nende kõrgused on võrdsed (miks?). Tähistame ABB_1C_1 ruumala V_3-ga. Kuna $ABCC_1$ ruumala on tähistatud V_2-ga, siis

$$V_2 = V_3.$$

Enne leidsime, et $V_1 = V_2$. Seega $V_1 = V_2 = V_3$ ja teoreem on sellega tõestatud. ∎

Et prisma ruumala $V = V_1 + V_2 + V_3$, siis arvestades eelmist tulemust, võime kirjutada:

$$V = 3V_1$$

Järeldus. Rööptahukas on jaotatav kuueks ruumvõrdseks tetraeedriks.

538. Nimeta püramiidi põhjaga paralleelse lõike omadused.

539. Kuidas avaldub püstprisma ruumala? püramiidi ruumala?

540. Korrapärase kolmnurkse püramiidi iga serv on 10 cm. Arvuta püramiidi ruumala.

541. Püramiidi põhjaks on romb, mille diagonaalid on 12 cm ja 15 cm. Arvuta püramiidi ruumala, kui püramiidi kõrgus on 21 cm.

542. Leia korrapärase kuusnurkse püramiidi ruumala, kui põhiserv on 2,1 m ja külgserv 2,9 m.

543. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a. Külgserv moodustab põhitahuga 45°-se nurga. Avalda püramiidi ruumala.

544. Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrgus on h. Püramiidi külgtahk moodustab põhitahuga 60°-se nurga. Avalda püramiidi ruumala.

545. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haarad on 6 cm ja alus on 8 cm. Püramiidi kõik külgservad on 9 cm. Arvuta püramiidi ruumala.

546. Püramiidi põhjaks on kolmnurk külgedega 39 cm, 17 cm ja 28 cm. Kõik külgservad on 22,9 cm. Arvuta püramiidi ruumala.

547. Püramiidi põhi on ristkülik, mille pindala on 1 m^2. Kaks külgtahku on risti põhitahuga ning teised kaks moodustavad temaga nurgad 30° ja 60°. Arvuta püramiidi ruumala.

548. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on b ja külgtahu tipunurk α. Avalda püramiidi ruumala.

549. Korrapärase kaheksanurkse püramiidi külgserv $b=3{,}5$ moodustab põhja tasapinnaga nurga $\alpha=78°40'$. Leia püramiidi ruumala.

550. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on 50 cm^2 ja 32 cm^2 ning kõrgus on 30 cm. Leia tüvipüramiidi ruumala.

551. Tüvipüramiidi ruumala on 7,4 dm^3. Põhjade pindalad on 1000 cm^2 ja 10 cm^2. Leia tüvipüramiidi kõrgus.

552. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on alumisel põhjal 12,5 cm ja ülemisel põhjal 7,5 cm. Kõrgus on 10 cm. Arvuta ruumala.

553. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kujuline anum, mille põhjaks on tüvipüramiidi väiksem põhi, on poole kõrguseni

täidetud veega. Kui palju vett on anumas, kui anuma põhjade küljed on 20 cm ja 10 cm ning anuma kõrgus on 30 cm?

554. Kui suur on nelinurkse tüvipüramiidi kujulise keha tihedus, kui ta vette asetatult (väiksema põhjaga allapoole) vajub vette kuni poole kõrguseni? Põhjade küljed on 14 cm ja 8 cm ning kõrgus on 9 cm.

555. Kolmnurkse tüvipüramiidi kõrgus on 10 m. Püramiidi ühe põhja küljed on 27 m, 29 m ja 52 m ning teise põhja ümbermõõt on 72 m. Arvuta tüvipüramiidi ruumala.

556. Tüvipüramiidi ruumala on 1720 m^3, kõrgus on 20 m ja põhjade vastavate külgede suhe on 5 : 8. Arvuta põhjade pindalad.

557. Ruudukujulise tiigi külje pikkus on 80 m. Tiigi sügavus on 3 m ja kallaste kaldenurk on 60°. Mitu kuupmeetrit pinnast kaevati välja tiigi ehitamisel, kui väljakaevamisel suurenes pinnase maht 9%?

558. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 10,5 ja 4,5 cm ning kõrgus on 4 cm. Leia
1) külgtahkude põhitahu vaheline nurk α;
2) külgservade ja põhitahu vaheline nurk β;
3) külgtahkudeks olevate trapetsite nurgad γ ja δ.

559. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 25 m ja 15 m ning külgtahu teravnurk on 65°. Leia tüvipüramiidi ruumala.

8.17. KOONUSE KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Def. **Koonuse külgpindalaks S_k nimetatakse tema sisse kujundatud korrapärase püramiidi külgpindala S_n piirväärtust, kui püramiidi põhja tippude arv n tõkestamatult kasvab,** s. t.

$$S_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Teoreem. **Koonuse külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja moodustaja poole korrutisega.**

Tõestus. Tähistame korrapärase n-nurkse püramiidi külgpindala S_n-ga ja teda piirava koonuse külgpindala S_k-ga. Nüüd võime kirjutada, et

$S_k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Et $S_n = \frac{1}{2} n a_n m_n$, kus a_n on korrapärase n-nurkse püramiidi põhiserv ja m_n selle püramiidi apoteem, siis

$$S_k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} n a_n m_n\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi r \cdot m = \pi r m,$$

sest $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n) = 2\pi r$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = m$, kus m on koonuse moodustaja. ∎

Seega,

koonuse külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja moodustaja poole korrutisega.

$$S_k = \pi r m$$

Koonuse täispindala

$$S_t = \pi r(r + m)$$

560. Tõesta koonuse täispindala valemi kehtivus. Sõnasta see valem.

561. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk küljega 75 cm. Leia täispindala.

562. Koonuse telglõike üks haar on 20 cm ja telglõike tipunurk on 72°. Leia külgpindala ja täispindala.

563. Koonuse põhja pindala on 36π cm^2. Koonuse põhjast kahe ühiku kaugusel asuv põhjaga paralleelne lõige on 25π cm^2. Leia koonuse külgpindala.

564. Silotorni katus on koonusekujuline. Katuse kõrgus on 2 m ja torni läbimõõt on 6 m. Mitu tahvlit katuseplekki kulus katuse katmiseks, kui tahvli mõõtmed on 0,7 m×1,4 m ja katuse kokkuvaltsimiseks kulus 12% kogu vajatavast plekist?

565. Ringi diameetri otspunktist tõmmatud kõõl pöörleb selle diameetri ümber. Arvuta pöörlemisel tekkiva pinna suurus, kui ringi diameeter on 25 cm ja kõõl 20 cm.

566. Kui suur on koonuse telglõike tipunurk juhul, kui koonus ja silinder on võrdsete kõrguste, võrdsete põhjapindalade ja võrdsete külgpindaladega.

567. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 15 cm ja 20 cm, pöörleb kord ühe ja kord teise kaateti ümber. Leia nende koonuste külgpindalade suhe.

568. Kolmnurk külgedega $a=13$ cm, $b=14$ cm ja $c=15$ cm pöörleb kord külje a, siis külje b ja lõpuks külje c ümber. Missugusel juhul on tekkiva kaksikkoonuse pindala suurim?

569. Võrdhaarne trapets alustega 10 cm ja 4 cm ning kõrgusega 8 cm pöörleb pikema aluse ümber. Leia tekkiva pöördkeha pindala.

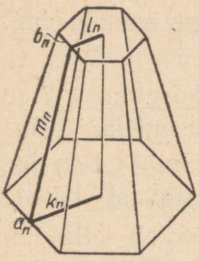
8.18. TÜVIKOONUSE KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Def. **Tüvikoonuse külgpindalaks S_k nimetatakse tema sisse kujundatud korrapärase tüvipüramiidi külgpindala S_n piirväärtust, kui tüvipüramiidi põhja tippude arv n tõkestamatult kasvab,** s. t.

$$S_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Teoreem. **Tüvikoonuse külgpindala on võrdne niisuguse silindri külgpindalaga, mille moodustajaks on tüvikoonuse moodustaja ja mille põhja raadiuseks on tüvikoonuse põhjade raadiuste aritmeetiline keskmine.**

Tõestus. Olgu korrapärase n-nurkse tüvipüramiidi alumise põhja külg a_n ja apoteem k_n ning ülemise põhja külg b_n ja apoteem l_n. Tüvipüramiidi apoteem olgu m_n (joon. 152). Siis



Joon. 152.

$$S_n = \frac{n(a_n+b_n)}{2}\cdot m_n$$

ehk

$$S_n = \frac{na_n+nb_n}{2}\cdot m_n.$$

Kui $n\to\infty$, siis $na_n\to 2\pi r_1$, $nb_n\to 2\pi r_2$, kus r_1 on tüvikoonuse alumise põhja raadius ja r_2 tema ülemise põhja raadius. m_n läheneb tüvikoonuse moodustajale m. Seega

$$S_k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{na_n+nb_n}{2}\cdot m_n\right) = \frac{2\pi r_1+2\pi r_2}{2}\cdot m.$$

$$\boxed{S_k = \pi m(r_1+r_2).}$$

Et

$$\pi m(r_1+r_2) = 2\pi m\cdot\frac{r_1+r_2}{2},$$

siis ongi teoreem tõestatud. ∎

Tüvikoonuse täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga liita põhjade pindalad πr_1^2 ja πr_2^2. Seega

$$\boxed{S_t = \pi[r_1^2+r_2^2+m(r_1+r_2)].}$$

570. Kuidas avaldub tüvipüramiidi külgpindala ja täispindala?

571. Tuleta tüvikoonuse täispindala valem, lähtudes tüvipüramiidi täispindala valemist.

572. Missugune kujund on koonuse telglõikeks? tüvikoonuse telglõikeks?

573. Missuguse kujundi me saame, kui lõikame tüvikoonuse külgpinna mööda tema moodustajat lahti ja laotame tasapinnale?

574. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 3 m ja 1,5 m ning kõrgus 4 m. Arvuta täispindala.

575. Leia tüvikoonuse külgpindala, kui väiksema põhja läbimõõt $d=10{,}8$ dm, moodustaja $m=3{,}7$ dm ja kõrgus $h=1{,}2$ dm.

576. Tüvikoonuse kõrgus $h=63$ dm, moodustaja $m=65$ dm ja külgpindala $S=26\pi$ m². Arvuta põhjade raadiused.

577. Avalda tüvikoonuse külgpindala, kui tüvikoonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 30° ja telglõike pindala on Q.

578. Avalda tüvikoonuse külgpindala, kui tüvikoonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 45° ning põhjade raadiused on r_1 ja r_2.

579. Leia niisuguse silindri põhja raadius, mille külgpindala on võrdne antud tüvikoonuse külgpindalaga ja mille kõrgus on võrdne tüvikoonuse moodustajaga, kui tüvikoonuse põhjade pindalad on $2{,}56\pi$ m² ja $21{,}16\pi$ m².

Olgu tasapinnal antud joon s ja seda joont mittelõikav sirge t (joon. 153). Joone s pöörlemisel ümber sirge t tekib p ö ö r d p i n d. Pöördkeha ruumala valemi tuletamiseks vaatleme joont s koordinaatteljestikus. Joon s on koordinaatteljestikus tõlgendatav mingi funktsiooni $y=f(x)$ graafikuna või selle osana. Sirgeks t, mille ümber toimub pöörlemine, valime x-telje.

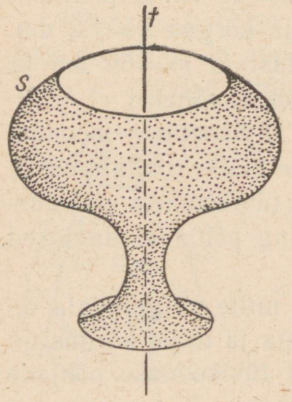
Teoreem. **Kui funktsiooni $y=f(x)$ graafik pöörleb ümber x-telje, siis tekkivast pöördpinnast x-teljega ristuvate tasapindadega kohal a ja kohal b eraldatud pöördkeha ruumala avaldub valemiga**

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

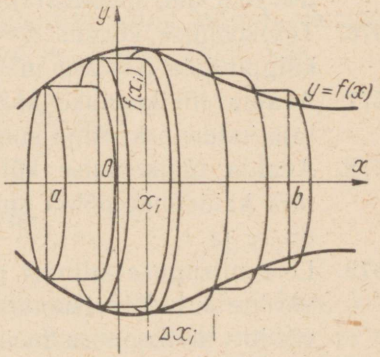
T õ e s t u s. Joonisel 154 on kujutatud pöördkeha. Tükeldame selle pöördkeha x-teljega ristuvate tasapindadega n osaks. Need osad lähendame silindritega, mille põhjade raadiused on $f(x_i)$ ja kõrgused Δx_i. Nii saadud silindrite ruumalade summa

$$\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\,\Delta x_i$$

on antud pöördkeha ruumala lähisväärtuseks. Pöördkeha ruumala defineerime kui saadud summa piirväärtuse silindrite arvu n



Joon. 153.



Joon. 154.

tõkestamatul kasvamisel nii, et kõigi silindrite kõrgused Δx_i tõkestamatult kahanevad, s. t.

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\,\Delta x_i.$$

Et ruumala V avaldub integraalsummana, siis

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

ja määratud integraali omaduse põhjal

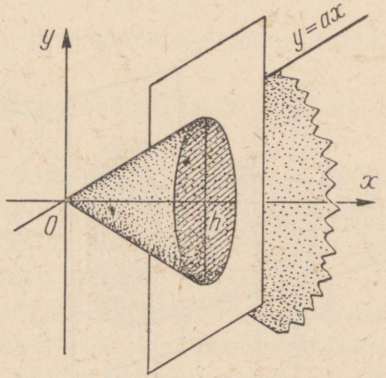
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \blacksquare$$

8.20. KOONUSE JA TÜVIKOONUSE RUUMALA.

Rakendame pöördkeha ruumala valemit koonuse ja tüvikoonuse ruumala valemi tuletamiseks.

Teoreem. **Koonuse ruumala on võrdne ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest.**

Tõestus. Pöörelgu sirge $y=ax$, kus $a>0$, ümber x-telje (joon. 155). Lõigates tekkinud pöördpinda x-teljega ristuva tasapinnaga kohal h, tekib koonus. Pöördkeha ruumala valemit rakendades saame:



Joon. 155.

$$V=\pi\int_0^h (ax)^2dx=\pi a^2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{\pi a^2h^3}{3}.$$

Et koonuse põhja raadius $r=ah$, siis

$$\boxed{V=\frac{\pi r^2h}{3}.}$$

Teoreem. **Tüvikoonuse ruumala avaldub valemiga**

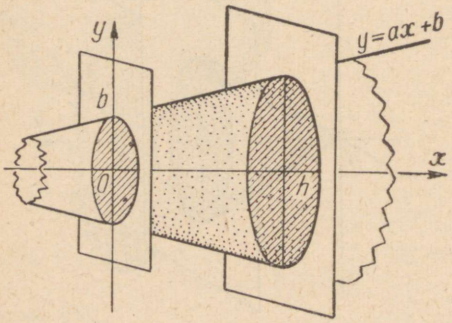
$$\boxed{V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2),}$$

kus r_1 ja r_2 on tüvikoonuse põhjade raadiused ja h on tüvikoonuse kõrgus.

