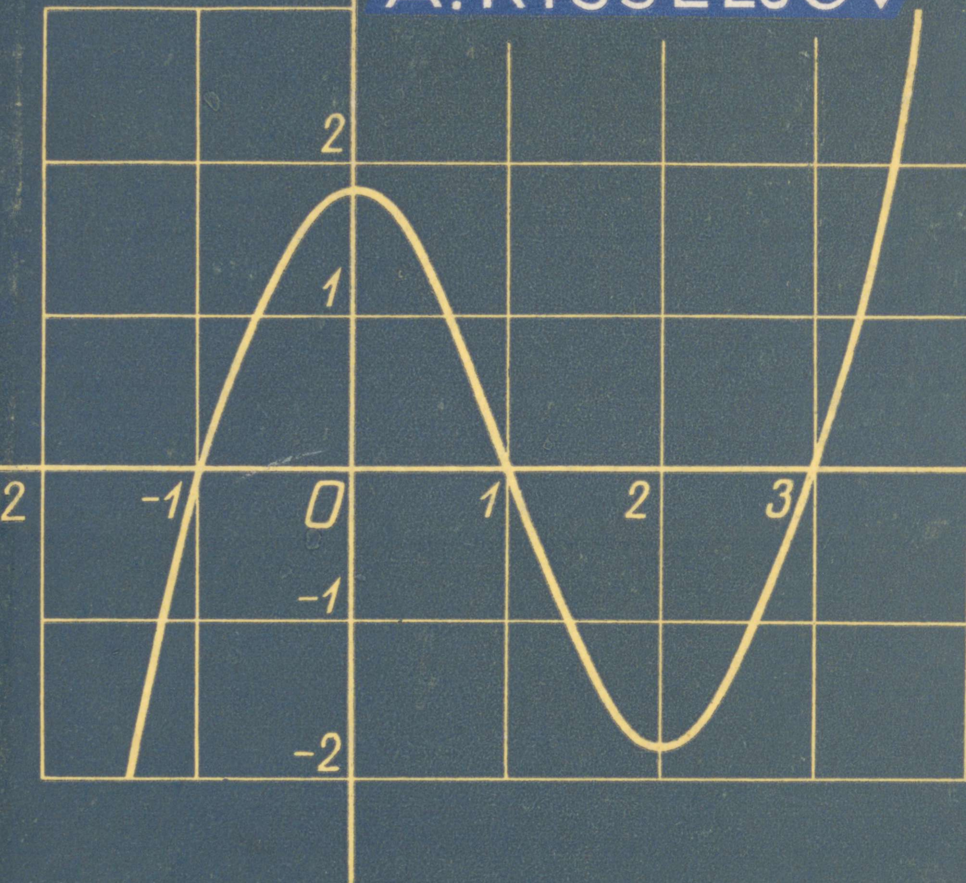
A. KISSELJOV



ALGEBRA

IX—XI KLASSILE

A. KISSELJOV

ALGEBRA

IX—XI KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1962

Originaali tiitel:

А. П. Киселёв, Алгебра, часть вторая.
Учебник для 8—10 классов средней школы.
Утверждён Министерством
просвещения РСФСР.
Учпедгиз 1961.

Tõlkinud A. Ilves.

Tõlge kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

Esimene jagu.

Identsed teisendused astmete ja juurtega.

I. Astendamine.

1. Astendamine. Astendamine on tehe, mille abil korrutatakse antud arv (astendatav) iseendaga nii mitu korda, kui suur on teine antud arv (astendaja).

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32.$$
$$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4 = 81.$$
$$a \cdot a \cdot a = a^3.$$

Üldiselt: $$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tegurit}} = a^n.$$

2. Negatiivse arvu aste. Relatiivsete arvude korrutamisel on korrutis positiivne, kui negatiivsete tegurite arv on paarisarv. Vastasel korral on korrutis negatiivne. Rakendades seda omadust võrdsete negatiivsete tegurite korrutamisel, s. o. negatiivse arvu astendamisel, saame reegli:

negatiivse arvu paarisaste on positiivne, paaritu aste — negatiivne.

Seega:

$$(-2)^2 = 4; \quad (-2)^6 = 64; \quad (-5)^4 = 625;$$
$$(-2)^5 = -32; \quad (-2)^7 = -128;$$
$$(-5)^5 = -3125 \text{ jne.}$$

3. Üksliikmete astendamine. Üldiselt on õpilastele reeglid üksliikme ruudu ja kuubi arvutamiseks tuntud. Näitame nüüd, et samade reeglite järgi toimub üksliikme astendamine ka mistahes arvuga.

a) Astendame korrutise *abc* arvuga *n*. Kasutades korrutamise tuntud omadusi, saame:

$$(abc)^n = \underbrace{(abc) \cdot (abc) \cdot (abc) \cdot \ldots \cdot (abc)}_{n \text{ korda}} =$$

$$= abc \cdot abc \cdot \ldots \cdot abc =$$

$$= \underbrace{(aa \ldots a)}_{n \text{ korda}} \cdot \underbrace{(bb \ldots b)}_{n \text{ korda}} \cdot \underbrace{(cc \ldots c)}_{n \text{ korda}} = a^n b^n c^n.$$

Et astendada korrutis mingi arvuga, tuleb selle arvuga astendada iga tegur eraldi ja tulemused korrutada.

b) Samal viisil leiame murru $\frac{a}{b}$ astme:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ korda}} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Et astendada murd mingi arvuga, tuleb selle arvuga astendada eraldi lugeja ja nimetaja ning esimene tulemus jagada teisega.

c) Olgu arv a^m vaja astendada arvuga n. Saame:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ korda}} = a^{m+m+m+\ldots+m} = a^{mn}.$$

Et astendada mingi arvu aste mingi teise arvuga, tuleb astendajad korrutada.

d) Võtame nüüd mingi üksliikme, näiteks $2a^2b^3$. Astendame ta mingi arvuga n. Kasutades tuletatud reegleid, saame:

$$(2a^2b^3)^n = 2^n a^{2n} b^{3n}.$$

Et astendada üksliige mingi arvuga, tuleb astendada selle arvuga kordaja, tähtede astendajad aga korrutada selle arvuga.

Harjutused.

Astendada:

1. $(-3)^5$; $(-7)^3$; $(-4)^4$; $(-10)^6$; $(-0{,}1)^5$.
2. $(3a^2b)^3$; $(-2a^3b^2)^3$; $(-5a^4b^2c)^4$.
3. $\left(\frac{x^2y}{z^3}\right)^4$; $\left(-\frac{3ab^3}{2c^2}\right)^3$; $\left(-\frac{0{,}2a^3bc}{d^2}\right)^6$.

II. Hulkliikme ruutimine.

4. Valemi tuletamine. Kasutades valemit $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ võime ruutu tõsta kolmliikme $a+b+c$, vaadeldes seda kui kaksliiget $(a+b)+c$:

$$[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2(a+b)\cdot c+c^2.$$

Seega kaksliikmele $a+b$ kolmanda liikme c liitmisel lisandusid pärast summa ruutu tõstmist veel kaks liiget: 1) kahekordne esimese kahe liikme summa ja kolmanda liikme korrutis ning 2) kolmanda liikme ruut.

Nüüd pole raske ruutu tõsta neliliiget $a+b+c+d$, võttes summa $a+b+c$ üheks liikmeks:

$$[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)\cdot d+d^2.$$

Asendades $(a+b+c)^2$ avaldisega, mille leidsime varem, saame:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)\cdot c+c^2+$$
$$+2(a+b+c)\cdot d+d^2.$$

Me märkame jälle, et uue liikme lisandamisega ruutu tõstetavale hulkliikmele lisandusid ruudule kaks liiget: 1) kahekordne endiste liikmete summa ja uue liikme korrutis ning 2) uue liikme ruut. On ilmne, et selline kahe liikme lisandumine ruudule kestab seni, kuni ruutu tõstetavale hulkliikmele lisandatakse uusi liikmeid. Tähendab:

hulkliikme ruut võrdub esimese liikme ruuduga, pluss kahekordne esimese ja teise liikme korrutis, pluss teise liikme ruut, pluss kahekordne esimese kahe liikme summa ja kolmanda liikme korrutis, pluss kolmanda liikme ruut, pluss kahekordne esimese kolme liikme summa ja neljanda liikme korrutis, pluss neljanda liikme ruut jne.

Mõistagi, hulkliikme liikmed võivad olla ka negatiivsed.

Kui viimase võrduse paremal poolel avame sulud, siis saame pärast liikmete ümberpaigutamist:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+$$
$$+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Seepärast võib eelmise reegli formuleerida nii:

hulkliikme ruut võrdub kõigi tema liikmete ruutude summaga, millele on liidetud iga liikme ja kõigi temale järgnevate liikmete kahekordsed korrutised.

5. **Märkus märkide kohta.** Lõpptulemuses esinevad plussmärgiga 1) hulkliikme kõigi liikmete ruudud ja 2) need kahekordsed korrutised, mis saadi ühesuguste märkidega liikmete korrutamisel. Näiteks:

$$(3x^2-2x+1)^2=(3x^2)^2+2(3x^2)(-2x)+(-2x)^2+$$
$$+2(3x^2-2x)\cdot 1+1^2=9x^4-12x^3+4x^2+6x^2-$$
$$-4x+1=9x^4-12x^3+10x^2-4x+1.$$

Harjutused.

4. $\left(2a^2-\frac{1}{2}a+1\right)^2$.
5. $\left(\frac{1}{2}x^2-4x-3\right)^2$.
6. $(-5a^3x+3a^2x^2-ax^3+3x^4)^2$.
7. $\left(0{,}3x^3-0{,}1x^2-\frac{3}{4}x+0{,}5\right)^2$.

Kahe järgmise näite varal veenduda, et hulkliikme ruut ei muutu, kui me tema kõigi liikmete märgid muudame vastupidisteks.

8. $(a-b+c)^2=(-a+b-c)^2$.
9. $(2x^3-x^2-3x+1)^2=(-2x^3+x^2+3x-1)^2$.
10. Kui võrdus $(a-b)^2=(m-n)^2$ on õige, kas võib siis sellest järeldada, et $a-b=m-n$?

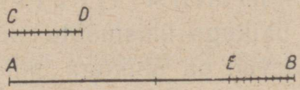
III. Irratsionaalarvu mõiste.

6. **Ühismõõduga ja ühismõõduta lõigud.** Nagu geomeetriast teada, nimetatakse kahe sirglõigu ühismõõduks sellist lõiku, mis mahub kumbagi sirglõiku täisarv korda ilma jäägita. Geomeetrias näidatakse, et võib esineda ka kaks niisugust lõiku, milledel ei ole ühismõõtu (näiteks ruudu külg ja tema diagonaal).

Kaht lõiku nimetatakse ühismõõduga või ühismõõduta lõikudeks olenevalt sellest, kas neil on ühismõõt või mitte.

7. **Mõõtmise mõiste.** Olgu meil vaja mõõta lõigu AB (joon. 1) pikkus pikkusühikuga CD. Selleks leiame, mitu korda ühik CD mahub lõiku AB. Oletame, et ta mahub AB-sse 3 korda mingi jäägiga EB (mis on väiksem kui CD). Siis arv 3 on mõõtmise ligikaudne tulemus täpsusega kuni 1, ja seejuu-

res puuduga, sest AB on suurem kui $3CD$, kuid väiksem kui $4CD$ (ka arvu 4 võib nimetada selle mõõtmise ligikaudseks tulemuseks täpsusega kuni 1, kuid liiaga). Soovides saada täpsemat tulemust, leiame, mitu korda mahub $\frac{1}{10}$ ühikust CD jääki EB. Oletame, et see osa mahub EB-sse üle 8 korra, kuid vähem kui 9 korda. Siis



Joon. 1.

arvud 3,8 ja 3,9 on **lõigu AB mõõtmise ligikaudsed tulemused täpsusega kuni** $\frac{1}{10}$, esimene puuduga, teine liiaga. Soovides saada veelgi täpsemat mõõtmise tulemust, leiame, mitu korda mahub viimasesse jääki $\frac{1}{100}$ ühikust CD. Mahtugu see osa jääki üle 5 korra, kuid vähem kui 6 korda. Siis arvud 3,85 ja 3,86 on **lõigu AB mõõtmise ligikaudsed tulemused täpsusega kuni** $\frac{1}{100}$. Niisugust mõõtmist võib üha jätkata. Seejuures on võimalikud kaks juhtumit:

1) võib juhtuda, et üksteisele järgnevail mõõtmistel täpsusega 0,1, 0,01, 0,001,... varem või hiljem ei jää järele mingit jääki;

2) võib juhtuda, et mistahes täpsusega 0,1, 0,01, 0,001,... me ka mõõdaksime, alati jääb järele jääk.

Esimesel juhtumil saadakse mõõtmise tulemusena lõplik kümnendmurd. Teisel juhtumil saadakse mõõtmise tulemusena lõpmatu kümnendmurd.

Lõplik kümnendmurd saadakse ainult sel juhtumil, kui ühiku mingi kümnendosa (üks kümnendik või üks sajandik või üks tuhandik jne.) osutub mõõdetava lõigu ja pikkusühiku ühismõõduks.

Kui aga mõõdetav lõik omab pikkusühikuga ühismõõdu, kuid ei $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ega üldse ühiku mingi kümnendosa pole mõõdetavale lõigule ja pikkusühikule ühismõõduks, siis saadakse mõõtmise tulemusena perioodiline[1] lõpmatu kümnendmurd. Lõpuks, kui mõõdetav lõik ei oma pikkusühikuga ühismõõtu, siis saadakse mõõtmise tulemusena lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd.

8. **Irratsionaalarvud ja nende ligikaudsed väärtused.** Täis- ja murdarve nimetatakse üldiselt r a t s i o n a a l a r v u d e k s. Iga ratsionaalarvu võib kirjutada lõpliku kümnendmurru või perioodilise lõpmatu kümnendmurru kujul; mitteperioodilisi lõpmatuid kümnendmurde nimetatakse i r r a t s i o n a a l a r v u d e k s. Ratsionaalarvud[2] on ühikuga ühismõõtu omavate suuruste mõõtarvud ja irratsionaalarvud on ühikuga ühismõõtu mitteomavate suuruste mõõtarvud.

Irratsionaalarv on t u n t u d (ehk a n t u d), kui on näidatud viis, mille abil on võimalik leida kuitahes palju tema kümnendkohti.

Katkestades lõpmatu kümnendmurru, mis väljendab antud (ratsionaalset või irratsionaalset) arvu, mingi kümnendkoha juures, saame selle arvu l i g i k a u d s e v ä ä r t u s e t ä p s u s e g a k u n i 0,1, 0,01, 0,001 jne. p u u d u g a. Suurendades viimast säilitatavat kümnendkohta 1 võrra, saame antud arvu ligikaudse väärtuse sama täpsusega, kuid l i i a g a.

Näiteid.

1) Kirjutades murru $\frac{1}{3}$ perioodilise lõpmatu kümnendmurruna 0,33333 ... ja säilitades selle murru neli esimest kohta, saame $\frac{1}{3}$ ligikaudse väärtuse täpsusega 0,0001 puuduga: 0,3333.

Ligikaudne väärtus täpsusega kuni 0,0001 liiaga on 0,3334.

2) Irratsionaalarv π, mis väljendab ringjoone pikkuse ja diameetri suhet, kirjutatakse mitteperioodilise lõpmatu kümnendmurruna, mille esimesed 25 kohta on:

$$3{,}141592653589793238462643.$$

---

[1] Tõepoolest, ühismõõdu olemasolu korral võiksime alati saada täpse mõõtmistulemuse hariliku murruna. Teisendades selle hariliku murru kümnendmurruks, avaldaksime mõõtmise tulemuse kümnendmurruna. Kuid harilik murd teisendatult lõpmatuks kümnendmurruks annab alati perioodilise murru. Juhtumil aga, kui mõõdetav lõik ei oma ühismõõtu, ei saa tekkida perioodilist murdu, sest kui ta tekikski, siis võiks teda teisendada harilikuks murruks ja see harilik murd oleks täpseks mõõtmistulemuseks, ent seesugust tulemust ei saa ühismõõdutuse korral esineda. Järelikult peab kümnendmurd sel juhtumil olema mitteperioodiline.

[2] Ladinakeelne sõna *ratio* tähendab suhet. Ratsionaalarvud on need arvud, mida võib esitada kahe täisarvu suhtena, irratsionaalarvud aga need arvud, mida ei saa sel kujul esitada.

Arvu π ligikaudsed väärtused täpsusega 0,00001 on 3,14159 (puuduga) ja 3,14160 (liiaga).

3) Võtame irratsionaalarvu, mida väljendatakse järgmise mitteperioodilise lõpmatu kümnendmurruga:

$$123{,}101001000100001000001000000 1\ldots$$

(kahe teineteisele järgneva ühe vahel on üks null, siis kaks nulli, siis kolm nulli jne.).

Selle irratsionaalarvu ligikaudsed väärtused täpsusega kuni 0,000000000001 (s. o. $\frac{1}{10^{12}}$) on 123,101001000100 (puuduga) ja 123,101001000101 (liiaga).

9. Irratsionaalarvude võrdsus ja mittevõrdsus. Reaalarvud. Kaks irratsionaalarvu on võrdsed, kuid nad on väljendatud kümnendmurdudega, mille vastavad numbrid on võrdsed[1].

Kahest positiivsest irratsionaalarvust on suurem see, mille arendis kümnendmurruks sisaldab rohkem täisühelisi või täisüheliste võrdsuse korral rohkem kümnendikke või täisüheliste ja kümnendike võrdsuse korral rohkem sajandikke jne.

Näiteks arv 2,745037... on suurem kui arv 2,745029..., sest esimese arvu kuues number väljendab suuremat arvu kui teise arvu kuues number, sellal kui kõik eelnevad vastavad numbrid on samad.

See definitsioon on kohane ka irratsionaalarvu võrdlemiseks ratsionaalarvuga, kui ratsionaalarv on arendatud kümnendmurruks. See kõlbab ka kahe ratsionaalarvu võrdlemiseks, mis on arendatud kümnendmurdudeks, kui ainult kümnendmurrud perioodiga 9 asendada kümnendmurdudega, mis lõpevad nullidega: näiteks 2,39999... asemel on vaja võtta 2,400000...

Märgime, et sellest mittevõrdsuse definitsioonist järeldub:

kui α on mingi irratsionaalarv, a — arvu α mingi ligikaudne väärtus puuduga, b — arvu α mingi ligikaudne väärtus liiaga, siis

$$a<\alpha<b.$$

Irratsionaalarvud võivad olla positiivsed ja negatiivsed vastavalt mõõdetava suuruse mõttele. Nagu ratsionaalarvudegi korral on kahest negatiivsest irratsionaalarvust suurem see, mille abso-

[1] Kaht võrdset r a t s i o n a a l a r v u võib mõnikord avaldada erinevate numbritega, nimelt siis, kui üks neist on perioodiline murd perioodiga 9. Nii 0,999...=1 ja 2,3999...=2,4.

luutväärtus[1] on väiksem; iga negatiivne arv on nullist väiksem, null on aga väiksem igast positiivsest arvust.

Ratsionaal- ja irratsionaalarve nimetatakse **reaalarvudeks.**

10. Tehete definitsioonid irratsionaalarvude puhul. Olgu antud mingid positiivsed irratsionaalarvud α ja β (alljärgnevas näites $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{2}$). Olgu arvude α ja β ligikaudsed väärtused puuduga:

	kuni 0,1	kuni 0,01	kuni 0,001	kuni 0,0001
α	1,7	1,73	1,732	1,7320
β	1,4	1,41	1,414	1,4142

Vastavad ligikaudsed väärtused liiaga saadakse neist arvudest viimase kümnendkoha suurendamisel 1 võrra.

Siis: a) Liita α ja β tähendab leida arv, mis oleks

suurem igast järgmisest summast:	ja väiksem igast järgmisest summast:
$1{,}7+1{,}4=3{,}1$	$1{,}8+1{,}5=3{,}3$
$1{,}73+1{,}41=3{,}14$	$1{,}74+1{,}42=3{,}16$
$1{,}732+1{,}414=3{,}146$	$1{,}733+1{,}415=3{,}148$
$1{,}7320+1{,}4142=3{,}1462$ jne.	$1{,}7321+1{,}4143=3{,}1464$ jne.

Liita arvud α ja β tähendab leida kolmas arv γ, mis oleks suurem nende mistahes puuduga võetud ligikaudsete väärtuste summast, kuid väiksem nende mistahes liiaga võetud ligikaudsete väärtuste summast.

Me väidame tõestuseta, et mistahes kahe reaalarvu α ja β korral selline arv γ on olemas ja seejuures ainult üks.

b) Võttes arvude α ja β eespool antud ligikaudsed väärtused, võime ütelda, et α ja β korrutis on arv, mis on

[1] Irratsionaalarvude absoluutväärtust defineeritakse niisamuti nagu ratsionaalarvude absoluutväärtust.

suurem igast järgmisest korrutisest:	ja väiksem igast järgmisest korrutisest:
$1{,}7 \cdot 1{,}4 = 2{,}38$	$1{,}8 \cdot 1{,}5 = 2{,}70$
$1{,}73 \cdot 1{,}41 = 2{,}4393$	$1{,}74 \cdot 1{,}42 = 2{,}4708$
$1{,}732 \cdot 1{,}414 = 2{,}449048$	$1{,}733 \cdot 1{,}415 = 2{,}452195$
$1{,}7320 \cdot 1{,}4142 = 2{,}44939440$	$1{,}7321 \cdot 1{,}4143 = 2{,}44970903$
jne.	jne.

Korrutada positiivsed arvud α ja β tähendab leida selline kolmas arv, mis oleks suurem nende mistahes puuduga võetud ligikaudsete väärtuste korrutisest, kuid väiksem nende mistahes liiaga võetud ligikaudsete väärtuste korrutisest.

Me väidame tõestuseta, et selline arv on olemas ja seejuures ainult üks.

c) **Astendada irratsionaalarv α kahega, kolmega, neljaga jne. tähendab leida korrutis, mis koosneb kahest, kolmest, neljast jne. tegurist, mis on võrdsed α-ga.**

d) Pöördtehted irratsionaalarvudega defineeritakse niisamuti kui ratsionaalarvudegagi; lahutada arvust α arv β tähendab leida selline arv x, et summa $\beta+x$ võrduks α-ga, jne.

Kui üks arvudest α või β on ratsionaalarv ja väljendub lõpliku kümnendmurruna, siis tuleb antud definitsioonides seesuguse arvu ligikaudsete väärtuste asemel võtta tema täpne väärtus.

Irratsionaalarvu ja arvu 0 korrutist loetakse niisamuti nagu ratsionaalarvu ja arvu 0 korrutistki võrdseks nulliga.

Tehted negatiivsete irratsionaalarvudega sooritatakse kooskõlas juhisega, mis on antud negatiivsete ratsionaalarvude kohta.

Lähemal vaatlusel võib kindlaks teha, et tehteil irratsionaalarvudega on samad omadused, mis on tehteil ratsionaalarvudega, näiteks liitmis- ja korrutamistehtele on omased kommutatiivsus ja assotsiatiivsus; korrutamis- ja jagamistehtele on peale nende veel omane distributiivsus. Omadused, mida väljendavad võrratused, kehtivad ka irratsionaalarvude korral; näiteks kui $\alpha>\beta$, siis $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$, $\alpha\gamma>\beta\gamma$ (kui $\gamma>0$) ja $\alpha\gamma<\beta\gamma$ (kui $\gamma<0$) jne.

11. Juurimine. Definitsioon. Arvu α n-ndaks juureks nimetatakse sellist arvu, mille n-es aste võrdub arvuga α.

Arvu a n-ndat juurt tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$. Definitsioonist järeldub et $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Seda võrdust võib kasutada juurimistehte kontrollimiseks. Oletame, et $\sqrt[11]{2048} = 2$. Kontrollimiseks astendame 2 arvuga 11, saame $2^{11} = 2048$. Järelikult juur on leitud õigesti. Samuti on $\sqrt[4]{39{,}0625} = 2{,}5$, sest $2{,}5^4 = 39{,}0625$.

12. Mistahes juure ligikaudne väärtus. Me teame juba, mis on ruutjuure ligikaudsed väärtused täpsusega kuni 1, kuni $\frac{1}{10}$, jne. Ruutjuure kohta öeldut võib aga rakendada ka iga muu juure kohta. Näiteks arvu $\sqrt[3]{2}$ ligikaudseks väärtuseks täpsusega kuni $\frac{1}{100}$ nimetatakse niisugust kümnendmurdu, mis koosneb ühelistest, kümnelistest ja sajandikest, mille kuup pole suurem arvust 2; kui me aga suurendame seda arvu $\frac{1}{100}$ võrra ja tõstame kuupi, siis saame 2-st suurema arvu. Me ei hakka tuletama juhist kuup- ja muude juurte täpsete ning ligikaudsete väärtuste leidmiseks, piirdume ainult järgmise lihtsa võtte kättenäitamisega niisuguste juurte leidmiseks.

Olgu vaja leida $\sqrt[3]{2}$. Ligikaudsed juured täpsusega kuni 1 on ilmselt arvud 1 (puuduga) ja 2 (liiaga). Et leida otsitava juure kümnendike arv, leiame reast 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9 kaks sellist kõrvuti seisvat arvu, et väiksema arvu kuup oleks väiksem kui 2, suurema arvu kuup aga suurem kui 2. Selleks võtame oma arvude reast keskmise arvu 1,5 ja tõstame ta kuupi. Leiame: $1{,}5^3 = 3{,}375$, mis on suurem kui 2. Et 1,5-st suuremad arvud annavad kuupi tõstmisel veelgi suurema tulemuse, siis võime ära heita rea kogu parempoolse osa ja katsetada ainult arve 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4.

Võtame neist keskmise 1,2 ja tõstame kuupi. Saame 1,728, mis on väiksem kui 2. Tähendab, katsetamisele kuuluvad veel ainult arvud 1,3 ja 1,4. Tõstes kuupi arvu 1,3, saame 2,197, mis on suurem kui 2. Sel teel saime kaks arvu: 1,2 ja 1,3, mis erinevad teineteisest 0,1 võrra ja mille kuupide vahel asetseb arv 2. Need ongi arvu 2 ligikaudsed kuupjuured täpsusega kuni $\frac{1}{10}$ puuduga ja liiaga.

Kui soovime leida sajandike kohal seisva numbri, peame proovima järgmisi arve: 1,21; 1,22; 1,23; . . . ; 1,29. Võttes sellest reast keskmise arvu 1,25 ja tõstes selle kuupi, leiame $1{,}25^3 = 1{,}953125$, mis on väiksem kui 2. Tähendab, nüüd on vaja proovida veel arve: 1,26; 1,27; 1,28; 1,29. Et $1{,}25^3$ erineb arvust 2 väga vähe, siis on loomulik proovida, kas $1{,}26^3$ pole suurem kui 2. Ja tõepoolest, tõstes 1,26 kuupi, saame 2,000376. Tähendab, otsitav kuupjuur 2-st täpsusega kuni $\frac{1}{100}$ on 1,25 (puuduga) või 1,26 (liiaga). Kui me sooviksime edasi saada tuhandike kohal seisva numbri, siis peaksime samal viisil proovima arve reast: 1,251; 1,252; 1,253; . . . ; 1,259.

Mõistagi, et see võte on väsitav (on olemas palju sobivamaid viise[1]), kuid sellest nähtub selgesti, et on võimalik leida mistahes juure ligikaudse väärtuse kuitahes palju kohti.

$\sqrt[3]{2}$ jaoks leidsime ligikaudsed väärtused puuduga: 1; 1,2; 1,25; 1,259; . . .

Moodustame lõpmatu kümnendmurru 1,259 . . . See lõpmatu kümnendmurd kujutab enesest teatavat irratsionaalarvu α, ja arvud 1; 1,2; 1,25; 1,259; . . . kujutavad enesest irratsionaalarvu α puuduga võetud ligikaudseid väärtusi.

Irratsionaalarvu α kuup on 2. Et veenduda selles, meenutame, mida nimetatakse irratsionaalarvu α kuubiks; α^3 on arv, mis rahuldab kaht tingimust: ta on suurem arvu α mistahes puuduga võetud ligikaudse väärtuse kuubist ja väiksem arvu α mistahes liiaga võetud ligikaudse väärtuse kuubist. Kuid arvu $\sqrt[3]{2}$ eespool leitud ligikaudsed väärtused rahuldavad neid tingimusi, sest

$$1^3<2, \quad 1{,}2^3<2, \quad 1{,}25^3<2, \quad 1{,}259^3<2, \ldots$$
$$2^3>2, \quad 1{,}3^3>2, \quad 1{,}26^3>2, \quad 1{,}260^3>2, \ldots$$

Tähendab, irratsionaalarv 1,259 . . . on kuupjuur 2-st.

Järelikult pärast irratsionaalarvude tarvituselevõtmist on mistahes positiivse arvu mistahes juure aritmeetilise väärtuse leidmise ülesanne alati üheselt lahendatav, s. o. säärane juure väärtus on alati olemas ja seejuures ainult üks.

Märkus. Juurimistehe on elementaaralgebra kursuses käsitletavate irratsionaalarvude arvukate näidete allikaks. Kuid oleks jäme viga mõelda, nagu oleksid kõik irratsionaalarvud ratsionaalarvude juured või väljenduksid nende

[1] Mistahes juuri arvutatakse, nagu hiljem näeme, üsna lihtsalt logaritmide tabeli abil.

juurte algebraliste avaldiste abil. On olemas lõpmatult palju irratsionaalarve, mis ei ole ühegi ratsionaalarvu mingiks juureks ja mida üldse ei võigi saada algebraliste tehete abil (liitmised, lahutamised, korrutamised, jagamised, astendamised, juurimised) ratsionaalarvudest, millisel hulgal, mis järjekorras ja missuguste ratsionaalarvudega me neid tehteid ka sooritaksime. Seesuguse irratsionaalarvu näiteks on arv π.

IV. Irratsionaalsete avaldiste teisendamine.

13. Ratsionaalsed ja irratsionaalsed algebralised avaldised. Algebralist avaldist nimetatakse ratsionaalseks mingi selles avaldises esineva tähe suhtes, kui see täht ei ole juuremärgi all; vastasel korral nimetatakse avaldist selle tähe suhtes irratsionaalseks. Näiteks avaldis $3a+2\sqrt{x}$ on ratsionaalne tähe a suhtes ja irratsionaalne tähe x suhtes.

Kui öeldakse «ratsionaalne algebraline avaldis», juurde lisamata, milliste tähtede suhtes, siis eeldatakse, et ta on ratsionaalne kõigi tähtede suhtes, mis kuuluvad avaldisse.

14. Juure põhiomadus. Märgime, et selles peatükis kõneleme ainult juurte (radikaalide aritmeetilistest väärtustest. Võtame mingi juure, näiteks $\sqrt[3]{a}$, ja astendame juuritava mingi arvuga, näiteks 2-ga; koos sellega korrutame juurijat selle arvuga, millega astendasime juuritava, s. o. käesoleval juhtumil 2-ga. Siis saame uue juure: $\sqrt[6]{a^2}$. Tõestame, et juure suurus nende kahe operatsiooni tagajärjel ei muutunud.

Oletame, et me arvutasime $\sqrt[3]{a}$ väärtuse ja saime mingi arvu x. Siis võime kirjutada võrduse: $x=\sqrt[3]{a}$ ja $x^3=a$. Tõstame viimase võrduse mõlemad pooled ruutu: $(x^3)^2=a^2$, s. o. $x^6=a^2$.

Viimasest võrdusest nähtub, et $x=\sqrt[6]{a^2}$. Seega on üks ja sama arv x võrdne $\sqrt[3]{a}$ ja $\sqrt[6]{a^2}$; järelikult $\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2}$.

Samuti võib veenduda, et

$$\sqrt{a}=\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[6]{a^3}=\sqrt[8]{a^4}=\ldots;$$

$$\sqrt[3]{m^2}=\sqrt[6]{m^4}=\sqrt[9]{m^6}=\sqrt[12]{m^8}=\ldots;$$

$$\sqrt{1+x}=\sqrt[4]{(1+x)^2}=\sqrt[6]{(1+x)^3}=\ldots.$$

Juure suurus ei muutu, kui astendame juuritava mingi arvuga ja ühtlasi korrutame juurija sama arvuga.

Seda võib sõnastada veel nii:

juure suurus ei muutu, kui juurija ja juuritava astendaja korrutada ühe ja sama arvuga.

Järeldused. a) **Erinevate juurijatega juured võib viia ühisele juurijale** (samuti nagu erinevate nimetajatega murde võib teisendada ühenimelisteks). Selleks on küllalt, kui leida kõigi juurijate ühiskordne (parim on väikseim ühiskordne) ja korrutada iga juurija vastava täiendusteguriga, astendades ühtlasi iga juuritava sama arvuga.

Näide.

$$\sqrt{ax}; \quad \sqrt[3]{a^2}. \quad \sqrt[6]{x}.$$

Juurijate väikseim ühiskordne on 6; täiendustegurid on: esimesel juurel 3, teisel 2 ja kolmandal 1. Siis:

$$\sqrt{ax}=\sqrt[6]{(ax)^3}=\sqrt[6]{a^3x^3}; \qquad \sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{(a^2)^2}=\sqrt[6]{a^4}; \qquad \sqrt[6]{x}.$$

b) **Kui juuritavaks on aste, mille astendajal on ühine tegur juurijaga, siis võib astendaja ja juurija jagada selle teguriga.**

Näiteid.

$$1)\ \sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{x}; \qquad 2)\ \sqrt[6]{(1+x)^3}=\sqrt{1+x}.$$

c) **Kui juuritavaks on mitme astme korrutis, mille astendajail on ühine tegur juurijaga, siis võib kõik astendajad ja juurija jagada selle teguriga.**

Näide.

$$\sqrt[6]{8a^6x^3}=\sqrt[6]{(2a^2x)^3}=\sqrt{2a^2x}.$$

15. Juure aritmeetilise väärtuse leidmine korrutisest, astmest ja murrust. a) Olgu vaja leida n-es juur korrutisest abc. Kui oleks nõutud korrutise astendamist, siis, nagu nägime, oleks tulnud astendada iga tegur eraldi. Et juurimine on astendamise pöördtehe, siis võib arvata, et korrutise juurimisel tuleb juurida iga tegur eraldi, s. o.

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

Et veenduda selle võrduse õigsuses, astendame tema parema poole arvuga n:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{c}\right)^n.$$

Kuid juure definitsiooni järgi $(\sqrt[n]{a})^n = a$; $(\sqrt[n]{b})^n = b$; $(\sqrt[n]{c})^n = c$. Järelikult, $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c})^n = abc$.

Kui korrutise $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ n-es aste on võrdne korrutisega abc, siis see tähendab, et korrutis $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ on võrdne n-nda juurega korrutisest abc.

Tähendab:

et juurida korrutis, tuleb juurida iga tegur eraldi ja tulemused korrutada.

b) Kontrollimisega on kerge veenduda, et $\sqrt{a^4} = a^2$, sest $(a^2)^2 = a^4$; $\sqrt[3]{x^{12}} = x^4$, sest $(x^4)^3 = x^{12}$, jne.

Üldiselt, $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$, sest $(a^m)^n = a^{mn}$. Tähendab:

et juurida aste, mille astendaja jagub juurijaga, tuleb astendaja jagada juurijaga.

c) Õiged on ka järgmised võrdused:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}, \quad \text{sest} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16};$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}, \quad \text{sest} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Üldiselt,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \text{sest} \quad \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

Et juurida murd, tuleb juurida lugeja ja nimetaja eraldi ning esimene tulemus jagada teisega.

Näiteid.

1) $\sqrt{9a^4b^6} = \sqrt{9}\sqrt{a^4}\sqrt{b^6} = 3a^2b^3$;

2) $\sqrt[3]{125a^6x^9} = \sqrt[3]{125}\sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{x^9} = 5a^2x^3$;

3) $\sqrt{\frac{4a^2b^6}{9c^2d^4}} = \frac{2ab^3}{3cd^2}$.

16. Juurte lihtsaimaid teisendusi. a) **Tegurite toomine juuremärgi ette.** Kui juuritav avaldis lahutub selliseiks tegureiks, et mõnest saab leida täpse juure, siis võib niisugused tegurid pärast nende juurimist kirjutada juuremärgi ette (s. o. neid võib juuremärgi alt välja tuua); näiteks:

1) $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2a}=\sqrt{a^2}\sqrt{a}=a\sqrt{a}$;

2) $\sqrt[3]{16x^4}=\sqrt[3]{8x^3\cdot 2x}=2x\sqrt[3]{2x}$.

b) **Tegurite viimine juuremärgi alla.** Vastupidi, mõnikord on kasulik viia juuremärgi alla tegurid, mis seisavad juuremärgi ees; selleks on küllalt, kui seesugused tegurid astendada arvuga, mis on võrdne juurijaga, ja saadud astmed kirjutada juuremärgi alla; näiteks:

1) $a^2\sqrt{a}=\sqrt{(a^2)^2a}=\sqrt{a^4a}=\sqrt{a^5}$;

2) $2x\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(2x)^3x}=\sqrt[3]{8x^3x}=\sqrt[3]{8x^4}$.

c) **Juuritava avaldise vabastamine nimetajast.** Selgitame seda järgmiste näidetega:

1) $\sqrt{\frac{3x}{5}}$. Et nimetajast oleks võimalik leida täpne ruutjuur, korrutame murru mõlemad liikmed 5-ga.

$$\sqrt{\frac{3x}{5}}=\sqrt{\frac{3x\cdot 5}{5^2}}=\frac{\sqrt{15x}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{15x}}{5}=\frac{1}{5}\sqrt{15x}.$$

2) $\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed 2-ga, a-ga ja x-ga, s. o. $2ax$-ga:

$$\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}=\sqrt{\frac{3\cdot 2ax}{4a^2x^4}}=\frac{\sqrt{6ax}}{\sqrt{4a^2x^4}}=\frac{\sqrt{6ax}}{2ax^2}=\frac{1}{2ax^2}\sqrt{6ax}.$$

Märkus. Kui on vaja juurida algebraline summa, siis ei tohi juurida iga liidetavat eraldi. Nii: $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, kuna aga $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$; tähendab, juurimisel (samuti nagu astendamiselgi) ei ole liitmise suhtes (ega lahutamise suhtes) distributiivsust.

Harjutused.

Tuua tegurid juuremärgi ette:

11. $\sqrt{4a^3}$; $\sqrt{8a^6b^7}$; $\sqrt{50a^5b^3x^3}$; $\sqrt[3]{16a^4}$.

12. $\sqrt{27}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{60}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{1728}$.

13. $\sqrt[3]{-81x^5y^2}$; $\sqrt{98(a+b)^3}$; $\sqrt{250x^7y}$.

Viia juuremärgi ees seisvad tegurid juuremärgi alla:

14. $2\sqrt{2}$; $7\sqrt{10}$; $5\sqrt{5}$; $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; $a\sqrt{a}$.

15. $2ab\sqrt{\frac{1}{2}a}$; $\frac{1}{4}\sqrt{4x}$; $\frac{1}{3}\sqrt[3]{54a}$.

16. $2a^2\sqrt[3]{3ab^2}$; $(a+b)\sqrt{a+b}$; $2(x-y)\sqrt{\frac{1}{2}a^3(x-y)}$.

Vabastada juuritav avaldis nimetajast:

17. $\sqrt{\frac{1}{600}}$; $\sqrt{\frac{11}{540}}$. **18.** $\sqrt{\frac{3x}{49ay^2}}$; $\sqrt{x-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3ax}}$.

17. Sarnased juured. Sarnasteks juurteks *nimetatakse niisuguseid juuri, millel on ühesugused juuritavad avaldised ja võrdsed juurijad.* Sarnased on näiteks juured:

$$+3a\sqrt[3]{xy} \text{ ja } -5b\sqrt[3]{xy}.$$

Selleks et määrata, kas antud juured on omavahel sarnased, tuleb nad esialgu lihtsustada, s. o. kui võimalik:

1) tuua juuremärgi alt välja need tegurid, millest on võimalik leida täpne juur;

2) vabaneda juuremärgi all murru nimetajast;

3) vähendada juurija, jagades juurija ja juuritava astendaja nende ühise teguriga, kui see on olemas.

Nende tehete teostamisel omandab juuravaldis lihtsaima kuju.

Näited.

1) Juuravaldised $\sqrt[3]{8ax^3}$ ja $\sqrt[6]{64a^2y^{12}}$ osutuvad sarnasteks, kui me neid lihtsustame: $\sqrt[3]{8ax^3}=2x\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[6]{64a^2y^{12}}=2y^2\sqrt[6]{a^2}=$ $=2y^2\sqrt[3]{a}$.

2) Kolm juurt $\sqrt{\frac{2x}{3}}$, $\sqrt{\frac{6}{x}}$, $\sqrt{6x}$ osutuvad sarnasteks, kui vabastame juuritavad nimetajaist:

$$\sqrt{\frac{2x}{3}}=\sqrt{\frac{2x\cdot3}{3\cdot3}}=\sqrt{\frac{6x}{3^2}}=\frac{\sqrt{6x}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{6x};$$

$$\sqrt{\frac{6}{x}}=\sqrt{\frac{6x}{x^2}}=\frac{\sqrt{6x}}{x}=\frac{1}{x}\sqrt{6x}.$$

Harjutused.

Viia järgmised juured ühisele juurijale:

19. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$; $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{x^3}$, $\sqrt[6]{y^5}$.

20. $\sqrt[3]{xy^2}$, $\sqrt{yz}$, $\sqrt[4]{xz^3}$; $\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}$.

Lihtsusta järgmised juured (taandada juurijad ja juuritava astendajad:

21. $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[8]{10\,000}$, $\sqrt[6]{9a^4b^8}$, $\sqrt[8]{16a^8b^{12}}$.

22. $\sqrt[9]{8x^6}$; $\sqrt[6]{121a^4b^4}$; $\sqrt[15]{8a^3b^{12}c^{30}}$.

Lihtsustada järgmised juured eesmärgiga näidata nende sarnasus:

23. $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$; $\sqrt{1\frac{1}{3}}$, $\sqrt{5\frac{1}{3}}$, $\sqrt{16\frac{1}{3}}$.

24. $\sqrt{a^3x}$, $\sqrt{ax^3}$, $\sqrt{ax}$. 25. $\sqrt{\frac{bx^2}{a}}$, $\sqrt{\frac{bx^4}{a}}$, $\sqrt{\frac{x^2}{ab}}$.

18. Tehted irratsionaalsete üksliikmetega. a) **Liitmine ja lahutamine.** Et liita või lahutada irratsionaalseid üksliikmeid, ühendatakse need pluss- või miinusmärkidega ja koondatakse sarnased liikmed, kui neid on olemas.

Näited.

1) $\frac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}=2x\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-x\sqrt{x}=$
$=4x\sqrt{x}$;

2) $15\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{32}-16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{108}=$
$=15\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}$.

b) **Korrutamine.** Me nägime (§ 15), et juure leidmisel korrutisest on vaja leida juur igast tegurist eraldi; tähendab, ka vastupidi:

et korrutada mitu ühe ja sama juurijaga juurt, selleks korrutatakse juuritavad ja saadud korrutis juuritakse antud juurijaga.

Nii: $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{abc}$; $\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{xy}$.

Et korrutada erinevate juurijatega juuri, selleks on vaja eelkõige viia nad ühisele juurijale.

Kui juurte ees on kordajaid, siis korrutatakse need omavahel.

Näited.

1) $a\sqrt{2x}\cdot\frac{a}{b}\sqrt{3x}=\frac{a^2}{b}\sqrt{6x^2}=\frac{a^2x}{b}\sqrt{6};$

2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=$

$$=\sqrt[6]{3^3\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2^2}}=\sqrt[6]{\frac{3^3}{3^2\cdot2^3}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3}{8}}.$$

c) **Jagamine.** Me teame, et juure leidmiseks murrust on vaja leida juur lugejast ja nimetajast eraldi; tähendab, ka vastupidi:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};\quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}},\ \text{jne., s. o.:}$$

et jagada ühesuguste juurijatega juuri, selleks jagatakse nende juuritavad ja saadud jagatis juuritakse antud juurijaga.

Erinevate juurijatega juured on vaja eelkõige viia ühisele juurijale. Kui on kordajaid, siis need jagatakse.

Näited.

1) $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}:\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}=-\frac{6\cdot5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)2bx^2}{x^2(a-b)}}=-15\sqrt{b}.$

2) $\frac{3a}{5b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{a-x}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a}{a-x}}=\frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{\frac{a^4}{(a-x)^2}}:\sqrt[6]{\frac{8a^3}{(a-x)^3}}\right)=$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[6]{\frac{a(a-x)}{8}}.$$

d) **Astendamine. Et astendada juur, selleks astendatakse juuritav avaldis antud astendajaga, jättes juurija muutumatuks.**

Nii: $(\sqrt[3]{a})^2=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^2};$

$$(\sqrt[n]{x})^m=\underbrace{\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{x}}_{m\text{ korda}}=\sqrt[n]{x^m}.$$

Näited.

1) $\left(\sqrt[4]{2ab^3x^2}\right)^3=\sqrt[4]{(2ab^3x^2)^3}=\sqrt[4]{8a^3b^9x^6}=b^2x\sqrt[4]{8a^3bx^2}$;

2) $\left(\sqrt[6]{\frac{2x}{1+x}}\right)^3=\sqrt[6]{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3}=\sqrt{\frac{2x}{1+x}}$.

e) **Juurimine. Et juurida juur, selleks korrutatakse juurijad.**

Nii: $\sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[6]{a}$.

Et selles veenduda, oletame, et $\sqrt{\sqrt[3]{a}}=x$. Tõstame selle võrduse mõlemad pooled algul ruutu, siis aga kuupi:

$$\sqrt[3]{a}=x^2; \quad a=(x^2)^3=x^6.$$

Siit nähtub, et $x=\sqrt[6]{a}$, ja järelikult $\sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[6]{a}$.

Näide.

$$\sqrt{2x\sqrt[3]{x^2}}.$$

Viime teguri $2x$ kuupjuuremärgi alla:

$$\sqrt{\sqrt[3]{(2x)^3x^2}}=\sqrt[6]{8x^5}.$$

Märgime, et selle näite puhul (ja teiste sellesarnaste näidete puhul) võib toimida ka teisiti: et avaldis, mis seisab ruutjuuremärgi all, on korrutis, võime kasutada korrutise juurimise teoreemi. Siis saame:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[6]{x^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}.$$

Viies juured ühisele juurijale 6, saame:

$$\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[6]{8x^5}.$$

Harjutused.

26. $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}$; $\sqrt{12}+2\sqrt{27}-3\sqrt{75}+9\sqrt{48}$.

27. $\frac{2}{3}\sqrt{18a^5b^3}+\frac{1}{5}\sqrt{50a^3b^3}-b\sqrt{\frac{2a}{b}}$.

28. $\sqrt{18}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}$; $6\sqrt{8}\cdot 5\sqrt{2}$. 29. $2\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{\frac{3}{5}}$.

30. $\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{448}$. 31. $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{2}-\sqrt{27}$.

32. $2\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{15}$; $\sqrt[3]{a}\cdot 2\sqrt[3]{a^4}\cdot 3\sqrt[3]{a^4}$.

33. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[6]{15}\cdot\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}$.

34. $2\sqrt{\frac{3a}{x^2}}\cdot 4\sqrt{\frac{4x^4}{3a^3}}$. 35. $\sqrt{120a^3b} : \sqrt{3ab}$; $18\sqrt{27a^3} : 3\sqrt{30a}$.

36. $\sqrt{x} : \sqrt[3]{x}$; $\sqrt{8} : \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a}$.

37. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2ab}\right)^3$; $\left(2\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2x}\right)^2$; $(3a^2x\sqrt[3]{a+b})^2$.

38. $(\sqrt[4]{(1+x^3)^3})^2$; $(\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt{x})^{10}$; $(3ab^2\sqrt[3]{a^2b})^4$.

39. $\sqrt[6]{2\sqrt{3}}$; $\sqrt{a\sqrt{a}}$; $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$;

$\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{16}{3}}}$; $\sqrt{2a\sqrt{\frac{1}{4}a}}$.

19. **Tehted irratsionaalsete hulkliikmetega** sooritatakse samade juhiste järgi, millised on tuletatud ratsionaalsete hulkliikmete kohta.

Näiteks:

$$\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}-5\sqrt{0,3}\right)^2=\frac{4}{5}-4\sqrt{1,5}+7,5=8,3-4\sqrt{1,5}.$$

Harjutused.

40. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$, $(\sqrt[3]{a}+2)(\sqrt[3]{a}-2)$.

41. $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$.

42. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$.

43. Lihtsustada järgmine avaldis:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Kontrollida, kas x väärtused rahuldavad järgmisi võrrandeid:

44. $x^2-4x+1=0$, kui $x=2+\sqrt{3}$.

45. $x^2-10x+13=0$, kui $x=5-2\sqrt{3}$.

20. Murru nimetaja vabastamine juurtest. Murruliste avaldiste arvutamisel, mille nimetajad sisaldavad juuri, on mõnedel juhtumeil kasulik algul teisendada murd nii, et ta nimetaja ei sisaldaks juuri. Olgu näiteks vaja arvutada:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Me võime arvutada kas otseselt selle valemi järgi või teha algul murru nimetaja ratsionaalseks; selleks korrutame antud murru mõlemad liikmed summaga $\sqrt{3}+\sqrt{2}$:

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}. \tag{2}$$

Valem (2) on arvutamiseks sobivam kui valem (1) esiteks seepärast, et ta sisaldab eneses kõigest kolm tehet, mitte aga neli nagu valem (1); teiseks aga ka seepärast, et arvutamisel, mis paratamatult saab olla ainult ligikaudne, määratakse tulemuse viga võrdlemisi lihtsalt valemi (2) järgi. Näiteks leides $\sqrt{3}$ ja $\sqrt{2}$ poole tuhandiku täpsusega, saame:

$$x=1{,}732+1{,}414=3{,}146.$$

See tulemus on täpne kuni $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ tuhandikku, s. o. kuni $\frac{1}{1000}$.

Näited.

1) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed arvuga $\sqrt{5}$.

$$\frac{3\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2\cdot 5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}=0{,}3\sqrt{5}.$$

Kui ruutjuuremärgi all on kordarv, siis on mõnikord kasulik lahutada see algtegureiks, et kindlaks määrata, milliste tegurite lisandamisel ta muutub täisruuduks. Selleks piisab, et korrutada murru mõlemad liikmed ruutjuurega puuduolevate tegurite korrutisest. Näiteks:

$$\frac{3}{\sqrt{40}}=\frac{3}{\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}}=\frac{3\sqrt{2\cdot 5}}{\sqrt{2^3\cdot 5}\cdot\sqrt{2\cdot 5}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{2^4\cdot 5^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2^2\cdot 5}=\frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

3) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed arvuga $\sqrt[5]{3^3}$.

$$\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}.$$

Üldiselt:
$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}.$$

4) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed vahega $3-\sqrt{5}$:

$$\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{6-2\sqrt{5}}{9-5}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Üldiselt:
$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}.$$

5) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed summaga $3+\sqrt{5}$:

$$\frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{3^2-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Üldiselt:
$$\frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}.$$

6) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed vahega $\sqrt{3}-\sqrt{2}$:

$$\frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{3-2}=5\sqrt{3}-5\sqrt{2}.$$

Üldiselt:
$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$$

7) $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{3-2}=$$
$$=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}.$$

Üldiselt:

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}.$$

8) Kui nimetaja on kuupjuuri sisaldav kaksliige, siis võib teda teha ratsionaalseks, tuginedes samasustele:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3;$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3.$$

Olgu näiteks nimetajaks $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. Siis, korrutanud murru lugeja ja nimetaja kolmliikmega $(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2$, saame nimetajaks $(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3$, s. o. 3—2 ehk 1. Niisamuti leiame:

$$\frac{5}{3+\sqrt[3]{4}}=\frac{5\,[3^2-3\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2]}{(3+\sqrt[3]{4})\,[3^2-3\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2]}=\frac{45-15\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{16}}{3^3+(\sqrt[3]{4})^3}=$$

$$=\frac{45-15\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{16}}{31}=\frac{45-15\sqrt[3]{4}+10\sqrt[3]{2}}{31}.$$

Harjutused.

46. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{2}{\sqrt{2}}$; $\frac{5}{\sqrt{5}}$; $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; $\frac{a}{\sqrt{a}}$.

47. $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$; $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$; $\frac{13}{7-\sqrt{6}}$; **48.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $\frac{x}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

49. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$; $\frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}}$; $\frac{1}{\sqrt{x+2}-2}$.

50. $\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}+\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$; $\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

51. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+5}$; $\frac{10}{7-\sqrt[3]{3}}$; $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5}}$.

V. Irratsionaalsed võrrandid.

21. Ülesanne. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 10 m, üks kaatetitest on 2 m; leida selle kolmnurga kaks teist külge.

Tähistanud teise kaateti tähega x ja teades, et hüpotenuus peab võrduma avaldisega $\sqrt{2^2+x^2}$, saame järelikult võrrandi:

$$2+x+\sqrt{4+x^2}=10.$$

Saime võrrandi, milles tundmatu on juuremärgi all. Seda liiki võrrandeid nimetatakse **irratsionaalseiks võrrandeiks.**

Et lahendada irratsionaalne võrrand, tuleb see algul v a b a s t a d a j u u r t e s t, mille juuritavad sisaldavad tundmatut. Kui võrrandis, nagu meiegi ülesandes, on ainult üks juur, siis võib sellest vabaneda järgmiselt: eelkõige eraldame juure, s. o. viime liikmed, mis ei sisalda juuri, võrrandi ühele poolele, jättes juure teisele poolele:

$$\sqrt{4+x^2}=8-x.$$

Nüüd tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu. On ilmne, et kui astendame võrdseid arve ühe ja sama astendajaga, siis saame võrdsed arvud; seepärast jääb võrdus kehtima ka pärast tema mõlema poole ruutimist.

$$4+x^2=(8-x)^2;\quad 4+x^2=64-16x+x^2.$$

Lahendades selle võrrandi leiame:

$$16x=64-4=60;\quad x=\frac{60}{16}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}\,.$$

Siis hüpotenuus on:

$$\sqrt{4+\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{225}{16}}=\sqrt{\frac{64+225}{16}}=\sqrt{\frac{289}{16}}=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}\,.$$

Olgu veel vaja lahendada võrrand: $10-\sqrt[3]{3x+21}=7.$
Eraldame juure ja tõstame võrrandi mõlemad pooled kuupi:

$$3=\sqrt[3]{3x+21};\quad 27=3x+21;\quad x=2.$$

K o n t r o l l: $10-\sqrt[3]{3\cdot 2+21}=10-\sqrt[3]{27}=10-3=7.$

22. Võõrlahendid. Võrrandi poolte ruutimine võib sisse tuua niinimetatud v õ õ r l a h e n d e i d, s. o. niisuguseid lahendeid, mis võrrandit ei rahulda. Toome näite. Olgu meil antud kaks võrrandit:

$$x+1=\sqrt{x+7}\quad (1);\qquad x+1=-\sqrt{x+7},\quad (2)$$

mis erinevad teineteisest ainult juure ees oleva märgi poolest.

Tõstnud kummagi võrrandi mõlemad pooled ruutu, saame ühe ja sellesama võrrandi:

$$x^2+2x+1=x+7, \tag{3}$$

sest $(-\sqrt{x+7})^2$ ja $(\sqrt{x+7})^2$ võrduvad ühe ja sellesama arvuga $x+7$.

Võrrandil (3) on kaks lahendit: -3 ja 2. Arv -3 rahuldab võrrandit (2), kuid ei rahulda võrrandit (1); vastupidi: arv 2 rahuldab võrrandit (1), kuid ei rahulda võrrandit (2).

Võib juhtuda, et võrrandil (1) ei ole üldse lahendit; siis võrrand (3) sisaldab ainult võrrandi (2) lahendeid ja järelikult kõik need on võrrandi (1) võõrlahenditeks.

Võrrandi poolte ruutimine võib anda uue võrrandi, mis pole esialgsega samaväärne.

23. Võrrandi vabastamine kahest ruutjuurest. Olgu vaja lahendada võrrand, milles esineb kaks ruutjuurt, mille juuritavad sisaldavad tundmatut:

$$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1.$$

Soovides vabaneda juurest $\sqrt{2x-4}$, eraldame ta:

$$\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}.$$

Nüüd tõstame selle võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5,$$

mis annab:

$$x-10=2\sqrt{x+5}.$$

Lõpuks vabastame teistkordse ruutimise abil ka viimase võrrandi juurest:

$$x^2-20x+100=4x+20 \text{ ehk } x^2-24x+80=0.$$

Lahendame selle võrrandi:

$$x=12\pm\sqrt{144-80}=12\pm\sqrt{64}=12\pm 8;$$
$$x_1=12+8=20; \quad x_2=12-8=4.$$

Asendamise teel veendume, et antud võrrandit rahuldab ainult arv 20, arv 4 aga teda ei rahulda.

Harjutused.

52. $x-5=\sqrt{x}+1$; $\quad 3+2\sqrt{x}=5$; $\quad \sqrt{3x-5}-4=5$.

53. $5\sqrt{x}-7=3\sqrt{x}-1$; $\quad 7\sqrt{3x}-1=5\sqrt{3x}+5$ (viimases kahes näites enne sarnased juured koondada).

54. $\sqrt{x^2-3x-1}+7=2x$; $\quad x-\sqrt{25-x^2}=7$.

Teine jagu.

Funktsioonid ja nende graafikud.

1. Funktsionaalne sõltuvus.

24. Jäävad ja muutuvad suurused. Maksku 1 kg mingisugust kaupa a rubla. Leiame selle kauba x kg hinna. Tähistades otsitava suuruse y-ga, saame:

$$y=ax.$$

See valem lubab meid arvutada rahasumma, mis on vaja maksta antud kauba mistahes koguse eest. Nii:

2	kg	hind	on	$2a$	rubla,	
5	„	„	„	$5a$	„	
3,5	„	„	„	$3{,}5a$	„	jne.

Antud valemisse kuulub kolm suurust: x — kauba kogus, y — kogu kauba hind ja a — kauba kilogrammi hind. Me näeme, et samal ajal, kui esimesed kaks suurust x ja y omandavad mitmesuguseid arvulisi väärtusi, me eeldame, et kolmas suurus a jääb muutumatuks.

Võtame valemi, mis väljendab ringjoone pikkuse sõltuvust raadiusest:

$$C=2\pi R.$$

Siin π on arv, mis väljendab ringjoone pikkuse suhet diameetriga. Võttes π väärtuseks arvu 3,14 täpsusega kuni 0,01, saame ringjoone pikkuse ligikaudse väärtuse:

$$C \doteq 6{,}28R.$$

Andes raadiusele mitmesuguseid arvulisi väärtusi, võime selle valemi järgi arvutada vastava ringjoone pikkuse. Nii:

Kui $R=1$, siis ringjoone pikkus on $C=6{,}28$,
„ $R=3$, „ „ „ „ $C=18{,}84$,
„ $R=4{,}2$ „ „ „ „ $C=26{,}376$, jne.

Siin, nagu esimeselgi juhtumil, suurused C ja R muutuvad (omandavad mitmesuguseid arvulisi väärtusi), kordaja 6,28 jääb aga muutumatuks.

Neid suurusi, mis säilitavad oma väärtuse muutumatuna, nimetatakse **jäävateks suurusteks.** *Suurusi, mis võivad omandada mitmesuguseid väärtusi, nimetatakse* **muutuvateks suurusteks.**

Olgu tähendatud, et vaadeldava küsimuse piirides võib mõnd arvu pidada muutumatuks ainult suhtelises mõttes. Tegelikus elus me ei saa näidata niisugust suurust, mis ei alluks muutustele. Ülaltoodud näites võib kauba hind teatava ajavahemiku möödudes muutuda ühele või teisele poole.

Harilikult tähistatakse valemisse kuuluvad jäävad suurused tähestiku esimeste tähtedega: $a, b, c, \ldots, m$, muutuvad suurused aga viimaste tähtedega: x, y, z; mõistagi, et sellest tingimusest ei peeta alati kinni.

25. Argument ja funktsioon. Vaadeldes toodud näiteis muutuvaid suurusi, märkame, et samal ajal, kui me kaht suurust (kauba hulk, raadiuse pikkus) vabalt muutsime, andes neile mistahes arvulisi väärtusi, omandasid kaks teist suurust (kauba hind, ringjoone pikkus) neid või teisi arvulisi väärtusi juba sõltuvalt sellest, missugused väärtused andsime esimestele.

Seda kahest teineteisega seotud muutuvast suurusest, millele võib anda mistahes arvulisi väärtusi, nimetatakse sõltumatuks muutujaks ehk **argumendiks.**

Seda muutuvat suurust, mille arvulised väärtused muutuvad sõltuvalt teise suuruse arvulistest väärtustest, nimetatakse sõltuvaks muutujaks ehk selle teise muutuva suuruse **funktsiooniks.**

Nii on ülaltoodud näiteis kauba hind kauba koguse funktsioon; ringjoone pikkus on ringi raadiuse funktsioon.

Mõnikord ei sõltu muutuv suurus mitte ühest, vaid kahest, kolmest ja rohkemast muutuvast suurusest. Siis nimetatakse teda kahe, kolme jne. muutuva suuruse funktsiooniks.

Näiteid.

1) Ühtlase liikumise tee valem kirjutatakse nii:

$$y = vx.$$

Siin on v (kiirus) — jääv suurus; x (aeg) — sõltumatu muutuja (argument) ja y (läbitud tee) — selle argumendi funktsioon.

2) Ringi pindala väljendatakse valemiga:

$$S = \pi R^2.$$

Siin on R (raadius) — argument; S (pindala) — funktsioon; π — jääv suurus.

3) Keha erikaalu väljendatakse valemiga:

$$d = \frac{P}{v}.$$

Siin on d (erikaal) kahe muutuva suuruse P (keha kaal) ja v (keha ruumala) funktsioon.

4) Joule-Lenzi seadust väljendatakse valemiga:

$$Q = qI^2Rt.$$

Siin on Q (soojushulk) kolme muutuja: I (voolu tugevus), R (juhtme takistus) ja t (aeg) funktsioon. Jääv suurus q, mis on võrdne 0,24 kaloriga, on niinimetatud elektrienergia soojus-ekvivalent, s. o. Q väärtus, kui $I = 1$ amper, $R = 1$ oom, $t = 1$ sek.

26. Funktsionaalse sõltuvuse kolm avaldamisviisi. a) Kahe muutuva suuruse vahel kehtiva funktsionaalse sõltuvuse tundmaõppimisel püüame eelkõige kindlaks teha, missuguseid arvulisi väärtusi omandab üks neist olenevalt teise suuruse arvulistest väärtustest.

Oletame näiteks, et me soovime õppida tundma sõltuvust, mis kehtib raudvarva pikkuse ja tema temperatuuri vahel. Hakkame soojendama 0°-se temperatuuriga raudvarba, mille pikkus on 1 m, ja mõõdame tema pikkust mitmesuguste temperatuuride puhul. Vaatluse tulemused võime esitada tabeli kujul. Antud juhtumil on tabelil näiteks järgmine kuju:

Temperatuur	0°	50°	80°	100°	350°	600°	1000°
Varva pikkus	1 m	1,0006 m	1,00096 m	1,0012 m	1,0042 m	1,0072 m	1,012 m jne. [1]

[1] Olgu tähendatud, et olenevalt mitmesugustest tingimustest ühtib varva pikkus siin toodud väärtustega tegelikult ainult ligikaudu.

Sellest tabelist näeme, et varva pikkus suureneb koos temperatuuri tõusuga. Niisugust suurustevahelise funktsionaalse sõltuvuse avaldamisviisi nimetatakse sõltuvuse väljendamiseks t a b e l i a b i l.

b) Funktsionaalse sõltuvuse väljendamisel tabeli abil on see puudus, et ta annab meile sõltuvuse iseloomust ebatäieliku kujutluse. Nii saame eelmise näite tabelist teada varva pikkuse ainult temperatuuri teatavate väärtuste puhul. Selleks et teada saada varva pikkust mistahes temperatuuri puhul, peame avaldama sõltuvuse varva pikkuse ja temperatuuri vahel üldkujul, valemi näol.

Arvutame, mille võrra suureneb varva pikkus temperatuuri tõusmisel 1° võrra. 50°-se temperatuuri puhul oli varva pikkus 1,0006 m, 80°-se temperatuuri puhul võrdus varva pikkus 1,00096 m. Tähendab, temperatuuri tõusmisel $80° - 50° = 30°$ võrra oli varva pikenemine

$$1{,}00096 - 1{,}0006 = 0{,}00036 \text{ (m)}.$$

Järelikult temperatuuri 1°-sele tõusule vastav pikenemine oli

$$0{,}00036 : 30 = 0{,}000012 \text{ (m)}.$$

Võttes varva pikkuse teistsuguste temperatuuride juures, näiteks 80° ja 350° puhul, ja sooritades vastavad arvutused, saame jällegi suuruse 0,000012. Seega, kui temperatuur tõuseb 1° võrra, siis pikeneb 1 m pikkune raudvarb 0,000012 m võrra. Seda teades, koostame varva pikkuse ja tema temperatuuri vahelise sõltuvuse üldvalemi.

Temperatuuri tõustes 1° võrra pikeneb varb 0,000012 m. Tähendab, temperatuuri tõustes $t°$ võrra on pikenemine $0{,}000012t$ m. Lisades selle pikenemise varva esialgsele pikkusele 0° juures (1 m) ja tähistades varva pikkuse $t°$ puhul tähega l, saame valemi:

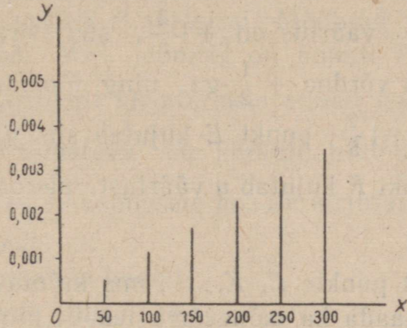
$$l = 1 + 0{,}000012t.$$

See valem võimaldab arvutada varva pikkust mistahes temperatuuri puhul. Võttes t väärtuseks 50°, 80°, 100° jne., saame l jaoks need väärtused, mis olid juba tabelis antud.

Funktsionaalse sõltuvuse niisugust väljendamisviisi valemi abil nimetatakse a n a l ü ü t i l i s e k s.

c) Lõpuks me kujutleme sageli näitlikkuse huvides sõltuvust kahe suuruse vahel g r a a f i l i s e l t — joonise, diagrammi (graafiku) abil. Antud näite puhul oleksime võinud toimida nii:

Tõmbame kaks ristuvat sirget OX ja OY. Paigutame sirgele OX alates punktist O lõigud, mis on võrdelised temperatuuriga, ning sirgele OY lõigud, mis on võrdelised varva pikenemisega, teatavas mõõtkavas (joonisel kujutab rõhtsirge üks jaotis 50° ja püstsirge üks jaotis 0,001 m).

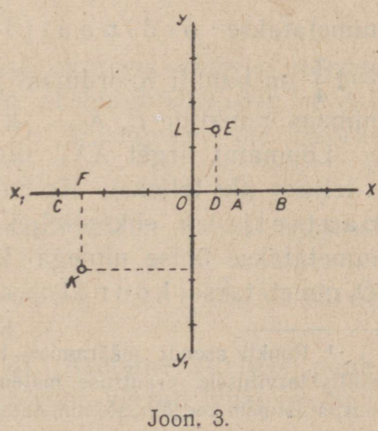


Joon. 2.

Iga t väärtuse jaoks püstitame vastavast punktist lõigu, mis on paralleelne sirgega OY ja võrdne varva pikenemisega (kokkulepitud mõõtkavas). Nii saame joonisel 2 kujutatud graafiku.

Funktsionaalse sõltuvuse graafilist kujutamist kasutatakse matemaatikas laialdaselt. Seejuures rakendatakse erilist meetodit, niinimetatud koordinaatide meetodit, millega nüüd tutvumegi.

27. Koordinaatide meetod. Võtame kaks ristuvat sirget XX_1 ja YY_1 (joon. 3), mis lõikuvad punktis O. Edasi võtame mingi sirglõigu (mille pikkus on näiteks 1 sentimeeter) pikkusühikuks ja lepime kokku, et sõltumatu muutuja x väärtusi kujutame sirgel XX_1, alates punktist O kui algusest, kusjuures x positiivsed väärtused asetame O-st paremale ja negatiivsed O-st vasakule. Seega lõik OA kujutab x väärtust, mis on võrdne $+1$-ga, lõik OB x väärtust, mis on võrdne $+2$-ga, lõik OC x väärtust, mis võr-



Joon. 3.

dub -3-ga, jne. Punkt O ise kujutab x väärtust, mis võrdub nulliga. Funktsiooni y väärtused, mis vastavad neile x väärtustele, kujutame sirgeil, mis on tõmmatud punktidest A, B, $C, \ldots$ paralleelselt sirgega YY_1 (teisiti öeldes: sirge XX_1 ristsirgetel), kusjuures funktsiooni positiivsed väärtused asetame sirgest XX_1 ülespoole, negatiivsed väärtused aga temast allapoole, näiteks, kui $x = +\frac{1}{2}$ ja y väärtus on $+1\frac{2}{5}$, siis sirgel XX_1 võtame lõigu OD, mis on võrdne $+\frac{1}{2}$-ga, ning tõmbame ristlõigu DE, mille pikkus on $+1\frac{2}{5}$; punkt E kujutab siis y väärtust, mis on võrdne $+1\frac{2}{5}$. Punkt K kujutab y väärtust, mis on võrdne $-1\frac{3}{4}$-ga, kui $x = -2\frac{1}{2}$, jne.