T õ e s t u s. Pöörelgu sirge $y=ax+b$, kus $a>0$ ja $b>0$, ümber x-telje (joon. 156). Lõigates tekkinud pöördpinda x-teljega ristuvate tasapindadega kohal 0 ja kohal h, tekib tüvikoonus. Rakendades pöördkeha ruumala valemit, saame:

$$V=\pi\int_0^h (ax+b)^2dx=\pi\int_0^h (a^2x^2+2abx+b^2)\,dx=$$

$$=\pi\Big[\int_0^h a^2b^2\,dx+\int_0^h 2abx\,dx+\int_0^h b^2\,dx\Big]=$$



Joon. 156.

$$=\pi\left[a^2\int_0^h x^2\,dx+2ab\int_0^h x\,dx+b^2\int_0^h dx\right]=$$

$$=\pi\left[a^2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h+2ab\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^h+b^2x\Big|_0^h\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{a^2h^3}{3}+2ab\cdot\frac{h^2}{2}+b^2h\right]=\frac{\pi h}{3}[a^2h^2+3abh+3b^2].$$

Et $r_1=b$ ja $r_2=ah+b$, siis

$r_1^2=b^2$, $r_2^2=a^2h^2+2ahb+b^2$ ja $r_1r_2=ahb+b^2$

ja siit

$$r_1^2+r_2^2+r_1r_2=b^2+a^2h^2+2ahb+b^2+ahb+b^2=a^2h^2+3abh+3b^2.$$

Seega

$$V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2).\blacksquare$$

580. Defineeri tüvikoonuse ruumala korrapärase tüvipüramiidi ruumala piirväärtusena ja leia siis tüvikoonuse ruumala valem.

581. Leia tüvikoonuse ruumala valem kahe koonuse ruumala vahena.

582. Kui palju kaalub koonusekujuline liivahunnik, mille kõrgus on 1,3 m ja põhja ümbermõõt on 15 m, kui 1 m^3 liiva kaalub 18 000 N?

583. Koonuse kõrgus on 8 cm, telje ja moodustaja vaheline nurk on 42°. Arvuta koonuse ruumala.

584. Koonuse põhja raadius on 20 cm, moodustaja ja põhja vaheline nurk on 65°. Leia ruumala.

585. Koonusekujuline telk ehitatakse niisugune, et sellesse mahuvad 4 meest arvestusega igaühele 3,5 m^2 pinda. Telgi kõrgus on 3,5 m. Kui palju kulub telgi valmistamiseks riiet ja kui palju tuleb telgis õhku ühe mehe kohta?

586. Kaevati välja vundamendisüvend mõõtmetega 14,50 m, 9,25 m ja 6,50 m Väljakaevatud mullast kerkis koonusekujuline hunnik, mille moodustaja ja põhja vaheline nurk oli 45°.

Arvestades, et igast 25 m^3 kinnisest pinnasest saab 40 m^3 lahtist pinnast, leia selle koonuse kõrgus.

587. Marmorkoonusest, mille kõrgus oli 21 cm ja põhja läbimõõt 40 cm, puuriti välja teine koonus, mille telg ühtis antud koonuse teljega ja mille moodustaja oli paralleelne antud koonuse moodustajaga. See tühimik valati seisu stabiilsuse saavutamiseks täis seatina. Leia nii saadud koonuse erikaal, kui väljapuuritud koonuse kõrgus oli 14 cm ning kui marmori tihedus on $2{,}84\frac{g}{cm^3}$ ja seatina tihedus $11{,}35\frac{g}{cm^3}$.

588. Ruut, mille diagonaal on d cm, pöörleb ümber diagonaali. Leia tekkinud pöördkeha pindala ja ruumala. Arvuta, kui $d=3{,}5$ cm.

589. Leia ülesande 567 andmete järgi koonuste ruumalade suhe.

590. Leia ülesande 568 andmete järgi, missugusel juhul on tekkiva kaksikkoonuse ruumala suurim.

591. Koonuse kõrgus on h ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α. Avalda koonuse ruumala. Arvuta, kui $\alpha=25°$ ja $h=14{,}6$.

592. Koonuse põhja raadius on r ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α. Avalda koonuse külgpindala ja ruumala. Arvuta, kui $\alpha=48{,}4°$ ja $r=3{,}42$.

593. Kolmnurgas on antud külg a ja selle lähisnurgad β ja γ. Avalda selle kolmnurga pöörlemisel ümber antud külje tekkiva keha pindala ja ruumala. Arvuta, kui $a=14{,}6$ cm, $\beta=78°$ ja $\gamma=56°$.

594. Võrdhaarne kolmnurk, mille pindala $Q=50$ dm^2 ja tipunurk $\beta=100°$, pöörleb ümber sirge, mis läbib kolmnurga aluse üht otspunkti ja on risti alusega. Avalda ja arvuta tekkiva pöördkeha pindala ja ruumala.

595. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 4 m ja 2,5 m; kõrgus on 3 m. Leia ruumala.

596. Tüvikoonusekujulise veeanuma ülemise põhja sisemine läbimõõt on 1,20 m ja alumise põhja sisemine läbimõõt 80 cm. Sisemine sügavus on 1,00 m. Mitu ämbrit vett mahub anumasse, kui ämbrisse mahub 11 l vett?

597. Tehase korsten on 140 m kõrge. Korstna sisemine läbimõõt alt on 5,25 m ja korstnamüüri paksus 1,50 m. Ülevalt on korstna sisemine läbimõõt 2,50 m ja korstnamüüri paksus 0,25 m. Arvuta:

1) korstnamüüri ruumala, kui müüri paksus väheneb ühtlaselt alt ülespoole,

2) korstna kogurõhk vundamendile, kui korstnamüüri tihedus on $1{,}75\frac{t}{m^3}$.

598. Tüvikoonuse põhjade raadiused on $r_1=25$ cm ja $r_2=12$ cm. Moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 75°. Leia selle tüvikoonuse pindala ja ruumala.

599. Koonusest, mille põhja raadius on 11 cm ja mille moodustaja on 61 cm, lõigatakse tipust 20 cm kaugusel põhjaga paralleelse tasapinnaga ära tema koonuseline osa. Kui suur on järelejäänud tüvikoonuse ruumala?

600. Puust koonus, kõrgusega 45 cm, ujub vees nii, et tema tipp on veepinnast 27 cm kõrgemal. Leia koonuse tihedus.

601. Puust koonus, kõrgusega 24 cm, ujub vees tipuga allapoole. Leia:

a) kui sügavalt ujub koonus vees, kui puu tihedus on $0{,}48\frac{g}{cm^3}$,

b) kui suur on veepinnale jääva koonuseosa ruumala ja pindala, kui koonuse põhja raadius on 7 cm.

602. Tehnikas kasutatakse tüvikoonuse ruumala arvutamiseks järgmist ligikaudset valemit:

$$V \approx G_m h, \text{ kus } G_m = \frac{\pi}{2}(r_1^2 + r_2^2).$$

Selgita selle valemi kasutamise õigsust. Kas valem annab täpsema tulemuse siis, kui tüvikoonus oma kujult läheneb silindrile, või siis, kui ta oma kujult läheneb koonusele?

603. Tehnikas kasutatakse tüvikoonuse ruumala arvutamiseks ka valemit

$$V \approx Mh,$$

kus M on tüvikoonuse kesklõike pindala, s. o. selle põhjaga paralleelse lõike pindala, mille läbimõõt on r_1+r_2.
Selgita esitatud valemi kasutamise õigsust. Kas valem annab täpsema tulemuse siis, kui tüvikoonus oma kujult läheneb silindrile, või siis, kui ta oma kujult läheneb koonusele?

604. Kasutades eelmises kahes ülesandes antud ligikaudseid valemeid, arvuta niisuguse tüvikoonuse ruumala, mille põhjade

läbimõõdud on 18 cm ja 20 cm ning kõrgus on 6 cm. Kumb valem annab täpsema tulemuse?

605. Leia sirge $y=2x$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala vahemikus 0-st 3-ni.

606. Leia parabooli $y=x^2$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöörkeha ruumala vahemikus 0-st 2-ni.

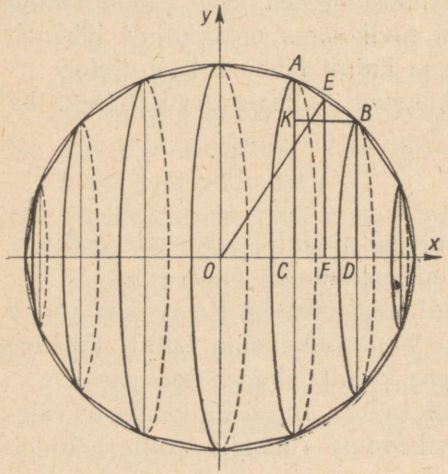
607. Leia joone $y=\sqrt{x}$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala vahemikus 0-st 2-ni.

608. Leia kuupparabooli $y=x^3$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva keha ruumala vahemikus 0-st 2-ni.

8.21. SFÄÄRI JA TEMA OSADE PINDALA.

Def. **Sfääri (sfääri segmendi ja sfääri vöö) pindalaks nimetatakse kera suurringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga (vastavate osade) pöörlemisel tekkinud pöördkeha pindala piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab.**

Olgu antud korrapärane $2n$-nurk koos tema ümberringjoonega (joon. 157). Pöörelgu see hulknurk ümber x-telje, milleks on sirge, millel asub üks keskpunkti läbivaist diagonaalidest. Saame pöördkeha, mis koosneb tüvikoonustest. Äärmised osad on küll koonused, kuid neid võib vaadelda tüvikoonustena, mille ühe põhja pindala on null. Kera pindalaks on nende tüvikoonuste külgpindalade summa piirväärtus. Olgu hulknurga kaheks järjes-



Joon. 157.

tikuseks tipuks punktid $A(x_{i-1};\ y_{i-1})$ ja $B(x_i;\ y_i)$. Tähistame hulknurga külje a_{2n}-ga ja apoteemi k_{2n}-ga. Edasi tähistame

$$KB=CD=x_i-x_{i-1}=\Delta x_i,$$

külje AB pöörlemisel tekkiva tüvikoonuse külgpindala S_i-ga ning kera pindala S-ga. Siis

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}S_i.$$

Teoreem. **Sfääri pindala on võrdne kera neljakordse suurringi pindalaga.**

T õ e s t u s. Jooniselt 157 näeme, et $S_i=\pi(AC+BD)\cdot AB$. Trapetsi kesklõigu omaduse põhjal $AC+BD=2EF$ ja seega

$$S_i=2\pi\cdot EF\cdot AB.$$

Vaatleme kolmnurki AKB ja OFE. Need on sarnased. Miks? Siit

$$\frac{AB}{OE}=\frac{KB}{EF},$$

millest

$$AB\cdot EF=OE\cdot KB=k_{2n}\Delta x_i.$$

Seega

$$S_i=2\pi k_{2n}\Delta x_i$$

ja

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}S_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi k_{2n}\Delta x_i=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2\pi k_{2n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i)=2\pi\lim_{n\to\infty}(k_{2n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i)=2\pi r\cdot 2r=4\pi r^2,$$

sest $\lim\limits_{n\to\infty}k_{2n}=r$, s. t. et hulknurga apoteem n tõkestamatul kasvamisel läheneb hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiusele

ja $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=2r$. ∎

Saadud summa piirväärtust saab avaldada ka määratud integraali kaudu rajades $(-r)$-st r-ni, sest

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\int_{-r}^{r}dx.$$

Seega

$$S=2\pi r\int_{-r}^{r}dx=2\pi rx\Big|_{-r}^{r}=4\pi r^2.$$

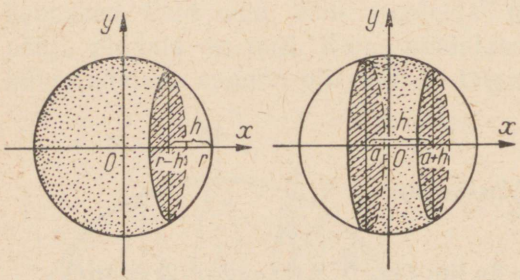
Et hulknurga ümberringjoone raadius r on ka pöörlemisel tekkinud sfääri raadiuseks, siis

sfääri pindala on võrdne nelja suurringi pindalaga.

$$\boxed{S=4\pi r^2}$$

Teoreem. **Sfääri segmendi (vöö) pindala on võrdne sfääri suurringjoone pikkuse ja segmendi (vöö) kõrguse korrutisega.**

Tõestus. Olgu kera raadius r ja segmendi (vöö) kõrgus h. Tuginedes sfääri pindala tõestuskäigule, määrame vaid vastavad integreerimisrajad (joon. 158). Saame



Joon. 158.

$$S_{seg}=2\pi r\int_{r-h}^{r}dx=2\pi rx\Big|_{r-h}^{r}=2\pi r^2-2\pi r(r-h)=2\pi rh.\blacksquare$$

$$\boxed{S_{seg}=2\pi rh.}$$

$$S_{vöö}=2\pi r\int_a^{a+h} dx=2\pi rx\Big|_a^{a+h}=2\pi r(a+h)-2\pi ra=2\pi rh.\blacksquare$$

$$\boxed{S_{vöö}=2\pi rh.}$$

609. Näita, et tüvikoonuse ruumala valemist tuleneb koonuse ruumala valem, kui ühe põhja raadius võtta võrdseks nulliga.

610. Missugust joont nimetatakse ringjooneks?

611. Kuidas nimetatakse ringi osi? Kuidas leitakse ringi sektori pindala? ringi segmendi pindala?

612. Otsitava sfääri pindala on 3 korda suurem antud sfääri pindalast. Kui suur on otsitava kera raadius, kui antud kera raadius on 5 cm?

613. On antud kaks kera, mille raadiused on 8,8 cm ja 10,5 cm. Kui suur on selle kera raadius, mille pindala on võrdne antud kerade pindalade summaga?

614. Kera, mille raadius on 41 dm, on lõigatud tasapinnaga 9 dm kaugusel keskpunktist. Arvuta lõike pindala.

615. Kera raadius on 63 cm. Punkt asetseb kera puutujatasapinnal 16 cm kaugusel puutepunktist. Leia punkti lühim kaugus kera pinnast.

616. Kera raadius on r. Läbi raadiuse otspunkti on pandud tasapind, mille suhtes raadiuse kaldenurk on 60°. Avalda tekkinud lõike pindala.

617. Vöö põhjade raadiused on 16 cm ja 33 cm; kera raadius on 65 cm. Leia vöö kõrgus juhul, kui kera keskpunkt
1) on vöö põhjade vahel,
2) ei ole vöö põhjade vahel.

618. Arvuta sfääri segmendi pindala, kui kera raadius on 15 cm ja segmendi kõrgus on 4 cm.

619. Arvuta sfääri segmendi pindala, kui segmendi kõrgus on 16 cm ja põhja raadius on 30 cm.

620. Tõesta, et kera segmenti kujundatud koonuse külgpindala on selle segmendi põhja pindala ja sfääri segmendi pindala keskmine võrdeline.

621. Kera, mille raadius on 10 cm, on silindriliselt läbi puuritud mööda telge. Puuraugu läbimõõt on 12 cm. Arvuta keha täispindala.

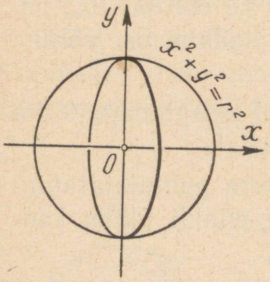
622. Observatooriumi katus on kujult sfääri segment, mille kõrgus on 4,6 m. See segment on osa kerast, mille raadius on 9,2 m. Leia katuse pindala.

623. Kuubi ümber on kujundatud kera, mille raadius on a. Üht kuubi tahkudest on laiendatud kuni lõikumiseni kera pinnaga. Leia tekkinud segmentide pindalad.

624. Kui suur osa maakera pinnast kuulub polaarvöötmesse, parasvöötmesse ja troopikavöötmesse ($r \approx 6000$ km)?

8.22. KERA JA TEMA OSADE RUUMALA.

Teoreem. **Kera ruumala on võrdne ühe kolmandikuga sfääri pindala ja raadiuse korrutisest.**



Joon. 159.