Tähendame, et punkte E, $K, \ldots$, mis kujutavad funktsiooni y väärtusi, võime saada ka mõnevõrra teisiti, nimelt: selle asemel et ristsirgetele DE, $FK, \ldots$ ehitada lõike, mis kujutavad y väärtusi, võime nad ehitada sirgele YY_1, alates punktist O, ja siis tõmmata nende lõikude lõpust sirged, mis on paralleelsed sirgega XX_1, kuni lõikumiseni vastavate ristsirgetega. Olles nii ehitanud lõigu $OL = +1\frac{2}{5}$ ja tõmmanud $LE \| OX$, saame punkti E, s. o. sama punkti, mille saime varem, võttes $DE = +1\frac{2}{5}$.

Arve, mis vastavad sirgele XX_1 ehitatavatele lõikudele OD, $OF, \ldots$, nimetatakse a b s t s i s s i d e k s ($\frac{1}{2}$ on punkti E abstsiss, $-\frac{5}{2}$ on punkti K abstsiss jne.); arve, mis vastavad sirge XX_1 ristsirgetele (või sirgele YY_1) ehitatavatele lõikudele DE, $FK, \ldots$, nimetatakse o r d i n a a t i d e k s ($1\frac{2}{5}$ on punkti E ordinaat, $-1\frac{3}{4}$ on punkti K ordinaat jne.); neid ja teisi kutsutakse ühise nimega punktide E, $K, \ldots$ k o o r d i n a a t i d e k s.

Lõpmatut sirget XX_1 nimetatakse a b s t s i s s t e l j e k s ehk x-teljeks (iks-teljeks); lõpmatut sirget YY_1 nimetatakse o r d i n a a t t e l j e k s ehk y-teljeks (igrek-teljeks); mõlemaid sirgeid nimetatakse ühise nimega k o o r d i n a a t t e l g e d e k s. Punkti O nimetatakse k o o r d i n a a t i d e a l g u s e k s[1].

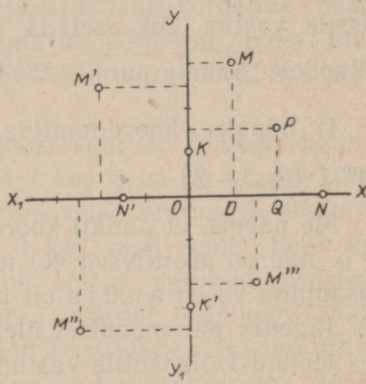
---

[1] Punkti asendi määramise tasapinnal kahe näidatud koordinaadi abil võttis tarvitusele prantsuse matemaatik R e n é D e s c a r t e s (1596—1650), mispärast neid koordinaate nimetatakse D e s c a r t e s'i k o o r d i n a a t i d e k s.

28. **Punkti asukoha määramine tasapinnal.** Kasutades koordinaatide süsteemi võime lahendada järgmised ülesanded.

a) O n a n t u d p u n k t t a s a p i n n a l; l e i d a t e m a k o o r d i n a a d i d a n t u d k o o r d i n a a t i d e s ü s t e e m i s. Olgu tasapinnal antud punkt P (joon. 4). Tõmbame sellest punktist x-teljele ristlõigu PQ. Mõõtnud kokkulepitud ühikuga lõigu OQ, leiame punkti P abstsissi. Mõõtnud lõiku PQ, leiame punkti P ordinaadi. Meie joonisel on punkti P abstsiss $+2$ ja ordinaat $+1\frac{1}{2}$. Harilikult kirjutatakse punkti koordinaadid sulgudesse seda punkti tähistava tähe kõrvale, näiteks $P\left(+2, +1\frac{1}{2}\right)$ ehk lihtsalt $P\left(2, 1\frac{1}{2}\right)$. Esimesele kohale kirjutatakse abstsiss, teisele kohale ordinaat.

Punkti koordinaatide leidmisel ei tohi unustada koordinaadi märki. Nii on punkti M''' koordinaadid $1\frac{1}{2}$ (abstsiss) ja -2 (ordinaat); punkti M'' koordinaadid on $-2\frac{1}{2}$ ja -3, jne.



Joon. 4.

Kui võtame punkti x-teljel, siis on tema ordinaat ilmselt null, abstsiss aga positiivne või negatiivne arv, mis oma absoluutväärtuselt on võrdne antud punkti kaugusega punktist O. Seesugused on näiteks punktid $N(3, 0)$ ja $N'\left(-1\frac{1}{2}, 0\right)$.

Kui punkt on võetud y-teljel, siis on tema abstsiss võrdne nulliga, ordinaat on aga arv, mis on absoluutväärtuselt võrdne antud punkti kaugusega punktist O. Niisugused on näiteks punktid $K(0, 1)$ ja $K'\left(0, -2\frac{1}{2}\right)$.

Koordinaatide alguse abstsiss ja ordinaat on ilmselt võrdsed nulliga.

b) L e i d a p u n k t t e m a a n t u d k o o r d i n a a t i d e j ä r g i. Vaatleme järgmisi juhtumeid.

1) Olgu punkti koordinaadid (1, 3). Asetame x-teljele punktist O p a r e m a l e lõigu, mis on võrdne võetud ühikuga. Saa-

dud punktist tõmbame ristsirge ja asetame sellele ülespoole x-telge lõigu, mis on võrdne kolme ühikuga. Saadud punkt M ongi otsitav punkt.

Eespool öeldust on selge, et me võiksime punkti M leida ka teisiti. Nimelt: asetame x-teljele ühikuga võrdse lõigu, y-teljele kolme ühikuga võrdse lõigu ja saadud punktidest tõmbame telgedega paralleelsed sirged. Nende sirgete lõikepunkt on punkt M.

2) Olgu punkti koordinaadid $\left(-2, 2\frac{1}{2}\right)$. On ilmne, et siin peab abstsissile -2 vastava lõigu asetama punktist O vasakule ja ordinaadile $2\frac{1}{2}$ vastava lõigu — ülespoole. Saadud punkt $M'\left(-2, 2\frac{1}{2}\right)$ ongi otsitav punkt.

3) Kui punkti koordinaadid on $\left(-2\frac{1}{2}, -2\right)$, siis tuleb abstsissile vastav lõik asetada vasakule ja ordinaadile vastav lõik allapoole. Saame punkti $M''\left(-2\frac{1}{2}, -3\right)$.

4) Lõpuks koordinaatide $\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$ järgi saame punkti $M'''\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$.

Me näeme, et punkti koordinaatidel on pluss- või miinusmärk, s. o. nad on positiivsed või negatiivsed, olenevalt sellest, millises tasapinna v e e r a n d i s on punkt. Me võime seda kujutada tabelis, lugedes parempoolset ülemist veerandit esimeseks ning jätkates loetelu kellaosutile vastupidises suunas:

Veerand	Abstsiss x	Ordinaat y
1.	+	+
2.	−	+
3.	−	−
4.	+	−

Harjutused.

Näidata joonisel punktid järgmiste koordinaatide järgi:

55. (2, 3), (3, 2), (2, −3), (−3, 2), (−3, −2).

56. $\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$, $\left(0, -2\frac{1}{2}\right)$, $\left(3\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-3\frac{1}{2}, 0\right)$, (0, 0).

II. Võrdelisus ja pöördvõrdelisus.

29. Võrdeline sõltuvus. Igaüks teab kogemuse järgi, et kui vee maht suureneb (või väheneb) mingi arv korda, siis sama arv korda suureneb (või väheneb) ka tema kaal. Näiteks 1 l vett kaalub 1 kg, 2 l vett kaalub 2 kg, $2\frac{1}{2}$ l vett kaalub $2\frac{1}{2}$ kg jne. (eeldatakse, mõistagi, et muud tingimused, mis mõjutavad vee kaalu, jäävad muutumatuks; näiteks vesi võetakse ühesuguselt puhas, ühe ja sama temperatuuriga jne.). Niisugust sõltuvust vee ruumala ja kaalu vahel nimetatakse võrdeliseks sõltuvuseks. Aritmeetikas öeldakse, et kaks suurust on omavahel võrdelises sõltuvuses (ehk on teineteisega võrdelised), kui ühe suuruse suurenemisel (või vähenemisel) mingi arv korda ka teine suurus suureneb (või väheneb) sama arv korda. Nii on kaaluga müüdava kauba hind võrdeline kauba kaaluga; töölistele makstav töötasu on võrdeline tööliste arvuga (muude võrdsete tingimuste puhul); murru suurus on muutumatu nimetaja korral võrdeline tema lugejaga; täisnurkse kolmnurga pindala on võrdeline tema alusega, kui kõrgus on muutumatu, ja võrdeline kõrgusega, kui alus on muutumatu, jne.

Olgu meil kaks mingisugust võrdelist suurust (näiteks kauba kaal ja tema hind) ning oletame, et kui üks neist on võrdne ühe suuruse ühikuga, siis teine on võrdne teise suuruse k ühikuga (näiteks kui kauba kaal on võrdne 1 kg, siis tema hind on 1 rubla). Kui nüüd oletame, et esimene suurus muutub võrdseks x ühikuga, siis muutub ka teine suurus ja võrdub y ühikuga (näiteks kui kaupa võetakse mitte 1 kg, vaid 3 kg, siis on ta hind mitte 1 rubla, vaid 3 rubla). Et meie poolt võetud suurused on võrdelised, siis peab arv y olema suurem või väiksem arvust k samas vahekorras, milles arv x on suurem või väiksem 1-st. Tähendab, me saame võrde:

$$y:k=x:1,$$

millest leiame:

$$y=kx.$$

30. Võrdelise sõltuvuse üldine definitsioon. Anname võrdelise sõltuvuse järgmise üldise definitsiooni.

Kaht suurust nimetatakse **võrdeliseks,** *kui sõltuvust nende vahel saab väljendada valemiga $y=kx$, milles x ja y on arvud, mis väljendavad võetud suuruste teineteisele vastavaid väärtusi, k aga on jääv arv (võrdne y väärtusega, mis vastab x väärtusele* 1). Seda jäävat arvu nimetatakse antud suuruste võrdeteguriks.

Esitatud definitsioon erineb aritmeetika kursuses antud definitsioonist selle poolest, et võrdetegur k võib olla ka negatiivne arv. Viimasel juhtumil on argumendi ja funktsiooni väärtuste märgid erinevad. Nagu geomeetriast teada, väljendatakse ringjoone pikkust valemiga $C=2\pi R$, kus raadius R ja ringjoone pikkus C on muutuvad suurused, 2π aga on jääv arv. Seepärast võime ütelda, et ringjoone pikkus on võrdeline tema raadiusega.

31. Pöördvõrdeline sõltuvus. Võib juhtuda, et kaks muutuvat suurust sõltuvad teineteisest nii, et ühe suuruse suurenedes teine suurus absoluutväärtuselt väheneb ja seejuures samas vahekorras, milles esimene suureneb. Niisuguseid suurusi nimetatakse aritmeetikas p ö ö r d v õ r d e l i s t e k s suurusteks (suurusi, mis on lihtsalt võrdelised, nimetatakse mõnikord p ä r i v õ r d e l i s t e k s suurusteks). Näiteks tundide arv, mille jooksul raudteerong sõidab ära kogu tee Moskvast Leningradini, on pöördvõrdeline selle rongi liikumise keskmise kiirusega, sest kiiruse suurenemisega $1\frac{1}{2}$ korda, 2 korda, ..., üldse teatavas vahekorras, väheneb tundide arv, mille jooksul rong läbib vahemaa Moskvast Leningradini, $1\frac{1}{2}$ korda, 2 korda, ..., üldse samas vahekorras, milles kiirus suurenes. Samuti on antud rahasumma, näiteks 100 rubla eest saadava kauba kaal pöördvõrdeline selle kauba kilogrammi hinnaga; aeg, mille jooksul töölised sooritavad neile antud töö, on pöördvõrdeline tööliste arvuga (mõistagi tingimusel, et kõik töölised töötavad ühesuguse tööviljakusega); murru suurus on pöördvõrdeline tema nimetajaga (muutumatu lugeja korral), jne.

Märkus. Selleks et kaks teineteisest sõltuvat suurust oleksid võrdelised (või pöördvõrdelised), ei piisa ainult sellest, et ühe suuruse suurenemisega suureneks ka teine suurus (võrdelisuse korral) või et ühe suuruse suurenemisega väheneks teine suurus (pöördvõrdelisuse korral). Näiteks, kui suureneb mingi liidetav, siis suureneb ka summa; kuid oleks ekslik ütelda, et summa on võrdeline selle liidetavaga, sest kui suurendame liidetavat näiteks kolm korda, siis kuigi summa suureneb, ei suurene ta mitte 3 korda. Samuti ei või näiteks ütelda, et vahe on pöördvõrdeline lahutatavaga, sest kui lahutatav suureneb näiteks 2 korda, siis vahe väheneb, kuid mitte 2 korda. On vajalik, et mõlema suuruse suurenemine või vähenemine toimuks ühes ja samas vahekorras.

Võtame kaks mingisugust pöördvõrdelist suurust ja oletame, et kui üks neist on võrdne ühega, siis teine võrdub k-ga. Kui nüüd oletame, et need suurused muutusid, kusjuures esimene sai võrdseks x-ga, teine y-ga, siis arv y peab osutuma suuremaks või väiksemaks arvust k samas vahekorras, milles arv x on väiksem või suurem kui 1, s. o. teiste sõnadega: samas vahekorras, milles 1 on suurem või väiksem kui x. Tähendab, me saame võrde:

$$y : k = 1 : x, \text{ kust } yx = k.$$

32. Pöördvõrdelise sõltuvuse üldine definitsioon.

Kaht suurust nimetatakse **pöördvõrdelisteks**, *kui ühe suuruse arvulise väärtuse korrutis teise suuruse vastava arvulise väärtusega võrdub jääva arvuga.*

Märgime, et käesolevas paragrahvis antud definitsioon erineb aritmeetika kursuses antud definitsioonist selle poolest, et jääv arv k võib olla nii positiivne kui ka negatiivne. Viimasel juhtumil on argumendi ja funktsiooni arvuliste väärtuste märgid erinevad.

Valem $yx = k$ on ühevääarne valemiga $y = \frac{k}{x}$, mida võib sõnastada nii:

kui kaks suurust on pöördvõrdelised, siis ühe suuruse arvuline väärtus võrdub mingi jääva suuruse ja teise suuruse vastava arvulise väärtuse jagatisega.

Harjutused.

57. Millises sõltuvuses on ühtlasel liikumisel:

a) antud aja jooksul läbitud tee ja liikumiskiirus?
b) aeg, mille jooksul läbitakse antud tee, ja liikumiskiirus?
c) tee ja aeg, mille jooksul läbitakse tee (antud kiirusega)?

Märkus. Need sõltuvused tulevad kergesti ilmsiks ühtlase liikumise valemite vaatlemisel: $s = vt$, kus s on tee, v — liikumiskiirus ja t — aeg, mille jooksul läbiti tee.

58. Millises sõltuvuses on:

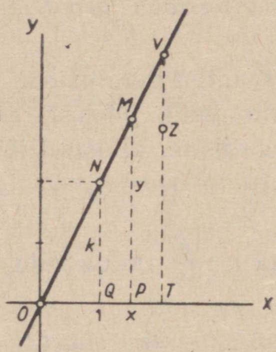
a) täisnurkse kolmnurga pindala ja alus (muutumatu kõrguse korral)?
b) pindala ja kõrgus (muutumatu aluse korral)?
c) alus ja kõrgus (muutumatu pindala korral)?

59. Kas järgmised muutuvate suuruste paarid on teineteisega võrdelised:

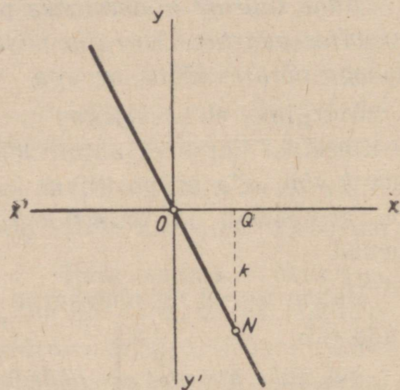
a) ringjoone kaar ja sellele kaarele toetuv kesknurk?
b) kõõl ja sellele toetuv kesknurk?
c) ringjoone pikkus ja raadius?
d) ruudu pindala ja külg?
e) ringi pindala ja raadius?

33. Võrdelise sõltuvuse graafik. Tõestame, et funktsiooni $y=kx$ graafik on sirgjoon. Lihtsuse pärast piirdume juhtumiga, kus k on positiivne.

$x=0$ puhul on $y=k \cdot 0=0$; tähendab, punkt, mille mõlemad koordinaadid võrduvad nulliga, s. o. koordinaatide algus, asetseb otsitaval graafikul (joon. 5).



Joon. 5.



Joon. 5'.

$x=1$ puhul on $y=kx=k$. Punkti abstsissiga 1 ja ordinaadiga k tähistame tähega N. See punkt asetseb samuti meie graafikul.

Tõestame, et sirge ON iga punkt asetseb meie graafikul. Teiste sõnadega: tõestame, et sirge ON mistahes punkti M abstsiss x ja ordinaat y on omavahel seotud võrrandiga $y=kx$.

Võtame sirgel ON mistahes punkti M. Tõmbame läbi M sirge MP, mis on paralleelne ordinaatteljega. Kolmnurkade OPM ja OQN sarnasusest järeldub, et

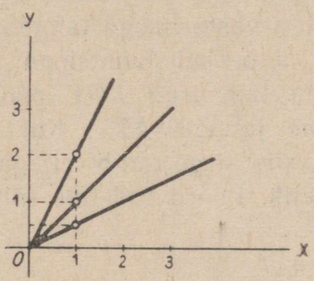
$$PM : OP = QN : OQ.$$

Kuid $OQ=1$ ja $QN=k$, seepärast

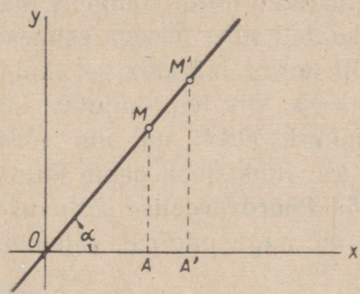
$$PM : OP = k, \quad PM = k \cdot OP.$$

Et PM on punkti M ordinaat ja OP — punkti M abstsiss, siis on meie väide tõestatud: sirge ON iga punk asetseb funktsiooni $y=kx$ graafikul. Jääb tõestada, et pole ühtki graafiku punkti, mis ei asetseks sirgel ON. Kui niisugune punkt Z oleks olemas, siis, tõmmates läbi selle punkti sirge TZ paralleelselt y-teljega ning võttes sirge TZ ja sirge ON lõikepunktiks V, saaksime vastuolu. Tõepoolest, et punkt V asetseb tõestuse järgi samuti meie graafikul, siis vastaksid ühele ja samale abstsissile OT kaks graafiku ordinaati, nimelt TZ ja TV, samal ajal kui abstsissile OT vastab tõeliselt ainus ordinaat TV, mis on võrdne suurusega $k \cdot OT$.

Seega:
võrdelise sõltuvuse ($y=kx$) graafik on sirge, mis läbib koordinaatide alguse ja punkti N, mille abstsiss on 1, ordinaat aga on



Joon. 6.



Joon. 7.

võrdne võrdeteguriga (meie joonis on tehtud juhuks, kui $k=2$).

Märkus. Me vaatlesime funktsiooni $y=kx$ graafikut ainult juhtumil, kui k on positiivne. Kuid meie arutlused jäävad jõusse ka sel korral, kui k on negatiivne. Sirge, mis on funktsiooni $y=kx$ graafikuks juhtumil, kui k on negatiivne, asetseb ainult nurkades $X'OY$ ja XOY' (s. o. teises ja neljandas veerandis); tõepoolest, juhtumil, kui k on negatiivne, asetseb punkt N koordinaatidega $(1, k)$ neljandas veerandis, otsitav graafik aga on sirge ON (joon. 5′).

34. Sirge asetuse muutumine võrdeteguri muutumisel. Ehitame ühel ja samal joonisel sirged, mis kujutavad funktsioone:

$$y=\frac{1}{2}x; \quad y=x; \quad y=2x,$$

millel on positiivsed võrdetegurid, mis kasvavad funktsioonilt funktsioonile. Jooniselt näeme, et sedamööda, kuidas kasvab võrdetegur, kaldub sirge ikka rohkem ja rohkem x-teljest eemale, lähenedes y-teljele. Seega siis iseloomustab võrdetegur k funktsioonis $y=kx$ nurka, mille on moodustanud sirge poolteljega OX; seepärast nimetatakse arvu k ka funktsiooni $y=kx$ graafiliselt kujutava sirge t õ u s u k s. Kuna sellest võrdusest on näha, et $k=\frac{y}{x}$, siis võib ütelda, et sirge tõus on võrdne funktsiooni (ordinaadi) mingi väärtuse ja argumendi (abstsissi) vastava väärtuse suhtega (joon. 7).

$$k=\frac{MA}{OA}=\frac{M'A'}{OA'}=\ldots=\tan\alpha.$$

Siit nähtub, et k on sirge poolt abstsisstelje positiivse suunaga moodustatud nurga tangens (nagu trigonomeetriast teada, võrdub ühe kaateti suhe teisega esimese kaateti vastasnurga tangensiga).

On tarvis märkida, et kui $k=1$, s. o. kui funktsioon omab kuju $y=x$, siis teda kujutav sirge on täisnurga XOY poolitaja (kolmnurk OAM on siis võrdhaarne ja $\angle\alpha=45°$). Kui $k=0$, s. o. kui funktsioon omab kuju $y=0$, siis sirge ühtib teljega OX.

35. Pöördvõrdelise sõltuvuse graafik. Pöördvõrdeline sõltuvus avaldub, nagu nägime, valemiga:

$$xy=k \text{ ehk } y=\frac{k}{x}.$$

Ehitame graafiku erijuhtumiks, kui $k=6$, s. o. kui funktsioon on $y=\frac{6}{x}$.

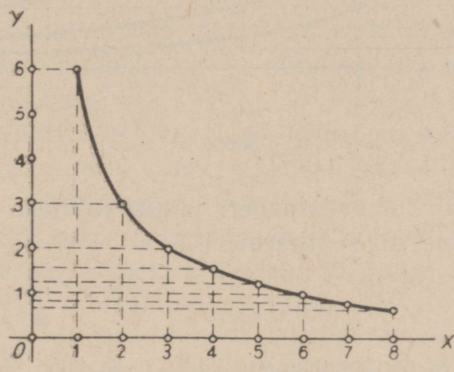
Koostame selle funktsiooni väärtuste tabeli argumendi positiivsete väärtuste jaoks, näiteks seesuguse:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y	6	3	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{5}$	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4}$	...

Kandes tabelis esitatud väärtused joonisele ja ühendades kõik graafikul saadud punktid kõvera abil (käsitsi või erilise joonestamisjoonlaua abil, mida nimetatakse l e k a a l i k s), saame pöördvõrdelise sõltuvuse $y=\frac{6}{x}$ graafiku (joon. 8).

Pöörame tähelepanu selle graafiku järgmistele omadustele:

abstsissi x piiramatul suurenemisel ($x=9$, 10, 11, 12, ...) kõvera ordinaat üha väheneb, lähenedes nullile, nii et kõver, sedamööda, kuidas ta pikeneb paremale, läheneb ikka rohkem ja rohkem x-teljele, kuid ei puutu sellega iialgi kokku (murd $\frac{6}{x}$ ei saa kunagi muutuda nulliks). Samuti, kui x väärtuseks võtame murrud $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ jne., mis üha lähenevad nullile, siis hakkab y ikka rohkem kasvama ($y=12$, 24, 48, ...), nii et kõvera haru tõuseb pikenemisel vasakule piiramatult üles, lähenedes ikka rohkem ja rohkem y-teljele, kuid ei puutu sellega iialgi kokku (kui $x=0$, lakkab murd $\frac{6}{x}$ olemast).

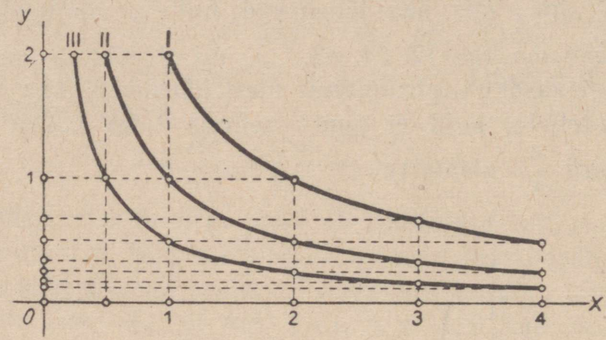


Joon. 8.

Joonis 9, mis on tehtud suuremas mõõtkavas kui eelmine, kujutab funktsiooni $y=\frac{k}{x}$ kolme graafikut: kui $k=2$; 1; $\frac{1}{2}$. Neil graafikutel on samad omadused, mis eelmise joonise graafikulgi; nad erinevad üksteisest ainult suurema või väiksema surutusega täisnurga tipu poole.

Funktsiooni $y=\frac{k}{x}$ graafikut nimetatakse **hüperbooliks**. Positiivse k ja x korral asetseb hüperbool esimeses veerandis; negatiivse k ja positiivse x korral on ta neljandas veerandis. Argumendi x negatiivsete väärtuste puhul saadakse hüperbooli teine haru. Kui $k>0$, siis asetseb ta kolmandas veerandis; kui aga $k<0$, siis asetseb ta teises veerandis.

Olgu tähendatud, et graafikute valmistamiseks on kõige sobivam võtta kanvaapaber (võrkpaber), mis võrdsel kaugusel seisvate rõht- ja püstsirgetega on jaotatud väikesteks ruudukesteks (näiteks ruutmillimeetriteks; siis nimetatakse paberit millimeetripaberiks). Sirged OX ja OY tuleb sellel paberil võtta nii, et nad ühtiksid mingite sirgetega paberil. Pikkusühikuks



Joon. 9.

võetakse siis üks või mitu paberi jaotist (näiteks millimeetripaberil — millimeeter või sentimeeter).

Harjutused.

60. Eeldades, et ühtlase liikumise kiirus v on jääv, kujutada graafiliselt tee s ja t funktsioonina (nimelt: $s=vt$), võttes t muutuvaks abstsissiks ja s muutuvaks ordinaadiks.

61. Keha vaba langemise meeter-sekundeis väljendatud kiirust v võib avaldada valemiga $v=gt$, kus t tähendab langemise algusest möödunud sekundite arvu ja g — langemise kiirendust, mis võrdub 9,8 m sekundis.

Avaldada v graafiliselt aja t funktsioonina (võttes abstsissi t ühikuks sentimeetri ja ordinaadi v ühikuks millimeetri).

62. Ehitada ühel ja samal joonisel funktsioonide $y=\frac{1}{3}x$; $y=x$ ja $y=3x$ graafikud.

63. Ehitada funktsioonide $y=\frac{4}{x}$ ja $y=\frac{1}{3x}$ graafikud.

64. Ehitada funktsiooni $y=\frac{2,1}{x}$ graafik, andes x-le väärtused: 5; 4; 3; 2; 1; 0,7; 0,5; 0,4 ja samasugused negatiivsed väärtused (ühikuks võtta sentimeeter).

Joonestatud graafikuist leida y suurus, kui: 1) $x=-2,2$ ja 2) $x=3,4$.

36. Esimese astme kaksliige. Ülesanne. Raudvarva pikkus 0° temperatuuri puhul on 1 m; leida, missugune pikkus l on sellel varval, kui ta soojeneb kuni $t°$ ja kui on teada, et 1° võrra soojenedes suureneb varva pikkus 0,000012 võrra sellest pikkusest, mis tal on 0° puhul.

Soojenemisel 1° võrra peab varva pikkus, mis 0° puhul on võrdne ühe meetriga (100 cm), suurenema 100 · 0,000012 cm, s. o. 0,0012 cm võrra. Soojenemisel $t°$ võrra peab pikenemine olema t korda suurem kui soojenemisel 1° võrra, seepärast on kogu pikenemine $0{,}0012t$ cm. Liites selle pikenemise varva algpikkusega (0° puhul), s. o. 100 sentimeetriga, saame:

$$l = 0{,}0012t + 100.$$

Pole raske näha, et see on sama valem, mille saime juba varem (§ 26), ainult pikkus ei ole nüüd väljendatud mitte meetreis, vaid sentimeetreis.

Kui temperatuuri t, milleni varb on soojenenud, vaadelda kui sõltumatut muutujat, siis võime pikkust l vaadelda kui temperatuuri funktsiooni. Tähistades tava kohaselt sõltumatu muutuja tähega x ja funktsiooni tähega y, võime sõltuvust varva pikkuse ja tema temperatuuri vahel väljendada järgmise valemiga:

$$y = 0{,}0012x + 100$$

või üldisemal kujul:

$$y = kx + b,$$

kui tähtedega k ja b tähistame jäävaid arve, mis kuuluvad sellesse valemisse.

Algebralist avaldist $kx+b$, milles k ja b on mingisugused jäävad arvud ja x on sõltumatu muutuja, nimetatakse e s i m e s e a s t m e k a k s l i i k m e k s (x suhtes). Seesugused funktsioonid esinevad paljude ülesannete ja küsimuste lahendamisel.

Kaksliikme j u u r e k s e. n u l l k o h a k s nimetatakse argumendi x seda väärtust, mille puhul kaksliige muutub nulliks. Et seda väärtust leida, peab võrdsustama kaksliikme nulliga ja lahendama saadud võrrandi. Seega kaksliikme $1\frac{1}{2}x+2$ juur leitakse, kui lahendatakse võrrand

$$1\frac{1}{2}x + 2 = 0,$$

$$1\frac{1}{2}x = -2, \quad x = -2 : \frac{3}{2} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}.$$

37. Esimese astme kaksliikme graafik. Võtame mingi kaksliikme erijuhtumi, näiteks sellise:

$$y=1\frac{1}{2}x+2.$$

Jätame esialgu arvu 2 kõrvale ja võtame lihtsama funktsiooni: $y=1\frac{1}{2}x$. See funktsioon väljendab võrdelist sõltuvust y ja x vahel ning selle graafikuks on, nagu teame, sirge (joon. 10), mis läbib koordinaatide alguse ja punkti M, mille abstsiss on 1 ja ordinaat $1\frac{1}{2}$.

Kui me anname argumendile x mitte üksnes positiivseid väärtusi, vaid ka negatiivseid, siis pikeneb see sirge allapoole, läbides punkti M', mille abstsiss on -1 ja ordinaat $-1\frac{1}{2}$. Kui me võtame nüüd varem kõrvalejäetud arvu 2, s. o. võtame funktsiooni $y=1\frac{1}{2}x+2$, siis näeme, et kõik selle funktsiooni ordinaadid on funktsiooni $y=1\frac{1}{2}x$ vastavaist ordinaatidest kahe ühiku võrra suuremad. Tähendab, funktsiooni $y=1\frac{1}{2}x+2$ graafiku saame funktsiooni $y=1\frac{1}{2}x$ graafikust, kui sirge MM' kanname paralleelselt iseendaga 2 ühiku võrra ülespoole. Selleks asetame teljele OY lõigu $OA=2$ ja joonestame läbi punkti A sirge, mis on paralleelne sirgega MM'. See sirge ongi funktsiooni $y=1\frac{1}{2}x+2$ graafik. Selle sirge ja x-telje lõikepunkti abstsiss OD on võrdne kaksliikme juurega, sest selle abstsissi puhul ordinaat y (s. o. kaksliikme enda väärtus) võrdub nulliga (meie joonisel $OD=-1\frac{1}{3}$).

Kui võtame funktsiooni $y=1\frac{1}{2}x-2$, siis tuleb lõik OA asetada punktist O allapoole, sest siis tuleks funktsiooni $y=1\frac{1}{2}x$ kõiki ordinaate vähendada 2 ühiku võrra. Me saame siis sirge $A'B'$, mis on paralleelne sirgega MM' ja mis lõikab y-teljest lõigu $OA'=-2$. Selle kaksliikme juur võrdub sirge $A'B'$ ja x-telje lõikepunkti abstsissiga (joonisel võrdub see abstsissiga $+1\frac{1}{3}$).

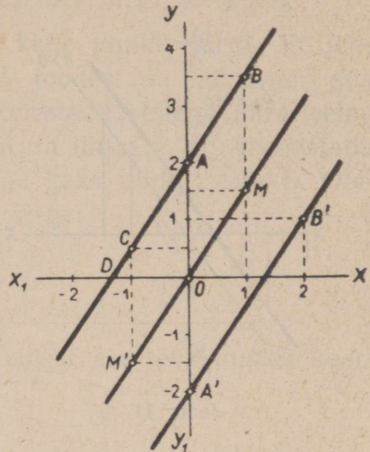
Kui funktsioonis $y=kx+b$ kordaja k on negatiivne arv (näiteks $y=-1\frac{1}{2}x+2$), siis abisirge, mis kujutab graafiliselt funktsiooni $y=kx$, läheb läbi nurkade X_1OY ja XOY_1; vastavalt sellele muutub ka sirge BC siht. Niisiis:

kaksliikme $y=kx+b$ graafik on sirgjoon, mis on paralleelne funktsiooni $y=kx$ kujutava sirgega ning lõikab y-teljest lõigu, mille suurus on b.

Selle tõttu, et funktsiooni $y=kx+b$ graafik on sirgjoon, nimetatakse seda funktsiooni ennast l i n e a a r f u n k t s i o o n i k s.

Selle asemel, et ütelda: «Sirge, mis kujutab funktsiooni $y=kx+$ $+b$», ütleme edaspidisel käsitlusel lühidalt: «Sirge $y=kx+b$».

Sirge $y=kx+b$ poolt x-teljega moodustatud nurk on võrdne nurgaga, mille moodustab x-teljega sirge $y=kx$; järelikult see nurk oleneb kordaja k suurusest ja seepärast nimetatakse seda kordajat üldkujulises kaksliikmes $kx+b$ t õ u s u k s.



Joon. 10.

Arvu b kaksliikmes $kx+b$ nimetatakse a l g o r d i n a a d i k s, see on ordinaat, mis vastab abstsissi algväärtusele $x=0$; ta kujutab endast y-telje lõiku, mille eraldab kaksliiget kujutav sirge.

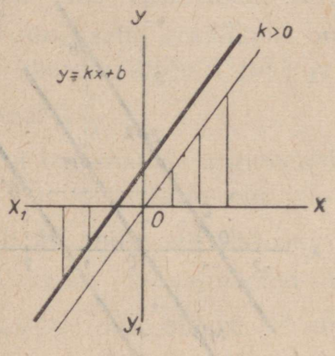
Kordaja k, nagu nägime (§ 34), on võrdne sirge $y=kx$ (ja järelikult temaga paralleelse sirge $y=kx+b$) ning x-telje positiivse suuna poolt moodustatud nurga tangensiga.

38. Kaksliikme $y=kx+b$ muutumine sõltuvalt x muutumisest. Sirge $y=kx$, mis on paralleelne sirgega $y=kx+b$, läbib nurki XOY ja X_1OY_1, kui $k>0$, ning nurki X_1OY ja XOY_1, kui $k<0$.

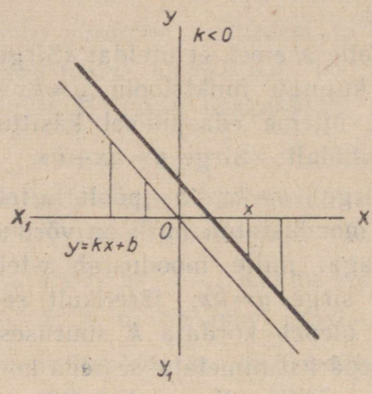
Järelikult esimesel juhtumil sirge $y=kx+b$ tõuseb üles (joon. 11), teisel juhtumil aga laskub alla (kui teda vaadelda suunas vasakult paremale, joon. 12).

Kui võtame arvesse, et negatiivsed arvud on seda suuremad, mida väiksemad on nende absoluutväärtused, siis võime ütelda (joon. 12), et see kasvamine või kahanemine on p i i r a m a t u ja seejuures ü h t l a n e, s. o. x suurenemisega ühe ja sama arvu võrra kasvab või kahaneb funktsioon samuti ühe ja sama arvu võrra.

39. **Märkused.** 1) Kui tõus k on võrdne nulliga, siis muutub kaksliige üksliikmeks ja $y=b$. See tähendab, et graafilisel kujutamisel peab tekkima selline sirge, mille kõikidel punktidel on üks ja sama ordinaat b, kuid abstsiss võib olla milline tahes. Seesugune joon on ilmselt x-teljega paralleelne sirge, mis lõikab

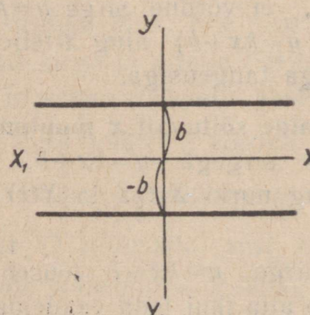


Joon. 11.

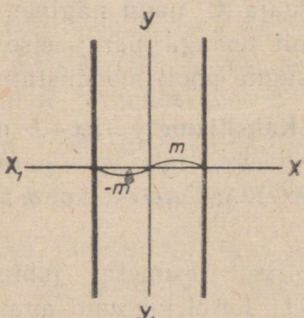


Joon. 12.

y-teljest lõigu b. Tähendab, positiivse b korral asetseb see sirge pealpool x-telge, negatiivse b korral aga selle all (joon. 13); nii ühel kui ka teisel juhtumil jääb x-i muutumise korral funktsioon muutumatuks (võrdseks b-ga).



Joon. 13.



Joon. 14.

Eriti kui $k=0$ puhul ka veel $b=0$, s. o. kui lineaarfunktsioon on $y=0$, siis on funktsiooni graafikuks x-telg (selle telje iga punkti ordinaat $y=0$, abstsiss on aga meelevaldne).

2) Kui mingi sirge on paralleelne y-teljega, siis võivad selle sirge punkti ordinaadid omada mistahes väärtusi, abstsiss on aga

kõikidel punktidel üks ja sama, nimelt: abstsiss on võrdne positiivse või negatiivse lõiguga, mille sirge lõikab x-teljest. Järelikult niisugust sirget võib väljendada võrrandiga $x=m$ (ordinaat y, mis ei esine võrrandis, jääb meelevaldseks). Eriti, kui $m=0$, siis saadakse võrrand $x=0$, mis väljendab, et iga punkti abstsiss on 0 ja ordinaat milline tahes. See sirge on y-telg.

40. Sirge $y=kx+b$ joonestamine kahe punkti järgi. Et joonestada sirge $y=kx+b$, võib algul joonestada abisirge, mis kujutab funktsiooni $y=kx$, ja siis joonestada sellega paralleelne sirge, mis lõikab y-teljest lõigu b. Kuid lihtsam on joonestada sirge $y=kx+b$, leides enne selle sirge kaks mingit punkti. Oletame näiteks, et on vaja joonestada sirge:

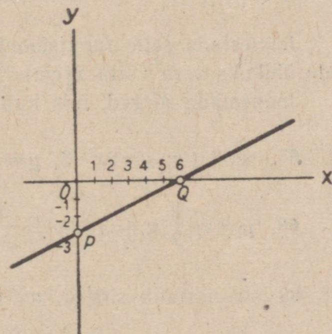
$$y=\frac{1}{2}x-3.$$

Selleks leiame mingi kahe sellel sirgel asetseva punkti koordinaadid, näiteks nende punktide koordinaadid, kus sirge lõikab koordinaatide telgi. Nende punktide leidmiseks anname võrrandis abstsissile x väärtuse 0 ja leiame ordinaadi y vastava väärtuse; siis anname ordinaadile y väärtuse 0 ja leiame abstsissi x vastava väärtuse; nii leiame, et

1) kui $x=0$, siis $y=-3$;

2) kui $y=0$, siis $\frac{1}{2}x-3=0$

ja $x=6$.



Joon. 15.

Punkt abstsissiga 0 ja ordinaadiga -3 on punkt P (joon. 15); punkt abstsissiga 6 ja ordinaadiga 0 on punkt Q; tähendab, otsitav graafik on sirge PQ, mis läbib need kaks punkti.

Kui koordinaatide telgede lõikepunktid (või üks neist) ei asetse joonise piirides, siis võib otsida teisi punkte, mis asetsevad joonisel [1].

---

[1] Et vähendada sirge joonestamisel tekkivat viga, on soovitav, et need kaks punkti, mille järgi joonestatakse sirge, asetseksid teineteisest võimalikult kaugel; siis teatav ebatäpsus joonlaua asetamisel, mida on väga raske vältida, avaldab joonestatava sirge sihile vähem mõju.

Harjutused.

65. Kui x on kraadide arv, mida näitab Celsiuse termomeeter, ja y on kraadide arv, mida näitab sama temperatuuri puhul Fahrenheiti termomeeter, siis võib sõltuvust nende arvude vahel avaldada valemiga:

$$y = \frac{9}{5} x + 32.$$

Joonestada selle funktsiooni graafik, võttes x abstsissiks ja y ordinaadiks (abstsisside ühikuks võib võtta sentimeetri või pool sentimeetrit, ordinaatide ühikuks aga 1 mm).

66. Hoiuse iga rubla, mis kannab $p\%$, annab aastas tulu $\frac{p}{100}$ rubla; x aasta jooksul ühelt rublalt saadud tulu on $\frac{p}{100} \cdot x$ (rubla); järelikult x aasta pärast muutub iga rubla $1 + \frac{p}{100} \cdot x$ (rublaks). Seega, märkides tähega y suuruse, milleni kasvab 1 rubla x aasta jooksul, võime kirjutada valemi:

$$y = 1 + \frac{p}{100} \cdot x.$$

Joonestada selle funktsiooni graafik, võttes $p=3$ (abstsisside ja ordinaatide ühikuks võib võtta 2 cm).

Joonestada sirged, mis kujutavad funktsioone:

67. $y=1+x$; $y=2x-3$; $y=\frac{1}{2}x+3$.

68. $y=-\frac{1}{2}x+3$; $y=\frac{3}{5}x-\frac{3}{8}$; $y=0{,}7x+2$.

69. Joonestada sirged, mille võrrandid on:

$$3y+x=0; \quad x+y+5=0; \quad 4x+3y=18.$$

70. Kontrollida graafiliselt, kas kolm sirget, mille võrrandid on $2x+3y=13$; $5x-y=7$; $x-4y+10=0$, lõikuvad ühes punktis.

Kolmas jagu.

Ruutfunktsioon.

I. Täiendavaid andmeid ruutvõrrandeist.

41. Ruutvõrrandi lahendite valem. Algebra kursuse algosas on tuletatud täieliku ja mittetäieliku ruutvõrrandi lahendite leidmiseks järgmised valemid:

1) $ax^2=0$; võrrandi mõlemad lahendid võrduvad ilmselt nulliga.

2) $ax^2+c=0$; lahendite valem on: $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

3) $ax^2+bx=0$; siis $x_1=0$; $x_2=-\frac{b}{a}$.

4) $x^2+px+q=0$; lahendite valem on:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \qquad \text{ehk } x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

5) Lõpuks täieliku ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendite valem on $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Viimane valem on kõige üldisem; kõik ülejäänud saadakse temast kui erijuhtumid. Oletades, et selles valemis $a=1$, saame valemi (4) (sel juhul $b=p$ ja $c=q$); oletades, et $c=0$, saame juhtumi (3); kui $b=0$, saame valemi (2), ja lõpuks saame esimese juhtumi, kui üldvalemis võtame $b=c=0$.

42. Diskriminant. Vaatleme mitmesuguseid juhtumeid, mis võivad esineda ruutvõrrandi lahendamisel olenevalt kordajate arvulistest väärtustest.

1. $b^2-4ac>0$. Sel juhul on juurealune avaldis positiivne. Tema ruutjuurel on kaks väärtust ning järelikult võrrandil on kaks erinevat reaalset lahendit:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

2. $b^2-4ac=0$. Sel juhul võrdub lugeja teine liige nulliga ja võrrandil on kaks võrdset lahendit:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

3. $b^2-4ac<0$. Mõlemad lahendid on kompleksed (vt. § 138).

Nii näeme, et ruutvõrrandil on reaalsed (erinevad või võrdsed) või kompleksed lahendid olenevalt sellest, kas võrrandi kordajaist moodustatud juurealune avaldis b^2-4ac on suurem, võrdne või väiksem kui null. Selle avaldise erilise tähenduse tõttu kannab ta v õ r r a n d i d i s k r i m i n a n d i nimetust. (Diskriminant tähendab tõlkes e r i s t a j a.)

43. Ruutvõrrandi lahendite omadused (Viëta teoreem). Võtame taandatud ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahendite valemi:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}; \quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Kui me need võrdused liidame liikmeti, siis juured koonduvad ja me saame:

$$\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p.}$$

Kui me samad võrdused korrutame liikmeti, siis saame:

$$x_1x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2.$$

Milline ka oleks juurealune arv, alati on

$$\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Järelikult

$$\boldsymbol{x_1x_2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q.}$$

Seega:

taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub teise liikme kordajaga, mis on võetud vastupidise märgiga, nende lahendite korrutis võrdub aga vabaliikmega.

Võtame nüüd üldkujulise ruutvõrrandi: $ax^2+bx+c=0$.

Jaganud kõik võrrandi liikmed a-ga, muudame selle võrrandi äsja eespool vaadeldud võrrandi kujuliseks:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0;$$

järelikult taandamata täieliku võrrandi jaoks saame:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ ja } x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Järeldused. 1) Kasutades neid omadusi võime kergesti koostada ruutvõrrandi, mille lahenditeks on antud arvud.

Olgu näiteks vaja koostada võrrand, mille lahenditeks on arvud 2 ja 3. Siis võrdustest $2+3=-p$ ja $2\cdot 3=q$ leiame: $p=-5$ ja $q=6$; järelikult saame võrrandi: $x^2-5x+6=0$.

Samuti leiame, et 3 ja -7 on lahenditeks võrrandile: $x^2-[3+(-7)]x+3(-7)=0$, s. o. $x^2+4x-21=0$; arvud 3 ja 0 on võrrandi $x^2-3x=0$ lahendid.

2) Samade omaduste abil võime ruutvõrrandit lahendamata leida tema lahendite märgid, kui need lahendid on reaalsed. Olgu antud näiteks võrrand x^2+8x+ $+12=0$. Et selles näites avaldis $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$, s. o. 4^2-12, on positiivne arv, siis mõlemad lahendid on reaalsed. Pannes tähele, et võrrandi vabaliige on positiivne, järeldame, et ka lahendite korrutis peab olema positiivne arv, s. o. lahenditel peab olema üks ja seesama märk. Selleks märgiks peab olema miinusmärk, sest lahendite summa on negatiivne (-8). Võrrandil $x^2+8x-12=0$ on erinevate märkidega lahendid (sest nende korrutis on negatiivne), kusjuures negatiivsel lahendil on suurem absoluutväärtus (sest lahendite summa on negatiivne) jne.

Harjutused.

Millega võrduvad iga järgneva võrrandi lahendite summa ja korrutis:

71. $x^2-8x-9=0$; $x^2-1=-x$; $x^2+2=x$; $6-5x+3x^2=0$.

72. $\frac{1}{2}x^2=2x+1$; $x^2-7x=0$.

Kontrollida Viëta teoreemi järgmiste võrrandite puhul:

73. $x^2-6x+9=0$; $9x^2-30x+25=0$.

74. $x^2+16=0$; $x^2+4x+7=0$.

75. Üks ratsionaalsete kordajatega ruutvõrrandi lahend on $3+\sqrt{2}$; milline on teine lahend?

Koostada ruutvõrrandid, mille lahenditeks on järgmised arvud.

76. 8 ja 2; 8 ja -2; -8 ja 2; -8 ja -2.

77. 5 ja 0; -5 ja 0; 4 ja 4; -4 ja -4.

44. Teise astme kolmliige. Avaldist ax^2+bx+c, milles x tähistab sõltumatut muutujat ning a, b ja c mingisuguseid jäävaid arve, nimetatakse r u u t f u n k t s i o o n i k s ehk t e i s e a s t m e k o l m l i i k m e k s. Erinevus niisuguse kolmliikme ja võrrandi $ax^2+bx+c=0$ vahel seisab selles, et võrrandis tähistab täht x ainult neid arve, mis rahuldavad võrrandit, sellal kui ta kolmliikmes tähistab mistahes arvu. x väärtusi, mis muudavad kolmliikme nulliks, nimetatakse tema n u l l k o h t a d e k s e. j u u r t e k s; tähendab kolmliikme ax^2+bx+c juured on ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid.

Erijuhtumil, kui $a=1$, omandab kolmliige kuju x^2+px+q; kui $b=0$ või kui $c=0$, muutub kolmliige kaksliikmeks ax^2+c või ax^2+bx.

45. Teise astme kolmliikme lahutamine tegureiks. Võtame algul kolmliikme x^2+px+q, milles x^2 kordaja on 1. Lahendanud taandatud ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$, leiame tema lahendid x_1 ja x_2. Nagu äsja nägime, $x_1+x_2=-p$ ja $x_1x_2=q$.

Neist võrdustest leiame: $p=-(x_1+x_2)$ ja $q=x_1x_2$.

Asetame need avaldised kolmliikmesse p ja q asemele ning teisendame seejärel hulkliiget järgmiselt:

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=$$
$$=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=(x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2)=$$
$$=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2).$$

Seega:

kolmliige x^2+px+q lahutub kaheks teguriks, milledest esimene võrdub arvu x ja kolmliikme ühe juure vahega ning teine võrdub arvu x ja kolmliikme teise juure vahega.

Näited.

1) $x^2+5x-14=0$; $x=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+14}=-\frac{2}{5}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}$;

$$x_1=-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}=2;\ x_2=-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}=-7;$$

$$x^2+5x-14=(x-2)[x-(-7)]=(x-2)(x+7).$$

2) $x^2-8x+5=0$; $x=4\pm\sqrt{16-5}=4\pm\sqrt{11}$;

$$x_1=4+\sqrt{11};\ x_2=4-\sqrt{11};$$

$$x^2-8x+5=[x-(4+\sqrt{11})][x-(4-\sqrt{11})]=$$
$$=(x-4-\sqrt{11})(x-4+\sqrt{11}).$$

3) $x^2+px+q=0$; $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$;

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$$

$$x^2+px+q=\left[x-\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right]\left[x-\left(-\frac{p}{2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right]=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right).$$

Nüüd võtame kolmliikme ax^2+bx+c, milles x^2 kordaja on mistahes arv. Seda kolmliiget võib kujutada nii:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Sulgudes seisev avaldis on x^2+bx+q kujuline kolmliige. Tema juured x_1 ja x_2 on samad, mis kolmliikmel ax^2+bx+c. Leidnud need, võime eelmises paragrahvis tõestatu põhjal selle kolmliikme lahutada tegureiks järgmiselt:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2).$$

Järelikult $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Seega kolmliikme ax^2+bx+c tegureiks lahutus erineb kolmliikme x^2+px+q tegureiks lahutusest ainult täiendava teguri a poolest.

Näited.

1) Kolmliikme $2x^2-2x-12$, mille juured on 3 ja -2, võib lahutada tegureiks nii: $2(x-3)(x+2)$.

2) Kolmliige $3x^2+x+1$, mille juured on

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{-11}}{6};\qquad x_2=\frac{-1-\sqrt{-11}}{6},$$

lahutatakse tegureiks nii:

$$3\left(x-\frac{-1+\sqrt{-11}}{6}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{-11}}{6}\right)=$$
$$=\frac{1}{12}(6x+1-\sqrt{-11})(6x+1+\sqrt{-11}).$$

3) $6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2$.

Selle kolmliikme juured on järgmised:

$$x_1=\frac{b^2}{2a};\qquad x_2=\frac{a^2}{3b}.$$

Seepärast

$$6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2=6ab\left(x-\frac{b^2}{2a}\right)\left(x-\frac{a^2}{3b}\right)=$$

$$=6ab\left(\frac{2ax-b^2}{2a}\right)\left(\frac{3bx-a^2}{3b}\right)=(2ax-b^2)(3bx-a^2).$$

4) Taandada murd:

$$\frac{2a^2-2a-12}{3a^2+a-10}.$$

Lahutame lugeja ja nimetaja tegureiks ning taandame siis murru, kui võimalik. Et lugeja juured on 3 ja -2, nimetaja juured aga $\frac{5}{3}$ ja -2, siis võib murru kujutada nii:

$$\frac{2(a-3)\ (a+2)}{3\left(a-\frac{5}{3}\right)(a+2)}=\frac{2a-6}{3a-5}.$$

Järeldus. Antud lahendite järgi võib koostada ruutvõrrandi. Nii saame võrrandi, mille lahendid on 3 ja -2, järgmiselt:

$$(x-3)[x-(-2)]=0,\ \text{s. o.}\ (x-3)(x+2)=0,$$

mis pärast sulgude avamist annab: $x^2-x-6=0$. Mõistagi võib selle võrrandi kõiki liikmeid korrutada mistahes arvuga, mis ei sõltu x-st (näiteks 2-ga), kusjuures lahendid ei muutu.

Harjutused.

Lahutada tegureiks:

78. $x^2-17x+70$; $x^2+3x-88$; $3x^2-14x+8$; $6x^2+x-1$.

79. $20x^2+17x-24$; $x(x+8)-20$.

Taandada järgmised murrud (lahutades algul iga murru lugeja ja nimetaja tegureiks):

80. $\frac{x^2+6x-91}{x^2+8x-105}$; $\frac{2x+8x-90}{3x^2-36x+105}$. **81.** $\frac{x^2+3ax+2a^2+ab-b^2}{x^2+2ax+a^2-b^2}$.

Lahutades järgmised kolmliikmed tegureiks, leida, missuguste x väärtuste puhul on nende kolmliikmete väärtused positiivsed ja missuguste puhul negatiivsed:

82. x^2-6x+9; $x^2-14x+45$. **83.** x^2-4x-5; $12-x-6x^2$.

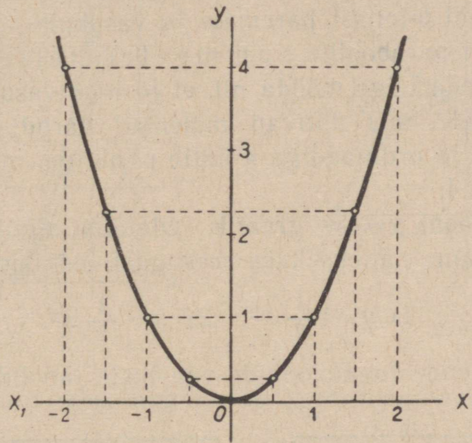
84. $-x^2+x-12$; $-x^2-5x-6$.

II. Ruutfunktsiooni graafik.

46. Funktsiooni $y=x^2$ graafik. Juhime tähelepanu funktsiooni $y=x^2$ järgmistele omadustele.

a) Argumendi x iga väärtuse puhul on funktsioon määratud ja omandab ainult ühe väärtuse. Näiteks, kui $x=-10$, siis on funktsiooni väärtus $(-10)^2=100$; kui $x=1000$, siis on funktsiooni väärtus $1000^2=1\,000\,000$ jne.

b) Et $(-x)^2=x^2$, siis x kahe väärtuse puhul, mis erinevad ainult märkide poolest, saadakse kaks võrdset positiivset y väärtust; näiteks, kui $x=-2$ ja $x=+2$, siis y väärtus on üks ja seesama, nimelt 4. Negatiivseid y väärtusi ei saada mitte kunagi.



Joon. 16.

c) Kui x absoluutväärtus suureneb piiramatult, siis suureneb piiramatult ka y väärtus. Nii näiteks, kui anname x-ile rea piiramatult kasvavaid positiivseid väärtusi: 1, 2, 3, 4, ... või rea piiramatult kahanevaid negatiivseid väärtusi: -1, -2, -3, -4, ..., siis saame rea piiramatult kasvavaid y väärtusi: 1, 4, 9, 16, 25, ...

Tähele pannes neid omadusi, koostame funktsiooni $y=x^2$ väärtuste tabeli, näiteks järgmise:

x	...	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	...
y	...	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	...

Kujutame nüüd need väärtused joonisel 16 punktidena, mille abstsissideks on x väärtused, ordinaatideks aga y vastavad väärtused (pikkusühikuks võtsime joonisel lõigu $O1$); joonestame läbi saadud punktide kõvera. Seda kõverat nimetatakse **parabooliks**. Vaatleme tema mõnd omadust.

a) Kogu kõver asetseb ühel pool x-telge, nimelt sealpool, kus ordinaatide väärtused on positiivsed.

b) y-telg jaotab parabooli kahte harru. Punkti O, kus need harud kokku jooksevad, nimetatakse parabooli **tipuks**. See punkt on parabooli ja x-telje ainus ühine punkt.

c) Mõlemad harud on lõpmatud, sest x ja y võivad suureneda piiramatult. Harud tõusevad x-teljelt piiramatult kõrgele, kaugenedes samal ajal y-teljest paremale ja vasakule.

d) y-telg on paraboolile **sümmeetriateljeks**; kui joonis kokku murda seda telge mööda nii, et joonise vasak pool langeks paremale poolele, siis ühtivad mõlemad harud; näiteks punkt abstsissiga -2 ja ordinaadiga 4 ühtib punktiga, mille abstsiss on $+2$ ja ordinaat 4.

47. Funktsiooni $y=ax^2$ graafik. Oletame algul, et a on positiivne arv. Võtame näiteks kaks seesugust funktsiooni:

$$1)\ y=1\frac{1}{2}x^2;\quad 2)\ y=\frac{1}{3}x^2.$$

Koostame nende funktsioonide väärtuste tabelid, näiteks järgmised:

1)

x	-2	-1	0	1	2	...
y	6	$1\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	6	...

2)

x	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	3	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	...

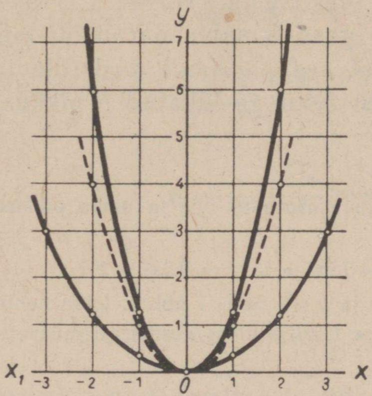
Kanname kõik need väärtused joonisele 17 ja joonestame kõverad. Võrdluseks paigutame samale joonisele (punktiiris) veel kolmanda funktsiooni $y=x^2$ graafiku.

3)

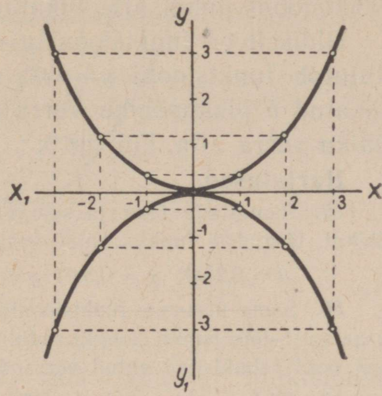
x	-2	-1	0	1	2	...
y	4	1	0	1	4	...

Jooniselt nähtub, et ühe ja sama abstsissi puhul on esimese kõvera ordinaat $1\frac{1}{2}$ korda suurem, teise kõvera ordinaat aga kolm korda väiksem kui kolmanda kõvera ordinaat. Neil kõverail on ühine iseloom: lõpmatud harud, sümmeetriatelg jm., ainult kui $a>1$, siis on kõvera harud enam üles painutatud; kui $a<1$, siis on nad rohkem alla painutatud kui kõveral $y=x^2$. Kõiki selliseid kõveraid nimetatakse samuti p a r a b o o l i d e k s.

Oletame nüüd, et kordaja a on negatiivne arv. Olgu näiteks $y=-\frac{1}{3}x^2$. Võrreldes seda funktsiooni funktsiooniga $y=+\frac{1}{5}x^2$, märkame, et x-i ühe ja sama väärtuse puhul on mõlemal funkt-



Joon. 17.



Joon. 18.

sioonil üks ja sama absoluutväärtus, kuid nende märgid on vastupidised. Seepärast saadakse funktsiooni $y=-\frac{1}{3}x^2$ graafikuna joonisel 18 samasugune parabool nagu funktsioonil $y=+\frac{1}{3}x^2$, ainult selle erinevusega, et ta asetseb x-telje all ja on sümmeetriline parabooliga $y=\frac{1}{3}x^2$. Sel juhul on funktsiooni kõik väärtused negatiivsed peale ühe, mis on võrdne nulliga, kui $x=0$.

Märkus. Kui kahe muutuva suuruse x ja y vaheline sõltuvus väljendub võrrandiga $y=ax^2$, kus a on mingi jääv arv, siis võib ütelda, et suurus y on võrdeline suuruse x ruuduga, sest x väärtuse suurendamisel või vähendamisel 2 korda, 3 korda jne. suureneb või väheneb ka y väärtus 4 korda, 9 korda, 16 korda jne.

Näiteks ringi pindala võrdub πR^2, kus R on ringi raadius ja π jääv arv; seepärast võib ütelda, et ringi pindala on võrdeline raadiuse ruuduga.

48. Funktsiooni $y=ax^2+b$ graafik. Olgu meil kolm järgmist funktsiooni:

$$1)\ y=\frac{1}{3}x^2;\quad 2)\ y=\frac{1}{3}x^2+2;\quad 3)\ y=\frac{1}{3}x^2-2.$$

On ilmne, et argumendi x ühe ja sama väärtuse puhul on teise funktsiooni ordinaat 2 ühiku võrra suurem, kolmanda funktsiooni ordinaat aga 2 ühiku võrra väiksem esimese funktsiooni vastavast ordinaadist. Seepärast kujutab teist ja kolmandat funktsiooni joonisel sama parabool, mis esimestki funktsiooni, ainult et see parabool peab teise funktsiooni puhul olema üles lükatud ja kolmanda funktsiooni puhul alla lükatud kahe pikkusühiku võrra.

Üldiselt on funktsiooni $y=ax^2+b$ graafik sama parabool, mis kujutab funktsiooni $y=ax^2$, ainult et see parabool peab olema lükatud b pikkusühiku võrra üles, kui $b>0$, ja lükatud b pikkusühiku võrra alla, kui $b<0$.

Harjutused.

85. Joonestada ühes ja samas teljestikus, kasutades üht ja sama pikkusühikut, järgmiste funktsioonide graafikud:

$$y = 0{,}25x^2; \quad y = 0{,}5x^2; \quad y = 2x^2; \quad y = 0{,}5x^2 + 1; \quad y = 0{,}5x^2 - 1.$$

86. Sama ülesanne funktsioonide $y = x^2$ ja $y = 0{,}5x + 1$ kohta; leida nende graafikute lõikepunkti koordinaadid ja joonise kontrollimise eesmärgil määrata, kas need rahuldavad antud võrrandeid.

49. Teise astme kolmliikme graafik. Vaatleme algul sellise kolmliikme graafikut, mida võib kujutada korrutise $a(x+m)^2$ kujul. Võtame näiteks kaks järgmist funktsiooni:

$$1)\ y=\frac{1}{4}(x+2)^2 \text{ ja } 2)\ y=\frac{1}{4}(x-2)^2.$$

Samal joonisel joonestame võrdluseks veel parabooli:

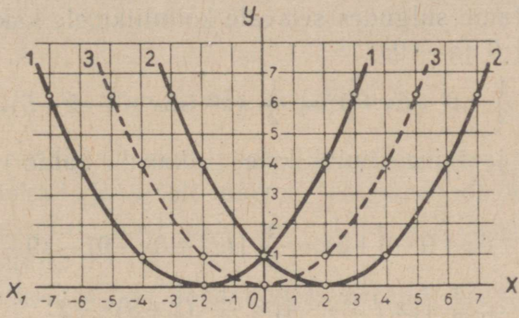
$$3)\ y=\frac{1}{4}x^2.$$

Esialgu koostame nende kolme funktsiooni väärtuste tabeli, näiteks järgmise:

$x=$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1) $y=\frac{1}{3}(x+2)^2=$	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9	$12\frac{1}{4}$	16
2) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2=$	$12\frac{1}{4}$	9	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4
3) $y=\frac{1}{4}x^2=$	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9

Kandes kõik need väärtused joonisele, saame kolm graafikut, mis on kujutatud joonisel 19.

Seda joonist vaadeldes märkame, et kõver 1 on sama parabool 3, ainult kantud 2 ühiku võrra vasakule, kõver 2 on sama parabool 3, kuid kantud 2 ühiku võrra paremale.



Joon. 19.

Seda järeldust üldistades võime ütelda, et funktsiooni $y=a(x+m)^2$ graafik on parabool, mis kujutab funktsiooni $y=ax^2$, ainult et see parabool on kantud vasakule, kui $m>0$, ja paremale kui $m<0$, nii mitme ühiku võrra, kui suur on arvu m absoluutväärtus. Selle parabooli harud on suunatud üles, kui $a>0$, nagu meie näiteis, ja alla, kui $a<0$, nagu näiteks paraboolil.

$$y=-\frac{1}{4}(x+2)^2.$$

Võtame nüüd kolmliikme, mille kuju on $y=ax^2+bx+c$. Vaatleme näiteks kolmliiget.

$$y=\frac{1}{2}x^2+3x+2\frac{1}{2}\cdot$$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	$2\frac{1}{2}$	0	$-1\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$	6	...

Leides punktid, mis kujutavad tabelis antud väärtusi, ja tõmmates läbi nende punktide kõvera (kõver 3, joon. 20), saame otsitava graafiku. Näitame nüüd, et see graafik on sama parabool, mis kujutab funktsiooni $y=\frac{1}{2}x^2$ (mis on saadud antud kolmliikmest teise ja kolmanda liikme ärajätmise teel), ainult et see parabool on viidud teise kohta. Selleks teisendame antud kolmliiget järgmiselt. Esiteks toome sulgude ette x^2 kordaja:

$$\frac{1}{2}x^2+3x+2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x^2+6x+5),$$

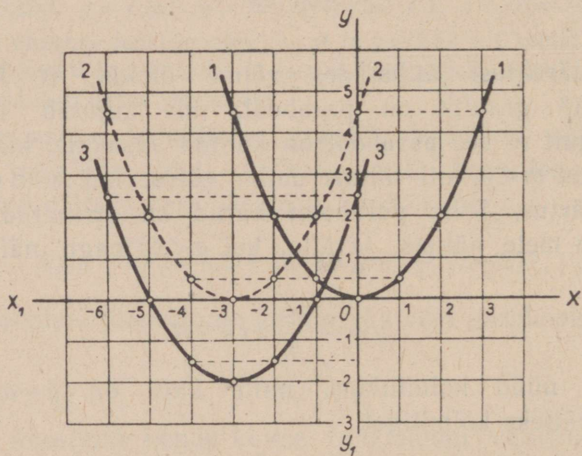
teiseks lisandame sulgudes seisvale kolmliikmele kaks vastastikku hävivat liiget 9 ja -9:

$$\frac{1}{2}(x^2+6x+5)=\frac{1}{2}(x^2+6x+9-9+5),$$

kolmandaks jaotame hulkliikme liikmed kahte rühma. Siis saame:

$$\frac{1}{2}(x^2+6x+9-9+5)=\frac{1}{2}[(x^2+6x+9)-(9-5)]=$$

$$=\frac{1}{2}[(x+3)^2-4]=\frac{1}{2}(x+3)^2-2.$$



Joon. 20.

Arvestades nüüd eespool läbiarutatud näiteid, võime toimida järgmiselt.

Joonestame parabooli, mis kujutab funktsiooni $y=\frac{1}{2}x^2$ (kõver 1, joon. 20); seejärel kanname ta 3 ühiku võrra vasakule, siis saame parabooli 2, mis kujutab funktsiooni $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$. Selle parabooli kanname nüüd 2 ühiku võrra allapoole, saame parabooli 3, mis kujutab antud funktsiooni.

50. Ruutvõrrandi graafiline lahendamine. Ruutvõrrandit võib graafiliselt lahendada järgmisel viisil: joonestanud millimeetripaberile parabooli, mis kujutab võrrandi vasakul poolel asetsevat kolmliiget, leiame selle parabooli ja x-telje lõikepunktid. Nende punktide abstsissid ongi võrrandi lahendid, sest nende abstsisside puhul on kolmliikme väärtusi kujutavad ordinaadid võrdsed nulliga.

Näited.

$$1)\quad \frac{1}{2}x^2+3x+2\frac{1}{2}=0.$$

Selle võrrandi vasaku poole graafikut kujutab kõver 3 (joon. 20). Sellelt jooniselt näeme, et parabool lõikab x-telge kahes punktis, mille abstsissid on -1 ja -5. Need ongi antud võrrandi lahendid.

Seda võib kontrollida, lahendades võrrandi üldvalemi abil või asetades leitud lahendid võrrandi vasakusse poolde.

$$2)\quad \frac{1}{2}x^2-2x+2=0.$$

Koostanud kolmliikme $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$ väärtuste tabeli, ehi-

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	8	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	...

tame parabooli (joon. 21). See parabool ei lõiku x-teljega, vaid puutub teda punktis, mille abstsiss on 2. Võrrandil on sel juhul ainult üks lahend (õigemini kaks võrdset lahendit).

$$3)\quad x^2-x+2=0.$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	14	8	4	2	2	4	8	14	...

Parabool (joon. 22) ei lõiku x-teljega ega puutu teda; seega võrrandil ei ole reaalseid lahendeid.

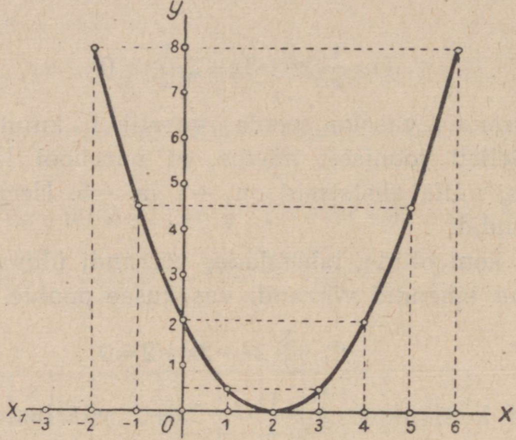
Näitame veel järgmist ruutvõrrandi graafilist lahendamisvõtet. Olgu vaja lahendada võrrand

$$x^2=1{,}5x-2=0.$$

Teisendame teda nii:

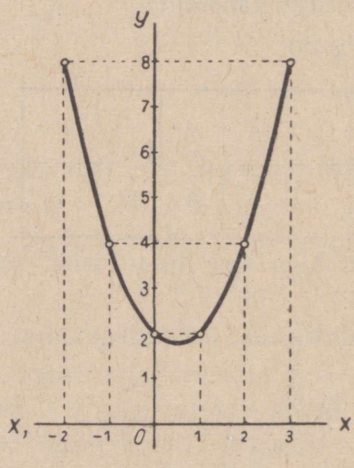
$$x^2=1{,}5x+2.$$

Selle võrrandi kumbki pool on eraldi vaadelduna teatav x-i funktsioon. Tähistame funktsiooni, mida väljendab võrrandi vasak pool, tähega y_1 ja funktsiooni, mida väljendab võrrandi parem pool, tähega y_2. Esimest funktsiooni kujutab joonisel 23 para-

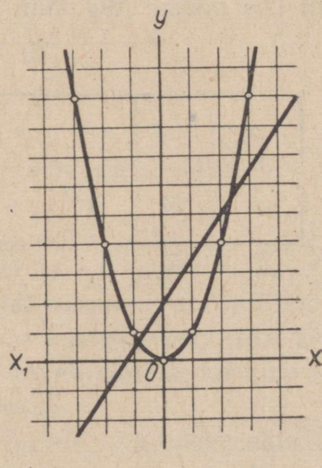


Joon. 21.

bool, teist — sirge. Joonestanud ühel ja samal joonisel nende kahe funktsiooni graafikud, leiame, et sirge ja parabool lõikuvad kahes punktis, mille abstsissid on ligikaudselt 2,35 ja $-0{,}85$. Need ongi antud võrrandi lahendite ligikaudsed väärtused, sest nende



Joon. 22.



Joon. 23.

abstsisside puhul on ordinaadid y_1 ja y_2 teineteisega võrdsed ja järelikult $x^2=1,5x+2$.

Kui juhtub, et sirge ei lõiku parabooliga, siis võrrandil reaalseid lahendeid ei ole; kui aga sirge puutub parabooli, siis on võrrandil üks lahend, mis on võrdne puutepunkti abstsissiga.

Harjutused.

Koostada järgmiste funktsioonide väärtuste tabelid ja joonestada nende graafikud:

87. $y = x^2 - 2x - 2$; $y = 2x^2 + 3x - 2$.
88. $y = x^2 + 4x - 1$; $y = -x^2 + 2x - 2$.
89. $x = -2y^2 - 4y - 2$; $y = x^2 - 3x - 5$.

Lahendada graafiliselt järgmised võrrandid:

90. $x^2 = x + 6$; $x^2 = 2x + 2$; $x^2 = 2 - 3x$.
91. $x^2 = 3x + 5$; $x^2 = 12x - 36$; $x^2 = \frac{3x+4}{2}$.

51. Biruutvõrrand. Neljanda astme võrrandit, näiteks järgmist:

$$x^4-13x^2+36=0,$$

mis sisaldab ainult tundmatu p a a r i s a s t m e i d, nimetatakse b i r u u t v õ r r a n d i k s. Ta teisendub ruutvõrrandiks, kui x^2 asendada tähega y ja järelikult x^4 asendada avaldisega y^2. Ülaltoodud võrrand muutub siis ruutvõrrandiks:

$$y^2-13y+36=0.$$

Lahendame selle:

$$y=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}-36}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{13}{2}\pm\frac{5}{2};$$

$$y_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9; \quad y_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4.$$

Kuid võrdusest $x^2=y$ nähtub, et $x=\pm\sqrt{y}$. Asendades siis y leitud arvudega 9 ja 4, saame antud võrrandi järgmised neli lahendit:

$$x_1=+\sqrt{9}=3; \quad x_2=-\sqrt{9}=-3;$$

$$x_3=+\sqrt{4}=2; \quad x_4=-\sqrt{4}=-2.$$

Koostame valemi üldkujulise biruutvõrrandi $ax^4+bx^2+c=0$ lahendamiseks.

Võttes $x^2=y$, saame võrrandi $ay^2+by+c=0$, millest leiame:

$$y_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Et aga $x=\pm\sqrt{y}$, siis saame biruutvõrrandi jaoks järgmised neli lahendit:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};\quad x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};$$

$$x_3=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};\quad x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Siit nähtub, et kui $b^2-4ac<0$, siis kõik neli lahendit on kompleksed; kui aga $b^2-4ac>0$, siis võib esineda kolm juhtumit (me eeldame, et $a>0$): 1) kõik lahendid on reaalsed (nagu eespool toodud arvulises näites), kui $-b+\sqrt{b^2-4ac}>0$ ja $-b-\sqrt{b^2-4ac}>0$; 2) kõik lahendid on kompleksed, kui nende mõlema avaldise väärtused on negatiivsed, ja 3) kaks lahendit on reaalsed ja kaks kompleksed, kui $-b+$ $+\sqrt{b^2-4ac}>0$, kuid $-b-\sqrt{b^2-4ac}<0$. Lõpuks, kui $b^2-4ac=0$, siis lahendid on paarikaupa võrdsed.

Harjutused.

Lahendada järgmised võrrandid:

92. $x^4-5x^2+4=0$; $x^4-10x^2+9=0$.

93. $x^4-2x^2-3=0$; $2x^4-7x^2=4$.

94. $x^4-25x^2+144=0$; $x^4-2x^2=63$.

52. Võrrandid, mille vasak pool lahutub tegureiks, parem pool on aga null. Selliste võrrandite lahendamine taandub madalama-astmeliste võrrandite lahendamiseks. Nii nägime, et mittetäieliku ruutvõrrandi $ax^2+bx=0$ lahendamiseks piisab, kui võrrandi vasak pool lahutada kaheks teguriks: $x(ax+b)=0$, ja seejärel, võttes arvesse, et korrutis on võrdne nulliga ainult siis, kui üks või teine tegur võrdub nulliga, taandada selle võrrandi lahendamine kahe esimese astme võrrandi $x=0$ ja $ax+b=0$ lahendamiseks.

Samal viisil võib lahendada mittetäieliku kuupvõrrandi, mis ei sisalda vabaliiget, näiteks võrrandi

$$x^3+3x^2-10x=0.$$

Tuues tähe x sulgude ette, kirjutame võrrandi kujul:

$$x(x^2+3x-10)=0$$

ja järelikult ta jaguneb kaheks võrrandiks:

$$x=0 \text{ ja } x^2+3x-10=0,$$

millest leiame kolm lahendit:

$$x_1=0;\quad x_2=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+10}=2;$$

$$x_3=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}+10}=-5.$$

Olgu mingi võrrand teisendatud selliseks:

$$x(x+4)(x^2-5x+6)=0.$$

Siis ta lahutub kolmeks võrrandiks:

$$x=0;\quad x+4=0;\quad x^2-5x+6=0.$$

Need võrrandid annavad:

$$x_1=0;\quad x_2=-4;\quad x_3=2;\quad x_4=3.$$

53. Kaheliikmeline võrrand. Kaheliikmeliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit $ax^m+b=0$ ehk võrrandit $x^m+\frac{b}{a}=0$*. Tähistades arvu $\frac{b}{a}$ absoluutväärtuse tähega q, võime kaheliikmelise võrrandi kirjutada kas kujul $x^m+q=0$ või kujul $x^m-q=0$. Abitundmatu abil on alati võimalik neid võrrandeid lihtsustada nii, et esimese võrrandi vabaliige muutub $+1$-ks, teisel aga -1-ks. Tõepoolest, oletame, et $x=y\sqrt[m]{q}$, kus $\sqrt[m]{q}$ on arvu q m-nda juure a r i t m e e t i l i n e v ä ä r t u s; siis $x^m=qy^m$ ja võrrandid omandavad kuju:

$$qy^m+q=0, \text{ s. o. } q(y^m+1)=0, \text{ kust } y^m+1=0,$$

või

$$qy^m-q=0, \text{ s. o. } q(y^m-1)=0, \text{ kust } y^m-1=0.$$

Seega kaheliikmeliste võrrandite lahendamine viib võrrandite $y^m\pm 1=0$ lahendamisele. Selliste võrrandite lahendamine elementaarsete meetoditega on võimalik üksnes astendaja m mõnede eriväärtuste puhul. Üldine võte, mida seejuures kasutatakse, seisab võrrandi vasaku poole tegureiks lahutamises, mille tagajärjel võrrand omandab kuju, mida vaatlesime varem.

* Kui kaheliikmelise võrrandi kuju on $ax^m+bx^n=0$, kus $m>n$, siis võib teda kujutada nii: $x^n(ax^{m-n}+b)=0$ ja järelikult jaguneb ta kaheks võrrandiks: $x^n=0$ ja $ax^{m-n}+b=0$.

54. Kaheliikmeliste kolmanda astme võrrandite lahendamine. Need võrrandid on järgmised: $x^3-1=0$ ja $x^3+1=0$.

Märkinud, et

$$x^3-1=x^3-1^3=(x-1)(x^2+x+1),$$

ja

$$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1),$$

võime esitatud võrrandid kirjutada nii:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \text{ ja } (x+1)(x^2-x+1)=0.$$

Tähendab, esimese võrrandi lahenditeks on võrrandite $x-1=0$ ja $x^2+x+1=0$ lahendid, teise võrrandi lahenditeks on aga võrrandite $x+1=0$ ja $x^2-x+1=0$ lahendid.

Lahendanud need võrrandid, näeme, et võrrandil $x^3-1=0$ on kolm järgmist lahendit:

$$x_1=1; \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}; \quad x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

milledest üks on reaalne ja kaks on kompleksed; võrrandil $x^3+1=0$ on kolm lahendit:

$$x_1=-1; \quad x_2=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}; \quad x_3=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

milledest üks on samuti reaalne ja kaks kompleksed.

55. Juure mitmesugused väärtused. Kaheliikmeliste võrrandite lahendamine on tihedalt seotud antud arvu juure kõigi väärtuste leidmisega. Tõesti, leida $\sqrt[m]{A}$ on ilmselt sama, mis lahendada võrrand $x^m=A$, s. o. $x^m-A=0$, ja seepärast kui mitu erinevat lahendit sel võrrandil on, nii mitu erinevat väärtust on juurel $\sqrt[m]{A}$.

Toetudes sellele märkusele näitame, et *iga* (*nulliga mittevõrdse*) *reaalarvu kuupjuurel on kolm erinevat väärtust*.

Vaatleme algul juhtumit, kui A on positiivne arv. Olgu vaja leida $\sqrt[3]{A}$, s. o. teiste sõnadega, olgu vaja lahendada võrrand $x^3-A=0$. Tähistades $\sqrt[3]{A}$ aritmeetilise väärtuse tähega q, oletame, et $x=qy$. Siis võib võrrandi $x^3-A=0$ kujutada järgmiselt: $q^3y^3-A=0$. Kuid $q^3=A$, seepärast $q^3y^3-A=A(y^3-1)$ ja võrrand omandab kuju: $y^3-1=0$.

Eelmises paragrahvis nägime, et sel võrrandil on kolm lahendit:

$$y_1=1; \quad y_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}; \quad y_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Igaüks neist väärtustest, rahuldades võrrandit $y^3=1$, kujutab enesest arvu 1 kuupjuurt. Et $x=qy$, siis

$$x_1=q\cdot 1=q;\quad x_2=q\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\quad x_3=q\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Need ongi juure $\sqrt[3]{A}$ kolm väärtust; üks neist on reaalne (aritmeetiline), kaks aga on kompleksed. Kõik nad saadakse, kui juure $\sqrt[3]{A}$ aritmeetiline väärtus korrutatakse juure $\sqrt[3]{1}$ kõigi kolme väärtusega.

Näiteks kuupjuurel 8-st on kolm järgmist väärtust:

$$2;\quad 2\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=-1+\sqrt{-3};$$

$$2\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-1-\sqrt{-3}.$$

Kui $A<0$, siis jääb eelmine arutelu jõusse, ainult et q-ga tuleb tähistada juure $\sqrt[3]{-A}$ reaalne väärtus ja oletada, et $x=-qy$.

56. Kolmeliikmeline võrrand. Nii nimetatakse võrrandit $ax^{2n}+bx^n+c=0$ (selle kuju erijuhtum, kui $n=2$, on biruutvõrrand). Ta muutub ruutvõrrandiks, kui võtame tarvitusele abitundmatu $y=x^n$. Siis võrrand omandab kuju:

$$ay^2+by+c=0,$$

kust saame, et

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Järelikult

$$x^n=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Lahendades, kui võimalik, selle kaheliikmelise võrrandi, leiame kõik x väärtused.

Näide.

$$x^6-9x^3+8=0.$$

$$x^3=y;\quad y^2-9y+8=0;\quad y=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-8}=\frac{9\pm 7}{2};$$

$$y_1=8\ ;\quad y_2=1;$$

järelikult

$$x^3=8 \text{ ja } x^3=1.$$

Lahendanud need kaheliikmelised kolmanda astme võrrandid, saame x-le kuus väärtust:

$$x_1=2;\quad x_2=-1+\sqrt{-3};\quad x_3=-1-\sqrt{-3};$$

$$x_4=1;\quad x_5=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\quad x_6=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Harjutused.

Lahendada võrrandid:

95. $x^3=m^3$; $x^3+729=0$; $x^6=64$.

96. $8x^6+7x^3-1=0$; $x^{2m}+2ax^m=8a^2$.

III. Ruutvõrrandi süsteemid.

57. Mitme tundmatuga võrrandi aste. Et määrata mitme tundmatuga võrrandi astet, on esialgu vaja see võrrand lihtsustada (avada sulud, vabastada ta juurtest ja nimetajaist, mis sisaldavad tundmatuid, ning koondada sarnased liikmed). Siis *võrrandi astmeks nimetatakse võrrandi selle liikme tundmatuile kuuluvate astendajate summat, millel see summa on suurim.*

Näiteks võrrandid $x^2+2xy-x+2=0$, $3xy=4$, $2x+y^2-y=0$ on teise astme võrrandid; võrrandid $3x^2y-y^2+x+10=0$ on kolmanda astme võrrand (kahe tundmatuga) jne.

Tähendame, et võrrandi mingi liikme tundmatuile kuuluvate astendajate summat nimetatakse selle liikme m õ õ t e k s. Seega liikmed $2xy$, $5x^2$, $3y^2$ on k a h e m õ õ t e l i s e d, liikmed $0{,}2x^2y$, $10xy^2$, $\frac{1}{2}xyz$ on k o l m e m õ õ t e l i s e d jne. Liiget, mis ei sisalda tundmatuid, nimetatakse n u l l m õ õ t e l i s e k s.

Tähendame veel, et võrrandit nimetatakse h o m o g e e n s e k s, kui kõik tema liikmed on ühe ja sama mõõtelised. Seega võrrand $3x^2+xy-2y^2=0$ on homogeenne kahe tundmatuga teise astme võrrand.

58. Kahe tundmatuga teise astme täieliku võrrandi üldkuju on järgmine:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Temas on esimesed kolm liiget kahemõõtelised, järgmised kaks liiget ühemõõtelised ja viimane (vaba-) liige nullmõõteline. Kordajad $a, b, c, \ldots$ võivad olla positiivsed või negatiivsed arvud või võrdsed nulliga (mõistagi ei eeldata, et kolm kordajat a, b ja c on üheaegselt nullid, sest vastasel korral ei oleks võrrand mitte teise, vaid esimese astme võrrand).

Vaatleme nüüd, kuidas lahendatakse kaht kahe tundmatuga teise astme võrrandit sisaldavaid lihtsamaid võrrandisüsteeme.

59. Kahe võrrandi süsteem, kus üks on esimese ja teine teise astme võrrand. Olgu antud süsteem:

$$\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y=1 & \text{. . . . teise astme võrrand;} \\ 2x-y=1 & \text{. . . . . . . esimese astme võrrand.} \end{cases}$$

Niisugust süsteemi on sobivam lahendada asendamismeetodi abil järgmiselt. Esimese astme võrrandist avaldame ühe tundmatu teise tundmatu funktsioonina, näiteks avaldame y kui x funktsiooni:

$$y=2x-1.$$

Siis muutub teise astme võrrand pärast astendamist ühe tundmatuga võrrandiks.

$$x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1;$$
$$x^2-4(4x^2-4x+1)+x+6x-3=1;$$
$$x^2-16x^2+16x-4+x+6x-3-1=0;$$
$$-15x^2+23x-8=0; \qquad 15x^2-23x+8=0;$$
$$x=\frac{23\pm\sqrt{23^2-4\cdot15\cdot8}}{2\cdot15}=\frac{23\pm\sqrt{529-480}}{30}=\frac{23\pm\sqrt{49}}{30};$$
$$x_1=\frac{23+7}{30}=1; \qquad x_2=\frac{23-7}{30}=\frac{8}{15}.$$

Pärast seda leiame võrrandist $y=2x-1$, et

$$y_1=2\cdot1-1=1; \; y_2=2\cdot\frac{8}{15}-1=\frac{1}{15}.$$

Seega on antud võrrandisüsteemil 2 lahendit:

$$1) \; x_1=1, \; y_1=1; \qquad 2) \; x_2=\frac{8}{15}, \; y_2=\frac{1}{15}.$$

60. Kunstlikud võtted. Näidatud võte on kasutatav neil juhtumeil, kui üks võrrandeist on esimese astme võrrand; mõningail juhtumeil võib rakendada kunstlikke võtteid, mille kohta ei saa üldreeglit anda. Toome näiteid.

Näide 1.

$$x+y=a; \quad xy=b.$$

Esimene viis. Et on antud tundmatute summa ja nende korrutis, siis x ja y peavad olema ruutvõrrandi

$$z^2-az+b=0$$

lahenditeks (§ 43).

Järelikult

$$x=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}; \quad y=z_2=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Teine viis. Tõstame esimese võrrandi ruutu ja lahutame sellest neljakordse teise võrrandi[1].

$$\begin{array}{r} x^2+2xy+y^2=a^2 \\ -4xy \quad = \; -4b \\ \hline x^2-2xy+y^2=a^2-4b, \end{array}$$

s. o.

$$(x-y)^2=a^2-4b, \text{ kust: } x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}.$$

Nüüd on meil süsteem:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}. \end{cases}$$

Liites ja lahutades need võrrandid, saame:

$$2x=a\pm\sqrt{a^2-4b}; \quad 2y=a\mp\sqrt{a^2-4b};$$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}; \quad y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Et me ühe võrrandi tõstsime ruutu, siis kontrollime asendamise teel, kas leitud lahendite hulgas pole v õ õ r l a h e n d e i d.

Sel viisil leiame, et antud süsteemil on 2 lahendit:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$$

Teine lahend erineb esimesest ainult selle poolest, et x väärtus esimeses lahendis on y väärtuseks teises lahendis, ja vastupidi. Seda on võimalik ette näha, sest võrrand ei muutu x

[1] Niisuguseid väljendeid kasutatakse lühiduse mõttes sageli selle asemel, et ütelda: «Tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu», «Korrutame võrrandi mõlemad pooled neljaga» jne.

asendamisel y-ga ja y asendamisel x-ga. Märgime, et selliseid võrrandeid nimetatakse sümmeetrilisteks võrranditeks.

Näide 2.

$$x-y=a, \quad xy=b.$$

Esimene viis. Esitades võrrandid kujul

$$x+(-y)=a, \quad x(-y)=-b,$$

märkame, et x ja $-y$ on ruutvõrrandi

$$z^2-az-b=0$$

lahendid.

Järelikult

$$x=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}; \quad y=-z_2=-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right).$$

Teine viis. Tõstnud esimese võrrandi ruutu ja liitnud selle neljakordse teise võrrandiga, saame:

$$(x+y)^2=a^2+4b, \text{ kust } x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}.$$

Nüüd on meil süsteem:

$$\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{a^2+4b} \\ x-y=a. \end{cases}$$

Liites ja lahutades need võrrandid leiame, et

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}; \quad y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

Näide 3.

$$x+y=a; \quad x^2+y^2=b.$$

Tõstes esimese võrrandi ruutu ja lahutades sellest teise võrrandi, saame:

$$2xy=a^2-b, \text{ kust } xy=\frac{a^2-b}{2}.$$

Nüüd seisab küsimus süsteemi

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=\dfrac{a^2-b}{2} \end{cases}$$

lahendamises, mida käsitlesime juba esimeses näites.

61. Kahe võrrandi süsteem, kus mõlemad on teise astme võrrandid. Seesugune süsteem ei lahendu üldkujul elementaarselt, sest ta taandub täielikuks neljanda astme võrrandiks.

Vaatleme elementaarselt lahenduvate võrrandite mõnd erijuhtumit.

Näide 1.

$$x^2+y^2=a; \quad xy=b.$$

Esimene viis (*asendamisviis*). Teisest võrrandist avaldame ühe tundmatu teise tundmatu funktsioonina; näiteks $x=\frac{b}{y}$.

Asetame selle avaldise esimesse võrrandisse ja vabastame võrrandi murrust; siis saame biruutvõrrandi:

$$y^4-ay^2+b^2=0.$$

Lahendanud selle, leiame y neli väärtust. Asetanud need järgemööda varem tuletatud x valemisse, leiame vastavad neli x väärtust.

Teine viis. Liites esimese võrrandi kahekordse teise võrrandiga, saame:

$$x^2+y^2+2xy=a+2b, \quad \text{s. o.} \quad (x+y)^2=a+2b,$$

kust

$$x+y=\pm\sqrt{a+2b}.$$

Lahutades esimesest võrrandist kahekordse teise võrrandi, leiame:

$$x^2+y^2-2xy=a-2b, \quad \text{s. o.} \quad (x-y)^2=a-2b,$$

kust

$$x-y=\pm\sqrt{a-2b}.$$

Seega seisab küsimus järgmise nelja esimese astme süsteemi lahendamises:

$$1)\begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b} \\ x-y=\sqrt{a-2b} \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b} \\ x-y=-\sqrt{a-2b} \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b} \\ x-y=\sqrt{a-2b} \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b} \\ x-y=-\sqrt{a-2b} \end{cases}$$

Igaüks neist lahendub üsna lihtsalt võrrandite algebralise liitmise teel.

Kolmas viis. Tõstes teise võrrandi ruutu, saame järgmise süsteemi:

$$x^2+y^2=a; \quad x^2y^2=b^2.$$

Siit nähtub, et x^2 ja y^2 on ruutvõrrandi $z^2-az+b^2=0$ lahendid.

Järelikult

$$x^2=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}; \quad y^2=z_2=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}.$$

Näide 2.

$$x^2-y^2=a; \quad xy=b.$$

Asendamisviisi abil taandame selle süsteemi kergesti biruutvõrrandiks. Anname siin veel ühe kunstliku lahendusvõtte.

Tõstes teise võrrandi ruutu, saame:

$$x^2-y^2=a; \quad x^2y^2=b^2$$

ehk

$$x^2+(-y^2)=a; \quad x^2(-y^2)=-b^2.$$

Siit nähtub, et x^2 ja $-y^2$ on võrrandi $z^2-az-b^2=0$ lahendid. Järelikult

$$x^2=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}; \quad y^2=-z_2=-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}\right).$$

Siit leiame x ja y.

Märkus. Kõigil juhtumeil, kui võrrand tuleb astendada, on vaja lahendeid kontrollida.

62. Teise astme võrrandisüsteemide graafiline lahendamine. Joonestanud iga antud võrrandi graafiku, leiame nende graafikute lõikepunktide koordinaadid. Need ongi võrrandite lahendid.

Näide. Lahendada graafiliselt süsteem:

$$1) \ y=x^2-3x+2; \quad 2) \ x=2y^2-3.$$

Koostame x ja y väärtuste tabeli esimese võrrandi jaoks:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	20	12	6	2	0	0	2	6	12	...

ning x ja y väärtuste tabeli teise võrrandi jaoks:

y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
x	...	15	5	-1	-3	-1	5	15	29	...

Nende väärtuste järgi ehitame graafikud (need graafikud on paraboolid, joon. 24).

Graafikud lõikuvad kahes punktis, mille koordinaadid on ligikaudselt: $x=0{,}3$; $y=1{,}3$ ja $x=2{,}8$; $y=1{,}6$.

Me võime leida lõikepunktide koordinaadid ka suurema täpsusega, kui joonestame need graafiku osad, mis on lõikepunktide lähedal, suuremas mõõtkavas.

Harjutused.

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

97. $\begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 24 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 40 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = a \\ \dfrac{x}{y} = b \end{cases}$

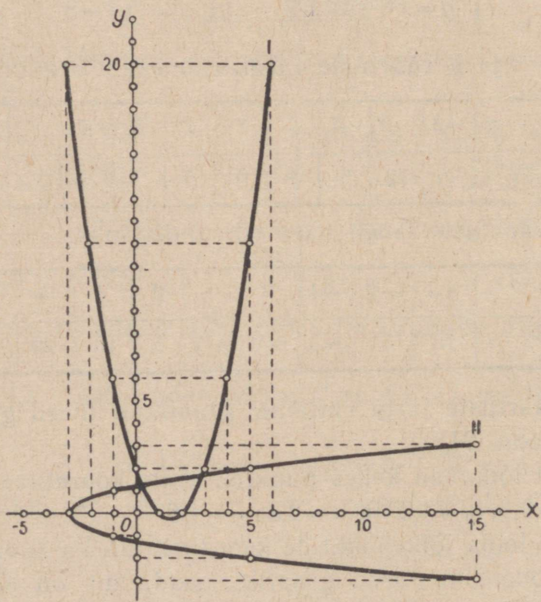
98. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \dfrac{4}{3}x \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 96 \\ x - y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 156 \\ x - y = 6 \end{cases}$

99. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

100. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$

101. $\begin{cases} 9x^2 - xy + 2y^2 + 4x = 20 \\ 5x^2 - 11xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$

102. Kaks jalakäijat peavad ära käima 270 km pikkuse tee. Üks neist käib iga päev 6 km võrra rohkem kui teine, mistõttu ta vajab kogu tee käimiseks 1,5 päeva vähem kui teine. Mitme päevaga käib ära kogu tee kumbki jalakäija?



Joon. 24.

103. Põllul on ristküliku kuju. Leida tema pindala, teades, et: 1) kui tema pikkust vähendada 12 m võrra, laiust suurendada 12 m võrra, siis omandab ta ruudu kuju; 2) kui pikkust suurendada 12 m võrra ja laiust vähendada 12 m võrra, siis on tema pindala 15 049 m².

104. Kolme meetri kõrguse risttahuka diagonaali pikkus on 13 m; tema aluse ümbermõõt on 32 m. Leida risttahuka mõõtmed.

105. Täisnurkses kolmnurgas on hüpotenuus, mille pikkus on c, temale tõmmatud kõrgusega jaotatud 2 lõiguks, milledest üks võrdub selle lõigu juures asetseva nurga vastaskaatetitega. Leida kaatetid.

106. Täisnurkses kolmnurgas on hüpotenuusi pikkus c ja kaatetite summa s. Leida kaatetid.

Neljas jagu.

Võrratused.

I. Esimese astme võrratused.

63. Eelmärkus. Me juba teame, mis mõttes tuleb relatiivsete arvude vallas mõista väljendusi «suurem» ja «väiksem», nimelt: ütlus «a on suurem kui b» ($a>b$) tähendab, et vahe $a-b$ on positiivne arv, ja ütlus «a on väiksem kui b» ($a<b$) tähendab, et see vahe on negatiivne arv.

64. Võrratuse põhiomadused. Kaks arvu või kaks algebralist avaldist, mis on omavahel seotud märgiga $>$ või $<$, moodustavad v õ r r a t u s e. Võrratus koosneb kahest osast: v a s a k u s t poolest ja p a r e m a s t poolest.

Tähistame võrratuse vasaku poole tähega a ja parema poole tähega b. Siis võime võrratuse põhiomadusi väljendada järgmiselt:

1) Kui $a>b$, siis $b<a$; näiteks: kui $-2>-3$, siis $-3<-2$.

2) Kui $a>b$ ja $b>c$, siis $a>c$; näiteks: kui $-2>-3$ ja $-3>-4$, siis $-2>-4$.

3) Kui $a>b$ ja $c=d$, siis $a+c>b+d$ ja $a-c>b-d$, s. o. kui mittevõrdsete arvudega liidame või lahutame neist võrdsed arvud, siis võrratuse märk ei muutu (s. o. võrratuse suurem pool jääb suuremaks). Näiteks: $2>-3$; liidame või lahutame kummastki poolest -10:

$$2+(-10)>-3+(-10), \text{ s. o. } -8>-13;$$
$$2-(-10)>-3-(-10), \text{ s. o. } 12>7.$$

4) Kui $a>b$ ja $c>d$, siis $a+c>b+d$; samuti, kui $a<b$ ja $c<d$, siis $a+c<b+d$.

Näiteks, kui kahe võrratuse $-7>-10$ ja $-3>-4$ pooled liikmeti liita, siis saame $-10>-14$.

Samuti, kui liikmeti liidame kahe võrratuse $2<8$ ja $-4<-2$ pooled, siis saame: $-2<6$.

5) Kui $a>b$, aga $c<d$, siis $a-c>b-d$; või kui $a<b$, aga $c>d$, siis $a-c<b-d$.

N ä i t e k s:

$$-\begin{cases} -8>-10 \\ 2<3 \end{cases} \qquad \text{ehk} \qquad -\begin{cases} 7<12 \\ 8>-2 \end{cases}$$
$$-10>-13 \qquad\qquad\qquad -1<14$$

Lepime kokku kõnelda kahe võrratuse kohta, et nad on s a m a p i d i s e d, kui kummalgi on üks ja seesama märk $>$ või $<$, ja et nad on v a s t u p i d i s e d, kui ühel võrratusel on märk $>$, teisel aga märk $<$. Siis võib neljandat ja viiendat omadust väljendada nii:

kaht samapidist võrratust võib liikmeti liita; kaht vastupidist võrratust võib liikmeti lahutada, jättes tulemuses selle võrratuse märgi, millest lahutati teine võrratus.

6) Kui $a>b$ ja m on positiivne arv, siis $am>bm$ ja $a:m>$ $>b:m$.

Kui võrratuse mõlemad pooled korrutame või jagame ühe ja sama positiivse arvuga, siis võrratuse märk ei muutu.

Näiteks korrutades võrratuse $-5>-7$ pooled $+4$-ga, saame: $-20>-28$.

7) Kui $a>b$ ja m on negatiivne arv, siis $am<bm$ ja $a:m<b:m$.

Kui võrratuse mõlemad pooled korrutame või jagame ühe ja sama negatiivse arvuga, siis võrratuse märk muutub vastupidiseks.

Näiteks korrutades võrratuse $-5>-7$ mõlemad pooled -1-ga, saame: $5<7$.

65. Võrratuste suhtes (nagu võrdustegi suhtes), mis sisaldavad tähti, on võimalikud kaht liiki küsimused:

1) lahendada tundmatuid sisaldav võrratus, s. o. leida, missuguste tundmatute väärtuste puhul on antud võrratus kehtiv;

2) tõestada võrratuse samane kehtivus, s. o. näidata, et ta on kehtiv tähtede mistahes väärtuste puhul või vähemalt väärtuste puhul, mis on piiritletud etteantud tingimustega.

Mõlema küsimuse lahendamine põhineb võrratuste mõnedel omadustel, mis on sarnased võrrandite lahendamise aluseks olevate omadustega.

66. Samaväärsed võrratused. Võrratusi, mis sisaldavad ühtesid ja samu tundmatuid, nimetatakse s a m a v ä ä r s e i k s, kui neid rahuldavad nende tundmatute ühed ja samad väärtused; nii on kaks võrratust $3x+2<x+10$ ja $3x<x+8$ samaväärsed, sest mõlemat rahuldavad x väärtused, mis on väiksemad kui 4, ja ainult need väärtused.

Võrratuste samaväärsuse kohta on kehtivad teoreemid, mis on üsna sarnased taoliste teoreemidega võrrandite samaväärsuse kohta.

67. Teoreem 1. Kui tundmatuid sisaldava võrratuse mõlema poolega liidame (või lahutame) ühe ja sama arvu, siis saame uue võrratuse, mis on samaväärne esimesega.

Tähistame tundmatuid sisaldava võrratuse vasaku poole tähega A ja parema poole tähega B, m olgu mistahes arv. Tõestame, et kaks võrratust

$$A>B \qquad (1)$$

ja

$$A+m>B+m \qquad (2)$$

on samaväärsed. Oletame, et esimest võrratust rahuldavad tähtede mõned kindlad väärtused. See tähendab, et nende väärtuste puhul on A arvuline väärtus suurem kui B arvuline väärtus; kuid siis on § 64 kolmanda omaduse põhjal tähtede samade väärtuste korral ka summa $A+m$ arvuline väärtus suurem kui summa $B+m$ arvuline väärtus, sest kui võrratuse mõlema poolega liidame ühe ja sama arvu, siis võrratuse märk ei muutu. Tähendab, võrratuse (1) iga lahend on ka võrratuse (2) lahendiks.

Vastupidi: kui tähtede teatavate väärtuste korral summa $A+m$ arvuline väärtus on suurem kui summa $B+m$ arvuline väärtus, siis tähtede samade väärtuste korral on ka A arvuline väärtus suurem kui B arvuline väärtus (võrratus jääb kehtivaks, kui võrratuse mõlema poolega liidame — m); järelikult kõik võrratuse (2) lahendid rahuldavad ka võrratust (1); tähendab, need võrratused on samaväärsed.

Et lahutamine on samaväärne vastupidise arvu liitmisega, siis järeldub sellest, et võrratuse mõlemast poolest võib lahutada ühe ja sama arvu.

Järeldus. Võrratuse mistahes liiget võib ühelt poolelt viia teisele poolele vastupidise märgiga.

Kui meil on näiteks võrratus $A>B+C$, siis liites kummagi poolega arvu — C, saame $A-C>B$.

68. Teoreem 2. Kui tundmatuid sisaldava võrratuse mõlemad pooled korrutame (või jagame) ühe ja sama positiivse arvuga, siis saame uue võrratuse, mis on samaväärne esimesega.

Tõestame, et kaks võrratust

$$A>B \tag{1}$$

ja

$$Am>Bm \tag{2}$$

on samaväärsed, kui ainult m on positiivne arv.

Olgu tundmatute teatavate väärtuste puhul A arvuline väärtus suurem kui B arvuline väärtus; siis on tundmatute samade väärtuste puhul ka korrutise Am arvuline väärtus suurem kui korrutise Bm arvuline väärtus, sest võrratuse mõlemate poolte korrutamisel positiivse arvuga võrratuse märk ei muutu. Tähendab, kõik võrratuse (1) lahendid rahuldavad ka võrratust (2).

Vastupidi: kui tähtede teatavate väärtuste puhul Am arvuline väärtus on suurem kui Bm arvuline väärtus, siis on tähtede samade väärtuste puhul ka A arvuline väärtus suurem kui B arvuline väärtus, sest võrratuse mõlema poole jagamisel positiivse arvuga võrratuse märk ei muutu.

Märkus. Positiivset arvu, millega meil tõestuse kohaselt on õigus korrutada või jagada võrratuse mõlemaid pooli (muutmata võrratuse märki), võib anda ka tähtavaldise kujul, kusjuures see avaldis võib sisaldada ka võrrandis esinevaid tundmatuid. Kuid säärasel korral on vaja eraldi uurida, kas selle avaldise väärtused, millega me korrutame või jagame võrratuse mõlemaid pooli, on positiivsed temas sisalduvate tähtede kõigi väärtuste puhul.

Näiteks korrutame võrratuse $A>B$ mõlemad pooled avaldisega $(x-5)^2$;

$$A>B; \tag{1}$$

$$A(x-5)^2>B(x-5)^2 \tag{2}$$

Korrutaja $(x-5)^2$ jääb positiivseks arvuks x kõigi väärtuste puhul peale ühe: $x=5$. Tähendab, võrratused (1) ja (2) on samaväärsed sel juhul, kui väärtus $x=5$ ei rahulda esimest võrratust; vastupidisel korral võrratusel (1), mida rahuldavad võrratuse (2) kõik lahendid, on veel lahend $x=5$ (see lahend ei rahulda võrratust (2), sest võrratus (2) muutub võrduseks).

Järeldus. Kui võrratuse mõlemad pooled sisaldavad ühise positiivse teguri, siis võib sellega jagada võrratuse mõlemaid pooli.

Näiteks võrratuse $(x-5)^2(x-1)>(x-5)^2(3-x)$ mõlemal poolel on ühine tegur $(x-5)^2$. Juhtumil, kui $x=5$, muutub see tegur nulliks, kuid x kõigi muude väärtuste puhul on see positiivne arv. Lahend $x=5$ ei rahulda antud võrratust. Soovides otsusele jõuda, kas x muud väärtused rahuldavad võrratust, võime jagada võrratuse mõlemad pooled avaldisega $(x-5)^2$ kui positiivse arvuga; pärast jagamist saame $x-1>3-x$. Kõik x väärtused, mis rahuldavad seda võrratust, välja arvatud väärtus $x=5$, rahuldavad ka antud võrratust.

69. Teoreem 3. Kui tundmatuid sisaldava võrratuse mõlemad pooled korrutame (või jagame) ühe ja sama negatiivse arvuga ning muudame seejuures võrratuse märgi vastupidiseks, siis saame uue võrratuse, mis on samaväärne esimesega.

See teoreem tõestatakse samal viisil nagu teoreem 2; on vaid tarvis arvesse võtta, et võrratuse mõlemate poolte korrutamisel või jagamisel negatiivse arvuga võrratuse märk muutub vastupidiseks.

Selle teoreemi kohta võib teha samasuguse märkuse, nagu tegime teoreemi 2 kohta.

Järeldused. a) Muutes võrratuse kõigi liikmete märgid vastupidisteks (s. o. korrutades tema mõlemaid pooli arvuga -1), peame vastupidiseks muutma ka võrratuse märgi.

b) Võrratuse mõlemaid pooli ei tohi korrutada tähelise kordajaga, mille märk on teadmata.

c) Murruliste liikmetega võrratuse võib vabastada murdudest. Võtame näiteks võrratuse:

$$\frac{A}{B}>\frac{C}{D}. \tag{1}$$

Toome kõik liikmed vasakule poolele ja viime murrud ühisele nimetajale:

$$\frac{AD-BC}{BD}>0. \tag{2}$$

Kui BD on positiivne arv, siis võime ta ära jätta võrratuse märki muutmata, sest BD ärajätmine on seesama, mis võrratuse mõlemate poolte korrutamine selle arvuga. Jätnud BD ära, saame võrratuse, mis ei sisalda murde:

$$AD-BC>0.$$

Kui BD on negatiivne arv, siis võime ta ära jätta, muutes seejuures võrratuse märgi vastupidiseks; siis saame võrratuse, mis ei sisalda murdavaldisi:

$$AD-BC<0.$$

Kui BD märk on teadmata (mis esineb üldiselt siis, kui B ja D sisaldavad tundmatuid), siis ei tohi me võrratuse mõlemaid pooli BD-ga korrutada. Sel juhul arutleme nii: et murd oleks positiivne, selleks on tarvilik ning piisav, et murru lugeja ja nimetaja oleksid üheaegselt kas positiivsed või negatiivsed. Järelikult võrratust (2) rahuldavad tähtede sellised väärtused, mille puhul

$$\begin{cases} AD-BC>0 \\ BD>0 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} AD-BC<0 \\ BD<0 \end{cases}$$

Seega taandub võrratuse (1) lahendamine kahest murruvabast võrratusest koosneva süsteemi lahendamiseks.

70. Võrratuse tõestus. Antud võrratuse õigsuse määramiseks ei saa püstitada mingisuguseid kindlaid reegleid. Märgime ainult, et üks võtetest seisab selles, et antud võrratus teisendatakse võrratuseks, mille õigsus on ilmne, ja siis, lähtudes sellest ilmselt õigest võrratusest, jõutakse loogilise arutelu kaudu kuni esitatud võrratuseni. Toome näite.

Tõestada, et *kui arvude x ja y summa on jääv arv, siis nende korrutis omandab suurima väärtuse juhtumil, kui $x=y$.*

Olgu $x+y=a$, kus a on jääv arv. Kui $x=y$, siis kumbki neist arvudest on $\frac{a}{2}$, ja xy on siis võrdne arvuga $\frac{a^2}{4}$.

On vaja tõestada, et kui $x \neq y$, siis $xy<\frac{a^2}{4}$.

Teisendame seda tõestamist vajavat võrratust nii:

$$xy<\frac{a^2}{4};\ 4xy<a^2;\ 4xy<(x+y)^2;\ 4xy<x^2+2xy+y^2;$$
$$0<x^2-2xy+y^2;\ 0<(x-y)^2.$$

Viimane võrratus on õige, kui x ja y ei ole võrdsed. Siirdudes järk-järgult viimaselt võrratuselt eelmiste võrratuste juurde, märkame, et kõik nad on samaväärsed. Tähendab, ka esimene võrratus on õige.

Kui näiteks $x+y=10$, siis korrutise suurim väärtus on $5 \cdot 5=25$.

71. Ühe tundmatuga esimese astme võrratuse lahendamine. Ühe tundmatuga esimese astme võrratuse üldkuju pärast sulgude avamist ja murrulistest liikmetest vabastamist on järgmine:

$$ax+b>a_1x+b_1.$$

Kandes tundmatud liikmed vasakule poolele ja tuntud liikmed paremale poolele, saame:

$$(a-a_1)x>b_1-b.$$

Kui $a-a_1>0$, siis, jagades võrratuse mõlemad pooled avaldisega $a-a_1$, leiame:

$$x>\frac{b_1-b}{a-a_1}.$$

Kui aga $a-a_1<0$, siis saame:

$$x<\frac{b_1-b}{a-a_1}.$$

Seega üks esimese astme võrratus annab tundmatu ühe tõkke, s. o. arvu, mis tõkestab tundmatu väärtust ülaltpoolt ($x<m$) või altpoolt ($x>m$).

Näide. Lahendada võrratus $2x(2x-5)-27<(2x+1)^2$.

Avame sulud:

$$4x^2-10x-27<4x^2+4x+1.$$

Kanname liikmed üle ja koondame sarnased liikmed:

$$-14x<28.$$

Jagame võrratuse mõlemad pooled arvuga -14:

$$x>-2.$$

72. Kaks ühe tundmatuga esimese astme võrratust. Vaatleme kahe võrratuse süsteemi:

$$\begin{cases} ax+b>a'x+b' \\ cx+d>c'x+d' \end{cases}$$

Kumbki võrratus annab tundmatu ühe tõkke.

Seejuures võib esineda kolm juhtumit.

1) Samapidised tõkked. Sel juhtumil on küllalt, kui võtta neist üks. Kui näiteks $x>7$ ja $x>12$, siis on küllalt, kui võtta ainult $x>12$, sest kui $x>12$, siis on ammugi $x>7$; või kui näiteks $x<5$ ja $x<8$, siis on küllalt, kui võtta $x<5$, sest siis on ammugi $x<8$.

2) Vastupidised tõkked, näiteks $x>10$ ja $x<15$. Sel juhtumil võib tundmatu jaoks valida ainult selliseid väärtusi, mis asetsevad leitud tõkete vahel.

3) Vasturääkivad tõkked, näiteks $x<5$ ja $x>7$. Sel juhtumil süsteemil pole lahendeid.

Näide. Lahendada kaks võrratust: $0{,}3x+5<0{,}5x$ ja $5x<<60+2x$. Esimene võrratus annab $x>25$, teine $x<20$. Tähendab, kui need võrratused on tuletatud ühe ja sama ülesande tingimustest, siis sellel ülesandel pole lahendit.

Harjutused.

Lahendada järgmised võrratused:

107. $x-7<2x+5$; $9x-8+3(x-2)<2(x+3)$.

108. $\frac{2x}{5}+4>x-\frac{1}{2}$; $x+2b<16-3(x-2b)$.

109. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}>\frac{a+b}{ab}$; $10-\frac{5x}{2}>0$.

110. Kui $a>b$ ja $c=d$, kas on siis alati $ac>bd$?

111. Kui $a>b$, kas on siis alati $a^m>b^m$?

112. Mis võib ütelda arvude a ja b kohta, kui on teada, et $ab>0$? kui $ab<0$?

113. Millisel tingimusel suureneb murd $\frac{a}{b}$, kui lugeja ja nimetajaga liita üks ja sama positiivne arv (a ja b on positiivsed arvud)?

V i i e s j a g u.

Progressioonid.

I. Aritmeetiline progressioon.

73. Ülesanne. Töölisele tehti ülesandeks kaevata kaev ja lepiti kokku maksta talle sügavuse esimese meetri eest 0,3 rubla, teise eest 0,5 rubla jne., suurendades töötasu iga järgneva meetri eest 0,2 rubla võrra. Kui palju maksti töölisele, kui tema poolt kaevatud kaevu sügavus on 10 m?

Ülesande lahendamiseks on vaja leida järgmiste arvude summa:

$$0{,}3+0{,}5+0{,}7+0{,}9+1{,}1+1{,}3+1{,}5+1{,}7+1{,}9+2{,}1.$$

Selle summa võime leida lihtsamalt kui hariliku liitmise teel. Märkides summa tähega s, kirjutame kaks järgmist rida:

$$s=0{,}3+0{,}5+0{,}7+0{,}9+1{,}1+1{,}3+1{,}5+1{,}7+1{,}9+2{,}1.$$
$$s=2{,}1+1{,}9+1{,}7+1{,}5+1{,}3+1{,}1+0{,}9+0{,}7+0{,}5+0{,}3.$$

Teise summa kirjutasime, asetades esimese rea liidetavad vastupidisesse järjekorda, mistõttu summa muidugi ei muutunud. Liidame nüüd kõik arvud, mis asetsevad üksteise all.

$$2s=2{,}4+2{,}4+2{,}4+2{,}4+2{,}4+2{,}4+2{,}4+2{,}4+2{,}4+2{,}4,$$

s. o.

$$2s=2{,}4 \cdot 10=24$$

ja järelikult

$$s=\frac{24}{2}=12.$$

Niisiis kogu töö eest tuli maksta 12 rubla.

Selles ülesandes oli meil tegemist ühe ja sama arvu võrra kasvavate arvude reaga. Sääraseid ridu nimetatakse a r i t m e e t i l i s t e k s p r o g r e s s i o o n i d e k s.

74. Definitsioon. Aritmeetiliseks progressiooniks *nimetatakse niisugust arvude rida, milles iga arv, alates teisest, võrdub eelneva arvu ning ühe ja sama, antud rea jaoks jääva (positiivse või negatiivse) arvu summaga.*

Nii on arvude read: 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46 ja 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6 aritmeetilised progressioonid, sest esimeses reas on iga arv, alates teisest, võrdne eelneva arvu ja positiivse arvu 4 summaga, teises reas aga eelneva arvu ja negatiivse arvu -2 summaga.

Arve, mis moodustavad progressiooni, nimetatakse progressiooni l i i k m e i k s. Positiivset või negatiivset arvu, mis on vaja liita eelneva liikmega, et saada järgnev liige, nimetatakse progressiooni v a h e k s.

Progressiooni nimetatakse k a s v a v a k s või k a h a n e v a k s olenevalt sellest, kas ta liikmed rea algusest kaugenedes suurenevad või vähenevad. Kasvava progressiooni vahe on positiivne arv, kahaneva progressiooni vahe aga negatiivne arv.

Selle tähistamiseks, et arvude rida kujutab enesest aritmeetilist progressiooni, asetatakse mõnikord rea ette märk $\div$.

Harilikult on kombeks tähistada esimest liiget tähega a, viimast liiget tähega l, vahet tähega d, kõigi liikmete arvu tähega n, nende summat tähega s[1].

75. Aritmeetilise progressiooni üldliikme valem.

Olgu antud progressioon $\div$ 10, 14, 18,... (vahe on 4).

Siis 2. liige$=10+4=14$;

3. „ $=10+4+4=10+4\cdot 2=18$;

4. „ $=10+4+4+4=10+4\cdot 3=22$, jne.

Tähendab:

10. liige$=10+4\cdot 9=46$;

20. „ $=10+4\cdot 19=86$, jne.

Samuti, kui antud progressioon $\div$ 6, 4, 2,... (vahe on -2), siis

2. liige$=6+(-2)=4$;

3. „ $=6+(-2)+(-2)=6+(-)\cdot 2=2$, jne.

---

[1] Mõnedes raamatutes tähistatakse progressiooni liikmeid ka nii: a_1, a_2, a_3, ..., a_n. Progressiooni vahet tähistatakse mõnikord tähega r.

Näiteks:

10. liige$=6+(-2)\cdot 9=-12$.

Üldiselt, kui on antud progressioon $\div$ $a, b, c, \ldots$ (vahe on d), siis

2. liige$=a+d$;
3. „ $=a+d+d=a+2d$;
4. „ $=a+2d+d=a+3d$, jne.

Tähendab, et 10. liige on $a+9d$; 15. liige on $a+14d$, üldiselt m-es liige on $a+d(m-1)$. Seega:

aritmeetilise progressiooni iga liige võrdub esimese liikmega, pluss progressiooni vahe ja sellele liikmele eelnevate liikmete arvu korrutis.

Viimane liige võrdub esimese liikmega, pluss vahe ja liikmete ühe võrra vähendatud arvu korrutis, s. o.

$$\boldsymbol{l=a+d(n-1).} \tag{1}$$

Näited.

1) Leida progressiooni $\div$ 60, 75, 90,... 10. liige.

Et selle progressiooni vahe on 15, siis 10. liige on

$$60+15\cdot 9=195.$$

2) Leida progressiooni $\div$ 40, 37, 34, ... 12. liige.

Et vahe on -3, siis 12. liige on

$$40+(-3)\cdot 11=40-33=7.$$

3) Kui suur on n-es arv järjestikuliste paaritute arvude reas 1, 3, 5,...?

See arv on

$$1+2(n-1)=1+2n-2=2n-1.$$

Järeldus. Aritmeetilist progressiooni, mille esimene liige on a, vahe on d ja liikmete arv on n, võib esitada järgmiselt:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots,\ a+d(n-1).$$

76. Aritmeetilise progressiooni liikmete summa valem. Algul veendume aritmeetilise progressiooni järgmises omaduses:

aritmeetilise progressiooni algusest ja lõpust võrdsel kaugusel asetseva kahe liikme summa võrdub äärmiste liikmete summaga.

Näiteks progressioonis $\div 3, 7, 11, 15, 19, 23$ leiame:

$$3+23=26; \quad 7+19=26; \quad 11+15=26.$$

On arusaadav, miks see nii on: nende summade esimesed liidetavad (s. o. 3, 7, 11) järjest suurenevad 4 võrra, teised liidetavad aga järjest vähenevad 4 võrra; seepärast jääb iga liikmepaari summa üheks ja samaks.

Võtame veel näite kahanevast progressioonist $\div 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4$. Selles progressioonis on

$$8+(-4)=4, \quad 6+(-2)=4, \quad 4+0=4.$$

Liige 2, mis seisab võrdsel kaugusel progressiooni algusest ja lõpust, tuleb liita iseendaga: $2+2=4$. Ka siin on selgitus sama: liidetavad 8, 6, 4, 2 järjest vähenevad 2 võrra, liidetavad -4, -2, 0 ja 2 aga järjest suurenevad 2 võrra. Seepärast jääb iga liikmepaari summa muutumatuks.

Nüüd tuletame mistahes aritmeetilise progressiooni liikmete summa valemi. Selleks kasutame sama viisi, mille abil leidsime aritmeetilise progressiooni liikmete summa § 73 ülesandes, nimelt liidame liikmeti kaks progressiooni:

$$s=a+b+c+\ldots+i+k+l;$$
$$s=l+k+i+\ldots+c+b+a.$$
$$2s=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\ldots+$$
$$+(i+c)+(k+b)+(l+a).$$

Kuid

$$a+l=b+k=c+i=\ldots=l+a;$$

järelikult

$$2s=(a+l)n, \text{ kust } s=\frac{(a+l)n}{2}. \qquad (2)$$

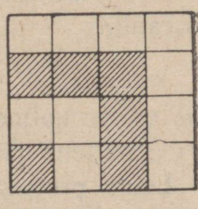
Aritmeetilise progressiooni kõigi liikmete summa võrdub liikmete arvu ja äärmiste liikmete summa poole korrutisega.

Nii leiame ülesandes § 73 summa s jaoks selle valemi järgi sama arvu, mille varem leidsime teisel teel:

$$s=[(0{,}3+2{,}1)\cdot 10]:2=12.$$

Näide 1. Leida naturaalarvude rea n esimese liikme summa (viimane arv kaasa arvatud).

Rida $1, 2, 3, \ldots, n$ on aritmeetiline progressioon, mille esimene liige on 1, vahe on 1,



Joon. 25.

liikmete arv on n ja viimane liige on samuti n; seepärast

$$s=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Nii:

$$1+2+3+4+5+6=\frac{6(6+1)}{2}=21.$$

Näide 2. Leida esimese n paaritu arvu summa.

Nagu eelmises paragrahvis nägime, n-es paaritu arv on $2n-1$; seepärast

$$s=\frac{[1+(2n-1)]\cdot n}{2}=n^2.$$

Nii on

$$1+3=4=2^2; \qquad 1+3+5=9=3^2;$$
$$1+3+5+7=16=4^2, \text{ jne.}$$

Seda paaritute arvude summa omadust kujutab näitlikult joonis 25, mis on koostatud järgmiselt: ruudule (all vasakul) on lisatud kolm samasugust ruutu (1 üles, 1 kõrvale ja 1 ülemisse paremasse nurka); nendele ruutudele on lisatud veel 5 ruutu (2 üles, 2 kõrvale, 1 ülemisse paremasse nurka). Neile on jällegi lisatud 7 ruutu, siis 9 ruutu jne. Siit ilmneb, et

$$1+3=2^2, \quad 1+3+5=3^2, \quad 1+3+5+7=4^2, \text{ jne.}$$

Näide 3. Leida progressiooni $\div 3,\ 2\frac{1}{2},\ 2, \ldots$ kümne liikme summa.

Siin $a=3$, $d=2\frac{1}{2}-3=-\frac{1}{2}$; seepärast on progressiooni 10. liige $3-\frac{1}{2}\cdot 9=-1\frac{1}{2}$ ja otsitav summa on

$$\frac{\left[3+\left(-1\frac{1}{2}\right)\right]\cdot 10}{2}=1\frac{1}{2}\cdot 5=7\frac{1}{2}.$$

Kontroll:

$$3+2\frac{1}{2}+2+1\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}-1-1\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}.$$

77. Märkus. Et viie arvu a, l, d, n ja s jaoks on meil kaks võrrandit:

$$1)\ l=a+d(n-1) \text{ ja } 2)\ s=\frac{(a+l)n}{2},$$

siis võime kolme antud arvu järgi leida ülejäänud kaks. Lahendame näitena järgmise ülesande.

Leida progressiooni liikmete arv, kui progressiooni esimene liige on 7, vahe on -2 ja kõigi liikmete summa on 12.

Selles ülesandes on antud: $a=7$, $d=-2$ ja $s=12$. Tundmatud on l ja n. Asetades valemisse (1) ja (2) antud arvud, saame:

$$l=7-2(n-1)=9-2n; \qquad 12=\frac{(7+l)\,n}{2},$$

kust

$$12=\frac{(7+9-2n)\,n}{2}=(8-n)\,n;$$

$$n^2-8n+12=0; \qquad n=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm 2;$$

$$n_1=6; \qquad n_2=2.$$

Saadakse kaks vastust: liikmete arv on kas 6 või 2. Ja tõepoolest, kahel progressioonil 7, 5, 3, 1, -1, -3 ja 7, 5 on üks ja sama summa 12.

78. Naturaalarvude rea liikmete ruutude summa valem. Tuletame valemi, mis võimaldab arvutada naturaalarvude rea esimese n liikme ruutude summa. Valemi tuletamiseks vaatleme järgmisi samasusi:

$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1^2+1^3;$$
$$3^3=(2+1)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1^2+1^3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^3=n^3+3\cdot n^2\cdot 1+3\cdot n\cdot 1^2+1^3.$$

Liites need samasused ja koondades sarnased liikmed saadud samasuse paremal ja vasakul poolel, saame:

$$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3(1+$$
$$+2+3+\ldots+n)+n.$$

Kuid

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

järelikult

$$3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}$$

Lihtsustame selle võrduse paremat poolt:

$$(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}=$$
$$=(n+1)\left[(n+1)^2-1-\frac{3n}{2}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

Seega

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Harjutused.

114. Leida 30. liige aritmeetilises progressioonis 3, 7, ...

115. Leida 15. liige aritmeetilises progressioonis, mille esimene liige on 130 ja vahe -3.

116. Mitu liiget peab olema progressioonis $\div$ 4, 8, ..., et liikmete summa oleks 112?

117. Leida 103 liikme summa progressioonis $\div$ 103, 101, ...

118. Aritmeetilise progressiooni 3. liige on 7 ja 9. liige on 8. Leia 1. ja 6. liige.

119. Näidata, et kui a, b ja c on aritmeetilise progressiooni kolm üksteisele järgnevat liiget, siis b on a ja c aritmeetiline keskmine.

120. Aritmeetilise progressiooni 2. liige on 1 ja 5. liige on 7. Leida aritmeetilise progressiooni 1000 liikme summa.

121. Leida aritmeetilise progressiooni liikmete arv, kui vahe on -12, viimane liige on 15 ja kõigi liikmete summa on 456.

122. Mitme võrra on kõigi täisarvude summa 51-st kuni 100-ni (viimane kaasa arvatud) suurem kui kõigi täisarvude summa 1-st kuni 50-ni (viimane kaasa arvatud)?

123. Mitu lööki lööb ööpäeva jooksul kell, mis lööb nii täis- kui ka pooltunde?

124. Kas täisnurkse kolmnurga küljed võivad moodustada aritmeetilise progressiooni?

125. Keha, langedes teatavast kõrgusest, läbib esimese sekundi jooksul 4,9 m, igal järgmisel sekundil aga 9,8 m rohkem. Milliselt kõrguselt langes keha, kui langemine kestis 10 sekundit?

126. Aritmeetilise progressiooni kuue liikme summa on 17. Leida see progressioon, teades, et 4. liige on 3.

127. Võrrandeist $l=a+d(n-1)$ ja $s=\frac{(a+l)\,n}{2}$ kõrvaldada l, teiste sõnadega: avaldada s sõltuvana ainult a-st, d-st ja n-st.

128. Leida kolm niisugust arvu, mis moodustaksid aritmeetilise progressiooni vahega d ja millede summa võrduks nende korrutisega.

II. Geomeetriline progressioon.

79. Ülesanne. Muistendi järgi tegi India prints Siram malemängu leiutajale ettepaneku küsida temalt tasu, millist ta tahab. See palus, et temale antaks malelaua esimese ruudu eest 1 nisutera, teise eest 2 tera, kolmanda eest 4 tera jne., suurendades terade arvu kaks korda iga järgneva ruudu eest. Prints oli nõus. Kui aga arvutati nisu hulk, mis tuli anda malelaua 64 ruudu eest, siis ilmnes, et niisugust tasu pole võimalik välja anda, kuna selleks ei piisa nisu. Kui palju teri oleks tulnud leiutajale anda?

Terade hulk, mis oleks tulnud 64 ruudu eest anda, on võrdne järgmise rea summaga:

$$s=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{62}+2^{63}.$$

Me võime leida selle summa tema üksikuid liidetavaid arvutamata. Selleks korrutame võrduse mõlemad pooled 2-ga:

$$2s=2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{63}+2^{64}.$$

Lahutame nüüd sellest võrdusest eelmise võrduse; siis saame vasakul poolel s, paremal poolel aga $2^{64}-1$ (arvud $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{63}$ hävivad):

$$s=2^{64}-1.$$

Tähendab, tuleb arvutada aste 2^{64}, mida võib teha kas järjestikusel korrutamisel kahega valemi järgi:

$$2^{64}=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\ldots (64 \text{ tegurit})$$

või valemi järgi:

$$2^{64}=[(2^{16})^2]^2=(65\,536^2)^2.$$

Nii leiame lõpuks, et terade arv on:

$$s=2^{64}-1=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Võib arvutada, et kui selline arv teri külvata ühtlaselt kogu maakera maismaale, siis tekiks 9 mm paksune nisukiht.

Selles ülesandes on meil tegemist arvude reaga, milles iga arv, alates teisest, võrdub eelneva arvu ning ühe ja sama arvu korrutisega. Seesuguseid arvude ridasid nimetatakse geomeetrilisteks progressioonideks.

80. Definitsioon. Geomeetriliseks progressiooniks *nimetatakse niisugust arvude rida, milles iga arv, alates teisest, võrdub eelneva arvu ning ühe ja sama, antud rea jaoks jääva arvu korrutisega.* Seega järgmised kolm rida:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \ldots;$$

$$8,\ -16,\ 32,\ -64,\ 128,\ -256,\ 512,\ \ldots;$$

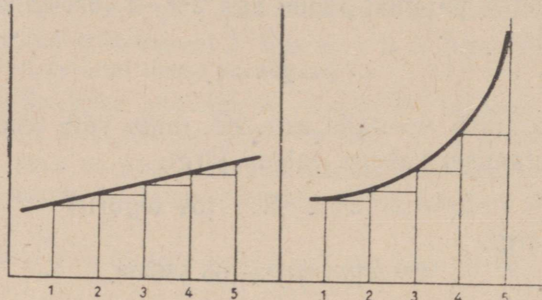
$$20,\ 10,\ 5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{16},\ \frac{5}{32},\ \ldots$$

on geomeetrilised progressioonid, sest nendes ridades iga arv, alates teisest, saadakse eelnevast arvust, korrutades seda esimeses reas arvuga 2, teises reas arvuga -2 ja kolmandas arvuga $\frac{1}{2}$.

Selle tähistamiseks, et antud rida on geomeetriline progressioon, kirjutatakse mõnikord rea ette $\div\!\div$.

Nagu aritmeetilises progressioonis, nii nimetatakse ka geomeetrilist progressiooni moodustavaid arve tema l i i k m e i k s; arvu, millega tuleb eelnev liige korrutada, et saada järgnev, nimetatakse progressiooni t e g u r i k s.

Progressiooni nimetatakse k a s v a v a k s või k a h a n e v a k s olenevalt sellest, kas progressiooni liikmed rea algusest kaugene-



Joon. 26.

des absoluutväärtuselt suurenevad või vähenevad; nii on kolmest eespool toodud progressioonist esimene ja teine kasvavad, kolmas aga kahanev progressioon. Kasvavas progressioonis on teguri absoluutväärtus suurem kui 1, kahanevas progressioonis on see aga väiksem kui 1.

Harilikult tähistatakse progressiooni tegurit tähega q ning liikmeid, nende arvu ja summat samuti nagu aritmeetilises progressiooniski, s. o. $a, b, c, \ldots, l$ (viimane liige), n (liikmete arv) ja s (summa).

81. Geomeetrilise progressiooni võrdlemine aritmeetilise progressiooniga. Aritmeetilise progressiooni kahe kõrvuti asetseva liikme vahe jääb alati üheks ja samaks, mistõttu tema liikmed kasvavad (või kahanevad) ühtlaselt (joon. 26, vasakpoolne). Vaatleme, milline on geomeetrilise progressiooni $\div\!\div\ a, b, c, \ldots$ (tegur on q) kahe kõrvuti asetseva liikme vahe.

Progressiooni definitsioonist järeldub, et $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$ jne., järelikult

$$b-a=aq-a=a(q-1);$$
$$c-b=bq-b=b(q-1), \text{ jne.}$$

Kui progressioon on kasvav ja tema liikmed on positiivsed, siis $a<b<c<\ldots$ jne.; seepärast ka

$$a(q-1)<b(q-1)<c(q-1)<\ldots,$$

s. o.

$$b-a<c-b<d-c<\ldots \text{ jne.}$$

Tähendab, positiivsete liikmetega geomeetrilises progressioonis *kahe kõrvuti asetseva liikme vahe suureneb sedamööda, kuidas suureneb nende kaugus rea algusest;* seetõttu sellise progressiooni liikmed kasvavad seda kiiremini, mida kaugemal nad asetsevad rea algusest, mis on näitlikult kujutatud joonisel 26 (parempoolne).

Näiteks:

$$\div 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$$

$$\div\div 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

82. Geomeetrilise progressiooni üldliikme valem. Olgu antud geomeetriline progressioon

$$\div\div 3, 6, 12, 24, \ldots \text{ (tegur on 2).}$$

Siis

$$2.\text{ liige}=3\cdot 2=6;$$
$$3.\quad ,, \quad =3\cdot 2\cdot 2=3\cdot 2^2=12;$$
$$4.\quad ,, \quad =3\cdot 2\cdot 2\cdot 2=3\cdot 2^3=24, \text{ jne.}$$

Näiteks 10. liige $=3\cdot 2^9=3\cdot 512=1536$.

Samuti, kui meil on progressioon

$$\div\div 10, 5, 2\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{4}\ldots\left(\text{tegur on } \tfrac{1}{2}\right),$$

siis

$$2.\text{ liige}=10\cdot\frac{1}{2}=5;$$
$$3.\quad ,, \quad =10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}=2\frac{1}{2};$$
$$4.\quad ,, \quad =10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=10\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{10}{8}=1\frac{1}{4} \text{ jne.}$$

Üldiselt, kui meil on progressioon kujul

$$\div\div a, b, c, \ldots \text{ (tegur on } q),$$

siis on temas

$$2.\text{ liige}=aq=aq^1;$$
$$3.\quad ,, \quad =aq\cdot q=aq^2;$$
$$4.\quad ,, \quad =aq^2\cdot q=aq^3, \text{ jne.}$$

Seega 10. liige $=aq^9$, üldiselt m-es liige $=aq^{m-1}$. Tähendab: **geomeetrilise progressiooni iga liige, alates teisest, võrdub esimese liikme ja progressiooni teguri astme korrutisega, milles astendajaks on kõigi eelnevate liikmete arv.**

Viimane liige l, millele eelneb $n-1$ liiget, avaldatakse valemiga:

$$l=aq^{n-1}$$

Näide 1. Leida 6. liige progressioonis $\div\!\div\, 3, 12, \ldots$

Selle progressiooni tegur on $12:3=4$; seepärast 6. liige on $3 \cdot 4^5=3072$.

Näide 2. Leida 10. liige progressioonis $\div\!\div\, 20, 10, \ldots$

Et selle progressiooni tegur on $10:20=\frac{1}{2}$, siis 10. liige on

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 20 \cdot \frac{1}{2^9} = 5 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{5}{2^7} = \frac{5}{128}.$$

Järeldus. Geomeetrilist progressiooni, mille esimene liige on a, tegur on q ja liikmete arv on n, võib kirjutada nii:

$$\div\!\div\, a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^{n-1}.$$

83. Geomeetrilise progressiooni liikmete summa valem. Kasutame seda võtet, mille abil leidsime varem (§ 79) summa $1+2+2^2+\ldots+2^{63}$. Korrutame võrduse

$$s=a+b+c+\ldots+k+l \tag{1}$$

mõlemad pooled teguriga q, siis saame:

$$sq=aq+bq+cq+\ldots+kq+lq.$$

Kuid

$$aq=b, \quad bq=c, \quad cq=d, \ldots, kq=l,$$

järelikult

$$sq=b+c+d+\ldots+l+lq. \tag{2}$$

Lahutades liikmeti võrdusest (2) võrduse (1), leiame:

$$sq-s=lq-a, \quad \text{s. o.} \quad (q-1)s=lq-a,$$

kust

$$s=\frac{lq-a}{q-1}.$$

Geomeetrilise progressiooni liikmete summa võrdub murruga, mille lugejaks on viimase liikme ja progressiooni teguri korrutis miinus esimene liige, nimetajaks aga progressiooni tegur miinus 1.

Märkused. 1. Et kahaneva progressiooni puhul $-1<q<1$, siis on parem anda sellise progressiooni summa valemile teistsugune kuju, korrutades murru lugeja ja nimetaja arvuga -1:

$$s=\frac{a-lq}{1-q}.$$

2. Kui tähe l asendame tema avaldisega aq^{n-1}, siis summa valem saab järgmise kuju:

$$s=\frac{aq^n-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1} \quad \text{ehk} \quad s=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Näide. Leida progressiooni kaheksa liikme summa, kui $a=1$ ja $q=\frac{1}{3}$. Siis

$$l=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7=\left(\frac{1}{3}\right)^7$$

ja

$$s=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8}{\frac{2}{3}}=\frac{3-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8}{2}=\frac{3280}{2187}.$$

84. Geomeetrilise progressiooni näide. Leida geomeetrilise progressiooni esimene liige a ja viimane liige l, kui $q=3$, $n=5$ ja $s=242$.

Algul leiame l valemi järgi $l=aq^{n-1}=a\cdot 3^4$ ja asetame siis selle avaldise ning antud arvud summa valemisse:

$$242=\frac{a\cdot 3^4\cdot 3-a}{3-1}=\frac{a(3^5-1)}{2}=121a,$$

kust leiame, et

$$a=242:121=2.$$

Nüüd leiame, et

$$l=2\cdot 3^4=162.$$

Kontroll: $2+6+18+54+162=242$.

Harjutused.

129. Leida esimene liige geomeetrilises progressioonis, mille tegur on 5 ja 7. liige on 62 500.

130. Leida geomeetrilise progressiooni $5, \frac{5}{6}, \ldots$ esimese kaheksa liikme summa.

131. Leida neli arvu, teades, et nad moodustavad geomeetrilise progressiooni, et nende summa on 360 ja et viimane arv on teisest 9 korda suurem.

132. Leida geomeetrilise progressiooni 1, $\sqrt{2}$, ... kaheteistkümne liikme summa.

133. Moodustada neljast arvust selline geomeetriline progressioon, mille esimese ja kolmanda liikme summa oleks 5, teise ja neljanda liikme summa oleks 10.

134. On tähele pandud, et ühe linna elanikkond suureneb igal aastal ühes ja samas vahekorras. Kui suur on see vahekord, kui elanikkond suurenes kolme aasta jooksul 10 000 inimeselt 14 641 inimesele?