Tõestus. Pöörelgu ringjoon, mille võrrand on $x^2+y^2=r^2$, ümber x-telje (joon. 159). Ringjoone võrrandist $y^2=r^2-x^2$. Asetades y^2 avaldise pöördkeha ruumala valemisse, saame:

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=$$

$$=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Et sfääri pindala on $S=4\pi r^2$, siis

$$\boxed{V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{3}Sr.}$$

Teoreem. **Kera segmendi ruumala avaldub valemiga**

$$\boxed{V_{seg}=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right),}$$

kera kihi ruumala valemiga

$$V_{kiht}=\frac{\pi h}{6}(3r_1^2+3r_2^2+h^2),$$

kera sektori ruumala valemiga

$$V_{sekt}=\frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

T õ e s t u s. Jooniselt 158 näeme, et kera segmendi ruumala valemi saame kera ruumala valemi tuletamisel saadud integraalist, kui integreerime rajades $(r-h)$-st r-ni, kus h on segmendi kõrgus.

$$V_{seg}=\pi\int_{r-h}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r-h}^{r}=$$

$$=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}-r^3+r^2h+\frac{r^3-3r^2h+3rh^2-h^3}{3}\right)=$$

$$=\pi\left(rh^2-\frac{h^3}{3}\right)=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right).\ \blacksquare$$

Kera kihi ruumala saame leida kahe segmendi ruumala vahena (joon. 158).

Kera kihi ruumala valemi saame samuti integreerimise teel, kasutades kera ruumala valemi tuletamisel saadud integraali. Nüüd toimub aga integreerimine rajades a-st $(a+h)$-ni, kus a on kihi vasakpoolse põhja kaugus koordinaatide alguspunktist ja h on kihi kõrgus.

$$V_{kiht}=\pi\int_{a}^{a+h}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{a}^{a+h}=\pi\Big[r^2(a+h)-$$

$$-\frac{(a+h)^3}{3}-r^2a+\frac{a^3}{3}\Big]=\pi\left(r^2h-a^2h-ah^2-\frac{h^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi h}{2}\left(2r^2-2a^2-2ah-\frac{2h^2}{3}\right)=\frac{\pi h}{2}\left\{(r^2-a^2)+\right.$$

$$\left.+[r^2-(a^2+2ah+h^2)]+\frac{h^2}{3}\right\}=\frac{\pi h}{3}\left(r_1^2+r_2^2+\frac{h^2}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2+3r_2^2+h^2\right). \blacksquare$$

Kera sektori ruumala avaldub koonuse ja kera segmendi ruumalade summana (joon. 122):

$$V_{sek}=\frac{1}{3}\pi r_1^2(r-h)+\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right).$$

Et

$$r_1^2=r^2-(r-h)^2=2rh-h^2,$$

siis

$$V_{sek}=\frac{1}{3}\pi(2rh-h^2)(r-h)+\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h(2r^2-2rh-rh+h^2+3rh-h^2)=\frac{2}{3}\pi r^2h. \blacksquare$$

625. Missuguse kuju omandab kera segment, kui tema kõrgus saab võrdseks kera raadiusega? läbimõõduga? Kontrolli segmendi ruumala valemi kehtivust neil juhtudel!

626. Missuguse kuju omandab kera kiht, kui $h=r-a$? Kontrolli kera kihi ruumala valemi kehtivust sel juhul!

627. Praktikas kasutatakse kera ruumala arvutamiseks valemit $V\approx\frac{1}{2}d^3$. Põhjenda selle valemi õigsust. Kui suur on viga, kui kasutada seda valemit niisuguse kera ruumala arvutamiseks, mille raadius on 1 m?

628. Kuubil ja keral on võrdne ruumala 1000 cm³. Mitu protsenti on kera pindala väiksem kuubi pindalast?

629. Kuubil ja keral on võrdne pindala 600 cm². Mitu protsenti on kera ruumala suurem kuubi ruumalast?

630. Kerakujuline õõnes boi välise läbimõõduga 1,4 m peab vees vajuma poolest saadik vette. Kui paks peab sel juhul olema terasplekk, millest boi tuleb valmistada, kui vee tihedus on $1\frac{g}{cm^3}$ ja teraspleki tihedus $7{,}8\frac{g}{cm^3}$?

631. Puust kera läbimõõduga 11,1 cm vajub 6,9 cm sügavusele vette. Kui suur on märgamata pinna osa? Kui suur on kera tihedus?

632. Tinakuulist, mille raadius on 8,6 cm, valatakse seest tühi

kuul välise läbimõõduga 23,5 cm. Kui paks on uue kuuli sein?

633. Kera raadius on r ja tema sektori telglõike nurk on 120°. Leia sektori ruumala.

634. Kaksikkumera läätse sfääriliste pindade raadiused on 10 cm ja 17 cm. Keskpunktidevaheline kaugus on 21 cm. Arvuta läätse ruumala.

635. Kera, mille raadius on 65 cm, on ühel ja samal pool keskpunkti lõigatud kahe paralleelse tasapinnaga, mille kaugused keskpunktist on 16 cm ja 25 cm. Leia nende vahel oleva kera kihi ruumala.

636. Ringi segment pöörleb segmendi aluseks oleva kõõluga paralleelse diameetri ümber. Tõesta, et seejuures tekkiv pöördkeha on ruumvõrdne keraga, mille läbimõõduks on segmendi kõõl.

9. ÜLESANDEID KORDAMISEKS.

Keskkooli matemaatikakursus on sellega ammendatud. Põhilised teadmised ja oskused on omandatud järgmistes ainelõikudes:

1) aritmeetilised tehted ja tehted ligikaudsete arvudega,
2) algebralised teisendused,
3) võrrandite ja võrratuste lahendamine,
4) funktsioonid,
5) tehted astmete ja juurtega,
6) arvutamine logaritmidega ja arvutuslükati kasutamine,
7) trigonomeetria valemid ja kolmnurkade lahendamine,
8) funktsiooni pidevus, piirväärtus, tuletis ja integraal,
9) geomeetrilised kujundid, nende omadused, pindala ja ruumala valemid,
10) vektor ja tehted vektoritega,
11) hulk ja operatsioonid hulkadega.

Järgnevalt on toodud ülesandeid ja kordamisküsimusi kõigi loetletud ainelõikude kohta, et kontrollida ja kinnistada keskkoolis õpitud matemaatikaalaseid teadmisi ja oskusi.

637. Loetle ja esita valemitena aritmeetiliste tehete põhiseadused.

638. 1) Esita arvutamise abivalemid.

2) Avalda $(10a+5)^2$ ja sõnasta eeskiri 5-ga lõppevate arvude ruutude leidmiseks. Leia 45^2, 75^2, 95^2.

639. Kasutades arvutamise abivalemeid, arvuta 21^2, 42^2, 59^2, 35^2, 85^2, 99^2, 82^2.

640. Kuidas muutub summa, kui
1) üht liidetavat suurendada a võrra,
2) üht liidetavat vähendada b võrra,
3) kaht liidetavat suurendada kumbagi $3a$ võrra,
4) üht liidetavat suurendada $2a$ võrra ja teist vähendada $3b$ võrra,
5) üht liidetavat suurendada k korda,
6) kõiki liidetavaid suurendada a võrra (n liidetavat),
7) kõiki liidetavaid suurendada k^2 korda (n liidetavat)?

641. Arvuta.

1) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$

2) $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{5}$

3) $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0$

642. Esita summa märgita.

1) $\sum_{n=1}^{5}\frac{n}{n+1}$

2) $\sum_{n=1}^{5}\frac{2^n}{2n}$

3) $\sum_{x=1}^{5}|x-3|$

4) $\sum_{x=1}^{5}(x-3)^2$

643. Esita summa märgi abil.

1) $1+4+9+16+\ldots+36$
2) $2+5+10+17+\ldots+50$
3) $1+3+5+7+\ldots+99$
4) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+20\cdot 21$

5) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{19}{20}$

6) $2+1\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}+\ldots+1\frac{1}{20}$

644. Esita graafiliselt funktsioon $\{(x; y)\}$, kus

$$y := \begin{cases} 1-x, & \text{kui } x \geqslant 0, \\ 1+x, & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

ning kui määramispiirkonnaks on

1) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$;

2) $\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$.

645. On antud funktsioon

$F\{(0; 7), (1; 4), (2; 1), (3; -2), (4; -5)\}$.

1) Esita see funktsioon graafiliselt.
2) Leia $G \subset F$, mille elementideks olevad arvupaarid rahuldavad tingimust $y = 7 - 3x$.

646. On antud hulgad

$A = \{-3; -2; -1; 0\}$, $B = \{0; 1\}$,
$C = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Leia

1) $A \cup B$
2) $A \cap B$
3) A'_C
4) B'_C
5) $A \times B$
6) $B \times A$
7) $A'_C \cup B'_C$
8) $A'_C \cap B'_C$

647. On antud hulgad:

$A = \{$arvu 210 jagajad$\}$,
$B = \{$arvust 11 väiksemad naturaalarvud$\}$,
$C = \{$arvude 24 ja 60 ühistegurid$\}$.

Leia

1) $A \cap B$
2) $A \cap C$
3) $A \cap B \cap C$
4) $A \cup (B \cap C)$
5) $A \cap (B \cup C)$
6) $A \cup B \cup C$
7) $(A \cup B) \cap C$
8) $(A \cap B) \cup C$
9) $(A \cap \varnothing) \cup B$

648. Valguse kiirus on $186 \cdot 10^3$ miili sekundis. Mitu aastat kulub valgusel Maa peale jõudmiseks tähelt Castor, mis asub Maast $959 \cdot 10^{11}$ miili kaugusel?

649. Olgu $D=\frac{Wl^3}{4bd^3E}$.

Leia E, kui $b=1$, $d=2$, $l=20$, $W=100$ ja $D=0{,}0008$.

650. Maa mass on $6 \cdot 10^{21}$ tonni. Päikese mass on Maa massist $3{,}25 \cdot 10^5$ korda suurem. Kui suur on Päikese mass?

651. Valguse kiirus on $3 \cdot 10^{10}$ sentimeetrit sekundis. Mitu minutit kulub valgusel Päikeselt Maale jõudmiseks, kui Päike on Maast $1{,}5 \cdot 10^{13}$ cm kaugusel?

652. Valgus jõuab Päikeselt Maale 8 minuti 20 sekundiga. Päike on Maast $1{,}5 \cdot 10^8$ km kaugusel. Lähimalt kinnistähelt jõuab valgus Maale 3 aastaga. Leia selle kinnistähe kaugus Maast.

653. Olgu $y=\frac{wl^4}{384EI}$, kus $w=\frac{W}{l}$ ja $I=\frac{bd^3}{12}$.

Leia I, w ja y, kui $b=3$, $d=9$, $l=150$, $W=8000$ ja $E=1{,}1 \cdot 10^6$.

654. Olgu $L=\frac{4\pi An^2}{10^9 l}$.

Leia L, kui $A=\pi r^2$, $r=3$, $l=40$, $n=1000$ (võta $\pi^2=10$).

655. Peolauas istuvad Anne, Berta, Carmen ja Daisy ning Elmar Fred, Georg, Hillar ja Ivar.

1) Mitu erinevat tantsupaari saab neist moodustada?

2) Mitu erinevat tantsupaari saab neist moodustada, kui tantsivad ainult noormehed?

3) Mitu erinevat tantsupaari saab moodustada, kui Berta, Georg ja Ivar ei tantsi?

656. Leia avaldise

1) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ arvuline väärtus, kui $a=-4\frac{1}{3}$ ja $b=-1\frac{2}{3}$;

2) $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}$ arvuline väärtus, kui $a=-2\sqrt{3}$ ja $b=-3\sqrt{2}$.

657. Lihtsusta.

1) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{b-a}$

2) $\dfrac{4a^2-9b^2}{6b-4a}$

3) $\dfrac{4a-1-4a^2}{4a^2-1}$

4) $\dfrac{a}{a^2-1}-\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{1}{1-a}-\dfrac{1}{a-1}$

5) $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n+1}$

6) $\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)^2-\left(\dfrac{1}{1-n}-\dfrac{1}{n}\right)^2$

658. Esita hulk elementides.

1) $\left\{k \,\middle|\, \dfrac{3k+4}{\sqrt{1+k^2}}=5\right\}$

2) $\left\{k \,\middle|\, \dfrac{3k+4}{\sqrt{1+k^2}}=3\right\}$

3) $\left\{k \,\middle|\, \dfrac{3k-4}{\sqrt{1+k^2}}=4\right\}$

4) $\left\{k \,\middle|\, \dfrac{3k-4}{\sqrt{1+k^2}}=1\right\}$

659. Lahenda võrrandid.

1) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{2}{3}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{5}$

3) $\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}=\dfrac{1}{2}$

4) $\dfrac{\sqrt{x-3a}}{\sqrt{x+3a}}-\dfrac{\sqrt{x+3a}}{\sqrt{x-3a}}=\dfrac{3}{2}$

660. 200 kurgiseemnest läks idanema 185. Kui suur on selle kurgisordi idanemisprotsent? Kui suur on sellest seemnetagavarast võetud seemne idanemise tõenäosus?

661. Redisepeenralt võeti prooviks 350 redist. Nende uurimisel

selgus, et 107 neist oli ussitanud. Kui suur on tervete rediste protsent? Kui suur on tõenäosus, et peenralt juhuslikult võetud redis on söömiskõlblik? Mitu tervet redist on 10 kimbus, kui igas kimbus on 8 juhuslikult võetud redist?

662. Leia C_5^2, C_{10}^4, C_{12}^{10}.

663. Leia $C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5$.

664. Esita binoomi arend.

1) $(x+1)^5$
2) $(2x-3)^4$
3) $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^5$
4) $(2x^2-3x)^5$
5) $(3a+4a^3)^4$
6) $\left(-\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}a^2\right)^5$

665. Maleringis on n liiget. Mitmel viisil saab valida 3-liikmelist juhatust, kui $n=3$; 9; 15?

666. Olgu $x=p^2-q^2$, $y=2pq$, $z=p^2+q^2$, kus $p\in N_1$, $q\in N_1$ ja $p>q$. Näita, et $x^2+y^2=z^2$. Asendades tähed p ja q lubatud arvuliste väärtustega, leia viis täisarvude kolmikut, mis esitavad täisnurkse kolmnurga külgi.

667. Tõesta matemaatilise induktsiooni meetodiga, et

1) $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$;

2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

3) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

668. Näita, et korrutis $n(n+1)(n+2)$ jagub 6-ga, kui $n\in N$.

669. Näita, et vahe n^3-n jagub 6-ga, kui $n\in N$.

670. Keha paigutatakse vee ja sulava jää segusse. See keha jahtub nii, et tema temperatuur iga minuti lõpuks väheneb murru $\frac{p}{q}$ võrra temperatuurist selle minuti algul. Olgu keha temperatuur katse algul t_0 ja n-nda minuti lõpul pärast katse algust t_n. Leia arvude n, t_n ja t_0 vaheline seos.

671. Leia arvujada üldliige.

1) 2; 3; 5; 8; 12; ...
2) 2; 3; 5; 8; 13; ...

3) 1; 7; 3; 9; 5; 11; ...
4) 17; 17; 18; 16; 19; 15; ...

672. Esita arvujada antud üldliikme järgi.

1) $a_n=\frac{2n-1}{2}$

2) $a_n=\sin\frac{n\pi}{4}$

3) $a_n=\cos\frac{(n+1)\pi}{3}$

4) $a_{2n}=3n-1$
$a_{2n-1}=3n+1$

5) $a_{2n}=n\log 10n$
$a_{2n-1}=n\log 10^n$

673. Esita hulgad elementides.

1) $\left\{x\,\middle|\,\frac{3-x}{2}=2-\frac{5-2x}{3}\right\}$

2) $\{x\,|\,x\in z\wedge 3x^2+5x-2=0\}$

3) $\{x\,|\,x\in N\wedge x^2-x-6=0\}$

4) $\left\{x\,\middle|\,\log(x+70)-\frac{2}{3}\log 64-1=0\right\}$

5) $\{a\,|\,a<5\wedge\log_3(a-1)^2-\log_3(a-3)=2\}$

6) $\left\{b\,\middle|\,\left(\frac{1}{2}\right)^{2b+3}=32\right\}$

7) $\{c\,|\,3^{2c+1}-3^{c+2}=162\}$

674. Näita, et aritmeetilises progressioonis iga liige, alates teisest, on temale eelneva ja järgneva liikme aritmeetiline keskmine.

675. Näita, et geomeetrilises progressioonis iga liige, alates teisest, on temale eelneva ja järgneva liikme geomeetriline keskmine.