135. Näidata, et rida, mis on moodustatud geomeetrilise progressiooni liikmete pöördarvudest, on samuti geomeetriline progressioon. Kas see omadus on ka aritmeetilisel progressioonil?

136. Geomeetrilise progressiooni 5. liige on 61, 11. liige on 1647. Leida 7. liige.

137. Tõestada, et igas geomeetrilises progressioonis 4., 5. ja 6. liikme summa on 1., 2. ja 3. liikme summa ning 7., 8. ja 9. liikme summa geomeetriline keskmine.

138. Geomeetrilise progressiooni 1. ja 2. liikme vahe on 8, 2. ja 3. liikme summa on 12. Leida see progressioon.

139. Kas täisnurkse kolmnurga küljed võivad moodustada geomeetrilise progressiooni?

III. Lõpmatud progressioonid.

85. Lõpmatute progressioonide mõned omadused. Kui arvude rida, mis moodustab progressiooni, jätkub piiramatult, siis nimetatakse progressiooni l õ p m a t u k s. Vaatleme selliste progressioonide mõnd omadust.

a) Võtame lõpmatult kasvava aritmeetilise progressiooni, mille vahe on väga väike, näiteks järgmise:

$$\div\ 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ 1{,}04;\ \ldots$$

Hoolimata sellest, et selle progressiooni liikmed kasvavad väga aeglaselt, ületavad nad küllalt kaugel progressiooni algusest mistahes antud arvu, kui suur see ka oleks, näiteks nad muutuvad suuremaks kui 1 000 000. Tõepoolest, selleks et selle progressiooni $(n+1)$ liige, mis võrdub $1+0{,}01n$, muutuks suuremaks kui 1 000 000, on küllalt, kui võtta n väärtuseks nii suur arv, mis rahuldaks võrratust $1+0{,}01n>1\,000\,000$.

Sellest leiame: $n>\frac{999\,999}{0{,}01}=99\,999\,900$.

Et lõpmatus progressioonis liikmete arv n võib olla kuitahes suur, siis võib selle võtta suurema kui 99 999 900; järelikult $1+0{,}01n$ saab suuremaks kui 1 000 000.

Sellist arutlust võib korrata iga kasvava lõpmatu aritmeetilise progressiooni kohta; seepärast võime teha järgmise üldise järelduse:

lõpmatult kasvava aritmeetilise progressiooni algusest küllalt kaugel asetsevad liikmed ületavad iga kuitahes suure antud arvu.

Võtame lõpmatult kahaneva aritmeetilise progressiooni, näiteks $\div$ 1000, 998, 996,... (vahe on -2). Kui suur ka oleks esimene liige, ikka saavad progressiooni liikmed teatavast kohast alates negatiivseks, ja küllalt kaugel progressiooni algusest nende absoluutväärtused ületavad kuitahes suure antud arvu.

b) Võtame nüüd positiivsete liikmetega lõpmatult kasvava geomeetrilise progressiooni, näiteks järgmise:

$$\div\div 1;\quad 1{,}01;\quad 1{,}01^2 = 1{,}0201;\quad 1{,}01^3 = 1{,}030301;\ \ldots$$
$$\text{(tegur on } 1{,}01\text{)},$$

ja võrdleme seda lõpmatu aritmeetilise progressiooniga

$$\div 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ldots\ \text{(vahe on } 0{,}01\text{)},$$

mille esimesed kaks liiget on võrdsed meie poolt võetud geomeetrilise progressiooni esimese kahe liikmega.

Nagu varem nägime, kasvavad geomeetrilise progressiooni liikmed kiiremini kui aritmeetilise progressiooni liikmed.

Kuid kasvava aritmeetilise progressiooni liikmed ületavad küllalt kaugel progressiooni algusest mistahes arvu; tähendab, meie geomeetrilise progressiooni liikmed võivad ammugi ületada iga antud arvu.

Niisiis:

positiivsete liikmetega lõpmatult kasvava geomeetrilise progressiooni liikmed ületavad küllalt kaugel progressiooni algusest iga kuitahes suure antud arvu.

See omadus on ka sellisel kasvaval geomeetrilisel progressioonil, mille kõik või mõned liikmed on negatiivsed (näiteks: -5, -10, -20, ... või 5, -10, 20, -40, ...), ainult et sel korral ei tule rääkida liikmeist, vaid nende a b s o l u u t v ä ä r t u s t e s t.

c) Võtame nüüd positiivsete liikmetega lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni kohta näite:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots\left(\text{tegur on } \frac{1}{2}\right).$$

Sellise progressiooni liikmed nende kaugenemisel progressiooni algusest muidugi vähenevad, kuid kas nad võivad saada väiksemaks igast antud positiivsest arvust, näiteks väiksemaks kui 0,000001, seda pole algul näha. Et seda avastada, võtame abiprogressiooni, mille liikmed on meie poolt võetud progressiooni liikmete pöördarvud:

$$1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots \text{(tegur on 2)}.$$

See progressioon on kasvav ja seepärast, nagu praegu nägime, ületavad tema liikmed küllalt kaugel progressiooni algusest iga antud arvu; tähendab, nad ületavad ka 1 000 000. Kui aga ilmneb, et

$$2^n > 1\,000\,000,$$

siis on ilmselt

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1\,000\,000}.$$

Rakendame seda arutlust mistahes positiivsete liikmetega lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni

$$\div\div\ a, b, c, \ldots \text{(tegur } q < 1)$$

kohta.

Et näidata, et selle progressiooni liikmed küllalt kaugel progressiooni algusest muutuvad väiksemaks igast kuitahes väikesest antud positiivsest arvust α, võtame geomeetrilise abiprogressiooni

$$\div\div\ \frac{1}{a}, \frac{1}{aq}, \frac{1}{aq^2}, \frac{1}{aq^3}, \ldots, \frac{1}{aq^n}, \ldots \left(\text{tegur } \frac{1}{q} > 1\right).$$

See on kasvav progressioon, sest tema tegur on suurem kui 1. Kui kasvava geomeetrilise progressiooni liikmed võivad ületada iga antud arvu; järelikult ületavad nad ka arvu $\frac{1}{\alpha}$. Seepärast küllalt suure arvu n puhul on rahuldatud võrratus:

$$\frac{1}{aq^n} > \frac{1}{\alpha}, \text{ ja siis } aq^n < \alpha.$$

Seega:

positiivsete liikmetega lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni algusest küllalt kaugel asetsevad liikmed on väiksemad kuitahes väikesest antud positiivsest arvust.

See omadus on ka lõpmatult kahaneval geomeetrilisel progressioonil, mille kõik või mõned liikmed on negatiivsed, kuid sel korrai ei räägita progressiooni liikmeist, vaid nende absoluutväärtustest.

86. Piirväärtuse mõiste. Oletame, et me lõpmatult kahanevas geomeetrilises progressioonis

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

võtsime algusest 10 liiget; siis viimane (10.) liige on $\left(\frac{1}{2}\right)^9$, kümne liikme summa (mida tähistame sümboliga s_{10}) on:

$$s_{10} = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 2 - \frac{1}{2^9}.$$

Samuti leiame:

$$s_{11} = 2 - \frac{1}{2^{10}}; \quad s_{12} = 2 - \frac{1}{2^{11}}; \quad \dots; \quad s_{n+1} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Me näeme, et liikmete arvu kasvades läheneb nende summa üha enam ja enam arvule 2. Nii on summa s_{n+1} murru $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ võrra väiksem kui 2, aga see murd, nagu nägime, muutub küllalt suure n korral väiksemaks igast antud positiivsest arvust.

Kui mingi muutuva suuruse (meie näites — progressiooni liikmete summa) väärtus läheneb ikka enam ja enam teatavale jäävale arvule (meie näites — arvule 2) nii, et jääva arvu ja muutuva suuruse vahe absoluutväärtus saab ja jääb väiksemaks igast kuitahes väikesest antud positiivsest arvust, siis nimetatakse seda jäävat arvu muutuva suuruse piirväärtuseks.

Seda märkides võime ütelda, et muutuv summa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

ligineb arvu n lõpmatul kasvamisel piirväärtusele 2, mida kirjutatakse nii:

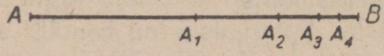
$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \to 2, \text{ kui } n \to \infty$$

($n \to \infty$ loetakse: «n ligineb lõpmatusele»), või kirjutatakse nii:

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Siin sümbol «lim» on ladinakeelse sõna *limes* (piir) lühendus. Selle sümboli juurde asetatud kirjutis $n \to \infty$ asendab lauset: «Kui n kasvab piiramatult» (kui n ligineb ∞-le).

Ka piltlikult võib näidata (joon. 27), et vaadeldav summa läheneb piiramatult arvule 2. Oletame, et lõik $AA_1=1$ ja $AB=2$.



Joon. 27.

Siis $1+\frac{1}{2}=AA_2$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=AA_3$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=AA_4$ jne., on selge, et progressiooni liikmete arvu suurendades me läheneme piiramatult punktile B ja tähendab summa $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ läheneb piiramatult lõigule $AB=2$.

87. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valem. Kui lõpmatult kahanevas geomeetrilises progressioonis

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ldots\ (-1<q<1)$$

võtame algusest n liiget, siis n-es liige on aq^{n-1} ja n liikme summa on

$$s_n=\frac{a-lq}{1-q}=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

Seda valemit võib kirjutada ka nii:

$$s_n=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Oletame, et n kasvab piiramatult. Siis arv $\frac{a}{1-q}$ jääb muutumatuks, kuid murd $\frac{aq^n}{1-q}$ väheneb oma absoluutväärtuselt ja seejuures lõpmatult, kuna tema lugeja muutub absoluutväärtuselt väiksemaks igast antud positiivsest arvust, nimetaja aga jääb muutumatuks. Tähendab:

$$s_n\to\frac{a}{1-q},\ \text{kui}\ n\to\infty.$$

Seda piirväärtust $\frac{a}{1-q}$ nimetataksegi lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summaks,

s. o. **lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmete summa võrdub progressiooni esimese liikme ning arvu 1 ja progressiooni teguri vahe jagatisega.**

Näiteks, liikmete summa geomeetrilises progressioonis

$$\div\div 2, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{8}, -\frac{1}{16} \ldots,$$

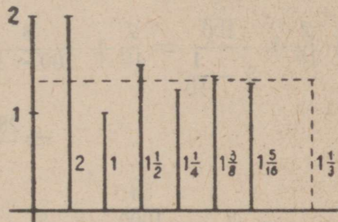
milles $q = -\frac{1}{2}$ ja $a=2$, võrdub

$$\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

Juurdelisatud joonisel on kujutatud rida ordinaate, mis näitlikult kujutavad antud progressiooni ühe, kahe, kolme, nelja jne. liikme summa suurust.

Need ordinaadid muutuvad kord suuremaks kui $1\frac{1}{3}$, kord väiksemaks kui $1\frac{1}{3}$, lähenedes üha enam sellele arvule (joon. 28).

88. Geomeetrilise progressiooni summa valemi rakendamine perioodiliste kümnendmurdude puhul. Võtame järgmised kaks p u h t p e r i o o d i l i s t e (s. o. selliste, millel periood algab kohe pärast koma) kümnendmurdude näidet:



Joon. 28.

1) 0,999 . . . ja 2) 0,232323 . . .

Need murrud kujutavad endast summasid:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10\,000} + \ldots \text{ ja } \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000} + \ldots$$

Nende summade liidetavad on lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmed, kusjuures progressiooni teguriks on esimesel progressioonil $\frac{1}{10}$ ja teisel $\frac{1}{100}$. Need summad võrduvad:

$$1)\ \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10-1} = \frac{9}{9} = 1; \quad 2)\ \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{23}{100-1} = \frac{23}{99}.$$

Neist näiteist nähtub, et

puht-perioodiline murd võrdub hariliku murruga, mille lugejaks on periood ja nimetajaks arv, mis on kirjutatud nii mitme 9-ga, kui mitu numbrit on perioodis.

Võtame nüüd kaks segaperioodiliste (s. o. niisuguste, millel periood ei alga kohe pärast koma) kümnendmurdude näidet:

3) 0,2888 ... ja 4) 0,3545454 ...

Neid murde võib esitada summadena:

$$3)\ \frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10\,000}+\dots$$

ja

$$4)\ \frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{100\,000}+\frac{54}{10\,000\,000}+\dots$$

Nende summade liidetavad, alates teisest, on lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmed; kolmandas summas on teguriks $\frac{1}{10}$, neljandas summas $\frac{1}{100}$. Seepärast need summad võrduvad:

$$3)\ \frac{2}{10}+\frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{10}+\frac{8}{100-10}=\frac{2}{10}+\frac{8}{90}=\frac{2\cdot 9+8}{90}=\frac{2\cdot 10-2+8}{90}=$$

$$=\frac{28-2}{90}=\frac{26}{90}=\frac{13}{45}.$$

$$4)\ \frac{3}{10}+\frac{\frac{54}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{1000-10}=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=\frac{3\cdot 99+54}{990}=$$

$$=\frac{3\cdot 100-3+54}{990}=\frac{354-3}{990}=\frac{351}{990}=\frac{39}{110}.$$

Neist näiteist selgub, et:

segaperioodiline murd võrdub sellise hariliku murruga, mille lugejaks on teise perioodi ees seisva arvu ja esimese perioodi ees seisva arvu vahe ning nimetajaks on arv, mis on kirjutatud nii mitme 9-ga, kui mitu numbrit on perioodis, ja nii mitme nulliga, kui mitu numbrit on koma ja esimese perioodi vahel.

Harjutused.

Leida lõpmatult kahanevate progressioonide summad:

140. $3+1+\frac{1}{3}+\dots;$ $\qquad 8-4+2-\dots.$

141. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots;$ $\qquad 1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\dots.$

142. $1+\frac{1}{1{,}05}+\frac{1}{1{,}05^2}+\ldots;\quad 1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\ldots\ (b<a)$.

143. $1+x+x^2+x^3+\ldots(0<x<1)$.

144. $1-x+x^2-x^3+\ldots(0<x<1)$.

145. Lõpmatu geomeetrilise progressiooni summa on $7\frac{1}{2}$, esimese kahe liikme summa on $6\frac{2}{3}$. Leida progressiooni 6. liige.

146. Väljendada järgmiste perioodiliste murdude täpsed väärtused harilikes murdudes: 0,777 ...; 2,7171 ...; 0,(142857); 0,3(8); 1,41(26); 0,16(21).

147. Ruutu, mille külg a, on joonestatud teine ruut, mille tipud asetsevad antud ruudu külgede keskel. Sellesse ruutu on joonestatud samal viisil kolmas ruut, kolmandasse neljas jne. kuni lõpmatuseni. Leida kõigi ruutude pindalade ja ümbermõõtude summa.

Kuues jagu.

Astendaja mõiste üldistus.

I. Täisarvulised astendajad.

89. Täisarvuliste positiivsete astendajate omadusi. Seni eeldasime, et astendajad on positiivsed täisarvud, kusjuures me andsime neile mõtte, mis on väljendatud järgmises definitsioonis:

astendada arv a mingi täisarvulise positiivse astendajaga n tähendab leida n võrdse teguri korrutis aaa . . . a.

Loetleme nende astendajate omadused, mis on meile tuntud algebra kursuse eelmistest peatükkidest:

1) ühe ja sama arvu astmete korrutamisel liidetakse nende astendajad;

2) ühe ja sama arvu astmete jagamisel lahutatakse jagatava astendajast jagaja astendaja, kui jagaja astendaja pole suurem jagatava astendajast;

3) negatiivse arvu astendamisel paarisarvulise astendajaga saadakse positiivne arv, paarituarvulise astendajaga astendamisel aga negatiivne arv;

4) et astendada korrutis, tuleb astendada sama astendajaga iga tegur eraldi;

5) et astendada aste, tuleb astendajad korrutada;

6) et astendada murd, tuleb astendada sama astendajaga lugeja ja nimetaja eraldi;

7) et astendada juur, tuleb astendada sama astendajaga juuritav;

8) et juurida aste, tuleb astendaja jagada juurijaga, kui selline jagamine on teostatav jäägita.

Nüüd laiendame astendaja mõistet, kõneldes negatiivseist ja murrulistest astendajaist, mida me pole seni kasutanud.

Seejuures näeme, et *kõik täisarvuliste positiivsete astendajate omadused on kehtivad ka negatiivsete ja murruliste astendajate puhul.*

90. Astendaja null. Ühe ja sama arvu astmete jagamisel võib juhtuda, et jagatava astendaja võrdub jagaja astendajaga.

Olgu arv a^n vaja jagada arvuga a^n. Kasutades paragrahvis 89 antud reeglit (2) saame:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

Kuid nullil pole astendajana seda tähendust, mis antakse täisarvulistele positiivseile astendajaile, sest arvu ei saa null korda võtta teguriks. Et avaldisele a^0 anda mõte, läheneme küsimusele arvu a^n jagamisest arvuga a^n teisest küljest. Me teame, et mistahes nullist erineva arvu ja temaga võrdse arvu jagatis on 1.

Seepärast on kokku lepitud lugeda $a^0 = 1$.

Seega võime defineerida, et:

iga arv (välja arvatud null) astmes null võrdub ühega.

Et eespool loetletud täisarvuliste positiivsete astendajate omadused on rakendatavad ka nullilise astendaja kohta, selles on kerge veenduda. Nii:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m; \qquad (a^m)^0 = a^{m\cdot 0} = a^0 = 1 \text{ jne.}$$

91. Negatiivsed täisarvulised astendajad. Lepime kokku, et ühe ja sama arvu astmete jagamisel lahutame jagaja astendaja jagatava astendajast ka sel juhtumil, kui jagaja astendaja on suurem kui jagatava astendaja. Siis saame jagatisena negatiivse astendajaga astme, näiteks $a^2 : a^5 = a^{-3}$. Seega siis lepime kokku kasutada arvu negatiivse astendajaga astet selle arvu astmete jagatise tähistamiseks juhtumil, kui jagaja astendaja ületab jagatava astendaja nii mitme ühe võrra, kui suur on negatiivse astendaja absoluutväärtus. Nii tähendab a^{-2} arvude $a : a^3$ või $a^2 : a^4$ või $a^3 : a^5$ jagatist, üldiselt $a^m : a^{m+2}$ jagatist.

Selles mõttes mõistetava arvu negatiivse astendajaga aste võrdub murruga, mille lugejaks on 1, nimetajaks aga on sama arv, kuid positiivse astendajaga, mis on võrdne negatiivse astendaja absoluutväärtusega.

Tõesti, vastavalt meie kokkuleppele peab olema:

$$a^{-1}=\frac{a^m}{a^{m+1}}; \qquad a^{-2}=\frac{a^m}{a^{m+2}}; \qquad x^{-3}=\frac{x^m}{x^{m+3}} \text{ jne.}$$

Taandades esimest kaht murdu a^m-ga ja kolmandat murdu x^m-ga (s. o. taandades murde mõlemal juhul lugejaga), saame:

$$a^{-1}=\frac{1}{a} \qquad a^{-2}=\frac{1}{a^2}; \qquad x^{-3}=\frac{1}{x^3}, \text{ jne.}$$

Üldiselt,

$$a^{-n}=\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n}.$$

Näeme, et negatiivsed astendajad annavad võimaluse esitada iga murrulist algebralist avaldist murruvabal kujul; selleks tarvitseb ainult kõik nimetaja tegurid viia tegureina lugejaisse, võttes need negatiivsete astendajatega. Näiteks:

$$\frac{3a}{b^2c^3}=3a\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^3}=3ab^{-2}c^{-3}.$$

92. Tehted negatiivsete astendajatega astmetega. Veendume nüüd, et kõik tehted negatiivsete astmenäitajatega võib sooritada samade reeglite järgi, mis varem tuletati positiivsete astendajate jaoks. On küllalt, kui selgitada seda ainult korrutamise ja astendamise kohta, sest pöördtehete reeglid, s. o. jagamise ja juurimise reeglid, on otseste tehete järeldused.

Korrutamine. Tuleb näidata, et astmete korrutamisel liidetakse ühe ja sama tähe astendajad ka sel juhul, kui need astendajad on negatiivsed. Veendume, et $a^{-n}\cdot a^{-m}=a^{-n+(-m)}=a^{-(n+m)}$, kus m ja n on positiivsed täisarvud.

Tõepoolest, muutes negatiivsete astendajatega astmed murdudeks ja sooritades korrutamistehte reeglite järgi, mis kehtivad murdude kohta, saame:

$$a^{-n}\cdot a^{-m}=\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{a^m}=\frac{1}{a^n\cdot a^m}=\frac{1}{a^{(n+m)}}=a^{-(n+m)}.$$

Samuti

$$x^{-n}\cdot x^m=x^{-n+m}, \quad \text{sest } x^{-n}\cdot x^m=\frac{1}{x^n}\cdot x^m=\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}=x^{-n+m}.$$

Astendamine. On vaja näidata, et astme astendamisel korrutatakse astendajaid ka sel juhtumil, kui nad on negatiivsed. Veendume, et $(a^{-n})^{-m}=a^{(-n)\cdot(-m)}=a^{nm}$.

Tõepoolest:

$$(a^{-n})^{-m}=\frac{1}{(a^{-n})^m}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m}=\frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}}=a^{nm}.$$

Samuti

$$(x^n)^{-m}=x^{-mn},\quad \text{sest } (x^n)^{-m}=\frac{1}{(x^n)^m}=\frac{1}{x^{mn}}=x^{-nm}.$$

Näited.

1) $(3a^{-2}b^2c^{-3})\,(0{,}8ab^{-3}c^4)=2{,}4a^{-1}b^{-1}c.$

2) $(x^{-1}y^3z^2):(5x^2y^{-2}z^3)=\frac{1}{5}x^{-3}y^5z^{-1}.$

3) $(2ax^{-3})^{-2}=2^{-2}a^{-2}x^6.$

4) $(x^{-2}-y^{-1})^2=(x^{-2})^2-2x^{-2}y^{-1}+(y^{-1})^2=$
$=x^{-4}-2x^{-2}y^{-1}+y^{-2}.$

5) $(a^{-2}+b^{-3})\,(a^{-2}-b^{-3})=a^{-4}-b^{-6}.$

6) $\sqrt[3]{27p^{-9}q^{-3}}=3p^{-3}q^{-1}.$

Harjutused.

148. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

5^{-2}; 10^{-1}; 2^{-4}; $(-1)^{-1}$; $(-2)^{-2}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $(0{,}1)^{-3}$; $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $(0{,}3)^{-4}$.

Kirjutada järgmised avaldised murruvabal kujul:

149. $\frac{1}{a^2b}$; $\frac{2}{a^3b^4}$; $\frac{3a}{x}$; $\frac{x}{3ay^2z^3}$.

150. $\frac{a}{a+x}$; $\frac{a}{a-x}$; $\frac{3ab}{(1+x)^2(1-x)}$.

Sooritada järgmised tehted.

151. $7a^3b^{-1}\cdot 2ab^3$; $4\frac{1}{2}a^4x^{-3}y^{-2}\cdot 2a^{-4}x^3y^5$.

152. $a^8:a^{-1}$; $x^{-2}:x$; $x^2:x^2$; $x^{-2}:x^2$.

153. $10a^3b^{-2}:5ab^{-5}$; $25a^{-3}b^{-2}x^2:5a^{-4}b^2x^3$.

154. $(a^{-2})^4$; $(a^2)^{-4}$; $(a^{-2})^{-4}$.

155. $(2a^2b^{-3})^2$; $\left(\frac{1}{2}x^{-3}y^{-2}\right)^{-2}$.

156. $\left[\left(\frac{3a^3b^{-2}c^{-3}}{2x^2y}\right)^2\right]^{-3}$; $\sqrt{3a^{-2}\sqrt{27x^{-12}y^6}}$.

157. $(2a^{-1}-1)\,(2a^{-1}+1)$; $(a^{-2}-a^{-1})^2$.

II. Murrulised astendajad.

93. Mis mõttes kasutatakse murrulisi astendajaid. Me teame (§ 15), et astme juurimisel jagatakse astendaja juurijaga, kui see jagamine on teostatav jäägita; näiteks $\sqrt{a^4}=a^2$; $\sqrt[3]{x^9}=x^3$ jne.

Laiendame nüüd seda reeglit ka nende juhtumite jaoks, kui astendaja ei jagu juurijaga jäägita. Näiteks me lepime kokku selles, et

$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\,; \qquad \sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}\,; \qquad \sqrt[3]{z^5}=z^{\frac{5}{3}}.$$

Üldse lepime kokku, et

avaldis $a^{\frac{m}{n}}$ *tähendab juurt, mille juurija võrdub astendaja* $\frac{m}{n}$ *nimetajaga ja juuritava astendaja võrdub lugejaga* (s. o. juurt $\sqrt[n]{a^m}$).

Lepime kokku kasutada negatiivseid murrulisi astendajaid samas mõttes, nagu kasutasime negatiivseid täisarvulisi astendajaid; näiteks ütleme, et:

$$a^{-\frac{3}{4}}=\frac{a^m}{a^{m+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\,*.$$

94. Murrulise astendaja põhiomadus. Murrulise astendajaga astme suurus ei muutu, kui me korrutame või jagame murrulise astendaja lugeja ning nimetaja ühe ja sama arvuga (mis erineb nullist).

Seega:

$$a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{6}{4}}=a^{\frac{9}{6}}=\ldots; \qquad x^{\frac{4}{6}}=x^{\frac{2}{3}}.$$

Üldiselt:

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$$

Tõepoolest, murrulise astendaja nimetaja tähendab juurijat, tema lugeja aga tähendab juuritava astendajat. Sellist juurijat ja astendajat võib, nagu nägime (§ 14), korrutada ning jagada ühe ja sama arvuga.

Toetudes sellele omadusele, *võime murrulisi astendajaid teisendada samuti nagu harilikke murde*; me võime näiteks murrulist astendajat taandada või mitu murrulist astendajat teisendada samanimeliseks.

---

* Murrulised astendajad toodi algebrasse peamiselt hollandi inseneri Simon Stevin'i poolt XVII sajandi algul. Hiljem, XVII sajandi lõpul, võttis Oxfordi professor John Wallis tarvitusele negatiivsed astendajad.

95. Tehted murruliste astendajatega astmetega. Tuleb tõestada, et murruliste astendajate kohta on rakendatavad samad reeglid, mis tuletati varem täisarvuliste astendajate jaoks. Selleks on küllalt, kui seda selgitada ainult korrutamise ja astendamise kohta, sest jagamise ja juurimise reeglid on korrutamise ja astendamise reeglite järeldused.

Korrutamine. Tõestame, et korrutamisel liidetakse ühe ja sama tähe astendajad ka siis, kui need astendajad on murrulised. Näiteks veendume, et:

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{10+12}{15}} = a^{\frac{22}{15}}.$$

Selleks kirjutame murruliste astendajatega astmed juurtena ja teostame korrutamise juurte korrutamise reeglite järgi (§ 18):

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4} = \sqrt[15]{a^{10}} \cdot \sqrt[15]{a^{12}} = a^{\frac{22}{15}}.$$

Tulemus on sama, mille saime pärast astendajate liitmist; järelikult astendajate liitmise reeglit (korrutamise puhul) võib rakendada ka murruliste astendajate kohta.

Seega:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}; \quad a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}.$$

Astendamine. Tõestame, et astme astendamisel võib astendajaid korrutada ka siis, kui need astendajad on murrud. Näiteks veendume, et:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}} = a^{\frac{8}{15}}.$$

Tõepoolest, asendades murruliste astendajatega astmed juurtega ja sooritades tehted juurtega, saame:

$$\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^8}} = \sqrt[15]{a^8} = a^{\frac{8}{15}}.$$

Ka siis, kui astendajad pole üksnes murdarvud, vaid ka negatiivsed, võib nende kohta rakendada reegleid, mis on kehtivad positiivsete astendajate kohta. Näiteks:

$$a^{-\frac{m}{n}} a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} =$$

$$= a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

96. Näiteid tehete kohta murruliste ja negatiivsete astendajatega.

$$1)\ \left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\left[a^{\frac{1}{2}}+\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]\left[a^{\frac{1}{2}}-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]=a-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)^2=$$

$$=a-b-c+2b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}=a-b-c+2\sqrt{bc}.$$

$$2)\ \sqrt{12a^{-4}b^3}:\left[\left(\frac{a^5}{3b^{-4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}}=\left(2\cdot 3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{3}{2}}\right):\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}b^2}=$$

$$=2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}}=2b^3\sqrt{ab}.$$

Harjutused.

Teostada tehted:

158. $2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\cdot 5a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}$.

159. $20a^{-2}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}:4a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}$; $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{a}}$.

160. $\sqrt[3]{3a^2b}:4ab^3$; $\sqrt[12]{x^3}:x^{\frac{1}{4}}$.

161. $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^3$; $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-2}$; $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

162. $\left(x^3\right)^{\frac{1}{3}}$; $\left(x^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $4\left(a^3b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

163. $\left(27a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

164. $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}$; $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{3}}}$; $\sqrt{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$.

165. $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(2a+\frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}\right)^2$.

166. $\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

167. Teades, et (ligikaudu) $10^{0,30103}=2$ ja $10^{0,47712}=3$, kujutada arvud 4, 8, 16, 9, 24, 6, 12, 18 arvu 10 astmetena.

III. Irratsionaalse astendaja mõiste.

97. Irratsionaalse astendajaga astme mõte. Vaatleme astet a^{α}, kus α on mingi irratsionaalarv ja astendatav a on mingi positiivne arv, mis pole võrdne 1-ga. Seejuures võib esineda kolm järgmist juhtumit:

a) $a>1$ ja α on positiivne irratsionaalarv, näiteks $10^{\sqrt{2}}$.

Tähistame tähega α_1 arvu α mistahes ratsionaalse ligikaudse väärtuse puuduga ja tähega α_2 arvu α mistahes ratsionaalse ligikaudse väärtuse liiaga. Siis tähendab aste a^α sellist arvu, mis on suurem igast astmest a^{α_1}, kuid väiksem igast astmest a^{α_2}. Võib tõestada, et selline arv on olemas ja seejuures ainult üks. Nii näiteks tähendab $10^{\sqrt{2}}$ sellist arvu, mis on suurem igast järgmisest arvust:

$$10^{1,4},\ 10^{1,41},\ 10^{1,414},\ 10^{1,4142},\ \ldots,$$

kus astendajad on arvu $\sqrt{2}$ ligikaudsed väärtused puuduga, ja väiksem igast järgmisest arvust:

$$10^{1,5},\ 10^{1,42},\ 10^{1,415},\ 10^{1,4143},\ \ldots,$$

kus astendajad on arvu $\sqrt{2}$ ligikaudsed väärtused liiaga.

b) $a<1$ ja α on endiselt positiivne irratsionaalarv, näiteks $0,5^{\sqrt{2}}$.

Sel korral mõistetakse astme a^α all sellist arvu, mis on väiksem igast astmest a^{α_1} ja suurem igast astmest a^{α_2}. Nii on $0,5^{\sqrt{2}}$ arv, mis on väiksem igast järgmisest arvust:

$$0,5^{1,4},\ 0,5^{1,41},\ 0,5^{1,414},\ 0,5^{1,4142},\ \ldots,$$

kuid suurem igast järgmisest arvust:

$$0,5^{1,5},\ 0,5^{1,42},\ 0,5^{1,415},\ 0,5^{1,4143},\ \ldots.$$

Seega, kui irratsionaalarv α asetseb kahe ratsionaalarvu α_1 ja α_2 vahel, siis aste a^α asetseb astmete a^{α_1} ja a^{α_2} vahel niihästi siis, kui $a>1$, kui ka siis, kui $a<1$.

c) $a \gtreqless 1$ ja α on negatiivne irratsionaalarv; näiteks:

$$10^{-\sqrt{2}};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}.$$

Avaldisele a^α omistatakse siis sama mõte, mis on ratsionaalsete negatiivsete astendajatega astmeil.

$$10^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{\sqrt{2}}};\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}}.$$

Irratsionaalsete astendajate teooria lähemal käsitlemisel ilmneb, et kõik ratsionaalsete astendajate omadused on rakendatavad ka irratsionaalsete astendajate kohta; nii:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta};\quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

IV. Eksponentfunktsioon.

98. Definitsioon. *Eksponentfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $y=a^x$*, mis kujutab endast mingi jääva positiivse arvu $a \neq 1$ astet ja mille astendajaks on sõltumatu muutuja x, mis võib saada kõikvõimalikke väärtusi: positiivseid ja negatiivseid, täisarvulisi ja murrulisi, ratsionaalseid ja irratsionaalseid. Seejuures eeldatakse, et juhtumil, kui astendaja x on murruline ja järelikult a^x tähendab mingit juurt, siis võetakse kõigist juure väärtustest ainult tema aritmeetiline, s. o. positiivne väärtus [1].

Sellest, mis teame astendajate kohta, järeldub, et x igale väärtusele vastab ainult üks funktsioon $y=a^x$ väärtus (kokkuleppe tõttu kasutada ainult juurte aritmeetilisi väärtusi).

99. Eksponentfunktsiooni omadused. Vaatleme eksponentfunktsiooni omadusi, pidades meeles, et a on positiivne arv.

1. *Iga positiivse astendatava puhul on funktsiooni a^x väärtus positiivne,* s. o. $a^x > 0$.

Kui x on positiivne täisarv, siis $a^x > 0$, milline ka oleks positiivne arv a; järelikult on meie väide õige.

Võrdugu nüüd x mingi positiivse murruga, näiteks $x=\frac{m}{n}$. Siis

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Kui $a^m > 0$, järelikult ka $\sqrt[n]{a^m} > 0$, sest me leppisime kokku võtta ainult juure aritmeetilise väärtuse.

Olgu x positiivne irratsionaalarv. Tähistame tähtedega α_1 ja α_2 x ligikaudsed ratsionaalsed väärtused liiaga ja puuduga. Need ligikaudsed väärtused on samuti positiivsed. Siis funktsiooni a^x väärtus, asetsedes kahe positiivse arvu a^{α_1} ja a^{α_2} vahel, on positiivne arv.

---

[1] Siin eeldatakse, et astendatav a pole võrdne 1-ga, sest kui $a = 1$, siis aste a^x võrduks x-i mistahes väärtuse puhul 1-ga ega sõltuks x-st. Eeldatakse ka veel, et astendatav a on positiivne arv, sest kui $a < 0$, siis astmel a^x poleks x paljude väärtuste puhul mingisugust reaalset väärtust. Näiteks $a = -4$ ja $x = \frac{1}{2}$, siis aste a^x saaks imaginaarse väärtuse $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$.

Võrdugu x lõpuks mingi negatiivse arvuga, näiteks $x=-p$. Siis

$$a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Milline positiivne arv p ka oleks, vastavalt öeldule on $a^x > 0$, kuid siis on ka $\frac{1}{a^p} > 0$.

Seega on meie väide õige x mistahes väärtuse puhul.

2. *Kui $a>1$, siis on funktsioon $a^x>1$, kui $x>0$, ja $a^x<1$, kui $x<0$* (kui $a<1$, siis a^x kohta kehtivad vastupidised võrratused).

Olgu x positiivne täisarv. Siis

$$a>1; \quad a^x > 1^x; \quad a^x > 1.$$

Olgu x positiivne murd, näiteks $\frac{m}{n}$. Siis

$$a>1; \quad a^m>1; \quad \sqrt[n]{a^m} > \sqrt[n]{1}; \quad \sqrt[n]{a^m} > 1; \quad a^{\frac{m}{n}} > 1.$$

Kui x on positiivne irratsionaalarv, siis $a^{\alpha_1}>1$, kus α_1 on x ligikaudne ratsionaalne väärtus puuduga, seepärast on ka $a^x > 1$. Seega x-i iga positiivse väärtuse puhul on

$$a^x > 1.$$

Olgu nüüd x mistahes negatiivne arv, näiteks $x=-p$. Siis

$$a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Kuid vastavalt eelmisele $a^p>1$. Järelikult:

$$\frac{1}{a^p} < 1, \text{ s. o. } a^x < 1.$$

3. *Kui $a>1$, siis x-i kasvades funktsioon a^x kasvab.*

Kui x_1 ja x_2 on kaks positiivset täisarvu ning $x_2>x_1$, siis on ilmne, et kui $a>1$, siis

$$a^{x_2} > a^{x_1}.$$

Olgu nüüd x_1 ja x_2 positiivsed murrud, näiteks $x_1 = \frac{m}{n}$ ja $x_2 = \frac{p}{q}$. Samuti olgu $x_2>x_1$. Siis

$$\frac{p}{q} > \frac{m}{n}.$$

Pärast murdude teisendamist samanimeliseks saame:

$$\frac{pn}{qn} > \frac{mq}{qn}.$$

Kahest võrdsete nimetajatega mittevõrdsest murrust on see suurem, mille lugeja on suurem. Järelikult:

$$pn > mq.$$

Et pn ja mq on täisarvud, siis võib nende kohta rakendada eelmisi arutlusi, ja me saame:

$$a^{pn} > a^{mq}.$$

Võtame arvudest a^{pn} ja a^{mq} qn-nda juure. Me teame, et kahest ühe ja sama juurijaga juurest on see suurem, mille juuritav on suurem. Järelikult:

$$\sqrt[qn]{a^{pn}} > \sqrt[qn]{a^{mq}} \quad \text{ehk} \quad a^{\frac{pn}{qn}} > a^{\frac{mq}{qn}}.$$

Taandades astendajad saame:

$$a^{\frac{p}{q}} > a^{\frac{m}{n}}, \quad \text{s. o.} \quad a^{x_2} > a^{x_1}.$$

Olgu x_1 ja x_2 kaks reaalarvu, milledest üks või mõlemad on irratsionaalsed.

Märgime tähega β arvu x_1 ligikaudse ratsionaalse väärtuse liiaga ja tähega α arvu x_2 ligikaudse väärtuse puuduga. Kui $x_1 < x_2$, siis võib valida α ja β nii, et $\beta < \alpha$. Siis on $a^{x_1} < a^{\beta}$ ja $a^{\alpha} < a^{x_2}$. Et aga $a^{\beta} < a^{\alpha}$, siis $a^{x_1} < a^{x_2}$.

100. Eksponentfunktsiooni graafik. Joonestame järgmise kolme eksponentfunktsiooni graafikud:

$$1)\ y = 2^x;\ 2)\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x;\ 3)\ y = 10^x.$$

Esimese kahe funktsiooni graafiku valmistamiseks anname muutujale x rea täisarvulisi väärtusi:

$$-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

Kui $x = -3$, siis saame:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8};\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 1 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 : \frac{1}{8} = 8.$$

Samuti arvutame y väärtused ka x-i kõigi ülejäänud väärtuste jaoks.

Funktsiooni $y = 10^x$ jaoks pole sobiv võtta arvu x näidatud väärtusi, sest siis saaksime y jaoks nii suured arvud, mille kujutised ei mahu joonisele 29 (näiteks, kui $x=3$, saaksime $y=10^3=1000$). Selle funktsiooni puhul anname x-le järgmised murrulised väärtused (mis asetsevad -1 ja $+1$ vahel):

$$x=-1;\quad -\frac{3}{4};\quad -\frac{2}{4};\quad -\frac{1}{4};\quad 0;\quad \frac{1}{4};\quad \frac{2}{4};\quad \frac{3}{4};\quad 1.$$

Vastavad y väärtused arvutame sellises järjekorras:

$$10^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}=\sqrt{3{,}162}=1{,}778;$$

$$10^{\frac{2}{4}}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3{,}162.$$

Edasi leiame lihtsa korrutamise ja jagamise teel:

$$10^{\frac{3}{4}}=10^{\frac{2}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{4}}=3{,}162\cdot 1{,}778=5{,}62\ \ldots$$

$$10^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{1{,}778}=\frac{1000}{1778}=0{,}56\ \ldots$$

$$10^{-\frac{2}{4}}=\frac{1}{3{,}162}=\frac{1000}{3162}=0{,}32\ \ldots$$

$$10^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{5{,}62}=\frac{100}{562}=0{,}17\ \ldots$$

Kirjutame kõik leitud väärtused järgmisse kolme tabelisse:

1) $y=2^x$.

$x=$	kasvab	-3	-2	-1	0	1	2	3	kasvab
$y=$	kasvab	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	kasvab

2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$x=$	kasvab	-3	-2	-1	0	1	2	3	kasvab
$y=$	kahaneb	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	kahaneb

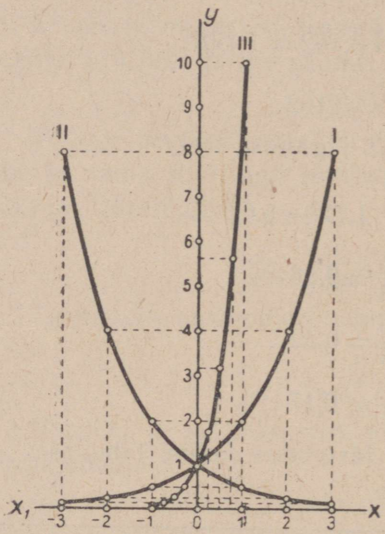
3) $y=10^x$.

$x=$	kasvab	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	kasvab
$y=$	kasvab	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10	kasvab

(Viimases tabelis on arvud ümardatud.)

Kandes need väärtused joonisele ja ühendades saadud punktid kõverategа (joon. 29), saame kolm võetud funktsiooni graafikut (joonis on soovitav teha millimeetripaberile, võttes pikkusühikuks sentimeetri).

Vaadeldes eksponentfunktsioonide graafikuid, näeme nende järgmisi omadusi.



Joon. 29.

1. Iga positiivse astendatava korral on funktsioon a^x positiivne (kõik kõverad asetsevad ülalpool x-telge).

2. Juhtumil, kui $a>1$, on funktsioon $a^x>1$, kui $x>0$, ja $a^x<1$, kui $x<0$ (juhtumil, kui $a<1$, kehtivad a^x kohta vastupidised võrratused).

3. x-i kasvades funktsioon a^x kasvab, kui $a>1$ (ja kahaneb, kui $a<1$).

4. Kui $x=0$, siis $a^x=1$ igasuguste a väärtuste korral (kõik kõverad läbivad üht ja sama punkti, mis asetseb y-teljel punktist O kaugusel $+1$).

5. Kui $a>1$, siis x-i kasvades funktsioon a^x kasvab seda kiiremini, mida suurem on a (kui $a=10$, siis tõuseb kõver tunduvalt kõrgemale kui juhtumil, mil $a=2$).

Harjutused.

168. Joonestada funktsiooni $y=3^x$ graafik vahemikus $x=0$ kuni $x=3$, andes astendajale väärtused: $0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ 2\frac{1}{2};\ 3$.

169. Joonestada funktsiooni $y=2^x$ graafik vahemikus $x=-3$ kuni $x=+2$ (ühikuks võtta 1 cm). Kasutades graafikut leida x ligikaudsed väärtused, mis rahuldavad võrrandit $2^x=5$.

170. Joonestada funktsiooni $y=\frac{2^x-1}{x-3}$ graafik vahemikus -1 kuni $+4$ (võttes pikkusühikuks 2 cm). Kasutades graafikut leida y, kui $x=1{,}5$ ja kui $x=-0{,}5$.

Seitsmes jagu.

Logaritmid.

I. Logaritmide üldised omadused.

101. Astendamise kaks pöördtehet. Võtame võrduse:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

See võrdus väljendab tehet, mida nimetatakse astendamiseks. Selles tehtes on antud astendatav (2) ja astendaja (3), otsitav on aga aste (8). Vaatleme, millised on astendamise pöördtehted. Niisuguseid tehteid on kaks.

1. Olgu vaja teada, milline arv tuleb astendada 3-ga, et saada arv 12. Tähistades otsitava arvu tähega x, võime kirjutada võrrandi $x^3 = 12$. Tehet, mille abil antud astme ja antud astendaja järgi leitakse asendatav x, nimetatakse juurimiseks; seda tehet tähistatakse, nagu teame, nii:

$$x = \sqrt[3]{12}.$$

2. Oletame, et on vaja teada, milline peab olema astendaja, millega on vaja astendada arv 4, et saada 16. Tähistades otsitava astendaja tähega x, võime kirjutada võrrandi: $4^x = 16$. Tehet, mille abil antud astme ja antud astendatava järgi leitakse astendaja, nimetatakse antud arvu (16) logaritmimiseks antud alusel (4). Meie näites $x = 2$, sest $4^2 = 16$.

Seega on astendamisel kaks pöördtehet. Esitame küsimuse: kas need tehted on erinevad? Ka korrutamise puhul võib ju vaadelda kaht pöördtehet: esimene — korrutatava leidmine antud korrutise ja korrutaja järgi, teine — korrutaja leidmine antud korrutise ja korrutatava järgi. Kuid neid tehteid ei vaadelda kui erinevaid tehteid, vaid kui üht ja sama tehet, mida nimetatakse jagamiseks.

Nende kahe pöördtehte ühtimise põhjus seisneb korrutamise kommutatiivsuses, mille järgi korrutis ei muutu korrutatava ja korrutaja koha vahetusest. Sama olukord esineb ka kahe liidetava liitmisel. Sellel tehtel on samuti kaks pöördtehet: tundmatu arvu leidmine (esimene liidetav), millega on vaja liita antud arv (teine liidetav), et saada antud summa; teine — tundmatu arvu leidmine (teine liidetav), mis on vaja liita antud arvuga (esimene liidetav), et saada antud summa. Kuid neid kaht tehet vaadeldakse kui üht tehet, mida nimetatakse lahutamiseks, selle tõttu, et liitmisel kehtib samuti kommutatiivsus, mille kohaselt summa ei sõltu liidetavate järjekorrast. Kui see omadus kehtiks ka astendamise puhul, siis moodustaksid eespool näidatud kaks pöördtehet sisuliselt ühe tehte. Kuid astendamine ei oma kommutatiivsust, näiteks arv 2^3 pole võrdne arvuga 3^2, 10^2 ei võrdu arvuga 2^{10} jne. Seetõttu erineb astendatava leidmine antud astendaja ja astme järgi (juurimine) oluliselt astendaja leidmisest antud astendatava ja astme järgi (logaritmimine).

102. Definitsioon. *Antud arvu* **logaritmiks** *antud alusel nimetatakse astendajat, millega on vaja astendada see alus, et saada antud arv.*

Näiteks kui aluseks on 4, siis:

arvu 16 logaritm on **2**, sest $4^2 = 16$;
„ 64 „ „ 3, „ $4^3 = 64$;
„ 4 „ „ 1, „ $4^1 = 4$;
„ 2 „ „ $\frac{1}{2}$, „ $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;
„ $\frac{1}{2}$ „ „ $-\frac{1}{2}$, „ $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$;
„ $\frac{1}{4}$ „ „ -1, „ $4^{-1} = \frac{1}{4}$.

Kui võtame aluseks 10, siis:

arvu 10 logaritm on 1, sest $10^1 = 10$;
„ 100 „ „ 2, „ $10^2 = 100$;
„ 1000 „ „ 3, „ $10^3 = 1000$;
„ 0,1 „ „ -1, „ $10^{-1} = \frac{1}{10}$;
„ 0,01 „ „ -2, „ $10^{-2} = \frac{1}{100}$.

Selle asemel, et kirjutada: «arvu 16 logaritm alusel 4», kirjutatakse lühidalt: $\log_4 16$, märkides logaritmi märgist veidi allapoole arvu, mis on võetud aluseks. Muide, kui on varem teada, milline arv on võetud aluseks, siis on tavaks seda mitte kirjutada.

Enne kui kõnelda logaritmide rakendamisest, vaatleme mõnd niinimetatud logaritmfunktsiooni omadust.

103. Logaritmfunktsioon ja selle graafik. Kui me võrduses $y=a^x$ vaatleme x kui sõltumatut muutujat, siis y on x-i eksponentfunktsioon. Kui me aga võtame selles võrduses sõltumatuks muutujaks y, siis x on y teatav funktsioon, ja nimelt: x on arvu y logaritm alusel a, mida võime kirjutada nii:

$$x=\log_a y.$$

Tähistades, nagu meil on kombeks, sõltumatu muutuja tähega x, selle muutuja funktsiooni aga tähega y (s. o. vahetades x-i y-ga ja vastupidi), võime sama funktsiooni väljendada nii:

$$y=\log_a x.$$

Sellist funktsiooni nimetatakse logaritmfunktsiooniks (ta on eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon).

Valmistame järgmise kolme logaritmfunktsiooni graafikud:

$$1)\ y=\log_2 x; \quad 2)\ y=\log_{\frac{1}{2}} x; \quad 3)\ y=\log_{10} x.$$

Selleks koostame nende funktsioonide väärtuste tabelid. Kõige lihtsamini võib neid koostada vastavate eksponentfunktsioonide tabelite järgi (§ 100):

$$1)\ y=2^x; \quad 2)\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 3)\ y=10^x,$$

vahetades neis tabeleis abstsissi x väärtused ordinaadi y väärtuste vastu ja ümberpöördult. Seda tehes saame kolm järgmist tabelit:

1) $y=\log_2 x$.

$x=$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=$	-3	-2	-1	0	1	2	3

2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

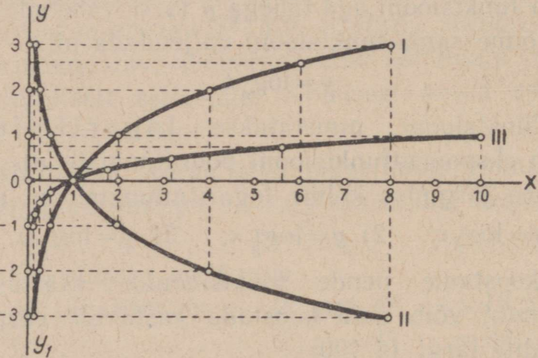
$x=$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y=$	-3	-2	-1	0	1	2	3

$$3)\ y=\log_{10}x.$$

$x=$	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10
$y=$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Kandes kõik need väärtused joonisele ja ühendades punktid kõverjoontega, saame võetud funktsioonide kolm graafikut (joon. 30).

Omades logaritmfunktsiooni graafikut, võime selle abil leida antud arvu logaritmi ligikaudse väärtuse. Võtame näiteks funkt-



Joon. 30.

siooni $y=\log_2 x$ graafiku ja leiame selle abil $\log_2 6$. Selleks võtame joonisel abstsissi, mis on võrdne 6-ga, ja joonestame temale vastava ordinaadi. Mõõtnud selle ordinaadi, saame ligikaudselt 2,6; see ongi $\log_2 6$.

104. Logaritmide põhiomadused. Võtame logaritmfunktsiooni

$$y=\log_a x.$$

Vastavalt logaritmi definitsioonile saame:

$$x=a^y.$$

Tuletame logaritmide mõned omadused.

1) **Positiivse aluse puhul negatiivseil arvudel ei ole logaritme.**

Eksponentfunktsiooni vaatlemisel nägime, et kui $a>0$, siis on funktsioon $a^y>0$ iga y väärtuse puhul. See tähendab, et millised ka oleksid positiivne alus a ja astendaja (logaritm) y, funktsioon a^y, s. o. x, on alati positiivne arv.

2) **Igasuguse aluse puhul (mis pole võrdne ühega) arvu 1 logaritm on null.**

Tõepoolest, me teame, et mistahes a puhul (mis pole võrdne nulliga) on

$$a^0 = 1.$$

Kuid vastavalt logaritmi definitsioonile tähendab see, et

$$\log_a 1 = 0.$$

3) **Arvust 1 suurema aluse puhul on ühest suuremate arvude logaritmid positiivsed ja ühest väiksemate arvude logaritmid negatiivsed.**

Eksponentfunktsiooni a^y kohta, kus $a>1$, teame, et kui $y>0$, siis $a^y = x > 1$, ja kui $y<0$, siis $a^y = x < 1$.

Kuid vastavalt definitsioonile on y arvu x logaritm. Tähendab, kui arv $x>1$, siis on tema logaritm $y>0$, s. o. tema logaritm on positiivne. Kui aga arv $x<1$, siis on tema logaritm $y<0$, s. o. tema logaritm on negatiivne.

Kui $a<1$, siis $y<0$ x väärtuste puhul $x>1$, ja $y>0$, kui $x<1$.

4) **Aluse enda logaritm on üks.**

Tõepoolest:

$$a^1 = a, \quad \text{kust:} \quad \log_a a = 1.$$

5) **Arvust 1 suurema aluse puhul vastab suuremale arvule ka suurem logaritm.**

Me nägime, et kui $a>1$, siis y kasvades kasvab ka funktsioon a^y. Kui tähistame y kaks erinevat väärtust tähtedega y_1 ja y_2, a^y vastavad väärtused tähtedega x_1 ja x_2, siis saame:

$$a^{y_2} > a^{y_1}, \text{ kui } y_2 > y_1$$

ehk

$$x_2 > x_1, \quad \text{kui} \quad y_2 > y_1.$$

Kuid y_1 ja y_2 on vastavalt arvude x_1 ja x_2 logaritmid.

Tähendab,

$$x_2 > x_1, \quad \text{kui} \quad \log_a x_2 > \log_a x_1.$$

Kõiki nimetatud logaritmide omadusi võib illustreerida logaritmfunktsiooni graafiku abil. Nii tähendab esimene omadus, et funktsiooni $y = \log_a x$ graafik asetseb tervenisti paremal pool y-telge. Teine omadus kõneleb sellest, et funktsiooni $y = \log_a x$ graafik läbib punkti (1, 0). Kolmas omadus tähendab, et kui $a > 1$, siis juhtumil, kui $x > 1$, on kõvera ordinaadid positiivsed, juhtumil aga, kui $x < 1$, on ordinaadid negatiivsed jne.

Harjutused.

171. Millised on arvude

$$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \sqrt{2};\ \sqrt[3]{2};\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16}$$

logaritmid, kui logaritmide alus on 2?

172. Kirjutada järgmised võrdused logaritmi märgi abil:

$$10^0 = 1;\ 10^1 = 10;\ 10^2 = 100;\ 10^{-2} = 0{,}01;\ a^x = N.$$

173. Kirjutada järgmised võrdused ilma logaritmi märgita:

$$\log_{10} 1000 = 3;\ \log_{10} 0{,}001 = -3;\ \log_{16} 4 = \frac{1}{2};\ \log_a P = y.$$

174. Millised on järgmiste arvude logaritmid, kui alus on 16:

$$16;\ 256;\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{256};\ 4;\ \frac{1}{4};\ 2;\ \frac{1}{2}?$$

175. Missugused on järgmiste arvude logaritmid, kui alus on 10:

$$10;\ 100;\ 1000;\ 10\,000;\ 0{,}1;\ 0{,}001;\ 0{,}0001?$$

176. Kirjutada järgmised võrdused logaritmi märgi abil:

$$5^2 = 25;\quad 7^3 = 343;\quad 3^7 = 2187;\quad 8^3 = 512.$$

177. Leida: $\log_2 2$; $\log_3 9$; $\log_3 729$; $\log_3 \frac{1}{3}$; $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$.

178. Millega võrduvad järgmised avaldised, kui a on 1-st erinev positiivne arv:

$$\log_a a^2;\ \log_a a^n;\ \log_a \frac{1}{a};\ \log_a \sqrt{a};\ \log_a \frac{1}{\sqrt{a}}?$$

179. Millega võrdub arv x, kui

$$1)\ \log_2 x = 3;\quad 2)\ \log_5 x = 2;\quad 3)\ \log_4 x = -5;$$

$$4)\ \log_x 4 = 2;\quad 5)\ \log 2 = -\frac{1}{2}?$$

180. Joonestada funktsiooni $y = \log_3 x$ graafik, kasutades funktsiooni $y = 3^x$ väärtusi (vt. ülesanne 168).

105. Logaritmide tabeli praktiline tähtsus. Mitmesuguseid arve võib väljendada ühe ja sama arvu astmetena, näiteks arvu 10 astmetena. Niisugused arvud, nagu 10; 100; 1000 või 0,1; 0,01; 0,001 jne., väljenduvad arvu 10 astmetena väga lihtsalt: $10 = 10^1$;

$100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; ... ; $0{,}1 = 10^{-1}$; $0{,}01 = 10^{-2}$; $0{,}001 = 10^{-3}$ jne.[1]. Muid arve on arvu 10 astmetena raskem avaldada. Kui on tarvis leida astendaja, millega on vaja astendada arv 10, et saada 5, siis võime ainult ütelda, et otsitava astendaja on suurem kui 0, kuid väiksem kui 1, sest $10^0 = 1$ on väiksem kui 5, kuid $10^1 = 10$ on suurem kui 5; tähendab, astendajaks, millega on vaja astendada arv 10, et saada 5, peab olema mingi positiivne arv, mis on väiksem kui 1. Me võime isegi ütelda, et see arv on suurem kui $\frac{1}{2}$, aga väiksem kui $\frac{3}{4}$, sest $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162$ on väiksem kui 5, aga $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt[4]{1000} = \sqrt{\sqrt{1000}} = \sqrt{31{,}62} = 5{,}62$ on suurem kui 5. Matemaatikas on osi, milles näidatakse viise, kuidas iga antud arvu N jaoks leida selline astendaja x, mille puhul aste 10^x võrdub täpselt arvuga N või erineb sellest arvust kuitahes vähe. Neid viise kasutades on koostatud l o g a r i t m i d e t a b e l i d, milles on toodud mitmesugused arvud ja iga arvu juures on näidatud astendaja (logaritm), millega on vaja astendada arv 10, et saada see arv. Selgitame, mis otstarbeks need tabelid on vajalikud.

Olgu vaja leida arv x valemi järgi $x = \sqrt[5]{40}$.

Me ei oska leida viienda astme juurt. Niisuguseil juhtumeil võivad abiks olla logaritmide tabelid. Leiame neist tabeleist arvu 40 ja selle juurest vastava logaritmi.

Olgu see 1,6... See tähendab, et

$$40 = 10^{1,6\ldots},$$

ja järelikult

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{10^{1,6\ldots}}.$$

Et astme juurimisel astendaja (milline see ka oleks) juuritavas jagatakse juurijaga, siis

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{10^{1,6\ldots}} = 10^{\frac{1,6\ldots}{5}} = 10^{0,32\ldots}.$$

Nüüd leiame logaritmide veerust 0,32 ja sellele vastava arvu. Oletame, et see arv on 2,09... See ongi avaldise $\sqrt[5]{40}$ ligikaudne väärtus.

---

[1] Arve, mis on kirjutatud numbri 1 ja sellele järgnevate või eelnevate nullidega, nagu 10, 100, 1000, ... ning 0,1, 0,01, 0,001, ... , nimetame edaspidi j ä r g u ü h i k u i k s. — *Toim.*

Varsti näeme, et logaritmide tabelid lubavad paljudel juhtumitel sooritada arvudega selliseid tehteid, mis tabeliteta oleksid äärmiselt tülikad (nagu äsja esitatud näiteski) või mille teostamiseks kuluks väga palju aega.

Nüüd tutvume sellega, kuidas mingi tehte sooritamiseks antud arvudega esiteks antud arvude logaritmide järgi (mis on leitud tabelist) arvutada nõutava tehte tulemuse logaritm ja teiseks, kuidas, arvutanud selle logaritmi, selle järgi leida tabelist otsitav arv.

106. Korrutise, jagatise, astme ja juure logaritm.

a) Olgu vaja arvutada korrutis

$$387 \cdot 45{,}2.$$

Proovime seda tehet sooritada logaritmide abil. Leiame tabeleist arvude 378 ja 45,2 logaritmid. Olgu need 2,5775 ja 1,6551 (alusel 10). See tähendab, et

$$378 = 10^{2{,}5775} \quad \text{ja} \quad 45{,}2 = 10^{1{,}6551},$$

ja järelikult

$$378 \cdot 45{,}2 = 10^{2{,}5775} \cdot 10^{1{,}6551}.$$

Et ühe ja sama arvu astmete korrutamisel nende astendajad liidetakse (millised need astendajad ka oleksid), siis on:

$$378 \cdot 45{,}2 = 10^{2{,}5775+1{,}6551} = 10^{4{,}2326}.$$

Tähendab, korrutise $378 \cdot 45{,}2$ logaritm on arv 4,2326, mis saadi antud tegurite logaritmide liitmisel. (Selle logaritmi järgi leiame tabelist ka korrutise enda.)

Oletame üldiselt, et N_1 ja N_2 on kaks arvu, mille korrutis on vaja leida. Olgu tabelist leitud nende arvude logaritmid x_1 ja x_2. Logaritmide aluseks võib olla arv 10 või ka mingi muu positiivne arv, mille tähistame tähega a. Siis saame võrdused:

$$N_1 = a^{x_1}, \; N_2 = a^{x_2}, \text{ järelikult } N_1 N_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

Siit nähtub, et $\log (N_1 N_2) = x_1 + x_2$. Kuid x_1 on $\log N_1$ ja x_2 on $\log N_2$; tähendab,

$$\log (N_1 N_2) = \log N_1 + \log N_2.$$

Korrutise logaritm (mistahes alusel) **võrdub tegurite logaritmide summaga** (samal alusel).

See järeldus jääb kehtivaks ka siis, kui tegureid on rohkem kui kaks, sest ühe ja sama arvu astmete korrutamisel liidetakse astendajad, olenemata tegurite arvust.

b) Oletame, et on vaja teostada jagamine:

$$5637 : 26{,}3.$$

Leiame tabeleist nende arvude logaritmid (näiteks alusel 10). Olgu $\log 5637 = 3{,}751$ ja $\log 26{,}3 = 1{,}42$. Siis

$$5637 = 10^{3,751} \text{ ja } 26{,}3 = 10^{1,42}.$$

Järelikult

$$5637 : 26{,}3 = 10^{3,751} : 10^{1,42} = 10^{3,751-1,42} = 10^{2,331}.$$

Siit nähtub, et jagatise $5637 : 26{,}3$ logaritm on arv 2,331, mis on saadud jagaja logaritmi lahutamisel jagatava logaritmist. Üldiselt, kui

$$N_1 = a^{x_1} \text{ ja } N_2 = a^{x_2}, \text{ siis } N_1 : N_2 = a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}.$$

Järelikult

$$\log (N_1 : N_2) = x_1 - x_2 = \log N_1 - \log N_2.$$

Jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega.

Et iga murd on lugeja ja nimetaja jagatis, siis:

murru logaritm võrdub lugeja ja nimetaja logaritmide vahega. Näiteks:

$$\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3; \ \log 2\frac{3}{4} = \log \frac{11}{4} = \log 11 - \log 4;$$

$$\log 0{,}6 = \log 6 - \log 10.$$

c) Kui $N = a^x$, siis $N^n = (a^x)^n = a^{xn}$;

järelikult

$$\log N^n = nx = n \log N.$$

Astme logaritm võrdub astendatava logaritmi ja astendaja korrutisega.

Näiteks $\log (15{,}3)^2 = 2 \log 15{,}3$; $\log 3^{-2} = -2 \log 3$.

d) Et $\sqrt[n]{N} = N^{\frac{1}{n}}$, siis, rakendades astme logaritmi reeglit, saame:

$$\log \sqrt[n]{N} = \log N^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log N = \frac{\log N}{n}.$$

Juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

107. Algebralise avaldise logaritmimine. Logaritmida algebraline avaldis tähendab avaldada tema logaritm avaldisse kuuluvate üksikute arvude logaritmide abil. Eelmise paragrahvi järeldused lubavad seda teha korrutise, jagatise, astme ja murru suhtes.

Näiteks:

$$1)\ \log \frac{2{,}5 \cdot 7^3}{0{,}28} = \log(2{,}5 \cdot 7^3) - \log 0{,}28 =$$

$$= \log 2{,}5 + \log 7^3 - \log 0{,}28 =$$

$$= \log 2{,}5 + 3 \log 7 - \log 0{,}28.$$

$$2)\ \log \frac{5ax}{\sqrt{3}} = \log(5ax) - \log \sqrt{3} = \log 5 + \log a +$$

$$+ \log x - \frac{1}{2} \log 3.$$

$$3)\ \log(a^3 \sqrt{5x}) = 3 \log a + \frac{1}{2}(\log 5 + \log x) =$$

$$= 3 \log a + \frac{1}{2} \log 5 + \frac{1}{2} \log x.$$

108. Märkused. a) Kui avaldises, mille väärtus on vaja arvutada, esineb arvude s u m m a või v a h e, siis tuleb need leida tabelite abita hariliku liitmise või lahutamise teel [1].

Näiteks:

$$\log (35 + 7{,}24)^5 = 5 \log (35 + 7{,}24) = 5 \log 42{,}24.$$

b) Osates logaritmida avaldisi, võime ka, vastupidi, logaritmimise antud tulemuse järgi leida selle avaldise, millest see tulemus on saadud; näiteks kui

$$\log x = \log a + \log b - 3 \log c,$$

siis on kerge järeldada, et

$$x = \frac{ab}{c^3}.$$

Seda operatsiooni nimetatakse p o t e n t s e e r i m i s e k s.

c) Enne kui asuda logaritmide tabeli ehituse vaatlemisele, esitame mõned kümnendlogaritmide, s. o. selliste, mille aluseks on võetud arv 10, omadused.

Harjutused.

Logaritmida järgmised avaldised:

181. $\log (a^2b^3)$; $\log (5a^2x^2)$; $\log (mn)^3$.

---

[1] Sest meil ei ole valemeid, mis väljendavad summa või vahe logaritme antud arvude logaritmide kaudu.

182. $\log \frac{2a^2}{3b^8}$; $\log \frac{4a^3b^{-8}}{5mn^4x^{\frac{1}{2}}}$; $\log \sqrt{ab}$.

183. $\log \sqrt[3]{7a^3b}$; $\log(4\sqrt[5]{2ab^3})$; $\log(7a^8b\sqrt[8]{c})$.

184. $\log \frac{a^3\sqrt{2b}}{8x^3y^2}$.

185. $\log \sqrt{10a\sqrt[3]{b^2}}$; $\log \sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}$.

Leida avaldis x tema logaritmi järgi:

186. $\log x = \log a + \log b$; $\log x = \log a - \log b$.

187. $\log x = 2\log a$; $\log x = 2\log a + 3\log b$.

188. $\log x = \frac{1}{2}\log a$; $\log x = \frac{1}{3}(\log a + \log b)$.

II. Kümnendlogaritmide omadused.

109. Kümnendlogaritmide omadused. a) Et $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10\,000$ jne., siis $\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$; $\log 1000 = 3$; $\log 10\,000 = 4$ jne.

Ühe ja sellele järgnevate nullidega kirjutatud täisarvu logaritm on positiivne täisarv, mis sisaldab nii palju ühelisi, kui palju nulle on logaritmitavas arvus.

Seega $\log 100\,000 = 5$, $\log 1\,000\,000 = 6$ jne.

b) Et

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1; \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01;$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001; \quad 10^{-4} = 0{,}0001 \text{ jne., siis}$$

$$\log 0{,}1 = -1; \quad \log 0{,}01 = -2; \quad \log 0{,}001 = -3 \text{ jne.}$$

Ühe ja sellele eelnevate nullidega kirjutatud kümnendmurru logaritm on negatiivne täisarv, mille absoluutväärtus võrdub nullide arvuga kümnendmurrus, kaasa arvatud ka null tervet.

Seega $\log 0{,}00001 = -5$; $\log 0{,}000001 = -6$ jne.

c) Võtame täisarvu, mis pole mingi järguühik, näiteks täisarvu 35 või segaarvu 10,7. Sellise arvu logaritm ei saa olla täisarv, sest astendades arvu 10 mingi positiivse või negatiivse täisarvuga, saame järguühiku.

Oletame nüüd, et sellise arvu logaritm on mingi murd $\frac{a}{b}$.

Siis saame:

arvu 35 korral, et $10^{\frac{a}{b}} = 35$; $\sqrt[b]{10^a} = 35$; $10^a = 35^b$;

arvu 10,7 korral, et $10^{\frac{a}{b}} = 10{,}7$; $\sqrt[b]{10^a} = 10{,}7$; $10^a = 10{,}7^b$.

Kuid need võrdused pole võimalikud, sest 10^a on järguühik, samal ajal kui astmed 35^b ja $10{,}7^b$ ei saa võrduda ühegi järguühikuga, milline ka oleks astendaja b.

Mittejärguühiku logaritm on irratsionaalarv, sest seda logaritmi ei saa täpselt väljendada ühegi ratsionaalarvuga. Harilikult väljendatakse irratsionaalsed logaritmid ligikaudselt mitmekohaliste kümnendmurdude kujul. Selle murru täisosa nimetatakse logaritmi karakteristikuks ja murdosa logaritmi mantissiks. Kui näiteks logaritm on 1,5441, siis tema karakteristik on 1 ja mantiss 0,5441.

d) Võtame mingi täis- või segaarvu, näiteks 623 või 623,57. Seesuguse arvu logaritm koosneb karakteristikust ja mantissist. Ilmneb, et kümnendlogaritmidel on see paremus, et me võime alati leida nende karakteristiku üksnes juba antud arvu kirjutuse järgi. Selleks loendame, mitu numbrit on antud täisarvus või segaarvu täisosas. Meie näiteis on neid numbreid kolm. Seepärast on kumbki arv 623 ja 623,57 suurem kui 100 ja väiksem kui 1000; tähendab, ka kummagi arvu logaritm on suurem kui log 100, s. o. suurem kui 2, kuid väiksem kui log 1000, s. o. väiksem kui 3 (meenutame, et suuremal arvul on ka suurem logaritm). Järelikult $\log 623 = 2, \ldots$ ja $\log 623{,}57 = 2, \ldots$ (punktid asendavad tundmatuid mantisse).

Samuti leiame:

$$10 < 56{,}7 < 100; \quad 1000 < 8634 < 10\,000;$$

$$1 < \log 56{,}7 < 2; \quad 3 < \log 8634 < 4.$$

Järelikult

$$\log 56{,}7 = 1, \ldots; \quad \log 8634 = 3, \ldots$$

Olgu antud täisarvus N või tema täisosas üldse m numbrit. Et väikseim täisarv, mis sisaldab m numbrit, on üks $m-1$ nulliga, siis võime kirjutada võrratuse:

$$1\overbrace{000\ldots0}^{m-1 \text{ nulli}} < N < 1\overbrace{000\ldots0}^{m \text{ nulli}}$$

ja järelikult

$$m - 1 < \log N < m,$$

ning seepärast

$$\log N = (m-1) + 0,\ldots$$

Tähendab, $\log N$ karakteristik võrdub arvuga $m-1$.

Seega näeme, et:

täis- või segaarvu logaritmi karakteristik on 1 võrra väiksem selle arvu täisosa numbrite arvust.

Märkinud seda, võime otsekohe kirjutada: $\log 7{,}205 = 0,\ldots$; $\log 83 = 1,\ldots$; $\log 720{,}4 = 2,\ldots$ jne.

e) Võtame mõned kümnendmurrud, mis on väiksemad kui 1 (s. o. milles on 0 tervet): 0,35; 0,07; 0,0056; 0,0008 jne.

On ilmne, et:	Järelikult:
$0{,}1 < 0{,}35 < 1;$	$-1 < \log 0{,}35 < 0;$
$0{,}01 < 0{,}07 < 0{,}1;$	$-2 < \log 0{,}07 < -1;$
$0{,}001 < 0{,}0056 < 0{,}01;$	$-3 < \log 0{,}0056 < -2;$
$0{,}0001 < 0{,}0008 < 0{,}001;$	$-4 < \log 0{,}0008 < -3.$

Seega asetseb iga antud logaritm kahe negatiivse täisarvu vahel, mis erinevad teineteisest ühe ühelise võrra; seepärast võrdub igaüks neist väiksema negatiivse arvuga, mida suurendatakse teatava ühest väiksema positiivse arvu võrra. Näiteks, $\log 0{,}0056 = -3+0,\ldots$ Oletame, et see arv on 0,7482. Siis

$$\log 0{,}0056 = -3 + 0{,}7482 = -2{,}2518.$$

Niisuguseid summasid nagu $-3+0{,}7482$, mis koosnevad negatiivsest täisarvust ja positiivsest kümnendmurrust, on kombeks logaritmiliste arvutuste puhul kirjutada lühidalt nii $\overline{3}{,}7482$ *, s. o. asetada miinusmärk karakteristiku kohale eesmärgiga näidata, et see kuulub ainult karakteristikule, mitte aga mantissile, mis jääb positiivseks. Seega eespool toodud tabelist nähtub, et:

$$\log 0{,}35 = \overline{1},\ldots;\ \log 0{,}07 = \overline{2},\ldots;\ \log 0{,}0008 = \overline{4},\ldots$$

Olgu $A = \overbrace{0{,}000\ldots0}^{m \text{ nulli}}\alpha\beta\ldots$ üldselt mingi kümnendmurd, mille esimese tüvenumbri ** ees on m nulli, kaasa arvatud 0 tervet. Siis on ilmne, et

$$\overbrace{0{,}000\ldots0}^{m \text{ nulli}}1 < A < \overbrace{0{,}000\ldots0}^{m-1 \text{ nulli}}1.$$

* Sellist arvu loetakse nii: kolm miinusega koma 7482.

** Arvu **tüvenumbriteks** nimetame kõiki numbreid selle arvu kirjutuses peale nullide, millega algab või lõpeb arvu kirjutus. Näiteks arvu 0,005704 tüvenumbrid on 5, 7, 0 ja 4 ning arvu 203 000 tüvenumbrid on 2, 0 ja 3.

Antud arvu tüvenumbritega kirjutatud arvu nimetame antud arvu **tüveks**. Nii on arvu 0,005704 tüvi 5704 ja arvu 203 000 tüvi 203. — *Toim.*

Järelikult

$$\log \overbrace{0{,}000\ldots0}^{m \text{ nulli}}1<\log A<\log \overbrace{0{,}000\ldots0}^{m-1 \text{ nulli}},1.$$

s. o.

$$-m<\log A<-(m-1).$$

Et kahest arvust: $-m$ ja $-(m-1)$ väiksem on $-m$, siis

$$\log A=-m+0,\ldots$$

ja seepärast $\log A$ karakteristik on $-m$ (positiivse mantissi korral).

Kui kümnendmurd on väiksem 1-st, siis tema logaritmi karakteristik sisaldab nii palju negatiivseid ühelisi, kui palju on antud kümnendmurru esimese tüvenumbri ees nulle, kaasa arvatud ka 0 tervet; sellise logaritmi mantiss on positiivne.

f) Korrutame mingi täis- või murdarvu N 10-ga või 100-ga või 1000-ga . . . . Vaatleme, kuidas muutub seejuures $\log N$. Et korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga, siis

$$\log(N\cdot 10)=\log N+\log 10=\log N+1;$$
$$\log(N\cdot 100)=\log N+\log 100=\log N+2;$$
$$\log(N\cdot 1000)=\log N+\log 1000=\log N+3, \text{ jne.}$$

Kui me arvuga $\log N$ liidame mingi täisarvu, siis suurendame ainult logaritmi karakteristikut, mitte aga selle mantissi. Näiteks, kui $\log N=2{,}7804$, siis $2{,}7804+1=3{,}7804$, $2{,}7804+2=4{,}7804$ jne., või kui $\log N=\bar{3}{,}5649$, siis $\bar{3}{,}5649+1=\bar{2}{,}5649$; $\bar{3}{,}5649+$ $+2=\bar{1}{,}5649$ jne. Seepärast:

mingi arvu korrutamisel 10, 100, 1000-ga jne. logaritmi mantiss ei muutu, karakteristik aga suureneb nii mitme ühelise võrra, kui mitu nulli on korrutajas.

Samuti arvestades seda, et jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega, saame:

$$\log\frac{N}{10}=\log N-\log 10\ =\log N-1;$$

$$\log\frac{N}{100}=\log N-\log 100\ =\log N-2;$$

$$\log\frac{N}{1000}=\log N-\log 1000=\log N-3, \text{ jne.}$$

Kui lepime kokku, et täisarvu lahutamisel logaritmist lahutame selle täisarvu alati karakteristikust, jättes mantissi muutmata, siis võime ütelda, et:

arvu jagamisel 10, 100, 1000-ga jne. logaritmi mantiss ei muutu, kuid karakteristik väheneb nii mitme ühelise võrra, kui mitu nulli on jagajas.

110. Järeldused. a) *Koma ümberpaigutamisel arvus selle logaritmi mantiss ei muutu,* sest koma ümberpaigutamine on samaväärne arvu korrutamise või jagamisega 10, 100, 1000-ga jne. Seega erinevad arvude 0,00423; 0,0423; 4,23; 423 logaritmid üksteisest ainult karakteristikute, mitte aga mantisside poolest (tingimusel, et kõik mantissid on positiivsed).

b) *Ühe ja sama tüvega arvude logaritmide mantissid on võrdsed*; nii erinevad arvude 23, 230, 2300, 23 000 logaritmid üksteisest ainult karakteristikuilt.

Märkus. Nendest kümnendlogaritmide omadustest nähtub, et me võime leida mistahes arvu logaritmi karakteristiku ilma tabelita (selles seisab kümnendlogaritmide suur paremus); seepärast on logaritmide tabelites antud ainult logaritmide mantissid; peale selle, et murru logaritmi leidmine taandub täisarvude logaritmide leidmiseks (murru logaritm võrdub lugeja logaritmi ja nimetaja logaritmi vahega), siis paigutatakse tabelisse ainult täisarvude logaritmide mantissid.

Harjutused.

189. Leida järgmiste arvude kümnendlogaritmi karakteristik 3: 38; 382; 3824; 3,12; 37,2; 56 315,726; $57\frac{1}{2}$; $3485\frac{2}{7}$.

190. Millega võrduvad järgmiste murdude kümnendlogaritmid: 0,1; 0,01; 0,001; 0,00001; 0,000001?

191. Leida järgmiste murdude kümnendlogaritmi karakteristik: 0,36; 0,183; 0,02; 0,0036; 0,00056; 0,00000378.

192. Teades, et $\log 2 = 0{,}301$; $\log 3 = 0{,}477$; $\log 7 = 0{,}845$, arvutada esimese kümne täisarvu kümnendlogaritmid.

193. Teades, et $\log 2 = 0{,}30103$ ja $\log 3 = 0{,}47712$, arvutada $\log 0{,}0015$ ja $\log 750$.

194. Mitu numbrit on arvus 2^{100}, kui $\log_{10} 2 = 0{,}30103$?

III. Tabelite ehitus ja kasutamine.

11. Logaritmide süsteem. Logaritmide süsteemiks nimetatakse ühel ja samal alusel arvutatud järjestikuste täisarvude logaritmide kogu. Kasutatakse kaht logaritmide süsteemi: h a r i l i k e ehk kümnendlogaritmide süsteemi, mille aluseks on arv 10, ja niinimetatud naturaallogaritmide süsteemi, mille aluseks on irratsionaalarv 2,7182818... (põhjustel, mis selgitatakse kõrgemas matemaatikas). Tegelikul arvutamisel kasutatakse kümnendlogaritme nende eeliste tõttu, millele oli osutatud §-des 109 ja 110.

Naturaallogaritme nimetatakse ka logaritmide leiutaja šoti matemaatiku Neperi (ka Napier, elas 1550—1617) nime järgi Neperi logaritmideks ja kümnendlogaritme Briggsi logaritmideks professor Briggsi (Neperi kaasaeglase ja sõbra) nime järgi, kes esimesena koostas kümnendlogaritmide tabeli *.

112. Negatiivse logaritmi teisendamine. Me nägime, et arvust 1 väiksemate arvude logaritmid on negatiivsed. Tähendab, neid võib väljendada negatiivsete kümnendmurdude abil. Selliseid logaritme võib alati nii teisendada, et nende mantiss saab positiivseks, karakteristik aga jääb negatiivseks. Selleks piisab, kui lisada mantissile positiivne üheline, karakteristikule aga negatiivne üheline (mistõttu logaritmi väärtus muidugi ei muutu). Kui meil näiteks on logaritm $-2{,}0873$, siis võib seda teisendada nii:

$$-2{,}0873=-2-1+1-0{,}0873=-(2+1)+$$
$$+(1-0{,}0873)=-3+0{,}9127.$$

ehk lühidalt:

$$-2{,}0873=-\overset{-1+1}{2{,}0873}=\overline{3}{,}9127.$$

Vastupidi: iga negatiivse karakteristiku ja positiivse mantissiga logaritmi võib esitada negatiivse kümnendmurruna. Selleks piisab, kui lisada positiivsele mantissile -1 ja negatiivsele karakteristikule $+1$ **.

Nii võib kirjutada:

$$\overline{7}{,}8302=\overset{+1-1}{\overline{7}{,}8302}=-6{,}1698.$$

---

* Ühtlasi peab aga ütlema, et Neperi logaritmid pole samased naturaallogaritmidega, vaid on nendega teatavas seoses. Naturaallogaritmid võeti tarvitusele esmakordselt pärast Neperi surma 1619. a. Londoni matemaatikaõpetaja John Spideli poolt. Järgmisel, 1620. a. andis šveitslane Bürgi välja oma tabelid, mis ta oli koostanud sõltumatult Neperist.

Tähendame, et 1914. aastal täitus 300 aastat logaritmide leiutamisest, sest Neper andis oma tabelid välja 1614. a. («*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*» nime all).

**Nende teisenduste teostamiseks tuleb liita $+1$ ja -1; üks neist liidetakse karakteristiku, teine mantissiga. Et mitte eksida, kummale liita $+1$ ja

113. Neljakohaliste tabelite kirjeldus ja kasutamine. Enamiku praktiliste ülesannete lahendamiseks piisab neljakohalistest tabelitest, mille kasutamine on üsna lihtne [1]. Väike väljavõte neist tabeleist (nende ehituse selgitamiseks) on trükitud sellel leheküljel. Tabeleis sisalduvad kõigi täisarvude 1 kuni 9999 (viimane kaasa arvatud (logaritmide mantissid, mis on arvutatud neljakohaliste kümnendmurdudena, kusjuures viimane koht on suurendatud 1 võrra kõigil neil juhtumeil, kui viies number oleks olnud 5 või üle 5; neljakohalised tabelid annavad järelikult ligikaudsed mantissid täpsusega kuni $\frac{1}{2}$ kümnetuhandikku (puuduga või liiaga).

Logaritmide mantissid.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7
55	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Et me täisarvu või kümnendmurru logaritmi karakteristiku võime kümnendlogaritmide omaduste põhjal leida vahetult, siis on tabelis antud ainult logaritmide mantissid; seejuures on vaja meeles pidada, et kümnendmurrus ei ole koma asetusel, samuti nullide arvul arvu kirjutuse alguses ja lõpus mingit mõju logaritmi mantissi suurusele. Seepärast jätame antud arvu logaritmi mantissi leidmisel arvu kirjutuses koma tähele panemata, samuti nullid tema alguses ja lõpus, kui neid on, ja leiame seejärel tekkinud

kummale — 1, on soovitav alati lähtuda antud logaritmi mantissist ja arutleda nii: olgu antud logaritmis mantiss negatiivne, kuid see on vaja teha positiivseks; siis tuleb sellega liita + 1 ja seepärast tuleb karakteristikuga liita — 1, olgu antud logaritmis mantiss positiivne, kuid see on vaja teha negatiivseks (kogu logaritm peab olema negatiivne); siis tuleb sellele lisada — 1 ja järelikult karakteristikule +1.

[1] Suurt täpsust nõudvail juhtumeil kasutatakse viiekohalisi tabeleid ja mõnikord isegi seitsmekohalisi (näiteks Georg V e g a «Logaritmilis-trigonomeetriline käsiraamat»). Selliste tabelite kasutamist juhendatakse nende sissejuhatuses.

täisarvu (s. o. arvu tüve) logaritmi mantissi. Seejuures võib esineda kolm juhtumit.

1) *Täisarv on kirjutatud kolme numbriga.* Olgu näiteks vaja leida arvu 536 logaritmi mantiss. Otsime üles selle arvu esimesed kaks kohta, s. o. 53, tabeli esimeses veerus (vt. leheküljel 135 trükitud tabelit). Leidnud arvu 53, liigume samas reas sellest arvust paremale kuni selle rea lõikumiseni veeruga, mille pealkirjaks on antud arvu kolmas number, s. o. meie näites number 6. Lõikekohas leiame arvu 536 logaritmi mantissi 7292 (s. o. 0,7292). Samuti leiame, et arvu 508 logaritmi mantiss on 0,7059 ja arvu 500 logaritmi mantiss on 0,6990 jne.

2) *Täisarv on kirjutatud kahe või ühe numbriga.* Sel juhul lisame mõttes arvule ühe või kaks nulli ja leiame sel teel tekkinud kolmekohalise arvu logaritmi mantissi. Näiteks arvule 51 lisame juurde ühe nulli, mille tõttu saame arvu 510, ja leiame, et logaritmi mantiss on 0,7076; arvule 5 lisame juurde kaks nulli ja leiame, et logaritmi mantiss on 0,6990, jne.

3) *Täisarv on kirjutatud nelja numbriga.* Näiteks on vaja leida log 5436 mantiss. Sel juhtumil leiame algul tabelist, nagu äsja näitasime, antud arvu esimese kolme numbriga kirjutatud arvu, s. o. arvu 543 logaritmi mantissi (see on 0,7348); seejärel liigume leitud mantissi juurest samas reas paremale (tabeli paremasse ossa, mis asetseb teisel pool kahekordset püstjoont) kuni lõikumiseni veeruga, mille pealkirjaks on antud arvu neljas number, s. o. meie näites number 6. Lõikekohas leiame paranduse (arv 5), mis tuleb peast liita mantissiga 0,7348, et saada arvu 5436 logaritmi mantiss; sel viisil leiame, et logaritmi mantiss on 0,7353.

4) *Täisarv on kirjutatud viie või enama numbriga.* Heidame ära kõik numbrid peale esimese nelja, s. o. võtame antud arvu tüve neljakohalise ligikaudse väärtuse, kusjuures suurendame selle arvu viimast numbrit ühe võrra juhtumil, kui äraheidetud viies number on 5 või üle 5. Nii võtame 57 842 asemel 5784, 30 257 asemel 3026, 583 263 asemel 5833 jne. Selle ümardatud neljakohalise arvu logaritmi mantissi leiame nii, nagu äsja selgitasime.

Juhindudes neist näpunäiteist leiame järgmiste arvude logaritmid:

36,5; 804,7; 0,26; 0,00345; 7,2634; 3456,86.

Kirjutame eelkõige välja tabeleid kasutamata logaritmide karakteristikud, jättes ruumi mantisside jaoks, mis kirjutame juurde hiljem:

$\log 36{,}5 = 1, \ldots;$ $\log 0{,}00345 = \overline{3}, \ldots;$

$\log 804{,}7 = 2, \ldots;$ $\log 7{,}2634 = 0, \ldots;$

$\log 0{,}26 = \overline{1}, \ldots;$ $\log 3456{,}86 = 3, \ldots.$

Lisades tabelist leitud mantissid, saame:

$\log 36{,}5 = 1{,}5623;$ $\log 0{,}00345 = \overline{3}{,}5378;$

$\log 804{,}7 = 2{,}9056;$ $\log 7{,}2634 = 0{,}8611;$

$\log 0{,}26 = \overline{1}{,}4150;$ $\log 3456{,}86 = 3{,}5387.$

114. Interpoleerimine. Mõnedes neljakohalistes tabelites ei ole antud arvu neljandale numbrile vastavaid parandusi. Kui on tegemist selliste tabelitega, siis tuleb need parandused leida lihtsa arvutamisega, mida võib teostada järgmise teoreemi alusel: kui arvud ületavad 100 ja nende vahed on alla ühe, siis võib ilma tunduva veata väita, et:

logaritmide juurdekasvud on võrdelised vastavate arvude juurdekasvudega [1].

Olgu näiteks vaja leida arvu 5367 logaritmi mantiss. See mantiss on mõistagi sama, mis arvu 536,7 logaritmilgi. Tabelist leiame arvu 536 logaritmi mantissi 7292. Võrreldes seda mantissi paremal oleva naabermantissiga 7300, mis vastab arvule 537, märkame, et kui arv 536 suureneb 1 võrra, siis logaritmi mantiss suureneb 8 kümnetuhandiku võrra (8 on niinimetatud t a b e l i v a h e kahe naabruses oleva mantissi vahel); kui aga arv 536 suureneb 0,7 võrra, siis logaritmi mantiss suureneb mitte 8 kümnetuhandiku võrra, vaid teatava väiksema arvu võrra: x kümnetuhandiku võrra, mis vastavalt eeldatud võrdelisusele peab rahuldama võrret $x : 8 =$

---

[1] Vaadeldes logaritmfunktsiooni $y = \log_{10} x$ graafikut (§ 103) märkame, et isegi väikeste arvude puhul (näiteks arvude 3 kuni 10 puhul) erineb graafik väga vähe sirgjoonest. Kui seda graafikut pikendada paremale vastavalt abstsissi väärtusele 10-st kuni 100-ni (s. o. 90 pikkusühiku võrra piki x-telge), siis kasvaksid ordinaadid ainult 1-st kuni 2-ni, sest $\log 10 = 1$ ja $\log 100 = 2$, graafiku edasisel pikendamisel vastavalt abstsissi väärtusele 100-st kuni 1000-ni (s. o. 900 pikkusühiku võrra) suureneksid ordinaadid jälle ainult ühe ühiku võrra. Tähendab, sajast suuremate arvude puhul võib tunduva veata eeldada, et funktsiooni $y = \log_{10} x$ graafik langeb ühte sirgega. Kuid see tähendab eeldada, et selliste arvude puhul on ordinaatide juurdekasvud võrdelised abstsisside juurdekasvudega, s. o. teiste sõnadega, et logaritmide vahed on võrdelised arvude vahedega.

$=0{,}7:1$, kust saame, et $x=8\cdot 0{,}7=5{,}6$, mis pärast ümardamist annab 6 kümnetuhandikku. Tähendab, arvu 536,7 (ja järelikult ka arvu 5367) logaritmi mantiss on $7292+6=7298$, s. o. 0,7298.

Tähendame, et kahe tabelis kõrvuti seisva arvu järgi vahepealse arvu leidmist nimetatakse *interpoleerimiseks*. Siin kirjeldatud interpoleerimist nimetatakse *võrdeliseks* interpoleerimiseks, sest see põhineb oletusel, et logaritmi juurdekasv on võrdeline arvu juurdekasvuga. Seda nimetatakse ka *lineaarseks* interpoleerimiseks, sest see eeldab, et logaritmfunktsiooni muutumist kujutab sirgjoon.

115. Antilogaritmide tabelid. Arvu leidmiseks antud logaritmi järgi võib kasutada samu tabeleid, mille järgi leitakse antud arvude logaritmide mantissid, kuid on soovitav kasutada teisi tabeleid, milles on antud niinimetatud *antilogaritmid*, s. o. arvud, mis vastavad antud logaritmide mantissidele. Selgituseks on väike väljavõte neist paigutatud samale leheküljele.

Olgu antud neljakohaline logaritmi mantiss 2863 (karakteristiku jätame tähele panemata) ja olgu vaja leida sellele vastav täisarv. Omades antilogaritmide tabeleid, tuleb neid kasutada samal viisil, nagu varem oli selgitatud antud arvu logaritmi mantissi leidmisel, ja nimelt: tuleb leida logaritmi mantissi esimesed kaks numbrit esimesest veerust (arvude ees olev punkt asendab koma, mis eraldab logaritmi karakteristiku mantissist). Seejärel liigume nende numbrite juurest samas reas paremale kuni lõikumiseni veeruga, mille pealkirjaks on logaritmi mantissi kolmas number. Lõikekohas leiame neljakohalise arvu 1932, mille logaritmi mantiss on 286. Seejärel liigume selle arvu juurest edasi samas reas kuni lõikumiseni veeruga, mille pealkirjaks on logaritmi mantissi neljas number. Lõikekohas leiame paranduse 1, mis on vaja peast liita varem leitud arvuga 1932, et saada arv, mille logaritmi mantiss on 2863.

Antilogaritmid

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0 1 1	2 2 2	3 3 4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0 1 1	2 2 3	3 3 4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0 1 1	2 2 3	3 3 4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0 1 1	2 2 3	3 4 4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0 1 1	2 2 3	3 4 4
.30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Seega otsitav arv on 1933. Pärast seda, pöörates tähelepanu antud logaritmi karakteristikule, tuleb arvus 1933 asetada vastavale kohale koma.

Toome mõned näited.

$$
\begin{array}{llll}
\text{kui} & \log x = 3{,}2863, & \text{siis} & x = 1933; \\
,, & \log x = 1{,}2863, & ,, & x = 19{,}33; \\
,, & \log x = 0{,}2863, & ,, & x = 1{,}933; \\
,, & \log x = \overline{2}{,}2863, & ,, & x = 0{,}0193; \\
,, & \log x = 0{,}2287, & ,, & x = 1{,}693; \\
,, & \log x = \overline{1}{,}7635, & ,, & x = 0{,}5801; \\
,, & \log x = 3{,}5029, & ,, & x = 3184; \\
,, & \log x = \overline{2}{,}0436, & ,, & x = 0{,}01106 \text{ jne.}
\end{array}
$$

Kui logaritmi mantissis on antud viis või rohkem numbrit, siis võtame ainult esimesed neli numbrit, jättes ülejäänud ära (ja suurendades neljandat numbrit 1 võrra, kui viies number on 5 või enam). Näiteks mantissi 35478 asemel võtame 3548, 47562 asemel 4756.

116. Märkus interpoleerimise kohta. Logaritmi mantissi neljandale ja järgmistele numbritele vastava paranduse võib leida ka interpoleerimise teel. Kui näiteks logaritmi mantiss on 84357, siis, leidnud arvu 6966, mis vastab mantissile 843, võime edasi arutleda nii: kui logaritmi mantiss suureneb (1 tuhandiku võrra), s. o. kui ta saab 844-ks; siis arv, nagu nähtub tabelist, suureneb 16 ühelise võrra; kui aga logaritmi mantiss suureneb mitte ühe tuhandiku võrra, vaid 0,57 tuhandiku võrra, siis arv suureneb x ühelise võrra, kusjuures x peab rahuldama võrret:

$$x : 16 = 0{,}57 : 1, \text{ kust } x = 16 \cdot 0{,}57 = 9{,}12.$$

Tähendab, otsitav arv on $6966 + 9{,}12 = 6975{,}12$ ehk (piirdudes ainult nelja numbriga) 6975.

117. Tehted logaritmidega, mille karakteristik on negatiivne. Logaritmide liitmine ja lahutamine ei valmista mingit raskust, nagu nähtub järgmistest näidetest:

$$
+\begin{array}{r} \overline{2}{,}9734 \\ 1{,}8302 \\ \hline 0{,}8036 \end{array}
\qquad
+\begin{array}{r} \overline{3}{,}8384 \\ \overline{5}{,}8804 \\ \hline \overline{7}{,}7188 \end{array}
\qquad
-\begin{array}{r} \overline{1}{,}0384 \\ 5{,}9630 \\ \hline \overline{7}{,}0754 \end{array}
\qquad
-\begin{array}{r} 0{,}0052 \\ \overline{4}{,}5736 \\ \hline 3{,}4316 \end{array}
$$

Samuti ei tekita mingisugust raskust logaritmi korrutamine positiivse arvuga, näiteks:

$$\begin{array}{r} \overline{3},5837 \\ \times 9 \\ \hline \overline{22},2533 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{2},4735 \\ \times 34 \\ \hline 1\,8940 \\ 14\,205 \\ \hline 16,0990 \\ -\;68 \\ \hline \overline{52},0990 \end{array}$$

Viimases näites on korrutatud 34-ga esmalt positiivne mantiss ja seejärel negatiivne karakteristik ning tulemused liidetud.

Kui logaritm, mille karakteristik on negatiivne ja mantiss positiivne, korrutatakse negatiivse arvuga, siis võib toimida kahte viisi: kas muudetakse antud logaritm algul negatiivseks või korrutatakse eraldi tema mantiss ja karakteristik ning tulemused liidetakse, näiteks:

$$\overline{3},5632 \cdot (-4) = -2,4368 \cdot (-4) = 9,7472;$$
$$\overline{3},5632 \cdot (-4) = +12 - 2,2528 = 9,7472.$$

Jagamisel võib esineda kaks juhtumit: esiteks negatiivne karakteristik jagub jagajaga; teiseks negatiivne karakteristik ei jagu jagajaga. Esimesel juhul jagatakse karakteristik ja mantiss eraldi:

$$\overline{10},3784 : 5 = \overline{2},0757.$$

Teisel juhul lisatakse karakteristikule nii mitu negatiivset ühelist, kuni tekkinud arv jagub jagajaga, mantissile aga lisatakse niisama palju positiivseid ühelisi:

$$\overline{3},7608 : 8 = (-8 + 5,7608) : 8 = \overline{1},7201.$$

See teisendus tuleb teha peast ning tehe sooritatakse järgmiselt:

$$\overline{3},7608 : 8 = \overline{1},7201 \text{ ehk } \begin{array}{r|l} \overline{3},7608 & 8 \\ \hline & \overline{1},7201. \end{array}$$

118. Lahutatavate logaritmide teisendamine liidetavaiks. Mingi keeruka avaldise väärtuse arvutamisel logaritmide abil tuleb mõned logaritmid liita, teised lahutada; sel juhul harilikult arvutatakse eraldi liidetavate logaritmide summa ja lahutatakse logaritmide summa ning lahutatakse esimesest summast teine summa. Näiteks, kui meil on

$$\log x = 2{,}7305 - \overline{2}{,}0740 + \overline{3}{,}5464 - 8{,}3589,$$

siis sooritatakse tehted harilikult nii:

$$+\begin{array}{r} 2{,}7305 \\ \overline{3}{,}5464 \\ \hline 0{,}2769 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} \overline{2}{,}0704 \\ 8{,}3589 \\ \hline 6{,}4329 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 0{,}2769 \\ 6{,}4329 \\ \hline 7{,}8440 \end{array} = \log x.$$

Kuid logaritmide lahutamist on võimalik asendada liitmisega. Näiteks:

$$-\overline{2}{,}0740 = 2 - 0{,}0740 = 1{,}9260,$$

$$-8{,}3589 = -\overset{-1+1}{8{,}3589} = \overline{9}{,}6411.$$

Nüüd võib korraldada arvutamise nii:

$$+\begin{array}{r} 2{,}7305 \\ 1{,}9260 \\ \overline{3}{,}5464 \\ \overline{9}{,}6411 \\ \hline \overline{7}{,}8440 \end{array} = \log x$$

119. Logaritmidega arvutamise näiteid.

Näide 1. Arvutada avaldise

$$x = \frac{\sqrt[3]{A} \cdot B^4}{C^3 \cdot \sqrt[3]{D}}$$

väärtus, kui $A = 0{,}8216$, $B = 0{,}04826$, $C = 0{,}005127$ ja $D = 7{,}246$.

Logaritmime antud avaldise:

$$\log x = \frac{1}{3} \log A + 4 \log B - 3 \log C - \frac{1}{3} \log D.$$

Et vältida liigset ajakaotust ja vähendada vigade võimalusi, koostame eelkõige arvutuste skeemi, jättes arvutused algul teostamata ning tabelid kasutamata:

$\log A = \log 0{,}8216$	$= \overline{1},\ \ldots\ldots$	$\frac{1}{3} \log A =$
$\log B = \log 0{,}04826$	$= \overline{2},\ \ldots\ldots$	$4 \log B =$
$\log C = \log 0{,}005127$	$= \overline{3},\ \ldots\ldots$	$-3 \log C =$
$3 \log C \ \ldots\ldots$	$=$	$-\frac{1}{3} \log D =$
$\log D = \log 7{,}246$	$= 0,\ \ldots\ldots$	$\log x =$
$\frac{1}{3} \log D \ \ldots\ldots$	$=$	$x =$

Pärast seda võtame tabelid ja kirjutame vabaks jäetud kohtadele logaritmid:

$\log A = \log 0{,}8216$	$= \bar{1},9146$	$\frac{1}{3}\log A = \bar{1},9715$
$\log B = \log 0{,}04826$	$= \bar{2},6835$	$4 \log B = \bar{6},7340$
$\log C = \log 0{,}005127$	$= \bar{3},7099$	$-3 \log C = 6{,}8703$
$3 \log C \; . \; . \; . \; . \; .$	$= \bar{7},1297$	$-\frac{1}{3}\log D = \bar{1},7133$
$\log D = \log 7{,}246$	$= 0{,}8601$	$\log x = 1{,}2891$
$\frac{1}{3}\log D \; . \; . \; . \; . \; .$	$= 0{,}2867$	$x = 19{,}45$

Näide 2. Arvutada $x = (-2{,}31)^3 \sqrt[5]{72} = -(2{,}31)^3 \sqrt[5]{72}$.

Et negatiivseil arvudel ei ole logaritme, siis leiame esialgu: $x' = (2{,}31)^3 \sqrt[5]{72}$.

$$\log x' = 3 \log 2{,}31 + \frac{1}{5} \log 72.$$

Pärast arvutamist ilmneb, et $x' = 28{,}99$, järelikult $x = -28{,}99$.

Näide 3. Arvutada: $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{3}}$.

Siin ei ole võimalik kogu arvutamist teostada logaritmide abil, sest juuremärgi all on summa. Sääraseil juhtumeil arvutatakse avaldise väärtus ositi. Algul leiame $N = \sqrt[5]{8}$, siis $N_1 = \sqrt[4]{3}$; edasi leiame tavalise liitmise teel $N + N_1$ ja lõpuks arvutame $\sqrt[3]{N + N_1}$; ilmneb, et

$$N = 1{,}516; \; N_1 = 1{,}316; \; N + N_1 = 2{,}832;$$

$$\log x = \log \sqrt[3]{2{,}832} = \frac{1}{3} \log 2{,}832 = 0{,}1507; \; x = 1{,}415.$$

Harjutused.

195. Muuta järgmiste negatiivsete logaritmide mantiss positiivseks: $-2{,}3789$; $-1{,}0760$; $-0{,}0058$; $-5{,}6700$.

196. Teisendada järgmised logaritmid negatiivseks: $\bar{2},7359$; $\bar{1},0803$; $\bar{4},0760$; $\bar{1},0023$.

Leida tabelist järgmiste arvude logaritmid:

197. 9; 26; 573; 55; 78; 7,414; 0,7557.

198. 5,634; 10,083; 0,20738; 0,00534.

Leida arvud järgmiste logaritmide järgi:

199. 2,8676; 1,3496; 0,0111; 3,1412.

200. 1,6628; 2,3114; 0,5100; 1,5806.

201. 3,7467; — 1,0834; — 0,6347; — 3,9134.

(Viimases kolmes näites on algul vaja logaritmid teisendada.)

Teostada logaritmidega järgmised tehted:

202. $+\begin{cases}\overline{2},7308\\ \overline{3},9683\end{cases}$; $+\begin{cases}1,5734\\ \overline{2},8430\end{cases}$; $+\begin{cases}\overline{2},0387\\ \overline{1},7857\end{cases}$.

203. $-\begin{cases}0,3756\\ \overline{2},7489\end{cases}$; $\overline{2},7403 \times 7$.

204. $\overline{1},4018 \times 9$; $\overline{3},5612 \times 36$.

205. $\overline{3},5603 \times (-23)$; $\overline{12},6310 : 4$.

206. $\overline{3},0274 : 5$; $\overline{2},5074 : 7$.

Järgmistes näidetes asendada lahutamine liitmisega:

207. — 3,2603; — 7,5920; — 0,4168.

208. $-\overline{1},5609$; $-\overline{2},2754$; $-\overline{3},0406$.

Arvutada logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused:

209. $0,03714^3$; $\sqrt[6]{0,3571}$; $\sqrt[3]{235,8}$.

210. $\sqrt[3]{\frac{13}{17}}$; $\sqrt[3]{17705}$; $\sqrt[2]{\frac{1}{85 \cdot 77}}$.

211. $\left(2\frac{5}{6}\right)^9$; $\frac{0,7361 \cdot 0,03715}{2,165 \cdot 0,8717}$.

212. $\sqrt[3]{\frac{0,07624}{3,142 \cdot 27,05}}$; $\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}}$.

213. $\sqrt[3]{\frac{716,5}{\sqrt[4]{2}}}$; $2,718^{-8,142}$.

214. Mitu numbrit on arvus 3^{20}?

215. Läbides klaasplaadi kaotab valguskiir oma intensiivsusest $\frac{1}{10}$. Milline osa valguskiire alg-intensiivsusest jääb järele, kui kiir on läbinud 10 niisugust plaati?

216. Arvutada kera ruumala valemi järgi $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, kui $R = 5,875$ ja $\pi = 3,142$.

217. Kolmnurga küljed on a, b, c. Arvutada kolmnurga pindala S valemi järgi:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

kus p on kolmnurga poolümbermõõt, s. o. $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, kui küljed on: 1) 6 cm; 8 cm; 9 cm; 2) 0,927 m; 1,135 m; 0,575 m.

218. Õõnessilindri ruumala V avaldatakse valemiga:

$$V = \pi (R^2 - r^2) h,$$

kus h on kõrgus, R — põhja välimine raadius ja r — põhja sisemine raadius. Arvutada V, kui $R = 74{,}35$ m, $r = 42{,}63$ m, $h = 132{,}8$ m ja $\pi = 3{,}142$.

219. Pendli ühe poolvõnke periood (s. o. aeg, mille jooksul pendel liigub paremast äärmisest asendist vasakusse äärmisse asendisse) avaldub valemiga (kui pendli kaldenurk ei ületa 3°):

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

kus t — aeg (sekundeis), l — pendli pikkus (sentimeetrites), g — raskustungi kiirendus (sentimeeter sekund ruudus) ja π — ringjoone pikkuse suhe diameetriga. Leida aeg t, kui $l = 100$ cm, $g = 981{,}5 \ \frac{\text{cm}}{\text{sek.}^2}$ ja $\pi = 3{,}142$.

120. Viiekohaliste tabelite kasutamine. Täpsemaiks arvutusteks kasutatakse viiekohaliste logaritmide tabeleid. Neis tabeleis on arvude logaritmid arvutatud täpsusega 0,00001 (õigemini: täpsusega 0,000005). Kõige enam on kasutatavad E. P r ž e v a l s k i koostatud tabelid. Anname nende kasutamiseks lühikesi näpunäiteid.

1. Tabelite esimene lehekülg sisaldab arvude 1 kuni 100 logaritmide mantissid. Kuid seda lehekülge võib ka mitte kasutada, otsides neid mantisse kolmekohaliste arvude logaritmide hulgast. Et leida arvude 67; 6,7; 0,0067 jne. logaritmid, kirjutatakse vastav karakteristik ja otsitakse arvu 670 logaritmi mantiss.

2. Olgu arvul kolm tüvenumbrit. (Peame meeles, et null kahe tüvenumbri vahel on ka tüvenumber.) See arv otsitakse üles vastava lehekülje esimesest veerust (pealkirjaga N). Samast reast ja veerust pealkirjaga 0 leitakse vastav mantiss.

3. Olgu arvul neli tüvenumbrit. Veerust pealkirjaga N otsitakse üles arv, mis on kirjutatud antud arvu esimese kolme numbriga.

Samast reast ja veerust, mille pealkirjaks on antud arvu neljas number, leiame otsitava mantissi.

Näide. Leida log 84,37. Karakteristik on 1.

Otsime üles veerust N arvu 843. Läheme samas reas sellest arvust paremale. Veerust pealkirjaga 7 leiame vastava mantissi 92619. Seega $\log 84{,}37 = 1{,}92619$.

4. Arvul on rohkem kui neli tüvenumbrit. Võtame arvu, mis on kirjutatud antud arvu esimese kolme numbriga, ja leiame selle arvu logaritmi mantissi. Edasi toimime samuti nagu neljakohaliste tabelite kasutamisel, s. o. koostame võrde või kasutame tabeli-

kest, mis asetseb parempoolses äärmises veerus pealkirja P. P. (*partes proportionales*) all.

Näide. log 187,367.

Otsime üles arvu 187 ning selles reas ja veerus 3 leiame mantissi 27254. Arvutame järgneva mantissi ja leitud mantissi vahe (tabelivahe). See on 23. Parempoolses äärmises veerus arvu 23 all leiame numbrile 6 vastava paranduse 13,8 (sajatuhandikku) ja numbrile 7 vastava paranduse 16,1. Arvutuse teostame nii:

$$\begin{array}{rr} 1873 & 27254 \\ 6 & 138 \\ 7 & 161 \\ \hline 187367 & 2726941 \end{array}$$

Seega log 187,367 = 2,27269.

IV. Eksponent- ja logaritmvõrrandid.

121. **Võrrandite näiteid. Eksponentvõrrandeiks** *nimetame selliseid võrrandeid, kus tundmatu esineb astendajas;* **logaritmvõrrandeiks** *aga selliseid, kus tundmatu esineb logaritmitavas.* Niisuguseid võrrandeid saab lahendada elementaarsete võtetega ainult erijuhtumeil, kusjuures tuleb toetuda logaritmide omadustele ning asjaolule, et võrdsete arvude logaritmid on võrdsed, ja ümberpöördult: võrdsetele logaritmidele vastavad võrdsed arvud.

Näide 1. Lahendada võrrand $2^x = 1024$.

Logaritmime võrrandi mõlemad pooled:

$$x \log 2 = \log 1024; \qquad x = \frac{\log 1024}{\log 2} = \frac{3,01030}{0,30103} = 10.$$

Näide 2. Lahendada võrrand $a^{2x} - a^x = 1$.

Oletades, et $a^x = y$, saame ruutvõrrandi $y^2 - y - 1 = 0$, kust leiame:

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Järelikult

$$a^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ja } a^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Et $1-\sqrt{5}<0$, siis viimasel võrrandil lahendeid ei ole (kui a on positiivne arv), esimene aga annab

$$x=\frac{\log(1+\sqrt{5})-\log 2}{\log a}.$$

Näide 3. Lahendada võrrand $\log(a+x)+\log(b+x)=$ $=\log(c+x)$.

Võrrandi võib kirjutada nii:

$$\log[(a+x)(b+x)]=\log(c+x).$$

Et ühe ja sama aluse puhul võrdsetele logaritmidele vastavad võrdsed arvud, siis

$$(a+x)(b+x)=c+x;$$

see on ruutvõrrand, mis on kergesti lahendatav.

122. Liitprotsentide valem. Ülesanne. Milliseks summaks muutub t aasta jooksul a rubla suurune hoius, kui ta kannab igal aastal $p\%$ liitprotsenti?

Öeldakse, et hoius kannab liitprotsente, kui võetakse arvesse niinimetatud «protsendi protsent», s. o. kui hoiusele arvatakse juurde iga aasta lõpul intress, et see järgneval aastal samuti kannaks protsenti.

Hoiuse iga rubla, mis on antud hoiule p protsendiga, annab aasta jooksul intressi $\frac{p}{100}$ rubla ja järelikult hoiuse iga rubla muutub aasta pärast $1+\frac{p}{100}$ rublaks (näiteks, kui hoius on 5%-line, siis muutub iga rubla aasta pärast $1+\frac{5}{100}$, s. o. 1,05 rublaks). Tähistades murru $\frac{p}{100}$ lühiduse pärast tähega r, võime ütelda, et hoiuse iga rubla muutub aasta pärast $1+r$ rublaks, järelikult a rubla muutub aasta jooksul $a(1+r)$ rublaks. Veel aasta pärast, s. o. kahe aasta pärast arvates hoiule andmise algusest, muutub iga $a(1+r)$ rubla uuesti $1+r$ rublaks; tähendab, kogu hoius muutub $a(1+r)^2$ rublaks. Samal viisil leiame, et kolme aasta pärast on hoius $a(1+r)^3$, nelja aasta pärast $a(1+r)^4, \ldots,$ üldiselt t aasta pärast, kui t on täisarv, muutub hoius $a(1+r)^t$ rublaks. Seega, märkides tähega A rahasumma, milleks hoius muutub t aasta pärast, saame järgmise liitprotsendi valemi:

$$A=a(1+r)^t, \text{ kus } r=\frac{p}{100}.$$

Selle valemi järgi on kerge leida üht neljast arvust A, a, r (või p) ja t, kui on antud ülejäänud kolm.

Näide. Olgu $a=2300$ rubla, $p=4$, $t=20$ aastat; siis

$$r=\frac{4}{100}=0{,}04;\ A=2300\cdot 1{,}04^{20}.$$

$$\log A=\log 2300+20\log 1{,}04=3{,}3617+20\cdot 0{,}0170=$$
$$=3{,}3617+0{,}3400=3{,}7017.$$
$$A=5031 \text{ rubla.}$$

Märkused. 1) Selles näites tuli meil korrutada log 1,04 arvuga 20. Et arv 0,0170 on log 1,04 ligikaudne väärtus täpsusega kuni $\frac{1}{2}$ kümnetuhandikku, siis on selle arvu ja arvu 20 korrutis täpne ainult kuni $\frac{1}{2}\cdot 20$, s. o. kuni 10 kümnetuhandikuni ehk ühe tuhandikuni. Seepärast ei saa me summas 3,7017 vastutada mitte üksnes kümnetuhandike numbri eest, vaid isegi mitte tuhandike numbri eest. Et sellistel juhtumitel saada suurem täpsus, on parem kasutada mitte arvu $1+r$ neljakohalisi logaritme, vaid suurema numbrite arvuga logaritme, näiteks seitsmekohalisi. Sel eesmärgil toome allpool väikese tabeli, milles on esitatud p mõnedele väärtustele vastavad seitsmekohalised logaritmid.

2) Liitprotsendi valemit kasutatakse mitte ainult rahandusküsimustes, vaid mõnikord ka looduslikke protsesse käsitlevate ülesannete lahendamisel, näiteks mingi maa elanike arvu määramisel, metsa puude juurdekasvu arvutamisel jms.

p	$1+r$	$\log(1+r)$
3	1,03	0,0128372
$3\frac{1}{4}$	1,0325	0,0138901
$3\frac{1}{2}$	1,035	0,0149403
$3\frac{3}{4}$	1,0375	0,0159881
4	1,04	0,0170333
$4\frac{1}{4}$	1,0425	0,0180761
$4\frac{1}{2}$	1,045	0,0191163
$4\frac{3}{4}$	1,0475	0,0201540
5	1,05	0,0211893

Harjutused.

Lahendada võrrandid:

220. $3^x = 243$; $2^{2x} = 512$; $5^{x+2} = 3125$.

221. $10^x = 3$; $5^x = 10$; $10^{4x} = 5{,}754$.

222. $4{,}097^x = 3652$; $\left(\frac{5}{6}\right)^x = 2{,}48$.

223. $3^{\sqrt{x}} = 243$; $0{,}55^x = 2{,}718$; $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$.

224. $2^x + 4^x = 72$; $9^{x+1} - 3^{x+3} = 486$.

225. $\log(x - 1) + \log(x + 1) = \log 2$.

226. $\frac{1}{3} \log x^3 = 5 \log x$.

227. $\log x^2 + \log 8x = 2 \log x + \log x^2$.

228. Reservuaarist, mille ruumala on 6 dm³, pumbatakse õhku välja õhupumbaga, mille imemissilindri ruumala on 2 dm³. Mitu pumba kolvi tõmmet on vaja teha, et hõrendada õhk reservuaaris kuni $\frac{1}{200}$-ni algrõhust (kahjuliku ruumala mõju mitte arvestada)?

229. Mitme aastaga kahekordistub kapital, mis kannab hoiul 5% liitprotsenti?

Juhend. Algkapital on x, lõppkapital $2x$; võrrandit saab taandada x-ga.

230. Sama ülesanne, kui kapital on hoiul, kandes 4% liitprotsenti.

231. Kiirgamise tõttu väheneb raadium kaalult ja nimelt: 1600 aasta jooksul kaotab iga gramm raadiumi poole oma kaalust. Arvutada raadiumi kaalu aastane kadu protsentides.

232. Teatava maa elanike arv kasvab igal aastal 1,2% võrra. Mitme protsendi võrra kasvab elanike arv 25 aasta jooksul?

K a h e k s a s j a g u.

Võrrandite uurimine.

I. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandite uurimine.

123. Mis tähendab võrrandit uurida. Võrrandit uurida tähendab vaadelda kõiki erijuhtumeid, mis võivad esineda võrrandi lahendamisel, ja selgitada nende juhtumite tähendust ülesande seisukohalt, mille tingimuste kohaselt võrrand koostati.

124. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandi üldkuju. Varem läbivõetust on teada, et ühe tundmatuga esimese astme võrrand pärast vajalikke teisendusi (sulgude avamine, nimetajaist vabastamine, tundmatute viimine võrrandi ühele poolele ja tuntud arvude viimine teisele poolele, sarnaste liikmete koondamine) omandab lihtsaima kuju:

$$ax=b,$$

kus a ja b võivad olla positiivsed, negatiivsed või nulliga võrdsed arvud.

Vaatleme, millised lahendid on sel võrrandil arvude a ja b mitmesuguste arvuliste väärtuste puhul.

125. Positiivne lahend. Selline lahend saadakse siis, kui arvud a ja b on mõlemad positiivsed või mõlemad negatiivsed. Olgu näiteks $3x=6$ või $-3x=-6$. Siis saame:

$$x=\frac{6}{3}=2 \text{ või } x=\frac{-6}{-3}=2\,.$$

Positiivne lahend, rahuldades võrrandit, rahuldab koos sellega ka ülesannet, mille tingimuste kohaselt võrrand on koostatud. Mõnikord juhtub, et mitte kõik ülesande tingimused pole võrrandiga väljendatud; siis võib positiivne lahend võrrandit ka mitte rahuldada. Toome selle kohta näite.

Ülesanne. 20 inimesest (täiskasvanuist ja noorukeist) koosnev töölisring korraldas korjanduse raamatukogule raamatute ostmiseks, kusjuures iga täiskasvanu annetas 3 rubla ja iga nooruk 1 rubla. Kui palju oli selles ringis täiskasvanuid ja kui palju noorukeid, kui kogu korjandus andis 35 rubla?

Tähistame täiskasvanute arvu tähega x; siis noorukite arv on $20-x$ ning täiskasvanute poolt kokkupandud rahasumma on $3x$ rubla ja noorukite poolt kokkupandud rahasumma on $(20-x)$ rubla. Järelikult saame võrrandi

$$3x+(20-x)=35, \text{ kust } x=7\frac{1}{2}.$$

See positiivne lahend rahuldab küll võrrandit, kuid ei rahulda ülesannet, sest ülesande mõtte kohaselt peab otsitav arv olema täisarv. Erinevus ülesande ja võrrandi vahel tuleneb siin sellest, et võrrand ei sisalda eneses ülesandes eeldatavat nõuet, et otsitav arv oleks täisarv. Esitatud ülesandel ei ole lahendeid.

126. Negatiivne lahend. Selline lahend saadakse võrrandile $ax=b$ siis, kui arvudel a ja b on vastupidised märgid. Olgu näiteks

$$5x=-15 \text{ või } -5x=15;$$

siis

$$x=\frac{-15}{5}=-3 \text{ või } x=\frac{15}{-5}=-3.$$

Et näidata, mis mõttes tuleb mõista negatiivset lahendit $x=-m$, pöörame tähelepanu sellele, et kui arv $-m$ rahuldab antud võrrandit $ax=b$, siis võrdus $-am=b$ peab olema samasus: tähendab, positiivne arv m rahuldab siis teist võrrandit $-ax=b$, mis saadakse antud võrrandist, kui x asendame selles avaldisega $-x$. Toetudes sellele märkusele ja saanud negatiivse lahendi $x=-m$, võime toimida nii: asendame x võrrandis $-x$-ga; saame uue võrrandi, millel peab olema positiivne lahend $x=m$. Uus võrrand muidugi ei vasta esitatud ülesandele; vaadeldes seda lähemalt, leiame kergesti, kuidas tuleb ülesanne muuta, et tal oleks positiivne lahend $x=m$.

Näitena toome sellise lihtsa ülesande.

Isa on 40-aastane, poeg aga 10-aastane. Mitme aasta pärast on isa pojast 7 korda vanem?

Tähistame otsitava arvu tähega x.

On ilmne, et x aasta pärast on isa vanus $40+x$ ja poja vanus $10+x$. Tingimuste kohaselt on.

$$40+x=7(10+x), \text{ kust } x=-5.$$

Asendades x võrrandis $-x$-iga, saame uue võrrandi: $40-x=$ $=7(10-x)$, mis vastab samale ülesandele, kuid muudetud küsimusega ja nimelt: mitme aasta eest oli isa pojast 7 korda vanem?

Samalaadseist näiteist märkame, et negatiivset lahendit tuleb mõista vastupidises mõttes sellele, milles mõistetakse positiivset lahendit; kui positiivne lahend tähendab aega pärast teatavat sündmust, siis negatiivne lahend tähendab aega enne seda sündmust; kui esimene tähendab sissetulekut, siis teine tähendab väljaminekut jne. Kui aga juhtub, et ülesande mõtte kohaselt ei saa tundmatut arvu x mõista kahes vastupidises mõttes, siis negatiivne lahend tähendab, et ülesandel pole lahendeid.

127. Lahend null. Oletame, et võrrandis $ax=b$ arv b on null, kordaja a aga mingi nullist erinev arv. Olgu antud näiteks võrrand $4x=0$. Tähendab, korrutis $4x$ peab võrduma nulliga. Kuid korrutis võrdub nulliga ainult siis, kui üks tegureist võrdub nulliga; järelikult tegur x peab võrduma nulliga. Ka valemist $x=\frac{0}{4}$ nähtub, et $x=0$.

Ülesanne. Missugune arv on vaja liita murru $\frac{13}{26}$ lugejaga ja nimetajaga, et saada $\frac{1}{2}$?

Tähistades otsitava arvu tähega x, saame võrrandi:

$$\frac{13+x}{26+x}=\frac{1}{2};$$

kust

$$26+2x=26+x; \qquad x=0.$$

See tähendab, et see murd ise võrdubki $\frac{1}{2}$-ga.

128. Juhtum, millal võrrandil pole lahendit. Olgu võrrandis $ax=b$ arv a null, b aga nullist erinev arv, näiteks $0 \cdot x=10$. Selline võrdus on võimatu, sest missuguse väärtuse me x-ile ka annaksime, on korrutis $0 \cdot x$ võrdne nulliga, mitte aga 10-ga.

Olgu näiteks selline võrrand:

$$\frac{x}{2}-4+\frac{x}{3}=7+\frac{5x}{6}.$$

Lahendame ta, nagu harilikult (ühine nimetaja on 6):

$$3x-24+2x=42+5x,$$

s. o.

$$5x=66+5x \text{ ehk } 5x-5x=66.$$

Missuguse väärtuse me x-ile ka annaksime, vahe $5x-5x$ on alati null, aga mitte 66. Tähendab, esitatud ülesandel pole lahendit. Kui me oleksime märkamata, et kordaja a on null, jaganud võrrandi $ax=b$ mõlemad pooled arvuga a, siis oleksime saanud x jaoks valemi $x=\frac{b}{a}$. Märgates siis, et $a=0$, me leiaksime sellest valemist, et $x=\frac{b}{0}$. Kuna jagamine nulliga on võimatu, siis tuleksime viimase valemi põhjal järeldusele, et *kui $a=0$, siis võrrandil $ax=b$ pole lahendit* (tähendab, ka ülesandel pole lahendeid).

Kuid pole piisav piirduda ainult selle järeldusega. On otstarbekohane pöörata tähelepanu veel ühele tähtsale asjaolule, mille selgitamiseks peame esialgu vaatlema, kuidas muutub murd, kui ta nimetaja piiramatult väheneb, lugeja aga jääb muutumatuks.

129. Kuidas tuleb mõista võrdust $\frac{m}{0}=\pm\infty$. Vähenegu murru $\frac{m}{n}$ nimetaja absoluutväärtus üha rohkem ja rohkem, lähenedes piiramatult nullile, lugeja aga jäägu muutumatuks.

Oletame näiteks, et nimetaja n saab järgmised järjest vähenevad väärtused:

$$n=0{,}1;\ n=0{,}01;\ n=0{,}001;\ n=0{,}0001 \text{ jne.}$$

Siis murd saab järgmised järjest kasvavad väärtused:

$$\frac{m}{0{,}1}=10m;\quad \frac{m}{0{,}01}=100m;\quad \frac{m}{0{,}001}=1000m;$$

$$\frac{m}{0{,}0001}=10\,000m \text{ jne.}$$

Siit nähtub, et kui lugeja jääb muutumatuks ja nimetaja läheneb piiramatult nullile, siis murru $\frac{m}{n}$ (mille liikmed võivad olla ka negatiivsed arvud) absoluutväärtus suureneb piiramatult. Seda asjaolu väljendatakse lühidalt kirjas nii:

$$\frac{m}{0}=\pm\infty,$$

kus märk ∞ tähendab «lõpmatust». Seda üleskirjutust ei tohi mõista sõnasõnaliselt, sest jagamine nulliga on võimatu; see ainult märgib lühidalt, et murru absoluutväärtus suureneb piiramatult (või nagu mõnikord öeldakse, ligineb lõpmatusele), kui nimetaja läheneb piiramatult nullile ja lugeja jääb muutumatuks, kusjuures murd ise jääb kas positiivseks või negatiivseks (olenevalt sellest, kas nullile ligineval nimetajal on lugejaga ühesugune või vastupidine märk).

130. Nüüd võime eelmises paragrahvis käsitletud uurimust täiendada järgmiselt:

kui $a=0$, siis võrrandil $ax=b$ ei ole lahendit; kui aga a ei võrdu nulliga, vaid ainult ligineb nullile ikka lähemale ja lähemale, siis lahendi absoluutväärtus kasvab piiramatult.

131. Määramatu lahend. Kui võrrandis $ax=b$ mõlemad arvud a ja b osutuvad nulliks, siis võrrand muutub samasuseks $0 \cdot x=0$, mis on kehtiv x iga väärtuse puhul. Tähendab, sel juhul osutub võrrand määramatuks, s. o. ta võimaldab lõpmata palju meelevaldseid lahendeid.

Kui me jagaksime võrrandi mõlemad pooled arvuga a, märkamata, et $a=0$, siis saaksime x väärtuseks murru $\frac{b}{a}$, mis juhtumil, kui $b=0$ ja $a=0$, muutuks avaldiseks $\frac{0}{0}$. Sellel avaldisel ei ole arvulist väärtust.

Võtame näite.

Ülesanne. Missugune arv tuleb liita murru $\frac{a}{b}$ lugeja ja nimetajaga, et see murd võrduks arvuga m?

Tähistades otsitava arvu tähega x, saame võrrandi:

$$\frac{a+x}{b+x}=m,$$

kust

$$a+x=bm+mx, \quad x-mx=bm-a; \quad (1-m)x=bm-a.$$

Kui $m \neq 1$, siis $x=\frac{bm-a}{1-m}$.

Oletame, et $m=1$ ja vahe $b-a$ on mingi nullist erinev arv (positiivne või negatiivne). Siis saame x jaoks võrrandi:

$$0 \cdot x=b-a.$$

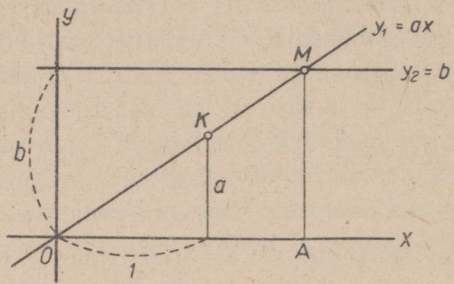
Siit võime järeldada, et kui $m=1$ ja $b \neq a$, siis pole olemas mingit arvu x, mis rahuldaks ülesande nõuet; kui aga m pole võrdne 1-ga, vaid ainult läheneb 1-le, siis suureneb arvu x absoluutväärtus piiramatult.

Kui $m=1$ puhul ka veel $b=a$, siis saadakse x jaoks võrrand

$$0 \cdot x=0,$$

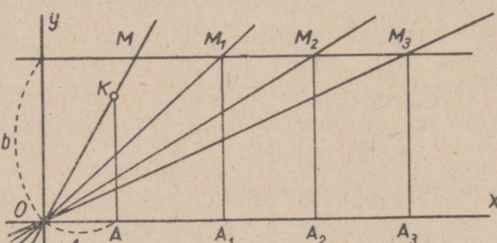
millest võib järeldada, et x iga väärtus rahuldab ülesande nõuet (ja tõesti: murd $\frac{a+x}{a+x}$ võrdub x iga väärtuse puhul arvuga 1).

132. Võrrandi $ax=b$ lahendi graafiline tõlgendamine. Tähistame võrrandi vasaku poole tähega y_1 ja parema poole tähega y_2 ning joonestame ühel ja samal joonisel kahe funktsiooni $y_1=ax$ ja $y_2=b$ graafikud.



Joon. 31.

Esimese funktsiooni graafik on sirge, mis läbib koordinaatide alguse ja punkti $(1, a)$; teise funktsiooni graafik on x-teljega paralleelne sirge, mis lõikab y-teljest lõigu b (joonisel 31 kujuta-



Joon. 32.

sime juhtumit, kui $a>0$ ja $b>0$; jätame lugejale võimaluse teha joonise juhtumeiks, kui: 1) $a>0$, $b<0$; 2) $a<0$, $b>0$ ja 3) $a<0$ ja $b<0$). Need kaks sirget lõikuvad punktis M, mille abstsiss OA ongi võrrandi $ax=b$ lahend, sest selle abstsissi puhul sirge $y_1=ax$ ordinaat on võrdne sirge $y_2=b$ ordinaadiga ja järelikult $ax=b$.

Kasutades niisugust graafilist kujutust, võime näitlikult tõlgendada võrrandi $ax=b$ lahendamise kõiki juhtumeid. Piirdume kahe juhtumi vaatlemisega: 1) võrrandil pole lahendit ja 2) võrrandil on määramatu lahend.

1) *Võrrandil ei ole lahendit* (joon. 32). Vähendades kordaja a arvulist väärtust, sunnime sirget $y=ax$ üha rohkem lähenema x-teljele. Siis eemaldub punkt M, kus sirge $y=b$ lõikub sirgega $y=ax$, üha rohkem paremale, läbides asendeid M_1, M_2, M_3 jne., kusjuures lõikepunkti abstsiss OA suureneb piiramatult, läbides väärtusi OA_1, OA_2, OA_3 jne. Tähendab, kui a piiramatult väheneb, lähenedes nullile, siis võrrandi $ax=b$ lahend kasvab piiramatult (mida võib väljendada nii: $x=\frac{b}{0}=\infty$).

2) *Määramatu lahend* tekib, nagu nägime (§ 131), juhtumil, kui $a=b=0$. Et seda juhtumit tõlgendada graafiliselt, kujutleme, et joonisel 32 suurus b väheneb, lähenedes nullile; siis hakkab sirge $y_2=b$, jäädes paralleelseks x-teljega, sellele teljele üha lähenema ja ühtib sellega, kui $b=0$. Teiselt poolt muutub sirge $y_1=ax$, kui $a=0$, samuti x-teljeks. Siis ühtivad x-teljega kaks sirget $y_2=b$ ja $y_1=ax$ ning järelikult võib selle telje iga punkti pidada lõikepunktiks; tähendab, lahendi väärtus jääb määramatuks.

Harjutused.

Veenduda, et järgmistel võrranditel ei ole lahendeid (redutseeruvad võimatuteks võrdusteks):

233. $\frac{5x+1}{6}+\frac{x+3}{4}=x+1+\frac{x-3}{12}$.

234. $(x+2)^2+(x-2)^2=(x+3)^2+(x-3)^2$.

Veenduda, et järgmised võrrandid annavad lõpmatu palju lahendeid (on samasused):

235. $8x+3=(x+2)^2-x^2+4x-1$.

236. $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1)$.

237. Sirgel, mis läbib kahe ringi keskpunktid O ja O_1, leida punkt, milles sirge lõikab antud ringide ühist välist puutujat, kui ringi raadiused on r ja r_1 ning keskpunktide kaugus teineteisest on d. Uurida mitmesuguseid juhtumeid, mis võivad esineda lahendamisel.

238. Leida seesama ühise seesmise puutuja jaoks.

II. Kahe tundmatuga esimese astme võrrandisüsteemi uurimine.

133. Üldvalemid. Lahendades kahest võrrandist koosneva süsteemi

$$ax+by=c \quad \text{ja} \quad a'x+b'y=c',$$

saame tundmatute jaoks järgmised valemid:

$$(ab'-a'b)x=(b'c-bc'); \qquad (ab'-a'b)y=(ac'-a'c). \qquad (1)$$

Kui $ab'-a'b \neq 0$, siis

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}; \quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}. \qquad (2)$$

134. Uurimine. Nende valemite uurimisel vaatleme kaht juhtumit.

1) Ühine nimetaja $ab'-a'b$ ei võrdu nulliga.

Sel juhtumil on süsteemil üks lahend. Selle lahendi tähenduse kohta ülesande seisukohalt, mille tingimuste kohaselt on vaadeldav süsteem koostatud, võib ütelda sedasama, mis oli öeldud varem ühe tundmatuga võrrandi uurimisel.

2) Ühine nimetaja $ab'-a'b=0$. Sel juhtumil võivad lugejad valemites (2) nullist erineda kui ka nulliga võrduda. Tõestame, et kui ükski arvudest a, a', b, b' pole nulliga võrdne, siis kehtivad järgmised kaks lauset.

a) Kui x ja y valemites (2) üks lugejaist võrdub nulliga, siis võrdub ka teine lugeja nulliga.

Olgu näiteks x avaldise lugeja võrdne nulliga. Selleks on vajalik, et:

$$cb'=c'b;$$

peale selle on antud, et $ab'=a'b$.

Korrutades esimese võrduse vasaku poole teise võrduse parema poolega ja esimese võrduse parema poole teise võrduse vasaku poolega, saame:

$$cb'a'b=c'bab', \text{ kust } cb'a'b-c'bab'=0,$$

ja järelikult

$$bb'(a'c-ac')=0.$$

Et arvud b ja b' pole võrdsed nulliga, siis on viimane võrdus võimalik üksnes siis, kui $a'c-ac'=0$, s. o. kui y avaldise lugeja on võrdne nulliga.

Samuti, kui oletame, et y avaldise lugeja valemites (2) on võrdne nulliga (s. o. kui $ac'=a'c$ ja $ab'=a'b$), siis saame:

$$ac'a'b=a'cab'; \; aa'(c'b-cb')=0; \; c'b-cb'=0.$$

b) Kui valemites (2) ühe avaldise lugeja pole võrdne nulliga, siis pole ka teise avaldise lugeja võrdne nulliga.

Tõepoolest, kui lugeja ühe tundmatu valemis oleks võrdne nulliga, siis oleks lause a) kohaselt ka lugeja teise tundmatu valemis võrdne nulliga.

Kui kummagi avaldise lugeja valemites (2) on null, siis tähendab see, et ülesanne on määramatu. Tõepoolest, korrutades esimese võrrandi liikmeid arvuga b' ja teise võrrandi liikmeid arvuga b (mida võib teha, sest eelduse kohaselt pole arvud b ja b' nulliga võrdsed), saame:

$$ab'x+bb'y=cb' \quad \text{ja} \quad a'bx+b'by=c'b. \qquad [A]$$

Kui $ab'=a'b$ ja $cb'=c'b$; järelikult mõlemad võrrandid [A] kujutavad enesest tegelikult üht kahe tundmatuga võrrandit, ja sel juhtumil, nagu teame, võib tundmatuil olla lõpmatu palju väärtusi.

Kui valemites (2) lugejad pole võrdsed nulliga ja $ab'-a'b=$ $=0$, siis tähendab see, et võrrandid on teineteisega sobimatud. Tõesti, kui $ab'=a'b$ ja $cb'\neq c'b$, siis on süsteemi [A] vasakutel pooltel võrdsed arvulised väärtused, parematel pooltel aga erinevad väärtused; tähendab, võrrandid on teineteisega sobimatud ja ülesandel pole lahendit.

On kasulik märkida, et juhtumil, kui võrrandid (1) omandavad kuju $0x=0$, $0y=0$, siis ei tähenda see veel, et mõlemale tundmatule võib anda mistahes väärtusi. Andes ühele tundmatule mistahes väärtused, määrame sellega kindlaks teise tundmatu väärtused, leides nad ühest antud kahest võrrandist.

Seega, kui $ab'-a'b\neq 0$, siis leitakse süsteemi

$$ax+by=c \quad \text{ja} \quad a'x+b'y=c'$$

lahendid üldvalemite järgi; kui aga $ab'-a'b=0$, kuid ükski arvudest a, b, a', b', ei muutu nulliks, siis on võrrandil kas lõpmatu palju lahendeid või pole ühtki lahendit. Juhtumit, millal $ab'-a'b=0$ ja peale selle üks arvudest a, b, a', b' võrdub nulliga, meie ei vaatle.

III. Ruutvõrrandi uurimine.

135. Valemite uurimine. Täieliku ruutvõrrandi ax^2+bx+ $+c=0$ lahendite valemid on, nagu teame,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Arvu a võtame positiivsena (kui ta oleks negatiivne, siis võiksime võrrandi kõigi liikmete märgid muuta vastupidiseks; arvu a väärtus ei saa olla null, sest vastasel korral poleks võrrand ruutvõrrand, vaid ta muutuks esimese astme võrrandiks).

Varem kõnelesime (§ 42), et ruutvõrrandi lahendid on mõlemad reaalsed või mõlemad kompleksed olenevalt sellest, kas diskriminandi b^2-4ac väärtus on positiivne või negatiivne.

Vaatleme seda küsimust lähemalt. 1) Kui $b^2-4ac>0$, siis $\sqrt{b^2-4ac}$ on mingi positiivne arv (meenutame, et märk $\sqrt{}$ tähistab siin juure aritmeetilist väärtust); lahendid x_1 ja x_2 on järelikult reaalsed ja mittevõrdsed. Seejuures võib esineda kolm juhtumit.

a) Mõlemad lahendid on positiivsed, kui $-b+\sqrt{b^2-4ac}>0$ ja $-b-\sqrt{b^2-4ac}>0$; selleks on tarvis, et arv b oleks negatiivne (positiivse b puhul oleks lahend x_2 negatiivne) ja et b absoluutväärtus oleks suurem kui $\sqrt{b^2-4ac}$.

b) Mõlemad lahendid on negatiivsed, kui $-b+\sqrt{b^2-4ac}<0$ ja $-b-\sqrt{b^2-4ac}<0$; selleks on tarvis, et b oleks positiivne arv (negatiivse b puhul oleks lahend x_1 ilmselt positiivne), ja peale selle, et oleks rahuldatud võrratus $b>\sqrt{b^2-4ac}$.

c) Üks lahend on positiivne ja teine negatiivne, kui arv b, olles positiivne või negatiivne, on absoluutväärtuselt väiksem kui $\sqrt{b^2-4ac}$.

2) Kui $b^2-4ac=0$, siis on lahendid reaalsed ja võrdsed: $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$, positiivsed või negatiivsed (või võrdsed nulliga, kui $b=0$).

3) Kui $b^2-4ac<0$, siis on mõlemad lahendid kompleksed (see juhtum on võimatu, kui $c<0$).

4) Null-lahendid esinevad ainult sel juhul, kui lahendite valemeis üks lugejaist või mõlemad lugejad võrduvad nulliga. Esimene juhtum esineb siis, kui $c=0$ ja järelikult võrrandil on kuju: $ax^2+bx=0$; teine esineb siis, kui $c=0$ ja $b=0$, s. o. kui võrrand on $ax^2=0$.

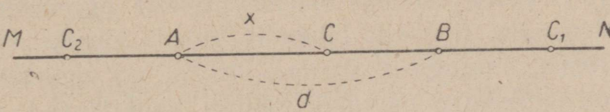
5) Kui $a=0$, siis ei ole võrrand ruutvõrrand, vaid esimese astme võrrand $bx+c=0$. Kuid asetanud küsimuse, kuidas muutuvad x_1 ja x_2 kui a piiramatult läheneb nullile, tuleme analoogilisele järeldusele, mille tegime esimese astme võrrandite kohta. Nimelt: kui a läheneb piiramatult nullile, siis üks ruutvõrrandi

lahendeist kasvab piiramatult, teine aga läheneb piiramatult väärtusele $-\frac{c}{b}$.