676. Teades, et
$\log 2=0{,}3010$, $\log 3=0{,}4771$, $\log 7=0{,}8451$,
kõik veaga alla 0,00005, leia

1) $\log 6$
2) $\log 14$
3) $\log 21$
4) $\log\frac{2}{3}$
5) $\log\frac{7}{3}$
6) $\log\frac{2}{7}$
7) $\log\frac{1}{2}$
8) $\log\frac{1}{3}$
9) $\log\frac{1}{7}$
10) $\log 18$
11) $\log 42$
12) $\log 147$

677. Päevalill annab aastas keskmiselt 2000 seemet. Olgu kasvutingimused ühtlaselt soodsad kogu maismaal. Taime jõudsaks arenemiseks on talle vaja 1 m^2 pinda. Mitu aastat kulub selleks, et ühest päevalilleseemnest arenenud taimed kataksid kogu maismaa, kui oletada, et kõik seemned idanevad ja iga seeme annab aastas ühe lõikuse? Maa raadius on 6400 km. Maismaa moodustab 28% Maa pinnast?

678. Näita, et $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

679. Ruutu on konstrueeritud teine ruut tippudega esimese ruudu külgede keskkohas teise ruutu on samal viisil konstrueeritud kolmas ruut, kolmandasse neljas jne. Leia kõikide nende ruutude ümbermõõtude summa, kui lähteruudu külg on a.

680. Ruutu, mille külg on a, on joonestatud ringjoon, sellesse ruut, viimasesse ringjoon jne. Leia kõikide ruutude pindalade summa ja kõikide segmentide pindalade summa.

681. Leia lühima diagonaaliga ristkülik, mille ümbermõõt on u.

682. Leia vähima aluse ja kõrguse summaga kolmnurk, kui kolmnurga pindala on S.

683. Kui sügavale vajub elavhõbedas seatinast kera? (Seatina tihedus 11,5 ja elavhõbedal 13,6.)

684. Leia ellipsi $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala.

685. Leia ellipsi $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala.

686. Leia lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa, kui esimene liige on 5 ja tegur on $-\frac{2}{5}$.

687. Leia lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni esimene liige, kui summa on 2 ja tegur on $\frac{1}{2}$.

688. Leia lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni tegur, kui summa on $\frac{10}{7}$ ja esimene liige on $\frac{5}{2}$.

689. Leia lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa, kui kolmas liige on $\frac{4}{25}$ ja tegur on $\frac{1}{5}$.

690. Leia piirväärtus.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{1-2n}$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-2n}{3+n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-n^2}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3n}{1-3n}$

691. Leia piirväärtus.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{2x-x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x}$ 5) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{6-x-x^2}{3-2x-x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x^2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{6x-3x^2}{6-5x-x^2}$

692. Leia funktsiooni tuletis antud kohtadel.

1) $f(x)=\sqrt{4x+5}$, $x\in\{1;\ 5;\ 11\}$

2) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$, $x\in\{0;\ 3;\ 5\}$

3) $f(x)=\sin\frac{3}{2}x$, $x\in\left\{0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right\}$

4) $f(x)=\cos^2 x$, $x\in\left\{0;\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{6}\right\}$

5) $f(x)=\log 2x$, $x\in\left\{\frac{1}{2};\ 1;\ 10\right\}$

6) $f(x)=\ln^2 x$, $x\in\{1;\ e;\ e^2\}$

693. Kontrolli võrduse kehtivust.

1) $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$

2) $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

3) $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}=\arcsin\frac{77}{85}$

4) $2\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{4}=\arctan\frac{32}{43}$

5) $\arccos\frac{9}{\sqrt{82}}-\arcsin\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{\pi}{4}$

6) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\arctan\frac{\sqrt{7}}{3}=\pi$

694. Lahenda võrrand.

1) $9\cdot 3^{\log_x^2 4}-\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x\frac{1}{8}}=0$

2) $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\frac{2}{\log_4 x}$

3) $\log_3 x+\log_3^2 x+\log_3^3 x+\ldots=1$

4) $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$

5) $\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3)=6$

6) $\log_a(1-\sqrt{1+x})=\log_{a^2}(3-\sqrt{1+x})$

695. Olgu $u=27$ ja $v=81$. Leia

1) $u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{4}}$;
3) $u^{\frac{1}{3}}+v^{\frac{1}{4}}$;
2) $u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{4}}$;
4) $u^{\frac{2}{3}}:v^{\frac{1}{2}}$.

696. Olgu $p=4$ ja $q=9$. Leia

1) $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})^2$; 3) $(p^{\frac{1}{2}}\cdot q^{\frac{1}{2}})^2$; 4) $\left[\frac{p^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}}\right]^3$;

5) $\left(\frac{2p^2}{3q^2}\right)^0$.

697. Olgu $I=\frac{D^{\frac{2}{3}}v^3}{220}$.

Leia I, kui $D=1728$ ja $v=10$.

698. Leia lahendite hulk.

1) $x\sqrt{2} > x + \sqrt{2}$

2) $x(\sqrt{2}-1) < x(\sqrt{2}+1)$

3) $2x-3 < 6\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)$

4) $\frac{|3x-4|}{5} < 1$

5) $\left|\frac{4-3x}{5} + 1\right| > 0$

6) $\left|\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right| < \frac{1}{10}$

7) $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < 0{,}01$

8) $|2x-3| < |x|$

9) $|2x+3| < |x-3|$

10) $|2x-3| > |x-3|$

699. Leia süsteemi lahendite hulk.

1) $\begin{cases} x > 2 \\ 2x+y < 9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y > x \\ 2x+y = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x| < 2 \\ 2x+y < 9 \end{cases}$

4) $\begin{cases} |y| > |x| \\ y < x-4 \end{cases}$

700. Esita hulk elementide kaudu.

1) $\{x \mid x^2 + 6ax = 16a^2\}$

2) $\{x \mid 12a^2x^2 + 4ax = 1\}$

3) $\{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$

4) $\{x \mid ax^2 - 2(a-1)x + a = 0\}$

701. Missugused mõõtmed peaksid olema 1-rublasel hõberahal, kui tahaksime, et ta võimalikult vähe kuluks (s. t. et tema pind oleks antud kaalu puhul minimaalne)?

702. On antud jooned $y = x$ ja $y = \sqrt{x}$. Kumbki moodustab pöörlemisel ümber x-telje pöördpinna. Leia nende pöördpindadega piiratud keha ruumala.

703. Leia integreerimise teel pindala, mida piiravad jooned:

1) $y=x^2$ ja $y=-x^2+2$;

2) $y=(2+x)(3-x)$ ja $y=-(2+x)$.

704. Leia integreerimise teel antud joone ja x-teljega piiratud kujundi pindala.

1) $y=(x-3)(x-7)$ 3) $y=x^2-7x+10$

2) $y=(x-2)(x+3)$ 4) $y=x(x-4)^2$

705. Leia kõvera puutuja etteantud kohal.

1) $y=(3x-1)^2$, kui $x=\frac{1}{3}$

2) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, kui $x=0$

3) $y=\tan^2 x$, kui $x=\frac{\pi}{4}$

4) $y=\sin 1{,}25x$, kui $x=4\pi$

706. Kui suur on tõenäosus, et

1) ühe täringuga visates saame 6 silma;
2) kahe täringuga visates saame 12 silma;
3) ühe täringuga visates saame mitte rohkem kui 3 silma;
4) kahe täringuga visates saame mitte rohkem kui 3 silma?

707. Kui suur on tõenäosus võita loteriil, kus on 10 000 piletit ja 10; 100; 1000 võitu?

708. 1) Tasandid α ja β on paralleelsed. Vaatle sirglõike, mille üks otspunkt on tasandil α ja teine tasandil β. Tõesta, et kõigi selliste sirglõikude keskpunktid on komplanaarsed.

2) Rööptahuka $A \ldots D_1$ servade AA_1 ja C_1D_1 keskpunktid on vastavalt P ja Q. Tahu BCC_1B_1 diagonaalide lõikepunkt on R. Tee joonis ja viiruta sellel tasandi PQR lõige rööptahukaga.

709. Tetraeedri $ABCD$ servade AB ja BC keskpunktid on vastavalt M ja N. Tahu ACD raskuskese on O. Tee joonis ja viiruta sellel tasandi MNO lõige tetraeedriga.

710. Tõesta, et iga kahe kiivsirge juures leidub üks ja ainult üks sirge, mis lõikab neid kiivsirgeid ja on nendega risti.

711. Tõesta vektorite abil, et rööpküliku diagonaalide ruutude summa võrdub rööpküliku nelja külje ruutude summaga.

712. Tõesta koosinusteoreem vektorite abil.

713. Tetraeedri $ABCD$ serva CD keskpunkt on K ning tahkude ABC ja ACD raskuskeskmed on vastavalt L ja M. Määra vektorite $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{LM}$ ja $\overrightarrow{MN}$ koordinaadid baasi suhtes, mis koosneb vektoritest $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{DB}$.

714. Rööptahuka $A \ldots D_1$ tahkude $ABCD$, AA_1D_1D, DCC_1D_1 ja BB_1C_1C diagonaalide lõikepunktid on vastavalt P, Q, R ja S. Määra vektorite $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RP}$ ja $\overrightarrow{PS}$ koordinaadid baasi suhtes, mis koosneb vektoritest $\vec{a}=\overrightarrow{C_1C}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{D_1A_1}$. Kontrollimiseks arvuta vektorite $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RP}$ ja $\overrightarrow{PS}$ summa koordinaadid kahel erineval viisil.

715. Korrapärase kuusnurkse püramiidi $A \ldots G$ tipp on G, põhja keskpunkt O ja tahu raskuskese M. Määra vektorite $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{OM}$ ja $\overrightarrow{MD}$ koordinaadid baasi suhtes, mis koosneb vektoritest $\vec{a}=\overrightarrow{BF}$, $\vec{b}=\overrightarrow{SE}$ ja $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$.

716. Lahenda võrratus.

1) $\log_5(2x-1) > \log_5(3x+2)$

2) $\log_{x-1} 4 > 1$

3) $\log_{x+1}(x-2) < 0$

4) $\log_{0,25}(x-1)+\log_{0,25}(x+1) > \log_{0,25} 3$

5) $\log_4(2-\sqrt{x+3}) < 2\cos\frac{5\pi}{3}$

6) $\log_4\frac{2x-1}{x+1} < \cos\frac{2\pi}{3}$

717. Rong sõidab kirde suunas, seejärel ringjoone kaart mööda 310 meetrit ja edasi suunas, mis moodustab põhja suunaga 85° nurga. Leia ringjoone raadius, kui ringjoone raadius on lähtekohas.

718. Lääne suunas sõitev rong jätkab teed 310 meetrit mööda ringjoone kaart lõuna poole, edasi kulgeb tee jälle otse. Missuguses suunas jätkub sõit, kui ringjoone raadius on 600 meetrit?

719. Kaks ringjoont raadiustega 5 cm ja 7 cm lõikuvad. Leia
1) ühise kõõlu pikkus,
2) ühiste punktide vaheliste kaarte pikkused,
kui keskpunktidevaheline kaugus on 8 cm.

720. Maja pikkus on 136 meetrit. Et valmistada sellest majast fotot vaatenurgas 37°, kaugeneb pildistaja maja ühe nurga juurest suunas, mis moodustab maja esiseinaga nurga 127°. Kui kaugele majast peab pildistaja taganema?

721. Mööda sirget teed PQX kõndiv mees näeb teest vasakul kaht posti A ja B. Kohal P on $\angle XPA=25°$ ja $\angle XPB=40°$. Liikudes edasi 1 km võrra punkti Q, näeb ta poste ühel sirgel, nii et $\angle XQA=63°$. Leia postidevaheline kaugus.

722. 400 m kõrguselt mäelt paistab all tasandikul kaks maja A ja B. Maja A suund jääb lõunasuunast 18° lääne poole ja moodustab horisontaalsihiga nurga 27°36′. Maja B jääb lõunasuunast 32° ida poole ja moodustab horisontaalsihiga nurga 23°42′. Leia majadevaheline kaugus.

723. Arvuta.

1) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) $\sin\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

3) $\tan\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4) $\tan\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

5) $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

6) $\sin\left[\arctan\left(-1\right)\right]$

724. Kontrolli võrduse kehtivust.

1) $\arcsin\frac{2}{3}=\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$

2) $\arcsin\frac{4}{5}=\arctan\frac{4}{3}$

3) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)=-\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4) $\arctan 2=\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$

725. Arvuta

1) $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$

2) $\cos\left(2\arccos\frac{2}{3}\right)$

3) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4) $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+\arcsin\frac{2}{5}\right]$

5) $\tan\left[\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)+\arcsin\frac{2}{3}\right]$

6) $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{3}{4}\right)$

726. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid.

1) $\begin{cases} 3^x+5^y=\frac{16}{5} \\ 3^{x-1}\cdot 5^{y+1}=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{x+1}+2^{y+2}=17 \\ 2\cdot 3^{x-1}-2^{y-2}=-\frac{7}{9} \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^{x+y}=81 \\ 0{,}5^{2xy}=\frac{1}{16} \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4^{\sqrt{x}}=0{,}5^{2-y} \\ 3^{\log_9 x}=\frac{4}{3} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^{y^2-15y+56}=1 \\ y-x=5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^{2y-1}=5 \\ x^{y+2}=3 \end{cases}$

727. Esita järgmised relatsioonid graafiliselt.

1) $\{(x;\ y)\,|\,y=-2x+1 \wedge y=x+2\}$

2) $\{(x;\ y)\,|\,x+y=3 \wedge x+y=-3\}$

3) $\{(x;\ y)\,|\,y<x+4 \wedge y>6+2x\}$.

4) $\{(x;\ y)\,|\,2x-y<4 \wedge 3x+2y>4\}$

728. Leia xy-tasapinnal etteantud tingimustele vastav punktide hulk.

1) $\{(x;\ y)\,|\,x\leqslant 0 \wedge y\geqslant 0;\quad y\leqslant x+2 \wedge 5x+y\geqslant -5\}$

2) $\{(x;\ y)\,|\,x\geqslant 0 \wedge y\geqslant 0;\quad x+2y-4\leqslant 0 \wedge 3x+2y-6\leqslant 0\}$

729. On antud hulgad

$H=\{(x;\ y)|\ |x|\leqslant 2\}$ ja $G=\{(x;\ y)|\ |y|\geqslant 2\}$.

Joonesta hulgad $H\cap G$ ja $H\cup G$.

730. Joonesta funktsioonide graafikud.

1) $y=2\sin 2x$

2) $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

3) $y=3\sin(2x+3)$

4) $y=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

731. Leia funktsiooni määramispiirkond.

1) $y=\frac{5x-1}{1-3x}$

2) $y=\tan 2x$

3) $y=\log(2x^2-3x+1)$

4) $y=\ln(2-x-x^2)$

732. Leia funktisooni määramispiirkond.

1) $y=\sqrt{\frac{3x+1}{3-x}}$

2) $y=\log\frac{3-x}{x-5}$

3) $y=\frac{3}{\sqrt{x^2-3x-2}}$

4) $y=\log\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$

733. Keha liigub sirgjooneliselt kiirusega $v=\cos 2t$. Leia keha liikumise võrrand tingimusel, et keha poolt ajamomendiks $t=\frac{\pi}{2}$ (sek) on läbitud 6 meetrit.

734. Lahendada graafiliselt lineaarplaneerimise ülesanded.

1) $x+y\leqslant 2$
$x+y\geqslant 1$
$x\geqslant 0$
$y\geqslant 0$
$z=2x+3y$ (max)

2) $x-y\leqslant 1$
$x+y\geqslant 2$
$x-2y\leqslant 0$
$x\geqslant 0$
$y\geqslant 0$
$z=x-2y$ (min)

735. Antud on punktid $A(5;\ -3;\ 5)$, $B(1;\ 7;\ 11)$, $C(-4;\ 9;\ 8)$ ja $D(-6;\ -7;\ 10)$. Kas lause $D\in ABC$ on tõene?