136. Ülesanne kahest valgusallikast. Et näite varal selgitada ruutvõrrandite lahendamisel esinevate mitmesuguste juhtumite tähendust, toome ülesande kahest valgusallikast.

Sirgel MN asetsevais punktides A ja B on kaks valgusallikat. Esimese allika valgustugevus võrdub a küünlaga ja teise oma b küünlaga. Kaugus A ja B vahel on d meetrit. Leida sirgel MN selline punkt, kus mõlemalt valgusallikalt saadavad pinnavalgustused oleksid võrdsed (joon. 33).

Otsitav punkt võib asetseda kas A ja B vahel või punktist B paremal või punktist A vasakul.



Joon. 33.

Oletame, et ta asetseb A ja B vahel, näiteks punktis C, mis on punktist A x meetri kaugusel. Füüsikast on teada, et pinnavalgustus on muudel võrdsetel tingimustel pöördvõrdeline valgusallika kauguse ruuduga. Arvestades seda seadust, arutleme nii: kui punkt C asetseks punktist A 1 meetri kaugusel, siis valgustaks see valgusallikas punkti C a küünla tugevuselt; et aga punkt C asetseb punktist A mitte 1 meetri, vaid x meetri kaugusel, siis on tema pinnavalgustus $\frac{a}{x^2}$ luksi.

Samuti leiame, et punktis C, mis asetseb valgusallikast B $(d-x)$ meetri kaugusel, on punktist B saadav pinnavalgustus $\frac{b}{(d-x)^2}$ luksi. Ülesanne nõuab, et

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}, \tag{1}$$

kust

$$a(d-x)^2=bx^2, \text{ s. o. } ad^2-2adx+ax^2-bx^2=0,$$

$$(a-b)x^2-2adx+ad^2=0.$$

Et x kordaja jagub arvuga 2, siis (§ 125, 1):

$$x=\frac{ad\pm\sqrt{a^2d^2-(a-b)ad^2}}{a-b}=\frac{ad\pm d\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{d\sqrt{a}(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

Järelikult

$$x_1=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\qquad x_2=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Uurime neid valemeid. Et a ja b on positiivsed arvud, siis pole sellel ülesandel kompleksseid lahendeid.

1) Kui $a>b$, siis on mõlemad lahendid positiivsed, ning et

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a}<\sqrt{a}+\sqrt{b},\text{ siis } x_1>d \text{ ja } x_2<d.$$

Teine lahend ($x_2<d$) vastab meie oletusele, et otsitav punkt asetseb A ja B vahel; esimene lahend ($x_1>d$) aga räägib selle vastu. Et otsustada, kas seda lahendit pidada õigeks või mitte, peame vaatlema, missuguse võrrandi saame, kui oletame, et otsitav punkt on punktist B paremal (näiteks punktis C_1), x meetri kaugusel punktist A. Siis valgusallikalt A saadav punkti C_1 pinnavalgustus on endiselt $\frac{a}{x^2}$, valgusallikast B asetseb punkt C_1 $x-d$ meetri kaugusel; seepärast valgusallikalt B saadav punkti C_1 pinnavalgustus on $\frac{b}{(x-d)^2}$ ja võrrand on siis:

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(x-d)^2}. \tag{2}$$

Võrreldes seda võrrandit võrrandiga (1), leiame, et nad on identsed, sest

$$(d-x)^2=(x-d)^2.$$

Märganud seda, võime kinnitada, et võrrandi (1) mõlemad positiivsed lahendid rahuldavad ülesannet.

2) Kui $a<b$, siis x_1 on negatiivne arv ja x_2 on positiivne arv, kusjuures $x_2<d$. Positiivne lahend vastab oletusele, et otsitav punkt asetseb A ja B vahel. Et selgitada negatiivse lahendi mõtet, asendame x-i võrrandis (1) $-x$-iga;

$$\frac{a}{(-x)^2}=\frac{b}{(d+x)^2}$$

ehk

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d+x)^2}.$$

Võrrandil (3) on samad lahendid, mis võrrandil (1), ainult et need on vastupidiste märkidega. Tähendab, võrrandi (1) negatiivse lahendi absoluutväärtus võrdub võrrandi (3) positiivse lahendiga. Kuid see viimane vastab samale ülesandele, ainult teistsugusel oletusel, ja nimelt, et otsitav punkt asetseb valgusallikast A vasakul. Tõepoolest, kui oletame, et otsitav punkt on C_2, mis asetseb x meetri kaugusel valgusallikast A, siis leiame, et valgusallikalt A saadav punkti C_2 pinnavalgustus on $\frac{a}{x^2}$ ja valgusallikalt B saadav pinnavalgustus on $\frac{b}{(d+x)^2}$; järelikult võrrand (3) rahuldab seda oletust.

Võrrandi (1) negatiivne lahend tähendab seega, et kaugus x_1 tuleb võtta vastupidises suunas sellele, millises loetakse positiivset lahendit.

3) Kui $a=b$, siis kaotab x_1 avaldis mõtte, teise lahendi valem aga annab $x_2=\frac{d}{2}$.

Arutledes samuti nagu §-s 129, järeldame: vastavalt suuruste a ja b lähenemisega võrdsusele kasvab x_1 piiramatult, s. o. mõlemast valgusallikast võrdselt valgustatud punkt eemaldub valgusallikaist piiramatult.

Teine lahend $x_2=\frac{d}{2}$ näitab, et kui $a=b$, siis teine võrdselt valgustatud punkt asetseb võrdsetel kaugustel võrdsete tugevustega valgusallikate vahel.

4) Kui $a=b$ ja $d=0$, siis muutub võrrand (2) samasuseks,

$$0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 0 = 0,$$

mis on kehtiv x-i iga väärtuse puhul. Tähendab, ülesanne jääb määramatuks.

Tõepoolest, kui ühesuguse tugevusega valgusallikad asetsevad ühes kohas ($d=0$), siis on iga vabalt võetud punkt valgustatud nende poolt ühe ja sellesama tugevusega.

5) Kui a ei võrdu b-ga, kuid $d=0$, siis $x_1=x_2=0$. Seda tuleb mõista selles mõttes, et kui kaugus kahe mittevõrdse valgusallika vahel väheneb, lähenedes ikka rohkem ja rohkem nullile, siis lähenevad mõlemad võrdselt valgustatud punktid piiramatult valgusallikale A.

Üheksas jagu.

Imaginaar- ja kompleksarvud.

137. Imaginaararvud. Imaginaararvud tekivad negatiivse arvu juurimisel ruutjuurega.

Imaginaararvu $\sqrt{-1}$ tähistatakse tavaliselt ühe tähega i (algustäht prantsuskeelsest sõnast *imaginaire,* mis tähendab «kujuteldav») ja nimetatakse imaginaarseks ühikuks. On loomulik järeldada, et $i^2=-1$ ja $(\sqrt{-a})^2=-a$. Iga imaginaararvu võib väljendada i ja mingi reaalarvu korrutisena.

Näiteks

$$\sqrt{-16}=\sqrt{16(-1)}=4\sqrt{-1}=4i.$$

Üldiselt

$$\sqrt{-b^2}=\sqrt{b^2(-1)}=b\sqrt{-1}=bi.$$

138. Kompleksarvud. Arvu, mille kuju on $a+bi$, kus a ja b on reaalarvud, nimetatakse kompleksarvudeks[1]; arvu a nimetatakse selle arvu reaalosaks ja arvu bi tema imaginaarosaks. Kui $a=0$, siis muutub ta imaginaararvuks bi; kui $b=0$, siis saame arvu $a+0 \cdot i$, mida vaadeldakse kui reaalarvu a.

Kompleksarve $a+bi$ ja $a-bi$ nimetatakse kaaskompleksarvudeks. Kompleksarve $a+bi$ ja $-a-bi$ nimetatakse vastupidisteks kompleksarvudeks.

---

[1] Sõna «kompleksne» tähendab eesti keeles «liitne»; selle nimetus andis arvudele $a+bi$ esmakordselt saksa matemaatik Gauss (1777—1855). Nimetuse imaginaarne (*imaginaire*) võttis tarvitusele prantsuse matemaatik Descartes 1637. a.

Definitsioon. *Kaks kompleksarvu* $a+bi$ *ja* $a'+b'i$ *loetakse võrdseiks siis ja ainult siis, kui*

$$a=a' \text{ ja } b=b'.$$

Sellest definitsioonist järeldub, et kompleksarv $a+bi$ võrdub nulliga siis ja ainult siis, kui $a=0$ ja $b=0$.

Tõepoolest, reaalarvu 0 võib kujutada kompleksarvuna nii: $0+i0$. Eelmise definitsiooni põhjal peab võrdus $a+bi=0+i0$ paika ainult sel tingimusel, kui $a=0$ ja $b=0$.

Märkus. Kompleksarvude suhtes pole tehtud mingit kokkulepet, millist arvu pidada teisest suuremaks.

139. Tehted kompleksarvudega. Lepime kokku teostada algebralisi tehteid ja teisendusi kompleksarvudega samade reeglite järgi, mille järgi teostatakse tehteid reaalarvudega, eeldades alati, et $(\sqrt{-a})^2=-a$.

See juhis on aluseks kompleksarvudega arvutamisel. Et sooritada mingi tehe kompleksarvudega $a+bi$, tuleb sellekujuliste kaksliikmetega teostada tehted samade reeglite järgi, mis tuletati reaalsete liikmetega kaksliikmete jaoks, ja lõpptulemuses kõikjal avaldis i^2 asendada arvuga -1.

Liitmine.

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)=(a+a_1)+(b+b_1)\,i;$$

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=$$
$$=(a+a_1+a_2)+(b+b_1+b_2)\,i.$$

Siit on kerge näha, et kompleksarvude summal on samad omadused, mis reaalarvude summal, s. o. tal on kommutatiivsus ja assotsiatiivsus.

Lahutamine.

$$(a+bi)-(a_1+b_1i)=(a-a_1)+(b-b_1)\,i.$$

Märgime, et kahe kompleksarvu summa või vahe võib osutuda reaalarvuks; näiteks kaaskompleksarvude summa $(a+bi)+$ $+(a-bi)=2a$ on reaalarv.

Korrutamine.

$$(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=$$
$$=(aa_1-bb_1)+(a_1b+ab_1)\,i.$$

Samal viisil võib arvutada kolme või enama kompleksarvu korrutise.

Märgime, et kahe nullist erineva kaaskompleksarvu korrutis $(a+bi)(a-bi)$ on võrdne positiivse reaalarvuga a^2+b^2. Tõepoolest

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-b^2i^2,$$

kuid $i^2=-1$, järelikult

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Jagamine.

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=$$

$$=\frac{(aa_1+bb_1)+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2-(b_1i)^2}=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2-b_1^2}i.$$

Astendamine. Esmalt leiame imaginaararvu i astmed, teades, et vastavalt kokkuleppele on i^2 võrdne arvuga -1:

$i^1=i;$	$i^5=i^4\cdot i=(+1)\cdot i=i;$
$i^2=-1;$	$i^6=i^5\cdot i=i^2=-1;$
$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i;$	$i^7=i^6\cdot i=(-1)\cdot i=-i;$
$i^4=i^3\cdot i=-i^2=+1;$	$i^8=i^4\cdot i^4=+1$

jne.

Me saame seega neli vahelduvat väärtust:

$$i;\quad -1;\quad -i;\quad +1.$$

Märgime veel, et i^0 loetakse võrdseks arvuga 1.

Nüüd leiame kergesti avaldise $a+bi$ positiivse täisarvuga astendamise tulemused; nii:

$$(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi.$$

$$(a+bi)^3=a^3+3a^2(bi)+3a(bi)^2+(bi)^3=$$
$$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$$

Ruutjuure leidmine. Oletame, et

$$\sqrt{a+bi}=x+yi.$$

Siis

$$a+bi=(x^2-y^2)+2xyi$$

Järelikult

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases} \tag{1}$$

Ruutjuure leidmine redutseerub selle võrrandisüsteemi reaalsete lahendite leidmiseks. Tõstes mõlemad võrrandid ruutu ja seejärel liites need, saame:

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2 \quad \text{ja} \quad x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

(Miinusmärk juure ees on ära jäetud, sest arvude x ja y reaalsete väärtuste puhul ei saa avaldise x^2+y^2 väärtus olla negatiivne.) Võtame viimase võrrandi koos võrrandisüsteemi (1) esimese võrrandiga; liites ja lahutades need, saame:

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \quad \text{ja} \quad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},$$

$$y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \quad \text{ja} \quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Süsteemi (1) teisest võrrandist näeme, et x ja y märgid peavad olema ühesugused, kui $b>0$, ja erinevad, kui $b<0$. Seepärast:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], \quad \text{kui } b>0.$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], \quad \text{kui } b<0.$$

Näited.

1) $$\sqrt{5+12\sqrt{-1}}=\sqrt{5+12i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+\right.$$
$$\left.+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}}+i\sqrt{\frac{8}{2}}\right)=$$
$$=\pm(\sqrt{9}+i\sqrt{4})=\pm(3+2i).$$

2) $$\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{i}=\sqrt{0+1\cdot i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}+\right.$$
$$\left.+i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right).$$

3) $$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{-i}=\sqrt{0-1\cdot i}=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{4}}\right)=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right).$$

Märkus. Suuremate juurijatega juurimist meie ei käsitle.

Harjutused.

239. Kontrollida võrduse $i^7+i^{18}+i^{25}+i^{35}+i^{97}+i^{100}=0$ kehtivust.

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

240. $(x+i\sqrt{6})(x-i\sqrt{6})$.

241. $\sqrt{4+2\sqrt{-6}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{-6}}$.

242. $(1+i)^4$; $(-2\sqrt{-2})^6$.

Kontrollida ruutu või kuupi tõstmise teel järgmiste võrduste kehtivust:

243. $\sqrt{2i}+\sqrt{-2i}=2$.

244. $\sqrt[3]{i}=-i$.

Sooritada nõutavad tehted:

245. $(\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i})^2$.

246. $\frac{(a+ib)^2}{a-ib}-\frac{(a-ib)^2}{a+ib}$.

Lihtsustada avaldised:

247. 1) $\frac{1}{-1+i\sqrt{3}}$; 2) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

248. Tähistanud lühiduse pärast

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\alpha_1;\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\alpha_2 \text{ ja } 1=\alpha_3.$$

kontrollida järgmiste võrduste kehtivust:

1) $\alpha_1^3=\alpha_2^3=\alpha_3^3=1$; 2) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$; 3) $\alpha_1\cdot\alpha_2\,.\,\alpha_3=1$;
4) $\alpha_1^2=\alpha_2$; 5) $\alpha_2^2=\alpha_1$; 6) $1+\alpha_1+\alpha_1^2=0$.

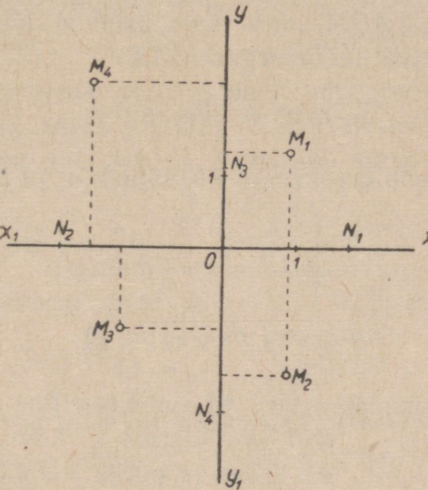
140. Kompleksarvu geomeetriline kujutamine. Iga kompleksarvu $a+bi$ võib kujutada geomeetriliselt.

Võtame tasapinnal ristkoordinaatide teljestiku ja, valinud pikkusühiku (näiteks sentimeetri), kujutame reaalarve x-teljel, imaginaararve aga y-teljel. Vastavalt sellele nimetatakse x-telge reaalteljeks ja y-telge imaginaarteljeks. Näiteks (joon. 34).

punkt N_1 kujutab arvu $+1{,}75$
„ N_2 „ „ $-2{,}25$
„ N_3 „ „ $+1{,}1i$
„ N_4 „ „ $-2{,}25i$

Arvu $a+bi$ kujutame tasapinna punktina, mille abstsiss on a ja ordinaat on b. Nii näiteks

punkt M_1 kujutab arvu $0,9+1,3i$
„ M_2 „ „ $0,9-1,75i$
„ M_3 „ „ $-1,4-1,1i$
„ M_4 „ „ $-1,8+2,25i$
„ 0 „ „ $0+0i$



Joon. 34.

On ilmne, et antud koordinaatide teljestiku ja antud pikkusühiku puhul vastab tasapinna punktile üks ja ainult üks kompleksarv (erijuhtumil reaal- või imaginaararv), ja vastupidi: igale kompleksarvule vastab üks ja ainult üks tasapinna punkt. Seega siis samuti, nagu iga reaalarvu (nii positiivset kui ka negatiivset ja nulli) võib geomeetriliselt kujutada s i r g e (arvtelje) punktina, nii võib iga kompleksarvu geomeetriliselt kujutada t a s a p i n n a punktina. Paneme tähele, et lõik koordinaatide algusest kuni antud kompleksarvu $a+bi$ kujutava punktini on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, mille üks kaatet on a ja teine kaatet on b. Tähendab, selle lõigu pikkus on $\sqrt{a^2+b^2}$; seda suurust nimetatakse kompleksarvu $a+bi$ m o o d u l i k s. Nullist erineva arvu moodul on alati positiivne.

Kompleksarvude geomeetriline kujutamine etendab kõrgema matemaatika mõnes harus tähtsat osa.

140a. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju. Kompleksarvude kujutamine tasapinna punktide abil võimaldab meil esitada arvu

$a+bi$ veel teiselgi kujul, nimelt nn. **trigonomeetrilisel kujul**. Kujutagu punkt M (joon. 35) kompleksarvu $a+bi$. Siis

$$OA=a; \quad AM=b. \tag{1}$$

Tähistame punkti M kauguse OM koordinaatide algusest tähega r ja nurga AOM, mille moodustavad lõik OM ja x-telg, tähega φ. Siis saame kolmnurgast OAM:

$$a=r\cos\varphi; \quad b=r\sin\varphi. \tag{2}$$

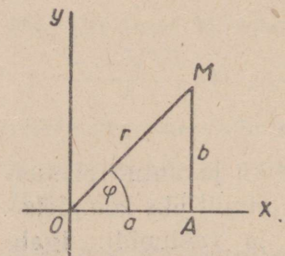
Asendades kompleksarvus $a+bi$ tähed a ja b leitud avaldistega, saame:

$$a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$$

ehk

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{3}$$

See ongi kompleksarvu trigonomeetriline kuju. Suurust $OM=r$ nimetatakse kompleksarvu **mooduliks** ja nurka $AOM=\varphi$ tema **argumendiks**.



Joon. 35

Märgime, et moodul r, mis väljendab punkti M kaugust koordinaatide algusest, on alati positiivne arv (ainult nulli moodul on null).

Näitame, kuidas kompleksarvu, mis on antud tavalisel algebralisel kujul[1] $a+bi$, esitada trigonomeetrilisel kujul. Selleks peame leidma r ja φ väärtused, kui meil on teada a ja b väärtused. Kolmnurgast OAM (joon. 35) leiame:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}; \quad \tan\varphi=\frac{a}{b}. \tag{4}$$

Seega, teades a ja b väärtusi, võime alati valemite (4) järgi leida r ja φ väärtused.

Näide 1. Väljendada arv $5+12i$ trigonomeetrilisel kujul.

---

[1] Et a ja b on arvu $a+bi$ kujutava punkti abtsissiks ja ordinaadiks, siis öeldakse seesuguse kompleksarvu kuju kohta, et kompleksarv on antud oma koordinaatidega.

Valemite (4) järgi leiame:

$$r=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13;$$

$$\tan\varphi=\frac{12}{5}.$$

Jääb veel antud tangensi järgi leida nurk φ. Väikseimaks nurgaks, mille tangens on $\frac{12}{5}=2{,}4$, on $\varphi=67°23'$. Kuid me teame, et samasugune tangensi väärtus on ka nurgal $180°+\varphi=247°23'$. Milline nurk tuleb antud juhtumil võtta? Et seda kindlaks teha, vaatame, millised märgid on suurustel $\sin\varphi$ ja $\cos\varphi$. Valemist (2) leiame:

$$\sin\varphi=\frac{b}{r}; \qquad \cos\varphi=\frac{a}{r}. \tag{5}$$

Pannes siia väärtused $a=5$; $b=12$; $r=13$, saame:

$$\sin\varphi=\frac{12}{13}, \qquad \cos\varphi=\frac{5}{13},$$

s. o. siinus ja koosinus on positiivsed. See tähendab, et nurk asetseb esimeses veerandis ja järelikult $\varphi=67°23'$. Nüüd võime kirjutada:

$$5+12i=13(\cos 67°23'+i\sin 67°23').$$

Trigonomeetriast on teada, et siinus ja koosinus ei muutu, kui argumendiga liita või sellest lahutada 360° täisarv korda. Seepärast võime kirjutada saadud avaldise üldisemal kujul: $5+12i=$ $=13[\cos(67°23'+360°k)+i\sin(67°23'+360°k)]$, kus k on mistahes täisarv (sealhugas ka null).

Märkus. Et nimetaja r on avaldistes (5) alati positiivne arv, siis sõltuvad siinuse ja koosinuse märgid üksnes arvude a ja b märkidest. Seepärast, näinud, et antud juhtumil on a ja b mõlemad positiivsed arvud, oleksime võinud kohe järeldada, et ka siinus ja koosinus on positiivsed.

Näide 2. Esitada trigonomeetrilisel kujul arv $-3+2i$.

Valemi (4) järgi leiame:

$$r=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}; \ \tan\varphi=-\frac{2}{3}=-0{,}666\ldots$$

Tangens on negatiivne, järelikult tuleb nurga φ väärtust otsida teisest või neljandast veerandist. Pöördudes valemite (5) juurde, märkame, et kuna $a=-3$ ja $b=2$, siis on siinus positiivne ja koosinus negatiivne, milline juhtum leiab aset teises veerandis. Tabelite abil leiame, et $\varphi=146°18'$, tähendab:

$$-3+2i=\sqrt{13}(\cos 146°18'+i\sin 146°18').$$

Näide 3. Esitada trigonomeetrilisel kujul arv $1-i$.

Saame: $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$; $\tan\varphi=-1$.

Et siin on $a=1>0$ ja $b=-1<0$, siis on koosinus positiivne ja siinus negatiivne, milline juhtum esineb neljandas veerandis. Siit leiame, et $\varphi=315°$, ja me võime kirjutada:

$$1-i=\sqrt{2}(\cos 315°+i\sin 315°).$$

Märkus 1. Et $315°=360°-45°$ ja

$$\cos 315°=\cos(-45°)=\cos 45°,$$
$$\sin 315°=\sin(-45°)=-\sin 45°,$$

siis võiksime antud arvu üles kirjutada sellisel kujul:

$$1-i=\sqrt{2}(\cos 45°-i\sin 45°).$$

Märkus 2. Muidugi võiksime me kõigis näiteis argumendi kraadide asemel väljendada radiaanides. Nii võiksime 3. näites saadud avaldise üles kirjutada järgmiselt:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Soovitame õpilastel joonestada punktid, mis kujutavad ülesandeis 1 kuni 3 antud arve koordinaatide a ja b järgi, ja veenduda, et kõigil juhtumeil r ja φ väärtused ühtivad nende valemi (4) järgi arvutatud väärtustega.

Näide 4. Esitada trigonomeetrilisel kujul reaalarv $m>0$.

Et

$$m=m+0\cdot i,$$

siis $a=m$, $b=0$ ja me saame:

$$r=\sqrt{m^2+0^2}=m;\ \tan\varphi=\frac{0}{m}=0;\ \cos\varphi=\frac{m}{m}=1.$$

Järelikult $\varphi=0°$ ja me võime kirjutada.

$$m=m(\cos 0°+i\sin 0°)$$

või üldisel kujul:

$$m=m(\cos 360°k+i\sin 360°k).$$

Siit järeldame, et positiivse arvu mooduliks on see arv ise ja argumendiks on $0°$ (ehk $360°k$).

Näide 5. Esitada trigonomeetrilisel kujul negatiivne arv $-m$ $(m>0)$.

Et

$$-m=-m+0\cdot i,$$

siis siin $a=-m$, $b=0$, ja me saame, et

$$r=\sqrt{(-m)^2+0^2}=m;\ \tan\varphi=\frac{0}{-m}=0;$$

$$\cos\varphi=\frac{-m}{m}=-1.$$

Järelikult $\varphi=180°$ ja me saame:

$$-m=m\,[\cos 180°+i\sin 180°]$$

või üldisemalt:

$$-m=m\,[\cos(180°+360°k)+i\sin(180°+360°k)].$$

Siit järeldame, et negatiivse arvu mooduliks on tema absoluutväärtus ja argumendiks on 180° (ehk üldisemalt: $180°+360°k$).

Võtame nüüd ümberpöördud ülesande: väljendada trigonomeetrilisel kujul antud arv algebralisel kujul.

Kui arv on antud trigonomeetrilisel kujul, siis on antud r ja φ väärtused. Sel juhtumil võime valemi (2) järgi arvutada a ja b väärtused.

Näide 6. Esitada algebralisel kujul arv $6(\cos 40°+i\sin 40°)$.

Siin on: $a=r\cos\varphi=6\cos 40°=6\cdot 0{,}766=4{,}596$

$b=r\sin\varphi=6\sin 40°=6\cdot 0{,}643=3{,}858$

ja seega antud arv on

$$4{,}596+3{,}858i.$$

Märgime, et φ väärtused esimeses kolmes näites ning a ja b väärtused viimases näites on ligikaudsed, sest me kasutasime nende arvutamisel trigonomeetriliste funktsioonide tabeleid.

Näide 7. Väljendada algebralisel kujul arv

$$4(\cos 30°+i\sin 30°).$$

Et $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 30°=\frac{1}{2}$, siis leiame, et

$$4(\cos 30°+i\sin 30°)=2\sqrt{3}+2i.$$

Näide 8. Väljendada algebralisel kujul arv

$$5(\cos 0°+i\sin 0°).$$

Et

$$\cos 0°=1,\ \sin 0°=0,$$

siis

$$5(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 5,$$

s. o. saame reaalarvu.

Harjutused.

249. 1) Anda järgmistele arvudele trigonomeetriline kuju:

a) $4+3i$; b) $4-3i$; c) $-4+3i$; d) $-4-3i$.

2) Anda järgmistele arvudele trigonomeetriline kuju:

a) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; b) $-\sqrt{3}+i$; c) $1-i\sqrt{3}$.

3) Anda järgmistele arvudele trigonomeetriline kuju:

a) $5-4i$; b) $1+2i$; c) 3; d) $5i$.

4) Tõestada, et kõigi positiivsete reaalarvude argument on 0° (ehk, mis on sama, $360^\circ k$).

5) Tõestada, et kõigi imaginaararvude argument on 90° või -90° ehk üldisel kujul: $360^\circ k+90^\circ$ või $360^\circ k-90^\circ$).

6) Leida, kuidas asetsevad punktid, mis kujutavad arve, mille moodul on 2; 5.

7) Leida, kuidas asetsevad punktid, mis kujutavad arve, mille argument on 30°; -45°; 180°.

8) Esitada algebralisel kujul arvud:

a) $\cos 24^\circ + i \sin 24^\circ$; b) $2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$;

c) $6(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$.

140b. Tehted kompleksarvudega, mis on esitatud trigonomeetrilisel kujul. Kõik algebralised tehted kompleksarvudega, mis on esitatud trigonomeetrilisel kujul, sooritatakse samade reeglite järgi, nagu tehted algebralisel kujul esitatud arvudega (vt. § 139). See tähendab, et tehted sooritatakse hulkliikmetega sooritatavate tehete reeglite järgi, kusjuures eeldatakse alati, et $(\sqrt{-a})^2=-a$, eriti $(\sqrt{-1})^2=i^2=-1$.

Kompleksarvude liitmist ja lahutamist on kergem ja mugavam teostada, kui nad on antud algebralisel kujul. Hoopis teisiti on lugu ülejäänud nelja algebralise tehtega.

Korrutamine. Olgu tarvis korrutada arvud:

$$m=R(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$
$$n=r(\cos \beta + i \sin \beta),$$

Saame

$$mn=Rr(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \beta). \tag{1}$$

Kuid

$$(\cos \alpha+i \sin \alpha)(\cos \beta+i \sin \beta)=\cos \alpha \cos \beta+i \sin \alpha \cos \beta+$$
$$+i \cos \alpha \sin \beta+i^2 \sin \alpha \sin \beta=$$
$$=(\cos \alpha \cos \beta-\sin \alpha \sin \beta)+i(\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta),$$

ja võrdus (1) saab kuju:

$$mn=Rr[\cos(\alpha+\beta)+i \sin(\alpha+\beta)]. \tag{1}$$

Seega ilmneb, et:

kahe kompleksarvu korrutise moodul võrdub tegurite moodulite korrutisega ja korrutise argument on võrdne tegurite argumentide summaga.

Näide 1. Olgu

$$m=3(\cos 20^\circ+i \sin 20^\circ),$$
$$n=2(\cos 35^\circ+i \sin 35^\circ),$$

Siis:

$$mn=6(\cos 55^\circ+i \sin 55^\circ).$$

Näide 2. Olgu

$$m=5(\cos 200^\circ+i \sin 200^\circ),$$
$$n=\cos 240^\circ+i \sin 240^\circ.$$

Siis:

$$mn=5(\cos 440^\circ+i \sin 440^\circ)=5(\cos 80^\circ+i \sin 80^\circ).$$

Näide 3. Olgu

$$m=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i \sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$n=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i \sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Siis:

$$mn=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i \sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Olgu vaja korrutada kolm arvu:

$$m=r_1(\cos \alpha+i \sin \alpha),$$
$$n=r_2(\cos \beta+i \sin \beta),$$
$$p=r_3(\cos \gamma+i \sin \gamma).$$

Korrutades esimesed kaks arvu, saame vastavalt valemile (1):

$$mn=r_1r_2[\cos(\alpha+\beta)+i \sin(\alpha+\beta)].$$

Korrutades nüüd arvud mn ja p, saame sama valemi järgi:

$$mnp=r_1r_2r_3[\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i \sin(\alpha+\beta+\gamma)].$$

Näide 4. Olgu antud:

$$m_1=2(\cos 150^\circ+i \sin 150^\circ),$$
$$m_2=3(\cos 200^\circ+i \sin 200^\circ),$$
$$m_3=5(\cos 10^\circ+i \sin 10^\circ).$$

Siis:

$$m_1m_2m_3=30(\cos 360^\circ+i \sin 360^\circ)=30.$$

On täiesti selge, et nende arvude algebraliste kujude korrutamine oleks nõudnud märksa rohkem arvutusi ja aega.

Üldjuhtumil, kui on antud n arvu $m_1, m_2, \ldots, m_n$, mille moodulid on $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ja argumendid on $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, siis saame:

$$m_1 m_2 \ldots m_n = r_1 r_2 \ldots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 \ldots + \varphi_n) + \\ + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)]. \qquad \text{(II)}$$

Jagamine. Olgu vaja arv

$$m = R(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

jagada arvuga

$$n = r(\cos\beta + i \sin\beta).$$

Saame:

$$\frac{m}{n} = \frac{R(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{R}{r} \cdot \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}. \qquad (2)$$

Teisendame teist murdu, korrutades tema lugejat ja nimetajat nimetaja kaaskompleksarvuga $\cos\beta - i\sin\beta$. Saame:

$$\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{\cos^2\beta - i^2\sin^2\beta}.$$

Et $i^2 = -1$, siis nimetaja on $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$. Lugeja võime kirjutada nii:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)[\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)]$$

ning kasutades kompleksarvude korrutamise reeglit, saame:

$$\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta).$$

Asetades saadud avaldise valemisse (2), saame:

$$\frac{m}{n} = \frac{R}{r}[\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)]. \qquad \text{(III)}$$

Järelikult võime ütelda:

kahe kompleksarvu jagatise moodul võrdub jagatava ja jagaja moodulite jagatisega ning argument võrdub nende argumentide vahega.

Näide 5. Olgu

$$m = 12(\cos 55° + i \sin 55°),$$
$$n = 3(\cos 35° + i \sin 35°).$$

Siis:

$$\frac{m}{n} = 4(\cos 20° + i \sin 20°).$$

Näide 6. Olgu

$$m = \sqrt{3}(\cos 200° + i \sin 200°),$$
$$n = 2[\cos(-160°) + i \sin(-160°)].$$

Siis:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 360° + i \sin 360°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Astendamine. Olgu vaja tõsta ruutu arv

$$m = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Rakendades eespool korrutise jaoks tuletatud valemit (I), saame:

$$m^2 = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2$$

ehk

$$m^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\,.$$

Samuti saame:

$$m^3 = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)\,.$$

Üldiselt, kui meil on n võrdset tegurit

$$m = r(\cos\varphi + i\sin 3\varphi)\,,$$

siis, rakendades valemit (II), saame:

$$m^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,. \qquad \text{(IV)}$$

Kompleksarvu astme moodul on võrdne astendatava mooduli sama astmega ning argument on võrdne astendatava argumendi ja astendaja korrutisega.

Erijuhtumeil, kui $r=1$, omandab valem (IV) kuju:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi.$$

See valem kannab prantsuse matemaatiku Moivre'i (1667—1754) nime järgi Moivre'i valemi nimetust.

Näide 7. Tõsta kuupi arv

$$a = 2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)\,.$$

Saame:

$$a^3 = 8(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 4 + 4i\sqrt{3}$$

$$\left(\text{sest} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Näide 8. Astendada

$$m = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \text{ arvuga } 20.$$

Esitame arvu m algul trigonomeetrilisel kujul. Saame:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1} = 1\,.$$

$$\tan\varphi = \sqrt{3}, \quad \varphi = 60^\circ$$

(et siinus ja koosinus on positiivsed, siis võtame nurga esimeses veerandis).

Seega

$$m = 1\,(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\,.$$

Siit

$$m^{20} = 1^{20}(\cos 1200^\circ + i\sin 1200^\circ) =$$
$$= \cos(360^\circ\cdot 3 + 120^\circ) + i\sin(360^\circ\cdot 3 + 120^\circ) =$$
$$= \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

Juurimine. a) Olgu vaja leida ruutjuur arvust

$$m = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Tähistame otsitava juure mooduli ja argumendi tähtedega x ja y. Siis

$$\sqrt{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = x(\cos y + i\sin y).$$

Siit leiame ruutu tõstmise reegli põhjal:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x^2(\cos 2y + i\sin 2y).$$

Kahe kompleksarvu võrdsuse definitsiooni järgi peab aga

$$x^2 = r, \text{ kust } x = \sqrt{r},$$

ja

$$2y = \varphi + 360°\, k, \text{ kust } y = \frac{\varphi}{2} + 180°\, k.$$

Seega ruutjuur antud arvust on

$$n = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180°\, k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180°\, k\right)\right].$$

Vaatleme nüüd, mitu väärtust saame juurde, kui tähele k anname väärtused 0, ± 1, ± 2 jne.

Kui $k=0$, siis saame:

$$n_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Kui $k=1$, siis saame:

$$n_2 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180°\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180°\right)\right].$$

Kuid

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180°\right) = -\cos\frac{\varphi}{2} \text{ ja } \sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180°\right) = -\sin\frac{\varphi}{2}$$

ning me võime juure n_2 kirjutada järgmisel kujul:

$$n_2 = -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Siit järeldame, et

$$n_2 = -n_1.$$

Kui $k=2$, siis saame:

$$n_3 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 360°\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 360°\right)\right] =$$

$$= \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = n_1.$$

Kui $k=3$, siis saame:

$$n_4 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 540°\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 540°\right)\right] =$$

$$= \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180°\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 189°\right)\right] = n_2.$$

On ilmne, et andes tähele k väärtused 4, 5, 6, . . . , saame ikka väärtused, mis on vaheldumisi võrdsed suurustega n_1 ja n_2. Sama saame, kui anname suurusele k negatiivsed väärtused.

Seega ruutjuurel kompleksarvust on kaks erinevat väärtust, mis on teineteise suhtes vastupidised kompleksarvud.

Näide 9. Olgu

$$m=16(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ).$$

Siis:

$$\sqrt{m}=4[\cos(30^\circ+180^\circ k)+i\sin(30^\circ+180^\circ k)].$$

Kui $k=0$, siis saame:

$$\sqrt{m}=n_1=4(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}+2i.$$

Kui $k=1$, siis saame:

$$\sqrt{m}=n_2=4(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ)=$$

$$=4(-\cos 30^\circ-i\sin 30^\circ)=-2\sqrt{3}-2i.$$

Näide 10. Leida $\sqrt{25}$.

Vastavalt tulemusele, mis on saadud näites 4, § 140a, võime kirjutada:

$$25=25(\cos 360^\circ k+i\sin 360^\circ k).$$

Siis:

$$\sqrt{25}=5(\cos 180^\circ k+i\sin 180^\circ k).$$

Kui $k=0$, siis:

$$\sqrt{25}=5(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)=5(1+i\cdot 0)=5.$$

Kui $k=1$, siis:

$$\sqrt{25}=5(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=5(-1+i\cdot 0)=-5.$$

b) Olgu vaja leida kuupjuur arvust

$$m=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Siis võime kirjutada:

$$\sqrt[3]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y).$$

Siit:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=x^3(\cos 3y+i\sin 3y).$$

Järelikult

$$x^3=r;\ 3y=\varphi+360^\circ k.$$

Siit:

$$x=\sqrt[3]{r};\ y=\frac{\varphi}{3}+120^\circ k.$$

Saame:

$$\sqrt[3]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=n=$$

$$=\sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ k\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ k\right)\right].$$

Kui $k=0$, siis saame:

$$n_1=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\frac{\varphi}{3}\right).$$

Kui $k=1$, siis:

$$n_2 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)\right].$$

Kui $k=2$, siis:

$$n_3 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)\right].$$

Pole raske veenduda, et kui $k=3, 4, 5, 6, \ldots$, siis saame $n_4=n_1$; $n_5=n_2$ jne., s. o. uusi juure väärtusi me enam ei saa. Samad väärtused saame tähe k negatiivsete väärtuste puhul.

Seega *kuupjuurel kompleksarvust on kolm erinevat väärtust.*

Näide 11. Leida kuupjuur arvust 1.

Siis

$$1=1(\cos 360^\circ k+i\sin 360^\circ k).$$

Saame:

$$\sqrt[3]{1}=n=1(\cos 120^\circ k+i\sin 120^\circ k).$$

Kui $k=0, 1, 2$, siis saame vastavalt:

$$n_1=1(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)=1;$$

$$n_2=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};$$

$$n_3=1(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)=1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Tõstes saadud arvud kuupi veendume, et kõik nad annavad tulemuseks arvu 1.

Näide 12. Lahendada võrrand $x^3+8=0$.

Leiame:

$$x^3=-8;\ x=\sqrt[3]{-8}.$$

Vastavalt näitele 5, § 140a, võime kirjutada:

$$-8=8[\cos(180^\circ+360^\circ k)+i\sin(180^\circ+360^\circ k)].$$

Siit:

$$\sqrt[3]{-8}=n=2[\cos(60^\circ+120^\circ k)+i\sin(60^\circ+120^\circ k)].$$

Kui $k=0, 1, 2$, siis saame:

$$n_1=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3};$$

$$n_2=2(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=2(-1+i\cdot 0)=-2;$$

$$n_3=2(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

Kontrollimise teel võib veenduda, et kõigi saadud arvude kuup on -8.

1) Asume nüüd juurimise üldjuhtumi käsitlemisele. Olgu vaja leida n-es juur arvust

$$m=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Tähistades juure mooduli ja argumendi tähtedega x ja y, saame:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y).$$

Siit:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=x^n(\cos ny+i\sin ny).$$

Järelikult:

$$x^n=r;\ ny=\varphi+360^\circ k,$$

kust

$$x=\sqrt[n]{r};\ y=\frac{\varphi}{n}+\frac{360^\circ k}{n},$$

ja tähendab

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{360^\circ k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{360^\circ k}{n}\right)\right].$$

Viimase võrduse võib kirjutada ka kujul:

$$\sqrt[n]{r[\cos(\varphi+360^\circ k)+i\sin(\varphi+360^\circ k)]}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{360^\circ k}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{360^\circ k}{n}\right)\right]. \quad \text{(V)}$$

Järelikult võime ütelda:
kompleksarvu n-nda juure moodul võrdub juuritava mooduli sama astme juurega ning argument võrdub juuritava argumendi ja juurija jagatisega.

Mitu erinevat juure väärtust me saame? Pole raske veenduda, et kuni me asetame valemisse (V) väärtusi $k=0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, siis saame erinevad juure väärtused (sest nende argumendid on erinevad). Kui aga $k=n$, siis saame:

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{360^\circ n}{n}=\frac{\varphi}{n}+360^\circ,$$

ja juur võrdub

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+360^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+360^\circ\right)\right]=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

s. o. saame juure sama väärtuse, mis juhtumil, kui $k=0$. Täpselt samuti, kui $k=n+1,\ n+2, \ldots,$ saame juurele samad väärtused, mis juhtumeil, kui $k=1, 2, \ldots$.

Seega järeldame, et *kompleksarvu n-ndal juurel on n erinevat väärtust.*

Näide 13. Lahendada võrrand $x^6-243=0$.
Saame:

$$x^5=243, \text{ kust } x=\sqrt[5]{243}.$$

Kuid

$$243=243(\cos 360^\circ k+i\sin 360^\circ k).$$

Järelikult:

$$\sqrt[5]{243}=3(\cos 72^\circ k+i\sin 72^\circ k).$$

Kui $k=0, 1, 2, 3, 4$, siis saame:

$$n_1=3(\cos 0+i\sin 0)=3(1+i\cdot 0)=3,$$
$$n_2=3(\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ),$$
$$n_3=3(\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ),$$
$$n_4=3(\cos 216^\circ+i\sin 216^\circ),$$
$$n_5=3(\cos 288^\circ+i\sin 288^\circ).$$

Leides saadud argumentide siinused ja koosinused, väljendame kõik juured algebraliselt.

Kümnes jagu.

Mõned andmed algebralistest võrranditest.

I. Hulkliikme jaguvus.

141. x **suhtes täisratsionaalse**[1] **hulkliikme jaguvus vahega** $x-a$.

Bézaut' teoreem. *x suhtes täisratsionaalne hulkliige*

$$M=Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+K$$

annab jagamisel vahega $x-a$ (kus a on mistahes positiivne või negatiivne arv) jäägi

$$R=Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+K,$$

mis on võrdne jagatava selle väärtusega, mis ta saab, kui $x=a$.

Tõestus. Tähe x alanevate astmete järgi korraldatud hulkliikme jagamisest on näha, et selle hulkliikme jagamist avaldisega $x-a$ võib jätkata seni, kuni jäägi kõrgeim liige R ei sisalda tähte x. Olgu jagatis seejuures mingi hulkliige Q. Siis võime kirjutada võrduse:

$$M=(x-a)Q+R.$$

See võrdus on samasus, s. o. ta on kehtiv x kõigi võimalike väärtuste puhul, ja seepärast peab ta olema kehtiv ka juhtumil, kui $x=a$. Kui aga $x=a$, siis annab ta

$$M'=(a-a)Q'+R,$$

kui tähtedega M' ja Q' tähistame hulkliikmete M ja Q neid väärtusi, mis nad saavad, kui $x=a$ (jääk R kui x-i mittesisaldav aval-

[1] Hulkliiget nimetatakse x suhtes täisratsionaalseks, kui x ei esine jagajas.

[2] Bézout — XVIII sajandi prantsuse matemaatik.

dis ei muutu x asendamisest tähega a). Et $a-a=0$, siis on ka korrutis $(a-a)Q'$ võrdne nulliga; tähendab, viimasest võrdusest saame, et $M'=R$, s. o.

$$R=Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+K,$$

mida oligi vaja tõestada.

Järeldus 1. Et $x+a=x-(-a)$, siis, rakendades tõestatud teoreemi ka summa $x+a$ kohta, leiame, et *hulkliige*

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+K$$

annab jagamisel summaga $x+a$ jäägi

$$A(-a)^m+B(-a)^{m-1}+\ldots+K,$$

mis on võrdne jagatava selle väärtusega, mis ta saab juhtumil, kui $x=-a$.

Näited.

1) Hulkliige x^5-3x^2+5x-1 annab jagamisel vahega $x-2$ jäägi

$$2^5-3\cdot 2^2+5\cdot 2-1=29.$$

2) Hulkliige x^5-3x^2+5x-1 annab jagamisel summaga $x+2$ jäägi

$$(-2)^5-3(-2)^2+5(-2)-1=-55.$$

Järeldus 2. *Selleks et hulkliige*

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+K$$

jaguks vahega $x-a$, on tarvilik ja piisav, et ta juhtumil, kui $x=a$, muutuks nulliks.

See on tarvilik, sest kui antud hulkliige jagub vahega $x-a$, siis jääk on 0, kuid see jääk on eespool tõestatu kohaselt jagatava see väärtus, mille ta saab sel juhul, kui $x=a$. See on ka piisav, sest kui hulkliige muutub nulliks sel juhul, kui $x=a$, siis tähendab see, et hulkliikme jagamisel vahega $x-a$ saadud jääk on null.

Järeldus 3. *Selleks et hulkliige*

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+K$$

jaguks summaga $x+a$, on tarvilik ja piisav, et ta juhtumil, kui $x=-a$, muutuks nulliks, sest summa $x+a$ on sama, mis vahe $x-(-a)$.

Näited.

1) Hulkliige x^3-4x^2+9 jagub vahega $x-3$, sest

$$3^3-4\cdot 3^2+9=0.$$

2) Hulkliige $2x^2+x-45$ jagub summaga $x+5$, sest

$$2(-5)^2+(-5)-45=0.$$

142. Kaksliikme $x^m \mp a^m$ jaguvus kaksliikmega $x \mp a$.

1) *Kahe arvu ühe ja sama astendajaga astmete vahe jagub samade arvude vahega,* sest x^m-a^m annab jagamisel vahega $x-a$ jäägi a^m-a^m, s. o. nulli.

2) *Kahe arvu ühe ja sama astendajaga astmete summa ei jagu nende arvude vahega,* sest x^m+a^m annab jagamisel vahega $x-a$ jäägi $a^m+a^m=2a^m$, mitte aga nulli.

3) *Kahe arvu ühe ja sama paarisarvulise astendajaga astmete vahe jagub, ning ühe ja sama paarituarvulise astendajaga astmete vahe ei jagu nende arvude summaga,* sest vahe x^m-a^m jagamisel summaga $x+a$ saame jäägi $(-a)^m-a^m$, mis paarisarvulise m puhul on 0 ja paarituarvulise m puhul on $-2a^m$.

4) *Kahe arvu ühe ja sama paarituarvulise astendajaga astmete summa jagub, ning ühe ja sama paarisarvulise astendajaga astmete summa ei jagu nende arvude summaga,* sest summa x^m+a^m jagamisel summaga $x+a$ on jääk $(-a)^m+a^m$, mis on võrdne nulliga, kui m on paaritu arv, ja on $2a^m$, kui m on paarisarv.

Näited.

1) x^1+a^1 jagub summaga $x+a$, kuid ei jagu vahega $x-a$.
2) x^2-a^2 jagub vahega $x-a$ ja summaga $x+a$.
3) x^2+a^2 ei jagu vahega $x-a$ ega summaga $x+a$.
4) x^3-a^3 jagub vahega $x-a$, kuid ei jagu summaga $x+a$.
5) x^3+a^3 jagub summaga $x+a$, kuid ei jagu vahega $x-a$.

143. Kaksliikme $x^m \mp a^m$ ja kaksliikme $x \mp a$ jagatised.

Kui jagame kaksliikme x^m-a^m kaksliikmega $x-a$, siis saame jagatiseks hulkliikme:

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1}$$

(jäägid selle jagamise puhul on järgmised: esimene jääk on $ax^{m-1}-a^m$, teine jääk on $a^2x^{m-2}-a^m$, kolmas jääk on $a^3x^{m-3}-a^m, \ldots$, m-es jääk on $a^mx^{m-m}-a^m=a^m-a^m=0$).

On ilmne, et jagatiseks saadud hulkliige sisaldab m liiget; tähtede a ja x astendajate summa on igas liikmes üks ja sama, nimelt $m-1$. Tähe x astendajad vähenevad 1 võrra liikmelt liikmele alates $m-1$ kuni 0-ni ja tähe a astendajad suurenevad 1 võrra liikmelt liikmele alates nullist kuni $m-1$; kõigi liikmete kordajad on võrdsed ühega; kõigil liikmeil on plussmärk; liikmete arv jagatises on m.

Märganud seda, võime otsekohe kirjutada:

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2);$$
$$x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3);$$
$$x^5-a^5=(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4) \text{ jne.}$$

Et saada kaksliikme x^m-a^m jagatis kaksliikmega $x+a$ juhtumil, kui m on paarisarv, ja kaksliikme x^m+a^m jagatis kaksliikmega $x+a$ juhtumil, kui m on paaritu arv, selleks piisab, kui eespool saadud jagatises täht a asendada $-a$-ga. Seega:

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2);$$
$$x^4-a^4=(x+a)(x^3-ax^2+a^2x-a^3);$$
$$x^5+a^5=(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4) \text{ jne.}$$

Harjutused.

250. Leida jäägid, mis tekivad hulkliikme $x^4-3x^3-5x^2+20x-8$ jagamisel avaldistega: $x-1$; $x+1$; $x-2$; $x+2$; $x-3$; $x+3$.

251. Leida tähe a arvuline väärtus, mille puhul hulkliige $x^4+3x^3+4x^2+ax+11$ jagub jäägita avaldisega $x+1$.

144. Algebralise võrrandi üldkuju. Varemalt nägime, et võrrandi, mis sisaldab tundmatut nimetajas, võib vabastada murdudest. Edasi teame, et võrrandile, mis sisaldab tundmatut juuremärgi all, võib anda ratsionaalse kuju. Seetõttu võime ütelda, et igale võrrandile, milles tundmatu on seotud antud arvudega lõplik arv korda rakendatud kuue algebralise tehte (liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise[1]) abil, võib anda järgmise täisratsionaalse kuju:

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx+L=0,$$

kus kordajad $A, B, C, \ldots, K$ ja L on jäävad reaal- või kompleksarvud ja m on võrrandi astme näitaja. Mõned kordajad võivad erijuhtumeil võrduda nulliga. Sellekujulist võrrandit nimetatakse a l g e b r a l i s e k s võrrandiks. Algebralisi võrrandeid,

[1] Eeldusel, et tundmatu ei esine astendajas ega juurijas.

mille aste on suurem kui 2, nimetatakse kõrgema astme võrrandeiks.

145. Algebralise võrrandi mõned omadused. Kõrgema astme võrrandid on kõrgema algebra aineks. Elementaaralgebra vaatleb ainult nende võrrandite erijuhtumeid.

Kõrgem algebra püstitab järgmise tähtsa teoreemi:

igal algebralisel võrrandil on reaalne või kompleksne lahend (Gauss'i [1] teoreem 1799. aastast).

Eeldades seda tõsiasja (mille tõestus elementaaralgebra vahenditega oleks raske) pole raske näidata, et:

algebralise võrrandi kõigi reaalsete ja komplekssete lahendite arv võrdub võrrandi astme näitajaga.

Tõepoolest, Gauss'i teoreemi järgi on võrrandil

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx+L=0 \tag{1}$$

reaalne või kompleksne lahend; olgu see lahend α. Siis peab võrrandi (1) vasakul poolel olev hulkliige jaguma kaksliikmega $x-\alpha$ (§ 141). Kui teostame jagamise, siis saame jagatisena $(m-1)$-se astme hulkliikme, mille esimene kordaja on A. Tähistades hulkliikme teised kordajad vastavalt tähtedega B_1, $C_1, \ldots,$ K_1 ja võttes arvesse, et jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega, võime võrrandi (1) esitada kujul:

$$(x-\alpha)(Ax^{m-1}+B_1x^{m-2}+C_1{}^{m-3}+\ldots+K_1)=0. \tag{2}$$

Võttes teistes sulgudes seisva hulkliikme võrdseks nulliga, saame uue võrrandi, millel peab sama teoreemi põhjal olema mingi lahend β; seetõttu võib tema vasaku poole lahutada kaheks teguriks: $x-\beta$ ja $(m-2)$-se astme hulkliige, mille esimene kordaja on endiselt A. Selle tõttu võib võrrandi (1) kirjutada järgmiselt:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(Ax^{m-2}+B_2x^{m-3}+\ldots+K_2)=0. \tag{3}$$

Jätkates neid arutlusi, jõuame lõpuks selleni, et viimastes sulgudes saame teise astme hulkliikme, kusjuures tema esimene kordaja on A. Lahutades selle kolmliikme tegureiks (§ 45) anname võrrandile (1) kuju:

$$\mathrm{A}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)=0, \tag{4}$$

kus kaksliikmete arv on m. On ilmne, et võrrand (4) muutub

[1] Karl Friedrich Gauss, kuulus saksa matemaatik (1777—1855).

samasuseks x-i iga järgmise väärtuse puhul: $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma, \ldots$, $x=\lambda$ ja teda ei rahulda ükski x muu väärtus (kui $A \neq 0$); tähendab, võrrandil (1) on m lahendit: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$. Mõned lahendid võivad erijuhtumeil olla võrdsed.

On otstarbekohane märkida veel järgmised kõrgemas algebras tõestatavad tõsiasjad.

Iga algebralise võrrandi

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Kx + L = 0$$

lahendite summa võrdub arvuga $-\frac{B}{A}$ ja lahendite korrutis võrdub arvuga $(-1)^m \cdot \frac{L}{A}$ (näiteks võib olla ruutvõrrand).

Kui reaalsete kordajatega algebralisel võrrandil on kompleksseid lahendeid, siis nende arv on paarisarv (näiteks võib olla biruutvõrrand).

Kui reaalsete kordajatega algebralisel võrrandil on n lahendit kujul $p+qi$, siis on tal veel n lahendit kujul $q-qi$ (näiteks võib olla biruutvõrrand, mille komplekssed lahendid on alati kaaskompleksarvud), ja et

$$[x-(p+qi)][x-(p-qi)] = [(x-p)-qi][(x-p)+$$
$$+qi] = (x-p)^2 - q^2i^2 = (x-p)^2 + q^2 =$$
$$= x^2 - 2px + (p^2+q^2),$$

siis sisaldab võrrandi vasak pool sel juhul n reaalset tegurit kujul ax^2+bx+c.

Paarituarvulise astme algebralisel võrrandil, millel on reaalsed kordajad, on vähemalt üks reaalne lahend.

Mistahes täheliste kordajatega algebralised võrrandid, mille aste ei ületa nelja, on lahendatavad algebraliselt, s. o. nende võrrandite lahendite jaoks on leitud üldvalemid, mis on koostatud võrrandi kordajatest algebraliste tehete abil.

Selles mõttes mistahes kordajatega võrrandid, mille aste on kõrgem kui neli, pole algebraliselt lahendatavad (Abel'i[1] teoreem); kui aga mistahes astme võrrandi kordajad on antud arvudega, siis on alati võimalik arvutada soovitud täpsusega kõik tema lahendid — nii reaalsed kui ka komplekssed. Niisuguseid arvutusviise käsitletakse kõrgemas algebras.

---

[1] XIX sajandi norra matemaatik (1802—1829).

Üheteistkümnes jagu.

Määramatud võrrandid.

146. Sissejuhatavad märkused. Esimese astme võrrandite tundmaõppimisel nägime, et kui võrrandite arv on väiksem kui tundmatute arv, siis on sel süsteemil lõpmatu palju lahendeid. Selliseid võrrandeid nimetatakse määramatuiks võrrandeiks.

Sagedamini esineb praktikas ühe kahe tundmatuga võrrandi juhtum. Sellise võrrandi üldkuju on:

$$ax+by=c,$$

kus x ja y on tundmatud ning a, b, ja c on antud kordajad.

Sageli on ülesande tingimused sellised, et ülesandes seatud küsimusele annavad õige vastuse ainult lahendite täisarvulised väärtused ja mõnikord ainult täisarvulised positiivsed väärtused.

Ülesanne 1. Lahutada arv 118 kaheks niisuguseks arvuks, millest üks jaguks 11-ga, teine aga 17-ga.

Tähistades ühe arvu avaldisega $11x$ ja teise avaldisega $17y$, saame võrrandi:

$$11x+17y=118.$$

Et ülesandes pole midagi öeldud arvude märkide kohta, siis võime käesoleval juhul pidada ülesande vastuseks ka negatiivseid lahendeid. Nii rahuldavad ülesande tingimusi arvud 33 ja 85 (kui $x=3$ ja $y=5$), kuid samuti rahuldavad neid ka arvud 220 ja -102 (kui $x=20$ ja $y=-6$).

Ülesanne 2. Teemasinad pakitakse kastidesse, millest ühtedesse mahub 4 teemasinat ja teistesse 7 teemasinat. Kui palju on vaja võtta kumbagi liiki kaste, et pakkida neisse 41 teemasinat?

Tähistades väikeste kastide arvu tähega x ja suurte kastide arvu tähega y, saame võrrandi:

$$4x+7y=41.$$

On ilmne, et ülesande tingimuste kohaselt on sobivad ainult täisarvulised ja seejuures positiivsed lahendid. Antud võrrand võimaldab ainult ühe sellise lahendi ja nimelt: $x=5$; $y=3$.

Seega on tarvis osata lahendada määramatut võrrandit täisarvudes või ainult positiivsetes täisarvudes.

147. Võrrandi täisarvudes lahendamatuse tunnus. Olgu antud võrrand:

$$ax+by=c.$$

Kui kordajate a, b ja c hulgas on mõni murruline kordaja, siis võime kõik kordajad teisendada ühenimelisteks ja jätta nimetaja seejärel arvestamata. Siis on kõik kordajad täisarvud.

Edasi, kui kordajatel a, b ja c on mingi ühistegur, siis võib sellega võrrandit taandada.

Seega edaspidi eeldame, et kordajad a, b ja c on ühistegurita täisarvud.

Oletame nüüd, et kordajatel a ja b on ühisteguriks mingi täisarv, mis erineb arvust 1. Olgu näiteks

$$a=ma_1; \quad b=mb_1.$$

Võrrand omandab nüüd kuju:

$$ma_1x+mb_1y=c.$$

Jagades kõik võrrandi liikmed arvuga m, saame:

$$a_1x+b_1y=\frac{c}{m}.$$

Kui x ja y on täisarvud, siis kujutab võrrandi vasak pool enesest täisarvu, parem pool aga murdu, sest oletuse kohaselt arv c ei jagu arvuga m. Selline võrdus on võimatu.

Järelikult:

kui määramatus võrrandis tundmatute ees olevatel kordajatel on ühistegur, mida ei ole vabaliikmel, siis ei saa võrrandil olla täisarvulisi lahendeid.

Seepärast eeldame edaspidisel arutlusel, et a ja b on ühistegurita arvud.

148. Võrrandi positiivsetes arvudes lahendamatuse tunnus. Olgu võrrandis $ax+by=c$ kordajad a ja b positiivsed arvud, vabaliige aga negatiivne arv. Siis võrrandi vasaku poole väärtus on positiivne tundmatute x ja y kõigi positiivsete väärtuste puhul, parema poole väärtus aga jääb negatiivseks. Seesugune võrdus on võimatu.

Kui kordajad a ja b on negatiivsed ning c on positiivne, siis, korrutades võrrandi mõlemaid pooli arvuga -1, redutseerime selle juhtumi eelmisele. Seega:

kui määramatus võrrandis tundmatute ees olevate kordajate märgid on vastupidised vabaliikme märgile, siis pole võrrandil positiivseid lahendeid.

149. Määramatu võrrandi lahendite üldvalem. Oletame, et me mingil viisil (näiteks vahetu proovimise teel) leidsime määramatu võrrandi $ax+by=c$ ühe täisarvulise lahendi.

Olgu see lahend $x=\alpha$ ja $y=\beta$. Asetades x ja y väärtused võrrandisse, saame samasuse:

$$a\alpha+b\beta=c.$$

Lahutades liikmeti selle samasuse antud võrrandist, saame:

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0,$$

kust

$$ax=a\alpha-b(y-\beta) \text{ ehk } x=\alpha-\frac{b(y-\beta)}{a}.$$

Selleks et x oleks täisarv, on tarvilik ja piisav, et avaldis $\frac{b(y-\beta)}{a}$ oleks täisarv (sest α on täisarv). Teiste sõnadega: on tarvilik ja piisav, et arv $b(y-\beta)$ jaguks arvuga a. Kuid eelduse kohaselt pole arvudel b ja a ühiseid tegureid, järelikult on tarvilik (ja piisav), et arv $y-\beta$ jaguks arvuga a. Tähistades arvude $y-\beta$ ja a täisarvulise jagatise tähega t (see võib olla nii positiivne kui ka negatiivne), saame:

$$\frac{y-\beta}{a}=t, \text{ kust } y=\beta+at.$$

Asendades x valemis murru $\frac{y-\beta}{a}$ tähega t, saame:

$$x=\alpha-bt.$$

Seega määramatu võrrandi lahendite valemid on:

$$x=\alpha-bt, \quad y=\beta+at.$$

Andes neis valemeis arvule t mistahes täisarvulisi positiivseid ja negatiivseid väärtusi, saame antud määramatule võrrandile lõpmatu palju täisarvulisi lahendeid. Eriti, kui $t=0$, saame lahendid $x=\alpha$; $y=\beta$, mis leidsime juba varem.

Leitud valemeid silmitsedes märkame kohe, et nad on koostatud järgmise reegli järgi.

1. Lahendi esimeseks liikmeks on antud tundmatu eriväärtus.
2. Lahendi teiseks liikmeks on mistahes täisarvu t ja antud võrrandi ühe kordaja korrutis, kusjuures x valemisse võetakse y kordaja ja y valemisse võetakse x kordaja:
3. Üks kordajatest võetakse vastupidise märgiga.

Pole raske näha, et on täiesti ükskõik, millise kordaja võtame sama märgiga, mis tal on võrrandis, ja millise võtame vastupidise märgiga. Tõepoolest, valemid

$$x=\alpha-bt,\ y=\beta+at \quad \text{ja} \quad x=\alpha+bt,\ y=\beta-at$$

annavad ühed ja samad lahendid; ainult lahendid, mis ühed valemid annavad positiivse t korral, annavad teised absoluutväärtuselt võrdse negatiivse t korral.

Näide. On antud võrrand $3x+5y=26$.

Vahetu asendamise teel veendume, et võrrandit rahuldavad väärtused $x=2$ ja $y=4$. Teised lahendid leitakse siis valemist:

$$x=2+5t,\ y=4-3t \quad \text{või} \quad x=2-5t,\ y=4+3t.$$

Andes nendes valemites arvule t mistahes täisarvulisi väärtusi, saame antud võrrandile mitmesuguseid täisarvulisi lahendeid. Näiteks, kasutades esimesi valemeid, saame:

t	0	1	2	3	—1	—2	...
x	2	7	12	17	—3	—8	...
y	4	1	—2	—5	7	10	...

Kui oleksime võtnud teised valemid, oleksime saanud samad lahendid, andes arvule t järgemööda väärtused: 0; — 1; — 2; — 3; 1; 2 jne.

Seega redutseerub määramatu võrrandi täisarvudes lahendamise ülesanne mingi ühe lahendi leidmiseks.

150. Asendamisviis. Et leida määramatu võrrandi üks lahend, võib kasutada järgmist viisi. Olgu antud võrrand

$$ax+by=c.$$

Avaldame sellest ühe tundmatu (parem selle, mille kordaja on väiksem) teise funktsioonina. Olgu näiteks $a<b$. Siis:

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

Anname tundmatule y järgemööda väärtused 0; 1; 2; 3; ... niikaua, kuni leiame sellise y väärtuse, mille puhul avaldis $c-by$ jagub arvuga a. Oletame, et kui $y=n$, siis avaldis $c-bn$ jagub arvuga a, andes jagatiseks arvu m. Siis:

$$x=m \text{ ja } y=n,$$

mis on antud võrrandi üheks lahendiks. Tõepoolest, siis on

$$\frac{c-bn}{a}=m \quad \text{ehk} \quad c-bn=am,\ am+bn=c.$$

Viimane võrdus näitab, et arvud m ja n rahuldavad antud võrrandit.

Näide. On antud võrrand $7x-4y=2$.
Avaldame sellest võrrandist y:

$$4y=7x-2,\ y=\frac{7x-2}{4}.$$

Andes x-ile järgemööda väärtused 0; 1; 2; ..., veendume, et kui $x=2$, siis avaldis $7x-2$ jagub arvuga 4, andes jagatiseks 3. Järelikult üks lahend on

$$x=2;\ y=3.$$

Teised lahendid leitakse üldvalemi järgi:

$$x=2+4t,\ y=3+7t \quad \text{või} \quad x=2-4t,\ y=3-7t.$$

Märkus. Arvuteoorias tõestatakse, et kui a ja b on ühistegurita arvud, siis arvude 0; 1; 2; ...; $(a-1)$ hulgas leidub alati üks arv y, mille puhul avaldis $c-by$ jagub arvuga a. Seepärast soovitataksegi suure katsetuste arvu vältimiseks võtta jagajaks väiksem kordaja.

151. Määramatu võrrandi erikuju. Määramatu võrrand lahendub üldkujul kergesti, kui üks tundmatute ees seisvaid kordajaid on 1. Olgu näiteks x kordaja võrdne 1-ga. Siis saame:

$$x+by=c.$$

Avaldame x-i:

$$x=c-by.$$

On ilmne, et y igale täisarvulisele väärtusele vastab ka x täisarvuline väärtus.

Näide. On antud võrrand $5x+y=18$.

Leiame:

$$y=18-5x.$$

Andes x-ile mistahes täisarvulisi väärtusi, saame y vastavad täisarvulised väärtused:

x	0	1	2	3	4	—1	—2	...
y	18	13	8	3	—2	23	28	...

152. Määramatu võrrandi üldlahend. Esitame mistahes kordajatega määramatu võrrandi lahendamise näite. Olgu antud võrrand:

$$23x+53y=109.$$

Avaldame sellest võrrandist selle tundmatu, mille kordaja on väiksem, antud korral x:

$$x=\frac{109-53y}{23}.$$

ehk pärast täisosa eraldamist:

$$x=4-2y+\frac{17-7y}{23}.$$

Selleks et täisarvulise y puhul ka x oleks täisarv, on tarvilik ja piisav, et avaldis $\frac{17-7y}{23}$ oleks täisarv. Tähistanud viimase tähega t, saame:

$$\frac{17-7y}{23}=t \quad \text{ehk } 17-7y=23t, \quad 23t+7y=17.$$

Kui me leiame tähtedele y ja t sellised täisarvulised väärtused, mis rahuldavad võrrandit $\frac{17-7y}{23}=t$ ehk võrrandit

$$23t+7y=17,$$

siis leiame ühes sellega vastavad täisarvulised väärtused tähele x ja meie ülesanne ongi lahendatud. Seega redutseerub antud võrrandi lahendamine teise, hoopis lihtsama võrrandi lahendamiseks, mille k o r d a j a d o n v ä i k s e m a d kui antud võrrandil.

Uue võrrandiga toimime samuti. Avaldame algul sellest y:

$$y=\frac{17-23t}{7}=2-3t+\frac{3-2t}{7}.$$

Selleks et y oleks täisarv, on tarvilik ja piisav, et avaldis $\frac{3-2t}{7}$ oleks täisarv. Tähistades selle avaldise tähega t_1, saame:

$$\frac{3-2t}{7}=t_1 \quad \text{ehk} \quad 7t_1+2t=3.$$

Kui t ja t_1 on viimast võrrandit rahuldavad täisarvud, siis saame vastavalt ka x ja y täisarvulised väärtused, mis rahuldavad antud võrrandit. Järelikult redutseerus meie ülesanne viimase võrrandi lahendamiseks. Toimime sellega samuti nagu varem:

$$t=\frac{3-7t_1}{2}=1-3t_1+\frac{1-t_1}{2}.$$

Võttes avaldise $\frac{1-t_1}{2}$ võrdseks täisarvuga t_2, saame:

$$\frac{1-t_1}{2}=t_2 \quad \text{ehk} \quad 2t_2+t_1=1.$$

Saime võrrandi, milles ühe tundmatu kordaja on 1, kuid selliseid võrrandeid me juba oskame lahendada. Lahendanud selle, saame:

$$t_1=1-2t_2.$$

Andes selles võrrandis tähele t_2 mistahes täisarvulisi väärtusi, saame täisarvulised väärtused tähele t_1.

Asetades tähtede t_1 ja t_2 leitud täisarvulised väärtused tähe t avaldisse

$$t=1-3t_1+\frac{1-t_1}{2}=1-3t_1+t_2,$$

saame tähele t vastavad täisarvulised väärtused. Asetades t ja t_1 vastavad väärtuste paarid y avaldisse

$$y=2-3t+\frac{3-2t}{7}=2-3t+t_1,$$

saame y vastavad täisarvulised väärtused. Lõpuks, asetades y ja t leitud väärtused x avaldisse

$$x=4-2y+\frac{17-7y}{23}=4-2y+t,$$

saame tähele x vastavad täisarvulised väärtused.

Kuid tundmatuid x ja y võib ka otseselt väljendada sõltuvuses tähest t_2. Selleks asetame tähe t avaldisse t_1 asemele tema avaldise t_2 kaudu:

$$t=1-3t_1+t_2=1-3(1-2t_2)+t_2$$

ehk

$$t=-2+7t_2.$$

Asetame nüüd y avaldisse t ja t_1 asemele nende avaldised t_2 kaudu:

$$y=2-3t+t_1=2-3(-2+7t_2)+(1-2t_2)$$

ehk

$$y=9-23t_2.$$

Lõpuks, asetades x avaldisse leitud t ja y avaldised, saame:

$$x=4-2y+t=4-2(9-23t_2)+(-2+7t_2)$$

ehk

$$x=-16+53t_2.$$

Seega saame x ja y jaoks valemid:

$$x=-16+53t_2, \quad y=9-23t_2.$$

Andes neis tähele t_2 mistahes täisarvulisi väärtusi, nii positiivseid kui ka negatiivseid, saame antud võrrandile lõpmatu palju lahendeid; mõned neist on paigutatud järgnevasse tabelisse:

t_2	0	1	2	—1	—2
x	—16	37	90	—69	—122
y	9	—14	—37	32	55

Vaadeldes operatsioone, mis sooritati antud ja järgnevate võrrandite kordajatega, võib märkida järgmist järjestust.

1. Antud võrrandi suurem kordaja 53 jagati väiksema kordajaga 23; saadi jagatis 2 ja jääk 7.

2. Antud võrrandi väiksem kordaja 23 jagati jäägiga 7; saadi jagatis 3 ja jääk 2.

3. Esimene jääk 7 jagati teise jäägiga 2; saadi jagatis 3 ja jääk 1.

Teiste sõnadega: me toimisime täpselt samuti, nagu oleksime arvutanud antud võrrandi kordajate suurimat ühistegurit.

Me teame, et kahe ühistegurita arvu suurimaks ühisteguriks on 1. Et me määramatuis võrrandeis alati eeldame, et tundmatute ees olevad kordajad on ühistegurita arvud, siis, sooritanud võrrandiga eespool näidatud operatsioonid, saame alati niisuguse võrrandi, milles ühe tundmatu kordaja on 1. Koos sellega leiame ka antud võrrandi lahendid. Siit järeldub:

kui määramatu võrrandi tundmatute kordajad on ühistegurita arvud, siis on võrrandil alati täisarvulisi lahendeid.

153. Võrrandi lahendamise lihtsustamine. Mõnikord võib määramatu võrrandi lahendamisel teostada mõned lihtsustamised, mis võimaldavad kiiremini jõuda lahenditeni.

1. Juhtumil, kui ühe tundmatu ees seisval kordajal ja vabaliikmel on ühistegur, siis toonud sisse uue sobiva tundmatu, võib võrrandi taandada selle ühisteguriga.

Näide 1. On antud võrrand $6x-5y=21$.

Kordajal 6 ja vabaliikmel on ühistegur 3. Järelikult ka liige $5y$ peab jagunema arvuga 3; et aga 5 ei jagu 3-ga, siis peab y olema arvu 3 kordne. Võtnud $y=3t$, kus t on täisarv, saame:

$$6x-15t=21$$

ehk pärast taandamist 3-ga:

$$2x-5t=7.$$

Lahendame viimase võrrandi:

$$x=\frac{7+5t}{2}=3+2t+\frac{1+t}{2}=3+2t+t_1;$$

$$\frac{1+t}{2}=t_1;\ 2t_1-t=1;\ t=-1+2t_1.$$

Asetades leitud väärtused tundmatute x ja y avaldistesse, saame:

$$x=3+2(-1+2t_1)+t_1=1+5t_1;$$
$$y=3(-1+2t_1)=-3+6t_1.$$

Näide 2. On antud võrrand $9x+14y=105$.

Võttes $x=3t$ ja taandades võrrandi arvuga 3, saame:

$$3x+14t=35.$$

Võttes selles võrrandis $x=7t_1$ ja taandades võrrandi mõlemad pooled 7-ga, saame:

$$3t_1+2t=5.$$

Lahendame viimase võrrandi:

$$t=\frac{5-3t_1}{2}=2-t_1+\frac{1-t_1}{2}=2-t_1+t_2;$$

$$\frac{1-t_1}{2}=t_2;\ 1-t_1=2t_2;\ t_1=1-2t_2.$$

Sooritades järjestikused asendamised, saame:

$$t=2-(1-2t_2)+t_2=1+3t_2;$$
$$x=7t_1=7(1-2t_2)=7-14t_2;$$
$$y=3t=3(1+3t_2)=3+9t_2.$$

2. *Kui täisarvuga võrdse avaldise lugejais olevail liikmeil on ühistegur, siis võib võrrandi lahendamist lihtsustada.*

Näide 3. On antud võrrand $12x+17y=41$.

Lahendame ta x suhtes:

$$x=\frac{41-17y}{12}=3-y+\frac{5-5y}{12}=3-y+5\,\frac{1-y}{12}.$$

Selleks et avaldis $5\,\frac{1-y}{12}$ oleks täisarv, on tarvilik ja piisav, et $\frac{1-y}{12}$ oleks täisarv.

Võrdsustades selle avaldise täisarvuga t, saame:

$$\frac{1-y}{12}=t;\ 1-y=12t;\ y=1-12t.$$

Vastavalt sellele saame x jaoks:

$$x=3-(1-12t)+5t=2+17t.$$

3. *Kui täisosa eraldamisel tekkiv jääk on suurem kui pool jagajat, siis on sobivam sisse tuua negatiivne jääk.*

Näide 4. On antud võrrand $11x-20y=49$.

Lahendame ta x suhtes:

$$x=\frac{49+20y}{11}=4+2y+\frac{5-2y}{11}=4+2y+t;$$

$$\frac{5-2y}{11}=t;\ 5-2y=11t;\ 11t+2y=5;$$

$$y=\frac{5-11t}{2}=2-5t+\frac{1-t}{2}=2-5t+t_1;$$

$$\frac{1-t}{2}=t_1;\ 1-t=2t_1;\ t=1-2t_1.$$

Tehes asendused, saame:

$$y=2-5(1-2t_1)+t_1=-3+11t_1;$$
$$x=4+2(-3+11t_1)+(1-2t_1)=-1+20t_1.$$

Kui lahendaksime võrrandi harilikul viisil, siis saaksime x avaldiseks:

$$x=4+y+\frac{5+9y}{11}$$

ja järgmine võrrand oleks:

$$\frac{5+9y}{11}=t;\ 11t-9y=5.$$

See võrrand ei ole nii lihtne kui eespool negatiivse jäägi sissetoomise tagajärjel saadud võrrand

$$11t+2y=5.$$

Näide 5. On antud võrrand $15x+28y=59$.

Lahendame võrrandi x suhtes, tuues sisse negatiivsed jäägid:

$$x=\frac{59-28y}{15}=4-2y+\frac{-1+2y}{15}=4-2y+t;$$

$$\frac{-1+2y}{15}=t;\ -1+2y=15t;\ 2y-15t=1;$$

$$y=\frac{1+15t}{2}=7t+\frac{1+t}{2}=7t+t_1;$$

$$\frac{1+t}{2}=t_1;\ 1+t=2t_1;\ t=-1+2t_1.$$

Tehes asendused, saame:

$$y=7(-1+2t_1)+t_1=-7+15t_1;$$
$$x=4-2(-7+15t_1)+(-1+2t_1)=17-28t_1.$$

Katsudes käesoleva paragrahvi näites toodud võrrandeid lahendada harilikul viisil, veendume kohe, et ilma lihtsustusteta oleksid need nõudnud lahendamiseks enam operatsioone.

154. Positiivsed lahendid. Nagu varem öeldud, tuleb kõigist määramatu võrrandi lahendeist sageli võtta ainult need, mis annavad tundmatuile x ja y üheaegselt positiivsed väärtused. Leides tundmatute x ja y üldvalemid, võib kohe määrata, milliste mistahes teguri väärtuste puhul saadakse tundmatule x ja y täisarvulised ning positiivsed väärtused.

Tõepoolest, võtame valemid:

$$x=\alpha+bt;\quad y=\beta-at.$$

Selleks et x ja y oleksid positiivsed, on vaja võtta t väärtusteks ainult sellised väärtused, mille puhul

$$\alpha+bt>0;\quad \beta-at>0.$$

Oletame, et α on positiivne arv. (Seda võime eeldada, sest vastasel korral võiksime korrutada võrrandi mõlemad pooled arvuga -1.) Siis võib esineda kolm juhtumit.

1. *Mõlemad võrratused on samapidised.* See esineb siis, kui b on negatiivne arv. Tõepoolest, kasutades võrratuste omadusi, saame:

$$bt>-\alpha;\ at<\beta;$$

$$t<-\frac{\alpha}{b};\ t<\frac{\beta}{a}.$$

Sel juhtumil võimaldab võrratus lõpmatu palju positiivseid täisarvulisi lahendeid.

Tõepoolest, oletame, et me oleme saanud:

$$t<\frac{7}{2} \text{ ja } t<-1\frac{3}{5}.$$

On ilmne, et iga arv, mis on väiksem kui $-1\frac{3}{5}$, rahuldab mõlemat võrratust. Järelikult võib t väärtuseks võtta mistahes täisarvu, mis on väiksem kui $-1\frac{1}{5}$.

Võtame teise juhtumi:

$$t>\frac{7}{15};\quad t>3\frac{1}{3}.$$

On ilmne, et võttes t väärtuseks mistahes täisarvu, mis on suurem kui $3\frac{1}{3}$, saame x ja y väärtusteks positiivsed täisarvud.

Näide 1. $3x-5y=11$.

Lahendame selle võrrandi:

$$x=\frac{11+5y}{3}=4+2y-\frac{1+y}{3}=4+2y-t;\qquad \frac{1+y}{3}=t;$$

$$1+y=3t;\ y=-1+3t;$$

$$x=4+2(-1+3t)-t=2+5t.$$

Otsime positiivseid lahendeid:

$$-1+3t>0;\ 2+5t>0$$

ehk

$$t>\frac{1}{3};\quad t>-\frac{2}{5}.$$

Võttes t väärtuseks mistahes täisarvu, mis on suurem kui $\frac{1}{3}$ (ehk, mis on sama, suurem kui 0), saame x ja y jaoks lõpmatu palju positiivseid väärtuste paare, mis rahuldavad antud võrrandit.

Näide 2. $8x-3y=-13$.

Lahendame võrrandi:

$$y=\frac{13+8x}{3}=4+3x+\frac{1-x}{3}=4+3x+t;$$

$$\frac{1-x}{3}=t;\ 1-x=3t;\ x=1-3t;\ y=7-8t.$$

Otsime positiivseid lahendeid:

$$1-3t>0;\ 7-8t>0$$

ehk

$$t<\frac{1}{3};\quad t<\frac{7}{8}.$$

Tähe t mistahes väärtus, mis on väiksem kui $\frac{1}{3}$ (s. o. 0, -1, -2, ...), annab tundmatuile x ja y täisarvulised ja positiivsed väärtused.

2. *Vastupidised võrratused, kusjuures nad on teineteisele vasturääkivad.* Oletame, et me saame järgmised võrratused:

$$t<\frac{7}{8};\quad t>1\frac{1}{3}.$$

On ilmne, et pole olemas t selliseid väärtusi, mis rahuldaksid üheaegselt mõlemat võrratust. Sel juhul ei saa võrrandil olla positiivseid lahendeid.

Näide 3. $4x+5y=-7$.

Lahendades selle võrrandi, saame:

$$x=-3+5t;\ y=1-4t.$$

Siit

$$-3+5t>0;\ 1-4t>0$$

ehk

$$t>\frac{3}{7};\quad t<\frac{1}{4}.$$

Võrratused on vasturääkivad; võrrandil ei ole positiivseid lahendeid.

3. *Vastupidised võrratused, kusjuures nad ei ole teineteisele vasturääkivad.* Oletame, et me saime võrratused:

$$t>4\frac{1}{7};\quad t<7\frac{3}{4}.$$

Kõik tähe t täisarvulised väärtused, mis on $4\frac{1}{7}$ ja $7\frac{3}{4}$ vahel, s. o. 5, 6 ja 7, annavad arvudele x ja y positiivsed väärtused.

Seega:
võrrandil on nii mitu täisarvulist positiivset lahendit, kui mitu täisarvu on arvu t leitud tõkete vahel.

Märgime, et võrrandil ei tarvitse ka sel juhul olla positiivseid lahendeid. See on siis, kui arvu t leitud tõkete vahel pole ühtki täisarvu. Näiteks olgu meil võrratused:

$$t>1\frac{1}{4};\quad t<1\frac{7}{8}.$$

Võrratused ei ole vasturääkivad; kuid $1\frac{1}{4}$ ja $1\frac{7}{8}$ vahel pole ühtki täisarvu. Võrrandil ei ole täisarvulisi positiivseid lahendeid.

Näide 4. $3x+7y=55$.

Lahendame võrrandi:

$$x=\frac{55-7y}{3}=18-2y+\frac{1-y}{3}=18-2y+t;$$

$$y=1-3t;\ x=16+7t.$$

Siit

$$1-3t>0;\ 16+7t>0$$

ehk

$$t<\frac{1}{3};\quad t>-2\frac{2}{7}.$$

On ilmne, et arvule t võime anda ainult väärtused 0, -1 ja -2. Saame võrrandi kolm lahendit:

t	0	-1	-2
x	16	9	2
y	1	4	7

Näide 5. $5x+4y=3$.
Lahendades võrrandi, saame:

$$x=-1+4t;\ y=2-5t.$$

Siit

$$t>\frac{1}{4};\quad t<\frac{2}{5}.$$

Võrratused ei ole vasturääkivad; kuid $1\frac{1}{4}$ ja $\frac{2}{5}$ vahel pole täisarve. Võrrandil ei ole täisarvulisi positiivseid lahendeid.

Harjutused.

Lahendada järgmised võrrandid positiivseis täisarvudes:

252. $3x+2y=10$; $7x+5y=157$; $5x-11y=17$; $8x+11y=13$.

253. $7x+9y=35$; $15x+28y=185$.

254. Lahutada arv 100 kaheks positiivseks arvuks nii, et üks neist jaguks arvuga 7 ja teine arvuga 11.

255. Kolme meetri laiuse põranda katmiseks on laudu laiusega 11 cm ja 13 cm. Mitu lauda tuleb võtta kummastki liigist?

256. Rukki säilitamiseks on kahesuguse mahuga kotte: ühed mahutavad 60 kg, teised 80 kg. Kui palju tuleb võtta kumbagi liiki kotte, et mahutada neisse 440 kg rukist nii, et ei oleks poolikuid kotte?

257. Leida üldkuju arvudele, mis jagamisel 7-ga annavad jäägi 3 ja jagamisel 11-ga annavad jäägi 4.

Kaheteistkümnes jagu.

Ühendid ja Newtoni binoomivalem.

I. Ühendid.

155. Definitsioon. Mitmesuguseid rühmi, mis on koostatud mingeist esemeist ning erinevad üksteisest kas nende esemete järjestuse või esemete enda poolest, nimetatakse üldiselt ü h e n d i t e k s.

Kui näiteks kümnest erinevast numbrist 0, 1, 2, 3, . . . , 9 koostame mitmest numbrist koosnevaid rühmi, näiteks selliseid: 123, 312, 8056, 5630, 42 jne., siis saame nende numbrite mitmesugused ühendid. Mõned neist, näiteks 123 ja 312, erinevad ainult numbrite järjestuse poolest, teised aga, näiteks 8056 ja 312, erinevad neisse kuuluvate numbrite poolest (ka numbrite arvu poolest).

Esemeid, milledest koostatakse ühendeid, nimetatakse e l e m e n t i d e k s. Elemente tähistame tähtedega $a, b, c, \ldots$

Ühendid on kolme liiki: variatsioonid, permutatsioonid ja kombinatsioonid. Vaatleme neid eraldi.

156. Variatsioonid. Olgu esemete arv, milledest koostame ühendid, kolm (näiteks kolm kaarti); tähistame need esemed tähtedega a, b ja c. Neist võib moodustada ühendeid ühekaupa:

$$a, b, c;$$

kahekaupa:

$$ab, ac, bc, ba, ca, cb;$$

kolmekaupa:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Võtame neist ühendeist ühendid kahekaupa. Need erinevad üksteisest kas esemete poolest, näiteks *ab* ja *ac*, või esemete järjestuse poolest, näiteks *ab* ja *ba*, kuid esemete arv neis on üks ja sama. Seesuguseid ühendeid nimetatakse variatsioonideks kolmest elemendist kahekaupa.

Variatsioonideks *m elemendist n-kaupa nimetatakse selliseid ühendeid, milledest igaüks sisaldab n elementi, mis on võetud antud m elemendist ning erinevad üksteisest kas elementide endi või elementide järjestuse poolest* (tähendab, eeldatakse, et $n \leqslant m$). Nii on eespool toodud kolmekaupa moodustatud ühendid variatsioonid kolmest elemendist kolmekaupa (erinevad ainult järjestuselt); kahekaupa moodustatud ühendid on variatsioonid kolmest elemendist kahekaupa (erinevad kas elementidelt või järjestuselt).

Variatsioonid m elemendist võivad olla moodustatud ühe-, kahe-, kolme- ja lõpuks m-kaupa.

Leiame nüüd variatsioone endid moodustamata kõigi variatsioonide arvu, mis on võimalik moodustada m elemendist n-kaupa. Seda arvu tähistatakse tavaliselt nii: A_m^n (siin on A algustäht prantsuskeelsest sõnast «*arrangement*», mis tähendab «korraldus», «paigutus»). Selle arvu leidmiseks vaatleme võtet, mille abil on võimalik moodustada mitmesuguseid variatsioone.

Olgu meil antud m elementi: $a, b, c, \ldots, k, l$. Algul koostame neist kõik variatsioonid ühekaupa. Neid on ilmselt m. Tähendab, $A_m^1 = m$. Nüüd moodustame kõik variatsioonid kahekaupa. Selleks ühendame kõigi varem ühekaupa moodustatud variatsioonidega järgemööda kõik ülejäänud $m-1$ elementi ühekaupa. Nii ühendame elemendiga a järjestikku ülejäänud elemendid $b, c, \ldots, k, l$, elemendiga b ühendame järjestikku ülejäänud elemendid $a, c, \ldots, k, l$ jne. Siis saame järgmised variatsioonid kahekaupa:

$$m \text{ rida} \left\{ \begin{array}{lll} ab, ac, ad, \ldots, & ak, al; & (m-1 \text{ variatsiooni}) \\ ba, bc, bd, \ldots, & bk, bl; & (m-1 \text{ variatsiooni}) \\ ca, cb, cd, \ldots, & ck, cl; & (m-1 \text{ variatsiooni}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ la, lb, lc, \ldots, & lk; & (m-1 \text{ variatsiooni}) \end{array} \right.$$

Et kõiki elemente on kokku m, siis igast variatsioonist ühekaupa saame $m-1$ variatsiooni kahekaupa ja üldse saame neid $(m-1)m$. On selge, et muid variatsioone kahekaupa olla ei saa. Tähendab:

$$A_m^2 = m(m-1).$$

Et nüüd moodustada variatsioone kolmekaupa, võtame äsja kahekaupa moodustatud variatsioonid ja ühendame nendega järgemööda ühekaupa kõik ülejäänud $m-2$ elementi. Siis saame järgmised variatsioonid kolmekaupa:

$$m(m-1) \text{ rida} \left\{ \begin{array}{ll} abc,\ abd, \dots,\ abk,\ abl; & (m-2 \text{ variatsiooni}) \\ acb,\ acd, \dots,\ ack,\ acl; & (m-2 \text{ variatsiooni}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ lka,\ lkb, \dots\dots & (m-2 \text{ variatsiooni}) \end{array} \right.$$

Et kõiki variatsioone kahekaupa on $m(m-1)$ ja et igast saadakse $(m-2)$ variatsiooni kolmekaupa, siis on kõiki selliseid variatsioone:

$$(m-2)[m(m-1)]=m(m-1)(m-2).$$

Seega

$$A_m^3=m(m-1)(m-2).$$

Samuti saame

$$A_m^4=m(m-1)(m-2)(m-3);$$

$$A_m^5=m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4);$$

ja üldiselt

$$A_m^n=\boldsymbol{m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]}.$$

Selline on variatsioonide arvu valem. Sõnades võib seda väljendada nii:

kõigi võimalike variatsioonide arv *m* elemendist *n*-kaupa võrdub *n* järjestikuse täisarvu korrutisega, milledest suurim on *m*.

Seega:

$$A_4^2=4\cdot 3=12;\quad A_4^3=4\cdot 3\cdot 2=24;$$

$$A_8^4=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=1680, \text{ jne.}$$

157. Ülesanded. 1) Klassil on 10 õppeainet ja 5 erinevat tundi päevas. Mitut viisi võib päevas tunde jaotada?

Kõik võimalikud tundide jaotused päevas kujutavad enesest ilmselt kõiki võimalikke variatsioone kümnest elemendist viiekaupa. Seepärast peab kõiki jaotusviise olema:

$$A_{10}^5=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=30\,240.$$

2) Kui palju võib moodustada täisarve, milledest igaüks koosneks kolmest e r i n e v a väärtusega numbrist?

Otsitav arv on üheksast numbrist kolmekaupa moodustatud variatsioonide arv; järelikult on ta $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

3) Kui palju võib moodustada täisarve, milledest igaüks koosneks kolmest e r i n e v a s t numbrist?

10-st numbrist 0, 1, 2, 3. . . . , 9 võib moodustada $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ variatsiooni kolmekaupa; kuid sellest arvust on vaja välja jätta need variatsioonid kolmekaupa, mis algavad numbriga 0. Selliseid variatsioone on nii palju, kui palju võib moodustada variatsioone üheksast numbrist kahekaupa, s. o. $9 \cdot 8 = 72$; järelikult otsitav arv on $720 - 72 = 648$.

158. Permutatsioonid. Kui variatsioonid m elemendist on võetud m-kaupa (s. o. nad erinevad ainult elementide järjestuselt), siis nimetatakse selliseid variatsioone **permutatsioonideks.** Näiteks permutatsioonid kahest elemendist a ja b on variatsioonid kahest elemendist kahekaupa, s. o. ab ja ba, permutatsioonid kolmest elemendist on variatsioonid kolmest elemendist kolmekaupa, s. o. abc, acb, bac, bca, cab, cba, jne.

Kõigi võimalike premutatsioonide arvu m elemendist tähistatakse sümboliga P_m (siin on P algustäht prantsuskeelsest sõnast «*permutation*», mis tähendab «ümberpaigutus»).

Et permutatsioonid m elemendist on variatsioonid m elemendist m-kaupa, siis on permutatsioonide arvu valem järgmine:

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1)m.$$

Kõigi võimalike permutatsioonide arv m elemendist võrdub naturaalarvude korrutisega alates 1-st kuni m-ni.

159. Ülesanded. 1) Mitu üheksakohalist arvu võib kirjutada üheksa erineva numbriga?

Otsitav arv on:

$$P_9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362\,880.$$

2) Mitut viisi võib paigutada 12 inimest laua taha, millele on pandud 12 sööginõu?

Paigutuste arv on:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 12 = 479\,001\,600.$$

Märkus. Naturaalarvude korrutis 1-st kuni m-ni (seda korrutist tähistatakse lühidalt nii: $m!$) kasvab väga kiiresti arvu m

kasvades; kui $m=12$, siis see korrutis on 479 001 600; kui $m=100$, siis see korrutis on arv, milles on 158 numbrit.

160. Kombinatsioonid. Kui kõigist variatsioonidest, mis on võimalik moodustada m elemendist n-kaupa, võtame ainult need, mis erinevad üksteisest vähemalt ühelt elemendilt, siis saame ühendid, mida nimetatakse **kombinatsioonideks.**

Näiteks nelja elemendi a, b, c ja d kolmekaupa moodustatud kombinatsioonid on

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

Kui teeme kõigis neis kombinatsioonides kõik võimalikud ümberpaigutused (permutatsioonid), siis saame kõik võimalikud variatsioonid neljast elemendist kolmekaupa.

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*

Selliste variatsioonide arv on ilmselt $6 \cdot 4=24$.

Seega kõigi variatsioonide arv m elemendist n-kaupa võrdub kõigi m elemendist n-kaupa moodustatud kombinatsioonide arvu ja kõigi n elemendist moodustatud permutatsioonide arvu korrutisega, s. o.

$$A_m^n = C_m^n P_n,$$

kus C_m^n tähistab kõigi kombinatsioonide arvu m elemendist n-kaupa (C on algustäht prantsuskeelsest sõnast «*combinaison*», mis tähendab «kombinatsioon»).

Siit tuletame järgmise kombinatsioonide arvu valemi:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}.$$

Näiteks:

$$C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6,\quad C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4,\quad \text{jne.}$$

Näited.

1) Ühele ja samale ametikohale on 10-st kandidaadist vaja valida kolm. Kui palju on valiku võimalusi?

Otsitav arv moodustab ilmselt kõigi võimalike kombinatsioonide arvu kümnest elemendist kolmekaupa, s. o.

$$C_{10}^{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120.$$

2) Mitmel viisil võib valida 13 kaarti kaardipakist, milles on 52 kaarti?

Otsitav arv kujutab enesest kombinatsioonide arvu 52 kaardist kolmeteistkümne-kaupa, s. o.

$$C_{52}^{13}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot \ldots \cdot 40}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 13}=635\,013\,559\,600.$$

161. Kombinatsioonide arvu valemi teine kuju. Kombinatsioonide arvu valemile võib anda teise kuju, kui korrutame tema lugejat ja nimetajat korrutisega $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-n)$, siis saame lugejas korrutise

$$m(m-1)\ldots[m-(n-1)]\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-n),$$

mida võib kirjutada, paigutades tegurid ümber, järgmiselt:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-n)[m-(n-1)]\ldots m.$$

Järelikult:

$$C_m^n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-1)\,m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-n)}=\frac{P_m}{P_n\cdot P_{m-n}}.$$

162. Kombinatsioonide omadus. Asendades selles valemis tähe n vahega $m-n$, saame:

$$C_m^{m-n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-1)\,m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-n)\,1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}=\frac{P_m}{P_{m-n}\cdot P_n}.$$

Võrreldes seda valemit eelmisega, leiame:

$$C_m^n=C_m^{m-n}.$$

Selle järelduseni viib ka lihtne arutelu: kui võtame m elemendist n elementi, et neist moodustada üht kombinatsiooni, siis moodustab järelejäänud elementide kogu ühe kombinatsiooni, mis koosneb $m-n$ elemendist. Seega vastab igale n elemendist koosnevale kombinatsioonile üks $m-n$ elemendist koosnev kombinatsioon, ja vastupidi; tähendab:

$$C_m^n=C_m^{m-n}.$$

See vastastikune suhe võimaldab lihtsustada m elemendi n-kaupa moodustatud kombinatsioonide arvu leidmist, kui n on suurem kui $\frac{1}{2}m$. Näiteks:

$$C_{100}^{97} = C_{100}^{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161\,700.$$

Harjutused.

258. 5 õpilast peavad istuma ühes pingis. Mitmel viisil võivad nad seal aset võtta?

259. Mitu neljakohalist arvu võib moodustada numbritest 0, 1, 2, 3? *Juhis.* Kõigi võimalike neljanumbriliste permutatsioonide arvust tuleb lahutada nulliga algavate permutatsioonide arv.

260. Tasapinna asend ruumis on määratud kolme punktiga, mis ei asetse ühel sirgel. Mitu tasapinda saab panna läbi nelja, seitsme, kümne, n punkti, kui ükski 3 punkti ei asetse ühel sirgel ja ükski 4 punkti ei asetse ühel tasapinnal?

261. Keegi tõmbab 32 kaarti sisaldavast pakist 4 kaarti. Mitu eri juhtumit võib seejuures esineda?

262. Mitu permutatsiooni võib moodustada numbritest 1, 2, 3, 4, 5, 6, mis algavad numbritega 4? numbritega 45? numbritega 456?

263. Rühmas on 32 õpilast, neist on vaja 6 õpilast paigutada esimesse pinki. Mitu eri juhtumit võib esineda, kui pole tähtis, millises järjestuses õpilased istuvad pingis?

II. Newtoni binoomivalem.

163. Teise liikme poolest erinevate binoomide korrutis. Hariliku korrutamisega leiame:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab;$$
$$(x+a)(x+b)(x+c) = [x^2 + (a+b)x + ab](x+c) =$$
$$= x^3 + (a+b)x^2 + abx + cx^2 + (ac+bc)x + abc =$$
$$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc.$$

Samuti leiame:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 +$$
$$+ (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 +$$
$$+ (abc+abd+acd+bcd)x + abcd.$$

Vaadeldes neid korrutisi märkame, et kõik nad on koostatud ühe ja sama seaduse järgi ja nimelt:

korrutis on hulkliige, mis on korraldatud tähe x alanevate astmete järgi.

Esimese liikme astendaja võrdub korrutatavate binoomide arvuga; järgmiste liikmete tähe x astendajad kahanevad 1 võrra; viimane liige ei sisalda tähte x (sisaldab seda null astmes).

Esimese liikme kordaja on 1; teise liikme kordaja võrdub korrutatavate binoomide kõigi teiste liikmete summaga; kolmanda liikme kordaja on kahekaupa võetud kõigi teiste liikmete korrutiste summa; neljanda liikme kordaja on kõigi kolmekaupa võetud teiste liikmete korrutiste summa. Viimane liige on kõigi teiste liikmete korrutis.

Tõestame, et see seadus on rakendatav kuitahes paljude binoomide korrutise kohta. Selleks veendume algul, et kui see seadus on õige m binoomi korrutise kohta:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k),$$

siis on ta õige ka $(m+1)$ binoomi korrutise kohta:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)(x+l).$$

Oletame, et on õige järgmine võrdus:

$$\begin{gathered}(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)= \\ =x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots+S_m,\end{gathered}$$

kus lühiduse mõttes on kasutatud järgmist tähistust:

$$\begin{aligned}&S_1=a+b+c+\ldots+i+k;\\&S_2=ab+ac+\ldots+ik;\\&S_3=abc+abd+\ldots\\&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\&S_m=abc\ldots ik.\end{aligned}$$

Korrutame oletatava võrduse mõlemad pooled binoomiga $x+l$:

$$\begin{gathered}(x+a)(x+b)\ldots(x+k)(x+l)= \\ =(x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots+S_m)(x+l)= \\ =x^{m+1}+S_1x^m+S_2x^{m-1}+\ldots+S_mx+ \\ +lx^m+lS_1x^{m-1}+\ldots+lS_m= \\ =x^{m+1}+(S_1+l)x^m+(S_2+lS_1)x^{m-1}+ \\ +\ldots+(S_m+lS_{m-1})x+lS_m.\end{gathered}$$

Vaadeldes seda uut korrutist, veendume, et ta allub samale seadusele, mille eeldasime olevat õige m binoomi korral. Tõepoolest, esiteks järgivad seda seadust tähe x astendajad; teiseks järgivad seda ka kordajad, sest teise arvu kordaja S_1+l on kõigi korrutatavate binoomide teiste liikmete summa, kaasa arvatud ka l; kolmanda liikme summa S_2+lS_1 on kõigi teiste paarikaupa võetud liikmete korrutis, kaasa arvatud ka l, jne.; lõpuks lS_m on kõigi teiste liikmete $a, b, c, \ldots, k, l$ korrutis.

Me nägime, et see seadus on õige kahe, kolme ja nelja binoomi korrutise kohta; järelikult peab ta nüüd tõestatu kohaselt olema õige ka $4+1$ binoomi korrutise kohta, s. o. viie binoomi korrutise kohta; kui ta aga on õige viie binoomi korrutise kohta, siis on ta õige ka $5+1$ binoomi korrutise kohta, s. o. kuue binoomi korrutise kohta, jne.

Esitatud arutelu kujutab enesest niinimetatud «tõestust m-lt $(m+1)$-le». Seda nimetatakse ka «matemaatiliseks induktsiooniks» (ehk «täielikuks induktsiooniks»). Tähendame, et selle raamatu eelmistes peatükkides oli korduvalt võimalusi rakendada tõestust m-lt $(m+1)$-le (näiteks progressiooni üldliikme valemi tuletamisel, §§ 75, 82 jne.). Me ei teinud seda ainult sellepärast, et taotlesime käsitletu lihtsust.

164. Newtoni binoomivalem. Oletame, et meie poolt tõestatud võrduses

$$(x+a)(x+b)\ldots(x+k)=$$
$$=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots+S_m$$

on kõik binoomide teised liikmed võrdsed, s. o. $a=b=c=\ldots$ $\ldots=k$. Siis võrduse vasak pool on binoomi aste $(x+a)^m$. Vaatleme, milleks muutuvad seejuures kordajad $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Kordaja S_1, mis on võrdne summaga $a+b+c+\ldots+k$, muutub korrutiseks ma. Kordaja S_2, mis võrdub summaga $ab+ac+ad+\ldots$, muutub arvuks a^2, mis on võetud nii mitu korda, kui mitu kombinatsiooni saab moodustada m elemendist kahekaupa, s. o. muutub avaldiseks $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2$. Kordaja S_3, mis on võrdne summaga $abc+abd+\ldots$, muutub arvuks a^3, korrutatud kombinatsioonide arvuga m elemendist kolmekaupa, s. o. muutub avaldiseks $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3$, jne. Lõpuks kordaja S_m, mis on võrdne $abc\ldots k$, muutub avaldiseks a^m. Seega saame:

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3}+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n}a^nx^{m-n}+\ldots+a^m.$$

See võrdus on tuntud Newtoni binoomivalemina[1], kusjuures hulkliiget, mis asetseb valemi parempoolses osas, nimetatakse binoomi arendiks. Vaatleme selle hulkliikme omadusi.

165. Newtoni binoomivalemi omadused. Neist omadustest juhime tähelepanu järgmisele kümnele.

1) Tähe x astendajad vähenevad 1 võrra alates esimesest liikmest kuni viimase liikmeni, kusjuures esimeses liikmes tähe x astendaja võrdub binoomi astendajaga ja viimases liikmes on ta 0; vastupidi: tähe a astendajad suurenevad 1 võrra, alates esimesest liikmest viimase liikme poole, kusjuures esimeses liikmes on tähe a astendaja 0, viimases liikmes ta aga on võrdne binoomi astendajaga. Seetõttu on a ja x astendajate summa kõigis liikmeis üks ja sama, nimelt: ta on võrdne binoomi astendajaga:

2) Binoomi arendi kõigi liikmete arv on $m+1$, sest arend sisaldab arvu a kõiki astmeid astendajatega 0 kuni m.

3) Kordajateks on: esimesel liikmel üks, teisel liikmel binoomi astendaja, kolmandal liikmel m elemendist kahekaupa moodustatud kombinatsioonide arv, neljandal liikmel m elemendist kolmekaupa moodustatud kombinatsioonide arv; üldiselt $(n+1)$ liikme kordaja võrdub m elemendist n-kaupa moodustatud kombinatsioonide arvuga. Lõpuks viimase liikme kordaja võrdub m elemendist m-kaupa moodustatud kombinatsioonide arvuga, s. o. ühega.

Tähendame, et neid kordajaid nimetatakse binoomikordajaiks.

4) Tähistades binoomi arendi iga liikme tähega T ühes alloleva numbriga, mis näitab ära selle liikme koha arendis, s. o. esimene liige T_1, teine liige T_2 jne., võime kirjutada:

$$T_{n+1} = C_m^n a^n x^{m-n} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} a^n x^{m-n}.$$

See on binoomi arendi mistahes liikme üldvalem, sest selle järgi võime leida iga liikme (peale esimese), asendades arvu n arvudega 1, 2, 3, ..., m.

---

[1] Isaac Newton — kuulus inglise matemaatik (1642—1727). Ta juhtis tähelepanu umb. 1665. a. binoomivalemi kehtivusele mitte üksnes täisarvulise ja positiivse astendaja m puhul, vaid ka negatiivse ja murrulise m puhul. Selle ranget tõestust ta aga ei andnud. Esmakordselt tõestas kombinatsioonide teooria abil valemi täisarvuliste positiivsete astendajate kohta Jakob Bernoulli (1654—1705).

5) Binoomi arendi algusest esimese liikme kordaja võrdub ühega, tema lõpust esimese liikme kordaja võrdub samuti ühega. Algusest teise liikme kordaja on m, s. o. C_m^1; lõpust teise liikme kordaja on C_m^{m-1}; et aga $C_m^1 = C_m^{m-1}$ (§ 162), siis on need kordajad võrdsed. Algusest kolmanda liikme kordaja on C_m^2, lõpust kolmanda liikme kordaja aga on C_m^{m-2}; kuid $C_m^2 = C_m^{m-2}$, seepärast on ka need kordajad võrdsed jne. Tähendab:

binoomi arendi algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete kordajad on võrdsed.

6) Vaadeldes binoomikordajaid:

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ldots,$$

märkame, et üleminekul ühe kordaja juurest järgmise juurde korrutatakse lugejaid järjest vähenevate arvudega (arvudega $m-1$, $m-2$, $m-3$ jne.), kuna nimetajaid korrutatakse järjest suurenevate arvudega (arvudega 2, 3, 4 jne.). Seetõttu kordajad algul kasvavad (kuni kordajad lugejas on suuremad vastavaist kordajaist nimetajas) ja pärast kahanevad. Et arendi algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete kordajad on võrdsed, siis peab suurim kordaja olema arendi keskel. Kui arendi kõigi liikmete arv on paaritu arv (mis esineb binoomi paarisarvulise astendaja puhul), siis on keskel üks suurima kordajaga liige; kui aga liikmete arv on paarisarv (mis esineb binoomi paarituarvulise astendaja puhul), siis peab keskel olema kaks võrdsete suurimate kordajatega liiget.

Näiteks:

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4;$$
$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

7) Kahe kõrvuti oleva liikme:

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\, a^n x^{m-n}$$

ja

$$T_{n+2} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)](m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}\, a^{n+1} x^{m-n-1}$$

võrdlusest järeldame, et:

järgneva liikme kordaja leidmiseks tuleb eelneva liikme kordaja korrutada tähe x astendajaga eelnevas liikmes ja jagada kõigi eelnevate liikmete arvuga.

Kasutades seda omadust, võib kohe kirjutada näiteks

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+\dots$$

Võtame nüüd arvu 7, korrutame teda 6-ga ja jagame 2-ga, saame 21:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+\dots$$

Nüüd võtame 21, korrutame 5-ga ja jagame 3-ga, saame 35:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+\dots$$

Nüüd on liikmed välja kirjutatud kuni rea keskkohani, ülejäänud liikmed saame, toetudes viiendale omadusele:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+\dots$$
$$35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7.$$

8) **Kõigi binoomikordajate summa on 2^m.** Tõepoolest, võttes binoomivalemis $x=a=1$, saame:

$$2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+1.$$

Näiteks binoomi $(x+a)^7$ arendi kõigi kordajate summa võrdub

$$1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7.$$

9) Asendades binoomivalemis tähe a tähega $-a$, saame:

$$(x-a)^m=x^m+m(-a)x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(-a)^2x^{m-2}+$$
$$+\dots+(-a)^m,$$

s. o.

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}-\dots+(-1)^m a^m,$$

järelikult pluss- ja miinusmärgid vahelduvad.

10) Kui viimases võrduses võtame $x=a=1$, siis leiame:

$$0=1-m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+(-1)^m.$$

Paarituarvulistel kohtadel seisvate binoomikordajate summa võrdub paarisarvulistel kohtadel seisvate binoomikordajate summaga.

166. Binoomivalemi rakendamine hulkliikmele. Newtoni binoomivalemi abil saab astendada ka hulkliiget. Nii on

$$(a+b+c)^4=[(a+b)+c]^4=(a+b)^4+4c(a+b)^3+$$
$$+6c^2(a+b)^2+4c^3(a+b)+c^4.$$

Arendades $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$, saame lõpuks:

$$(a+b+c)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+$$
$$+4a^3c+12a^2bc+12ab^2c+4b^3c+6a^2c^2+$$
$$+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3+c^4.$$

Harjutused.

Leida Newtoni binoomivalemi abil:

264. $(1+x)^6$; $(x+3)^5$; $(x-1)^7$.

265. $(2-a)^8$; $(3x+4y)^6$; $(1+x)^m$.

266. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$; $(x^2+2y^2)^4$; $(3a^2-2b^2)^6$.

267. Leida binoomi $(5x^2-6a^2)^{10}$ arendi 6. liige.

268. Leida $(3a-2)^{12}$ arendi 8. liige.

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

269. $2{,}1^6=\left(2+\frac{1}{10}\right)^6=\cdots$

270. $1{,}03^5=\left(1+\frac{3}{100}\right)^5=\cdots$

271. $0{,}97^4=\left(1-\frac{3}{100}\right)^4=\cdots$

272. $29^5=(30-1)^5=\ldots$

273. $99^3=(100-1)^3=\ldots$

274. $(4+\sqrt{3})^6$; $(6-5\sqrt{2})^5$.

275. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4$; $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3$.

276. $(1+\sqrt{3})^8$; $(2\sqrt{2}+\sqrt{6})^6$.

277. Leida $\left(x^2-\frac{3}{x^3}\right)^{15}$ arendi liige, mis ei sisalda x-i.

278. Teha sama binoomi $\left(2x^2-\frac{a}{2x^3}\right)^{10}$ arendis.

Täiendused.

I. Ahelmurrud.

167. Ahelmurru definitsioon. Ahelmurruks *nimetatakse murdu kujul:*

$$a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots\\ \qquad +\cfrac{1}{a_n}}}},$$

kui täisarv a liidetakse murruga, mille lugeja on 1 ja nimetaja on täisarv a_1, mis omakorda on liidetud murruga, mille lugeja on 1 ja nimetaja on täisarv a_2, mis on liidetud murruga, ... jne. (eeldatakse, et kõik täisarvud on positiivsed).

Murde $\frac{a}{1}$, $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ jne. nimetatakse ahelmurru l ü l i d e k s. Ülalkirjeldatud murdu tähistatakse lühidalt nii:

$$(a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n).$$

Näiteks murde

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}, \qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}$$

kirjutatakse lühidalt: (3, 2, 1, 3) ja (0, 2, 1, 17).

168. Ahelmurru teisendamine harilikuks murruks. Iga ahelmurdu saab teisendada harilikuks murruks; selleks tuleb aritmeetika reeglite kohaselt sooritada kõik tehted, mis on näidatud ahelmurru kirjutises.

Olgu meil näiteks selline murd:

$$(2, 3, 1, 4)=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}.$$

Teostame näidatud tehted:

$$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4};\quad 1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5};\quad 3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5};\quad 1:\frac{19}{5}=\frac{5}{19};$$

$$2+\frac{5}{19}=\frac{43}{19}.$$

See ongi harilik murd, mis kujutab enesest antud ahelmurru täpset väärtust.

169. Hariliku murru teisendamine ahelmurruks. Iga harilikku murdu saab teisendada ahelmurruks. Olgu näiteks antud murd $\frac{A}{B}$. Eraldades sellest täisosa, saame:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B},$$

kus a on jagatise täisosa ja r on jääk, mis tekkis A jagamisel B-ga. (Kui $\frac{A}{B}$ on lihtmurd, siis $a=0$ ja $r=A$.)

Jagades murru $\frac{r}{B}$ mõlemad liikmed arvuga r, saame:

$$\frac{r}{B}=\frac{1}{B:r}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{r_1}{r}},$$

kus a_1 on jagatise täisosa ja r_1 on jääk, mis tekkis arvu B jagamisel arvuga r.

Jagades murru $\frac{r_1}{r}$ mõlemad liikmed arvuga r_1, saame:

$$\frac{r_1}{r}=\frac{1}{r:r_1}=\cfrac{1}{a_2+\cfrac{r_2}{r_1}},$$

kus a_2 on jagatise täisosa ja r_2 on jääk, mis tekkis arvu r jagamisel arvuga r_1. Jätkates sama võtet, saame järk-järgult:

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{r_1:r_2}=\cfrac{1}{a_3+\cfrac{r_3}{r_2}},\quad \frac{r_3}{r_2}=\frac{1}{r_2:r_3}=\cfrac{1}{a_4+\cfrac{r_4}{r_3}}\ \text{jne.}$$

Et $B > r > r_1 > r_2 > r_3 \ldots$, siis jõuame seda võtet jätkates jäägini, mis on võrdne nulliga. Olgu $r_n = 0$, s. o.

$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{1}{a_n}.$$

Siis saame asendamise teel:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{r}{B} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_1}{r}} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}} =$$

$$= a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Märkus. Selle võtte analüüsist ilmneb, et $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ on jagatiste täisosad, mis saadakse järjestikusel jagamisel, kui A jagatakse B-ga, seejärel B esimese jäägiga; esimene jääk teise jäägiga jne., teisiti öeldes: need on jagatiste täisosad, mis saadakse arvude A ja B suurima ühisteguri leidmisel järjestikuse jagamise teel.

Seetõttu nimetatakse arve $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ahelmurru *jagatisteks*.

Näited.

1) Teisendada arv $\frac{40}{17}$ ahelmurruks.

Et

$$\begin{array}{rrrrr} & & & 40 & |\,17 \\ & & 17 & |\,6 & 2 \\ & 6 & |\,5 & 2 & \\ 5 & |\,1 & 1 & & \\ 0 & 5 & & & \end{array}, \text{ siis } \frac{40}{17} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}.$$

2) Teisendada arv $\frac{7}{120}$ ahelmurruks.

Et

$$\begin{array}{rrrr} & & 7 & |\,120 \\ & 120 & |\,7 & 0 \\ 7 & |\,1 & 17 & \\ 0 & 7 & & \end{array}, \text{ siis } \frac{7}{120} = \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{7}}.$$

170. Lähendmurrud. Kui võtame ahelmurru algusest mõned lülid, jättes ära kõik ülejäänud lülid, ja teisendame nendest moodustatud ahelmurru harilikuks murruks, siis saame ahelmurru lähendmurru. Esimese lähendmurru saame, kui võtame ainult esimese lüli; teise saame, kui võtame esimesed kaks lüli jne. Seega on ahelmurru

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

esimene lähendmurd $\frac{3}{1}$;

teine „ $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$,

kolmas „ $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=\frac{10}{3}$.

Neljas lähendmurd $\frac{27}{8}$ kujutab enesest ahelmurru täpset väärtust.

Kui ahelmurd ei sisalda täisarvu, siis on esimene lähendmurd 0.

171. Lähendmurdude moodustamise reegel. Koostame ahelmurru $(a, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ esimesed kolm lähendmurdu:

$$1)\ \frac{a}{1}\quad 2)\ a+\frac{1}{a_1}=\frac{aa_1+1}{a_1};$$

$$3)\ a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=a+\cfrac{1}{\cfrac{a_1a_2+1}{a_2}}=a+\frac{a_2}{a_1a_2+1}=$$

$$=\frac{aa_1a_2+a+a_2}{a_1a_2+1}=\frac{(aa_1+1)\,a_2+a}{a_1a_2+1}.$$

Võrreldes kolmandat lähendmurdu esimese kahega, märkame, et kolmanda lähendmurru lugeja saadakse, kui teise lähendmurru lugeja korrutatakse vastava jagatisega (s. o. arvuga a_2) ja saadud korrutisega liidetakse esimese lähendmurru lugeja; kolmanda lähendmurru nimetaja saadakse samal viisil esimese kahe lähendmurru nimetajaist.

Tõestame, et see seadus on rakendatav iga lähendmurru kohta, mis järgneb kolmandale lähendmurrule, s. o. meie tõestame, et $(n+1)$-se lähendmurru lugeja saame, kui korrutame n-nda lähendmurru lugeja vastava jagatisega (s. o. arvuga a_n) ja liidame saadud korrutisega $(n-1)$-se lähendmurru lugeja, ning et $(n+1)$-se lähendmurru nimetaja saadakse samal viisil n-nda ja

$(n-1)$-se lähendmurdude nimetajaist. Kasutame tõestust n-lt $(n+1)$-le, s. o. tõestame, et kui see reegel on rakendatav n-nda lähendmurru kohta, siis on ta rakendatav ka $(n+1)$-se lähendmurru kohta.

Tähistame esimese, teise, kolmanda jne. lähendmurru järjestikku sümbolitega

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P^2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

ja märgime, et nendele vastavad jagatised on:

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Oletame, et on õiged võrdused

$$P_n = P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}; \quad Q_n = Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}, \tag{1}$$

ja järelikult

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}\, a_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1}\, a_{n-1} + Q_{n-2}}. \tag{2}$$

On vaja tõestada, et ka sel juhul

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}. \tag{3}$$

Kahe lähendmurru

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}$$

ja

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

võrdlusest selgub, et $(n+1)$-ne lähendmurd saadakse n-ndast lähendmurrust, kui viimases arvu a_{n-1} asendame summaga $a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$.

Seepärast võrdusest (2) saame, et

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) + Q_{n-2}}.$$

Avanud sulud ja korrutanud murru mõlemad liikmed arvuga a_n, saame:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}a_{n-1}a_n+P_{n-1}+P_{n-2}a_n}{Q_{n-1}a_{n-1}\,a_n+Q_{n-1}+Q_{n-2}\,a_n}=\frac{(P_{n-1}\,a_{n-1}+P_{n-2})\,a_n+P_{n-1}}{(Q_{n-1}\,a_{n-1}+Q_{n-2})\,a_n+Q_{n-1}}\,.$$

Arvestades võrdust (1), võime lõpuks kirjutada:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_n\,a_n+P_{n-1}}{Q_n\,a_n+Q_{n-1}}.$$

See ongi võrdus (3), mida oli vaja tõestada.

Seega, kui tõestatud reegel on kehtiv n-nda lähendmurru kohta, siis on ta kehtiv ka $(n+1)$-se lähendmurru kohta. Kuid me nägime vahetult, et ta on kehtiv kolmanda lähendmurru kohta, järelikult on ta tõestatu kohaselt kehtiv neljanda lähendmurru kohta; kui ta aga on kehtiv neljanda kohta, siis on ta kehtiv ka viienda kohta jne.

Kasutades seda reeglit, koostame kõik järgmise ahelmurru lähendmurrud:

$$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}=(2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5).$$

Arvutust on kõige sobivam korraldada nii:

		3	2	3	1	5
2	3	11	25	86	111	641
1	1	4	9	31	40	231

Esimesed kaks lähendmurdu leiame vahetult, need on $\frac{2}{1}$ ja $\frac{3}{1}$. Ülejäänud lähendmurrud leiame toetudes tõestatud reeglile.

Meelespidamise eesmärgil asetame ülemisse ritta ahelmurru jagatised kolmandast kuni viimaseni.

172. Teoreem 1. Ahelmurru täpne väärtus on kahe teineteisele järgneva lähendmurru vahel, kusjuures ta on lähem järgnevale kui eelnevale lähendmurrule.

T õ e s t u s. Olgu antud ahelmurd:

$$(a, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_s),$$

mille täpse väärtuse tähistame tähega A. Võtame kolm mingisugust lähendmurdu:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \ \frac{P_n}{Q_n}, \ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Eelmises paragrahvis tõestatu kohaselt saame:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Kui me selle võrduse paremale poolele asetame a_n asemele $y = (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_s)$, siis saame vasakul poolel ahelmurru täpse väärtuse A, tähendab:

$$A = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}},$$

kust

$$AQ_n y + AQ_{n-1} = P_n y + P_{n-1}$$

ehk

$$AQ_n y - P_n y = P_{n-1} - AQ_{n-1},$$

ja järelikult

$$yQ_n \left(A - \frac{P_n}{Q_n}\right) = Q_{n-1} \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A\right).$$

Viimasest võrdusest võime tuletada kaks järeldust.

1) Et arvud y, Q_n ja Q_{n-1} on positiivsed, siis peavad sulgudes olevad vahed olema kas üheaegselt positiivsed või üheaegselt negatiivsed; tähendab:

$$\begin{cases} \text{kui } A - \dfrac{P_n}{Q_n} > 0, \\ \text{siis ka } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A > 0 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} \text{kui } A - \dfrac{P_n}{Q_n} < 0, \\ \text{siis ka } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A < 0, \end{cases}$$

$$\text{s. o.} \quad \begin{cases} \text{kui } A > \dfrac{P_n}{Q_n} \\ \text{siis ka } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > A \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} \text{kui } A < \dfrac{P_n}{Q_n}. \\ \text{siis ka } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < A. \end{cases}$$

Järelikult asetseb A iga kahe järjestikuse lähendmurru vahel.

2) Et $y>1$ ja $Q_n>Q_{n-1}$, kusjuures Q_n ja Q_{n-1} on positiivsed, siis järeldame samast võrdusest, et $\left(A-\frac{P_n}{Q_n}\right)$ absoluutväärtus on väiksem kui $\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A\right)$ absoluutväärtus.

Siit järeldub, et $\frac{P_n}{Q_n}$ on suurusele A lähem kui $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, mida oligi vaja tõestada.

Märkus. Et ilmselt $A>a$, s. o. $A>\frac{P_1}{Q_1}$, siis

$$A<\frac{P_2}{Q_2}; \qquad A>\frac{P_3}{Q_3}; \qquad A<\frac{P_4}{Q_4} \text{ jne.}$$

Ahelmurru täpne väärtus on suurem igast paarituarvulise järjekorranumbriga lähendmurrust, kuid väiksem igast paarisarvulise järjekorranumbriga lähendmurrust.

173. Teoreem 2. Kahe kõrvuti seisva lähendmurru vahe võrdub murruga, mille lugejaks on ± 1 ja nimetajaks on nende lähendmurdude nimetajate korrutis.

Tõestus. Et

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n+1}Q_n-P_n Q_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}},$$

siis on ilmne, et selle vahe nimetaja vastab teoreemi väitele. Jääb tõestada, et selle murru lugeja on ± 1.

Et

$$P_{n+1}=P_n a_n+P_{n-1} \text{ ja } Q_{n+1}=Q_n a_n+Q_{n-1},$$

siis

$$\begin{aligned} P_{n+1}Q_n-P_nQ_{n+1} &= (P_na_n+P_{n-1})\,Q_n-P_n\,(Q_na_n+Q_{n-1})= \\ &= P_nQ_na_n+P_{n-1}Q_n-P_nQ_na_n-P_nQ_{n-1}= \\ &= -\,(P_nQ_{n-1}-P_{n-1}\,Q_n\,). \end{aligned}$$

Sulgudes seisev avaldis kujutab enesest murru lugejat, mis tekib murru $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ lahutamisel murrust $\frac{P_n}{Q_n}$.

Järelikult me tõestasime, et murru lugeja absoluutväärtus, mis tekib murru $\frac{P_n}{Q_n}$ lahutamisel murrust $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, on võrdne murru absoluutväärtusega, mis saadi murru $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ lahutamisel murrust $\frac{P_n}{Q_n}$, teiste sõnadega: murru lugeja absoluutväärtus, mis saadakse kõrvuti asetsevate lähendmurdude lahutamisel, on jääv suurus kõigi lähendmurdude puhul. Kui esimese ja teise lähendmurru vahe on

$$\left(a + \frac{1}{a_1}\right) - a = \frac{1}{a_1}.$$

Järelikult iga kahe kõrvuti asetseva lähendmurru vahe lugeja absoluutväärtus on 1.

Kui võtame § 171 toodud näite, siis leiame:

$$\frac{3}{1} - \frac{2}{1} = \frac{1}{1}; \quad \frac{11}{4} - \frac{3}{1} = -\frac{1}{4}; \quad \frac{25}{9} - \frac{11}{4} = \frac{1}{36};$$

$$\frac{86}{31} - \frac{25}{9} = -\frac{1}{279} \text{ jne.}$$

Järeldused. 1. Iga lähendmurd on taandumatu murd, sest kui murdu $\frac{P_n}{Q_n}$ saaks taandada mingi teguriga $m > 1$, siis $P_n Q_{n-1} - - P_{n-1} Q_n$ jaguks arvuga m, mis aga on võimatu, sest see vahe on ± 1.

2. Kui ahelmurru täpse väärtuse asemel võtame lähendmurru $\frac{P_n}{Q_n}$, siis teeme vea, mis on väiksem igast kolmest järgmisest arvust:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}; \quad \frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})}; \quad \frac{1}{Q_n^2}.$$

Tõepoolest, kui A on ahelmurru täpne väärtus, siis vahe $A - \frac{P_n}{Q_n}$ on väiksem kui vahe $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}$, mille absoluutväärtus on vastavalt tõestusele $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$. Teiselt poolt, et $Q_{n+1} = Q_n a_n + + Q_{n-1}$, kus $a_n \geqq 1$, siis $Q_{n+1} \geqq Q_n + Q_{n-1}$, ning järelikult: $Q_n Q_{n+1} \geqq Q_n (Q_n + Q_{n-1})$ ja $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \leqq \frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})}$, ja seepärast on vahe $A - \frac{P_n}{Q_n}$ absoluutväärtus väiksem kui $\frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})}$.

Lõpuks, et $Q_{n+1} > Q_n$, siis $Q_{n+1} Q_n > Q_n^2$ ja seepärast

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Järelikult vahe $A - \frac{P_n}{Q_n}$ absoluutväärtus on väiksem kui $\frac{1}{Q_n^2}$.

Vea kolmest mainitud ülemmäärast on kõige väiksem $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$, kuid selle ülemmäära arvutamiseks on vaja teada ahelmurru ligikaudseks väärtuseks võetud lähendmurrule järgneva lähendmurru nimetajat. Vea ülemmäära $\frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})}$ on võimalik arvutada ainult siis, kui on teada eelneva lähendmurru nimetaja. Kui aga on teada ainult lähendmurd $\frac{P_n}{Q_n}$, siis on võimalik vea ülemmäärana arvutada ainult $\frac{1}{Q_n^2}$.

Kui me näiteks teame, et antud ahelmurru mingi lähendmurd on $\frac{45}{17}$, siis võime ütelda, et võttes ahelmurru ligikaudseks väärtuseks selle lähendmurru, teeme vea, mis on väiksem kui $\frac{1}{17^2}=\frac{1}{289}$. Kui me peale selle teame, et eelneva lähendmurru nimetaja on näiteks 8, siis võime ütelda, et ligikaudse väärtuse $\frac{45}{17}$ viga on väiksem kui $\frac{1}{17(17+8)}=\frac{1}{425}$. Lõpuks, kui me teame, et järgneva lähendmurru nimetaja on näiteks 37, siis võime kindlasti ütelda, et $\frac{45}{17}$ erineb ahelmurru täpsest väärtusest vähem kui $\frac{1}{17\cdot 37}=\frac{1}{629}$ võrra.

174. Teoreem 3. Lähendmurd on ahelmurru täpsele väärtusele lähem kui iga muu väiksema nimetajaga murd.

Tõestus. Oletame, et on olemas murd $\frac{a}{b}$, mis erineb ahelmurru A täpsest väärtusest vähem kui lähendmurd $\frac{P_n}{Q_n}$, ja olgu $b<Q_n$. Tõestame, et see oletus viib vasturääkivusele. Et $\frac{P_n}{Q_n}$ on arvule A lähem kui $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ ja $\frac{a}{b}$ on arvule A lähem kui $\frac{P_n}{Q_n}$, siis on $\frac{a}{b}$ arvule A ammugi lähem kui $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; et A asetseb peale selle $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ ja $\frac{P_n}{Q_n}$ vahel, siis vahe $\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ absoluutväärtus on suurem kui vahe $\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ absoluutväärtus; tähendab, pöörates tähelepanu ainult absoluutväärtustele, võime kirjutada:

$$\frac{1}{Q_n\,Q_{n-1}}>\left|\frac{aQ_{n-1}-bP_{n-1}}{bQ_{n-1}}\right|;\quad Q_n\,Q_{n-1}>bQ_{n-1}.$$

Korrutades need võrratused liikmeti, saame:

$$1>|aQ_{n-1}-bP_{n-1}|.$$

Et aQ_{n-1} ja bP_{n-1} on täisarvud, siis on see võrratus võimalik üksnes tingimusel, et

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=0,\text{ kust }\frac{a}{b}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

See võrdus pole võimalik, sest $\frac{a}{b}$ eelduse kohaselt arvule A lähem kui $\frac{P_n}{Q_n}$, samal ajal kui $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ erineb tõestuse kohaselt arvust A rohkem kui $\frac{P_n}{Q_n}$. Tekkinud vasturääkivus tõestab teoreemi 3 õigsust.

175. Antud aritmeetilise murru ligikaudsed väärtused. Kui antud taandumatu aritmeetilise murru lugeja ja nimetaja on väljendatud suurte arvudega, siis on sageli vaja leida selle murru võimalikult lihtsal kujul väljendatud ligikaudne väärtus. Selleks teisendatakse antud harilik murd ahelmurruks ja leitakse selle mingi lähendmurd olenevalt sellest, millist täpsust soovitakse.

Näide.

Teades, et arv π, mis kujutab enesest ringjoone suhet diameetriga, asetseb kahe murru: 3,141 592 653 ja 3,141 592 654 vahel, leida π lihtsaim lähend.

Teisendades mõlemad murrud ahelmurdudeks ja võttes ainult nende murdude ühised jagatised, leiame, et

$$\pi=(3,\ 7,\ 15,\ 1,\ldots).$$

Lähendmurd on:

		15	1
3	22	333	355
1	7	106	113

Lähendi $\frac{22}{7}$ leidis Archimedes; selle viga on väiksem kui $\frac{1}{7\cdot 106}=\frac{1}{742}$ ja, tähendab, ammugi väiksem kui $\frac{1}{100}$. Arvule $\frac{355}{113}$ osutas Adrian Metius; võtnud selle arvu konstandi π lähendiks, teeme vea, mis on väiksem kui $\frac{1}{113\cdot 33\,102}=\frac{1}{3\,740\,526}$, s. o. igal juhtumil väiksema kui üks miljondik. Archimedese ja Metiuse lähendid kui paarisarvulise järjekorranumbriga lähendmurrud on suuremad kui π.

176. Ruutjuure leidmine. Olgu vaja leida $\sqrt{41}$ ahelmurdude abil. Arutleme nii: suurim täisarv, mis sisaldub $\sqrt{41}$, on 6; seepärast võime kirjutada, et

$$\sqrt{41}=6+\frac{1}{x},$$

kust

$$\frac{1}{x}=\sqrt{41}-6; \qquad x=\frac{1}{\sqrt{41}-6}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}. \qquad (1)$$

Et $\sqrt{41}+6$ võrdub 12-ga, pluss mingi lihtmurd, siis suurim arv, mis sisaldub avaldises $\frac{\sqrt{41}+6}{5}$, on 2; seepärast võime kirjutada, et

$$x=\frac{\sqrt{41}+6}{5}=2+\frac{1}{y},$$

kust

$$\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}-2=\frac{\sqrt{41}-4}{5}; \qquad (2)$$

$$y=\frac{5}{\sqrt{41}-4}=\frac{5(\sqrt{41}+4)}{25}=\frac{\sqrt{41}+4}{5}.$$

Et $\sqrt{41}+4$ võrdub arvuga 10, pluss mingi lihtmurd, siis suurim täisarv, mis sisaldub avaldises $\frac{\sqrt{41}+4}{5}$, on 2; seepärast võime kirjutada, et

$$y=\frac{\sqrt{41}+4}{5}=2+\frac{1}{z}, \qquad (3)$$

kust

$$\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{41}-6}{5}; \qquad z=\frac{5}{\sqrt{41}-6}=\frac{5(\sqrt{41}+6)}{5}=\sqrt{41}+6.$$

Suurim täisarv, mis sisaldub avaldises $\sqrt{41}+6$, on 12; seepärast võime kirjutada, et

$$z=\sqrt{41}+6=12+\frac{1}{v}, \qquad (4)$$

kust

$$\frac{1}{v}=\sqrt{41}-6; \qquad v=\frac{1}{\sqrt{41}-6}.$$

Võrreldes v avaldist x avaldisega, leiame, et $v=x$. Kasutades võrdusi (1), (2), (3) ja (4) saame:

$$\sqrt{41}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{x}}}}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cdots}}}}}}$$

Seega avaldus $\sqrt{41}$ perioodilise ahelmurruna. Arvutades selle ahelmurru lähendmurrud, leiame arvu $\sqrt{41}$ ligikaudsed väärtused:

		2	12	2	2	...
6	13	32	397	826	2049	...
1	2	5	62	129	320	...

Samal teel leiame, et

$$\sqrt{13}=(3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, \ldots);$$
$$\sqrt{29}=(5, 2, 1, 1, 2, 10, \ldots).$$

177. Määramatu võrrandi lahendi leidmine. Ahelmurrud annavad vahendi määramatu võrrandi $ax+by=c$ ühe lahendi leidmiseks. Toome selleks näiteid. Olgu meil võrrand:

$$43x+15y=8.$$

Võtame murru $\frac{43}{15}$ ja teisendame ta ahelmurruks:

$$\frac{43}{15}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}$$

Arvutame nüüd eelviimase lähendmurru; see on $\frac{20}{7}$, Et viimane lähendmurd on ahelmurru täpne väärtus, s. o. $\frac{43}{15}$, ja $\frac{20}{7}$ on selle murru paarituarvulise järjekorranumbriga lähendmurd, siis § 172 teoreemi (märkus) põhjal võime kirjutada, et

$$\frac{43}{15}-\frac{20}{7}=\frac{1}{15 \cdot 7},$$

kust

$$43 \cdot 7-15 \cdot 20=1.$$

Et viimast samasust kohandada antud võrrandiga, korrutame kõik tema liikmed arvuga 8 ja kirjutame ta nii:

$$43 \cdot 56+15(-160)=8.$$

Võrreldes seda samasust meie võrrandiga, leiame, et viimases võib x väärtuseks võtta arvu 56 ja y väärtuseks arvu -160. Siis avalduvad kõik võimalikud lahendid valemitega (§ 149):

$$x=56-15t;\ y=-160+43t.$$

Neid valemeid võib lihtsustada, asendades tähe t avaldisega $t+3$ (seda võib teha, sest t on mistahes arv):

$$x=56-15(t+3)=11-15t;$$
$$y=-160+43(t+3)=-31+43t.$$

Võtame veel näite: $7x-19y=5$.

Teisendades murru $\frac{7}{19}$ ahelmurruks, leiame:

$$\frac{7}{19}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

Eelviimane lähendmurd on $\frac{3}{8}$. Et see on paarisarvulise järjekorranumbriga lähendmurd, siis

$$\frac{7}{19}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{19\cdot8},$$

kust

$$7\cdot8-19\cdot3=-1.$$

Korrutades selle võrduse kõik liikmed arvuga 5, saame:

$$7\cdot40-19\cdot15=-5$$

ehk

$$7\cdot(-40)-19\cdot(-15)=5.$$

Võrreldes viimast samasust antud võrrandiga, leiame, et viimases võib x-i asendada arvuga -40 ja y-i arvuga -15. Siis:

$$x=-40+19t;\ y=-15+7t.$$

Neid valemeid võib lihtsustada, asendades t avaldisega $t+12$:

$$x=-40+19(t+2)=-2+19t;$$
$$y=-15+7(t+2)=-1+7t.$$

178. Logaritmi arvutamine. Olgu vaja arvutada log 2 alusel 10; teiste sõnadega: on vaja lahendada võrrand $10^x=2$. Algul leiame x-ile lähima täisarvu. Et $10^0=1$ ja $10^1=10$, siis x on 0 ja 1 vahel; järelikult võib kirjutada, et $x=\frac{1}{z}$; siis $10^{\frac{1}{z}}=2$ ehk $10=2^z$. Pole raske näha, et z on 3 ja 4 vahel; järelikult võib kirjutada, et $z=3+\frac{1}{z_1}$. Siis

$$10=2^{3+\frac{1}{z_1}}=2^3\cdot2^{\frac{1}{z_1}}=8\cdot2^{\frac{1}{z_1}},$$

kust

$$2^{\frac{1}{z_1}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}, \quad \text{s. o. } 2=\left(\frac{5}{4}\right)^{z_1}.$$

Proovimise teel leiame, et z_1 asetseb 3 ja 4 vahel, seepärast võime kirjutada, et

$$z_1=3=\frac{1}{z_2}; \quad 2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z_2}}=\left(\frac{5}{4}\right)^3\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}},$$

kust

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}}=2:\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{128}{125} \text{ ehk } \left(\frac{128}{125}\right)^{z_2}=\frac{5}{4}.$$

Proovimise teel leiame jälle, et z_2 asetseb 9 ja 10 vahel. Seda võtet võib jätkata kaugemalegi. Rahuldudes z_2 väärtusega võime oletada, et $z_2=9$; järelikult

$$z_1=3+\frac{1}{9}; \quad z=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}} \text{ ja } x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}}$$

Teisendades selle ahelmurru harilikuks murruks, saame:

$$x=\frac{28}{93}=0{,}30107;$$

see tulemus on õige kuni murdosa neljanda kohani; täpsemad uurimised annavad: $x=0{,}3010300$.

II. Piirväärtustest.

179. Definitsioonid. Võtame lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\left(\text{tegur on } \frac{1}{2}\right)$$

esimese n liikme summa.

Progressiooni liikmete arvu lõpmatult kasvades kasvab see summa, lähenedes (§ 86) jäävale arvule 2 nii, et vahe

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

liidetavate arvu küllaldaselt kasvades muutub väiksemaks mistahes antud positiivsest arvust (näiteks väiksemaks kui 0,000001) ja liidetavate arvu edasisel kasvamisel jääb sellest arvust alati väiksemaks.

Nendel tingimustel kõneleme, et arv 2 on summa $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+$ $+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ piirväärtus, kui liidetavate arv lõpmatult kasvab.

Selles näites jääb muutuv suurus (progressiooni liikmete summa), lähenedes oma piirväärtusele, sellest väiksemaks. Kuid võib esineda juhtumeid, millal muutuv suurus, lähenedes oma piirväärtusele, jääb sellest suuremaks. Kui oletame näiteks, et summas $1+\frac{1}{x}$ on x väärtus positiivne ja kasvab lõpmatult, siis läheneb see summa piirväärtusele 1, jäädes alati suuremaks kui 1.

Võib ka juhtuda, et muutuv suurus muutub nii, et ta on oma piirväärtusest kord suurem, kord väiksem. Sellist juhtumit nägime juba, kui kõnelesime lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni $2; -1; +\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; +\frac{1}{8}; \ldots \left(\text{tegur on } -\frac{1}{2}\right)$ n liikme summa piirväärtusest (§ 87).