736. Kas punktid $K(1;\ 1;\ 5)$, $L(-3;\ 8;\ -6)$, $M(-2;\ 4;\ -1)$ ja $N(2;\ -3;\ 10)$ on rööpküliku tipud?

737. Punktid $A(3;\ -4;\ 7)$, $B(-5;\ 3;\ -2)$ ja $C(1;\ 2;\ -3)$ on rööpküliku tipud. Leia tipu B vastastipp D.

738. Punktid $A(2; -3; -5)$ ja $B(-1; 3; 2)$ on rööpküliku tipud ja $E(4; -1; 7)$ on rööpküliku diagonaalide lõikepunkt. Leia rööpküliku kaks ülejäänud tippu.

739. Arvuta kolmnurga pindala, kui kolmnurga tipud on $A(2; 0; -1)$, $B(-3; 2; 2)$, $C(4; 1; -2)$.

740. Arvuta kolmnurga sisenurgad, kui kolmnurga tipud on $P(1; 2; 1)$, $Q(7; 4; -2)$ ja $R(3; -1; 7)$.

741. Kuubi tippu on rakendatud kolm jõudu, mille suurused on 1 N, 2 N ja 3 N. Jõud on suunatud sellest tipust lähtuvate tahkude diagonaale mööda. Leia nende jõudude resultantjõud.

742. Tetraeedri tipud on $A(2; 1; 5)$, $B(4; 0; 8)$, $C(6; -2; 6)$ ja $D(5; 0; 3)$. Arvuta ruumala ja tipust D lähtuv kõrgus.

743. Kas vektorid $\vec{p}=(1; 6; 5)$, $\vec{q}=(3; -2; 4)$ ja $\vec{r}=(7; -18; 2)$ on komplanaarsed?

744. Antud on kaks vektorit $\overrightarrow{ST}=(2; 1; 2)$ ja $\overrightarrow{TU}=(3; 2; 6)$. Arvuta kolmnurga STU sisenurgad ja pindala.

745. Tetraeedri servad on $K(0; 0; 0)$, $L(-1; 2; -3)$, $M(2; -1; 3)$ ja $N(1; 2; 1)$. Arvuta tetraeedri servade pikkused.

746. Kui keha liigub seaduse järgi $s=f(t)$, siis keha kiirus momendil t_0 on $f'(t_0)$. Leia keha kiirus ajamomendil $t=0$, kui

1) $s=v_0t+\frac{at^2}{2}$; 2) $s=10t-\frac{5t^2}{2}$.

747. Vertikaalselt üles visatud kivi lendab seaduse järgi $s=24t-16t^2$. Leia kivi algkiirus (kiirus ajamomendil $t=0$) ja kui kõrgele kivi lendab (s maksimaalne väärtus).

748. Horisondi suhtes kaldu üles visatud keha liigub seaduse järgi $s=\frac{v_0}{g}\sin 2\varphi$, kus v_0 on algkiirus, g raskuskiirendus ja φ liikumissuuna kaldenurk horisondi suhtes. Missuguse nurga korral on keha lennukaugus maksimaalne?

749. Keha kiirus on v. Leia keha poolt läbitud tee pikkus ajavahemikus $t=1$ kuni $t=3$, kui

1) $v=v_0+at$

2) $v=2+8t$

750. Keha liikumiskiirus on sõltuv ajast. Leia keha poolt 4 tunni jooksul läbitud tee pikkus, kui

1) $v=4t-t^2$;

2) $v=\frac{t}{4}+\frac{t^2}{2}$.

751. Risttahuka põhiservad on 36 cm ja 15 cm. Risttahuka diagonaal moodustab põhitahuga 38°-se nurga. Leia risttahuka külgpindala.

752. Puust koonus, kõrgusega 45 cm, ujub vees nii, et tema tipp on veepinnast 27 cm kõrgemal. Leia koonuse tihedus.

753. Poiss ehitas ruudukujulise põhjaga kinnist risttahukat. Ta vahetas kogemata ära põhiserva ja kõrguse mõõtmed, seetõttu kulus risttahuka ehitamiseks 9600 cm^2 materjali enam ja ruumala suurenes kahekordseks. Missugused pidid olema risttahuka mõõtmed?

754. Korrapärase nelinurkse püramiidi apoteem on 15 cm ja külgservad moodustavad põhjaga nurga 70°. Leia püramiidi ruumala.

755. 918,4 grammist tinast valatakse ühesuguse servapikkusega tetraeeder. Kui pikk on see serv, kui tina tihedus on $11{,}4\frac{g}{cm^3}$?

756. Korrapärane kuusnurkne marmorsammas $\left(\text{tihedus } 2{,}84\frac{g}{cm^3}\right)$ pikkusega 1,85 m lihvitakse silindrikujuliseks. Leia marmorsamba pikkus, kui sammas pärast lihvimist kaalub 215 kgf.

757. Puurauk läbimõõduga 16 cm on vett täis jooksnud. Pump võimsusega 4500 liitrit tunnis peab 20 minutit töötama, et seda vett välja pumbata. Kui sügav on puurauk?

758. Kolmnurga külg $c=25$ cm ja tema lähisnurgad $\alpha=60°20'$ ja $\beta=42°10'$. Kolmnurk pöörleb ümber külje c. Arvuta pöördkeha pindala ja ruumala.

759. Tüvikoonuse külgpindala on 100 m^2 ja põhjade raadiuste summa 5 m. Leia tüvikoonuse moodustaja ja ruumala, kui tüvikoonuse kõrgus on 4 m.

760. Ringi sektor, mille raadius on r ja kesknurk 60°, pöörleb

ümber sümmeetriatelje. Kui suur on pöördkeha ruumala? Leia pöördkeha ja kera, mille osaks on see pöördkeha, ruumalade suhe.

761. Võrdle järgmiste taevakehade pindala, ruumala ja massi, kui vaatleme neid taevakehasid keradena, mille raadiused ja tihedused on antud:

Maa: $r=6370$ km, tihedus $5{,}6\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$,

Kuu: $r=1738$ km, tihedus $3{,}3\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$,

Päike: $r=695\,300$ km, tihedus $1{,}4\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

762. Lahenda kolmnurk, kui on antud:

1) $a=15$ cm $\quad h_a=11$ cm $\quad$ ja $\alpha=67°24'$,

2) $b=38{,}5$ cm $\quad c=33{,}7$ cm $\quad$ ja $h_c=35{,}2$ cm,

3) $a=25$ cm $\quad b=17$ cm $\quad$ ja $\alpha=118°43'$.

763. Tõesta samasused.

1) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta$

2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\cos^2\alpha+\cos^2(60°+\alpha)+\cos^2(60°-\alpha)=\dfrac{3}{2}$

4) $\tan\alpha\cdot\tan\beta+\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)}=1$

764. Leia muutuja x väärtuste hulk, mille puhul

1) $2^x>x^2$, 2) $2^x<x^2$, 3) $2^x=x^2$.

765. Koonda

1) $\frac{1}{2}u^2-\frac{2}{3}v^2+\frac{5}{6}u^2-\frac{2}{4}v^2$

2) $0{,}85a^{2n}-1{,}73b^{2n}+3{,}52c^{2n}+7{,}88a^{2n}-b^{2n}+0{,}12c^{2n}$

3) $5(a+b)^{m+n}-6(a+b)^{m-n}-3(a+b)^{m+n}+7(a+b)^{m-n}$

766. Lihtsusta.

1) $\left(\frac{9x^2-6x+1}{4x^2+4x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

2) $\frac{(x^4-y^4)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3) $\left(\frac{x^3y+x^3z}{24y^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

4) $a^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot a^{\frac{3}{4}}$

5) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$

6) $(-12)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{144}$

767. Arvuta.

1) $\left(2{,}75+5\frac{2}{3}-1\frac{5}{6}\right):19{,}75+\left(4{,}5-2\frac{5}{6}+3{,}75\right):3{,}25$

2) $\left(1\frac{5}{12}+2{,}75-3\frac{5}{6}\right)\cdot 3{,}6-\left(8{,}4-7\frac{2}{15}+1\frac{2}{3}\right):14\frac{2}{3}$

3) $6\frac{3}{8}:\left(4\frac{1}{6}-2\frac{3}{4}\right)+\left(51\frac{1}{2}-5\frac{1}{8}\right):3\frac{1}{2}$

4) $8\frac{4}{5}:\left(7\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}\right):6\frac{5}{8}+\left(4\frac{1}{6}-2\frac{3}{4}\right):5\frac{2}{3}$

768. Arvuta.

1) $\dfrac{\frac{1}{2}:\frac{1}{100}-24\frac{1}{4}}{1\frac{3}{5}\cdot 12\frac{7}{8}}-\dfrac{\frac{1}{100}\cdot 43\frac{3}{4}-\frac{1}{16}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}}$

2) $\dfrac{4\frac{7}{8}\cdot 4\frac{4}{5}}{5\frac{1}{5}+6\frac{1}{2}}+\dfrac{5\frac{5}{8}:3\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}-1\frac{3}{10}}$

769. Leia arv, millest 40% võrdub avaldise $14{,}7-6{,}3:2\frac{1}{3}$ väärtusega.

770. Leia 60% avaldise $115{,}8+0{,}5\cdot 8{,}4$ väärtusest.

771. Kauba hinda tõsteti esialgu 10% võrra ja mõne aja möödudes vähendati 10% võrra. Mitu protsenti oli nüüd kauba hind suurenenud või vähenenud esialgse hinna suhtes?

772. Arvuta logaritmide tabelite abil ja kontrolli tulemust arvutuslükatil.

1) $\dfrac{3{,}87 \cdot 554{,}2 \cdot 0{,}8741}{0{,}07529 \cdot 230000}$

2) $\dfrac{54{,}18^2 \cdot 6{,}874 \cdot 0{,}942^3}{31{,}09 \cdot 3{,}876^3}$

3) $\sqrt[4]{28{,}75 \sqrt[3]{\dfrac{765{,}9}{8645}}}$

4) $\sqrt[3]{58{,}06 - \sqrt{0{,}009898}}$

5) $\left(\dfrac{2578}{568300}\right)^{-1{,}5} - \left(\dfrac{0{,}9487}{0{,}0095}\right)^{1{,}5}$

6) $\left(\dfrac{0{,}2389}{4{,}597}\right)^2 + \sqrt{\left(\dfrac{0{,}0197}{0{,}385}\right)^{\frac{3}{2}}}$

773. Kolm arvu, mille summa on 39, moodustavad geomeetrilise progressiooni. Kui suurimat arvu vähendada 9 võrra, saame aritmeetilise progressiooni. Leia need kolm arvu.

774. Esita hariliku murruna.

1) 0,28157157... 2) 0,8174242... 3) 0,142857142857...

775. Aritmeetilise progressiooni 2, 14, 26 jne. iga kahe järjestikuse liikme vahele tuleb paigutada kaheksa arvu nii, et saaksime jälle aritmeetilise progressiooni. Esita selle progressiooni esimesed 10 liiget.

776. Mitu meetrit läbib vabalt langev keha õhutühjas ruumis 12 sekundiga? Mitme sekundiga langeb keha 490 m?

777. Lahenda võrratused.

1) $\dfrac{x-4}{x+3} > 1$

2) $\dfrac{2x}{3-4x} < 2$

3) $\dfrac{-x-2}{3-2x} + 1 < 0$

4) $\dfrac{2+x}{x-1} + x > 0$

778. Tõesta võrratus.

1) $k + \dfrac{1}{k} \geqslant 2,\ k > 0$

2) $\dfrac{2a}{1+a^2} \leqslant 1$

3) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2,\ a > 0,\ b > 0$

4) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4,\ a > 0,\ b > 0$

779. Leia järgmised piirväärtused.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-3}{7x+2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+7}{x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-x-15}$

6) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{4x^2-1}$

780. Leia järgmiste kõverate ekstreemumpunktid.

1) $y=2x^4+32x^2$

2) $y=\dfrac{x^2}{2}-10x^3$

3) $y=x^4+2x^3-4x^2$

4) $y=x^4+6\dfrac{2}{3}x^3-4x^2$

781. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

1) $y=(x^5+x^3+x)^2$

2) $y=(3-2x)^5$

3) $y=(x^3-3x^2+2x)^3$

4) $y=(2x^4+3x^3-2x^2+5x-6)^4$

782. Uuri funktsioone.

1) $y=4x-3$

2) $y=2-3x$

3) $y=3x^2-2x-1$

4) $y=3-2x-x^2$

783. Kasutades kuupparabooli $y=x^3$ graafikut, lahenda järgmised võrrandid graafiliselt.

1) $x^3=10-x$

2) $x^3+x=2$

3) $x^3-2x=0$

4) $x^3-x-1=0$

5) $x^3-5x+3=0$

6) $x^3-3x-2=0$

784. Parabool $y=0{,}4x^2$ pöörleb ümber x-telje. Leia pöördkeha ruumala, mille eraldab pöördparaboolist tasapind, mis on risti x-teljega ja lõikab teda kohal $x=3$.

785. Arvuta järgmised integraalid.

1) $\int\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$

2) $\int(x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x+1)\,dx$

3) $\int\dfrac{\sin x}{2}\,dx$

4) $\int(x-\sin x)\,dx$

5) $\int\left(x-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

6) $\int\dfrac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}\,dx$

786. Avalda kuubi ruumala
1) kuubi serva funktsioonina,
2) kuubi täispindala funktsioonina.
Esita need funktsioonid graafiliselt.

787. Kuidas sõltub sirge $y=mx+1$ asend koordinaatteljestikus m väärtusest?
Joonesta need sirged, kui $m=-0{,}5$; 1; 0,5 ja 2.

788. Kuidas sõltub sirge $y=-2x+b$ asend koordinaatteljestikus b väärtusest?
Joonesta need sirged, kui $b=-3$; 0; 1,5; 5.

789. Leia võrrand sirgele, mis on paralleelne sirgega $y=4x-7$ ja läbib sirgete $2x+y=3$ ja $4x-7y=-3$ lõikepunkti.

790. Leia võrrand sirgele, mis läbib punkti $P\ (-1;\ 3)$ ning sirgete $y=4x+3$ ja $y=2x+9$ lõikepunkti.

791. On antud punktid $A(3;\ 2)$, $N(5;\ 6)$, $T(4;\ 5)$, $S(2;\ 1)$. Näita, et punktidega $ANTS$ määratud nelinurk on rööpkülik.

792. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$
2) $c^2x^2+(ac-bc)x-ab=0$

793. Lahenda järgmised võrratused.

1) $|2x+1|<3,\ x\in R$
2) $|2-3y|<6,\ y\in Z$
3) $|3x-1|>8,\ x\in R$
4) $\left|\frac{1}{2}y+2\right|>3,\ y\in Z$

794. Leia järgmiste võrrandite lahendite hulk.

1) $|x+1|=5$
2) $|x+2|=4$
3) $|x+3|=11$
4) $|2x-1|=13$
5) $|2x-3|=|x+6|$
6) $|2x-3|=|x-3|$

795. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}-1=abc-x(a+b+c)$

2) $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab}$

796. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$

2) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=13-x$

797. Trapetsikujulise ristlõikega kanali laius on ülalt 4,5 m, alt 1,5 m ja sügavus 1,5 m. Veetase kanalis on 1 m ja voolu kiirus $30\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Arvuta vee mass, mis voolab läbi kanali ristlõike 1 tunni jooksul.

798. 9 cm pikkuse servaga kuupi lõigatakse iga tema tipu juurest tasapinnaga nii, et see lõikab külgservi 3 cm kaugusel tipust. Joonesta saadud keha ja arvuta tema ruumala.
Missuguse keha me saame, kui tasapinnad lõikavad servi 4,5 cm kaugusel tipust? Kui suur on nüüd saadud keha ruumala?

799. Millega võrdub tetraeedri ja kuubi täispindala suhe, kui nende külgservad on võrdsed?

800. Millega võrdub tetraeedri ja kuubi ruumalade suhe, kui nende külgservad on võrdsed?

801. Esita silindri kõrgus, külgpindala ja ruumala põhja läbimõõdu funktsioonina ja joonesta nende funktsioonide graafikud, kui $h=d$.