See piirväärtus on $1\frac{1}{3}$ ja progressiooni kahe, kolme, nelja jne. liikme summa on vaheldumisi oma piirväärtusest kord suurem, kord väiksem:

$$2-1=1<1\frac{1}{3}; \quad 2-1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}>1\frac{1}{3};$$

$$2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}<1\frac{1}{3}\cdots$$

Pärast neid näiteid on arusaadav järgmine piirväärtuse definitsioon:

kui muutuv suurus x oma muutumisel läheneb jäävale suurusele a nii, et vahe $a-x$ (või $x-a$) absoluutväärtus saab ja jääb ka edaspidi väiksemaks igast positiivsest arvust, siis nimetatakse **seda jäävat suurust a muutuja x piirväärtuseks.**

Selle asemel et ütelda: «suuruse x piirväärtus on a», öeldakse sageli: «x ligineb suurusele a» ja kirjas väljendatatakse seda nii: $x \to a$ ehk $\lim x=a$.

Kui muutuv suurus kasvab piiramatult, siis kõneldakse kokkuleppeliselt, et ta ligineb $+\infty$-le; kui aga muutuv suurus jääb negatiivseks ja tema absoluutväärtus kasvab piiramatult, siis kõneldakse, et ta ligineb $-\infty$-le.

Lõpmatusele liginevat suurust nimetatakse lõpmatult kasvavaks suuruseks ja nullile liginevat suurust nimetatakse lõpmatult kahanevaks suuruseks. Tuleb ühtlasi meenutada, et need nimetused ei tähenda ei väga suurt ega väga väikest suurust, nad iseloomustavad suuruse muutumise protsessi: suurus, mida nimetatakse «lõpmatult kasvavaks», muutub nii, et ta saab ja jääb (absoluutväärtuselt) igast antud arvust suuremaks; suurus, mida nimetatakse «lõpmatult kahanevaks», muutub nii, et ta saab ja jääb (absoluutväärtuselt) igast antud positiivsest arvust väiksemaks.

Kui kasutada selles mõttes nimetust «lõpmatult kahanev suurus», siis võib piirväärtuse definitsiooni sõnastada lühidalt nii: *jäävat suurust a nimetatakse muutuja x piirväärtuseks, kui vahe x—a on lõpmatult kahanev suurus.*

180. Lõpmatult kahanevate suuruste mõned omadused. 1) *Lõpmatult kahanevate suuruste summa on lõpmatult kahanev suurus* (kui liidetavate arv ei suurene piiramatult).

Võtame näitena kolm lõpmatult kahanevat suurust: α, β ja γ (nad võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed). Selleks et näidata, et nende summa $\alpha+\beta+\gamma$ on lõpmatult kahanev suurus, on vaja veenduda, et selle summa absoluutväärtus saab ja jääb igast antud arvust väiksemaks, näiteks väiksemaks kui üks miljondik. Tõepoolest, et suurused α, β ja γ on lõpmatult kahanevad, siis nende muutudes igaühe absoluutväärtus saab ja jääb igast antud arvust väiksemaks, sealhulgas väiksemaks ka kui $\frac{1}{3}$ miljondikku; tähendab, summa $\alpha+\beta+\gamma$ absoluutväärtus saab ja jääb väiksemaks kui $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$ miljondikku, s. o. väiksemaks kui 1 miljondik.

Tähendame, et kui üheaegselt liidetavate absoluutväärtuste vähenemisega liidetavate arv piiramatult kasvab, siis võib nende summa ka mitte osutuda lõpmatult kahanevaks suuruseks. Võtame näiteks sellise summa:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n} \quad (n \text{ liidetavat})$$

ja oletame, et arv n kasvab piiramatult; siis hoolimata sellest, et nimetaja n suurenedes liidetavad vähenevad piiramatult, jääb nende summa muutumatuks (ta on 1).

2) *Lõpmatult kahaneva suuruse ja jääva arvu korrutis on lõpmatult kahanev suurus.*

Näiteks korrutis 100α, kus α on mingi lõpmatult kahanev suurus, saab ja jääb (absoluutväärtuselt) igast antud positiivsest arvust väiksemaks, näiteks väiksemaks kui 1 miljondik, sest α saab ja jääb igast antud positiivsest arvust väiksemaks, sealhulgas väiksemaks ka kui 1 sajamiljondik.

3) *Kahe lõpmatult kahaneva suuruse korrutis on lõpmatult kahanev suurus.* Kui lõpmatult kahaneva suuruse ja jääva arvu korrutis saab ja jääb kuitahes väikeseks, siis on kahe lõpmatult kahaneva suuruse korrutisel ammugi see omadus.

4) *Lõpmatult kahaneva suuruse ja jääva arvu jagatis on lõpmatult kahanev suurus.*

Näiteks jagatis $\alpha : \frac{1}{10}$ on lõpmatult kahanev suurus, sest ta võrdub korrutisega $\alpha \cdot 10$, s. o. võrdub lõpmatult kahaneva suuruse ja jääva arvu korrutisega.

Märkus. Lõpmatult kahaneva suuruse jagatis teise lõpmatult kahaneva suurusega võib mõnikord võrduda jääva arvuga, mõnikord lõpmatult kahaneva suurusega ja mõnikord lõpmatult kasvava suurusega; kõik see sõltub sellest, millise seaduse järgi kahaneb jagatav ja millise seaduse järgi kahaneb jagaja. Võtame näitena kolm jagatist:

$$\frac{2\alpha}{\alpha}=2; \quad \frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha; \quad \frac{\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}.$$

Oletame, et α on lõpmatult kahanev suurus. Siis esimene jagatis, mis on alati 2, on jääv arv; teine jagatis, mis on võrdne α-ga, on lõpmatult kahanev suurus, ja kolmas jagatis, mis on võrdne murruga $\frac{1}{\alpha}$, on lõpmatult kasvav suurus, sest murd, mille lugeja on jääv arv ja nimetaja kahaneb piiramatult, kasvab piiramatult.

181. Piirväärtuste omadused. 1) *Muutuval suurusel ei saa olla üle ühe piirväärtuse.*

Oletame vastupidist, ja nimelt, et muutuv suurus x ligineb kahele erinevale piirväärtusele, näiteks arvudele 5 ja 5,1. Siis peavad vastavalt piirväärtuse definitsioonile olema vahed $x-5$ ja $x-5{,}1$ lõpmatult kahanevad suurused (positiivsed või negatiivsed).

Olgu $x-5=\alpha$ ja $x-5{,}1=\beta$; siis

$$x=5+\alpha \text{ ja } x=5{,}1+\beta,$$

ja järelikult

$$5+\alpha=5{,}1+\beta, \text{ kust } \alpha-\beta=0{,}1.$$

Kuid see võrdus on võimatu, sest vahe $\alpha-\beta$, mis kujutab enesest lõpmatult kahanevate suuruste algebralist summat, on lõpmatult kahanev suurus ja järelikult ei saa ta võrduda nullist erineva jääva arvuga. Tähendab, ei saa oletada, et suurusel x on kaks piirväärtust.

2) *Kui kahe muutuva suuruse (x ja y) vahe on lõpmatult kahanev suurus (või võrdne nulliga) ja ühel neist on piirväärtus, siis ka teisel suurusel on sama piirväärtus.*

Oletame näiteks, et suuruse x piirväärtus on 2. Siis võib ütelda, et $x=2+\alpha$, kus α on lõpmatult kahanev suurus. Peale selle oletame, et vahe $x-y$ on võrdne lõpmatult kahaneva suurusega β (või nulliga). Siis

$$(2+\alpha)-y=\beta, \text{ kust } 2-y=\beta-\alpha.$$

Et vahe $\beta-\alpha$ on lõpmatult kahanev suurus, siis nähtub viimasest võrdusest, et arv 2 on muutuva suuruse y piirväärtus.

3) **Pöördteoreem.** *Kui kahel muutuval suurusel (x ja y) on üks ja sama piirväärtus, siis nende vahe on lõpmatult kahanev suurus (või võrdub nulliga).*

Oletame näiteks, et suurustel x ja y on üks ja sama piirväärtus 10. Siis $x=10+\alpha$ ja $y=10+\beta$, kus α ja β on lõpmatult kahanevad suurused. Järelikult:

$$x-y=(10+\alpha)-(10+\beta)=\alpha-\beta.$$

Et vahe $\alpha-\beta$ on lõpmatult kahanev suurus või võrdub nulliga, siis on ka võrduse vasak pool, s. o. vahe $x-y$, lõpmatult kahanev suurus või võrdne nulliga.

4) *Muutuvate suuruste algebralise summa piirväärtus võrdub nende suuruste piirväärtuste algebralise summaga* (kui liidetavate arv pole lõpmatult suur).

Oletame, et meil on kolme muutuva suuruse $x+y+z$ summa ning et $x\to 3$, $y\to 2$ ja $z\to -5$. Siis võime kirjutada võrduse:

$$x=3+\alpha; \qquad y=2+\beta; \qquad z=-5+\gamma,$$

kus α, β ja γ on lõpmatult kahanevad suurused.

Järelikult

$$x+y+z=(3+\alpha)+(2+\beta)+(-5+\gamma)=$$
$$=(3+2-5)+(\alpha+\beta+\gamma),$$

kust

$$(x+y+z)-(3+2-5)=\alpha+\beta+\gamma.$$

Selle võrduse parempoolne osa on lõpliku arvu lõpmatult kahanevate liidetavate summa ja seepärast on ta ise lõpmatult kahanev; sellest aga järeldub, et muutuv summa $x+y+z$ ligineb piirväärtusele $3+2-5$, s. o. ligineb piirväärtuste algebralisele summale.

Seda arutelu võib korrata nelja, viie ja enama liidetava kohta, kui ainult liidetavate arv ei kasva piiramatult (vastasel korral võib ilmneda, et summa $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ polegi lõpmatult kahanev suurus).

5) *Muutuvate suuruste korrutise piirväärtus võrdub nende suuruste piirväärtuste korrutisega.*

Olgu meil kahe muutuva suuruse korrutis xy, milledest üks suurus ligineb piirväärtusele 2 ja teine piirväärtusele 3. Siis

$$x=2+\alpha \text{ ja } y=3+\beta.$$

Järelikult

$$xy=(2+\alpha)(3+\beta)=2\cdot 3+3\alpha+2\beta+\alpha\beta,$$

kust

$$xy-2\cdot 3=3\alpha+2\beta+\alpha\beta.$$

Korrutised 3α, 2β ja $\alpha\beta$ on lõpmatult kahanevad suurused ja seepärast on ka nende summa lõpmatult kahanev suurus, mis tähendab, et $xy \to 2\cdot 3$, s. o. $\lim xy=(\lim x)\cdot(\lim y)$.

Seda järeldust võib üldistada kolme, nelja ja enama teguri korrutise kohta. Vaadeldes korrutist xyz kui kahe teguri xy ja z korrutist, võime kirjutada:

$$\lim(xyz)=(\lim xy)\cdot(\lim z)=(\lim x)\cdot(\lim y)\cdot(\lim z).$$

6) *Muutuvate suuruste jagatise piirväärtus võrdub jagatava piirväärtuse ja jagaja piirväärtuse jagatisega, kui jagaja piirväärtus pole võrdne nulliga.*

Olgu $x\to 2$, $y\to 3$; siis $x=2+\alpha$ ja $y=3+\beta$, kus α ja β on lõpmatult kahanevad suurused. Järelikult:

$$\frac{x}{y}-\frac{2}{3}=\frac{2+\alpha}{3+\beta}-\frac{2}{3}=\frac{(2+\alpha)3-(3+\beta)2}{(3+\beta)\cdot 3}=\frac{3\alpha-2\beta}{(3+\beta)\cdot 3}.$$

Selle võrduse parempoolses osas oleva murru lugeja on lõpmatult kahanev suurus, sest ta on kahe lõpmatult kahaneva suuruse algebraline summa; nimetaja aga, mille piirväärtus on 3^2, ei saa ligineda nullile. Kui aga murru lugeja on lõpmatult kahanev suurus ja nimetaja pole lõpmatult kahanev, siis murd on lõpmatult kahanev suurus.

Tähendab, eespool toodud võrdusest järeldame, et

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{2}{3}=\frac{\lim x}{\lim y}.$$

7) *Muutuva astendatava ja jääva astendajaga astme piirväärtus võrdub astendatava piirväärtuse sama astmega.*

Piirdume juhtumiga, millal astendaja on positiivne täisarv. Sel juhul on see teoreem korrutise piirväärtuse teoreemi lihtne järeldus. Nii:

$$\lim (x^3) = \lim (xxx) = (\lim x)\,(\lim x)\,(\lim x) = (\lim x)^3.$$

Lisandame piirväärtuste kohta veel kaks järgmist teoreemi:

8) *Kui muutuv suurus kasvab, jäädes seejuures väiksemaks mingist jäävast suurusest, siis on tal piirväärtus.* Võtame näiteks arvu $\sqrt{2}$ ligikaudsed väärtused puuduga, mis on algul arvutatud täpsusega kuni 1, siis kuni $\frac{1}{10}$, seejärel kuni $\frac{1}{100}$ jne. Me saame siis arvude lõpmatu rea:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421 \text{ jne.}$$

Need arvud suurenevad sedamööda, kuidas rida kasvab, kuid jäävad alati väiksemaks teatavast jäävast arvust, näiteks väiksemaks kui 1,5; neil tingimustel peame järeldama, et arvud eespool toodud reas liginevad mingile kindlale piirväärtusele (see piirväärtus on irratsionaalarv $\sqrt{2}$).

9) *Kui muutuv suurus kahaneb, jäädes seejuures suuremaks mingist jäävast arvust, siis on tal piirväärtus.*

Võtame näitena arvu $\sqrt{2}$ ligikaudseid väärtusi liiaga, täpsusega kuni 1, kuni $\frac{1}{10}$, kuni $\frac{1}{100}$ jne.

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422 \text{ jne.}$$

Sedamööda, kuidas rida kasvab, vähenevad need arvud, kuid jäävad alati suuremaks kui 1,4; neil tingimustel peame järeldama, et antud rea arvud liginevad piirväärtusele (piirväärtus on võrdne irratsionaalarvuga $\sqrt{2}$).

Harjutused.

279. Leida piirväärtus, millele ligineb murd $\frac{2x^2-x-1}{3x^2-5x+2}$, kui $x \to 1$.

L a h e n d u s. Kui $x \to 1$, siis liginevad antud murru lugeja ja nimetaja nullile. Et aga $\frac{0}{0}$ on määramatu avaldis, siis jääb meile teadmatuks, millisele piirväärtusele ligineb antud murd (ja kas ta üldse mingile piirväärtusele ligineb), kui $x \to 1$.

Seepärast toimime teisiti: oletame, et x pole võrdne 1-ga, vaid on võrdne mingi muutuva suurusega, mis ligineb 1-le. Olgu näiteks $x=1+h$, kus h on mingi positiivne suurus, mis ligineb nullile. Siis on antud murru väärtus:

$$\frac{2(1+h)^2-(1+h)-1}{3(1+h)^2-5(1+h)+2}=\frac{2+4h+2h^2-1-h-1}{3+6h+3h^2-5-5h+2}=$$

$$=\frac{2h^2+3h}{3h^2+h}=\frac{2h+3}{3h+1}$$

(taandada murdu arvuga h on meil õigus, sest $h\neq 0$).

Oletame nüüd, et $h\to 0$, ja järelikult $x\to 1$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{2h+3}{3h+1}=\frac{\lim\limits_{h\to 0}(2h+3)}{\lim\limits_{h\to 0}(3h+1)}=\frac{3}{1}=3.$$

Sama piirväärtuse leiame, kui oletame, et $x=1-h$, kus h on mingi nullile liginev positiivne suurus. Seega, kas x läheneb ühele, jäädes ühest suuremaks või väiksemaks, on antud murru piirväärtus üks ja sama arv, nimelt 3.

280. Leida piirväärtus, millele ligineb murd $\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x-8}$, kui $x\to 1$.

281. Teha sama, kui $x\to 0$.

282. Leida $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^3-12x+16}$.

283. Leida $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$.

284. Leida $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$.

L a h e n d u s. Et

$$\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

siis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

285. Leida $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}$.

286. Leida $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+\sqrt{x^2+1}}$.

287. Leida piirväärtus, millele ligineb murd, kui liidame lugeja ja nimetajaga ühe ja sama lõpmatult kasvava suuruse; teiste sõnadega: leida

$\lim\limits_{m\to\infty}\frac{a+m}{b+m}$.

Lahendus.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a+m}{b+m}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{a}{m}+1}{\frac{b}{m}+1}=\frac{\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{a}{m}+1\right)}{\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{b}{m}+1\right)}=\frac{\lim\limits_{m\to\infty}\frac{a}{m}+1}{\lim\limits_{m\to\infty}\frac{b}{m}+1}=$$

$$=\frac{0+1}{0+1}=1.$$

Seega siis, olgu $\frac{a}{b}$ liht- ($a<b$), või liigmurd ($a>b$), selle murru piirväärtus, kui $m\to\infty$, on üks ja sama arv, nimelt 1. Siit järeldub, et lihtmurd 1-le lähenedes suureneb, liigmurd aga väheneb.

III. Ruutkolmliikme uurimine.

Teise astme võrratused.

182. Ülesanne. 1000 m kõrgusel olevalt aerostaadilt visati alla koormus kiirusega 20 m sekundis. Kui kõrgel maapinnast oli see koormus 15 sek. pärast? (Õhu takistust ei võeta arvesse.)

Langeva keha poolt läbitud tee arvutatakse valemi järgi:

$$s=v_0t+\frac{gt^2}{2}, \tag{1}$$

kus v_0 on algkiirus, $g=9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{sek}^2}$ on raskustungi kiirendus.

Antud juhtumil $v_0=20\ \frac{\text{m}}{\text{sek}}$ ja valemil on seega kuju:

$$s=20t+4{,}9t^2. \tag{2}$$

Selle tee läbib langev koormus t sekundi jooksul. Tähendab, t sekundi möödudes oli koormus

$$x=1000-20t-4{,}9t^2 \tag{3}$$

meetri kõrgusel maapinnast. Et leida x — koormuse kõrgus maapinnast 15 sekundi pärast, selleks tuleb asetada valemisse (3) t asemele arv 15. Saame

$$x=1000-20\cdot 15-4{,}9\cdot 15^2=-402{,}5.$$

x negatiivsel väärtusel ei ole siin mõtet ja järelikult meie ülesandel pole lahendit. Miks on see nii? Et sellele küsimusele vastata, selleks leiame algul, mitme sekundi jooksul langeb allavisatud koormus maapinnale. On ilmne, et see toimub sel momendil, kui koormus läbib tee, mis on võrdne kõrgusega, millelt ta alla visati, s. o. 1000 m. Tähendab, me saame:

$$20t+4{,}9t^2=1000$$

ehk

$$4{,}9t^2+20t-1000=0. \qquad (4)$$

Lahendades selle võrrandi, leiame, et $t=12{,}4$ sek. (täpsusega kuni $\frac{1}{10}$; võtame ainult positiivse lahendi). Tähendab, koormus langes alla juba 12,4 sekundi pärast, seepärast polnud ülesande küsimusel mõtet.

Missuguste t väärtuste puhul võimaldab ülesanne täiesti kindlaid lahendeid? Ilmselt ainult nende väärtuste puhul, mille juures koormuse poolt läbitud tee on väiksem kui 1000 m, s. o. tingimusel, et

$$4{,}9t^2+20t<1000$$

ehk

$$4{,}9t^2+20t-1000<0. \qquad (5)$$

Tähendab, ülesandel on lahend ainult seesuguste t (positiivsete) väärtuste korral, mille puhul kolmliige $4{,}9t^2+20t-1000$ väärtus on negatiivne. See on siis, kui $t<12{,}4$.

Paljudes ülesannetes, nagu eeltooduski, on vaja antud kolmliikme kohta jõuda selgusele, missuguste temasse kuuluva tähe väärtuste puhul on ta väärtus positiivne ja missuguste puhul negatiivne. Selles seisabki ruutkolmliikme uurimine, mida käsitletakse järgnevais paragrahvides.

183. Erinevate reaalsete juurtega ruutkolmliige.

Näide 1. Olgu antud kolmliige.

$$y=2x^2-7x+3. \qquad (1)$$

On vaja leida, missuguste x väärtuste puhul on sel kolmliikmel positiivsed ja missuguste väärtuste puhul negatiivsed väärtused.

Me teame (§§ 44 ja 45), et iga kolmliiget võib kujutada x^2 ees seisva kordaja ning kolmliikme muutuja ja juurte vahede korrutisena.

Leiame antud kolmliikme juured. Selleks lahendame võrrandi:

$$2x^2-7x+3=0. \qquad (2)$$

Saame $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=3$ (edaspidi märgime tähega x_1 kolmliikme väiksemat reaalset juurt). Siis võib antud kolmliikme esitada järgmisel kujul:

$$y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3). \qquad (3)$$

Nüüd uurime, milliste x väärtuste puhul on see korrutis positiivne arv ja milliste väärtuste puhul negatiivne. Vaatleme kolme juhtumit.

1. Olgu $x<\frac{1}{2}$. Siis võib ammugi ütelda, et $x<3$. Kandes kõik liikmed võrratuse vasakule poolele, saame siit:

$$x-\frac{1}{2}<0 \text{ ja } x-3<0.$$

Järelikult on avaldise $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)$ väärtus kui kahe negatiivse arvu korrutis positiivne. Pärast selle korrutamist 2-ga saame jälle positiivse arvu. Siit järeldub, et kui $x<\frac{1}{2}$, siis avaldise (3) väärtus ja järelikult ka antud kolmliikme väärtus on positiivne.

2. Olgu $x>\frac{1}{2}$, kuid $x<3$,

s. o. x väärtused asetsevad antud kolmliikme juurte vahel. Kandes neis võrratustes kõik liikmed vasakule poolele, saame:

$$x-\frac{1}{2}>0 \text{ ja } x-3<0.$$

Järelikult on korrutises $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)$ üks tegureist positiivne, teine negatiivne. Tähendab, korrutis on negatiivne ja pärast selle korrutamist arvuga 2 saame negatiivse arvu. Seega, kui

$$\frac{1}{2}<x<3,$$

siis avaldise (3) ja järelikult ka antud kolmliikme väärtus on negatiivne.

3. Olgu $x>3$, siis on ammugi $x>\frac{1}{2}$. Siit saame:

$$x-3>0 \text{ ja } x-\frac{1}{2}>0.$$

Korrutis $(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ja järelikult ka korrutis $2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ on positiivsed arvud. Tähendab, kui $x>3$, siis antud kolmliikme väärtus on positiivne. Seega tulime järgmisele järeldusele. Kolmliikme $2x^2-7x+3$ väärtused on positiivsed x kõigi väärtuste puhul, mis on väiksemad kui $\frac{1}{2}$, ja x kõigi väärtuste puhul, mis on suuremad kui 3; kolmliikme väärtused on negatiivsed x kõigi väärtuste puhul, mis asetsevad $\frac{1}{2}$ ja 3 vahel.

Tehtud järelduse kontroll x mõnede arvuliste väärtuste kohta on esitatud järgmises tabelis, mille ülemises reas on antud x väärtused, alumistes aga vastavad kolmliikme väärtused:

x	-5	-3	-1	0	1	2	4	7	10
$2x^2-7x+3$	88	42	12	3	-2	-3	7	52	133

Samale järeldusele tuleme, kui vaatleme kolmliikme $2x^2-7x+3$ graafikut. Me teame (vt. § 50), et selle graafikuks on parabool, mis lõikab x-telge punktides, mille abstsissid on $\frac{1}{2}$ ja 3. Graafiku (joon. 36) vaatlemisest nähtub vahetult, et parabooli punktid, mille abstsissid on väiksemad kui $\frac{1}{2}$ või suuremad kui 3, asetsevad ülalpool x-telge ja järelikult nende ordinaadid, s. o. $y=2x^2-7x+3$ väärtused on positiivsed.

Parabooli punktid aga, mille abstsissid on $\frac{1}{2}$ ja 3 vahel, asetsevad allpool x-telge ja järelikult nende ordinaadid on negatiivsed.

Näide 2. Uurime samal viisil kolmliiget.

$$y=3x^2-x-10.$$

Lahendades ruutvõrrandi $3x^2-x-10=0$ leiame antud kolmliikme juured. Need on: $x_1=-\frac{5}{3}$ ja $x_2=2$. Siis võib kolmliikme esitada järgmisel kujul:

$$y=3\left[x-\left(-\frac{5}{3}\right)\right](x-2)$$

ehk

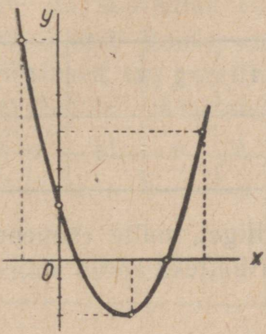
$$y=3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-2).$$

Arutledes samuti nagu esimeseski näites, leiame:

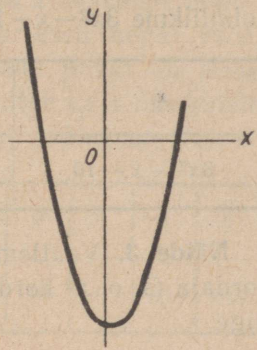
1) Kui $x < -\frac{5}{3}$, siis ka $x < 2$.

Siit

$$x + \frac{5}{3} < 0 \text{ ja } x - 2 < 0.$$



Joon. 36.



Joon. 37.

Järelikult on nende x väärtuste puhul korrutis

$$3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 2) > 0,$$

s. o. antud kolmliikme väärtused on positiivsed.

2) Kui $x > -\frac{5}{3}$ ja $x < 2$, siis saame

$$x + \frac{5}{3} > 0 \text{ ja } x - 2 < 0.$$

Järelikult

$$3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 2) < 0,$$

s. o. kolmliikme väärtused on negatiivsed.

3) Juhtumil, kui $x > 2$, on samuti $x > -\frac{5}{3}$.

Siis saame:

$$x + \frac{5}{3} > 0 \text{ ja } x - 2 > 0.$$

Siit

$$3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 2) > 0,$$

s. o. kolmliikme väärtused on positiivsed.

Üldine järeldus on sama, mis esimeseski näites: kolmliikme väärtused on positiivsed kõigi x väärtuste puhul, mis on väiksemad kui $-\frac{5}{3}$, ja kõigi x väärtuste puhul, mis on suuremad kui 2. Tema väärtused on negatiivsed kõigi x väärtuste puhul, mis asetsevad $-\frac{5}{3}$ ja 2 vahel. Seda järeldust kinnitavad tabel ja samuti kolmliikme $3x^2-x-10$ (joon. 37) graafik.

x	-5	-2	-1	0	1	2	3	5
$3x^3-x-10$	70	4	-6	-10	-8	0	14	60

Näide 3. Vaatleme nüüd niisugust kolmliiget, mille esimene kordaja (s. o. x^2 kordaja) on negatiivne. Olgu näiteks antud kolmliige

$$y=-2x^2+4x+16.$$

Leidnud selle kolmliikme juured: $x_1=-2$ ja $x_2=4$, võime kolmliikme kirjutada nii:

$$y=-2(x+2)(x-4).$$

Uurides korrutise märki, samuti nagu eelmisteski näidetes, leiame:

1. Kui $x<-2$, siis ka $x<4$. Siit

$$x+2<0 \text{ ja } x-4<0.$$

Nende tegurite korrutis $(x+2)(x-4)$ on positiivne. Kuid selle positiivse arvu korrutamisel arvuga -2 saame negatiivse arvu ja, tähendab, antud kolmliikme väärtused on negatiivsed, kui $x<-2$.

2. Kui $x>-2$ ja $x<4$, siis saame:

$$x+2>0 \text{ ja } x-4<0.$$

Korrutis $(x+2)(x-4)$ on negatiivne arv ja järelikult pärast selle korrutamist negatiivse arvuga -2 saame positiivse arvu.

Järelikult kolmliikme juurte -2 ja 4 vahel asetsevate x väärtuste puhul on antud kolmliikme väärtused positiivsed.

3. Lõpuks, kui $x>4$, saame:

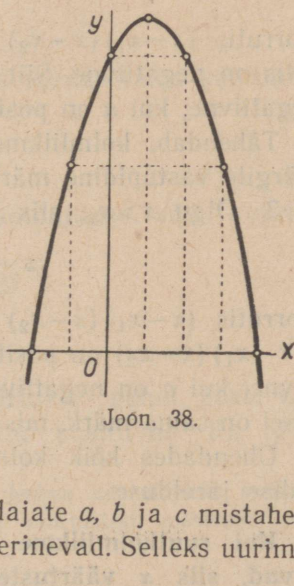
$$x+2>0 \text{ ja } x-4>0.$$

Korrutis $(x+2)(x-4)$ on positiivne. Pärast selle korrutamist arvuga -2 saame negatiivse arvu, ja järelikult kolmliikme väärtused on negatiivsed, kui $x>4$.

Me näeme, et käesoleval juhtumil on tegemist olukorraga, mis on vastupidine sellele, mida panime tähele kahes esimeses näites: x väärtuste puhul, mis on väiksemad kui -2, ja x väärtuste puhul, mis on suuremad kui 4, on kolmliikme väärtused negatiivsed, kolmliikme juurte vahel asetsevate x väärtuste puhul on tema väärtused aga positiivsed. Seda järeldust kinnitab ka x üksikutele arvulistele väärtustele vastavate kolmliikme väärtuste tabel.

x	-5	-3	-2	-1	0	1	3	4	5	8
$-2x^2+4x+16$	-54	-14	0	10	16	18	10	0	-14	-80

Samale tulemusele jõuame, kui vaatleme kolmliikme $-2x^2+4x+16$ graafikut. Me teame juba (§§ 47, 49), et kui $a<0$, siis kolmliikme ax^2+bx+c graafik on pööratud tipuga üles ja lõikab x-telge punktides, mille abstsissid on võrdsed kolmliikme juurtega. Antud juhul on graafikul (joon. 38) selline kuju. Me näeme, et kui $x<-2$ ja kui $x>4$, siis on kõvera punktide ordinaadid, s. o. $y=-2x^2+4x+16$ väärtused, negatiivsed ja juhtumil, kui $-2<x<4$, positiivsed.



Joon. 38.

Kõrvutades kolmanda näite esimese ja teisega, märkame, et kõigil kolmel juhtumil x väärtuste puhul, mis on väiksemast juurest väiksemad, ja samuti väärtuste puhul, mis on suuremast juurest suuremad, on kolmliikme väärtusel sama märk, mis x^2 kordajalgi; kolmliikme juurte vahel asetsevate x väärtuste puhul on kolmliikme väärtuse märk vastupidine x^2 kordaja märgile.

Veendume, et see järeldus on õige kordajate a, b ja c mistahes väärtuste puhul, kui juured on reaalsed ja erinevad. Selleks uurime ruutkolmliiget üldkujul.

Üldjuhtum. Olgu antud kolmliige

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kus a, b ja c on mistahes reaalarvud, mis rahuldavad ainult tingimust, et kolmliikme juured on reaalsed ja erinevad (ja $a \neq 0$). Tähistame need juured tähtedega

$$x_1 \text{ ja } x_2 \quad (x_1 < x_2).$$

Siis võib kolmliiget esitada selliselt:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Uurime, millised on selle kolmliikme väärtused x-i mitmesuguste väärtuste puhul.

1. Olgu $x < x_1$, siis järelikult ka $x < x_2$ (sest $x_1 < x_2$). Siit saame: $x - x_1 < 0$ ja $x - x_2 < 0$.

Järelikult sel juhtumil korrutis $(x - x_1)(x - x_2)$ on positiivne arv. Siit järeldub, et $a(x - x_1)(x - x_2)$ on positiivne, kui a on positiivne, ja negatiivne, kui a on negatiivne arv. Teiste sõnadega, kui $x < x_1$, siis on kolmliikme $ax^2 + bx + c$ väärtusel sama märk, mis kordajal a.

2. Olgu $x > x_1$ ja $x < x_2$.

$$x - x_1 > 0 \text{ ja } x - x_2 < 0.$$

Korrutis $(x - x_1)(x - x_2)$ kui erinevate märkidega arvude korrutis on negatiivne. Siit järeldub, et korrutis $a(x - x_1)(x - x_2)$ on negatiivne, kui a on positiivne, ja positiivne, kui a on negatiivne.

Tähendab, kolmliikme väärtustel on sel juhtumil kordaja a märgile vastupidine märk.

3. Olgu $x > x_2$, siis järelikult ka $x > x_1$ (sest $x_2 > x_1$). Seega

$$x - x_2 > 0 \text{ ja } x - x_1 > 0.$$

Korrutis $(x - x_1)(x - x_2)$ on positiivne ja järelikult ka korrutis $a(x - x_1)(x - x_2)$ on positiivne, kui a on positiivne, ja ta on negatiivne, kui a on negatiivne. Tähendab, kolmliikme arvulisel väärtusel on sama märk, mis kordajal a.

Ühendades kõik kolm juhtumit, võime nüüd teha järgmise üldise järelduse:

Kui ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ juured on erinevad reaalarvud, siis x väärtuste puhul, mis on väiksemad kui kolm-

liikme väiksem juur ja x väärtuste puhul, mis on suuremad kui kolmliikme suurem juur, on kolmliikme väärtusel sama märk, mis x^2 kordajal. Kolmliikme juurte vahel asetsevate x väärtuste puhul on tema väärtuse märk vastupidine x^2 kordaja märgile.

Märkus. Kui nimetada väärtusi $x<x_1$ ja $x>x_2$ x väärtusteks, mis on väljaspool juurte vahemikku, ja väärtusi $x_1<x<x_2$ x väärtusteks, mis on juurte vahemikus, siis võib seda järeldust formuleerida ka veel nii:

kui kolmliikmel ax^2+bx+c on erinevad reaalsed juured x_1 ja x_2, siis x väärtuste puhul, mis on väljaspool juurte vahemikku, on kolmliikmel sama märk, mis x^2 kordajalgi, ning x väärtuste puhul, mis asetsevad juurte vahemikus, on kolmliikmel x^2 kordaja märgile vastupidine märk.

Harjutused.

Uurida järgmisi kolmliikmeid:

288. $y=x^2-8x+12$.

289. $y=x^2-2x-15$.

290. $y=-3x^2+8x+3$.

291. $y=-x^2+9x-14$.

292. $y=6x^2-x-12$.

184. Võrdsete juurtega ruutkolmliige. Olgu vaja uurida kolmliiget

$$y=2x^2-8x+8.$$

Leiame selle kolmliikme juured. Selleks võrdsustame kolmliikme nulliga ja lahendame võrrandi

$$2x^2-8x+8=0.$$

Saame $x_1=x_2=2$. Tähendab, antud kolmliikme võib kujutada järgmiselt (§ 45):

$$y=2(x-2)(x-2)$$

ehk

$$y=2(x-2)^2.$$

On ilmne, et x-i mistahes reaalsete väärtuste[1] puhul, peale väärtuse $x=2$, on avaldise $(x-2)^2$ väärtus positiivne. Ka pärast

[1] Et mitte alati teha selgitavat märkust, lepime edaspidiseks kokku, et igal pool, kus kõneldakse tähtede arvulistest väärtustest, mõeldakse ainult nende reaalseid väärtusi.

selle avaldise korrutamist positiivse arvuga 2 saame positiivse arvu. Järelikult kolmliikme $2x^2-8x+8$ väärtused on positiivsed x kõigi väärtuste puhul, peale väärtuse, mis on võrdne kolmliikme juurega, s. o. peale väärtuse $x=2$.

(Kui $x=2$, siis kolmliikme väärtus on null.)

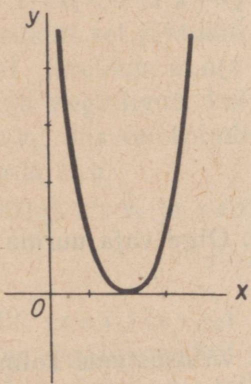
Joonestanud kolmliikme $2x^2-8x+8$ graafiku, märkame (joon. 39), et x-i kõigi väärtuste puhul kõvera punktid asetsevad ülalpool x-telge, s. o. $y>0$, ja ainult sel juhtumil, kui $x=2$, on $y=0$. Selles punktis kõver puudutab abstsisstelge.

Näide 2. Uurime kolmliiget

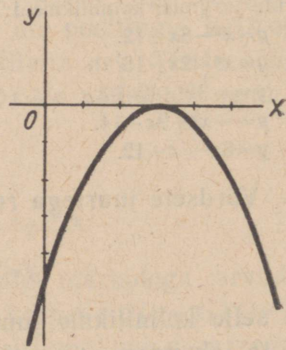
$$y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4\frac{1}{4}.$$

Leiame selle kolmliikme juured; selleks lahendame võrrandi

$$-\frac{1}{2}x^2+3x-4\frac{1}{2}=0.$$



Joon. 39.



Joon. 40.

Saame $x_1=x_2=3$. Antud kolmliikme võime järelikult kujutada selliselt:

$$y=-\frac{1}{2}(x-3)(x-3)$$

ehk

$$y=-\frac{1}{2}(x-3)^2.$$

Samuti nagu eelmiseski näites järeldame, et x-i kõigi väärtuste puhul, välja arvatud väärtus $x=3$, on avaldise $(x-3)^2$ väärtus positiivne. Pärast selle korrutamist arvuga $-\frac{1}{2}$ saame negatiivse arvu.

Seega selle kolmliikme väärtused on negatiivsed x-i kõigi väärtuste puhul, peale väärtuse $x=3$.

Joonestanud kolmliikme $-\frac{1}{2}x^2+3x-4\frac{1}{2}$ graafiku, näeme (joon. 40), et kõik parabooli punktid, välja arvatud punkt (3; 0), asetsevad allpool x-telge. Tähendab, kõigi nende punktide ordinaadid, s. o. $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4\frac{1}{2}$ väärtused, on negatiivsed.

Kõrvutanud mõlemad näited, märkame, et kolmliikme arvulise väärtuse märk ühtib mõlemal juhul x^2 kordaja märgiga. Et veenduda, et see tõik peab paika mistahes kordaja puhul (juhtumil, kui juured on võrdsed), vaatleme üldkujulist kolmliiget.

Üldjuhtum. Olgu antud kolmliige

$$y=ax^2+bx+c,$$

kusjuures on teada, et tal on võrdsed juured. Tähistades juure tähega x_1, esitame kolmliikme kujul:

$$y=a(x-x_1)(x-x_1)$$

ehk

$$y=a(x-x_1)^2.$$

Siit järeldame: milline ka oleks vahe $x-x_1$, kui ta ainult pole null, on selle vahe ruut alati positiivne arv. Tähendab, positiivse a puhul on korrutis $a(x-x_1)^2$ ja järelikult ka y positiivsed arvud ning negatiivse a puhul — negatiivsed arvud. Seega võime teha järelduse:

kui kolmliikmel on võrdsed juured, siis on x-i kõigi väärtuste puhul, välja arvatud kolmliikme juurega võrdne väärtus, kolmliikme väärtustel sama märk, mis x^2 kordajal.

Harjutused.

Uurida järgmisi kolmliikmeid:

293. $y=x^2-2x+1$.

294. $y=16x^2-8x+1$.

295. $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-3$.

296. $y=(2x-3)^2-3x^2+4x+7$.

185. Komplekssete juurtega ruutkolmliige.

Näide 1. Uurime kolmliiget:

$$y=2x^2-3x+3.$$

Lahendades võrrandi $2x^2-3x+3=0$, saame:

$$x=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{4}.$$

Kolmliikme juured osutusid kompleksseiks. Sel juhtumil on ka vahed $x-x_1$ ja $x-x_2$ kompleksarvud. Et kompleksarvude märkide küsimusel pole mõtet, siis uurime antud juhtumit teisel viisil. Toome algul sulgude ette esimese kordaja. Saame:

$$y=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right).$$

Vaadeldes nüüd teist liiget $\frac{3}{2}x$ kui x ja $\frac{3}{4}$ kahekordset korrutist $2\cdot\frac{3}{4}\cdot x$, täiendame avaldist

$$x^2-\frac{3}{2}x=x^2-2\cdot\frac{3}{4}\cdot x$$

kuni täisruuduni, liites ja hiljem lahutades arvu $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Saame:

$$y=2\left[\left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{3^2}{4^2}\right)+\frac{3}{2}-\frac{3^2}{4^2}\right]=$$

$$=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{2}-\frac{9}{16}\right]=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right].$$

Uurime nüüd saadud avaldist. On ilmne, et x mistahes väärtuste puhul on avaldise $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$ väärtus positiivne arv ja võrdub nulliga ainult siis, kui $x=\frac{3}{4}$. Nurksulgudes olev teine liidetav $\frac{15}{16}$ on samuti positiivne arv. Tähendab, kogu nurksulgudes olev summa on positiivne. Selle korrutamisel positiivse arvuga 2 saame jällegi positiivse arvu. Seega antud juhul kolmliikme väärtused on positiivsed x kõigi väärtuste puhul.

Kolmliikme $y=2x^2-3x+3$ graafik (joon. 41) näitab, et parabooli kõik punktid asetsevad tõepoolest ülalpool x-telge, s. o. nende ordinaadid on positiivsed.

Näide 2. Uurime kolmliiget

$$y=-3x^2+2x-1.$$

Lahendades võrrandi $-3x^2+2x-1=0$ leiame kolmliikme juured. Saame:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-2}}{3}.$$

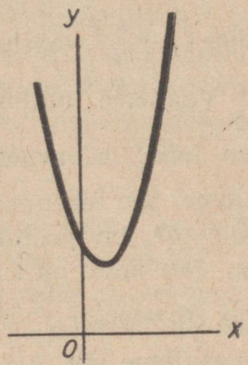
Kolmliikme juured osutusid kompleksseiks. Seepärast kasutame uurimiseks sama viisi, mida kasutasime esimeses näites.

Toome sulgude ette esimese kordaja ja eraldame sulgudes kaksliikme ruudu:

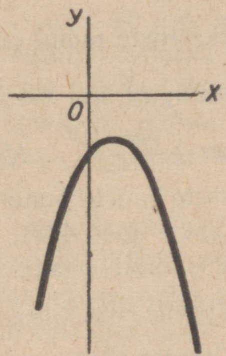
$$y=-3x^2+2x-1=-3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=-3\left(x^2-2\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}\right)=-3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right].$$

Avaldis $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$ on võrdne nulliga, kui $x=\frac{1}{3}$, ja on positiivne x-i kõigi muude väärtuste puhul. Tähendab, summa $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}$ on alati positiivne.



Joon. 41.



Joon. 42.

Selle korrutamisel arvuga -3 saame alati negatiivse arvu. Siit järeldame, et kolmliikme $-3x^2+2x-1$ väärtused on negatiivsed kõigi väärtuste puhul. Kolmliikme graafik (joon. 42) näitab, et kõik parabooli punktid asetsevad allpool x-telge, s. o. nende ordinaadid on negatiivsed.

Kõrvutanud esimese ja teise näite, märkame, et kolmliikme arvulise väärtuse märk ühtis mõlemal juhtumil x^2 kordaja märgiga eranditult muutuja x kõigi väärtuste puhul. Näitame, et see tõik on kehtiv kõigi komplekssete juurtega kolmliikmete kohta.

Üldjuhtum. Olgu antud kolmliige

$$y=ax^2+bx+c,$$

kusjuures on teada, et kolmliikme juured on kompleksed. Me teame (§§ 42 ja 135), et sel juhul on

$$b^2-4ac<0.$$

Teisendame kolmliiget samuti, nagu tegime seda 1. ja 2. näites:

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

ehk

$$y=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{c}{a}\right).$$

Liidame ja lahutame $\frac{b^2}{4a^2}$, saame:

$$y=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right);$$

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

x kõigi väärtuste puhul on avaldise $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ väärtus positiivne või võrdne nulliga $\left(\text{kui } x=-\frac{b}{2a}\right)$. Vaatleme, milline märk on teisel liidetaval $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$. Me teame juba, et avaldis b^2-4ac on komplekssete juurte puhul negatiivne. See tähendab, et temale vastupidine arv $-(b^2-4ac)$, s. o. $4ac-b^2$, on positiivne. Nimetaja $4a^2$ on samuti positiivne arv. Järelikult on kogu avaldis $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ positiivne arv. Seega x kõigi (reaalsete) väärtuste puhul kogu nurksulgudes olev summa on positiivne arv.

Siit järeldub, et kolmliikme arvulise väärtuse märk sõltub ainult kordaja a märgist; kui a on positiivne, on ka kolmliikme väärtused positiivsed, ja vastupidi.

Seega võime järeldada: **kui kolmliikme juured on komplekssed, siis x kõigi väärtuste puhul kolmliikme arvulisel väärtusel on sama märk, mis x^2 kordajal.**

Harjutused.

Uurida järgmisi kolmliikmeid.

297. $y=x^2-5x+8$.

298. $y=3x^2+2x+1$.

299. $y=-2x^2+4x-7$.

186. Üldine järeldus. Me võime nüüd ruutkolmliikme teostatud uurimise kohta teha üldkokkuvõtte. Kuid enne teeme järgmised märkused.

1. Me eraldasime kolmliikme uurimisel kolm juhtumit olenevalt sellest, millised on kolmliikme juured. Kuid me teame (§ 42), et ruutvõrrandi lahendite ja tema diskriminandi b^2-4ac vahel kehtib järgmine sõltuvus.

1) Kui $b^2-4ac>0$, siis on võrrandi lahendid reaalsed ja erinevad.

2) Kui $b^2-4ac=0$, siis on lahendid reaalsed ja võrdsed.

3) Kui $b^2-4ac<0$, siis on lahendid kompleksed.

Järelikult selle asemel, et näiteks ütelda «kui kolmliikme juured on reaalsed ja erinevad», võime ütelda lühemalt «kui diskriminant on suurem kui null»; analoogiliselt muudame formuleeringut ka ülejäänud kahel juhtumil.

2. Me uurisime, milline märk on kolmliikme arvulisel väärtusel muutuja mitmesuguste väärtuste puhul. Selle asemel, et ütelda «kolmliikme arvulise väärtuse märk», ütleme edaspidi lühidalt «kolmliikme märk», pidades meeles, et jutt on arvu märgist, mis saadakse, kui kolmliikmes muutuja asendada tema arvulise väärtusega. Samuti sõnade asemel «kolmliikme väärtused on positiivsed (negatiivsed)» ütleme lühemalt «kolmliige on positiivne (negatiivne)». Nüüd võime üldise järelduse formuleerida järgmiselt.

1. Kui kolmliikme ax^2+bx+c diskriminant on positiivne, siis x kõigi väärtuste puhul, mis asetsevad juurtest piiratud vahemikus, tema märk on vastupidine kordaja a märgile; x kõigi väärtuste puhul väljaspool seda vahemikku on kolmliikmel sama märk, mis kordajal a.

2. Kui kolmliikme diskriminant võrdub nulliga, siis x kõigi väärtuste puhul, välja arvatud kolmliikme juurtega võrdsed x väärtused, on kolmliikmel sama märk, mis kordajal a.

3. Kui diskriminant on negatiivne, siis x kõigi väärtuste puhul on kolmliikmel sama märk, mis kordajal a.

Selle järelduse võib esitada järgmise tabeli kujul:

Diskriminant	x väärtus	$y=ax^2+bx+c$ märk	
		$a>0$	$a<0$
$b^2-4ac>0$	1) $x_1<x<x_2$ 2) $x<x_1$; $x>x_2$	$-$ $+$	$+$ $-$
$b^2-4ac=0$	milline tahes, peale $x=x_1=x_2$	$+$	$-$
$b^2-4ac<0$	milline tahes	$+$	$-$

Näited.

1. $y=x^2-7x+10$. Diskriminant $b^2-4ac=49-40=9>0$; $a=1>0$. Kolmliikme juured on: $x_1=2$; $x_2=5$. Järelikult, kui

$x<2$ ja kui $x>5$, siis on kolmliige positiivne, kui aga $2<x<5$, siis negatiivne.

2. $y=-2x^2+6x+80$. Diskriminant on $36+640=676>0$; $a=-2<0$. Kolmliikme juured on: $x_1=-5$; $x_2=8$. Järelikult, kui $-5<x<8$, siis on kolmliige positiivne; kui $x<-5$ ja kui $x>8$, siis negatiivne.

3. $y=-x^2+4x-15$. Diskriminant on $16-4\cdot 15=-44<0$. Järelikult kolmliige on negatiivne x-i kõigi väärtuste puhul.

4. $y=5x^2-10x+5$. Diskriminant on $10^2-4\cdot 5\cdot 5=0$. Kolmliikme juured on $x_1=x_2=1$; $a=5>0$. Järelikult kolmliige on positiivne x-i kõigi väärtuste puhul, välja arvatud, kui $x=1$.

5. Leida, milliste tähe m väärtuste puhul on kolmliikme $2x^2-6x+m$ väärtused positiivsed, kui x on mistahes arv. Et siin $a=2>0$, siis mistahes x puhul kolmliikme väärtused on positiivsed sel juhul, kui $b^2-4ac<0$. Asetades siia väärtused $a=2$, $b=-6$, $c=m$, saame: $36-4\cdot 2m=36-8m$. Tähendab, peab kehtima $36-8m<0$. Siit leiame, et $m>4\frac{1}{2}$. Seega, kui m on suurem kui $4\frac{1}{2}$, siis on antud kolmliikme väärtused positiivsed x mistahes väärtuste puhul.

6. Leida, missuguste p väärtuste puhul on kolmliikme $x^2+(p-2)x+2p+1$ väärtused positiivsed x mistahes väärtuste puhul.

Kolmliikme diskriminant on $(p-2)^2-4(2p+1)=p^2-12p=$ $=p(p-12)$. Järelikult selleks, et kolmliikme väärtused oleksid mistahes x puhul positiivsed, peab olema:

$$p(p-12)<0.$$

Lahendades võrrandi

$$p(p-12)=0$$

leiame:

$$p_1=0;\ p_2=12.$$

Lahendame võrratuse: $p(p-12)<0$. See on õige tingimusel:

$$\text{I. } p<0 \text{ ja } p-12>0$$

või

$$\text{II. } p>0 \text{ ja } p-12<0.$$

Esimene võrratuste süsteem on vasturääkiv (kui $p<0$, siis on ilmne, et ka $p-12<0$). Teine süsteem aga annab lahendi:

$$0<p<12.$$

Seega p kõigi väärtuste puhul 0-st kuni 12-ni, s. o. tingimusel, et $0<p<12$, on antud kolmliikme väärtused x mistahes väärtuste puhul positiivsed.

Harjutused.

Uurida järgmisi kolmliikmeid:

300. $y=3x^2+4x-7$.

301. $y=-0{,}5x^2+1{,}5x+5$.

302. $y=-5x^2+20x-20$.

303. $y=3x^2+2x+2$.

304. $y=-x^2+3x-4$.

Ülesandeis 305 kuni 309 leida, missuguste m väärtuste puhul on kolmliikme väärtused positiivsed, kui x saab mistahes väärtusi.

305. $x^2-8x+m+10$.

306. $x^2-2x+m-6$.

307. $x^2-10x-m$.

308. $x^2+(m+2)x+3m+1$.

309. $3x^2+(2m+6)x+m+3$.

187. Teise astme võrratused. Ühe tundmatuga teise astme võrratusteks nimetatakse võrratusi kujul

$$ax^2+bx+c>0 \tag{1}$$

ja

$$ax^2+bx+c<0, \tag{2}$$

kus a, b ja c on mistahes reaalarvud, kusjuures $a\neq 0$.

Et võrratusele (2) on alati võimalik anda kuju (1), korrutades teda arvuga — 1, siis võime edaspidi piirduda võrratuste vaatlemisega kujul (1).

Lahendada võrratus tähendab leida, milliste x väärtuste puhul on see võrratus kehtiv. Võrratuse (1) suhtes tähendab see, et me peame leidma x need väärtused, mille puhul kolmliikme vasak pool osutub positiivseks arvuks.

Pärast seda, mis oli eelmistes paragrahvides öeldud ruutkolmliikme märgi kohta, ei tekita vastamine sellele küsimusele raskusi.

Lahendame mõned näited.

Näide 1. Olgu vaja lahendada võrratus

$$2x^2-13x+15>0. \tag{1}$$

See tähendab, et meil on vaja leida, milliste x väärtuste puhul on kolmliige $2x^2-13x+15$ positiivne arv. Lahenduse teostame järgmiselt.

a) Konstateerime, et esimene kordaja on positiivne ($a=2>0$).

b) Konstateerime, et kolmliikme diskriminant on $13^2-4\cdot2\cdot15>0$.

Siit järeldame (vt. tabel §-s 186), et võrratus (1) on kehtiv x-i kõigi väärtuste puhul, mis on kolmliikme väiksemast juurest väiksemad, ja x-i kõigi väärtuste puhul, mis on suuremast juurest suuremad.

c) Et leida need juured, lahendame võrrandi

$$2x^2-13x+15=0.$$

Leiame: $x_1=1\frac{1}{2}$; $x_2=5$.

Antud võrratus on järelikult kehtiv x väärtuste puhul, mis on väiksemad kui $1\frac{1}{2}$, ja x väärtuste puhul, mis on suuremad kui 5.

Näide 2. Lahendada võrratus

$$-4x^2+4x-1<0. \quad (1)$$

Korrutades võrratuse mõlemad pooled arvuga -1, saame samaväärse võrratuse:

$$4x^2-4x+1>0. \quad (2)$$

a) Kordaja $a=4>0$.

b) Diskriminant on $4^2-4\cdot4=0$.

Järelikult kolmliikmel on võrdsed juured. Sel juhtumil, nagu teame (§ 186), on kolmliikme (2) väärtused positiivsed x_1 kõigi väärtuste puhul, välja arvatud kolmliikme juurtega võrdsed väärtused. Leiame selle juure, lahendades võrrandi:

$$4x^2-4x+1=0.$$

Saame $x=\frac{1}{2}$. Seega antud võrratus (1) on kehtiv x kõigi väärtuste puhul, välja arvatud $x=\frac{1}{2}$.

Näide 3. Lahendada võrratus

$$3x^2-5x+4>0.$$

a) Kordaja $a=3>0$.

b) Diskriminant on $5^2-4\cdot3\cdot4=-23<0$.

Siit järeldame kohe, et võrratus on kehtiv x mistahes väärtuste puhul.

Näide 4. Lahendada võrratus

$$(2x-1)(x+3)-(x+7)(x-1)-4x<0.$$

Avanud sulud ja sooritanud lihtsustused, saame:

$$x^2-5x+4<0 \tag{1}$$

ehk pärast korrutamist arvuga -1

$$-x^2+5x-4>0.$$

a) Kordaja $a=-1<0$.

b) Diskriminant on $5^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)=9>0$.

Järelikult on võrratus (2) ja koos sellega ka võrratus (1) kehtiv x kõigi väärtuste puhul, mis asetsevad kolmliikme juurte vahel. Leiame need juured.

$$x^2-5x+4=0,$$

siit $x_1=1$, $x_2=4$. Seega võrratus (1) on kehtiv, kui

$$1<x<4.$$

Näide 5. Lahendada võrratus

$$\frac{x^2}{6}-x+1\frac{1}{2}<0. \tag{1}$$

Korrutades võrratuse mõlemad pooled arvuga -6, saame:

$$-x^2+6x-9>0. \tag{2}$$

a) Kordaja $a=-1<0$.

b) Diskriminant on $6^2-4\cdot(-1)\cdot(-9)=0$.

Siit järeldame kohe, et võrratusel (1) pole lahendeid [kui $x=3$, siis kolmliige (2) võrdub nulliga; x kõigi ülejäänud väärtuste puhul on ta negatiivne].

Näide 6. Lahendada võrratus

$$-3x^2+4x-10>0.$$

Et $a=-3<0$ ja diskriminant on $4^2-120<0$, siis järeldame vahetult, et võrratusel pole lahendeid.

Lahendanud näited, samuti §-s 186 toodud tabeli vaatlemine viivad meid võrratuse

$$ax^2+bx+c>0$$

suhtes järgmisele üldisele järeldusele.

I. Kui $b^2-4ac<0$, siis:

a) võrratus on kehtiv x mistahes väärtuste puhul, kui $a>0$;

b) võrratusel pole lahendeid, kui $a<0$.

II. Kui $b^2-4ac=0$, siis:

a) võrratus on kehtiv x kõigi väärtuste puhul, välja arvatud kolmliikme juurega võrdne väärtus, kui $a>0$;

b) võrratusel pole lahendeid, kui $a<0$.

III. Kui $b^2-4ac>0$, siis:

a) kui $a>0$, siis võrratus on kehtiv x väärtuste puhul, mis on suuremad kolmliikme suuremast juurest, ja x väärtuste puhul, mis on väiksemad selle kolmliikme väiksemast juurest (ehk, nagu leppisime kokku, ütelda lühemalt «x väärtuste puhul, mis asetsevad väljaspool kolmliikme juurte vahel olevat vahemikku»);

b) kui $a<0$, siis võrratus on kehtiv x väärtuste puhul, mis asetsevad kolmliikme juurte vahel.

Märkus. Kõigis toodud näiteis lahendasime küsimuse, toetudes ruutkolmliikme uurimise tulemustele, mida käsitlesime §-s 186. Kuid igal juhtumil on muidugi võimalik ka täiesti iseseisev uurimine. Näiteks, lahendanud näites 1 antud võrrandi $2x^2-13x+15=0$ ja leidnud, et $x=1\frac{1}{2}$; $x_2=5$, oleksime võinud võrrandi esitada ka sel kujul:

$$2\left(x-1\frac{1}{2}\right)(x-5)>0.$$

Nüüd taandub antud võrratuse lahendamine järgmise kahe esimese astme võrratuse süsteemi lahendamiseks:

$$\mathrm{I}\left\{\begin{aligned} &x-1\frac{1}{2}>0 \\ &x-5>0 \end{aligned}\right.$$

ja

$$\mathrm{II}\left\{\begin{aligned} &x-1\frac{1}{2}<0 \\ &x-5<0. \end{aligned}\right.$$

Esimene süsteem annab $x>5$, teine $x<1\frac{1}{2}$. Tähendab, antud võrratus on kehtiv x väärtuste puhul $x>5$ ja $x<1\frac{1}{2}$. Saime sama tulemuse mis varemgi, kuid märksa pikemat teed kaudu.

Lahendame nüüd mõned keerukamad võrratused.

Näide 7. Lahendada võrratus

$$\frac{x^2-8x+7}{x-3}>0.$$

Selle võrratuse lahendamine taandub kahe süsteemi lahendamiseks:

$$\text{I} \begin{cases} x^2-8x+7>0 & (1) \\ x-3>0 & (2) \end{cases}$$

ja

$$\text{II} \begin{cases} x^2-8x+7<0 & (3) \\ x-3<0 & (4) \end{cases}$$

Lahendame esimese võrratuste süsteemi. Et $8^2-4\cdot7=36>0$, siis on kolmliikmel x^2-8x+7 reaalsed ja erinevad juured. Lahendanud võrrandi $x^2-8x+7=0$, leiame $x_1=1$; $x_2=7$. Sel juhul, nagu teame (§ 183), võrratus (1) on kehtiv, kui $x<1$ ja kui $x>7$.

Lahendanud teise võrratuse, leiame $x>3$. Tähendab, mõlemat võrratust rahuldavad ainult x väärtused $x>7$.

Lahendame teise süsteemi. Võrratus (3) on kehtiv x kõigi väärtuste puhul, mis asetsevad 1 ja 7 vahel, s. o. kui $1<x<7$. Kuid võrratus (4) annab $x<3$. Tähendab, mõlemat võrratust rahuldavad ainult x väärtused, mis asetsevad 1 ja 3 vahel, s. o. kui $1<x<3$.

Nüüd võime teha üldise järelduse: antud võrratus on kehtiv,

kui $1<x<3$ ja kui $x>7$.

Kontrollige lahenduse õigsust, asetades võrratusse väärtused: $x=-1$; 0; 1; 2; 4; 6; 8; 10.

Näide 8. Lahendada võrratus

$$\frac{x^2-9x+14}{x^2-5x+4}>0.$$

Selle võrratuse lahendamine taandub järgmiste süsteemide lahendamiseks:

$$\text{I} \begin{cases} x^2-9x+14>0 & (1) \\ x^2-5x+4>0 & (2) \end{cases}$$

ja

$$\text{II} \begin{cases} x^2-9x+14<0 & (3) \\ x^2-5x+4<0 & (4) \end{cases}$$

Et $9^2-56=25>0$ ja $5^2-16=9>0$, siis on kummalgi kolmliikmel reaalsed ja erinevad juured. Lahendades vastavad võrrandid, leiame esimese kolmliikme jaoks, et $x_1=2$; $x_2=7$, ja teise kolmliikme jaoks, et $x_1=1$; $x_2=4$. Siit järeldame:

1) Võrratus (1) on kehtiv, kui $x<2$ ja kui $x>7$, kuid võrratus (2) on kehtiv, kui $x<1$ ja kui $x>4$. Järelikult mõlemad võrratused üheskoos on kehtivad, kui $x<1$ ja $x>7$.

2) Võrratus (3) on kehtiv, kui $2<x<7$, võrratus (4) aga juhtumil, kui $1<x<4$. Järelikult mõlemad võrratused on üheaegselt kehtivad, kui $2<x<4$. Seega on antud võrratuse lahendeiks järgmised x väärtused: 1) $x<1$; 2) $2<x<4$; 3) $x>7$.

Märkus. Leidnud mõlema kolmliikme juured, oleksime võinud antud võrratuse esitada ka järgmisel kujul:

$$\frac{(x-2)(x-7)}{(x-1)(x-4)}>0.$$

Siis oleks selle võrratuse lahendamine taandunud järgmise kahe süsteemi lahendamiseks:

$$\mathrm{I}\ \begin{cases}(x-2)(x-7)>0 & (1)\\ (x-1)(x-4)>0 & (2)\end{cases}$$

ja

$$\mathrm{II}\ \begin{cases}(x-2)(x-7)<0 & (3)\\ (x-1)(x-4)<0 & (4)\end{cases}$$

Me võime iga võrratuse lahendada samuti, nagu tegime seda käesoleva paragrahvi esimeses näites. On ilmne, et oleksime tulnud sama tulemuseni nagu eespoolgi, kuid lahenduse käik oleks olnud tunduvalt pikem.

Näide 9. Lahendada võrratus

$$\frac{x^2-3x-10}{x^2-3x+10}<0.$$

Võrratuse lahendus taandub järgmiste süsteemide lahendamiseks:

$$\mathrm{I}\ \begin{cases}x^2-3x-10>0 & (1)\\ x^2-3x+10<0 & (2)\end{cases}$$

ja

$$\mathrm{II}\ \begin{cases}x^2-3x-10<0 & (3)\\ x^2-3x+10>0 & (4)\end{cases}$$

Kolmliikmete diskriminandid on: $3^2+4\cdot 10=49>0$ ja $3^2-4\cdot 10=-31<0$. Siit järeldame kohe, et süsteemil 1 pole lahendeid. Tõepoolest, kui kolmliikme (2) diskriminant on väiksem kui null, siis on kolmliige positiivne x mistahes väärtuste puhul ja järelikult võrratus (2) on võimatu.

Lahendame süsteemi II. Me teame juba, et võrratus (4) on kehtiv x kõigi väärtuste puhul. Tähendab, meil jääb veel lahendada võrratus (3). Leides kolmliikme $x^2-3x-10$ juured, saame $x_1=-2$; $x_2=5$. Järelikult võrratuse (3) ja ühes sellega ka süsteemi II lahenditeks on ainult need x väärtused, mis asetsevad -2 ja 5 vahel.

Seega on antud võrratus kehtiv, kui $-2<x<5$.

Harjutused.

Lahendada järgmised võrratused:

310. $x^2-10x+25<0$.

311. $(x-3)(x-1)-15>0$.

312. $x(2x+3)+1<0$.

313. $-3x^2+8x-6>0$.

314. $x^2-5x+7>0$.

315. $9x^2-12x+4>0$.

316. $\dfrac{x^2-9x+18}{x-4}>0$.

317. $\dfrac{x^2+2x-15}{x+1}<0$.

318. $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-2x+5}>0$.

319. $\dfrac{x^2+4x+7}{x^2-6x+9}<0$.

320. $\dfrac{x^2-5x+8}{x^2-8x+15}>0$.

321. $\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-8x+12}<0$.

Harjutuste vastused.

1. -243; -343; 256; $1\,000\,000$; $-0{,}00001$.

3. $\frac{x^8y^4}{z^{12}}$; $-\frac{27a^3b^9}{8c^6}$; $\frac{0{,}000064a^{18}b^6c^6}{d^{12}}$.

11. $2a\sqrt{a}$; $2a^3b^3\sqrt{2b}$; $5a^2bx\sqrt{2abx}$; $2a\sqrt[3]{2a}$.

14. $\sqrt{8}$; $\sqrt{490}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{a^3}$. **17.** $\frac{1}{60}\sqrt{6}$; $\frac{1}{90}\sqrt{165}$.

19. $\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[6]{25}$; $\sqrt[6]{x^3}$; $\sqrt[6]{x^4}$; $\sqrt[12]{16}$; $\sqrt[12]{27}$; $\sqrt[12]{x^9}$; $\sqrt[12]{y^{10}}$.

20. $\sqrt[12]{x^4y^8}$; $\sqrt[12]{y^6z^6}$; $\sqrt[12]{x^3z^9}$; $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)^3}$; $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^2}$.

21. $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt[3]{3a^2b^4}$; $\sqrt{2a^2b^3}$.

23. $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; $\frac{7}{3}\sqrt{3}$.

24. $a\sqrt{ax}$; $x\sqrt{ax}$; $\sqrt{ax}$. **26.** $8\sqrt{2}$; $29\sqrt{3}$.

27. $(2a^2b+ab-1)\sqrt{2ab}$. **28.** $12\sqrt{6}$; 120. **32.** 15; $6a^3$.

33. $\sqrt[6]{a^5}$; $\sqrt[6]{60}$; $2\sqrt[3]{3}$. **34.** $\frac{16x}{a}$. **35.** $2a\sqrt{10}$; $1{,}8a\sqrt{10}$.

36. $\sqrt[6]{x}$; $2\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[12]{a^5}$. **39.** $\sqrt[12]{12}$; $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[12]{a^7}$.

47. $-1-\sqrt{2}$; $\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$; $\frac{91+13\sqrt{6}}{43}$.

52. $x=9$; $x=1$; $x=28\frac{2}{3}$. **78.** $(x-7)(x-10)$; $(x+11)(x-8)$.

79. $(5x+8)(4x-3)$; $(x+10)(x-2)$.

80. $\frac{x+13}{x+15}$; $\frac{2(x+9)}{3(x-7)}$. **81.** $\frac{x+2a-b}{x+a-b}$. **92.** ±1; ±2; ±1; ±3.

93. $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{-1}$; ±2; $\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$.

94. ±4; ±3; ±3; $\pm\sqrt{-7}$.

97. 1) 3; 8; 2) $x=-5$; $y=-8$ või $x=8$; $y=5$;

3) $x=\pm\sqrt{ab}$; $y=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$.

98. 1) $x=\pm 3$; $y=\pm 4$; 2) $x=4\pm 4\sqrt{2}$; $y=-4\pm 4\sqrt{2}$;
3) $x=16$; $y=10$.

99. $x=\frac{24}{13}$; $y=\frac{24}{5}$. **102.** 9; 7,5. **103.** $137 \cdot 113=15\,481$.

104. 12; 4. **109.** $x>1$, kui $\frac{a+b}{ab}>0$, ja $x<1$, kui $\frac{a+b}{ab}<0$; $x<4$.

113. $a<b$. **114.** 119. **116.** $n=7$. **121.** $n=8$.
124. Kolmnurga küljed on: $3a$, $4a$, $5a$, kus a on mistahes arv.
131. 9; 27; 81; 243; või -18; 54; -162; 486. **136.** 183.

145. $a_6=\frac{5}{243}$ või $a_6=-\frac{10}{243}$. **147.** $2a^2$; $4a(2+\sqrt{2})$.

150. $a(a+x)^{-1}$; $2(a-x)^{-1}$; $3ab(1+x)^{-2}(1-x)^{-1}$.

153. $2a^2b^3$; $5ab^{-4}x^{-1}$. **155.** $4a^4b^{-6}$; $4x^6y^4$. **158.** $10a^{\frac{5}{6}}x$.

159. $5ac^{-\frac{1}{12}}$; $a^{\frac{1}{2}}$. **163.** $3a^{-1}b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{1}{6}}$. **164.** $a^{\frac{1}{4}}$; $a^{-\frac{1}{9}}$; $(1-x)^{\frac{1}{3}}$.

178. 2; n; -1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **179.** 8; 25; $\frac{1}{1024}$; 2; $\frac{1}{4}$.

188. $x=\sqrt{a}$; $x=\sqrt[3]{ab}$. **251.** $a=13$.

Sisukord.

Esimene jagu.

Identsed teisendused astmete ja juurtega.

Teine jagu.

Funktsioonid ja nende graafikud.

Kolmas jagu.

Ruutfunktsioon.

Neljas jagu.

Võrratused.

Viies jagu.

Progressioonid.

Kuues jagu.

Astendaja mõiste üldistus.

Seitsmes jagu.

Logaritmid.

Kaheksas jagu.

Võrrandite uurimine.

Üheksas jagu.

Kümnes jagu.

Mõned andmed algebralistest võrranditest.

Üheteistkümnes jagu.

Kaheteistkümnes jagu.

Ühendid ja Newtoni binoomivalem.

Täiendused.

Андрей Петрович Киселёв

АЛГЕБРА

Учебник для 8—11 классов средней школы

На эстонском языке

Оформление Г. Панта

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste

Kunstiline toimetaja H. Keigo

Tehniline toimetaja Ü. Laul

Korrektor O. Sepp

Ladumisele antud 1. XII 1961. Trükkimisele antud 24. I 1962. Paber 60×90, $^1/_{16}$. Trükipoognaid 16,75. Arvutuspoognaid 14,32. Trükiarv 7000. Tellimise nr. 10 565. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. III.

Hind 27 kop.

6—6

26 kop.