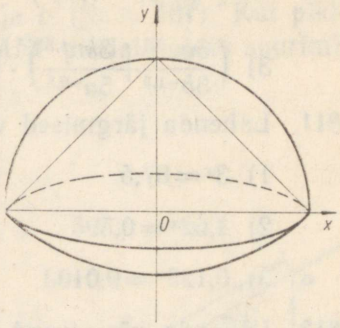
802. Kolmnurga küljed on: $a=48$ cm, $b=36$ cm ja $c=28$ cm. Kolmnurk pöörleb ümber külje a. Leia pöördkeha pindala ja ruumala.

803. 20 cm pikkuse raadiusega ringist on välja lõigatud sektorid kesknurgaga
a) 45°; b) 60°; c) 120° ja d) 240°.
Need sektorid on koonuste külgpindadeks. Leia koonuste ruumala.

804. Koonuse telglõikeks on võrdkülgne kolmnurk.
1) Avalda moodustaja m ja kõrgus h põhja raadiuse r funktsioonina.
2) Avalda külgpindala S_k ja ruumala V põhja läbimõõdu d funktsioonina.
3) Joonesta vastavad graafikud.

805. Planetaarium koosneb silindrikujulisest ruumist ja selle peale ehitatud poolkerast, mille pinnale kujutatakse tähistaevas. Leia planetaariumi ruumala, kui silindrikujulise ruumi läbimõõt on 12 m ja kõrgus 5 m.

806. Leia
1) 1 m pikkuse raadiusega kera pindala ja ruumala,
2) 1 m^2-suuruse pindalaga kera raadius ja ruumala,
3) 1 m^3 suuruse ruumalaga kera raadius ja pindala.



Joon. 160.

807. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 6 cm. Kolmnurga ümber on joonestatud poolringjoon, mis läbib kolmnurga kõiki tippe. Selle poolringjoone vastu on joonestatud kaar, mille keskpunkt asetseb täisnurga tipus ja mille raadius on võrdne kaatetiga. Ringjoone kaarte poolt piiratud kujund pöörleb täisnurga tippu läbiva hüpotenuusi ristsirge ümber. Leia pöördkeha pindala ja ruumala (vt. joon. 160).

808. Kumb on suurem:
1) $\sqrt{4 \cdot 9}$ või $\sqrt{4+9}$?
2) $\sqrt{a^2-b^2}$ või $\sqrt{(a-b)^2}$?
3) $\sqrt{a^3+b^3}$ või $\sqrt{(a+b)^3}$?
4) $\sqrt{4x^2-12xy+9y^2}$ või $\sqrt{4x^2-9y^2}$?

Põhjenda!

809. Lihtsusta.
1) $\sqrt{9x+9}-\sqrt{x+1}+\sqrt{25x+25}$
2) $(3\sqrt{2}+5\sqrt{8}+9\sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$
3) $(\sqrt{3}+2\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$
4) $(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})$
5) $(\sqrt{6}+2\sqrt{2})^2$

810. Lihtsusta.
1) $\dfrac{m^{-\frac{3}{2}}n^4}{p^3q^{-2}} \cdot \dfrac{m^{-1}m^{-1,5}}{p^{-\frac{2}{3}}q^{-0,25}}$

2) $\left(\frac{3x^{-2}}{4y^{-3}}-\frac{4y^{-3}}{3x^{-2}}\right)^{-2}$

3) $\left(\frac{5a^{-0,5}}{3b^{-1,3}}+\frac{3b^{-1,3}}{5a^{-0,5}}\right)\cdot\left(\frac{5a^{-0,5}}{3b^{-1,3}}-\frac{3b^{-1,3}}{5a^{-0,5}}\right)$

811. Lahenda järgmised võrrandid arvutuslükati abil.

1) $3^x=87,5$
2) $4,62^x=0,595$
3) $0,125^x=0,0103$
4) $237^{x-1}=4,89$
5) $\sqrt[x]{578}=5,5$
6) $\sqrt[x-1]{67,5}=1,75$

812. Lahenda võrratused.

1) $x^2-36>0$
2) $x^2-5x<0$
3) $x^2+6x-7<0$
4) $-5x^2-18x-35>0$

813. Ringi, mille raadius on r, on joonestatud ruut, sellesse ruutu on joonestatud ring, sellesse jälle ruut, jne. Kui suur on kõikide ringide pindalade summa? Kui suur on kõikide ruutude pindalade summa?

814. Arvude 1 ja 7 vahele tuleb paigutada 6 arvu nii, et moodustuks kaheksaliikmeline geomeetriline progressioon. Leia need arvud. Leia sellele progressioonile vastav eksponentfunktsioon.

815. $1=1=1^2$
$1+3=4=2^2$
$1+3+5=9=3^2$ jne.

Näita, et toodud näidetest ilmnev seaduspärasus (sõnasta see!) on kehtiv iga naturaalarvu n puhul!

816. Lihtsusta.

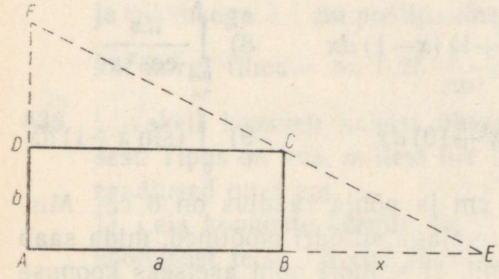
1) $\tan\alpha+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$
2) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\tan\alpha\cdot\cot\alpha$
3) $\cos^4\beta+\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta+\sin^2\beta$
4) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

817. Leia järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid.

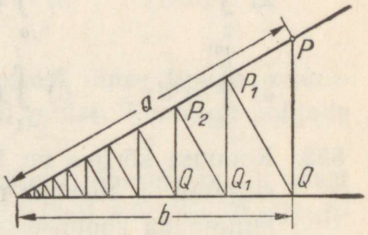
1) $y=\frac{3-4x}{2}$
2) $y=\frac{4x^2-1}{2}$

3) $y=\log(x+1)$ 4) $y=\log(x^2-3)$

818. Ristküliku $ABCD$ mõõtmed on a ja b (joon. 161). Kui pikk peab olema lõik x, et kolmnurga AEF pindala oleks suurim?



Joon. 161.



Joon. 162.

819. Lõik s tuleb jagada kaheks osaks nii, et silinder, mille raadiuseks ja kõrguseks need lõigud on, oleks suurima ruumalaga.

820. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $x^2-(a+b)x+ab=0$
2) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

821. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$
2) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-5}=\sqrt{2x+18}$

822. Kumb on suurem: kas 9^{99} või $(9^9)^9$?

823. Teravnurga ühel haaral on võetud punkt P, mille kaugus tipust on a. Punktist P on tõmmatud ristlõik teisele haarale. Saadud punktist Q, mis on tipust kaugusel b, on tõmmatud ristlõik esimesele haarale. Nii jätkates saame ühele haarale punktid P, P_1, P_2 jne. ja teisele haarale punktid Q, Q_1, Q_2 jne. Leia kõikide nende ristlõikude summa, s. t. $PQ+QP_1+P_1Q_1+\ldots$ (joon. 162).

824. Arvuta järgmised integraalid.

1) $\int_0^{10} dx$ 4) $\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}-1\right) dx$ 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

2) $\int_2^4 5x^3 dx$ 5) $\int_0^{10} (x+1)(x-1)\, dx$ 8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

3) $\int_{100}^{101} 5x^2 dx$ 6) $\int_{-1}^{1} (3x^2+10)\, dx$ 9) $\int_0^{2\pi} (\sin x+1)\, dx$

825. Koonuse kõrgus on 12 cm ja põhja raadius on 6 cm. Missugused on suurima ruumalaga silindri mõõtmed, mida saab kujundada koonusesse nii, et silindri põhi asetseks koonuse põhjal?

826. Koonuse kõrgus on 21 cm ja põhja raadius 7 cm. Missugused on koonusesse kujundatud suurima täispindalaga silindri mõõtmed?

827. Kolme 6 m pikkuse kepi abil ehitatakse korrapärase kolmnurkse püramiidi kujuline telk. Kui suur peab olema püramiidi kõrgus, et telgis oleks võimalikult palju õhku?

828. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga üks kaatet asetseb tasapinnal ja teine moodustab tasapinnaga nurga 45°. Kui suure nurga moodustab hüpotenuus selle tasapinnaga?

829. Võrdkülgse kolmnurga üks külg asetseb tasapinnal, mis moodustab kolmnurga tasapinnaga nurga 60°. Kui suure nurga moodustavad teised küljed selle tasapinnaga?

830. Kolmetahulise ruuminurga iga tasanurk on 60°. Kui suured on selle ruuminurga kahetahulised nurgad?

831. Püramiidi $SABC$ serval AB on antud punkt M, tahul SAB punkt N ja tahul SAC punkt P. Esita joonisel püramiidi lõige tasapinnaga MNP.

832. Kuubi serv on 10 cm. Kui kaugel asetseb kuubi mingi tipp selle vastastahu keskpunktist?

833. Võrdkülgse kolmnurga ristprojektsioon tasapinnal, mis läbib kolmnurga üht külge, on täisnurkne kolmnurk. Leia nurk võrdkülgse kolmnurga ja projektsioonipinna vahel.

834. Ruudu projektsioon tasapinnal, mis läbib ruudu üht tippu,

on romb, mille üks nurk on 140°. Leia ruudu ja projektsioonipinna vaheline nurk.

835. Mitu protsenti kuubi ruumalast täidab kuubisse kujundatud kera?

836. Mitu protsenti kera ruumalast täidab kerasse kujundatud kuup?

837. Kas on võimalik saata 1000 pudelikorki läbimõõduga 2,2 cm ja pikkusega 3,4 cm postipakina, mis kaalub vähem kui 5 kg, kui korgi tihedus on $0{,}25\frac{g}{cm^3}$?

838. Liivakell koosneb kahest ühesugusest ühise tipuga koonusest. Tipus on ava, millest liiv läbi voolab. Koonuste põhjade raadiused on 3 cm.
1) Leia koonuste kõrgus, kui 1 minuti jooksul voolab ühest koonusest teise 7,5 cm^3 liiva ja liivakell mõõdab 10-minutilist ajavahemikku.
2) Leia liiva seis viienda minuti kohal.

839. Tüvikoonusekujulise korstna kõrgus on 25 m. Korstna alumine sisemine läbimõõt on 1 m ja ümbermõõt 7,54 m, ülemine läbimõõt on 0,6 m, ümbermõõt 3,14 m. Leia korstna rõhumine alusmüürile, kui korstna tihedus on $2{,}2\frac{t}{m^3}$.

840. Kaevati ristkülikukujuline tiik mõõtmetega 60 m×80 m. Kalda kaldenurk on 45° ja tiigi sügavus 3 m. Leia tiigi ehitamisel väljakaevatud pinnase hulk, kui väljakaevamisel pinnase hulk suureneb 9% võrra.

841. Tüvipüramiidi ruumala on 74 cm^3, kõrgus 6 cm ja ühe põhja pindala 16 cm^2. Leia teise põhja pindala.

842. Nõguspeegel on segmendi pinnaks kerale raadiusega 10 cm. Segmendi kõrgus on 2 cm. Peegel kaetakse 0,1 mm paksuse hõbedakihiga. Leia hõbedakihi mass, kui hõbeda tihedus on $10{,}4\frac{g}{cm^3}$.

843. Leia kera ruumala, kui kera pindala on 1296 cm^2.

844. Leia kera pindala, kui kera ruumala on 4500 cm^3.

845. Lihtsusta.

1) $(49x^2+84xy+36y^2)^n:(7x+6y)^n$

2) $\dfrac{u^{2+n}v^x}{10y^3} : \dfrac{u^n v^{2+x}}{5y} \cdot 2v^{2+2y}$

3) $\dfrac{95x^6y^7z}{38x^2yz} + (2x^2y^3)^2 - \dfrac{2x^5x^8}{4z^2} : \dfrac{3xy^2}{4z^2}$

846. Võrdle avaldisi.

1) $(4a+2a)^{-3}$, $4a+2a^{-3}$ ja $4a+(2a)^{-3}$,

2) $(5x \cdot 2x)^{-2}$, $5x \cdot 2x^{-2}$ ja $5x \cdot (2x)^{-2}$,

3) $(25-16)^{\frac{1}{2}}$, $25^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{1}{2}}$ ja $25-16^{\frac{1}{2}}$.

847. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $\dfrac{2+2x}{9x^2-4} - \dfrac{x-2}{9x^2+12x+4} = \dfrac{x+4}{9x^2-4}$

2) $\dfrac{3+2x}{1+2x} - \dfrac{5+2x}{7+2x} = 1 - \dfrac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$

848. Võrdkülgse kolmnurga kõrgusele on ehitatud uus võrdkülgne kolmnurk, selle kõrgusele jällegi uus võrdkülgne kolmnurk jne. Leia kõikide nii konstrueeritud kolmnurkade pindalade summa, kui esimese kolmnurga külg on a.

849. Lahenda võrrandid.

1) $\sin 2x = \sin x$

2) $\cos 2x = \cos x$

3) $2 \sin x = \sin (45° - x)$

4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$

850. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

1) $y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$

2) $y = \log (3-4x)$

3) $y = \dfrac{2-x}{5-4x-x^2}$

4) $y = \dfrac{\log (3x-6)}{x-3}$

851. Leia järgmiste funktsioonide ekstreemumkohad.

1) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

2) $y = x(x^2+x+1)$

3) $y = (x-1)(x^2-1)$

4) $y = x^3+3x^2+3x-7$

5) $y = (x-a)^3+(x-b)^3$

6) $y = (x-a)(x-b)^2$

852. Leia järgmiste võrrandite lahendid, kasutades Newtoni võtet lahendite täpsustamiseks.

1) $x^3 - x = 33$ 2) $x^3 - x^2 = 10$ $x^3 - x^2 + x = 44$

853. Nelinurkne korrapärane püramiid on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga nii, et eraldub püramiid, mille ruumala on pool esialgse püramiidi ruumalast. Kui kõrgel põhjast on tehtud lõige?

854. Koonuse külgpinna laotuseks on ringi sektor. Avalda selle sektori kesknurk koonuse põhja raadiuse r ja moodustaja s suhte funktsioonina. Mis tähendus on suhtel $\frac{r}{s}$ koonuse telglõike puhul?

855. Missuguse nurga moodustavad kõverate $y=\sin x$ ja $y=\cos x$ puutujad x-teljega kohtadel

1) $x=0$, 2) $x=\frac{\pi}{4}$, 3) $x=\frac{\pi}{2}$, 4) $x=\pi$?

856. Parabool $y=0{,}4x^2$ pöörleb ümber y-telje. Leia pöördkeha ruumala, mille eraldab pöördparaboolist tasapind, mis on risti y-teljega ja lõikab teda kohal $y=3$. Võrdle saadud tulemust ülesande 784 vastusega.

857. Leia $f(x)$, kui

1) $\int f(x)\,dx=x+c$,
2) $\int f(x)\,dx=4x^3+c$,
3) $\int f(x)\,dx=9x^2+c$,
4) $\int f(x)\,dx=-\frac{1}{x}+c$,
5) $\int f(x)\,dx=x^2+c$,
6) $\int f(x)\,dx=x^{-5}+c$.

858. Leia kuubi täispindala, ruumala, diagonaal ja diagonaallõike pindala, kui kuubi serv on

1) 12 cm, 2) 1,5 m, 3) 14 dm.

859. Korrapärase üheksanurkse püramiidi põhiserv on 2 cm. Külgtahud moodustavad põhitahuga 65° nurga. Arvuta

1) püramiidi kõrgus ja külgserva pikkus,
2) püramiidi täispindala ja ruumala,
3) külgservade ja põhja vaheline nurk.

860. Oktaeedri serv on 5,3 cm. Arvuta oktaeedri pindala ja ruumala. Missugune kuju on oktaeedri diagonaallõikel ja kui suur on selle pindala?

861. Lahenda võrrandid.

1) $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$

2) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$

3) $\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$

862. Leia x, kui

1) $x = 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2}$;

2) $x = 100^{\frac{1}{2} - \log \sqrt[4]{4}}$;

3) $x = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

863. Lahenda võrrandid.

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

2) $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\log 4}{\log 8}$

864. Eeldades, et kella osutid liiguvad konstantse kiirusega, leia, mitu minutit pärast kella nelja osutid kattuvad.

865. Kaks keha liiguvad ringjoont mööda, esimene neist läbib täispöörde 5 sekundit kiiremini kui teine. Kui nad liiguvad ühes suunas, siis nad kohtuvad iga 100 sekundi pärast. Kui suure osa täispöördest läbib kumbki keha ühes sekundis?

866. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid.

1) $\begin{cases} x+y=20 \\ xy=64 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=9 \\ xy=90 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=625 \\ x+y=35 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=164 \\ x-y=2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2=208 \\ xy=96 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-y^2=55 \\ xy=24 \end{cases}$

867. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $4^{(3-x)(2-x)} = 1$

2) $10^{(5-x)(6-x)} = 100$

3) $2^{x+1} + 4^x = 80$

4) $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$

5) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$

868. Missugustel $a \in Q$ väärtustel on võrrandil

$$\frac{a}{x}=\frac{x-1}{x-a}$$

reaalsed lahendid?

869. Missugustel $a \in N$ väärtustel on võrrandil

$$x^2-2(a-5)x+a^2-1=0$$

reaalsed lahendid?

870. Missugustel $a \in R$ väärtustel on võrrandi

$$ax^2-x+a=0$$

lahendid

1) reaalsed ja erinevad,
2) reaalsed ja võrdsed,
3) imaginaarsed?

871. Missugustel $m \in R$ väärtustel on võrrandi

$$(m-5)x^2-4mx+m-2=0$$

lahendid

1) reaalsed ja erinevad,
2) reaalsed ja võrdsed,
3) imaginaarsed?

872. Lahenda järgmised võrratused.

1) $\frac{7x-5}{8x+3}>4$

2) $\frac{x^2+10x+16}{x-1}>10$

3) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}>1$

873. Mitmes liige arvujadas on 10, kui $a_n=2n^2-19n+34$?

874. Mitmendad arvujada liikmed on võrdsed, kui nende jadade üldliikmed avalduvad vastavalt valemitena

$a_n=5n^2-21n-236$ ja $b_n=2n^2-11n-83$?

875. Igal inimesel on 2 vanemat, 4 vanavanemat, 8 vanavana-

vanemat jne. Kui palju eelkäijaid oli ühel inimesel 1000 aasta jooksul, kui ühe aastasaja jooksul kasvab üles 3 põlvkonda?

876. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $3\cos 2x = 7\sin x$

2) $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2}\sin 2x$

3) $1 + \cos x + \sin x = 0$

4) $\cos 2x = \cos 6x$

5) $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$

877. Joonesta funktsiooni graafik.

1) $y = |x^2 - x - 6|$

2) $y = |-6x^2 + x + 1|$

3) $y = |\cos x|$

4) $y = |\sin x|$

878. Leia määramispiirkond.

1) $y = \frac{5}{6x^2 - x - 1}$

2) $y = \sqrt{1 - \cos x}$

3) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 12}$

4) $y = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$

879. Leia funktsiooni kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond.

1) $y = x^2 + 3x - 108$

2) $y = -x^3 + 3x + 4$

3) $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

4) $y = \sin 2x$

880. Leia piirväärtused.

1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

3) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{5x^2 + 12x + 4}$

881. Kasutades ligikaudset valemit avaldise $(1+x)^n$ väärtuse arvutamiseks, leia

1) $1{,}04^3$, 2) $1{,}03^6$, 3) $0{,}98^4$.

882. Lahenda võrratused.

1) $|1 + x| < 2$ 2) $|x + 4| \leqslant 3$ 3) $|-2x + 1| > 5$

883. Jalgrattur hilines väljumisega 30 km pikkusele distantsile 3 minutit. Ta sõitis aga kavandatud keskmisest kiirusest 1 kilomeetri võrra tunnis rohkem ja jõudis kohale täpselt ettenähtud ajal. Missuguse kiirusega oli jalgratturil sõit kavandatud?

884. Kohtade A ja B vaheline kaugus on 78 km. Kohast A väljub jalgrattur koha B suunas. 1 tund hiljem alustas teine jalgrattur sõitu kohast B koha A suunas kiirusega, mis oli esimese jalgratturi kiirusest 4 km võrra tunnis suurem. Jalgratturid kohtusid 36 km kaugusel kohast B. Mitu kilomeetrit läbis kumbki jalgrattur kuni kohtumiseni ja missuguse kiirusega?

885. Kaks jalakäijat väljusid samaaegselt kohtadest A ja B teineteisele vastu ja kohtusid 3 tunni 20 minuti pärast. Mitme tunniga läbib kumbki jalakäija A ja B vahelise maa, kui esimene neist jõudis kohta B 5 tundi hiljem kui teine kohta A?

886. Kaks töölist koos töötades lõpetavad töö 8 tunniga. Esimene neist üksi töötades suudaks selle töö lõpetada 12 tunni võrra kiiremini kui teine üksi töötades. Mitme tunniga suudaks selle töö lõpetada kumbki tööline üksi töötades?

887. Bassein täitub kahe toru kaudu 6 tunniga. Kui aga kasutada ainult esimest toru, siis täitub bassein 5 tunni võrra kiiremini kui ainult teise toru kaudu. Mitme tunniga täituks bassein ainult esimest toru kasutades või ainult teist toru kasutades?

888. Abituriendid vahetasid omavahel enne koolist lahkumist fotosid. Mitu õpilast oli abituuriumis, kui vahetati 870 fotot?

889. Kahe arvu geomeetriline keskmine on 12 võrra suurem väiksemast arvust. Nende arvude aritmeetiline keskmine on aga 24 võrra väiksem suuremast arvust. Leida need arvud.

890. Ristkülikukujulisest papitükist valmistati lahtine karp nii, et nurkadest lõigati välja ruudud külje pikkusega 4 cm ja siis pöörati servad üles. Missugused olid papitüki mõõtmed, kui tema ümbermõõt oli 96 cm ja saadud karbi ruumala 768 cm^3?

891. Ristkülikukujulise spordiväljaku mõõtmed on a meetrit ja b

meetrit. Väljak ümbritsetakse kõikjal ühelaiuse teega. Leia selle tee laius, kui tee kogupindala on võrdne spordiväljaku pindalaga.

892. Kaks keha, mille vahemaa on d meetrit, liiguvad teineteisele vastu ja kohtuvad a sekundi pärast. Kui nad liiguksid mõlemad samas suunas sama kiirusega, siis kohtuksid nad b sekundi pärast. Leia kummagi keha liikumise kiirus.

893. Vabrikus on 35% töölistest naised, ülejäänud 252 töölist on mehed. Kui palju on vabrikus töölisi?

894. Kaupa müüdi 138 rubla ja 60 kopika eest ning saadi sealjuures 10% kasu. Kui suur on kauba omahind?

895. Kauba hind oli 65 rubla. Pärast hinnaalandust maksis see kaup 62 rubla. Mitme protsendi võrra alandati kauba hinda?

896. Antikvariaat ostis kaks eset 225 rubla eest ja sai müües 40% kasumit. Kui palju maksis kauplus kummagi eseme eest, kui ühe eest saadi kasumit 25% ja teise eest 50%?

897. Esita sirged 1) $y=3x-2$, 2) $3x-2y+1=0$, 3) $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$. Peegelda need sirged x-teljest ja y-teljest ning avalda saadud sirgete võrrandid.

898. Leia punkt, kus lõikuvad sirge $3x+6y=9$ ja tema peegeldus x-teljest.

899. Kolmnurga tippudeks on punkt $(3; -2)$, selle peegeldus x-teljest ja y-teljest. Leia selle kolmnurga ümbermõõt, nurgad ja pindala.

900. Nelinurk on määratud sirgega $3x+y-2=0$, selle peegeldusega x-teljest ja y-teljest ning viimase peegeldusega x-teljest. Leia selle nelinurga pindala ja diagonaalidevaheline nurk.

901. Leia joone $(x+2)^2+(y-2)^2=2$ peegeldus x-teljest ja selle teisenduse püsipunktid. Tee joonis!

902. Leia võrrand parabooli $y=x^2+1$ teisendusele sirgest $y=x$ ja leia nende joontega määratud pinnatüki pindala.

903. Trapetsi tippudeks on punkt $(2; 3)$, selle peegeldus sirgest $y=x$ ja nende punktide peegeldused x-teljest. Leia selle trapetsi ümbermõõt ja pindala.

904. Missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid, missugused paaritud funktsioonid?

1) $y=x^3$
2) $y=x-\sin x$
3) $y=x+x^2$
4) $y=x\cos x$
5) $y=x\sin x$
6) $y=\tan x$

905. Leia kolmnurgaga, mille tippudeks on punktid $A(1;\ -2)$, $B(3;\ 4)$ ja $C(-2;\ 1)$, alguspunkti suhtes homoteetne kolmnurk, kui homoteetsustegur on $-1{,}5$. Leia mõlema kolmnurga pindala.

906. Leia ringjoonega $(x+4)^2+(y-3)^2=25$ koordinaatide alguspunkti suhtes homoteetse joone võrrand, kui homoteetsustegur on -2.

907. Leia funktsiooni ektreemumpunktid vahemikus $-2\pi<x<2\pi$.

1) $y=2\sin x\cos x-5$
2) $y=4\sin 2x-3\cos 2x$
3) $y=\sin 6x-\sqrt{3}\cos 6x$

908. Leia funktsiooni tuletis.

1) $y=\log_2(5x^2+1)$
2) $y=\ln\sqrt{x}$
3) $y=\log_4\sqrt[4]{x^3}$
4) $y=5^{5x}$
5) $y=e^{-3x}$
6) $y=\ln(e^x+e^2)$

909. Kuidas muutub korrutis, kui
1) suurendada üht tegurit k korda,
2) suurendada kaht tegurit k^2 korda,
3) suurendada kõiki tegureid $\sqrt{k}$ korda (n tegurit),
4) suurendada üht tegurit m^2 korda ja vähendada teist tegurit n^2 korda?
5) üht tegurit suurendada a võrra (2 tegurit)?

910. Sõnasta järgmised seosed.

1) $(ab)^n=a^nb^n$
2) $(a^n)^m=a^{nm}$
3) $a^ma^n=a^{m+n}$

911. Mis on funktsioon, relatsioon? Too näiteid!

912. Missugust funktsiooni nimetatakse pidevaks kohal a? Too näiteid!

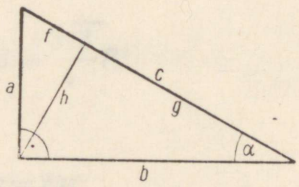
Suurus, mõiste	Valem, avaldis
1. Protsendid	
1. 1°. a ja b suhe protsentides	$\frac{a}{b}\cdot 100$
2°. a muut Δa protsentides	$\frac{\Delta a}{a}\cdot 100$
2. $p\%$ arvust a on m	$m=\frac{p}{100}\cdot a$
	$a=\frac{m}{p}\cdot 100$
2. Keskmised	
3. Arvude $a_1, a_2 \ldots, a_n$ aritmeetiline keskmine	$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$
4. Arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geomeetriline keskmine	$\sqrt[n]{a\cdot a_2\cdot \ldots \cdot a_n}$
3. Abivalemid	
5. Kahe arvu summa ja vahe ruut	$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
6. Kahe arvu ruutude vahe	$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$
7. Kahe arvu summa ja vahe kuup	$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
8. Kahe arvu kuupide summa ja vahe	$a^3\pm b^3=(a\pm b)\,(a^2\mp ab+b^2)$
4. Võrduse ja võrratuse omadused	
9. Võrduse omadused	1°. Kui $a=b$, siis $b=a$. 2°. Kui $a=b$ ja $b=c$, siis $a=c$. 3°. Kui $a=b$, siis $a+c=b+c$. 4°. Kui $a=b$, siis $ac=bc$.
10. Võrratuse omadused	1°. Kui $a>b$, siis $b<a$. 2°. Kui $a>b$ ja $b>c$, siis $a>c$. 3°. Kui $a>b$, siis $a+c>b+c$. 4°. Kui $a>b$ ja $c>d$, siis $a+c>b+d$. 5°. Kui $a>b$ ja $c<d$, siis $a-c>b-d$.

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
	6°. Kui $a>b$ ja $m>0$, siis $ma>mb$. 7°. Kui $a>b$ ja $n<0$, siis $na<nb$.
5. Ruutvõrrand	
11. Ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahend	$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$
12. Ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahend	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
13. Ruutvõrrandi $ax^2+2kx+c=0$ lahend	$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$
14. Ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahendite summa ja korrutis	$x_1+x_2=-p$ $x_1x_2=q$
6. Progressioonid	
15. Aritmeetilise progressiooni üldliige (a_n — n-es liige, a_1 — esimene liige, d — vahe, n — liikmete arv)	$a_n=a_1+(n-1)d$
16. Aritmeetilise progressiooni summa (S_n — n esimese liikme summa)	1°. $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ 2°. $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$
17. Geomeetrilise progressiooni üldliige (q — tegur)	$a_n=a_1q^{n-1}$
18. Geomeetrilise progressiooni summa	1°. $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ 2°. $S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$
19. Tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa	$S=\frac{a_1}{1-q}$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
7. Astmed ja juured	
20. Korrutise aste	$(a_1 a_2 \dots a_k)^n = a_1^n a_2^n \dots a_k^n$
21. Jagatise aste	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
22. Võrdsete alustega astmete korrutis	$a^m a^n = a^{m+n}$
23. Võrdsete alustega astmete jagatis	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
24. Astme aste	$(a^m)^n = a^{mn}$
25. Korrutise juur	$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_k} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_k}$
26. Jagatise juur	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
27. Juure aste	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
28. Juure juur	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
29. Aste astendajaga null	$a^0 = 1$
30. Negatiivse astendajaga aste	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
31. Murrulise astendajaga aste	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
8. Logaritmid	
32. Logaritm arvust N alusel a	$a^{\log_a N} = N$
33. Korrutise logaritm	$\log(ab) = \log a + \log b$
34. Jagatise logaritm	$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$
35. Astme logaritm	$\log a^m = m \log a$
36. Juure logaritm	$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}$

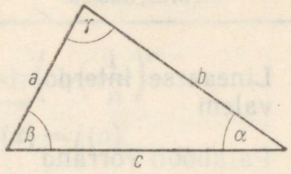
Suurus, mõiste	Valem, avaldis
9. Kombinatoorika	
37. Permutatsioonid m elemendist.	$P_m=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot m=m!$
38. Variatsioonid n elemendist m kaupa	$V_n^m=m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot[m-(n-1)]$
39. Kombinatsioonid n elemendist m kaupa	$C_n^m=\frac{V_n^m}{P_m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$
40. Newtoni binoom	$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$
10. Funktsioonid (x — argument, y — funktsioon, a, b, c — konstandid)	
41. Paarisfunktsioon	$f(-x)=f(x)$
42. Paaritu funktsioon	$f(-x)=-f(x)$
43. Lineaarfunktsioon	$y=ax+b\quad(a\neq0)$
44. Võrdeline sõltuvus	$y=ax\quad(a\neq0)$
45. Pöördvõrdeline sõltuvus	$y=\frac{a}{x}\quad(a\neq0,\ x\neq0)$
46. Ruutfunktsioon	$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq0)$
47. Astmefunktsioon	$y=ax^n$
48. Eksponentfunktsioon	$y=a^x\quad(a>0,\ a\neq1)$
49. Logaritmfunktsioon	$y=\log_a x\quad(a>0,\ a\neq1)$
11. Funktsiooni piirväärtus ja pidevus	
50. Funktsiooni piirväärtuse omadused	1°. $\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)$ 2°. $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$ 3°. $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, $(\lim g(x)\neq0)$
51. Arv π	$\pi=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}\right)$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
52. Arv e	$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
53. Funktsiooni $f(x)$ pidevus kohal a	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
12. Funktsiooni tuletis	
54. Funktsiooni $f(x)$ tuletis (Δx — argumendi muut)	$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
55. Elementaarfunktsioonide tuletised	vt. tabel lk. 193
56. Funktsiooni $y=f(x)$ kasvamise tunnus	$f'(x)>0$
57. Funktsiooni $y=f(x)$ kahanemise tunnus	$f'(x)<0$
58. Funktsiooni $y=f(x)$ ekstreemumkoha tarvilik tingimus	$f'(x)=0$
59. Funktsiooni $y=f(x)$ puutuja võrrand punktis $(x_1; y_1)$	$y-y_1=f'(x_1)\,(x-x_1)$
60. Funktsiooni $y=f(x)$ graafiku kumeruse tunnus	$f''(x)<0$
61. Funktsiooni $y=f(x)$ graafiku nõgususe tunnus	$f''(x)>0$
62. Käänupunkti olemasolu tarvilik tingimus	$f''(x)=0$
13. Joone võrrand	
(x, y — joone mistahes punkti koordinaadid; a, b, k, r — konstandid)	
63. Võrrand sirgjoonele, mis on määratud	
a) tõusuga k ja algordinaadiga b	$y=kx+b$
b) kahe punktiga $(x_1; y_1)$ ja $(x_2; y_2)$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
c) telglõikudega a ja b	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
64. Lineaarse interpolatsiooni valem	$\Delta y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \Delta x$
65. Parabooli võrrand	$y = ax^2 + bx + c$
66. Hüperbooli võrrand	$y = \frac{a}{x}$
67. Ellipsi võrrand	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
68. Ringjoone võrrand	1°. $x^2 + y^2 = r^2$, keskpunktiks $(0; 0)$ 2°. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, keskpunktiks $(a; b)$
14. Täisnurkne kolmnurk	
69. Meetrilised seosed	1°. $a^2 + b^2 = c^2$ 2°. $h^2 = fg$ 3°. $a^2 = fc$ 4°. $b^2 = gc$
70. Külgede ja nurkade vahelised seosed	1°. $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ 2°. $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ 3°. $\frac{a}{b} = \tan \alpha$ 4°. $\frac{a}{b} = \cot \alpha$
71. Pindala	$S = \frac{1}{2} ch$ $S = \frac{1}{2} ab$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis

15. Kolmnurk



72. Koosinuslause

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

73. Siinuslause (R — ümberringjoone raadius)

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

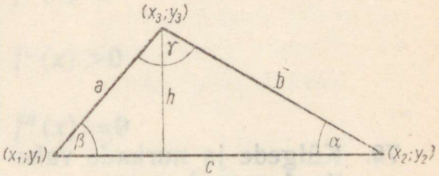
74. Teisi külgede ja nurkade vahelisi seoseid

1°. $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

2°. $$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

3°. $$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

75. Kolmnurga pindala (r — siseringjoone raadius)



1°. $$S=\frac{1}{2}hc$$

2°. $$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

3°. $$S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

4°. $$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
kus $$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
	5°. $S=pr$
	6°. $S=\frac{abc}{4R}$
	7°. $S=\frac{1}{2}\lvert (x_1-x_2)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_1-y_2)\rvert$
76. Võrdhaarne kolmnurk (a — alus, b — haar)	$S=\frac{a}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$
77. Võrdkülgne kolmnurk (a — külje pikkus, R — ümberjoonestatud ringjoone raadius)	$a=R\sqrt{3}$
	$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
	$S=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$
16. Ringjoon. Nelinurk	
78. a) Ringjoone pikkus (r — raadius, d — diameeter)	$c=2\pi r$ $c=\pi d$
b) Ringi pindala	$S=\pi r^2$ $S=\frac{\pi d^2}{4}$
79. a) Kesknurgale x radiaani vastava sektori pindala	$S=\frac{r^2x}{2}$
b) Kesknurgale x radiaani vastava kaare pikkus	$s=rx$
80. Ruudu pindala (a — külg)	$S=a^2$
81. Ristküliku pindala (a, b — lähisküljed)	$S=ab$
82. Rombi pindala (a — külg. α — üks rombi nurk; d_1, d_2 — diagonaalid)	1°. $S=a^2\sin\alpha$ 2°. $S=\frac{1}{2}d_1d_2$
83. Rööpküliku pindala (a, b — lähisküljed, α — nendevaheline nurk)	$S=ah=ab\sin\alpha$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
84. Rööpküliku diagonaalide omadus (d_1, d_2 — diagonaalid; a, b — lähisküljed)	$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$
85. Trapetsi pindala (a, b — alused, h — kõrgus)	$S=\frac{h}{2}(a+b)$
86. Nelinurga pindala (d_1, d_2 — diagonaalid, α — nurk nende vahel)	$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$
17. Trigonomeetria valemid	
87. Seosed radiaanmõõdu ja kraadimõõdu vahel	1 rad$=\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ17'45''$ $1^\circ=\frac{\pi}{180^\circ}\text{rad}\approx0{,}017453$ rad
88. Trigonomeetrilised põhiseosed	1°. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 2°. $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 3°. $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 4°. $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
89. Negatiivse nurga trigonomeetrilised funktsioonid	1°. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ 2°. $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ 3°. $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
90. Taandamisvalemid	1°. $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ 2°. $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ 3°. $\tan(180^\circ-\alpha=-\tan\alpha$ 4°. $\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ 5°. $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$ 6°. $\tan(180^\circ+\alpha)=\tan\alpha$ 7°. $\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$ 8°. $\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ 9°. $\tan(360^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$
91. Trigonomeetriliste funktsioonide perioodilisus	1°. $\sin(\alpha+k\cdot360^\circ)=\sin\alpha$ 2°. $\cos(\alpha+k\cdot360^\circ)=\cos\alpha$ 3°. $\tan(\alpha+k\cdot180^\circ)=\tan\alpha$
92. Nurkade summa ja vahe valemid	1°. $\sin(\alpha\pm\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
	2°. $\cos(\alpha\pm\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
	3°. $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$
93. Kahekordse nurga valemid	1°. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
	2°. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
	3°. $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
94. Poolnurga valemid	1°. $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
	2°. $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
	3°. $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
	4°. $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
	5°. $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
95. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe valemid	1°. $\sin\alpha+\sin\beta=$ $=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
	2°. $\sin\alpha-\sin\beta=$ $=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
	3°. $\cos\alpha+\cos\beta=$ $=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
	4°. $\cos\alpha-\cos\beta=$ $=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
96. Trigonomeetrilised põhivõrrandid	
1°. Võrrandi $\sin x=m$ üldlahend	$x=k\pi+(-1)^k\arcsin m$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
2°. Võrrandi $\cos x = m$ üldlahend	$x = 2k\pi \pm \arccos m$
3°. Võrrandi $\tan x = m$ üldlahend	$x = k\pi + \arctan m$
18. Geomeetrilised teisendused	
93. Peegeldus x-teljest	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
94. Peegeldus y-teljest	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$
95. Peegeldus sirgest $y = x$	$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
96. Peegeldus koordinaatide alguspunktist	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$
97. Lüke vektoriga $v = (v_1; v_2)$	$\begin{cases} x' = x + v_1 \\ y' = y + v_2 \end{cases}$
98. Pööre koordinaatide alguspunkti ümber nurga φ võrra	$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$
99. Homoteetsus keskpunktiga (0; 0) ja teguriga k	$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$
100. Tasapinna kokkusurumine x-telje poole suhtes m	$\begin{cases} x' = x \\ y' = my \end{cases}$
101. Tasapinna kokkusurumine y-telje poole suhtes	$\begin{cases} x' = mx \\ y' = y \end{cases}$
19. Aritmeetilised tehted	
102. Liitmise kommutatiivsus	$a + b = b + a$
103. Liitmise assotsiatiivsus	$(a + b) + c = a + (b + c)$
104. Korrutamise kommutatiivsus	$ab = ba$
105. Korrutamise assotsiatiivsus	$(ab)c = a(bc)$
106. Korrutamise distributiivsus liitmise suhtes	$a(b + c) = ab + ac$

Kehade pindala ja ruumala valemid.

(V — ruumala; S_k — külgpindala; S_p — põhja pindala; S_t — täispindala; h — kõrgus; n — põhja tippude arv; r — põhja raadius.)

Keha	Pindala	Ruumala
Prisma $\ddot{u}_n$ — ristlõike ümbermõõt l — külgserv	$S_k = \ddot{u}_n \cdot l$ $S_t = S_k + 2S_p$	$V = S_p h$
Korrapärane püramiid n — põhja tippude arv a_n — põhja serv m_n — apoteem k_n — põhja apoteem	$S_k = \frac{1}{2} n a_n m_n$ $S_t = \frac{1}{2} n a_n (m_n + k_n)$	$V = \frac{1}{3} S_p h$
Püramiid		$V = \frac{1}{3} S_p h$
Korrapärane tüvipüramiid a_n, b_n — põhjade servad k_n, l_n — põhjade apoteemid	$S_k = \frac{n a_n + n b_n}{2} \cdot m_n$ $S_t = \frac{n}{2} [a_n (m_n + k_n) + b_n (m_n + l_n)]$	$V = \frac{h}{3} (S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} S_{p_2}} + S_{p_2})$
Tüvipüramiid		$V = \frac{h}{3} (S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} S_{p_2}} + S_{p_2})$
Silinder	$S_k = 2\pi r h$ $S_t = 2\pi r (r + h)$	$V = \pi r^2 h$
Koonus (m — moodustaja)	$S_k = \pi r m$ $S_t = \pi r (r + m)$	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
Tüvikoonus	$S_k = \pi m (r_1 + r_2)$ $S_t = \pi [r_1^2 + r_2^2 + m (r_1 + r_2)]$	$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$
Kera (sfäär)	$S = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Keha	Pindala	Ruumala
Kera (sfääri) segment	$S=2\pi rh$	$V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$
Kera vöö (kiht)	$S=2\pi rh$	$V=\frac{\pi h}{6}(3r_1^2+3r_2^2+h^2)$
Kera sektor		$V=\frac{2}{3}\pi r^2h$
Pöördkeha		$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

TULETISTE TABEL.

Funktsioon	Tuletis
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$
$c\cdot f(x)$	$c\cdot f'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$, kus $g(x)\neq 0$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

SISUKORD.

1. Matemaatilise teooria loogiline ülesehitus 3
   1.1. Induktsioon ja deduktsioon 3
   1.2. Aksioomid ja teoreemid 6
   1.3. Pöörd-, vastand- ja pöördvastandteoreem. Vastuväiteline tõestus 10
   1.4. Tarvilik ja piisav tingimus 14
   1.5. Algmõisted ja tuletatud mõisted 16
   1.6. Kujutluse osa matemaatikas 19
   1.7. Aksiomaatiline meetod 22
   1.8. Algmõistete ja aksioomide süsteemi moodustamine 23
   1.9. Geomeetria aksiomaatilisest ülesehitusest 24
2. Sirgete ja tasandite vastastikused asendid 26
   2.1. Ekvivalentsusrelatsioon ja ekvivalentsusklassid 26
   2.2. Algmõisted ja viis aksioomi 29
   2.3. Siht tasandil. Sirgekimp ja sirgesidum 30
   2.4. Tasandi määramine punktide ja sirgetega 32
   2.5. Sirge ja tasandi vastastikused asendid 34
   2.6. Kahe tasandi vastastikused asendid 36
   2.7. Paralleelsete tasandite lõikumine sirge ja tasandiga 39
   2.8. Tasandi riht. Tasandikimp ja tasandisidum 41
   2.9. Kahe sirge vastastikused asendid 42
   2.10. Siht ruumis 44
   2.11. Kolme tasandi vastastikused asendid 45
3. Vektorid ja afiinsed koordinaadid 47
   3.1. Suund. Vektor. Lüke 48
   3.2. Vektorite summa ja vahe 52
   3.3. Vektori korrutis ja jagatis arvuga 58
   3.4. Kollineaarsete vektorite hulk 61
   3.5. Komplanaarsete vektorite hulk 64
   3.6. Ruumi vektorite hulk 68
   3.7. Ruumi vektorbaas. Vektori koordinaadid 70
   3.8. Lineaartehted ja kollineaarsuse tingimus koordinaatkujus 72
   3.9. Vektori projektsioon 75
   3.10. Ruumi reeper. Ruumi punkti afiinsed koordinaadid 80
   3.11. Koordinaatoktandid 84
   3.12. Tsentraal- ja paralleelprojekteerimine 86
   3.13. Projekteerimiste omadusi 88
4. Vektorite skalaarkorrutis. Ristseis ja ristkoordinaadid ruumis 90
   4.1. Nurk kahe vektori vahel. Vektorite skalaarkorrutis 90
   4.2. Vektori ristprojektsioon 94
   4.3. Skalaarkorrutise algebralised omadused 95
   4.4. Nurk kahe sirge vahel. Kahe sirge ning sirge ja tasandi ristseis 98
   4.5. Tasandi normaal 100

4.6. Ristprojekteerimine. Nurk sirge ja tasandi vahel 102
4.7. Kahetahuline nurk. Kahe tasandi ristseis 104
4.8. Hulknurga ristprojektsiooni pindala 106
4.9. Ristbaas. Ristreeper. Ristkoordinaadid 108
4.10. Skalaarkorrutis koordinaatkujus. Arvutusvalemid 109
4.11. Rööpküliku ja kolmnurga pindala 112
4.12. Rööptahuka ja tetraeedri ruumala 114
5. Kordamiseks ja täiendamiseks 117
5.1. Funktsiooni tuletis 117
5.2. Funktsiooni uurimine 120
5.3. Ekstreemumülesanded 124
5.4. Võrrandi ligikaudne lahendamine 130
6. Määramata integraal 135
6.1. Algfunktsioon 135
6.2. Määramata integraal 137
6.3. Määramata integraali omadusi 138
7. Määratud integraal 143
7.1. Kõvertrapetsi pindala 143
7.2. Määratud integraal 146
7.3. Määratud integraal piirväärtusena 150
7.4. Pindala arvutamine 153
7.5. Töö arvutamine 158
8. Tahkkehad ja pöördkehad 159
8.1. Sissejuhatuseks 159
8.2. Kehade defineerimine vastavate pindade abil 160
8.3. Ruuminurgad 166
8.4. Mitmetahulised nurgad 167
8.5. Tahkkehad 169
8.6. Pöördkehad 173
8.7. Kehade omadusi 174
8.8. Kehade pindala ja ruumala otsesest ja kaudsest mõõtmisest 178
8.9. Prisma külg- ja täispindala 181
8.10. Risttahuka ruumala 183
8.11. Prisma ruumala 187
8.12. Silindri külg- ja täispindala 190
8.13. Silindri ruumala 192
8.14. Püramiidi külg- ja täispindala 193
8.15. Tüvipüramiidi külg- ja täispindala 195
8.16. Püramiidi ja tüvipüramiidi ruumala 197
8.17. Koonuse külg- ja täispindala 202
8.18. Tüvikoonuse külg- ja täispindala 204
8.19. Pöördkeha ruumala 206
8.20. Koonuse ja tüvikoonuse ruumala 207
8.21. Sfääri ja tema osade pindala 212
8.22. Kera ja tema osade ruumala 216
9. Ülesandeid kordamiseks 219
10. Valemeid 256

Карль Оскарович Арива, Олаф Иоханнесович Принитс. **МАТЕМАТИКА ДЛЯ 11-ГО КЛАССА.** Пробный учебник. На эстонском языке. Обложка художника Р. Тунгла. Издательство «Валгус», Таллин. Toimetaja K. Kallaste. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja M. Pall. Korrektorid H. Kull ja A. Taim. Laduda antud 23. III 1973. Trükkida antud 5. VI 1973. Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2, 60×90/16. Trükipoognaid 17. Arvestuspoognaid 13,38. Trükiarv 19 000. Kirjastus «Valgus», Tallinn, Pärnu mnt. 10. H. Heidemanni nim. Trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I. Tellimuse nr. 1924.
Hind 25 kop.

25 kop.

A
33261
..2603965

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00260396 9